现代控制理论知识点总结

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

标准化 $\bar{A}=P^{-1}AP$ $\bar{B}=P^{-1}B$ $\bar{C}=CP$ $\bar{D}=D$

能控判断 $Q_c=[b\ Ab\ A^2b\cdots A^{n-1}b]$

能观判断 $Q_o=\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{n-1}\end{bmatrix}$

$G(s)=\dfrac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$

第二
- 能控标准型：$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1&&\\&&\ddots&\\0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}$ $\bar{B}=[0\ 0\cdots 1]^T$ $\bar{C}=[\beta_0\ \beta_1\ \cdots\beta_{n-1}]$
- 能观标准型：$\bar{A}=\begin{bmatrix}&&&-a_0\\1&&&-a_1\\&\ddots&&\vdots\\&&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}$ $\bar{B}=[\beta_0\ \beta_1\cdots\beta_{n-1}]^T$ $\bar{C}=[0\ 0\cdots 1]$

$P_{c2}=[A^{n-1}b\cdots b]\begin{bmatrix}1&&&&0\\a_{n-1}&&&&\\\vdots&&\ddots&&\\a_2&&&&\\a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&1\end{bmatrix}$ $P_{o2}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\cdots&a_2&a_1\\&&&a_2\\&&&\vdots\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CA^{n-1}\\\vdots\\C\end{bmatrix}$

$$P_{c2}=[A^{n-1}b,A^{n-2}b,\cdots,b]\begin{bmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\a_{n-1}&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\a_2&&\ddots&\ddots&0\\a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&1\end{bmatrix}$$

$$P_{o2}^{-1}=\begin{bmatrix}1&a_{n-1}&\cdots&a_2&a_1\\0&\ddots&\ddots&&a_2\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&a_{n-1}\\0&\cdots&0&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}CA^{n-1}\\CA^{n-2}\\\vdots\\CA\\C\end{bmatrix}$$

稳定性

李雅普诺夫稳定性
- 第一法：BIBO系统 ⇒ 极点位于左半平面
- 第二法：
  - $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 负定
  - $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 半负定且非零处 $\dot{V}(x)$ 不恒为零

  ⇒ 渐近稳定 + $\lim_{\|x\|\to\infty}V(x)=\infty$ = 大范围渐近稳定
  - $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 正定 ⇒ 不稳定

$A^TP+PA=-Q$ （Q 正定）
P 为正定实对称
⇔ 渐近稳定

离散化

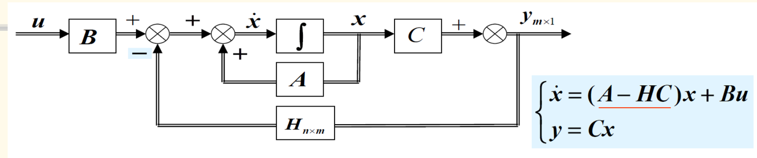
$G(T)=e^{AT}$ $H(T)=\int_0^T e^{At}B\,dt$

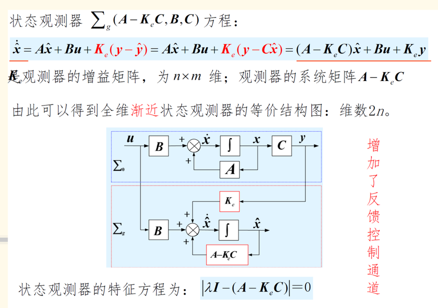
$G(T)=I+AT$ $H(T)=BT$

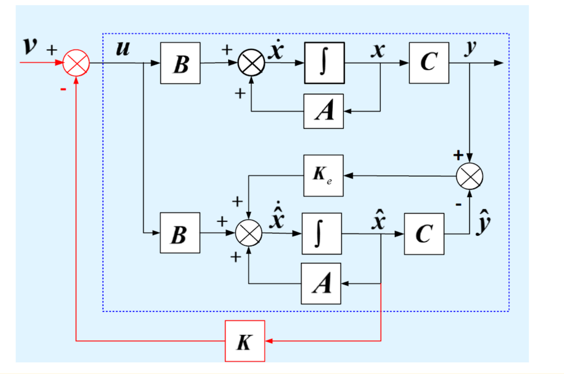
状态反馈 与 **状态观测**（相互独立）

状态反馈：
1) 能控性分析
2) A-BK 修改极点

状态观测：
1) 能观性分析
2) A-KC 修改极点







能观、能控分解

a b

a. 矩阵形式为：$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\\dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11}&\hat{A}_{12}\\0&\hat{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\0\end{bmatrix}u$，$y=[\hat{C}_1\ \ \hat{C}_2]\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\end{bmatrix}$

非奇异变换阵：$R_c=[R_1\ \cdots\ R_{n1}\ \cdots\ R_n]$

前 n_1 列为 Q_c 中 n_1 个线性无关的列，其余列保证 R_c 非奇异任选

b. 矩阵形式为：$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\\dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11}&0\\\tilde{A}_{21}&\tilde{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\\tilde{B}_2\end{bmatrix}u$，$y=[\tilde{C}_1\ \ 0]\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\end{bmatrix}$

非奇异变换阵：
前 n_1 行为 Q_o 中 n_1 个线性无关的行，
其余行保证 R_o 的逆非奇异任选

$R_o^{-1}=\begin{bmatrix}R_1\\\vdots\\R_{n1}\\\vdots\\R_n\end{bmatrix}$

a+b. 先能控分解，再各部分进行能观分解

e^{At} 和 $\phi(t)$

1) 标准化后求解
$e^{At}=P^{-1}e^{\bar{A}t}P$
1) 单根
$e^{\bar{A}t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1t}&&\\&e^{\lambda_2t}&\\&&\ddots\end{bmatrix}$
2) n 重根
$e^{\bar{A}t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}&\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}&\cdots\\&e^{\lambda t}&\cdots&\vdots\\&&&\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t}\end{bmatrix}$

2) 拉氏变换
$sX(s)-x(0)=AX(s)$
$\Rightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0)$
$\Rightarrow x(t)=e^{At}x(0)$

3) 有限项法
1) 两两相异时，
$\begin{bmatrix}a_0(t)\\a_1(t)\\\vdots\\a_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&&&\vdots\\1&\cdots&&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1t}\\e^{\lambda_2t}\\\vdots\\e^{\lambda_nt}\end{bmatrix}$
2) λ_1 为 n 重根时，
$\begin{bmatrix}a_0(t)\\a_1(t)\\a_2(t)\\\vdots\\a_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\lambda_1^3&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\&1&2\lambda_1&3\lambda_1^2&\cdots&\frac{n-1}{1!}\lambda_1^{n-2}\\\vdots&&&&&\vdots\\&&&&&(n-1)\lambda_1\\&&&&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1t}\\te^{\lambda_1t}\\\frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_1t}\\\vdots\end{bmatrix}$

2）A 的特征值为 λ_1（n 重根）　注意求逆

$$\begin{bmatrix}a_0(t)\\a_1(t)\\a_2(t)\\\vdots\\a_{n-2}(t)\\a_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\lambda_1^3&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\0&1&2\lambda_1&3\lambda_1^2&\cdots&\frac{(n-1)}{1!}\lambda_1^{n-2}\\0&0&1&3\lambda_1&\cdots&\frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3}\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\ddots&1&(n-1)\lambda_1\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1t}\\\frac{1}{1!}te^{\lambda_1t}\\\frac{1}{2!}t^2e^{\lambda_1t}\\\vdots\\\frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1t}\\\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1t}\end{bmatrix}$$

4) 定义

最优控制

$$J = \psi(N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(k, N)$$

$$J[x(N)] \Rightarrow J^*[x(N-1)] \Rightarrow \cdots \Rightarrow J^*[x(0)]$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u]\, dt$$

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \qquad J = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0) \qquad \boxed{u = -R^{-1}B^T P x}$$

最优估计

$$z = Hx + v$$

$$x_{LS} = \min\{ (z - H\hat{x})^T W (z - H\hat{x}) \}$$

$$\frac{\partial (z - H\hat{x})^T W (z - Hx)}{\partial x} = \frac{\partial (z^T W z - 2\hat{x}^T H^T W z + \hat{x}^T H^T W H x)}{\partial x}$$

$$= -2H^T W z + 2H^T W H x = 0$$

$$\Rightarrow x_{LS} = (H^T W H)^{-1} H^T W z$$

$$\Rightarrow \quad x - \hat{x} = (H^T W H)^{-1} H^T W (Hx - z) = -(H^T W H)^{-1} H^T W v$$

$$E(x - \hat{x}) = -(H^T W H)^{-1} H^T W E(v)$$

$$E(\tilde{x}\tilde{x}^T) = (H^T W H)^{-1} H^T W R W H (H^T W H)^{-1}$$