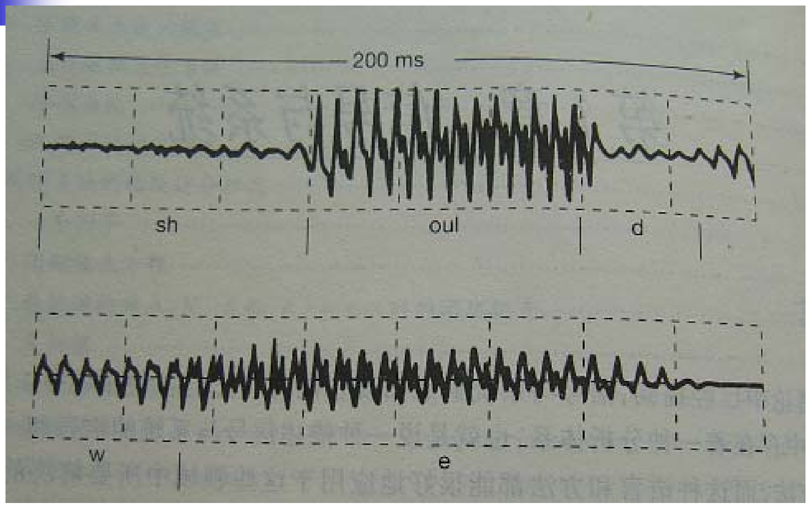
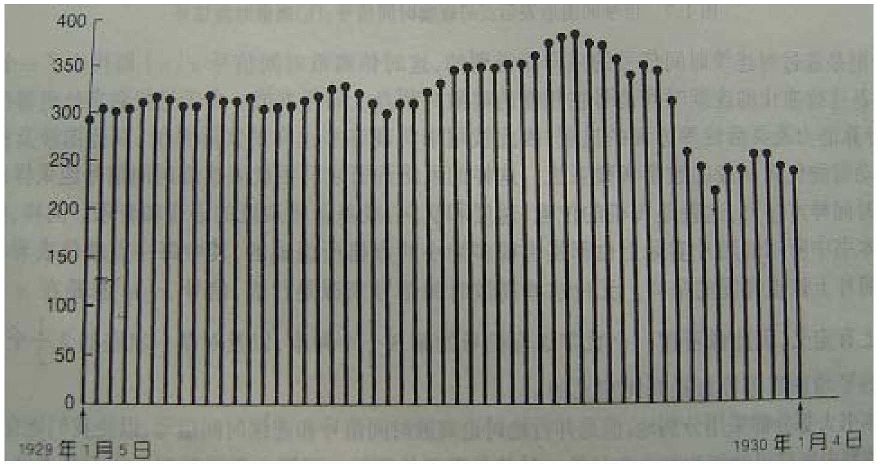
# 第一章 信号与系统

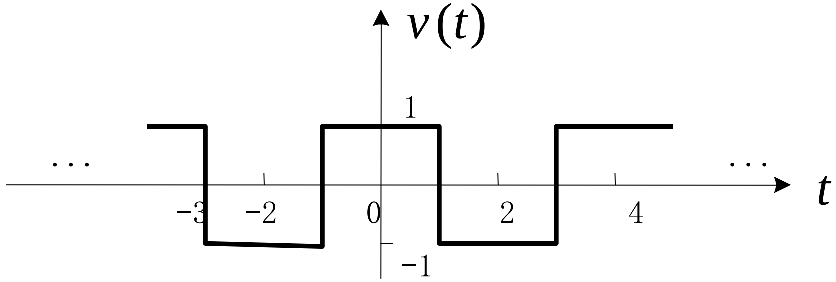


- 信号举例及其数学表示
- 信号的自变量变换
- 今后常用的几种基本信号
- 系统及其数学模型
- 系统的基本性质

# 几种一维确知信号的示例




方波发生器输出的信号

离散与连续

定义域与值域

# 一维确知信号的共性及其建模

共性：一维确知信号均可以表示成一个自变量的函数。
不失一般性，本课程将以时间为自变量讨论问题。

连续时间信号—自变量连续变化的信号。

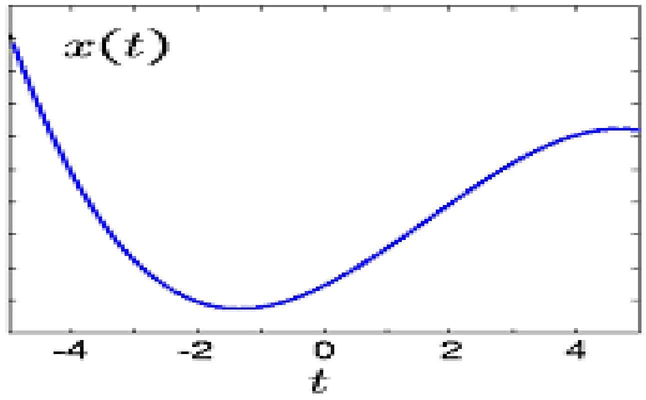
用 $t$ 表示连续的时间自变量，连续时间信号模型化为：$x(t)$ 。

离散时间信号—只在某些离散的时间点上才有定义的信号，本质上是一串有序的数值，也称为序列。

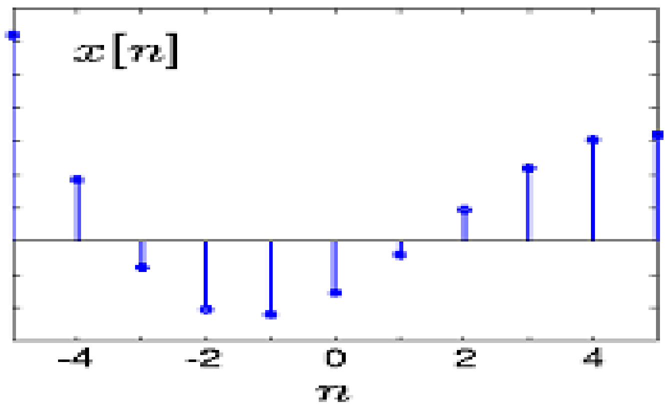
用 $n$ 表示离散的时间自变量，离散时间信号模型化为：$x[n]$。

连续时间信号在离散时刻点上的样本可以构成一个离散时间信号。
连续时间信号的值域可以是不连续的。

# 一维确知信号的共性及其建模




连续时间信号




离散时间信号

- 离散时间信号可以从连续时间信号通过提取其样本而得到。如: $x(t) \longrightarrow x(nT)$
- 如果将离散时间信号值加以量化，则称之为数字信号。

# 信号能量和功率的抽象化

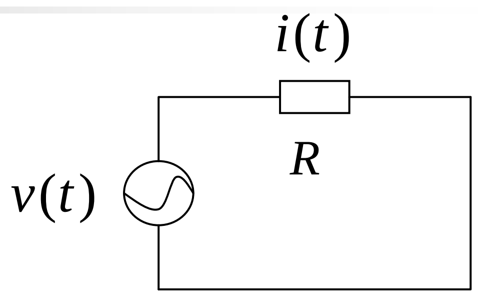
电路中的能量和功率:

瞬时功率: $p(t)=v(t)*i(t)=\frac{1}{R}v^2(t)$

在时间间隔 $t_1 \le t \le t_2$内消耗的总能量:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{R}v^2(t)dt$$

平均功率:
$$\overline{P}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{R}v^2(t)dt$$




抽象化

连续时间信号 $x(t)$ 在 $t_1 \le t \le t_2$ 区间的能量定义为:

$$E=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt$$

连续时间信号 $x(t)$ 在$t_1 \le t \le t_2$ 区间的平均功率定义为:

$$P=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt$$

# 无限区间信号的总能量和平均功率



离散时间信号在 $n_1 \le n \le n_2$ 区间的能量定义为

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

离散时间信号在 $n_1 \le n \le n_2$ 区间的平均功率为

$$P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

在无限区间上也可以定义信号的总能量和平均功率:

连续时间情况下:

总能量

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

平均功率

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

离散时间情况下:

总能量

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

平均功率

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2$$

# 三类重要信号

**1.** 能量信号—信号具有有限的总能量， 即:

$$E_\infty < \infty, \quad P_\infty = 0$$

工程中实际存在的信号大多属于此种信号

**2.** 功率信号—信号有无限的总能量，但平均功率有限。即:

$$E_\infty = \infty, \quad 0 < P_\infty < \infty$$

**3.** 信号的总能量和平均功率都是无限的。 即:

$$E_\infty = \infty, \quad P_\infty = \infty$$

# 时移变换

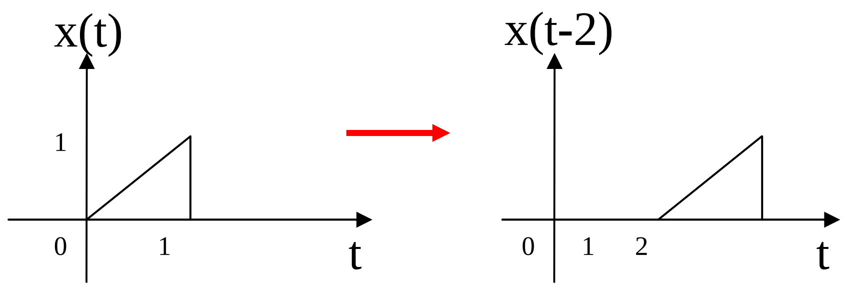
由于信号可视为自变量的函数，当自变量改变时，必然会使信号的特性相应地改变。

## 时移变换：Shift of Signals

$x(t) \to x(t-t_0)$

当 $t_0 > 0$ 时，信号向右平移 $t_0$

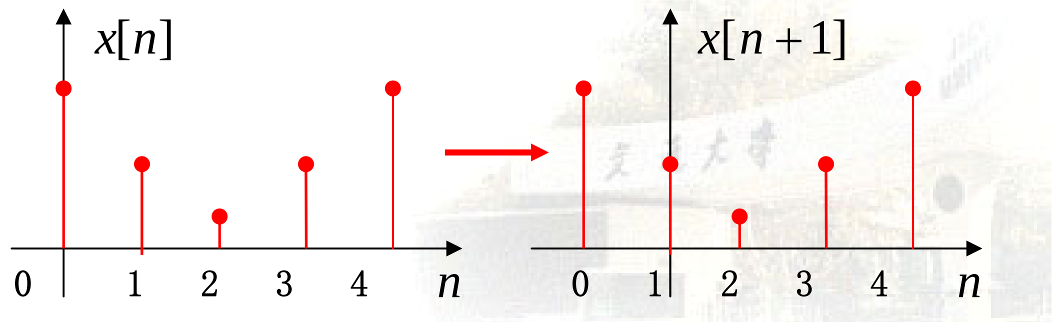
$t_0 < 0$ 时，信号向左平移 $|t_0|$




$x[n] \to x[n-n_0]$  $n_0$ 为整数

当 $n_0 > 0$时，信号向右平移 $n_0$

$n_0 < 0$ 时，信号向左平移 $|n_0|$



XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 反转变换和尺度变换

**反转变换:**

$$x(t) \longrightarrow x(-t)$$

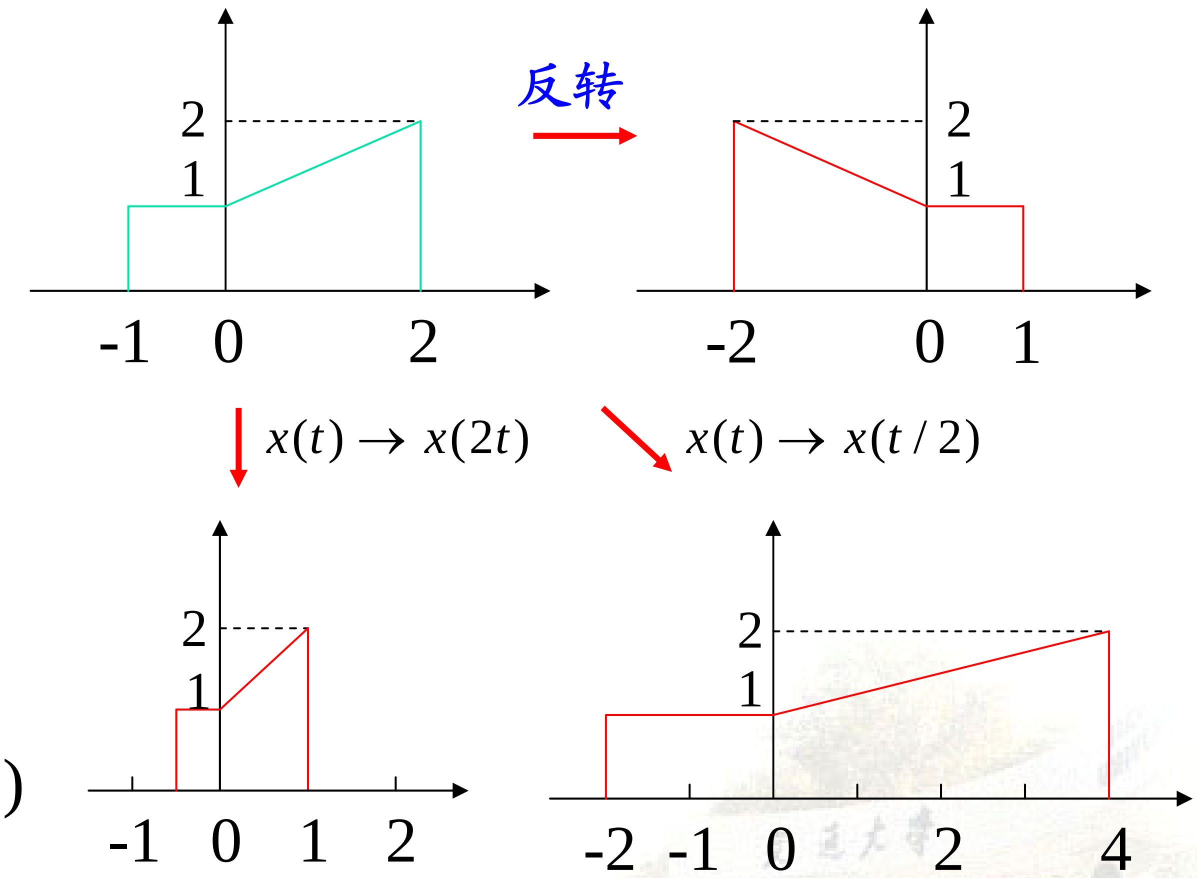
信号以 $t=0$ 为轴呈镜像对称。

**尺度变换:**

$$x(t) \longrightarrow x(at)$$

$a>1$ 时，$x(at)$ 是将 $x(t)$ 在时间上压缩a倍，

$0<a<1$ 时，$x(at)$ 是将 $x(t)$ 在时间上扩展1/a倍。

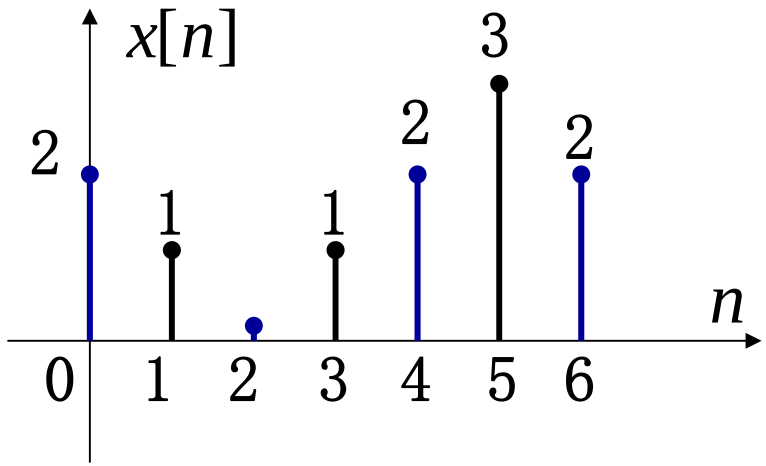


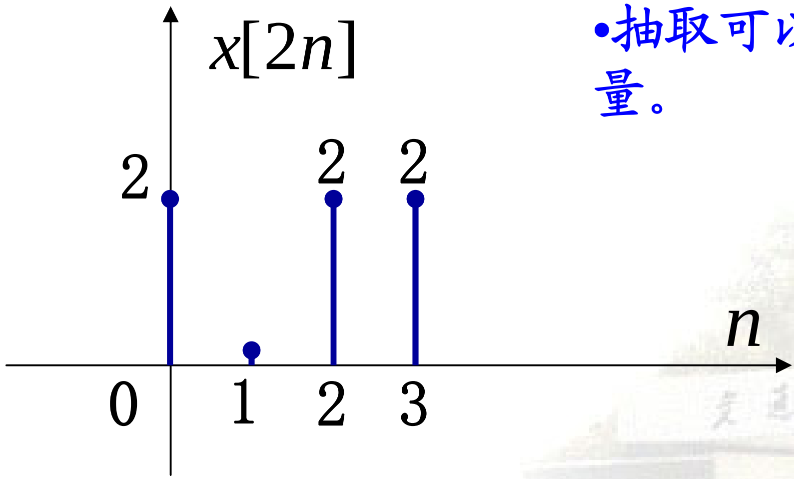

a>1 原信号被压缩　　0<a<1 原信号被扩展

# 离散信号的抽取

由于离散时间信号的自变量只能取整数值，因而尺度变换一般只对连续时间信号而言。对离散时间信号，存在两种“尺度变换”：当**a**为大于**1**的整数时，离散信号的尺度变化表现为对离散信号的抽取，例如：

$$x[n] \longrightarrow x[2n]$$



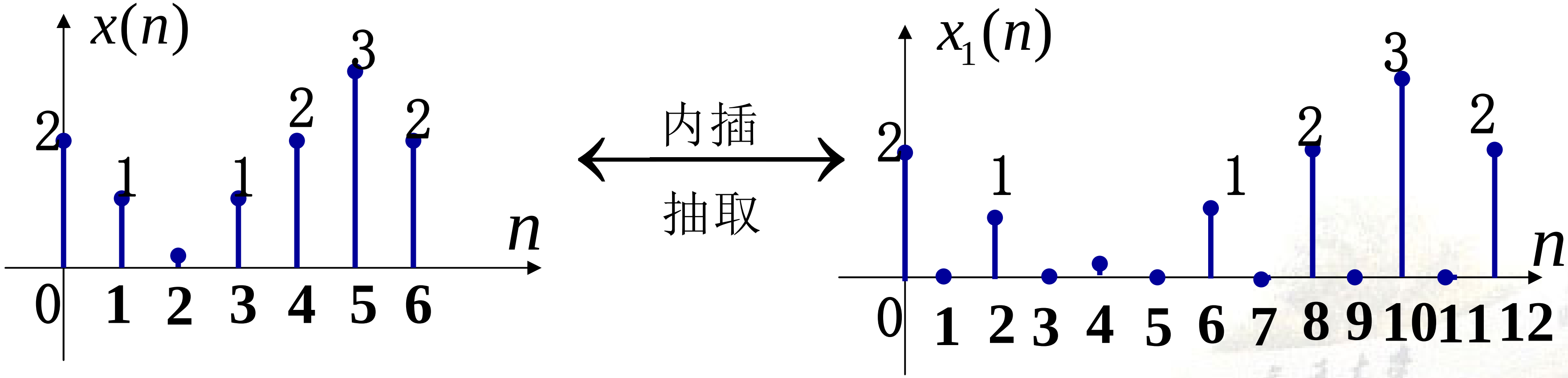




- 抽取是不可逆的；
- 抽取可以降低数据量。

# 离散信号的内插

- 内插(interpolation)

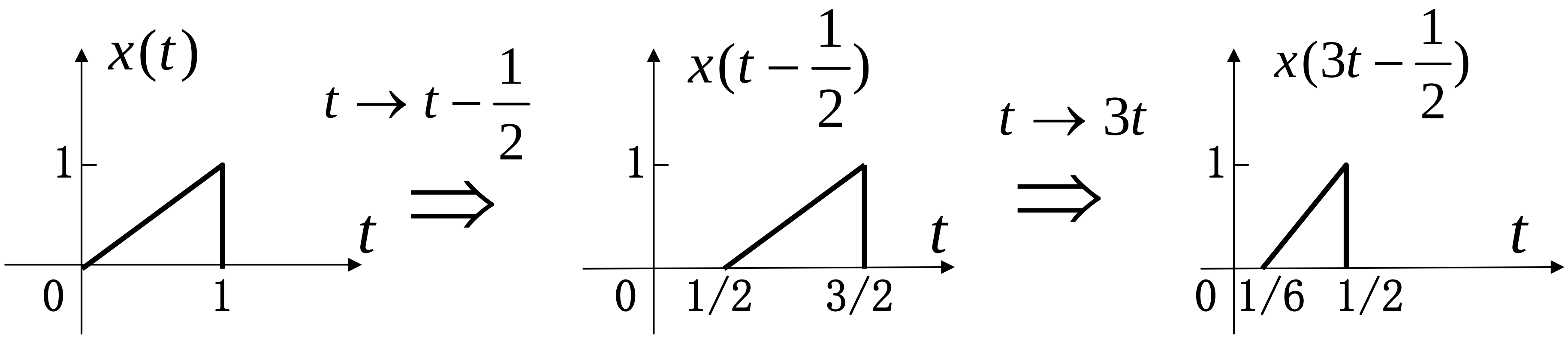
$$x(n) \longrightarrow x_1(n) = \begin{cases} x(n/2) & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases}$$




内插是可逆的。

# 信号自变量变换的综合示例

$$x(t) \Rightarrow x(3t - \frac{1}{2})$$




一般过程和步骤：

$$x(t) \to x(\alpha t + \beta)$$

1. 首先根据$\beta$的值将x(t)延时或超前，
2. 根据$\alpha$的值对延时或超前的信号做尺度变换，
3. 如果$\alpha < 0$则还要进行时间反转。
4. 特殊点（如零点，各端点和节点）验证。

Mar.1.2012 Thu. 08:47

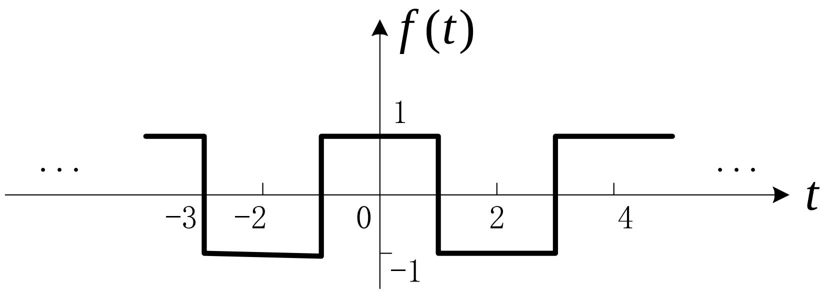
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 信号的周期性

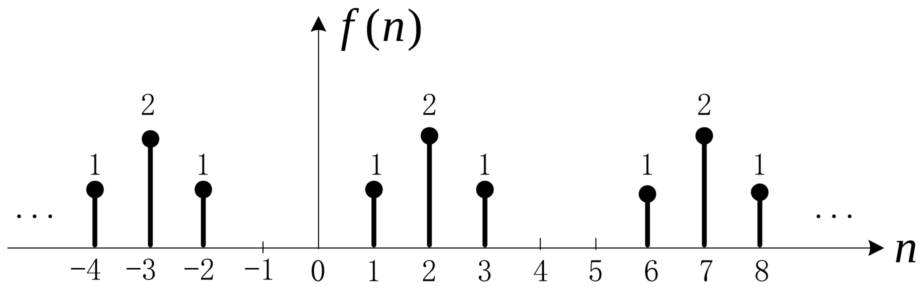
周期信号的定义：对于全部的t或n，

$$x(t)=x(t+T) \qquad x[n]=x[n+N]$$

T和N为信号的周期。显然，2T,3T,4T,…或2N,3N,4N,…也是信号的周期。
满足此关系的正实数（正整数）中最小的一个，称为信号的基波周期 ($T_0N_0$)。




连续的周期信号




离散周期信号

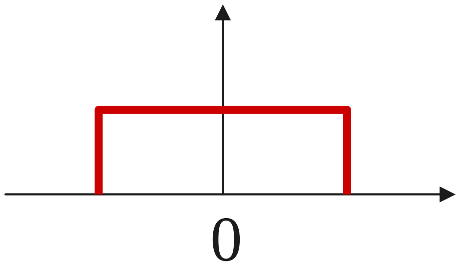
$x(t)=c$ 可视为一种特殊的周期信号，但它的基波周期没有确定的定义。

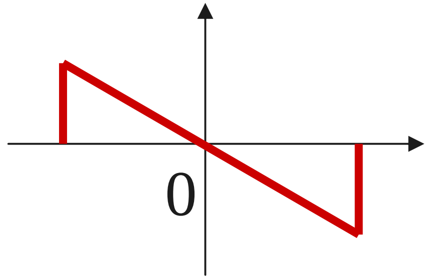
$x[n]=c$ 也可以视为周期信号，其基波周期为$N_0=1$。

# 信号的奇偶性

如果有**x(-t)=x(t)** 则称该信号是偶信号。

如果有**x(-t)=-x(t)** 则称该信号是奇信号。



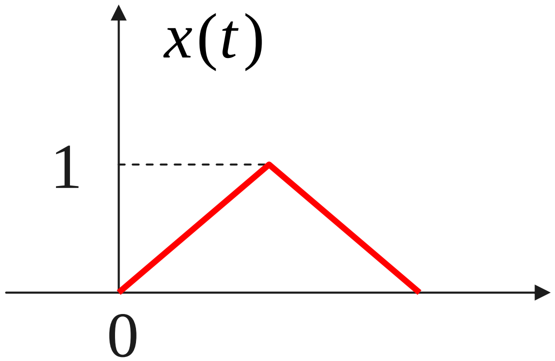

任何信号都能分解成一个偶信号与一个奇信号之和。

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$$

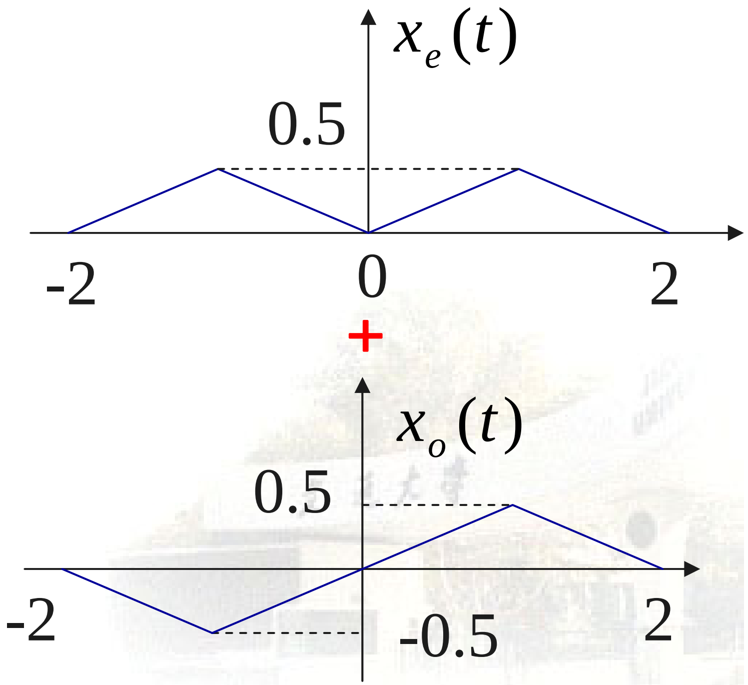
$$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$$

$$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$

分别为偶部和奇部




=



# 信号的奇偶性

- 对复信号而言:

如果有

$$x(t) = x^*(-t)$$

$$x(n) = x^*(-n)$$

则称该信号为共轭偶信号。

如果有

$$x(t) = -x^*(-t)$$

$$x(n) = -x^*(-n)$$

则称为共轭奇信号。

任何信号都能被分解成一个共轭偶信号与一个共轭奇信号之和。

# 信号的奇偶性

- 复信号的奇偶分解:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

其中:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x^*(-t)]$$

其中:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

# 连续时间复指数信号与正弦信号(一)



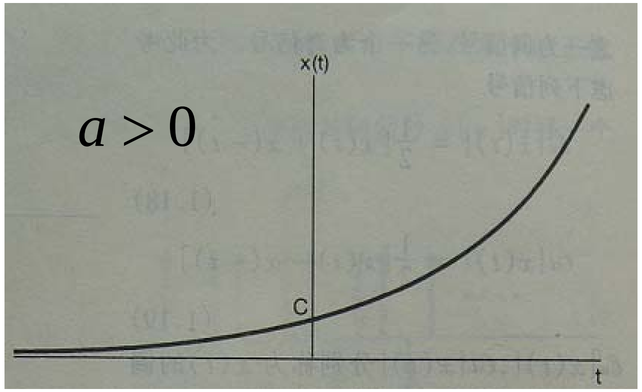
$$x(t) = Ce^{at}$$ 其中 **C, a** 为复数

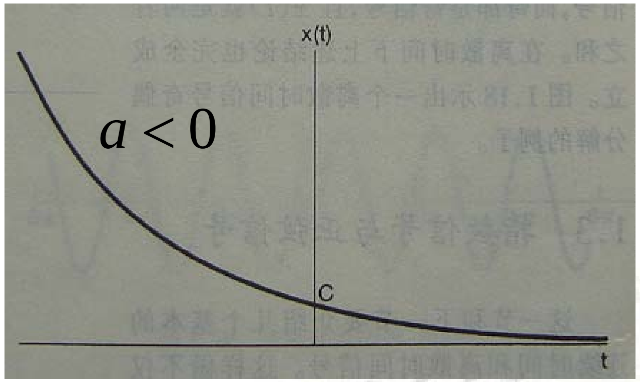
**1.** 实指数信号: **C**，**a** 为实数

**a>0**呈单调指数上升。

**a<0**呈单调指数下降。

**a=0 x(t)=c**是常数。




**2.** 周期性复指数信号与正弦信号

$a = j\omega_0$ **C**为实数，取**C=1**

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

实部与虚部都是正弦信号。

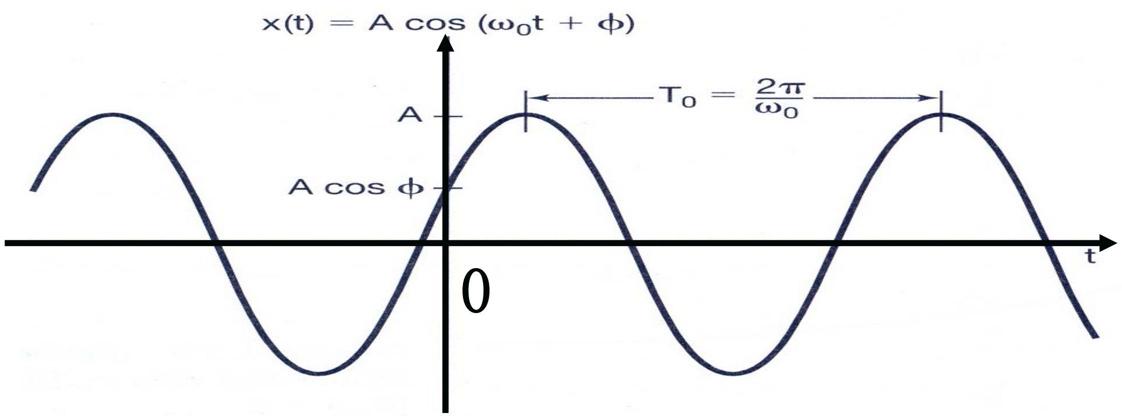
$x(t)$ 显然是周期的，其基波周期为: $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ 基波频率为 $\omega_0$

## 连续时间复指数信号与正弦信号（二）



更一般的正弦信号为

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \quad = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$




$e^{jw_0 t}$ 的无限区间总能量和平均功率，显然，总能量是无限的

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| e^{jw_0 t} \right|^2 dt = 1$$ 周期复指数信号是功率信号。

# 成谐波关系的复指数信号集

$$\phi_k(t)=\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\}\ ,\quad k=0,\pm 1,\pm 2\cdots\cdots$$

该信号集中的每个信号都是周期的，它们的频率分别为$k\omega_0$，都是 $\omega_0$ 的整数倍，因而称它们是成谐波关系的。

信号集中信号的基波频率为 $\omega_0$，基波周期为 $T_0=\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ ，各次谐波的周期分别为$T_k=\dfrac{2\pi}{|k\omega_0|}$，它们的公共周期是 $T_0$ 。

上述成谐波关系的信号做为基本构造单元可以构造各种各样的周期信号。

# 一般连续时间复指数信号

$x(t) = Ce^{at}$ 其中 C, a 为复数

令 $C = |C|e^{j\theta}, a = r + j\omega_0$ ,则

$$x(t) = |C|e^{j\theta}e^{rt}e^{jw_0 t} = |C|e^{rt}e^{j(w_0 t+\theta)}$$

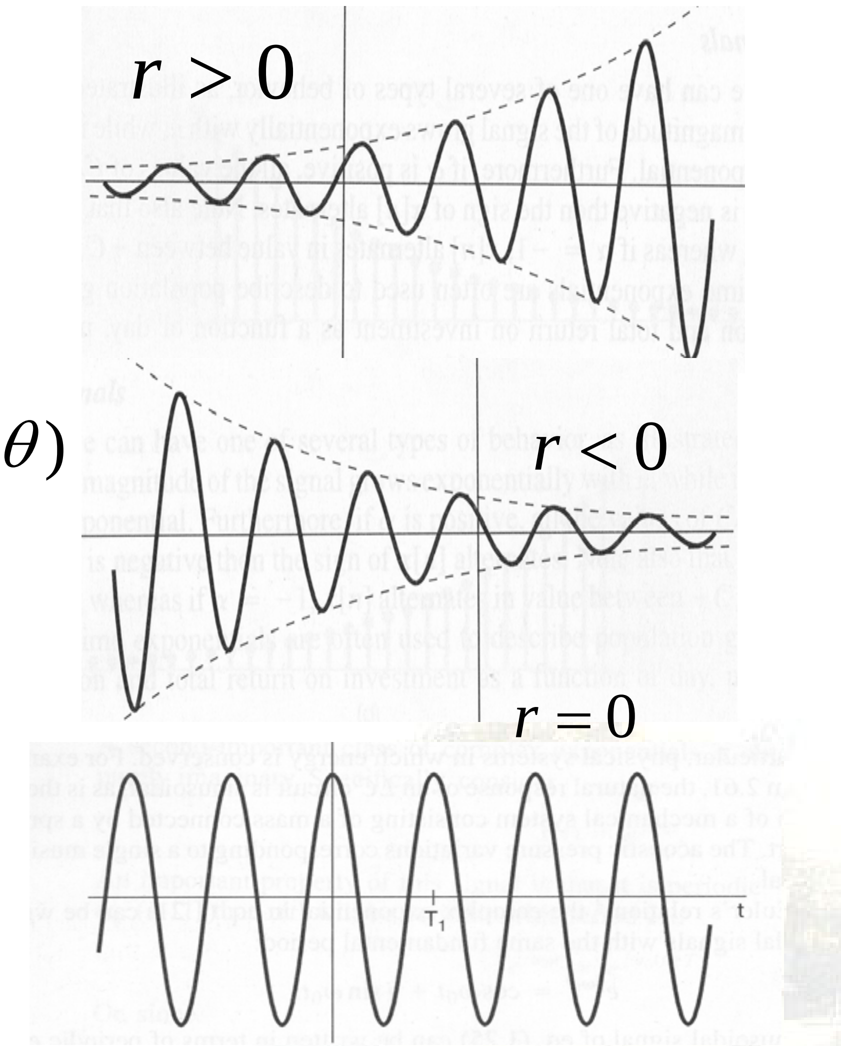
$$= |C|e^{rt}\cos(w_0 t+\theta) + j|C|e^{rt}\sin(w_0 t+\theta)$$

该信号可看成是振幅按实指数信号规律变化的周期性复指数信号。它的实部与虚部都是振幅呈实指数规律变化的正弦振荡。

当r>0时，是指数增长的正弦振荡。

r<0时，是指数衰减(阻尼)的正弦振荡。

r=0时，是等幅的正弦振荡。



XI'AN JIAOTONG
UNIVERSITY

# 离散时间复指数信号

$x[n]=Ca^n$ 其中C和a一般为复数

若令 $a=e^{\beta}$ 则类似于连续时间的情况有另外一种表示形式

$$x[n]=Ce^{\beta n}$$

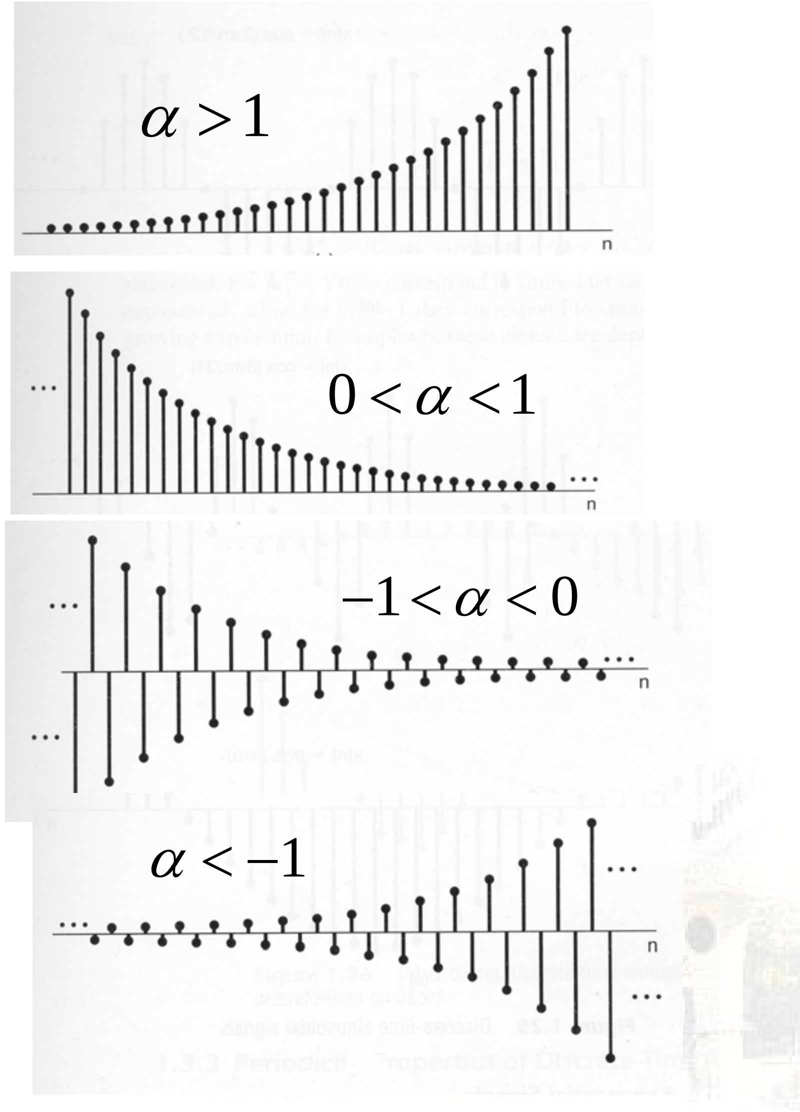
**1.** 实指数信号： **C，a** 为实数

**a>1** 时呈单调指数增长。

**0<a<1** 时呈单调指数衰减。

**-1<a<0** 时摆动指数衰减。

**a<-1** 时呈摆动指数增长。



XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 离散时间正弦信号

**2. 恒模的复指数信号与正弦信号**

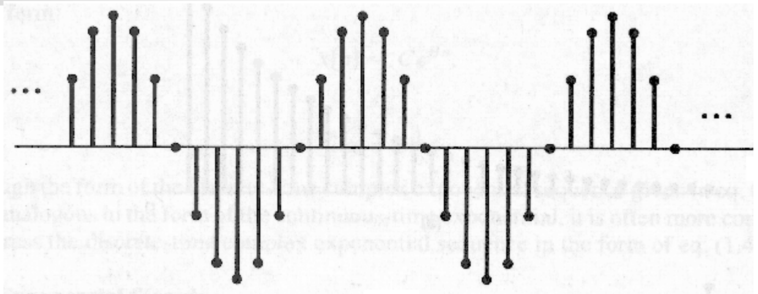
$a = e^{jw_0}$ **C为实数，取C=1**

$$x[n] = e^{jw_0 n} = \cos w_0 n + j\sin w_0 n$$

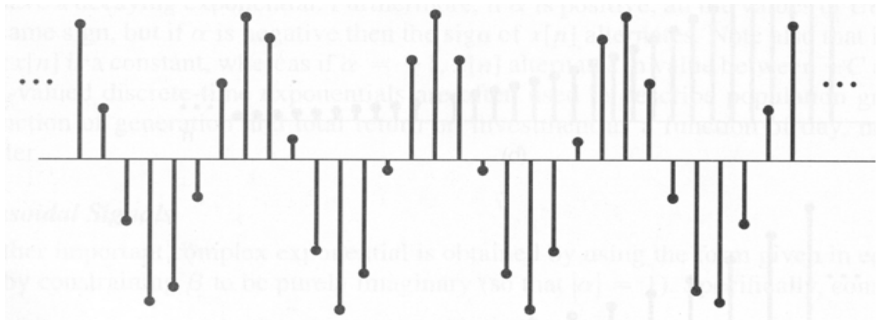
实部与虚部都是正弦信号。

$e^{jw_0 n}$ 具有无限的总能量和有限的平均功率，显然，恒模的复指数信号是功率信号。

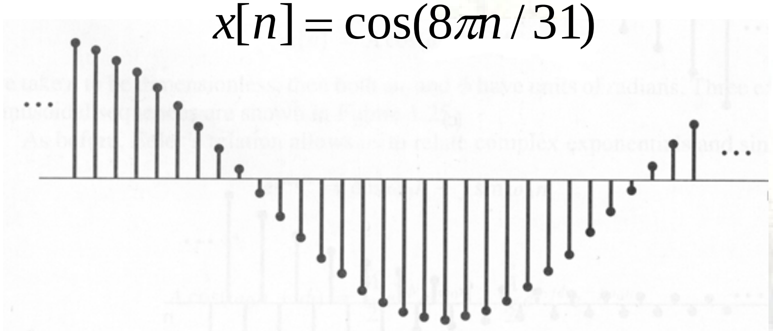
思考题:
离散时间正弦信号是否都为周期信号?



$x[n] = \cos(2\pi n/12)$



$x[n] = \cos(8\pi n/31)$



$x[n] = \cos(n/6)$

# 离散时间复指数序列的周期性

思考题：离散时间正弦信号是否都为周期信号？

离散时间恒模复指数信号为周期信号的充分必要条件：

$$e^{j\omega_0[n+N]} = e^{j\omega_0 n} \Leftrightarrow e^{j\omega_0 N} = 1 \Leftrightarrow \omega_0 N = 2\pi m \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

表明只有在 $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 是一个有理数时，信号才具有周期性。

正弦信号也可以得到类似的结论。

在满足周期性要求的情况下，总能找到**无公因子**的两个正整数 **m, N** 使得： $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$

此时 $N = \frac{2\pi}{\omega_0} m$ 即为该信号的周期，也称为基波周期，因此该信号的基波频率为 $\omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$ 。

# 一般离散时间复指数信号

$x[n] = Ca^n$ 其中 **C, a** 为复数

令 $C = |C|e^{j\theta}$ $a = |a|e^{j\omega_0}$ 则

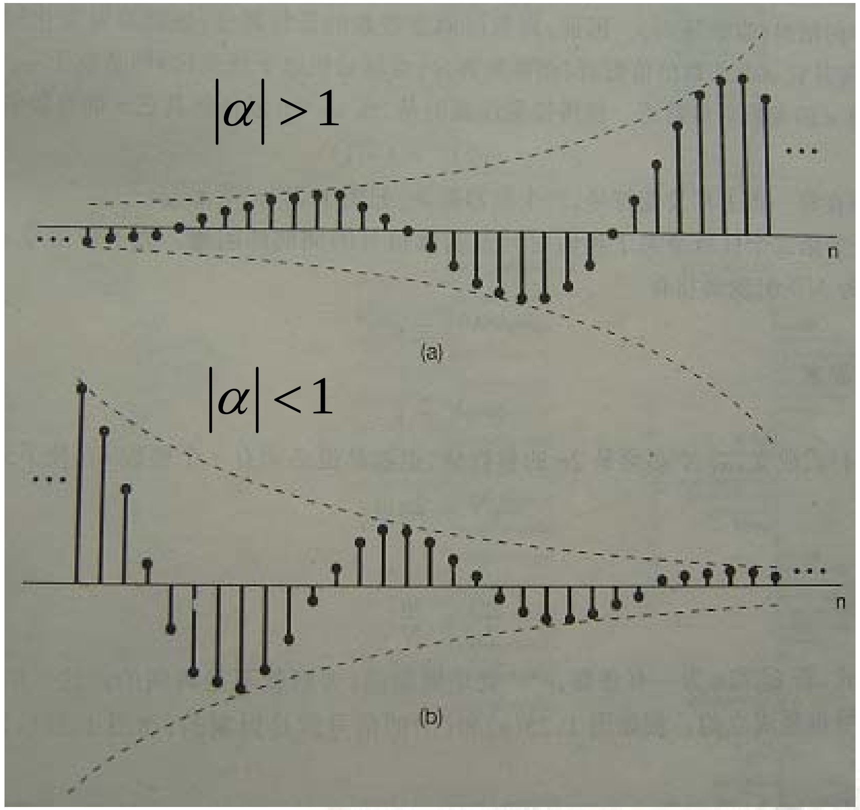
$$x[n] = |C||a|^n \cos(w_0 n + \theta)$$

$$+ j|C||a|^n \sin(w_0 n + \theta)$$

当 $|a| = 1$ 时它的实部与虚部都是正弦序列。

当 $|a| > 1$ 时，它的实部与虚部都是指数增长的正弦序列。

当 $|a| < 1$ 时，它的实部与虚部都是指数衰减的正弦序列。



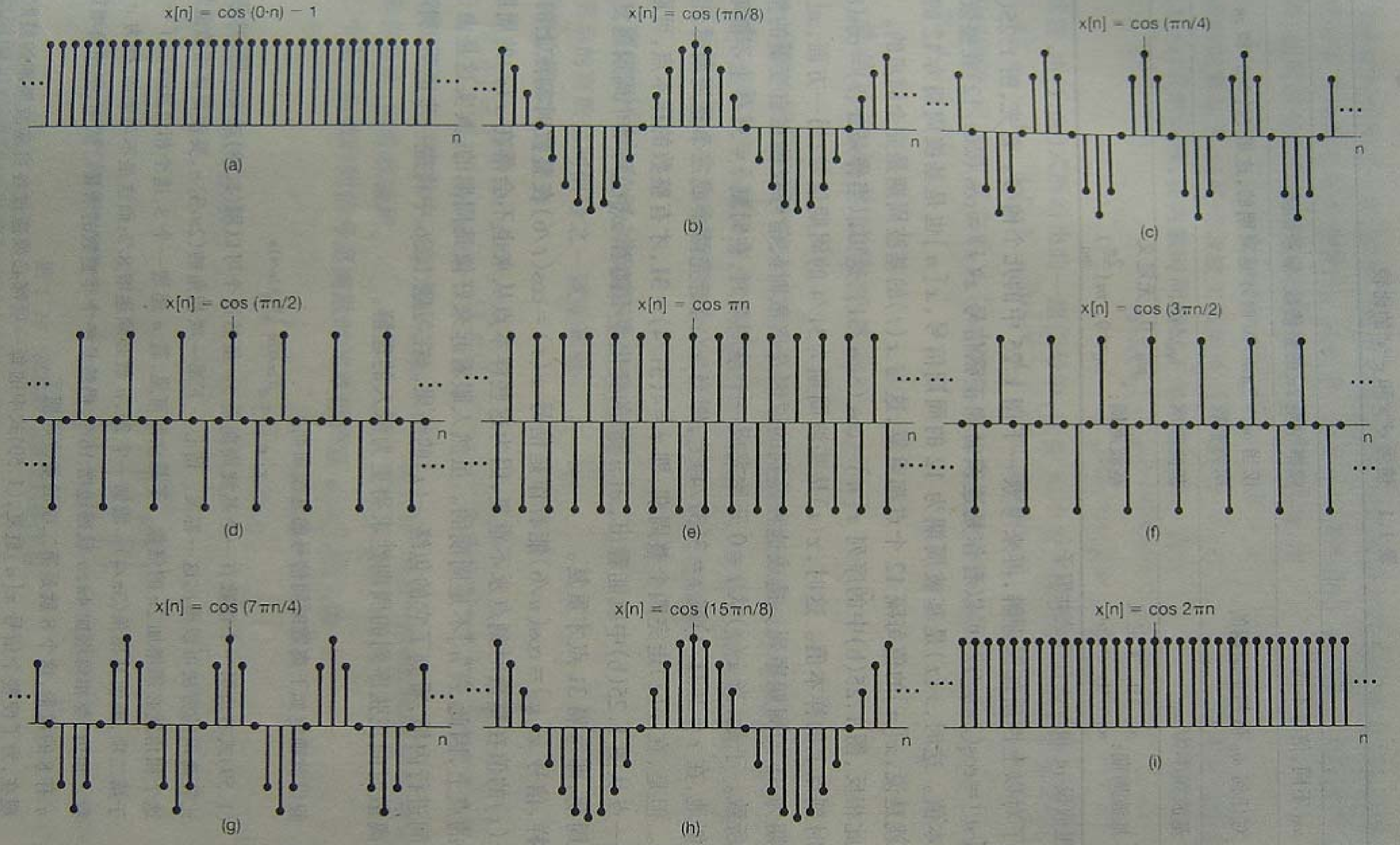



图 1.27 对应于几个不同频率时的离散时间正弦序列

# 离散时间复指数序列频率的周期性



对 $e^{jw_0 t}$，$w_0$越大，对应的信号的振荡频率就愈高。

而对 $e^{jw_0 n}$，由于 $e^{j(w_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{jw_0 n} = e^{jw_0 n}$

上式表明，离散时间复指数信号在频率 $w_0 + 2\pi$ 和频率 $w_0$ 时是完全一样的。因此，考察这种离散时间复指数信号时，只需在2π范围内选择频率即可（接近 $2k\pi$ ，则认为是低频；接近 $(2k+1)\pi$，则认为是高频）

°同连续时间信号的情况类似，离散时间周期性复指数信号也可以构成一个成谐波关系的信号集。 $\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots$

同连续时间信号的情况不同，由于 $\phi_{k+N}[n] = \phi_k[n]$

上述信号集中只有N个互不相同的信号。

上述成谐波关系的信号做为基本构造单元可以构造各种各样的周期信号。

# 信号$e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

| $e^{j\omega_0 t}$ | $e^{j\omega_0 n}$ |
|---|---|
| 不同频率，信号不同 | 频差相差2π的整数倍时，信号相同 |
| 对任何频率信号都是周期的 | 仅当$w_0 = 2\pi m / N$时，信号是周期的 |
| 基波频率 $w_0$ | 基波频率 $w_0 / m$ |
| 基波周期：$T_0 = 2\pi / w_0$ | 基波周期：$N_0 = 2\pi m / w_0$ |

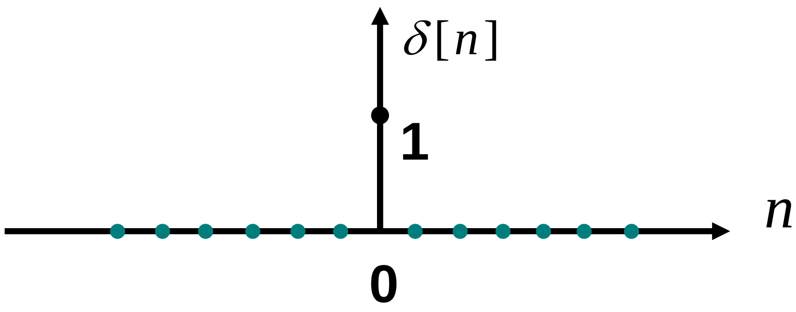
例 确定如下离散时间信号的基波周期:

$$x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$$

# 离散时间单位脉冲与单位阶跃

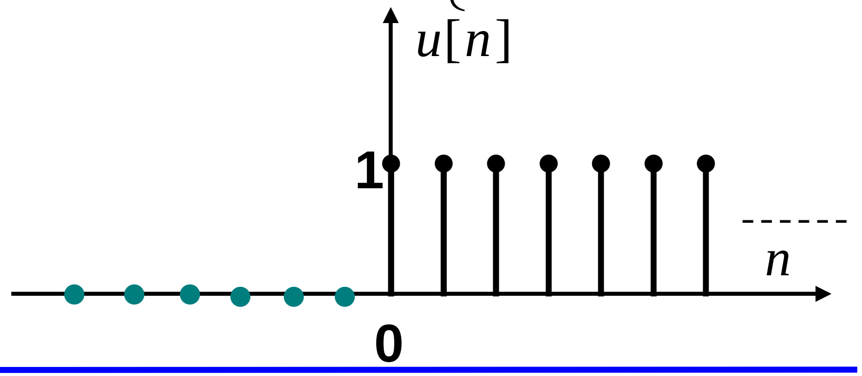
单位脉冲序列 $\delta[n]$

定义 $\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$




单位阶跃序列 $u[n]$

定义 $u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$




单位脉冲是单位阶跃的一次差分: $\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

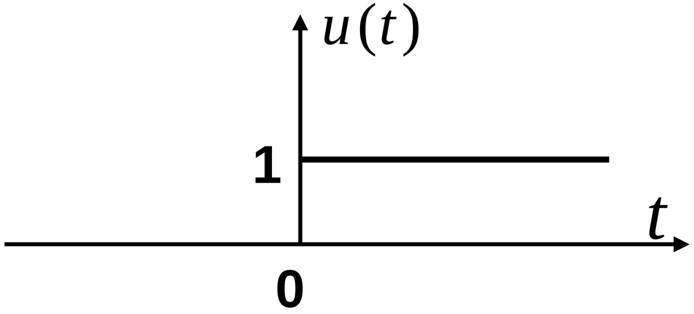
单位阶跃是单位脉冲的求和函数: $u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$

单位脉冲函数是构成其它信号的基本元素，且具有采样性质。 $x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$

# 连续时间单位冲激与单位阶跃函数

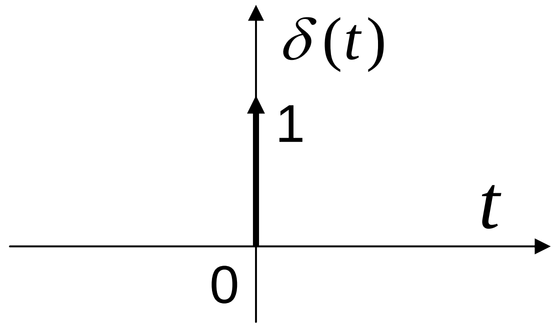
单位阶跃函数 $u(t)$

定义 $u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$




单位冲激函数 $\delta(t)$

定义 $\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$




单位阶跃是单位冲激的积分函数:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

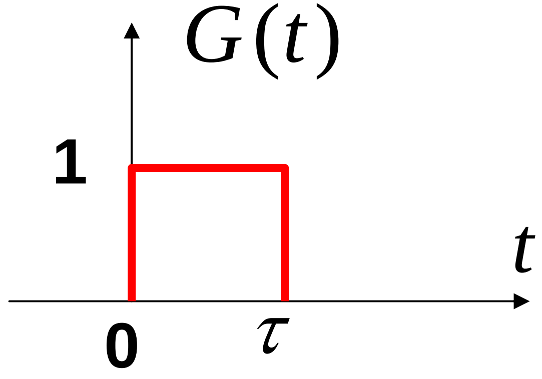
单位冲激是单位阶跃的一次微分:
（数学上不严密）

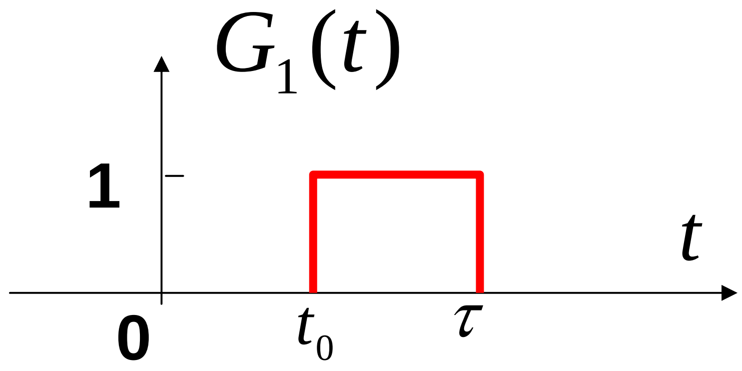
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

# 连续时间单位冲激与单位阶跃函数



- 单位阶跃的应用：



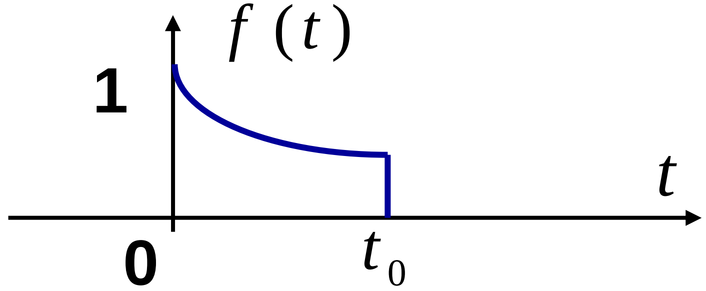

$$G(t)=u(t)-u(t-\tau)$$

$$G_1(t)=u(t-t_0)-u(t-\tau)$$

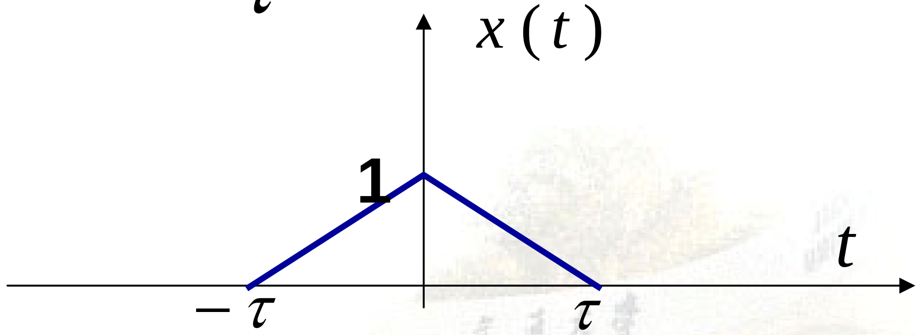
# 连续时间单位冲激与单位阶跃函数



$$f(t) = e^{-t}[u(t) - u(t - t_0)]$$




$$x(t) = (1 + \frac{t}{\tau})[u(t+\tau) - u(t)] + (1 - \frac{t}{\tau})[u(t) - u(t-\tau)]$$

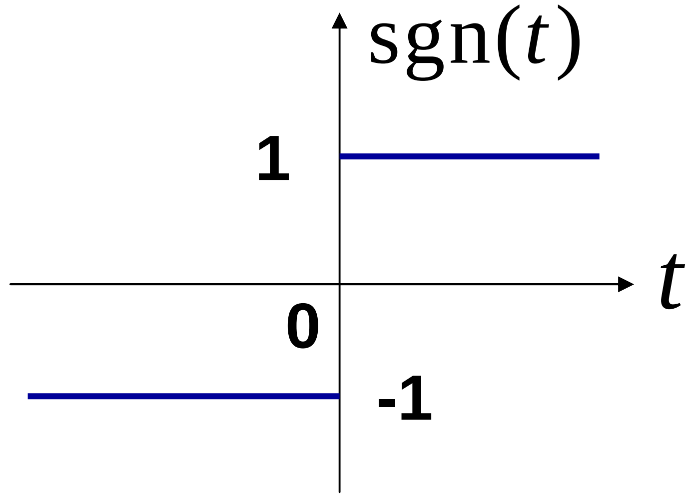



$u(n)$ 在信号表示中也有同样的用途。

# 连续时间单位冲激与单位阶跃函数

## 符号函数：

定义： $$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$$




符号函数与单位阶跃的关系：

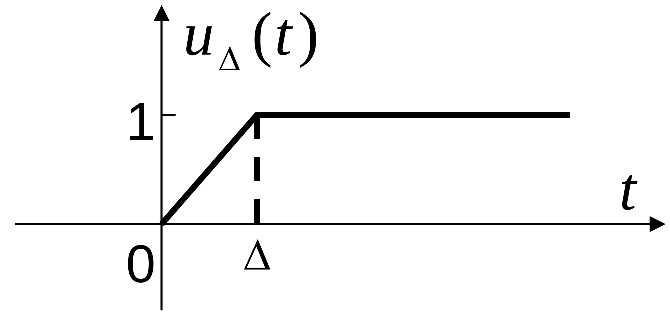
$$\mathrm{sgn}(t)=u(t)-u(-t)$$

$$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{sgn}(t)=2\delta(t)$$

# 单位冲激与阶跃函数的极限分析

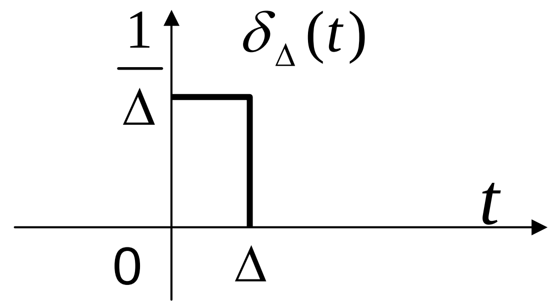
定义 $u_\Delta(t)$如右图所示:




显然当$\Delta \longrightarrow 0$时 $u_\Delta(t) \longrightarrow u(t)$

定义 $$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$



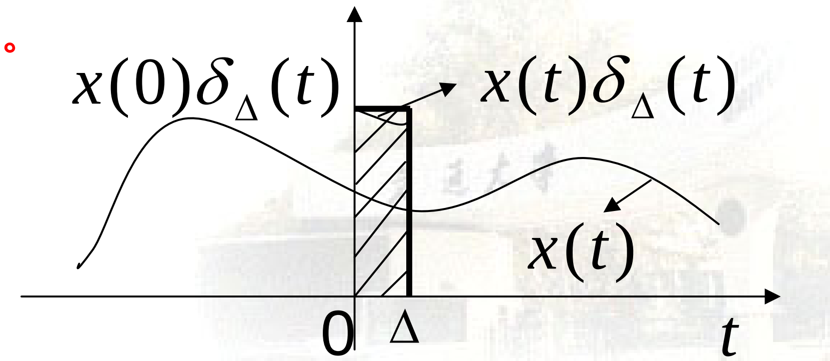

即$\delta(t)$可视为一个面积始终为1（强度）的矩形，当其宽度趋于零时的极限。

$\delta(t)$也具有提取连续时间信号样本的作用。

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

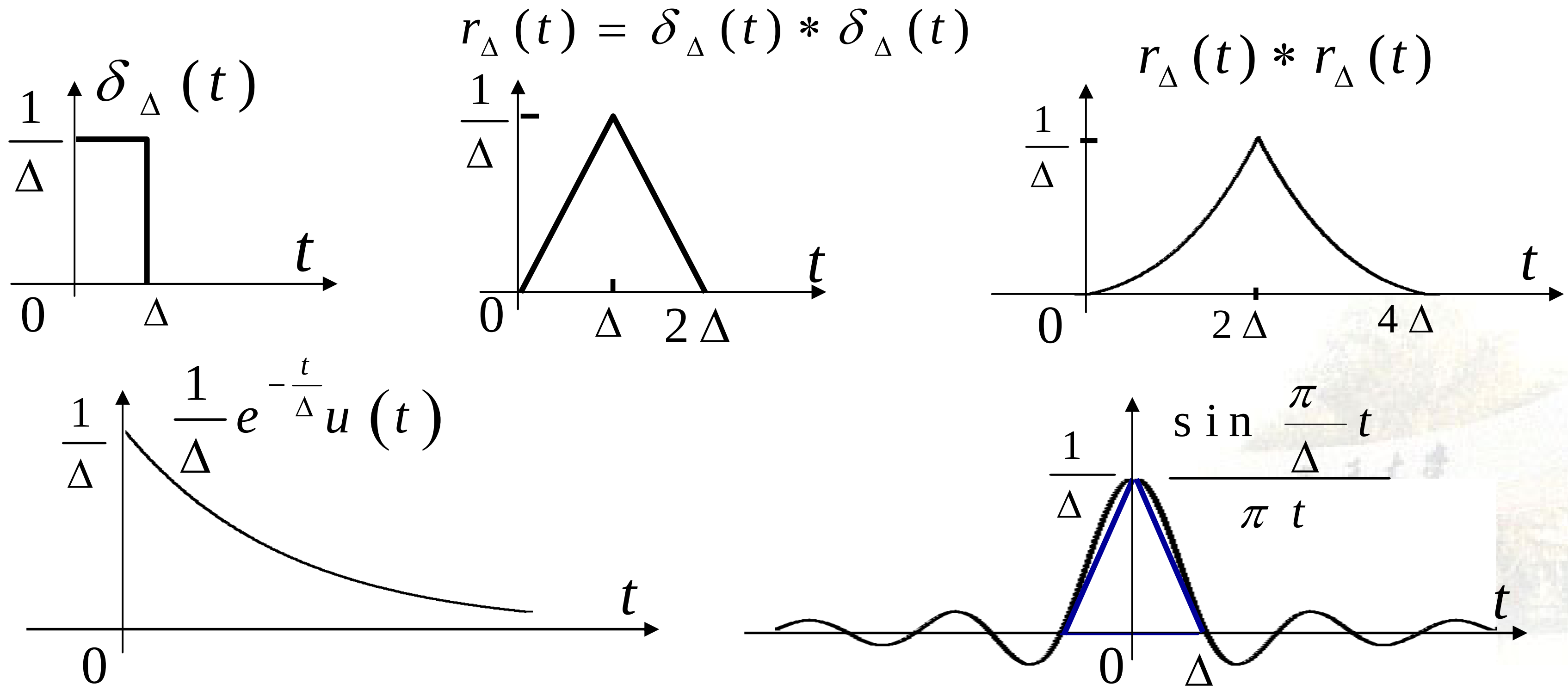
$$\Delta \to 0 \quad x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$



# 奇异函数

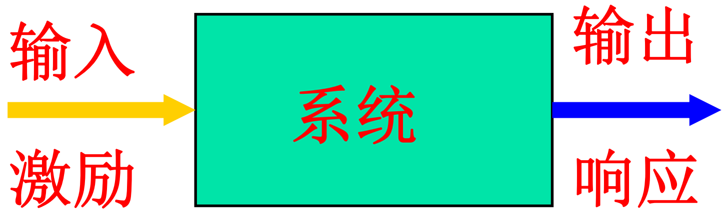
前边在定义$\delta(t)$时，采用了极限的思想，将其看成面积始终为 1 的矩形在宽度趋于0时的极限。但这样的定义仍然是不严密的，因为可以发现有很多不同的信号在极限的意义下具有相同的属性。



# 连续时间与离散时间系统

**系统:**

是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。系统的基本作用是对输入信号进行加工和处理，将其转换为所需要的输出信号。




**连续时间系统:**

输入信号与输出响应都是连续时间信号的系统。 $x(t) \to y(t)$

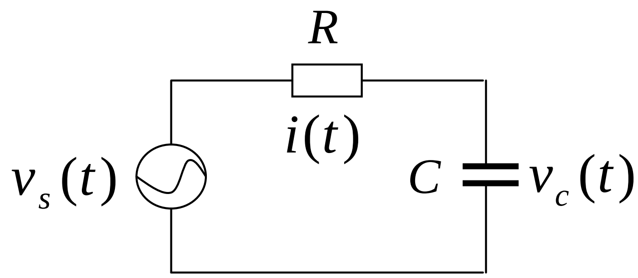

**离散时间系统:**

输入信号与输出响应都是离散时间信号的系统。 $x[n] \to y[n]$


鉴于系统是围绕输入输出而定义的，系统的建模应该从输入输出信号的关系入手。

# 连续时间系统的建模

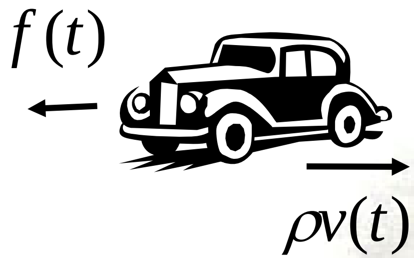
右图的RC电路中，$v_s(t)$ 为输入，$v_c(t)$ 为输出，确定输入输出的关系。




$$i(t)=\frac{v_s(t)-v_c(t)}{R} \qquad i(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_c(t)=\frac{1}{RC}v_s(t)$$

动力 $f(t)$为输入，速度 $v(t)$ 为输出，汽车质量为m，$\rho v(t)$为摩擦力，确定输入输出的关系。




$$\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{m}[f(t)-\rho v(t)] \qquad \frac{dv(t)}{dt}+\frac{\rho}{m}v(t)=\frac{1}{m}f(t)$$

可以统一为同一个微分方程：

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=bx(t)$$

# 离散时间系统的建模

例 银行工资户头资金流量建模

令x[n]为第n个月末的净存款。y[n]为第n个月末的节余。假设月息为1%。系统可以建模为:

$$y[n]=1.01y[n-1]+x[n] \quad 或 \quad y[n]-1.01y[n-1]=x[n]$$

例: 我国人口模型

令x[n]为第n个年末的净人口流动。y[n]为第n个年末的总人口。$K_d$为人口死亡率，$k_b$为出生率。系统可以建模为:

$$y[n]=(1+k_b-k_d)y[n-1]+x[n] \quad 或 \quad y[n]-(1+k_b-k_d)y[n-1]=x[n]$$

可以统一为同一个差分方程: $y[n]+ay[n-1]=bx[n]$

# 系统的建模及两点重要特性

结论：工程应用中的很多连续时间系统可以由线性微分方程描述，而离散时间系统可以由线性差分方程描述。

要求所研究的系统具有以下两点重要特性:

（1）这一类系统应该具有一些性质和结构，通过它们能够对系统的行为作出透彻的描述，并能对这一类系统建立有效的分析方法（即可操作性）。

（2）很多工程实际中的系统都能够利用这类系统的方法建模（即具有普遍性）。

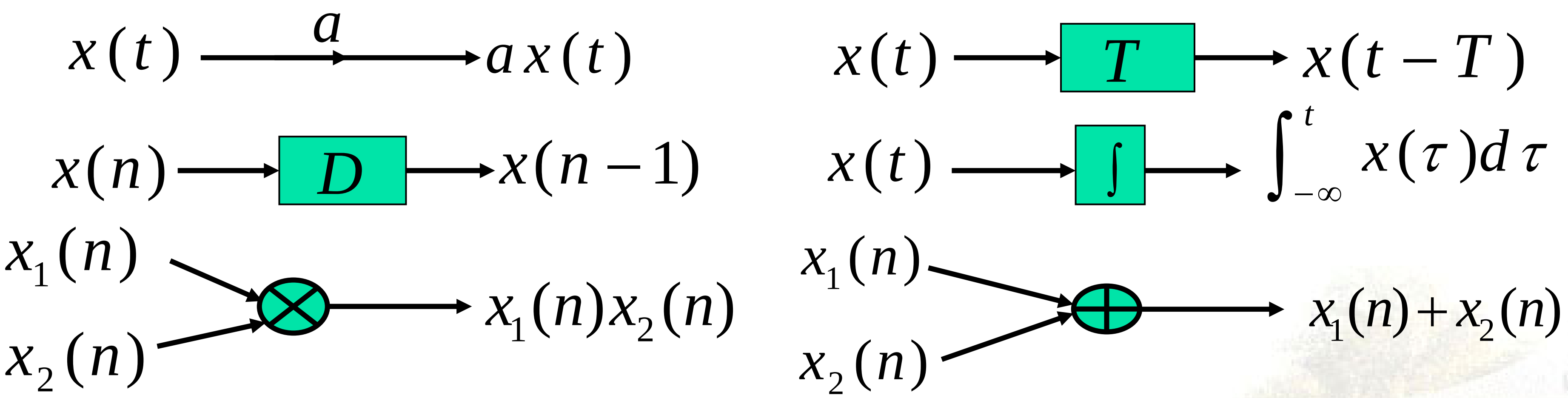
本课程所研究的对象——LTI（Linear Time－Invariant Systems）系统就是这样的一类系统。

注意：由于一些不理想因素的存在，工程实际中系统的建模往往要进行一些假设，在这些假设条件下，系统才能被理论模型准确描述。因此在工程应用中必须时刻注意这些假设的适用范围。

# 系统的表示



- 系统对信号的变换功能是通过系统模型中包含的各种数学 运算来实现的。
- 系统模型中的基本运算:




- 系统表示方法:

  1. 用方程表示。2. 电路图表示。3. 方框图表示。

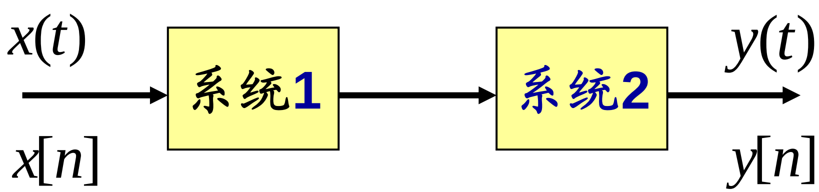
# 系统的互联（一）

研究系统互联的必要性：现实中的系统是各式各样的，其复杂程度也大相径庭。但许多系统都可以分解为若干个简单系统的组合。

可以通过对简单系统（子系统）的分析并通过子系统互联而达到分析复杂系统的目的。

也可以通过将若干个简单子系统互联起来而实现一个相对复杂的系统。这一思想对系统分析和系统综合都是十分重要的。

级联



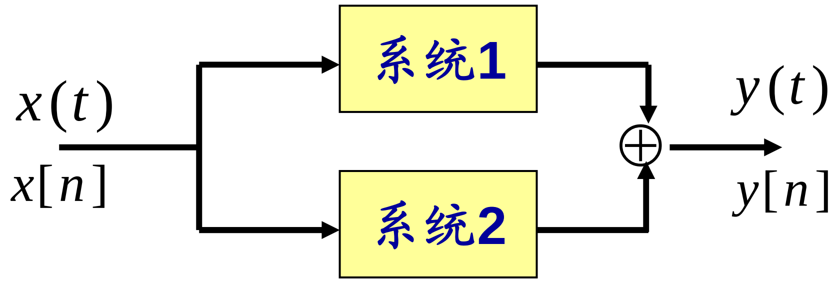

举例？

方框图

XI'AN JIAOTONG
UNIVERSITY

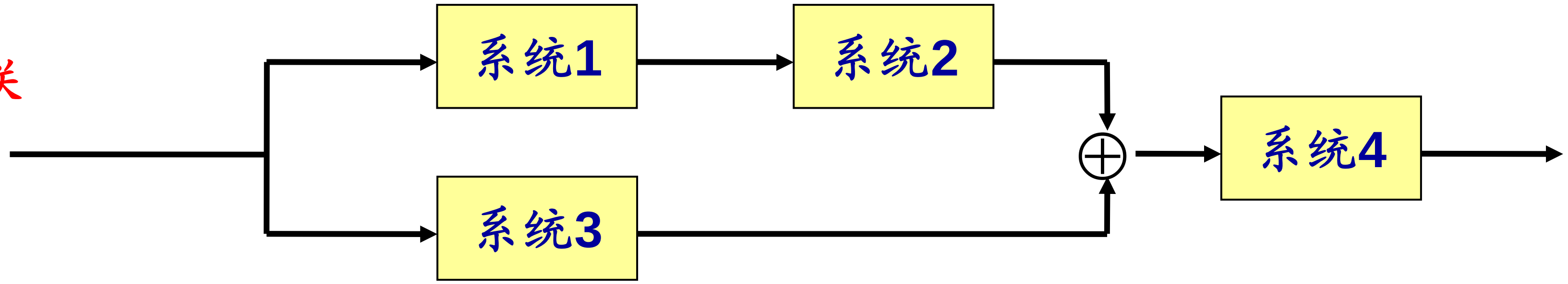
# 系统的互联（二）

并联

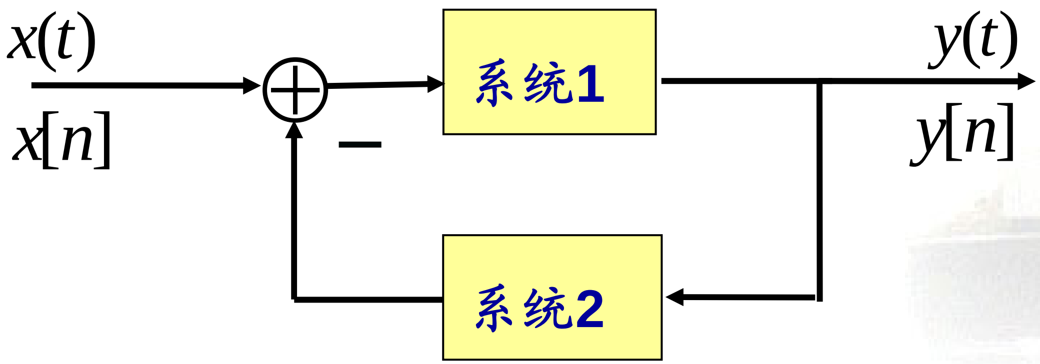



举例？

混联




反馈联结




反馈系统的应用极为广泛。举例？

# 记忆系统与无记忆系统

- 在任何时刻，系统的输出都只与当前时刻的输入有关，而与该时刻以外的输入无关，则称该系统是无记忆系统。
- 如果一个系统的输出响应不仅与当时的输入有关，而且与该时刻以外的其它时刻的输入有关，则系统是记忆的。

记忆系统的示例:

累加器: $$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

电容或电感: $$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

延时器: $$y(t)=x(t-1)$$

差分器: $$y[n]=x[n]-x[n-1]$$

无记忆系统的示例:

电阻: $$y(t)=Rx(t)$$

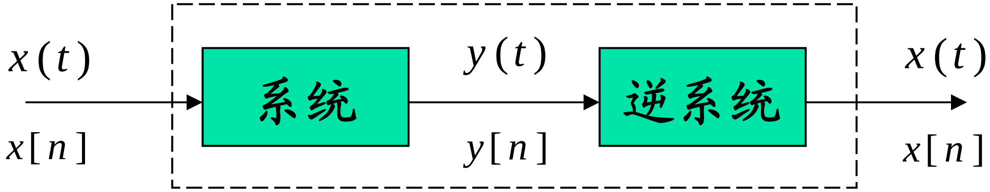
恒等系统: $$y(t)=x(t)$$

$$y[n]=x[n]$$

在许多实际系统中，记忆系统直接是与能量的存贮相联系的;
在离散时间系统中，记忆直接与保留前面时刻的信号值的存储器相联系。

# 可逆性与逆系统

- 如果一个系统对任何不同的输入都能产生不同的输出，即输入与输出是一一对应的，则称该系统是可逆系统。
- 如果一个可逆系统与另一个系统级联后构成一个恒等系统，则称后者是前者的逆系统 。(是否可以置换？)




可逆系统的示例:

电阻 $y(t)=Rx(t) \Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{R}x(t)$

累加器和差分器（反之也成立？）:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \Leftrightarrow w[n]=y[n]-y[n-1]$$

不可逆系统的示例:

整流器: $y(t)=x^2(t)$

开关: $y(t)=0$

抽取器 $y[n]=x[2n]$

通信中编解码器是典型的可逆系统，解码器是它的逆系统。
判断系统是否可逆一般是困难的，无有效的办法判定系统是否可逆.

# 因果性

- ✓ 如果一个系统在任何时刻的输出都只与当时这个时刻的输入以及该时刻以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关就称该系统是因果的。
- ✓ 一切物理可实现的连续时间系统都是因果的.
- ✓ 一切即时系统(无记忆)都是因果的.
- ✓ 对非实时处理的离散时间非因果系统,可以通过先存储,后处理来实现.

因果系统的示例:

RLC电路

累加器和差分器:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \Leftrightarrow w[n]=y[n]-y[n-1]$$

非因果系统的示例:

$$y[n]=x[n]-x[n+1]$$

$$y(t)=x(2t)$$

$$y(n)=x(-n)$$

思考题: $y(t)=x(t)\cos(t+1)$ 是因果系统还是非因果系统?

# 稳定性

如果一个系统当输入有界时，产生的输出也是有界的，则该系统是稳定系统。否则，就是不稳定系统。

稳定系统的示例:

RLC电路、下落的雨滴、单摆

自然界中存在的系统一般都是稳定系统，系统的稳定性一般都是存在能量损耗的原因。

不稳定系统的示例:

银行节余模型

$$y[n]=(n+1)u[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

例: 检验系统 $y(t)=tx(t)$ 和 $y(t)=e^{x(t)}$ 的稳定性。

$x(t)=1$ 时，$y(t)=t$ 是无界的，所以 $y(t)=tx(t)$ 是不稳定系统。

因为输入是有界的，所以令 $|x(t)|<B$，故有：$|y(t)|<e^{B}$ 所以系统 $y(t)=e^{x(t)}$ 是稳定的。

# 时不变性（一）

- 当一个系统输入信号有一个时移时，输出响应也产生同样的时移。除此之外，输出响应无任何其它变化，则称该系统是时不变的，否则就是时变的。
- 即若y[n]是系统在x[n]输入下的输出，当输入变为x[$n-n_0$]时，输出为y[$n-n_0$]，系统为时不变的。连续时间系统类似。

例： 检验系统 $y(t)=\sin[x(t)]$ 的时不变性。

$$y_1(t)=\sin[x_1(t)]$$

$$x_2(t)=x_1(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \quad y_2(t)=\sin[x_1(t-t_0)]$$

$$y_1(t-t_0)=\sin[x_1(t-t_0)] \quad \Rightarrow \quad y_1(t-t_0)=y_2(t)$$

所以系统为时不变的。

XI'AN JIAOTONG
UNIVERSITY

# 时不变性（二）

例：　检验系统 $y[n]=nx[n]$ 的时变性。

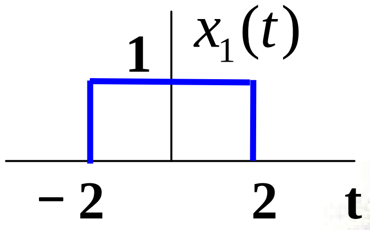
证明1：可以用定义证明。

证明2：举反例：　$x_1[n]=1,\qquad \therefore x_2[n]=x_1[n-n_0]=1$

$$\left.\begin{aligned} y_1[n-n_0]&=n-n_0 \\ y_2[n]&=nx_2[n]=n \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1[n-n_0]\neq y_2[n]$$

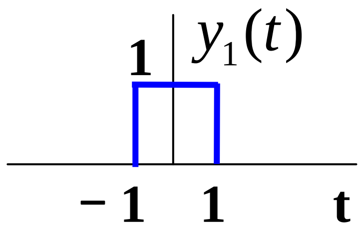
所以系统为时变的。

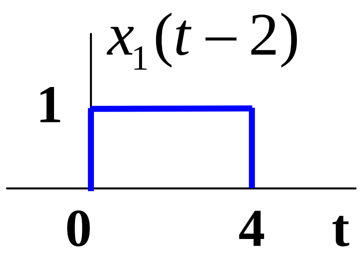
例：　检验系统 $y(t)=x(2t)$ 的时变性。

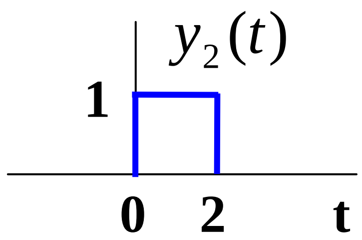


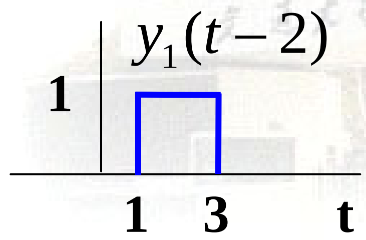

证明1：可以用定义证明。

证明2：举反例：



# 线性（一）

几个定义: $x_1(t) \to y_1(t) \quad x_2(t) \to y_2(t)$

可加性: $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$ 输入的和产生输出的和

齐次性: $ax_1(t) \to ay_1(t)$ 零输入产生零输出

线性: $ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$

累加性: $\sum_{k=1}^{K} a_k x_k(t) \to \sum_{k=1}^{K} a_k y_k(t)$

例: 检验系统 $y(t) = tx(t)$ 的线性。

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= tx_1(t) \\ y_2(t) &= tx_2(t) \\ x_3(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_3(t) &= tx_3(t) = t[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

所以系统为线性的。

# 线性（二）



例：$y(t)=\mathrm{Re}\{x(t)\}$。系统满足可加性，但不满足齐次性。当 $a=j$ 时实部变为虚部，虚部变为实部。

$$y(t)=\frac{1}{x(t)}[x'(t)]^2$$ 满足齐次性但不满足可加性。

$$y_2(t)=\frac{1}{x_1(t)+x_2(t)}[(x_1(t)+x_2(t))']^2$$

$$=\frac{[x_1'(t)+x_2'(t)]^2}{x_1(t)+x_2(t)}\neq\frac{[x_1'(t)]^2}{x_1(t)}+\frac{[x_2'(t)]^2}{x_2(t)}$$

## 线性（三）

XI'AN JIAOTONG
UNIVERSITY

对线性系统而言，如果能够把输入信号$x(t)$分解成若干个简单信号的线性组合，只要能得到该系统对每一个简单信号所产生的响应，就可以根据系统的线性特性，通过线性组合而得到系统对输入信号$x(t)$产生的输出响应。即：

若 $x(t)=\sum_k a_k x_k(t)$ ，且 $x_k(t)\rightarrow y_k(t)$

则 $y(t)=\sum_k a_k y_k(t)$

这一思想是建立信号与系统分析理论和方法的基础。

# 线性（四）

例：检验系统 $y(t)=x^2(t)$ 是否有线性特性。

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)&=x_1^2(t)\\ y_2(t)&=x_2^2(t)\\ x_3(t)&=ax_1(t)+bx_2(t)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} y_3(t)=x_3^2(t)&=\left[ax_1(t)+bx_2(t)\right]^2\\ &=a^2x_1^2(t)+b^2x_2^2(t)+2abx_1(t)x_2(t)\\ &=a^2y_1(t)+b^2y_2(t)+2abx_1(t)x_2(t)\end{aligned}$$

所以系统不是线性的。

例：检验系统 $y[n]=2x[n]+3$ 是否有线性特性。

$$\left.\begin{aligned} y_3[n]&=2x_1[n]+2x_2[n]+3\\ y_1[n]+y_2[n]&=2x_1[n]+2x_2[n]+6\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ 不满足可加性。

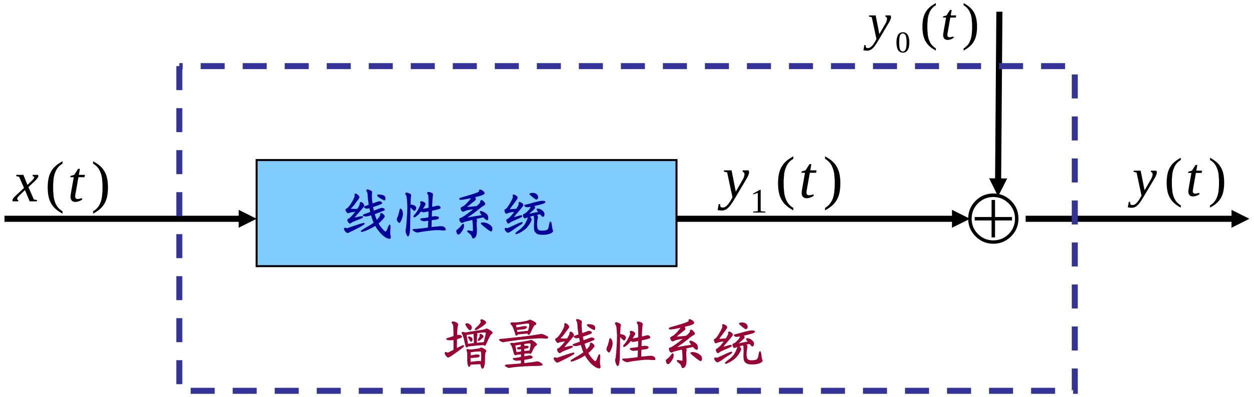
$x[n]=0\rightarrow y[n]=3 \quad \Rightarrow$ 不满足齐次性。

所以系统不是线性的。但是给出的方程确是个线性方程！

# 增量线性系统

在工程实际中，有一类系统并不满足线性系统的要求。但是这类系统的输出响应的增量与输入信号的增量之间满足线性特性。这类系统称为增量线性系统。

任何增量线性系统都可以等效为一个线性系统再加上一部分与输入无关的响应。




当增量线性系统的 $y_0(t)=0$ 时，$y(t)=y_1(t)$。此时系统的输出响应完全由$y_1(t)$ 决定。此时系统处于零初始状态，故将$y_1(t)$称为系统的零状态响应。

增量线性系统当 $x(t)=0$ 时，有 $y_1(t)=0$， $y(t)=y_0(t)$，因此将$y_0(t)$称为系统的零输入响应。增量线性系统的响应包括零输入响应和零状态响应两部分。

# 本章小结



- 建立了信号与系统的数学建模方法和数学模型。
- 讨论了信号自变量变换对信号的影响。
- 分连续和离散两种情况介绍了作为信号分析基础的基本信号：复指数信号、正弦信号、单位冲激与单位阶跃信号。
- 讨论了离散时间正弦信号的周期性问题。
- 定义并讨论了系统的六大基本特性及系统的互连。讨论了增量线性系统及其等效方法。

由于在工程实际中，相当广泛的系统其数学模型都可以描述成一个线性时不变(LTI)系统（普遍性），而且基于线性和时不变性，为系统分析建立一套完整的、普遍适用的方法提供了可能（可操作性），因此，线性时不变系统将成为本课程所研究的对象。

# 作业

1.3, 1.4, 1.5

1.12, 1.15, 1.16, 1.21cde,

1.22bdgh, 1.23b ——第一次作业

1.26, 1.28aceg, 1.31, 1.42, 1.46, 1.47

——第二次作业