

第二章 矩阵

第四节:初等变换与初等矩阵

董荣

数学与统计学院



作业

习题2.4

(A) 1, 3(2), 6, 9, 10

注: 这次作业先不做,下次讲完后再做

回顾



可逆矩阵求逆的方法:

若A可逆,则其逆矩阵 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*$,其中 A^* 是A的伴随矩阵:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
 代数余子式 (n-1阶)

有没有一种更简单的矩阵求逆方法呢?



本节课教学内容

- 1 初等变换与初等矩阵的概念
- 2 初等变换与初等矩阵的关系
- 3 阶梯形矩阵



定义1(初等行变换)对矩阵施行的下列3种变换称为初等行变换:

- (1) 交换第i行与第j行的位置(记为 $r_i \leftrightarrow r_i$)
- (2) 用非零数k乘矩阵的第i行(记为 kr_i)
- (3) 把矩阵的第i行的k倍加到第j行上去(记为 r_j+kr_i)

例如

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$



定义2 (初等列变换) 对矩阵施行的下列3种变换称为初等列变换:

- (1) 交换第i列与第j列的位置(记为 $c_i \leftrightarrow c_j$)
- (2) 用非零数k乘矩阵的第i列(记为 kc_i)
- (3) 把矩阵的第i列的k倍加到第j列上去(记为 c_i + kc_i)

例如

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$$

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.



定义3 (矩阵等价)如果矩阵A经过有限次初等行(列)变换变成 矩阵B,则称矩阵A与B行(列)等价.

矩阵行等价和矩阵列等价统称为矩阵等价,记作 $A \cong B$.

矩阵等价关系具有下列性质:

(1) 自反性:
$$A \cong A$$

$$A \cong A \longrightarrow B \cong A$$
(2) 对称性: if $A \simeq B \longrightarrow B \simeq A$
$$B \xrightarrow{r_j - kr_i} A$$

(2) 对称性: if
$$A \cong B \Rightarrow B \cong A$$

(3) 传递性: if
$$A \cong B$$
, $B \cong C \Rightarrow A \cong C$

定义4(初等矩阵)对单位矩阵只作1次初等变换所得到的矩阵,

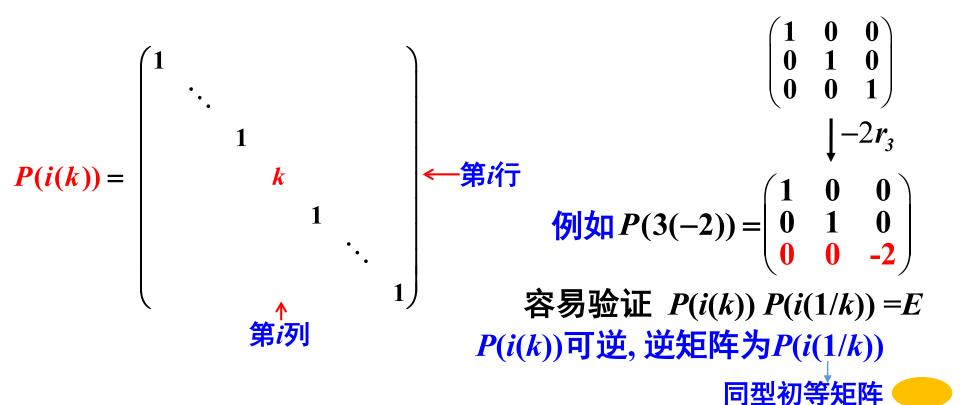
称为初等矩阵.

3种初等变换对应3种初等矩阵.

(1) 万场单位短烟场等%(万)

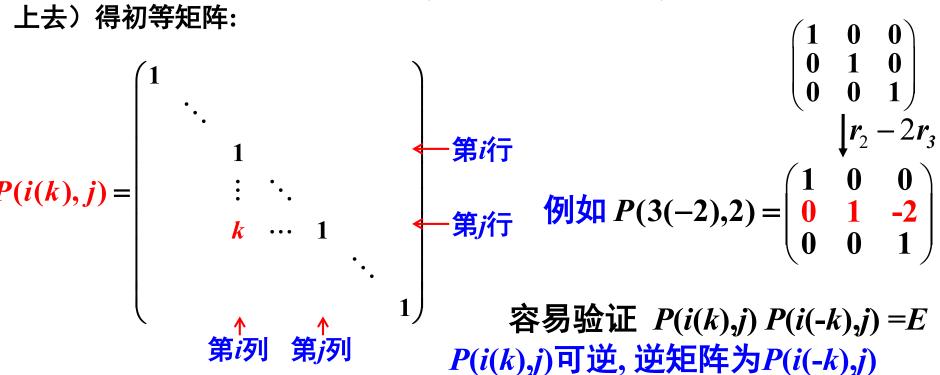


(2) 用非零数k乘单位矩阵I的第i行(或第i列)得初等矩阵:





(3) 把单位矩阵I的第i行的k倍加到第j行上去(或把I的第j列的k倍加到第i列



同型初等矩阵



本节课教学内容

- 1 初等变换与初等矩阵的概念
- 2 初等变换与初等矩阵的关系
- 3 阶梯形矩阵



初等变换与初等矩阵有什么关系呢?

例 读
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
, 求 $P(1,2)A$, $AP(2(k))$, $P(3(k),2)A$.

$$P(1,2)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AP(2(k)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



初等变换与初等矩阵有什么关系呢?

例1 读
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
, 求 $P(1,2)A, AP(2(k)), P(3(k),2)A$.

$$P(3(k),2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

定理1(初等变换与初等矩阵的关系)

对矩阵A施行一次初等行变换,相当于对A左乘一个相应的初等矩阵;对矩阵A施行一次初等列变换,相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

用矩阵乘法表示初等 <mark>行</mark> 变换	用矩阵乘法表示初等列变换
$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B, \mathbb{N}B = P(i,j)A$	$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B, \mathbb{N}B = AP(i,j)$
$A \xrightarrow{kr_i} B, \mathbb{N}B = P(i(k))A$	$A \xrightarrow{kc_i} B, \mathbb{N}B = AP(i(k))$
$A \xrightarrow{r_j + kr_i} B, \text{QI}B = P(i(k), j)A$	$A \xrightarrow{c_i + kc_j} B, $



定理1(初等变换与初等矩阵的关系)

对矩阵A施行一次初等行变换,相当于对A左乘一个相应的初等矩阵;对矩阵A施行一次初等列变换,相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

A与B行等价 \iff 存在初等矩阵 $P_1,P_2,...,P_s$ 使 $P_s...P_2P_1A=B$.

若令
$$P=P_s...P_2P_1$$
,则有

$$PA=B$$

其中P为可逆矩阵.



定理1(初等变换与初等矩阵的关系)

对矩阵A施行一次初等行变换,相当于对A左乘一个相应的初等矩阵;对矩阵A施行一次初等列变换,相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

A与B列等价 \iff 存在初等矩阵 $Q_1,Q_2,...,Q_t$ 使 $AQ_1Q_2...Q_t=B$.

若令 $Q=Q_1Q_2...Q_t$,则有

$$AQ=B$$
,

其中Q为可逆矩阵.





 $P_{s}...P_{2}P_{1}AQ_{1}Q_{2}...Q_{t}=B.$

若令 $P=P_s...P_2P_1, Q=Q_1Q_2...Q_t$,则有

PAQ=B

其中P, Q为可逆矩阵.

当矩阵A = B等价时,必存在可逆矩阵P, Q使PAQ = B, 其中P, Q可以表示成若干初等矩阵之积.

思考:反之,若存在可逆矩阵P,Q使PAQ=B,A与B一定等价吗?

是否任何可逆矩阵都能表示成若干初等矩阵之积的形式?

例 设A是3阶方阵,将A的第1行与第3行对换得B,再把 B的第2行加到第3行得C,求满足PA = C的可逆矩阵P.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(1,3)A &= B, \quad P(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
P(2(1),3)B &= C, \quad P(2(1),3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \qquad P(2(1),3)P(1,3)A = C, \\
& \text{th}P &= P(2(1),3)P(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$



本节课教学内容

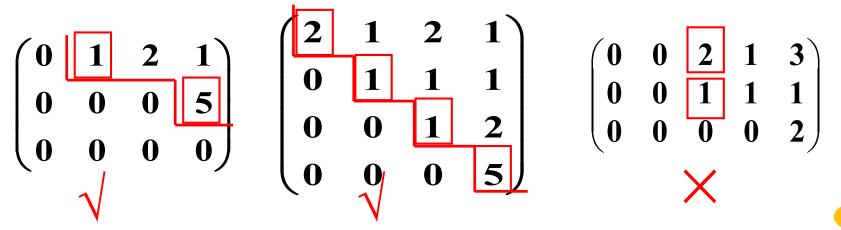
- 1 初等变换与初等矩阵的概念
- 2 初等变换与初等矩阵的关系
- 3 阶梯形矩阵



定义5 (阶梯形矩阵) 称满足下列两个条件的矩阵为阶梯形矩阵:

- 1) 若有零行(元素全为零的行),则零行都位于底部;
- 2) 各非零行的首非零元素都位于前一行首非零元的右边.

例 判断下列矩阵是否为阶梯型矩阵.



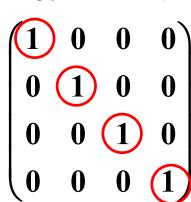


定义6 (简化行阶梯形矩阵) 称满足下列条件的矩阵为简化 行阶梯形矩阵(行最简形).

- 1)阶梯形矩阵;
- 2)各非零行的首非零元均为1;
- 3)首非零元所在列其它元素均为0.

例 下面三个矩阵都是简化行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$





定理2 对于任一非零矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 都可通过有限次初等行变换把它化成阶梯形矩阵,进一步可化为简化行阶梯型矩阵(行最简形).

例 用初等行变换将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

化成简化行阶梯形矩阵。



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + 3r_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -12 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
阶梯形矩阵

$$\frac{-\frac{1}{4}r_2}{\frac{1}{6}r_3} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $r_1 + r_3$ (2) $r_2 + r_3$ (3) $r_2 + r_3$ (4) $r_3 + r_4$ (5) $r_4 + r_5$ (5) $r_5 + r_5$ (6) $r_5 + r_5$ (7) $r_5 + r_5$ (7) $r_5 + r_5$ (8) $r_5 + r_5$

(行最简形)



继续进行初等列变换:

$$\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 + 3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

非零矩阵经初等变换可化为左上角是单位阵、其余元素都是0的 矩阵,称为A在等价意义下的标准形。

- The state of the s
- 回顾:定义6 称满足下列条件的矩阵为简化行阶梯形矩阵(行最简形).
- 1)阶梯形矩阵;
- 2)各非零行的首非零元均为1;
- 3)首非零元所在列其它元素均为0.

例 设B是可逆矩阵A经有限次初等行变换所化成的简化行阶梯形矩阵,证明B=I.

证 B=PA, $\det(P)\neq 0$, $\det(A)\neq 0$ \Rightarrow $\det(B)\neq 0$ \Rightarrow B无零行



定理3 设A为n阶方阵,则下列条件相互等价:

- (1) A是可逆矩阵;
- (2) A可经有限次初等行变换化成同阶单位矩阵I (即A行等价于同阶单位阵);
- (3) A可表示成若干个初等矩阵之积.

证 采用循环证法

(1)→(2): 前面例子已经证明了,一个可逆矩阵经过有 限次初等行变换化成的行最简形就是单位阵

利用定理3可得到一种较为简单的求逆 矩阵的方法.

- (2)→(3): 存在初等矩阵 $P_1, P_2, ..., P_m$ 使 $P_m ... P_2 P_1 A = I$ 故 $A = (P_m ... P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} ... P_m^{-1}$
- (3)→(1): 设 $A = Q_1Q_2...Q_m$,其中 Q_i , i=1...m为初等矩阵. 有 $\det(Q_i)\neq 0$, i=1...m. 故 $\det(A)\neq 0$, A可逆, 证毕.