Date:

11. (5) 证明 R是传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明: $\Rightarrow$

$\forall x, y \in A$

$(\exists z \in A)(xRz \wedge zRy)$

$\Rightarrow (x, y) \in R$ (由 R是传递的)

所以 $R \circ R \subseteq R$

$\Leftarrow$ $\forall x, y, z \in A$

$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$

$\Rightarrow (x, z) \in R \circ R$

$\Rightarrow (x, z) \in R$ ($R \circ R \subseteq R$ 条件)

所以 R是传递的

17. (1) 真 $\forall x \in A$,

$(x, x) \in R_1 \wedge (x, x) \in R_2$

$\Rightarrow (x, x) \in R_1 \circ R_2$

所以 $R_1 \circ R_2$ 是自反的

(2) 假 $R_1 = \{(1, 2)\}$, $R_2 = \{(2, 1)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(1, 1)\}$ 不是反自反

No: ______

Date: ______

(3) 假设 $R_1=\{(1,2),(2,1)\}$

$R_2=\{(2,3),(3,2)\}$

$R_1\circ R_2=\{(1,3)\}$ 不是对称关系

(4) 假设 $R_1=\{(1,3),(2,4)\}$

$R_2=\{(3,2),(4,1)\}$

$R_1\circ R_2=\{(1,2),(2,1)\}$ 不是反对称关系

(5) 假设 $R_1=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,4)\}$

$R_2=\{(3,4),(4,5),(5,6)\}$

$R_1\circ R_2=\{(2,4),(3,5),(4,5),\}$ 不是传递关系

19. (1) $(1,2)\in R$

$(2,4)\in R$

$(1,4)\notin R$

(2) $|A|=4$

$R^2=\{(1,4),(2,3),(3,4),(4,4)\}$ $R^4=\{(1,4),(2,4),(3,4),($

$R^3=\{(1,3),(2,4),(3,4),(4,4)\}$

$R_1=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,3),(4$

No:

Date:

(3) 能. $R_2=A\times A$ 上的全关系.

23. (1) 证明:

① 自反性: $\forall x\in A$

$(x,x)\in R_1 \wedge (x,x)\in R_2$

$\Rightarrow (x,x)\in(R_1\cap R_2)$

所以 $R_1\cap R_2$ 是自反的.

② 对称的 $\forall\ x,y\in A$

$(x,y)\in(R_1\cap R_2)$

$\Rightarrow (x,y)\in R_1 \wedge (x,y)\in R_2$

$\Rightarrow (y,x)\in R_1 \wedge (y,x)\in R_2$ (条件 R_1, R_2 对称)

$\Rightarrow (y,x)\in(R_1\cap R_2)$

所以 $R_1\cap R_2$ 是对称的

③ 传递性: $\forall\ x,y,z\in A$

$(x,y)\in R_1\cap R_2 \wedge (y,z)\in R_1\cap R_2$

$\Rightarrow ((x,y)\in R_1 \wedge (x,y)\in R_2) \wedge ((y,z)\in R_1 \wedge (y,z)\in R_2)$

$\Rightarrow (((x,y)\in R_1 \wedge (y,z)\in R_1) \wedge ((x,y)\in R_2 \wedge (y,z)\in R_2)$

$\Rightarrow (x,z)\in R_1 \wedge (x,z)\in R_2$

$\Rightarrow (x,z)\in(R_1\cap R_2)$

所以 $R_1\cap R_2$ 是传递的

综上, $R_1\cap R_2$ 是等价关系.

扫描全能王 创建

(2) $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

$R_1\cup R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

不传递

$R_1\cup R_2$ 不是等价关系

20.(1) 证明:自反关系

$\forall a,b\in A$

$(a,b)\in A\times A$

有 $a+b=a+b$

$\Rightarrow (a,b)R(a,b)$

所以 R是自反关系

证明:对称关系

$\forall a,b,c,d\in A$

$(a,b)R(c,d)$

$\Rightarrow a+d=b+c$

$\Rightarrow b+c=a+d$

$\Rightarrow (c,d)R(a,b)$

所以 R是对称关系

证明:传递关系

$\forall a,b,c,d,e,f\in A$

$(a,b)R(c,d)\wedge(c,d)R(e,f)$

$\Rightarrow a+d=b+c\wedge c+f=e+d$

$\Rightarrow a-b=c-d\wedge f-e=c-d$

$\Rightarrow a+f=b+e$

$\Rightarrow (a,b)R(e,f)$

所以R是传递关系

R是 $A\times A$ 上的等价关系

Date:

(2) 求 $[(2,5)]_R$

$2+d=5+c$

$d-c=3$

所以 $[(2,5)]_R=\{(2,5),(1,4),(3,6),(4,7),(5,8),(6,9)\}$

(3) 不对.

$R\subseteq(A\times A)\times(A\times A)$

22. 设R是非空集合A上的等价关系. 证明 $\tilde{R}$ 也是集合A上的等价关系.

证明: 自反关系

$\forall x\in A$

xRx (R是A上的等价关系)

$\Rightarrow (x,x)\in R$

$\Rightarrow (x,x)\in \tilde{R}$

$\tilde{R}$ 是自反关系

Date:

证明 $\tilde{R}$是对称关系

$\forall\ x,y \in A$

$xRy \wedge yRx$

$\Rightarrow (x,y)\in R \wedge (y,x)\in R$

$\Rightarrow (y,x)\in \tilde{R} \wedge (x,y)\in \tilde{R}$

$\Rightarrow (x,y)\in \tilde{R} \wedge (y,x)\in \tilde{R}$

所以 $\tilde{R}$是对称关系

证明 $\tilde{R}$是 传递关系

$\forall\ x,y,z \in A$

$(x,y)\in \tilde{R} \wedge (y,z)\in \tilde{R}$

$\Rightarrow (y,x)\in R \wedge (z,y)\in R$

$\Rightarrow (z,y)\in R \wedge (y,x)\in R$ （R是 传递关

$\Rightarrow (z,x)\in R$

$\Rightarrow (x,z)\in \tilde{R}$

所以 $\tilde{R}$是 传递关系

综上 $\tilde{R}$是等价关系

Date:

29. 设R是非空集合A上的二元关系，若$(\forall a,b,c \in A)$
$(aRb \wedge bRc \Rightarrow cRa)$则称$R$是循环关系.

证明，R是自反的和循环的当且仅当R是等价关系.

证明：$\Rightarrow$ ① R是自反的（已知条件）

② 证明R是对称的

$\forall a,b \in A$.

$(a,b) \in R$

$\Rightarrow (a,b) \in R \wedge (b,b) \in R$ （R是自反的）

$\Rightarrow (b,a) \in R$ （R是循环的）

所以，R是对称的

③ 证明R是传递的

$\forall a,b,c \in A$

$aRb \wedge bRc$

$\Rightarrow cRa$ （R是循环的）

$\Rightarrow aRc$ （R是对称的）

所以，R是传递的

综上，R是等价的

① 证明：R是自反的。(已知条件R是等价关系，必自反)

② 证明：R是循环的

$\forall a,b,c \in A$

$aRb \land bRc$

$\Rightarrow aRc$ (R是传递关系)

$\Rightarrow cRa$ (R是对称关系

所以R是循环的

综上，R是自反的和循环的当且仅当R是等价关系

补充题：设 $R \subseteq A\times A$ $(A\neq\emptyset)$ 是A上的拟序关系，请问R是反对称的吗？给出理由。

R是反对称的。

证明：

反证法：假设R不是反对称的。

$\exists\ x,y \in A$

$(x,y)\in R \land (y,x)\in R$

$\Rightarrow (x,x)\in R$ (R是传递关系)

与 $(x,x)\notin R$ 矛盾 (R是反自反关系)

所以R是反对称的。