XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

分枝定界法
Branch and Bound

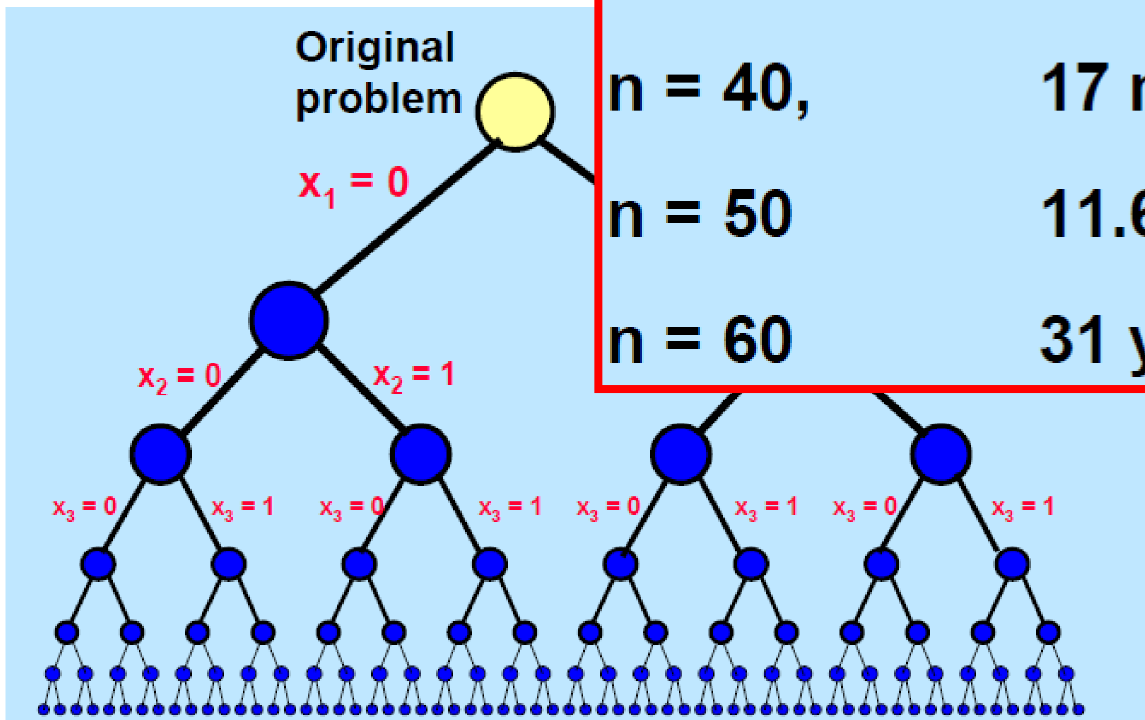
电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- 纯整数规划问题的分枝定界法
- 0-1规划问题的分枝定界法

求解整数规划问题的另一途径

- 枚举＝2^n



n = 30,	1 second
n = 40,	17 minutes
n = 50	11.6 days
n = 60	31 years

- 有限枚举–分枝定界法

分枝定界法的几何解释

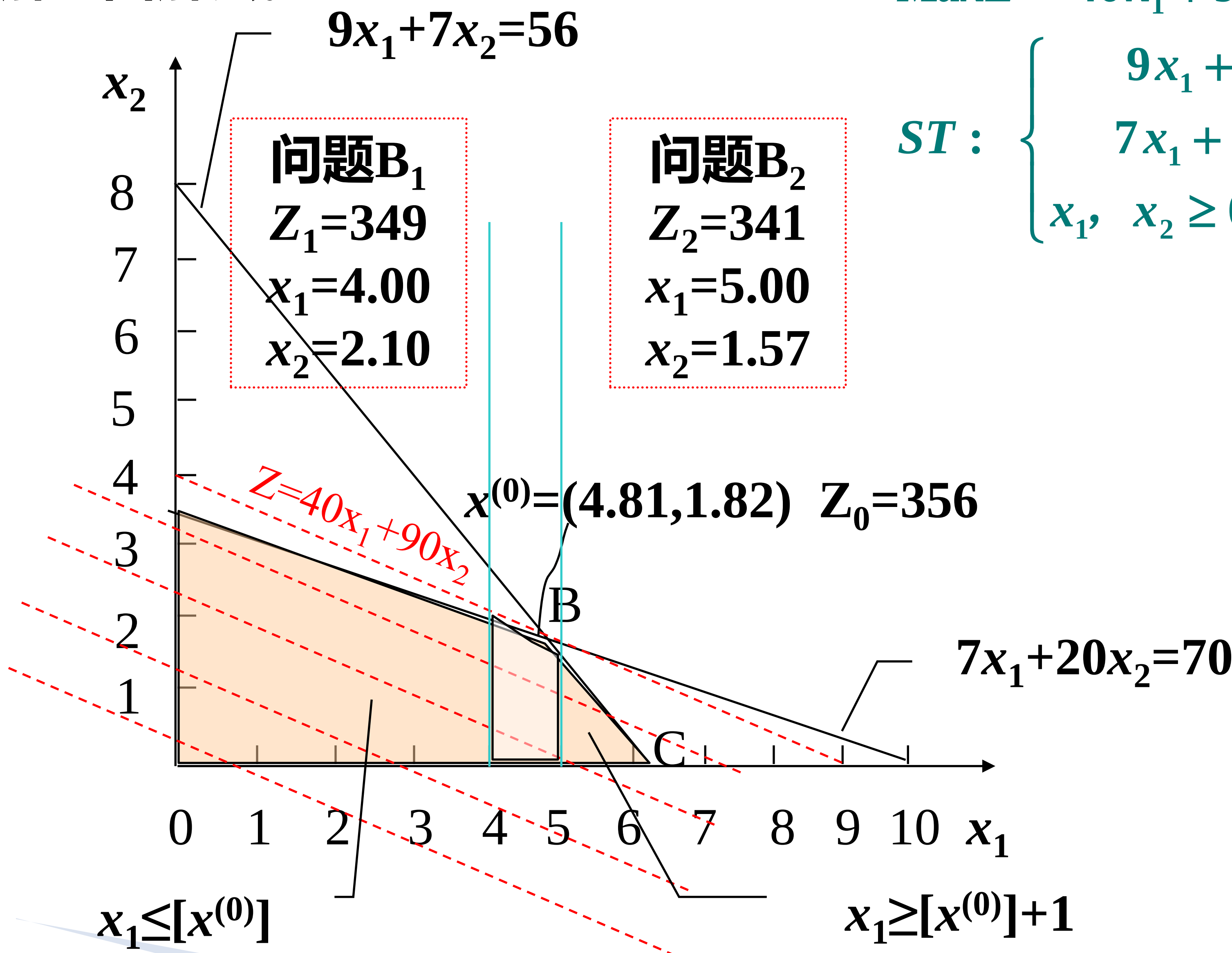
- 例:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 40x_1 + 90x_2 \\
&ST: \quad \begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1,\ x_2 \ge 0，且为整数 \end{cases}
\end{aligned}
$$

解：图解法。

$$\text{Max}Z = 40x_1 + 90x_2$$

$$ST:\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \le 70 \\ x_1,\ x_2 \ge 0,\ \text{且为整数} \end{cases}$$



分枝定界法的基本思想

考虑ILP问题

$$(P_0)\quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x\text{为整数向量} \end{cases} \end{aligned}$$

P_0的最优解x^0

x_i^0不满足整数要求

$x_i \leq [x_i^0]$

$x_i \geq [x_i^0]+1$

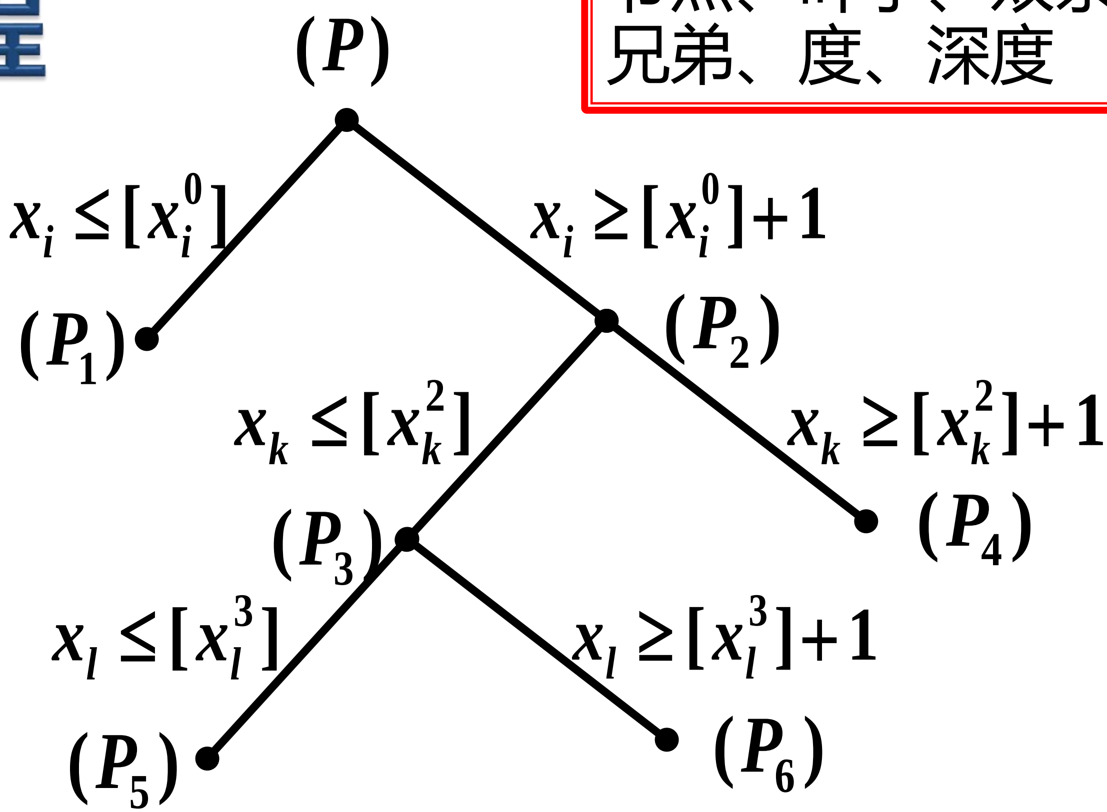
$$(P_1)\quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, x\text{为整数向量} \\ x_i \leq [x_i^0] \end{cases} \end{aligned}$$

$$(P_2)\quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, x\text{为整数向量} \\ x_i \geq [x_i^0]+1 \end{cases} \end{aligned}$$

分枝过程

节点、叶子、双亲、孩子、兄弟、度、深度

分
枝
树



分枝过程在某个点上由下述两个原因之一而停止：

(1)相应的松弛LP问题的解是满足整数要求的；

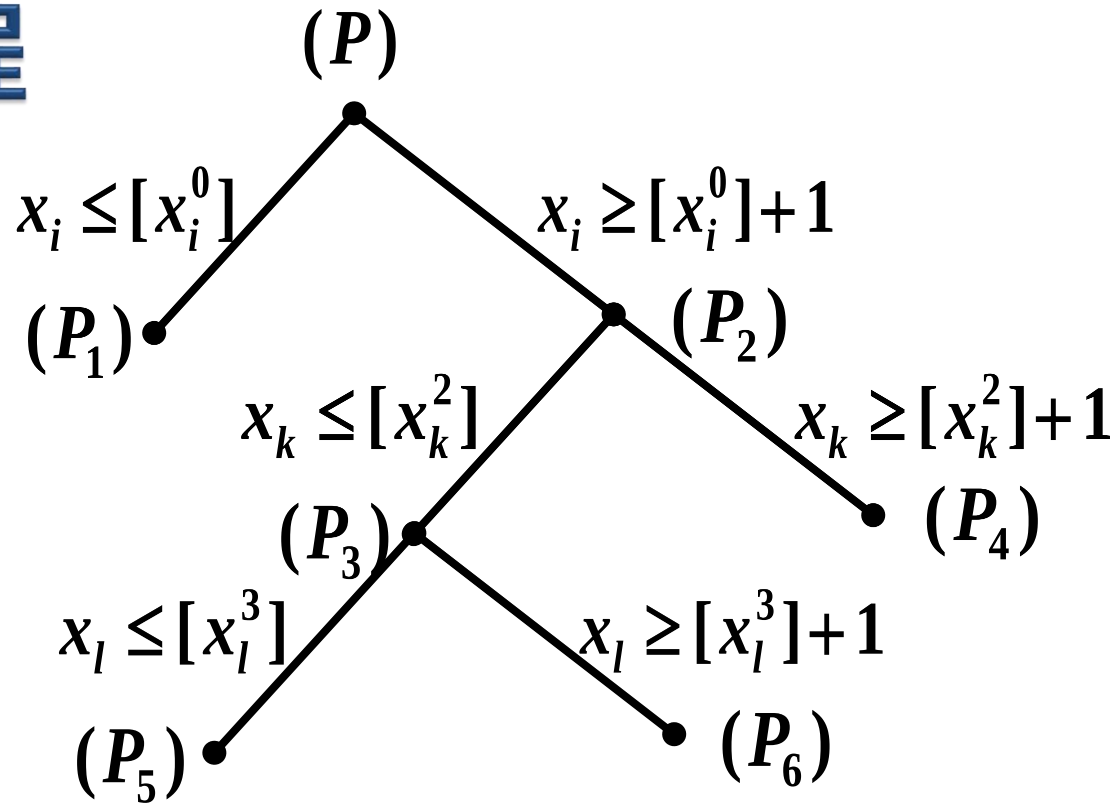
(2)相应松弛LP问题是不可行的．

定界-剪枝过程

- 目前最好的目标值: z_m -> z^*_m
- 某一点x^k的分枝下界$z_k = c^T x^k$
- x^k的后代的目标值$c^T x$

$$c^T x \ge z_k \ge z_m^*$$

- **剪枝 死点**



例子

例1： min $z=-4x_1-11x_2$

(ILP)

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z=-4x_1-11x_2\\
s.t.\quad & 2x_1-x_2\le 4\\
& 2x_1+5x_2\le 16\\
& -x_1+2x_2\le 4\\
& x_1,x_2\ge 0\ \text{为整数}
\end{aligned}
$$

解：

(LP_0)

$$
\begin{aligned}
\min\quad & z=-4x_1-11x_2\\
s.t.\quad & 2x_1-x_2\le 4\\
& 2x_1+5x_2\le 16\\
& -x_1+2x_2\le 4\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

分枝： 新增约束是互斥的，等价于对可行域进行剖分

定界： 对最优目标值下界做出估计

$(LP_0)\ z^*=-34\frac{2}{3}$

$x^*=(\frac{4}{3},\frac{8}{3})$

思考：哪些节点不用再考虑？

$x_1\le 1$ 增加约束分枝 $x_1\ge 2$

$(LP_1)\ z^*=-31\frac{1}{2}$

$x^*=(1,\frac{5}{2})$

×　×

$(LP_2)\ z^*=-34\frac{2}{5}$

$x^*=(2,\frac{12}{5})$

$x_2\le 2$ 增加约束分枝 $x_2\ge 3$

$(LP_3)\ z^*=-34$

$x^*=(3,2)$

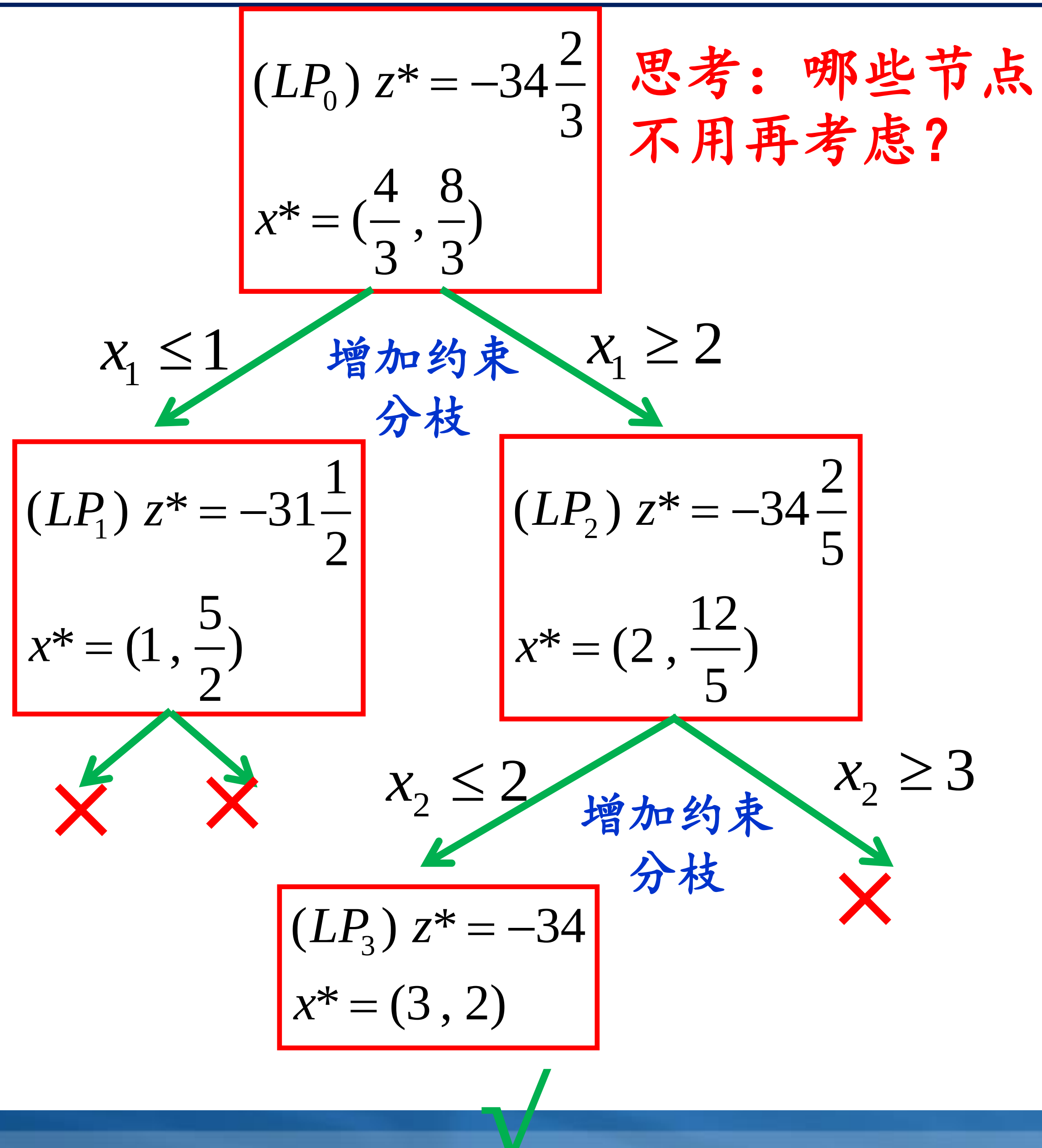
√　×

例子得到的启示

1. 分枝定界法是一种基于“树”结构的搜索或遍历方法
2. 分枝定界法中的整数性判断不会在本质上引起数值困难
3. 定界是为了避免无效的分枝搜索，恰当的分枝有助于更好定界
4. 分枝定界法是部分枚举而不是穷举

分枝：新增约束是互斥的，等价于对可行域进行剖分

定界：对最优目标值下界做出估计



分枝定界法：有关术语

$$\begin{cases} \min \quad z = f(x) \\ s.t. \quad x \in K_0 \subset R^n \end{cases}$$

基本假设：K_0 已被划分为若干互不相交的子集之并(初始时可以就是 K_0 本身)

$$K_0 = \bigcup_{i=1}^{M} K_i$$

①划分：把 K_0 的某个子集K_i划分为若干个互不相交子集之并：

$$K_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} K_{i_j}$$

注意：划分之后从划分集中立即删去K_i，同时将各K_{i_j}加入

(LP_0) $z^* = -34\frac{2}{3}$

$x^* = (\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$

思考：哪些节点不用再考虑？

$x_1 \le 1$ 增加约束分枝 $x_1 \ge 2$

(LP_1) $z^* = -31\frac{1}{2}$

$x^* = (1, \frac{5}{2})$

×　×

(LP_2) $z^* = -34\frac{2}{5}$

$x^* = (2, \frac{12}{5})$

$x_2 \le 2$ 增加约束分枝 $x_2 \ge 3$

(LP_3) $z^* = -34$

$x^* = (3, 2)$

√　×

分枝定界法：有关术语

$$\begin{cases} \min & z = f(x) \\ s.t. & x \in K_0 \subset R^n \end{cases}$$

基本假设：K_0 已被划分为若干互不相交的子集之并(初始时可以就是 K_0 本身)

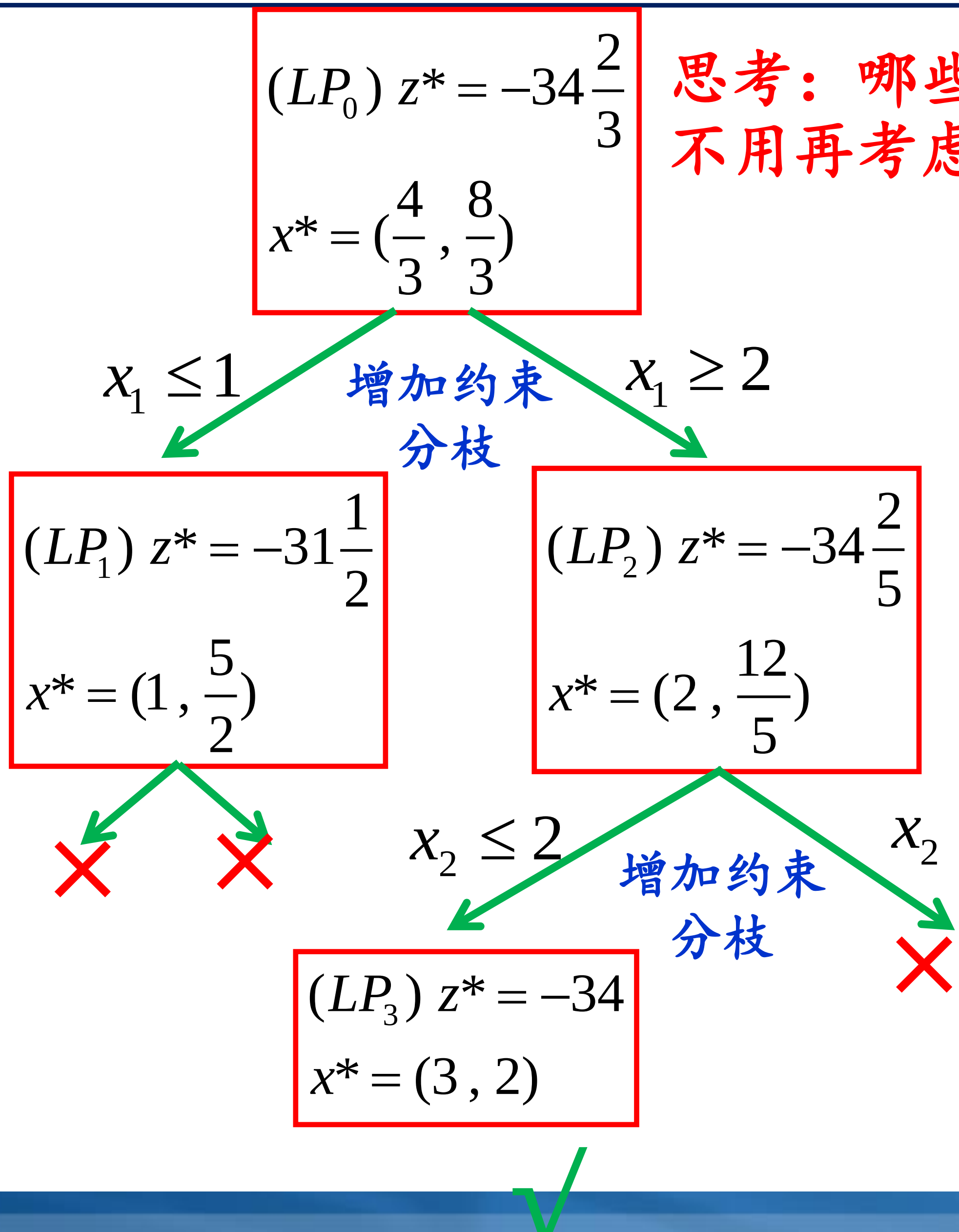
$$K_0 = \bigcup_{i=1}^{M} K_i$$

②活问题(活节点)：当前划分集中每一个 K_i 对应的下述问题：

$$(K_i): \begin{cases} \min & z = f(x) \\ s.t. & x \in K_i \subset R^n \end{cases}$$

注意：活问题集合在动态变化

思考：哪些节点不用再考虑？



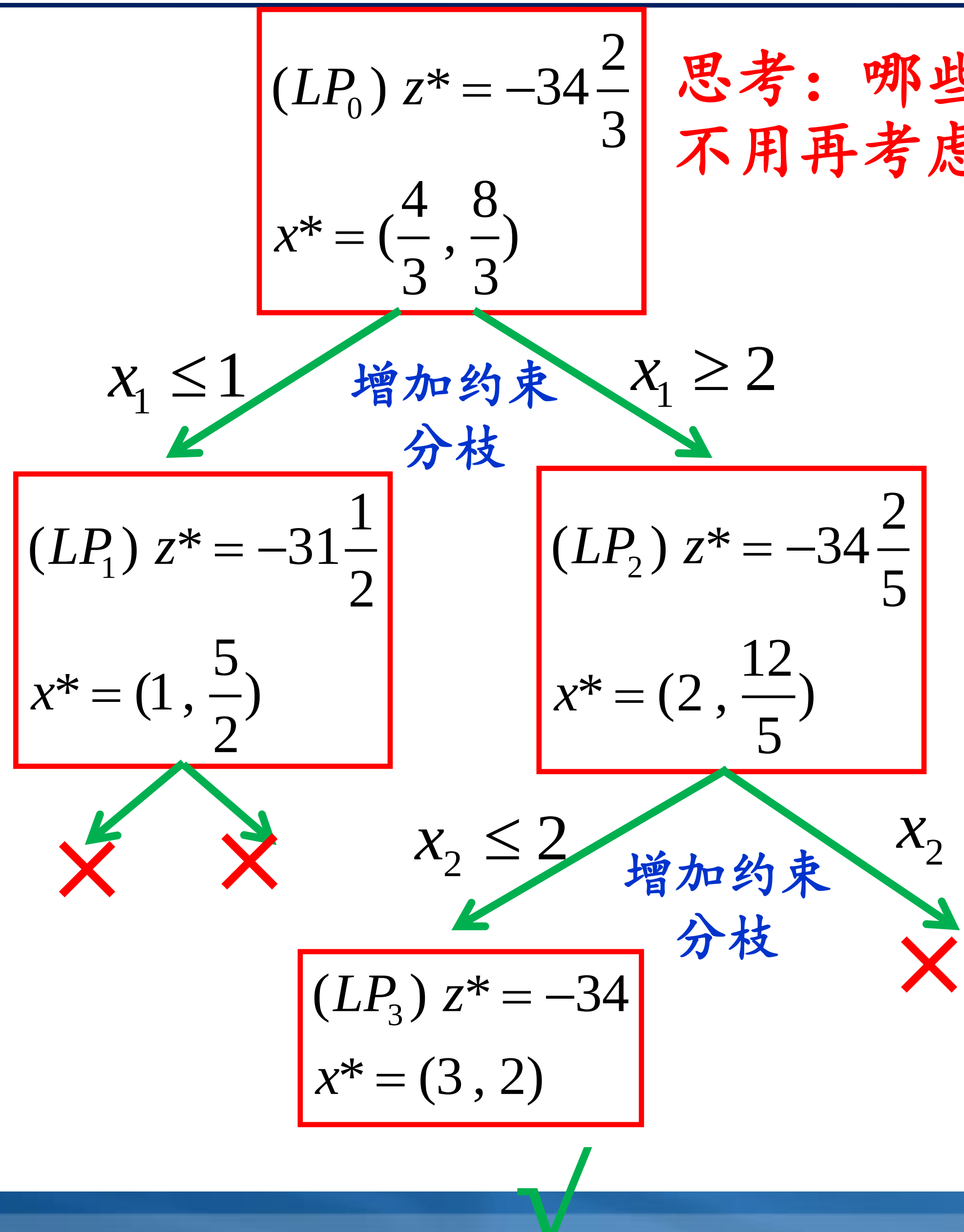
分枝定界法：有关术语

$$\begin{cases} \min & z = f(x) \\ s.t. & x \in K_0 \subset R^n \end{cases}$$

③松弛问题：当前划分集中每一个 K_i 对应的下述问题：

$$(\tilde{K}_i): \begin{cases} \min & z = f(x) \\ s.t. & x \in \tilde{K}_i \subset R^n \end{cases}$$

注意： $\tilde{K}_i \supset K_i$ **且使得松弛问题求解非常容易。可以是线性规划松弛，也可是其他形式松弛**



思考：哪些节点不用再考虑？

分枝定界法：有关术语

$$\begin{cases} \min \quad z = f(x) \\ s.t. \quad x \in K_0 \subset R^n \end{cases}$$

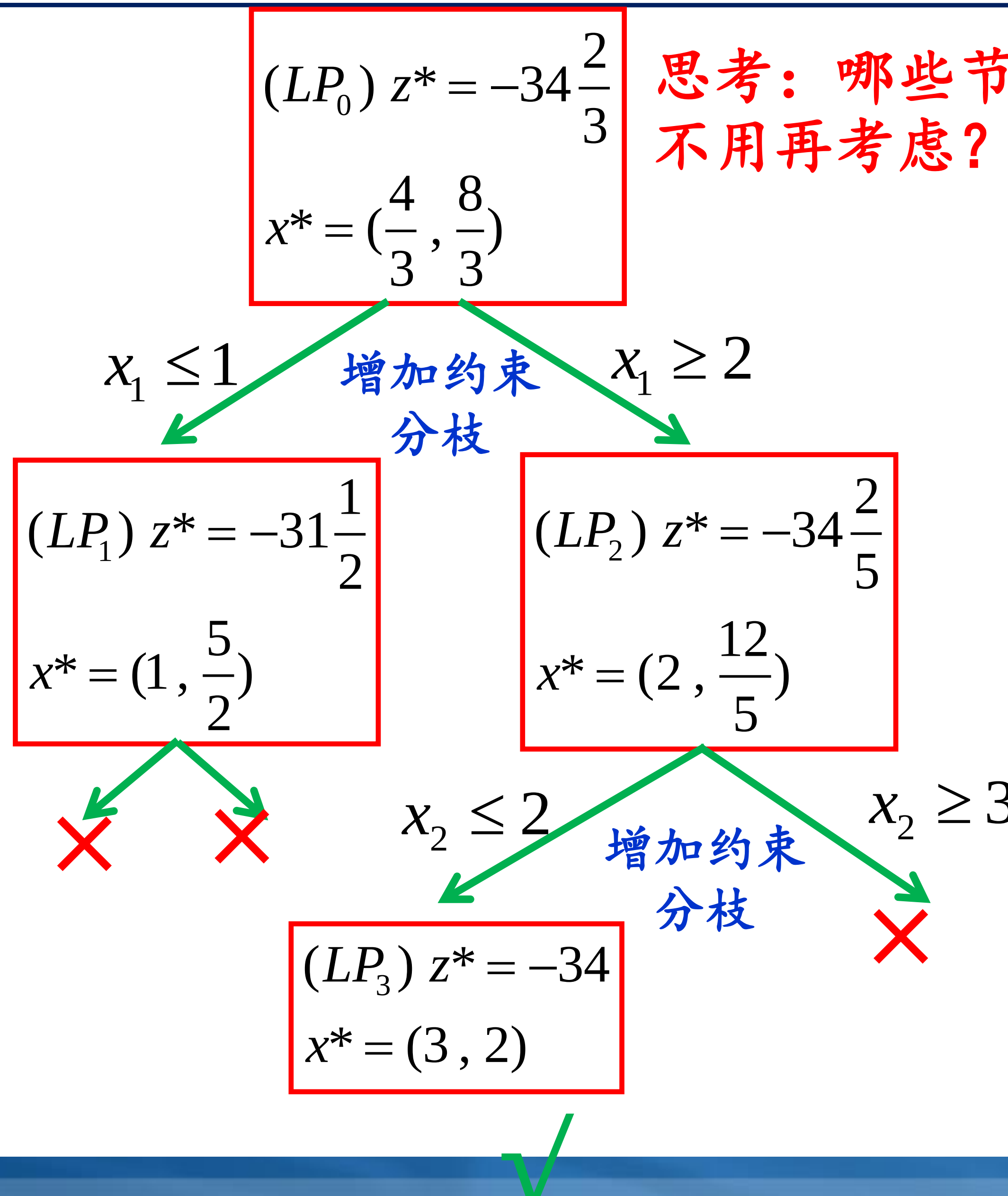
$$K_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} K_{i_j}$$

④父问题与子问题(父节点与子节点)： 下述两个问题之间的关系：

父问题：$\begin{cases} \min \quad z = f(x) \\ s.t. \quad x \in K_i \subset R^n \end{cases}$

子问题：$\begin{cases} \min \quad z = f(x) \\ s.t. \quad x \in K_{i_j} \subset R^n \end{cases}$

注意：子问题出现后，父问题将不再是活问题



思考：哪些节点不用再考虑？

分枝定界法：有关术语

⑤当前最好解、当前最好目标界估计、活问题的目标界估计：

初始化 $\begin{cases} \tilde{x}^* = NaN\ ,\ \tilde{z}^* = +\infty \\ \underline{z}^{(0)*} = -\infty \end{cases}$

$(\tilde{K}_i)$ 求解前：

$\underline{z}^{(i)*}$从其父节点直接继承

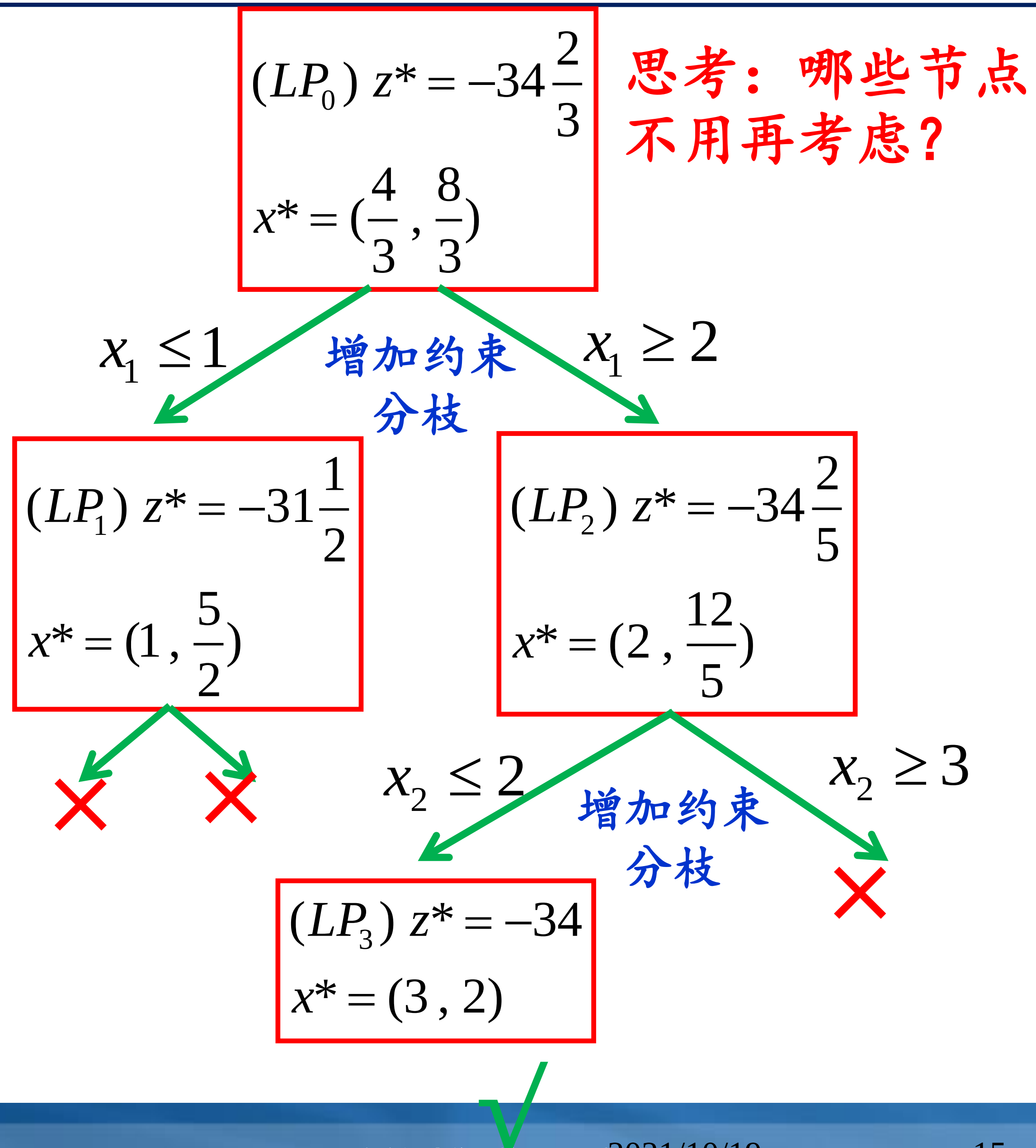
$(\tilde{K}_i)$ 求解后：**定界**

若 $\tilde{x}^{(i)*} \in K_0$ and $\tilde{z}^{(i)*} < \tilde{z}^*$

$\tilde{z}^* = \tilde{z}^{(i)*};\ \tilde{x}^* = \tilde{x}^{(i)*};$

若 $\tilde{x}^{(i)*} \notin K_0$

$\underline{z}^{(i)*} = \tilde{z}^{(i)*}$



思考：哪些节点不用再考虑？

分枝定界法：有关术语

⑥已查清的问题：若某个活问题的松弛问题属于以下四种情况之一：

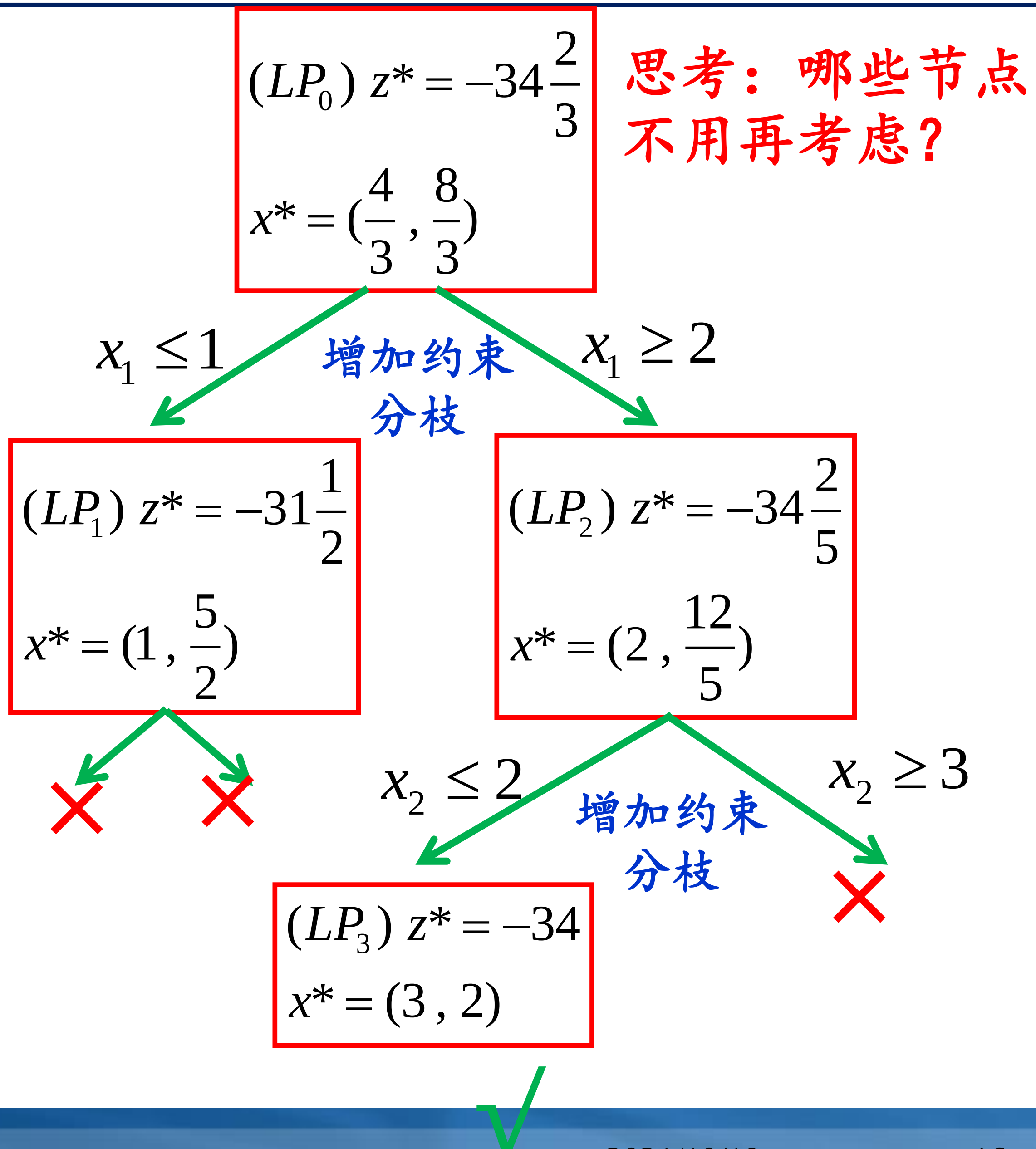
($\tilde{K}_i$) 无可行解

($\tilde{K}_i$) 求解后发现 $\tilde{x}^{(i)*} \in K_0$

($\tilde{K}_i$) 求解前发现 $\underline{z}^{(i)*} \ge \tilde{z}^*$

($\tilde{K}_i$) 求解后发现 $\tilde{z}^{(i)*} \ge \tilde{z}^*$

⑦剪枝：从活问题集合(活点集合)中删去所有已查清问题



思考：哪些节点不用再考虑？

分枝定界法：有关术语

⑧**分枝**：选择一个活问题对其进行划分(可以是已求解的，也可是未求解的，每次未必是二分，注意划分后活问题集合的变化)

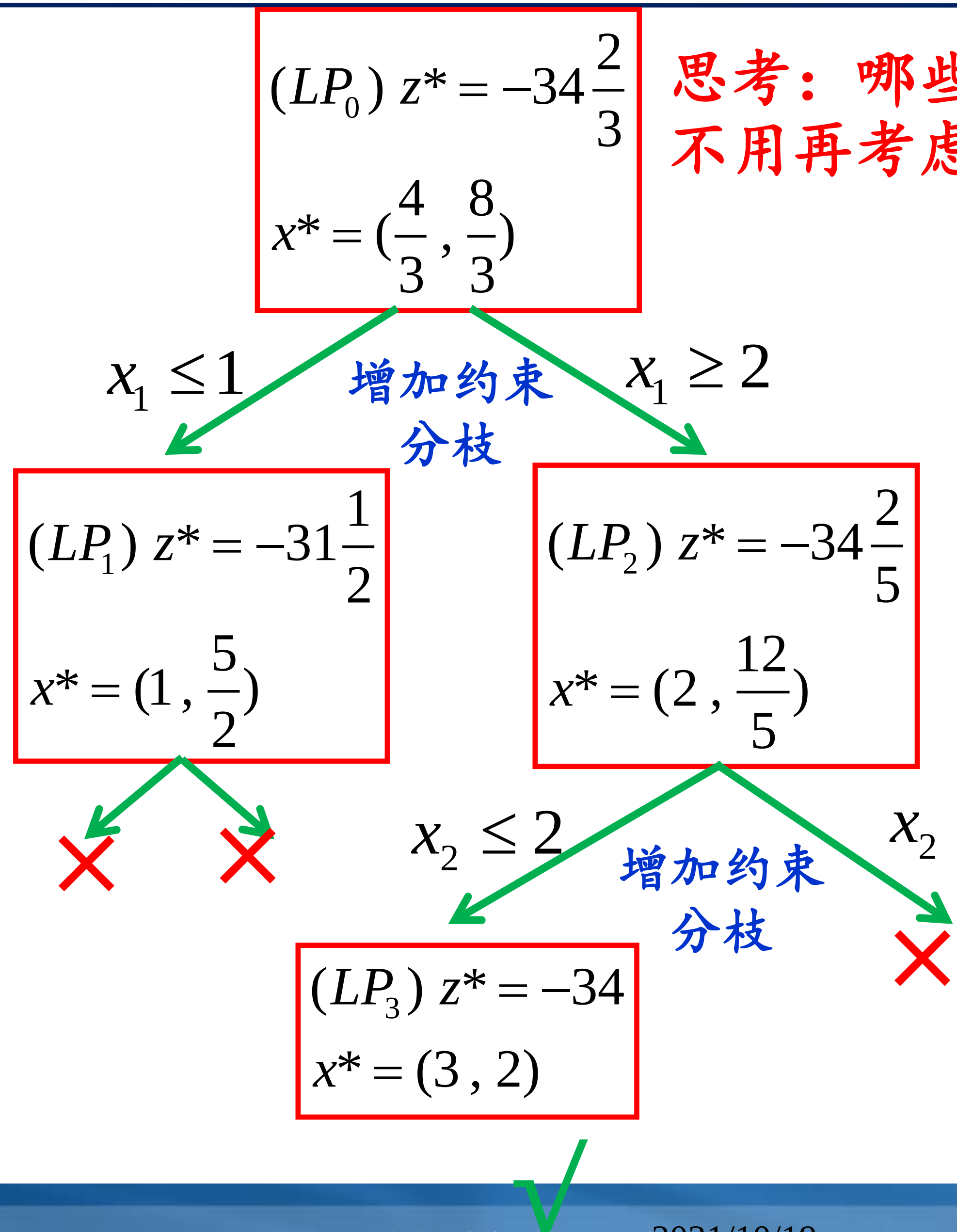
分枝定界法的**终止准则**：

终止准则(最优解)：活问题集合为空　　$\tilde{x}^*, \tilde{z}^*$

终止准则(满意解)：

$$\tilde{z}^* - \min_k \left\{ \underline{z}^{(k)*} \right\} \le \varepsilon$$

Optimality Gap



思考：哪些节点不用再考虑？

分枝定界法的一般步骤

- 初始化: 活点集合, 上界, 最好整数解
- 定界: $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{z}_k \geq \boldsymbol{z}_m$
- 分枝: $x_i \leq [x_i^k]$ $x_i \geq [x_i^k]+1$
- 后继问题: 应用对目标函数估界的方法，或对某一分枝重要性的了解，确定出首先要解的某一分枝。

- 程序计算方法: 树的遍历

分枝定界法注意事项

- 分枝变量选择：
  - 按目标函数系数：选系数绝对值最大者变量先分
    对目标值升降影响最大
  - 选与整数值相差最大的非整数变量先分枝
  - 按使用者经验，对各整数变量排定重要性的优先顺序
- 分枝节点选择：
  - 深探法(后进先出法)：最后打开的节点最先选，尽快找到整数解。(整数解质量可能不高)
  - 广探法： 选目标函数当前最大值节点。(找到的整数解质量高，慢。)

分枝定界法：0-1规划的隐枚举法

分枝定界思想应用于0-1规划时有更高效的实现方式

隐枚举法(Implicit Enumeration)

0-1规划是最常见、最重要的整数规划类型，所有整数变量均可化为0-1变量

$0 \le x_i \le 10,\ x_i$ 为整数

二进制

$$x_i = 2^0 y_0 + 2^1 y_1 + 2^2 y_2 + 2^3 y_3$$

y_j为0-1变量

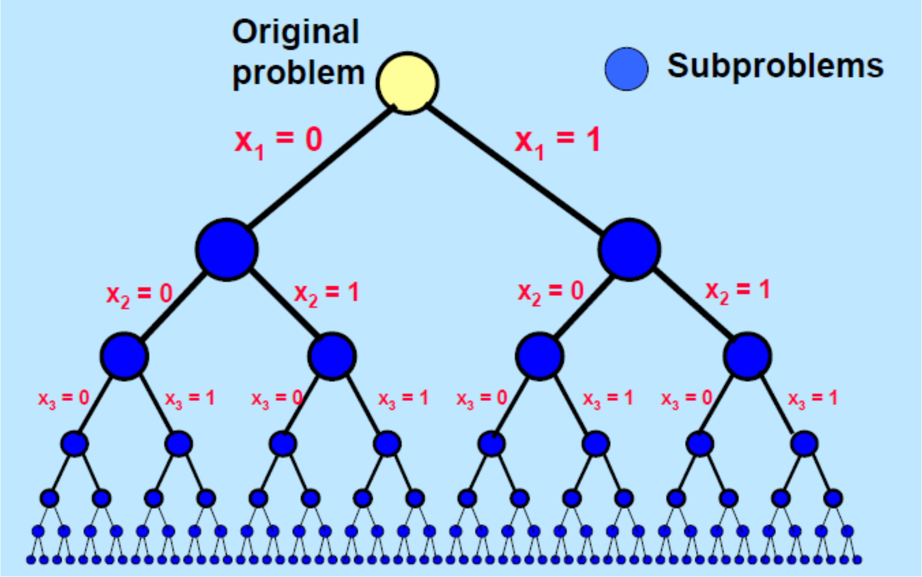
纯0-1线性规划的标准形式：

$$\begin{cases} \min z = c^T x \\ s.t.\ Ax \le b \\ x \text{ 为 0-1向量} \end{cases}$$

特殊要求：$c \ge 0$

若 $c_i < 0$ 可令 $x_i' = 1 - x_i$

求解方法：二叉树遍历



n = 30,	1 second
n = 40,	17 minutes
n = 50	11.6 days
n = 60	31 years

仅需部分枚举确保整数性(0-1)

分枝定界法：0-1规划隐枚举法举例

例2： min $\quad z = 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le -2 \\ & -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le -4 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad ; i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

枚举数目为7，明显小于16 (即2^4)

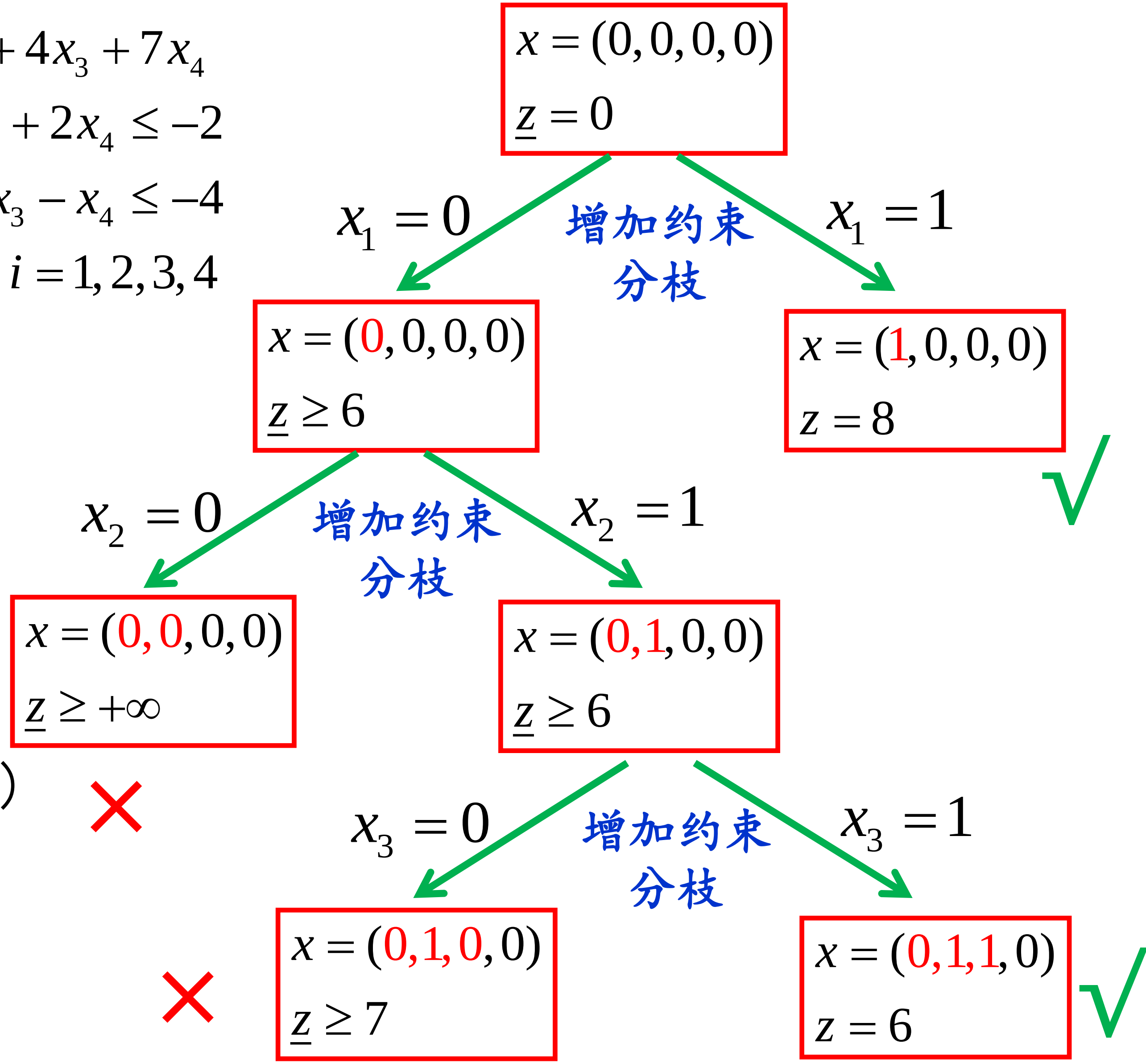
重要概念：

不可行程度(动态)

固定变量

自由变量

定界方法



作业

- P102 6. (1)