四到八章模拟题选讲

董荣
数学与统计学院

第4章 向量与线性方程组基本要求

① 理解向量组线性相关与线性无关的概念，会判别向量组的线性相关性；

② 了解向量组的极大无关组与向量组的秩的概念，会求向量组的极大无关组与向量组的秩；

③ 掌握齐次线性方程组是否有非零解及非齐次线性方程组是否有解的判别方法；

④ 理解齐次线性方程组基础解系的概念，掌握求齐次方程组的基础解系及其结构式通解的方法；

⑤ 理解非齐次线性方程组通解的结构，掌握求其结构式通解的方法。

$r(A+B)\le r(A)+r(B)$； $r(AB)\le min\{r(A),r(B)\}$；

若$A_{m\times n}B_{n\times p}=O$，则$r(A)+r(B)\le n$(课本例题4.4.4)；

第5章 线性空间与欧氏空间基本要求

① 了解线性空间的基本概念，具体掌握线性空间$F^n, F^{m\times n}, F[x]_n$的概念；

② 能够判定线性空间的子集是否构成子空间；

③ 会求线性空间的基、维数，向量在一组基下的坐标；

④ 会求向量空间不同基之间的过渡矩阵，了解基变换与坐标变换之间的关系；

⑤ 理解欧氏空间的基本概念，理解标准正交基的概念，掌握施密特正交化方法，了解坐标映射和同构的概念；

⑥ 掌握正交矩阵和正交变换的概念和性质。

第6章 特征值与特征向量基本要求

① 理解特征值与特征向量的定义,会计算特征值与特征向量;

② 掌握特征值和特征向量的性质,了解这些性质的证明思路;

③ 了解相似矩阵的概念及性质;

④ 理解方阵可对角化的条件,掌握用相似变换化方阵为对角矩阵的方法;

⑤ 了解实对称矩阵的性质,掌握实对称矩阵正交相似对角化的方法。

第7章 二次曲面与二次型基本要求

① 了解曲面与曲线的概念，掌握柱面/锥面/旋转面方程的推导方法；

② 掌握五种二次曲面的标准方程的形式，了解曲线在坐标面上的投影方程的求法；

③ 理解二次型的概念，能够写出二次型的矩阵，掌握用正交变换法和配方法化二次型为标准形的方法；

④ 理解合同变换的概念和惯性定理，会求实对称矩阵的正/负惯性指数；

⑤ 理解正定二次型(正定矩阵)的概念，掌握正定二次型(正定矩阵)的判别方法，了解负定/半正定/不定二次型的判别条件；

⑥ 了解一般二次曲面方程的化简方法。

第8章 线性变换基本要求

① 理解线性变换和线性算子的基本概念，了解线性变换的运算；

② 理解核与值域的概念，会用span{基or向量组}的形式表示线性变换的核与值域，

③ 了解秩+零度定理，了解线性变换是单射/可逆的等价条件；

④ 掌握线性变换的矩阵表示，会求线性算子在不同基下的矩阵；

⑤ 掌握求T的值域与核的方法(如：课本例题8.2.5)。

一、填空题(1-4题，每小题3分，共12分)

1. 若向量组 $\alpha_1=(-2,3,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(2,t,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$

线性相关，则常数 t =（ -3 ）

解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关$\Leftrightarrow r[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]<3 \Leftrightarrow |\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0,$

由$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & t & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2t-6=0,$ 得$t=-3.$

2. 若矩阵A的伴随矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\4&5&1&0\\0&0&6&8\end{bmatrix}$$

则 det(A)=（2 ）.

解 $|A^*|=8$, 等式$AA^*=|A|E$两边取行列式，得$|A|\cdot|A^*|=|A|^4$,

则 $|A|=0$或$|A|=2$.

由$|A^*|\neq 0$知A^*可逆，故A可逆，从而$|A|\neq 0$, 故$|A|=2$.

反证法，在A^*可逆的条件下，若$|A|=0$，则有$AA^*=|A|E=O$

可得$r(A)+r(A^*)\leq 4$，而A^*可逆，$r(A^*)=4$，故$r(A)=0$

$\Rightarrow A=O$，则$A^*=O$，矛盾，故A^*可逆的条件下必有A可逆

若$AB=O$，

则$r(A)+r(B)\leq n$

(课本例题4.4.4);

3. 已知 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 为3维列向量， $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$

则 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$ ＝（ 6 ）.

解 $$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}(a_1\ a_2\ a_3)=\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1+1+4=6$$

4. 已知 α_1,α_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，

则向量组 $\beta_1=\alpha_1+t_1\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+t_2\alpha_1$ 也可作为 $Ax=0$

的基础解系的充要条件是常数 t_1,t_2 满足条件（ $1-t_1t_2\neq 0$ ）

解 $[\beta_1\ \beta_2]=[\alpha_1\ \alpha_2]\begin{pmatrix}1 & t_2\\ t_1 & 1\end{pmatrix}$

β_1,β_2 也可作为 $Ax=0$ 的基础解系

$\Leftrightarrow$ 向量组 β_1,β_2 与向量组 $\alpha_1\ \alpha_2$ 等价

$\Leftrightarrow$ 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & t_2\\ t_1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}1 & t_2\\ t_1 & 1\end{pmatrix}=1-t_1t_2\neq 0.$

二、单项选择题(5-8题，每小题3分, 共12分)

5. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$，则（ B ）

(A) A为正交矩阵　　(B) $\frac{1}{3}A$为正交矩阵

(C) $\det(A)=1$　　(D) $A^{-1}=\frac{1}{3}A^{\mathrm{T}}$

解 $\det(A)=-27$,

$AA^{\mathrm{T}}=9E \Rightarrow \frac{A}{3}\left(\frac{A}{3}\right)^{\mathrm{T}}=E$, 故 $\frac{A}{3}$为正交矩阵.

6.已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&8&0\\2&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$相似于对角阵$\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&-2\end{pmatrix}$,则$a=$ (A)

(A) 0 (B) 2 (C) -2 (D) 6

解 由题意，特征值6的几何重数为2,

即$3-r(6E-A)=2, \Rightarrow r(6E-A)=1.$

又$6E-A=\begin{pmatrix}4&-8&0\\-2&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&0&-a\\0&0&0\end{pmatrix}$

故$a=0.$

7. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$的秩为1，则 (D)

$(A)a=b$且$a+2b=0$　$(B)a\neq b$且$a+2b\neq 0$

$(C)a=b$且$a+2b\neq 0$　$(D)a\neq b$且$a+2b=0$

解　若$a=b$，则$A=\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\Rightarrow A^*=O$与题设矛盾，故$a\neq b$.

又A^*的秩为$1\Rightarrow$ $\boxed{A^*\text{不可逆，从而}A\text{不可逆，}}$ 即$|A|=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2$$

因$a-b\neq 0$，故$a+2b=0$.

8. $\mathrm{R}^{2\times 2}$的子空间$W=\left\{\begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a,b\in \mathrm{R}\right\}$的维数是 **(B)**

$(A)\,1\quad (B)\,2\quad (C)\,3\quad (D)\,4$

解 $\begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

显然 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$,

$k_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$, 即$\begin{pmatrix} k_1+k_2 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$k_1$=0， k_2=0.

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是W的一个基, dim(W)=2.

三、解答题(9-15题，共76分)

9. 设3阶方阵A,B满足$A+B=AB$，

(1) 证明矩阵$A-E$可逆 (2) 当$B=\begin{pmatrix}3&2&0\\3&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$时,求$A$.

解 (1) $AB-A-B=O$, 即$(A-E)B-(A-E)=E$,

$\Rightarrow (A-E)(B-E)=E$, 故$A-E$可逆,$(A-E)^{-1}=B-E$.

(2) $A-E=(B-E)^{-1}$,

$$A=E+(B-E)^{-1}=E+\begin{pmatrix}2&2&0\\3&5&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}9&-2&0\\-3&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

10. a,b取何值时，线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & 7 & 10 & a+6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$
有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出方程组的结构式通解.

解

$$\overline{A}=(A,b)\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-4 \end{array}\right]$$

（1）当$a\neq 1$时，$r(A)=r(\overline{A})=4$, 方程组有唯一解

（2）当$a=1,b\neq 4$时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

（3）当$a=1,b=4$时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，方程组有无穷多解

10. a,b取何值时，线性方程组$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & 7 & 10 & a+6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出方程组的结构式通解.

此时 $\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -7 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 11x_3 + 7x_4, \\ x_2 = 1 - 3x_3 - 2x_4 \end{cases}$

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2\text{为任意常数})$$

11.两直线$L_1:\begin{cases} x=3-z, \\ y=2 \end{cases}$与$L_2:\begin{cases} x+y-3z=-7, \\ x-2z=-6 \end{cases}$是否共面？若共面，求它们所确定平面的一般式方程

解 $\vec{a_1}=(1,0,1)\times(0,1,0)=(-1,0,1)$，$P_1(3,2,0)$，

$\vec{a_2}=(1,1,-3)\times(1,0,-2)=(2,1,1)$，$P_2(-6,-1,0)$，

$$\vec{a_1}\times\vec{a_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -9 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$$，故L_1与L_2共面.

$$\vec{n}=\vec{a_1}\times\vec{a_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-i+3j-k=(-1,3,-1)$$

故所求平面方程为$-(x-3)+3(y-2)-z=0$或$x-3y+z+3=0$.

12.已知3阶矩阵A的特征值为1,2,–3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是依次对应的特征向量，设$B=A^*-2A+3E$，求$B^{-1}$的特征值、特征向量，及$\det(B^{-1})$.

解 $|A|=-6$, $A^*=|A|A^{-1}=-6A^{-1}$, $B=-6A^{-1}-2A+3E$

由题设$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-3\alpha_3$.

$$B\alpha_1=(-6A^{-1}-2A+3E)\alpha_1=-6A^{-1}\alpha_1-2A\alpha_1+3\alpha_1=-6\cdot\frac{1}{1}\cdot\alpha_1-2\cdot1\cdot\alpha_1+3\alpha_1$$

因此$B\alpha_1=-5\alpha_1$，同理 $B\alpha_2=-4\alpha_2$，$B\alpha_3=11\alpha_3$. $\therefore B$的特征值为$-5,-4,11$

特征值性质： 若数λ为n阶可逆矩阵A的一个特征值,α为对应特征向量,即$A\alpha=\lambda\alpha$,则$\lambda\neq0$,并且有：

(1)$\frac{1}{\lambda}$为A^{-1}的特征值,α为对应的特征向量,即$A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$;

(2)$\frac{|A|}{\lambda}$为A^*的特征值,α为对应的特征向量,即$A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$;

12.已知3阶矩阵A的特征值为1,2,–3， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是依次对应的特征向量，设$B=A^*-2A+3E$，求$B^{-1}$的特征值、特征向量，及$\det(B^{-1})$.

解 $|A|=-6,\ A^*=|A|A^{-1}=-6A^{-1},\ B=-6A^{-1}-2A+3E$

由题设$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=-3\alpha_3$.

$$B\alpha_1=(-6A^{-1}-2A+3E)\alpha_1=-6A^{-1}\alpha_1-2A\alpha_1+3\alpha_1=-6\cdot\frac{1}{1}\cdot\alpha_1-2\cdot1\cdot\alpha_1+3\alpha_1$$

因此$B\alpha_1=-5\alpha_1$，同理 $B\alpha_2=-4\alpha_2$， $B\alpha_3=11\alpha_3$. $\therefore B$的特征值为$-5,-4,11$

则B^{-1}的特征值为$-\dfrac{1}{5}$，$-\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{11}$.

对应特征向量依次为$k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,k_3\alpha_3(k_i\neq0)$.

$$\det(B^{-1})=(-\frac{1}{5})\times(-\frac{1}{4})\times(\frac{1}{11})=\frac{1}{220}.$$

13.设矩阵$B=\begin{pmatrix}2&4&0\\2&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$, $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,

(1)写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Bx$的矩阵$A$;

(2)求一个正交矩阵P，使得$P^{-1}AP$成对角矩阵;

(3)写出在正交变换$x=Py$下f化成的标准型.

解 (1) $A=\frac{1}{2}\left(B+B^T\right)=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

(2) 由$|\lambda E-A|=0$得A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-1$.

对于$\lambda_1=\lambda_2=5$,

$5E-A=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得线性无关的特征向量$\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(0,0,1)^T$.

对于$\lambda_3=-1$,

$$-E-A=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 0\\ -3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ 得特征向量$\xi_3=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,

单位化得 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $e_2=(0,0,1)^T$, $e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$,

令$P=(e_1\quad e_2\quad e_3)$，则$P$为正交矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}5 & & \\ & 5 & \\ & & -1\end{pmatrix}$.

(3) 在正交变换$x=Py$下f的标准型为$5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

14.设R^4的子空间V由向量组$\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,4)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,2)^T$生成,求$V$的基与维数.

解 $$(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

V的一个基为：极大线性无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,

V的维数$\dim(V)=3.$

15. 设A,B均为n阶正定矩阵，证明关于λ的方程$\det(\lambda A-B)=0$的根全大于零.

证 因A正定，故$|A|>0$,且有可逆矩阵P,使$A=P^TP$.

$$|\lambda A-B|=|\lambda P^TP-\left(P^{-1}P\right)^TB(P^{-1}P)|$$

$$=|P^T\left(\lambda E-\left(P^{-1}\right)^TBP^{-1}\right)P|$$

$$=|P^T|\cdot|P|\cdot|\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|$$

$$=|A||\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|$$

$|\lambda A-B|=0\Leftrightarrow|\lambda E-(P^{-1})^TBP^{-1}|=0\Leftrightarrow\lambda$是$(P^{-1})^TBP^{-1}$的特征值

由B正定，知$(P^{-1})^TBP^{-1}$也正定,因此其特征值均大于零

故方程$\det(\lambda A-B)=0$的根全大于零.