第五章　机器人动力学

前面我们所研究的机器人运动学都是在稳态下进行的，没有考虑机器人运动的动态过程。实际上，机器人的动态性能不仅与运动学相对位置有关，还与机器人的结构形式、质量分布、执行机构的位置、传动装置等方案有关。

机器人动态性能由动力学方程描述，研究机器人运动与关节力(力矩)间的动态关系。

- 分析机器人动态数学模型，主要采用两种理论

  牛顿—欧拉方程，拉格朗日方程

- 对于动力学，有两个相反的问题

  (1) 已知各关节作用力或力矩，求各关节的位移、速度和加速度，即求得运动轨迹。

  (2) 已知机械手的运动轨迹（各关节的位移、速度和加速度），求各关节所需要的驱动力或力矩。

5.1 刚体的动能与势能

牛顿力学：

(1) 牛顿力学的核心是牛顿三定律，具体应用时首先需要进行受力分析;

(2) 在古典力学领域具有广泛的应用，但在处理高速运动（接近光速）和微观粒子时会出现不准确的情况，这时需要引入相对论和量子力学来解决问题。

拉格朗日力学：

拉格朗日力学的基础是最小作用原理，即物体的运动轨迹使作用量取得极小值。

拉格朗日方程是一个二阶偏微分方程，它包含了物体的坐标、速度以及物体所受到的力等信息。

拉格朗日力学在多自由度系统中具有广泛的应用。多自由度系统是指具有多个独立自由度的系统，如振动、分子结构等。

虽然牛顿力学和拉格朗日力学采用不同的方法描述物体的运动，但它们实际上是等价的。

在某些情况下，拉格朗日力学可以简化问题，使其更容易求解。

而在其他情况下，牛顿力学可能更方便使用。

拉格朗日函数 L 被定义为系统动能 K 和势能P 之差，即：

$$L = K - P \qquad (5-1)$$

系统动力学方程式，即拉格朗日方程如下：

$$\boldsymbol{F}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, i = 1,2,\cdots n \qquad (5-2)$$

式中，q_i为表示系统的广义坐标，$\dot{q}_i$ 为相应的速度，而$\boldsymbol{F}_i$ 为作用在第 i 个坐标上的力或是力矩。

➢ 一般物体的动能与势能

动能 $$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{d}^2$$

势能 $$P = \frac{1}{2}kd^2$$

小车-弹簧系统的拉格朗日函数

$$L = K - P = \frac{1}{2}m\dot{d}^2 - \frac{1}{2}kd^2$$

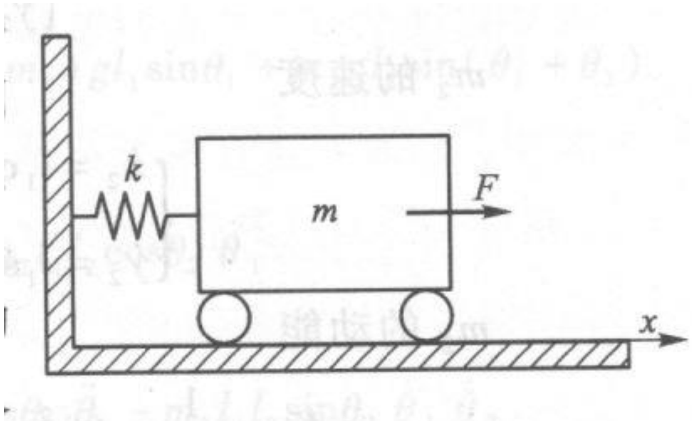

图1 一般物体的动能与势能

拉格朗日函数导数

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right] = m\ddot{d} \qquad \frac{\partial L}{\partial d} = -kd$$

拉格朗日-欧拉方程

$$F = m\ddot{d} + kd$$

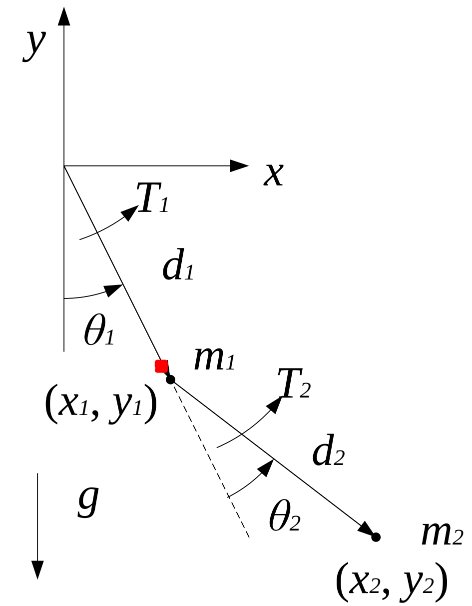

图2 二连杆机器手

- 二连杆机械手的动能和势能

先计算连杆1的动能和势能

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2, \; v_1 = d_1 \dot{\theta}_1, \quad P_1 = m_1 \cdot g \cdot h_1, \; h_1 = -d_1 \cos\theta_1$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$P_1 = -m_1 g \; d_1 \cos\theta_1$$

再求连杆2的动能和势能

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \qquad P_2 = m_2 \cdot g \cdot y_2$$

式中

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2,$$

$$x_2 = d_1 \sin\theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = -d_1 \cos\theta_1 - d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{x}_2 = d_1 \cos\theta_1\dot{\theta}_1 + d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = d_1 \sin\theta_1\dot{\theta}_1 + d_2 \mathrm{sis}(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

二连杆机械手系统的总动能和总势能分别为：

$$K = K_1 + K_2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 d_1 d_2 \cos\theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \qquad (5-3)$$

$$P = P_1 + P_2$$

$$= -(m_1 + m_2) g d_1 \cos\theta_1 - m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \qquad (5-4)$$

5. 2 拉格朗日方法

1. 二连杆机械手系统的拉格朗日函数

$$
\begin{aligned}
L &= K - P \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)d_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 d_2^2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\
&+ m_2 d_1 d_2 \cos\theta_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2)gd_1\cos\theta_1 + m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}
\tag{5-4}
$$

求得力矩的动力学方程式：

$$
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}
\tag{5-5}
$$

其中，D_{ii}为关节i有效惯量，D_{ij} 为关节i和关节j之间的耦合惯量。

D_{ijj}向心加速度系数，D_{iij} 、D_{iji}哥氏加速度系数，

D_i代表关节 i处的重力。

比较可得本系统各系数如下：

有效惯量 $$D_{11}=(m_1+m_2)d_1^2+m_2d_2^2+2m_2d_1d_2\cos\theta_2$$

$$D_{22}=m_2d_2^2$$

耦合惯量 $$D_{12}=m_2d_2^2+m_2d_1d_2\cos\theta_2=m_2(d_2^2+d_1d_2\cos\theta_2)$$

向心加速度系数

$$D_{111}=0$$

$$D_{122}=-m_2d_1d_2\sin\theta_2$$

$$D_{211}=m_2d_1d_2\sin\theta_2$$

$$D_{222}=0$$

哥氏加速度系数

$$D_{112}=D_{121}=-m_2d_1d_2\sin\theta_2$$

$$D_{212}=D_{221}=0$$

重力项

$$D_1=(m_1+m_2)gd_1\sin\theta_1+m_2gd_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

$$D_2=m_2gd_2\sin(\theta_1+\theta_2)$$

➢ 表5.1 给出这些系数值及其与位置θ_2 的关系。

注意：有效惯量的变化将对机械手的控制产生显著影响！

表5.1

负载	θ_2	$\cos\theta_2$	D_{11}	D_{12}	D_{22}	I_1	I_2
地面空载	0° 90° 180° 270°	1 0 -1 0	6 4 2 4	2 1 0 1	1 1 1 1	6 4 2 4	2 3 2 3
地面满载	0° 90° 180° 270°	1 0 -1 0	18 10 2 10	8 4 0 4	4 4 4 4	18 10 2 10	2 6 2 6
外空间负载	0° 90° 180° 270°	1 0 -1 0	402 202 2 202	200 100 0 100	100 100 100 100	402 202 2 202	2 102 2 102

可以看出D_{11}、D_{22}有效惯量在不同负载条件下有明显变化。I_1、I_2与T_1、T_2成正比的系数。

2. 机械手动力学方程的计算与简化

分析由一组A变换描述的任何机械手，求出其动力学方程。推导过程分五步进行：

- 计算任一连杆上任一点的速度；
- 计算各连杆的动能和机械手的总动能；
- 计算各连杆的势能和机械手的总势能；
- 建立机械手系统的拉格朗日函数；
- 对拉格朗日函数求导，以得到动力学方程式。

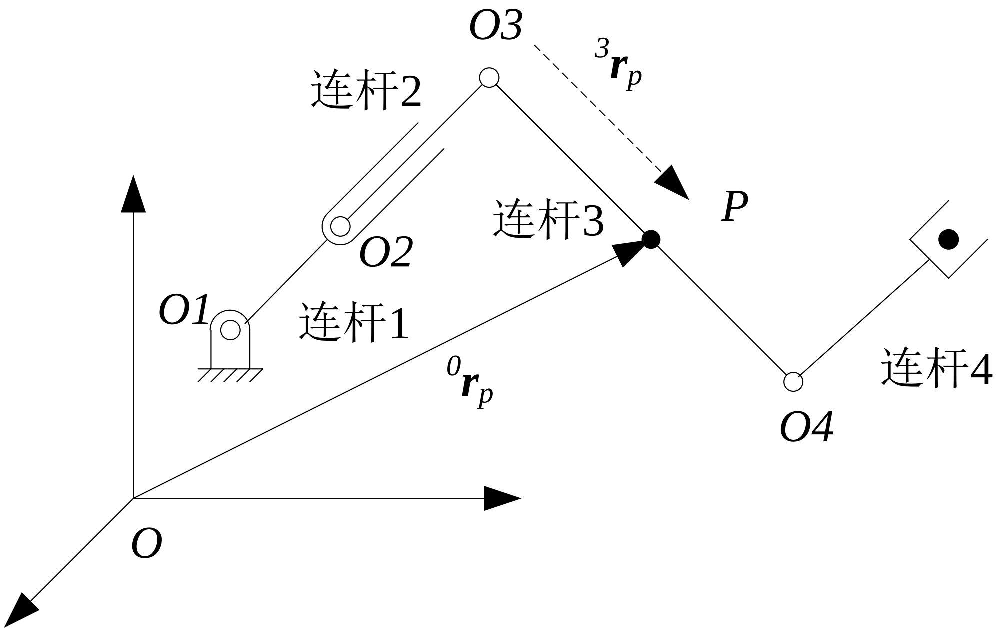

图3 四连杆机械手

3. 质点速度的计算

为了计算系统的动能，必须知道机器人各关节的速度。

- 连杆3上点 P 的速度为：

$$^{0}\boldsymbol{v}_{p}=\frac{d}{dt}({}^{0}\boldsymbol{r}_{p})=\frac{d}{dt}(T_{3}\,{}^{3}\boldsymbol{r}_{p})=\dot{T}_{3}\,{}^{3}\boldsymbol{r}_{p}$$

对于连杆i 上任一点的速度为：

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial T_{i}}{\partial q_{j}}\dot{q}_{j}\right){}^{i}\boldsymbol{r} \tag{5.6}$$

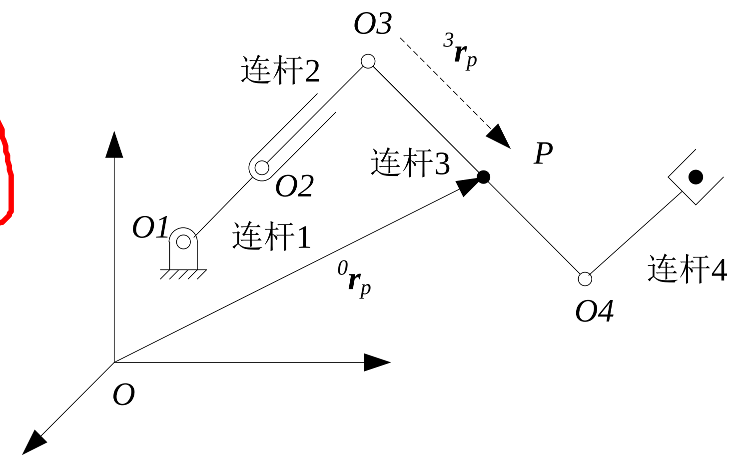

图4

- P点的加速度为：

$$^{0}\boldsymbol{a}_{p}=\frac{d}{dt}({}^{0}\boldsymbol{v}_{p})=\frac{d}{dt}(\dot{T}_{3}\,{}^{3}\boldsymbol{r}_{p})=\dot{T}_{3}\,{}^{3}\boldsymbol{r}_{p}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{3}}{\partial q_{j}}\dot{q}_{j}\right){}^{3}\boldsymbol{r}_{p}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial T_{3}}{\partial q_{i}}\frac{d}{dt}\dot{q}_{i}\right)\left({}^{3}\boldsymbol{r}_{p}\right)+\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^{2}T_{3}}{\partial q_{j}\partial q_{k}}\dot{q}_{k}\dot{q}_{j}\right)\left({}^{3}\boldsymbol{r}_{p}\right)$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_j}\ddot{q}_j\right)\left({}^3\boldsymbol{r}_p\right)+\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 T_3}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j\right)\left({}^3\boldsymbol{r}_p\right)$$

➢ 速度的平方

$$({}^0\boldsymbol{v}_p)^2=({}^0\boldsymbol{v}_p)\cdot({}^0\boldsymbol{v}_p)=Trace[({}^0\boldsymbol{v}_p)\cdot({}^0\boldsymbol{v}_p)^T]$$

$$=Trace\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_j}\dot{q}_j({}^3\boldsymbol{r}_p)\cdot\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)({}^3\boldsymbol{r}_p)^T\right]$$

$$=Trace\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial T_3}{\partial q_j}({}^3\boldsymbol{r}_p)({}^3\boldsymbol{r}_p)^T\frac{\partial T_3}{\partial q_k}^T\dot{q}_j\dot{q}_k\right]$$

式中，Trace表示矩阵迹。对于n阶方程，其迹为它的主对角线上各元素之和。

➢ 任一机械手上一点的速度平方为：

$$\boldsymbol{v}^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=Trace\left[\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\,{}^i\boldsymbol{r}\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\,{}^i\boldsymbol{r}\right)^T\right]$$

$$=Trace\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\frac{\partial T_i}{\partial q_k}\,{}^i\boldsymbol{r}\,{}^i\boldsymbol{r}^T\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k}\right)^T\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \tag{5.7}$$

4. 动能和势能的计算

➢ 动能的计算

令连杆3上任一质点P的质量为dm，则其动能为：

$$dK_3 = \frac{1}{2} v_p^2 dm$$
$$= \frac{1}{2} Trace\left[\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_3}{\partial q_j} {}^3r_p ({}^3r_p)^T \left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right] dm$$
$$= \frac{1}{2} Trace\left[\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_3}{\partial q_j} ({}^3r_p dm \, {}^3r_p{}^T)^T \left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

任一机械手连杆i 上位置矢量${}^i\boldsymbol{r}$ 的质点，其动能为：

$$dK_i = \frac{1}{2} Trace\left[\sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial T_i}{\partial q_j} {}^j\boldsymbol{r} \, {}^i\boldsymbol{r}^T \frac{\partial T_i{}^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] dm$$
$$= \frac{1}{2} Trace\left[\sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial T_i}{\partial q_j} ({}^i\boldsymbol{r} dm \, {}^i\boldsymbol{r}^T)^T \frac{\partial T_i{}^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

连杆3的动能为：

$$K_3 = \int_{连杆3} dK_3 = \frac{1}{2} Trace\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial T_3}{\partial q_j} \left(\int_{连杆3} {}^3\boldsymbol{r}_p \, {}^3\boldsymbol{r}_p^{\ T} dm\right) \left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k}\right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k\right]$$

任何机械手上任一连杆*i*动能为：

$$K_i = \int_{连杆i} dK_i = \frac{1}{2} Trace\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} \frac{\partial T_i}{\partial q_j} I_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k}\right) \dot{q}_j \dot{q}_k\right] \tag{5.8}$$

式中，I_i 为伪惯量矩阵。

具有*n*个连杆的机械手总的动能为：

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Trace\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} \frac{\partial T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k\right] \tag{5.9}$$

式（5.9）中忽略了各杆件传动装置的动能，考虑后为下：

连杆 *i* 的传动装置动能为： $K_{ai} = \frac{1}{2} I_{ai} \dot{q}_i^2$ I_{ai} **为传动装置等效质量**

所有关节传动装置总动能为： $K_a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_{ai} \dot{q}_i^2$

机械手系统（包括传动装置）的总动能为：

$$K_t = K + K_a$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_i} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} I_{ai}\dot{q}_i^2 \qquad (5.10)$$

➢势能的计算

一个在高度h处质量m为的物体，其势能为：

$$P = m \cdot g \cdot h$$

连杆i 上位置${}^i\boldsymbol{r}$ 处的质点dm，其势能为：

$$dP_i = -dm \cdot \boldsymbol{g}^T \cdot {}^0r = -\boldsymbol{g}^T \cdot T_i \, {}^ir \cdot dm$$

式中，$\boldsymbol{g}^T = [g_x, g_y, g_z, 1]$

$$P_i = \int_{连杆i} dP_i = -\int_{连杆i} \boldsymbol{g}^T T_i \, {}^irdm = -\boldsymbol{g}^T T_i \int_{连杆i} {}^irdm$$

$$= -\boldsymbol{g}^T T_i m_i \, {}^ir_i = -m_i \boldsymbol{g}^T T_i \, {}^ir_i$$

${}^ir_i$ **为连杆*i*** 相对于前端关节坐标系的重心位置。

- 由于传动装置的重力作用P_{ai}是很小的，所以机械手系统的总势能为：

$$P=\sum_{i=1}^{n}(P_i-P_{ai})\approx\sum_{i=1}^{n}P_i \qquad (5.11)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{g}^T T_i\,{}^i r_i$$

5. 机械手动力学方程的推导

- 据式 (5.1) 求拉格朗日函数

$$L=K_t-P$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_i}I_i\frac{\partial T_i^{\,T}}{\partial q_k}\right)\dot q_j\dot q_k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}I_{ai}\dot q_i^2+\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{g}^T T_i\,{}^i r_i, \qquad n=1,2\cdots$$

(5.12)

- 再据式(5.2)求动力学方程，先求导数

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_p}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_p}I_i\frac{\partial T_i^{\,T}}{\partial q_k}\right)\dot q_k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}Ttace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_i}I_i\frac{\partial T_i^{\,T}}{\partial q_p}\right)\dot q_j+I_{ap}\dot q_p \qquad p=1,2,\cdots n$$

因为 I_i 为对称矩阵，即 $I_i^T = I_i$，所以下式成立：

$$Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right) = Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i^T \frac{\partial T_i^T}{\partial q_j}\right) = Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_j}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right)\dot{q}_k + I_{ap}\dot{q}_p$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i} Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right)\ddot{q}_k + I_{ap}\ddot{q}_p + \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Trace\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_j \partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$+\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Trace\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_p \partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$= \sum_{i=p}^{n}\sum_{k=1}^{i} Trace\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right)\ddot{q}_k + I_{ap}\ddot{q}_p + 2\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} Trace\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_j \partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_p}=\frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}Trace\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_j \partial q_k}I_i\frac{\partial T_i}{\partial q_k}^T\right)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=p}^{n}\sum_{i=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}Trace\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_p}I_i\frac{\partial T_i}{\partial q_j}^t\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{i=p}^{n}m_i\boldsymbol{g}^T\frac{\partial T_i}{\partial q_p}{}^i r_i$$

$$=\sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}Trace\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_p \partial q_j}I_i\frac{\partial T_i}{\partial q_k}^T\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{i=p}^{n}m_i\boldsymbol{g}^T\frac{\partial T_i}{\partial q_p}{}^i r_i$$

具有n个连杆的机械手系统动力学方程如下：

$$T_i=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}Trace\left(\frac{\partial T_j}{\partial q_k}I_j\frac{\partial T_j}{\partial q_i}^T\right)\ddot{q}_k+I_{ai}\ddot{q}_i$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=1}^{j}Trace\left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial q_k \partial q_m}I_j\frac{\partial T_j}{\partial q_i}^T\right)\dot{q}_k\dot{q}_m-\sum_{j=1}^{n}m_j\boldsymbol{g}^T\frac{\partial T_j}{\partial q_i}{}^i r_i \qquad (5.13)$$

上述方程式与求和顺序无关，可写成

$$T_i=\sum_{j=1}^{n}D_{ij}\ddot{q}_j+I_{ai}\ddot{q}_i+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}D_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k+D_i \qquad (5.14)$$

$$D_{ij} = \sum_{p=\max\ i,j}^{n} Trace\left(\frac{\partial T_p}{\partial q_j} I_p \frac{\partial T_p^T}{\partial q_i} \right)$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max\ i,j,k}^{n} Trace\left(\frac{\partial^2 T_p}{\partial q_j \partial q_k} I_p \frac{\partial T_p^T}{\partial q_i} \right)$$

$$D_i = \sum_{p=i}^{n} -m_p \frac{\partial T_p}{\partial q_i} {}^p r_p$$

对于一个6轴转动机器人，上式展开为

$$\begin{aligned}
T_i = {} & D_{i1}\ddot{\theta}_1 + D_{i2}\ddot{\theta}_2 + D_{i3}\ddot{\theta}_3 + D_{i4}\ddot{\theta}_4 + D_{i5}\ddot{\theta}_5 + D_{i6}\ddot{\theta}_6 + I_{ai}\ddot{\theta}_i + \\
& D_{i11}\dot{\theta}_1^2 + D_{i22}\dot{\theta}_2^2 + D_{i33}\dot{\theta}_3^2 + D_{i44}\dot{\theta}_4^2 + D_{i55}\dot{\theta}_5^2 + D_{i66}\dot{\theta}_6^2 + \\
& D_{i12}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{i13}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + D_{i14}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + D_{i15}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 + D_{i16}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_6 + \\
& D_{i21}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_{i23}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + D_{i24}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 + D_{i25}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + D_{i26}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_6 + \\
& D_{i31}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_1 + D_{i32}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 + D_{i34}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 + D_{i35}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_5 + D_{i36}\dot{\theta}_3\dot{\theta}_6 + \\
& D_{i41}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_1 + D_{i42}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_2 + D_{i43}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_3 + D_{i45}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 + D_{i46}\dot{\theta}_4\dot{\theta}_6 + \\
& D_{i51}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_1 + D_{i52}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_2 + D_{i53}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_3 + D_{i54}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_4 + D_{i56}\dot{\theta}_5\dot{\theta}_6 + \\
& D_{i61}\dot{\theta}_6\dot{\theta}_1 + D_{i62}\dot{\theta}_6\dot{\theta}_2 + D_{i63}\dot{\theta}_6\dot{\theta}_3 + D_{i64}\dot{\theta}_6\dot{\theta}_4 + D_{i65}\dot{\theta}_6\dot{\theta}_5 + D_i
\end{aligned}$$

6. 二连杆机械手动力学方程实例

规定机械手的坐标系

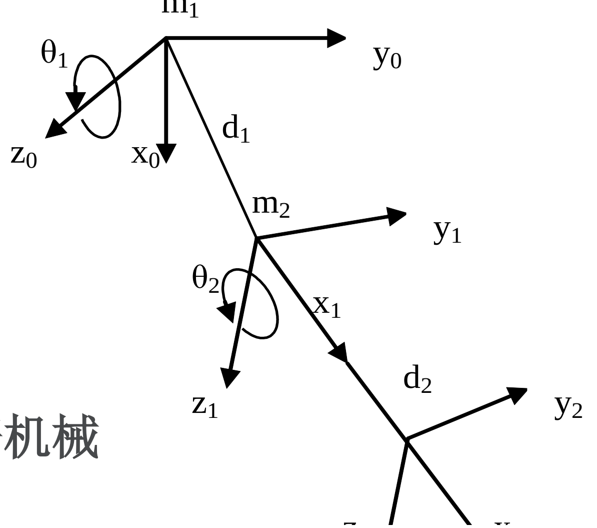

图5 二连杆机械手的坐标系

连杆参数

表 4.2 二连杆机械手连杆参数

连 杆	变 量	α	a	d	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
1	θ_1	0°	d_1	0	1	0
2	θ_2	0°	d_2	0	1	0

➢计算A矩阵和T矩阵

$$A_1 = {}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & d_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & d_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & d_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & d_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
{}^{0}T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & d_1c_1 + d_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & d_1s_1 + d_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

可求出动力学方程：

$$
T_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + 2D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_1 + I_{a1}\ddot{\theta}_1
$$

$$
T_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 + 2D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_2 + I_{a2}\ddot{\theta}_2
$$

$$
\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{4}{3}m_2l^2 + m_2l^2\cos\theta_2 & \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\cos\theta_2 \\ \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\cos\theta_2 & \frac{1}{3}m_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}m_2l^2\sin\theta_2 \\ \frac{1}{2}m_2l^2\sin\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_2l^2\sin\theta_2 & -\frac{1}{2}m_2l^2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1gl\cos\theta_1 + \frac{1}{2}m_2gl\cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2gl\cos\theta_1 \\ \frac{1}{2}m_2gl\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{a1} & 0 \\ 0 & I_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}
$$

5.3 牛顿-欧拉方程

上面利用拉格朗日方程推导了机器人动力学模型，也可以利用牛顿方程及欧拉方程推导出动力学模型。

牛顿方程：

图 6 作用在图刚体上的力 $F = m\dot{v}_C$

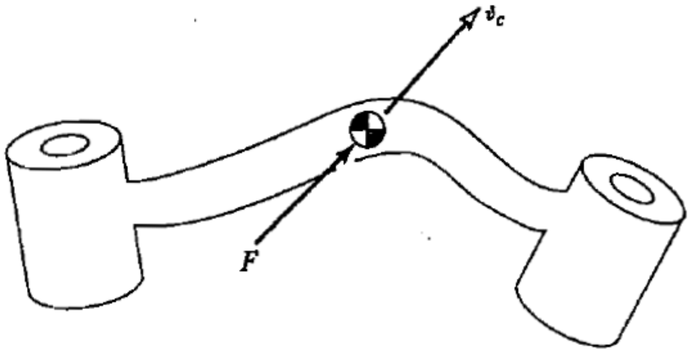

图6 作用于刚体质心的力F引起刚体加速度

欧拉方程：

图7所示为一个旋转刚体，其角速度和角加速度分别为ω、$\dot{\omega}$，此时由欧拉方程可得到作用在刚体上的力矩 N 引起刚体的转动。

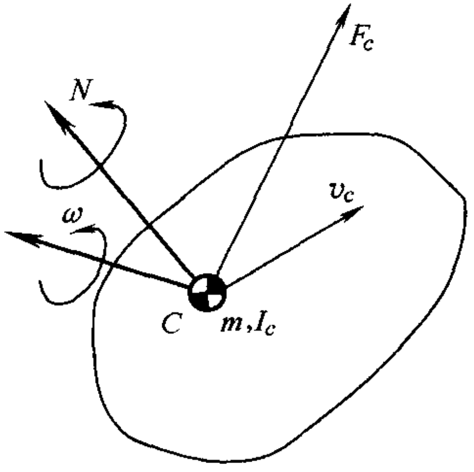

图7

m---刚体质量　F_c-----作用于质心的作用力

v_c----线性速度　I-------惯性张量

N----作用在刚体的力矩　　w---角速度

在刚体上的力矩N引起刚体的转动为

$$N = {}^{C}I\dot{\omega} + \omega \times {}^{C}I\omega,$$

式中 ${}^{c}I$ 是刚体在坐标系{C}中的惯性张量，而刚体的质心在坐标系{C}的原点上。

在此基础上，可得到牛顿-欧拉方程一般形式为：

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i}, i = 1, 2, \ldots, n$$

式中K为动能，P为势能，D为消耗能量，W为外力作用的功，q_i为广义坐标。

具体算法：

第一部分：对每个连杆，从连杆1到连杆n计算连杆的速度和加速度，并计算出动能、势能、消耗能量和外力作用的功；

第二部分：应用牛顿欧拉方程，计算连杆间的相互作用力和力矩以及关节力矩。

质量 m_1和m_2 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$(见图8)为：

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + (d_1\cos\theta_1)\boldsymbol{i} + (d_1\sin\theta_1)\boldsymbol{j}$$

$$= (d_1\cos\theta_1)\boldsymbol{i} + (d_1\sin\theta_1)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + [d_2\cos(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{i} + [d_2\sin(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{j}$$

$$= [d_1\cos\theta_1 + d_2\cos(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{i} + [d_1\sin\theta_1 + d_2\sin(\theta_1+\theta_2)]\boldsymbol{j}$$

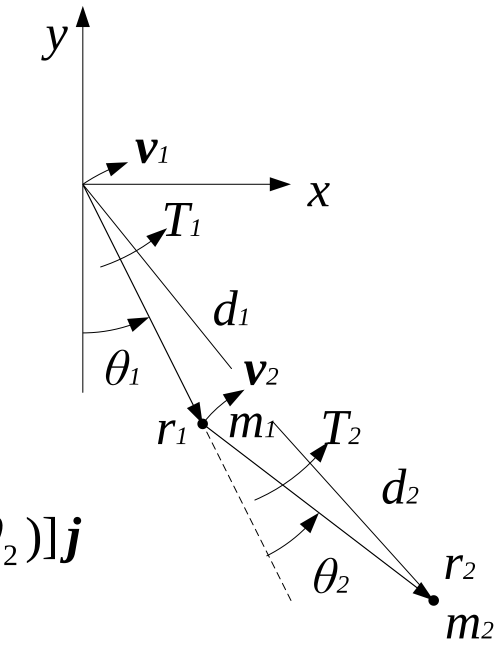

图8 二连杆机械手

可得:

$$\begin{aligned} T_1 = {} & [(m_1+m_2)d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2m_2 d_1 d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 \\ & + [m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_2 + c_1\dot{\theta}_1 - (2m_2 d_1 d_2\sin\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ & - (m_2 d_1 d_2\sin\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + [(m_1+m_2)g d_1\sin\theta_1 + m_2 d_2 g\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} T_2 = {} & (m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2 d_1 d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 \\ & + c_2\dot{\theta}_2 + m_2 g d_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{aligned} \tag{5.17}$$

5.4 机器人的动静特性

包括：动态响应特性

稳定性

静态特性：工作精度，重复能力，稳定度，空间分辨度。

（1）动态动态响应特性

机器人能够移动得多快，能以怎样的准确性快速地停在给定点，以及它对停止位置超调了多少距离等等。

(2) 稳定性

稳定性**是指机器人运动过程中是否能到达平衡点，及有无振荡问题。**

- 两种不同类型的振荡：

  衰减振荡

  非衰减振荡

- 维持振荡是一种临界情况。

(3) 空间分辨度

空间分辨度（spatial resolution）是描述机器人工具末端运动的一个重要因素。分辨度 指明系统能够区别工作空间所需要的最小运动增量。

分辨度可以是控制系统能够控制的最小位置增量的函数，或者是控制测量系统能够辨别的最小位置增量。

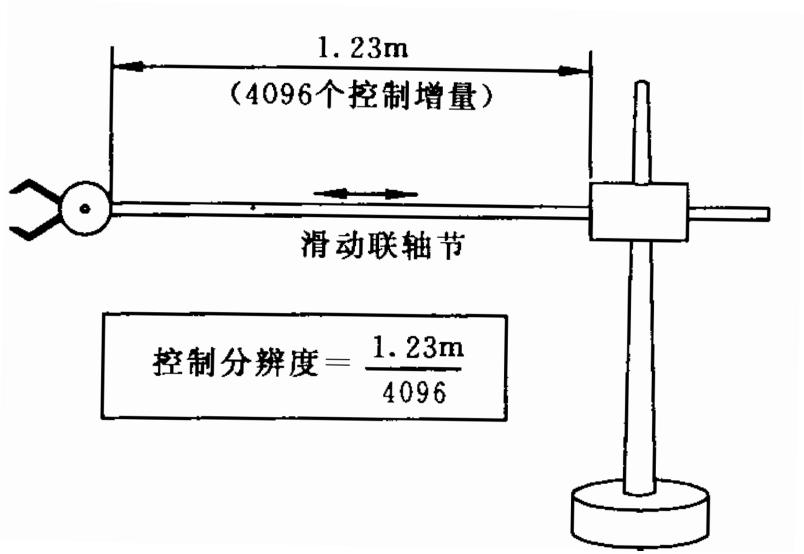

图9 控制对分辨度的影响

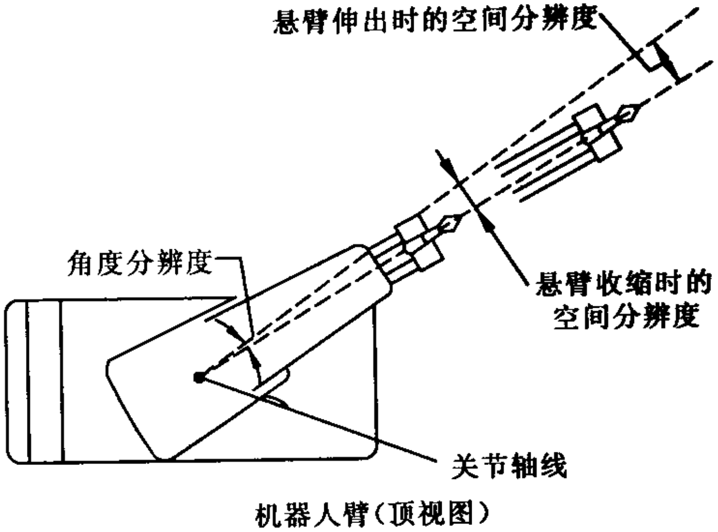

图10 悬臂伸缩对空间分辨度的影响

(4) 精度

- 精度这一术语常常与分辨度及重复性能相混淆。
- 三个因素：
  - a. 各控制部件的分辨度；
  - b. 各机械部件的偏差；
  - c. 传感器精度。

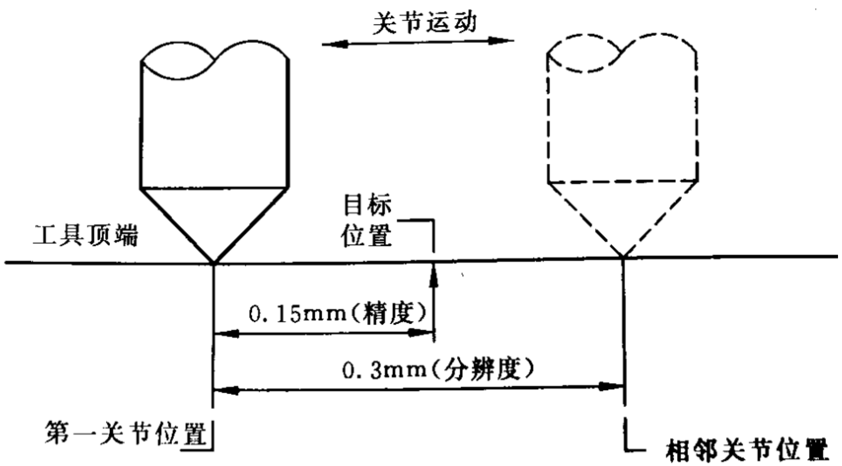

图11 考虑机械偏差时精度与空间分辨度的关系

(6) 重复性

➢ 重复性

称重复定位精度，指的是机器人自身重复到达原先被命令或训练位置的能力。

➢ 涉及因素：

分辨度

部件偏差

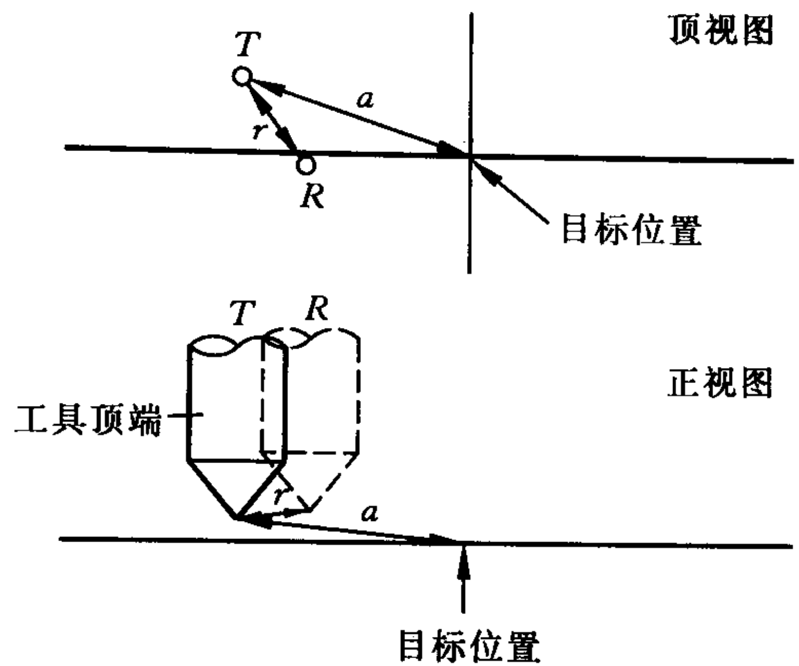

图12 精度与重复性关系

5.5 机器人动力学matlab仿真

在MATLAB中，机器人正向动力学函数为

```
[T,q,qd]=R.fdyn(T,torqfun,q0,qd0)
qdd =R.accel(q,qd,torqfun);
```

其中，输入参数q0和qd0分别是初始的关节角度和角速度，torqfun为给定的力矩函数，T表示整个时间间隔（采样时间）；

函数输出q、qd和qdd分别是给定机器人关节角度、角速度和角加速度。

逆向动力学函数为

```
tau = R.rne(q,qd,qdd,option)
```

其中输入参数q、qd和qdd分别是机器人R到达指定关节位置的关节角度、角速度和角加速度；函数输出tau为驱动的关节力矩。

实验1 针对六轴机械臂PUMA560，在忽略重力的情况下，即假定重力的作用方向与运动平面垂直。求解正向动力学问题，其中关节扭矩、关节角度和关节角速度如下：$T=[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]^T$（Nm, 常量），$\Theta_0=[-60^\circ\ 90^\circ\ 30^\circ\ 0\ 0\ 0]^T$，$\dot{\Theta}_0=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$（rad/s）

实验结果:

```
>>
  three_dof1_forward_dynamics
  qdd =
     0.6697
     2.1099  8.8318
     5.1985
     5.8652
     5.1509
```

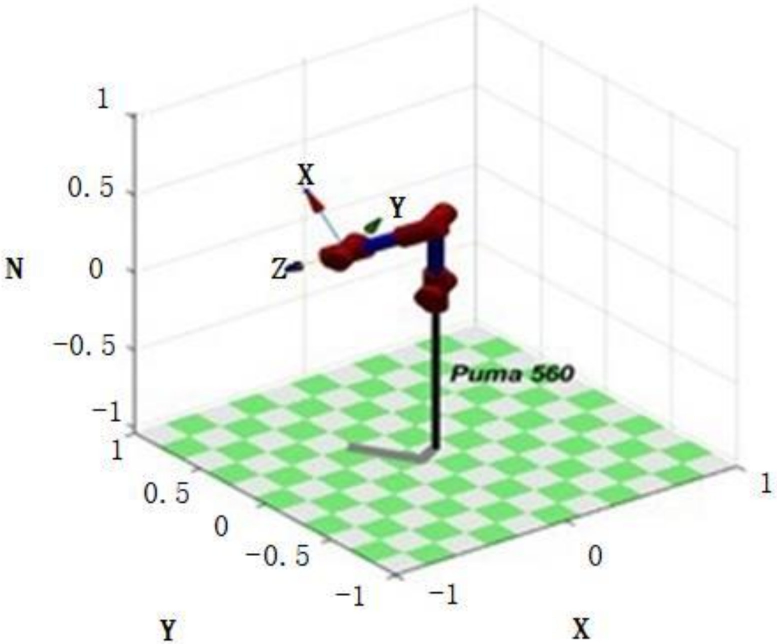

图12 正向动力学机械臂运动图

实验4.2 对于3自由度3R机器人，已知长度参数$L_1=4$，$L_2=3$，$L_3=2$(m)，质量和惯性矩 $m_1=20$，$m_2=15$，$m_3=10$(kg)，${}^C Izz_1=0.5$，${}^C Izz_2=0.2$，${}^C Izz_3=0.1$(kgm^2)。假定每个连杆的重心在其几何中心处，并且假定重力作用在运动平面的-Y方向上。

1）编写逆动力学程序，计算所需的关节驱动力矩。利用给定的运动指令为：$\Theta=[10^o\ \ 20^o\ \ 30^o]^T$，$\dot{\Theta}=[1\ \ 2\ \ 3]^T$（rad/s），$\ddot{\Theta}=[0.5\ \ 1\ \ 1.5]^T$（rad/$s^2$）；

2) 用函数rne()和gravload()对结果进行验证。

D-H表：

j	theta	d	a	alpha	offset
1	q_1	0	0	0	0
2	q_2	0	4	0	0
3	q_3	0	3	0	0

实验结果：

1）

```
>> tau = three_dof_reverse_dynamics([10;20;30],[1;2;3],[0.5;1;1.5]);
     tau = 851.7198  636.6980  296.7687
```

2）

```
robot =Plan3R: 3 axis, RRR, modDH, slowRNE
```

末端位姿　t0 =

0.5000	-0.8660	0	6.537
0.8660	0.5000	0	2.195
0	0	1	0
0	0	0	1

力矩　tau = 851.7198　636.6980　296.7687

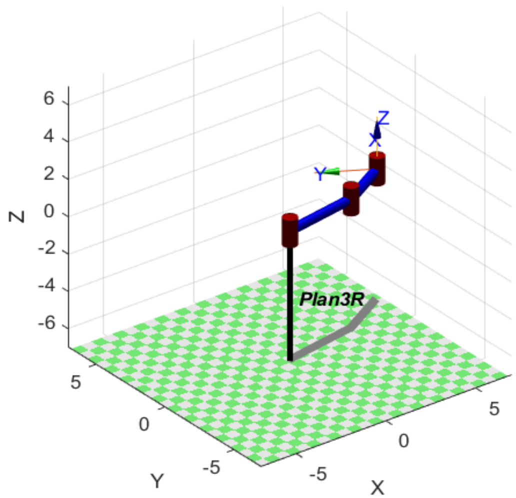

图4.13 逆向动力学机械臂运动

本章总结：

- 研究刚体动力学问题，着重分析了机器人机械手动力学方程的两种求法：

  拉格朗日平衡法

  牛顿—欧拉动态平衡法

$$\tau = \boldsymbol{M}(q)\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{V}(q, \dot{q}) + \boldsymbol{G}(q)$$

- 在分析二连杆机械手的基础上，总结出建立拉格朗日方程的步骤，并据之计算出机械手连杆上一点的速度、动能和位能，进而推导出机械手的动力学方程。

- 机械手的动静态特性