

Programowanie narzędzi analitycznych Z07

Rafał Woźniak

Faculty of Economic Sciences, University of Warsaw

Warszawa, 17-11-2021

Metoda Największej Wiarygodności

- Zastosowania MNW w ekonometrii można podzielić na dotyczące modeli szacowanych na próbach przekrojowych i te dotyczące modeli szacowanych na szeregach czasowych.
- Skupimy się wyłącznie na przypadku modeli szacowanych MNW na danych przekrojowych.
- Próby przekrojowe są zazwyczaj dobierane losowo, więc możemy założyć, że poszczególne obserwacje są niezależne. W przypadku szeregów czasowych założenie o niezależności obserwacji nie jest zazwyczaj prawdziwe, co znacznie komplikuje wyprowadzenia.
 - Słaba egzogeniczność
 - Identyfikowalność parametrów
 - Niezależność
- J. Mycielski, *Ekonometria* (Skrypt), str. 245-246.

([1] str. 251) Najważniejszymi własnościami estymatorów MNW jest ich

- zgodność,
- asymptotyczna normalność
- i asymptotyczna efektywność.

$$\sqrt{N} \left(\hat{\theta} - \theta_0 \right) \rightarrow N \left(0, I^{-1}(\theta_0) \right) \quad (1)$$

$$\sqrt{N} \left(\hat{\theta} - \theta_0 \right) \rightarrow N \left(0, I^{-1}(\theta_0) \right) \quad (2)$$

Macierz wariancji-kowariancji estymatora MNW jest szacowana przez zastąpienie θ_0 za pomocą $\hat{\theta}$ i odwróceniu macierzy informacyjnej

$$\hat{\Sigma} = I^{-1}(\hat{\theta}) \quad (3)$$

Błędy standardowe każdego elementu $\hat{\theta}$ są równe pierwiastkowi odpowiedniego elementu diagonalu macierzy $\hat{\Sigma}$. W większości zastosowań, macierz informacyjna nie jest łatwo wyznaczalna. Bardziej powszechnym podejściem zatem jest użycie ujemnej odwrotności hessjanu

$$\hat{\Sigma} = -H^{-1}(\hat{\theta}) \quad (4)$$

Jeśli hessjan nie jest ujemnie określony dla $\hat{\theta}_{MNW}$, to wyznaczenie błędów standardowych z (4) nie jest możliwe. Popularną alternatywą jest zastosowanie iloczynu diadycznego (*outer product*) gradientów

$$\hat{\Sigma} = \left(G(\hat{\theta}) G'(\hat{\theta}) \right)^{-1} \quad (5)$$

The take-home message

$$\hat{\theta} \sim N\left(\theta_0, -H^{-1}(\theta_0)\right) \quad (6)$$

Własności estymatorów MNW pozwalają wyprowadzić rozkłady statystyk testowych, które można zastosować do testowania hipotez nieliniowych o bardzo ogólnej postaci. Trzy najczęściej stosowane statystyki służące do testowania takich hipotez:

- ilorazu wiarygodności LR (**L**ikelihood **R**atio)
- statystyka Walda W
- statystyka mnożników Lagrange'a LM (**L**agrange **M**ultipliers)

Testowana hipoteza ma postać

$$H_0 : \begin{cases} h_1(\theta) = 0 \\ \vdots \\ h_g(\theta) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

gdzie g jest liczbą nałożonych ograniczeń.

- Zakłada się, że macierz pierwszych pochodnych $H(\theta) : \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta'}$ ma pełen rząd. Warunek ten będzie spełniony, jeśli żadnego z równań nie da się uzyskać z pozostałych równań.
- Oznaczenia
 - $\hat{\theta}$ oznacza estymator MNW bez ograniczeń
 - $\hat{\theta}_R$ oznacza estymator MNW z ograniczeniami
- $LR = 2 \left(\ln L(\hat{\theta}) - \ln L(\hat{\theta}_R) \right) \rightarrow \chi_g^2$
- Wzór ten jest prosty do policzenia. Oznacza on, że będziemy skłonni do odrzucenia hipotezy zerowej, jeśli narzucenie jej na parametry silnie zmniejsza dopasowanie modelu mierzone wartością log-wiarygodności.
- Wadą statystyki LR jest konieczność oszacowania zarówno modelu bez ograniczeń, jak i modelu z ograniczeniami, celem uzyskania $l(\hat{\theta})$ i $l(\hat{\theta}_R)$.

- [1] J. Mycielski, *Ekonometria* (Skrypt), WNE UW.
- [2] V.L. Martin, A.S. Hurn and D. Harris, *Econometric Modelling with Time Series: Specification, Estimation and Testing*, Cambridge University Press, 2012.