第十周习题课

1， 第九周习题课剩下的内容

2，

3．求函数 $f(x)$，已知：

（1）$f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$， $x>0$；　　　（2）$f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$。

解：（1）取 $\varphi(x)=f(x^2)$，则 $\varphi'(x)=2xf'(x^2)=2$， $x>0$，

注意 $(2x)'=2$，所以存在常数 C 使得 $\varphi(x)=2x+C$，也即 $f(x^2)=2x+C$。
由题设，我们只有 $x>0$ 时函数 $f'(x)$ 的信息，所以只能确定 $x>0$ 时的 $f(x)$：

$$f(x)=2\sqrt{x}+C，\quad x>0。$$

（2）取 $g(x)=f(\sin^2 x)$，则 $g'(x)=(\sin^2 x)'f'(\sin^2 x)=2\sin x\cos^3 x$

注意到 $(\cos^4 x)'=4\cos^3 x(-\sin x)=-4\sin x\cos^3 x$，

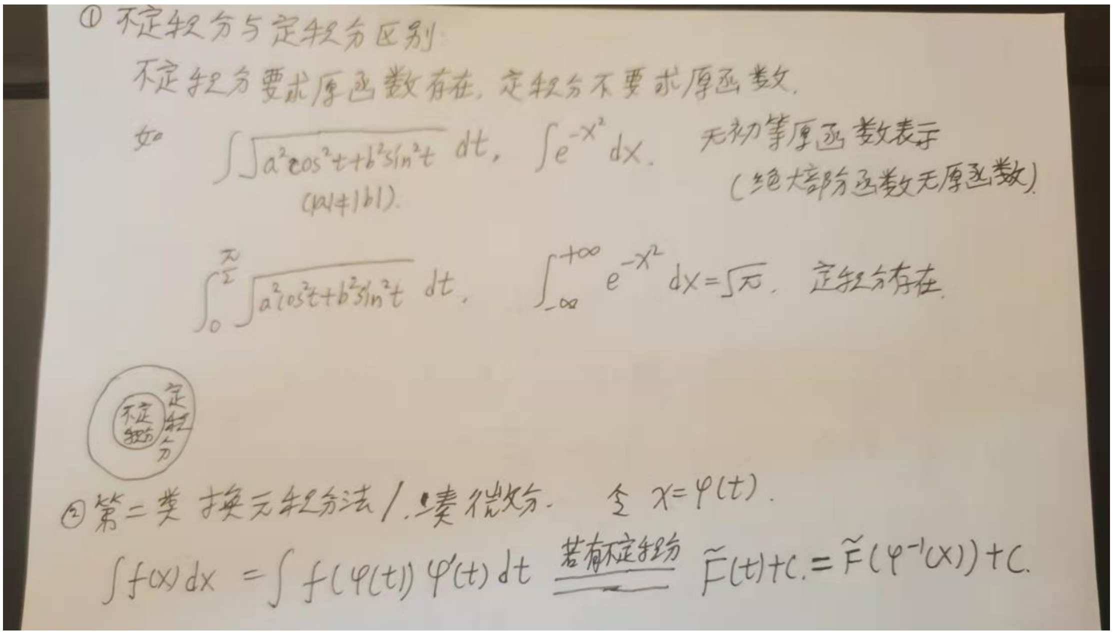
$$(-\frac{\cos^4 x}{2})'=2\sin x\cos^3 x=g'(x)，$$

所以存在常数 C 使得 $g(x)=-\dfrac{\cos^4 x}{2}+C$，也即

$$f(\sin^2 x)=-\frac{\cos^4 x}{2}+C=-\frac{(1-\sin^2 x)^2}{2}+C，$$

可见 $\quad f(x)=-\dfrac{(1-x)^2}{2}+C$， $x\geq 0$。

3，不定积分与定积分的异同，联系，细节（手稿写的比较简略，只搭了框架）



① 不定积分与定积分区别：

不定积分要求原函数存在，定积分不要求原函数。

如 $\int\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt$，$(|a|\neq|b|)$．$\int e^{-x^2}dx$． 无初等原函数表示（绝大部分函数无原函数）

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,dt$， $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$． 定积分存在．

② 第二类换元积分法/凑微分． 令 $x=\varphi(t)$．

$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \xlongequal{\text{若有不定积分}} \tilde{F}(t)+C.=\tilde{F}(\varphi^{-1}(x))+C.$

定积分时: $\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$，注意上下限！定积分注意。

例如：令 $x=\varphi(t)=r\cos t$，$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\cdot(-\sin t)\,dt = -r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt \ ?\ \times$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cdots\cdots \qquad = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt \ \checkmark$$

求原函数 $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx \xlongequal{x=r\sin t} \int r^2\cos^2 t\,dt = r^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$

$$= \frac{r^2 t}{2} + \frac{r^2\sin 2t}{4} + C = \frac{r^2 t}{2} + \frac{r^2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{2} + C = \frac{r^2\cdot\arcsin\frac{x}{r}}{2} + \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2} + C$$

一个易错的例子：

计算 $\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\,dx$.

1) 不正确方法，注意到 $\left(\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}$.

由 Newton-Leibniz 公式，

$$\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\,dx = \arctan\frac{x(x-2)}{x-1}\Big|_0^2 = 0.\ \text{不可能.}$$

关键问题：$x=1$ 为 $\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}$ "断点"，从而不是变上限积分形成的原函数.
(不连续，可导)

2) 正解：原函数关于 $x=1$ 对称，$\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}$ 在 $[0,1)$ 上为原函数.

$$\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\,dx = \int_0^1\cdots + \int_1^2\cdots$$

令 $t=2-x$

$$= \int_0^1 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\,dx + \int_1^0 \frac{(t-1)^2+1}{(t-1)^2+t^2(t-2)^2}\cdot(-1)\,dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\,dx = 2\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}\Big|_0^1 = \pi.$$