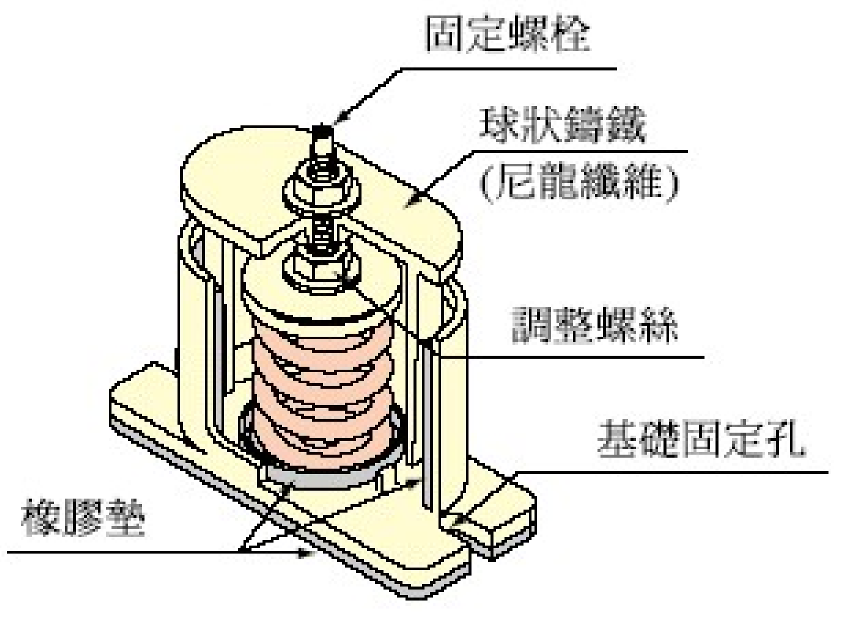
系统建模与动力学分析

学　时　数：48学时
学　　　分：3
任课教师：闫　涛
工作单位：电信学部自动化学院综合所
办公地点：兴庆校区东二楼361
　　　　　创新港4-6168
邮　　　箱：yantao@xjtu.edu.cn

隔　振

- 振动可能导致零件损坏，产生噪音，把力传到地基上等。
- 为了尽可能的减少由于机械的振动而传到地基上力的数值（力的隔离），机器一般是支撑在隔振器上。
- 同样，为了减少由于地基的运动而传到精密仪器的运动值（运动的隔离），也需要把仪器支撑在隔振器上。
- 隔振器 (Vibration Isolator) 由弹簧和阻尼器组成。



隔　振

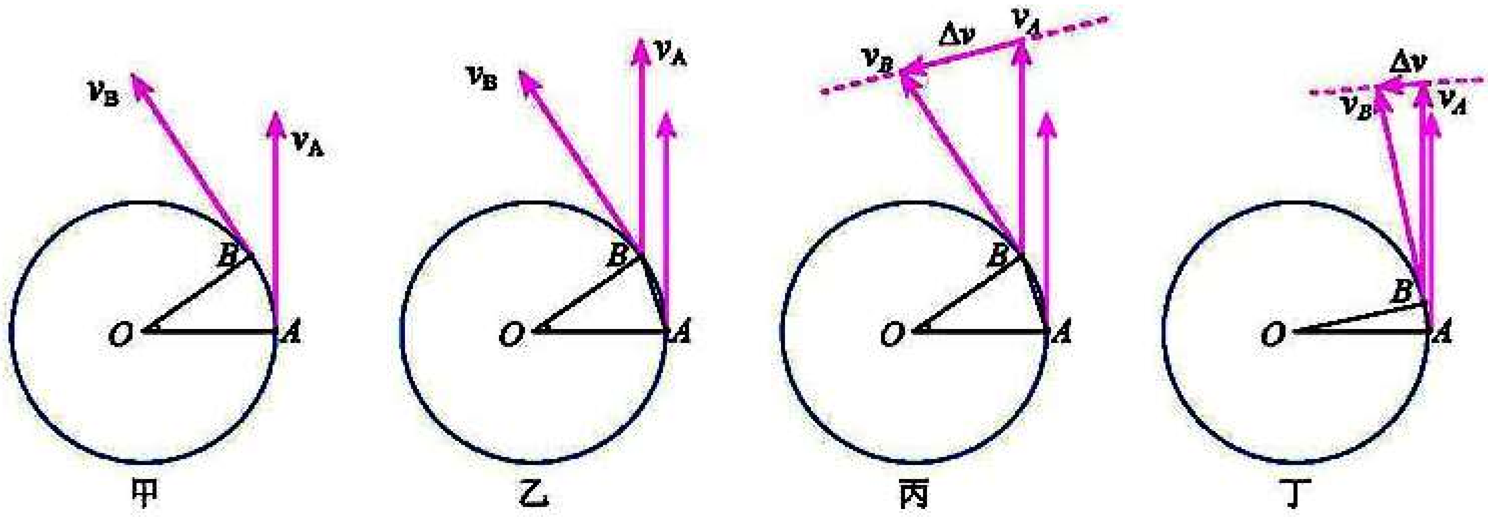
- 向心力 (Centripetal Force) 和离心力 (Centrifugal Force)
- 假定质量 m 以常速度沿圆轨迹运动，点质量必须具有一加速度指向旋转中心点。
- 为产生这加速度，必须要有一质量乘加速度的力。
- 如果加速度是指向中心，其反作用力是指向外，而大小等于此中心方向的力，向着中心方向的作用力称为向心力，而反向的惯性反作用力称为离心力。
- 向心加速度推导
- 由于三角形 OAB 和 APQ 是相似的

$$|\Delta v|/|v_A| \approx r\Delta\theta/r$$

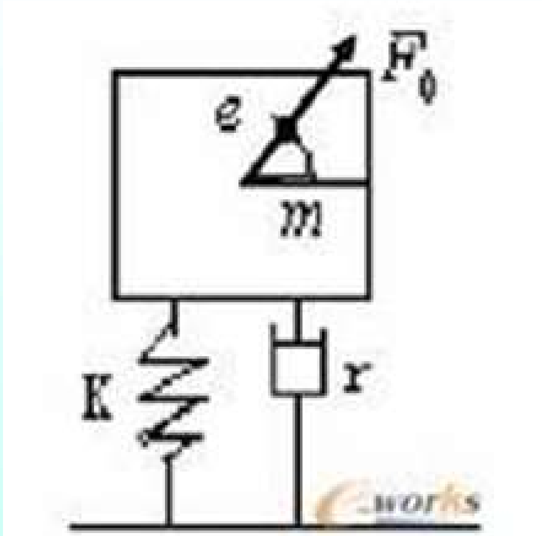
- 其中 $|v_A| = \omega r$，$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta\theta / \Delta t)$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|v_A| r\Delta\theta}{r\Delta t} = \omega^2 r$$

隔　振



- 由于旋转不平衡而引起的振动
- 如果一个旋转刚体的质量中心与旋转中心不重合，就会产生旋转不平衡。
- 如右图所示，假定转子以常速度ω rad/s旋转，不平衡质量m位于距离旋转中心为r的地方，不平衡质量将产生一大小为$m\omega^2 r$的离心力。



隔　振

- 仅分析垂直方向上的运动，离心力的垂直分量 $m\omega^2 r\sin\omega t$ 作用在轴承上，并通过它传到地基上，因此有可能使机器产生过度的振动。

- 假定系统总质量是 M，不平衡质量为 m，没有激励时的平衡位移为 x，系统运动方程为

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = p(t) \qquad p(t) = m\omega^2 r\sin\omega t$$

- 对上式两边取拉氏变换并假定初始条件为零。

$$(Ms^2 + bs + k)X(s) = P(s) \Rightarrow \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

- 正弦传递函数为

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} = \frac{1}{-M\omega^2 + bj\omega + k}$$

隔　振

- 相应的稳态输出为

$$x(t) = X\sin(\omega t+\varphi) = \left|G(j\omega)\right| m\omega^2 r\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{b\omega}{k-M\omega^2}\right)$$

$$= \frac{m\omega^2 r}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+b^2\omega^2}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{b\omega}{k-M\omega^2}\right)$$

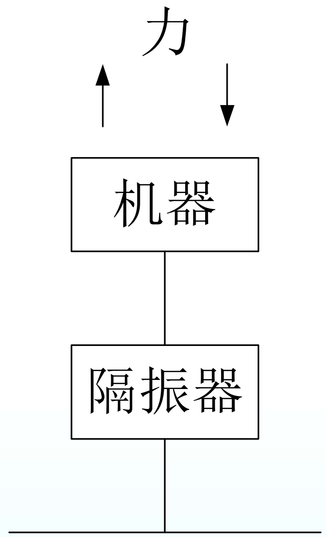
- 把 $k/M=\omega_n^2$ 和 $b/M=2\zeta\omega_n$ 代入上式

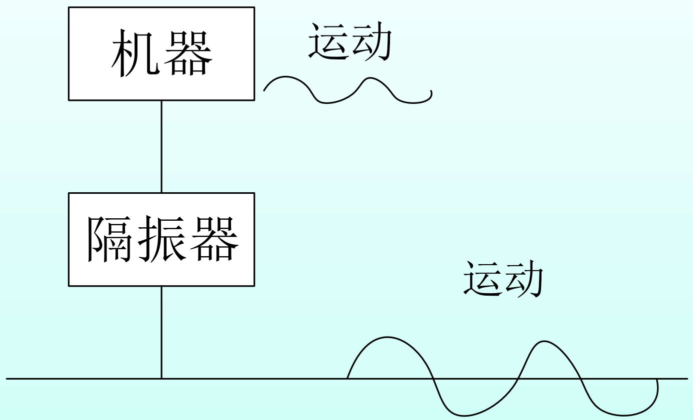
$$x(t) = \frac{m\omega^2 r/k}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_n^2)^2+(2\zeta\omega/\omega_n)^2}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}\right)$$

- 由上式可见，当阻尼比 ζ 很小和激励力频率 ω 接近于固有频率 ω_n 时，稳态的输出振幅会变得很大。

隔　振

- 隔振(Vibration Isolation)是使振动作用减小或消除的过程。
- 隔振器的作用是减小从机器传到地基上的力或减小由振动地基传到机器上的运动。
- 右图表示振动源是由机器内部产生的振动力（力的激励）。隔振器减小传到地基上的力。
- 右下图中振动源是地基的振动运动（运动的激励）。隔振器减小机器的振幅。
- 隔振器基本上是由有弹性的载荷支承装置（例如弹簧）和能量耗散装置（例如阻尼器）所组成。
- 在分析中假定给出的机器和地基是刚性的，而隔振器假定是无质量的。

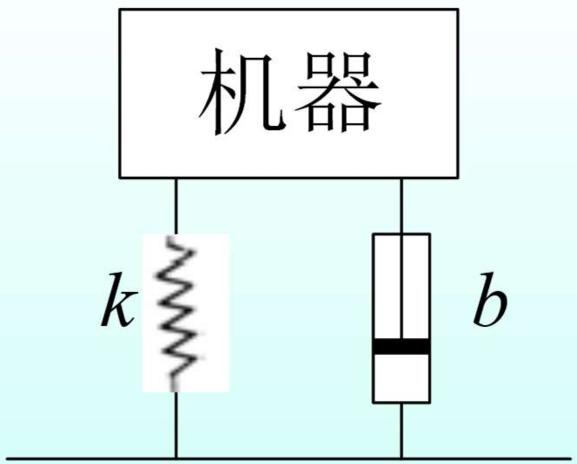




隔　振

- **可传性：** 一个隔振器的可传性是其减小传递力或运动能力的一种度量。
- 如果振动源是由于机器的不平衡所引起的振动力（力的激励），可传性是传到地基上的力振幅与激励力振幅之比。
- 如果振动源是地基的振动运动（运动的激励），可传性是机器的振幅与地基的振幅之比。
- **力的激励的可传性**——振动源是由机器的不平衡所引起的振动力。

$$\text{可传性} = TR = \frac{F_t}{F_o} = \frac{\text{传递力的振幅}}{\text{激励力的振幅}}$$



隔　振

- 激励力（在垂直方向上）是由机器的不平衡质量所引起

$$p(t)=m\omega^2 r\sin\omega t$$

- 系统的运动方程式为

$$M\ddot{x}+b\dot{x}+kx=p(t)$$

- 传递到地基上的力是阻尼力和弹簧力之和

$$f(t)=b\dot{x}+kx=F_t\sin(\omega t+\phi)$$

- 对上两式取拉氏变换并假定初始条件为零

$$(Ms^2+bs+k)X(s)=P(s) \qquad (bs+k)X(s)=F_t(s)$$

$$\frac{F_t(s)}{P(s)}=\frac{bs+k}{Ms^2+bs+k}$$

- 相应的正弦传递函数是

隔 振

$$\frac{F_t(j\omega)}{P(j\omega)}=\frac{bj\omega+k}{-M\omega^2+bj\omega+k}=\frac{(b/M)j\omega+(k/M)}{-\omega^2+(b/M)j\omega+(k/M)}$$

- 把 $k/M=\omega_n^2$ 和 $b/M=2\zeta\omega_n$ 代入上式

$$\frac{F_t(j\omega)}{P(j\omega)}=\frac{1+j(2\zeta\omega/\omega_n)}{1-(\omega^2/\omega_n^2)+j(2\zeta\omega/\omega_n)}$$

- 最终可求得可传性如下：

$$TR=\frac{F_t}{F_o}=\left|\frac{F_t(j\omega)}{P(j\omega)}\right|=\frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \qquad \beta=\omega/\omega_n$$

- 从上式可知可传性与 β 和 ζ 两者均有关。关系曲线如图7-36所示。从图中可以看出

隔 振

- 1. 当$\beta=2^{1/2}$时，不管阻尼比ζ为何值，TR始终等于1，因此所有曲线通过临界点$TR=1$，$\beta=2^{1/2}$。
- 2. 当$\beta<2^{1/2}$时，阻尼比ζ增大，共振时的可传性减小，因此增加阻尼使隔振器得到改进。
- 3. 当$\beta>2^{1/2}$时，阻尼比ζ增大，可传性也增大，因此增加阻尼反而对隔振器的作用不利。
- 传到地基上的力的振幅是

$$F_t=|F_t(j\omega)|$$

$$=\frac{m\omega^2 r\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}}$$

- 运动激励的可传性
- ——汽车的悬挂系统

隔　振

- 简化模型如右图所示，系统的运动方程式是

$$m\ddot{x}+b(\dot{x}-\dot{y})+k(x-y)=0 \Rightarrow m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=b\dot{y}+ky$$

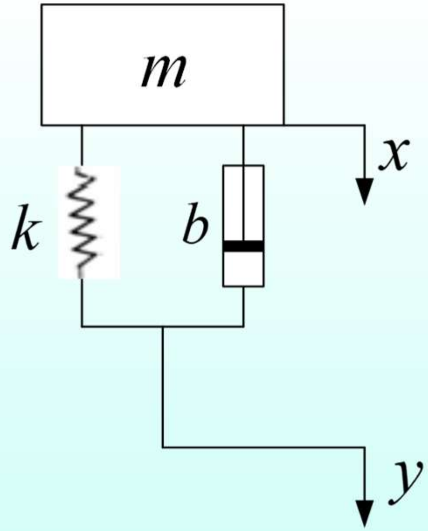
- 对上式进行拉氏变换,并假定初始条件为零

$$(ms^2+bs+k)X(s)=(bs+k)Y(s) \Rightarrow \frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

- 正弦传递函数是 $\dfrac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}=\dfrac{bj\omega+k}{-m\omega^2+bj\omega+k}$

- 那么

$$可传递性=TR=\frac{输出位移振幅}{输入位移振幅}$$



$$TR=\left|\frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)}\right|=\frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \qquad \beta=\omega/\omega_n$$

隔　振

- 地震仪——用于测量在地震时地面的位移
- 如图 7-40 所示，设质量 m 相对于惯性空间的位移用 x 表示，框架相对于惯性空间的位移用 y 表示。
- 位移 x 是当 $y=0$ 时从其平衡位置度量的，位移 y 是系统输入
- 这些位移，在框架的地震中接近于正弦的。$y(t)=Y\sin\omega t$
- 在地震仪中，我们测量在 x 和 y 之间的相对位移 $z=x-y$。
- 地震仪的运动方程式:

$$m\ddot{x}+b(\dot{x}-\dot{y})+k(x-y)=0$$

$$\Rightarrow m(\ddot{y}+\ddot{z})+b\dot{z}+kz=0$$

$$\Rightarrow m\ddot{z}+b\dot{z}+kz=-m\ddot{y}$$

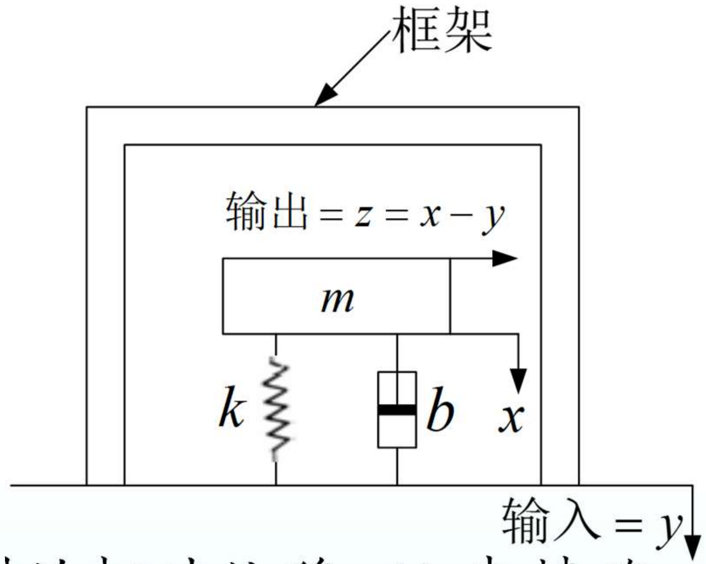
- 对上式取拉氏变换，并设初始条件为零。

隔　振

$$(ms^2+bs+k)Z(s)=-ms^2Y(s)$$

- 注意系统的输入是位移y，输出是相对位移z，传递函数为

$$\frac{Z(s)}{Y(s)}=\frac{-ms^2}{ms^2+bs+k}$$



- 正弦传递函数是

$$\frac{Z(j\omega)}{Y(j\omega)}=\frac{\beta^2}{1-\beta^2+j2\zeta\beta}$$

$$k/m=\omega_n^2 \quad b/m=2\zeta\omega_n \quad \beta=\omega/\omega_n$$

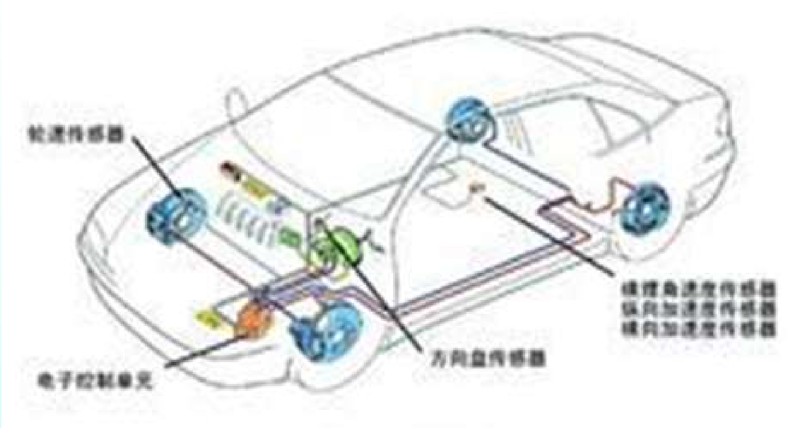
- 在地震仪中，我们希望根据所测量到的相对位移 $z(t)$ 来精确地决定输入位移$y(t)$，如果$\beta>>1$，上式可简化为

$$\frac{Z(j\omega)}{Y(j\omega)}\approx-\frac{\beta^2}{\beta^2}=-1$$

- 如果$\beta>>1$即$\omega>>\omega_n$，则地震仪能够精确测量并记录其框架y的位移。

隔　振

- 事实上，对于 $\omega >> \omega_n$，质量 m 在空间中接近维持固定不动，而框架的运动可以看成是质量和框架之间的相对运动。
- 为了实现条件 $\omega >> \omega_n$，我们需要选择无阻尼固有频率 ω_n，使其尽可能的低（在静变形许可的范围内，选择尽可能大的质量和弹性尽可能软的弹簧）。
- 加速度计——通过测量相对位移来测量系统的加速度
- 原理图形基本与地震仪相同，但其本质上的区别是在于对无阻尼固有频率 ω_n 的选择。



- 加速度计的系统模型与地震仪相同，但此时输入是加速度，故它的传递函数为

$$\frac{Z(s)}{s^2Y(s)} = \frac{-m}{ms^2+bs+k} = \frac{-1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

隔　振

- 如果无阻尼固有频率 ω_n 比输入频率 ω 足够大，位移 z 接近于正比 $\ddot{y}$。

$$\frac{Z(s)}{s^2Y(s)} \approx \frac{1}{\omega_n^2}$$

- 动力吸振器
- 一个旋转机器，由于转子的不平衡质量会引起一个较大的力传到地基上。
- 动力吸振器安装在机器上来消除大的传递力。
- 动力吸振器使整个系统变成具有两个固有频率的两个自由度系统，为了减小或接近消除传递力，固有频率之一是位于工作频率之上，而另一个是在其之下。例如飞机尾部的吸振器。

- 本部分我们仅讨论简单的动力吸振器，它将减小垂直方向传递到地基上的力。

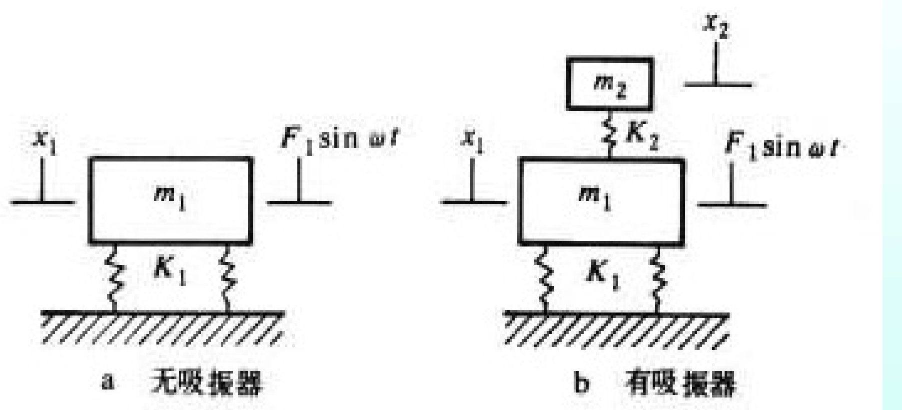
隔 振

- 使用动力吸振器来减小振动
- 假设激励力是 $P(t)=P\sin\omega t$，其中 $P=m\omega^2 r$。通过前述分析，我们可知激励力是以

$$\frac{m\omega^2 r\sqrt{k^2+b^2\omega^2}}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+b^2\omega^2}}$$

为振幅的正弦力传递到地基上。

- 如果粘性阻尼系数 b 非常小，其系统的固有频率 ω_n 等于激励频率 ω，发生共振，机器会受到强烈的振动，传递力变得非常大。
- 在这种情况下，可以将由一个质量 m_a 和一个弹簧 k_a 组成的动力吸振器附加在机器上以减小振动。



动力吸振器原理图

隔　振

- 对于图7-42(b)的系统的运动方程式是

$$M\ddot{x}+b\dot{x}+kx+k_a(x-y)=p(t)=P\sin\omega t$$

$$m_a\ddot{y}+k_a(y-x)=0$$

- 其中x和y分别是质量M和质量m_a在没有激励力$p(t)$下从其平衡位置测量的位移。

- 对上两个方程取拉氏变换且假设初始条件为零。

$$(Ms^2+bs+k+k_a)X(s)-k_aY(s)=P(s)$$

$$(m_as^2+k_a)Y(s)-k_aX(s)=0$$

$$\Rightarrow\left(Ms^2+bs+k+k_a-\frac{k_a^2}{m_as^2+k_a}\right)X(s)=P(s)$$

$$\Rightarrow\frac{X(s)}{P(s)}=\frac{m_as^2+k_a}{(Ms^2+bs+k+k_a)(m_as^2+k_a)-k_a^2}$$

隔　振

- 相应的正弦传递函数是

$$\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)}=\frac{-m_a\omega^2+k_a}{(-M\omega^2+bj\omega+k+k_a)(-m_a\omega^2+k_a)-k_a^2}$$

- 如果粘性阻尼系数b小得可以忽略，那上式变为

$$\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)}\approx\frac{-m_a\omega^2+k_a}{(-M\omega^2+k+k_a)(-m_a\omega^2+k_a)-k_a^2}$$

- 注意，在实际系统中自由振动最后由于阻尼而消失，尽管其非常小，而受迫振动在稳态时可以由上式来代替。
- 传递到地基上的力$f(t)$是

$$f(t)=kx+bx'\approx kx$$

- 此传递力的振幅是$k|X(j\omega)|$，其中

$$|X(j\omega)|=\left|\frac{k_a-m_a\omega^2}{(k+k_a-M\omega^2)(k_a-m_a\omega^2)-k_a^2}\right|\quad |P(j\omega)|=\left|\frac{m\omega^2r(k_a-m_a\omega^2)}{(k+k_a-M\omega^2)(k_a-m_a\omega^2)-k_a^2}\right|$$

隔　振

- 在上式中，如果m_a和k_a满足

$$k_a - m_a\omega^2 = 0$$

那么$|X(j\omega)|=0$，传递到地基上的力为零。

所以，如果动力吸振器的固有频率$\sqrt{k_a/m_a}$作成等于激励频率ω，我们有可能消除传递到地基上的力。

- 一般，这种动力吸振器仅用于在原有系统的固有频率$\sqrt{k/M}$是非常接近激励频率ω的系统。（若没有这种设备，系统将共振。）

- 动力吸振器的物理意义
- 物理上，动力吸振器的作用是产生弹簧力$k_a y$，此弹簧力与激励力$p(t)$相抵消。
- 首先，若粘性阻尼系数b非常小，于是有

隔　振

$$\frac{Y(j\omega)}{P(j\omega)}=\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)}\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{k_a}{(k+k_a-M\omega^2)(k_a-m_a\omega^2)-k_a^2}$$

- 如果m_a和k_a满足k_a-$m_a\omega^2=0$，上式变为

$$\frac{Y(j\omega)}{P(j\omega)}=\frac{k_a}{-k_a^2}=-\frac{1}{k_a}$$

- 显然

$$y(t)=\left|-\frac{1}{k_a}\right|P\sin(\omega t+\angle-\frac{1}{k_a})=\frac{P}{k_a}\sin(\omega t-180^\circ)=-\frac{P}{k_a}\sin\omega t$$

- 上式表明弹簧k_a给质量M一个力$k_a y$=-$P\sin\omega t$，此力的大小等于激励力，而相位角与激励力相比滞后180度。
- 因此弹簧力与激励力彼此抵消，而质量M保持静止。

隔　振

- 在上述情况下，系统将有两个频率，而在此两个频率时，质量 M 将处在共振状态，这两个频率是这两个自由度系统的固有频率，可由下式获得

$$(k+k_a-M\omega_i^2)(k_a-m_a\omega_i^2)-k_a^2=0$$

- 求得的 ω_1 和 ω_2 是带有动力吸振器系统的两个固有频率。
- 图 7-43(a) 和 (b) 分别指出对于图 7-42(a) 和 (b) 的系统，当 b 是非常小时的振幅 $|X(j\omega)|$ 与频率 ω 的关系曲线。

- 注意，给吸振器弹簧平行附加上一个粘性阻尼器，可减轻在此两个固有频率时的强烈振动。即在两个共振频率时的非常大的振幅可以减小到非常小的值。