作业题

习题2.10 某射手在每次射击中能击中目标的概率为0.8，现连续射击：(1)直至第一次击中目标为止；(2)直至第$r(r\geq 1)$次击中目标为止，求射击次数X的分布律.

解 (1) $P\{X=k\}=(1-0.8)^{k-1}\times 0.8=0.8\times 0.2^{k-1}\ \ (k=1,2,\cdots)$

(2) $P\{X=k\}=C_{k-1}^{r-1}0.8^{r-1}\times 0.2^{(k-1)-(r-1)}\times 0.8$

$$=C_{k-1}^{r-1}0.8^{r}\times 0.2^{k-r}\ \ (k=r,r+1,\cdots)$$

作业题

习题2.13 设X服从二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

其中$0<p<1, q=1-p$.

(1) k取何值时，$P\{X=k\}$最大？

(2) p为何值时，$P\{X=k\}=P\{X=n-k\}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$

解 (1) $P\{X=k\}$最大时，有

$$P\{X=k\}\geq P\{X=k-1\}，且P\{X=k\}\geq P\{X=k+1\}$$

即

$$\frac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}\geq 1，且\frac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}\geq 1$$

可得

$$(n+1)p-1\leq k\leq (n+1)p$$

故$(n+1)p$为整数时，$k=(n+1)p-1$或$k=(n+1)p$；$(n+1)p$不为整数时，$k=\lfloor (n+1)p \rfloor$

作业题

习题2. 13 设X服从二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$

其中$0<p<1, q=1-p$.

(1) k取何值时，$P\{X=k\}$最大？

(2) p为何值时，$P\{X=k\}=P\{X=n-k\}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$

解 (2) 由$P\{X=k\}=P\{X=n-k\}$，有

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=C_n^{n-k}p^{n-k}(1-p)^{n-(n-k)}$$

因为$C_n^k=C_n^{n-k}$，故

$$p^n=(1-p)^n$$

从而

$$p=1-p \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{2}$$

作业题

习题2.19 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$F(x)$为其分布函数. 试证明：对任何实数x，有$F(x)=1-F(2\mu-x)$，从而$F(\mu)=0.5$；且当X服从标准正态分布时，有$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$，$\Phi(0)=0.5$.

证 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$，$F(2\mu-x)=\int_{-\infty}^{2\mu-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$

令$s=2\mu-t$，则

$$F(2\mu-x)=\int_{+\infty}^{x}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\mu-s)^2}{2\sigma^2}}ds=\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}ds$$

从而

$$F(x)+F(2\mu-x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt+\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}ds$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=1$$

标准正态分布时$\mu=0$，从而$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$；再取$x=0$，得$\Phi(0)=0.5$.

作业题

习题2.20 设随机变量X服从正态分布$N(-2,9)$，求：

(3) $P\{0<X<5\}$；(6) 满足$P\{|X-a|<a\}=0.01$的常数a.

解 (3) $P\{0<X<5\}=P\left\{\frac{0-(-2)}{3}<\frac{X-(-2)}{3}<\frac{5-(-2)}{3}\right\}=P\left\{\frac{2}{3}<\frac{X-(-2)}{3}<\frac{7}{3}\right\}$

$$=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)-\Phi\left(\frac{2}{3}\right)=0.9901-0.7486=0.2415$$

(5) $0.01=P\{|X-a|<a\}=P\{-a<X-a<a\}=P\{0<X<2a\}$

$$=P\left\{\frac{0-(-2)}{3}<\frac{X-(-2)}{3}<\frac{2a-(-2)}{3}\right\}=P\left\{\frac{2}{3}<\frac{X-(-2)}{3}<\frac{2(a+1)}{3}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{2(a+1)}{3}\right)-\Phi\left(\frac{2}{3}\right)=\Phi\left(\frac{2(a+1)}{3}\right)-0.7486$$

从而，$\Phi\left(\frac{2(a+1)}{3}\right)=0.7586 \Rightarrow \frac{2(a+1)}{3}=0.71 \Rightarrow a=0.065$

作业题

习题2.26 设随机变量X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的指数分布，求下列随机变量的概率密度：

(1) $Y_1=X^3$； (2) $Y_2=\mathrm{e}^{-\lambda X}$.

解 (1) $f_{Y_1}(y)=f_X(\sqrt[3]{y})\left|(\sqrt[3]{y})'\right|=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt[3]{y}}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{\lambda}{3}y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt[3]{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(2) $f_{Y_2}(y)=f_X\left(-\frac{1}{\lambda}\ln y\right)\left|\left(-\frac{1}{\lambda}\ln y\right)'\right|=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}\ln y\right)}\left|-\frac{1}{\lambda y}\right|, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

作业题

习题2. 28 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求$Y=|X-\mu|$的概率密度.

解 $F_Y(y)=P\{|X-\mu|\le y\}$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P\{|X-\mu|\le y\}=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$

当$y>0$时，

$$F_Y(y)=P\{|X-\mu|\le y\}=P\{-y\le X-\mu\le y\}$$

$$=P\left\{-\frac{y}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{y}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{y}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)-1$$

$$\Rightarrow \quad f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{2}{\sigma}\Phi'\left(\frac{y}{\sigma}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

综上，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

作业题

习题3.9 设随机向量(X,Y)服从二维正态分布，其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{4\pi}}$$

求：(1) $P\{2X\le Y\}$；

(2) 随机点(X,Y)落在区域$G=\left\{(x,y)\middle|\pi\le(x-1)^2+(y-2)^2\le 4\pi\right\}$的概率.

解

(1) $P\{2X\le Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{2x}\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{4\pi}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

令$\begin{cases}x-1=r\cos\theta\\ y-2=r\sin\theta\end{cases}$，则

$$P\{2X\le Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}-\mathrm{atan}\frac{1}{2}}^{\mathrm{acot}\frac{1}{2}}\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\pi}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\pi}}r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\pi}}\mathrm{d}\left(\frac{r^2}{4\pi}\right)=\frac{1}{2}$$

作业题

习题3.9 设随机向量(X,Y)服从二维正态分布，其概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{4\pi}}$$

求：(1) $P\{2X\le Y\}$；

(2) 随机点(X,Y)落在区域$G=\{(x,y)|\pi\le(x-1)^2+(y-2)^2\le 4\pi\}$的概率.

解

(2) $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_{(x,y)\in G}\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{4\pi}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，令$\begin{cases}x-1=r\cos\theta\\ y-2=r\sin\theta\end{cases}$，则

$$P\{(X,Y)\in G\}=\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\pi}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\pi}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\pi}}\mathrm{d}\left(\frac{r^2}{4\pi}\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}-\mathrm{e}^{-1})$$

作业题

习题3. 15 设随机变量X服从两点分布：

$$P\{X=1\}=\frac{1}{3},\qquad P\{X=2\}=\frac{2}{3}.$$

当$X=x$时，Y服从参数为x的指数分布，试求：

(1) Y的概率密度；(2) 给定Y时，X的条件分布律.

解

(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y|X=1\}P\{X=1\}+P\{Y\le y|X=2\}P\{X=2\}$

$$=\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-y})+\frac{2}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-2y}\right),\qquad y\ge 0$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-y})+\frac{2}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-2y}\right), & y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$y\neq 0$时，$F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-y}+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2y}, & y>0\\ 0, & y<0\end{cases}$，从而$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-y}+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

作业题

习题3.15 设随机变量X服从两点分布：

$$P\{X=1\}=\frac{1}{3},\qquad P\{X=2\}=\frac{2}{3}.$$

当$X=x$时，Y服从参数为x的指数分布，试求：

(1) Y的概率密度；(2) 给定Y时，X的条件分布律.

解 (2) $y\geq 0$时，

$$P\{X=k|Y=y\}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\{X=k|y\leq Y<y+\varepsilon\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X=k,y\leq Y<y+\varepsilon\}}{P\{y\leq Y<y+\varepsilon\}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{y\leq Y<y+\varepsilon|X=k\}P\{X=k\}}{P\{y\leq Y<y+\varepsilon\}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X=k\}\int_y^{y+\varepsilon}f_{Y|X}(y|x=k)\mathrm{d}y}{\int_y^{y+\varepsilon}f_Y(y)dy}=\frac{f_{Y|X}(y|x=k)P\{X=k\}}{f_Y(y)}$$

故 $P\{X=1|Y=y\}=\dfrac{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-y}}{\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-y}+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2y}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{-y}+4\mathrm{e}^{-2y}}$，$P\{X=2|Y=y\}=\dfrac{4\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{-y}+4\mathrm{e}^{-2y}}$

作业题

习题3.24(2) 设随机变量X,Y相互独立，都在区间$[0,a](a>0)$上服从均匀分布，求$|X-Y|$的概率密度.

解 由已知条件知(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, & 0\le x\le a, 0\le y\le a\\ 0, & 其他\end{cases}$

令$Z=|X-Y|$，则

$$F_Z(z)=P\{|X-Y|\le z\}=P\{-z\le X-Y\le z\}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-2\int_z^a \mathrm{d}y\int_0^{y-z}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}x, & 0\le z\le a\\ 1, & z>a\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-\frac{(a-z)^2}{a^2}, & 0\le z\le a\\ 1, & z>a\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\frac{2(a-z)}{a^2},\quad 0\le z\le a$$

作业题

习题4.14&20 在长度为a的线段上任取两点A及B，求线段AB的长度的数学期望与方差.

解 不妨设线段为区间$[0,a]$，A的坐标为X，B的坐标为Y，则X,Y相互独立，且都在$[0,a](a>0)$上服从均匀分布，同时线段AB的长度为$|X-Y| \triangleq Z$

法一 由习题3.24(2)知Z的概率密度为$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2(a-z)}{a^2}, & 0\le z\le a\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$E(Z)=\int_0^a z\frac{2(a-z)}{a^2}\mathrm{d}z=\frac{a}{3}$$

$$E(Z^2)=\int_0^a z^2\frac{2(a-z)}{a^2}\mathrm{d}z=\frac{a^2}{6}$$

$$D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\frac{a^2}{18}$$

作业题

习题4. 14&20 在长度为a的线段上任取两点A及B，求线段AB的长度的数学期望与方差.

解 不妨设线段为区间$[0,a]$，A的坐标为X，B的坐标为Y，则X,Y相互独立，且都在$[0,a](a>0)$上服从均匀分布，同时线段AB的长度为$|X-Y|\triangleq Z$

法二

$$E(|X-Y|)=\int_0^a\int_0^a|x-y|\frac{1}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\frac{1}{a^2}\int_0^a\int_0^y(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}\times\frac{a^3}{6}\times 2=\frac{a}{3}$$

$$E\left(|X-Y|^2\right)=E\left(X^2-2XY+Y^2\right)=E\left(X^2\right)-2E(X)E(Y)+E\left(Y^2\right)$$

$$=\frac{a^2}{3}-2\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}+\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{6}$$

$$D(|X-Y|)=E\left(|X-Y|^2\right)-[E(|X-Y|)]^2=\frac{a^2}{18}$$

作业题

习题4. 34(1) 设X与Y分别服从(0-1)分布，即$P\{X=0\}=1-p_1, P\{X=1\}=p_1$, $0<p_1<1$，$P\{Y=0\}=1-p_2, P\{Y=1\}=p_2$，$0<p_2<1$. 试证：$X$与$Y$相互独立等价于$X$与$Y$不相关.

证 “独立⇒不相关”：一般结论.

下证“不相关⇒独立”，即$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\}$，$i,j=0,1$

$0=\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)-p_1p_2$

从而$p_1p_2=E(XY)=1\times P\{X=1,Y=1\}+0\times[1-P\{X=1,Y=1\}]$

即$P\{X=1,Y=1\}=p_1p_2=P\{X=1\}P\{Y=1\}$

记$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}$，则$p_1=P\{X=1\}=p_{10}+p_{11}=p_{10}+p_1p_2$，从而$p_{10}=p_1(1-p_2)$

即$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}$

同理可得$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}$

最后有$p_{00}=1-p_{11}-p_{01}-p_{10}=1-p_1p_2-(1-p_1)p_2-p_1(1-p_2)=(1-p_1)(1-p_2)$

即$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}$

重要知识点回顾

- 随机事件与概率
  - 随机事件的相关概念
  - 事件的关系与运算
  - 概率的定义
    - 古典概型的计算
  - 概率的性质
  - 条件概率与乘法公式
  - 全概率公式、贝叶斯公式
  - 事件的独立性概念及应用

重要知识点回顾

- 随机变量及其概率分布
  - 随机变量的相关概念
    - 分布函数
    - 离散型随机变量与分布律
    - 连续型随机变量与概率密度
  - 几种重要的分布
    - 离散型：两点分布、二项分布、泊松分布、几何分布
    - 连续型：均匀分布、正态分布、指数分布
  - 随机变量的函数
    - 概率分布的计算
      - 离散型
      - 连续型：(1)由分布函数出发；(2)概率密度变换公式

重要知识点回顾

- 随机向量及其概率分布
  - 随机向量的概念
  - 分布函数与边缘分布函数
  - 二维离散型随机向量与分布律（联合分布律、边缘分布律）
  - 二维连续型随机向量与概率密度（联合概率密度、边缘概率密度）
    - 二维正态分布、二维均匀分布
  - 条件分布
    - 条件分布函数、条件分布律(离散型)、条件概率密度(连续型)
  - 随机变量的相互独立性及应用
  - 随机向量的函数
    - 概率分布的计算
      - 离散型
      - 连续型：(1)由分布函数出发；(2)概率密度变换公式

重要知识点回顾

- 随机变量的数字特征
  - 期望：定义、性质、计算
  - 方差：定义、性质、计算
  - 随机变量函数的数字特征的计算
  - 马尔可夫不等式

例题

例1 将一枚均匀硬币掷$2n$次，计算出现正面次数多于反面次数的概率.

解

"出现正面次数多于反面次数"的概率应与"出现反面次数多于正面次数"的概率相等，设此概率为P

总的可能结果个数：2^{2n}

正面等于反面的结果个数：C_{2n}^{n}

则 $2P = 1 - \frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{2^{2n}}$，$P = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{2^{2n+1}}$

例题

例2 设A,B为两个事件，判断$P(A\cup B)P(AB)$与$P(A)P(B)$的大小关系.

解

$$
\begin{aligned}
&P(A\cup B)P(AB)-P(A)P(B)\\
&\qquad=P(A)P(AB)+P(B)P(AB)-[P(AB)]^2-P(A)P(B)\\
&\qquad=[P(A)-P(AB)]P(AB)+[P(AB)-P(A)]P(B)\\
&\qquad=[P(A)-P(AB)][P(AB)-P(B)]\le 0
\end{aligned}
$$

例题

例3 设事件A,B相互独立，A,C互斥，$P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{4}$，计算$P(AB|\overline{C})$.

解

因A,B相互独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)$

又因A,C互斥，即$AC=\emptyset$，故 $P(ABC)=0$

从而 $P(AB)=P(ABC)+P(AB\overline{C})=P(AB|\overline{C})P(\overline{C})$

所以 $P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB)}{P(\overline{C})}=\frac{P(A)P(B)}{1-P(C)}=\frac{2}{9}$

例题

例4 从混有5张假钞的20张百元钞票中任取2张，并将其中一张拿到验钞机上检验.

(1) 求检验结果是假钞的概率；

(2) 如果检验结果是假钞，求抽出的2张都是假钞的概率.

解 设$A_i=\{$取出得两张钞票中有i张假钞$\}$，$i=0,1,2$

$B=\{$检验结果是假钞$\}$

(1) $P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(B|A_i)P(A_i)=0\times P(A_i)+\frac{1}{2}\times\frac{C_5^1C_{15}^1}{C_{20}^2}+1\times\frac{C_5^2}{C_{20}^2}=\frac{1}{4}$

(2) $P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{1\times\frac{C_5^2}{C_{20}^2}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{19}$

例题

例5 设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知$P\{X \leq 70\} = 0.5$，$P\{X \leq$

例题

例6 设二维随机向量$(X, Y) \sim N(1,0,1,1,0)$，计算$P\{XY - Y \le 0\}$.

解

方法一：(X, Y)的概率密度为$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2+y^2}{2}}$

$$P\{XY - Y \le 0\} = \iint_{xy-y\le 0} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\int_{1}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

考虑变量替换$\begin{cases} x = r\cos\theta + 1 \\ y = r\sin\theta \end{cases}$可算得结果

例题

例6 设二维随机向量$(X,Y)\sim N(1,0,1,1,0)$，计算$P\{XY-Y\le 0\}$.

解

方法二：注意到X,Y相互独立，且$X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$

$$
\begin{aligned}
P\{XY-Y\le 0\} &= P\{(X-1)Y\le 0\}\\
&= P\big\{\{(X-1)<0,Y>0\}\cup\{(X-1)>0,Y<0\}\cup\{X-1=0\}\cup\{Y=0\}\big\}\\
&= P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0,Y<0\}\\
&= P\{X-1<0\}P\{Y>0\}+P\{X-1>0\}P\{Y<0\}\\
&= \Phi(0)[1-\Phi(0)]+[1-\Phi(0)]\Phi(0)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例题

例7 设二维随机向量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}a\mathrm{e}^{x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：(1) 常数a；(2) X,Y的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$

(3) 判断X,Y是否相互独立；(4) $P\{X+Y\le 0.5\}$

解 (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y a\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\mathrm{e}-2a$

解得$a=\frac{1}{\mathrm{e}-2}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_x^1\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}-2}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}-2},\quad 0<x<1$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^y\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}-2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^y-1}{\mathrm{e}-2},\ 0<y<1$

例题

例7 设二维随机向量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}ae^{x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：(1) 常数a；(2) X,Y的边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$

(3) 判断X,Y是否相互独立；(4) $P\{X+Y\le 0.5\}$

解 (3) $$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}(1-x)(e^{y}-1)}{(e-2)^2}, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\neq f(x,y)$$

故X,Y不独立

(4) $$P\{X+Y\le 0.5\}=\int_0^{0.25}\int_x^{0.5-x}\frac{e^{x}}{e-2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{4e^{0.25}-5}{2(e-2)}$$

例题

例8 二维随机向量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

求：(1) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(2) $F_{X|Y}(x|0.25)$；

(3) $P\{X<0.5|Y<0.5\}$；(4) $Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度；(5) $E\left(X^2Y^2\right)$

解 (1) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^y 8xy\mathrm{d}x, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$0<y<1$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$$

例题

例8 二维随机向量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

求：(1) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(2) $F_{X|Y}(x|0.25)$；

(3) $P\{X<0.5|Y<0.5\}$；(4) $Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度；(5) $E(X^2Y^2)$

解 (2) $F_{X|Y}(x|0.25)=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u|0.25)\mathrm{d}u$

$$=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \int_{-\infty}^{x}32u\mathrm{d}u, & 0<x<0.25\\ 1, & x\ge 0.25\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 16x^2, & 0<x<0.25\\ 1, & x\ge 0.25\end{cases}$$

例题

例8 二维随机向量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

求：(1) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；(2) $F_{X|Y}(x|0.25)$；

(3) $P\{X<0.5|Y<0.5\}$；(4) $Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度；(5) $E(X^2Y^2)$

解 (3) $P\{X<0.5|Y<0.5\}=\dfrac{P\{X<0.5,Y<0.5\}}{P\{Y<0.5\}}=\dfrac{\int_0^{0.5}\int_0^{y}8xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^{0.5}4y^3\mathrm{d}y}=1$

(4) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^1 8y^3z\mathrm{d}y, & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2z, & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(5) $E(X^2Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y 8x^3y^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{4}$