系统建模与动力学分析

学　时　数：48学时
学　　　分：3
任课教师：闫　涛
工作单位：电信学部自动化学院综合所
办公地点：兴庆校区东二楼361
　　　　　创新港4-6168
邮　　　箱：yantao@xjtu.edu.cn

第三章　机械系统（下：动力学建模）

- 动量和动量定理
- 动量矩和动量矩定理

动量和动量定理

- 动量：质点的质量与速度的乘积称为质点的动量。质点的动量是矢量，它的方向与质点速度方向一致。质点系的动量是质点系内各质点动量的矢量和。动量的单位是kg·m/s。

$$\boldsymbol{p}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=\sum m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\sum m_i\boldsymbol{r}_i$$

- 质点系的质心(Centroid) C 的矢径为

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{m}$$

- 代入上式可得

$$\boldsymbol{p}=\frac{d}{dt}\sum m_i\boldsymbol{r}_i=\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{r}_C)=m\boldsymbol{v}_C$$

- 其中，为质点系质心 C 的速度。该式表明质点系的动量等于质心速度与其全部质量的乘积。

动量和动量定理

- 作用力$\boldsymbol{F}$与微小时间间隔dt的乘积称为元冲量，即$d\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}dt$。力$\boldsymbol{F}$在作用时间$t_1\sim t_2$内的冲量(Impulse)是矢量积分

$$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}dt$$

冲量的单位是N·s。

- 质点的动量定理
- 质点动量定理的微分形式为

$$d\left(m\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{F}dt$$

- 即质点动量的增量等于作用于质点上的力的元冲量。对上式积分，时间由t_1到t_2，质点速度由$\boldsymbol{v}_1$变为$\boldsymbol{v}_2$，可得

$$\boxed{m\boldsymbol{v}_1-m\boldsymbol{v}_2=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}dt=\boldsymbol{I}}$$

- 该式为质点动量定理的积分形式，即在某一时间间隔内，质点动量的变化等于作用于质点的力在该时间段内的冲量。

动量和动量定理

- 质点系的动量定理
- 设质点系有n个质点，其中第i个质点的质量为m_i，速度为$\boldsymbol{v}_i$。该质点受到外界作用的外力为$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$，受到质点系内其他质点作用的内力为$\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}$。根据质点的动量定理有

$$d\left(m_i\boldsymbol{v}_i\right)=\left(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}+\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}\right)dt=\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}dt+\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}dt$$

- 将n个方程两端相加可得

$$\sum d\left(m_i\boldsymbol{v}_i\right)=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}dt+\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}dt$$

- 由于质点系内质点相互作用的内力总是大小相当、方向相反地成对出现，因此内力冲量的矢量和等于零，即$\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{i})}dt=0$。
- 又因 $\sum d\left(m_i\boldsymbol{v}_i\right)=d\sum\left(m_i\boldsymbol{v}_i\right)=d\boldsymbol{p}$ 是质点系动量的增量，于是得到质点系动量定理的微分形式

$$d\boldsymbol{p}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}dt=\sum d\boldsymbol{I}_i^{(\mathrm{e})}$$

动量和动量定理

- 该式表示质点系动量的增量等于作用于质点系的外力元冲量矢量和。该式也可以写成

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

- 即质点系的动量对时间的导数等于作用于质点系的外力的矢量和（外力的主矢）。对该式积分可得

$$\int_{\boldsymbol{p}_1}^{\boldsymbol{p}_2} d\boldsymbol{p}=\sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} dt \qquad \text{或} \qquad \boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum \boldsymbol{I}_i^{(\mathrm{e})}$$

- 该式为质点系动量定理的积分形式，即在某一时间间隔内，质点系动量的改变量等于在这段时间内作用于质点系外力冲量的矢量和。由此可见，质点系的内力不能改变其动量。
- 质点系动量定理的投影形式为

$$\frac{dp_x}{dt}=\sum F_x^{(\mathrm{e})} \qquad \frac{dp_y}{dt}=\sum F_y^{(\mathrm{e})} \qquad \frac{dp_z}{dt}=\sum F_z^{(\mathrm{e})}$$

动量和动量定理

- 质点系动量守恒定律
- 如果作用于质点系的外力的主矢恒等于零，则质点系的动量保持不变，即

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 = \text{恒矢量}$$

- 如果作用于质点系的外力主矢在某一坐标轴上的投影恒等于零，则质点系的动量在该坐标轴上的投影保持不变。即

$$\sum F_x^{(\mathrm{e})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}_{2x} = \boldsymbol{p}_{1x} = \text{恒矢量}\boldsymbol{p}_x$$

$$\sum F_y^{(\mathrm{e})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}_{2y} = \boldsymbol{p}_{1y} = \text{恒矢量}\boldsymbol{p}_y$$

$$\sum F_z^{(\mathrm{e})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}_{2z} = \boldsymbol{p}_{1z} = \text{恒矢量}\boldsymbol{p}_z$$

- 注意：内力虽不能改变质点系的总动量，但可以改变质点系内各质点的动量。

动量和动量定理

- 质量中心
- 质点系在力的作用下，其运动状态与各质点的质量及分布位置都相关，即

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{m}$$

- 质心位置能反映出质点系质量分布的特征，因此其在质点系（特别是刚体）动力学中具有重要地位。计算质心位置常使用上式投影形式

$$\begin{cases} x_C=\dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}=\dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C=\dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}=\dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C=\dfrac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}=\dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases}$$

动量和动量定理

- 质心运动定理
- 由于质点系的动量等于质点系的质量与质心速度的乘积，因此动量定理的微分形式可写成

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_C)=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

- 对于质量不变的质点系，该式可改写为

$$m\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})} \quad \text{或} \quad m\boldsymbol{a}_C=\sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

- 式中$\boldsymbol{a}_C$为质心的加速度。该式表明，质点系的质量与质心加速度的成绩等于作用于质点系外力的矢量和（即外力主矢）。这种规律称为质心运动定理。
- 质点系质心的运动，也可以看作是集中了整个质点系质量的一个质点，在与质点系所受相同外力主矢作用下的运动。

动量和动量定理

- 由质心运动定律理可知，质点系的内力不影响质心的运动状态，只能改变质点系内其他点的运动状态。只有外力才能改变质心的运动。
- 质心运动定理是矢量式，应用时常取投影式

$$ma_{Cx} = \sum F_x^{(e)} \qquad ma_{Cy} = \sum F_y^{(e)} \qquad ma_{Cz} = \sum F_z^{(e)}$$

- 自然坐标系下的投影式为

$$ma_C^t = \sum F_t^{(e)} \qquad ma_C^n = \sum F_n^{(e)} \qquad ma_C^b = \sum F_b^{(e)}$$

动量和动量定理

- 质心运动守恒定律
- 由质心运动定理可知：
- 1. 如果作用于质点系的外力主矢恒等于零，则质心做匀速直线运动；如果初始静止，则质心位置始终保持不变。
- 2. 如果作用于质点系的所有外力在某轴上投影的代数和恒等于零，则质心速度在该轴上的投影保持不变；如果初始速度投影等于零，则质心沿该轴的坐标保持不变。
- 以上结论称为质心运动守恒定律。

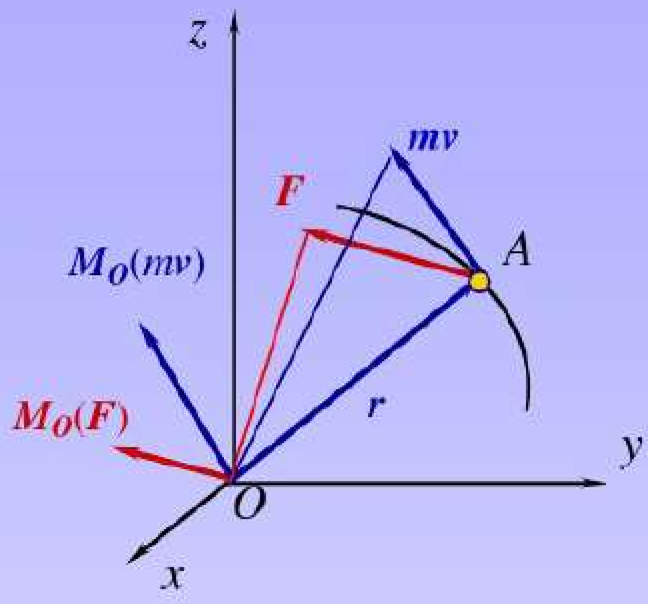
动量矩和动量矩定理

- 动量定理、动量矩定理（角动量定理）、动能定理、质心运动定理统称为动力学普遍定理，可用于求解动力学问题。
- 能量守恒由时间平移不变性推出；动量守恒由空间平移不变性推出；动量矩守恒由空间旋转不变性推出。
- 在一定程度上，动量定理、动量矩定理对质点系和刚体运动问题（平动、转动）的解释比牛顿第二定律更本质。
- 任何转动发生变化都是动量矩定理的作用。
- 动力学普遍定理(General Theorems of Dynamics)
- 动量定理(Theorem of Momentum)
- 动量矩定理/角动量定理 (Theorem of Moment of Momentum/ Theorem of Angular Momentum)
- 动能定理(Kinetic Energy Theorem)
- 质心运动定理(Theorem of Motion of Center of Mass)

§4-1 动 量 矩

一、质点的动量矩

1. 对点的动量矩



质点A的动量mv对点O的矩，定义为质点A对点O的动量矩。

$$M_O(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

2. 对轴的动量矩

上式投影到各坐标轴可得动量mv对各坐标轴的矩。

$$M_x(m\boldsymbol{v}) = y\,(mv_z) - z\,(mv_y)$$

$$M_y(m\boldsymbol{v}) = z\,(mv_x) - x\,(mv_z)$$

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = x\,(mv_y) - y\,(mv_x)$$

§4-1 动 量 矩

二、质点系的动量矩

1. 对点的动量矩

质点系内各质点对某点 O 的动量矩的矢量和，称为这质点系对该点 O 的动量主矩或动量矩。用 $\boldsymbol{L}_O$ 表示，有

$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{r} \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

2. 对轴的动量矩

类似的可得质点系对各坐标轴的动量矩表达式

$$L_x = \sum M_x(m_i \boldsymbol{v}_i)$$

$$L_y = \sum M_y(m_i \boldsymbol{v}_i)$$

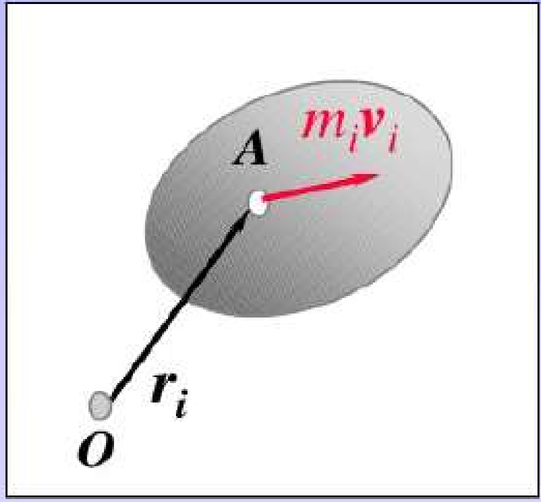
$$L_z = \sum M_z(m_i vi)$$

§4-1 动 量 矩

三、平动刚体对固定点O的动量矩

设刚体以速度 $\boldsymbol{v}$ 平动，刚体内任一点 A 的矢径是 $\boldsymbol{r}_i$,该点的质量为m，速度大小是$\boldsymbol{v}_i$。

该质点对点O的动量矩为 $\boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$



从而整个刚体对点O的动量矩

$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

因为刚体平动 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C$

$$\boldsymbol{L}_O = \sum \boldsymbol{M}_O(m_i\boldsymbol{v}_i) = \sum (m_i\boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{v}_C$$

又因为 $\sum m_i\boldsymbol{r}_C = \sum m_i\boldsymbol{r}_i$

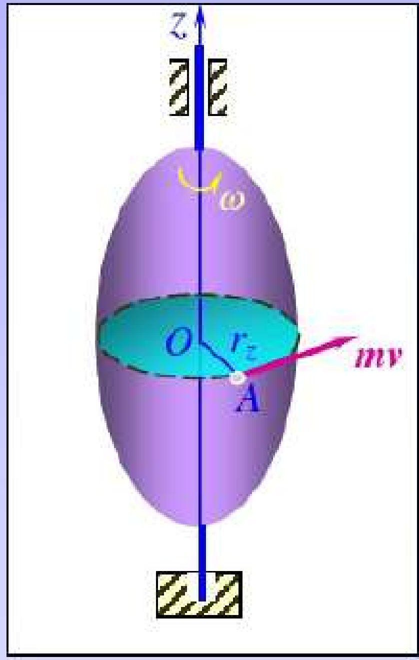
所以 $\boldsymbol{L}_O = \sum m_i\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i\boldsymbol{v}_C$

§4-1 动 量 矩

四、定轴转动刚体对其转轴的动量矩

设刚体以角速度 ω 绕固定轴 z 转动，刚体内任一点 A 的转动半径是 r_z。

该点的速度大小是 $v = r_z\,\omega$ ，方向同时垂直于轴 z 和转动半径 r_z，且指向转动前进的一方。



若用 m 表示该质点的质量，则其动量对转轴 z 的动量矩为

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = r_z \cdot m\, r_z\, \omega = m r_z^2\, \omega$$

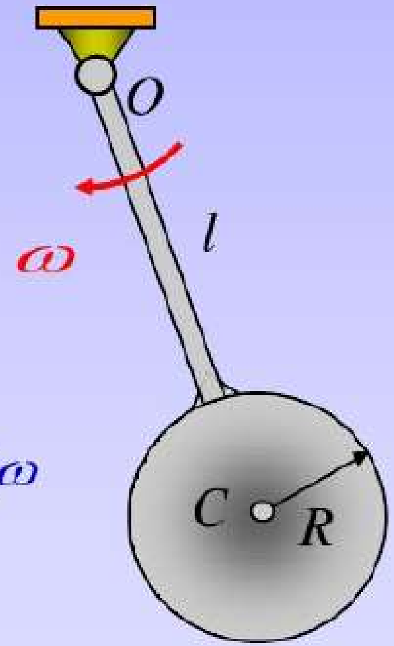
从而整个刚体对轴 z 的动量矩

$$L_z = \sum M_z(m_i \boldsymbol{v}_i) = \omega \sum m_i r_{iz}^2 = J_z\, \omega$$

即，**作定轴转动的刚体对转轴的动量矩，等于这刚体对该轴的转动惯量与角速度的乘积**。

思考题

一半径为R、质量为m_1的匀质圆盘与一长为l、质量为m_2的匀质细杆相固连，以角速度ω在铅直面转动。试求该系统对O轴的动量矩。



解: 系统做定轴转动，该系统对O轴的动量矩

$$L_O = J_O\omega = [\frac{1}{3}m_2 l^2 + \frac{1}{2}m_1 R^2 + m_1(R+l)^2]\omega$$

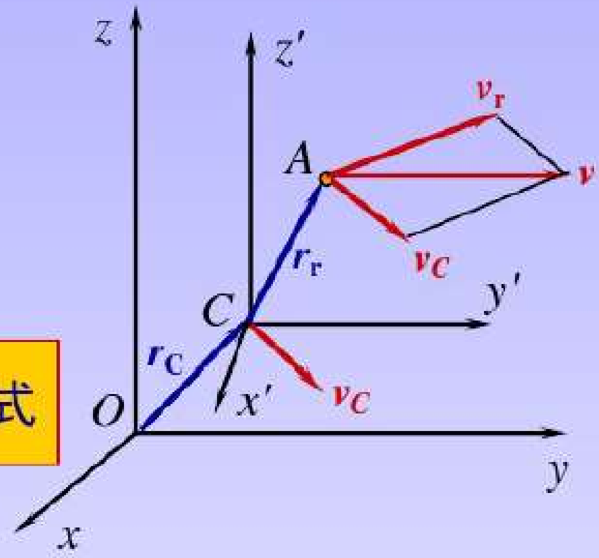
顺时针。

§4-1 动 量 矩

五、质点系对固定点O的动量矩的另一种表示

过固定点O建立固定坐标系$Oxyz$，以质点系的质心 C 为原点，取平动坐标系 $Cx'y'z'$，质点系对固定点O的动量矩为

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C$$



$$\boldsymbol{L}_C = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i\boldsymbol{v}_{ri})$$

$\boldsymbol{L}_C$—— 质点系相对质心C 的动量矩

上式即平面运动刚体对固定点O的动量矩计算公式

可以证明

在质心平动坐标系下，

质点系的绝对动量对质心C的动量矩 = 相对动量对质心C的动量矩。

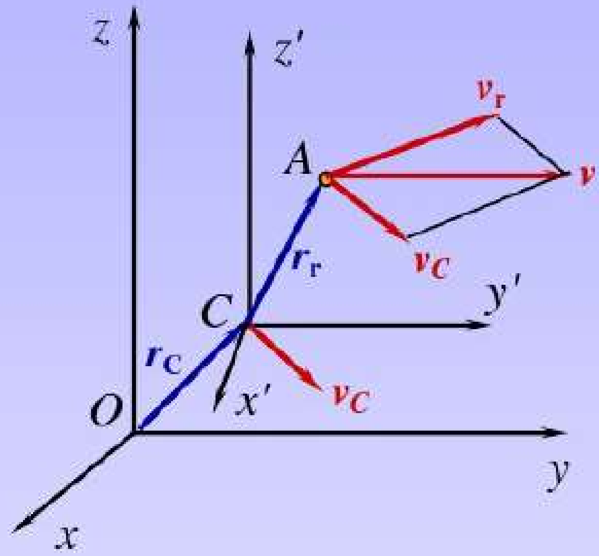
即 $$\boldsymbol{L}_C = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i\boldsymbol{v}_{ri}) = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i\boldsymbol{v}_i)$$

§4-1 动 量 矩

五、质点系对固定点O的动量矩的另一种表示 证 明

过固定点O建立固定坐标系$Oxyz$，以质点系的质心 C 为原点，取平动坐标系 $Cx'y'z'$，它以质心的速度 $\boldsymbol{v}_C$ 运动。

设质点系内任一质点 A 在这平动坐标系中的相对速度是$\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$，该点的绝对速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_\mathrm{e}+\boldsymbol{v}_\mathrm{r}=\boldsymbol{v}_\mathrm{c}+\boldsymbol{v}_\mathrm{r}$，则质点系对固定点$O$的动量矩



$$\boldsymbol{L}_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum[(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_{ri})\times m_i(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{ri})]$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_C)+\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})+\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_C)+\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})$$

§ 4-1　动 量 矩

$$L_O=\sum(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)=\sum[(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_{ri})\times m_i(\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{ri})]$$

$$=\sum(\boldsymbol{r}_c\times m_i\boldsymbol{v}_c)+\sum(\boldsymbol{r}_c\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})+\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_c)+\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})$$

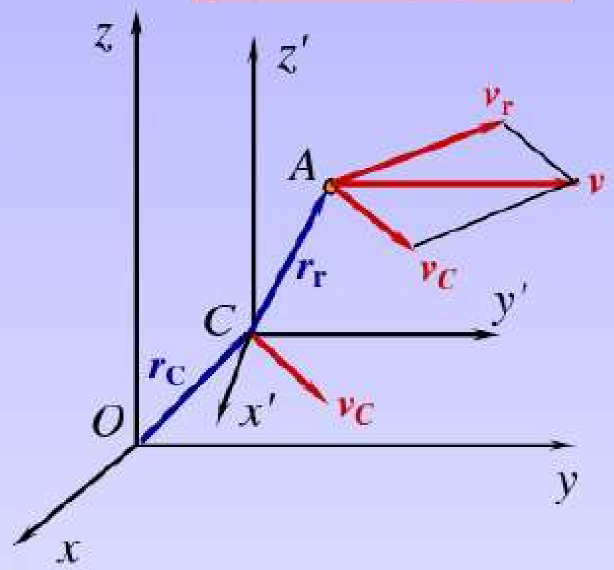
对上式各项分析

$$\boxed{\sum(m_i\boldsymbol{r}_i)=\sum m_i\,\boldsymbol{r}_C}$$

$$\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_C)=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_C$$

$$\sum(\boldsymbol{r}_C\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})=\boldsymbol{r}_C\times\sum(m_i\boldsymbol{v}_{ri})=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\,\underbrace{\boldsymbol{v}_{rC}}_{\to 0}=0$$

$$\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_C)=\sum(m_i\boldsymbol{r}_{ri})\times\boldsymbol{v}_C=\sum m_i\,\underbrace{\boldsymbol{r}_{rC}}_{\to 0}\times\boldsymbol{v}_C=0$$



则上式可以写为

$$=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_C+\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times m_i\boldsymbol{v}_{ri})=\boldsymbol{r}_C\times\sum m_i\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{L}_C$$

$\to$ $\boldsymbol{L}_C$——质点系相对质心C的动量矩

思考题

一半径为r的匀质圆盘在水平面上纯滚动，如图所示。已知圆盘对质心的转动惯量为J_O，角速度为ω，质心O点的速度为v_O。试求圆盘对水平面上O_1点的动量矩。

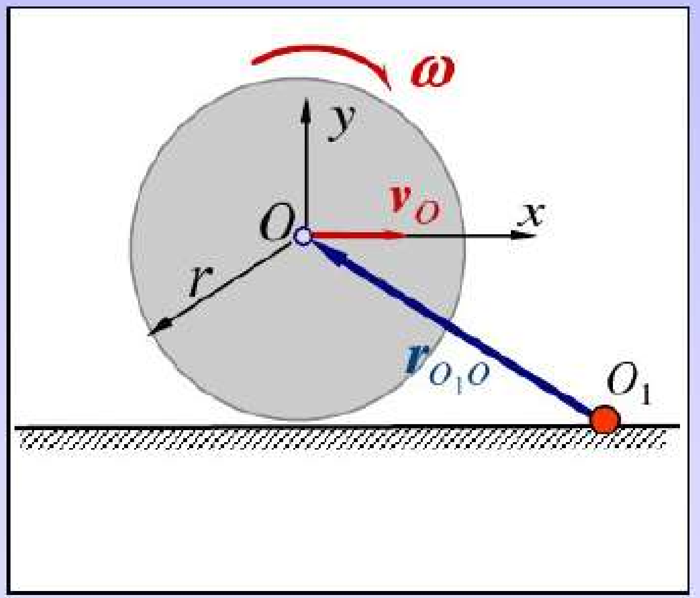
$$L_{O1} = L_O + \boldsymbol{r}_{O_1O} \times m\boldsymbol{v}_O$$

$$L_O = J_O\omega = \frac{1}{2}mr^2\omega$$

$$v_O = r\omega$$

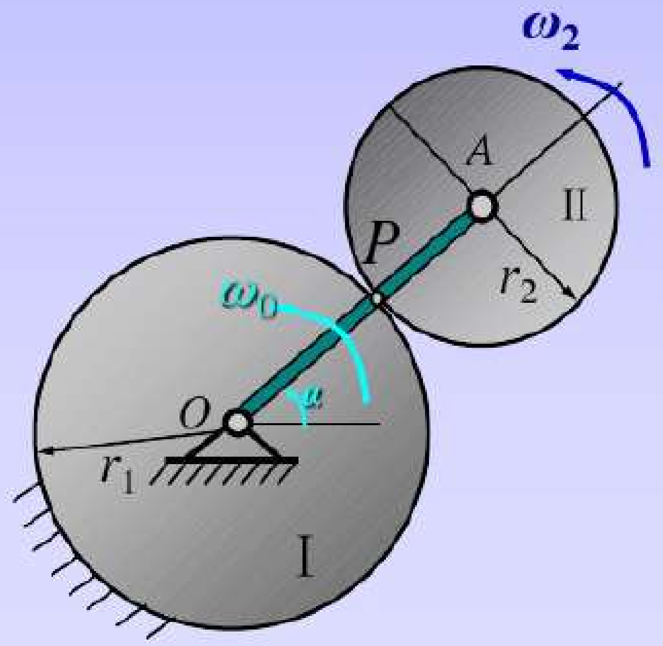
$$\boldsymbol{r}_{O_1O} \times m\boldsymbol{v}_O = mr^2\omega$$

$$L_{O1} = \frac{3}{2}mr^2\omega$$



思考题

行星齿轮机构在水平面内运动。质量为m_1的均质曲柄OA带动行星齿轮II在固定齿轮I上纯滚动。齿轮II的质量为m_2，半径为r_2。定齿轮I的半径为r_1。求轮II对轴O的动量矩。



$$v_A = (r_1 + r_2)\cdot\omega_O = r_2\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_0$$

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C$$

$$L_O = (r_1 + r_2)\cdot m_2 v_A + J_A\omega_2$$

§ 4-2 动量矩定理

- 动量矩定理
- 动量矩守恒定理

§ 4-2 动 量 矩 定 理

一、动量矩定理

1. 对定点的动量矩定理

因为质点系对定点O的动量矩为 $\boldsymbol{L}_O = \sum(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i)$

将其两端求时间的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \sum(\overset{0}{\boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i} + \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i)$$

$$= \sum(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{a}_i) = \sum(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i) = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$$

其中 $\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$ 可分为外力对O点的矩和内力对O点的矩二项

即 $\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) + \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)})$

而内力对O点的矩 $\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(i)}) = 0$ 所以有

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

§4-2 动 量 矩 定 理

一、动量矩定理

1. 对定点的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})}$$

令 $\boldsymbol{M}_O=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$ ，则有 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_O}$

有 结 论

质点系对某固定点的动量矩随时间的变化率，等于作用于质点系的全部外力对同一点的矩的矢量和，这就是质点系对定点的动量矩定理。

§4-2 动 量 矩 定 理

一、动量矩定理

1. 对定点的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

2 .对定轴的动量矩定理

将上式投影到固定坐标轴系上，注意到导数的投影等于投影的导数，则得

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_i^{(e)})\equiv M_x$$

$$\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}=\sum M_y(\boldsymbol{F}_i^{(e)})\equiv M_y$$

有 结 论

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})\equiv M_z$$

质点系对某固定轴的动量矩随时间的变化率, 等于作用于质点系的全部外力对同一轴的矩的代数和，这就是质点系对定轴的动量矩定理。

§4-2 动量矩定理

对定点的动量矩定理 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

对定轴的动量矩定理 $$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(F^{(e)})$$

二、动量矩守恒定理

1. 如果$\sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) \equiv 0$，则由上面第一式可知，$\boldsymbol{L}_O=$常矢量。

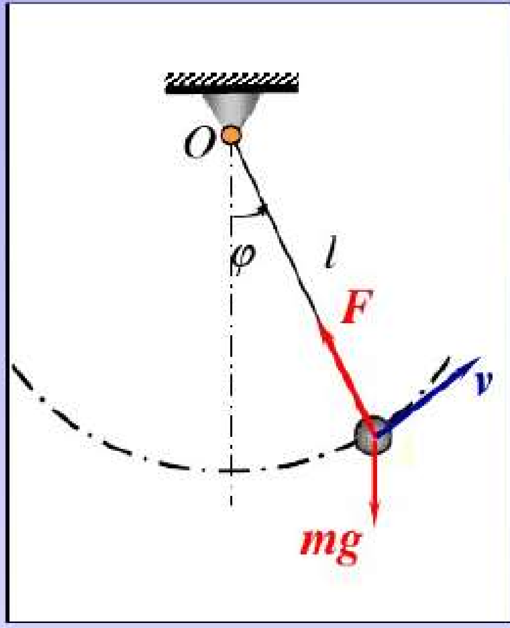
2. 如果$\sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)}) \equiv 0$，则由上面第二式可知，$L_z=$常量。

有结论

如作用于质点系的所有外力对某固定点(或固定轴)的主矩始终等于零，则质点系对该点(或该轴)的动量矩保持不变。这就是质点系的动量矩守恒定理.它说明了质点系动量矩守恒的条件。

§4-2 动 量 矩 定 理

例题 4-1 试用动量矩定理导出单摆(数学摆)的运动微分方程。



解: 把单摆看成一个在圆弧上运动的质点 A，设其质量为 m，摆线长 l。又设在任一瞬时质点 A 具有速度 v，摆线 OA 与铅垂线的夹角是 φ。

取通过悬点 O 而垂直于运动平面的固定轴 z 作为矩轴，对此轴应用质点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_z(m\boldsymbol{v})]=\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

§ 4-2 动 量 矩 定 理

例题 4-1

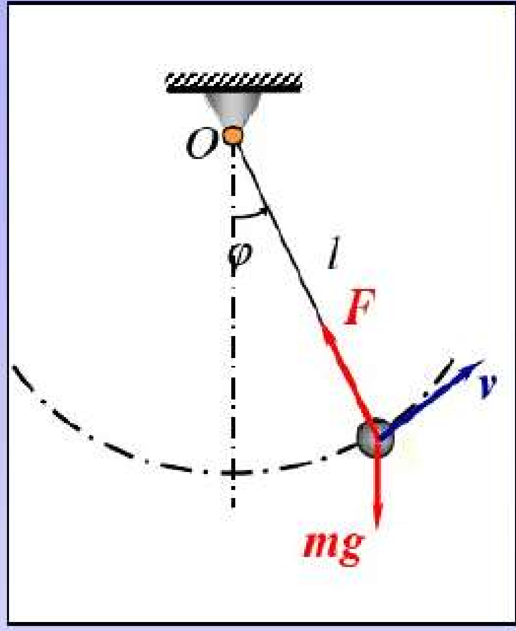
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M_z(m\boldsymbol{v})] = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

由于动量矩和力矩分别是

$$M_z(m\boldsymbol{v}) = mvl = m(l\omega)l = ml^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$$

和

$$\sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = -mgl\sin\boldsymbol{\varphi}$$



从而可得

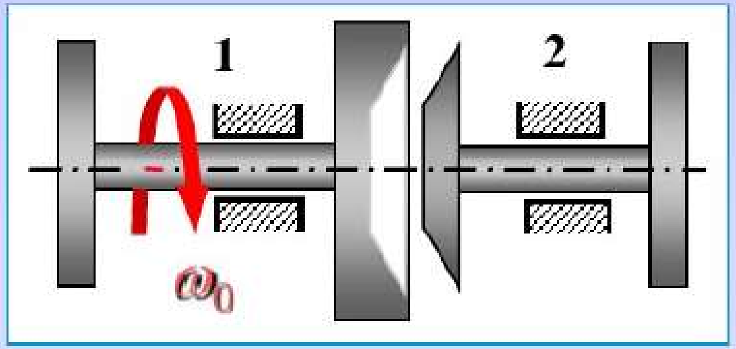
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ml^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}) = -mgl\sin\boldsymbol{\varphi}$$

化简即得单摆的运动微分方程

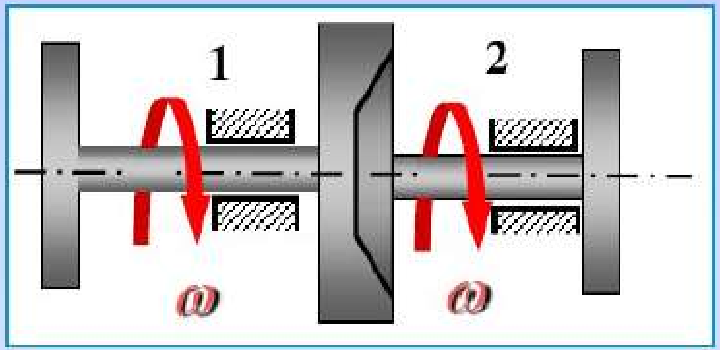
$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

§4-2 动 量 矩 定 理

例题 4-2 摩擦离合器靠接合面的摩擦进行传动。在接合前，已知主动轴1以角速度ω_0转动，而从动轴2处于静止(图a)。一经结合，轴1的转速迅速减慢。轴2的转速迅速加快，两轴最后以共同角速度ω 转动(图b)。已知轴1和轴2连同各自的附件对转轴的转动惯量分别是J_1和J_2，试求接合后的共同角速度 ω，轴承的摩擦不计。



(a)



(b)

§ 4-2 动 量 矩 定 理

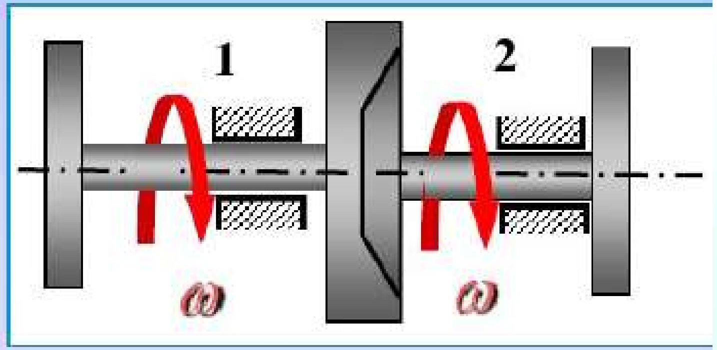
例题 4-2

解: 取轴1和轴2组成的系统作为研究对象。

接合时作用在两轴的外力对公共转轴的矩都等于零，故系统对转轴的总动量矩不变。

接合前系统的动量矩是 $(J_1\,\omega_0 + J_2\times 0)$。

离合器接合后，系统的动量矩是 $(J_1 + J_2)\,\omega$。



故由动量矩守恒定理得

$$J_1\omega_0 = (J_1 + J_2)\omega$$

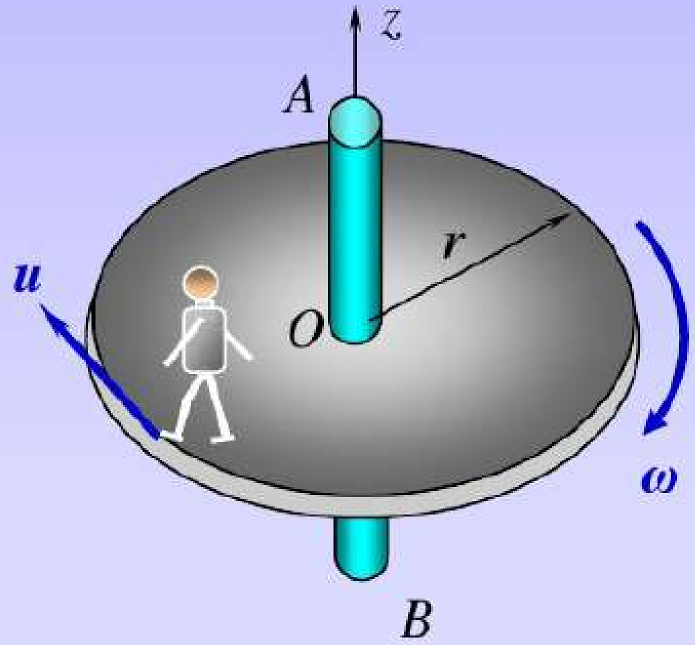
从而求得结合后的共同角速度

$$\omega = \frac{J_1}{J_1 + J_2}\omega_0$$

显然 ω 的转向与 ω_0 相同。

§ 4-2 动 量 矩 定 理

例题 4-3 如图所示，在静止的水平匀质圆盘上，一人沿盘边缘由静止开始相对盘以速度$\boldsymbol{u}$行走，设人质量为m_2，盘的质量为m_1，盘半径r，摩擦不计。求盘的角速度。



§4-2 动 量 矩 定 理

例题 4-3

解：以人和盘为研究对象。

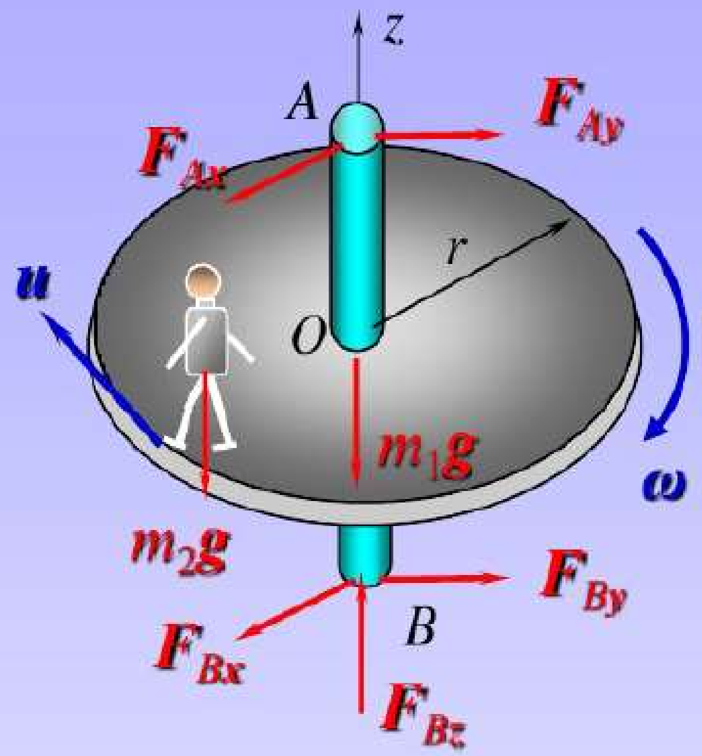
$$L_z = J_z\omega + m_2 v\cdot r$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_r \text{，} \quad v = r\omega + u$$

$$L_z = J_z\omega + m_2 r(r\omega + u)$$

$$L_z = m_2 r u + (\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_2 r^2)\omega$$

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$



$m_z = 0$， 初始静止 L_{z0}=0

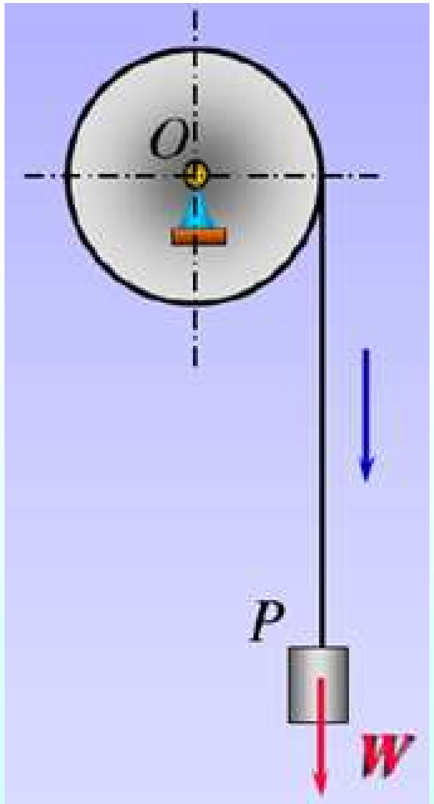
$$m_2 r u + (\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_2 r^2)\omega = 0,$$

$$\omega = -\frac{2m_2}{2m_2 + m_1}\cdot\frac{u}{r}$$

§ 4-2 动量矩定理

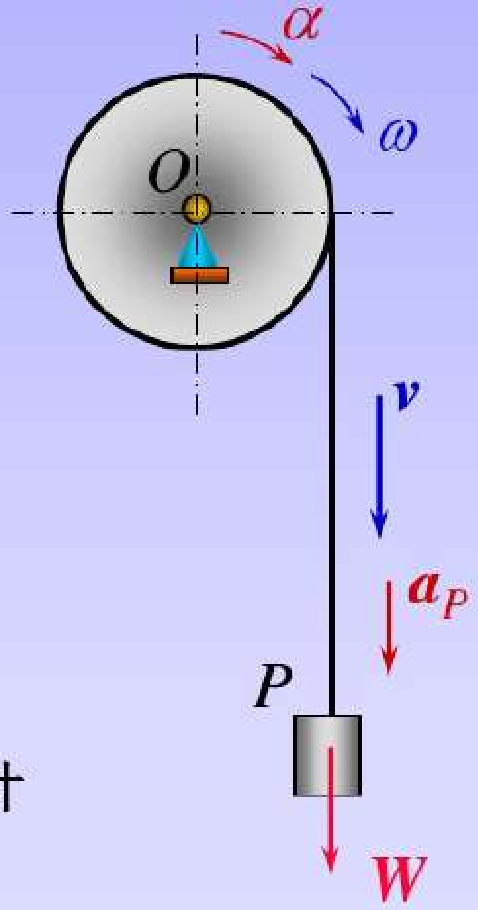
例： 匀质圆轮半径为r、质量为m。圆轮在重物P带动下绕固定轴O转动，已知重物重量为W。

求： 重物下落的加速度a_P。



解： 以整个系统为研究对象。

设圆轮的角速度和角加速度分别为ω和α，重物的加速度为a_P。



圆轮对轴O的动量矩

$$L_{O1}=J_O\omega=\frac{1}{2}mR^2\omega$$ 顺时针

重物对轴O的动量矩

$$L_{O2}=mvR=\frac{W}{g}vR$$ 顺时针

系统对轴O的总动量矩

$$L_O=L_{O1}+L_{O2}=\frac{1}{2}mR^2\omega+\frac{W}{g}vR$$ 顺时针

系统对轴O的总动量矩　$L_O = L_{O1} + L_{O2} = \frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{W}{g}vR$

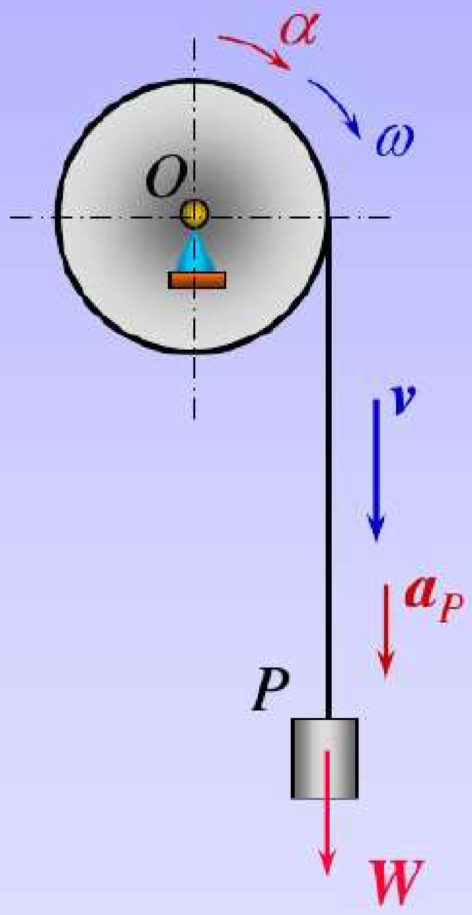
应用动量矩定理　$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O$

有　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mR^2\omega + \frac{W}{g}vR) = WR$

得　$\frac{1}{2}mR^2\alpha + \frac{W}{g}a_P R = WR$

其中　$a_P = R\alpha$

所以求得重物下落的加速度大小　$a_P = \dfrac{W}{\frac{m}{2} + \frac{W}{g}}$



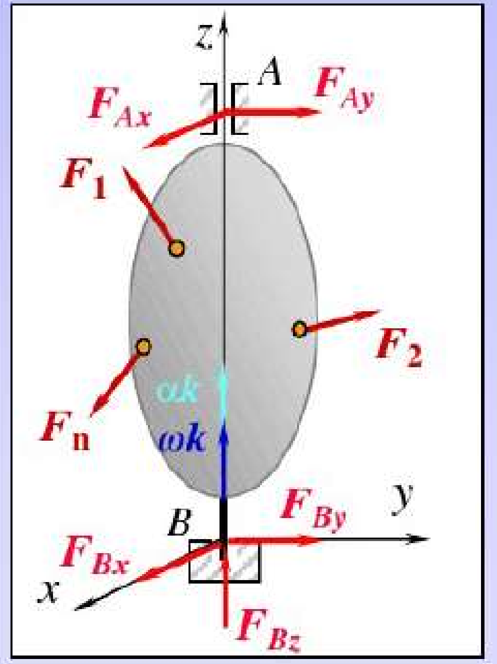
§4-3 刚体的定轴转动微分方程

§ 4-3 刚体的定轴转动微分方程

一、定轴转动微分方程

设刚体在主动力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 作用下绕定轴 z 转动，与此同时，轴承上产生了反力 $\boldsymbol{F}_A$ 和 $\boldsymbol{F}_B$。

用 $M_z = \sum M_z(\boldsymbol{F}^{(e)})$ 表示作用在刚体上的外力对转轴 z 的主矩(反力 $\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{F}_B$ 自动消去)。



刚体对转轴 z 的动量矩 $\qquad L_z = J_z\omega$

于是根据动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z}$$

可得

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$$

§ 4-3 刚体的定轴转动微分方程

$$J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_z$$

考虑到

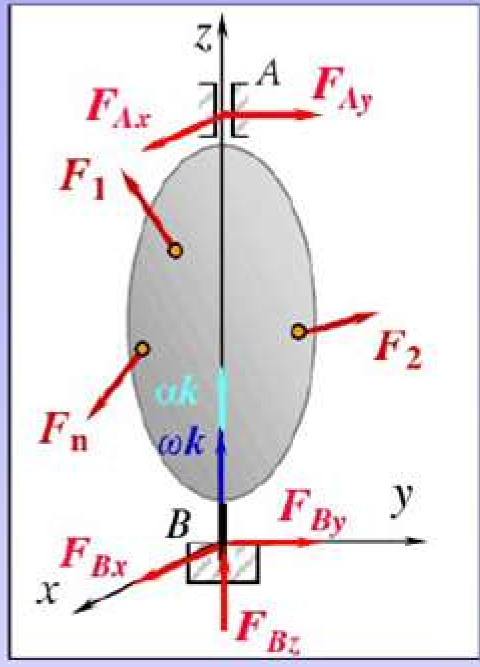
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

则上式可写成

$$\boxed{J_z \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

或

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z$$

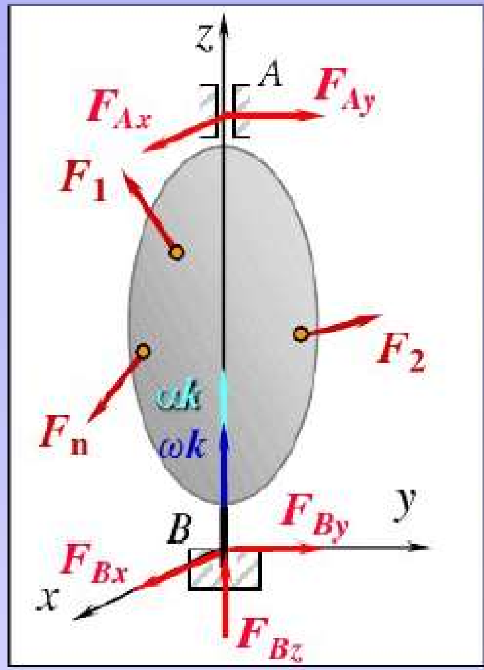


即，定轴转动刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积，等于作用于刚体的外力对转轴的主矩。这就是刚体定轴转动微分方程。

§4-3 刚体的定轴转动微分方程

定轴转动微分方程
$$J_z \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \sum M_z(\boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

或
$$J_z \ddot{\varphi} = M_z$$



二、几点讨论

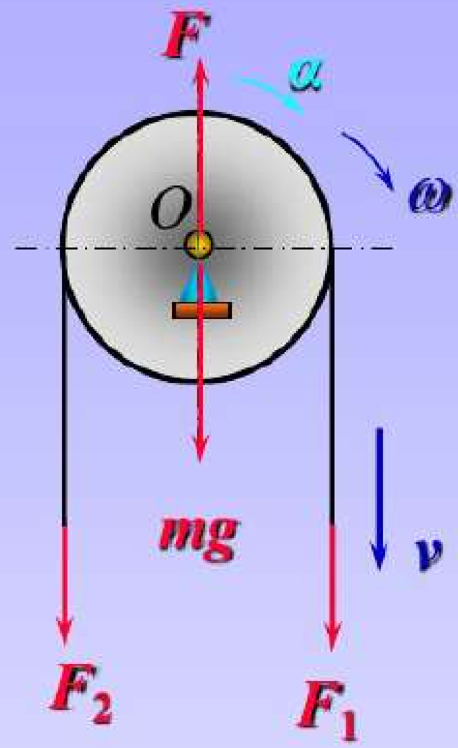
1. 若外力矩M_z=0，刚体作匀速转动；

2. 若外力矩M_z=常量，则刚体作匀变速转动；

3. 若外力矩M_z相同，J_z越大，角加速度越小，即刚体转动状态变化的越慢，反之亦然，这正说明J_z是刚体转动时惯性的度量。

§ 4-3 刚体的定轴转动微分方程

思考题 在什么条件下，$F_1=F_2$?



解： 由定轴转动微分方程

$$J_O\alpha = F_1R - F_2R$$

即

$$F_1 - F_2 = \frac{J_O\alpha}{R}$$

$$\boxed{J_O = \frac{1}{2}mR^2}$$

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2}mR\alpha$$

$F_1=F_2$条件为上式右端$=0$，则

(1) $m=0$

或 (2) $R=0$

或 (3) $\alpha=0$

§4-4　相对于质心的动量矩定理

- 相对于质心的动量矩定理
- 相对于质心轴的动量矩定理

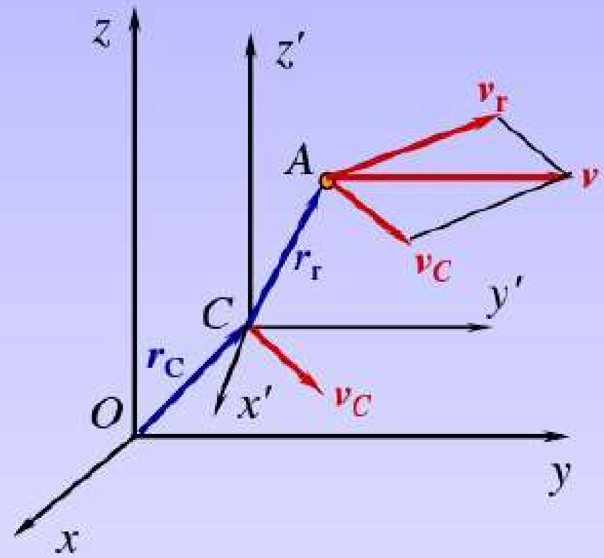
§ 4-4 相对于质心的动量矩定理

过固定点O建立固定坐标系$Oxyz$，以质点系的质心 C 为原点，取平动坐标系 $Cx'y'z'$，质点系对固定点O的动量矩。

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C, \quad \boldsymbol{L}_C = \sum (\boldsymbol{r}_{ri} \times m_i \boldsymbol{v}_{ri})$$

$\boldsymbol{L}_C$——质点系相对质心C的动量矩

一、相对于质心的动量矩定理



由对定点的动量矩定理

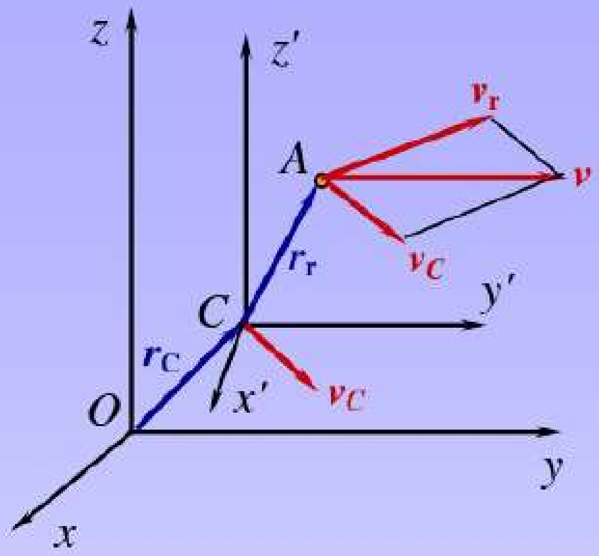
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i^{(e)}) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C) = \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(e)})$$

§ 4-4 相对于质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{L}_C) = \sum(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) \qquad (1)$$



左端 $$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} \times \sum m_i \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \sum m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= \boldsymbol{v}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

$\Rightarrow 0$

$$= \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$$

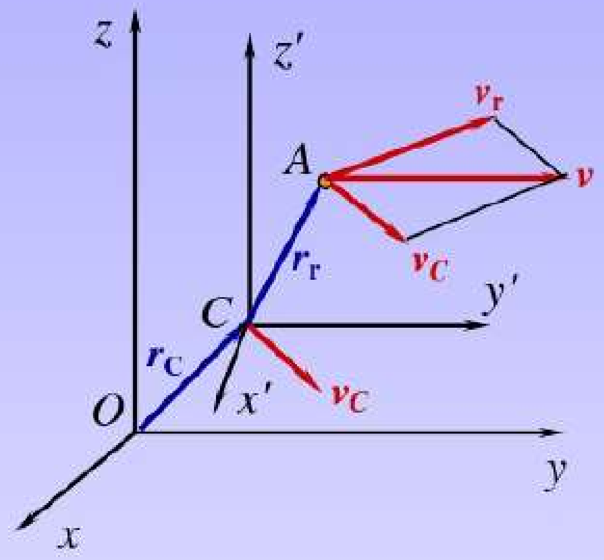
右端 $$= \sum[(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_{ri}) \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}] = \sum(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

代入（1）式有 $$\boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

§4-4 相对于质心的动量矩定理

$$\boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{a}_C + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) + \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

注意到由质心运动定理有 $m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}$



所以上式为

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \sum(\boldsymbol{r}_{ri} \times \boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \sum M_C(\boldsymbol{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \boldsymbol{M}_C}$$

这就是相对于质心的动量矩定理的一般形式。

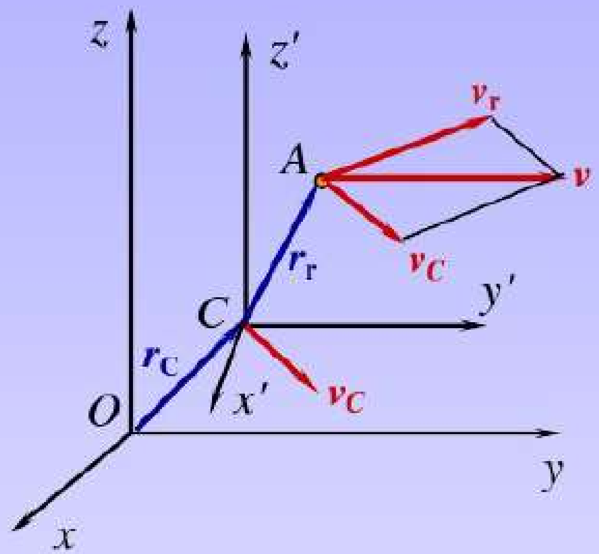
即，**质点系相对于质心的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心的主矩.**

§ 4-4 相对于质心的动量矩定理

二、相对于质心轴的动量矩定理

将前面所得质点系相对于质心的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times\boldsymbol{F}_i^{(e)})=\sum\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)})=\boldsymbol{M}_C}$$



沿质心轴进行投影，得

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_{Cz'}}{\mathrm{d}t}=M_{Cz'}}$$

即，**质点系相对于质心轴的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对该轴的主矩.**

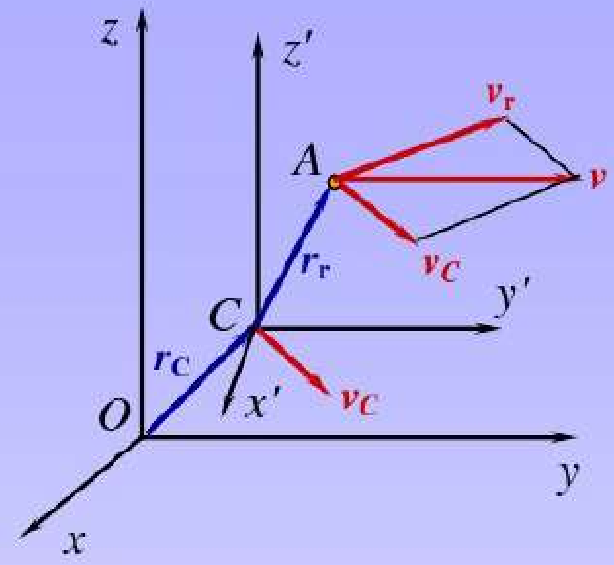
§4-4 相对于质心的动量矩定理

1. 对质心的动量矩定理

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum(\boldsymbol{r}_{ri}\times\boldsymbol{F}_i^{(e)})=\sum\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i^{(e)})=\boldsymbol{M}_C}$$

2. 对质心轴的动量矩定理

$$\boxed{\frac{dL_{Cz'}}{dt}=M_{Cz'}}$$

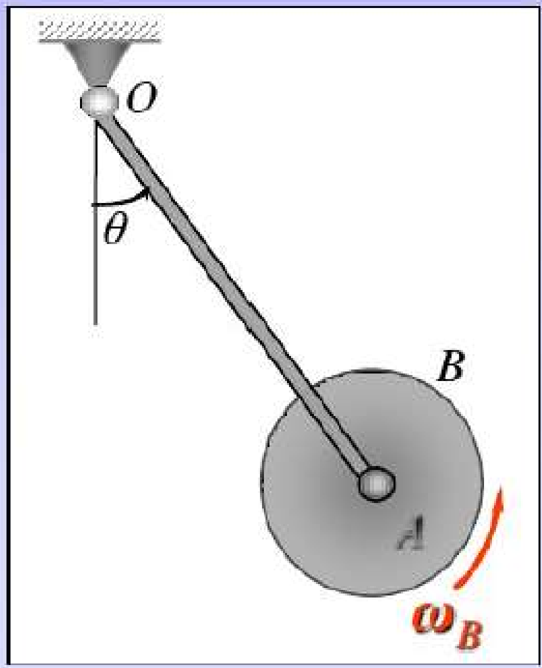


讨 论

1. 在以质心为原点的平动坐标系中，质点系对质心（或质心轴）的动量矩定理的形式与对定点（或定轴）的动量矩定理的形式相同；

2. 由该定理可见，质点系相对于质心（或质心轴）的动量矩的改变，只与质点系的外力有关，而与内力无关，即内力不能改变质点系对质心（或质心轴）的动量矩。

例题 4-8 长度为l，质量为m_1的均质杆OA与半径为R，质量为m_2的均质圆盘B在A处铰接，铰链O，A均光滑。初始时，杆OA有偏角θ_0，轮B有角速度ω_0（逆时针向）。求系统在重力作用下的运动。



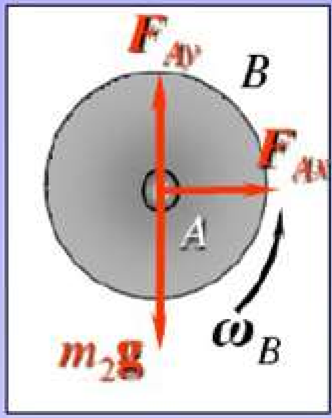
解： 1. 考虑圆盘B，受力如图b所示，根据对质心的动量矩定理

$$J_B\dot{\omega}_B = 0$$

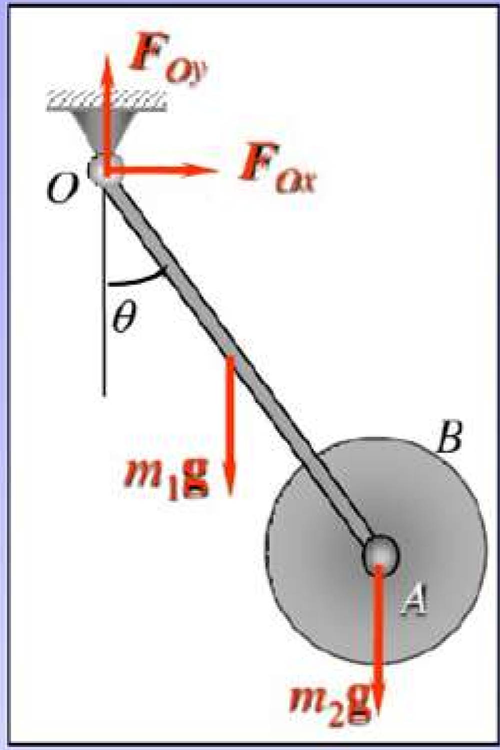
$$\omega_B = \omega_0$$

2. 考虑杆轮系统，受力如图c所示，应用对固定点O的动量矩定理，计算轮B动量矩时使用式

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{p}$$



(b)



(c)

得 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_{OA}\dot{\theta} + (J_B\omega_B + m_2 l\dot{\theta}\cdot l)\right] = -m_1 g\frac{l}{2}\sin\theta - m_2 g l\sin\theta$$

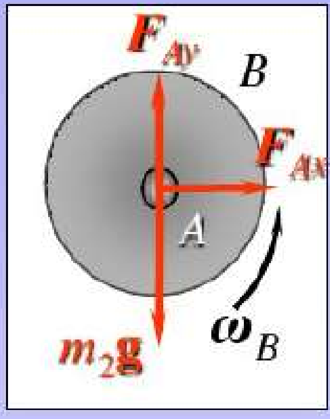
$$\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)l\ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)g\sin\theta = 0$$

微幅振动时的运动规律为

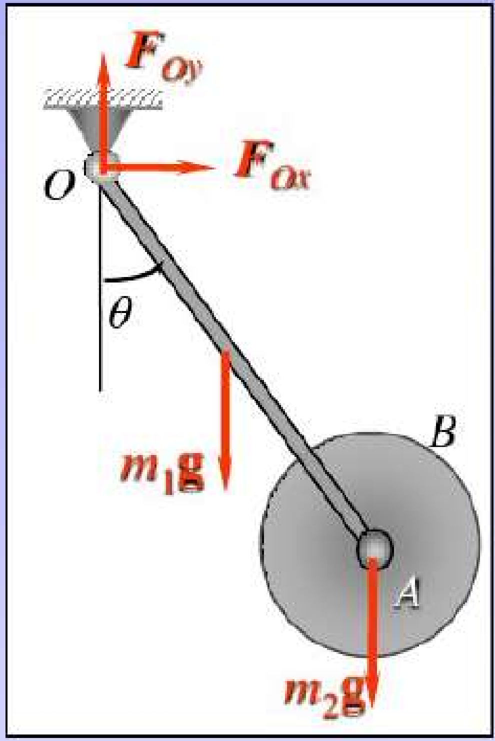
$$\theta = \theta_0 \cos\ \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3m_1 + 6m_2}{2m_1 + 6m_2} \cdot \frac{g}{l}}$$

3. 运动特性：圆盘的转动不影响系统的摆动，而系统的摆动也不影响圆盘的转动。



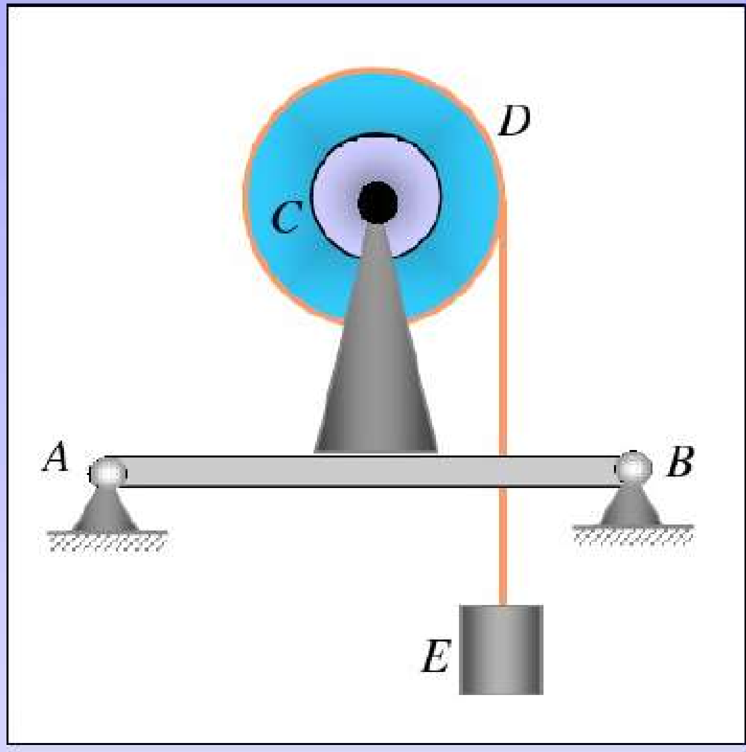
(b)



(c)

§ 4-4 相对于质心的动量矩定理

例题 4-9 起重装置由匀质鼓轮D（半径为R，重为$\boldsymbol{W}_1$）及均质梁AB（长l=4R，重$\boldsymbol{W}_2$=$\boldsymbol{W}_1$）组成，鼓轮通过电机C（质量不计）安装在梁的中点，被提升的重物E重 $\boldsymbol{W}=\frac{1}{4}\boldsymbol{W}_1$。电机通电后的驱动力矩为$M$，求重物$E$上升的加速度$a$及支座$A$，$B$的约束力$\boldsymbol{F}_{NA}$及$\boldsymbol{F}_{NB}$。



解： 1. 求加速度a。

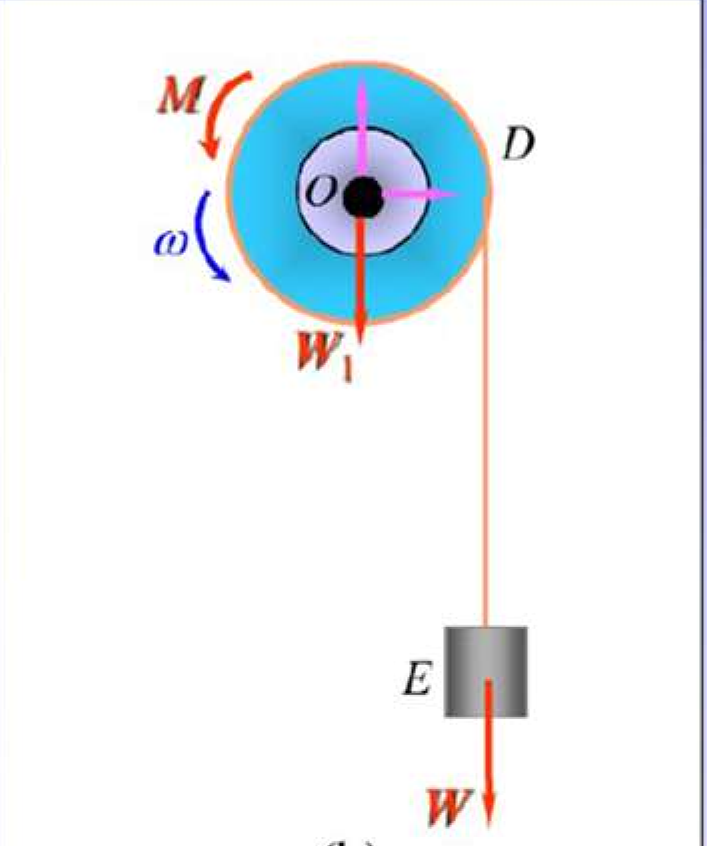
考虑鼓轮D，重物E及与鼓轮固结的电机转子所组成的系统（图b），M为电机定子作用在转子的驱动力矩，对固定点O的应用动量矩定理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(J_D+\frac{W}{g}R^2\right)\omega\right]=M-WR$$

其中 $$J_D=\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2$$

解得 $$\alpha=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}\cdot\frac{g}{R}$$

$$a=\frac{4M/R-W_1}{3W_1}g$$



(b)

2. 考虑整个系统（图c），注意驱动力矩为M系统内力。对点B应用动量矩定理得

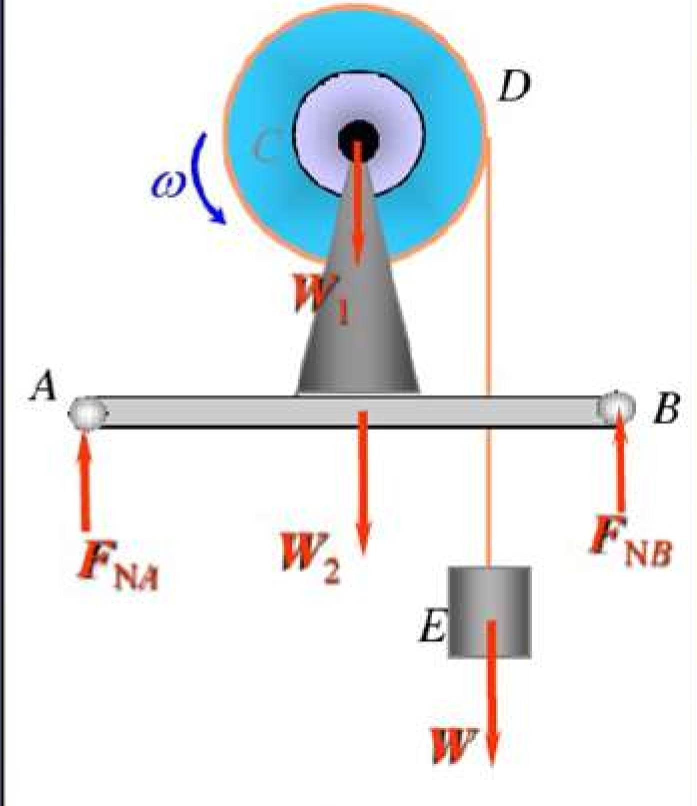
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[J_D\omega-\frac{W}{g}R\omega\left(\frac{l}{2}-R\right)\right]=$$

$$(W_1+W_2)\frac{l}{2}+W\left(\frac{l}{2}-R\right)-F_{\mathrm{NA}}l$$

解得

$$F_{\mathrm{NA}}=\frac{1}{2}(W_1+W_2)+W\left(\frac{1}{2}-\frac{R}{l}\right)-\left[J_D-\frac{W}{g}R\left(\frac{l}{2}-R\right)\right]\frac{\alpha}{l}$$

$$F_{\mathrm{NA}}=\frac{17}{16}W_1-\frac{1}{16}\frac{W_1}{g}R\alpha$$



(c)

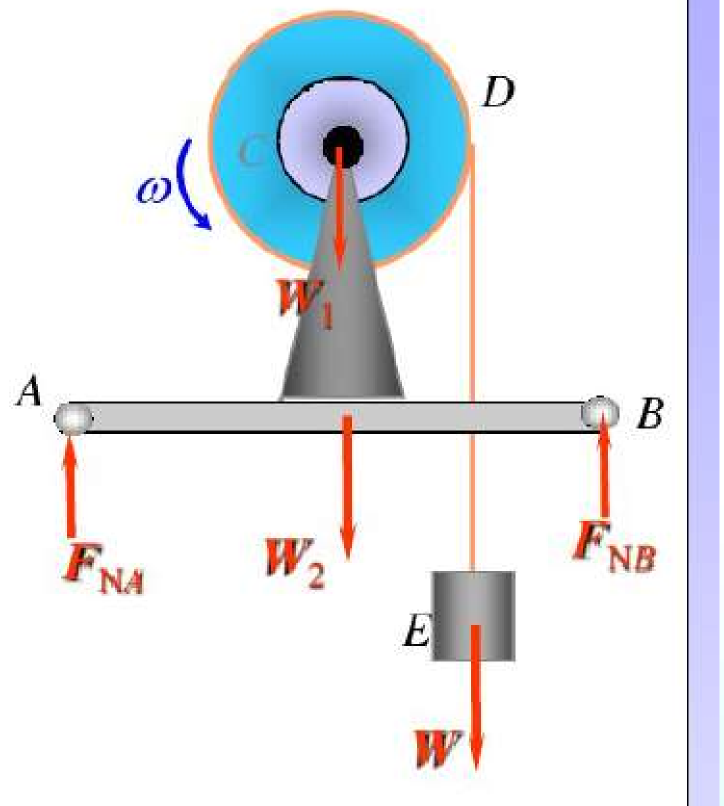
对整个系统应用动量定理得

$$\frac{W}{g}R\alpha = F_{NA} + F_{NB} - W_1 - W_2 - W$$

解得

$$F_{NB} = W_1 + W_2 + W - F_{NA} + \frac{W}{g}R\alpha$$

$$= \frac{19}{16}W_1 + \frac{5}{16}\frac{W_1}{g}a$$



(c)

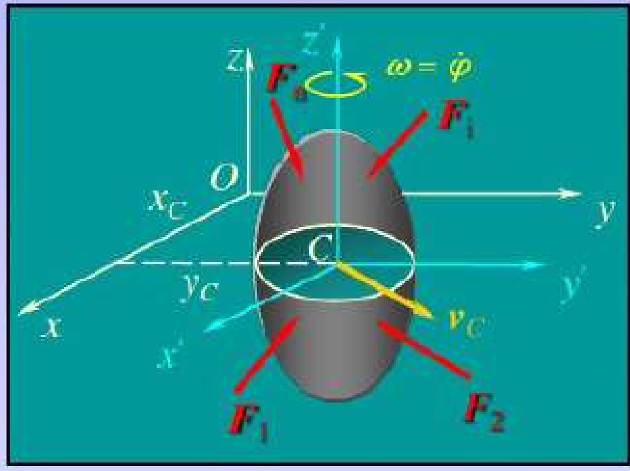
§4-5 刚体的平面运动微分方程

§4-5 刚体的平面运动微分方程

设刚体在外力 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 作用下作平面运动。

取固定坐标系 $Oxyz$，使刚体平行于坐标面 Oxy 运动，且质心 C 在这个平面内，再以质心为原点作平动坐标系 $Cx'y'z'$。

由运动学知，刚体的平面运动可分解成随质心的牵连平动和相对于质心的相对转动。



随质心的牵连平动规律可由质心运动定理来确定

即

$$\sum m_i \boldsymbol{a}_c = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$

而相对于质心的相对转动规律可由相对质心的动量矩定理来确定

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C$$

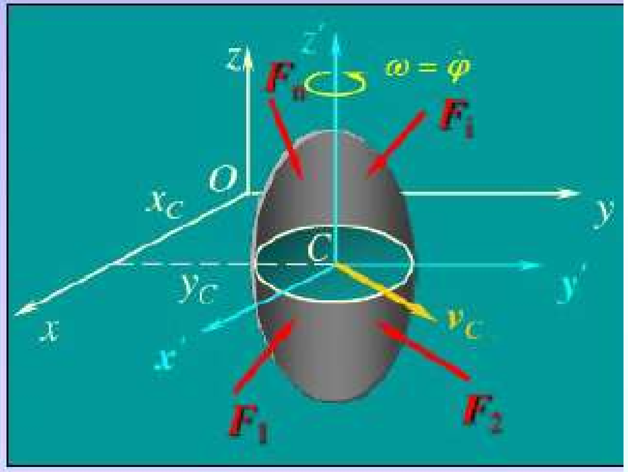
§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

随质心的牵连平动规律可由质心运动定理来确定 $\sum m_i \boldsymbol{a}_c = \sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$

而相对质心的相对转动规律可由相对质心的动量矩定理来确定 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C$

将前一式投影到轴 x，y 上，后一式投影到轴 Cz' 上，可得

$$\sum m_i a_{Cx} = \Sigma F_x \ , \quad \sum m_i a_{Cy} = \Sigma F_y \ , \quad \frac{\mathrm{d}L_{Cz'}}{\mathrm{d}t} = M_{Cz'}$$



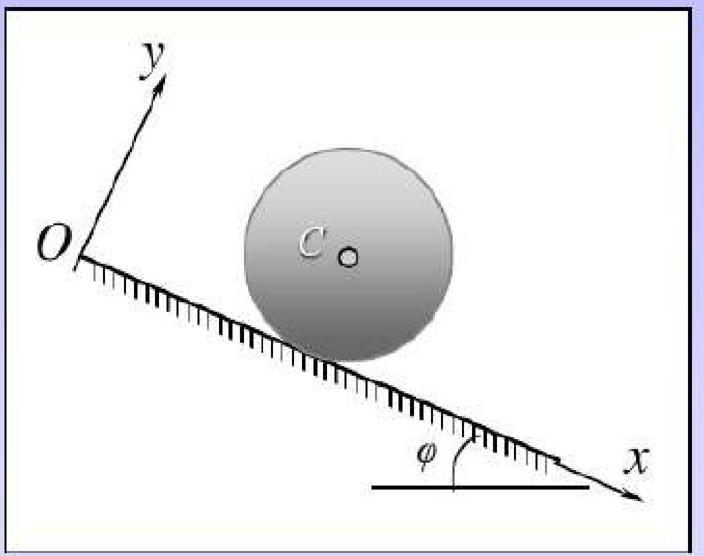
注意到 $a_{Cx} = \ddot{x}_C$ ， $a_{Cy} = \ddot{y}_C$ ， $L_{Cz'} = J_C \omega = J_C \dot{\varphi}$

式中 J_C 表示刚体对轴 Cz' 的转动惯量。

则有 $\boxed{\sum m_i \ddot{x}_C = \Sigma F_x \ , \quad \sum m_i \ddot{y}_C = \Sigma F_y \ , \quad J_C \ddot{\varphi} = M_C}$

这就是**刚体的平面运动微分方程**。可以应用它求解刚体作平面运动时的动力学问题。

例题4-10 匀质圆柱的质量是m，半径是 r，从静止开始沿倾角是φ的固定斜面向下滚动而不滑动，斜面与圆柱的静摩擦系数是 f_s。试求圆柱质心C的加速度，以及保证圆柱滚动而不滑动的条件。



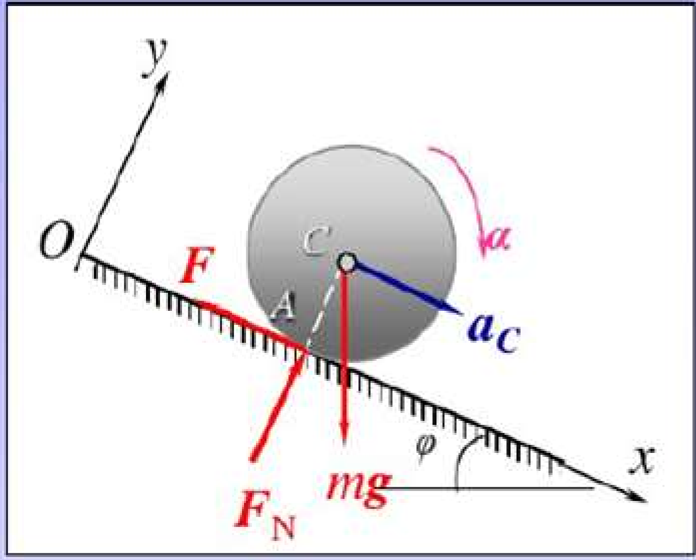
解： 以圆柱为研究对象，圆柱作平面运动。

由刚体平面运动微分方程，有

$$ma_C = mg\sin\varphi - F \qquad (1)$$

$$0 = F_N - mg\cos\varphi \qquad (2)$$

$$J_C\alpha = Fr \qquad (3)$$



由于圆柱只滚不滑，故有运动学关系

$$a_C = r\alpha \qquad (4)$$

联立求解以上四个方程，并考虑到$J_C = mr^2/2$，得到

$$a_C = \frac{2}{3}g\sin\varphi\ ,\qquad F = \frac{1}{3}mg\sin\varphi\ ,\qquad F_N = mg\cos\varphi$$

§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

例题 4-10

$$a_C = \frac{2}{3} g \sin \varphi \,, \qquad F = \frac{1}{3} m g \sin \varphi \,, \qquad F_N = m g \cos \varphi$$

由保证圆柱滚动而不滑动的静力学条件：

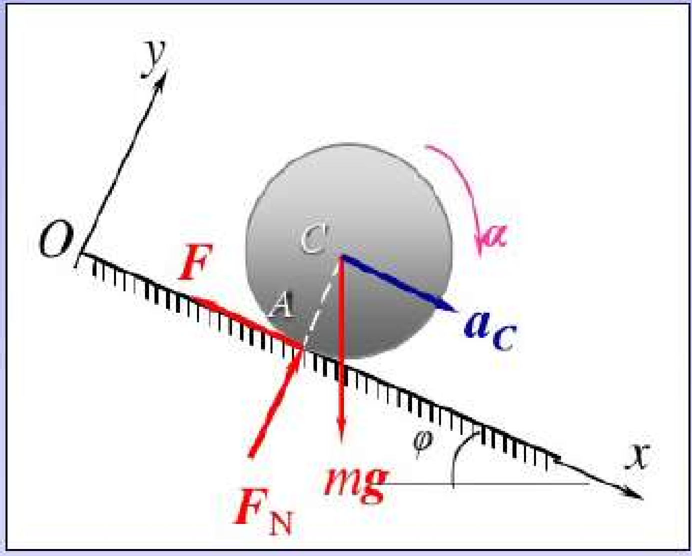
$$F \le f_s F_N$$

代入求出的 F 和 F_N，则得

$$\frac{1}{3} m g \sin \varphi \le f_s m g \cos \varphi$$

从而求得圆柱滚动而不滑动的条件

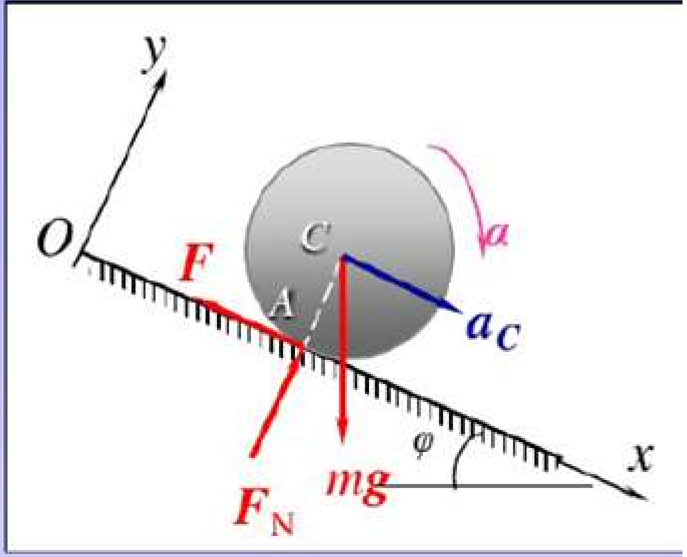
$$\tan \varphi \le 3 f_s$$



§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

例题 4-10

讨 论



1. 若 $\tan\varphi \le 3f_s$ 不成立，如何分析？

即圆柱有滑动，故运动学关系 $a_C = r\alpha$ 不成立。

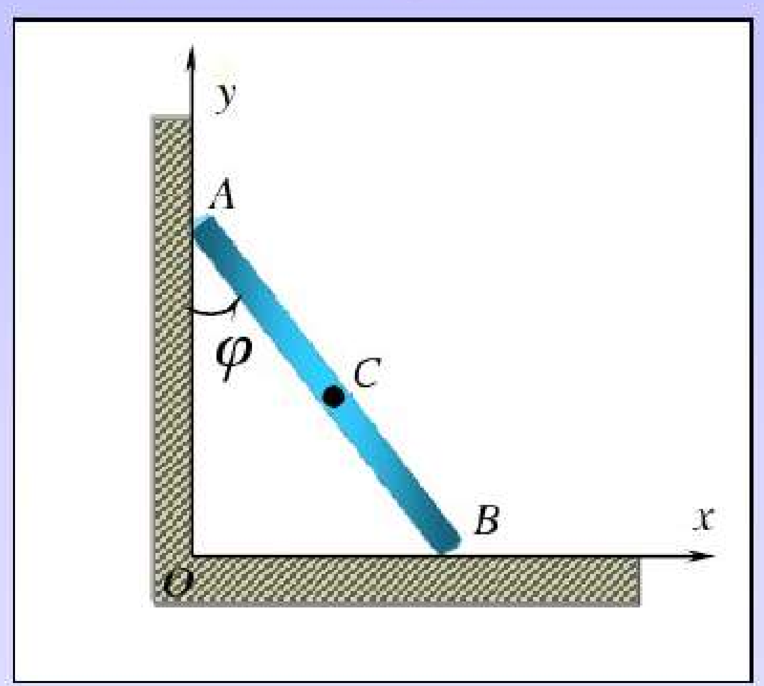
则应用关系 $F = F_N f_s$ 做为补充方程。

2. 本例动量矩方程亦可用 $J_A\alpha = M_A$ 。

3. 本例亦可用动能定理求出 a_C，然后应用质心运动定理求出 F。

§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

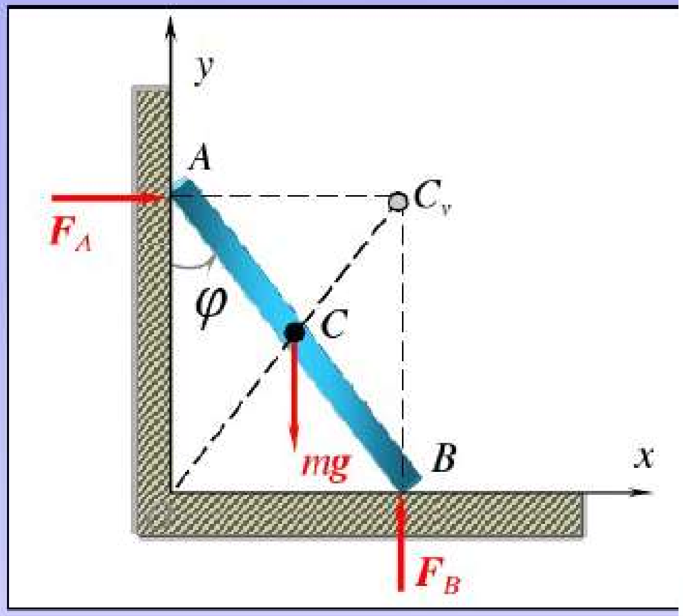
例题 4-11 匀质细杆 AB 的质量是 m，长度是 $2l$，放在铅直面内，两端分别沿光滑的铅直墙壁和光滑的水平地面滑动。假设杆的初位置与墙成交角 φ_0，初角速度等于零。试求杆沿铅直墙壁下滑时的角速度和角加速度，以及杆开始脱离墙壁时它与墙壁所成的角度 φ_1。



§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

例题 4-11

解： 在 A 端脱离墙壁以前，受力如图所示。杆作平面运动，取坐标系 Oxy，则杆的运动微分方程可写成



$$m\ddot{x}_C = F_A \tag{a}$$

$$m\ddot{y}_C = F_B - mg \tag{b}$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_B l\sin\varphi - F_A l\cos\varphi \tag{c}$$

由几何关系知

$$x_C = l\sin\varphi \tag{d}$$

$$y_C = l\cos\varphi \tag{e}$$

§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

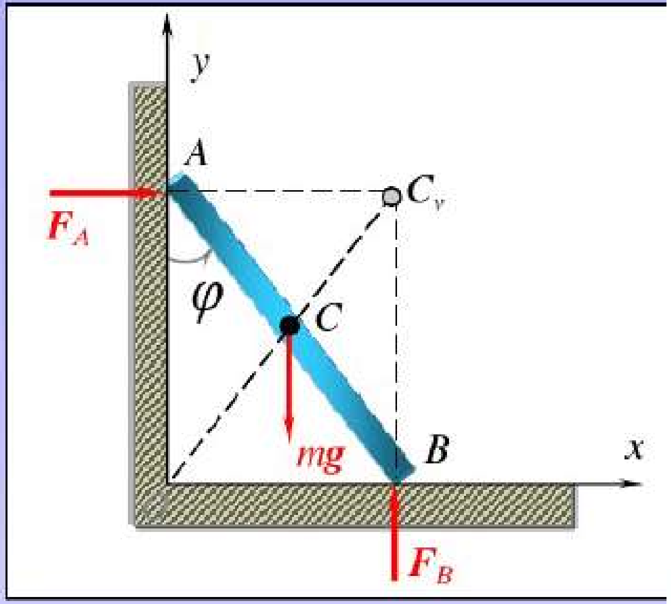
例题 4-11

将式(d)和(e)对时间求导，得

$$\dot{x}_C = l\dot{\varphi}\cos\varphi \quad , \quad \dot{y}_C = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{x}_C = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \qquad \text{(f)}$$

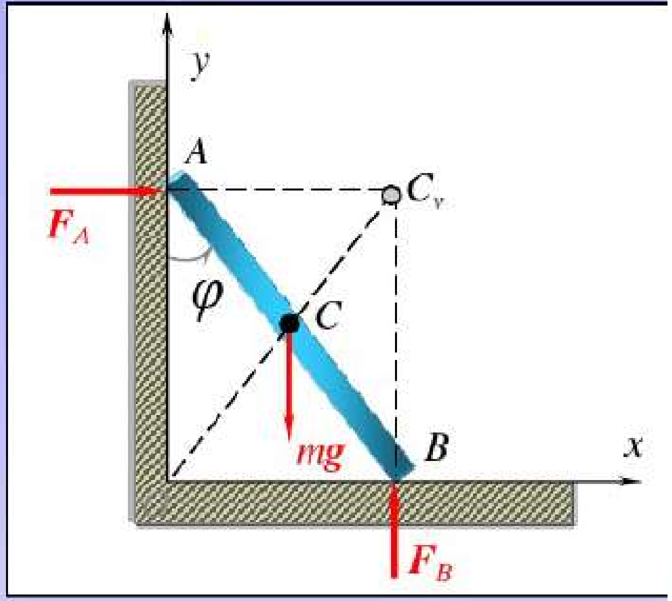
$$\ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi \qquad \text{(g)}$$



把(f)和(g)分别代入(a)和(b)，再把F_A和F_B的值代入(c)

最后得杆AB的角加速度

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi \qquad \text{(h)}$$



利用关系

$$\ddot{\varphi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}$$

把上式化成积分

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi}=\frac{3g}{4l}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

求得杆 AB 的角速度

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0-\cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

$$\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0-\cos\varphi)} \qquad \text{(i)}$$

当杆即将脱离墙时，$F_A \to 0$。以$F_A=0$代入(a)，再根据(f)得

$$l\ddot{\boldsymbol{\varphi}}\cos\boldsymbol{\varphi}_1=l\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2\sin\boldsymbol{\varphi}_1$$

把(h)和(i)的表达式在$\varphi=\varphi_1$时的值代入上式，得关系

$$l\frac{3g}{4l}\sin\varphi_1\cos\varphi_1=l\frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0-\cos\varphi_1)\sin\varphi_1$$

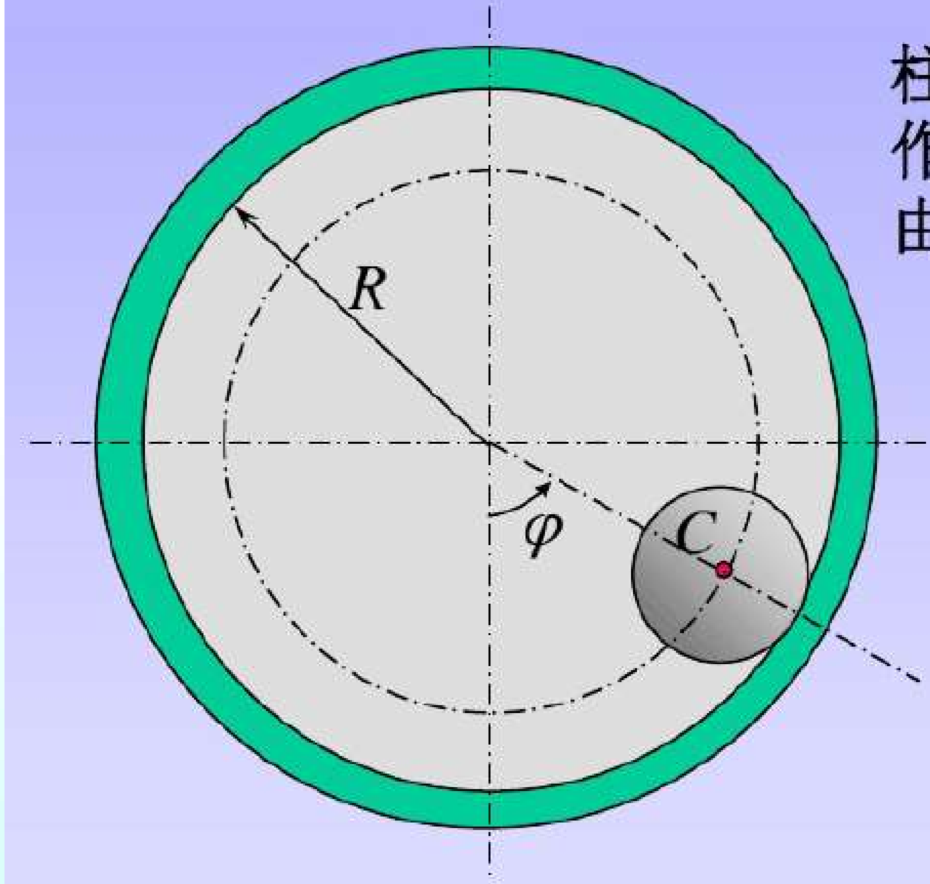
整理后，求得杆开始脱离墙时与墙所成的夹角

$$\varphi_1=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos\varphi_0\right)$$

§ 4-5 刚体的平面运动微分方程

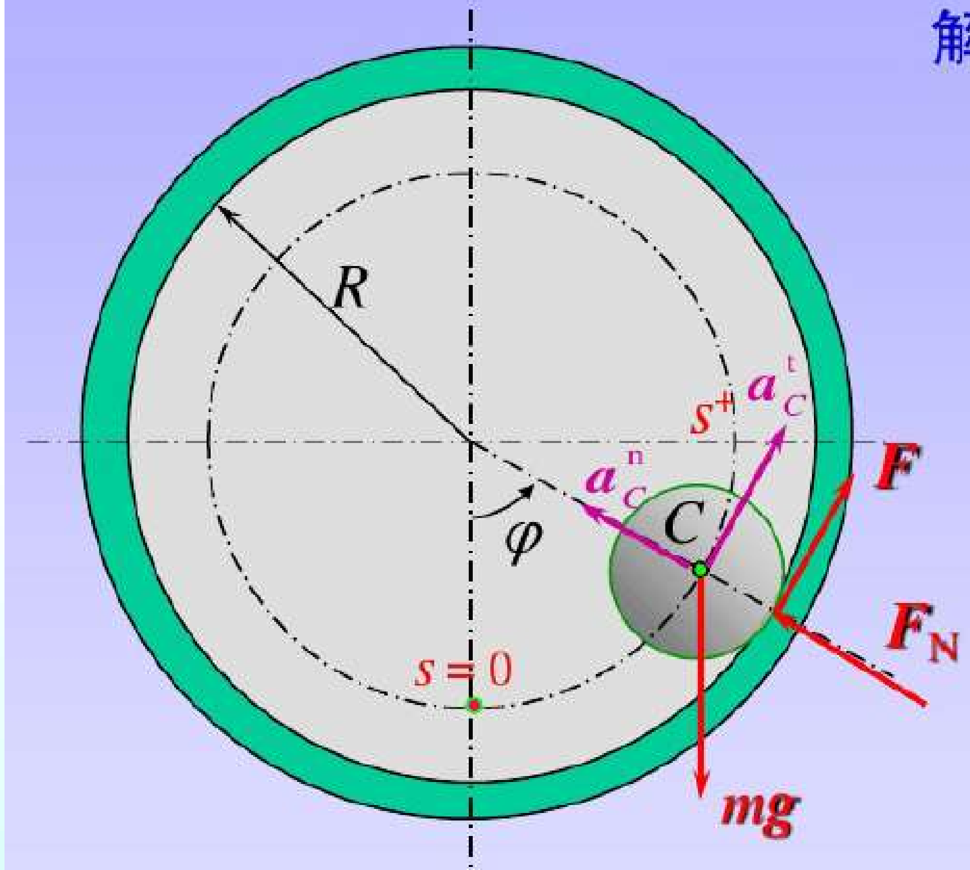
例题 4-15

半径为r、质量为 m的均质圆柱体，在半径为 R 的刚性圆槽内作纯滚动 。在初始位置$\varphi = \varphi_0$，由静止向下滚动。



试求：

1. 圆柱体的运动微分方程；
2. 圆槽对圆柱体的约束力；
3. 微振动周期与运动规律。



解： 圆柱体受力分析。

mg—重力；

F—滑动摩擦力；

F_N—圆槽对圆柱体的约束力。

圆柱体作平面运动，取弧坐标s与圆柱体质心轨迹重合。

1、圆柱体的运动微分方程

根据自然轴系中，质心运动定理的投影形式，圆柱体的平面运动微分方程

$$ma_C^{t} = m(R-r)\ddot{\varphi} = F - mg\sin\varphi$$

$$ma_C^{n} = m(R-r)\dot{\varphi}^2 = F_N - mg\cos\varphi$$

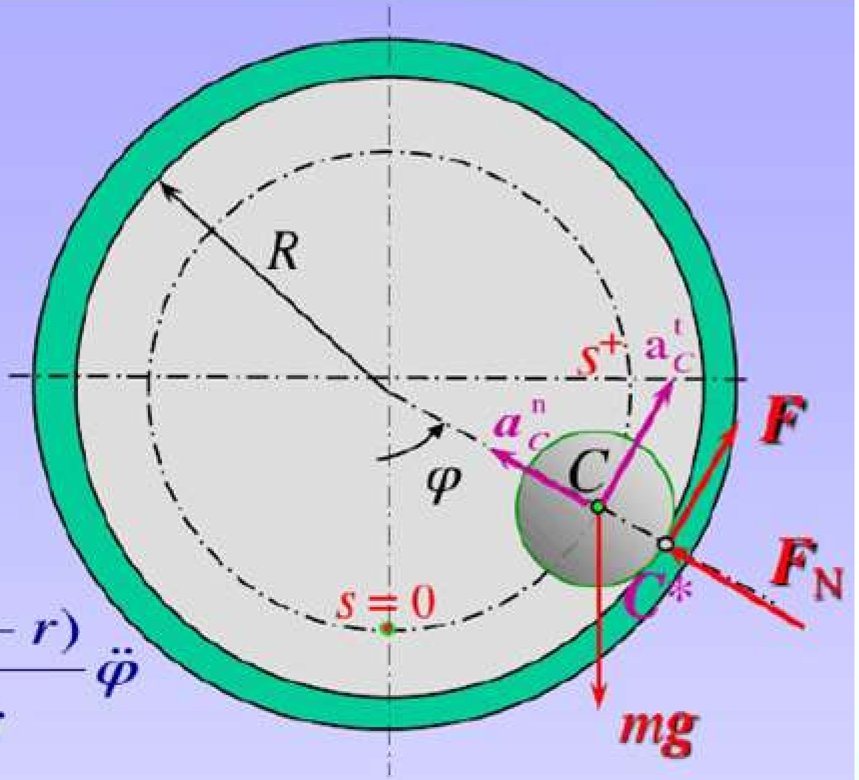
$$J_C\alpha = -Fr$$

C^* 为瞬心，由运动学知识得

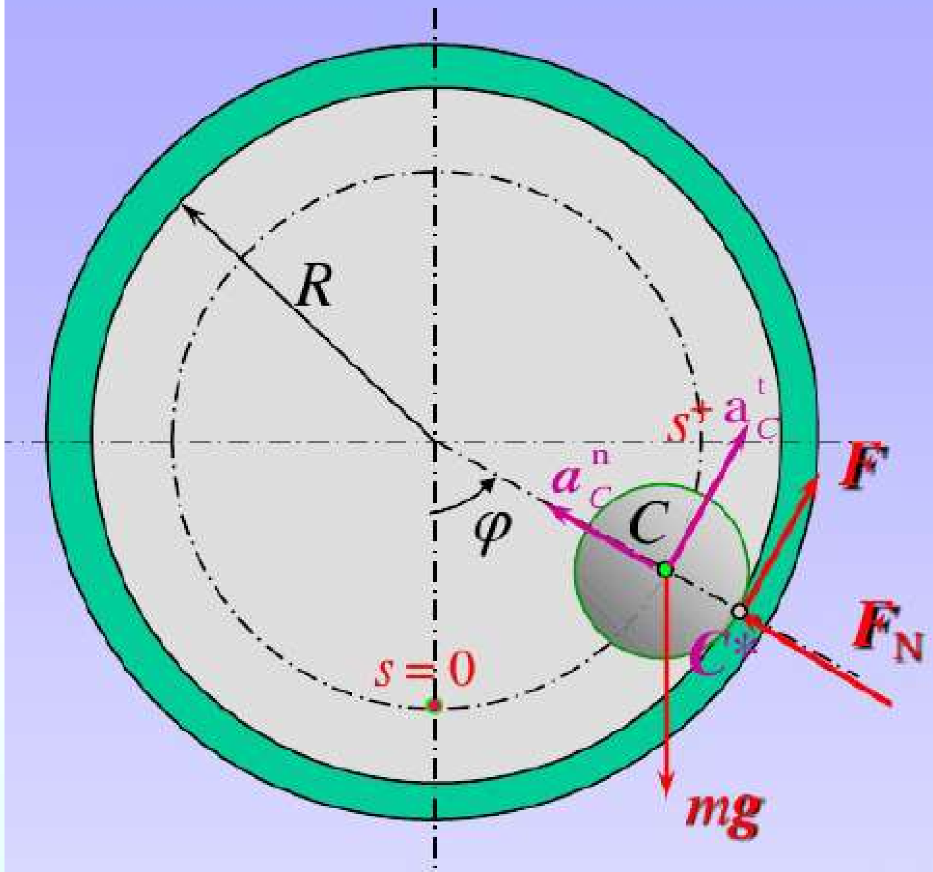
$$v_C = (R-r)\dot{\varphi} = r\omega, \quad \dot{\omega} = \alpha = \frac{(R-r)}{r}\ddot{\varphi}$$

联立求解得 $$-\frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi} = F$$

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$



这是角度φ大小都适用的圆柱体非线性运动微分方程。



2. 圆槽对圆柱体的约束力

由第二个运动微分方程

$$ma_C^n = m(R-r)\dot{\varphi}^2 = F_N - mg\cos\varphi$$

圆槽对圆柱体的约束力为：

$$F_N = mg\cos\varphi + m(R-r)\dot{\varphi}^2$$

$$F = -\frac{1}{2}m(R-r)\ddot{\varphi}$$

F_N——法向力

F——摩擦力

3. 微振动的周期与运动规律

$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0$$

φ很小时，$\sin\varphi\approx\varphi$，非线性微分方程线性化

$$\ddot{\varphi}+\frac{2g}{3(R-r)}\varphi=0$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}\ ,\qquad T=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

线性微分方程的一般解为

$$\varphi = A\sin(\omega_0 t + \alpha)。$$

求导得 $$\dot{\varphi} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

A和α为待定常数，由运动的初始条件确定。

初始条件 $$t = 0,\quad \varphi = \varphi_0,\quad \dot{\varphi}_0 = 0$$

代入上式得 $$\varphi_0 = A\sin\alpha,\qquad 0 = A\omega_0\cos\alpha$$

$$A = \varphi_0,\qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}t\right)$$