2021-2022 学年工科数学分析基础（上）期中测试（模拟卷）

一、选择题（每小题 3 分，共计 5 小题，满分 15 分）

1、已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个领域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

（A）不可导　　（B）可导且 $f'(0)\neq 0$　　（C）取得极大值　　（D）取得极小值

2、设 $f(x)=(x-1)^n x^{2n}\sin\dfrac{\pi}{2}x$，则 $f^{(n)}(1)=$（　　）.

（A）$(n-1)!$　　（B）$n!$　　（C）$n!+1$　　（D）$(n+1)!$

3、设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则 $f(x)$（　　）.

（A）处处连续　　（B）只有第一类间断点

（C）只有第二类间断点　　（D）既有第一类间断点，又有第二类间断点

4、已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，又 $f(x)$ 满足方程

$f''(x)+\cos f'(x)=e^{f(x)}$，则在 (a,b) 内 $f(x)$（　　）.

（A）不小于 0　　（B）不大于 0　　（C）恒为 0　　（D）恒不为 0

5、已知 $f(x)$ 为二阶可导的正值函数，且 $f(0)=f'(0)=1$，$f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2$，则（　　）.

（A）$f(2)\leq e^2\leq\sqrt{f(1)f(3)}$　　（B）$e^2\leq f(2)\leq\sqrt{f(1)f(3)}$

（C）$\sqrt{f(1)f(3)}\leq e^2\leq f(2)$　　（D）$\sqrt{f(1)f(3)}\leq f(2)\leq e^2$

二、选择题（每小题 3 分，共计 5 小题，满分 15 分）

6、设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可微，且满足 $2f(2+x)+f(2-x)=3+2x+o(x)$，这里 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小（当 $x\to 0$ 时），则微分 $df(x)\big|_{x=2}=$____________.

7、设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}+\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $f'(1)=$____________.

8、设当 $x\to 0^+$ 时，$\ln(1+x^2)\sin x$ 是比 $x^k(\sqrt{1+x^2}-1)$ 高阶的无穷小，而 $x^k(\sqrt{1+x^2}-1)$ 是比 $(1-\cos\sqrt{x})\arctan x$ 高阶的无穷小，则 k 的取值范围是____________.

9、已知 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x-\arcsin(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2e^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)=$____________.

10、当 $a>0$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1})=$____________.

三、计算题（共计 5 小题，满分 35 分）

11、求曲线 $y=y(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x<0 \\ (3-x)\sqrt{x}, x\ge 0 \end{cases}$ 的凹凸区间和拐点。

12、设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-4x+5}+x[\frac{1}{x}]$，其中 $[x]$ 表示不超过的 x 的最大整数，求曲线 $y=f(x)$ 的全部渐近线。

13、设 $\begin{cases} x=\tan t, \\ y=\dfrac{u(t)}{\cos t}, \end{cases}$ 函数 $y=y(x)$ 满足 $(1+x^2)^2y''=y$，求 $\dfrac{d^2u}{dt^2}$ 的值。

14、讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}, x\le 0 \\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, x>0 \end{cases}$ 的连续性，试确定其间断点类型

15、设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且 $f'''(a)\ne 0$. $f(a+h)$ 在 $x=a$ 处的一阶泰勒展开式为 $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a+\theta h)(0<\theta<1)$。求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$ 的值。

四、证明题（共计 5 小题，满分 35 分）

16、（1）证明对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 成立；

（2）设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

17、设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；　（2)存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

18、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0<a<b$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

19、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值 2，在 $(0,1)$ 内取得最小值，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)>2$；　（2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-4$.

20、已知 $f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2 x+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x$.

（1）证明方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内仅有一根 x_n，$n=1,2,3\cdots$；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\arccos\dfrac{1}{n})$；　（3）设 $x_n\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 满足 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.