期中考试模拟题（五）2020.5

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设事件 A 和 B 相互独立，$P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$，则 $P(A)=$ ________.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=$ ______________ .

3．设 $X\sim N(0,\sigma_1^2),Y\sim N(0,\sigma_2^2)$ 且相互独立，则 $P\{0<\sigma_2 X-\sigma_1 Y<2\sigma_1\sigma_2\}=$ ______.

4．设 $E(X)=1,\ E(Y)=2,\ D(X)=1,\ D(Y)=4,\ \rho_{XY}=0.6$，设 $Z=(2X-Y+1)^2$，则其数学期望 $E(Z)=$ ______.

5．设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 $X_i\sim P(\lambda)$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则根据切比雪夫不等式 $P(|\bar{X}-\lambda|<2\sqrt{\lambda})\geq$ _____________ .

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 A、B、C 是三个事件，与事件 A 互斥的事件是(　　　).

（A）$\bar{A}B\cup A\bar{C}$　　（B）$\overline{A(B\cup C)}$　　（C）$\overline{A\cup B\cup C}$　　（D）$\overline{ABC}$

2．设 A、B 为随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是(　　　).

(A) $P(A\cup B)=P(A)$　　(B) $P(AB)=P(A)$

(C) $P(B|A)=P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(B)-P(A)$

3．设随机变量 X,Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数是(　　　).

(A) $F_Z(z)=F_X(z)$　　(B) $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

$(C)\ F_Z(z)=\min\{F_X(z),F_Y(z)\}$ $(D)\ F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$

4．设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

则（ ）.

（A） $Cov(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$ （B） $Cov(X_1,Y)=\sigma^2$

（C） $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$ （D） $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$

5．设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，$E(X_i^k)=\mu_k$，记

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 依概率收敛于（ ）.

$(A)\ \mu_2$ $(B)\ \mu_1^2$ $(C)\ \mu_2+\mu_1^2$ $(D)\ \mu_2-\mu_1^2$

三、(10 分）某员工为找新工作，请其领导写推荐信. 他估计如果得到了强有力推荐，那么有 80%的可能找到工作；如果得到了一般推荐，那么有 40%的可能找到工作，如果得到较弱推荐，那么只有 10%的可能找到工作. 而且他估计得到强有力推荐、一般推荐、较弱推荐的概率分别为 0.7, 0.2, 0.1. 求：(1）他找到新工作的概率.（2）如果他没有找到新工作，他得到强有力推荐的概率是多少?

四、(12 分）有一种鸟在某个时间段 $(0,T]$ 下蛋数为 $1\sim5$ 枚，下 r 枚蛋的概率与 r 成正比. 一个人在 T 时去鸟窝捡蛋，他仅当每个鸟窝的蛋数大于 3 枚时才捡走一枚. 假设有 6 个这种鸟窝，每个鸟窝保存完好，且各鸟窝中蛋的个数相互独立.

（1）写出一个鸟窝中蛋数 X 的分布律.

（2）对于指定的一个鸟窝，求捡蛋人在该鸟窝中捡到一枚蛋的概率.

（3）求捡蛋人在 6 个鸟窝中捡到蛋的总数 Y 的分布律、数学期望和方差.

（4）当一个捡蛋人在这 6 个鸟窝中捡过蛋后，紧接着又有一个捡蛋人到这些鸟窝中捡蛋，也仅当每个鸟窝的蛋数大于 3 枚时才捡走一枚，求第二个捡蛋人捡到蛋的总数 Z 的分布.

五、(18 分)设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x>0,y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，

（1）求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；（2）X,Y 是否相互独立？为什么？

（3）求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$；

（4）$P\left\{Y \le 2 \middle| X \le 1\right\}, P\left\{Y \le 2 \middle| X = 1\right\}$.

六、（12 分）设 $X \sim U(0,2), Y \sim \exp(3)$，且它们相互独立，求

（1）$Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；（2）概率 $P\left\{X + Y \le 1\right\}$.

七、（8 分）某工厂有 200 台同类型的机器，由于工艺等原因，每台机器的实际工作时间只占全部工作时间的 80%，各台机器工作是相互独立的，求任一时刻有 144 至 172 台机器正在工作的概率.（用标准正态分布的分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示）