Metody optymalizacji procesów

Programowanie nieliniowe na przykładzie optymalizacji założeń technicznych pierwszego stopnia rakiety Saturn V

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
Kraków, 2019
Piotr Pasterak
Jakub Rak

1. Wstęp

Optymalizowanie wielu procesów daje się sprowadzić do rozwiązania problemu opisywanego w sposób liniowy, to znaczy takiego, że dla zadanych wartości zmiennych x_i wartość oczekiwana y jest równa:

$$y=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$$

Również opis warunków brzegowych jest liniowy, a przestrzeń dostępnych wartości parametrów x_i
jest wynikiem przecięcia wielu wielowymiarowych półprzestrzeni.
Istnieje wiele metod rozwiązań takiego problemu, jednak wszystkie one sprowadzają się do znalezienia punktu, który jest wierzchołkiem bryły będącej dziedziną funkcji y.

Jednak nie wszystkie problemy z którymi spotykamy się w rzeczywistości dają się opisać funkcją liniową. Wiele z nich, szczególnie te związane z inżynierią, są problemami nieliniowymi. Oznacza to, że funkcja opisująca problem jest funkcją złożoną z elementów innych niż suma iloczynów współczynników i zmiennych. W takim przypadku metody znane z rozwiązywania problemu liniowego zawodzą, gdyż szukane ekstremum funkcji może znajdować się w każdym miejscu dziedziny.

2. Przybliżenie problemu

Problem, który jest poruszony w niniejszej pracy dotyczy rozważań nad konstrukcją pierwszego członu rakiety nośnej Saturn V. Rakieta ta jest jednym z największych i najpotężniejszych obiektów kosmicznych wyprodukowanych w dziejach ludzkości. W 1969 roku wyniosła na orbitę i pozwoliła misji Apollo wylądować na księżycu oraz powrócić z niego.
Mimo tak odpowiedzialnego zadania, cały obiekt jest połączeniem zarówno prostoty jak i bezpieczeństwa. Jest to wynikiem braków technologicznych tamtych czasów, presji czasu związanej z wyścigiem o podbój kosmosu oraz niezwykłej współpracy tysięcy naukowców i inżynierów. Postawienie na prostotę skutkuje tym, że opis fizyczny pracy pierwszego stopnia rakiety daje się wyrazić za pomocą kilku zmiennych i kilkunastu stałych. Jednak prawdziwym zadaniem jest określenie, jak ma wyglądać optymalna praca tego podzespołu.

2.1. Założenia optymalizacyjne

W celu znalezienia rozwiązania idealnego, należy określić czym ono jest. Otóż to, z czym inżynierowie zmagali się w tamtych czasach oraz współcześnie jest masa rakiety jako całości. Im cięższe jest to, co chcemy wynieść na orbitę, tym więcej energii trzeba użyć. W przypadku rozważania pierwszego członu rakiety, mówimy tutaj o dwóch głównych aspektach:

- Paliwie, jako źródle energii,
- Obudowie i silnikach, które to paliwo spalają.

Masa całkowita pierwszego członu oraz paliwa wynosiła[1] 2290 ton, podczas gdy masa bez paliwa była równa 130 ton. Oznacza to, że masa paliwa wynosiła 2160 ton i stanowiło to ponad 94% masy całego pierwszego członu. Zmniejszając masę mieszanki paliwowej o kilka procent, zmniejsza się znacząco masę i wielkość całej rakiety. Tak więc w niniejszej pracy będzie poszukiwana najmniejsza ilość paliwa potrzebna do wyniesienia reszty rakiety na niską orbitę okołoziemską. Oznaczana będzie ona dużą literą V.

2.2. Zmienne niezależne

Aby zoptymalizować problem, należy określić, od jakich zmiennych zależy nasza funkcja celu. W tym przypadku wykorzystane będą dwie zmienne niezależne związane z geometrią układu:

- Promień dyszy silnika, oznaczany małą literą r,
- Promień zewnętrzny stopnia rakiety, oznaczany dużą literą R.

2.3. Funkcja celu

Ze względu na wyprowadzenie modelu rakiety (patrz załącznik), funkcja celu ma postać:

$$V(r,R)=\gamma_1\cdot r^2\cdot R^3\left(\gamma_2-\gamma_3\cdot\frac{R^2}{r^2}+\sqrt{\left(\gamma_3\cdot\frac{R^2}{r^2}-\gamma_2\right)^2-\frac{\gamma_4}{r^2\cdot R^3}}\right)\gamma_1=1{,}11\cdot 10^{-9}\gamma_2=1{,}48\cdot 10^9$$

$$\gamma_3=1{,}49\cdot 10^5\gamma_4=4{,}88\cdot 10^{21}$$

2.4. Warunki brzegowe

Przedział wartości R i r, ze względu na warunki techniczne powinny wynosić:

$R\in\langle 2{,}5;20\rangle r\in\langle 0;8\rangle$

W przypadku promienia r możemy mówić o rozbiciu pola powierzchni silnika rakietowego na kilka mniejszych o sumarycznym polu powierzchni, dlatego też promień r może być aż tak duży.

Ostatecznie trzeba też dodać warunek ograniczający promienie między sobą:

$r\leq R$

3. Obliczenia

Wybrano dwa algorytmy optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami: Metoda *COBYLA* która jest najbardziej preferowana ze względu na mechanizm przybliżania przez linearyzowanie. Metodę *trust-constr* która wyznacza minimum bazując na gradiencie.

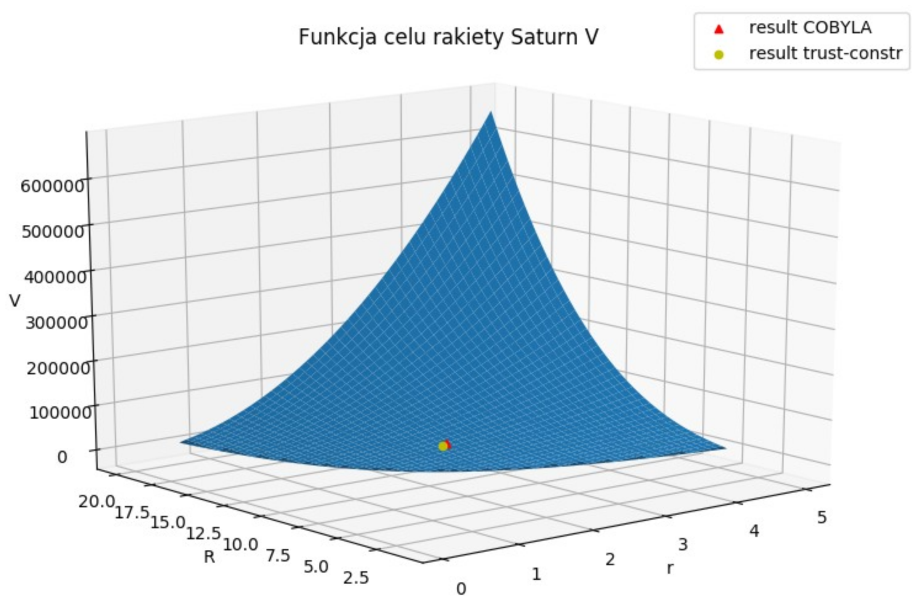
Rozwiązanie przedstawione w postaci V, x(r,R)
Dla metody COBYLA (z punktem poczatkowym [5,10])
fun: 27212.467859518427 x: array([2.5 , 11.25])
zaskakująco COBYLA zwraca błąd: „*Did not converge to a solution satisfying the constraints*", niemniej rozwiązanie jest w granicach i jest lepsze niż w przypadku *trust-constr*.

Wyniki te zostały użyte jako wartość początkowa dla następnego algorytmu (*trust-constr*) w drugiej iteracji.

Dla metody trust-constr (z wynikami metody COBYLA jako punktem początkowym)
fun: 24529.63400799457 x: array([2.42531348, 11.11908411])
Dla metody trust-constr (z punktem poczatkowym [5,10])
fun: 75329.42647468536 x: array([4.76232147, 10.12042058])

Ostatecznie:
r = 2.42531348
R = 11.11908411
V = 24529.63400799457

Ze względu na dwa parametry funkcji celu, można ją przedstawić w formie graficznej:



Rysunek 1 Graficzne przedstawienie funkcji celu. Żółty punkt oznacza znalezione rozwiązanie optymalne.

4. Wnioski

Przy pomocy algorytmu *COBYLA* nie uzyskano wartości optymalnej, zaś dla *trust-constr* wynik był gorszy. Z tego powodu wybrano wariant kaskadowy dzięki czemu uzyskano wyniki lepsze niż w obu algorytmach osobno.

5. Bibliografia

[1] https://www.quora.com/What-was-the-weight-of-the-Saturn-V-without-any-fuel-being-loaded
[2] https://history.nasa.gov/afj//ap08fj/pdf/sa503-flightmanual.pdf
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Rocketdyne_F-1
[4] https://space.stackexchange.com/questions/32265/understanding-coefficient-of-drag-verses-mach-number-for-launch-vehicles
[5] http://ww2010.atmos.uiuc.edu/(Gh)/guides/mtr/prs/hght.rxml

6. Dodatek (1): kod programu

```
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import optimize

y_1 = 1.11 * 10**(-9)
y_2 = 1.48 * 10**9
y_3 = 1.49 * 10**5
y_4 = 4.88 * 10**21



def goal_f(r):
    return y_1 * r[0]**2 * r[1]**3 * (y_2 - y_3 * (r[1]**2/r[0]**2) + np.sqrt((y_3 *
(r[1]**2/r[0]**2) - y_2)**2 - (y_4 / (r[0]**2 * r[1]**3))))



def restrict_f(x):
    return (y_3 * (x[1]**2/x[0]**2) - y_2)**2 - (y_4 / (x[0]**2 * x[1]**3))



def print_plot(solution):
    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

    Y = np.arange(1, 20, 0.001)
    X = np.arange(0.1, 5, 0.001)
    X, Y = np.meshgrid(X, Y)
    plt.title('Funkcja celu rakiety Saturn V')
    ax.set_xlabel("r")
    ax.set_ylabel("R")
    ax.set_zlabel("V")
    Z = goal_f([X, Y])

    ax.plot_surface(X, Y, Z, linewidth=0, antialiased=True)
    ax.scatter(solution[0][0], solution[0][1], solution[0][2] , marker='^',  c="r", label ='result
COBYLA')
    ax.scatter(solution[1][0], solution[1][1], solution[1][2], marker='o', c="y", label ='result
trust-constr')

    plt.legend()

    plt.show()



if __name__ == '__main__':
    """Main script loop.
    Zadanie optymalizacyjne:
    Promień dyszy silnika, oznaczany małą literą r,
    Promień zewnętrzny stopnia rakiety, oznaczany dużą literą R.
    """

    cons = [{'type': 'ineq', 'fun': restrict_f},
            {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: x[0]},
            {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: x[0] - 8},
            {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: 2.5 - x[1]},
            {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: x[1] - 20},
            {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: x[0] - x[1]}
            ]

    print(
        """
        Method COBYLA uses the Constrained Optimization BY Linear Approximation (COBYLA) method.
        The algorithm is based on linear approximations to the objective function and each
constraint.
```

```
        The method wraps a FORTRAN implementation of the algorithm.
        The constraints functions ‘fun’ may return either a single number or an array or list of numbers.
        """
    )

    result_cobyla = optimize.minimize(goal_f, [5, 10], method="COBYLA", constraints=cons)
    print(result_cobyla)

    print(
        """
        Method trust - constr is a trust - region algorithm for constrained optimization.
        It swiches between two implementations depending on the problem definition.
        It is the most versatile constrained minimization algorithm implemented in SciPy and the most appropriate for large-scale problems.
        This interior point algorithm, in turn, solves inequality constraints by introducing slack variables and solving a sequence of equality-constrained barrier problems for progressively smaller values of the barrier parameter.
        The previously described equality constrained SQP method is used to solve the subproblems with increasing levels of accuracy as the iterate gets closer to a solution.
        """)

    result_trust = optimize.minimize(goal_f, [2.5, 11.25], method="trust-constr", constraints=cons)
    print(result_trust)

    print_plot([[result_cobyla.x[0], result_cobyla.x[1], result_cobyla.fun], [result_trust.x[0], result_trust.x[1], result_trust.fun]])
```

7. Dodatek (2): wyprowadzenie modelu (postaci funkcji celu)

Ze względu na ograniczony zakres niniejszej pracy przyjmiemy kilka uproszczeń, aby wyprowadzony model dało się wykorzystać w późniejszych obliczeniach.

a) Geometria części rakiety

W uproszczeniu pierwszy stopień rakiety jest walcem o wysokości H i promieniu R. Objętość tego walca jest objętością paliwa, które chcemy zabrać ze sobą i wynosi:

$$V(R)=H\cdot\pi\cdot R^2$$

Dla znanych parametrów technicznych rakiety Saturn V wiemy że[1]: H = 42,1 m; R = 5,05 m, czyli:

$$V=3373m^3$$

Warto też policzyć gęstość paliwa, która jest niezależna od jego ilości (masa paliwa m_p = 2’160’000 kg) :

$$\rho=\frac{m_p}{V}\rho=640\frac{kg}{m^3}$$

b) Cel misji

Celem misji pierwszego stopnia jest wyniesienie wszystkich pozostałych części rakiety na niską orbitę okołoziemską na wysokości[2] H_k = 61'000 metrów oraz prędkość rakiety wynoszącą v_k = 2350 m/s. Oznacza to, że użyta energia jest równa:

$$\Delta E=E_{pot}+E_{kin}$$

Gdzie:

$$E_{pot}=G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_Z}-\frac{1}{R_Z+H_k}\right)E_{kin}=m\cdot\frac{v_k^2}{2}$$

m - masa rakiety, jest sumą masy połowy paliwa pierwszego stopnia, konstrukcji tego stopnia i masy pozostałych części rakiety z paliwem, czyli wynosi ona:

$$m(V)=\frac{1}{2}V\cdot\rho+m_1+m_r$$

W tym przypadku masy wynoszą odpowiednio[1]: m_1 = 130000 kg, m_r = 680000 kg. Równanie sprowadza się więc do:

$$\Delta E(V)=G\cdot M\cdot\left(\frac{1}{2}V\cdot\rho+m_1+m_r\right)\cdot\left(\frac{1}{R_Z}-\frac{1}{R_Z+H_k}\right)+\left(\frac{1}{2}V\cdot\rho+m_1+m_r\right)\cdot\frac{v_k^2}{2}$$ Które po wprowadzeniu stałych sprowadza się do równania:

$$\Delta E(V)=\beta_1\cdot V+\beta_2\beta_1=1{,}074\cdot10^9\,J/m^3\beta_2=2{,}717\cdot10^{12}\,J$$

Jeśli podstawi się objętość pierwszego członu rakiety Saturn V, otrzyma się:

$$\Delta E=6{,}34015\cdot10^{12}\,J$$

c) Czas pracy silników

Rakieta Saturn V rozpędzała się za pomocą 5 silników F-1.

Zużycie paliwa jest wprost proporcjonalne do pola powierzchni silnika rakietowego:

$Q(r)=\alpha_3\cdot\pi\cdot r^2$

Paliwo jest zużywane w sposób liniowy, a więc całkowity czas opróżnienia zbiorników wynosi:

$$T(V,r)=\frac{V}{Q(r)}=\frac{1}{\alpha_3\cdot\pi}\cdot\frac{V}{r^2}$$

Dla parametrów rzeczywistych[1, 3]: T_0=168 s; r_0 = 1,86 m:

$$\alpha_3=\frac{1}{5\cdot\pi\cdot T_0}\cdot\frac{V}{r_0^2}=0{,}369$$

Upraszczając:

$$\beta_3=\frac{1}{\alpha_3\cdot\pi}=0{,}8616T(V,r)=\beta_3\cdot\frac{V}{r^2}$$

d) Moc silnika

Silniki rakietowe F-1 posiadają siłę ciągu równą[3] F = 7,27·10^6 N każdy. Wiemy też, że zużywają one paliwo. Z II prawa dynamiki Newtona otrzymujemy zależność:

$$Q\cdot\rho\cdot v_w=F v_w=\frac{F}{Q\cdot\rho}$$

Moc silnika pochodzi z energii kinetycznej gazów wylotowych, czyli:

$E_{k,w}=\frac{1}{2}\cdot m_w\cdot v_w^2 M_w=\frac{E_{k,w}}{\Delta t}=\frac{m_w\cdot v_w^2}{2\cdot\Delta t}=\frac{F^2}{2\cdot Q\cdot\rho}$ Wprowadzając znany wzór na szybkość zużycia paliwa, oraz fakt, że siła ciągu jest wprost proporcjonalna do powierzchni silnika:

$$M_w(r)=\frac{\left(\alpha_4\cdot\pi\cdot r^2\right)^2}{2\cdot\rho}\cdot\frac{1}{\alpha_3\cdot\pi\cdot r^2}=\frac{\alpha_4^2\cdot\pi}{2\cdot\rho\cdot\alpha_3}\cdot r^2$$

Upraszczając:

$$M_w(r)=\beta_4\cdot r^2\beta_4=2{,}97\cdot 10^9$$

Dla parametrów rzeczywistych rakiety Saturn V można wyznaczyć sumaryczną moc wszystkich silników na:

$$M_w=5{,}14\cdot 10^{10}W$$

e) Moc siły oporu powietrza

Siła oporu powietrza jest dany wzorem:

$$F_O=c_d\cdot v\cdot S=c_d\cdot v\cdot\pi\cdot R^2$$

Przechodząc do mocy oporu powietrza:

$$M_O=\pi\cdot c_d\cdot v^2\cdot R^2$$

W przypadku rakiety współczynnik c jest zależny od prędkości (mowa o wartościach od zera do kilku prędkości dźwięku) i jest w zakresie[4]:

$$c_d\in[0{,}2;0{,}55]$$

Dobrą, przybliżoną wartością współczynnika w zakresie prędkości rakiety jest: c_d = 0,4. Rozpatrywana prędkość będzie się zmieniać, ale można przyjąć dla obliczeń, że wynosi ona połowę prędkości końcowej v_k (na początku prędkość będzie wynosiła 0).

W tym miejscu warto też zaznaczyć, że ciśnienie powietrza (a więc i siła oporu przy stałych warunkach) będzie się zmniejszać z rosnącą wysokością, osiągając na wysokości docelowej wartość mniejszą niż 0,001 wartości na poziomie morza[5]. W niniejszej pracy przyjęto średnią wartość ciśnienia na poziomie 1/10 (wysokość 12 km) wartości początkowej. Podsumowując, wzór na moc oporu powietrza będzie wyglądał następująco:

$M_O(R)=\frac{\pi}{40}\cdot c_d\cdot v_k^2\cdot R^2 M_O(R)=\beta_5\cdot R^2\beta_5=1{,}735\cdot 10^5$

f) Moc stratna

Ze względu na wcześniejsze obliczenie energii potrzebnej na wzniesienie rakiety oraz znajomość czasu przelotu (168 s), można obliczyć średnią użytą moc przez rakietę Saturn V:

$M_u=3{,}77\cdot 10^{10} W$

Suma mocy potrzebnej na wzniesienie rakiety oraz potrzebnej na pokonanie oporów powietrza jest mniejsza od mocy dostępnej na silnikach rakiety Saturn V.

Wynika ona z geometrii rakiety oraz wymogów dotyczących korekcji lotu. Wysoko zawieszony środek ciężkości oraz silniki umieszczone na dole pojazdu powodują, że sterowanie pojazdem wymaga dodatkowych nakładów energetycznych. Są one wprost proporcjonalne do stosunku wysokości środka ciężkości do szerokości rakiety:

$M_s=\alpha_6\cdot\frac{H}{R}=\alpha_6\cdot\frac{V}{\pi\cdot R^3}$

Współczynnik α_5 można wyznaczyć ze znanych parametrów technicznych rakiety:

$\alpha_6=1{,}637\cdot 10^9$

Lub w sposób uproszczony:

$M_s(V,R)=\beta_6\cdot\frac{V}{R^3}\beta_6=5{,}21\cdot 10^8$

Sumarycznie, moc użyteczna będzie dana wzorem:

$M_u(V,R,r)=M_w-M_O-M_S=\beta_4\cdot r^2-\beta_5\cdot R^2-\beta_6\cdot\frac{V}{R^3}$

g) Czas lotu, równanie końcowe

Znając wartość mocy użytecznej, można wyznaczyć czas potrzebny na uzyskanie energii końcowej lotu:

$$T(V,R,r)=\frac{\Delta E}{M_u}=\frac{\beta_1\cdot V+\beta_2}{\beta_4\cdot r^2-\beta_5\cdot R^2-\beta_6\cdot\frac{V}{R^3}}$$

Z drugiej strony czas pracy silników dany był wzorem:

$T(V,r)=\beta_3\cdot\frac{V}{r^2}$

Przyrównując te czasy do siebie, otrzymujemy:

$\frac{\beta_1\cdot V+\beta_2}{\beta_4\cdot r^2-\beta_5\cdot R^2-\beta_6\cdot\frac{V}{R^3}}=\beta_3\cdot\frac{V}{r^2}$ Rozwiązanie równania ze względu na V to funkcja celu:

$$V(r,R)=\frac{r^2\cdot R^3}{2\cdot\beta_3\cdot\beta_6}\left(\beta_3\cdot\beta_4-\beta_1-\beta_3\cdot\beta_5\cdot\frac{R^2}{r^2}+\sqrt{\left(\beta_1-\beta_3\cdot\beta_4+\beta_3\cdot\beta_5\cdot\frac{R^2}{r^2}\right)^2-\frac{4\cdot\beta_2\cdot\beta_3\cdot\beta_6}{r^2\cdot R^3}}\right)$$

Co można uprościć do:

$$V(r,R)=\gamma_1\cdot r^2\cdot R^3\left(\gamma_2-\gamma_3\cdot\frac{R^2}{r^2}+\sqrt{\left(\gamma_3\cdot\frac{R^2}{r^2}-\gamma_2\right)^2-\frac{\gamma_4}{r^2\cdot R^3}}\right)\gamma_1=1{,}11\cdot 10^{-9}\gamma_2=1{,}48\cdot 10^{9}$$

$$\gamma_3=1{,}49\cdot 10^{5}\gamma_4=4{,}88\cdot 10^{21}$$