第二章 线性时不变系统

- 知识准备。
- 离散时间信号的时域分解及离散LTI系统时域分析、卷积和
- 连续时间信号的时域分解及连续时间LTI系统时域分析、卷积积分
- LTI系统的性质
- **LTI**系统的微分方程及差分方程表示。
- **LTI**系统的框图结构表示。

引言

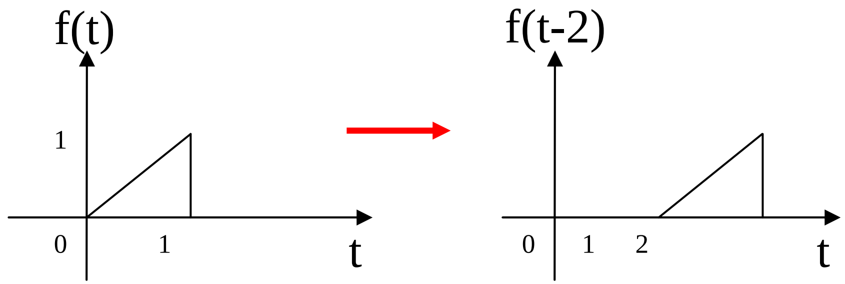
在已知系统并给定输入信号的前提条件下如何求解系统的输出是信号与系统分析的主要任务之一。信号与系统的时域分析是指在分析过程中，信号的表示、系统的描述和信号过系统输出的求解等全部分析过程都在时域中进行的一种分析方法。信号与系统的时域分析往往比较直观，物理意义清楚，是学习其他各种变换分析方法的基础。本章将主要讨论LTI系统的时域分析方法。

知识准备

- 单位脉冲函数的采样性质：

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

- 信号的时移变换：



- 系统的线性： $ax_1(t)+bx_2(t)\rightarrow ay_1(t)+by_2(t)$

- 系统的时不变性：即若y[n]是系统在x[n]输入下的输出，当输入变为x[n-n_0]时，输出为y[n-n_0]。

问题：如何在给定输入的情况下得到系统的输出？

出发点：如果能把任意输入信号分解成基本信号的线性组合，那么只要得到了LTI系统对基本信号的响应，就可以利用系统的线性和时不变特性，将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。

本章研究的主要问题

- 研究信号的分解:
  - 以什么样的信号作为构成任意信号的基本信号单元;
  - 如何用基本信号单元的线性组合来构成任意信号?
  - 如何得到 LTI 系统对基本单元信号的响应;
  - 任意信号过LTI系统的响应如何求解?
- 作为基本单元的信号应满足以下要求:
  - 尽可能简单，并且用它的线性组合能够表示（构成）尽可能广泛的其它信号;
  - LTI系统对这种信号的响应易于求得。

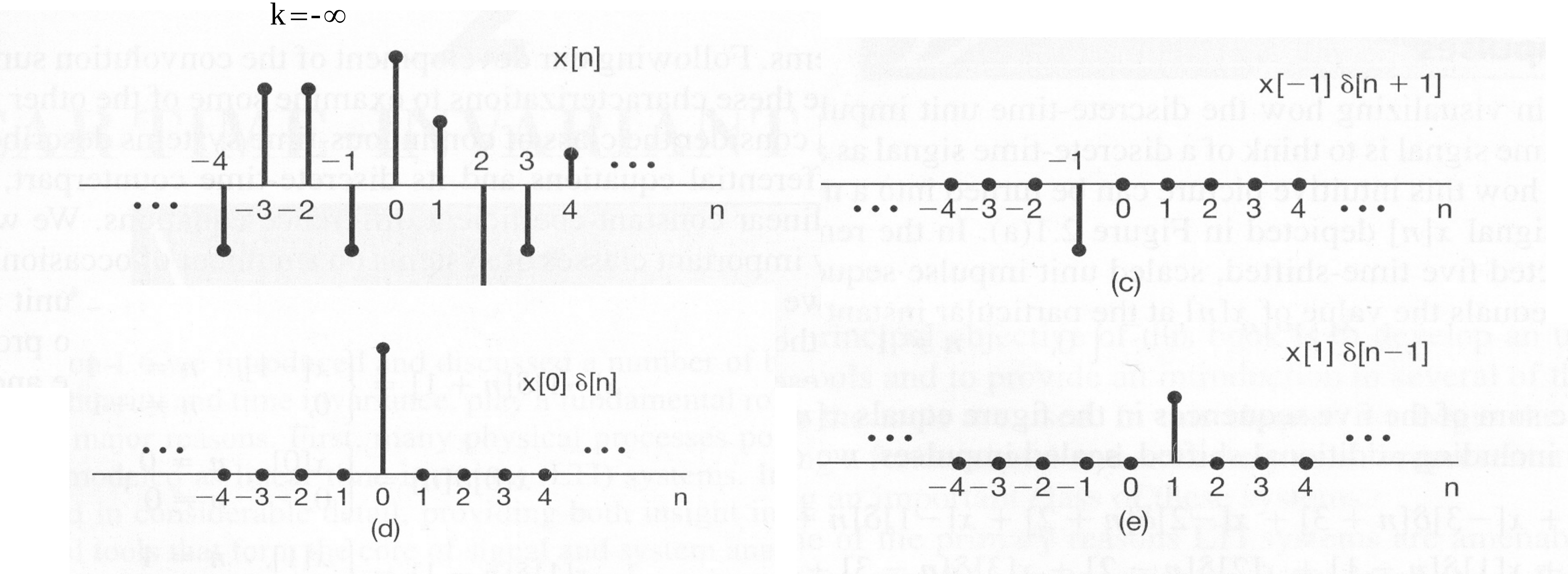
离散时间信号的时域分解

首先看一个示例：x[n]可以分解为：

$$x[n] = \cdots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + \cdots$$

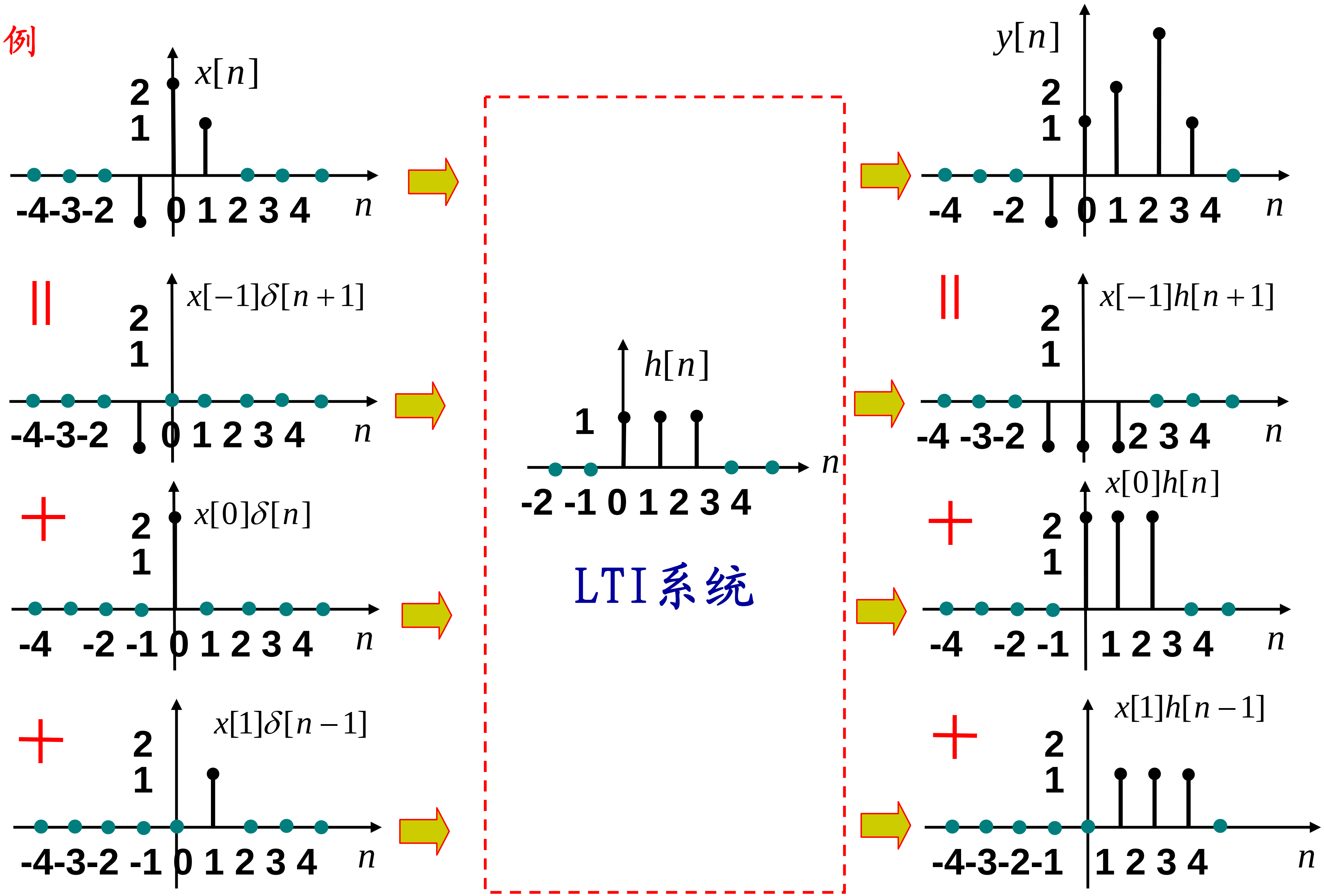
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

单位脉冲序列的筛选性质



离散LTI系统的单位脉冲响应及卷积和表示示例

例



离散LTI系统的单位脉冲响应及卷积和表示

LTI系统

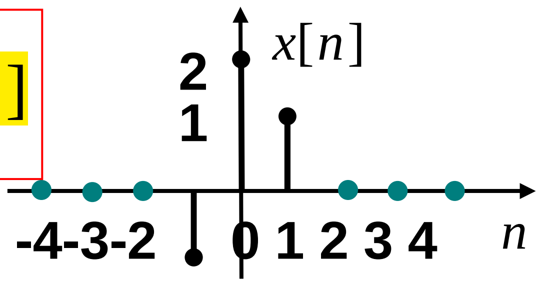
	输入		输出	
h[n]定义:	$\delta[n]$	$\Rightarrow$	$h[n]$	单位脉冲响应
时移不变性:	$\delta[n-k]$	$\Rightarrow$	$h[n-k]$	
齐次性:	$x[k]\delta[n-k]$	$\Rightarrow$	$x[k]h[n-k]$	
叠加性:	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$	$\Rightarrow$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$	
	$\Vert$		$\Vert$	
信号分解:	$x[n]$	$\Rightarrow$	$y[n]$	

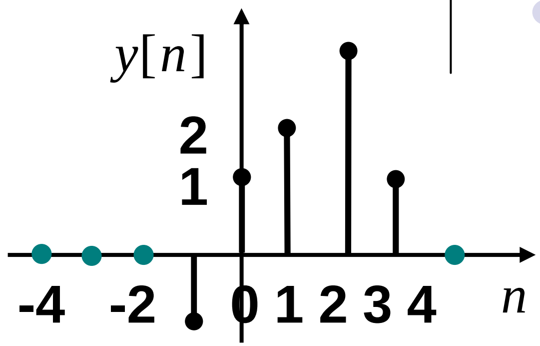
一个LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积和:

$$\boxed{y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}=x[n]*h[n]$$

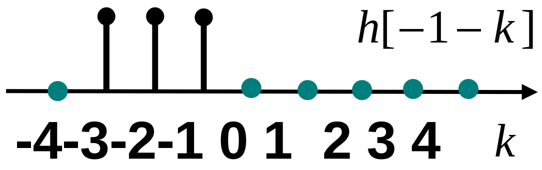
卷积和的计算（一）

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

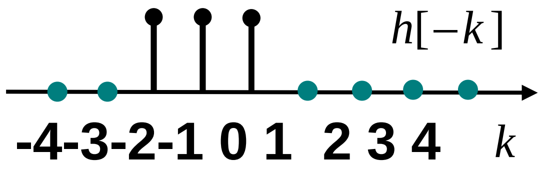




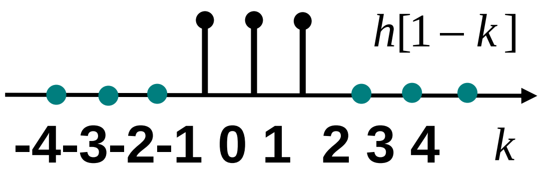
例：　　信号和系统同前例，换一种思路来求解y[n]．将信号x[k]和h[n-k]看作k的函数。对每一个n，将 **x[k]**与**h[n-k]**对应点相乘，再把乘积的各点值累加，即得到**n**时刻的**y[n]**。



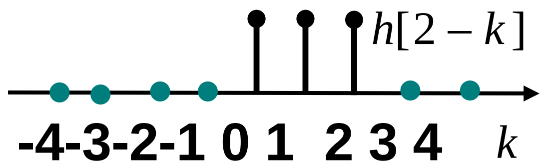
$$y[-1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[-1-k]=-1$$



$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[-k]=1$$



$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[1-k]=2$$



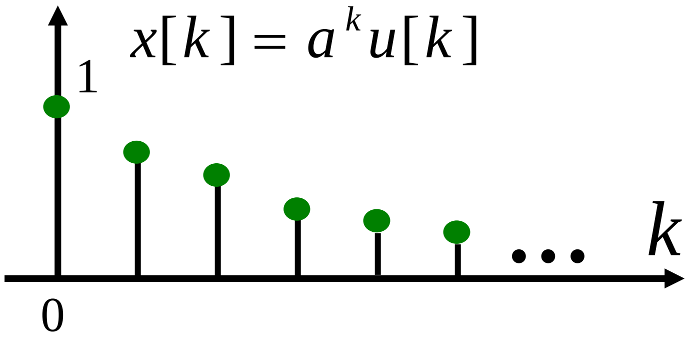
$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[2-k]=3$$

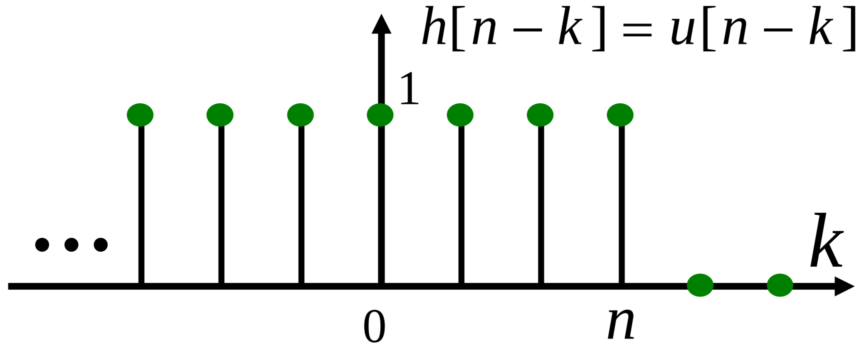
卷积和的计算（二）

例：输入信号和系统单位脉冲响应分别为下式，求系统输出y[n].

$$x[n]=a^{n}u[n] \quad 0<a<1 \qquad h[n]=u[n]$$

将信号x[k]和h[n-k]看作k的函数。





$$x[k]h[n-k]=\begin{cases} a^{k} & 0\le k\le n \\ 0 & \text{其余 k} \end{cases} \qquad y[n]=\sum_{k=0}^{n}a^{k}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

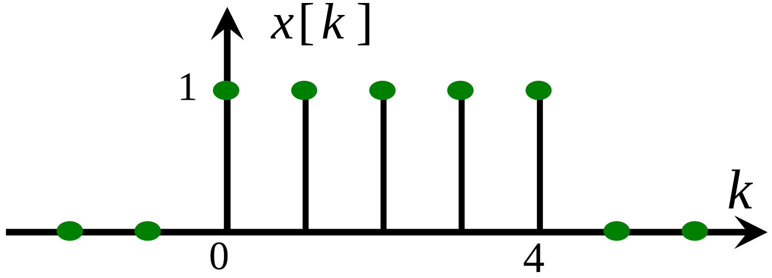
卷积和运算可以等效为序列h[n-k]与x[k]的滑动相关。

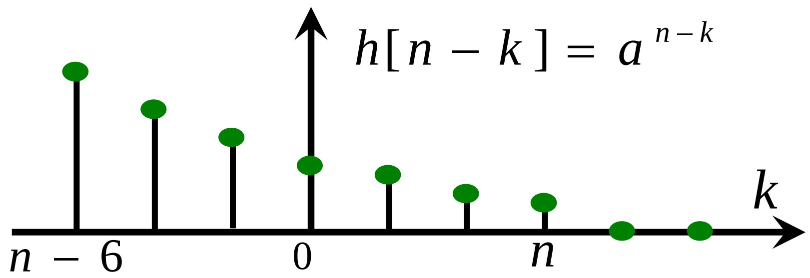
卷积和的计算(三)

例：输入信号和系统单位脉冲响应分别为下式，求系统输出y[n].

$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & \text{其余 n}\end{cases}\qquad h[n]=\begin{cases}a^n & 0\le n\le 6\\ 0 & \text{其余 n}\end{cases}\qquad a>1$$

将信号x[k]和h[n-k]看作k的函数。





分5个区间考虑问题:

$$n<0\qquad 0\le n\le 4\qquad 4<n\le 6$$

$$6<n\le 10\qquad n>10$$

用图解法进行卷积和运算可以帮助深刻理解系统响应的生成过程和原理，同时帮助获得求和上下限。

卷积和的计算（三）

		$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$
$h(n)$	$x(n)$	1	0	2	1
$h(-1)$	1	1	0	2	1
$h(0)$	2	2	0	4	2
$h(1)$	0	0	0	0	0
$h(2)$	3	3	0	6	3
$h(3)$	1	1	0	2	1

$y(-1)$ $y(0)$ $y(1)$ $y(2)$ $y(3)$ $y(4)$ $y(5)$ $y(6)$

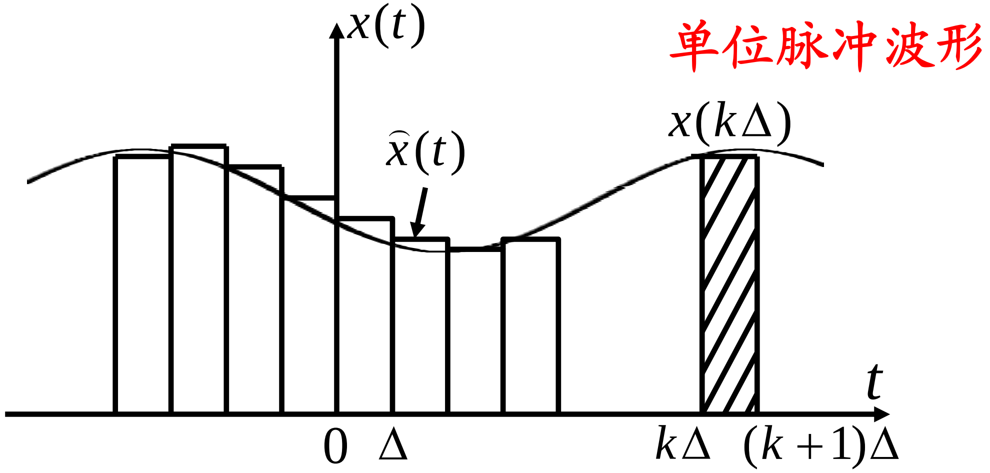
优点：计算非常简单。

缺点：① 只适用于两个有限长序列的卷积和；

② 一般情况下，无法写出 $y(n)$ 的封闭表达式。

连续时间信号的时域分解（一）

定义：$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}1/\Delta & 0<t<\Delta \\ 0 & otherwise\end{cases}$ 则有：$\Delta\delta_\Delta(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\Delta \\ 0 & otherwise\end{cases}$



第 k个矩形可表示为：$x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$

对波形 $x(t)$我们可以使用 $\hat{x}(t)$ 来近似，$\hat{x}(t)$可以表示为若干单位脉冲波形的线性组合。

$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

连续时间信号的时域分解（二）

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

于是: $$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

这就是连续时间冲激函数的筛选性质。

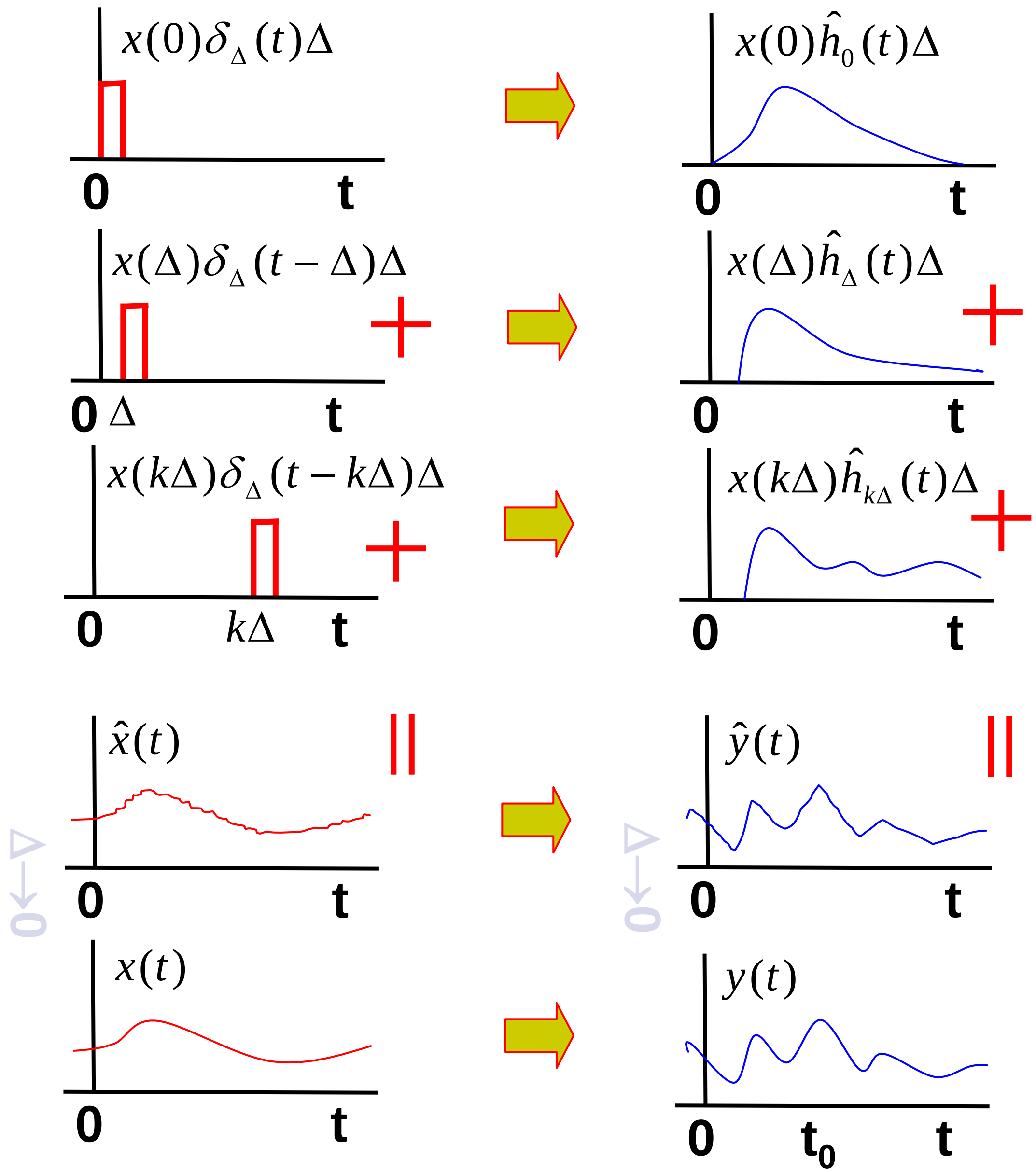
由于 $$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

可以很容易证明: $$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

尽管这样很直接，但是上述推导是一个数学问题，不利于物理概念的理解。

任何连续时间信号都可以被分解成移位加权的单位冲激信号的“和”。

连续时间线性系统的单位脉冲响应图示



连续LTI系统的单位脉冲响应及卷积积分表示

连续时间信号的时域分解： $\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\cdot\Delta$

令 $\hat{h}_{k\Delta}(t)$为系统对输入 $\delta_{\Delta}(t-k\Delta)$ 的响应

由系统的线性有： $\hat{y}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\cdot\Delta$

当 $\Delta\to 0$时， $\hat{x}(t)\to x(t)$，同时 $\hat{y}(t)\to y(t)$

$$y(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau$$

其中 $h_{\tau}(t)$为系统在时间 t 对发生于时间 τ的单位冲激 $\delta(t-\tau)$的响应。

时不变条件下： $h_{\tau}(t)=h_0(t-\tau)$ 定义 $h(t)=h_0(t)$为单位冲激响应

一个LTI系统可以完全由它的单位冲激响应来表征。

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau} \iff y(t)=x(t)*h(t)$$

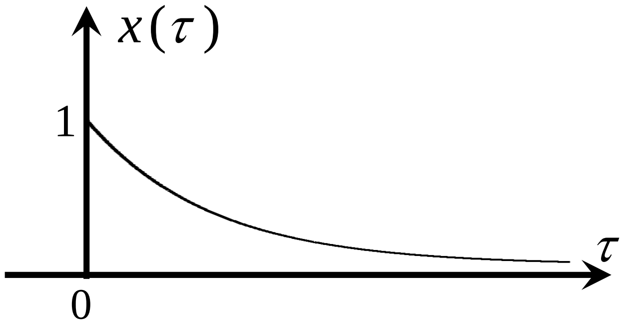
系统响应可以通过输入信号和系统单位冲激响应的卷积积分来表征。

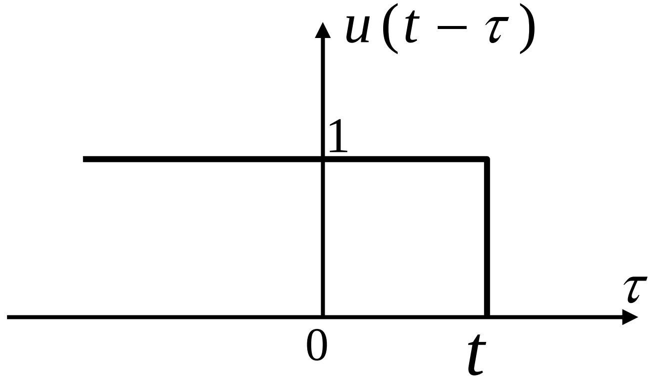
卷积积分的计算（一）

和卷积和类似，卷积积分运算过程的实质也是：参与卷积的两个信号中，一个不动，另一个反转后随参变量 t 移动。对每一个 t 的值，将 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 对应相乘，再计算相乘后曲线所包围的面积。

例: 求下面两个信号的卷积:

$$x(t)=e^{-at}u(t),\quad a>0 \qquad h(t)=u(t)$$





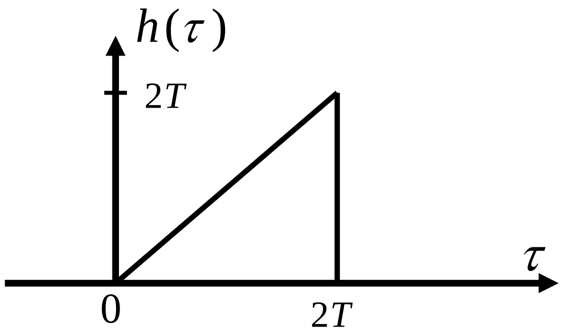
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

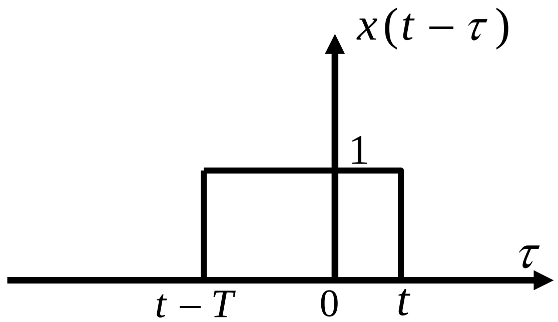
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}e^{-a\tau}d\tau=\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

卷积积分的计算(二)

例: 求下面两个信号的卷积:

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & otherwise\end{cases}\qquad h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & otherwise\end{cases}$$





$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$y(t)=0\ ,\quad t<0\ ,\ t>3T\ ;$

$y(t)=\int_{t-T}^{t}\tau d\tau=Tt-\frac{1}{2}T^2,\qquad T<t<2T\,;$

$y(t)=\int_{0}^{t}\tau d\tau=\frac{1}{2}t^2,\qquad 0<t<T;$

$y(t)=\int_{t-T}^{2T}\tau d\tau=2T^2-\frac{1}{2}(t-T)^2\qquad 2T<t<3T$

卷积积分与卷积和的性质（一）

例: 考察下面两个系统的单位脉冲冲激响应:

$$y[n]=\left(x[n]+x[n-1]\right)^2$$

$$y[n]=\max\left(x[n],x[n-1]\right)$$

$$y[n]=x[n]+x[n-1]$$

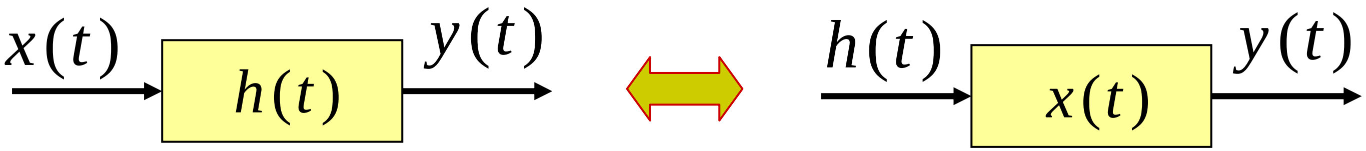
$$\Rightarrow \quad h[n]=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

一个ＬＴＩ系统的特性完全由它的单位冲激响应来决定。

但是，单位冲激响应不能完全表征其它系统的特性。

1. 交换律: $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

一个单位冲激响应是 $h(t)$ 的LTI系统对输入信号 $x(t)$ 所产生的响应，与一个单位冲激响应是 $x(t)$ 的LTI系统对输入信号 $h(t)$ 所产生的响应相同。



卷积积分与卷积和的性质（二）

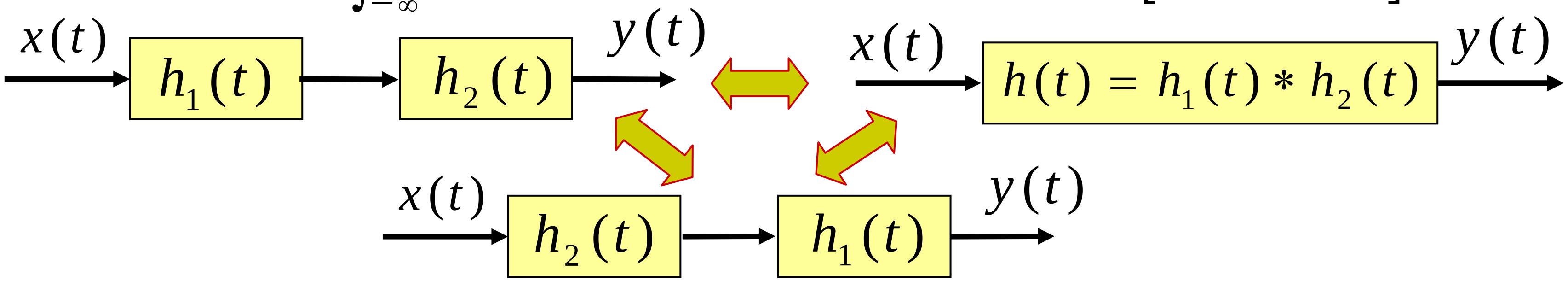
2. 结合律: $[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$

证明: $[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h_1(\lambda-\tau)d\tau\right]h_2(t-\lambda)d\lambda$

交换积分次序: $=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h_1(\lambda-\tau)h_2(t-\lambda)d\lambda\right]d\tau$ 　　条件?

$\eta=\lambda-\tau$ 　　$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h_1(\eta)h_2(t-\tau-\eta)d\eta\right]d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$



两个LTI系统级联时，系统总的单位冲激(脉冲)响应等于各子系统单位冲激(脉冲)响应的卷积。

由于卷积运算满足交换律，因此，系统级联的先后次序可以调换。

卷积积分与卷积和的性质（三）

产生以上结论的前提条件:

系统必须是**LTI**系统；所有涉及到的卷积运算必须收敛。

如:

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{平方}} \rightarrow \boxed{\text{乘2}} \rightarrow y(t) = 2x^2(t)$$

若交换级联次序，即成为:

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{乘2}} \rightarrow \boxed{\text{平方}} \rightarrow y(t) = 4x^2(t)$$

又如：若 $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$， $h_2[n] = u[n]$，虽然系统都是**LTI**系统。当 $x[n] = 1$ 时:

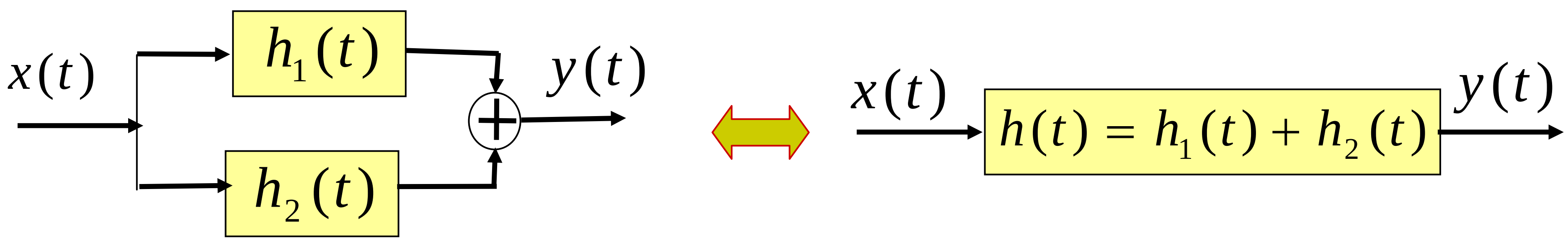
$$x[n] = 1 \rightarrow \boxed{h_1[n]} \xrightarrow{0} \boxed{h_2[n]} \rightarrow y[n] = 0$$

$$x[n] = 1 \rightarrow \boxed{h_2[n]} \xrightarrow{\infty} \boxed{h_1[n]} \rightarrow y[n] = ?$$

卷积积分与卷积和的性质（四）

3. 分配律: $x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$

两个LTI系统并联，其总的单位脉冲(冲激)响应等于各子系统单位脉冲(冲激)响应之和。



例: 求下面两个函数的卷积:

$$x[n]=2^{-n}u[n]+2^{n}u[-n] \qquad h[n]=u[n]$$

$$y[n]=\left\{2^{-n}u[n]+2^{n}u[-n]\right\}*u[n]$$
$$=\left\{2^{-n}u[n]\right\}*u[n]+\left\{2^{n}u[-n]\right\}*u[n]$$

卷积运算还有如下性质:

- 卷积积分满足微分、积分及时移特性:

①若 $x(t) * h(t) = y(t)$, 则

$$x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t) = y'(t)$$

$$[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau] * h(t) = x(t) * [\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau] = [\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau]$$

②若 $x(t) * h(t) = y(t)$, 则

$$x(t-t_0) * h(t) = x(t) * h(t-t_0) = y(t-t_0)$$

卷积和满足差分、求和及时移特性:

① 若 $x(n)*h(n)=y(n)$，则

$$[x(n)-x(n-1)]*h(n)=x(n)*\left[h(n)-h(n-1)\right]$$
$$=y(n)-y(n-1)$$

$$[\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)]*h(n)=x(n)*[\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)]=\sum_{k=-\infty}^{n}y(k)$$

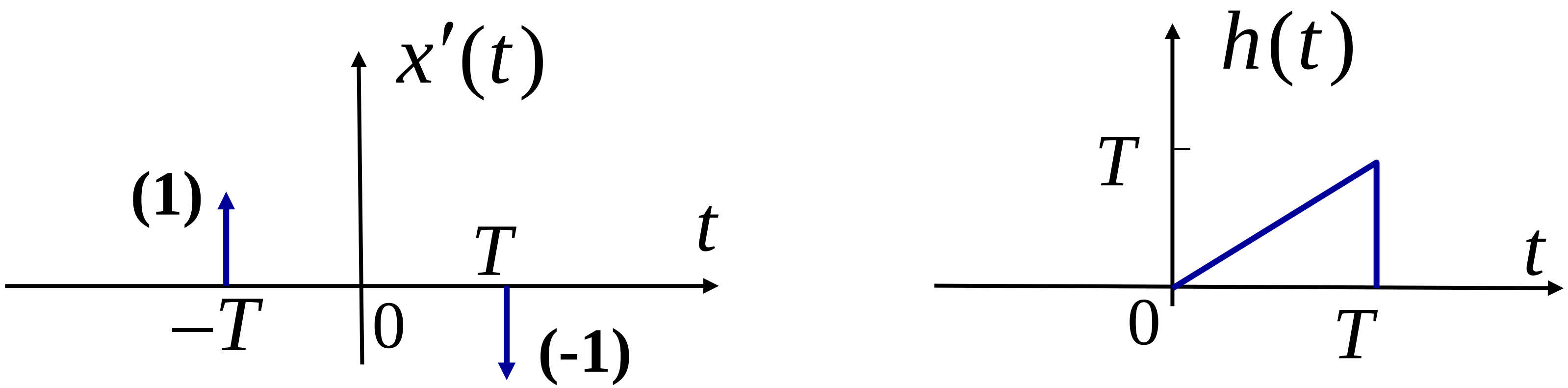
② 若 $x(n)*h(n)=y(n)$，则

$$x(n-n_0)*h(n)=x(n)*h(n-n_0)=y(n-n_0)$$

恰当地利用卷积的性质可以简化卷积的计算:

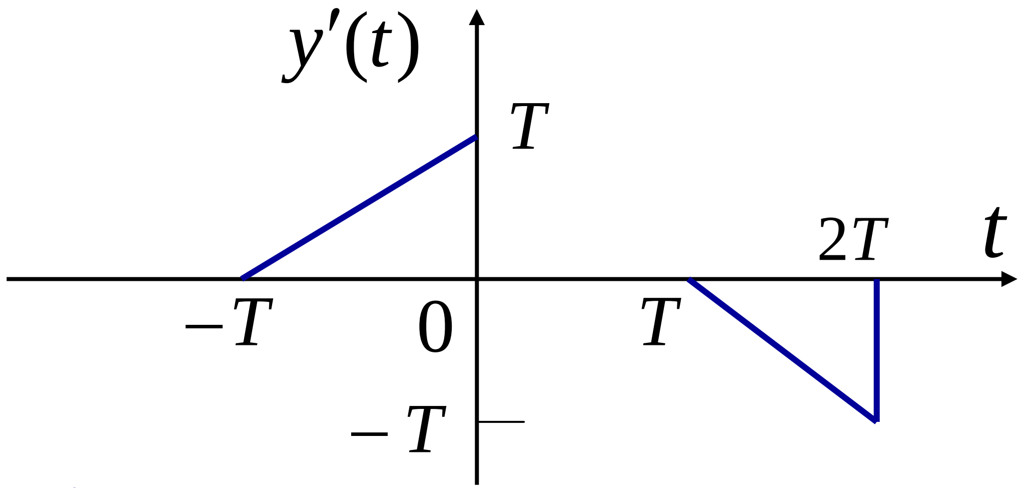
例如:

将 $x(t)$ 微分一次有: $x'(t)=\delta(t+T)-\delta(t-T)$



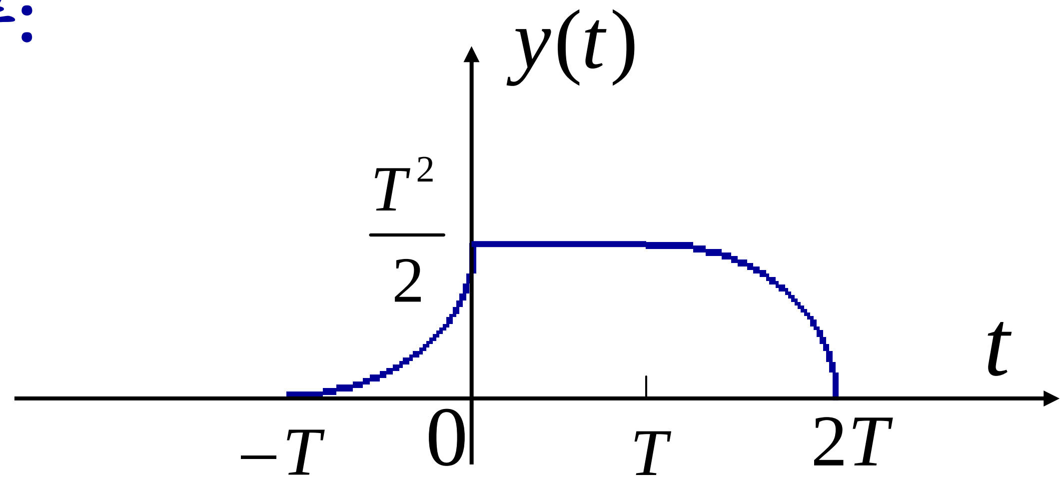
根据微分特性有:

$$y'(t)=x'(t)*h(t)=h(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$
$$=h(t)-h(t-T)$$



利用积分特性即可得:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} y'(\tau)d\tau$$



记忆性（一）

LTI 系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，因而其特性（记忆性、可逆性、因果性、稳定性）都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

根据 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$，如果系统是无记忆的，

则在任何时刻 n，$y[n]$ 都只能和 n 时刻的输入有关，和式中只能有 $k=n$ 时的一项为非零，因此必须有：

$$h(n-k)=0,\quad k\neq n$$ 即：$$h(n)=0,\quad n\neq 0$$

所以，无记忆系统的单位脉冲/冲激响应为：

$$h[n]=k\delta[n] \qquad h(t)=k\delta(t)$$

此时，$x[n]*h[n]=kx[n] \qquad x(t)*h(t)=kx(t)$

当 $k=1$ 时系统是恒等系统。

记忆性（二）

对于恒等系统:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

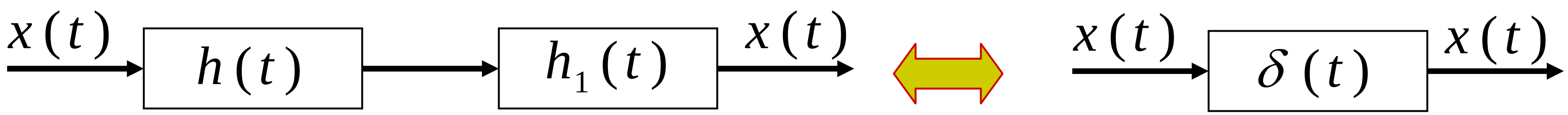
$\Rightarrow$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

退化为单位脉冲和冲激函数的筛选性质。

如果**LTI**系统是可逆的，一定存在一个逆系统，且逆系统也是**LTI**系统，它们级联起来构成一个恒等系统。



可逆性（一）

逆系统单位脉冲/冲激响应满足:

$$h(t)*h_1(t)=\delta(t) \quad h[n]*h_1[n]=\delta[n]$$

例: 考察延时器的可逆性:

延时器 $y(t)=x(t-t_0)$ 的单位冲激响应, $h(t)=\delta(t-t_0)$

因此: $x(t-t_0)=x(t)*\delta(t-t_0)$

即一个信号与移位冲激的卷积就是该信号的移位。

其逆系统是将移位后的信号再移回来, 因此其逆系统的单位冲激响应:

$$h_1(t)=\delta(t+t_0)$$

显然: $h(t)*h_1(t)=\delta(t-t_0)*\delta(t+t_0)=\delta(t)$

离散时间情况下上述结论同样成立。

可逆性（二）

例:　考察累加器 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ 的可逆性:

第一章已经讨论过，其逆系统为差分器:　$y[n]=x[n]-x[n-1]$

本例对上述结论进行验证:

由于:　$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k]$$

累加器的单位脉冲响应为:　$h[n]=u[n]$

其逆系统的单位脉冲响应为:　$h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

$$h[n]*h_1[n]=u[n]*\left\{\delta[n]-\delta[n-1]\right\}$$

$$=u[n]-u[n-1]=\delta[n]$$

因果性

由 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$，当LTI系统是因果系统时，在任何时刻 n ，$y[n]$ 都只能取决于 n 时刻及其以前的输入，即和式中所有 $k>n$ 的项都必须为零，即:

$$h[n-k]=0,\ k>n \qquad \text{或:} \qquad h[n]=0, n<0$$

同理，对连续时间系统有: $h(t)=0, t<0$

这是LTI系统具有因果性的充分必要条件。

累加器及其逆系统为因果系统，延时器是因果的，其逆系统是非因果的。

n<0和t<0时信号为零的信号称为因果信号，一个LTI系统的因果性就等效为其冲激响应是因果信号。

稳定性（一）

根据稳定性的定义，若 $x[n]$ 有界，则 $|x(n-k)| \le B$; 若系统稳定，则要求 $y[n]$ 必有界，由

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

有：$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \le B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

当单位脉冲响应是绝对可和时，即： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

系统是稳定的。以上条件为**LTI**系统稳定的充分条件。

用反证法证明：绝对可和条件为**LTI**系统稳定的必要条件。

假设单位脉冲响应不是绝对可和的，即： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$

稳定性（二）

假设系统输入为： $x[n]=\begin{cases}0 & h[-n]=0\\ \dfrac{h^*[-n]}{|h[-n]|} & h[-n]\neq 0\end{cases}$

显然： $|x[n]|\leq 1$ 输入信号**x[n]**有界。

考察**n=0**时的输出： $y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[0-k]=$

$$=\sum_{\substack{k=-\infty\\ h[k]\neq 0}}^{\infty}h[k]\frac{h^*[k]}{|h[k]|}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|=\infty$$

输出无界，所以绝对可和条件为**LTI**系统稳定的必要条件。

对连续时间系统，相应有： $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$

即绝对可积条件是连续时间**LTI**系统稳定的充分必要条件。

LTI系统的单位阶跃响应

在工程实际中，也常用单位阶跃响应 $s(t)$ $s[n]$ 来描述**LTI**系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$或 $u[n]$所产生的响应。因此有:

$$s(t)=u(t)*h(t) \qquad s[n]=u[n]*h[n]$$

另外单位阶跃响应 $s(t)$ 或 $s[n]$ 还可以看作输入为 $h(t)$ 或 $h[n]$ 系统的单位脉冲/冲激响应为$u(t)$或 $u[n]$的响应。故单位脉冲/冲激和单位阶跃响应的关系为:

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \qquad h(t)=\frac{d}{dt}s(t)$$

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

所以，LTI系统的特性也可以用它的单位阶跃响应来描述。

线性常系数微分方程

在工程实际中有相当普遍的一类系统，其数学模型可以用线性常系数微分方程或线性常系数差分方程来描述。分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程或差分方程。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \qquad a_k, b_k \quad \text{均为常数}$$

求解该微分方程，通常是求出通解 $y_h(t)$ 和一个特解 $y_p(t)$ 于是有 $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$。特解 $y_p(t)$ 是与输入 $x(t)$ 同类型的函数，通解 $y_h(t)$ 是齐次方程的解，即 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$ 的解。

欲求得齐次解，可根据齐次方程建立一个特征方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$ 求出其特征根。在特征根均为单阶根时，可得出齐次解的形式为：

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k e^{\lambda_k t},$$

其中 C_k 是待定的常数。

线性常系数微分方程

$$y_h(t)=\sum_{k=1}^{N}C_k e^{\lambda_k t},$$ 其中 C_k 是待定的常数。

要确定系数 C_k ，需要有一组条件，暂且称为附加条件。仅仅从确定待定系数 C_k 的角度来看，这一组附加条件可以是任意的，包括附加条件的值以及给出附加条件的时刻都可以是任意的。

线性常系数微分方程

当微分方程描述的系统是线性系统时，必须满足系统零输入—零输出的特性。也就是系统在没有输入，即 $x(t)=0$ 时， $y(t)=0$。此时，微分方程就蜕变成齐次方程，因而描述线性系统的微分方程其齐次解必须为零，这就要求所有的 C_k 都为零。

确定待定系数所需的一组附加条件的值必须全部为零，因此， LCCDE具有一组零附加条件时，才能描述线性系统。

可以证明：当这组零附加条件在信号加入的时刻给出时，LCCDE描述的系统不仅是线性的，也是因果的和时不变的。

在信号加入的时刻给出的零附加条件称为零初始条件。

线性常系数差分方程

结论：LCCDE具有一组全部为零的初始条件可以描述一个因果的LTI系统。这组条件是：

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad \cdots\cdots,\quad y^{(N-1)}(0)=0$$

如果一个因果的**LTI**系统由**LCCDE**描述，且方程具有零初始条件，就称该系统初始是静止的或最初是松弛的。如果**LCCDE**具有一组不全为零的初始条件，则可以证明它所描述的系统是增量线性的。

一般的线性常系数差分方程可表示为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

与微分方程一样，它的解法也可以通过求出一个特解 $y_p[n]$ 和通解，即齐次解 $y_h[n]$ 来进行，其过程与解微分方程类似。

要确定齐次解中的待定常数，也需要有一组附加条件。同样地，当**LCCDE**具有一组全部为零的初始条件时，所描述的系统是线性、因果、时不变的。

线性常系数差分方程

对于差分方程，还可以将其改写为：

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\right]$$

可以看出：要求出 $y[0]$，不仅要知道所有的 $x[n]$，还要知道 $y[-1],y[-2],\cdots\cdots,y[-N]$，这就是一组初始条件，由此可以得出 $y[0]$。进一步，又可以通过 $y[0],y[-1],\cdots\cdots,y[-N+1]$ 求得 $y[1]$，依次类推可求出所有 $n\geq 0$ 时的解。

由于这种差分方程可以通过递推求解，因而称为递归方程。

当 $a_k=0,k\neq 0$ 时，差分方程变为： $y(n)=\sum_{k=0}^{M}\frac{b_k}{a_0}x(n-k)$

此时，解方程不再需要迭代运算，因而称为非递归方程。显然，此时方程就是一个卷积和的形式，其中 $h[n]=\frac{b_n}{a_0},\quad 0\leq n\leq M$

线性常系数差分方程

此时，系统单位脉冲响应 $h[n]$ 是有限长的,因而把这种方程描述的LTI系统称为FIR系统。将递归方程描述的系统称为IIR系统,此时系统的单位脉冲响应是一个无限长的序列。

FIR系统与IIR系统是离散时间LTI系统中两类很重要的系统，它们的特性、结构以及设计方法都存在很大的差异。

由于无论微分方程还是差分方程的特解都具有与输入信号相同的函数形式，即特解完全是由输入信号决定的，因而特解所对应的这一部分响应称为受迫响应或强迫响应。齐次解所对应的部分由于与输入信号无关，也称为系统的自然响应。

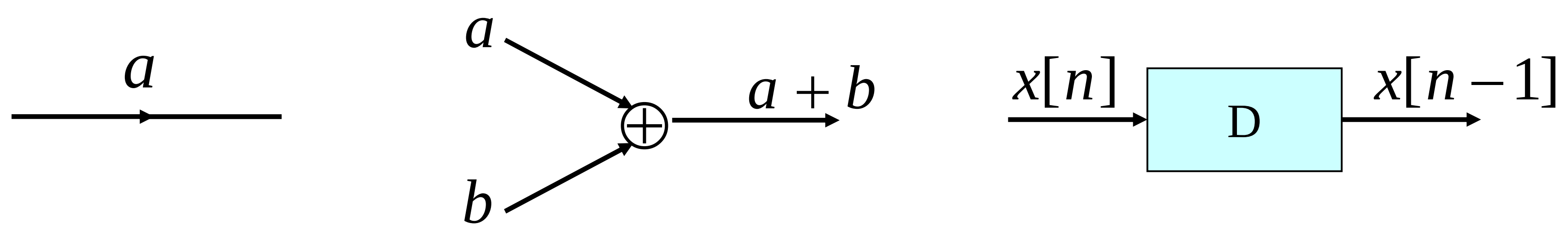
增量线性系统的响应分为零状态和零输入响应，零输入属于自然响应，零状态既包含了受迫响应，也包含有一部分自然响应。

由差分方程描述的LTI系统的框图结构表示

由**LCCDE**描述的系统，其数学模型是由一些基本运算来实现的，如果能用一种图形表示方程的运算关系，就会更加形象直观；另一方面，分析系统很重要的目的是为了设计或实现一个系统，用图形表示系统的数学模型，将对系统的特性仿真、硬件或软件实现具有重要意义。

不同的结构也会在设计和实现一个系统时带来不同的影响：如系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。

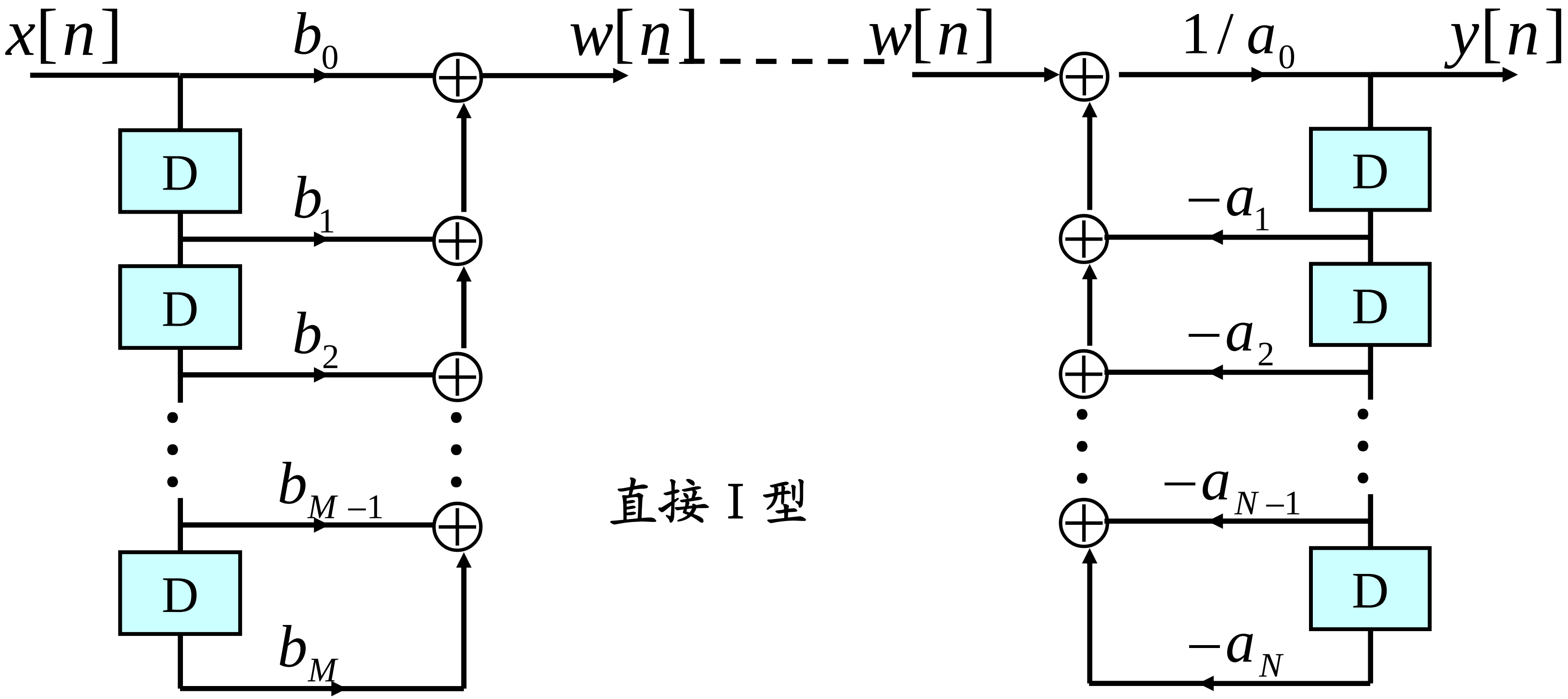
由 $$y[n]=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\right]$$ 可看出：方程中包括三种基本运算：乘系数、相加、移位（延迟）。这些运算可用以下符号表示：



由差分方程描述的LTI系统的框图结构表示

若令 $w[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$，则 $y[n]=\frac{1}{a_0}\left\{w[n]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$

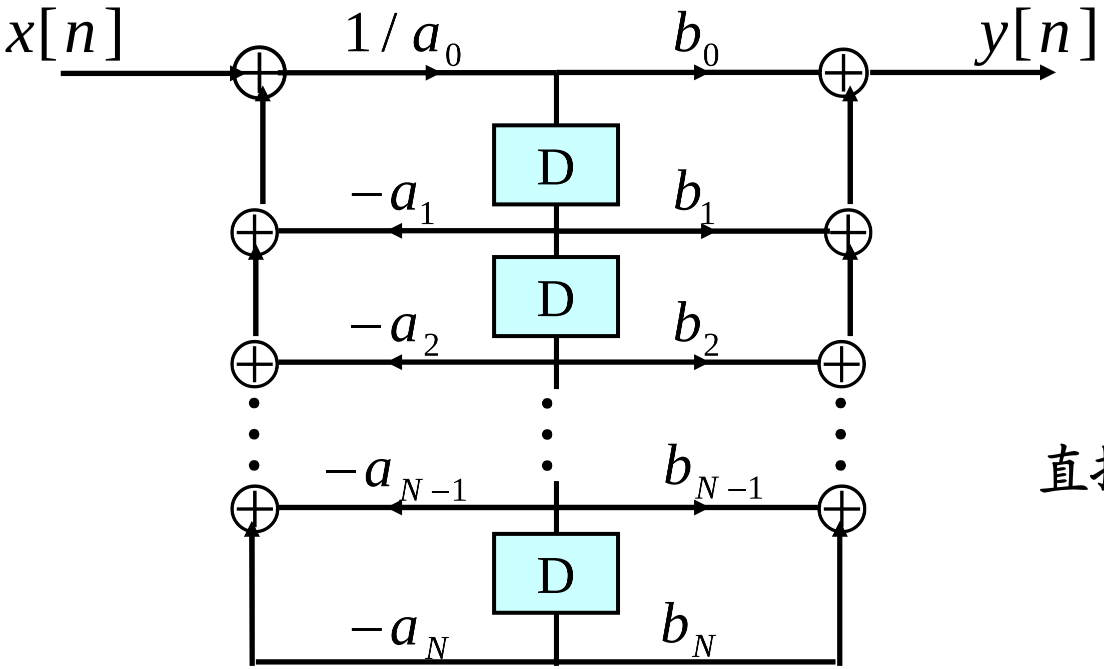
据此可得方框图：



直接 I 型

由差分方程描述的LTI系统的框图结构表示

将其级联起来，就成为**LCCDE**描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能。显然，它可以看成是两个级联的系统，可以调换其级联的次序，并将移位单元合并，于是得到（下图中假设了M=N）：



直接II型

由微分方程描述的LTI系统的框图结构表示

由 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ 看出它也包括三种基本运算：微分、相加、乘系数。

但由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为灵敏，因此，工程上通常使用积分器而不用微分器。

将微分方程两边同时积分 N 次，即可得到一个积分方程：

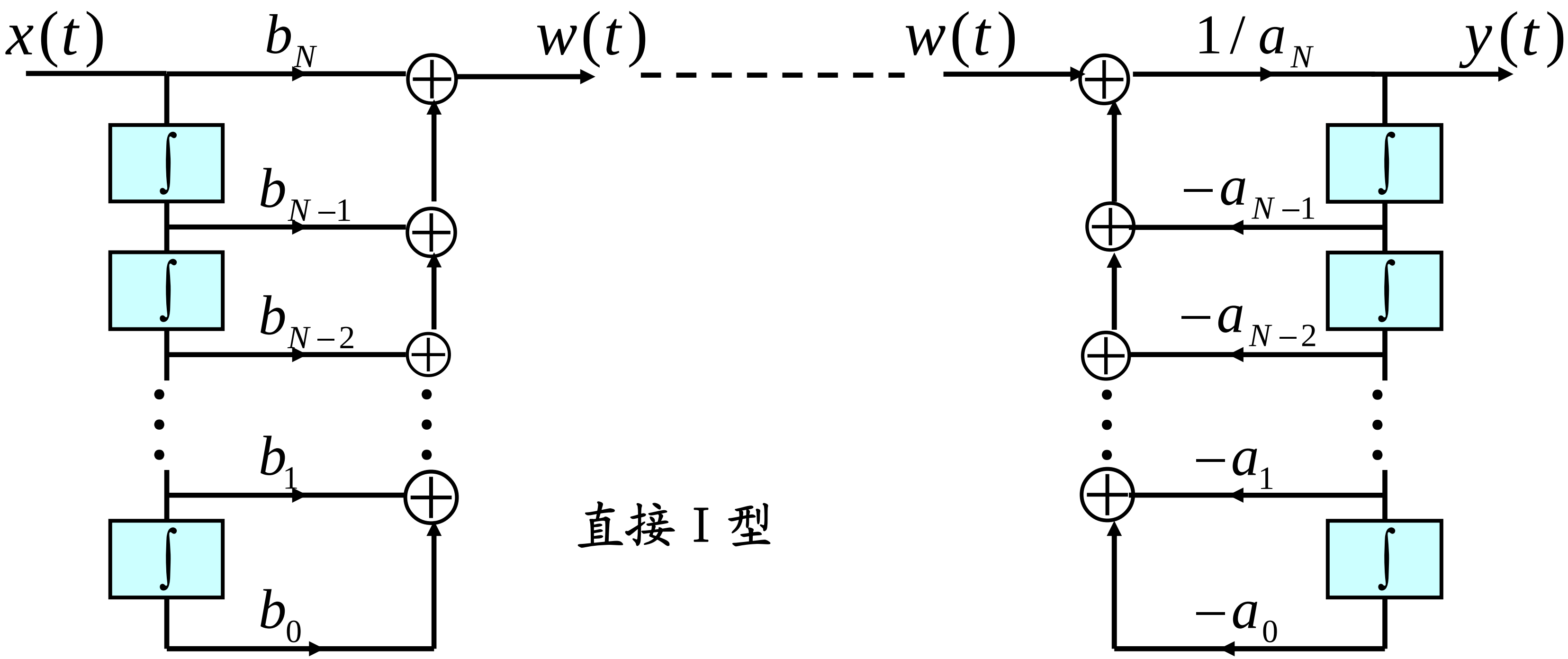
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)$$

对此积分方程完全按照差分方程的办法有：

$$y(t) = \frac{1}{a_N}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)}_{w(t)} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$

由微分方程描述的LTI系统的框图结构表示

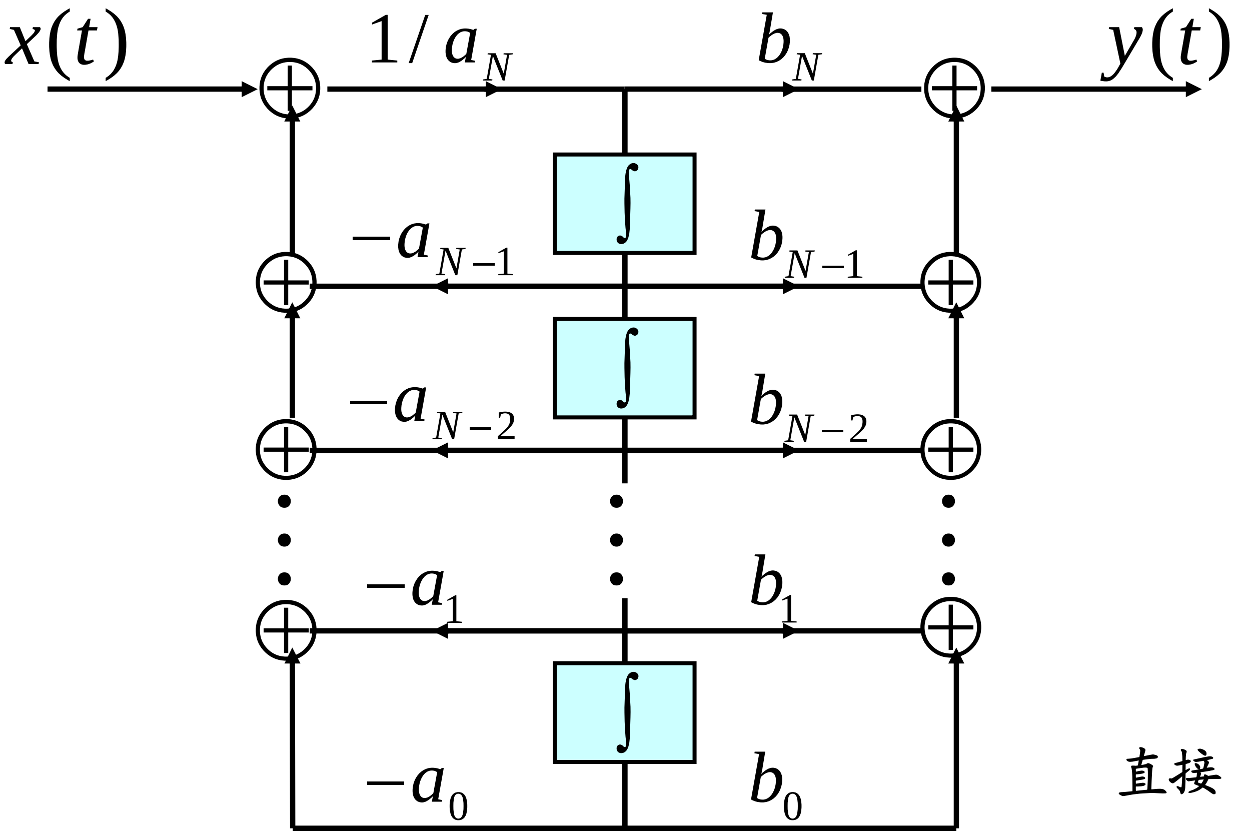
$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)}_{w(t)}-\sum_{k=0}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



直接 I 型

由微分方程描述的LTI系统的框图结构表示

通过交换级联次序，合并积分器可得直接II型：



直接II型

本章小结

1. 信号的时域分解:
2. **LTI系统的时域分析——卷积和与卷积积分**
3. **LTI系统的描述方法:**

- 用单位冲激或单位脉冲响应描述系统（也可用阶跃响应描述）;
- 用线性常系数微分方程或线性常系数差分方程连同零初始条件描述**LTI**系统;
- 用方框图描述系统。

4. **LTI系统的特性与单位冲激或单位脉冲响应的关系:**

- 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与单位冲激或单位脉冲响应的关系;
- 系统级联、并联时，单位冲激或单位脉冲响应与各子系统的关系。

本章小结

时域分析方法的基本思想:

1. 将信号在时域分解成 $\delta(t)$ 或 $\delta[n]$ 的线性组合。（完备正交信号集）
2. 利用LTI系统的线性与时不变性，得出系统的响应可表示为单位冲激响应 $h(t)$ ，或单位脉冲响应 $h[n]$的线性组合—— 卷积积分与卷积和。

从分解信号的角度出发，基本信号单元必须满足两个要求:

1. 本身简单，以便LTI系统对它的响应能简便得到。
2. 具有普遍性，能够用以构成相当广泛的信号。

时域分析方法的局限性:

1. 要得到系统的输出，卷积运算较为繁杂，物理意义不明显。
2. 描述系统特征的冲激或脉冲响应往往难于直接求取。很难建立其与微分方程或差分方程的联系。

作业

2.1，2.5， 2.11， 2.21ac, 2.16——第二章第一次

2.13， 2.19， 2.22bc, 2.24, 2.28acg, 2.44ab, ——第二章第二次

2.29bdf, 2.31, 2.40, 2.47, 2.48——第二章第三次