Metody Numeryczne - Sprawozdanie 7

Piotr Moszkowicz

25 kwietnia 2019

Spis treści

1 Wstęp Teoretyczny

Na siódmych zajęciach przeprowadzaliśmy interpolację Lagrange'a najpierw bez, a potem z optymalizacją położeń węzłów metodą Chebyshev'a.

1.1 Interpolacja Lagrange'a

Interpolacja Lagrange'a to iteracyjna metoda interpolacyjna. Z pomocą wcześniej wybranych położeń węzłów wyznaczamy przybliżone wartości interesującej nas funkcji iteracyjnie (najlepiej dla sporej ilości punktów na interesującym nas przedziale, ale wartości były gęsto ulokowane, co pozwoli nam otrzymać większą dokładność). Dla każdego podanego punktu tworzymy wielomian Lagrange'a przedstawiający się poniższym wzorem:

$$\Phi_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} \tag{1}$$

gdzie: x - kolejne szukane przybliżenie x_i - kolejne wartości położeń węzłów

Następnie ten wielomian mnożymy przez wartość funkcji w danym punkcie, dla którego szukamy przybliżenia. Otrzymany wynik jest interpolacją Lagrange'a w danym punkcie - za pomocą zebrania takich wyników jesteśmy w stanie wyrysować przybliżony wykres interesującej nas funkcji.

1.2 Optymalizacja położeń węzłów metodą Chebyshev'a

Przy zastosowaniu metody Chebyshev'a, wyznaczamy położenia naszych węzłów za pomocą poniższego wzoru:

$$x_i = \frac{1}{2}[(x_{max}-x_{min})cos(\pi\frac{2i+1}{2n+2}) + (x_{min}+x_{max})] \tag{2}$$

Pozwala nam on na uniknięcie dużych "podbić" przy brzegach przedziałów, co zwiększa dokładność interpolacji.

2 Opis problemu

Na zajęciach naszym zadaniem było wykonać interpolację Lagrange'a dla funkcji $f(x) = exp(-x^2)$ w przedziale $x \in [-5, 5]$ Proces wykonujemy dla różnej liczby węzłów n - 5, 10, 15, 20. Z tego powodu na początku programu alokujemy cztery tablicę dla każdego n (wymiar tablicy n+1). Dwie z nich służą jako położenie x-ów (każdy wypełnione inną metodą), dwie pozostałe jako pozycję wartości funkcji badanej dla danych położeń x.

Dla niezoptymalizowanych tablic wyznaczamy pozycję węzłów poniższym wzorem:

$$x[i] = x_{min} + (x_{max} - x_{min}/n) * i \tag{3}$$

gdzie $x_{min} = -5, x_{max} = 5$, n - ilość węzłów, i - kolejny numer iteracji.

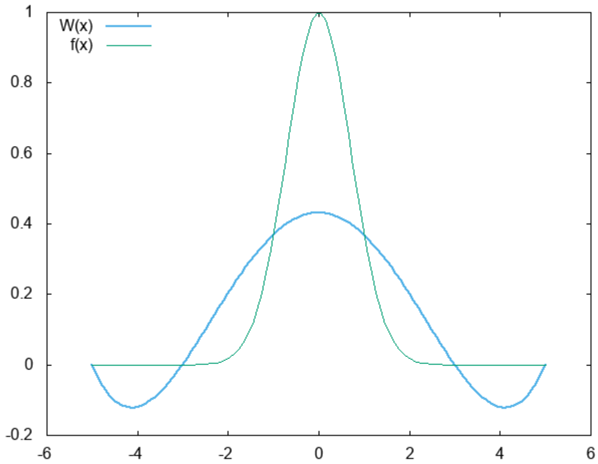
Przy metodzie Chebyshev'a korzystamy ze wzoru 2.

Następnie przeprowadzamy interpolację Lagrange'a i wyniki zapisujemy do plików oraz sporządzamy odpowiednie wykresy.

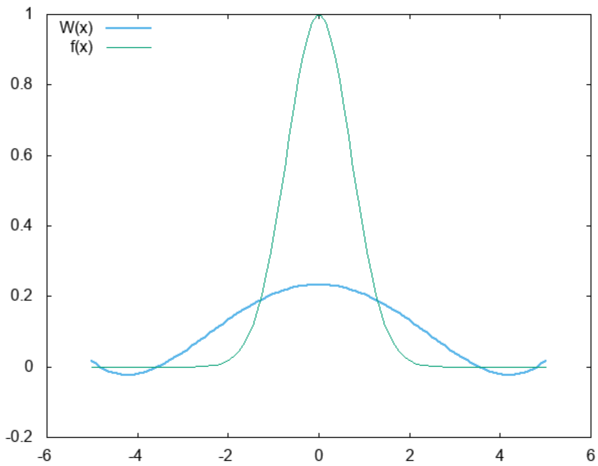
3 Wyniki

Na wykresach jako f(x) oznaczono funkcję interpolowaną, natomiast jako W(x) interpolację Lagrange'a.

3.1 n = 5

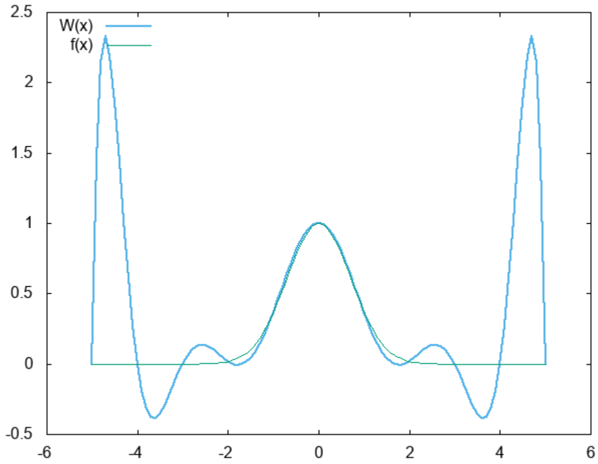


Rysunek 1: Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla n = 5, naiwna metoda położeń węzłów

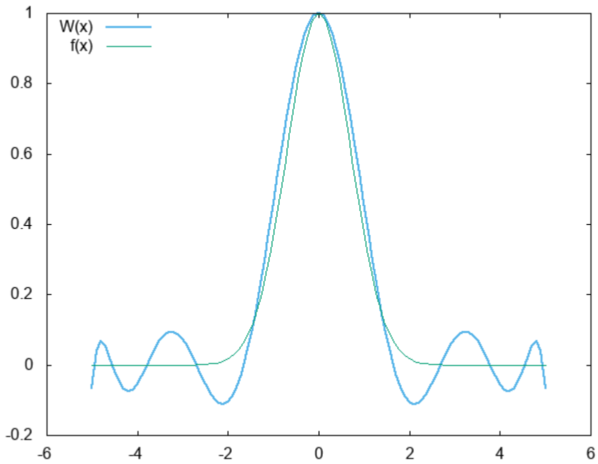


Rysunek 2: Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla n = 5, metoda położeń węzłów Chebyshev'a

3.2 n = 10

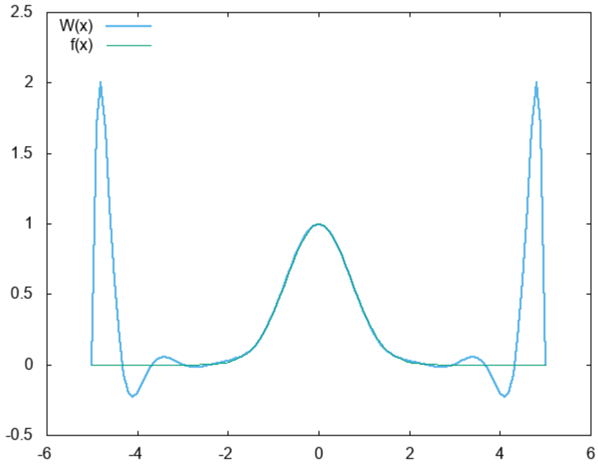


Rysunek 3: Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla n = 10, naiwna metoda położeń węzłów

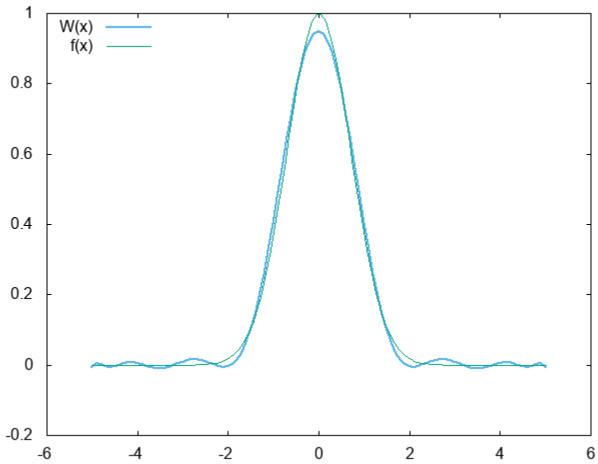


Rysunek 4: Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla n = 10, metoda położeń węzłów Chebyshev'a

3.3 n = 15

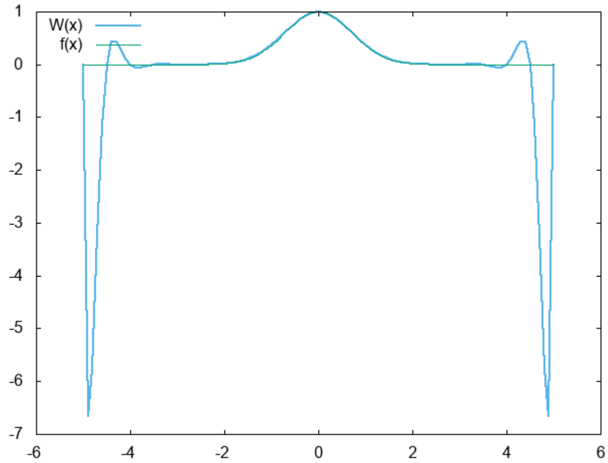


Rysunek 5: Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla n = 15, naiwna metoda położeń węzłów

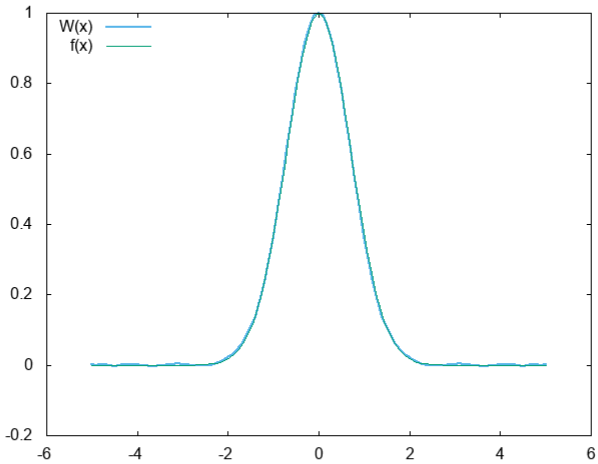


Rysunek 6: Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla n = 15, metoda położeń węzłów Chebyshev'a

3.4 n = 20



Rysunek 7: Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla n = 20, naiwna metoda położeń węzłów



Rysunek 8: Wykres funkcji oraz jej interpolacji dla n = 20, metoda położeń węzłów Chebyshev'a

3.5 Wnioski

Jak widać powyżej, większa ilość węzłów pozwala nam osiągnąć dokładniejsza interpolację funkcji. Natomiast również warto zwrócić uwagę na charakterystyczne "skoki" na krańcach przedziały przy braku stosowania wyrafinowanych metod optymalizacji pozycji węzłów. Interpolacja z tego powodu dość bardzo odbiega na tej części wykresu. Z pomocą przychodzi nam metoda Chebyshev'a, która skutecznie ogranicza odbicia i pozwala nam osiągnąć niemal idealną interpolację.