

# Metody Numeryczne - Sprawozdanie 11

Piotr Moszkowicz

6 czerwca 2019

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp Teoretyczny</b>	<b>1</b>
1.1	Splot dwóch funkcji . . . . .	1
1.2	Szybka transformata Fouriera - algorytm radix-2 . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Opis problemu</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Wyniki</b>	<b>3</b>
3.1	$k = 8$ . . . . .	3
3.2	$k = 10$ . . . . .	4
3.3	$k = 12$ . . . . .	5
3.4	Wnioski . . . . .	6

# 1 Wstęp Teoretyczny

Na jedenastych zajęciach zajmowaliśmy się odsumowaniem sygnału przy użyciu szybkiej transformaty Fouriera.

## 1.1 Splot dwóch funkcji

Splot dwóch funkcji  $f(x)$  oraz  $g(x)$  dany jest wzorem:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (1)$$

## 1.2 Szybka transformata Fouriera - algorytm radix-2

Algorytm radix-2 jest wykorzystywany przez bibliotekę GSL w momencie, gdy liczba węzłów jest potęgą 2. Celem jest wyliczenie współczynników transformaty Fouriera  $c_k$ .

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{2\pi}{N}j \\ j &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ N &= 2^r, r \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

następnie wyliczamy parametr  $c_k$  dany wzorem:

$$\begin{aligned} c_k &= \langle E_k, f \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} E_k(x_j) f(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \exp(-I x_j k) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp(-I \frac{2\pi}{N} j k) \end{aligned} \quad (2)$$

następnie grupujemy parzyste ( $j = 2m$ ) i nieparzyste ( $j = 2m + 1$ ) składniki:

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp(-I \frac{2\pi}{N} (2m)k) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp(-I \frac{2\pi}{N} (2m+1)k) \end{aligned} \quad (3)$$
$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp(-I \frac{2\pi}{N/2} mk) \\ &\quad + \exp(-I \frac{2\pi}{N/2} k) \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp(-I \frac{2\pi}{N/2} mk) \end{aligned} \quad (4)$$

Finalnie otrzymujemy wzór na  $c_k$ :

$$c_k = p_k + \varphi_k q_k \quad (5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} p_k &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m} \exp(-I \frac{2\pi}{N/2} mk) \\ q_k &= \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2m+1} \exp(-I \frac{2\pi}{N/2} mk) \\ \varphi_k &= \exp(-I \frac{2\pi}{N/2} k) \end{aligned}$$

Korzystając z okresowości wyrazów  $p_k$  oraz  $q_k$  wyznaczamy tylko połowę z nich. Również korzystamy z poniższej własności czynnika fazowego:

$$\begin{aligned}\varphi_{k+N/2} &= \exp(-I \frac{2\pi}{N/2}(k + \frac{N}{2})) \\ &= \exp(-I \frac{2\pi}{N/2}(k)) \exp(-I \frac{2\pi}{N/2}(\frac{N}{2})) \\ &= -\exp(-I \frac{2\pi}{N/2}(k)) = -\varphi_k\end{aligned}\tag{6}$$

## 2 Opis problemu

Naszym problemem było odsumowanie funkcji za pomocą filtru Gauss'a, bazującego na FFT. Nasz sygnał to spłot funkcji, gdzie  $f(x)$  to sygnał, a  $g(x)$  to funkcja wagowa. Funkcje dane są poniższymi wzorami:

$$f(t) = f_0(t) + \Delta = \sin(1 \cdot \omega t) + \sin(2 \cdot \omega t) + \sin(3 \cdot \omega t) + \Delta\tag{7}$$

gdzie:

$\Delta$  - liczba losowa

$\omega = \frac{2\pi}{T}$  - pulsacja

$T$  - okres

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})\tag{8}$$

W związku z tym, iż funkcja  $g(t)$  będzie tylko połówką pełnej funkcji Gaussa, musimy dodać drugą funkcję, która będzie pozostałą częścią. Z tego powodu korzystamy z dwóch funkcji  $g_1(t)$  oraz  $g_2(t)$  danymi wzorami:

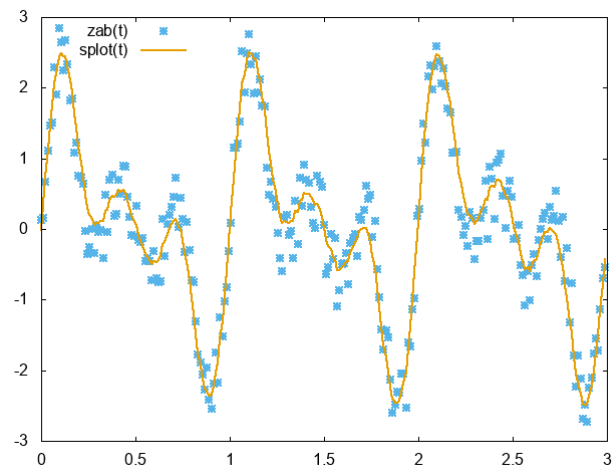
$$g_1(t) = FFTg(t > 0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(t_i) \exp(-\frac{2\pi I \cdot k \cdot i}{N})\tag{9}$$

$$g_2(t) = FFTg(t < 0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(t_i) \exp(+\frac{2\pi I \cdot k \cdot i}{N}) = FFT^{-1}g(t > 0)\tag{10}$$

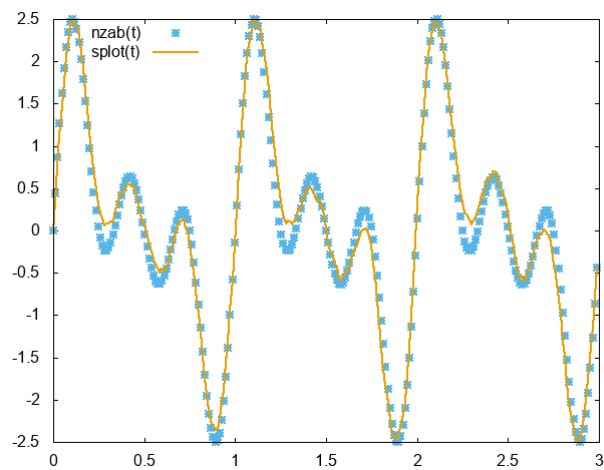
Korzystając z powyższej wiedzy należało odsumować sygnał dla  $k = 8, 10, 12$ , gdzie  $T = 1$ ,  $t_{max} = 3T$ ,  $\sigma = \frac{T}{20}$ . Dla każdego  $k$  alokowaliśmy tablicę sygnałów niezaburzonych ( $f_0(t)$ ), tablicę sygnałów zaburzonych ( $f(t)$ ), dwie tablice wag ( $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ ). Następnie obliczaliśmy transformaty funkcji  $f(t)$ ,  $g_1(t)$  oraz transformatę odwrotną funkcji  $g_2(t)$ . Następnie obliczaliśmy transformatę spłotu - czyli iloczyn  $f(k) \cdot (g_1(k) + g_2(k))$  i finalnie obliczaliśmy transformatę odwrotną tego wyrażenia. Na końcu szukaliśmy elementu o maksymalnym module  $f_{max} = \max|f(2 \cdot i)|$  oraz zapisywaliśmy wyniki do plików.

## 3 Wyniki

### 3.1 $k = 8$



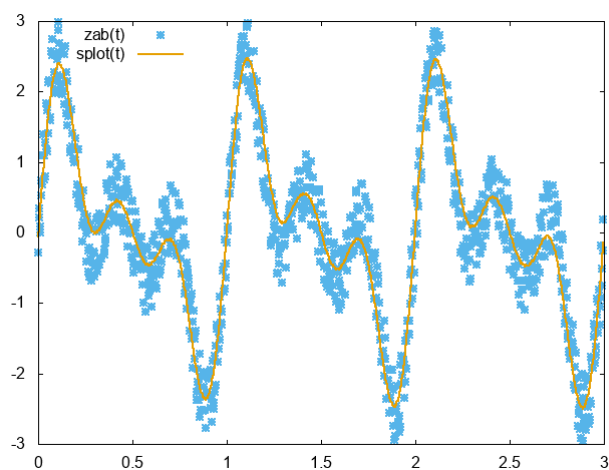
Rysunek 1: Sygnał zaburzony oraz znormalizowany splot  $k = 8$



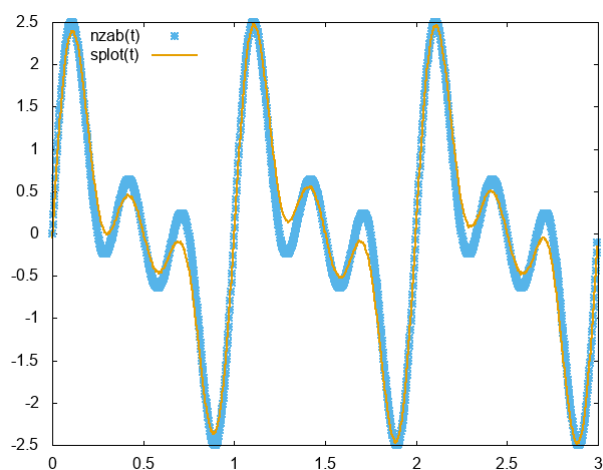
Rysunek 2: Sygnał niezaburzony oraz znormalizowany splot  $k = 8$

Jak widać powyżej splot nie jest gładki, jakość odsumowania nie jest najlepsza.

### 3.2 $k = 10$



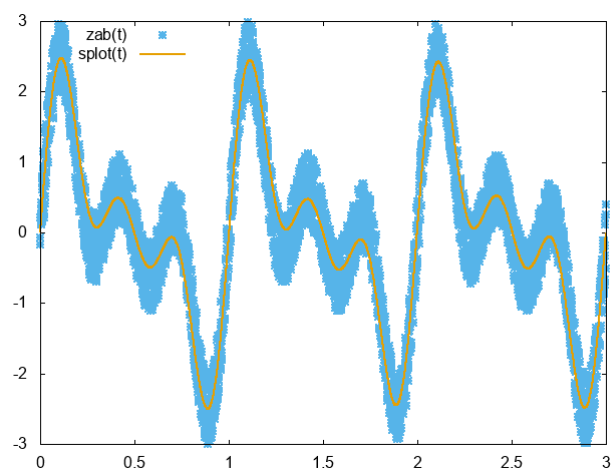
Rysunek 3: Sygnał zaburzony oraz znormalizowany splot  $k = 10$



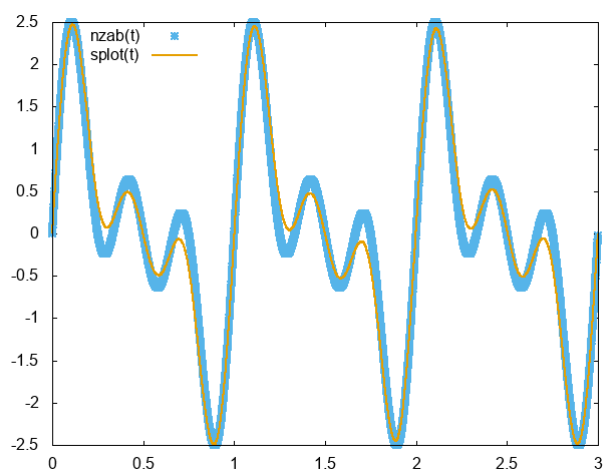
Rysunek 4: Sygnał niezaburzony oraz znormalizowany splot  $k = 10$

Na powyższych wykresach widać już poprawę dokładności odsumienia - między innymi ekstrema funkcji zaczynają się pokrywać.

### 3.3 $k = 12$



Rysunek 5: Sygnał zaburzony oraz znormalizowany splot  $k = 12$



Rysunek 6: Sygnał niezaburzony oraz znormalizowany splot  $k = 12$

Zwiększając ilość węzłów doszliśmy do największej gładkości funkcji.

### 3.4 Wnioski

Metoda nie pozwala na uzyskanie bardzo dokładnego wyglądu funkcji. Jak widać na powyższych porównaniach, zwiększanie ilości węzłów pozwala na uzyskanie gładziej funkcji - dokładniejszej reprezentacji. Prawdopodobnie zmiana szerokości okna pozwoliłaby nam na uzyskanie dokładniejszych wyników - z tego powodu wykresy nie pokrywają się dla każdego  $t_i$ .