2012-2013秋季线性代数期末试题

考试课程　　线性代数　　A卷　　　　2013 年 1 月 4 日

姓名: ______________　学号: ______________　班级: ______________

注：填空题请直接在答题纸上写答案，解答题请写清步骤。

1. (30分) 填空题(每小题3分)：

(1) 设A是一个$m\times n$阶矩阵, B是一个$n\times s$阶矩阵, $r(A)=n$, $r(B)=r$, 则$\dim N(AB)=\underline{s-r}$.

(2) 设A和B是可逆矩阵, 则分块矩阵$C=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$的逆矩阵是$\underline{\begin{pmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}}$.

(3) 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, 且$A$与$B$相似，则$x,y=\underline{0,1}$.

(4) 设a_1,a_2,a_3是$\mathbf{R}^4$中相互正交的单位向量，矩阵$P=I_4-(a_1a_1^T+a_2a_2^T+a_3a_3^T)$的全部特征值是$\underline{0(3\text{重}),1(1\text{重})}$(写明重数).

(5) 设A,B是两个n阶矩阵, 且$AB=0$, $Ax=0$和$Bx=0$无公共非零解,则$r(A)+r(B)\underline{=}n$(填写$<,>$或$=$).

(6) 关于一元函数$y=y(t)$, 二阶微分方程$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=0$的通解(complete solution)是$\underline{y=C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}}$ (C_1,C_2为任意常数).

(7) 设4阶矩阵A与B相似, I是4阶单位阵, A的特征值是$1,1,2,2$, 则$|B^{-1}+I|=\underline{9}$.

(8) 补齐2阶矩阵$A=\begin{pmatrix}2&6\\ & \end{pmatrix}$的第二行元素, 使$A$有特征向量$x_1=(3,1)$和$x_2=(2,1)$.　　$\underline{-1,7}$.

(9) 设$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 与$S$交换的3阶矩阵全体形成的向量空间维数是$\underline{3}$.

(10) 设$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}$, P_1是A的第一列形成的1维空间上的投影矩阵,

P_2是A的列空间上的投影矩阵, 则$P_2P_1=$<u>$P_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$</u>.

2. (10分) 设a,b,c,d为不全为0的实数，矩阵$A=\begin{pmatrix}a^2&ab&ac&ad\\ba&b^2&bc&bd\\ca&cb&c^2&cd\\da&db&dc&d^2\end{pmatrix}$,

求A的特征值和相应特征子空间。

解: $\det A=abcd\begin{vmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\\a&b&c&d\\a&b&c&d\end{vmatrix}=0$,故$A$有特征值0.已知$a,b,c,d$不全为0,不妨设$a\neq 0$. $A\to\begin{pmatrix}a^2&ab&ac&ad\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $r(A)=1$,则$\dim N(A)=3$且$N(A)$,即零特征值对应的特征子空间有基:

$$\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

特征值0的几何重数为3,故其代数重数不小于3，又$\mathrm{tr}A=a^2+b^2+c^2+d^2>0$,因此，特征值0的代数重数等于3, 且另一个特征值为$a^2+b^2+c^2+d^2$,其特征子空间的基为$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

3. (12分) 设A是一个$m\times n$阶矩阵, 假设$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有解,解集为S.

(1) 证明：S中的解向量在A的行空间$C(A^T)$上的投影均相等(记作$\mathbf{x}_{row}$);

(2) 证明：$\mathbf{x}_{row}$是$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的长度最小的解；

(3) 假设$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}$, 求$\mathbf{x}_{row}$.

(1) **证明：** 因为$S\subseteq\mathbf{R}^n=N(A)+C(A^T)$,所以对任意$x_1,x_2\in S$，有$x_1=x_{1r}+x_{1n}$, $x_2=x_{2r}+x_{2n}$, 其中$x_{1r},x_{2r}\in C(A^T)$, $x_{1n},x_{2n}\in N(A)$. 由$x_1,x_2\in S$知$x_{1r},x_{2r}\in S\cap C(A^T)$. 又$A(x_{1r}-x_{2r})=0$,故$x_{1r}-x_{2r}\in C(A^T)\cap N(A)=\{0\}$,即$x_{1r}=x_{2r}$,也即任意解向量在$A$的行空间的投影相等。

(2) **证明：** 任意$x\in S$, $x=x_{\text{row}}+x_n$, 其中$x_{\text{row}}\in C(A^T)$, $x_n\in N(A)$.而

$$||x||^2=||x_{\text{row}}||^2+||x_n||^2\geq||x_{\text{row}}||^2,$$

即x_{row}是$Ax=b$的长度最小的解。

(3) **解：** 设$x_{\text{row}}=A^T\alpha$,则由$Ax_{\text{row}}=b$得$AA^T\alpha=b$, 即$\begin{pmatrix}11&-1\\-1&5\end{pmatrix}\alpha=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}$, 解得$\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.因此$x_{\text{row}}=A^T\alpha=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.

4. (12分)$A=\begin{pmatrix}1&3&0&5\\2&6&1&16\\5&15&0&25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&0&1&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

求A的四个基本子空间的基.

解： $\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\6\end{pmatrix}\}$为$A$的行空间的一组基,

$\{\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$为$A$的列空间的一组基,

$\{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\0\\-6\\1\end{pmatrix}\}$ 为A 的零空间的一组基,

$\{\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix},\}$为$A$的左零空间的一组基。

5. (10分) 给定两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$, 满足$a_1 = 1, b_1 = -1$, $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}$.

(1) 定义$u_k = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, 求矩阵$A$使得$u_{k+1} = Au_k$.

(2) 求A的特征值和a_n和b_n的通项公式.

解： (1) $u_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} u_k$.

(2) $|A - \lambda I| = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$, 故$A$得特征值为$2, 3$. 易得$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$为属于特征值2的特征向量，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$为属于特征值2的特征向量。

$u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} u_n &= A^{n-1}u_1 = 2 \cdot 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n \\ 2^n - 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是$a_n = 2^{n+1} - 3^n$, $b_n = 2^n - 3^n$.

6. (12分) 给定$\mathbb{R}^2$上3个点(x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$.

(1) 设最小二乘意义下拟合这三个点的最佳曲线是$y = C + Dx$, 证明这条直线过平均值点$(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$;

(2) 令$e_i = y_i - (C + Dx_i)$, i=1,2,3. 证明$e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

(3) 假设三个点是$(-2, 1), (0, 2), (2, 4)$, 验证以上结论.

(1) **证明:** $\begin{cases} C + Dx_1 = y_1, \\ C + Dx_2 = y_2, \\ C + D_3 = y_3 \end{cases}$ 记$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. 最小二乘解满足方程$AA^T\hat{x} = A^Tb$,即

$$\begin{pmatrix} 3 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_iy_i \end{pmatrix},$$

故$C + (\frac{1}{3}\sum x_i)D = \frac{1}{3}\sum y_i$.

(2) **证明：** $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = b - p$, 其中$b - A\hat{x}$ 为b在$C(A)$上的投影，

故$e \perp C(A)$,因此$e \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 即$e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

(3) 过三点的拟合直线为$y = \frac{7}{3} + \frac{3}{4}x$.

7. (14分) 设$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{pmatrix}$, 其中$t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$.

(1) 假设A的秩为2, 求A的列空间(column space)$C(A)$的一组标准正交基(写出计算公式即可)；

(2) 求A的QR分解$A = QR$；

(3) 具体写出R不可逆的条件；

(4) 假设A的秩为2, $b \in \mathbb{R}^4$,证明b在$C(A)$上投影是QQ^Tb.

(1) **解：** 取$q_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$. 记$t = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}^T$, $\bar{t} = \frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}$, $u = \begin{pmatrix} 1, 1, 1, 1 \end{pmatrix}^T$. 取

$$q_2 = \frac{t - (q_1^T t) q_1}{||t - (q_1^T t) q_1||} = \frac{t - \bar{t}u}{||t - \bar{t}u||}.$$

(2) $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, $R = Q^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2\bar{t} \\ 0 & ||t - \bar{t}u|| \end{pmatrix}$.

(3) R不可逆$\Leftrightarrow ||t - \bar{t}u|| = 0 \Leftrightarrow t = \bar{t}u$, 即$t_1 = t_2 = t_3 = t_4$.

(4) b在$C(A)$上的投影为$A(A^TA)^{-1}A^Tb = QR(R^TR)^{-1}R^TQ^Tb = QQ^Tb$.