2019版

南卷汇

大一下高数期中试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

2017 年高数（下）期中

一．单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 存在于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是　　（　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充分必要条件　　D. 即非充分又非必要条件

2. 设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分别为 $f_x(1,-2)=1$ 和 $f_y(1,-2)=-1$，则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是　　（　　）

A. $\vec{i}$　　B. $\vec{j}$　　C. $\vec{i}-\vec{j}$　　D. $\vec{i}+\vec{j}$

3. 设函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处　　（　　）

A. 连续但偏导数不存在　　B. 偏导数存在但不可微

C 可微　　D. 偏导数存在且连续

4. 设 $f(x,y)$ 连续，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\vartheta\int_0^1(\rho\cos(\vartheta),\rho\sin(\vartheta)d\rho)$ 等于　　（　　）

A. $I=\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　B. $I=\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

C. $I=\int_0^{\sqrt{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　D. $I=\int_0^{\sqrt{2}}dy\int_x^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

5. 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$， $f(x)$ 为正值连续函数，a，b 为常数，则 $\iint\limits_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$ 等于　　（　　）

A. $ab\pi$　　B. $\frac{ab\pi}{2}$　　C. $(a+b)\pi$　　D. $\frac{a+b}{2}\pi$

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若函数 z= $f(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的隐函数，则 $dz|_{(1,0,-1)}$ =______

2. 设 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则 $grad(u)|_{(1,2,-2)}=$________

3. 若 $f\in C[0,1],\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=$________

4. $\lim\limits_{c\to 0}\iint\limits_{c\le x^2+y^2\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$ =______

5. 若函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x^2-y^2,y^2-z^2)=0$ 确定的隐函数，且 $F(u,v)$ 可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$______

三．计算下列各题（每小题 8 分，共 56 分）

~~1.~~ 求曲线 $x=\cos(t), y=\sin(t), z=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

~~2.~~ 求曲面 $z-e^{z}+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程和法线方程

~~3~~. 设 $z=x^{2}f\left(x,\frac{y^{2}}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}$.

~~4~~. 计算二次积分 $I=\int_{1}^{2}dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_{2}^{4}dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$.

~~5.~~ 计算二重积分 $\iint_D xdxdy$. 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le ax\}\quad(a>0)$

~~6.~~ 在球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{2}$ 上找　一点 (x_0,y_0,z_0)，使得函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

在该点处沿点 $A(0,1,1)$ 到点 $B(2,0,1)$ 的方向导数具有最大值 .

~~7.~~ 设有函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，讨论 $f_x(x,y), f_y(x,y)$

在点 $(0,0)$ 处的连续性和 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性

四．证明题（共 14 分）．

1.（9 分）试证明曲面 $z = x^2 + y^2 + a$ （$a > 0$）上任意一点处的切平面与曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围成的空间区域的体积是一个常数.

2.（5 分）设 $f(x,y)$ 是定义在整个平面上的连续函数，$f(0,0) = 0$，且当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时 $f(x,y) > 0$，对任意的点 (x,y) 和任意实数 t 都有 $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$. 证明：存在常数 a>0，b>0，使得对任意的点 (x,y) 都有 $a(x^2+y^2) \le f(x,y) \le b(x^2+y^2)$.

2017 年高数（下）期中标准答案

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D　　2. C　　3. D　　4. C　　5. D

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $dx-\sqrt{2}dy$　　2. $\frac{2}{9}(1,2,-2)$　　3. $\frac{A^2}{2}$　　4. $-\pi$　　5. $\frac{xF_u}{\partial F_v}$

三．计算下列各题（每小题 8 分，共 56 分）

1. $\vec{c}\,|_{t=\frac{\pi}{2}}=(-1,0,1)$　（4’）　　切线：$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$　（6’）

法线：$-x+z+1=0$　（8’）

2. $\vec{n}\,|_{(1,2,0)}=(2,1,0)$　（4’）　　切平面：$2x+y=4$　（6’）

法线：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{0}$　（8’）

3. $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2f_1-y^2f_2$　（4’）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f+4xf_1-\frac{2y^2}{x}f_2+x^2f_{11}-2y^2f_{12}+\frac{y^2}{x^2}f_{22}$$　（8’）

4. $I=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi x}{2y}\right)\Big|_y^{y^2}dy=\frac{4}{\pi^2}(\pi+2)$

5. $I=2\iint\limits_D xdxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\rho^2\cos\varphi d\rho=\frac{\pi}{8}a^3$

6. $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$　（1’）　　$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=2x\frac{1}{\sqrt{2}}-2y\frac{1}{\sqrt{2}}=2x$　（3’）

作函数 $L(x,y,z,\lambda)=x-y+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}\right)$　（4’）

由 $\frac{\partial L}{\partial x}=0,\frac{\partial L}{\partial y}=0,\frac{\partial L}{\partial z}=0$ 及 $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$ 得 $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$ 及 $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)$（6’）

$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_1}=\sqrt{2}$ ，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{M_2}=-\sqrt{2}$　（7’）

故在 M_1 处方向导数取得最大值　（8’）

7. $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}=0$

同理 $f_y(0,0)=0$ （2’）

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$ （4’）

由于 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}f_x(x,y)=-\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 不存在，

$\therefore$ $f_x(x,y)$ 不连续（6’）

同理可得 $f_y(x,y)$ 在点（0, 0）处也不连续

$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta f}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2}=0$ ， $\therefore$ 可微（8’）

四．证明题（共 14 分）

1. $z=x^2+y^2+a$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程 $z=2x_0x+2y_0y-x_0^{\ 2}-y_0^{\ 2}+a$

切平面与 $z=x^2+y^2$ 的交线的圆在 x_0y 面上的投影为：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le a$$

所求体积 $V=\iint\limits_D\left[2x_0x+2y_0y-x_0^{\ 2}-y_0^{\ 2}+a-\left(x^2+y^2\right)\right]d\delta$ （6’）

$=\iint\limits_D\left[a-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2\right]d\delta=\dfrac{\pi}{2}a^2$ （9’）

2. 作 $D_1:x^2+y^2=1$ 在 D_1 上 $f(x_1,y_1)=\min\{f(x,y)|(x,y)\in D_1\}=a$ （2’）

$f(x_2,y_2)=\max\{f(x,y)|(x,y)\in D_1\}=b$

$0<a\le b,a\le f(x,y)\le b,(x,y)\in D_1$

$$f(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\sqrt{x^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\left(x^2+y^2\right)f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$\therefore$ $a\left(x^2+y^2\right)\le f(x,y)\le b\left(x^2+y^2\right)$ （5’）

2016 年高数下期中试卷

一、单选（每题 4 分，共 16 分）

1、若 $f(x,x^2)=x^3, f_x(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y(x,x^2)=$ （ ）

A、 $x+x^3$　　B、 $2x^2+2x^4$

C、 x^2+x^5　　D、 $2x+2x^2$

2、 $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ ，交换积分次序得（其中 f 连续） （ ）

A、 $I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$　　B、 $I=\int_{e^x}^e dy\int_0^1 f(x,y)dy$

C、 $I=\int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dy$　　D、 $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

3、设函数 z=f(x, y)在点（0，0）附近有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=1$。则（ ）

A、 $dy|_{(0,0)}=3dx+dy$

B、曲面 z=f(x, y)在点（0，0，f（0，0））的法向量为（3，1，0）

C、曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点（0，0，f（0，0））的法向量为（1，0，3）

D、曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点（0，0，f（0，0））的法向量为（3，0，1）

4、函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0 \\ 2, x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在（0，0）处 （ ）

A、无定义

B、连续

C、有极限但不连续

D、无极限

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

~~1~~、曲面 $\sin xy+\sin yz+\sin xz=1$ 在点 $(1,\frac{\pi}{2},0)$ 处 切平面方程为_______

~~2~~、设函数在 M（1，2，-2）处的梯度 $gradu|_M$ 为______

~~3~~、函数 $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$ 在点（1，-1）沿方向 $\vec{L}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ 的方向导数是___

~~4、~~设 $f(x)\in C[0,1]$ ，且 $\int_0^1 f(x)dx=A$ ，则 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy=$_____

三、计算题（每题 8 分）

~~1、~~设 $z=f(e^{x+y},\frac{x}{y})$ ，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

~~2、~~计算 $I=\iint_D(1-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 以及 $x=0$ 所围的第一象限的区域

~~3、~~在曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 上求一个切平面，使该切平面在三个坐标轴上的截距

之积最大，并写出该平面的方程

~~4~~、设函数 $z=\arcsin\sqrt{x^2-y}$ ，求全微分 dz

~~5~~、求球面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 与平面 $2x-3y+5z-4=0$ 的交线在点（1，1，1）处的切线与法平面方程

~~6~~、设 $z=(x,y)$ 由 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

四、综合题（前两小题每个 7 分，第三小题 6 分，共 20 分）

~~1、~~对任意的 x 和 y，有 $(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=4$，且变量代换 $\begin{cases} x=uv \\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2) \end{cases}$ ，将函数 f（x，y）变换成 g（u，v），试求满足关系式 $a(\frac{\partial g}{\partial u})^2\text{-}b(\frac{\partial g}{\partial v})^2=u^2+v^2$ 的常数 a 和 b

~~2、~~试证明：三曲面 $F_i(x,y,z)=0(i=1,2,3)$ 切同一直线 L 与点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的充分必要条件是 $\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}|_{P_0}=0$

~~3、设~~函数 $f(t)\in C[0,+\infty)$ 且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ 求 $f(t)$

2016 高数下期中答案

一、单选

1. A　2. B　3. C　4. B

二、填空

1. $z=0$　2. $(\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9})$

3. $-\frac{11}{5}$　4. $\frac{1}{2}A^2$

三、

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1e^{x+y}+f_2\cdot\frac{1}{y}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=f_1e^{x+y}+e^{x+y}(f_{11}e^{x+y}-f_{12}\frac{x}{y})-\frac{1}{y^2}f_2+\frac{1}{y}(f_{21}e^{x+y}-f_{22}\frac{x}{y^2})$$

$$=f_1e^{x+y}-f_2\frac{1}{y^2}+e^{2(x+y)}f_{11}-\frac{x}{y^3}f_{22}+\frac{e^{x+y}}{y}(1-\frac{x}{y})f_{12}$$

2. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{a\cos\varphi}^{a}(1-\rho)\rho d\rho$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a^3)-(\frac{1}{2}a^2\cos^2\varphi-\frac{1}{3}a^3\cos^3\varphi)d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{8}a^2-\frac{\pi}{6}a^3+\frac{2}{9}a^3$$

3. 设切点 (x_0,y_0,z_0)

切平面：$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$

化简得 $\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=1$

所以 截距为 $\sqrt{x_0},\sqrt{y_0},\sqrt{z_0}$，截距之积 $\sqrt{x_0y_0z_0}$

设 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial z}=0$$

得 $x=y=z=\dfrac{1}{9}$

所以切平面：$x+y+z=\dfrac{1}{3}$

4. $dz=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+y}}\cdot\dfrac{2xdx-dy}{2\sqrt{x^2-y}}$

5. 两方程微分得 $\begin{cases}-dx+2dy+2dz=0\\ 2dx-3dy+5dz=0\end{cases}\Rightarrow(dx,dy,dz)=(16,9,-1)$

所以 切线 $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面方程：$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

6.

$$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$$

设 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-F_x}{F_z}=\dfrac{\frac{1}{z}}{\frac{x}{z^2}+\frac{1}{z}}=\dfrac{z}{x+z}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x}=\frac{1}{(x+z)^2}\left[\frac{\partial z}{\partial x}(x+z)-z(1+\frac{\partial z}{\partial x})\right]=\frac{-z^2}{(z+x)^3}$$

四、

1.

$$\begin{cases}dx=vdu+udv\\ dy=udu-vdv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-vdx-udy}{v^2+u^2}\\ dv=\dfrac{vdy-udx}{u^2+v^2}\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$4=(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2=\frac{1}{u^2+v^2}\left[(\frac{\partial g}{\partial u})^2+(\frac{\partial g}{\partial v})^2\right]$$

$$\therefore a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{4}$$

2. 设 L 方向向量 (a,b,c)

$\because$ 曲面 $F_2=0(i=1,2,3)$ 在 P_0 切于同一直线 $\Leftrightarrow$

$$\therefore \text{在} P_0, \begin{cases} F_{1x}a+F_{1y}b+F_{1z}c=0 \\ F_{2x}a+F_{2y}b+F_{2z}c=0 \\ F_{3x}a+F_{3y}b+F_{3z}c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}=0$$

（平面法向量为（F_{ix},F_{iy},F_{iz}））

3. $f(t)=e^{4\pi t^2}+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2t}f(\frac{1}{2}\rho)\rho d\rho$

$$=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}f(\frac{1}{2}\rho)\rho d\rho$$

$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t),\ f(0)=1$

对于一阶齐次微分方程 $f'(t)=8\pi tf(t)$

易求得 $f(t)=C_1e^{4\pi t^2}$

设其次方程通解 $f(t)=C(t)e^{4\pi t^2}$

代入得 $C'(t)=8\pi t$

$\therefore C(t)=4et^2+C$

$f(t)=(4\pi t^2+C)e^{4\pi t^2},\ f(0)=1\Rightarrow C=1$

$\therefore f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$

西安交通大学考试题(A)卷

成绩	

课　程　高等数学(I,II)下

学　院 ____________

专业班号 ____________　考试日期　2015 年 4 月 26 日

姓　名 ____________　学　号 ____________　期中 √

一、　单项选择（每小题 3 分，共 15 分）

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处（　　）

A　极限存在；　　B 连续；　　C　可微；　　D 关于 x,y 的偏导数存在.

2. 函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2-2xz+2y-3$ 在点(1,-1,2)处方向导数的最大值为（　）

A　$4\sqrt{2}$ ；　　B $3\sqrt{2}$ ；　　C $2\sqrt{2}$；　　D $\sqrt{2}$

3. 设曲面上 $z^2-xy=8(z>0)$ 某点的切平面平行于 $x-y+2z-1=0$，则该点的坐标为（　　）

A　(-2,2,2)；　　B (1,-4,2)；　　C (2,-2,2)；　　D (4,-1,,2)

4. 设 $f(u)$ 为连续函数，$F(t)=\iint\limits_{(D)} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$ 其中 $(D):0\le y\le\sqrt{t^2-x^2}$，则 $F'(t)$ 为（　）

A　$\pi t^2 f(t)$ ；　B $2\pi t^2 f(t)$ ；　C　$\pi t f(t)$；　　D　$2\pi t f(t)$

5. 设 $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1+a}{2}}$，其中 $a>0$ 为常数，则 $f(x,y)$ 在点(0,0)处（　　）

A　连续但不可偏导；　　B 可偏导但不连续；

C　可微，且 $df\big|_{(0,0)}=0$；　　D　$f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在(0,0)处连续

二、　填空（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ____________.

2. 设 $u=x^{yz}$，则 $du=$ ____________.

3. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=2\end{cases}$ 在点(1,2,-1)处切线的方向向量 $\vec{\tau}=$ ____________.

~~4.~~ 设函数 $u=xy^2+z^2-xyz$，则在(1,-1,1)处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{4}$ 的方向 $\vec{l}$ 的方向导数为________

~~5.~~ 交换二次积分次序：$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1-x^2}f(x,y)dy=$________

三、 计算（每小题 9 分，共 45 分）

~~1.~~ 设函数 $z=f\left(x^2-y^2,e^{xy}\right)+\frac{y}{g\left(x^2+y^2\right)}$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 二阶可导，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

~~2.~~ 设函数 $F(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，$z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ 确定的隐函数，试求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

~~3.~~ 求积分 $\iint\limits_{(D)}\ln\left(1+x^2+y^2\right)d\sigma$，其中 (D) 是 $x^2+y^2\le 4$ 位于第一象限的部分.

~~4.~~ 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，函数 $u(x,y,z)=f(r)$，其中 f 具有二阶连续导数，

（1） 把 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 表示成 r 的函数；

（2） 若 u 满足 $\Delta u=0$，求 $f(r)$

~~5.~~ 设向量值函数 $\vec{f}(x,y,z)=\left(x\sin y,ye^z,\cos(xz)\right)^T$，求 $\vec{f}$ 的 Jacobi 矩阵.

~~四、~~（15 分）求函数 $f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$ 在闭区域 $x^2+2y^2\le 3$ 的最大值与最小值.

~~五、~~（10 分）计算三重积分 $\iiint\limits_{(D)}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|d\sigma$，其中 $(D):x^2+y^2\le 1$

2014 年高数(下)期中

整理人：彭钰茗

一．计算下列各题(每小题 7 分)

~~1.~~ 设$f(x,y) = \arctan\sqrt{x^y}$，求$f_x(x,1)$；

~~2.~~ 设$z = e^x \ln|\sin(x-2y)|$，计算$dz|_{(\frac{\pi}{4},0)}$；

~~3.~~ 设$u = 2xy - z^2$，求u在点$(2,-1,1)$处的方向导数的最大值；

~~4.~~ 求椭球面$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$在点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$处的切平面方程和法线方程；

~~5.~~ 求空间曲线$x = t, y = 3t^2, z = t^3$在$t = 1$对应的点处切线和法平面方程；

~~6.~~ 设函数$F(u,v)$具有一阶连续偏导数，$z = z(x,y)$是由方程$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right) = 0$所确定的隐函数，试求表达式$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$；

~~7.~~ 求二元函数$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$的极值；

~~8.~~ 交换积分次序$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1-x^2} f(x,y)\, dy$，其中$f(x,y)$连续；

已做 9. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中$D$是由圆周 $x = \sqrt{a^2-y^2}$(a > 0)和$x = 0$ 所围成的区域;

~~10.~~ 求向量函数$\vec{f}(x,y,z) = (x\cos y, ye^x \sin xz)^T$的导数。

二．（8 分）设函数$z=f\left(x^2y,\frac{y^2}{x}\right)+xg(x^2+y^2)$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$二阶可导，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

三．（8 分）讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad , & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)处偏导数存在，但在不连续(0,0)处偏导数不连续，而$f(x,y)$却在(0,0)处可微。

四．（8 分）在平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$与三个坐标平面所围成的四面体内作一个以该平面为顶面，在xoy坐标面上的投影为长方体的六面体，求最大六面体的体积（其中$a,b,c>0$）。

五．（6 分）设$F(x,y)=f(x)g(y)=s\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，其中$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{s}$都是可导函数，证明$F(x,y)=\bar{C}e^{C(x^2+y^2)}$，其中$\bar{\boldsymbol{C}},\boldsymbol{C}$为任意常数。

2014 年高等数学(下)期中

一、

1. $f_x(x,1) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$;

2. $dz|_{(\frac{\pi}{4},0)} = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)dx - 2e^{\frac{\pi}{4}}dy$;

3. $\nabla u|_{(2,-1,1)} = (-2,4,-2), \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{max} = \|\nabla u\|\|\vec{e_l}\| = \sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2} = 2\sqrt{6}$;

4. 切平面方程$x+2y+z-2=0$；法线方程$\frac{x-\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$;

5. 切线方程$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-1}{3}$；法平面方程$x+6y+3z-22=0$；

6. 全微分法：

$$\begin{cases} F_1\left[\frac{1}{z}dx+\left(-\frac{x}{z^2}\right)dz\right]+F_2\left[\frac{1}{z}dy+\left(-\frac{y}{z^2}\right)dz\right]=0 \\ dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial x}dy \end{cases}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1}{\frac{x}{z}F_1+\frac{y}{z}F_2}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2}{\frac{x}{z}F_1+\frac{y}{z}F_2}, \quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

7. $f_x=f_y=0$，得驻点$P_1(0,0),P_2(-1,-1)$，H$f(P_1)$负定，$f(x,y)$在$(-1,-1)$处取极大值1，$x=y=0$时取$y=x,y=-x$易证$f(x,y)$无极值。综上$f(x,y)$在$(-1,-1)$处取极大值1，；

8. $\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1-x^2}f(x,y)dy=\int_{-1}^{0}dy\int_{-1}^{1}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\,dy$；

9. $\pi\sin a-\pi a\cos a$；

10. $\begin{pmatrix}\cos y & -x\sin y & 0\\ ye^x(\sin xz+z\cos xz) & e^x\sin xz & xye^x\cos xz\end{pmatrix}$；

二、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1\left(x^2y,\frac{y^2}{x}\right)xy-f_2\left(x^2y,\frac{y^2}{x}\right)\frac{y^2}{x^2}+2g'(x^2+y^2)x^2+g(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1+\frac{2y}{x}f_2+2xyg'(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1+x^2\left[f_{11}\cdot 2xy+f_{12}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right]+\left(-\frac{2y}{x^2}\right)f_2$$

$$+\frac{2y}{x}\left[f_{21}\cdot 2xy+f_{22}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right]+2yg'(x^2+y^2)+4x^2yg''(x^2+y^2)$$

$$=2xf_1+2x^3yf_{11}+3y^2f_{12}-\frac{2y}{x^2}f_2-\frac{2y^3}{x^3}f_{22}+2yg'(x^2+y^2)$$
$$+4x^2yg''(x^2+y^2)$$

三、

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x^2})=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{y\to 0}(y\sin\frac{1}{y^2})=0$$

∴在(0,0)处偏导数存在

$$f_x=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

取$y=kx$，$\lim_{x\to 0}f_x=\lim_{x\to 0}[2x\sin\frac{1}{(1+k^2)x^2}-\frac{2}{(1+k^2)x}\cos\frac{1}{(1+k^2)x^2}]=0-\infty$ 可知极限不存在

∴ f_x不连续，同理f_y不连续

∴在(0, 0)处，偏导数不连续；

$$\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\frac{|\Delta f-f_x\,dx-f_y\,dy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|$$

$$\le\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

∴ $f(x,y)$在(0, 0)处可微

四、

$V=\iint_D c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})dxdy=c\int_0^x dx\int_0^y\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy=c\int_0^x[\left(1-\frac{x}{a}\right)y-\frac{1}{2b}y^2]dx=c\left(xy-\frac{x^2y}{2a}-\frac{xy^2}{2b}\right)$

$$L=xy-\frac{x^2y}{2a}-\frac{xy^2}{2b}-\lambda[\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1]$$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2} \qquad V_{max} = \frac{1}{8}abc$$

五、

$$F_x(x,y) = f'(x)g(y) = s'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_y(x,y) = g'(y)f(x) = s'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

可知：$yf'(x)g(y) = xf(x)g'(y)$

令 $\frac{f'(x)}{xf(x)} = \frac{g'(y)}{yg(y)} = C, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = Cx$

$f(x) = C_1 e^{Cx^2}, \quad g(y) = C_2 e^{Cy^2}$

$\therefore F(x,y) = f(x)g(y) = \bar{C}e^{C(x^2+y^2)}$

2013 年高数（下）期中

一、计算下列各题(每小题 7 分，共 70 分)

~~1.~~ 设 $u = xy - \frac{x}{y} + e^{xyz}$，求 $du\big|_{(1,2,0)}$。

~~2.~~ 设曲线为 $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = t \end{cases}$，求它在对应于 $t=1$ 的点处的切线方程和法平面方程。

~~3.~~ 设有球面 $x^2+y^2+z^2=14$，求它在点 $(3,2,1)$ 处的切平面方程和法线方程。

~~4.~~ 设方程 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$ 可确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在 $P(1,-2,1)$ 处的值。

~~5.~~ 设积分区域 Ω 由抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=h>0$ 所围成，求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$。

~~6.~~ 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(1-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=ax$ 及 $x=0$ 所围在第一象限的区域。

~~7.~~ 计算二重积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$。

~~8.~~ 在圆锥面 $Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h(R>0,h>0)$ 所围的锥体内作底面平行于 xoy 面的长方体，求体积最大的长方体及最大体积。

~~9.~~ 在一个侧面为旋转抛物面 $4z=x^2+y^2$ 的容器内装有 $8\pi(cm^3)$ 的水，若给该容器再注入 $128\pi(cm^3)$ 的水，问水面比原来升高多少？

~~10.~~ 求向量值函数 f 的导数，其中 $f=\left[x\cos y, ye^x, \sin(xz)\right]^T$。

~~二、(8 分)~~ 设 $z=f(e^{x+y},\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$。

~~三~~、(8 分) 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续，是否可微？

~~四、~~(8 分) 设Ω是由曲面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$及$z=\sqrt{x^2+y^2}-a(a>0)$所围成的均匀物体，求Ω对oz轴的转动惯量I_z。

~~五、~~(6 分) 已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，计算二重积分$I=\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)dxdy$。

2013 年高数（下）期中参考答案

一、1. 解：

$$du = d(xy) - d(\frac{x}{y}) + d(e^{xy^2})$$

$$= ydx + xdy - \frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy + y^2e^{xy^2}dy + xye^{xyz}dz$$

$$= (y - \frac{1}{y} + yze^{xyz})dx + (x + \frac{x}{y^2} + xze^{xyz})dy + xye^{xyz}dz$$

$$du|_{(1,2,0)} = \frac{3}{2}dx + \frac{5}{4}dy + 2dz$$

2. 解：

$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (3t^2, 2t, 1) = (3,2,1)$，

当 $t=1$ 时， $x=y=z=1$，

故切线方程为：$\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$，

法平面方程为：$3(x-1)+2(y-2)+z-1=0$

3. 解：

令 $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14$，

$(F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z) = (6,4,2)$，

故 $\vec{\eta} = (3,2,1)$，

切平面方程为：$3(x-3)+2(y-2)+z-1=0$，

法线方程为：$\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

4. 解：

两边对 x 求偏导得：$2x + 6z\dfrac{\partial z}{\partial x} + y - \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$，

即 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x+y}{6z-1}$，

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{6z-1-6\dfrac{\partial z}{\partial y}(2x+y)}{(6z-1)^2}$，

原方程两边对 y 求偏导得：$4y+6z\frac{\partial z}{\partial y}+x-\frac{\partial z}{\partial y}=0$，

代入 $(1,-2,1)$ 得：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{7}{5}$，

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{5-6\times\frac{7}{5}(2-2)}{25}=-\frac{1}{5}$

5. 解：

原式 $=\int_0^h z^2\iint\limits_{\sigma z} d\sigma dz=\int_0^h z^2\pi z dz=\frac{\pi}{4}z^4\Big|_0^h=\frac{\pi}{4}h^4$

6. 解：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\cos\theta}^{a}(1-\rho)\rho d\rho$$
$$=\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{3}a^2-\tfrac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+\tfrac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$
$$=\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{3}a^3-\tfrac{1}{2}a^2\times\tfrac{1}{2}\times\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{3}a^3\times\tfrac{2}{3}$$
$$=(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\pi}{8})a^2-\tfrac{1}{9}a^3$$

7. 解：

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{x^2}^{\frac{1}{2}}e^{\frac{y}{x}}dy+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\frac{1}{2}}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\bullet xe^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\bullet xe^{\frac{y}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{x}+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dx\bullet xe^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{x}$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(xe^{\frac{1}{2x}}-xe^{x}+ex-xe^{\frac{1}{2x}})dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}ex-xe^{x}dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-xe^{x}+ex)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}ex-xe^{x}dx$$
$$=-\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+\tfrac{3}{4}e$$

8. 解：

设长方体与锥面交点为 (x_0,y_0,z_0)，

则 $V=4x_0y_0(h-z_0)$，

问题转化为求 $f(x,y,z)=xy(h-z)$ 在约束 $h^2(x^2+y^2)=R^2z^2$ 下的最大值问题，

令 $L(x,y,z,\lambda)=xy(h-z)+\lambda\left[h^2(x^2+y^2)-R^2z^2\right]$，

则$\begin{cases} L_x = y(h-z)+2\lambda h^2 x = 0 \\ L_y = x(h-z)+2\lambda h^2 y = 0 \\ L_z = -xy - \lambda R^2 = 0 \\ L_\lambda = h^2(x^2+y^2) - R^2 z^2 = 0 \end{cases}$，

得唯一驻点为$(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{4}{3})$，

依题意必有最大值，

从而长方体的最大体积为$V = 4\times(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2\times(2-\frac{4}{3}) = \frac{64}{27}$

9. 解：

设水面高h时水的体积为V，

则$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int_0^h dz \iint\limits_{\sigma z} dz = \int_0^h 4\pi z dz = 2\pi h^2$，

当$V_1 = 8$时，$h_1 = \sqrt{\frac{8}{2\pi}}$，

当$V_2 = 8+128+136$时，$h_2 = \sqrt{\frac{136}{2\pi}}$，

$\Delta h = h_2 - h_1 = \sqrt{\frac{136}{2\pi} - \frac{8}{2\pi}} = 4.5135cm$

10. 解：

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y & 0 \\ ye^x & e^x & 0 \\ z\cos xz & 0 & x\cos xz \end{pmatrix}$$

二、解：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1 e^{x+y} + f_2 \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left[f_{11}e^{x+y} + f_{12}(-\frac{x}{y^2}) \right] e^{x+y} + \left[f_{21}e^{x+y} + f_{22}(-\frac{x}{y^2}) \right] \frac{1}{y} + f_2(-\frac{1}{y^2})$$

$$= f_{11}e^{2x+2y} + f_1 e^{x+y} - f_{22}\frac{x}{y^3} - \frac{f_2}{y^2} + f_{12}e^{x+y}(-\frac{x}{y^2}+1)$$

三、解：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0),$$

故连续，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2}}}{\Delta x}=0,$$

同理有 $f_y(0,0)=0$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

故可微

四、 解：

$$dI=u(\sqrt{x^2+y^2})dv$$

$$I=u\iiint_{(v)}(x^2+y^2)dv=u\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho d\rho\int_{\rho-a}^{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho^2dz$$

$$=u\bullet 2\pi\int_0^a\rho^3(\sqrt{a^2-\rho^2}-\rho+a)d\rho$$

其中 $\int_0^a\rho^3\sqrt{a^2-\rho^2}d\rho$，

令 $\rho=a\sin t$，

则原式

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\sin^3 t\bullet a\cos t\bullet a\cos tdt$$

$$=a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t(1-\sin^2 t)dt$$

$$=a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 tdt-a^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 tdt$$

$$=a^5(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3})$$

$$=\frac{2}{15}a^5$$

则

$$I=2\pi u\left[\frac{2}{15}a^5-\int_0^a\rho^4d\rho+a\int_0^a\rho^3d\rho\right]$$

$$=2\pi u\left[\frac{2}{15}a^5-\frac{1}{5}a^5+\frac{1}{4}a^5\right]$$

$$=\frac{11\pi}{30}u$$

五、解：

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 ydy\int_0^1 xf_{xy}(x,y)dx \\
&= \int_0^1 ydy\int_0^1 xdf_y(x,y) \\
&= \int_0^1 ydy\left[xf_y(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f_y(x,y)dx \right] \\
&= -\int_0^1 ydy\int_0^1 f_y(x,y)dx \\
&= -\int_0^1 dx\int_0^1 f_y(x,y)dy \\
&= -\int_0^1 dx\int_0^1 ydf(x,y) \\
&= -\int_0^1 dx\left[yf(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x,y)dy \right] \\
&= -\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy \\
&= -\iint_D f(x,y)dxdy \\
&= -a
\end{aligned}
$$