第二章 矩阵

第五节：矩阵的秩

董荣
数学与统计学院

作业

习题2.5

(A) 1 (1) (4)，2， 5

(B) 1

本节课教学内容

1. 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

2. 矩阵的k阶子式

3. 矩阵的秩

4. 计算矩阵秩的一般方法

回顾：

定理 设A为n阶方阵，则下列条件**相互等价**：

(1) A是可逆矩阵;

(2) A可经有限次初等行变换化成同阶单位矩阵I;

(3) A可表示成若干个初等矩阵之积.

当A可逆时, 存在初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_m$使

$$P_m \cdots P_2 P_1 A = I$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_m \cdots P_2 P_1 A A^{-1} = I A^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_m \cdots P_2 P_1 I = A^{-1}$$

求逆矩阵的初等变换法:

$$[A \,\vdots\, I]_{n \times 2n} \xrightarrow{\text{若干次初等行变换}} [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

求解矩阵方程:

若A为可逆方阵, 则矩阵方程$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$的解$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$可用下面方法求得

$$[A \,\vdots\, B] \xrightarrow{\text{若干次初等行变换}} [\boldsymbol{I} \,\vdots\, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}]$$

求解线性方程组:

若A为可逆方阵, 则线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$的解$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$可用下面方法求得

$$[\boldsymbol{A} \,\vdots\, \boldsymbol{b}] \xrightarrow{\text{若干次初等行变换}} [\boldsymbol{I} \,\vdots\, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}]$$

定理1 设A,B都是$m\times n$矩阵，则

(1) A与B行等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P_{m\times m}$使$PA=B$;

(2) A与B列等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$Q_{n\times n}$使$AQ=B$;

(3) A与B等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P_{m\times m}$及可逆矩阵$Q_{n\times n}$使$PAQ=B$.

例 求可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

$$[A \mid I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

4 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right)\xrightarrow[-r_3]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

所以 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

例 设$AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$. 求 X.

解 通过计算得$|A|\neq 0$，所以A可逆，于是$X=A^{-1}B$.

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&-2&1&-4\\0&-2&-5&-1&-9\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-5r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&-2&0&4&6\\0&0&-1&-1&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3]{-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right).\quad 故\ X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

本节课教学内容

1. 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

2. 矩阵的k阶子式

3. 矩阵的秩

4. 计算矩阵秩的一般方法

定义1（矩阵的k阶子式）

在$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵$\boldsymbol{A}$中，任取$\boldsymbol{k}$行与$\boldsymbol{k}$列$(\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{m},\boldsymbol{k}\le\boldsymbol{n}\}$，位于这些行列交叉处的$\boldsymbol{k}^2$个元素，不改变它们在$\boldsymbol{A}$中所处的位置次序而得的$\boldsymbol{k}$阶行列式，称为矩阵$\boldsymbol{A}$的一个**$\boldsymbol{k}$阶子式**.

例如

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad \begin{vmatrix}3&1\\0&5\end{vmatrix}$$

2阶子式

定义1（矩阵的k阶子式）

在$m \times n$矩阵A中，任取k行与k列$(k \le m, k \le n\}$，位于这些行列交叉处的k^2个元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为矩阵A的一个k阶子式.

例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=15$ 2阶子式

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=10$ 3阶子式

$|A|=0$ 4阶子式

注意区分以下概念：k阶子式，子矩阵，余子式，代数余子式

本节课教学内容

1. 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

2. 矩阵的k阶子式

3. 矩阵的秩

4. 计算矩阵秩的一般方法

定义2（矩阵的秩）

如果$A=O$, 则称A的秩为零；如果$A\neq O$，则称A中非零子式的**最高阶数**为A的**秩**. 记为 $r(A)$ 或 $R(A)$.

例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 4 & -2\\ 3 & 3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

$$r(A)=2 \qquad r(B)=3 \qquad r(C)=1$$

根据定义，易得：

(1) 若$m\times n$矩阵$A\neq O$,则$1\leq r(A)\leq \min\{m,n\}$;

(2) $r(A)=r(A^T)$;

(3) $r(A)=r \Leftrightarrow$ A中至少存在一个r阶非零子式，而且A中所有的$r+1$阶子式（如果存在的话）全为零.

定义3（满秩矩阵）

设A为$m \times n$矩阵,

若$r(A) = m$，则称A为**行满秩矩阵**

若$r(A) = n$，则称A为**列满秩矩阵**

设A为$n \times n$矩阵,

若$r(A) = n$, 则称A为满秩方阵（或非奇异方阵）

若$r(A) < n$, 则称A为降秩方阵（或奇异方阵）

n阶方阵A满秩(即$r(A) = n$) $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

n阶方阵A不满秩(即$r(A) < n$) $\Longleftrightarrow$ $|A| = 0$

例 设$A=\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$, $r(A)=3$,求常数a.

解 由条件知A为降秩方阵，所以$\det(A)=0$. $\det(A)=0 \Leftrightarrow r(A)=3$

即 $\det(A)=\begin{vmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{vmatrix}=(1+3a)\begin{vmatrix}1&a&a&a\\1&1&a&a\\1&a&1&a\\1&a&a&1\end{vmatrix}=(1+3a)\begin{vmatrix}1&a&a&a\\0&1-a&0&0\\0&0&1-a&0\\0&0&0&1-a\end{vmatrix}$

$=(1+3a)(1-a)^3=0$

$\Rightarrow$ $a=-\dfrac{1}{3}$或$a=1$

若$a=1$，则$r(A)=1$,不合题意.

当$a=-\dfrac{1}{3}$时,A的左上角的三阶子式$=(1+2a)(1-a)^2=\dfrac{16}{27}\neq 0$， $r(A)=3$,

故$a=-\dfrac{1}{3}$.

本节课教学内容

1. 用初等变换求可逆矩阵的逆矩阵

2. 矩阵的k阶子式

3. 矩阵的秩

4. 计算矩阵秩的一般方法

阶梯形矩阵的秩等于其非零行的个数

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=2$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$r(B)=4$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(C)=1$

阶梯形矩阵的首非零元所在的行和列所组成的k阶子式$\neq 0$，所有$k+1$阶子式$=0$

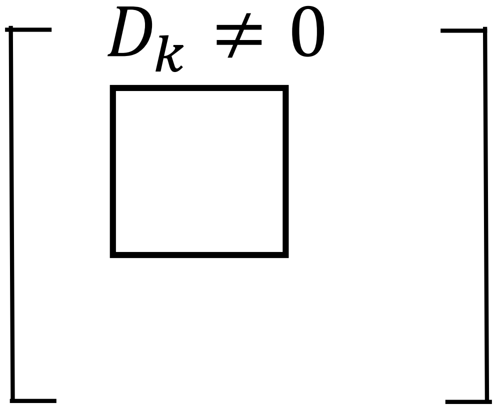
定理2 设矩阵A经过若干次初等行变换变成了矩阵B，则 $r(A)=r(B)$，即行等价的矩阵有相同的秩。

证明思路：

只需证明A经过一次初等行变换变为B之后$r(B)\geq r(A)$，由于初等变换的逆变换也是初等变换，可知$r(A)\geq r(B)$，从而有做一次初等行变换后$r(A)=r(B)$，那么做有限次初等行变换矩阵的秩也不变。

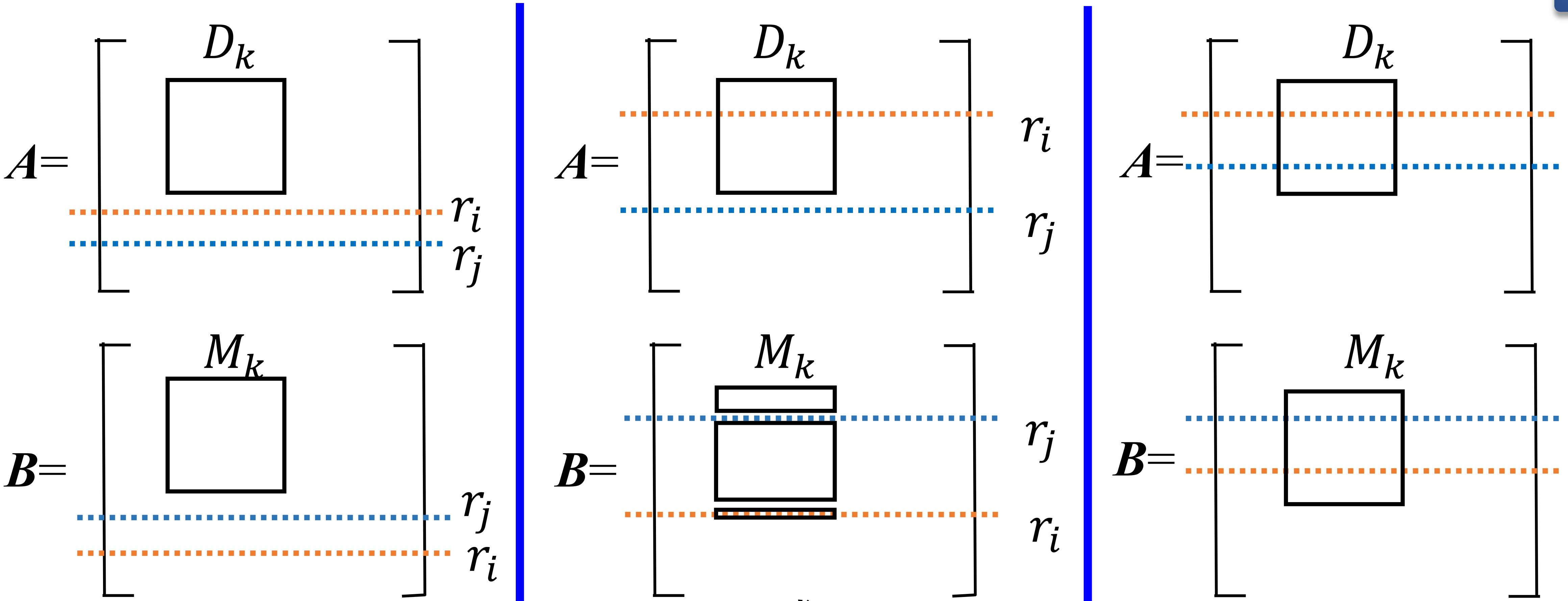
设$r(A)=k$，则A中必存在非零的k阶子式D_k

$A=$



(以D_k是A中连续的一块为例)

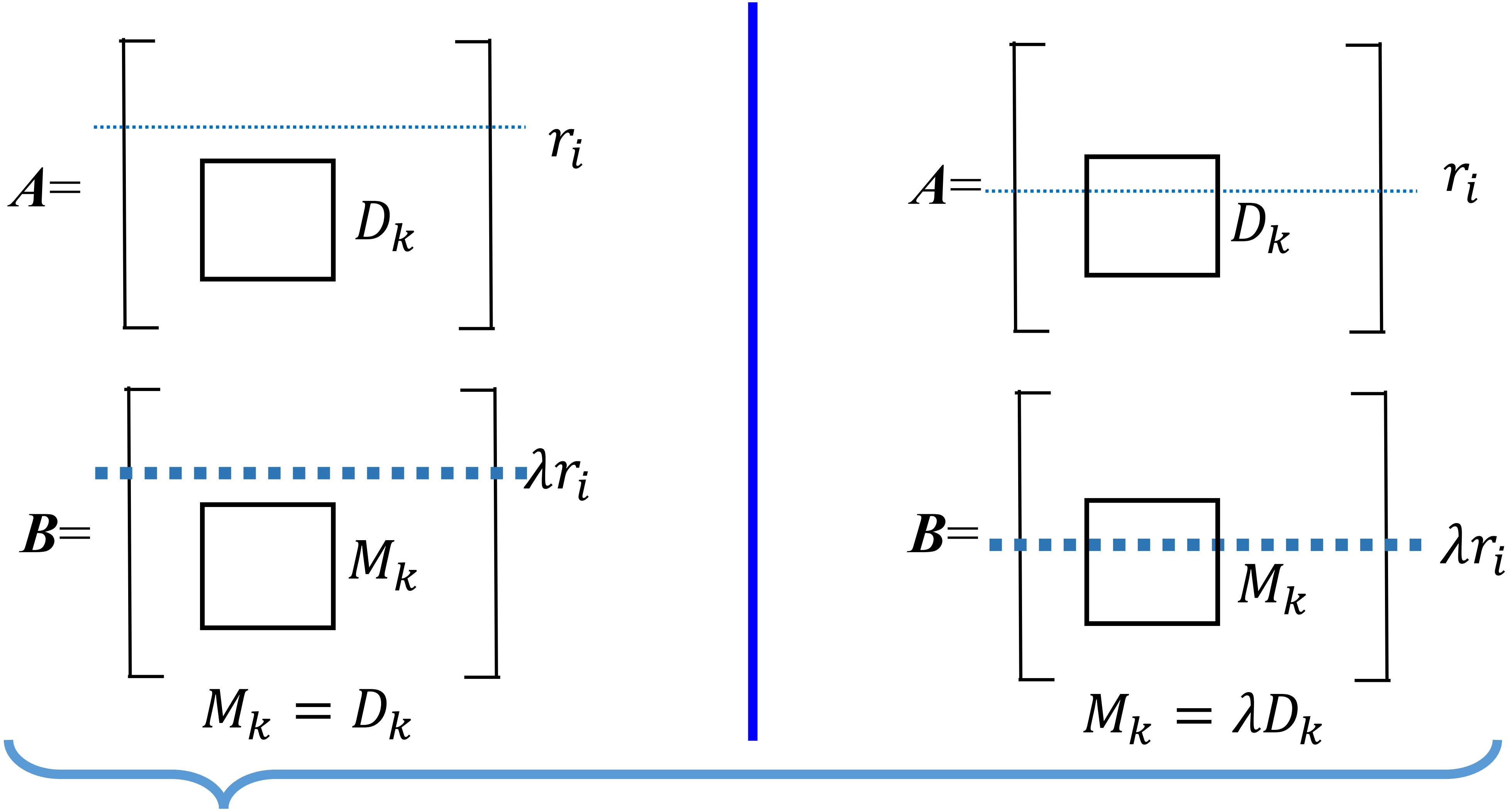
对A进行变换$r_i \leftrightarrow r_j$，有如下三种情况：



$M_k = D_k$ $\quad$ $M_k = D_k$ 或 $M_k = -D_k$ $\quad$ $M_k = -D_k$

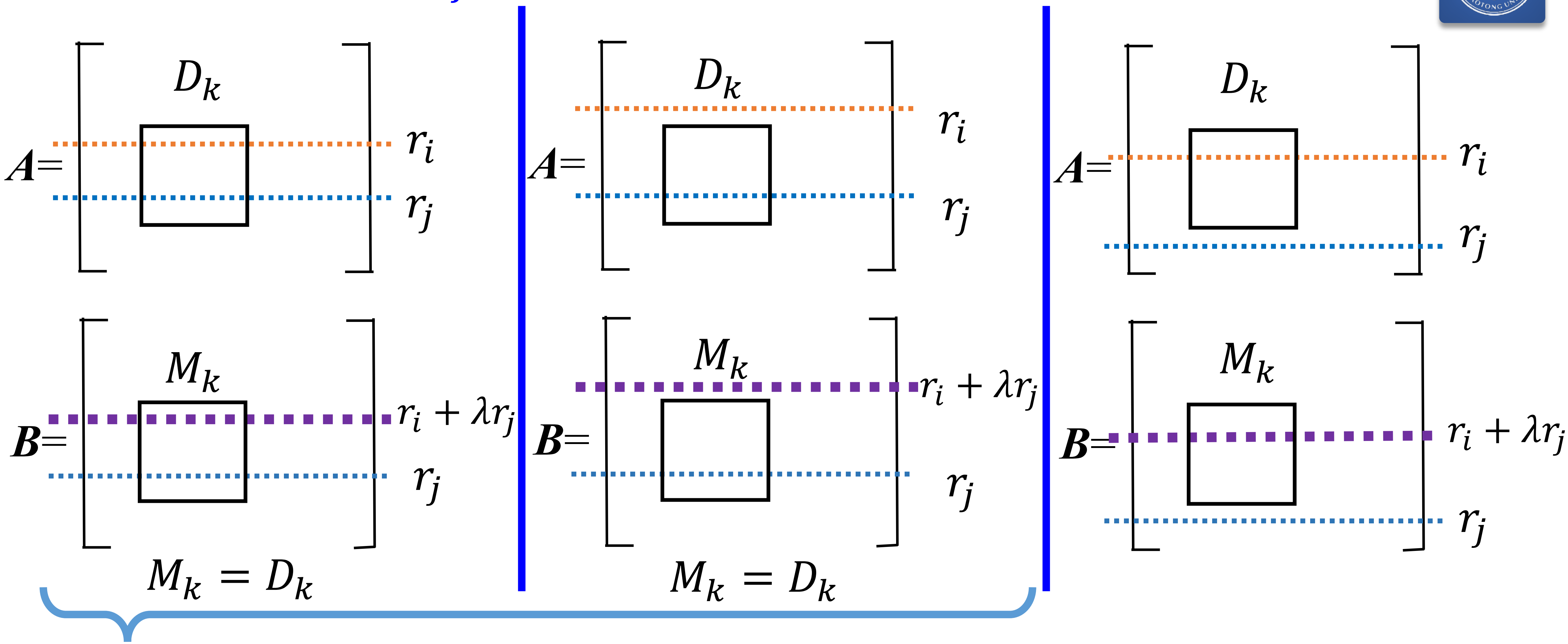
$M_k \neq 0$，$\therefore \boldsymbol{B}$中存在$k$阶的非零子式$M_k$，$r(B) \geq r(A) = k$

对A进行变换λr_i，$\lambda \neq 0$，有如下两种情况：



$M_k \neq 0$, $\therefore$ B中存在k阶的非零子式M_k，$r(B) \geq r(A) = k$

对A进行变换$r_i+\lambda r_j$，有以下三种情况:

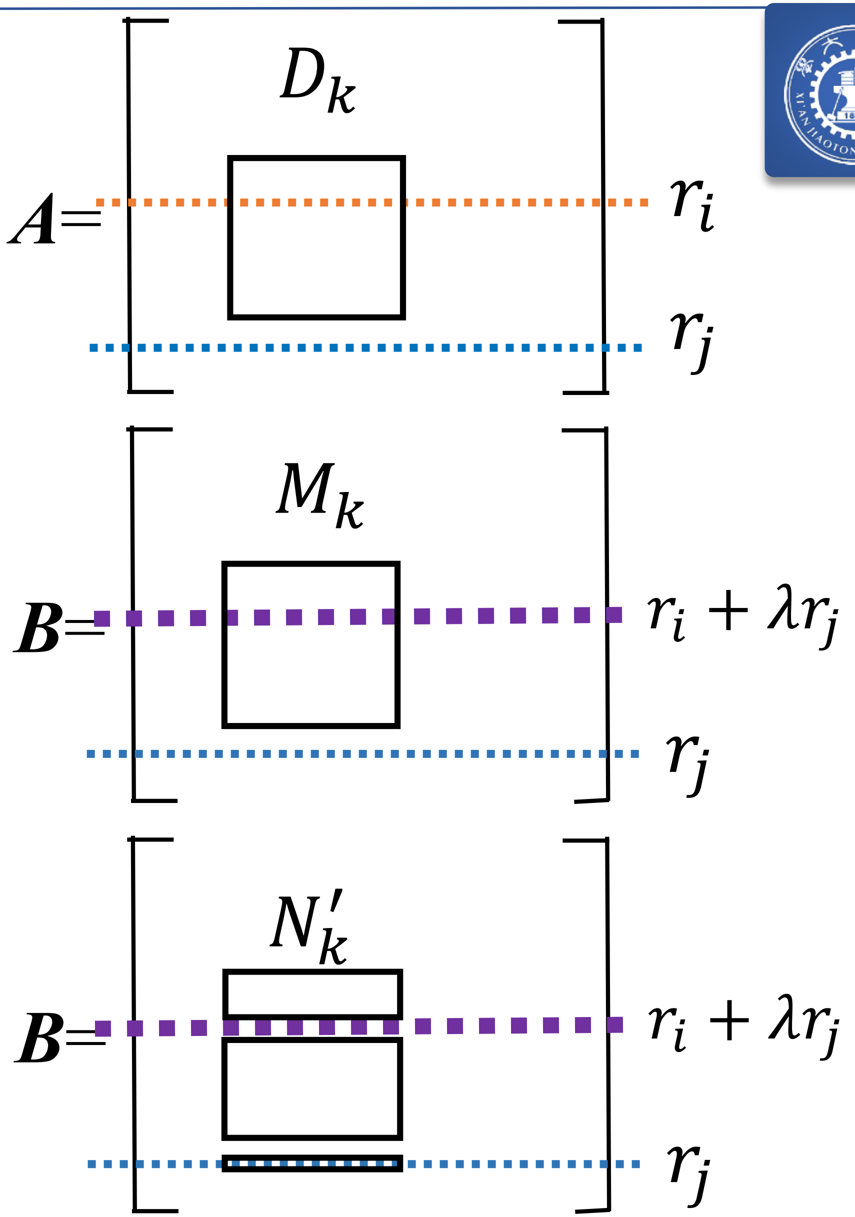


$M_k\neq 0$,∴对前两种情况，B中存在k阶的非零子式M_k，$r(B)\geq r(A)=k$

$$M_k = \begin{vmatrix} r_s \\ \vdots \\ r_t \\ r_i + \lambda r_j \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_s \\ \vdots \\ r_t \\ r_i \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} r_s \\ \vdots \\ r_t \\ r_j \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = D_k + \lambda N_k$$

$M_k - \lambda N_k = D_k \neq 0$，因此，$M_k, N_k$不同时为零，

若$N_k \neq 0$，则$\boldsymbol{B}$的k阶子式$N_k' = \begin{vmatrix} r_s \\ \vdots \\ r_t \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \\ r_j \end{vmatrix} \neq 0$



所以对第三种情况，$\boldsymbol{B}$中存在k阶非零子式（M_k或N_k'），$r(B) \geq r(A) = k$

定理2 设矩阵A经过若干次初等行变换变成了矩阵B，则$r(A)=r(B)$. 即行等价的矩阵有相同的秩。

$\boldsymbol{B=PA}$

推论1 设矩阵A经过若干次初等列变换变成了矩阵B，则$r(A)=r(B)$.即列等价的矩阵有相同的秩。

$\boldsymbol{B=AQ}$

$$r(A^T)=r(B^T)$$

即初等变换不改变矩阵的秩，等价矩阵有相同的秩。

推论2 设A为$m\times n$矩阵，P为m阶满秩方阵，Q为n阶满秩方阵，则有

$$r(PA)=r(A),\ r(AQ)=r(A),\ r(PAQ)=r(A)$$

即用满秩方阵（可逆矩阵）乘矩阵后，矩阵的秩不改变。

求矩阵秩的方法： 将A经初等行变换变成阶梯形矩阵，

则非零行的个数就是A的秩.

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形矩阵}B$$

A的秩等于B中非零行的个数

求矩阵的秩的方法：

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形矩阵}B$$

A的秩等于B中非零行的个数

例 求下列矩阵A的秩

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_2 \\ r_4-4r_2 \\ r_4-r_3}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2-r_4 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad R(A)=3.$$