第三章 复变函数的积分

§3.1 复积分的概念

§3.2 柯西积分定理

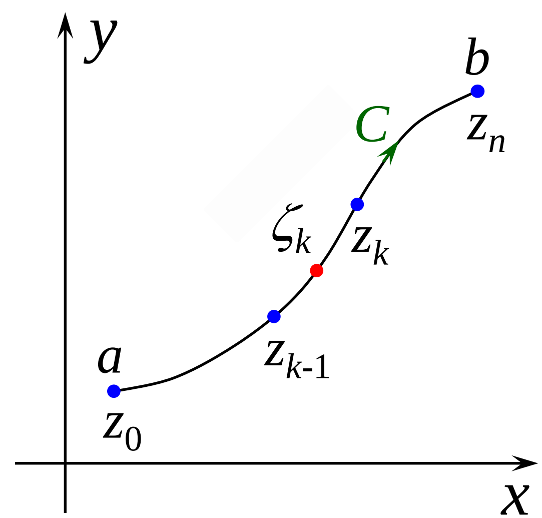
§3.3 柯西积分公式与高阶导数公式

§3.4 解析函数和调和函数的关系

§3.1复积分的概念

一、复积分的定义

定义　如图设 C 为简单光滑的有向曲线，其方向是从 a 到 b，函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，



(1)分：将曲线 C 任意划分：

$$z_0 = a, z_1, z_2, \cdots, z_n = b,$$

令 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，$\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k|$，

(2) 匀：在每个弧段 $\widehat{z_{k-1}z_k}$ 上任取一点 $\zeta_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$，

则 $f(\zeta_k)\Delta z_k = f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$, 其中 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$.

(3) 合：$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

(4) 精：设λ表示n个小弧段的最大长度，当$\lambda \to 0$时，

无论C怎样分，ζ_k怎样取，如果和式的极限唯一存在，

若 $\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ 存在(不依赖 C 的划分和ζ_k的选取)，则称之为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为$\int_C f(z)\,dz$.

注 (1)$\int_{C^-} f(z)\,dz$ 表示沿曲线 C 的负方向积分；

(2) $\oint_{\Gamma} f(z)\,dz$ 表示沿闭曲线 Γ(的逆时针方向)积分.

二、复积分的性质

(1) $\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\mathrm{d}z=\alpha\int_C f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_C g(z)\mathrm{d}z.$

(2) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=-\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z.$

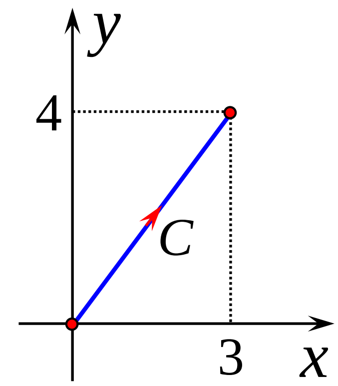
(3) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z,$

其中, $C=C_1+C_2.$

(4) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C |f(z)||\mathrm{d}z|=\int_C |f(z)|\mathrm{d}s\le ML,$

其中, $M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$, L为曲线C的弧长。

例1 试求积分 $\int_C \frac{1}{z-i}dz$ 绝对值的一个上界，其中曲线C如图所示。



解 曲线 C： $z = 3t + i4t$， $t: 0 \to 1$，

$$|z-i| = |3t + i(4t-1)| = \sqrt{(3t)^2 + (4t-1)^2}$$

$$= \sqrt{25t^2 - 8t + 1} = \sqrt{25\left(t - \frac{4}{25}\right)^2 + \frac{9}{25}} \geq \frac{3}{5}.$$

$$\left|\int_C \frac{1}{z-i}\mathrm{d}z\right| \leq \int_C \frac{1}{|z-i|}\mathrm{d}s \leq \frac{5}{3}\cdot 5 = \frac{25}{3}.$$

例2 试证 $\lim\limits_{r\to 0}\oint_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz=0$

证 不妨设 $r<1$,

$$|1+z^2|\geq|1-|z|^2|$$

$$0\leq\left|\oint_{|z|=r}\frac{z^3}{1+z^2}dz\right|\leq\oint_{|z|=r}\frac{|z|^3}{|1+z^2|}ds$$

$$\leq\oint_{|z|=r}\frac{|z|^3}{|1-|z|^2|}ds=\frac{2\pi r^4}{1-r^2}\to 0,\ (r\to 0).$$

三、复积分的计算

方法一　化为第二类曲线积分

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)$$

$$=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+i\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y.$$

- 进一步可化为定积分或者二重积分。

方法二　直接化为定积分

设曲线 $C: z=z(t)=x(t)+i\,y(t),\ t:a\to b,$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t,$$

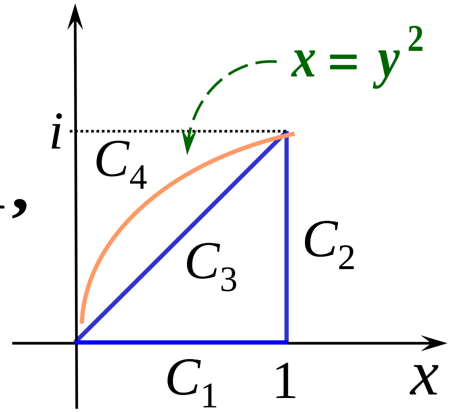
其中, $z'(t)=x'(t)+i\,y'(t).$

附 其它方法(后面的章节介绍)

- **利用原函数计算，即** $\int_C f(z)\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}.$
- 利用柯西积分公式、高阶导公式计算。
- 利用留数计算。

例3 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为(如图):

(1) $C=C_1+C_2$; (2) $C=C_3$; (3) $C=C_4$.



解(1) 曲线 C_1 的方程为 $z=x$, $x:0\to 1$,

曲线 C_2 的方程为 $z=1+iy$, $y:0\to 1$,

$$I=\int_{C_1} z\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} z\,\mathrm{d}z,$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 (1+iy)\,\mathrm{d}(1+iy)$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 i(1+iy)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\left(iy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=i.$$

(2) 曲线 C_3 的方程为 $z=t+it,\ t:0\to 1,$

$$I=\int_{C_3} z\,\mathrm{d}z=\int_0^1(t+it)\,\mathrm{d}(t+it)=(1+i)(1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2i\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1=i.$$

(3) 曲线 C_4 的方程为 $z=t^2+it, t:0\to 1,$

$$I=\int_{C_4} z\,\mathrm{d}z=\int_0^1(t^2+it)\,\mathrm{d}(t^2+it)$$

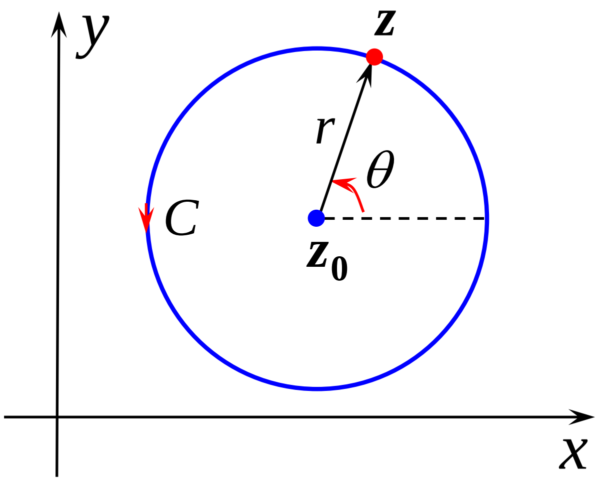
$$=\frac{1}{2}(t^2+it)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1+i)^2=i.$$

例4 计算 $I=\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中C为 $|z-z_0|=r$，n为整数。

解 曲线 C 的参数方程为 $z=z_0+re^{i\theta}$，$\theta: 0\to 2\pi$，

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}\,i}{(re^{i\theta})^n}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta,$$



当 $n=1$ 时，$I=2\pi i$；

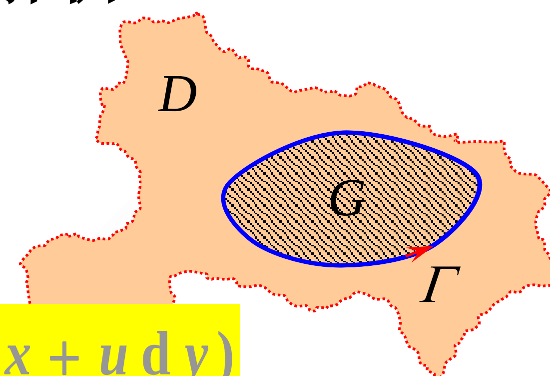
当 $n\neq 1$ 时，$I=\frac{i}{i(1-n)r^{n-1}}e^{i(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0.$

注 此例的结果很重要！

§ 3.2柯西积分定理

一、柯西基本定理

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，



Γ 为 D 内的任意一条简单闭曲线，

则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

证明 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma}(u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\oint_{\Gamma}(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$

$$\xlongequal[(?)]{\text{Green公式}} -\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

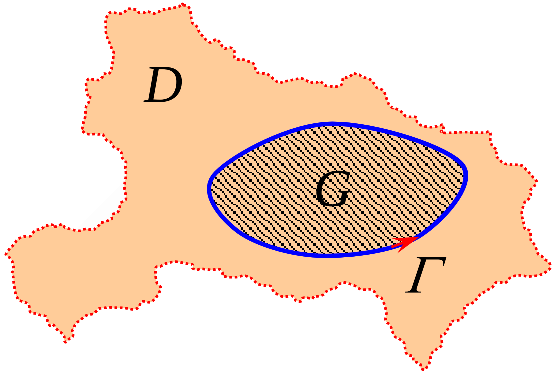
$$\xlongequal{\text{C}-\text{R方程}} 0.$$

- 上述定理又称为柯西-古萨(Cauchy-Goursat)基本定理。

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，

Γ 为 D 内的任意一条简单闭曲线，

则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$

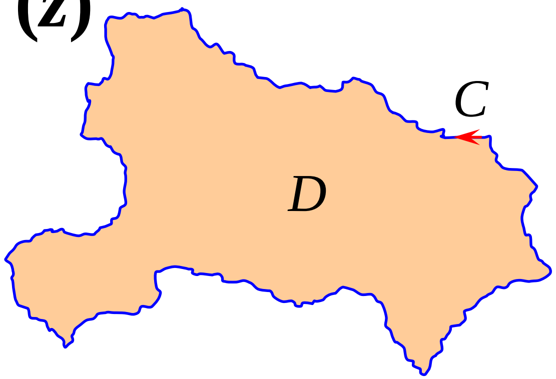


注 (1) 定理中的曲线 Γ 可以不是简单闭曲线。

(2) 定理中的条件还可以进一步减弱。

定理 设单连通域 D 的边界为 C,函数 $f(z)$ 在 D 内解析，

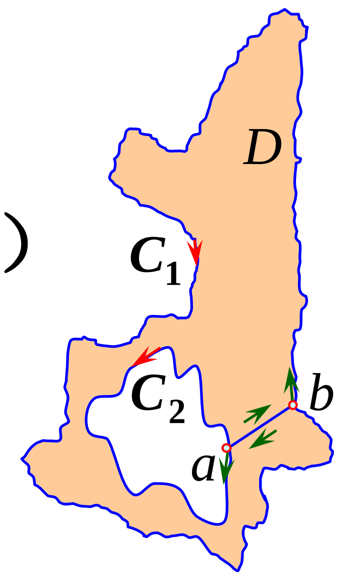
则有 $\boxed{\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = 0.}$



二、闭路变形原理

将柯西积分定理推广到二连域

定理 设二连域 D 的边界为 $C = C_1^{-} + C_2$（如图）函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 C 上连续，则



$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0} \quad \text{或} \quad \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

证明 如图作线段 $\overline{ab}$，则二连域 D 变为单连域，

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

由 $\displaystyle\int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\mathrm{d}z = 0$, $\Rightarrow \displaystyle\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0,$

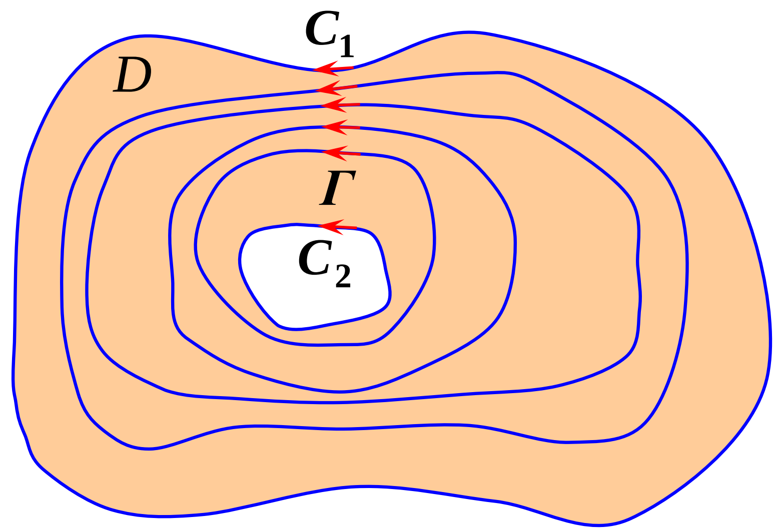
$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \quad \text{或} \quad \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

闭路变形原理

如图，设 $f(z)$ 在 D 内解析，

在边界 $C = C_1 + \overline{C_2}$ 上连续，

Γ 为 D 内的一条“闭曲线”，



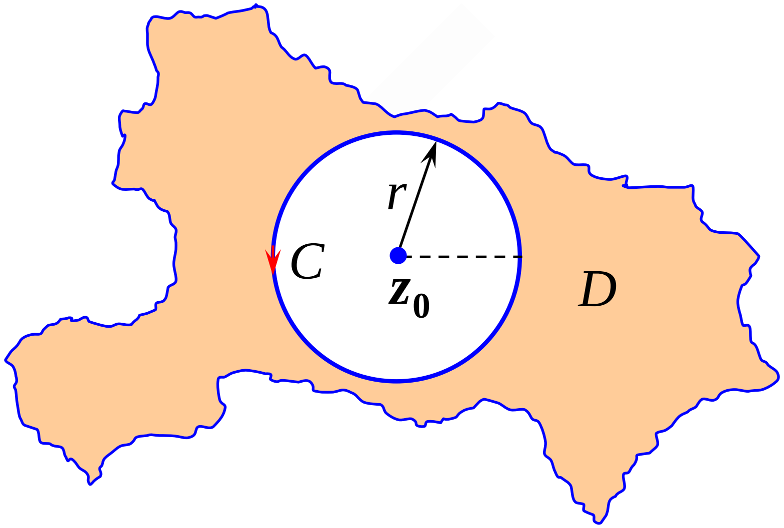
则 $\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$.

- 在区域内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值，

称此为闭路变形原理。

例1 计算 $I=\oint_{\Gamma}\dfrac{dz}{(z-z_0)^n}$，其中 Γ 为包含 z_0 的一条闭曲线。

解 如图以 z_0 为圆心 r 为半径作圆，



则函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ 在

$\overline{D}=D+\Gamma+C^-$ 上解析，

因此有 $I=\oint_{\Gamma}\dfrac{dz}{(z-z_0)^n}$

$$=\oint_{C}\frac{dz}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}。\end{cases}$$

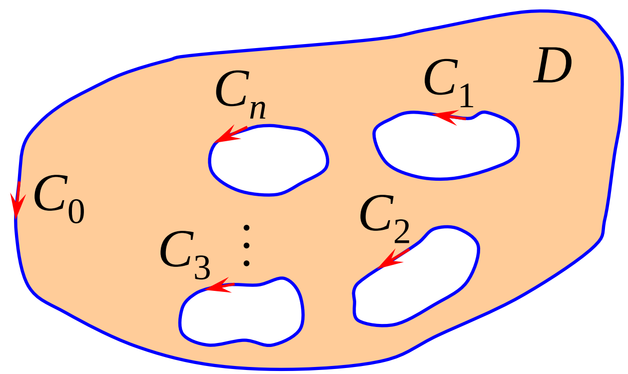
三、复合闭路定理

将柯西积分定理推广到多连域

定理 设多连域 D 的边界为 $C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$ 如图

函数 $f(z)$ 在 D 内解析，

在 C 上连续，



则 $\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0}$

或 $\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$

证明（略）

例2 计算 $I=\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz$，其中 C 为：

$(1)\ |z-3|=\frac{1}{2}$；$(2)\ \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1}=1$

解 令 $f(z)=\frac{2z-1}{z^2-z}$，则 $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}$，奇点为 $z=0, 1$.

（1）当 C 为 $|z-3|=\frac{1}{2}$ 时 $I=\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz=0$.

（2）当 C 为 $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1}=1$ 时 令 C_1: $|z|=\frac{1}{3}$，C_2: $|z-1|=\frac{1}{3}$，

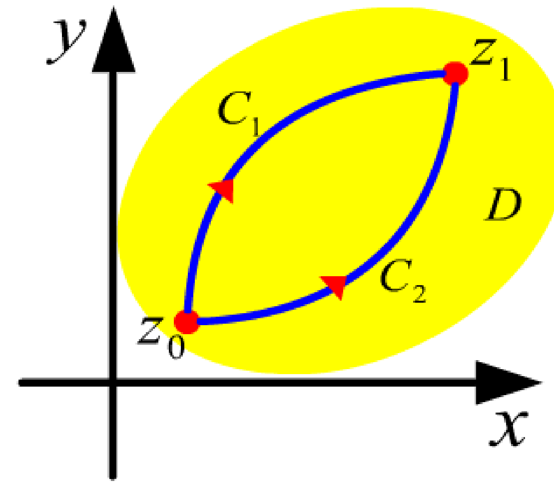
$$则\ I=\oint_{C_1}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz$$

$$=2\pi i+0+0+2\pi i=4\pi i.$$

四、路径无关性

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，C_1, C_2 为 D 内的任意两条从 z_0 到 z_1 的简单曲线，则有

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$



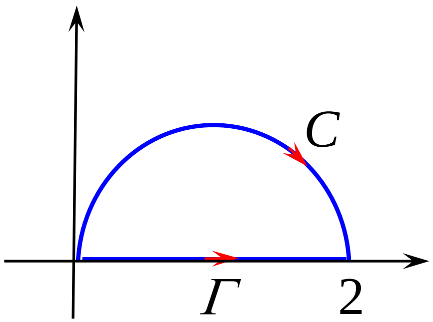
证明 由 $\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = 0$,

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = -\int_{C_2^-} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

- 可见，解析函数在单连通域内的积分只与起点和终点有关，因此可记为：$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz.$

例3 计算 $I=\int_C \sin z dz$，其中 C 为如图所示的一个半圆。

解 设 G如图所示，由于$\sin z$在复平面上处处解析，因此有



$$I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma \sin z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^2 \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^2=1-\cos 2.$$

问 是否可以直接计算？

即 $I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z=\int_0^2 \sin z\,\mathrm{d}z=-\cos z\Big|_0^2=1-\cos 2.$

五、原函数

1. 基本概念及性质

定义 设在单连域 D 内，函数 $F(z)$ 恒满足 $F'(z)=f(z)$，

则 $F(z)$称为 $f(z)$在 D 内的一个原函数。

性质 函数 $f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数。

证明 设 $G(z)$ 和$H(z)$ 是$f(z)$ 的两个原函数，

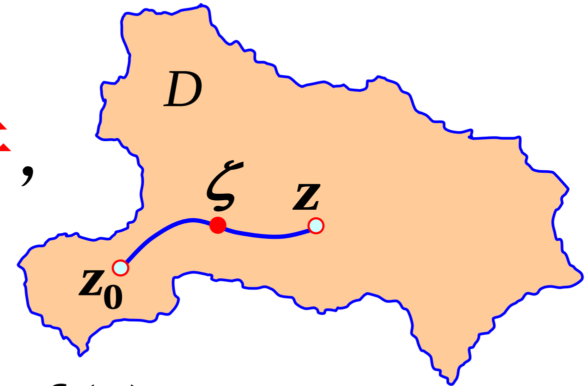
则 $[G(z)-H(z)]'=G'(z)-H'(z)=f(z)-f(z)=0$,

$\Rightarrow G(z)-H(z)=c$，其中，c为任意常数。

定义 函数$f(z)$的原函数 $F(z)+c$ 称为 $f(z)$的不定积分，

记作$\int f(z)\,\mathrm{d}z=F(z)+c$.

2. 由变上限积分构成的原函数



定理 若 $f(z)$ 在**单连域** D 内处处**解析**,

令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$, $z, z_0 \in D$,

则 $F(z)$ 在 D 内解析, 且 $F'(z)=f(z)$.

证明 (1) **(思路)**

$$\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}s,$$

$$(2)\quad \left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,ds,$$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z| = \varepsilon,$$ (当 $|\Delta z|$ 充分小时)

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| = 0,$$ 即 $F'(z) = f(z).$

3. Newton-Leibniz公式

定理 若 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，$G(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数，则 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = G(z_1) - G(z_2)$，其中 $z_0, z_1 \in D.$

证明 由于 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 也是 $f(z)$ 的一个原函数,

有 $F(z)=G(z)+c$, $\Rightarrow$ $F(z_0)=G(z_0)+c$,

$F(z_1)=G(z_1)+c$,

$$\Rightarrow\ F(z_1)-F(z_0)=\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z-0=G(z_1)-G(z_0).$$

例4 求 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z$.

解 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3.$

例5 求 $\int_a^b \cos z \, \mathrm{d}z$.

解 $\int_a^b \cos z \, \mathrm{d}z = \sin z \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$

例6 求 $\int_0^i z \cos z \, \mathrm{d}z$.

解 $\int_0^i z \cos z \, \mathrm{d}z = \int_0^i z \, \mathrm{d}\sin z = z \sin z \Big|_0^i - \int_0^i \sin z \, \mathrm{d}z$

$$= (z \sin z + \cos z)\Big|_0^i = i \sin i + \cos i - 1.$$

思考题:

$$\oint_C \frac{z}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{\frac{1}{2}}{z^2+1}d(z^2+1) = \oint_\Gamma \frac{\frac{1}{2}}{w}dw = \frac{1}{2}\oint_\Gamma dLnw = 0,$$

其中，C为$|z| = 2, \mathrm{w} = z^2+1 \triangleq f(z), \Gamma$为$f(z)$将$C$映射成$w$平面的曲线。

请问上述做法正确吗？

六、小结与思考

一、复积分的定义

二、复积分的性质

三、复积分的计算

四、柯西基本定理

五、闭路变形原理

六、复合闭路定理

七、路径无关性

八、原函数