复变函数试卷 (A)

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

~~1. 已知两复数~~ $\cancel{z_1}$ ~~和~~ $\cancel{z_2}$ ~~满足~~ $\cancel{|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2| = 1}$~~, 那么~~ $\cancel{Re(z_1\bar{z}_2)} =$_______

~~2. 计算~~ $\cancel{i^{\sqrt{2}}} =$_______

3. $z = 0$ 是函数 $f(z) = \frac{e^z - 1}{(\sin z)^3}$ 的 _______ 级极点.

4. 把单位圆盘 $|z| < 1$ 映为单位圆盘 $|w| < 1$ 且满足 $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = \pi/2$ 的分式线性映射为 $w =$_______.

5. 求留数 $Res[z^3 e^{\frac{1}{z}}, 0] =$_______.

6. 函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z = i$ 处的 Taylor 级数的收敛半径 $R =$_______.

7. 在圆环域 $0 < |z| < +\infty$ 内, 将函数展为 Laurent 级数 $\cos^2 \frac{1}{z} =$_______.

~~8. 若~~ $\cancel{f(z) = y^3 + mx^2y + i(x^3 + lxy^2)}$ ~~为解析函数, 则~~ $\cancel{m} =$_______, $\cancel{l} =$_______.

9. 计算积分（沿曲线正向）$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^{10} - 2} =$_______.

10. 计算积分（沿曲线正向）$\oint_{|z|=2} \frac{z^8 + 1}{(z-1)^6(z^3-2)} dz =$_______.

二、判别题 (打 $\surd$ 或 $\times$, 每小题 2 分, 共 20 分)

~~1. 零的幅角为零. ( )~~

~~2. 对任何复数 z 都有 $|\sin z| \leq 1$ 成立. ( )~~

3. 如果 $f(z)$ 及其共轭 $\overline{f(z)}$ 都在区域内 D 内解析, 则 $f(z)$ 只能是常数. ( )

4. 幂级数的和函数在其收敛圆周上一定存在奇点. ( )

5. 若 $\oint_{|z|=1} f(z)dz = 0$, 则必有 $\oint_{|z|=1} Re[f(z)]dz = 0$ 和 $\oint_{|z|=1} Im[f(z)]dz = 0$. ( )

6. 不存在共形映射把复平面 $\mathbf{C}$ 映为单位圆盘 $|w| < 1$. ( )

7. 解析函数在区域内部的值可以由它在区域边界上的值唯一确定. ( )

8. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-2)^n$ 如果在 $z=0$ 处收敛, 则在 $z=3$ 处一定也收敛. ( )

9. 一个复变函数在某点可导的充分必要条件是其实部和虚部都在该点可导, 且满足 C-R 方程. ( )

10. 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是调和函数, 则 $u+iv$ 是解析函数. ( )

三、(10 分) 求函数 $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)^2}$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开式, 以及在圆环域 $1 < |z| < +\infty$ 内的 Laurent 展开式.

四、（10 分）用复积分的方法计算广义积分 $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$.

五、(8 分) 证明: 当 C 为不通过原点的简单闭曲线时, $\oint_C \frac{1}{z^4}dz = 0$.

六、（7 分）令 z_1, z_2 为复平面内相异两点，证明方程 $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = \lambda\ (\lambda \neq 1)$ 表示的点 z 的轨迹是一个圆，并证明点 z_1 和 z_2 关于该圆周对称。

七、（7 分）令 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，且 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内有界，证明 z_0 必定是 $f(z)$ 的可去奇点。

八、（8 分）令 D 表示由圆心分别在 $z=1$ 和 $z=-1$，半径为 $\sqrt{2}$ 的两圆弧所围成的区域。求一共形映射将 D 映为上半平面。