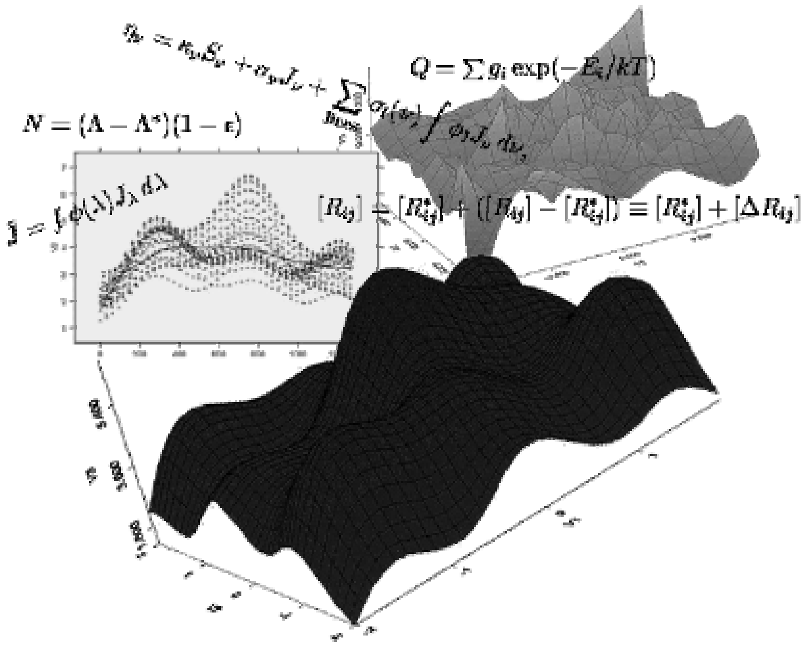
UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE

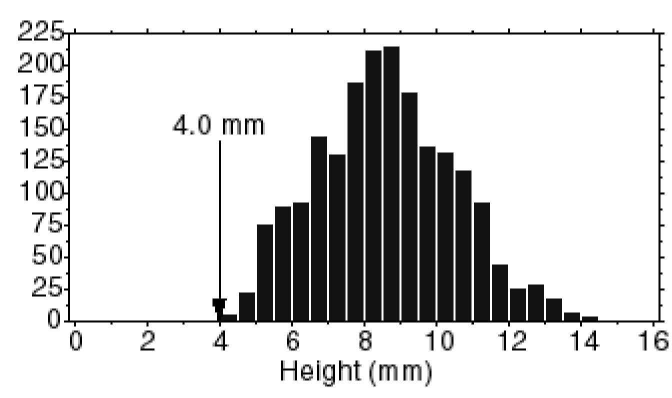
FACULTAD DE CIENCIAS DEL MAR

Coquimbo



GUÍA BÁSICA PARA CURSO DE ESTADÍSTICA

Biología Marina



2003

INTRODUCCIÓN

El término "**estadística**", es derivado del latín "***status***", que significa estado. Este concepto generalmente se aplica de dos maneras:

a) **Estadísticas (Plural)** se refiere a un conjunto de datos recogidos en forma sistemática para obtener información sobre asuntos demográficos, económicos, sociales, biológicos o de otra naturaleza. Algunos ejemplos pueden ser: el número de nacimientos anuales en las diferentes regiones de Chile, población de lobos marinos reproductivamente activa, captura de anchovetas en la última década, número de goles convertidos por bam bam Zamorano en la última temporada.

b) **Estadística (singular)** se refiere a una disciplina que comprende los métodos de recolección, presentación, análisis e interpretación de datos. Esta disciplina esta íntimamente ligada al método científico ya que permite llevar a la práctica etapas de verificación de hipótesis e interpretación de resultados. El diseño experimental, técnicas de muestreo, análisis e interpretación de resultados de investigaciones forman parte del de la metodología estadística la que se esta basada esencialmente en la teoría de probabilidades.

¿Qué es la Bio-Estadística?

Es la aplicación de herramientas de la estadística al área de las ciencias biológicas y de la medicina. Relacionada con ella existe el término "Biometría" aplicado a todo tipo de mediciones biológicas.

En relación a las funciones que puede desempeñar la estadística es posible clasificarla de dos maneras:

a) Estadística descriptiva:

Es aquella parte de la estadística que describe y analiza una población, sin pretender sacar conclusiones de tipo general. Es decir, las conclusiones obtenidas son validas sólo para dicha población. Solo involucra el ordenamiento y descripción de un conjunto de datos. Ejemplo: Ordenación en tablas de la altura de todos los estudiantes de biología marina de la UCN, indicando un promedio de alturas por sexo, o por edad.

b) Estadística inferencial:

Es aquella parte de la estadística, cuyo propósito es inferir o inducir leyes de comportamiento de una población, a partir del estudio de una muestra. Es decir las conclusiones obtenidas a partir de una muestra, son válidas para toda la población. Ejemplo: Utilizando los datos de altura de todos los alumnos de biología marina de la UCN se busca realizar una estimación de la altura de hombres y mujeres de todos los alumnos de la UCN. O quizás podemos probar si los hombres de la universidad presentan un promedio de altura mayor al de las mujeres.

Toma de Muestras (muestreo):

"Tu no necesitas comerte todo el buey para saber que la carne es dura". Esta es la idea de tomar muestras: ganar información sobre un todo a través de la examinar solo una parte de este.

Algunos conceptos estadísticos sobre muestras:

Población o Universo: El todo el grupo de personas, animales o cosas sobre las que queremos obtener algún tipo de información. Es necesario tener en cuenta que nosotros definimos nuestra población en relación de nuestro deseo de información.

Unidad: Consiste en cualquier miembro individual de la población.

Muestra: Es una parte de la población sobre la cual hemos recolectado cierta información la que utilizamos para obtener conclusiones sobre la población.

Variable: Característica de una unidad, que puede ser medida en todas las unidades de una muestra.

Ejemplo: Se desea realizar un estudio sobre el consumo de tabaco en la juventud chilena. Es necesario definir que se entiende por juventud delimitando que parte de ella se refiere a ella.

Población	Muestra	Variable
Mujeres y hombres entre 16 a 26 años.	100 hombres y mujeres jóvenes de todas las capitales regionales de Chile.	Nivel de nicotina medida en una muestra sanguínea.

TIPOS DE VARIABLES BIOLÓGICAS

a) Datos en escala proporcional

Pensemos que estamos estudiando un grupo de plantas. La altura de las plantas (medida en centímetros) constituye la variable de interés, y el número de hojas por plantas es otra de las variables bajo estudio. De esta manera, es necesario poner atención en dos factores fundamentales de estos datos:

Primero que existe un tamaño de intervalo constante entre cualquier unidad adyacente de las escalas de medición. Es decir, la diferencia de tamaño entre plantas de 36cm. y 37cm. es la misma que la diferencia entre plantas con 39 cm. y 40 cm.; al igual que la diferencia entre 8 y 10 hojas es la misma que entre 7 y 9 hojas. Segundo, es importante notar que existe un punto "0" que representa una importancia física. Estas características nos permiten decir que una planta de 30 cm mide la mitad que una planta de 60 cm o que una planta con 45 hojas tiene tres veces más hojas que una con 15 hojas. Otros ejemplos pueden ser pesos (mg, lb), volúmenes (cc), capacidad (ml), tasas (cm/seg, mph, mg/min) y tiempo (hr, yr).

b) Datos en escala de intervalos

Algunas escalas de medición poseen un tamaño de intervalo constante, pero no poseen un cero verdadero; estas son las llamadas *escalas de intervalo*. Un ejemplo son las dos escalas de temperaturas mas comunes: Celsius (C) y Fahrenheit (F). Es posible decir la diferencia entre 20°C (68°F) y 25°C (77°F) es la misma que entre 5°C (41°C) y 10°C (50°F) formando una escala de medición compuesta por intervalos de igual tamaño. Pero no es posible indicar que la temperatura de 40°C (104°F) es dos veces mas caliente que una temperatura de 20°C (68°F) ya que el punto cero esta arbitrariamente definido (valores de temperatura absolutos se miden en escala Kelvin (K) las que puede ser denominada una escala proporcional, donde el 0 tiene un significados físico).

c) Datos en escala ordinal:

Si un hombre A pesa 90 kg y un hombre B pesa 80 Kg, entonces el individuo A pesa 10 kg más que B. Pero es posible que nuestros datos solo requieran la información que indique que el hombre A pesa más que B, sin importar cuanto más. En este caso estamos trabajando con diferencias relativas entre las magnitudes de nuestra variable. En este sentido, los datos consisten en ordenamientos o ranking de mediciones son catalogados como una escala ordinal de mediciones ("Ordinal" viene del latín que significa orden). Uno puede hablar de una entidad biológica que es mas corta, oscura, mas rápida o más activa que otra, o el tamaño de 5 tipos de células puede ser asignado como 1,2,3,4 y 5 para denotar su magnitud relativa a otra.

d) Datos en escala nominal:

A veces alguna de las variables con se esta trabajando es clasifica por una cualidad que ésta posee y no por una medición numérica. En estos casos la variable puede ser llamada un "atributo", encontrándonos ante la presencia de una escala nominal de mediciones. Los fenotipos genéticos son comúnmente citadas como atributos biológicos como color de ojos (café, azules), color de pelo (negro, rubio, castaño, pelirrojo). Los animales pueden ser clasificados como machos y hembras.

Datos continuos y discretos

Cuando hablamos de la altura de las plantas, estábamos tratando con una variable que permite cualquier valor entre un determinado rango de mediciones observadas, es este caso estamos tratando con **variables continuas**. En este sentido si tenemos mediciones de la altura de dos plantas con valores de 35cm y 36cm, un número infinito de números de tallas es posible encontrar en el rango de 35 a 36cm: una planta puede medir 35.07cm o 35.988, etc. Claro, todo depende del instrumento con que estemos midiendo.

Sin embargo, cuando hablamos del número de hojas de una planta, estamos tratando con una variable que puede tomar solo valores enteros. Es posible, observar 27 o 28 hojas, pero 27,43 hojas o 27.9 hojas son valores de esta variable que son imposibles de obtener. En este caso estamos ante la presencia de una variable **discreta** o **discontinua**.

Los datos en escalas proporcionales, de intervalos y ordinales pueden ser continuos o discretos. Los datos en escala nominal son por naturaleza discretos.

CONCEPTOS DE EXACTITUD, PRECISIÓN Y FIGURAS SIGNIFICATIVAS

a) **Exactitud** (Accuracy): Se relaciona con la pregunta **¿Qué tan cerca se encuentra un valor experimental (medido) del valor real?** La exactitud está dada por el instrumento que se usa. El sentido común indica que si una regla común y corriente tiene una exactitud de 1mm, una medición igual a 23.55 mm, no es posible. ¿Por qué?

b) **Precisión**: Este concepto se relaciona con la pregunta **¿Qué tan cerca se encuentran, unas de otras, distintas mediciones hechas sobre una misma variable?** La precisión esta dada por quien hace las mediciones y depende fuertemente de la experiencia y rigurosidad.

De lo anterior es importante, entonces, tener en cuenta lo siguiente:

a. Exactitud y precisión son conceptos relativos

b. Exactitud y precisión son conceptos independientes y no son sinónimos

c. Entre ambas situaciones, es más fácil alcanzar una alta precisión. Sin embargo a veces no es posible.... ¿Por qué? ¿Cómo se puede "compensar" en el caso de una variable que tiene alta variación?

FIGURAS SIGNIFICATIVAS Y REDONDEO DE DATOS

Se ha medido el largo de dientes de un tiburón blanco. Primeros utilizamos una regla. El diente mas grande midió 6.3cm. Luego este diente es medido con un instrumento que permite mayor exactitud, como un pie de metro concluyendo que el diente mide 6.27cm. De esta manera la exactitud del instrumento con el que estamos midiendo nos limita el número de cifras significativas que es posible utilizar para informar los resultados.

Rangos Implicados: El largo del ala de una mariposa es de 5.4cm, teóricamente significa que el verdadero largo se encuentra entre 5.35 y 5.45 cm. lo que comprende al rango implicado de esta medición con 2 figuras significativas.

Algunos ejemplos:

Valor	Rango	Figuras significativas	Exactitud
8	7.5 - 8.5	1	1
8.3	8.25 – 8.35	2	0.1
8.32	8.315 – 8.325	3	0.01

Aproximación (redondeo de decimales) de datos:

Se necesita redondear 72.8 en unidades. El resultado es 73, pues 72.8 está más próximo de 73 que de 72. Análogamente, 72.8146 se redondea en centésimas (o sea con dos decimales) a 72.81, porque 72.8146 está mas cerca de 72.81 que de 72.82. Pero que pasa si es necesario redondear 72.465 en centésimas nos hayamos ante un dilema, ya que este valor se encuentra equidistante de 72.46 y 42.47. En estos casos se utiliza la siguiente regla:

Si el ultimo digito anterior es par ….aproximar hacia abajo.

Si el último digito anterior es impar … aproximar hacia arriba.

De esta manera: **72.465 se aproxima a 72.46**

183.575 se aproxima a 183.58

116.500.000 se aproxima en millones a 116.000.000

"Estas reglas son necesarias siempre tenerlas en cuenta, ya que las calculadoras y computadores típicamente entregan los resultados con mas figuras significativas que son justificadas por nuestros datos".

DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

Cuando recogemos y resumimos una gran cantidad de datos, es bastante útil representar esta información como una **tabla de frecuencia**. La que representa una lista de todos los valores observados de la variable en estudio y cuantas veces cada valor ha sido observado.

"Cuando los datos son agrupados en tablas de frecuencia (o distribución de frecuencias), el proceso de análisis e interpretación es más fácil"

Consideremos el siguiente ejemplo:

Se ha recogido la información sobre el consumo de proteínas (medido en gramos) en una muestra de 20 ostiones mantenidos en los acuarios del laboratorio a los que se les administro una dieta especial. Los datos son los siguientes:

21	25	35	22	18
24	21	23	16	23
27	17	26	19	29
20	19	20	23	22

Al observar estos datos de esta manera, son bastante poca la información que se puede visualizar. Quizás solo podríamos decir que existe una variación entre los datos observados.

De esta manera para ordenar esta información se construirá una tabla de frecuencias siguiendo los pasos:

a) **Calculo del Rango**:

El rango está definido como la distancia entre el dato máximo y el mínimo.

$$R = X_{máx} - X_{mín}$$

En este caso R = 35-16= 19

b) **Determinado el número de clases:**

El número de clases es el número de categorías o intervalos en el que se va a dividir la información. Este número se puede fijar arbitrariamente, dependiendo del número de datos que se tenga (generalmente el número de clases varia entre 5 a 20).

En este ejemplo se utilizarán 5 clases

c) **Determinación de las amplitud del intervalo:**

También llamado ancho de clase, la amplitud del intervalo es la cantidad de datos que están comprendidos en un intervalo de clase. Este intervalo presenta un límite superior y un límite inferior. Ahora para definir la amplitud del intervalo es posible utilizar la siguiente formula:

$$Ampl.Interv. = \frac{Rango}{Número \quad de \quad clases}$$

En este ejemplo Ampl. Inter. = 19/5= 3.8 ≈ 4 (el valor se redondea sólo si los datos son enteros o discretos).

d) –Formación de los rangos de clase y determinación de marca de clase:

Significa hallar los límites inferiores y superiores de cada intervalo; para ello al dato menor se le suma la amplitud del intervalo (4 en este caso). La marca de clase corresponde al valor medio ubicado en cada rango de clase.

e) Frecuencia Absoluta (fi):

Es el número de veces que se repiten los valores dentro de los diferentes intervalos en que se ha dividido la información

f) Frecuencia Relativa:

Es el valor que resulta al dividir cada una de las frecuencias absolutas entre el total de frecuencias o datos y multiplicarlas por 100 para que sean expresadas en porcentaje

g) Frecuencia Absoluta Acumulada:

Se obtiene sumando y acumulando los valores absolutos clase por clase en orden ascendente

h) Frecuencia Relativa Acumulada:

Se obtiene sumando y acumulando los valores relativos clase por clase en orden ascendente

De esta manera la tabla de frecuencia queda así:

Consumo de proteínas (grs.) de 20 ostiones *Argopecten purpuratus*

Rango de clase		Marca de clase	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa	Frec. absoluta acumulada	Frec. relativa acumulada
16	19	17.5	5	25	5	25
20	23	21.5	9	45	14	70
24	27	25.5	4	20	18	90
28	31	29.5	1	5	19	95
32	35	33.5	1	5	20	100

*Notar que la amplitud del rango de clase de 4 unidades 4 (16, 17, 18 y 19).

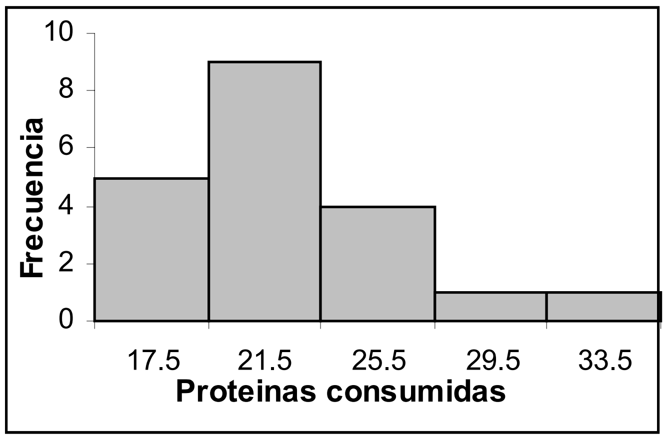
Representación gráfica de tablas de frecuencias

a) Histogramas

Los histogramas muestran las frecuencias por clase de la variable medida.

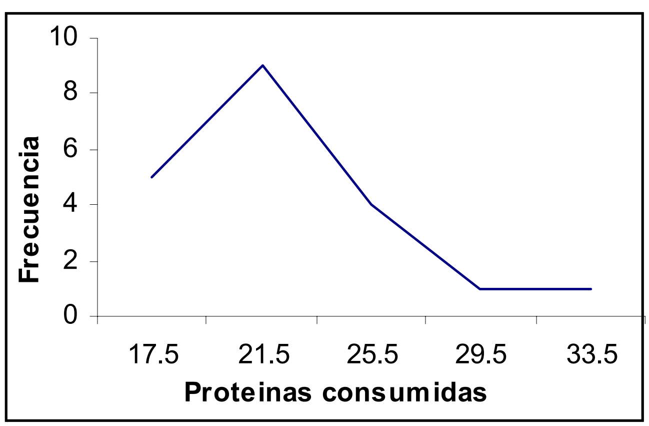
Se obtienen al graficar las marcas de clase (abscisa) versus la frecuencia (ordenada).

Cuando se grafican variables continuas, las barras verticales deben tocarse entre sí.



b) Polígonos de frecuencias

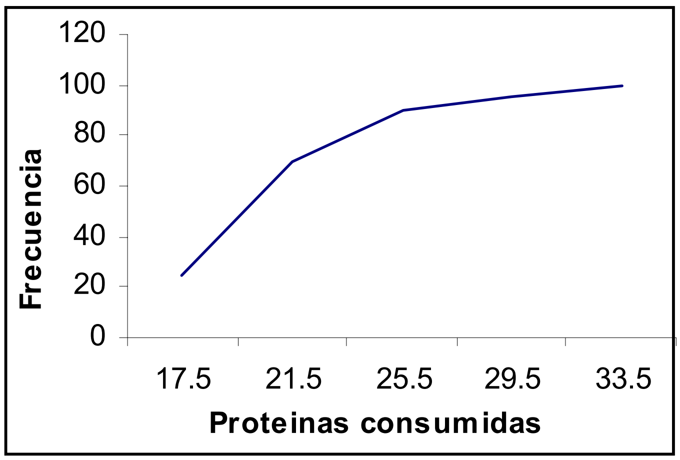
Se produce fácilmente al conectar con una línea las marcas de clases adyacentes.



c) Ojivas

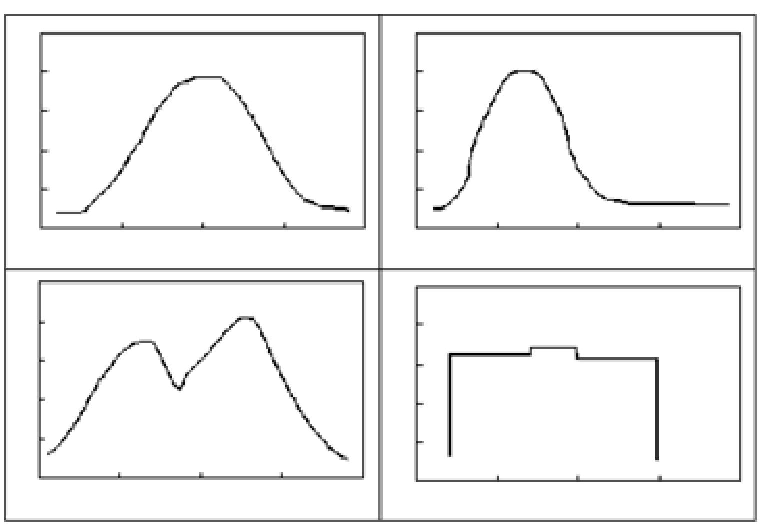
Se obtienen al graficar las frecuencias acumuladas absolutas o relativas.

Son útiles para determinar percentiles, tales como la mediana (50avo percentil) y los rangos intercuartílicos

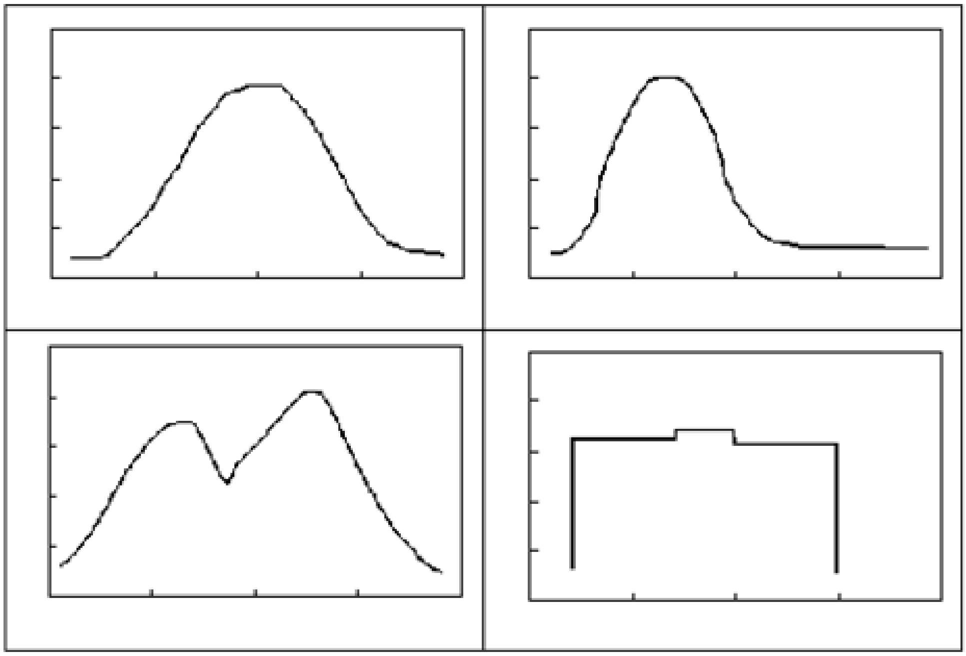


TIPOS DE DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA

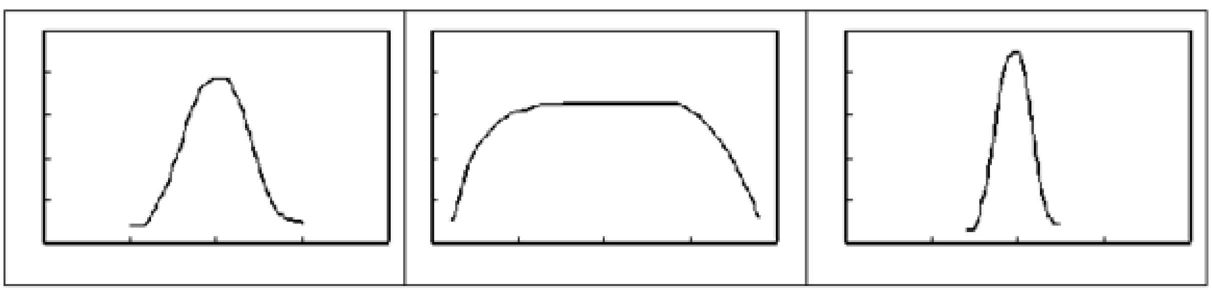
A.- En función de la forma



B.- Localización en la absisa (eje X)



C.- En función de la dispersión



MEDIDAS DESCRIPTIVAS NUMÉRICAS

Población y Muestras:

El primer objetivo de un análisis estadístico es inferir las características de un grupo de datos a través del análisis de las características de un pequeña muestra del grupo. Para lograr realizar una generalización del todo a partir de una parte del todo se requiere tener en consideración los siguientes conceptos: Población, muestra (ya antes discutidos), parámetro, estadístico, y muestra aleatoria.

Muestras Aleatorias: Para muestrear una población de manera aleatoria se requiere que cada miembro de la población tenga opción igual e independiente de ser elegida. En este punto es necesario tener en cuenta un concepto clave para obtener muestras aleatorias: "Las muestras deben ser independientes en el tiempo y el espacio".

Cuando es posible asignar un número a cada miembro de la población es útil la utilización de tablas de números aleatorios (B.41 de Zar1999), para generar muestras aleatorias. Pero la mayoría de las veces no es posible asignar un número a cada miembro de la población, en este caso una muestra aleatoria implica tener en cuenta consideraciones biológicas más que matemáticas. De esta manera, las técnicas utilizadas para tomar muestras siempre requieren manejar algo de conocimiento sobre el organismo en que se está trabajando.

Parámetros y Estadísticos:

Existen muchos tipos de mediciones que son útiles para caracterizar y describir una población. Una cantidad como la estimación de la tendencia central o la dispersión es llamada "**Parámetro**", ya que está describiendo una característica de la población. Pero, raramente es posible calcular parámetros. Sin embargo, a través de una muestra aleatoria de la población en estudio, los parámetros pueden ser estimados bastante bien. De esta forma, una estimación de un parámetro poblacional es llamado "**Estadístico**". Todo buen estadístico de una población debe poseen las siguientes características: ser insesgado, consistente y eficiente.

Medidas de Tendencia Central:

Media ($\overline{X}$): Representa el promedio aritmético de un set de observaciones. Esto es la suma de las observaciones divididas por el número de observaciones.

La formula es: $$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} Xi}{N}$$

Ejemplo: El coeficiente de inteligencia (CI) de 5 personas es el siguiente: 100,95,102,115 y 98. La media es: $\overline{X}$ = (100+95+102+115+98)/5 = 102

Cuando los datos se encuentra agrupados se calcula por:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} Xi \bullet fi}{\sum_{i=1}^{i=n} fi}$$

Hacer el cálculo para la tabla de frecuencias del consumo de proteínas de los ostiones.

Comentarios adicionales concernientes a la media:

i. Cuando se calcula media, cada punto (valor, Xi) es usado. Es un estadístico poco “resistente”, ya que es fuertemente influenciado por los valores extremos.

ii. La media es un número ÚNICO.

iii. La media de la muestra ($\overline{X}$), es un buen estimador de μ (la media universal o paramétrica)

Mediana (Me): Es el valor medio. Esto es el punto medio de las observaciones cuando estas han sido ordenas en orden ascendente.

Se calcula por:

Si el tamaños de la muestra es impar: Me= $X_{(n+1)/2}$

Ejemplo: 11,13,15,16,17 Me= 15

Si el tamaños de la muestra es par: Me=($X_{n/2}$ + $X_{n/2+1}$)/2

Ejemplo: 11,13,15,16,17, 20 Me= 15.5

Cuando los datos se encuentra agrupados se calcula por:

a) Buscar posición del dato

b) Calcular por

$$Me = \underset{\text{Del intervalo}}{\text{Límite inferior}} + \frac{0.5n - \text{frec. acum. ant.}}{\text{Nro. Obs en Intervalo}} \times \text{Ancho intervalo}$$

Para el ejemplo de los ostiones entonces:

Me = $X_{(n+1)/2} = X_{(20+1)/2} = X_{10.5}$; buscar intervalo de clase que contenga esta posición y aplicar fórmula.

Me = (20)+ ((0.5x20)-5)/9 x 4 = 22.2

"A diferencia de la media, la mediana no es influida por los valores extremos."

Moda: La moda el valor mas frecuente. Es decir, el valor que más se repite dentro de las observaciones realizadas.

Ejemplo: La moda del coeficiente intelectual de un grupo de alumnos: 100,95,105,110, 100. Entonces la moda es 100.

Para datos que se encuentran ordenados en una tabla de frecuencia la moda corresponde a la marca de clase más frecuente:

Para el ejemplo de los ostiones: ¿Cual es la moda?

Al igual que la mediana no es afectada por los valores extremos.

Para tener en cuenta:

Los conceptos de media, moda y mediana están definidos para un set de observaciones. La media, moda y mediana son estadísticos si nuestras observaciones son muestras; ellas son parámetros si nuestras observaciones comprenden toda la población.

Relaciones de las tres medidas de tendencia central

Estudie y analice las siguientes figuras. Tomando en cuanta las siguientes observaciones. Asigne el número que corresponde, a cada situación, a cada uno de los gráficos.

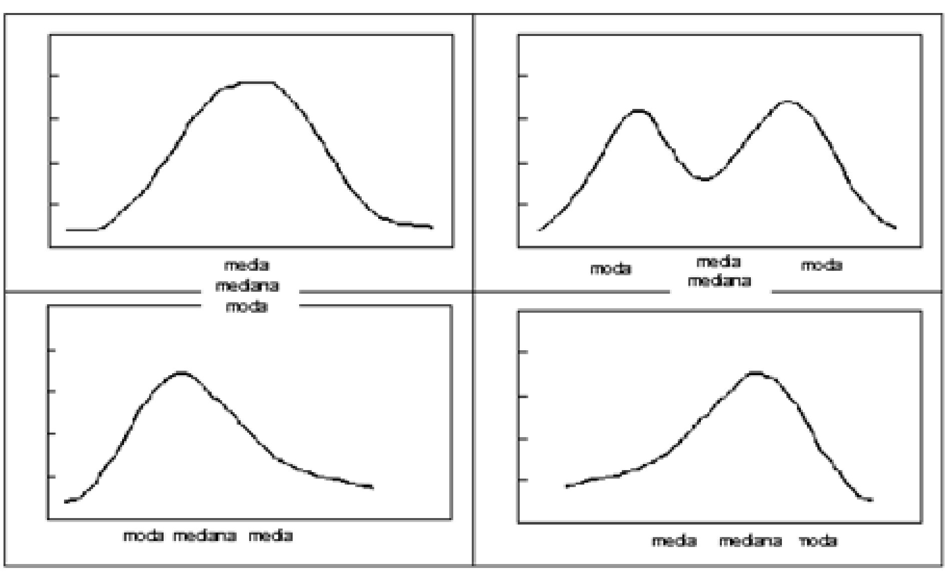
1. En una distribución normal, la media, la mediana y la moda son iguales.

2. En una distribución simétrica, la media y la mediana son iguales.

3. En una distribución sesgada, el orden de las tres medidas es:

   a) sesgada positivamente: moda, mediana, media.

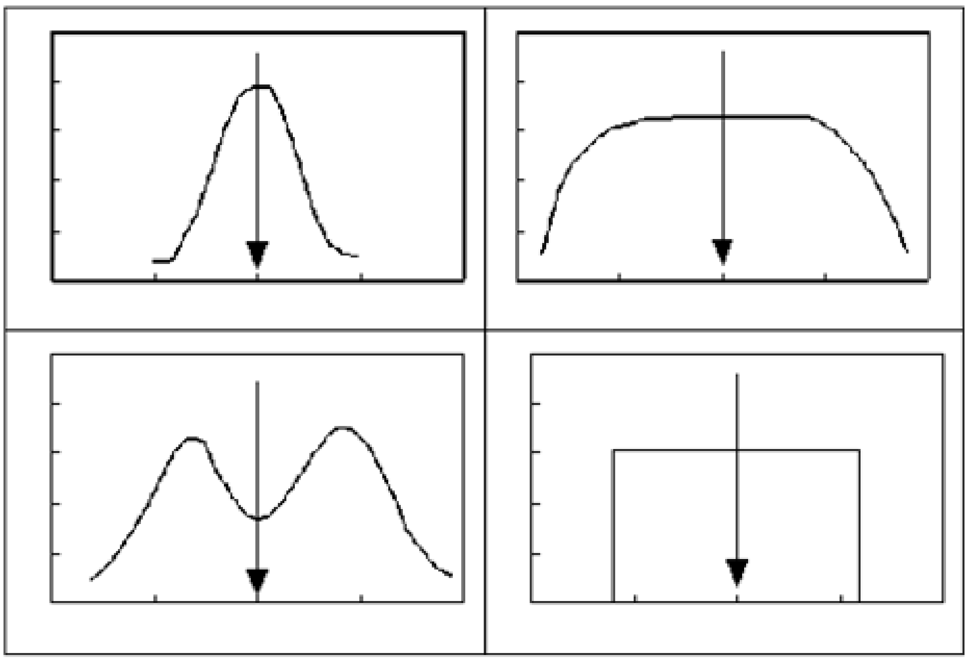
   b) sesgada negativamente: media, mediana, moda.



Medidas de Dispersión o Variabilidad:

Adicionalmente a la medición de tendencia central, es recomendable tener una medición de la dispersión de los datos. De esta manera es posible tener una idea de cuan esparcidos se encuentran las mediciones en torno al centro de la distribución.

Analice las siguientes figuras: a) qué tipo de distribución se tiene en cada caso; b) son iguales o diferentes la media y la mediana de cada distribución?; c) existen diferencias notorias en la dispersión de cada distribución?



En todos casos las MEDIAS y las MEDIANAS son iguales. Pero las DISTRIBUCIONES son <u>diferentes</u>

El Rango: Corresponde a la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.

$$\textbf{Rango} = X_{max} - X_{min}$$

Ejemplo. El tiempo que utilizan 6 niños de igual edad para desarrollar una misma tarea fue la siguiente: 16, 12, 15, 18, 13, 14 minutos.

El rango es: 18-12= 6 minutos.

Suma de las desviaciones de la media al cuadrado: También es conocida con el nombre de suma de los cuadrados. Su compresión es clave para entender el significado de cada una de las demás medidas de dispersión que existen. Este valor entrega una idea de cuán lejos se encuentran los datos con respecto a la media.

$$SS = \sum (Xi - \overline{X})^2$$

Reflexiones las siguientes preguntas:

¿Porqué se emplean desviaciones de la media al cuadrado?

¿Qué indica una SS grande?

¿Qué indica una SS pequeño?

¿Qué indica una SS igual a 0?

Calcule la media y SS para el peso (grs) del músculo abductor de las siguientes almejas: 7.4, 8.1, 6.3, 8.6, 7.9, 6.9

Varianza (S^2): Corresponde a la media de la suma de cuadrados (por eso es llamada media cuadrática), para la población se denomina por σ^2 (sigma cuadrado), de esta manera:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (Xi - \upsilon)^2}{N}$$, es la varianza de la población.

$$S^2 = \frac{\sum (Xi - \overline{X})^2}{n-1}$$, es la varianza de una muestra.

La varianza de una muestra esta dividida por n-1 (llamado "grados de libertad" o GL), permitiendo una estimación no segada y más conservadora ya que no sobreestima el valor de σ^2 que presenta un N desconocido.

Calcular a partir del ejemplo anterior

Desviación Estándar (DS o S): Simplemente es estimada a través la raíz cuadrada de la varianza. Tener en cuenta que este valor tiene las mismas unidades que las mediciones originales.

Calcular S a través de varianza estimada anteriormente.

Coeficiente de variación (CV): Es el cuociente de la desviación estándar y la media aritmética, expresado en porcentaje, es decir:

$$CV = \frac{DS}{\overline{X}} \bullet 100$$

El coeficiente de variación expresa la variabilidad de la muestra relativa a la media de la muestra. De esta forma es llamada variabilidad relativa o dispersión relativa.

Como medidas de variabilidad, la desviación estándar y la varianza tienen magnitudes que son dependientes de los datos, en este sentido podemos hacer una estimación de la variabilidad del tamaño de las orejas de elefantes y ratones obteniendo los siguientes resultados:

	Ratones	**Elefantes**
Media	0.78 cm	78.0 cm
DS	0.26 cm	26.0 cm
CV	**33.3%**	**33.3%**

¿Qué podemos concluir en base a estos resultados?

Tener en cuenta que:

a. El CV puede ser calculado sólo para datos de escala de proporción (donde el cero verdadero existe). Esto significa que no es válido calcular CV para datos de temperatura medidos en escala de grados Celsius, por ejemplo.

b. Debido a que la media y la desviación estándar tienen las mismas unidades, el coeficiente de variación es adimensional, es decir no tiene unidades.

Medidas de Posición o Cuantiles:

Estos son estadísticos que divides una distribución de frecuencias en cuatro, diez o cien partes iguales. Cuando los datos no se distribuyen en forma normal, éstos pueden ser utilizados para reflejar la variación de nuestros datos. Recordemos que la mediana es el valor que se encuentra en la mitad de nuestra distribución (es decir es el 50avo percentil), pero la mediana es solo uno de los estadísticos que dividen una distribución de frecuencias en partes iguales. Existen también los cuartiles (4), quintiles (5), deciles (10) y percentiles (100).

Los cuartiles son estadísticos que dividen en cuatro partes iguales nuestra información, donde cada parte incluye el 25% de las observaciones. De esta manera el 25% de las observaciones, se dice que corresponden al primer cuartil (Q_1). La mediana correspondería al segundo cuartil Q_2 y Q_3 sería la posición donde se encontraría el 75% de nuestra distribución.

Esquemáticamente tenemos:

1er cuartil			
2do cuartel			
3er cuartil			
25%	25%	25%	25%

Con la siguiente formula es posible calcular cualquier percentil, determinado la posición de la variable en un set de datos:

$$X_{(n+1)} \bullet \frac{p}{100}$$

DADO EL SIGUIENTE SET ORDENADO DE DATOS

5	5	7	8	9	9	9	10	12	14	14	15	17	18	25	30	31	64	72	88	89	90	92	98
Ranking			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

La media ± DS = 34.6 ± 34.1 ¿Son estos los mejores estadísticos para este caso?

Mediana = (24/2+ (24/2+1))/2 ➔ variable rankeada 12.5, corresponde a 16.

CALCULO DEL RANGO INTERCUARTILICO (50% del centro de la distribución)

1. Primer cuartil (25avo percentil) = (24 + 1) x 0.25 = 6.25, es decir, la variable rankeada en el lugar 6.25. Ya que el valor de la variable es 9 para el ranking 6 y 7, el primer cuartil es 9.

2. Tercer cuartil (75avo percentil) = (24 + 1) x 0.75 = 18.75, es decir la variable rankeada en el lugar 18.75. Los valores para las variables rankeadas en el lugar 18 y 19 son el 64 y 72. El valor está 0.75 más allá del valor de la variable rankeada X_{18} = 64, por lo tanto (72 – 64) x 0.75 = 6 ➔ Finalmente, 64 + 6 = 70.

3. Conclusión, el rango intercuartílico se extiende entre 9 y 70.

Cálculo de percentiles en tablas de frecuencia

La clave es proceder de la misma forma con la que se calculó la mediana, la única diferencia es que ahora no estamos interesados en ubicar la posición 50avo de nuestra distribución, sino que el rango intercuartilico que se encuentra entre las posiciones 25avo y 75avo.

Volvamos al ejemplo de los ostiones:

Consumo de proteínas (grs.) de 20 ostiones *Argopecten purpuratus*

Rango de clase		Marca de clase	Frecuencia Absoluta	Frec. absoluta acumulada
16	19	17.5	5	5
20	23	21.5	9	14
24	27	25.5	4	18
28	31	29.5	1	19
32	35	33.5	1	20

La mediana (**percentil 50**) fue de 22.2 (calculada anteriormente)

Q_1 (percentil 25): (20+1) (0.25)= 5.25, este valor se encuentra en el intervalo de clase 20-23. De este modo:

$$\text{Per.25} = \underset{\text{del intervalo}}{\text{Límite inferior}} + \frac{0.25n - \text{frec. acum. ant.}}{\text{Nro. Obs en Intervalo}} \times \text{Ancho intervalo}$$

= 20+ (((0.25 x 20)-5)/9) x 4 = 20

Q_3 (percentil 75): (20+1) (0.75)= 15.75, este valor se encuentra en el intervalo de clase 24-27.

$$\text{Per.75} = \underset{\text{del intervalo}}{\text{Límite inferior}} + \frac{0.75n - \text{frec. acum. ant.}}{\text{Nro. Obs en Intervalo}} \times \text{Ancho intervalo}$$

=24+ (((0.75x20)- 14)/4) x 4 = 25

Para tener presente:

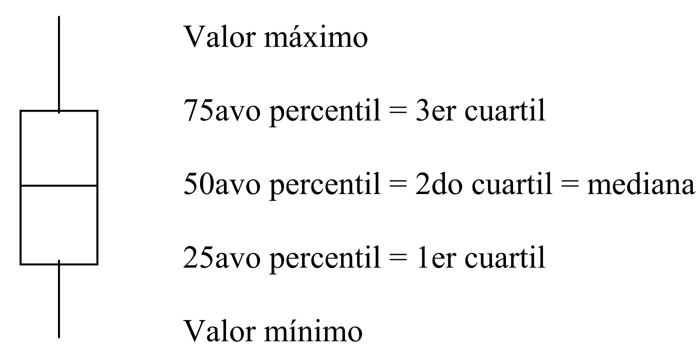
Si los datos no se distribuyen en forma normal, no se debe usar la DS y la Media como únicos y exclusivos estimadores. Lo correcto es informar otras medidas y para ello existen dos alternativas:

a) Usar la mediana y el rango intercuartílico

b) Mejor todavía, usar los "cinco estimadores":

mínimo   1er cuartil   mediana   3er cuartil   máximo

Una manera útil y práctica de representar estas medidas es a través de un gráfico de caja (boxplot):



Ejercicio: Los siguientes datos corresponden a las lecturas de la presión sanguínea sistólica que se hicieron a 58 adultos que presentaron un examen físico:

104	112	139	118	132	132	112	106
126	126	118	117	116	113	122	123
116	114	117	106	124	115	118	123
105	120	121	120	102	138	106	113
114	122	108	122	112	112	123	116
124	111	111	114	123	107	120	120
124	122	131					

a) Construir tabla de frecuencias con 8 clases.
b) Que porcentaje de personas tiene una presión mayor a 117.
c) Ordene los datos en un histograma y ojiva de frecuencias.
d) Estime la medidas de tendencia central aprendidas.
e) Estime todas las medidas de dispersión aprendidas.
f) Estime el rango intercuartilico en la tabla de frecuencias.

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Un problema frecuente en el campo biológico, es saber si nuestras observaciones se encuentran dentro de los parámetros normales esperados para la población en estudio. Para tomar una decisión generalmente se miden características de un individuo y, si los valores encontrados son los habituales para otras estimaciones realizadas es posible decir que son valores normales. Así, por ejemplo, consideremos que es normal que una persona adulta presente una presión arterial de 130mm y anormal que esta sea de 210mm ya que es un valor muy raro de encontrar en adultos sanos.

"Para establecer los límites entre lo habitual y lo raro, es necesario conocer la distribución de la variable en estudio, en individuos normales."

Supongamos que se conoce la distribución de los valores de glucosa en la sangre de un grupo de salmones de cultivo sanos. Esta información se representa en un histograma. Basados en este grafico, es posible fijar los límites entre los que se encuentra la mayoría de los peces sanos y fuera de los cuales se encontrarían muy poco individuos.

Existe una distribución de frecuencias teórica llamada **distribución normal**, que puede considerarse como modelo adecuado para la distribución de un gran número de variables en el campo biológico. Esta distribución tiene las siguientes características:

- Su grafico semeja una campana simétrica, cuyas colas se extienden hacia el infinito tanto en dirección negativa como en la positiva (es asintótica con respecto al eje horizontal).

- El promedio, la mediana, el la moda de la distribución tienen el mismo valor.

- Las distribución queda completamente definida por el promedio y la desviación estándar.

- Cualesquiera sean los valores de μ y σ, el área bajo la curva comprendida entre el promedio más y menos 1, 2 y 3 desviaciones estándar es aproximadamente:

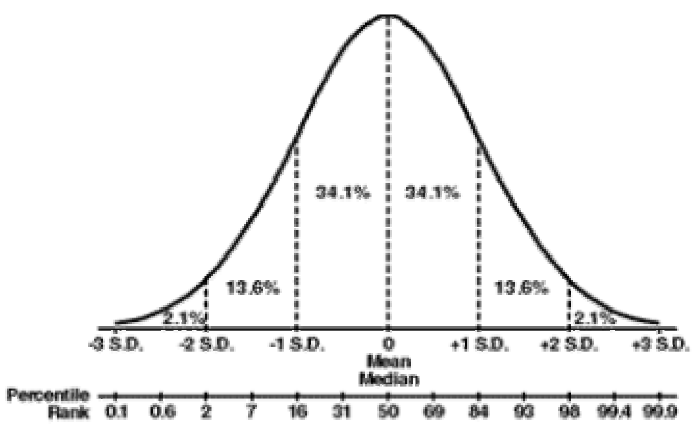
$$\mu \pm 1\sigma = 0.6826$$

$$\mu \pm 2\sigma = 0.9546$$

$$\mu \pm 3\sigma = 0.9973$$

De manera similar se puede expresar una determinada área en términos de $\mu \pm \sigma$:

- 50% de los valores individuales se encuentra entre $\mu \pm 0.764\sigma$
- 95% de los valores individuales se encuentra entre $\mu \pm 1.960\sigma$
- 99% de los valores individuales se encuentra entre $\mu \pm 2.576\sigma$



En la figura es posible observar las diferentes áreas y posiciones bajo la curva normal de 1, 2 y 3 desviaciones estándar.

Proporciones de la curva normal:

Para cualquier valor de *Xi* proveniente de una población normal con media μ, σ el valor de

$$Z = \frac{Xi - \mu}{\sigma}$$

nos indica cuantas desviaciones estándar desde la media el valor de Xi esta localizado. La tabla B.2 (de Zar 1999), nos indica que proporción de una distribución normal cae más allá un valor dado de Z. Este cálculo es llamado normalización o estandarización. La media de un set de valores estándares normales es 0 y la varianza en 1.

Ejemplo: Calcular la proporción de una distribución normal del largo de fémures de leopardo donde μ = 60mm y σ = 10mm.

a) ¿Qué proporción de la población de huesos presenta un largo mayor a 66mm?

$$Z = \frac{66mm-60mm}{10mm} = 0.60$$

P (Xi>66mm) = P (Z>0.60) = 0.2743 o 27.43 %

b) Si la población esta compuesta por 2000 huesos, ¿cuántos de ellos van a ser mayores que 66mm?

(0.2743) (2000) = 549

c) ¿Que proporción de la población es menor que 66mm?

P (Xi < 66mm)= 1.000-P(Xi>66mm) = 1000 – 0.2743 = 0.7257

d) ¿Que proporción del área bajo la curva cae a la derecha de 77.5 mm?

$$Z = \frac{77.5mm-60mm}{10mm} = 1.75$$

P (Xi > 77.5 mm) = P (Z> 1.75) = 0.0401 o 4.01 %

e) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar aleatoriamente desde esta población un hueso que mida entre 66 y 77.5 mm de largo?

P (66mm < Xi < 77.5)= P (0.60 < Z < 1.75) = 0.2743 -0.0401 = 0.2342

Test estadístico para la normalidad:

También se llaman "test de Bondad de Ajuste para Normalidad". El objetivo es determinar si un set de datos o muestra proviene de una población con distribución normal.

Un adelanto: En estadística se trabaja planteando una Ho o hipótesis nula y una Ha o hipótesis alterna. En este caso las hipótesis son:

Ho: Los datos de esta muestra se distribuyen en forma normal

Ha: Los datos de esta muestra no se distribuyen en forma normal.

Para decidir frente a estas hipótesis se debe tener en cuenta lo siguiente: a) cada test estadístico produce un valor determinado, que tiene asociado un valor de probabilidad, b) el valor de probabilidad se compara con un valor prefijado: Por ejemplo $\alpha = 0.05$. Así:

- **Si P $\leq \alpha$, entonces se rechaza Ho.**
- **Si P > α , entonces fallamos en rechazar Ho.**

Aunque existen varios tests de normalidad, estudiaremos el test de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste. Este se fija en la forma de la distribución y no en su ubicación en el eje X. Esta prueba convierte las frecuencias relativas observadas a valores de Z y luego determina si esta distribución es normal o no. Esta prueba es también conocida con el nombre de **test de Lilliefors**. Veamos su aplicación en el siguiente ejemplo:

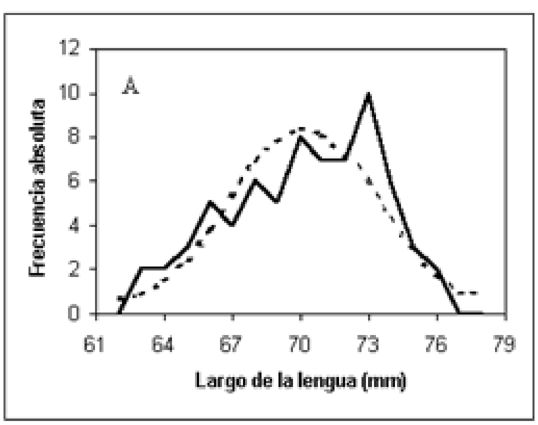
Largo (mm) de la lengua de Pumas salvajes capturados en los cerros de la Pampilla.

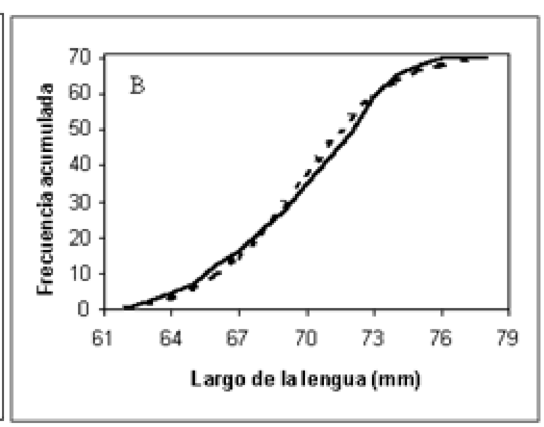
Intervalo	*Xi*	*fi*	*Fi*	rel *Fi*	Z	P(Z)	rel *Fi*	Di	Di'
< 62.5	62	0	0	0.0000	-2.32	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102
62.5 – 63.5	63	2	2	0.0286	-2.02	0.0115	0.0217	0.0069	0.0217
63.5 – 64.5	64	2	4	0.0571	-1.71	0.0219	0.0436	0.0135	0.0150
64.5 – 65.5	65	3	7	0.1000	-1.41	0.0357	0.0793	0.0207	0.0222
65.5 – 66.5	66	5	12	0.1714	-1.11	0.0542	0.1335	0.0379	0.0335
66.5 – 67.5	67	4	16	0.2286	-0.81	0.0755	0.2090	0.0196	0.0376
67.5 – 68.5	68	6	22	0.3143	-0.50	0.0995	0.3085	0.0058	0.0799
68.5 – 69.5	69	5	27	0.3857	-0.20	0.1122	0.4207	0.0350	0.1064
69.5 – 70.5	70	8	35	0.5000	0.10	0.1191	0.5398	0.0398	0.1541
70.5 – 71.5	71	7	42	0.6000	0.40	0.1156	0.6554	0.0554	0.1554
71.5 – 72.5	72	7	49	0.7000	0.70	0.1026	0.7580	**0.0580**	**0.1580**
72.5 – 73.5	73	10	59	0.8429	1.01	0.0858	0.8438	0.0009	0.1438
73.5 – 74.5	74	6	65	0.9286	1.31	0.0611	0.9049	0.0237	0.0620
74.5 – 75.5	75	3	68	0.9714	1.61	0.0414	0.9463	0.0251	0.0177
75.5 – 76.5	76	2	70	1.0000	1.91	0.0256	0.9719	0.0281	0.0005
76.5 – 77.5	77	0	70	1.0000	2.21	0.0145	0.9864	0.0136	0.0136
> 77.5	78	0	70	1.0000	2.52	0.0136	1.0000	0.0000	0.0000

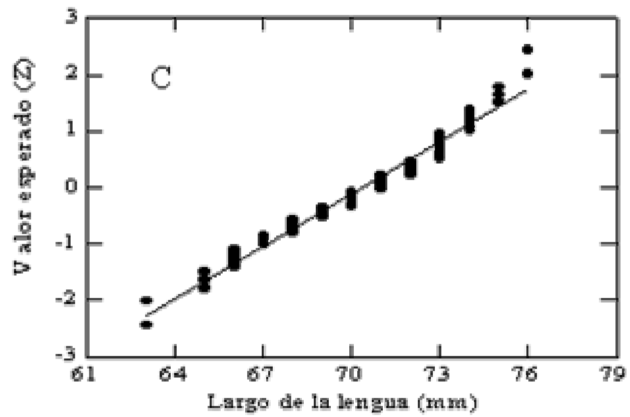
PROTOCOLO. Cada vez que se va a examinar la normalidad de un set de datos siga este protocolo:

1.- Inspección visual de los datos:

A continuación se muestran tres formas de examinar visualmente los datos. A) La distribución absoluta observada se compara con una distribución normal. B) La distribución acumulada observada se compara con la distribución acumulada esperada. C) Los datos individuales se grafican v/s los valores esperados de la distribución de Z:







2. Test de bondad de ajuste para normalidad:

a) Organizar los datos en una tabla de frecuencia (ver arriba)

b) Calcular la Frecuencia relativa acumulada: [rel *Fi* = (Fi * 1)/n]

c) Calcular la frecuencia relativa acumulada esperada rel Fi $_{(esp)}$:

i) Zi = (Lim. superior. Interv. – Media)/ DS. (En el ejemplo: Media = 70.17; DS = 3.31)

ii) Buscar la probabilidad P asociada a Z, usando la Tabla de Z de Zar:

iii) Calcular la rel F acumulada esperada usando P(Z).

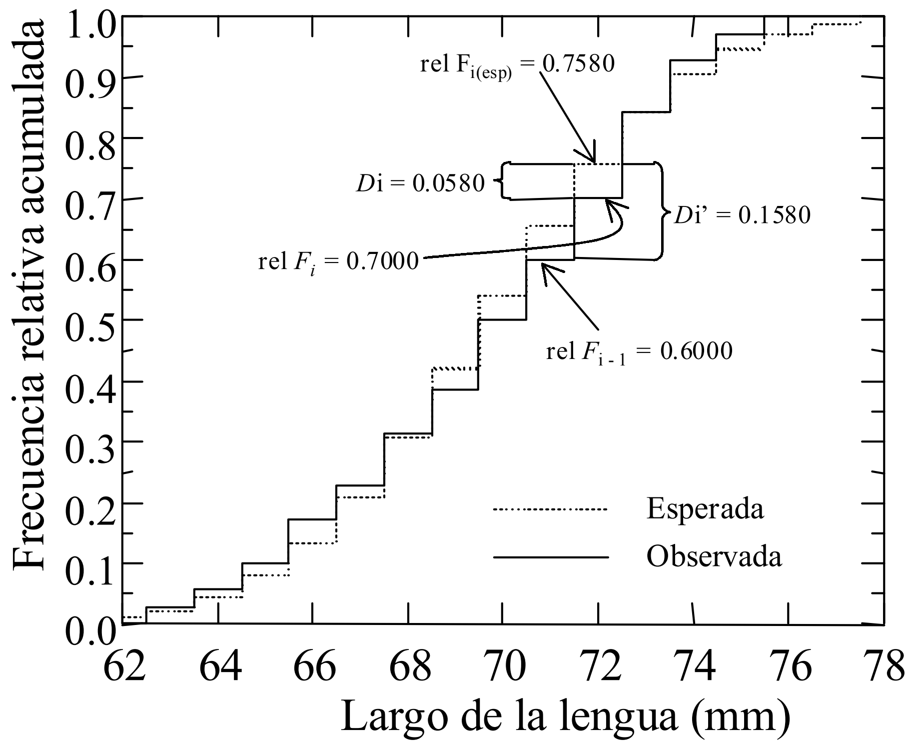
Recordar que la Tabla B.2 de Zar (1999) da las proporciones del lado derecho de la curva normal (o sea, P(Z < un valor dado). Debido a que la curva normal es simétrica, el lado izquierdo contiene las mismas proporciones. De esta manera cuando P(Z < -1.71) = P(Z > 1.71), el valor de P se obtiene directamente de la tabla. Pero si el valor de Z es positivo entonces el valor de la frecuencia relativa acumulada esperada es igual a 1.0000 menos el valor de la tabla. Por ejemplo de la tabla de arriba:

P(Xi < 70.5) = P(Z < 0.10) = 1.0000 – P(Z > 0.10) = 1.0000 – 0.4602 = 0.5398

iv) Calcular las diferencias entre las frecuencias relativas acumuladas:

$Di = |\text{rel } F_i - \text{rel } F_{i(esp)}|$ y $Di' = |\text{rel } F_{i-1} - \text{rel } F_{i(esp)}|$

El test estadístico es D = max [(max Di), (max Di')]. El valor crítico para este test es $D_{\alpha,n}$ y se encuentra en la Tabla B.9 de Zar (1999). Si $D \geq D_{\alpha,n}$ entonces se rechaza la Ho.



Representación gráfica del test de Kolmogorov-Smirnov de bondad de ajuste para normalidad. Se muestra porque es necesario examinar una frecuencia observada contra una frecuencia esperada. Ambas distribuciones se presentan en forma de escalera, en que cada escalón corresponde a un intervalo de clase. Lo que se requiere es detectar el valor máximo de desviación entre ambas frecuencias. Mediante el cálculo de *D*i y *D*i' se examinan las distancias verticales a la izquierda y a la derecha de cada escalón.

En este ejemplo Dmax = 0.1580 y $D_{0.05,\ 70}$ = 0.15975, por lo tanto no se rechaza Ho y concluimos redactando una frase:

"Los datos de largo de lengua de Pumas capturados en la Pampilla se ajustan a una distribución normal (Test de Lilliefors P> 0.05)".

Existen varios programas estadísticos en los cuales se puede poner a prueba la normalidad de los datos. En este curso iremos poco a poco, mostrando como se pueden realizar pruebas estadísticas utilizando el programa SYSTAT. Los pasos para aplicar el test de Lilliefors en SYSTAT son:

1. Los datos originales (no en tablas de frecuencias) deben estar ordenados en columnas. Una columna para cada set de datos.

2. La ruta para aplicar el Test de Lilliefors siguiendo las opciones de ventana es:

a) Statistics > Nonparametrics Tests > One sample KS.

b) Seleccionar la(s) variable(s) que se desea(n) examinar. En la ventana Options: seleccionar Lilliefors presionar OK.

c) El resultado del test se muestra en la pantalla principal (Main) del programa:

```
Kolmogorov-Smirnov   One   Sample   Test   using   Normal(0.00,1.00)
distribution

Variable  N-of-Cases   MaxDif   Lilliefors Probability

   HOJAS   50.00000    0.08229        0.51372
```

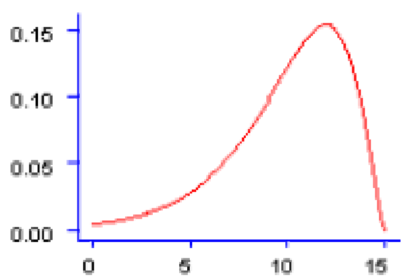
(OJO: no representan los datos del ejemplo discutido anteriormente)

Los datos corresponden al tamaño de una extraña planta cultivada en algunas casas de estudiantes de BM. Los botánicos la han identificado, por el momento, con el nombre de *Cannabis sativa*. SYSTAT informa para la variable: *n*, Dmax y la probabilidad para el test. En este caso P>0.05. Por lo tanto:________________________.

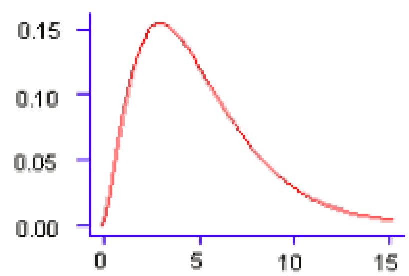
Concepto de Sesgo (Skewness) y Curtosis (Kurtosis):

Los poligonos de frecuencia suelen presentar como curvas para que puedan analizarse en términos de probabilidad y visualizar su grado de dispersión. Dos elementos son esenciales para estas curvas o polígonos de frecuencias: la simetría y la curtosis.

El sesgo o "**asimetría**" (**g_1**) es una estadística necesaria para conocer cuanto se parece nuestra distribución a una distribución normal y constituye un indicador del lado de la curva donde se agrupan los datos. Si este indicador es 0, la curva es perfectamente simétrica. Cuando es positiva quiere decir que hay más valores agrupados hacia la izquierda de la curva (por debajo de la media). Cuando es negativa significa que los valores tienden a agruparse hacia la derecha de la curva (por encima de la media).

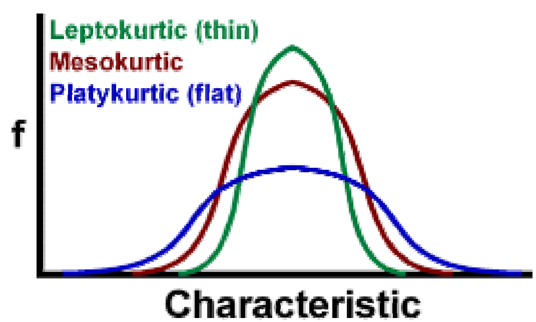


Curva segada a la izquierda o sesgo negativo



Curva sesgada a la derecha o sesgo positivo

La curtosis (**g_2**) es un indicador del grado de apuntamiento de nuestra curva, es decir que tan plana o apuntada es. Cuando es 0, significa que se trata de una curva normal. Si es positiva, quiere decir que la curva o distribución o polígono es más apuntada o levantada. Si es negativa, quiere decir que es más plana..



Formas de curvas con diferentes grados de curtósis o apuntamiento.

En resumen

Asimetría:

$g_1 = 0$, tenemos una distribución simétrica

$g_1 > 0$, tenemos un sesgo positivo (la cola se extiende en la dirección +)

$g_1 < 0$, tenemos un sesgo negativo (la cola se extiende en la dirección -)

Curtosis

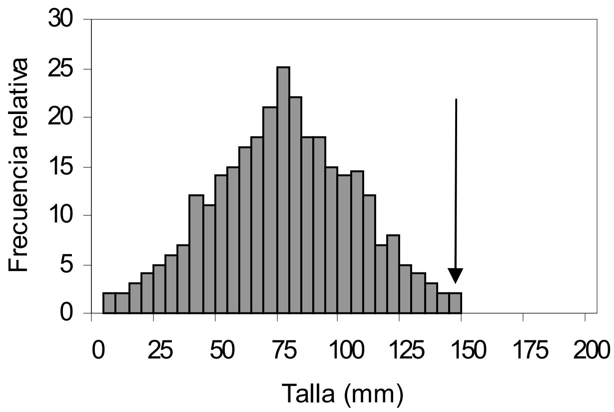
$g_2 = 0$, distribución mesocúrtica, datos distribuidos en forma normal.

$g_2 > 0$, distribución leptocúrtica, muchos valores alrededor de la media y las colas y pocos entre ellas

$g_2 < 0$, distribución platicúrtica, los valores entre la media y las colas están sobre-representados.

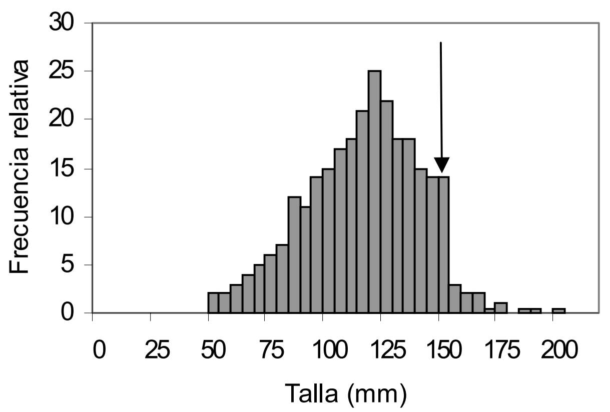
Utilidad de los estadísticos de sesgo y curtosis:

Es normal que en la mayoría de los textos de Bioestadística no se incluya algún ejemplo que sirva para ilustrar la aplicación de los conceptos de sesgo y curtosis. En ecología, por ejemplo, cuando se estudian procesos de competencia, depredación y efectos de factores físicos o químicos, puede ser de gran utilidad determinar la curtosis a través del tiempo. Esto permitiría, por ejemplo, tener una indicación de la mortalidad diferencial, como se plantea en los siguientes ejemplos:



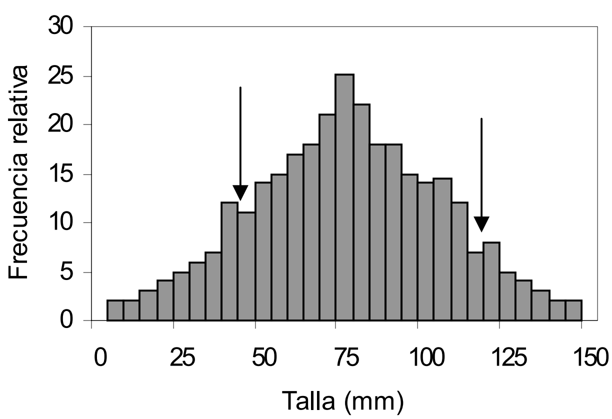
1. Sesgo (skewness):
La figura muestra la distribución de tallas de una población de anfípodos Hyale sp. de una poza del intermareal, sujeta a los procesos naturales de control poblacional. Las tallas se distribuyen en forma normal, hasta que ingresa un nuevo depredador al sistema por lo que se espera que la distribución de tallas cambie después de un tiempo. La flecha indica la talla mínima a la que son comidos los anfípodos.

Media = 75.5 mm
g_1 = -0.03
n = 5000



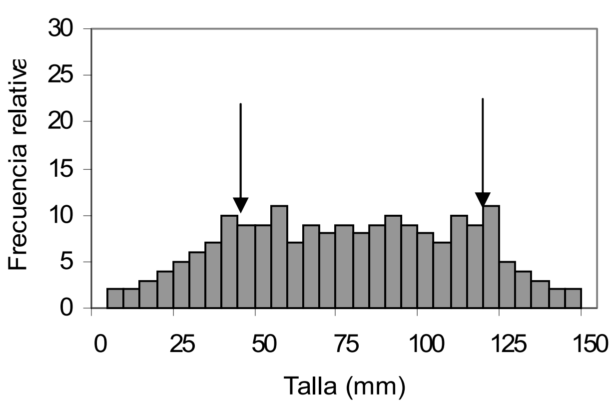
Este nuevo depredador come en forma selectiva individuos de talla superior a 140 mm. Así, la mortalidad de los individuos superiores a esta talla, será mayor que los individuos que aún no crecen lo suficiente para ser comidos por el nuevo depredador. La distribución se vuelve asimétrica y el sesgo aumenta. Al principio el sesgo se vuelve negativo porque hay un exceso de animales menores que la media y hay más tallas individuales que se desvían negativamente de la media. Teoricamente, se espera que si la situación continúa, la media será aún más pequeña que la moda y el sesgo se volverá positivo.

Media = 125.5 mm
g_1 = -0.27
n = 4330



2. Curtosis:
Seguimos con el ejemplo de Hyale. En este nuevo caso, el nuevo depredador come en forma selectiva animales dentro de un rango de tallas que va de 45 a 120 mm. Antes de eso la distribución de tallas se distribuía en forma normal.

Media = 75.5 mm
g_2 = -0.02
n = 5000



Al cabo de un periodo de tiempo en que los anfípodos son consumidos, se produce un descenso en el número de aquellos que están alrededor de la talla promedio. Los más chicos y los más grandes no son afectados. La curtosis declina y la forma de la distribución de tallas se vuelve plana en el centro (platicúrtica).

Media = 75.5 mm
g_2 = -1.15
n = 1800

PONIENDO A PRUEBA HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

Como ya se ha indicado anteriormente una de las mayores metas en los análisis estadísticos es lograr inferencias sobre una población examinado una muestra de esta población. De esta manera se empieza realizado una declaración sobre la población, esto es llamado **Hipótesis Nula** (abreviada Ho), ya que expresa el concepto de "NO DIFERENCIA". Por ejemplo, una hipótesis nula sobre la media de una población (μ) debe decir indicar que μ no es diferente que cero, es decir: **Ho: μ = O.**

O también es posible que queramos hipotetizar que la media de la población no es diferente (o es igual) a 3.5 cm, entonces en este caso podemos escribir que: **Ho: 3.5cm**.

Si concluimos que la hipótesis nula es falsa, entonces una **Hipótesis Alternativa** (abreviada Ha) es asumida como verdadera. Se debe postular una hipótesis nula y una alternativa para cada test estadístico que es llevado a cabo, y todos los posibles resultados son cubiertos por este par de hipótesis.

*"Es importante tener en cuenta que las hipótesis deben ser establecidas **ANTES** que los datos sean recolectados. Proponer hipótesis después de la examinación de los datos puede invalidar un test estadístico."*

De esta forma una vez que se tienen los datos se deben seguir los siguientes pasos:

A. Someter los datos a análisis estadístico.

B. La función del test estadístico es generar un valor (el valor de un test estadístico), el cual es convertido vía una tabla o un algoritmo (computador) a un valor de probabilidad.

C. Interpretación del test estadístico y su probabilidad.

¿Qué tan diferentes necesitan ser dos valores para que podamos concluir, al menos TENTATIVAMENTE, que son diferentes?

Por esto es necesario un criterio objetivo para rechazar o no rechazar una hipótesis nula de un determinado test. Deben existir algunos **puntos prácticos** en los que nos situemos convencidos de rechazar o no rechazar una hipótesis. En este sentido la probabilidad asociada con el test estadístico que hemos aplicado se encarga de tomar la decisión por nosotros.

La teoría de probabilidades nos provee de los elementos teóricos para estar ciertos de que los resultados de una muestra reflejan los resultados en la población.

La probabilidad de que un evento ocurría oscila entre 0 y 1 (0 = evento imposible y 1 = siempre ocurre este evento). Para probar una hipótesis sobre la media, el investigador debe evaluar si es alta o baja la probabilidad de que la media de la muestra esté cerca de la media de la distribución muestral. Si es baja, el investigador dudará en generalizar a la población o si es alta, el investigador podrá hacer generalizaciones.

¿Pero que tan bajo o alta debe ser la probabilidad para que podamos decir que la media de la muestra esta cerca o lejos de la media de la población (lo que conlleva rechazare o no rechazar la hipótesis nula)?

Aquí es donde entra en juego el **nivel de significancia** o **nivel alfa** (denotado por α**).**

En general una probabilidad de 0.05 o 5% (a veces se utiliza también 0.01 o 1%) es comúnmente utilizada como nivel de significancia.

¿Porqué utilizamos α= 0.05?

Podemos verlo con el siguiente ejemplo, si tenemos 95 de 100 boletos de una rifa de un automóvil, ¿tendríamos confianza en que ese auto va a ser nuestro?. Seguramente sí. Aunque no es una certeza total ya que está no existe en el universo. De esta manera un nivel de significancia de 0.05 implica que el investigador tiene 95% de seguridad para generalizar sin equivocarse, y sólo 5% en contra. En términos de probabilidad, 0.95 y 0.05, ambos suman la unidad (universo), de esta manera:

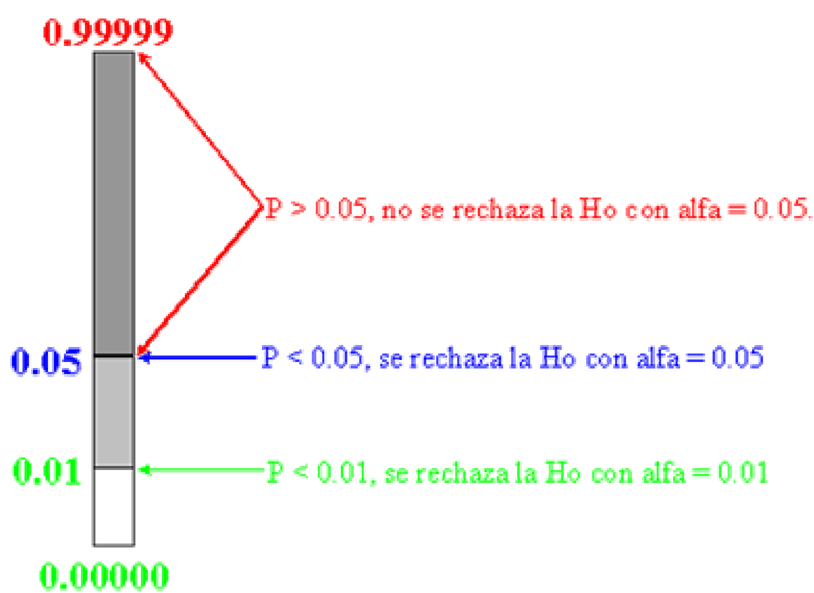
En un test estadístico, la matriz de decisión se reduce a dos posibilidades:

1. Si la probabilidad es > que el nivel de significancia, entonces OPERACIONALMENTE, concluimos que los datos APOYAN la Ho. Esto es, que la Ho es "verdadera". No se obtuvo significancia estadística.

2. Si la probabilidad generada es ≤ que el nivel de significancia, entonces concluimos que no es verdad que la Ho es correcta. De este modo la Ho es RECHAZADA.

Mientras menor sea la probabilidad generada (0.0001 vs 0.049), mayor confidencia se tiene para rechazar la Ho.

Cuando la Ho es rechazada, la Ha es APOYADA pero <u>NO APROBADA</u>. La clave esta en el hecho que el método científico no aprueba hipótesis.



La barra vertical representa la distribución poblacional en términos probabilísticos de la variable que estamos midiendo. Dentro de esta distribución se indica las diferentes regiones de aceptación o rechazo (no a escala) de la Ho.

¿Es posible cometer un error al realizar estos procedimientos de estadística inferencial?

Nunca podemos estar completamente seguros de nuestra estimación. Trabajamos con altos niveles de confianza o seguridad y aunque el riesgo es mínimo, podría cometerse un error. Los resultados posibles al probar una hipótesis son:

1- Aceptar un hipótesis verdadera (decisión correcta).

2- Rechazar una hipótesis falsa (decisión correcta).

3- Aceptar una hipótesis falsa (error conocido como el tipo II o beta).

4- Rechazar una hipótesis verdadera (error conocido como de tipo I o error alfa).

Ambos errores son indeseables y puede reducirse la posibilidad de que se presenten mediante: Muestras representativas, inspección cuidadosa de datos, selección de pruebas estadísticas apropiadas, y mayor conocimiento de la población con la que estamos trabajando.

Los dos tipos de errores en los Test de Hipótesis:

	Si Ho es verdadera	***Si Ho es falsa***
Si Ho es rechazada	**Error tipo I (alfa)**	No hay error
Si Ho no es rechazada	No hay error	***Error tipo II (beta)***

Error tipo I: Un error tipo I sería rechazar la Ho de que la temperatura corporal media es de 37°C, cuando su media realmente es de 37°C. Usualmente ese error no es un mal cálculo ni un paso equivocado; es un error que puede ocurrir cuando por casualidad ocurre un suceso raro.

Error de tipo II: En el ejemplo anterior un error de tipo II sería no rechazar la Ho (media = 37°C), cuando en realidad es falsa, es decir la media no es igual a 37°C.

Test de bondad de ajuste de chi-cuadrado

Frecuentemente se da el caso que a partir de datos en escala nominal "**observados**" se desea saber si la población de éstos, se ajustan a una determinada distribución teórica "**esperada**". Por ejemplo un genetista realiza una cruza de plantas, donde espera obtener una proporción fenotípica de sus flores de 3:1 (flores amarillas y verdes respectivamente). Quizás la proporción observada de esta cruza es de 84: amarillas : 16 flores verdes. A partir de la distribución teórica (3:1), con estas 100 plantas observadas el hubiese esperado una proporción de 75: amarillas : 25 flores verdes. ¿La distribución observada se ajusto o no se ajusta a la distribución esperada?.

Planteemos las hipótesis estadísticas:

Ha: las frecuencias observadas son iguales a las frecuencias esperadas.

Ha: las frecuencias observadas son diferentes a las frecuencias esperadas.

El cálculo del siguiente estadístico llamado Chi-Cuadrado es usado como medida de cuan lejos la distribución observada se encuentra de la distribución esperada teóricamente:

$$X^2 = \sum \frac{(fi - \hat{fi})^2}{\hat{fi}}$$ o en palabras:

$$X^2 = \sum \frac{(\text{frecuencia esperada-frecuencia observada})^2}{\text{frecuencia esperada}}$$

De esta manera en el ejemplo de las plantas el valor de chi cuadrado es:

$$(84\text{-}75)^2/75+(16\text{-}25)^2/25 = 4.320.$$

¿Contra que comparamos este valor?: contra un valor crítico de $X^2_{\alpha,\nu}$. Este se ubica en la tabla respectiva con grados de libertad de : ν **= k -1** (k es el número de clases que se están comparando).

En este caso el valor crítico de $X^2_{0.05,3}$ = 3.841.

Si el valor calculado es mayor que el valor crítico, se rechaza la Ho.

Es este caso Rechazamos Ho, ya que la probabilidad asociada al valor calculado 4.320 es menor a 0.05 (alpha). Es decir: $0.025<P<0.05$.

Podemos concluir que la proporción de flores amarillas : verdes observadas no se ajusta a la proporción de flores amarillas : verdes esperadas para un cruzamiento de este tipo (chi-cuadrado bondad de ajuste $0.025<P<0.05$).

Errores de Chi-cuadrado

1. Efecto de frecuencia observada pequeña:

Fe = 20.2 y Fo = 22.0; $X^2 = (22-20.2)^2/20.2 = 0.162$

Fe = 0.2 y Fo = 2.0; $X^2 = (2.0-0.2)^2/0.2 = 16.2$

"A pesar que la diferencia absoluta es igual en ambos casos, Chi-cuadrado es 10 veces más grande en el segundo caso." ¿Cuáles pueden ser las consecuencias de esta situación?.

En general se recomienda aplicar este test cuando tenemos frecuencias observadas mayores 5.

2. Problemas de continuidad: Corrección de Yates para continuidad.

a) Permite que los datos de enumeración discreta se aproximen a la distribución continua de X^2

b) Sólo se usa cuando G.L. = v = 1, o sea cuando se tienen dos clases

c) Siempre disminuye el valor de X^2

$$X^2 = \sum \frac{([fi - \hat{fi}] - 0.5)^2}{\hat{fi}}$$

Si no se corrige, el efecto de discontinuidad incrementa artificialmente el valor de X^2 lo suficiente para ocasionar el rechazo de una Ho verdadera.

3. Es fundamental tener en cuenta que el estadístico chi-cuadrado es calculado usando las frecuencias observadas. No es valido convertir los datos a porcentajes e intentar realizar el cálculo.

Subdividiendo el análisis de Chi cuadrado:

Tenemos un cruzamiento dihíbrido ente semillas que arrojó las siguientes frecuencias observadas:

	Amarillo suave	Amarillo	Verde suave	Verde	*n*
F obs	152	39	53	6	250
F esp	140.625	46.875	46.875	15.2625	

Ho: La muestra viene de una población que tiene proporciones de 9:3:3:1 de semillas amarillas suaves, amarillas, verdes suaves y verdes.

Ha: La muestra viene de una población que **no** tiene proporciones de 9:3:3:1 de semillas amarillas suaves, amarillas, verdes suaves y verdes.

Gl= k-1= 3; X^2= 0.9201 + 1.3230 + 0.80032 + 5.9290 = 8.972

$X^2_{0.05,\,3}$ = 7.815 Se rechaza Ho.

Las frecuencias observadas en este cruce dihibrido se alejan significativamente del modelo 9:3:3:1 (X^2,0.025 < P < 0.05)

Pero a pesar de que Ho ha sido rechazada, quizás podemos estar interesados en probar si la diferencia significativa entre lo observado y lo esperado esta concentrado en alguna clase en particular, o si la diferencia fue provocada por el efecto los datos en todas las clases.

Al observar los cálculos de Chi cuadrado, nos damos cuenta que la última clase entrega el mayor aporte al valor final de Chi-cuadrado (5.929), de esta forma es posible realizar el análisis dejando fuera a esta clase momentáneamente, y formular las siguientes hipótesis:

Ho: La muestra viene de una población con proporciones de 9:3:3 en sus primeros tres fenotipos.

Ho: La muestra viene de una población sin proporciones de 9:3:3 en sus primeros tres fenotipos.

Gl= k-1= 2; X^2= 0.9201 + 1.3230 + 0.80032 = 2.544

$X^2_{0.05,\,3}$ = 5.991 No se rechaza Ho.

Las frecuencias observadas provienen de una población que presenta sus primeras tres frecuencias fenotípicas de 9:3:3 (X^2,0.25 < P < 0.50).

Ahora podemos unir las tres primeras frecuencias fenotípicas y compararlas con la última para verificar si ésta es la que provoca la diferencia significativas contra los valores esperados:

Ho: La muestra viene de una población con proporciones de 1:15 de semillas verdes y otros fenotipos de semillas.

Ho: La muestra **no** viene de una población con proporciones de 1:15 de semillas verdes y otros fenotipos de semillas.

Gl= k-1= 1; X^2= 5.929 + 0.3953 = 6.324

$X^2_{0.05,\,3}$ = 3.841 Se rechaza Ho.

Las muestras no provienen de una población con proporciones esperadas de 1:15 de semillas verdes y otros fenotipos de semillas (X^2, 0.01 < P < 0.025).

Atención: ¿Le falta algo a este último cálculo?.

Heterogeneidad de Chi cuadrado:

A veces se da el caso en que un determinado número de set de datos están siendo probados en contra de una misma hipótesis nula, y nosotros deseamos decidir si es posible combinar todos los datos con el propósito de desarrollar un único análisis de Chi-cuadrado.

Un ejemplo para demostrar el uso de esta herramienta, lo proveen los datos de una serie de 10 experimentos realizados por Mendel.

Los datos de cada experimento ponen a prueba la Ho de que las arbejas provienen de una población con una proporción de 3:1. **Debido a que la Ho no es rechazada en ninguno de los 10 casos**, entonces es razonable poner a prueba la Ho de que las 10 muestras provienen de la misma población.

Exp.	Amarillo	Verde	Total(n)	X^2	GL
1	25	11	36	0.5926	1
2	32	7	39	1.0342	1
3	14	5	19	0.0175	1
4	70	27	97	0.4158	1
5	24	13	37	2.0270	1
6	20	6	26	0.0513	1
7	32	13	45	0.3630	1
8	44	9	53	1.8176	1
9	50	14	64	0.3333	1
10	44	18	62	0.5376	1
Total de X^2				**7.1899**	**10**
X^2 agrupado	**355**	**123**	**478**	**0.1367**	**1**
X^2 Heter.				**7.0532**	**9**

0.5 < P < 0.75

Pasos a seguir:

1. **X^2 agrupado:** Se calcula para decidir si todas las muestras provienen de la misma población 3:1. Aquí la Ho es la misma que para cada experimento por separado:

Ho: Las frecuencias observadas se ajustan a la proporción esperada de 3:1.

Ha: Las frecuencias observadas no se ajustan a la producción de 3:1.

Consultando la tabla de X^2 encontramos que el valor crítico para GL = 1, es igual 3.841, por lo tanto no se rechaza Ho.

2. **X^2 para heterogeneidad:** Se calcula para decidir si las diez muestras provienen de la misma población. La prueba de heterogeneidad entre replicas del test de bondad de ajuste, se basa en que la suma de valores individuales de X^2 es en sí mismo un valor de Chi-cuadrado. Aquí la Ho es:

Ho: Las diez muestras provienen de la misma población (son homogéneas).

Ha: Las diez muestras provienen de al menos dos poblaciones diferentes (son homogéneas).

Es este ejemplo la diferencia entre el valor de X^2 total y X^2 agrupado es de 7.053 con Gl= 10-1 = 9. Este valor corresponde a **X^2 de heterogeneidad**. Consultando la tabla de Chi-cuadrado se obtienen la misma probabilidad, y basado en esto no se rechaza la Ho. Es decir las 10 muestras provienen de una misma población y se justifica que se agrupen.

La corrección de Yates solo debe ser aplicada una vez que se ha determinado que los datos se pueden agrupar. En este ejemplo se debe usar X^2c = 0.128 en vez de X^2 = 0.137.

Consideraciones importantes en el Test de Heterogeneidad:

1. Se puede mal interpretar el resultado de X^2 agrupado:

    a) Si el valor para X^2 agrupado es bajo, se podría pensar en rechazar la Ho.

    b) Pero antes de eso se debe considerar la probabilidad asociada a **X^2 de heterogeneidad**. Y si la probabilidad asociada a este valor es <0.05, entonces si se debe rechazar la Ho.

    c) En este último caso, no se justifica agrupar los datos.

2. Aumentando el poder de análisis:

En ninguno de los casos (Réplicas) del siguiente ejemplo se pudo rechazar la Ho. Pero que pasa si se demuestra homogeneidad y se puede aumentar el tamaño muéstrela lo suficiente para rechazar la Ho. Analicemos el siguiente ejemplo:

Observaciones del uso de la tenaza derecha o izquierda para manejar el alimento en *Petrolisthes laevigatus*. Los datos entre paréntesis corresponden a las frecuencias esperadas.

<u>Hipótesis:</u>

Para cada muestra y para los datos agrupados:

Ho: La población muestra una misma proporción de Petrolisthes laevigatus que usan la tenaza derecha y la izquierda.

Ha: La población no muestra la misma proporción de Petrolisthes laevigatus uso de las tenazas.

Para el test de heterogeneidad:

Ho: Todas las muestras provienen de la misma población.

Ha: Las muestras provienen de a lo menos, dos poblaciones distintas.

A partir de una muestra de datos que se encuentran en escala nominal realizar inferencias de si la población.

Exp.	Diestras	Zurdas	Total (n)	X^2	Gl
1	15 (11.00)	7 (11.00)	22	2.9091	1
2	16 (12.00)	8 (12.00)	24	2.6667	1
3	12 (8.50)	5 (8.50)	17	2.8824	1
4	13 (9.00)	5 (9.00)	18	3.5556	1
Total de X^2				12.0138	4
X^2 agrupado	56 (40.50)	25 (409.50)	81	11.8642	1
X^2 Heter.				0.1496	3

$0.975 < P < 0.99$

Aquí interesa determinar si los datos son homogéneos, por lo tanto nos interesa la probabilidad asociada a heterogeneidad. Debido a que la probabilidad es mayor que 0.05, se justifica agrupar los cuatro sets de datos y luego calcular X^2_c.

¿De esta forma cual esta conclusión final en este experimento? ¿Cual es la tenaza preferida de estos cangrejos?.

Test de Kolmogorov-Smirnov: Prueba de ajuste de una muestra para variables discretas.

Puede ser utilizado como una alternativa para Chi-cuadrado y tiene tablas propias. Puede ser utilizado cuando existen frecuencias observadas pequeñas. Es excelente para el caso de los datos de escala ordinal y nominal. Usa frecuencias acumuladas, pero el diseño experimental es muy importante: **"n debe ser múltiplo de k".** El estadígrafo del test es **"d max".**

$$|di| = (Fi - \hat{F}i)$$

Ejemplo: Un total de 35 poliquetos fueron utilizados para verificar cual era la preferencia de estos animales sobre sustratos con diferente grados de humedad.

Ho: Los poliquetos no muestran presencias por ningún sustrato en especial

Ha: Los poliquetos muestran preferencias por algún sustrato determinado.

	Grado de Humedad				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
F obs	8	13	6	6	2
F esp	7	7	7	7	7
F obs acum.	8	21	27	33	35
F esp acum.	7	14	21	28	35
$\mid di \mid$	**1**	**7**	**6**	**5**	**0**

$d_{max} = 7$; $(dmax)_{0.05,\ 5\ 35} = 7$

Entonces: Se rechaza Ho

Existe una preferencia de los poliquetos sobre un sustrato con un grado de humedad determinado (K-S, $0.02 < P < 0.05$).

Tablas de contingencia

En muchos casos se colectan datos de enumeración simultáneamente para dos variables, y se desea testear la hipótesis de que las frecuencia de ocurrencia las categorías de una variable son independientes de las frecuencias observadas en la segunda variable. Este tipo de datos se dice que son ordenados en una **tabla de**

contingencia. Es este tipo de análisis no se necesitan frecuencias esperadas a priori ya que éstas son calculadas a partir de las frecuencias de los datos observados.

El número de columnas en una tabla de contingencia es denotado c y el número de filas por r. Entonces una tabla está compuesta por r x c celdas.

Veamos un ejemplo de una tabla contingencia de 2 x 4:

	Color de pelo					
Sexo	**Negro**	**Café**	**Rubio**	**Rojo**	**TOTAL**	
Macho	32	43	16	9	100	R_1
Hembra	55	65	64	16	200	R_2
TOTAL	87	108	80	25	300	
	C_1	C_2	C_3	C_4		

C = columnas y R = filas.

En este test, la hipótesis nula es que las frecuencias observadas en las filas son independientes de las frecuencias observadas en las columnas. En el ejemplo entonces:

Ho: El color de pelo de los humanos es independiente del sexo en la población muestreada.

Ha: El color de pelo de los humanos es dependiente del sexo en la población muestreada.

Análisis de la tabla de contingencia:

La formula es: $$X^2 = \sum \frac{(fi - \hat{fi})^2}{\hat{fi}}$$

Los grados de libertad son: **Gl= (r-1)(c-1).**

Las frecuencias esperadas se calculan por:

$$F_{esp}\, ij = (Ri)(Cj)/N$$

Para el ejercicio anterior.

F_{11}= 100*87/300 = 29 — F_{21}= 200*87/300 = 55
F_{12}= 100*108/300 = 36 — F_{22}= 200*108/300 = 65
F_{13}= 100*80/300 = 16 — F_{23}= 200*80/300 = 64
F_{14}= 100*25/300 = 9 — F_{24}= 200*25/300 = 16

Entonces tenemos la siguiente tabla con los valores esperados en paréntesis:

		Color de pelo			
Sexo	**Negro**	**Café**	**Rubio**	**Rojo**	**TOTAL**
Macho	32 (29.00)	43 (36.00)	16 (26.67)	9 (8.33)	100
Hembra	55 (58.00)	65 (72.00)	64 (53.33)	16 (16.67)	200
TOTAL	87	108	80	25	300

Aplicando estos valores a la formula de Chi-Cuadrado:

X^2 = 0.3103+1.311+4.2667+0.0533+0.1552+0.6806+2.1333+0.0267 = **8.987**

Gl= (2-1)(4-1) = 3; $X^2_{0.05,3}$ = 7.815

Entonces se rechaza Ho.

El color de pelo en humanos no es independiente del sexo en la población muestreada (tabla de contingencia $0.025 < P < 0.05$).

Método especial simplificado para las tablas de contingencia de 2x2.

La tabla de contingencia de 2x2 es la que más comúnmente se usa.

Determinar si el siguiente requisito es verdadero.

$$\left| (f_{11})\,(f_{22}) - (f_{12})\,(f_{21}) \right| > N / 2$$

Si éste requisito se cumple, es necesario incluir la corrección de Yates para continuidad en el test de contingencia (el que actúa de manera conservadora):

$$X^2 = \frac{N\left(\left|(f_{11})(f_{22}) - (f_{12})(f_{21})\right| - N/2\right)^2}{(C_1)(C_2)(R_1)(R_2)}$$

Si el requisito de arriba no se cumple, entonces se elimina el termino (N/2).

En el método simplificado, la Frecuencia esperada no se calcula por separado. De esta manera, la determinación de X^2 es: a) más fácil y b) más cuidadosa.

Un aspecto de gran importancia en las tablas de contingencia es que necesita una frecuencia esperada mínima igual 5.

Prueba de heterogeneidad para tablas 2x2:

El principio es el mismo empleado para poner a prueba la heterogeneidad de replicas en el test de bondad de ajuste de X^2.

La Ho busca determinar si las distintas muestras provienen de una misma población. Veamos un ejemplo con una droga aplicada para mejorar la sobrevivencia en los tranques con Abalones, atacados por una bacteria maldita introducida por una desconocida mano negra. Se hicieron cuatro experimentos distintos en los cuales se puso a prueba la Ho de que la sobrevivencia de los animales era independiente de la administración de la droga "papaina". En los cuatro casos no fue posible rechazar las Ho. "Problemas de tamaño muestreal", sentencio un avispado estudiante de magíster.

Entonces sugirió un test de Heterogeneidad de para los cuatro experimentos considerados réplicas.

Ho: Las cuatro muestras son homogéneas.

Ha: Las cuatro muestras son heterogéneas.

Experimento 1

	Mueren	*Viven*	*Total*	
Con droga	9	15	24	$X^2 = 2.4806$
Sin droga	15	10	25	Gl = 1
Total	24	25	49	

Experimento 2

	Mueren	*Viven*	*Total*	
Con droga	13	12	25	$X^2 = 2.1222$
Sin droga	18	7	25	Gl = 1
Total	31	19	50	

Experimento 3

	Mueren	*Viven*	*Total*	
Con droga	12	13	25	$X^2 = 2.0525$
Sin droga	17	8	25	Gl = 1
Total	29	21	50	

Experimento 4

	Mueren	*Viven*	*Total*	
Con droga	10	14	24	$X^2 = 2.4522$
Sin droga	16	9	25	Gl = 1
Total	26	23	49	

Datos agrupados para Exp. 1-4

	Mueren	*Viven*	*Total*	
Con droga	44	54	98	$X^2 = 8.9262$
Sin droga	66	34	100	Gl = 1
Total	110	88	198	

Total de X^2	= 9.1075	Gl= 4
X^2 Agrupado	= 8.9262	Gl= 1
X^2 Heterogeneidad	**= 0.1813**	Gl= 3

$$X^2_{0.05,3} = 7.815$$

Por lo tanto, no se rechaza Ho con 0.975< P < 0.99

Este análisis demuestra que se justifica agrupar los datos de los cuatro experimentos, lo cual nos da la posibilidad de ejecutar un nuevo análisis con un tamaño muestreal mayor y estimar mejor si la "papaina", aislada por nuestra distinguida bioquímica "Yoya Martinez", sirve o no para contrarrestar los efectos de la bacteria maldita.

Ho: La sobrevivencia es independiente de la administración de la "papaina"

Ha: La sobrevivencia no es independiente de la administración de la "papaina"

	Mueren	*Viven*	*Total*
Con droga	44	54	98
Sin droga	66	34	100
Total	110	88	198

Recordar que la corrección de Yates se debe aplicar una vez que se ha determinado que es válido agrupar los datos.

De esta manera: $X^2_c = 8.183$; GL = y $X^2_{0.05,1} = 3.841$

¿Cuál es la conclusión estadística para este experimento?

Subdividiendo las tablas de contingencia:

En el primer de tablas de contingencia analizado (Tabla de 2 x 4), se determinó una dependencia del sexo de las personas y el color de pelo. Al examinar los valores de las frecuencias observadas es posible notar que la proporción de hombres rubios es marcadamente menor que las otras columnas. Esto nos lleva a pensar que gran parte de la significan cía lograda en este análisis esta provocada por la columna tres en la tabla. De esta forma es posible ignorar momentáneamente los datos para la columna tres y trabajar con una tabla de 2 x 3, la hipótesis sería:

Ho: La ocurrencia de pelo, negro, café y colorín es independiente del sexo.

Ha: La ocurrencia de pelo, negro, café y colorín no es independiente del sexo.

Sexo	**Negro**	**Café**	**Colorín**	Total
Hombre	***32***	***43***	***9***	84
Mujer	***55***	***65***	***16***	136
Total	***87***	***108***	***25***	220

X^2 = 0.245 con GL =2; valor crítico $X^2_{0.05,2}$ = 5.991

Entonces no se rechaza Ho con 0.75 < P< 0.9

De esta forma podemos concluir que los tres colores de pelo son independientes del sexo de los individuos. Ahora podemos hacer una tabla de 2 x 2, considernado en la columna el color rubio y en la otra los otros tres colores y formular la siguiente Ho:

Ho: La ocurrencia del color rubio y no rubio es independiente del sexo.

Ha: La ocurrencia del color rubio no es independiente del sexo.

Sexo	**Rubio**	**No rubio**	Total
Hombre	***16***	***84***	***100***
Mujer	***64***	***136***	***200***
Total	***80***	***220***	***300***

X^2_c = 7.928 con GL = 1; Valor crítico $X^2_{0.05,1}$ = 3.841

Entonces se rechaza Ho con 0.001< P< 0.005.

Mediante este tratamiento hemos confirmado nuestra sospecha de que entre los cuatro colores de pelo, el rubio se presenta con frecuencias relativas diferentes de las que ocurren con los otros colores. Estrictamente hablando, este procedimiento no se debe aplicar para poner a prueba hipótesis estadísticas y debe ser considerado solo como una guía para desarrollar nuevas hipótesis con nuevos datos.

PRUEBAS DE HIPÓTESIS PARA DOS MUESTRAS

Entre los procedimientos más comunes utilizados en la bioestadística, se encuentra la realización de comparaciones entre dos muestras, para inferir si existen diferencias entre dos poblaciones muestreadas. De esta forma es posible realizar pruebas de hipótesis para comparara diferentes estadísticos de dos poblaciones como son: la media, mediana, varianzas, coeficientes de variación e índices de diversidad.

Entonces podemos decir que el objetivo de la mayoría de las pruebas de hipótesis de dos muestras es hacer inferencias sobre parámetros poblacionales a través de la examinación de estadísticos calculados a partir de una muestra.

Distribución de student

Es una prueba estadística para evaluar si dos grupos difieren entre sí de manera significativa respecto a sus medias. Se simboliza por la letra "t". El test de Student o distribución t, fue introducida por William Sealy Gosset bajo el pseudónimo de "Student".

La distribución es análoga a la distribución de Z:

$$Z = \frac{Xi - \mu}{\sigma} \qquad\qquad t = \frac{Xi - \mu}{ES}$$

ES corresponde al error estándar de la muestra, el que puede ser definido por el error en el muestreo, o la desviación promedio de un estimado de los valores reales de la población.

$$ES = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \quad \text{o} \quad ES = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dependiendo de lo que nosotros estemos interesados en probar o inferir sobre la población, la prueba de hipótesis va a ser una o dos colas.

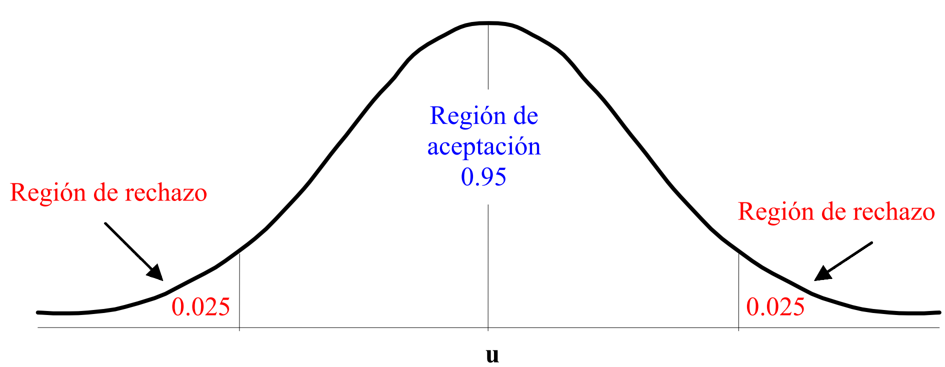
Test de hipótesis dos colas con respecto a la media

Este tipo de pruebas de hipótesis, solo nos interesa determinar si existe o no diferencia entre dos medias, por ejemplo:

Ho: Media A = Media B

Ha: Media A $\neq$ Media B

Áreas de aceptación y rechazo en t-test con dos colas:

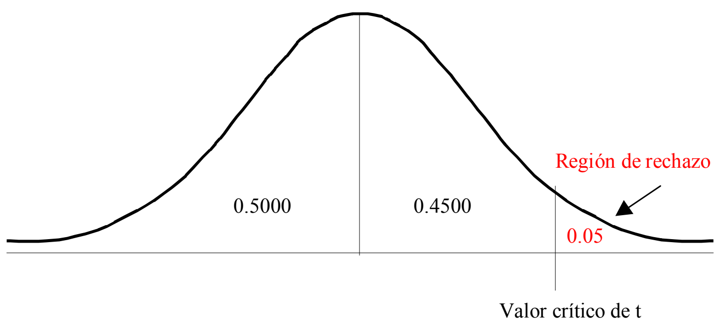


Test de hipótesis de una cola con respecto a la media

Este tipo de pruebas de hipótesis, se aplica cuando existen indicios de que no solo existen diferencias entre nuestras muestras, sino que también el tratamiento producirá una diferencia orientada en alguna dirección en particular. Es este caso la región de rechazo corresponde a un solo lado de la distribución, izquierdo a derecho dependiendo de la hipótesis que estemos poniendo a prueba. De esta forma existen dos tipos de test con una cola:

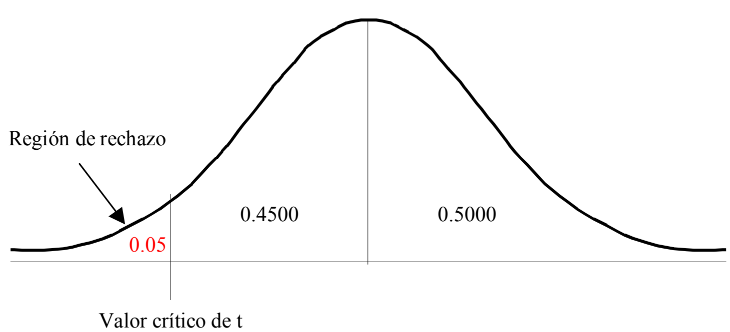
1.- La media del grupo al que se aplicó el tratamiento será más grande que la media del grupo control.

Ho: Media Control ≥ Media del tratamiento
Ha: Media Control < Media del tratamiento



2.- La media del grupo al que se aplicó el tratamiento será más pequeña que la media del grupo control.

Ho: Media Control ≤ Media del tratamiento
Ha: Media Control > Media del tratamiento



Comparación de la media dos grupos utilizando el test de Student:

Es un test que se utiliza en los casos que tenemos dos grupos en que las muestras son independientes entre los dos grupos que se están comparando.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Tenemos el resultado de un experimento en que 13 personas fueron divididas en dos grupos, un tenia 6 personas y el otro 7. Los miembros del primer grupo se les administro una determinada droga (B), y a los miembros del segundo grupo se les administro la droga G. A cada individuo se le tomó una muestra de sangre y se registró el tiempo que demoraba la muestra en coagularse.

Droga B	**Droga G**
8.8	9.9
8.4	9.0
7.9	11.1
8.7	9.6
9.1	8.7
9.6	10.4
	9.5
n_1 = 6	**n_2 = 7**
Gl_1 =5	**Gl_2 = 6**
Media $_1$ = 8.75 min	**Media $_2$ = 9.74 min**
SS_1 = 1.6950 min^2	**SS_2 = 4.0171 min^2**

La interrogante en el experimento era si la sangre de las personas tratadas con la droga B presentaba el mismo tiempo medio de coagulación que las personas tratadas con la droga G. En otras palabras:

Ho: Media Droga B = Media Droga G

Ha: Media Droga B $\neq$ Media Droga G

Para realizar esta comparación primero es necesario saber si las dos muestras provienen de una población normal, y si las dos poblaciones presentan varianzas iguales (homogéneas).

a) Prueba de normalidad: Ya sabemos como estimarla; ¿Con que test?.

b) Prueba de homocedásticidad de varianzas: Para verificar si las varianzas de los grupos que estamos comparando sin significativamente iguales o distintas debemos utilizar el test de Fisher, las hipótesis son:

Ho: Existe homocedásticidad de varianzas entre el grupo 1 y el grupo 2.
Ha: No Existe homocedásticidad de varianzas entre el grupo 1 y el grupo 2.
El estadístico F se calcula por:

$$F = \frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} \quad \textbf{o} \quad F = \frac{S_2{}^2}{S_1{}^2}$$

Siempre se debe tener presente que la varianza mayor debe ir en el numerador, y la menor en el denominador.

Los grados de libertad son: **Gl= n_1, n_2**, y el valor critico se busca en la tabla Fisher como : **$F_{0.05\ (2)}\ n_1, n_2$**

Una vez que se han verificado estos prerrequisitos podemos continuar con el t-test para muestras independientes, cuyo cálculo es análogo a la formula de Student ya presentada:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}$$ y los **Gl = $(n_1 + n_2) - k$**

$$s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}};$$ si n_1 y n_2 son iguales $$s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{2S_p^2}{n}}$$

$$S_p^2 = \frac{SS_1 + SS_2}{n + n - 2}$$

Realicemos los cálculos:

1) Asumiremos que los datos son normales:

2) Test de Fisher: S^2_1= 0.3390 y S^2_2= 0.6695

F = 0.6695/0.339 = 1.9749; $F_{0.05\,(2)\,7,6}$ = 5.70

3) t-test:

$$S_p^2 = \frac{1.6950 + 4.0171}{5 + 6} = \frac{5.7121}{11} = 0.5193\,\text{min}^2$$

$$S_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{0.5193}{6} + \frac{0.5193}{7}} = \sqrt{0.0866 + 0.0742} = 0.40\,\text{min}$$

$$t = \frac{8.75 - 9.74}{0.40} = -2.475 \ ; \ t_{0.05(2),\,11} = 2.201$$

Entonces rechazamos Ho.

El tiempo de coagulación de la sangre es diferente entre los grupos de personas tratadas con diferentes tipos de drogas (t-test 0.02 < P <0.05).

Requisitos para aplicar el t-test:

1. Ambas muestras son obtenidas al azar
2. Las muestras son independientes unas de otras
3. La variable debe ser continua
4. Las variables deber tener distribución normal
5. Las varianzas deben ser homocedásticas

La capacidad del t-test se relaciona directamente con el cumplimiento de sus requisitos. Si éstos no se cumplen existen otras alternativas (no parametricas). En general, si se aumenta el tamaño de las muestras el test tiende a ser más robusto. En el caso que se presenten dos medias de una población normal pero con varianzas heterocedásticas, es posible utilizar el "aproximado a t de Welch". El test y el cálculo de sus grados de libertad son:

$$t = \frac{\overline{X}_a - \overline{X}_b}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad \upsilon' = \frac{\left[\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left[S_1^2\right]^2}{n_1 - 1} + \frac{\left[S_2^2\right]^2}{n_2 - 1}}$$

Si ν no es un entero se aproxima al entro próximo más pequeño.

Afortunadamente, existen paquetes estadísticos (como Systat) que nos entrega el valor t para el caso de varianzas homocedásticas, y para los casos que tenemos varianzas heterocedásticas. De esta forma se paga por heterocedasticidad con una disminución en ν.

t-test para pares agrupados

En algunas ocasiones las muestras del grupo 1 se encuentran de alguna manera relacionadas con las observaciones del grupo 2. En este tipo de situaciones se dice que los datos se encuentran pareados. En este tipo de test, los datos originales de dos muestras no son analizados, sino más bien, las diferencias entre los miembros de cada par.

Por ejemplo: Queremos verificar la hipótesis nula de que el largo de la pata delantera y la pata trasera de los Pudú del zoológico, es el mismo. De esta manera los datos son tabulados en pares:

Ciervo	Pata Delantera (X_1)	Pata Trasera (X_2)	Diferencia ($d = X_1 - X_2$)
1	142	138	4
2	140	136	4
3	144	147	-3
4	144	139	5
5	142	143	-1
6	146	141	5
7	149	143	6
8	150	145	5
9	142	136	6
10	148	146	2

Las hipótesis estadísticas son:

$$\text{Ho: } \mu 1 - \mu 2 = 0 \quad \text{o} \quad \text{Ho: } \mu_d = 0$$
$$\text{Ha: } \mu 1 - \mu 2 \neq 0 \quad \text{o} \quad \text{Ha: } \mu_d \neq 0$$

El test se calcula por:

$t = \dfrac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}}$ donde S_d (error estándar) se calcula por: $S_{\bar{d}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\sum (di - \bar{d})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}}$

Los grados de libertad: **Gl = n-1**

En nuestro ejemplo tenemos:

n = 10
Gl = 10-1 = 9
d media= 3.3 cm $S^2_d = 9.3444\ cm^2$

$S_{\bar{d}} = \dfrac{\sqrt{9.3444}}{\sqrt{10}} = 0.97cm \qquad t = \dfrac{3.3cm}{0.97} = 3.402$; $t_{0.05(2),9}=2.262$

De esta forma concluimos que se rechazo Ho.

Se determinó que el largo de las patas delanteras difiere significativamente con el largo de las patas traseras de los Pudú del zoológico metropolitano (t-test 0.005 < P < 0.01)

El t-test de pares agrupados no asume con normalidad de los datos ni homocedásticidad de varianzas, pero si asume que las diferencias de los pares si se distribuyen de manera normal.

Un poco más de t-test

Hasta el momento solo hemos analizado casos en que se realizan comparaciones entre dos grupos. ¿Porque entonces no comparamos mas de dos grupos realizando repeticiones del t-test?.

La siguiente tabla relaciona el riesgo general de cometer un error de tipo I realizando comparaciones repetidas:

Número de Comparaciones	% Riesgo de cometer error Tipo I
2	5
3	12
4	20
6	37
8	51
10	63

La corrección de Bonferroni, puede ser aplicada para realizar este tipo de comparaciones múltiples. La corrección produce un cambio en el valor típico de α que elegimos. Normalmente trabajamos con α = 0.05 y para corregir sólo necesitamos dividir el valor de α por el número (P) de comparaciones o tests que haremos. Así obtenemos α' **=** α **/ P.**

Ejemplo: Comparación de las medias del control y los grupos experimentales en cinco experimentos ejecutados en cinco tiempos distintos. Se entregan los valores obtenidos en 5 t-test individuales.

	Medias			
Tiempo (min)	**Control**	**Experimental**	**t-test (dos colas)**	**Probabilidad**
0	50.3	52.1	0.35	>0.200
15	55.3	59.1	1.71	0.108
30	61.5	68.8	2.14	0.041
45	68.2	79.3	2.49	0.022
60	76.3	92.0	2.79	0.008

Para este caso P = 5, entonces α' = α/P = 0.05/5 = **0.01**

Por lo tanto las probabilidades obtenidas deben se ahora comparadas contra α' = 0.01.

¿Qué efecto produce esta corrección?....... investíguelo.

Test estadísticos No-Paramétricos.

Como ya hemos visto, la aplicación de cada test implica el cumplimiento de ciertos prerrequisitos, tales como hocedásticidad y normalidad en el caso del t-test de dos muestras. ¿Qué ocurre si no podemos cumplir con estos requisitos?.

Existen métodos estadísticos que no implican la estimación de la media varianza poblacional y no formula hipótesis sobre estos parámetros. Este tipo de procedimientos son llamados **test no-parametricos**. De esta manera no requieren una distribución de datos determinada, es por esto que también son llamados **test de distribuciones libres**.

Entonces los test no paramétricos pueden verse como una opción cuando no podemos cumplir con los prerrequisitos de los test paramétricos. Sin embargo estos últimos siempre van a ser mas potentes que los test no paramétricos (en los test no paramétricos existe una mayor probabilidad de cometer un error de tipo II).

Test de Mann-Whitney (U-Test):

En este test, como en muchos otros test no paramétricos, no se emplean directamente las mediciones realizadas, sino que las mediciones se clasifican o podríamos decir "rankean". Los datos pueden ser "rankeados" de menor a mayor o de mayor a menor. En la mayoria de los casos la utilización de rank en los datos tiende a comprimir la diferencia real entre los datos de una muestra.

Procedimientos para asignar ranks:

1. Sin grados atados:

Datos	77	78	80	86	87	90	91	93	97	98
Ranks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2. Con grados atados:

Datos	77	78	80	86	86	90	91	91	91	98
Ranks	1	2	3	4.5	4.5	6	8	8	8	10
	1	2	3	(4 + 5) / 2 = 4.5		6	(7 + 8 + 9) / 3 = 8			10

3. Con dos muestras de datos:

Grupo A	Grupo B
2.3	1.7
2.4	2.5
2.7	2.6
3.9	3.5
4.3	3.7
4.8	4.4

Transformados a rangos $\Rightarrow$

Grupo A	*Grupo B*
2	1
3	4
6	5
9	7
10	8
12	11

Pasos a seguir para aplicar Mann-Whitney (U-test):

1 Asignar ranas a todos los valores

2 Sumar los ranas de cada grupo y designarlos como R_1 y R_2.

3 Comprobar que:

$$R_1 + R_2 = \frac{[(N+1) \bullet N]}{2}$$

4 Calcular U y U´:

$$U = n_1 \bullet n_2 + \left[\frac{n_1 \bullet (n_1 + 1)}{2}\right] - R_1 \qquad \text{y} \qquad U' = n_{\cdot 2} \bullet n_1 + \left[\frac{n_2 \bullet (n_2 + 1)}{2}\right] - R_2$$

5 Comprobar que :

$$U_1 = (n_1 \bullet n_2) - U_2$$

Veamos un ejemplo:

Se desea saber si existen diferencias entre la altura de hombres y mujeres.

Ho: Los hombres y mujeres tiene la misma altura.
Ha: Los hombres y mujeres no tiene la misma altura.

Altura de hombres	**Altura de mujeres**	**Rangos hombres**	**Rangos mujeres**
193	175	1	7
188	173	2	8
185	168	3	10
183	165	4	11
180	163	5	12
178		6	
170		9	
n_1 = 7	**n_2 = 5**	**R_1 = 30**	**R_2 = 48**

* Datos ordenados de > a <.

Valores calculados: U = 33 ; U´= 2

Valor crítico: $U_{0.05(2),5,7}$= 30

Como 33>30, se rechaza Ho.

Existen diferencias significativas entre la altura de hombres y mujeres (U-test 0.01 < P < 0.02).

El test de Mann-Whitney con una cola.

En este tipo de casos, es necesario declarar que lado de la cola de la distribución Mann-Whitney es de nuestro interés. De esta manera debemos determinar si calcular U o U´.

Veamos la siguiente tabla:

	Ho: Grupo 1 $\geq$ Grupo 2 Ha: Grupo 1 < Grupo 2	Ho: Grupo 1 $\leq$ Grupo 2 Ha: Grupo 1 > Grupo 2
Rangos de < a >	**U**	**U´**
Rangos de > a <	**U´**	**U**

Ejemplo: Se registró la velocidad para escribir a maquina en dos grupos de estudiantes con y sin entrenamiento.

Ho: La velocidad (letras por minuto) es igual o menor en estudiantes con entrenamiento.

Ha: La velocidad (letras por minuto) es mayor en estudiantes entrenados.

Resultados :

$n_1 = 8$ $n_2 = 7$
$R_1 = 83.5$ $R_2 = 36.5$
$U' = 47.5$
$U_{0.05\,(1),7,\,8} = 43$
Como 47.5 > 43, entonces rechazamos Ho.

Los estudiantes entrenados son capaces de escribir mas rápido que lo que no poseen este entrenamiento (U-test 0.01 < P < 0.025).

El test de Mann-Whitney se puede usar con datos ordinales.

Ej. Estudio del estado de madurez escolar de dos grupos. La madurez escolar medida en una escala ordinal de I, II, III y IV. ¿Tienen ambos grupos igual estado de madurez?

G_1	I	I	I	I	II	II	II	II	II	III	III	IV
R_1	3.5	3.5	3.5	3.5	11	11	11	11	11	19	19	23
G_2	I	I	II	II	II	II	III	III	III	III	III	III
R_2	3.5	3.5	11	11	11	11	19	19	19	19	19	19

Desarrolle el ejercicio….

U-test para muestras grandes:

Si se pone atención en la tabla de valores críticos de Mann-Whitney (B.11), es posible ver que esta solo puede ser utilizada cuando el tamaño máximo para el grupo pequeño es de 20 muestras y como máximo para el grupo de mayor cantidad de datos de 40 muestras. Afortunadamente la distribución de U se aproxima a la distribución normal en muestras grandes. De esta manera para valores grandes de n_1 y n_2 debemos utilizar la corrección para la continuidad, realizando una transformación a valores de Z con la siguiente formula:

$$Zc = \frac{\left| U - \frac{(n_1)(n_2)}{2} \right| - 0.5}{\sqrt{\frac{(n_1)(n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

En el numerador se ha incluido el valor **0.5**, llamado corrector de continuidad. Esto se hace porque la distribución de U es discreta y la distribución de Z es continua. Así tenemos Zc, corregido para la continuidad. Una ves que tenemos Z obtenemos directamente su probabilidad desde la tabla Z, **pero debemos recordar que la tabla es de una cola**.

Ejemplo: Se desea verificar si la toxicidad del selenio es afectada por la temperatura del agua. Se registró el número de peces muertos en distintos estanques que tenían la temperatura del agua en 20 y 30 °C.

Ho: El número de peces muertos en agua contaminada a 20 y a 30 °C es el mismo.
Ha: El número de peces muertos en agua contaminada a 20 y a 30 °C no es diferente.
Resultados:

	Peces a 20 °C	**Peces a 30 °C**
n=	24	25
Suma de los rangos =	614	611

U = 286; U´ = 314. Utilizamos el valor de U más alto.

$$Zc = \frac{\left| 314 - \frac{(24)(25)}{2} \right| - 0.5}{\sqrt{\frac{(24)(25)(24 + 25 + 1)}{12}}} = \frac{13.5}{50} = 0.27$$

Recordemos que para P= 0.05, el valor critico de Z= 1.96. De esta manera debido a que Zc es menor que 1.96, se puede concluir que no se rechaza Ho.

Ahora podemos calcular cual es la probabilidad asociada a Zc = 0.27, la que tiene un valor de 0.3936. Pero la tabla de Z es para una cola, entonces para dos colas P (Zc=0.27) = 0.3936 x 2 = 0.7872.

Conclusión: La tasa de mortalidad de los peces cultivados a 20 y 30°C no varió significativamente, por lo tanto se demuestra que el selenio no cambia su poder toxico a estas temperatura probadas (Mann-Whitney, P = 0.7872).

Existen ocasiones en que tenemos grupos con muestras grandes y que además gran parte de los datos se encuentran atados. Se recomienda que en los casos donde un porcentaje $\geq$ 20% de los datos se encuentran atados, y en particular en las ocasiones donde se presentan "atos múltiples", o si el valor de Z calculado es demacrado cercano para ser significativo, es necesario aplicar una corrección, la cual va en el denominador de la aproximación a Z.:

$$\sqrt{\frac{n_1 \bullet n_2}{N^2 - N}\left[\frac{N^3 - N - \sum T}{12}\right]} \qquad \text{donde} \qquad \sum T = \sum (t^3 - t)$$

Veamos un ejemplo:

Grupo 1	Rangos	Grupo 2	Rangos
78	5	55	1
79	7.5	56	2
84	10	67	3
85	13.5	78	5
85	13.5	78	5
92	17	9	7.5
94	19	83	9
95	21.5	85	13.5
95	21.5	85	13.5
95	21.5	85	13.5
97	24.5	85	13.5
113	27	93	18
115	28.5	95	21.5
115	28.5	97	24.5
117	32	101	26
118	35	117	32
123	37	117	32
125	38.5	117	32
140	40	117	32
142	41	120	36
145	42	125	38.5
150	44	147	43
151	45		
n_1 = 23	R_1 = 613	n_2 = 22	R_2 = 422

Cálculos:

U_1 = 23 (22) + 23 (24)/2 – 613 = 169

U_2 = 22 (23) + 23 (24)/2 – 422 = 337

Debido a que n_1 y n_2 > 20, se debe usar la transformación de Z:

$$Zc = \frac{\left| 337 - \frac{(23)(22)}{2} \right| - 0.5}{\sqrt{\frac{(23)(22)(23+22+1)}{12}}} = 1.896$$

Zc= 1.896 no es significativo pero está muy cerca de serlo: P(Z = 1.96) = 0.05. Entonces es necesario corregir. Seguir los siguientes pasos:

1. Se calcula el número de atados pares, atados triples, atados cuádruples, etc, etc…

Atados de a:	**F**	**T^3-t**	**T**	**Datos reales**
2	4	$2^3 - 2$	24	79, 97, 115, 125
3	1	$3^3 - 3$	24	78
4	1	$4^3 - 4$	60	95
5	1	$5^3 - 5$	120	117
6	1	$6^3 - 6$	210	85
		Suma de T	438	

2. Se calcula el denominador:

$$\sqrt{\frac{22 \bullet 23}{45^2 - 45}\left[\frac{45^3 - 45 - 438}{12}\right]} = \sqrt{0.2555 \bullet 7553.5} = 43.93$$

3. Se recalcula el valor de Z con el nuevo denominador:

$$Zc = \frac{\left| 337 - \frac{(23)(22)}{2} \right| - 0.5}{43.93} = 1.90$$

Ahora si comparamos los valores de probabilidad para dos valores de Zc calculados:

a) sin corrección para atados Zc = 1.89; P(Z = 1.89) = 0.0294 x 2 = 0.0588.

b) con corrección para datos atados Zc = 1.90; P(Z = 19.0) = 0.0287 x 2 = 0.0574.

¿Conclusión acerca de los efectos de la corrección para datos atados?

Test de una cola con aproximación normal:

Hipótesis de una cola también pueden ser puestas a prueba con U o U´ con aproximación normal.

a) Previamente se debe definir la dirección de la diferencia (U o U´) y reemplazar el valor correspondiente en la formula de Zc.

b) El valor de Zc calculado se compara directamente con el valor crítico de la tabla de Z

c) Finalmente, si Zc $\geq$ que el valor crítico de Z, entonces se rechaza Ho.

Test para diferencian entre dos medianas

Prueba la hipótesis de dos muestras provienen de una misma población con la misma mediana. Básicamente el test esta basado en el cálculo de la gran median de la muestra y luego la realización de una tabla de contingencia de 2 x 2. El test de medianas tiene un 64% de poder en comparación a la comparación de dos muestras de t-test y un 67% de poder que el test de Mann-Witney.

Ejemplo :

Ho: Las dos muestras provienen de una población con idénticas medianas.

Ha: Las dos muestras NO provienen de una población con idénticas medianas.

Las medianas para todas las mediciones (N = 25) se ubica en $X_{(n+1)/2}$, luego se construye la siguiente tabla 2x2:

Número	Muestra 1	Muestra 2	Total
Sobre la mediana	6	6	**12**
Bajo la mediana	5	8	**13**
Total	**11**	**14**	**25**

Se calcula como una tabla de contingencia (recordar corrección).

$X^2_c = 0.031$, $X^2_{0.05} = 3.841$. $\Rightarrow$ No se rechaza Ho.

Es posible decir que las dos muestras provienen de una misma población (test de medianas $0.75 < P < 0.90$).

PRUEBAS ESTADÍSTICAS NO PARAMÉTRICAS PARA PARES AGRUPADOS

Estos test corresponde a opciones análogas a el t-test para pares agrupados (con datos pareados), los que deben utilizarse cuando no podemos cumplir con los requisitos mínimos para aplicar el test paramétrico.

Test de los Signos

Esta asociado con la distribución binomial. Considera Dirección de la diferencia entre pares asociados. Luego otorga signo + o -, según corresponda. Este test tiene solo 67% del poder que tiene el t-test para pares agrupados.

Ejemplo: Tiempo de desove de dos razas distintas de *A. purpuratus*.

Ho: La raza silvestre de la Rinconada (Antofagasta) desova al mismo tiempo que la raza de laboratorio (UCN).

Ha: La raza silvestre de la Rinconada (Antofagasta) NO desova al mismo tiempo que la raza de laboratorio (UCN).

Estanques en los cuales la raza silvestre desova primero.

Estanque	Raza silvestre primero
A	Si
B	No
C	No
D	No
E	Si
F	Si
G	Si
H	Si
I	Si
J	Si

Resultados:
n = 10
Si = 7
No = 3

La proporción observada 7:3, ¿es significativamente distinta a o esperado 5:5?.

Debemos utilizar la siguiente expansión binomial computar esta probabilidad:

$$P(x) = \frac{N!}{X!(N-X)!} p^x q^{n-x} \qquad P(3) = \frac{10!}{3!7!}(0.5)^3(0.5)^7 = 0.11719$$

P(3) = 0.11719, es la probabilidad de obtener exactamente 3 de 10, si la probabilidad de obtener 1 es 50% (o dicho de otro modo 1:1).

Este valor es > 0.05, de esta manera no se rechaza Ho. Sin embargo, necesitamos incluir también las probabilidades para X = 2, 1 y 0.

Estas probabilidades se calculan de la tabla B.25 de Zar (1999).

X = 2 p = 0.04395
X = 1 p = 0.00977
X = 0 p = 0.00098

Además, para obtener la probabilidad de aparición de $X \leq 3$, necesitamos sumar sus respectivas probabilidades:

X = 3	p = 0.11719
X = 2	p = 0.04395
X = 1	p = 0.00977
X = 0	p = 0.00098
	0.17189

Debido a que este es un test de dos colas, necesitamos también las probabilidades para X ≥ 7.

X = 7	p = 0.11719
X = 8	p = 0.04395
X = 9	p = 0.00977
X = 10	p = 0.00098
	0.17189

Finalmente la probabilidad total es (X≤ o ≥ 7) = 0.34378.

"El número de estanques en los cuales la raza silvestre de *A. purpuratus* desova primero no fue significativamente diferente del número de estanques en los cuales la raza de laboratorio desovó primero (P = 0.344)"

Este test es posible someterlo a una prueba de una cola también. En el ejemplo las hipótesis serian:

Ho: La raza silvestre no desovó antes que la raza de laboratorio.

Ha: La raza silvestre desovó antes que la raza de laboratorio.

En caso solo necesitaríamos considerar X ≥ / y las probabilidades individuales sumadas para 7, 8, 9 y 10. Nuevamente no rechazamos Ho: "El número de estanques en los cuales la raza silvestre desovó primero no fue significativamente mayor que los esperado (P= 0.17189).

Test de los signos con muestras grandes:

En estos casos se debe determinar la probabilidad binomial mediante el cálculo individual de cada una y después sumarlas. Es obvio que este procedimiento es demasiado laborioso en los casos de n muy grandes.

De esta forma existen dos alternativas, mas fáciles que el procedimiento anterior, en los cuales se utilizan las tablas B:25 y B.36 de Zar (1999).

Pero cuando se tiene n > 25 es necesario corregir para continuidad; Notar que p no tiene que ser igual a q. La transformación de datos binomiales a la distribución de Z incluye la corrección para continuidad (distribución discreta continua).

$$Zc = \frac{(X \pm 0.5) - np}{\sqrt{npq}}$$

Usar X + 0.5 si < np
Usar X – 0.5 si > np

Método 1:

Ejemplo: Tasa de enfriamiento y calentamiento en lagartijas.

Ho: El calentamiento es igual al enfriamiento

Ha: El calentamiento no es igual al enfriamiento.

Los datos indicaron que de 30 lagartijas 7 se calentaron mas rápido y 7 se enfriaron más rápido.

Usando la Tabla B.26

¿La porción 23:7 es significativamente diferente de la proporción esperada 1:1?

1. De la tabla B.26 se obtiene que $C_{0.05(2),\ 30} = 9$, debido a que estamos trabando con un test de dos colas existen dos valores críticos.

   N-*C* = 30 – 9 = 21 (valor crítico superior)

   Nuestro valor 7, es menor que 9, por lo tanto se rechaza Ho.

Conclusión. Se observó una diferencia significativa en el número de lagartijas que se enfriaron o calentaron más rápidamente (test de signos P = 0.01).

Test con una cola.

Ho: las lagartijas se calentaron más rápidamente.

Ha: Las lagartijas no se calentaron más rápidamente.

23 de las 30 lagartijas se caslentaron mas rápidamente.

$C_{0.05\ (1),\ 30} = 10$ $N - C = 30 - 10 = 20$ (valor crítico superior)

Si 20 de las 30 lagartijas se calentaron más rápidamente, deberíamos obtener significancia debido a 23 > 20. Entonces rechazamos Ho con p = 0.005.

Un número significativamente más alto de lagartijas se calentaron más rápidamente que aquellas que se enfriaron (test de signos, P = 0.005).

Metodo 2: Se utiliza una aproximación Normal (trasformación de Z).

Con el ejemplo anterior:

Ho: El número de lagartijas que se mas rápido es mayor (test de una cola):

$$Zc = \frac{(23 - 0.5) - 0.5(29)}{\sqrt{(30)(0.5)(0.5)}} = \frac{8}{2.74} = 2.92$$

P(z=2.92) = 0.0018, por lo tanto se rechaza Ho.

Un número significativamente más alto de lagartijas se calentaron más rápidamente que aquellas que se enfriaron (test de signos con aproximación normal y corrección de continuidad, P = 0.0018).

Test de Wilcoxon

Es también llamado "**muestra pareada de Wilcoxon**" , "**pares agrupados de Wilcoxon**" o "**test de grados con signos**". Puede ser utilizado cuando los *di* no son normales. Tiene 95% del poder del t-test de pares agrupados.

Puede ser utilizado cuando en aplicaciones cuando se tiene datos de escala proporcional, de intervalo u ordinal.

El test ocupa los grados asignados a **di** (T+ y T-), considerando los signos. Si las muestras que se comparan no son diferentes, entonces se espera que T+ y T- no sean significativamente diferentes.

Ejemplo: Datos de un estudio relativo a la diferencia en peso de los globos oculares en una muestra de Lenguados de Caldera.

Ho: No existen diferencias significativas en el peso del ojo derecho e izquierdo en los lenguados

Ha: Existen diferencias significativas en el peso del ojo derecho e izquierdo en los lenguados.

Sujeto	Ojo Derecho	Ojo Izquierdo	*di*	Ranking
A	7.5	7.3	0.2	1
B	0.9	0.3	0.6	5.5
C	1.2	1.2	0.0	-
D	2.5	1.8	0.7	7
E	4.7	3.6	1.1	8
F	7.2	6.8	0.4	3
G	1.8	2.3	-0.5	-4
H	1.7	1.1	0.6	5.5
I	1.2	0.9	0.3	2

Procedimiento para calcular Wilcoxon:

A. Determinar di y los rangos de di desde 1 a N. Rankear **siempre** en orden ascendente.

B. Es la suma de los rangos igual a N(N+1)/2.

(Revisión interna) 36 = 8(9)/2

C. Calcular T el cual es igual a la suma de los rangos con el más pequeño de los rangos.

$T+ = 1+5.5+7+8+3+5.5+2 = 32$

$T- = -4 = 4$ (este tomamos en cuenta ya que es la suma mas pequeña)

D. Encontrar la probabilidad asociada con T = 4 y N = 8. (**Nota: en un test con dos colas la diferencia iguala 0, no se cuenta**)

El valor crítico (0.05(2), 8) es iguala 3. Debido a que el valor observado de 4 > 3, no rechazamos Ho con alfa igual 0.05.

Los pesos de los globos oculares izquierdo y derecho de una muestra de lenguados, *Paralichthys microps*, no fueron significativamente diferentes (test de pares agrupados de Wilcoxon 0.10 > P > 0.05)

Test de Wilcoxon Corregido: Existe una variada gama de correcciones al test original.

La tabla de Wilcoxon incluye valores críticos de T para muestras de hasta 100 unidades. Pero en general, si necesitamos estimar la probabilidad asociada a un N mayor que 25, se recomienda usar la **transformación Normal**.

$$Zc = \frac{\left| T - \frac{n(n+1) - m(m+1)}{4} \right| - 0.5}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - m(m+1)(2m+1) - \sum t/2}{24}}}$$

Donde m es el número de diferencias iguales a cero; T es para pares atados (igual que en el caso de Mann-Whitney) y 0.5 es la corrección de continuidad.

Ejemplo: Peso y orden de nacimiento en mellizos.

Ho: El peso al nacer no está relacionado con el orden de nacimiento.

Ha: El peso al nacer está relacionado con el orden de nacimiento.

Alpha = 0.05, dos colas, N=50

A. Test sin corrección y ceros eliminados:

  a. Usamos la Tabla: T más pequeño T = 260.5   N = 50-8 = 42

  Valor critico (0.05, 2, 42) = 2.94 ;   0.02 > P > 0.01

  b. Transformación a Z sin correción de continuidad:

$$Z = \frac{260.5 - 42(43)/4}{\sqrt{\frac{42(43)(85)}{24}}} = \frac{-191}{79.98} = -2.388 = 2.39$$

p (Z=2.39) = 0.0084 x 2 = 0.0168

B. Transformación a Z con corrección para diferencias de cero, rangos atados y continuidad:

  a. Necesitamos atribuir nuevos ranos a las diferencias observadas incluyendo los ceros. Notar que los rangos para las diferencias iguales a cero, no pueden ser considerándoos para el recuento de rangos positivos o negativos.

b. Ajustar para los rangos atados (RT = 972). Este ajuste es similar al usado en el caso de Mann-Whitney.

Diferencias iguales a cero = m = 8 RT = 972 N = 50 T = 372.5

$$Zc = \frac{\left|372.5 - \frac{50(51) - 8(9)}{4}\right| - 0.5}{\sqrt{\frac{50851)(101) - 8(9) - 972/2}{24}}} = \frac{246.5}{103.25} = 2.39$$

p(Z = 2.39) = 0.0084 x 2 = 0.0168

Los distintos (sin) sabores del test de Wilcoxon:

1. El modelo "full equipo":

$$Zc = \frac{\left|T - \frac{n(n+1) - m(m+1)}{4}\right| - 0.5}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - m(m+1)(2m+1) - \frac{\sum T}{2}}{24}}}$$

2. Cuando no hay diferencia igual a cero:

$$Zc = \frac{\left|T - \frac{n(n+1)}{4}\right| - 0.5}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1) - \frac{\sum T}{2}}{24}}}$$

3. Cuando no hay rangos atados:

$$Zc = \frac{\left|T - \frac{n(n+1)}{4}\right| - 0.5}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

4. Sin la corrección para continuidad (modelo que se da en la mayoría de los textos):

$$Z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

Datos fuera de rango: ¿Cuándo lejos es demasiado lejos?

Cuando se examina una muestra y se intenta poner a prueba su normalidad, a veces se presentan datos que están "fuera del rango" (outliers) de la mayoría de los datos. Cuál es el origen de estos "outliers"?

Si la muestra se **distribuye en forma normal**, existen algunas pruebas estadísticas que pueden ser usadas para determinar si un particular dato fuera de rango, es estadísticamente significativo.

1. **El test de Dixon:** Este test está diseñado para muestras de hasta 25 datos. Tiene cuatro formas distintas de calcular el valor del test, dependiendo del tamaño de la muestra.

n = 3 a 7	8 a 10	11 a 13	14 a 25
$r_{10} = \dfrac{Y_2 - Y_1}{Y_n - Y_1}$	$r_{11} = \dfrac{Y_2 - Y_1}{Y_{n-1} - Y_1}$	$r_{21} = \dfrac{Y_3 - Y_1}{Y_{n-1} - Y_1}$	$r_{22} = \dfrac{Y_3 - Y_1}{Y_{n-2} - Y_1}$

PROCEDIMIENTO:

1. Ordenar los datos de menor a mayor o bien de mayor a menor, pero de tal manera que el primer dato sea el valor fuera de rango, Y_1.

2. Emplear la formula apropiada (dependiendo del valor de n), para calcular el estadístico **r**.

3. Determinar la probabilidad asociada a **r**, usando la tabla de valores críticos de Dixon.

Ejemplo: Recuento de eritrocitos (x 10^6) de 20 tortugas marinas del Pacífico Sur.

3.8	4.1	4.5	4.6	4.8	5.0	5.0	5.0	5.1	5.2	5.2	5.2	5.3	5.4	5.4	5.4	5.7	5.8	5.9	5.9

PREGUNTA: Es el valor 3.8 un outliers (fuera de rango)??

Notar que los datos fueran ordenados para que el valor 3.8 sea Y_1. Debido a que n = 20, aplicamos la formula para n = 14 a 25.

$$r_{22} = \frac{Y_3 - Y_1}{Y_{n-2} - Y_1} \qquad r_{22} = \frac{4.5 - 3.8}{5.8 - 3.8} = 0.350$$

Examinando la Tabla de valores críticos de Dixon vemos que el valor calculado es menor que el valor crítico 0.450 para alfa = 0.05.

Conclusión: ______________________________

"El valor más pequeño de la muestra, igual a 3.8 millones de glóbulos rojos por cm^3 de sangre, no es un valor fuera de rango (test de Dixon, P > 0.10)."

Aunque la tabla tiene valores críticos para dos colas, normalmente nosotros sabemos cual es la dirección del outliers y por ello se usan casi siempre los valores críticos para una cola.

2. **El test de Grubb:** Este test se puede usar para muestras con n > 25. El test diseñado por Grubb es similar al computo de valores de Z.

PROCEDIMIENTO:

1. Calcular la media y la desviación estándar de la muestra.
2. Computar el test estadístico: **$(Y_1 - Y)) / S$**, donde Y_1 es el valor sospechoso de ser un outlier.
3. Buscar la probabilidad asociada al valor del test en la tabla de valores críticos de Grubb.

Ejemplo: Concentración de estrógeno en estudiantes de las Termas de Guayacán que tienen novias.

0.008	0.055	0.077	0.300	0.025	0.100	0.100	0.300	0.011	0.050	0.110	0.100
0.018	0.135	0.026	0.100	0.036	0.120	0.350	0.370	0.060	0.080	0.120	0.100
0.056	0.052	**0.440**	0.155	0.043	0.110	0.100	0.019	0.070	0.110	0.133	0.100

PREGUNTA: Los valores más pequeño (0.008) o más grande (0.440), son outliers???

Pero antes de aplicar el test, qué tenemos que demostrar???

Para los datos: Media = 0.115; S = 0.10551 y n = 36.

a) Test para el dato más pequeño (0.008):

(0.008 – 0.115) / 0.10551 = - 1.028

El valor crítico de la tabla de Grubb es 2.823 para una cola.

Conclusión: ________________________

b) Test para el dato más grande (0.440):

(0.440 – 0.155) / 0.10551 = 3.080

El valor crítico es el mismo.

Conclusión: ________________________

Reflexionar:

- El dato excluido estadísticamente, se obtuvo por error?. Si no es así, el valor cuestionado representa un valor real de la naturaleza o del experimento?
- Cuál es la ética detrás de la eliminación de un dato de una muestra?
- Es siempre lícito eliminar un dato, porqué estadísticamente constituye un outlier?

GUÍA DE EJÉRCITOS PARA AYUDANTÍAS

X^2

1-Una carretera de alta velocidad necesita saber si las medidas de seguridad existentes se encuentran en los rangos de seguridad de accidentes, los cuales son: ileso, leve, intenso, grave y fatal con una proporción de 15:7:4:2:1.

Se dispone de los siguientes datos:

Ilesos= 47 Leves= 25 Intensos= 9 Graves= 2 Fatales= 1

2- La relación de ventas de 7 productos sigue una proporción de 20:15:10:7:5:3:1. En una muestra de n=200 se determina lo siguiente:

Producto	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**Total**
fi	**60**	**60**	**60**	**7**	**6**	**5**	**2**	**200**

3- Se quiere comprobar que un dado no esta cargado hacia ningún numero. Se lanza el dado 60 veces y se obtuvo:

	1	2	3	4	5	6	Total
fi	**13**	**8**	**9**	**7**	**11**	**12**	**60**

4- La relación de cantidad de asaltos en las poblaciones de Guayacán, Parte Alta, San Juan y Sindempart siguen una proporción de 7:5:4:2. Después de un plan de seguridad se desea saber si la situación ha cambiado. Los asaltos registrados el último mes fueron:

	Guayacán	Parte Alta	San Juan	Sindempart	Total
fi	**23**	**20**	**20**	**11**	**74**

Después de un año se terminó el programa de seguridad y se determinó la siguiente cantidad de asaltos en las poblaciones:

	Guayacán	Parte Alta	San Juan	Sindempart	Total
fi	**12**	**24**	**21**	**5**	**66**

5- Se sabe que las proporciones de rosas Rojas-Rosas-Blancas de la población de Coquimbo es de 1:2:1. Determine si los siguientes datos provienen de la misma población, si es así realice un test de X^2 para determinar si la población sigue la proporción determinada.

Dato	1	2	3	4	5	6	7
Rojas	**9**	**14**	**4**	**13**	**27**	**16**	**7**
Rosas	**19**	**28**	**10**	**32**	**46**	**33**	**16**
Blancas	**7**	**17**	**3**	**15**	**23**	**14**	**4**
Totales	**35**	**59**	**17**	**60**	**96**	**63**	**18**

Tablas de Contingencia

1- Se desea conocer si el color del pelo es influido por el sexo de las personas.

	Negro	Café	Rubio	Pelirrojo	Total
Machos	**59**	**61**	**47**	**50**	**217**
Hembras	**61**	**70**	**33**	**48**	**212**
	120	**131**	**80**	**98**	**429**

2- Se desea saber si existen cambios estacionales en el número de ejemplares y sexo de *Orchestoidea sp.* en las playas de arena.

	Verano	Otoño	Invierno	Primavera	Total
Machos	**54**	**61**	**47**	**50**	**217**
Hembras	**61**	**70**	**33**	**48**	**212**
	120	**131**	**80**	**98**	**429**

3- Se desea probar que la cantidad de alumnos aprobados y reprobados en los ramos no depende del profesor.

	Aprobados	Reprobados	Total
Profesor A	**13**	**10**	**23**
Profesor B	**15**	**8**	**23**
Total	**28**	**18**	**46**

	Aprobados	Reprobados	Total
Profesor A	**16**	**7**	**23**
Profesor B	**14**	**9**	**23**
Total	**30**	**16**	**46**

	Aprobados	Reprobados	Total
Profesor A	**15**	**8**	**23**
Profesor B	**17**	**6**	**23**
Total	**30**	**14**	**46**

Kolmogorov-Smirnov

1-Distribución de Petrolistes en el intermareal rocoso.

	Mas Bajo	Medio Bajo	Medio Alto	Alto	n
fi	**16**	**33**	**26**	**21**	**96**

2- Los concesionarios del casino piensan que a los alumnos no les importa el menú de cada día.

	Cazuela	Bistec	Porotos	Pescado	Pollo	n
fi	**5**	**12**	**2**	**9**	**7**	**35**

Mas ejercicios de chi cuadrado, K-S y tablas de contingencia.

1-Un estudio elaborado en la población de la región Metropolitana indica que la relación de personas zurdas y derechas es de 1:2. Se desea probar si este patrón es el mismo en la región de Coquimbo. El muestreo arrojó los siguientes resultados:

Zurdos	Derechos
159	247

2- 126 individuos de *Cancer cetosus* fueron colocados en un acuario el cual contenía cantidades iguales de 6 diferentes tipos de alimentos. La frecuencia en que cada animal eligió cada alimento fue:

Item de comida	1	2	3	4	5	6
fi	13	26	31	14	28	14

Pruebe si existe alguna preferencia por un ítem en particular.

3- Con el objetivo de conocer si existe un equilibrio perfecto entre machos y hembras de *Rhyncocinetes typus*, se tomaron muestras de cuatro localidades diferentes en la Bahía de la Herradura ¿A que conclusión llegaría Ud.?

Sector	**A**	**B**	**C**	**D**
Machos	44	31	12	15
Hembras	54	40	18	16

4- Se desea conocer si la abundancia de machos y hembras de *Larus modestus* varia dependiendo de las estaciones del año.

	Verano	Otoño	Invierno	Primavera
Machos	*135*	*71*	*43*	*163*
Hembras	77	40	38	86

5- Un profesor piensa que existe una relación entre el color de la concha de *Argopecten purpuratus* y la profundidad a la que es cultivado. Para comprobar si existe esta dependencia, se realizaron experimentos en cultivos ubicados en la Bahía de Tongoy. Realice el análisis correspondiente.

	Cultivo 1		Cultivo 2		Cultivo 3	
	Anaranjado	Rosa	Anaranjado	Rosa	Anaranjado	Rosa
5 mts.	7	10	21	36	4	7
8 mts.	27	18	102	69	25	13

	Cultivo 4		Cultivo 5	
	Anaranjado	Rosa	Anaranjado	Rosa
5 mts.	4	7	6	12
8 mts.	22	14	28	24

6- Se realiza un cruzamiento monohíbrido entre heterocigotos de guisantes resultando: proporción genotípica 12:37:17 (AA, Aa, aa respectivamente). ¿Estos resultados concuerdan con los encontrados por Mendel para un cruzamiento de este tipo?.

Subdivida el análisis para probar si las proporciones fenotípicas concuerdan con un análisis de este tipo se cumplen.

Ejercicios de comparaciones entre dos grupos

1) El siguiente set de datos corresponde a la temperatura corporal de 25 cangrejos expuestos a temperatura ambiente (24.3°C). ¿La temperatura media del cuerpo es la misma a la del ambiente?

25.8	22.9	24.0	26.2	23.3	24.8	25.4	27.0	25.4
24.6	25.1	24.5	24.3	25.5	23.5	25.5	24.8	
26.1	27.3	23.9	24.6	28.1	26.3	23.9	22.9	

2) Un fabricante de remedios debe asegurar que su producto sea disuelto rápidamente por los jugos gástricos (el tiempo máximo permitido es de 45 segundos). ¿El tiempo de disolución esta de acuerdo a las normas permitidas?

42.7	43.4	44.6	45.1
45.6	45.9	46.8	47.6

3) Se desea saber si existen variaciones en la concentración de insulina (mg/100ml) entre hombres obesos y flacos; para esto se realizaron los siguientes mediciones. ¿Qué opina ud?

Obesos	228.8	229.6	218.6	220.1	226.5	224.1	222.0
Flacos	224.3	223.8	230.8	223.4	221.5	230.2	

4) Se están investigando las diferencias de tamaño entre hembras y machos del Piquero Peruano (*Sula variegata*), se postula que la hembras son de mayor tamaño que los machos y para esto, como medidas representativas, se utiliza el largo total (cm) y el largo del cúlmen (mm) :

a) Mediciones de largo total :

Machos	60	71	65	68	68	69	62	64	63	66	
Hembras	72	79	61	85	71	62	81	63	77	79	59

b) Mediciones de cúlmen :

Machos	114	116	118	125	113	120	119	
Hembras	118	116	114	121	117	116	120	123

5) Se desea saber cual es la efectividad de dos antifouling en la fijación de picorocos (cm^2 en placas de madera). En un lado de la placa existe antifouling A y en el otro antifouling B. ¿Existen diferencias en las eficacias de los antifouling ?.

Placas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Anti A	8	9	5	8	8	9	7	9	9	9	9	8	7	7	8	7	7
Anti B	9	5	3	5	3	5	7	6	9	6	8	6	7	5	9	3	6

6) Las concentraciones de nutrientes como nitrito y nitrato son importantes a la hora de conocer la productividad de una masa de agua. se tomaron muestras en once puntos de la Bahía de la Herradura para conocer si ambos nutrientes se encuentran presentes a una misma concentración (en $\mu g/m^3$) :

Estación	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Nitrito	97	84	72	61	81	84	77	61	104	116	84
Nitrato	96	81	76	68	88	83	71	66	108	118	89

7) Se mide la longitud de jaibas machos y hembras y se desea conocer si las longitudes son diferentes.

Machos	44	48	36	32	51	45	54	56
Hembras	32	40	44	44	34	30	26	

8) Se midió el largo de la concha (cm) de dos poblaciones naturales de ostiones provenientes de las bahías de la Herradura y Tongoy. Se cree que los ostiones de Tongoy son más grandes que los de la Herradura, ¿Que piensa Usted ?.

Tongoy	193	188	185	183	180	178	170
Herradura	175	173	168	165	163		

9) Se desea probar que las larvas cultivadas a mayor temperatura se desarrollan mas rápidamente. Para esto se cultivaron larvas de Langostino Rojo en estanques con temperaturas de 15 y 20 °C durante tres semanas, las sobrevivientes fueron las siguientes:

15°C	I	II	I	II	II	II	III	IV	
20°C	I	I	II	II	II	III	III	IV	IV

10) En nuestro centro de cultivos de borrachillas debemos elegir que tipo de alimento utilizar (natural o procesado). Para saber cual alimento es más eficiente se alimentaron 23 peces con alimento natural y 29 con el alimento procesado. Luego de un mes se pesaron las muestras de peces y debemos tomar una decisión.

	Alimento natural	**Alimento procesado**
N	23	29
Suma de rangos	597	781

11) Un alumno de biología marina quiere saber si la concentración de oxígeno producido por *Lessonia* sp. varia según la salinidad en que esta se encuentre (34.5 ppm o 36 ppm). Según los datos, ¿Cuál es su opinión?.

	34.5	**36.0**		**34.5**	**36.0**		**34.5**	**36.0**		**34.5**	**36.0**		**34.5**	**36.0**
1	0.8	0.5	6	1.0	0.6	**11**	1.5	1.0	**16**	1.9	1.4	**21**	2.2	1.6
2	0.9	0.5	7	1.1	0.7	**12**	1.6	1.0	**17**	1.9	1.4	**22**	2.3	1.8
3	0.9	0.6	8	1.2	0.8	**13**	1.7	1.1	**18**	1.9	1.5	**23**	2.4	
4	0.9	0.6	9	1.3	0.8	**14**	1.7	1.1	**19**	2.0	1.5			
5	1.0	0.6	10	1.4	0.9	**15**	1.8	1.3	**20**	2.2	1.6			

12) Sometieron a 10 estudiantes a un test de aptitud matemática bajo dos condiciones; Una sala en silencio y una sala con música ambiente. Los puntajes obtenidos fueron.

Estudiantes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ptje sin música	114	121	136	102	99	114	127	150	129	130
Ptje con música	112	122	141	107	96	109	121	146	127	128

13) Se postula una medición anterior-posterior y dorsal-ventral de una almeja no varia significativamente. Pruebe esta afirmación con las siguientes mediciones:

Concha	1	2	3	4	5	6	7	8
A-P	125	128	132	135	136	139	144	149
D-V	121	123	134	138	128	133	137	148

Aplique el test que corresponde en cada caso; se debe presentar las hipótesis (Ho y Ha), valores calculados críticos de cada test, conclusión y frase conclusiva.