Metody Numeryczne - Sprawozdanie 8

Piotr Moszkowicz

9 maja 2019

Spis treści

1 Wstęp Teoretyczny

Na ósmych zajęciach zajęliśmy się interpolacją funkcjami sklejonymi poprzez wyznaczanie drugiej pochodnej w węzłach.

1.1 Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczanie drugich pochodnych w węzłach

Aby nasza interpolacja była poprawna szukamy funkcji: $m_j = s^{(2)}(x_j)$ dla j = 0,1, ..., n.

Wprowadzając odpowiednie dane otrzymujemy macierzowy układ równań, który należy rozwiązać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \ddots \\ \ddots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_1 \\ \ddots \\ \ddots \\ d_{n-2} \\ \beta \end{bmatrix} \tag{1}$$

Gdzie:

α, β - w naszym przypadku 0.
$m_0 = \alpha, m_{n-1} = \beta$ - warunki brzegowe.
$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$
$\mu_i = 1 - \lambda_i$
h - kolejne położenia węzłów - wzór w opisie problemu.
$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i})$ - elementy wektora wyrazów wolnych
y - wartości funkcji w węzłach

Po jego rozwiązaniu jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości funkcji z poniższego wzoru:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6 \cdot h_i} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6 \cdot h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \tag{2}$$

Gdzie:

$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1})$
$B_i = y_{i-1} - m_{i-1} \cdot \frac{h_i^2}{6}$

to stałe całkowania. W ten sposób otrzymujemy interpolację funkcji.

2 Opis problemu

Na zajęciach naszym zadaniem było wykonać interpolację funkcjami sklejanymi dla funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz $f_2(x) = cos(2x)$ w przedziale $x \in [-5, 5]$ Proces wykonujemy dla różnej liczby węzłów n - 5, 8, 21. Z tego powodu na początku programu alokujemy trzy tablicę dla każdego n (wymiar tablicy n+1). Jedna przechowuje położenia węzłów, druga wartości w tych położeniach, natomiast trzecia zawiera wektor drugich pochodnych.

Pozycję węzłów wyznaczamy następującym wzorem:

$$x[i] = x_{min} + (\frac{x_{max} - x_{min}}{n-1}) * i \tag{3}$$

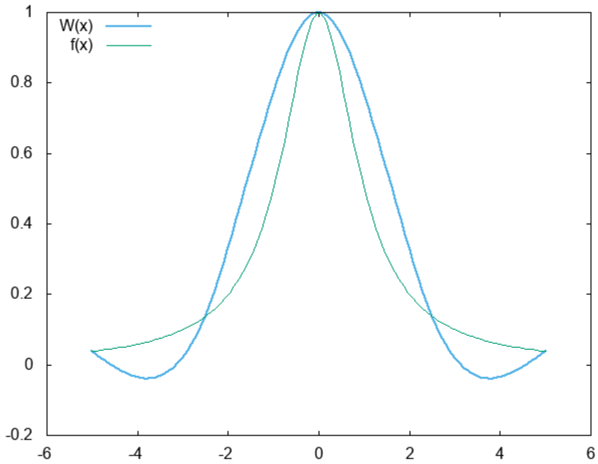
gdzie $x_{min} = -5, x_{max} = 5$, n - ilość węzłów, i - kolejny numer iteracji.

Następnie wstawiamy odpowiednie wartości do macierzy oraz wektorów i dokonujemy interpolacji z pomocą biblioteki GSL. Finalnie wyznaczamy wartości interpolacji ze wzoru nr 2 Wyniki zapisujemy do plików oraz sporządzamy odpowiednie wykresy.

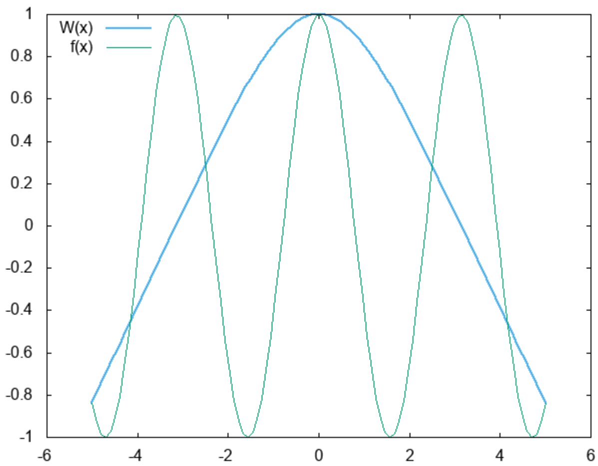
3 Wyniki

Na wykresach jako f(x) oznaczono funkcję interpolowaną, natomiast jako W(x) interpolację funkcjami sklejonymi.

3.1 n = 5

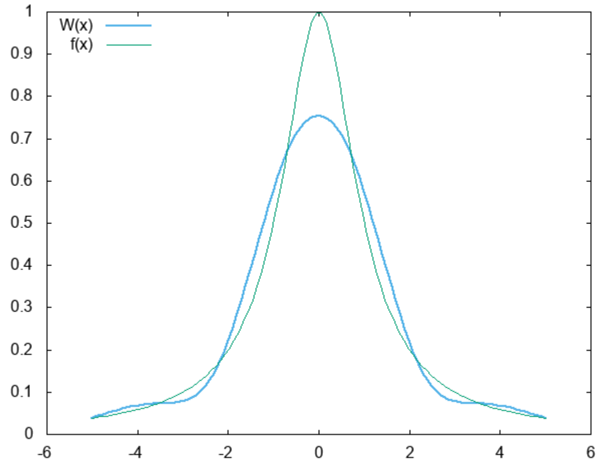


Rysunek 1: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla n = 5

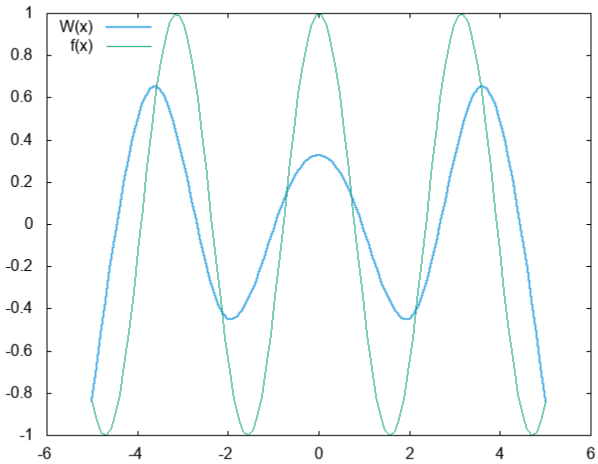


Rysunek 2: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla n = 5

3.2 n = 8

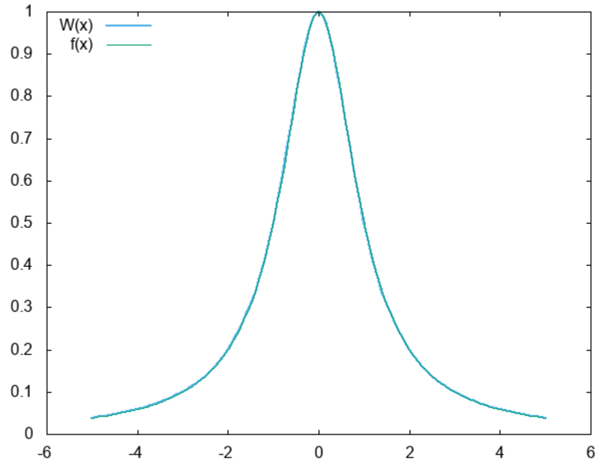


Rysunek 3: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla n = 8

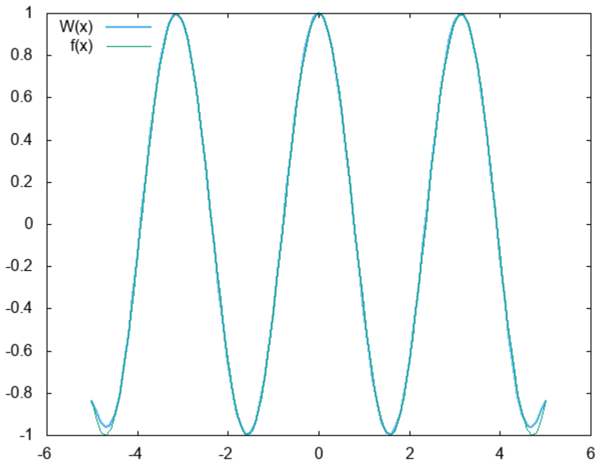


Rysunek 4: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla n = 8

3.3 n = 21



Rysunek 5: Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacji dla n = 21



Rysunek 6: Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacji dla n = 21

3.4 Wnioski

Jak widać powyżej, większa ilość węzłów pozwala nam osiągnąć dokładniejsza interpolację funkcji. Mimo wszystko przy funkcji f_2 nie byliśmy w stanie dokonać bardzo dokładnej interpolacji - widać na początku oraz na końcu cosinusa rozbieżność wartości. Porównanie wykresów funkcji bardzo dokładnie obrazuje jaką ilość węzłów należy zastosować dla danej funkcji, oraz to, czy metoda jest akceptowalna.