

概率论11.12章

知识总结及解题经验

2023 年 6 月 4 日



西安交通大学

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

### 作品信息

- **标题：**概率论11.12章知识总结及解题经验
- **作者：**钱院学辅概率论编写小组
- **出品时间：**2023 年 6 月 4 日
- **总页数：**10

## 第 11 章. 随机过程的基本知识

by 智电钱 2101 曲圣

理工科（非数学类）的概率论教学从第 8 章结束，跳过了第 9 章和第 10 章，进入了第 11 章--随机过程，这最后两章的难度比前几章又提升了一个台阶。前面我们主要研究 1 维或 n 维随机变量，而这两章主要研究一族随机变量  $X(t)$ ，其数学意义是随机变量  $X$  在不同时刻（也可以说是不同代，不同...）的取值。

### Part 1 随机过程的定义

当课本引入  $X(t, \omega)$  这一表征随机过程的符号，以及样本轨道、状态空间等概念时，很多同学可能感到头疼。但实际上，课本对这一模块全新的数学概念并没有给出规范化的定义，就像高数讲不清楚极限，那是数分的任务；线代讲不清楚空间，那是高代的任务。因此，作为工科的学生，并不需要深入理解这一概念，只需要学会应用即可。

例 11.5 设随机过程  $X_t$  只有两条样本曲线

$$X(t, \omega_1) = k \cos t, X(t, \omega_2) = k \sin t, \quad -\infty < t < +\infty$$

其中  $k(>0)$  为常数,  $P(\omega_1) = \frac{1}{3}, P(\omega_2) = \frac{2}{3}$ , 求  $X_t$  的一维分布函数  $F_0(x)$  和二维分布函数  $F_{0, \pi/2}(x_1, x_2)$ .

解 由题意, 随机变量  $X(0)$  服从两点分布:  $X(0) \sim \begin{pmatrix} 0 & k \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , 故有

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq x < k, \\ 1, & x \geq k \end{cases}$$

类似地, 二维随机向量  $\left(X(0), X\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \sim \begin{pmatrix} (0, k) & (k, 0) \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , 故有

$$F_{0, \pi/2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 < 0 \text{ 或 } x_2 < 0 \text{ 或 } 0 \leq x_1 < k, 0 \leq x_2 < k, \\ \frac{1}{3}, & x_1 \geq k, 0 \leq x_2 < k, \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq x_1 < k, x_2 \geq k, \\ 1, & x_1 \geq k, x_2 \geq k \end{cases}$$

譬如课本 P262 例 11.5, 我们并不必须写成解答里的那种形式, 以下方法可能更为直观:  $\omega$  有  $1/3$  的概率取  $\omega_1$ , 此时  $X(t) = k \cos t$ , 因此  $X(0) = k, X(\pi/2) = 0$ , 同样的,  $\omega$  有  $2/3$  的概率取  $\omega_2$ , 此时  $X(t) = k \sin t$ , 因此  $X(0) = 0, X(\pi/2) = k$ .

列出下表，轻松得解！

$X(0) \setminus X(\pi/2)$	0	k
0	0	2/3
k	1/3	0

## Part 2 随机过程的分布与数字特征

随机变量的性质可以完全类比推广到随机变量族，就像一维微积分可以推广到  $n$  维一样。

一维分布函数为： $F_t(x) = P(X(t) \leq x)$

概率密度  $f_t(x) = (F_t(x))'$

二维分布函数为： $F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2)$

下面谈谈数字特征。

均值  $m_X(t)$  的定义是：

$$m_X(t) = E(X(t))$$

主要有两种计算方法：

方法 1：利用课本上的公式（背景是黎曼积分）

$$m_X(t) = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_t(x) dx$$

方法 2：在  $E(X(t))$  中直接带入  $X(t)$  的表达式，后续操作类比概率论部分。

注意在计算时，应当将  $t$  看作常量！

方法 2 在课本上没有明确给出，但在例题中应用了，这种方法其实比方法 1 要简单，因为方法 1 的难度在于求出分布函数，而方法 2 将我们不熟悉的随机过程转化为熟悉的均值计算方法（见第四章）。

下面给出例子--课本 P276 习题 13

- 13/ 设随机变量  $A$  服从参数为  $\lambda$  的指数分布，试求随机过程  $X(t) = e^{-At}, t > 0$  的
- (1) 一维概率密度；
  - (2) 均值函数；
  - (3) 自相关函数。

在第（1）问中，通过对一维分布函数  $F_t(x)$  求导可得一维概率密度  $f_t(x)$

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t} x^{\frac{\lambda}{t}-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

第（2）问，若利用方法 1，

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_t(x) dx = \int_0^1 x \frac{\lambda}{t} x^{\frac{\lambda}{t}-1} dx = \frac{\lambda}{\lambda+t}$$

若利用方法 2,

$$m_X(t) = E(X(t)) = E(e^{-At}) = \int_0^{+\infty} e^{-At} \lambda e^{-\lambda A} dA = \frac{\lambda}{\lambda+t}$$

虽然最重要且最常见的是计算均值, 但其他数字特征同样不容忽视。他们的定义类似概率论部分, 只是稍有不同, 而计算方法完全类比以上方法 1, 2。

方差函数  $D_X(t)$  也常常记作  $V(t)$  或  $\sigma^2(t)$ , 其定义式为:

$$D_X(t) = E\{[X(t) - m_X(t)]^2\} = E(X^2(t)) - E(X(t))^2$$

自相关函数  $R_X(t_1, t_2)$  的定义式为:

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2))$$

自协方差函数  $C_X(t_1, t_2)$  的定义式为:

$$C_X(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2)) = E(X(t_1)X(t_2)) - E(X(t_1))E(X(t_2))$$

互相关函数  $R_{XY}(t_1, t_2)$  的定义式为:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y(t_2))$$

互协方差函数  $C_{XY}(t_1, t_2)$  的定义式为:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), Y(t_2)) = E(X(t_1)Y(t_2)) - E(X(t_1))E(Y(t_2))$$

$X(t)$  和  $Y(t)$  不相关的定义为  $C_{XY}(t_1, t_2) = 0$ 。这一点仅供了解。

### Part 3 随机过程的分布与数字特征

根据不等式

$$X(t) \leq |X(t)| \leq \frac{1 + X^2(t)}{2}$$

可得,

$$E(X^2(t)) \text{ 存在是 } E(X(t)) \text{ 存在的充分条件。}$$

(这一点希望读者基于期望的定义, 结合高数中积分的收敛性补证!)

有读者可能不知道存在的含义, 其实就是求出  $E(X^2(t))$ , 然后说明它是有限值即可。

二阶矩过程要求  $E(X^2(t))$  存在, 这是一个比较强的条件。在解题时, 只要涉及到二阶矩过程, 例如证明某一过程是正交增量过程, 都需要我们说明  $E(X^2(t))$  存在。这一条在 12 章中也有应用!

二阶矩过程的一个重要的子类是正交增量过程, 其定义是:

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4, \text{ 有 } E\{[X(t_2) - X(t_1)][X(t_4) - X(t_3)]\} = 0$$

这一定义看起来云里雾里, 但实际上正是借用了代数中正交的概念。  $X(t)$  在

$t_1 \sim t_2$ 时段的增量和 $t_3 \sim t_4$ 时段的增量正交，换成概率论的语言就是乘积的期望为0。在这一部分中，通常规定  $X(0) = 0$ 。再定义  $g(t) = E(X^2(t))$ 。

下面说一个重要的数学思想：无中生有。

当  $t_1 < t_2$  时， $E(X(t_1)X(t_2)) = E\{[X(t_1) - X(0)][X(t_2) - X(t_1) + X(t_1)]\} = E\{[X(t_1) - X(0)][X(t_2) - X(t_1)]\} + E(X^2(t_1)) = 0 + E(X^2(t_1)) = g(t_1)$

蓝字部分无中生有的目的是凑出正交增量过程的定义式。注意，这一思想是贯穿于 11 和 12 章的学习中的，这一点希望大家多体会。

因此， $E(X(s)X(t)) = E(X(s \wedge t))$ ，其中  $s \wedge t = \min\{s, t\}$ ，此外， $s \vee t = \max\{s, t\}$

还有一个结论是  $g(t)$  是单调非减函数，这一结论仅需了解即可。

独立增量过程不是二阶矩过程的子类，与正交增量过程完全不同，但很多同学往往将其混淆。其定义为：

$\forall 0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n$ , 有  $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2) \dots X(t_n) - X(t_{n-1})$  相互独立

平稳独立增量过程的定义是：

$\forall s \geq 0, t > 0$ , 有  $X(t+s) - X(s)$  的概率分布与  $s$  无关

我们审视一下表达式  $X(t+s) - X(s)$ 。 $s$  代表起点， $t$  代表长度。也就是说，与起点无关。但值得注意的是， $X(t+s) - X(s)$  也不一定与长度有关！

## Part 4 泊松过程

计数过程  $N(t)$  表征了  $(0, t]$  区间事件的发生次数。

泊松过程是计数过程的子类，其定义是：

条件 1:  $N(0) = 0$

条件 2: 是独立增量过程

条件 3:

描述方法 1:

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

描述方法 2:

$$P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$$

这两种描述方法等价。方法 2 在实际生活中用的比较多，因为在现实中比较容易验证，其含义为：短时间  $\Delta t$  内事件发生 1 次的概率与时间间隔成比例，发生 2 次及以上的概率非常小。而方法 1 在做题里用的比较多，其实这一部分每个题的套路完全一样：结合  $e^x$  的泰勒级数，以及二项式定理，列写  $\sum$  表达式计算。

下面给出例子--课本 P276 习题 20 和 23。

(20.) 设  $X_T = \{X(t), t \geq 0\}$  和  $Y_T = \{Y(t), t \geq 0\}$  是两个相互独立的分别有强度  $\lambda$  和  $\mu$  的泊松过程, 试证明  $Z_T = \{X(t) + Y(t), t \geq 0\}$  是具有强度  $\lambda + \mu$  的泊松过程。

条件 1, 2 较易验证 (独立增量的证明也不需要细写)

$$\begin{aligned} P(Z(t+s) - Z(s) = n) &= \sum_{k=0}^n P(X(t+s) - X(s) = k) P(Y(t+s) - Y(s) = n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} C_n^k (\lambda t)^k (\mu t)^{n-k} \\ &= \frac{((\lambda + \mu)t)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned}$$

凑出二项式定理的构造思路, 需要敏锐的观察能力, 这一点希望大家在实践中加以体会。

(23.) 设在时间区间  $(0, t]$  来到某商店门口的顾客数  $N(t)$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程, 每个来到商店门口的顾客进入商店的概率为  $p$ , 不进入商店就离去的概率是  $1-p$ , 各个顾客进入商店与否相互独立, 令  $X(t)$  为  $(0, t]$  内进入商店的顾客数, 证明  $\{X(t), t \geq 0\}$  是强度为  $\lambda p$  的泊松过程。

在看解答之前, 希望大家复习全概率公式。

$$\begin{aligned} P(X(t+s) - X(s) = m) &= \sum_{k=m}^{+\infty} P(N(t+s) - N(s) = k \mid N(t+s) - N(s) = k) P(N(t+s) - N(s) = k) \\ &= \sum_{k=m}^{+\infty} C_k^m p^m (1-p)^{k-m} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \frac{1}{m!} p^m e^{-\lambda t} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-m)!} (1-p)^{k-m} \\ \text{令 } i &= k - m \\ &= \frac{1}{m!} p^m e^{-\lambda t} (\lambda t)^m \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} (1-p)^i = \frac{1}{m!} p^m e^{-\lambda t} (\lambda t)^m e^{\lambda t(1-p)} = \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{-\lambda p t} \end{aligned}$$

这块的问题有些步骤的思路可能不太自然, 因此希望大家动手完整的算一遍! 接下来是泊松过程的数字特征。其核心是:

$$N(t) = N(t) - N(0) \sim P(\lambda t)$$

因此

$$E(N(t)) = D(N(t)) = \lambda t$$

当  $s < t$  时,  $\text{Cov}(N(s), N(t)) = \text{Cov}(N(s) - N(0), N(t) - N(s) + N(s)) = \text{Cov}(N(s) - N(0), N(t) - N(s)) + \text{Cov}(N(s), N(s)) = D(N(s)) = \lambda s$

$s > t$  的情况可以类似讨论。

不知道大家是否对蓝字部分的操作有点眼熟呢? 没错, 这就是前文提及的**无中生有**!

$N(t)$  是  $(0, t]$  区间事件的发生次数, 仅用此描述泊松过程是不完备的, 因此课本引入了  $S_n$  表示事件第  $n$  次发生的时刻,  $T_n = S_n - S_{n-1}$  表示事件第  $n$  次和第  $n-1$  次发生的时间间隔。

这一部分由于推导复杂, 故不作为重点讲解, 大家可以看一下课本的推导过程, 有兴趣者可以深入研究课本 P276 习题 24。

24. 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程,  $S_n (n \geq 1)$  表示事件  $A$  第  $n$  次出现的发生时刻, 试求  $(S_1, S_2)$  的联合概率密度。

这题主要有 2 种做法, 其一是利用  $e^x$  的泰勒级数, 求出分布函数, 再求导, 其二是从  $T_1, T_2$  的概率密度求得  $S_1, S_2$  的概率密度。

关键是要记住结论

“ $N(t)$  是强度为  $\lambda$  的泊松过程  $\Leftrightarrow T_n \sim \exp(\lambda)$  且相互独立”

## Part 5 布朗运动

布朗运动也是计数过程的子类, 其定义是:

条件 1:  $N(0) = 0$

条件 2: 是独立增量过程

条件 3:  $N(t) - N(s) \sim N(0, \sigma^2 |t - s|)$

从这里可以推出, 布朗运动是平稳独立增量过程, 是正态过程。

在条件 3 中, 令  $s = 0$ , 可得:

$$N(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$$

这一算式和条件 3 共同构成了布朗运动的仅有的计算公式!

显然,  $E(N(t)) = 0$

利用**无中生有**, 可知:  $\text{Cov}_N(s, t) = \sigma^2 s \wedge t$ , 这一点请读者补证。

到此为止, 第 11 章随机过程的所有重点知识和解题技巧就讲解完毕了。



## 第 12 章. 平稳过程

by 自动化钱 2101 袁晨翔

一个随机过程  $X(t)$ ，如果它的  $n$  维概率密度(或  $n$  维分布函数)不随时间起点选择的不同而改变，则称  $X(t)$  是严平稳随机过程。

$$p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

该式说明，平稳随机过程的统计特性与所选取的时间起点无关。或者说，整个过程的统计特性不随时间的推移而变化。

平稳随机过程的  $n$  维概率密度不随时间平移而变化的特性，反映在其一、二维概率密度及数字特征上具有以下性质：

(1) 若  $X(t)$  为平稳过程，则它的一维概率密度与时间无关。

$$p_x(x_1; t_1) = p_x(x_1; t_1 + \tau) = p_x(x_1; 0) = p_x(x)$$

所以与一维分布有关的数字特征均为常数。

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_x dx = m$$

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 p_x dx = \psi_x^2$$

$$p_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_x(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = p_x(x_1, x_2; \tau)$$

所以与二维分布有关的数字特征仅是  $\tau$  的函数，而与  $t_1, t_2$  的本身取值无关。

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$$

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - m_x^2$$

当  $\tau=0$  时，有

$$C_x(0) = R_x(0) - m_x^2 = \sigma_x^2$$

若随机过程满足

$$(1) E[X(t)] = m_x;$$

$$(2) R_x(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = R_x(\tau), \tau = t_2 - t_1;$$

$$(3) E[X^2(t)] < \infty.$$

则称  $X(t)$  为宽平稳过程(或称广义平稳过程)

严平稳过程只要均方值有界, 就是广义平稳的, 但反之则不一定。

当我们同时考虑两个平稳过程  $X(t)$  和  $Y(t)$  时, 若它们的互相关函数仅是单变量  $\tau$  的函数, 即

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = R_{XY}(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1,$$

则称  $X(t)$  和  $Y(t)$  宽平稳相依, 或称这两个随机过程是联合宽平稳的。

例 12.1 设随机过程  $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi)$  式中  $a, \omega_0$  为常数,  $\Phi$  是在区间  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量, 这种信号通常称为随相正弦波。求证  $X(t)$  是平稳的。

在上面的讨论中, 每当谈到随机过程时, 就意味着所涉及的是大量的样本函数的集合。要得到随机过程的统计特性, 就需要观察大量的样本函数。

能否找到更简单的方法代替上述方法呢?

各态历经性过程的各样本函数都同样的经历了随机过程的各种可能状态, 因此从随机过程的任何一个样本函数都可以得到随机过程的全部统计信息, 任何一个样本函数的特性都可以充分地代表整个随机过程的特性。

定义设  $X(t)$  是一个平稳过程

$$(1) \text{ 若 } \bar{x}(t) = E[X(t)] = m_x$$

以概率 1 成立, 则称随机过程  $X(t)$  的均值具有各态历经性。

$$(2) \text{ 若 } x(t)x(t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = R_x(\tau)$$

以概率 1 成立, 则称  $X(t)$  的自相关函数具有各态历经性。

$$\text{式中 } \bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

$$x(t)x(t+\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt$$

分别称作  $X(t)$  的时间均值和时间自相关函数。

若  $X(t)$  的均值和自相关函数都具有各态历经性, 则称  $X(t)$  是宽各态历经过程。

$$(3) \text{ 若 } F(x) = P\{X(1) \leq x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U[x - x(t)] dt$$

以概率 1 成立，则称  $X(t)$  的分布函数具有各态历经性。式中

$$U[x - x(t)] = \begin{cases} 1, & x(t) \leq x \\ 0, & x(t) > x \end{cases}$$

例 12.2 讨论本节例 12.1 所给出的随机过程

$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Phi)$  是否各态历过程。

性质 1:  $R_X(\tau)$  是偶函数，即满足  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

证：

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] = E[X(t + \tau)X(t)] = R_X(-\tau)$$

性质 2:  $R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

证：任何正的随机函数的数学期望恒为非负值，即

$$E[(X(t) + X(t + \tau))^2] \geq 0$$

$$E[X^2(t) \pm 2X(t)X(t + \tau) + X^2(t + \tau)] \geq 0$$

对于平稳过程，有

$$E[X^2(t)] = E[X^2(t + \tau)] = R_X(0)$$

$$R_X(0) \pm 2X(t)X(t + \tau) \geq 0$$

$$\therefore R_X(0) \geq |E[X(t)X(t + \tau)]| \geq |R_X(\tau)|$$

对于中心化自相关函数(或协方差函数)，不难得到同样的结论：

$$C_X(0) \geq |C_X(\tau)| \text{ 或 } |C_X(\tau)| \leq \sigma_x^2$$

性质 3: 周期平稳过程的自相关函数必是周期函数，且与过程的周期相同。

若平稳过程  $X(t)$  满足条件  $X(t) = X(t+T)$ ，则称它为周期平稳过程，其中  $T$  为过程周期。

$$\text{证: } R_X(t+T) = E[X(t)X(t + \tau + T)] = E[X(t)X(t + T)] = R_X(t)$$

性质 4: 平稳过程的均方值可以由自相关函数令  $\tau=0$  得到。 $R_X(0)$  代表了平稳过程的“总平均功率”。

$$R_X(0) = E[X^2(t)]$$

性质 5: 不包含任何周期分量的非周期平稳过程满足

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = R_X(\infty) = m_x^2$$

这是因为, 从物理意义上讲, 当  $\tau$  增大时  $X(t)$  与  $X(t + \tau)$  之间相关性会减弱,

在  $\tau \rightarrow \infty$  的极限情况下, 两者相互独立, 于是有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[X(t)X(t + \tau)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[X(t)]E[X(t + \tau)] = m_x^2$$

$$\therefore R_X(\infty) = m_x^2$$

对于中心化自相关函数, 则有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C_X(\tau) = C_X(\infty) = 0$$

性质 6: 若平稳过程含有平均分量(均值)为  $m_x$ , 则自相关函数将含有固定分量  $m_x^2$ 。即

$$R_X(\tau) = C_X(\tau) + m_x^2$$

当考虑到非周期平稳过程有  $R_X(\infty) = m_x^2$ , 并  $\tau = 0$  时, 得

$$C_X(\tau) = \sigma_x^2 = R_X(0) - R_X(\infty)$$

性质 7: 自相关函数必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \geq 0$$

这一条件限制了自相关函数曲线图形不能有任意形状, 不能出现平顶, 垂直边或在幅度上的任何不连续。

性质 8: 一个函数能成为自相关函数的充要条件是, 必须满足半正定性, 即对任意函数  $f(t)$  有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)(t_2 - t_1) f(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0$$

例 12.3: 平稳过程  $X(t)$  的自相关函数为

$$R_X(\tau) = 100e^{-10\tau} + 100 \cos(10\tau) + 100$$

求  $X(t)$  的均值、均方值和方差。