第二章 解析函数

- 解析函数的概念
- 解析函数的充要条件
- 初等函数

第一节 解析函数的概念

一、复变函数的导数与微分

二、解析函数的概念

三、解析函数的充要条件

一、复变函数的导数与微分

1. 复变函数的导数

定义　设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 点的某邻域内有定义，

$z_0 + \Delta z$ 的邻域内的任意一点，$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$，

如果极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在有限的极限值 A，则称 $f(z)$ 在 z_0 处**可导**，这个

极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 处的导数，记作 $f'(z_0)$.

2. 复变函数的微分

定义　设函数 $w = f(z)$在 z 点的某邻域内有定义，$z + \Delta z$ 的邻域内的任意一点，如果存在A使得

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(|\Delta z|),$$

则称 $f(z)$ 在 z 处**可微**，$A\Delta z$ 为**微分**,记作$\mathrm{d}w = A\Delta z$.

特别地，有$\mathrm{d}z = \Delta z$.(考虑函数 $w = f(z) = z$即可)

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}w = A\mathrm{d}z.}$$

3. 可导与可微以及连续之间的关系

(1) **可导** $\rightleftarrows$ **可微**

(2) **可导** $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **连续**

- 由此可见，上述结论与一元实函数是一样的。

- 对二元实函数：

偏导数存在 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ **可微** $\underset{\not\longrightarrow}{\longleftarrow}$ **偏导数连续**。

例 求下列函数的导数.

(1) $f(z) = z^2$ (2) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

解 (1) 由 $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z)$$

$$= 2z,$$

得 $f'(z) = (z^2)' = 2z.$

解 (2) 由 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{z(z+\Delta z)}$$

$$=-\frac{1}{z^2}.$$

得 $f'(z)=\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}.$

同理可得 $(z^n)'=nz^{n-1}$, (n 为正整数);

$(C)'=0$, (C 为复常数)。

例 证明 $w=\overline{z}$ 在平面上的可导性.

证 因为对平面上任意一点 z_0,

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\overline{z_0+\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

$\Delta z\to 0$ 时，若沿平行于实轴的方向,

$\Delta y=0,\Delta x\to 0$有,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1;$$

$\Delta z \to 0$ 时，若沿平行于虚轴的方向,

$\Delta x = 0, \Delta y \to 0$有,

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

所以 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 不存在.

因此，由点 z_0的任意性得 $w = \overline{z}$ 在平面上每一点都不可导.

但是 $w = \overline{z} = x - iy$ 显然是连续的.

4.求导公式与法则:

(1) $(C)' = 0$, 其中C为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中n为复常数.

(3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$. $(g(z) \neq 0)$

（6）复合函数求导法则

$$\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z).\quad \text{其中 } w = g(z)$$

（7）反函数求导法则

设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内为解析且 $f'(z) \neq 0$

又反函数 $z = f^{-1}(w) = \varphi(w)$ 存在且连续，则

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}\bigg|_{z=\varphi(w)} = \frac{1}{f'(\varphi(w))}$$

二、解析函数

1. 解析函数的定义

(1) 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点以及 z_0 点的邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 **点解析**;

(2) 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点解析，则称 $f(z)$ 在**区域 D 内解析**，或者称 $f(z)$ 是 D 内的**解析函数**。

关系 (1) **点可导** $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ **点解析;**

(2) **区域可导** $\rightleftarrows$ **区域解析。**

2. 奇点的定义

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的**奇点**。

性质

(1) 在区域 D 内解析的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(除去分母为零的点)在 D 内解析。

(2) 如果函数 $\xi = g(z)$ 在 z 平面上的区域 D 内解析，函数 $w = f(\xi)$ 在 ξ 平面上的区域 G 内解析，且对 D 内的每一点 z，函数 $g(z)$ 的值都属于 G，则复合函数 $w = f[g(\xi)]$ 在 D 内解析。

根据性质可知:

(1) 所有多项式在复平面内是处处解析的.

(2) 任何一个有理分式函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在不含有分母为零的点的区域内是解析的，而使分母为零的点是它的奇点.

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z+3}{4z^2-1}$ 的解析区域及在该区域上的导数.

解 设 $P(z)=z+3$, $Q(z)=4z^2-1$,

由函数 z^n 的解析性以及求导法则知:

当 $Q(z)\neq 0$ 时，即 $z\neq \pm\dfrac{1}{2}$ 时, $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 解析.

因此在全平面除去点 $z=\pm\dfrac{1}{2}$ 的区域内 $f(z)$ 解析。

$$f'(z)=\frac{P'(z)Q(z)-P(z)Q'(z)}{[Q(z)]^2}=\frac{4z^2-1-8z(z+3)}{(4z^2-1)^2}.$$

三、函数解析的一个充分必要条件

1. 点可导的充要条件

定理

函数 $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在点 $z = x + i\,y$ 处可导的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微且满足柯西–黎曼（**Cauchy-Riemann**）方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(简称C-R 方程)

求导公式

若 $f(z)$ 在 $z=x+iy$ 处可导,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\qquad=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. 区域解析的充要条件

定理

函数 $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在区域 D 内可微，且满足 $C-R$ 方程.

推论

若函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$的四个偏导数 u'_x, u'_y, v'_x, v'_y 在区域 D 内存在且连续，并满足 $C-R$ 方程，则函数 $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在区域 D 内解析。

注　由第三章的高阶导数公式可知，该推论也是充要条件。

例　讨论函数 $w=\overline{z}$ 的可导性与解析性。

解　由 $w=\overline{z}=x-iy$，有 $u=x, v=-y$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

可知不满足 $C-R$ 方程，

所以 $w=\overline{z}$ 在复平面内处处不可导，处处不解析。

例 讨论函数 $w=\bar{z}z^2$ 的可导性与解析性.

解 由 $w=\bar{z}z^2=|z|^2 z=(x^3+xy^2)+i(x^2y+y^3)$,

有 $u=x^3+xy^2, v=x^2y+y^3$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=3x^2+y^2, & \frac{\partial u}{\partial y}&=2xy,\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=x^2+3y^2, & \frac{\partial v}{\partial x}&=2xy,\end{aligned}\right\}$$

由 $C-R$ 方程, $\Rightarrow\ x=y=0$,

所以 $w=\bar{z}z^2$ 仅在 $(0,0)$ 点可导，处处不解析.

例 讨论函数$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$的可导性与解析性.

解 由 $u=e^x\cos y,\ v=e^x\sin y$, 有

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= e^x\cos y, & u'_y &= -e^x\sin y, \\ v'_y &= e^x\cos y, & v'_x &= e^x\sin y, \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\text{四个偏导数连续,}\\ &\text{且满足}\ C-R\ \text{方程,}\end{aligned}$$

故 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在全平面上处处可导,

处处解析, 且 $f'(z)=u'_x+iv'_x=e^x(\cos y+i\sin y)$.

参照以上例题可进一步证明:

如果 $f(z)$ 在区域D内解析，则以下条件等价:

(1) $f(z) =$ 恒取实值;

(2) $f'(z) = 0$;

(3) $|f(z)| =$ 常数;

(4) $\overline{f(z)}$解析;

(5) $\mathrm{Re}[f(z)] =$ 常数;

(6) $\mathrm{Im}[f(z)] =$ 常数;

(7) $v = u^2$;

(8) $\arg f(z) =$ 常数.

小结与思考

在本课中我们得到了一个重要结论—函数解析的充要条件及其有用的推论:

$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内可微且满足 $C-R$ 方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

若函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 的四个偏导数 u'_x, u'_y, v'_x, v'_y 在区域 D 内存在且连续，并满足 $C-R$ 方程，则函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析。