仲英学业辅导中心出品

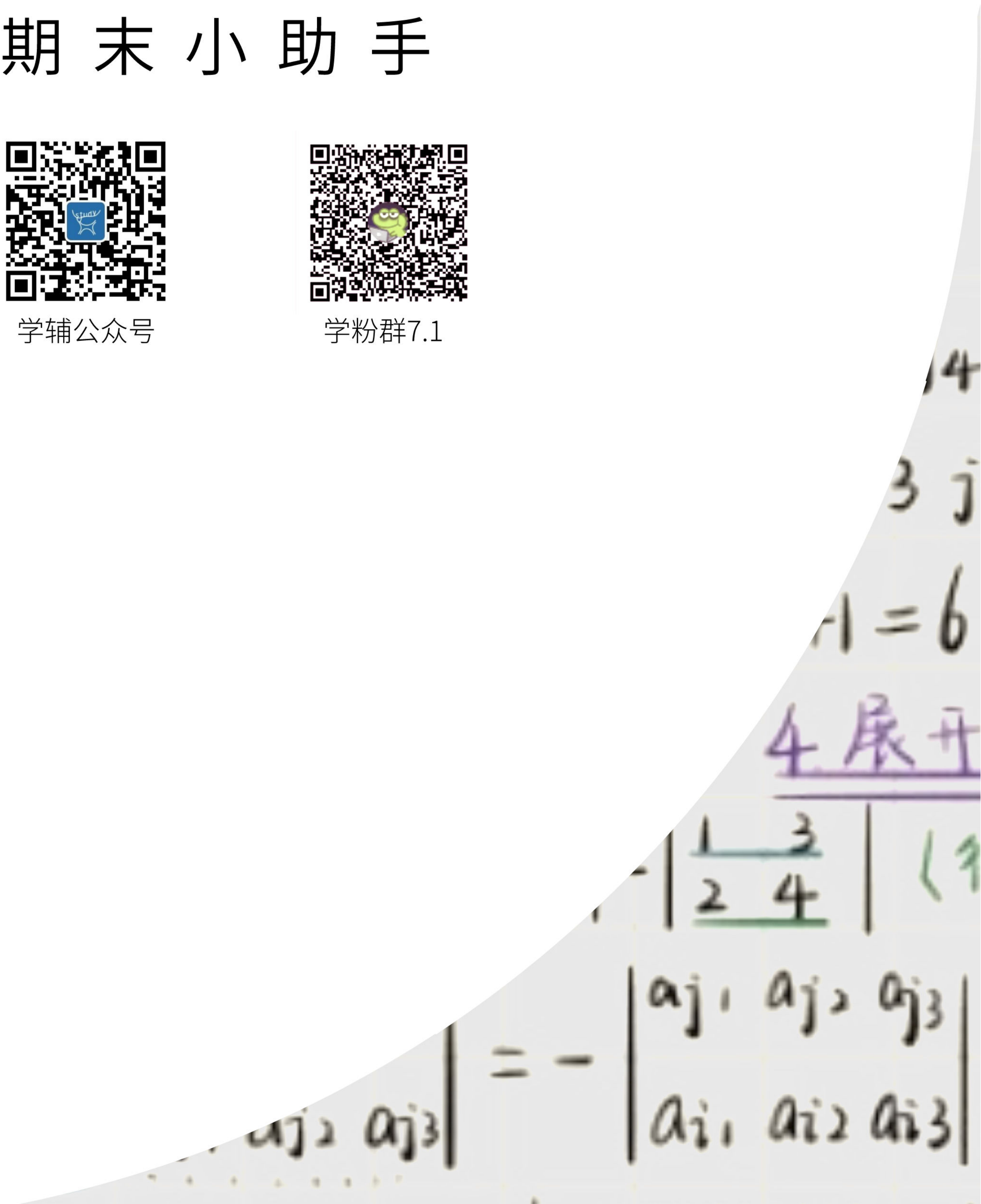
线性代数

2021秋季学期版

期 末 小 助 手

学辅公众号

学粉群7.1



前言

致各位亲爱的学辅资料读者：

万物冬藏待春来，时光即在弹指间。仲英学辅在平静又不平凡中度过了一年时光；脚下行程千里远，腹中贮书万卷多。仲英学辅工作人员们在大家的追梦路上，一如既往的送去了温暖。

本资料由仲英书院学业辅导中心的工作人员编写，对线性代数学习及考试内容进行了全面及详细的总结，列举典型例题，以帮助同学们夯实、巩固和提高。在此，郑重感谢各位编者同学的努力，可以使本资料顺利完成。由于时间精力限制，难免有疏漏之处，如果在阅读使用过程中发现错误，欢迎同学们反馈，我们会记录，并在下一版中予以修正。（反馈请邮件联系学辅邮箱：xjtuzyxf@163.com）

资料版次及编者信息：

2021 年版

编写人员：计算机 94 张文千、自动化 002 曹家熙、计算机 91 苏晗琛、
金禾 001 聂博佩、计算机 95 王鸿瑞、AI001 刘海若、
自动化 006 贾浚源、自动化 94 邓勇

排版人员：金融 001 徐思佳、越杰 001 曾云海、越杰 81 唐智亿

仲英学业辅导中心

2021 年 10 月 6 日

目录

第一章　行列式

1.1　行列式的定义与性质

1.1.1　行列式的基本性质

1. 行列式与其转置行列式相等, 即 $D = D^T$;
2. 互换行列式两行 (列) 的位置, 行列式的值反号;
3. 行列式 D 等于其任一行 (列) 元素分别与其对应的代数余子式乘积之和;
4. 行列式某一行 (列) 所有元素的公因子 k, 可以提到行列式符号的外面;
5. 若行列式的某一行 (列) 的元素都是两数之和, 那么行列式等于两个行列式的和;
6. 行列式某一行 (列) 加上另外一行 (列) 的 k 倍, 行列式值不变;
7. 若行列式 D 有两行 (列) 元素相等或成比例, 则 $D = 0$.

1.1.2　书后例题

(**A**)

1. 求解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

答案: $x_1 = -2$, $x_2 = 6$.

2. 任意改换行列式 D 的第 i 行元素和第 j 列元素, 而 D 的其他元素不变, 问 D 的 (i, j) 元素的代数余子式 A_{ij} 的值是否会改变?

答案: 不会.

解析: (i, j) 元素的代数余子式不包括第 i 行与第 j 列的元素.

3. 求行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\3&5&-8&9\\2&0&-4&2\\1&2&10&4\end{vmatrix}$$

的 $(3,4)$ 元素的余子式 M_{34} 及代数余子式 A_{34}.

答案: $M_{34}=104$，$A_{34}=-104$.

解析: $M_{34}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\3&5&-8\\1&2&10\end{vmatrix}=104$, $A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-104$.

4. 设有两个行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix},$$

不用具体计算, 说明 D_1 的第 4 行元素余子式之和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=D_2$.

解析: D_1 与 D_2 仅第四行元素不同, 故 D_1 与 D_2 第四行元素的代数余子式相同. 将 D_2 按第四行展开, 得 $D_2=(-1)\cdot(-1)^{4+1}\cdot M_{41}+(1)\cdot(-1)^{4+2}\cdot M_{42}+(-1)\cdot(-1)^{4+3}\cdot M_{43}+(1)\cdot(-1)^{4+4}\cdot M_{44}=M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$, M 是 D_2 的代数余子式, 也是 D_1 的代数余子式.

5. 计算下列行列式:

$$(1)\begin{vmatrix}2&1&4\\-4&3&7\\4&6&10\end{vmatrix};\qquad (2)\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\db&-dc&de\\fb&fc&-fe\end{vmatrix}.$$

答案: (1) -100; (2) $4abcdef$.

解析: 第一问按行列式定义直接展开计算即可. 第二问各行分别提出公因子 a, d, f, 各列分别提出公因子 b, c, e, 再按定义展开计算.

6. 计算下列 n 阶行列式:

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}; \qquad (2)\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

答案: (1) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$; (2) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$.

1.2　行列式的计算

1.2.1　重要方法

1. 行列式某一行 (列) 所有元素的公因子 k, 可以提到行列式符号的外面.
2. 若行列式的某一行 (列) 的元素都是两数之和, 那么行列式等于两个行列式的和.
3. 行列式某一行 (列) 加上另外一行 (列) 的 k 倍, 行列式值不变.

1.2.2　特殊行列式

1. 上、下三角行列式的值等于主对角线元素之积;
2. 范德蒙德行列式.

1.2.3　典型例题

一般行列式的求解, 利用降阶法化为上、下三角行列式.

例 1.2.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 10 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

答案: -2.

例 1.2.3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

答案: $[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

1.2.4 书后例题

1. 计算下列行列式:

$$(1)\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}; \qquad (2)\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(3)\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a-b & a & a \\ a & a & a+c & a \\ a & a & a & a-c \end{vmatrix}; \qquad (4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(5)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \qquad (6)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & x \\ 1 & x & 0 & x & x \\ 1 & x & x & 0 & x \\ 1 & x & x & x & 0 \end{vmatrix}.$$

答案: (1) $-2(x^3+y^3)$; (2) $1-x^2-y^2-z^2$; (3) b^2c^2;

(4) 160; (5) 40; (6) $4x^3$.

2. 证明:

$$(1)\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b);$$

$$(3)\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 计算下列行列式:

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix};\quad (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix};\quad (3)\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}.$$

答案: (1) -20; (2) -2;

(3) $abd(c-d)(d-b)(d-c)(c^2-a^2)$.

4. 计算下列 n 阶行列式:

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix};\qquad (2)\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix};$$

$$(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix};\qquad (4)\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix};$$

答案: (1) $(n-1)(-1)^{n-1}$;

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_i b^{b-1} + b^n$;

(3) $(-2)(n-2)!$;

(4) $a_1a_2a_3\cdots a_n(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$.

5. 利用递推公式计算行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}.$$

答案: $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

1.3 Cramer 法则

1.3.1 Cramer 法则

对于由 n 个方程、n 个未知量组成的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为未知量; a_{ij} 为第 i 个方程中未知量 x_j 的系数, $i,j=1,2,\cdots,n$; $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为常数项, 如果它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中, D_j 是将 D 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 依次用方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, n$ 替换后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_1 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_1 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

1.3.2　书后例题

1. 用 Cramer 法则求解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 + a_1^3 x_4 = 1, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 + a_2^3 x_4 = 1, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 + a_3^3 x_4 = 1, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 + a_4^3 x_4 = 1. \end{cases}$$,其中a_1, a_2, a_3, a_4为互不相同的常数.

答案: (1) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$;

(2) $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

2. 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

存在非零解, 试求 λ 的值.

答案: $\lambda = 1$.

5. 求 3 次多项式 $f(x)$, 使其满足: $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 16$.

答案: $f(x) = 7 - 5x^2 + 2x^3$.

1.4 第 1 章习题

1. **答案:** (1) 140; (2) 48; (3) $1, 2, 3$; (4) $\dfrac{a}{b}$; (5) $\lambda \neq 1$ 且 $\mu \neq 0$.

2. **答案:** (1) D; (2) A; (3) B.

3. **答案:** -105.

4. **答案:** (1) -18; (2) -142; (3) $1 + x^2 + y^2 + z^2$; (4) $6a^5$.

5. **答案:** $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

第二章　矩阵

2.1　知识点总结与剖析

1. 矩阵: 由数域 F 中的 $m\times n$ 个数排成的行列的矩形数表. 通常用大写字母表示矩阵, 小写字母表示其中元素.

矩阵运算:

a) 加减运算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

前提: 矩阵维数相同, 即同为 $m\times n$ 矩阵.

运算规则: 下标相同元素相加.

b) 数乘运算 $k\boldsymbol{A}$

运算规则: $\boldsymbol{A}$ 中每个元素均乘以 k.

c) 乘法运算 $\boldsymbol{AB}$

前提: $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同.

运算规则: $\boldsymbol{A}$ 中的第 i 行构成的行向量与 $\boldsymbol{B}$ 中的第 j 列构成的列向量相乘的到结果矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的 $\boldsymbol{C}_{ij}$ 元素.

d) 矩阵的转置 $\boldsymbol{A}^T$

运算规则: 将 $\boldsymbol{A}$ 中元素的行下标与列下表交换, 即 a_{ji} 为 $\boldsymbol{A}^T$ 中的第 j 行, 第 i 列个元素.

矩阵运算部分结论:

a) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$, 但二者可建立联系: $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}A$;

b) $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$;

c) $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\times\det(\boldsymbol{B})$.

2. 方阵的行列式: 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式 (各元素的位置不变) 称

为方阵的行列式, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det(\boldsymbol{A})$.

3. 伴随矩阵: 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 称行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各个元素的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 构成的矩阵的转置为伴随矩阵, 记作 $\boldsymbol{A}^*$ 或 $adj(\boldsymbol{A})$.

a) 性质 1：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}) * \boldsymbol{E}$;

b) 性质 2：若 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，则 $\det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}$.

4. 逆矩阵: 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果有 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{B}$ 方阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 记作 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

a) 定理: $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, 且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 有 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{\det(\boldsymbol{A})}$.

5. 分块矩阵的运算: 将子矩阵视为矩阵元素, 具体规则与矩阵运算相同.

6. 初等变换: 矩阵的初等列变换与初等行变换统称为矩阵的初等变换.

初等行 (列) 变换:

(1) 互换两行 (列); (2) 数乘两行 (列); (3) 倍加两行 (列).

矩阵等价: 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换化成 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行 (列) 等价, 记作 $A \cong B$.

a) 定理 1：对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换, 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 左乘一个相应的初等矩阵; 对 $\boldsymbol{A}$ 矩阵施行一次初等列变换, 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 右乘一个相应的初等矩阵.

b) 定理 2: 对于任一非零矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 都可通过有限次初等行变化把它化成阶梯形矩阵, 进一步可化为简化行阶梯形矩阵.

c) 定理 3: 任一可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 必可通过若干次初等行变换化成同阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$.

d) 定理 4: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \boldsymbol{A}$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积.

7. 矩阵的秩: 如果 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 的秩为零; 如果 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 中非零子式的最高阶数为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $R(\boldsymbol{A})$ 或 $r(\boldsymbol{A})$.

k **阶子式:** 在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中, 任取 k 行 k 列 ($k \leq m$,$k \leq n$), 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 不改变他们在中所处位置的次序而得到的 k 阶行列式, 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

a) 定理 1: 经过初等变换的矩阵其秩不变.

b) 定理 2: 若 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = r$, 则必存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}.$$

c) 结论: $r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, r(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, r(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, r(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$

2.2 精选例题

2.2.1 矩阵乘法与乘幂

例 2.1. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维向量, $\boldsymbol{\alpha}^T$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置. 若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$=____.

答案: 3.

法 *1*: 设 $\boldsymbol{\alpha} = (x, y, z)^T$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = x^2 + y^2 + z^2$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = 3$.

法 *2*: 由

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix};$$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ 为一个数, 所以 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = 3\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 故 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = 3$.

法 *3*: 直接利用结论, 若为行向量, 则为一个数, 其值为矩阵主对角线元素之和. 故直接将所给矩阵主对角线元素相加的值为 3.

注: 行列向量的乘积是矩阵运算中经常涉及到的内容, 法 *1* 为原理, 法 *2* 是常见的处理方法, 法 *3* 是结论, 当在解题过程中碰到有关行列向量乘积的问题时, 应试着往这方面想.

例 2.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵. 证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{O}\Longleftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

分析: 从右到左显然, 从左到右: $\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\rangle_{(i,i)}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0$, 所以 $a_{ik}=0,(k=0,1,2,\cdots,n)$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行全为 0, 同理可得其他行皆为 0, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

此题相当于找到一行数的平方和为零问题, 从而证明各个元素都是 0.

例 2.3 (课本题, $P_{46}T_{10}$)**.** (1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}(n=2,3,\cdots)$;

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]$,$\boldsymbol{\beta}=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$ 方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$, 求 $\boldsymbol{A}^n(n=2,3,\cdots)$.

答案:

(1) $\boldsymbol{O}$;

(2) $3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$.

分析: 见课本 P_{311}. (第二问用到行列向量相乘得一个数)

例 2.4. 设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{B}=(1,-1,1)$, 则 $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})^{2017}=$________.

解: 显然不能直接硬算, 应利用矩阵运算规则先做简化处理, 注意到 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T$ 是一个常数 2, 所以, $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B})^{2017}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T)^{2016}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=2^{2016}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$.

求幂的方法:

1) 归纳猜想, 计算几次后发现规律, 再用归纳法严格证明;

2) 若能分解成列行向量相乘的形式, 则利用结合律提出行列向量相乘的部分;

3) 若能分解成 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$($\boldsymbol{A}$ 为对角阵), 则中间的 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}$ 部分全部抵消, 转换成对角阵的幂, 再乘以两端的 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{P}^{-1}$, 这种方法是非常常见且有效的一种方法;

4) 分块对角阵求幂;

5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{G}$ 的幂便于计算, 且满足 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{F}$, 则可利用二项展式计算 $\boldsymbol{A}^n$.

2.2.2　方阵的行列式

例 2.5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=-2$, 将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3)$, 其中 $a_j(j=1,2,3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $\boldsymbol{j}$ 列, 令 $\boldsymbol{B}=(a_3-2a_1,3a_2,a_1)$, 则 $|\boldsymbol{B}|=$____.

答案: 6.

法 1: 将 $|\boldsymbol{B}|$ 拆成两个行列式之和, 得 $|\boldsymbol{B}| = |(a_3 - 2a_1, 3a_2, a_1)| = |(a_3, 3a_2, a_1)| - |(2a_1, 3a_2, a_1)| = 3|(a_3, a_2, a_1)| - 0 = -3|(a_1, a_2, a_3)| = -3|\boldsymbol{A}| = 6$.

法 2:

$$|\boldsymbol{B}| = |(a_1, a_2, a_3)\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}|\boldsymbol{A}| = -3|\boldsymbol{A}| = 6.$$

上述方法中方法 *1* 经常用到, 方法 *2* 与方法 *3* 等价, 方法 *3* 应重点掌握.

例 2.6. 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}, 2\boldsymbol{\gamma}_2, 3\boldsymbol{\gamma}_3, 4\boldsymbol{\gamma}_4]^T$, $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3, \boldsymbol{\gamma}_4]^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3, \boldsymbol{\gamma}_4, \boldsymbol{\beta}$ 均为 4 维行向量, 且已知 $|\boldsymbol{A}| = 8$, $|\boldsymbol{B}| = 1$, 计算行列式 $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|$.

答案: -4.

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ 2\boldsymbol{\gamma}_3 \\ 3\boldsymbol{\gamma}_4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \boldsymbol{\gamma}_3 \\ \boldsymbol{\gamma}_4 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \boldsymbol{\gamma}_3 \\ \boldsymbol{\gamma}_4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \boldsymbol{\gamma}_3 \\ \boldsymbol{\gamma}_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ 2\boldsymbol{\gamma}_2 \\ 3\boldsymbol{\gamma}_3 \\ 4\boldsymbol{\gamma}_4 \end{vmatrix} = -6|\boldsymbol{B}| = \frac{1}{4}|\boldsymbol{A}| - 6|\boldsymbol{B}| = -4.$$

单纯的矩阵运算或是行列式并不麻烦, 题型花样也不多, 但加上逆阵后, 特别是套上正交矩阵的马甲后题目就非常灵活了, 下面一道题是 13 年的一道期中试题 (并不是压轴题), 大家可以感受一下.

例 2.7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 *3* 阶方阵, $\det(\boldsymbol{A}) = 0.5$, 求 $\det((2\boldsymbol{A})^{-1}–5\boldsymbol{A}^*)$.

答案: -16.

分析: 此题要把握好伴随阵和逆矩阵的关系, 以及逆矩阵的行列式与其本身行列式的关系. 先通过 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$, 所求变成了 $\det(0.5\boldsymbol{A}^{-1}–2.5\boldsymbol{A}^{-1}) = (-2)^3\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = -8\times2 = -16$.

例 2.8. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正交矩阵 *(即 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$ 且为实矩阵)*, 满足 $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$, 求 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|$ 的值.

答案: 0.

分析: 首先, $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$ 与 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|$ 并不一定相等.

题目给了一个很弱的条件 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 但同时给了一个很强的条件 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是正交阵, 我们不妨从这里开始研究:

$\boldsymbol{A}$ 是正交阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$, 所以 $|\boldsymbol{A}|^2=1$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$. 同理 $|\boldsymbol{B}|=\pm 1$. 再看题目条件, $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 则可知 $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$ 异号, 一定是一个 1 一个 -1, 即 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-1$;

已知条件已经发掘完全, 剩下的就是建立已知与所求之间联系:

$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$ (课本 $P_{54}T_{11}$), 则有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{B}$, 两边同时取行列式得:

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|,(|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T|)$ 所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$, 所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

2.2.3　伴随与逆矩阵

例 2.9. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 证明: $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 均可逆, 并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

答案: $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$; $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}$.

分析: 对题目所给式子做恒等变形, 因式分解, 即可确定.

由 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 得: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$;

由 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 得: $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$, 整理后得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$;

所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}$.

例 2.10. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均为可逆方阵, 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$;

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$;

答案:

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \iff ((\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1})^{-1}=(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B})^{-1} \iff (\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}$ 因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆, 且上式显然成立, 得证;

(2) 证 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$:

$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}\rightarrow(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$ 由（*1*）$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$;

根据可逆方阵的逆是唯一的, 可知: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$.

例 2.11. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$, 证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 并求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

答案: $\boldsymbol{B}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})$

法 1: 利用条件 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{I}$ 可发现, $\boldsymbol{A}^3$ 与 $\boldsymbol{I}$ 齐次, 同理, $\boldsymbol{A}^4$ 与 $\boldsymbol{A}$ 齐次, $\boldsymbol{A}^5$ 与 $\boldsymbol{A}^2$ 齐次, 故 $\boldsymbol{A}$ 的代数多项式一定可用 $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2$ 表示.

若 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则一定存在 a,b,c 使得 $\boldsymbol{B}^{-1}=a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{I}$;

则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{I})$;

则:

$$\begin{cases} 2a-2b+c= & 0\\ 2b-2a-2c= & 0\\ 2b+2c-1= & 0\end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} a= & \dfrac{1}{10}\\ b= & \dfrac{3}{10}\\ c= & \dfrac{2}{5}\end{cases}$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{B}^{-1}=\dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})$.

法 2:

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})$, 将 $\boldsymbol{B}$ 分解, 证其因子可逆.

$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{I}$, $|A|\neq 0$, $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2$.

$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{I}^3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$ 且 $\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}$, 所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$, $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$.

$\boldsymbol{A}^3+8\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^3+(2\boldsymbol{I})^3=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=10\boldsymbol{I}$, 所以 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})$ 可逆, $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=\dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})$.

所以 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{B}^{-1}=\dfrac{1}{20}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}^2=\dfrac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})$.

例 2.12 (课本第 2 章习题, $P_{79}T_5$, 18 年期中)**.** 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $[(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A})^*]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=$

$2\boldsymbol{AB}+12\boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答案: $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$.

分析: 矩阵方程只用按照代数方程的解法分离出未知量, 再通过求逆阵求解即可.

化简: 由 $(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^*=|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^{-1}$ 得 $(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^*=\frac{|\boldsymbol{A}|}{8}\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}$,

故原方程化简为: $4\boldsymbol{ABA}^{-1}=2\boldsymbol{AB}+12\boldsymbol{I}$, 进一步化简得: $2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+6\boldsymbol{I}$,

所以 $\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$, $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix}$, 分块对角阵求逆阵得

$$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}.$$

例 2.13. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}_{4\times3}\neq\boldsymbol{O}$, 且满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 求常数 t 的值.

答案: -3.

法 1: 用反证法证明 $|\boldsymbol{A}|=0$:

假设 $|\boldsymbol{A}|\neq0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 又有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$, 两边同时右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 与题设矛盾, 故 $|\boldsymbol{A}|=0$;

法 2: 用线性方程组的观点证明 $|\boldsymbol{A}|=0$:

因为 $\boldsymbol{BA}=O$, 所以 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=O$, 又 $\boldsymbol{B}^T\neq O$, 所以线性方程组 $\boldsymbol{A}^Tx=O$ 有非零解, 所以 $|\boldsymbol{A}|=0$;

计算 $|\boldsymbol{A}|$ 得 $7t+21=0$, 解得 $t=-3$.

例 2.14. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n\times 1$ 非零矩阵, 证明: (1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=1$; (2) $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

证:

(1) 因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数, 则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$, 显然, 当 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$ 时, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$; 而当 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 时, 有 $(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}-1)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\boldsymbol{O}$, 又 $\boldsymbol{\alpha}$ 非零, 则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\neq\boldsymbol{O}$(只要设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 计算可知) 故必有 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$, 所以充要条件成立.

(2) 由 (1) 知, 当 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$ 时, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$, 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\boldsymbol{O}$, 由 (1) 中运算可知, 此时必有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 与 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$ 矛盾, 故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

证明矩阵可逆的一般思路:

(1) 证明行列式不为 0;

(2) 证明满秩;

(3) 找到一个矩阵, 使与之乘积为 $k\boldsymbol{I}$;

(4) 反证法;

(5) 看能否写成初等阵之积等.

求逆矩阵的一般方法:

(1) 初等行变换;

(2) 定义法求伴随, 化逆阵;

(3) 凑配法;

(4) 分块对角公式.

例 2.15 (课本 $P_{55}T_3$)**.** 设实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times 4}$ 满足: (1) $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}$, 其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式; (2) $a_{44}=-1$.

(1) 求 $|\boldsymbol{A}|$; (2) 证明: $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$.

答案: (1) 1; (2) 详见分析.

分析: (1) 由 $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}$ 得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*)^T$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^*|$, 即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^3$, 故 $|\boldsymbol{A}|=0,1,-1$;

将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第四行展开, 得 $|\boldsymbol{A}|=a_{41}^2+a_{42}^2+a_{43}^2+1\geq 1$, 故 $|\boldsymbol{A}|=1$.

（2) 由 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*)^T$ 得 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^*$, 两边同乘 $\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$.

例 2.16 (课本 $P_{79}1.(5)$)**.** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$, 若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数, 求 a_{11}.

答案: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

分析: $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$, 则 $|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^*|=\boldsymbol{A}^{3-1}=\boldsymbol{A}^2$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=0,1$, 当满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$ 时, 有 $a_{ij}=\boldsymbol{A}_{ij}$, 其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 a_{ij} 的代数余子式;

将 $|\boldsymbol{A}|$ 按第一行展开, 得 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$, 得 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$;

所以 $|\boldsymbol{A}|=1$, 得 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2=1$, 所以 $a_{11}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2.2.4　矩阵的秩

例 2.17. 设线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的增广矩阵为

$$\bar{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & 4\\ -1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda^2\\ 1 & -1 & 2 & \vdots & -4\end{bmatrix},$$

求 $r(\boldsymbol{A})$ 及 $r(\bar{\boldsymbol{A}})$.

分析: 这是一道讨论思想很明显的题目. 大家都知道对于求秩很基础的一个方法就是求化简为行阶梯型.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & 4\\ -1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda^2\\ 1 & -1 & 2 & \vdots & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & 4\\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & \vdots & 4+\lambda^2\\ 0 & -2 & 2-\lambda & \vdots & -8\end{bmatrix},$$

下一步应当是用第二行消去第三行、第二列的 2, 此时要注意到是要判断 λ 与 -1 的关系. 我们先假设可以消去继续往下写, 最后 $\lambda=-1$ 的情况再单独讨论即可.

解答: 由题意得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & 4\\ -1 & \lambda & 1 & \vdots & \lambda^2\\ 1 & -1 & 2 & \vdots & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & 4\\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & \vdots & 4+\lambda^2\\ 0 & -2 & 2-\lambda & \vdots & -8\end{bmatrix}$$

当 $\lambda\neq-1$ 时

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & 4\\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & \vdots & 4+\lambda^2\\ 0 & -2 & 2-\lambda & \vdots & -8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & \vdots & 4\\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & \vdots & 4+\lambda^2\\ 0 & 0 & 4-\lambda & \vdots & -8+\dfrac{8+2\lambda^2}{1+\lambda}\end{bmatrix}$$

故当 $\lambda \neq 4$ 且 $\lambda \neq -1$ 时, $r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3$;

当 $\lambda = -1$, $r(\boldsymbol{A}) = 2$, $r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 3$;

当 $\lambda = 4$, $r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = 2$.

此类题是比较常见的一类题型, 考试中出现的概率较大. 考察同学们的矩阵的秩、增广系数阵等基础知识以及基础的分类讨论思想, 属于难度不大的常考题型.

例 2.18 (13 年期中压轴题)**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, $r(\boldsymbol{A}) = r$, 证明: 必存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 及秩为 r 的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$.

分析: $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 秩为 r, 则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 等价, $\boldsymbol{A}$ 必可表示为 $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{B}$ 即为题目所给满秩方阵,

故关键在于找到这样的 $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{C}$, 且说明使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$, 将 $\boldsymbol{C}$ 满秩分解为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$ 的形式, 若 $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{C}$, 显然 $\boldsymbol{C}$ 应有 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$;

设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$, 则现在的工作是找到这样一个 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{N}$, 和 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{X}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{X}^{-1}$, 使得 $\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{N}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{X}^{-1}$,

注意到当 $\boldsymbol{NX} = \boldsymbol{I}_n$, 上式刚好化为 $\boldsymbol{M}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$,

所以取 $\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{Q}$, 构造出来的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足题意.

解答: 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$;

令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$, 显然满足 $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{C}$;

且有 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}$, 找到了这样的 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$, 命题得证.

例 2.19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 阶矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times m$ 阶矩阵, 证: $|\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}|$.

解: 由分块矩阵乘法得,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix},$$

两边取行列式得 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}|$.

2.3　习题练习

1. 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为零, 求证: $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵的行列式为零.

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的行列式分别等于 $2, -3$, 求 $\det(-2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1})$.

3. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{I}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足方程 $\boldsymbol{AXA} + \boldsymbol{BXB} = \boldsymbol{AXB} + \boldsymbol{BXA} + \boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

6. 已知 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足方程 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{I}$, 求 $\boldsymbol{B}$.

答案:

1. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵也为零矩阵, 其行列式为零; 如果 $\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵, 那么 $\boldsymbol{AA}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$. 现在假设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵的行列式不为零, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵可逆, 上式两端同时右乘 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵的逆之后得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 与 $\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵矛盾, 所以此种情况下 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵的行列式仍为零, 证毕.

2. $-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$, 注意 -2 提取出来之后应带 n 次方.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 先根据 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵的行列式为 8 得出 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 2, 据此可以求出 $\boldsymbol{A}$ 的逆, 进而得到 $\boldsymbol{A}$, 最后得到 $\boldsymbol{B}$.

第三章 几何向量及其应用

3.1 向量的运算

3.1.1 知识点

向量的线性运算包括加法和数乘。(加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，数乘：$\lambda\boldsymbol{a}$)

向量的三种积包括数量积、向量积和混合积，具体如下：

(1) 数量积（点积、内积，二维情形，更高维同理）：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cdot\cos\theta=\|\boldsymbol{a}\|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=\|\boldsymbol{b}\|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=x_a x_b+y_a y_b$$

(2) 向量积（叉积、外积）：

结果的方向满足右手定则，结果的模在数值上等于由两向量确定的平行四边形的面积，该运算满足反交换律。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$$

(3) 混合积：三个向量其中两个先求叉积，再与另外一个作点积。

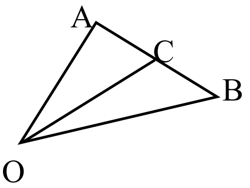
$$[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_{\boldsymbol{a}} & y_{\boldsymbol{a}} & z_{\boldsymbol{a}}\\ x_{\boldsymbol{b}} & y_{\boldsymbol{b}} & z_{\boldsymbol{b}}\\ x_{\boldsymbol{c}} & y_{\boldsymbol{c}} & z_{\boldsymbol{c}}\end{vmatrix}$$

互换两个向量的位置，结果反号。

3.1.2 典型例题

例 1

设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$分别为空间上三点$A,B,C$的向径，证明：点$C$落在线段$AB$上的充要条件是存在数$\lambda \in [0,1]$，使得



$$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + (1-\lambda)\boldsymbol{b}$$

证： 当C在线段的两端时，$\lambda = 0$ 或 1

当C在线段的内部时，设$\lambda = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{AB}}$，则$\overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{AB}$,

而$\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}, \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

故$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

即$\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + (1-\lambda)\boldsymbol{b}$

一般地，若λ为实数，则点C在直线AB上。

思路： 先写出$\overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{AB}$，再一步一步推导即可。

例 2

设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = 2$，则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}) =$ ______。

解：

$$\begin{aligned}
&[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
&= [(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
&= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
&= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = 2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) = 4
\end{aligned}$$

思路： 先利用向量三种积的运算规则对式子进行化简，再依据向量与本身的向量积为零向量，向量与其他向量先进行向量积再与其本身进行数量积为 0 等性质对式子进行进一步化简即可。

3.2 向量之间的关系

3.2.1 知识点

两向量共线的充要条件：

$$\boldsymbol{a}\text{与}\boldsymbol{b}\text{共线} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\boldsymbol{R},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}) \Leftrightarrow k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}(k_1,k_2\text{不全为 }0)$$

三向量共面的充要条件：

$$\boldsymbol{a}、\boldsymbol{b}、\boldsymbol{c}\text{共面} \Leftrightarrow \text{存在不全为零的}k_1、k_2、k_3\text{，使得}k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

特别地，当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为三维向量时，充要条件为存在不全为零的k_1、k_2、k_3，使得

$$\begin{cases}x_{\boldsymbol{a}}k_1+y_{\boldsymbol{a}}k_2+z_{\boldsymbol{a}}k_3=0\\x_{\boldsymbol{b}}k_1+y_{\boldsymbol{b}}k_2+z_{\boldsymbol{b}}k_3=0\\x_{\boldsymbol{c}}k_1+y_{\boldsymbol{c}}k_2+z_{\boldsymbol{c}}k_3=0\end{cases}$$

即行列式$\begin{vmatrix}x_{\boldsymbol{a}} & y_{\boldsymbol{a}} & z_{\boldsymbol{a}}\\x_{\boldsymbol{b}} & y_{\boldsymbol{b}} & z_{\boldsymbol{b}}\\x_{\boldsymbol{c}} & y_{\boldsymbol{c}} & z_{\boldsymbol{c}}\end{vmatrix}=0$，亦即混合积$[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}]=0$.

两向量垂直的充要条件：

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{夹角为}\frac{\pi}{2}$$

3.2.2 典型例题

例 3

若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面。

解： 证明$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面，只需证明其混合积等于 0。

在原等式右乘一个$\boldsymbol{c}$，得$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，

其中$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$。

故$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{0}$，故得证。

思路： 运用三向量共面充要条件。

3.3 空间的平面与直线

3.3.1 知识点

1.平面的表示形式：

（1）点法式：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

过点(x_0,y_0,z_0)，法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

（2）一般式：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$

（3）截距式：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

在x,y,z轴上的截距依次为a,b,c。（截距式不能表示与坐标轴平行的平面）

（4）参数方程式：

$$\begin{cases} x=x_0+sL_1+tL_2 \\ y=y_0+sM_1+tM_2, \quad (-\infty<s<+\infty,-\infty<t<+\infty) \\ z=z_0+sN_1+tN_2 \end{cases}$$

表示过点(x_0,y_0,z_0)，且向量$(\mathrm{L}_1,M_1,N_1),(L_2,M_2,N_2)$为该平面内不共线的两个向量。（参数方程形式基本不用）

2.空间直线的表示形式：

对于过点(x_0,y_0,z_0)，方向向量为(l,m,n)的直线

（1）参数方程：

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \quad (-\infty<t<+\infty) \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

（2）对称式方程：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

该式表示一种比例形式，而不是除式。若分母为 0，表示分子为 0。

（3）一般式方程：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

表示两个平面的交线，只有两个平面方程表示的平面相交时，上式表示直线。（可通过求两平面法向量的矢量积来求直线的方向向量）

3.平面之间的位置关系

对于两平面：

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\,, \qquad \pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

其法向量为：

$$n_1 = (a_1, b_1, c_1), n_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

有下列关系：

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n_1} \parallel \boldsymbol{n_2}, \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n_1} \perp \boldsymbol{n_2}$$

4.直线之间的位置关系

对于直线：

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

线上两点：

$$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$$

两直线的方向向量：

$$\boldsymbol{n_1} = (l_1, m_1, n_1), \boldsymbol{n_1} = (l_2, m_2, n_2)$$

两者共面$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}$与 $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}$共面；两者异面$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}$与 $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}$异面。

5.平面与直线的位置关系

一条直线L与L在平面π上的投影直线的夹角φ称为直线L与π的夹角($\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)。设直线方向向量为$\boldsymbol{a}$，平面法向量为$\boldsymbol{n}$，则

$$sin\varphi = |cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{n}\|}$$

$\varphi = 0$,则L与π平行或L在π内；

$\varphi \neq 0$,则L与π相交。

特别地，若$\varphi = \frac{\pi}{2}$，则L与π垂直。

注：绝大多数的空间平面与直线之间的关系问题，都是通过转化为他们的法向量和方向向量的关系来求解的。

3.3.2 典型例题

例 4

已知两条直线L_1:$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$和$L_2$:$\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$，试求过$L_2$且平行于$L_1$的平面方程

分析：平面与已知直线平行或直线在平面内，则平面的法向量与两直线的方向向量垂直。

解：设所求平面的法向量$\boldsymbol{n} = (a,b,c)$ ，L_1的方向向量$\boldsymbol{n_1} = (1,0,-1)$，$L_2$的方向向量$\boldsymbol{n_2} = (2,1,1)$。则$\mathrm{n} \perp \mathrm{n}_1, n \perp n_2$,平面过$L_2$上的点$(-2,1,0)$。

取法向量

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} = (1,-3,1)$$

则平面方程为

$$x - 3y + z = -5$$

注：该问题也可用平面束解决。

另解：过L_2的平面束为

$$(x - 2y + 4) + \lambda(y - z - 1) = 0$$

化简得

$$x + (\lambda - 2)y - \lambda z = \lambda - 4$$

由L_1的方向向量垂直于平面束的法向量解得 $\lambda = -1$

因此所求平面方程为

$$x-3y+z=-5$$

例 5

求两平面$2x-y+z=7$和$x+y+2z=11$所成二面角的平分面方程。

分析：直接向已知直线引垂线并不方便，可以考虑使用两平面相交来求。

解：设$P(x,y,z)$为平分面上任意一点，则P到两平面距离相等，因此

$$\frac{|2x-y+z-7|}{\sqrt{6}}=\frac{|x+y+2z-11|}{\sqrt{6}}$$

即

$$2x-y+z-7=\pm(x+y+2z-11)$$

因此平分面方程为

$$x-2y-z+4=0\text{ 或 }x+z-6=0$$

例 6

直线L过点$P(2,1,3)$，且与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$垂直相交，求$L$的方程。

分析：直接向已知直线引垂线并不方便，可以考虑使用两平面相交来求。

解：过已知直线的平面束为

$$(2x+3y+5)+\lambda(y+2z-1)=0$$

代入P的坐标，解得

$$\lambda=-1$$

所以该平面为

$$2x-4y-2z+6=0$$

再求过P的已知直线法平面方程法向量为$(3,2,-1)$，过点P，由此得到法平面方程

$$3x+2y-z-5=0$$

解得直线一般式方程

$$\begin{cases} x-2y-z+3=0 \\ 3x+2y-z-5=0 \end{cases}$$

例 7

求过$P_0(-1,0,4)$与平面$3x-4y+z-10=0$平行且又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程。

分析：求出已知直线和平行平面的交点，就可解得直线方向向量，从而得出直线方程。

解：已知过P_0且与已知平行的平面方程：

$$3(x+1)-4y+z-4=0$$

已知直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=2t \end{cases}$$

将其代入平面方程得

$$3t-12-4t+2t-4=0$$

解得

$$t=16$$

直线过另一点(16,19,32)，直线方向向量为$\boldsymbol{l}=(16,19,28)$.

所以直线方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$$

例 8

证明：直线$L_1: x=y=z-4, L_2: -x=y=z$异面；求两直线间的距离，并求出与$L_1$和$L_2$都相交的直线方程。

分析：任取L_1,L_2上两点P_1,P_2，通过直线方向向量$\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2$和$\overrightarrow{P_1P_2}$混合积判断是否异面。

解：由题意得$\boldsymbol{l}_1=(1,1,1),\boldsymbol{l}_2=(-1,1,1)$，取$P_1(0,0,4),P_2(0,0,0)$，则$\overrightarrow{P_1P_2}=(0,0,-4)$。

混合积$[\boldsymbol{l}_1 \quad \boldsymbol{l}_2 \quad \overrightarrow{P_1P_2}]=-8\neq 0$，故$L_1,L_2$异面。

L_1,L_2间距$d=\frac{\|[\boldsymbol{l}_1 \quad \boldsymbol{l}_2 \quad \overrightarrow{P_1P_2}]\|}{\|\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2\|}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$。

公垂线L_3与$\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=(0,2,-2)$平行，设其方向向量为$\boldsymbol{l}_3=(0,1,-1)$。

由L_1, L_3确定平面法向量$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_3 = (-2,1,1)$，平面为$-2x + y + z - 4 = 0$。

由L_2, L_3确定平面法向量$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{l}_3 = (-2,-1,-1)$，平面为$-2x - y - z = 0$。

求得直线一般式方程为$\begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

例 9

求常数k的值，使得下列三个平面过同一直线，并求此直线的对称式方程。（直线如下）

$$\pi_1: 3x + 2y + 4z = 1;\quad \pi_2: x - 8y - 2z = 3;\quad \pi_3: kx - 3y + z = 2$$

解：平面π_1、π_2的交线为

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1 \\ x - 8y - 2z = 3 \end{cases}$$

令$x = 0$得

$$\begin{cases} 2y + 4z = 1 \\ -8y - 2z = 3 \end{cases}$$

解得直线上一点为$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$。

该直线的方向向量为平面π_1、π_2法向量的外积向量，即

$$(3,2,4) \times (1,-8,-2) = (28,10,-26) = 2(14,5,-13)$$

所以交线L的对称式方程为

$$\frac{x}{14} = \frac{y + \frac{1}{2}}{5} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-13}$$

L的方向向量与π_3法向量垂直则

$$(14,5,-13) \cdot (k,-3,1) = 0$$

解得$k = 2$。经验证，$k = 2$时π_3通过L，满足题意。

所以$k = 2$，对称式方程为

$$\frac{x}{14} = \frac{y + \frac{1}{2}}{5} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-13}$$

另解：利用平面束的方法求k的值。

设

$$\pi_3: 3x + 2y + 4z - 1 + \lambda(x - 8y - 2z - 3) = 0$$

即

$$(3 + \lambda)x + (2 - 8\lambda)y + (4 - 2\lambda)z = 1 + 3\lambda$$

其系数与$\pi_3: kx - 3y + z = 2$对应成比例。

则

$$\frac{3+\lambda}{2} = \frac{2-8\lambda}{-3} = \frac{4-2\lambda}{1} = \frac{1+3\lambda}{2}$$

解得$k = 2, \lambda = 1$。

可通过解 1 的方法求得交线的对称式方程可写为

$$\frac{x}{14} = \frac{y+\frac{1}{2}}{5} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-13}$$

总结：本章的主要内容比较简单，概念容易理解，考试形式比较固定，题目难度较小。前面有关向量概念和计算是基础，后面的空间平面直线主要应用向量的知识来处理。这些向量的概念在之后的章节中内涵会有所延伸，不能仅仅把它当做有向线段等事物。此外，向量积只针对三维向量。

3.4 第三章练习题

（一）基础题

1. 已知$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,则$\vec{a}\times\vec{b}=$

分析：题意是将$\vec{a}\times\vec{b}$用其他形式表示，只要将$\vec{c}$移到等式右侧再等式两侧同时叉乘$\vec{b}$，最后进行化简即可。

解：$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}=-\vec{c}\times\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$

2. 设向量$\boldsymbol{a_1}$与$\boldsymbol{a_2}$不共线，又$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a_1}-2\boldsymbol{a_2}$,$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a_1}+3\boldsymbol{a_2}$,$\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a_1}-5\boldsymbol{a_2}$，证明：$ABD$三点共线。

分析：只要证明$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$方向相同即可。

证明：$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a_1}-2\boldsymbol{a_2}=\overrightarrow{AB}$

则$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$方向相同，

即ABD三点共线。

3. 直线L_1:$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$与直线$L_2$:$\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$之间的关系为？

分析：先求出两直线的各自的一个方向向量，再观察计算两向量关系

解：直线L_1的一个方向向量$\overrightarrow{L_1}=(1,2,-1)\times(-2,1,1)=(3,1.5)$

直线L_2的一个方向向量$\overrightarrow{L_2}=(3,6,-3)\times(2,-1,-1)=(-9,-3,-15)=-3\overrightarrow{L_1}$

因此直线L_1平行于直线L_2.

4. 求以$A(1,-1,1),B(-1,0,2),C(2,-2,1)$为顶点的三角形面积，并求$AB$边上的高。

分析：通过向量积来求面积，进而求高。

解：$\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right\| = \sqrt{3} = \|\overrightarrow{AB}\|h = 2S$

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. 求以$A(3,0,0), B(0,3,0), C(0,0,2), D(4,5,6)$为顶点的四面体的体积。

分析：利用混合积的几何意义。

解：

$$V_{A-BCD} = \frac{1}{6}V_{平行六面体} = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}\quad \overrightarrow{AC}\quad \overrightarrow{AD}]| = 15$$

6. 已知向量$\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{a} = (1,1,-1)$平行，且$\boldsymbol{b}$与$z$正向的夹角为锐角，求$\boldsymbol{b}$方向余弦。

分析：向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的方向相反。

解：向量$\boldsymbol{b}$的方向与$\boldsymbol{n} = (-1,-1,1)$一致，则方向余弦为

$$\boldsymbol{b^0} = \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

7. 求过原点且与直线$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$及$x + 1 = \frac{y+2}{2} = z - 1$都平行的直线。

分析：平面过原点则平面的形式为$Ax + By + Cz = 0$，其法向量与直线的方向向量垂直。

解:

$$\boldsymbol{l_1} = (0,1,1), \boldsymbol{l_2} = (1,2,1)$$

则$\boldsymbol{l_1} \times \boldsymbol{l_2} = (-1,1,-1)$

平面方程为$x - y + z = 0$.

8. 求平行于平面$5x - 14y + 2z + 36 = 0$且与之距离为 3 的平面。

分析：利用平面间距离公式。

解：设平面为$5x - 14y + 2z + m = 0$

则

$$\frac{|m-36|}{\sqrt{5^2+(-14)^2+2^2}}=3$$

解得$m=-9$或 81.

故平面方程为$5x-14y+2z-9=0$或$5x-14y+2z+81=0$.

9. 求过点$(3,4,-2)$且与坐标轴截距相等的平面。

分析：利用截距式。

解：设截距为a,则平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$$

带入已知点得$a=5$

所以平面方程为$x+y+z=5$.

10. 设平面S过 3 点$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$。直线L过原点，与S的夹角为$\frac{\pi}{4}$，且位于平面$x=y$上，求直线L的方程。

解：平面方程为$x+y+z=1$，其法向量$\boldsymbol{n_1}=(1,1,1)$. 平面$x=y$的法向量$\boldsymbol{n_2}=(1,-1,0)$

设直线的方向向量$\boldsymbol{l}=(a,b,c)$

则

$$\begin{cases}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n_2}=0\\ \dfrac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n_1}}{\|\boldsymbol{l}\|\|\boldsymbol{n_1}\|}=\sin\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

取$\boldsymbol{l}=\left(1,1,4\pm3\sqrt{2}\right)$

直线方程为

$$x=y=\frac{z}{4\pm3\sqrt{2}}$$

11. 设有直线L_1:$\begin{cases}x-y=3\\3x-y+z=1\end{cases}$和直线$L_2$:$x+1=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$，点$M$:$(1,0,-1)$.

（1）求L_1的对称式方程

（2）求M到L_1的距离

（3）求L_2到L_1的距离

分析：主要利用公式求解。

解：

（1）可取点$(0,-3,-2)$,方向向量为$(1,1,-2)$

$$\frac{\mathrm{x}}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{-2}$$

（2）利用点到直线的距离公式，取$P:(0,-3,-2)$,方向向量$\boldsymbol{l_1}=(1,1,-2)$

$$d=\frac{\left\|\overrightarrow{PM}\times\boldsymbol{l_1}\right\|}{\|\boldsymbol{l_1}\|}=\frac{\sqrt{93}}{3}$$

（3）直线L_2的方向向量$\boldsymbol{l_2}=(1,-2,2)$，点$N:(-1,1,0)$

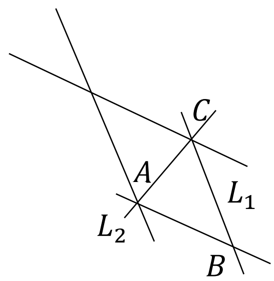
则

$$d=\frac{\left|\left[\boldsymbol{l_1}\quad\boldsymbol{l_2}\quad\overrightarrow{MN}\right]\right|}{\|\boldsymbol{l_1}\times\boldsymbol{l_2}\|}=\frac{20}{\sqrt{29}}$$

12. 设矩阵$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$是满秩的，则直线$L_1$:$\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$与直线$L_2$:$\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$（ ）

A．相交于一点 B．重合 C．平行但不重合 D．异面

解：点$(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2),(a_3,b_3,c_3)$记为$A,B,C$.



则L_1过点C且方向向量为$\overrightarrow{AB}$；L_2过点A且方向向量为$\overrightarrow{BC}$

而矩阵$\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$是满秩的，即$A,B,C$不在同一直线上

所以两直线相交于一点。

13. 求过点$(1,2,3)$且与直线$L:x-1=y=1-z$垂直相交的直线方程。

分析：先设交点再求解，也可考虑用平面束来求解。

解：直线的一个方向向量为$(1,1,-1)$,设交点为(x,y,z)，则该点指向交点的向量为$(x-$

$1, y-2, z-3)$，该向量与直线L垂直，因此$(x-1, y-2, z-3)\times(1,1,-1)=0$，解得$(x,y,z)=(1,0,1)$,所以$(x-1,y-2,z-3)=(0,-2,-2)$，所以直线方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$$

另解：过已知直线的平面束为$x-1-y+\lambda(y+z-1)=0$，带入点(1,2,3)，得$\lambda=\frac{1}{2}$，所以该平面为$2x-y+z=3$，其法向量为$(2,-1,1)$。

而所求的直线的方向向量与平面法向量垂直且与直线L垂直

则利用向量积得所求直线的方向向量为$(0,1,1)$

则直线方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$$

拓展：已知一直线的对称式方程求通过该直线的平面束方法：将对称式方程分开写为两个等式，将$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$化为$b(x-x_0)-a(y-y_0)+\lambda(c(y-y_0)-b(z-z_0))=0$，该式即为所要求的平面束方程。

14. 设有直线L_1:$\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-6}{-4}$和$L_2$:$\begin{cases} x-z=9 \\ y+4z=-17 \end{cases}$，试判断这两条直线的位置关系。

若共面，求它们所确定的平面方程；若还相交，求交点。

分析：先看方向向量，判断平行；之后联立看是相交还是异面。

解：L_1的方向向量$\boldsymbol{l_1}=(2,3,-4)$，$L_2$的方向向量$\boldsymbol{l_2}=(1,-4,1)$，两直线不平行。

联立可得方程有解$(3,7,-6)$.

即两者相交且交于点$(3,7,-6)$.

它们确定的平面的法向量垂直于$\boldsymbol{l_1}\boldsymbol{l_2}$.

求得一法向量为$\boldsymbol{l_1}\times\boldsymbol{l_2}=(13,6,11)$.

则平面方程为$13(x-3)+6(y-7)+11(z+6)=0$.

（二）提高题

1. （1）证明：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

（2）证明：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

（3）证明：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$.

分析：（1）拉格朗日公式；（2）根据前者推导而来；（3）称作雅克比恒等式。

证明：

（1）假设$\boldsymbol{a}=(a,b,c),\boldsymbol{b}=(d,e,f),\boldsymbol{c}=(g,h,i)$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a&b&c\\ei-fh&fg-di&dh-eg\end{vmatrix}$$

$$=(bdh+cdi-beg-cfg\quad aeg+cei-adh-cfh\quad afg+bfh-adi-bei)$$

$$=(ag+bh+ci)(d\quad e\quad f)-(ad+be+\mathrm{cf})(g\quad h\quad i)=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

（2）在（1）的结论将$\boldsymbol{b}$换为$\boldsymbol{d}$，并在两端同点乘$\boldsymbol{b}$，得到

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

同时

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c})]\cdot\boldsymbol{b}&=[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}\quad\boldsymbol{b}]\\&=[\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}]\\&=[\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\end{aligned}$$

故原式成立。

（3）将（1）中的轮换式子相加即可。

2.　（1）已知$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MA}$，将$\overrightarrow{MP}$绕$\overrightarrow{MA}$右旋角度$\theta$得$\overrightarrow{MP_1}$，记$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{MA}}{\|\overrightarrow{MA}\|}$，试用$\boldsymbol{e},\overrightarrow{MP},\theta$表示出$\overrightarrow{MP_1}$。

（2）设O,A,P是三个不同的点，将$\overrightarrow{OP}$绕$\overrightarrow{OA}$右旋角度θ得$\overrightarrow{OP_1}$，记$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$，试用$\boldsymbol{e},\overrightarrow{OP},\theta$表示出$\overrightarrow{OP_1}$。

分析：先建立 3 个基底，再利用坐标的旋转公式。

解：

（1）以$\overrightarrow{MP}$方向的单位向量为x轴正方向，记$\boldsymbol{i}=\frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|}$，$\boldsymbol{e}$为$z$轴正方向，则$y$轴正方向为

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}\times\frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|}$$

其中$\overrightarrow{MP}=\|\overrightarrow{MP}\|\boldsymbol{i}$，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP_1}&=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\overrightarrow{MP}\|\\ 0\end{bmatrix}[\boldsymbol{i}\quad\boldsymbol{j}]\\ &=\cos\theta\,\overrightarrow{MP}+\sin\theta\,(\boldsymbol{e}\times\overrightarrow{MP}).\end{aligned}$$

（2）设P到OA的垂足为M，则

$$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP_1}$$

而$\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$

将$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}$带入（1）的结果并注意到$\boldsymbol{e}\times\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{0}$，得

$$\overrightarrow{MP_1}=(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})\cos\theta+(\boldsymbol{e}\times\overrightarrow{OP})\sin\theta$$

联立得

$$\overrightarrow{OP_1}=(1-\cos\theta)(\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}+\cos\theta\ \overrightarrow{OP}+\sin\theta\,(\boldsymbol{e}\times\overrightarrow{OP}).$$

第四章　$\boldsymbol{n}$ 维向量与线性方程组

4.1　知识点总结与例题详解

定理 4.1. 可将 n 元线性方程组写成矩阵形式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵, $\bar{\boldsymbol{A}}$ 为增广矩阵. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\iff \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)<\boldsymbol{n}$. 当 $b\neq 0$ 时存在无解情形 $\boldsymbol{r}\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)>\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$.

例 4.1. 求解齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&5&1&-1\\-3&-8&a-1&1\\3&7&4&b-1\end{bmatrix}.$$

解 将 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&5&1&-1\\-3&-8&a-1&1\\3&7&4&b-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&a-2&0\\0&0&0&b+1\end{bmatrix},$$

$a\neq 2$, $b\neq -1$ 时, 方程有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;

$a=2,b\neq -1$ 时, 方程解为 $\boldsymbol{x}=c\,(-13,5,1,0)^T$;

$a\neq 2,b=-1$ 时, 方程解为 $\boldsymbol{x}=c\,(3,-1,0,1)^T$;

$a=2,b=-1$ 时, 方程解为 $\boldsymbol{x}=c\,(-13,5,1,0)^T+c\,(3,-1,0,1)^T$.

定义 4.2 (封闭). 一般地, 如果数的集合 F 中任何两个数作某一运算的结果都仍是 F 中的数, 则称数集 F 对这个运算封闭.

定义 4.3 (数域). 如果集合 $K\subseteq\mathbb{C}$ 满足以下条件, 则称 K 是一个数域:

(1) $0,1 \in K$;

(2) 若 $a,b \in K$, 则 $a+b \in K$, $ab \in K$;

(3) 若 $a \in K$, 且 $a \neq 0$, 则 $\dfrac{1}{a} \in K$.

定义 4.4 (线性表示与线性组合). 设 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是数域 K 上的线性空间 V 中的有限个向量, 对于向量 $\boldsymbol{x} \in V$, 如果存在 $c_1,\cdots,c_n \in K$, 使得 $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 可以由 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性表示, 或者 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 的一个线性组合.

定义 4.5 (向量组之间线性表示与向量组等价). 设有两个向量组 *(I)*: $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$; *(II)*: $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$. 若 *(I)* 中的每个向量都能被 *(II)* 线性表示, 则 *(I)* 可由 *(II)* 线性表示; 若两个向量组能互相线性表示, 则称两个向量组等价.

等价向量组的基本性质:

自反性, 对称性, 传递性.

定义 4.6 (线性相关与线性无关). 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组向量. 如果存在一组不全为 0 的常数 $k_1,\cdots,k_s$, 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关; 若仅在 $k_1,\cdots,k_s$ 全为 0 时才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$, 则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

例 4.2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n \times p$ 矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的列 (行) 向量组均是线性无关的, 则 $\boldsymbol{C}$ 的列 (行) 向量组也是线性无关的;

(2) 若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组是线性相关的, 则 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组也是线性相关的.

证明 *(1)* 由 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩则 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩相同, 即 $r(\boldsymbol{A}) = n, r(\boldsymbol{B}) = p, r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{C}) = r(\boldsymbol{B}) = p$. 则 $\boldsymbol{C}$ 为列满秩, $\boldsymbol{C}$ 的列向量线性无关; 同理, 当 $\boldsymbol{B}$ 为行满秩时, $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的秩相同, $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{C}) = r(\boldsymbol{A}) = m$, $\boldsymbol{C}$ 为行满秩, $\boldsymbol{C}$ 的行向量线性无关.

(2) 由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关得到 $r(\boldsymbol{B}) < p$ 则 $r(\boldsymbol{AB})r(\boldsymbol{B}) < p$, 故 $\boldsymbol{AB}$ 列向量线性相关.

例 4.3. 若 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 有 n 个线性无关的解向量, 求 $\boldsymbol{A}$.

解 由已知, 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 有 n 个线性无关的解向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$, 所以矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$ 可逆, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n) = \boldsymbol{O}$, 所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

定理 4.7. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 (线性无关) $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$ 有非零解 (只有零解) $\Longleftrightarrow (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 (只有零解) $\Longleftrightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 的秩小于 s(等于 s) .

推论 4.8. n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 (线性无关) 等价于 $\det[\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s] = 0 (\neq 0)$.

推论 4.9. 若 $s > n$, 则 s 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 必定线性相关. 特别地, $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

定理 4.10. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ $(s \geq 2)$ 线性相关的充要条件是该向量组中至少存在 1 个向量可由其余 s–1 个向量线性表示.

定理 4.11. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示.

定理 4.12. 如果组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 有一个部分组 (非空子集) 线性相关, 则向量组组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

因为零向量是线性相关的, 所以含零向量的向量组一定线性相关.

如果向量组 (I) (II) 都线性无关且等价, 则 (I) (II) 所含向量个数相等.

定义 4.13 (极大线性无关组)**.** 如果向量组 U 有一个部分组 U' 满足:

(1)U' 线性无关;

(2)U 中任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可以用 U' 中的元素线性表示,

则称 U' 是 U 的一个极大线性无关组.

同一个向量组的极大线性无关组所含向量个数必定相等, 等于该向量组构成的矩阵的秩.

定理 4.14. 任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, $r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ 的行秩 $= \boldsymbol{A}$ 的列秩.

定理 4.15. 若向量组 U 可由向量组 U' 线性表示, 则 $r(U) \leq r(U')$.

推论 4.16. 若向量组 I 与向量组 U' 等价, 则 $r(U) = r(U')$.

定理 4.17. 对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{n\times p}$, 有 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$;

对于矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}_{n\times p}$, 有 $r(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$.

定理 4.18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $r(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 必存在基础解系, 且基础解系含有 n–r 个向量.

例 4.4. 设矩阵 A 按列分块为 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 又向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$, 求解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

解 显然 $r(\boldsymbol{A})=3$, 因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解空间维数为 1. 由 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可知 $\boldsymbol{x}_0=(-1,2,0,-1)^T$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解. 由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$ 可知, $\boldsymbol{x}_1=(1,2,3,4)^T$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解, 所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1=(1,2,3,4)^T+c(-1,2,0,-1)^T$.

4.2　练习题

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 (　)

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

B. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

D. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关, $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

2. 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的齐次线性方程组, 下列结论正确的是 (　)

A. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

B. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

C. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解

D. 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ (　)

A. 当 $n>m$ 时仅有零解

B. 当 $n>m$ 时必有非零解

C. 当 $m>n$ 时仅有零解

D. 当 $m>n$ 时必有非零解

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 则下列向量组中可以作为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是 (　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

B. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3$

D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$, $3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$

5. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4']$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-3,5,2,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-3,7,-1)^T$. 若 $\boldsymbol{A}$ 行等价于 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 则向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$=________, $\boldsymbol{\alpha}_4$=________.

6. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2, 则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2+7\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为____.

7. 已知向量 $(1,a,a^2)^T$ 可由向量组 $(a+1,1,1)^T$, $(1,a+1,1)^T$, $(1,1,a+1)^T$ 线性表示且表示方式不唯一, 则 $\boldsymbol{\alpha}=$ ________.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有不同解 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 且 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$ 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数为 ____.

9. 已知 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解, 证明 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 则有

A. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解

B. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

C. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 没有非零公共解

D. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 恰有 1 个非零公共解

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵 $(n\geq 2)$, 对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含向量个数 k 应满足________.

12. 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 以 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,-1)^T$ 为基础解系, 则系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ =________.

4.3　参考答案

1. A

解析: 由题意, $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leq n$ 且 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为非零矩阵. 则 $r(\boldsymbol{A})\geq 1$, $r(\boldsymbol{B})\geq 1$, 于是 $r(\boldsymbol{A})\leq n-1$, $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. 同理 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

2. D

解析: $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 表示 $r(\boldsymbol{A})<n$, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解或者是无解;

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 表示 $r(\boldsymbol{A})=n$, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能有唯一解或者是无解;

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有非零解.

3. D

解析: $\boldsymbol{AB}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $r(\boldsymbol{AB})\le r(\boldsymbol{A})\le n$, 若 $m>n$, 则 $\boldsymbol{AB}$ 必然不满秩.

4. C

解析: 逐一检查各个向量组是否线性相关即可.

5. $(2,7,11,3)^T$, $(9,-4,23,4)^T$

解析: 由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 行等价可得 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$.

6. 2

解析: 过渡矩阵满秩, 所以两个向量组等价, 秩相等.

7. 0

解析: 向量 $(1,a,a^2)^T$ 可由向量组 $(a+1,1,1)^T$, $(1,a+1,1)^T$, $(1,1,a+1)^T$ 不唯一表示, 由该系数矩阵构成的行列式为 0, 即 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a+1&1&1\\1&a+1&1\\1&1&a+1\end{bmatrix}$, $det(A)=0$. 解得 $a=0,-3$, 当 $a=-3$ 时, 方程组无解, 故舍去.

8. 1

解析：方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有不同解说明 $\boldsymbol{A}$ 不满秩, 又 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$, 说明 $r(\boldsymbol{A})=n-1$, 所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数为 1.

9. 解析: 由于方程组同解, $n-r(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{B})$, 即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

10. 解析: 注意到 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个线性无关的解, 故 $r(A)\le n-2$, 因此 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$.

11. $k\ge 2$

解析: 由对任意 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$, 故 $r(\boldsymbol{A})\le n-2$.

12. $\begin{bmatrix}-k&k&k\\-l&l&l\\-m&m&m\end{bmatrix}$, 其中 k,l,m 不全为 0

解析：将基础解系 (解空间维数) 转化为系数矩阵的秩可知 $r(\boldsymbol{A})=1$, 然后设出 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组, 列线性方程组求基础解析即可.

第五章　线性空间与欧氏空间

5.1　知识点总结与例题详解

5.1.1　线性空间及其同构

定义 5.1 (线性空间). 设 V 是一个非空集合, F 是一个数域, 如果满足以下条件, 称 V 是数域 F 上的一个线性空间:

(1) V 对所定义的加法运算封闭. 即, 对于 V 内任意的两个元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 都有 V 中唯一确定的元素与之对应, 记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

(2) V 与 F 对所定义的数量乘法运算封闭. 即, 对于 V 内每个元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 F 内每个元素 k, 都有 V 中唯一确定的元素与之对应, 记为 $k\boldsymbol{\alpha}$.

将以上两种 (加法、数乘) 运算统称为线性运算, 满足以下八条规律:

i) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$; (交换律)

ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$; (结合律)

iii) V 中存在一个零元素, 记为 $\mathbf{0}$, 使得对 V 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$; (存在零元)

iv) 对于 V 中每个元素都存在它的负元素, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$; (存在负元)

v) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

vi) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$; (数的结合)

vii)$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$; (数的分配)

viii) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$; (元的分配)

在以上规则中, k、l 表示数域中 F 的任意数；$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 等表示集合 V 中任意元素.

- 元素属于数域 K 的矩阵, 按矩阵的加法和矩阵的与数的数量乘法, 构成数域 K 上

的一个线性空间, 记为 $M_{m,n}(K)$.

- 全体实函数 (连续实函数) , 按函数的加法和数与函数的数量乘法, 构成一个实数域上的线性空间.
- n 维向量空间是线性 K^n 空间.

易错点: 在线性空间中, 加法、数乘、零元素、负元素这些概念都是人为定义的:

设 V 是一个非空集合, K 是一个数域, 在集合 V 的元素之间定义了一种代数运算, 叫做加法; 这就是说, 给出了一个法则, 对于 V 中任意两个元素和, 在 V 中都有唯一的一个元素与他们对应, 成为 a 与 b 的和, 记为 $a+b$.

数域 K 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算, 叫做数量乘法, 即对于数域 K 中任一数 k 与 V 中任一元素 a, 在 V 中都有唯一的一个元素与他们对应, 称为 k 与 a 的数量乘积, 记为 ka.

下面来看一道经典题:

V 是全体正实数组成的集合 R^+, 加法及数乘运算如下定义:

$$a \oplus b = ab, k \circ a = a^k, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}.$$

则零元素为 1, a 的负元素是 $\dfrac{1}{a}$.

定义 5.2 (几种典型的线性空间). *$\mathbb{F}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ 分别是 $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 上的线性空间.*

$m \times n$ 矩阵全体构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间.

$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的解集合构成线性空间, 称为解空间.

以上的例子都是按照一般的线性运算定义的.

线性空间有如下基本性质:

(1) 零元素唯一.

(2) 任一元素的负元素唯一.

(3) $0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$.

(4) 若 $k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

定义 5.3 (同构映射). *f 是线性空间 V_1 到 V_2 的同构映射, 满足:*

(1) f 是线性空间 V_1 到 V_2 的双射;

(2) $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V_1$, $f(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = f(\boldsymbol{\alpha}) + f(\boldsymbol{\beta})$;

(3) $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V_1, k \in F, f(k\boldsymbol{\alpha}) = kf(\boldsymbol{\alpha})$,

那么就说 V_1 与 V_2 同构.

在 n 维线性空间 V 中, 向量与它的坐标的对应就是同构映射.

定理 5.4. 数域 P 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

同构映射的逆映射以及两个同构映射的乘积还是同构映射.

定理 5.5. 设 f 是线性空间 V_1 到 V_2 的同构映射, 则

(1) $f(\mathbf{0_1}) = \mathbf{0_2}$, 其中 $\mathbf{0_1}$, $\mathbf{0_2}$ 分别是 V_1 和 V_2 的零向量.

(2) $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V_1$, 有 $f(-\boldsymbol{\alpha}) = -f(\boldsymbol{\alpha})$;

(3) $\forall \boldsymbol{\alpha}_i \in V_1, k_i \in F, f(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{\alpha}_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i f(\boldsymbol{\alpha}_i)$;

(4) V_1 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\iff$ 它们的像 $f(\boldsymbol{\alpha}_1), f(\boldsymbol{\alpha}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\alpha}_m)$ 线性相关.

同构作为线性空间之间的性质, 还具有下列简单性质:

(1) 自反性: V_1 与 V_1 同构;

(2) 对称性: 若 V_1 与 V_2 同构, 则 V_2 与 V_1 同构;

(3) 传递性: 若 V_1 与 V_2 同构, V_2 与 V_3 同构, 则 V_1 与 V_3 同构.

定理 5.6 (扩充定理)**.** 设 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_r}$ 是 n 维线性空间 V 中一个线性无关向量组, $r < n$, 则一定可由 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2} \cdots \boldsymbol{\alpha_r}$ 扩充得到 V 的基.

5.1.2 线性子空间

定义 5.7 (线性子空间)**.** 设 W 是线性空间 V 的一个非空子集, 如果 W 按 V 中定义的线性运算也构成一个线性空间, 则称 W 是 V 的一个线性子空间.

定理 5.8. 设 W 是线性空间 V 的非空子集, 则

W 为 V 的子空间 $\iff W$ 对 V 中的线性运算封闭.

定理 5.9. 设 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个子空间, $V_1 \cap V_2$ 中的元素既属于 V_1, 又属于 V_2, 则它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

定理 5.10. 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 则 V 的子集

$$\{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} | \boldsymbol{\alpha} \in V_1, \boldsymbol{\beta} \in V_2\}$$

是 V 的子空间, 并称这个子空间为 V_1 和 V_2 的**和**, 记为 V_1+V_2.

定理 5.11 (维数公式)**.** 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 则有

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

定义 5.12 (子空间的直和)**.** 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间, 如果和 V_1+V_2 中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的表示式

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}),\quad(\boldsymbol{\alpha_1}\in V_1,\boldsymbol{\alpha_2}\in V_2)$$

唯一, 则称这个和为 V_1 与 V_2 的直和, 记为 $V_1\oplus V_2$.

定理 5.13. V_1+V_2 为直和 $\iff V_1\cap V_2=\mathbf{0}$.

推论 5.14. V_1+V_2 为直和 $\iff V_1\cap V_2=\mathbf{0}\iff\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)$.

由此可知, 和的维数要比维数的和来得小. 推广到有限个线性子空间的和空间维数:

推论 5.15. 如果 n 维线性空间 V 中两个子空间 V_1, V_2 的维数之和大于 n, 那么 V_1, V_2 必含有非零的公共向量.

例 5.1. 记矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&1&1&2\\-1&3&0&2&-2\\0&1&1&3&4\\1&2&5&13&5\end{bmatrix}$ 的第 j 个列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_j$, $j=1,2,\cdots 5$,

(1) 证明 $W=\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\}$ 为线性空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间;

(2) 求 W 的基与维数;

(3) 求 $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 在该基下的坐标.

解 *(1)* $W=span\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5\}$, 它对 $\mathbb{R}^4$ 中线性运算封闭, 故 W 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

(2) $\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&0&3&7&0\\0&1&1&3&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$, 所以 W 的一个基为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_5$, 维数为 *3*.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4=7\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以在该基下的坐标分别为 $(3,1,0)^T$, $(7,3,0)^T$.

第一问的证明用到了子空间的充要条件. 第三问中, 已经知道了 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_5$ 是 W 的一个基, 求另外两个向量在这个基下的坐标, 也就是用这个基分别线性表示这两个向量.

例 5.2. 设 $T \in L(\mathbb{R}^3)$, $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, 定义 $T(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)^T$, 求 T 的值域的一组基, 并指出 T 的秩.

解 $R(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$,

而 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 所以 $R(T)$ 的一组基为 $(1,0,1)^T$, $(2,1,1)^T$, 维数为 2.

例 5.3. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$ 的解空间的维数为____.

解 该方程组可以写作 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = \mathbf{0}$ 即 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$. 其中 $r(\boldsymbol{A}) = 2$, 则维数为 $n - r(\boldsymbol{A}) = 3$.

例 5.4. $1 + x$, $x + x^2$, $x^2 - 1$ 是否可作为 $span\{1 + x, x + x^2, x^2 - 1\}$ 的一个基? 求 $span\{1 + x, x + x^2, x^2 - 1\}$ 的基与维数.

解 $(1 + x, x + x^2, x^2 - 1) = (1, x, x^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 所以 $1 + x$, $x + x^2$, $x^2 - 1$ 不能作为 $span\{1 + x, x + x^2, x^2 - 1\}$ 的一个基, 维数是 *2*, 其中任意两个线性无关的向量都可以作为它的基.

例 5.5. $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $\left\{ \begin{bmatrix} a + b & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ 的维数为____.

解 $\begin{bmatrix} a + b & a \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a, $b \in \mathbb{R}$, 可以看出维数是 *2*.

总结:

求维数, 就是要把矩阵写成几个线性无关的矩阵的线性表示.

要证明 n 个向量构成 n 维线性空间 V 的基, 只需要证明他们线性无关.

5.1.3 基变换与坐标变换

定义 5.16 (基, 维数与向量的坐标). 如果线性空间 V 中存在一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 而且任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示为 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha_1} + x_2\boldsymbol{\alpha_2} + \ldots + x_n\boldsymbol{\alpha_n}$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一个基, 基中所含向量个数 n 为 V 的维数, 记为 $\dim(V) = n$, 称 V 为 n 维线性空间, n 个有序数 $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

对该定义, 有如下几点说明:

(1) 线性空间的基不唯一, 但维数唯一且确定.

(2) 对于 n 维线性空间 V, V 中任意 n 个线性无关的向量都可作为 V 的基.

(3) 对于生成子空间 $span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组与秩分别是 W 的基与维数.

(4) n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系就是它的解空间的基, 基础解系所含向量个数 $n - r(\boldsymbol{A})$ 就是解空间的维数.

定义 5.17 (过渡矩阵). n 维线性空间 V 中, 基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, 则基变换公式为 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$, 且基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$.

定理 5.18 (坐标变换公式). *n 维线性空间 V 的基 (I): $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 (II): $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$; 基 (I) 下的坐标为 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$, 基 (II) 下的坐标为 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)^T$, 则有 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ay}$.*

例 5.6 (2015). *已知线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 且*

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^T,\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,-1)^T,\ \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

(1) 求 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$;

(2) 设向量 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下有相同的坐标, 求 $\boldsymbol{\alpha}$.

解 *(1)* 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\,\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AP}$, $\boldsymbol{\beta}_1 = (0,0,2)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (0,2,2)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (2,2,2)^T$.

(2) 设所求向量的坐标为 $\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{APx}$, 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{E})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为 $\boldsymbol{A}$

为可逆矩阵, 得 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$, 得 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,1)^T$, 故 $\boldsymbol{\alpha}=k(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=k(1,-1,0)^T$.

5.1.4　欧氏空间

定义 5.19 (欧氏空间). 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的有限维线性空间, 在 V 上定义了一个二元实函数, 称为内积, 记作 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$, 满足以下四条公理:

(1) 对称性 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle$;

(2) 关于标量乘法线性性质 $\langle k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$;

(3) 关于向量加法的线性性质 $\langle\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$;

(4) 正定性 (非负性) $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时, $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0$.

这里 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 任意的向量, k 是任意实数, 这样的线性空间 V 称为欧氏空间.

注意: 对同一个线性空间可以引入不同的内积, 使得它作成欧几里得空间.

几种典型的欧氏空间:

(1) 在线性空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$, $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$;

(2) 对于 n 阶实方阵, 关于矩阵线性运算构成线性空间 $\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$;

(3) 在连续函数空间中, $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.

以上的 (1) 与我们平常见到的向量的内积运算一致, 但与线性空间中加法、数乘的定义类似, 也可以定义不同的内积, 从而构成不同的线性空间.

上面的三种称为**标准内积**.

定义 5.20 (向量的范数). 欧式空间中, 记向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的范数 (长度) 为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$, 即 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle}$.

范数有以下性质:

(1)$\|\boldsymbol{\alpha}\|\geq 0$, 且 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=0 \iff \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$;

(2)$\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$;

(3)$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leq\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$(三角不等式) .

定义 5.21 (向量的夹角). 欧氏空间中, 两个非零向量的夹角为

$$\varphi=arccos\frac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|},\quad 0\leq\varphi\leq\pi.$$

如果 $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交 (垂直) , 记为 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$.

m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 两两正交, 则有 $\|\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_m\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2 + \|\boldsymbol{\alpha}_2\|^2 + \cdots + \|\boldsymbol{\alpha}_m\|^2$(勾股定理) .

向量 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 间的距离为 $d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|$.

定理 5.22 (Cauchy-Schwarz(柯西-施瓦茨) 不等式). *$|\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \|\boldsymbol{\beta}\|$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时等号成立.*

5.1.5 正交及应用

定义 5.23 (正交向量组与正交单位向量组). *欧式空间 V 中的一个向量组不含零向量且其中的向量两两正交, 则称它是一个*正交向量组*. 如果每一个向量都是单位向量, 称为*标准正交向量组 *(或*正交单位向量组*, 或*正交规范向量组*).*

定理 5.24. *正交向量组必是线性无关向量组.*

定义 5.25 (正交基与标准正交基). *如果是 n 维欧氏空间, 且正交向量组中向量的个数也为 n, 上述定义中的正交向量组称为*正交基*, 标准正交向量组称为*标准正交基 *(或*规范正交基*).*

定理 5.26. *设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维欧式空间 V 的一个标准正交基, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 是 V 中任意向量, 设 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$, $\boldsymbol{\beta} = y_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则*

(1) $x_i = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_i \rangle$;

(2)$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$;

(3)$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$;

(4)$d(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

上面的定理说明了 n 维欧式空间 V 与 $\mathbb{R}^n$ 间的同构关系.

例 5.7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$, 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 并求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 0)^T$ 在此组基下的坐标.

解 令 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基. 向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 0)^T$ 在此组基下的坐标为 $(\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_3 \rangle)^T = (2, 0, -1)^T$.

定理 5.27 (Gram-Schmidt(格拉姆-施密特) 正交化方法). 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维欧式空间 V 的一个基, 令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle} \boldsymbol{\beta}_1,$$
$$\cdots$$
$$\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_n - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle} \boldsymbol{\beta}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle} \boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_{n-1} \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_{n-1}, \boldsymbol{\beta}_{n-1} \rangle} \boldsymbol{\beta}_{n-1},$$

$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的一个正交基, 再单位化, 就得到了标准正交基.

例 5.8. 设 $\mathbb{R}[x]_2$(次数不超过 2 的一元实系数多项式全体按通常多项式的加法和数与多项式的乘法构成的实线性空间) 的内积为 $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$, 则 $\mathbb{R}[x]_2$ 的一个正交基为____.

解 由格拉姆-施密特正交化方法, 将基 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (1, x, x^2)$ 正交化.

$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = 1;$

$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \dfrac{\langle \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle} \boldsymbol{\beta}_1 = x - \dfrac{1}{2}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$.

所以一组正交基是 $\left(1, x - \dfrac{1}{2}, x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right)$.

总结: 在计算内积时, 应从题目的定义出发计算.

定义 5.28 (正交矩阵). 满足 $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$ 的实方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同阶正交矩阵, 有如下性质:

(1)$\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$;

(2)$\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 A^* 均为正交矩阵;

(3)$\boldsymbol{AB}$ 为正交矩阵;

(4)$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列 (行) 向量组为标准正交向量组.

例 5.9 (2006). 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 则为正交矩阵的是 $\boldsymbol{A}, \dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{A}$ 的哪一个?

解 $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}$. 运用上面的性质 (4) 可以验证 $\boldsymbol{A}$ 的行、列向量均为正交向量组, 将 $\boldsymbol{A}$ 单位化即可.

定义 5.29 (正交变换). $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶正交矩阵, 对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, 称线性变换 $T: T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Px}$ 为正交变换.

定理 5.30 (正交变换的性质). *(1)*$\langle \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_2\rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\rangle$*(正交变换保持向量的内积不变)；*

(2)$\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_1\| = \|\boldsymbol{x}_1\|$*(正交变换保持向量的长度不变)．*

例 5.10 (2016). 设有向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1,3,-3)$, 则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 上的正交射影向量 $Proj_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta} =$ ____.

解 将 $\boldsymbol{\alpha}$ 单位化得 $\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 则 $Proj_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\beta} = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{e}\rangle \boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

5.2　练习题

1. (参见例 1、例 5) $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, W_1 是形如 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ 的二阶实方阵全体, W_2 是形如 $\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$ 的二阶实方阵全体. 检验线性空间 V 的子集 W 是否构成 V 的子空间, 并求子空间的维数与基.

2. (参见例 2) 判断 $\mathbb{R}^3$ 的子集 $W_1 = \left\{(x, 2x, 3y)^T \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$ 是否构成 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

3. (参见例 4) 证明: 函数组 x^3, x^3+x, x^2+1, $x+1$ 是 $F[x]_3$ 的一个基, 并求 $f = x^2+2x+3$ 在该基下的坐标.

4. (参见例 8) 在欧式空间 $C[-\pi,\pi]$(内积为 $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$) 中, 求子空间 $W = span\{1, \cos x, \sin x\}$ 的一个标准正交基.

5. (参见例 8) 已知三维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,-1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,-1)^T$, 构造一个标准正交基, 使得 $span\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\} = span\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\}$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1 =$ ____, $\boldsymbol{\beta}_2 =$ ____.

6. (参见例 10) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, W 是由 $\boldsymbol{\beta}_1 = (0,1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (-4,0,3)^T$ 生成的子空间. 求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,1)^T$ 在 W 上的射影.

7. 与 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,1,3)^T$ 都正交的单位向量为 ____.

8. (2010) 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, 线性空间 $V = \{\boldsymbol{b} | \boldsymbol{b} \in F^4, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\}$, 求 V 的基与维数.

9. (2008) 设数域 $\mathbb{R}$ 上的三维线性空间 V 中定义了两个运算 $\oplus$ 与 $\circ$, 即 $\boldsymbol{\alpha}\oplus\boldsymbol{\beta}\in V$, $k\circ\boldsymbol{\alpha}\in V$, 且 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是 V 的一个基, 若

$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1\oplus(-1)\circ\boldsymbol{\varepsilon}_2\oplus 2\circ\boldsymbol{\varepsilon}_3$,

$\boldsymbol{\alpha}_2=3\circ\boldsymbol{\varepsilon}_1\oplus(-2)\circ\boldsymbol{\varepsilon}_2\oplus 5\circ\boldsymbol{\varepsilon}_3$,

$\boldsymbol{\alpha}_3=2\circ\boldsymbol{\varepsilon}_1\oplus\boldsymbol{\varepsilon}_2\oplus\boldsymbol{\varepsilon}_3$,

求 $span(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的基与维数.

10. (2007) 在 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中所有二阶实对称矩阵组成的集合构成 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的一个子空间 W, 证明元素组 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}4&-1\\-1&-5\end{bmatrix}$ 是 W 的一个基.

11. (2006) 设 $\mathbb{R}^4$ 的子空间 V 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,6,10,2)^T$ 生成, 求 V 的基与维数.

5.3 参考答案

1. W_1 不是, 因为其中的元素对加法不封闭. W_2 是. 由 $\begin{bmatrix}a&a\\a&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&b\\b&b\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ 知其基为 $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$, 维数是 2.

2. W_1 中任意向量可写成 $\boldsymbol{\alpha}=(x,2x,0)^T+(0,0,3y)^T=x\,(1,2,0)^T+y\,(0,0,3)^T$, 所以 W_1 是由 $(1,2,0)^T$, $(0,0,3)^T$ 生成的子空间.

3. 证明: $(x^3,x^3+x,x^2+1,x+1)=(1,x,x^2,x^3)\,\boldsymbol{A}=(1,x,x^2,x^3)\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$. 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵, 故 $x^3,x^3+x,x^2+1,x+1$ 是 $F\,[x]_3$ 的一个基.

$f=x^2+2x+3=\left(1,x,x^2,x^3\right)b=\left(1,x,x^2,x^3\right)(3,2,1,0)^T=(x^3,x^3+x,x^2+1,x+1)\boldsymbol{A}^{-1}b$,

所以坐标为 $\boldsymbol{A}^{-1}b=(0,0.1,2)^T$.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=x$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\sin x$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\cos x$, 按照所定义的内积计算得 $\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle=0$, 所以 $(1,\cos x,\sin x)$ 是正交基. 又 $\boldsymbol{\alpha}_1=\sqrt{2\pi}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\sqrt{\pi}$, 所以标准正交基是 $\left(\sqrt{2\pi},\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)$.

5. 由格拉姆-施密特正交化方法, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 分别为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^T$.

6. $\mathrm{Proj}_W\boldsymbol{\alpha}\left\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_1\right\rangle\boldsymbol{e}_1+\left\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_2\right\rangle\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{5}\boldsymbol{e}_2=\left(\frac{4}{25},1,-\frac{3}{25}\right)^T$.

7. 设这个向量是 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$, 与三个向量正交得到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&-1&1\\2&1&1&3\end{bmatrix}$. 解这个方程组, 得 $\boldsymbol{x}=\frac{1}{\sqrt{26}}(4,0,1,-3)^T$.

8. W 的基与维数为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的极大无关组与秩, 记 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$, 可算出 $\boldsymbol{A}$ 的极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, 故 V 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, 维数是 3.

9. $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{bmatrix}$, 而 $\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&-2&1\\2&5&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可作为 $span\,(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的一组基, 维数为 2.

10. W 为三维空间, 故任意三个线性无关的向量都可以作为它的基. 令 $k_1\boldsymbol{A}_1+k_2\boldsymbol{A}_2+k_3\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{O}$, 得 $\begin{bmatrix}1&2&4\\-2&1&-1\\1&3&-5\end{bmatrix}k_1k_2k_3=\boldsymbol{O}$. 而 $\begin{bmatrix}1&2&4\\-2&1&-1\\1&3&-5\end{bmatrix}$ 满秩, 故只有零解即 $k_1=k_2=k_3=0$, 所以这三个向量线性无关, 可以作为一组基.

11. 因为矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&8\\0&0&-7&24\\0&0&0&12\end{bmatrix}$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 可以作为一组基, 维数是 4.

第六章　特征值与特征向量

本章全章都是重点, 考试大题必有 **1-2** 道题, 小题也会有考察, 考前复习要多用时间, 关键在于熟记步骤, 计算要细心.

6.1　知识点总结与例题详解

6.1.1　特征值、特征向量相关概念与求解

1. 基础概念 (务必熟记, 小题、大题多次考察概念与计算)

定义 6.1 (特征值)**.** *设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶矩阵, 如果有一个复数* ***(注意范围, 不一定是实数)*** *及一个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{C}^n$, 使得*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

或

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 (可能会有多个).

定义 6.2 (特征向量)**.** *称非零列向量 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 (或属于) 特征值 λ 的特征向量 (每一个特征向量对应于自己的特征值).*

2. 特征值与特征向量的求解 (一定要记住固定的解题步骤, 后面的计算基本都有赖于这一步的求解)

求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的一般步骤为:

Step1 求出 $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$(求解行列式) 的全部根 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n, 则 λ_1,λ_2, $\cdots$, λ_n 就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

Step2 对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i, 求出

$$\det(\boldsymbol{I}_i-\boldsymbol{A})=0, \quad i=1,\cdots,n$$

的基础解系 (具体求解思路见第四、五章)

$$\boldsymbol{\xi}_{i1},\boldsymbol{\xi}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{ik};$$

Step3 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_{i1}+c_2\boldsymbol{\xi}_{i2}+\cdots+c_{k_i}\boldsymbol{\xi}_{ik_i},$$

其中, c_1, c_2, $\cdots$, c_n 不全为 0 的任意常数.

3. 其它相关概念 (记忆, 考试可能会出现)

I. 特征方程: 关于 λ 的一元 n 次代数方程 $det(\lambda\boldsymbol{I}_i-\boldsymbol{A})=0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

II. 特征多项式: 一元 n 次多项式 $f(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_i-\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

III. 特征子空间: 若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则称齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 λ 的特征子空间, 并记为 V_λ.

IV. 单特征值、重特征值与代数重数: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值. 如果为特征方程的重根, 称 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值; 当 $k=1$ 时, 称 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值.

V. 几何重数: V_{λ_i} 的维数, 即齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数为特征值 λ_i 的几何重数. **$\boldsymbol{\lambda_i}$ 对应线性无关的特征向量的个数**.

例 6.1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量. *(课本 210 页例 6.1.1)*

解 由特征方程

$$det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-3\\-3&\lambda+5&-3\\-6&6&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&3&-3\\1&\lambda+5&-3\\0&6&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 有 2 重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, 有单特征值 $\lambda_3=4$;

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, 解方程组 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由初等行变换

$$-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\-6&6&-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ 为对应于特征值 -2 的线性无关特征向量, 对应于特征值 -2 的全部特征向量为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$, k_1、k_2 为不全为 0 的任意常数).

对于特征值 $\lambda_3=4$, 解方程组 $(4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&3&-3\\-3&9&-3\\-6&6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&12&-6\\0&12&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3$ 为对应于特征值 4 的线性无关特征向量, 对应于特征值 4 的全部特征向量为 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}_3$($k$ 为任意非零常数).

注 求特征值与特征向量是第六章最为重要、考察最为频繁的知识点, 且其方法基本不变. 对于此知识点需熟练掌握, 即牢记步骤, 细心计算 (计算量较大).

6.1.2　特征值、特征向量相关性质与结论

1. 性质与结论汇总 (熟记, 记住结论可以快速解答小题)

I. 若 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 都是属于 λ_i 的特征向量, 则当 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不为 0 时, $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 也是属于 λ_i 的特征向量; 当 $k\boldsymbol{x}_1$ 不为 0 时, $k\boldsymbol{x}_1$ 也是属于 λ_i 的特征向量. 一般地, 如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 都是属于 λ_i 的特征向量, $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为任意常数, 则当 $c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m$ 不为 0 时, $c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m$ 仍是属于 λ_i 的特征向量. 即属于同一特征值的特征向量不唯一.

II. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则有

(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det(\boldsymbol{A})$(积为行列式)

(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(\boldsymbol{A})$ (矩阵迹)

推广: 方阵可逆 $\Longleftrightarrow$ 特征值都不为 0; 方阵不可逆 $\Longleftrightarrow$ 特征值至少有一个为 0.

III. 设 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则

(1) 对任何正整数 m, λ^m 为矩阵 $\boldsymbol{A}^m$ 的一个特征值;

(2) 对任何多项式 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $f(\lambda)$ 为矩阵 $f(\boldsymbol{A})=$

$a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$ 的一个特征值, 且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量与矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 对应于 $f(\lambda)$ 的特征向量相同.

IV. 设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值, 则 $\lambda\neq 0$, 且 $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一个特征值, $\dfrac{\det(\boldsymbol{A})}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

V. 属于互不相同特征值的特征向量线性无关.

VI. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任何特征值的集合重数不大于其代数重数.

例 6.2 (2016 年期末, 证明题)**.** 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同特征值, $\boldsymbol{x}_i$ 为属于 λ_i 的特征向量, $i=1,2$. 证明: $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证明 *(反证法)* 如果 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 特征向量, 则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda_0(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_0\boldsymbol{x}_1+\lambda_0\boldsymbol{x}_2$, 把 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ 代入上式, 得

$$(\lambda_1-\lambda_0)\boldsymbol{x}_1+(\lambda_2-\lambda_0)\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0},$$

而 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是属于相异特征值的特征向量, 因此线性无关 (由上述性质知), 所以 $\lambda_1-\lambda_0=0$, $\lambda_2-\lambda_0=0$, $\lambda_1=\lambda_2$, 与已知矛盾, 故 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

注 遇到特征向量的证明题, 要熟练应用公式, 同时如果对于结论为否命题的证明题, 使用反证法往往会事半功倍.

例 6.3 (2018 年期末, Gilbert 线性代数 P_{295})**.** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=$________.

解 由题意可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $2,\ -1,\ \dfrac{1}{2}$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=(-1)^2=1$.

例 6.4 (2018 年期末)**.** 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&x\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=2$, 且有三个线性无关的特征向量, 则 x 的值为________.

解 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 2 重特征值 2, 且有三个线性无关的特征向量, 可知方程组 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数为 2, 即矩阵 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 秩为 1, 有

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&-x\\3&3&-3\end{bmatrix},$$

故有 $-x=2, x=-2$.

注 特征值与特征向量相关性质与结论考察形式较为灵活, 常与其它知识点结合考察, 需要大家在熟记各种性质与结论的基础上灵活应用以解决问题.

6.1.3　相似矩阵与矩阵的对角化

1. 相似矩阵概念与性质

(1) 相似矩阵: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵 (必须是方阵), 如果存在一个 n **阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$(重点: 可逆)**, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 并称由 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的变换为一个相似变换. 相似矩阵具有如下性质:

I. 相似矩阵具有自反性、对称性与传递性.

II. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则有

i. $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{B})$;

ii. $(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$, 特别地, 当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可逆时, $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$;

iii. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值;

iv. $tr\,(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{B})$;

v. 以上命题的逆命题不真, 即不能反推;

vi. 单位矩阵的相似矩阵只能是单位矩阵.

2. 矩阵的对角化 (★★★★)

定义 6.3 (矩阵的对角化). 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与一个对角矩阵相似, 则称 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 简称为 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

矩阵可对角化的条件:

定理 6.4 (矩阵可对角化的充要条件). n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

推论 6.5 (矩阵可对角化的一个充分条件). 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值互不相同 *(即的特征值都是单特征值)* 则必与对角矩阵相似.

推论 6.6 (矩阵可对角化的充要条件). n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值的几何重数都等于它的代数重数.

矩阵可对角化时对角矩阵 D 和可逆矩阵 P 的求解:

在 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时, 求出对应于每个特征值的线性无关特征向量, 从而可得到 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_n$, 其中 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是对应于特征值 λ_i 的特征向量, $i=1,2,\cdots,n$. 以 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\xi}_n$ 为列向量构成矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1 & \boldsymbol{\xi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\xi}_n\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

例 6.5. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$ 能否对角化? 若能对角化, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解 此矩阵即为例 *1* 中矩阵, 此矩阵有 3 个线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, 由矩阵可对角化的条件, 可知此矩阵可相似对角化, 令

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=diag(-2,-2,4).$$

注 求矩阵可对角化时的对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 本质上仍然是特征值与特征向量的求解. 在求对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 时, 要注意特征值与特征向量之间的对应. 求得的对角阵的对角元素是对应的特征值.

例 6.6. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 2, -3, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-7\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 由题意, $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 且存在一个 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}=diag(1,2,-3),$$

故有

$$A = PDP^{-1},$$

$$A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

所以

$$B = A^3 - 7A + 5I = PD^3P^{-1} - 7\ PDP^{-1} + 5PIP^{-1} = P\left(D^3 - 7D + 5I\right)P^{-1},$$

又有

$$D^3 - 7D + 5I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = -I,$$

所以

$$B = P\,(-I)\,P^{-1} = -I.$$

注 在问题中出现一些高次矩阵时, 常常利用本例的方法, 将矩阵写成相似对角化的形式, 通过对角矩阵来简化运算, 表示出相应的高次矩阵. 请同学们理解并记忆此方法.

例 6.7. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 可相似对角化, 求 x.

解 由 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(6-\lambda) = 0$, 解得 $\lambda = 1, 6$;

$\lambda = 1$ 是二重特征根, 所以 $r\,(A - \lambda E) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1$, 因此 $x = 3$.

注 对于期末考试, 其中的大题很多会将不同章节的知识点杂糅在一起, 如本题, 在计算时要对矩阵的秩等相关概念熟悉, 化简时做到思路清晰, 用矩阵的秩来求解其中的未知数.

6.1.4 实对称矩阵

实对称矩阵是必定可以对角化的一类矩阵, 有着非常重要的应用.

1. 实对称矩阵概念与性质（重要）

(1) 概念: 如果有 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 其矩阵的元素都为实数, 且矩阵的转置等于本身, 则称其为实对称矩阵. 即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}, a_{ij}=a_{ji}$.

(2) 性质：

I. 实对称矩阵必可以对角化, 对称是“矩阵特征值为实数”的充分不必要条件;

II. 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有相异特征值 λ_1, λ_2, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 分别是与 λ_1, λ_2 对应的特征向量, 则 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 正交;

III. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 则必存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角矩阵;

IV. 实对称矩阵的每个特征值的几何重数都正好等于其代数重数;

V. 实对称矩阵的特征值均为实数;

VI. 实对称矩阵的特征值都是实数.

2. 实对称矩阵相似对角化过程中正交矩阵的求解（牢记）

n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正交相似对角化过程如下:

Step1 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

Step2 对每个特征值, 求出方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 (即特征子空间 V_{λ_i} 的一个基);

Step3 对每个特征值 λ_i, 利用 Gram-Schmidt 正交化方法 (具体方法见下例题) 将 V_{λ_i} 的基中的向量单位正交化, 得到其标准正交基, 再将所有特征子空间的标准正交基合在一起得到 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个标准正交的特征向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$.

Step4 令矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n]$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

例 6.8. 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列实对称矩阵化为对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}.$$

解 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=(10-\lambda)(\lambda-1)^2$, 可得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 可取一组正交的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi_1} = (0, 1, 1)^T, \boldsymbol{\xi_2} = (4, -1, 1)^T,$$

进行单位化得

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}},\ -\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^T,$$

同理, 当 $\lambda_3 = 10$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 得

$$\boldsymbol{e}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T,$$

于是得到 $\boldsymbol{A}$ 的标准正交特征向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, 故所求正交矩阵可取

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = diag\,(1, 1, 10)$.

拓展 *(Gram-Schmidt 正交化方法)* 若没有取得正交的向量组, 即在本例中, 如果我们把齐次线性方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系取为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 0, 1)^T,$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交, 要将其正交化, 即令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}\boldsymbol{\beta}_1 = (2, 0, 1)^T - \frac{-4}{5}\,(-2, 1, 0)^T = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)^T;$$

再单位化, 即令 $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_i\|}$, $i = 1, 2$, 得到 V_{λ_1} 的一个标准正交基

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^T, \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^T,$$

这样算得的正交矩阵就是

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

注 求正交矩阵，与一般相似变换矩阵求法的不同之处在于需要将各特征子空间的基中的向量进行单位正交化．如果在考试中没有取得正交的向量组，则可应用 *Gram-Schmidt* 正交化方法化出，但是一般最好能直接取得正交．求解此类题目需要牢记方法，细心计算．同时记住结论：n 阶实对称矩阵一定可以分解为 n 个秩为 1 的矩阵之和，且每个秩为 1 的矩阵前的系数为特征值．

6.2　练习题

习题基础组

1.(2020 期末) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&8&0\\2&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}\sim diag(6,6,-2)$，求 $a=$ ____.

2.(2019 期末) 设 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2)^{-1}$ 的一个特征值为 ____.

3. (2020 期末) 三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,3$; $(-1,-1,1)^T,(1,-2,-1)^T$ 分别是对应于特征值为 1, 2 的特征向量，求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值为 3 的全部特征向量（　）.

A. $k(-1,0,1)^T$

B. $k(-1,0,-1)^T$

C. $k(1,0,-1)^T$

D. $k(1,0,1)^T$

4. (2018 期末) 当（　　）时，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

A. $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值且均可相似对角化

B. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式

D. $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

5. (2019 期末) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有二重特征值 2，且有 3 个线性无关的特征向量，则 x, y 的值分别为________.

6. (2019 期末) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&a&0\\0&3&1\end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&b\end{bmatrix}$, 则 a,b 的值分别为________.

7. (2020 期末) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{bmatrix}$, 求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^9+5\boldsymbol{A}^8$.

8. (2019 期末) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$, 且向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$ 是逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量, 试求常数 k.

9. (2019 期末) 设 n 为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\neq\mathbf{0}$, 且 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 令矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 求: (1) $\boldsymbol{A}^2$; (2)$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

10. (2018 期末) 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 即存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$, 已知 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量, 求 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 λ 的特征向量.

11. (2020 期末) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^T$, 且 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

12. (2016 期末) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $\frac{1}{2}$, 13, 14, 则 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{I}|=$____.

习题提高组

13. (2014 期末) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维实单位列向量, 且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$, 问其是否可以相似对角化? 若可相似对角化, 求出与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角阵 $\boldsymbol{D}$.

14. (2015 期末) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维向量, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值.

15. (2018 期末) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵 $(n\geq 2)$, $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零实列向量，令矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$,

(1) 求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值与行列式 $\det(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I})$;

(2)$\boldsymbol{B}$ 是否可对角化? 为什么?

16. (2015 期末) 证明: $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 有相同的特征值.

6.3　参考答案

1. $a=0$.

2. $\dfrac{3}{4}$.

3. D. (选择题简便方法, 代入计算)

4. A.

5. $x=3$, $y=-1$.

6. $a=5$, $b=4$. (相似矩阵迹相同, 行列式相等)

7. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$. (模仿例 5 方法)

8. -2 或 1. (两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可知, $\boldsymbol{\alpha}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 由特征值定义可求解)

9.（1）$\boldsymbol{O}$. ($\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}^T=\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\right)^T\boldsymbol{\beta}^T=\boldsymbol{O}$.)

（2）$\boldsymbol{x}=c_1\left(b_2,-b_1,0,\cdots,0\right)^T+c_2\left(b_3,0,-b_1,\cdots,0\right)^T+c_n\left(b_n,0,0,\cdots,-b_1\right)^T$, c_1, c_2, c_3, $\cdots$, c_n 为不全为零的常数.

($\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\rightarrow\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$, 又 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\rightarrow\lambda=0$, 即仅有特征值 0; 又 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}\right)=1\rightarrow$ 特征向量的维数为 $n-1$, 解方程即得答案)

10. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$ ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$, 等式两边左乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$, 由相似得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$, 得到 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$, 所以特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$).

11. (1) 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$ 可知, $r(\boldsymbol{A})\leq 1$, 又由 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 可知 $r(\boldsymbol{A})=1$, 故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 是两个特征值, 又 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2$, 得特征值分别为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$.

(2) 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量是方程 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$ 的基础解系, 解得 $\boldsymbol{\xi}_1=\left(b_2,-b_1,0\right)^T$, $\boldsymbol{\xi}_2=\left(b_3,0,-b_1\right)^T$, 又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\alpha}$, 故得到 $\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{\xi}_1\ ,\ \boldsymbol{\xi}_2\ ,\ \boldsymbol{\xi}_3\right)=\begin{bmatrix} b_2 & b_3 & a_1 \\ -b_1 & 0 & a_2 \\ 0 & -b_1 & a_3 \end{bmatrix}$, 对角矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

12. 6. (由题意, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=diag(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}diag(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})\boldsymbol{P}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}diag(2,3,4)\boldsymbol{P}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}diag(1,2,3)\boldsymbol{P}^{-1}$, 进而可求)

13. (1) 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$, 且均为实对称矩阵, 可知其可对角化.

(2)$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$, 由 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交得 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 即 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1, -1; 又因为 $r(\boldsymbol{A})\le r\left(\boldsymbol{\alpha\beta}^T\right)+r\left(\boldsymbol{\beta\alpha}^T\right)=2$, 故 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 且其相似对角阵为 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

14. 1. (已知得 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[0,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$, 由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$ 满秩, 得 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]^{-1}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$ 相似, 易得非零特征值为 1.)

15. (1) 由 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 可知 $r(\boldsymbol{B})=r\left(\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\right)=1$, 又 $\boldsymbol{BA\alpha}=\boldsymbol{A\alpha\alpha}^T\boldsymbol{A\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A\alpha})\boldsymbol{A\alpha}$, 故 $\boldsymbol{B}$ 有 $n-1$ 重特征值 0 和单特征值 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A\alpha}$, $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}$ 有 $n-1$ 重特征值 2 和单特征值 $2+\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A\alpha}$, 故 $\det(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I})=2^{n-1}(2+\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A\alpha})$.

(2)$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A\alpha}\neq 0$ 时, 每个特征值的几何重数等于代数重数, 可对角化; $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A\alpha}=0$ 时不可对角化.

16. 由于 $\left|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^T\right|=\left|\lambda\boldsymbol{I}^T-\boldsymbol{A}^T\right|=\left|(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^T\right|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$, 特征多项式相同, 则特征值相同.

第七章　二次曲面与二次型

7.1　二次曲面与二次型知识点

7.1.1　曲面与空间曲线的方程

1. 曲面的直角坐标方程: $F(x,y,z)=0$, 曲面的参数方程: $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$

2. 空间曲线的直角坐标方程$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$, 参数方程: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

7.1.2　柱面

柱面　动直线 L 始终平行于直线 C 并沿着曲线 Γ 移动而形成的曲面, 其中, Γ 为准线, L 为母线.

柱面的参数方程　若母线L 与$(l,m,n)^T$ 平行, 准线Γ 由参数方程

$$\begin{cases} x=f_1(u) \\ y=f_2(u) \quad ,\alpha\le u\le\beta \\ z=f_3(u) \end{cases}$$

给定, 则柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x=f_1(u)+lv \\ y=f_2(u)+mv \quad ,\alpha\le u\le\beta, v\in\mathbb{R} \\ z=f_3(u)+nv \end{cases}$$

7.1.3 锥面

锥面 动直线 L 沿定曲线 Γ 移动, L 始终过定点 M_0, 所形成的曲面. 其中 L 为母线, M_0 为顶点, Γ 为准线.

锥面的参数方程 若已知 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 准线的参数方程为

$$\begin{cases} x = f_1(u) \\ y = f_2(u) \quad ,u \in [\alpha, \beta] \\ z = f_3(u) \end{cases}$$

则锥面的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + (f_1(u) - x_0)\, v \\ y = y_0 + (f_2(u) - y_0)\, v \quad ,u \in [\alpha, \beta], v \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + (f_3(u) - z_0)\, v \end{cases}$$

7.1.4 旋转面

定义 一条曲线 Γ 绕一条定直线 L 旋转一周所形成的曲面称为旋转面. 定直线 L 称为轴, 曲线 Γ 称为母线.

特殊情况下的方程 $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕z 轴旋转一周形成的曲面方程为

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0$$

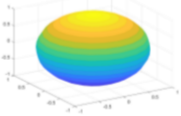
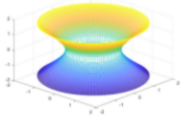
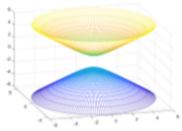
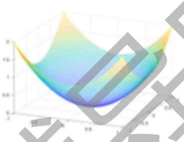
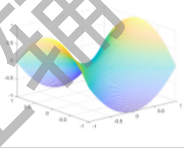
7.1.5 五种典型的二次曲面

常见的五种典型的二次曲面如表 7.1 所示.

7.1.6 曲线在坐标面上的投影

曲线 Γ 每一个点在平面 π 上的垂足形成的曲线称为 Γ 在 π 上的投影. 如求 Γ 在 O_{xy} 平面上的投影的方程, 先求 Γ 到 O_{xy} 的投影柱面方程: 从 Γ 的方程中消去 z, 得到 $\phi(x,y) = 0$. 因此$\begin{cases} \phi(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 即为 Γ 在 O_{xy} 平面的投影曲线方程.

表 7.1: 二次曲线方程与形状说明表

曲面形状	方程	其它条件	图像
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$a,b,c>0$	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$a,b,c>0$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$a,b,c>0$	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$	$p,q>0$	
双曲抛物面	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$	$p,q>0$	

7.1.7 二次型

定义 称关于 n 个变量 $x_1,\ldots,x_n$ 的二次齐次多项式函数

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{ij}x_ix_j$$

为一个 n 元二次型. 可以将其写作 $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,\ldots,x_n\right)^T$, $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_n$ 为实对称矩阵. 称 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}x$ 为二次型的矩阵表达式, $\boldsymbol{A}$ 为二次型 f 的矩阵, $r(\boldsymbol{A})$ 为二次型 f 的秩.

7.1.8 二次型的标准型

通过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 将二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化成只含变量的平方项的形式 $f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$, 上式右端称为二次型 f 的标准型. 标准型的矩阵是对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}\left(d_1,d_2,\ldots,d_n\right)$, 标准型的矩阵形式为 $f=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$. 易得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵.

定理对于二次型 $f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$($\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵), 总存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使得它可以将 f 化为标准型 $f = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

7.1.9　合同矩阵

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 记为 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$, 且称由 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 的变换为合同变换. 合同具有自反性, 对称性和传递性. 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩.

判断两个矩阵是否合同 1. 两矩阵合同 $\iff$ 两矩阵具有相同的正惯性指数 $\iff$ 正负特征值个数相同; 2. 两个实对称阵若相似则必合同 (两个可对角化的同阶方阵相似 $\iff$ 它们有相同的特征值).

7.1.10　正定二次型与正定矩阵

定义 设 $f(x) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是一个 n 元二次型, 如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, 都有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$, 则称 f 为正定二次型, $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

常用性质定理

1. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值大于 0.

2. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵 $\iff$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M}$, 即 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{I}_n$.

7.1.11　推论

1. n 元二次型 f 为正定二次型 $\iff$ f 的正惯性指数为 n.

2. 正定矩阵的行列式大于 0.

第八章 线性变换

8.1 知识点

8.1.1 线性变换及其运算

定义 8.1.1（线性变换） 设 T: V→W 是从线性空间 V 到线性空间 W 的映射，且 $\forall\alpha,\beta\in V, k\in F$有

（1）$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$

（2）$T(k\alpha)=kT(\alpha)$

则称 T 为 V 到 W 的一个线性变换。

说明：

（1）线性变换如果是一个一一映射，我们就称之为同构，否则可以称为同态，如果是满射可以称为满同态，如果是单射可以称为单同态；

（2）线性变换满足 V 上的线性组合对应到 W 上的线性组合；

（3）V 到 W 的所有线性变换的全体记为 L(V,W)；

（4）V 到自身的线性变换的全体为 L(V)，也称线性算子；

（5）同构必为线性变换。

例一，恒等变换为线性变换；

例二，零变换为线性变换；

例三，在线性空间$P[X]_3$中，导数运算为一个线性变换；

证明：$\forall p=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, q=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\in P[X]_3$

从而，$D(p+q)=Dp+Dq$，$D(kp)=kDp$，$D\in L(P[X]_3, P[X]_2)$.

例四，$e_1,e_2,\ldots\ldots e_n$为空间 V 的一个基，对于 α∈V，设 α=$\sum k_i e_i$,定义 T:V→F^n为 T(α)=$(k_1,k_2,\ldots\ldots,k_n)^T$，则有定义 T∈L(V,$F^n$)；

例五，设 A 为一个 m×n 实矩阵，定义 T:$R^n\to R^m$为 T(x)=Ax，∀x∈R^n，则有 T∈L(R^n,R^m)；

例六，数乘变换为线性算子；

例七，T$(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,0)$则其不是一个线性变换。

➢ **线性变换的基本性质**

定理 8.1.1 设 T 为 V 到 W 的一个线性变换，则有

（1）T(0)=0

（2）T(-a)=T(a)

（3）T 把 V 中线性相关组映射为 W 中的线性相关组。

说明：

（1）线性无关组进行线性变换后未必是线性无关组；

（2）线性变换由其在基上的作用决定；

（3）若两个线性变换的原像集相同且作用在每个元素上的结果相同则这两个线性变换是相等的。

➢ **线性变化的核与值域**

定义 8.1.2（核与值域） T 为 V 到 W 的一个线性变换，则称 V 为 T 的定义域，称 V 的子集 A 为 T 的核或者零空间，如果 A 中的元素在 T 的作用下像为 0，记为ker(T)。称 W 的子集 B 为 T 的值域或者像空间，如果其在 V 中有原像，记为 R(T)或者 T(V)。

ker(T)为零向量关于映射 T 的原像的全体，R(T)是 V 中的向量在 T 的作用下像的全体。

对于零变换，其零空间为 V；对于恒等变换，其零空间为{0}，值域为 V。

定理 8.1.2 设 T 为 V 到 W 的线性变换。则有

（1）ker(T)是 V 的子空间

（2）R(T)是 W 的子空间

证明：$\alpha_1,\alpha_2\in\ker(T)$，$k\in R$

则 $T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=T(\alpha_1+\alpha_2)=0, T(k\alpha_1)=kT(\alpha_1)=0$

从而知（1）成立

$\alpha_1,\alpha_2\in R(T), k\in R$则 $T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=T(\alpha_1+\alpha_2), T(k\alpha_1)=kT(\alpha_1)$从而知（2）成立

定义 8.1.3 线性变换 T 的像空间的维数，称为线性变换 T 的秩，记为$\mathrm{rank}(T)$。线性变换 T 的零空间的维数，称为 T 的零度，记为$\mathrm{nullity}(T)$，有$\mathrm{nullity}(T)=\dim\ker(T)$。

定理 8.1.3（秩加零度定理） T 为 V 到 W 的线性映射，则$\mathrm{nullity}(T)+\mathrm{rank}(T)=\dim(T)$。

证明：只需证明 T 在$V/\ker(T)$上的限制为其到$\dim(T)$的一个同构。

对于$\alpha,\beta\in V/\ker(T)$,有$T(\alpha)=T(\beta)\Leftrightarrow T(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$;

对于$\gamma\in\dim(T)$可知其一个原像必定在$V/\ker(T)$中。

所以 T 在$V/\ker(T)$上的限制为其到$\dim(T)$的一个同构。

$$\mathrm{nullity}(T)+\mathrm{rank}(T)=\dim(T)$$

定理 8.1.4 设 T 为 V 到 U 的线性映射，则下列条件等价：

（1）T 为单射

（2）T 的零空间为｛0｝

（3）T 将 V 中线性无关组映射为 U 中的线性无关组

定理 8.1.5 $\mathrm{Dim}(V)=n$时（4）$\mathrm{rank}(T)=n$与上述也等价

证明：

（1）⇔（2）

对于α，β属于 V 有 T(α)=T(β)⇔ $T(\alpha-\beta)=0$，

T 为单射⇔当且仅当$\alpha-\beta=0$时有$T(\alpha)=T(\beta)$，即当且仅当$x=0$时有$T(x)=0$

（2）⇔（3）

正推：若存在 T 将 V 中线性无关组映射为 U 中线性相关组，这会与其零空间为$\{0\}$矛盾！

反推：若 T 的零空间含有非零元 x，则对于 V 中线性无关组 {x，y} 其映射为 U 中的线性相关组。

定义 8.1.4 T_1:U→V,T_2:V→W 为线性映射，则其定义 T_1T_2:U→W 为：$T_1T_2(\alpha)=T_1(T_2(\alpha))$，称这个 U 到 W 的映射为 T_1T_2 的乘积或复合。

定理 8.1.6 如果 T_1,T_2 都是线性变换则其复合也是线性变换。

定义 8.1.5 对 T:V→W 若有 S:W→V 使得 TS 及 ST 为恒等变换，则称 S 为 T 的逆映射，T 为可逆映射。如果 T 为线性变换，则称之为可逆线性变换。

定理 8.1.7 可逆线性变换的逆映射为可逆线性变换。

定理 8.1.8 T 为 V 到 W 的线性变换，则 T 为可逆线性变换充要于其零空间为 {0} 且其像集为 W。

8.1.2 线性变换的矩阵表示

引例：

设 n 阶矩阵 A=$\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$定义$R^n$中的变换 T(x)=Ax x∈$R^n$则 T 为线性变换。

设$e_1, e_2, \dots\dots e_n$为R^n空间中的单位向量，则

$$\mathrm{A}e_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}=\alpha_1$$

以此类推，令$\alpha_i=T(e_i)$，则有 T(x)=Ax

定义 8.2.1 设V和W的维数分别为n和m，它们的基分别为$\mathrm{B}=\{\alpha_1\dots\dots\alpha_n\}$，$\mathrm{B'}=\{\beta_1\dots\dots\beta_n\}$

对于 T 为 V 到 W 的线性变换，基向量 T(α_i)是 W 中的向量，可以用 W 的基线性唯一表示，即

$$\begin{cases} T(\alpha_1) = \sum a_{i1}\beta_i \\ \vdots \\ T(\alpha_n) = \sum a_{in}\beta_i \end{cases}$$

或者 $T(\alpha_1 \dots\dots \alpha_n) = (\beta_1 \dots\dots \beta_n)A$

称矩阵 A 为线性变换 T 的矩阵。

这说明：线性变换的矩阵完全代表了线性变换。

定理 8.2.1

（1）线性变换的和对应矩阵的和

（2）线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积

（3）线性变换的乘积对应于矩阵的乘积

定理 8.2.2 由于同构的定义，我们可以知道：L(V,W)≅ $F^{m\times n}$(≅表示同构)

定理 8.2.3 T 为 V 到 W 的线性变换，则若其矩阵为 A 有

（1）R(T)与矩阵 A 的列向量空间同构，且 T 的秩等于 A 的秩

（2）Ker(T)与齐次线性方程 Ax=0 的解空间同构

定理 8.2.4 设 T 为 n 维空间 V 到 n 维空间 W 的线性变换则 T 可逆充要于其矩阵可逆，其逆映射对应的矩阵为其矩阵的逆。

定理 8.2.5 同一个线性变换在不同的基下对应的矩阵是相似的。

证明：$(\alpha_1 \dots\dots \alpha_n)$对应矩阵 A$(\beta_1 \dots\dots \beta_n)$对应矩阵 B 则有存在 n 阶方阵 P 使

$(\alpha_1 \dots\dots \alpha_n) = (\beta_1 \dots\dots \beta_n)P$

则有$\mathrm{xA} = \mathrm{xPBP}^{-1}$即有$\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$.

8.2 习题

（一）基础组

一、 判断题

1. 判断下述规则 T_1,T_2 是否成为各自线性空间 V 的变换：

（1）$V=F^{2\times2}$，对于任意的 $A\in V$，若 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则

$$T_1(A)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix},\quad T_2(A)=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

（2）$V=R[x]_3$，对于任意的 $f(x)\in V$，若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$,则

$$T_1[f(x)]=\frac{d}{dx}f(x),\quad T_2[f(x)]=xf(x)$$

（3）$V=R^2$,对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，若 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b)^T$,则

$$T_1(\boldsymbol{\alpha})=(a+1,b+1)^T,\quad T_2(\boldsymbol{\alpha})=(ia,ib)^T$$

2. 设 V 是区间[a,b]上全体实连续函数的集合对于函数加法与数乘所成的实数域 R 上的线性空间，定义变换 T：对于 $f(x)\in V$

$$T[f(x)]=\int_a^x f(t)\sin t\,dt$$

判断 T 是否为 V 的线性变换.

二、 计算题

1. 设数域 F 上线性空间 F^3 的变换为 T_1,T_2 为：对 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T\in F^3$，有

$$T_1(\alpha)=\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a1+a2 \end{bmatrix}\quad T_2(\alpha)=\begin{bmatrix} a1+a2-a3 \\ 0 \\ a3-a1-a2 \end{bmatrix}$$

试求 $T_1+T_2(\alpha)$和 $T_1T_2(\alpha)$.

2. 设线性空间 F^3 的线性变换 T 为：对于 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，$T(\alpha)=(3a_1,-a_2,2a_3)^T$.

（1）证明 T 为可逆线性变换.

（2）求 T 在基

$$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}\quad \eta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\quad \eta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

下的矩阵.

（3）求线性变换 T^3（$T^3=TTT$）在基

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

下的矩阵.

3. 设 T 属于 $L(R^3)$，T 在 R^3 的基 $\alpha_1=(-1,1,1)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$ 下的矩阵为

$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，求 T 在基 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$下的矩阵.

（二）提高组

1. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是实数域 R 上的线性空间 V 的一个基，线性变换 T 使

$$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_3,\ T(\varepsilon_2)=\varepsilon_2,\ T(\varepsilon_3)=\varepsilon_1$$

（1）求 T 的特征值和特征向量.

（2）试求 V 的另一个基 η_1,η_2,η_3，使 T 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为对角矩阵.

8.3 答案

（一）基础组

一、判断题

1. 三小题中 T_1 均为线性变换，T_2 均不为线性变换

2. 是

二、计算题

1. $T_1+T_2(\alpha)=\begin{bmatrix} 2a1+a2-a3 \\ a2 \\ a3 \end{bmatrix}$，$T_1T_2(\alpha)=\begin{bmatrix} a1+a2-a3 \\ 0 \\ a1+a2-a3 \end{bmatrix}$

2.

（1）先求出 T 在基

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\ e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

由 A 可逆，得 T 为可逆线性变换.

（2）设$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)=(e_1, e_2, e_3)P$，则

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

于是 T 在 η_1, η_2, η_3 下的矩阵为

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & -4 & 3\\0 & -1 & -3\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

（3）T^3 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为

$$A^3=\begin{bmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

3. 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵记为 P.

即$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}P$

则 T 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵为 $PAP^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

（二）提高组

1.

（1）$T(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\ A$，$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

T 的特征值即为 A 的特征值，$|A-\lambda E|=0$，解得$\lambda = \pm 1$

$\lambda = 1$，特征向量为 $k_2\varepsilon_3 + k_3(\varepsilon_1+\varepsilon_3)$

$\lambda = -1$，特征向量为 $k_1(\varepsilon_1-\varepsilon_3)$

（2）

解题思路：对于 T 在基$(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)$下的矩阵 A，求矩阵 P，使 $PAP^{-1}=\Lambda$（对角矩阵），然后令$(\eta_1, \eta_2, \eta_3)=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)P$，则 T 在基下的矩阵恰是对角矩阵.

答案之一为

$$\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3,\ \eta_2=\varepsilon_2,\ \eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_3.$$