离散数学
Discrete Mathematics

西安交通大学 计算机学院

任课教师：李文

第四章 关系 (relation)

§1. 集合的叉积 n元组

§2.关系

§3.关系的表示 关系的性质

§4.关系的运算

§5. 等价关系

§6. 半序关系

§1.集合的叉积　n元组

定义1.叉积，笛卡尔积 (cross product ,Cartesian product(1637))

- n个集合A_1， A_2，… ，A_n的 n 维叉积定义为

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n): a_i \in A_i (1 \le i \le n)\};$$

- n 维叉积$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的每个元素$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$都称为一个n元组（n-tuple）；即，叉积是元组的集合；

- 每个n元组$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$的第i个位置上的元素a_i称为该n元组的第i个分量（坐标或投影）；元组各分量的顺序不能改变；
- n 称为该叉积及其元组的维数；
- 两个元组相等$\Leftrightarrow$它们的维数相同且对应的分量相等。即

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)= (b_1, b_2, \ldots, b_m) \Leftrightarrow n=m \wedge (\forall i \in N)(1 \le i \le n)(a_i = b_i);$$

注：笛卡尔(1596-1650)，法国数学家， 1637年发表《方法论》之一《几何学》，首次提出坐标及变量概念。这里是其概念的推广。

定义2.

- 二个集合A，B的(二维或二重)叉积定义为

$$A\times B=\{(a, b): a\in A \wedge b\in B\};$$

- 其元素——二元组(a, b)通常称为序偶或偶对(ordered pair)；
- 二元组(a, b)的第一分量上的元素a称为前者；第二分量上的元素b称为后者；
- 二重叉积的A× B第一集合A称为前集；第二集合B称为后集。

一般地说，关于叉积和元组有：

(1) $(a, b) \neq (b, a)$；

(2) $A \times B \neq B \times A$；

(3)二元组不是集合，因为二元组中的分量计较顺序，而集合中的元素是不讲究顺序的。

投票 最多可选1项

设置

若A=B=C，并且三个集合均不为空集，则$A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$成立吗？

A 成立

B 不成立

提交

为了将所有的概念都统一于集合概念， 可采用克亚托斯基(Kazimierz Kurafowski)在1921年给出的定义 $(a, b)=\{\{a\},\{a, b\}\}$

将二元组定义为比其元素高二层的集合；

(4) 也可用二元组来递归的定义n元组如下：

$(a,b,c)=((a,b),c)$

… … …

$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)= ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$

(5) 可用二重叉积来递归的定义n维叉积如下：

$A\times B\times C=(A\times B)\times C$

… … …

$A_1\times A_2\times \ldots\times A_{n-1}\times A_n= (A_1\times A_2\times \ldots\times A_{n-1})\times A_n$

(6)利用(5)所给的定义， 可以递归的定义集合的叉积幂如下：

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$\cdots$$

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

(7) 规定空集∅与任何集合A的叉积是空集∅ 。

即 $A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A$。

定理1.设A,B,C,D是四个非空的集合。那么

$$A\times B = C\times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D 。$$

[证]. $\Rightarrow$)：（采用逻辑法）对任何的元素a,b

$a\in A\wedge b\in B$

$\Leftrightarrow (a,b)\in A\times B$

$\Leftrightarrow (a,b)\in C\times D$ (条件：$A\times B = C\times D$)

$\Leftrightarrow a\in C\wedge b\in D$

所以 $A = C \wedge B = D$ 。

……

[证]. $\Leftarrow$): （采用逻辑法）

对任何的元素a,b,

$(a,b)\in A\times B$

$\Leftrightarrow a\in A\wedge b\in B$

$\Leftrightarrow a\in C\wedge b\in D$ (条件： $A=C\wedge B=D$ ）

$\Leftrightarrow (a,b)\in C\times D$

所以 $A\times B=C\times D$ 。

定理2．设A,B,C是三个集合。则

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$； (叉积对并)

(2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$； (叉积对交)

(3) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$； (叉积对并)

(4) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$。 (叉积对交)

[证].只证(1)（采用逻辑法）

对任何的元素a,b

$(a,b)\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow a\in A\wedge b\in B\cup C$

$\Leftrightarrow a\in A\wedge(b\in B\vee b\in C)$

$\Leftrightarrow (a\in A\wedge b\in B)\vee(a\in A\wedge b\in C)$ (分配律：$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$)

$\Leftrightarrow (a,b)\in A\times B\vee(a,b)\in A\times C$

$\Leftrightarrow (a,b)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ 。

§2 .关系

一.关系的基本概念

定义1 . 设A,B是两个非空的集合,

- 二重叉集A×B 的任何一个子集R都称为是从集合A到集合B的一种二元关系(binary relation)，即 $R\subseteq A\times B$ ；
- 当 $(a,b)\in R$ 时，称a与b有关系R，记为 aRb ；
- 当 $(a,b)\notin R$ 时，称a与b没有关系R，记为 $a\overline{R}b$或$a \not{R} b$;
- 当A=B时，即$R\subseteq A\times A$，则称R是A上的一个二元关系。

例1．设A是西安交通大学全体同学组成的集合。

$R=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in A\wedge a,b$的生源地是同一个省/市/自治区$\}$；

$S=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in A\wedge a,b$在同一个自然班$\}$；

$T=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in A\wedge a,b$是自动化81班的同学$\wedge a,b$ 是兄弟$\}$；

$R,S,T\subseteq A\times A$ 。

例2．设A是某一大家庭，怎么定义堂/表兄弟关系?

例3. 设N是自然数集合。

R={(a,b)|a∈N∧**b**∈**N** ∧**a<b}**;

S={(a,b)|a∈**N**∧**b**∈N ∧**a|b}，N上的整除关系**；

T={(a,b)|a∈**N**∧**b**∈**N** ∧ a≡b (mod m)}, N上

的模m同余关系;

R,S,T⊆N×N 。

例5. 设A是某一C程序中诸函数的集合。

R={(a,b)|a∈A∧b∈A ∧a调用b**}**。

例6. 设A = {风，马，牛}**,**

R={(风,牛),(马,牛),(风,牛)} ⊆A×A。

设A,B是两个非空的集合，$R\subseteq A\times B$,

1° 全关系(full relation)： $R=A\times B$称为全关系；

2° 空关系(empty relation)： $R=\emptyset$称为空关系；

•空关系和全关系都是平凡关系；

3° 幺关系或单位关系(identical relation)：

$R=\{(a, a): a\in A\}\subseteq A\times A$称为A上的幺关系；

4° 关系的交，并，补运算：叉积是一种（新型的）集合，关系是叉积的子集，因此，关系也是一种集合，有关集合论的一切概念、论述、运算也都适合于关系；

5° 关系的扩充(expansion)：若$R_1 \subseteq R_2$，则称关系R_2是关系R_1的一个扩充；

6° n元关系： n元关系R是n 维叉积的一个子集；即

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

定义3.前域(domain)　后域(codomain)

设A,B是两个非空集合，$R \subseteq A \times B$是一个从A到B的关系。则关系R的

- 前域：$\wp(R) = \{ a : a \in A \wedge (\exists b \in B)(aRb)\} \subseteq A$；
- 后域：$\Re(R) = \{ b : b \in B \wedge (\exists a \in A)(aRb) \} \subseteq B$。

定义3.前域(domain)   后域(codomain)

例9 .设A={1,2,3,4}，B={2,4,6,8}。

R={(1,2),(2,4),(3,6)}，请解出$\wp$(R) 和$\Re$(R)。

填空题 1分

设置

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

设A={1,2,3,4}， B={2,6,8,10}， R={(1,2),(2,8),(4,6)}。
那么 $\wp$(R) = [填空1]， $\mathscr{R}$(R)= [填空2] 。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

二.关系的一些关联性质

定理1. 设$R_1,R_2 \subseteq A\times B$是两个关系。若 $R_1 \subseteq R_2$，则

(1)保序性：$\wp(R_1) \subseteq \wp(R_2)$；

(2)保序性：$\mathscr{R}(R_1) \subseteq \mathscr{R}(R_2)$；

[证].只证(1)（采用逻辑法）对任何元素$a\in A$,

$$a\in \wp(R_1)$$

$$\Leftrightarrow a\in A\wedge(\exists b\in B)(a\,R_1\,b)$$

$$\Leftrightarrow a\in A\wedge(\exists b\in B)((a,b)\in R_1)$$

$$\Rightarrow a\in A\wedge(\exists b\in B)((a,b)\in R_2)$$ (条件：$R_1\subseteq R_2$)

$$\Leftrightarrow a\in A\wedge(\exists b\in B)(a\,R_2\,b)$$

$$\Leftrightarrow a\in \wp(R_2)$$

所以 $\wp(R_1)\subseteq \wp(R_2)$。

定理2 . 设$R_1, R_2 \subseteq A \times B$是两个二元关系。则

(1) $\wp(R_1 \cup R_2) = \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$

(2) $\mathcal{R}(R_1 \cup R_2) = \mathcal{R}(R_1) \cup \mathcal{R}(R_2)$

(3) $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$

(4) $\mathcal{R}(R_1 \cap R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1) \cap \mathcal{R}(R_2)$

[证].只证(1)， (3)

(1)先证： $\wp(R_1)\cup\wp(R_2)\subseteq\wp(R_1\cup R_2)$ (包含法)

由于 $R_1\subseteq R_1\cup R_2$， $R_2\subseteq R_1\cup R_2$,

依定理1，有 $\wp(R_1)\subseteq\wp(R_1\cup R_2)$,

$$\wp(R_2)\subseteq\wp(R_1\cup R_2)$$

故根据第一章§2定理2的(3′)，就可得

$$\wp(R_1)\cup\wp(R_2)\subseteq\wp(R_1\cup R_2)\ ;$$

次证：$\wp(R_1 \cup R_2) \subseteq \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$ (采用元素法)

对任何元素$a \in A$， 若$a \in \wp(R_1 \cup R_2)$，

则存在 $b \in B$， 使得 $a\ \mathbf{R_1 \cup R_2}\ b$

因此 $(a,b) \in R_1 \cup R_2$，

从而有$(a,b) \in R_1$ 或者 $(a,b) \in R_2$，

于是 $a \in \wp(R_1)$ 或者 $a \in \wp(R_2)$，

故此 $a \in \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$，

所以 $\wp(R_1 \cup R_2) \subseteq \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$ ；

所以 $\wp(R_1 \cup R_2) = \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$ 。

(3) 证： $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$ (采用包含法)

由于 $R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$， $R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$，

依定理1，有 $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1)$，

$$\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_2)$$

根据第一章§2定理2的(3″)，就可得

$$\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$$ 。

投票 最多可选1项

设置

设 $A=\{1,2,3\}$， $R_1=\{(1,1),(2,2)\}$， $R_2=\{(1,2),(2,1)\}$，

$\wp(R_1)\cap\wp(R_2)\subseteq\wp(R_1\cap R_2)$ 成立吗？

A 成立

B 不成立

提交

* 元素$a\in A$和集合$A_1\subseteq A$在关系$R\subseteq A\times B$下的关联集

(1)a的R-关联集(R-relative set of a)：

$$R(a)=\{b : b\in B\wedge aRb\}\subseteq B\text{ ；}$$

(2) A_1的R-关联集(R-relative set of A_1)：

$$R(A_1)=\{b : b\in B\wedge (\exists a\in A_1)(aRb)\}\subseteq B\text{ 。}$$

例.设$A=\{a,b,c,d\}$， $A_1=\{c,d\}$，

$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,a),(d,c),(c,b)\}$，求出$A_1$的R-关联集。

定理.设$R \subseteq A \times B$是一个二元关系， $A_1, A_2 \subseteq A$ 。则

(1)保序性：$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow R(A_1) \subseteq R(A_2)$ ；

(2)$R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$ ；

(3)$R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$ 。

§3.关系的表示　关系的性质

一.关系表示法

1° 关系的矩阵表示法

设关系$R \subseteq A \times B$，　这里A,B是两个非空有限集合，

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m\}，\quad B=\{b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n\}，$$

则 用一个$m \times n$阶0-1矩阵M_R来表示关系R，　称此矩阵M_R为关系R的关系矩阵(relation matrix)。

$M_R=(x_{ij})_{m\times n}$，其中

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}\ (a_i,b_j)\in R\text{时} \\ 0 & \text{当}\ (a_i,b_j)\notin R\text{时}\end{cases}\qquad (i=1,\ldots,m;\quad j=1,\ldots,n)$$

例1 .设$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$， $B=\{b_1,b_2,b_3\}$,

$R\subseteq A\times B$ ， $R=\{(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_3),$

$(a_3,b_1),(a_4,b_2)\}$, R的关系矩阵？

例2 .设$A=\{a_1,a_2,a_3\}$， $S\subseteq A\times A$ ，

$S=\{(a_1,a_1),(a_2,a_2),(a_3,a_3),(a_1,a_3),(a_3,a_1),$

$(a_2,a_3),(a_3,a_2)\}$, S的关系矩阵？

主观题 1分

设置

设$A=\{ a_1,a_2,a_3,a_4 \}$， $B=\{b_1,b_2,b_3\}$， $R\subseteq A\times B$ ，

$R =\{ (a_1, b_1),(a_1, b_3),(a_2, b_2),(a_3, b_1),(a_4, b_2)\}$。

请写出R的关系矩阵。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

2° 关系的图形表示法

设关系$R \subseteq A \times B$， 这里A,B是两个非空有限集合，

$A=\{ a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m \}$， $B=\{ b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n \}$ 。

则 用一个有向图$G_R=(V_R,E_R)$来表示关系R， 称此有向图G_R为关系R的关系图(relation digraph)。

- $V_R = A \cup B$，$E_R = R$；
- V_R中的元素称为结点，用小圆点表示；表示A中元素的结点放在左边一块；表示B中元素的结点放在右边一块；

• E_R中的元素称为边，用有向弧表示；若aRb(即$(a,b)\in R$)，则在表示a的结点和表示b的结点之间连一条有向弧。有向弧的始端与结点a相连，有向弧的终端与结点b相连；

•用两个圆圈分别将表示两个集合A和B中元素的结点圈起来。

•所有有向弧的始端结点构成$\wp(R)$；所有有向弧的终端结点构成$\mathcal{R}(R)$。

•若A=B，这时令V_R =A，规定只画表示一个集合元素的结点；表示元素间关系的有向弧也只在此一个集合的结点间画出 。

例3 .设关系 $R \subseteq A \times B$,

$A=\{ a_1,a_2,a_3,a_4 \}$，　　$B=\{b_1,b_2,b_3\}$,

$R =\{ (a_1, b_2),(a_1, b_3),(a_2, b_3),(a_3, b_1),(a_4, b_2)\}$，R的关系图?

例4 .设关系 $S \subseteq A \times A$ ，$A=\{ a_1,a_2,a_3\}$ ，

$S=\{ (a_1, a_1),(a_2, a_2),(a_3, a_3),(a_1, a_3),(a_3, a_1) , (a_2, a_3),(a_3, a_2)\}$ ，S的关系图?

注：●图中各结点所**带**的小**圆圈**称为自反**圈**；一对结点间的来**回**边称为**双向弧**；**否**则，一对结点间只有一条边，则此边称为单**向弧**。

二.关系的性质

设二元关系$R\subseteq X\times X$(或者说$R\subseteq X^2$)，这里$X\neq\varnothing$是一集合。则R称为是X上的

1° 自反关系(reflexive relation)：当且仅当R满足自反性：

$(\forall x\in X)(xRx)$ ；

反自反关系(irreflexive relation)：当且仅当R满足反自反性：

$(\forall x\in X)(x \not R\, x)$或$(\forall x\in X)\neg(xRx)$；

例5.设 X={a,b,c,d}，判断下列关系性质：

$R_1=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b)\}$，

$R_2 =\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$，

$R_3=\{(a,b),(a,c),(a,d),(c,d)\}$，

$R_4 =\{(a,b),(a,a),(b,b),(c,d),(c,c)\}$。

Φ，X×X?

注： •自反性和反自反性是关系的两个极端性质；因此，自反关系和反自反关系是两种极端关系；

•从关系矩阵来看：自反关系关系矩阵的对角线上元素全是1；反自反关系关系矩阵的对角线上元素全是0;

•从关系图来看：自反关系关系图的各结点上全都有自反圈；反自反关系关系图的各结点上全都没有自反圈。

2° 对称关系(symmetric relation)：当且仅当R满足

对称性：$(\forall x\in X)(\forall y\in X)(xRy \Rightarrow yRx)$；

3° 反对称关系(antisymmetric relation)：当且仅当R满足反对称性：

$(\forall x\in X)(\forall y\in X)(xRy\wedge yRx\Rightarrow x = y)$；

注：●对称性和反对称性是关系的两个**极**端性质；因此，对称关系和反对称关系是两种**极**端关系；

例6.设X={a,b,c}，判断下列关系性质：

$R_1=\{(a,b),(b,a)\}$，

$R_2=\{(a,b)\}$，

$R_3=\{(a,a),(b,b)\}$，

$R_4=\{(a,b),(b,a),(b,c)\}$，

Φ，X×X。

注： •从关系矩阵来看：对称关系的关系矩阵是对称矩阵。

即$x_{ij} = x_{ji}(1 \le i,j \le n)$;

反对称关系的关系矩阵满足如下性质

$x_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_{ji} = 0 \ (1 \le i,j \le n)$; 或者?

•从关系图来看：对称关系关系图的结点间若有弧则都是双向弧；反对称关系关系图的结点间若有弧则都是单向弧;

4° 传递关系(transitive relation)：当且仅当R满足

传递性：$(\forall x\in X)(\forall y\in X)(\forall z\in X)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$；

反传递关系(antisymmetric relation)：当且仅当R满足反传递性：

$(\forall x\in X)(\forall y\in X)(\forall z\in X)(xRy \wedge yRz \Rightarrow x \not R z)$；

注：●传递性和反传递性是关系的两个极端性质；因此，传递关系和反传递关系是两种极端关系；

●概念反传递性和反传递关系一般不甚用，所以不加讨论；

例7.设X={a,b,c}, 判断下列关系性质：

$R_1=\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$， $R_2=\{(a,a),(a,b)\}$

$R_3=\{(a,a),(a,b),(a,c),(c,b),(c,c)\}$

$R_4=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(c,b)\}$， $R_5=\{(a,b),(c,b)\}$，

例8. 设X={a,b,c,d}，判断下列关系性质：

$R_1=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d),(b,d)\}$

$R_2=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d)\}$

Φ，$X\times X$。

例9. 设X是平面上直线的集合。平行关系

$R=\{(x,y) : x\in X \wedge y\in X \wedge x /\!/ y\}$的性质？

例10. 设X是平面上三角形的集合。相似关系

$R=\{(x, y) : x\in X \wedge y\in X \wedge x \backsim y\}$的性质？

例11. •相等关系是自反的、对称的、反对称的、传递的。

•全关系X^2是自反的、对称的、传递的。

•幺关系I 是自反的、对称的、反对称的、传递的。

•空关系$\varnothing$是反自反的、对称的、反对称的、传递的。

关系性质的其他例子:

例1.设$A=\{a,b,c\}$, $R,S \subseteq 2^A \times 2^A$，判断下列关系的性质：

$R=\{(x,y)|x,y \in 2^A \wedge x \subset y\}$,

$S=\{(x,y)|x,y \in 2^A \wedge x \cap y = \Phi\}$。

例2.设$A=\{0,1,\ldots 10\}$, $R \subseteq A \times A$，判断关系R的性质：

$R=\{(x,y)|x,y \in A \wedge x+y=10\}$。

§4.关系的运算

1° 关系的逆运算

定义1.逆运算(converse operation)

设A，B是两个非空的集合。 称一元运算 $\smile : 2^{A\times B} \to 2^{B\times A}$

对任何二元关系$R\subseteq A\times B$，使得

$$\breve{R} = \{(b,a) : b\in B\wedge a\in A\wedge aRb\}\subseteq B\times A$$

为关系的逆运算；称 是R的逆关系(converse of relation)。

* 显然，对任何$(b,a)\in B\times A$，$b\breve{R}a \Leftrightarrow aRb$。

例1.设A={a,b,c}，B={1,2}， R={(a,1),(a,2),(b,2),(c,1)}，$\breve{R}$？

定理1.逆运算基本定理

设两个关系R$\subseteq$A×B，S $\subseteq$A×B，这里 A, B是两个非空的集合。则有

(1) $\breve{\breve{R}}=R$ ；　　　　　　　反身律

(2) $R\subseteq S \Rightarrow \breve{R}\subseteq \breve{S}$ ；　　　　　　保序性

$R=S \Rightarrow \breve{R}=\breve{S}$ ；

(3) $\breve{(R\cup S)}=\breve{R}\cup \breve{S}$ ；　　　　逆对并的分配律

(4) $\breve{(R\cap S)}=\breve{R}\cap \breve{S}$；　　　　逆对交的分配律

(5) $\breve{(X\times Y)}=Y\times X$ ；

(6) $\breve{\varnothing}=\varnothing$ ；

(7) $\breve{(R')}=(\breve{R})'$ ；

(8) $\breve{R\setminus S}=\breve{R}\setminus\breve{S}$。 (逆对差的分配律)

[证].只证(1)，(4)，(7) （采用逻辑法）

(1)对任何$(x,y)\in A\times B$， 有

$(x,y)\in\breve{\breve{R}}$

$\Leftrightarrow (y,x)\in\breve{R}$

$\Leftrightarrow (x,y)\in R$

所以 $\breve{\breve{R}}=R$ 。

(4)对任何$(x,y)\in B\times A$，有

$$(x,y)\in \overparen{R\cap S}$$

$$\Leftrightarrow (y,x)\in R\cap S$$

$$\Leftrightarrow (y,x)\in R\wedge(y,x)\in S$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in \breve{R}\wedge(x,y)\in \breve{S}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in \breve{R}\cap \breve{S}$$

所以 $\overparen{R\cap S}=\breve{R}\cap\breve{S}$ 。

(7)对任何$(x,y)\in B\times A$，有

$(x,y)\in \breve{(R')}$

$\Leftrightarrow (y,x)\in R'$

$\Leftrightarrow (y,x)\notin R$

$\Leftrightarrow (x,y)\notin \breve{R}$

$\Leftrightarrow (x,y)\in (\breve{R})'$

所以 $\breve{(R')}=(\breve{R})'$ 。

2° 关系的合成运算

定义2.合成运算(composition operation)

设A，B是两个非空的集合， 称二元运算

$$\circ : 2^{A\times B} \times 2^{B\times C} \to 2^{A\times C}$$

对任何两个二元关系$R \subseteq A\times B$, $S \subseteq B\times C$，使得

$$R\circ S = \{(a,c) : a\in A\wedge c\in C\wedge(\exists b\in B)(aRb\wedge bSc)\}\subseteq A\times C$$

为关系的合成运算；称$R\circ S$是R与S的合成关系。

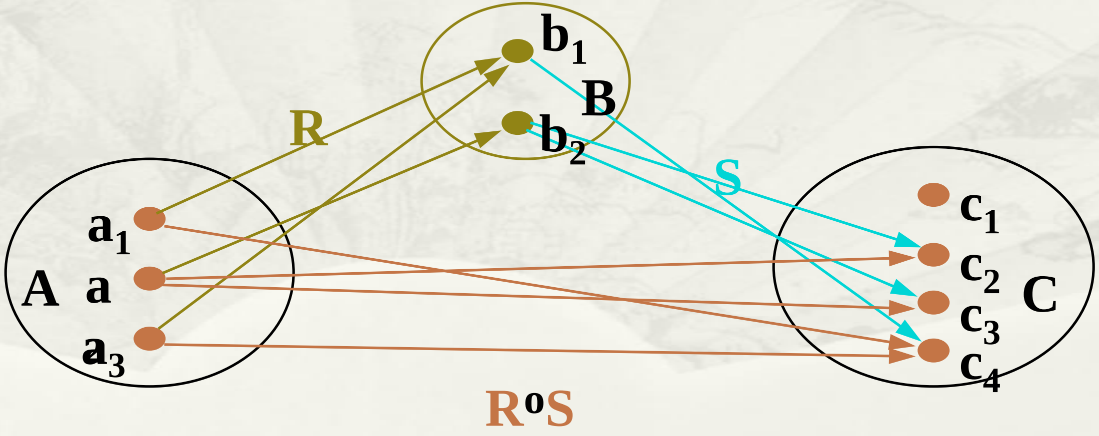
* 显然，对任何$(a,c)\in A\times C$， $aR\circ Sc\Leftrightarrow(\exists b\in B)(aRb\wedge bSc)$ 。

例2 .设$A=\{ a_1,a_2,a_3\}$， $B=\{b_1,b_2\}$， $C=\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

$R\subseteq A\times B$ ， $S\subseteq B\times C$

$R =\{(a_1, b_1),(a_2, b_2),(a_3, b_1)\}$, $S =\{(b_1, c_4),(b_2, c_2),(b_2, c_3)\}$,

那么 $R\circ S=$？



例3.设A是老年男子的集合，B是中年男子的集合，C是青少年男子的集合。

R是由A到B的父子关系， $R \subseteq A \times B$

S 是由B到C的父子关系， $S \subseteq B \times C$ ，

则$R \circ S =$？

定理2.合成运算基本定理

设$R, R_1, R_2 \subseteq A\times B$， $S, S_1, S_2 \subseteq B\times C$，$T \subseteq C\times D$，这里$A,B,C,D$是四个非空的集合。则

(1)$R \circ \varnothing = \varnothing \circ S = \varnothing$;

(2)$\wp(R \circ S) \subseteq \wp(R)$;

$\Re(R \circ S) \subseteq \Re(S)$;

(3) $R_1 \subseteq R_2 \wedge S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2$;　　保序性

(4) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$;　　结合律

(5) $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$；

合成运算对并的左分配律

$(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$；

合成运算对并的右分配律

(6) $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$；

合成运算对交的左分配不等式

$(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$；

合成运算对交的右分配不等式

(7) $\breve{(R \circ S)} = \breve{S} \circ \breve{R}$。

鞋袜律

[证]. (4)（采用逻辑法）对任何元素$a\in A, d\in D$，有

$$a\, R\circ(S\circ T)d$$

$$\Leftrightarrow(\exists b\in B)(aRb\wedge b(S\circ T)d)$$

$$\Leftrightarrow(\exists b\in B)(aRb\wedge(\exists c\in C)(bSc\wedge cTd))$$

$$\Leftrightarrow(\exists b\in B)(\exists c\in C)(aRb\wedge(bSc\wedge cTd))$$

(量词前移：$p\wedge\exists xA(x)\Leftrightarrow \exists x(p\wedge A(x))$)

$$\Leftrightarrow (\exists c\in C)(\exists b\in B)(aRb\wedge(bSc\wedge cTd))$$

(量词交换：$\exists x\exists yA(x,y)\Leftrightarrow\exists y\exists xA(x,y)$)

……

$\Leftrightarrow (\exists c \in C)(\exists b \in B)((aRb \wedge bSc) \wedge cTd)$

(∧的结合律：$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$)

$\Leftrightarrow (\exists c \in C)((\exists b \in B)(aRb \wedge bSc) \wedge cTd)$

(量词后移：$\exists x(p \wedge A(x)) \Leftrightarrow p \wedge \exists x A(x)$)

$\Leftrightarrow (\exists c \in C)(a(R \circ S)c \wedge cTd)$

$\Leftrightarrow a(R \circ S) \circ Td$

所以 $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$；

(5)对任何元素$a\in A, c\in C$，有

$$a\, R\circ(S_1\cup S_2)c$$

$$\Leftrightarrow(\exists b\in B)(aRb\wedge b(S_1\cup S_2)c)$$

$$\Leftrightarrow(\exists b\in B)(aRb\wedge(bS_1c\vee bS_2c))$$

$$\Leftrightarrow(\exists b\in B)((aRb\wedge bS_1c)\vee(aRb\wedge bS_2c)) \qquad (p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r))$$

$$\Leftrightarrow(\exists b\in B)(aRb\wedge bS_1c)\vee(\exists b\in B)(aRb\wedge bS_2c) \qquad (\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists x(A(x)\vee\exists xB(x))$$

$$\Leftrightarrow a(R\circ S_1)c\vee a(R\circ S_2)c$$

$$\Leftrightarrow a(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)c$$

所以 $R\circ(S_1\cup S_2)=(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)$。

- 但是合成运算不满足交换律。即，一般

$$R \circ S \neq S \circ R$$

例4.设A={a,b,c,d,e} 。

R={(a,b),(c,d),(b,b)}， S={(b,e),(c,a),(a,c),(d,b)} ，

计算$R \circ S$=？　$S \circ R$=？

3° 关系矩阵的合成运算

设$R \subseteq A \times B$， $S \subseteq B \times C$ 是两个二元关系，其合成关系为$R \circ S$。这里

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$， $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_l\}$， $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$。

设它们的关系矩阵分别为

$M_R=(x_{ij})_{m\times l}$，　　$M_S=(y_{ij})_{l\times n}$，

$M_{R\circ S}=(u_{ij})_{m\times n}$

则 有： $M_{R \circ S} = M_R \circ M_S$

其中： $M_R \circ M_S = (t_{ij})_{m\times n}$

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1}^{l}(x_{ik} \wedge y_{kj}) \quad (1\le i \le m, 1 \le j \le n)$$

注：这**里**关系**矩阵**的合成运算与《线性代数》中的一般**矩阵**的**乘**法运算相**似**，不同的是：**乘**法**换**成布尔**乘**$(\wedge)$；加法**换**成布尔加$(\vee)$。这**里**的布尔加 **$1\vee 1=1$**（不进位），而非**$1\vee 1=0$**（进位）。

[证].（采用逻辑法）对任何的i，j $(1\le i \le m, 1 \le j \le n)$，有

$$u_{ij}=1$$

$\Leftrightarrow a_i R\circ S c_j$

$\Leftrightarrow (\exists b\in B)(a_i R b \wedge b S c_j)$

$\Leftrightarrow (a_i R b_1 \wedge b_1 S c_j) \vee (a_i R b_2 \wedge b_2 S c_j) \vee \ldots \vee (a_i R b_l \wedge b_l S c_j)$

$\Leftrightarrow (x_{i1}=1 \wedge y_{1j}=1) \vee (x_{i2}=1 \wedge y_{2j}=1) \vee \ldots \vee (x_{il}=1 \wedge y_{lj}=1)$

(∧、∨是命题的真值联结词‘且’、‘或’)

$\Leftrightarrow (x_{i1} \wedge y_{1j}) \vee (x_{i2} \wedge y_{2j}) \vee \ldots \vee (x_{il} \wedge y_{lj})=1$ (这里∧是布尔乘，∨是布尔加。)

$\Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{l}(x_{ik} \wedge y_{kj})=1$

$\Leftrightarrow t_{ij}=1$

即 $u_{ij}=t_{ij}$

因此 $(u_{ij})_{m\times n}=(t_{ij})_{m\times n}$

所以 $M_{R\circ S}=M_R\circ M_S$。

例5.设A={a,b,c,d,e}，则关系

R={(a,b),(c,d),(b,b)}，S={(b,e),(c,a),(a,c),(d,b)}

的合成关系 R∘S= {(a,e),(b,e),(c,b)}

其关系矩阵分别为

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},M_S=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

计算 $M_R \circ M_S$=？

4° 关系的闭包运算（宏运算）

定义3.关系的合成幂(nth power)

设二元关系R $\subseteq$A×A，n$\in$N 。这里A 是一个非空的集合， N 是自然数集。 规定:

(1) $R^0 = I$ （这里$I=I_A=\{(a,a) : a\in A\}$是A上的幺关系）；

(2) $R^1 = R$；

(3) $R^{n+1} = R^n \circ R$ (特别地：$R^2 = R \circ R$)。

定理3.指数律

设二元关系$R \subseteq A \times A$，$m, n \in N$。这里A是一个非空的集合，N是自然数集。则

(1)交换律：$R^m \circ R^n = R^n \circ R^m = R^{m+n}$；

特别地：$I \circ R = R \circ I = R$ (幺关系是合成运算的幺元)；

(2)交换律：$(R^m)^n = (R^n)^m = R^{m \cdot n}$。

[证]. （采用数学归纳法）

只证(1)的一个等式： $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;

归纳变量选取n（让m固定）

n=0时， $R^m \circ R^0 = R^m \circ I$ (定义3的(1)：$R^0 = I$)

$= R^m$

n=1时， $R^m \circ R^1 = R^m \circ R$ (定义3的(2)：$R^1 = R$)

$= R^{m+1}$ (定义3的(3))

结论成立;

……

n=k时，假设结论成立。即 $R^m \circ R^k = R^{m+k}$；

n=k+1时， $R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ (R^k \circ R)$ (定义3的(3))

$= (R^m \circ R^k) \circ R$ (结合律)

$= R^{m+k} \circ R$ (归纳假设)

$= R^{m+k+1}$ (定义3的(3))

结论成立；

根据数学归纳法，即证明了该结论。

例6.设二元关系R$\subseteq$A×A,这里A={a,b,c} ,R={(a,b),(c,b)}。从而有

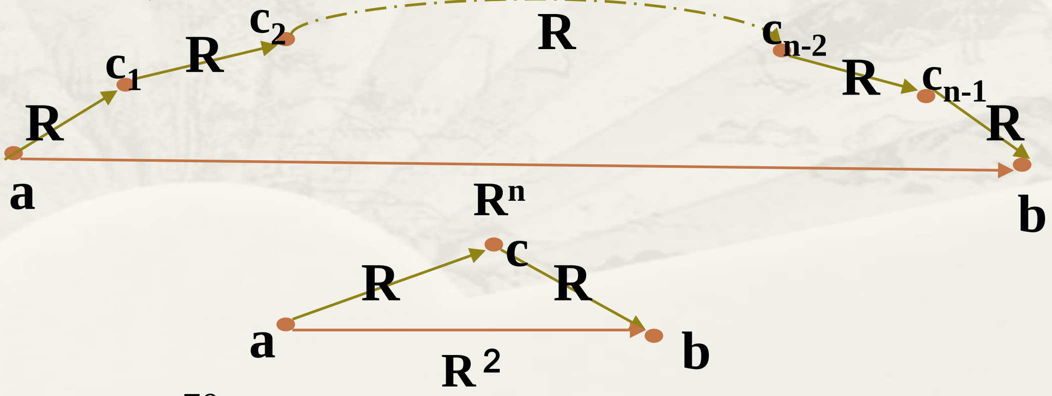
I={(a,a),(b,b),(c,c)}， $\breve{R}${(b,a),(b,c)}

计算 $\breve{R}\circ R$，$R\circ\breve{R}$。

注：• 由定理2的(1)有：$\varnothing \circ R = R \circ \varnothing = \varnothing$，这说明空集是合成运算的零元。

•一般地 $a\,R^n b \Leftrightarrow (\exists c_1)(\exists c_2)\ldots(\exists c_{n-1})(aRc_1 \wedge c_1Rc_2 \wedge \ldots \wedge c_{n-1}Rb)$；

特别地 $a\,R^2 b \Leftrightarrow (\exists c)\,(aRc \wedge cR\,b)$ 。



定义4.闭包运算(closure operation)

设二元关系$R \subseteq A \times A$。这里A是一个非空的集合。定义：

(1)传递闭包(transitive closure)：

$$R^{+} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots ;$$

(2)自反传递闭包(reflexive and transitive closure)：

$$R^{*} = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k = I \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots 。$$

注：•传递闭包有时也记为$t(R)$；自反传递闭包有时也记为$rt(R)$；

• $a R^{+} b \Leftrightarrow (\exists k \in N)(k \geq 1)(aR^k b)$;

• $a R^{*} b \Leftrightarrow (\exists k \in N)(aR^k b)$

$\Leftrightarrow (a=b) \vee (\exists k \in N)(k \geq 1)(aR^k b) \Leftrightarrow (a=b) \vee (aR^{+} b)$ 。

定理4.传递闭包基本定理

设二元关系$R\subseteq A\times A$，$R\neq\varnothing$ 。则

(1)若 $m\in N$，$m\geq 1$ ，则 $R^m\subseteq R^+$ ；特别地 $R\subseteq R^+$ ；

(2) R^+是传递关系：即，对任何元素 a，b，$c\in A$ ，

$aR^+b\wedge bR^+c\Rightarrow aR^+c$ ；

(3) R^+是包含R的最小传递关系：即，对任何二元关系

$S\subseteq A\times A$，若$R\subseteq S$且S也是传递关系，那么 $R^+\subseteq S$ ；

(4)若|A|=n，则 $R^{+}=\bigcup_{k=1}^{n}R^{k}$；这时

$$a\,R^{+}b \Leftrightarrow (\exists k\in N)(1\le k\le n)(aR^{k}b)\text{；}$$

(5)若R是传递关系，则 $R^{+}=R$。

[证].只证(2)(采用逻辑法)（ R^{+}是传递关系）

(2)对任何元素a，b，$c\in A$，有

$aR^{+}b\wedge bR^{+}c$

$\Rightarrow(\exists k)(aR^{k}b)\wedge(\exists l)(bR^{l}c)$ (这里$k\ge 1$, $l\ge 1$)

……

$$\Rightarrow(\exists x_1)(\exists x_2)\ \ldots(\exists x_{k-1})(aRx_1\wedge x_1Rx_2\wedge\ \ldots\ \wedge x_{k-1}Rb)$$

$$\wedge\ (\exists y_1)(\exists y_2)\ \ldots(\exists y_{l-1})(bRy_1\wedge y_1Ry_2\wedge\ \ldots\ \wedge y_{l-1}Rc)$$

$$\Rightarrow(\exists x_1)(\exists x_2)\ \ldots(\exists x_{k-1})(aRx_1\wedge x_1Rx_2\wedge\ \ldots\ \wedge x_{k-1}Rb$$

$$\wedge\ (\exists y_1)(\exists y_2)\ \ldots(\exists y_{l-1})(bRy_1\wedge y_1Ry_2\wedge\ \ldots\ \wedge y_{l-1}Rc))$$

(量词前移：$\exists xA(x)\wedge p\Leftrightarrow\exists x(A(x)\wedge p)$)

$$\Rightarrow(\exists x_1)(\exists x_2)\ \ldots(\exists x_{k-1})(\exists y_1)(\exists y_2)\ \ldots(\exists y_{l-1})(aRx_1\wedge x_1Rx_2$$

$$\wedge\ \ldots\ \wedge x_{k-1}Rb\ \wedge\ bRy_1\wedge y_1Ry_2\wedge\ \ldots\ \wedge y_{l-1}Rc)$$

(量词前移：$p\wedge\exists xA(x)\Leftrightarrow\exists x(p\wedge A(x))$)

……

$\Rightarrow(\exists x_1)(\exists x_2)\ \ldots(\exists x_{k-1})(\exists x_k)(\exists x_{k+1})(\exists x_{k+2})\ \ldots(\exists x_{k+l-1})(aRx_1$

$\wedge x_1Rx_2\wedge\ \ldots\ \wedge x_{k-1}Rx_k\wedge x_kRx_{k+1}\wedge x_{k+1}Rx_{k+2}\wedge\ \ldots\ \wedge x_{k+l-1}Rc)$

(这里， 令：$x_k=b$, $x_{k+1}=y_1$, $x_{k+2}=y_2$, … , $x_{k+l-1}=y_{l-1}$)

$\Rightarrow(\exists n)(aR^nc)$ (这里， 令： $n=k+l\geq 1+1\geq 1$)

$\Rightarrow aR^+c$

所以，R^+是传递的。

定理5.自反传递闭包基本定理

设二元关系$R\subseteq A\times A$，$R\neq\varnothing$ 。则

(1)若 $m\in N$，则 $R^m\subseteq R^*$ ；特别地 $I\subseteq R^*$， $R\subseteq R^*$ ；

(2) R^*是自反传递关系：即，

对任何元素 $a\in A$， aR^*a ；

对任何元素 a，b，$c\in A$，

$$aR^*b\wedge bR^*c\Rightarrow aR^*c$$ ；

(3) R^*是包含R的最小自反传递关系：即，对任何二元关系 $S\subseteq A\times A$，若$R\subseteq S$且S也是自反传递关系，那么 $R^*\subseteq S$ ；

(4)若|A|=n，则 $R^* = \bigcup_{k=0}^{n} R^k$；这时

$$a\,R^*b \Leftrightarrow (\exists k \in N)(0 \le k \le n)(aR^k b)$$

$$\Leftrightarrow (a=b) \vee (\exists k \in N)(1 \le k \le n)(aR^k b)\;;$$

(5)若R是自反传递关系， 则 $R^* = R$ 。

[证].只证(3)（采用逻辑法）（若$R\subseteq S$且S也是自反传递关系，那么 $R^*\subseteq S$ ）

(3)对任何元素a，$b\in A$，有

aR^*b

$\Rightarrow(a=b)\vee(\exists k)(aR^kb)$ (这里$k\geq 1$)

$\Rightarrow(a=b)\vee(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_{k-1})(aRx_1\wedge x_1Rx_2\wedge\ldots\wedge x_{k-1}Rb)$

$\Rightarrow aSb\vee(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_{k-1})(aSx_1\wedge x_1Sx_2\wedge\ldots\wedge x_{k-1}Sb)$ (S是自反的且$R\subseteq S$)

$\Rightarrow aSb\vee aSb$ (S是传递的 且 $\exists xp\Leftrightarrow p$)

$\Rightarrow aSb$ (幂等性：$p\vee p\Leftrightarrow p$)

所以 $R^*\subseteq S$ 。

小练习

1 设R_1、R_2是非空集合A上的二元关系，请判断：

(1) R_1和R_2自反， $R_1 \circ R_2$ 自反。

(2) R_1和R_2反对称， $R_1 \cap R_2$ 反 对称 。

(3) R_1和R_2对称， $R_1 \circ R_2$ 对称。

(4) R_1和R_2对称， $R_1 \cup R_2$ 对称

(5) R_1和R_2传递， $R_1 \circ R_2$ 传递。

(6) R_1和R_2传递， $R_1 \cup R_2$ 传递。

2 设A={a,b,c,d}， $R \subseteq A \times A$，

R={(a,a) ,(b,b), (a,b) ,(c,d)}， 求R^+，R^* 。

§5. 等价关系

1° 等价关系和等价类

定义1.等价关系(equivalence relation)

设二元关系R$\subseteq$ A×A。这里A是非空的集合。

R是A上的等价关系$\Leftrightarrow$R是自反的、对称的、传递的。

例1.同乡关系是等价关系吗?

例2 .平面几何中的三角形间的相似关系是等价关系吗?

例3 .平面几何中的三角形间的全等关系是等价关系吗?

例4 .平面几何中的直线间的平行关系是等价关系吗?

例5 .设N是自然数集，m是一正整数， R是N上的模m同余关系，$R=\{(a,b): a \in N \wedge b \in N \wedge a \equiv b \pmod{m}\}$是等价关系吗？

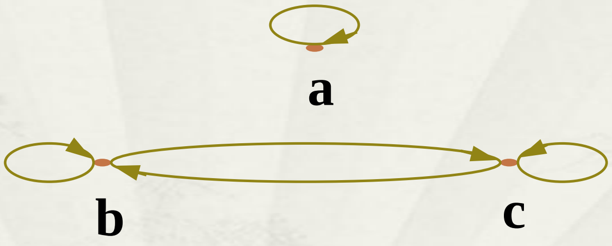
例6.非空集合A上的幺关系、全关系是等价关系吗？

例7.非空集合A上的空关系是等价关系吗？

例8. 设二元关系$R\subseteq A\times A$,这里

$A=\{a,b,c\}$, $R=\{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c),(c,b)\}$,

其关系图如下。



•等价关系的实质是将集合A中的元素进行分类。

定义2.等价类(块)(equivalence classes(block))

设R是非空集合A上的等价关系。对任何元素$a\in A$，由a生成的(或者说是由a诱导出的)关于R的等价类定义为

$$\{b : b\in A\wedge bRa\}$$

记为$[a]_R$. (显然有$[a]_R\subseteq A$)。同时称a为等价类$[a]_R$的代表元。

定义3. 设R是非空集合A上的等价关系。 定义集合

$$\Pi_R = \{[a]_R : a \in A\}$$ (注意：应去掉重复的类！)

为集合A关于等价关系R的商集。记为A/R。称A/R中元素的个数为R的秩。

例9.设N是自然数集，m是一个正整数。R是N上的模m同余关系，即 $R=\{(a,b) : a\in N \wedge b\in N \wedge a \equiv b \pmod{m}\}$ 。R是N上的等价关系，其商集是？关系R的秩是？

定理1. 设R是非空集合A上的等价关系。对任意的$a,b\in A$，有

(1)$a\in[a]_R$　(故$[a]_R\neq\varnothing$)　；

(2)aRb (即 $(a,b)\in R$) $\Leftrightarrow [a]_R=[b]_R$　；

(3)(3.1) $[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing\Rightarrow[a]_R=[b]_R$

($\Rightarrow aRb$，即 $(a,b)\in R$)；

(3.2) $(a,b)\notin R\Rightarrow[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$ ；

(4)两个等价类$[a]_R$和$[b]_R$，要么完全重合(即$[a]_R=[b]_R$)，要么不交(即$[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$)；二者必居其一，也只居其一。

[证]. （采用逻辑法）

(1)对任何元素a，有

$a \in A$

$\Rightarrow aRa$ (R是等价关系，故R自反)

$\Rightarrow a \in [a]_R$

$\Rightarrow [a]_R \neq \varnothing$ ；

(2) 先证：$aRb \Rightarrow [a]_R = [b]_R$

为证$[a]_R = [b]_R$，须证$[a]_R \subseteq [b]_R$并且$[b]_R \subseteq [a]_R$

(a) 对任何元素$x \in A$，

有 $x \in [a]_R$

$\Rightarrow xRa$

$\Rightarrow xRa \wedge aRb$ (已知条件： aRb)

$\Rightarrow xRb$ (R传递)

$\Rightarrow x \in [b]_R$

所以 $[a]_R \subseteq [b]_R$

(b) 任何元素$x\in A$，有 $x\in[b]_R$

$\Rightarrow xRb$

$\Rightarrow xRb\wedge aRb$ (已知条件： aRb)

$\Rightarrow xRb\wedge bRa$ (R对称)

$\Rightarrow xRa$ (R传递)

$\Rightarrow x\in[a]_R$

所以 $[b]_R\subseteq[a]_R$

综合(a)和 (b)，即得 $[a]_R = [b]_R$；

次证：$[a]_R = [b]_R \Rightarrow aRb$

$[a]_R \neq \varnothing$ (本定理的(1))

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \land x_0 \in [b]_R)$ (已知条件：$[a]_R = [b]_R$)

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 Ra \land x_0 Rb)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(aRx_0 \land x_0 Rb)$ (R是等价关系，故R对称)

$\Rightarrow aRb$ (R是等价关系，故R传递 且 $\exists xp \Leftrightarrow p$)

(3)(3.1)

$[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \cap [b]_R)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \wedge x_0 \in [b]_R)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 Ra \wedge x_0 Rb)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(aRx_0 \wedge x_0 Rb)$ (R是等价关系，故R对称)

$\Rightarrow aRb$ (即 $(a,b) \in R$) (R是等价关系，故R传递 且 $\exists xp \Leftrightarrow p$)

$\Rightarrow [a]_R = [b]_R$ (本定理的(2))

(3.2) (整体采用反证法) 若$(a,b)\notin R$，则 $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$ 。

否则若

$[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$

$\Rightarrow [a]_R = [b]_R$ (本定理的(3.1))

$\Rightarrow aRb$ (本定理的(2))

$\Rightarrow (a,b) \in R$

这就与已知条件：$(a,b)\notin R$ 矛盾；

(4)对任何序偶(a,b)

$(a,b)\in A\times A$

$\Rightarrow(a,b)\in R\vee(a,b)\notin R$ (二分法，互斥)

$\Rightarrow([a]_R=[b]_R)\vee([a]_R\cap[b]_R=\varnothing)$

(本定理的(2)和(3.2)，互斥)。

定义4. 设R和S是非空集合A上的两个等价关系。若$R \subseteq S$，则 称R细于S，或S粗于R 。

例11.设A是一非空集。则

(1)A上最细的等价关系是?其商集A/R是?

(2)A上最粗的等价关系是全？其商集A/R是?

定理2. 设R和S是非空集合A上的两个等价关系。则

$$R\subseteq S \Leftrightarrow (\forall a\in A)([a]_R\subseteq [a]_S)$$ 。

[证]. （采用逻辑法）　先证：$R\subseteq S \Rightarrow (\forall a\in A)([a]_R\subseteq [a]_S)$

对任何元素$a\in A$，有

对任何元素$x\in A$，有

$x\in [a]_R$

$\Rightarrow xRa$

$\Rightarrow xSa$　　(已知条件：$R\subseteq S$)

$\Rightarrow x\in [a]_S$

所以　$[a]_R\subseteq [a]_S$

所以$(\forall a\in A)([a]_R\subseteq [a]_S)$；

次证：$(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S) \Rightarrow R \subseteq S$

对任何序偶$(a,b) \in A \times A$

$(a,b) \in R$

$\Rightarrow aRb$

$\Rightarrow bRa$ (R是等价关系，故R对称)

$\Rightarrow b \in [a]_R$

$\Rightarrow b \in [a]_S$ (已知：$(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S)$)

$\Rightarrow bSa$

$\Rightarrow aSb$ (S是等价关系，故S对称)

$\Rightarrow (a,b) \in S$

所以 $R \subseteq S$ 。

定理3. 设R和S是非空集合A上的两个等价关系。则

$$R=S \Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R = [a]_S)$$ 。

[证].(采用逻辑法)

$R=S$

$\Leftrightarrow R \subseteq S \wedge S \subseteq R$

$\Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S) \wedge (\forall a \in A)([a]_S \subseteq [a]_R)$ (定理2)

$\Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S \wedge [a]_S \subseteq [a]_R)$

($\forall$量词对$\wedge$的分配律：$\forall x(A(x) \wedge \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x))$)

$\Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R = [a]_S)$ 。

注：•由定理2知，若两个等价关系相等，则每个元素所对应的等价类也相同；若两个等价关系的等价类集合相等，则两个等价关系相同。

•由定理3知，等价关系与等价类集合一一对应。即相同的等价关系对应着相同的等价类集合，不同的等价关系对应着不同的等价类集合。

2° 划分与等价关系

定义5. 覆盖、划分(covering partition)

设A是一非空集合。则A的

(1) 覆盖是一集合之集 $\Pi=\{A_\gamma : \gamma\in\Gamma\wedge A_\gamma\neq\varnothing\}$，

满足条件： $A\subseteq\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$；

(2) 划分是一集合之集 $\Pi=\{A_\gamma : \gamma\in\Gamma\wedge A_\gamma\neq\varnothing\}$，满足条件：

(a) $A=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$；

(b) $\gamma_1\neq\gamma_2\Rightarrow A_{\gamma1}\cap A_{\gamma2}=\varnothing$；

其中A_γ称为划分Π的划分块(block of partition)。

注：●由划分和覆盖的定义可知，A上的划分一定是A上的覆盖；反之则未必。

定理4 。设R是非空集合A上的等价关系。则R的等价类之集

$$\Pi_R = \{ [a]_R : a \in A \}$$

是A上的一个划分；等价类就是划分块。

定理5. 设 $\Pi=\{A_\gamma : \gamma\in\Gamma\wedge A_\gamma\neq\varnothing\}$是非空集合A上的一个划分。借助$\Pi$来定义A上的二元关系 $R_\Pi\subseteq A\times A$，使得

$$R_\Pi=\{(a,b) : (\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_\gamma\wedge b\in A_\gamma)\}$$

则R_Π是A上的等价关系。 称为是由划分Π产生的(或者说是诱导出的)A上的等价关系。

[证]. (1)自反性：

对任何元素a，有

$a\in A$

$\Rightarrow a\in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ (划分的条件(a)：$A=\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$)

$\Rightarrow (\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_\gamma)$

$\Rightarrow (\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_\gamma \wedge a\in A_\gamma)$ (幂等律：$p\Leftrightarrow p\wedge p$)

$\Rightarrow (a,a)\in R_\Pi$

$\Rightarrow aR_\Pi a$

所以R_Π是自反的；

(2)对称性：

对任何元素$a,b\in A$，有

$aR_{\Pi}b$

$\Rightarrow(a,b)\in R_{\Pi}$

$\Rightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_{\gamma}\wedge b\in A_{\gamma})$

$\Rightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(b\in A_{\gamma}\wedge a\in A_{\gamma})$ (交换律：$p\wedge q\Leftrightarrow q\wedge p$)

$\Rightarrow(b,a)\in R_{\Pi}$

$\Rightarrow bR_{\Pi}a$

所以R_{Π}是对称的；

(3)传递性：

对任何元素a,b,c∈A，有

$$aR_{\Pi}\, b \wedge bR_{\Pi}\, c$$

$$\Rightarrow (a,b)\in R_{\Pi} \wedge (b,c)\in R_{\Pi}$$

$$\Rightarrow (\exists\gamma_1\in\Gamma)(a\in A_{\gamma 1}\wedge b\in A_{\gamma 1})\wedge(\exists\gamma_2\in\Gamma)(b\in A_{\gamma 2}\wedge c\in A_{\gamma 2})$$

$$\Rightarrow (\exists\gamma_1\in\Gamma)(a\in A_{\gamma 1})\wedge (\exists\gamma_1\in\Gamma)(b\in A_{\gamma 1}) \wedge$$

$$(\exists\gamma 2\in\Gamma)(b\in A_{\gamma 2})\wedge (\exists\gamma_2\in\Gamma)(c\in A_{\gamma 2})$$

$$(\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x))$$

……

$\Rightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_{\gamma}\wedge b\in A_{\gamma}\wedge b\in A_{\gamma}\wedge c\in A_{\gamma})$

(由划分条件(b)的逆否，有 $A_{\gamma1}\cap A_{\gamma2}\supseteq\{b\}\neq\varnothing\Rightarrow\gamma_1=\gamma_2=\gamma$)

$\Rightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_{\gamma}\wedge b\in A_{\gamma}\wedge c\in A_{\gamma})$ (幂等律：$p\wedge p\Leftrightarrow p$)

$\Rightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_{\gamma}\wedge c\in A_{\gamma})$ (合取分析式：$p\wedge q\Rightarrow p$)

$\Rightarrow(a,c)\in R_{\Pi}$

$\Rightarrow aR_{\Pi}c$

所以R_{Π}是传递的； 所以R_{Π}是等价关系。

* 注：定理5表明: 由集合A上的划分Π可产生A上的一个等价关系；划分块就是等价类。

* 问题：

1.由A上的一个等价关系R出发，由等价类可以得到一个划分$\Pi_{R=}$ X/R，由该划分出发，又可产生一个新的等价关系R_1，这个过程是否要进行下去？R与R_1有什么关系？

2.由A上的一个划分Π出发可产生一个等价关系R_Π，由该关系又可产生新的划分Π_1，Π与Π_1有什么关系？

定理6。设R是非空集合 A 上的等价关系， Π是A上的一个划分。那么 $R=R_{\Pi} \Leftrightarrow \Pi_R=\Pi$ 。

[证]. (采用逻辑法)

[证]. (采用逻辑法)　先证：　$R=R_{\Pi} \Rightarrow \Pi_R = \Pi$

对任何元素$a \in A$，有

对任何元素$x \in A$，有

$x \in [a]_R$

$\Leftrightarrow xRa$

$\Leftrightarrow xR_{\Pi}a$　　(已知条件：　$R=R_{\Pi}$)

$\Leftrightarrow x \in [a]_{R_{\Pi}}$

所以　$[a]_R=[a]_{R_{\Pi}}$

所以　$(\forall a \in A)([a]_R=[a]_{R_{\Pi}})$

所以 $\Pi_R=\{[a]_R : a \in A\}=\{[a]_{R_{\Pi}} : a \in A\}=\Pi$；

次证： $\Pi_R = \Pi \Rightarrow R = R_\Pi$

对任何序偶$(a,b) \in A \times A$

$(a,b) \in R$

$\Leftrightarrow aRb$

$\Leftrightarrow bRa$ (R是等价关系，故R对称)

$\Leftrightarrow b \in [a]_R$

$\Leftrightarrow b \in [a]_{R\Pi}$ (已知条件：$\Pi_R = \Pi \Rightarrow (\forall a \in A)([a]_R = [a]_{R\Pi}))$

$\Leftrightarrow bR_\Pi a$

$\Leftrightarrow aR_\Pi b$ (R_Π是等价关系，故R_Π对称)

$\Leftrightarrow (a,b) \in R_\Pi$ 所以 $R = R_\Pi$ 。

注：•由定理4, 5, 6可知：由等价关系可以产生一个划分，由划分可以产生一个等价关系；

•划分与等价关系是一一对应的。即每个划分对应一个等价关系，且每个等价关系对应一个划分。

§6. 半序关系

定义1. 半序关系(partial order relation)

设二元关系R$\subseteq$ A×A。这里A是非空的集合。

R是A上的半序关系$\Leftrightarrow$R是自反的、反对称的、传递的。

* 通常，半序关系R记为$\leq$ ，称系统$(A, \leq)$为半序集(poset)。

例1. 自然数集N、整数集I、有理数集Q 、实数集R上的小于等于关系‘$\leq$’是半序关系吗？

例2.集合X的幂集2^X上的包含关系‘$\subseteq$’是半序关系吗?

例3. N、整数集I、有理数集Q 、实数集R上的小于关系‘$<$’是半序关系吗?

注：二元关系$R\subseteq A\times A(A\neq\varnothing)$ 是A上的**拟**序关系(quasi order) $\Leftrightarrow$R是反自反的、传递的。**拟**序一般记作$<$，称系统$(A,<)$为**拟**序集;

拟序与**半**序的关系是：对任何元素$a, b\in A$

$$a<b \Leftrightarrow a\leq b \wedge a\neq b ;$$

例4.集合X的幂集2^X上的真包含关系‘$\subset$’是半序关系吗？是拟序关系吗?

定义2.可比较性(comparability)

设(A, ≤)是一半序集，a与b是A中的一对元素。 称

a与b是可比较的 $\Leftrightarrow$ $a \le b \vee b \le a$ 。

注：•否则，若$a \nleq b \wedge b \nleq a$，则称a与b是不可比较的;

•半序关系≤在集合A上建立了一种比较关系。

例5. 对小于等于关系‘≤’，任何二数a,b是可比较的吗？

例6. 对于‘$\subseteq$’，任何二集合A,B都是可比较的吗？

定义3.全序关系 线性序 链(total order, linear order , chain)

设$(A, \le)$是一半序集。

$\le$是A上的全序关系$\Leftrightarrow$ $\le$满足全可比较性：

$$(\forall a\in A)(\forall b\in A)(a\le b\vee b\le a)\ 。$$

这时， 简称$\le$是全序或线性序；称$(A, \le)$是一全序集。

注： •**否**则，若$(\exists a\in A)(\exists b\in A)(a\nleq b\wedge b\nleq a)$，一般 则称$\le$是非线性序(nonlinear order);

•非线性序在实**际**中有**很**重要的作用；也是本课程的一个重要研究对象。

- 字典序(lexicographic)

设$(\Sigma, \leq)$是一全序集。其中：Σ是一有限集，称为字母表(alphabet)，任一元素$a\in\Sigma$称为字母(alpha)， $\leq$是字母表中字母的自然顺序，显然$\leq$是一个全序。故此, 则$(\Sigma^*, \leq^*)$是一全序集， 称其为字典序。其中：

$$\Sigma^* = \{\Lambda\} \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots \cup \Sigma^n \cup \ \ldots \quad (\Lambda\text{称为空字})$$

其任何元素 $w\in\Sigma^*$称为一个字(word)；必有$k\in N$,使得

$w \in \Sigma^k$，从而

$$w=(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots , a_{ik})=a_{i1}a_{i2} a_{i3} \ldots a_{ik}$$

这里$a_{ij}\in\Sigma$ $(1\leq j\leq k)$。

定义二元关系$\leq^* \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$，使得：

对于任何二字$w_1=a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots a_{im}$和$w_2=b_{i1}b_{i2}b_{i3}\ldots b_{in}$

$w_1 \leq^* w_2$当且仅当 下列四条之一成立：

(1)$a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots a_{im}=b_{i1}b_{i2}b_{i3}\ldots b_{in}$；(这时：$m=n$, $a_{ij}=b_{ij}$)

(2)$a_{i1}\neq b_{i1}$ 且$a_{i1}\leq b_{i1}$；

(3)存在着某个$k \in N$，$1 \leq k \leq \min(m,n)$，使得

$a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots a_{ik-1}=b_{i1}b_{i2}b_{i3}\ldots b_{ik-1}$且$a_{ik}\neq b_{ik}$且$a_{ik}\leq b_{ik}$。

(4) w_1是w_2的前缀。

例7.小于等于关系‘≤’，包含关系‘⊆’是全序关系吗？

例8.(I , ≤)，(R, ≤) 都是全序集。但是在(I , ≤) 中每个整数，下一个比它大的或比它小的（即紧挨着它的）那个数都可确定；而在(R, ≤) 中却不可能。

定义3.直接后继　后继(direct successor, successor)

设(A, ≤)是一半序集，a与b是A中的一对元素。 称

b是a的直接后继

$$\Leftrightarrow a\neq b\wedge a \leq b\wedge(\forall t\in A)(a \leq t\wedge t \leq b\Rightarrow t=a\vee t=b)$$

直接后继简称后继； a的后继记作a^+，即$b= a^+$，这时称a是b的前驱或前趋(predecessor)。

例9. $(N_m, \leq)$, $(N, \leq)$,$(I , \leq)$, $(R, \leq)$ 都是全序集。

$N_m=\{0,1,2,\ldots,m-1\}$。

$(N_m, \leq)$ 中每个元素都有后继、前驱?

$(N, \leq)$每个元素都有后继、前驱?

$(R, \leq)$每个元素都有后继、前驱?

半序集的表示法——哈斯图(Hasse)

半序集$(A, \le)$的Hasse图是一个图 $G_{\le} = (V_{\le}, E_{\le})$

其中：$V_{\le} = A$ 是结点集；

$E_{\le} = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in A \wedge a \le b \wedge b = a^{+}\}$是边集。

在画法上，规定：

(1) 结点a^{+}必须画在结点a 的紧(斜)上方；

(2)不画边的方向。

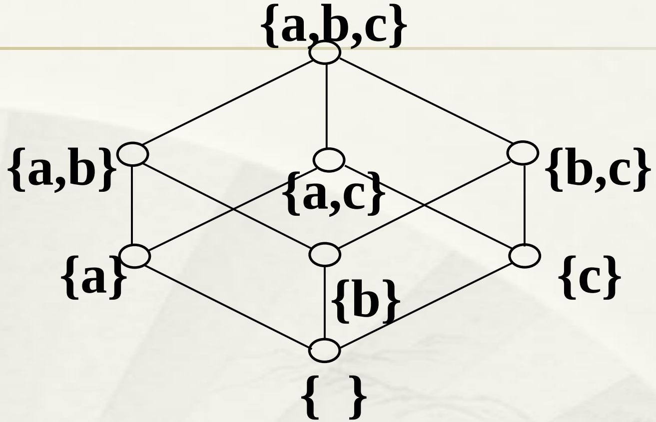
注：与关系图相比，Hasse图：

- 省略了自反性的边(圈)；　省略了(反对称性)方向；　省略了传递性的边；

例10. 设A ={a,b,c},

2^A上的包含关系$\subseteq$的

Hasse图。



例10

注；在非线性**半**序集中，直接**后继**一般不唯一；

其Hasse图**呈**现**网格状**；其实**正**是这点**导致一门**现代数学的重要学科——**格**论的出现；而此例**正好**给人们形象、直**观**的**展**现出布尔代数(用其三大特例之一——集合代数来表现)的内部数学结构。

例11. 设A = {2,3,4,6,7,8,12,36,60},

R ={(a,b):a$\in$A$\wedge$b$\in$A$\wedge$**b |a**},

R是A上的倍数关系。

R的Hasse图？

例12. 设A ={2,3,6,12,24,36},

R={(a,b):$a \in A \wedge b \in A \wedge$ **a | b**}

R是A上的整除关系。

R的Hasse图？

注：**虽**然同为整除关系，**但**由于集合不同，其Hasse图就**呈**现出明显的不同；这说明两例中的**半**序集是不同的；所以，在论及**半**序关系时，重要的是一定要指明其是那个集合上的**半**序关系；**半**序集是一个整体，不能分而论之。

定义4.最大元　最小元（greatest element,least element）

设$(A, \leq)$是半序集，$B \subseteq A$，$x_0 \in B$。则 称

(1)x_0是B的最大元$\Leftrightarrow (\forall x \in B)(x \leq x_0)$；

(2)x_0是B的最小元$\Leftrightarrow (\forall x \in B)(x_0 \leq x)$。

注：•**最**大（小）元**未**必存在；即使B(甚或A)是有限集合也**未**必;

• B的**最**大（小）元若存在，则一定在B**中**;

定理1. 设$(A,\leq)$是半序集，$B\subseteq A$。若B有最大(小)元，则必是唯一的。

[证].（采用逻辑法）只证最大元的唯一性

x_{01}是B的最大元 $\wedge$ x_{02}是B的最大元

$\Rightarrow(\forall x\in B)(x\leq x_{01})\wedge(\forall x\in B)(x\leq x_{02})$,

$\Rightarrow x_{02}\leq x_{01}\wedge x_{01}\leq x_{02}$

(因x_{01}, $x_{02}\in B$都是B的普通一元；根据普遍性特殊化：

$\forall xA(x)\Rightarrow A(y)$；以及合成律：$(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow s)\Rightarrow p\wedge r\rightarrow q\wedge s$)

$\Rightarrow x_{01}=x_{02}$ ($\leq$有反对称性)

所以，B的最大元是唯一的。

定义5.极大元　极小元（maximum element,minimal element）

设(A,≤)是半序集，$B\subseteq A$， $x_0\in B$。则 称

(1)x_0是B的一个极大元

$$\Leftrightarrow\neg(\exists x\in B)(x_0\leq x\wedge x\neq x_0)\Leftrightarrow\neg(\exists x\in B)(x_0<x);$$

(2)x_0是B的一个极小元

$$\Leftrightarrow\neg(\exists x\in B)(x\leq x_0\wedge x\neq x_0)\Leftrightarrow\neg(\exists x\in B)(x<x_0)。$$

注：•**极**大（小）元不一定存在；**但**在B(或A)是有限集合时一定存在;

•**极**大（小）元即使存在，一般也是不唯一的;

• B的**极**大（小）元若存在，则一定在B**中**。

定义6.上界 下界（upper bound,lower bound）

设$(A,\leq)$是半序集，$B\subseteq A$， $z_0\in A$ 。则 称

(1)z_0是B的一个上界$\Leftrightarrow(\forall x\in B)(x\leq z_0)$ ；

(2)z_0是B的一个下界$\Leftrightarrow(\forall x\in B)(z_0\leq x)$ ；

(3)若B有一个上界，则称B上方有界；

若B有一个下界，则称B下方有界；

若B上、下方都有界，则称B有界。

注：•上**界**、下**界**、**界**一般不一定存在；

• B(或A)有限不一定有上**界**、下**界**、**界**；有上**界**、下**界**、**界**B(或A)也不一定有限；

•上**界**、下**界**、**界**即使存在，一般也是不唯一的；

• B的上**界**、下**界**、**界**若存在，可以在B中，也可以不在B中。

例13. (R, ≤) 是全序集。

取B=(0,1)={x : x∈R∧0<x<1}⊆R，B 的上下界？

定义7.上确界、下确界（least upper bound,greatest lower bound）

设$(A,\leq)$是半序集，$B\subseteq A$， $z_0\in A$。则 称

(1)z_0是B的上确界

$\Leftrightarrow(\forall x\in B)(x\leq z_0)\wedge(\forall z\in A)((\forall x\in B)(x\leq z)\Rightarrow z_0\leq z)$；

(2)z_0是B的下确界

$\Leftrightarrow(\forall x\in B)(z_0\leq x)\wedge(\forall z\in A)((\forall x\in B)(z\leq x)\Rightarrow z\leq z_0)$；

(3)上确界即是最小上界，记为LUB(B)；

下确界即是最大下界，记为GLB(B)。

注：•上(下)确**界**一般不一定存在；即使B(或A)是有限集合也**未**必；

• B的上(下)确**界**若存在，可以在B中，也可以不在B中；

例14. **令**：A={ $-\frac{1}{n}$ ：n∈N∧n≥1}

B={ $\frac{1}{n}$ ：n∈N∧n≥1}

X=A∪B

定理2. 设(A,≤)是半序集,B⊆A。若B有上(下)确界，则必是唯一的。

注：•**最**大(小)元一定是**极**大(小)元；**极**大(小)元不一定是**最**大(小)元；**极**大(小)元存在不一定有**最**大(小)元；

•**最**大(小)元一定是上(下)确**界**；(下)确**界**不一定是**最**大(小)元；上(下)确**界**存在不一定有**最**大(小)元；

•上(下)确**界**一定是上(下)**界**；

上(下)**界**不一定是上(下)确**界**；

上(下)**界**存在不一定有上(下)确**界**；

•讨论B的上(下)确**界**的**前**提是B的上(下)**界**存在；

例15. 设A={2,3,4,6,7,8,12,36,60},

R={(a,b) : a∈A∧b∈A∧a | b}，其中:

B_1={8,12}, B_2={2,3}, B_3={7,8}, B_4={2,4,12},

各个子集的特殊元素是什么?

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上确界	下确界
B_1	/	/				
B_2	/	/				
…						

•半序集的全序化(非线性序的线性化)

设(A, ≤)是一半序集，其中$A=\{a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n\}$。下面的拓扑排序(分类)(A topological sort)算法是将半序集(A,≤)整对(或者说转化)为一个全序集(A,≦)，并且满足保序性：

$(\forall a\in A)(\forall b\in A)(a\leq b\Rightarrow a\leqq b)$（也称为遗传性)。

注：•拓扑学主要是研究变化中的不变量；

•而这里，全序化是变化；遗传性是不变量。

拓扑排序(分类)算法：

No.1 $k \leftarrow 1$； (设置计数器)

No.2 在A中任取半序集$(A, \leq)$的一个极小元 a_{ik}；

No.3 若 $k=n$ ，则算法停止；欲得之全序为：

$$a_{i1} \leqq a_{i2} \leqq a_{i3} \leqq \ldots \leqq a_{ik} \leqq \ldots \leqq a_{in};$$

No.4 (否则$k \neq n$) $k \leftarrow k+1$,$A \leftarrow A \backslash \{a_{ik}\}$； go to No.2 。

注： •**拓扑**排序算法所得之全序不是唯一的（因为**极**小元不唯一）；

•例如，在例14中的**半**序集就可**被转**化为如下的全序：

7，3，2，6，4，12，8，60，36 。

问题： •有限**半**序集中一定有**极**小元吗？定义5下的注**已经回答**;

•**半**序集的子集和原序还构成**半**序集吗？**回答参**见**习**题35。

定义8.良序集(well ordered set)

设(A, ≤)是半序集。则 称

(A, ≤)是良序集⇔A的每个非空子集都有最小元

$\Leftrightarrow(\forall B\subseteq A)(\exists x_0\in B)(\forall x\in B)(x_0\leq x)$

。这时 称半序(关系)≤是良序(关系)。

例16. (N, ≤)， (I , ≤) 是良序关系吗？

定理3. 设(A,≤)是良序集。那么

(1) (A, ≤)是全序集；(即，良序集一定是全序集)

(2)对于任何元素$a\in A$，若a不是A的最大元，则a的直接后继a^+一定存在；即

$$(\forall a\in A)(\neg(\forall x\in A)(x\leq a)\Rightarrow (\exists b\in A)(b= a^+))$$ 。

[证]. (采用逻辑法，构造法)

(1) $(\forall B\subseteq A)(\exists x_0\in B)(\forall x\in B)(x_0\leq x)$ (因≤是良序)

$\Rightarrow(\forall\{a,b\}\subseteq A)(\exists x_0\in\{a,b\})(\forall x\in\{a,b\})(x_0\leq x)$

(普遍性特殊化)

$\Rightarrow(\forall\{a,b\}\subseteq A)(\exists x_0\in\{a,b\})(x_0\leq a\wedge x_0\leq b)$

$\Rightarrow(\forall a\in A)(\forall b\in A)((a\leq a\wedge a\leq b)\vee(b\leq a\wedge b\leq b))$

$\Rightarrow(\forall a\in A)(\forall b\in A)(a\leq b\vee b\leq a)$ 合取分析式：$p\wedge q\Rightarrow p$)

所以≤是全序关系；

(2) $(\forall B\subseteq A)(\exists x_0\in B)(\forall x\in B)(x_0\leq x)$　(良序,存在最小元x_0)

$\Rightarrow (\forall B\subseteq A)(\exists x_0\in A)(x_0\in B\wedge(\forall x\in A)(x\in B\Rightarrow x_0\leq x))$

(放大缩小法。注意：　∃量词的特征谓词$x_0\in B$作为合取项；

∀量词的特征谓词$x\in B$作为蕴含条件)

$\Rightarrow (\forall B\subseteq A)(\exists b\in A)(b\in B\wedge(\forall t\in A)(t\in B\Rightarrow b\leq t))$

(约束变项换名：　$\exists xA(x)\Leftrightarrow\exists yA(y)$ (x_0换名为b)；

最小元为b ，　$\forall xA(x)\Leftrightarrow\forall yA(y)$ (x换名为t))

$\Rightarrow(\forall B_1=\{x : x\neq a \wedge a\leq x\}\subseteq A)\ (\exists b\in A)(b\in B_1\wedge(\forall t\in A)(t\in B_1\Rightarrow b\leq t)\ )$

(B普遍性特殊化为B_1，最小元为b)

(a不是最大元 (已知条件)

$\Leftrightarrow \neg(\forall x\in A)(x\leq a)$

$\Leftrightarrow(\exists x\in A)\neg(x\leq a)$ (量词对偶律：$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$)

$\Leftrightarrow(\exists x\in A)(a\neq x\wedge a\leq x)$ (因≤是全序)

$\Leftrightarrow B_1\neq\varnothing$)

$\Rightarrow(\forall a\in A)(\exists b\in A)(b\neq a\wedge a\leq b\wedge(\forall t\in A)(t\neq a \wedge a\leq t\Rightarrow b\leq t)\ )$

$(b\in B_1\Leftrightarrow b\neq a\wedge a\leq b\ ,\ t\in B_1\Leftrightarrow t\neq a\wedge a\leq t\ )$

$\Rightarrow (\forall a \in A)(\exists b \in A)(b \neq a \wedge a \leq b \wedge$

$(\forall t \in A)(t \neq a \wedge \underline{a \leq t \wedge t \leq b} \Rightarrow b \leq t \wedge t \leq b))$

(附加律：$p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q \wedge r$)

$\Rightarrow (\forall a \in A)(\exists b \in A)(b \neq a \wedge a \leq b \wedge (\forall t \in A)(t \neq a \wedge \underline{a \leq t \wedge t \leq b} \Rightarrow t = b))$

($\leq$是良序，故$\leq$是反对称的)

$\Rightarrow (\forall a \in A)(\exists b \in A)(b \neq a \wedge a \leq b \wedge (\forall t \in A)(\underline{a \leq t \wedge t \leq b} \Rightarrow t = a \vee t = b))$

(相容(析取)排斥法：$\neg r \wedge p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow r \vee q$)

$\Rightarrow (\forall a \in A)(\exists b \in A)(b = a^{+})$