第四章　n维向量与线性方程组

第三节：向量组的秩

第四节 线性方程组解的结构

董荣
数学与统计学院

作业：

习题4.4

(A) 1，3，5，9，10(2)，11，13，17

(B) 5

主要内容

1.向量组的秩与矩阵的秩的关系

2.齐次线性方程组

3.非齐次线性方程组

回顾： **定理4.3.2** 设有两个向量组:

$$(\mathrm{I}): \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s; \qquad (\mathrm{II}): \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r;$$

且(I)可由(II)线性表示,则

(1) 当$s > r$时,(I)线性相关;

(2) 当(I)线性无关时,必有$s \le r$.

推论4.3.1 如果(I)、(II)都是线性无关组,且(I)与(II)等价,则(I)与(II)所含向量个数必相同.即两个等价的线性无关组所含向量个数相同.

推论4.3.1' 设(I)、(II)都是向量组U的极大无关组,则(I)与(II)所含向量个数必相同.

推论4.3.2 设$r(U)=r$，则U中任何r个线性无关的向量所构成的向量组都可以作为U的极大无关组.

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性无关}\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性相关}\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$$

定理4.3.1 (矩阵三秩相等) 对任何矩阵A，有

$$r(A)\ =\ A\text{的列秩}\ =\ A\text{的行秩}$$

定理4.3.3 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则r(I)≤r(II).

推论4.3.3 若(I)与(II)等价，则r(I)=r(II).

定理4.3.4

(1) 对于矩阵$A_{m\times n}, B_{m\times n}$，有$r(A+B)\le r(A)+r(B)$;

(2) 对于矩阵$A_{m\times n}, B_{n\times p}$，有$r(AB)\le min\{r(A), r(B)\}$.

证: (1): 设A, B按列分块为

$$A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n], B=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]$$

$$A+B=[\alpha_1+\beta_1 \quad \alpha_2+\beta_2 \quad \cdots \quad \alpha_n+\beta_n]$$

设A列向量组的极大无关 组为$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir}$(故$r(A)=r$);

设B列向量组的极大无关 组为$\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{js}$(故$r(B)=s$),

$\Rightarrow A+B$的每个列向量可由向量 组 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir},\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{js}$线性表示,

$$\Rightarrow r(A+B)\le r(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir},\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{js})$$

$$\le r+s=r(A)+r(B)$$

定理4.3.4

(1) 对于矩阵$A_{m\times n}, B_{m\times n}$，有$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；

(2) 对于矩阵$A_{m\times n}, B_{n\times p}$，有$r(AB)\le min\{r(A),r(B)\}$.

证（2）: 设$A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$, 并设$A$按列分块为$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$,

则AB的第j列为

$$A\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj}\end{bmatrix}=b_{1j}\alpha_1+b_{2j}\alpha_2+\cdots+b_{nj}\alpha_n,\quad j=1,2,\cdots,p$$

$\Rightarrow$ AB的列向量组可由A的列向量线性表示,

$\Rightarrow$ AB的列秩$\le$ A的列秩 $\Rightarrow$ $r(AB)\le r(A)$.

$\Rightarrow r(AB)=r((AB)^T)=r(B^TA^T)\le r(B^T)=r(B)$.

例： 设矩阵$A_{n\times m}$、$B_{m\times n}$满足$AB=I_n$,其中I_n为n阶单位矩阵，且$n<m$.证明：B的列向量组线性无关.

证法1 设B按列分块为$B=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}$,

设有$x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$

亦即$Bx=0$,其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，两端左乘A,得 $ABx=0$.

因为$AB=I$, 得$x=0$,

所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关.

例： 设矩阵$A_{n\times m}$、$B_{m\times n}$满足$AB=I_n$,其中I_n为n阶单位矩阵，且$n<m$.证明：B的列向量组线性无关.

证法2 要证$B_{m\times n}$的列向量组线性无关, 即相当于要证$r(B)=n$.

由已知 $AB=I$ 可得

$$n=r(I_n)=r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}\le r(B_{m\times n})\le\min\{n,m\}=n,$$

$$\Rightarrow r(B)=n.$$

主要内容

1.向量组的秩与矩阵的秩的关系

2.齐次线性方程组

3.非齐次线性方程组

齐次线性方程组解的性质

解向量

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow Ax = 0. \quad (1)$$

若 $x_1 = \xi_{11}, x_2 = \xi_{21}, \cdots, x_n = \xi_{n1}$ 使得方程 $Ax = 0$ 成立，

则 $x = \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$ 称为方程组（1）的**解向量**，

它也就是向量方程 $Ax = 0$ 的解.

齐次线性方程组解的性质

（1）若$x_1=\xi_1, x_2=\xi_2$为 $Ax=0$ 的解，则$x=\xi_1+\xi_2$ 也是$Ax=0$的解.

（2）若 $x_1=\xi_1$为 $Ax=0$的解， k 为实数，则$x=k\xi_1$ 也是$Ax=0$的解.

易知，方程组的全体解向量构成一个向量空间，

称此向量空间为齐次线性方程组$Ax=0$的解空间 (解集合).

$$S=\{x|x\in F^n, Ax=0\}$$

基础解系及其求法

基础解系的定义

如果齐次方程组 $Ax=0$ 的一组解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 满足：

① $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关；

② 方程组 $Ax=0$ 的任一解都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为齐次线性方程组的一个基础解系.

可以看出齐次方程组的基础解系就是齐次方程组解集合的极大无关组

易证（课后习题）

与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则方程组 $Ax=0$ 的**通解**可表示为：

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s,$$ …………… 结构式通解(结构解)

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意实数.

如果 $r(A_{m\times n})=n$,则 $Ax=0$ 只有零解， $\Rightarrow$ $Ax=0$ 不存在基础解系

定理4.4.1 设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=r<n$,则n元齐次线性方程组$Ax=0$必存在基础解系,且基础解系含$n-r$个向量.

证： 设齐次线性方程组的系数矩阵A的秩r(A)=r<n，则方程组通解中有r个约束未知量, n-r个自由未知量，不妨设$x_1, x_2,\ldots x_r$为约束未知量，

因此，方程组的通解为：

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,r+1}x_{r+1} + c_{1,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_{2,r+1}x_{r+1} + c_{2,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_r = c_{r,r+1}x_{r+1} + c_{r,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{rn}x_n, \end{cases}$$

定理4.4.1 设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=r<n$,则n元齐次线性方程组$Ax=0$必存在基础解系,且基础解系含$n-r$个向量.

证： 写成列向量，则有

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{1,r+1}x_{r+1}+c_{1,r+2}x_{r+2}+\cdots+c_{1n}x_n \\ c_{2,r+1}x_{r+1}+c_{2,r+2}x_{r+2}+\cdots+c_{2n}x_n \\ \vdots \\ c_{r,r+1}x_{r+1}+c_{r,r+2}x_{r+2}+\cdots+c_{rn}x_n \\ x_{r+1}+0+\cdots+0 \\ 0+x_{r+2}+\cdots+0 \\ \vdots \\ 0+0+\cdots+x_n \end{bmatrix}$$

定理4.4.1 设A为$m\times n$矩阵，$r(A)=r<n$,则n元齐次线性方程组$Ax=0$必存在基础解系,且基础解系含$n-r$个向量.

证：

$$x = x_{r+1}\begin{bmatrix} c_{1,r+1} \\ c_{2,r+1} \\ \vdots \\ c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_{r+2}\begin{bmatrix} c_{1,r+2} \\ c_{2,r+2} \\ \vdots \\ c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

或 $x = x_{r+1}\boxed{\xi_1} + x_{r+2}\boxed{\xi_2} + \cdots + x_n\boxed{\xi_{n-r}}$,

易知ξ_1，ξ_2,⋯，ξ_{n-r}是$Ax=0$的基础解系,

因为是解向量，线性无关，任意解可由其线性表示。

例： 求下列齐次线性方程组的基础解系与通解.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解 方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\begin{cases} x_1 = x_2 + 4x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_2 + 3x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ 从而基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$.

定理4.4.2 设A为$m \times n$矩阵，$r(A)=r<n$，则齐次线性方程组$Ax=0$的任何$n-r$个线性无关的解向量都可作为$Ax=0$的基础解系.

例： 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，证明：向量组 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3$，$\beta_3=3\alpha_3+\alpha_1$ 也是$Ax=0$的基础解系。

证： 方程组$Ax=0$的基础解系含有3个向量，故任何3个线性无关的解向量都可作为它的基础解系。

我们仅需要证明β_1,β_2,β_3是$Ax=0$的线性无关的解向量即可。

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$$

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+2k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(3k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，我们可得 $k_1=k_2=k_3=0$，
即β_1,β_2,β_3线性无关

例：设矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times p}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，试证 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$

证：若$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则结论显然成立。

若$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，将$\boldsymbol{B}$按列分块$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_p]$

由$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_p]=[\boldsymbol{A\beta}_1\quad\boldsymbol{A\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{A\beta}_p]$

得 $\boldsymbol{A\beta}_j=\mathbf{0}\quad(j=1,2,\cdots,p)$

这表明矩阵$\boldsymbol{B}$的每个列向量都是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解向量

$\boldsymbol{B}$的列向量组中有$r(\boldsymbol{B})$个线性无关的向量，因此，方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解集合中至少含有$r(\boldsymbol{B})$个线性无关的解向量，故方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系至少含有$r(\boldsymbol{B})$个向量。

$$n-r(\boldsymbol{A})\ge r(\boldsymbol{B})$$

即，我们有 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$

主要内容

1.向量组的秩与矩阵的秩的关系

2.齐次线性方程组

3.非齐次线性方程组

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若记$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 则上述方程组可写成 $Ax = b$.

导出组： 通常称方程组$Ax = 0$为与方程组$Ax = b$对应的齐次线性方程组（或称$Ax = 0$ 为$Ax = b$ 的**导出组**）

非齐次线性方程组解的基本性质

性质4.4.3 如果$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$都是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是对应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$$

性质4.4.4 如果$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解，$\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的一个解，则$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{b}+\mathbf{0}=\boldsymbol{b}$$

补充性质: 如果$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\dots,\boldsymbol{\eta}_k$都是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则$\frac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{\eta}_k}{k}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解。

$$\boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{\eta}_k}{k}\right)=\frac{1}{k}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_k)=\frac{1}{k}(k\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$$

性质4.4.3 如果$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$都是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，则$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$是对应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解。

定理4.4.3（**非齐次线性方程组解的结构定理**）设$\boldsymbol{\eta}^*$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个特解，则$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任一解$\boldsymbol{x}$可表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}$$

其中$\boldsymbol{\xi}$为对应齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的某个解。

证：方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任一解$\boldsymbol{x}_0$显然可表示成

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\eta}^*+(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\eta}^*)$$

令$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\eta}^*$，显然$\boldsymbol{\xi}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个解 (性质4.4.3)。

则$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}$，即$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的任一解$\boldsymbol{x}_0$可表示为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个特解($\boldsymbol{\eta}^*$)加上导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的某个解($\boldsymbol{\xi}$).

定理4.4.3（非齐次线性方程组解的结构定理）设η^*为非齐次线性方程组$Ax=b$的一个特解，则$Ax=b$的任一解x可表示为

$$x=\eta^*+\xi$$

其中ξ为对应齐次线性方程组$Ax=0$的某个解。

在$Ax=b$有解的前提下
$$\begin{cases}\text{当}Ax=0\text{只有零解时，方程组}Ax=b\text{有唯一解。}\\ \text{当}Ax=0\text{有非零解时，方程组}Ax=b\text{有无穷多解。}\end{cases}$$

方程组$Ax=b$有无穷多解时，其通解可以表示成它的任一特解η^*与导出组$Ax=0$的通解之和，即方程组$Ax=b$的通解可以表示为

$$x=\eta^*+\sum_{i=1}^{n-r}c_i\xi_i\quad(c_1,\cdots,c_{n-r}\text{为任意常数})$$

结构式通解（结构解）

其中，η^*为$Ax=b$的一个特解，$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$为导出组$Ax=0$的基础解系。

例：求解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$$

解：

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2$，方程组有无穷多解。

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \end{cases}$$，取 $x_2 = x_4 = 0$，

得 $x_1 = x_3 = 1/2$，

得方程组的一个解 $\eta^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$，

对应的齐次方程组是 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$，

取 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

则基础解系是 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$，

于是所求通解为

$$x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \eta^*$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

例： 求解下列非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

解： 方程组的增广矩阵为

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因 $R(A) = R(\bar{A}) = 3 < 4$，所以线性方程组有无穷多解.

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

即

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \eta^* + c\xi_1$$

其中c为任意常数.

例：试讨论3个平面

$$x+2y+z=1,2x+3y+(a+2)z=3,x+ay-2z=0$$

的相互位置关系。

解：这3个平面的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(1,2,1),\vec{n}_2=(2,3,(a+2)),\vec{n}_3=(1,a,-2)$$

这三个向量互不平行（互相不成比例），故这3个平面互不平行。

联立这三个方程，每一个解都应当代表3个平面的一个交点。

$$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&(a-3)(a+1)&a-3\end{bmatrix}$$

例： 试讨论3个平面

$$x+2y+z=1, 2x+3y+(a+2)z=3, x+ay-2z=0$$

的相互位置关系。

$$\bar{\boldsymbol{A}} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{bmatrix}$$

(1) 当$a \neq 3$且$a \neq -1$时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3$（未知量个数），方程组有唯一解，故此时3个平面交于一点。

(2) 当 $a=3$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$，方程组有解且有无穷多解，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+2y=1-z} \\ \boldsymbol{-y=1-3z} \end{cases}$$

通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中c为任意实数。上述解集合表示过点$(3,-1,0)$，以$(-7,3,1)^T$为方向向量的空间直线，故此时3个平面相交于一条直线。

(3) 当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 2 < r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3$，方程组无解，故此时3个平面没有公共交点。又由于3个平面互不平行，故3个平面两两相交于一条直线。