Metody Numeryczne - Sprawozdanie 2

Piotr Moszkowicz

13 marca 2019

Spis treści

1 Wstęp Teoretyczny

Na drugich laboratoriach naszym zadaniem było rozwiązania różniczkowego (równania Poissona w jednym wymiarze) za pomocą metody rozkładu LU z wykorzystaniem macierzy trójdiagonalnej. Aby rozwiązać zadanie potrzebne jest wprowadzenie kilku pojęć, które objaśniam poniżej.

1.1 Wektor

Wektor to obiekt matematyczny opisywany za pomocą jego długości, zwrotu oraz kierunku, wykorzystywany głównie w fizyce oraz matematyce. Notacja, z którą wykorzystujemy w obliczeniach matematycznych do zapisu wektora to notacja macierzowa, zilustrowana poniżej:

$$v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \tag{1}$$

Jest to trójelementowy wektor wierszowy.

1.2 Macierz

Macierz to tablica prostokątna, która zawiera liczby. Notacja w jakiej zapisujemy macierze widoczna jest poniżej:

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Na powyższym przykładzie widnieje macierz kwadratowa (ilość kolumn jest równa ilości wierszy) o wymiarze 2. Wyróżniamy kilka rodzajów macierzy, poniżej te najważniejsze, które są istotne dla przebiegu ćwiczenia.

Macierz diagonalna to taka, która posiada wartości różne od zera jedynie na przekątnej (tzw. diagonali).

Macierz trójdiagonalna to taka, która posiada wartości różne od zera jedynie na diagonali, oraz pierwszej naddiagonali i pierwszej poddiagonali.

1.3 Rozkład LU macierzy trójdiagonalnej

Elementy macierzy rozkładu LU, gdy na wejściu dostajemy macierz trójdiagonalną możemy wyliczyć w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} = L{*}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & c_3 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Elementy macierzy L i U wyliczamy za pomocą następujących wzorów:

$$u_1 = d_1 \tag{4}$$

$$l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}, i = 2, 3, \ldots, N \tag{5}$$

$$u_i = d_i - l_i * c_{i-1}, i = 2, 3, \ldots, N \tag{6}$$

dysponując nimi możemy rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ LU\vec{x} &= \vec{b} \end{aligned} \tag{7}$$

rozwiązując poniższe układy równań:

$$\begin{aligned} L\vec{y} &= \vec{b} \\ U\vec{v} &= \vec{y} \end{aligned} \tag{8}$$

2 Opis problemu

Naszym zadaniem jest rozwiązanie równania Poissona postaci:

$$\Delta^2 V(x) = -\rho(x) \tag{9}$$

w przedziale $x \in [-X_b, X_b]$ z warunkiem brzegowym $V(-X_b) = V(X_b) = 0$ dla rozkładu gęstości:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-X_b, -X_a) \\ 1, & x \in [-X_a, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (0, X_a] \\ 0, & x \in (X_a, X_b] \end{cases} \tag{10}$$

dwa razy - raz gdy parametr $N = 50$ oraz drugi, gdy $N = 500$.

Poniżej wzory, potrzebne do wprowadzenia wartości:

$$x_i = -X_b + h * (i - 1), i = 1, 2, \ldots, N \tag{11}$$

$$h = \frac{2X_b}{(N-1)} \tag{12}$$

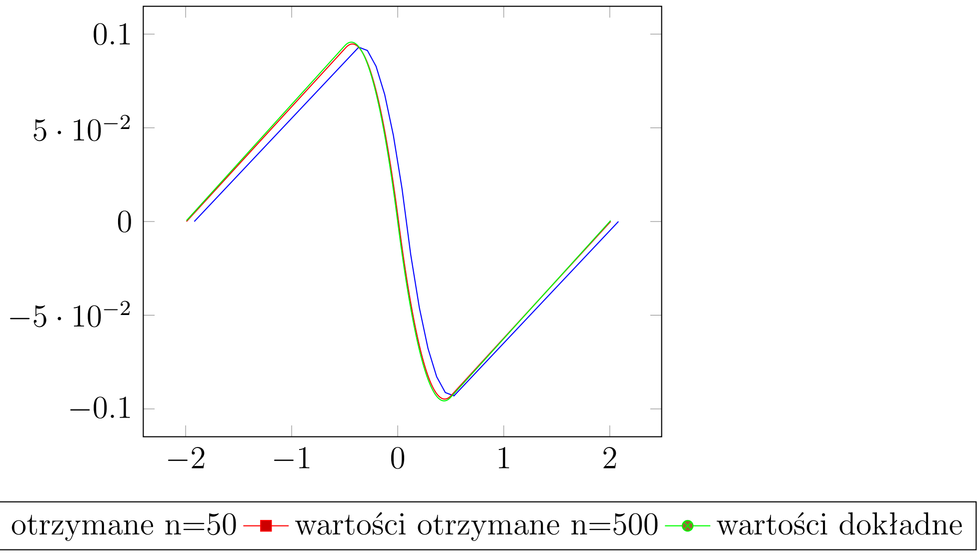
$$d_i = \frac{-2}{h^2} \tag{13}$$

$$a_i = c_i = \frac{1}{h^2} \tag{14}$$

Stałe oraz warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{1}{2} \\ X_b &= 2 \\ d_1 &= 1 \\ c_1 &= 0 \\ \rho_1 &= 0 \\ d_n &= 1 \\ a_n &= 0 \\ \rho(n) &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

3 Wyniki



Wykres przedstawiający wynik uzyskany, gdy wykonujemy 500 iteracji

4 Wnioski

Jak widać na powyższych wykresach, gdy stosujemy większa ilość iteracji otrzymujemy dużo wyższą dokładność, zbliżając się na prawdę blisko do dokładnego wyniku.