第四章 n维向量与线性方程组
第二节：向量组的线性相关性
第三节：向量组的秩

董荣
数学与统计学院

作业：

习题4.3

(A) 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(B) 1, 2

主要内容

1.线性相关与线性无关的判别

2.向量组的极大无关组

3.向量组的秩的定义

4.向量组的秩与矩阵的秩的关系

回顾：

定理4.2.2 矩阵A的列向量组线性相关(线性无关)

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$Ax=0$有非零解(只有零解)

$\Leftrightarrow$ A的秩小于其列数(A为列满秩矩阵)

推论4.2.1 n个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关(线性无关)

$\Leftrightarrow$ 行列式$\det\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}=0(\neq 0)$

推论4.2.2 若$s>n$,则s个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$必线性相关.

特别地,$n+1$个n维向量必线性相关.

有关线性相关与线性无关的常用性质及判别法

一个向量α线性相关：$\exists$常数$k \neq 0$,使得$k\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$

定理4.2.3 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$线性相关$\Leftrightarrow$至少有一个向量可由其余s−1个向量线性表示.

证： 充分性是显然的，我们来证明必要性：

若$\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_s$线性相关$\Rightarrow k_1\alpha_1 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s = 0$

其中$k_1, \cdots, k_i, \cdots, k_s$至少有一个不为零，不妨设 $k_i \neq 0$

$$\Rightarrow k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_s\alpha_s = -k_i\alpha_i$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{k_1}{-k_i}\alpha_1 + \cdots + \frac{k_{i-1}}{-k_i}\alpha_{i-1} + \frac{k_{i+1}}{-k_i}\alpha_{i+1} + \cdots + \frac{k_s}{-k_i}\alpha_s$$ 得证

推论 向量组线性无关$\Leftrightarrow$任何一个向量都不能由其余向量线性表示.

由定理4.2.3知,两个向量α_1与α_2线性相关

$\Leftrightarrow \alpha_1 = k\alpha_2$或$\alpha_2 = \lambda\alpha_1$ 至少有一个成立

$\Leftrightarrow \alpha_1$与α_2的对应分量成比例.

例: $(1,2,3)^T$与$(2,4,6)^T$线性相关,

$(1,2,3)^T$与$(-1,0,2)^T$线性无关.

定理4.2.4 如果向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而向量组 $B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则 β 可由 A 唯一线性表示.

证： 先证可线表： 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k\beta=0$

$\because$ 向量组 B 线性相关 $\Longrightarrow$ $k_1, \ldots, k_r, k$ 不全为零. 而 A 线性无关，

$\therefore k\neq 0$，（否则与 A 线性无关矛盾）

即有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=-k\beta$

$$\Rightarrow \beta=\frac{k_1}{-k}\alpha_1+\frac{k_2}{-k}\alpha_2+\cdots+\frac{k_r}{-k}\alpha_r$$ $\therefore$ β 可由 A 线性表示.

再证唯一性：设 $\beta=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$； $\beta=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_r\alpha_r$

两式相减有 $(\lambda_1-\mu_1)\alpha_1+(\lambda_2-\mu_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_r-\mu_r)\alpha_r=0$

$\because$ A 线性无关，$\therefore \lambda_1-\mu_1=0,\lambda_2-\mu_2=0,\cdots\lambda_r-\mu_r=0$

$\therefore \lambda_1=\mu_1,\lambda_2=\mu_2,\cdots\lambda_r=\mu_r$ 即表达式唯一.

定理4.2.5 如果向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 有一个部分组线性相关，则向量组 A 也线性相关.

证： 设向量组A:的部分组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则有不全为零的常数 $k_1,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

$$\Rightarrow k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+0\alpha_{s+1}+\cdots+0\alpha_r=0$$

由 $k_1,\cdots,k_s,0,\cdots,0$ 不全为零,$\Rightarrow$ A线性相关.

推论： 如果向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 则它的任何部分组也线性无关.

定理4.2.5 如果向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 有一个部分组线性相关，则向量组 A 也线性相关.

1）特别的，含有零向量的向量组线性相关, 线性无关向量组不含零向量.

2）定理4.2.5 常说成: 部分线性相关，则整体线性相关；整体线性无关，则部分线性无关。

例: 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,又$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.问$\alpha_4$能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示？为什么？

解: 已知$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，由定理4.2.5知，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关。由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故由定理4.2.4知，$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

回顾：**定理4.2.4** 如果向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而向量组 $B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则 β 可由 A 唯一线性表示.

主要内容

1.线性相关与线性无关的判别

2.向量组的极大无关组

3.向量组的秩的定义

4.向量组的秩与矩阵的秩的关系

2. 向量组的极大线性无关组

定义4.3.1 (极大无关组) 如果向量组U有一个部分组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) U中的任意向量α都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示,

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为$U$的一个极大线性无关组，简称为极大无关组.

显然，向量组U与它的极大无关组等价

若U线性无关，则其极大无关组就是U本身

问题：如果U的极大无关组不唯一，不同的极大无关组所含向量个数是否相同?

定理4.3.2 设有两个向量组:

$$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s;\qquad (\mathrm{II}):\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r;$$

且(I)可由(II)线性表示,则

(1) 当$s>r$时,(I)线性相关;

(2) 当(I)线性无关时,必有$s\le r$.

证: （2）是（1）的逆否命题，因此，我们只需要证明（1）

简单起见，我们以$s=3,r=2$为例来证明（一般情况可类似证明）

由于（I）可由（II）线性表示，从而存在常数 $c_{ij}\ (i=1,2;j=1,2,3)$ ，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_1=c_{11}\boldsymbol{\beta}_1+c_{21}\boldsymbol{\beta}_2,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2=c_{12}\boldsymbol{\beta}_1+c_{22}\boldsymbol{\beta}_2,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=c_{13}\boldsymbol{\beta}_1+c_{23}\boldsymbol{\beta}_2$$

定理4.3.2 设有两个向量组:

$$(\mathrm{I}): \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s; \qquad (\mathrm{II}): \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_r;$$

且(I)可由(II)线性表示,则

(1) 当$s > r$时,(I)线性相关;

(2) 当(I)线性无关时,必有$s \leq r$.

写成矩阵形式: $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] = [\beta_1 \quad \beta_2] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$

或 $A = BC$.

由于矩阵C的行数小于其列数，我们可知$Cx = 0$有非零解，不妨记为x_0，从而有$Ax_0 = BCx_0 = 0$. 这说明$Ax = 0$有非零解，从而矩阵A的列向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关。

定理4.3.2 设有两个向量组:

$$(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s;\qquad (\mathrm{II}):\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r;$$

且(I)可由(II)线性表示,则

(1) 当$s>r$时,(I)线性相关;

(2) 当(I)线性无关时,必有$s\le r$.

推论4.3.1 如果(I)、(II)都是线性无关组,且(I)与(II)等价,则(I)与(II)所含向量个数必相同.即两个等价的线性无关组所含向量个数相同.

推论4.3.1' 设(I)、(II)都是向量组U的极大无关组,则(I)与(II)所含向量个数必相同.

主要内容

1.线性相关与线性无关的判别

2.向量组的极大无关组

3.向量组的秩的定义

4.向量组的秩与矩阵的秩的关系

3. 向量组的秩的定义

定义4.3.2（向量组的秩） 如果向量组U仅含零向量，规定U的秩为零；否则，称向量组U的极大无关组所含向量的个数称为**向量组U的秩**(rank)，记为$r(U)$.

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性无关} \Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\text{线性相关} \Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$$

推论4.3.2 设$r(U)=r$，则U中任何r个线性无关的向量所构成的向量组都可以作为U的极大无关组.

主要内容

1.线性相关与线性无关的判别

2.向量组的极大无关组

3.向量组的秩的定义

4.向量组的秩与矩阵的秩的关系

4. 向量组的秩与矩阵的秩的关系

定义 称一个矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

的列向量组的秩为A的**列秩**；称A的行向量组的秩为A的**行秩**.

定理4.3.1 (矩阵三秩相等) 对任何矩阵A，有

$$r(A) = A\text{的列秩} = A\text{的行秩}$$

定理4.3.1 (矩阵三秩相等)对任何矩阵A，有

$$r(A) = A\text{的列秩} = A\text{的行秩}$$

证明思路: 因为$r(A) = r\left(A^T\right)$，故只需证明 $r(A) = A$的列秩 即可。

设矩阵A的秩为r，则在A中存在r阶子式$D_r \neq 0$，并且A中所有$r+1$阶子式（如果存在）全都为零。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

由$D_r \neq 0$，知A中由D_r所在的r列所构成的子矩阵的秩为r，于是D_r所在的r列线性无关。

因为A中任意$r+1$阶子式都为零，知从A中任取$r+1$个列所构成的子矩阵的秩小于$r+1$，进而这$r+1$列线性相关。

因此，D_r所在的r列为A的列向量组的极大无关组，从而A的列秩为r。

例：已知两个向量组

（I）$:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^T$

（II）$:\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^T,\ \boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^T$

（1）求向量组（I）的秩；

（2）如果向量组（II）与向量组（I）有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由（I）线性表示，试求常数a,b的值。

解:（1）$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

故向量组(I)的秩r(I)=2，同时我们也可以看出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为(I)的一个极大无关组。

例： 已知两个向量组

（I）：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(9,6,-7)^T$

（II）：$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^T,\ \boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^T$

（1）求向量组（I）的秩；

（2）如果向量组（II）与向量组（I）有相同的秩，且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由（I）线性表示，试求常数a,b的值。

解: (2) 由条件r(II)=r(I)=2，可知向量组(II)线性相关，从而

$$\det[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=0,\ \text{由此解得}a=3b$$

$\boldsymbol{\beta}_3$ 可由(I)线性表示，从而 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由(I)的极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关，从而有

$$\det[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{vmatrix}1&3&b\\2&0&1\\-3&1&0\end{vmatrix}=0,\quad \text{由此解得}b=5\text{，进而}a=3b=15$$

例：求向量组(I): $\boldsymbol{\alpha_1}=(1,-2,0,3)^T,\boldsymbol{\alpha_2}=(2,-5,-3,6)^T$，$\boldsymbol{\alpha_3}=(0,1,3,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha_4}=(2,-1,4,-7)^T,\boldsymbol{\alpha_5}=(5,-8,1,2)^T$的一个极大无关组，并用极大无关组线性表示该组中其它向量。

解：以向量组(I)为矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组来构造矩阵$\boldsymbol{A}$，并用初等行变换将$\boldsymbol{A}$化成阶梯型矩阵

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha_1}\quad\boldsymbol{\alpha_2}\quad\boldsymbol{\alpha_3}\quad\boldsymbol{\alpha_4}\quad\boldsymbol{\alpha_5}]=\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\-2&-5&1&-1&-8\\0&-3&3&4&1\\3&6&0&-7&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&-3&3&4&1\\0&0&0&-13&-13\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&0&0&-5&-5\\0&0&0&-13&-13\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{-13}{5}r_3}\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&0&0&-5&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

故向量组(I)的秩为3，并且$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_4}$为(I)的一个极大无关组。

例： 求向量组(I): $\boldsymbol{\alpha_1}=(1,-2,0,3)^T, \boldsymbol{\alpha_2}=(2,-5,-3,6)^T$，$\boldsymbol{\alpha_3}=(0,1,3,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha_4}=(2,-1,4,-7)^T, \boldsymbol{\alpha_5}=(5,-8,1,2)^T$的一个极大无关组，并用极大无关组线性表示该组中其他向量。

再进一步把矩阵B化成简化行阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0&2&5\\0&-1&1&3&2\\0&0&0&-5&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&2&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

为了用$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_4}$线性表示$\boldsymbol{\alpha_3}$，求线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+x_3\boldsymbol{\alpha_4}=\boldsymbol{\alpha_3}$

$$[\boldsymbol{\alpha_1}\quad\boldsymbol{\alpha_2}\quad\boldsymbol{\alpha_4}\,\vdots\,\boldsymbol{\alpha_3}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

解得$x_1=2,x_2=-1,x_3=0$，所以$\boldsymbol{\alpha_3}=2\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2}$，同样，可得$\boldsymbol{\alpha_5}=\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_4}$.

定理4.3.3 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则$r(I)\le r(II)$.

证： 设(I)(II)的极大无关组分别为(I′)(II′)，由于向量组的极大无关组与向量组本身等价，故(I′)可由(II′)线性表示。

(I′)是线性无关的，由定理4.3.2知(I′)所含向量个数小于等于(II′)所含向量个数，从而$r(I)\le r(II)$.

推论4.3.3 若(I)与(II)等价，则$r(I)=r(II)$.