Metody Numeryczne - Sprawozdanie 9

Piotr Moszkowicz

16 maja 2019

Spis treści

1 Wstęp Teoretyczny **1**

1.1 Metoda aproksymacji funkcji okresowych 1

1.2 Wzór na wartość aproksymowaną 1

2 Opis problemu **1**

3 Wyniki **2**

3.1 Funkcja 1 2

3.2 Funkcja 2 2

3.3 Funkcja 3 3

3.4 Funkcja 1 z parametrem α 3

3.5 Wnioski 4

1 Wstęp Teoretyczny

Na dziewiątych zajęciach zajęliśmy się aproksymacją funkcji okresowych.

1.1 Metoda aproksymacji funkcji okresowych

Funkcje okresowe aproksymujemy w bazie (czyli z pomocą) funkcji trygonometrycznych takich jak: 1, sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x), ...

Nasza aproksymacja przedstawia się wielomianem:

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{m}[a_j cos(jx) + b_j sin(jx)], m < N \tag{1}$$

Współczynniki a_j, b_j wyznacza się z pomocą minimalizacji poniższego wyrażenia:

$$\sum_{i=0}^{2N-1}[f(x_i) - F(x_i)]^2 \tag{2}$$

Finalnie uzyskujemy poniższe wzory na współczynniki:

Sinusowe:

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{2N-1}[f(x_i) sin(jx_i)] \tag{3}$$

Cosinusowe:

$$a_{j=0} = \frac{1}{2N}\sum_{i=0}^{2N-1}[f(x_i)] \tag{4}$$

$$a_{j>0} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{2N-1}[f(x_i) cos(jx_i)] \tag{5}$$

Wyznaczając te współczynniki podstawiając do wzoru z punktu 1.2 uzyskujemy kolejne wartości aproksymacji badanej funkcji.

1.2 Wzór na wartość aproksymowaną

Poniższy wzór wykorzystujemy do uzyskania wartości aproksymowanej w danym punkcie.

$$F(x) = \sum_{k=0}^{Ms} a_k sin(kx) + \sum_{j=0}^{Mc} b_j cos(jx) \tag{6}$$

gdzie: x - punkt, w którym wyznaczamy aproksymację Ms - liczba współczynników sinusowych Mc - liczba współczynników cosinusowych a - tablica współczynników sinusowych b - tablica współczynników cosinusowych

2 Opis problemu

Na zajęciach aproksymowaliśmy trzy funkcję dane poniższymi wzorami:

$$f_1(x) = 2sin(x) + sin(2x) + 2sin(3x) + \alpha \tag{7}$$

$$f_2(x) = 2sin(x) + sin(2x) + 2cos(x) + cos(2x) \tag{8}$$

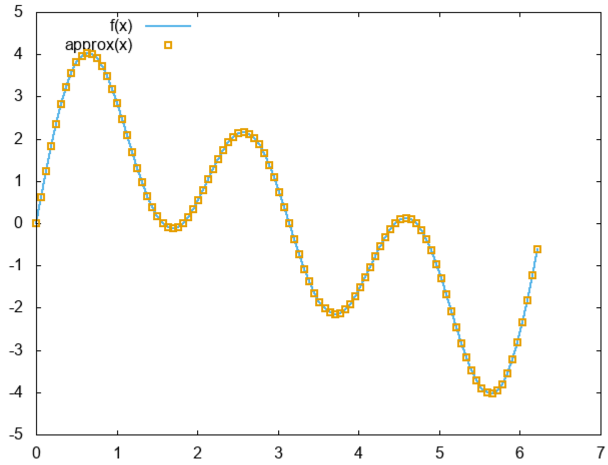
$$f_3(x) = 2sin(1.1x) + sin(2.1x) + 2sin(3.1x) \tag{9}$$

Parametr α funkcji numer 1 został wykorzystane w podpunkcie 4 zadania - jest to liczba pseudolosowa (dla każdego x inna) z przedziału $[-0.5, 0.5]$. Przedział aproksymacji dla każdej z funkcji jest taki sam: $[0, 2\pi)$. Liczba węzłów $n = 100$.

Na początku alokujemy tablicę na argumenty naszych funkcji oraz jej wartości, wartości aproksymowane oraz po jednej dla każdego rodzaju współczynników. Następnie zgodnie z wzorami z punktu 1.1 wypełniamy tablicę współczynników. Finalnie, nasze wartości aproksymowane wyznaczamy według wzoru z punktu 1.2.

3 Wyniki

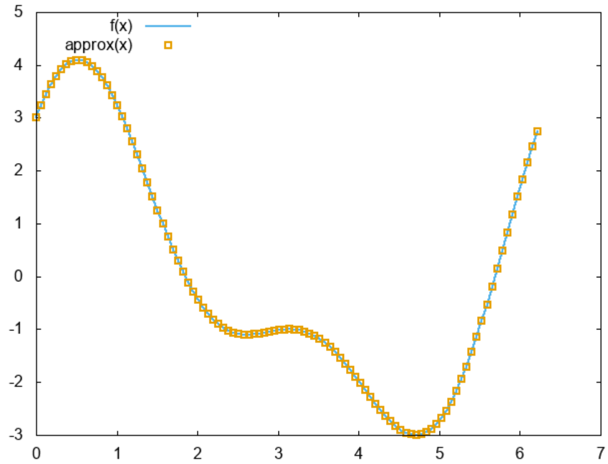
3.1 Funkcja 1



Rysunek 1: Wykres funkcji f_1 oraz jej aproksymacji

Ilość współczynników sinusowych: 5. Ilość współczynników cosinusowych: 5.

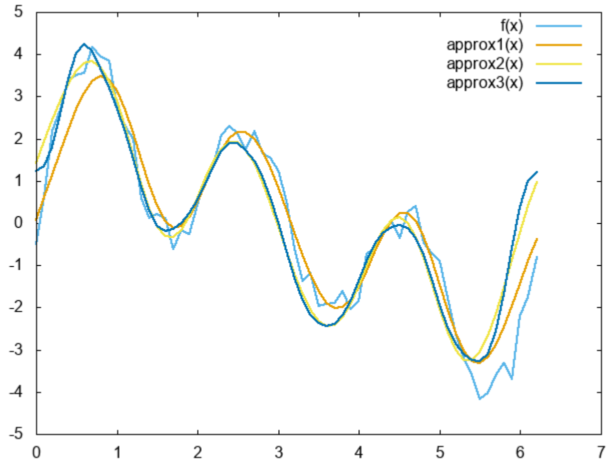
3.2 Funkcja 2



Rysunek 2: Wykres funkcji f_2 oraz jej aproksymacji

Ilość współczynników sinusowych: 5. Ilość współczynników cosinusowych: 5.

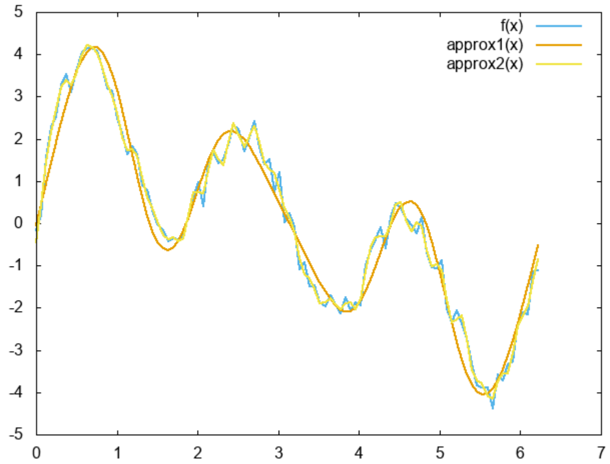
3.3 Funkcja 3



Rysunek 3: Wykres funkcji f_3 oraz jej trzech aproksymacji

Approx1: Ilość współczynników sinusowych: 5. Ilość współczynników cosinusowych: 0.
Approx2: Ilość współczynników sinusowych: 5. Ilość współczynników cosinusowych: 5.
Approx3: Ilość współczynników sinusowych: 10. Ilość współczynników cosinusowych: 10.

3.4 Funkcja 1 z parametrem α



Rysunek 4: Wykres funkcji f_1 (z parametrem α) oraz jej dwóch aproksymacji

Approx1: Ilość współczynników sinusowych: 5. Ilość współczynników cosinusowych: 5.

Poniżej tabela z kolejnymi współczynnikami:

Nr. Współczynnika	Wartość współczynnika sinusowego	Wartość współczynnika cosinusowego
0	-0.0452017	-0.00361847
1	1.92646	-0.0129459
2	0.994851	0.0273134
3	1.99885	0.0394117
4	0.0168423	-0.052857
5	0.0228968	-0.0452017

Approx2: Ilość współczynników sinusowych: 30. Ilość współczynników cosinusowych: 30.

Poniżej tabela z kolejnymi współczynnikami:

Nr. Współczynnika	Wartość współczynnika sinusowego	Wartość współczynnika cosinusowego
0	-0.0307241	0.0283
1	1.92646	-0.0129459
2	0.994851	0.0273134
3	1.99885	0.0394117
4	0.0168423	-0.052857
5	0.0228968	-0.0452017
6	0.0706436	0.0282495
7	-0.00238744	-0.0180066
8	-0.0710608	-0.0833183
9	0.0320917	-0.000425004
10	0.0678075	-0.0103759
11	0.0916186	-0.0972262
12	0.0364132	-0.0162188
13	-0.0100376	-0.0533774
14	0.00114293	-0.0206754
15	-0.0487017	-0.0119318
16	-0.0191274	-0.0468803
17	0.0384369	-0.0372725
18	-0.0281439	0.0199155
19	-0.0125692	-0.00851425
20	0.0127544	0.0565644
21	0.00486813	0.0415548
22	-0.0417515	-0.0722173
23	0.0526188	0.000685388
24	0.0638102	0.00573207
25	-0.0964	0.027
26	0.00543785	0.0485935
27	-0.028078	-0.0957934
28	-0.005901	-0.0285553
29	-0.0239767	-0.0214709
30	-0.00361847	-0.0307241

3.5 Wnioski

Jak widać powyżej, za każdym razem zwiększenie ilości współczynników diametralnie (w pozytywnym sensie) wpływa na dokładność aproksymacji. Również, co możemy zaobserwować przy funkcji trzeciej - nasza metoda nie radzi sobie tak dobrze, gdy w argumentach funkcji okresowych pojawiają się parametry. Z pomocą metody bez problemu natomiast jesteśmy w stanie wyznaczyć coraz dokładniej współczynniki przed kolejnymi składnikami okresowymi naszych funkcji.