第二章 矩阵的秩
习题课

董荣
数学与统计学院

由上节知：任一非零矩阵A经**初等变换**可化成一个左上角是单位阵、其余元素都是0的矩阵B，称B为A**在等价意义下的标准形**，也称为**秩标准形**。

定理 若$r(A_{m\times n})=r$,则必存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

若A为**行满秩矩阵**,即$r(A)=r=m$, 则秩标准型为$[I_m \ O_{m\times(n-m)}]$

若A为**列满秩矩阵**,即$r(A)=r=n$, 则秩标准型为$\begin{pmatrix} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix}$

若A为**满秩方阵**，即$r(A)=m=n$, 则秩标准型为 I_n

例 设$r(A_{m\times n})=r$,证明存在列满秩矩阵$G_{m\times r}$和行满秩矩阵$H_{r\times n}$，使得$A=GH$.

证 由定理知存在可逆矩阵P_m ,Q_n,使

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}_{m\times r}\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}_{r\times n}$$

则有$A=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}Q^{-1}=GH$

其中$G=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$为$m\times r$矩阵，且$r(G)=r$，即$G$为列满秩矩阵.

$H=\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}Q^{-1}$为$r\times n$矩阵，且$r(H)=r$，即$H$是行满秩矩阵.

称$A=GH$是A的一个满秩分解.

矩阵运算

加法、数乘、矩阵乘法、幂次、求逆

习题2.1 (A):

6 (4) 设A和B都是n阶矩阵，并且对任意的n维列向量x满足$Ax=Bx$，证明$A=B$.

证

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n, \quad i = 1, \cdots n$$

对任意 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$都成立, 则

取$x=(1, 0, 0, \ldots, 0)^T$，可得$a_{i1}=b_{i1}$, $i=1,\ldots,n$

取$x=(0, 1, 0, \ldots, 0)^T$，可得$a_{i2}=b_{i2}$, $i=1,\ldots,n$

… …

取$x=(0, 0, 0, \ldots, 1)^T$，可得$a_{in}=b_{in}$, $i=1,\ldots,n$

$a_{ij} = b_{ij}$

$i=1,\ldots,n$,

$j=1,\ldots,n$

$\Rightarrow$ $A = B$

习题2.1 (B):

2 设A为$m\times n$实矩阵，证明:$A=O\Leftrightarrow A^TA=O$.

证　必要性，显然$A=O\Rightarrow A^TA=O$

充分性，

$$A^TA=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=O$$

$$(A^TA)_{ij}=a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{mi}a_{mj}=0,\quad i=1,\cdots n, j=1,\cdots n$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{取}i=j=1,\text{则}(A^TA)_{11}=a_{11}^2+a_{21}^2+\cdots+a_{m1}^2=0\Rightarrow a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{m1}=0 \\ &\text{取}i=j=2,\text{则}(A^TA)_{22}=a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{m2}^2=0\Rightarrow a_{12}=a_{22}=\cdots=a_{m2}=0 \\ &\cdots\ \cdots \\ &\text{取}i=j=n,\text{则}(A^TA)_{nn}=a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{mn}^2=0\Rightarrow a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{mn}=0 \end{aligned}\right\} A=O$$

第2章习题

1(1) 设$\boldsymbol{\alpha}$为3维列向量，若$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & -6\\ 3 & -6 & 9\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$.

解 设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=[a_1\quad a_2\quad a_3]\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

由$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}[a_1\quad a_2\quad a_3]=\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2\end{bmatrix}$

得 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1+4+9=14$

第2章习题

1(2) 设n维向量$\boldsymbol{\alpha} = [a, 0, \cdots, 0, a]^T$，其中$a < 0$，已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$的逆矩阵为$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，求常数$a$.

解 $\boldsymbol{I} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\right)\left(\boldsymbol{I} + {}^1\!/_a\, \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\right) = \boldsymbol{I} + \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T - \frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = 2a^2,$$ 故有$({}^1\!/_a - 1 - 2a)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \boldsymbol{O}$,

$$\text{又}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{O} \Rightarrow {}^1\!/_a - 1 - 2a = 0,$$

即$a = -1$或$a = 1/2$，由题设$a < 0$，我们有$a = -1$.

第2章习题

1(6) 设$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$P_{3\times 3}$可逆，$B=P^{-1}AP$, 求$B^{2020}-7A^2$.

解 $B^{2020}=P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP=P^{-1}A^{2020}P$

$$A^2=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad A^4=(A^2)^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

从而$A^{2020}=\left(A^4\right)^{505}=I$

故$B^{2020}-7A^2=I-7A^2=\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}$

第2章习题

4 设$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$，3阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PD}$，求$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^8(5\boldsymbol{I}-6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)$.

解 $|\boldsymbol{P}|=-6\neq 0$，因此$\boldsymbol{P}$可逆，且$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1},\quad \boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{PDP}^{-1}\boldsymbol{PDP}^{-1}\boldsymbol{PD}\cdots\boldsymbol{PDP}^{-1}=\boldsymbol{PD}^k\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi(\boldsymbol{A})=5\boldsymbol{A}^8-6\boldsymbol{A}^9+\boldsymbol{A}^{10}=5\boldsymbol{PD}^8\boldsymbol{P}^{-1}-6\boldsymbol{PD}^9\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{PD}^{10}\boldsymbol{P}^{-1}$$
$$=\boldsymbol{P}\left(5\boldsymbol{D}^8-6\boldsymbol{D}^9+\boldsymbol{D}^{10}\right)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{D})\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\varphi(\boldsymbol{D})==\begin{bmatrix}\mathbf{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},\qquad \varphi(\boldsymbol{A})=\mathbf{4}\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

伴随矩阵、逆矩阵的性质

活用公式：$\boldsymbol{AA^{-1}=A^{-1}A=I}$

$$\boldsymbol{AA^{*}=A^{*}A}=det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{A^{*}}{det(A)}}$$

逆矩阵的基本性质：

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶可逆方阵，常数$k\neq 0$，则有：

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$可逆，且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$ $\Leftarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$

(2) $\boldsymbol{A}^{T}$可逆，且$(\boldsymbol{A}^{T})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{T}$ $\Leftarrow$ $\boldsymbol{A}^{T}(\boldsymbol{A}^{-1})^{T}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^{T}=\boldsymbol{I}$

(3) $k\boldsymbol{A}$可逆，且$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$ $\Leftarrow$ $(k\boldsymbol{A})\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$

(4) $\boldsymbol{AB}$可逆，且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ $\Leftarrow$ $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$

(5) $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$ $\Leftarrow$ $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\det(\boldsymbol{I})=1$

性质(4)推广：若$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$均为$n$阶可逆方阵，则$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m$可逆，且$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}$。

特别的，我们有$(\boldsymbol{A}^{m})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{m}$.

伴随矩阵的基本性质：

设方阵A、B均可逆，$k\neq 0$，试证明

$$\boxed{AA^* = A^*A = |A|E}$$

(1) A^*可逆，且$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \dfrac{A}{|A|}$ $\Leftarrow$ $\dfrac{A}{|A|}A^* = A^*\dfrac{A}{|A|} = E, A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$

$$(A^{-1})^* = A\frac{1}{|A|}$$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$ $\Leftarrow$ $(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|\dfrac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}A^*$

(3) $|A^*| = |A|^{n-1}$ $\Leftarrow$ 推论1

(4) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ $\Leftarrow$ $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\dfrac{A}{|A|}$

(5) $(AB)^* = B^*A^*$

$\Leftarrow$ $(AB)^* = |A||B|(B^{-1}A^{-1}) = |B|B^{-1}|A|A^{-1} = B^*A^*$

习题2.2 (A)：

1(3) 证明：如果矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个同阶的非零矩阵，且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则$\det(\boldsymbol{A})=0$且$\det(\boldsymbol{B})=0$.

证 (反证法)

假设$\det(\boldsymbol{A})$和$\det(\boldsymbol{B})$至少有一个不是0，不妨设$\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，则$\boldsymbol{A}$可逆.

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{O}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$$

与题目中条件“$\boldsymbol{B}$是非零矩阵”矛盾，

所以$\det(\boldsymbol{A})=0$且$\det(\boldsymbol{B})=0$

之前我们说，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$并不一定得到$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，
现在我们可以看到，如果$\boldsymbol{A}$可逆，则一定得到$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，反之亦然

第2章习题

公式：$AA^* = A^*A = \det(A)\,I$

1(4) 设3阶矩阵A, B满足$A^*BA = 2BA - 8I$，$A = diag(1, -2,1)$，求B.

解 $\det(A) = -2 \neq 0$，所以A可逆.

方程$A^*BA = 2BA - 8I$两端右乘A^{-1}，左乘A，得

$$AA^*BAA^{-1} = 2ABAA^{-1} - 8AIA^{-1}$$

有$\det(A)\,B = 2AB - 8I \implies (A + I)B = 4I$

故$B = 4(A + I)^{-1} = 4\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

第2章习题

公式：$AA^* = A^*A = \det(A)\,I$

1(5) 设$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^* = 2BA^* + I$，求$\det(B)$.

解 方程右端右乘A，得 $ABA^*A = 2BA^*A + IA$

得$\det(A)\,AB = 2\det(A)\,B + A$

又$\det(A) = 3$，代入得$3AB = 6B + A \Rightarrow 3(A - 2I)B = A$

两边取行列式，得$\det(3(A - 2I)B) = \det(A)$

$$\Rightarrow 3^3 \det(A - 2I)\det(B) = 3$$

因为$\det(A - 2I) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$，得$\det(B) = \frac{1}{9}$

第2章习题

公式：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}$

2(5) 设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$，且$a_{11} = a_{12} = a_{13} = a > 0$，求$a$.

解 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T \Leftrightarrow A_{ij} = a_{ij}$

$$A_{11} = a_{11} = a, \qquad A_{12} = a_{12} = a, \qquad A_{13} = a_{13} = a$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 3a^2$$

$$\det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$$

$$\begin{bmatrix} \det(\boldsymbol{A}) & & \\ & \det(\boldsymbol{A}) & \\ & & \det(\boldsymbol{A}) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$$,两边取行列式：

$\det(\boldsymbol{A})^3 = \det(\boldsymbol{A})^2$　　从而我们可知 $\det(\boldsymbol{A}) = 1$ 或者 $\det(\boldsymbol{A}) = 0$

由$a > 0$，知$\det(\boldsymbol{A}) = 3a^2 = 1$，故$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

第2章习题

1(8) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为3阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3, |\boldsymbol{B}|=2, \left|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}\right|=2$，求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|$.

解 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}$

$$\left|\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}\right|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}\right|\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|=3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=3$$

习题2.2 (B)

公式：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}$

3 设4阶实方阵$\boldsymbol{A}$满足$a_{ij} = A_{ij}$，其中A_{ij}是a_{ij}的代数余子式$(i,j = 1,2,3,4)$，$a_{44} = -1$

（1）求$\det(\boldsymbol{A})$　　（2）证明$\boldsymbol{A}$可逆且$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$.

证 $a_{ij} = A_{ij} \Rightarrow \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$，两边求行列式得

$|\boldsymbol{A}|^2 = |\boldsymbol{A}|^4 \implies |\boldsymbol{A}| = 0$ 或 $|\boldsymbol{A}| = 1$ 或 $|\boldsymbol{A}| = -1$

$$|\boldsymbol{A}| = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}$$
$$= a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2 + a_{44}^2$$
$$\geq a_{44}^2 = 1$$

所以$|\boldsymbol{A}| = 1$, 从而$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I} \implies \boldsymbol{A}$可逆且$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$

习题2.2 (B):

1. 设$A_{n\times n}$可逆，α,β均为n维列向量，且$1+\beta^TA^{-1}\alpha\neq 0$
证明$A+\alpha\beta^T$可逆，且

$$\left(A+\alpha\beta^T\right)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$$

证

$$\left(A+\alpha\beta^T\right)\left(A^{-1}-\frac{A^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}\right)$$

$$=I-\frac{\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}+\alpha\beta^TA^{-1}-\frac{\alpha\beta^TA^{-1}\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$$

$$=I+\alpha\beta^TA^{-1}-\frac{\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}-\left(\beta^TA^{-1}\alpha\right)\frac{\alpha\beta^TA^{-1}}{1+\beta^TA^{-1}\alpha}$$

$$=I+\alpha\beta^TA^{-1}-\alpha\beta^TA^{-1}$$

$$=I$$

分块矩阵的运算

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{B}_n] = [\boldsymbol{AB}_1 \quad \boldsymbol{AB}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{AB}_n]$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^n & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} {\boldsymbol{A}_1}^{-1} & & & \\ & {\boldsymbol{A}_2}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & {\boldsymbol{A}_m}^{-1} \end{bmatrix} \quad \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}_1)\det(\boldsymbol{A}_2)\cdots\det(\boldsymbol{A}_m)$$

例： 设A,B为n阶可逆方阵，A^*,B^*分别为A,B 的伴随矩阵，

分块阵 $C=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ ，则 $C^*=$ （B）

A. $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

分析

$$C^*=|C|C^{-1}=|A||B|\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A||B|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$

例：设4阶矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\left(\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{*}\right)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+12\boldsymbol{I}$，

其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&0&2\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{B}$.

解 $|\boldsymbol{A}|=2$，$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{*}=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}|\boldsymbol{A}|2\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}$，$\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=4\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1}4\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}12\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{A}\quad\Longrightarrow 4\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+12\boldsymbol{I}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{B}(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=6\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=6\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

矩阵的初等变换

对矩阵A施行一次初等**行变换**，相当于对A**左乘**一个相应的初等矩阵；

对矩阵A施行一次初等**列变换**，相当于对A**右乘**一个相应的初等矩阵.

第2章习题

2(1) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$均为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=diag(1,1,2)$，

若$\boldsymbol{P}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$，$\boldsymbol{Q}=[\alpha_1+\alpha_2\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$，

其中$\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,3)$均为3维列向量，求$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

解 $$\boldsymbol{Q}=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

第2章习题

2(3) 设$\boldsymbol{A}$是n阶可逆矩阵，交换$\boldsymbol{A}$的第1行与第2行得矩阵$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*$分别是$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的伴随矩阵，则

（A）交换$\boldsymbol{A}^*$的第1行与第2行得$\boldsymbol{B}^*$

（B）交换$\boldsymbol{A}^*$的第1列与第2列得$\boldsymbol{B}^*$

（C）交换$\boldsymbol{A}^*$的第1行与第2行得$-\boldsymbol{B}^*$

（D）交换$\boldsymbol{A}^*$的第1列与第2列得$-\boldsymbol{B}^*$

解：$P(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{P}(1,2)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}^*(1,2), \quad \boldsymbol{P}^*(1,2) = |\boldsymbol{P}(1,2)|\boldsymbol{P}^{-1}(1,2) = -\boldsymbol{P}(1,2),$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}(1,2) = -\boldsymbol{B}^*.$$

矩阵的秩

定义：非零子式的最高阶数

特性：初等变换不会改变矩阵的秩

求矩阵的秩：化成阶梯形矩阵，数非零行个数

习题2.5 (B)

2 设有$n(n>1)$维向量$\boldsymbol{\alpha}=[1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]$，$\boldsymbol{I}$为$n$阶单位阵，求$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\frac{1}{n}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$的秩.

解 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\frac{1}{p}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} 1-1/p & \cdots & -1/p \\ \vdots & & \vdots \\ -1/p & \cdots & 1-1/p \end{bmatrix}$,

$$|\boldsymbol{B}|=1-\frac{1}{p}n.$$

可得$|\boldsymbol{A}|=0$,

且$\boldsymbol{A}$左上角的$n-1$阶子式

$=1-\frac{1}{n}(n-1)\neq 0$,

故$r(\boldsymbol{A})=n-1$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

习题2.5 (A)

5 证明同型矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n}$等价$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

证 “$\Rightarrow$” 若同型矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n}$等价，显然有$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

“$\Leftarrow$” 若同型矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n}$有相同的秩，即$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r$

则矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{m\times n}$有相同的秩标准型$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$, 即存在可逆方阵

$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2$使$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1}$$

由$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{-1}$可逆，得知$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$等价