

西安交通大学考试题

成绩

课 程 复变与积分变换

系 别 _____

考试日期 2008 年 1 月 16 日

专业班号 _____

姓 名 _____

学 号 _____ 期中 ☐ 期末 ☒

一. 填空题(直接将结果写在横线上;每小题4分)

1. $(1+i)^{1/3} =$ _____

2. $i^{i+1} =$ _____

3. 设 S_r 为曲线 $z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$, 其中 $r > 0$ 为一常数, 则 $\int_{S_r} \frac{\cos z - 1}{z} dz$
= _____

4. 设 $z = x + iy, f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____, $d =$ _____。

5. $\int_{|z|=2} \frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3} dz =$ _____。

二. 解答题(每小题5分)

1. 计算积分 $\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2 + 1} dz$ 。 2. 计算积分 $\int_{|z|=1} \frac{chz}{z^{n+1}} dz$, 其中 n 为正整数。

3. 证明 $\sin(in), (n = 1, 2, \dots)$, 是一个无界数列, 并判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(in)}{n^2}$ 的敛散性。

4. 设 a 是一个非零的复常数, 试求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$ 的收敛半径。

5. 设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, 问 z_0 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的什么样的奇点, 并求 $\text{Res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0 \right]$ 。

6. 讨论函数 $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ 的连续性、可导性与解析性。

7. 求直线 $Im(z) = 0$ 在映射 $w = \frac{z-i}{z+i}$ 下的像曲线。

8. 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$ 。

三. (6分) 求一个共形映射, 使在该映射下, 区域 $\{z: |z| < 1, Re(z) > 0, Im(z) > 0\}$ 与区域 $\{w: |w| < 1\}$ 是一一对应。

四. (6分) 将函数 $f(z) = (1+z^2)^{-2}$ 分别在 $|z| < 1$ 以及 $|z-i| < 2$ 内展开为幂级数。

五. 计算题. (每小题4分) 1. 求 Fourier 变换 $\mathcal{F}[e^{-|t|}]$ 。

2. 求 Fourier 变换 $\mathcal{F}[\cos t \sin(3t)]$ 。

3. 已知 $f(t) = e^{-t} u(2t) \sin(3t)$, 求其 Fourier 变换 $\mathcal{F}[f(t)]$ 。

4. 求 Laplace 变换 $\mathcal{L}[\sin(t - \frac{\pi}{3})]$ 。

5. 求 Laplace 逆变换 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4a^3}{s^4 + 4a^4}\right]$, 其中 $a > 0$ 为实常数。

6. 求函数 $f(t) = t \cdot u(t)$ 与 $g(t) = \sin t \cdot u(t)$ 的卷积 $f * g$ 。

7. 用 Laplace 变换求解方程 $\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2e^{-t/2} + t, & (t > 0) \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$