

MES

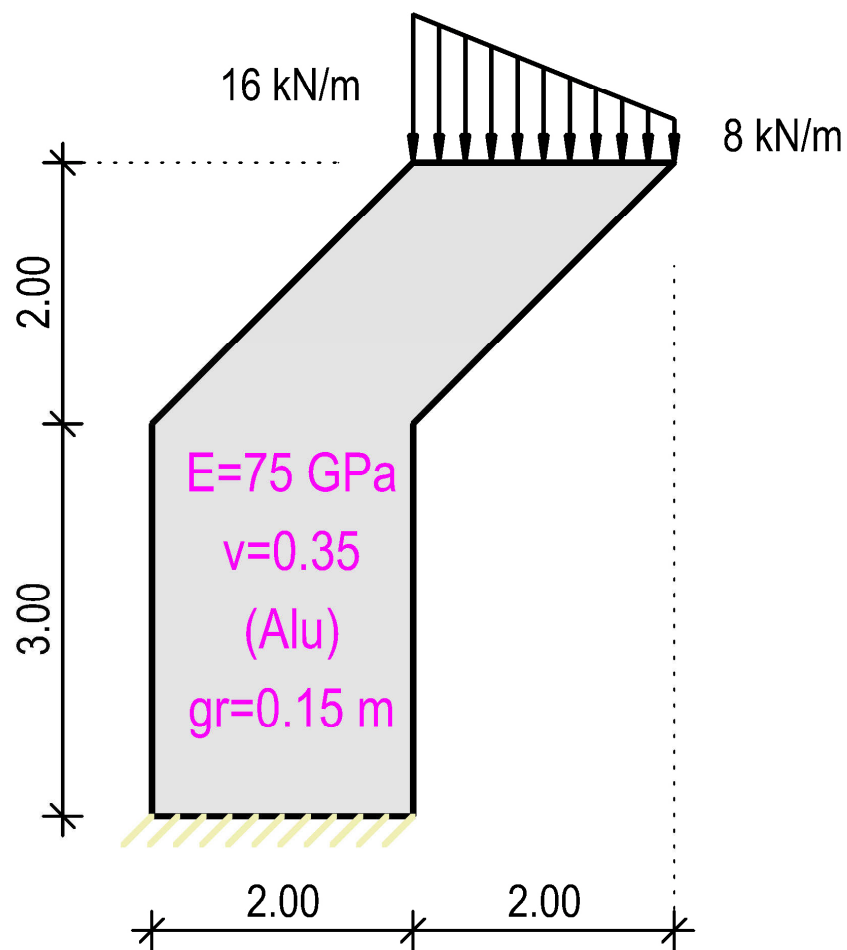
PSN, zakres sprężysty

KOMPLETNY PRZYKŁAD; KROK PO KROKU

dr inż. Piotr Owerko

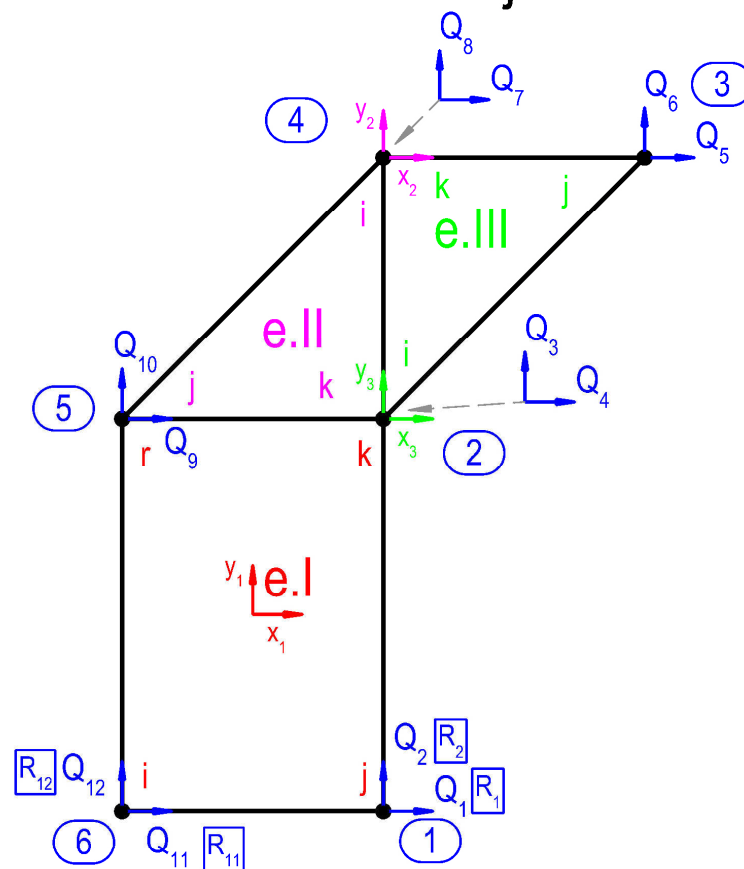
Instytut Budownictwa

Konstrukcja do analizy:



dr inż. Piotr Owerko

Przyjęta dyskretyzacja i numeracja:



WERSJA ROBOCZA !!

```
print("Funkcje kształtu prostokata:")
Ni =1/4 * (1-2*x/ a) * (1-2*y/ b)
Nj =1/4 * (1+2*x/ a) * (1-2*y/ b)
Nk =1/4 * (1+2*x/ a) * (1+2*y/ b)
Nr =1/4 * (1-2*x/ a) * (1+2*y/ b)
```

```
print("Macierz funkcji kształtu prostokata:")
N1=matrix(2, 8, [Ni,0,Nj,0,Nk,0,Nr,0, 0,Ni,0,Nj,0,Nk,0,Nr])
```

```
print("B: Iloczyn macierzy operatorów różniczkowych i funkcji kształtu:")
Bpio=matrix(3, 8, [diff(Ni, x),0,diff(Nj, x),0,diff(Nk, x),0,diff(Nr, x),0, 0,diff(Ni, y),0,diff(Nj, y),0,diff(Nk, y),0,diff(Nr, y), diff(Ni, y),diff(Ni, x),diff(Nj, y),diff(Nj, x),diff(Nk, y),diff(Nk, x),diff(Nr, y),diff(Nr, x)])
```

```
.....PROSTOKAT:.....
PRZYJMUJE UKŁAD LOKALNY ZACZEPIONY ŚRODKU GEOMETRYCZNYM PROSTOKĄTA !
Wymiary prostokąta:
2
3

Grubość prostokąta:
0.1500

Funkcje kształtu prostokąta:
1/12*(x - 1)*(2*y - 3)
-1/12*(x + 1)*(2*y - 3)
1/12*(x + 1)*(2*y + 3)
-1/12*(x - 1)*(2*y + 3)

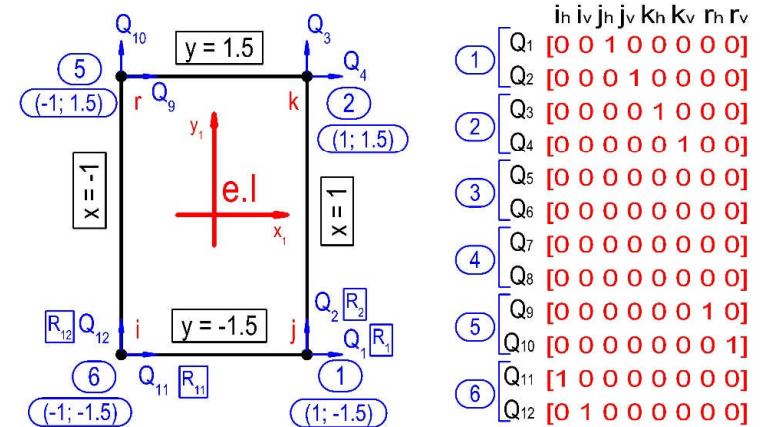
Macierz funkcji kształtu prostokąta:
[ 1/12*(x - 1)*(2*y - 3)      0 -1/12*(x + 1)*(2*y - 3)      0 1/12*(x + 1)*(2*y + 3)      0 -1/12*(x - 1)*(2*y + 3)      0]
[      0 1/12*(x - 1)*(2*y - 3)      0 -1/12*(x + 1)*(2*y - 3)      0 1/12*(x + 1)*(2*y + 3)      0 -1/12*(x - 1)*(2*y + 3)]
Pochodne funkcji kształtu prostokąta:
1/6*y - 1/4
1/6*x - 1/6
-1/6*y + 1/4
-1/6*x - 1/6
1/6*y + 1/4
1/6*x + 1/6
-1/6*y - 1/4
-1/6*x + 1/6
B: Iloczyn macierzy operatorów różniczkowych i funkcji kształtu:
[ 1/6*y - 1/4      0 -1/6*y + 1/4      0 1/6*y + 1/4      0 -1/6*y - 1/4      0]
[      0 1/6*x - 1/6      0 -1/6*x - 1/6      0 1/6*x + 1/6      0 -1/6*x + 1/6]
[ 1/6*x - 1/6 1/6*y - 1/4 -1/6*x - 1/6 -1/6*y + 1/4 1/6*x + 1/6 1/6*y + 1/4 -1/6*x + 1/6 -1/6*y - 1/4]
Full MatrixSpace of 3 by 8 dense matrices over Symbolic Ring
```

```

Transponowana B:
[ 1/6*y - 1/4      0 1/6*x - 1/6]
[      0 1/6*x - 1/6 1/6*y - 1/4]
[-1/6*y + 1/4      0 -1/6*x - 1/6]
[      0 -1/6*x - 1/6 -1/6*y + 1/4]
[ 1/6*y + 1/4      0 1/6*x + 1/6]
[      0 1/6*x + 1/6 1/6*y + 1/4]
[-1/6*y - 1/4      0 -1/6*x + 1/6]
[      0 -1/6*x + 1/6 -1/6*y - 1/4]
Full MatrixSpace of 8 by 3 dense matrices over Symbolic Ring
D: Macierz sprężystości- PODAJE W GPa !!:
[ 85.500000000000 29.900000000000 0.000000000000]
[ 29.900000000000 85.500000000000 0.000000000000]
[ 0.000000000000 0.000000000000 27.800000000000]
Full MatrixSpace of 3 by 3 dense matrices over Real Field with 53 bits of precision
Bt*D*B*h:
[ 0.02500*(4.6333333333333*x - 4.6333333333333)*(x - 1) + 0.01250*(14.250000000000*y - 21.375000000000)*(2*y - 3) 0.02500*(x - 1)*(4.9833333333333*y - 7.4750000000000) + 0.01250*(4.6333333333333*x - 4.6333333333333)*(2*y - 3)
[ 0.02500*(x - 1)*(4.6333333333333*y - 6.9500000000000) + 0.01250*(4.9833333333333*x - 4.9833333333333)*(2*y - 3) 0.02500*(14.250000000000*x - 14.2500000000000)*(x - 1) + 0.01250*(4.6333333333333*y - 6.9500000000000)*(2*y - 3)
[ 0.02500*(x - 1)*(-4.6333333333333*x - 4.6333333333333) + 0.01250*(2*y - 3)*(-14.250000000000*y + 21.375000000000) 0.01250*(-4.6333333333333*x - 4.6333333333333)*(2*y - 3) + 0.02500*(x - 1)*(-4.9833333333333*y + 7.4750000000000)
[ 0.01250*(-4.9833333333333*x - 4.9833333333333)*(2*y - 3) + 0.02500*(x - 1)*(-4.6333333333333*y + 6.9500000000000) 0.02500*(x - 1)*(-14.250000000000*x - 14.2500000000000) + 0.01250*(2*y - 3)*(-4.6333333333333*y + 6.9500000000000)
[ 0.02500*(4.6333333333333*x + 4.6333333333333)*(x - 1) + 0.01250*(14.250000000000*y + 21.375000000000)*(2*y - 3) 0.02500*(x - 1)*(4.9833333333333*y + 7.4750000000000) + 0.01250*(4.6333333333333*x + 4.6333333333333)*(2*y - 3)
[ 0.02500*(x - 1)*(4.6333333333333*y + 6.9500000000000) + 0.01250*(4.9833333333333*x + 4.9833333333333)*(2*y - 3) 0.02500*(14.250000000000*x + 14.2500000000000)*(x - 1) + 0.01250*(4.6333333333333*y + 6.9500000000000)*(2*y - 3)
[ 0.02500*(x - 1)*(-4.6333333333333*x + 4.6333333333333) + 0.01250*(2*y - 3)*(-14.250000000000*y - 21.375000000000) 0.01250*(-4.6333333333333*x + 4.6333333333333)*(2*y - 3) + 0.02500*(x - 1)*(-4.9833333333333*y - 7.4750000000000)
[ 0.01250*(-4.9833333333333*x + 4.9833333333333)*(2*y - 3) + 0.02500*(x - 1)*(-4.6333333333333*y - 6.9500000000000) 0.02500*(x - 1)*(-14.250000000000*x + 14.2500000000000) + 0.01250*(2*y - 3)*(-4.6333333333333*y - 6.9500000000000)
Macierz sztywności el. nr 1 (prostokat)- podwójna całka oznaczona z Bt*B*D*B*h*10^6:
[ 7339166.666666668 2163750.0 -5949166.666666666 78750.00000000017 -3669583.333333334 -2163750.0 2279583.333333333 -78750.0000000023]
[ 2163750.0 4935000.0 -78749.99999999983 -660000.0000000001 -2163750.0 -2467500.0 78749.99999999977 -1807500.0]
[-5949166.666666666 -78750.00000000017 7339166.666666668 -2163750.0 2279583.333333333 78750.00000000023 -3669583.333333334 2163750.0]
[ 78749.99999999983 -660000.0000000001 -2163750.0 4935000.0 -78749.99999999977 -1807500.0 2163750.0 -2467500.0]
[-3669583.333333334 -2163750.0 2279583.333333333 -78750.00000000023 7339166.666666668 2163750.0 -5949166.666666666 78750.00000000017]
[ -2163750.0 -2467500.0 78749.99999999977 -1807500.0 2163750.0 4935000.0 -78749.99999999983 -660000.0000000001]
[ 2279583.333333333 78750.00000000023 -3669583.333333334 2163750.0 -5949166.666666666 -78750.00000000017 7339166.666666668 -2163750.0]
[-78749.99999999977 -1807500.0 2163750.0 -2467500.0 78749.99999999983 -660000.0000000001 -2163750.0 4935000.0]

```


Wyjaśnienie doboru granic całkowania
oraz genezy macierzy topologii elementu nr I:



```

Topel1: Macierz topologii elementu nr 1 (prostokat)
liczba kolumn = liczba stopni swobody danego el.
liczba wierszy = liczba stopni swobody całej struktury MES
[0 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1]
[1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 0]

```

Topel1T: Macierz transponowana topologii elementu nr 1 (prostokat)

```
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]
[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
```

Kształ1GUW: Macierz sztywności elementu nr 1 (prostokąt) w GUW

[7339166.666666668	-2163750.0	2279583.333333333	78750.00000000023
-2163750.0	4935000.0	-78749.99999999977	-1807500.0
[2279583.333333333	-78750.00000000023	7339166.666666668	2163750.0
[78749.99999999977	-1807500.0	2163750.0	4935000.0
[0.0	0.0	0.0	0.0
[0.0	0.0	0.0	0.0
[0.0	0.0	0.0	0.0
[0.0	0.0	0.0	0.0
[-3669583.333333334	2163750.0	-5949166.666666666	-78750.00000000017
2163750.0	-2467500.0	78749.99999999983	-600000.00000000001
[-5949166.666666666	78750.00000000017	-3669583.333333334	-2163750.0
[-78749.99999999983	-600000.00000000001	-2163750.0	-2467500.0

[7339166.666666668	-2163750.0	2279583.333333333	78750.00000000023	0.0	0.0	0.0	0.0	-3669583.333333334	2163750.0	-5949166.666666666	-78750.00000000017]
[-2163750.0	4935000.0	-78749.99999999977	-1807500.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2163750.0	-2467500.0	78749.99999999983	-660000.0000000001]
[2279583.333333333	-78750.00000000023	7339166.666666668	2163750.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-5949166.666666666	78750.00000000017	-3669583.333333334	-2163750.0]
[78749.99999999977	-1807500.0	2163750.0	4935000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-78749.99999999983	-660000.0000000001	-2163750.0	-2467500.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[-3669583.333333334	2163750.0	-5949166.666666666	-78750.00000000017	0.0	0.0	0.0	0.0	7339166.666666668	-2163750.0	2279583.333333333	78750.00000000023]
[2163750.0	-2467500.0	78749.99999999983	-660000.0000000001	0.0	0.0	0.0	0.0	-2163750.0	4935000.0	-78749.99999999977	-1807500.0]
[-5949166.666666666	78750.00000000017	-3669583.333333334	-2163750.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2279583.333333333	-78750.00000000023	7339166.666666668	2163750.0]
[-78749.99999999983	-660000.0000000001	-2163750.0	-2467500.0	0.0	0.0	0.0	0.0	78749.99999999977	-1807500.0	2163750.0	4935000.0]

.....TROJKAT - el. II:.....

```

Macierz 'Aw' - składowa iloczynu zmiennych z projektu Pascala oraz niewiadomych wielomianu aproksymującego po podstawieniu do A współrzędnych węzłów:
Macierz 'Aw' liczba kolumn = liczba składników wielomianu*liczba współrzędnych stosowanego układu = liczba stopni swobody całego elementu)
Macierz 'Aw' liczba wierszy = liczba stopni swobody całego elementu
Aw=
[ 1 xi yi 0 0 0]
[ 0 0 0 1 xi yi]
[ 1 xj yj 0 0 0]
[ 0 0 0 1 xj yj]
[ 1 xk yk 0 0 0]
[ 0 0 0 1 xk yk]

```

$$N2 \text{ po podstawieniu=} \begin{bmatrix} 1/2*y + 1 & 0 & -1/2*x & 0 & 1/2*x - 1/2*y & 0 \\ 0 & 1/2*y + 1 & 0 & -1/2*x & 0 & 1/2*x - 1/2*y \end{bmatrix}$$

```

Funcje kształtu (na podstawie wcześniej podanych współrzędnych węzłów):
1/2*y + 1
-1/2*x
1/2*x - 1/2*y

```

```

B- Iloczyn macierzy operatorów różniczkowych i funkcji kształtu:
[ 0 0 -1/2 0 1/2 0]
[ 0 1/2 0 0 0 -1/2]
[ 1/2 0 0 -1/2 -1/2 1/2]

D- Macierz sprężystości - PODAJE W GPa !!:
[ 85.5000000000000 29.9000000000000 0.0000000000000]
[ 29.9000000000000 85.5000000000000 0.0000000000000]
[ 0.0000000000000 0.0000000000000 27.8000000000000]

Transponowana B:
[ 0 0 1/2]
[ 0 1/2 0]
[-1/2 0 0]
[ 0 0 -1/2]
[ 1/2 0 -1/2]
[ 0 -1/2 1/2]

Bt*B*D*h:
[ 1.0425000000000e6 0.0000000000000 0.0000000000000 -1.0425000000000e6 -1.0425000000000e6 1.0425000000000e6]
[ 0.0000000000000 3.2062500000000e6 -1.1212500000000e6 0.0000000000000 1.1212500000000e6 -3.2062500000000e6]
[ 0.0000000000000 -1.1212500000000e6 3.2062500000000e6 -0.0000000000000 -3.2062500000000e6 1.1212500000000e6]
[-1.0425000000000e6 0.0000000000000 0.0000000000000 1.0425000000000e6 1.0425000000000e6 -1.0425000000000e6]
[-1.0425000000000e6 1.1212500000000e6 -3.2062500000000e6 1.0425000000000e6 4.2487500000000e6 -2.1637500000000e6]
[ 1.0425000000000e6 -3.2062500000000e6 1.1212500000000e6 -1.0425000000000e6 -2.1637500000000e6 4.2487500000000e6]

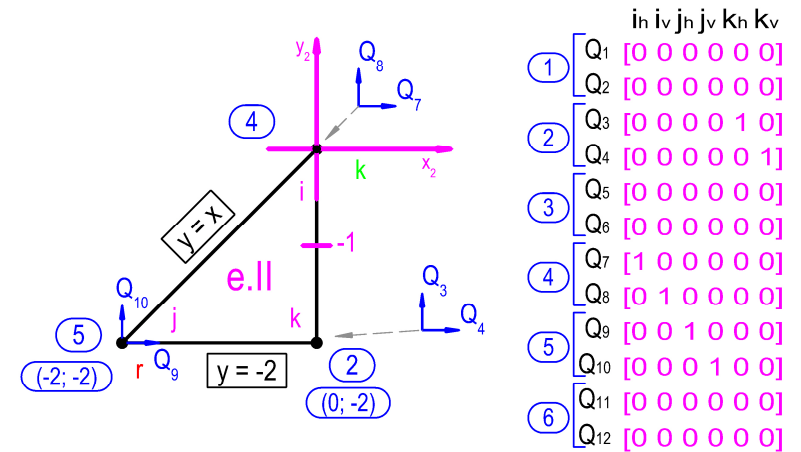
sprawdz:
[ 2.0850000000000e6 0.0000000000000 0.0000000000000 -2.0850000000000e6 -2.0850000000000e6 2.0850000000000e6]
[ 0.0000000000000 6.4125000000000e6 -2.2425000000000e6 0.0000000000000 2.2425000000000e6 -6.4125000000000e6]
[ 0.0000000000000 -2.2425000000000e6 6.4125000000000e6 -0.0000000000000 -6.4125000000000e6 2.2425000000000e6]
[-2.0850000000000e6 0.0000000000000 0.0000000000000 2.0850000000000e6 2.0850000000000e6 -2.0850000000000e6]
[-2.0850000000000e6 2.2425000000000e6 -6.4125000000000e6 2.0850000000000e6 8.4975000000000e6 -4.3275000000000e6]
[ 2.0850000000000e6 -6.4125000000000e6 2.2425000000000e6 -2.0850000000000e6 -4.3275000000000e6 8.4975000000000e6]

jak widać iloczyn Bt*B*D*h w trójkacie jest macierza samych liczb !

Macierz sztywności el. nr 2 (trojkat)- podwójna całka oznaczona z Bt*B*D*h*10^6:
[ 2085000.0 0 0 -2085000.0 -2085000.0 2085000.0]
[ 0 6412500.0 -2242499.9999999995 0 2242499.9999999995 -6412500.0]
[ 0 -2242499.9999999995 6412500.0 0 -6412500.0 2242499.9999999995]
[ -2085000.0 0 0 2085000.0 2085000.0 -2085000.0]
[ -2085000.0 2242499.9999999995 -6412500.0 2085000.0 8497499.999999998 -4327500.0]
[ 2085000.0 -6412500.0 2242499.9999999995 -2085000.0 -4327500.0 8497499.999999998]

```


Wyjaśnienie doboru granic całkowania oraz genezy macierzy topologii elementu nr II:



```

Topel1: Macierz topologii elementu nr 2 (trojkat)
liczba kolumn = liczba stopni swobody danego el.
liczba wierszy = liczba stopni swobody całej struktury MES
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0]
[0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]

```

```

Topel2T: Macierz transponowana topologii elementu nr 2 (trojkat)
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0]
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]

```

Kszte2GUW: Macierz sztywności elementu nr 2 (trojkat) w GUW

[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	8497499.999999998	-4327500.0	0.0	0.0	-2085000.0	2242499.9999999995	-6412500.0	2085000.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	-4327500.0	8497499.999999998	0.0	0.0	2085000.0	-6412500.0	2242499.9999999995	-2085000.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	-2085000.0	2085000.0	0.0	0.0	2085000.0	0.0	0.0	-2085000.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	2242499.9999999995	-6412500.0	0.0	0.0	0.0	6412500.0	-2242499.9999999995	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	-6412500.0	2242499.9999999995	0.0	0.0	0.0	-2242499.9999999995	6412500.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	2085000.0	-2085000.0	0.0	0.0	-2085000.0	0.0	0.0	2085000.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]
[0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0]

.....TROJKAT - el III:.....

PRZYJMUJE UKLAD LOKALNY ZACZEPIONY W LEWYM DOLNYM WEZLE TROJKATA !

Macierz 'A3' - skladowa iloczynu zmiennych z trojka Pascala oraz niewiadomych wielomianu aproksymujacego:

Macierz 'A3' liczba kolumn = liczba skladnikow wielomianu*liczba wspolrzecznych stosowanego ukkladu = liczba stopni swobody calego elementu)

Macierz 'A3' liczba wierszy = liczba wspolrzecznych stosowanego ukkladu = liczba niewiadomych pojedynczego wezla

A3=

[1 x y 0 0 0]
[0 0 0 1 x y]

Macierz 'Aw3' - skladowa iloczynu zmiennych z trojka Pascala oraz niewiadomych wielomianu aproksymujacego po podstawieniu do A wspolrzecznych wezlow:

Macierz 'Aw3' liczba kolumn = liczba skladnikow wielomianu*liczba wspolrzecznych stosowanego ukkladu = liczba stopni swobody calego elementu)

Macierz 'Aw3' liczba wierszy = liczba stopni swobody calego elementu

Aw3=

[1 xi3 yi3 0 0 0]
[0 0 0 1 xi3 yi3]
[1 xj3 yj3 0 0 0]
[0 0 0 1 xj3 yj3]
[1 xk3 yk3 0 0 0]
[0 0 0 1 xk3 yk3]

Macierz 'N3' - Macierz funkcji ksztaltu

Macierz 'N3' liczba kolumn = liczba skladnikow wielomianu*liczba wspolrzecznych stosowanego ukkladu = liczba stopni swobody calego elementu)

Macierz 'N3' liczba wierszy = liczba wspolrzecznych stosowanego ukkladu = liczba niewiadomych pojedynczego wezla

[N3]=[A3]*([Aw3]^(-1)

N3=

[-x*((yi3 - yj3)*((xi3 - xk3)/(xi3 - xj3) - 1)/((xi3 - xj3)*((xi3 - xk3)*(yi3 - yj3)/(xi3 - xj3) - yi3 + yk3)) - 1/(xi3 - xj3)) + y*((xi3 - xk3)/(xi3 - xj3) - 1)/((xi3 - xk3)*(yi3 - yj3)/(xi3 - xj3) - yi3 + yk3) + (xi3*(yi3 - yj3)/(x

N3 po podstawieniu=

[-1/2*y + 1 0 1/2*x 0 -1/2*x + 1/2*y 0]
[0 -1/2*y + 1 0 1/2*x 0 -1/2*x + 1/2*y]

Wyprowadzenie macierzy sztywności trojkata plaskiego:

Funcje ksztaltu (na podstawie wziesniej podanych wspolrzecznych wezlow):

-1/2*y + 1
1/2*x
-1/2*x + 1/2*y

B3- Iloczyn macierzy operatorów różniczkowych i funkcji kształtu:

```
[ 0 0 1/2 0 -1/2 0]
[ 0 -1/2 0 0 0 1/2]
[-1/2 0 0 1/2 1/2 -1/2]
```

D3- Macierz sprężystości - PODAJE W GPa !!:

```
[ 85.5000000000000 29.9000000000000 0.0000000000000]
[ 29.9000000000000 85.5000000000000 0.0000000000000]
[0.0000000000000 0.0000000000000 27.8000000000000]
```

Transponowana B3:

```
[ 0 0 -1/2]
[ 0 -1/2 0]
[ 1/2 0 0]
[ 0 0 1/2]
[-1/2 0 1/2]
[ 0 1/2 -1/2]
```

Bt3*B3*D3*ht3:

```
[ 1.0425000000000e6 0.0000000000000 0.0000000000000 -1.0425000000000e6 -1.0425000000000e6 1.0425000000000e6]
[ -0.0000000000000 3.2062500000000e6 -1.1212500000000e6 0.0000000000000 1.1212500000000e6 -3.2062500000000e6]
[ 0.0000000000000 -1.1212500000000e6 3.2062500000000e6 0.0000000000000 -3.2062500000000e6 1.1212500000000e6]
[-1.0425000000000e6 0.0000000000000 0.0000000000000 1.0425000000000e6 1.0425000000000e6 -1.0425000000000e6]
[-1.0425000000000e6 1.1212500000000e6 -3.2062500000000e6 1.0425000000000e6 4.2487500000000e6 -2.1637500000000e6]
[ 1.0425000000000e6 -3.2062500000000e6 1.1212500000000e6 -1.0425000000000e6 -2.1637500000000e6 4.2487500000000e6]
```

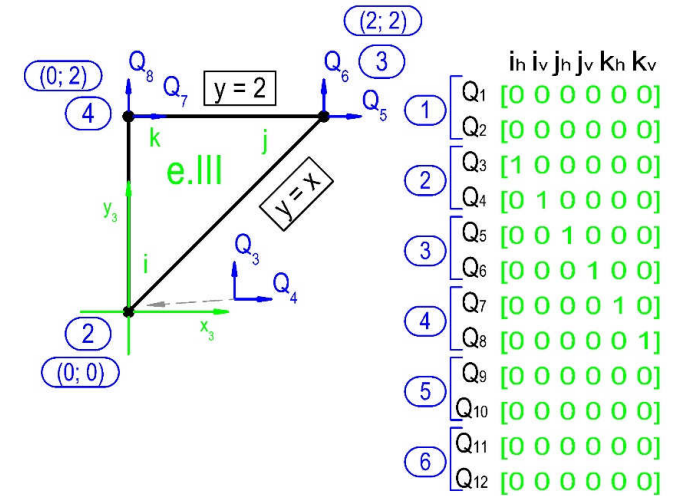
jak widać iloczyn Bt*B*D*h w trójkacie jest macierza samych liczb !

Macierz sztywności el. nr 3 (trojkat)- podwójna całka oznaczona z Bt*B*D*h*10^6:

```
[ 2085000.0 0 0 -2085000.0 -2085000.0 2085000.0]
[ 0 6412500.0 -2242499.999999995 0 2242499.999999995 -6412500.0]
[ 0 -2242499.999999995 6412500.0 0 -6412500.0 2242499.999999995]
[ -2085000.0 0 0 2085000.0 2085000.0 -2085000.0]
[ -2085000.0 2242499.999999995 -6412500.0 2085000.0 8497499.999999998 -4327500.0]
[ 2085000.0 -6412500.0 2242499.999999995 -2085000.0 -4327500.0 8497499.999999998]
```

```
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[1 0 0 0 0 0]
[0 1 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0]
[0 0 0 0 1 0]
[0 0 0 0 0 1]
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0]
```

```
[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0]
[0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]
```

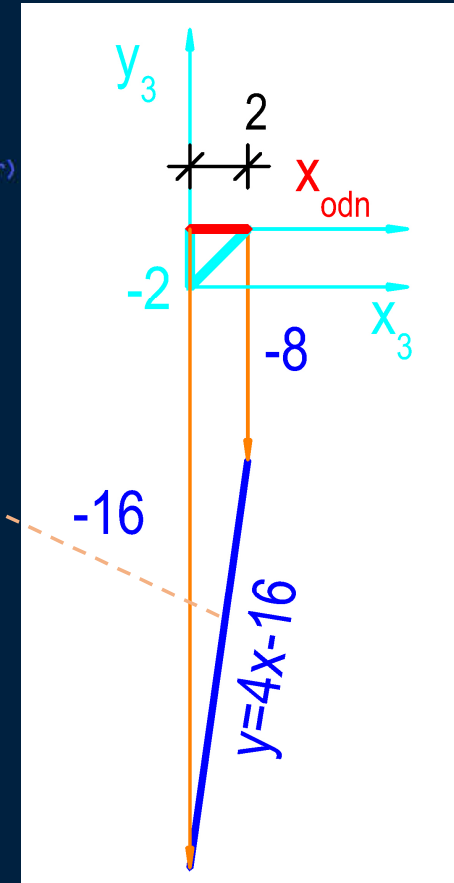
[illegible]

166.66666668	-2163750.0	2279583.333333333	78750.00000000023	0.0	0.0	0.0	0.0	-3669583.333333334	2163750.0	-5949166.666666666	-78750.000000000
-2163750.0	4935000.0	-78749.99999999977	-1807500.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2163750.0	-2467500.0	78749.99999999983	-660000.0000000
583.333333333	-78750.00000000023	17921666.666666664	-2163750.0	0.0	-2085000.0	-4170000.0	4327500.0	-12361666.666666666	2163750.0	-3669583.333333334	-2163750.0
9.99999999977	-1807500.0	-2163750.0	19845000.0	-2242499.9999999995	0.0	4327500.0	-12825000.0	2163749.9999999995	-2745000.0	-2163750.0	-2467500.0
0.0	0.0	0.0	-2242499.9999999995	6412500.0	0.0	-6412500.0	2242499.9999999995	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-2085000.0	0.0	0.0	2085000.0	2085000.0	-2085000.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-4170000.0	4327500.0	-6412500.0	2085000.0	10582499.999999998	-4327500.0	0.0	-2085000.0	0.0	0.0
0.0	0.0	4327500.0	-12825000.0	2242499.9999999995	-2085000.0	-4327500.0	14909999.999999998	-2242499.9999999995	0.0	0.0	0.0
9583.33333334	2163750.0	-12361666.666666666	2163749.9999999995	0.0	0.0	0.0	-2242499.9999999995	13751666.666666668	-2163750.0	2279583.333333333	78750.000000000
2163750.0	-2467500.0	2163750.0	-2745000.0	0.0	0.0	-2085000.0	0.0	-2163750.0	7020000.0	-78749.99999999977	-1807500.0
9166.66666666	78750.00000000017	-3669583.333333334	-2163750.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2279583.333333333	-78750.00000000023	7339166.666666668	2163750.0
749.9999999998	-660000.0000000001	-2163750.0	-2467500.0	0.0	0.0	0.0	0.0	78749.99999999977	-1807500.0	2163750.0	4935000.0


```

print(".....Obciazenia:.....")
print("")
print("Obliczenia wektora obciazen wezlowych przylozonych na krawedzi elementu nr 3 (trojkata):")
print("")
N3_y2=N3(y=2)
N3_y2
N3_y2TR=N3_y2.transpose()
N3_y2TR
Obc3=matrix(2,1, [0, x*4-16])
Obc3
Obc3DOCALKI=N3_y2TR*Obc3
Wektobc3=Obc3DOCALKI.apply_map(lambda e: integrate(e,x,0,2))
print("Wektor obciazen wezlowych przylozonych na krawedzi elementu nr 3 (trojkata):")
Wektobc3
print("")
print("Wektor wiezi podporowych elementu nr 1 (prostokata):") # zgodnie z dyskretyzacja, numeracja lokalna (i, j, k , r)
print("zostanie wyliczony od razu w ukladzie globalnym")
print("Wektor wiezi podporowych elementu nr 2 (trojkata):") # zgodnie z dyskretyzacja, numeracja lokalna (i, j, k)
print("jest zerowy")
print("")
print("Wektor obciazen wezlowych el.3 w ukladzie globalnym:")
Wektobc3GUM=Topel3*Wektobc3
Wektobc3GUM
print("")
print("Globalny wektor obciazen:")
WektobcGUM=Wektobc3GUM
WektobcGUM
print("")
print("Globalny wektor reakcji:")
WektReak=matrix(12,1, [R1, R2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, R11, R12])
WektReak
print("")
print("Globalny wektor reakcji+obciazen:")
print("")
WektReaObc=WektReak+WektobcGUM
WektReaObc
print("Globalny wektor przemieszczen z uwzglednieniem warunkow brzegowych:")
print("")
WektPrzem=matrix(12,1, [0, 0, Q3, Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q9, Q10, 0, 0])
WektPrzem
print("")
print("Wyliczenie lewej strony glownego rownania K*Q:")
Lewa=KsztGLOBAL*WektPrzem
Lewa
print("")
print("Wyliczenie prawej strony glownego rownania P+R:")
Prawa=WektReaObc
Prawa

```



.....Obciążenia:.....

Obliczenia wektora obciążeń węzłowych przyłożonych na krawędzi elementu nr 3 (trojkąta):

```
[      0      0      1/2*x      0 -1/2*x + 1      0]
[      0      0      0      1/2*x      0 -1/2*x + 1]
[      0      0]
[      0      0]
[      1/2*x      0]
[      0      1/2*x]
[-1/2*x + 1      0]
[      0 -1/2*x + 1]
[      0]
```

[4*x - 16]

Wektor obciążeń węzłowych przyłożonych na krawędzi elementu nr 3 (trojkąta):

```
[      0]
[      0]
[      0]
[-32/3]
[      0]
[-40/3]
```

Wektor wiezi podporowych elementu nr 1 (prostokąta):

zostanie wyliczony od razu w układzie globalnym

Wektor wiezi podporowych elementu nr 2 (trojkąta):

jest zerowy

Wektor obciążeń węzłowych el.3 w układzie globalnym:

```
[      0]
[      0]
[      0]
[      0]
[      0]
[-32/3]
[      0]
[-40/3]
[      0]
[      0]
[      0]
[      0]
```

Globalny wektor obciazen:

```
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[-32/3]
[ 0]
[-40/3]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
```

Globalny wektor reakcji:

```
[ R1]
[ R2]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[ R11]
[ R12]
```

Globalny wektor reakcji+obciazen:

```
[ R1]
[ R2]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[-32/3]
[ 0]
[-40/3]
[ 0]
[ 0]
[ R11]
[ R12]
```

Globalny wektor przemieszczen z uwzglednieniem warunkow brzegowych:

```
[ 0]
[ 0]
[ Q3]
[ Q4]
[ Q5]
[ Q6]
[ Q7]
[ Q8]
[ Q9]
[ Q10]
[ 0]
[ 0]
```

Wyliczenie lewej strony glownego rownania K*Q:

```
[ 2163750.0*Q10 + 2279583.333333333*Q3 + 78750.00000000023*Q4 - 3669583.333333334*Q9]
[ -2467500.0*Q10 - 78749.99999999977*Q3 - 1807500.0*Q4 + 2163750.0*Q9]
[ 2163750.0*Q10 + 17921666.666666664*Q3 - 2163750.0*Q4 - 2085000.0*Q6 - 4170000.0*Q7 + 4327500.0*Q8 - 12361666.666666666*Q9]
[ -2745000.0*Q10 - 2163750.0*Q3 + 19845000.0*Q4 - 2242499.9999999995*Q5 + 4327500.0*Q7 - 12825000.0*Q8 + 2163749.9999999995*Q9]
[ -2242499.9999999995*Q4 + 6412500.0*Q5 - 6412500.0*Q7 + 2242499.9999999995*Q8]
[ -2085000.0*Q3 + 2085000.0*Q6 + 2085000.0*Q7 - 2085000.0*Q8]
[ -2085000.0*Q10 - 4170000.0*Q3 + 4327500.0*Q4 - 6412500.0*Q5 + 2085000.0*Q6 + 10582499.999999998*Q7 - 4327500.0*Q8]
[ 4327500.0*Q3 - 12825000.0*Q4 + 2242499.9999999995*Q5 - 2085000.0*Q6 - 4327500.0*Q7 + 14909999.999999998*Q8 - 2242499.9999999995*Q9]
[ -2163750.0*Q10 - 12361666.666666666*Q3 + 2163749.9999999995*Q4 - 2242499.9999999995*Q8 + 13751666.666666668*Q9]
[ 7020000.0*Q10 + 2163750.0*Q3 - 2745000.0*Q4 - 2085000.0*Q7 - 2163750.0*Q9]
[ -78750.00000000023*Q10 - 3669583.333333334*Q3 - 2163750.0*Q4 + 2279583.333333333*Q9]
[ -1807500.0*Q10 - 2163750.0*Q3 - 2467500.0*Q4 + 78749.99999999977*Q9]
```

Wyliczenie prawej strony glownego rownania P+R:

```
[ R1]
[ R2]
[ 0]
[ 0]
[ 0]
[-32/3]
[ 0]
[-40/3]
[ 0]
[ 0]
[ R11]
[ R12]
```

```
.....WYLICZENIE GLOBALNEGO RÓWNANIA  $K*Q=P+R$ .....

[[Q3 == (18912404194849/1329447841802666250), Q4 == (-24383512273927/1994171762703999375), Q5 == (7108823022984623/184793250010570608750),
0.000014226
-0.000012227
0.000038469
-0.000042991
0.000037714
-0.000014387
0.000013332
6.1448e-6
-4.1630
34.667
4.1630
-10.667

A więc globalny wektor przemieszczeń ma postać:
[ 0.00000]
[ 0.00000]
[ 0.000014226]
[-0.000012227]
[ 0.000038469]
[-0.000042991]
[ 0.000037714]
[-0.000014387]
[ 0.000013332]
[ 6.1448e-6]
[ 0.00000]
[ 0.00000]

Z kolei globalny wektor reakcji ma postać:
[-4.1630]
[ 34.667]
[0.00000]
[0.00000]
[0.00000]
[0.00000]
[0.00000]
[0.00000]
[0.00000]
[0.00000]
[ 4.1630]
[-10.667]
```

Zgodność z rozwiązaniem komercyjnym (ARSAP) ? TAK

Węzeł/Przypadek		UX (m)	UZ (m)
1/	1	0,0	0,0
2/	1	0,00001423	-0,00001223
3/	1	0,00003849	-0,00004302
4/	1	0,00003774	-0,00001439
5/	1	0,00001334	0,00000615
6/	1	0,0	0,0

Węzeł/Przypadek		FX (kN)	FZ (kN)
1/	1	-4,17	34,67
6/	1	4,17	-10,67

.....REEMIGRACJA DO ELEMENTU NR 1 - PROSTOKAT.....

Wektor przemieszczeń węzłów el nr 1 w układzie lokalnym:

```
[ 0.00000]
[ 0.00000]
[ 0.00000]
[ 0.00000]
[ 0.000014226]
[-0.000012227]
[ 0.000013332]
[ 6.1448e-6]
```

Wyznaczenie tensora odkształceń elementu nr 1 - prostokąt; $e = B_{lok} * Q_{lok}$:

```
[ (1.4888e-7)*y + 2.2332e-7]
[ -(3.0620e-6)*x - 1.0138e-6]
[(1.4888e-7)*x - (3.0620e-6)*y + 1.8190e-12]
```

podstawmy współrzędne środka elementu; $x=0$ oraz $y=0$; wzgl. lok. ukl współrzędnych do macierzy B_{lok} :

```
[-1/4  0 1/4  0 1/4  0 -1/4  0]
[  0 -1/6  0 -1/6  0 1/6  0 1/6]
[-1/6 -1/4 -1/6 1/4 1/6 1/4 1/6 -1/4]
```

Ostatecznie tensor odkształceń elementu nr 1 przyjmie postać:

```
[ 2.2332e-7]
[-1.0138e-6]
[1.8190e-12]
```

Teraz możemy policzyć tensor naprężeń elementu nr 1; $\text{Tensor_sigma} = D * e$

```
[-0.01122]
[-0.08000]
[5.057e-8]
```

WYNIK W MPa !!

.....REEMIGRACJA DO ELEMENTU NR 2 - TROJKAT.....

Wektor przemieszczeń węzłów el nr 2 w układzie lokalnym:

```
[ 0.000037714]
[-0.000014387]
[ 0.000013332]
[ 6.1448e-6]
[ 0.000014226]
[-0.000012227]
```

Wyznaczenie tensora odkształceń elementu nr 2 - trojkat; $e2=B_lok2*Q_lok2$:

```
[ 4.4663e-7]
[-1.0798e-6]
[ 2.5579e-6]
```

podstawmy współrzędne środka elementu; $x=-2/3$ oraz $y=-4/3$; wzgl. lok. ukl współrzędnych do macierzy B_lok :

```
[ 0 0 -1/2 0 1/2 0]
[ 0 1/2 0 0 0 -1/2]
[ 1/2 0 0 -1/2 -1/2 1/2]
```

Ostatecznie tensor odkształceń elementu nr 2 przyjmie postać:

```
[ 4.4663e-7]
[-1.0798e-6]
[ 2.5579e-6]
```

Teraz możemy policzyć tensor naprężeń elementu nr 2; $Tensor_sigma2=D2*e2$

```
[0.005901]
[-0.07897]
[ 0.07111]
```

WYNIK W MPa !!

```

.....REEMIGRACJA DO ELEMENTU NR 3 - TROJKAT.....

Wektor przemieszczeń węzłów el nr 3 w układzie lokalnym:
[ 0.000014226]
[-0.000012227]
[ 0.000038469]
[-0.000042991]
[ 0.000037714]
[-0.000014387]

Wyznaczenie tensora odkształceń elementu nr 3 - trojkąt; e3=B_lok3*Q_lok3:
[ 3.7759e-7]
[-1.0798e-6]
[-2.5580e-6]

podstawmy współrzędne środka elementu; x=2/3 oraz y=4/3; wzgl. lok. ukl współrzędnych do macierzy B_lok3:
[ 0 0 1/2 0 -1/2 0]
[ 0 -1/2 0 0 0 1/2]
[-1/2 0 0 1/2 1/2 -1/2]

Ostatecznie tensor odkształceń elementu nr 3 przyjmie postać:
[ 3.7759e-7]
[-1.0798e-6]
[-2.5580e-6]

Teraz możemy policzyć tensor naprężeń elementu nr 3; Tensor_sigma3=D3*e3
[-1.688e-6]
[-0.08103]
[-0.07111]
WYNIK W MPa !!

.....KONIEC OBLICZEN !.....

```

Zgodność z rozwiązaniem komercyjnym (ARSAP) ? TAK

e. I

$\begin{bmatrix} -0.01122 \\ -0.08000 \\ 5.057e-8 \end{bmatrix}$

e. II

$\begin{bmatrix} 0.005901 \\ -0.07897 \\ 0.07111 \end{bmatrix}$

e. III

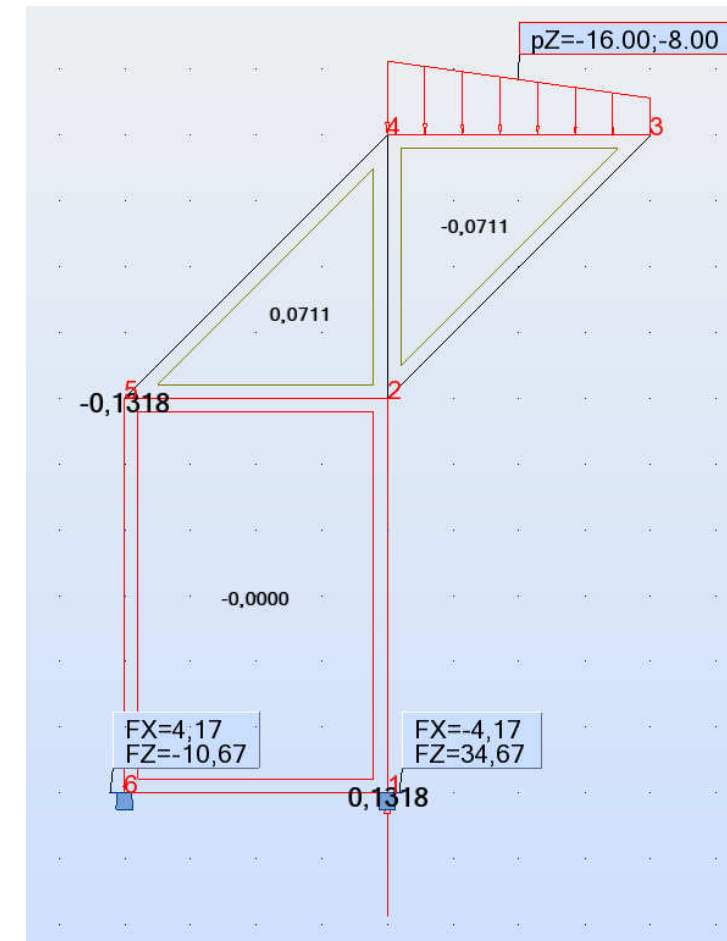
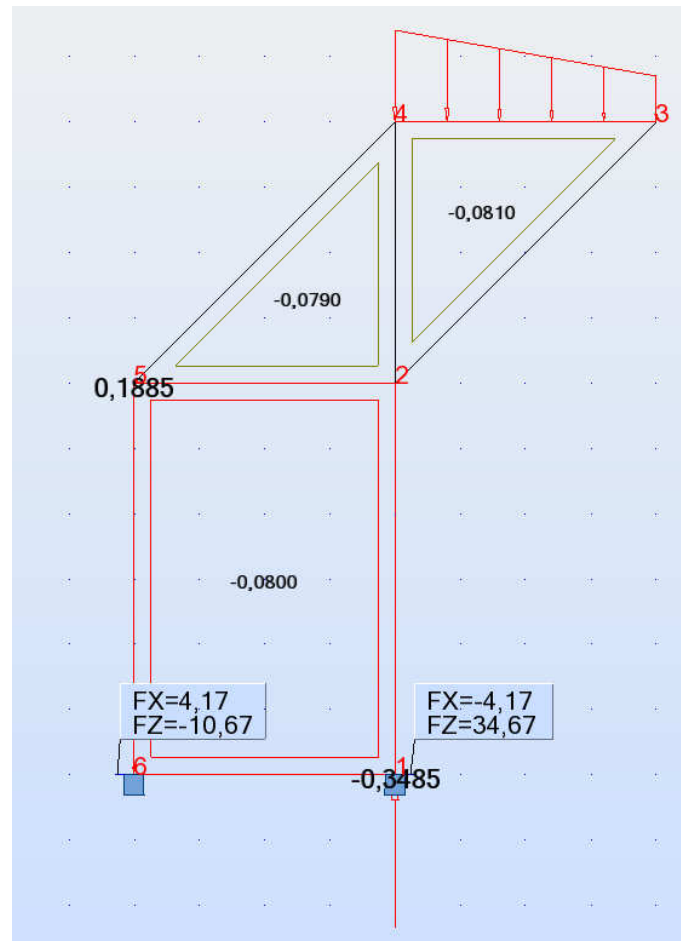
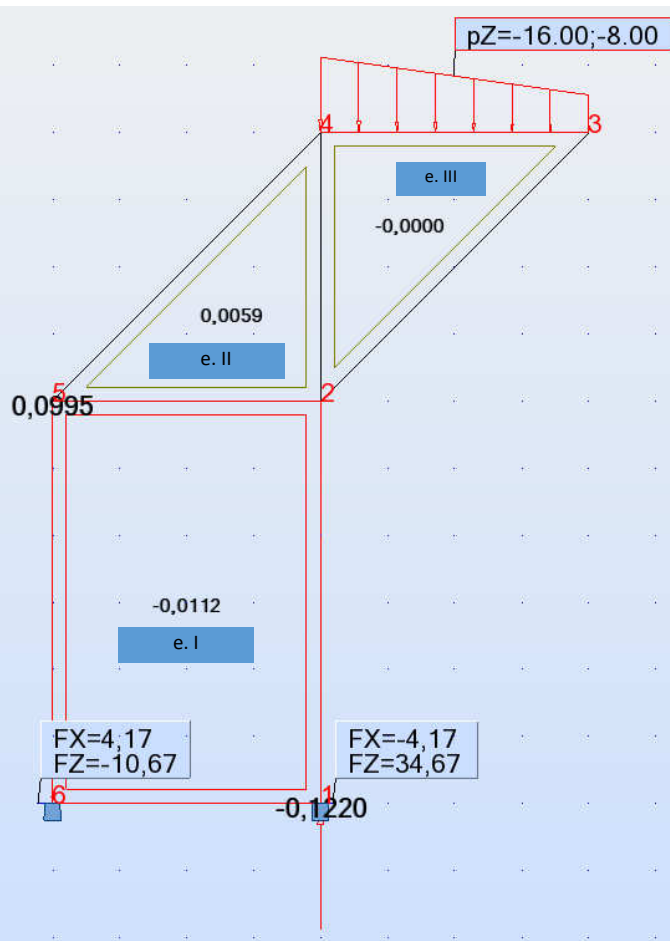
$\begin{bmatrix} -1.688e-6 \\ -0.08103 \\ -0.07111 \end{bmatrix}$

Sigma XX
Sigma YY
Styczne XY

Sigma XX

Sigma YY

styczne XY



dr inż. Piotr Owerko

WERSJA ROBOCZA !!