

一、填空题(共 6 道小题, 每小题 2 分, 满分 12 分, 把答案填在题中横线上)

1. 设 A, B 为两个随机事件, 且有 $P(\bar{A}) = 0.4, P(B) = 0.4, P(\bar{B}|A) = 0.5$, 则 $P(\bar{B}|(A \cup B)) = \underline{\frac{3}{7}}$.

2. 设某车间有三台机床, 在一小时内三台机床不要求工人维修的概率分别为 0.9、0.8、0.85, 假设三台机床是否需要维修是相互独立的, 则一小时内三台车床至少有一台不需要维护的概率为 0.997.

3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布 ($\lambda > 0$), 且已知 $E[(X-2)(X-3)] = 2$, 则 $\lambda = \underline{2}$.

4. 设 $D(X) = 25, D(Y) = 36, \rho_{XY} = 0.4$, 则 $D(X+Y) = \underline{85}$.

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本, X 在 $(0, 2\theta)$ 服从均匀分布, 其中 $\theta > 0$, 则 $D(\bar{X}) = \underline{\frac{\theta^2}{3n}}$.

6. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X - \mu| \geq 2\sigma\} \leq \underline{0.25}$.

二、选择题（共 6 道小题，每小题 2 分，满分 12 分，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 对任意事件 A 、 B ，与 $A \cup B = B$ 不等价的是（ D ）.
(A) $A \subset B$ (B) $\bar{B} \subset \bar{A}$ (C) $A\bar{B} = \Phi$ (D) $\bar{A}B = \Phi$
2. 设随机变量 $X \sim N(-3,1)$ ， $Y \sim N(2,1)$ ，且 X 与 Y 相互独立，设 $Z = X - 2Y + 7$ ，则 $Z \sim$ （ A ）.
(A) $N(0,5)$ (B) $N(0,-3)$ (C) $N(0,46)$ (D) $N(0,54)$
3. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$ ，令 $Y = -2X$ ，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为（ D ）.
(A) $2f_X(-2y)$ (B) $f_X(-\frac{y}{2})$ (C) $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$ (D) $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$
4. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关， $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$ 分别为 X 、 Y 的概率密度，则在 $Y = y$ 条件下， X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为（ A ）.
(A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$ (C) $f_X(x)f_Y(y)$ (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$
5. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 X 的一个样本，则下列总体均值的估计量中，最有效的为（ C ）.
(A) $\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{1}{6}X_3 + \frac{1}{3}X_4$ (B) $\frac{1}{9}X_1 + \frac{1}{9}X_2 + \frac{3}{9}X_3 + \frac{4}{9}X_4$
(C) $\frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{4}X_4$ (D) $\frac{1}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3 + \frac{2}{5}X_4$
6. 在假设检验中，设 H_1 为备择假设，则（ C ）为犯第一类错误.
(A) H_1 正确，接受 H_1 (B) H_1 正确，拒绝 H_1
(C) H_1 不正确，接受 H_1 (D) H_1 不正确，拒绝 H_1

三、解答下列各题（共5小题，每小题8分，共40分）

1. 仪器中有三个元件，它们损坏的概率都是 0.2，并且损坏与否相互独立. 当一个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.25，当两个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.6，当三个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.95，当三个元件都不损坏时，仪器不发生故障. 求：（1）仪器发生故障的概率；（2）仪器发生故障时恰有二个元件损坏的概率.

参考解答： A 表示“仪器出现故障”， B_i 表示“有*i*个元件出现故障”， $i=1, 2, 3$.

$$(1) \quad \text{由全概率公式知：} P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(A|B_i)$$

$$P(B_1) = 3 \times 0.2 \times 0.8^2 = 0.384 \quad P(B_2) = 3 \times 0.2^2 \times 0.8 = 0.096 \quad P(B_3) = 0.2^3 = 0.008$$

$$P(A) = 0.384 \times 0.25 + 0.096 \times 0.6 + 0.008 \times 0.95 = 0.1612$$

(2) 由贝叶斯公式知：

$$P(B_2|A) = \frac{P(AB_2)}{P(A)} = \frac{0.096 \times 0.6}{0.1612} = 0.3573$$

2. 一口袋中有 6 个球, 在这 6 个球上分别标有数字 -3, -3, 1, 1, 1, 2, 从这袋中任取一球, 设各个球被取到的可能性相同, 以 X 表示取出的球上标有的数字, 求 X 的分布律与分布函数.

参考解答: X 可能取的值为 -3, 1, 2, X 的分布律为 $P(X = -3) = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{6}.$

$$\text{分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ \frac{1}{3}, & -3 \leq x < 1; \\ \frac{5}{6}, & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$3. \text{ 设 } X \text{ 的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 令 } Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2. \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$$

(1) 求 Y 的分布函数, (2) 求 $P\{X \leq Y\}$

参考解答: (1) 当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0;$ (1 分)

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1;$ (2 分)

$$1 \leq y < 2 \quad F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Y = 1\} + P\{1 < Y \leq y\} = P\{X \geq 2\} + P\{1 < X \leq y\} = \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx + \int_1^y \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{18+y^3}{27}$$

因此 Y 的分布函数为:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{18+y^3}{27}, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

$$(2) \quad P\{X \leq Y\} = 1 - P\{X > Y\} \\ = 1 - P\{X \geq 2\}$$

$$= 1 - \int_2^3 \frac{1}{9}x^2 dx \\ = \frac{8}{27}$$

4. 为了测定一台机床的质量, 把它分解成 75 个部件来称量. 假定每个部件的称量误差 (单位: kg) 服从区间 $(-1, 1)$ 上的均匀分布, 且每个部件称量误差相互独立, 试求机床重量的总误差的绝对值不超过 10kg 的概率. ($\Phi(2) = 0.9772$)

参考解答: 设第 i 个部件称量误差为 X_i ($i=1, 2, \dots, 75$), 则 $E(X_i) = 0$, $D(X_i) = \frac{1}{3}$ (2 分)

由中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{75} X_i \sim N(0, 25)$ (近似), (4 分)

于是有 $P\left(\left|\sum_{i=1}^{75} X_i\right| \leq 10\right) \approx \Phi\left(\frac{10-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-10-0}{5}\right) = 0.9544$. (8 分)

5. 已知一批零件的长度 $X(\text{cm})$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40cm, 求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

($u_{0.025} = 1.96, u_{0.05} = 1.645, t_{0.025}(15) = 2.1315, t_{0.05}(15) = 1.7531$)

参考解答: 由 $\bar{x} = 40$, $n = 16$, $\alpha = 0.05$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$, $\sigma = 1$, (2 分)

因为 $U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 令 $P\{|U| < u_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha$

因此 μ 的置信区间为 $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})$, (6 分) 代入数据得 μ 的置信区间为 $(39.51, 40.49)$. (8 分)

四、解答下列各题（共 3 小题，每小题 12 分，共 36 分）

1. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 关于 X , 关于 Y 的边缘密度函数; (2) 判断 X 与 Y 是否相互独立;
(3) 求 $P\{X + Y \leq 1\}$.

参考解答: (1) 当 $0 < x < 1$ 时, $f_X(x) = \int_x^1 6x dy = 6x(1-x)$, 当 $0 < y < 1$ 时, $f_Y(y) = \int_0^y 6x dx = 3y^2$,

故 $f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$ 故 $f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (6 \text{ 分})$

(2) 由 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, X 与 Y 不相互独立. (8 分)

$$(3) \quad P(X + Y \leq 1) = \int_0^{1/2} 6x dx \int_x^{1-x} dy = \int_0^{1/2} 6x(1-2x) dx = \frac{1}{4}. \quad (12 \text{ 分})$$

2. 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta \alpha^\beta x^{-\beta-1}, & x > \alpha \\ 0, & x \leq \alpha \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 1$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本.

(1) 当 $\alpha = 1$ 时, 求 β 的矩估计量;

(2) 当 $\beta = 2$ 时, 求 α 的极大似然估计量.

参考解答:

(1) 当 $\alpha = 1$ 时, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x; \beta) = \begin{cases} \beta x^{-\beta-1}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{\beta}{x^{\beta+1}} dx = \frac{\beta}{\beta-1}, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{\beta}{\beta-1} = \bar{X},$$

解得参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$; (6 分)

(2) 当 $\beta = 2$ 时, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} 2\alpha^2 x^{-3}, & x > \alpha \\ 0, & x \leq \alpha \end{cases} \quad (8 \text{ 分})$$

极大似然函数为

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha) = \begin{cases} 2^n \alpha^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-3}, & x_i > \alpha \\ 0, & x_i \leq \alpha \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

为使 $L(\alpha)$ 取最大值, 只需在 $x_i \geq \alpha$ 时,

使 $2^n \alpha^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-3}$ 取最大值, 即 α 取最大值,

$\hat{\alpha} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 因此 $\hat{\alpha} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。(12 分)

3. 某纯净水生产厂用自动灌装机灌装纯净水, 该自动灌装机正常灌装量 $X \sim N(18, 0.4^2)$, 现测量该厂 9 个灌装样品的灌装量 (单位: L) 如下:

18.0, 17.6, 17.3, 18.2, 18.1, 18.5, 17.9, 18.1, 18.3.

在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 试问 (1) 该天灌装是否合格? (2) 灌装量精度是否在标准范围内?

参考解答: (1) 检验: $H_0: \mu = 18 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 18$. (1 分)

检验统计量为 $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - 18)}{S}$, (2 分)

当 H_0 成立时, $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - 18)}{S} \sim t(n-1)$.

拒绝域为 $|t| = \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - 18)}{s} \right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (4 分)

$n=9$, $\bar{x}=18$, $s^2=0.1325$, $t=0$, $t_{0.025}(8)=2.3060$.

故接受 H_0 , 即认为该天灌装合格. (6 分)

(2) 检验: $H_0: \sigma^2 \leq 0.4^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 > 0.4^2$.

检验统计量为 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{0.4^2}$, (8 分)

当 $\sigma^2 = 0.4^2$ 时 $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$.

故拒绝域为: $\frac{(n-1)s^2}{0.4^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$. (10 分)

$n=9$, $s^2=0.1325$, $\chi^2=6.625$, $\chi_{0.05}^2(8)=15.507$,

故接受 H_0 , 即认为灌装精度在标准范围内. (12 分)