

1. ZADANIA I ŚRODKI FORMALNE TEORII KOLEJEK

Teoria kolejek, nazywana również *teorią masowej obsługi*, jest szybko rozwijającą się gałęzią badań operacyjnych. Z drugiej strony, ze względu na stosowany w tej teorii aparat matematyczny, można ją uważać za rozdział teorii procesów stochastycznych.

Od samego początku jej powstawania teoria kolejek była silnie związana z techniką, a więc wynikała niejako z zapotrzebowań praktycznych. Jeszcze przed pierwszą wojną światową duński teletechnik A. K. Erlang zajmował się zagadnieniami stochastycznymi, wynikającymi z obserwacji pracy central telefonicznych. Model centrali telefonicznej, do której zgłaszały się abonenci w przypadkowo wybranym czasie, jest wzorcowym modelem teorii kolejek. Obsługa zgłaszających się abonentów polega na realizacji połączenia zajmującego przez pewien przedział czasu jedną z wielu linii, które są w dyspozycji centrali. Model ten stał się dla teorii kolejek podstawowym przykładem realizacji zasadniczych założeń dotyczących strumienia zgłoszeń, funkcji rozkładu czasów obsługi oraz źródłem wielu terminów i definicji.

Począwszy od lat trzydziestych obecnego stulecia metody badania pracy central telefonicznych zostają przeniesione do rozważań innych systemów kolejkowych w dziedzinie komunikacji, transportu, przemysłu, handlu, urządzeń socjalnych, służby zdrowia. Powstały nowe zagadnienia, potrzeby i metody, a rozwijająca się teoria wzbudziła żywe zainteresowanie wielu matematyków, statystyków, techników i ekonomistów. Ogólnie metody analizy systemów kolejkowych można podzielić na dwie grupy.

– *Metody analityczne*, których istota sprowadza się do ułożenia i rozwiązania układów równań różniczkowych wiążących ze sobą prawdopodobieństwa zdarzeń występujących w procesie obsługi. Na ogólnie równania te rozwiązuje się w stanie ustalonym, tzn. przy założeniu, że czas $t \rightarrow \infty$ (założenie to powoduje, że układ równań różniczkowych ulega przekształceniu w odpowiadający mu układ równań algebraicznych).

– *Metody symulacyjne* polegające na syntezie algorytmu symulującego funkcjonowanie danego systemu przy obsłudze strumienia zgłoszeń. Wielokrotna komputerowa realizacja procesu obsługi przy użyciu tego algorytmu, a następnie opracowanie statystyczne rezultatów otrzymanych przy wszystkich realizacjach, umożliwiają znalezienie interesujących nas współzależności oraz wartości wskaźników jakości badanego systemu kolejkowego.

Metody analityczne można stosować do opisu stosunkowo prostych systemów pod warunkiem, że są spełnione dość silne założenia dotyczące strumienia zgłoszeń oraz czasów obsługi (w modelach analitycznych zakłada się na ogólnie, że strumień zgłoszeń jest strumieniem prostym, natomiast czasy obsługi mają rozkład wykładniczy – Dodatek D.2). W praktycznych zastosowaniach założenia te stosunkowo rzadko są spełnione i stanowią zbyt dużą idealizację zagadnień.

W ostatnich latach, w związku z szybkim rozwojem informatyki, szczególnego znaczenia nabierają symulacyjne metody analizy systemów kolejkowych. Metoda symulacji stanowi jedyną efektywną metodę analizy złożonych wielokanałowych i wielofazowych systemów obsługi przy dowolnych strumieniach wejściowych zgłoszeń i funkcjach rozkładów czasów obsługi. Systemy takie najczęściej występują w zagadnieniach praktycznych.

Przykładami prostych systemów obsługi mogą być: wspomniane już zagadnienie oczekiwania na połączenie telefoniczne, uznawany za klasyczny problem postoju taksówek, obsługa klientów w urzędach, bankach, sklepach itp. W odróżnieniu od tych prostych systemów, systemy wielokanałowe i wielofazowe wymagają realizacji wielu czynności obsługi (operacji technologicznych) jednocześnie lub w określonej kolejności. Przykładem może być ciąg operacji technologicznych wykonywanych w procesie produkcji traktowany jako wielofazowy system kolejkowy.

Zasadniczym celem teorii kolejek jest opracowanie ogólnych metod umożliwiających wyznaczenie wartości podstawowych wskaźników charakteryzujących proces obsługi i ocenę jakości pracy systemu kolejkowego oraz wybór optymalnej struktury i organizacji obsługi. Z punktu widzenia użytkownika należy wypracować wskazania do podjęcia decyzji o sposobie użytkowania systemu, natomiast z punktu widzenia zarządzającego systemem należy określić warunki najbardziej efektywnego jego wykorzystania.

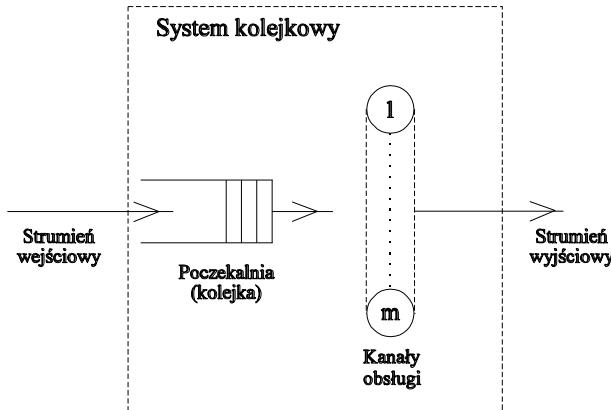
1.1. Pojęcia ogólne i definicje

Teoria kolejek, podobnie jak każda inna dziedzina nauki, ma pewne specyficzne określenia i pojęcia. Jednym z ważniejszych pojęć występujących w tej teorii jest pojęcie zgłoszenia. Przez *zgłoszenie* rozumie się żądanie spełnienia przez system określonej czynności, przy czym zgłoszenie jest utożsamiane z jego nośnikiem. Zamiast mówić: *klient, pasażer, abonent stoi w kolejce lub oczekuje na obsługę*, mówimy: *zgłoszenie stoi w kolejce lub oczekuje na obsługę*.

Obsługę rozumie się jako spełnienie określonej potrzeby, w szerokim sensie tego słowa. Środki, które umożliwiają obsługę zgłoszeń (człowiek, urządzenie, automat), nazywamy *urządzeniami obsługującymi, stanowiskami obsługi lub kanałami obsługi*, a zbiór takich identycznych urządzeń obsługujących *systemem obsługi*.

W teorii kolejek ciąg zdarzeń losowych jest nazywany *strumieniem zdarzeń*. Dotyczy to zdarzeń losowych związanych z procesem przybywania zgłoszeń do systemu lub też z procesem obsługi.

W ogólnej postaci każdy system kolejkowy można przedstawić za pomocą schematu blokowego podanego na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Schemat blokowy systemu kolejkowego

Na wejściu systemu pojawia się pewien ciąg zgłoszeń wymagających obsługi, nazywany *strumieniem wejściowym*. Zgłoszenia pojawiające się w systemie są kierowane bezpośrednio do obsługi w przypadku wolnych kanałów lub też gromadzone w poczekalni, gdzie oczekują na zwolnienie kanału obsługi. Strumień zgłoszeń uzyskany na wyjściu systemu nosi nazwę *strumienia wyjściowego*, przy czym strumień wyjściowy może zawierać zgłoszenia zarówno obsłużone, jak też i nie obsłużone, tzn. takie, które zrezygnowały ze spełnienia swoich zapotrzebowań w rozważanym systemie.

Momenty określające wejścia zgłoszeń do systemu oraz momenty ich wyjścia są wielkościami losowymi. Wobec tego, z tak określonym systemem obsługi wiążą się dwa rozkłady statystyczne opisujące jego własności. Są to:

- *rozkład czasów wejścia zgłoszeń* opisujący rodzaj strumienia wejściowego zgłoszeń, tzn. rozkład przedziałów czasowych pomiędzy chwilami t_1, \dots, t_n , w których przybywają do systemu kolejne zgłoszenia x_1, \dots, x_n ,
- *rozkład czasów obsługi* opisujący typ obsługi, tzn. rozkład czasów wymaganych dla zapewnienia obsługi kolejnym klientom na stanowiskach obsługi.

W praktyce często obsługa jednego zgłoszenia jest realizowana przez kilka aparatów obsługi, z reguły kolejny aparat obsługi rozpoczyna swą pracę po jej zakończeniu przez aparat poprzedzający go. Taki proces obsługi nazywamy *wieloetapowym* lub *wielofazowym*, w odróżnieniu od prostego procesu, polegającego na realizacji pojedynczej operacji, zwanego procesem *jednofazowym*. Ogólnie rzecz biorąc, można spotkać wiele postaci systemów kolejkowych, a do najbardziej typowych zalicza się takie systemy, w których:

- wszystkie aparaty obsługi są równouprawnione i mają identyczne charakterystyki,
- aparaty obsługi tworzące dany system nie są równouprawnione, tzn. mają indywidualne charakterystyki.

W pierwszym przypadku nadchodzące zgłoszenia są obsługiwane przez jeden z wolnych kanałów obsługi, przy czym nie stosuje się żadnych reguł uprzywilejowania. Taka organizacja systemu nosi nazwę *nieuporządkowanej*

(przykładem może być obsługa klientów w sklepie, gdzie nabywca podchodzi do któregokolwiek z wolnych sprzedawców).

W drugim przypadku mamy do czynienia z systemem *uporządkowanym* (zwykle kanały obsługi są ponumerowane i jako pierwszy rozpoczyna obsługę wolny kanał o najniższym numerze porządkowym ewentualnie ten, który miał najdłuższy przestój itp.).

W zależności od liczby kanałów systemy kolejkowe dzieli się na *jednokanałowe i wielokanałowe*.

Ważną cechą pozwalającą na ocenę systemów kolejkowych jest zachowanie się zgłoszenia, nadchodzącego w chwili, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Można tu wyróżnić trzy grupy systemów.

Pierwszą grupę tworzą systemy, dla których cechą charakterystyczną jest to, że zgłoszenie nie może czekać na początek obsługi w systemie lub – co w istocie wychodzi na to samo – system obsługi odmawia przyjęcia zgłoszenia w chwili, gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte. Jest oczywiste, że własność taka może występować w systemach o ograniczonej liczbie kanałów obsługi. Praktycznie oznacza ona, że w systemie nie istnieją warunki do utworzenia kolejki, tzn. system nie ma poczekalni. Zgłoszenie, które nadeszło do systemu i zostało potraktowane odmownie, opuszcza system, mimo że nie dokonano jego obsługi. Jest to ewidentna strata dla systemu i dlatego tak zorganizowane systemy kolejkowe noszą nazwę *systemów ze stratami*.

Druga grupa systemów charakteryzuje się tym, że zgłoszenia nadchodzące do systemu mogą go opuścić tylko wtedy, kiedy zostaną całkowicie obsłużone. W razie braku wolnych kanałów obsługi zbiór zgłoszeń nadchodzących do systemu tworzy kolejkę w poczekalni o nieograniczonej pojemności. Takie systemy obsługi otrzymały nazwę *systemów z oczekiwaniem lub systemów bez strat*.

Dla trzeciej grupy systemów charakterystyczna jest obecność pewnych warunków pośrednich, np. ograniczony czas przebywania zgłoszenia w systemie, czy też czas oczekiwania w kolejce na rozpoczęcie obsługi. Wszystkie tego rodzaju systemy nazywamy *mieszanymi systemami obsługi*.

Oprócz podziału systemów obsługi na trzy podstawowe grupy, można również rozróżnić systemy między sobą według liczby kanałów obsługi lub liczby miejsc w poczekalni. Rozważane są dwa typy systemów: *z ograniczonym lub nieograniczonym rozmiarem*, przy czym przez rozmiar systemu rozumie się sumaryczną liczbę kanałów obsługi i miejsc w poczekalni. Oczywiście, w żadnym rzeczywistym systemie nie może występować nieograniczona liczba miejsc w poczekalni, czy też liczba kanałów obsługi, ale może być ona tak znaczna, że praktycznie można ją przyjąć za nieskończanie dużą.

Innym kryterium klasyfikacji systemów kolejkowych może być np. liczba źródeł zgłoszeń. I tak, systemy kolejkowe dzielą się na *systemy otwarte*, które mogą mieć nieskończanie wielką liczbę zgłoszeń

przychodzących do systemu, oraz *systemy zamknięte*, w których maksymalna liczba zgłoszeń do obsługi jest ustalona i stała w czasie.

1.2. Podstawowe wielkości charakteryzujące systemy kolejkowe

1.2.1. Nasycenie systemu kolejkowego

System kolejkowy powinien obsługiwać zgłaszające się obiekty z prędkością większą niż ich przybywanie. Pomijając ekonomiczny aspekt tego zagadnienia, zarówno natężenie strumienia zgłoszeń, jak i prędkość obsługi podlegają przypadkowym wahaniom. Istnieją przedziały czasu, w których przybywa więcej zgłoszeń niż może być jednocześnie obsłużonych i część z nich (o ile jest to możliwe) musi czekać na usługę. Zgłoszenia te tworzą *kolejkę*.

Nasycenie systemu kolejkowego można opisać za pomocą trzech charakterystyk:

- *strumienia zgłoszeń* – będącego statystycznym opisem procesu przybywających do systemu zgłoszeń,
- *procesu obsługi* – opisującego proces realizacji obsługi zgłoszeń,
- *regulaminu (dyscypliny) kolejki* – określającego metodę wybierania kolejnego zgłoszenia do obsługi w przypadku istnienia kolejki.

Proces obsługi jest określany przez dwa parametry: czas obsługi i krotność systemu obsługi. *Czas obsługi* jest to czas wymagany do obsługi jednego zgłoszenia, natomiast *krotność systemu obsługi* jest liczbą zgłoszeń, które mogą być jednocześnie obsługiwane. System obsługi o krotności m nazywa się *m-kanalowym systemem obsługi*.

W prostych przypadkach statystyczne własności strumienia zgłoszeń i procesu obsługi są stacjonarne (niezależne od czasu). Często jednak mamy do czynienia z procesami niestacjonarnymi. Na przykład natężenie strumienia zgłoszeń może zależeć od pory dnia lub też prędkość obsługi może być funkcją długości kolejki itp.

1.2.1.1. Strumień zgłoszeń

Strumień zgłoszeń jest statystycznym opisem procesu przybywania zgłoszeń do systemu obsługi. Jest on zazwyczaj opisywany za pomocą *funkcji rozkładu odstępów czasu (interwałów)* między kolejnymi zgłoszeniami. Jeśli strumień zgłoszeń nie wykazuje zmienności, interwał ten jest stały, a strumień ma charakter deterministyczny. Gdy zgłoszenia są losowe, interwał jest zmienną losową i należy wówczas określić jego funkcję rozkładu.

Jeśli przyjmiemy oznaczenia:

\bar{t}_a – średnia długość interwału pomiędzy dwoma sąsiadującymi zgłoszeniami,

λ – średnie natężenie strumienia zgłoszeń,
wówczas zależność między tymi wielkościami ma postać

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_a} \quad (1-1)$$

Do opisu właściwości strumienia zgłoszeń powszechnie stosuje się *funkcję rozkładu* $B(t)$ określającą prawdopodobieństwo tego, że interwał ten jest większy od pewnej wartości t , czyli

$$B(t) = 1 - F(t) \quad (1-2)$$

gdzie dystrybuanta $F(t)$ jest prawdopodobieństwem tego, że interwał ten jest mniejszy od t . Jak już wspomniano, podstawowym warunkiem, który musi być spełniony, aby można było stosować metody analityczne, jest założenie, że strumień zgłoszeń jest *strumieniem prostym*, tzn. jest *stacjonarny, bez pamięci i pojedynczy*. Dokładniejsze informacje dotyczące strumieni zgłoszeń są zawarte w Dodatku D.2.

Stacjonarność strumienia zgłoszeń oznacza, że dla dowolnej grupy ze skończonej liczby, nie zachodzących na siebie przedziałów czasu, prawdopodobieństwo pojawienia się w nich odpowiednio k_1, k_2, \dots, k_n zgłoszeń zależy tylko od wymienionych liczb i od długości odpowiednich przedziałów czasu, lecz nie zależy od ich położenia na osi czasu. W szczególności prawdopodobieństwo pojawienia się k zgłoszeń w przedziale czasu $(t, t + \tau)$ nie zależy od t , a jest jedynie funkcją zmiennych k oraz τ .

Brak pamięci polega na tym, że prawdopodobieństwo wystąpienia k zgłoszeń w przedziale czasu $(t, t + \tau)$ nie zależy od tego, ile zgłoszeń i w jaki sposób wystąpiło do tego momentu. Oznacza to, że warunkowe prawdopodobieństwo wystąpienia k zgłoszeń w przedziale czasu $(t, t + \tau)$, obliczone przy dowolnym założeniu o wystąpieniu zgłoszeń do tego momentu, jest takie samo jak bezwarunkowe prawdopodobieństwo tego zdarzenia.

Pojedynczość wyraża warunek praktycznej niemożności pojawienia się dwóch bądź większej liczby zgłoszeń w tym samym czasie. Rozkład dyskretny, zwany *rozkładem Poissona*, ma wszystkie właściwości strumienia prostego. Rozkład ten znajduje szerokie zastosowanie w teorii kolejek, gdyż umożliwia w wielu przypadkach uzyskanie rozwiązań analitycznych. Właściwości rozkładu Poissona, a także innych ważniejszych rozkładów przedstawiono w Dodatku D.2.

1.2.1.2. Proces obsługi

Często zdarza się, że czas obsługi zgłoszenia w systemie nie jest stały. Jeżeli podlega on stochastycznym wahaniom, to musi być opisany za pomocą odpowiedniej funkcji rozkładu. *Czas obsługi* T_0 jest to istotna wielkość charakteryzująca system obsługi. Rozpatrzmy zmienną losową T_0 . Niech $G(t)$ będzie funkcją rozkładu tej zmiennej określona następująco

$$G(t) = p(T_0 < t) \quad (1-3)$$

Funkcja gęstości rozkładu $g(t)$ jest określona zależnością

$$g(t) = G'(t) \quad (1-4)$$

Duże znaczenie praktyczne ma przypadek, gdy zmienna losowa T_0 podlega rozkładowi wykładniczemu o funkcji gęstości rozkładu określonej wzorem

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0 \quad (1.5)$$

gdzie parametr rozkładu μ wynosi

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_0} \quad (1-6)$$

Wielkość \bar{t}_0 jest średnim czasem obsługi zgłoszenia.

Rozkład wykładniczy nie jest jedynym rozkładem służącym do opisu procesu obsługi. Stosuje się również rozkład Erlanga, który lepiej opisuje ten proces. W wielu przypadkach praktycznych charakterystyki systemu kolejkowego stosunkowo mało zależą od rodzaju rozkładu czasów obsługi, lecz przede wszystkim od wartości średniej tego czasu \bar{t}_0 . Dlatego też, w teorii kolejek zakłada się, że proces obsługi podlega rozkładowi wykładniczemu. Hipoteza ta umożliwia uproszczenie aparatu matematycznego wykorzystywanego do opisu takich systemów i w licznych przypadkach znalezienie prostych formuł analitycznych.

1.2.1.3. Regulamin kolejki

Trzecim istotnym elementem, wpływającym na nasycenie systemu kolejkowego, jest *regulamin (disciplina) obsługi kolejki* określający kolejność wybierania zgłoszeń z kolejki znajdującej się w poczekalni.

Podstawowe sposoby to:

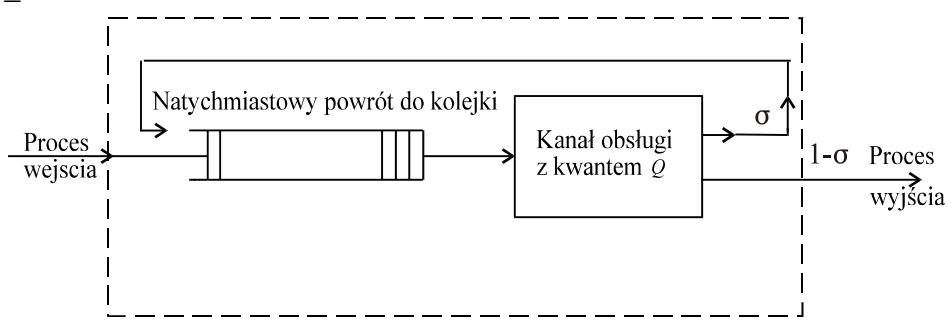
- Dyscyplina FIFO (ang. *First-In, First-Out*) lub PAPS (franc. *Premier-Arrivé, Premier-Servi*). Jako pierwsze do obsługi kieruje się zgłoszenie najdłużej oczekujące w kolejce.

- Dyscyplina LIFO (ang. *Last-In, First-Out*) lub DAPS (franc. *Dernier-Arrivé, Premier-Servi*). Jako pierwsze do obsługi kieruje się zgłoszenie, które przybyło jako ostatnie. Taki sposób obsługi kolejki odwzorowuje np. wysiadanie pasażerów z windy lub odczytywanie zapisów z taśmy magnetycznej bez jej przewijania.

- Dyscyplina RSS (ang. *Random Selection for Service*). Jako następne do obsługi wybiera się zgłoszenie w drodze losowania (uporządkowanie przypadkowe). Bez dodatkowych założeń oznacza to, że wybór każdego zgłoszenia z kolejki jest jednakowo prawdopodobny.

- Dyscyplina RR (ang. *Round-Robin*) stosowana często do opisu systemów informatycznych. Polega ona na tym, że traktuje zgłoszenia (programy w systemach informatycznych) według regulaminu FIFO, lecz obsługa jest przerywana na końcu przedziału czasu Q zwanego *kwantem* (ang. *time*

slice). Jeśli obsługa nie została zakończona przed upływem tego czasu, zgłoszenie zajmuje miejsce w poczekalni z prawdopodobieństwem σ lub opuszcza system w przypadku zakończenia obsługi z prawdopodobieństwem $1-\sigma$. W celu uproszczenia opisu rozważa się czasy obsługi będące wielokrotnością Q . Schemat blokowy przedstawiający dyscyplinę RR ma postać jak na rys. 1.2.



Rys. 1.2. Schemat blokowy dyscypliny RR

– Dyscyplina PS (ang. *Processor-Sharing*), która reprezentuje graniczny przypadek dyscypliny RR, gdy $Q \rightarrow 0$ i $\sigma \rightarrow 1$, natomiast iloraz $\frac{Q}{1-\sigma} = E(S)$ pozostaje stały (S jest zmienną losową opisującą czas trwania obsługi zgłoszenia). Dyscyplina ta ma zastosowanie w systemach informatycznych.

Wszystkie te przypadki dotyczą systemów, w których zgłoszenia czekają na obsługę. Oczywiście, może się zdarzyć opuszczenie kolejki przez zgłoszenie (system z niecierpliwy klientami). Gdy zachodzi zjawisko tego typu, tzw. *odstępowanie* (ang. *reneging*), wówczas należy określić regułę odstępowania. Może ona zależeć od długości kolejki lub czasu oczekiwania w kolejce. Odstępowanie opisuje się często podając odpowiednią funkcję rozkładu.

Niektóre zgłoszenia z kolejki mogą mieć priorytet, tzn. prawo pierwszeństwa obsługi przed zgłoszeniem o niższym priorytecie. Ogólny model systemu kolejkowego z priorytetem można sformułować w następujący sposób: w k strumieniach zgłoszeń przybywa k klas jednostek, które mogą być obsługiwane przez l kanałów obsługi. Zadany jest pewien przepis, dotyczący relacji porządkujących poszczególne klasy zgłoszeń oraz ustalona dyscyplina kolejki w ramach danej klasy. Zakłada się ponadto, że zgłoszenia należące do tej samej klasy mają taki sam rozkład czasów obsługi.

Można przeprowadzić klasyfikację systemów kolejkowych z priorytetami ze względu na sposób rozwiązania dwóch podstawowych zagadnień występujących w takich systemach. Pierwsze z nich pojawia się w chwili, gdy zwalnia się kanał obsługi i trzeba zadecydować, która jednostka spośród czekających w kolejce wejdzie jako pierwsza do systemu. Jeżeli decyzja w tej kwestii zależy tylko od tego, do której klasy jednostka ta

należy, to takie systemy kolejkowe noszą nazwę *systemów z priorytetem zewnętrznym*. Jeżeli decyzja ta zależy również od aktualnego stanu systemu, np. od czasu oczekiwania jednostek będących w kolejce, od długości kolejki zgłoszeń należących do danej klasy czy też od tego, do której klasy należy jednostka kończąca obsługę, to takie systemy nazywamy *systemami z priorytetem wewnętrznym*.

Drugie zagadnienie pojawiające się w systemach priorytetowych jest następujące: co należy uczynić, jeżeli podczas obsługi jednostki należącej do klasy o niższym priorytecie zgłosi się do systemu jednostka z klasy o wyższym priorytecie; czy przerwać obsługę jednostki o niższej klasie priorytetu, czy ją kontynuować. W pierwszym przypadku mówimy o *systemach z priorytetem rugującym*, natomiast w drugim o *systemach z priorytetem nierugującym*.

W zależności od tego, co dzieje się z wyrugowaną jednostką można mówić o trzech rodzajach *priorytetu absolutnego*. Są to: priorytet absolutny z doobsługiwaniem, priorytet absolutny z identyczną obsługą od nowa i priorytet absolutny z inną obsługą od nowa. Zakłada się także, że wewnętrz danej klasy obowiązuje regulamin likwidacji kolejki FIFO.

W literaturze można spotkać klasyfikację systemów z priorytetami w zależności od liczności źródeł, z których przybywają jednostki. Mianowicie, jeżeli liczność wszystkich źródeł jest nieskończona, system nazywamy *systemem z nieskończonymi źródłami*, w przeciwnym przypadku nazywamy go *systemem ze skończonymi źródłami*. Te ostatnie mogą być podzielone na dwie kategorie: priorytetowe systemy kolejkowe z wielorakimi skończonymi źródłami (różne jednostki przybywają z różnych skończonych źródeł) oraz priorytetowe systemy kolejkowe z pojedynczymi skończonymi źródłami (jednostki należące do dwóch lub większej liczby klas wychodzą z tego samego źródła). Badanie tych ostatnich systemów jest szczególnie trudne, ponieważ wejście jednostki z danej klasy wpływa na parametry strumienia zgłoszeń jednostek z innej klasy.

1.3. Klasyfikacja systemów kolejkowych

1.3.1. Ogólne zasady klasyfikacji

Jak już wspominano, system kolejkowy jest *zadany*, jeśli są określone elementy, które w sposób istotny wpływają na główne parametry charakteryzujące jego pracę, a tym samym na jego funkcjonowanie. Ponieważ każdy z tych elementów może mieć dowolny charakter, istnieją możliwości wystąpienia dużej różnorodności systemów kolejkowych. Dlatego też, w sposób naturalny powstała konieczność uporządkowania tych systemów i ich klasyfikacji.

W charakterze cech klasyfikacyjnych można przyjąć różne wielkości określające system obsługi: dyscyplinę kolejki, typ rozkładu wejściowego strumienia zgłoszeń, typ rozkładu czasów obsługi, liczbę kanałów obsługi, liczbę faz obsługi itp. Klasyfikacja może uwzględniać również i inne cechy, jak obecność lub brak ograniczeń nałożonych na

długość kolejki i czas oczekiwania, możliwość wyjścia zgłoszenia z systemu i przejście do drugiej kolejki. W celu oznaczenia typu systemu kolejkowego i odpowiadającego mu modelu matematycznego, dla wygody, wykorzystuje się kod, w którym w zaszyfrowany sposób są zawarte informacje mówiące o przynależności systemu do tej lub innej grupy.

1.3.2. Klasyfikacja według D. Kendalla

Matematyk i statystyk angielski D. Kendall zaproponował prostą symbolikę, w której system kolejkowy oznaczono w następujący sposób

$$X/Y/m$$

gdzie:

X – symbol rozkładu wejściowego strumienia zgłoszeń,

Y – symbol rozkładu czasów obsługi zgłoszeń,

m – liczba kanałów obsługi.

Dla oznaczenia typu rozkładów strumienia wejściowego oraz czasów obsługi przyjęto następujące symbole:

D – strumień zdeterminowany lub regularny,

M – wykładniczy rozkład czasów obsługi lub odstępów czasu pomiędzy sąsiednimi zgłoszeniami, tzn. poissonowski rozkład przybyć,

E_k – rozkład Erlanga k -tego rzędu, który może wystąpić zarówno po stronie urzędzeń obsługujących, jak i po stronie zgłoszeń,

H_k – rozkład hiperwykładniczy rzędu r ,

C_k – rozkład Cox'a rzędu k ,

GI – strumień ogólnego typu, dowolny i niezależny,

G – strumień o dowolnym rozkładzie czasów obsługi.

Zgodnie z tą symboliką, np. kod $M/M/1$ oznacza system kolejkowy jednokanałowy, dla którego strumień wejściowy zgłoszeń jest opisany rozkładem Poissona, natomiast czas obsługi podlega rozkładowi wykładniczemu. Kod $M/E_k/3$ oznacza system z wykładniczym rozkładem czasów pomiędzy zgłoszeniami (strumień zgłoszeń Poissona) i erlangowskim rozkładem czasów obsługi rzędu k . System ten zawiera trzy równoległe kanały obsługi.

Kod $GI/G/m$ oznacza natomiast system obsługi z m -kanałami, dowolnym i niezależnym rozkładem strumienia zgłoszeń i czasów obsługi (interwały czasu między momentami wystąpienia zgłoszeń są niezależne i mają ten sam dowolny rozkład). Natomiast kod $D/E_k/1$ oznacza jednokanałowy system mający regularny strumień wejściowy i rozkład czasów obsługi Erlanga k -tego rzędu.

Niedostatkiem zaprezentowanego sposobu kodowania jest to, że kod ten odnosi się tylko do jednofazowych systemów obsługi i nie zawiera informacji o istnieniu lub braku ograniczeń na ilość zgłoszeń przebywających w systemie, a także nie pokazuje przyjętego sposobu likwidacji kolejki, tzn. dyscypliny kolejki. Elementy te odgrywają istotną rolę w pracy systemu kolejkowego.

1.3.3. Klasyfikacja według A. M. Lee

Dążąc do wyeliminowania niedogodności klasyfikacji systemów kolejkowych wg D. Kendalla, specjalista z teorii kolejek A. M. Lee zaproponował rozszerzenie kodu uwzględniającego wymienione w p. 1.3.2 czynniki.

Po uzupełnieniu kod ma postać

$$X/Y/m/d/l$$

gdzie:

d – kod przyjętej dyscypliny kolejki,

l – rozmiar systemu, tzn. maksymalna liczba zgłoszeń mogących się pomieścić w systemie (w kanałach obsługi i w poczekalni).

Na przykład kod $M/M/2/FIFO/\infty$ oznacza system poissonowski, zawierający dwa kanały obsługi pracujące według dyscypliny FIFO, z nieskończoną liczbą miejsc w poczekalni.

W ostatnich latach ten system kodowania został jeszcze poszerzony

o dodatkowy element: O dla systemu otwartego i F dla systemu zamkniętego. Tak więc kod $M/E_2/2/FIFO/N/F$ oznacza system kolejkowy o poissonowskim strumieniu wejściowym zgłoszeń, erlangowskim rozkładzie czasów obsługi drugiego rzędu, zawierający dwa kanały obsługi. System ten jest zamknięty, liczba miejsc w poczekalni wynosi $N-2$, obowiązującą regułą likwidacji kolejki w poczekalni jest dyscyplina FIFO.

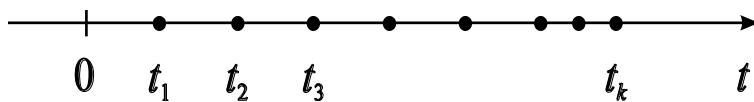
2. STRUMIENIE ZDARZEŃ

2.1 Strumień prosty i jego własności

W teorii prawdopodobieństwa przez prosty strumień zdarzeń rozumie się sekwencję zdarzeń o interwałach przypadkowych lub deterministycznych.

Zdarzenia tworzące strumień mogą w ogólnym przypadku różnić się między sobą. W rozważaniach dotyczących strumieni zdarzeń zakłada się, że zdarzenia są jednorodne.

Strumień zdarzeń można przedstawić jako uporządkowany ciąg punktów t_1, t_2, \dots, t_k na osi czasu, odpowiadających momentom pojawienia się zdarzeń jak na rysunku 2.1.



Rys. 2.1.

Strumień zdarzeń jest regularny, jeżeli tworzące go zdarzenia pojawiają się w zdeterminizowanych przedziałach czasu. Takie strumienie są rzadko spotykane w praktyce. Najczęściej występującymi w rzeczywistości są przypadkowe strumienie zdarzeń.

1. Strumień zdarzeń jest stacjonarny, jeżeli prawdopodobieństwo pojawienia się pewnej liczby zdarzeń w przedziale czasu τ zależy jedynie od długości tego przedziału i nie zależy od jego położenia na osi czasu.

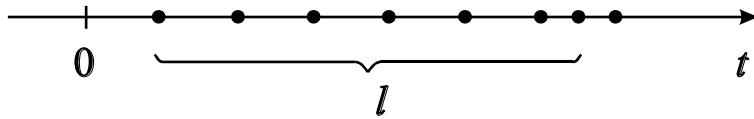
2. Strumień zdarzeń jest bez pamięci, jeżeli dla dowolnych rozłącznych przedziałów czasu liczba zdarzeń, które zaistnieją w jednym z nich nie zależy od liczby zdarzeń zachodzących w pozostałych przedziałach.

3. Strumień zdarzeń jest zwykły, jeżeli prawdopodobieństwo zaistnienia dwóch lub większej ilości zdarzeń w elementarnym przedziale Δt jest pomijalnie małe w odniesieniu do prawdopodobieństw pojawienia się tylko jednego zdarzenia.

Strumień zdarzeń posiadający trzy wymienione wyżej własności nazywamy strumieniem prostym lub stacjonarnym strumieniem Poissona.

Udowodnimy poniżej, że strumień posiadający własności 1 do 3 jest strumieniem Poissona.

Rozważmy oś x (rys. 3-2) i wyodrębnijmy na niej pewien przedział o długości l . Określmy dyskretną zmienną losową X związaną z liczbą punktów znajdujących się w tym przedziale.



Rys. 2.2.

Zmienna losowa X może przyjmować wartości $0, 1, 2, \dots, m, \dots$.

Punkty padające na przedział l są niezależne od pozostałych, a więc z teoretycznego punktu widzenia, ciąg tych punktów może być nieskończony. Wykażemy, że zmienna losowa X podlega rozkładowi Poissona. Wyliczymy prawdopodobieństwo p_m zdarzenia, polegającego na tym, że w przedziale o długości l znajdzie się dokładnie m punktów.

Rozumowanie rozpoczęmy od prostego przypadku.

Rozważmy na osi x nieskończenie mały przedział Δx i wyliczmy prawdopodobieństwo znalezienia się w nim co najmniej jednego punktu. Wartość średnia ilości punktów znajdujących się w tym przedziale wynosi $\lambda \Delta x$, gdyż w przedziale o jednostkowej długości znajduje się średnio λ punktów.

Zgodnie z warunkiem 3 dla nieskończenie małego przedziału Δx można pominąć prawdopodobieństwo znalezienia więcej niż jednego punktu. Tak więc, wartość średnia $\lambda \Delta x$ liczby punktów znajdujących się w przedziale Δx będzie w przybliżeniu równa prawdopodobieństwu znalezienia co najmniej jednego punktu.

Ostatecznie, dla $\Delta x \rightarrow 0$ można uważać, że prawdopodobieństwo znalezienia w tym przedziale co najmniej jednego punktu jest równe $\lambda \Delta x$, natomiast dla zdarzenia przeciwnego, tzn. że nie będzie żadnego punktu wynosi $1 - \lambda \Delta x$.

Wyliczymy obecnie prawdopodobieństwo p_m tego, że m punktów znajdzie się w przedziale l . Podzielimy przedział l na n równych części o długości

$$\Delta x = \frac{l}{n}.$$

Mówimy, że przedział elementarny Δx jest pusty, gdy nie zawiera żadnego punktu i jest zajęty, jeśli zawiera co najmniej jeden punkt. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że przedział Δx jest zajęty w przybliżeniu

równe jest $\lambda \Delta x = \frac{\lambda l}{n}$, a prawdopodobieństwo, że jest pusty wynosi $1 - \frac{\lambda l}{n}$.

Zgodnie z warunkiem 2 punkty są rozłożone niezależnie pomiędzy poszczególnymi rozłącznymi przedziałami. Można więc traktować rozważane przedziały elementarne jako n niezależnych doświadczeń,

w których dany przedział może być zajęty z prawdopodobieństwem $p = \frac{\lambda l}{n}$

lub pusty z prawdopodobieństwem $q = 1 - \frac{\lambda l}{n}$ (schemat Bernoulliego'go).

Znajdziemy prawdopodobieństwo tego, że spośród n przedziałów, będzie zajętych dokładnie m .

Zgodnie z twierdzeniem o powtarzalnych doświadczeniach (twierdzenie 1-6), prawdopodobieństwo to jest równe w przybliżeniu

$$p_m \approx C_n^m \left(\frac{\lambda l}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\lambda l}{n} \right)^{n-m}$$

Podstawiając $\lambda l = a$ otrzymujemy

$$p_m \approx C_n^m \left(\frac{a}{n} \right)^m \left(1 - \frac{a}{n} \right)^{n-m}.$$

W przypadku, gdy n jest wystarczająco duże, prawdopodobieństwo to jest w przybliżeniu równe prawdopodobieństwu tego, że dokładnie m punktów znajdzie się w przedziale l . Wynika to z faktu, że prawdopodobieństwo znalezienia w przedziale Δx więcej niż jednego punktu jest pomijalnie małe.

Aby znaleźć dokładną wartość prawdopodobieństwa p_m , trzeba wyliczyć granicę dla $n \rightarrow \infty$

$$p_m = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^m \left(\frac{a}{n} \right)^m \left(1 - \frac{a}{n} \right)^{n-m}$$

Dokonajmy przekształceń.

$$\begin{aligned} C_n^m \left(\frac{a}{n} \right)^m \left(1 - \frac{a}{n} \right)^{n-m} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)! a^m \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n}{m!(n-m)! n^m \left(1 - \frac{a}{n} \right)^m} = \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)a^m \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n}{n^m m! \left(1 - \frac{a}{n} \right)^m}. \end{aligned}$$

Więc

$$p_m = \frac{a^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n$$

\searrow_1
 \searrow_1

$$p_m = \frac{a^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m} = \frac{a^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}} \right]^a = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

gdzie dla $n \rightarrow \infty$ wyrażenie $\frac{n}{a} \rightarrow \infty$.

Wykazaliśmy więc, że prawdopodobieństwo tego, że dokładnie m punktów znajdzie się w przedziale l jest określone wzorem

$$p_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

gdzie $a = \lambda l$.

Oznacza to, że zmienna X podlega rozkładowi Poissona o parametrze $a = \lambda l$, gdzie a jest średnią liczbą punktów znajdujących się w przedziale l .

2.2. Niestacjonarny strumień Poissona

Podstawowym parametrem charakteryzującym niestacjonarny strumień jest gęstość chwilowa $\lambda(t)$.

Gęstością chwilową niestacjonarnego strumienia zdarzeń nazywamy iloraz średniej liczby zdarzeń zachodzących w elementarnym przedziale czasu $(t, t+\Delta t)$ do długości tego przedziału przy założeniu, że $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = m'(t), \quad (2-1)$$

gdzie $m(t)$ jest średnią liczbą zdarzeń w przedziale $(0, t)$.

Rozważmy strumień zdarzeń jednorodnych, zwykłych i bez pamięci lecz niestacjonarny, o zmiennej gęstości $\lambda(t)$. Strumień taki nosi nazwę niestacjonarnego strumienia Poissona. Stanowi to pierwszy etap uogólnienia prostego strumienia zdarzeń.

Można udowodnić, że dla takiego strumienia liczba zdarzeń zachodzących w przedziale czasu o długości τ , którego początek jest obrany w punkcie t_0 osi czasu, podlega rozkładowi Poissona

$$p_m(\tau, t_0) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2-2)$$

gdzie a jest średnią wartością liczby zdarzeń w przedziale czasu $[t_0, t_0 + \tau]$

$$a = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt .$$

Wielkość a zależy nie tylko od długości przedziału τ lecz również od jego położenia na osi czasu.

Określimy dla takiego strumienia funkcję rozkładu zmiennej losowej T będącej odcinkiem czasu pomiędzy dwoma sąsiednimi zdarzeniami. Ponieważ rozważany strumień nie jest stacjonarny, poszukiwany rozkład będzie zależał od położenia pierwszego zdarzenia na osi czasu t . Co więcej, rozkład ten będzie zależał od postaci funkcji $\lambda(t)$.

Niech t_0 oznacza moment pojawienia się pierwszego z dwóch sąsiadujących ze sobą zdarzeń

$$F_{t_0}(t) = p(T < t) = 1 - p(T \geq t) .$$

Prawdopodobieństwo $p(T \geq t)$ tego, że w przedziale czasu $[t_0, t_0 + \tau]$ nie pojawi się żadne zdarzenie wynosi

$$p(T \geq t) = e^{-a} = e^{-\int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt} ,$$

stąd

$$F_{t_0}(t) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(t) dt} . \quad (2-3)$$

Obliczając pochodną otrzymujemy gęstość prawdopodobieństwa

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t_0 + t) e^{-\int_{t_0}^{t_0 + t} \lambda(t) dt}, t > 0 . \quad (2-4)$$

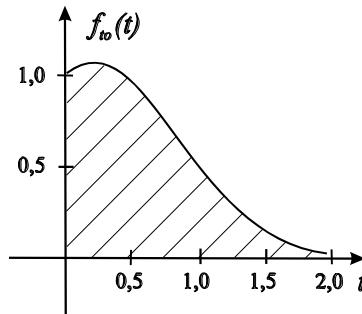
Rozkład ten nie jest rozkładem wykładniczym, jego postać zależy od parametru t_0 oraz od rodzaju funkcji $\lambda(t)$. Na przykład dla postaci liniowej funkcji $\lambda(t)$, tj.

$$\lambda(t) = a + bt \quad (2-5)$$

funkcja gęstości przyjmuje postać

$$f_{t_0}(t) = [a + b(t_0 + t)] e^{-at - bt_0 t - \frac{bt^2}{2}}. \quad (2-6)$$

Wykres tego rozkładu dla zestawu parametrów: $a = 0,4$; $b = 2$; $t_0 = 0,3$ przedstawiono na rysunku 3.3.

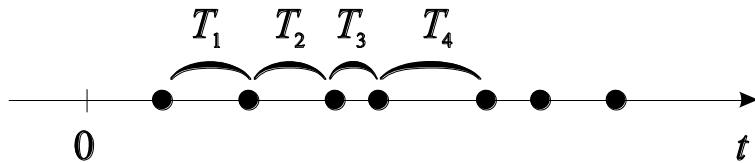


Rys. 2.3.

Struktura niestacjonarnego strumienia Poissona jest trochę bardziej złożona niż strumienia prostego i jest bardzo wygodna do zastosowań praktycznych, ponieważ podstawowa cecha strumienia, tzn. brak pamięci jest w nim zachowana. Jeśli obierzemy na osi czasu t w arbitralny sposób punkt t_0 , wówczas funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_{t_0}(t)$ zmiennej losowej T nie zależy od tego, co zdarzyło się przed oraz w momencie t_0 , tzn. nie jest ważne czy inne zdarzenia miały miejsce wcześniej czy też nie.

2.3 Strumień Palmy (o ograniczonej pamięci)

Strumień o ograniczonej pamięci jest inną formą uogólnienia strumienia prostego. Rozważmy strumień zwykłych jednorodnych zdarzeń przedstawiony na rysunku 3.4.



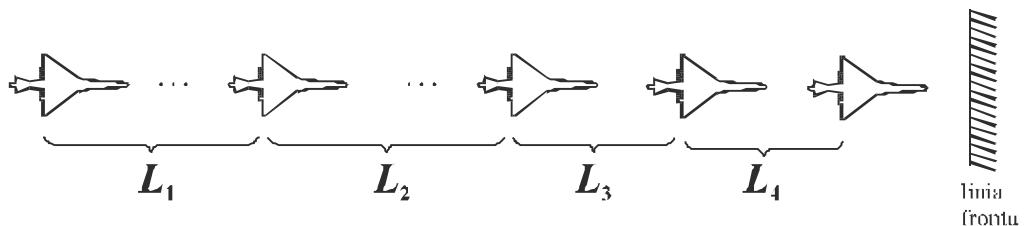
Rys. 2.4.

Strumień ten jest nazywany strumieniem o ograniczonej pamięci (lub strumieniem Palmy), jeśli przedziały czasu T_1, T_2, \dots , pomiędzy dwoma następującymi po sobie zdarzeniami są zmiennymi losowymi niezależnymi.

Strumień prosty jest przypadkiem szczególnym strumienia Palmy, gdyż w strumieniu tym przedziały T_1, T_2, \dots , są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie wykładniczym. Niestacjonarny strumień Poissona nie jest strumieniem Palmy. Istotnie, jeżeli rozpatrzymy dwa przedziały T_k i T_{k+1} to długości tych przedziałów są zależne od siebie (początek przedziału T_{k+1} zależy od końca przedziału T_k).

Przykład 2.1.

Strumień Palmy. Grupa samolotów porusza się w „kolumnie” z prędkością v . Każdy samolot za wyjątkiem szefa grupy musi zachować pewien dystans L w stosunku do poprzedzającego go samolotu. Biorąc pod uwagę błąd pomiaru radiotelemetrycznego dystans ten będzie obarczony pewnym błędem. Momenty pokonania przez samoloty pewnej linii tworzą strumień Palmy, gdyż zmienne losowe $T_1 = \frac{L_1}{v}, T_2 = \frac{L_2}{v}, \dots$ są niezależne od siebie. Zauważmy, że strumień ten nie będzie strumieniem Palmy, jeśli każdy samolot będzie dążył do zachowania stałego dystansu nie od swojego poprzednika lecz od szefa grupy co zaprezentowano na rysunku 3.5.



Rys. 2.5.

Strumienie Palmy są bardzo często obserwowane na wyjściu systemów kolejkowych. W niektórych systemach strumień przybywających zgłoszeń jest dzielony przez system na dwie części: strumień zdarzeń obsłużonych i strumień zdarzeń nie obsłużonych, tzn. takich, które otrzymały odmowę obsługi.

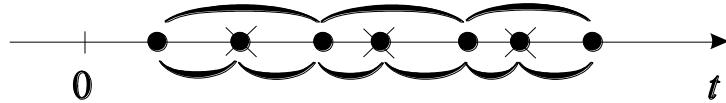
Twierdzenie 2.1 Palmy (podstawowe twierdzenie teorii strumieni wyjściowych).

Załóżmy, że system kolejkowy jest zasilany przez strumień typu Palmy i że przybywające do systemu zgłoszenia w momencie, gdy system ten jest całkowicie zajęty otrzymują odmowę obsługi. Jeśli czas obsługi podlega

rozkładowi wykładniczemu, strumień zgłoszeń otrzymujących odmowę jest również strumieniem Palmy.

W szczególności, jeżeli strumień wejściowy jest prosty, strumień zgłoszeń nieobsłużonych nie jest prosty. Interesującym przykładem strumienia o ograniczonej pamięci jest strumień Erlanga otrzymany przez „blokowanie” zgłoszeń występujących w strumieniu prostym.

Rozważmy strumień prosty i wybierzmy z niego co drugi punkt (na rysunku 2.6 punkty odrzucone oznaczamy przez x).



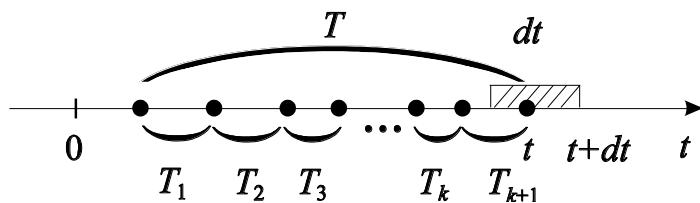
Rys. 2.6.

Pozostałe punkty tworzą strumień Erlanga pierwszego rzędu E_1 . Strumień ten jest strumieniem Palmy, ponieważ z niezależnością przedziałów czasu pomiędzy zdarzeniami wynika niezależność wielkości T_1, T_2, \dots , które są następującymi po sobie przedziałami strumienia początkowego. Strumień Erlanga drugiego rzędu E_2 otrzymamy ze strumienia prostego zachowując co trzeci punkt itd.

W ogólności strumień Erlanga k -tego rzędu E_k nazywamy strumień otrzymany ze strumienia prostego przez zachowanie jednego punktu z $k+1$ punktów i pominiecie pozostałych.

Znajdziemy funkcję rozkładu przedziału czasu T pomiędzy dwoma sąsiadującymi zdarzeniami w strumieniu Erlanga rzędu k przedstawionego na rysunku 3-7.

Rozważmy na osi czasu t strumień prosty o interwałach T_1, T_2, \dots



Rys. 2.7.

Wielkość T jest sumą $k+1$ niezależnych zmiennych przypadkowych T_i , $i=1,2,\dots,k+1$

$$T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i , \quad (2-7)$$

z których każda podlega temu samemu rozkładowi wykładniczemu o funkcji gęstości

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad , \quad t > 0 .$$

Oznaczmy przez $f_k(t)$ funkcję gęstości rozkładu zmiennej T dla strumienia E_k . Prawdopodobieństwo, że zmienna ta znajdzie się w przedziale $[t, t+dt]$ jest równe $f_k(t) dt$. Oznacza to, że ostatni punkt przedziału T musi się znaleźć w przedziale elementarnym $(t, t+dt)$, natomiast k punktów poprzednich strumienia prostego w przedziale $(0, t)$.

Prawdopodobieństwo pierwszego zdarzenia jest równe λdt , a drugiego zgodnie z ogólną formułą

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Mnożąc te prawdopodobieństwa przez siebie otrzymamy

$$f_k(t) dt = \frac{\lambda (\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dt ,$$

stąd

$$f_k(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad , \quad t > 0 \quad (2-8)$$

tzn. otrzymujemy funkcję gęstości rozkładu Erlanga rzędu k .

Dla $k = 0$ otrzymujemy rozkład wykładniczy

$$f_0(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad , \quad t > 0 .$$

Dla rozkładu Erlanga E_k wyliczamy wartość średnią m_k oraz wariancję D_k .

Zgodnie z twierdzeniem o dodawaniu wartości średnich otrzymujemy

$$m_k = \sum_{i=1}^{k+1} m_i = (k+1)m_0 ,$$

gdzie $m_0 = 1/\lambda$ jest wartością średnią przedziału czasu pomiędzy dwoma zdarzeniami w strumieniu prostym.

Otrzymamy wówczas

$$m_k = \frac{k+1}{\lambda} \quad (2-9)$$

Wykorzystując twierdzenie o dodawaniu wariancji otrzymujemy

$$D_k = \frac{k+1}{\lambda^2} , \quad \sigma_k = \frac{\sqrt{k+1}}{\lambda} \quad (2-10)$$

Gęstość Λ_k strumienia E_k jest odwrotnością m_k , to znaczy

$$\Lambda_k = \frac{\lambda}{k+1} \quad (2-11)$$

Aby wykazać pewne interesujące własności strumienia Erlanga, dokonamy unormowania wielkości T w ten sposób, aby jej średnia wartość a w konsekwencji gęstość strumienia pozostała stała.

W tym celu dokonujemy zmiany skali czasu rozpatrując w miejscie T wielkość

$$\tilde{T} = \frac{T}{k+1} \quad (2-12)$$

Strumień taki nosi nazwę unormowanego strumienia Erlanga rzędu k .

Funkcja gęstości rozkładu dla zmiennej \tilde{T} ma postać

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{\Lambda_k (\Lambda_k t)^k}{k!} e^{-\Lambda_k t}, \quad t > 0$$

gdzie $\Lambda_k = \lambda(k+1)$

Ostatecznie

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{\lambda(k+1)}{k!} [\lambda(k+1)t]^k e^{-\lambda(k+1)t}, \quad t > 0 \quad (2-13)$$

Wartość średnia zmiennej \tilde{T} nie zależy od k i ma postać

$$\tilde{m}_k = m_0 = \frac{1}{\lambda} \quad (2-14)$$

gdzie λ dla dowolnego k jest gęstością początkowego prostego strumienia zgłoszeń.

Wariancja zmiennej \tilde{T} ma postać,

$$\tilde{D}_k = \frac{D_k}{(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2(k+1)} \quad (2-15)$$

i maleje, gdy k rośnie.

Dochodzimy do następującej konkluzji. Gdy k rośnie do nieskończoności, strumień unormowany Erlanga przechodzi w strumień regularny o stałych odstępach równych $1/\lambda$.

Własność strumienia Erlanga jest bardzo wygodna do zastosowań praktycznych, ponieważ pozwala w miarę potrzeb poszukiwać parametru k odpowiadającego rzeczywistemu strumieniowi zdarzeń. Zakładając na przykład, że strumień rzeczywisty nie posiada pamięci przyjmujemy $k = 0$ lub, że jest regularny $k = \infty$. Tak więc rząd strumienia Erlanga może być uznany za miarę pamięci strumienia zgłoszeń.

Często w zastosowaniach praktycznych, aby zastąpić rzeczywisty strumień zgłoszeń posiadający pamięć, posługujemy się unormowanym strumieniem Erlanga o przybliżonej wartości średniej oraz wariancji.

Przykład 2. Błąd! Nieznany argument przełącznika..

W wyniku analizy statystycznej długości czasu T pomiędzy dwoma sąsiadującymi ze sobą zgłoszeniami otrzymano następującą wartość średnią oraz wariancję

$$m_t=2[\text{min}], \quad D_t=0.8 [\text{min}^2].$$

Należy zastąpić ten strumień przez unormowany strumień Erlanga posiadający takie same charakterystyki jak strumień wyjściowy.

Dokonajmy obliczeń

$$\lambda = \frac{1}{m_t} = 0,5, \quad \tilde{D}_k = \frac{D_k}{(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2(k+1)},$$

$$(k+1) \approx \frac{1}{D_k \lambda^2} = \frac{1}{0,8 \cdot 0,25} = \frac{1}{0,2} = 5,$$

$$k = 4.$$

Tak więc można aproksymować ten strumień przez unormowany strumień Erlanga 4-tego rzędu.

3. MATEMATYCZNY OPIS SYSTEMÓW KOLEJKOWYCH

Jak wspominano w rozdziale 2 w każdym systemie kolejkowym można na ogólny wyróżnić trzy zasadnicze elementy: proces wejścia, poczekalnię i obsługę.

Kolejne obiekty zgłaszały się do systemu obsługi w losowych momentach czasu i dokładna specyfikacja modelu wymaga opisu procesu wejścia. Najczęściej przyjmuje się, że odstępy między zgłoszeniami kolejnych obiektów są zmiennymi losowymi niezależnymi, o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa. Szczególną rolę w teorii kolejek odgrywa proces Poissona. Zgodnie z tym rozkładem prawdopodobieństwo pojawiienia się k zgłoszeń w przedziale czasu t określa się według relacji

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (3-1)$$

gdzie λ jest parametrem strumienia zgłoszeń równym średniej liczbie zgłoszeń nadchodzących do systemu w ciągu jednostki czasu. Dla tego procesu odstępy czasu między kolejnymi zgłoszeniami mają rozkład wykładniczy o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3-2)$$

Zazwyczaj zakłada się, że czasy obsługi poszczególnych zgłoszeń są wzajemnie niezależne, a także nie zależą od procesu wejścia i aktualnej długości kolejki w poczekalni.

Po sprecyzowaniu matematycznego modelu systemu kolejkowego można szukać odpowiedzi na różne pytania, które interesują praktyka. Pytania te mogą dotyczyć stabilności systemu; czy z upływem czasu ustali się pewien graniczny rozkład prawdopodobieństwa możliwych stanów systemu? Najczęściej stan systemu utożsamiamy z liczbą zgłoszeń przebywających w nim w dowolnym momencie. W przypadku stabilności systemu kolejkowego (spełnienia warunków ergodiczności) zadawałamy się na ogół znalezieniem granicznego rozkładu prawdopodobieństw stanów systemu. Jednakże, w niektórych przypadkach potrzebna jest znajomość rozkładu prawdopodobieństw stanów systemu w dowolnej chwili t , tzn. przebiegów przejściowych prawdopodobieństw. Rozkład taki zależy oczywiście od warunków początkowych ustalonych zazwyczaj w formie rozkładu prawdopodobieństwa w chwili $t = 0$.

Inne pytania mogą dotyczyć:

- strat czasu zgłoszeń oczekujących na obsługę,
- liczby nieobsłużonych jednostek, jeżeli zakładamy ograniczoną pojemność poczekalni lub dopuszczać możliwość rezygnacji z obsługi,
- obciążeń poszczególnych kanałów obsługi,
- rozkładu długości interwałów bezczynności kanałów obsługi lub ich nieprzerwanej pracy.

Odpowiedzi na tego rodzaju zapytania pozwalają ocenić efektywność pracy systemu kolejkowego.

Prawdopodobieństwo pojawienia się jednego zgłoszenia w przedziale czasu o długości Δt jest równe

$$\lambda \Delta t + 0(\Delta t)$$

gdzie $0(\Delta t)$ jest nieskończenie małą wyższego rzędu w odniesieniu do Δt .

Prawdopodobieństwo to nie zależy od położenia tego odcinka na osi czasu, ani też od tego, kiedy występuły zgłoszenia w przedziale poprzedzającym t . Ta własność jest charakterystyczna dla rozkładu wykładniczego. Żaden inny rozkład odstępów czasu między zgłoszeniami nie zapewnia niezależności zgłoszeń w przeszłości od dotychczasowego przebiegu procesu wejścia.

Rozkład czasów obsługi przyjmuje się także wykładniczy, o parametrze μ i dystrybuancie:

$$F_0(t) = 1 - e^{-\mu t} \quad (3-3)$$

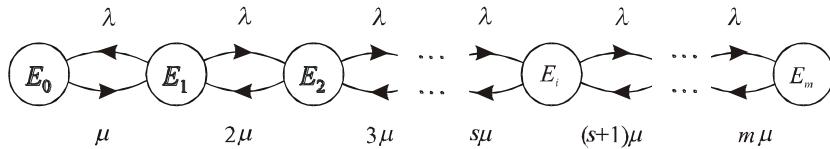
Wielkość λ jest średnim czasem obsługi jednego zgłoszenia.

Gdy przybywające do systemu zgłoszenie zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte przechodzi do poczekalni ustawiając się w kolejce zgłoszeń oczekujących na obsługę. Do sprecyzowania modelu potrzebna jest wtedy znajomość regulaminu określającego kolejność obsługi oczekujących zgłoszeń i warunków ewentualnej rezygnacji z obsługi. Najczęściej rozpatrywane są systemy, w których kolejność obsługi jest zgodna z kolejnością przybywania zgłoszeń - dyscyplina FIFO. Uwzględniając koszty inwestycji (zwiększenia ilości kanałów obsługi), koszty operacji obsługi zgłoszenia oraz straty wynikające z oczekiwania lub rezygnacji z obsługi można przy użyciu modeli systemów kolejkowych rozwiązywać problemy ekonomicznej optymalizacji systemu. Problemy te sprowadzają się zasadniczo do racjonalnego projektowania nowych procesów produkcyjnych, transportowych itp. lub ulepszania struktury i organizacji już istniejących. W rozdziale tym przedstawimy najbardziej efektywne metody analizy systemów kolejkowych oraz zaprezentujemy ich podstawowe modele.

Rozpatrzmy system kolejkowy ze stratami typu $M/M/m/-/m$. Stochastyczny proces zmian stanów zachodzący w tym systemie opiszemy przy pomocy równań różniczkowych zwyczajnych.

W równaniach tych nieznanymi wielkościami będą prawdopodobieństwa tego, że w momencie t w systemie obsługi znajduje się dokładnie s zgłoszeń (tzn. jest zajętych dokładnie s kanałów obsługujących), przy czym $s=0, 1, 2, \dots, m$, gdzie m jest ilością kanałów obsługi w systemie. System ten może znajdować się w stanach $E_0, E_1, E_2, \dots, E_s, \dots, E_m$. Stan $E_s, s=0, \dots, m$ oznacza, że w systemie znajduje się i klientów.

Graf stanów takiego systemu przedstawiono na rysunku 3.1.



Rys. 3.1. Graf stanu dla systemu kolejkowego $M/M/m/-m$

Zgłoszenie pojawia się w systemie w momencie, kiedy wszystkie kanały obsługi są zajęte, otrzymuje odmowę obsługi i opuszcza system. Tak więc w systemie tym nie ma warunków na utworzenie się kolejki zgłoszeń.

Obecnie przedstawiony zostanie sposób układania równań opisujących dynamikę rozważanego systemu, oparty na teorii prawdopodobieństwa. Na początek ułożone zostaną równania różniczkowe dla prawdopodobieństwa $p_0(t)$ tego, że w momencie t wszystkie kanały obsługi są wolne. Rozważa się moment t oraz zdarzenie złożone: w momencie $t+\tau$, gdzie τ jest dowolnie małym odcinkiem czasu, wszystkie urządzenia obsługujące są wolne. Oznaczając to złożone zdarzenie przez A można wyrazić go jako sumę iloczynów prostych zdarzeń.

$$A=B \cdot C + D \cdot E \quad (3-4)$$

Gdzie:

- B – zdarzenie polegające na tym, że w momencie t wszystkie kanały obsługi są wolne,
- C – zdarzenie polegające na tym, że w ciągu czasu τ ani jedno zgłoszenie nie przybyło do systemu,
- D – zdarzenie polegające na tym, że w momencie t zajęty był jeden kanał obsługi
- E – zdarzenie polegające na tym, że w ciągu czasu τ jeden zajęty kanał obsługi został zwolniony.

Biorąc pod uwagę wykładnicze funkcje rozkładu strumienia wejściowego oraz czasu obsługi można napisać

$$\begin{aligned} p(C) &\equiv e^{-\lambda t} - \lambda \tau \\ p(E) &= 1 - e^{-\mu \tau} \equiv 1 - 1 + \mu \tau = \mu \tau \end{aligned} \quad (3-5)$$

Prawdopodobieństwo zaistnienia zdarzeń A, B i D oznaczamy przez

$$\begin{aligned}
 p(A) &= p_0(t + \tau) \\
 p(B) &= p_0(t) \\
 p(D) &= p_1(t)
 \end{aligned} \tag{3-6}$$

Wstawiając (D.31) i (D.32) do (D.30) otrzymuje zależność

$$p_0(t + \tau) = p_0(t)(1 - \lambda\tau) + p_1(t)\mu\tau$$

Stąd po podzieleniu stronami przez τ mamy

$$\frac{p_0(t + \tau) - p_0(t)}{\tau} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Przechodząc do granicy przy $\tau \rightarrow 0$ uzyskuje się ostatecznie

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \tag{3-7}$$

otrzymując w ten sposób opis dynamiki systemów obsługi, wyrażony poprzez równanie różniczkowe wiążące ze sobą prawdopodobieństwa wyróżnionych stanów elementarnych.

W analogiczny sposób układają się równania różniczkowe dla pozostałych prawdopodobieństw. W ogólnym przypadku zdarzenie złożone F polegające na tym, że w momencie $t + \tau$ zajętych jest dokładnie s urządzeń obsługujących, składa się z następujących prostych zdarzeń:

$$F = K \cdot M + N \cdot L + P \cdot R \tag{3-8}$$

gdzie:

K – zdarzenie polegające na tym, że w momencie t zajętych jest dokładnie s kanałów obsługi

M – zdarzenie polegające na tym, że w ciągu przedziału czasu τ nie przybyło do systemu żadne zgłoszenie ani też nie został zwolniony żaden z s kanałów obsługi

N – zdarzenie polegające na tym, że w chwili t zajętych było $(s-1)$ kanałów obsługi

L – zdarzenie polegające na tym, że w przedziale czasu t przybyło do systemu dokładnie jedno zgłoszenie

P – zdarzenie polegające na tym, że w momencie t zajętych było $(s+1)$ kanałów obsługi

R – zdarzenie polegające na tym, że w ciągu czasu τ zwolnił się jeden kanał obsługi

Analogicznie do poprzednich rozważań można napisać

$$\begin{aligned}
 p(F) &= p_s(t + \tau) \\
 p(K) &= p_s(t) \\
 p(M) &= e^{-\lambda\tau} (e^{-\mu\tau})^s = e^{-(\lambda+s\mu)\tau} \cong 1 - (\lambda + s\mu)\tau \\
 p(N) &= p_{s-1}(t) \\
 p(L) &= 1 - e^{-\lambda\tau} \cong \lambda\tau \\
 p(P) &= p_{s+1}(t) \\
 p(R) &= 1 - (e^{-\mu\tau})^{s+1} \cong (s+1)\mu\tau
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

Wstawiając (3-9) do (3-8) otrzymuje się zależność

$$\begin{aligned}
 p_s(t + \tau) &= p_s(t)[1 - (\lambda + s\mu)\tau] + p_{s-1}(t)\lambda\tau + p_{s+1}(t)(s+1)\mu\tau \\
 \frac{p_s(t + \tau) - p_s(t)}{\tau} &= -p_s(t)(\lambda + s\mu) + p_{s-1}(t)\lambda + p_{s+1}(t)(s+1)\mu
 \end{aligned} \tag{3-10}$$

$1 \leq s \leq m-1$

Skąd pochodząc z τ do granicy ($\tau \rightarrow 0$) można otrzymać

$$\frac{dp_s(t)}{dt} = \lambda p_{s-1}(t) - (\lambda + s\mu)p_s(t) + \mu(s+1)p_{s+1}(t) \tag{3-11}$$

$1 \leq s \leq m-1$

Prawdopodobieństwo $p_m(t)$, gdy zajęte są wszystkie kanały obsługi oblicza się rozważając następujące zdarzenia. Zdarzenie złożone T polegające na tym, że w momencie czasu $t + \tau$ zajętych jest dokładnie m kanałów obsługi, składa się z następujących prostych zdarzeń:

$$T = S \cdot U + V \cdot W \tag{3-12}$$

gdzie:

S – zdarzenie polegające na tym, że w momencie t znajdowało się w systemie m zgłoszeń

U – zdarzenie polegające na tym, że w ciągu przedziału czasu τ nie został zwolniony żaden z m kanałów obsługi

V – zdarzenie polegające na tym, że w chwili t w systemie znajdowało się $(m-1)$ zgłoszeń

W – zdarzenie polegające na tym, że w przedziale czasu τ przybyło do systemu dokładnie jedno zgłoszenie

Odpowiednio prawdopodobieństwa mają postać

$$\begin{aligned} p(T) &= p_m(t + \tau) \\ p(S) &= p_m(t) \\ p(U) &= (e^{-\mu\tau})^m \cong 1 - m\mu\tau \\ p(V) &= p_{m-1}(t) \\ p(W) &= 1 - e^{-\lambda\tau} \cong \lambda\tau \end{aligned} \quad (3-13)$$

Na podstawie zależności (3-12) i (3-13) można napisać

$$p_m(t + \tau) = p_m(t)(1 - m\mu\tau) + \lambda\tau p_{m-1}(t) \quad (3-14)$$

Stąd po obliczeniu granicy, gdy $\tau \rightarrow 0$ otrzymuje się

$$\frac{dp_m(t)}{dt} = \lambda p_{m-1}(t) - m\mu p_m(t) \quad (3-15)$$

Układ równań typu (3-7), (3-11) i (-15) stanowi tzw. system równań różniczkowych Erlanga (Chapmana-Kołmogorowa)

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\ &\vdots = \vdots \\ \frac{dp_s(t)}{dt} &= \lambda p_{s-1}(t) - (\lambda + s\mu)p_s(t) + (s+1)\mu p_{s+1}(t) \\ &\quad 1 \leq s \leq m-1 \\ &\vdots = \vdots \\ \frac{dp_{m-1}(t)}{dt} &= \lambda p_{m-2}(t) + [\lambda + (m-1)\mu]p_{m-1}(t) + m\mu p_m(t) \\ \frac{dp_m(t)}{dt} &= \lambda p_{m-1}(t) - m\mu p_m(t) \end{aligned} \quad (3-16)$$

Całkując układ równań (3-16), otrzymujemy szukane prawdopodobieństwa jako funkcje czasu. Należy mieć na uwadze fakt, że przy całkowaniu równań (3-16) jest spełniony warunek normalizujący

$$\sum_{s=0}^m p_s(t) = 1 \quad (3-17)$$

Warunki początkowe są określone przez podanie położenia początkowego systemu. Na przykład jeżeli w momencie początkowym $t=0$ system był w położeniu E_1 , to należy przyjąć warunki początkowe

$$p_1(0) = 1 \text{ i } p_0(0) = p_2(0) = p_3(0) = \dots = p_m(0) = 0 \quad (3-18)$$

Przyjrzyjmy się strukturze równań (3-16) w celu zwrócenia uwagi na pewną ogólną prawidłowość. Równania te można otrzymać bezpośrednio z grafu stanów systemu przedstawionego na rysunku 3.1 zgodnie z następującą regułą mnemotechniczną. **Po lewej stronie każdego równania znajduje się pochodna prawdopodobieństwa danego stanu, natomiast po prawej stronie występuje tyle członów, ile krawędzi grafu jest związanych z danym położeniem.** Jeżeli krawędź grafu wychodzi z danego położenia, odpowiadający jej człon posiada znak minus, jeżeli wchodzi do tego położenia – znak plus. Każdy człon równa się gęstości prawdopodobieństwa przejścia, odpowiadającej danej krawędzi, pomnożonej przez prawdopodobieństwo tego stanu, z którego krawędź ta wychodzi.

Podana reguła mnemotechniczna, układania równań różniczkowych dla prawdopodobieństw stanów, jest regułą słuszną dla dowolnego ciągu łańcucha Markowa. Upraszczająca ona zdecydowanie procedurę układania równań i będzie stosowana w dalszych rozważaniach. Za pomocą tej reguły można w sposób mechaniczny zapisać równania różniczkowe dla prawdopodobieństw stanów na podstawie grafu stanów systemu.

4. PODSTAWOWE MODELE MARKOWSKICH SYSTEMÓW KOLEJKOWYCH

Przedstawimy poniżej podstawowe modele systemów kolejkowych oraz wyprowadzimy najważniejsze parametry charakteryzujące funkcjonowanie tych systemów. Zależności te zostały umieszczone w tabelach 4-3 do 4-7. Mogą one być wykorzystane przy formułowaniu zadań optymalizacji systemów kolejkowych.

4.1. Systemy ze stratami

4.1.1. Model systemu kolejkowego ze stratami $M/M/m/-m$

W systemach kolejkowych ze stratami (zabronioną kolejką) nowe zgłoszenia są obsługiwane tylko w tym przypadku, gdy w momencie ich pojawienia się w systemie jest wolny co najmniej jeden kanał obsługi. W przeciwnym przypadku zgłoszenie opuszcza system bez uzyskania obsługi, co stanowi ewidentną strategię dla systemu.

W systemie ze stratami zachodzi jednorodny proces markowski, dlatego też dynamika takiego systemu może być opisana za pomocą układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Zauważamy, że system ten może znajdować się w jednym z następujących stanów:

E_0 - wszystkie kanały obsługi wolne (brak zgłoszeń do obsługi),

E_1 - jeden kanał obsługi zajęty (jedno zgłoszenie w systemie),

E_2 - dwa kanały obsługi zajęte (dwa zgłoszenia w systemie),

:

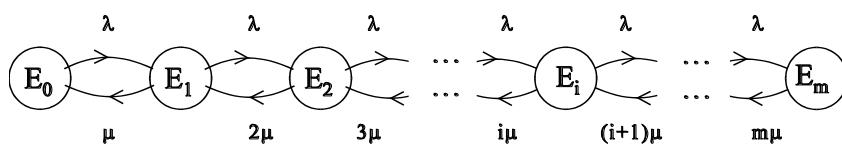
E_i - i kanałów zajętych (i zgłoszeń w systemie),

:

E_m - m kanałów zajętych (m zgłoszeń w systemie, brak warunków na przyjęcie następnego zgłoszenia do systemu - blokada systemu).

Zakłada się, że wszystkie kanały obsługi są niezależne statystycznie i charakteryzują się identycznym parametrem obsługi μ .

Uproszczony graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rysunku 4-1.



Rys. 4.1. Graf stanów dla systemu kolejkowego $M/M/m/-m$

Stosując regułę mnemotechniczną, zaprezentowaną w przykładzie 4-1, otrzymujemy układ równań Chapmana-Kołmogorowa opisujący dynamikę tego systemu

$$\begin{aligned}
 p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
 p'_1(t) &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\
 &\vdots \\
 p'_i(t) &= \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \\
 &\vdots \\
 p'_{m-1}(t) &= \lambda p_{m-2}(t) - [\lambda + (m-1)\mu]p_{m-1}(t) + m\mu p_m(t), \\
 p'_m(t) &= \lambda p_{m-1}(t) - m\mu p_m(t).
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

Układ równań różniczkowych (4-1) jest słuszny [65] zarówno dla stałych jak i zmiennych w czasie parametrów λ i μ .

Zakładając, że w momencie początkowym $t = 0$ wszystkie kanały obsługi są niezajęte (rozruch systemu), otrzymuje się następujące warunki początkowe:

$$p_0(0) = 1, p_i(0) = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, m. \tag{4-2}$$

Należy mieć na uwadze fakt, że przy całkowaniu równań (4-1) jest spełniony warunek

$$\sum_{s=0}^m p_s(t) = 1. \tag{4-3}$$

Układ równań (4-1) nosi nazwę układu równań Erlanga i po jego całkowaniu otrzymujemy prawdopodobieństwa $p_s(t)$, $0 \leq s \leq m$, które charakteryzują średnie obciążenie systemu. W szczególności prawdopodobieństwo $p_m(t)$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia, że nowo przybyłe zgłoszenie zastaje wszystkie kanały obsługi zajęte i otrzymuje odmowę obsługi

$$p_{odm} = p_m(t). \tag{4-4}$$

Do oceny funkcjonowania systemu obsługi wprowadza się wielkość $q(t)$, zwaną względną zdolnością obsługi systemu

$$q(t) = 1 - p_m(t). \tag{4-5}$$

Dla ustalonego czasu t wielkość $q(t)$ jest to iloraz średniej liczby zgłoszeń obsłużonych w jednostce czasu i średniej liczby zgłoszeń przybyłych do systemu.

Wprowadza się również wielkość $A(t)$ zwaną bezwzględną zdolnością obsługi systemu

$$A(t) = \lambda q(t) = \lambda [1 - p_{odm}(t)] \quad (4-6)$$

W większości praktycznych zastosowań wystarcza znajomość charakterystyk obsługi w stanie ustalonym. W celu znalezienia granicznego rozwiązania systemu równań (4-1) przechodzi się w tych równaniach do granicy dla $t \rightarrow \infty$. Można udowodnić [43], że dla każdego systemu kolejkowego ze stratami, przy $t \rightarrow \infty$, wszystkie prawdopodobieństwa $p_s(t)$ dążą do stałych wartości, tzn. że osiągany jest zawsze stan ustalony w sensie prawdopodobieństw stanów, czyli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_s(t) = p_s, \quad s = 0, 1, \dots, m \quad (4-7)$$

natomast wszystkie ich pochodne dążą do zera

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_s'(t) = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4-8)$$

Korzystając z zależności (4-7) i (4-8) otrzymuje się następujący układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ 0 &= \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2, \\ &\vdots \\ 0 &= \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu)p_i + (i+1)\mu p_{i+1}, \\ 1 \leq i &\leq m-1 \\ &\vdots \\ 0 &= \lambda p_{m-2} - [\lambda + (m-1)\mu]p_{m-1} + m\mu p_m, \\ 0 &= \lambda p_{m-1} - m\mu p_m \end{aligned} \quad (4-9)$$

oraz warunek normalizujący

$$\sum_{s=0}^m p_s = 1 \quad (4-10)$$

System równań algebraicznych (4-9) jest łatwy do rozwiązyania względem niewiadomych p_0, p_1, \dots, p_m . Z pierwszego równania otrzymujemy

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0 \quad (4-11)$$

gdzie $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ nosi nazwę względnej intensywności obsługi.

Z drugiego równania systemu (4-9) po uwzględnieniu zależności (4-11) otrzymujemy

$$p_2 = \frac{\lambda^2 p_0}{2\mu^2} = \frac{1}{2!} \rho^2 p_0 . \quad (4-12)$$

Postępując analogicznie z pozostałymi równaniami dojdziemy do formuły ogólnej

$$p_i = \frac{1}{i!} \rho^i p_0, i = 1, \dots, m \quad (4-13)$$

Aby wyliczyć p_0 należy wykorzystać zależność (4-10)

$$\sum_{s=0}^m p_s = p_0 \sum_{s=0}^m \frac{\rho^s}{s!} = 1 ,$$

stąd

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{s=0}^m \frac{\rho^s}{s!}} , \quad 0 \leq s \leq m . \quad (4-14)$$

Wstawiając zależność (4-14) do (4-13) mamy

$$p_i = \frac{\frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!}} , \quad 0 \leq i \leq m \quad (4-15)$$

Podstawiając we wzorze (4-15) $i = m$ otrzymujemy wyrażenie na prawdopodobieństwo odmowy obsługi

$$p_{odm} = p_m = \frac{\rho^m}{\sum_{s=0}^m \frac{\rho^s}{s!}} \quad (4-16)$$

a także

$$q = 1 - p_m \quad (4-17)$$

$$A = \lambda q = \lambda (1 - p_m) . \quad (4-18)$$

Oznaczmy przez \bar{n} średnią ilość zgłoszeń przebywających w systemie. W tym przypadku wielkość ta jest równa średniej ilości zajętych kanałów obsługi \bar{m}_0

$$\bar{n} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \dots + m \cdot p_m = \sum_{s=1}^m s p_s = \frac{\sum_{s=1}^m \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!}}{\sum_{s=0}^m \frac{\rho^s}{s!}} . \quad (4-19)$$

Można zauważyć, że

$$\bar{n} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda(1 - p_m)}{\mu} = \rho(1 - p_m) \quad (4-20)$$

ponieważ wielkość A jest średnią liczbą zgłoszeń obsłużonych w jednostce czasu.

Przykład 4-1

Wielokanałowy system kolejkowy przedstawia centralę telefoniczną wyposażoną w trzy linie telefoniczne ($m = 3$). Zgłoszenie (wywołanie abonenta) pojawiające się w momencie kiedy linie są zajęte otrzymuje odmowę. Intensywność strumienia zgłoszeń wynosi $\lambda = 0,8$ wywołania na minutę, natomiast średnia długość rozmowy wynosi $\bar{t}_0 = 1,5$ min. Wszystkie strumienie zdarzeń są proste. Określić graniczne wartości prawdopodobieństw określonych stanów systemu przy $t \rightarrow \infty$, bezwzględną oraz wzglną zdolność obsługi systemu, prawdopodobieństwo odmowy oraz średnią ilość zajętych kanałów obsługi \bar{m}_0 .

Parametry μ i ρ przyjmują wartości

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_0} = \frac{1}{1,5} = 0,667 ,$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,8}{0,667} = 1,2 .$$

Zgodnie z formułami (4-15), (4-17) i (4-18) otrzymujemy

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0 = 1,2 p_0,$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0,72 p_0,$$

$$p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 = 0,288 p_0,$$

$$p_0 = \frac{1}{1+1,2+0,72+0,288} = 0,312,$$

a więc odpowiednio

$$p_1 = 1,2 \cdot 0,312 = 0,374,$$

$$p_2 = 0,72 \cdot 0,312 = 0,224,$$

$$p_3 = 0,288 \cdot 0,312 = 0,09.$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi wynosi $p_{i=m} = p_m = 0,09$.

Względna i bezwzględna zdolność obsługi systemu wynoszą

$$q = 1 - p_3 = 0,91,$$

$$A = \lambda q = 0,8 \cdot 0,91 = 0,728 ,$$

a średnia liczba zajętych kanałów obsługi przyjmuje wartość

$$\bar{m}_0 = \frac{A}{\mu} = \frac{0,728}{0,667} \approx 1,1 .$$

Oznacza to, że w stanie ustalonym średnio będzie zajęty jeden kanał obsługi. Uzyskuje się w ten sposób wysoki stopień efektywności obsługi, gdyż około 91% wszystkich pojawiających się zgłoszeń będzie obsłużonych.

4.1.2. Optymalizacja systemu kolejkowego ze stratami M/M/m/-m

Przedmiotem rozważań jest parking, na który przybywają samochody zgodnie z procesem Poissona o intensywności λ . Obsługa polega na przydzieleniu miejsca na parkingu. Czasy postoju samochodów na parkingu nie zależą od rodzaju samochodu i podlegają rozkładowi wykładniczemu

o wartości średniej $\frac{1}{\mu}$. Parking posiada m miejsc do parkowania

samochodów i na zewnątrz parkingu nie ma warunków na ustawnienie się samochodów w kolejce na zwolnienie miejsca na parkingu (obok parkingu ustawione są znaki zakazu zatrzymywania). Samochody, które nie znajdują wolnych miejsc do parkowania muszą opuścić parking. Należy określić optymalną liczbę miejsc na parkingu, która maksymalizuje średni zysk odniesiony do jednostki czasu, biorąc pod uwagę

- średnią cenę r parkowania jednego samochodu w jednostce czasu,
- koszt c amortyzacji i obsługi jednego miejsca parkingowego w jednostce czasu.

Należy zaproponować odpowiedni model systemu kolejkowego, adekwatny do opisanego rzeczywistego problemu i wyznaczyć podstawowe parametry charakteryzujące system, a także określić funkcję celu $f(m)$ podlegającą optymalizacji.

Następnie należy rozwiązać problem, dla następujących danych liczbowych: $\lambda = 60$ przybyć/godz., $\mu = 2$ odjazdy/godz., $r = 2$ (jedn. monetarne) j.m./godz., $c = 1$ j.m./godz. tzn. znaleźć optymalną liczbę miejsc na parkingu m_{opt} , która maksymalizuje zysk z posiadanej parkingu i dla tej ilości miejsc określić średnią ilość niezajętych miejsc parkingowych m_{nz} .

Formalizacja matematyczna i rozwiązanie problemu

Analizując sformułowany problem stwierdzamy, że mamy do czynienia z systemem kolejkowym ze stratami $M/M/m/-m$. Miejsce na parkingu odgrywa rolę kanału obsługi. W rozważanym systemie nie ma warunków na powstanie kolejki. W związku z tym, średnia długość kolejki oczekujących pojazdów na zwolnienie miejsca na parkingu $\bar{v} = 0$. Podobnie, średni czas oczekiwania pojazdów w kolejce na zwolnienie miejsca na parkingu $\bar{t}_f = 0$.

Czas przebywania pojazdów na parkingu wynosi

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu},$$

natomiast średnia ilość pojazdów na parkingu jest w tym przypadku równa średniej ilości zajętych miejsc parkingowych i wynosi

$$\bar{n} = \bar{m}_0 = \lambda(1 - p_m)\bar{t}_s = \rho(1 - p_m), \quad (4-21)$$

gdzie $p_m = p_{odm}$ jest prawdopodobieństwem odmowy obsługi, tzn. zdarzenia, że wszystkie miejsca na parkingu są zajęte.

Średni zysk z posiadanej parkingu liczony na jednostkę czasu wynosi:

$$f(m) = r\bar{n} - cm = r\rho(1 - p_m) - cm \quad (4-22)$$

Podstawiając zależności (4-14) i (4-16) do wzoru (4-22) otrzymujemy następujące zagadnienie optymalizacji dyskretnej polegające na znalezieniu m_{opt} , należącego do zbioru liczb całkowitych dodatnich ($m \in C^+$), które maksymalizuje funkcję zysku:

$$f(m) = r\rho \left(1 - \frac{\rho^m}{m! \sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!}} \right) - cm \quad (4-23)$$

gdzie m jest liczbą kanałów obsługi.

Łatwo zauważyc, że w przypadku dużych wartości m , pełny przegląd nie wchodzi w rachubę ze względu na długi czas obliczeń. Wykorzystanie rachunku różniczkowego, ze względu na dyskretny charakter zagadnienia ma ograniczone zastosowanie. Dlatego też, zaproponowana zostanie pewna metoda pozwalająca na zlokalizowanie przedziału, wewnątrz którego znajduje się wartość m_{opt} . W tym celu wyliczymy zależność rekurencyjną pomiędzy prawdopodobieństwami p_{m+1} i p_m , gdzie p_{m+1} jest prawdopodobieństwem odpowiadającym systemowi o ilości kanałów obsługi powiększonej o jeden.

Biorąc pod uwagę zależność (4-16) możemy napisać

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{\rho^m}{m!} = \frac{1}{\frac{m!}{\rho^m} \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{\rho^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\rho^m}{m!} \right)} = \\ &= \frac{1}{\frac{m!}{\rho^m} + \frac{m!}{\rho^{m-1}} + \dots + \frac{m(m-1)}{\rho^2} + \frac{m}{\rho} + 1} \end{aligned} \quad (4-24)$$

Dla modelu o powiększonej o jeden liczbie kanałów obsługi mamy:

$$p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{1}{\frac{(m+1)!}{\rho^{m+1}} + \frac{(m+1)!}{\rho^m} + \dots + \frac{(m+1)m}{\rho^2} + \frac{m+1}{\rho} + 1} \quad (4-25)$$

Ponieważ mianownik wyrażenia (4-25) jest większy od mianownika wyrażenia (4-24) dla każdego ρ , więc:

$$p_{m+1} < p_m \quad (4-26)$$

Znajdziemy wzór rekurencyjny wiążący ze sobą prawdopodobieństwa p_{m+1} i p_m

$$p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\rho}{m+1} p_m \frac{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{\rho^k}{k!}} = p_m \frac{\rho}{m+1} \left(\frac{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}}{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}} - \frac{\frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!}}{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!}} \right)$$

(4-27)

Analizując wyrażenie (4-27) można zauważyć, że wartość pierwszego składnika znajdującego się w nawiasie wynosi jeden, natomiast drugi jest równy p_{m+1} . Możemy więc napisać

$$p_{m+1} = p_m \frac{\rho}{m+1} (1 - p_{m+1}).$$

Stąd mamy

$$p_{m+1} \left(1 + \frac{\rho}{m+1} p_m \right) = \frac{\rho}{m+1} p_m$$

i ostatecznie

$$p_{m+1} = \frac{\frac{\rho}{m+1} p_m}{1 + \frac{\rho}{m+1} p_m}. \quad (4-28)$$

W przypadku gdy $m = 0$ prawdopodobieństwo $p_0 = 1$.

W oparciu o zależności (4-24) i (4-27) możemy wyliczyć

$$p_m - p_{m+1} = p_m \left[1 - \frac{\rho}{m+1 + \rho p_m} \right]. \quad (4-29)$$

Można zauważyć, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (p_m - p_{m+1}) = 0.$$

Zgodnie z zależnością (4-26) $p_m - p_{m+1} > 0$ dla każdego m . Dlatego też, zbiór liczb całkowitych $m \geq 0$ takich, że

$$p_m - p_{m+1} \leq \frac{c}{\rho r} \quad (4-30)$$

nie jest pusty. W związku z tym istnieje najmniejsza liczba całkowita $m = m_d$ (ewentualnie $m_d = 0$) spełniająca nierówność (4-30).

Jeśli $m \leq m_d$ wtedy mamy

$$f(m) - f(m-1) = r\rho(p_{m-1} - p_m) - c > r\rho \frac{c}{r\rho} - c = 0$$

co oznacza, że

$$f(m) > f(m-1). \quad (4-31)$$

Z zależności (5-31) wynika, że funkcja $f(m)$ jest funkcją rosnącą dla $m \leq m_d$. Istnieje również największa liczba całkowita $m = m_f$ spełniająca nierówność

$$p_m \leq \frac{c}{\rho r}, \quad (4-32)$$

a ponadto $m_d \leq m_f$, gdyż p_m maleje wraz ze wzrostem m i jest spełniona nierówność

$$f(m+1) - f(m) = r\rho(p_m - p_{m+1}) - c < r\rho p_m - c < 0. \quad (4-33)$$

Z nierówności (4-33) wynika, że

$$f(m+1) \leq f(m), \quad (4-34)$$

co dowodzi, że funkcja $f(m)$ jest funkcją malejącą, gdy $m \geq m_f$.

Analizując nierówności (4-31) i (4-34) można zauważać, że aby znaleźć optymalną ilość kanałów obsługi m_{opt} , która maksymalizuje funkcję celu, należy rozpatrzyć wartości m należące do przedziału

$$m_d \leq m \leq m_f \quad (4-35)$$

tzn. można zlokalizować przedział, wewnątrz którego znajduje się rozwiązanie optymalne i ograniczyć pełny przegląd wartości m do tego przedziału.

Obliczenia liczbowe. Dla danych liczbowych dotyczących przykładu mamy

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 30$$

$$\frac{c}{\rho r} = \frac{1}{60}$$

Poszukujemy najmniejszej liczby całkowitej dodatniej m_d takiej, że

$$p_{m_d} - p_{m_{d+1}} \leq \frac{1}{60}$$

oraz najmniejszej liczby całkowitej m_f spełniającej warunek

$$p_{m_f} \leq \frac{1}{60}$$

Otrzymujemy: $m_d = 32$, $m_f = 40$, $p_m > 1/60$ skąd wynika, że optymalna wartość m_{opt} znajduje się w przedziale $m_{opt} \in [32,40)$.

Widzimy, że

$$f(m) = r\rho(1 - p_m) - cm < 59 - m, \quad m \in [32,40).$$

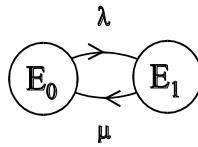
Dokonując pełnego przeglądu wartości m wewnątrz otrzymanego przedziału znajdujemy $m_{opt} = 32$ i odpowiadającą mu wartość funkcji celu $f(32) = 22,22$. Średnia liczba niezajętych miejsc parkingowych przy założeniu, że $m = m_{opt}$ wynosi

$$m_{nz} = m - \bar{n} = m - \rho(1 - p_m) = 32 - 30(1 - 0,096266) = 4,89.$$

Podsumowując uzyskane wyniki można stwierdzić, że rozważany model kolejkowy można z powodzeniem wykorzystać do analizy ekonomicznej rozpatrywanego problemu.

4.1.3. System kolejkowy ze stratami M/M/1/-1

Graf stanów systemu przedstawiono na rysunku 5-2. Jest to szczególny przypadek systemu rozpatrzonego w poprzednim paragrafie przy założeniu, że $m=1$.



Rys. 4.2. Graf stanów dla systemu M/M/1/-1

Równanie różniczkowe opisujące dynamikę tego systemu otrzymamy z układu równań (4-1), podstawiając $m=1$ lub stosując regułę mnemotechniczną bezpośrednio do grafu przedstawionego na rysunku 4-2

$$\begin{aligned}\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t)\end{aligned}\quad (4-36)$$

Dodając stronami oba równania (4-36) otrzymamy

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + \frac{dp_1(t)}{dt} = 0$$

lub

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\frac{dp_1(t)}{dt}.$$

Stąd

$$p_0(t) = -p_1(t) + C_1.$$

Stałą całkowania C_1 znajdujemy uwzględniając warunki początkowe

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = 0.$$

W rezultacie otrzymamy

$$p_0(t) = 1 - p_1(t). \quad (4-37)$$

Podstawiając zależność (4-37) do drugiego równania układu równań (4-36) otrzymujemy

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda - (\lambda + \mu)p_1(t)$$

Rozdzielając zmienne, otrzymamy równanie

$$\frac{dp_1(t)}{\lambda - (\lambda + \mu)p_1(t)} = dt$$

którego rozwiązanie ma postać

$$-\frac{1}{\lambda + \mu} \ln [\lambda - (\lambda + \mu)p_1(t)] = t + C_2$$

Ponieważ dla $t = 0$, prawdopodobieństwo $p_1(t) = 0$, więc

$$C_2 = -\frac{1}{\lambda + \mu} \ln \lambda$$

Podstawiając za C_2 do poprzedniego równania i dokonując przekształceń otrzymamy

$$\ln \left[1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} p_1(t) \right] = -(\lambda + \mu)t$$

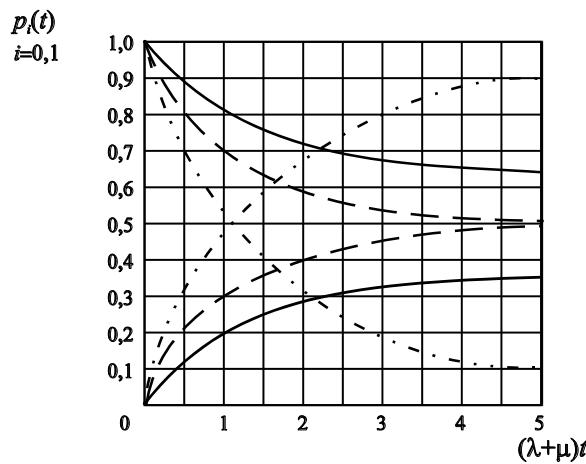
$$e^{-(\lambda + \mu)t} = 1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} p_1(t)$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} [1 - e^{-(\lambda + \mu)t}]$$

Jak widać z otrzymanego równania, prawdopodobieństwo tego, że jedyny kanał obsługi jest zajęty, rośnie z czasem według krzywej wykładniczej ze stałą czasową $\frac{1}{\lambda + \mu}$ od wartości 0 do wartości $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ co jest przedstawione na rysunku 4-3.

Prawdopodobieństwo tego, że jedyny kanał obsługi będzie wolny, określamy w następujący sposób:

$$p_0(t) = 1 - p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right]$$



Rys. 4.3. Wykres funkcji $p_0(t)$ i $p_1(t)$ dla systemu M/M/1 z zabronioną kolejką

Przy wzroście czasu t od 0 do ∞ prawdopodobieństwo $p_0(t)$ maleje wykładniczo od 1 do wartości $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ z taką samą stałą czasową. Na rysunku 4.3 pokazano funkcje $p_0(t)$ i $p_1(t)$. Linie ciągłe odnoszą się do przypadku gdy $\mu > \lambda$ (dla $\mu = 2\lambda$). Linie przerywane obrazują przypadek $\mu = \lambda$. W końcu linia kropka-kreska pokazuje przypadek $\mu \ll \lambda$, a w szczególności $\mu = 0,1 \lambda$.

Jak widzimy, jakość obsługi zależy od współczynnika intensywności obsługi $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Graniczne wartości, do których dążą prawdopodobieństwa $p_0(t)$ i $p_1(t)$ przy $t \rightarrow \infty$, wynoszą

$$q = p_0 = \frac{1}{1 + \rho} \quad (4-38)$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1 + \rho}.$$

Ponieważ w systemie nie może występować kolejka, więc średni czas przebywania zgłoszenia w systemie wynosi $\frac{1}{\mu}$.

Przykład 4-2

Jednokanałowy system kolejkowy ze stratami przedstawia linię telefoniczną. Zgłoszenie (wywołanie abonenta) w momencie, kiedy linia jest zajęta, otrzymuje odmowę. Intensywność strumienia zgłoszeń $\lambda = 0,8$ (wywołania na minutę). Średnia długość rozmowy $t_0 = 1,5$ minuty. Wszystkie strumienie zgłoszeń są proste. Określić graniczne (przy $t \rightarrow \infty$) wartości:

- względnej zdolności obsługi q ,
- bezwzględnej zdolności obsługi A ,
- prawdopodobieństwa odmowy obsługi p_m .

Należy porównać faktyczną zdolność obsługi systemu ze znamionową, która byłaby osiągnięta, gdyby każda rozmowa trwała dokładnie 1,5 minuty i każda z nich następowała po poprzedniej bez żadnej przerwy.

Określmy parametr μ strumienia obsługi

$$\mu = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{1,5} = 0,667$$

Według zależności (4-38) otrzymamy względную zdolność obsługi

$$q = \frac{0,667}{0,8 + 0,667} = 0,455$$

Widzimy więc, że w stanie ustalonym system będzie obsługiwał 45% pojawiających się zgłoszeń.

Zgodnie ze wzorem (4-18) znajdujemy bezwzględną zdolność obsługi systemu

$$A = \lambda q = 0,8 \cdot 0,455 = 0,364$$

to znaczy linia jest zdolna zrealizować średnio 0,364 rozmowy w ciągu minuty.

Prawdopodobieństwo odmowy

$$p_m = 1 - q = 0,545$$

to znaczy że około 55% wywołań otrzyma odmowę.

Nominalna zdolność obsługi kanału wynosi

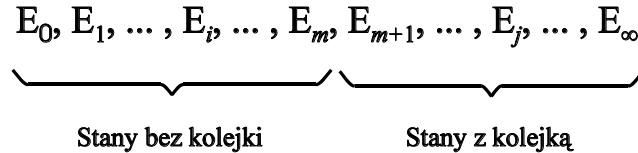
$$A_{nom} = \frac{1}{t_0} = 0,667$$

rozmowy na minutę.

4.2. Systemy z nieograniczonym oczekiwaniem

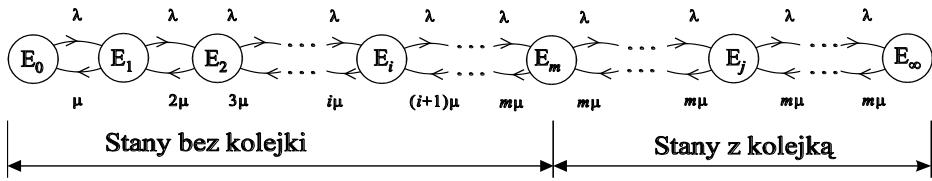
4.2.1. System kolejkowy z oczekiwaniem $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$

Można zauważyc, że system ten może znajdować się w następujących stanach



gdzie stan $E_j, j = 0, 1, \dots, \infty$ oznacza, że w systemie znajduje się j zgłoszeń.

Każdemu stanowi można przyporządkować prawdopodobieństwo $p_s(t), s = 0, 1, \dots, i, \dots, m, m+1, \dots, j, \dots, \infty$. Graf stanów przedstawiono na rysunku 5-4.



Rys. 4.4. Graf stanów dla systemu $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$

Stosując regułę mnemotechniczną otrzymujemy układ równań Chapman - Kołmogorowa

$$\begin{aligned}
 p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
 p'_1(t) &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\
 &\vdots \\
 p'_i(t) &= \lambda p_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \\
 &\vdots \\
 & \quad 1 \leq i \leq m-1
 \end{aligned} \tag{4-39}$$

$$\begin{aligned}
 p'_{m-1}(t) &= \lambda p_{m-2}(t) - [\lambda + (m-1)\mu]p_{m-1}(t) + m\mu p_m(t), \\
 p'_m(t) &= \lambda p_{m-1}(t) - (\lambda + m\mu)p_m(t) + m\mu p_{m+1}(t), \\
 &\vdots \\
 p'_j(t) &= \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + m\mu)p_j(t) + m\mu p_{j+1}(t), \\
 &\vdots \\
 & \quad j \geq m.
 \end{aligned}$$

Warunki początkowe są analogiczne jak dla poprzedniego przypadku

$$p_0(0) = 1, \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_i(0) = \dots = p_m(0) = \dots = p_j(0) = \dots = 0. \tag{4-40}$$

Aby uzyskać rozwiązanie w stanie ustalonym, należy przejść do granicy przy $t \rightarrow \infty$. Otrzymamy wówczas system równań algebraicznych

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \\
0 &= \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{i-1} - (\lambda + i\mu) p_i + (i+1)\mu p_{i+1} \\
&\vdots \quad 1 \leq i \leq m-1 \\
0 &= \lambda p_{m-2} - [\lambda + (m-1)\mu] p_{m-1} + m\mu p_m \\
0 &= \lambda p_{m-1} - (\lambda + m\mu) p_m + m\mu p_{m+1} \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{j-1} - (\lambda + m\mu) p_j + m\mu p_{j+1} \\
&\vdots \quad j \geq m
\end{aligned} \tag{4-41}$$

Podobnie, jak dla systemu poprzedniego, wyliczamy formuły na prawdopodobieństwa stanów

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{1}{i!} \rho^i p_0, \quad 1 \leq i \leq m-1 \\
p_j &= \frac{1}{m! m^{j-m}} \rho^j p_0, \quad j \geq m
\end{aligned} \tag{4-42}$$

$$\text{gdzie } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Dołączając warunek normalizujący

$$\sum_{s=0}^{\infty} p_s = 1, \quad s = 0, 1, \dots, i, \dots, m, \dots, j, \dots, \infty \tag{4-43}$$

obliczamy p_0

$$\sum_{s=0}^{\infty} p_s = \sum_{s=0}^{m-1} p_s + \sum_{s=m}^{\infty} p_s = 1. \tag{4-44}$$

Podstawiając zależności (4-42) do wzoru (4-43) otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} p_0 + \sum_{j=m}^{\infty} \frac{\rho^j}{m! m^{j-m}} p_0 = 1.$$

Stąd

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{j=m}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{j-m}} . \quad (4-45)$$

Składnik $\sum_{j=m}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{j-m}$ jest sumą postępu geometrycznego o ilorazie $\frac{\rho}{m}$. Jeżeli $\frac{\rho}{m} \geq 1$ i $j \rightarrow \infty$ suma ta jest rozbieżna i wówczas liczba klientów tworzących kolejkę zmierza do nieskończoności. Jeżeli $\frac{\rho}{m} < 1$ suma posiada skońzoną granicę, a system spełnienia warunek ergodyczności

$$\sum_{j=m}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{j-m} = \frac{1}{1 - \frac{\rho}{m}} = \frac{m}{m - \rho} , \quad \frac{\rho}{m} < 1 . \quad (4-46)$$

Uwzględniając zależność (4-46) we wzorze (4-45) otrzymujemy

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}} , \quad \frac{\rho}{m} < 1 . \quad (4-47)$$

Prawdopodobieństwo, że s kanałów obsługi jest zajętych wynosi

$$p_s = \frac{\rho^s}{s!} p_0 = \frac{\frac{\rho^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}} , \quad 1 \leq s \leq m-1, \quad \rho < m . \quad (4-48)$$

Prawdopodobieństwo tego, że długość kolejki wynosi r , tzn. $j = m+r$, jest określone wzorem

$$p_{m+r} = \frac{\rho^{m+r}}{m!m^r} p_0 = \frac{\frac{\rho^{m+r}}{m!m^r}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}} , \quad r \geq 0, \quad \rho < m . \quad (4-49)$$

Prawdopodobieństwo, że wszystkie kanały obsługi są zajęte ($r = 0$) jest określone zależnością

$$p_m = \frac{\rho^m}{m!} p_0 = \frac{\frac{\rho^m}{m!}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}} , r \geq 0, \quad \rho < m . \quad (4-50)$$

Obliczmy \bar{v} , tzn. średnią ilość klientów oczekujących w kolejce na rozpoczęcie obsługi

$$\bar{v} = \sum_{r=0}^{\infty} rp_{m+r} = \sum_{r=0}^{\infty} r \frac{\rho^{m+r}}{m! m^r} p_0 = \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\rho^m}{m!} p_0}_{{p_m}} r \left(\frac{\rho}{m}\right)^r , \quad (4-51)$$

która można sprowadzić do postaci

$$\bar{v} = p_m \sum_{r=0}^{\infty} ra^r , \quad a = \frac{\rho}{m} .$$

Występującą we wzorze sumę można wyliczyć w następujący sposób

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} ra^r &= a + 2a^2 + 3a^3 + \dots \\ &= a(1 + 2a + 3a^2 + \dots) \\ &= a \frac{d}{da} (a + a^2 + a^3 + \dots) . \end{aligned}$$

Ponieważ $a = \frac{\rho}{m} < 1$, więc wyrażenie w nawiasie jest zbieżnym ciągiem geometrycznym. Dlatego też możemy napisać

$$\sum_{r=0}^{\infty} ra^r = a \frac{d}{da} \left[\frac{a}{1-a} \right] = a \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{a}{(1-a)^2} .$$

Powracając do poprzednich oznaczeń otrzymujemy

$$\sum_{r=0}^{\infty} ra^r = \frac{a}{(1-a)^2} = \frac{m\rho}{(m-\rho)^2} . \quad (4-52)$$

Podstawiając zależność (4-52) do wzoru (4-51) mamy

$$\bar{\nu} = \frac{\rho^{m+1}}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}} , \quad \frac{\rho}{m} < 1 . \quad (4-53)$$

Oznaczmy przez \bar{n} średnią ilość zgłoszeń w systemie (w trakcie obsługi oraz w kolejce). Możemy napisać

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{m-1} ip_i + \sum_{j=m}^{\infty} jp_j . \quad (4-54)$$

Z drugiej strony można zauważyć, że

$$\bar{n} = \bar{\nu} + \bar{m}_0 \quad (4-55)$$

gdzie: $\bar{\nu}$ - średnia ilość klientów w kolejce,
 \bar{m}_0 - średnia ilość zgłoszeń w trakcie obsługi.

Zależność (4-55) można łatwo wyprowadzić na podstawie zależności (4-54) podstawiając $j = m+r$, gdzie r jest liczbą zgłoszeń w kolejce

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{m-1} ip_i + \sum_{r=0}^{\infty} (m+r)p_{m+r} = \sum_{i=1}^{m-1} ip_i + \sum_{r=0}^{\infty} mp_{m+r} + \sum_{r=0}^{\infty} rp_{m+r} . \quad (4-56)$$

Uwzględniając fakt, że dwa początkowe składniki wyrażenia (4-56) są równe \bar{m}_0 , trzeci jest równy $\bar{\nu}$, otrzymujemy zależność $\bar{n} = \bar{\nu} + \bar{m}_0$. Obliczmy średnią ilość zajętych kanałów obsługi

$$\bar{m}_0 = \sum_{i=1}^{m-1} ip_i + \sum_{r=0}^{\infty} m p_{m+r} .$$

Podstawiając za p_i i p_{m+r} odpowiednie wyrażenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{m}_0 &= p_0 \sum_{i=1}^{m-1} i \frac{\rho^i}{i!} + p_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m \rho^{m+r}}{m! m^r} = \\ &= p_0 \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\rho^i}{(i-1)!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m} \right)^r \right] . \end{aligned} \quad (4-57)$$

Sumę $\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^r$ występującą w wyrażeniu (4-57) przy założeniu $\frac{\rho}{m} < 1$ możemy wyliczyć jako sumę ciągu geometrycznego

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^r = \frac{1}{1 - \frac{\rho}{m}} = \frac{m}{m - \rho}$$

otrzymując wyrażenie

$$\bar{m}_0 = p_0 \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\rho^i}{(i-1)!} + \frac{m\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} \right]. \quad (4-58)$$

Zajmijmy się obecnie wyrażeniem

$$\frac{m\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} = \frac{\rho^m}{(m-1)!} + \frac{\rho\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} \quad (4-59)$$

Podstawiając zależność (4-59) do (4-58) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{m}_0 &= p_0 \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\rho^i}{(i-1)!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!} + \frac{\rho\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} \right] = \\ &= p_0 \left[\sum_{i=1}^m \frac{\rho^i}{(i-1)!} + \frac{\rho\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} \right] \end{aligned}$$

Po prostych modyfikacjach mamy

$$\bar{m}_0 = p_0 \rho \left[\sum_{i=1}^m \frac{\rho^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} \right]$$

Zmieniając wskaźnik sumowania możemy napisać

$$\bar{m}_0 = p_0 \rho \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} \right]. \quad (4-60)$$

Biorąc pod uwagę zależność (4-60) oraz uwzględniając fakt, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe p_0^{-1} otrzymujemy

$$\bar{m}_0 = p_0 p_0^{-1} \rho = \rho \quad (4-61)$$

Wstawiając zależność (4-61) do (4-55) mamy

$$\bar{n} = \bar{\nu} + \rho \quad (4-62)$$

Średnią ilość zajętych kanałów obsługi można także wyliczyć uwzględniając relację

$$\bar{m}_0 = \sum_{s=1}^m s p_s = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + \dots + m p_m \quad (4-63)$$

lub wykorzystując zależność

$$\bar{m}_0 = \frac{A}{\mu} \quad (4-64)$$

ponieważ A (bezwzględna zdolność obsługi systemu) jest to średnia ilość zgłoszeń, które są obsłużone podczas jednostki czasu. Jeżeli więc podzielimy A przez μ , tzn. pomnożymy przez czas obsługi $\bar{t}_0 = \frac{1}{\mu}$ otrzymamy \bar{m}_0 .

W rozważanym systemie zachodzi ponadto:

$$p_{odm} = 0$$

$$q = 1 - p_{odm} = 1$$

więc

$$A = \lambda q = \lambda \quad (4-65)$$

$$\bar{m}_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad (4-66)$$

Wyliczymy średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce, który oznaczamy przez \bar{t}_f .

Jeżeli nowe zgłoszenie przybywa do systemu, podczas gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte i nie ma kolejki, musi ono czekać na zwolnienie kanału obsługi i średni czas oczekiwania wynosi $\frac{1}{m\mu}$. Jeżeli nowa jednostka przybywa do systemu i zastaje już jedno zgłoszenie w kolejce,

średni czas oczekiwania tej jednostki wyniesie $\frac{2}{m\mu}$ itd. Możemy więc napisać

$$\bar{t}_f = \frac{1}{m\mu} p_m + \frac{2}{m\mu} p_{m+1} + \dots + \frac{(r-1)}{m\mu} p_{m+r} + \dots \quad (4-67)$$

gdzie r jest liczbą jednostek w kolejce.

Podstawiając wyrażenie

$$p_{m+r} = \frac{\rho^{m+r}}{m! m^r} p_0$$

do wzoru (4-67) otrzymujemy

$$\bar{t}_f = \frac{\rho^m p_0}{mm! \mu} \left[1 + 2\left(\frac{\rho}{m}\right) + 3\left(\frac{\rho}{m}\right)^2 + \dots + r\left(\frac{\rho}{m}\right)^{r-1} + \dots \right]$$

lub w postaci zwartej

$$\bar{t}_f = \frac{\rho^m}{m\mu m!} p_0 \sum_{r=1}^{\infty} r \left(\frac{\rho}{m}\right)^{r-1}. \quad (4-68)$$

Obliczmy sumę

$$\sum_{r=1}^{\infty} r \left(\frac{\rho}{m}\right)^{r-1} = \sum_{r=1}^{\infty} r a^{r-1}$$

$$\text{gdzie } a = \frac{\rho}{m} < 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} r a^{r-1} &= 1 + 2a + 3a^2 + \dots = \frac{d}{da} [a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots] = \\ &= \frac{d}{da} \left[\frac{a}{1-a} \right] = \frac{1}{(1-a)^2} \end{aligned}$$

Wracając do poprzednich oznaczeń otrzymujemy

$$\sum_{r=1}^{\infty} r \left(\frac{\rho}{m}\right)^{r-1} = \frac{m^2}{(m-\rho)^2}. \quad (4-69)$$

Podstawiając zależność (4-69) do wzoru (4-68) mamy

$$\bar{t}_f = \frac{\rho^m p_0}{m! \mu} \frac{m}{(m-\rho)^2} = \frac{\rho^m}{\mu(m-1)!(m-\rho)^2} p_0$$

i ostatecznie

$$\bar{t}_f = \frac{\rho^{m+1}}{\lambda(m-1)!(m-\rho)^2} p_0$$

$$\text{Ponieważ } \bar{\nu} = \frac{\rho^{m+1}}{\lambda(m-1)!(m-\rho)^2} p_0$$

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}$$

$$\bar{\nu} = \lambda \bar{t}_f . \quad (4-70)$$

Zależność (4-70) nosi nazwę I formuły Little'a dla stanu ustalonego.

Oznaczmy symbolem \bar{t}_s średni czas przebywania zgłoszenia w systemie, który może być wyliczony w następujący sposób:

$$\bar{t}_s = M[T_s] = M[T_f] + M[T_0] \quad (4-71)$$

gdzie M - symbol średniej wartości,

T_s - czas przebywania jednostki w systemie,

T_f - czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce,

T_0 - czas obsługi,

$$M[T_f] = \bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}$$

$$M[T_0] = q \cdot \bar{t}_0 = \frac{q}{\mu}$$

więc

$$t_s = t_f + \frac{q}{\mu}$$

Ponieważ $q = 1$, więc $M [T_0] = \frac{1}{\mu}$ i wtedy średni czas przebywania zgłoszenia w systemie wynosi

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{v}}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda} \left(\bar{v} + \frac{\lambda}{\mu} \right) = \frac{1}{\lambda} (\bar{v} + \rho) \quad (4-72)$$

Uwzględniając zależność (4-62) we wzorze (4-72) otrzymujemy

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\lambda} \bar{n} . \quad (4-72)$$

Ostatecznie II formuła Little'a w stanie ustalonym przyjmuje postać

$$\bar{n} = \lambda \bar{t}_s . \quad (4-74)$$

4.2.2. Optymalizacja systemu kolejkowego z nieograniczonym oczekiwaniem M/M/m/FIFO/ ∞

W zakładzie produkcyjnym znajduje się magazyn części zamiennych, do którego przychodzą robotnicy. Właściciel przedsiębiorstwa zauważył, że wokół okienka magazyniera dość często pojawia się znaczne zgrupowanie robotników oczekujących na wydanie przez niego odpowiednich części zamiennych. Stwierdził on, że przynosi to dość duże straty opłacanego przez niego czasu pracy robotników. Z drugiej strony skonstatował, że gdywiększy nadmiernie ilość pracujących magazynierów może spowodować ich niedociążenie i będzie im musiał płacić pomimo, że nie będą wykonywać żadnej pracy.

Właściciel będący dobrym menedżerem postanowił zminimalizować swoje koszty. W tym celu określił przedział czasu T , podczas którego rozważane zjawisko może być traktowane jako stacjonarne. Zadecydował, że początek tego przedziału należy określić kilkadziesiąt minut po rozpoczęciu pracy natomiast jego koniec na kilkadziesiąt minut przed zakończeniem pracy.

Podczas przyjętego przedziału czasu T przybywa średnio po części zamienne λT pracowników, a średni czas obsługi pracownika wynosi $\frac{1}{\mu}$.

Robotnicy oczekujący w kolejce tracą średnio $\lambda T \bar{t}_f$ jednostek czasu pracy, gdzie \bar{t}_f jest średnim czasem oczekiwania w kolejce. W przypadku zatrudnienia m magazynierów ich średni czas przestoju jest równy

$$mT - \lambda T \frac{1}{\mu} = (m - \rho)T \quad (4-75)$$

i można dokonać analizy, przyjmując różne wartości m , przebiegu funkcji kosztów, o postaci

$$f(m) = [c_1 \bar{\lambda t_f} + c_2 (m - \rho)]T \quad (4-76)$$

gdzie

- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
- c_1 i c_2 są odpowiednio stawkami godzinowymi uposażeń robotników i magazynierów
- T jest rozważanym przedziałem czasu wyrażonym, na przykład w godzinach.

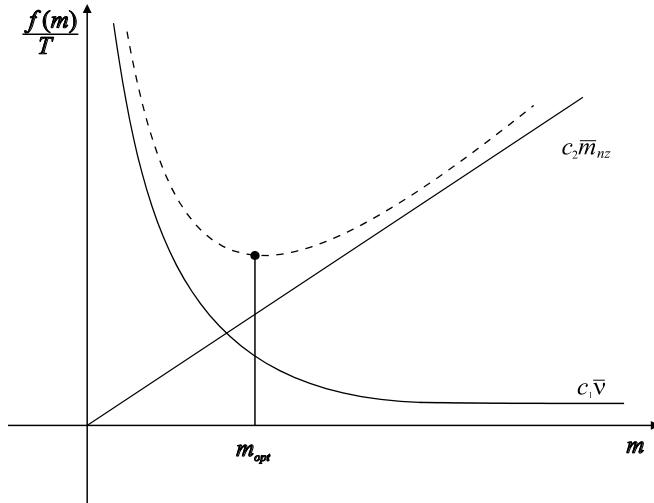
Zauważamy ponadto, biorąc pod uwagę zależności znajdujące się w tabeli 4-4, że

$$(m - \rho) = m - \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho} = m - \frac{\rho}{1 - \rho} + \frac{\rho^2}{1 - \rho} = m - \bar{n} + \bar{\nu} = \bar{m}_{nz} \quad (4-77)$$

gdzie \bar{m}_{nz} jest średnią ilością niezajętych kanałów obsługi (magazynierów). Funkcję kosztów $f(m)$ można zatem zapisać w postaci

$$f(m) = (c_1 \bar{\nu} + c_2 \bar{m}_{nz})T. \quad (4-78)$$

Wykażemy w graficznny sposób, że istnieje optymalna ilość magazynierów przedstawiając na wspólnym wykresie krzywe $c_1 \bar{\nu}$ i $c_2 \bar{m}_{nz}$. Pokazuje to rysunek 4-5.



Rys. 4.5. Graficzne przedstawienie funkcji kosztów

Analiza rzeczywistego systemu

Właściciel przedsiębiorstwa zlecił odpowiedniej firmie wykonanie badań statystycznych. Analityk obserwujący to zjawisko zauważył, że zgrupowanie robotników pod magazynem jest prawie ustalone pomiędzy 9 a 12 godziną każdego dnia pracy. Oznacza to, że podczas tego przedziału czasu obserwowane zjawisko jest stacjonarne. Podczas obserwacji trwających 100 dni roboczych analityk zliczał ilość robotników wchodzących do magazynu podczas 5 minutowych przedziałów czasu. Wyniki obserwacji zostały zgrupowane w tabeli 4-1.

Tabela 4-Błąd! Nieznany argument przełącznika.

Ilość robotników i wchodzących do magazynu w okresie 5 minut	Względna częstość obserwowana f_i
0	0.30
1	0.35
2	0.22
3	0.10
4	0.02
5	0.01
6	0

W oparciu o uzyskane wyniki, zawarte w tabeli 4-1, analityk wyliczył średnią wartość l obserwowanego rozkładu

$$l = \sum_{i=0}^5 i \cdot f_i = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,22 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,02 + 5 \cdot 0,01 + 6 \cdot 0 = \\ = 1,22 \text{ robotników}/5 \text{ minut.}$$

Zakładając prawdziwość hipotezy, że obserwowany rozkład jest zbliżony do rozkładu Poissona o wartości średniej $l = 1,22$ analityk sprawdził jej słuszność stosując test χ^2 Pearsona. W wyniku zastosowania tego testu postawiona hipoteza nie została odrzucona, więc intensywność przybywania zgłoszeń wynosi:

$$\lambda = \frac{l}{5} = 0,244 \text{ przybycia/min.}$$

Przechodząc do studiów nad średnim czasem trwania obsługi, podczas tego samego okresu 100 dni pracy zakładu, analityk sporządził tabelę 4-2.

Tabela 4-Błąd! Nieznany argument przełącznika.

Czas trwania obsługi [minuta]	Obserwowana częstotliwość względna czasu obsługi
<1	0.25
od 1 do 2	0.22
od 2 do 3	0.15
od 3 do 4	0.13
od 4 do 5	0.08
od 5 do 6	0.06
od 6 do 7	0.04
od 7 do 8	0.03
od 8 do 9	0.02
od 9 do 10	0.01
od 10 do 11	0.01
>11	0

Średni czas obsługi wynosi 3,33 minuty. Test Pearsona pozwala na zaakceptować hipotezę, że obserwowany rozkład jest zbliżony do rozkładu wykładniczego o parametrze $a = \frac{1}{3,33} = 0,3$, który można interpretować jako

średnią liczbę robotników obsługiwanych w jednostce czasu, a więc $\mu = 0,3$.

Część statystyczna została zakończona i analityk przystępuje do wykorzystania wyników teoretycznych.

Analityk obserwując pracę magazynu stwierdził, że w pobliżu niego jest bardzo dużo miejsca, gdzie mogą oczekiwania robotnicy i zaproponował jako najbardziej odpowiedni model $M/M/m/FIFO/\infty$, gdzie m jest liczbą magazynierów.

Wyliczając

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0,8 < 1$$

stwierdził, że warunek ergodyczności jest spełniony w przypadku gdy pracuje jeden magazynier.

Następnie wykorzystując wzór na średnią ilość zgłoszeń zawarty w tabeli 4-4 wyliczył średnią ilość oczekujących robotników

$$\bar{n} = \frac{\rho}{1 - \rho} = 4$$

oraz średni czas oczekiwania w kolejce

$$t_f = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = 13,3 \text{ minuty.}$$

Biorąc pod uwagę zależności zawarte w tabeli 4-4 i dotyczące systemu $M/M/m/\infty$ wyrażenie (4-78) możemy zapisać w postaci

$$\min_{m \in C^+} \rightarrow f(m) = \left[c_1 \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2} + c_2(m-\rho) \right] T \quad (4-79)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}$$

Zagadnienie optymalizacji dyskretnej określone wzorem (5-79) w postaci ogólnej jest trudne do rozwiązania. Dlatego też sformułujemy prostsze zagadnienie, które będzie dotyczyło ograniczenia czasu oczekiwania w kolejce. Ponieważ średni czas oczekiwania w kolejce w badanym systemie wydaje się zbyt długi, właściciel zaproponował przeprowadzenie reorganizacji zakładu polegające na zwiększeniu ilości magazynierów, tak aby średni czas oczekiwania robotników w kolejce \bar{t}_f był mniejszy lub co najwyżej równy jednej minucie.

W oparciu o tabelę 4-4 możemy napisać

$$\bar{t}_f = \frac{\rho^{m+1}}{\lambda(m-1)!(m-\rho)^2} p_0 \leq 1, \quad (4-80)$$

gdzie

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}}. \quad (4-81)$$

Ponieważ parametr λ jest stały, globalna intensywność obsługi $m \mu$ rośnie wraz ze wzrostem m , wobec tego czas oczekiwania w kolejce (4-80) maleje gdy m rośnie.

Dla $m = 2$, na podstawie zależności (5-81) po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $p_0 = 0,42$.

Średni czas oczekiwania w kolejce określony wzorem (4-80) dla $m = 2$ wynosi

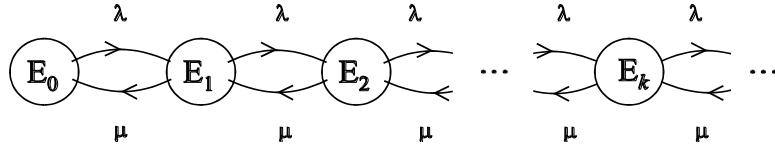
$$\bar{t}_f = \frac{\rho^{m+1}}{\lambda(m-1)!(m-\rho)^2} \cdot p_0 = 0,6 \text{ minuty} < 1 \quad (4-82)$$

i spełnia warunek określony przez właściciela zakładu.

Widząc, otrzymane rezultaty właściciel podjął decyzję o utworzeniu drugiego stanowiska magazyniera.

4.2.3. System kolejkowy $M/M/1/FIFO/\infty$

Rozpatrzmy system $M/M/1/FIFO/\infty$, dla którego graf stanów ma postać jak na rysunku 4.6.



Rys.4.6. Graf stanów systemu $M/M/1/FIFO/\infty$

Układ równań różniczkowych opisujących dynamikę systemu ma postać

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ &\vdots \\ p_k'(t) &= \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu)p_k(t) + \mu p_{k+1}(t), \\ &\vdots \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4-83)$$

przy warunkach początkowych

$$p_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = i \\ 0 & \text{dla } k \neq i \end{cases} \quad (4-84)$$

co oznacza, że w momencie $t = 0$ w systemie znajduje się i klientów.

Rozwiązujeć ten układ równań różniczkowych możemy wyznaczyć rozwiązanie w stanie przejściowym [64]

$$\begin{aligned} p_k(t) &= e^{-(\lambda+\mu)t} \left[\left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{i-k}{2}} I_{k-i} \left(2\sqrt{\lambda\mu t} \right) + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{i-k+1}{2}} \cdot I_{k+i+1} \left(2\sqrt{\lambda\mu t} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \sum_{m=k+i+2}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{k}{2}} I_m \left(2\sqrt{\lambda\mu t} \right) \right], k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4-85)$$

gdzie

$$I_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+l}}{j!(j+l)!} \quad (4-86)$$

jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu l .

W stanie ustalonym dla $k = 0$ i $t \rightarrow \infty$ otrzymujemy wyrażenia

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1 - \rho}} = 1 - \rho, \quad \rho < 1 \quad (4-87)$$

$$p_1 = \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{\mu^2} . \quad (4-88)$$

Prawdopodobieństwo, że długość kolejki wynosi r zgłoszeń wyraża się wzorem

$$p_{1+r} = \rho^{(1+r)} p_0 = (1 - \rho) \rho^{(1+r)}, \quad \rho < 1 . \quad (4-89)$$

Możemy znaleźć maksimum tego prawdopodobieństwa wyliczając pochodną

$$\frac{\partial p_{1+r}}{\partial \rho} = -\rho^{(1+r)} + (1 - \rho)(1 + r)\rho^r .$$

Przyrównując ją do zera

$$\frac{\partial p_{1+r}}{\partial \rho} = 0 ,$$

otrzymujemy równanie

$$-\rho\rho^r + (1 - \rho)(1 + r)\rho^r = 0$$

Dzieląc obie strony przez ρ^r mamy

$$-\rho + (1 - \rho)(1 + r) = 0$$

Z równania tego wyliczamy optymalną wartość parametru ρ

$$\rho_{opt} = \frac{1+r}{2+r}$$

Maksimum prawdopodobieństwa p_{1+r} dla ρ_{opt} jest równe

$$P_{1+r}^{\max} = \frac{(1+r)^{1+r}}{(2+r)^{2+r}}.$$

Liczba jednostek oczekujących w kolejce wynosi

$$\bar{v} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}, \quad (4-90)$$

natomiast średnia ilość zajętych kanałów obsługi

$$\bar{m}_0 = \rho. \quad (4-91)$$

Można również wyznaczyć średnią ilość niezajętych kanałów obsługi

$$\bar{m}_{nz} = 1 - \rho \quad (4-92)$$

oraz średnią ilość zgłoszeń w systemie

$$\bar{n} = \bar{v} + \bar{m}_0 = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}. \quad (4-93)$$

Średni czas oczekiwania w kolejce ma postać

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}, \quad (4-94)$$

natomiast średni czas przebywania zgłoszenia w systemie wyraża zależność

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}. \quad (4-95)$$

Łatwo również wyprowadzić następujące związki:

$$\frac{\bar{n}}{\mu} = \frac{\bar{v}}{\lambda} \quad (4-96)$$

oraz

$$\frac{\bar{n}}{\lambda} - \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}. \quad (4-97)$$

W pracy [73] udowodniono zależność (4-98). Prawdopodobieństwo zdarzenia, że czas oczekiwania w kolejce przewyższy przedział czasu τ (oznacza to, że

zgłoszenie oczekuje na obsługę dłużej niż τ) jest związane z prawdopodobieństwem tego, że wszystkie kanały obsługi są zajęte

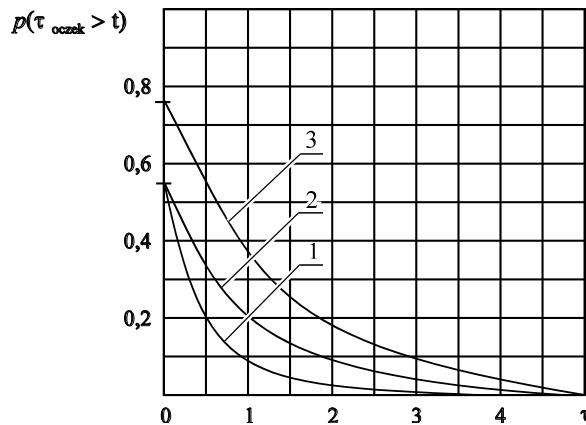
$$p(\tau_{ocz} > \tau) = p_m \cdot e^{-(m\mu - \lambda)\tau}; \tau \geq 0 \quad (4-98)$$

gdzie p_m jest określone wzorem (4-50).

Dla jednokanałowego systemu kolejkowego z oczekiwaniem bez ograniczeń, mając na uwadze relację (4-47) i (4-50) podstawiając $m = 1$ możemy napisać

$$p(\tau_{ocz} > \tau) = \rho \cdot e^{-(\mu - \lambda)\tau}. \quad (4-99)$$

Zależność tego prawdopodobieństwa przy zmianie τ przedstawiono na rysunku 4.7. Na rysunku tym krzywe 1 i 2 odpowiadają wartości $\rho = \frac{1}{2} = \text{const}$, przy czym dla krzywej 1 różnica $\mu - \lambda$ wynosi 1, a dla krzywej 2 - dwa. Krzywe 1 i 3 posiadają $\mu - \lambda = 1 = \text{const}$, a $\rho = \frac{1}{2}$ dla krzywej 1 i $\rho = \frac{3}{4}$ dla krzywej 3.



Rys. 4.7. Wykres prawdopodobieństwa tego, że czas oczekiwania w kolejce przewyższy przedział czasu o długości τ dla systemu $M/M/1/FIFO/\infty$.

4.2.4. Optymalizacja systemu $M/M/1/FIFO/\infty$

Założymy, że znany jest jednostkowy koszt oczekiwania zgłoszenia w systemie c_1 oraz jednostkowy koszt niezajętości kanału obsługi c_2 . Można znaleźć optymalną wielkość ρ , która minimalizuje średni koszt eksploatacji

systemu. Dla ustalonego λ można zapytać jaka jest optymalna intensywność obsługi μ_{opt} .

Funkcja celu, tzn. średni koszt eksploatacji systemu ma postać

$$\Gamma(\rho) = c_1 \bar{n} + c_2 \bar{m}_{nz} = c_1 \frac{\rho}{1-\rho} + c_2 (1-\rho) \quad (4-100)$$

Obliczając pochodną i przyrównując ją do zera otrzymujemy

$$\Gamma'(\rho) = c_1 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} - c_2 = 0 . \quad (4-101)$$

Występują dwa przypadki

- a) gdy $c_1/c_2 \geq 1$, wtedy $\Gamma'(\rho) > 0$; stąd funkcja $\Gamma'(\rho)$ jest funkcją rosnącą i posiada minimum dla $\rho = 0$, tzn. $\lambda = 0$,
- b) gdy $c_1/c_2 < 1$, wtedy $\Gamma'(\rho) = 0$.

Możemy zapisać, że

$$\rho_{\text{opt}} = 1 - \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} < 1$$

a z warunku $\Gamma''(\rho_{\text{opt}}) = \frac{2c_1}{(1-\rho)^3} > 0$ wynika, że $\Gamma(\rho_{\text{opt}})$ jest wartością minimalną funkcji celu.

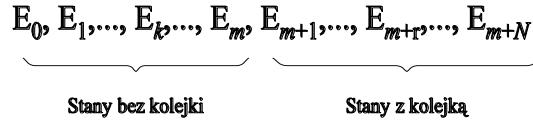
Poszukiwana wartość optymalna intensywności obsługi wynosi

$$\mu_{\text{min}} = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}} \quad (4-102)$$

4.3. Systemy mieszane

4.3.1. System kolejkowy mieszany $M/M/m/\text{FIFO}/m+N$

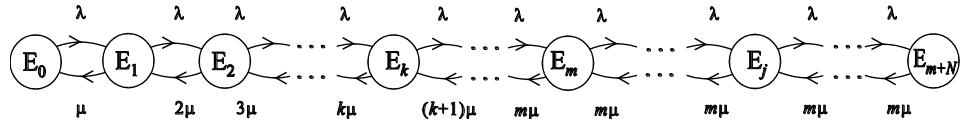
Można zauważyc, że system ten może znajdować się w następujących stanach



przy czym liczba stanów jest skończona, gdyż skończony jest rozmiar systemu. Każdemu stanowi systemu można przyporządkować odpowiednie prawdopodobieństwa stanu

$$p_s(t), \quad s = 0, 1, \dots, i, \dots, (m+N).$$

Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rysunku 4.8.



Rys. 4.8. Graf stanów dla systemu kolejowego $M/M/m/\text{FIFO}/m+N$

Stosując reguły mnemotechniczną otrzymujemy układ równań Chapmana-Kołmogorowa

$$\begin{aligned}
 p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
 p'_1(t) &= +\lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + \mu p_2(t), \\
 &\vdots \\
 p'_k(t) &= \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)2\mu p_{k+1}(t), \\
 &\quad 1 \leq k \leq m-1 \\
 &\vdots \\
 p'_m(t) &= \lambda p_{m-1}(t) - (\lambda + m\mu)p_m(t) + m\mu p_{m+1}(t), \\
 &\vdots \\
 p'_{m+r}(t) &= \lambda p_{m+r-1}(t) - (\lambda + m\mu)p_{m+r}(t) + m\mu p_{m+r+1}(t), \\
 &\quad 0 \leq r \leq N-1 \\
 &\vdots \\
 p'_{m+N}(t) &= \lambda p_{m+N-1}(t) - m\mu p_{m+N}(t).
 \end{aligned} \tag{4-103}$$

Warunki początkowe są następujące:

$$p_0(0) = 1, \quad p_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, m+N, \tag{104}$$

co odpowiada rozruchowi systemu.

Warunek normalizujący ma postać

$$\sum_{l=0}^{N+m} p_l(t) = 1. \tag{4-105}$$

Ponieważ interesuje nas stan ustalony przechodzimy do granicy przy $t \rightarrow \infty$ i układ równań różniczkowych zamienia się w układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\
0 &= \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2 \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} \\
&\quad 1 \leq k \leq m-1, \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{m-1} - (\lambda + m\mu)p_m + m\mu p_{m+1} \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{m+r-1} - (\lambda + m\mu)p_{m+r} + m\mu p_{m+r+1} \\
&\quad 0 \leq r \leq N-1, \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{m+N-1} - m\mu p_{m+N}
\end{aligned} \tag{4-106}$$

Podobnie jak poprzednio wyliczamy interesujące nas prawdopodobieństwa jako funkcje prawdopodobieństwa p_0

$$\begin{aligned}
p_k &= \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad 1 \leq k \leq m-1, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \\
p_j &= \frac{1}{m^{j-m}} \frac{1}{m!} \rho^j p_0, \quad m \leq j \leq m+N
\end{aligned} \tag{4-107}$$

Prawdopodobieństwo p_0 wyliczamy wykorzystując warunek (4-105) dla stanu ustalonego. Podstawiając formułę (4-107) otrzymujemy ostatecznie

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^{m+1}}{m m!} + \dots + \frac{\rho^{m+N}}{m^N m!} \right]^{-1}. \tag{4-108}$$

Wyrażenie (4-108) przekształcamy do postaci

$$p_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \left[1 + \underbrace{\left(\frac{\rho}{m} \right)^1 + \left(\frac{\rho}{m} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\rho}{m} \right)^N}_{\text{ciąg geometryczny}} \right]^{-1} \right\}^{-1}. \tag{4-109}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest ciągiem geometrycznym o ilorazie

$$q_1 = \frac{\rho}{m}.$$

Rozróżniamy dwa przypadki

a) $q_1 = 1$, wówczas

$$p_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \left[1 + N \cdot \frac{\rho}{m} \right] \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} (N+1) \right\}^{-1} \quad (4-110)$$

b) $q_1 \neq 1$, wtedy

$$p_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \left[1 + \frac{\rho}{m} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^N}{1 - \frac{\rho}{m}} \right] \right\}^{-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^{N+1}}{1 - \frac{\rho}{m}} \right\}^{-1} \quad (4-111)$$

Prawdopodobieństwo odmowy wyliczamy z zależności

$$p_{odm} = p_{m+N} = \frac{\rho^{m+N}}{m^N m!} p_0 \quad (4-112)$$

przy czym p_0 w formule (4-112) należy uwzględnić stosownie do rozważanego przypadku. Ta prawidłowość musi być respektowana przy wszystkich dalszych relacjach.

Względna zdolność obsługi systemu wynosi

$$q = 1 - p_{odm} = 1 - \frac{\rho^{m+N}}{m^N m!} p_0 \quad (4-113)$$

a bezwzględna zdolność obsługi

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{m+N}}{m^N m!} p_0 \right) \quad (4-114)$$

Średnią ilość zajętych kanałów obsługi wyliczamy z zależności

$$\bar{m}_0 = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{m+N}}{m^N m!} p_0 \right) = \rho (1 - p_{m+N}) \quad (4-115)$$

natomiast średnią ilość zgłoszeń w kolejce wyliczamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\bar{\nu} &= 1 \cdot p_{m+1} + 2 p_{m+2} + \dots + N p_{m+N} = \\
&= 1 \frac{\rho^{m+1}}{mm!} p_0 + 2 \frac{\rho^{m+2}}{m^2 m!} p_0 + \dots + \frac{N \rho^{m+N}}{m^N m!} p_0 = \\
&= \frac{\rho^{m+1}}{mm!} p_0 \left[1 + 2 \frac{\rho}{m} + 3 \left(\frac{\rho}{m} \right)^2 + \dots + N \left(\frac{\rho}{m} \right)^{N-1} \right]
\end{aligned} \tag{4-116}$$

Podstawiając $\frac{\rho}{m} = a$ do zależności (4-116) otrzymujemy

$$\bar{\nu} = \frac{\rho^{m+1}}{mm!} p_0 \left[1 + 2a + 3a^2 + \dots + Na^{N-1} \right]. \tag{4-117}$$

Aby znaleźć wielkość $\bar{\nu}$, jeżeli $\rho \neq m$, najpierw obliczamy sumę ciągu geometrycznego

$$\sum_a = a + a^2 + \dots + a^{k-1} + \dots + a^N \tag{4-118}$$

która wynosi

$$\sum_a = \frac{a - a^{N+1}}{1 - a} \tag{4-119}$$

Suma $1 + 2a + 3a^2 + \dots + Na^{N-1}$ jest pochodną zależności (4-118) względem a . Dlatego też, wzór ogólny na tę sumę otrzymamy obliczając pochodną zależności (4-119) względem a .

$$\begin{aligned}
\sum_a' &= \frac{[1 - (N+1)a^N](1-a) + (a - a^{N+1})}{(1-a)^2} = \\
&= \frac{1 - (N+1)a^N + Na^{N+1}}{(1-a)^2} = \frac{1 - a^N [1 + N(1-a)]}{(1-a)^2}.
\end{aligned} \tag{4-120}$$

Tak więc, wyrażenie (4-116) po uwzględnieniu zależności (4-120) przyjmuje postać

$$\bar{\nu} = \frac{\rho^{m+1}}{m m!} p_0 \frac{m^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \left[N \left(1 - \frac{\rho}{m} \right) + 1 \right] \right\}}{(m-\rho)^2} =$$

$$= \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} p_0 \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \left[N \left(1 - \frac{\rho}{m} \right) + 1 \right]}{(m-\rho)^2}. \quad (4-121)$$

Przypadek $\rho = m$ otrzymamy ze wzoru (4-121) stosując przejście graniczne przy $\rho \rightarrow m$

$$\bar{\nu} = \lim_{\rho \rightarrow m} \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} p_0 \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \left[N \left(1 - \frac{\rho}{m} \right) + 1 \right]}{(m-\rho)^2} =$$

$$= \frac{m^{m+1}}{(m-1)!} p_0 \lim_{\rho \rightarrow m} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \left[N \left(1 - \frac{\rho}{m} \right) + 1 \right]}{(m-\rho)^2}.$$

Ponieważ pod znakiem granicy jest symbol nieoznaczony typu $\frac{0}{0}$ stosujemy dwukrotnie regułę de l'Hospitala otrzymując

$$\bar{\nu} = \frac{m^{m+1}}{(m-1)!} p_0 \lim_{\rho \rightarrow m} \frac{-\frac{N}{m^2} \left(\frac{\rho}{m} \right)^{N-1} \left[N \left(1 - \frac{\rho}{m} \right) + 1 \right] + \frac{N}{m} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N}{-2(m-\rho)} =$$

$$= \frac{m^{m+1}}{(m-1)!} p_0 \lim_{\rho \rightarrow m} \frac{-\frac{N}{m^2} (N-1) \left(\frac{\rho}{m} \right)^{N-2} \left[N \left(1 - \frac{\rho}{m} \right) + 1 \right] + \frac{N^2}{m^2} \left(\frac{\rho}{m} \right)^{N-1} + \frac{N^2}{m^2} \left(\frac{\rho}{m} \right)^{N-1}}{2} =$$

$$= \frac{m^{m+1}}{(m-1)!} p_0 \lim_{\rho \rightarrow m} \frac{-N(N-1) + N^2 + N^2}{2m^2} = \frac{m^m}{m!} \frac{N(N+1)}{2} p_0 \quad (4-122)$$

Średnią liczbę zgłoszeń w systemie wyliczamy ze wzoru

$$\bar{n} = \bar{\nu} + \bar{m}_0 = \bar{\nu} + \rho (1 - p_{m+N}) \quad (4-123)$$

przy czym trzeba rozważyć dwa przypadki: $\frac{\rho}{m} \neq 1$ i $\frac{\rho}{m} = 1$.

Średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce otrzymamy wykorzystując I formułę Little'a (4-70)

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}$$

Po podstawieniu odpowiedniego wyrażenia za $\bar{\nu}$ i p_0 stosowanie do przypadku otrzymamy

$$\begin{aligned} \bar{t}_f &= \frac{1}{\lambda} \frac{m^m}{m!} \frac{N(N+1)}{2} p_0, && \text{dla } \rho = m, \\ \bar{t}_f &= \frac{1}{\lambda} \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^N \left[N\left(1 - \frac{\rho}{m}\right) + 1\right]}{(m-\rho)^2} p_0, && \text{dla } \rho \neq m. \end{aligned} \quad (4-124)$$

Średni czas przebywania zgłoszenia w systemie wynosi

$$\bar{t}_s = M[T_s] = M[T_f] + M[T_0],$$

gdzie

$$\begin{aligned} M[T_f] &= \bar{t}_f = \frac{\bar{\nu}}{\lambda}, \\ M[T_0] &= q \cdot \bar{t}_0 = \frac{q}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{\rho^{m+N}}{m^N m!} p_0 \right) \end{aligned}$$

A więc

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{\nu}}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{\rho^{m+N}}{m^N m!} p_0 \right) = \frac{\bar{\nu}}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \rho (1 - p_{m+N}). \quad (4-125)$$

Liczba kanałów niezajętych w trakcie pracy systemu kolejkowego może być wyliczona z zależności

$$\sum_{n=0}^m (m-n)p_n = m - \bar{m}_0 = m - \rho (1 - p_{m+N}). \quad (4-126)$$

4.3.2. Optymalizacja systemu kolejkowego $M/M/m/\text{FIFO}/m+N$

Rozpatrzmy stację benzynową, do której przybywają klienci zgodnie z rozkładem Poissona o parametrze λ . Celem rozważań jest zdefiniowanie optymalnej polityki obsługi tzn. ilości dystrybutorów, które należy zainstalować oraz liczby miejsc postojowych dla samochodów oczekujących

na tankowanie paliwa (jedno obok dystrybutora a pozostałe miejsca na placu obok dystrybutora). Zakłada się, że dystrybutory pracują w sposób niezależny, a czas pracy każdego z nich podlega rozkładowi wykładniczemu

o wartości średniej $\frac{1}{\mu}$. Obowiązującą regulę likwidacji kolejki jest

dyscyplina FIFO. Formułując zadanie optymalizacji należy wziąć pod uwagę następujące wielkości:

- średni zysk r odpowiadający napełnieniu paliwem jednego samochodu (koszt sprzedaży paliwa - koszt zakupu benzyny liczony w miejscu zainstalowania stacji benzynowej).
- koszt c_1 amortyzacji i utrzymania jednego miejsca postoju (obok dystrybutora lub w kolejce) przypadający na jednostkę czasu.
- koszt c_2 utrzymania każdego dystrybutora, na który składa się płaca pracownika oraz obsługa i konserwacja dystrybutora odniesiony do jednostki czasu.

Aby rozwiązać problem optymalizacji należy określić parę (m, N) , gdzie

m - jest ilością dystrybutów do zainstalowania,

N - ilością zaplanowanych miejsc postoju przy czym $m \leq N$,

która maksymalizuje funkcję $f(m, N)$ to znaczy średni zysk w jednostce czasu osiągany przez stację benzynową.

Wyrazimy najpierw przy pomocy wielkości λ , N , p_N , m , r , c_1 i c_2 funkcję celu $f(m, N)$, która ma podlegać maksymalizacji, gdzie p_N jest prawdopodobieństwem w stanie ustalonym, tego że system obsługi jest całkowicie zajęty (prawdopodobieństwo odmowy obsługi).

Następnie wykażemy, że dla ustalonego m funkcja $f(m, N)$ osiąga maksimum ze względu na N w przedziale $[m, \infty)$.

Funkcja ekonomiczna odniesiona do jednostki czasu posiada następujące składniki:

- dochód jednostkowy ze sprzedaży paliwa wynoszący $\lambda(1 - p_N)r$, gdyż w jednostce czasu mamy średnio $\lambda(1 - p_N)$ dokonanych usług samochodów, przy czym $p_N = p_{odm}$ jest prawdopodobieństwem odmowy obsługi
- jednostkowy koszt amortyzacji miejsc postoju określony przez współczynnik c_1
- jednostkowy koszt utrzymania dystrybutów c_2 .

Stąd funkcja celu przyjmuje postać

$$f(m, N) = \lambda(1 - p_N)r - c_1N - c_2m. \quad (4-127)$$

Przy ustalonym m dokonamy obecnie analizy funkcji $f(m, N)$, $\frac{df}{dN}(m, N)$ i $\frac{d^2f}{dN^2}(m, N)$ traktując N jako zmienną ciągłą. Obliczając pierwszą i drugą pochodną otrzymujemy wyrażenie:

$$\begin{aligned} f'_N(m, N) &= \frac{df}{dN}(m, N) = -\lambda r \frac{dp_N}{dN} - c_1 \\ f''_N(m, N) &= \frac{d^2f}{dN^2}(m, N) = -\lambda r \frac{d^2p_N}{dN^2} \end{aligned}$$

Warunek konieczny istnienia punktu ekstremalnego ma postać

$$f'_N(m, N) = \frac{df}{dN}(m, N) = -\lambda r \frac{dp_N}{dN} - c_1 = 0 \quad (4-128)$$

Stąd

$$\frac{dp_N}{dN} = -\frac{c_1}{\lambda r}$$

tzn. istnieje taka liczba $N_0 \geq m$, że

$$\dot{p}_{N_0} = -\frac{c_1}{\lambda r}.$$

Aby określić rodzaj ekstremum należy rozważyć zachowanie się pierwszej pochodnej p'_N w pobliżu punktu ekstremalnego.

Rozpatrzmy trzy przypadki:

- a) $\rho < m$,
- b) $\rho = m$,
- c) $\rho > m$,

gdzie $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Biorąc pod uwagę zależność (4-112) mamy

$$p_N = \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N p_0 \quad (4-129)$$

gdzie

$$p_0 = \begin{cases} \frac{m-\rho}{\sum_{k=0}^{m-1} (m-k) \frac{\rho^k}{k!} - \frac{m^m}{m!} \frac{\rho^{N+1}}{m^N}} & \text{dla } \rho \neq m \\ \frac{1}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k}{k!} - \frac{m^m}{m!} (N-m+1)} & \text{dla } \rho = m. \end{cases} \quad (4-130)$$

Wykorzystując zależność $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$ otrzymujemy:

$$p'_N = \begin{cases} \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \ln \left(\frac{\rho}{m} \right) p_0 + \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \cdot p'_0 & \text{dla } \rho \neq m \\ \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \ln \left(\frac{\rho}{m} \right) p_0 + \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \cdot p'_0 & \text{dla } \rho = m. \end{cases} \quad (4-131)$$

Dla $\rho \neq m$ pochodna prawdopodobieństwa p'_0 wynosi

$$p'_0 = \frac{(m-\rho) \frac{m^m}{m!} \rho \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \ln \left(\frac{\rho}{m} \right)}{\left(\sum_{k=0}^{m-1} (m-k) \frac{\rho^k}{k!} - \frac{m^m}{m!} \frac{\rho^{N+1}}{m^N} \right)^2} = \frac{p_0^2}{m-\rho} \frac{m^m}{m!} \rho \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \ln \left(\frac{\rho}{m} \right) \quad (4-132)$$

Gdy $\rho = m$, wtedy

$$p'_0 = \frac{-\frac{m^m}{m!}}{\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k}{k!} + \frac{m^m}{m!} (N-m+1) \right)^2} = -\frac{m^m}{m!} p_0^2. \quad (4-133)$$

Stąd

$$p'_N = \begin{cases} \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \ln \left(\frac{\rho}{m} \right) p_0 + \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \frac{m^m}{m!} \rho \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \ln \left(\frac{\rho}{m} \right) \frac{p_0^2}{m-\rho} = \\ = p_N \ln \left(\frac{\rho}{m} \right) \left[1 + \frac{\rho p_N}{m-\rho} \right] \text{ dla } \rho \neq m \\ \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \left(-\frac{m^m}{m!} \right) p_0^2 = -p_N^2 \quad \text{dla } \rho = m \end{cases} \quad (4-134)$$

Rozpatrując trzy możliwe przypadki relacji pomiędzy ρ i m mamy

a) $\rho < m, \quad \log \frac{\rho}{m} < 0, \quad m - \rho > 0$, stąd $p'_N < 0$

b) $\rho = m, \quad p'_N = -p_N^2 < 0$

c) $\rho > m, \quad \ln \left(\frac{\rho}{m} \right) > 0,$

Dla przypadku c) określmy znak pierwszej pochodnej.

Wyrażenie p'_N zapisujemy w postaci

$$p'_N = p_N \ln \frac{\rho}{m} \left[1 - \frac{\rho \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \cdot p_0}{\rho - m} \right]. \quad (4-$$

135)

Następnie przekształcamy do postaci

$$1 - \frac{\rho \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N \cdot p_0}{\rho - m} = 1 - \frac{1 - \rho \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N}{\frac{m^m}{m!} \frac{\rho^{N+1}}{m^N} - \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) \frac{\rho^k}{k!}} < 1 - \frac{\rho \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^N}{\frac{m^m}{m!} \frac{\rho^{N+1}}{m^N}} = 0 \quad (4-136)$$

i stwierdzamy, że $p'_N < 0$ również dla tego przypadku.

Stąd $p'_N < 0$ dla każdego ρ .

Obliczając drugą pochodną p''_N mamy

$$p''_N = \begin{cases} p'_N \ln\left(\frac{\rho}{m}\right) \left(1 + \frac{\rho p_N}{m-\rho}\right) + p'_N \left(\frac{\rho}{m}\right) \ln \frac{\rho p'_N}{m-\rho} = p'_N \ln\left(\frac{\rho}{m}\right) \left(1 + \frac{2\rho p_N}{m-\rho}\right) & \text{dla } \rho \neq m \\ -2p_N p'_N & \text{dla } \rho = m. \end{cases} \quad (4-137)$$

Można wykazać, że $p''_N > 0$ dla każdego ρ .

Ostatecznie dla $N_0 > m$ takiego, że $p'_{N_0} = -\frac{c_1}{\lambda r}$ druga pochodna

$f''(m, N_0) = -\lambda p''_{N_0} < 0$ i funkcja $f(m, N_0)$ przyjmuje wartość maksymalną w przedziale $[m, \infty)$. W przeciwnym przypadku, gdy nie można znaleźć $N_0 > m$ takiego, że $p'_{N_0} = -\frac{c_1}{\lambda r}$ funkcja $f(m, N)$ jest funkcją malejącą w przedziale $[m, \infty)$, $f(m, m) > f(m, \infty)$ i maksimum jest osiągnięte dla $N_0 = m$.

Przykład liczbowy

Znajdźmy optymalną politykę organizacji stacji obsługi dla danych:

- $\lambda = 40$ przybyć/godz.
- $\mu = 20$ odjazdów/ godz.
- $r = 5$ jednostek monetarnych (j.m.),
- $c_1 = 1$ j.m/miejsce/godz.
- $c_2 = 10$ j.m/dystrybutor/godz.

Najpierw wyliczamy

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2,$$

$$\frac{c_1}{\lambda r} = \frac{1}{50 \cdot 5} = \frac{1}{250} = 0,004.$$

Dla $m = 1$ otrzymujemy

$$p_0 = \frac{1}{2^{N+1} - 1}, \quad p_N = \frac{2^N}{2^{N+1} - 1},$$

$$p'_N = p_N \ln 2 [1 - 2p_N] = \ln 2 \left[\frac{1}{2 - \frac{1}{2^N}} \right] \left[1 - 2 \frac{1}{2 - \frac{1}{2^N}} \right].$$

Aby znaleźć N_0 wykorzystujemy fakt, że p'_N jest funkcją rosnącą i $p''_N > 0$.

Dla poszczególnych N otrzymujemy:

$$\begin{aligned} N = 10 & \quad p'_N = -0,0001693 > -0,004; \\ N = 5 & \quad p'_N = -0,005588 < -0,004; \\ N = 6 & \quad p'_N = -0,0027501 > -0,004. \end{aligned}$$

Stąd $p'_N = -\frac{c_1}{\lambda r}$ dla $N=5$ lub $N=6$.

Wartość funkcji celu $f(1,5)=250(1-p_5)-5-10=108,25$

$$p_5 = \frac{2^5}{2^6 - 1} = 0,508 \quad p_6 = \frac{2^6}{2^7 - 1} = 0,504$$

$$f(1,6)=250(1-p_6)=10,8$$

Dla $m=1$ maksimum występuje w przypadku $N=5$; $f(1,5)=108,25$.
W identyczny sposób dla $m=2$ i $m=3$ znajdujemy

$$f_{max}(m,N) = f(3,9).$$

Średnia ilość niezajętych dystrybutorów

$$\bar{m}_0 = m - \rho(1 - p_N) = 1,027.$$

Średnia ilość niezajętych miejsc przeznaczonych do postoju w kolejce jest równa

$$N_{nz} = 9 - \bar{n}$$

gdzie $\bar{n} = \bar{\nu} + \rho(1 - p_N)$

Średnia długość kolejki wynosi

$$\bar{\nu} = \frac{1}{9 \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^9 \right]} \cdot \frac{2^4}{2!} \cdot \left[\left(1 - \frac{2}{3} \right) \left(-7 \left(\frac{2}{3} \right)^6 \right) + \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^7 \right) \right] = 0,672$$

Średnia ilość zgłoszeń w systemie jest określona wzorem

$$\bar{n} = 0,672 + 1,973 = 2,645;$$

natomiast średnia ilość nie zajętych miejsc w poczekalni

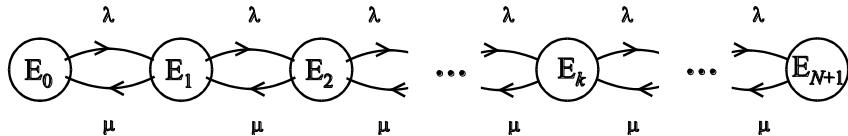
$$N_{nz} = 9 - \bar{n} = 6,354 .$$

4.3.3. System kolejkowy $M/M/1/\text{FIFO}/1+N$

Rozpatrzmy system kolejkowy $M/M/1/\text{FIFO}/1+N$. System ten może znajdować się w stanach

$$E_0, E_1, \dots, E_{1+N}$$

Graf stanów przedstawiono na rysunku 4.9.



Rys. 4.9. Graf stanów dla systemu $M/M/1/\text{FIFO}/1+N$

W stanie ustalonym otrzymamy następujący układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho p_0, \\ p_2 &= \rho^2 p_0, \\ &\vdots \\ p_k &= \rho^k p_0, \\ &\vdots \\ p_{N+1} &= \rho^{N+1} p_0, \end{aligned} \tag{4-138}$$

$$\text{gdzie } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Dla $\rho = 1$

- prawdopodobieństwo stanu, że system jest wolny wynosi:

$$p_0 = \frac{1}{1+N+1} = \frac{1}{N+2} \tag{4-139}$$

- prawdopodobieństwo przebywania w systemie j zgłoszeń w stanie ustalonym jest równe

$$p_j = \frac{1}{N+2}, \quad j = 1, \dots, N+1 \tag{4-140}$$

Dla $\rho \neq 1$ wymienione powyżej prawdopodobieństwa wyliczamy z zależności

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}}, \quad (4-141)$$

$$p_j = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \rho^j, \quad j=1,\dots,N+1 \quad (4-142)$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi wynosi

$$p_{odm} = p_{1+N} = \rho^{N+1} p_0 = \rho^{N+1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \quad (4-143)$$

Względna zdolność obsługi systemu wynosi

$$q = 1 - p_{odm} = 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \rho^{N+1} \quad (4-144)$$

a bezwzględna zdolność obsługi

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \rho^{N+1} p_0\right) \quad (4-145)$$

Średnia ilość zajętych kanałów obsługi jest wyliczana z zależności

$$\bar{m}_0 = \rho \left(1 - p_{N+1}\right) \quad (4-146)$$

Średnia ilość zgłoszeń w kolejce jest określona relacjami

$$\bar{v} = \frac{N(N+1)}{2(N+2)} \quad \text{dla } \rho=1 \quad (4-147)$$

$$\bar{v} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \frac{1-\rho^N [N(1-\rho)+1]}{1-\rho^{N+2}} \quad \text{dla } \rho \neq 1 \quad (4-148)$$

Średni czas oczekiwania w kolejce można wyrazić wzorami

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\lambda} \frac{N(N+1)}{2(N+2)} \quad \text{dla } \rho=1 \quad (4-149)$$

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho^2}{1-\rho} \frac{1-\rho^N [N(1-\rho)+1]}{1-\rho^{N+2}} \quad \text{dla } \rho \neq 1 \quad (4-150)$$

Czas przebywania zgłoszenia w systemie określa się jako

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{\nu}}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \rho (1 - p_{N+1}) \quad (4-151)$$

Średnia liczba niezajętych kanałów obsługi wynosi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^1 (1-n)p_n &= 1 - \bar{m}_0 = 1 - \rho (1 - p_{N+1}) = \\ &= 1 - \rho + \rho p_{N+1} = 1 - \rho + \rho \cdot \rho^{N+1} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+2}} = \\ &= \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+2}} = p_0 \end{aligned} \quad (4-152)$$

4.3.4. Optymalizacja systemu kolejkowego M/M/1/FIFO/1 + N

Rozpatrzmy gabinet stomatologiczny wyposażony w jeden fotel dentystyczny. Zakładamy, że czas obsługi pacjentów przez stomatologów jest zmienną losową niezależną podlegającą rozkładowi wykładniczemu o parametrze μ . Obok gabinetu jest niewielka poczekalnia, której pojemność całkowita wynosi N miejsc nie wliczając miejsca na fotelu dentystycznym.

Pacjenci przybywają do gabinetu zgodnie z rozkładem Poissona o parametrze λ i oczekują na przyjęcie w poczekalni, jeżeli w momencie ich przybycia w poczekalni było co najwyżej $N - 1$ pacjentów. Jeśli wszystkie miejsca w poczekalni są zajęte przybywający pacjenci odchodzą z gabinetu bez uzyskania obsługi i noszą nazwę „utraconych pacjentów”.

Należy zaproponować model adekwatny do rozważonego problemu oraz sformułować zadanie optymalizacji systemu biorąc pod uwagę:

- koszt „utraconego pacjenta” c_1
- koszt przebywania pacjenta w gabinecie, w który wliczony jest czas trwania zabiegu w przeliczeniu na jednego pacjenta i jednostkę czasu c_2 .
- koszty stałe (wynajęcie pomieszczeń, ogrzewanie itd.) na jednostkę czasu c_3 ($N + 1$) + c_4

Należy sformułować również funkcję celu, którą jest średni koszt eksploatacji gabinetu przypadający na jednostkę czasu.

Dla danych liczbowych $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $c_4 = 0$, $\lambda = 1$ obliczyć wartość optymalną N , gdy $\mu = 1$ i $\mu = 1/2$.

Formalizacja matematyczna problemu.

Zaprezentowany problem jest systemem kolejkowym $M/M/1/FIFO/1+N$, gdzie N jest maksymalną ilością pacjentów mogących się znajdować jednocześnie w poczekalni. Graf stanów takiego systemu przedstawiono na rysunku 4.9.

Stan ustalony w takim systemie jest zawsze osiągalny. Zgodnie z tabelą 5-5 wzory na prawdopodobieństwo zdarzenia, że j pacjentów jest w systemie w stanie ustalonym mają postać

- dla $\rho \neq 1$, $p_j = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}} \rho^j$, $j = 0, \dots, N+1$
- dla $\rho = 1$, $p_j = \frac{1}{N+2}$, $j = 0, \dots, N+2$

Średnia ilość pacjentów w systemie może być określona zgodnie z relacją.

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N+1} np_n$$

W zależności od ρ mamy

$$\begin{aligned} - & \quad \rho \neq 1, \quad \bar{n} = \sum_{n=1}^{N+1} n \frac{1-\rho}{1+\rho^{N+2}} \rho^n = p_0 \sum_{n=1}^{N+1} n \cdot \rho^n \\ - & \quad \rho = 1, \quad \bar{n} = \frac{1}{N+2} \sum_{n=1}^{N+1} n = \frac{N+1}{2} \end{aligned} \tag{4-153}$$

Aby wyliczyć \bar{n} dla $\rho \neq 1$ posłużymy się funkcją zmiennej z zdefiniowaną w następujący sposób:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N+1} z^n = \frac{1-z^{N+2}}{1-z} \quad \text{dla } z \neq 1 \tag{4-154}$$

Tak więc

$$zf'(z) = z \left(\sum_{n=1}^{N+1} nz^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{N+1} nz^n . \tag{4-155}$$

Obliczając pochodną funkcji $f(z)$ wyliczamy

$$zf'(z) = z \frac{(1-z)[-(N+2)z^{N+1}] + (1-z^{N+2})}{(1-z)^2} \quad (4-156)$$

Podstawiając $z = \rho$ ($\rho \neq 1$) otrzymujemy

$$\bar{n} = p_0 \rho f'(\rho) = \frac{\rho}{1-\rho} - (N+2) \frac{\rho^{N+2}}{1-\rho^{N+2}} \quad (4-157)$$

Następnie zgodnie z II formułą Little'a wyliczamy średni czas przebywania pacjenta w gabinecie

$$\bar{t}_s = \frac{\text{średnia ilość pacjentów}}{\text{intensywność wejściowa pacjentów}} = \frac{\bar{n}}{\lambda(p_0 + p_1 + \dots + p_{N+1})} = \frac{\bar{n}}{\lambda(1 - p_{N+1})} \quad (4-158)$$

Średnia ilość utraconych pacjentów w jednostce czasu wynosi λp_{N+1} .

Funkcja celu, którą jest średni koszt eksploatacji gabinetu w jednostce czasu, jest określona relacją

$$f(N) = c_1 \lambda p_{N+1} + c_2 \bar{n} + c_3 (N+1) + c_4 \quad (4-159)$$

W ogólnym przypadku zagadnienie optymalizacyjne, polegające na znalezieniu optymalnej ilość miejsc w poczekalni, przy której funkcja kosztów osiąga wartość minimalną jest zagadnieniem trudnym do rozwiązania. Dla-tego też, ograniczymy się do rozważania przykładu liczbowego. Ponieważ $\lambda = \mu = 1$ więc $\rho = 1$ i funkcja celu ma postać

$$f(N) = \frac{1}{N+2} + \frac{N+1}{2} + (N+1) = \frac{2+3(N+1)(N+2)}{2(N+2)} \quad (4-160)$$

Obliczamy pochodną $f'(N)$ i przyrównujemy ją do zera

$$f'(N) = -\frac{1}{(N+2)^2} + \frac{3}{2} = 0, \quad (4-161)$$

$$(N+2)^2 = \frac{2}{3}$$

Stąd $N < 0$ i $f(N)$ jest funkcją rosnącą dla $N > 0$. Tak więc, minimalny koszt eksploatacji otrzymujemy dla $N = 0$ i $f(1) = 2$.

Dla $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$, $\rho = 2$ funkcja celu ma postać

$$f(N) = \frac{2^{N+1}}{2^{N+2}-1} + \left[-2 + (N+2) \frac{2^{N+2}}{2^{N+2}-1} \right] + N + 1 \quad (4-162)$$

Można sprawdzić dokonując pełnego przeglądu wariantów, że minimum jest osiągnięte dla $N = 0$ i $f(1) = 2,33$; gdyż funkcja $f(N)$ jest funkcją rosnącą dla $N > 0$.

4.4. System kolejkowy o nieograniczonej ilości kanałów obsługi $M/M/\infty$.

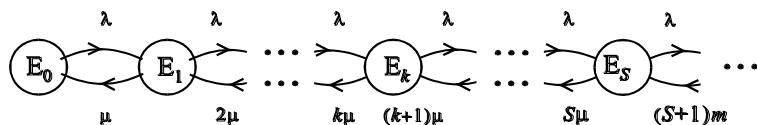
Jeżeli przy formalizacji procesów przemysłowych, posiadających charakter systemów kolejkowych, można uznać ilość kanałów obsługi za nieograniczoną, to nie jest trudno dostrzec, że ogólna formuła równań różniczkowych dla prawdopodobieństw stanów $p_s(t)$, $s = 1, 2, 3, \dots$, w pełni pokrywa się z ogólną formułą równań różniczkowych Chapmana-Kolmogorowa (5-1). Jednakże, nieograniczona ilość kanałów obsługi powoduje, że ilość równań różniczkowych jest nieskończona. Stany, w których może znajdować się system są następujące:

E_0 - wszystkie kanały obsługi są wolne, nie ma zgłoszeń w systemie,
 E_1 - jeden kanał zajęty, jedno zgłoszenie w systemie,

¶

E_k - k -kanałów zajętych, k -zgłoszeń w systemie,
 ¶.

Graf stanów dla tego systemu ma postać jak na rysunku 5-10.



Rys. 4.10. Graf stanów dla systemu $M/M/\infty$

Stosując regułę mnemotechniczną otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned}
 p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\
 p'_1(t) &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\
 &\vdots \\
 p'_s(t) &= \lambda p_{s-1}(t) - (\lambda + s\mu)p_s(t) + (s+1)\mu p_{s+1}(t) \\
 &\vdots \quad s \geq 1.
 \end{aligned} \tag{4-163}$$

Zakładając, że w chwili początkowej w systemie nie było klientów dołączamy warunek początkowy

$$P_0(0) = 1, p_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{4-164}$$

oraz warunek normalizujący

$$\sum_{s=0}^{\infty} p_s(t) = 1 \tag{4-165}$$

Wykorzystując metodę funkcji tworzącej (rozdz. 6-3) możemy znaleźć rozwiązania tego układu równań różniczkowych

$$p_s(t) = \frac{(1-e^{-\mu t})^s}{s!} \rho^s e^{-\rho(1-e^{-\mu t})}, \quad s \geq 0 \tag{4-166}$$

oraz przebieg w czasie średniej liczby zajętych kanałów obsługi

$$\bar{m}_0(t) = \sum_{s=1}^{\infty} s p_s(t) = \rho (1 - e^{-\mu t}) \tag{4-167}$$

Wartości $p_s(t)$ oraz $\bar{m}_0(t)$ w stanie ustalonym znajdziemy przechodząc we wzorach (4-166) i (4-167) do granicy przy $t \rightarrow \infty$.

Otrzymamy wówczas

$$p_s = \lim_{t \rightarrow \infty} p_s(t) = \frac{1}{s!} \rho^s e^{-\rho}, \quad s \geq 0 \tag{4-168}$$

$$\bar{m}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{m}_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho (1 - e^{-\mu t}) = \rho \tag{4-169}$$

Przykład 4-3.

Model problemu absencji chorobowej. Do przychodni zakładowej zgłasza się średnio, w ciągu dnia dwóch pracowników po poradę lekarską. W wyniku badania otrzymują oni zalecenie pozostania średnio trzy dni w domu ze wskazaniem przebywania „w łóżku”.

Zakłada się, że czasy pomiędzy dwoma sąsiednimi zgłoszeniami chorych oraz czasy przebywania na zwolnieniu lekarskim są zmiennymi losowymi niezależnymi, podlegającymi rozkładowi wykładniczemu. Należy zaproponować matematyczny model problemu oraz wyznaczyć wielkości charakteryzujące proces, a w szczególności wielkość n , tzn. średnią ilość pracowników przebywających na zwolnieniu lekarskim.

Łatwo zauważyc, że mamy tutaj do czynienia z modelem $M/M/\infty$ („łóżko” stanowi kanał obsługi i każdy pracownik nim dysponuje). Parametry charakteryzujące system: $\lambda = 2$ przybycia /dzień, $\mu = 1/3$ wyjścia /dzień.

Stan ustalony istnieje zawsze, a prawdopodobieństwo, że system znajduje się w stanie j na podstawie zależności (4-168) wynosi

$$p_j = \frac{\rho^j}{j!} p_0, \quad j \geq 1, \quad (4-170)$$

gdzie

$$p_0 = e^{-\rho}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Średnią ilość chorych wyliczamy z zależności

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} = \\ &= e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} = \rho e^{-\rho} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} = \\ &= \rho e^{-\rho} e^{\rho} = \rho, \end{aligned} \quad (4-171)$$

co jest zgodne z relacją (4-169).

Pozostałe wielkości charakteryzujące pracę systemu obliczamy na podstawie zależności

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \quad (4-172)$$

$$\bar{\nu} = \bar{n} - \rho = \rho - \rho = 0 ,$$

$$\bar{t}_f = 0 . \quad (4-173)$$

Dla danych liczbowych przykładu mamy

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{3}} = 6 ,$$

stąd $\bar{n} = 6$.

4.5. System kolejkowy $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ z niecierpliwymi klientami (z ograniczonym czasem oczekiwania w kolejce)

Rozważmy system kolejkowy przedstawiony w rozdziale 4.2.1 z dodatkowym założeniem, że czas przebywania zgłoszenia w kolejce jest ograniczony i wynosi T_{ocz} . Jeżeli przed upływem tego czasu zgłoszenie nie otrzyma obsługi, opuszcza ono system, co stanowi stratę dla zarządzającego.

Zakłada się, że czas oczekiwania T_{ocz} jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym i funkcji gęstości

$$h(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu t} & \text{dla } t \geq 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0, \end{cases} \quad (4-174)$$

gdzie parametr ν jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do średniego czasu oczekiwania w kolejce

$$\nu = \frac{1}{M [T_{ocz}]} . \quad (4-175)$$

Parametr ν może być interpretowany jako natężenie strumienia zgłoszeń opuszczających poczekalnię bez otrzymania obsługi.

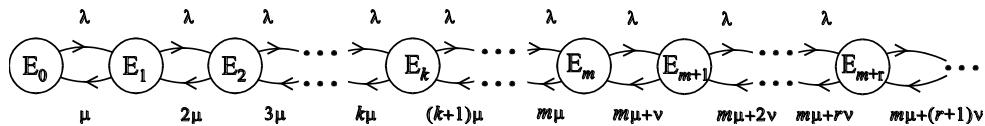
Jest sprawą oczywistą, że przy $\nu \rightarrow \infty$ system mieszany staje się systemem z odmową obsługi zgłoszeń, natomiast przy $\nu \rightarrow 0$ staje się systemem o nieograniczonej kolejce.

Możliwe są następujące stany systemu:

- E_0 - żaden kanał nie jest zajęty (brak zgłoszeń w systemie),
- E_1 - jeden kanał zajęty (żadne zgłoszenie nie oczekuje w poczekalni),
⋮
- E_k - k kanałów jest zajętych (żadne zgłoszenie nie oczekuje w poczekalni),
⋮
- E_m - wszystkie kanały są zajęte (żadne zgłoszenie nie oczekuje w poczekalni),
- E_{m+1} - wszystkie kanały są zajęte (jedno zgłoszenie oczekuje w poczekalni),
⋮
- E_{m+s} - wszystkie kanały są zajęte (s zgłoszeń oczekuje w poczekalni).
⋮

Ilość zgłoszeń w kolejce jest nieograniczona. Zatem, system posiada nieskończoną liczbę stanów, a w konsekwencji jest opisywany nieskończoną ilością równań różniczkowych zwyczajnych.

Graf stanów systemu przedstawiono na rysunku 4.11.



Rys. 4.11. Graf stanów dla systemu $M/M/m/FIFO/\infty$ z nieciepliwymi klientami

Stosując regułę mnemotechniczną otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych opisujących dynamikę tego systemu:

$$\begin{aligned}
p'_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
p'_1(t) &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\
&\vdots \\
p'_k(t) &= \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \\
&\quad 1 \leq k \leq m-1, \\
&\vdots \\
p'_{m+r}(t) &= \lambda p_{m+r-1}(t) - (\lambda + m\mu + r\nu)p_{m+r}(t) + [m\mu + (r+1)\nu]p_{m+r+1}(t), \\
&\vdots .
\end{aligned} \tag{4-176}$$

Równania dotyczące stanu ustalonego otrzymamy przechodząc w równaniach (4-176) do granicy przy $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1, \\
0 &= \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2, \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1}, \\
&\quad 1 \leq k \leq m-1, \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{m-1} - (\lambda + m\mu)p_m + (m\mu + \nu)p_{m+1}, \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{m+r-1} - (\lambda + m\mu + r\nu)p_{m+r} + [m\mu + (r+1)\nu]p_{m+r+1}, \\
&\vdots .
\end{aligned} \tag{4-177}$$

Równania algebraiczne (4-177) uzupełniamy warunkiem normalizującym

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \tag{4-178}$$

Aby znaleźć rozwiązanie tego układu równań, postępujemy analogicznie jak w poprzednich przypadkach.

Dla $k \leq m$ otrzymujemy

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{4-179}$$

Podobnie dla równań o indeksach $k > m$ ($k = m+r$, $r \geq 1$) znajdujemy

$$\begin{aligned}
 p_{m+1} &= \frac{\lambda^{m+1}}{m! \mu^m (m\mu + \nu)} p_0, \\
 p_{m+2} &= \frac{\lambda^{m+2}}{m! \mu^m (m\mu + \nu)(m\mu + 2\nu)} p_0, \\
 &\vdots \\
 p_{m+r} &= \frac{\lambda^{m+r}}{m! \mu^m \prod_{n=1}^r (m\mu + n\nu)} p_0, r \geq 1, \\
 &\vdots .
 \end{aligned} \tag{4-180}$$

Wstawiając zależności (4-179) i (4-180) do wzoru (4-178) wyliczamy prawdopodobieństwo p_0

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m+r}}{m! \mu^m \prod_{n=1}^r (m\mu + n\nu)} \right]^{-1} \tag{4-181}$$

Wprowadzając parametr

$$\beta = \frac{\nu}{\mu} \tag{4-182}$$

wtedy

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, 0 < k \leq m \tag{4-183}$$

$$p_{m+r} = \frac{\frac{\rho^{m+r}}{m!} p_0}{\prod_{n=1}^r (m + n\beta)} \quad r \geq 1$$

gdzie

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{n=1}^r (m + n\beta)} \right]^{-1} \tag{4-184}$$

Znając prawdopodobieństwa wszystkich stanów systemu możemy określić interesujące nas jego parametry, a w szczególności prawdopodobieństwo p_w tego, że zgłoszenie opuści poczekalnię bez otrzymania obsługi ze względu na przekroczenie limitu czasu oczekiwania.

Aby wyznaczyć p_w posłużymy się następującym rozumowaniem. W stanie ustalonym prawdopodobieństwo p_w może być określone jako iloraz średniej liczby zgłoszeń opuszczających poczekalnię w jednostce czasu i średniej liczby zgłoszeń przybywających do systemu w jednostce czasu. W tym celu wyliczymy najpierw średnią liczbę zgłoszeń w poczekalni

$$\bar{v} = \sum_{r=1}^{\infty} rp_{m+r} = \frac{\rho^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\rho^r}{\prod_{n=1}^r (m+n\beta)} \quad (4-185)$$

$$\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{n=1}^r (m+n\beta)}$$

Abytrzymać prawdopodobieństwo p_w należy pomnożyć wielkość \bar{v} przez średnią intensywność rezygnacji z obsługi v i podzielić przez średnią intensywność przybywania zgłoszeń λ , tzn. należy wprowadzić współczynnik

$$\frac{v}{\lambda} = \frac{\mu}{\underline{\lambda}} = \frac{\beta}{\rho} . \quad (4-186)$$

Otrzymujemy ostatecznie zależność

$$p_w = \frac{\frac{\beta}{\rho} \frac{\rho^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\rho^r}{\prod_{n=1}^r (m+n\beta)}}{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho^r}{\prod_{n=1}^r (m+n\beta)}} \quad (4-187)$$

Względną zdolność obsługi systemu określamy z zależności:

$$q = 1 - p_w \quad (4-188)$$

gdzie p_w jest dane wzorem (4-187).

Można zauważyc, że wyrażenia (4-178) oraz (4-188) zawierają nieskończone sumy, które jednak są szybko zbieżne w miarę wzrostu ilości wyrazów. W celu praktycznego wykorzystania tych zależności zamiast sumy nieskończonej, możemy uwzględnić „zgrubną” jej estymację, polegającą na pominięciu składników sumy, począwszy od r -tego wyrazu. Stosuje się najczęściej następujące formuły

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{a^s}{\prod_{n=1}^s (m+n\beta)} < \frac{\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^r e^{\frac{\rho}{\beta}}}{r!} \quad (4-189)$$

lub

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{s\rho^s}{\prod_{n=1}^s (m+n\beta)} < \frac{\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^r e^{\frac{\rho}{\beta}}}{(r-1)!} \quad (4-190)$$

Można zauważyc, że w przypadku, gdy $\beta \rightarrow \infty$ system z ograniczonym czasem oczekiwania staje się systemem z odmową obsługi (zgłoszenie, które zastaje wszystkie kanały zajęte opuszcza system). W drugim przypadku granicznym, tzn. gdy $\beta \rightarrow 0$, zgłoszenie przybywające do systemu nie opuszcza nigdy poczekalni, wówczas $p_w = 0$. Stan ustalony jest osiągnięty wtedy, gdy $\rho < m$.

4.6. Systemy zamknięte

4.6.1. System kolejkowy zamknięty M/M/m/FIFO/N/F

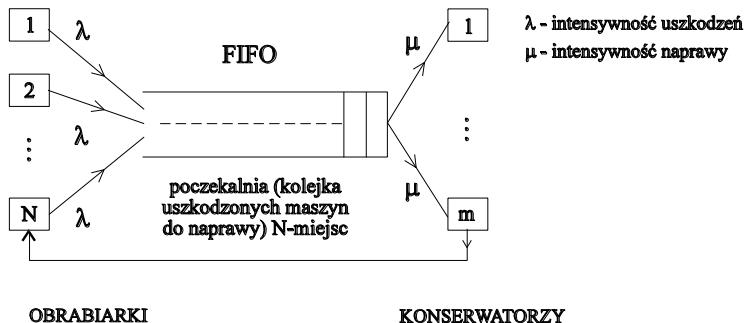
Przy formalizacji procesów przemysłowych typowy jest przypadek, gdy zgłoszenia do obsługi pochodzą od ograniczonej liczby obiektów. Sytuacja taka może się zdarzyć zarówno w przypadku systemu jednokanałowego jak i wielokanałowego. Typowym przykładem takiego systemu, może być grupa m pracowników obsługujących N obrabiarek. Każda obrabiarka, jest źródłem zgłoszeń o intensywności λ , natomiast intensywność obsługi każdego pracownika wynosi μ . Ogólna intensywność zgłoszeń, zależy ściśle od ilości uszkodzonych obrabiarek, czyli jest funkcją stanów układu. Systemy takie, nazywa się często zamkniętymi systemami kolejkowymi.

W klasycznych otwartych systemach obsługi, ilość zgłoszeń jest taka duża, że można zaniedbać wpływ stanu procesu na strumień zgłoszeń.

W rozpatrywanym modelu zakłada się, że ilość zgłoszeń nie przekracza liczby N , natomiast liczba kanałów obsługi wynosi m . Jeżeli $N \leq m$, to

zgłoszenia są obsługiwane bez kolejki, natomiast gdy $N > m$, wówczas $N - m$ zgłoszeń czeka w kolejce na obsługę.

Schemat ideowy takiego systemu przedstawiono na rysunku 4.12.



Rys. 4.12. Schemat ideowy systemu zamkniętego $M/M/m/FIFO/N/F$

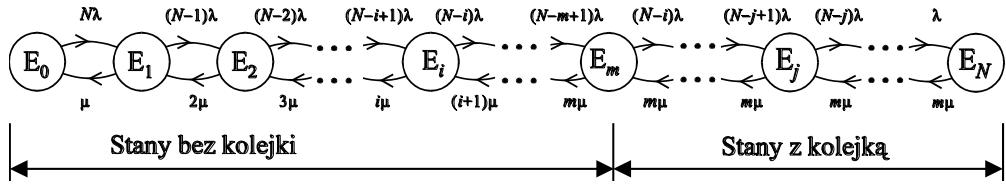
Możliwe są następujące stany systemu:

- E_0 - wszystkie kanały są wolne, brak zgłoszeń w systemie,
- E_1 - jeden kanał zajęty, jedno zgłoszenie w systemie,
- E_2 - dwa kanały zajęte, dwa zgłoszenia w systemie,
- \vdots
- E_i - i kanałów zajętych, i zgłoszeń w systemie,
- \vdots
- E_m - m kanałów zajętych, m zgłoszeń w systemie,
- \vdots
- E_j - m kanałów zajętych, $j-m$ zgłoszeń w kolejce na naprawę,
- \vdots
- E_N - m kanałów zajętych, N zgłoszeń w systemie, $N-m$ zgłoszeń oczekujących na naprawę.

Ze stanu E_0 do E_1 system jest przeprowadzany przez strumień zgłoszeń o intensywności $N\lambda$ (każde źródło ma możliwość zgłoszenia zapotrzebowania na naprawę). Natomiast ze stanu E_1 do E_2 przeprowadza strumień zgłoszeń o intensywności $(N-1)\lambda$, gdyż w stanie E_1 jedno źródło zostało już zgłoszone, możliwość zgłoszeń ma więc $N-1$ źródeł itd.

Intensywność obsługi wynosi: μ dla przejścia $E_1 \rightarrow E_0$, 2μ dla przejścia $E_2 \rightarrow E_1$, $i\mu$ dla przejścia $E_i \rightarrow E_{i-1}$, gdy $0 < i \leq m-1$ oraz $m\mu$ dla przejścia $E_{j+1} \rightarrow E_j$, gdy $m-1 \leq j \leq N-1$

Graf stanów systemu przedstawiono na rysunku 4.13.



Rys. 4.13. Graf stanów dla systemu $M/M/m/\text{FIFO}/N/F$

Stosując regułę mnemotechniczną otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych opisujących dynamikę systemu

$$\begin{aligned}
 p'_0(t) &= -N\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
 p'_1(t) &= N\lambda p_0(t) - [(N-1)\lambda + \mu]p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\
 p'_2(t) &= (N-1)\lambda p_1(t) - [(N-2)\lambda + 2\mu]p_2(t) + 3\mu p_3(t), \\
 &\vdots \\
 p'_i(t) &= (N-i+1)\lambda p_{i-1}(t) - [(N-i)\lambda + i\mu]p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \\
 &1 \leq i \leq m-1, \\
 &\vdots \\
 p'_m(t) &= (N-m+1)\lambda p_{m-1}(t) - [(N-m)\lambda + m\mu]p_m(t) + m\mu p_{m+1}(t), \\
 &\vdots \\
 p'_j(t) &= (N-j+1)\lambda p_{j-1}(t) - [(N-j)\lambda + m\mu]p_j(t) + m\mu p_{j+1}(t), \\
 &m \leq j \leq N-1, \\
 &\vdots \\
 p'_N(t) &= \lambda p_{N-1}(t) - m\mu p_N(t).
 \end{aligned} \tag{4-191}$$

Do systemu równań różniczkowych (2.208) należy dodać warunki początkowe, na przykład

$$p_0(0) = 1 \quad \text{oraz} \quad p_i(0) = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, N, \tag{4-192}$$

a także warunek normalizujący

$$\sum_{s=0}^N p_s(t) = 1 \tag{4-193}$$

W stanie ustalonym otrzymujemy system równań algebraicznych

$$\begin{aligned}
0 &= -N\lambda p_0 + \mu p_1, \\
0 &= N\lambda p_0 - [(N-1)\lambda + \mu]p_1 + 2\mu p_2, \\
0 &= (N-1)\lambda p_1 - [(N-2)\lambda + 2\mu]p_2 + 3\mu p_3, \\
&\vdots \\
0 &= (N-i+1)\lambda p_{i-1} - [(N-i)\lambda + i\mu]p_i + (i+1)\mu p_{i+1}, \\
&\quad 1 \leq i \leq m-1, \\
&\vdots \\
0 &= (N-m+1)\lambda p_{m-1} - [(N-m)\lambda + m\mu]p_m + m\mu p_{m+1}, \\
&\vdots \\
0 &= (N-j+1)\lambda p_{j-1} - [(N-j)\lambda + m\mu]p_j + m\mu p_{j+1}, \\
&\quad m \leq j \leq N-1, \\
&\vdots \\
0 &= \lambda p_{N-1} - m\mu p_N.
\end{aligned} \tag{4-194}$$

Stosując znaną z poprzednich wyprowadzeń metodę postępowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{N}{1} \rho p_0, \\
p_2 &= \frac{N(N-1)}{1 \cdot 2} \rho^2 p_0, \\
&\vdots \\
p_i &= \frac{N(N-1)(N-2) \cdots (N-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i} \rho^i p_0, \\
&\vdots \\
p_m &= \frac{N(N-1)(N-2) \cdots (N-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m} \rho^m p_0, \\
&\vdots \\
p_j &= \frac{N(N-1)(N-2) \cdots (N-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m m^{j-m}} \rho^j p_0, \\
&\vdots \\
p_N &= \frac{1 \cdot 2 \cdots (N-1)N}{1 \cdot 2 \cdots m m^{N-m}} \rho^N p_0.
\end{aligned} \tag{4-195}$$

Wzór (4-195) w formie ogólnej przyjmuje postać

$$p_i = \frac{N!}{i!(N-i)!} \rho^i p_0, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{4-196}$$

$$p_j = \frac{N!}{m! m^{j-m} (N-j)!} \rho^j p_0, \quad m+1 \leq j \leq N$$

Aby wyznaczyć p_0 trzeba wykorzystać wyrażenie (4-193) oraz formuły (4-196). Otrzymamy wówczas

$$\left[\sum_{i=0}^m \frac{N!}{i!(N-i)!} \rho^i + \sum_{j=m+1}^N \frac{N!}{m!(N-j)! m^{j-m}} \rho^j \right] p_0 = 1 ,$$

stąd

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^m \frac{N!}{i!(N-i)!} \rho^i + \sum_{j=m+1}^N \frac{N!}{m!(N-j)! m^{j-m}} \rho^j \right]^{-1} \quad (4-197)$$

Prawdopodobieństwo, że r zgłoszeń oczekuje na obsługę wyliczamy z zależności

$$p_{m+r} = \frac{N! \rho^{m+r}}{m!(N-m-r)! m^r \left[\sum_{i=0}^m \frac{N!}{i!(N-i)!} \rho^i + \sum_{r=0}^{N-m} \frac{N! \rho^{m+r}}{m^r r! (N-m-r)!} \right]} \quad (4-198)$$

Średnia ilość zgłoszeń oczekujących w kolejce \bar{v} wynosi

$$\bar{v} = \sum_{r=0}^{N-m} r p_{m+r} = \frac{N!}{m!} p_0 \sum_{r=0}^{N-m} \frac{r}{m^r (N-m-r)!} \rho^{m+r} \quad (4-199)$$

Średnią ilość zajętych kanałów obsługi, uzyskujemy z zależności

$$\bar{m}_0 = \sum_{r=0}^{m-1} r p_i + m \sum_{k=m}^N p_k = \sum_{i=0}^{m-1} i p_i + m \left(1 - \sum_{i=0}^{m-1} p_i \right) \quad (4-200)$$

Bezwzględną zdolność obsługi systemu podaje wzór

$$A = \bar{m}_0 \cdot \mu \quad (4-201)$$

a średnią ilość zgłoszeń w systemie obliczamy na podstawie zależności

$$\bar{n} = \sum_{i=0}^m i p_i + \sum_{j=m+r}^N j p_j = p_0 N! \left[\sum_{i=0}^m \frac{1}{i!(N-i)!} \rho^i + \sum_{j=m+r}^N \frac{1}{m! m^r (N-j)!} \rho^{m+r} \right] \quad (4-202)$$

lub ze wzoru

$$\bar{n} = N - \frac{\bar{m}_0}{\rho} . \quad (4-203)$$

Średni czas przebywania zgłoszeń w systemie wyliczamy stosując II formułę Little'a

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda(N - \bar{n})} \quad (4-204)$$

natomiast średni czas przebywania zgłoszeń w kolejce określamy w oparciu o I formułę Little'a

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda(N - \bar{n})} = \bar{t}_s - \frac{1}{\mu} \quad (4-205)$$

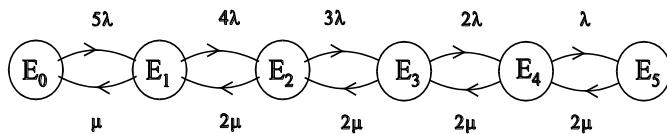
Przykład 4-4.

Dwie książki przypadają na grupę czytelników liczących 5 osób. Przeciętnie do czytelni zgłasza się dwie osoby dziennie (przyjmuje się, że jeden dzień odpowiada 12 godzinom). Średnio każda osoba korzysta z książki przez 6 godzin. Należy określić podstawowe parametry systemu.

Podanym warunkom odpowiadają następujące dane liczbowe: $m = 2$, $N = 5$, $\lambda = 2$. Na podstawie tych danych wyliczamy

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{12}{6} = 2, \\ \rho &= \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$

Graf stanów przedstawiono na rysunku 4.14.



Rys. 4.14. Graf stanów dla przykładu 4-4

W oparciu o wzory (5-196) i (5-197) wyliczamy poszczególne prawdopodobieństwa w stanie ustalonym

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{5!}{1!4!} 1^1 p_0 = 5 p_0 = 0,095; \\
p_2 &= \frac{5!}{2!3!} 1^2 p_0 = 10 p_0 = 0,19; \\
p_3 &= \frac{5!}{2!2!2!} 1^3 p_0 = 15 p_0 = 0,28; \\
p_4 &= \frac{5!}{2!1!2!2!} 1^4 p_0 = 15 p_0 = 0,28; \\
p_5 &= \frac{5!}{2!2!3!} 1^5 p_0 = 7,5 p_0 = 0,14; \\
p_0 &= \frac{1}{1+5+10+15+15+7,5} = 0,019.
\end{aligned}$$

Średnia długość kolejki do książek znajdujących się w czytelni wynosi

$$\bar{v} = \sum_{r=0}^3 r p_{2+r} = 1 \cdot p_3 + 2 p_4 + 3 p_5 = 0,28 + 0,56 + 0,42 = 1,26 \text{ osoby}$$

Średnia ilość książek będących w trakcie czytania przyjmuje wartość

$$\bar{m}_0 = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 (0,19 + 0,56 + 0,14) = 1,87.$$

Absolutna przepustowość systemu, tzn. średnia ilość osób mogących w ciągu 1 dnia (12 godzin) skorzystać z książki wynosi

$$A = \bar{m}_0 \cdot \mu = 1,87 \cdot 2 = 3,74;$$

natomiast średnia ilość zgłoszeń w systemie

$$\bar{n} = 5 - \frac{1,87}{1} = 3,13$$

4.6.2. Optymalizacja systemu kolejkowego M/M/m/FIFO/N/F

Rozpatrzmy zakład reprodukcji graficznej, który dzierżawi N identycznych kserokopiarek ($N \geq 1$). Kserokopiarki te są używane, gdy pracują po-prawnie. W przypadku uszkodzenia wzywany jest do naprawy jeden z m konserwatorów ($m \geq 1$). Przedmiotem naszych zainteresowań jest liczba n_t uszkodzonych kserokopiarek w momencie t :

$$n_t \in \{0, 1, \dots, N\} \text{ i } p_j(t) = p[n_t = j] \quad (4-206)$$

Zakłada się, że:

- każda pracująca kserokopiarka może ulec uszkodzeniu według rozkładu Poissona o parametrze λ ,
- wszystkie kserokopiarki są identyczne,
- czasy trwania naprawy każdej kserokopiarki są zmiennymi losowymi niezależnymi od siebie i podlegają rozkładowi wykładniczemu o wartości średniej $\frac{1}{\mu}$.

Wykorzystując zależności dotyczące tego systemu zawarte w tabeli 5-7 możemy sformułować zagadnienie optymalizacji zakładu reprodukcji tzn. dla założonej ilości kserokopiarek N znaleźć optymalną ilość konserwatorów m_{opt} biorąc pod uwagę:

- koszt pracy konserwatora w jednostce czasu c_1 ,
- koszt niewykorzystania uszkodzonej kserokopiarki c_2 .

Funkcję celu możemy zapisać w postaci

$$f(m) = c_1 \cdot m + c_2 \cdot \bar{n} \rightarrow \min_{m \in C^+} \quad (4-207)$$

gdzie m jest ilością konserwatorów, natomiast n średnią ilością uszkodzonych kserokopiarek.

Uwzględniając zależności zawarte w tabeli 5-7 możemy zapisać wzór (4-207) w postaci

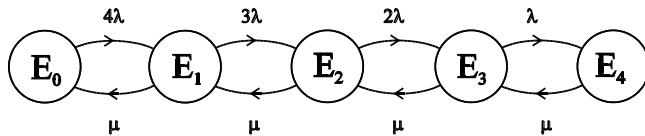
$$f(m) = c_1 \cdot m + \frac{c_2}{1+\rho} \left[\rho N + \frac{m \sum_{j=m+1}^N C_N^j \frac{j! \rho!}{m! m^{j-m}}}{\sum_{j=0}^{m-1} C_N^j \rho^j + \sum_{j=m}^N C_N^j \frac{j! \rho!}{m! m^{j-m}}} \right], \quad (4-208)$$

przy czym $m \in C^+$.

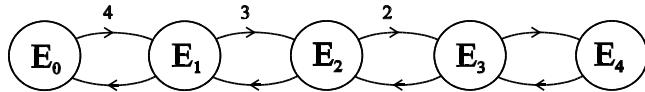
Analizując zależności (4-208) możemy stwierdzić, że zagadnienie optymalizacji w postaci ogólnej jest trudne do rozwiązania. Dlatego też przedstawiony zostanie przypadek szczególny, gdy $c_1 = 1$, $c_2 = 4$ i $N = 4$ oraz $\lambda = \mu = 1$ i dla tego zestawu danych określona zostanie optymalna ilość konserwatorów m_{opt} .

Dla opisanego powyżej zagadnienia szczegółowego zachodzą cztery przypadki, które przedstawiono na rysunku 5.15.

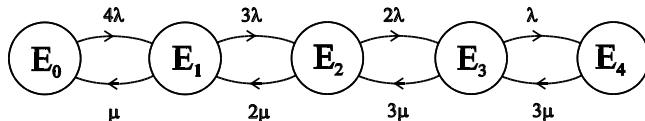
Przypadek 1, $m = 1$



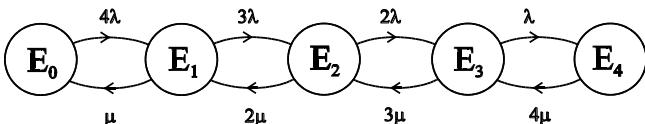
Przypadek 2, $m = 2$



Przypadek 3, $m = 3$



Przypadek 4, $m = 4$



Rys. 4.15. Zestawienie możliwych przypadków

Stosując regułę mnemotechniczną otrzymujemy układ równań różniczkowych opisujący zachowanie się rozważanego systemu w stanie przejściowym obowiązujący dla wszystkich przypadków przedstawionych na rysunku 4.15

$$\begin{aligned}
 p'_0(t) &= -4\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\
 p'_1(t) &= -(3\lambda + \mu)p_1(t) + 4\lambda p_0(t) + (2 \wedge m)\mu p_2(t) \\
 p'_2(t) &= -[2\lambda + (2 \wedge m)\mu]p_2(t) + 3\lambda p_1(t) + +(2 \wedge m)\mu p_3(t) \\
 p'_3(t) &= -[\lambda + (3 \wedge m)\mu]p_3(t) + 2\lambda p_2(t) + m\mu p_4(t) \\
 p'_4(t) &= m\mu p_4(t) + \lambda p_3(t)
 \end{aligned} \tag{4-209}$$

Stosując przejście graniczne dla $t \rightarrow \infty$ oraz znaną z poprzednich rozważań procedurę rekurencyjną otrzymujemy dla stanu ustalonego następujące zależności:

$$\begin{aligned} p_1 &= 4\rho p_0 \\ p_2 &= \frac{3\rho p_1}{2 \wedge m} \\ p_3 &= \frac{2\rho p_2}{3 \wedge m} \\ p_4 &= \frac{\rho p_3}{m} \end{aligned}$$

przy założeniu , że $p_i \geq 0$, $i = 0, \dots, 4$

$$\sum_{i=0}^4 p_i = 1 \quad (4-210)$$

oraz po wyrażeniu każdego prawdopodobieństwa p_i , $i = 1, \dots, 4$ w postaci funkcji p_0 mamy

$$\begin{aligned} p_1 &= 4\rho p_0, \quad p_2 = \frac{4 \cdot 3 \rho^2 p_0}{2 \wedge m}, \quad p_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \rho^3 p_0}{(3 \wedge m)(2 \wedge m)}, \quad p_4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \rho^4 p_0}{m(3 \wedge m)(2 \wedge m)}, \\ &\sum_{i=0}^4 p_i = 1 . \end{aligned} \quad (4-211)$$

Po podstawieniu do wzoru (5-208) danych szczegółowych otrzymujemy funkcję celu o postaci :

$$f(m) = c_1 m + c_2 (p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4) \quad (4-212)$$

przy czym $\rho = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$.

Rozpatrując poszczególne ilości konserwatorów m otrzymujemy :

$$\begin{aligned} m &= 1, \quad p_0 = \frac{1}{65}, \quad f(1) = 1 + 4[4p_0 + 24p_0 + 72p_0 + 96p_0] = 13,06; \\ m &= 2, \quad p_0 = \frac{1}{20}, \quad f(2) = 2 + 4[4p_0 + 12p_0 + 18p_0 + 12p_0] = 11,20; \\ m &= 3, \quad p_0 = \frac{3}{49}, \quad f(3) = 3 + 4\left[4p_0 + 12p_0 + 12p_0 + \frac{16}{3}p_0\right] = 11,16; \\ m &= 4, \quad p_0 = \frac{1}{16}, \quad f(4) = 4 + 4[4p_0 + 12p_0 + 12p_0 + 4p_0] = 12. \end{aligned} \quad (4-213)$$

Stąd łatwo zauważyc, że optymalna ilość konserwatorów $m_{opt} = 3$, dla której wartość funkcji celu (4-212) osiąga wartość minimalną.

5. SYSTEMY KOLEJKOWE Z INDYWIDUALNĄ OBSŁUGĄ

5.1. Model systemu kolejkowego $M/M/m/-m$ z indywidualną obsługą.

System kolejkowy ze stratami charakteryzuje się tym, że zgłoszenia przybywające do niego, w przypadku gdy wszystkie kanały obsługi są zajęte, otrzymują odmowę obsługi. W związku z tym ważnym zagadnieniem dla tego systemu jest jego optymalizacja polegająca na minimalizacji strat wynikających z niemożności obsłużenia wszystkich klientów. Klasyczny system $M/M/m/-m$ zawiera m kanałów obsługi o identycznej zdolności obsługi μ , do których wpływa całkowity strumień zgłoszeń λ . W praktyce rzadko zdarza się sytuacja, aby każde stanowisko obsługi miało tę samą zdolność obsługi. Istotne jest zatem skonstruowanie modelu systemu, który jest w stanie uwzględnić te różnice. Mając do dyspozycji kilka wolnych kanałów obsługi, klienci kierują się z reguły do jednego z nich, lecz jego wybór jest na ogół przypadkowy.

Możemy zatem założyć, że strumień wejściowy λ (średnia liczba klientów przybywających do systemu w jednostce czasu) rozkłada się równomiernie na wszystkie wolne stanowiska obsługi. Otrzymujemy zatem system, w którym do każdego stanowiska obsługi wchodzi strumień o intensywności λ/m . Natomiast każde ze stanowisk posiada indywidualną zdolność obsługi μ_i , $i=1, \dots, m$.

Wprowadźmy oznaczenia:

m - ilość stanowisk obsługi np. liczba kas w supermarketie

λ - intensywność strumienia zgłoszeń (średnia liczba klientów przybywających do systemu w jednostce czasu)

μ_i - zdolność obsługi i -tego stanowiska (średnia liczba obsłużonych klientów w jednostce czasu przez i -te stanowisko)

Mając na uwadze zwartość i przejrzystość uzyskanych wyników wprowadzamy dodatkowo wielkości:

-indywidualną względową intensywność obsługi dla każdego kanału

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \dots, \rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, \dots, \rho_m = \frac{\lambda}{\mu_m} \quad (5-1)$$

-całkowitą zdolność obsługi systemu, (która dla systemu klasycznego wynosi $m\mu$)

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m \quad (5-2)$$

-całkową względną intensywność obsługi systemu

$$\rho = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^m \mu_i} \quad (5-3)$$

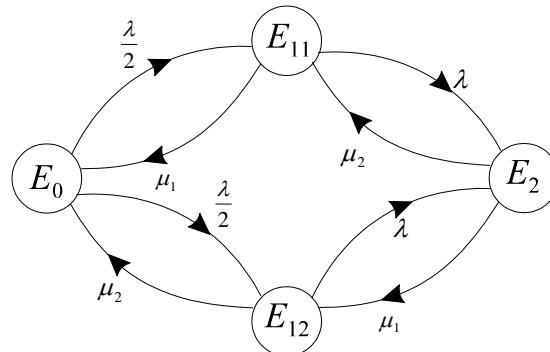
Zanim podamy wzory ogólne dotyczące systemu $M/M/m/-m$ z indywidualną obsługą rozpatrzmy szczegółowo dwa przypadki szczególne: systemu $M/M/2/-2$ i systemu $M/M/3/-3$ z indywidualną obsługą.

5.1.1. System $M/M/2/-2$ z indywidualną obsługą.

Założymy, że każdy z kanałów obsługi tego systemu charakteryzuje się indywidualnymi intensywnościami obsługi: μ_1 dla pierwszego kanału i μ_2 dla drugiego. System ten może znajdować się w jednym z następujących stanów:

- E_0 - wszystkie kanały obsługi wolne
- E_{11} - jeden kanał zajęty i jest to kanał o numerze 1
- E_{12} - jeden kanał zajęty i jest to kanał o numerze 2
- E_2 - dwa kanały obsługi zajęte

Oznaczmy przez p_0 , p_{11} , p_{12} , p_2 - prawdopodobieństwa zdarzeń, że system znajduje się odpowiednio w stanie: E_0 , E_{11} , E_{12} , E_2 .
Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rysunku 5.1



Rys.5.1 Graf stanów dla systemu $M/M/2/-2, (\lambda, \mu_1, \mu_2)$.

Stosując reguły mnemotechniczną do grafu przedstawionego na rysunku 5.1 otrzymujemy dla stanu stacjonarnego następujący układ równań

$$-\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} = 0$$

$$\frac{\lambda}{2} p_0 - (\lambda + \mu_1) p_{11} + \mu_2 p_2 = 0 \quad (5-4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2} p_0 - (\lambda + \mu_2) p_{12} + \mu_1 p_2 &= 0 \\ \lambda p_{11} + \lambda p_{12} - (\mu_1 + \mu_2) p_2 &= 0\end{aligned}$$

Spełnione musi być także warunek normalizujący

$$\sum_{k=0}^2 p_k = 1 \quad (5-5)$$

przy czym oczywisty jest warunek, że

$$p_1 = p_{11} + p_{12} \quad (5-6)$$

Układ równań (5-4) zapisujemy w postaci macierzowej, zastępując jedno z równań tego układu np. czwarte przez warunek normalizujący. Otrzymujemy wówczas

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & -(\lambda + \mu_1) & 0 & \mu_2 \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \mu_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5-7)$$

Rozwiązujeć układ równań (5-7) mamy:

$$p_0 = \frac{2}{2 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2}$$

$$p_{11} = \frac{1}{\binom{2}{1}} \rho_1 p_0$$

$$p_{12} = \frac{1}{\binom{2}{1}} \rho_2 p_0 \quad (5-8)$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 p_0$$

$$p_1 = p_{11} + p_{12} = \frac{1}{\binom{2}{1}} (\rho_1 + \rho_2) p_0$$

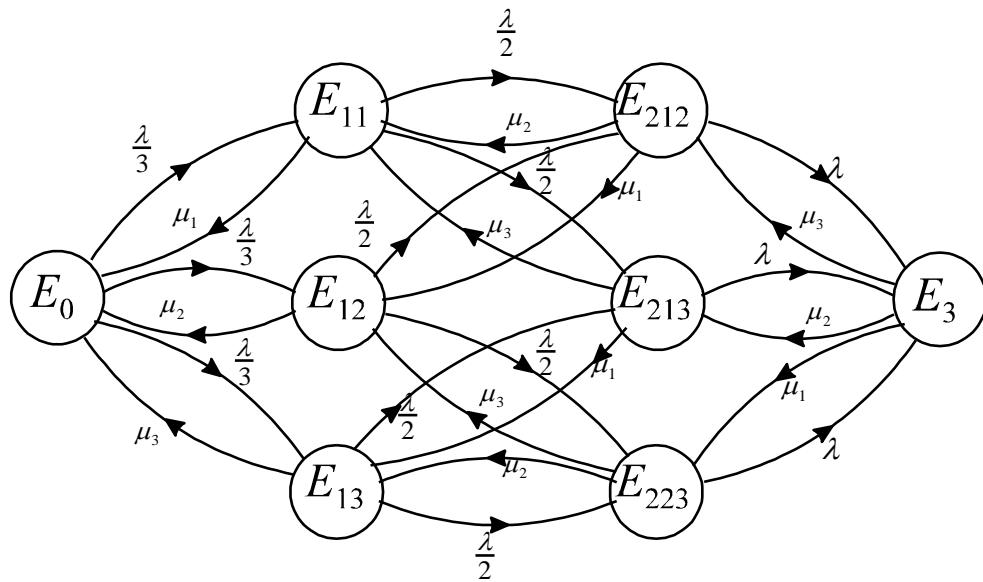
gdzie $\binom{n}{k}$ oznacza symbol Newtona.

5.1.2. System $M/M/3/-3$ z indywidualną obsługą.

Powtórzmy obecnie całą procedurę dla systemu z trzema indywidualnymi kanałami obsługi o parametrach: μ_1, μ_2, μ_3 . System ten może przebywać w jednym z następujących stanów:

- E_0 - wszystkie kanały obsługi wolne
- E_{11} - jeden zajęty; pierwszy
- E_{12} - jeden zajęty; drugi
- E_{13} - jeden zajęty; trzeci
- E_{212} - dwa zajęte; pierwszy i drugi
- E_{213} - dwa zajęte; pierwszy i trzeci
- E_{223} - dwa zajęte; drugi i trzeci
- E_3 - trzy zajęte

Każdemu stanowi systemu przyporządkujemy odpowiednie prawdopodobieństwo jego wystąpienia. Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rysunku 5.2.



Rys.5.2. Graf stanów dla systemu $M/M/3/-3, (\lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$

Na podstawie grafu przedstawionego na rysunku 5.2 stosując regułę mnemotechniczną dla stanu stacjonarnego otrzymujemy układ równań algebraicznych wiążących ze sobą poszukiwane prawdopodobieństwa.

$$\begin{aligned}
-\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} + \mu_3 p_{13} &= 0 \\
\frac{\lambda}{3} p_0 - (\mu_1 + \lambda) p_{11} + \mu_2 p_{212} + \mu_3 p_{213} &= 0 \\
\frac{\lambda}{3} p_0 - (\mu_2 + \lambda) p_{12} + \mu_1 p_{212} + \mu_3 p_{223} &= 0 \\
\frac{\lambda}{3} p_0 - (\mu_3 + \lambda) p_{13} + \mu_1 p_{213} + \mu_2 p_{223} &= 0 \\
\frac{\lambda}{2} p_{11} + \frac{\lambda}{2} p_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_{212} + \mu_3 p_3 &= 0 \\
\frac{\lambda}{2} p_{11} + \frac{\lambda}{2} p_{13} - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda) p_{213} + \mu_2 p_3 &= 0 \\
\frac{\lambda}{2} p_{12} + \frac{\lambda}{2} p_{13} - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_{223} + \mu_1 p_3 &= 0 \\
\lambda p_{212} + \lambda p_{213} + \lambda p_{223} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) p_3 &= 0
\end{aligned} \tag{5-9}$$

Spełniony musi być warunek normalizujący

$$\sum_{k=0}^3 p_k = 1 \tag{5-10}$$

Wiemy ponadto, że

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} \\ p_2 = p_{212} + p_{213} + p_{223} \end{array} \right\} \tag{5-11}$$

Zastępując ostatnie równanie w układzie równań (5-9) przez warunek normalizujący (5-10) i stosując zapis macierzowy otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} -\lambda & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{3} & -(\lambda + \mu_1) & 0 & 0 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{3} & 0 & -(\lambda + \mu_2) & 0 & \mu_1 & 0 & \mu_3 & 0 \\ \frac{\lambda}{3} & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_3) & 0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & 0 & \frac{\lambda}{2} & 0 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_3) & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2 + \mu_3) & \mu_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} p_0 \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{212} \\ p_{213} \\ p_{223} \\ p_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \tag{5-12}$$

Rozwiązań układu równań (5-12) ma postać:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{6}{6 + 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_3} \\
p_{11} &= \frac{1}{\binom{3}{1}} \rho_1 p_0 \\
p_{12} &= \frac{1}{\binom{3}{2}} \rho_2 p_0 \\
p_{13} &= \frac{1}{\binom{3}{1}} \rho_3 p_0 \\
p_{212} &= \frac{1}{2! \binom{3}{2}} \rho_1 \rho_2 p_0 \\
p_{213} &= \frac{1}{2! \binom{3}{2}} \rho_1 \rho_3 p_0 \\
p_{223} &= \frac{1}{2! \binom{3}{2}} \rho_2 \rho_3 p_0 \\
p_3 &= \frac{1}{3!} \rho_1 \rho_2 \rho_3 p_0
\end{aligned} \tag{5-13}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_{11} + p_{12} + p_{13} = \frac{1}{\binom{3}{1}} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) p_0 \\
p_2 &= p_{212} + p_{213} + p_{223} = \frac{1}{2! \binom{3}{2}} (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3) p_0
\end{aligned} \tag{5-14}$$

5.1.3. Uogólnienie otrzymanych wyników na system $M/M/m/-/m$ z indywidualną obsługą.

Po szczegółowej analizie otrzymanych wzorów dla systemów $M/M/2/-2$ i $M/M/3/-3$ z indywidualną obsługą można uogólnić uzyskane rozwiązanie na m - kanałowy system obsługi.

Zachowując dotychczasowe oznaczenia mamy:

$$p_0 = \frac{m!}{m! + \sum_{k=1}^m (m-k)! S K_m^k} \tag{5-15}$$

Prawdopodobieństwa zajęcia jednego kanału obsługi wynoszą:

$$\begin{aligned}
p_{1j_1} &= \frac{1}{m \choose 1} \rho_{j_1} p_0 \\
p_{1j_2} &= \frac{1}{m \choose 1} \rho_{j_2} p_0 \\
&\vdots \\
p_{1j_k} &= \frac{1}{m \choose 1} \rho_{j_k} p_0 \\
&\vdots \\
p_{1j_m} &= \frac{1}{m \choose 1} \rho_{j_m} p_0
\end{aligned} \tag{5-16}$$

gdzie p_{1j_k} oznacza prawdopodobieństwo zajęcia jednego stanowiska o numerze j_k .

$$p_1 = \sum_{k=1}^{m \choose 1} p_{1j_k} = p_0 \sum_{k=1}^{m \choose 1} \rho_{j_k} = \frac{p_0}{1! {m \choose 1}} SK_m^1 \tag{5-17}$$

Prawdopodobieństwo zajęcia dwóch kanałów obsługi o numerach j_k i j_n ma postać:

$$\begin{aligned}
p_{2j_1j_2} &= \frac{1}{2! {m \choose 2}} \rho_{j_1} \rho_{j_2} p_0 \\
p_{2j_1j_3} &= \frac{1}{2! {m \choose 2}} \rho_{j_1} \rho_{j_3} p_0 \\
&\vdots \\
p_{2j_kj_n} &= \frac{1}{2! {m \choose 2}} \rho_{j_k} \rho_{j_n} p_0
\end{aligned} \tag{5-18}$$

Prawdopodobieństwo zajęcia dwóch dowolnych kanałów obsługi wyraża się wzorem

$$p_2 = \sum_{\substack{k,n=1 \\ k \neq n}}^{m \choose 2} p_{2j_kj_n} = \frac{p_0}{2! {m \choose 2}} SK_m^2 \tag{5-19}$$

Prawdopodobieństwo zajęcia i kanałów obsługi o numerach j_1, \dots, j_i wynosi

$$p_{i,j_1,\dots,j_i} = \frac{1}{i! {m \choose i}} \rho_{j_1} \dots \rho_{j_i} p_0 \tag{5-20}$$

i ogólnie, że zajętych jest i dowolnych kanałów obsługi

$$p_i = \sum_{\substack{k_1, L, k_i=1 \\ k_1 \neq L \neq k_i}}^{\binom{m}{i}} p_{i j_1, \dots, j_i} = \frac{p_0}{i! \binom{m}{i}} SK_m^i \quad (5-21)$$

Prawdopodobieństwo zaistnienia m -tego stanu ma postać

$$p_m = \frac{p_0}{m!} \prod_{k=1}^m \rho_k \quad (5-22)$$

We wzorach (5-15), (5-17), (5-19) i (5-21) użyto symbolu SK_m^k , którego sens zostanie obecnie wyjaśniony. Zrobimy to na przykładzie SK_4^2 .

Jeżeli mamy zbiór m -elementowy to możemy z niego utworzyć k -elementowe kombinacje bez powtórzeń ($k \leq m$). W rozważanym przykładzie $k = 2$, $m = 4$. Mamy zatem zbiór czteroelementowy $\Omega = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$. Dwuelementowymi kombinacjami bez powtórzeń elementów zbioru Ω są :

$$\{\rho_1, \rho_2\}, \{\rho_1, \rho_3\}, \{\rho_1, \rho_4\}, \{\rho_2, \rho_3\}, \{\rho_2, \rho_4\}, \{\rho_3, \rho_4\} \quad (5-23)$$

Każdej kombinacji bez powtórzeń elementów zbioru przyporządkowujemy iloczyny zgodnie ze schematem:

$$\begin{aligned} \{\rho_1, \rho_2\} &\rightarrow \rho_1 \rho_2 \\ \{\rho_1, \rho_3\} &\rightarrow \rho_1 \rho_3 \\ \{\rho_1, \rho_4\} &\rightarrow \rho_1 \rho_4 \\ \{\rho_2, \rho_3\} &\rightarrow \rho_2 \rho_3 \\ \{\rho_2, \rho_4\} &\rightarrow \rho_2 \rho_4 \\ \{\rho_3, \rho_4\} &\rightarrow \rho_3 \rho_4 \end{aligned} \quad (5-24)$$

Po wyliczeniu sumy wszystkich iloczyń otrzymujemy wynik będący odpowiednikiem wyrażenia oznaczonego w/w symbolem. Tak więc

$$SK_4^2 = \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_1 \rho_4 + \rho_2 \rho_3 + \rho_2 \rho_4 + \rho_3 \rho_4 \quad (5-25)$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi wynosi

$$p_{\text{odm}} = p_m \frac{p_0}{m!} \prod_{k=1}^m \rho_k \quad (5-26)$$

Względna zdolność obsługi jest określona wyrażeniem

$$q = 1 - p_m \quad (5-27)$$

natomiast bezwzględna zdolność obsługi systemu wynosi

$$B = \lambda q = \lambda(1 - p_m) \quad (5-28)$$

Średnią ilość zajętych kanałów obsługi \bar{m}_0 , która dla systemu ze stratami jest równa średniej ilości zgłoszeń przebywających w systemie wyliczamy ze wzoru

$$\bar{m}_0 = \bar{n} = \sum_{k=0}^m kp_k \quad (5-29)$$

Ze względu na duży stopień komplikacji tego szeregu znalezienie wzoru ogólnego jest bardzo trudne. Ponieważ jest to szereg skończony, możemy go wyliczyć na podstawie wyznaczonych już uprzednio wartości prawdopodobieństw p_0, \dots, p_m .

5.1.4. Porównanie modelu klasycznego z modelem z indywidualną obsługą

Aby przekonać się jaki błąd popełniamy stosując model klasyczny dokonujemy porównania z modelem z indywidualną obsługą, przyjmując następujące wartości parametrów

-dla systemu ze stratami z indywidualną obsługą :

$$\lambda = 1, m = 3, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3, \mu_3 = 4, \rho_1 = \frac{1}{2}, \rho_2 = \frac{1}{3}, \rho_3 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{-dla systemu klasycznego: } \lambda = 1, \mu = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} = 3, \rho = \frac{1}{3}$$

Przy obliczeniach błędu za poprawne uznajemy wyniki otrzymane w oparciu o model systemu z indywidualną obsługą. Dlatego też błąd jest wyliczany zgodnie ze wzorem

$$\delta = \frac{W_{\text{klas}} - W_{\text{ind}}}{W_{\text{ind}}} \cdot 100\% \quad (5-30)$$

gdzie: W_{klas} – wielkość obliczana na podstawie modelu klasycznego

W_{ind} – wielkość obliczana na podstawie modelu z indywidualną obsługą.
Wyniki obliczeń dla obu modeli zgrupowano w tabeli 5-1

Tabela 5-1 Zestawienie wyników obliczeń

Wielkość	Model klasyczny	Model indywidualny	Błąd $\delta [\%]$
p_0	0,716814	0,669029	2,54
p_1	0,238938	0,252427	-5,34
p_2	0,039823	0,043689	-8,84
p_3	0,004424	0,004854	-8,85
q	0,995575	0,995145	0,04
A	0,995575	0,995145	0,04
\bar{n}	0,331858	0,354368	-6,35

Analizując wyniki przedstawione w tabeli I zauważamy, że przy wyliczaniu niektórych parametrów charakteryzujących system popełniamy błędy nie przekraczające w rozważanym przykładzie 10%. Oznacza to, że systemy z uśrednionymi parametrami obsługi są przybliżeniem rzeczywistości. Należy zwrócić uwagę na fakt, że przy dużych kosztach funkcjonowania kanałów obsługi różnice te mogą być źródłem dużych strat. Z tego też powodu stosowanie modeli systemów z indywidualną obsługą pomimo ich dużej złożoności jest w pełni uzasadnione.

5.2. Model systemu kolejkowego $M/M/m/FIFO/\infty$ z indywidualną obsługą

5.2.1 Charakterystyka systemu $M/M/m/FIFO/\infty$

Systemy kolejkowe znajdują coraz częściej zastosowania przy projektowaniu i doskonaleniu struktur organizacyjnych występujących w administracji cywilnej i wojskowej, służbie zdrowia, handlu, transporcie, a także przy badaniu niezawodności złożonych urządzeń i kompleksów operacji.

Klasyczny system kolejkowy $M/M/m/FIFO/\infty$ posiada poczekalnię z nieskończoną liczbą miejsc, a zatem jest systemem z nieograniczonym czasem oczekiwania na obsługę. Każdy klient zgłoszający się do systemu zostanie obsłużony, natomiast istotnym problemem jest jak długo będzie musiał czekać na obsługę. Zakłada się, że klienci nie mogą rezygnować z obsługi podczas oczekiwania w kolejce.

W optymalizacji strukturalnej tego systemu ważnym parametrem jest średni czas oczekiwania zgłoszeń w kolejce. Powinien on być relatywnie mały, lecz aby to osiągnąć należy użyć wielu bardzo szybkich kanałów obsługi, co może pociągnąć za sobą znaczne koszty.

Klasyczny model systemu $M/M/m/FIFO/\infty$ zawiera m kanałów obsługi o identycznej zdolności obsługi μ , do których wpływa całkowity strumień zgłoszeń λ . W praktyce rzadko zdarza się sytuacja, aby każde stanowisko

obsługi miało tę samą zdolność obsługi. Istotne jest zatem zbudowanie modelu systemu, który jest w stanie uwzględnić te różnice.

Mając do dyspozycji kilka wolnych kanałów obsługi, klienci kierują się z reguły do jednego z nich, lecz jego wybór jest na ogólny przypadkowy.

Możemy zatem założyć, że strumień wejściowy λ rozkłada się równomiernie na wszystkie wolne stanowiska obsługi. Tak więc do każdego stanowiska obsługi wchodzi strumień o intensywności λ/m , natomiast każde z nich posiada indywidualną zdolność obsługi μ_i , $i = 1, \dots, m$.

Niech:

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i} \quad i = 1, \dots, m, \quad (5-31)$$

Zanim podamy wzory ogólne dotyczące systemu $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ z indywidualną obsługą rozpatrzymy dwa przypadki szczególne: systemu $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ dla $m=2$ i $m=3$.

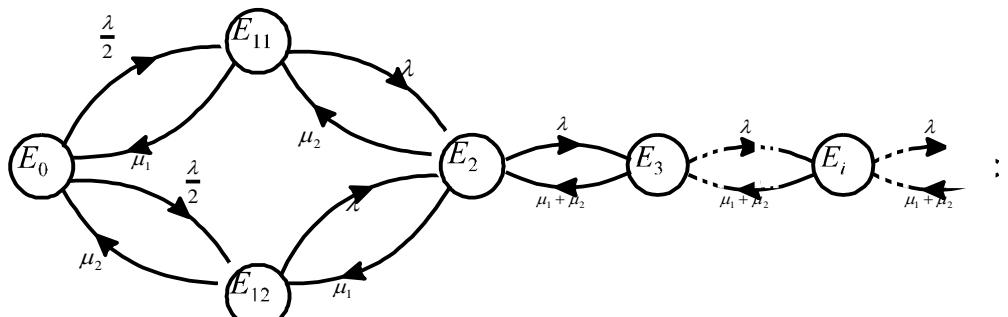
5.2.2. System $M/M/2/\text{FIFO}/\infty$ z indywidualną obsługą.

W systemie tym są dwa kanały obsługujące zgłoszenia charakteryzujące się indywidualnymi intensywnościami obsługi: μ_1 dla pierwszego kanału i μ_2 dla drugiego. System ten może znajdować się w jednym z następujących stanów:

- E_0 - wszystkie kanały obsługi wolne,
- E_{11} - jeden kanał zajęty (kanał o numerze 1),
- E_{12} - jeden kanał zajęty (kanał o numerze 2),
- E_2 - dwa kanały obsługi zajęte,
- E_3 - dwa kanały zajęte, jedno zgłoszenie w poczekalni, ... ,
- E_i - dwa kanały obsługi zajęte, ($i-2$) zgłoszeń w poczekalni, ...

Stany E_0 , E_{11} , E_{12} , E_2 , są stanami bez kolejki, natomiast E_3 , E_4 , ..., E_i , ... są stanami z kolejką.

Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Graf stanów dla modelu $M/M/2/\text{FIFO}/\infty$ z indywidualną obsługą.

Każdemu stanowi przyporządkowujemy odpowiednie prawdopodobieństwo. Tak więc p_i jest prawdopodobieństwem tego, że system znajduje się w stanie E_i .

Stosując regułę mnemotechniczną [1] do grafu przedstawionego na rys. 5.3 otrzymujemy dla stanu stacjonarnego następujący układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} &= 0 \\ 0,5\lambda p_0 - (\lambda + \mu_1) p_{11} + \mu_2 p_2 &= 0 \\ 0,5\lambda p_0 - (\lambda + \mu_2) p_{12} + \mu_1 p_2 &= 0 \\ \lambda p_1 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_2 + (\mu_1 + \mu_2) p_3 &= 0 \\ \lambda p_2 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_3 + (\mu_1 + \mu_2) p_4 &= 0 \\ \cdots & \\ \lambda p_{i-1} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_i - (\mu_1 + \mu_2) p_{i+1} &= 0 \quad i \geq 3 \\ \cdots & \end{aligned} \quad (5-32)$$

Spełniony musi być także warunek normalizujący:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \quad (5-33)$$

gdzie $p_1 = p_{11} + p_{12}$

Rozwiążując układ równań (5-32) z ostatnim równaniem zastąpionym przez warunek normalizujący otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{\rho_1}{2} p_0 & p_{12} &= \frac{\rho_2}{2} p_0 & p_1 &= \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} p_0 \\ p_2 &= \frac{\rho_1 \rho_2}{2} p_0, & p_i &= \frac{\lambda^i}{2\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)^{i-2}} p_0, & i &\geq 3 \end{aligned} \quad (5-34)$$

Prawdopodobieństwo p_0 wyliczamy z warunku normalizującego zakładając, że suma nieskończona jest zbieżna tzn. spełniony jest warunek ergodyczności $\frac{SK_2^2}{SK_2^1} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} < 1$

$$p_0 = \frac{2(\rho_1 + \rho_2 - \rho_1 \rho_2)}{2(\rho_1 + \rho_2) + \rho_1^2 + \rho_2^2} \quad (5-35)$$

5.2.3. System M/M/3/FIFO/∞ z indywidualną obsługą.

W systemie tym są trzy kanały obsługujące zgłoszenia o indywidualnych intensywnościach obsługi: μ_1, μ_2, μ_3 .

System ten może znajdować się w jednym z następujących stanów:

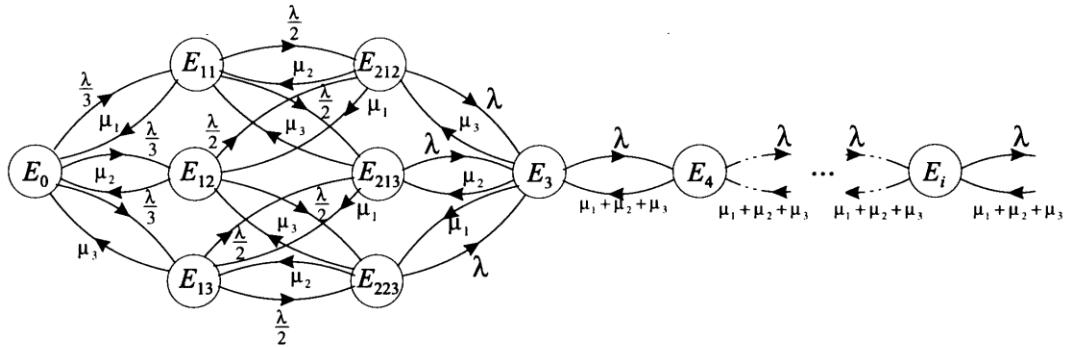
E_0 - wszystkie kanały obsługi wolne,

E_{11} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 1),

E_{12} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 2),

- E_{13} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 3),
 E_{212} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 1 i 2),
 E_{213} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 1 i 3),
 E_{223} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 2 i 3),
 E_3 - trzy kanały obsługi zajęte, brak zgłoszeń w poczekalni,
 E_4 - trzy kanały obsługi zajęte, jedno zgłoszenie w poczekalni,..
 $.E_i$ - trzy kanały obsługi zajęte, ($i-3$) zgłoszeń w poczekalni, ...

Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rys. 5.4.



Rys. 5.4. Graf stanów dla modelu $M/M/3/FIFO/\infty$ z indywidualną obsługą.

Stosując regułę mnemotechniczną do tego grafu otrzymujemy dla stanu stacjonarnego układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned}
 -\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} + \mu_3 p_{13} &= 0 \\
 \lambda / 3 p_0 - (\mu_1 + \lambda) p_{11} + \mu_2 p_{212} + \mu_3 p_{213} &= 0 \\
 \lambda / 3 p_0 - (\mu_2 + \lambda) p_{12} + \mu_1 p_{212} + \mu_3 p_{223} &= 0 \\
 \lambda / 3 p_0 - (\mu_3 + \lambda) p_{13} + \mu_2 p_{213} + \mu_1 p_{223} &= 0 \\
 \lambda / 2 p_{11} + \lambda / 2 p_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_{212} + \mu_3 p_2 &= 0 \\
 \lambda / 2 p_{11} + \lambda / 2 p_{13} - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda) p_{213} + \mu_2 p_3 &= 0 \\
 \lambda / 2 p_{12} + \lambda / 2 p_{13} - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_{223} + \mu_1 p_3 &= 0 \\
 \lambda p_{212} + \lambda p_{213} + \lambda p_{223} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_3 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) p_4 &= 0 \\
 \hline
 \lambda p_{i-1} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_i + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) p_{i+1} &= 0 \quad i \geq 3
 \end{aligned} \tag{5-36}$$

Spełniony musi być także warunek normalizujący:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1, \tag{5-37}$$

gdzie $p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13}$, $p_2 = p_{212} + p_{213} + p_{223}$

Rozwiążanie układu równań (5-36) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{\lambda}{\binom{3}{1}\mu_1} p_0 & p_{12} &= \frac{\lambda}{\binom{3}{1}\mu_2} p_0 & p_{13} &= \frac{\lambda}{\binom{3}{1}\mu_3} p_0, \\
p_{212} &= \frac{\lambda^2}{\binom{3}{2}\mu_1\mu_2} p_0 & p_{213} &= \frac{\lambda^2}{2!\binom{3}{2}\mu_1\mu_3} p_0 & p_{223} &= \frac{\lambda^2}{2!\binom{3}{2}\mu_2\mu_3} p_0 \\
p_3 &= \frac{\lambda^3}{2!\binom{3}{2}\mu_1\mu_2\mu_3} p_0 \\
&&&&&\vdots \\
p_4 &= \frac{\rho_1\rho_2\rho_3\lambda}{2!\binom{3}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)} p_0 \\
&&&&&\vdots \\
p_i &= \frac{\rho_1\rho_2\rho_3\lambda^{i-3}}{2!\binom{3}{2}\mu_1\mu_2\mu_3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)^{i-3}} p_0, \quad \text{dla } i \geq 3 \\
&&&&&\vdots
\end{aligned} \tag{5-38}$$

Ponadto możemy zapisać

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{\binom{3}{1}} p_0 = \frac{SK_3^1}{\binom{3}{1}} p_0$$

$$p_2 = p_{212} + p_{213} + p_{223} = \frac{\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3}{2!\binom{3}{2}} p_0 = \frac{SK_3^2}{2!\binom{3}{2}} p_0$$

Wielkość p_0 wyliczona z warunku normalizującego przy założeniu, że warunek ergodyczności $\frac{SK_m^m}{SK_{m-1}^{m-1}} = \frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3} < 1$ jest spełniony, wynosi

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3} + \frac{\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3}{6} + \frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{6} \frac{\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3}{\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 - \rho_1\rho_2\rho_3} \right]^{-1}$$

5.2.4. Uogólnienie otrzymanych wyników na system $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ z indywidualną obsługą

Analizując systemy $M/M/2/\text{FIFO}/\infty$ oraz $M/M/3/\text{FIFO}/\infty$ możemy zauważać pewne analogie w uzyskanych wynikach. Możemy więc uogólnić powyższe wzory na system $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$.

Prawdopodobieństwo, że jeden kanał jest zajęty wynosi:

$$p_{1,j} = \frac{\lambda}{\binom{m}{1}\mu_j} p_0 ; 1 \leq j < m \quad (5-39)$$

Prawdopodobieństwo, że dwa kanały i, j są zajęte wynosi:

$$p_{2,i,j} = \frac{\lambda^2}{2!\binom{m}{2}\mu_i\mu_j} p_0 ; 1 \leq i, j < m \quad (5-40)$$

Ogólnie, prawdopodobieństwo, że i kanałów jest zajętych wynosi

$$p_{i,j_1,j_2,\dots,j_i} = \frac{\lambda^i}{i!\binom{m}{i}\mu_{j_1}\cdot\mu_{j_2}\cdot\dots\cdot\mu_{j_i}} p_0 ; 1 \leq i < m \quad (5-41)$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{m!\mu_1\mu_2\cdot\dots\cdot\mu_m(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m)^{i-m}} p_0 \quad i \geq m \quad (5-42)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$p_i = \frac{SK_m^i}{i!\binom{m}{i}^{i-m}} p_0 \quad 1 \leq i < m \quad (5-43)$$

$$p_i = \frac{SK_m^i}{i!(SK_m^{m-1})^{i-m}} p_0 \quad i \geq m \quad (5-44)$$

Prawdopodobieństwo p_0 wyliczamy z warunku normalizującego

$$p_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{SK_m^i}{i!\binom{m}{i}^{i-m}} p_0 + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(SK_m^m)^{i-m+1}}{m!(SK_m^{m-1})^{i-m}} p_0 = 1 \quad (5-45)$$

Druga suma po wyciągnięciu przed znak sumy pewnych wyrażeń i po podstawieniu za $i-m=j$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie

$$q = \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}}$$

Suma ta jest zbieżna, gdy iloraz $q < 1$ i wynosi

$$p_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} + \frac{SK_m^m SK_m^{m-1}}{m! (SK_m^{m-1} - SK_m^m)} \right]^{-1} \quad \text{gdy} \quad \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} < 1 \quad (5-46)$$

Średnia liczba zajętych kanałów obsługi \bar{m}_0 jest określona wzorem

$$\bar{m}_0 = \frac{m SK_m^m}{SK_m^{m-1}} = \frac{m \lambda}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m} \quad \text{dla} \quad \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} < 1 \quad (5-47)$$

Średnia liczba zgłoszeń oczekujących w kolejce \bar{v} wynosi

$$\bar{v} = \frac{(SK_m^m)^2}{m! SK_m^{m-1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}}\right)^2} p_0 \quad \text{dla} \quad \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} < 1 \quad (5-48)$$

Średni czas oczekiwania zgłoszeń w kolejce \bar{t}_f jest określony zależnością

$$\bar{t}_f = \frac{SK_m^m}{m! \mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}}\right)^2} p_0 \quad (5-49)$$

Średni czas przebywania zgłoszenia w systemie \bar{t}_s można wyliczyć z II formuły Little'a

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\bar{v} + \bar{m}_0 \right) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{SK_m^{m-1}}{m! \left(\frac{SK_m^{m-1}}{SK_m^m} - 1 \right)^2} p_0 + \frac{m SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right] \quad (5-50)$$

Można zauważyć, że:

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \bar{t}_0 \quad (5-51)$$

gdzie \bar{t}_0 jest średnim czasem obsługi klienta.

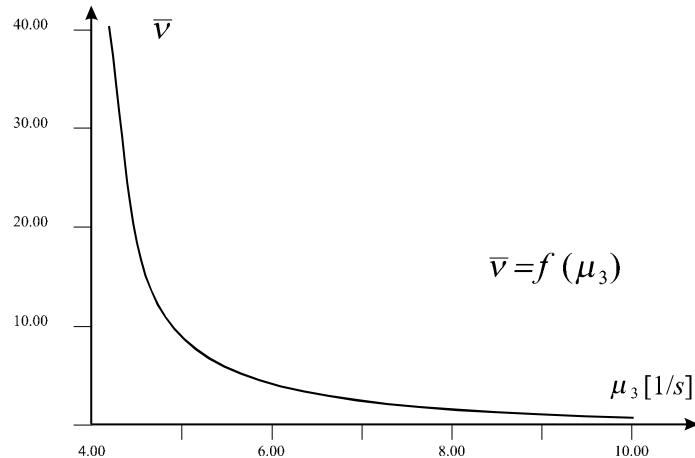
$$\bar{t}_0 = \frac{\bar{m}_0}{\lambda} \quad (5-52)$$

5.2.5. Wykresy podstawowych parametrów modelu $M/M/m/FIFO/\infty$ z indywidualną obsługą

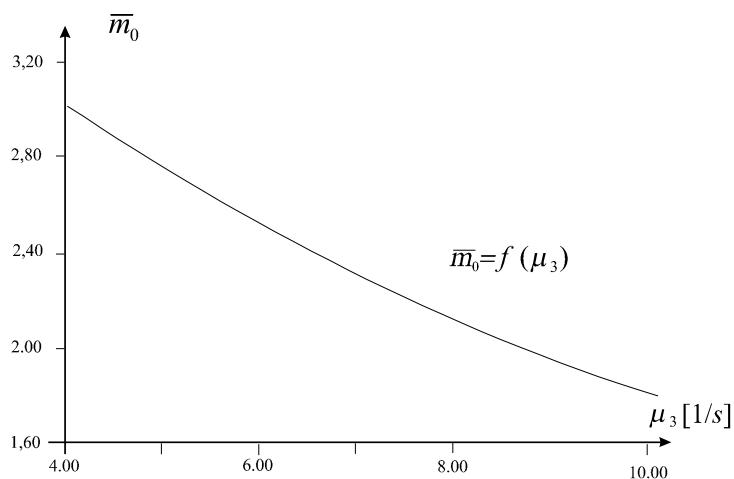
Wykresy zależności podstawowych parametrów jako funkcje zdolności obsługi jednego z kanałów np. μ_3 są przedstawione na rys. 5.5÷5.8.

Przyjmijmy dane liczbowe modelu

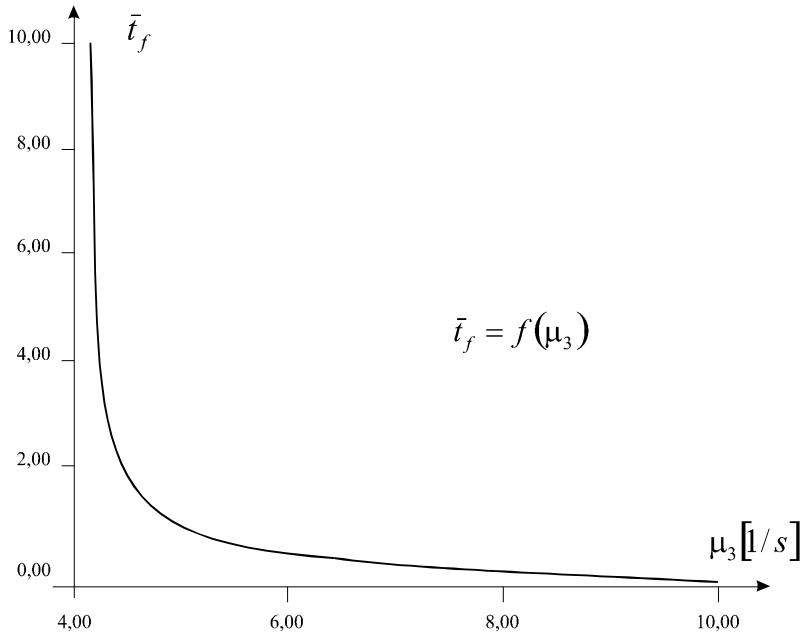
$$\mu_1 = 1 \text{ zgłoszenie/s} \quad \mu_2 = 5 \text{ zgłoszeń/s} \quad \mu_3 - \text{zmienna.} \quad \lambda = 10 \text{ zgłoszeń/s}$$



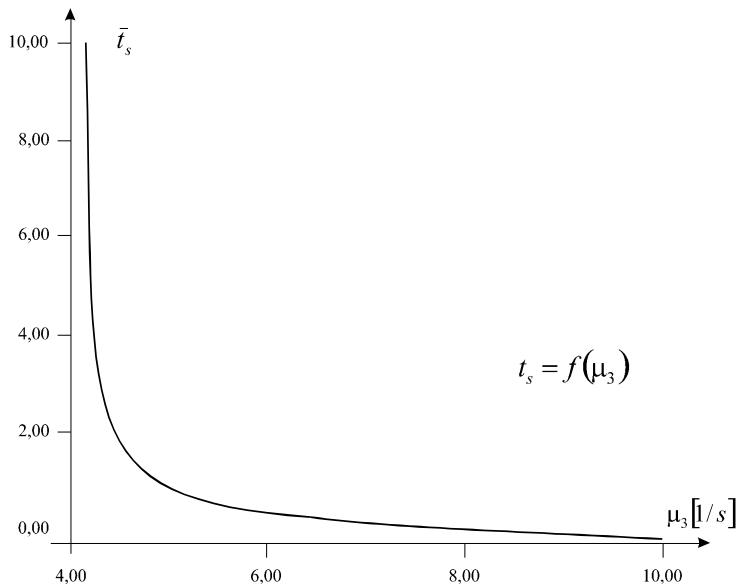
Rys. 5.5. Wykres zależności średniej liczby klientów w kolejce jako funkcja μ_3



Rys. 5.6. Wykres zależności średniej liczby zajętych kanałów obsługi



Rys. 5.7. Wykres zależności średniego czasu oczekiwania w kolejce



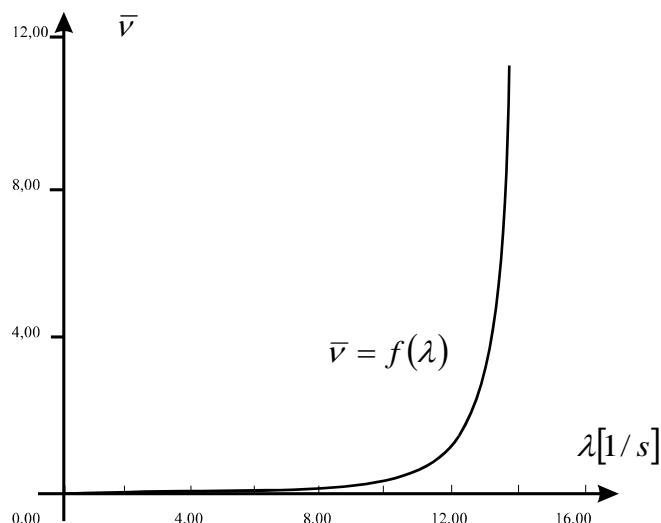
Rys. 5.8. Wykres zależności średniego czasu przebywania klienta w systemie

Można zauważyć, że zarówno średnia liczba klientów w poczekalni jak i średnia liczba zgłoszeń w trakcie obsługi (rys. 5.5 i 5.6) maleją asymptotycznie wraz ze wzrostem zdolności obsługi trzeciego kanału. Nigdy jednak nie osiągają wartości zerowej. Nawet jeżeli μ_3 przekroczy wartość $\lambda = 10$ i trzeci kanał sam jest w stanie obsłużyć cały strumień wejściowy, poczekalnia nie jest pusta. Wynika to z faktu, że strumień zgłoszeń rozkłada się równomiernie na wszystkie kanały i zgłoszenie może trafić do kanału zajętego, pomimo tego, że inne są wolne i ustawić się w kolejce.

Analogiczna sytuacja ma miejsce ze średnimi czasami obsługi i oczekiwania w kolejce (rys. 5.7 i 8). Wykresy zależności podstawowych parametrów charakteryzujących system jako funkcje natężenia strumienia wejściowego λ przedstawiono na rys. 5.9, 5.12.

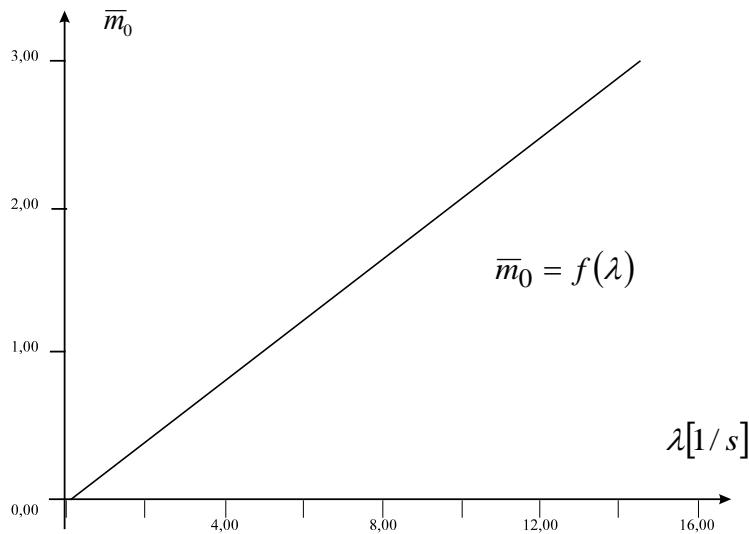
Przyjmijmy dane liczbowe modelu:

$$\mu_1 = 1 \text{ zgłoszenie/s} \quad \mu_2 = 5 \text{ zgłoszeń/s} \quad \mu_3 = 8 \text{ zgłoszeń/s} \quad \lambda - \text{zmienna}$$



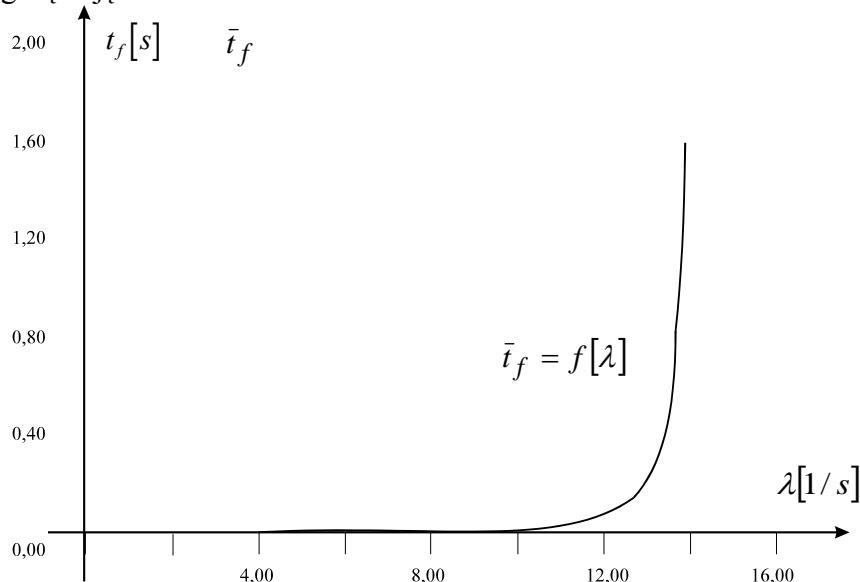
Rys. 5.9. Wykres zależności średniej liczby klientów w poczekalni jako funkcja λ .

Można zauważyć, że wykres zależności średniej liczby klientów w poczekalni jako funkcja λ posiada asymptotę pionową w punkcie $\lambda = 14$. Wynika to z faktu, że suma $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 14$, tzn. natężenie strumienia wejściowego nie może przekroczyć sumy zdolności obsługi wszystkich kanałów, gdyż tworzy się wtedy nieskończona kolejka (naruszony został warunek ergodyczności).

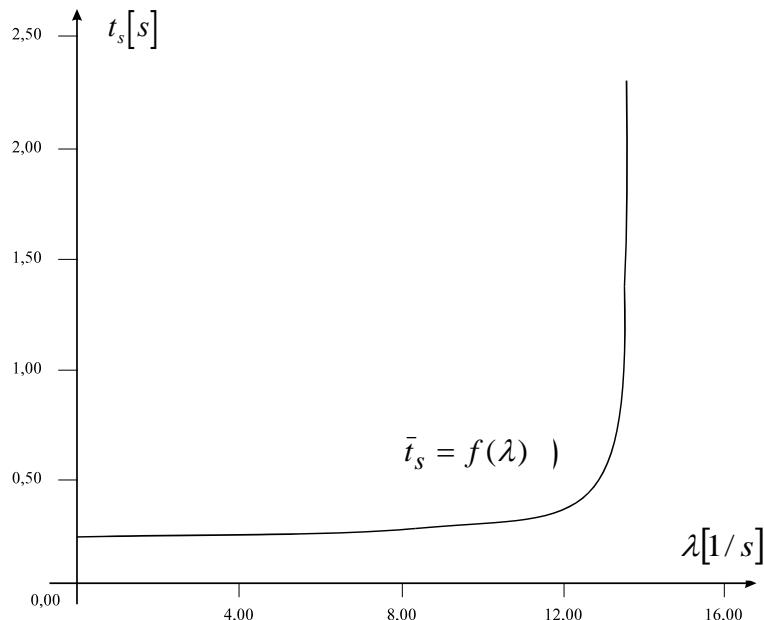


Rys. 5.10. Wykres zależności średniej liczby zajętych kanałów w obsłudze jako funkcja λ .

Zależność średniej liczby zajętych kanałów w obsłudze jako funkcja λ jest linią prostą. Dla $\lambda \rightarrow 14$ linia ta dąży do punktu $\bar{m}_0 = 3$. Jest to zrozumiałe, gdyż dla $\lambda \rightarrow 14$ tworzy się nieskończona kolejka i średnio wszystkie kanały obsługi są zajęte.



Rys. 5.11. Wykres zależności średniego czasu oczekiwania w kolejce jako funkcja λ .



Rys. 5.12. Wykres zależności średniego czasu przebywania zgłoszenia w systemie jako funkcja λ .

Zarówno średni czas przebywania zgłoszenia w systemie jak i średni czas oczekiwania w kolejce dla $\lambda \rightarrow 14$ dążą do nieskończoności (rys. 5.11 i 5.12). Wynika to z faktu, że dla $\lambda \rightarrow 14$ tworzy się nieskończona kolejka. Średni czas przebywania zgłoszenia w systemie dla $\lambda \rightarrow 0$ wynosi

$$\bar{t}_s(0) = \frac{m}{\mu} = \frac{3}{14}$$

5.2.6. Porównanie modelu klasycznego z modelem z indywidualną obsługą.

Model klasyczny jest to uogólniony model z indywidualną obsługą, zakładamy wtedy, że wszystkie kanały mają identyczną zdolność obsługi. Uogólnienie to pociąga za sobą pewne błędy, przyjmując dane liczbowe możemy oszacować jaki błąd popełniamy stosując model klasyczny.

Jako wyniki poprawne uznamy wyniki oparte na modelu z indywidualną obsługą. Błąd jest wyliczany ze wzoru:

$$\delta = \frac{W_{klas} - W_{ind}}{W_{ind}} \cdot 100\% \quad (5-53)$$

gdzie: W_{klas} - wielkości wyliczone na podstawie modelu klasycznego

W_{ind} - wielkości wyliczone na podstawie modelu z indywidualną obsługą

Parametry oraz wyniki obliczeń dla modelu klasycznego i z indywidualną obsługą wraz z błędem jaki popełniamy przyjmując model klasyczny zawarte są w tabeli 5-2.

Tabela 5-2 Wyniki porównania modelu klasycznego i indywidualnego.

Wielkość	Model klasyczny	Model indywidualny	Błąd $\delta[\%]$
λ	10	10	-
μ_1	5	2	-
μ_2	5	5	-
μ_3	5	8	-
ρ_1	2	5	-
ρ_2	2	2	-
ρ_3	2	1,25	-
p_0	0,111	0,0762	45,6
p_1	0,222	0,209	6,22
p_2	0,222	0,238	-6,72
p_i	$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i$	$\frac{15}{28} \left(\frac{2}{3}\right)^i$	-6,66
\bar{m}_0	2	2	0
\bar{v}	0,889	0,952	-6,62
\bar{n}	2,889	2,952	-2,13
\bar{t}_f	0,0889	0,0952	-6,62
\bar{t}_s	0,2889	0,2952	-2,13

W rozważanym przypadku przyjmując model klasyczny popełniamy błędy mieszczące się w granicach kilku procent z wyjątkiem prawdopodobieństwa tego, że system jest pusty gdzie popełniamy błąd prawie 50%. Prawdopodobieństwo to jest ważnym parametrem z punktu widzenia analizy pracy systemu i wyznaczenie go z tak dużym błędem może pociągnąć za sobą duże straty finansowe w przypadku wykorzystania tego modelu do wyznaczenia optymalnej struktury systemu kolejkowego.

W przypadku optymalizacji systemów o dużych rozmiarach i znacznych kosztach amortyzacji kanałów obsługi błędy rzędu 6% mogą być źródłem poważnych strat. Warto wtedy dokonać złożonych obliczeń przyjmując model indywidualny.

5.3. System kolejkowy $M/M/m/FIFO/m+N$ z indywidualną obsługą i jego optymalizacja

5.3.1 Charakterystyka systemu

System kolejkowy $M/M/m/FIFO/m+N$ posiada N miejsc w poczekalni zatem liczba klientów znajdujących się w poczekalni jest ściśle ograniczona. Jeśli wszystkie miejsca w poczekalni zostaną zajęte w oczekiwaniu na usługę systemu, każde następne zgłoszenie nie będzie przyjęte do systemu.

Aby dokonać analizy funkcjonowania systemu musimy znać jego podstawowe parametry takie jak: średni czas oczekiwania w kolejce, średni czas obsługi, średnią liczbę zajętych kanałów obsługi, itd. Należy zatem stworzyć model, na podstawie którego dokonamy obliczeń. Zakładamy, że każdy kanał obsługi posiada indywidualną zdolność obsługi μ_i oraz, że strumień wejściowy λ rozkłada się z równym prawdopodobieństwem na wszystkie kanały. W odróżnieniu od modelu klasycznego na wejściu każdego kanału obsługi pojawia się strumień zgłoszeń o intensywności λ/m .

Przyjmijmy oznaczenia:

m – ilość kanałów obsługi

λ - intensywność strumienia zgłoszeń (liczba zgłoszeń w jednostkę czasu)

μ_i - zdolność obsługi i -tego stanowiska (liczba obsłużonych klientów w jednostce czasu)

oraz

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, \quad i=1,\dots,m.$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m$$

Zanim podamy ogólne wzory dla m -kanałowego systemu przeprowadzimy analizę dwóch przypadków szczególnych: $M/M/2/FIFO/2+N$ i $M/M/3/FIFO/3+N$

5.3.2. System $M/M/2/FIFO/2+N$ z indywidualną obsługą

W systemie tym są dwa kanały obsługujące zgłoszenia, zakładamy, że kanały te posiadają indywidualną zdolność: μ_1 i μ_2 . System ten może znajdować się w jednym z następujących stanów:

E_0 - wszystkie kanały obsługi wolne,

E_{11} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 1),

E_2 - dwa kanały obsługi zajęte,

E_3 - dwa kanały obsługi zajęte, jedno zgłoszenie w poczekalni

E_3 - trzy kanały obsługi zajęte, brak zgłoszeń w poczekalni,

E_i - dwa kanały obsługi zajęte, $(i-2)$ zgłoszeń w poczekalni,

...

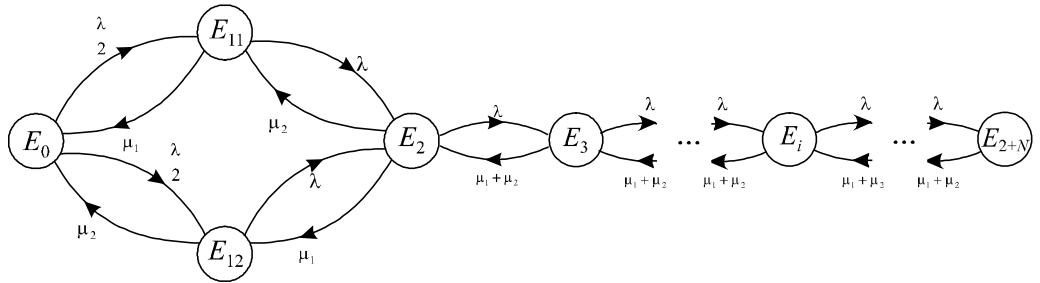
E_{N+2} - dwa kanały obsługi zajęte, N zgłoszeń w poczekalni, blokada systemu

przy czym:

E_0, E_{11}, E_{12}, E_2 - stany bez kolejki

E_3, E_4, E_i, E_{N+2} - stany z kolejką

Każdemu stanowi przyporządkowujemy odpowiednie prawdopodobieństwo, to znaczy że np. p_i oznacza prawdopodobieństwo tego, że system znajduje się w stanie E_i



Rys.5.13. Graf stanów dla modelu $M/M/2/FIFO/2+N$ z indywidualną obsługą

Stosując regułę mnemotechniczną do grafu otrzymujemy dla stanu stacjonarnego następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} - \lambda p_0 &= 0 \\
 0,5\lambda p_0 + \mu_2 p_2 - (\lambda + \mu_1) p_{11} &= 0 \\
 0,5\lambda p_0 + \mu_1 p_2 - (\lambda + \mu_2) p_{12} &= 0 \\
 \lambda p_{11} + \lambda p_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_2 + (\mu_1 + \mu_2) p_3 &= 0 \tag{5-54} \\
 \lambda p_2 + \lambda p_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_3 + (\mu_1 + \mu_2) p_4 &= 0 \\
 \lambda p_3 + \lambda p_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_4 + (\mu_1 + \mu_2) p_5 &= 0 \\
 \vdots \\
 \lambda p_{i-1} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_i - [\mu_1 + \mu_2] p_{i+1} &= 0 \quad i \geq 3 \\
 \vdots \\
 \lambda p_{2+N-1} - (\mu_1 + \mu_2) p_{2+N} &= 0
 \end{aligned}$$

Spełniony musi być również warunek normalizujący:

$$\sum_{j=0}^{2+N} p_j = 1 \tag{5-55}$$

gdzie $p_1 = p_{11} + p_{12}$.

Rozwiążując układ równań (5-54) otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned}
 p_{11} &= \frac{\rho_1}{2} p_0 & p_{12} &= \frac{\rho_2}{2} p_0 \\
 p_1 &= p_{11} + p_{12} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} p_0 = \frac{SK_2^1}{2!} p_0 \\
 p_2 &= \frac{\rho_1 \rho_2}{2} p_0 = \frac{SK_2^2}{2!} p_0 \\
 p_3 &= \frac{(\rho_1 \rho_2)^2}{2(\rho_1 + \rho_2)} p_0 = \frac{(SK_2^2)^2}{2! SK_2^1} p_0 \\
 p_i &= \frac{(\rho_1 \rho_2)^{i-1}}{2(\rho_1 + \rho_2)^N} p_0 = \frac{(SK_2^2)^{i-1}}{2! (SK_2^1)^N} p_0 \\
 p_{2+N} &= \frac{(\rho_1 \rho_2)^{N+1}}{2(\rho_1 + \rho_2)^N} p_0 = \frac{(SK_2^2)^{N+1}}{2! (SK_2^1)^N} p_0
 \end{aligned} \right\} \quad (5-56)$$

Wielkość p_0 wyliczamy z warunku normalizującego (5-55). Począwszy od $j=2$ suma ta jest sumą skońzonego ciągu geometrycznego o ilorazie $q = \frac{SK_2^2}{SK_2^1} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$. Można ją wyliczyć jako sumę skończonej liczby wyrazów ciągu geometrycznego. Rozróżniamy przy tym dwa przypadki :

- $q=1$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 \rho_2}{2} (N+1) \right]^{-1} = \left[1 + \frac{SK_2^1}{2!} + (N+1) \frac{SK_2^2}{2!} \right]^{-1} \quad (5-57)$$

- $q \neq 1$

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \left[1 + \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 \rho_2}{2} \cdot \frac{(\rho_1 + \rho_2)^{N+1} - (\rho_1 \rho_2)^{N+1}}{(\rho_1 + \rho_2 - \rho_1 \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)^N} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{SK_2^1}{2!} + \frac{SK_2^2}{2!} \cdot \frac{(SK_2^1)^{N+1} - (SK_2^2)^{N+1}}{(SK_2^1 - SK_2^2) \cdot (SK_2^1)^N} \right]^{-1}
 \end{aligned} \quad (5-58)$$

Prawdopodobieństwo odmowy wynosi

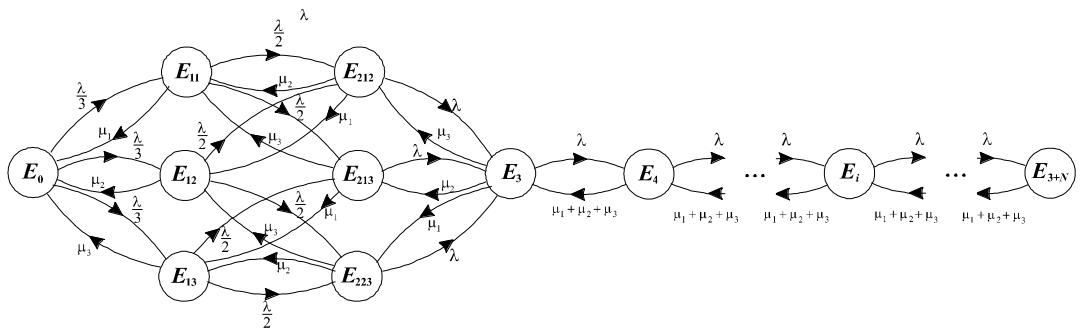
$$p_{odm} = \frac{(\rho_1 \rho_2)^{N+1}}{2(\rho_1 + \rho_2)^N} p_0 = \frac{\left(\frac{SK_2^2}{2} \right)^{N+1}}{\left(2SK_2^1 \right)^N} p_0$$

(5-59)

5.3.3. System M/M/2/FIFO/3+N z indywidualną obsługą

W systemie tym są trzy kanały obsługujące zgłoszenia, kanały te posiadają indywidualne zdolności obsługi: μ_1, μ_2, μ_3 . System ten może znajdować się w jednym z następujących stanów:

- E_0 – wszystkie kanały obsługi wolne,
- E_{11} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 1),
- E_{12} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 2),
- E_{13} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 3),
- E_{212} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 1 i 2),
- E_{213} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 1 i 3),
- E_{223} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 2 i 3),
- E_3 - trzy kanały obsługi zajęte, brak zgłoszeń w poczekalni,
- E_4 - trzy kanały obsługi zajęte, jedno zgłoszenie w poczekalni,
- ⋮
- E_i – dwa kanały obsługi zajęte, ($i-3$) zgłoszeń w poczekalni, ...
- ⋮
- E_{3+N} – trzy kanały zajęte, wszystkie N miejsc w poczekalni zajęte, blokada systemu



Rys. 5.14. Graf stanów dla modelu $M/M/3/FIFO/3+N$ z indywidualną obsługą

Stosując regułę mnemotechniczną do tego grafu otrzymujemy dla stanu stacjonarnego układ równań algebraicznych (5-60):

$$\left. \begin{aligned}
& -\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} + \mu_3 p_{13} = 0 \\
& \lambda/3 p_0 - (\mu_1 + \lambda) p_{11} + \mu_2 p_{212} + \mu_3 p_{213} = 0 \\
& \lambda/3 p_0 - (\mu_2 + \lambda) p_{12} + \mu_1 p_{212} + \mu_3 p_{223} = 0 \\
& \lambda/3 p_0 - (\mu_3 + \lambda) p_{13} + \mu_2 p_{213} + \mu_2 p_{223} = 0 \\
& \lambda/2 p_{11} + \lambda/2 p_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_{212} + \mu_3 p_3 = 0 \\
& \lambda/2 p_{11} + \lambda/2 p_{13} - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda) p_{213} + \mu_2 p_3 = 0 \\
& \lambda/2 p_{12} + \lambda/2 p_{13} - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_{223} + \mu_1 p_3 = 0 \\
& \lambda p_{212} + \lambda p_{213} + \lambda p_{223} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_3 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) p_4 = 0 \\
& \lambda p_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_4 + \lambda p_5 = 0 \\
& \vdots \\
& \lambda p_{i-1} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_i + \lambda p_{i+1} = 0 \quad \text{dla } i \geq 4 \\
& \vdots \\
& \lambda p_{3+N-1} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_{3+N} = 0
\end{aligned} \right\} \quad (5-60)$$

Spełniony musi być także warunek normalizujący:

$$\sum_{j=0}^{3+N} p_j = 1, \quad (5-61)$$

gdzie $p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13}$, $p_2 = p_{212} + p_{213} + p_{223}$

Rozwiązań układu równań (5-60) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{\rho_1}{\binom{3}{1}} p_0, & p_{12} &= \frac{\rho_2}{\binom{3}{1}} p_0, & p_{13} &= \frac{\rho_3}{\binom{3}{1}} p_0, & p_{212} &= \frac{\rho_1 \rho_2}{2! \binom{3}{2}} p_0 \\
p_{213} &= \frac{\rho_1 \rho_3}{2! \binom{3}{2}} p_0, & p_{223} &= \frac{\rho_2 \rho_3}{2! \binom{3}{2}} p_0, & p_3 &= \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{3! \binom{3}{3}} p_0 &= \frac{SK_3^3}{3! \binom{3}{3}} p_0 \\
p_4 &= \frac{(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^2}{2! \binom{3}{2} (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3)} p_0 &= \frac{(SK_3^3)^2}{2! \binom{3}{2} SK_3^2} p_0 \\
&\vdots \\
p_i &= \frac{(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{i-2}}{2! \binom{3}{2} (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3)^{i-3}} p_0 &= \frac{(SK_3^3)^{i-2}}{2! \binom{3}{2} (SK_3^2)^{i-3}} p_0 & \quad (5-62) \\
&\vdots \\
p_{3+N} &= \frac{(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{N+1}}{2! \binom{3}{2} (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3)^N} p_0 &= \frac{(SK_3^3)^{N+1}}{2! \binom{3}{2} (SK_3^2)^N} p_0
\end{aligned}$$

dla $i \geq 3$

Ponadto możemy zapisać

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{\binom{3}{1}} p_0 = \frac{SK_3^1}{\binom{3}{1}} p_0$$

$$p_2 = p_{212} + p_{213} + p_{223} = \frac{\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3}{2!\binom{3}{2}} p_0 = \frac{SK_3^2}{2!\binom{3}{2}} p_0$$

Wielkość p_0 wyliczamy z warunku normalizującego (5-61). Począwszy od wskaźnika $j=3$ suma ta jest sumą skońzonego ciągu geometrycznego o ilorazie $q = \frac{SK_3^3}{SK_3^2} = \frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3}$. Można ją wyliczyć jako sumę skończonej liczby wyrazów ciągu geometrycznego. Rozróżniamy przy tym dwa przypadki :

- $q=1$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3} + (N+1) \frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{6} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{SK_3^1}{3} + (N+1) \frac{SK_3^3}{3!} \right]^{-1} \quad (5-63a)$$

- $q \neq 1$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3} + \frac{\rho_1\rho_2\rho_3 (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3)^{(N+1)} - (\rho_1\rho_2\rho_3)^{(N+1)}}{6(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3)^N (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 - \rho_1\rho_2\rho_3)} \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{SK_3^1}{3} + \frac{SK_3^3 (SK_3^2)^{N+1} - (SK_3^3)^{N+1}}{3! (SK_3^2)^N (SK_3^2 - SK_3^3)} \right]^{-1} \quad (5-63b)$$

Prawdopodobieństwo odmowy obsługi wynosi:

$$p_{odm} = p_{3+N} = \frac{(\rho_1\rho_2\rho_3)^{N+1}}{6(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_3)^N} p_0 = \frac{(SK_3^3)^{N+1}}{6(SK_3^2)^N} p_0. \quad (5-64)$$

5.3.4. Uogólnienie otrzymanych wyników na system $M/M/m/\text{FIFO}/m+N$ z indywidualną obsługą

Analizując systemy $M/M/2/\text{FIFO}/2+N$, oraz $M/M/2/\text{FIFO}/3+N$ można zauważać analogię w rozwiązaniach dla tych systemów. Możemy więc uogólnić powyższe wzory na system $M/M/m/\text{FIFO}/m+N$.

Prawdopodobieństwo, że jeden kanał jest zajęty wynosi:

$$p_{1,j} = \frac{\lambda}{2! \binom{m}{l} \mu_j} p_0 \quad \text{dla } 1 \leq j < m \quad (5-65)$$

Prawdopodobieństwo, że dwa kanały i, j są zajęte wynosi:

$$p_{1,ij} = \frac{\lambda^2}{2! \binom{m}{2} \mu_i \mu_j} p_0 \quad \text{dla } 1 \leq i, j < m \quad (5-66)$$

Ogólnie prawdopodobieństwo, że i kanałów jest zajętych wynosi:

$$p_{i,j_1,j_2 \dots j_i} = \frac{\lambda^i}{i! \binom{m}{i} \mu_{j_1} \mu_{j_2} \dots \mu_{j_i}} p_0 \quad \text{dla } 1 \leq i < m \quad (5-67a)$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{m! \mu_1 \mu_2 \dots \mu_m (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m)^{i-m}} p_0 \quad \text{dla } m \leq i \leq N+m \quad (5-67b)$$

Uwzględniając wzór na p_j dla $j \geq 1$

$$p_i = \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_i \\ j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_i}} p_{i,j_1,j_2 \dots j_i} \quad 1 \leq i < m-1 \quad (5-68)$$

możemy ostatecznie napisać:

$$p_i = \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} p_0 \quad \text{dla } 1 \leq i < m \quad (5-69a)$$

$$p_i = \frac{(SK_m^m)^{i-m+1}}{m! (SK_m^{m-1})^{i-m}} p_0 \quad \text{dla } m \leq i \leq N+m \quad (5-69b)$$

Prawdopodobieństwo p_0 wyliczamy z warunku normalizacyjnego
 $\sum_{j=0}^{m+N} p_j = 1$ co prowadzi do wzoru

$$p_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} p_0 + \sum_{i=m}^{m+N} \frac{(SK_m^m)^{i-m+1}}{m! (SK_m^{m-1})^{i-m}} p_0 = 1 \quad (5-70)$$

Druga suma w powyższym wyrażeniu po wyciągnięciu pewnych wyrażeń przed znak sumy po podstawieniu $i-m=j$ jest skończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q :

$$q = \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \quad (5-71)$$

Ze względu na iloraz ciągu geometrycznego q rozróżniamy dwa przypadki:

- $q=1$, wówczas

$$p_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} + \sum_{i=m}^{m+N} \frac{SK_m^m}{m!} (N+1) \right]^{-1} \quad (5-72a)$$

- $q \neq 1$, wtedy

$$\begin{aligned} p_0 &= \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} + \frac{SK_m^m}{m!} \left[1 + \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \frac{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^N}{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)} \right] \right]^{-1} \\ &= \left[1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} + \frac{SK_m^m}{m!} \frac{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^{N+1}}{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5-72b)$$

Ważnym parametrem charakteryzującym ten model jest wartość prawdopodobieństwa odmowy, które wyliczamy z zależności

$$p_{odm} = p_{m+N} = \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m! (SK_m^{m-1})^N} p_0 \quad \text{dla } m \leq i \leq N+m \quad (5-73)$$

przy czym zależność na p_0 stosujemy odpowiednio do rozpatrywanego przypadku.

Na podstawie zależności (2-10) możemy wyznaczyć wzgledna zdolność obsługi systemu, która wynosi:

$$B = 1 - p_{odm} = 1 - \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} p_0 \quad (5-74)$$

natomiast bezwzględna zdolność obsługi wynosi:

$$A = \lambda B = \lambda \left(1 - \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} p_0 \right) \quad (5-75)$$

Średnią liczbę zajętych kanałów obliczamy stosując wzór:

$$\bar{m}_0 = \frac{A}{\mu} \cdot (1 - p_{odm}) \quad (5-76)$$

gdzie

$$\bar{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^m \mu_i}{m} \quad (5-77)$$

Wstawiając wzory (5-75) i (5-77) do (5-76) otrzymujemy:

$$\bar{m}_0 = \frac{m\lambda}{\sum_{i=1}^m \mu_i} \left(1 - \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} p_0 \right) = \frac{mSK_m^m}{SK_m^{m-1}} \left(1 - \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} p_0 \right) \quad (5-78)$$

Średnią liczbę zgłoszeń oczekujących w kolejce na rozpoczęcie obsługi obliczamy ze wzoru:

$$\bar{v} = \sum_{i=m}^{m+N} (i-m)p_i = \sum_{r=0}^N r p_{m+r} = \sum_{r=0}^N r \frac{(SK_m^m)^{r+1}}{m!(SK_m^{m-1})^r} p_0 \quad (5-79)$$

Dokonując przekształceń otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= p_0 \left[\frac{(SK_m^m)^2}{m!(SK_m^{m-1})^r} + 2 \frac{(SK_m^m)^3}{m!(SK_m^{m-1})^2} + 3 \frac{(SK_m^m)^3}{m!(SK_m^{m-1})^2} + \dots + N \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} \right] \\ \bar{v} &= \frac{(SK_m^m)^2}{m!(SK_m^{m-1})^r} p_0 \cdot \left[1 + 2 \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) + 3 \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^2 + \dots + N \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^{N-1} \right] \\ \bar{v} &= \frac{(SK_m^m)^2}{m!SK_m^{m-1}} p_0 \sum_{r=0}^N r \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^{r-1}. \end{aligned} \quad (5-80)$$

Sumę występującą w wyrażeniu (5-80) oznaczamy przez S_r .

$$S_r = \sum_{r=0}^N r \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^{r-1}. \quad (5-81)$$

Mogemy ją obliczyć podstawiając

$$q = \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \quad (5-82)$$

Tak więc

$$S_r = \sum_{r=0}^N r(q) \quad (5-83)$$

Stosując twierdzenie o całkowaniu szeregu otrzymujemy sumę szeregu całkowanego

$$\int_0^q S_r(q) dq = \sum_{r=0}^N \int_0^q r(q) r^{-1} = \sum_{r=0}^N q^r = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \quad \text{dla } q \neq 1 \quad (5-84)$$

Tak więc wartość sumy określonej wyrażeniem S_r jest pochodną zależności (5-84) względem q :

$$S_r = \left(\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \right)' = \frac{-(N+1)q^N(1-q) + 1 - q^{N+1}}{(1-q)^2} = \frac{1 - q^N [1 + N(1-q)]}{(1-q)^2}$$

dla $q \neq 1$ (3.32)

Podstawiając zależność (5-83) do (5-80) otrzymujemy:

$$\bar{v} = \frac{(SK_m^m)^2}{m! SK_m^{m-1}} p_0 \frac{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^N \left[1 - N \left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) \right]}{\left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^2}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy ostatecznie

$$\bar{v} = \frac{(SK_m^m)^2}{m! SK_m^{m-1}} p_0 \frac{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^N \left[1 + N \left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) \right]}{\left(SK_m^{m-1} - SK_m^m \right)^2}. \quad \text{dla } q \neq 1 \quad (5-85)$$

W przypadku gdy $q=1$ średnią liczbę zgłoszeń oczekujących w kolejce możemy wyliczyć ze wzoru (3.33a) stosując przejście graniczne: $SK_m^m \rightarrow SK_m^{m-1} \dots$

$$\bar{v} = \lim_{SK_m^m \rightarrow SK_m^{m-1}} \left\{ \frac{(SK_m^m)^2}{m!} SK_m^{m-1} p_0 \frac{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^N \left[1 + N \left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) \right]}{(SK_m^{m-1} - SK_m^m)^2} \right\} \quad \text{dla } q = 1 \quad (5-87)$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\bar{v} = \frac{(SK_m^m)^3}{m!} p_0 \lim_{SK_m^{m-1} \rightarrow SK_m^{m-1}} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^N \left[1 + N \left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) \right]}{(SK_m^{m-1} - SK_m^m)^2} \right\}. \quad \text{dla } q \neq 1 \quad (5-88)$$

Przechodząc w wyrażeniu (3.35) do granicy otrzymujemy symbol nieoznaczony typu $\frac{0}{0}$. Stosując dwukrotnie regułę de l'Hospitala i przechodząc do granicy otrzymujemy następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned} & \lim_{SK_m^m \rightarrow SK_m^{m-1}} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^N \left[1 + N \left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) \right]}{(SK_m^{m-1} - SK_m^m)^2} \right\} \stackrel{H}{=} \\ & \lim_{SK_m^m \rightarrow SK_m^{m-1}} \left\{ \frac{\frac{-N}{(SK_m^{m-1})^2} \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^{N-1} \left[N \left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) + 1 \right] + \frac{N}{(SK_m^{m-1})^2} \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^N}{-2(SK_m^{m-1} - SK_m^m)} \right\} \stackrel{H}{=} \\ & \lim_{SK_m^m \rightarrow SK_m^{m-1}} \left\{ \frac{\frac{-N}{(SK_m^{m-1})^2} (N-1) \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^{N-2} \left[N \left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) + 1 \right] + \frac{N^2}{(SK_m^{m-1})^2} \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^{N-1} + \frac{N^2}{(SK_m^{m-1})^2} \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^{N-1}}{2} \right\} \stackrel{H}{=} \\ & = \frac{-N(N-1) + 2N^2}{2(SK_m^{m-1})^2} = \frac{N^2 + N}{2(SK_m^{m-1})^2} \end{aligned} \quad (5-89)$$

Podstawiając wartość granicy (5-89) do wzoru (5-88) otrzymujemy zależność na średnią ilość klientów oczekujących w kolejce:

$$\bar{v} = \frac{SK_m^m(N^2 + N)}{2m!} p_0 \quad \text{dla } q=1 \quad (5-90)$$

Kolejnymi istotnymi parametrami systemu kolejkowego są: średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce \bar{t}_f i średni czas pobytu zgłoszenia w systemie \bar{t}_s . Korzystając z I Formuły Little'a dla stanu stacjonarnego obliczamy średni czas oczekiwania w kolejce \bar{t}_f :

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} \quad (5-91)$$

Zastępując \bar{v} we wzorze (5-91) formułami (5-88) i (5-90) mamy:

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\lambda} \frac{(SK_m^m)^2}{m!} SK_m^{m-1} \frac{1 - \left(\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right)^N \left[1 - N \left(1 - \frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} \right) \right]}{(SK_m^{m-1} - SK_m^m)^2} \cdot p_0 \quad \text{dla } q \neq 1 \quad (5-92a)$$

i

$$\bar{t}_f = \frac{1}{\lambda} \frac{SK_m^m N(N+1)}{2m!} p_0 \quad \text{dla } q=1 \quad (5-92b)$$

Średni czas przebywania zgłoszenia w systemie \bar{t}_s jest obliczany na podstawie zależności:

$$\bar{t}_s = M[T_s] = M[T_f] + M[T_0] \quad (5-93)$$

gdzie:

$$M[T_f] = \bar{t}_f$$

$$M[T_0] = B \cdot \bar{t}_0 = \left[1 - \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} p_0 \right] \cdot \bar{t}_0 \quad (5-94)$$

Tak więc

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{v}}{\lambda} + \left[1 - \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} p_0 \right] \cdot \bar{t}_0 \quad (5-95)$$

Wzory (5-94) i (5-95) podobnie jak wielkości \bar{v} i p_0 mają dwie różne postacie w zależności od q .

5.3.5. Wykresy podstawowych parametrów modelu $M/M/m/\text{FIFO}/m+N$ z indywidualną obsługą

Wykresy zależności podstawowych parametrów systemu kolejkowego od zdolności obsługi jednego z kanałów przedstawimy na przykładzie

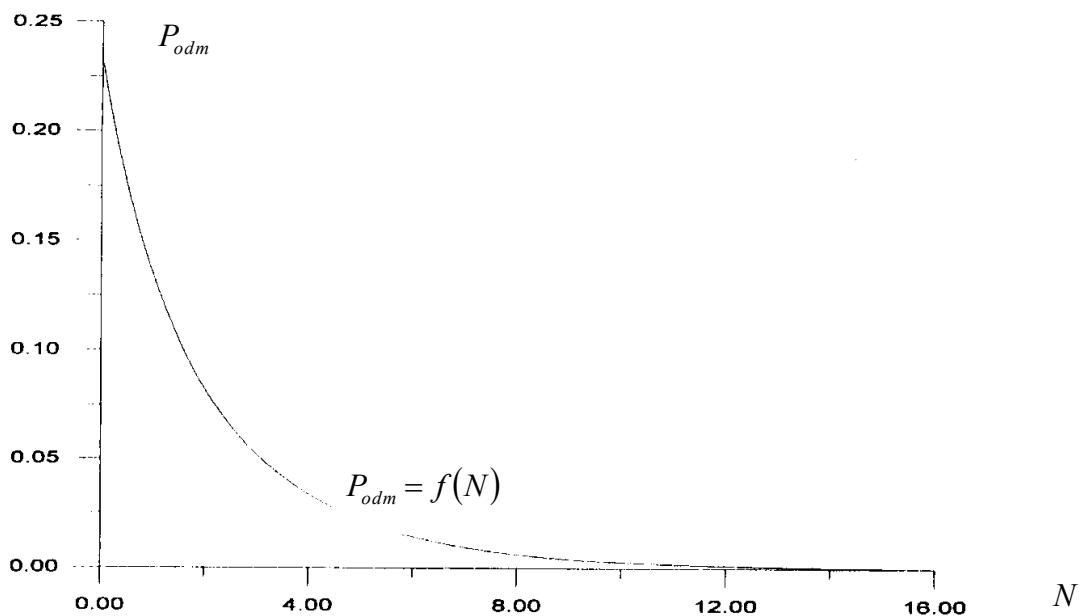
trójkanałowego systemu z indywidualną obsługą. Przyjmijmy dane liczbowe modelu: $\mu_1 = 1$ zgłoszenie/s, $\mu_2 = 5$ zgłoszeń/s, $\mu_3 = 8$ zgłoszeń/s, $\lambda = 10$, $m=3$, N - zmienna.

W rozpatrywanym modelu istnieje duża analogia do modelu zaprezentowanego w rozdziale drugim. Dlatego też wykresy zależności przedstawione w pierwszym rozdziale będą w dużym stopniu odpowiadały charakterem i kształtem do rozpatrywanego modelu. W przypadku rozpatrywanego modelu istnieje dodatkowy parametr jakim jest ilość miejsc w poczekalni N , który ma znaczny wpływ na wartości interesujących nas. Dlatego też zobaczymy jak zachowuje się system w zależności od ilości miejsc w poczekalni. Ważnym zagadnieniem, które nie występuje w przypadku nieskończonej poczekalni o nieskończonej pojemności jest prawdopodobieństwo odmowy obsługi nadchodzących zgłoszeń. Zobaczmy na wykresie że ma ono istotny wpływ na ekonomiczne wykorzystanie systemu przy minimalnych stratach, a to jest w znacznym stopniu uzależnione od doboru optymalnej wartości miejsc w poczekalni przy określonej liczbie kanałów obsługi.

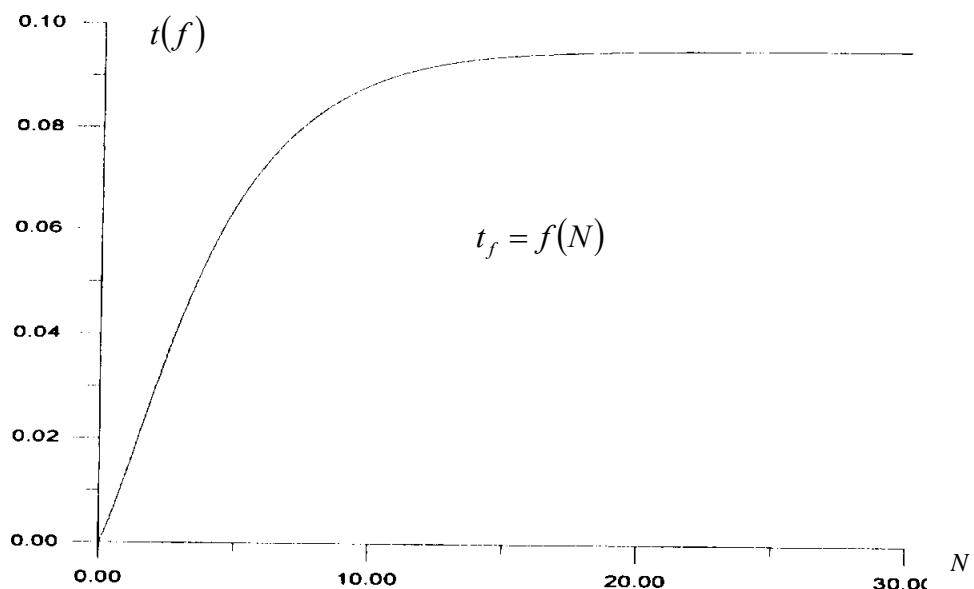
Zależność prawdopodobieństwa odmowy od ilości miejsc w poczekalni dla 3 kanałów obsługi przedstawiono na rysunku 5.15.

Analizując zależność średniego czasu oczekiwania zgłoszenia w kolejce od liczby miejsc w poczekalni można zauważyc pewną właściwość. Począwszy od pewnej liczby miejsc w poczekalni, czas oczekiwania na usługę ustala się. Ma to ścisły związek z liczbą kanałów oraz wielkością natężenia strumienia wejściowego.

Zależność średniego czasu oczekiwania zgłoszenia w kolejce od długości poczekalni przy ustalonej liczbie kanałów obsługi, oraz przy odpowiednim natężeniu strumienia wejściowego przedstawiono na rysunkach 3.2 i 3.3.

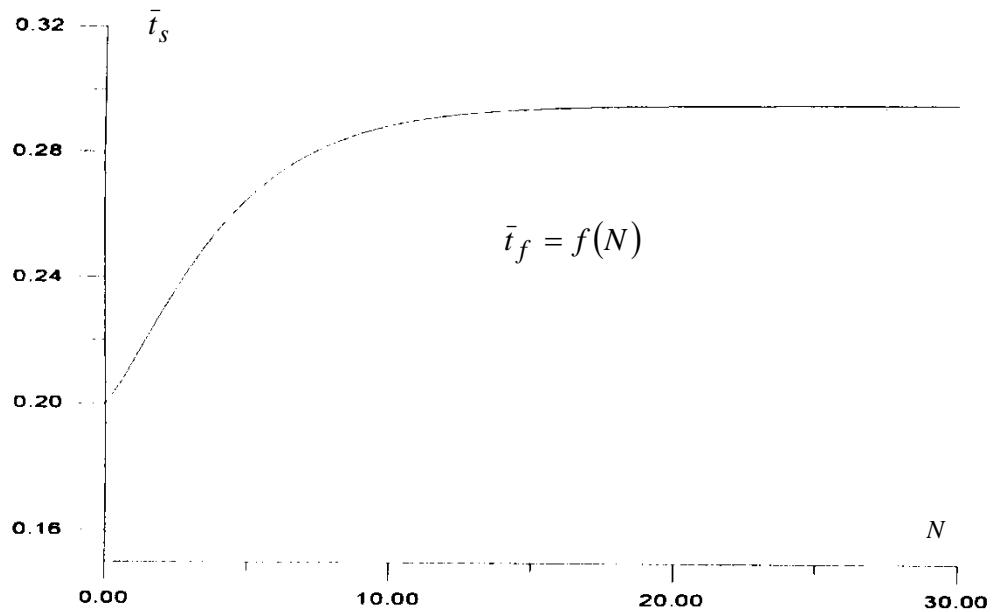


Rysunek 5.15. Zależność prawdopodobieństwa odmowy od ilości miejsc w poczekałni N

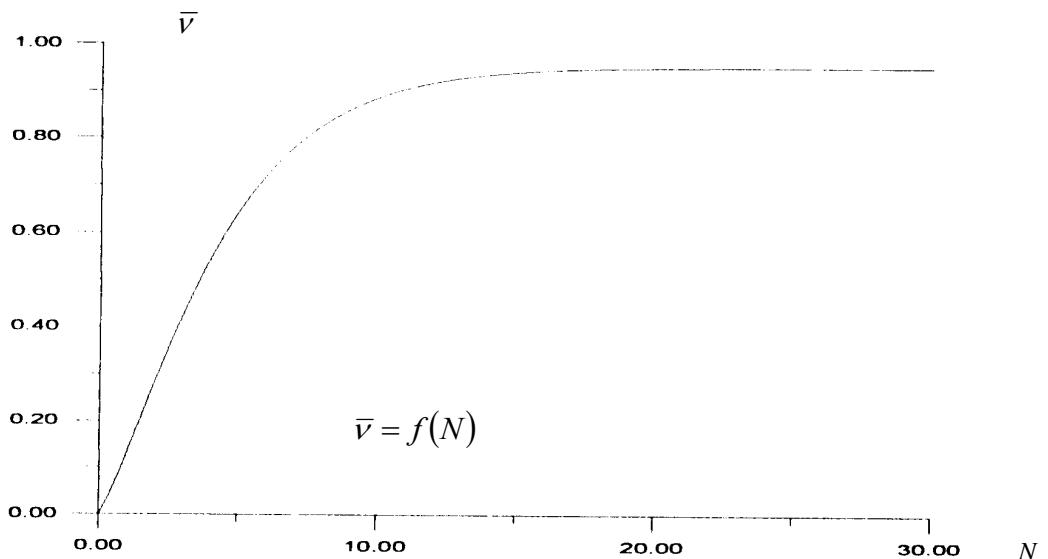


Rysunek 5.16. Zależność średniego czasu oczekiwania zgłoszenia w kolejce od długości poczekałni przy ustalonej liczbie kanałów w obsłudze, oraz przy odpowiednim natężeniu strumienia wejściowego

Czas przebywania zgłoszenia w systemie jest sumą czasu obsługi i czasu oczekiwania w kolejce. Jego wykres jako funkcja N przedstawiono na rysunku 5.15



Rysunek 5.17 Czas przebywanie zgłoszenia w systemie jako funkcja N



Rysunek 5.18 Zależność średniej ilości zgłoszeń w kolejce od liczby miejsc w poczekalni N przy ustalonych parametrach m i λ .

Rysunek 5.18 przedstawia zależność średniej ilości zgłoszeń w kolejce od długości poczekalni przy ustalonych parametrach m i λ .

5.3.6. Porównanie modelu klasycznego z modelem z indywidualną obsługą.

Podobnie jak w poprzednim rozdziale, przyjmując dane liczbowe oszacujmy błąd wynikły z porównania modelu klasycznego z modelem z indywidualną obsługą.

Parametry i wyniki umieszczone są w tabeli 5-3.

Zakładamy ponadto, że

$$q = \frac{SK_m^m}{SK_{m-1}^{m-1}} \neq 1$$

Tabela 5-3 Porównanie modeli: klasycznego i z indywidualną obsługą

Wielkość	Model klasyczny	Model indywidualny 1	Błąd $\delta_1[\%]$	Model indywidualny 2	Błąd $\delta_2[\%]$
λ	10	10	-	10	-
N	4	4	-	4	-
μ_1	5	2	-	4	-
μ_2	5	5	-	5	-
μ_3	5	8	-	6	-
ρ_1	2	5	-	2,5	-
ρ_2	2	2	-	2	-
ρ_3	2	1,25	-	1,6666	-
p_0	0,118	0,0806	46,4	0,0922	27,9
p_1	0,236	0,209	12,9	0,1896	24,4
p_2	0,236	0,238	-0,84	0,1922	22,7
p_3	$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^i$	$0,168 \left(\frac{2}{3}\right)^{i-3}$	-11,8	$0,128 \left(\frac{2}{3}\right)^{i-3}$	15,7
p_7	0,02727	0,033	-17,3	0,0253	7,78
q	0,9689	0,9668	0,2	0,9747	-0,6
B	9,689	9,668	0,2	9,747	-0,6
m_0	1,94	2	3	2	3
\bar{v}	0,509	0,543	-6,26	0,4144	22,8
\bar{n}	2,449	2,543	-3,69	2,414	1,44
\bar{t}_s	0,2447	0,2543	-3,77	0,2414	1,3
\bar{t}_f	0,0509	0,0543	-6,26	0,0414	22,9

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 3.1. zauważmy że średnio korzystając z modelu klasycznego przy obliczaniu niektórych parametrów popełniamy błąd rzędu kilku procent. Przy mało rozbudowanych systemach model z uśrednianymi parametrami jest dobrym przybliżeniem

rzeczywistości, lecz jeśli system opiera się na dużych kosztach mogą być dość duże straty, ponieważ znaczne różnice występują już podczas obliczania prawdopodobieństwa że system jest pusty (około 50% dla różnicujących się znacznie między sobą parametrów poszczególnych kanałów obsługi μ_i i około 20% dla zbliżonych do siebie wartości parametrów). Z tego powodu warto stosować przedstawiony model systemu z indywidualną obsługą.

5.3.7. Optymalizacja systemu kolejkowego $M/M/m/\text{FIFO}/m+N$ z indywidualną obsługą

Rozpatrzmy obecnie zagadnienie optymalizacji systemu kolejkowego $M/M/m/\text{FIFO}/m+N$ z indywidualną obsługą. Przy formalizacji matematycznej zagadnienia przyjmujemy następujące oznaczenia:

- natężenie strumienia wejściowego jest zgodnie z rozkładem Poissona o intensywności λ
- liczba kanałów obsługi wynosi m
- czas obsługi każdego kanału podlega rozkładowi wykładniczemu o wartości $1/\mu_i$ dla $0 < i \leq m$
- liczba miejsc w poczekalni wynosi N
- w poczekalni obowiązuje reguła likwidacji kolejki FIFO
- średni zysk wynikający z obsługi jednego zgłoszenia wynosi r
- koszt amortyzacji i utrzymania jednego miejsca w poczekalni przypadający na jednostkę czasu wynosi c_i
- koszt amortyzacji, obsługi, konserwacji i utrzymania wszystkich kanałów odniesiony do jednostki czasu (przyjmujemy iż koszt ten jest jednakowy niezależnie od stanu zajętości kanału) jest $c_2 \sum_{i=1}^m \mu_i$.

Rozwiążując problem optymalizacji określamy parę (m, N) , która maksymalizuje funkcję celu $f(m, N)$ określającą średni zysk systemu osiągany w jednostce czasu. W tym celu należy wyrazić funkcję $f(m, N)$ przy pomocy wielkości $\lambda, N, p_N, m, r, c_i, c$ gdzie p_N jest prawdopodobieństwem odmowy obsługi.

Funkcja celu przyjmuje postać

$$f(m, N) = \lambda(1 - p_N)r - c_1N - c_2\mu \quad (5-96)$$

a po podstawieniu za p_N wyrażenia () otrzymujemy.

$$f(m, N) = \lambda \left(1 - \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} p_0 \right) r - c_1N - c_2\mu \quad (5-97)$$

gdzie $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4(m-3)$

5.3.8. Przykład optymalizacji systemu kolejkowego M/M/m/FIFO/m+N

Załóżmy, że system jest wyposażony w 3 kanały o zdolnościach obsługi: $\mu_1 = 1 \text{ zgł/j. czasu}$, $\mu_2 = 3 \text{ zgł/j. czasu}$, $\mu_3 = 4 \text{ zgł/j. czasu}$ oraz poczekalnię o liczbie miejsc $N=3$. Do systemu wpływa strumień wejściowy zgłoszeń zgodnie z rozkładem Poissona o natężeniu $\lambda = 10 \text{ zgł/j. czasu}$. Prawa rynku przewidują możliwość rozbudowy systemu, a co za tym idzie zwiększenie możliwości obsługi liczby klientów. Administrator stwierdził, iż system będzie obsługiwał dwa razy więcej klientów niż dotychczas to znaczy $\lambda = 20 \text{ zgł/j. czasu}$. W tym celu należy przeprowadzić badania ile kanałów obsługi należy dodać oraz jak dużą stworzyć poczekalnię aby osiągnięty zysk był największy. Administrator ponadto zakłada, iż dodane kanały będą miały jednakową zdolność obsługi $\mu_4 = 5 \text{ zgł/j. czasu}$.

Funkcja celu (5-97), którą należy maksymalizować przyjmuje postać

$$f(m, N) = \lambda \left(1 - \frac{(SK_m^m)^{N+1}}{m!(SK_m^{m-1})^N} p_0 \right) r - c_1 N - c_2 (5m - 8) \quad (5-98)$$

Dodatkowo obliczamy

$$\frac{SK_m^m}{SK_m^{m-1}} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5m - 8}$$

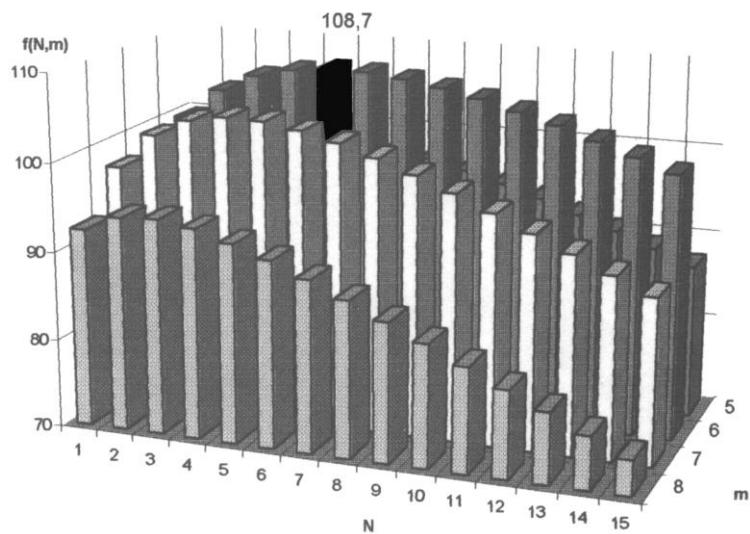
Przyjmujemy również następujące wartości współczynników kosztów :

$r = 10 \text{ j. monetarnych/j. czasu}$, $c_1 = 2 \text{ j. monetarnych/j. czasu}$, $c_2 = 3 \text{ j. monetarnych/j. czasu}$,

Wartość prawdopodobieństwa p_0 jest wyliczana zgodnie ze wzorem (5-72b), a wartość funkcji celu (5-98) dla zmiennych m i N oblicza opracowany program optymalizacyjny. Wyniki obliczeń zostały przedstawione w tabeli (3.2) oraz zaprezentowane w postaci graficznej na rysunku (3.5). Przedstawiono na nim w przestrzeni trójwymiarowej zależność funkcji celu od dwóch parametrów dyskretnych m i N oraz wskazano dla jakich wartości m i N funkcja ta osiąga maksimum (czarny słupek).

Tabela .5-4 Wartości liczbowe funkcji celu w zależności od m i N

		m			
		5	6	7	8
N	1.	86,4	95,9	97,5	92,5
	1.	92,5	101,8	101,5	94,2
	2.	95,8	105,3	103,5	94,4
	3.	97,5	107,3	104,2	93,8
	4.	98,3	108,3	104,1	92,6
	5.	98,3	108,7	103,4	91,2
	6.	97,9	108,6	102,4	89,5
	7.	97,2	108,1	101,1	87,7
	8.	96,2	107,4	99,6	85,8
	9.	95,0	106,5	98,0	83,9
	10.	93,7	105,4	96,2	81,9
	11.	92,2	104,2	94,4	79,9
	12.	90,7	102,8	92,6	78,0
	13.	89,1	101,4	90,7	76,0
	14.	87,4	99,9	88,8	74,0



Rysunek 5.19. Wykres zależności funkcji celu od dwóch parametrów dyskretnych m i N

5.4. Model systemu kolejkowego $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ z niecierpliwyimi klientami i indywidualną obsługą

5.4.1 Charakterystyka systemu

System kolejkowy $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ posiada poczekalnię z nieskończoną liczbą miejsc. Każdy klient zgłoszający się do systemu zostanie obsłużony, natomiast istotnym problemem jest jak długo będzie musiał czekać na obsługę?

Zakłada się, że czas przebywania zgłoszenia w kolejce jest ograniczony i wynosi T_{ocz} . Przyjmuje się, że czas oczekiwania w kolejce T_{ocz} jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym i funkcji gęstości $h(t)$ określonej wzorem (5-99)

$$h(t) = \begin{cases} \delta e^{-\delta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (5-99)$$

Jeżeli przed upływem czasu \bar{t}_{ocz} zgłoszenie nie otrzyma obsługi, opuszcza ono system, co stanowi strategię zarządzającego systemem.

Parametr rozkładu δ jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do średniego czasu oczekiwania w kolejce i jest określony zależnością (5-100). Może on być interpretowany jako średnie natężenie strumienia zgłoszeń opuszczających poczekalnię bez otrzymania obsługi.

$$\delta = 1/\bar{t}_{ocz} \quad (5-100)$$

W optymalizacji strukturalnej tego systemu ważnym parametrem jest średni czas oczekiwania zgłoszeń w kolejce. Powinien on być relatywnie mały, lecz aby to osiągnąć należy użyć wielu bardzo szybkich kanałów obsługi, co może pociągnąć za sobą znaczne koszty.

Klasyczny model systemu $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ z niecierpliwyimi zgłoszeniami [1] zawiera m kanałów obsługi o identycznej zdolności obsługi μ , do których wpływa całkowity strumień zgłoszeń λ .

W praktyce rzadko zdarza się sytuacja, aby każde stanowisko obsługi miało tę samą zdolność obsługi. Istotne jest zatem zbudowanie modelu systemu, który jest w stanie uwzględnić te różnice.

Mając do dyspozycji kilka wolnych kanałów obsługi, klienci kierują się z reguły do jednego z nich, lecz jego wybór jest na ogół przypadkowy.

Zakłada się, że strumień wejściowy λ rozkłada się równomiernie na wszystkie wolne stanowiska obsługi. Tak więc do każdego stanowiska obsługi wchodzi strumień o intensywności λ/m , natomiast każde z nich posiada indywidualną zdolność obsługi μ_i , $i = 1, \dots, m$.

Wprowadźmy oznaczenia; niech:

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i} \quad i = 1, \dots, m,$$

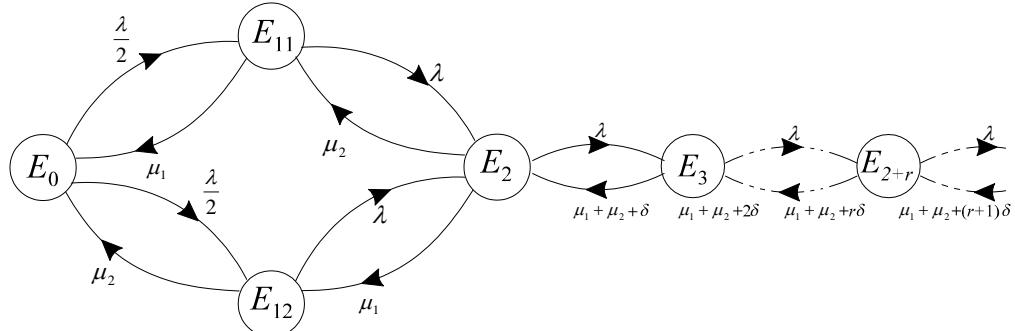
Zanim podamy wzory ogólne dotyczące systemu $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ z niecierpliwyimi zgłoszeniami i indywidualną obsługą rozpatrzmy dwa przypadki szczególne: systemu $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ dla $m=2$ i $m=3$.

5.4.2. System $M/M/2/\text{FIFO}/\infty$ z niecierpliwyimi klientami i indywidualną obsługą

W systemie tym są dwa kanały obsługujące zgłoszenia charakteryzujące się indywidualnymi intensywnościami obsługi: μ_1 dla pierwszego i μ_2 dla drugiego kanału.. System ten może znajdować się w jednym z następujących stanów: E_0 - obydwa kanały obsługi wolne, E_{11} - jeden kanał zajęty (kanał o numerze 1), E_{12} -jeden kanał zajęty (kanał o numerze 2), E_2 -dwa kanały obsługi zajęte, E_3 - dwa kanały zajęte, jedno zgłoszenie w poczekalni, ..., E_i - dwa kanały obsługi zajęte, ($i-2$) zgłoszeń w poczekalni, ...

Stany E_0, E_{11}, E_{12}, E_2 , są stanami bez kolejki, natomiast $E_3, E_4, \dots, E_i, \dots$ są stanami z kolejką.

Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rys. 5.20.



Rys. 5.20. Graf stanów dla modelu $M/M/2/\text{FIFO}/\infty$ z niecierpliwyimi klientami i indywidualną obsługą.

Każdemu stanowi przyporządkowujemy odpowiednie prawdopodobieństwo. Tak więc p_i jest prawdopodobieństwem tego, że system znajduje się w stanie E_i .

Stosując regułę mnemotechniczną [1] do grafu przedstawionego na rys. 5.20 otrzymujemy dla stanu stacjonarnego następujący układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned}
& \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} - \lambda p_0 = 0 \\
& 0,5\lambda p_0 + \mu_2 p_2 - (\lambda + \mu_1) p_{11} = 0 \\
& 0,5\lambda p_0 + \mu_1 p_2 - (\lambda + \mu_2) p_{12} = 0 \\
& \lambda p_{11} + \lambda p_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_2 + (\mu_1 + \mu_2 + \delta) p_3 = 0
\end{aligned} \tag{5-101}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda p_{2+r-1} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda + r\delta) p_{2+r} - [\mu_1 + \mu_2 + (r+1)\delta] p_{2+r+1} = 0 \\
& r \geq 1
\end{aligned}$$

Spełniony musi być również warunek normalizujący:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1, \tag{5-102}$$

gdzie $p_1 = p_{11} + p_{12}$.

Rozwiążując układ równań (5-101) otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned}
p_{11} &= \frac{\lambda}{2\mu_1} p_0 = \frac{\rho_1}{2} p_0 & p_{12} &= \frac{\lambda}{2\mu_2} p_0 = \frac{\rho_2}{2} p_0 \\
p_1 &= p_{11} + p_{12} = \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)}{2\mu_1\mu_2} p_0 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} p_0 \\
p_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2} p_0 = \frac{\rho_1\rho_2}{2} p_0 \\
p_3 &= \frac{\lambda^3}{2\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2 + \delta)} p_0 = p_{2+r} = \frac{\rho_1\rho_2\lambda}{2(\mu_1 + \mu_2 + \delta)} p_0 \\
\\
p_{2+r} &= \frac{\rho_1\rho_2\lambda^r}{2 \prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + n\delta)} p_0, \quad r \geq 1
\end{aligned} \right\} \tag{5-102}$$

Prawdopodobieństwo p_0 wyliczamy z warunku normalizującego

$$p_0 = 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\rho_1 + \rho_2 \right) + \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho_1 \rho_2 \lambda^r}{2 \prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + n\delta)} \right]^{-1} \quad (5-103)$$

Średnia liczba zgłoszeń w poczekalni wynosi

$$\bar{v} = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{2+r} = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \rho_1 \rho_2 \lambda^r}{2 \prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + n\delta)}}{1 + \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho_1 \rho_2 \lambda^r}{2 \prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + n\delta)}} \quad (5-104)$$

Prawdopodobieństwo p_w , tego że zgłoszenie opuści poczekalnię bez otrzymania obsługi obliczamy ze wzoru (5-105)

$$p_w = \frac{\delta}{\lambda} \bar{v}. \quad (5-105)$$

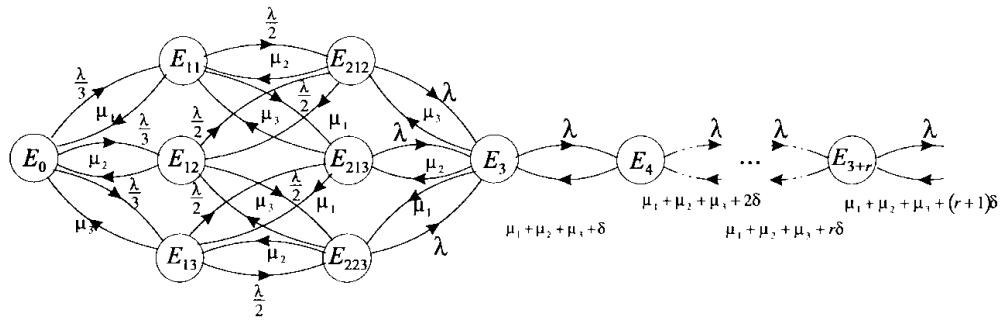
Podstawiając do wzoru (5-105) zależność (5-104) otrzymujemy

$$p_w = \frac{\frac{\delta \rho_1 \rho_2}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \lambda^{r-1}}{\prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + n\delta)}}{1 + \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho_1 \rho_2 \lambda^r}{2 \prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + n\delta)}} \quad (5-106)$$

5.4.3. System M/M/3/FIFO/ ∞ z niecierpliwymi klientami i indywidualną obsługą

W systemie tym są trzy kanały o indywidualnych intensywnościach obsługi: μ_1, μ_2, μ_3 obsługujące zgłoszenia. System ten może znajdować się w jednym z następujących stanów: E_0 - trzy kanały obsługi wolne, E_{11} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 1), E_{12} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 2), E_{13} - jeden kanał obsługi zajęty (kanał nr 3), E_{212} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 1 i 2), E_{213} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 1 i 3), E_{223} - dwa kanały obsługi zajęte (kanały nr 2 i 3), E_3 - trzy kanały obsługi zajęte, brak zgłoszeń w poczekalni, E_4 - trzy kanały obsługi zajęte, jedno zgłoszenie w poczekalni, ... E_i - trzy kanały obsługi zajęte, ($i-3$) zgłoszeń w poczekalni, ...

Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rys. 5.21.



Rys. 5.21. Graf stanów dla modelu $M/M/3/FIFO/\infty$ z niecierpliwy mi klientami i indywidualną obsługą

Stosując regułę mnemotechniczną do tego grafu otrzymujemy dla stanu stacjonarnego układ równań algebraicznych (5-107):

$$\left. \begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} + \mu_3 p_{13} &= 0 \\ \lambda / 3 p_0 - (\mu_1 + \lambda) p_{11} + \mu_2 p_{212} + \mu_3 p_{213} &= 0 \\ \lambda / 3 p_0 - (\mu_2 + \lambda) p_{12} + \mu_1 p_{212} + \mu_3 p_{223} &= 0 \\ \lambda / 3 p_0 - (\mu_3 + \lambda) p_{13} + \mu_2 p_{213} + \mu_2 p_{223} &= 0 \\ \lambda / 2 p_{11} + \lambda / 2 p_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) p_{212} + \mu_3 p_3 &= 0 \\ \lambda / 2 p_{11} + \lambda / 2 p_{13} - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda) p_{213} + \mu_2 p_3 &= 0 \\ \lambda / 2 p_{12} + \lambda / 2 p_{13} - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_{223} + \mu_1 p_3 &= 0 \\ p_{212} + \lambda p_{213} + \lambda p_{223} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) p_3 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \delta) p_4 &= 0 \\ \dots \\ \lambda p_{3+r-1} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda + r\delta) p_{3+r} + [\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + (r+1)\delta] p_{3+r+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-107)$$

$r \geq 1$

Spełniony musi być także warunek normalizujący:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1, \quad (5-108)$$

gdzie $p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13}$, $p_2 = p_{212} + p_{213} + p_{223}$

Rozwiążanie układu równań (5-107) przyjmuje postać:

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{\rho_1}{\binom{3}{1}} p_0, & p_{12} &= \frac{\rho_2}{\binom{3}{1}} p_0, & p_{13} &= \frac{\rho_3}{\binom{3}{1}} p_0, & p_{212} &= \frac{\rho_1 \rho_2}{2! \binom{3}{2}} p_0 \\ p_{213} &= \frac{\rho_1 \rho_3}{2! \binom{3}{2}} p_0, & p_{223} &= \frac{\rho_2 \rho_3}{2! \binom{3}{2}} p_0, & p_3 &= \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{3! \binom{3}{3}} p_0 \end{aligned} \right\} \quad (5-109)$$

Z następujących równań układu (5-107) po wykorzystaniu uzyskanych wyników wyznaczamy kolejne prawdopodobieństwa.

$$p_4 = \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \lambda}{3! \binom{3}{3} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \delta)} p_0, \quad r=1 \quad (5-110)$$

$$p_{3+r} = \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \lambda^r}{6 \prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + n\delta)} p_0, \quad r \geq 1 \quad (5-111)$$

Ponadto możemy zapisać

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{\binom{3}{1}} p_0 = \frac{SK_3^1}{\binom{3}{1}} p_0$$

$$p_2 = p_{212} + p_{213} + p_{223} = \frac{\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3}{2! \binom{3}{2}} p_0 = \frac{SK_3^2}{2! \binom{3}{2}} p_0 \quad (5-112)$$

$$p_3 = \frac{SK_3^3}{3!} p_0$$

Wielkość p_0 wyliczona z warunku normalizującego wynosi

$$p_0 = \left[1 + \frac{SK_3^1}{\binom{3}{1}} + \frac{SK_3^2}{2! \binom{3}{2}} + \frac{SK_3^3}{3!} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \lambda^r}{6 \prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + n\delta)} \right]^{-1} \quad (5-113)$$

5.4.4. Uogólnienie wyników szczegółowych na system $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ z niecierpliwymi klientami i indywidualną obsługą

Analizując modele i zależności dotyczące systemów: $M/M/2/\text{FIFO}/\infty$ oraz $M/M/3/\text{FIFO}/\infty$ możemy zauważać pewne analogie w uzyskanych wynikach. Możemy więc uogólnić powyższe wzory dla m -kanalowego systemu $M/M/m/\text{FIFO}/\infty$ z niecierpliwymi klientami i indywidualną obsługą. Zachodzą zatem zależności:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} p_0, \quad i \leq m \\ &\vdots \\ p_{m+r} &= \frac{\prod_{i=1}^m \rho_i \lambda^r}{m! \prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)} p_0, \quad r \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (5-114)$$

Liczymy pozostałe parametry systemu.

$$p_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^m \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{SK_m^m \lambda^r}{m! \prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)} \right]^{-1} \quad (5-115)$$

Średnia liczba zgłoszeń w poczekalni:

$$\bar{v} = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot p_{m+r} = \frac{\frac{SK_m^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \lambda^r}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)}}{1 + \sum_{i=1}^m \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} + \frac{SK_m^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)}} \quad (5-116)$$

$$p_w = \frac{\frac{SK_m^m}{m!} \delta \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\lambda^{r-1}}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)}}{1 + \sum_{i=1}^m \frac{SK_m^i}{i! \binom{m}{i}} + \frac{SK_m^m}{m!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)}}$$
(5-117)

Względna zdolność obsługi wynosi:

$$q = 1 - p_w \quad (5-118)$$

Średnia liczba zajętych kanałów \bar{m}_0 :

$$\bar{m}_0 = \sum_{i=1}^m ip_i + \sum_{r=1}^{\infty} mp_{m+r} \quad (5-119)$$

Średnia ilość zgłoszeń w systemie:

$$\bar{n} = \bar{v} + \bar{m}_0 = \sum_{i=1}^m ip_i + \sum_{r=1}^{\infty} (m+r)p_{m+r}$$
(5-120)

Korzystając z I formuły Little'a dla stanu ustalonego obliczymy średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce \bar{t}_f , średni czas obsługi \bar{t}_o oraz średni czas przebywania jednostki w systemie \bar{t}_s .

Średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce :

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} \quad (5-121)$$

Średni czas obsługi

$$\bar{t}_o = \frac{q}{\mu} = \frac{(1-p_w)}{\mu} \quad (5-122)$$

Średni czas przebywania jednostki w systemie:

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \bar{t}_o = \frac{\bar{v}}{\lambda} + \frac{(1-p_w)}{\mu} \quad (5-123)$$

Chcąc obliczyć poszczególne parametry dla konkretnego przykładu musimy dokonać zaokrąglenia nieskończonej sumy występującej we wzorach (5-114÷5-117). Najczęściej stosowane formuły mają postać:

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\prod_{n=1}^s \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)} < \frac{\left(\frac{\lambda}{\delta} \right)^r e^{\frac{\lambda}{\delta}}}{r!} \quad (5-124)$$

lub

$$\sum_{s=r}^{\infty} \frac{r\lambda^r}{\prod_{n=1}^s \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)} < \frac{\left(\frac{\lambda}{\delta} \right)^r e^{\frac{\lambda}{\delta}}}{(r-1)!} \quad (5-125)$$

Stosując te oszacowania możemy sumy nieskończone zaokrąglić i policzyć jako sumę kilku pierwszych r wyrazów nieskończonych sum (5-124) i (5-125) lub popełniamy przy tym pewien błąd, który jednakże jest bardzo mały (co potwierdzają przeprowadzone obliczenia). Wynika stąd, że przedstawione sumy są bardzo szybko zbieżne w miarę wzrostu liczby wyrazów sumy.

5.4.5. Porównanie modelu klasycznego z modelem z niecierpliwymi klientami i indywidualną obsługą.

Model klasyczny jest to uproszczony model z indywidualną obsługą, zakładamy wtedy, że wszystkie kanały mają identyczną zdolność obsługi. Uproszczenie to pociąga za sobą pewne błędy. Przyjmując dane liczbowe możemy oszacować jaki błąd popełniamy stosując model klasyczny.

Aby przekonać się jaki błąd popełniamy stosując model klasyczny dokonujemy porównania modeli: z indywidualną obsługą i systemu klasycznego. najlepiej możemy to zobaczyć analizując konkretny przykład liczbowy.

Załóżmy, że system z niecierpliwymi klientami i indywidualną obsługą ma parametry:

a)	b)
$m = 3$	$m = 3$
$\lambda = 1$	$\lambda = 1$
$\mu_1 = 1 \quad \rho_1 = 1$	$\mu_1 = 0.5 \quad \rho_1 = 2$
$\mu_2 = 2 \quad \rho_2 = 0.5$	$\mu_2 = 2 \quad \rho_2 = 0.5$
$\mu_3 = 3 \quad \rho_3 = 1 / 3$	$\mu_3 = 3.5 \quad \rho_3 = 2 / 7$
$\delta = 5$	$\delta = 5$

Dla systemu klasycznego w obu przypadkach mamy : $\mu = 2, \rho = 0.5$

Obliczenia przeprowadzamy dla dwóch grup danych, aby przekonać się jaka jest wartość błędu w zależności od rozpiętości parametrów charakteryzujących zdolność obsługi, najpierw dla danych określonych w punkcie a). W pierwszej kolejności liczymy „sumy nieskończone”. Nasze oszacowanie będzie polegało na policzeniu pierwszych czterech składników tych sum i dodaniu wyrażenia ograniczającego ($r=5$ w nierówności (5-124))

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{n=1}^r 6 + n\delta \right)} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\delta} \right)^5 e^{\frac{\lambda}{\delta}}}{5!} =$$

$$= \frac{1}{11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \frac{1}{11 \cdot 16 \cdot 21} + \frac{1}{11 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 26} + 3.255 \cdot 10^{-6} = 9.6875133 \cdot 10^{-2}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r\lambda^r}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^m \mu_i + n\delta \right)} = \sum_{r=1}^4 \frac{r\lambda^r}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{n=1}^r 6 + n\delta \right)} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\delta} \right)^5 e^{\frac{\lambda}{\delta}}}{4!} =$$

$$= \frac{1}{11} + \frac{2}{11 \cdot 16} + \frac{3}{11 \cdot 16 \cdot 21} + \frac{4}{11 \cdot 16 \cdot 21 \cdot 26} + 16.27 \cdot 10^{-6} = 10.31423 \cdot 10^{-2}$$

Teraz możemy wyliczyć kolejne prawdopodobieństwa charakteryzujące system:

$$p_0 = \left[1 + \frac{SK_3^1}{3} + \frac{SK_3^2}{6} + \frac{SK_3^3}{6} + \frac{SK_3^3}{6} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{\prod_{n=1}^r (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + n\delta)} \right]^{-1} = \\ = \left[1 + \frac{11}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} 9.6875 \cdot 10^{-2} \right]^{-1} = [1.8082465]^{-1} = 0.553021937$$

$$p_1 = \frac{SK_3^1}{3 \choose 1} p_0 = \frac{11}{18} p_0 = 0.33795785$$

$$p_2 = \frac{SK_3^2}{2! \binom{3}{2}} p_0 = \frac{1}{6} \cdot 0.553 = 0.092170322$$

$$p_3 = \frac{SK_3^3}{3! \binom{3}{3}} p_0 = \frac{1}{36} \cdot 0.553 = 0.01536172$$

$$p_4 = \frac{SK_3^3}{3! \binom{3}{3}} \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \delta} p_0 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{11} \cdot p_0 = 0.00139652$$

$$p_5 = \frac{SK_3^3}{3! \binom{3}{3}} \frac{\lambda^2}{(6+5)(6+10)} p_0 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{11 \cdot 16} \cdot p_0 = 0.000087282$$

$$p_6 = \frac{SK_3^3}{3! \binom{3}{3}} \frac{\lambda^2}{11 \cdot 16 \cdot 21} p_0 = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{11 \cdot 16 \cdot 21} \cdot p_0 = 0.000004156$$

Prawdopodobieństwo, że zgłoszenie opuści poczekalnię bez obsługi wynosi

$$p_w = \frac{SK_3^3}{3!} \frac{\delta}{\lambda} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r r}{\prod_{n=1}^r \left(\sum_{i=1}^3 \mu_i + n\delta \right)} \cdot p_0 = \frac{1}{36} \cdot 5 \cdot 10.3 \cdot 10^{-2} \cdot p_0 = 0.007922215$$

Średnia liczba zgłoszeń w poczekalni:

$$\bar{v} = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot p_{m+r} = p_w \frac{\lambda}{\delta} = 0.001584443$$

Średnia liczba zajętych kanałów obsługi:

$$\begin{aligned} \bar{m}_0 &= \sum_{i=1}^3 i \cdot p_i + \sum_{r=1}^{\infty} m \cdot p_{m+r} = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 3(p_4 + p_5 + p_6) \\ \bar{m}_0 &= 0.572847528 \end{aligned}$$

Średnia liczba zgłoszeń w systemie

$$\bar{n} = \bar{v} + \bar{m}_0 = \sum_{i=1}^m i \cdot p_i + \sum_{r=1}^{\infty} (m+r) \cdot p_{m+r}$$

$$\bar{n} = 0.574431971$$

Podobne obliczenia przeprowadzamy dla danych określonych w punkcie b) oraz dla modelu klasycznego uśredniając wartości μ_i .

Jako wyniki poprawne uzajmujemy wyniki oparte na modelu z indywidualną obsługą. Błąd jest wyliczany ze wzoru (5-126):

$$\delta = \frac{W_{klas} - W_{ind}}{W_{ind}} \cdot 100\% \quad (5-126)$$

gdzie: W_{klas} - wielkości wyliczone na podstawie modelu klasycznego

W_{ind} - wielkości wyliczone na podstawie modelu z indywidualną obsługą

Parametry oraz wyniki obliczeń dla modelu klasycznego i z indywidualną obsługą wraz z błędem jaki popełniamy przyjmując model klasyczny zawarte są w Tabeli 5-5

Tabela 5-5 Zestawienie wyników obliczeń

Wielkość	Model klasyczny	Model ind. Dane a	Model ind. Dane b	Błąd $\delta_a[\%]$	Błąd $\delta_b[\%]$
λ	1	1	1	–	–
μ_1	2	1	0,5	–	–
μ_2	2	2	2	–	–
μ_3	2	3	3,5	–	–
ρ_1	0,5	1	2	–	–
ρ_2	0,5	0,5	0,5	–	–
ρ_3	0,5	1/3	1,25	–	–
p_0	0,606850775	0,553021937	0,441205713	9,73	37,5
p_1	0,303425387	0,337957850	0,409691019	-10,22	-25,94
p_2	0,075856346	0,092170322	0,126058775	-17,70	-39,82
p_3	0,012642724	0,015361720	0,21009795	-17,70	-39,82
p_4	0,001149338	0,001396520	0,001909981	-17,70	-39,82
p_5	0,000071833	0,000087282	0,000119373	-17,70	-39,82
p_6	0,000003421	0,000004156	0,000005684	-17,70	-39,82
p_w	0,006519998	0,007922215	0,010834992	-17,70	-39,82
q	0,993480002	0,992077785	0,989165008	0,14	0,43
\bar{m}_0	0,496740027	0,572847528	0,730943068	-13,28	-32,04
\bar{v}	0,001303999	0,001584443	0,002166998	-17,70	-39,82
\bar{n}	0,498044026	0,574431971	0,733110066	-13,30	-32,07
\bar{t}_f	0,001303999	0,001584443	0,002166998	-17,70	-39,82
\bar{t}_0	0,496740001	0,496038892	0,494582504	0,14	0,43
\bar{t}_s	0,498044	0,497623335	0,496749502	0,08	0,26

Analizując wyniki przedstawione w Tabeli 5.5 zauważamy, że konieczne jest rozpatrywanie modeli systemów kolejkowych z indywidualną obsługą. W sytuacji, gdy wartość średnia nie jest wielkością reprezentatywną dla intensywności obsługi poszczególnych kanałów widzimy, że przy obliczaniu niektórych parametrów posługując się modelem klasycznym popełniamy bardzo duży błąd, który dochodzi do 40 %. Błąd ten szybko wzrasta w miarę powiększania się rozpiętości między skrajnymi wartościami reprezentującymi intensywność obsługi stanowisk.

5.5 Model systemu kolejkowego M/M/m/FIFO/N/F z indywidualną obsługą i. równomiernym rozpływem zgłoszeń

5.5.1 Charakterystyka systemu

Przy opracowaniu tego systemu kolejkowego wprowadzamy następujące oznaczenia:

m – liczba kanałów obsługi

N – maksymalna ilość zgłoszeń w systemie

λ - intensywność strumienia zgłoszeń

μ_i - zdolność obsługi I-tego kanału $1 < i \leq m$

I wielkości określone wzorami

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}, \dots, \rho_m = \frac{\lambda}{\mu_m}$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m \quad (5-127)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^m \mu_i}$$

Bezpośrednie wyprowadzenie wzorów opisujących system z indywidualną obsługą M/M/m/FIFO/N/F jest zadaniem bardzo trudnym, dlatego też najpierw zostanie pokazany sposób wyprowadzenia wzorów dla szczególnych przypadków: systemu z dwoma ($m=2$) indywidualnymi kanałami M/M/2/FIFO/N/F i trzema ($m=3$) M/M/3/FIFO/N/F. Następnie wzory te zostaną uogólnione na dowolną liczbę kanałów z indywidualną obsługą

5.5.2 System M/M/2/FIFO/N/F z indywidualną obsługą

System tego typu można scharakteryzować przy pomocy następującego zestawu parametrów N , $m=2$, λ , μ_1 , μ_2 , gdzie μ_1, μ_2 są to odpowiednio zdolności obsługi pierwszego i drugiego kanału. Opisywany system może się znaleźć w następujących stanach:

E_0 – wszystkie kanały obsługi wolne

$E_{1,1}$ – jeden kanał zajęty ; kanał nr 1

$E_{1,2}$ – jeden kanał zajęty ; kanał nr 2,

E_2 - dwa kanały obsługi zajęte,

E_3 - dwa kanały obsługi zajęte, jedno zgłoszenie w kolejce

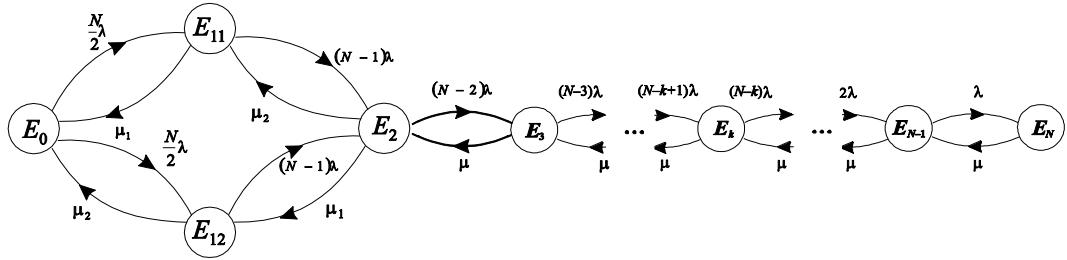
...

E_k - dwa kanały obsługi zajęte, $(k-2)$ zgłoszeń w kolejce $(2 < k < N)$

...

E_N - dwa kanały obsługi zajęte, $(N-2)$ zgłoszeń w kolejce .

Prawdopodobieństwa, że system znajdzie się w stanach: $E_0, E_{11}, E_{12}, E_2, \dots, E_k, \dots, E_N$ wynoszą odpowiednio $p_0, p_{11}, p_{12}, p_2, \dots, p_k, \dots, p_N$.
 Graf stanów dla rozpatrywanego systemu przedstawiono na rysunku 5.22.



Rys. 5.22. Graf stanów dla systemu $M/M/2/FIFO/N/F$ z indywidualną obsługą

Stosując regułę mnemotechniczną w odniesieniu do tego grafu można w sposób szybki znaleźć układ równań dla rozważanego systemu w stanie stacjonarnym. Mają one postać:

$$\begin{aligned} -N\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} - \mu_2 p_{12} &= 0 \\ 0,5N\lambda p_0 - [(N-1)\lambda + \mu_1] p_{11} + \mu_2 p_2 &= 0 \\ 0,5N\lambda p_0 - [(N-1)\lambda + \mu_2] p_{12} + \mu_1 p_2 &= 0 \\ (N-1)\lambda p_{11} + (N-1)\lambda p_{12} - \{(N-2)\lambda + \mu\} p_2 + \mu p_3 &= 0 \quad (5-128) \\ (N-2)\lambda p_2 - [(N-3)\lambda + \mu_1] p_3 + \mu_2 p_4 &= 0 \\ \vdots \\ (N-k-1)\lambda p_{k-1} - (N-k)\lambda + \mu\} p_k + \mu p_{k+1} &= 0, \\ 2 < k < N \\ \vdots \\ \lambda p_{N-1} + \mu p_N &= 0 \end{aligned}$$

Przy czym musi być spełniony dodatkowy warunek normalizujący:

$$\sum_{i=0}^N p_i = 1 \quad (5-129)$$

gdzie $p_1 = p_{11} + p_{12}$.

Powyższy układ równań zapisany w postaci macierzowej przyjmuje następującą postać (warunek normalizujący nie został tutaj uwzględniony):

$$\left[\begin{array}{ccccccc|cc} -N\lambda & \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0,5N\lambda & -[(N-1)\lambda + \mu_1] & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0,5N\lambda & 0 & -[(N-1)\lambda + \mu_2] & \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (N-1)\lambda & (N-1)\lambda & -[(N-2)\lambda + \mu] & \mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (N-2)\lambda & -[(N-3)\lambda + \mu] & \mu & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(N-3)\lambda & -[(N-4)\lambda + \mu] & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda + \mu) & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\mu \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-130)$$

Regularna struktura tego układu równań, umożliwia jego łatwe rozwiązywanie. Możliwe jest wyróżnienie dwóch charakterystycznych części:

H- głowa i **T**-ogon grafu, jak pokazano to na rysunku 5.23. Część **H** układu zawiera równania opisujące stany: E_0, E_1, \dots, E_m . Część **T** opisuje stany grafu: $E_{m+1}, E_{m+2}, \dots, E_N$. Wektory kolumnowe \mathbf{p}_H i \mathbf{p}_T zawierają wartości prawdopodobieństw odpowiadające grupom **H** i **T**.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H} & \\ \hline (N-m)\lambda & \mathbf{T} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_H \\ \vdots \\ \mathbf{p}_T \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Rys. 5.23 Podział układu równań na dwie części:

Rozwiązywanie układu równań rozpoczniemy od rozwiązywania jego części **T**. Rozważania związane z tą częścią układu równań będą prawdziwe zarówno dla rozpatrywanego przez nas systemu $M/M/2/FIFO/N/F$, jak również systemu $M/M/3/FIFO/N/F$ i w końcu systemu $M/M/m/FIFO/N/F$.

Część **T** układu równań może być zapisana następująco:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -[(N-m-1)\lambda + \mu] & \mu & 0 & 0 & 0 & p_{m+1} \\ (N-m)\lambda & -[(N-m-1)\lambda + \mu] & \mu & 0 & 0 & p_{m+2} \\ 0 & (N-m-1)\lambda & -[(N-m-2)\lambda + \mu] & 0 & 0 & p_{m+3} \\ 0 & 0 & (N-m-2)\lambda & 0 & 0 & p_{m+4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\lambda & -(\lambda + \mu) & p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & p_N \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -(N-m)p_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-131)$$

Stąd po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{m+1} \\ (N-m)\lambda & -\mu & 0 & 0 & 0 & p_{m+2} \\ 0 & (N-m-1)\lambda & -\mu & 0 & 0 & p_{m+3} \\ 0 & 0 & (N-m-2)\lambda & 0 & 0 & p_{m+4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\lambda & -\mu & p_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & p_N \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -(N-m)\lambda p_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-132)$$

co w rezultacie daje

$$p_{m+1} = \frac{(N-m)!}{(N-m-1)!} \rho \cdot p_m$$

$$p_{m+2} = \frac{(N-m)!}{(N-m-2)!} \rho^2 \cdot p_m$$

....

$$p_{m+j} = \frac{(N-m)!}{(N-m-j)!} \rho^j \cdot p_m$$

$$p_N = (N-m)! \rho^{N-m} p_m$$

Ostatecznie więc mamy:

$$\begin{aligned} p_{m+j} &= \frac{(N-m)!}{(N-j)!} \rho^{j-m} \cdot p_m, \quad m < j < N \\ p_N &= (N-m)! \rho^{N-m} p_m \end{aligned} \quad (5-133)$$

Część **H** układu równań zapisujemy następująco:

$$\begin{bmatrix} -N\lambda & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \frac{N}{2}\lambda & -(N-1)\lambda + \mu_1 & 0 & \mu_2 \\ \frac{N}{2}\lambda & 0 & -(N-1)\lambda + \mu_2 & \mu_1 \\ 0 & (N-1)\lambda & (N-1)\lambda & -(N-2)\lambda + \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu p_{m+1} \end{bmatrix} \quad (5-134)$$

Po podstawieniu p_{m+1} uzyskanego z części **H** i uzależnieniu wszystkich prawdopodobieństw od p_0 otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} -(N-1)\lambda + \mu_1 & 0 & \mu_2 \\ 0 & -(N-1)\lambda + \mu_2 & \mu_1 \\ (N-1)\lambda & (N-1)\lambda & -\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{N}{2}\lambda \cdot p_0 \\ -\frac{N}{2}\lambda \cdot p_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-135)$$

W wyniku rozwiązania tego układu równań otrzymujemy:

$$p_{11} = \frac{N}{1! \binom{2}{1}} \rho_1 p_0$$

$$p_{12} = \frac{N}{1! \binom{2}{1}} \rho_2 p_0$$

$$p_2 = \frac{N(N-1)}{2! \binom{2}{2} \rho_1 \rho_2} p_0 \quad (5-136)$$

Po uwzględnieniu rozwiązań obu części układu równań oraz warunku normalizującego otrzymujemy następujące wzory na prawdopodobieństwa znajdowania się systemu w danym stanie:

$$p_0 = \frac{2}{2 + N(\rho_1 + \rho_2) + \sum_{j=2}^N \frac{N!}{(N-j)!} \rho_1 \rho_2 \rho^{j-2}}$$

$$p_1 = \frac{N}{2} (\rho_1 + \rho_2) p_0$$

$$p_j = \frac{N!}{(N-j)!} \rho_1 \rho_2 \rho^{j-2} p_0, \quad 2 \leq j \leq N$$

5.5.3. System M/M/3/FIFO/N/F z indywidualną obsługą

Dla systemu M/M/3/FIFO/N/F powtarzamy całą procedurę jak w poprzednim paragrafie. System tego typu można scharakteryzować przy pomocy następującego zestawu parametrów N , $m=3$, λ , μ_1, μ_2, μ_3 gdzie μ_1, μ_2 i μ_3 są to odpowiednio zdolności obsługi pierwszego, drugiego i trzeciego kanału. Opisywany system może się znaleźć w następujących stanach:

E_0 – wszystkie kanały obsługi wolne

$E_{1,1}$ – jeden kanał zajęty; kanał nr 1

$E_{1,2}$ – jeden kanał zajęty; kanał nr 2

$E_{1,3}$ – jeden kanał zajęty; kanał nr 3

E_{212} – dwa kanały obsługi zajęte, kanały nr 1 i nr 2

E_{213} – dwa kanały obsługi zajęte, kanały nr 1 i nr 3

E_{223} – dwa kanały obsługi zajęte, kanały nr 2 i nr 3

E_3 – trzy kanały obsługi zajęte,

E_4 – trzy kanały obsługi zajęte, jedno zgłoszenie w kolejce.

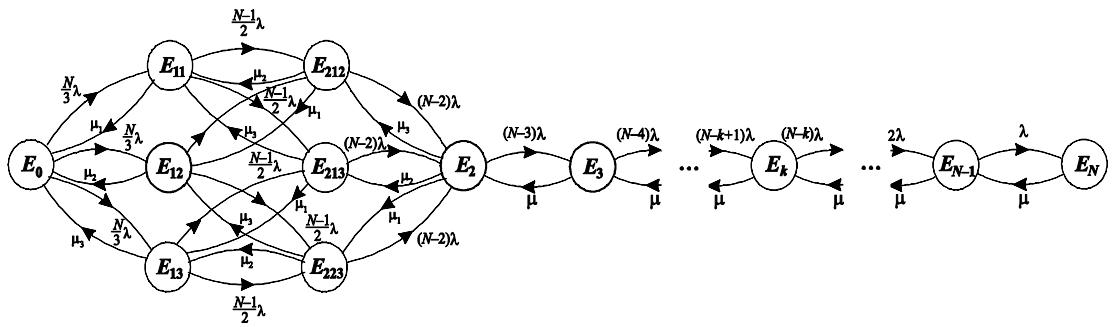
...

E_k – trzy kanały obsługi zajęte, $(k-3)$ zgłoszeń w kolejce ($3 < k < N$)

...

E_N – trzy kanały obsługi zajęte, $(N-3)$ zgłoszeń w kolejce .

Każdemu ze stanów przyporządkowane jest odpowiednie prawdopodobieństwo. Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rysunku 5.24.



Rys. 5.24 Graf stanów dla systemu M/M/3/FIFO/N/F z indywidualną obsługą

Stosując reguły mnemotechniczną dla grafu z rysunku 5.24 otrzymujemy dla części T następujący układ równań algebraicznych

$$\begin{aligned}
 -N\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} + \mu_3 p_{13} &= 0 \\
 N/3\lambda p_0 + [(N-1)\lambda + \mu_1] p_{11} + \mu_2 p_{212} + \mu_3 p_{213} &= 0 \\
 N/3\lambda p_0 + [(N-1)\lambda + \mu_2] p_{12} + \mu_1 p_{212} + \mu_3 p_{223} &= 0 \\
 N/3\lambda p_0 + [(N-1)\lambda + \mu_3] p_{13} + \mu_1 p_{213} + \mu_3 p_{223} &= 0 \\
 (N-1)/2\lambda p_{11} + (N-1)/2\lambda p_{12} - [(N-2)\lambda + \mu_1 + \mu_2] p_{212} + \mu_3 p_3 &= 0 \\
 (N-1)/2\lambda p_{11} + [(N-1)/2\lambda p_{13} - [(N-2)\lambda + \mu_1 + \mu_3] p_{213} + \mu_2 p_3 &= 0 \\
 (N-1)/2\lambda p_{12} + [(N-1)/2\lambda p_{13} - [(N-2)\lambda + \mu_2 + \mu_3] p_{223} + \mu_1 p_3 &= 0 \\
 (N-2)\lambda p_{212} + (N-2)\lambda p_{213} + (N-2)\lambda p_{223} - \mu p_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{5-137}$$

Układ równań (5-137) w postaci macierzowej ma postać:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc}
 -N\lambda & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{N}{3}\lambda & -[(N-1)\lambda + \mu_1] & 0 & 0 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & 0 \\
 \frac{N}{3}\lambda & 0 & -[(N-2)\lambda + \mu_2] & 0 & \mu_1 & 0 & \mu_3 & 0 \\
 \frac{N}{3}\lambda & 0 & 0 & -[(N-2)\lambda + \mu_{13}] & 0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\
 0 & \frac{N-1}{2}\lambda & \frac{N-1}{2}\lambda & 0 & -[(N-2)\lambda + \mu_1 + \mu_2] & 0 & 0 & \mu_3 \\
 0 & \frac{N-1}{2}\lambda & 0 & \frac{N-1}{2}\lambda & 0 & -[(N-2)\lambda + \mu_1 + \mu_3] & 0 & \mu_2 \\
 0 & 0 & \frac{N-1}{2}\lambda & \frac{N-1}{2}\lambda & 0 & 0 & -[(N-2)\lambda + \mu_2 + \mu_3] & \mu_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & (N-2)\lambda & (N-2)\lambda & (N-2)\lambda & -\mu
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 p_0 \\
 p_{11} \\
 p_{12} \\
 p_{13} \\
 p_{212} \\
 p_{213} \\
 p_{223} \\
 p_3
 \end{array} \right] \tag{5-138}$$

Rozwiązujeając układ równań (5-138) otrzymujemy wzory na poszukiwane prawdopodobieństwa:

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{N}{1!(3)} \rho_1 p_0 & p_{12} &= \frac{N}{1!(3)} \rho_2 p_0 & p_{13} &= \frac{N}{1!(3)} \rho_3 p_0 \\
p_{212} &= \frac{N(N-1)}{2!(3)} \rho_1 \rho_2 p_0 & p_{213} &= \frac{N(N-1)}{2!(3)} \rho_1 \rho_3 p_0 \\
p_{223} &= \frac{N(N-1)}{2!(3)} \rho_2 \rho_3 p_0 & & & & (5-139) \\
p_3 &= \frac{N(N-1)(N-2)}{3!(3)} \rho_1 \rho_2 \rho_3 p_0
\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę warunek normalizujący otrzymujemy ostatecznie wzory:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{6}{6 + 2N(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) + N(N-1)(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3) + \sum_{j=3}^N \frac{N!}{(N-j)!} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho^{j-3}} \\
p_1 &= \frac{N}{3} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) p_0 & p_2 &= \frac{N(N-1)}{6} (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3) p_0 \\
p_j &= \frac{N!}{(N-j)!} (\rho_1 \rho_2 \rho_3) \rho^{j-3} p_0, & 3 \leq j \leq N & (5-140)
\end{aligned}$$

5.5.4. System M/M/m/FIFO/N/F z indywidualną obsługą

Biorąc pod uwagę rezultaty otrzymane dla systemów: M/M/2/FIFO/N/F i M/M/3/FIFO/N/F możemy przewidzieć rozwiązanie ogólne dla systemu mającego m kanałów obsługi o indywidualnych czasach obsługi:

Rozwiązanie to ma postać:

$$p_0 = \frac{m!}{m! + \sum_{i=1}^m \frac{N!}{(N-i)!} (m-i)! \dot{S}K_m^i + \sum_{j=m+1}^N \frac{N!}{(N-j)!} SK_m^m \rho^{j-m}}$$

$$p_{1j_1} = \frac{N}{1! \binom{m}{1}} \rho_{j_1} p_0 \quad p_{1j_2} = \frac{N}{1! \binom{m}{1}} \rho_{j_2} p_0 \quad \dots$$

$$p_{1j_m} = \frac{N}{1! \binom{m}{1}} \rho_{j_m} p_0 \quad (5-141)$$

$$p_1 = \frac{N}{1! \binom{m}{1}} SK_m^1 p_0$$

$$p_{2j_1 j_2} = \frac{N(N-1)}{2! \binom{m}{2}} \rho_{j_1} \rho_{j_2} p_0 \quad p_{2j_1 j_3} = \frac{N(N-1)}{2! \binom{m}{2}} \rho_{j_1} \rho_{j_3} p_0 \quad \dots$$

$$p_{2j_{m-1} j_m} = \frac{N(N-1)}{2! \binom{m}{2}} \rho_{j_{m-1}} \rho_{j_m} p_0$$

$$p_2 = \frac{N(N-1)}{2! \binom{m}{2}} SK_m^2 p_0$$

$$p_{ij_1 j_2 \dots j_i} = \frac{N!}{i!(N-i)! \binom{m}{i}} \rho_{j_1} \rho_{j_2} \dots \rho_{j_i} p_0$$

Symbol SK_m^i występujący we wzorze (5-141) jest objaśniony na przykładach (patrz wzór (5-142)).

$$\begin{aligned} SK_3^2 &= \rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3 \\ SK_4^1 &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 \end{aligned} \quad (5-142)$$

Rozwiązańe w postaci ogólnej jest następujące:

$$p_i = \frac{N!}{i!(N-i)! \binom{m}{i}} SK_m^i p_0, \quad 1 \leq i \leq m \quad (5-143)$$

$$p_j = \frac{N!}{m!(N-j)!} \left(\prod_{k=1}^m \rho_k \right) \rho^{j-m} p_0, \quad m \leq j \leq N$$

Mając dane formuły ogólne na poszczególne prawdopodobieństwa możemy określić wzory ogólne na najważniejsze parametry charakteryzujące system :

- średnią liczbę zgłoszeń w kolejce

$$\bar{v} = \sum_{r=0}^{N-m} p_{r+m} = \sum_{r=0}^{N-m} \frac{N!}{m!(N-r-m)!} \left(\prod_{k=1}^m \rho_k \right) \rho^r p_0 \quad (5-144)$$

- średnią liczbę zajętych kanałów obsługi

$$\bar{m}_0 = r \sum_{r=0}^m p_r + m \sum_{r=m+1}^N p_r \quad (5-145)$$

- średnią liczbę zgłoszeń w systemie

$$\bar{n} = \sum_{r=0}^m i p_i + \sum_{j=m+r}^N j p_j \quad (5-146)$$

- średni czas przebywania zgłoszeń w systemie

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda(N-\bar{n})} \quad (5-147)$$

- średni czas oczekiwania zgłoszenia w kolejce

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda(N-\bar{n})} = \bar{t}_s - \frac{1}{\mu} \quad (5-148)$$

Modele systemów kolejkowych są często wykorzystywane w praktyce jako podstawa do podjęcia decyzji dotyczących poprawy funkcjonowania struktur organizacyjnych występujących w różnych dziedzinach aktywności przemysłowej. W rozdziale niniejszym zostały wyprowadzone formuły konieczne do opisu systemu kolejkowego M/M/m/FIFO/N/F z indywidualnym czasem obsługi i ze strumieniem zgłoszeń rozłożonym równomiernie na wszystkie wolne kanały obsługi.

5.6. Model systemu kolejkowego M/M/m/-/m z indywidualną obsługą i nierównomiernym rozpływem zgłoszeń

5.6.1 Charakterystyka systemu

W klasycznym systemie ze stratami M/M/m/-/m zakłada się, że do m kanałów obsługi wpływa całkowity strumień zgłoszeń. Każdy kanał obsługuje

ma jednakową zdolność obsługi μ . W praktyce jednak rzadko zdarzają się takie sytuacje. W rozdziale pierwszym rozpatrzyliśmy system kolejkowy z indywidualnymi intensywnościami obsługi ale założyliśmy równomierny rozpływ zgłoszeń na niezajęte kanały obsługi. W niniejszym rozdziale rozpatrzymy model, w którym każdy z m kanałów obsługi ma różną zdolność obsługi (μ_1 dla pierwszego kanału, μ_2 dla drugiego kanału, μ_3 dla trzeciego kanału, ..., μ_m dla m – tego kanału) natomiast strumień wejściowy o intensywności λ rozkłada się nierównomiernie na każdy wolny kanał obsługi. W tym modelu systemu strumień wejściowy o intensywność λ rozkłada się na wszystkie wolne stanowiska obsługi to znaczy z prawdopodobieństwem k_1 jest zajmowany kanał o numerze jeden, z prawdopodobieństwem k_2 kanał o numerze dwa, ... z prawdopodobieństwem k_m kanał o numerze m . Spełnione przy tym są warunki: $\lambda = \sum_{i=1}^m k_i \lambda$, $\sum_{i=1}^m k_i = 1$. Podobnie jak w rozdziale pierwszym przyjmujemy oznaczenia:

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5-149)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i, \quad (5-150)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5-151)$$

Rozpatrzymy teraz dwa szczególne przypadki systemu dla $m=2$ i $m=3$.

5.6.2 System M/M/2/-/2 z indywidualną obsługą i nierównomiernym rozpływem zgłoszeń

Założmy, że każdy z kanałów obsługi tego systemu charakteryzuje się indywidualnymi intensywnościami obsługi: μ_1 dla pierwszego kanału i μ_2 dla drugiego oraz indywidualnymi intensywnościami przybywania zgłoszeń: $k_1\lambda$, dla pierwszego kanału i $k_2\lambda$ dla drugiego kanału, przy czym $k_1 + k_2 = 1$. Wielkości k_1, k_2 można traktować jako prawdopodobieństwa wybierania poszczególnych kanałów ze zbioru wolnych kanałów wyrażające preferencje zgłoszeń. System ten może znajdować się w jednym z następujących stanów:

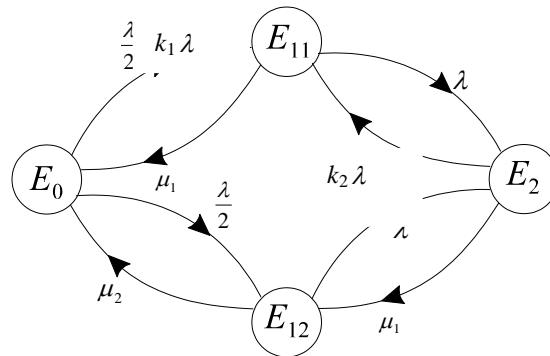
E_0 - wszystkie kanały obsługi wolne,

E_{11} - kanał numer 1 jest zajęty,

E_{12} - kanał numer 2 jest zajęty,

E_2 - dwa kanały zajęte.

Graf stanów tego systemu przedstawiono na rysunku 5.25.



Rys. 5.25 Graf stanów dla systemu $M/M/2/-2,(\lambda, \mu_1, \mu_2)$.

Oznaczmy przez p_0, p_{11}, p_{12}, p_2 - prawdopodobieństwa zdarzeń, że system znajduje się odpowiednio w stanie: E_0, E_{11}, E_{12}, E_2 .

Stosując regułę mnemotechniczną do tego grafu otrzymujemy dla stanu stacjonarnego następujący układ równań:

$$\begin{cases} 0 = -k_1\lambda p_0 - k_2\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_{12} \\ 0 = -\lambda p_{11} - \mu_1 p_{11} + \mu_2 p_2 + p_0 k_1\lambda \\ 0 = -\lambda p_{12} - \mu_2 p_{12} + \mu_1 p_2 + p_0 k_2\lambda \\ 0 = -\mu_2 p_2 - \mu_1 p_2 + \lambda p_{11} + \lambda p_{12} \end{cases} \quad (5-152)$$

Spełniony musi być także warunek normalizujący:

$$\sum_{k=0}^2 p_k = 1, \text{ czyli: } p_0 + p_{11} + p_{12} + p_2 = 1 \quad (5-153)$$

gdzie: $p_1 = p_{11} + p_{12}$.

Aby rozwiązać układ równań (5-152) wybieramy równania 2, 3, 4 tego układu i przekształcamy je do następującej postaci wektorowo-macierzowej:

$$p = A^{-1}b \quad (5-154)$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} -1 - \frac{1}{\rho_1} & 0 & \frac{1}{\rho_2} \\ 0 & -1 - \frac{1}{\rho_2} & \frac{1}{\rho_1} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \end{bmatrix} \quad (5-155)$$

$$p = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (5-156)$$

$$b = \begin{bmatrix} -k_1 p_0 \\ -k_2 p_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-157)$$

W wyniku rozwiązań tego układu otrzymujemy następujące wyniki:

$$p_{11} = \frac{(\rho_1 \rho_2 + \rho_2 + \rho_1) \rho_1 k_1 + \rho_2 \rho_1^2 k_2}{2\rho_1 \rho_2 + \rho_2 + \rho_1} p_0$$

$$p_{12} = \frac{(\rho_1 \rho_2 + \rho_2 + \rho_1) \rho_2 k_2 + \rho_1 \rho_2^2 k_1}{2\rho_1 \rho_2 + \rho_2 + \rho_1} p_0 \quad (5-158)$$

$$p_2 = \frac{(\rho_1 + 1) \rho_1 \rho_2^2 k_2 + (\rho_2 + 1) \rho_2 \rho_1^2 k_1}{2\rho_1 \rho_2 + \rho_2 + \rho_1} p_0$$

Wprowadzając podstawienie :

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} \quad (5-159)$$

oraz upraszczając powyższe wyrażenia otrzymujemy ostatecznie

$$p_{11} = \rho_1 \frac{\psi + k_1}{2\psi + 1} p_0$$

$$p_{12} = \rho_2 \frac{\psi + k_2}{2\psi + 1} p_0$$

(5-160)

$$p_{odm} = p_2 = \rho_1 \rho_2 \frac{\psi}{2\psi + 1} \left(1 + \frac{k_1}{\rho_2} + \frac{k_2}{\rho_1}\right) p_0$$

$$p_0 = \frac{2\psi + 1}{(2\psi + 1) + \rho_1(\psi + k_1) + \rho_2(\psi + k_2) + \rho_1 \rho_2 \psi \left(1 + \frac{k_1}{\rho_2} + \frac{k_2}{\rho_1}\right)}$$

W celu sprawdzenia poprawności uzyskanego rozwiązania stosujemy przejście graniczne polegające na podstawieniu wartości $k_1 = k_2 = 1/2$, które to podstawienie powoduje, że strumień wejściowy o intensywności λ rozkłada się równomiernie na wszystkie niezajęte stanowiska obsługi. Dla takiego przypadku otrzymujemy następujące wzory:

$$p_0 = \frac{2}{2 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2}$$

$$p_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rho_1 p_0, \quad p_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rho_2 p_0$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 p_0$$

co jest zgodne z wynikami uzyskanymi w rozdziale pierwszym (wzór (5-8)).

5.6.3 System M/M/3/-/3 z indywidualną obsługą i nierównomiernym rozpływem zgłoszeń

Podobnie jak dla systemu dwukanałowego przyjmujemy oznaczenia:

-intensywności obsługi kanałów: μ_1, μ_2, μ_3 ,

-intensywności przybywania zgłoszeń do poszczególnych kanałów:

$k_1\lambda, k_2\lambda, k_3\lambda$ przy czym $k_1 + k_2 + k_3 = 1$,

Rozważany system może znajdować się w następujących stanach:

E_0 – wszystkie kanały obsługi wolne

E_{11} – zajęty 1 kanał

E_{12} – zajęty 2 kanał

E_{13} – zajęty 3 kanał

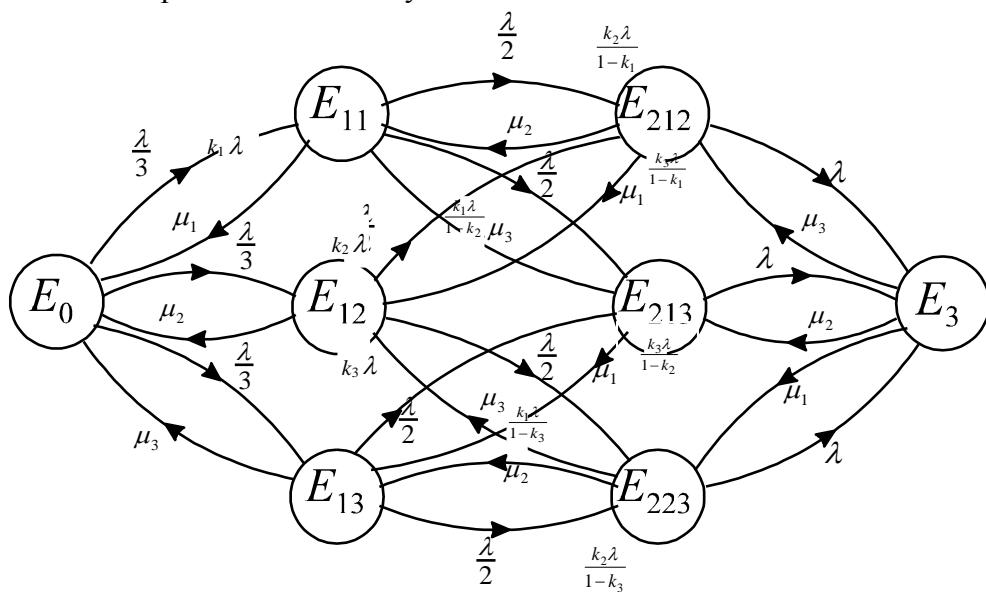
E_{212} – 2 zajęte kanały (numer 1 i 2)

E_{213} – 2 zajęte kanały (numer 1 i 3)

E_{223} – 2 zajęte kanały (numer 2 i 3)

E_3 – 3 kanały zajęte

Graf stanów przedstawiono na rysunku 5.26.



Rys.5.26. Graf stanów dla systemu $M/M/3/-/3, (\lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$

Oznaczmy przez $p_0, p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{212}, p_{213}, p_{223}, p_3$ prawdopodobieństwa zdarzeń, że system znajduje się odpowiednio w stanach $E_0, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{212}, E_{213}, E_{223}, E_3$. Stosując regułę mnemotechniczną dla stanu ustalonego otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych:

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_1\lambda p_0 + \mu_1 p_{11} - k_2\lambda p_0 + \mu_2 p_{12} - k_3\lambda p_0 + \mu_3 p_{13} = 0 \\ k_1\lambda p_0 - \mu_1 p_{11} - \frac{k_2}{1-k_1}\lambda p_{11} + \mu_2 p_{212} - \frac{k_3}{1-k_1}\lambda p_{11} + \mu_3 p_{213} = 0 \\ k_2\lambda p_0 - \mu_2 p_{12} - \frac{k_1}{1-k_2}\lambda p_{12} + \mu_1 p_{212} - \frac{k_3}{1-k_2}\lambda p_{12} + \mu_3 p_{223} = 0 \\ k_3\lambda p_0 - \mu_3 p_{13} - \frac{k_1}{1-k_3}\lambda p_{13} + \mu_1 p_{213} - \frac{k_2}{1-k_3}\lambda p_{13} + \mu_2 p_{223} = 0 \\ \frac{k_2}{1-k_1}\lambda p_{11} - \mu_2 p_{212} + \frac{k_1}{1-k_2}\lambda p_{12} - \mu_1 p_{212} - \lambda p_{212} + \mu_3 p_3 = 0 \\ \frac{k_3}{1-k_1}\lambda p_{11} - \mu_3 p_{213} + \frac{k_1}{1-k_3}\lambda p_{13} - \mu_1 p_{213} - \lambda p_{213} + \mu_2 p_3 = 0 \\ \frac{k_3}{1-k_2}\lambda p_{12} - \mu_3 p_{223} + \frac{k_3}{1-k_3}\lambda p_{13} - \mu_2 p_{223} - \lambda p_{223} + \mu_1 p_3 = 0 \\ \lambda p_{212} - \mu_3 p_3 - \mu_2 p_3 - \mu_1 p_3 + \lambda p_{213} + \lambda p_{223} = 0 \end{array} \right. \quad (5-161)$$

Spełniony musi być także warunek normalizujący:

$$\sum_{k=0}^3 p_k = 1, \quad (5-162)$$

to znaczy, że:

$$p_0 + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{212} + p_{213} + p_{223} + p_3 = 1$$

przy czym

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{11} + p_{12} + p_{13} \\ p_2 &= p_{212} + p_{213} + p_{223} \end{aligned} \quad (5-163)$$

Analizując rozwiązanie dla systemu dwukanałowego można przewidzieć częściowe rozwiązanie dla systemu trójkanałowego. Ma ono postać:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \rho_1 \frac{\psi + k_1}{3\psi + 1} p_0 \\ p_{12} &= \rho_2 \frac{\psi + k_2}{3\psi + 1} p_0 \\ p_{13} &= \rho_3 \frac{\psi + k_3}{3\psi + 1} p_0 \end{aligned} \quad (5-164)$$

$$p_3 = \psi p_2$$

gdzie :

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}; i = 1, 2, 3$$

Wówczas układ równań (5-161) można zredukować do układu trzech równań z niewiadomymi: $p_{212}, p_{213}, p_{223}$. Tak więc do dalszych obliczeń wybieramy z układu równań (5-161) równania o numerach 2, 3, 4. Równania te przekształcamy do następującej postaci wektorowo-macierzowej

$$p = A^{-1}b \quad (5-165)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} \mu_2 & \mu_3 & 0 \\ \mu_1 & 0 & \mu_3 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} p_{212} \\ p_{213} \\ p_{223} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2\mu_1\mu_2\mu_3} \begin{bmatrix} -\mu_1\mu_3 & -\mu_2\mu_3 & \mu_3^2 \\ -\mu_1\mu_2 & \mu_2^2 & -\mu_2\mu_3 \\ \mu_1^2 & -\mu_1\mu_2 & -\mu_1\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -k_1\lambda p_0 + p_{11}(\mu_1 + \frac{k_2}{1-k_1}\lambda + \frac{k_3}{1-k_1}\lambda) \\ -k_2\lambda p_0 + p_{12}(\mu_2 + \frac{k_3}{1-k_1}\lambda + \frac{k_3}{1-k_2}\lambda) \\ -k_3\lambda p_0 + p_{13}(\mu_3 + \frac{k_3}{1-k_1}\lambda + \frac{k_2}{1-k_3}\lambda) \end{bmatrix}$$

Otrzymane rozwiązanie ma postać:

$$\begin{aligned}
p_{212} &= \frac{-1}{2\mu_1\mu_2\mu_3} \left[\begin{array}{l} \lambda(k_1\mu_1\mu_3 + k_2\mu_2\mu_3 - k_3\mu_3^2) - \frac{1}{3\psi+1}(\rho_1(\mu_1+\lambda)(\psi+k_1)\mu_1\mu_3 + \\ \rho_2(\mu_2+\lambda)(\psi+k_2)\mu_2\mu_3 - \rho_3(\mu_3+\lambda)(\psi+k_3)\mu_3^2) \end{array} \right] p_0 \\
p_{213} &= \frac{-1}{2\mu_1\mu_2\mu_3} \left[\begin{array}{l} \lambda(k_1\mu_1\mu_2 - k_2\mu_2^2 + k_3\mu_2\mu_3) - \frac{1}{3\psi+1}(\rho_1(\mu_1+\lambda)(\psi+k_1)\mu_1\mu_2 - \\ \rho_2(\mu_2+\lambda)(\psi+k_2)\mu_2^2 + \rho_3(\mu_3+\lambda)(\psi+k_3)\mu_2\mu_3) \end{array} \right] p_0 \\
p_{223} &= \frac{-1}{2\mu_1\mu_2\mu_3} \left[\begin{array}{l} \lambda(-k_1\mu_1^2 + k_2\mu_1\mu_2 + k_3\mu_1\mu_3) - \frac{1}{3\psi+1}(-\rho_1(\mu_1+\lambda)(\psi+k_1)\mu_1^2 + \\ \rho_2(\mu_2+\lambda)(\psi+k_2)\mu_1\mu_2 + \rho_3(\mu_3+\lambda)(\psi+k_3)\mu_1\mu_3) \end{array} \right] p_0 \\
p_2 &= p_{212} + p_{213} + p_{223} \\
&\quad \left[\begin{array}{l} \rho_1(k_2+k_3) + \rho_2(k_1+k_3) + \rho_3(k_1+k_2) - (\frac{\lambda k_1\mu_1}{\mu_2\mu_3} + \frac{\lambda k_2\mu_2}{\mu_1\mu_3} + \frac{\lambda k_3\mu_3}{\mu_1\mu_2}) - \\ \frac{\lambda}{3\psi+1} \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3} ((\psi+k_1)(\mu_1+\lambda)(-\mu_1+\mu_2+\mu_3) + (\psi+k_2)(\mu_2+\lambda)(\mu_1-\mu_2+\mu_3) + \\ (\psi+k_3)(\mu_3+\lambda)(\mu_1+\mu_2-\mu_3)) \end{array} \right] \\
p_0 &= \frac{3\psi+1}{(3\psi+1) + \rho_1(\psi+k_1) + \rho_2(\psi+k_2) + \rho_3(\psi+k_3) - \frac{(1+\psi)(3\psi+1)}{2} M} \\
&\text{gdzie:} \\
M &= \rho_1(k_2+k_3) + \rho_2(k_1+k_3) + \rho_3(k_1+k_2) - (\frac{\lambda k_1\mu_1}{\mu_2\mu_3} + \frac{\lambda k_2\mu_2}{\mu_1\mu_3} + \frac{\lambda k_3\mu_3}{\mu_1\mu_2}) - \\
&\quad \frac{\lambda}{3\psi+1} \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_3} ((\psi+k_1)(\mu_1+\lambda)(-\mu_1+\mu_2+\mu_3) + (\psi+k_2)(\mu_2+\lambda)(\mu_1-\mu_2+\mu_3) + \\
&\quad (\psi+k_3)(\mu_3+\lambda)(\mu_1+\mu_2-\mu_3))
\end{aligned} \tag{5-166}$$

Podobnie jak poprzednio w celu sprawdzenia poprawności otrzymanego rozwiązania stosujemy przejście graniczne : $k_1=k_2=k_3=1/3$, co daje następujące wzory:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{6}{6 + 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_3} \\
p_{11} &= \frac{1}{\binom{3}{1}} \rho_1 p_0, \quad p_{12} = \frac{1}{\binom{3}{1}} \rho_2 p_0, \quad p_{13} = \frac{1}{\binom{3}{1}} \rho_3 p_0, \\
p_{212} &= \frac{1}{2!\binom{3}{2}} \rho_1 \rho_2 p_0, \quad p_{213} = \frac{1}{2!\binom{3}{2}} \rho_1 \rho_3 p_0, \quad p_{223} = \frac{1}{2!\binom{3}{2}} \rho_2 \rho_3 p_0, \\
p_3 &= \frac{1}{3!} \rho_1 \rho_2 \rho_3 p_0,
\end{aligned}$$

i jest zgodne z wynikami uzyskanymi dla modelu z równomiernym rozpływem strumienia zgłoszeń na wolne kanały obsługi (rozdział 5.1.1. wzór (5-8)).

Porównując wzory na poszczególne prawdopodobieństwa dla obu systemów, w przypadku gdy strumień wejściowy o intensywności λ rozkłada się na wszystkie wolne stanowiska obsługi równomiernie prawidłowości są widoczne wyraźnie. W przypadku gdy strumień wejściowy rozkłada się nierównomiernie nie jest to tak oczywiste. Wyraźnie są widoczne podobieństwa we wzorach na prawdopodobieństwa $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m}$. Natomiast w pozostałych wzorach są pewne prawidłowości ale znalezienie wzoru ogólnego na te zależności nie jest sprawą prostą.

5.6.4. Model systemu kolejkowego M/M/4/-/4 z indywidualną obsługą i nierównomiernym rozpływem zgłoszeń

Podobnie jak dla systemu dwukanałowego i trzykanałowego przyjmujemy oznaczenia

- intensywności obsługi kanałów $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$
- intensywności przybywania zgłoszeń do poszczególnych kanałów $k_1\lambda, k_2\lambda, k_3\lambda, k_4\lambda$

gdzie k_1, k_2, k_3, k_4 oznaczają prawdopodobieństwa zajętości poszczególnych kanałów, a λ jest intensywnością strumienia wejściowego systemu. Spełnione są przy tym warunki

$$\lambda = \sum_{i=1}^4 k_i \lambda, \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1$$

Przyjmujemy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}\rho_i &= \frac{\lambda}{\mu_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \mu &= \sum_{i=1}^4 \mu_i \\ \rho &= \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}$$

System tako może znajdować się w jednym z następujących stanów

E_0 – wszystkie kanały obsługi wolne

E_{11} – zajęty 1 kanał

E_{12} – zajęty 2 kanał

E_{13} – zajęty 3 kanał

E_{14} – zajęty 4 kanał

E_{212} – 2 zajęte kanały (numer 1 i 2)

E_{213} – 2 zajęte kanały (numer 1 i 3)

E_{214} – 2 zajęte kanały (numer 1 i 4)

E_{223} – 2 zajęte kanały (numer 2 i 3)

E_{224} – 2 zajęte kanały (numer 2 i 4)

E_{234} – 2 zajęte kanały (numer 3 i 4)

E_{3123} – 3 zajęte kanały (numer 1, 2 i 3)

E_{3124} – 3 zajęte kanały (numer 1, 2 i 4)

E_{3134} – 3 zajęte kanały (numer 1, 3 i 4)

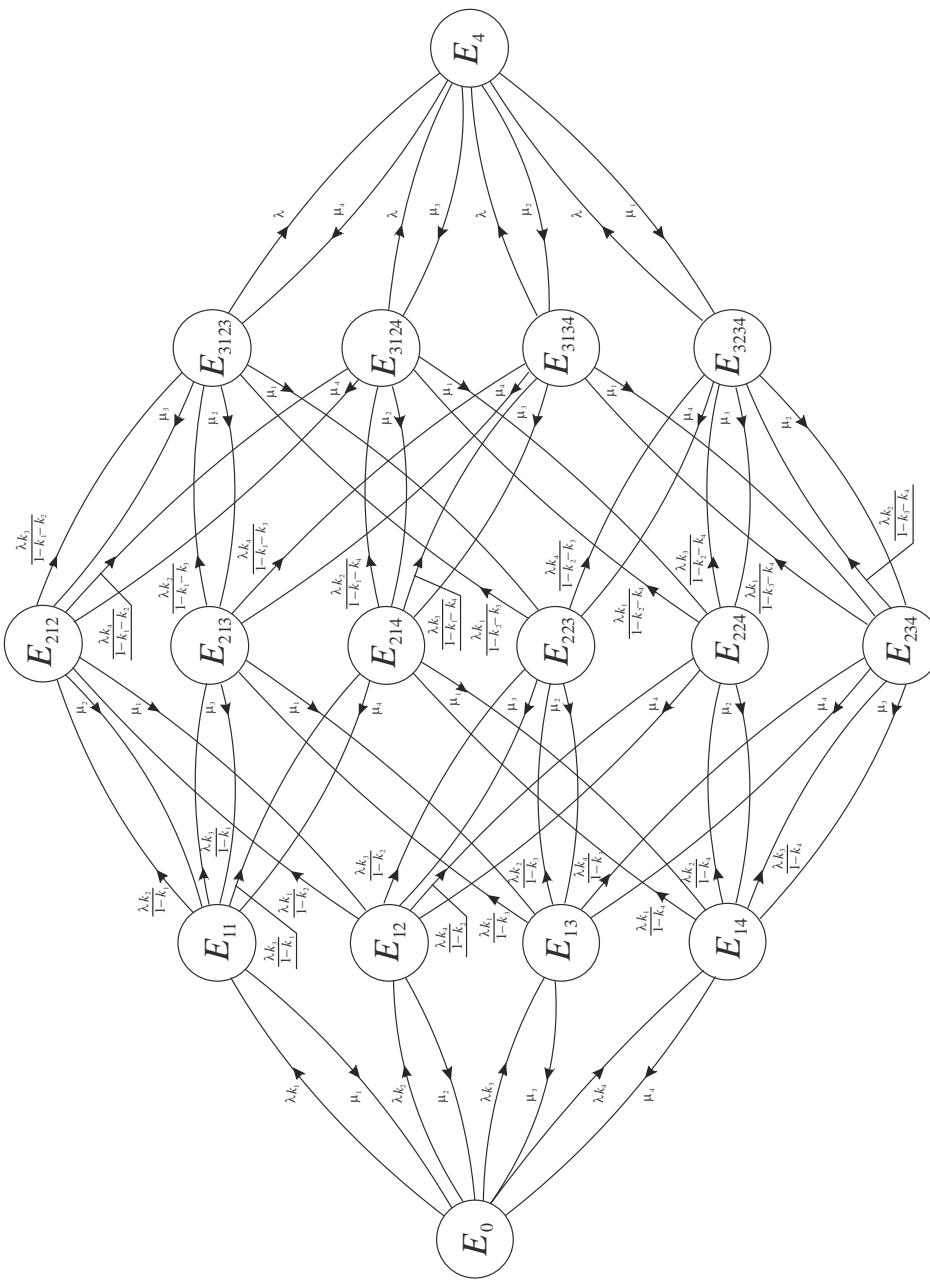
E_{3234} – 3 zajęte kanały (numer 2, 3 i 4)

E_4 – 4 zajęte kanały

Oznaczmy przez $P_0, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{212}, P_{213}, P_{214}, P_{223}, P_{224}, P_{234}, P_{3123}, P_{3124}, P_{3134}, P_{3234}, P_4$

prawdopodobieństwa zdarzeń, że system znajduje się w odpowiednim stanie $E_0, E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{212}, E_{213}, E_{214}, E_{223}, E_{224}, E_{234}, E_{3123}, E_{3124}, E_{3134}, E_{3234}, E_4$

Graf stanów dla tego systemu przedstawiono na rysunku 6.3.



Rys. 6.3. Graf stanów dla systemu M/M/4/-4 z indywidualną obsługą i niewłomniem rozmówem zgloszeń.

Stosując regułę mnemotechniczną dla stanu ustalonego otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda k_1 p_0 - \lambda k_2 p_0 - \lambda k_3 p_0 - \lambda k_4 p_0 + p_{11}\mu_1 + p_{12}\mu_2 + p_{13}\mu_3 + p_{14}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_1 p_0 \frac{\lambda k_2 p_{11}}{1-k_1} - \lambda k_3 p_{11} \frac{\lambda k_4 p_{11}}{1-k_1} - p_{11}\mu_1 + p_{212}\mu_2 + p_{213}\mu_3 + p_{214}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_2 p_0 \frac{\lambda k_1 p_{12}}{1-k_2} - \lambda k_3 p_{12} \frac{\lambda k_4 p_{12}}{1-k_2} - p_{212}\mu_1 + p_{12}\mu_2 + p_{223}\mu_3 + p_{224}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_3 p_0 \frac{\lambda k_1 p_{13}}{1-k_3} - \lambda k_2 p_{13} \frac{\lambda k_4 p_{13}}{1-k_3} - p_{213}\mu_1 + p_{223}\mu_2 + p_{13}\mu_3 + p_{234}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_4 p_0 \frac{\lambda k_1 p_{14}}{1-k_4} - \lambda k_2 p_{14} \frac{\lambda k_3 p_{14}}{1-k_4} - p_{214}\mu_1 + p_{224}\mu_2 + p_{234}\mu_3 + p_{14}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_2 p_{11} \frac{\lambda k_1 p_{12}}{1-k_1} - \lambda k_3 p_{212} \frac{\lambda k_4 p_{212}}{1-k_1-k_2} - p_{212}\mu_1 - p_{212}\mu_2 + p_{3123}\mu_3 + p_{3124}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_3 p_{11} \frac{\lambda k_1 p_{13}}{1-k_1} - \lambda k_2 p_{213} \frac{\lambda k_3 p_{213}}{1-k_1-k_3} - p_{213}\mu_1 - p_{3123}\mu_2 + p_{213}\mu_3 + p_{3134}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_4 p_{11} \frac{\lambda k_1 p_{14}}{1-k_1} - \lambda k_2 p_{214} \frac{\lambda k_3 p_{214}}{1-k_1-k_4} - p_{214}\mu_1 - p_{3124}\mu_2 + p_{3134}\mu_3 + p_{214}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_3 p_{12} \frac{\lambda k_2 p_{13}}{1-k_2} - \lambda k_1 p_{223} \frac{\lambda k_4 p_{223}}{1-k_2-k_3} - p_{3123}\mu_1 - p_{223}\mu_2 + p_{223}\mu_3 + p_{3234}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_4 p_{12} \frac{\lambda k_2 p_{14}}{1-k_2} - \lambda k_1 p_{224} \frac{\lambda k_3 p_{224}}{1-k_2-k_4} - p_{3124}\mu_1 - p_{224}\mu_2 + p_{3234}\mu_3 + p_{224}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_4 p_{13} \frac{\lambda k_3 p_{14}}{1-k_3} - \lambda k_1 p_{234} \frac{\lambda k_2 p_{234}}{1-k_3-k_4} - p_{3134}\mu_1 - p_{3234}\mu_2 + p_{234}\mu_3 + p_{234}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_3 p_{212} \frac{\lambda k_2 p_{213}}{1-k_1-k_2} + \lambda k_1 p_{223} \frac{\lambda k_4 p_{223}}{1-k_2-k_3} - \lambda p_{3123} - p_{3123}\mu_1 - p_{3123}\mu_2 + p_{3123}\mu_3 + p_4\mu_4 = 0 \\ \lambda k_4 p_{212} \frac{\lambda k_2 p_{214}}{1-k_1-k_4} + \lambda k_1 p_{224} \frac{\lambda k_3 p_{224}}{1-k_2-k_4} - \lambda p_{3124} - p_{3124}\mu_1 - p_{3124}\mu_2 + p_4\mu_3 + p_{3124}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_4 p_{213} \frac{\lambda k_3 p_{214}}{1-k_1-k_4} + \lambda k_1 p_{234} \frac{\lambda k_2 p_{234}}{1-k_3-k_4} - \lambda p_{3134} - p_{3134}\mu_1 - p_4\mu_2 + p_{3134}\mu_3 + p_{3134}\mu_4 = 0 \\ \lambda k_4 p_{223} \frac{\lambda k_3 p_{224}}{1-k_2-k_3} + \lambda k_2 p_{234} \frac{\lambda k_1 p_{234}}{1-k_3-k_4} - \lambda p_{3234} - p_4\mu_1 - p_{3234}\mu_2 + p_{3234}\mu_3 + p_{3234}\mu_4 = 0 \\ \lambda p_{3123} - \lambda p_{3124} + \lambda p_{3134} - p_4\mu_1 + p_4\mu_2 + p_4\mu_3 - p_4\mu_4 = 0 \end{array} \right.$$

Spełnione musi być także warunek normalizujący

$$\sum_{k=0}^4 p_k = 1$$

to znaczy, że

$$p_0 + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{212} + p_{213} + p_{214} + p_{223} + \\ + p_{224} + p_{234} + p_{3123} + p_{3124} + p_{3134} + p_{3234} + p_4 = 1$$

przy czym

$$p_1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} \\ p_2 = p_{212} + p_{213} + p_{214} + p_{223} + p_{224} + p_{234} \\ p_3 = p_{3123} + p_{3124} + p_{3134} + p_{3234} + p_4 = 1$$

Aby rozwiązać otrzymany układ algebraicznych równań, przekształcamy je do następującej postaci wektorowo-macierzowej

$$p = A^{-1}b$$

Rozwiązywanie tego układu równań jest niezwykle czasochłonne przy wykorzystaniu istniejących pakietów oprogramowania a uzyskane wyniki można zapisać w postaci wydruku o objętości więcej niż 1 000 stron. Wobec powyższego nie jest możliwe znalezienie postaci ogólnej wzorów pozwalających wyznaczyć prawdopodobieństwa dla systemu o dowolnej liczbie kanałów obsługi m i nierównomiernym rozpływnie zgłoszeń.

6. ANALIZA SYSTEMÓW KOLEJKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM FUNKCJI TWORZĄCEJ PRAWDOPODOBIĘSTWA

Aby wykazać podstawowe właściwości łańcuchów Markowa w stanie stacjonarnym, a także w celu przeprowadzania analizy stanów przejściowych w różnych problemach rzeczywistych, bardzo użyteczne jest zastosowanie funkcji tworzącej prawdopodobieństwa. Do zdefiniowania tej funkcji konieczna jest znajomość transformaty Z funkcji dyskretnej $f(n)$ oraz podstawowych własności tej transformacji. Niezbędne minimum wiadomości, dotyczących transformacji Z zamieszczono w dodatku 10-1.

Sformułujemy obecnie definicję funkcji tworzącej prawdopodobieństwa, którą wykorzystamy następnie do wyznaczenia funkcji prawdopodobieństwa danego stanu dla przykładowych systemów kolejkowych.

Definicja 6-1

Rozważmy ciąg lub funkcję $f(n)$ o określonych jednoznacznie wartościach na zbiorze liczb naturalnych N . Założymy ponadto, że istnieje $a \geq 0$ takie, że funkcja ta dla dowolnego $n \in N$ spełnia warunek

$$|f(n)| \leq a^n \quad (6-1)$$

Ciąg

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{n-1} \quad (6-2)$$

nazywamy „funkcją tworzącą” funkcji dyskretnej $f(n)$. Funkcja ta jest jednostajnie zbieżna co najmniej dla

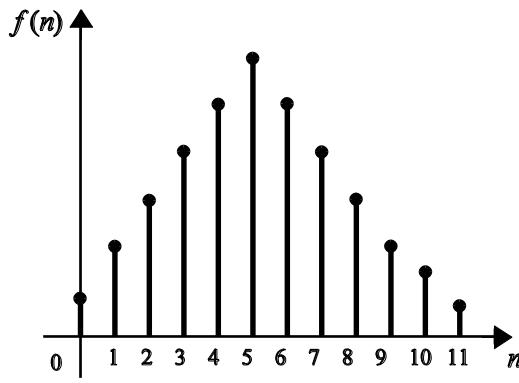
$$|z| < \frac{1}{a}. \quad (6-3)$$

Przykładową funkcję dyskretną $f(n)$ przedstawiono na rysunku 6.1.

¹ W niektórych przypadkach przyjmuje się jako definicję funkcji tworzącej wyrażenie:

$$f^*(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n$$

Definicja niekiedy jest wygodniejsza do analizy systemów kolejkowych.



Rys. 6.1. Przykład funkcji dyskretnej $f(n)$

Jeżeli warunki (6-1), (6-2) i (6-3) są spełnione, pomiędzy funkcjami $f^*(z)$ i $f(n)$ istnieje relacja wzajemnie jednoznaczna, tzn. każdej funkcji dyskretnej $f(n)$ odpowiada jedna i tylko jedna funkcja $f^*(z)$ i odwrotnie,

każda funkcja $f^*(z)$ dla $|z| < \frac{1}{a}$ może być w sposób jednoznaczny

rozwinięta w ciąg o wartościach całkowitych i współczynniki tego rozwinięcia określają jedną i tylko jedną funkcję $f(n)$.

Funkcja $f^*(z)$ jest nazywana często transformatą Z dyskretnej funkcji $f(n)$.

6.1 System kolejkowy M/M/ ∞ ; zastosowanie funkcji tworzącej do wyznaczenia prawdopodobieństw p_n

Spróbujmy znaleźć rozwiązanie układu równań różniczkowych wyprowadzonych w rozdziale 5.4 dla systemu M/M/ ∞ wykorzystując funkcję tworzącą.

Układ równań różniczkowych dla tego systemu ma postać [rozdział 4.4 - wzór (4-163)]

$$\begin{aligned}
 p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\
 p_1'(t) &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\
 &\vdots \\
 p_n'(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \\
 n &\geq 1 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{6-4}$$

Rozważmy ogólną postać tego układu równań

$$p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t)/z^n. \quad (6-5)$$

$n \geq 1$

Mnożąc równanie (6-20) stronami przez z^n oraz obliczając sumę w granicach od $n = 0$ do $n \rightarrow \infty$ otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \odot(t) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1}(t) z^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n - \mu \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t) z^n. \quad (6-6)$$

Biorąc pod uwagę definicję funkcji tworzącej (6-1) oraz własności transformacji Z zamieszczone w dodatku 10-1 równanie (6-21) można przekształcić do postaci

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \lambda z P - \lambda P - \mu z \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (6-7)$$

co po prostych przekształceniach daje równanie różniczkowe cząstkowe postaci

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \mu(1-z) \frac{\partial P}{\partial z} + \lambda(1-z)P = 0 \quad (6-8)$$

Rozwiążanie tego równania różniczkowego (zawarte w dodatku 10-2) przy założeniu, że warunki początkowe mają postać

$$p_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq a, \\ 1 & \text{dla } n = a, \end{cases} \quad (6-9)$$

przyjmuje formę

$$P(z, t) = e^{\Theta(z, t)} \Phi(z, t) \quad (6-10)$$

gdzie

$$\Theta(z, t) = \frac{-\lambda(1-z)(1-e^{-\mu t})}{\mu}, \quad (6-11)$$

$$\Phi(z, t) = [1 - (1-z)e^{-\mu t}]^a.$$

Wyrażenie na prawdopodobieństwo $p_n(t)$ możemy otrzymać stosując formułę Leibniza

$$p_n(t) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n P(z,t)}{\partial z^n} \right]_{z=0} \quad (6-12)$$

Otrzymujemy zależność

$$p_n(t) = \frac{e^{-\rho f(t)}}{n!} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{a!}{(a-r)!} \rho^{n-r} [f(t)]^{n+a-2r} e^{-\mu rt} \quad (6-13)$$

gdzie

$$f(t) = 1 - e^{-\mu t}, \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (6-14)$$

Średnia ilość zajętych kanałów obsługi w stanie przejściowym, może być uzyskana w prosty sposób w oparciu o funkcję tworzącą $P(z,t)$

$$\bar{m}_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = \left[\frac{\partial P}{\partial z} \right]_{z=1} = \left[e^\theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Phi e^\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=1} \quad (6-15)$$

W przypadku, gdy $z = 1$, $e^\theta = 1$, $\Phi(1,t) = 1$ funkcja $\bar{m}_0(t)$ przyjmuje postać

$$\bar{m}_0(t) = r \left(1 - e^{-rt} \right) + a e^{-rt} \quad (6-16)$$

Dla przypadku, gdy $a = 0$ co oznacza, że w momencie $t = 0$ nie ma klientów w systemie (rozruch systemu kolejkowego) otrzymujemy

$$\Phi(z,t) = 1 \quad , \quad \text{gdy } a = 0. \quad (6-17)$$

Podstawiając zależność (6-17) do wzoru (6-10) mamy

$$P(z,t) = e^{\Theta(z,t)} = e^{\frac{-\lambda(1-z)(1-e^{-\mu t})}{\mu}}. \quad (6-18)$$

Po przekształceniach i podstawieniu za wyrażenie $\rho (1 - e^{-\mu t}) = m$ otrzymujemy

$$P(z,t) = e^{-m(1-z)} \quad (6-19)$$

Z tabeli transformat Z (dodatek 10-1) wynika

$$Z[p_n] = P(z) = e^{\lambda(z-1)} \quad (6-20)$$

co odpowiada rozkładowi Poissona

$$p_n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6-21)$$

Tak więc funkcja $p_n(t)$ odpowiadająca transformacie (6-34) jest funkcją Poissona o parametrze $m = \rho(1 - e^{-\mu t})$. Otrzymujemy więc ostateczny wzór na funkcję $p_n(t)$

$$p_n(t) = \frac{\rho^n (1 - e^{-\mu t})^n}{n!} e^{-\rho(1 - e^{-\mu t})} \quad (6-22)$$

6.2. System kolejkowy M/M/m/FIFO/N/F; wyznaczenie prawdopodobieństw p_n w oparciu o funkcję tworzącą

Rozpatrzmy system kolejkowy zamknięty zdefiniowany jako M/M/m/FIFO/N/F. Wyprowadzony w rozdziale 4.6.1 system równań Erlanga-Kołmogorowa określony wzorem (4-191) ma postać

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -N\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ &\vdots \\ p_i'(t) &= (N-i+1)\lambda p_{i-1}(t) - [(N-i)\lambda + i\mu] p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t), \\ &\vdots 1 \leq i \leq N-1, \\ p_N'(t) &= -m\mu p_N(t) + \lambda p_{N-1}(t). \end{aligned} \quad (6-23)$$

Funkcja tworząca prawdopodobieństwa otrzymana na podstawie układu równań (6-23) przybiera postać

$$P(z, t) = \sum_{i=0}^N p_i(t) z^i \quad (6-24)$$

i spełnia równanie różniczkowe cząstkowe o poniższej postaci (dodatek 10-2)

$$\frac{\partial P}{\partial t} - (1-z)(\mu + \lambda z) \frac{\partial P}{\partial z} = -N\lambda(1-z)P \quad (6-25)$$

Dowód

Biorąc pod uwagę postać ogólną równań różniczkowych (6-23) dla dowolnego wskaźnika i mamy

$$p_i'(t) = (N-i+1)\lambda p_{i-1}(t) - [(N-i)\lambda + i\mu] p_i(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t) / z^i \quad (6-26)$$

Pomnóżmy równanie (6-26) stronami przez z^i , a następnie dokonajmy sumowania w granicach od $i = 0$ do $i = N$. Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N p_i'(t) z^i &= \lambda \sum_{i=0}^N (N-i+1) p_{i-1}(t) z^i + \\ &- \sum_{i=0}^N [(N-i)\lambda + i\mu] p_i(t) z^i + \sum_{i=0}^N (i+1)\mu p_{i+1}(t) z^i. \end{aligned} \quad (6-27)$$

Po dokonaniu prostych przekształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N p_i'(t) z^i &= \lambda \sum_{i=0}^N (N+1) p_{i-1}(t) z^i - \lambda \sum_{i=0}^N i p_{i-1}(t) z^i + \\ &- \lambda \sum_{i=0}^N N p_i(t) z^i - (\mu - \lambda) \sum_{i=0}^N i p_{i-1}(t) z^i + \frac{\mu}{z} \sum_{i=0}^N (i+1) p_{i+1}(t) z^{i+1}. \end{aligned} \quad (6-28)$$

Z własności transformacji Z (dodatek 10-1) oraz faktu, że poniższe wyrażenie można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} -\lambda \sum_{i=0}^N i p_{i-1}(t) z^i &= -\lambda \sum_{i=0}^N [(i-1) p_{i-1}(t) z^i + p_{i-1}(t) z^i] = \\ &= -\lambda \sum_{i=0}^N (i-1) p_{i-1}(t) z^i - \lambda \sum_{i=0}^N p_{i-1}(t) z^i = -\lambda z^2 \frac{\partial P}{\partial z} - \lambda z P \end{aligned} \quad (6-29)$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (N+1)\lambda z P - \lambda z^2 \frac{\partial P}{\partial z} - \lambda z P - N\lambda P - (\mu - \lambda) z \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \frac{\partial P}{\partial z} \quad (6-30)$$

Po przeprowadzeniu redukcji wyrażeń podobnych oraz przemieszczeniu składników otrzymujemy zależność

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \lambda z^2 \frac{\partial P}{\partial t} - \lambda z \frac{\partial P}{\partial z} + \mu z \frac{\partial P}{\partial z} - \mu \frac{\partial P}{\partial z} = N\lambda z P - N\lambda P. \quad (6-31)$$

Grupując wyrażenia mamy

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \lambda z(1-z) \frac{\partial P}{\partial z} - \mu(1-z) \frac{\partial P}{\partial z} = -N\lambda P(1-z). \quad (6-32)$$

Wyłączając wspólny czynnik przed nawias otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\partial P}{\partial t} - (1-z)(\mu + \lambda z) \frac{\partial P}{\partial z} = -N\lambda P(1-z) \quad (6-33)$$

c.b.d.o.

Na podstawie ogólnej formuły rozwiązania równania o postaci (6-33), znajdującej się w dodatku 10-2, można określić rozwiązanie tego równania różniczkowego cząstkowego przy założeniu, że warunki początkowe mają postać: $p_0(0) = 1$ i $p_i(0) = 0$ dla $i > 0$. Jest ono określone wzorem

$$P(z, t) = \frac{[(\mu + \lambda e^{-kt}) + \lambda z(1 - e^{-kt})]^N}{k^N} \quad (6-35)$$

gdzie $k = \lambda + \mu$.

Tak więc $p_n(t)$ jako współczynnik stojący przed z^n w rozwinięciu funkcji $P(z, t)$ w szereg wynosi

$$p_n(t) = \frac{\binom{N}{n} \lambda^n (1 - e^{-kt})^n (\mu + \lambda e^{-kt})^{N-n}}{k^N}, \quad (6-36)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N.$

W stanie ustalonym, tzn. dla $t \rightarrow \infty$ mamy

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = \frac{\binom{N}{n} \lambda^n \mu^{N-n}}{k^N} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{\lambda^n \mu^{N-n}}{(\lambda + \mu)^N} \quad (6-37)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N$

i ostatecznie

$$p_n = \frac{N! \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \mu^N}{n!(N-n)!(\lambda + \mu)^N} = \frac{N! \rho^n}{n!(N-n)!(1+\rho)^N} \quad (6-38)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N$

gdzie $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $n = 0, 1, \dots, N$.

7. SZEREGOWE POŁĄCZENIE SYSTEMÓW KOLEJKOWYCH

W ogólnym przypadku analiza systemów kolejkowych połączonych szeregowo, w oparciu o metody analityczne, jest bardzo trudna do realizacji i zwykle do tego celu wykorzystujemy metody symulacyjne. Jednakże, gdy proces przybywania zgłoszeń do systemu oraz obsługa posiadają charakter wykładniczy, metody analityczne są możliwe do zastosowania.

Systemy kolejkowe połączone szeregowo można spotkać w wielu zagadnieniach praktycznych, np. w liniach produkcyjnych, w organizacji ruchu klientów, tj. w restauracjach samoobsługowych, w procesach obiegu dokumentacji wewnętrz struktur organizacyjnych urzędów.

Aby zilustrować metodykę postępowania przedstawimy dwa systemy makowskie połączone szeregowo, z których każdy posiada jeden kanał obsługi. W celu znalezienia równania opisującego zachowanie się systemu w stanie ustalonym wykorzystamy teorię łańcuchów Markowa.

Uzyskane wyniki można uogólnić na dowolną ilość systemów kolejkowych połączonych szeregowo.

7.1 Szeregowe połączenie systemów kolejkowych; wyprowadzenie równań

Rozważa się systemy kolejkowe, które spełniają następujące założenia:

- zgłoszenia przybywają do systemu według procesu Poissona o intensywności λ i przechodzą przez pierwsze stanowisko oznaczone symbolem

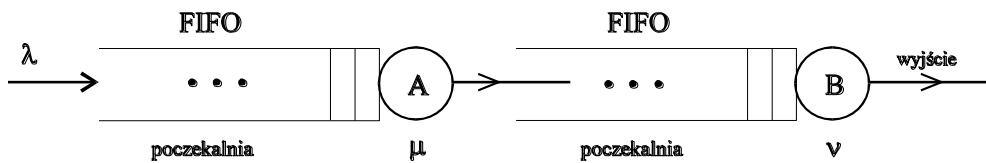
A, następnie przez drugie stanowisko oznaczone symbolem B,

- czasy obsługi na stanowisku A (odpowiednio B) są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładzie wykładniczym i wartości średniej $\frac{1}{\mu}$
(odpowiednio $\frac{1}{\nu}$),

- w obu systemach obowiązuje reguła likwidacji kolejki typu FIFO, a rozmiary systemów A i B są nieograniczone.

Oznaczmy przez X_t (odpowiednio Y_t) liczbę zgłoszeń znajdujących się w systemie A (odpowiednio B) w momencie t . Para $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ definiuje jednorodny łańcuch Markowa. Dla rozważanej pary (X_t, Y_t) można przedstawić następujący graf przejść podając jedynie sytuacje charakterystyczne wnoszące istotne elementy do równań opisujących dynamikę systemu.

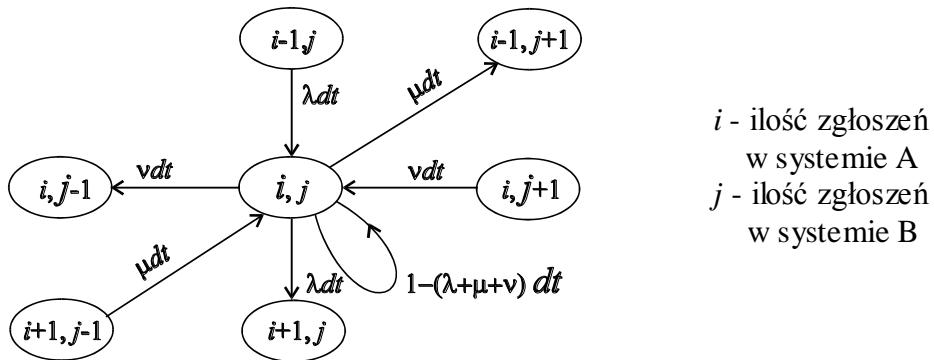
Schemat funkcjonalny takiego systemu przedstawiono na rysunku 7.1.



Rys.7.1. Schemat szeregowego połączenia systemów kolejkowych

Ponieważ proces przybycia zgłoszeń do systemu A jest poissonowski, a czasy obsługi w stacjach A i B są wykładnicze występują cztery przypadki.

Przypadek 1 $i > 0, j > 0$ rysunek 8-2.

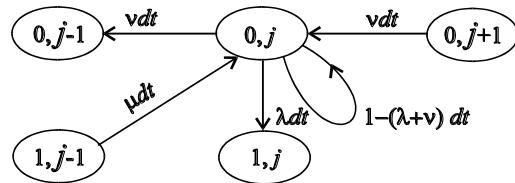


Rys.7.2. Graf stanów dla przypadku $i > 0, j > 0$

Stosując reguły mnemotechniczną dla stanu ustalonego otrzymujemy następujące równanie algebraiczne:

$$0 = -(\lambda + \mu + v)p_{ij} + \lambda p_{i-1,j} + \mu p_{i+1,j-1} + v p_{i,j+1}, \forall i > 0, \forall j > 0 \quad (7-1)$$

Przypadek 2 $i = 0, j > 0$ rysunek 7.3.

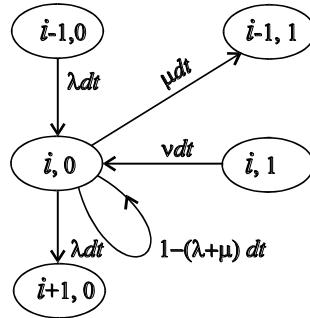


Rys. 7.3. Graf stanów dla przypadku $i = 0, j > 0$

Odpowiadające temu przypadkowi równanie algebraiczne dla stanu ustalonego ma postać

$$0 = -(\lambda + \nu)p_{0,j} + \mu p_{1,j-1} + \nu p_{0,j+1}, i = 0, \forall j > 0 \quad (7-2)$$

Przypadek 3 $i > 0, j = 0$ rysunek 7.4.

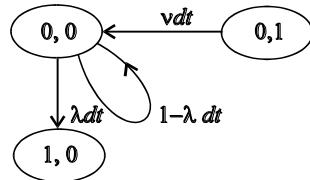


Rys. 7.4. Graf stanów dla przypadku $i > 0, j = 0$

Odpowiadające równanie algebraiczne opisujące zachowanie się systemu w stanie ustalonym ma postać

$$0 = -(\lambda + \mu)p_{i,0} + \lambda p_{i-1,0} + \nu p_{i,1}, \forall i > 0, j = 0 \quad (7-3)$$

Przypadek 4 $i = 0, j = 0$ rysunek 7.5.



Rys. 7.5. Graf stanów dla przypadku $i = 0, j = 0$

Odpowiadające temu przypadkowi równanie algebraiczne po zastosowaniu reguły mnemotechnicznej dla stanu ustalonego przyjmuje postać

$$0 = -\lambda p_{0,0} + \nu p_{0,1} \quad (7-4)$$

Otrzymany graf stanów jest ściśle spójny, gdyż istnieje tylko jedna droga ze stanu $(0,0)$ do stanu (i,j) oraz jedna droga ze stanu (i,j) do stanu $(0,0)$ dla każdego i, j , co można zauważyć na rysunkach 7.6 i 7.7.

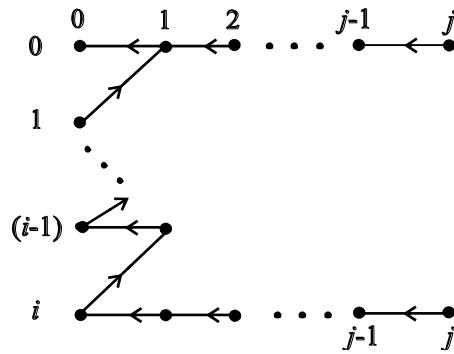
Stan ustalony jest osiągnięty (rozważany łańcuch jest łańcuchem ergodycznym) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $p_{i,j}$ spełniający warunki (7-1), (7-2), (7-3) i (7-4), tzn. następujący układ równań:

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda + \mu + \nu)p_{ij} + \lambda p_{i-1,j} + \mu p_{i+1,j-1} + \nu p_{i,j+1}, \quad \forall i > 0, \forall j > 0 \\ 0 &= -(\lambda + \nu)p_{0,j} + \mu p_{1,j-1} + \nu p_{0,j+1}, \quad i = 0, \forall j > 0 \\ 0 &= -(\lambda + \mu)p_{i,0} + \lambda p_{i-1,0} + \nu p_{i,1}, \quad \forall i > 0, j = 0 \\ 0 &= -\lambda p_{0,0} + \nu p_{0,1}, \quad i = 0, j = 0 \end{aligned} \quad (7-5a)$$

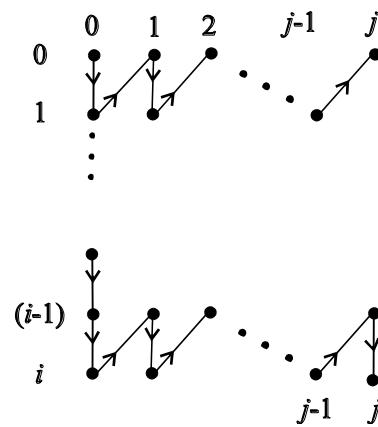
oraz dodatkowy warunek normalizujący

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} p_{i,j} = 1, \quad p_{i,j} \geq 0, \quad \forall i \geq 0, \forall j \geq 0 \quad (7-5b)$$

przy czym rozwiązanie tego układu równań jest jednoznaczne.



Rys. 7.6. Droga ze stanu (i, j) do stanu $(0, 0)$



Rys. 7.7. Droga ze stanu $(0,0)$ do stanu (i,j)

Poszukujemy rozwiązań układu równań (7-5 a i b) zakładając jego postać

$$p_{i,j} = p_i^A \cdot p_j^B \quad (7-6)$$

przy czym należy określić p_i^A i p_j^B oraz warunki jakie muszą spełniać parametry λ , μ i v aby rozwiązanie to istniało.

Rozważania rozpoczęmy od systemu A, którego model ma postać M/M/1/FIFO/ ∞ . Dla takiego modelu aby istniał stan ustalony, musi być spełniony warunek $\lambda < \mu$. Zgodnie z rozdziałem 4.2.3. prawdopodobieństwo p_i^A jest określone relacją

$$p_i^A = (1 - \rho_A) \rho_A^i, \quad \rho_A = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad (7-7)$$

Zakładamy również, że system B osiąga stan ustalony i będziemy poszukiwać rozwiązań równań (7-1), ..., (7-5) w postaci (7-6).

Uwzględniając zależność (8-6) we wzorze (8-5) otrzymamy

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} p_{i,j} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} p_i^A p_j^B = \left(\sum_{i \geq 0} p_i^A \right) \left(\sum_{j \geq 0} p_j^B \right) = 1,$$

przy czym

$$p_{i,j} = p_i^A p_j^B \geq 0, \quad \forall i \geq 0, \quad \forall j \geq 0$$

oraz

$$\sum_{i \geq 0} p_i^A = 1 .$$

Powyższe warunki powodują, że musi być spełniona relacja

$$\sum_{j \geq 0} p_j^B = 1 \quad (7-8)$$

Dokonamy obecnie analizy równań (8-1), ..., (8-4) otrzymanych dla sytuacji charakterystycznych grafu stanów biorąc pod uwagę zależności

$$p_{i-1}^A = (1 - \rho_A) \rho_A^{i-1} \quad (7-9)$$

oraz

$$p_i^A = (1 - \rho_A) \rho_A^i = (1 - \rho_A) \rho_A^{i-1} \rho_A \quad (7-10)$$

Wstawiając zależność (7-9) do (7-10) mamy

$$p_i^A = p_{i-1}^A \rho_A,$$

co daje ostatecznie

$$p_{i-1}^A = \frac{1}{\rho_A} p_i^A = \frac{\mu}{\lambda} p_i^A \quad (7-11)$$

Biorąc pod uwagę równanie (7-4) otrzymujemy

$$-\lambda p_0^A p_0^B + \lambda p_0^A p_1^B = -\lambda p_0^B + \nu p_1^B = 0.$$

Rozważając równanie (7-3) mamy

$$-(\lambda + \mu) p_i^A p_0^B + \lambda p_{i-1}^A p_0^B + \nu p_i^B p_1^B = 0,$$

które po uwzględnieniu relacji (8-11) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & -(\lambda + \mu) p_i^A p_0^B + \mu p_{i-1}^A p_0^B + \nu p_i^A p_1^B = \\ & = -\lambda p_i^A p_0^B + \nu p_i^A p_1^B = -\lambda p_0^B + \nu p_1^B = 0. \end{aligned}$$

Równanie (7-2) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} & -(\lambda + \nu) p_0^A p_j^B + \mu p_1^A p_{j-1}^B + \nu p_0^A p_{j+1}^B = \\ & = -(\lambda + \nu) p_j^B + \lambda p_{j-1}^B + \nu p_{j+1}^B = 0. \end{aligned}$$

Równanie (7-1) można sprowadzić do postaci

$$\begin{aligned} & -(\lambda + \mu + \nu) p_i^A p_j^B + \lambda p_{i-1}^A p_j^B + \mu p_{i+1}^A p_{j-1}^B + \nu p_i^A p_{j+1}^B = \\ & = -(\lambda + \nu) p_j^B + \lambda p_{j-1}^B + \nu p_{j+1}^B = 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie stwierdzamy, że prawdopodobieństwo p_j^B musi spełniać układ równań

$$\begin{aligned}
0 &= -\lambda p_0^B + \nu p_1^B, \\
0 &= -(\lambda + \mu)p_j^B + \lambda p_{j-1}^B + \nu p_{j+1}^B, \forall j \geq 1, \\
\sum_{j=0}^{\infty} p_j^B &= 1, p_j^B \geq 0, \forall j \geq 0.
\end{aligned} \tag{7-}$$

Błąd! Nie znany argument przełącznika.)

Analizując ten układ równań rozpoznajemy model M/M/1/FIFO/ ∞ z parametrem $\rho_B = \lambda / \nu$. Stąd warunek ergodyczności dla systemu B przyjmuje postać $\lambda < \nu$.

Ostatecznie poszukiwane prawdopodobieństwo $p_{i,j}$ jest określone wzorem

$$p_{ij} = (1 - \rho_A)(1 - \rho_B)\rho_A^i \rho_B^j \tag{7-13}$$

gdzie

$$\rho_A = \frac{\lambda}{\mu}, \rho_B = \frac{\lambda}{\nu}.$$

Prawdopodobieństwo tego, że w systemie znajduje się k klientów jest równe

$$\begin{aligned}
p_k &= \sum_{i+j=k} p_{ij} = \sum_{i=0}^k p_i^A p_{k-i}^B = \\
&= (1 - \rho_A)(1 - \rho_B)\lambda^k \sum_{i=0}^k \frac{1}{\mu^i \nu^{k-i}}.
\end{aligned} \tag{7-14}$$

Zestawienie ważniejszych wielkości charakteryzujących połaczenie szeregowe systemów kolejkowych zawarte jest w tabeli 7-1.

Tabela 7-1

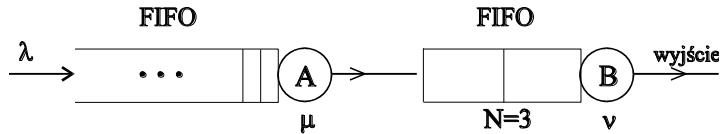
$$\rho_A = \frac{\lambda}{\mu} \quad \rho_B = \frac{\lambda}{\nu}$$

Wielkość charakterystyczna	System A	System B	System całkowity
średnia ilość zgłoszeń w kolejce	$\bar{v}_A = \frac{\rho_A^2}{1-\rho_A}$	$\bar{v}_B = \frac{\rho_B^2}{1-\rho_B}$	$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$
średnia ilość zgłoszeń w systemie	$\bar{n}_A = \frac{\rho_A}{1-\rho_A}$	$\bar{n}_B = \frac{\rho_B}{1-\rho_B}$	$\bar{n} = \bar{n}_A + \bar{n}_B = \frac{\rho_A}{1-\rho_A} + \frac{\rho_B}{1-\rho_B}$
średnia ilość zajętych kanałów obsługi	$\bar{m}_A = \rho_A$	$\bar{m}_B = \rho_B$	$\bar{m} = \bar{m}_A + \bar{m}_B = \rho_A + \rho_B$

Przykład 7.1. W zakładzie obróbki mechanicznej każda obrabiana część musi przechodzić obróbkę sukcesywnie na dwóch obrabiarkach A i B. Strumień części przybywających do maszyny A podlega procesowi Poissona o intensywności λ . Czasy obróbki na maszynie A (odpowiednio B) są zmiennymi losowymi niezależnymi podlegającymi rozkładowi wykładniczemu o wartości średniej $\frac{1}{\mu}$ (odpowiednio $\frac{1}{\nu}$). Obowiązującą regułą likwidacji kolejki dla obu maszyn jest dyscyplina FIFO. Pojemność magazynu pomiędzy maszynami A i B jest ograniczona i wynosi 2 części. Maszyna A nie może być zatrzymana. W sytuacji, gdy zaistnieje przepełnienie magazynu oddzielającego obie maszyny, następuje odrzucenie części z taśmy produkcyjnej co stanowi stratę produkcyjną.

Wiedząc, że koszt części odrzuconej wynosi na przykład 1000 jednostek monetarnych oraz, że koszt funkcjonowania maszyny B w jednostce czasu wynosi 10 v, niezależnie od tego czy maszyna ma przestój czy też funkcjonuje, należy obliczyć optymalną wartość parametru v_{opt} , która minimalizuje średni koszt pracy linii w jednostce czasu.

Na rysunku 7.8. przedstawiono schemat funkcjonalny linii montażowej.



Rys.7.8. Schemat funkcjonalny linii montażowej

Rozważany problem można potraktować jako szeregowe połączenie dwóch systemów kolejkowych.

Maszynie A odpowiada system M/M/1/FIFO/ ∞ (λ, μ), $\lambda < \mu$ natomiast maszynie B system M/M/1/FIFO/3 (λ, ν).

Dla modelu M/M/1/FIFO/3 mamy (rozdział 2)

$$p_j^B = \frac{1 - \rho_B}{1 - \rho_B^4} \rho_B^j, \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (7-15)$$

gdzie $\rho_B = \frac{\lambda}{\nu} \neq 1$,

$$p_j^B = \frac{1}{4}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (7-16)$$

gdzie $\rho_B = \frac{\lambda}{\nu} = 1$.

Oznaczmy przez d średnią ilość części odrzucanych z taśmy montażowej w jednostce czasu

$$d = \lambda p_3^B = \lambda \frac{1 - \frac{\lambda}{\nu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^4} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^3 \quad \text{dla } \lambda \neq \nu \quad (7-17)$$

lub

$$d = \lambda p_3^B = \frac{\lambda}{4} \quad \text{dla } \lambda = \nu \quad (7-18)$$

Średni koszt utrzymania linii montażowej w jednostce czasu wynosi

$$f(\nu) = 10\nu + 1000d \quad \text{dla } \lambda \neq \nu \quad (7-19)$$

Zakładając, że $\lambda = 1$ mamy

$$f(\nu) = 10\nu + \frac{1000}{\nu^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\nu}}{1 - \frac{1}{\nu^4}} = 10\nu + \frac{1000}{(\nu+1)(\nu^2+1)} \quad \text{dla } \nu \neq 1 \quad (7-20)$$

lub

$$f(\nu) = 10\nu + 1000 \cdot \frac{1}{4} = 260 \quad \text{dla } \nu = 1 \quad (7-21)$$

Obliczając pochodną $f'(\nu)$ i przyrównując ją do zera otrzymujemy równanie

$$f(\nu) = 10 - \frac{1000(3\nu^2 + 2\nu + 1)}{(\nu+1)^2(\nu^2+1)^2} = 0 \quad (7-22)$$

Rozwiązujeając równanie (8-22) znajdujemy $\nu_{min} = 3,7$ oraz minimalną wartość funkcji celu $f_{min}(3,7) = 88,57$.

8. ZASTOSOWANIE MODELI KOLEJKOWYCH W RÓŻNYCH DZIEDZINACH TECHNIKI

Rozważania dotyczące zastosowań modeli systemów kolejkowych zostaną zilustrowane na przykładach zaczerpniętych z różnych dziedzin działalności gospodarczej i przemysłowej. Pierwszy z nich dotyczy zastosowania modeli kolejkowych do wyznaczania optymalnej polityki zarządzania zapasami. Dalsze dwa dotyczą optymalizacji struktury systemu informatycznego i modelowania wielodostępnego systemu komputerowego jako zamkniętego systemu kolejkowego.

Kolejny przykład jest poświęcony modelowaniu struktur systemów edukacyjnych jako wielofazowych systemów kolejkowych. Przykład ostatni dotyczy zastosowania modelu kolejkowego ze zbiornikiem do wyznaczania optymalnego harmonogramu załadunku zimnego wsadu w ciągu produkcyjnym stalownia konwertytora - walcownia slabing.

8.1. Zastosowanie modeli kolejkowych do wyznaczania optymalnej polityki zarządzania zapasami

Rozpatrzmy pracę marketu i skoncentrujmy się na sprzedaży wybranego urządzenia przemysłowego. Zakładamy, że sumaryczna ilość urządzeń przeznaczonych do sprzedaży i zarezerwowanych dla klientów, lecz nie odebranych z magazynu jest równa zapasowi maksymalnemu, który wynosi N sztuk.

Klienci przybywają do marketu zgodnie z rozkładem Poissona o intensywności λ i są obsługiwani w kolejności ich przybywania. Nie dokonują oni zakupu danego urządzenia, gdy nie ma go na składzie, to znaczy gdy jest przerwa w zapasie. Przedziały czasu oddzielające momenty składania zamówienia w fabryce i jego realizację są zmiennymi losowymi niezależnymi i podlegają rozkładowi wykładniczemu o wartości średniej $\frac{1}{\mu}$.

Oznaczmy przez $p_j(t)$ prawdopodobieństwo zdarzenia, że w momencie t jest w magazynie j urządzeń danego typu.

Dokonamy porównania trzech polityk uzupełniania zapasów

- uzupełnienie zapasu po każdym sprzedanym urządzeniu; polityka P1.
- zaopatrzenie po całkowitym opróżnieniu zapasu; polityka P2.
- zaopatrzenie na ustalonym poziomie tzw. zapasie krytycznym lub zapasie bezpieczeństwa; polityka P3.

Dla każdej z wymienionych polityk zostanie zaproponowany odpowiedni model kolejkowy oraz wyznaczona funkcja zysku osiąganego przez

właściciela marketu ze sprzedaży urządzenia, przypadająca na jednostkę czasu, biorąc pod uwagę:

- r - dochód ze sprzedaży urządzenia,
- c_1 - koszt składowania urządzeń w jednostce czasu,
- c_2 - koszt wysyłki i przyjęcia do realizacji zlecenia (w tym przypadku koszt ten jest niezależny od ilości zamawianych urządzeń).

Dla rozpatrywanych modeli przyjmuje się, że początek obsługi odpowiada realizacji urządzenia zgodnie z zamówieniem, a koniec obsługi odpowiada przybyciu urządzenia lub partii zamówionych urządzeń do magazynu.

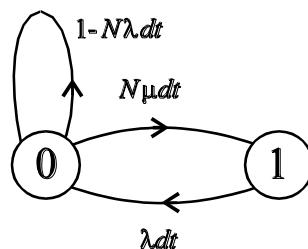
Rozpatrzmy szczegółowo zaprezentowane polityki uzupełnienia zapasów.

Polityka P1

Zarządzający magazynem zamawia nowe urządzenia w fabryce bezpośrednio po sprzedaży, przy czym w trakcie realizacji może być tylko jedno zamówienie. W związku z tym suma jednostek zamówionych i znajdujących się w magazynie jest równa zapasowi maksymalnemu N .

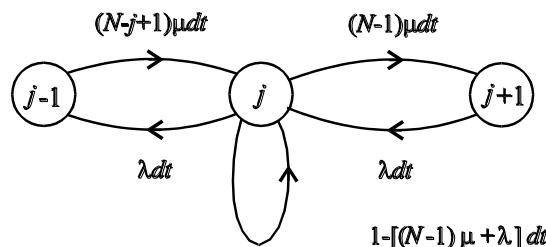
Wyznaczając graf przejść podający ewolucję stanu zapasów rozpatrujemy trzy sytuacje charakterystyczne przedstawione na rysunkach 8-1a, b, c.

a) Przypadek 1. Przerwa w zapasie - 0 urządzeń na składzie



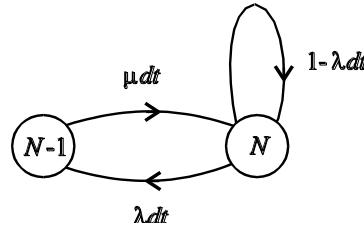
Rys. 8.1a

b) Przypadek 2. Ilość artykułów na składzie wynosi $j, j = 1, \dots, N-1$



Rys. 8.1b

c) Przypadek 3. Ilość urządzeń znajdujących się na składzie wynosi N .



Rys. 8.1c

Dla tego modelu na podstawie tabeli 5-3 określamy

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \frac{\frac{\rho^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{\rho^k}{k!}} \quad (8-1)$$

gdzie $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Średnia ilość sprzedanych urządzeń w jednostce czasu wynosi $\lambda (1-p_0)$, natomiast średnia ilość jednostek na składzie $\bar{n} = \sum_{k=1}^N kp_k$. Średnią ilość zleceń w jednostce czasu znajdujemy zgodnie z relacją

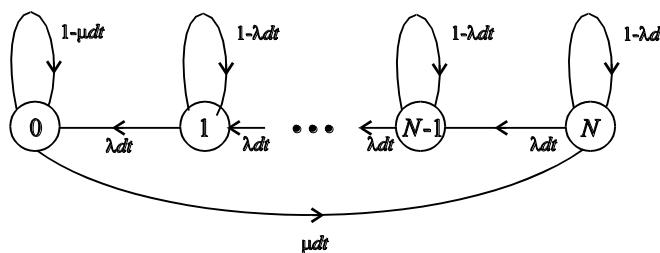
$$\mu(N - \bar{n}) = \lambda(1 - p_0).$$

Stąd funkcja zysku w jednostce czasu osiągana przez zarządzającego magazynem dla polityki P1 wynosi

$$f_1(N) = \lambda(1 - p_0)r - \bar{n}c_1 - \lambda(1 - p_0)c_2. \quad (8-2)$$

Polityka P2

Urządzenia są dowożone do magazynu partiami. Gdy jest przerwa w zapasie wysyłane jest zamówienie na N urządzeń. Zakłada się ponadto, że w trakcie realizacji może być maksymalnie jedno zlecenie. Graf stanów podający ewolucję stanu zapasów dla tej polityki przedstawiono na rysunku 8.2.



Rys. 8.2. Graf stanów dla polityki P2

Łańcuch przedstawiony na rysunku 8-2 posiada skończoną liczbę stanów i nie podlega redukcji. Istnieje więc zawsze stan ustalony. Stosując regułę mnemotechniczną dla stanu ustalonego otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} 0 &= -\mu p_0 + \lambda p_1, \\ &\vdots \\ 0 &= -\lambda p_j + \lambda p_{j+1} \text{ dla } j = 1, \dots, N-1, \\ &\vdots \\ 0 &= -\lambda p_N + \mu p_0. \end{aligned} \quad (8-3)$$

Niech

$$p_1 = \frac{p_0}{\rho} \quad , \quad p_{j+1} = p_j \quad \text{dla } j = 1, \dots, N-1, \quad (8-4)$$

Ponieważ $\sum_{k=0}^N p_k = 1$ mamy

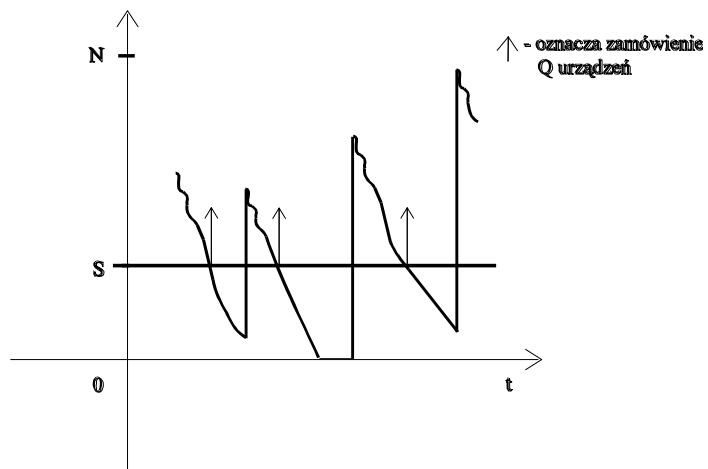
$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + \frac{N}{\rho}} = \frac{\rho}{N + \rho}, \\ p_j &= \frac{1}{N + \rho} \quad \text{dla } j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8-5)$$

Dla polityki P2 funkcja zysku w jednostce czasu wynosi

$$f_2(N) = I(1 - p_0)r - \bar{n}c_1 - mp_0c_2 \quad (8-6)$$

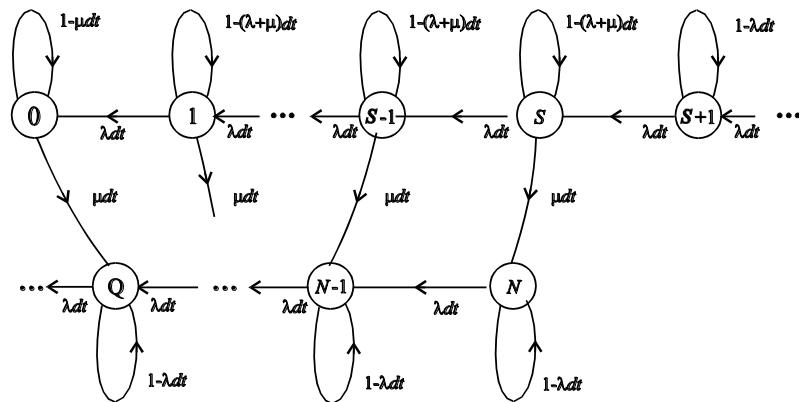
Polityka P3

Niech $N = Q+S$, gdzie Q jest ilością zamówionych urządzeń, a S zapasem krytycznym. Spełniony jest przy tym warunek $Q > S$. Gdy bieżący zapas jest równy S urządzeń, zarządzający magazynem wysyła zamówienie na Q jednostek. Ponieważ $Q > S$ realizacja zlecenia może spowodować, że zapas bieżący może się obniżyć poniżej poziomu S . Ilustruje to rysunek 8.3.



Rys. 8.3. Przebieg poziomu zapasu w czasie dla polityki P3

Podobnie jak w przypadku polityki P2 zakłada się, że można wysłać jedno zlecenie bieżące. Graf opisujący ewolucję stanów zapasów przedstawiono na rysunku 8.4



Rys.8.4. Graf stanów dla polityki P3

Ponieważ graf stanów posiada skończoną ilość stanów i macierz przejść nie podlega redukcji, istnieje zawsze stan ustalony. Stosując regulę mnemotechniczną dla stanu ustalonego otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}
0 &= -\mu p_0 + \lambda p_1, \\
&\vdots \\
0 &= -(\lambda + \mu)p_j + \lambda p_{j+1} \text{ dla } j = 1, \dots, S, \\
&\vdots \\
0 &= -\lambda p_j + \lambda p_{j+1} \text{ dla } j = S+1, \dots, Q-1, \\
&\vdots \\
0 &= -\lambda p_j + \mu p_{j-Q} + \lambda p_{j+1} \text{ dla } j = Q, \dots, N-1, \\
&\vdots \\
0 &= -\lambda p_N + \mu p_S.
\end{aligned} \tag{8-7}$$

Funkcja zysku osiąganego przez zarządzającego magazynem jest określona następująco

$$f_3(N) = \lambda(1 - p_0)r - \bar{n}c_1 - \mu \left(\sum_{k=0}^S p_k \right) c_2. \tag{8-8}$$

W oparciu o zależności (9-2), (9-6), (9-8) można dokonać porównania rozważanych polityk aby znaleźć najlepszą z nich. W tym celu rozpatrzmy przykład.

Przykład 8-1

Niech $\lambda = \mu = 1$, $N = 5$, $S = 2$, $r = 10$ j.m./ sztukę, $c_1 = 0,1$ j.m./ sztukę/j.czasu, $c_2 = 2$ j.m./ zlecenie, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1$.

Polityka P1

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^5 \frac{1}{k!}} = \frac{1}{326},$$

$$5 - \bar{n} = 1 - p_0, \quad \bar{n} = 4 + p_0 = \frac{1305}{326},$$

$$f_1(5) = \frac{325}{326} \cdot 10 - \frac{1305}{326} \cdot 0,1 - \frac{325}{326} \cdot 2 = 7,57.$$

Polityka P2

$$p_0 = \frac{1}{6}, \quad p_j = \frac{1}{6} \quad \text{dla } j = 1, \dots, 5 \quad \bar{n} = \frac{15}{6},$$

$$f_2(5) = \frac{5}{6} \cdot 10 - \frac{15}{6} \cdot 0,1 - \frac{1}{6} \cdot 2 = 7,75.$$

Polityka P3

$$S = 2, \quad Q = 3,$$

$$p_1 = p_0, \quad p_2 = 2p_1 = 2p_0, \quad p_3 = 2p_2 = 4p_0,$$

$$p_4 = p_3 - p_0 = 3p_0, \quad p_5 = p_2 = 2p_0,$$

$$p_0 = \frac{1}{13}, \quad \bar{n} = \sum_{k=1}^5 k p_k = \frac{39}{13} = 3,$$

$$f_3(5) = \frac{12}{13} \cdot 10 - 3 \cdot 0,1 - \frac{4}{13} \cdot 2 = 8,31.$$

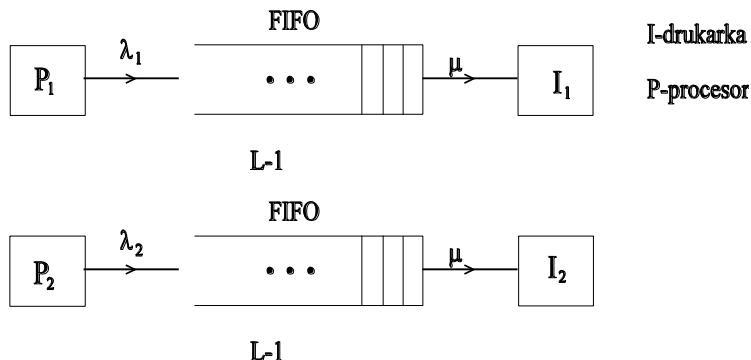
Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że najlepszą polityką uzupełniania zapasów jest polityka P3.

8.2 Optymalizacja struktury systemu informatycznego

Rozważmy system komputerowy wyposażony w dwie identyczne drukarki. Czasy trwania wydruków na drukarkach są zmiennymi losowymi niezależnymi, podlegającymi rozkładowi wykładniczemu o wartości średniej $\frac{1}{\mu}$. Zakłada się, że komputer posiada dwa niezależne procesory. Każdy procesor żąda drukowania komunikatów lub wyników obliczeń zgodnie z rozkładem Poissona o intensywności λ_1 dla procesora P_1 oraz λ_2 dla procesora P_2 . Zakłada się również, że maksymalna ilość programów oczekujących na wydruk (pojemność systemu) jest stała i wynosi $2L$. Chcemy dokonać porównania dwóch następujących polityk organizacji wydruków:

Polityka A

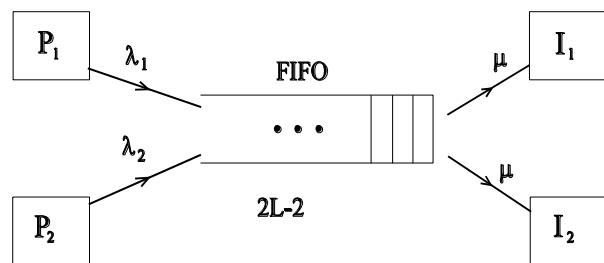
$(L \geq 1)$. Polega ona na przydzieleniu jednej drukarki do dyspozycji każdego procesora. Taka organizacja wydruków prowadzi do dekompozycji systemu na dwa niezależne podsystemy. Schemat blokowy tej polityki przedstawiono na rysunku 8.5.



Rys. 8.5 Schemat blokowy polityki A

Polityka B

$(2L \geq 2)$. Polega ona na utworzeniu wspólnej dla obu drukarek poczekalni dla programów oczekujących na wydruk. Wolna drukarka jest przydzielana pierwszemu programowi czekającemu na wydruk niezależnie od tego z jakiego pochodzi on procesora (w poczekalni programów obowiązuje dyscyplina FIFO). Schemat blokowy tej polityki został przedstawiony na rysunku 8.6.



Rys. 8.6. Schemat blokowy polityki B

W celu dokonania porównania obu polityk, wyliczymy średnią ilość programów przebywających w systemie dla następujących przypadków:

- $L = \infty$, to znaczy można przechowywać programy, które czekają na wydruk na dysku o pojemności praktycznie nieskończoność wielkiej. Dla obu polityk możemy określić warunki ergodiczności i zakładając, że są

one spełnione wykazać, że polityka B jest lepsza od polityki A, tzn. że spełnione są zależności: $\bar{n}_A > \bar{n}_B$, $\bar{t}_{S_A} \geq \bar{t}_{S_B}$.

- b) L jest skończone, co odpowiada przechowywaniu programów w pamięci operacyjnej lub na dysku o niewielkiej pojemności. Dla uproszczenia rozważań założymy, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$. Dokonamy porównania opisanych wyżej polityk wydruków określając relacje pomiędzy \bar{n}_A , \bar{n}_B , \bar{t}_{S_A} , \bar{t}_{S_B} , a także średnią ilość odmów drukowania programów przy obu politykach.

Rozwiązanie

Polityka A sprawdza się do rozpatrzenia dwóch niezależnych systemów M/M/1/FIFO/L, (λ_1, μ) i M/M/1/FIFO/L, (λ_2, μ) .

Polityka B polega na rozpatrzeniu systemu M/M/2/FIFO/2L, $(\lambda_1 + \lambda_2, \mu, \mu)$. Globalna intensywność zgłoszeń $\lambda_1 + \lambda_2$ jest otrzymywana przez superpozycję dwóch niezależnych procesów Poissona o intensywności λ_1 i λ_2 .

ad. a) Przy założeniu, że $L = A$ dla polityki A warunki ergodyczności mają postać

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} < 1, \lambda_1 < \mu, \quad (8-9)$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} < 1, \lambda_2 < \mu.$$

W systemie B, przy założeniu, że $L = \infty$ nierówność $\lambda_1 + \lambda_2 < 2\mu$ jest warunkiem ergodyczności. Warunek ten jest mniej restrykcyjny niż w systemie A.

System A. Zawiera dwa podsystemy:

- M/M/1/FIFO/ ∞ (λ_1, μ) , dla którego średnia ilość zgłoszeń jest określona wzorem

$$\bar{n}_1 = \frac{\lambda_1}{\mu - \lambda_1} \quad (8-10)$$

natomiast średni czas przebywania zgłoszeń w systemie zgodnie z II formułą Little'a jest określony relacją

$$\bar{t}_{s_1} = \frac{\bar{n}_1}{\lambda_1} = \frac{1}{\mu - \lambda_1} \quad (8-11)$$

- M/M/1/FIFO/ ∞ (λ_2, μ), dla którego obowiązują identyczne relacje jak w pierwszym systemie, przy czym w miejsce λ_1 należy podstawić λ_2 . Zatem można napisać

$$\begin{aligned}\bar{n}_2 &= \frac{\lambda_2}{\mu - \lambda_2} , \\ \bar{t}_{s_2} &= \frac{\bar{n}_2}{\lambda_2} = \frac{1}{\mu - \lambda_2} .\end{aligned}\quad (8-1)$$

Ponieważ oba podsystemy są niezależne, średnia ilość znajdujących się w nich zgłoszeń wynosi

$$\bar{n}_A = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = \frac{\lambda_1}{\mu - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu - \lambda_2} = \frac{\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\lambda_1\lambda_2}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} , \quad (8-13)$$

a czas przebywania w systemie jest określony relacją

$$\begin{aligned}\bar{t}_{s_A} &= \frac{\bar{n}_A}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\bar{n}_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\bar{n}_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\bar{n}_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\bar{n}_2}{\lambda_2} = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{s_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \bar{t}_{s_2}\end{aligned}\quad (8-14)$$

System B. Przyjmuje on postać: M/M/2/FIFO/ ∞ , ($\lambda_1 + \lambda_2, \mu, \mu$). Aby wyliczyć średnią ilość zgłoszeń \bar{n}_B w systemie B wyliczamy najpierw średnią długość kolejki ν

$$\bar{\nu} = \frac{\rho^{m+1}}{(m-\rho)^2(m-1)!} p_o , \quad (8-15)$$

gdzie

$$p_o = \frac{1}{\sum_{i=o}^{m-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}} .$$

Średnia ilość zajętych kanałów obsługi w stanie ustalonym wynosi

$$\bar{m}_0 = \rho ,$$

a średnia ilość zgłoszeń w systemie jest określona relacją

$$\bar{n}_B = \bar{\nu} + \bar{m}_0 = \bar{\nu} + \rho .$$

Warunek ergodyczności przyjmuje postać

$$\frac{\rho}{m} < 1 ,$$

$$\text{gdzie } \rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} .$$

Uwzględniając fakt, że w rozważanym przykładzie liczba kanałów obsługi $m = 2$ wyliczamy średnią ilość zgłoszeń w kolejce systemu B

$$\bar{\nu} = \frac{\rho^3}{(2-\rho)} \cdot \frac{1}{2+\rho} = \frac{\rho^3}{(2+\rho)(2-\rho)} = \frac{\rho^3}{4-\rho^2} \quad (8-16)$$

oraz prawdopodobieństwo

$$p_o = \frac{1}{1+\rho + \frac{\rho^2}{2-\rho}} = \frac{2-\rho}{(1+\rho)(2-\rho) + \rho^2} = \frac{2-\rho}{2+\rho} .$$

Ostatecznie średnia ilość zgłoszeń w systemie B wynosi

$$\bar{n}_B = \frac{\rho^3}{4-\rho^2} + \rho = \frac{4\rho}{4-\rho^2} = \frac{4\mu(\lambda_1 + \lambda_2)}{4\mu^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \quad (8-17)$$

Udowodnimy obecnie, że $\bar{n}_A > \bar{n}_B$, co jest równoznaczne z wykazaniem, iż polityka B jest lepsza od polityki A.

Przypomnijmy, że zależności \bar{n}_A i \bar{n}_B mają postać

$$\begin{aligned} \bar{n}_A &= \frac{\lambda_1}{\mu - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu - \lambda_2} , \\ \bar{n}_B &= \frac{4\mu(\lambda_1 + \lambda_2)}{4\mu^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)^2} . \end{aligned} \quad (8-18)$$

W celu przeprowadzenia porównania wykorzystujemy nierówności pomocnicze I i II

$$(I) \quad \lambda_1 \lambda_2 \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)^2 \rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \leq \frac{\lambda_1^2}{4} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2^2}{4} ,$$

$$\frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2^2}{4} \geq 0 ,$$

$$\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)^2 \geq 0 ,$$

$$(II) \quad (\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2) \leq \left(\mu - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)^2 ,$$

$$\mu^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\mu + \lambda_1 \lambda_2 \leq \mu^2 - \left(\lambda_1 + \lambda_2 \right)\mu + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \right)^2 .$$

Możemy napisać

$$\bar{n}_A = \frac{\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\lambda_1 \lambda_2}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} \geq \frac{\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\left[\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right]^2} =$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \left[\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right]}{\left[\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right]^2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\left[\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right]} ,$$

$$\bar{n}_A = \frac{\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - 2\lambda_1 \lambda_2}{(\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2)} \geq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\left[\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right]} ,$$

$$\bar{n}_B = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\mu}{\left[\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right] \left[\mu + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right]} .$$

Porównując \bar{n}_A z \bar{n}_B otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{n}_A &\geq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\left[\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right] \bar{n}_B} = \bar{n}_B \frac{\left[\mu + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \right]}{\mu}, \\ \bar{n}_A &\geq \frac{\mu + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu} \bar{n}_B \quad (8-19)\end{aligned}$$

Ponieważ czynnik $\frac{\mu + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)}{\mu}$ jest większy od 1, więc $\bar{n}_A \geq \bar{n}_B$
c.b.d.o

Zgodnie z II formułą Little'a mamy $\bar{t}_{s_A} \geq \bar{t}_{s_B}$.

Polityka B jest bardziej efektywna, gdyż charakteryzuje ją krótszy czas przebywania w systemie oraz mniej zajętych miejsc w pamięci przez oczekujące programy.

ad.b) Dla przypadku gdy L jest skończone, wprowadza się uproszczenie zakładając, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$.

Polityka A polega na rozpatrzeniu dwóch podsystemów:

- M/M/1/FIFO/L (λ_1, μ) . Ponieważ $\rho = 1$ otrzymujemy następujące zależności na \bar{n}_1 - średnią ilość zgłoszeń w systemie oraz p_L - prawdopodobieństwo odmowy obsługi

$$\bar{n}_1 = \frac{L}{2}, p_L = \frac{1}{L+1} \quad (8-20)$$

Zgodnie z II formułą Little'a średni czas przebywania zgłoszeń w systemie jest określony wzorem

$$\bar{t}_{s_1} = \frac{\bar{n}_1}{\lambda_1(1-p_L)} = \frac{L+1}{2\lambda_1} \quad (8-21)$$

- M/M/1/FIFO/L (λ_2, μ) , dla którego obowiązują identyczne zależności jak dla systemu poprzedniego, przy czym należy podstawić $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\bar{n}_2 = \frac{L}{2} ,$$

$$\bar{t}_{s_2} = \frac{L+1}{2\lambda_2} .$$

Łączna ilość zgłoszeń w systemie wynosi

$$\bar{n}_A = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = L ,$$

a średni czas przebywania programów w systemie przy polityce A ma postać

$$\bar{t}_{s_A} = \frac{1}{\lambda_1(1-p_L) + \lambda_2(1-p_L)} [\lambda_1(1-p_L)\bar{t}_{s_1} + \lambda_2(1-p_L)\bar{t}_{s_2}] = \frac{L+1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{L+1}{2\mu} .$$

(8-22)

Polityka B polega na rozpatrzeniu systemu M/M/2/FIFO/2L ($\lambda_1 + \lambda_2, \mu, \mu$).

Dla $\rho = m = 2$ średnia ilość zgłoszeń w kolejce \bar{v}_B oraz średnia ilość zgłoszeń w systemie \bar{n}_B są równe odpowiednio

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= p_o(2L-2)(2L-1), \\ \bar{n}_B &= \bar{v}_B + 2(1-p_{2L}), \end{aligned}$$

(8-23)

przy czym

$$p_o = \frac{1}{4L+1} ,$$

natomiast p_{2L} jest prawdopodobieństwem odmowy określonym zależnością

$$P_{2L} = 2p_o .$$

Średni czas przebywania zgłoszenia w systemie przy polityce B przyjmuje wartość

$$\bar{t}_{s_B} = \frac{\bar{n}_B}{\lambda(1-p_{2L})} = \frac{\bar{n}_B}{2\mu(1-2p_o)}$$

(8-24)

a średnia ilość zgłoszeń w systemie

$$\bar{n}_B = \frac{4L^2 + 2L}{4L+1} \quad (8-25)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\bar{t}_{s_B} = \frac{2L^2 + L}{\mu(4L-1)} \quad (8-26)$$

Dla przypadku gdy L jest skończone, mamy

$$\bar{n}_A < \bar{n}_B , \quad \text{gdyż} \quad L < \frac{4L^2 + 2L}{4L+1} , \quad L \geq 1 , \quad (8-27)$$

natomiast

$$\bar{t}_{s_A} \geq \bar{t}_{s_B} , \quad \text{gdyż} \quad \frac{L+1}{2\mu} > \frac{2L^2 + L}{\mu(4L-1)} , \quad L > 1 \quad (8-28)$$

Porównanie to nie jest użyteczne w praktyce. Oba systemy nie oferują takiej samej obsługi globalnej, ponieważ inne są w nich prawdopodobieństwa odmowy obsługi.

8.3. Model wielodostępnego systemu komputerowego

Rozpatrzmy wielodostępny system komputerowy, do którego podłączonych jest N konsoli. Przed każdą konsolą pracuje programista w trybie cyklicznym, to znaczy po fazie refleksji, gdy programista zastanawia się i drukuje zgłoszenia do wykonania przez komputer, następuje faza oczekiwania na odpowiedź komputera itd.

Zgłoszenia programistów na obsługę przez komputer są ustawiane w kolejce i wykonywane w kolejności ich przybycia - polityka FIFO.

Komputer pracuje w trybie monoprogramowania, to znaczy wykonuje obsługę tylko jednego zgłoszenia i musi zakończyć obsługę poprzedniego programu, aby rozpocząć obsługę następnego.

Zakłada się, że czas refleksji T_r jest zmienną losową posiadającą rozkład wykładniczy o wartości średniej R

$$p(T_r > t) = e^{-\frac{t}{R}} \quad (8-29)$$

Podobnie zakłada się, że czas wykonywania programu (bez oczekiwania na obsługę) jest zmienną losową S o rozkładzie wykładniczym i wartości średniej T

$$p(S > t) = e^{-\frac{t}{T}} \quad (8-30)$$

Niech k oznacza liczbę konsoli w trakcie oczekiwania na odpowiedź w momencie t , natomiast E_k - stan systemu odpowiadający tej sytuacji ($0 \leq k \leq N$).

Rozważany system jest postaci M/M/1/FIFO/N/F, gdyż zadania do realizacji nadchodzą do systemu z intensywnością $\lambda = \frac{1}{R}$ według rozkładu Poissona, natomiast czas obsługi programu przez procesor jest określony zależnością $T = \frac{1}{\mu}$. Rozważany system jest zamknięty, ponieważ zgłoszenia do obsługi nadchodzą ze skończonej liczby źródeł zgłoszeń (konsoli).

Wyprowadźmy wzory na intensywności przejść. Zakładając, że jedna refleksja jest w trakcie realizacji w chwili t , obliczymy prawdopodobieństwo tego, że zakończy się ona w przedziale czasu $(t, t+dt)$.

Wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo warunkowe (rozdział 1)

$$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)},$$

po uwzględnieniu zmiennych występujących w rozważanym zagadnieniu możemy napisać zależność

$$\begin{aligned} p(t < T_r \leq t + \Delta t / T_r > t) &= \frac{p(t < T_r \leq t + \Delta t)}{p(T_r > t)} = \\ &= \frac{p(t < T_r \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \frac{\Delta t}{p(T_r > t)}. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $\Delta t \rightarrow 0$, wyrażenie powyższe przyjmuje postać

$$\frac{F'(t)dt}{1-F(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} dt = \lambda dt = \frac{dt}{R} + O(dt) \quad (8-31)$$

gdzie $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ jest dystrybuantą rozkładu wykładniczego czasu refleksji T_r .

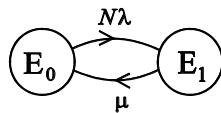
Ponieważ programiści pracują niezależnie, zatem jeśli n refleksji jest w trakcie realizacji w chwili t , to prawdopodobieństwo, że jedna z nich zakończy się w przedziale $(t, t+dt)$ jest równe $n \lambda dt = \frac{n}{R} dt + O(dt)$.

Prawdopodobieństwo tego, że jedna obsługa realizowana w momencie t , zakończy się w przedziale $(t, t+dt)$ (po uwzględnieniu faktu, że $\mu = \frac{1}{T}$)

jest równe $\mu dt = \frac{dt}{T}$.

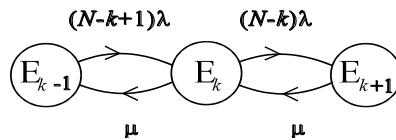
Graf przejść zdefiniowany poprzez sytuacje charakterystyczne przedstawiono na rysunku 8.7.

- sytuacja charakterystyczna nr 1



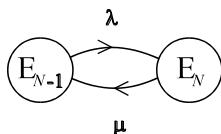
$$p_0'(t) = -N\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

- sytuacja charakterystyczna nr 2



$$p_k'(t) = (N-k+1)\lambda p_{k-1}(t) - [(N-k)\lambda + \mu] p_k(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

- sytuacja charakterystyczna nr 3



$$p_N'(t) = -\mu p_N(t) + \lambda p_{N-1}(t)$$

Rys. 8.7. Sytuacje charakterystyczne grafu

Zakłada się, że warunki początkowe mają postać

$$p_0(0) = 1, \quad p_i(0) = 1, \quad i = 1, \dots, N,$$

a warunek normalizujący jest określony wzorem

$$\sum_{i=0}^N p_i(t) = 1.$$

W stanie ustalonym spełniony jest układ równań

$$\begin{aligned} N\lambda p_0 &= \mu p_1, \\ [(N-k)\lambda + \mu]p_k &= (N-k+1)\lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}, \\ \mu p_N &= \lambda p_{N-1}. \end{aligned} \quad (8-32)$$

Rozwiązujeć powyższy układ równań znajdujemy poszczególne prawdopodobieństwa w stanie ustalonym:

$$\begin{aligned} p_1 &= N\rho p_0, \\ &\vdots \\ p_k &= \frac{N!}{(N-k)!} \rho^k p_0, \quad 2 \leq k \leq N, \\ &\vdots \\ p_0 &= \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N \frac{N!}{(N-k)!} \rho^k \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (8-33)$$

gdzie $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Długość przedziału czasu F , podczas którego żaden programista nie pracuje jest równa prawdopodobieństwu p_N tego, że wszyscy programiści czekają na obsługę komputera

$$F = p_N = \frac{N! \rho^N}{1 + \sum_{k=1}^N \frac{N!}{(N-k)!} \rho^k}. \quad (8-34)$$

Przykład 8-2

Rozważania teoretyczne zilustrujemy przykładem liczbowym.
Niech $N = 10$, $R = 1$ minuta (60 sek.), $T = 0,6$ sek, wówczas otrzymamy

$$\lambda = \frac{1}{R} = \frac{1}{60},$$

$$\mu = \frac{1}{T} = \frac{10}{6},$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{100}.$$

Prawdopodobieństwo p_0 obliczamy wykorzystując wzór rekurencyjny

$$p_{k+1} = p_k (N - k) , \quad k \in \{0, \dots, 9\}.$$

Stąd mamy

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,01 \cdot 10 p_0, \\ p_2 &= 0,01 \cdot 9 \cdot p_1 = 0,009 p_0, \\ p_3 &= 0,01 \cdot 8 \cdot p_2 = 7,2 \cdot 10^{-4} p_0, \\ &\vdots \\ p_{10} &= 3,6 \cdot 10^{-14} p_0. \end{aligned}$$

Uwzględniając warunek normalizujący wyliczamy

$$p_0 \equiv \frac{1}{1,11} = 0,901$$

i ostatecznie

$$F = N! \rho^N p_0 = 10! \left(\frac{1}{100} \right)^{10} \cdot 0,901 = 0,3 \cdot 10^{-13} .$$

Obliczmy średni czas oczekiwania komputera na odpowiedź W .

Prawdopodobieństwo $1 - p_0$ odpowiada proporcji czasu, podczas którego komputer pracuje, a cykl pracy programisty trwa średnio $R + W$ (składa się na niego czas trwania refleksji oraz czas odpowiedzi). Można założyć, że podczas tego cyklu średnio każdy z N programistów wyśle jedno zgłoszenie, które zajmie komputer średnio w ciągu czasu T .

Tak więc poszukiwana proporcja czasu wynosi

$$\frac{NT}{R+W},$$

i musi być spełnione równanie

$$1-p_0 = \frac{NT}{R+W}.$$

Wtedy średni czas reakcji komputera na zgłoszenie wynosi

$$W = \frac{NT}{1-p_0} - R \cong 0,6 \text{ sek.}$$