自 适 应 控 制

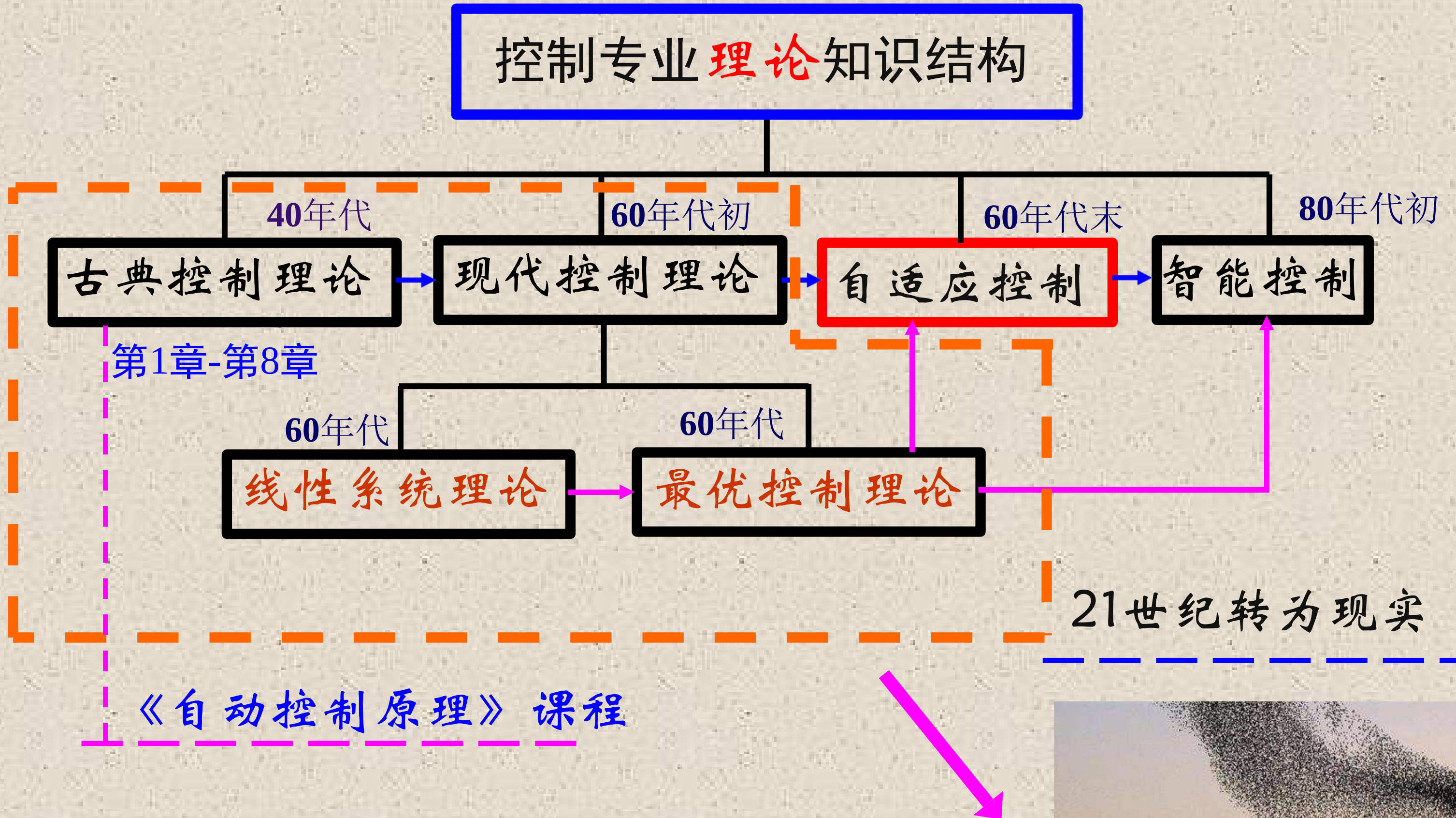
主讲：吕梅柏

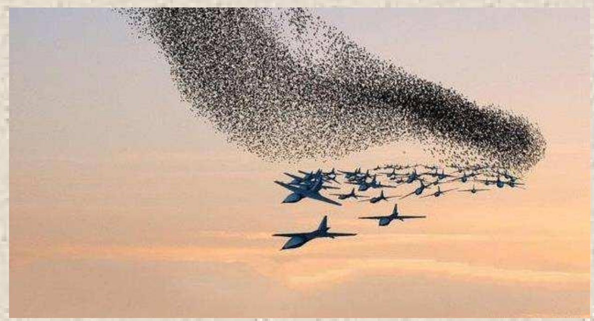
电话：15829682227

E-mail: nwpuiet@nwpu.edu.cn

办公室：航天北楼202室

本课程在控制学科中的地位





自适应控制原理与应用

第三章 连续时间系统模型参考自适应控制

3.1用局部参数优化理论设计模型参考自适应系统

3.2用李雅谱诺夫稳定性理论设计模型参考自适应系统

用系统状态变量构成自适应控制规律

用控制对象的输入和输出构成自适应控制规律

3.3用状态变量根据超稳定性理论设计并联模型参考自适应系统

3.1 用局部参数优化理论设计模型参考自适应系统

关于模型参考自适应控制系统的设计主要有两大类方法
:

基于局部参数最优化的设计方法

基于稳定性理论的设计方法

李亚普诺夫
稳定性理论

波波夫
超稳定性理论

3.1 用局部参数优化理论设计模型参考自适应系统

用局部参数最优化理论设计模型参考自适应系统是最早的一种设计方法，应用这一设计方法的要求是系统参数变化速度比系统控制过渡过程进行速度缓慢很多。

假定在系统的前向回路和反馈回路有若干个可调参数，当被控对象参数发生变化时，自适应机构能对这些参数进行调整，以补偿被控对象参数变化对控制系统性能的影响，即使得控制系统的输出与参考模型输出一致。

3.1 用局部参数优化理论设计模型参考自适应系统

基于局部参数最优化的设计方法及MIT方案

为此，用被控对象与参考模型的广义输出误差ε构成性能指标J，使J最小来确定自适应规律。

J是广义输出误差ε的直接函数，在MIT方案中，选用性能指标J为：

$$J = \int_{t_0}^{t} e^2(\tau)d\tau$$

分析可知，J间接的也应该是可调参数的函数。

在求J最小来确定的自适应规律的方法有很多，如：

1-最速下降法2-牛顿-拉富逊法3-共轭梯度法4-变尺度法等。

在局部参数优化法中通常采用梯度法来推导模型参考自适应规律。

下面先介绍一下梯度和梯度法的概念。

梯度

梯度法：

设系统可调参数为 θ ，性能指标为 $J=\int_{t_0}^{t} e^2(\tau)d\tau$

由于 e 是 θ 的函数，因此性能指标 J 是的隐函数，表示为：

$$J(\theta)=\int_{t_0}^{t} e^2(\tau)d\tau$$

如果将 $J(\theta)$ 看作是参数 θ 空间的一个超曲面，那么在参数空间变化率最大的方向，称作 $J(\theta)$ 的梯度，记为：$gradJ(\theta)$ 。

设系统可调参数为 θ ，性能指标为 $J = \int_{t_0}^{t} e^2(\tau)d\tau$

由于 e 是 θ 的函数，因此性能指标 J 是的隐函数，表示为：

$$J(\theta) = \int_{t_0}^{t} e^2(\tau)d\tau$$

如果将 $J(\theta)$看作是参数θ空间的一个超曲面，那么在参数空间变化率最大的方向，称作$J(\theta)$的梯度，记为：$gradJ(\theta)$　　。

局部参数最优化的设计方法中认为，参数的调整量

$\Delta\theta$ 取$\Delta\theta = -\lambda\, gradJ(\theta)$，自适应调整效果最好。

有了梯度法的概念，下面进行以梯度法为基础的自适应规律的设计。

美国麻省理工学院科研人员首先利用***局部参数最优化方法***设计出世界上第一个真正意义上的自适应控制律。故又常 简称为***MIT*自适应规律**。

具有可调增益的模型参考自适应系统的原理结构如图

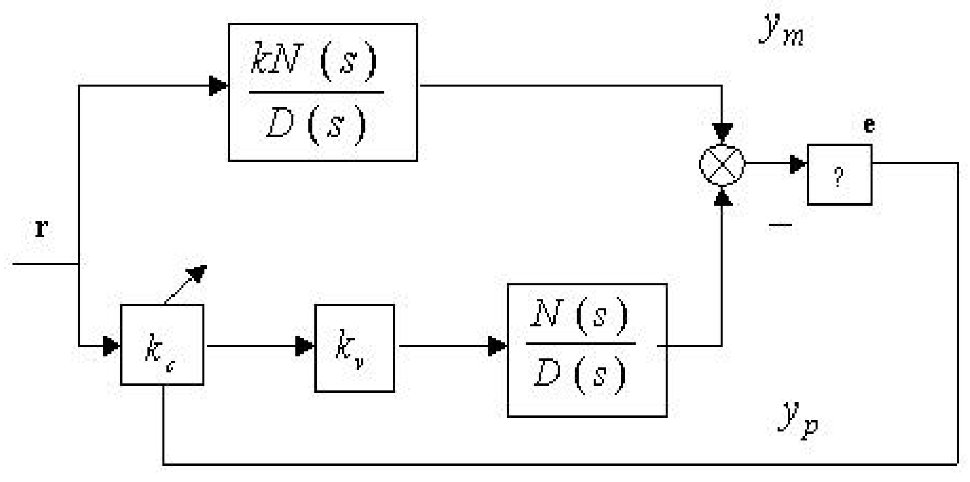


图 3.3　具有可调增益的自适应系统

美国麻省理工学院科研人员首先利用*局部参数最优化方法*设计出世界上第一个真正意义上的自适应控制律。故又常 简称为***MIT***自适应规律。

也就是说，使得被控系统的特征与理想模型的特征之间产生偏差。

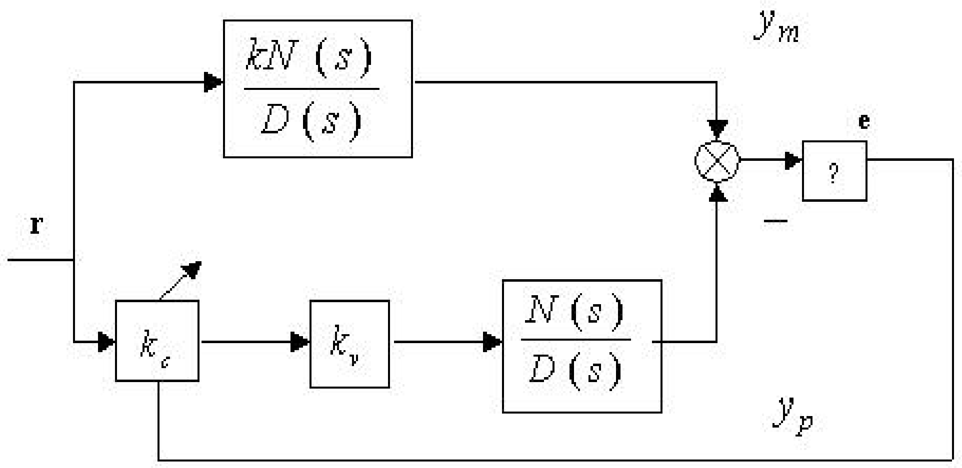


图 3.3　具有可调增益的自适应系统

该系统中，理想模型的增益k为常数。被控系统的增益k_v在外界环境发生变化或有其他干扰出现时有可能会受到影响而产生变化，从而使其动态特征发生偏离.

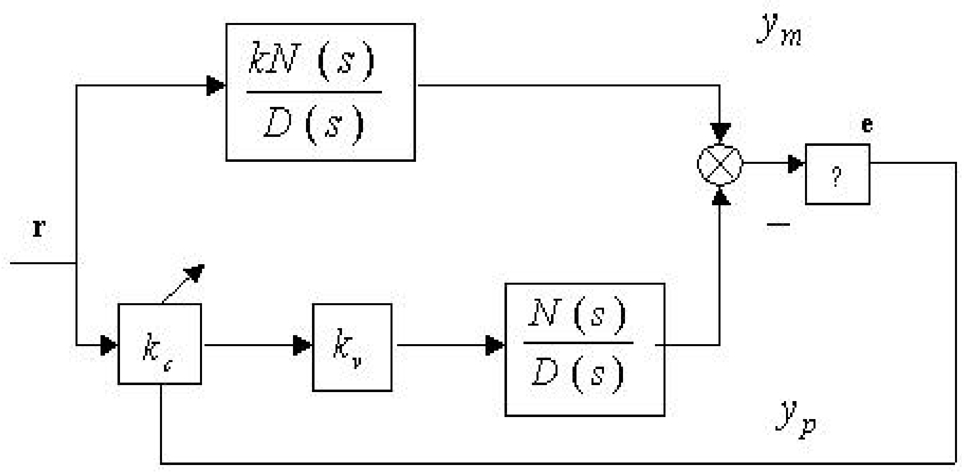


图 3.3 具有可调增益的自适应系统

而 k_v 的变化是不可测量的，这种特性之间的偏差反映在广义误差 e 上。

该系统中，**理想模型**的增益 k 为常数。**被控系统**的增益 k_v 在外界环境发生变化或有其他干扰出现时有可能会受到影响而产生变化，从而使其动态特征发生偏离.

而 k_v 的变化是不可测量的，这种特性之间的偏差反映在广义误差e上。

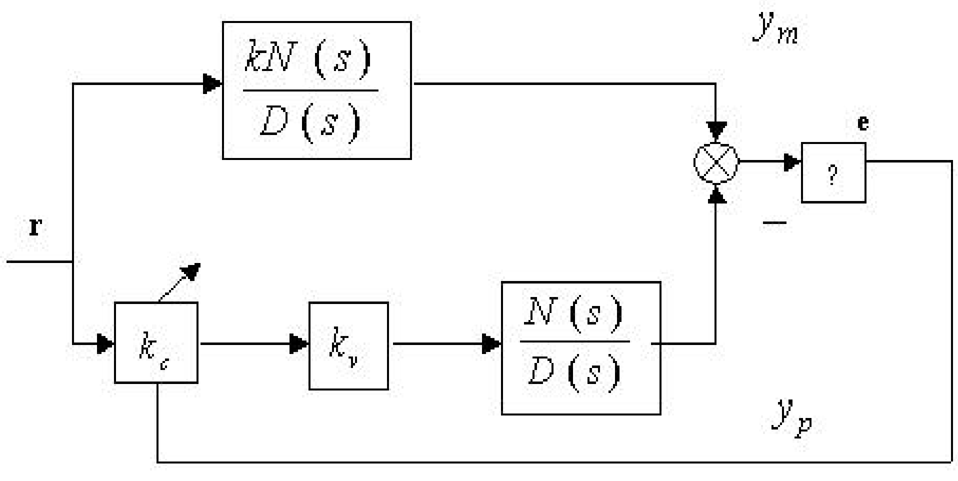


图 3.3　具有可调增益的自适应系统

为了消除或降低由于k_v的变化所造成的影响，在控制系统中增加了一个可调增益 k_c，来补偿 k_v 的变化。现在的任务是设计自适应机构来实时地调整 k_c，使的 k_c 与 k_v 乘积始终与理想型的 k 一致。

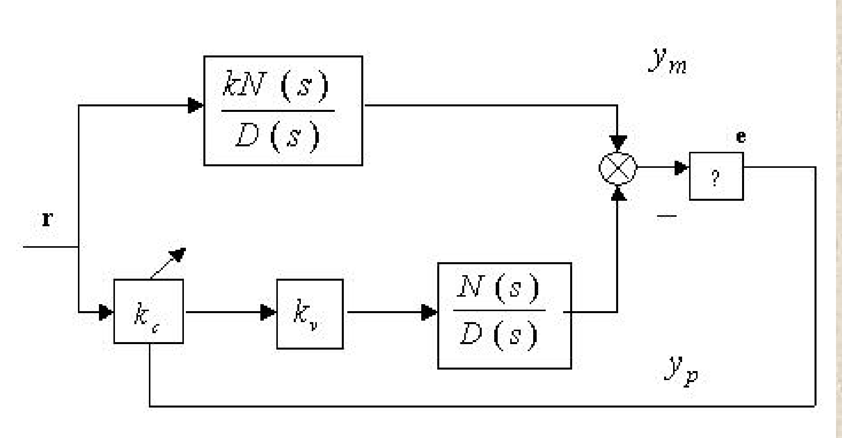


图 3.3　具有可调增益的自适应系统

设理想模型的传递函数为

$$G_M(s)=\frac{kN(s)}{D(s)}$$

$$=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots a_1 s+a_0}$$

被控对象的传递函数为 $G_p(s)=\frac{k_c k_v N(s)}{D(s)}$

定义广义误差为 $e = y_m - y_p$

式中 y_m 为理想模型的输出，y_p 为被控系统的输出，广义误差 e 为当参考模型与被控系统的输入信号同为 $r(t)$ 时，理想模型的响应与被控系统的响应之间的偏差。

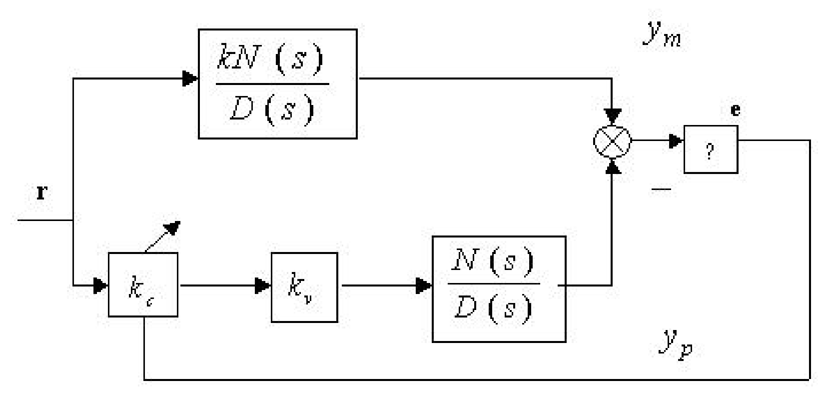


图 3.3　具有可调增益的自适应系统

$$G_M(s)=\frac{kN(s)}{D(s)}$$

$$G_p(s)=\frac{k_c k_v N(s)}{D(s)}$$

$$e=y_m-y_p$$

选取性能指标泛函为 $J=\int_{t_0}^{t} e^2(\tau)d\tau$

我们要通过调整可调增益k_c使性能指标J达到最小值。若采用梯度法寻优，则首先求出J对 k_c的梯度。

$$\frac{\partial J}{\partial k_c}=\int_{t_0}^{t} 2e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}d\tau$$

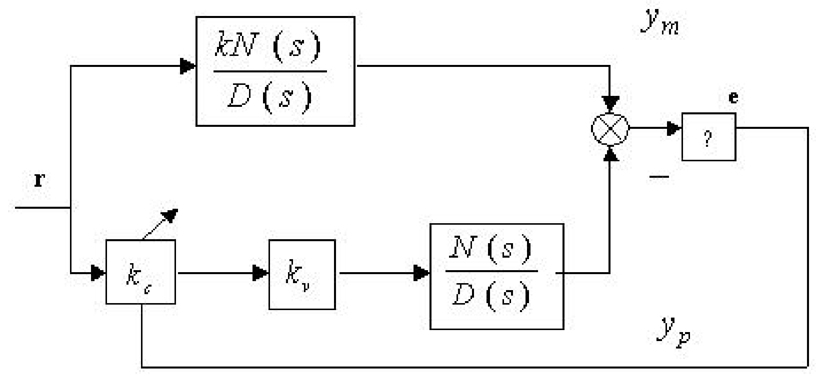


图 3.3 具有可调增益的自适应系统

$$J = \int_{t_0}^{t} e^2(\tau)d\tau$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_c} = \int_{t_0}^{t} 2e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}d\tau$$

根据梯度法可知，k_c 值应沿梯度下降的方向移动，在一定的步距下，k_c的变化量 Δk_c 将取这样的数值

$$\Delta k_c = -\lambda\frac{\partial J}{\partial k_c} = -\lambda\int_{t_0}^{t} 2e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}d\tau$$

式中λ为正的常数。

k_{c0} 为可调增益k_c 的初始值。

$$J=\int_{t_0}^{t} e^2(\tau)d\tau$$

$$k_c=-\lambda\int_{t_0}^{t} 2e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}d\tau+k_{c0}$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_c}=\int_{t_0}^{t} 2e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}d\tau$$

根据梯度法可知，k_c 值应沿梯度下降的方向移动，在一定的步距下，k_c的变化量 Δk_c 将取这样的数值

$$\Delta k_c=-\lambda\frac{\partial J}{\partial k_c}=-\lambda\int_{t_0}^{t} 2e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}d\tau$$

式中λ为正的常数。

$$\Delta k_c=k_c-k_{c0}$$

$$k_c=-\lambda\int_{t_0}^{t}2e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}d\tau+k_{c0}$$

为了获得调整k_c的自适应规律，对上式两边求时间的导数，得

$$\dot{k}_c=-2\lambda e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}$$

为了获得调整的自适应规律 k_c，必须计算$\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}$

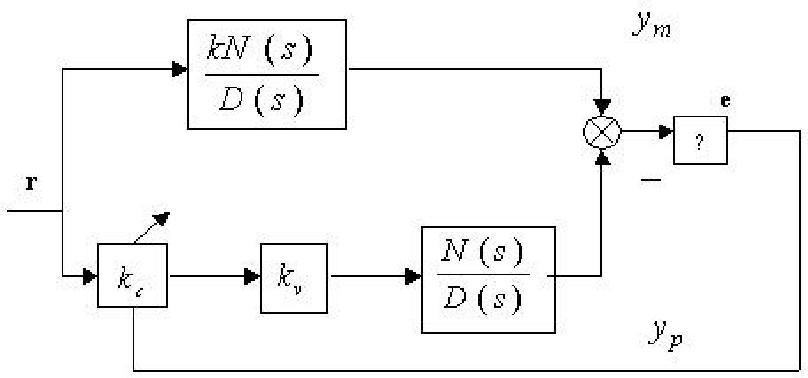


图 3.3 具有可调增益的自适应系统

这种类型自适应系统的开环传递函数为

$$W(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{(k-k_ck_v)N(s)}{D(s)}$$

所以 $$D(s)E(s)=(k-k_ck_v)N(s)R(s)$$

将其拉氏变换表示形式转化为微分方程的时域算子表示形式, (p为微分算子)则有

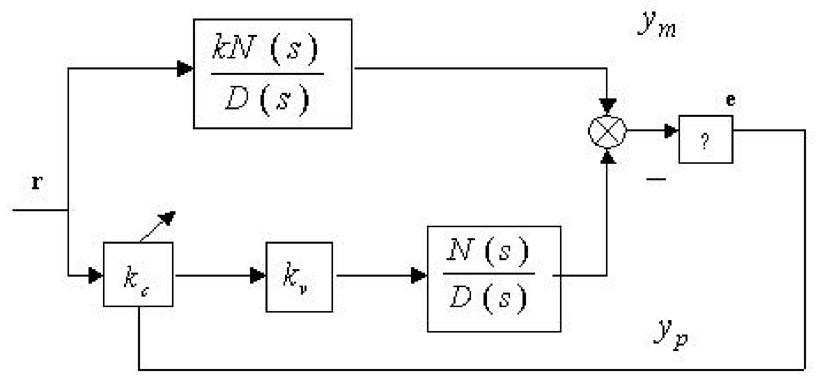


图 3.3 具有可调增益的自适应系统

$$D(p)e(t)=(k-k_c k_v)N(p)r(t)$$

将方程两边对求导数得

这种类型自适应系统的开环 传递函数为

$$D(p)\frac{\partial e(t)}{\partial k_c}=-k_v N(p)r(t)$$

应用这一设计方法的要求是系统参数变化速度比系统控制过渡过程进行速度缓慢很多。 (K_v变化较慢)

将其拉氏变换表示形式转化为微分方程的时域算子表示形式, (p为微分算子)则有

$$D(p)e(t)=(k-k_c k_v)N(p)r(t)$$

将方程两边对求导数得

$$D(p)\frac{\partial e(t)}{\partial k_c}=-k_v N(p)r(t)$$

而理想模型的输出与输入 之间有下列关系

$$D(p)y_m=kN(p)r(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial e(t)}{\partial k_c}=-y_m\frac{k_v}{k}$$

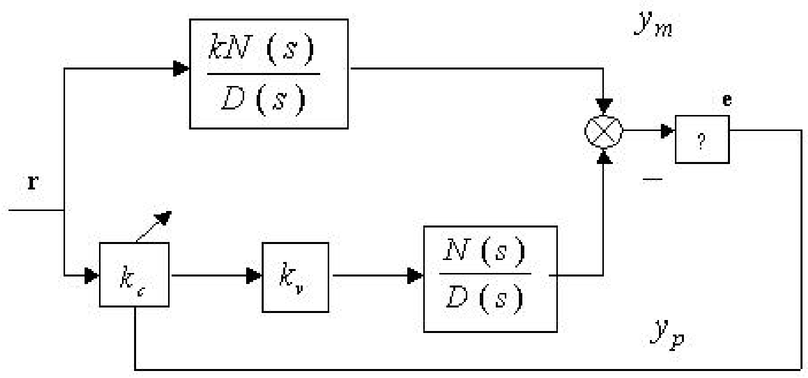


图 3.3 具有可调增益的自适应系统

$\frac{\partial e(t)}{\partial k_c}$, $y_m(t)$ 成比例关系

为了抗干扰起见，人们在实际系统中常避免使用微分信号 $\frac{\partial e(t)}{\partial k_c}$ ，而采用理想模型的输出 $y_m(t)$

$$\frac{\partial e(t)}{\partial k_c} = -y_m \frac{k_v}{k}$$

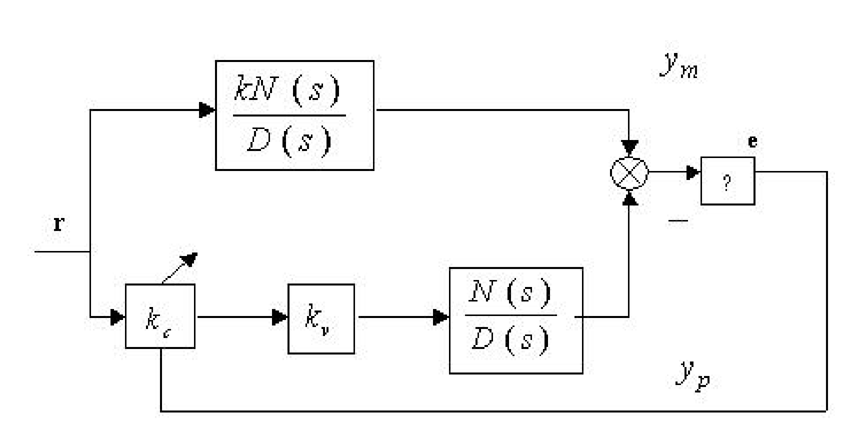


图 3.3　具有可调增益的自适应系统

两者之间仅相差一个比例常数

$$\dot{k}_c = -2\lambda e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}$$

$$\boxed{\dot{k}_c = r' e(\tau) y_m}$$

这就是可调增益k_c的调节规律，也就是系统的自适应规律

式中

$$\boxed{r' = 2\lambda\frac{k_v}{k}}$$

两者之间仅相差一个比例常数

$$\dot{k}_c = -2\lambda e(\tau)\frac{\partial e(\tau)}{\partial k_c}$$

$$\boxed{\dot{k}_c = r' e(\tau) y_m}$$

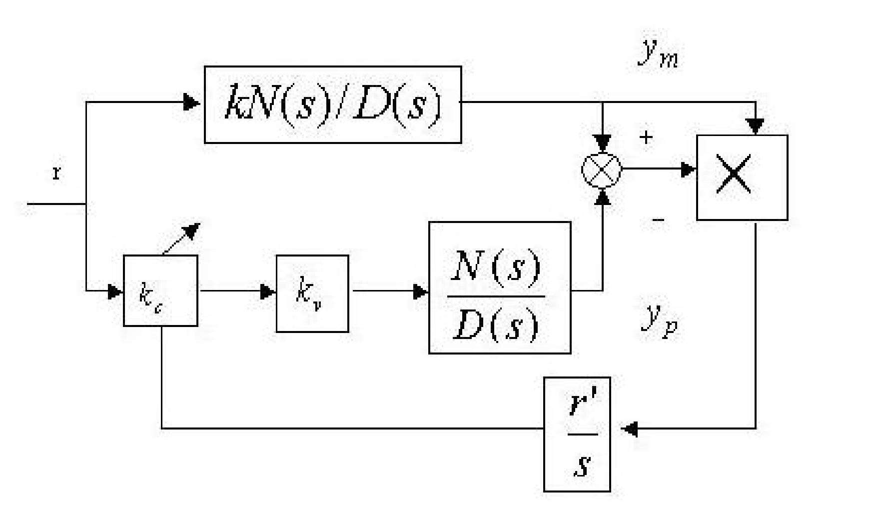


图 3.4 按 MIT 规律调节增益的自适应

这就是可调增益k_c的调节规律，也就是系统的自适应规律

可以看出，为实现这种自适应规律，自适应机构是由一个**积分器**和一个**乘法器**所组成。如图所示。

式中 $$\boxed{r' = 2\lambda\frac{k_v}{k_c}}$$

这样综合出来的模型参考闭环自适应系统的数学模型可用下列一组方程来描述：

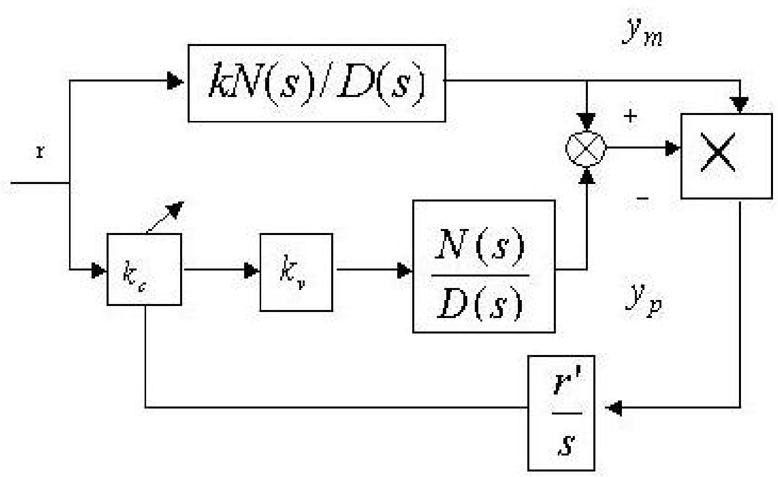


图 3.4　按 MIT 规律调节增益的自适应

$$D(p)e(t)=(k-k_ck_v)N(p)r(t)$$

$$D(p)y_m(t)=kN(p)r(t)$$

$$k_c=\int r'e(t)y_m(t)$$

$$\boxed{\dot{k}_c=r'e(\tau)y_m}$$

$$\boxed{r'=2\lambda\frac{k_v}{k_c}}$$

这样综合出来的模型参考闭环自适应系统的数学模型可用下列一组方程来描述：

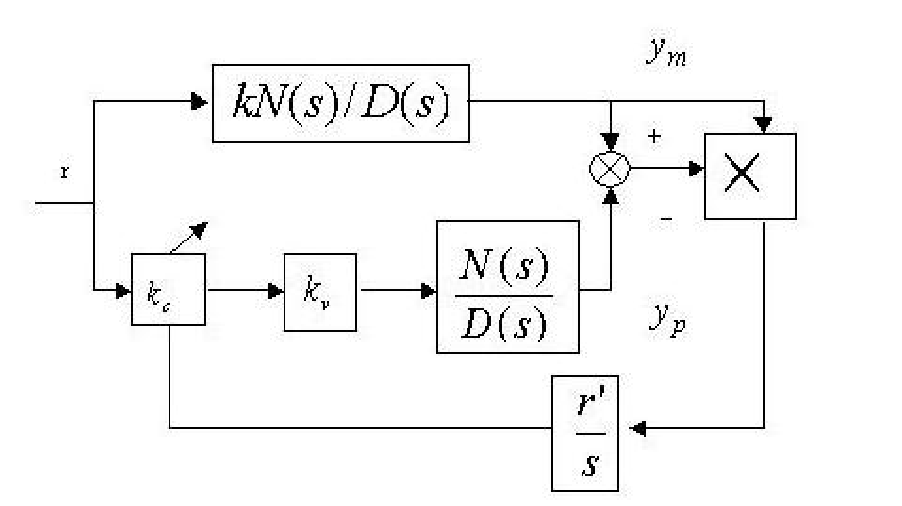


图 3.4　按 MIT 规律调节增益的自适应

$$D(p)e(t)=(k-k_c k_v)N(p)r(t)$$

开环广义误差方程

$$D(p)y_m(t)=kN(p)r(t)$$

理想参考模型方程

$$k_c=\int r' e(t) y_m(t)$$

自适应调整规律

凡是用可调增益来构成自适应系统的都可直接利用下述**数学模型**

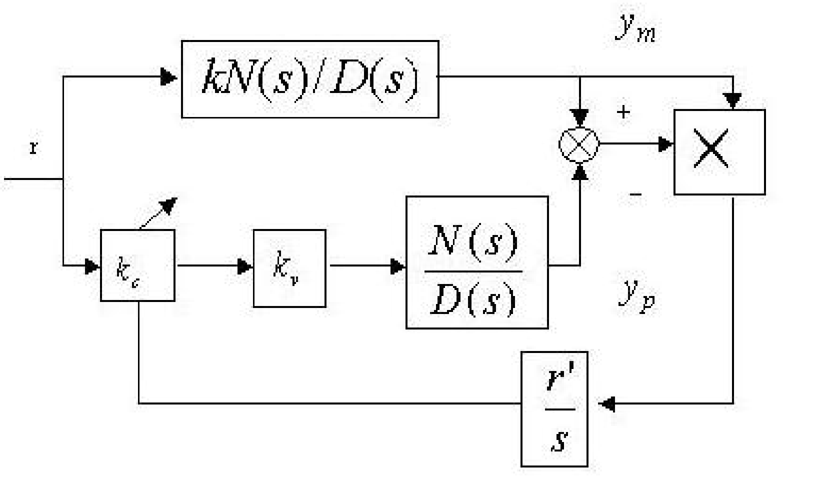


图 3.4 按 MIT 规律调节增益的自适应

$$D(p)e(t)=(k-k_c k_v)N(p)r(t)$$

$$D(p)y_m(t)=kN(p)r(t)$$

$$k_c=\int r'e(t)y_m(t)$$

从前面*MIT*方法的推导过程来看，在寻求自适应规律的过程中，没有考虑到系统的稳定性问题，

因此对具体系统来说，获得上式后，为了确保广义误差$e(t)$在自适应调节过程中能逐渐地收敛到某一个允许的值，还必须进行**稳定性校验**。

【例3.1.1】考虑一个一阶系统，其传递函数特性为：

$$G(s)=\frac{K_p}{1+Ts}$$

根据MIT规则设计的闭环的自适应控制系统应为：

$$\left\{\begin{aligned} T\dot{e}+e&=(K_m-K_cK_p)r \\ T\dot{y}_m+y_m&=K_mr \\ \dot{K}_c&=K\cdot e\cdot y_m \end{aligned}\right\}$$

下面我们通过解方程的解，看一下系统的稳定性

假定在 $t=t_0$ 时，y和 y_m 均为零，且 $K_c K_p \neq K_m$

当输入一个幅度为R的阶跃信号时，考虑 $t \geq t_0$

后，参考模型的出为：

$$y_m = K_m R \cdot \left[1 - \exp(-t/T)\right]$$

所以自适应调节律为：

$$\dot{K}_c = K \cdot e \cdot K_m R \cdot \left[1 - \exp(-t/T)\right]$$

对闭环系统的微分方程求导数使得误差的动态方程为：

$$T\ddot{e}+\dot{e}=-K_p\dot{K}_cR$$

或 $$T\ddot{e}+\dot{e}+K_pK_mKR^2e\cdot\left[1-\exp(-t/T)\right]=0$$

可见，当 $t\to\infty$ 时，上式右端第三项e中的系数趋近于 $K_pK_mKR^2$，即有：

$$T\ddot{e}+\dot{e}+K_pK_mKR^2e=0$$

此系统方程是渐近稳定的，即 $t\to\infty$ 时，有：

e = 0，即 $K_c\to K_m/K_p$

从以上分析可以看出：

①对于一阶系统，按照MIT规则设计的闭环自适应系统是稳定的

②跟踪速度或自适应速度是按指数规律进行的，从理论上说，只有当 $t \to \infty$ 时，误差才趋于零，所以，自适应速度的是比较相当慢的。

【例3.1.2】考虑被控对象为：

$$W_p(s)=\frac{K_p}{a_2s^2+a_1s+1}$$

理想系统模型为：

$$W_m(s)=\frac{K_m}{a_2s^2+a_1s+1}$$

根据前面推导出的结果，闭环自适应控制系统由以下微分方程组所决定：

$$\begin{cases} a_2 \dfrac{d^2 e}{dt^2} + a_1 \dfrac{de}{dt} + e = (K_m - K_p K_c) r \\ a_2 \dfrac{dy^2{}_m}{dt^2} + a_1 \dfrac{dy_m}{dt} + y_m = K_m r \\ \dfrac{dK_c}{dt} = K \cdot e \cdot y_m \end{cases}$$

假定在 $t_0 > 0$ 时，由参考输入加上一个幅值为A的阶跃信号，即$r(t) = A$，来研究偏差e的稳定性。

对上式偏差微分方程的两端求导，并整理得：

$$a_2 \frac{d^3 e}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} = -K_p \frac{dK_c}{dt} A = -K_p K e y_m A$$

假设$y_m(t)$的动态响应比$e(t)$自适应调整过程快得多。即在研究$e(t)$的调节过程时，认为$y_m(t)$已达到了它的稳定值$K_m A$，那么$e(t)$的微分方程就可简化为下式：

$$a_2 \frac{d^3 e}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} + K_m K_p K A^2 e = 0$$

利用劳斯（Routh）稳定性判断，很容易得到以下不等式，即当

$$K_m K_p K A^2 > \frac{a_1}{a_2}$$

时，系统不稳定，即当满足条件时，输出偏差e（y_p情况也相同）将出现不稳定，这是不容许的。因此在应用参数最优化方法进行设计时，最后必须对整个系统的稳定性进行分析和检验，而这一步工作往往是很麻烦的。

用局部参数最优化的方法设计的*MRAC*系统必须经过稳定性的验证。但是从实践经验来看，有些较为复杂的*MRAC*系统要验证其全局稳定性是很困难的。

在二十世纪六十年代，就有人提出了以稳定性理论为基础的*MRAC*系统的设计方法；首先是德国科学家帕克斯*(Parks)*提出 根据李雅普诺夫稳定性理论来设计*MRAC*。

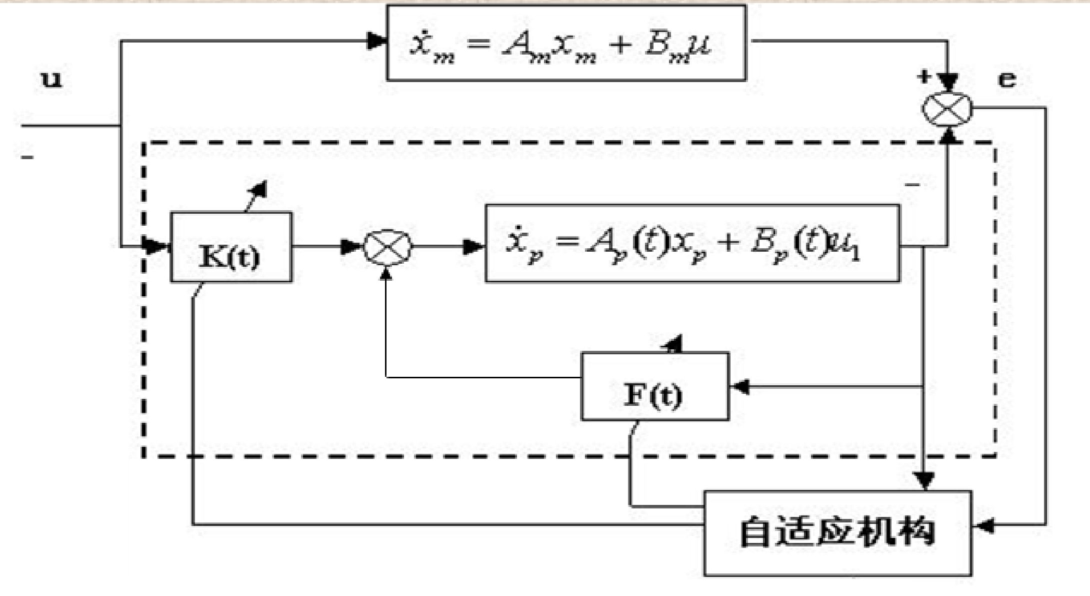
即用李雅普诺夫第二法推出自适应算法来保证自适应系统的全局稳定性。

3.2 用李亚普诺夫稳定性理论设计 MRAC

3.2.1 用系统状态变量构成自适应规律

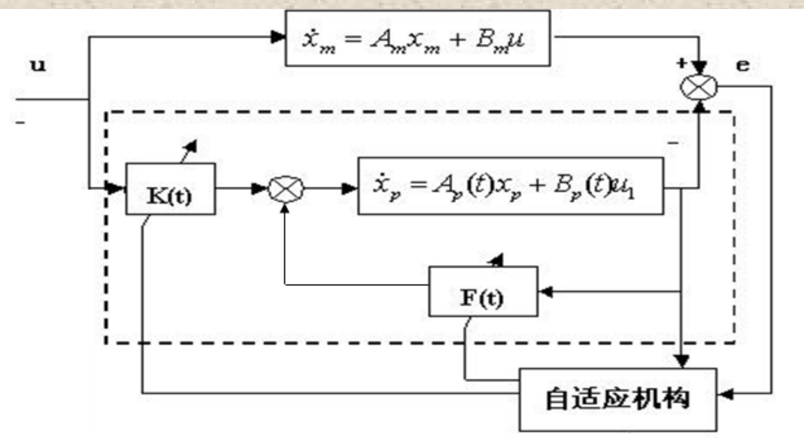
3.2.2 用控制对象的输入输出构成自适应规律

3.2.1 用系统状态变量构成自适应规律



设被控对象是结构已知参数未知的线性系统，系统的结构如图

3.2.1 用系统状态变量构成自适应规律



可调系统的状态方程为

$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)u_1$$

$$u_1 = K(t)u + F(t)x_p$$

$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)[K(t)u + F(t)x_p]$$

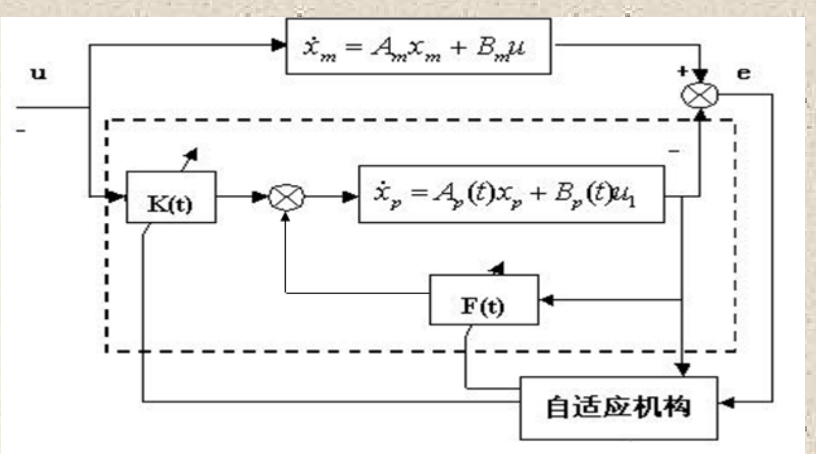
$$= [A_p(t) + B_p(t)F(t)]\,x_p + B_p(t)K(t)u$$

式中$A_p(t)$为$n \times n$阶矩阵，$B_p(t)$为$n \times m$阶矩阵，而矩阵 的元素 a_{pij}和 b_{pij}是受干扰影响的时变参数。通常被控系统的

参数是不便于直接调整的，

3.2.1 用系统状态变量构成自适应规律

为了补偿被控对象参数的变化，就需要引进可调的前馈增益矩阵$K(t)$和反馈补偿矩阵 $F(t)$与被控对象一起组成一个可调系统.



$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)[K(t)u + F(t)x_p]$$

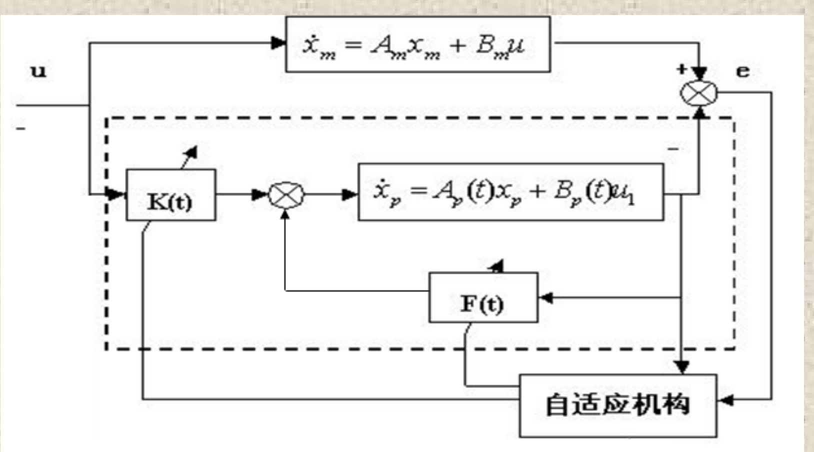
$$= [A_p(t) + B_p(t)F(t)]x_p + B_p(t)K(t)u$$

3.2.1 用系统状态变量构成自适应规律

给定一个参考模型，模型对输入***u***的响应就代表被控对象所期望的响应。参考模型 的状态方程为

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u$$

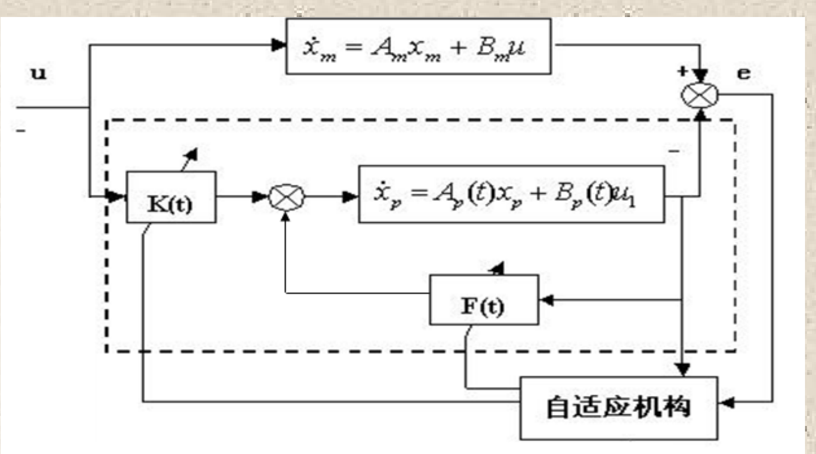
$A_m(t)$为$n \times n$阶矩阵，$B_m(t)$为$n \times m$阶矩阵，



3.2.1 用系统状态变量构成自适应规律

系统的广义状态误差向量为

$$e = x_m - x_p$$
$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x}_p$$



$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u$$

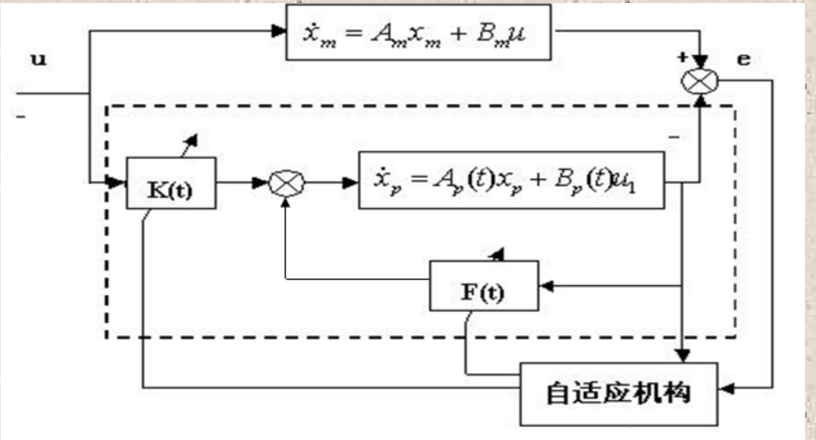
$A_m(t)$为$n\times n$阶矩阵，$B_m(t)$为$n\times m$阶矩阵，

$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)[K(t)u + F(t)x_p]$$
$$= [A_p(t) + B_p(t)F(t)]x_p + B_p(t)K(t)u$$

3.2.1 用系统状态变量构成自适应规律

系统的广义状态误差向量为

$$e = x_m - x_p$$
$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x}_p$$



$$\dot{e} = A_m e + [A_m - A_p(t) - B_p(t)F(t)]x_p + [B_m - B_p(t)K(t)]u$$

为了使可调系统对输入u的动态响应与参考模型对输入u的动态响应完全相一致，自适应机构对$K(t)$和$F(t)$进行调整，使可调系统与参考模型相匹配。设$\bar{F}$和$\bar{K}$为理想控制结果。

$$A_m = A_p(t) + B_p(t)\bar{F},\quad B_m = B_p(t)\bar{K},$$

$$\dot{e}=A_m e+[A_m-A_p(t)-B_p(t)F(t)]x_p+[B_m-B_p(t)K(t)]u$$

$$\dot{e}=A_m e+B_m\bar{K}^{-1}[\bar{F}-F]x_p+B_m\bar{K}^{-1}[\bar{K}-K]u$$

$$=A_m e+B_m\bar{K}^{-1}\Phi x_p+B_m\bar{K}^{-1}\Psi u$$

$\Phi=\bar{F}-F$为$m\times n$阵， $\Psi=\bar{K}-K$为$m\times m$阵。

$$A_m-A_p(t)=B_p(t)\bar{F}，\quad B_m\bar{K}^{-1}=B_p(t)，$$

为了使可调系统对输入u的动态响应与参考模型对输入u的动态响应完全相一致，自适应机构对$K(t)$和$F(t)$ 进行调整，使可调系统与参考模型相匹配。

$$\dot{e}=A_m e+[A_m-A_p(t)-B_p(t)F(t)]x_p+[B_m-B_p(t)K(t)]u$$

$$\dot{e}=A_m e+B_m\bar{K}^{-1}[\bar{F}-F]x_p+B_m\bar{K}^{-1}[\bar{K}-K]u$$

$$=A_m e+B_m\bar{K}^{-1}\Phi x_p+B_m\bar{K}^{-1}\Psi u$$

$\Phi=\bar{F}-F$为$m\times n$阵，$\Psi=\bar{K}-K$为$m\times m$阵。

为用李雅普诺夫稳定性理论设计自适应规律，我们在 包含广义状态误差及可调参数误差所组成的增广状态 $e\in R^n$, $F\in R^{n\times n}$, $K\in R^{n\times m}$ 空间定义一个李雅普诺夫函数V。

$$V=\frac{1}{2}[e^T Pe+tr(\Phi_1^T r^{-1}\Phi+\Psi_2^T r^{-1}\Psi)]$$

$$\dot{e}=A_m e+B_m\bar{K}^{-1}[\bar{F}-F]x_p+B_m\bar{K}^{-1}[\bar{K}-K]u$$

$$=A_m e+B_m\bar{K}^{-1}\Phi x_p\ +B_m\bar{K}^{-1}\Psi u$$

$\Phi=\bar{F}-F$为$m\times n$阵， $\Psi=\bar{K}-K$为$m\times m$阵。

为用李雅普诺夫稳定性理论设计自适应规律，我们在 包含广义状态误差及可调参数误差所组成的增广状态 $\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{F}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{K}\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 空间定义一个李雅普诺夫函数V。

$$V=\frac{1}{2}[e^T Pe+tr(\Phi_1^T r^{-1}\Phi+\Psi_2^T r^{-1}\Psi)]$$

P, r_1^{-1}, r_2^{-1} 都是对称正定矩阵，这就保证了 $V>0$ ，两边取时间导数，有

$$\dot{V}=\frac{1}{2}[e^T p\dot{e}+\dot{e}^T pe+tr(\dot{\Phi}_1^T r^{-1}\Phi+\Phi_1^T r^{-1}\dot{\Phi}+\dot{\Psi}_2^T r^{-1}\Psi+\Psi_2^T r^{-1}\dot{\Psi})]$$

$$\dot{e}=A_m e+B_m\bar{K}^{-1}\underline{[\bar{F}-F]}x_p+B_m\bar{K}^{-1}\underline{[\bar{K}-K]}u$$

$$=A_m e+B_m\bar{K}^{-1}\underline{\Phi}x_p+B_m\bar{K}^{-1}\underline{\Psi}u$$

$$=\frac{1}{2}[e^T(pA_m+A_m^T p)e]+e^T pB_m\bar{K}^{-1}\Phi x_p+e^T pB_m\bar{K}^{-1}\Phi u$$

$$+\frac{1}{2}tr(\dot{\Phi}^T r_1^{-1}\Phi+\Phi^T r_1^{-1}\dot{\Phi}+\dot{\Psi}^T r_2^{-1}\Psi+\Psi^T r_2^{-1}\dot{\Psi})$$

根据矩阵迹的性质 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ ，可知

$$\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\Phi}}^T\boldsymbol{r}_1^{-1}\boldsymbol{\Phi})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{r}_1^{-1}\dot{\boldsymbol{\Phi}})$$

$$\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{\Psi}}^T\boldsymbol{r}_2^{-1}\boldsymbol{\Psi})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{r}_2^{-1}\dot{\boldsymbol{\Psi}})$$

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_m\bar{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}_p=\mathrm{tr}(\mathrm{x}_p\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_m\bar{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{\Phi})$$

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_m\bar{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{u}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{u}\mathrm{e}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_m\bar{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{\Psi})$$

$$\dot{V}=\frac{1}{2}[e^T(pA_m+A_m^Tp)e]+tr(\dot{\Phi}^Tr_1^{-1}\Phi+x_pe^TpB_m\bar{K}^{-1}\Phi)$$
$$+tr(\dot{\Psi}^Tr_2^{-1}\Psi+ue^TpB_m\bar{K}^{-1}\Psi)$$

因为$\boldsymbol{A_m}$为稳定矩阵，只要选择一个对称正定阵$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{pA_m+A_m^Tp=-Q}$ 成立，方程中右边的第一项必定是负定的。为了保证$\dot{V}$是负定的，我们使方程中右边的第二第三项恒为零，则必须选

$$tr(\dot{\Phi}^Tr_1^{-1}\Phi+x_pe^TpB_m\bar{K}^{-1}\Phi)=0$$
$$tr(\dot{\Psi}^Tr_2^{-1}\Psi+ue^TpB_m\bar{K}^{-1}\Psi)=0$$

$$\dot{\Psi} = -r_2 (B_m \bar{K}^{-1})^T peu^T$$

$$\dot{\Phi} = -r_1 (B_m \bar{K}^{-1})^T pex_p^T$$

$$\Phi = \bar{F} - F, \quad \Psi = \bar{K} - K$$

则可得自适应调节规律为（假设F和K理想情况变化缓慢，不如系统调节迅速）

$$\dot{\mathrm{K}} = -r_2 (B_m \bar{K}^{-1})^T peu^T$$

$$\dot{\mathrm{F}} = -r_1 (B_m \bar{K}^{-1})^T pex_p^T$$

这样确定的*K(t)*、*F(t)*参数调整的自适应规律，就保证了李雅普诺夫函数*V*为正定的，它对时间*t*的导数是负定的，从而对任意分段连续的输入向量函数*u*能保证*MRAC*系统是全局稳定的。

$$\dot{F} = r_1 (B_m \bar{K}^{-1})^T p e x_p^T$$

$$\dot{K} = r_2 (B_m \bar{K}^{-1})^T p e u^T$$

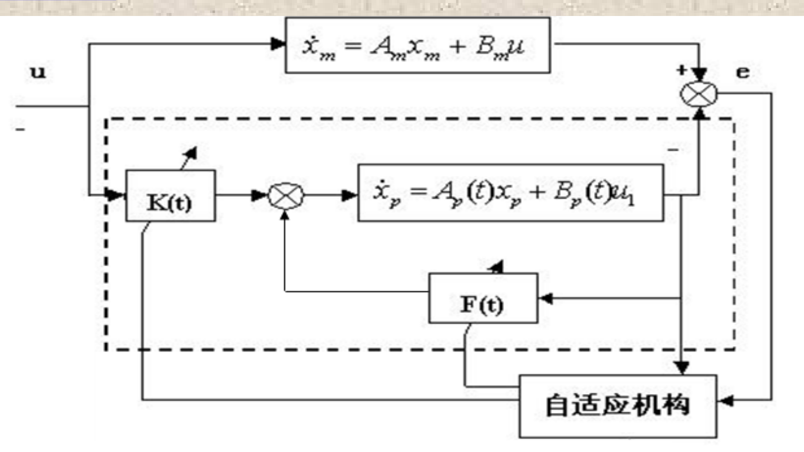
用系统状态变量构成自适应规律

用可调系统状态变量设计MRAC

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u$$

$$\dot{x}_p = A_p(t) x_p + B_p(t) u_1$$

$$u_1 = K(t) u + F(t) x_p$$



$$F(t) = \int_0^t r_1 (B_m \bar{K}^{-1})^T p e x_p^T \, d\tau + F(0)$$

$$K(t) = \int_0^t r_2 (B_m \bar{K}^{-1})^T p e u^T \, d\tau + K(0)$$

【例3.2.1】

对于

$$x=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix},\quad x^T=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix},\quad P=P^T=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

求 $tr\left\{x^T P x\right\}$

解： 由

$$x^T Px = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 39 \\ 39 & 47 \end{bmatrix}$$

所以

$$tr\left\{x^T Px\right\} = 43 + 47 = 90$$

【例3.2.2】用李雅普诺夫稳定理论重新设计例3.1.1

解：由输入/输出方程：

$$G_p(S)=\frac{K_p}{1+Ts} \quad \text{得：} \quad T\dot{y}+y=K_p u$$

$$G_m(S)=\frac{K_m}{1+Ts} \quad \text{得：} \quad T\dot{y}_m+y_m=K_m r$$

取 $x=y, x_m=y_m$

可得系统状态方程为：

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{K_p}{T}u$$

$$\dot{x}_m = -\frac{1}{T}x_m + \frac{K_m}{T}r$$

令：

$$\tilde{K}(e,t) = K_m - K_c(e,t)K_p$$

$$e(t) = x_m(t) - x(t)$$

则有：

$$\dot{e}(t) = -\frac{1}{T}e + \frac{1}{T}\tilde{K}r$$

$$\dot{\tilde{K}} = -K_p\dot{K}_c$$

构造李雅普诺夫函数为：

$$V = e^2 + K_1\tilde{K}^2$$

其中，$K_1 > 0$，则有

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2K_1\tilde{K}\dot{\tilde{K}} = -\frac{2}{T}e^2 + \frac{2}{T}\tilde{K}re + 2K_1\tilde{K}\dot{\tilde{K}}$$

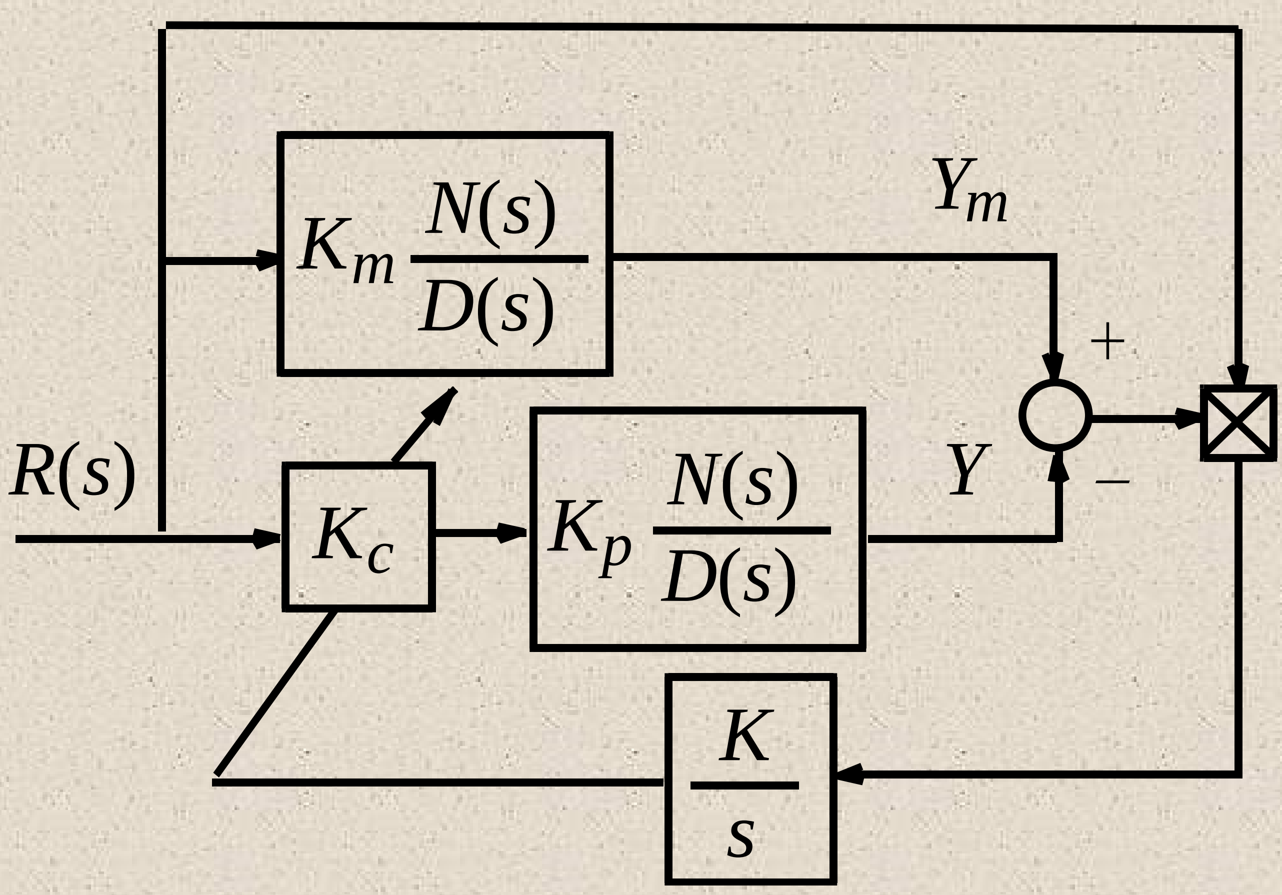
为了保证 $\dot{V} < 0$ ，令上式右边后两项之和为零可得：

$$\dot{\tilde{K}} = -\frac{1}{K_1 T}re$$

将此式与前面的关系式 $\dot{\tilde{K}} = -K_p\dot{K}_c$ 合并得下列自适应控制律：$\dot{K}_C = Kre$

式中：$K = \dfrac{1}{K_1 K_p T}$

系统结构图



此时系统的稳定性已有保证，不必对其稳定性进行分析。另外，与MIT设计方法相比较，其区别仅表现在结构上，若将MIT设计的方案中加在乘法器输入端的信号y_m改为期望输入信号r，便可实现用李雅普诺夫稳定性理论设计的自适应控制律

【例3.2.3】为了进行比较，用李雅普诺夫稳定性理论重新设计例3.1.2

解：首先求出被控系统及参考模型的状态方程

由：
$$W_p = \frac{K_p}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

得：
$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + y = K_p u$$

同理可得参考模型的微分方程为：

$$a_2 \ddot{y}_m + a_1 \dot{y}_m + y_m = K_m r$$

令
$$x_{p1} = y_p, x_{m1} = y_m$$
$$x_{p_2} = \dot{x}_{p_1} = \dot{y}_p$$
$$x_{p_3} = \dot{x}_{p_2} = \dot{x}_{p_1} = \ddot{y}_p$$

得可调系统的状态方程为：

$$\dot{x}_p = Ax_p + BK_pK_cr$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{a_2} & -\dfrac{a_1}{a_2} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{a_2} \end{bmatrix}$ $y_p = x_{p1}$

同理可得参考模型的状态方程为：

$$\dot{x}_m = Ax_m + BK_mr$$

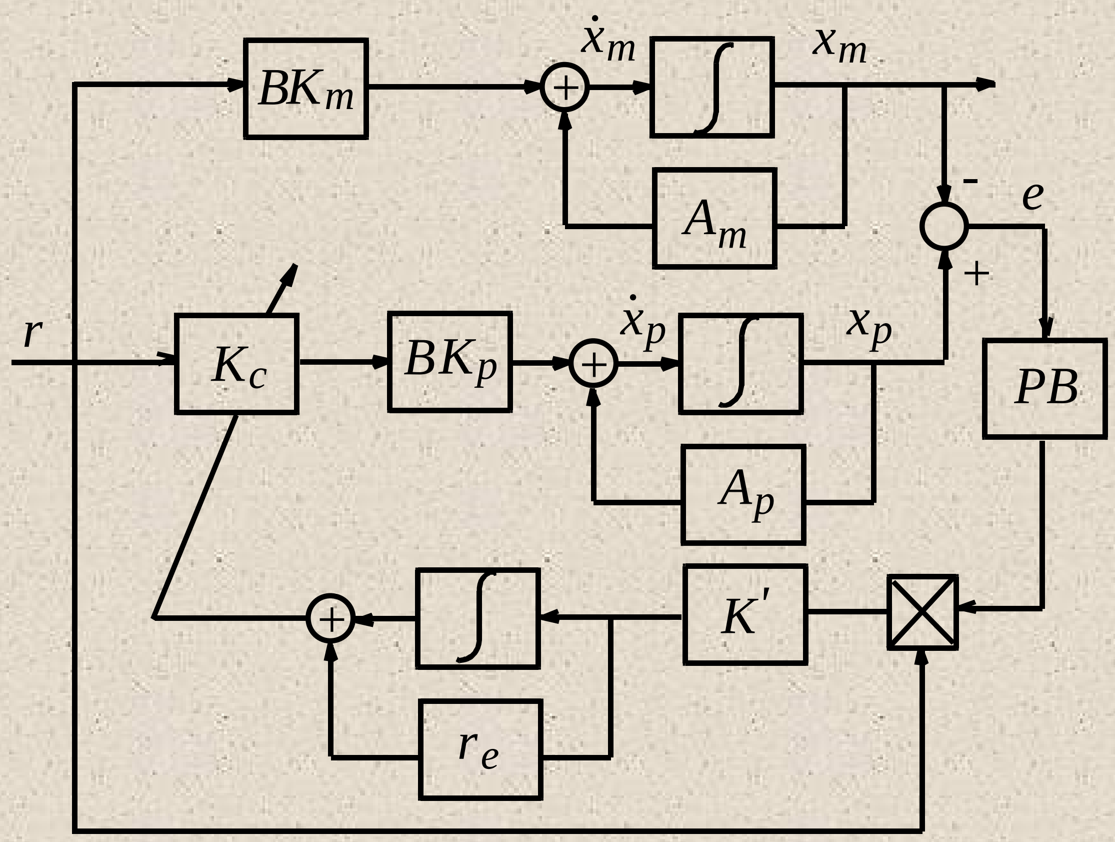
$$y_m = x_{p_1}$$

令： $e = x_m - x_p$

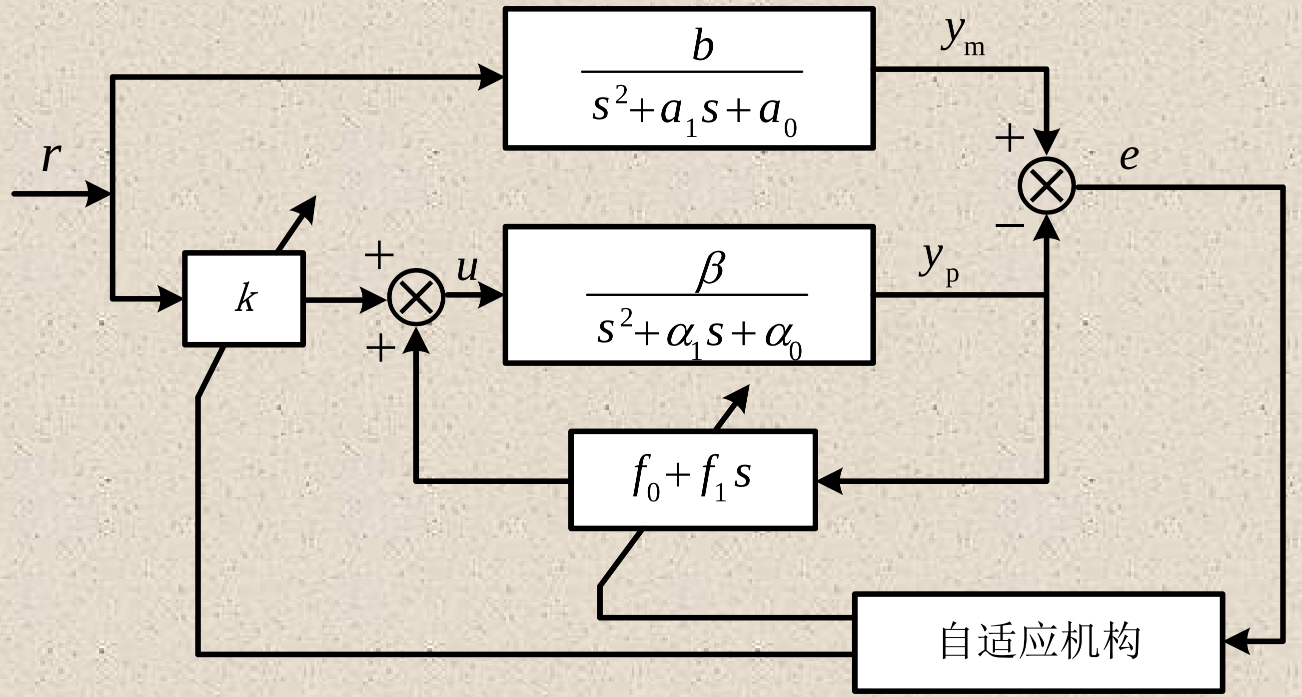
$$\tilde{K} = K_m - K_pK_c$$

设计的控制律稳定性得到保障。

自适应控制系统结构图

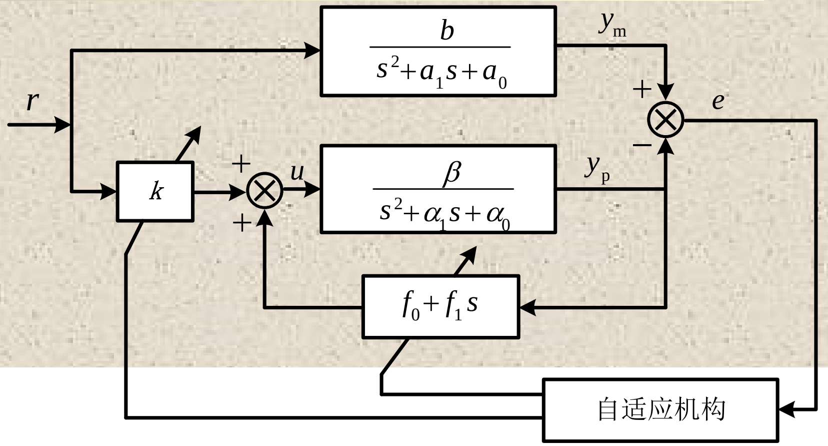


3.2.2 用输入输出构成自适应规律



许多实际控制对象来说往往不能获得全部状态变量，因此提出利用控制对象的输入和输出构成自适应控制规律的问题

3.2.2 用输入输出构成自适应规律



1. 单输入单输出系统的自适应规律

设控制对象为二阶系统，其微分方程为

$$\ddot{y} + \alpha_1\dot{y}_p + \alpha_0 y_p = \beta\mu \tag{3.47}$$

由于控制象的参数α_0，α_1和β是不可调整的未知时变参数，所以选取控制变量为

$$u = kr + f_0 y_p + f_1\dot{y}_p \tag{3.48}$$

式中，k为前馈增益，f_0和f_1为反馈增益，通过自适应调整参数k，f_0和f_1使控制对象的输出跟踪参考模型的输出。所选取的参考模型的阶数与控制对象相同，其微分方程为

$$\ddot{y}_m + a_1\dot{y}_m + a_0 y_m = br \tag{3.49}$$

式中，r为参考模型的输入信号。

将式(3.48)代入式(3.47)得可调系统微分方程，即

$$\ddot{y}_p+(\alpha_1-\beta f_1)\dot{y}_p+(\alpha_0-\beta f_0)y_p=k\beta r \tag{3.50}$$

令

$$\bar{\alpha}_1=\alpha_1-\beta f_1,\quad \bar{\alpha}_0=\alpha_0-\beta f_0,\quad \bar{\beta}=k\beta \tag{3.51}$$

则式(3.50)可写为

$$\ddot{y}_p+\bar{\alpha}_1\dot{y}_p+\bar{\alpha}_0 y_p=\bar{\beta}r \tag{3.52}$$

设$e=y_m-y_p$为广义输出误差，由式(3.49)和式(3.52)可得误差方程

$$\ddot{e}+a_1\dot{e}+a_0 e=(\bar{\alpha}_1-a_1)\dot{y}_p+(\bar{\alpha}_0-a_0)y_p+(b-\bar{\beta})r \tag{3.53}$$

令

$$\delta_1=\bar{\alpha}_1-a_1,\quad \delta_0=\bar{\alpha}_0-a_0,\quad \sigma=b-\bar{\beta} \tag{3.54}$$

则式(3.53)可写为

$$\ddot{e}+a_1\dot{e}+a_0 e=\delta_1\dot{y}_p+\delta_0 y_p+\sigma r \tag{3.55}$$

设参数误差向量$\boldsymbol{\varphi}$和广义误差向量$\boldsymbol{\varepsilon}$分别为

$$\phi^T=[\delta_0\quad \delta_1\quad \sigma],\quad \boldsymbol{\varepsilon}^T=[e\quad \dot{e}] \tag{3.56}$$

则误差方程式(3.55)的矩阵-向量形式可写为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\Delta}_a+\boldsymbol{\Delta}_b \tag{3.57}$$

式中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Delta}_a=\begin{bmatrix}0\\ \delta_0 y_p+\delta_1\dot{y}_p\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Delta}_b=\begin{bmatrix}0\\ \sigma r\end{bmatrix} \tag{3.58}$$

选取李雅普诺夫函数为

$$V=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}) \tag{3.59}$$

式中，$\boldsymbol{P}$ 为 2×2 正定对称阵，$\boldsymbol{\Gamma}$ 为3维正定对角线阵，即

$$\boldsymbol{\Gamma}=\mathrm{diag}(\lambda_0,\lambda_1,\mu) \tag{3.60}$$

设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ 且 $p_{12}=p_{21}$，求 V 对时间的导数，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{T}(\mathbf{PA}+\mathbf{A}^{T}\mathbf{P})\boldsymbol{\varepsilon}+\delta_0[\lambda_0\dot{\delta}_0+(ep_{12}+\dot{e}p_{22})y_p]+\\&\delta_1[\lambda_1\dot{\delta}_1+(ep_{12}+\dot{e}p_{22})\dot{y}_p]+\sigma[\mu\dot{\sigma}+(ep_{12}+\dot{e}p_{22})r]\end{aligned} \tag{3.61}$$

选取正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q} \tag{3.62}$$

并且选取自适应规律为

$$\dot{\delta}_0=-\frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})y_p}{\lambda_0} \tag{3.63}$$

$$\dot{\delta}_1=-\frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})\dot{y}_p}{\lambda_1} \tag{3.64}$$

$$\dot{\sigma}=-\frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})r}{\mu} \tag{3.65}$$

则 $\dot{V}$ 为负定，闭环系统渐近稳定。

当对象参数为缓慢变化时，$\dot{\alpha}_1 \approx 0$，$\dot{\alpha}_0 \approx 0$，$\dot{\beta} \approx 0$，由式(3.54)和式(3.51)，可得

$$\dot{\delta}_0 = \dot{\alpha}_0 \approx -\beta \dot{f}_0, \quad \dot{\delta}_1 = \dot{\alpha}_1 \approx -\beta \dot{f}_1, \quad \dot{\sigma} = -\dot{\bar{\beta}} \approx -\dot{k}\beta \tag{3.66}$$

$$\dot{f}_0 = -\frac{\dot{\delta}_0}{\beta}, \quad \dot{f}_1 = -\frac{\dot{\delta}_1}{\beta}, \quad \dot{k} = -\frac{\dot{\sigma}}{\beta} \tag{3.67}$$

将式(3.63)和式(3.64)代入式(3.67)可得反馈增益系数 f_0 和 f_1 的自适应规律，即

$$\dot{f}_0 = \frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})y_p}{\lambda_0\beta} \tag{3.68}$$

$$\dot{f}_1 = \frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})\dot{y}_p}{\lambda_1\beta} \tag{3.69}$$

及

$$f_0 = \int_0^t \frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})y_p}{\lambda_0\beta} d\tau + f_0(0) \tag{3.70}$$

$$f_1 = \int_0^t \frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})\dot{y}_p}{\lambda_1\beta} d\tau + f_1(0) \tag{3.71}$$

将式(3.65)代入式(3.67)可得前馈增益 k 的自适应规律，即

$$\dot{k} = \frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})r}{\mu\beta} \tag{3.72}$$

$$k = \int_0^t \frac{(ep_{12}+\dot{e}p_{22})r}{\mu\beta} d\tau + k(0) \tag{3.73}$$

按式(3.70)、式(3.71)及式(3.73)自适应调节 f_0，f_1 和 k，可使，$\alpha_1 - \beta f_1 \to a_1$，$\alpha_0 - \beta f_0 \to a_0$，$k\beta \to b$ 及 $y_p \to y_m$。

3.2.2 用输入输出构成自适应规律

从上面的推导可以看出，利用控制对象的输入输出构成自适应控制规律时，要用到控制对象输出和广义误差的各阶导数，因而需要在自适应机构中设置微分器，这就降低了自适应系统的抗干扰能力。

3.3 用状态变量根据超稳定性理论设计并联MRAC

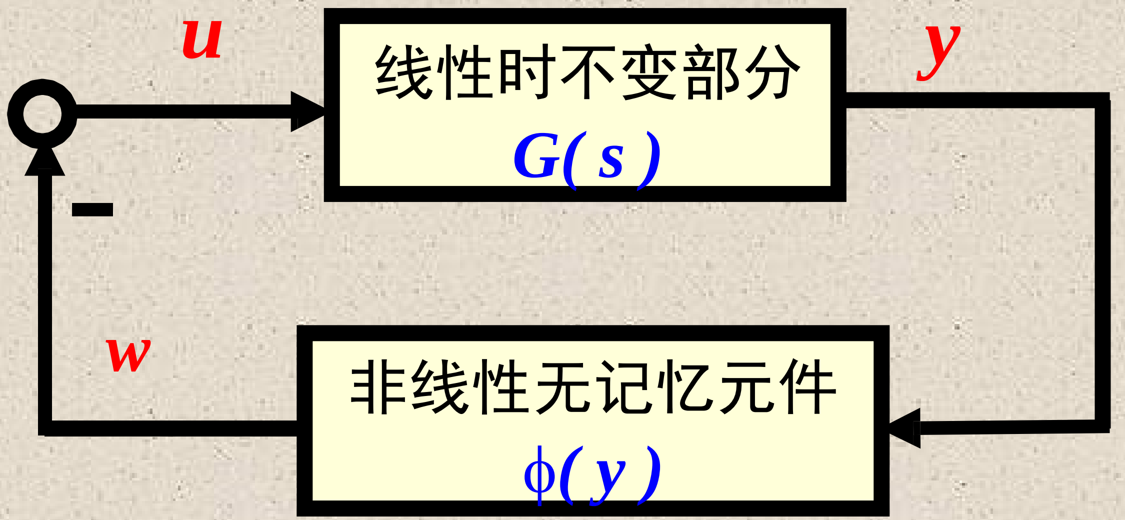
1 超稳定性理论的基本概念及定义

2 用超稳定性理论设计MRAC

上一节介绍了用李雅普诺夫稳定性理论设计自适应控制的基本方法，它的主要缺点是针对具体系统难于构造一个适当的李雅普诺夫函数。 而用**超稳定性理论**来设计模型参考自适应系统，它可以给出一族自适应规律，并且有相当系统的一整套设计理论。因此，有利于读者学习掌握这种自适应控制的设计方法和结合实际系统灵活选择适当的自适应控制规律。

超稳定性概念是波波夫于六十年代初研究非线性系统绝对稳定性时发展起来的。当时，波波夫对某种类型的非线性系统的渐近稳定性问题，提出了一个具有充分条件的频率判据，对研究的这类非线性系统的稳定性提供了比较实用的方法：

波波夫所研究的这类非线性系统，是由线性时不变部分与非线性无记忆元件相串联而构成的反馈系统，如图所示。


u
线性时不变部分
G(s)
y
-
w
非线性无记忆元件
φ(y)

MRAC数学描述

MRAC系统的误差方程

非线性部分

$$\dot{e} = A_m e + W_1$$
$$\nu = De$$

线性部分

$$W = -W_1 = [\int_0^t F_1(\nu,\tau,t)d\tau + F_2(\nu,t) + A_p(0) - A_m]x_p$$
$$+ [\int_0^t G_1(\nu,\tau,t)d\tau - G_2(\nu,t) + B_p(0) - B_m]u$$

输入为W_1

输出为 ν

输入为 ν

输出为 W

MRAC数学描述

MRAC系统的误差方程

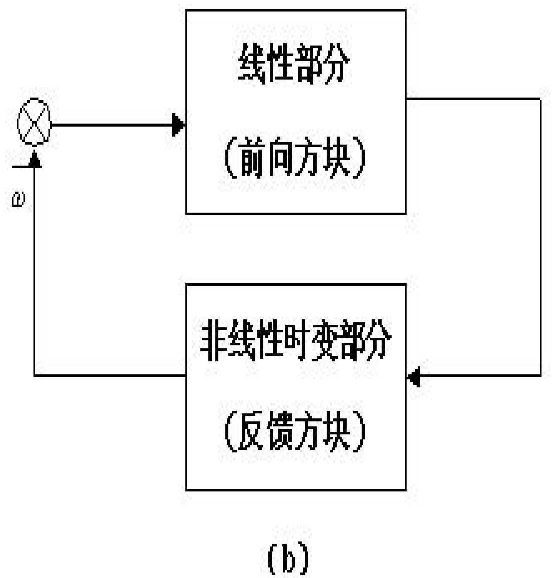


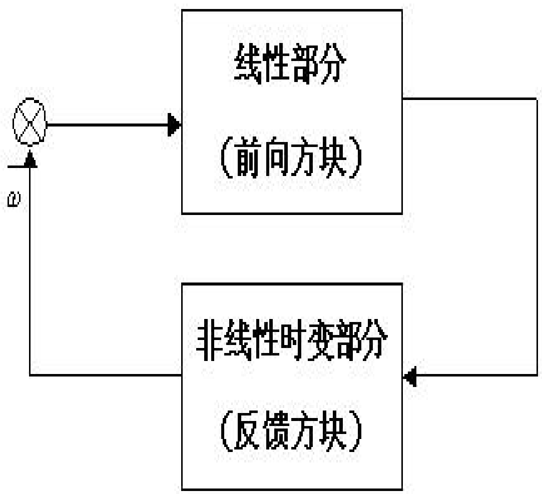
图3.2　并联自适应系统等价框图

超稳定性理论：

对于可用这种形式等价的时变非线性反馈系统的稳定性理论问题，波波夫曾作了充分的研究。得出的结论为：如果非线性时变部分满足某些（波波夫积分不等式）条件，则反馈系统的稳定性仅由线性部分的特征（正实性质）所决定。

MRAC数学描述

MRAC系统的误差方程

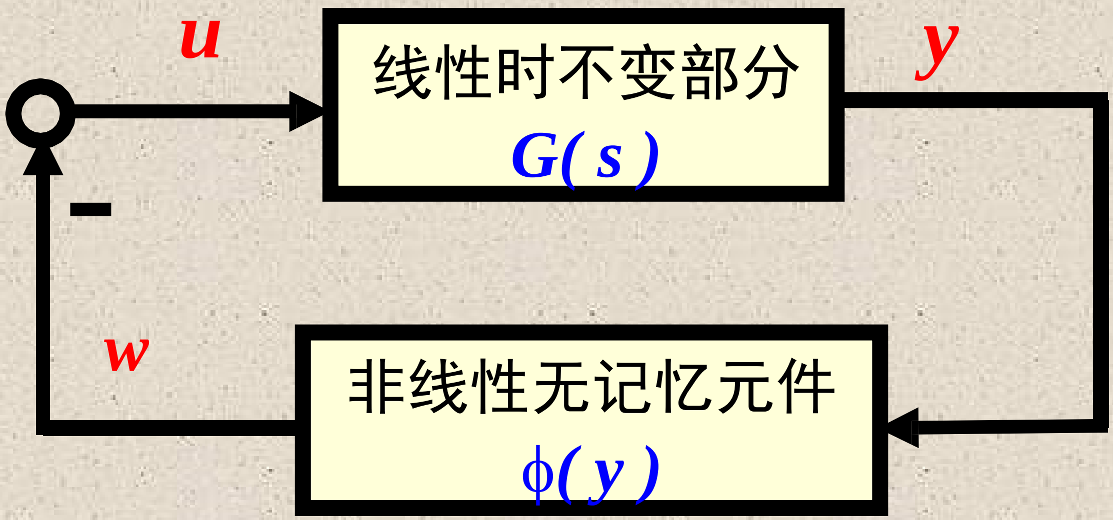


(b)

图3.2 并联自适应系统等价框图

- 这样，把研究时变非线性反馈系统的稳定性转化为仅用线性部分的特征来描述，就将一个十分复杂的问题转化为可以用比较简单的方法来解决了。这就是波波夫提出的超稳定性理论的重要贡献。

波波夫积分不等式

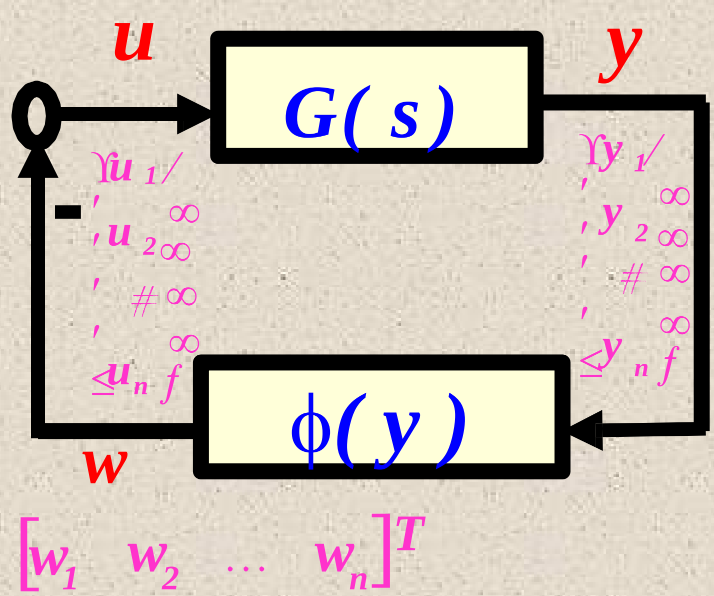


非线性元件满足

$$w = \phi(y)$$

$$0 \le \phi(y)y = wy \le ky^2,\quad k > 0,\quad \phi(0) = 0$$

波波夫的绝对稳定性判据要求反馈方块在任一瞬间，输入和输出的乘积都大于或等于零 ，推广到多变量系统，就是要求每一个分量在每一瞬间的乘积均大于或等于零。

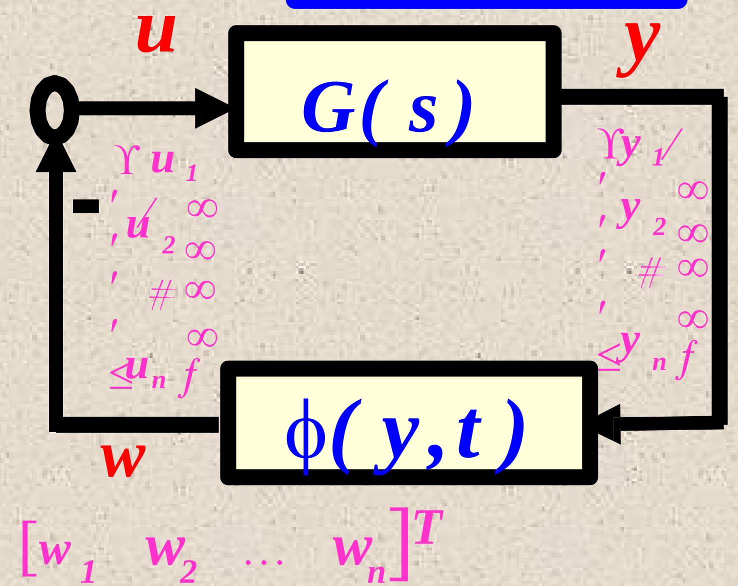


$$w_i y_i \ge 0, \quad i = 0、1、2、\ldots、n$$

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} w^T(\tau) y(\tau) d\tau \geq -r_0^2 \qquad t_1 \geq t_0,\ r_0^2 \geq 0$$

波波夫不等式

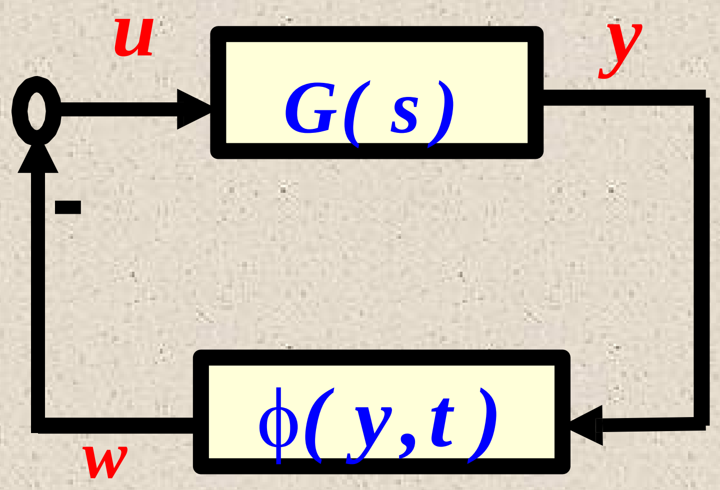
如果我们把非线性无记忆元件推广至非线性有记忆元件如右图所示。这时，亦就把非线性特性的条件放宽，扩大至并非要每一瞬间的输入和输出量的乘积都要大于或等于零，可以在小的时间间隙中，条件不满足。但是，在大的时间间隙中，条件是满足的。



$$w_i y_i \geq 0, \qquad i = 0、1、2、\ldots、n$$

超稳定性方块和正实函数的等价关系

超稳定方块 ⇕ 正实函数



渐近超稳定方块 ⇔ 严格正实函数

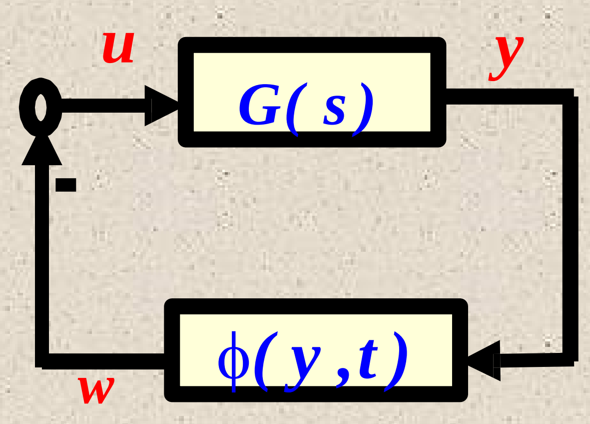
用波波夫稳定性理论设计*MRAC*系统

用波波夫超稳定性理论设计*MRAC*系统，其自适应规律既可以由系统的**状态变量**构成，也可由系统的**输入输出**构成。

用系统状态变量构成自适应规律

用控制对象的输入输出构成自适应规律

用系统状态变量构成自适应规律



用状态变量设计*MRAC* 步骤

(1)将模型参考自适应系统等价为非线性时变反馈系统的标准误差模型的形式，即由一线性的前向方块和一个非线性的反馈方块组成。

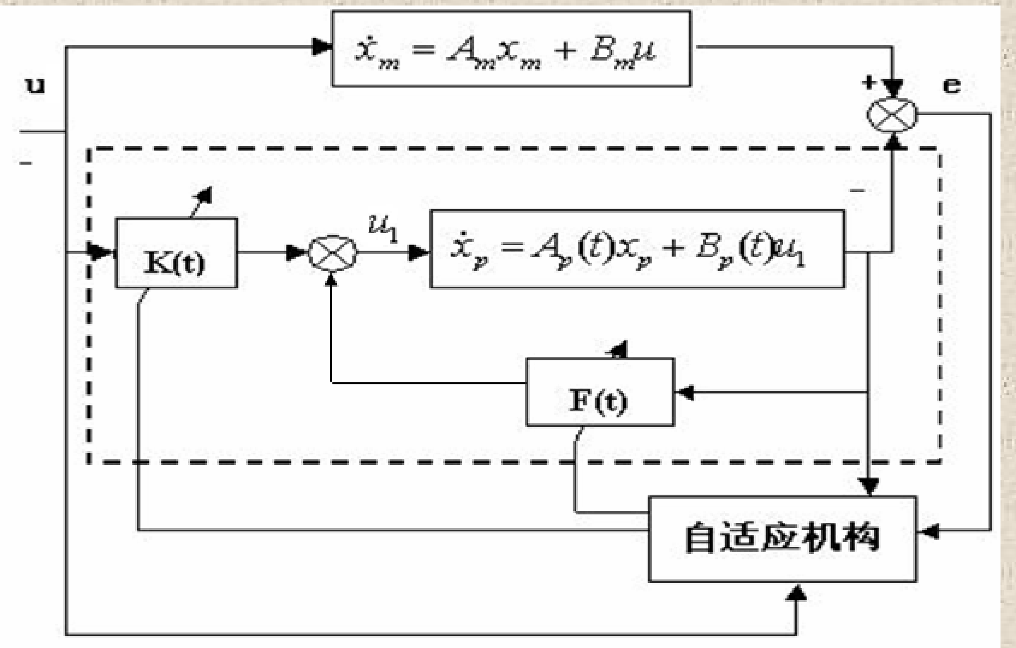
（2）使等价系统的反馈方块满足波波夫积分不等式，并由此确定 合适的自适应规律。

（3）确定等价系统的前向方块是严格正实的，从而决定另一部分 自适应规律。

（4）将等价系统返回至原始系统，从而完成整个自适应系统的工 作原理图。

设参考模型的状态方程：

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u$$



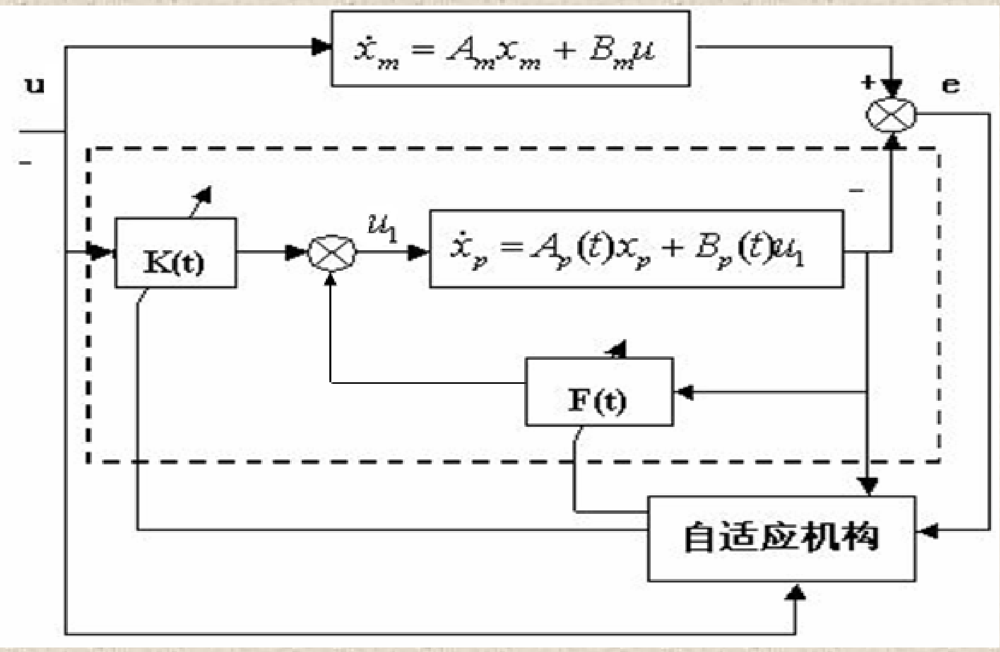
被控对象的状态方程

$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)u_1$$

一般自适应控制采用前馈加反馈的形式，即：

$$u_1 = K(t)u + F(t)x_p$$

带入上式：

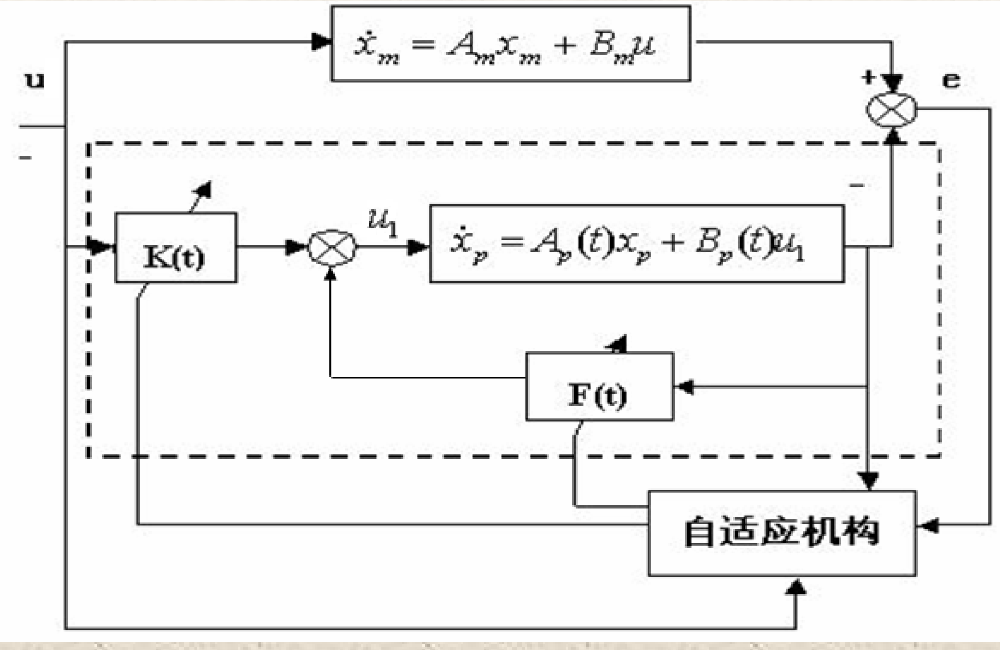


$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)[K(t)u + F(t)x_p]$$

$$= [A_p(t) + B_p(t)F(t)]x_p + B_p(t)K(t)u$$

$$u_1 = K(t)u + F(t)x_p$$

带入上式:

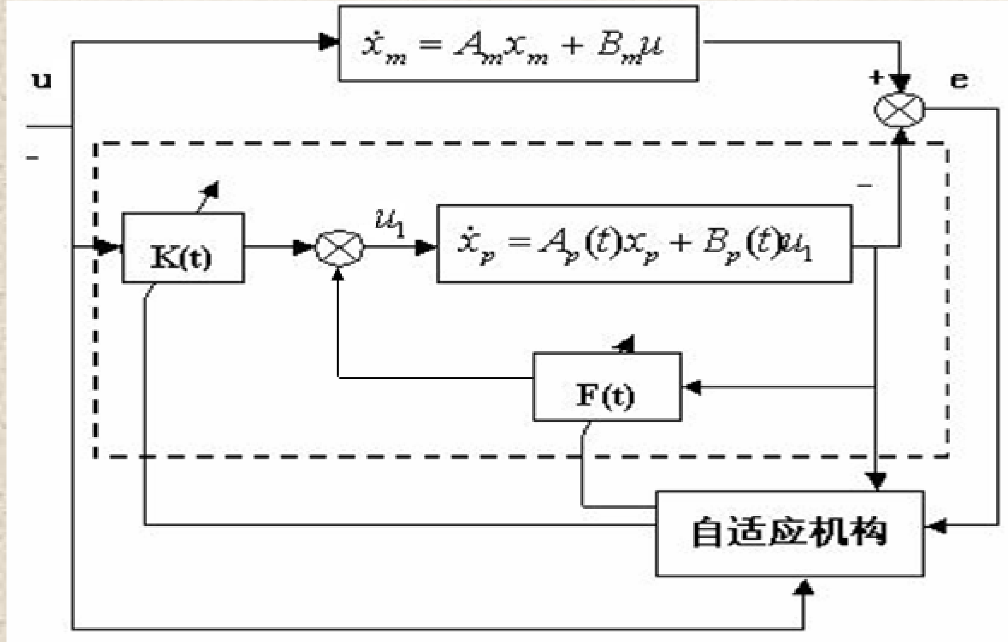


$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)[K(t)u + F(t)x_p]$$

$$= \underline{[A_p(t) + B_p(t)F(t)]}\, x_p + \underline{B_p(t)K(t)}u$$

设： $A_s(t) = A_p(t) + B_p(t)F(t)$

$B_s(t) = B_p(t)K(t)u$



$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)[K(t)u + F(t)x_p]$$

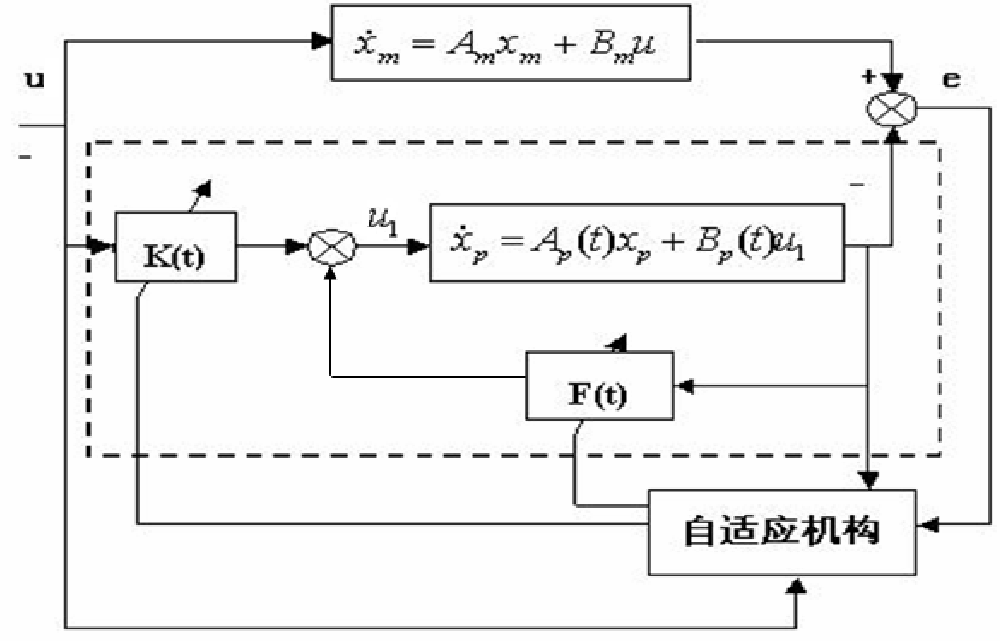
$$= \underline{[A_p(t) + B_p(t)F(t)]}\, x_p + \underline{B_p(t)K(t)}u$$

则可调系统：$\dot{x}_p = A_s(t)x_p + B_s(t)u$

因此，自适应规律将通过调节 $K(t)$、$F(t)$

，来调整：

$A_s(t)$、$B_s(t)$



则可调系统：

$$\dot{x}_p = A_s(t)x_p + B_s(t)u$$

步骤一

(1)将模型参考自适应系统等价为非线性时变反馈系统的标准误差模型的形式，即由一线性的前向方块和一个非线性的反馈方块组成。

$$\boldsymbol{\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u}$$

$$\dot{x}_p = A_s(t)x_p + B_s(t)u$$

由系统广义误差方程

$$\boldsymbol{e = x_m - x_s}$$

得状态误差方程：

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x}_s = A_m e + (B_m - B_s)u + (A_m - A_s)x_p$$

步骤一

- 等价的非线性时变反馈系统，是由对象和参考模型所组成的等价线性前向方块和有非线性时变性质的自适应机构等价反馈方块所组成。

$$\dot{e} = A_m e + I w_1$$

$$w = -w_1$$

$$= [A_s(t) - A_m] x_p + [B_s(t) - B_m] u$$

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x}_s = A_m e + (B_m - B_s) u + (A_m - A_s) x_p$$

步骤一

根据超稳定性理论，对等价反馈方块，要求其特性满足波波夫积分不等式，同时亦要求等价前向方块必须是严格正实的，这样才能保证广义误差 $e \to 0$ 。

$$\dot{e} = A_m e + I w_1$$

$$w = -w_1$$

$$= [A_s(t) - A_m] x_p + [B_s(t) - B_m] u$$

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x}_s = A_m e + (B_m - B_s) u + (A_m - A_s) x_p$$

步骤一

$$\dot{e}=A_m e+Iw_1$$

为了使前向方块严格正实，须在前向通道中串入一个线性补偿器***D***，使得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{De}$$

$$w=-w_1$$

$$=[A_s(t)-A_m]x_p+[B_s(t)-B_m]u$$

$$\dot{e}=\dot{x}_m-\dot{x}_s=A_m e+(B_m-B_s)u+(A_m-A_s)x_p$$

引理

如果$G(s)=m(s)/n(s)$满足下列条件：

1） $m(s)$、$n(s)$ 都具有实系数。

2）$m(s)$、$n(s)$ 都是胡尔维茨多项式。

3）$m(s)$、$n(s)$ 阶数之差不超过 ± 1 .

4）$1/G(s)$ 仍为正实函数。

则 $G(s)$ 仍为正实函数。

步骤一

线性部分

$$\dot{e} = A_m e + I w_1 \qquad v = De$$

输入为 w_1

输出为 v

$$w = -w_1$$

$$= [A_s(t) - A_m]x_p + [B_s(t) - B_m]u$$

非线性部分

$$A_s(t) = A_s(v,t)$$

$$B_s(t) = B_s(v,t)$$

输入为 v

输出为 w

步骤一

为了能使调节的作用在广义误差向量逐渐趋向零时仍能维持，自适应规律一般常选为具有比例加积分的作用。

$$A_s(v,t)=\int_0^t \Phi_1(v,\tau,t)d\tau+\Phi_2(v,t)$$

$$B_s(v,t)=\int_0^t \Psi_1(v,\tau,t)d\tau+\Psi_2(v,t)$$

上式带入：

$$w=-w_1$$

$$=[A_s(t)-A_m]x_p+[B_s(t)-B_m]u$$

步骤一

获得模型参考自适应系统的等价形式

$$W = -W_1 = [\int_0^t \Phi_1(v,\tau,t)d\tau + \Phi_2(v,t) + A_s(0) - A_m]x_p$$
$$+[\int_0^t \Psi_1(v,\tau,t)d\tau - \Psi_2(v,t) + B_s(0) - B_m]u$$

线性部分

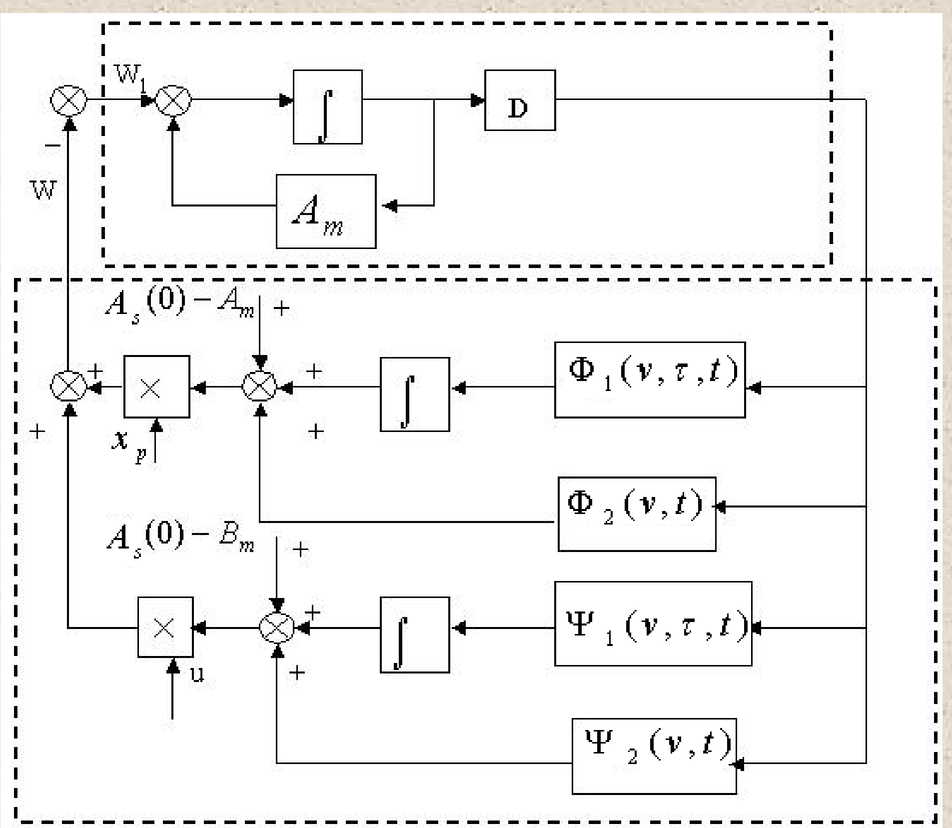
输入为W_1

输出为 v

非线性部分

输入为 v

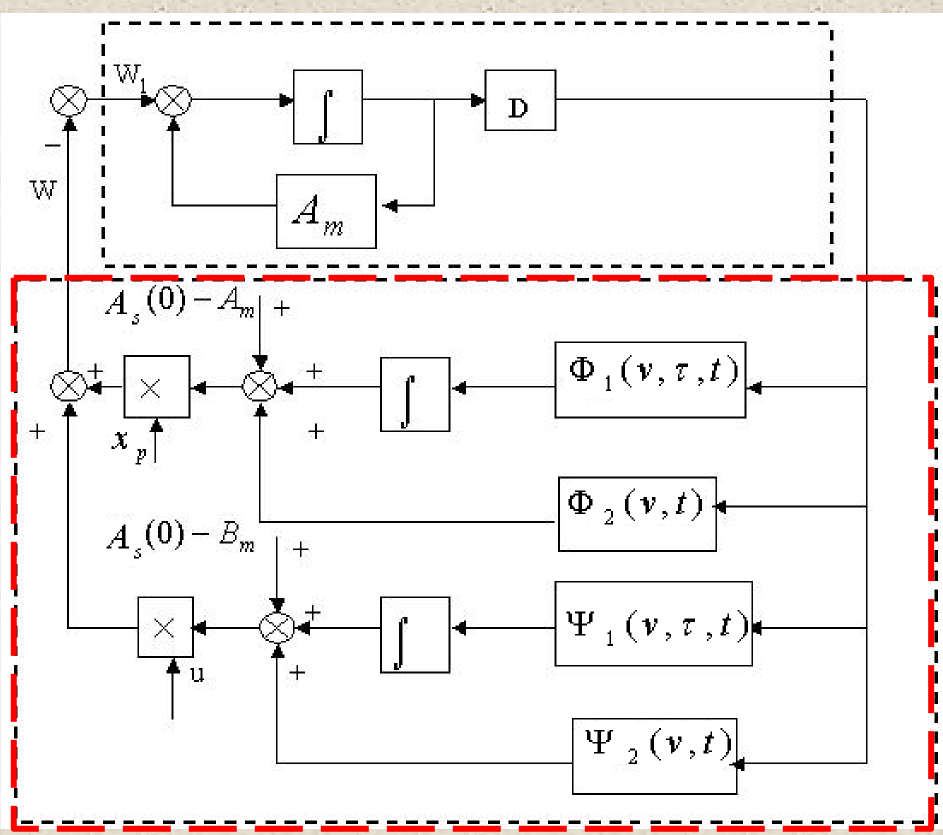
输出为 W



步骤二

$$\eta(0,t_1)=\int_0^{t_1} v^T w\,dt \ge -r_0{}^2,(t_1\ge 0)$$

使得等价反馈
方块满足波波
夫积分不等式



步骤二

$$\eta(0,t_1)=\int_0^{t_1} v^T w\,dt \ge -r_0^{\ 2},(t_1\ge 0)$$

使得等价反馈
方块满足波波
夫积分不等式

$$W=-W_1=[\int_0^t \Phi_1(v,\tau,t)d\tau+\Phi_2(v,t)+A_s(0)-A_m]x_p$$
$$+[\int_0^t \Psi_1(v,\tau,t)d\tau-\Psi_2(v,t)+B_s(0)-B_m]u$$

步骤二

$$\eta(0,t_1)=\int_0^{t_1}v^T[\int_0^t\phi_1(\nu,t,\tau)d\tau+\phi_2(\nu,\tau)+A_{s0}-A_m]x_p dt$$

$$+\int_0^{t_1}v^T[\int_0^t\psi_1(\nu,t,\tau)d\tau+\psi_2(\nu,\tau)+B_{s0}-B_m]u dt\geq -r_0^2$$

上式分为两个部分：

$$\eta_\Phi(0,t_1)=\int_0^{t_1}v^T[\int_0^t\phi_1(\nu,t,\tau)d\tau+\phi_2(\nu,\tau)+A_{s0}-A_m]x_p dt\geq -r_\phi^2$$

$$\eta_\Psi(0,t_1)=\int_0^{t_1}v^T[\int_0^t\psi_1(\nu,t,\tau)d\tau+\psi_2(\nu,\tau)+B_{s0}-B_m]u dt\geq -r_\Psi^2$$

设： $\eta(0,t_1)=\eta_\Phi(0,t_1)+\eta_\Psi(0,t_1)$

步骤二

$\eta_{\Phi}(0,t_1)$、$\eta_{\Psi}(0,t_1)$ 在形式上完全相同，因此只需分析一个不等式的解即可类推。

上式分为两个部分：

$$\eta_{\Phi}(0,t_1)=\int_0^{t_1} v^T[\int_0^t \phi_1(v,t,\tau)d\tau+\phi_2(v,\tau)+A_{s0}-A_m]x_p dt \geq -r_{\phi}^2$$

$$\eta_{\Psi}(0,t_1)=\int_0^{t_1} v^T[\int_0^t \psi_1(v,t,\tau)d\tau+\psi_2(v,\tau)+B_{s0}-B_m]udt \geq -r_{\Psi}^2$$

设：$\eta(0,t_1)=\eta_{\Phi}(0,t_1)+\eta_{\Psi}(0,t_1)$

步骤二

分析：

$$\eta_{\Phi}(0,t_1)=\int_0^{t_1} v^T[\int_0^t \underline{\phi_1(v,t,\tau)}d\tau+\underline{\phi_2(v,\tau)}+A_{s0}-A_m]x_p dt\geq -r_{\phi}^{2}$$

求解自适应规律：

$\phi_1(v,t,\tau)$、$\phi_2(v,\tau)$

再分解为两个不等式：

$$\eta_{\Phi1}(0,t_1)=\int_0^{t_1} v^T[\int_0^t \phi_1(v,t,\tau)d\tau+A_{s0}-A_m]x_p dt\geq -r_{\phi1}^{2} \quad (1)$$

$$\eta_{\Phi1}(0,t_1)=\int_0^{t_1} v^T\phi_2(v,t)x_p dt\geq -r_{\phi2}^{2} \quad (2)$$

$$\eta\Phi(0,t_1)=\eta_{\Phi1}(0,t_1)+\eta_{\Phi2}(0,t_1)$$

不经证明的一个结论， $\phi_1(\nu, t, \tau)$ 只要选取如下的函数，即不等式（1）成立。

$$\phi_1(\nu, t, \tau) = K_A(t-\tau)\nu(\tau)x_p^T(t)$$

同样： $\phi_2(\nu, t) = K'_A(t)\nu(t)x_p^T(t)$ 不等式（2）成立。

$$\eta_{\Phi 1}(0, t_1) = \int_0^{t_1} \nu^T [\int_0^t \phi_1(\nu, t, \tau) d\tau + A_{s0} - A_m] x_p dt \geq -r_{\phi 1}{}^2 \quad (1)$$

$$\eta_{\Phi 1}(0, t_1) = \int_0^{t_1} \nu^T \phi_2(\nu, t) x_p dt \geq -r_{\phi 2}{}^2 \quad (2)$$

$$\eta_{\Phi}(0, t_1) = \eta_{\Phi 1}(0, t_1) + \eta_{\Phi 2}(0, t_1)$$

类似的，确定 $\psi_1(v,t,\tau)$、$\psi_2(v,t)$ 为：

$$\psi_1(v,t,\tau)=K_B(t-\tau)v(\tau)u^T(\tau)$$

$$\psi_2(v,t)=K_B'(t)v(t)u^T(t)$$

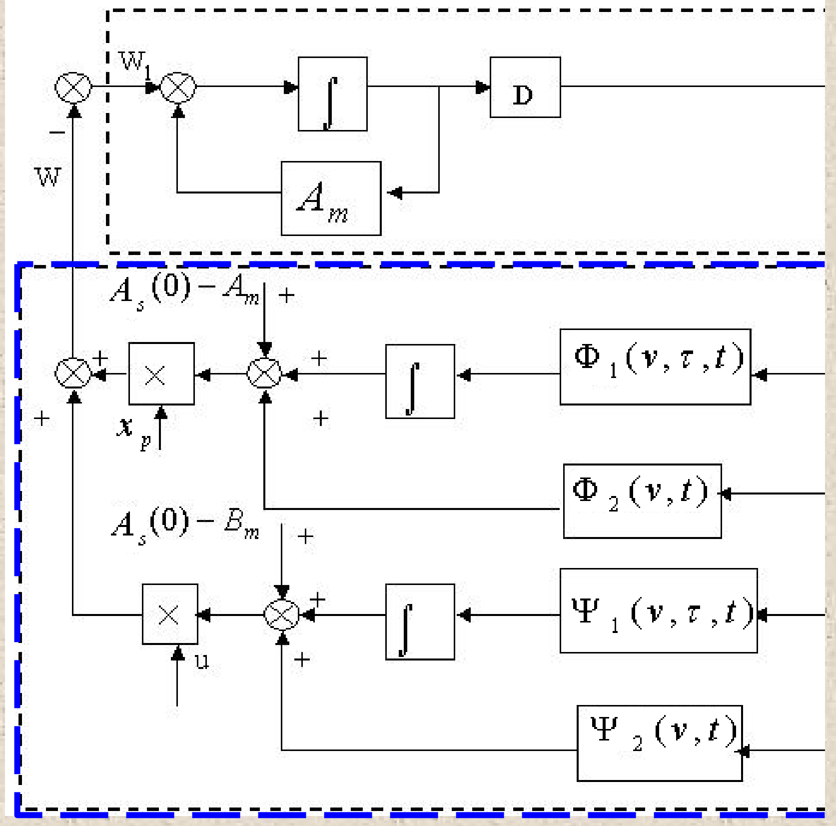
也就是说自适应规律取如下形式，可使等价的非 线性方块满足波波夫积分不等式。

$$\phi_1(v,t,\tau)=K_A(t-\tau)v(\tau)x_p^T(t)$$

$$\phi_2(v,t)=K'_A(t)v(t)x_p^T(t)$$

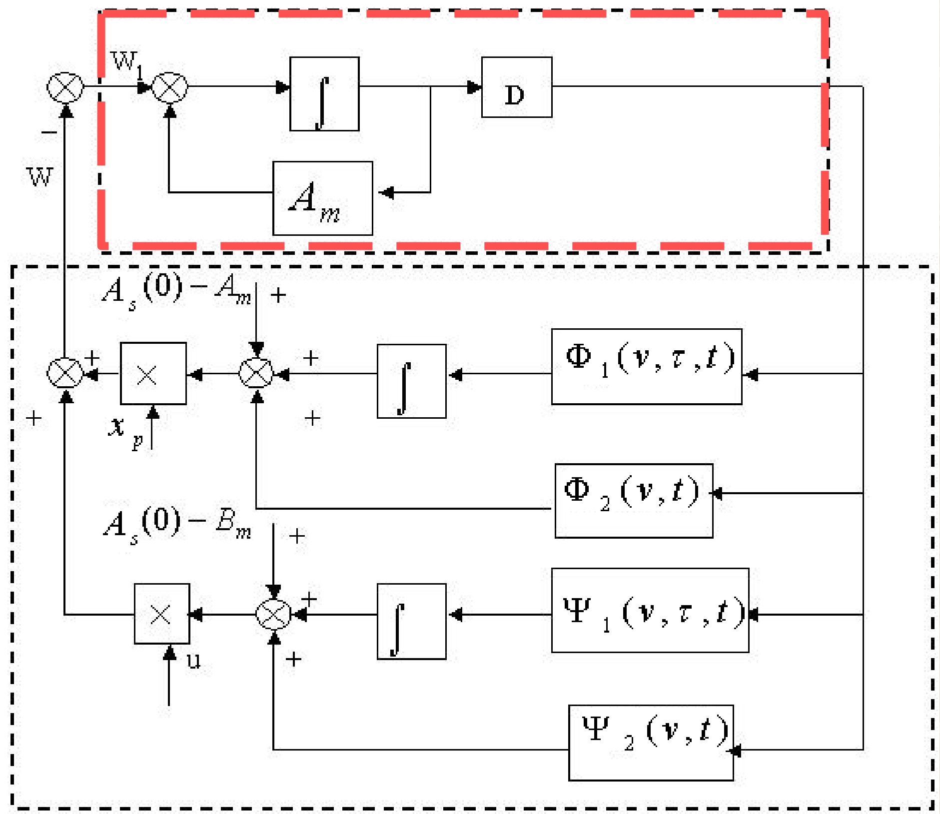
$$\psi_1(v,t,\tau)=K_B(t-\tau)v(\tau)u^T(\tau)$$

$$\psi_2(v,t)=K'_B(t)v(t)u^T(t)$$



步骤三

根据等价前向方块正实性要求，确定线性补偿器D



步骤三

根据等价前向方块正实性要求，确定线性补偿器D

当等价系统的反馈方块满足波波夫积分不等式后，要使系统为渐近超稳定系统，则要求由下式

$$\dot{e} = A_m e + I(-w)$$

$$v = De$$

形成的等价前向方块的传递函数阵

$$G(s) = D(sI - A_m)^{-1} I$$

必须严格正实。

式中D可以根据定理，通过求解

$$H(s) = J + C(sI - A)^{-1}B$$

步骤三

$$G(s) = D(sI - A)^{-1}I$$

$$PA + A^{\mathrm{T}}P = -LL^{\mathrm{T}}$$

$$B^{\mathrm{T}}P + K^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}} = C$$

$$K^{\mathrm{T}}K = J + J^{\mathrm{T}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &PA_m + A_m^{T}P = -Q \\ &PI = D \end{aligned}}$$

P,Q保证恒为正定阵，从而确定D 阵使得$G(s)$为严格正实函数，此时，系统为全局渐近稳定，其状态误差为

步骤三

$$G(s) = J + C(sI - A)^{-1} B$$

定理2 若$G(s)$是严格正实，其充分必要条件是：

存在着两个正定对称阵 P, Q，以及阵 S, R，对应于如前描述系统满足下列关系：

$$PA + A^T P = -Q$$

$$B^T P + S^T = C$$

$$J + J^T = R$$

$$\boxed{\begin{aligned} &PA_m + A_m^T P = -Q \\ &PI = D \end{aligned}}$$

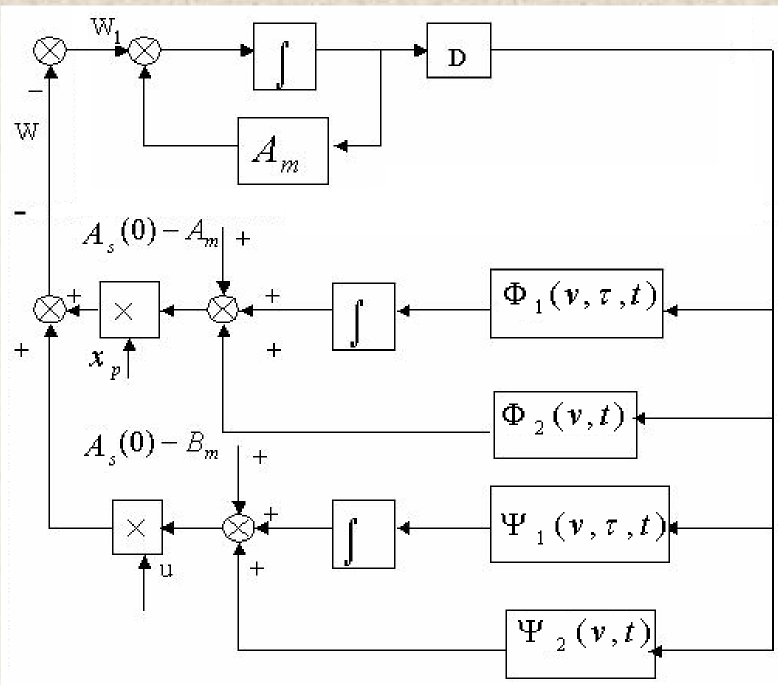
$$G(s) = D(sI - A_m)^{-1} I$$

P, Q保证恒为正定阵，从而确定D阵使得$G(s)$为严格正实函数，此时，系统为全局渐近稳定，其状态误差为

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} (x_m - x_s) = 0$$

(4)将等价系统返回至原始系统，从而完成整个自适应系统的工作原理图。

在确定了 K_A、K_A'、K_B、K_B'、D 后， 完成整个自适应系统的工作原理图。



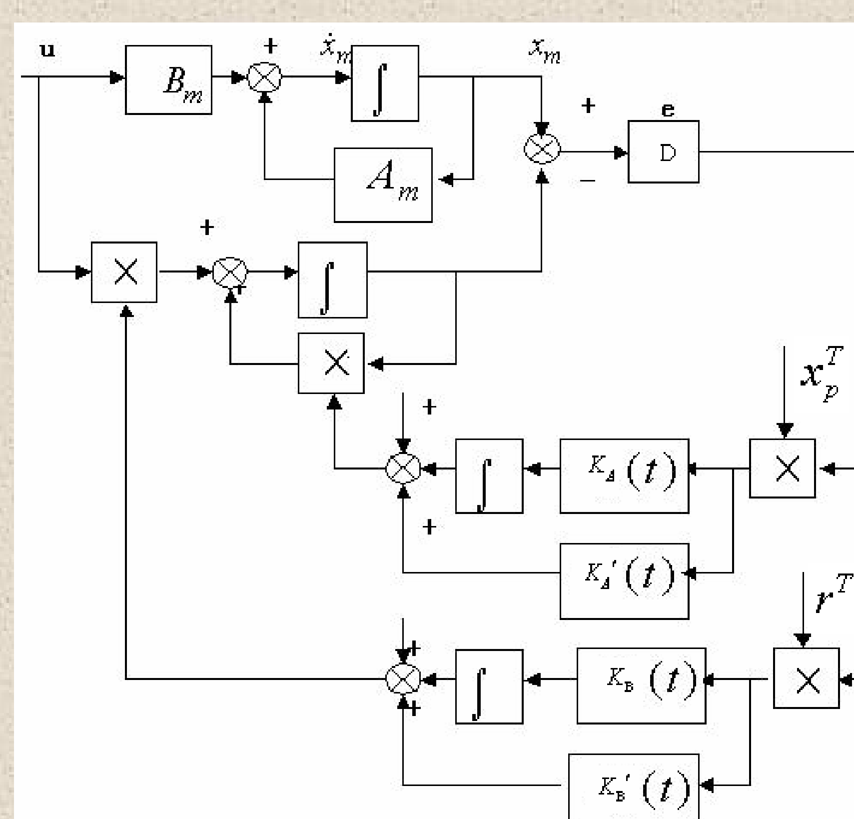
$$\phi_1(v,t,\tau) = \underline{K_A(t-\tau)}\,v\underline{(\tau)}\,\underline{x_p^T(t)}$$

$$\phi_2(v,t) = K'_A(t)v(t)x_p^T(t)$$

$$\psi_1(v,t,\tau) = K_B(t-\tau)v(\tau)u^T(\tau)$$

$$\psi_2(v,t) = K'_B(t)v(t)u^T(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &PA_m + A_m^T P = -Q \\ &PI = D \end{aligned}}$$



步骤四

$K_A(\mathrm{t})$、$K_A(t)'$、$K_{\mathrm{B}}(\mathrm{t})$、$K_{\mathrm{B}}(t)'$、D

有多种选取方法，选取方法不同， 所得到的自适应规律的类型就不同。

一般来说， 选取 $K_A(\mathrm{t})$、$K_A(t)'$、$K_{\mathrm{B}}(\mathrm{t})$、$K_{\mathrm{B}}(t)'$、D 为常数，获得比例＋积分型自适应规律。