Granice funkcii:

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1 \qquad \lim_{\square\to 0}\frac{tg\square}{\square}=1$$

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\arcsin\square}{\square}=1 \qquad \lim_{\square\to 0}\frac{\mathrm{arc}\,tg\square}{\square}=1$$

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{a}{\square}\right)^{\square}=e^a \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\ln(1+\square)}{\square}=1 \qquad \lim_{\square\to 0}\frac{\log_a(1+\square)}{\square}=\log_a e$$

$$\lim_{\square\to 0}\frac{e^{\square}-1}{\square}=1 \qquad \lim_{\square\to 0}\frac{a^{\square}-1}{\square}=\ln a$$

Dla $a>1$

$\log_a 0 \to -\infty$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a \infty \to \infty$

Dla $a<1$

$\log_a 0 \to \infty$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a \infty \to -\infty$

$$\sqrt[b]{x^a}=x^{\frac{a}{b}} \qquad \frac{1}{x^a}=x^{-a}$$

$\ln 0 \to -\infty$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln\infty \to \infty$

Suma ciągu geometrycznego:

$$S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Suma ciągu arytmetycznego:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

$$a^\infty=\begin{cases}\infty & dla\ a>1\\ 1 & dla\ a=1\\ 0 & dla\ |a|<1\end{cases}$$

Symbole nieoznaczone:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\left[\frac{\infty}{\infty}\right],[\infty-\infty],[0\cdot\infty],[1^\infty],[0^0],[\infty^0]$$

Symbole oznaczone:

$$[\infty\cdot\infty]=\infty;\ \left[\frac{a}{\infty}\right]=0;\ \left[\frac{a}{0}\right]=\pm\infty;\ [\infty^a]=\infty;\ [\infty^\infty]=\infty$$

Podstawienie trygonometryczne:

$$\sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-\sin^2(t)}=\cos(t). \qquad y=\sin(t).\quad dy=\cos(t)dt$$

$$\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+tg^2(t)}=\sqrt{\frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}=\frac{1}{\cos(t)} \qquad y=tg(t).\quad dy=\frac{1}{\cos^2(t)}dt$$

$$\sqrt{y^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}-1}=\sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}}=\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \qquad y=\frac{1}{\cos(t)}\quad dy=\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}dt$$

Podstawienia Eulera:

Jeśli a>0

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$

Jeśli c>0

$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

jeśli wielomian ma rzeczywiste miejsca zerowe u, v:

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-u).$

6a. $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$

7a. $\int\sin ax dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$

8a. $\int\cos ax dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

Cos x w nieparzystej potędze

$t=\sin x,\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ \cos x=\sqrt{1-t^2}$

Sin x w nieparzystej potędze

$t=\cos x,\ dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ \sin x=\sqrt{1-t^2}.$

Metoda współczynników nieoznaczonych Lagrange'a:

$$\int\frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Podstawienie uniwersalne:

$$\int F(\sin x,\cos x)dx \qquad \int F\left(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x\right)dx$$

$$\left|\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} t=tgx\\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}\\ \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2}\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|$$

Pochodne:

Definicja pochodnej: $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

1. $(C)'=0$
2. $(x^n)'=nx^{n-1}$
3. $(x)'=1$
4. $\left(\frac{a}{x}\right)'=-\frac{a}{x^2}$
5. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $(a^x)'=a^x\ln a$
7. $(e^x)'=e^x$
8. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
9. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
10. $(\sin x)'=\cos x$
11. $(\cos x)'=-\sin x$
12. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
13. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
14. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(arctgx)'=\frac{1}{x^2+1}$
17. $(arcctgx)'=-\frac{1}{x^2+1}$

1. $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$
2. $[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$
3. $[a\cdot f(x)]'=a\cdot f'(x)$
4. $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
5. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

1. $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
2. $\int[f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$
3. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$

Całki:

1. $\int dx=x+C$
2. $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C,\quad n\neq -1$
3. $\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$
4. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$
5. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
6. $\int e^x dx=e^x+C$
7. $\int\sin xdx=-\cos x+C$
8. $\int\cos xdx=\sin x+C$
9. $\int tgxdx=-\ln|\cos x|+C$
10. $\int ctgxdx=\ln|\sin x|+C$
11. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$
12. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$
13. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
14. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$
15. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+q}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+q}\right|+C$

Schemat rozwiązywania całek wymiernych:

$$\int\frac{W_L(x)}{W_M(x)}dx \qquad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$L\geq M$ → Dzielimy licznik przez mianownik

$L<M$ → Czy mianownik można rozłożyć na czynniki?

Nie $(np.\ \Delta<0)$ → Czy licznik jest stałą, czy wielomianem 1-go stopnia?

Tak $(np.\ \Delta\geq 0)$ → Stosujemy rozkład na ułamki proste → KONIEC

Wielomianem 1-go stopnia → Przekształcamy licznik tak, aby część jego składników była równa <u>pochodnej</u> mianownika

Stałą → Sprowadzamy mianownik do postaci kanonicznej:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

...dalej najczęściej przez podstawienie → KONIEC

Twierdzenie Taylora:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \qquad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Styczna: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Normalna: $y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Przybliżenie: $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$

Asymptota pionowa:

$$\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Asymptota pozioma:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$$

Asymptota ukośna:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}$$

Reguła de l'Hospitala: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

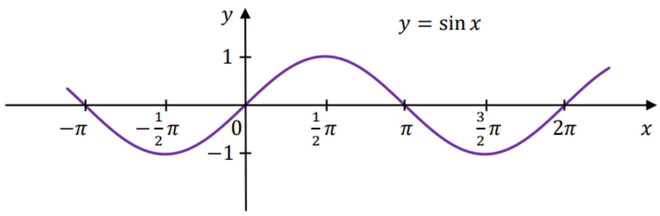
Twierdzenie Lagrange'a: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad c \in (a, b)$

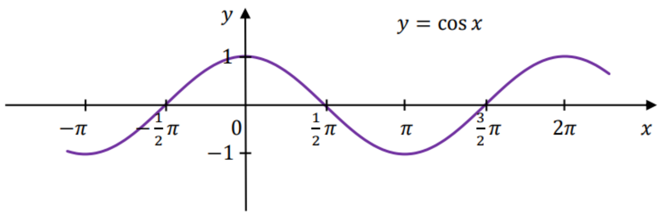
Definicja Heinego: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \underset{x_n \to x_0}{\forall} \lim\limits_{x_n\to x_0} f(x_n) = g$

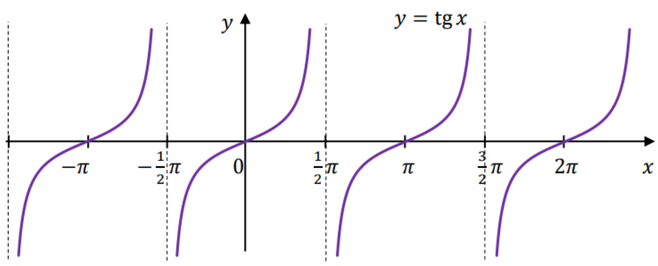
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Trygonometria:

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$(arc)\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$(arc)\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$(arc)tgx$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$(arc)ctgx$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0







$\sin(-x) = -\sin x \qquad \arcsin(-x) = -\arcsin x$

$\cos(-x) = \cos x \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$tg(-x) = -tgx \qquad arctg(-x) = -arctgx$

$ctg(-x) = -ctgx \qquad arcctg(-x) = \pi - arcctgx$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$