

Metody Numeryczne - Sprawozdanie 13

Piotr Moszkowicz

13 czerwca 2019

Spis treści

1	Wstęp Teoretyczny	1
1.1	Generator multiplikatywny	1
2	Opis problemu	1
3	Wyniki	2
3.1	Generator 1	2
3.2	Generator 2	3
3.3	Generator 3	4
3.4	Rozkład jednorodny w kuli 3D	5
3.4.1	Rozkład normalny	5
3.4.2	Rozkład jednomianowy	6
3.4.3	Gęstości, liczności podprzedziałów w rozkładzie jednomianowym	6
4	Wnioski	6

1 Wstęp Teoretyczny

Na trzynastych zajęciach zajęliśmy się generatorami liczb losowych o rozkładzie jednorodnym w kuli 3D.

1.1 Generator multiplikatywny

Generator multiplikatywny to generator liniowy, którego parametr $c = 0$. Równanie kolejnych generowanych liczb dane jest poniżej:

$$X_n = a^n X_0 \bmod n \quad (1)$$

Z tego równania wynika, iż otrzymany ciąg liczb losowych jest **ciągiem deterministycznym**.

2 Opis problemu

Pierwszy problemem było napisanie trzech multiplikatywnych generatorów liczb losowych o poniższych parametrach:

$$\begin{aligned} U_1(0, 1) : a = 17, m = 2^{13} - 1, X_0 = 10 \\ U_2(0, 1) : a = 85, m = 2^{13} - 1, X_0 = 10 \end{aligned} \quad (2)$$

oraz generator trzeci, dla którego kolejne liczby losowane dane są wzorem:

$$X_i = (1176 \cdot X_{i-1} + 1476 \cdot X_{i-2} + 1776 \cdot X_{i-3}) \bmod (2^{32} - 5) \quad (3)$$

Wyniki z każdego generatora należało unormować, tak, aby znajdowały się w przedziale $x_i \in (0, 1)$. Dokonywaliśmy to dzieląc otrzymaną liczbę przez $m + 1.0$.

Następnie należało wygenerować $N = 2000$ losowych liczb za pomocą każdego z generatorów, oraz zapisać je do pliku w takiej postaci, aby dało się z otrzymanych danych wygenerować wykresy zależności x_i od kolejno x_{i+1} , x_{i+2} oraz x_{i+3} .

Kolejnym zadaniem było wykonanie rozkładu jednorodnego w kuli 3D. Na początku generowaliśmy cztery liczby losowe $u_1 - u_4$ za pomocą generatora nr 3. Współrzędne naszych punktów są dane następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} x_i &= \sqrt{-2\ln(1 - u_1)\cos(2\pi u_2)} \\ y_i &= \sqrt{-2\ln(1 - u_1)\sin(2\pi u_2)} \\ z_i &= \sqrt{-2\ln(1 - u_3)\cos(2\pi u_4)} \end{aligned} \quad (4)$$

Następnie należało znormalizować wszystkie współrzędne dzieląc je przez długość wektora z nich złożonych, która dane jest wzorem:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5)$$

Takie dane zapisaliśmy do pliku. Następnie chcemy wygenerować również rozkład jednomianowy. Aby tego dokonać generujemy kolejną liczbę losową u_5 i obliczamy liczbę s_i z poniższego wzoru:

$$s_i = u_5^{\frac{1}{3}} \quad (6)$$

Posiadając już wartość s_i mnożymy kolejne współrzędne przez nią. Te dane również zapisujemy do pliku.

Finalnie chcemy również sprawdzić czy nasz rozkład faktycznie jest jednorodny. Aby tego dokonać musimy podzielić nasze dane na 10 podprzedziałów za pomocą odległości od środka kuli (promienia). W tym celu wprowadzamy zmienną $K = 10$, oraz $\Delta = \frac{1}{K}$. Następnie alokujemy tablicę o długości $K + 1$, w której będziemy przechowywać licznosc przedziałów w indeksach od 1 do 10. Dla każdego punktu dokonujemy poniższych obliczeń:

$$j = (\text{int}) \frac{\|r_i\|_2}{\Delta} + 1 \quad (7)$$

Indeks j mówi nam, w którym podprzedziale dany punkt się znajduje. W ten sposób wyliczamy licznosc każdego z podprzedziałów. Jednak, aby nasza miara była sensowna, musimy wyniki znormalizować, czyli każdy podprzedział dzielimy przez jego objętość, którą wyznaczamy na końcu programu z pomocą poniższych wzorów:

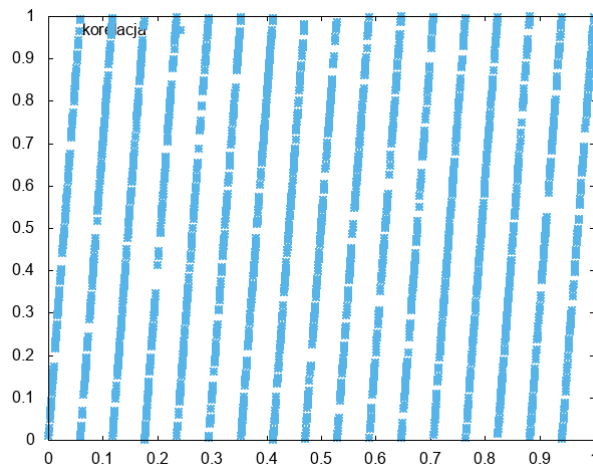
$$\begin{aligned} R_j &= \Delta \cdot j \\ R_{j-1} &= \Delta \cdot (j - 1) \\ V_j &= \frac{4}{3} \pi R_j^3 \\ V_{j-1} &= \frac{4}{3} \pi R_{j-1}^3 \\ g_j &= \frac{n_j}{V_j - V_{j-1}} \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie n_j to licznosc danego podprzedziału. W ten sposób możemy sprawdzić jakość naszego rozkładu.

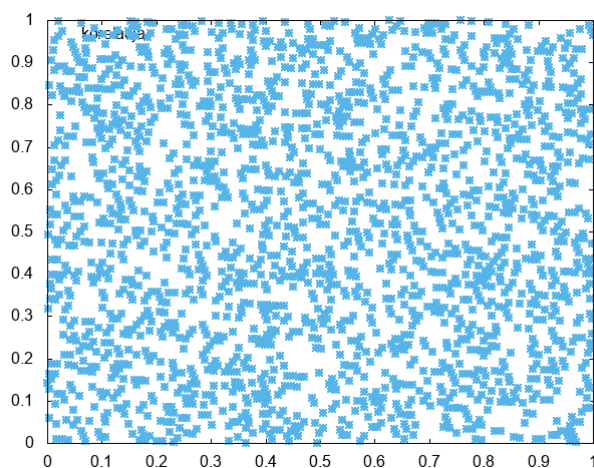
3 Wyniki

3.1 Generator 1

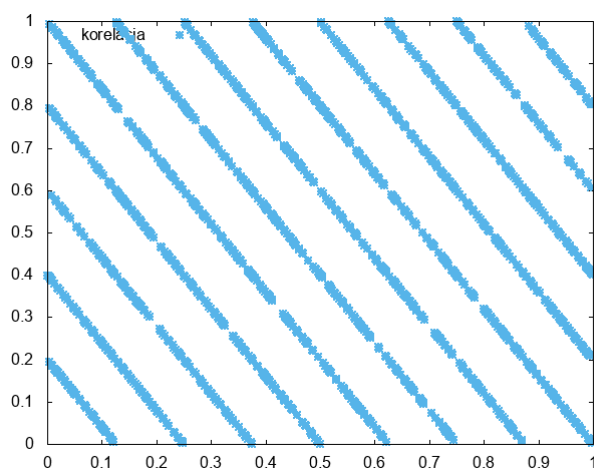
Na poniższych rysunkach można obserwować zależności pomiędzy kolejnymi generowanymi liczbami.



Rysunek 1: Zależność pary (x_i, x_{i+1})



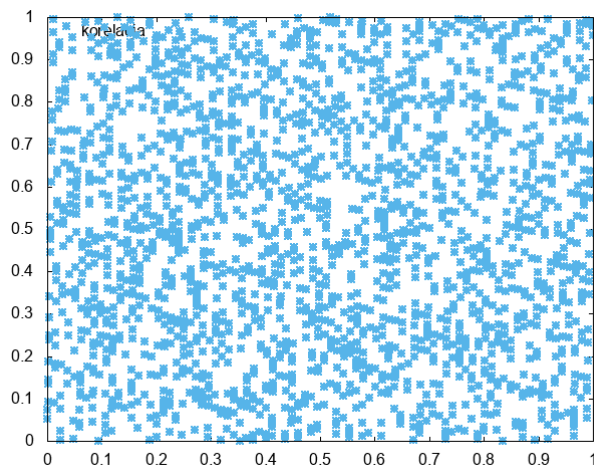
Rysunek 2: Zależność pary (x_i, x_{i+2})



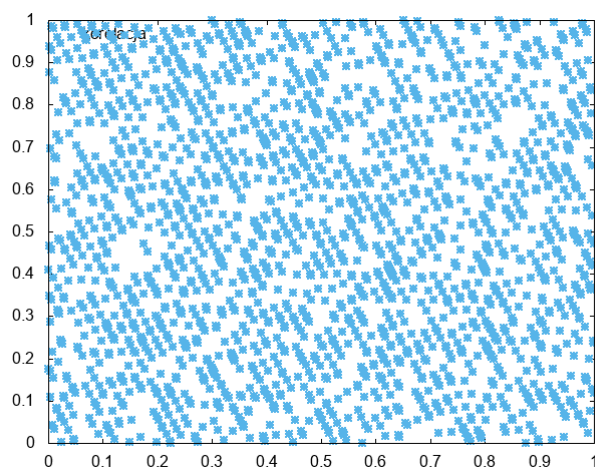
Rysunek 3: Zależność pary (x_i, x_{i+3})

3.2 Generator 2

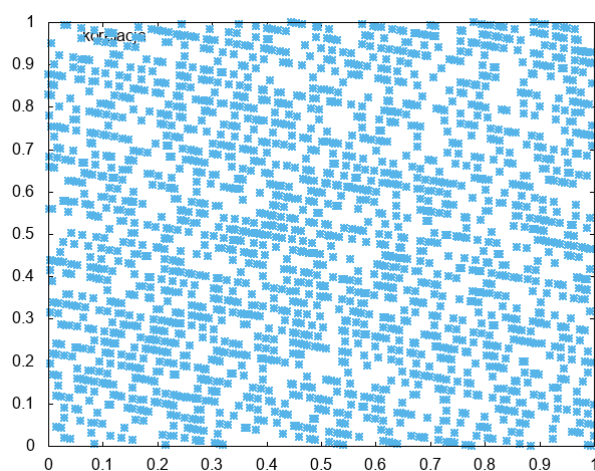
Na poniższych rysunkach można obserwować zależności pomiędzy kolejnymi generowanymi liczbami.



Rysunek 4: Zależność pary (x_i, x_{i+1})



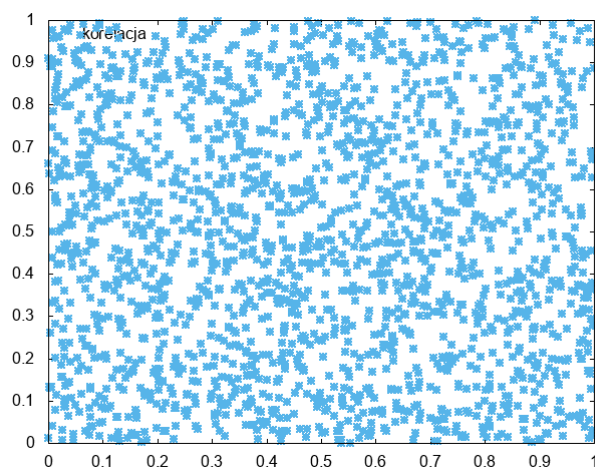
Rysunek 5: Zależność pary (x_i, x_{i+2})



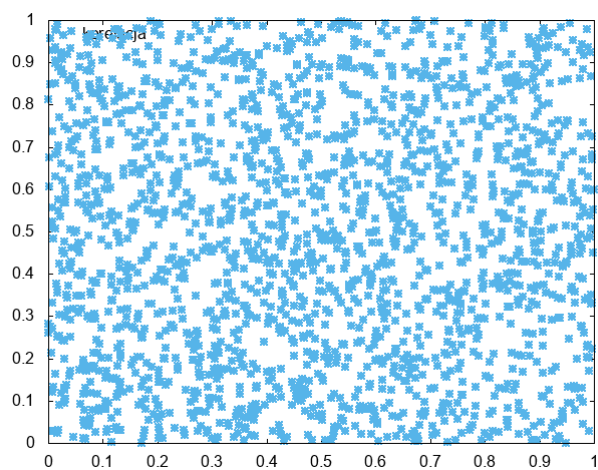
Rysunek 6: Zależność pary (x_i, x_{i+3})

3.3 Generator 3

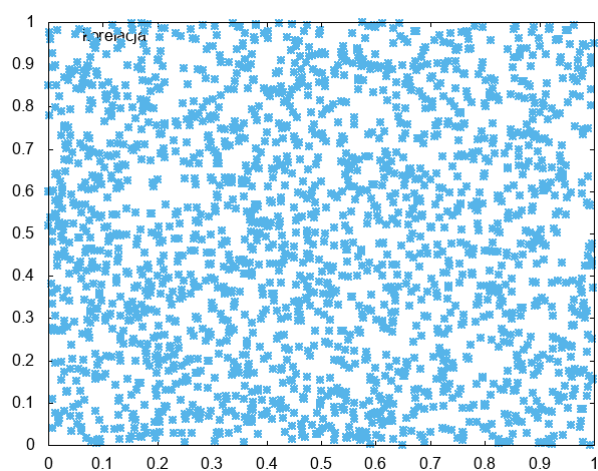
Na poniższych rysunkach można obserwować zależności pomiędzy kolejnymi generowanymi liczbami.



Rysunek 7: Zależność pary (x_i, x_{i+1})



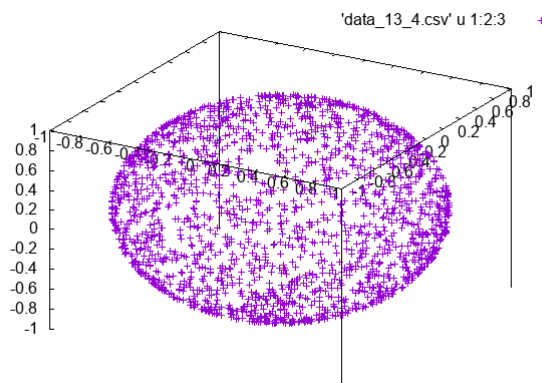
Rysunek 8: Zależność pary (x_i, x_{i+2})



Rysunek 9: Zależność pary (x_i, x_{i+3})

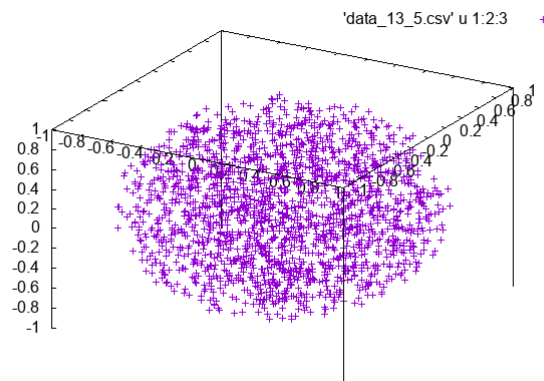
3.4 Rozkład jednorodny w kuli 3D

3.4.1 Rozkład normalny



Rysunek 10: Kula złożona z punktów rozkładu normalnego

3.4.2 Rozkład jednomianowy



Rysunek 11: Kula złożona z punktów rozkładu jednomianowego

3.4.3 Gęstości, licznosci podprzedziałów w rozkładzie jednomianowym

Poniżej w tabelach widać gęstości oraz licznosci kolejnych podprzedziałów dla wartości $n = 2000, 10^4, 10^7$.

Nr. Przedziału	Liczność	Gęstość
1	2	477.465
2	10	341.046
3	44	552.854
4	79	509.726
5	113	442.242
6	187	490.582
7	241	453.028
8	336	474.64
9	457	502.768
10	531	467.775

Tabela 1: Licznosci oraz gęstości dla $N = 2000$

Nr. Przedziału	Liczność	Gęstość
1	12	2864.79
2	57	1943.96
3	199	2500.41
4	369	2380.87
5	601	2352.1
6	928	2434.55
7	1221	2295.21
8	1704	2407.1
9	2189	2408.23
10	2720	2396.13

Tabela 2: Licznosci oraz gęstości dla $N = 10^4$

4 Wnioski

Jeśli chodzi o wnioski związane z generatorami - widać, iż pierwszy generator nie jest doskonały - liczby "układają" się na płaszczyznach co oznacza jasne zależności między nimi. Natomiast generator nr. 3 cechuje się najmniejszą zależnością między kolejnymi wynikami.

Nr. Przedziału	Liczność	Gęstość
1	10007	2.389e+06
2	69633	2.37481e+06
3	190008	2.38742e+06
4	369688	2.38531e+06
5	609404	2.38499e+06
6	911456	2.39114e+06
7	1270770	2.38877e+06
8	1689492	2.38661e+06
9	2170321	2.38768e+06
10	2709221	2.38664e+06

Tabela 3: Liczności oraz gęstości dla $N = 10^7$

Po grafikach związanych z rozkładem kuli 3D widać, iż na pierwszej z nich (podpunkt 3.4.1) punkty rozłożone są na obwodzie sfery. Natomiast na rysunku z podpunktu 3.4.2 punkty są rozmieszczone równomiernie wewnątrz kuli. Tabele z podpunktu 3.4.3 potwierdzają tę zależność - gęstości są bardzo zbliżone do siebie, zwłaszcza, gdy generujemy $N = 10^7$ punktów. Im większa ilość generowanych punktów, tym gęstości mniej odbiegają od siebie.