第四五八章复习课

褚蕾蕾

数学与统计学院

2022.1.8

第四章内容小结

一. 向量组

线性组合： $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$

线性表示： $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$

等价向量组　　线性相关，线性无关

极大无关组，向量组的秩

定理4. 2. 1 β 可由向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$ 有解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$

表示式唯一 ···　表示式无穷 ···

定理4.2.2 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关

$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ (线性无关)

有非零解 (只有零解)

$\Leftrightarrow r([\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s])<s$ $(=s)$

推论4.2.1 n个n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关(线性无关)

$\Leftrightarrow\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\right|=0$ $(\neq 0)$

推论4.2.2 若$s>n$,则s个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$必线性相关.

特别地 ,$n+1$个n维向量必线性相关 .

线性相关性的有关定理:

定理4.2.3 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\,(m\geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow$该组中至少有一个向量 可由其余$m-1$个向量线性表示.

定理4.2.4 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关,则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示,且表示式唯一.

定理4.2.5 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$有一个部分组线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

向量组的秩的有关定理:

定理4.3.3 若向量组(I)可以由(II)线性表示则$r(I)\leq r(II)$.

定理4.3.2 设有两个向量组

$$(I):\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s; \qquad (II):\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t;$$

且(I)可以由(II)线性表示，则

(1) 当$s>t$时,向量组(I)线性相关;

(2) 当向量组(I)线性无关时，必有 $s\le t$.

定理4.3.1 $r(A)=A$的列秩$=A$的行秩

定理4.3.4

(1) $A_{m\times n},B_{n\times p}$,有 $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$

(2) $A_{m\times n},B_{m\times n}$,有 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

(3) $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$且$AB=O$,有$r(A)+r(B)\le n$.

二. 线性方程组

齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$Ax = 0.$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0.$$

必有零解

只有零解 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n.$

有非零解 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n.$

此时有无穷多解, 可表示为基础解系中解向量的线性组合.

非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$Ax=b.$$

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

有解 $\Leftrightarrow b$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$, 即 $r(A)=r(\overline{A})$

(1) 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n;$

(2) 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=r<n,$

结构解 $x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*.$

例1 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

$$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3,\beta_3=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$$

判别 β_1,β_2,β_3 的线性相关性.

解1: 设 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$

$$(x_1+x_2+x_3)\alpha_1+(2x_1+3x_2-2x_3)\alpha_2+(3x_1+4x_2-x_3)\alpha_3=0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=0 \\ 3x_1+4x_2-x_3=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=0$$

所以方程组有非零解,

β_1,β_2,β_3 线性相关.

例1 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

$$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3,\beta_3=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$$

判别 β_1,β_2,β_3的线性相关性.

解2：
$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&-2\\3&4&-1\end{bmatrix}$$

$$r\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&-2\\3&4&-1\end{bmatrix}\right)=2,$$ β_1,β_2,β_3 线性相关.

例2 设$\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$，$p$为何值时此向量组线性相关？求它的一个极大无关组并用极大无关组表示其余向量

解：

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&p+2&p\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&p-2\end{bmatrix}$$

当$p=2$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3<4$，向量组线性相关；

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是极大无关组，$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

所以$\alpha_4=2\alpha_2$.

例3 设A与B都是n维向量组，证明B可由A线性表示$\Leftrightarrow$

$$r(A)=r(A\,|\,B).$$

证： 必要性　由于B可由A线性表示，则向量组$(A\,|\,B)$

可由A线性表示，有 $r(A\,|\,B)\le r(A)$;

而A组可由 $(A\,|\,B)$线性表示，有 $r(A)\le r(A\,|\,B)$;

所以有$r(A)=r(A\,|\,B)$.

充分性：设$r\left(A\right)=r\left(A\,|\,B\right)=k$,

设A_0：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$是$A$的极大无关组，

由于$r\left(A\,|\,B\right)=k$,故A_0也是$\left(A\,|\,B\right)$的极大无关组,

因此B可由A线性表示.

例4 当a, b为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

有解?并在有解时, 求其结构式通解.

解:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right]$$

(1)当$b \neq -2$时, $r(A) \neq r(\bar{A})$,方程组无解.

(2)当$b = -2$且$a \neq -8$时, $r(A)=r(\bar{A})=3<4$, 有无穷解.

$$\bar{A} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

结构式通解为$x = (-1,1,0,0)^T + c(-1,-2,0,1)^T$

(3)**当**$b = -2$**且**$a = -8$**时**，$r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$，**有无穷解**

$$\bar{A} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

结构式通解为$x = (-1,1,0,0)^T + c_1(4,-2,1,0)^T + c_2(-1,-2,0,1)^T$

例5 已知齐次线性方程组 $Ax=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

若非零方阵 B 满足 $AB=O$，求 $|B|$ 和 λ.

解： B 不为 O 说明 $Ax=0$ 有非零解，故 $|A|=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0 \quad \Rightarrow \lambda=1;$$

故 $A\neq O$,

又由 $AB=O$，知 $|B|=0$, 否则，B 可逆, 进而 $A=O$，矛盾

例6 设方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式为零,a_{ij}的代数余子式记为A_{ij}，已知$A_{21}\neq 0$,证明：齐次线性方程组$Ax=0$的通解为$x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$, 其中$k$为任意常数.

解： $\because\ |A|=0,\ M_{21}=-A_{21}\neq 0,\quad \therefore\ r(A)=n-1,$

$Ax=0$ 的基础解系中只含一个解向量,

设 $\xi=(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$, 由于$A_{21}\neq 0$知, $\xi\neq 0$;

则$A\xi$ 的第i个分量为 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{2k}=\begin{cases}0, & i\neq 2\\ |A|=0, & i=2\end{cases}$,

$\therefore \xi$是$Ax=0$的非零解,

故$Ax=0$的通解为$x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$,$k$为任意常数.

例7 设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})^T$为n维实向量$(i=1,2,\ldots,r;r<n)$，且$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关，令$A=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r]^T$.设$Ax=0$的解为$\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_n$,证明:$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_n$线性无关.

证： A的第i行是α_i^T,α_j是$Ax=0$的解，

$$\therefore\ \alpha_i^T\alpha_j=0(i=1,\ldots,r;j=r+1,\ldots n)$$

设有一组系数$k_1,\ldots,k_r,k_{r+1},\ldots,k_n$,使得

$$k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\alpha_{r+1}+\ldots+k_n\alpha_n=0 \qquad (1)$$

(1)式两边同时左乘$(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)^T$，又$\alpha_i^T\alpha_j=0$,

得$(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)^T(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=0$,

故$k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=0$;

例7 设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})^T$为n维实向量$(i=1,2,\dots,r;r<n)$，且$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$线性无关，令$A=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r]^T$.设$Ax=0$的

基础解

解为$\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_n$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$线性无关.

$$k_1\alpha_1+\dots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\alpha_{r+1}+\dots+k_n\alpha_n=0 \qquad (1)$$

故$k_1\alpha_1+\dots+k_r\alpha_r=0$;

有$\alpha_1,\dots,\alpha_r$线性无关，得$k_1=\dots=k_r=0$;

代入(1)式，得$k_{r+1}\alpha_{r+1}+\dots+k_n\alpha_n=0$,

而$\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$是基础解系，线性无关，

$\therefore\ k_{r+1}=\dots=k_n=0.$

故$\alpha_1,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n$线性无关 .

第五章内容小结

一. 线性空间

1. 线性空间，子空间

典型的线性空间：F^n，$F^{m\times n}$，$F[x]_n$，$C[a,b]$

$span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=\{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_n\alpha_n\}$

$A_{m\times n}$ 的列空间$R(A)$

$A_{m\times n}$ 的解空间$N(A)$

子空间的交与和，直和，维数公式

定理 设W是线性空间V的非空子集，则

W为V的子空间$\Leftrightarrow$ W对V中的线性运算封闭.

2. 基、维数和向量的坐标

几个常用的基：

$$R^n, \varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0)^T, \cdots, \varepsilon_n = (0,0,\cdots,1)^T$$

$$R^{2\times 2}, \quad E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R[x]_n, \quad 1, x, x^2, \cdots, x^n$$

3. 过渡矩阵、坐标变换公式

$$(\mathrm{I}): \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n; \qquad (\mathrm{II}): \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n.$$

$$[\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] A.$$

$$x = Ay \quad 或 \quad y = A^{-1}x.$$

4. 线性空间的同构

定义 设V_1和V_2是数域F上两个线性空间， V_1到V_2的一个映射f叫做同构映射，如果

(1) f是V_1到V_2的双射；

(2) $\forall \alpha, \beta \in V_1$, 恒有$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$;

(3) $\forall \alpha \in V_1$, $k \in F$,恒有$f(k\alpha)=kf(\alpha)$.

如果两个线性空间V_1与V_2之间可以建立一个同构映射，则称 V_1与V_2同构。

定理 设f是线性空间V_1到V_2的同构映射，则

(1) $f(0_1)=0_2$，其中$0_1,0_2$分别是V_1和V_2的零元素；

(2) $\forall\alpha\in V_1$有$f(-\alpha)=-f(\alpha)$;

(3) $\forall\alpha_i\in V_1,k_i\in F(i=1,2,\cdots m)$,有

$$f(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{m}k_i f(\alpha_i);$$

(4) V_1中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

$\Leftrightarrow$它们的像线性相关 .

定理 数域F上任一n维线性空间都与F^n 同构;

数域F上两个有限维线性空间同构$\Leftrightarrow$维数相同.

二. 欧氏空间

1. 欧氏空间(实内积空间)

内积, 内积公理

常用标准内积

$$R^n:\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha^T\beta=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

$$C[a,b]:\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx,$$

$$R^{n\times n}:\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

Cauchy-Schwarz不等式 $\left|\langle\alpha,\beta\rangle\right|\le\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle}$

范数，夹角，距离

2. 标准正交基

定理 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是n维欧氏空间V的一个标准正交基，$\forall\alpha,\beta\in V$，设 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$，$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$，$(x_i,y_i\in R,i=1,\cdots,n)$，则有

(1) $x_i=\langle\alpha,\alpha_i\rangle,(i=1,\cdots,n)$;

(2) $\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$;

(3) $\|\alpha\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$;

(4) $d(\alpha,\beta)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

Gram-Schmidt正交化方法，

正交矩阵，正交变换

第八章内容小结

一. 线性变换及其运算

1. 线性变换 $T:V\to W$,

(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$;

(2) $T(k\alpha)=k\big(T(\alpha)\big)$.

定理 设 $T\in L(V,W)$,则有

(1) $T(0)=0$; (2) $T(-\alpha)=-T(\alpha)$;

(3) $T(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_mT(\alpha_m)$;

(4) T把V中的线性相关组映射成W中的线性相关组.

2. 核(零空间),值域(象空间),秩,零度

$\ker(T)=\{\alpha\mid\alpha\in V,T(\alpha)=0\}$ $R(T)=\{T(\alpha)\mid\alpha\in V\}$

秩加零度定理

$$\text{nullity}(T)+\text{rank}(T)=n$$

定理 设$T\in L(V,W)$,则下列命题等价:

(1) T是单射;

(2) $\ker(T)=\{0\}$;

(3) T将V中线性无关组映射成W中线性无关组;

若$\dim(V)=n$,还与(4) $rank(T)=n$ 等价.

定理 设$\dim(V)=\dim(W)=n, T\in L(V,W)$,则下列命题等价:

(1) T可逆; (2) T是单射; (3)T是满射;

(4) $\text{rank}(T)=n$; (5) $\text{nullity}(T)=0$.

二. 线性变换的矩阵表示

1.线性变换的矩阵

$T \in L(V,W)$，基 $B_V = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$， $B_W = \{\beta_1,\dots,\beta_m\}$

$$\begin{cases} T(\alpha_1) = a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + \cdots + a_{m1}\beta_m \\ T(\alpha_2) = a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{m2}\beta_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T(\alpha_n) = a_{1n}\beta_1 + a_{2n}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_m \end{cases}$$

$$T[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n] = [T(\alpha_1)\ T(\alpha_2) \cdots T(\alpha_n)]$$
$$= [\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_m]A$$

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow] & T(\alpha) \arrow[d, leftrightarrow] \\ x \arrow[r, "A"] & y = Ax \end{tikzcd}$$

设 V中α在B_V下的坐标为x,

$T(\alpha)$在基B_W下的坐标为y, 则

$$y = Ax$$

线性变换T作用于α，
反映在坐标上，
就是用T的矩阵去左乘α
的坐标向量。

定理 设$T \in L(V,W)$，T的矩阵为A，则

(1) $R(T)$与A的列空间同构，从而T的秩等于A的秩；

(2) $\ker(T)$与齐次线性方程组$Ax=0$的解空间同构，

从而$\text{nullity}(T) = n - r(A)$.

定理 设$T \in L(V)$，$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$和$B' = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$是$V$的两个不同的基，$T$在$B$和$B'$下的矩阵分别为$A$和$D$，且$B$到$B'$的过渡矩阵为$C$，则有$C^{-1}AC = D$，

即线性算子在不同基下的矩阵是相似的.

例8(2014) 设F是数域，证明

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a,b\in F\right\}$$是$F^{2\times 2}$的一个子空间，

并求W的基和维数。

解 $\forall\begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{bmatrix}\in W,$

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+x & (a+x)+(b+y) \\ 0 & b+y \end{bmatrix}\in W,$$

$$k\begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & ka+kb \\ 0 & kb \end{bmatrix}\in W,$$ W是子空间.

$$\begin{bmatrix} a & a+b \\ 0 & b \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$ 而$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$线性无关，为基，$W$维数为2.

例9(2013) $A=\begin{bmatrix}1&-2&1&-1\\2&1&-1&2\\3&-2&-1&1\\2&-5&1&-2\end{bmatrix}$, $V=\{b\mid b\in R^4 且 Ax=b 有解\}$

(1) 证明V是R^4的子空间；

(2) 求V的基与维数.

解 (1) $\forall b_1,b_2\in V, Ax=b_1, Ay=b_2$

$$\Rightarrow b_1+b_2=Ax+Ay=A(x+y)\in V,$$

$\forall k\in R, kb_1=kAx=A(kx)\in V$，所以$V$为子空间.

(2) 可知V由A的列向量组生成, 为A的列空间.

V的基与维数分别是A的列向量组的极大无关组和秩 .

$$A\to\begin{bmatrix}1&-2&1&-1\\0&-1&-1&0\\0&0&-8&4\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

V的基可取A的前3个列向量，维数是3.

例10 (2009)

$1+x,\ x+x^2,\ x^2-1$ 是否可作为 $span\{1+x,\ x+x^2,\ x^2-1\}$ 的一个基？求 $span\{1+x,\ x+x^2,\ x^2-1\}$ 的维数.

解1: 设 $k_1(1+x)+k_2(x+x^2)+k_3(x^2-1)=0$

$$(k_1-k_3)+(k_1+k_2)x+(k_2+k_3)x^2=0$$

$$\begin{cases} k_1-k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$ 方程组有非零解，

$\therefore\ 1+x,\ x+x^2,\ x^2-1$ 线性相关，不能为基

而 $1+x,\ x+x^2$ 线性无关，

可作为 $span\{1+x,\ x+x^2,\ x^2-1\}$ 的一个基，维数是2.

例10 (2009)

$1+x,\ x+x^2,\ x^2-1$ 是否可作为 $span\{1+x,\ x+x^2,\ x^2-1\}$ 的一个基？求 $span\{1+x,\ x+x^2,\ x^2-1\}$ 的维数。

解2： $\left[1+x,\ x+x^2,\ x^2-1\right]=\left[1,\ x,\ x^2\right]\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$\therefore\ 1+x,\ x+x^2,\ x^2-1$ 线性相关，不能为基

而 $1+x,\ x+x^2$ 线性无关，

可作为 $span\{1+x,\ x+x^2,\ x^2-1\}$ 的一个基，维数是2.

例11 设3维线性空间V有两个基 (I)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$(II)$：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$，

已知由(I)到(II)的过渡矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&3&3\\0&2&2\end{bmatrix}$,

(1) 求向量 $\alpha=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3$ 在(I)下的坐标；

(2) 求向量$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$ 在(II)下的坐标；

(3) 若向量γ在(I)下的坐标为 $(4,2,-3)^T$，试选择V的一个新基，使γ在这个新基下的坐标是 $(1,0,0)^T$.

解: (1) $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A,$

$$\alpha=2\beta_1-\beta_2+3\beta_3=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix},$$

故向量α在(I)下的坐标为 $(3,4,4)^T$.

(2) 求向量 $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3$ 在(*II*)下的坐标；

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]\begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -5 \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix},$$

故向量 β 在(*II*)下的坐标为 $(\frac{11}{2}, -5, \frac{13}{2})^T$.

(3) 若向量 γ 在(*I*)下的坐标为 $(4,2,-3)^T$，试选择 V 的一个新基，使 γ 在这个新基下的坐标是 $(1,0,0)^T$.

$$\gamma = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = [4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$[4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故可取新基为

$4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3, \alpha_2, \alpha_3$

例12 (2021) 设$T\in L(\mathrm{R}^3)$，$T(\alpha_1)=[-5,0,3]^T$，$T(\alpha_2)=[0,-1,6]^T$，$T(\alpha_3)=[-5,-1,9]^T$，其中$\alpha_1=[2,1,-1]^T$，$\alpha_2=[2,-1,2]^T$，$\alpha_3=[3,0,1]^T$，求T在基$\varepsilon_1=[1,0,0]^T$，$\varepsilon_2=[0,1,0]^T$，$\varepsilon_3=[0,0,1]^T$下的矩阵.

解： 设T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$和基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵分别为$A$，$B$，

则 $[T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3)]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]B$,

$$\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}B\Rightarrow B=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

所以由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵为 $C=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$

例12 (2021) 设 $T\in L(\mathrm{R}^3)$，$T(\alpha_1)=[-5,0,3]^T$，$T(\alpha_2)=[0,-1,6]^T$，$T(\alpha_3)=[-5,-1,9]^T$，其中 $\alpha_1=[2,1,-1]^T$，$\alpha_2=[2,-1,2]^T$，$\alpha_3=[3,0,1]^T$，求 T 在基 $\varepsilon_1=[1,0,0]^T$，$\varepsilon_2=[0,1,0]^T$，$\varepsilon_3=[0,0,1]^T$ 下的矩阵.

解： 设 T 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵分别为 A，B，

$$B=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}$$

所以由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为 $C=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$

由 $C^{-1}AC=B$，有

$$A=CBC^{-1}=\begin{bmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-10&-5\\0&-1&-5\\0&12&9\end{bmatrix}$$

例13 (2020) 设 $T\in L(F[x]_2)$, T在基$\{x^2,x,1\}$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}$,

(1) 求T在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵;

(2) 求$T(3x^2-2x+1)$.

解: (1) 由基$\{x^2,x,1\}$到基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$的过渡矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad C^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以T在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵为

$$D=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{bmatrix}$$

例13 (2020) 设 $T\in L(F[x]_2)$, T在基$\{x^2,x,1\}$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}$,

(1) 求T在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵;

(2) 求$T(3x^2-2x+1)$.

解: (2) $3x^2-2x+1$在基$\{x^2,x,1\}$下的坐标为$[3,-2,1]^T$,

所以$T(3x^2-2x+1)$在基$\{x^2,x,1\}$下的坐标为

$$y=A\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\9\end{bmatrix},$$

故 $T(3x^2-2x+1)=2x^2+9.$

或者，由T在基$\{x^2,x,1\}$下的矩阵为A可得,

$$T(x^2)=x^2-x+2,\ T(x)=2x^2+1,\ T(1)=3x^2+3x+5,$$

$$T(3x^2-2x+1)=3T(x^2)-2T(x)+T(1)=2x^2+9.$$

例14(2014) 设$T\in L(R^3)$，令$T([x_1,x_2,x_3]^T)=[x_1+2x_2-x_3,$ $x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3]^T$，求 $R(T)$的基与维数，$\ker(T)$的基与维数

解

$$R(T)=\left\{\begin{bmatrix} x_1+2x_2-x_3, \\ x_2+x_3 \\ x_1+x_2-2x_3 \end{bmatrix} \mid x_1,x_2,x_3\in R\right\}=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以$R(T)$的基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},$ 维数为2.

$$\ker(T)=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \mid T(x_1,x_2,x_3)^T=0\right\}\quad \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \xi=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$$

所以$\ker(T)$的基为ξ，维数为1.

例15 (2006) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为3维线性空间V的基, V上的线性算子T在该基下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&2&2\\2&3&5\end{bmatrix}$, 求$R(T)$和$\ker(T)$的基与维数.

解: $R(T)$与A的列空间同构, $A\to\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$R(T)$的基可取为 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$, $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$, $\dim(R(T))=2$

$\ker(T)$与$Ax=0$的解空间同构 $A\to\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$Ax=0$的基础解系为 $[-4,1,1]^T$,

$\ker(T)$ 的基可取为 $-4\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\dim(\ker(T))=1$.

例16(2009) 设T是$R^3 \to W(W \subset R^{2\times 2})$的线性变换，

$$T([a,b,c]^T)=\begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ 0 & 2a+b+2c \end{bmatrix},$$ 求$R(T)$和$\ker(T)$的基.

解 取R^3的基$\varepsilon_1=[1,0,0]^T, \varepsilon_2=[0,1,0]^T, \varepsilon_1=[0,0,1]^T$,

取W的基 $E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T(\varepsilon_1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ T(\varepsilon_2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ T(\varepsilon_3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_3)]=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{22} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{T\text{的矩阵}A} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$R(T)$的基为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

$Ax=0$的基础解系为 $[-1,0,1]^T$， $\ker(T)$的基为$[-1,0,1]^T$.