第三章 几何向量及其应用

第一节：向量及其线性运算

第二节：数量积、向量积、混合积

董荣
数学与统计学院

作业

习题3.1

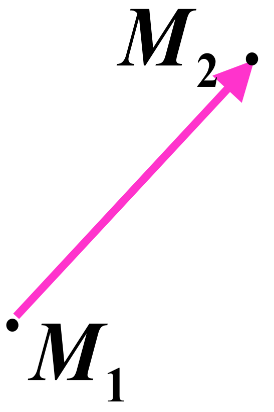
(A) 10， 12， 15， 16， 18

习题3.2（下次课讲完再做）

(A) 2, 3, 7, 8, 11, 13, 14, 18

第一节：向量及其线性运算

向量的基本概念



向量： 既有大小又有方向的量.

向量表示： $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$

以M_1为起点，M_2为终点的有向线段.

向量的长度（模、范数）： 向量的大小. 记为 $\|\vec{a}\|$, 或 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$

单位向量： 长度为1的向量. 与 $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量记为$\vec{a}^0$或$\overrightarrow{M_1M_2}^0$

零向量： 长度为0的向量. $\vec{0}$ (方向是任意的)

自由向量： 不考虑起点位置的向量.

相等向量： 长度相等且方向相同的向量.

$\vec{a}$ $\longrightarrow$ $\vec{b}$ $\longrightarrow$

负向量： 长度相等但方向相反的向量. $-\vec{a}$

$\vec{a}$ $\longrightarrow$ $-\vec{a}$ $\longleftarrow$

向径： 空间直角坐标系中任一点M与原点构成的向量 $\overrightarrow{OM}$

- **共线或平行**

若两非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反,则称$\vec{a}$与$\vec{b}$共线或平行。记为 $\vec{a} // \vec{b}$

特别的，零向量被认为与任一向量共线.

- **正交或垂直**

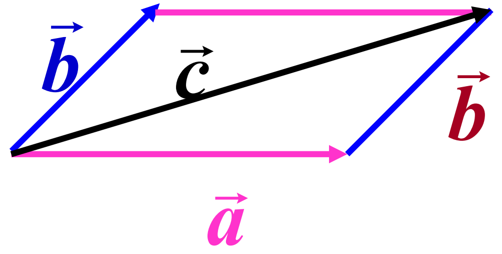
如果两非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向互相垂直,则称$\vec{a}$与$\vec{b}$正交或垂直。记为 $\vec{a} \perp \vec{b}$. 零向量被认为与任一向量正交.

- **共面**

如果将几个向量的起点取为同一点，它们都在过该点的同一平面上，则称这几个向量共面。

向量的线性运算

1、 向量加法： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$



三角形法则（折线法则）或平行四边形法则

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

（2）结合律： $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

（3）$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

（4） $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

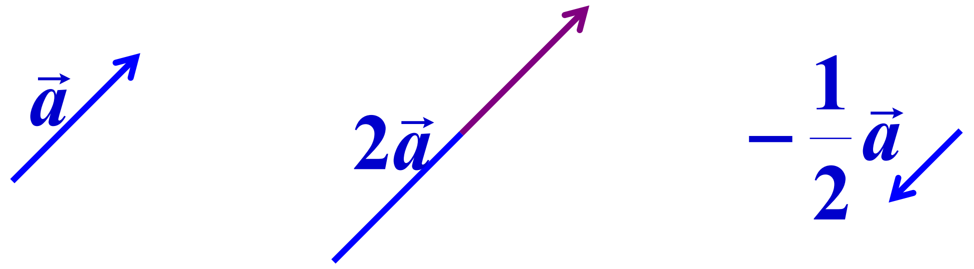
2、数乘向量

设λ是一个数，向量$\vec{a}$与λ的乘积$\lambda\vec{a}$规定为

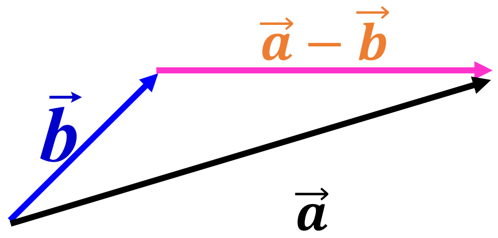
(1) $\lambda > 0$, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向，$\|\lambda\vec{a}\| = \lambda\|\vec{a}\|$

(2) $\lambda = 0$ 或$\vec{a} = \vec{0}$, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\lambda < 0$, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向，$\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{a}\|$



减法 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



数与向量的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律：$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

设$\vec{a}^0$表示与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量，

则 $\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{a}^0 \longrightarrow \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{a}^0.$

一个非零向量除以它的模是一个与其同方向的单位向量

向量的加法与数乘向量的运算统称为向量的线性运算.

向量长度的基本性质：

(1)非负性： $\|\vec{a}\| \geq 0$，且 $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(2)齐性： $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \, \|\vec{a}\|$

(3)三角不等式：

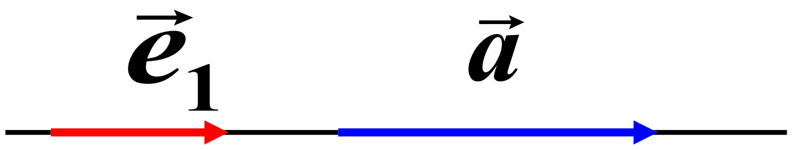
$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$，等号成立当且仅当$\vec{a}$与$\vec{b}$同向

两个向量共线的充要条件

定理3.1.1 两个向量 $\vec{a}$与$\vec{b}$共线的充要条件是存在不全为零的常数k_1和k_2使得

$$k_1\vec{a}+k_2\,\vec{b}=\vec{0}.$$

推论3.1.1 在一条直线上取定一个非零向量 $\vec{e}_1$，则该直线上任一向量$\vec{a}$必可由$\vec{e}_1$惟一地表示为 $\vec{a}=x\vec{e}_1$，其中x为一个常数.



三个向量共面的充要条件

定理3.1.2 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面 的充要条件是存在不全为零的常数k_1,k_2和k_3使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$$

推论3.1.2 在一个平面内取定两个不共线的向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2$,则该平面上任一向量$\vec{a}$都可由$\vec{e}_1,\vec{e}_2$惟一地表示为

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2,$$

其中x,y为常数.

定理3.1.3 设$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$是空间中不共面的三个向量, 则空间中任一向量$\vec{a}$都可由$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$惟一地表示为

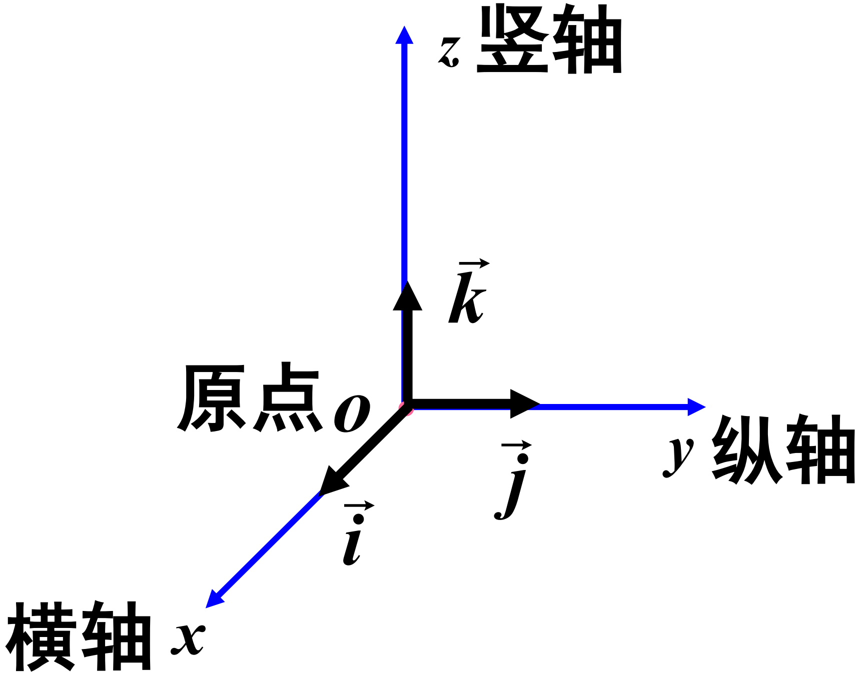
$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3,$$

其中x,y,z为常数.

空间直角坐标系

三个坐标轴的正方向符合右手系.

记为: $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$

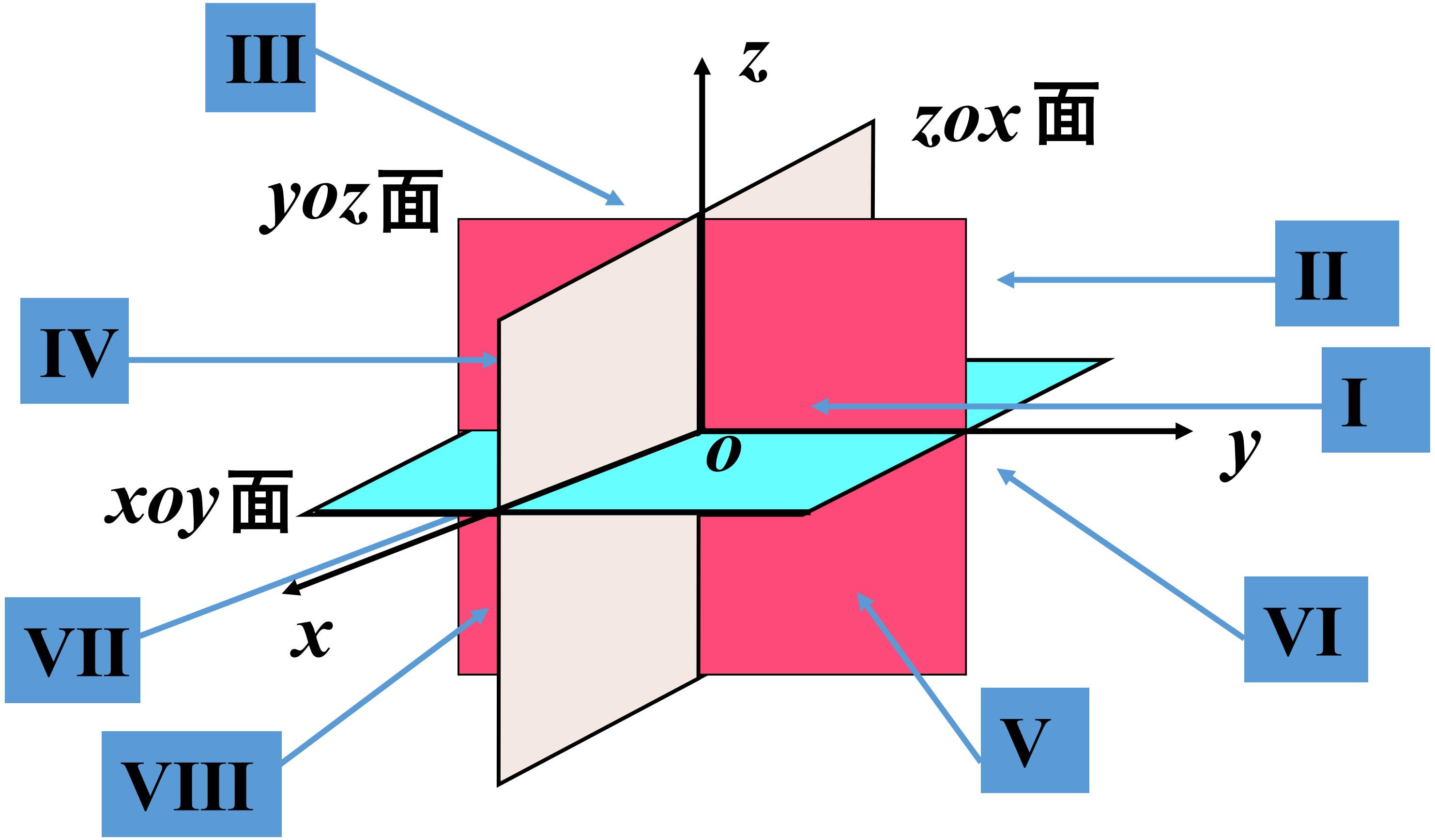


空间直角坐标系

1）基向量(基本单位向量、坐标向量)

2）坐标轴

3) 坐标面



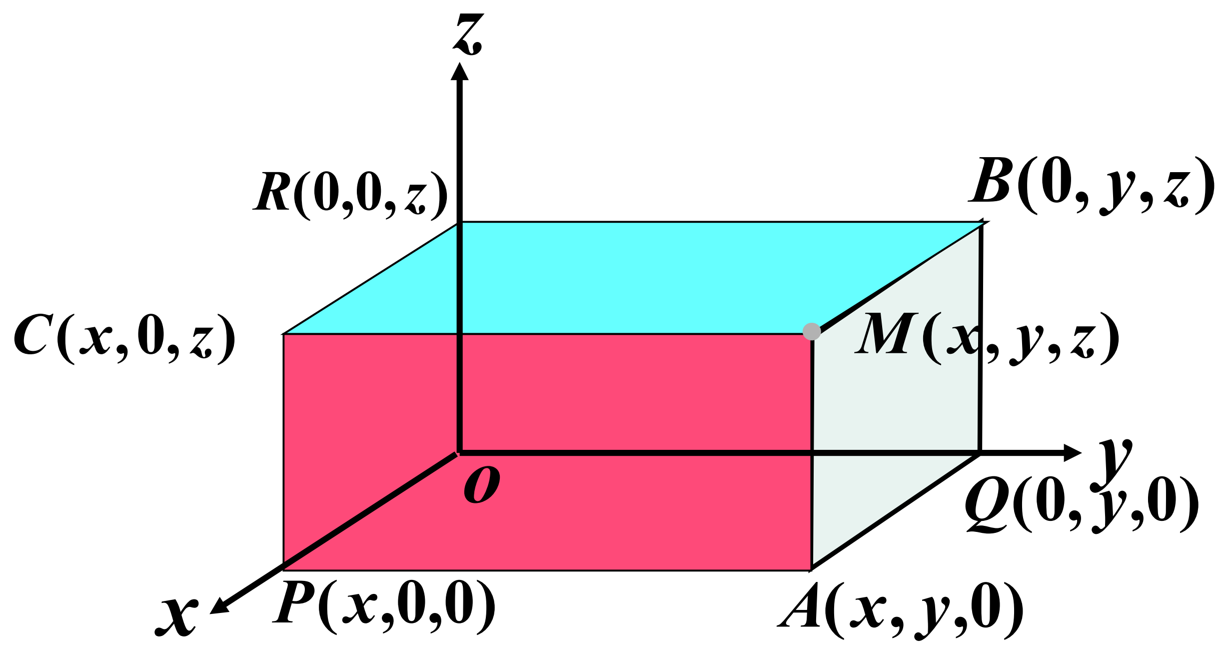
空间直角坐标系共有**八个卦限**

空间中的点的坐标

空间的点 $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x,y,z)

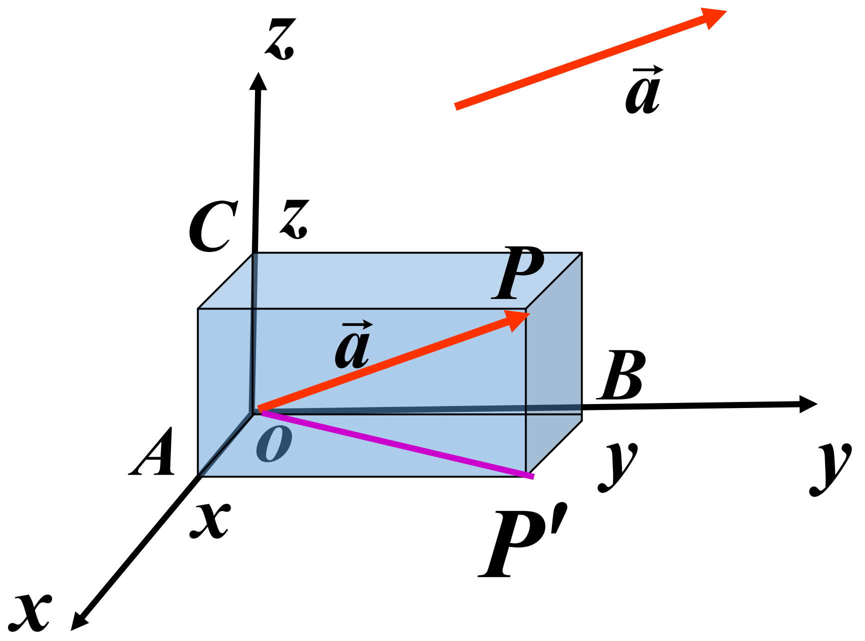
特殊点的表示： 坐标轴上的点P, Q, R

坐标面上的点A, B, C



向量的坐标

设$\vec{a}$为空间直角坐标系中的一个向量，将$\vec{a}$平移使其起点与原点重合，终点为 P



则有

$$\vec{a}=\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$ **分解式**

称(x,y,z)为$\vec{a}$在该坐标系下的**坐标**.

简记 $\vec{a}=(x,y,z)$

起点为$A(x_1,y_1,z_1)$终点为$B(x_2,y_2,z_2)$

的向量 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})$

$$=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

特别地 $\vec{i}=(1,0,0)$ $\vec{j}=(0,1,0)$ $\vec{k}=(0,0,1)$

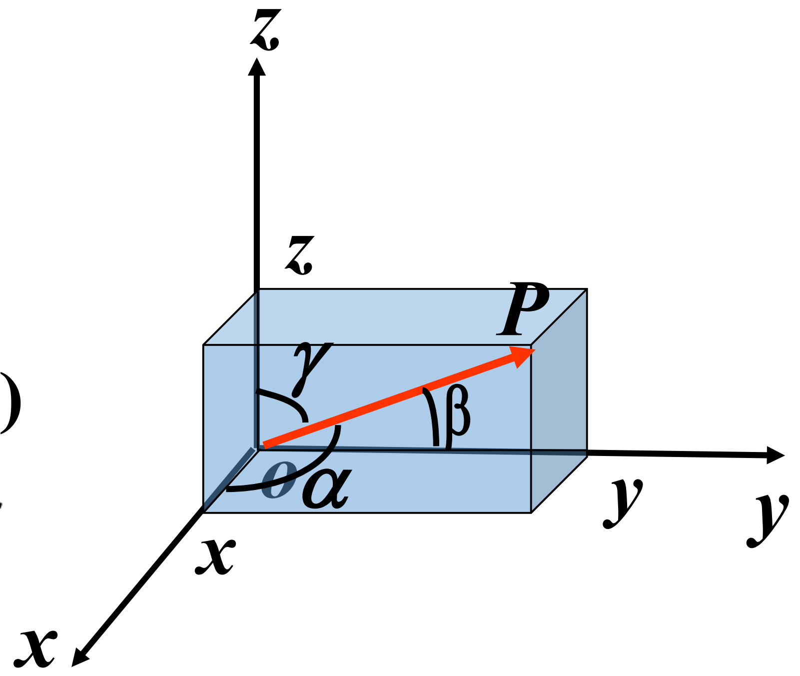
向量的长度与方向余弦

- 设 $\vec{a}=(x,y,z)$,则 $\|\vec{a}\|=\|\overrightarrow{OP}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

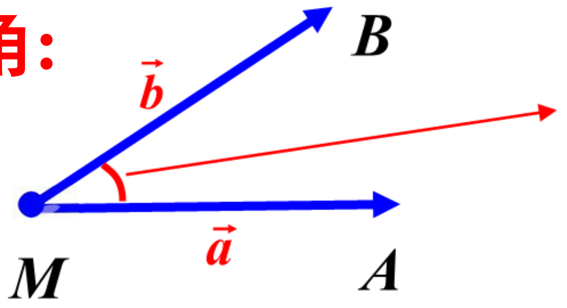
- 设有空间内两点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$

  则有 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$



- **向量的夹角:**



$\vec{a},\vec{b}$ 的夹角 $(\vec{a},\vec{b})$

$0\le\angle AMB\le\pi$

- **方向角:** 向量$\vec{a}$与x轴, y轴, z轴

  正向之间的夹角α,β,γ

- **方向余弦:** 方向角的余弦 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\|\vec{a}\|},\ \cos\beta=\dfrac{y}{\|\vec{a}\|},\ \cos\gamma=\dfrac{z}{\|\vec{a}\|}.$

方向余弦的特征

$$\cos\alpha = \frac{x}{||\vec{a}||} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{||\vec{a}||} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{||\vec{a}||} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

（1）$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(2) 单位向量的坐标就是它的方向余弦

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = \left(\frac{x}{\|\vec{a}\|}, \frac{y}{\|\vec{a}\|}, \frac{z}{\|\vec{a}\|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

用坐标进行向量的线性运算

设 $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, \ y_1, \ z_1),$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, \ y_2, \ z_2),$

则有

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2)\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\vec{k};$$

$$= (x_1 \pm x_2, \ y_1 \pm y_2, \ z_1 \pm z_2)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} + (\lambda z_1)\vec{k}.$$

$$= (\lambda x_1, \ \lambda y_1, \ \lambda z_1)$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$$

用坐标表示向量的共线共面的充要条件

设 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$,

$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$,

$\vec{a}$与$\vec{b}$共线的充要条件是存在不全为零的常数k_1和k_2,使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$$

不妨设 k_1不为0

$$\Leftrightarrow\ \vec{a}=\lambda\vec{b}\ ,\ (\lambda=-\frac{k_2}{k_1})$$

$$\Leftrightarrow\ (x_1,\ y_1,\ z_1)=\lambda(x_2,\ y_2,\ z_2),$$

$$\Leftrightarrow\ x_1:x_2=y_1:y_2=z_1:z_2$$

两向量共线的充要条件

三向量 $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\vec{c}=(x_3,\ y_3,\ z_3)$ 共面

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的常数k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$$

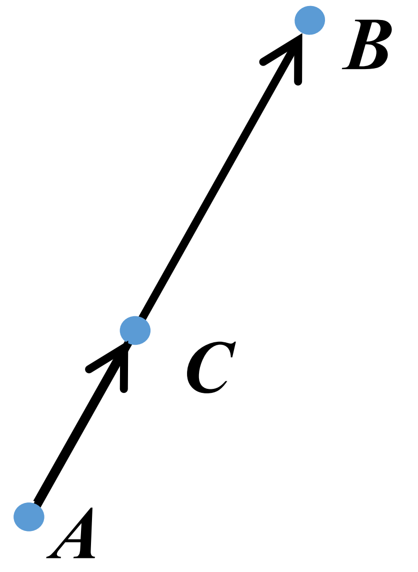
$\Leftrightarrow$ 方程组$\begin{cases} x_1k_1+x_2k_2+x_3k_3=0 \\ y_1k_1+y_2k_2+y_3k_3=0 \\ z_1k_1+z_2k_2+z_3k_3=0 \end{cases}$有非零解

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

三个向量共面的充要条件

线段的定比分点的坐标

设 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两个已知点$(A\neq B)$，如果点$C(x,y,z)$为直线 AB 上一点，它使得$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ 其中，常数$\lambda\neq$-1，则称点 C 分线段 AB 成定比 λ，我们来求分点C 的坐标.



由于 $\overrightarrow{AC}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$

$$\overrightarrow{CB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

我们有 $(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$

从而整理得到 $(x,y,z)=\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$

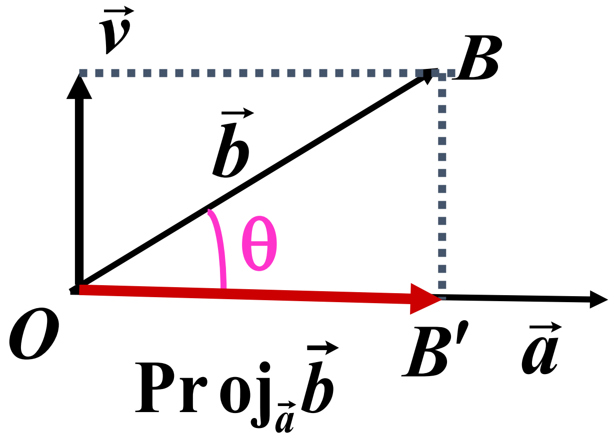
正交射影

定义3.1.3（正交射影向量和正交射影）

设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，定义向量

$$\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \|\vec{b}\|\cos\theta\cdot\vec{a}^0$$

为$\vec{b}$在$\vec{a}$上的正交射影向量，简称为射影向量.



定义数值 $(\vec{b})_{\vec{a}} = \|\vec{b}\|\cos\theta$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的正交射影，简称为射影，即有向线段OB'的值.

令 $\vec{v} = \vec{b} - \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b}$，则 $\vec{b} = \mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} + \vec{v}$，称为向量 $\vec{b}$ 的正交分解.

称 $\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b}$ 为 $\vec{b}$ 沿 $\vec{a}$ 的分量，称 $\vec{v}$ 为 $\vec{b}$ 的正交于$\vec{a}$ 的分量.

向量$\vec{a}=(x,y,z)$的坐标x,y,z分别是$\vec{a}$在坐标向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$上的射影.

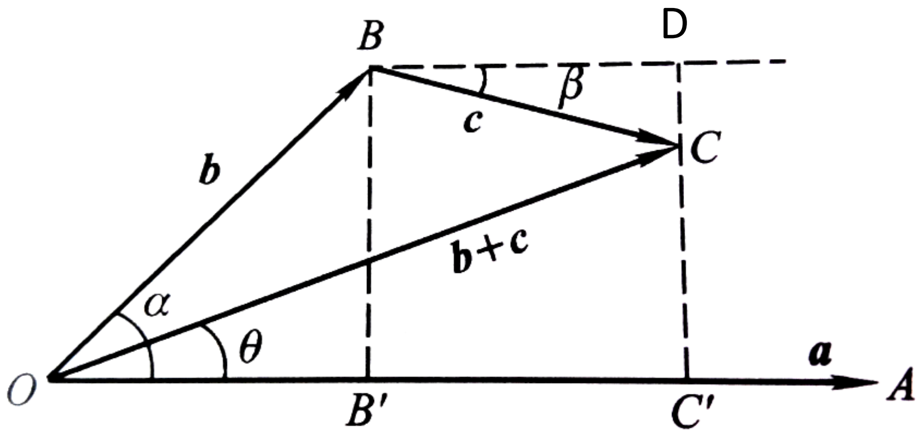
$$\vec{a}=(x,y,z)=\left(\|a\|\cos\alpha,\|a\|\cos\beta,\|a\|\cos\gamma\right)=\left((a)_{\vec{i}},(a)_{\vec{j}},(a)_{\vec{k}}\right)$$

$$\vec{a}^0=\left(\frac{x}{\|\vec{a}\|},\frac{y}{\|\vec{a}\|},\frac{z}{\|\vec{a}\|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

射影有下述基本性质:

（1） $\left(k\vec{b}\right)_{\vec{a}}=k\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}$

（2） $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)_{\vec{a}}=\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}+\left(\vec{c}\right)_{\vec{a}}$



第二节：数量积、向量积、混合积

一、数量积（内积、点积）

1、定义3.2.1（数量积、内积、点积）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta=\|\vec{a}\|\left(\vec{b}\right)_{\vec{a}}=\|\vec{b}\|\left(\vec{a}\right)_{\vec{b}}$$

2、性质：

（1） $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

（2） $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

（3） $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

（4） $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2\geq 0$ 且 $\vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$

由数量积的交换律和分配律，我们有

$$\left(\sum_{i=1}^{m}k_i\overrightarrow{a_i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\ell_j\overrightarrow{b_j}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_i\ell_j(\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{b_j})$$

例 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$

3、数量积的坐标表示：

设$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$， $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

则$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$