Zastosowanie własności równań różnicowych w procesie GARCH

Piotr Piękos

2018
Październik

1 Stochastyczne równania różnicowe

Celem mojego referatu jest zastosowanie aparatu stochastycznych równań różnicowych do procesu GARCH co pozwoliłoby wnioskować o własnościach procesu GARCH na podstawie dokonań z dziedziny stochastycznych równań różnicowych.

Zacznę od analizy procesu GARCH(1,1) i przejdę potem do ogólnego procesu GARCH(p,q)

2 GARCH(1,1)

Przypomnijmy, że modele GARCH mają postać:

- $X_t = h_t \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}$
- $h_t^2 = a + bh_{t-1}^2 + cX_{t-1}^2,\ t \in \mathbb{Z}$

co zapiszemy w wygodniejszej dla nas formie

$$h_t^2 = a + (b + c\varepsilon_t^2)h_t^2$$

2.1 Jawny wzór

Pokażę teraz za pomocą indukcji, że jawny wzór na h_t^2 to:

$$h_t^2 = a \sum_{i=0}^{t-t_0} \prod_{j=1}^{i} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) + h_*^2 \prod_{j=0}^{t-t_0} (b + c\varepsilon_{t-j}^2), \textbf{gdzie}$$

$$h_*^2 = h_{t_0-1}^2 \textbf{ - wartość początkowa}$$

UWAGA:

$$\prod_{j=1}^{0} ... = 1$$

Dowód:

1. Baza indukcji - ok
2. Krok:

$$\begin{aligned} h_{t+1}^2 = a + (b + c\varepsilon_{t+1}^2)h_t^2 = \\ a + (b + c\varepsilon_{t+1}^2)(a \sum_{i=0}^{t-t_0} \prod_{j=1}^{i} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) + h_*^2 \prod_{j=0}^{t-t_0} (b + c\varepsilon_{t-j}^2)) = \\ a + a \sum_{i=0}^{t-t_0} \prod_{j=0}^{i} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) + h_*^2 \prod_{j=0}^{t+1-t_0} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) = \\ a + a \sum_{i=1}^{t+1-t_0} \prod_{j=1}^{i} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) + h_*^2 \prod_{j=0}^{t+1-t_0} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) = \\ a \sum_{i=0}^{t+1-t_0} \prod_{j=1}^{i} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) + h_*^2 \prod_{j=0}^{t+1-t_0} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) \end{aligned} \tag{1}$$

□

3 Konsekwencje

Załóżmy $b + c < 1$

Oznaczmy przez H_*^2 współczynnik przy h_*^2.

$$H_*^2 = \prod_{j=0}^{t+1-t_0} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2)$$

Zbadajmy jego zachowanie przy $t - t_0 \to +\infty$

Jest to produkt niezależnych zmiennych losowych o wartości oczekiwanej $b + c$ (< 1). Więc z twierdzenia z RP2 albo jest on stale równy 1, albo zbiega do 0. Ponieważ nie jest stale równy 1 to zbiega do 0.

$$\lim_{t-t_0 \to +\infty} H_*^2 = 0$$

Co daje to, że różnica dwóch ciągów o tych samych parametrach, ale różnych wyrazach początkowychh_* zbiega do 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{t-t_0 \to +\infty} h1_t^2 - h2_t^2 = \\
\lim_{t-t_0 \to +\infty} (a \sum_{i=0}^{t-t_0} \prod_{j=1}^{i} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) + h1_*^2 \prod_{j=0}^{t-t_0} (b + c\varepsilon_{t-j}^2)) \\
-(a \sum_{i=0}^{t-t_0} \prod_{j=1}^{i} (b + c\varepsilon_{t+1-j}^2) + h2_*^2 \prod_{j=0}^{t-t_0} (b + c\varepsilon_{t-j}^2)) = \\
\lim_{t-t_0 \to +\infty} 0 + h1_*^2 \prod_{j=0}^{t-t_0} (b + c\varepsilon_{t-j}^2) - h2_*^2 \prod_{j=0}^{t-t_0} (b + c\varepsilon_{t-j}^2) = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Spójrzmy na granicę h_t^2

$$\lim_{t \to +\infty} h_t^2 = a \sum_{i=0}^{+\infty} \prod_{j=0}^{i} (b + c\varepsilon_{t-j}^2)$$

Jest ona zbieżna, co widać najłatwiej przez zbieżność wartości oczekiwanej.

$$\lim_{t-t_0 \to +\infty} \mathbb{E}h_t^2 = a \sum_{i=0}^{+\infty} \prod_{j=0}^{i} (b + c\varepsilon_{t-j}^2) = a \sum_{i=0}^{+\infty} (b + c)^j = \frac{a}{1 - (b + c)} \tag{3}$$

Po jawnym granicznym wzorze widać również stacjonarność gdyż mimo t we wzorze, żaden moment nie będzie zalezny od t

3.1 Zachowanie ogona

Zastosujemy teraz wnioski Harry'ego Kestena z jego analizy ogólnych stochastycznych równań różnicowych [1]. Generalna postać równania analizowana przez Kestena:

$$Y_n = M_n Y_{n-1} + Q_n$$

Gdzie:

- Y_n - d-wektor
- M_n oraz Q_n - macierze d x d

Do tej postaci będziemy sprowadzać analizowane równania z modelu GARCH

Zwróćmy uwagę, że nasz ciąg jest dokładnie takiej postaci, jeżeli podstawimy

- $Y_n = h_t^2$
- $Q_n = a$
- $M_n = (b + c\varepsilon^2)$

Załóżmy, że $\mathbb{E}ln(b + c\varepsilon^2) < 0$

Z pracy Kestena skorzystamy z Twierdzenia 4. Ma ono sporo założeń i mówi, że jeśli zostaną spełnione to

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\kappa_1} P(R \geqslant t)$$

, gdzie R to nasz rozkład graniczny a κ_1 to stała definiowana na podstawie warunków twierdzenia.

Warunki twierdzenia: Musi istnieć taka $\kappa_0 > 0$, że

1. $P(Q_1 = 0) < 1$
2. $\mathbb{E}|Q_1|^{\kappa_0} < +\infty$
3. $P(Q_1 \geqslant 0) = 1$
4. $\lim_{n \to +\infty} 1/nlog|M_1 ... M_n| = \alpha < 0$
5. $\mathbb{E}min_i(\sum_j (M_1(i,j))^{\kappa_0} \geqslant d^{\kappa_0/2}$

6. $\mathbb{E}|M_1|^{\kappa_0} log^+|M_1| < \infty$
7. $P(M_1 \geqslant 0) = 1$
8. $P(M_1 \textbf{ma wiersz} = \mathbf{0}) = 0$
9. $\mathbb{E} log|M_1| < +\infty$

Co dla naszego przypadku GARCH(1,1) daje warunki:

1. $P(a = 0) < 1$
2. $\mathbb{E}|a|^{\kappa_0} < +\infty$
3. $P(a \geqslant 0) = 1$
4. $\mathbb{E} ln(b + c\varepsilon^2) = \alpha < 0$
5. $\mathbb{E}(b + c\varepsilon^2)^{\kappa_0} \geqslant 1$
6. $\mathbb{E}|b + c\varepsilon^2|^{\kappa_0} log^+|b + c\varepsilon^2| < \infty$
7. $P(b + c\varepsilon^2 \geqslant 0) = 1$
8. $P(b + c\varepsilon^2 = 0) = 0$

Wtedy dla dowolnego $0 < \kappa_1 \leqslant \kappa_0$ zachodzi powyższa własność

Wszystkie warunki poza warunkiem numer 6 i 5 są oczywiste.

Tutaj argument dla warunku 6.

Co daje informację, że

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\kappa_1} P(R \geqslant t)$$

. Czyli prawdopodobieństwo tego że ogon jest większy od t jest asymptotycznie mniejsze niż t^{κ_1}

4 GARCH(p,q)

Dla ogólnego modelu GARCH(p,q) należy podstawić:

$$
\begin{gathered}
Y_t^= \begin{bmatrix} h_t^2 \\ ... \\ h_{t-d}^2 \end{bmatrix} \\
d = max(p,q) - 1 \\
Q_t = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ ..0 \end{bmatrix} \\
M_t = \begin{bmatrix} (b + c\varepsilon_t^2) & .. & .. & (b + v\varepsilon_{t-d}^2 \\ 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{4}
$$

I skorzystać z ogólnej formy rozwiązania zaproponowanej przez Kestena

$$
Y_n = \sum_{k=1}^{n} (\prod_{i=1}^{k-1} M_i) Q_k + \prod_{i=1}^{n} M_n Y_0 \tag{5}
$$

Literatura

[1] Harry Kesten. *Random difference equations and Renewal theory for products of random matrices* Acta Math, 131 207-248, 1973.