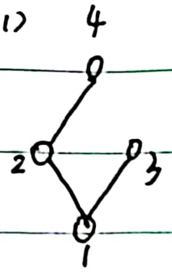
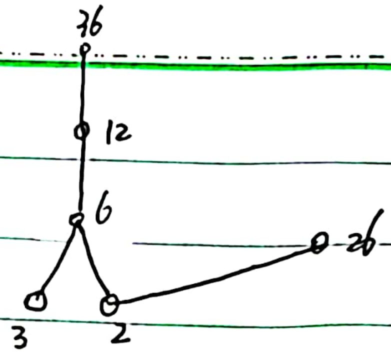
Date:

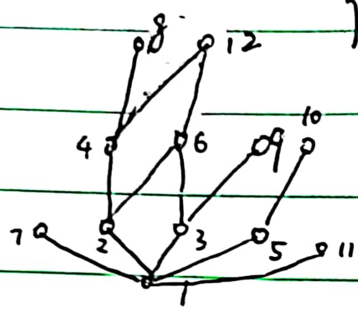
31. (1)




(2)




(3)




| | 最大元素 | 最小元素 | 极大元素 | 极小元素 | 上确界 | 下确界 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{2,3,6\}$ | 6 | \ | 6 | 2, 3 | 6 | 1 |
| $\{2,4,6\}$ | \ | 2 | 4, 6 | 2 | 12 | 2 |
| $\{4,8,12\}$ | \ | 4 | 8, 12 | 4 | \ | 4 |

33. 设 R是非空集合 X上的半序关系，$A \subseteq X$，

证明 $R \cap (A \times A)$ 是A上的半序关系

① 证明：$R \cap (A \times A)$ 是自反的.

$\forall x \in A$

有 $(x,x) \in R \wedge (x,x) \in A \times A$

$\Rightarrow (x,x) \in R \cap (A \times A)$

所以 $R \cap (A \times A)$ 是自反的

② 证明 $R \cap (A \times A)$ 是反对称的

反证法，假设 $R \cap (A \times A)$ 不是反对称的.

即 $\exists x, y \in A$, $(x,y) \in (R \cap (A \times A)) \wedge (y,x) \in (R \cap (A \times A))$

$\Rightarrow (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$

$\Rightarrow$ R是自反的.

与R是半序关系矛盾

所以 $R \cap (A \times A)$ 是反对称的.

No: ______

Date: ______

③ 证明 $R\cap(A\times A)$是传递的.

$\forall x,y,z\in A$

$(x,y)\in(R\cap(A\times A))\wedge(y,z)\in(R\cap(A\times A))$

$\Rightarrow (x,y)\in R\wedge(x,y)\in(A\times A)\wedge(y,z)\in R\wedge(y,z)\in(A\times A)$

$\Rightarrow (x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\wedge(x,y)\in(A\times A)\wedge(y,z)\in(A\times A)$

$\Rightarrow (x,z)\in R\wedge(x,z)\in A\times A$ (R是传递的)

$\Rightarrow (x,z)\in(R\cap(A\times A))$

所以 $R\cap(A\times A)$是传递的

综上 $R\cap(A\times A)$是A上的半序集

No: ______

Date: ______

34. 证明：$\leq_3$是$A\times B$上的半序关系。

① 证明 $\leq_3$是自反关系

$\forall x\in A, y\in B$

有 $(x,x)\in\leq_1 \wedge (y,y)\in\leq_2$

$\Rightarrow ((x,y),(x,y))\in\leq_3$ （定义）

所以 $\leq_3$是自反关系

② 证明 $\leq_3$是反对称关系

反证法：假设 $\leq_3$不是反对称关系

即$\exists x_1\in A, y_1\in B, x_2\in A, y_2\in B$

$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in\leq_3 \wedge ((x_2,y_2),(x_1,y_1))\in\leq_3$

$\Rightarrow (x_1,y_1)\in\leq_1 \wedge (y_1,x_1)\in\leq_1$

$\Rightarrow \leq_1$ 是对称关系

与$\leq_1$是半序关系矛盾

所以 $\leq_3$是反对称关系。

③ 证明：$\leq_3$是传递关系

$\forall (a,b)\in A\times B, (c,d)\in A\times B, (e,f)\in A\times B$

有 $((a,b),(c,d))\in\leq_3 \wedge ((c,d),(e,f))\in\leq_3$

$\Rightarrow (a,c)\in\leq_1 \wedge (b,d)\in\leq_2 \wedge (c,e)\in\leq_1 \wedge (d,f)\in\leq_2$

$\Rightarrow (a,c)\in\leq_1 \wedge (c,e)\in\leq_1 \wedge (b,d)\in\leq_2 \wedge (d,f)\in\leq_2$

$\Rightarrow (a,e)\in\leq_1 \wedge (b,f)\in\leq_2$ （$\leq_1$, $\leq_2$是传递的）

$\Rightarrow ((a,b),(e,f))\in\leq_3$ 所以$\leq_3$是传递的

综上 $\leq_3$是$A\times B$上的半序关系

Date:

36. (1) 无限集合：实数上的比较关系 $(R, \leq)$

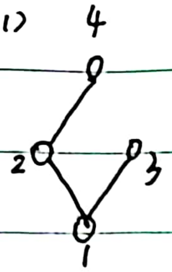
有限集合：$X=\{1,2,3\}$ 的整除关系

(3) 无限集合 $X=\{x \mid x \in R \wedge x \in (0,1)\}$

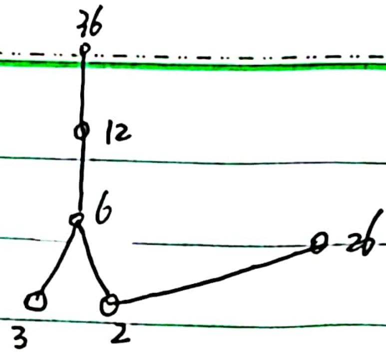
有限集合 $X=\{1,2,5,8\}$ 中的子集 $\{1,2\}$

Date:

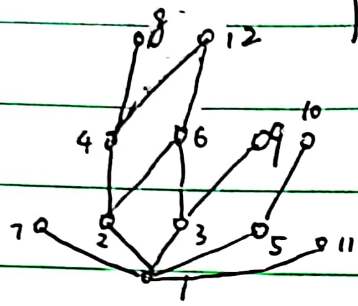
31. (1)




(2)




(3)




| | 最大元素 | 最小元素 | 极大元素 | 极小元素 | 上确界 | 下确界 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{2,3,6\}$ | 6 | \ | 6 | 2,3 | 6 | 1 |
| $\{2,4,6\}$ | \ | 2 | 4,6 | 2 | 12 | 2 |
| $\{4,8,12\}$ | \ | 4 | 8,12 | 4 | \ | 4 |

33. 设R是非空集合 X上的半序关系，$A \subseteq X$，

证明 $R \cap (A \times A)$ 是A上的半序关系

① 证明：$R \cap (A \times A)$ 是自反的.

$\forall x \in A$

有 $(x,x) \in R \wedge (x,x) \in A \times A$

$\Rightarrow (x,x) \in R \cap (A \times A)$

所以 $R \cap (A \times A)$ 是自反的

② 证明 $R \cap (A \times A)$ 是反对称的

反证法，假设 $R \cap (A \times A)$ 不是反对称的.

即 $\exists x, y \in A$，$(x,y) \in (R \cap (A \times A)) \wedge (y,x) \in (R \cap (A \times A))$

$\Rightarrow (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$

$\Rightarrow$ R是自反的.

与R是半序关系矛盾

所以 $R \cap (A \times A)$ 是反对称的.

No:

Date:

③ 证明 $R\cap(A\times A)$是传递的.

$\forall x, y, z \in A$

$(x,y)\in(R\cap(A\times A)) \wedge (y,z)\in(R\cap(A\times A))$

$\Rightarrow (x,y)\in R\wedge(x,y)\in(A\times A)\wedge(y,z)\in R\wedge(y,z)\in(A\times A)$

$\Rightarrow (x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\wedge(x,y)\in(A\times A)\wedge(y,z)\in(A\times A)$

$\Rightarrow (x,z)\in R\wedge(x,z)\in A\times A$ （R是传递的）

$\Rightarrow (x,z)\in(R\cap(A\times A))$

所以 $R\cap(A\times A)$是传递的

综上 $R\cap(A\times A)$是A上的半序集

No: 

Date: 

34. 证明：$\leq_3$ 是 $A\times B$ 上的半序关系.

① 证明 $\leq_3$ 是自反关系

$\forall x\in A, y\in B$

有 $(x,x)\in\leq_1 \wedge (y,y)\in\leq_2$

$\Rightarrow ((x,y),(x,y))\in\leq_3$ （定义）

所以 $\leq_3$ 是自反关系

② 证明 $\leq_3$ 是反对称关系

反证法：假设 $\leq_3$ 不是反对称关系

即 $\exists x_1\in A, y_1\in B, x_2\in A, y_2\in B$

$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in\leq_3 \wedge ((x_2,y_2),(x_1,y_1))\in\leq_3$

$\Rightarrow (x_1,y_1)\in\leq_1 \wedge (y_1,x_1)\in\leq_1$

$\Rightarrow \leq_1$ 是对称关系

与 $\leq_1$ 是半序关系矛盾

所以 $\leq_3$ 是反对称关系.

③ 证明：$\leq_3$ 是传递关系

$\forall (a,b)\in A\times B, (c,d)\in A\times B, (e,f)\in A\times B$

有 $((a,b),(c,d))\in\leq_3 \wedge ((c,d),(e,f))\in\leq_3$

$\Rightarrow (a,c)\in\leq_1 \wedge (b,d)\in\leq_2 \wedge (c,e)\in\leq_1 \wedge (d,f)\in\leq_2$

$\Rightarrow (a,c)\in\leq_1 \wedge (c,e)\in\leq_1 \wedge (b,d)\in\leq_2 \wedge (d,f)\in\leq_2$

$\Rightarrow (a,e)\in\leq_1 \wedge (b,f)\in\leq_2$ （$\leq_1,\leq_2$ 是传递的）

$\Rightarrow ((a,b),(e,f))\in\leq_3$ 所以 $\leq_3$ 是传递的

综上 $\leq_3$ 是 $A\times B$ 上的半序关系

Date:

36. (1) 无限集合：实数上的比较关系 $(R, \leq)$

有限集合：$X=\{1,2,3\}$ 的整除关系

(3) 无限集合 $X=\{x \mid x\in R \land x\in(0,1)\}$

有限集合 $X=\{1,2,5,8\}$ 中的子集 $\{1,2\}$

第五章 P157.

3.(1) 单射

(2) 满射

(3) 不是单射,不是满射,不是双射

(4) 满射

(5) 单射.满射.双射

(6) 单射

(7) 不是单射,不是满射,不是双射

6. 要证明 $g \subseteq f$.

反证法. 假设 $g \nsubseteq f$.

即 $\exists (x,y) \in g \wedge (x,y) \notin f$

$\Rightarrow x \in D(g) \wedge (x,y) \notin f$

$\Rightarrow x \in D(f) \wedge (x,y) \notin f$

$\Rightarrow \exists y_1 (x,y_1) \in f \wedge (x,y) \notin f$

$\Rightarrow \exists y_1 (x,y_1) \in g \wedge (x,y) \notin f \wedge (x,y) \in g$

$\Rightarrow (y_1 = y) \wedge (x,y_1) \in f \wedge (x,y) \notin f$

与题意矛盾

所以 $g \subseteq f$

由已知 $f \subseteq g$

得 $f = g$.

9. (1) $f\circ g = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2-1$

$= x^2+4+4x-1$

$= x^2+4x+3$

$g\circ f = g(f(x)) = g(x^2-1) = x^2-1+2 = x^2+1$

(2) $f(x)$ 不是单射，也不是满射，不是双射

$g(x)$ 是单射.是满射.是双射.

$f\circ g$ 不是单射.不是满射.不是双射，$g\circ f$ 不是单射.不是满射.不是双射。

11.

$$p \diamond p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \diamond p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad p \diamond p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I_x$$