49. ① 包含性 $X \subseteq G$ （已知条件）

② 非空： 由 $eH=He$ 得 $e \in X$

$e \in G$

所以 $X \neq \emptyset$.

③ 混合封闭性

$\forall x, y \in X$. 则 $x, y \in G$. $xH=Hx$, $yH=Hy$.

$\forall y^{-1} * h \in y^{-1}H$ 有 $h \in H$ 即 $h*y \in Hy$

$\exists h_1 \in H$. 使 $y*h_1 \in yH$ 且 $h*y=y*h_1$

即 $y^{-1}*h=h_1*y^{-1}$ 即 $y^{-1}*h \in Hy^{-1}$.

即 $y^{-1}H \subseteq Hy^{-1}$.

同理 $Hy^{-1} \subseteq y^{-1}H$. 即 $Hy^{-1}=y^{-1}H$

$\forall (x*y^{-1})*h \in (x*y^{-1})H$ $\exists h_1, h_2 \in H$

$(x*y^{-1})*h = x*(y^{-1}*h) = x*(h_1*y^{-1})$

$= (x*h_1)*y^{-1}$

$= (h_2*x)*y^{-1}$

$= h_2*(x*y^{-1}) \in H(x*y^{-1})$

即 $(x*y^{-1})H \subseteq H(x*y^{-1})$

同理 $H(x*y^{-1}) \subseteq (x*y^{-1})H$

即 $(x*y^{-1})H = H(x*y^{-1})$.

综上，有 $x*y^{-1} \in X$. 即 $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 子群.

59. 证明：① $\langle Z, \oplus \rangle$ 是交换群.

① 封闭性： $\forall a, b \in Z$ $a \oplus b \in Z$

② 结合律. $\forall a, b, c \in Z$

$(a \oplus b) \oplus c = (a+b-1) \oplus c = a+b+c-1-1$

$= a+(b+c-1)-1$

$= a+(b \oplus c)-1$

$= a \oplus (b \oplus c)$ 所以 $\oplus$ 有结合律.

③ 有幺元。 $\forall a \in Z$ $1 \oplus a = a \oplus 1 = a+1-1 = a$ 所以 $\oplus$ 有幺元

④ 有逆元 $\forall a \in Z$，$\exists b \in Z$，$b=-a+2$ 所以 $\oplus$ 有逆元

$a \oplus b = a+b-1 = a+(-a+2)-1 = 1$

$b \oplus a = -a+2+a-1 = 1$

⑤ 交换律. $\forall a, b \in Z$

$a \oplus b = a+b-1 = b+a-1 = b \oplus a$ 所以 $\oplus$ 有交换律.

综上，$\langle Z, \oplus \rangle$ 是交换律.

扫描全能王 创建

(2) 证明：$\langle Z, \otimes \rangle$ 是交换含幺半群

① 封闭性. $\forall a,b\in Z$, $a\otimes b = a+b-ab \in Z$

② 结合律: $\forall a,b,c\in Z$

$$
\begin{aligned}
(a\otimes b)\otimes c &= (a+b-ab)\otimes c \\
&= a+b-ab+c-(a+b-ab)c \\
&= a+b+c-bc-(a-ab)c-ab \\
&= a+b+c-bc-a(b+c-bc) \\
&= a\otimes(b+c-bc) \\
&= a\otimes(b\otimes c)
\end{aligned}
$$

所以 $\otimes$ 有结合律.

③ 有幺元

$a\otimes e = a+e-ae = a \Rightarrow e=0$

$\forall a\in Z$, $0\otimes a = a\otimes 0 = a$ 所以 $\otimes$ 运算有幺元。

④ 交换律: $\forall a,b\in Z$,

$a\otimes b = a+b-ab = b+a-ba = b\otimes a$

所以 $\otimes$ 运算有交换律

所以 $\langle Z, \otimes \rangle$ 是交换含幺半群.

(3) $\otimes$ 对 $\oplus$ 有分配律

$\forall a,b,c\in Z$

$$
\begin{aligned}
a\otimes(b\oplus c) &= a\otimes(b+c-1) \\
&= a+b+c-1-a(b+c-1) \\
&= a+b+c-1-ab-ac+a \\
&= (a+b-ab)+(a+c-ac)-1 \\
&= (a+b-ab)\oplus(a+c-ac) \\
&= (a\otimes b)\oplus(a\otimes c)
\end{aligned}
$$

所以 $\otimes$ 对 $\oplus$ 有分配律

综上，$\langle Z, \oplus, \otimes \rangle$ 是一个含幺的交换环。

扫描全能王 创建

$x \oplus x = (x \oplus x) \oplus 0$

$= (x \oplus x) \oplus ((x \oplus x) \oplus (-(x \oplus x)))$

$= ((x \oplus x) \oplus (x \oplus x)) \oplus (-(x \oplus x))$

由 $x \otimes x = x$

得 $(x \oplus x) \otimes (x \oplus x) = x \oplus x$

由环的分配律 $((x \oplus x) \otimes x) \oplus ((x \oplus x) \otimes x) = x \oplus x$

即 $((x \otimes x) \oplus (x \otimes x)) \oplus ((x \otimes x) \oplus (x \otimes x)) = x \oplus x$

即 $(x \oplus x) \oplus (x \oplus x) = x \oplus x$

则 $x \oplus x = (x \oplus x) \oplus (-(x \oplus x))$

$= 0$

(2) 证明：即 $\oplus$ 具有交换律

$\forall x, y \in R$ $(x \oplus y) \otimes (x \oplus y) = x \oplus y$

由分配律：$((x \oplus y) \otimes x) \oplus ((x \oplus y) \otimes y) = x \oplus y$

即 $((x \otimes x) \oplus (y \otimes x)) \oplus ((x \otimes y) \oplus (y \otimes y)) = x \oplus y$

即 $(x \oplus (y \otimes x)) \oplus ((x \otimes y) \oplus y) = x \oplus y$

即 $x \oplus (y \otimes x) \oplus (x \otimes y) \oplus y = x \oplus y$

即 $(y \otimes x) \oplus (x \otimes y) = 0$

所以 $(y \otimes x) \oplus (x \otimes y) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes y)$

消去律. 即 $y \otimes x = x \otimes y$

所以 $\otimes$ 运算可交换.

综上 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是交换环.

扫描全能王 创建