概率论与数理统计期末考试模拟题(四)

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

~~1. 设A,B互不相容，$P(A)=0.3,P(B)=0.5$，则$P(\bar{B}|\bar{A})=$______________.~~

2. 设 X 服从二项分布 $B(2,p)$，Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1}p$，$k=1,2,\cdots$，

若已知$P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$，则$D(Y)=$ _________.

~~3. 设随机变量(X,Y)服从区域$G=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$上的均匀分布，则~~

~~$P\left(\min(X,Y)\geq-\frac{1}{2},\max(X,Y)\leq\frac{1}{2}\right)=$ _______________.~~

4. 若X_1,X_2,X_3独立同分布，$P(X_n=1)=\frac{1}{4},P(X_n=-1)=\frac{3}{4},Y_n=X_nX_{n+1},n=1,2$，

则$P(Y_2=1|Y_1=1)=$_______________.

5. 若有一个容量为 11 的样本，其样本均值为 2，样本二阶原点矩为 10，则样本方差为_______________.

6. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_5)$是取自总体$N(0,1)$的样本，统计量$T=\frac{X_1+X_2}{\sqrt{C(X_3+X_4)^2+X_5^2}}$，则当

$C=$______________时，T服从$t(2)$分布.

二、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.4\Phi(x)+0.6\Phi(x-1)$，$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)=($　　　$)$.

(A) 0　　(B) 0.4　　(C) 0.5　　(D) 0.6

~~2. 将长为 1 米的木棍随机截成两段，则此两段长度的相关系数等于(　　　).~~

~~(A) -1　　(B) 0　　(C) 0.5　　(D) 1~~

3. 设随机变量$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix},i=1,2$, 且满足$P(X_1+X_2=0)=1$，则

$P(X_1=X_2)=($　　　$)$.

(A) 0　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

4. 设$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$独立同分布于 Poisson 分布$P(\lambda)$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，记$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则有（　　　）.

（A）$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{n\lambda}\leq x\right)=\Phi(x)$　　（B）$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right)=\Phi(x)$

（C）$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leq x\right)=\Phi(x)$　　（D）$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right)=\Phi(x)$

5 下面说法中正确的是（　　）.

① 样本均值是总体期望的无偏估计

② 样本 k 阶原点矩是总体 k 阶原点矩的无偏估计

③ 样本方差是总体方差的无偏估计

④ 样本 k 阶中心矩是总体 k 阶中心矩的无偏估计

（A）①②③　　（B）①③④　　（C）①②④　　（D）①②③④

三、（10 分）设某地区移动、电信、联通的用户比例为 4:3:2，一份对运营商的抽样调查数据表明：移动、电信、联通的好评率分别为 80%、60%、70%. 现从这些数据资料中任取一位用户的评价，

（1）求该评价为好评的概率；

（2）若该评价是好评，求该用户是电信用户的概率.

四、（10 分）设 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a+b\arcsin x, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$

（1）a,b满足什么条件时，$F(x)$为某随机变量的分布函数？

（2）若$F(x)$为连续型随机变量的分布函数，求a,b.

五、（10 分）设X服从参数为λ的指数分布，$Y=[X]+1$, $[x]$为不超过x的最大整数.（1）求Y的分布；　（2）求在已知$Y=2$的条件下，X的条件概率密度.

六、（12 分）设随机变量ξ,η独立同分布，$\xi\sim U\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

（1）求$\xi+\eta$的概率密度；　（2）若$X=\xi\cos\eta$, $Y=\xi\sin\eta$, 问X,Y是否不相关？

七、（10 分）设总体X的密度

$f(x)=\begin{cases}a|x-\mu|, & \mu-\theta\le x\le\mu+\theta,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ ，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体X的样本.

（1）求a；　　　（2）若μ已知，求θ的矩估计量.

八、（15 分）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本.

（1）若μ已知, σ^2未知，求σ^2的极大似然估计量；

（2）若μ已知，由（1）构造σ的置信水平为 95%的双侧置信区间；

（3）若已知$\sigma=2$, 考虑如下的假设检验问题,

$$H_0:\mu=2 \quad \text{vs} \quad H_1:\mu=3$$

检验由拒绝域$W=\{\bar{x}\ge 2.8\}$确定，当$n=36$时，求检验犯两类错误的概率.（用$\Phi(\cdot)$表示，不用计算）