彭·线代

期末试题集

（2021版）

彭康书院学业辅导与发展中心

2020 年线性代数期末试题

一、单选题

1.设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得矩阵 B，再把 B 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得矩阵 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　）

A. $C=P^{-1}AP$　　B. $C=PAP^{-1}$　　C. $C=P^{T}AP$　　D. $C=PAP^{T}$

2.设矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\1&2&3\end{pmatrix}$ 可逆，则直线 $\dfrac{x-1}{a_1-a_2}=\dfrac{y-2}{b_1-b_2}=\dfrac{z-3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-1}=\dfrac{y-b_1}{b_2-2}=\dfrac{z-c_1}{c_2-3}$（　　）

A.相交于一点　　B.重合　　C.平行但不重合　　D. 异面

3.设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，若 $BA=I$ 是单位矩阵，则（　　）

A. $r(A)=m,r(B)=m$　　B. $r(A)=m,r(B)=n$　　C. $r(A)=n,r(B)=m$　　D. $r(A)=n,r(B)=n$

4. 设 A 是 3 阶方阵，α_1,α_2 为属于特征值 1 的线性无关的特征向量，α_3 为属于特征值为-1 的特征向量，若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 P 可以取为（　　）

A. $(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$　　B. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$　　C. $(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$　　D. $(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$

5.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）

A.2，0　　B.1，1　　C. 2，1　　D. 1，2

二、填空题

1.设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为 3 阶矩阵. 若 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为________________.

2.设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则行列式 $\begin{vmatrix}O&2A\\A^*&O\end{vmatrix}=$________________.

3.在全体 2 阶实矩阵所构成的实线性空间 $R^{2\times2}$ 中，$\begin{pmatrix}10&9\\7&4\end{pmatrix}$ 在基 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 下的坐标为________________.

4.设 3 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的各行元之和均为 6，$|A|=2$，则 A^* 第一行元之和为____________.

5.设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+A=2I$，且 $|A|=4$，则 $\det(A+3I)=$____________.

三、解答题

1.求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ 的所有的极大无关组.

2.已知直线l的方程为$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.求直线$l$绕$y$轴旋转一周所得曲面的方程，并指出方程表示什么二次曲面.

3. (1)设$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\3&6&3\end{pmatrix}$，写出两个列矩阵$\alpha,\beta$使得$A=\alpha\beta^T$；

(2)如果n阶矩阵A的秩为r，证明存在秩为r的n阶矩阵B,C使得$A=BC$.

4.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R^3$线性无关，矩阵$A=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1)$， $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

(1)写出矩阵B与γ使得$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B,\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\gamma$；

(2)求线性方程组$AX=B$的通解.

5.设$T \in L(R^3), T(\alpha_1) = (-5,0,3)^T, T(\alpha_2) = (0,-1,6)^T, T(\alpha_3) = (-5,-1,9)^T$.
其中$\alpha_1 = (2,1,-1)^T, \alpha_2 = (2,-1,2)^T, \alpha_3 = (3,0,1)^T$ ，求T在基$\varepsilon_1 = (1,0,1)^T, \varepsilon_2 = (0,1,0)^T, \varepsilon_3 = (0,0,1)^T$ 下的矩阵.

6.设 3 阶实对称矩阵A各行元之和为 6，且其伴随矩阵A^*为零矩阵.

(1)求A的秩$r(A)$;

(2)求A的全部特征值;

(3)求A.

7.设n阶方阵A满足$A^2=A$，I是n阶单位矩阵.证明:

(1) $r(A)+r(A-I)=n$；

(2) A可以相似对角化;

(3) $r(A)=\mathrm{tr}(A)$，其中$\mathrm{tr}(A)$表示A的对角元之和.

8. (1)设向量组(I): $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$与向量组(II): $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$的秩相等，并设(II)可由(I)线性表示，试证明(I)与(II)等价;

(2)设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times s$矩阵，且$r(A)=r(AB)$，试证明存在$s\times n$矩阵C，使$A=ABC$.

2019年线性代数期末试题

一、填空题（每题3分，共30分）

1. 设$\alpha=(-1,2),\beta=(3,1)$,则$\alpha\beta^T=$_____,$\alpha^T\beta=$_____,$(\alpha^T\beta)^{99}=$_____.

2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&1\\1&3&0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&5&6\\0&0&0\end{pmatrix}$,则行列式$|AB^{-1}|=$_____.

3. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,如果$\alpha_1+\alpha_2,k\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关,则k=______.

4. 设矩阵A以及$A+I$均可逆,其中I为单位矩阵,记$G=I-(A+I)^{-1}$,则$G^{-1}=$_____.

5. 过四点$A(-1,0,1),B(-2,1,4),C(1,3,-3),D(0,1,-1)$空间四面体ABCD的体积为=______.

6. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$,其中列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关,$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$,则齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系为______.

7. 设3阶方阵A满足$I-A,2I-A,3I+A$都不可逆，则A与对角阵______相似.

8. 由向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$生成的$R^3$的子空间的标准正交基为______.

9. 直线L:$x-1=y=z$绕Z轴旋转所形成的旋转曲面的方程为______.

10. 设n阶实对称幂等矩阵A(满足$A^2=A$)的秩为r,则det($I+A+A^2+\cdots+A^n$)=______.

二（8分）计算阶行列式$\begin{vmatrix}1&1&1+x&1\\1&1&1&1+x\\1-x&1&1&1\\1&1-x&1&1\end{vmatrix}$.

三（8 分）求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\7\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\\-9\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-4\\-7\\1\end{pmatrix}$的极大线性无关组，并将其余的向量用所求得的极大线性无关组线性表示.

四（8 分）设$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&2&-1\end{pmatrix}$，求矩阵方程$XA=2X+B$的解.

五（8 分）已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为：$\pi_1: x+y+2z=1$
$\pi_2: x+\lambda y+z=2, \pi_3: \lambda x+y+z=1+\lambda.$

（1）当λ取何值时候，这三个平面交于一点？交于一条直线？没有公共交点？

（2）当它们交于一条直线时，求直线的方程.

六（8 分）设 T 为$F[x]_2$上的线性算子，T 在基$\{x^2, x, 1\}$下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

（1）求 T 在基$\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$下的矩阵.

（2）求$T(3x^2-2x+1)$.

七（10 分）已知矩阵$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$有一个二重特征值.

（1）求 a 的值，并讨论 A 是否相似于对角阵.

（2）如果 A 相似于对角阵，求可逆矩阵 P，使得$P^{-1}AP = \Lambda$是对角阵.

八（10 分）设二次型$f(x_1,x_1,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3+kx_3^2, g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$.

（1）求可逆变换$x=Py$将f化成标准型.

（2）问：k满足什么条件时，存在可逆线性变换将f化成g.

九（10 分）证明题

1. 设 A 为 n 阶矩阵，证明存在幂等矩阵 F(即$F^2=F$)及可逆矩阵 U，使得 A=FU.
2. 设 A 既是正交矩阵又是正定矩阵，证明 A=I。

2018 年线性代数期末试题

一、单选题

1. 设有非零多项式 $f(x)=\begin{bmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{bmatrix}$，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为实常数，则多项式 $f(x)$ 的次数为（　　）

A. 3 次　　B. 2 次　　C. 1 次　　D. ≤ 1 次

2. 下列矩阵中不是初等矩阵的是（　　）

A. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则该方程组的基础解系还有（　　）

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$

B. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

C. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

D. $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

4. 在欧式空间 R^3 中，下述哪个集合可构成 R^3 的子空间（　　）

A. $W_1=\left\{(x,y,z)^T\in R^3 \,\middle|\, x=y=z+1\right\}$

B. $W_2=\left\{(x,y,z)^T\in R^3 \,\middle|\, x-y+z=0\right\}$

C. $W_3=\left\{(x,y,z)^T\in R^3 \,\middle|\, x^2-y^2=z\right\}$

D. $W_4=\left\{(x,y,z)^T\in R^3 \,\middle|\, x+y+z=0\text{或}x=y\right\}$

5. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，则下列正确的答案是（　　）

A. A 与 B 相似且等价

B. A 与 B 不相似但等价

C. A 与 B 相似但不等价

D. A 与 B 不相似且不等价

二、填空题

1. 设 A 为 $n(n>1)$ 阶方阵，$\det(A)=5$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $\det\left[(A^*)^{-1}-A\right]=$________________.

2. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 $1,2,2$，且不能与对角矩阵相似，则 $r(2E-A)=$________________.

3. 设 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解向量 η_1,η_2 满足 $\eta_1+2\eta_2=(1,0,1)^T$，$\eta_2+\eta_1=(2,-2,1)^T$，且 $r(A)=2$，则该方程组的通解是________________________________.

4. 已知空间曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$，则曲线 C 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面方程为________________.

（注意：学习了第八章线性变换者做第 6 题，其余同学做第 5 题）

5. 设 $R[x]_3$（次数不超过 3 的一元实系数多项式全体并上零多项式按通常多项式的加法和实数与多项式的乘法作为数乘构成的实线性空间）的内积为 $\langle f,g\rangle=\int_0^{2018}f(x)g(x)dx$，又设 $W=\left\{k_1(1+x)+k_2\in R[x]_3 \middle| k_1,k_2\in R\right\}$，则 $R[x]_3$ 的子空间 W 的一个标准正交基为__________________.

6. 设 T 为 2 维线性空间 V 上的一个线性变换，T 在 V 的基 α_1，α_2 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，且由基 α_1,α_2 到基 β_1,β_2 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，则 T 在 V 的基 β_1,β_2 下的矩阵为____________________________.

三、解答题

1. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+x & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+x & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+x\end{vmatrix}$，其中 $a_1,\cdots,a_n$， x 为任意实常数.

2. λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+(\lambda+3)x_2+x_3=-2\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$，有唯一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时，求结构式通解.

3. R^3中有一直线L过点$P(1,2,3)$且垂直于平面$x+2y+3z=4$.

（1）求此直线L的直线方程.

（2）证明过此直线L的平面都垂直于平面$x+2y+3z=4$.

（3）求此直线L绕z轴旋转所得旋转面的曲面方程.

4. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2tx_2x_3+x_3^2$.

（1）问t取何值时，该二次型是正定的.

（2）取$t=1$，试用正交变换化相应的二次型为标准形，并写出所用的正交变换.

（3）$t=1$时，$f=1$表示何种二次曲面？

5. 设α_1和α_2分别是n阶方阵A对应特征值λ_1和λ_2的特征向量，且已知$\lambda_1\neq\lambda_2$，试证明：向量$\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量.

6. 设A，B是两个n阶实方阵，$M=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$是一个分块矩阵，试证明：$r(M)=r(A+B)+r(A-B)$.

7. 设A为$n(n>1)$阶实方阵，且$\det(A)=0$，证明：A的伴随矩阵A^*的非零特征值（若存在）等于$\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$，其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式.

2017 年线性代数期末试题

一、单选题

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则（　　）

A. $AP_1P_2=B$　　B. $AP_2P_1=B$　　C. $P_1P_2A=B$　　D. $P_2P_1A=B$

2. 设 n 阶方阵 A 经过有限次初等变换后得到矩阵 B，则（　　）

A. $|A|=|B|$　　B. 方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

C. A 与 B^T 等价　　D. 一定存在初等矩阵 P，Q，使得 $A=PBQ$

3. 设 $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次方程组，则（　　）

A. 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解

B. 若 $Ax=0$ 只有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解

C. 若 $Ax=0$ 有无穷多解，则 $Ax=b$ 只有零解

D. 若 $Ax=0$ 有无穷多解，则 $Ax=b$ 有非零解

4. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & x \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$，$A$ 有特征值 $\lambda_1=6, \lambda_2=\lambda_3=2$，且 A 有 3 个线性无关的特征向量，则 x 等于（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

5. 设 n 维向量组 β_1，β_2，β_3 可由 α_1，α_2 线性表示，则（　　）

A. 仅当 α_1，α_2 线性无关时，β_1，β_2，β_3 线性无关

B. 仅当 α_1，α_2 线性相关时，β_1，β_2，β_3 线性相关

C. β_1，β_2，β_3 线性无关

D. β_1，β_2，β_3 线性相关

二、填空题

1. 设 A 为 3 阶方阵，且 $|A-2I|=|A+I|=|2A-I|=0$，则 $|A^*|=$______________.

2. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2-2A+3I=0$，则 $A^{-1}=$_______________.

3. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $t=$ ______.

4. 二次曲面 $x^2+2y^2-2xy=1$ 在 R^3 中表示的图形是__________柱面.

5. 已知 R^3 中向量满足 $|a|=|b|=2$，$\langle a,b\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，则 $|2a-3b|=$ _______.

三、解答题

1. 求过点 $A(-3,0,1)$ 且与平面 π_1：$3x-4y-z+5=0$ 平行，与直线 l_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 相交的直线 l 的方程.

2. 已知 α_1，α_2，α_3 线性无关，证明 $\alpha_1+\alpha_2$，$3\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$ 线性无关.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，且线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

（1）求参数 λ，a 的值.　　（2）求方程组 $Ax=b$ 的通解.

4. 设 3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i\ (i=1,2,3)$，其中 $\alpha_1=(1,2,2)^T$，$\alpha_2=(2,-2,1)^T$，$\alpha_3=(-2,-1,2)^T$，求矩阵 A.

5. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$.

（1）若此二次型正定，求参数 a 的范围.

（2）若此二次型通过正交变换化成标准型方程为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 的取值及所用的正交变换.

6. 学习了第八章线性变换的同学做题一，其余同学做题二.

题一：设 $T\in L(V)$，T 在 V 的基 α_1，α_2，α_3 下的矩阵 $A=\begin{bmatrix}15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & -6\end{bmatrix}$.

（1）证明 $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 也是 V 的基.

（2）求 T 在基 β_1，β_2，β_3 下的矩阵.

题二：设线性空间 $f[x]_2$ 有两个基（I）$1,x,x^2$；（II）$x^2+x,x^2-x,x+1$.

（1）求由基（I）到基（II）的过渡矩阵.

（2）求 $f=4x^2+4x+2$ 在基（II）下的坐标.

7. 设 A，B 均为 n 阶矩阵，A 有 n 个不同的特征值，证明：

（1）若 $AB=BA$，则 B 相似于对角矩阵.

（2）若 A 的特征向量也是 B 的特征向量，则 $AB=BA$.

2016年线性代数期末试题

一、单选题

1. 设A和B均为n阶方阵，$\det(A)=a,\det(B)=b$,又设A^*、B^*分别为A、B的伴随矩阵，则$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$的伴随矩阵为（　　）

A. $\begin{bmatrix} aA^* & O \\ O & bB^* \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} bA^* & O \\ O & aB^* \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} bB^* & O \\ O & aA^* \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} aB^* & O \\ O & bA^* \end{bmatrix}$

2. 设A为3阶矩阵，将A的第2列加到第1列得矩阵B，再交换B的第2行和第3行得单位矩阵，记$P_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则$A$=（　　）

A. P_1P_2　　B. $P_1^{-1}P_2$　　C. P_2P_1　　D. $P_2P_1^{-1}$

3. 已知齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系为$(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$，则$A=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4]$的列向量组的一个极大线性无关组是（　　）

A. α_1,α_2　　B. α_2,α_3　　C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　D. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

4. 设A是n阶实对称矩阵，P是n阶可逆矩阵，n维列向量α是A的属于特征值λ的特征向量．则矩阵$(P^{-1}AP)^T$属于特征值λ的特征向量是（　　）

A. $P^{-1}\alpha$　　B. $P\alpha$　　C. $P^T\alpha$　　D. $(P^{-1})^T\alpha$

5. 设$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，则下列正确的答案是（　　）

A. A与B相似且合同　　B. A与B不相似但合同

C. A与B相似但不合同　　D. A与B不相似且不合同

二、填空题

1. 设A为n阶方阵，$\det(A)=5$，A^*为A的伴随矩阵，则$\det\left[A^*-\left(\frac{1}{10}A\right)^{-1}\right]=$______________.

2. 设方阵A满足$A^3=O$，则$(A^2+2A+4I)^{-1}=$______________.

3. 三元非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量η_1,η_2,η_3满足$\eta_1+2\eta_2=(3,0,-6)^T,2\eta_2+\eta_3=(2,-2,-3)^T$且$r(A)=2$．则该方程组的通解是____________________.

4. 已知空间曲线C:$\begin{cases} 3y^2+4z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$，则以$C$为准线、母线方向为$\vec{a}=(1,0,1)$的柱面方程为____________________；以C为准线、顶点为$P_0(1,0,0)$的锥面方程为____________________；曲线C绕z轴旋转所得的旋转面方程为____________________.

5. 设$R[x]_2$(次数不超过2的一元实系数多项式全体按通常多项式的加法和数与多项式的乘法构成的实线性空间)的内积为$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，则$R[x]_2$的一个正交基为____________________.

三、解答题

1. 计算n阶行列式：$D_n=\begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+a & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+a & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+a \end{vmatrix}$.

2. 设$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，且$A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=2A^{-1}X+I$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$I$是 3 阶单位矩阵，求矩阵$X$.

3. 当λ取何值时，线性方程组$\begin{cases} (2\lambda-2)x_1-x_2+(\lambda-2)x_3=2\lambda-1 \\ 3x_1+(1-\lambda)x_2+3x_3=-\lambda \\ (\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda \end{cases}$有惟一解、无解、无穷多解?在有无穷多解时，求结构式通解.

4. 设α_1,α_2分别是n阶方阵A对应特征值 1 和 2 的特征向量，又设向量α_3满足$A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$，证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

5. 一直线过点 $P(1,2,3)$且同时平行于 $x+2y+3z=4$ 和 $2x+3y+4z=5$ 两个平面.

（1）求此直线方程；

（2）求原点到此直线的距离；

（3）求此直线绕 z 轴旋转所得旋转面的方程.

6. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2tx_1x_3+4x_2x_3$.

（1）问 t 取何值时，该二次型是正定的.

（2）取 $t=0$，试用正交变换化相应的二次型为标准形，并写出所用的正交变换.

（3）$t=0$时，$f=1$表示何种二次曲面?

7. 设 A 为 $m\times n$ 的实矩阵，证明 $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{r}\left(A\right)$.

2015 年线性代数期末试题

一、填空题

1. 原点到平面 $2x+2y-z=2$ 的距离 $d=$________.

2. 设 A 为三阶矩阵，$\left|A^{-1}\right|=2$，A^*为 A 的伴随阵，则 $\left|3A^*\right|=$________.

3. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 的解空间的维数为________.

4. 设 $x\neq 0$，$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$，则方程 $D-6x^2=0$ 的根为________.

5. 已知三阶矩阵 A 的三个特征值分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=1$，$f(x)=x^3-x+2$ 则 $f(A)=$________.

二、单选题

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ 可逆，则方程组 $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2=a_3 \\ b_1x_1+b_2x_2=b_3 \\ c_1x_1+c_2x_2=c_3 \end{cases}$（　　）

A. 无解　　B. 有唯一解　　C. 有无穷多解　　D. 不能确定

2. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，$C=AB^{-1}$ 则 C^{-1} 中第 2 行第 3 列的元素是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

3. 直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+6}{-2}$ 与平面 $\prod:x-2y+z=3$ 的夹角为（　　）

A. $\frac{2}{3}\pi$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & b \end{bmatrix}$，则（　　）

A. $a=2,b=1$　　B. $a=3,b=2$　　C. $a=4,b=3$　　D. $a=5,b=4$

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的负惯性指数 $q=1$，且矩阵 A 满足 $A^2-A=6E$，则二次曲面方程 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=6$ 经正交变换 $x=Qy$ 可化为标准型（　　）

A. $\frac{y_1^2}{3}+\frac{y_2^2}{3}-\frac{y_3^2}{2}=1$　　B. $\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_3^2}{3}=1$

C. $\frac{y_1^2}{3}+\frac{y_2^2}{2}-\frac{y_3^2}{3}=1$　　D. $\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{3}-\frac{y_3^2}{2}=1$

三、解答题

1. 设 A 为给定的三阶矩阵，E 为三阶单位阵，矩阵 B 由式 $AB=A+B+2E$ 确定.

（1）求 $(B-E)^{-1}$.

（2）若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 B.

2. 已知 $\alpha_1=(1,0,0,\lambda)^T,\alpha_2=(\lambda,1,0,0)^T,\alpha_3=(0,\lambda,1,0)^T,\alpha_4=(0,0,\lambda,1)^T$ $\beta_1=(1,-1,0,0)^T,\lambda$ 为实数.

（1）当 λ 为何值时，向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

（2）当 λ 为何值时，向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，且表示不唯一.

3. 已知平面 $\prod_1$：$x+y-z=0$，$\prod_2$：$x+2y+z=0$.

（1）求过点 $P(1,2,1)$ 且与平面 $\prod_1$ 和 $\prod_2$ 的交线平行的直线的对称式方程.

（2）求过平面 $\prod_1$ 和 $\prod_2$ 的交线，且与直线 $L:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ 平行的平面方程.

4. 设 A 为三阶实对称矩阵，且 A 的迹 $\mathrm{tr}(A)=1, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，又 $AB=O$.

（1）证明 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=1$.

（2）求矩阵 A 的全部特征值和特征向量.

5.（1）设矩阵$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$，证明三个平面$\prod_i : a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1,2,3$相交于一直线的充分必要条件为：$r(A) = r(A|b) = 2$.

（2） 已知三个平面$\prod_1 : x + y + z = 1$，$\prod_2 : y + z = b$，$\prod_3 : x + ay + 2z = 2$相交于一直线，求$a,b$的值.

6. 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

（1）写出二次型矩阵A.

（2）求正交变换$x = Qy$,将f化为标准型,写出正交阵Q和f的标准型.

7. 已知线性空间R^3的基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵为$P$，且

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

（1）求$\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

（2）设向量$\alpha \in R^3$在基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下有相同的坐标，求$\alpha$.

2014 年线性代数期末试题

一、单选题

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&2&0&3\\3&0&4&0\\0&4&0&1\end{bmatrix}$，则行列式 $|2A|$ 的值为（　　）

A. 320　　B. -320　　C. 40　　D. -40

2. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{1896}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2015}=$（　　）

A. $\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}g&h&i\\d&e&f\\a&b&c\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}c&b&a\\f&e&d\\i&h&g\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}a&c&h\\d&f&e\\g&i&b\end{bmatrix}$

3. 若向量组 α,β,γ 线性无关，向量组 α,β,δ 线性相关，则（　　）

A. α 必可由 β,γ,δ 线性表示　　B. β 必可由 α,γ,δ 线性表示

C. δ 必可由 α,β,γ 线性表示　　D. δ 必不可由 α,β,γ 线性表示

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是二重特征值，则 x 和 y 依次为（　　）

A. $-2,2$　　B. $2,-2$　　C. $3,-1$　　D. $-1,3$

5. 以下说法中正确的是（　　）

A. 对于方阵 A,B，如果存在矩阵 C，使 $B=C^TAC$，则 A 与 B 合同

B. 若存在矩阵 C，使 $A=C^TC$，则 A 是正定的

C. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2$ 是正定的

D. 若实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式都是正数，则 A 是正定的

二、填空题

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵 $\left(n\geq 2\right)$，则 $(A^{*})^{-1}$=______ .

2. 矩阵 $A=\left[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4\right]$经若干次初等行变换可化为$\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 的列向量组的秩为______，其一个极大无关组为__________________，其余向量由极大无关组线性表示的关系式为________________________.

3. 齐次线性方程组 $Ax=0$，对其系数矩阵施以初等行变换得 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&1&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,则其结构式通解为

_____________________.

4. 曲线 L:$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}$绕 OY 轴旋转一周所得旋转面的方程为_________________________________.

5. 已知 $B=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$，则二次型 $f=x^TBx$ 的矩阵为__________________，其秩为______________.

三、解答题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

（1）求 A^3 和 A^4.

（2）试求一个 4 维列向量 α，使 $A^3\alpha\neq 0$.

（3）证明：对于（2）中的 α，向量组 α，$A\alpha$，$A^2\alpha$，$A^3\alpha$ 是线性无关的，α，$A\alpha$，$A^2\alpha$，$A^3\alpha$，$A^4\alpha$ 是线性相关的.

2. λ取何值时，线性方程组$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$有唯一解、无解、无穷的解？并在有无穷多解时，求其结构解.

3. 设有直线L:$\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$与点$M(1,0,-1)$. □

（1）求L的对称式方程；

（2）求点M到直线L的距离.

4. 记矩阵$A=\begin{bmatrix}1&-2&1&1&2\\-1&3&0&2&-2\\0&1&1&3&4\\1&2&5&13&5\end{bmatrix}$的第$j$个列向量为$\alpha_j(j=1,2,\cdots 5)$.

（1）证明$W=\{Ax|x\in R^5\}$为线性空间R^4的子空间

（2）求W的基与维数.

（3）求α_3，α_4在该基下的坐标.

5. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^{\ 2}+(1-a)x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值.

（2）求正交变换 $x=Py$ 化 f 为标准形.

6. 设α，β 均为 3 维实单位列向量，且 α 与 β 正交，令 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$,问矩阵 A 是否可相似对角化？为什么？若可对角化，求与 A 相似的对角阵 D.

2013 年线性代数期末试题

一、单选题

1. 若 A 为 n 阶方阵 $(n\geq 2)$，已知 $A^2=O$，则下式中未必成立的是（　　）

A. $A=O$　　B. $(A^T)^2=O$　　C. $A^3=O$　　D. $|A|=0$

2. 设 $\alpha_1=[1,2,0]^T,\alpha_2=[2,0,1]^T,\alpha_3=[-1,k,0]^T$ 当 $k=$（　　）时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

A. 1　　B. 2　　C. –1　　D. –2

3. 若方程组 $AX=b$ 中，方程的个数少于未知量的个数，则有（　　）

A. $AX=b$ 必有无穷多解　　B. $AX=0$ 仅有零解

C. $AX=0$ 必有非零解　　D. $AX=0$ 必无解

4. 如果（　　）时，则 n 阶矩阵 A 与 B 相似.

A. A 和 B 有相同的特征值且均可相似对角化　　B. $|A|=|B|$

C. A 与 B 有相同的特征多项式　　D. $r(A)=r(B)$

二、解答题

1. 设方阵 A 满足 $A^3=O$，证明 $I-A$ 可逆，且 $(I-A)^{-1}=I+A+A^2$.

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，3 阶方阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+3A^{-1}$,求 B.

3. 证明定理：若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\beta$ 线性相关，证明 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表示，且表示式唯一.

4. 设 $\alpha_1=\left[\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]^T$，$\alpha_2=\left[\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right]^T$，$\alpha_3=\left[\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]^T$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 构成 R^3 的一组标准正交基，并求向量 $\alpha=[1,2,0]^T$ 在此组基下的坐标.

5. 求空间曲线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=2y \end{cases}$ 在各坐标平面上的投影曲线的方程.

6. 已知向量组$\alpha_1=[1,-1,0,0]^T$，$\alpha_2=[-1,2,1,-1]^T$，$\alpha_3=[0,1,1,-1]^T$，$\alpha_4=[-1,3,2,-1]^T$.

（1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组及秩，并把其余向量用该极大线性无关组线性表示.

（2）设$\beta=[-2,6,a,5]^T$，a取何值时，β可由该极大线性无关组线性表示？并求表示式.

7. 已知两直线$L_1:\begin{cases}x-y+z+1=0\\3x-y-z-1=0\end{cases}$，$L_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$，证明直线 L_1 和 L_2 相交，并求由直线 L_1 和 L_2 所确定的平面方程.

8. 二次型 $f=3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-2ax_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 化成 $f=7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$.

（1） 求参数a及矩阵P .

（2） 将该二次型的矩阵表示为秩为 1 的矩阵之和.

9. 设 A 为 n 阶可逆矩阵 $(n \geq 2)$，α 是 n 维非零实列向量，令矩阵 $B = A\alpha\alpha^T$.

（1）求 B 的秩.

（2）求 B 的所有特征值及行列式 $\det(B+2I)$.

（3）B 是否可对角化？为什么？

10. （1）请给出判断实对称矩阵 A 是正定矩阵的三个充要条件.

（2）试举例说明两个同阶正定阵的乘积未必是正定阵.

（3）设实对称矩阵 A，B 均是正定矩阵，且满足 $AB = BA$，证明 AB 也是正定矩阵.

2012 年线性代数期末试题

一、单选题

1. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, C 为 n 阶可逆矩阵，矩阵 $B=AC$，则（　　）

A. $r(A)>r(B)$　　B. $r(A)<r(B)$　　C. $r(A)=r(B)$　　D. $r(B)$ 与 C 有关

2. 设 A_{ij} 是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 (i,j) 元素的代数余子式，若 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\11&12&13\\0&12&21\end{bmatrix}$，

则 $11A_{31}+12A_{32}+13A_{33}=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 16

3. 若四个点 $A(1,0,-2),B(7,x,0),C(-8,6,1),D(-2,6,1)$ 共面，则 $x=$（　　）

A. 0　　B. 6　　C. 4　　D. -4

4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关， 则下列向量组线性相关的是（　　）

A. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　B. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$

C. $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$　　D. $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$

5. 下列哪种情况会导致 n 阶行列式 D 的值为零（　　）

A. 主对角线上的元素全为零　　B. 副对角线上的元素全为零

C. 至少有一个 $n-1$ 阶子式为零　　D. 所有 $n-1$ 阶子式为零

二、解答题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}$，已知齐次线性方程组 $(2I-A)x=0$ 的基础解系含 2 个解向量，求 a 的值.

2. 设矩阵 $\mathbf{A}_{3\times3}$ 相似于对角矩阵 $diag\{2,2,-2\}$，求行列式 $\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}^*+5\mathbf{I}\right|$ 的值.

3. 设多项式 $f(x)=2x^5+2x^2-x$， $P=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$， $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，求 $f(A)$.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}-2&2&1\\0&-4&2\\0&1&-3\end{bmatrix}$，且 $AB+9I=A^2+3B$，求 $|B|$.

5. 证明两直线 $L_1:\begin{cases}x=-3-z\\y=4\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y+3z=4\\x-z=-2\end{cases}$ 相交，求出它们所在平面的方程.

6. 线性方程组$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$有解的条件是什么？求有解的情况下该方程组的所有解.

7. 已知二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$.

（1） 写出二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$的矩阵.

（2） 用正交变换把二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$化为标准型，并写出相应的正交变换.

8. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$，矩阵$X$满足$AXA+BXB=AXB+BXA+I$，求矩阵$X$.

9. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1 & 1\\ 2 & -5 & 1 & -2\end{bmatrix}$，线性空间$V=\left\{B\mid B\in R^4\text{方程组}Ax=B\text{有解}\right\}$.

（1）证明V是R^4的子空间.

（2）求V的基与维数.

10. 设三阶方阵A的特征值−1,1 对应的特征向量分别为α_1,α_2，向量α_3满足$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明:（1）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

（2）设$P=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]$，求$P^{-1}AP$.

2011 年线性代数期末试题

一、填空题

1. 若向量组 $\alpha_1=(1+k,1,1),\alpha_2=(1,1+k,1),\alpha_3=(1,1,1+k)$ 线性无关，则 k 应满足________________.

2. 设向量α，β的范数分别为 2 和 3，则内积$<\alpha+\beta,\alpha-\beta>$为______________________________.

3. 设实二次型的秩为 4，正惯性指数为 3，则其规范型为______________________________.

4. 由曲线$\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转所产生的旋转曲面方程为______________________________.

5. $R[x]_2$的基$1,x,x^2$到$1,1+x,1+x+x^2$的过渡矩阵为______________________________.

二、选择题

1. 设n阶方程A不可逆，则一定有（　　）

A. $rank(A)<n$　　B. $rank(A)<n-1$　　C. $A=0$　　D. 方程组$Ax=0$只有零解

2. 设A是实对称矩阵，C是实可逆矩阵，$B=C^TAC$，则（　　）

A. A与B相似　　B. A与B的行列式相等　　C. A与B有相同的特征值　　D. A与B合同

3. 设A是正交矩阵，则下列结论错误的是（　　）

A. $|A|=1$　　B. $|A|^2=1$　　C. $A^{-1}=A^T$　　D. A的行(列)向量组是正交的单位向量组

4. 下列矩阵中是正定矩阵的为（　　）

A. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. 设$\alpha_1=[1,1,0,0]$, $\alpha_2=[0,0,2,2]$, $\alpha_3=[1,0,1,0]$, $\alpha_4=[1,2,3,4]$，则该向量组的极大线性无关组为(　　)

A. α_1,α_2　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　C. α_1,α_3　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

三、解答题

1. 设A为实二阶方阵，且$|A|<0$，证明：A与对角矩阵相似.

2. 设 为n阶矩阵，α是n维列向量，若$A\alpha\neq 0$但$A^2\alpha=0$，证明：向量组α，$A\alpha$线性无关.

3. 设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-1&0&8\end{bmatrix}$,且$AXA^{-1}=XA^{-1}+3I$，求矩阵$X$.

4. 已知二次型$f=5x_1^2+5x_2^2+tx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为2.

（1）求参数t.

（2）用正交变换将二次型$f=\left(x_1,x_2,x_3\right)$化为标准型，并写出所用的正交变换.

5. 求向量组 $\alpha_1=[1,-1,2,4],\alpha_2=[0,3,1,2],\alpha_3=[3,0,7,14],\alpha_4=[1,-2,2,0],\alpha_5=[2,1,5,10]$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组表示.

6. 已知空间直角坐标系中三个平面方程为: $\pi_1: x+y+2z=1$，$\pi_2: x+\lambda y+z=2$，$\pi_3: \lambda x+y+z=1+\lambda$.

（1）当 λ 取何值时这三个平面交于一点？交于一直线？没有公共交点？

（2）当它们交于一直线时，求直线方程.

7. 设 m 阶实方阵 A 正定， B 为 $m\times n$ 阶实矩阵，证明 $B^T AB$ 为正定矩阵的充要条件是 $r(B)=n$.

2010 年线性代数期末试题

一、单选题

1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是（　　）

A. α_1,α_2　　B. $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

C. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$　　D. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

2. 设$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$, n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关的充分必要条件是（　　）

A. $\det(A)=1$　　B. A的特征值全为正

C. $r(A)=n$　　D. $x=0$是方程组$Ax=0$的解

3. 设A为 3 阶实对称矩阵，二次型$f=x^{\mathrm{T}}Ax$经过一个可逆线性变换$x=Cy$化为标准型$f=y_1^2+2y_2^2$，则必有（　　）

A. A有零特征值　　B. A有重特征值

C. 1,2 都是A的特征值　　D. 1,2 都不是A的特征值

4. 设有 4 元非齐次线性方程组$Ax=B$，系数矩阵A的秩$r(A)=2$，η_1,η_2,η_3为它的三个线性无关的解向量，则它的通解为$x=$（　　）

A. $k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$　　B. $k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)+\eta_1$

C. $k_1(\eta_1+\eta_2)+k_2(\eta_2+\eta_3)$　　D. $k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_3)$

5. 直线L_k通过P_k点，且与向量$\vec{a}_k$平行$(k=1,2)$，则L_1,L_2相交于一点的充分必要条件是（　　）

A. $(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0$，且$\vec{a}_1\times\vec{a}_2\neq 0$　　B. $(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0$，且$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2\neq 0$

C. $(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\neq 0$，且$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=0$　　D. $(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot\overrightarrow{P_1P_2}\neq 0$，且$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$

二、填空题

1. 若$A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$，则$A$的伴随矩阵$A^*=$____________.

2. 过ox轴和点$M(1,2,3)$的平面方程为____________________.

3. 曲线$\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x+y+z=1\end{cases}$在$xoy$坐标面上的投影曲线的方程为________________________.

4. A为n阶方阵，满足$A^2+A-4E=0$，则$(A+E)^{-1}=$__________.

5. A为 3 阶方阵，第一行元素全为 1，A_{ij}为对应元素a_{ij}的代数余子式，则$A_{21}+A_{22}+A_{23}=$__________.

三、解答题

1. 设有三元方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$.

（1）讨论λ取何值时该方程无解、有唯一解、有无穷多个解？

（2）当方程组有无穷多个解时，求其通解.

2. 设三元二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，求正交变换$x=Py$将二次型$f$化为标准形，并写出所用的正交变换.

3. 设$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&0&3\end{bmatrix}$.

（1）求$\left(A^*\right)^{-1}$，其中A^*为A的伴随矩阵.

（2）设$AX+6\left(A^*\right)^{-1}X=B$，其中$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，求$X$.

4. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，且 $r(A)=n$，证明 $B=A^{\mathrm{T}}A$ 为正定矩阵.

5. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为 n 阶矩阵，$\det\left(A\right)=0$， 为 a_{ij} 对应的代数余子式，$A_{21}\neq 0$，证明：$Ax=0$ 的通解为 $x=k\left(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n}\right)^{\mathrm{T}}$.

6. 设 $\alpha_i=\left(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in}\right)^{\mathrm{T}}\left(i=1,2,\cdots,r,r<n\right)$ 是 n 维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。已知 $\beta=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的实非零解向量，其中 $A=\left(a_{ij}\right)_{r\times n}$，试判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性.

2009 年线性代数期末试题

一、单选题

1. 设A为三阶方阵,将A的第 2 行加到第 1 行得矩阵B，再将B的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得矩阵C，记矩阵$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则（　　）

A. $C=P^{-1}AP$　　B. $C=PAP^{-1}$　　C. $C=P^{\mathrm{T}}AP$　　D. $C=PAP^{\mathrm{T}}$

2. 设有线性方程组(I) $AX=O$, (II) $A^{\mathrm{T}}AX=O$ 则（　　）

A. (II)的解是(I)的解，(I)的解也是(II)的解

B. (II)的解是(I)的解，但(I)的解不是(II)的解

C. (I)的解不是(II)的解，(II)的解也不是(I)的解

D. (I)的解是(II)的解，但(II)的解不是(I)的解

3. 若n阶方阵A相似于对角阵，则（　　）

A. A有n个不同的特征值　　B. A为实对称阵

C. A有n个线性无关的特征向量　　D. $r(A)=n$

二、填空题

1. 设$\lambda=2$是可逆矩阵A的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$的一个特征值为_______.

2. 矩阵$B=\begin{bmatrix}2&0\\1&0\end{bmatrix}$，则二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Bx$ 的矩阵为____________________.

3. 已知η_1，η_2，η_3是四元方程组$Ax=B$的三个解，其中$r(A)=3$且$\eta_1+\eta_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\eta_1+\eta_2=(4,4,4,4)^{\mathrm{T}}$，则方程组$Ax=B$的通解为____.

三、解答题

1. 证明两直线$l_1: x=y=z-4, l_2: -x=y=z$异面，求两直线间的距离，并求与$l_1,l_2$都垂直且相交的直线方程.

2. 线性方程组$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & \lambda & 1\\1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-3\\-2\\-2\end{bmatrix}$，讨论$\lambda$取何值时，该方程组有唯一解、无解、有无穷多解？并在有无穷多解时，求出该方程组的结构式通解.

3. 已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可经过正交变换$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$化为柱面方程$y'^2+4z'^2=4$，求$a$，$b$的值及正交矩阵$P$.

4. 设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，矩阵$X$满足$AX+I=A^2+X$，其中$I$为三阶单位矩阵，求矩阵$X$.

5. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -4 & -3 & -2\end{bmatrix}$，线性空间 $\{b\,|\,b\in F^4,\text{方程组}Ax=B\text{有解}\}$，求 V 的基与维数.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维列向量组，矩阵 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{bmatrix}$，试证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件为对任意 n 维列向量 B，方程组 $AX=B$ 均有解.

彭康学导团持续招募中，搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描下方二维码，关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。

彭小招1.0

群号：647383944

PKSTU 微信公众号