Metody Numeryczne - Sprawozdanie 1

Piotr Moszkowicz

28 lutego 2019

Spis treści

1 Wstęp Teoretyczny **1**

1.1 Wektor . . . 1

1.2 Macierz . . . 1

1.3 Wyznacznik macierzy . . . 1

1.4 Wskaźnik uwarunkowania macierzy . . . 2

1.5 Metoda eliminacji Gaussa . . . 2

1.6 Rozkład LU metodą Gaussa-Crouta . . . 2

2 Opis problemu **3**

3 Wyniki **3**

3.1 Rozkład LU macierzy . . . 3

3.2 Elementy diagonalne macierzy U oraz wyznacznik macierzy A . . . 3

3.3 Macierz odwrotna A^{-1} . . . 4

3.4 Iloczyn $A * A^{-1}$ . . . 4

3.5 Wskaźnik uwarunkowania macierzy . . . 4

4 Wnioski **4**

4.1 Wpływ elementów diagonalnych macierzy U na wyznacznik A . . . 4

4.2 Wielkość wskaźnika uwarunkowania macierzy A, sposób powiązania z iloczynem A * A^{-1} . . . 4

1 Wstęp Teoretyczny

Na pierwszych laboratoriach naszym zadaniem było zapoznanie się z biblioteką GSL oraz jej możliwościami na przykładzie odwracania macierzy, obliczania jej wyznacznika oraz wskaźnika jej uwarunkowania za pomocą rozkładu LU. Aby rozwiązać zadanie potrzebne jest wprowadzenie kilku pojęć, które objaśniam poniżej.

1.1 Wektor

Wektor to obiekt matematyczny opisywany za pomocą jego długości, zwrotu oraz kierunku, wykorzystywany głównie w fizyce oraz matematyce. Notacja, z którą wykorzystujemy w obliczeniach matematycznych do zapisu wektora to notacja macierzowa, zilustrowana poniżej:

$$v = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \tag{1}$$

Jest to trójelementowy wektor wierszowy.

1.2 Macierz

Macierz to tablica prostokątna, która zawiera liczby. Notacja w jakiej zapisujemy macierze widoczna jest poniżej:

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Na powyższym przykładzie widnieje macierz kwadratowa (ilość kolumn jest równa ilości wierszy) o wymiarze 2. Wyróżniamy kilka rodzajów macierzy, poniżej te najważniejsze, które są istotne dla przebiegu ćwiczenia.

Macierz diagonalna to taka, która posiada wartości różne od zera jedynie na przekątnej (tzw. diagonali).

Macierz jednostkowa to specjalny rodzaj macierzy diagonalnej - jej wartościami są same jedynki. Oznaczana jest jako I.

Macierz trójkątna to macierz, która na jednej z połów (patrząc z perspektywy diagonali) posiada zera. Wyróżniamy dwa typy macierzy trójkątnych:

- Macierz trójkątna lewa (dolna) - Posiada zera w górnej części (na lewo od diagonali).
- Macierz trójkątna prawa (górna) - Posiada zera w dolnej części (na prawo od diagonali).

Macierz odwrotna Jeśli A jest macierzą odwracalną, to macierzą odwrotną jest macierz B spełniająca poniższe równanie:

$$A * B = B * A = I \tag{3}$$

i jest oznaczana jako: A^{-1}

1.3 Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy to funkcja przyporządkowująca macierzy kwadratowej pewną liczbę. W tym zadaniu istotna jest informacja, iż wyznacznikiem macierzy trójkątnej jest iloczyn jej elementów znajdujących się na diagonali. Oznaczenie: $\det(\mathrm{A})$.

Nieosobliwość macierzy Jeżeli wyznacznik macierzy jest różny od 0 to macierz ta jest nieosobliwa co implikuje możliwość znalezienia macierzy odwrotnej.

1.4 Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Pozwala nam uzyskać pogląd na błąd względny rozwiązania równania macierzowego. Wyznacza się wzorem:

$$\kappa(A) = ||A|| * ||A^{-1}|| \tag{4}$$

1.5 Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa to metoda rozwiązywania układu równań liniowych. Metoda ta jest dwuetapowa:

Eliminacja zmiennych - doprowadzamy układ za pomocą (n-1) odejmowań aż uzyskamy trójkątny układ w poniższej postaci:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(n)}x_n &= b_1^n \\ a_{22}^{(n)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(n)}x_n &= b_2^n \\ \cdots &= \ldots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^n \end{aligned} \tag{5}$$

Postępowanie odwrotne - stosujemy wzór rekurencyjny dla macierzy trójkątnej. Dla ułatwienia opiszę jedynie metodę **pełnego wyboru elementów głównych** - w każdym kroku szukamy elementu:

$$|a_{rs}^{(k)}| = \max_{k \le i,j \le n} |a_{ij}^k| \tag{6}$$

i przestawiamy wiersze k i r oraz kolumny k i s.

1.6 Rozkład LU metodą Gaussa-Crouta

Metodę Gaussa możemy użyć do znalezienia macierzy L oraz U, które dane są wzorem:

$$A = L * U \tag{7}$$

Wykorzystujemy metodę eliminacji Gaussa, jednak zastępujemy odejmowanie mnożeniem przez macierz:

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 & 0 \\ -l_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \tag{8}$$

Po wykonaniu (n-1) takich operacji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L^{(n-1)}L^{(n-2)} \ldots L^{(1)}A^{(1)} &= A^{(n)} \\ L^{(n-1)}L^{(n-2)} \ldots L^{(1)}\vec{b}^{(n)} &= \vec{b}^{(n)} \end{aligned} \tag{9}$$

Odpowiednio przemnażając macierze otrzymujemy macierze L, U według poniższych wzorów:

$$\begin{aligned} &L = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1} \ldots (L^{(n-1)})^{-1} \\ &U = A^{(n)} = (L^{(n-1)}L^{(n-2)} \ldots L^{(1)})A^{(1)} \\ &A = L * U \end{aligned} \tag{10}$$

dysponując nimi możemy rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ LU\vec{x} &= \vec{b} \end{aligned} \tag{11}$$

rozwiązując poniższe układy równań:

$$\begin{aligned} L\vec{y} &= \vec{b} \\ U\vec{x} &= \vec{y} \end{aligned} \tag{12}$$

2 Opis problemu

Naszym zadaniem było:

1. Znaleźć rozkład LU macierzy A. (Punkt 1.6)
2. Znaleźć elementy diagonalne macierzy U oraz wyznacznik macierzy A. (Punkt 1.3)
3. Znaleźć macierz odwrotną A^{-1}. (Rozwiązując układ równań przy pomocy punktu 1.6)
4. Obliczyć iloczyn $A * A^{-1}$.
5. Obliczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy. (Wzór 4)

Macierz wejściowa dana jest poniższym wzorem, oraz jej wymiary wynosi 4 x 4:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i + j + \delta} \tag{13}$$

δw przypadku podstawowym (opisanym poniżej) równa jest 2.

3 Wyniki

3.1 Rozkład LU macierzy

Macierz LU rozkładu, wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.(3) & 0.25 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0(3) & 0.41(6) & 0.0428571 \\ 0.(6) & 0.8(3) & -0.0013(8) & -0.00238095 \\ 0.4 & 1 & -0.857143 & 0.000102041 \end{bmatrix}_{4\times4} \tag{14}$$

3.2 Elementy diagonalne macierzy U oraz wyznacznik macierzy A

Elementy diagonalne macierzy U przedstawiam poniżej w formie wektora w zapisie macierzowym poziomym:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.0(3) & -0.0013(8) & 0.000102041 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$det(A) = -2.36206 * e^{-9} \tag{16}$$

3.3 Macierz odwrotna A^{-1}

Macierz odwrotna A^{-1} wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix}_{4\times4} \tag{17}$$

3.4 Iloczyn $A * A^{-1}$

Iloczyn macierz A i jej macierzy odwrotnej ukazany jest poniżej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.13687 * e^{-13} & 1 & 1.81899 * e^{-12} & 0 \\ 1.13687 * e^{-13} & 4.54747 * e^{-13} & 1 & 9.09495 * e^{-13} \\ 0 & 0 & -9.09495 * e^{-13} & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \tag{18}$$

(czyli macierz jednostkowa w granicy błędu numerycznego).

3.5 Wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$\kappa = 14700 \tag{19}$$

4 Wnioski

4.1 Wpływ elementów diagonalnych macierzy U na wyznacznik A

Im większe liczby na diagonali macierz U tym wyznacznik A jest większy.

4.2 Wielkość wskaźnika uwarunkowania macierzy A, sposób powiązania z iloczynem A * A^{-1}

Wielkość uwarunkowania macierzy jest powiązana z elementem macierzy $(A^{-1})_{3,3}$ (wielkość uwarunkowania przemnożona przez parametr δ ze wzoru 13.