高数下总复习

（2021-2022第二学期）

数学与统计学院 吴慧卓

第五章　多元函数微分学及其应用

题型一 基本概念题

1. 二重极限. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 求二重极限：转化为一元函数，加逼准则

说明二重极限不存在时通常取两条不同的路径，

当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$具有不同的极限。

此方法也可用于讨论 $f(x,y)$在点(x_0,y_0) 的不连续性.

2. 连续 讨论函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的连续性时一般按定义：

(1) $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]=0$

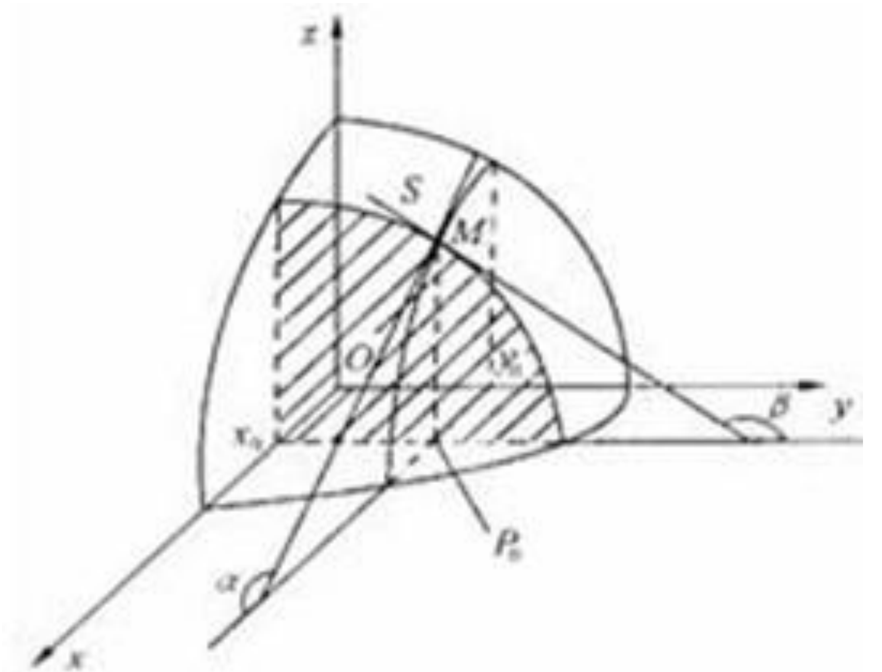
(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

3. 偏导数

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

例如，设$f(x,y)=\dfrac{2x^2+3y}{1+xy\sqrt{x^2+y^2}}$，求$f_x(1,0)$



4. 高阶偏导数

定义5

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

教材P44 如果函数$=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续, 则在该区域内

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

5. 全微分

1）定义：若 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

2）判定：

（1）必要条件：$f_x(x_0, y_0)$ 与 $f_y(x_0, y_0)$ 都存在；

（2）用定义判定：

$a)$ $f_x(x_0, y_0)$ 与 $f_y(x_0, y_0)$ 都存在

$$b)\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - [f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

（3）充分条件：$f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续；

3）计算：若 $f(x, y)$ 可微，则 $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

【例1】 讨论极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$是否存在

解　　令$y^2=kx$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在

【例2】试判断$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\sin\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)点是否连续，是否可导，是否可微？

解 $\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$ $\therefore f(x,y)$在(0,0)点连续

$$\because f_x\left(0,0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f\left(0,0\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,\ f_y\left(0,0\right)=0$$

$\therefore f(x,y)$在(0,0)点偏导存在.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left[f(x,y)-f\left(0,0\right)\right]-f_x\left(0,0\right)x-f_y\left(0,0\right)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|xy|}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(x^2+y^2\right)=0$$ $\therefore f(x,y)$在(0,0)点可微

【例3】 如果$f(x,y)$在(0, 0)点连续，下列命题正确的是（ B ）

(A)若$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$点可微；

(B)若$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$点可微；

(C)若$f(x,y)$在$(0,0)$点可微, 则$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在；

(D)若$f(x,y)$在$(0,0)$点可微, 则$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在。

连续、可导、可微的关系

一元函数

多元函数

连续

可导

连续

可偏导

可微

可微

偏导数连续

题型二 求多元复合函数的偏导数和全微分

1. 复合函数的微分法

定理 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

【例4】 若 $f(x,x^2)=x^3, f_x(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y(x,x^2)=$（ ）

A. $x+x^3$　　B. $2x^2+2x^4$　　C. x^2+x^5　　D. $2x+2x^2$

【例5】 设$z(x,y)=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$有二阶连续导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y\left[xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}''\right]+f_1'+\frac{1}{y}\left[xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}''\right]-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{y}{x^3}g''-\frac{1}{x^2}g'$$

题型三 求隐函数的偏导数或全微分

$$d(u\pm v)=du\pm dv,d(uv)=udv+vdu,d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

这组公式对一元函数和多元函数都适用。

【例6】

. 函数$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-2,y)$确定，其中函数$f(u,v)$可微，则$dz|_{(0,1)}=$____.

$x=0,y=1,z=1$ $[-dx+2dy]$

【例7】设 $u(x,y),v(x,y)$ 由方程 $\begin{cases} x+y+u+v=0, \\ x+y+u^2+v^2=0. \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

$$\begin{cases} dx+dy+du+dv=0 \\ dx+dy+2udu+2vdv=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du+dv=-(dx+dy) \\ udu+vdv=-\dfrac{1}{2}(dx+dy) \end{cases}$$

$$\Rightarrow du=\frac{\begin{vmatrix} -(dx+dy) & 1 \\ -\dfrac{1}{2}(dx+dy) & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u & v \end{vmatrix}}=\frac{\left(\dfrac{1}{2}-v\right)dx+(\dfrac{1}{2}-v)dy}{v-u}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\dfrac{1}{2}-v}{v-u}$$

题型四 求方向导数和梯度

总结:

1. 设$u=f(x,y,z)$可微，则 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}=f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta+f_z\cos\gamma$

$$z=f(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta$$

2. 梯度 $\quad \mathbf{grad}\,u=\nabla u=(f_x,f_y,f_z)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\langle \nabla u,\vec{e}_l\rangle$$

3. 若$u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)处可微，则在该点沿任一方向的方向导数存在，而梯度则是方向导数取得最大值的方向，梯度的模为方向导数的最大值.

$f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$在点$(0,1)$处的梯度=

【例8】 设函数$f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$,求函数在点（1,1,1）处方向导数的最大值.

$$\nabla f\Big|_{(1,1,1)}=\left(f_x,f_y,f_z\right)\Big|_{(1,1,1)}$$

$$=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\|\nabla f\|=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

题型五 极值与最值

1. 无约束极值

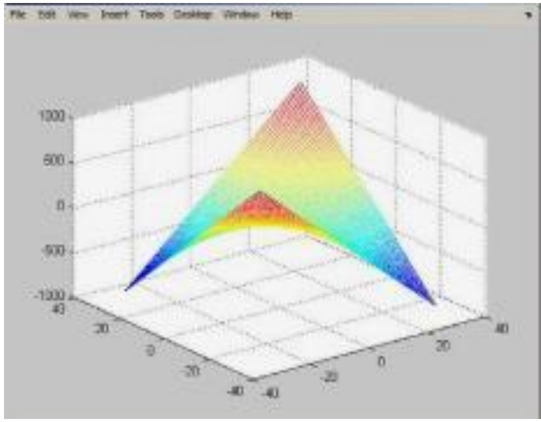
定义 若在点 (x_0, y_0) 的某邻域内恒成立不等式

$$f(x,y) \le f(x_0, y_0) \quad (f(x,y) \ge f(x_0, y_0))$$

则称 f 在点 (x_0, y_0) 取得**极大值**（**极小值**），点 (x_0, y_0) 称为 f 的**极大值点**（**极小值点**），极大值与极小值统称为**极值**，极大值点与极小值点统称为**极值点**.

定理4.3（极值的必要条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极值点，则

$$f_x'(x_0,y_0)=0,\quad f_y'(x_0,y_0)=0.$$



定理4.4（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点的某邻域内有二阶连续偏导数，又 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，记 $A=f_{xx}''(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}''(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}''(x_0,y_0)$，则

$$H_f(P_0)=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，有极值 $\begin{cases} A>0 & H\text{正定，极小值;} \\ A<0 & H\text{负定，极大值.} \end{cases}$

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，即 H 不定，无极值.

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，不一定（一般用定义判定）.

2. 条件极值及拉格朗日乘数法

求 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值

（1）构造拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

（2）将 $F(x, y, \lambda)$ 分别对 x, y, λ 求偏导数，构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

求$w = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi\left(x, y, z\right) = 0$ 下的条件极值

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$$

3. 最大最小值

1.求连续函数$z = f(x, y)$在有界闭域D上的最大最小值

(1).求函数$z = f(x, y)$在有界闭域D内可能的极值点

(2).求函数$z = f(x, y)$在有界闭域D边界上的最大最小值

(3).比较

2.应用题

【例9】 已知函数$f(x,y)$在$(0,0)$点的某个邻域内连续，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1,$$ 则(A)

(A) $(0,0)$不是f的极值点； (B) $(0,0)$是f的极大值点；

(C) $(0,0)$是f的极小值点； (D)无法判断.

【例10】（2009年数1, 3）求 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

[在$(0,\frac{1}{e})$取得极小值, 极小值 $-\frac{1}{e}$]

【例11】（2005年数2） 已知 $f(x,y)$的全微分$dz=2xdx-2ydy$

且 $f(1,1)=2$,求$f(x,y)$在$D=\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$上的最大值和最小值.

$z=x^2-y^2+C$　　$z=x^2-y^2+2$　　驻点为（0,0）　　$z(0,0)=2$

方法1：在边界上转化为无约束极值

$$x^2+\frac{y^2}{4}=1: z=1-\frac{y^2}{4}-y^2+2=3-\frac{5}{4}y^2 \quad (-2\le y\le 2)$$

$$z_y=-\frac{5}{2}y=0\Rightarrow y=0 \therefore z(0)=3, z(\pm 2)=-2 \qquad \therefore \max f=3, \min f=-2$$

方法2：把边界作为约束条件利用拉格朗日乘数法

$$L=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)\Rightarrow\begin{cases}L_x=2x+2\lambda x=0\\ L_y=-2y+\frac{1}{2}\lambda y=0\\ L_\lambda=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{c}z(0,\pm 2)=-2,\\ z(\pm 1,0)=3\end{array}$$

题型六 多元向量值函数的导数与微分

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

【例12】设有二元向量值函数$f(x,\ y)=\begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ \ln(x^2+y^2) \\ 2xy \end{bmatrix}$，

试求$f(x,y)$在点$(1,2)$处的导数与微分.

$$\mathrm{d}f(x,\ y)=\begin{bmatrix} d(x^2+y^2) \\ d\ln(x^2+y^2) \\ d2xy \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2xdx+2ydy \\ \dfrac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2} \\ 2xdy+2ydx \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} \\ 2y & 2x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}\Rightarrow Df(x,y)=\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2} & \dfrac{2y}{x^2+y^2} \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

提示：先求微分，再剥离出导数矩阵

题型七 多元微分学的几何应用

1. 空间曲线的切线和法平面

（1） $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \quad (\alpha \le t \le \beta)$

$$\vec{\tau}=\dot{\vec{r}}(t)=(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)) \ne 0 \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

（2） $\Gamma:\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x). \end{cases} \qquad \Gamma:\begin{cases} x=x, \\ y=y(x), \\ z=z(x). \end{cases} \qquad \vec{\tau}=\left(1,y'(x),z'(x)\right)$

(3) $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0} \ne 0$

$$\vec{\tau}=\vec{n}_1 \times \vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$

2. 空间曲面的切平面和法线

$$(1)\vec{\mathrm{r}}=\vec{\mathrm{r}}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\quad((u,v)\in D\subseteq \mathrm{R}^2)$$

$$\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}$$

$$(2)\Sigma: F(x,y,z)=0,\vec{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)$$

$$(3)z=f(x,y),\vec{n}=\left(f_x,f_y,-1\right)\text{或}\vec{n}=\left(-f_x,-f_y,1\right)$$

3. 曲率

$y=y(x)$具有二阶连续导数，$\kappa=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$.

【例13】 求曲线 $x=t^2, y=t^3, z=2t$在点（1, 1, 2）处的切线和法平面方程.

$$\tau=(2t,3t^2,2)\Big|_{t=1}=(2,3,2)$$

【例14】 求曲面 $z^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ 在点$(6,12,5)$处的切平面和法线方程.

$$F=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=0$$

$$n=\left(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},-2z\right)\Big|_{(6,12,5)}=\left(3,\frac{8}{3},-10\right)$$