高数期中题型串讲（提升篇）

主讲人：微电子81 王博

辛丑年冬月七日　立冬

投票 最多可选2项

设置

讲座时间有限，您更想听到哪部分内容？（最多两票）

A 极限的运算技巧

B 导数的计算法则总结

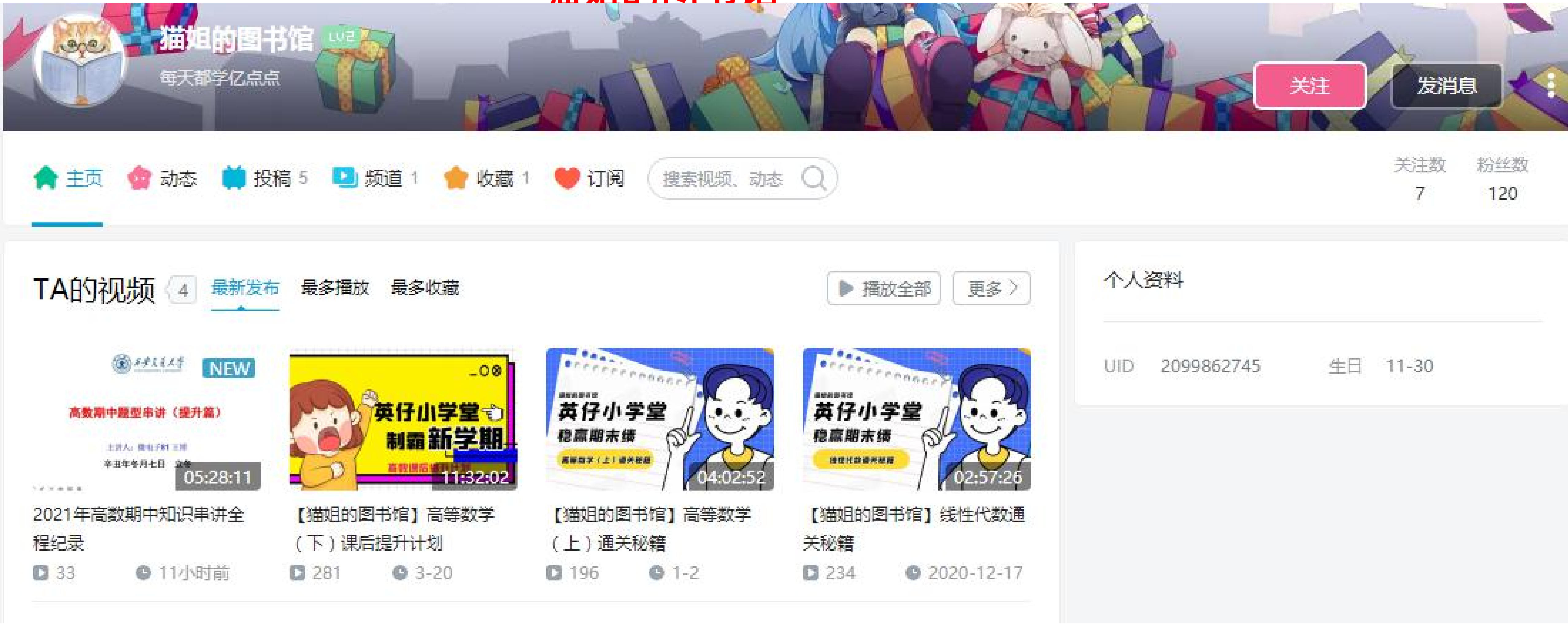
C 函数形态的研究（五个研究对象）

D 中值定理及数列极限的证明

提交

讲座时间有限，部分内容会省略或跳过。详解版可在b站上关注

“猫姐的图书馆”



1、已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个领域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

（A）不可导　　（B）可导且 $f'(0)\neq 0$　　（C）取得极大值　　（D）取得极小值

考点分析：极限的概念，极限的性质，导数的定义，等价无穷小

思考过程：

1、极限为有限值，能推出什么条件？（用严格的数学语言推导）

2、如何判断函数在这一点处是否可导？（巧用构造）

求导数的过程中能否采用洛必达法则？

3、怎样判断函数在这一点取得极大（小）值？

①该点处导数值为0，函数是否一定取得极值？；

②判断极大值极小值的有力工具——二阶导数（能不能用？）；

③利用极限的性质（保号性）进行判断。

[答案]　C

回顾：极限还具有哪些性质？

函数极限

在极限存在的条件下，有 5 个考点.

①(是常数)A 是一个常数，常记$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$. 见例 1.1.

②(唯一性)A 唯一：左极限 $=$ 右极限. 见例 1.2.

③(局部有界性)$x\to\cdot$ 时，$\exists M>0$，$|f(x)|\leqslant M$. 见例 1.3.

④(局部保号性)$x\to\cdot$ 时，若 $A>0\Rightarrow f(x)>0$；若 $x\to\cdot$ 时，$f(x)\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$. 见例 1.4.

⑤(等式脱帽法)$f(x)=A+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to\cdot}\alpha=0$. 见例 1.5.

数列极限

在极限存在的条件下，有 5 个考点.

①(是常数)A 是个常数，常记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

②(唯一性)A 唯一. 见例 2.1.

③(有界性)$\{x_n\}$有界，即 $\exists M>0$，使 $|x_n|\leqslant M$. 见例 2.2.

④(保号性) 若 $A>0$，则 $n\to\infty$ 时，$x_n>0$；若 $n\to\infty$ 时，$x_n\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$. 见例 2.3.

⑤(收敛的充要条件) 所有子列$\{x_{n_k}\}$均收敛于 A. 见例 2.4.

6、已 知 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存 在 ， 且 $f(x)=\dfrac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2e^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to1} f(x)$ ， 求

$f(0)=$______________.

考点分析：极限的性质，极限的计算，等价无穷小/泰勒展开

思考过程：

1、观察等式，如何处理含有极限的一项？

2、等式两边同时取极限，将极限值设为未知数求解。

3、计算过程中如何求解极限？（等价无穷小/泰勒展开）

【解】设 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=A$，则

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3}+\lim_{x\to1}\left[2x^2e^{x-1}\cdot\lim_{x\to1} f(x)\right],$$

令 $x-1=t$，

$$A=\lim_{t\to0}\frac{t-\arcsin t}{t^3}+2A,$$

$$A=-\lim_{t\to0}\frac{t-\arcsin t}{t^3}=-\lim_{t\to0}\frac{t-\left[t+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right]}{t^3}=\frac{1}{6},$$

[答案] $1-\dfrac{\pi}{2}$

例 1.5 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为(　　).

(A)0　　(B)6　　(C)36　　(D)∞

【解】应选(C).

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，得$\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$，于是得

$$xf(x)=-\sin 6x+o(x^3),$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-\sin 6x+o(x^3)}{x^3}=36$. 故选(C).

小结：极限计算方法及常见题型

1、极限出现的形式

即为七种未定式（“$\frac{0}{0}$”型，“$\frac{\infty}{\infty}$”型，“$\infty\cdot 0$”型，“$\infty-\infty$”型，“∞^0”型，“0^0”型，“1^∞”型）的计算.

2、开始组合！

幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 函数值作差 $f(x)-g(x)$

三角函数 $\sin f(x)$ $\cos f(x)$ $\tan f(x)$ $\arcsin f(x)$ $\arctan f(x)$

指对幂函数 $a^{f(x)}$ $\log f(x)$ $f(x)^a$ 复合函数 $f[g(x)]$ 多项式

绝对值函数 $|f(x)|$ 取整函数 $[f(x)]$ 最大最小值函数 $\max/\min f(x)$

变（上）限积分函数 $F(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$ 带极限函数 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x,n)$

小结：极限计算方法及常见题型

3、计算方法

（1）等价无穷小（十大泰勒展开式）

① $\dfrac{A}{B}$ 型，适用于“上下同阶”原则.

② $A-B$ 型，适用于“幂次最低”原则.

$$(1)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$(2)\ \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$(3)\ \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$(4)\ \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \leqslant 1.$$

$$(5)\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x| < 1.$$

小结：极限计算方法及常见题型

3、计算方法

（1）等价无穷小（十大泰勒展开式）

① $\dfrac{A}{B}$ 型，适用于“上下同阶”原则.

② $A-B$ 型，适用于“幂次最低”原则.

(6) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x|<1.$

(7) $(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2}x^2+o(x^2)\ (x\to 0).$

(8) $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)\ (x\to 0).$

(9) $\arcsin x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\ (x\to 0).$

(10) $\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)\ (x\to 0).$

小结：极限计算方法及常见题型

3、计算方法

（2）洛必达法则

$$\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\cdot}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【注】使用洛必达法则要满足三个条件：(1)“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型；(2) 分子、分母均可导；(3) 结果为 $0, c(c\neq 0), \infty$.

洛必达不是万能的方法！会出现 a. 洛必达“死循环” b.增大计算量的情况

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

∞/∞型，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$的分子分母同时求导：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

仍然是∞/∞型，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 分子分母继续求导：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

求 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{10}}$

$0/0$型，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{10}}$的分子分母同时求导：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{10}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}}{10x^9}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{10x^{11}}$$

仍然是0/0型，分子分母继续求导：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{10x^{11}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}}{110x^{10}}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{110x^{12}}$$

小结：极限计算方法及常见题型

3、计算方法

（3）吸收法则 $3\sin^2 x + x^3\cos\frac{1}{x} \sim 3x^2$

若α，β都是同一自变量变化过程下的无穷小量，则低阶+高阶~低阶

若α，β都是同一自变量变化过程下的无穷大量，则低阶+高阶~高阶

（4）提凑大法

- ✓ 提取已知极限的因式（多项式因式分解、直接计算可求出极限值）
- ✓ 函数相减形式——提出公因式 $f(x)-g(x)=g(x)(\frac{f(x)}{g(x)}-1)=g(x)[h(x)-1]$
- ✓ 函数相减形式——凑出无穷小

$$f(x)-g(x)\overset{①}{=}[f(x)-h(x)]+[h(x)-g(x)]\overset{②}{=}[h(x)-g(x)]-[h(x)-f(x)]$$

$$\ln\frac{f(x)}{g(x)}=\ln[1+(\frac{f(x)}{g(x)}-1)]$$

例： $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\tan x)^x-x^x}{(1-\sqrt[3]{\cos 2x})\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

小结：极限计算方法及常见题型

3、计算方法

（5）换元法　（$x=\frac{1}{t}$、公根式等）　例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

（6）擦汗大法（专治幂指函数）　$u^v=e^{v\ln u}$　例：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\ln(\frac{\ln x-1}{\ln x+1})}$

（7）恒等变形（通分、因式分解、分子/分母有理化、三角和差化积）

例：当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{1+\tan\sqrt{x}}-\sqrt{1+\sin\sqrt{x}}$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$ ______.

（8）等价无穷小逆用（不常见，可提高做题速度）

例1：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$　例2：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x}e^{\frac{1}{x}}-x)$

（9）拉格朗日中值定理

6、当 $a>0$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})=$ [答案] a ______.（换元法亦可）

（10）夹逼定理（恰当放缩）　例：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots\frac{n}{n^2+n+n})$

小结：极限计算方法及常见题型

4、无穷小比阶

$$\lim_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=} \begin{cases} 0, & ① \\ c\neq 0, & ② \\ \infty. & ③ \end{cases}$$

① 称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小.

② 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小.

③ 称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小.

例： 6、设当 $x\to 0^+$ 时，$\ln(1+x^2)\sin x$ 是比 $x^k(\sqrt{1+x^2}-1)$ 高阶的无穷小，而 $x^k(\sqrt{1+x^2}-1)$ 是比 $(1-\cos\sqrt{x})\arctan x$ 高阶的无穷小，则 k 的取值范围是__________.

[答案] $k\in(0,2)$

$\ln(1+x^2)\sin^2 x\sim x^4$，$x^k(\sqrt{1+x^2}-1)\sim\dfrac{1}{2}x^{k+2}$，$(1-\cos\sqrt{x})\arctan x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，

所以 $4>k+2>2$，即 $0<k<2$.

3、设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则 $f(x)$（　　）.

（A）处处连续　　（B）只有第一类间断点

（C）只有第二类间断点　　（D）既有第一类间断点，又有第二类间断点

考点分析：分段函数，函数的连续性，间断点类型的判断

思考过程：

1、如何将函数去掉极限运算？（观察自变量取值对于内部函数取值的变化）

2、得到分段函数后，找出函数的所有分界点，判断其是不是间断点；

3、根据间断点类型的定义，算出函数在该点的（左右）极限进行判断。

[答案]　B

回顾：函数的连续与间断

1、研究位置

由于一切初等函数在其定义区间内必连续，故只研究两类特殊的点：

①无定义点（间断）　　②分段函数的分段点（待定）

2、连续

(1) 内点处. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，其中 $x_0 \in (a,b)$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

(2) 端点处. 设 $x \in [a,b]$. 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$，则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 处右连续；若 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$，则称 $f(x)$ 在 $x = b$ 处左连续.

3、间断点的定义与分类

前提：$f(x)$ 在 $x = x_0$ 左、右两侧均有定义.

对于 ① $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$；② $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$；③ $f(x_0)$.

(1) 若 ①,② 均存在但 ① 不等于 ②，则 $x = x_0$ 为跳跃间断点.

(2) 若 ①,② 均存在且 ① 等于 ② 但不等于 ③，则 $x = x_0$ 为可去间断点.

其中(1)(2) 组成第一类间断点.

(3) 若 ①,② 至少有一个不存在且为无穷大，则 $x = x_0$ 为无穷间断点.

(4) 若 ①,② 至少有一个不存在且振荡，则 $x = x_0$ 为振荡间断点.

其中(3)(4) 属于第二类间断点.

例：$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(1+x)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}, & x \le 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x > 0 \end{cases}$

课下练习

1、设$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,试确定$f(x)$的间断点及类型 **[答案] x= 1 无穷间断点**

2、设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，试确定常数$a$和$b$. **[答案] a= 0 b= -1**

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+3}}{\sqrt{3^{2n}+x^{2n}}}(-\infty<x<+\infty)$,则 $f(x)$ 在区间$(1,+\infty)$上(　　).

(A) 连续

(B) 有一个可去间断点

(C) 有一个跳跃间断点

(D) 有一个第二类间断点

[答案] C

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{1}{n^x}(0<x<+\infty)$,则 $f(x)$ 在其间断点处的值等于______. **[答案]** $\frac{1}{\sqrt{e}}$

1.12 $x=\frac{1}{n}(n=2,3,\cdots)$ 是函数 $f(x)=x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$($[x]$表示不超过 x 的最大整数)的(　　).

(A) 无穷间断点　(B) 跳跃间断点　(C) 可去间断点　(D) 连续点

[答案] B

6、设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可微，且满足 $2f(2+x)+f(2-x)=3+2x+o(x)$，这里 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小（当 $x\to 0$ 时），则微分 $df(x)\big|_{x=2}$ =________.

考点分析：可微的概念，导数的定义，函数形态的研究

思考过程：

1、由所求可知需得到f(x)在点x=2处的导数（书上P124定理3.1的证明）

2、如何构造f(x)在点x=2处的导数 $\Rightarrow$ 需要知道f(x)在点x=2处的值；

3、可微的条件又说明了什么？$\Rightarrow$ 函数f(x)在点x=2处连续；

f[g(x)]在点x=2处又是否连续呢？（复合函数的概念）

4、通过加项减项来构造导数的定义公式；

5、等式两边取极限即可得到最终结果。

[答案] $2dx$

[答案] $y=2(x-6)$

[再来一题] **已知 $f(x)$ 是周期为5的连续函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程。**

回顾：导数的定义

导数的定义式 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

【注】(1) $f'(x_0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 是指 f 对 x 在 x_0 处的(瞬时)变化率

(2) 左导数 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

右导数 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

(3) 高阶导数 $f^{(n)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$.

[二级结论1] 若$f(x)$在$x=a$处连续，函数$F(x)=f(x)|x-a|$,则$f(a)=0$是$F(x)$在$x=a$处可导的充要条件。

[二级结论2] 若$f(x)$在$x=a$处可导，则$|f(x)|$在$x=a$处不可导的充要条件是$f(a)=0$且$f'(a)\neq 0$。

（T2018）函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^2-x|$不可导点的个数是**[答案]** **2** **[不给证明]**

回顾：计算导数的方法（1）

- 基本求导公式
- 复合函数求导
- 隐函数求导
- 反函数求导
- 分段函数求导（含绝对值）
- 多项乘除、开方、乘方（对数求导法）
- 幂指函数求导法
- 参数方程函数求导
- 高阶导数

① $(x^k)' = kx^{k-1}$（k 为任意实数）.

② $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}(x>0)$.

③ $(e^x)' = e^x$；$(a^x)' = a^x \ln a, a>0, a\neq 1$.

④ $(\sin x)' = \cos x$；$(\cos x)' = -\sin x$；

$(\tan x)' = \sec^2 x$；$(\cot x)' = -\csc^2 x$；

$(\sec x)' = \sec x \tan x$；$(\csc x)' = -\csc x \cot x$；

$(\ln|\cos x|)' = -\tan x$；$(\ln|\sin x|)' = \cot x$；

$(\ln|\sec x + \tan x|)' = \sec x$；$(\ln|\csc x - \cot x|)' = \csc x$.

⑤ $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$；$(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

⑥ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

⑦ $[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$，常见 $a=1$；

$[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}(x>a>0)$，常见 $a=1$.

回顾：计算导数的方法（2）

- 基本求导公式
- **复合函数求导**
- 隐函数求导
- 反函数求导
- 分段函数求导（含绝对值）
- 多项乘除、开方、乘方（对数求导法）
- 幂指函数求导法
- 参数方程函数求导
- 高阶导数

设$u=g(x)$在点x（泛指点）处可导，$y=f(u)$在点$u=g(x)$处可导，则：

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]g'(x),$$

$$d\{f[g(x)]\}=f'[g(x)]g'(x)dx. \qquad (*)$$

（*）式就是微分形式的不变形——无论u是中间变量还是自变量，$dy=f'(u)du$都成立。

课下练习

1. 已知$y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x)=\arctan x^2$.试求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$. [答案] π/4

2.设$y=\ln^3(\sin^2 x+1)$,求y'.

[答案] $\dfrac{3\sin 2x\ln^2(\sin^2 x+1)}{1+\sin^2 x}$

回顾：计算导数的方法（3）

- 基本求导公式
- 复合函数求导
- **隐函数求导**
- 反函数求导
- 分段函数求导（含绝对值）
- 多项乘除、开方、乘方（对数求导法）
- 幂指函数求导法
- 参数方程函数求导
- 高阶导数

设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的可导函数，则

① 方程 $F(x,y)=0$ 两边对自变量 x 求导，注意 $y=y(x)$，即将 y 看作中间变量，得到一个关于 y' 的方程；

② 解该方程便可求出 y'.

课下练习

（$T2015$）1、求曲线 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程

[答案] $y=\frac{e}{2}(x-3)+1$

2. 设 $u=f[\varphi(x)+y^2]$，其中 $y=y(x)$ 由方程 $y+e^y=x$ 确定，且 $f(x),\varphi(x)$ 均有二阶导数，求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2u}{dx^2}$

[答案] $\frac{du}{dx}=f'[\varphi'(x)+\frac{2y}{1+e^y}]$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=f''[\varphi'(x)+\frac{2y}{1+e^y}]^2+f'[\varphi''(x)+\frac{2(1+e^y)-2ye^y}{(1+e^y)^3}]$$

3.设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ [答案] 1 .

回顾：计算导数的方法(4)

- 基本求导公式
- 复合函数求导
- 隐函数求导
- **反函数求导**
- 分段函数求导（含绝对值）
- 多项乘除、开方、乘方（对数求导法）
- 幂指函数求导法
- 参数方程函数求导
- 高阶导数

设 $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)\neq 0$，则存在反函数 $x=\varphi(y)$，且 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$，即

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

在 $y=f(x)$ 二阶可导的情况下，记 $f'(x)=y'_x$，$\varphi'(y)=x'_y\,(x'_y\neq 0)$，则有

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x'_y},\quad y''_{xx}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}.$$

反过来，则有

$$x'_y=\frac{1}{y'_x},\quad x''_{yy}=\frac{-y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

课下练习

1. 设$y=f(x)$与$x=g(y)$互为反函数，$y=f(x)$可导，且 $f'(x)\neq 0, f(3)=5, h(x)=f[\frac{1}{3}g^2(x^2+3x+1)]$,求$h'(1)$. [答案] 10

2.设$x=f(y)$是函数$y=x+\ln x$的反函数，求$\dfrac{d^2f}{dy^2}$ [答案] $\dfrac{x}{(x+1)^3}$

回顾：计算导数的方法(5)

- 基本求导公式
- 复合函数求导
- 隐函数求导
- 反函数求导
- **分段函数求导（含绝对值）**
- 多项乘除、开方、乘方（对数求导法）
- 幂指函数求导法
- 参数方程函数求导
- 高阶导数

(1) 在分段点用导数定义求导(定义法).

(2) 在非分段点用导数公式求导(公式法).

课下练习

1. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$,其中$g(x)$具有二阶连续导数，且$g(0)=1, g'(0)=-1$.

(1) 求$f'(x)$.(2) 讨论$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的连续性.

[答案] (1) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0\end{cases}$ (2)全区间连续；

设 $f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

[答案] $f'(x)=\begin{cases}2x(1-x^2)e^{-x^2}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

回顾：计算导数的方法(6)

基本求导公式

复合函数求导

隐函数求导

反函数求导

分段函数求导（含绝对值）

多项乘除、开方、乘方（对数求导法）

幂指函数求导法

参数方程函数求导

高阶导数

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子，一般先取对数再求导. 设 $y=f(x)(y\neq 0)$，

① 等式两边取对数，得 $\ln|y|=\ln|f(x)|$；

② 两边对自变量 x 求导(同样注意 $y=f(x)$，即将 y 看作中间变量)，得

$$\frac{1}{y}y'=[\ln|f(x)|]'\Rightarrow y'=y[\ln|f(x)|]'.$$

课下练习

6、设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}+\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $f'(1)=$ [答案] $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$，求$y'$

[答案] $y'=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}[-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{x}{2}\ln(\tan 2x)+2\cot\dfrac{x}{2}\cot 2x\sec^2 2x]$

设 $y=\dfrac{x^3}{1-x}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{(2+x)^2}}+e^{4x}$，求 y'.

[答案] $y'=\dfrac{x^3}{1-x}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{(2+x)^2}}\left[\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{2}{2+x}\right)\right]+4e^{4x}$.

回顾：计算导数的方法(7)

- 基本求导公式
- 复合函数求导
- 隐函数求导
- 反函数求导
- 分段函数求导（含绝对值）
- 多项乘除、开方、乘方（对数求导法）
- **幂指函数求导法**
- 参数方程函数求导
- 高阶导数

对于 $u(x)^{v(x)}\ (u(x)>0, u(x)\neq 1)$，可以先化成指数函数

$$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)},$$

然后对 x 求导得

$$[u(x)^{v(x)}]'=[\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

课下练习

设 $f(x)=\begin{cases}x^{3x}, & x>0,\\ x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

[答案]

$$f'(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{3x\ln x}[9(\ln x+1)^2+3x^{-1}], & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

回顾：计算导数的方法(8)

- 基本求导公式
- 复合函数求导
- 隐函数求导
- 反函数求导
- 分段函数求导（含绝对值）
- 多项乘除、开方、乘方（对数求导法）
- 幂指函数求导法
- **参数方程函数求导**
- 高阶导数

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定，且 $\varphi(t),\psi(t)$ 均二阶可导，$\varphi'(t)\neq 0$，其中 t 是参数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

课下练习

6、设 $\begin{cases} x=\tan t, \\ y=\dfrac{u(t)}{\cos t}, \end{cases}$ 函数 $y=y(x)$ 满足 $(1+x^2)^2y''=y$，求 $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ 的值。 [答案] 0

2.设函数 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)=1, f''(0)=2$，且 $\begin{cases} x=f(t)-\pi \\ y=f(e^{3t}-1) \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$

[答案] 3 21

3、已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$，求该曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程. [答案] 切线方程 $x-y+\dfrac{5}{4}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=0$

法线方程 $x+y+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0$

回顾：计算导数的方法(9)

- 基本求导公式
- 复合函数求导
- 隐函数求导
- 反函数求导
- 分段函数求导（含绝对值）
- 多项乘除、开方、乘方（对数求导法）
- 幂指函数求导法
- 参数方程函数求导
- **高阶导数**

(1) 归纳法.

比如，设 $y=2^x$，则 $y'=2^x\ln 2, y''=2^x(\ln 2)^2,\cdots$.

得出通式 $y^{(n)}=2^x(\ln 2)^n, n=0,1,2,\cdots$.

(2) 莱布尼茨公式.

设 $u=u(x), v=v(x)$，均 n 阶可导，则 $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$，

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}. \qquad (*)$$

(*) 式就是求乘积的高阶导数的莱布尼茨公式，其中 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v$.

课下练习

1、设 $f(x)=(x-1)^n x^{2n}\sin\dfrac{\pi}{2}x$，则 $f^{(n)}(1)=$（　　）.　　[答案] B

（A）$(n-1)!$　（B）$n!$　（C）$n!+1$　（D）$(n+1)!$

2. 设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

[答案] $f^{(2k)}=0(k=0,1,2,\cdots)$　$f^{(2k+1)}=(-1)^k(2k)!(k=0,1,2,\cdots)$

导数的用途：研究函数的形态

函数的形态——极值、单调性

1、单调性的判别

用导数工具，若 $y=f(x)$ 在区间 I 上有 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 I 上严格单调增加；相应地，若 $y=f(x)$ 在区间 I 上有 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 I 上严格单调减少.

2、一阶可导点是极值点的必要条件

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且在点 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$.

3、判别极值的第一充分条件

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导.

① 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值；

② 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值；

③ 若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 内不变号，则点 x_0 不是极值点.

函数的形态——极值、单调性

4、判别极值的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$.

① 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值**；

② 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极小值**.

上述第二充分条件可以推广为第三充分条件.

5、判别极值的第三充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1), f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$.

① 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值**；

② 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极小值**.

课下练习

已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，又 $f(x)$ 满足方程

$f''(x)+\cos f'(x)=e^{f(x)}$，则在 (a,b) 内 $f(x)$（　　）.

（A）不小于 0　　（B）不大于 0　　（C）恒为 0　　（D）恒不为 0

[答案] C

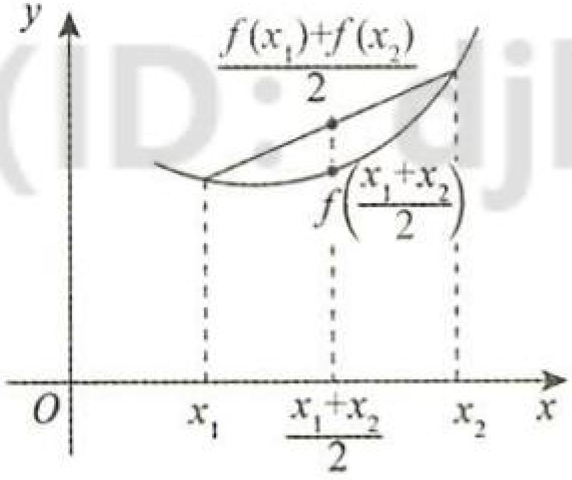
函数的形态——拐点、凹凸性

1、凹凸性的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

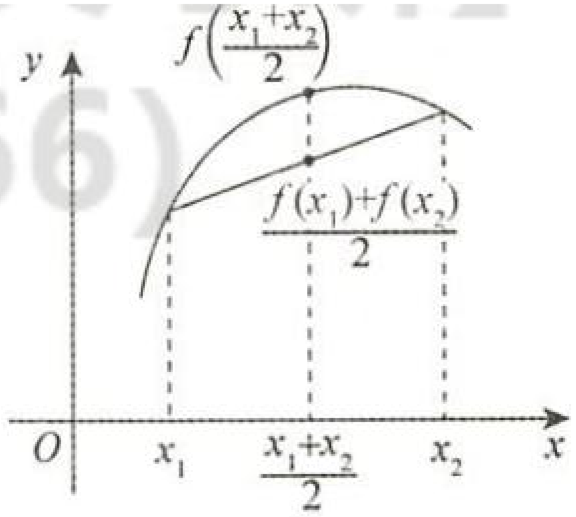
（1）如果对 I 上任意两点 x_1, x_2，恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上图形是（向上）凹的（或凹弧）；

（2）如果对 I 上任意两点 x_1, x_2，恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上图形是（向下）凸的（或凸弧）；



图形上任意弧段位于弦的下方

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$



图形上任意弧段位于弦的上方

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

函数的形态——拐点、凹凸性

2、拐点定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的拐点.

3、判别凹凸性的充分条件

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导.

a. 若在 I 上 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的；

b. 若在 I 上 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

4、二阶可导点是拐点的必要条件

设 $f''(x_0)$ 存在，且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线上的拐点，则 $f''(x_0) = 0$.

5-1、判别拐点的第一充分条件

设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，在点 $x = x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内二阶导数存在，且在该点的左右邻域内 $f''(x)$ 变号（无论是由正变负，还是由负变正），则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线上的拐点.

5-2、判别拐点的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内三阶可导，且 $f''(x_0) = 0$，$f'''(x_0) \neq 0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

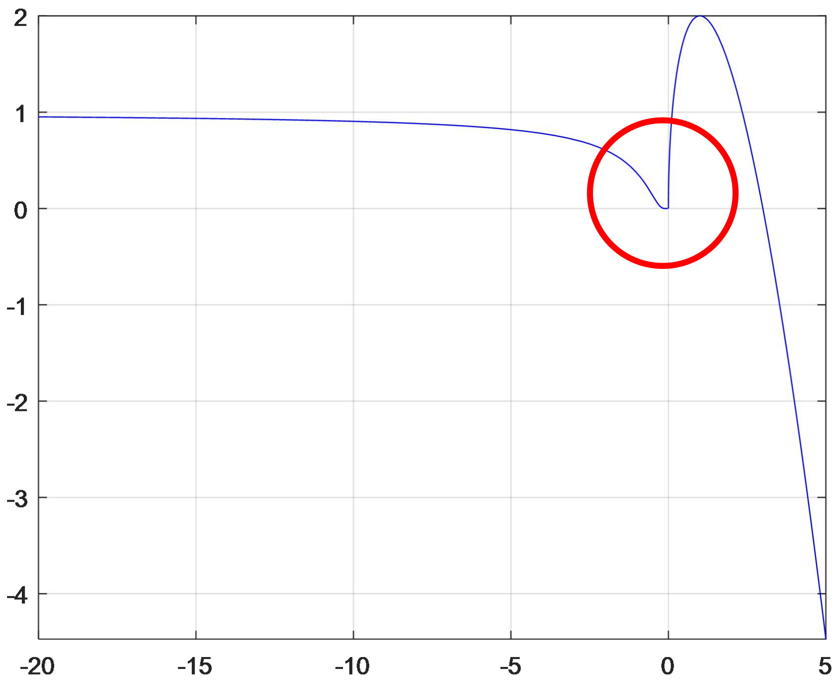
函数的形态——拐点、凹凸性

5-3、判别拐点的第三充分条件（不做要求）

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 3)$，则当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

课下练习

6、求曲线 $y=y(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}},x<0 \\ (3-x)\sqrt{x},x\geq 0 \end{cases}$ 的凹凸区间和拐点。



[答案] **凹区间** $(-\frac{1}{2},0)$ **凸区间** $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(0,+\infty)$

拐点 $(0,0)$ $(-\frac{1}{2},e^{-2})$

（2014·期中）设函数 $f(x)$ 二阶可导，且对于 $\forall x\in R$

满足 $x^2 f''(x)+x^2(f'(x))^3=1-\cos x, f'(0)=0$ 则

$A.x=0$ 必是 $f(x)$ 的极小值点　$B.x=0$ 必是 $f(x)$ 的极大值点

$C.(0,\ f(0))$ 必是曲线的拐点　$D.$ 不能判断原点是 $f(x)$ 的极值点还是拐点

[答案] A

函数的形态——渐近线

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$$

1、铅垂渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则 $x=x_0$ 为一条铅垂渐近线.

2、水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_1$，则 $y=y_1$ 为一条水平渐近线；若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_2$，则 $y=y_2$ 为一条水平渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_0$，则 $y=y_0$ 为一条水平渐近线.

3、斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b_1$，则 $y=k_1x+b_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_2$，$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2$，则 $y=k_2x+b_2$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b$，则 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

函数的形态——渐近线

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$$

6、设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-4x+5}+x[\frac{1}{x}]$，其中 $[x]$ 表示不超过的 x 的最大整数，求曲线 $y=f(x)$ 的全部渐近线。

[解析] 当 $x>1$ 时，$\left[\frac{1}{x}\right]=0$；当 $x\leqslant -1$ 时，$\left[\frac{1}{x}\right]=-1$；当 $0<|x|<1$ 时，$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$，

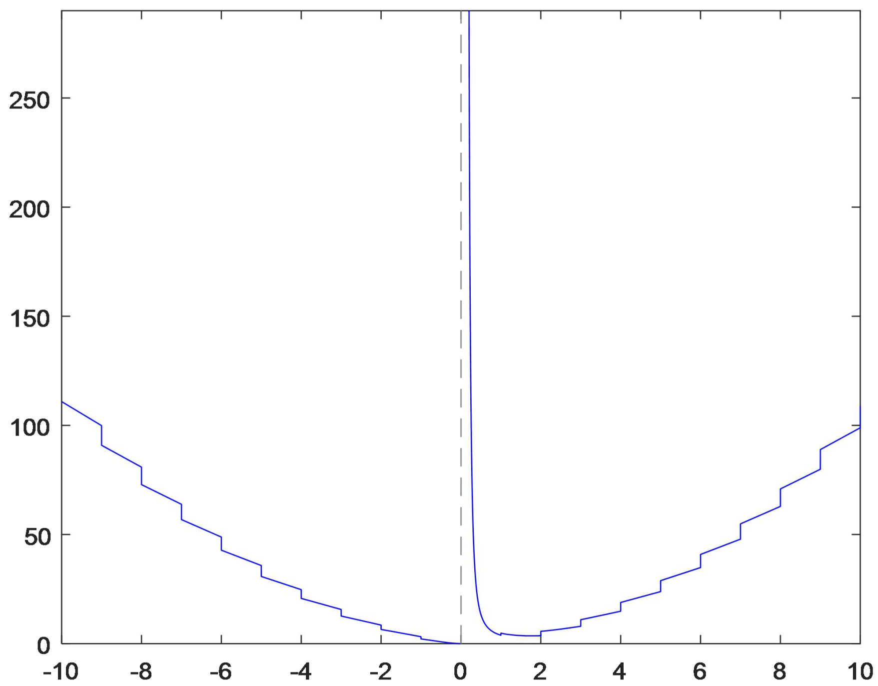
所以 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$. 此外，$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$. 因为

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-1=-2,$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-4x+5}+x\left[\frac{1}{x}\right]+2x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)+\lim_{x\to-\infty}x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right)$$

$$\overset{令\ t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{t\to0^-}\frac{(1-e^t)-e^t(\sqrt{1-4t+5t^2}-1)}{t}=1,$$



[答案] 斜渐近线 $y_1=-2x+1$ $y_2=x-1$ 铅垂渐近线 $x=0$ 无水平渐近线

函数的形态——渐近线

课下练习

（2018•期中&2016•期中）设$f(x)=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$，求

（1）函数$f(x)$的单调区间和极值

（2）曲线$y=f(x)$的凹凸区间、拐点及渐近线方程

[答案] 9. (1) 定义域：$\{x|x\neq -1\}$ $\quad f'(x)=\dfrac{4x(x+1)}{4(x+1)^4}=\dfrac{x}{(x+1)^3}$ $\quad f'(x)=0\Rightarrow x=0$

当$x<-1$时，$f'(x)>0$；当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$；当$x>0$时，$f'(x)>0$

$\therefore$增区间：$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$ $\quad$ 减区间：$(-1,0)$ $\quad$ 极小值：$f(0)=0$ $\quad$ 无极大值

(2) $f''(x)=\dfrac{1-2x}{(x+1)^4}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ $\quad$ 凹区间：$(-\infty,-1)$，$(-1,\dfrac{1}{2})$ $\quad$ 凸区间：$(\dfrac{1}{2},+\infty)$ $\quad$ 拐点：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{18})$

$\lim\limits_{x\to-1}=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2(x+1)^2}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}=f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$渐近线：$x=-1$(垂直渐近线)；$y=\dfrac{1}{2}$(水平渐近线)

函数的形态——最值（值域）

1、求闭区间[a,b]上连续函数$f(x)$的最大值M和最小值m

① 求出 $f(x)$ 在(a,b) 内的可疑点 —— 驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值.

② 求出端点的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$.

③ 比较以上所求得的所有函数值，其中最大者为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值 M，最小者为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值 m.

2、求开区间(a,b)上连续函数$f(x)$的最值或者取值范围

① 求出 $f(x)$ 在(a,b) 内的可疑点 —— 驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值.

② 求(a,b) 两端的单侧极限：若 a,b 为有限常数，则求 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$；若 a 为 $-\infty$，则求 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$；若 b 为 $+\infty$，则求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 记以上所求左端极限为 A，右端极限为 B.

③ 比较 ①、② 所得结果，确定最值或取值范围.

证明题专场一：常见八大证明定理（1）

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

定理1 （有界与最值定理）

$m \le f(x) \le M$，其中m, M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值.

[用途] 常用于找$f(c)=0$(由$f(a)>0, f(b)<0$, 则$f(c)=0$)

定理2 （介值定理） 当$m \le \mu \le M$，存在$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi)=\mu$.

[用途] 常用于找$f(c)=\mu$(由$f(a)=A, f(b)=B, A<\mu<B$, 则$f(c)=\mu$).

定理3 （零点定理） 当$f(a)\cdot f(b)<0$时，存在$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi)=0$.

定理4 （费马定理） 设$f(x)$在x_0处满足$\begin{cases} \text{①可导，} \\ \text{②取极值，} \end{cases}$ 则$f'(x_0)=0$.

[用途] 常用于证$f'(\xi)=0$(ξ为可导的极值点).

证明题专场一：常见八大证明定理（2）

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

定理5 （罗尔定理） 设$f(x)$满足$\begin{cases}①[a,b]\text{上连续，}\\ ②(a,b)\text{内可导,}\\ ③f(a)=f(b),\end{cases}$则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0.$

[用途] 常用于证①$F'(\xi)=0.$②证$F^{(n)}(\xi)=0,n\geq 2.$

定理6 （拉格朗日中值定理） 设$f(x)$满足$\begin{cases}①[a,b]\text{上连续，}\\ ②(a,b)\text{内可导,}\end{cases}$则存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\text{或者写成}f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

[用途] 常用于证①题设中有$f-f'$的关系或"$f(b)-f(a)$".

②$F'(\xi)>$（或$<$）$0.$③证$F^{(n)}(\xi)>$（或$<$）$0,n\geq 2.$

④$F(f'(\eta),f'(\tau))=0.$（$\eta\neq\tau$双中值问题）⑤$f'(x)$可考到单调性

证明题专场一：常见八大证明定理（3）

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

定理7 （柯西中值定理） 设$f(x)$满足$\begin{cases} ①[a,b]\text{上连续}, \\ ②(a,b)\text{内可导},\text{则存在}\xi\in(a,b)，\text{使得} \\ ③g'(x)\neq 0, \end{cases}$

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$$

[用途] 常用于证①两个具体函数所满足的式子.

②一个具体函数与一个抽象函数所满足的式子.

③与拉格朗日中值定理综合

证明题专场一：常见八大证明定理（4）

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

定理8 （泰勒公式）

（1）带拉格朗日余项的n阶泰勒公式：设$f(x)$在点x_0的的某个邻域内$n+1$阶导数存在，则对该邻域的任一点x，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\xi\in(x,x_0)$$

（2）带佩亚诺日余项的n阶泰勒公式

设函数f在x_0处n阶可微，则$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+(o(x-x_0)^n)$

[用途] 常用于①题中有f和$f^{(n)}$的关系，$n\geq 2.$

②证$F^{(n)}(\xi)>$（或$<$）$0,n\geq 2.$

③$f''(x)$可考到凹凸性

证明题专场一：常见八大证明定理（5）

拉格朗日、泰勒公式余项变体形式及求lim $\theta(x)$

若 $\xi \in (a,b)$，令 $\theta = \dfrac{\xi - a}{b - a}$，则 $\xi = a + \theta(b-a)$，$0 < \theta < 1$，于是拉格朗日中值定理的变体形式为

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b-a)](b-a).$$

泰勒公式(一阶为例)的变体形式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''[x_0 + \theta(x - x_0)]}{2}(x - x_0)^2 \ (x > x_0).$$

对于具体函数，可以较为轻松地反解出 $\theta(x)$。但若是抽象函数，如何构建含有 $\theta(x)$的关系式呢？

课下练习 6、设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且 $f'''(a) \neq 0$. $f(a+h)$ 在 $x = a$ 处的一阶泰勒展开式为

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h)(0 < \theta < 1)$$ 。求 $\lim\limits_{h \to 0} \theta$ 的值。 **[答案] 1/3**

[提示] 按阶数n作(n-1)、(n-2)阶泰勒展开，两阶泰勒展开式相减，拉氏中值定理。

证明题专场一：常见八大证明定理（6）

【技巧】常见辅助函数的构造 $F(x, f(x), f'(x), f''(x)) = 0$

（1）简单情形：题设$f(x)$即为辅助函数（研究对象）.

（2）复杂情形：

①乘积求导公式 $(uv)' = u'v + uv'$ **的逆用。**

$a.[f(x)f(x)]' = [f^2(x)]' = 2f(x)\cdot f'(x)$

[提示] 见到 $f(x)f'(x)$**，令** $F(x) = f^2(x)$.

$b.[f(x)\cdot f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$

[提示] 见到$[f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$**，令**$F(x) = f(x)f'(x)$.

$c.[f(x)e^{\varphi(x)}]' = f'(x)e^{\varphi(x)} + f(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = e^{\varphi(x)}[f'(x) + f(x)\varphi'(x)]$

[常用] [提示] 见到$f'(x) + f(x)\varphi'(x)$ **，令**$F(x) = f(x)e^{\varphi(x)}$.

$d.(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$亦有可能考到

证明题专场一：常见八大证明定理（7）

【技巧】常见辅助函数的构造 $F(x, f(x), f'(x), f''(x)) = 0$

（2）复杂情形：

①乘积求导公式 $(uv)' = u'v + uv'$ 的逆用。

$$c.[f(x)e^{\varphi(x)}]' = f'(x)e^{\varphi(x)} + f(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = e^{\varphi(x)}[f'(x) + f(x)\varphi'(x)]$$

[常用] [提示] 见到 $f'(x) + f(x)\varphi'(x)$，令 $F(x) = f(x)e^{\varphi(x)}$.

1\. 若 $\xi f'(\xi) + nf(\xi) = 0$, 令 $F(x) = x^n f(x)$

2\. $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$

3\. $\alpha f'(\xi) + \beta f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\frac{\beta}{\alpha}x} f(x)(\alpha \neq 0)$

4\. $f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{g(x)} f(x)$

5\. $f'(\xi) + g(\xi) f(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\int g(x)\mathrm{d}x} f(x)$

6\. $f''(\xi) + g(\xi) f'(\xi) = 0$, 令 $F(x) = e^{\int g(x)\mathrm{d}x} f'(x)$

证明题专场一：常见八大证明定理（8）

【技巧】常见辅助函数的构造 $F(x,f(x),f'(x),f''(x))=0$

（2）复杂情形：

②商的求导公式 $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ **的逆用。**

$$a.[\frac{f(x)}{x}]'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$$

[提示]　见到 $f'(x)x-f(x)$，$x\neq 0$，**令** $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

$$b.[\frac{f'(x)}{f(x)}]'=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$$

[提示]　见到 $f''(x)f(x)-[f'(x)]^2$，**令** $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

$$c.[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)},\text{故}b\text{为}[\ln f(x)]''.$$

已知 $f(x)$ 为二阶可导的正值函数，且 $f(0)=f'(0)=1$，$f(x)f''(x)\ge[f'(x)]^2$，则（　　）.

（A）$f(2)\le e^2\le\sqrt{f(1)f(3)}$　　（B）$e^2\le f(2)\le\sqrt{f(1)f(3)}$

（C）$\sqrt{f(1)f(3)}\le e^2\le f(2)$　　（D）$\sqrt{f(1)f(3)}\le f(2)\le e^2$

考点分析：辅助函数的构造，泰勒公式的运用，凹凸性的几何意义，放缩法

思考过程：

1、观察题设不等式和选项，应该如何构造辅助函数？（商的求导法则逆用）

2、观察选项中 $f(2)$ 和 e^2 的大小比较，应该怎样去比较函数值和自变量的关系？（泰勒公式展开）

拉格朗日余项应该怎样处理？（结合二阶导数的值，运用放缩法，舍去）

3、观察选项剩余部分，适当化简，思考体现了函数的什么性质？（凹凸性的几何意义）

4、代入相应端点，即可证出相应不等式。

[答案]　**B**

17、设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；（2）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

考点分析：辅助函数的构造，罗尔定理，奇函数的性质

思考过程：

1、奇函数能得出哪些有用的信息？（原点函数值为0，导数为偶函数）

2、第一问用拉格朗日中值定理证明是否可行？（不可行，区间精度不够）

=>采用罗尔定理=>如何构造辅助函数？相等的端点值在哪里？

3、第二问如何构造辅助函数（乘积求导法则的逆用）

=>采用罗尔定理一步到位。

课下练习（2010·期中）设函数 $f(x),g(x)$ 都在 $[1,6]$ 上连续，在 $(1,6)$ 内可导，且 $f(1)=5$, $f(5)=1, f(6)=12$.求证：至少存在一个点 $a\in(1,6)$ 使 $f'(a)+g'(a)[f(a)-2a]=2$.

（2015·期中）设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$, 证明:(1) 在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.(2) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

18、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0<a<b$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

证明: 欲证 $\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$，即要证 $\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足L-中值定理条件，故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\ ,\ \xi\in(a\ ,\ b) \qquad ①$$

又因 $f(x)$ 及 x^2 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件，

故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}\ ,\ \eta\in(a\ ,\ b) \qquad ②$$

将①代入②，化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta),\xi\ ,\ \eta\in(a\ ,\ b)$

拓展：对于真正意义上的双中值定理，应该怎样思考？

在区间$[a,b]$上插入区间分点 c，分成两个区间 (a,c) 和 (c,b)，接下来去确定点$(c,f(c))$。[反推法]

将结论中 $f'(\xi_1)$ 换成 $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$，$f'(\xi_2)$ 换成 $\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$，得到关于$f(c)$的等式或$f(c)$与c的关系式，从而确定分点$(c,f(c))$。

课下练习

（2018·期中改编）设$f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=0$, $f(1)=1$,证明：在$[0,1]$存在两点x_1,x_2，使得 $\dfrac{a}{f'(x_1)}+\dfrac{b}{f'(x_2)}=a+b$.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

19、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值 2，在 $(0,1)$ 内取得最小值，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)>2$；（2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-4$.

考点分析：拉格朗日中值定理，泰勒展开，费马定理

思考过程：

1、分析题设条件，给出两个点的函数值，极值具有什么性质？（费马定理）

2、第一问采用拉格朗日中值定理证明，得出导数与区间长度的关系式。根据中值的取值范围，可证明该不等式。

3、第二问欲证高阶导数的不等式，优先尝试泰勒展开。选择哪点进行展开？（以最大值点展开，代入最小值点）

4、根据不等关系和自变量的取值范围，可以证得该不等式。

[思考] 在利用泰勒公式证明高阶导数等式或不等式时，应选择在哪一点展开？这些点往往具有哪些特点呢？

思考：利用泰勒公式证明微分等式或不等式时，应选择在哪点展开？

运用泰勒定理就是将**某一点的函数值在另一点处展开**。对于展开点的选择尤为关键，需要尽可能利用上题设中的信息（**函数值，一阶导数值等**）。通过结论所需证明的**导数阶数**来展开到**适当的形式**。

一般展开点的选择无非是区间端点 a,b 或区间中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 或极值点（包括最值点）c或任意点x。（极少情况是其他点）

泰勒展开的原则是展开后后要将结论和条件中不存在的式子消去！

课下练习（2018·期中）设函数$f(x)$在$[-1,1]$上三阶可导，且$f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0,$ 证明：存在$\eta\in(-1,1)$，使得$f'''(\eta)\geq 3.$

试证明：若$f(x)$在$[a,b]$上存在二阶导数，且$f'(a)=f'(b)=0,$则存在$\xi\in(a,b),$使$|f''(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

例 3. 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$|f(x)|\leq a, |f''(x)|\leq b$，证明：对任意的$c\in(0,1)$，有$|f'(c)|\leq 2a+\dfrac{b}{2}$.

证明题专场二：数列极限的证明（1）

1、定义法（“先斩后奏”） 构造$|x_n - a|$，证$|x_n - a| \to 0(n\to\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

[例 1] 已知$x_1 = \dfrac{1}{2}, 2x_{n+1} + x_n^2 = 1$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

[“先斩”] 先假设极限存在，递推式两边同时取极限，解方程求出极限值。

根据数学归纳法保留正值极限。

[“后奏”] 由所求极限，代入极限定义式，整理后进行放缩迭代，即可得证。

记$A=\sqrt{2}-1, A=\dfrac{1-A^2}{2}$，则$|x_{n+1}-A| = \left|\dfrac{1-x_n^2}{2} - \dfrac{1-A^2}{2}\right| = \dfrac{1}{2}|x_n^2 - A^2| = \dfrac{1}{2}|x_n + A|\cdot|x_n - A|.$

由$n>1$时，$x_n < \dfrac{1}{2}$，$x_n + A < \dfrac{1}{2} + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$，故

$$|x_{n+1} - A| < \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\cdot|x_n - A| = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}|x_n - A|$$

$$< \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^2 |x_{n-1} - A| < \cdots < \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^n |x_1 - A|.$$

当$n\to\infty$时，$\left(\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^n \to 0^+$，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}-1.$

证明题专场二：数列极限的证明（1）

2、单调有界准则 若$\{x_n\}$单调增加（减少）且有上界（下界），则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

[1] 证什么.

[“单调”] 单调是证：x_{n+1} 与 x_n 的大小关系.

[“有界”] 有界是证：$\exists M > 0, |x_n| \le M.$

[2] 怎么证.

主要有两种证法.

① 用已知不等式.

$a.\forall x \ge 0, \sin x \le x,$如考$x_{n+1} = \sin x_n \le x_n, \{x_n\}$单调减少；

$b.\forall x, e^x \ge x+1,$如考$x_{n+1} = e^{x_n} - 1 \ge x_n, \{x_n\}$单调增加；

$c.\forall x > 0, x-1 \ge \ln x,$如考$x_{n+1} = \ln x_n + 1 \le x_n, \{x_n\}$单调减少；

$d.a,b > 0, \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2},$如考$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} \le \frac{x_n + 3 - x_n}{2} = \frac{3}{2}, \{x_n\}$有上界.

②用题设给出条件来推证.

证明题专场二：数列极限的证明（2）

2、单调有界准则 若$\{x_n\}$单调增加（减少）且有上界（下界），则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

[例 2] （1）证明对任意的正整数n，都有$\dfrac{1}{n+1} < \ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$成立；

（2）设$a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$收敛.

[例 3] （1）证明方程$x = 2\ln(1+x)$在$(0,+\infty)$内有唯一实根ξ;

（2）对于（1）中的ξ,任取$x_1 > \xi$,定义$x_{n+1} = 2\ln(1+x_n), n=1,2,\cdots,$

证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi.$

[思考] **如果递推式不具有单调性，该怎么去做？（回归到定义法）**

[例 4] 设$x_{n+1} = \cos x_n, n=1,2,\cdots, x_1 = \cos x$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且其极限是方程$\cos x - x = 0$的根.

证明题专场二：数列极限的证明（3）

3、夹逼准则 ①$y_n \le x_n \le z_n$;②$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$(可为0, $c(c\neq 0)$, ∞).

[例 5] 20、已知 $f_n(x) = C_n^1 \cos x - C_n^2 \cos^2 x + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n \cos^n x$.

（1）证明方程 $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内仅有一根 x_n， $n = 1,2,3\cdots$；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\arccos\dfrac{1}{n})$；（3）设 $x_n \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ 满足 $f_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$.

思考过程：

1、观察题设函数列表达式，应作怎样的等价代换？（二项展开）

2、第一问要求证明零点的存在性，应该采用什么定理？（零点定理）

证明零点的唯一性，应该采用什么工具？（导函数）

3、第三问要求证明零点列的极限，应采用什么方法？（夹逼准则）

[注] 也可用第一问求出的表达式反求出零点列，再进行极限运算。

西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

谢谢大家！祝大家考试顺利！

主讲人：微电子81 王博

辛丑年冬月七日　立冬