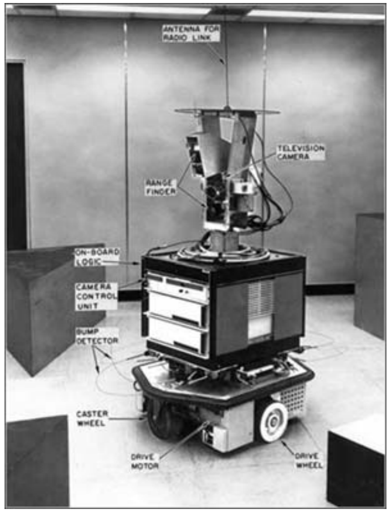
Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

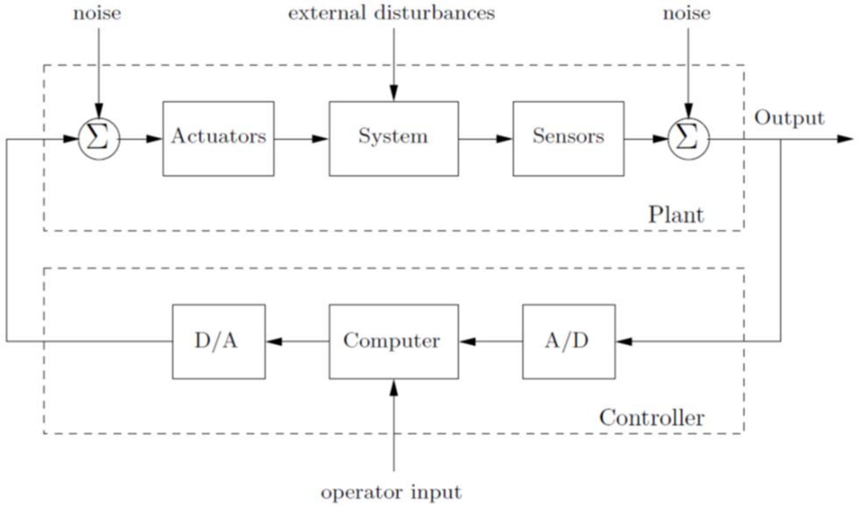
灵敏度分析
Sensitivity Analysis

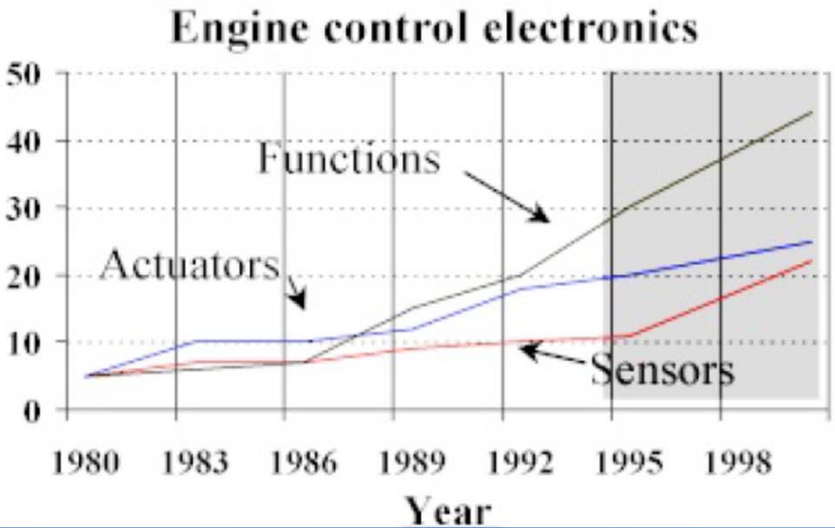
电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
翟桥柱 吴江

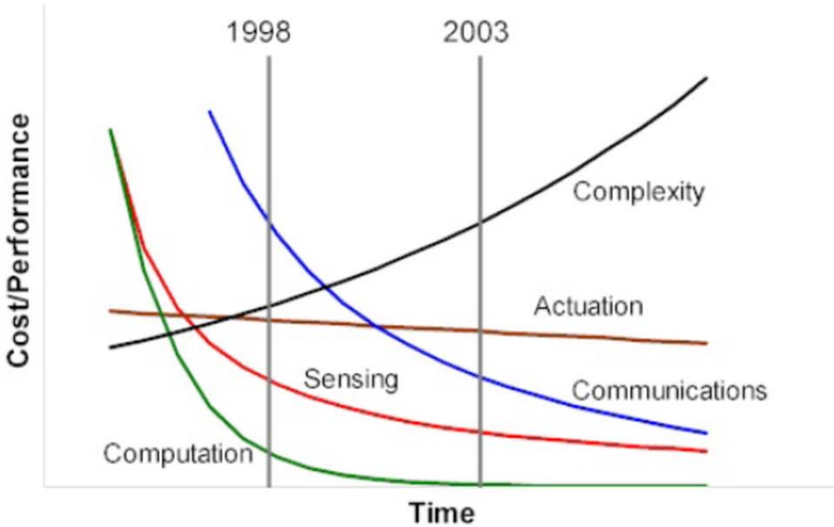
Control in an Information Rich World

——Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics, and Systems（2002)

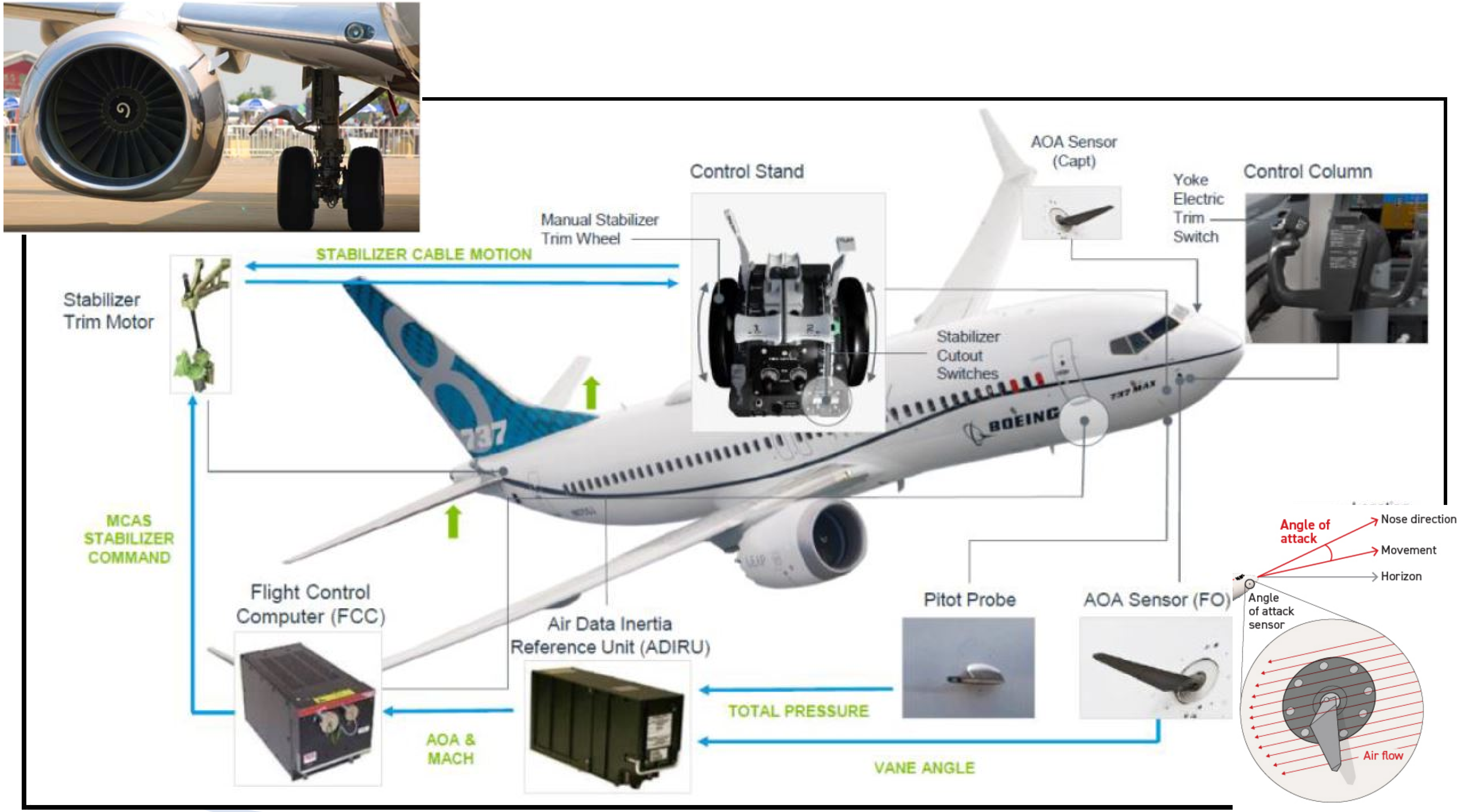




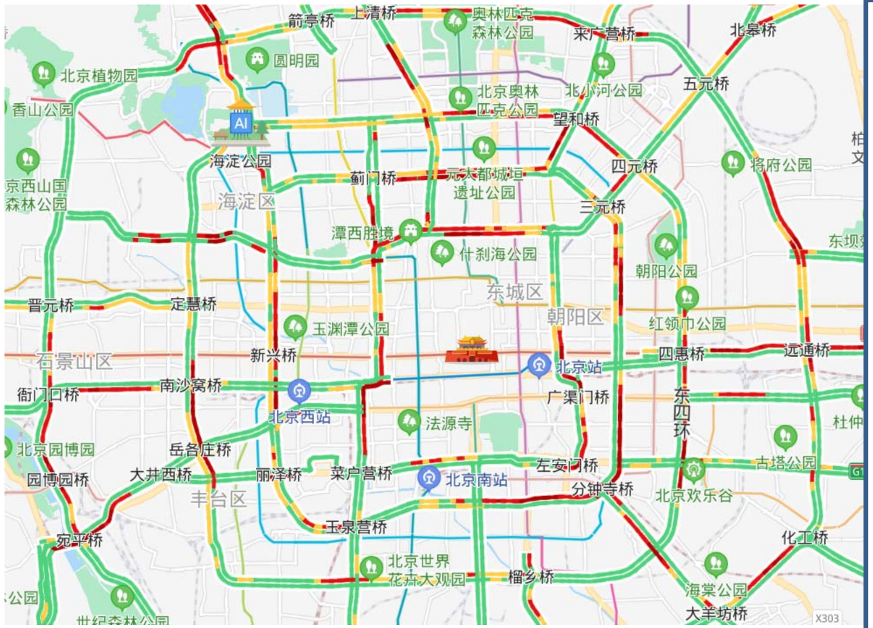


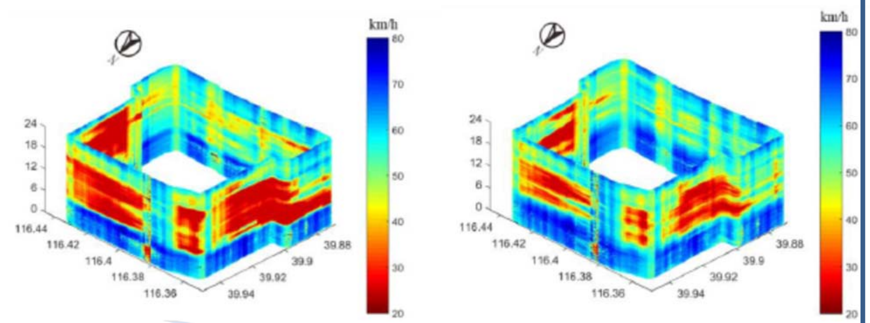


系统优化(控制)中的灵敏度分析

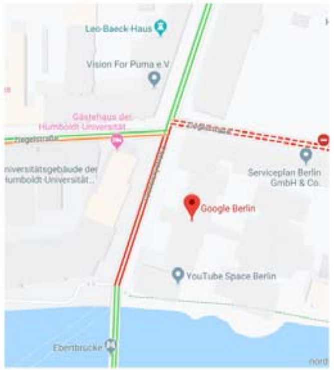


系统优化(控制)中的灵敏度分析





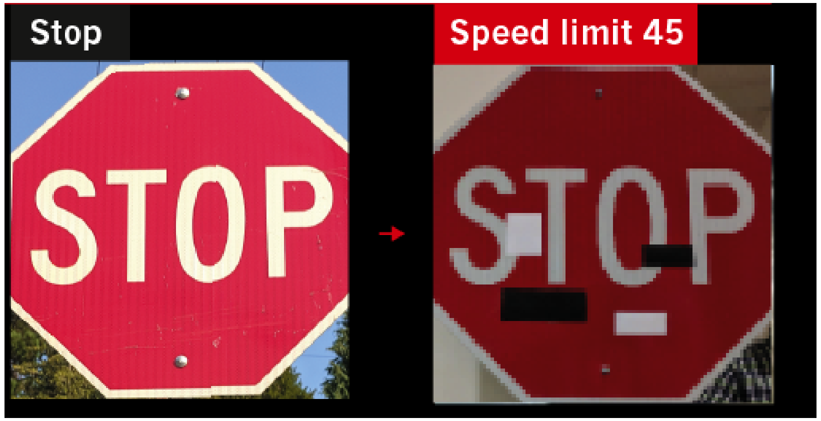
Fake Traffic Jam with 99 phones

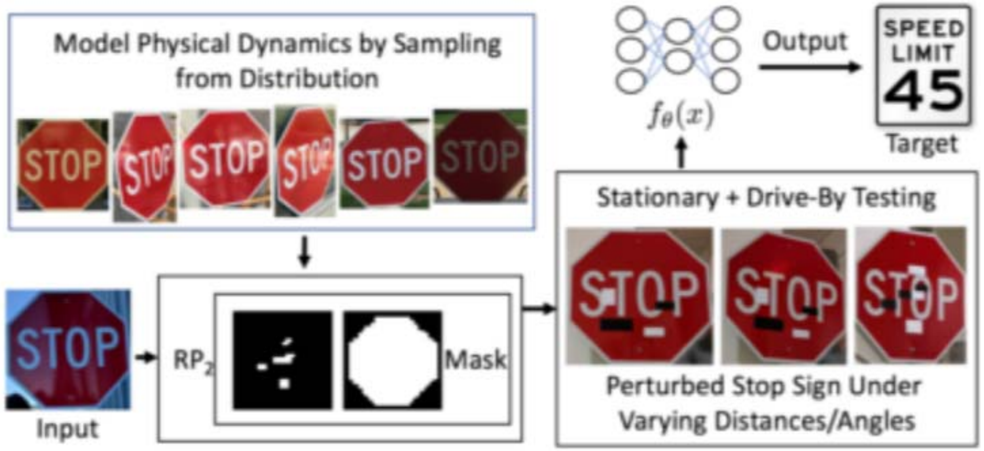


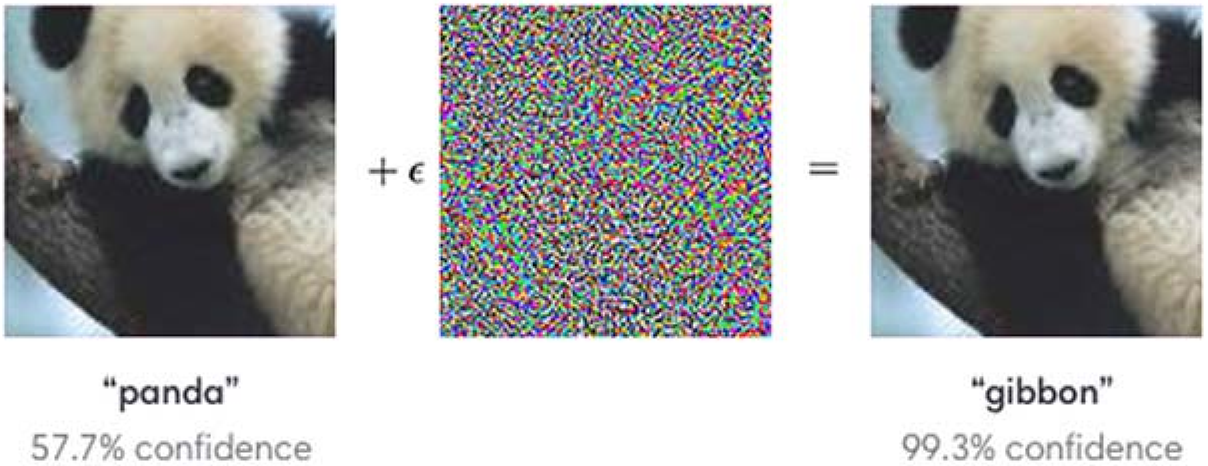
系统优化(控制)中的灵敏度分析

Robust Physical-World Attacks on Deep Learning Visual Classification

(CVPR 2018)







系统优化(控制)中的灵敏度分析

勤俭节约：对任何类型的一个问题，当某些因素发生微小改变时，原有解决方案是否仍可用？怎样适当调整以应对新情况？

变化中的规律： 不满足于解决一个给定问题，更希望了解(最优)解决方案随各因素变化的规律。

一个 LP 问题，当数据或结构发生变动时，原最优解信息能否有效利用而无需从头开始求解新问题？

$$
\begin{cases}
\min & z = c^T x \\
s.t. & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{cases}
$$

可能的变化

1. 维数不变，改变A，b，c
2. 增加变量，增加约束
3. 删除变量，删除约束

重点讨论

核心思想-单纯形表

z	$-C_B^T$	$-C_N^T$	0
x_B	B	N	b

⬇

z	0	ζ_N^T	$C_B^T\overline{b}$
x_B	I	N	b

最优单纯形表中，某些数据只对表格的一部分有影响！

c只影响第一行，**b**只影响最后一列

改变价值系数

$$\zeta_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$z_0 = c_B^T B^{-1} b$$

z	0	ζ_N^T	$C_B^T \bar{b}$
x_B	I	N	b

c 发生改变：$c \longrightarrow c'$

z	0	ζ_N^T	$c_B^T \bar{b}$
x_B	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}$

z	0	$\zeta_N'^T$	$c_B'^T \bar{b}$
x_B	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}$

①. $\bar{b} = B^{-1} b$ 不受影响，仍≥ 0

②. 计算 $\zeta_N'^T = c_B'^T B^{-1} N - c_N'^T$ ，若仍≤ 0 ，已得最优解

③. 否则，用单纯形法继续迭代

当仅有 c_N 发生改变时更简单

改变右端向量

$$\zeta_N^T = c_B^T B^{-1} N - c_N^T$$

$$z_0 = c_B^T B^{-1} b$$

z	0	ζ_N^T	$C_B^T \bar{b}$
x_B	I	N	b

b 发生改变：$b \longrightarrow b'$

z	0	ζ_N^T	$c_B^T \bar{b}$
x_B	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}$

z	0	ζ_N^T	$c_B^T \bar{b}'$
x_B	I	$B^{-1}N$	$\bar{b}'$

①. 检验数不受影响，仍≤0

②. 计算 $\bar{b}' = B^{-1}b'$，若仍非负，已得最优解　解方程组 $By = b'$

③. 否则，用对偶单纯形法继续迭代

增加不等式约束

z	0	ζ_N^T	$C_B^T \bar{b}$
x_B	I	N	b

z	0	ζ_N^T	0	$C_B^T \bar{b}$
x_B	I	N	0	b
x_{m+1}	$x\ldots$	$x\ldots$	1	b_{m+1}

例子

例：线性规划问题

$$\min \quad z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

最优单纯形表：

z	-3	0	-3	0	-8
x_2	1	1	1	0	4
x_4	5	0	2	1	14

最优解：

$x^*=(0, 4, 0, 14)^T$

新增约束：

$$x_1+3x_2+2x_3 \leqslant 10$$

解：最优解不满足新约束，先化为等式

$$x_1+3x_2+2x_3 \qquad +x_5 = 10$$

单纯形表增加一行一列：

z	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	1	3	2	0	1	10

化为标准单纯形表：

最小比列

z	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	-2^*	0	-1	0	1	-2

负最大元

例子

z	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_1	-2	0	-1	0	1	-2

化为标准
单纯形表

x_1入基，x_5出基

z	0	0	$-3/2$	0	$-3/2$	-5
x_2	0	1	$1/2$	0	$1/2$	3
x_4	0	0	$-1/2$	1	$5/2$	9
x_1	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	1

已得最优解！

最小比列

z	-3	0	-3	0	0	-8
x_2	1	1	1	0	0	4
x_4	5	0	2	1	0	14
x_5	-2^*	0	-1	0	1	-2

负最大元

大多数情况下，个别数据发生变动时，用灵敏度分析方法要简便一些。