Metody Numeryczne - Sprawozdanie 12

Piotr Moszkowicz

12 czerwca 2019

Spis treści

1 Wstęp Teoretyczny

Na dwunastych zajęciach zajęliśmy się całkowaniem z pomocą metody Romberg'a.

1.1 Metoda Romberga

W metodzie Romberg'a w celu uzyskania dokładniejszego wyniku bazujemy na poprzednio otrzymanych wynikach. Dla przedziału $x \in [0, 1]$ dla kolejnych wartości n dostajemy następujące wzory na kolejne, dokładniejsze przybliżenia całki:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) \\
S_2 &= \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{2}[f(\frac{1}{2})] + \frac{1}{4}f(1) \\
S_4 &= \frac{1}{8}f(0) + \frac{1}{4}[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4})] + \frac{1}{8}f(1)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

w tym momencie jesteśmy w stanie zauważyć, iż do obliczenia kolejnych wartości możemy skorzystać z wartości poprzednich, co pokazane jest w następującym wzorze:

$$S_2 = \frac{1}{2}S_0 + \frac{1}{2}[f(\frac{1}{2})] \tag{2}$$

Przy tych założeniach oraz przy założeniu metody Romgerg'a, iż odległość między $(n + 1)$ węzłami wynosi:

$$h_{2n} = \frac{b - a}{2^n} \tag{3}$$

gdzie a, b - krańce przedziału, n - ilość węzłów, możemy wyprowadzić wzór rekurencyjny na kolejne wartości całki:

$$
\begin{aligned}
R_{0,0} &= \frac{1}{2}(b - a)[f(a) + f(b)] \\
R_{n,0} &= \frac{1}{2}R_{n-1,0} + \frac{b - a}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1} f(a + (2i - 1)\frac{b - a}{2^n}) \\
R_{n,m} &= R_{n,m-1} + \frac{4^m R_{n,m-1} - R_{n-1,m-1}}{4^m - 1}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2 Opis problemu

Naszym zadaniem było obliczyć wartość trzech poniższych całek z pomocą metody Romberg'a (punkt 1.1):

$$
\begin{aligned}
&A) \int_0^1 \frac{sin(x)}{x}dx \\
&B) \int_{-1}^1 \frac{cos(x) - e^x}{sin(x)}dx \\
&C) \int_1^\infty (xe^x)^{-1}dx = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}}\frac{1}{x^2}dx
\end{aligned}
\tag{5}
$$

oraz wygenerowanie poniższej tablicy całek dla każdej z nich:

$$\begin{bmatrix} D_{0,0} & & & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & & & \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{n,0} & D_{n,1} & D_{n,2} & \cdots & D_{n,n} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Liczba n (ilość iteracji) wynosi odpowiednio 7, 15, 7, dla całek A, B, C.

3 Wyniki

3.1 Całka A

```
0.920735,
0.939793,0.946146,
0.944514,0.946087,0.946083,
0.945691,0.946083,0.946083,0.946083,
0.945985,0.946083,0.946083,0.946083,0.946083,
0.946059,0.946083,0.946083,0.946083,0.946083,0.946083,
0.946077,0.946083,0.946083,0.946083,0.946083,0.946083,0.946083,
```

Rysunek 1: Tabela wyników dla całki A

Wartość ostateczna: 0.946083

3.2 Całka B

```
-2.79321,
-2.3966,-2.2644,
-2.28522,-2.24809,-2.247,
-2.25633,-2.2467,-2.2466,-2.2466,
-2.24903,-2.2466,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.2472,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.24674,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.24663,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.2466,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,-2.24659,
```

Rysunek 2: Tabela wyników dla całki B

Wartość ostateczna: -2.24659

3.3 Całka C

```
0.18394,
0.227305,0.24176,
0.219834,0.217344,0.215716,
0.219351,0.21919,0.219313,0.21937,
0.219384,0.219394,0.219408,0.21941,0.21941,
0.219384,0.219384,0.219383,0.219383,0.219383,0.219383,
0.219384,0.219384,0.219384,0.219384,0.219384,0.219384,0.219384,
```

Rysunek 3: Tabela wyników dla całki C

Wartość ostateczna: 0.219384

4 Wnioski

Jak widać na przykładzie powyższych tabelek, ilość iteracji wpływa na coraz dokładniejszy wynik (w podpunkcie B trochę trudno to zauważyć, ale wynika to tylko i wyłącznie z ograniczenia zapisywanych cyfr do pliku). Kolejne, coraz dokładniejsze wyniki pojawiają się na elementach diagonali. Wynik z lewej strony ($D_{n,0}$) jest wyliczany na podstawie wyników z poprzedniej linii. Widać to wyraźnie - pomiędzy liniami zmiany są dość drastyczne (zwłaszcza na początku). Jednak następnie "idąc w prawo" (aż do $D_{n,n}$) otrzymujemy coraz dokładniejsze wyniki dokonując bardziej subtelnych zmian.