西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

最优性原理
Principle of Optimality

电信学部·自动化科学与工程学院
系统工程研究所
吴江

Outline

- 最优性原理

- 确定性定期纯离散多阶段决策问题的动态规划基本方程

确定性定期多阶段决策问题的基本模型

$$
\begin{cases}
\min \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, k). & \text{决策目标} \\
s.t. \quad x_{k+1} = \phi(x_k, u_k, k)\,; \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{状态转移约束} \\
\qquad x_k \in \Omega_k \subset R^{n_k}\,; \quad k = 0,1,\cdots N. & \text{状态空间约束} \\
\qquad u_k \in D_k(x_k) \subset R^{m_k}\,; \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{决策空间约束}
\end{cases}
$$

建模关键：满足无后效性的阶段划分及状态定义

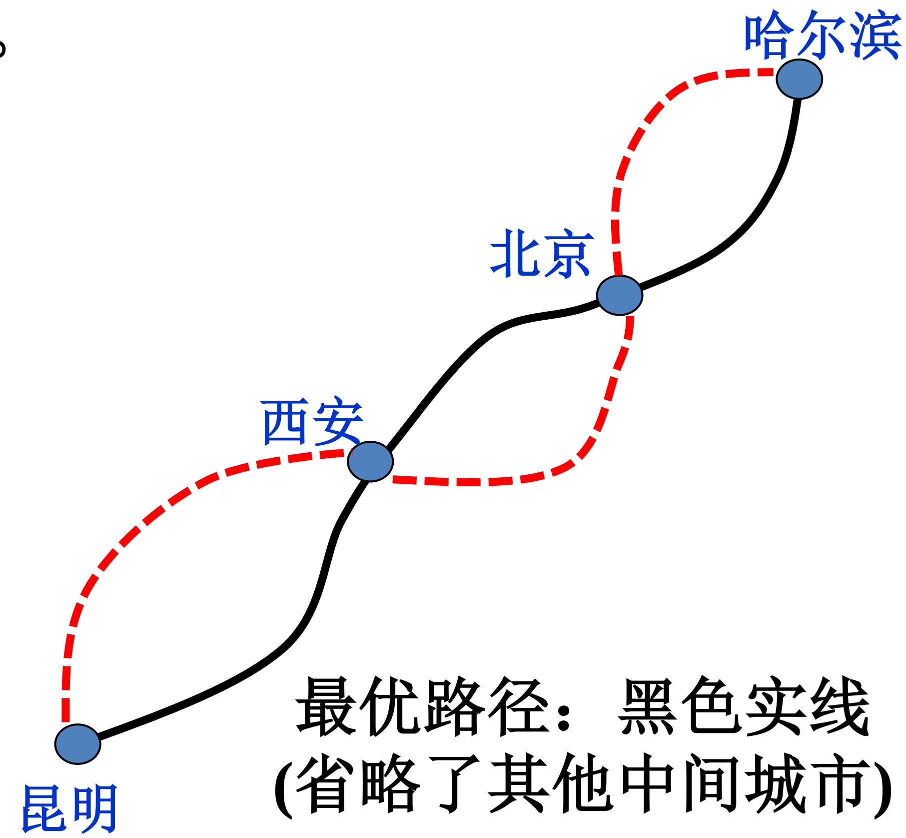
确定性定期离散时间问题

- 状态: $x_k : k = 0,1,\ldots, N. x_k \in \Omega_k \subset R^{n_k}$
- 决策: $u_k : k = 0,1,\ldots, N-1. u_k \in D_k(x_k) \subset R^{m_k}$
- 状态转移方程: $x_{k+1} = \phi(x_k, u_k, k), k = 0,1,\ldots, N-1$
- 控制/决策目标: $\min \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, k)$

最优性原理 多阶段决策问题怎样有效求解?

例4： 从昆明至哈尔滨自驾游，只允许经停直辖市及省会城市，求最短路线安排。

最优性原理：如果一个策略是最优策略，则它的前部、后部、中间片段子策略也一定是对应部分的最优策略。



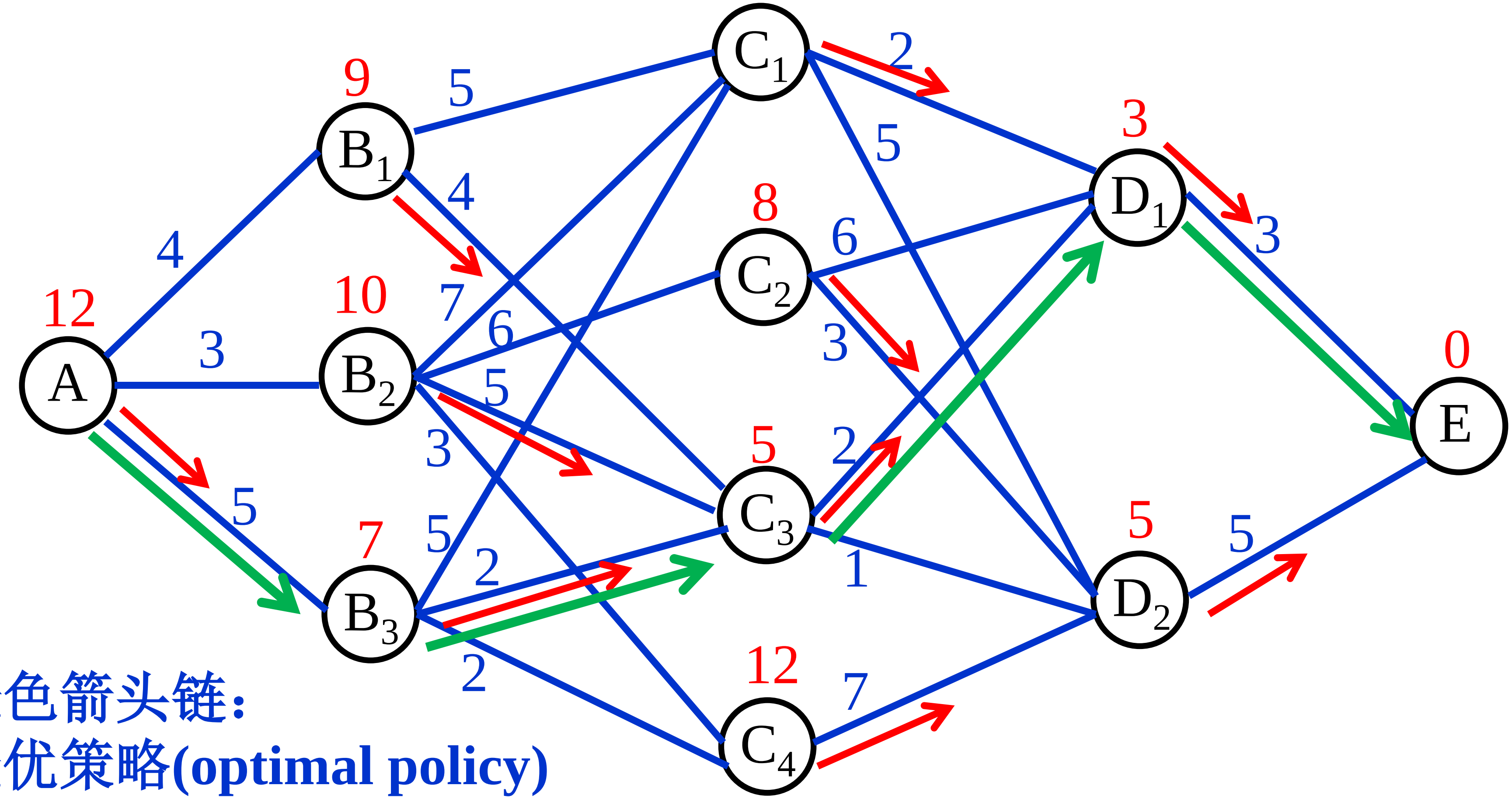
最优路径：黑色实线
(省略了其他中间城市)

最优性原理应用举例

例1. 管道铺设问题(纯离散问题)。

红色数字：从每个状态出发到达终态的最优费用(cost-to-go)

红色箭头：从每个状态出发的最优决策

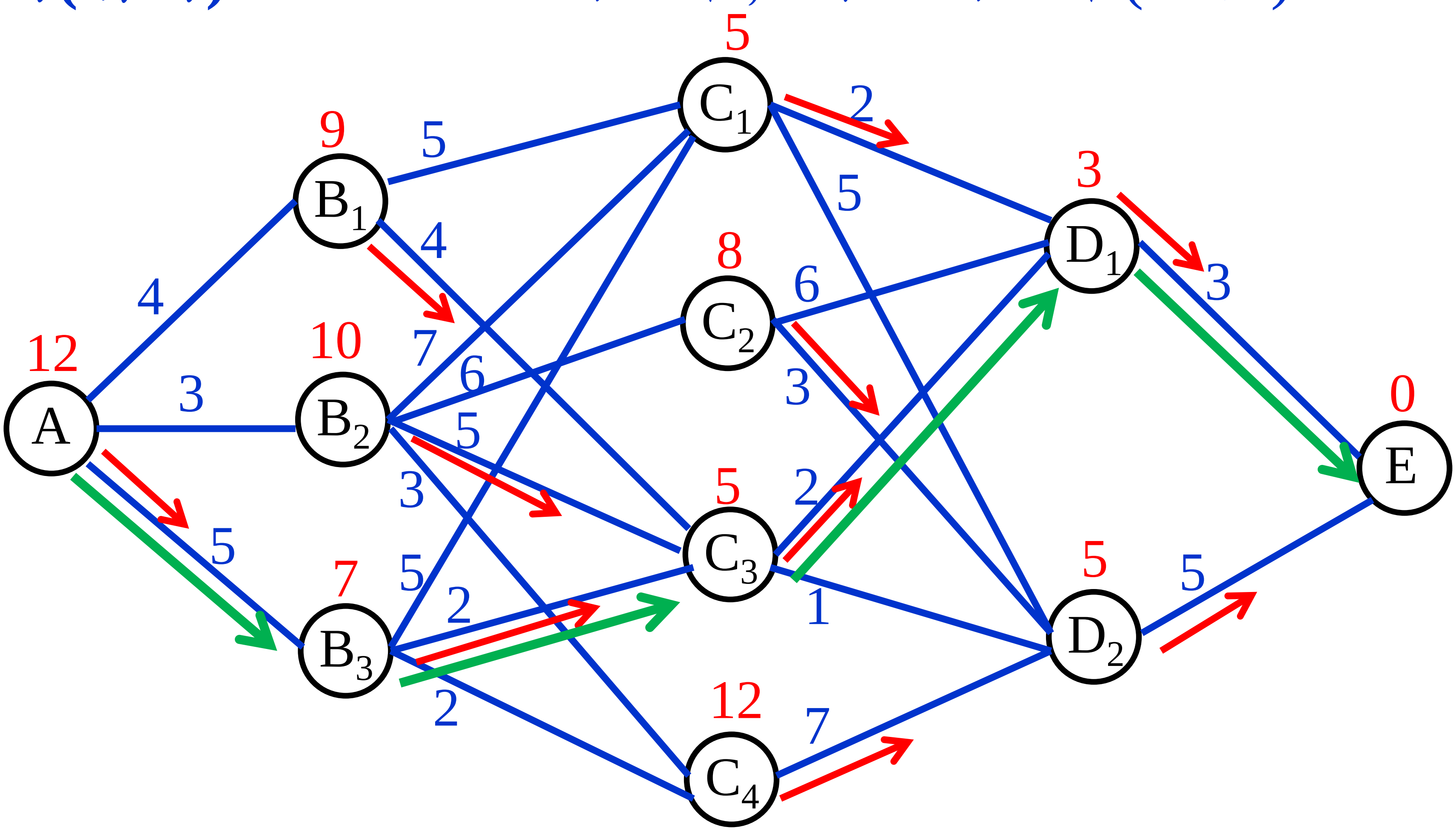


绿色箭头链：最优策略(optimal policy)

动态规划计算特点分析

反向(后向) DP:　先反向递推，再前向递推(扫描)

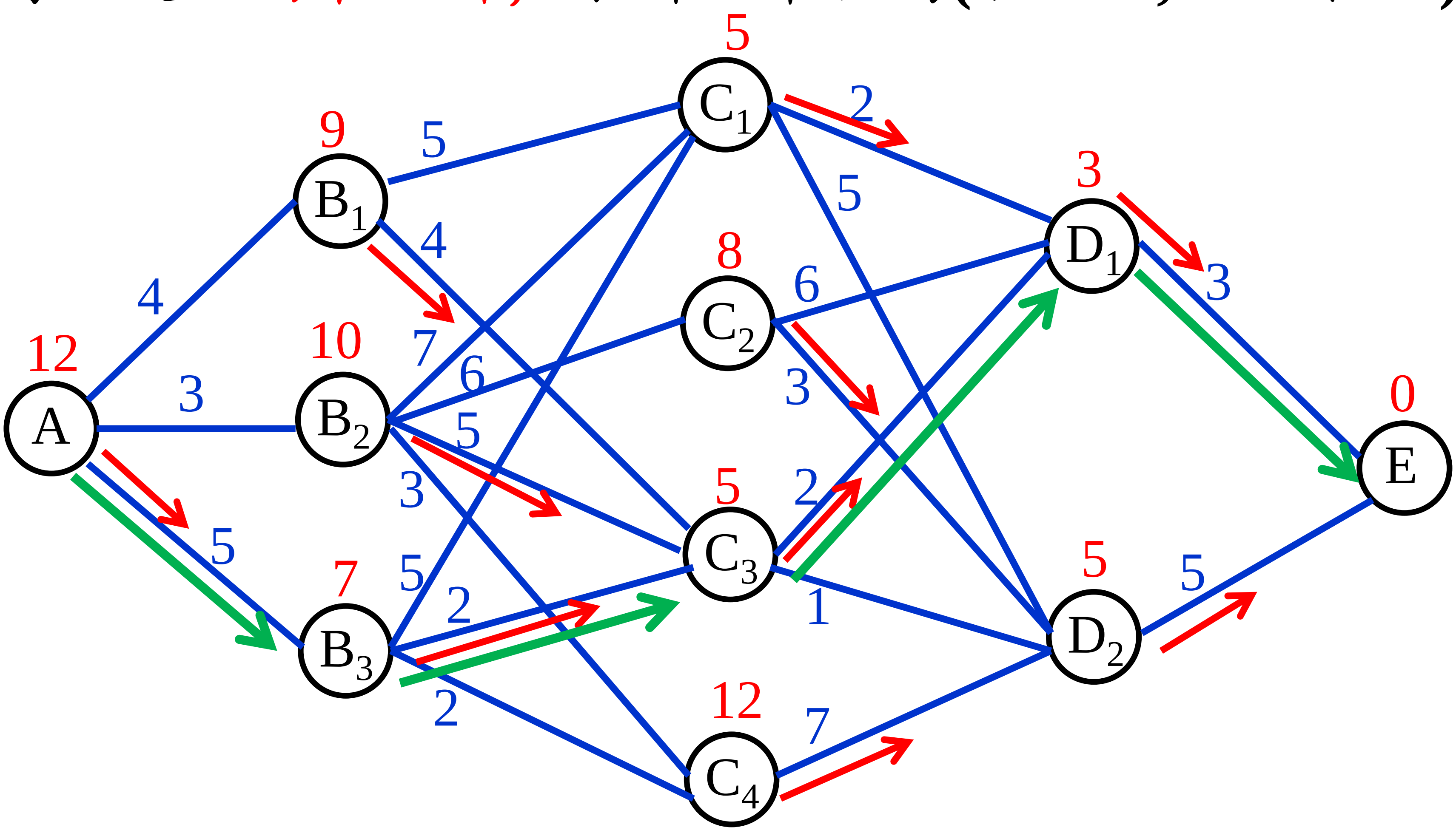
正向(前向) DP:　先正向递推，再反向递推(扫描)



动态规划计算特点分析

将一个多阶段问题转化为一系列结构相同的单阶段问题

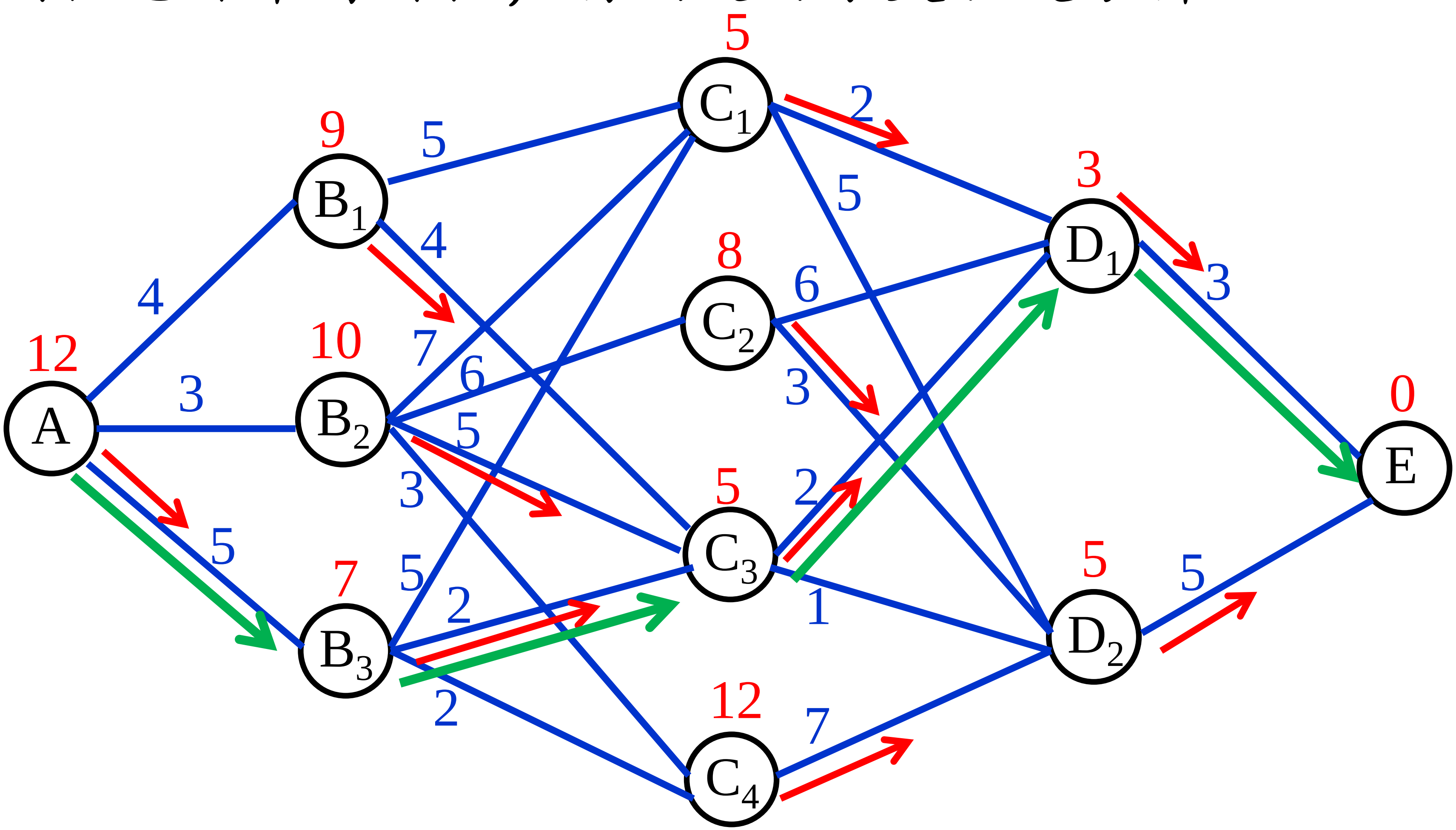
获得的是全局最优解，求解效率较高(和NLP, MIP相比)



动态规划计算特点分析

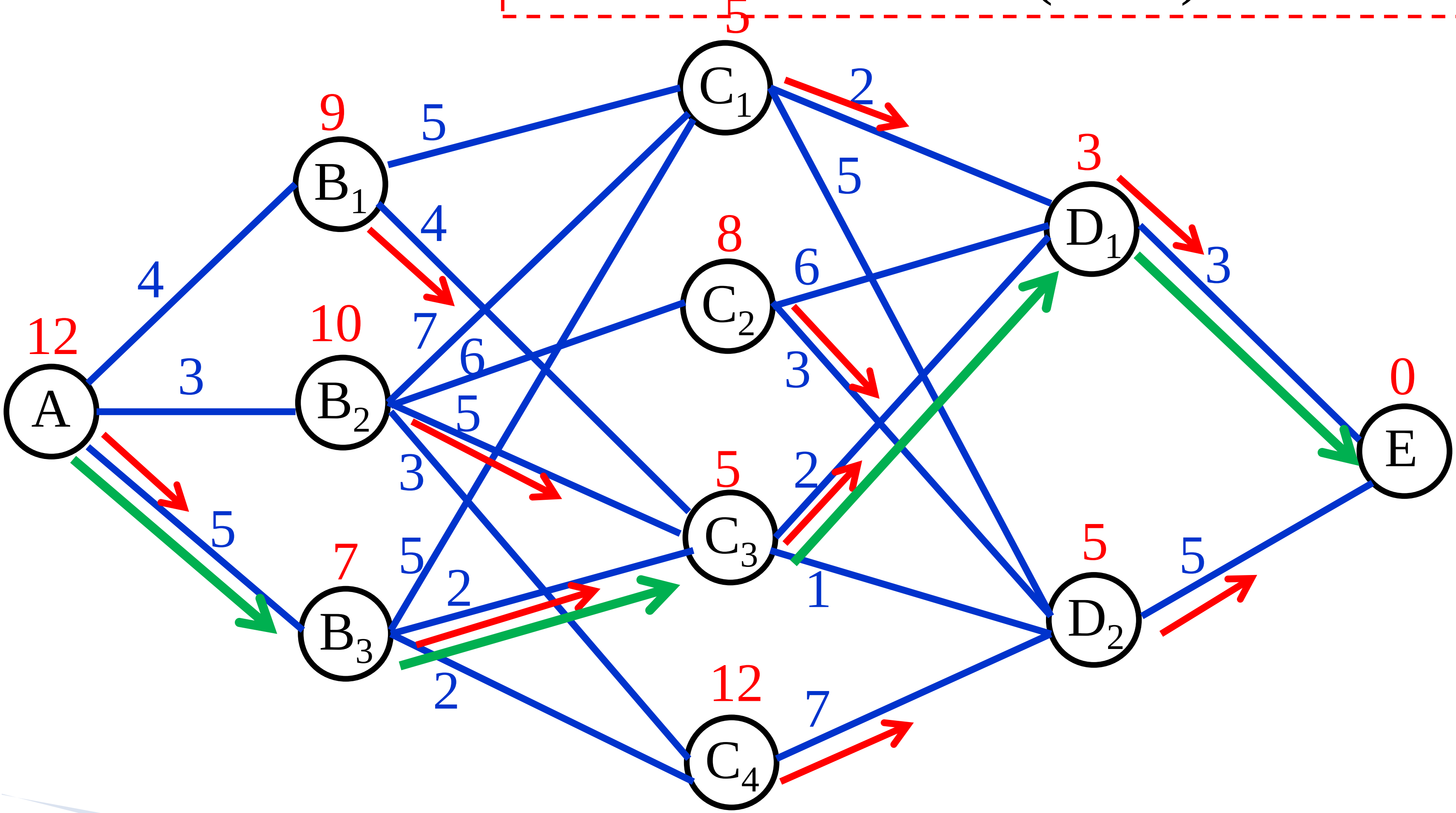
获得的是**多个多阶段决策问题的全局最优解**

中间信息非常有价值，特别是对于灵敏度分析



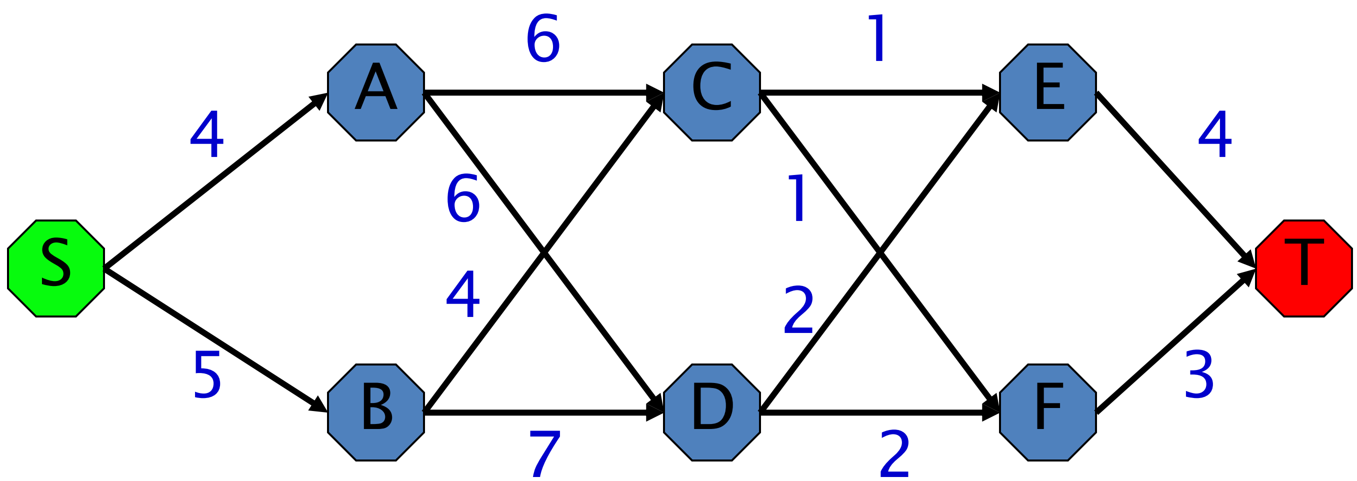
状态转移图

反向(后向) DP： 先反向递推，再前向递推(扫描)



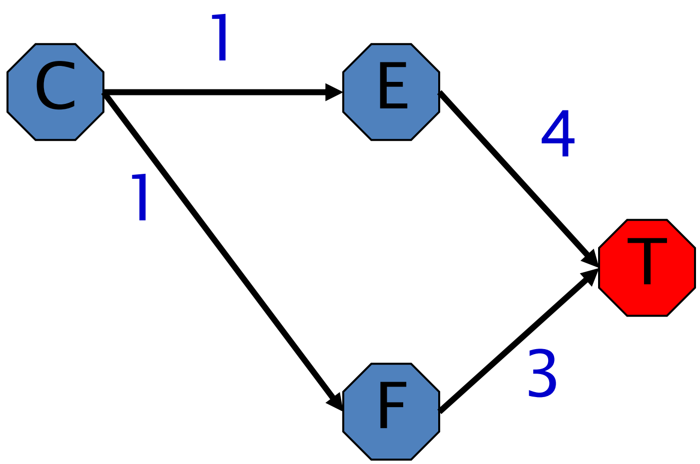
例：最短路径问题

$$\min_{p \in Path(S,T)} D(p)$$

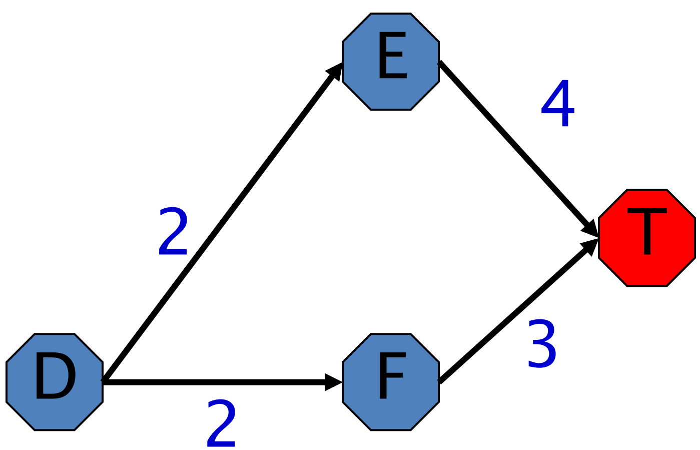


汽车从S站出发，到T站终止，全程分为4段，如何选择路线使S->T时间最短？（图中数字为各段所需时间。）

第三阶段决策：E or F

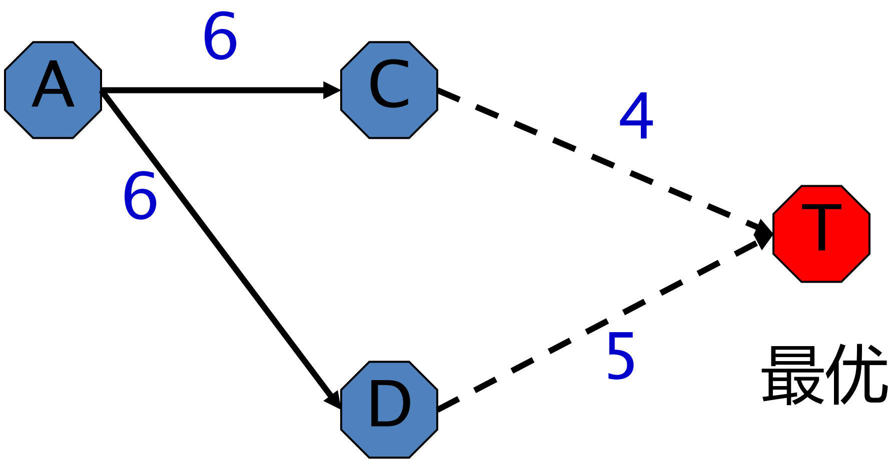


最优：C−>F−>T (4)

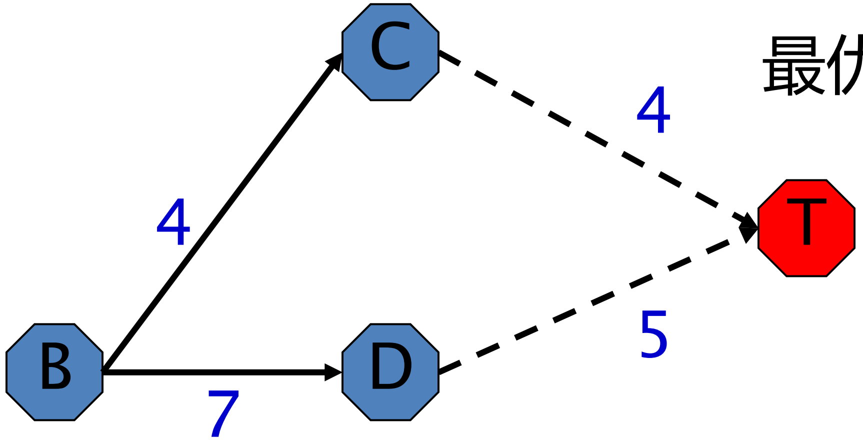


最优：D−>F−>T (5)

第二阶段决策：C or D

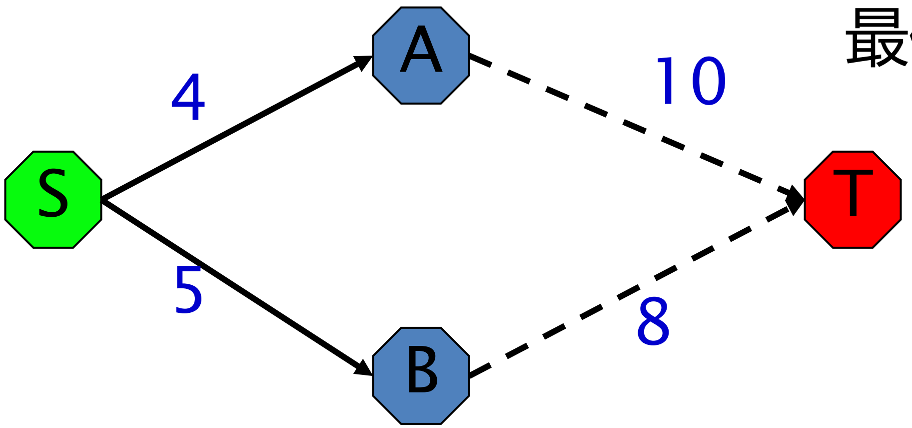


最优：A->C……>T (10)



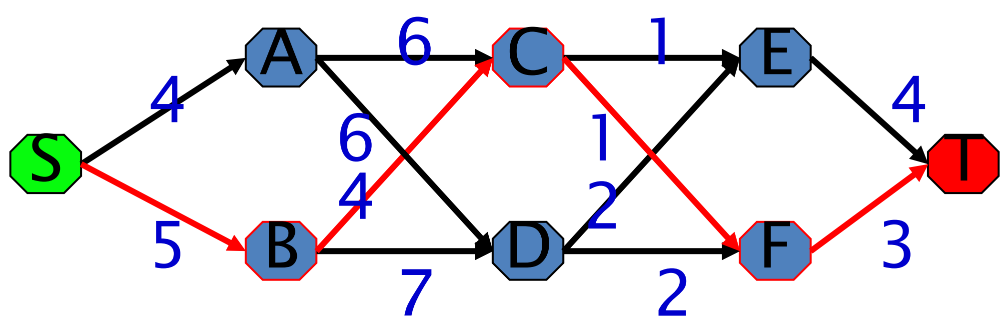
最优：B->C……>T (8)

第一阶段决策：A or B

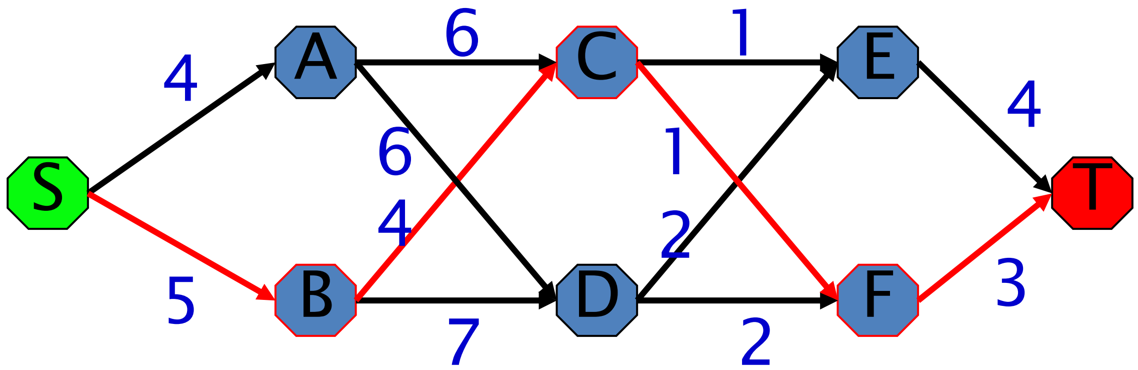


最优：S->B……>T (13)

最优决策：S->B->C->F->T （13）



特点



- 为找到S->T的最优路线，先找出各站到终点T的最优路线。
  - 表面上，多作了计算，但在迭代求解过程中，每一步只需作很简单的计算。
- 最优决策S->B->C->F->T中，从任一点开始到T的任一段，如C->F->T也是从C到T的最优决策。

最优性原理的数学表述

确定性定期离散时间多阶段决策问题基本模型

$$
\begin{cases}
\min \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, k). & \text{决策目标} \\
s.t. \quad x_{k+1} = \phi(x_k, u_k, k); \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{状态转移约束} \\
\qquad x_k \in \Omega_k \subset R^{n_k}; \quad k = 0,1,\cdots N. & \text{状态空间约束} \\
\qquad u_k \in D_k(x_k) \subset R^{m_k}; \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{决策空间约束}
\end{cases}
$$

最优性原理：

如果 $x_0^* \xrightarrow{u_0^*} x_1^* \xrightarrow{u_1^*} x_2^* \xrightarrow{u_2^*} \ldots \xrightarrow{u_{N-1}^*} x_N^*$ 是最优解，

则 $\forall k, 0 \le k \le N$, $x_k^* \xrightarrow{u_k^*} x_{k+1}^* \xrightarrow{u_{k+1}^*} \ldots \xrightarrow{u_{N-1}^*} x_N^*$ 是以 x_k^* 为初始状态的后部过程最优解。

最优性原理的数学表述

确定性定期离散时间多阶段决策问题基本模型

$$
\begin{cases}
\min \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, k). & \text{决策目标} \\
s.t. \quad x_{k+1} = \phi(x_k, u_k, k); \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{状态转移约束} \\
\quad x_k \in \Omega_k \subset R^{n_k}; \quad k = 0,1,\cdots N. & \text{状态空间约束} \\
\quad u_k \in D_k(x_k) \subset R^{m_k}; \quad k = 0,1,\cdots N-1. & \text{决策空间约束}
\end{cases}
$$

$$
f_k(x_k) = \min \sum_{j=k}^{N-1} G(x_j, u_j, j) = \min_{u_k, u_{k+1}, \cdots, u_{N-1}} \sum_{j=k}^{N-1} G(x_j, u_j, j)
$$

$$
= \min_{u_k} \left[G(x_k, u_k, k) + \min_{u_{k+1}, u_{k+2}, \cdots, u_{N-1}} \sum_{j=k+1}^{N-1} G(x_j, u_j, j) \right]
$$

$$
= \min_{u_k} [G(x_k, u_k, k) + f_{k+1}(x_{k+1})]
$$

动态规划基本方程
(递归/递推方程)

$$
\boxed{f_k(x_k) = \min_{u_k} [G(x_k, u_k, k) + f_{k+1}(x_{k+1})]}
$$

最优性原理的数学表述

$$
\begin{cases}
f_k(x_k): \text{出发费用，相当于状态转移图中每个状态上的红色数字} \\
u_k^*(x_k) = \arg\min\limits_{u_k}[G(x_k, u_k, k) + f_{k+1}(x_{k+1})]: \text{最优决策，反向递推} \\
f_N(x_N) = 0: \text{边界条件} \\
x_0^* = x_0,\ x_{k+1}^* = \phi(x_k^*, u_k^*(x_k^*), k); \quad k = 0,1,\cdots N-1: \text{前向递推，最优策略}
\end{cases}
$$

各自和状态转移图上的什么相对应？

$$
f_k(x_k) = \min \sum_{j=k}^{N-1} G(x_j, u_j, j) = \min_{u_k, u_{k+1}, \cdots, u_{N-1}} \sum_{j=k}^{N-1} G(x_j, u_j, j)
$$

$$
= \min_{u_k} \left[G(x_k, u_k, k) + \min_{u_{k+1}, u_{k+2}, \cdots, u_{N-1}} \sum_{j=k+1}^{N-1} G(x_j, u_j, j) \right]
$$

$$
= \min_{u_k} [G(x_k, u_k, k) + f_{k+1}(x_{k+1})]
$$

动态规划基本方程(递归/递推方程)

$$
\boxed{f_k(x_k) = \min_{u_k} [G(x_k, u_k, k) + f_{k+1}(x_{k+1})]}
$$

基本步骤

- 明确问题，找出**阶段**数
- 确定变量，找出**状态变量**和**决策变量**
- 找出状态**转移方程**
- 写出**递推关系**
- 求解**递推关系**

Life can only be understood backwards, but it must be lived forwards

--索伦·克尔凯郭尔

求解的一般途径

DP的主要特点：
- 全局最优解
- 求解效率较高
- 中间信息可充分利用

纯离散问题：

小规模时，状态转移图

其他情况下，基于基本方程递推求解

时间离散，状态连续问题：

状态离散化，化为纯离散问题近似求解

基于基本方程，递推求解

求解的关键步骤及主要难点：

- 恰当的阶段划分
- 恰当的状态定义
- 正确列出基本方程