1. $$G(s)=\frac{2s+a}{s^3+6s^2+11s+6}$$

① $$G(s)=\frac{2s+a}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

极点：$s_1=-1$，$s_2=-2$，$s_3=-3$

零点：$s=-\frac{a}{2}$

当 $a=2$，$a=4$，$a=6$ 时，

系统状态不完全能控或者不完全能观测。

②. $G(s)=\dfrac{2s+a}{s^3+6s^2+11s+6}$.

当 $a=4$, $a=2$, $a=6$ 时,

若其完全能控,则其必不完全能观。

~~要求其完全能控~~:

若其完全能观,则其必不完全能控。

对于②,要求其完全能观:

$$A_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix},\quad B_o=\begin{bmatrix}a\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$C_o=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

对于③,要求其完全能控.

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix},\quad B_c=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}a & 2 & 0\end{bmatrix}$$

2. $A=\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $C=[1\ \ 0]$

$AB=\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}$

$Q_c=\begin{bmatrix}1&-1\\1&7\end{bmatrix}$ 完全能控

$\operatorname{rank}(Q_c)=2=n$

$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-4)+6$

$=\lambda^2-5\lambda+10$

$a_1=-5$
$a_0=10$

$\bar{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}-1&1\\7&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&1\\2&1\end{bmatrix}$

$\bar{C}=[1\ \ 0]\begin{bmatrix}-6&1\\2&1\end{bmatrix}=[-6\ \ 1]$

$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-10&5\end{bmatrix}$

综上：$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-10&5\end{bmatrix}$, $\cancel{\bar{B}=[-6\ 1]}$, $\bar{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}-6&1\\2&1\end{bmatrix}$. $\bar{C}=[-6\ \ 1]$

$CA=[1\ \ 0]\begin{bmatrix}1&-2\\3&4\end{bmatrix}=[1\ \ -2]$

$Q_o=\begin{bmatrix}1&0\\1&-2\end{bmatrix}$ $\operatorname{rank}Q_o=2=n$

完全能观

$\det(\lambda I-A)=\lambda^2-5\lambda+10$

$a_0=10$
$a_1=-5$

$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&a_1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&-5\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-4&-2\\1&0\end{bmatrix}$ $\bar{A}=\begin{bmatrix}0&-10\\1&5\end{bmatrix}$

$\bar{B}=P^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-2\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=[$

$\bar{C}=[1\ 0]P=\dfrac{[1\ 0]}{2}\begin{bmatrix}0&2\\-1&4\end{bmatrix}$

综上：$\bar{A}=\begin{bmatrix}0&-10\\1&5\end{bmatrix}$, $\bar{B}=\begin{bmatrix}-6\\1\end{bmatrix}$, $C=$

$P=\begin{bmatrix}0&1\\-\frac{1}{2}&2\end{bmatrix}$

3. $G(s)=\dfrac{s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}=\dfrac{s^2+s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

无零极点相约，能控且能观测

$G(s)=\dfrac{s^2+s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$,

$a_0=6,\ a_1=11,\ a_2=6$

$\beta_0=5,\ \beta_1=1,\ \beta_2=1$

∴能观：$A=\begin{bmatrix}0&0&-a_0\\1&0&-a_1\\0&1&-a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}$ $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\y=cx\end{cases}$

$B=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix}$. $C=[0\ \ 0\ 1]$

能控：$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}$, $C=[5\ \ 1\ 1]$, $B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\y=cx\end{cases}$

4. (1) $2s^3Y(s)-3sY(s)=s^2U(s)-2sU(s)$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2-2s}{2s^3-3s}=\frac{\frac{1}{2}s^2-s}{s^3-\frac{3}{2}s}\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&\frac{3}{2}&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

验证：$AB=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $A\cdot AB=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$$Q_c=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad \mathrm{rank}(Q_c)=3=n$$

∴能控，

$$\begin{cases}\dot{X}=AX+BU\\Y=CX\end{cases}\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&\frac{3}{2}&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(2) 对偶：$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&\frac{3}{2}\\0&1&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\dot{X}=AX+BU\\Y=CX\end{cases}$$

3.3 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Q_c = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 完全能控, $\mathrm{rank}(Q_c) = 2 = n$

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 完全能观. $\mathrm{rank}(Q_o) = 2 = n$.