第五章

12. (1) $A\cap B$ 是有限集合。

证明：反证法，假设 $A\cap B$ 不是有限集合。

设 $|B|=n_B$. $\exists x_1, x_2, \cdots x_n$, $n\in N^+$ 且 $n>n_B$, $x_i\in A\cap B$ $(i=1,2,\cdots n)$

所以 $x_i\in B$ $(i=1,2\cdots n)$，则 $|B|\geqslant n$，与 $|B|=n_B<n$ 矛盾

所以 n 为有限值，所以 $A\cap B$ 是有限集合。且 $n\leqslant n_B$

(2) $A\cup B$ 是无限集合.

证明：反证法。假设 $A\cup B$ 是有限集合.

令 $|A\cup B|=n_1$，即 n_1 为一个有限正整数.

由于 A 是无限集合，

所以对于 $\forall m\in N^+$, $\exists k>m$,

使 $x_1, x_2\cdots x_k\in A$

所以 $x_i\in A\cup B$ $(i=1,2,\cdots k)$

所以 $|A\cup B|\geqslant k$，与 $|A\cup B|=n_1$，n_1 为有限数矛盾

所以 $A\cup B$ 是无限集合。

(3) $A\setminus B$ 是无限集合.

证明: 反证法: 假设 $A\setminus B$ 是有限集合.

令 $|A\setminus B| = n_1$, $|B| = n_2$

则 $|A| \leq n_1 + n_2$

即 A为有限集合, 与 A为无限集合矛盾

所以 $A\setminus B$ 是无限集合。

习题六

1. (1) 是
(2) 是
(3) 是
(4) 不是
(5) 不是
(6) 不是
(7) 是
(8) 是
(9) 是
(10) 是

6. a为幺元，a的左右逆元均为a.
$b*c=a$ b是c的左逆元
$c*b=a$ c是b的左逆元
$c*d=a$ c是d的左逆元
$d*b=a$ d是b的左逆元
$e*c=a$ e是c的左逆元
c是b的右逆元，e无左逆元
b是c的右逆元
d是c的右逆元
b是d的右逆元
c是e的右逆元。

12.

⊕	b	d
b	b	b
d	b	d

⊗	b	d
b	b	d
d	d	d

$\langle S_1, ⊕, ⊗\rangle$ 是子代数系统.
因为前域充满，后域唯一，封闭。

⊕	a	d
a	a	a
d	a	a

⊗	a	d
a	a	d
d	d	d

$\langle S_2, ⊕, ⊗\rangle$ 是子代数系统.
因为前域充满，后域唯一，封闭。

扫描全能王 创建

$\oplus$	b	c
b	b	a
c	a	c

$\otimes$	b	c
b	b	d
c	d	c

$\langle S_3, \oplus, \otimes \rangle$ 不是子代数系统

因为不封闭.