西安交通大学考试题

成绩	

课　程　系统建模与动力学分析（B 卷）

系　别 ＿＿＿＿＿＿＿＿　考试日期　2020 年 09 月 01 日

专业班号 ＿＿＿＿＿＿＿＿

姓　名 ＿＿＿＿＿＿＿＿　学　号＿＿＿＿＿　期中 ☐　期末 ☐

一、　回答下列每个小题（每小题 7 分，共 42 分）

1、简述机械系统的自由度，如何确定系统的自由度数。

2、对图 1-1 所示的齿轮传动系统中作用一扭矩 T 于轴 1 上。求系统的运动方程式。假设齿轮的惯性矩是 J_1 和 J_2，负载扭矩是 T_L。

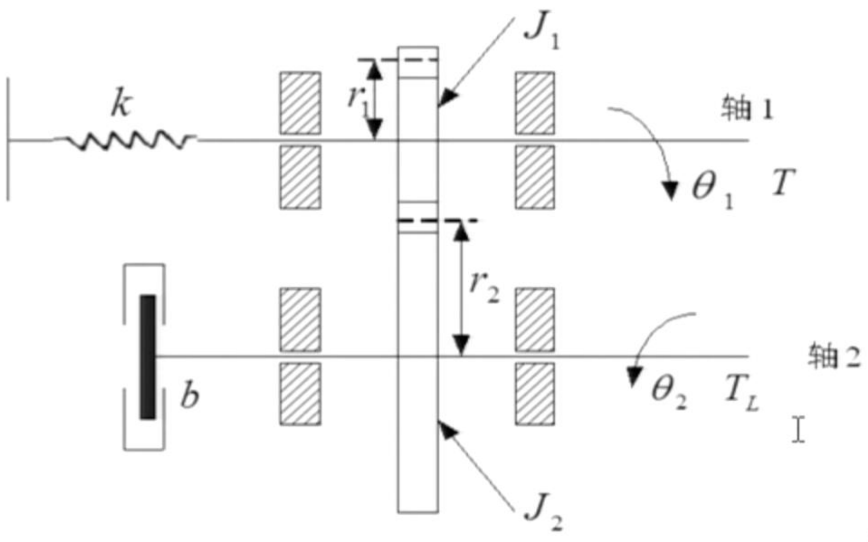


图 1-1

3、简述质点系的达朗贝尔原理。

西安交通大学考试题

成绩	

课　程　系统建模与动力学分析（B 卷）

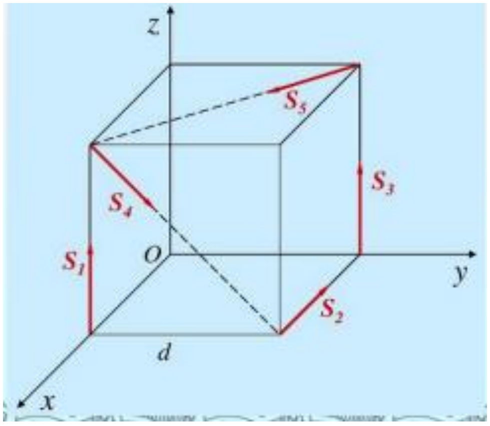
系　别 ____________________　　考试日期　2019 年 12 月 15 日

专业班号 ____________________

姓　名 ____________________　　学　号 __________　期中 ☐　期末 ☐

一、　回答下列每个小题（每小题 6 分，共 42 分）

1、如图 **1-1** 所示，边长为 d 的正方体上作用有五个力，方向如图 **1-1**，已知五个力的大小分别为：$S_1 = S_2 = S_3 = S$，$S_4 = S_5 = \sqrt{2}S$。参照图示已建立的直角坐标系 ***O-xyz***，求力系的最简形式。



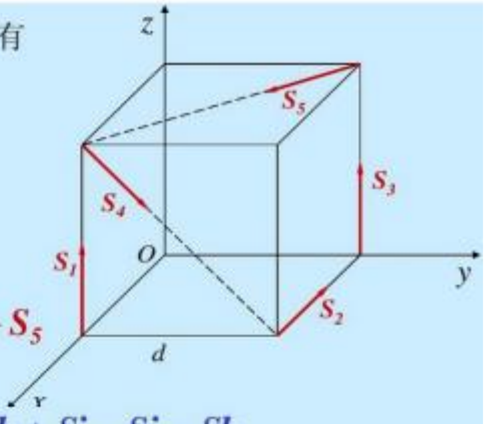
解：将各力向坐标轴上分解，有

$\boldsymbol{S}_1 = S\boldsymbol{k}$　$\boldsymbol{S}_2 = -S\boldsymbol{i}$　$\boldsymbol{S}_3 = S\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{S}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}S\boldsymbol{j} - \sqrt{2}S\boldsymbol{k}) = S(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{S}_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}S\boldsymbol{i} - \sqrt{2}S\boldsymbol{j}) = S(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$$

合力 $\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4 + \boldsymbol{S}_5$



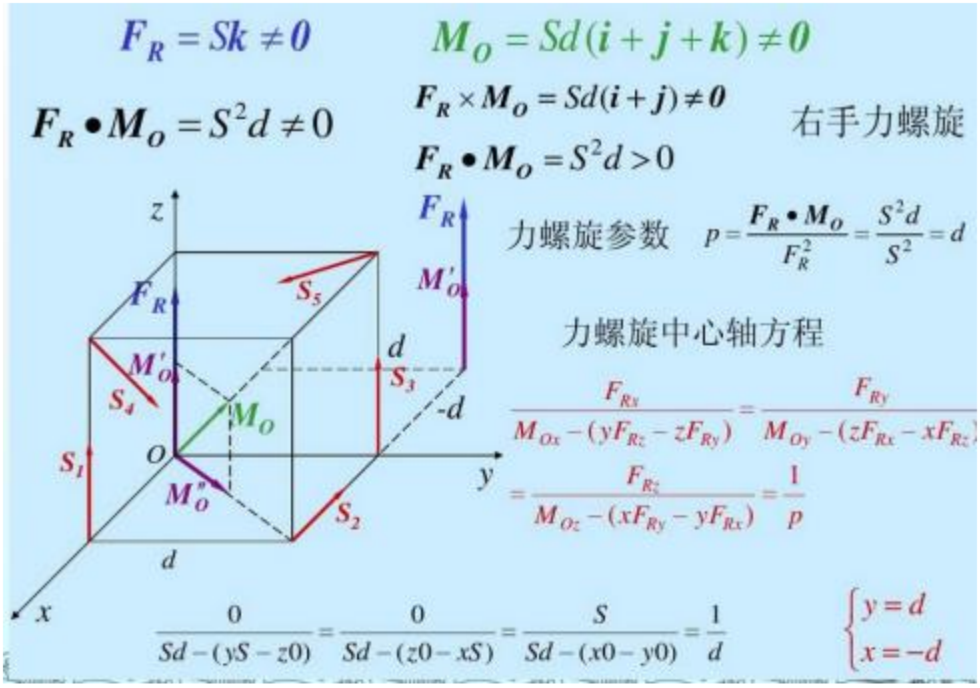
$$\boldsymbol{F}_R = S\boldsymbol{k} - S\boldsymbol{i} + S\boldsymbol{k} + S\boldsymbol{j} - S\boldsymbol{k} + S\boldsymbol{i} - S\boldsymbol{j} = S\boldsymbol{k}$$

各力对 O 点之矩　$\boldsymbol{M}_1 = -Sd\boldsymbol{j}$　$\boldsymbol{M}_2 = Sd\boldsymbol{k}$　$\boldsymbol{M}_3 = Sd\boldsymbol{i}$

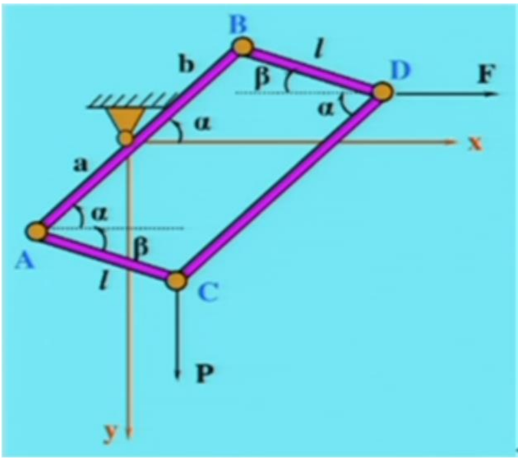
$\boldsymbol{M}_4 = -Sd\boldsymbol{i} + Sd\boldsymbol{j} + Sd\boldsymbol{k}$　$\boldsymbol{M}_5 = Sd\boldsymbol{i} + Sd\boldsymbol{j} - Sd\boldsymbol{k}$

对 O 点之主矩

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3 + \boldsymbol{M}_4 + \boldsymbol{M}_5 = Sd(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

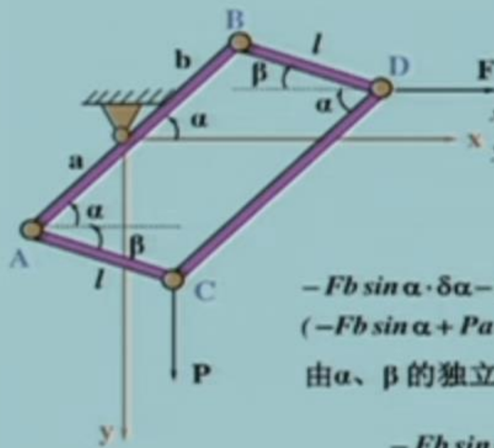


2、图 1-2 中所示的平行四杆机构，尺寸 a、b、l 及力 P、F 均为已知。求：平衡时图示所示的 α 角和 β 角。



例二．平行四杆机构，尺寸a、b、l 及力P、F均为已知．

求：平衡时 α＝？ β＝？



解：这是一个双自由度的力学系统．选广义坐标α、β．(α、β分别为与水平线的夹角)． 由本题的特点，建立直角坐标系，求出有关的虚位移．(无功的虚位移不必求出)．

$x_D = b\cos\alpha + l\cos\beta \qquad \delta x_D = -b\sin\alpha\delta\alpha - l\sin\beta\delta\beta$

$y_C = a\sin\alpha + l\sin\beta \qquad \delta y_C = a\cos\alpha\delta\alpha + l\cos\beta\delta\beta$

由 $\sum(F_{ix}\cdot\delta x_i + F_{iy}\cdot\delta y_i) = 0$

$F\delta x_D + P\delta y_C = 0$

$-Fb\sin\alpha\cdot\delta\alpha - Fl\sin\beta\cdot\delta\beta + Pa\cos\alpha\cdot\delta\alpha + Pl\cos\beta\cdot\delta\beta = 0$

$(-Fb\sin\alpha + Pa\cos\alpha)\cdot\delta\alpha + (-Fl\sin\beta + Pl\cos\beta)\cdot\delta\beta = 0$

由α、β的独立性（当 δα≠0 、δβ≠0 ）必有：

$-Fb\sin\alpha + Pa\cos\alpha = 0 \qquad tg\alpha = \frac{Pa}{Fb}$

$-Fl\sin\beta + Pl\cos\beta = 0 \qquad tg\beta\,\frac{P}{F}$

3、如下图 **1-3** 所示，在静止的水平匀质圆盘上，一人沿盘边缘由静止开始相对盘以速度 u 行走，设人质量为 m_2，盘的质量为 m_1，盘半径为 r，摩擦不计。求盘的角速度 ω。

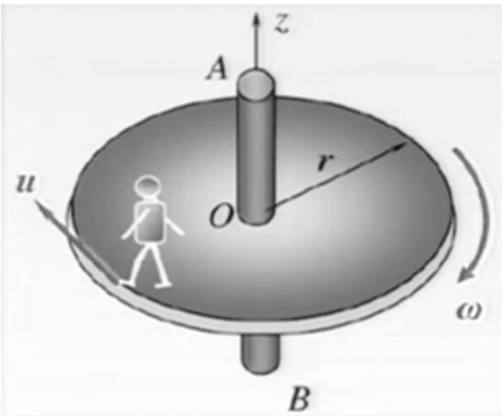


图 **1-3**

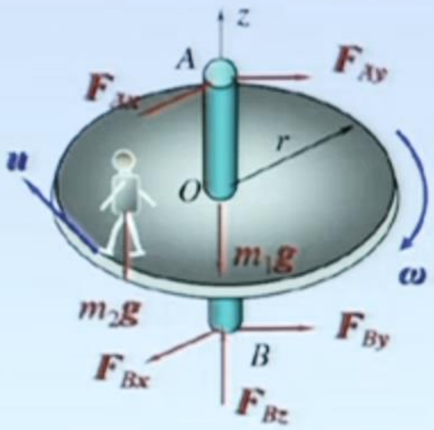
解：以人和盘为研究对象。

$$L_z = J_z\omega + m_2 v \cdot r$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r\ ,\quad v = r\omega + u$$

$$L_z = J_z\omega + m_2 r(r\omega + u)$$

$$L_z = m_2 r\,u + (\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_2 r^2)\omega$$



$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(F_i^{(e)})}$$

$m_z = 0$， 初始静止 L_{z0}=0

$$m_2 r\,u + (\frac{1}{2}m_1 r^2 + m_2 r^2)\omega = 0,\qquad \omega = -\frac{2m_2}{2m_2 + m_1}\cdot\frac{u}{r}$$

4、空气流在长为 L（单位：m）的管道中流动。假设管道的横截面是常数 A（单位：m^2）。求：空气流的气感 I。

4.（6 分）

假定管子中两横截面间的压力差是 $\triangle p$ N/m^2

根据牛顿第二定律

$$M\frac{dv}{dt}=A\Delta p \quad M=\rho AL$$

其中：M—管中两截面空气的质量；v m/s—空气速度；

L—两截面间的距离。

表示成质量流 Q，上式可写为

$$L\frac{dQ}{dt}=A\Delta p \quad Q=\rho Av$$

于是空气流的气感为

$$\text{气感}I=\frac{\Delta p}{dQ/dt}=\frac{L}{A}\frac{N/m^2}{kg/s^2}\text{或}\frac{1}{m}$$

5、写出液阻的定义。对于紊流，若通过节流的流量为 $Q=K_t\sqrt{H_1-H_2}$，求：紊流的液阻 R_t：

5. （6 分）

$$液阻=\frac{压力差的变化}{流量的变化}\frac{N/m^2}{m^3/s} or \frac{N\cdot s}{m^5}$$ 或

$$液阻=\frac{水头差的变化}{流量的变化}\frac{m}{m^3/s} or \frac{s}{m^2}$$

由题设公式可得

$$dQ=\frac{1}{2}K_t\frac{1}{\sqrt{H_1-H_2}}d(H_1-H_2)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{Q}{\sqrt{H_1-H_2}}\frac{1}{\sqrt{H_1-H_2}}d(H_1-H_2)=\frac{1}{2}\frac{Q}{H_1-H_2}d(H_1-H_2)$$

所以有

$$\frac{d(H_1-H_2)}{dQ}=\frac{2(H_1-H_2)}{Q}$$

因此紊流液阻为

$$\mathrm{R}_t=\frac{d(H_1-H_2)}{dQ}=\frac{2(H_1-H_2)}{Q} \qquad s/m^2$$

6、根据图 1-6 所示的方框图，写出以 *u* 为输入，*y* 为输出的两个反馈连接子系统的状态空间表达式。

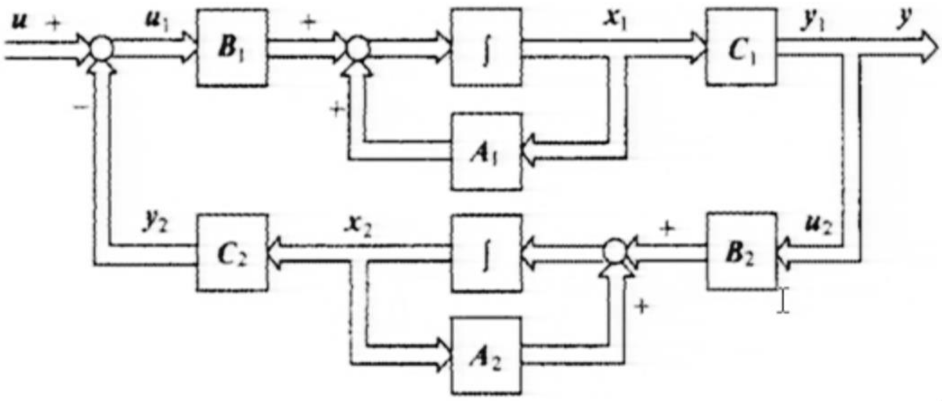


图 1-6

7、写出直流电动机的电枢电动势方程和电磁转矩方程，并解释两方程中所包含变量的物理含义。

7. （6 分）

1、直流电动机的电枢电动势方程为：

$E = C_E \Phi n$

上式中，

$C_E = n_p N / (60a)$ 称为电动势常数；

n_p 为极对数；

N 是电枢绕组全部导体数。

a 为电枢绕组串联之路对数

2、直流电动机的电磁转矩方程为：

$T_{em} = C_T \Phi I_a$

上式中，

$C_T = n_p N / (2a\pi)$ 称为电磁转矩常数；

n_p 为极对数；

N 是电枢绕组全部导体数。

a 为电枢绕组并联之路对数。

二、 如图 2(a)所示的液面系统，在稳定状态时通过的流量是$\bar{Q}$，容器 1 和容器 2 的水头分别是$\bar{H}_1$和$\bar{H}_2$。在 t=0 时流入量从$\bar{Q}$变化到$\bar{Q}+q$，其中q是流入流量的微小变化。假定所引起的水头变化（h_1和h_2）及流量变化（q_1和q_2）是很小的。容器 1 和容器 2 的液容分别是C_1和C_2。容器 1 的出流阀液阻是R_1，和容器 2 的出流阀液阻是R_2。（16 分）

1) 求当q是输入，q_2是输出时该液面系统的数学模型；

2) 证明该液面系统的电相似系统如图 2(b)所示。该电系统的输入电压为 e_i，输出电压为 e_o，隔离放大器的增益 K=1。（写出该电系统的数学模型以及两个系统对应的相似量）

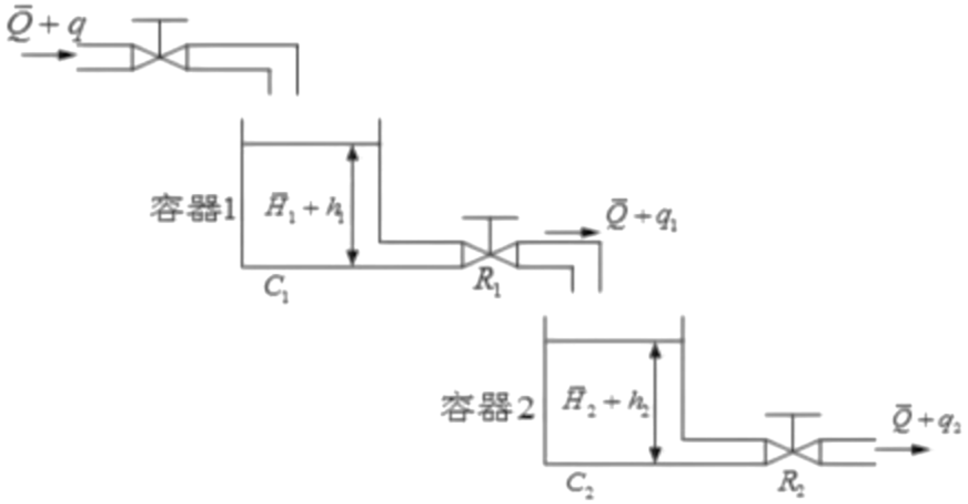


图 2(a)

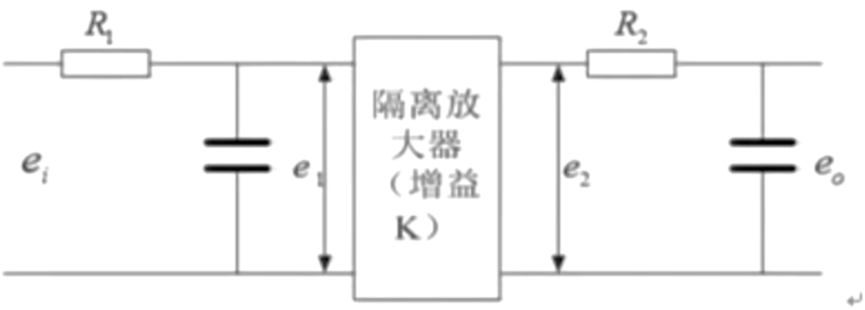


图 2(b)

二、（16 分）

1）对于容器 1，有 $C_1 dh_1 = (q - q_1)dt$；式中：$q_1 = \frac{h_1}{R_1}$

因此，有 $C_1 \frac{dh_1}{dt} + \frac{h_1}{R_1} = q$　　　(1)

对于容器 2，有 $C_2 dh_2 = (q_1 - q_2)dt$；式中：$q_2 = \frac{h_2}{R_2}$

因此，有 $C_2 \frac{dh_2}{dt} + \frac{h_2}{R_2} = \frac{h_1}{R_1}$　　　(2)

从（1）式和（2）式中消去 h_1，结果得

$$R_1 C_1 C_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2} + \left(\frac{R_1 C_1}{R_2} + C_2\right)\frac{dh_2}{dt} + \frac{h_2}{R_2} = q$$

注意：$h_2 = q_2 R_2$ 因此有：$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \left(R_1 C_1 + R_2 C_2\right)\frac{dq_2}{dt} + q_2 = q$

这就是所要求的数学模型。

2）图 2(b)所示的电路系统的数学模型为

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 e_o}{dt^2} + \left(R_1 C_1 + R_2 C_2\right)\frac{de_o}{dt} + e_o = e_i$$

因此，该液面系统和电路系统为一对相似系统，对应的相似量为：

电阻 R_1——液阻 R_1；电阻 R_2——液阻 R_2；

电容 C_1——液容 C_1；电容 C_2——液容 C_2

输入电压 e_i——输入流量的微小变化 q；

输出电压 e_o——输出流量的微小变化 q_2

三、 如图 3 所示，套筒 *M* 套在杆 *OA* 上，以 $x' = 30 + 200\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ 沿杆轴线运动，x' 以 mm (毫米) 计，

t 以 s(秒) 计。杆 OA 绕 Oz 轴以 $n=60$ r/min (转每分钟) 的转速转动，并与 Oz 轴的夹角保持为 $30°$。求：$t=1$ s 时，M 的速度及加速度。（10 分）

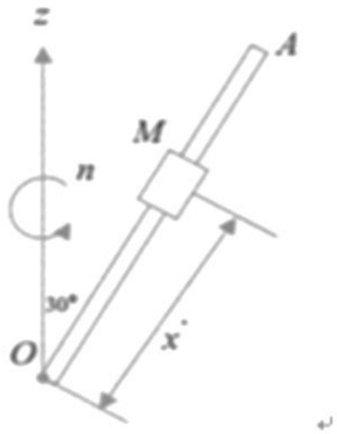


图 3

三、（10 分）

解:

动点：M。

动系：固连于ＯＡ上的坐标系。

静系：固连于地面的坐标系。

绝对速度：M相对于地面的速度。

相对速度：M相对于ＯＡ的速度。

牵连速度：ＯＡ上与M相重点相对于地面的速度。

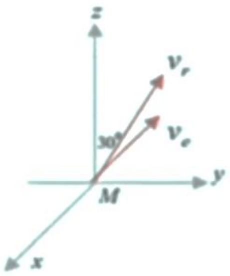
$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

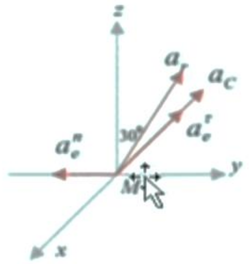
$$v_r = \frac{d}{dt}(x') = \frac{d}{dt}(30 + 200\sin\frac{\pi}{2}t) = (200\cos\frac{\pi}{2}t)\times\frac{\pi}{2} = 100\pi\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$v_r(1) = 100\pi\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$v_e = (x'\sin 30^o)\cdot\frac{2\pi n}{60} = \{[30 + 200\sin(\frac{\pi}{2}\times 1)]\times 0.5\}\times\frac{2\pi\times 60}{60} = 722.2(mm/s)$$

$$v_a = v_e = 722.2(mm/s)$$



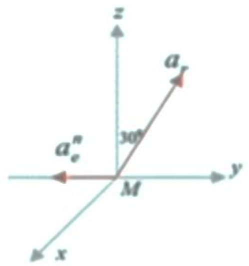


$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$a_C = 2\omega v_r \sin\theta = 2\times(2\times 3.14)\times 0\times \sin 30^\circ = 0$$

$$v_r = 100\pi\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$a_r = 100\pi(-\sin\frac{\pi}{2}t)\cdot\frac{\pi}{2} = -50\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t$$



$$a_r(1) = -50\pi^2\sin(\frac{\pi}{2}\times 1) = -50\pi^2 = -492.98(mm/s^2)$$

$$a_e^\tau = 0$$

$$a_e^n = \{[30+200\sin(\frac{\pi}{2}\times 1)]\times 0.5\}\times(2\pi)^2$$

$$= 115\times(2\times 3.14)^2 = 4535.416(mm/s^2)$$

$$a_{ax} = 0$$

$$a_{ay} = a_r\sin 30^\circ - a_e^n = -492.98\times 0.5 - 4535.416 = -4781.906(mm/s^2)$$

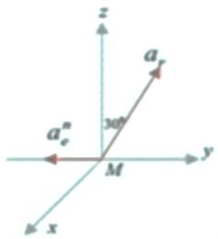
$$a_{az} = a_r\cos 30^\circ = -492.98\times 0.5 = -246.49(mm/s^2)$$

$$a_a = \sqrt{(a_{ax})^2+(a_{ay})^2+(a_{az})^2} = \sqrt{0^2+(-4781.906)^2+(-246.49)^2} = 4788.25(mm/s^2)$$

$$\alpha = \arccos\frac{a_{ax}}{a_a} = \arccos\frac{0}{4788.25} = 90^\circ$$

$$\beta = \arccos\frac{a_{ay}}{a_a} = \arccos\frac{-4781.906}{4788.25} = 177.05^\circ$$

$$\gamma = \arccos\frac{a_{az}}{a_a} = \arccos\frac{-246.49}{4788.25} = 92.95^\circ$$



四、 图 4(a)是由一压力容器和具有节流孔的管道所组成的气压系统。假定在 t<0 时系统是稳态的，稳态时的压力是$\overline{P}$，其中$\overline{P}=2\times10^{5}\,N/m^{2}$绝对压力。在 t=0 时，输入压力从$\overline{P}$变化到$\overline{P}+p_i$，此将引起容器中的压力从$\overline{P}_o$变化到$\overline{P}_o+p_o$的阶跃变化。再假定压力差的工作范围是在$-3\times10^{4}\,N/m^{2}$和$3\times10^{4}\,N/m^{2}$之间。容器的容积是$1\times10^{-4}\,m^{3}$。$\Delta p$与$q$(流量)的曲线由图 4(b)给出。整个系统的温度是$T=30^{\circ}C$，膨胀过程假定是绝热的(即空气的多方指数 n=1.40，$R_{空气}$=287 Nm/kgK)。导出此气动系统以p_i作为输入，p_o作为输出的数学模型。（10 分）

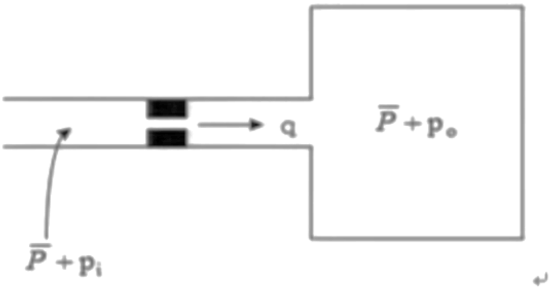


图 4(a) 气压系统

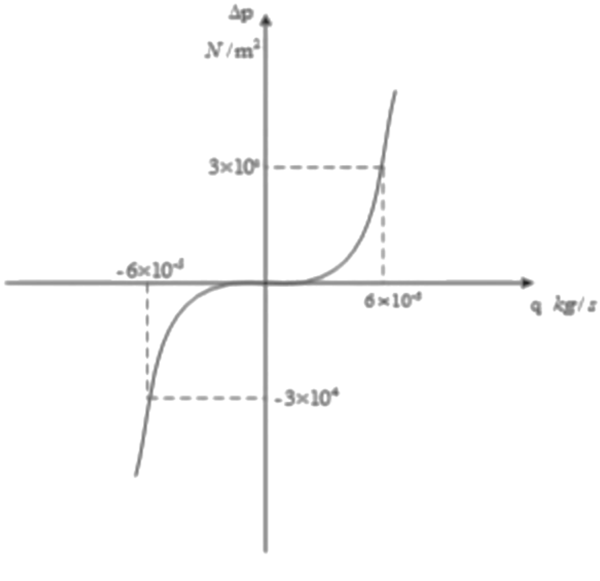


图 4(b) 压力差与流量的关系曲线

四、（10 分）

解：根据气容的定义可得：$Cdp_o = qdt$

根据气阻的定义可得：$q = \dfrac{\Delta p}{R} = \dfrac{p_i - p_o}{R}$

在上两式中，由于 $\Delta p \le \bar{P}$，因此 $R \approx \dfrac{3\times10^4}{6\times10^{-5}} = 5\times10^8 \dfrac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{kg\cdot m^2}}$

气容 $C = \dfrac{V}{nR_{空气}T} = \dfrac{1\times10^{-4}}{1.4\times287\times303} = 8.21\times10^{-10}\ kg\cdot m^2/N$

该系统的数学模型为：$RC\dfrac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$

带入上述气容气阻值最终可得：$0.4105\dfrac{dp_o}{dt} + p_o = p_i$

五、 如图 5 所示，楔形体重 P，倾角 α，在光滑水平面上。圆柱体重 Q，半径为 r，只滚不滑。初始系统静止，圆柱体在斜面最高点。求：该系统的运动微分方程。（取如图 5 所示的楔形体的水平位移 x 和圆柱体平行于斜面的位移 s 为广义坐标，各坐标原点均在初始位置。取水平面为重力势能零点。）

系统的动能：

$$T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{Q}{g}(\dot{x}^2+\dot{s}^2-2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2(\frac{\dot{s}}{r})^2$$

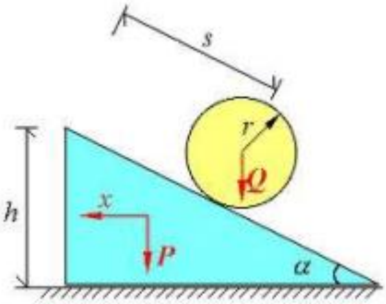
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{P+Q}{g}\dot{x}^2+\frac{3}{4}\frac{Q}{g}\dot{s}^2-\frac{Q}{g}\dot{x}\dot{s}\cos\alpha \quad (a)$$

系统的势能：

取水平面为重力势能零点。

$$U=\frac{1}{3}Ph$$

$$+Q(h-s\cdot\sin\alpha+r\cos\alpha)$$



典型例题—滚动与滑动

拉格朗日函数：

$$L=T-U$$

$$=\frac{1}{2}\frac{P+Q}{g}\dot{x}^2+\frac{3}{4}\frac{Q}{g}\dot{s}^2-\frac{Q}{g}\dot{x}\dot{s}\cos\alpha-\frac{1}{3}Ph-Q(h-s\cdot\sin\alpha+r\cos\alpha)$$

代入保守系统拉氏方程

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j})-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \quad (j=1,2,\cdots,k)$$

并适当化简，得到系统的运动微分方程。

$$(P+Q)\ddot{x}-Q\cdot\ddot{s}\cos\alpha=0$$

$$3\ddot{s}-2\ddot{x}\cos\alpha=2g\sin\alpha$$

六、 一台并励电动机，额定功率 $P_N=7.2$ KW，额定电压 $U_N=110$ V，额定转速 $n_N=900$ r/min，额定效率 $\eta_N=85$ %，电枢绕组的电阻 $R_a=0.08\ \Omega$（包括电刷接触电阻），额定励磁绕组电流 $I_{fN}=2$ A。若总制动转矩不变，在电枢回路中串入一电阻 R_L 使转速 n 降低到 450 r/min。假设空载功率 P_0 正比于转速 n，即 $P_0 \propto n$，求：（10 分）

1) 串入电阻 R_L 的数值；
2) 串入电阻 R_L 后电机的输出功率 P_2；
3) 串入电阻 R_L 后电机的效率 η；

解：

$$I_N=\frac{P_N}{U_N\eta_N}=\frac{7.2\times10^3}{110\times0.85}=77^A$$

$$I_{aN}=I_N-I_{fN}=77-2=75^A$$

$$E_N=U_N-I_{aN}R_a=110-75\times0.08=104^V$$

$$Ce\Phi=\frac{E_N}{n_N}=\frac{104}{900}=0.1156$$

Θ 总制动转矩不变时，达到稳定后电枢电流$I_a=I_{aN}$不变

$\therefore E=Cen\Phi=0.1156\times450=52^V$

而$E=U-I_a(R_a+R_L)$

$\therefore R_L=\frac{U-E}{I_a}-R_a=\frac{110-52}{75}-0.08=0.693^\Omega$

即串入电枢回路的电阻值为0.693^Ω

输入功率$P_1=UI=U_NI_N=110\times77=8470^W$

当输出功率$P_2=P_N$时，

总损耗为$\sum P=P_1-P_2=8470-7200=1270^W$

额定情况下的损耗分别为：

$$p_{wa}+p_{wb}=I_{aN}^2R_a=75^2\times0.08=450^W$$

$$p_{wf}=U_fI_f=U_NI_{fN}=110\times2=220^W$$

$\therefore$ 当$P_2=P_N$时的空载损耗为:

$p_{0N}=\sum p_N-(p_{wa}+p_{wb})-p_{wf}=1270-450-220=600^W$

又Θ 假设$p_0\propto n$，则当$n=450r/\min$时，其损耗为：

$$p_0=\frac{n}{n_N}p_{0N}=\frac{450}{900}\times600=300^W$$

此时，$p_{wa}+p_{wb}=I_{aN}^2(R_a+R_L)=75^2\times(0.08+0.693)=4348^W$

p_{wf} 保持不变 $=220W$

故在$450r/\min$时的总损耗为$\sum p=300+4348+220=4868W$

故输出功率为$P_2=P_1-\sum P=8470-4868=3602^W$

效率为$\eta=\frac{P_2}{P_1}\times100\%=\frac{3602}{8470}\times100\%=42.5\%$

西安交通大学考试题

成绩	

课　程 系统建模与动力学分析（A卷）

系　　别 ____________________ 考 试 日 期　2019 年 12 月 15 日

专业班号 ____________________

姓　　名 ____________________ 学　号__________ 期中 ☐ 期末 ☐

一、　回答下列每个小题（每小题 6 分，共 42 分）

1、如图 1-1 所示，在长方形平板的 *O*，*A*，*B*，*C* 点上分别作用着有四个力：F_1=1 kN，F_2=2 kN，F_3= F_4=3 kN，方向如图 1-1 所示。求：以上四个力构成的力系对 O 点的简化结果，以及该力系的最后合成结果。

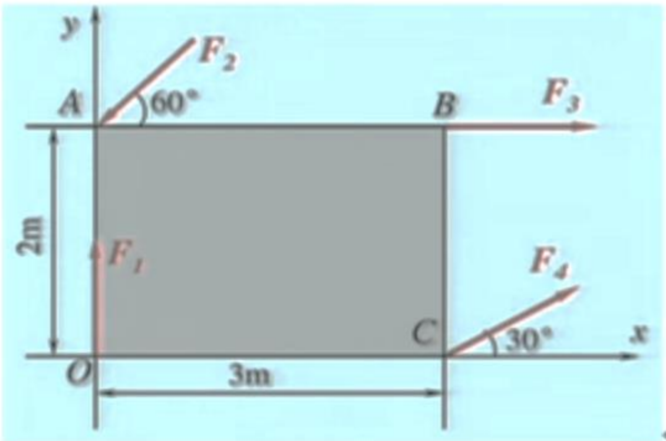
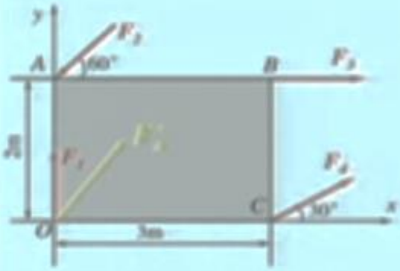


图 1-1

一、简答题（42 分）

1.（6 分）

解：　　求向O点简化结果　　1. 求主矢 F'_R。



$$F'_{Rx}=\sum F_x=-F_2\cos 60°+F_3+F_4\cos 30°=0.598\text{ kN}$$

$$F'_{Ry}=\sum F_y=F_1-F_2\sin 60°+F_4\sin 30°=0.768\text{ kN}$$

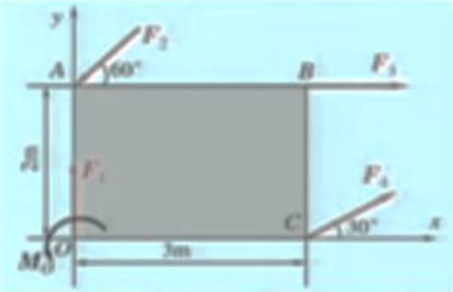
所以，主矢的大小　$F'_R=\sqrt{F'^2_{Rx}+F'^2_{Ry}}=0.794\text{ kN}$

主矢的方向：　$\cos(F'_R,i)=\dfrac{F'_{Rx}}{F'_R}=0.614$　　$\angle(F'_R,i)=52.1°$

$\cos(F'_R,j)=\dfrac{F'_{Ry}}{F'_R}=0.789$　　$\angle(F'_R,j)=37.9°$

2. 求主矩M_O

$$M_O=\sum M_O(F)=2F_2\cos 60°-2F_3+3F_4\sin 30°=0.5\text{ kN}\cdot\text{m}$$



最后合成结果　由于主矢和主矩都不为零，所以最后合成结果是一个合力F_R。如图所示。

$$F_R=F'_R$$

合力F_R到O点的距离　$d=\dfrac{M_O}{F'_R}=0.51\text{ m}$

2、图 1-2 中所示结构，各杆自重不计，在 G 点作用一铅直向上的力 F，$AC=CE=CD=DG=GE=l$。 求：支座 B 的水平约束力。

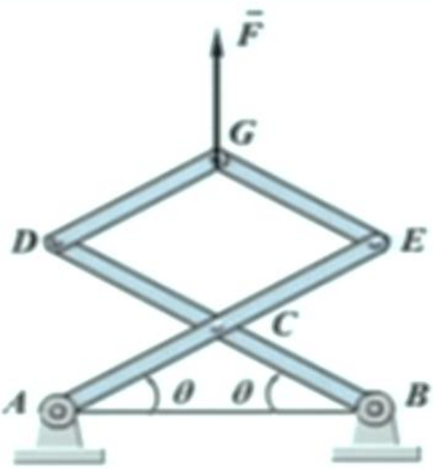
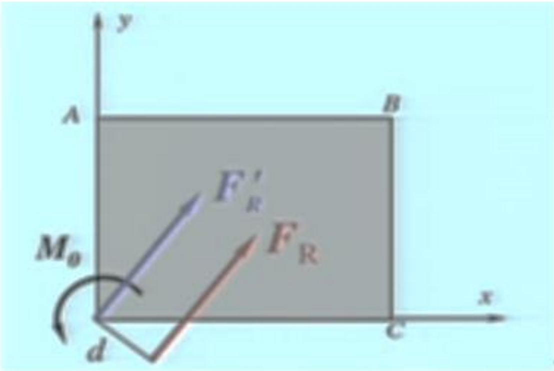
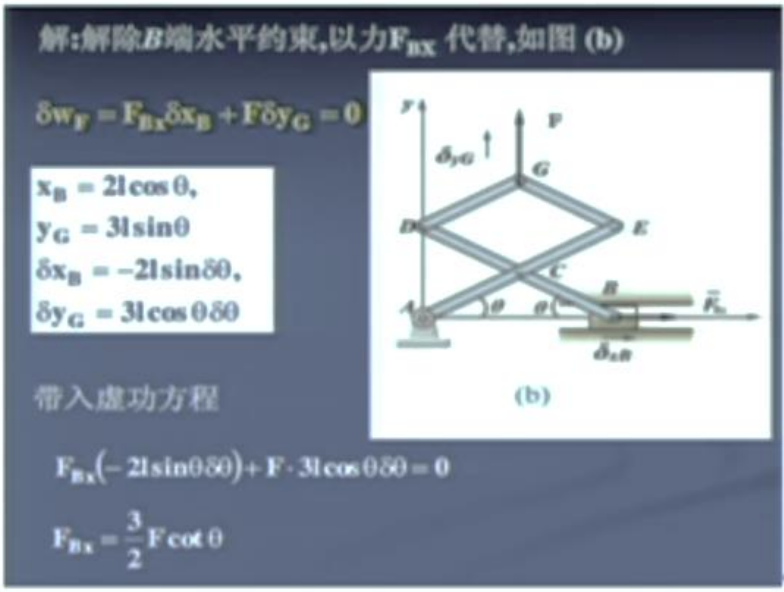


图 1-2


y
A
B
F'_R
F_R
M_0
x
C
d

2. （6 分）


解:解除B端水平约束,以力F_{BX} 代替,如图 (b)
$\delta w_F = F_{Bx}\delta x_B + F\delta y_G = 0$
$x_B = 2l\cos\theta,$
$y_G = 3l\sin\theta$
$\delta x_B = -2l\sin\delta\theta,$
$\delta y_G = 3l\cos\theta\delta\theta$
带入虚功方程
$F_{Bx}(-2l\sin\theta\delta\theta) + F\cdot 3l\cos\theta\delta\theta = 0$
$F_{Bx} = \frac{3}{2}F\cot\theta$
y
F
G
D
E
C
A
B
(b)

3、如下图 1-3 所示，匀质圆轮半径为 r、质量为 m。圆轮在重物 P 带动下绕固定轴 O 转动，已知重物重量为 W。求：重物下落的加速度 a_P。

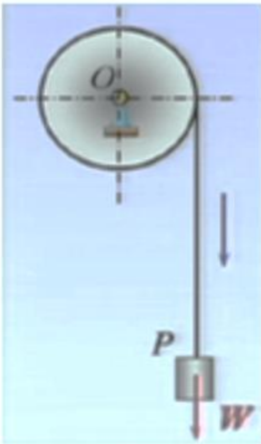
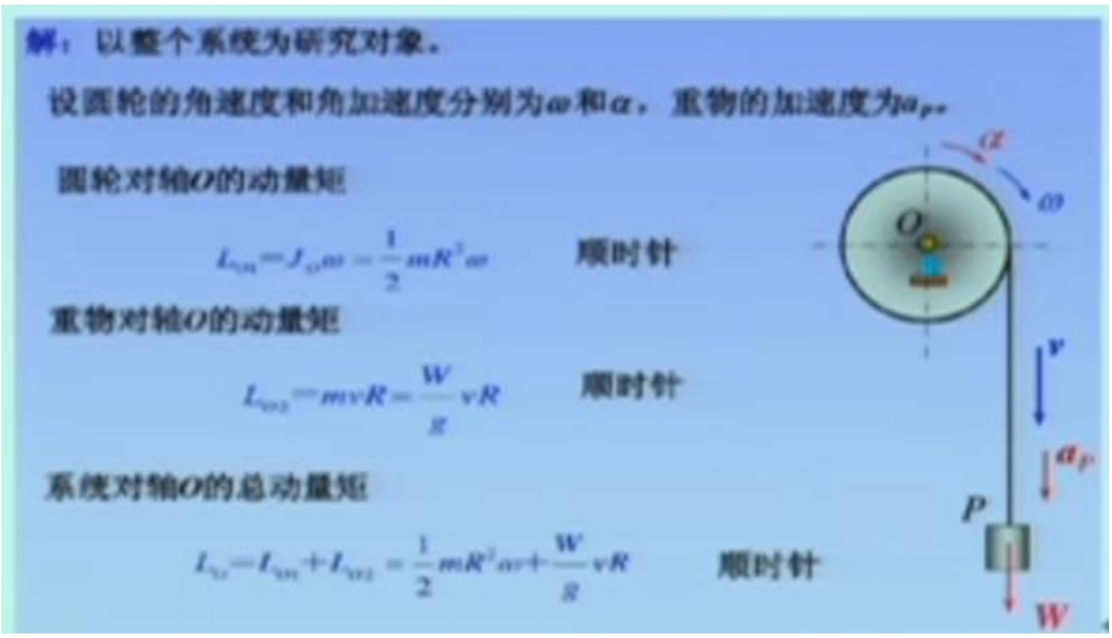


图 1-3



4、流体在长为 L（单位：m）的管道中流动。假设管道的横截面是常数 A（单位：m^2）。流体密度记为 ρ，重力加速度记为 g。求：

分别选择压力或水头作为势能度量时的液感 I。

5、求气动压力容器的气容 C，它盛有 10 m^3、温度为 20°C 的空气。假定膨胀过程是绝热的。空气的多方指数 k=1.40，$R_{空气}$=287 Nm/kgK。

6、根据图 1-6 所示的方框图，写出以 u 为输入，y 为输出的两个并联子系统的状态空间表达式。

7、写出他励直流电动机当额定电压 $U=U_N$，额定磁通 $\varphi=\varphi_N$，电枢串电阻 $R=0$ 时的固有机械特性方程，并解释该方程中所包含变量的物理含义。

7.（6 分）

他励直流电动机固有机械特性方程：

$$n=\frac{U_N}{C_E\Phi_N}-\frac{R_a}{C_E C_T\Phi_N^2}T_{em}$$

其中：T_{em}——电磁转矩；C_E——电机的电动势常数；

C_T——电机的电磁转矩常数；R_a——电枢绕组的电阻

二、　如图 2 所示液面系统，在稳定状态时流入量和流出量是$\bar{Q}$，容器之间的流量是零，容器 1 和容器 2 的水头都是$\bar{H}$。在$t=0$时流入量从$\bar{Q}$变化到$\bar{Q}+q$，其中q是流入量的微小变化。水

头（h_1和h_2）和流量（q_1和q_2）的最终变化假定很小。容器 1 和容器 2 的液容分别是C_1和C_2。容器之间阀的液阻是R_1，流出阀的液阻是R_2。求：该液面系统以q为输入，h_1为输出的数学模型。（10 分）

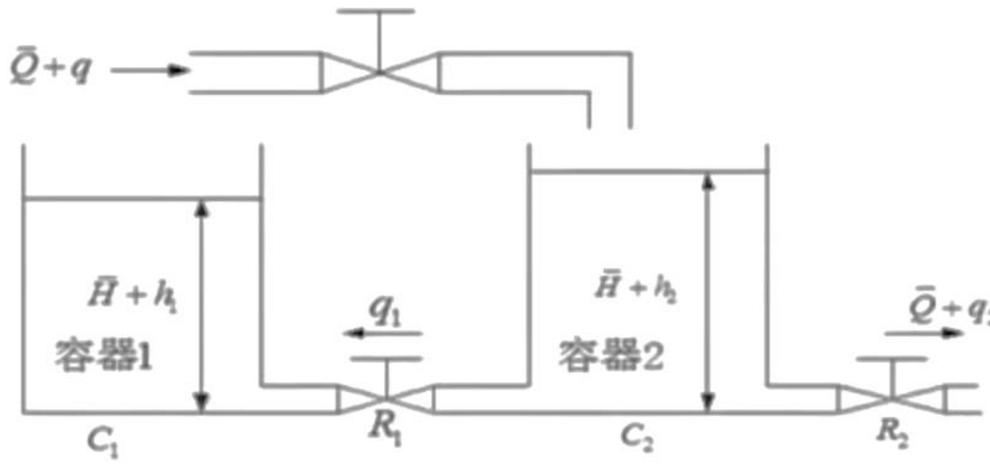


图 2

二、（10 分）

对于容器 1，$C_1dh_1 = q_1dt$，其中，$q_1 = (h_2 - h_1)/R_1$

显然，$R_1C_1\dfrac{dh_1}{dt} + h_1 = h_2$

对于容器 2，$C_2dh_2 = (q - q_1 - q_2)dt$，其中，$q_2 = h_2/R_2$

因此，有 $R_2C_2\dfrac{dh_2}{dt} + \dfrac{R_2}{R_1}h_2 + h_2 = R_2q + \dfrac{R_2}{R_1}h_1$

从上式中消去 h1，可得

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2h_2}{dt^2} + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)\frac{dh_2}{dt} + h_2 = R_2q + R_1R_2C_1$$

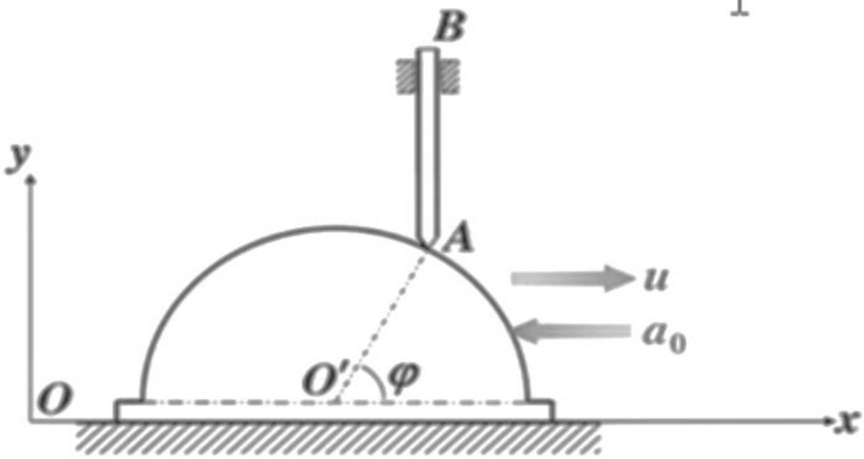
注意： $h_2=R_2q_2$ 因此有

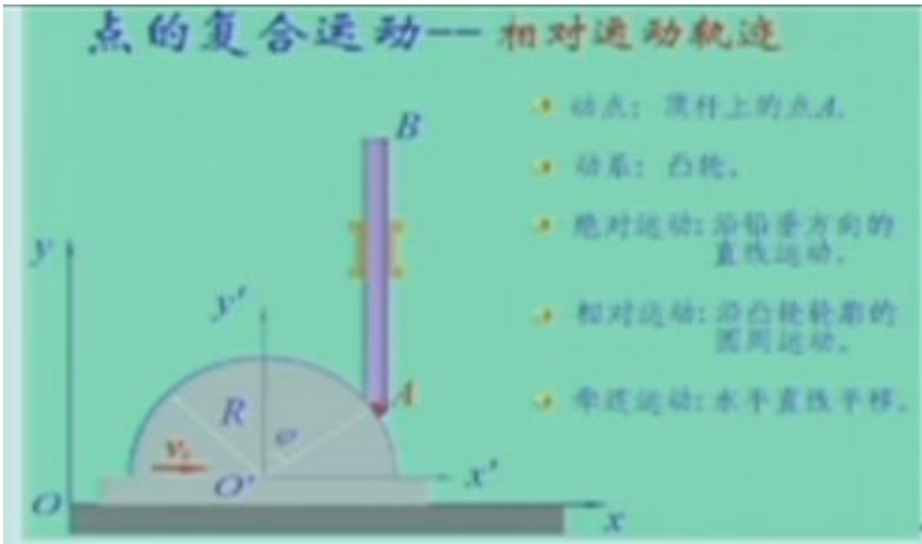
$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2q_2}{dt^2} + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)\frac{dq_2}{dt} + q_2 = q + R_1C_1\frac{dq}{dt}$$

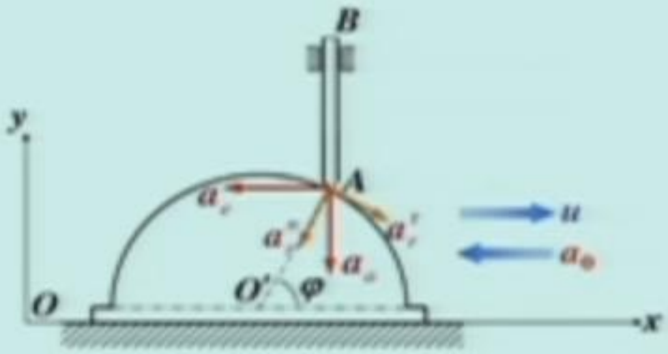
$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2h_1}{dt^2} + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)\frac{dh_1}{dt} + h_1 = R_2q$$

这些就是所要求的数学模型。

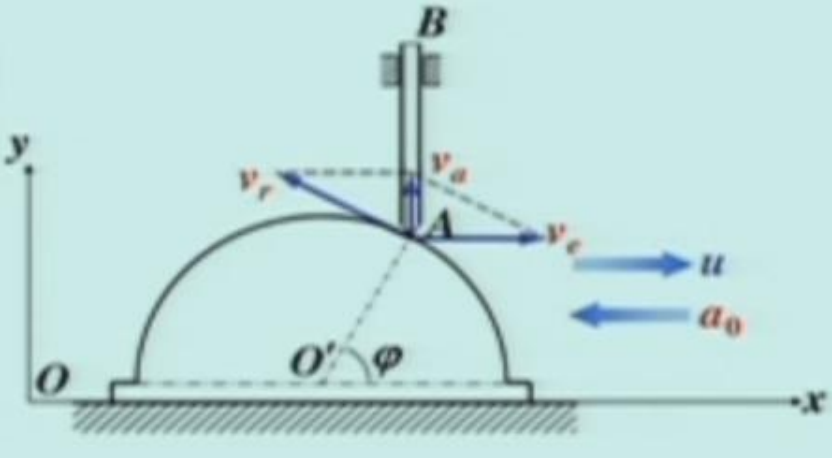
三、　在如图 3 所示凸轮机构中，凸轮外形为半圆形，半径为 R，凸轮沿水平轨道向右运动，推动顶杆 AB 沿固定的铅垂导轨运动，图示瞬时 AO' 与水平方向成 φ 角，凸轮的速度为 u，加速度为 a_0。求：瞬时顶杆 AB 的加速度。（8 分）







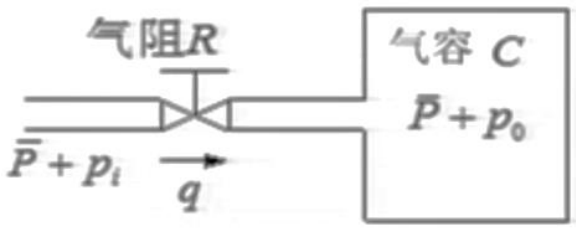
加速度	a_a	a_e	a_r^t	a_r^n
方　向	铅垂	水平向左	$\perp O'A$	由A指向O'点
大　小	?	a	?	v_r^2/R



$$v_r = \frac{u}{\sin\varphi}$$

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{u^2}{R\sin^2\varphi}$$

四、　参考图 4 所示的气动压力系统，假定对于 t<0 时系统是在稳态，而稳态系统的压力是 $\bar{P}=5\times10^5\,N/m^2$ 绝对压力。在 t=0 时，输入压力突然从 $\bar{P}$ 改变到 $\bar{P}+p_i$，其中 p_i 是具有 $p_i=2\times10^4\,N/m^2$ 幅值的阶跃变化。此阶跃变化是由于空气流进容器直到压力相等为止。假定初始流量是 $q(0)=1\times10^{-4}\,kg/s$。当空气流入容器，在容器中空气的压力从 $\bar{P}$ 变到 $\bar{P}+p_o$。决定该气动系统以 p_i 作输入，p_o 作输出的数学模型，以及 p_o 关于时间的函数。假定膨胀过程是绝热的（n = 1），整个系统的温度是常数，为 T = 293 K，并且容器具有 0.1 m³ 的容积。（10 分）



四、（10分）

解。阀的平均阻力是

$$R=\frac{\Delta p}{q}=\frac{2\times10^4}{1\times10^{-4}}=2\times10^8\ N\cdot s/kg\cdot m^2$$

容器的容积是

$$C=\frac{V}{nR_{空气}T}=\frac{0.1}{1\times287\times293}=1.19\times10^{-6}\ kg\cdot m^2/N$$

对于此系统的数学模型求得为

$$Cdp_0=qdt$$

式中

$$q=\frac{\Delta p}{R}=\frac{p_i-p_0}{R}$$

因此

$$RC\frac{dp_0}{dt}+p_0=p_i$$

把R、C和 p_i 的值代入此最后方程式，我们得

$$2\times10^8\times1.19\times10^{-6}\frac{dp_o}{dt}+p_o=2\times10^4$$

或

$$238\frac{dp_0}{dt}+p_0=2\times10^4 \qquad (5\text{-}46)$$

我们定义

$$x(t)=p_0(t)-2\times10^4 \qquad (5\text{-}47)$$

把方程式（5-47）代入方程式（5-46），我们得到x的微分方程式如下：

$$238\frac{dx}{dt}+x=0 \qquad (5\text{-}48)$$

注意 $p_o(0)=0$，对于x(t)的初始条件是

$$x(0)=p_o(.0)-2\times10^4=-2\times10^4$$

假设解为指数解 $x=Ke^{\lambda t}$，并代入方程式（5-28），我们找到特征方程式为

$$238\lambda+1=0$$

由此

$$\lambda=-0.0042$$

因此，x(t)可以重写为

$$x(t)=Ke^{-0.0042t}$$

式中K是常数，它是由初始条件决定

$$x(0)=K=-2\times10^4$$

五、 如图 5 所示一不可伸长的绳子跨过小滑轮 D，绳的一端系于匀质圆轮 A 的轮心 C 处，另一端绕在匀质圆柱体 B 上。轮 A 重 W_1，半径是 R。圆柱 B 重 W_2，半径是 r。轮 A 沿倾角为 α 的斜面作纯滚动，绳子倾斜段与斜面平行。滑轮 D 和绳子的质量不计，试求轮心 C 和圆柱 B 的中心 E 的加速度。(系统具有两个自由度。选取图示中的 $x_1=DC$ 和 $y=y_E$ 作为系统的广义坐标。)(10 分)

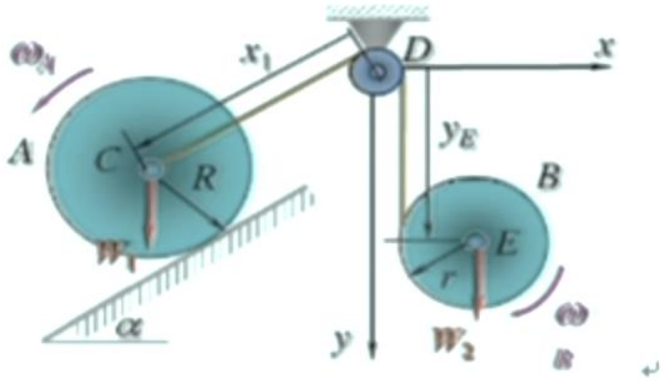


图 5

五、（10 分）

系统具有两个自由度。我们选取 $x_1 = DC$ 和 $y = y_E$ 作为系统的广义坐标。于是系统的动能为

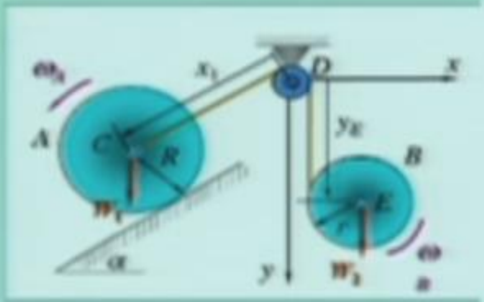
$$T=\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}J_C\omega_A^2+\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}\dot{y}^2+\frac{1}{2}J_E\omega_B^2$$

式中 ω_A 和 ω_B 分别是圆轮 A 和圆柱体 B 的角速度。根据运动学关系可知

$$\omega_A=\frac{\dot{x}_1}{R},\quad \omega_B=\frac{1}{r}(\dot{y}+\dot{x}_1)$$

将 ω_A 和 ω_B 代入动能表达式，并考虑到

$$J_C=\frac{1}{2}\frac{W_1}{g}R^2,\quad J_E=\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}r^2$$

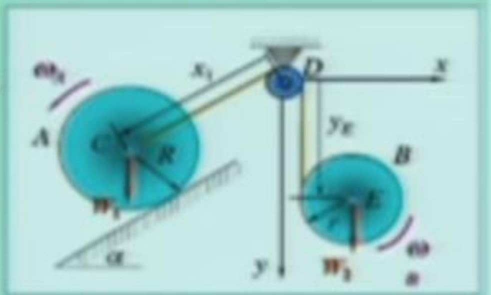


则有 $$T=\frac{3}{4}\frac{W_1}{g}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}\dot{y}^2+\frac{1}{4}\frac{W_2}{g}\dot{x}_1^2+\frac{1}{4}\frac{W_2}{g}\dot{y}^2+\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}\dot{x}_1\dot{y}$$

圆轮A 作纯滚动，摩擦力不做功。系统的主动力只有重力 W_1 和 W_2。因此，系统的势能为

$$V=-W_1x_1\sin\alpha-W_2y$$

写出系统的拉格朗日函数



$$L=\frac{1}{4g}(3W_1+W_2)\dot{x}_1^2+\frac{3}{4}\frac{W_1}{g}\dot{y}^2+\frac{1}{2}\frac{W_2}{g}\dot{x}_1\dot{y}+W_1x_1\sin\alpha+W_2y$$

将 L 代入拉氏方程 $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$

即得系统的运动微分方程

$$(3W_1+W_2)\ddot{x}_1+W_2\ddot{y}=2W_1g\sin\alpha \qquad \text{(a)}$$

$$\ddot{x}_1+3\ddot{y}=2g \qquad \text{(b)}$$

求解式 (a) 和 (b)，得

$$\ddot{x}_1=\frac{6W_1\sin\alpha-2W_2}{9W_1+2W_2}g$$

$$\ddot{y}=\frac{2W_1(3-\sin\alpha)+2W_2}{9W_1+2W_2}g$$

它们分别是轮心 C 和圆柱 B 的中心 E 的加速度。

六、 求图 $6(a)$和图 $6(b)$所示机械系统和电系统的数学模型，并使用力-电流相似证明它们是相似系统（写出对应相似量）。（10分）

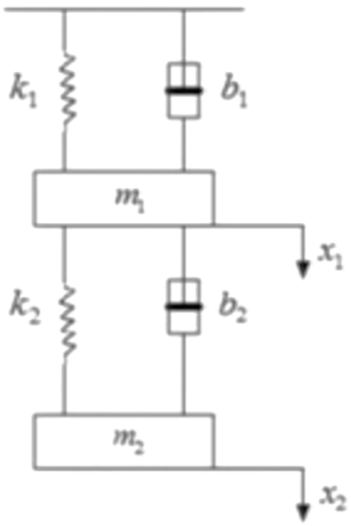


图 6(a)

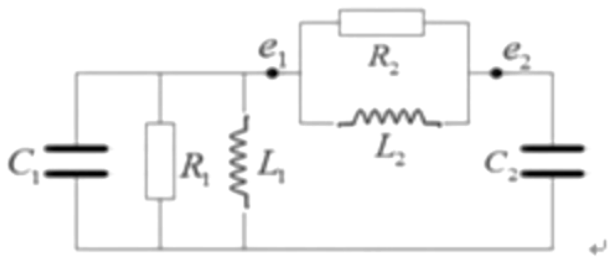


图 6(b)

六、(10 分)

机械系统的运动方程是

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+b_1\dot{x}_1+k_1x_1+b_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_2(x_1-x_2)=0 \\ m_2\ddot{x}_2+b_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_2(x_2-x_1)=0 \end{cases}$$

电系统的方程式可以写为

$$\begin{cases} C_1\dfrac{de_1}{dt}+\dfrac{1}{R_1}e_1+\dfrac{1}{L_1}\int e_1dt+\dfrac{1}{R_2}(e_1-e_2)+\dfrac{1}{L_2}\int(e_1-e_2)dt=0 \\ C_2\dfrac{de_2}{dt}+\dfrac{1}{R_2}(e_2-e_1)+\dfrac{1}{L_2}\int(e_2-e_1)dt=0 \end{cases}$$

把 $\dot{\psi}_1=e_1$ 和 $\dot{\psi}_2=e_2$ 代入最后两方程式中，得

$$\begin{cases} C_1\ddot{\psi}_1+\dfrac{1}{R_1}\dot{\psi}_1+\dfrac{1}{L_1}\psi_1+\dfrac{1}{R_2}(\dot{\psi}_1-\dot{\psi}_2)+\dfrac{1}{L_2}(\psi_1-\psi_2)=0 \\ C_2\ddot{\psi}_2+\dfrac{1}{R_2}(\dot{\psi}_2-\dot{\psi}_1)+\dfrac{1}{L_2}(\psi_2-\psi_1)=0 \end{cases}$$

由它们的数学模型可知，上述机械系统和电系统是**力—电流**相似系统，对应的

机械系统	电系统
力 P（力矩 T）	电流 i
质量 m（惯性矩 J）	电容 C
粘性摩擦系数 b	电阻的倒数 1/R
弹簧常数 k	电感的倒数 1/L
位移 x（角位移）	磁通量
速度 v（角速度 w）	电压 e

七、　一台并励直流电动机，额定功率 P_N=5.5 KW，额定电压 U_N=110 V，额定电流 I_N=58 A，额定转速 n_N=1470 r/min，励磁绕组的电阻 R_f=138 Ω，电枢绕组的电阻 R_a=0.15 Ω（包括电刷接触电阻）。在额定负载时突然在电枢回路中串入 0.5 Ω 的电阻，由于机械惯性的作用，此时电机转速 n 不会马上改变。若不计电枢回路中的电感和略去电枢反应的影响，试计算此瞬间的下列项目：（10 分）

1) 电枢反电动势 E；
2) 电枢电流 I_a；
3) 电磁转矩 T_{em}；
4) 若总制动转矩不变，试求达到稳定状态后的转速 n。

七、（10 分）

解：额定励磁电流：$I_{fN}=\frac{U_N}{R_f}=\frac{110}{138}=0.8(\mathrm{A})$

额定电枢电流：$I_{aN}=I_N-I_{fN}=58-0.8=57.2(\mathrm{A})$

额定电枢反电动势：

$E_N=U_N-I_{aN}R_a=110-57.2\times0.15=101.42(\mathrm{V})$

所以：$C_E\Phi=\frac{E_N}{n_N}=\frac{101.42}{1470}=0.069$

1) 突然串入0.5Ω电阻的瞬间，由于机械惯性的作用，电机转速n不会马上改变，则此时E=E$_N$=101.42V．

2) $E=U_N-I_a(R_a+R_l)=E_N$

$$\therefore\quad I_a=\frac{U_N-E_N}{R_a+R_l}=\frac{110-101.42}{0.15+0.5}=13.2(A)$$

3) 此时 $p_{em}=EI_a=101.42\times13.2=1338.744(W)$

$$T_{em}=\frac{P_{em}}{\Omega}=\frac{P_{em}}{\Omega}=\frac{P_{em}}{2\pi n_N/60}=\frac{1338.744}{2\pi\times1470/60}=8.7(N\bullet m)$$

4) 总制动转矩保持不变，达到稳定时，$I_a=I_{aN}$

$$E=U_N-I_a(R_a+R_l)=110-57.2\times(0.15+0.5)=72.82(V)$$

此时电机的转速为 $n=\frac{E}{C_e\Phi}=\frac{72.82}{0.069}=1055.5(r/\min)$.