

Minimalne drzewo rozpinające

Dany jest graf G spójny z wagami.

Drzewo rozpinające – podgraf grafu G , który jest drzewem zawierającym wszystkie wierzchołki grafu G .

Minimalne drzewo rozpinające – drzewo rozpinające, dla którego *suma wag krawędzi jest minimalna*.

Graf nieskierowany jest **spójny**, jeśli każdy wierzchołek jest osiągalny ze wszystkich innych wierzchołków.

Przykład

Przy projektowaniu układów elektronicznych często końcówki wielu elementów składowych należy uczynić elektrycznie równoważnymi, łącząc je przewodami. Do połączenia zbioru n końcówek możemy użyć $n-1$ przewodów, z których każdy łączy dwie końcówki. Ze wszystkich możliwych sposobów połączeń najbardziej pożądanym jest zazwyczaj ten, który **minimalizuje łączną długość użytych przewodów**.

Problem łączenia końcówek można modelować za pomocą spójnego grafu nieskierowanego z wagami $G = (V, E, w)$, w którym V jest zbiorem końcówek, a E jest zbiorem możliwych połączeń między parami końcówek. Z każdą krawędzią jest związana waga określająca koszt (długość potrzebnego przewodu) połączenia dwóch wierzchołków.

Problem: Znaleźć acykliczny podzbiór krawędzi $T \subset E$, który łączy wszystkie wierzchołki i którego łączna waga jest najmniejsza.

Rozwiązanie: minimalne drzewo rozpinające.

Reguła zachłanna:

- w algorytmie **Kruskala** – zbiór T jest **lasem**. Do T jest zawsze dodawana ta krawędź w grafie, która ma najmniejszą wagę i która łączy dwie różne składowe (tzn. dwa drzewa z lasu).
- w algorytmie **Prima** zbiór T jest zawsze **pojedynczym drzewem**. Do T jest zawsze dodawana ta krawędź w grafie, która ma najmniejszą wagę i która łączy drzewo wyznaczone przez T z wierzchołkiem spoza tego drzewa.

Algorytm Kruskala

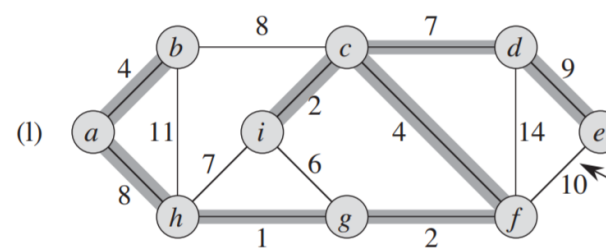
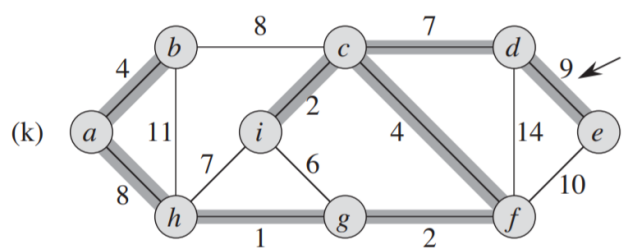
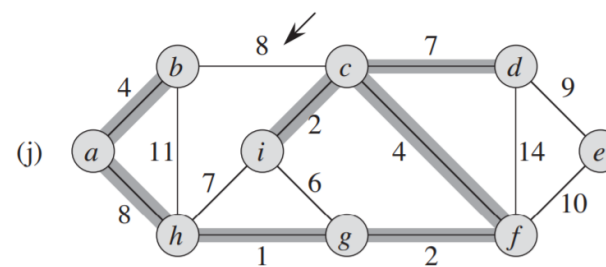
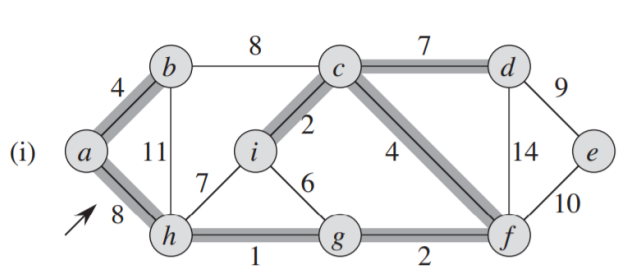
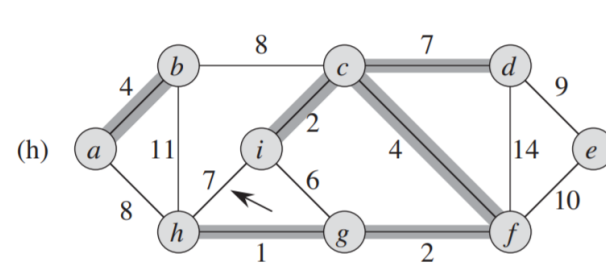
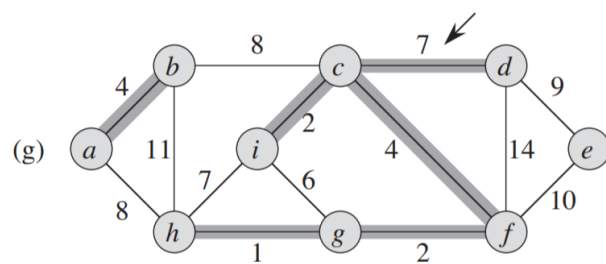
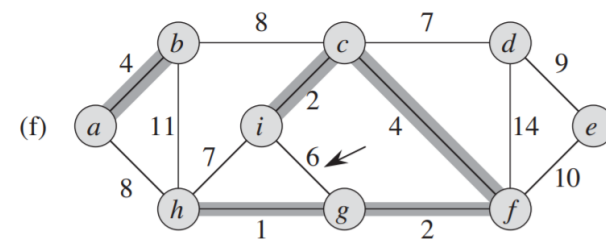
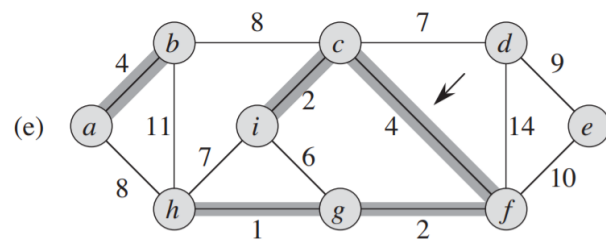
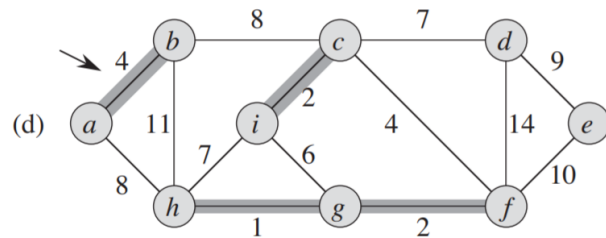
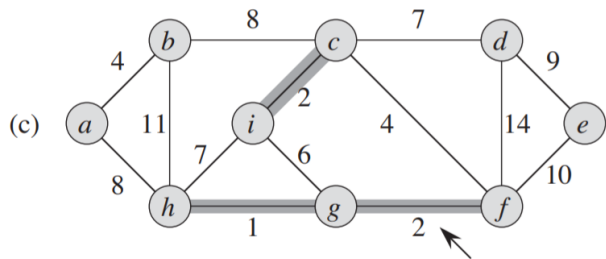
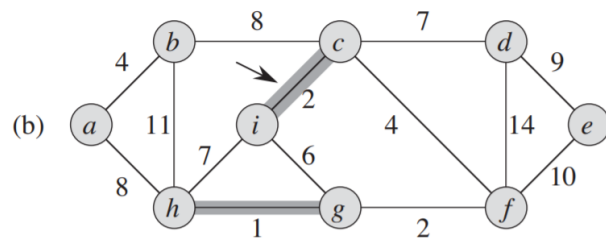
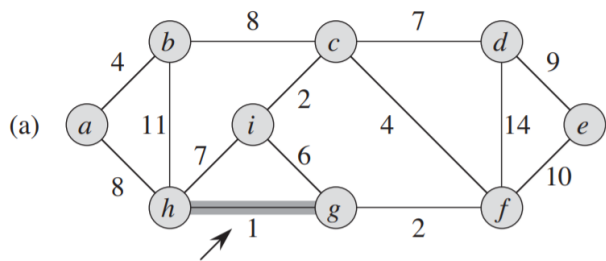
Algorytm Kruskala jest algorytmem zachłannym znajdującym minimalne drzewo rozpinające danego grafu spójnego z wagami. *Reguła zachłanna:* dodaj krawędź o minimalnej wadze, która nie tworzy cyklu. Rozwiązanie częściowe nie musi być drzewem.

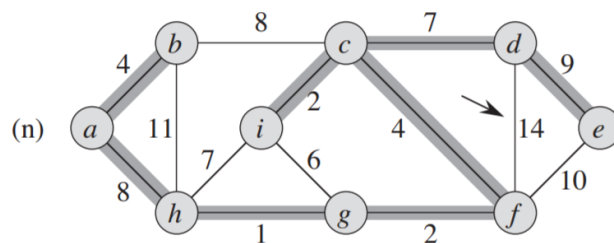
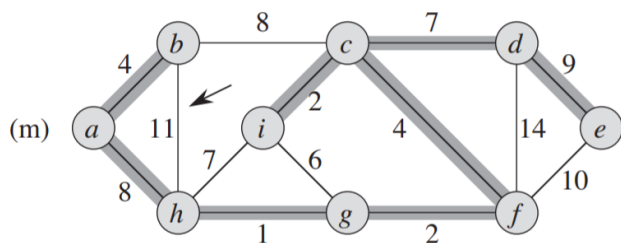
Wejście: $G = (V, E, w)$ – graf spójny nieskierowany z wagami.

Wyjście: T – zbiór krawędzi minimalnego drzewa rozpinającego grafu G .

Algorytm:

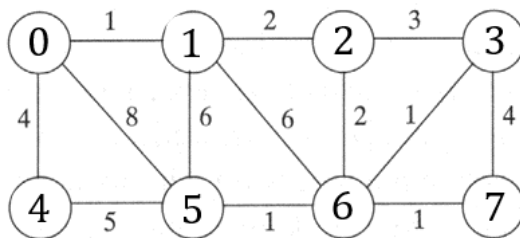
- 1 $T = \emptyset$
- 2 utwórz rozłączne podzbiory zbioru V (każdy podzbiór zawiera jeden wierzchołek ze zbioru V);
- 3 sortuj zbiór krawędzi E w porządku niemalejącym ze względu na wagi krawędzi;
- 4 **for** (każda krawędź (u, v) z uporządkowanego zbioru krawędzi E)
- 5 **if** (u i v należą do podzbiorów rozłączonych)
- 6 { połącz podzbiory zawierające u i v ;
- 7 dodaj krawędź (u, v) do zbioru T
- 8 }





Zadanie 1. Wykonaj krokową analizę działania algorytmu Kruskala dla powyższego grafu. (*Pliki do wykorzystania:* [Lab9_zadania_algorytm_Kruskala_Prima.xlsx](#), [arkusz zadanie_1](#)).

Zadanie 2. Znajdź minimalne drzewo rozpinające dla poniższego grafu. (*Pliki do wykorzystania:* [Lab9_zadania_algorytm_Kruskala_Prima.xlsx](#), [arkusz zadanie_2](#)).



Algorytm Prima

Algorytm Prima jest algorytmem zachłannym znajdującym minimalne drzewo rozpinające danego grafu spójnego z wagami.

Reguła zachłanna: dodaj krawędź o minimalnej wadze, która ma jeden wierzchołek w bieżącym drzewie a drugi, który nie należy do bieżącego drzewa.

Każde rozwiązanie częściowe jest drzewem.

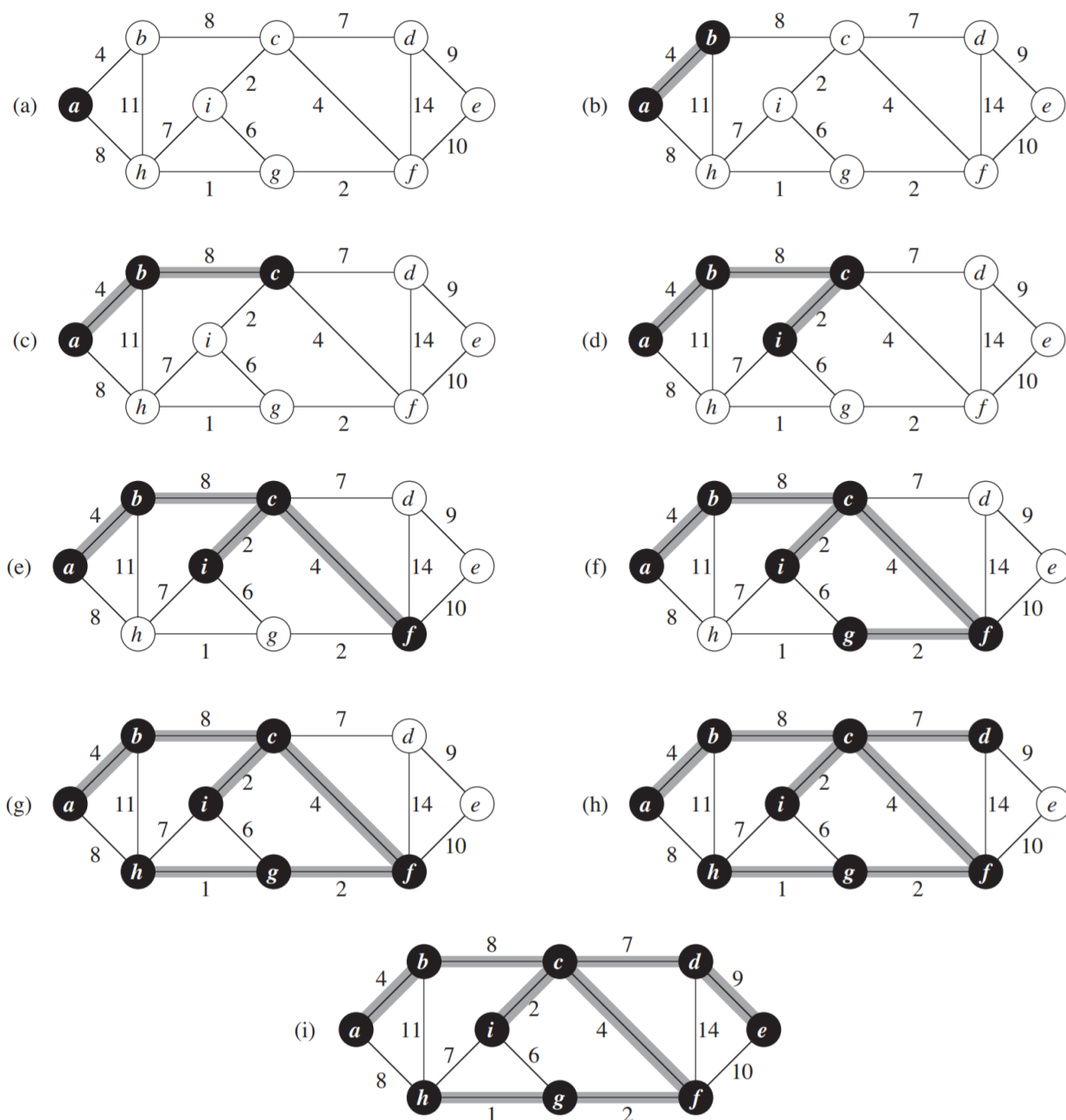
Wejście: $G = (V, E, w)$ – graf spójny z wagami, s - wierzchołek startowy.

Wyjście: T – zbiór krawędzi minimalnego drzewa rozpinającego grafu G .

Algorytm:

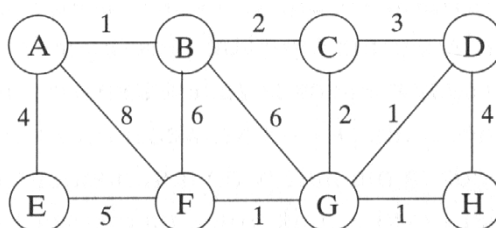
```

1   $T = \emptyset$ 
2   $U = \{s\}$ 
3  while ( $U \neq V$ )
4  {      znajdź krawędź  $(u, v) \in E$  o minimalnej wadze taką, że  $u \in U$  oraz  $v \in V - U$ ;
5           $T = T \cup \{(u, v)\}$ ;
6           $U = U \cup \{v\}$ ;
7  }
```



Zadanie 3. Wykonaj krokową analizę działania algorytmu Prima dla powyższego grafu. ([Pliki do wykorzystania: Lab9_zadania_algorytm_Kruskala_Prima.xlsx, arkusz zadanie_3](#)).

Zadanie 4. Chcemy znaleźć minimalne drzewo rozpinające dla poniższego grafu.



- wykonaj algorytm Prima; za każdym razem, gdy pojawia się wybór wierzchołka, zawsze użyj tego, który jest pierwszy w kolejności alfabetycznej (startując od wierzchołka A).
- Na tym samym grafie wykonaj algorytm Kruskala.

Zadanie 5. Pokaż, jak znaleźć maksymalne drzewo rozpinające grafu, tzn. drzewo rozpinające o możliwie największej łącznej wadze.

Bibliografia

T. H. Cormen, Ch. E. Leiserson, R. L. Rivest: *Wprowadzenie do algorytmów*. WNT Warszawa 2012.