第二章 线性控制系统的运动分析

一、线性定常齐次状态方程的解

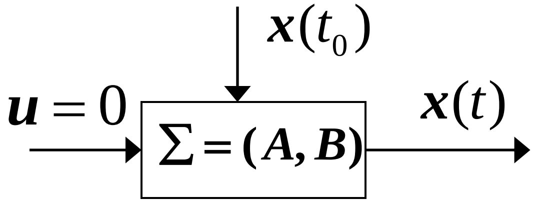
二、矩阵指数函数e^{At}的性质和计算方法

三、状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$

四、线性定常非齐次状态方程的解

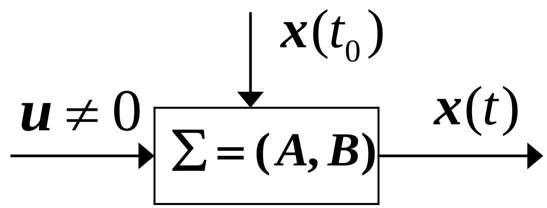
[预备知识]：线性定常系统的运动

1、自由运动：线性定常系统在没有控制作用，即 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ ，仅由初始状态引起的运动称自由运动。



齐次状态方程的解： $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{x}(t)|_{t=t_0}=\boldsymbol{x}(t_0)$

2、强迫运动：线性定常系统在控制$\boldsymbol{u}$作用下的运动，称为强迫运动。



非齐次状态方程的解：$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$， $\boldsymbol{x}(t)|_{t=t_0}=\boldsymbol{x}(t_0)$

一、线性定常齐次状态方程的解

1、标量齐次微分方程： $\dot{x} = ax$

满足初始状态 $x(t)|_{t=0} = x(0)$ 的解是：$x(t) = e^{at}x(0)$

2、齐次状态方程 $\dot{x}(t) = Ax(t)$？

$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k t^k$ 标量幂级数

求解过程：仿标量齐次微分方程的结果

这里设齐次状态方程的解为：$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots$（1）

待定系数法

注意：此处 b_i是n×1列向量

当 $t = 0$ 时，由上式可得 $x(0) = b_0$

- 式(1)左右求导得：$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots$（2）
- (1)(2)代入状态方程得：

$$b_1 + 2b_2 t^1 + 3b_3 t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots)\text{（3）}$$

$$b_1 + 2b_2t^1 + 3b_3t^2 + \cdots + kb_kt^{k-1} + \cdots = A(b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_kt^k + \cdots) \quad (3)$$

- 式(3)左右两边t的同次幂的系数两两相等得: $b_k = \frac{1}{k!}A^k b_0$（4）

$b_0 = x(0)$

- 将式(4)代入式(1)，$x(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_kt^k + \cdots$
- 有

$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots)x_0 \triangleq e^{At}x(0) \quad (5)$$

定义: $e^{At} \overset{\Delta}{=} I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$ 矢量幂级数

e^{At}定义为矩阵指数函数，和A一样也是n×n阶方阵

满足初始状态$x(t)|_{t=0} = x(0)$的解是：$x(t) = e^{At}x(0)$， $t \geq 0$

满足初始状态$x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$ 的解是:$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$， $t \geq t_0$

二、　矩阵指数函数的性质和计算方法

1、矩阵指数函数的性质

（1）设A为n×n阶矩阵，t1为t2两个独立自变量，则有：

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$$

[证明]：根据定义证明

（2）$e^{A(t-t)} = e^{A0} = I$

[证明]：矩阵指数函数定义中，令t＝0即可得证

（3）e^{At} 总是非奇异的，必有逆存在，且$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

[证明]：$\because e^{At}\cdot e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$，$\because$令$\tau = -t$，有$e^{At}\cdot e^{-At} = e^{A\cdot 0} = I$

$$\therefore (e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

（4）对于n×n阶方阵A和B：

如果A和B可交换，即A×B= B×A，则 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$

如果A和B不可交换，即A×B ≠ B×A，则 $e^{(A+B)t}\neq e^{At}e^{Bt}$

（5）对 e^{At} 有 $\frac{d}{dt}(e^{At})=Ae^{At}=e^{At}A$ 由定义证明

（6）如果P是非奇异阵，即 P^{-1} 存在，必有：

$e^{P^{-1}APt}=P^{-1}e^{At}P$ 和 $e^{At}=Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}$

[证明]：根据定义证

[注意]： $\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k个}=P^{-1}\underbrace{AA\cdots A}_{k个}P=P^{-1}A^kP$

$$e^{At}\overset{\Delta}{=}I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$$

（7）如果A是n×n阶对角阵，则 e^{At} 也是n×n阶对角阵：

如果： $A = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

则有： $e^{At} = diag[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$

[证明]：根据定义证

（8）如果 A_i 是m×m阶的约当块:

$$A_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m\times m}$$

则有:

$$e^{A_it}=e^{\lambda_it}\begin{bmatrix}1 & t & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & t\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_it} & te^{\lambda_it} & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{\lambda_it}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & te^{\lambda_it}\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_it}\end{bmatrix}$$

证明：略。根据定义证。

提示：证明中使用到

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m\times m}$$

通过引入零幂阵 $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$，有

二项式定理

$$(a+b)^n = \sum C_n^r a^{n-r} b^r$$

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$A_i^k = (\lambda_i I + N)^k$$

$$= \lambda_i^k I + C_k^1 \lambda_i^{k-1} N + C_k^2 \lambda_i^{k-2} N^2 + \ldots + C_k^{m-1} \lambda_i^{k-m+1} N^{m-1} + \ldots + N^k$$

零

注意到零幂阵N的高阶幂（$k>m$-1）为0，所以有

$$A_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & * & C_k^{m-1} \lambda_i^{k-m+1} \\ 0 & \lambda_i^k & * & C_k^{m-2} \lambda_i^{k-m+2} \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

（9）当A是约当矩阵时：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}$$

其中 A_i 是约当块

则有：

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & & 0 \\ & e^{A_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{A_n t} \end{bmatrix}$$

其中 $e^{A_i t}$ 是对应约当块 A_i 的矩阵指数函数。

[例如]:

$$A=\left[\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Longrightarrow e^{At}=\left[\begin{array}{c:ccc} e^{t} & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

2、矩阵指数函数的计算：

- 直接求解法：根据定义
- 拉氏变换求解：
- 标准型法求解：对角线标准型和约当标准型－非奇异变换
- 待定系数法： 凯莱－哈密顿（简称C-H）定理

（1）根据矩阵指数函数的定义求解：

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots+\frac{A^k}{k!}t^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k$$

对所有有限的t值来说，这个无穷级数都是收敛的

求出的解不是解析形式，适合于计算机求解。

（2）用拉氏变换法求解：

齐次状态方程：$\dot{x} = Ax$ 初始状态为：$x(t)|_{t=0} = x(0)$

两边取拉氏变换得：$sX(s) - x(0) = AX(s)$

$L[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$

整理得：$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$

拉氏反变换得： $x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0)$

由于 $x(t) = e^{At}x(0), \quad t \geq 0$

从而，

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

（3）标准型法求解：

思路：根据矩阵指数函数性质6： $e^{At}=Pe^{P^{-1}APt}P^{-1}$

记： $\bar{A}=P^{-1}AP$

有： $e^{At}=Pe^{\bar{A}t}P^{-1}$

$\bar{A}$ 有二种标准形式： 对角阵、约当矩阵

■ 当A的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为两两相异时：对角线标准型

$$e^{At}=Pe^{\bar{A}t}P^{-1}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

其中： P为使A化为对角线标准型的非奇异变换矩阵。

对角线标准型法求矩阵指数函数的步骤：

1） 先求得A阵的特征值 λ_i 。

2） 求对应于 λ_i 的特征向量 v_i，并得到P阵及P的逆阵。

3） 代入上式即可得到矩阵指数函数的值。

$$A\xrightarrow{\det(\lambda I-A)=0}\lambda_i\xrightarrow{(\lambda_i I-A)v_i=0}v_i\xrightarrow{P=[v_1\ \cdots\ v_n]}P\xrightarrow{e^{At}=Pe^{\bar{A}t}P^{-1}}e^{At}$$

■ 当A具有n重特征根λ_i：约当标准型

约当矩阵$\bar{A}$的矩阵指数函数

$$e^{At} = Qe^{\bar{A}t}Q^{-1} = Q\begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_i t} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}Q^{-1}$$

其中：$\boldsymbol{Q}$为使A化为约当标准型的非奇异变换矩阵。

约当标准型法求矩阵指数函数的步骤：

此时的步骤和对角线标准型情况类似：求特征值、特征向量、广义特征向量和变换阵$\boldsymbol{Q}$。

说明：对于所有重特征值λ_i，构造约当块，并和非重特征值一起构成约当矩阵。根据矩阵指数函数的性质8和9，求得$e^{\bar{A}t}$。

（4）待定系数法：将 e^{At} 化为A的有限项多项式来求解：

■ 凯莱(Cayley)－哈密顿(Hamilton)（以下简称C-H）定理：

设$n \times n$维矩阵A的特征方程为：

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

f(A)=|AI-A|=0

则矩阵A满足其自身的特征方程，即：

$$f(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0$$

说明：在解决有关矩阵方程的问题时，凯莱-哈密尔顿定理是非常有用的。

由定理知：A所有高于(n-1)次幂都可由A的0～(n-1)次幂线性表出。

即：$$A^m = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{mj} A^j$$

将此式代入 e^{At} 的定义中：

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} A^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{mj} A^j = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \alpha_{mj}$$

并令 $\alpha_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \alpha_{mj}$ 即可得到如下的结论：

■ 将 e^{At} 化为A的有限项多项式来求解

根据C-H定理，可将 e^{At} 化为A的有限项表达式，即封闭形式：

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) A^j = a_0(t) I + a_1(t) A + \cdots + a_{n-1}(t) A^{n-1}$$

其中：$a_0(t), a_1(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ 为 t 的标量函数，可按 A 的特征值确定。

1）$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两相异时，

注意求逆

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

推导：考虑将$\boldsymbol{A}$化为对角阵 $\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$后的矩阵指数函数

$$e^{\bar{A}t} = P^{-1}e^{At}P = P^{-1}(a_0(t)I + a_1(t)A + \cdots + a_{n-1}(t)A^{n-1})P$$

$$= a_0(t)I + a_1(t)\bar{A} + \cdots + a_{n-1}(t)\bar{A}^{n-1} \qquad (*)$$

注意到 $P^{-1}A^kP = P^{-1}\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}P = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k\text{个}} = \bar{A}^k$

$$e^{\bar{A}t}=a_0(t)\boldsymbol{I}+a_1(t)\bar{\boldsymbol{A}}+\cdots+a_{n-1}(t)\bar{\boldsymbol{A}}^{n-1}$$

其中， $e^{\bar{A}t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{A}}^k=\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k\end{bmatrix}$

比较方程两边对角线元素相等，有

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ e^{\lambda_2 t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda_2+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda_n+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t)\end{bmatrix}$$

由上式可计算： $\alpha_{n-1}(t), \alpha_{n-2}(t), \ldots \alpha_1(t), \alpha_0(t)$

注意： $a_0(t)+a_1(t)\lambda_i+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}=e^{\lambda_i t}$

2）$\boldsymbol{A}$的特征值为 λ_1 (n重根）

注意求逆

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_{n-2}(t) \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2 & \cdots & \frac{(n-1)}{1!}\lambda_1^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_1^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{1!}te^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

推导：由 1）可知 $e^{\bar{A}t} = a_0(t)\boldsymbol{I} + a_1(t)\bar{\boldsymbol{A}} + \cdots + a_{n-1}(t)\bar{\boldsymbol{A}}^{n-1}$

此时，$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$，代入上式整理可得：

由于 $$e^{\bar{A}t}=Q^{-1}e^{At}Q=Q^{-1}(a_0(t)I+a_1(t)A+\cdots+a_{n-1}(t)A^{n-1})Q$$

$$=a_0(t)I+a_1(t)\bar{A}+\cdots+a_{n-1}(t)\bar{A}^{n-1}$$

并且

$$e^{\bar{A}t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{A}^k=(\lambda_1 \boldsymbol{I}+\boldsymbol{N})^k=\begin{bmatrix} \lambda_1^k & C_k^1\lambda_1^{k-1} & * & C_k^{n-1}\lambda_1^{k-n+1} \\ 0 & \lambda_1^k & * & C_k^{n-2}\lambda_1^{k-n+2} \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^k \end{bmatrix}$$

$$\cdots \quad \begin{cases} e^{\lambda_1 t} = a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + a_2(t)\lambda_1^2 + a_3(t)\lambda_1^3 + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ te^{\lambda_1 t} = a_1(t) + 2a_2(t)\lambda_1 + 3a_3(t)\lambda_1^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-2} \\ t^2 e^{\lambda_1 t} = 2a_2(t) + (3\times 2)a_3(t)\lambda_1 + \cdots + (n-1)(n-2)a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-3} \\ \vdots \\ t^{n-2}e^{\lambda_1 t} = (n-2)!a_{n-2}(t) + (n-1)!a_{n-1}(t)\lambda_1 \\ t^{n-1}e^{\lambda_1 t} = (n-1)!a_{n-1}(t) \end{cases}$$

观察上述方程组可知，从第二个方程开始，每一个方程相当于由前一个方程左右两端对λ_1求导1次得到。

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} = e^{\lambda_1 t} \qquad (1)$$

说明：不管特征值互异、还是具有重根，只需要记住式(1)。

① 特征值互异时，对于每个特征值，写出方程(1)，联立解方程组求系数。

② 特征值为n重根时，则式(1)针对λ_1求导n-1次，补充缺少的n-1个方程。联立求出系数即可。

[例1]：求以下矩阵A的矩阵指数函数$e^{A_i t}$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

[解]：

1）用第一种方法一定义求解：(略）

2）用第二种方法一拉氏变换法求解：

$$L(e^{-at})=\frac{1}{s+a}$$

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

$$[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}}{(s^2+3s+2)}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2} & \frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}\\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$L(e^{-at})=\frac{1}{s+a}$$

3）用第三种方法一标准型法求解：

先求特征值：

$$|\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{bmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

得： $\lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$ ，具有互异特征根，用对角线标准型法。且A为友矩阵形式。

$$e^{At}=Pe^{\bar{A}t}P^{-1}=P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

由于$\boldsymbol{A}$为友阵，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=-\begin{bmatrix} -\mathbf{2} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=P^{-1}AP$$

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{-t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{e}^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{-t} & \boldsymbol{e}^{-2t} \\ -\boldsymbol{e}^{-t} & -\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-t}-\boldsymbol{e}^{-2t} & \boldsymbol{e}^{-t}-\boldsymbol{e}^{-2t} \\ -\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-t}+\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-2t} & -\boldsymbol{e}^{-t}+\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

4）用第四种方法—待定系数法求解.

$$e^{At}=a_0(t)I+a_1(t)A$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \Leftarrow a_0(t)+a_1(t)\lambda_i+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}=e^{\lambda_i t}$$

在第3种方法中已经求得特征根，所以得：

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}$$

求得矩阵指数函数如下：

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= a_0(t)I + a_1(t)A \\
&= (2e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t})\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

[例2]：求以下矩阵A的矩阵指数函数e^{At}

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

```
syms s t
A=[0,1,0;0,0,1;2,3,0]
eat=expm(A*t)
或者:
fs=inv(s*eye(3)-A)
eat=ilaplace(fs,s,t)
```

解：用C－H定理求解

$$a_0(t)+a_1(t)\lambda_i+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}=e^{\lambda_i t}$$

先求特征值，由 $|\lambda I-A|=0$ 可得：$\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=-1$

当 $\lambda_1=2$ 时，有 $a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+a_2(t)\lambda_1^2=e^{\lambda_1 t}$

当 $\lambda_2=\lambda_3=-1$（二重根）时，有 $a_0(t)+a_1(t)\lambda_2+a_2(t)\lambda_2^2=e^{\lambda_2 t}$

上式对 λ_2 求导1次，得到另一个方程：

$$a_1(t)+2a_2(t)\lambda_2=te^{\lambda_2 t}$$

得到方程组:
$$\begin{cases} a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+a_2(t)\lambda_1^2=e^{\lambda_1 t} \\ a_0(t)+a_1(t)\lambda_2+a_2(t)\lambda_2^2=e^{\lambda_2 t} \\ a_1(t)+2a_2(t)\lambda_2=te^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

写成矩阵形式为:
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ te^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

整理得:
$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ te^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

可以求出:

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}(e^{2t}+8e^{-t}+6te^{-t}) \\ \frac{1}{9}(2e^{2t}-2e^{-t}+3te^{-t}) \\ \frac{1}{9}(e^{2t}-e^{-t}-3te^{-t}) \end{bmatrix}$$

所以: $e^{\boldsymbol{A}t} = a_0(t)\boldsymbol{I} + a_1(t)\boldsymbol{A} + a_2(t)\boldsymbol{A}^2$

可以求出矩阵指数函数:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} e^{2t}+8e^{-t}+6te^{-t} & 2e^{2t}-2e^{-t}+3te^{-t} & e^{2t}-e^{-t}-3te^{-t} \\ 2e^{2t}-2e^{-t}-6te^{-t} & 4e^{2t}+5e^{-t}-3te^{-t} & 2e^{2t}-2e^{-t}+3te^{-t} \\ 4e^{2t}-4e^{-t}+6te^{-t} & 8e^{2t}-8e^{-t}+3te^{-t} & 4e^{2t}+5e^{-t}-3te^{-t} \end{bmatrix}$$

[小结]：矩阵指数函数的9个性质，4种计算方法

三、状态转移矩阵

1、线性定常系统的状态转移矩阵

已知:线性定常系统的齐次状态方程：$\dot{x} = Ax$

满足初始状态 $x(t)|_{t=0} = x(0)$ 的解是：$x(t) = e^{At}x(0)$

满足初始状态 $x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$的解是：$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$

令：$\begin{cases} e^{At} = \Phi(t) \\ e^{A(t-t_0)} = \Phi(t-t_0) \end{cases}$ 则有：$\begin{cases} x(t) = \Phi(t)x(0) \\ x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) \end{cases}$

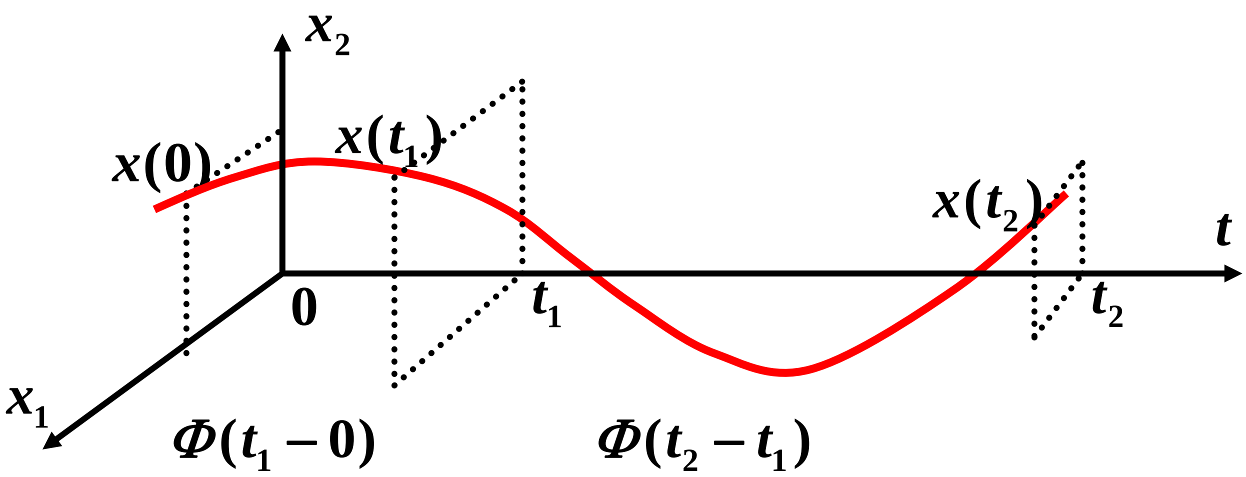
线性定常系统的状态转移矩阵

说明1：线性定常系统的状态转移矩阵就是矩阵指数函数本身

说明2：状态转移矩阵的物理意义：

状态转移矩阵包括了系统自由运动的全部规律，得到状态转移矩阵，则系统的自由运动情况就完全掌握了。

从时间角度看，状态转移矩阵使状态向量随着时间的推移不断地作坐标变换，不断地在状态空间中作转移，故称为状态转移矩阵。



2、状态转移矩阵的性质

$$e^{A(t-t)} = e^{A0} = I$$

（1）对于线性定常系统：$\Phi(t_0 - t_0) = \Phi(0) = e^{A0} = I$

不变性

说明：此性质的含义是，从t0到t0的转移，相当于不转移，转移后的状态转移矩阵仍是它自己。

（2）对于线性定常系统：

$$\Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

$$\dot{\Phi}(t - t_0) = A\Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_0)A$$

微分性和交换性

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$$

（3）对于线性定常系统：$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$

传递性

说明：此性质表明，从t0到t2的转移可以分为两步：先从t0转移到t1，再从t1转移到t2。

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$$

证明:

$$x(t_2)=\Phi(t_2-t_0)x(t_0)$$

$$x(t_1)=\Phi(t_1-t_0)x(t_0)$$

同时有: $x(t_2)=\Phi(t_2-t_1)x(t_1)$

$$\Rightarrow x(t_2)=\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)x(t_0)$$

比较$x(t_2)$的两种表达形式有:

$$\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$$

（4）对于线性定常系统：$\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t)$ 可逆性

说明：此性质表明，状态转移过程在时间上可以逆转。

说明：由性质1、3证明 $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$

$$x(t_0) \underset{\Phi(t_0-t)}{\overset{\Phi(t-t_0)}{\rightleftarrows}} x(t)$$

（5）对于线性定常系统 $\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)=\Phi(t_2)\Phi(t_1)$ → 分解性

说明：由 $\Phi(t_1+t_2)=e^{A(t_1+t_2)}$ 去证明。 $e^{A(t_1+t_2)}=e^{At_1}e^{At_2}$

（6）对于线性定常系统：$[\Phi(t)]^n=\Phi(nt)$ 倍时性

3、与状态转移矩阵相关的问题

（1）已知一组齐次状态方程的解，求状态转移矩阵：

方法是利用 $\boldsymbol{\Phi}(t)=x(t)x^{-1}(0)$ 直接求解。

x(0):多初值按列存放

（2）利用矩阵指数函数的求解方法求状态转移矩阵。

（3）已知状态转移矩阵，求系统矩阵***A***阵

说明：利用状态转移矩阵性质2求

由 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t-t_0)=A\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)$ 可得 $A=\dot{\Phi}(t-t_0)|_{t=t_0}=\dot{\Phi}(0)$

（4）已知某时刻系统状态和状态转移矩阵，求其它时刻的状态。

$$x(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)x(t_0)$$

[例3]已知某二阶系统齐次状态方程为：$\dot{x}(t)=Ax(t)$ ，其解为：

$$x(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\text{时，}x(t)=\begin{bmatrix}2e^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix},\ x(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\text{时，}x(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}+2te^{-t}\\e^{-t}+te^{-t}\end{bmatrix}$$

试求状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 。

[解]：设 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}$，则：$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix}2e^{-t}\\e^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix}e^{-t}+2te^{-t}\\e^{-t}+te^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

则有：$\begin{bmatrix}2e^{-t} & e^{-t}+2te^{-t}\\ e^{-t} & e^{-t}+te^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

所以：$\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t} & e^{-t}+2te^{-t}\\ e^{-t} & e^{-t}+te^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$

四、 线性定常非齐次状态方程的解

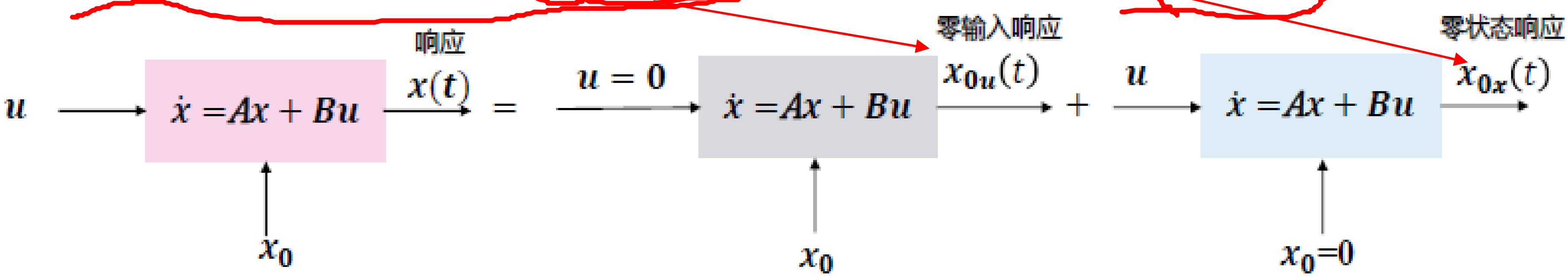
1、直接求解法

若线性定常系统的非奇次状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$,初始状态为$x(t_0)$的解存在，则解形式如下：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t-t_0)x(t_0)}_{\text{初始状态引起的响应，零输入响应}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}_{\text{输入引起的响应,零状态响应}}$$

初始状态引起的响应，零输入响应　　输入引起的响应,零状态响应



[证]:

1）先把状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 写成 $\dot{x} - Ax = Bu$

2）两边左乘 e^{-At}，再利用 e^{At} 的性质 $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$

$$e^{-At}\left[\dot{x} - Ax\right] = \tfrac{d}{dt}\left[e^{-At}x\right] = e^{-At}Bu$$

3）对上式在 $[t_0, t]$ 区间内进行积分，得:

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

直接求解法的关键：求状态转移矩阵或矩阵指数函数

2、拉氏变换求解法

对非齐次状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 两边进行拉氏变换得：

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

整理得：$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$

结论：$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)]$

[例4]：已知状态方程为：$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

其初始状态为：$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$

求系统在单位阶跃输入作用下状态方程的解。

[解]:

1）直接求解：(作为课后练习）

2）拉氏变换法求解：

$$X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$$

先求 $(sI-A)^{-1}$

由于： $$(sI-A)=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

所以： $$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X(s)=(sI-A)^{-1}x(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)}$$ 阶跃函数拉氏变换：

可以得到：

$$X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}(s+3)x_1(0)+x_2(0)\\ -2x_1(0)+sx_2(0)\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix}1/s\\ 1\end{bmatrix}$$

拉氏反变换得方程解为：

$$L(e^{-at})=\frac{1}{s+a}$$

$$x(t)=L^{-1}X(s)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+(2x_1(0)+x_2(0)-1)e^{-t}-(x_1(0)+x_2(0)-\frac{1}{2})e^{-2t}\\ -(2x_1(0)+x_2(0)-1)e^{-t}+(2x_1(0)+2x_2(0)-1)e^{-2t}\end{bmatrix}$$

[本节小结]：定常、时变系统状态转移矩阵，性质，求解方法