第五章 多元函数微分学及其应用

第一节 n维Euclid空间点集的初步知识

作业：P10：习题5.1（A）

1; 2; 4(1)(2)(4); 5(3)(4); 7(2)(4);

1.1 n维Enclid空间 R^n

n 维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)$

$$R^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots x_n)|x_i\in R,i=1,2,\cdots n\}$$

在R^n中引入：

加法：$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots x_n+y_n)$

数乘：$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots \alpha x_n)$

在 R^n 中再引入：

内积：$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ n维Enclid空间

范数：$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

距离：

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots(x_n-y_n)^2}$$

1.2 R^n 中点列的极限

R^n 中的点列： $\{x_k\}$ $\quad x_1, x_2, \cdots x_k, \cdots$

$$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots x_{k,n}) \in R^n$$

$$a = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in R^n$$

定义1.1 (点列的极限)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$，当 $k > N$ 时，恒有

$$\|x_k - a\| < \varepsilon$$

则称$\{x_k\}$的**极限**存在，且称a为其**极限**，记作

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \text{ 或 } x_k \to a \quad (k \to \infty)$$

$\{x_k\}$**收敛**于a

注： $\lim_{k\to\infty} x_k = a \Leftrightarrow \rho(x_k, a) \to 0$

定理1.1 设有点列 $x_k=(x_{k,1},x_{k,2},\cdots x_{k,n})\in R^n$，

$a=(a_1,a_2,\cdots a_n)\in R^n$，则

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}x_k=a \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i.}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

证： 必要性　$\forall i=1,2,\cdots,n$，$|x_{k,i}-a_i|\le\|x_k-a\|.$

充分性　$\forall i=1,2,\cdots,n$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$，

$\forall\varepsilon>0,\exists N_i\in N_+$，当 $k>N_i$ 时，有 $|x_{k,i}-a_i|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$，

令 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots N_n\}$，则 $\forall k>N$，有 $|x_{k,i}-a_i|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$，

$$\|x_k-a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{k,i}-a_i)^2}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a.$

定理1.2 设$\{x_k\}$是R^n 中的收敛点列，则

1）$\{x_k\}$的极限唯一；

2) $\{x_k\}$是有界的，即$\exists M>0$,使$\forall k\in N_+, \|x_k\|\le M$;

3）若$x_k\to a, y_k\to b$，则$x_k\pm y_k\to a\pm b$，$\alpha x_k\to\alpha a$.

定理1.3 (Bolzano-Weierstrass定理)

R^n 中的有界点列必有收敛子列(其极限称为**极限点**).

定理1.4 (Cauchy收敛原理)

R^n中的点列收敛$\Leftrightarrow\{x_k\}$是R^n中的Cauchy点列。

Cauchy点列： $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N_+$, 使得 $\forall k>N$,及 $p\in N_+$

恒有 $\|x_{k+p}-x_k\|<\varepsilon$.

1.3 R^n 中的开集与闭集

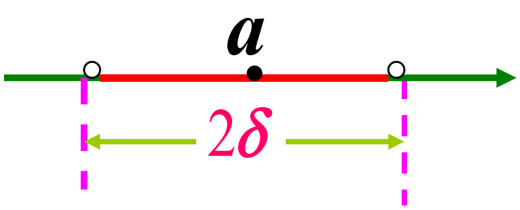
定义1.3 (邻域)

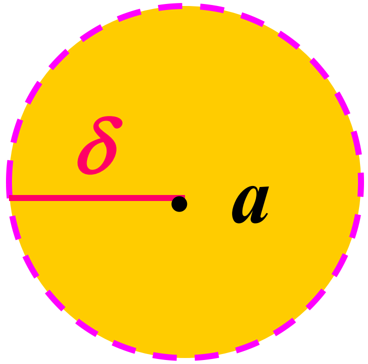
设点$a\in R^n$,常数$\delta>0$,则称R^n中与点a的距离小于δ的点x的全体所构成的点集为 点a的δ邻域,记为

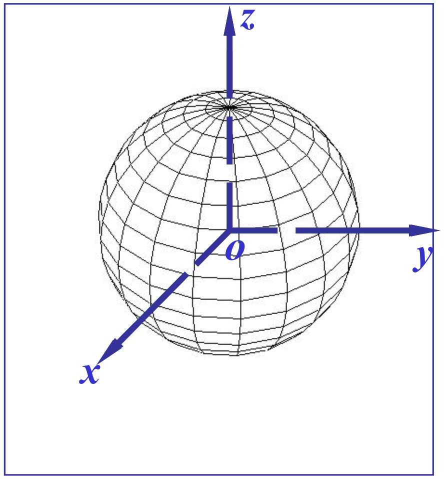
$$U(a,\delta)=\{x\in R^n \mid \|x-a\|<\delta\}$$

而将$U(a,\delta)$中去掉点a的部分称为点a的去心δ邻域,记为

$$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x\in R^n \mid 0<\|x-a\|<\delta\}=U(a,\delta)\setminus\{a\}$$







$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$,当 $k > N$ 时，恒有 $x_k \in U(a,\varepsilon)$.

定义1.2 设A是R^n中的点集, $a \in R^n$，若存在A中的点列 $\{x_k\}(x_k \neq a)$，使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$，则称$a$是$A$的聚点。

A的所有聚点构成的集合称为A的导集，记为 A'.

$\overline{A} = A \cup A'$ 称为A的闭包，

若$a \in A$，但$a \notin A'$，称a为A的孤立点，

若$A' \subseteq A$，则称A为闭集。

例如 $A = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \middle| k \in N_+ \right\}$，聚点$(0,0)$，$A' = \{(0,0)\}$，

注：闭集对极限运算封闭

空集 Φ是闭集, 单点集和有限点集都是闭集

定理1.5 设A是R^n中的点集, $a \in R^n$, 则

$$a \in A' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon) \cap A \neq \Phi.$$

证: 必要性

设$a \in A'$, 则存在A中的点列$\{x_k\}(x_k \neq a)$, 使$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$,

即$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$, 当$k > N$时, 恒有 $x_k \in \overset{o}{U}(a,\varepsilon)$.

由于$\{x_k\} \subseteq A$, 所以$\forall \varepsilon > 0, \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon) \cap A \neq \Phi$.

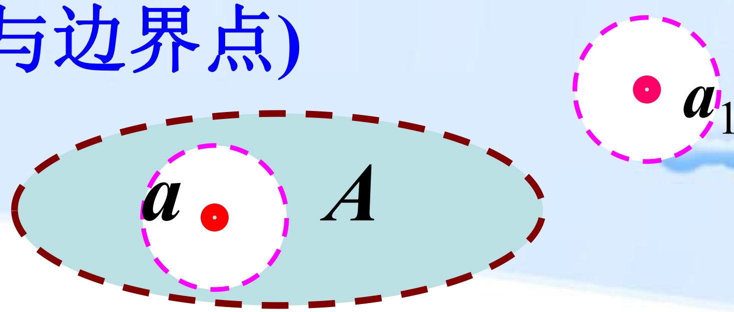
充分性

若$\forall \varepsilon > 0, \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon) \cap A \neq \Phi$, 则$\forall k \in N_+$, 取$\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$,

$\exists x_k \in \overset{\circ}{U}(a,\varepsilon_k) \cap A$, 即存在$A$中的点列$\{x_k\}(x_k \neq a)$,

$\|x_k - a\| < \varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$, 所以$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, 故$a \in A'$.

定义1.4 (内点,外点与边界点)



- 设 A 是R^n的一个点集，点$a \in A$．如果存在点 a 的一个邻域 $U(a,\delta)$, 使得$U(a,\delta) \subset A$，则称a为A的一个内点.

集合A的内点的全体所构成的 集合称为集合 A的内部.

记为: A^0或int$A$.

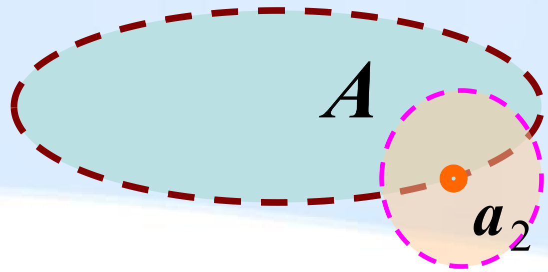
- 设 $a_1 \in R^n$．如果存在点 a_1 的一个邻域 $U(a_1,\delta_1)$

使得$U(a_1,\delta_1)$的点都不是A的点，即$U(a_1,\delta_1) \subset A^c$,

则称a_1为A的一个外点.

集合A的外点的全体所构成的 集合称为集合 A的外部.

记为: ext$A$.



设 $a_2 \in R^n$. 如果点 a_2 的任意一个邻域 $U(a_2, \delta_2)$ 既含有集合 A 的点, 又含有 A^c 的点, 则称 a_2 为 A 的一个边界点

集合 A 的边界点的全体所构成 的集合称为集合 A 的边界.

记为: ∂A.

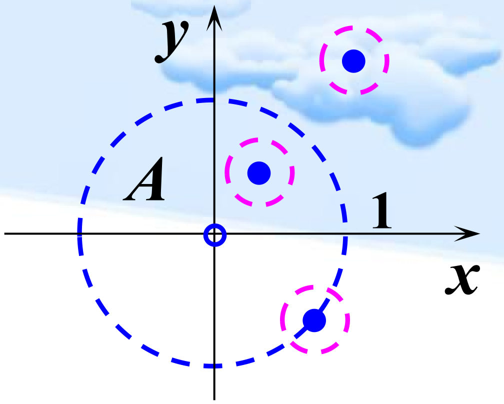
$$\mathbf{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup extA$$

例1 设 $A = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$,

求: A 的内部,外部以及边界.

例1 设 $A=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$,

求: A的内部,外部以及边界.



$A^0 = A$

$extA=\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$,

$\partial A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{0,0\}$,

例2 设 $A=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le 4\}$.

求: A的内部,外部以及边界.

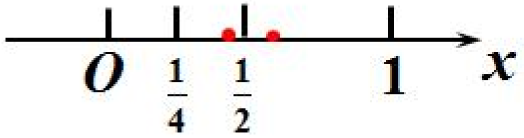
解 $A^0=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2<4\}$

$\partial A=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2=4\}$

$extA=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2>4\}$

例3 设 $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\}$,

$\partial A = A$



例4 $A=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\le 1\}$

A的内点$A^0=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$.

A的边界$\partial A=(0,0)\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

(0,0)既是边界点也是聚点，但(0,0) 不属于集合A

$\partial A\setminus(0,0)=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$

这时的边界点都是聚点， 也都属于集合A

注： 1) 内点一定是聚点；但聚点不一定是内点.

2) 区域的边界点(除孤立点外)一定是聚点.

3) 点集A的聚点可以属于A,也可以不属于A.

定义1.5 设$A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若$A^\circ = A$, 即A中的点全是A的内点，则称A为开集.

定理1.6 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集 $\Leftrightarrow$ A^c 是闭集.

例如，$E_1 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$是开集.

定理1.7 在 n维Euclid空间 $\mathbf{R}^n$ 中，开集有如下性质：

(1) 空集 Φ与全空间 $\mathbf{R}^n$是开集；

(2) 任意个开集的并是开集；

(3) 有限个开集的交是开集.

由对偶原理可知：

(1) 空集 Φ 和全空间$\mathbf{R}^n$ 是闭集；

(2) 任意多个闭集的交是闭集；

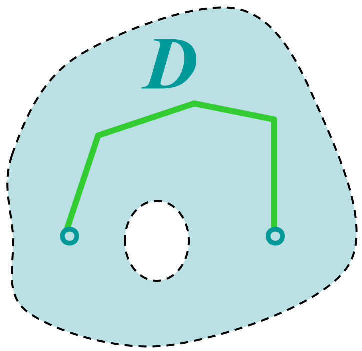
(3) 有限多个闭集的并是闭集.

1.4 R^n 中的紧集与区域

设A是R^n中的一个点集，若$\exists M>0$，使得$\forall x\in A$，都有$\|x\|\le M$，则称A是有界集，否则称为无界集.

定义1.6 设A是R^n中的一个点集，若A是有界闭集，则称A为紧集.

定义1.7 设$A\subseteq\mathrm{R}^n$是一个点集，如果A中的任意两点x与y都能用完全属于A的有限个线段联结起来，则称A是连通集.



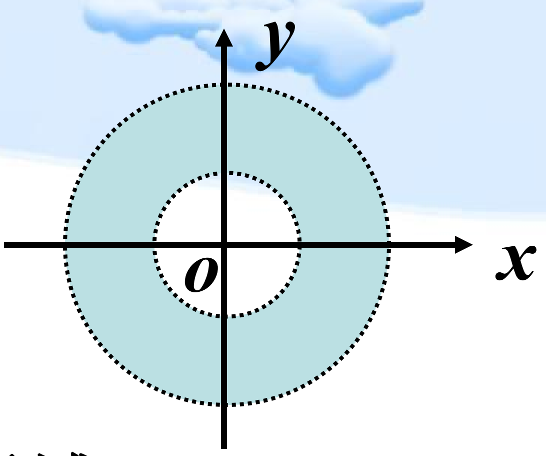
连通的开集称为开区域，简称区域.

区域与它的边界之并称为闭区域.

区域

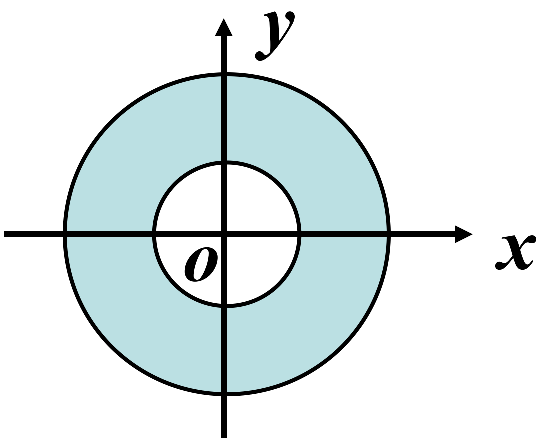
连通的开集称为区域或开区域.

例如： $\{(x,y)\,|\,1 < x^2 + y^2 < 4\}$.



开区域连同它的边界一起称为闭区域.

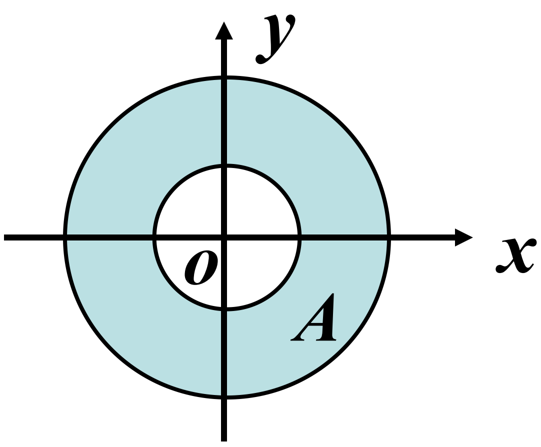
例如： $\{(x,y)\,|\,1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

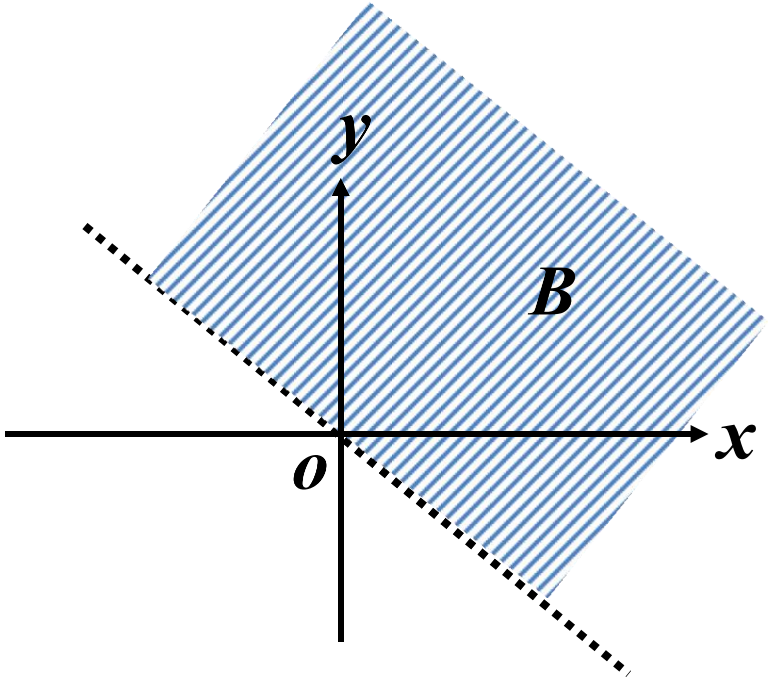


有界集与无界集

例如： $A=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\}$ 有界闭区域；

$B=\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 无界开区域





凸集： 设$A \subseteq R^n$，若$\forall x_1, x_2 \in A$，则$\forall t \in [0,1]$，

$tx_1 + (1-t)x_2 \in A$，则称A为 R^n 中的凸集.

注： 凸集都是连通集

凸开集都是区域