Przestrzeń wektorowa:

Definicja liniowej niezależności . Mówimy, że wektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in V$ są liniowo niezależne jeżeli

$$r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + \dots + r_n \cdot \vec{v_n} = \vec{0} \iff r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0.$$

Definicja span$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$.

$$\mathbf{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\} = \{r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + \dots + r_n \cdot \vec{v_n}, \quad r_1, \dots r_n \in \mathbb{R}\}.$$

Nietrudno pokazać, że $\mathbf{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ jest przestrzenią wektorową.

Definicja generowania . Mówimy, że wektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in V$ generują przestrzeń V jeżeli dla dowolnego wektora $\vec{v}$ istnieją skalary $r_1, \dots, r_n$ takie, że

$$\vec{v} = r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + \dots + r_n \cdot \vec{v_n}.$$

Definicja bazy . Mówimy, że wektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in V$ stanowią bazę przestrzeni V jeżeli:

1. są liniowo niezależne
2. generują przestrzeń V

W przestrzeni wektorowej V baza nie jest określona jednoznacznie, to znaczy w danej przestrzeni wektorowej można określić wiele różnych baz.

Baza kanoniczna w $\mathbb{R}^n$.
Bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^n$ nazywamy bazę

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad \text{gdzie} \quad e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, n.$$

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ bazę kanoniczną oznaczamy

$$\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \quad \text{gdzie} \quad \vec{i} = (1,0,0), \ \vec{j} = (0,1,0), \ \vec{k} = (0,0,1).$$

Definicja wymiaru przestrzeni wektorowej. Wymiar przestrzeni wektorowej określa liczba wektorów bazowych i oznaczamy $\dim V$

Definicja liniowej zależności zbioru funkcji
Mówimy, że **zbiór funkcji** $f_1(t), \dots, f_n(t)$ określonych na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ jest **liniowo zależny**, jeżeli istnieją stałe $c_1, \dots, c_n$ nie wszystkie równe zero, takie że $c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0$, dla każdego $t \in I$.

Definicja liniowej niezależności zbioru funkcji
Mówimy, że **zbiór funkcji** $f_1(t), \dots, f_n(t)$ określonych na przedziale I jest **liniowo niezależny** jeśli nie jest liniowo zależny. Inaczej mówiąc, równość $c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0$ zachodzi dla każdego $t \in I$ jedynie w przypadku, gdy wszystkie współczynniki c_i, $i = 1, \dots, n$ są równe zero.

ZAŁOŻENIA: Zakładamy, że funkcje $f_1(t), \dots, f_n(t)$ określone na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ są $n-1$ krotnie różniczkowalne i wyznacznik

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nie jest równy zero przynajmniej dla jednego t z przedziału I .
TEZA:
Wtedy funkcje $f_1(t), \dots, f_n(t)$ są liniowo niezależne. Powyższy wyznacznik będziemy oznaczać $W[f_1(t), \dots, f_n(t)]$ i nazywać **Wrońskianem**, inaczej **wyznacznikiem macierzy Wrońskiego**.

Algorytm wyznaczania macierzy przejścia $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ dla wektorów w $\mathbb{R}^n$.
Niech $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ będzie starą bazą w $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}', \dots, \vec{v_n}'\}$ będzie nową bazą w $\mathbb{R}^n$. Definiujemy macierz

(12) [nowa baza | stara baza]

kolumnami tej macierzy są współrzędne wektorów bazowych.
Wykonując operacje elementarne na wierszach (mnożenie wierszy przez liczbę, dodawanie wierszy i odejmowanie wierszy) na macierzy (12) przekształcamy ją do postaci:

$$[I \mid P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}],$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.

Wyznaczniki 2x2:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Metoda Sarrusa (tylko wyznaczniki 3x3):

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Odwzorowania liniowe:

Definicja odwzorowania liniowego. Odwzorowanie $L : V \to W$ jest liniowe jeżeli V i W są przestrzeniami wektorowymi i spełnione są następujące warunki:

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2), \quad L(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L(v)$$

dla dowolnych $v_1, v_2, v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definicja jadra. Jądrem odwzorowania liniowego nazywamy zbiór:

$$\ker L = \{v \in V : \ L(v) = 0\}.$$

Definicja obrazu. Obrazem odwzorowania liniowego nazywamy zbiór:

$$im\, L = \{w \in W : \ istnieje\ v \in V, \quad L(v) = w\}.$$

Obraz jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni W. Istotnie dla dowolnych $w_1, w_2 \in im\, L$ istnieją $v_1, v_2 \in V$ takie, że $L(v_1) = w_1$, $L(v_2) = w_2$ stąd wynika, że $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = w_1 + w_2$, zatem $w_1 + w_2 \in im\, L$. Analogicznie dla $w \in W$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ istnieje $v \in V : L(v) = w$ stąd $L(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L(v) = \lambda \cdot w$, zatem $\lambda \cdot w \in im\, L$ co kończy dowód, że $im\, L$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni W.

dim V = dim(kerL) + dim(imL)

Definicja macierzy odwzorowania liniowego. Jeżeli V i W są skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi w których mamy bazy:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{w_1, \dots, w_k\}.$$

Wartości $L(v_1), \dots, L(v_n)$ można zapisać w bazie $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ następująco:

$$\begin{cases} L(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{k1}w_k \\ L(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{k2}w_k \\ \vdots \\ L(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{kn}w_k \end{cases}$$

Macierz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

nazywamy macierzą odwzorowania liniowego w bazach $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$.

Macierz kwadratową A nazywamy **symetryczną**, jeżeli jest równa swojej macierzy transponowanej, tj. zachodzi warunek $A = A^T$.

Uwaga 11. Macierz przejścia. Niech $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ będzie dowolną bazą w $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{K} = \{e_1, \dots, e_n\}$ bazą kanoniczna w $\mathbb{R}^n$.
Rozpatrzmy odwzorowanie identycznościowe z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z bazą $\mathcal{B}$ do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z bazą $\mathcal{K}$ będziemy to zapisywać następująco:

$$id : \ (\mathbb{R}^n, \ \mathcal{B}) \ni v \to v \in (\mathbb{R}^n, \ \mathcal{K}).$$

Jest to przekształcenie liniowe, wyznaczymy jego macierz.
Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$v_i = (c_{1i}, \dots, c_{ni}), \quad e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Wyznaczamy macierz odwzorowania:

$$\begin{cases} id(v_1) = (c_{11}, \dots, c_{n1}) = c_{11}e_1 + \ldots + c_{n1}e_n \\ id(v_2) = (c_{12}, \dots, c_{n2}) = c_{12}e_1 + \ldots + c_{n2}e_n \\ \vdots \\ id(v_n) = (c_{1n}, \dots, c_{nn}) = c_{1n}e_1 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

Zatem macierz tego odwzorowania P ma postać

$$P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

i jest taka sama jak macierz $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}}$ w uwadze 6.
Stad wynika, że macierz przejścia z jednej bazy do drugiej jest to macierz odwzorowania identycznościowego.

Iloczyn skalarny.

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ i określone jest odwzorowanie

$$< \, , \, >: \ V \times V \to \mathbb{R}$$

takie, że dla dowolnego $u, v, w \in V$ i $k \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki:

1. $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$
2. $< ku, w > = k < u, w >$
3. $< u, v > = < v, u >$
4. $< u, u > \geqslant 0$ i $< u, u > = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $u = 0$.

Odwzorowanie $< \, , \, >$ nazywamy iloczynem skalarnym.

Schemat bezwyznacznikowej metody znajdowania macierzy odwrotnej.

$$[A|I] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} \left[I|A^{-1}\right]$$

Ortogonalność. Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym $<\ ,\ >$. Mówimy, że wektory $u,\ v \in V$ są ortogonalne (prostopadłe) jeżeli $< u, v >= 0$.

Podprzestrzenie ortogonalne. Niech V przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym $<\ ,\ >$, S dowolny podzbiór V. Definiujemy nastepujący zbiór:

$$S^{\perp} = \{v \in V : < u, v >= 0 \quad \text{dla każdego} \ \ u \in S\}.$$

Pokażemy, że $S^{\perp}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V. Wystarcze pokazać, że zbiór ten jest zamknięty na operacje dodawania i mnożenia przez skalar. Niech $v,\ w \in S^{\perp}$ i $k \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$< v+w, u >=< v, u > + < w, u >= 0, \ < kv, u >= k < v, u >= 0 \text{ dla każdego } \ u \in S\}$$

co kończy dowód, że $S^{\perp}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V.

Baza ortogonalna i ortonormalna.

Mówimy, że zbiór wektorów $\{u_1, \dots, u_n\}$ w V jest bazą ortogonalną jeżeli jest bazą w przestrzeni V i spełniony jest warunek:

$$< u_i, u_j >= 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Mówimy, że zbiór wektorów $\{u_1, \dots, u_n\}$ w V jest bazą ortonormalną jeżeli jest bazą w przestrzeni V i spełniony jest warunek:

$$< u_i, u_j >= \delta_{ij} \quad \text{gdzie} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases} \quad \text{i} \quad \|u_i\| = 1, \ i = 1, \dots, n.$$

Twierdzenie 3. Ortogonalizacja Grama-Schmita. Niech $\{v_1, \dots, v_n\}$ będzie dowolną bazą w V. Istnieje $\{w_1, \dots, w_n\}$ - ortogonalna baza w V określona następująco:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 \\
w_3 &= v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} \cdot w_2 \\
&\vdots \\
w_n &= v_n - \frac{< v_n, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 - \dots - \frac{< v_n, w_{n-1} >}{< w_{n-1}, w_{n-1} >} \cdot w_{n-1}.
\end{aligned}$$

Aby otrzymać bazę $\{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormalną należy wektory w_i podzielić przez ich norme

$$u_i = \frac{1}{\|w_i\|} \cdot w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Norma wektora.

W przestrzeni wektorowej V w której określony jest iloczyn skalarny definiuje sie normę wektora

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}.$$

1. $\|v\| \geqslant 0$, $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $v = 0$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|$
3. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Twierdzenie 4 o najlepszej aproksymacji. Niech W będzie podprzestrzenią wektorową przestrzeni wektorowej V z iloczynem skalarnym $<,>$ i niech $\mathcal{S}_{\mathcal{W}} = \{w_1, \dots, w_r\}$ - baza ortogonalna W. Dla dowolnego $v \in V$ definiujemy

$$c_i = \frac{< v, w_i >}{< w_i, w_i >}.$$

Wtedy dla dowolnych liczb $k_1, \dots, k_r$ mamy

$$\|v - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i\| \leqslant \|v - \sum_{i=1}^{r} k_i \cdot w_i\|.$$

Czyli najbliżej wektora v w przestrzeni W jest wektor

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i.$$

Wartości własne odwzorowań liniowych:

Niech V- bedzie przestrzenią wektorową i niech $L : V \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym.

Definicja. Mówimy, że λ jest wartością własną odwzorowania L jeżeli istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$, że równanie:

$$L(v) = \lambda \cdot v$$

ma niezerowe rozwiązanie.

Potęgowanie liczb zespolonych (wzór Moive'a):

$$(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Pierwiastki z liczb zespolonych:

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad \text{dla} \ \ k = 0, 1, \dots, n-1$$

Wzór Eulera:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Macierz przekształcenia do potęgi:

Wówczas dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ macierz przekształcenia L^k w bazie $\mathcal{B}$ ma postać

$$A_{L^k} = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \cdot P^{-1},$$

gdzie P jest macierzą przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy wektorów własnych.

Forma kwadratowa:

Definicja 4.1.1 Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K i niech f będzie pewną formą dwuliniową określoną na $V \times V$. Odwzorowanie $g : V \to K$ nazywamy *formą kwadratową* generowaną przez formę f (skojarzoną z f) jeżeli:

$$\underset{x \in V}{\forall} \ g(x) = f(x, x)$$

Uwaga: Jeżeli g jest formą kwadratową generowaną przez formę dwuliniową f, wówczas:

$$\underset{\alpha \in K}{\forall} \ \underset{x \in V}{\forall} \ g(\alpha x) = f(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 g(x)$$

oraz

$$\begin{aligned}
\underset{x,y \in V}{\forall} \ g(x + y) \ &= \ g(x + y, x + y) = f(x, x) + f(y, x) + f(x, y) + \\
&+ \ f(y, y) = g(x) + g(y) + f(x, y) + f(y, x)
\end{aligned}$$

Każda forma kwadratowa może być generowana przez wiele form dwuliniowych.

Kąt między wektorami.

$$\cos\alpha = \frac{< u, v >}{\|u\|\|v\|}.$$

Rzut wektora v w kierunku wektora w będziemy oznaczać $proj(v, w)$:

$$proj(v, w) = \frac{< v, w >}{< w, w >} \cdot w.$$

Ortogonalna diagonalizacja.

Definicja . Mówimy, że macierze A i B są ortogonalnie podobne jezeli istnieje orogonalna macierz P taka, że

$$P^T AP = B.$$

Jeżeli macierz A jest ortogonalnie podobna do macierzy diagonalnej D:

$$P^T AP = D$$

wtedy mówimy, że jest ortogonalnie diagonalizowana.

Algorytm ortogonalnej diagonalizacji.

1. Wyznaczamy wartości własne macierzy A
2. Dla każdej podprzestrzeni własnej wyznaczamy bazę ortonormalną, w przypadku gdy wymiar jest większy niż jeden stosujemy ortogonalizację Grama-Schmita.
3. Definiujemy macierz P której kolumnami są wektory skonstruowane w punkcie 2. Tak określona macierz P ortogonalnie diagonalizuje macierz A i wartości własne na przekątnej macierzy $D = P^T AP$ są w takiej samej kolejności jak odpowiadające im wektory własne w P.