§3.5 解析函数和调和函数的关系

一、调和函数的概念

二、共轭调和函数

三、解析函数和调和函数的关系

一、调和函数的概念

引例 **考察三维空间中某无旋无源力场(或流速场)的势函数。**

设该力场为 $\vec{F}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}.$

(1) **无旋场** 沿闭路做功为零(即做功与路径无关，或环流量为0(旋度为0))。

又称为**保守场**或者**梯度场**或者**有势场**。

存在势函数 $\varphi(x,y,z)$，使得

$$P=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad R=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

即 $\vec{F}=\{P,Q,R\}=\{\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}.$

一、调和函数的概念

引例 **考察三维空间中某无旋无源力场(或流速场)的势函数。**

设该力场为 $F=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$.

(1) 无旋场 $\vec{F}=\{P,Q,R\}=\left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}$.

(2) 无源场 散度为零，即 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

- **无旋无源力场（调和场）** 的势函数 φ 满足

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

特别地，对于平面力场 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$

一、调和函数的概念

定义 如果二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数，

且满足二维**拉普拉斯(Laplace)方程**:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 D 内的**调和函数**。(调和场的势函数)

注 **二维泊松(Poission)方程**

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=f(x,y).$$

知识广角 —— ∇ 算子与 Δ 算子

- 哈密顿 (Hamilton) 算子 $\nabla = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}.$

  "nabla那布拉"

  例如　设 $U(x,y,z)$ 为**数量场**，则**梯度** $grad\, U = \nabla U.$

  设 $\vec{F}(x,y,z)$ 为**向量场**，则

  散度 $div\, \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$，**旋度** $rot\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$

- 拉普拉斯 (Laplace) 算子 $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$

  "delta德尔塔"

  例如　**拉普拉斯 (Laplace) 方程** $\Delta \varphi = 0.$

  泊松 (Poission) 方程 $\Delta \varphi = f(x,y,z).$

$$T_c + iN_c = \int_c \overline{v(z)}\,dz, \quad v(z) = v_x + iv_y$$

$T_c = \oint_c v_x\,dx + v_y\,dy$ 环(流)量 → 密度(Rot 旋度)

$N_c = \oint_c v_x\,dy - v_y\,dx$ 流量 → 密度(div 散度)

$T_c = N_c = 0$ → $v(z)$ 无源无旋场（调和场）

单连域 $\overline{v_z}$ 解析 $\Longleftrightarrow$ $\oint_c \overline{v_z}\,dz = 0$ (刻画了 $v(z)$ 为平面上的无源无旋场)

↓

$f'(z) = \overline{v_z}$，且 $f(z)$ 解析(单值)

$f(z)$ 为平面流速场的复势

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \overline{v(z)}\,dz$$

若 $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$

φ → 势函数　　ψ → 流函数

$\varphi(x,y)=c$ → 等势线

$\psi(x,y)=d$ → 流线

$\varphi(x,y)$，$\psi(x,y)$　调和函数

一、调和函数的概念

定理 若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内有解析，

则 $u(x,y),v(x,y)$ 在区域 D 内都是调和函数。

证明 由 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad &\underset{(?)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \quad &\underset{(?)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \underset{(?)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$

二、共轭调和函数

定义 设函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 均为区域 D 内的调和函数，

且满足 $C-R$ 方程：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},$

则称 v 是 u 的**共轭调和函数**。

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是：**在区域 D 内，v 是 u 的共轭调和函数**。

注意 **v 是 u 的共轭调和函数** $\not\Rightarrow$ **u 是 v 的共轭调和函数**。

三、构造解析函数

问题 已知实部 u，求虚部 v（或者已知虚部 v，求实部 u），使 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，且满足指定的条件。

依据 构造解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的依据：

(1) u 和 v 本身必须都是调和函数；

(2) u 和 v 之间必须满足 $C-R$ 方程。

注意 必须首先检验 **u 或 v 是否为调和函数。**

方法

- **偏积分法**
- **全微分法**
- **不定积分法**

三、构造解析函数

方法 ● **偏积分法**（**不妨仅考虑已知实部 u 的情形**）

(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的两个偏导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}, & (A) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}. & (B) \end{cases}$$

(2) 将 (A) 式的两边对变量 y 进行**(偏)**积分得：

$$v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=\int\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\tilde{v}(x,y)+\varphi(x), \quad (C)$$

其中，$\tilde{v}(x,y)$ 已知，而 $\varphi(x)$ 待定。

(3) 将 (C) 式代入 (B) 式，求解即可得到函数 $\varphi(x)$.

三、构造解析函数

方法 ● **全微分法**（不妨仅考虑已知实部 u 的情形）

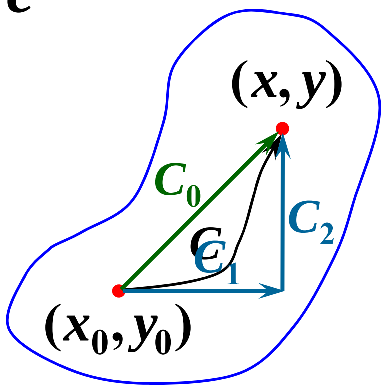
(1) 由 u 及 $C-R$ 方程得到待定函数 v 的全微分：

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

(2) 利用第二类曲线积分（与路径无关）得到原函数：

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+c$$

$$=\int_C-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+c.$$



其中，$C=C_0$ 或 C_1+C_2.

方法 **不定积分法(不妨仅考虑已知实部 u 的情形)**

(1) $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$

由 $f'(z)$ 解析，一定可以表示成 z 的函数形式，如 $g(z)$

(2) 求 $g(z)$ 的不定积分，即可求出

例　验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$ ，使得 $f(i)=-i$.

解 (1) 验证 $u(x,y)$ 为调和函数

由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x,$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

故 $u(x,y)$ 是调和函数。

例 验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$

方法一：偏积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,

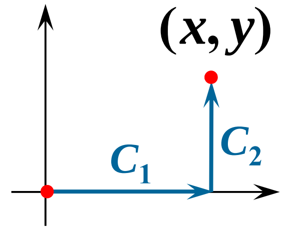
$$\Rightarrow\ v=\int(3x^2-3y^2)\,dy=3x^2y-y^3+\varphi(x),$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy$, $\Rightarrow\ \varphi'(x)=0$,

$$\Rightarrow\ \varphi(x)=c,\ \Rightarrow\ v(x,y)=3x^2y-y^3+c.$$

例　验证 $u(x,y)=x^3-3xy^2$ 为调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$，使得 $f(i)=-i$.

解 (2) 求虚部 $v(x,y)$



方法二：全微分法

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy,$

$$\Rightarrow\ dv=v'_x dx+v'_y dy=6xy\,dx+(3x^2-3y^2)dy,$$

$$\Rightarrow\ v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}6xy\,dx+(3x^2-3y^2)dy+c$$

$$=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y(3x^2-3y^2)dy+c$$

$$=3x^2y-y^3+c.$$

方法三：不定积分法

由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\qquad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy,$

$$\Rightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2+i6xy=3z^2$$

$$\Rightarrow f(z)=z^3+c$$

例 验证 $\boldsymbol{u(x,y)=x^3-3xy^2}$ 为调和函数，并求以 $\boldsymbol{u(x,y)}$ 为实部的解析函数 $\boldsymbol{f(z)}$ ，使得 $\boldsymbol{f(i)=-i}$.

解 **(3)** 求确定常数 $\boldsymbol{c}$

$$f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+c).$$

根据条件 $f(i)=-i$， 将 $x=0, y=1$ 代入得

$$\Rightarrow c=0,$$

即得 $$f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3).$$

$$=z^3.$$

例 如果$w=u(x,y)+iv(x,y)$为一解析函数，则它一定能单独用z来表示.

证明： $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, 则$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}, \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{i}{2}$,

将x,y代入$w=u(x,y)+iv(x,y)$中，那么w可看成是变量$z,\bar{z}$的函数,

要证明w仅依赖于z，只要证明$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$即可.

由复合函数偏导数求法知：

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

由于w是解析函数，由$C-R$方程得：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

得:$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0.$