§1.2 单位脉冲函数

- 一、引入脉冲函数的原因
- 二、单位脉冲函数的概念及其性质
- 三、单位脉冲函数的傅氏变换
- 四、周期函数的 Fourier 变换

一、为什么要引入单位冲激函数

理由 (1) 在数学、物理学以及工程技术中，一些常用的重要函数，如常数函数、线性函数、符号函数以及单位阶跃函数等等，都不能进行 Fourier 变换。

(2) 在工程实际问题中，有许多瞬时物理量不能用通常的函数形式来描述，如冲击力、脉冲电压、质点的质量等等。

(3) 周期函数的Fourier级数与非周期函数的Fourier变换都是用来对信号进行频谱分析的，它们之间能否统一起来。

引例 ● 长度为 a，质量为 m 的均匀细杆放在 x 轴的 $[0, a]$ 区间上，则它的线密度函数为 $P_a(x)=\begin{cases} m/a, & 0\le x\le a, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

● 质量为 m 的质点放置在坐标原点，则可认为它相当于细杆取 $a\to 0$ 的结果。相应地，质点的密度函数为

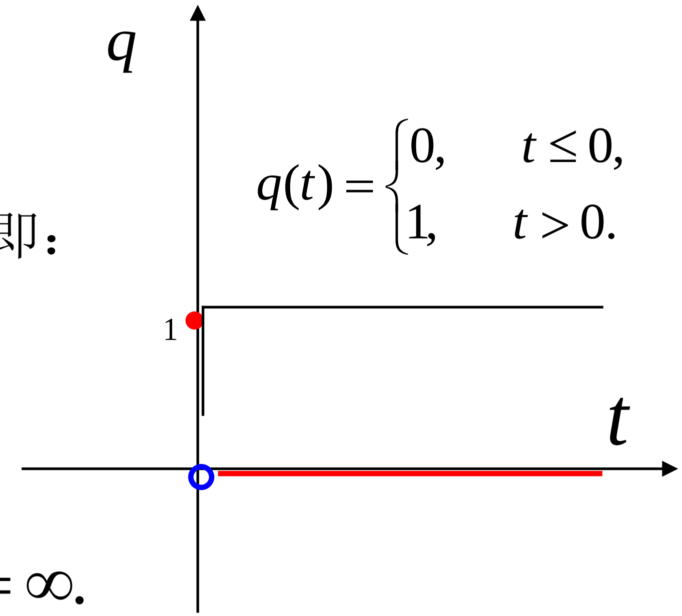
$$P(x)=\lim_{a\to 0} P_a(x)=\begin{cases} \infty, & x=0, \\ 0, & x\neq 0. \end{cases}$$

● 显然，该密度函数并没有反映出质点的任何质量信息，

还必须在此基础上附加一个条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx=m.$

引例：在原来电流为零的电路中，某一瞬间（设为$t=0$）进入一单位电量的脉冲，确定电路上的电流$i(t)$.

电路中的电荷函数为：$q(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$



由于电流强度是电荷函数对时间的变化率，即：

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t},$$

当$t\neq 0$时，$i(t)=0$;

当$t=0$时，$i(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}=\infty.$

注意：$q(t)$是不连续函数，在普通导数意义下，函数$q(t)$在这点不能求导，

上面只是形式地计算这个导数.

表明在通常意义下的函数类中的函数无法表示上述电路的电流强度，为了确定电流强度，需引入一个新函数。

二、单位脉冲(冲激)函数的概念及性质

1. 一维单位脉冲(冲激)函数的概念

定义 单位脉冲函数 $\delta(t)$ 满足:

(1) 当 $t \neq 0$ 时，$\delta(t) = 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

- 单位脉冲函数 $\delta(t)$又称为 Dirac 函数或者 δ 函数。

这是英国物理学家狄拉克(*Dirac*)给出的一种直观的δ – 函数（单位脉冲）定义. 也称为单位冲激函数。描述集中分布的物理量。

- 显然，借助单位脉冲函数，前面引例中质点的密度函数就可表示为 $P(x) = m\delta(x)$.

二、单位脉冲函数的概念及性质

1. 单位脉冲函数的概念

注 (1) 单位脉冲函数 $\boldsymbol{\delta(t)}$ 并不是经典意义下的函数，而是一个广义函数(或者奇异函数)，它不能用通常意义下的"值的对应关系"来理解和使用，而总是通过它的性质来使用它。

(2) 单位脉冲函数有多种定义方式，前面给出的定义方式是由 Dirac(狄拉克)给出的。

单位脉冲函数
其它定义方式

二、单位脉冲函数的概念及性质

2. 单位脉冲函数的性质

性质 (1) 筛选性质

设函数 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 无穷次可微函数，

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0).$$

一般地，若 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t_0).$$

(2) 对称性质

δ 函数为偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$.

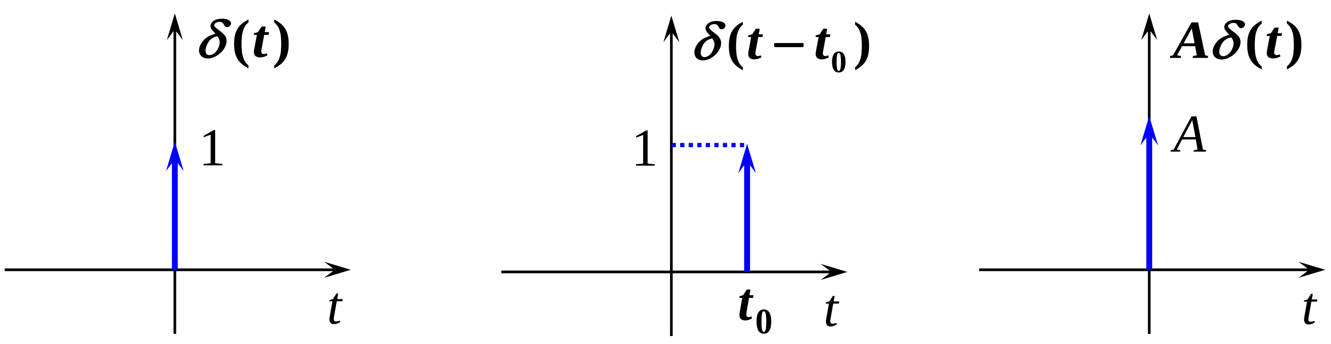
单位脉冲函数

其它性质

二、单位脉冲函数的概念及性质

3. 单位脉冲函数的图形表示

- δ 函数的图形表示方式非常特别，通常采用一个从原点出发长度为1的有向线段来表示，其中有向线段的长度代表 δ 函数的积分值，称为冲激强度。
- 同样有，函数 $A\delta(t)$ 的冲激强度为 A。

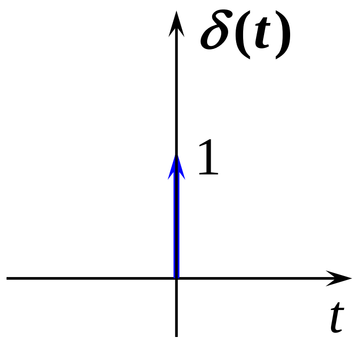


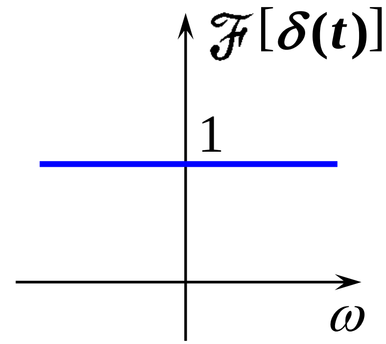
三、单位脉冲函数的 Fourier 变换

- 利用筛选性质，可得出 δ 函数的 Fourier 变换：

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1.$$

即 $\delta(t)$ 与 1 构成Fourier变换对 $\delta(t) \longleftrightarrow 1.$





- 由此可见，单位脉冲函数包含所有频率成份，且它们具有相等的幅度，称此为均匀频谱或白色频谱。

三、单位脉冲函数的 Fourier 变换

- 按照 Fourier 逆变换公式有

$$\mathscr{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{j\omega t}d\omega=\delta(t).$$

- 重要公式 $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\omega=2\pi\delta(t).}$

注 在 δ 函数的 Fourier 变换中，其广义积分是根据 δ 函数的性质直接给出的，而不是通过通常的积分方式得出来的，称这种方式的 Fourier 变换是一种广义的Fourier变换。

例1 分别求函数 $f_1(t)=1$ 与 $f_2(t)=t$ 的Fourier变换。

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt$

$$=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega).$$

(2) 将等式 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$ 的两边对 ω 求导，有

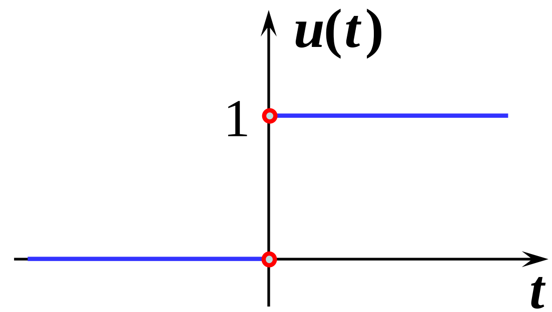
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-jt)e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta'(\omega),$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-j\omega t}dt=2\pi j\delta'(\omega),$$

即得 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]=2\pi j\delta'(\omega).$

例2 求函数$u(t)=\begin{cases}1, t>0\\ 0, t<0\end{cases}$的Fourier变换。

解 已知 $\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]=\dfrac{2}{j\omega}$,



$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),$$

又 $u(t)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{sgn} t+1)$,

得 $U(\omega)=\dfrac{1}{2}(\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]+\mathscr{F}[1])=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega).$

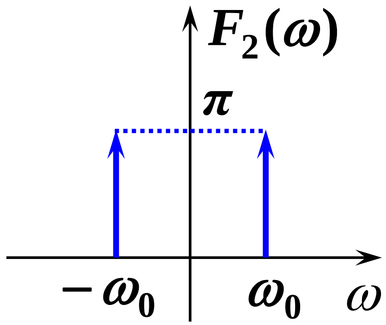
注 称 $u(t)$ 为单位阶跃函数，也称为 Heaviside 函数，它是工程技术中最常用的函数之一。

例3 分别求函数$f_1(t)=e^{j\omega_0 t}$与$f_2(t)=\cos\omega_0 t$ 的Fourier变换。

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega_0-\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0).$$

(2) 由 $\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$,



有 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$

$$=\frac{1}{2}(\mathscr{F}[\mathrm{e}^{j\omega_0 t}]+\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}])$$

$$=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0).$$

四、周期函数的 Fourier 变换

定理 设 $f(z)$ 以 T 为周期，在 $[0, T]$ 上满足 Dirichlet 条件，则 $f(z)$ 的 Fourier 变换为

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0).$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$，$F(n\omega_0)$ 是 $f(z)$ 的离散频谱。

证明 由 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$ 有

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jn\omega_0 t}\cdot e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0).$$

重要公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t_0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}d\omega=2\pi\delta(t),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega(t-t_0)}d\omega=2\pi\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

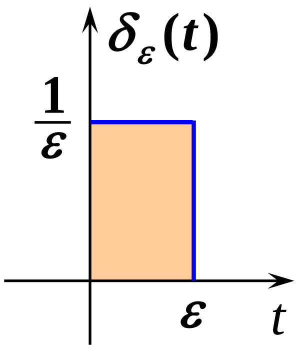
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}dt=u(\omega)-\frac{1}{2}$$

附：单位冲激函数的其它定义方式

广义函数最早是由物理大师**P.A.M. Dirac**在做量子力学的研究时引入的(**1920s**)，他系统地提出了狄拉克函数（Dirac delta function）。**1936**年，**S.L. Sobolev**确立了广义函数的数学基础；**L. Schwartz**（**1950s**）给出了广义函数的系统理论。

方式一　令 $\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}1/\varepsilon, & 0\le t\le\varepsilon,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

则 $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t).$



方式二　(20 世纪 50 年代，Schwarz)

单位冲激函数 $\delta(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(0)$,

其中，$\phi(t)\in C_0^\infty$ 称为检验函数。

广义函数定义方式：

K空间的任一函数

$$\left\langle \delta(x), \varphi(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

20世纪30年代

筛选性

K空间 $K = \left\{ \varphi(x) \middle| \varphi(x) \in C_0^\infty(R) \right\}$

检验函数

K空间上的一个泛函 $T:\varphi(x) \to T(\varphi(x)) \in R$

广义函数：K空间上的连续线性泛函

$\forall \varphi(x) \in K,\quad \delta:\varphi(x) \to \varphi(0)$ ——→ 单位脉冲函数是一个广义函数

(返回)

附：单位脉冲函数的性质

1）对称性 $\delta(x-\xi)=\delta(\xi-x)$ 特别地 $\delta(x)=\delta(-x)$

2）乘积性质 $f(x)\in C^{\infty}(R),\quad \delta(x\text{-}\xi)f(x)=\delta(x)f(\xi)$，特别地$\delta(x)f(x)=\delta(x)f(0)$

3）复合函数性质 $f(x)\in C^{1}(R), f(x)$只有单零点，则$\delta(f(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\delta(x-k)}{|f'(x_k)|}$

4）微分性质

$$\forall\varphi(x)\in K,\text{定义}\ \langle\delta'(x),\varphi(x)\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi'(x)dx=-\langle\delta(x),\varphi'(x)\rangle=-\varphi'(0)$$

$$\delta''(x)=(-1)^2\varphi''(0),\cdots,\delta^{(n)}(x)=(-1)^n\varphi^{(n)}(0)$$

5）原函数

$$H'(x)=\delta(x), H:Heavside\text{函数},\quad (\frac{1}{2}\mathrm{sgn}'(x)=\delta(x))$$

6）卷积

放置在 ξ 点处的点源

连续点源

$$\boxed{\delta(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi) f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x) f(\xi) d\xi = f(x)}$$

此点处的点源强度

(返回)