一元函数积分学及其应用

主要内容

典型例题

一、 定积分的定义

1. 定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$ 分、匀、和、精

2. 几何意义

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形面积

3. 定积分存在的条件

1）必要条件 $f(x)$在$[a,b]$上有界

2）充分条件（1）$f(x)$在$[a,b]$上连续；

（2）$f(x)$在$[a,b]$上除去有限个第一类间断点均连续.

一、 定积分的定义

1. 定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$ 分、匀、和、精

2. 几何意义

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形面积

例 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$

解析： 原式 $=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{4}$

一、 定积分的定义

1. 定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$ 分、匀、和、精

2. 几何意义

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形面积

例 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos^2\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

解析： 原式 $=\int_0^1 \cos^2 \pi x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}.$

一、 定积分的定义

1. 定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$ 分、匀、和、精

2. 几何意义

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形面积

例 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+\frac{1}{2}}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2}\right).$$

例 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1^2}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2}\right).$

分析：

$$\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+\frac{1}{2}}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+(\frac{1}{n})^2}\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+\frac{1}{2}}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2}\ge\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$\frac{n+1}{n^2+1^2}+\frac{n+\frac{1}{2}}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n^2}\le(1+\frac{1}{n})\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$$

原式 $=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$

一、 定积分的定义

1. 定义

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$ 分、匀、和、精

2. 几何意义 $f(x)>0,\ \int_a^b f(x)dx$ 表示曲边梯形面积

例 计算积分 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x.$

解析： $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(1-x)^2},\quad 1-x=t$

原式 $=\int_{-1}^{1}(1-t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$

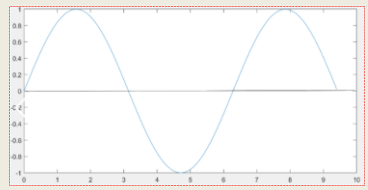
4. 定积分的性质

（1） **可加性** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

（2） **不等式** 若 $f(x) \le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

例 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx \ (k=1,2,3)$，则（ ）.

(A) $I_1 < I_2 < I_3$; (B) $I_3 < I_2 < I_1$; (C) $I_2 < I_3 < I_1$; (D) $I_2 < I_1 < I_3$



$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx$$

$$I_3 = \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx$$

4. 定积分的性质

（1） **可加性** $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

（2） **不等式** 若 $f(x) \le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

（3） **最值** 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

（4） **绝对值** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

（5-1） **中值定理** 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad (a<c<b)$$

（5-2） **中值定理** 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上可积且取值不变号，则至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

二、定积分的计算

定理1（Newton-Leibniz公式，微积分基本公式）

设 f 在 $[a,b]$ 上可积，且 f 在 $[a,b]$ 上有一个原函数 F，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

定理2（微积分第一基本定理）

设 $f \in C[a,b]$，则 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

定理3（微积分第二基本定理）

$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 在 I 上的所有原函数的一般表达式.

定理4（换元法）

设 $f \in C[a,b]$，变换 $x=\varphi(t), t\in[\alpha,\beta]$ 有连续的导数，且

（1）$\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$；（2）$t\in[\alpha,\beta]$，$a \le \varphi(t) \le b$；

则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

例 设 $|f(x)| \le \pi, f'(x) \ge m > 0 (a \le x \le b)$，证明：$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| \le \dfrac{2}{m}$.

证 因为 $f'(x) \ge m > 0 (a \le x \le b)$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格增，

又因为 $|f(x)| \le \pi$，所以，$-\pi \le f(a) < f(b) \le \pi$

设 $\varphi(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，$0 < \varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \le \dfrac{1}{m}$

$$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| \xlongequal{令 x=\varphi(y)} \left|\int_{f(a)}^{f(b)} \sin y \cdot \varphi'(y)dy\right| \le \int_0^\pi \frac{1}{m}\sin y dy = \frac{2}{m}.$$

定理4（换元法）

设 $f\in C[a,b]$, 变换 $x=\varphi(t), t\in[\alpha,\beta]$ 有连续的导数，且

（1） $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$; （2） $t\in[\alpha,\beta]$, $a\le\varphi(t)\le b$;

则 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

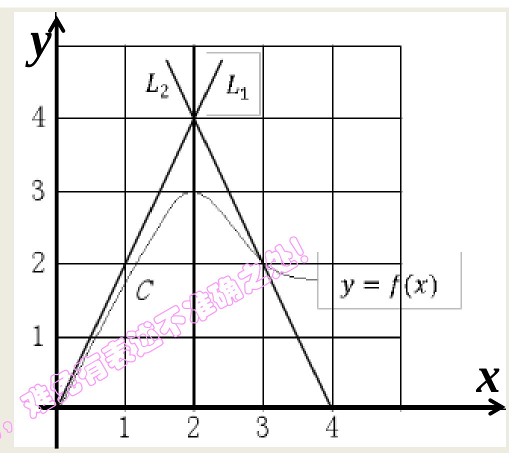
定理5（分部积分法）

设 $u(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数, 则

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

如何用？　　何时用？

例 如图, 曲线 C 的方程为 $y=f(x)$, $(3,2)$ 是它的一个拐点, 直线 L_1 与 L_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线, 其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x.$



解析: $f''(3)=0,\quad f'(0)=2, f'(3)=-2.\quad f(0)=0, f(3)=2.$

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3 (x^2+x)df''(x)$$

$$=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$=\cdots=20$$

定理6（变限定积分） 设 $f \in C[a,b]$, $\varphi(x),\phi(x)$可导, 则

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt\right) = f(\phi(x))\phi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

例 设 $f(x)$为连续函数，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} xf(t)\mathrm{d}t = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)+\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$ (B) $f(\ln x)+\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)+\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$

(C) $f(\ln x)-\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)+\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$ (D) $f(\ln x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$

分析： $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} xf(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$

例 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

定理6（变限定积分） 设 $f \in C[a,b]$, $\varphi(x),\phi(x)$可导, 则

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt\right) = f(\phi(x))\phi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

例 设函数 $F(x)=\int_0^x \sin^n t\mathrm{d}t$, n是正整数，则（ ）.

(A) $F(x)$ 是有界函数

(B) n为偶数时 $F(x)$必为周期函数

(C) n 为奇数时 $F(x)$ 必为周期函数

(D) $F(x)$不可能是周期函数

定理6（变限定积分） 设 $f \in C[a,b]$, $\varphi(x),\phi(x)$可导, 则

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt\right) = f(\phi(x))\phi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

常用定积分公式

（1） $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & f(x)\text{是偶函数} \\ 0 & f(x)\text{是奇函数} \end{cases}.$

例 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,

则（　　）.

(A) $M > N > K$　　(B) $M > K > N$

(C) $K > M > N$　　(D) $K > N > M$

定理6（变限定积分） 设 $f \in C[a,b]$, $\varphi(x),\phi(x)$可导, 则

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x)$$

常用定积分公式

（1） $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & f(x)\text{是偶函数} \\ 0 & f(x)\text{是奇函数} \end{cases}.$

（2） 设 $f(x)$是 R 上以 T 为周期的连续函数,

则$\forall a \in R$都有 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$. $\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)d$

（3） $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

例 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$.

解 $I=\underline{\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx}+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$　　$x=-t$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{t\sin t\cdot\arctan e^{-t}}{1+\cos^2 t}dt+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\int_{0}^{\pi}\left(\arctan e^{-x}+\arctan e^{x}\right)\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \qquad \boxed{\arctan e^{-x}+\arctan e^{x}\equiv\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8}. \qquad \boxed{\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx}$$

常用定积分公式

(4) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} & n\text{为奇数}\\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2}\dfrac{\pi}{2} & n\text{为偶数}\end{cases}.$$

(5) 三角函数系. 在 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos mx, \sin mx, \cdots$ 中任取两个不同函数, 若自然数 $m\neq n$, 则

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0,\quad \int_0^{2\pi}\sin mx dx=0,\quad \int_0^{2\pi}\cos nx dx=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 mx dx=\pi,\quad \int_0^{2\pi}\cos^2 nx dx=\pi,\quad \int_0^{2\pi}1\,dx=2\pi.$$

三、不定积分

1. 概念 设$F(x)$在I上可导且$F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，称集合$F(x)+C$为$f(x)$的不定积分，

记为 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 其中C为任意常数.

2. 性质

(1) $(\int f(x)dx)'=f(x)$ $\quad d\int f(x)dx=f(x)dx$

(2) $\int f'(x)dx=f(x)+C$ $\quad \int df(x)=f(x)+C$

(3) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

(4) $\int [f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

3. 基本公式

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq -1 \qquad \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$\int a^{x}dx=\frac{1}{\ln a}a^{x}+C,\quad a>0,a\neq 1 \qquad \int e^{x}dx=e^{x}+C$$

$$\int \sin xdx=-\cos x+C \qquad \int \cos xdx=\sin x+C$$

$$\int \tan xdx=-\ln|\cos x|+C \qquad \int \cot xdx=\ln|\sin x|+C$$

$$\int \sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C \qquad \int \csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C$$

$$\int \sec^2 xdx=\tan x+C \qquad \int \csc^2 xdx=-\cot x+C$$

3. 基本公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

4. 不定积分的计算

（1）第一换元法（凑微分法）

设 $f(u)$连续, $\varphi(x)$有连续的导数, 则

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \underline{\underline{u=\varphi(x)}} \left(\int f(u)du\right)\Big|_{u=\varphi(x)}$$

（2）第二换元法

设 $f(x)$连续, φ 有连续的导数, φ'定号, 则

$$\int f(x)dx \underline{\underline{x=\varphi(t)}} \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

4. 不定积分的计算

（1）第一换元法（凑微分法）

设 $f(u)$ 连续, $\varphi(x)$ 有连续的导数, 则

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=} \left(\int f(u)du\right)\Big|_{u=\varphi(x)}$$

例 计算 $I=\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

解 $I=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int(x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx = \int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$= \int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x\,de^{x+\frac{1}{x}} = xe^{x+\frac{1}{x}}+C.$

4. 不定积分的计算

（1）第一换元法（凑微分法）

设 $f(u)$ 连续, $\varphi(x)$ 有连续的导数, 则

$$\int f[\phi(x)]\phi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) \overset{u=\varphi(x)}{=\!=\!=} \left(\int f(u)du\right)\Big|_{u=\varphi(x)}$$

例 计算 $I=\int\frac{1}{x(x^8+1)}dx.$

分析： $I=\int\frac{1}{x(x^8+1)}dx = \int\frac{x^7}{x^8(x^8+1)}dx = \frac{1}{8}\int\frac{1}{x^8(x^8+1)}dx^8 = \frac{1}{8}\int\frac{1}{x^8}dx^8-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x^8+1}d(x^8+1)$

$\int\frac{1}{x^8}dx$ $\int\frac{1}{x^8+\varepsilon}dx$ $\int\frac{1}{x(x^8+\varepsilon)}dx = \int\frac{x^7}{x^8(x^8+\varepsilon)}dx = \frac{1}{8\varepsilon}\int\frac{1}{x^8}dx^8-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x^8+\varepsilon}d(x^8+\varepsilon)$

（2）第二换元法

设 $f(x)$ 连续，φ 有连续的导数，φ' 定号，则

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\varphi(t)} \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

例 计算不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx.$

解析： 原式 $\overset{\sqrt{e^x-1}=t}{=} \int (1+t^2)^2\arctan t\dfrac{2t}{1+t^2}dt = \int 2t(1+t^2)\arctan t dt$

$$=\frac{1}{2}\int \arctan t d(1+t^2)^2 = \frac{1}{2}\left((1+t^2)^2\arctan t - \int(1+t^2)dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left((1+t^2)^2\arctan t - t - \frac{1}{3}t^3\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}\right)+C$$

（2）第二换元法

设 $f(x)$ 连续，φ 有连续的导数，φ' 定号，则

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\varphi(t)} \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

例 $I=\int \dfrac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx$

解 $I \xlongequal{t=\sin x} \int \dfrac{2e^{-t}t}{(1-t)^2}dt = \dfrac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$

4. 不定积分的计算

（3）分部积分法

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

例 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$.

分析： $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\left[\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x\right]$

$$= -2\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 8 - 2\pi - 4\ln 2.$$

4. 不定积分的计算

（3）分部积分法

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

被积函数是两类不同函数相乘，通常采用分部积分

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x,\ \int P_n(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x,\ \int P_n(x)\cos\alpha x dx;$$

$$\int P_n(x)\ln x dx,\ \int P_n(x)\arctan x dx,\ \int P_n(x)\arcsin x dx;$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx,\ \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx.$$

4. 不定积分的计算

（4）简单的有理函数的积分

任一有理函数可分解为一个多项式与若干个部分分式的和.

这些部分分式的形式为 $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx \ (n \in \mathrm{N})$,

或 $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx \, (p^2 < 4q, n \in \mathrm{N}) = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p+B_1}{(x^2+px+q)^n} dx$

这两种形式的积分可用第一换元法求解.

4. 不定积分的计算

（5）无理函数的积分

可采用适当的换元如 $\sqrt[n]{x} = t$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ 等.

（6）特定的三角函数的积分

用万能公式变换, 如 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

注意：$\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int e^{x^2} dx$, $\int \frac{1}{\ln x} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$ 等积不出来.

例 求$I=\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}dx.$

解 令$x+\sqrt{x^2-x+1}=t$ 则 $x=\frac{t^2-1}{2t-1},dx=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt$

$$I=\int\frac{2(t^2-t+1)}{t(2t-1)^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|-\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+C$$

$$=2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}+C.$$

例 求$\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx\,(a<x<b).$

解 令$x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta\ \ (0<\theta<\frac{\pi}{2})$

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx=\int\frac{2(b-a)\sin\theta\cos\theta}{(b-a)\sin\theta\cos\theta}d\theta=2\theta+C$$

$$=2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C$$

例 求$I=\int\dfrac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}dx.$

解

$$I=\int\frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}dx=\int\frac{1}{(1-x\tan x)^2}d\left(x\tan x\right)$$

$$=\frac{-1}{1-x\tan x}+C=\frac{1}{x\tan x-1}+C$$

例 求$I=\int\ln\left((x+a)^{x+a}\cdot(x+b)^{x+b}\right)\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}dx.$

解

$$I=\int\left(\frac{\ln(x+a)}{x+b}+\frac{\ln(x+b)}{x+a}\right)dx.$$

$$=\int\ln(x+a)d\ln(x+b)+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$

$$=\ln(x+a)\ln(x+b)-\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$

$$=\ln(x+a)\ln(x+b)+C$$

参考此草稿请谨慎！未经细酌，难免有表述不准确之处！

例 计算$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{x^2-\pi x+2022}dx.$

解 原式$\displaystyle=\int_0^{\pi}\frac{\pi+\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2+2022-\frac{\pi^2}{4}}dx \xlongequal{令x-\frac{\pi}{2}=t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-\sin t}{t^2+a^2}dt$

其中$a=\sqrt{2022-\dfrac{\pi^2}{4}}$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{t^2+a^2}dt \quad -\underline{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t^2+a^2}dt}$$

$$=\frac{2\pi}{a}\arctan\frac{t}{a}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2022-\frac{\pi^2}{4}}}\arctan\frac{\pi}{2\sqrt{2022-\frac{\pi^2}{4}}}.$$

例 设n为自然数，计算$\displaystyle I_{2021}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2021x}{\sin x}dx.$

分析： 尝试计算$\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx.$

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2nx\cdot\sin x}{\sin x}dx \ =2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nx dx \ =\frac{1}{n}\sin 2nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

$$I_n=I_{n-1}=\cdots=I_1$$

$$I_n=I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x\sin x+\sin 2x\cos x}{\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+2\cos^2 x)dx=\frac{\pi}{2}.$$

例 求p的值，使$\int_a^b (x+p)^{2021} e^{(x+p)^2} dx = 0.$

分析 $\int_a^b (x+p)^{2021} e^{(x+p)^2} dx \xlongequal{\text{令} x+p=t} \int_{a+p}^{b+p} t^{2021} e^{t^2} dt = 0$

当p满足$b+p=-(a+p)$，即$p=-\dfrac{a+b}{2}$

解 取$p=-\dfrac{a+b}{2}$

$$\int_a^b (x+p)^{2021} e^{(x+p)^2} dx \xlongequal{\text{令} x+p=t} \int_{a+p}^{b+p} t^{2021} e^{t^2} dt$$

$$= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^{2021} e^{t^2} dt = 0.$$