积分变换

傅里叶(Fourier)变换

拉普拉斯(Laplace)变换

第一章 Fourier 变换

§1.1 Fourier 变换的概念

一、周期函数的 Fourier 级数

二、非周期函数的 Fourier 变换

一、周期函数的Fourier级数

1. 简谐波的基本概念 补

简谐波 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

$$= a\cdot\cos\omega_0 t + b\cdot\sin\omega_0 t$$

其中，A称为**振幅**，ω_0称为**角频率**，

θ称为**相位**，（$\theta = 0$ 称为**零相位**）。

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为基本**周期**;（单位：秒）

$F = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ 为**频率**。（单位：赫兹 Hz）

一、周期函数的Fourier级数

2. 正交函数系 补

函数系

$$\begin{cases} \varphi_0(t)=1 \\ \varphi_1(t)=\cos\omega_0 t \\ \varphi_2(t)=\cos 2\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \varphi_n(t)=\cos n\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_1(t)=\sin\omega_0 t \\ \psi_2(t)=\sin 2\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \psi_n(t)=\sin n\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{cases}$$

$$\{1, \cos\omega_0 t, \ \sin\omega_0 t, \ \cos 2\omega_0 t, \ \sin 2\omega_0 t, \ \cdots\ \cdots\}$$

一、周期函数的 Fourier 级数

2. 正交函数系

特点 (1) 周期性

$$\varphi_k(t+T)=\varphi_k(t),\quad k=0,1,2,\cdots\cdots$$

$$\psi_k(t+T)=\psi_k(t),\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

其中，$T=2\pi/\omega_0$.

(2) 正交性

$$\int_{-T/2}^{T/2}\varphi_m(t)\cdot\psi_n(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\varphi_k(t)\cdot\varphi_l(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\psi_k(t)\cdot\psi_l(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

$$(k\neq l)$$

- 由$\{\varphi_k(t)\},\{\psi_k(t)\}$组合叠加可以生成周期为 T 的复杂波。

一、周期函数的Fourier级数

2. 正交函数系

问题 对于任何一个周期为 T 的(复杂)函数 $f_T(t)$，能否：

$$f_T(t) \overset{?}{=} A_0\varphi_0(t)+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\varphi_n(t)+b_n\psi_n(t)$$

$$= A_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t$$

$$= A_0+\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n).$$

(Fourier级数的历史回顾)

一、周期函数的Fourier级数

3. Fourier级数的三角形式

定理（Dirichlet 定理）设$f_T(t)$是以T为周期的实值函数，且在区间$[-T/2, T/2]$上满足如下条件(称为Dirichlet 条件)：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点.

则在 $f_T(t)$ 的连续点处有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t), \qquad \text{(A)}$$

在 $f_T(t)$的间断处，上式左端为$\dfrac{1}{2}[f_T(t+0)+f_T(t-0)]$.

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的三角形式

定理 （Dirichlet 定理）

$$\boxed{f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),}\qquad \text{(A)}$$

其中，$a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t,\qquad n=1,2,\cdots$$

$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$，称之为**基频**。

定义 称 (A) 式为 Fourier 级数的三角形式。

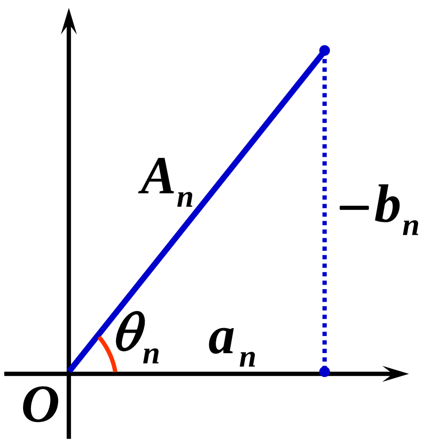
一、周期函数的Fourier级数

4. Fourier级数的物理含义

改写 $$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t),\qquad \text{(A)}$$

令 $$A_0=\frac{a_0}{2},\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

$$\cos\theta_n=\frac{a_n}{A_n},\quad \sin\theta_n=\frac{-b_n}{A_n},$$



则 (A) 式变为

$$f_T(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$$

一、周期函数的Fourier级数

4. Fourier级数的物理含义

$$f_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

表明 周期信号可以分解为一系列**固定频率**的简谐波之和，这些简谐波的(角)频率分别为一个基频 ω_0 的倍数。

意义 认为 “**一个周期为 T 的周期信号 $f_T(t)$ 并不包含所有的频率成份，其频率是以基频 ω_0 为间隔离散取值的.**”

- **这是周期信号的一个非常重要的特点。**

一、周期函数的 Fourier 级数

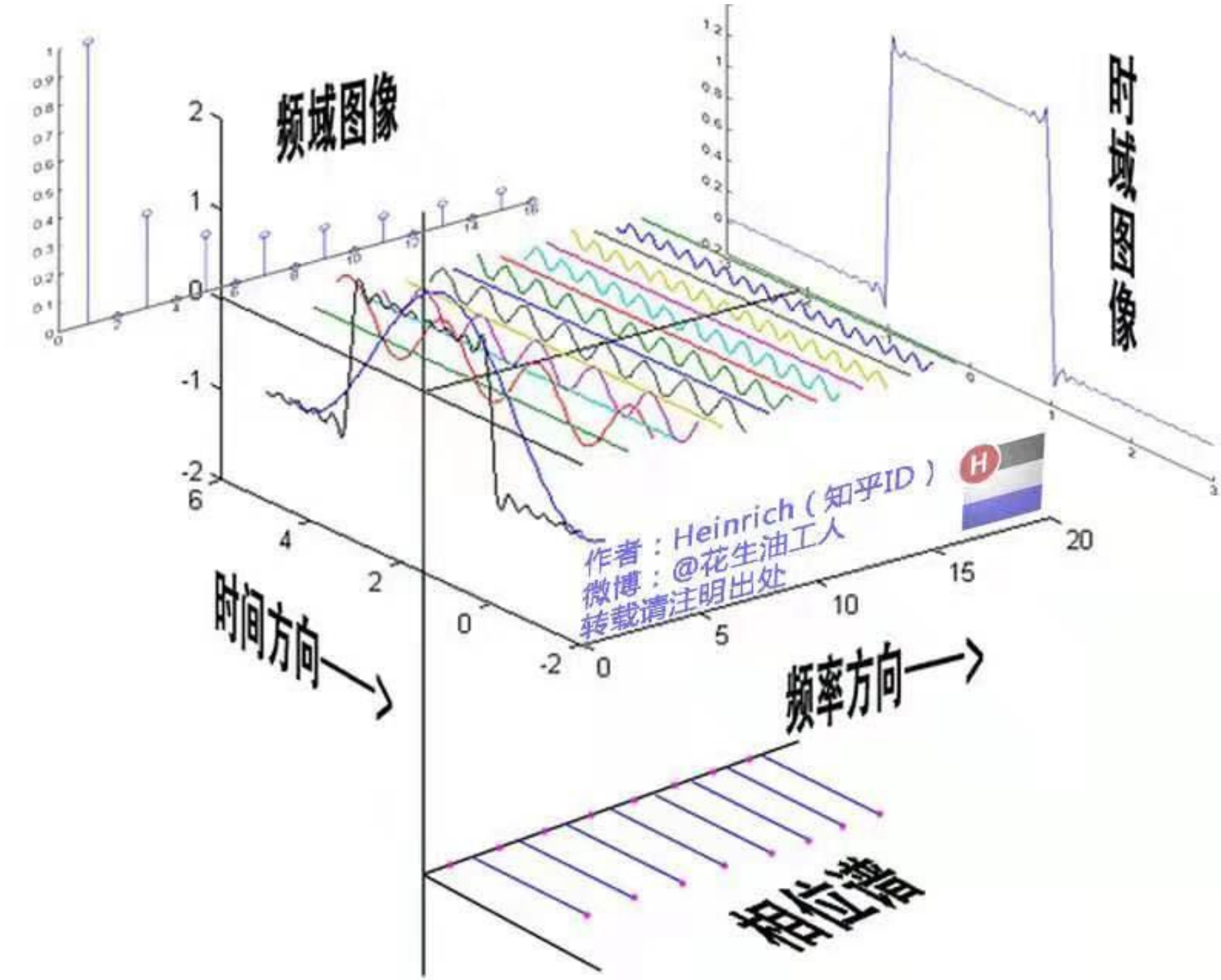
4. Fourier 级数的物理含义

$$f_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

振幅A_n 反映了频率为 $n\omega_0$ 的简谐波在信号 $f_T(t)$ 中所占有的份额；

相位θ_n 反映了在信号 $f_T(t)$ 中频率为$n\omega_0$的简谐波沿时间轴移动的大小。

- 这两个指标完全定量地刻画了信号的频率特性。



频域图像
时域图像
时间方向—>
频率方向—>
相位谱
作者：Heinrich（知乎ID）
微博：@花生油工人
转载请注明出处

一、周期函数的Fourier级数

5. Fourier级数的指数形式

推导 已知 $f_T(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$, **(A)**

根据 Euler 公式 $e^{jn\omega_0 t}=\cos n\omega_0 t+j\sin n\omega_0 t$, $(j=\sqrt{-1})$

可得 $\cos n\omega_0 t=\dfrac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2}$, $\sin n\omega_0 t=\dfrac{-je^{jn\omega_0 t}+je^{-jn\omega_0 t}}{2}$

代入 **(A)** 式并整理得

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\right).$$

一、周期函数的Fourier级数

5. Fourier级数的指数形式

推导 $$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\right).$$

令 $c_0=\dfrac{a_0}{2}$， $c_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$， $c_{-n}=\dfrac{a_n+jb_n}{2}$， 则有

$$\boxed{f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{jn\omega_0 t},}\qquad \text{(B)}$$

其中，$c_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$， $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

定义 称 (B) 式为 **Fourier级数的指数形式**。

一、周期函数的 Fourier 级数

5. Fourier 级数的指数形式

注意 (1) 分解式是惟一的。

(2) 计算系数 c_n 时，其中的积分可以在任意一个长度为 T 的区间上进行。

(3) 采用周期延拓技术，可以将结论应用到仅仅定义在某个有限区间上的函数。

一、周期函数的Fourier级数

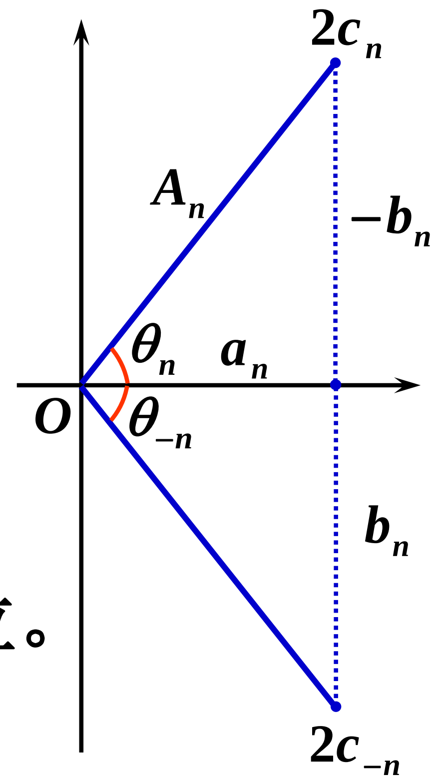
6. 离散频谱与频谱图

分析 由 $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$, $c_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2}$,

得 $c_0 = A_0$, $|c_n| = |c_{-n}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \dfrac{A_n}{2}$,

$$\arg c_n = -\arg c_{-n} = \theta_n, \quad (n > 0).$$

即 c_n 的模与辐角正好是振幅和相位。



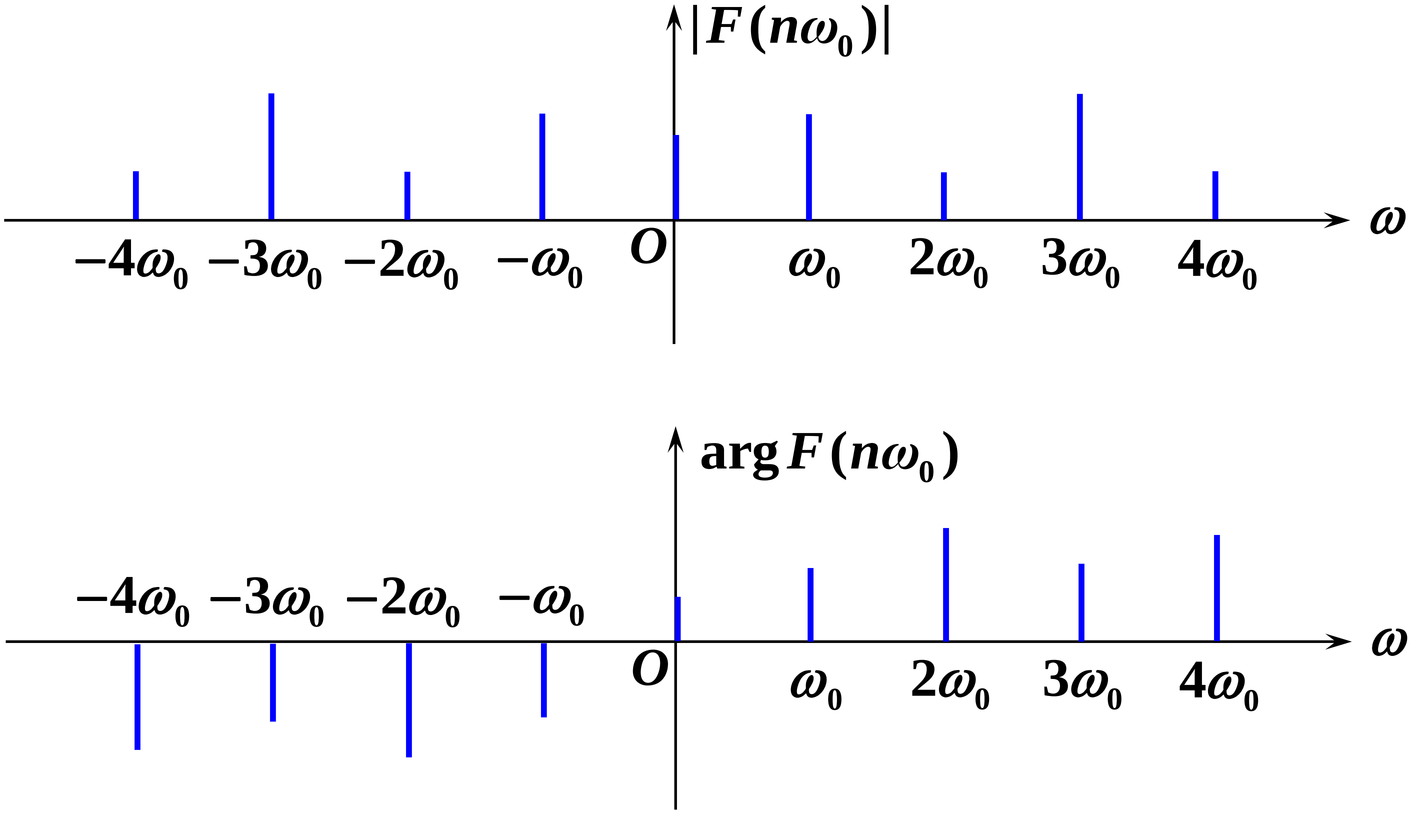
定义 称 $|c_n|$ 为**振幅谱**，称 $\arg c_n$ 为**相位谱**；

称 c_n 为**频谱**，记为 $F(n\omega_0) = c_n$.

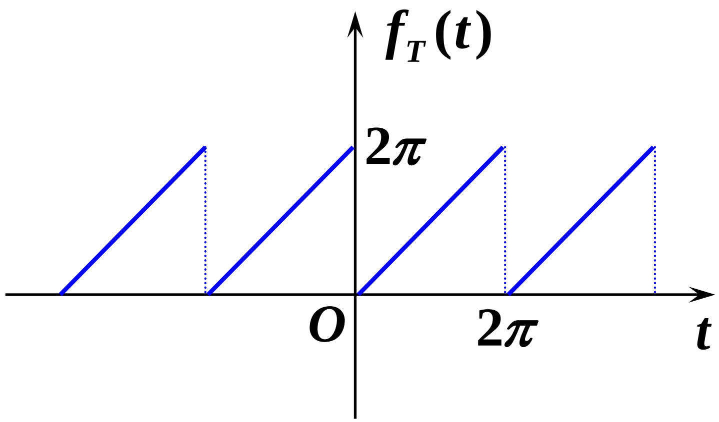
一、周期函数的 Fourier 级数

6. 离散频谱与频谱图

频谱图 将振幅 $|c_n|$、相位 $\arg c_n$ 与频率 $n\omega_0$ 的关系画成图形。



例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$. 求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式.



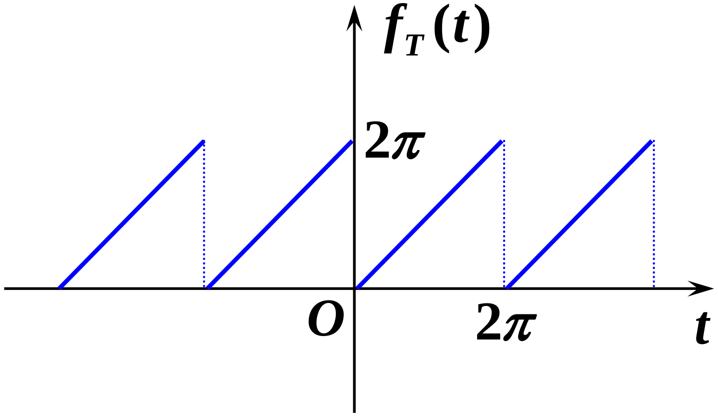
解 基频 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=1.$

(1) 当 $n=0$ 时,

$$c_0=F(0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f_T(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t\,\mathrm{d}t=\pi.$$

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$. 求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式.



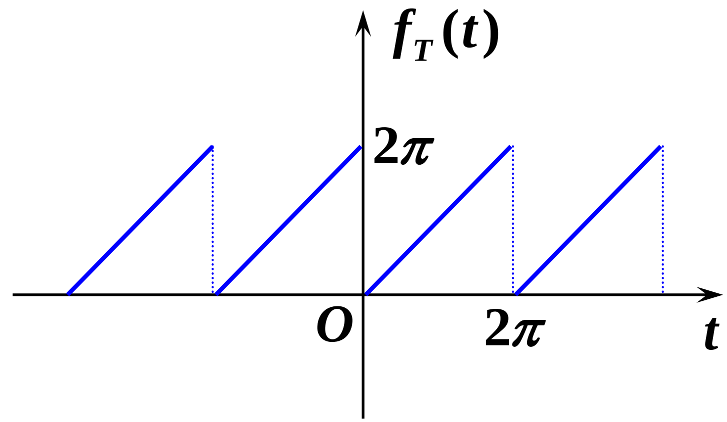
解 (2)当 $n\neq 0$ 时，

$$c_n = F(n\omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{e}^{-jnt}\mathrm{d}t = \frac{1}{-2n\pi j}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-jnt}$$

$$= \frac{1}{-2n\pi j}t\,\mathrm{e}^{-jnt}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2n\pi j}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-jnt}\mathrm{d}t = \frac{j}{n}.$$

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$. 求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式.

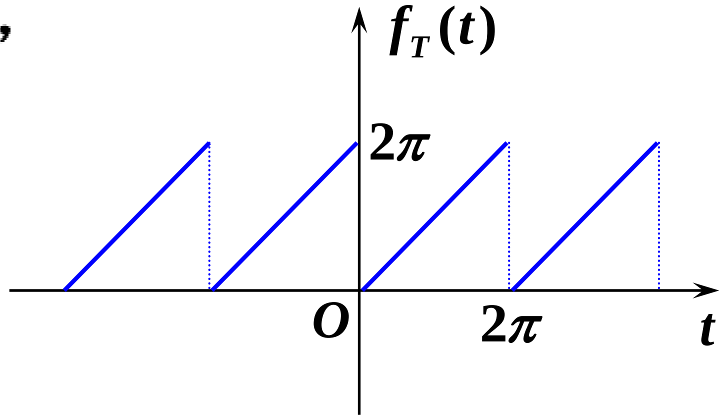


解 (3) $f_T(t)$ 的Fourier 级数为 $f_T(t)=\pi+\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\dfrac{j}{n}e^{jnt}$.

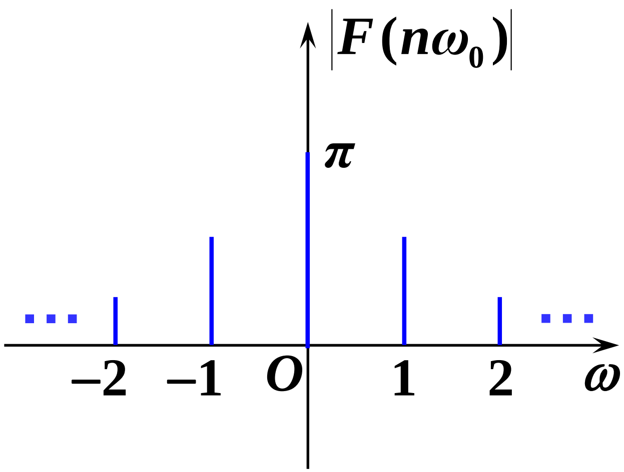
(4) 振幅谱为 $|F(n\omega_0)|=\begin{cases}\pi, & n=0, \\ 1/|n|, & n\neq 0.\end{cases}$

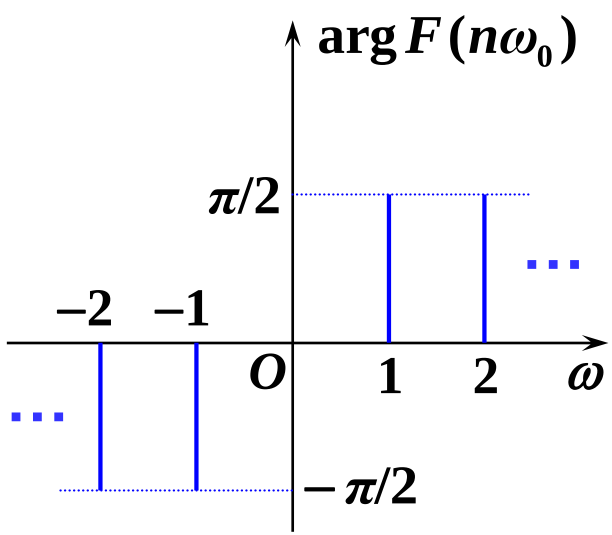
相位谱为 $\arg F(n\omega_0)=\begin{cases}0, & n=0, \\ \pi/2, & n>0, \\ -\pi/2, & n<0.\end{cases}$

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$. 求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式.



解 (5) 频谱图如下图所示。





二、非周期函数的傅立叶变换

借助 **Fourier** 级数展开，使得人们能够完全了解一个信号的频率特性，从而认清了一个信号的本质，这种对信号的分析手段也称为**频谱分析**(或者**谐波分析**)。

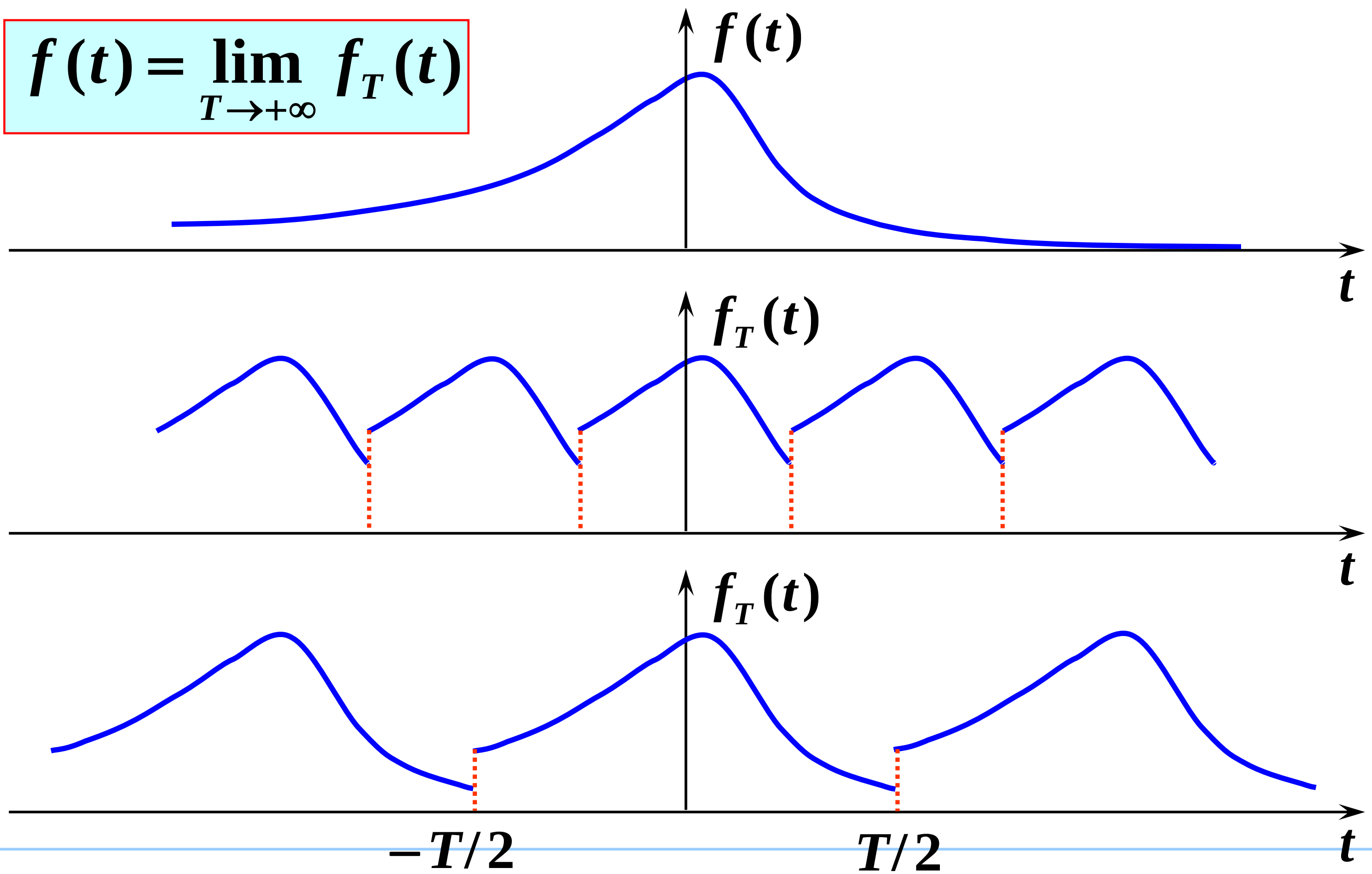
但是，**Fourier** 级数要求被展开的函数必须是周期函数，而在工程实际问题中，大量遇到的是非周期函数，那么，对一个非周期函数是否也能进行频谱分析呢?

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(1) 非周期函数可以看成是一个周期为无穷大的“周期函数”。

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)$$



二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(2) 当 $T \to +\infty$时，**频率特性**发生了什么变化?

分析 Fourier 级数表明周期函数仅包含离散的频率成份,其频谱是以$\omega_0 = 2\pi/T$ 为间隔离散取值的。

当 T 越来越大时，取值间隔越来越小；

当 T 趋于无穷时，取值间隔趋向于零，

即频谱将连续取值。

因此，一个非周期函数将包含所有的频率成份。

结论 离散频谱变成连续频谱。

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(3) 当 $T \to +\infty$ 时，级数求和发生了什么变化?

分析 $f(t) = \lim\limits_{T \to +\infty} f_T(t) = \lim\limits_{T \to +\infty} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$

$$= \lim_{T \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \mathrm{e}^{-jn\omega_0 t} \mathrm{d}t\right] \mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$$

将间隔ω_0记为$\Delta\omega$，节点$n\omega_0$记为ω_n，

并由$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$ 得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{\left[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t) \mathrm{e}^{-j\omega_n t} \mathrm{d}t\right] \mathrm{e}^{j\omega_n t}} \Delta\omega \qquad \text{(C)}$$

二、非周期函数的傅立叶变换

1. 简单分析

(3) 当 $T \to +\infty$ 时，级数求和发生了什么变化?

分析 记 $g_T(\omega)=[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{j\omega t}$，则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_T(\omega_n)\Delta\omega$$

按照积分定义，在一定条件下，(C) 式可写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

结论 级数求和变成函数积分。

二、非周期函数的傅立叶变换

2. Fourier 积分公式

定理 设函数$f(t)$满足

(1) 在$(-\infty,+\infty)$上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件;

(2) 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$.

则在 $f(t)$的连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad \text{(D)}$$

在 $f(t)$的间断处，公式的左端应为$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

定义 称 (D) 式为 Fourier 积分公式(复数形式)。

二、非周期函数的傅立叶变换

3. Fourier变换的定义

定义 (1) Fourier 正变换(简称**傅氏正变换**)

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\mathscr{F}[f(t)]$$

(2) Fourier 逆变换(简称**傅氏逆变换**)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

其中，$F(\omega)$称为**象函数**，$f(t)$ 称为**象原函数**.

$f(t)$与$F(\omega)$称为**傅氏变换对**，记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

注 **上述变换中的广义积分为柯西主值。**

二、非周期函数的傅立叶变换

4. Fourier 变换的物理意义

与 Fourier 级数的物理意义一样，Fourier 变换同样刻画了一个非周期函数的频谱特性，不同的是，非周期函数的频谱是连续取值的。

$F(\omega)$ 反映的是 $f(t)$ 中各频率分量的分布密度，它一般为复值函数，故可表示为

$$F(\omega)=|F(\omega)|\,\mathrm{e}^{j\arg F(\omega)}.$$

定义 称 $F(\omega)$ 为<u>**频谱密度函数**</u>(简称为<u>**连续频谱**或者**频谱**</u>)；

称 $|F(\omega)|$ 为<u>**振幅谱**</u>；称 $\arg F(\omega)$ 为<u>**相位谱**</u>。

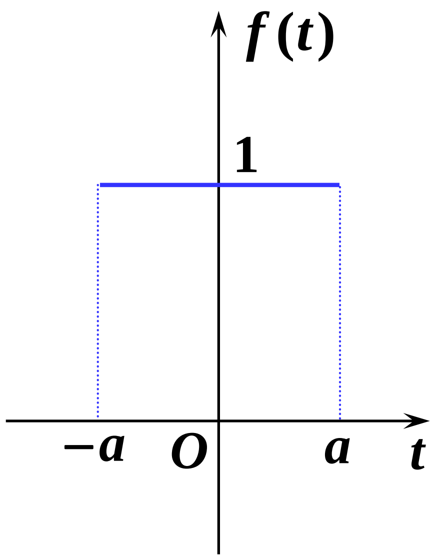
例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的 Fourier 变换及 Fourier 积分表达式。

解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{-j\omega}\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{a}$$

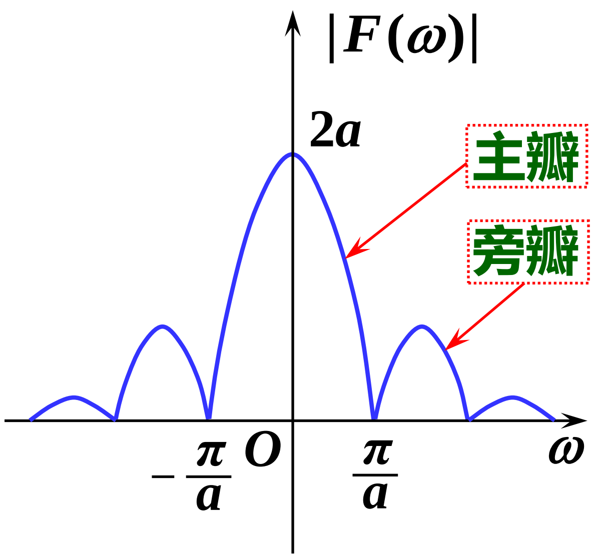
$$=\frac{1}{-j\omega}(\mathrm{e}^{-ja\omega}-\mathrm{e}^{ja\omega})$$

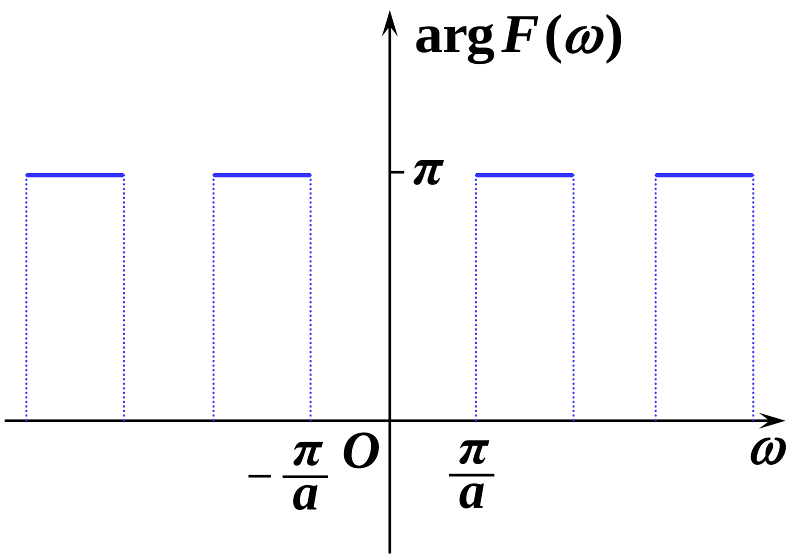
$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{(\mathrm{e}^{-ja\omega}-\mathrm{e}^{ja\omega})}{-2j}=2a\frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$



解 (2) 振幅谱为 $|F(\omega)| = 2a\left|\dfrac{\sin a\omega}{a\omega}\right|$

相位谱为 $\arg F(\omega) = \begin{cases} 0, & \dfrac{2n\pi}{a} \le |\omega| \le \dfrac{(2n+1)\pi}{a} \\ \pi, & \dfrac{(2n+1)\pi}{a} < |\omega| < \dfrac{(2n+2)\pi}{a} \end{cases}$





解 (3) 求 Fourier 逆变换，即可得到的 Fourier 积分表达式。

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega=\begin{cases}1, & |t|<a,\\ 1/2, & |t|=a,\\ 0, & |t|>a.\end{cases}$$

注 在上式中令 $t=0$, 可得重要积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\pi,\ (a>0).$$

注 在上式中令 $t=0$，可得重要积分公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \mathrm{d}x = \pi, \ (a>0).$$

一般地，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -\pi, & a<0. \end{cases}$$

特别地，有

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$ 狄利克雷(Dirichlet)积分公式

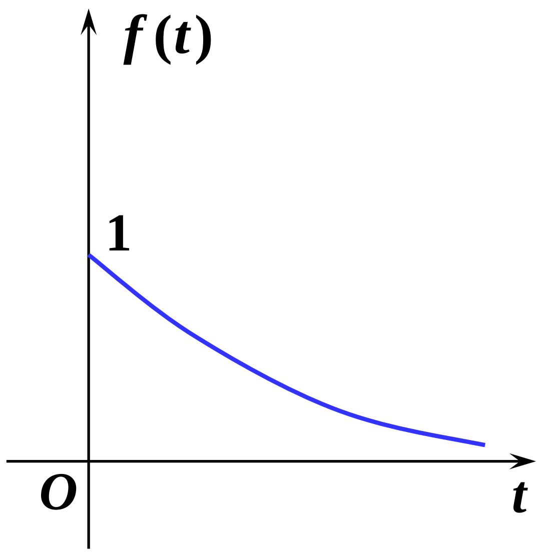
例 求单边衰减指数函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$ $(\alpha>0)$ 的 Fourier 变换，并画出频谱图。

解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} \mathrm{d}t$$

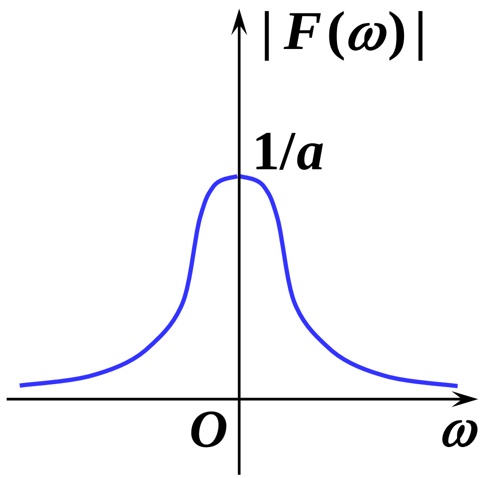
$$=\frac{1}{-(\alpha+j\omega)} e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

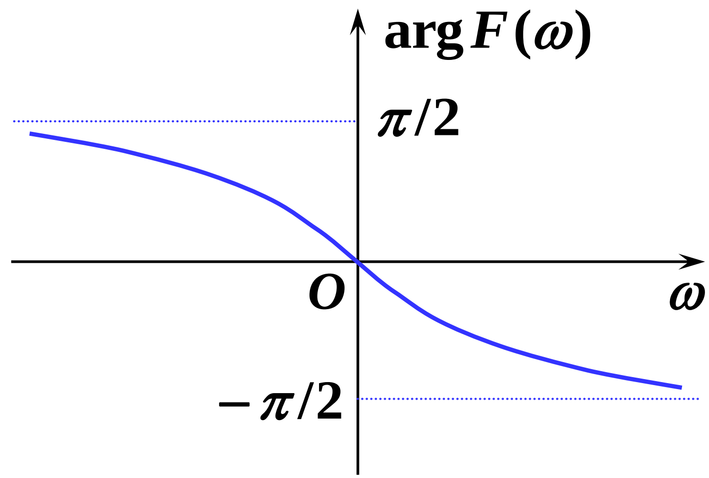
$$=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{\alpha-j\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$



解 (2)振幅谱为 $|F(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$;

相位谱为 $\arg F(\omega) = -\arctan(\omega/\alpha)$.

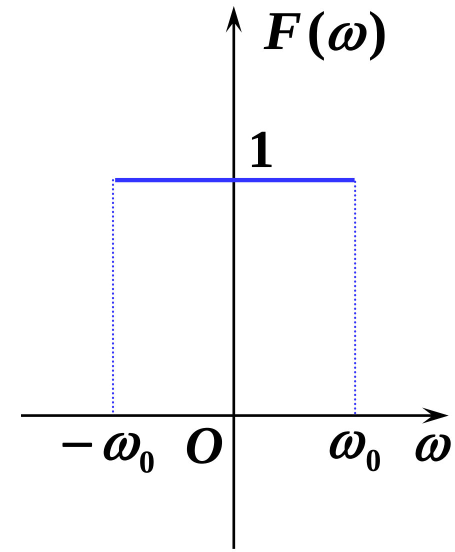




例 已知 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\omega_0\\ 0, & |\omega|>\omega_0\end{cases}$ $(\omega_0>0)$，求 $f(t)$.

解 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}e^{j\omega t}d\omega$$



$$=\frac{1}{2\pi jt}e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_0}^{\omega_0}=\frac{1}{\pi t}\cdot\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

$$=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}=\frac{\omega_0}{\pi}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}\right)=\frac{\omega_0}{\pi}\underline{S_a(\omega_0 t)}.$$

(?)

(关于抽样信号)

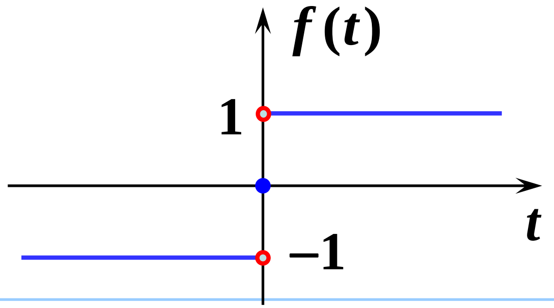
例　已知 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$，求 $f(t)$.

解 $$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{j\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{j\sin\omega t}{j\omega}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{j\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}\overset{\text{记为}}{=\!=\!=}\ \operatorname{sgn} t.$$

$$\boxed{\operatorname{sgn} t\longleftrightarrow\frac{2}{j\omega}.}$$



三、Fourier积分公式的三角形式及Fourier正余弦变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$$ 欧拉公式

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]\mathrm{d}\omega$$ 奇偶性

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]\mathrm{d}\omega$$ 奇偶性

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]\mathrm{d}\omega}\qquad \textbf{(E)}$$

定义 称 **(E)** 式为 **Fourier 积分公式(三角形式)**。

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]\mathrm{d}\omega$$ **(E)**

若 $f(t)$ 是 奇函数：

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

Fourier 正弦积分公式

$$F_s(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

Fourier 正弦变换

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t d\omega$$

Fourier 正弦逆变换

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]\mathrm{d}\omega}$$ **(E)**

若$f(t)$是 偶函数:

$$\boxed{f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega}$$

Fourier 余弦积分公式

$$\boxed{F_c(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau}$$

Fourier 余弦变换

$$\boxed{f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t d\omega}$$

Fourier 余弦逆变换