期中考试模拟题（七）答案 2021.5

一．(1) 3/4　(2) 0.6　(3) 空集Φ　(4) 18.4　(5) $1-(1-e^{-1})^2$

(6) 2/15　(7) $f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　(8) 6

二、计算题

1.(12 分) 解：(1) $P\{Y\le y|X=1\}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ y & 0<y<1\\ 1 & y\ge 1\end{cases}$，$P\{Y\le y|X=3\}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ y/3 & 0<y<3\\ 1 & y\ge 3\end{cases}$

$$F_Y(y)=P(X=1)P\{Y\le y|X=1\}+P(X=3)P\{Y\le y|X=3\}=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{2}{3}y & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{y}{6} & 1\le y<3\\ 1 & y\ge 3\end{cases}$$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}, & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{6}, & 1\le y<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(3) $E(Y)=\int_0^1\frac{2}{3}ydy+\int_1^3\frac{1}{6}ydy=1$

2. (10 分) 解：A:“第一次从甲箱中取出红球“，B:“从乙箱中取出红球”，C:“第二次从甲箱中取出红球”，　$P\{C\}=P\{C\cap\{(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})\}\}$=23/100

(2) 记 D 表示红球来自乙箱，则

$$P(D|C)=\frac{P(CD)}{P(C)}\overset{(3分)}{=\!=}\frac{\frac{2}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}}{0.23}=\frac{5}{23}\text{。}$$

3. (8 分) 解：A:“一台仪器可以直接出厂“，B:“一台仪器最终可以出厂”

$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.7+0.3*0.8=0.94$

(1) X 服从二项分布 B(n , 0.94) 。

(2) 所求概率 $p=1-0.94^n-0.06*0.94^{n-1}*n$ 。

4. (20 分) 解：(1)由 $\iint f(x,y)dxdy=1$ 得 a=3/2

(2) $f_X(x)=\begin{cases}3x^2 & 0<x<1\\ 0 & orther\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-y^2) & |y|<1\\ 0 & orther\end{cases}$。

(3) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{z}}y\cdot\frac{3}{2}yzdy=\frac{1}{2z^2}, & z\ge 1\\ 0, & -1\le z<1\\ \int_{\frac{1}{z}}^{0}(-y)\cdot\frac{3}{2}yzdy=\frac{1}{2z^2}, & z\le -1\end{cases}$ 。

(4) X 与 Y 是不相互独立，当$0<x<1,|y|<x$ 有 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ 。

(5) 当 0<x<1 时 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x} & |y|<x\\ 0 & |y|\ge x\end{cases}$,

(6) $P\left\{X+Y\ge\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{x+y\ge 0.25}f(x,y)dxdy=\int_{0.25}^{1}\frac{3}{2}xdx\int_{0.5-x}^{x}dy=\frac{81}{128}$

5. (10 分) 解：1）U 的密度为$f_U(u)=\begin{cases}0.25 & -2<u<2\\ 0 & orther\end{cases}$

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\le -1,U\le 1\}=P\{U\le -1\}=0.25$,

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\le -1,U>1\}=0$

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\le 1\}=P\{-1<U\le 1\}=0.5$

$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=0.25$

2) $D(X)=\frac{3}{4}$， $D(Y)=\frac{3}{4}$， $E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2[E(XY)-E(X)E(Y)]=2,$

三(8 分) 证明：(1) 因为对实常数 c，有

$E(X-c)^2=E(X-EX)^2+(c-EX)^2\ge E(X-E(X))^2$

所以不等式成立，且当且仅当 c = E(X) 时 等号成立；

(2) 对任意给定常数 a, b (a<b)，设随机变量 X 服从区间[a,b]上的均匀分布，

有 $E(X-E(X))^2=\frac{(b-a)^2}{12}$ 取$c=\frac{a+b}{3}$ 或 $c=\frac{2}{3}(a+b)$，代入

$E(X-c)^2=E(X-\frac{a+b}{3})^2=\int_a^b(x-\frac{a+b}{3})^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{9}(b^2-ab+a^2)$

由(1)得所证不等式成立。