习题课2

习题课2

常见函数的傅里叶和拉普拉斯变换

变换性质及其运用

应用傅里叶和拉普拉斯变换或积分形式去计算或证明一些反常积分

应用拉普拉斯变换及逆变换求线性常微分方程或积分方程

习题课2

重要公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt = f(0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t_0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\omega = 2\pi\delta(t),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = 2\pi\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt = 2\pi\delta(\omega),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}dt = u(\omega)-\frac{1}{2}$$

傅里叶变换基本性质(汇总)

线性性质 $\mathscr{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega)$.

位移性质 $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-j\omega t_0}F(\omega)$;　(时移性质)

$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}f(t)$.　(频移性质)

相似性质 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

习题课 2

微分性质 $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(\omega);$

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^n f(t).$$

积分性质 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega).$

Parseval 等式 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$

习题课2

几个常用函数的Laplace变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$;

(6) $\mathscr{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}$.

习题课 2

Laplace 变换的性质

线性性质

设 a，b 为常数，则有

$$\mathcal{L}[a\,f(t)+b\,g(t)] = a\,F(s)+b\,G(s);$$

$$\mathcal{L}^{-1}[a\,F(s)+b\,G(s)] = a\,f(t)+b\,g(t).$$

相似性质（尺度性质）

设 a 为任一正实数，则 $[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$

延迟性质 设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对任一非负实数 τ 有

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

习题课2

位移性质　设 a 为任一复常数，则　$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a).$

微分性质　$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0);$　导数的象函数

一般地，有

$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).}$$

$F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)];$　象函数的导数

一般地，有 $F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)].$

习题课2

积分性质 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{s}F(s).$ 积分的象函数

$$\int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s=\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$ 象函数的积分

习题课2

拉普拉斯变换延迟性质的运用,
特别注意延迟性质的条件

$$L[\cos(t-\tau)]$$

$$L(\cos(t-\tau)u(t-\tau))$$

傅里叶和拉普拉斯变换对应的卷积和卷积定理

习题课 2

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

定理 设 $[f_1(t)]=F_1(\omega)$， $[f_2(t)]=F_2(\omega)$，则有

$$[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega); \qquad (A)$$

$$^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=2\pi f_1(t)\cdot f_2(t). \qquad (B)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\quad (t\geq 0).$$

定理 $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s).$

习题课2

6. 设 $f(t)=\int_0^t \tau\cos a\tau d\tau$，则 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为（B）.

(A) $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$； (B) $\dfrac{s^2-a^2}{s(s^2+a^2)^2}$； (C) $\dfrac{a^2}{(s^2+a^2)^2}$；

4. $f(t)=\int_0^t te^{-3t}\sin 2t dt$ 的拉普拉斯变换为（ ）.

利用 Laplace 变换求下列广义积分值：

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$$

8. 设 $f(t)=\begin{cases}2, & |t|\le 1;\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$，则付氏变换 $\mathcal{F}[f(t)]=$ ________。

9. 傅氏变换 $\mathcal{F}[\delta(t)+2\cos t]=$ ________。

10. 拉氏变换 $\mathcal{L}[e^{-4t}\sin 5t]=$ ________。

习题课 2

5.在 Laplace 变换下,若 $f(t)*g(t)=h(t)$，则 $f(3t)*g(3t)=$ $\underline{\frac{1}{3}h(3t)}$.

二、选择（每小题 4 分，共 20 分）

$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]=F_1(s)$

$h(t)=f(t)*g(t)=\int_0^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

$f(3t)*g(3t)=\int_0^{+\infty}f(3\tau)g[3(t-\tau)]d\tau$

$\overset{x=3\tau}{=\!=}\int_0^{+\infty}f(x)g(3t-x)\frac{1}{3}dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}f(x)g(3t-x)dx$

$=\frac{1}{3}h(3t)$

$f(3t)*g(3t)$

$=\int_0^t f(3\tau)\cdot g(3(t-\tau))d\tau$

$\overset{3\tau=x}{=\!=}\int_0^{3t}f(x)g(3t-x)d\tau=h(3t)$

$h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

习题课2

$$\mathcal{F}[\delta(3t+3)] = ?$$

$$\mathcal{F}[\delta(t+1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)\cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= e^{-j\omega t}\Big|_{t=-1} = e^{j\omega}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[\delta(3t+3)] = \frac{1}{3}\mathcal{F}\left[\frac{\omega}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{3} e^{j\cdot\frac{\omega}{3}}$$

$$\mathcal{F}[\delta(3t+3)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(3t+3)\, e^{-j\omega t}\cdot dt$$

$$\overset{3t=\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau+3)\cdot e^{-j\omega\cdot\frac{1}{3}\tau}\cdot d\tfrac{1}{3}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3}\delta(\tau+3)\cdot e^{-\frac{1}{3}j\omega\tau}\cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau+3)\cdot e^{-\frac{1}{3}j\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{1}{3}j\omega\tau}\Big|_{\tau=-3} = \frac{1}{3}\cdot e^{j\omega}$$

在做相应积分变换时，不论函数自变量如何变化，所乘的那个积分核函数的自变量是不变的

习题课2

$\mathscr{F}[\delta(3t+3)] = ?$

$$\mathscr{F}[\delta(3t+3)] = \mathscr{F}[\delta(3(t+1))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(3(t+1))\cdot e^{-j\omega t}\cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(3\tau)e^{-j\omega\tau}\underline{e^{j\omega}}\cdot d\tau$$

$$= e^{j\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(3\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = e^{j\omega}\mathscr{F}[\delta(3\tau)] = e^{j\omega}\frac{1}{3}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\boxed{\neq \frac{1}{3}\mathscr{F}[\delta(t+1)]\Big|_{\frac{\omega}{3}}}$$

$$F(\omega) = \mathscr{F}[\delta(\tau)] = 1 \Rightarrow F\left(\frac{\omega}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \mathscr{F}[\delta(3t+3)] = \frac{1}{3}e^{j\omega}$$

$$\mathscr{F}[\delta(3t+3)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(3t+3)e^{-j\omega t}dt \xlongequal{3t=\tau} \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau+3)e^{-j\omega\cdot\frac{\tau}{3}}\cdot d\frac{1}{3}\tau$$

$$= \underline{\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau+3)e^{-\frac{1}{3}j\omega\tau}d\tau} = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}j\omega\tau}\Big|_{\tau=-3} = \frac{1}{3}e^{j\omega}$$

视作 $\mathscr{F}[\delta(\tau+3)]\Big|_{\frac{\omega}{3}}$

$$= e^{j3\omega}\Big|_{\omega=\frac{\omega}{3}}$$

$$= e^{j\omega}$$

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1.计算 $\sqrt[4]{1+i}=$ ______________________.

2.设 $f(z)=e^x[(x\cos y-y\sin y)+i(y\cos y+x\sin y)]$，计算 $f'(z)=$ ________.

3. $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^{2z}\sin z}{(z-2)^5}\mathrm{d}z=$ ____________.

4.求留数 $\mathrm{Res}[\dfrac{z-\sin z}{z^6},0]=$ ________________

5.级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^n(z+i)^{3n+1}}{n!}$ 的收敛半径为 ____________.

6.设 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1;\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$，则付氏变换 $\mathcal{F}[f(t)]=$ ___________ .

1. $\sqrt[8]{2}e^{(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2})i}, k=0,1,2,3$； 2. $f'(z)=(z+1)e^z$； 3. 0； 4. $-\dfrac{1}{120}$； 5. $\dfrac{1}{e}$； 6. $\dfrac{2\sin w}{w}$.

习题课2

二、单项选择题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$ 的收敛半径为 1，那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\frac{1}{2}-i)^n$【　　】.

(A) 发散;　(B) 条件收敛;　(C) 绝对收敛;　(D) 无法判别.

2. 对函数 $f(z)=x+3yi$，下面哪种说法是正确的【　　】.

(A) 在复平面内是连续和解析的;　(B) 在复平面内是连续和可导的;
(C) 在复平面内是连续但不解析的;　(D) 在复平面内是不连续的.

3. $z=0$ 为函数 $\frac{1}{1-\cos z}-\frac{2}{z^3}$ 的【　　】.

(A) 本性奇点;　(B) 一阶级点;　(C) 二阶极点;　(D) 三级极点.

4.设 C 为正向圆周 $|z|=2$，则积分 $\oint_C [e^z \sin z+\frac{z^4+z}{(z-1)^3}]dz=$【　　】.

(A) 12;　(B) $12\pi i$;　(C) 24;　(D) $24\pi i$

5. 设 $f(z)=\frac{1}{z}-z\sin\frac{1}{z^2}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]$ 为【　　】.

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 3.

6. 函数 $\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ 的 Laplace 逆变换为【　　】

(A) $\sin t+t\cos t$;　(B) $\frac{1}{2}(\sin t+t\cos t)$;

(C) $\cos t+t\sin t$;　(D) $\frac{1}{2}(\cos t+t\sin t)$.

1.C;　2.C;　3. D.　4.D;　5.A;　6.B.

1.求积分 $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2+1}dz$，其中 $C:|z|=2$.

$2\pi i[\mathrm{Res}(\frac{\sin z}{z^2+1},i)+\mathrm{Res}(\frac{\sin z}{z^2+1},-i)= 2\pi \sin i$

2. .求积分 $\oint\limits_C \frac{ze^{-\frac{1}{z}}}{z^2+1}dz$，其中 $C:|z|=r>1$.

$\oint\limits_C \frac{ze^{-\frac{1}{z}}}{z^2+1}dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0)] =2\pi i$

1.用留数计算积分 $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}dx,(|\varepsilon|<1)$.

$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}dx = -2i\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}dz = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ (

四、(10 分) 验证 $v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y$ 为调和函数，若 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$ 的共轭调和函数，且 $u(0,0)=0$,求对应的解析函数 $f(z)=u+vi$.

$$u_x = v_y \Rightarrow u = e^x(x\cos y - y\sin y)+x+g(y)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y + C，\quad u(0,0)=0 \Rightarrow C=0$$

$$f(z) = ze^z + (1+i)z$$

习题课2

1、设 $f(z)=u(x+y)+iv(x,y)$ 解析，求 $f(z)$.

由 $f(z)=u(x+y)+i\,v(x,y)$

令 $x+y=t$ 则 $u(x+y)=u(t)$

故 $u_x=u'(t)$，$u_y=u'(t)$

$u_{xx}=u''(t)$ $u_{yy}=u''(t)$

又 $u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow u''(t)=0 \Rightarrow u'(t)=c$

$\Rightarrow u(t)=ct+c_1 \Rightarrow u(x+y)=c(x+y)+c_1$

$\Rightarrow u_x=v_y=c$ $\quad u_y=-v_x=c$

$\Rightarrow v=cy+\phi(x) \Rightarrow v_x=\phi'(x)$

$\phi'(x)=-c \Rightarrow \phi(x)=-cx+c_2$

$\Rightarrow v=c(y-x)+c_2$

$\Rightarrow f(z)=c(x+y)+c_1+i(c(y-x)+c_2)$

$= c(1-i)z+c_1+ic_2$

$= c(1-i)z+d \quad (d=c_1+ic_2)$

习题课2

设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 解析，且 $u_x+v_x=0$，求 $f(z)$.

$f'(z)=u_x+iv_x$

$u_x+v_x=0$

$\Rightarrow f'(z)=(1-i)u_x$

$\dfrac{f'(z)}{1-i}$ 解析

$\Rightarrow \dfrac{f'(z)}{1-i}=C$（实常数）

$\Rightarrow f'(z)=(1-i)C \Rightarrow f(z)=(1-i)Cz+C_1$

习题课 2

五、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ 分别在圆环域 $0<|z+i|<1$ 和 $1<|z|<+\infty$ 展开成 Laurent 级数.

在圆环域 $0<|z+i|<1$ 内，$f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z+i-2i}=-\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}}\right)=-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n$$

$$\frac{1}{(z-i)^2}=-\left(\frac{1}{z-i}\right)'=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{z+i}{2i}\right)^{n-1}$$

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}n\left(\frac{z+i}{2i}\right)^{n-3}$$

习题课2

八、（6分）设在区域 $D=\{z\,\|\arg z|<\frac{\pi}{2}\}$ 内的单位圆 $|z|=1$ 上任取一点 z，

用 D 内曲线 C 连接 0 与 z。证明：$\mathrm{Re}\int_C \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{4}$

证明：因为在 D 并上原点的一个领域内函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 解析，所以，$\frac{1}{1+z^2}$

沿 C 的积分与路径无关。我们可以选择特殊的路径 $C=C_1+C_2$，其中 C_1为0到1的线段 C_2为1到z_0的单位圆上弧线

在 C_2 上，我们设 $z=e^{i\theta}(0\le\theta\le\alpha)$，其中$z_0=e^{i\alpha}$

$$\mathrm{Re}\int_C \frac{dz}{1+z^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\mathrm{Re}\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\mathrm{Re}\int_0^\alpha\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{2i\theta}}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\mathrm{Re}\int_0^\alpha\frac{id\theta}{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\mathrm{Re}\int_0^\alpha\frac{2id\theta}{\cos\theta}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{x=0}^1=\frac{\pi}{4}$$