概率论5-8章
知识总结及解题经验

2023 年 6 月 4 日

钱院学辅

西安交通大学
Xi'an Jiaotong University

作品信息

- **标题：** 概率论5-8章知识总结及解题经验
- **作者：** 钱院学辅概率论编写小组
- **出品时间：** 2023 年 6 月 4 日
- **总页数：** 23

第 5 章. 大数定律与中心极限定理

by 智电钱 2101 曲圣

本章是概率论部分的收官章节，难度较小，后面即将进入数理统计部分。知识点主要涉及标准正态分布分布函数$\phi(x)$的相关计算，与其他章节相对独立。但其中蕴含的数学思想（n 较大时看作∞，某种分布的极限分布是标准正态分布）在后续章节中会有所共鸣，例如第七章区间估计，n 充分大时，可以近似认为：

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

基于标准正态分布数据（$\phi(x)$在不同点的取值）的已知性，我们可以将未知分布取极限，转化为标准正态分布。这种从已知信息中近似获得未知信息的思想，希望大家能在实践中不断体会。

Part 1 随机变量的收敛性与不等式

先加深本章基础知识的理解。

依概率收敛的定义是：

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$$

或者写成：

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|<\varepsilon)=1$$

记作：

$$(\mathrm{p})\lim_{n\to\infty} X_n=X$$

由于ε为$n\to\infty$时的无穷小，因此上式的数学含义是：n 充分大时，变量X_n充分接近于 X。

这种接近不是值的接近，而是概率上的接近，即X_n与 X 充分接近的概率特别大，稍微远离的概率特别小。

依分布收敛的定义是：

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$$

第四章曾提及马尔可夫不等式：

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X}|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathrm{E}(|\mathrm{X}|^{\mathrm{r}})}{\varepsilon^{\mathrm{r}}}$$

大家可能业已忘记，但此式是后续章节中很多推导过程的基础。虽然做题很少用，但考试也没有明确说过不考，而且难度不大，所以还是希望大家掌握。

取 $X = E(Y) - Y$，得切比雪夫不等式：

$$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(Y)}{\varepsilon^2}$$

Part 2 大数定律

切比雪夫大数定律的推论：

若有：

（1）X_k相互独立

（2）$E(X_k) = \mu$相同

（3）$D(X_k) = \sigma^2$相同

则有：

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \varepsilon) = 1$$

这个定理的用法是：验证 3 个条件成立，进而可以应用上式。这是切比雪夫大数定律的推论，而原定理难以考察，不要求掌握。

辛钦大数定律：

将条件（3）改为：X_k同分布，结论相同，称为辛钦大数定律。可以用伯努利大数定律解的题都可以用切比雪夫解，且两个定理本质相同，故不做展开。

在上式中，$\frac{1}{n}\sum X_k$代表序列X_n的平均值，这一数值依概率收敛于X_n的期望μ，当 n 充分大时，有足够大的把握认为：$\frac{1}{n}\sum X_k = E(X)$，这就是前文提到的，用统计法，从已知信息（$E(X)$）中近似获得未知信息（$\frac{1}{n}\sum X_k$）的思想。

除了验证 3 条件成立，从而应用大数定律之外，本部分还有一类题型，课本 P111 例 5-4：

例 5.4 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$是独立同分布的随机变量序列，且每个 X_n 都服从参数为 λ 的泊松分布（$\lambda>0$），试问当 $n\to\infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ 依概率收敛于何值？

解 由于 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2, \cdots$ 是独立同分布的随机变量，且 $E(X_k^2) = [E(X_k)]^2 + D(X_k) = \lambda^2 + \lambda$，对 $\{X_n^2, n=1,2,\cdots\}$ 应用辛钦大数定律可知，当 $n\to\infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ 依概率收敛于 $E(Y_n) = E(X_k^2) = \lambda^2 + \lambda$.

下面给出解答：

设$E(X)=\mu$，$\mathrm{D(X)}=\sigma^2$

由前文，显然有：$\frac{1}{\mathrm{n}}\sum X_k$收敛于 $\mathrm{E}(X_k)=\mu$。类似的，$\frac{1}{\mathrm{n}}\sum X_k^2$自然也就收敛于 $\mathrm{E}(X_k^2)=\mathrm{E(X^2)}=D(X)+E^2(X)=\sigma^2+\mu^2$

本部分其实考的不多，理解思想就好，但下一部分就显得异常重要了。

Part 3 中心极限定理

（1）独立同分布：

设 $\mathrm{E(X)=\mu, D(X)}=\sigma^2$,当 n 很大时，有：

$$\mathrm{Y_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\sim N(0,1)$$

（2）二项分布 $\mathrm{X\sim B(n,p)}$,当 n 很大时，有：

$$\mathrm{Y_n}=\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$$

在求$\mathrm{a<Y_n<b}$ 的概率时，可以用：

$$\mathrm{P(a<Y_n<b)}=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}^2}{2}}\mathrm{dt}=\phi(\mathrm{b})-\phi(\mathrm{a})$$

在做这部分时，关键在于看出 X 属于（1）（2）的哪种类型，如果是二项分布，可能难以辨认，这就要求我们敏锐迅速的看出二项分布的两个参数 n 和 p，就笔者的体会，这一点可以通过少量的练习速成，其实把书上的例子看懂就差不多了。

这一部分题目往往很容易，不再进行详细讲解。但有易错点：丢掉上界和下界。

例 5.9 (1) 一复杂系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成,在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10.为了使整个系统起作用,至少必须有 85 个部件正常工作,求整个系统起作用的概率.

(2) 一复杂系统由 n 个相互独立起作用的部件所组成.每个部件的可靠性(即部件正常工作的概率)为 0.90,且必须至少有 80% 的部件正常工作才能使整个系统工作,问 n 至少为多大才能使系统的可靠性不低于 0.95.

解 (1) 在任一时刻,对每个部件考察其是否正常工作即相当于进行了一次伯努利试验,由于各个部件是否正常工作是相互独立的,因此,对这 100 个部件的逐一考察可看成是 100 重伯努利试验.若设 X 为某时刻正常工作的部件个数,则 $X\sim B(100,0.90)$,现要求 $P\{85\leqslant X\leqslant 100\}$.利用(5.3.3)式,有

$$P\{85\leqslant X\leqslant 100\}\approx\Phi\left(\frac{100-90}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}\right)-\Phi\left(\frac{85-90}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{10}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=0.952\ 0$$

(2) 设 n 为系统所需的部件总数,X 为某时刻正常工作的部件个数,则 $X\sim B(n,0.90)$,根据题意,要求使不等式 $P\{0.8n\leqslant X\leqslant n\}\geqslant 0.95$ 成立的最小的 n.

同样由(5.3.3)式,有

$$P\{0.8n\leqslant X\leqslant n\}\approx\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)$$
$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1$$

令 $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geqslant 0.95$,即 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.975$,查附表 1 得 $\frac{\sqrt{n}}{3}\geqslant 1.96$,故 $n\geqslant 34.574\ 4$,取 $n=35$,所以至少需要 35 个部件才能使整个系统的可靠性不低于 0.95.

例 5.10 某车间有 200 台机床,在工作时间内由于各种原因会停工,各机床开工与否相互独立.已知机床的开工率为 0.6,而每台开工的机床需电功率达到 5 kW.应至少供应该车间多少电功率,才能以 99.9% 的概率保证此车间正常工作?

解 设某时刻正常工作的机床数为 X,则 $X\sim B(200,0.6)$,$E(X)=120$,$D(X)=48$.设某时刻车间需要的电功率为 x,则有 $P\{0\leqslant 5X\leqslant x\}\geqslant 0.999$.而

$$P\{0\leqslant 5X\leqslant x\}=P\left\{\frac{0-120}{\sqrt{48}}\leqslant\frac{X-120}{\sqrt{48}}\leqslant\frac{x/5-120}{\sqrt{48}}\right\}$$
$$\approx\Phi\left(\frac{x/5-120}{\sqrt{48}}\right)-\Phi\left(\frac{0-120}{\sqrt{48}}\right)=\Phi\left(\frac{x/5-120}{\sqrt{48}}\right)\geqslant 0.999$$

例如课本 P115 例 5-19 和 P116 例 5-10，我们往往都能写对画绿色的部分，这是题目所给。但往往丢掉红色部分，这是隐含条件，需要多注意。

这部分的准备建议大家将课本例题的解析完全看懂，基本上就会做题了。课后习题可看可不看，因为都是同类型的题，没有很大变化。

但 P119 第 7 题可以关注一下：

7. 设 X 是一随机变量, $X_1, X_2, \cdots$ 是一列随机变量, 试证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n-X)^2=0$, 则 $(p)\lim\limits_{n\to\infty} X_n=X$.

解答利用夹逼性，比较难想。

$$0 \le P(|X_n - X| \ge \varepsilon) \le \frac{E(|X_n - X|^2)}{\varepsilon^2} = 0$$

事实上，这种做法基于对马尔可夫不等式的熟练掌握。这种思想在第 12 章的命题 12.2 的证明中还有运用。

命题 12.2 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为一随机序列, 若 $(\text{m.s.})\lim\limits_{n\to\infty} X_n=X$, 则 $(p)\lim\limits_{n\to\infty} X_n=X$.

证 对任意 $\varepsilon>0$, 由马尔可夫不等式 $P\{|Y|\geq\varepsilon\}\leq E(|Y|^2)/\varepsilon^2$, 有

$$P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}\leq E[|X_n-X|^2]/\varepsilon^2$$

因为 $(\text{m.s.})\lim\limits_{n\to\infty} X_n=X$, 即 $E(|X_n-X|^2)\to 0\,(n\to\infty)$, 所以由极限的夹逼法则, 得 $P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}\to 0\,(n\to\infty)$, 亦即 X_n 依概率收敛到 X.

虽然不会考原题，但如果今年考证明的话，这是一个可能的方向。

以上就是第五章的全部内容了。

第 6 章. 数理统计学的基本概念

by 自动化钱 2101 王子奇

一、知识归纳：

1. 总体与样本（理解概念意思即可）

总体：研究对象的全体或研究对象的某项（或某些）数量指标的全体所构成的集合。

个体：总体中的每个元素。

样本（或子样）：从总体中取得的一部分个体。

样本容量：样本中所含个体的数量。

抽样：取得样本的过程。

抽样法：抽样过程所采取的方法。

随机样本：样本中的个体是从总体中随机抽取出来的，这样的样本就是随机样本。

若样本$(X_1,X_2,...,X_n)$满足：（1）每个X_i与总体X具有相同的分布；（2）X_1，X_2，...，X_n相互独立，则称$(X_1,X_2,...,X_n)$为简单随机样本。称$(x_1,x_2,...,x_n)$为样本的一个观测值。

若总体X的分布函数为$F(x)$，则样本$(X_1,X_2,...,X_n)$的分布函数为

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

若总体X是连续型随机变量，概率密度为$f(x)$，则样本$(X_1,X_2,...,X_n)$的概率密度为

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

若总体X是离散型随机变量，分布律为$P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,...)$，则样本$(X_1,X_2,...,X_n)$的分布律为

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}$$

2. 统计量

样本均值：$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+...+X_n)$

定理 6.1 若总体 X 的均值和方差都存在，则 $E(\overline{X})=\mu$，$D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$，

$(p)\lim\limits_{n\to\infty}\overline{X}=\mu$

定理 6.2 若总体 X 的均值和方差都存在，则 $E(S^2)=\sigma^2$，$(p)\lim\limits_{n\to\infty}S^2=\sigma^2$

定理 6.3 如果总体 X 的 k 阶原点矩 $\alpha_k=E(X^k)(k=1,2,...)$ 存在，则 $E(A_k)=\alpha_k$，

$(p)\lim\limits_{n\to\infty}A_k=\alpha_k$

$X_{(1)}$，$X_{(2)}$，...，$X_{(n)}$ 是 $(X_1,X_2,...,X_n)$ 的顺序统计量（或次序统计量）

$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,...,X_n\}$ 是最小顺序统计量，$X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,...,X_n\}$ 是最大顺序统计量。

（样本极差、样本中位数、样本 p 分位数的概念理解）

3. 抽样分布

（1）Γ 分布（$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$）

性质 1 如果随机变量 $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，则 $E(X)=\frac{\alpha}{\lambda}$，$D(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

性质 2 如果随机变量 $X_1\sim\Gamma(\alpha_1,\lambda)$，$X_2\sim\Gamma(\alpha_2,\lambda)$，且 X_1 与 X_2 相互独立，则

$X_1+X_2\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$

（性质 2 可以推广到 n 个独立的随机变量的情形）

（2）χ^2 分布（$Z\sim\chi^2(n)$）

性质 1 $\chi^2(n)$ 即 $\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\chi^2(2)$ 即参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布。

性质 2 若 $Z\sim\chi^2(n)$，$E(Z)=n$，$D(Z)=2n$。

性质 3 若 Z_1，Z_2，...，Z_m 相互独立，且 $Z_i\sim\chi^2(n_i)(i=1,2,...,m)$，则

$\sum\limits_{i=1}^{m}Z_i\sim\chi^2(n_1+n_2+...+n_m)$。

定理 6.4 设随机变量X_1，X_2，...，X_n相互独立，且都服从标准正态分布$N(0,1)$，则随机变量$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$服从自由度为$n$的$\chi^2$分布，即$\chi^2\sim\chi^2(n)$。

（3）t分布（$T\sim t(n)$）

定理 6.5 设随机变量$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且X与Y相互独立，则

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$$

（4）F分布（$F\sim F(n_1,n_2)$）

定理 6.6 设随机变量$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且X与Y相互独立，则

$$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$$

推论 如果$F\sim F(n_1,n_2)$，则$\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$。

（5）分位数

上侧α分位数与下侧p分位数的概念要理解。

$$F_\alpha(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$$

（6）正态总体的抽样分布

定理 6.7（将书上定理 6.7 和定理 6.8 合并） 设$(X_1,X_2,...,X_n)$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2为样本方差，则

①$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

②$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$

③$\overline{X}$与S^2相互独立

④$T=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n-1)$

定理 6.8 设$(X_1,X_2,\dots,X_{n_1})$，$(Y_1,Y_2,\dots,Y_{n_2})$是分别来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$的样本，且两样本相互独立，则

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中

$$S_W^2=\frac{(n_1-1)S_{1n_1}^2+(n_2-1)S_{2n_2}^2}{n_1+n_2-2}$$

定理 6.9 设$(X_1,X_2,\dots,X_{n_1})$，$(Y_1,Y_2,\dots,Y_{n_2})$是分别来自总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两样本相互独立，则

$$F=\frac{\sigma_2^2S_{1n_1}^2}{\sigma_1^2S_{2n_2}^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

二、解题思路：

（1）问题：通过总体X的分布律（离散）或概率密度（连续）求$(X_1,X_2,\dots,X_n)$的分布律或概率密度。

思路：由于X_1，X_2，...，X_n相互独立，将他们各自的分布律或者概率密度相乘，离散中括号里直接写出各自的取值；连续写出 n 维区域的交集，其他为 0 即可。

例子：习题 6 的第 1、3、4 题。

（2）问题：给出X_1，X_2，...，X_n的各变量统计数据，计算样本频率分布，经验分布函数并画图，样本分位数，顺序统计量，样本极差等。

思路：概念清晰，知道各所求量的含义即可，尤其频率分布和经验分布函数与之前学过的概率和分布函数求解大同小异。

例子：习题 6 的第 5、14、19 题

（3）由总体分布求$E(\overline{X})$，$D(\overline{X})$，$E(S^2)$。

思路：牢记定理 6.1 至定理 6.3，先算总体均值和方差，再运用结论。

（4）由某变量样本分布得出另一变量的分布的求解和证明（重点）。

思路：对题目中的各变量做合适的代数变形，再套用各种分布的性质和结论。（这些定理和性质一定要牢记！）

例子：习题 6 的第 10、15、18、21、23、25、26、27 题。

第 7 章. 参数估计

by 强基数学 001 王瑞恒

这一章算是《概率论与数理统计》这门课的数理统计的部分，同时也是数理统计中的重点。参数估计主要包含点估计与区间估计这两大部分，这一章主要研究的是：如何根据已经观测到的数据，去估计对应相关的参数。

7.1：点估计

在第六章我们了解了统计量的定义（不含任何位置参数的关于样本的函数）。我们首先确定一个统计量，并假设其服从一个分布。但是这个分布的具体参数我们并不知道。现在我们已知的只有结合样本的观测值，以及对应统计量的值，我们如何大致估计出分布的具体参数？由此我们就引入了点估计。

整个问题过程如下：

假设某一分布的分布函数$F(x;\theta)$，其中θ可以是 1 个或多个待估计的参数，并且$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自该分布的样本，在点估计中，我们要做的就是找到适合的统计量，并且用观测值$\hat{\theta}$作为对未知参数θ的估计值。我们一般如下写：

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

上面我们主要介绍了什么是点估计，下面给出常见的两个点估计方法：点估计的常用方法为矩估计和最大似然估计（MLE），这也是必须掌握的内容。

7.1.1：矩估计

在第六章我们了解了一组样本的k阶原点矩的定义如下：

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$$

矩估计的思想其实就是**用样本的原点矩代替总体的原点矩**，也就是

$$\begin{cases}E(X)=A_1=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i\\ E\left(X^2\right)=A_2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2\\ \qquad\vdots\end{cases}$$

这里一般θ有多少个不同的参数，我们就一般列出多少个原点矩，以此使方程得到唯一的解。

- 例如：假设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$的样本，则$\mu,\sigma^2$的矩估计满足

$$\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i=E(X)=\mu\\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E\left(X^2\right)=\mu^2+\sigma^2\end{cases}$$

因此得到矩估计结果为

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}\\ \widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2\end{cases}$$

• 需要注意的是：**矩估计并不唯一！**

比如令$X_1,X_2,\cdots,X_n\sim Poi(\lambda)$，那么可以用 1 阶矩进行矩估计

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=E(X)=\lambda$$

还可以用二阶矩

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E\left(X^2\right)=\lambda^2+\lambda$$

还可以用样本方差

$$S_n=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=Var(X)=\lambda$$

三者结果并不相同，但都是同一个参数的矩估计，可见矩估计并不是唯一的。

矩估计法不必知道样本具体是什么分布，只要利用样本的矩替代总体矩，是一种简单且直接的估计方法。

7.1.2：最大似然估计（MLE）

最大似然估计的思想，其实就是判断：在“抽中”一组样本给定值也就是$X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n$的情况下，来自哪个具体分布，也或者说参数取什么时可以让概率最大，从而找出可能性最大的结果。这就是最大似然估计的总体思想

• 首先我们需要定义**似然函数**：

设总体X的概率密度函数为$p(x;\theta)$，其中$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$是 1 个或多个参数。如果给定$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自$X$的独立同分布的样本，那么这些样本的联合分布函数是

$$\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

我们将其看做是关于θ的函数，也就是相当于写成

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

这就是似然函数的定义。实际上我们经常会取对数，也就是对数似然函数

$$l(\theta)=log\,L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}log\,p\,(x_i;\theta)$$

最大似然估计就是要找到θ使上面似然函数的值最大，也就是

$$\hat{\theta}=\mathrm{argmax}_{\theta}L(\theta)$$

也可以是对数似然函数值最大。

在求解 MLE 时，为了求出最大值，我们常常是通过对参数求导（多个参数的话就是逐个求偏导），令偏导为 0，也即满足

$$\frac{\partial L(\theta_1,\cdots,\theta_k)}{\partial\theta_i}=0\quad 1\le i\le k$$

然后求解，并且验证确实是最大值，即得到参数的 MLE 估计。

• 例如：$X_1,X_2,\cdots,X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$，求出$\mu,\sigma^2$的最大似然估计：

首先写出似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

这里取对数后方便，所以我们对对数似然函数求偏导，也就是

$$log\,L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}log\,(2\pi)-\frac{n}{2}log\,\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

因此有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\,log\,L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\\ \dfrac{\partial\,log\,L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}\\ \widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\end{cases}$$

并且通过二阶偏导验证得到上述估计确实是似然函数最大值。

•有时候我们需要注意的是：如果似然函数不连续，我们就不能是求偏导的零点了，而要从定义出发了。

例如：假设$X_1,X_2,\cdots,X_n\sim U[0,\theta]$，求$\theta$的 MLE

注意到此均匀分布的密度函数是

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

这样我们得到的似然函数是

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{n}} & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

我们发现当$0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta$时，满足$\theta\ge max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。为了使似然函数最大，一方面不能让似然函数取 0，因此$\theta\ge max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$必须满足。而另一方面，注意到$\frac{1}{\theta}$是关于$\theta$单调递减的，所以$\theta$刚好是取上面的下界，也即$max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

所以此时此 MLE 的结果是$\hat{\theta}=X_{(n)}=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。

• 另外，**最大似然估计具有不变性**：如果$\hat{\theta}$是某一分布中θ的最大似然估计，且$g(\theta)$

是一个双射函数，那么$g(\theta)$的最大似然估计就是$g(\hat{\theta})$。

• 实际上还有 Pitman 估计、Bayes 估计、MAP 估计等方法，但我们只要掌握矩估计和最大似然估计这两个最基本的估计即可。这两个估计方法在《概率论与数理统计》的往年考试中，也始终是作为大题会考的重点。但一般不会太难，只要掌握基本方法即可做对。

7.2：估计量的衡量标准

一个参数的估计有很多，但我们应该挑出最好的一个。于是问题来了：如何衡量一个估计的好坏？有哪些标准可以参考？

因此这一部分就讲述了估计量的衡量标准，主要包括：**无偏性、有效性、相合性。**

这一部分经常是结合刚才求点估计的内容考，比如“验证是否为无偏估计或相合估计”，或者“判断两个估计中哪个更有效”。

7.2.1：无偏性

假设对参数θ，我们的一个估计$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，那么如果满足

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则我们称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计。如果$E(\hat{\theta})\neq\theta$，那么这个估计是有篇的，其中我们记估计量的偏是

$$\mathrm{Bias}(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\theta$$

另外，还有渐近无偏。如果当样本容量无穷大时，上面定义的偏趋于 0，也就是

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Bias}(\hat{\theta})=0$$

• 如果$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，那么不管是来自什么分布，只要知道$E(X)=\mu$，$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$，那么$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$均值一定是$\mu$的无偏估计，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$样本方差一定是$\sigma^2$的无偏估计。

• 对于求统计量的期望只要根据求期望的公式，也即结合$E(X)=\int_R xp(x)\mathrm{d}x$求。

例如：对于均匀分布$U[0,\theta]$，我们由$E(X)=\frac{\theta}{2}$求出其矩估计为$\hat{\theta}=2\bar{X}$，而上面最大似然估计为$max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。我们对统计量求期望也就是因为

$$E(2\bar{X})=2E(\bar{X})=\theta$$

得到 $2\bar{X}$是θ的无偏估计。下面对$max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$求期望：根据概率论知识，我们注意到$max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

所以得到其期望是$\int_0^\theta\frac{nx^n}{\theta^n}=\frac{n}{n+1}\theta$，因而$X_{(n)}=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$不是$\theta$的无偏估计。而$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$是$\theta$的无偏估计。

• 需要注意的是，无偏估计**不一定存在**，且存在也**不一定唯一**。例如：如果$X_1,X_2,\cdots,X_n\sim B(n,p)$，那么$\frac{1}{p}$的无偏估计并不存在。有兴趣的同学可以了解，但正常一般工科的《概率论与数理统计》不会将其作为重点。

• 另外，如果$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，则$g(\hat{\theta})$不一定是$g(\theta)$的无偏估计。也就是说无偏估

计没有不变性，不像最大似然估计一样。

7.2.2：有效性

刚才我们提到无偏估计并不唯一的特点，假如一个参数我们找到了多个无偏估计，但还有什么指标可以进一步深度衡量估计的效果好坏？

在无偏性中我们主要从期望入手，而这次我们从方差的角度来衡量，这就是引入了“有效性”的概念，其定义如下：

• 设θ_1,θ_2是参数θ的两个无偏估计，则方差小的估计更有效。也即如果

$$\mathrm{Var}(\theta_1)\le \mathrm{Var}(\theta_2)$$

则θ_1比θ_2更有效。

例如上面我们得到$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$和 $2\overline{X}$都是θ的无偏估计，而我们求方差得到

$$\mathrm{Var}(2\overline{X})=4\mathrm{Var}(\overline{X})=\frac{4}{n}\mathrm{Var}(X)=\frac{\theta^2}{3n}$$

而另一个

$$\mathrm{Var}\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

所以看出当$n\ge 2$ 时$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$的方差更小，故而更有效。

可是一个统计量的方差是否能够达到最小？实际上一个参数的估计，其方差有一个 C-R 下界。当然工科这个也不需要掌握。达到此最小方差的无偏估计，我们一般称为最小方差一致无偏估计，简称 UMVUE。这个有兴趣的同学也可以作为了解。

7.2.3：相合性

刚才我们说的无偏性和有效性，都是在固定了样本容量的情况下讨论的。那么如果把样本容量变化甚至让其趋于无穷大呢？下面我们介绍相合性，它是表示当样本量趋于无穷大时，能让近似估计值越来越接近实际参数值的性质。

• 令$\hat{\theta}$是θ的估计量，如果$n\to\infty$，有$\hat{\theta}$依概率收敛到θ，也就是

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\epsilon\right)=1$$

对$\forall\epsilon>0$ 都成立，那么$\hat{\theta}$是θ的相合估计，我们也称是弱相合估计。

• 如果改成$\hat{\theta}$均方收敛到θ，也就是

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right)=0$$

那么$\hat{\theta}$是θ的均方相合估计。

因为均方收敛可以推出依概率收敛，当然这是由不等式$P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|>\epsilon\right)\le\frac{E\left(\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right)}{\epsilon^2}$得到，所以均方相合是比弱相合强的。

• 实际上，如果题中要求判断是否为相合估计，实际上我们只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right)=0$$

即可。例如刚才我们求得的

$$\mathrm{Var}(2\overline{X})=\frac{\theta^2}{3n}\quad \mathrm{Var}\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

这两个方差都满足$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}\right)=0$。因而二者都是$\theta$的相合估计。

7.3：区间估计

刚才两章我们一直在说关于点估计，也就是根据观测的值估计参数的具体点值。而现在我们更期望得到参数大致所处在的一个范围。我们需要估计参数的一个范围，并且这个范围还要包含参数θ的真实可信度。这样的范围往往表现为是一个区间，我们就称其为**置信区间。**

一般的，我们估测的区间假设为(θ_1,θ_2)，那么如果满足

$$P(\theta_1<\theta<\theta_2)=1-\alpha$$

那么我们就称(θ_1,θ_2)为参数θ的$1-\alpha$置信区间。其中θ_1,θ_2分别是置信下限和置信上限，而$1-\alpha$是置信度，或者称置信系数。

上面我们提到的是双侧区间估计，还有单侧区间估计。其定义同理，就是只有置信下限，或者只有置信上限。

• 置信区间的精度是衡量置信区间的好坏的重要指标之一，区间的置信度太高则区间的长度就会很大，而区间长度大则就失去了意义。实际上置信区间的精度与**置信度**（置信系数）、**样本量**、**区间的长度**$\theta_2-\theta_1$三者有关。

一般的，如何求出一个置信区间？这里我们需要用到**分位数**的概念。分位数也就是：在一个分布中，给定α，如果实数λ满足

$$P(x<\lambda)=\alpha$$

我们就称λ是X的α分位数。特别的如果$\alpha=\frac{1}{2}$，就是我们常说的中位数。

•此外我们还需引入**枢轴量**的概念：如果一个关于样本的函数$Z=Z(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$含有待估计的位置参数，而$Z$的分布并不依赖任何未知参数，那么我们就称$Z$为枢轴量。需要注意枢轴量是含有未知参数的，不同于统计量。统计量不包含任何未知参数！

• 例如：给定一组数据，近似认为其服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，而σ^2是已知的，要求μ的$1-\alpha$置信区间，我们知道因为$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，于是可以构造枢轴量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

于是我们令$P(a_1<U<a_2)=1-\alpha$即可。这里我们一般取区间是对称的，于是我们两端都取标准正态分布的$\frac{\alpha}{2}$分位数就得到

$$P\left(-\phi_{\frac{\alpha}{2}}<U<\phi_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

其中$\phi_{\frac{\alpha}{2}}$是标准正态分布的$\frac{\alpha}{2}$分位数，而我们这样就可以解出

$$P\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

这就是我们得到的μ的$1-\alpha$置信区间。

• 实际上关于置信区间的估计，主要首先就是找到枢轴量，然后根据枢轴量找到初步分位数，最后根据枢轴量反解回出最后的区间。

这里主要需要会的就是如何求出枢轴量。而求出枢轴量的过程需要通过概率论知识，将变量通过伸缩变换，使其具体分布不含有未知参数。

• 如我们刚才提到的在$U[0,\theta]$中$X_{(n)}=max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的密度函数是

$$f(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

而我们通过伸缩变换，则得到$\frac{X_{(n)}}{\theta}$的密度函数变为

$$g(z)=\begin{cases}nz^{n-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

于是$\frac{X_{(n)}}{\theta}$的分布我们发现就不依赖具体的未知参数了。因此$\frac{X_{(n)}}{\theta}$就是一个枢轴量。

- 又例如：令$X_1,\cdots,X_n\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，那么由指数分布的可加性，可以得到

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\ \Gamma\,(n,\lambda)$$

而我们经过伸缩变换得到

$$2\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\ \Gamma\,\left(n,\frac{1}{2}\right)=\chi^2(2n)$$

于是我们找到了 $2\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i$是一个枢轴量，且其分布可以通过查表得到，从而得到具体置信区间。

7.4：正态总体参数的区间估计

这一部分往往会结合后面的假设检验考，而且具体常考的题就是给定一组具体问题和具体数据，求出对应参数的置信区间。

而这一部分的问题也要求必须掌握三大分布（卡方、F，t），同时也要知道各个枢轴量，如何根据不同情况构造出不同枢轴量，最后解出相应置信区间。

7.4.1：单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的区间估计

- **首先讨论均值μ的区间估计。**
- 如果方差σ^2已知，那么我们根据正态分布可加性，构造出的枢轴量是

$$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)\quad\Rightarrow\quad U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

从而根据置信系数，并且取等尾区间，得到枢轴量的区间是

$$P\left(-\phi_{\frac{\alpha}{2}}<U<\phi_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

于是解得μ的 $1-\alpha$置信区间是

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{\frac{\alpha}{2}}\ \ ,\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\phi_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

- 如果方程σ^2未知，那么我们构造的枢轴量中需要应用样本方差的信息。注意到

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\qquad\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\ \Rightarrow\ T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$$

其中$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$是样本方差。同理取 t 分布的等尾区间，得到对应分位数，我们得到此时μ的 $1-\alpha$置信区间是

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\quad,\quad\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

其中$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$是 t 分布的$\frac{\alpha}{2}$分位数。

• **然后讨论方差σ^2的区间估计**

这里我们只给出当μ位置的情况。此时我们构造的枢轴量为

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

同理结合我们得到σ^2的 $1-\alpha$置信区间是

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\quad,\quad\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

需要注意的是之前的 t 分布和标准正态分布的密度函数都是偶函数，所以我们不难得到 $-t_\alpha=t_{1-\alpha}$，之前这样写是为了方便看。

7.4.2：2 个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的区间估计

7.4.2.1：两个正态总体均值的差的区间估计

• 如果两个方差已知，那么我们构造的枢轴量是

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

由此得到的$\mu_1-\mu_2$的 $1-\alpha$置信区间是

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\phi_{\frac{\alpha}{2}}\quad,\quad\bar{X}-\bar{Y}+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\phi_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

• 如果两个方差位置但是相等，也即$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，则此时的枢轴量是

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)\qquad S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}}$$

其中S_X和S_Y分别是X,Y的样本方差。于是我们得到此时$\mu_1-\mu_2$的 $1-\alpha$置信区间是

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\quad,\quad\bar{X}-\bar{Y}+S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)$$

•实际上如果两个方差未知且不等的时候，情况是比较复杂的。只要知道两个样本充分大时其渐近分布趋于标准正态分布。这个一般不作为重点考察。

7.4.2.2：两个正态总体方差的比的区间估计

• 如果μ_1,μ_2已知，那么根据

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2\sim\chi^2(n_1)\qquad\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2\sim\chi^2(n_2)$$

于是得到枢轴量为

$$\frac{\sigma_2^2\,n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2\,n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

从而得到$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$的 $1-\alpha$置信区间是

$$\left(\frac{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)\quad,\quad\frac{n_1\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)\right)$$

• 如果μ_1,μ_2未知，则此时由

$$\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n_1-1)\quad\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2\sim\chi^2(n_2-1)$$

得到枢轴量为

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{(n_2-1)\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}{(n_1-1)\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

从而得到$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$的 $1-\alpha$置信区间是

$$\left(\frac{(n_1-1)\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{(n_2-1)\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1),\frac{(n_1-1)\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2}{(n_2-1)\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right)$$

第 8 章. 假设检验

by 自动化钱 2101 王子奇

1. 假设检验的基本概念（一定要看书理解）

假设检验、接受、拒绝、参数假设、参数假设检验（参数检验）、分布假设、分布假设检验。

（1）假设检验的基本原理：实际推断原理、检验统计量。

（2）两类错误：拒绝域、接受域、临界值、第 I 类错误（做题常用）、第 II 类错误、显著性水平（水平）、显著性检验、显著性水平为 α 的检验法（重点）。

（3）假设检验的一般步骤：原假设（零假设）、对立假设（备择假设）。

（4）p 值：（定义和检验准则见书 P181）

2. 正态总体参数的假设检验（重点）

检验法有：u检验法，χ^2检验法，t检验法，F检验法。

（1）单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情形

①总体均值 μ 的检验（$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$）

* 若方差 σ^2 已知（为 σ_0^2）：

检验统计量：$U=\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{\sigma_0}\sim N(0,1)$

拒绝域：$|u|=\left|\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{\sigma_0}\right|\geq u_{\alpha/2}$

若代入结果满足上式，拒绝 H_0；不满足，接受 H_0。

* 若方差 σ^2 未知：

检验统计量：$T=\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{S}\sim t(n-1)$

拒绝域：$|t|=\left|\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{s}\right|\geq t_{\alpha/2}(n-1)$

若代入结果满足上式，拒绝H_0；不满足，接受H_0。

②总体方差σ^2的检验（$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$）

* 若方差μ已知（为μ_0）：

检验统计量：$U=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{\sigma}\sim N(0,1)$

拒绝域：$|u|=\left|\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{\sigma}\right|\geq u_{\alpha/2}$

若代入结果满足上式，拒绝H_0；不满足，接受H_0。

* 若方差μ未知：

检验统计量：$T=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域：$t=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$或$t=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$

若代入结果满足上式，拒绝H_0；不满足，接受H_0。

（2）两个总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$与$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$的情形

①两总体均值差$\mu_1-\mu_2$的检验（$H_0:\mu_1-\mu_2=c$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq c$）

* 若方差σ_1^2和σ_2^2已知：

检验统计量：$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

拒绝域：$|u|=\left|\frac{\overline{x}-\overline{y}-c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right|\geq u_{\alpha/2}$

若代入结果满足上式，拒绝H_0；不满足，接受H_0。

* 若方差σ_1^2和σ_2^2未知且相等：

检验统计量：$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-c}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

其中，$S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_{1n_1}^2+(n_2-1)S_{2n_2}^2}{n_1+n_2-2}$

拒绝域：$|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-c}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\right|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

若代入结果满足上式，拒绝H_0；不满足，接受H_0。

∗ 若方差σ_1^2和σ_2^2未知且n_1和n_2充分大：

检验统计量：$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-c}{\sqrt{\dfrac{S_{1n_1}^2}{n_1}+\dfrac{S_{2n_2}^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

拒绝域：$|u|=\left|\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-c}{\sqrt{\dfrac{s_{1n_1}^2}{n_1}+\dfrac{s_{2n_2}^2}{n_2}}}\right|\geq u_{\alpha/2}$

若代入结果满足上式，拒绝H_0；不满足，接受H_0。

②两总体方差比的检验（$H_0:\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=c$，$H_1:\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq c$）

检验统计量：$F=\dfrac{S_{1n_1}^2}{cS_{2n_2}^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

拒绝域：$F=\dfrac{s_{1n_1}^2}{cs_{2n_2}^2}\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或$F=\dfrac{s_{1n_1}^2}{cs_{2n_2}^2}\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

若代入结果满足上式，拒绝H_0；不满足，接受H_0。

（注意：μ_1，μ_2已知和未知的算法均如上。但是前者的$s_{1n_1}^2$，$s_{2n_2}^2$计算时使用的均值是μ_1，μ_2；后者$s_{1n_1}^2$，$s_{2n_2}^2$计算时使用的均值是$\overline{x}$，$\overline{y}$）

3. 单侧假设检验（重点）

上一节均是双侧假设（双边假设）检验的方法。本节单侧假设（单边假设）的形式有：$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$；$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$；$H_0:\mu\le\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$；$H_0:\mu\ge\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$。

单边假设检验的方法几乎与上一节相同，但不同的是拒绝域的确定，两者都遵循的原则是* 统计量取拒绝域对应的区间的概率是 α；* 小于与大于取决于 H_1，由具体问题而定。

（这两节所有方法可以参考书 P191-192 的总结表格）

4.非正态总体的大样本检验和小样本检验（以看例题理解为主）

（1）大样本检验

当样本容量大时，可考虑近似分布，一般认为总体分布是正态分布。然后再对数据使用前两节介绍的方法。

（2）小样本检验

对非正态总体分布的特殊方法。

5.成对数据的假设检验

有时可以将双数据转化为单数据问题解决，比如差值的检验问题（具体方法见例题）。注意这类问题的标识非常明显：同一个人在服药前后的变化。

二、解题思路

本章的题型较为单一，都是运用正确的检验统计方法检验假设是否可以接受。如果是直接给出均值或者方差等，可直接套用方法；如果是给出一组或者两组数据，那就要明确什么统计量是已知的，什么是未知的，然后在知识归纳或书上的方法中选取合适的方法求解。大致步骤如下：

1.写出原假设和备择假设。

2.分析数据，明确合适的检验统计方法。

3.计算所需要的均值、方差等。

4.得出拒绝域。

5.将给出数据的均值和方差代入统计量，观察是否满足拒绝域。

6.若满足，拒绝原假设；若不满足，接受原假设。