第二次高数沙龙讲座

经济统计 001 李名

2021 年 11 月 3 日

目录

1. 微分中值定理

2. Taylor 定理

3. 综合题

Rolle 定理

定理

如果函数 $f(x)$ 满足条件:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,
2. 在开区间 (a,b) 上可导,
3. 在端点处 $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

巧妙构造函数来证明题中所给结论

例: 设 f(x) 在区间 I 上 n 阶可导, 且 $f^n(x) \neq 0$, 试证方程 f(x)=0 在区间 I 上最多有 n 个实根.

例: 设 f(x) 在区间 I 上 n 阶可导, 且 $f^n(x) \neq 0$, 试证方程 f(x)=0 在区间 I 上最多有 n 个实根.

反证法, 对相邻两个零点利用 Rolle 定理得到 f′(x) 至少有 n 个零点，最后推出 $f^n(x) = 0$ 与题设矛盾

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导,$f(0)=f(1)=0$,$f(\frac{1}{2})=1$, 求证:$\exists\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=1$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导,$f(0)=f(1)=0,f(\frac{1}{2})=1$, 求证:$\exists\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=1$

证明 $F(x)=f(x)-x$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上有一个零点，接着在 0 与零点之间利用 Rolle 定理

例: 设函数 f(x),g(x) 在 [a,b] 上二阶可导，且 g”(x)≠0,f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0, 试证

1) 在 (a,b) 内 g(x)≠0:

2) 在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

例: 设函数 f(x),g(x) 在 [a,b] 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$,f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0, 试证

1) 在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$:

2) 在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

1. 反证法
2. 构造 $F(x)=g(x)f'(x)-f(x)g'(x)$(Rolle 定理)

Lagrange 定理

定理

如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,
2. 在开区间 (a,b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Lagrange 定理在证明上与函数性态有关方面是至关重要的

例: 设 f”(x)<0,f(0)=0, 证明对任何 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有 f($x_1 + x_2$)<f(x_1)+f(x_2)

例: 设 f”(x)<0,f(0)=0, 证明对任何 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有 f($x_1 + x_2$)<f(x_1)+f(x_2)

1.Lagrange
2.F(x)=f(x+x_1)-f(x)

例: 设 f”(x)<0, 证明对任何 x_1, x_2, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

例: 设 f(x) 在 [a,b] 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 0<a<b, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$$

例: 设 f(x) 在 [a,b] 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $0<a<b$, 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

Lagrange 定理 +Cauchy 定理

例: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

1) 存在 $c \in (0,1)$, 使得 $f(c)=1-c$

2) 存在两个不同的点 $\xi, \eta \in (0,1)$, 使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

例: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

1) 存在 $c\in(0,1)$, 使得 $f(c)=1-c$
2) 存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

1. 构造函数利用 Rolle 定理
2. 注意题目中要求两个不同的点，考虑将 $[0,1]$ 分为两个区间, 具体分割值根据需要证明的结论 $(f(c)=1-c)$

Cauchy 定理

定理

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续,
2. 在开区间 (a,b) 内都可导,
3. 在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$,

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例: 设函数 f(x) 在 [a,b] 上连续, 在 (a,b) 内可导,a>0, 证明:$\exists x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, 使

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1} = (a^2 + b^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3} = \frac{lnb - lna}{b^2 - a^2}x_3 f'(x_3)$$

例: 设函数 f(x) 在 [a,b] 上连续, 在 (a,b) 内可导,a>0, 证明:$\exists x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$, 使

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1} = (a^2+b^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3} = \frac{lnb - lna}{b^2-a^2} x_3 f'(x_3)$$

Cauchy 定理: 分别取 $g_1(x) = x^2, g_2(x) = x^4, g_3(x) = lnx$

目录

1. 微分中值定理

2. Taylor 定理

3. 综合题

定理 (带 Peano 余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 点存在 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big)$$

定理 (带 Langrange 余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x) = \frac{\mathbf{f^{(n+1)}}(\xi)}{(\mathbf{n+1})!}(\mathbf{x - x_0})^{\mathbf{n+1}}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

定理 (带 Langrange 余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x) = \frac{\mathbf{f^{(n+1)}}(\xi)}{(\mathbf{n+1})!}(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})^{\mathbf{n+1}}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间．**在选择泰勒展开的点时要注意选择给定信息较多的点进行展开**

例: 计算极限 $\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2 ln(1+\frac{1}{x})\right]$

例: 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+tanx}-\sqrt{1+sinx}}{xln(x+1)-x^2}$

例: 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tanx}-\sqrt{1+sinx}}{xln(x+1)-x^2}$

注意分母的阶数较高不可再用等价无穷小分开求极限. 答案为 $-\frac{1}{2}$

例: 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$

例: 已知 $\lim_{x\to 0}\frac{sin6x+xf(x)}{x^3}=0$, 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$

1.Taylor 定理展开
2. 分子加减 6x 凑分开的极限
3. 根据已知求得 f(x), 笨但是很有效.

例: 已知 f(0)=0,f’(0)=1, 求

$$\lim_{n\to+\infty}[f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})]$$

$$\begin{aligned}
\text{因为} \lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n^2}) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\times\frac{f(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以: 原式 =0+0+. . . +0=0

例: 已知 f(0)=0,f'(0)=1, 求

$$\lim_{n\to+\infty}[f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})]$$

$$\text{因为} \lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{f(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{f'\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^2}$$

$$= 0$$

所以: 原式 =0+0+. . . +0=0

忽略了 $o(\frac{1}{n^2})$, **无穷个高阶无穷小的和未必是高阶无穷小**

例: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,$|f(x)|\le a$,$|f''(x)|\le b$(a,b 为非负实数), 证明:$\forall c\in(0,1)$,$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$

例: 设 f(x) 在 [0,1] 上二阶可导,$|f(x)|\leq a,|f''(x)|\leq b$(a,b 为非负实数), 证明:$\forall c\in(0,1),|f'(c)|\leq 2a+\frac{b}{2}$

将 x=0 和 x=1 代入 f(x) 在 $x_0 = c$ 处的二阶 Taylor 公式

目录

1. 微分中值定理

2. Taylor 定理

3. 综合题

例: 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

例: 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

1. 利用等价无穷小做变换.
2. 考虑 $(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 公式.
3.Lagrange 中值定理计算.

例: 设 f(x) 二阶可导，且 $|f''(x)|\leq M$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=1$, 证明, 对任意的 $a>1$, 有 $|f'(0)|+|f'(a)|\leq Ma$.

例: 设 f(x) 二阶可导，且 $|f''(x)|\leq M$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=1$, 证明, 对任意的 $a>1$, 有 $|f'(0)|+|f'(a)|\leq Ma$.

同时出现两个点的导数值, 利用 Taylor 未必能得到理想结果,
考虑在 [0,1] 和 [1,a] 上利用 Lagrange 定理.

Thanks for your listening