线性空间与线性变换

物理试验班 001 丰啸天

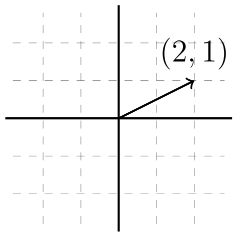
2021 年 11 月 21 日

1 线性空间与线性变换的定义

1.1 引言

当提起向量时，你脑海中会想到什么？

如果你只能想到直角坐标系中的一个箭头，那说明你的线性代数学得很失败，一点也没有理解它.



与此同时，线性代数作为数学公共基础课的意义也会失去，它本应成为后续各学科课程的铺垫. 电子信息类的同学学到《信号与系统》会惊呼，傅里叶变换从时域到频域再从频域到时域，不过就是函数空间换了一组基嘛！物理系的同学学到《量子力学》会惊呼，态空间中的左矢 $\langle\psi|$ 和右矢 $|\psi\rangle$，不过是应用 Riesz 表示定理的线性变换和向量嘛！.

本节课将引导大家理解线性空间、向量、基等基础概念，以及定义在线性空间上的线性映射和线性变换.

1.2 定义

1.2.1 线性空间

设 V 是一个非空集合，$\mathbb{F}$ 是一个数域，如果 V 上规定了加法运算和数乘运算（对加法运算和数乘运算封闭），且满足以下 8 条运算规律（加法四条，乘法四条），则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的**线性空间**.

1. 加法交换律：$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha} \qquad \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$
2. 加法结合律：$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\gamma)=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\gamma \qquad \forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma\in V$
3. 零元素：$\exists 0\in V,\ \text{s.t.}\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\ \boldsymbol{\alpha}+0=\boldsymbol{\alpha}$
4. 负元素：$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V,\ \exists\boldsymbol{\beta}\in V,\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=0$
5. 数乘单位元：$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{\alpha}\in V$

6. 数乘和域乘法相容：$(kl)\boldsymbol{\alpha} = k(l\boldsymbol{\alpha}) \qquad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V,\ k, l \in \mathbb{F}$
7. 数乘对向量加法满足分配律：$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta} \qquad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V,\ k \in \mathbb{F}$
8. 数乘对标量加法满足分配律：$(k+l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha} \qquad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V,\ k, l \in \mathbb{F}$

线性空间中的元素称为**向量**.

1.2.2 线性映射

设 V 和 V' 是数域 $\mathbb{F}$ 上的两个线性空间，V 到 V' 的一个映射 $\mathscr{A}$ 如果保持加法运算 (additivity) 和纯量乘法运算 (homogeneity)，即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}) \tag{1}$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}) = k\boldsymbol{\alpha} \tag{2}$$

则称 $\mathscr{A}$ 是 V 到 V' 的**线性映射**.

线性空间 V 到自身的线性映射称为 V 上的**线性变换**.

把 V 到 V' 所有线性映射组成的集合记作 $\mathrm{Hom}(V, V')$，把 V 到 V 上所有线性变换组成的集合记作 $\mathrm{Hom}(V, V)$.

1.2.3 线性相关与线性无关

在数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 中，给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，对于 $\boldsymbol{\beta} \in V$，如果存在 $\mathbb{F}$ 中的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

2 合成大西瓜

2.1 水果集构成线性空间

规定同数量同种类的一些水果为同一元素，则可定义水果的加法和数乘．倘若允许负数水果和分数水果的存在，水果集合构成一个有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间.

为简化问题，考虑五种水果：山竹，柠檬，猕猴，菠萝，西瓜.

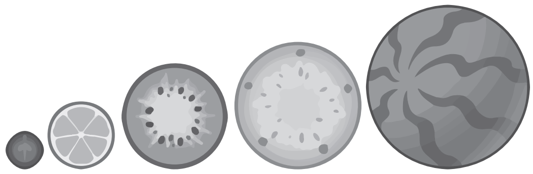


图 1: 纳入考虑的五种水果

2.2 水果空间的基与坐标

水果空间的一组基可以取为

$$\begin{bmatrix}\text{山竹} & \text{柠檬} & \text{猕猴} & \text{菠萝} & \text{西瓜}\end{bmatrix} \tag{3}$$

则任意多个水果都可以用这组基线性表出.

例 2.1. 如图2所示，分别选定 $[\text{山竹} \ \text{柠檬} \ \text{猕猴} \ \text{菠萝} \ \text{西瓜}]$ 和 $[\frac{1}{2}\text{山竹} + 2\text{柠檬} \quad \text{柠檬} \quad \text{猕猴} \quad \text{菠萝} + \text{猕猴} + \text{西瓜} \quad 3\text{西瓜}]$ 为基，求下述水果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这两组基下的坐标.

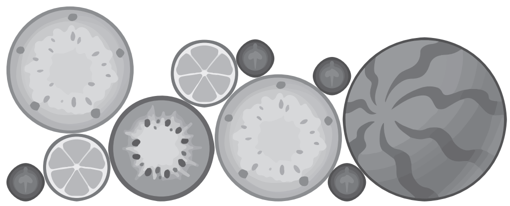


图 2: 水果向量

证明. 数一数，图中有 4 个山竹，2 个柠檬，1 个猕猴桃，2 个菠萝，1 个西瓜. 因此向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = 4\text{山竹} + 2\text{柠檬} + \text{猕猴} + 2\text{菠萝} + \text{西瓜} \tag{4}$$

倘若选定 $\begin{bmatrix}\text{山竹} & \text{柠檬} & \text{猕猴} & \text{菠萝} & \text{西瓜}\end{bmatrix}$ 为基，则此水果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\text{山竹} & \text{柠檬} & \text{猕猴} & \text{菠萝} & \text{西瓜}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\\1\\2\\1\end{bmatrix} \tag{5}$$

那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标就是 $\boldsymbol{x} = [4 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1]^T$.

倘若选定 $[\frac{1}{2}\text{山竹} + 2\text{柠檬} \quad \text{柠檬} \quad \text{猕猴} \quad \text{菠萝} + \text{猕猴} + \text{西瓜} \quad 3\text{西瓜}]$ 为基，配凑一下，则水果向量可以表示为

$$\left[\frac{1}{2}\text{山竹} + 2\text{柠檬} \quad \text{柠檬} \quad \text{猕猴} \quad \text{菠萝} + \text{猕猴} + \text{西瓜} \quad 3\text{西瓜}\right] \begin{bmatrix} 8 \\ -15 \\ -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{6}$$

那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标就是 $\boldsymbol{x}' = [8 \quad -15 \quad -1 \quad 2 \quad -\frac{1}{3}]^T$. □

此例题说明了基和坐标的意义。在不同的基下，同一个向量的坐标是不同的。坐标相当于向量在这组基下的一个代号，一种描述方法，当选定了一组基后，线性空间中所有向量都被唯一分配了一组坐标。这样，我们就能把一个虚无缥缈存在于线性空间中的，可能指代各种事物的向量“4 个山竹，2 个柠檬，1 个猕猴桃，2 个菠萝，1 个西瓜”，转化为易于处理的数字 $[4 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1]^T$ 或是 $[8 \quad -15 \quad -1 \quad 2 \quad -\frac{1}{3}]^T$。**这就是坐标的意义所在！这就是所谓代数！**

我们还发现，选定不同的基，虽然有了不同的坐标，但向量依旧是同一个向量，依旧是图2，它存在于抽象的线性空间之中。

举个例子：在正式场合，我们称学校为“西安交通大学”，在非正式场合，我们称学校为“西交”，在陕西地域，我们称学校为“交大”。但这些称呼指的都是全国两千七百多所普通高校中的这一个独一无二的 XJTU，被描述的对象不随着我们叫它什么而变化。不同场合不同地域，相当于选定了不同的基，而我们对它的称呼，则就是 XJTU 在这组基下的坐标。

2.3 水果空间上的线性变换

考虑定义在水果空间中的如下四种变换：

- 重新开始变换：清除屏幕中的所有水果
- 继续游戏变换：保持屏幕中的水果不变
- 快速通关变换：将屏幕中的所有水果变成大西瓜

- 清除杂碎变换：令屏幕中的山竹和柠檬消失

用映射的语言描述这些变换，就是

- 重新开始变换 $\mathscr{O}$：将任意水果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 映射为 0 向量
- 继续游戏变换 $\mathscr{I}$：将任意水果向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 映射为 $\boldsymbol{\alpha}$
- 快速通关变换 $\mathscr{F}$：将任意水果向量 $\boldsymbol{\alpha}$，映射到水果空间中和 $\boldsymbol{\alpha}$ 所含水果数相同，但组成水果全都是西瓜的向量 $\boldsymbol{\beta}$
- 清除杂碎变换 $\mathscr{A}$：将任意水果向量 $\boldsymbol{\alpha}$，映射到水果空间中和 $\boldsymbol{\alpha}$ 相比，山竹和柠檬数归 0，其他水果数不变的向量 $\boldsymbol{\gamma}$

我们意识到这样两件事情。一方面，这些变换都是用自然语言描述的，它和向量一样，也是定义在线性空间中的，不随基的改变而变化，它只是一个对应法则，一个黑盒子。给你一些水果，它返回另外一些水果，仅此而已。另一方面，自然语言描述很糟糕，尽管脱离于基而存在，但显得有些麻烦。我们通过希望选定一组基，让这个映射关系变成一个函数或者一个矩阵之类的东西，实现“代数”。这就是**线性变换在基下的矩阵**。

对于任意一个线性变换 $\mathscr{A}$，它进行了这样一个映射

$$\mathscr{A}:\boldsymbol{\alpha}\mapsto\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{7}$$

如果选定了一组基，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 就有一个坐标 $\boldsymbol{x}$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$ 也有个坐标 $\boldsymbol{y}$。那么这个映射就可以认为是

$$\mathscr{A}:\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y} \tag{8}$$

理论上来说，应当有个向量函数 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$，但由于这个映射是线性的，这个函数 f 可以表示为矩阵作用于自变量上，也就是

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x} \tag{9}$$

矩阵是什么？$n\times n$ 个数排成的数表罢了。这样，我们就又将一个自然语言描述的线性变换，通过取定一组基，用易于处理的数字排成的矩阵 A 表示出来了，再次实现了**代数**过程。

因此，一个线性变换 $\mathscr{A}$，在选定了一组基后，就对应着一个矩阵 A。线性变换把线性空间中的向量映射到另一个向量上，矩阵把向量的坐标映射到另一个向量的坐标上。向量和线性变换不依赖基而存在，矩阵和坐标依赖基而存在。

下面来看具体例子。

例 2.2. 写出 $\mathscr{O},\mathscr{I},\mathscr{F}$ 在基 [山竹 柠檬 猕猴 菠萝 西瓜] 和基 [$\frac{1}{2}$山竹 + 2柠檬 柠檬 猕猴 菠萝 + 猕猴 + 西瓜 3西瓜] 下的矩阵。

证明. 在基 [山竹 柠檬 猕猴 菠萝 西瓜] 下，线性变换 $\mathscr{O}$ 对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

线性变换 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

线性变换 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

在基 [$\frac{1}{2}$山竹 + 2柠檬 柠檬 猕猴 菠萝 + 猕猴 + 西瓜 3西瓜] 下，线性变换 $\mathscr{O},\mathscr{I}$ 的矩阵相同，线性变换 $\mathscr{F}$ 的矩阵变为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

□

例 2.3. 考察氨水转化为二氧化氮的反应，反应方程式为

1. $4\,NH_3 + 5\,O_2 = 4\,NO + 6\,H_2O$
2. $4\,NH_3 + 3\,O_2 = 2\,N_2 + 6\,H_2O$
3. $4\,NH_3 + 6\,NO = 5\,N_2 + 6\,H_2O$
4. $2\,NO + O_2 = 2\,NO_2$
5. $2\,NO = N_2 + O_2$
6. $N_2 + 2\,O_2 = 2\,NO_2$

求出此系统所需的最少独立化学方程式。并利用此，给出由混杂着上述六种气体/液体的系统组成的线性空间的一组基。

证明. 此题当堂求解。 □

3 函数空间

3.1 实平方可积函数空间

3.1.1 实平方可积

定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 在此区间上的积分 $\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$ 存在且由极限，则称函数 $f(x)$ 是**平方可积**的，此空间记为 $L_2[a,b]$。

3.1.2 实平方可积函数空间

元素是定义在 $[a,b]$ 上的实变量 x 的实值函数，它们是平方可积的，并且符合线性性，这些元素的集合形成的线性空间称为**平方可积的函数空间**，简称为**函数空间**。

两个函数 f 和 g 之间的距离定义为

$$\rho(f,g) = \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,\mathrm{d}x\right]^{1/2} \tag{14}$$

可知 $L_2[a,b]$ 是一个距离空间。

两个函数 f 和 g 之间的内积定义为

$$\rho(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

3.2 泰勒级数

3.2.1 引言

如何给函数空间选定一组基？泰勒级数解决此问题。

为了简单起见，我们将线性空间限定在有限维，考虑 $n-1$ 次**多项式函数**构成的线性空间。但读者须知，泰勒级数实际上可以有无穷项，能够处理任何性质良好的函数。

3.2.2 幂函数基

回顾泰勒级数公式

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{16}$$

注意到 $n-1$ 次多项式函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 求 n 阶导数就变成 0 了。因此任意 $n-1$ 次多项式函数的泰勒级数都只有前 n 项！若 $n-1$ 次多项式函数定义在 $[a,b]$ 上，$x_0\in[a,b]$，则可以选定

$$\left\{1,x-x_0,\frac{1}{2!}(x-x_0)^2,\cdots,\frac{1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}\right\} \tag{17}$$

为多项式函数构成的线性空间的一组基。任意多项式函数在这组基下的坐标为 $[f(x_0)\quad f'(x_0)\quad f''(x_0)\quad \cdots\quad f^{(n-1)}(x_0)]^T$。

特殊地，我们平常表示一个多项式函数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1} \tag{18}$$

这也是选定了 $\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$ 为基后的表达形式。应用泰勒级数，我们可以得到前面的坐标为

$$a_k=k!f^{(k)}(0) \tag{19}$$

此时函数就可以表达成

$$f(x)=[1\quad x\quad x^2\quad \cdots\quad x^{n-1}]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\end{bmatrix} \tag{20}$$

3.2.3 求导变换与幂零矩阵

求导变换 $\mathscr{D}$ 定义为

$$\mathscr{D} : f(x) \mapsto f'(x) \tag{21}$$

求导变换是线性变换。这可以通过导数的性质立刻得到。

$$\mathscr{D}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x) = \mathscr{D}f(x) + \mathscr{D}g(x) \tag{22}$$

$$\mathscr{D}[kf(x)] = kf'(x) = k\mathscr{D}f(x) \tag{23}$$

求导变换是定义在函数空间上的，它把任意一个函数映射到另一个函数。它是更本质的存在，脱离于函数基的选择。如果没学过线性代数这门课，你也可以研究导数十分透彻。然而，我们现在要用矩阵去描述它。

下面举一个函数基的例子，另一个函数基留作例题。

在 $n-1$ 次多项式函数构成的线性空间中，选定 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ 为基。对 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ 求导，得到

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} \tag{24}$$

写成基乘坐标向量的形式

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ (n-1)a_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

观察到从 $f(x)$ 的坐标到 $f'(x)$ 的坐标，可以写成矩阵 D 作用于其上

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ \vdots \\ (n-1)a_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{26}$$

因此，矩阵 D 就是求导变换在基 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ 下的矩阵。

例 3.1. 给出求导变换 $\mathscr{D}$ 在基 $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ 下的矩阵。

证明. 此题当堂讲解，答案为 $J_n(0)$。 □

我们不禁思考：不同函数基下的求导变换对应的矩阵有何共性？

正如给定幂等矩阵我们还原回投影变换去思考，给定对合矩阵我们还原回对称变换去思考，求导变换有什么性质，求导变换在一个个函数基下的矩阵就有什么性质。这再次说明线性变换才是线性代数的核心，矩阵只是研究工具。

注意到，任意一个 $n-1$ 阶函数求 n 次导就变成零函数 0。每求一次导，相当于对当前函数施加一个求导变换 $\mathscr{D}$。也就是说，每求一次导，相当于对当前函数在某个函数基下的坐标左乘一个矩阵 D。求导 n 次变成 0，意味着 $\mathscr{D}^n = \mathscr{O}$，也意味着，$D^n = O$。因此，$\mathscr{D}$ 是一个幂零指数为 n 的幂零变换，D 是一个幂零指数为 n 的幂零矩阵。

你若不信，我们来手算一下。考虑例 2.1 中的基下的矩阵，不妨令 $n=5$，则

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

D 的二次幂为

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

D 的三次幂为

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

可以料想，D 的五次幂就会变成 O 矩阵。

矩阵有秩。可以看到，求导变换矩阵 D 的秩为 $n-1$。上一次线代沙龙提到，秩代表着经历线性变换/矩阵左乘后，信息量的维度剩下多少。求导变换矩阵 D 就鲜明地说明了这一点。每次求导后，常数项消失了，函数变成了 $n-2$ 次多项式。我们不能通过导数精准地还原到原函数，这就是不定积分为何有常数 C 的原因。当大家学到第八章的时候，会发现一个线性变换的秩也是这样定义出来的。

最后，我们来看看线代课本上的一道习题有何意义，以此来结束这一小节。

例 3.2. 设 A 为 n 阶方阵，l 为正整数，$\boldsymbol{\alpha}$ 为某一向量。$A^l\boldsymbol{\alpha}=0$ 但 $A^{l-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$。求证：$\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, \cdots, A^{l-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关。

证明. 此题当堂证明。 □

若 $\mathscr{D}$ 是求导变换，$\mathscr{D}^l f(x)=0$ 但 $\mathscr{D}^{l-1}f(x)\neq 0$。这意味着 $f(x)$ 必定是一个 $l-1$ 次多项式，此时 $f(x), \mathscr{D}f(x), \cdots, \mathscr{D}^{l-1}f(x)$ 分别是常数，1 次多项式，2 次多项式，⋯，$l-1$ 次多项式，通过乘系数加加减减（初等变换），必定可以变成 $1, x, \cdots, x^{l-1}$，它们是函数空间的一组基，正是线性无关的。

从这道习题，可以引出高等代数中循环空间的概念。因为习题的结论意味着，可以通过一个幂零变换，构造出线性空间的一组基。

3.3 傅里叶级数

如何给函数空间选定一组正交基？傅里叶级数解决此问题。

刚刚得知，高等数学的进度甚至没有到换元积分和分部积分法。因此这一小节就先不讲了。当大一下学期学到傅里叶级数时，希望大家回过头来看看线性代数讲义。傅里叶级数所做的是选定了三角函数系作为函数空间的一组基，然后把任意函数在这组基下展开。和幂级数基不同，三角函数基是正交的（应用第一小节的内积定义），性质比幂级数基好得多。

部分同学可能以后会学到数学物理方程这门课，在球坐标系下和柱坐标系下，我们所作的同样是选定正交归一的球谐函数系和贝塞尔函数系，来

对任意一个函数进行展开，以方便偏微分方程的求解。可见，线性空间的概念是如此之深刻。

4 向量与线性变换在不同基下的表示

通过前两节的论证，我们知道，向量和线性变换都是脱离基而存在于线性空间中的概念。在选定了某一组基后，向量可以用一个坐标列向量表示，线性变换可以用一个矩阵表示。线性变换作用在向量上，就相当于矩阵作用在坐标上。从而把对西瓜山竹猕猴桃多项式函数的运算，转化为了对数字的运算。那么，如果换一组基呢？这些表示方法会发生什么变化？

考虑这样一个问题：给定向量 $f(x)$ 在基 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ 下的坐标 $\boldsymbol{x}$，怎么求出 $f(x)$ 在基 $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ 下的坐标 $\boldsymbol{y}$？给定求导变换 $\mathscr{D}$ 在基 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}\}$ 下的矩阵 D，怎么求出 $f(x)$ 在基 $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ 下的矩阵 D'？答案是使用化归的思想。

4.1 基变换与坐标变换

对于第一个问题，我们已知

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

现在把 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 在基 $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ 下的表示方法都找出来，得到

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

以此类推

$$x^k = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ k! \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

接着把 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 的 n 个坐标作为列向量排成一个矩阵，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1! & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{bmatrix}$$

这有点像一个向量组在基 $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ 下的坐标。每个向量的坐标是一个 $n \times 1$ 的矩阵，向量组的坐标就是 $n \times n$ 的矩阵。且都可以表示为

$$\text{向量（组）} = \text{基} \times \text{坐标}$$

于是，就可以推得

$$\begin{aligned} f(x) &= [1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^{n-1}]\boldsymbol{x} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1! & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{34}$$

同时，若 $f(x)$ 在基 $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{y}$，则有

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{35}$$

对比两式，得到坐标变换关系

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1! & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{36}$$

实际操作中，我们定义该矩阵为从新基 $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \cdots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ 到老基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 的过渡矩阵 P^{-1}，而把从老基到新基的过渡矩阵定义为 P。从而

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} P^{-1} \tag{37}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix} P \tag{38}$$

这看似有些别扭，但符合逻辑顺序。过渡总是从旧到新过渡，因此从旧到新定义为 P，从新到旧定义为 P^{-1}。不过也用不着纠结，只需理解基变换矩阵就是一组基在另一组基下的“坐标”即可。

4.2 线性变换在不同基下的矩阵

作者太懒，看书自学。

现在我们有一组新基，一组旧基。一个脱离于基的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和一个脱离基的线性变换 $\mathscr{A}$，以及脱离基的变换后向量 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$。还有线性变换在旧基下的矩阵 A。目的是要找出线性变换在新基下的矩阵 B。

可以先把这一向量在旧基下的坐标 $\boldsymbol{x}$ 找出来，用 A 左乘坐标，得到 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 在旧基下的坐标 $A\boldsymbol{x}$。然后通过基变换下的坐标变换，$\boldsymbol{\alpha}$ 在新基下的坐标 $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{x}$ 在新基下的坐标为 $P^{-1}A\boldsymbol{x}$。然后 $\mathscr{A}$ 在新基下的矩阵就显然了。由此导出了相似关系。