基 本 内 容

1. 离散时间傅里叶变换;

2. 常用信号的离散时间傅里叶变换对;

3. 离散时间周期信号的傅里叶变换;

4. 离散时间傅里叶变换的性质;

5. 系统的频率响应与系统的频域分析方法;

❖ 注释:

CFS (The Continuous-Time Fourier Series)

连续时间傅里叶级数

DFS (The Discrete-Time Fourier Series)

离散时间傅里叶级数

CTFT (The Continuous-Time Fourier Transform)

连续时间傅里叶变换

DTFT (The Discrete-Time Fourier Transform)

离散时间傅里叶变换

5.0 引言 Introduction

- 本章将采用与讨论CTFT完全相同的思想方法，来研究离散时间非周期信号的频域分解问题。

- **DFS** 与**CFS** 之间既有许多类似之处，也有一些重大差别：主要是DFS是一个有限项级数，其系数a_k具有周期性。

- 在采用相同方法研究如何从 DFS 引出离散时间非周期信号的频域描述时，可以看到DTFT与CTFT既有许多相类似的地方，也同时存在一些重要的区别。

- 抓住它们之间的相似之处并关注其差别，对于掌握和加深对频域分析方法的理解具有重要意义。

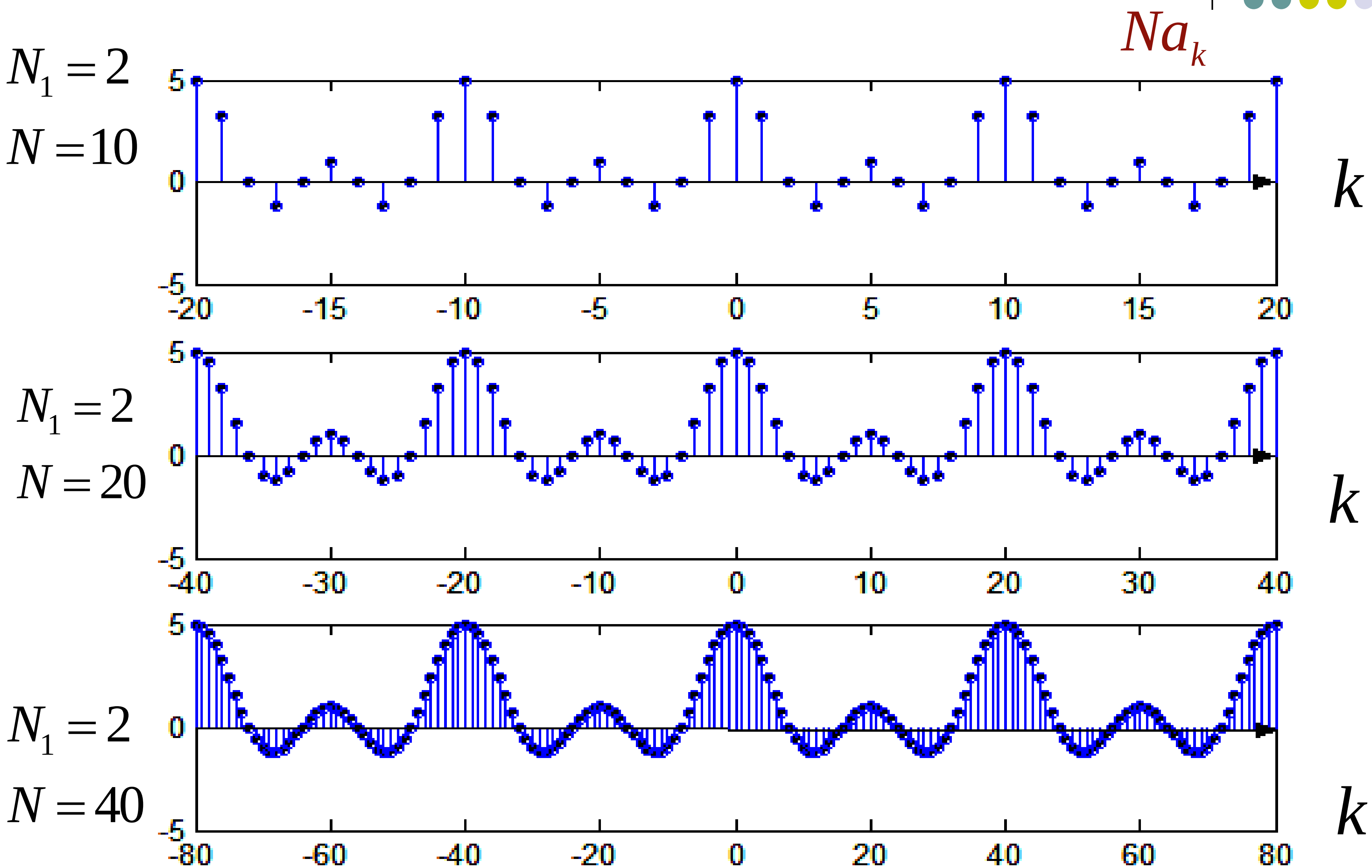
5.1 非周期信号的表示

Representation of Aperiodic Signals: The Discrete-time Fourier Thransform

一. 从 DFS 到 DTFT :

在讨论离散时间周期性矩形脉冲信号的频谱时, 我们看到:

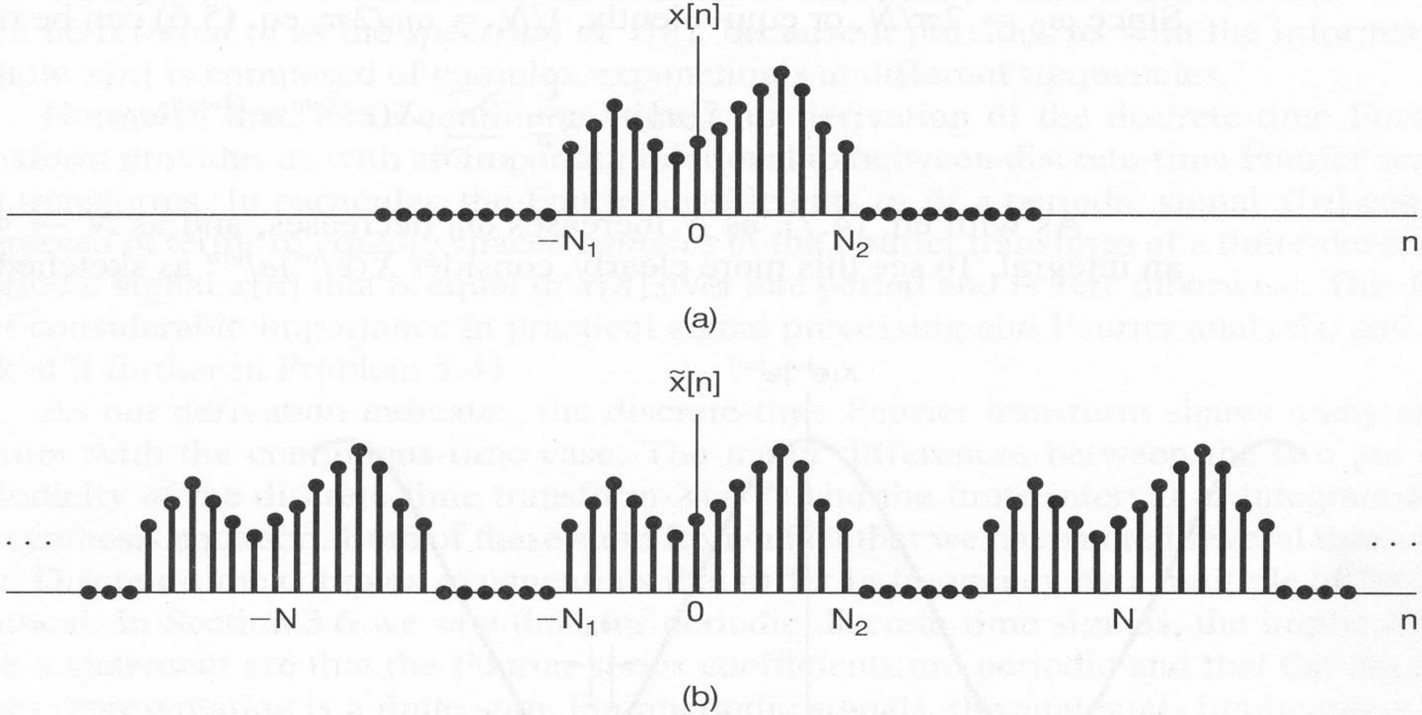
当信号周期 N 增大时，频谱的包络形状不变，幅度减小，而频谱的谱线变密。


Na_k
$N_1 = 2$
$N = 10$
k
$N_1 = 2$
$N = 20$
k
$N_1 = 2$
$N = 40$
k

当$N \to \infty$时，有 $\omega_0 = (2\pi / N) \to 0$，将导致信号的频谱无限密集，最终成为连续频谱。

从时域看，当周期信号的周期 $N \to \infty$ 时，周期序列就变成了一个非周期的序列。

因此，可以预见，对一个非周期信号，它的频谱应该是一个连续的频谱。



$\tilde{x}(n)$是一个以N为周期的离散时间信号，而非周期信号$x(n)$是$\tilde{x}(n)$的一个周期。

在区间$-N_1 \le n \le N_2$上，$x(n)=\tilde{x}(n)$。

对周期信号 $\tilde{x}(n)$ 由 **DFS** 有

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

即 $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_2}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

当 $N\to\infty$ 时 $\frac{2\pi}{N}k\to\omega$，令 $\lim_{N\to\infty}Na_k\triangleq X(e^{j\omega})$

有: $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ —— **DTFT**

说明: 显然 $X(e^{j\omega})$ 对 ω 是以 2π 为周期的。

将其与 a_k 表达式比较有

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

于是: $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$

当 $N \to \infty$时, $\tilde{x}(n) \to x(n), \quad k\omega_0 \to \omega, \quad \omega_0 \to d\omega, \quad \sum \to \int,$

当k在一个周期范围内变化时, $k\omega_0$在 2π 范围变化, 所以积分区间是 2π 。

$$\therefore\ x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

表明: 离散时间序列可以分解成频率在2π区间上分布的、幅度为 $\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})d\omega$ 的复指数分量的线性组合。

结论:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

DTFT对

二. 常用信号的离散时间傅里叶变换

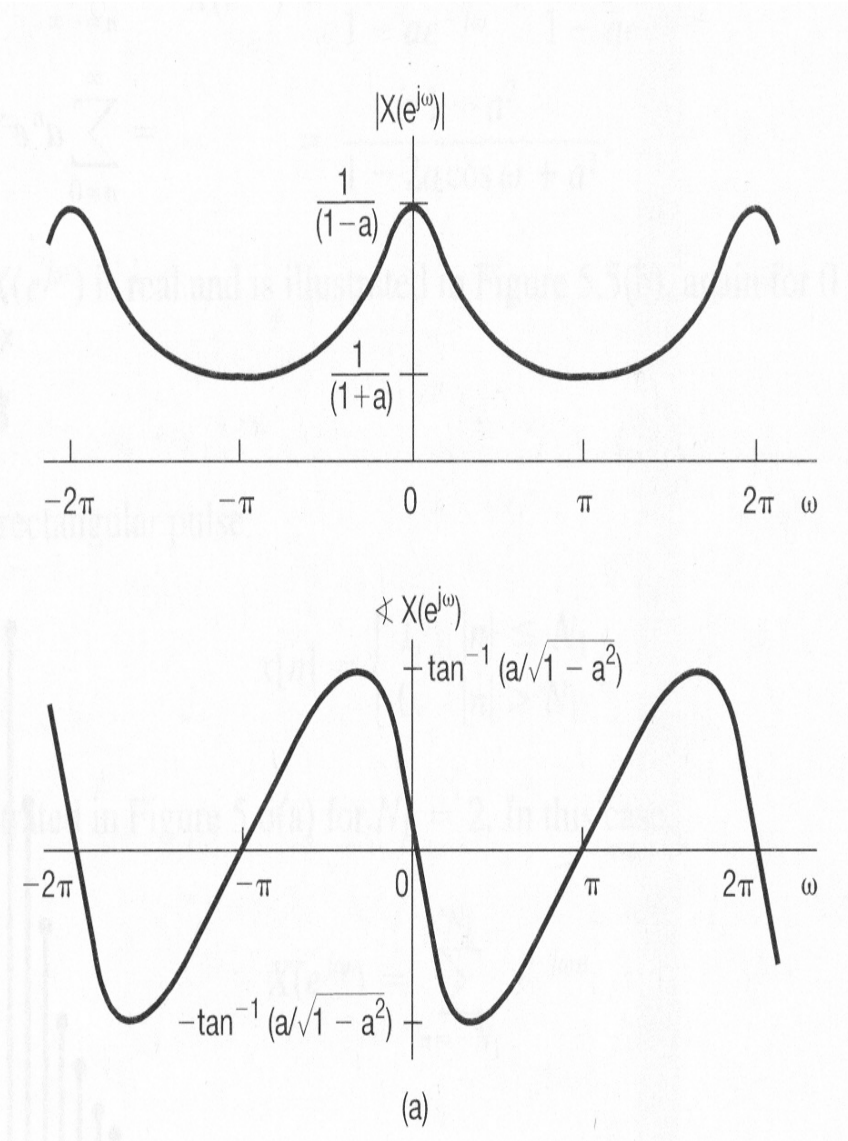
1. $x(n)=a^n u(n), \quad |a|<1$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

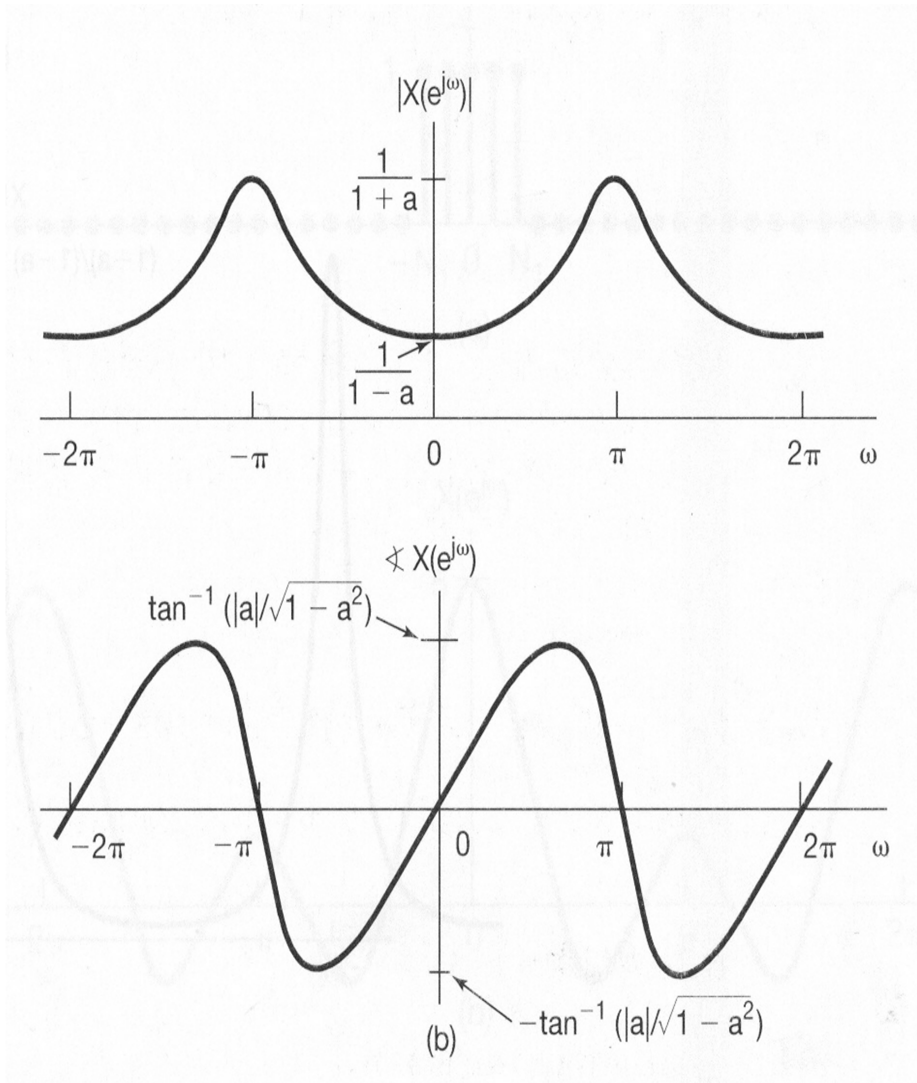
通常$X(e^{j\omega})$是复函数，用它的模和相位表示:

$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\measuredangle X(e^{j\omega})=-\mathrm{tg}^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$


|X(e^{jω})|
1/(1−a)
1/(1+a)
−2π
−π
0
π
2π
ω
∢ X(e^{jω})
tan^{−1} (a/√(1 − a^2))
−tan^{−1} (a/√(1 − a^2))
(a)

$0 < a < 1$


|X(e^{jω})|
1/(1 + a)
1/(1 − a)
−2π
−π
0
π
2π
ω
∢ X(e^{jω})
tan^{−1} (|a|/√(1 − a^2))
−tan^{−1} (|a|/√(1 − a^2))
(b)

$-1 < a < 0$

由图可以得到:

$0<a<1$ 时，低通特性， $x(n)$ 单调指数衰减

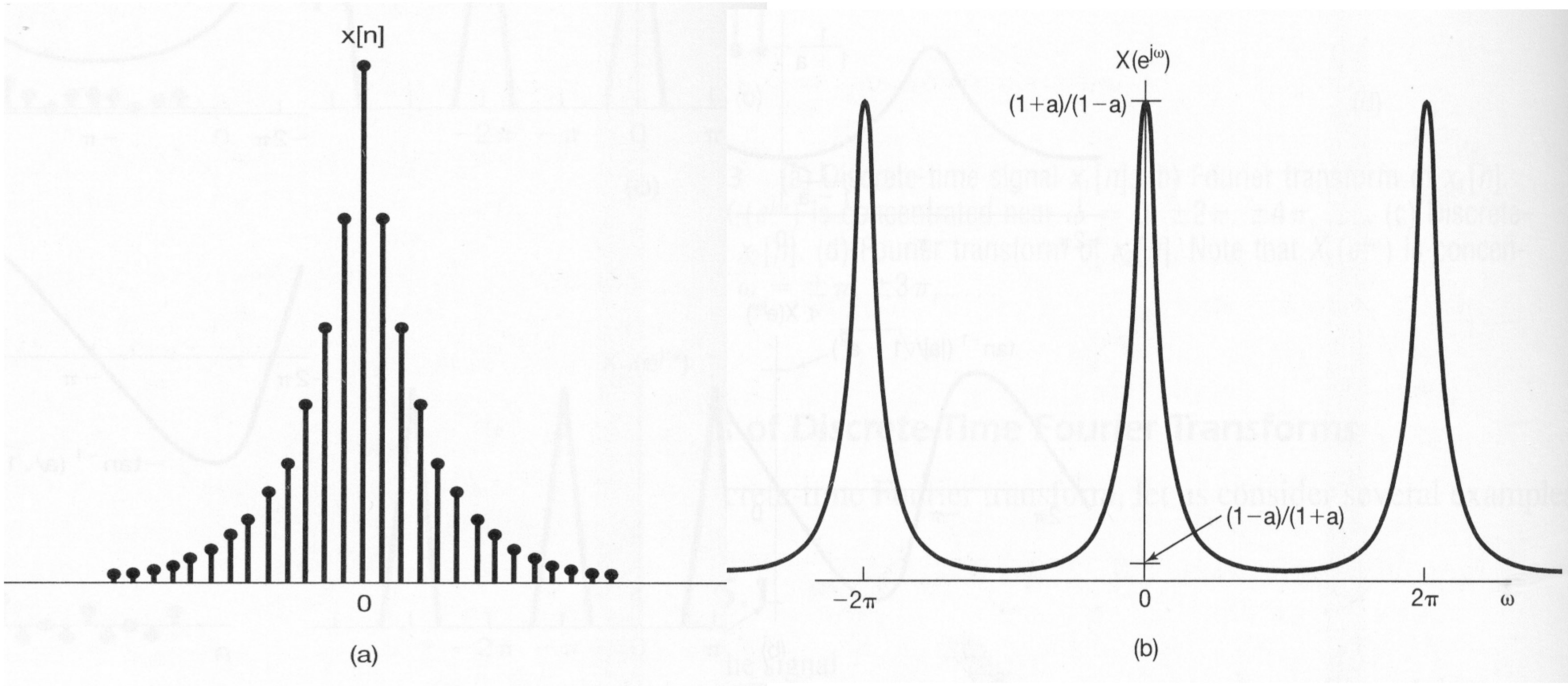
$-1<a<0$ 时，高通特性， $x(n)$ 摆动指数衰减

2. $x(n)=a^{|n|}, \quad |a|<1$

$$x(n)=a^{-n}u(-n-1)+a^{n}u(n)$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-j\omega n}=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}e^{j\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1-a^{2}}{1+a^{2}-2a\cos\omega}$$



可以得出结论: 实偶序列 ⟷ 实偶函数

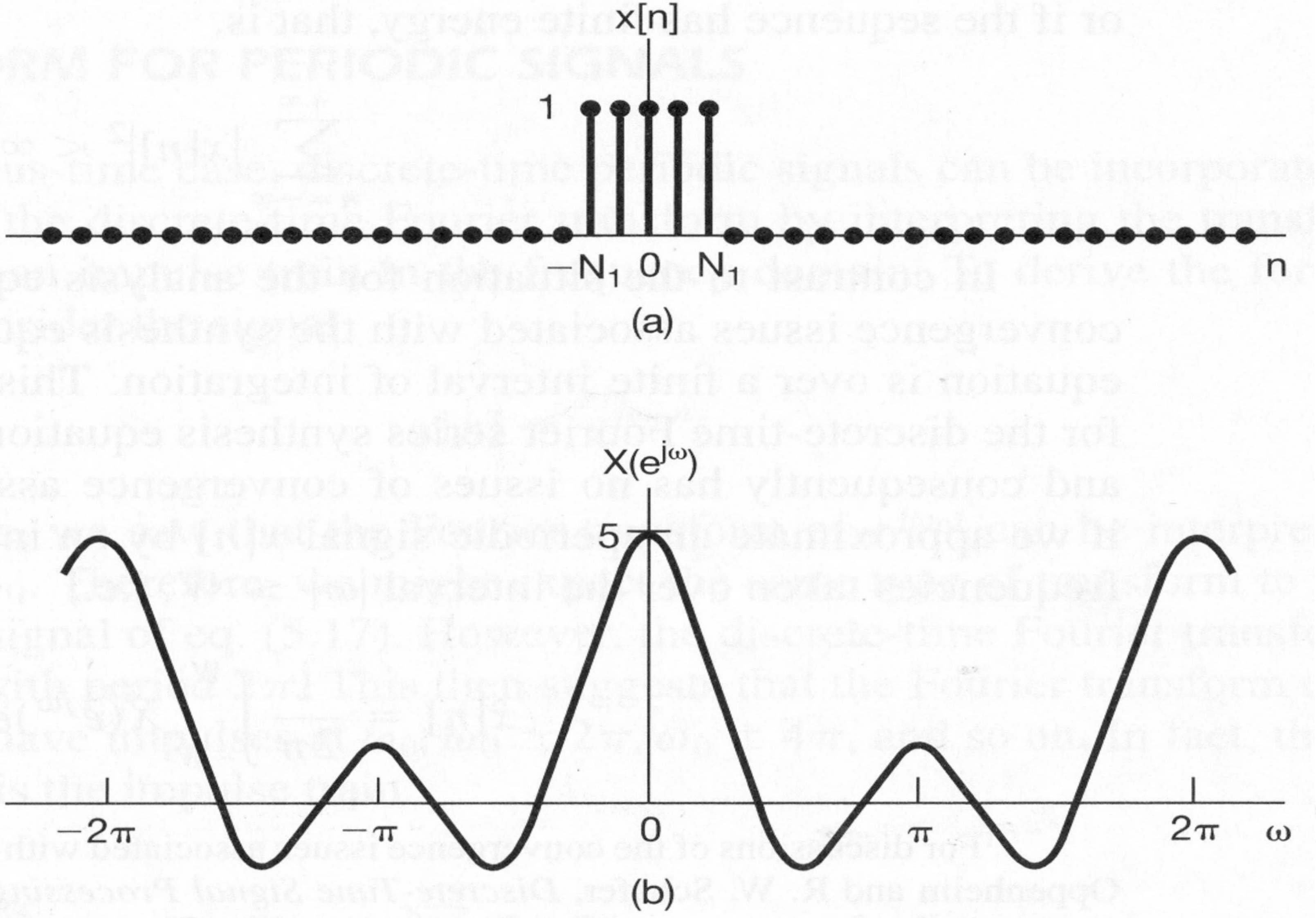
3.矩形脉冲:

$$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}=\frac{\sin(2N_1+1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

有同样的结论: 实偶信号 $\longleftrightarrow$ 实偶函数

当 $N_1=2$ 时，可得到:


x[n]
1
−N1
0
N1
n
(a)
X(e^jω)
5
−2π
−π
0
π
2π
ω
(b)

两点比较:

1. 与对应的周期信号比较

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2N_1+1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

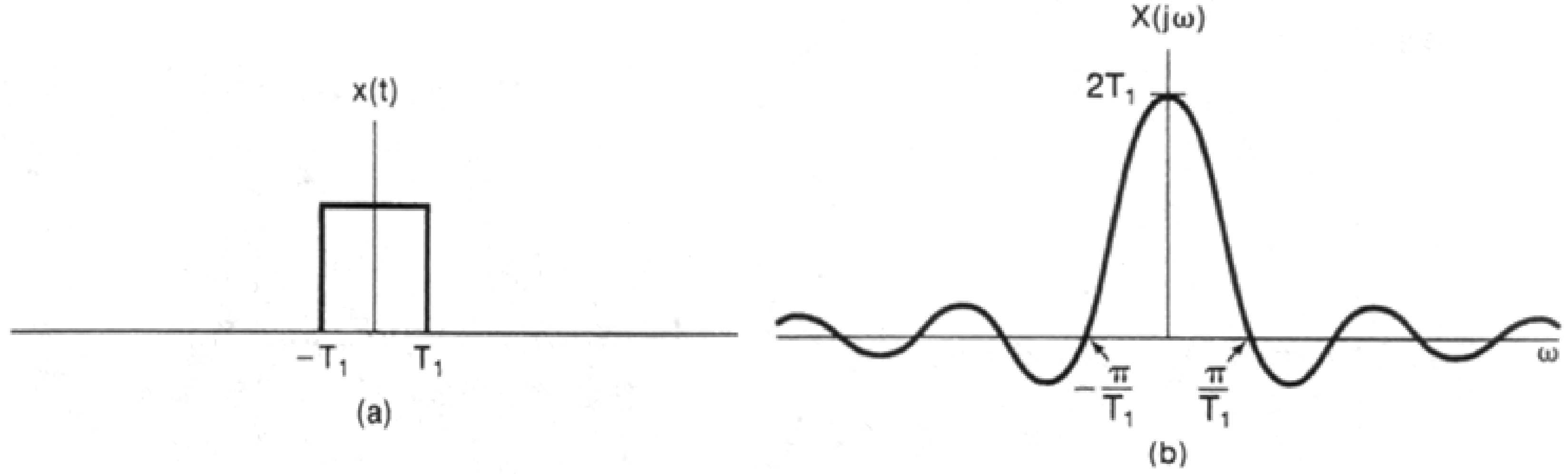
$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k},$$

显然有 $a_k = \frac{1}{N}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ 关系成立

2. 与对应的连续时间信号比较

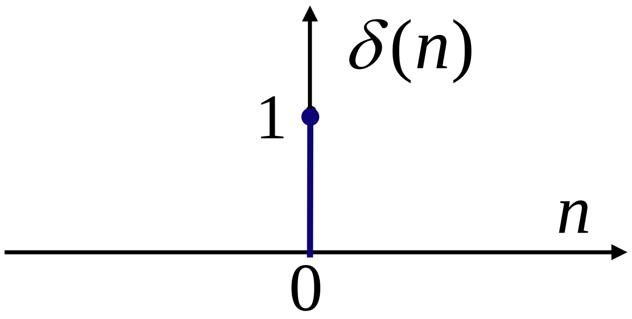
$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & |t|>T_1\end{cases} \qquad X(j\omega)=\frac{2T_1\sin\omega T_1}{\omega T_1}$$

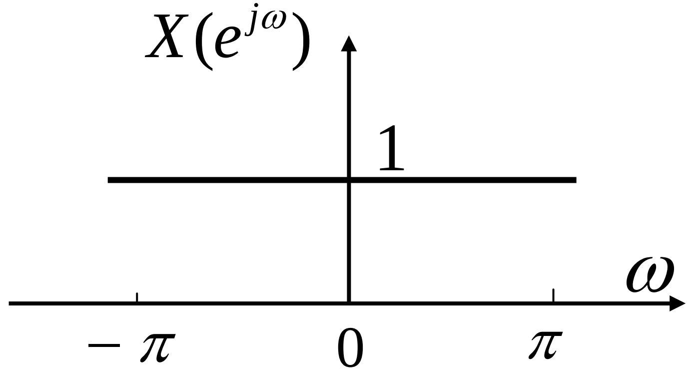
如图所示:



4. $x(n)=\delta(n)$

如图所示:





$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=1$$

三. DTFT的收敛问题

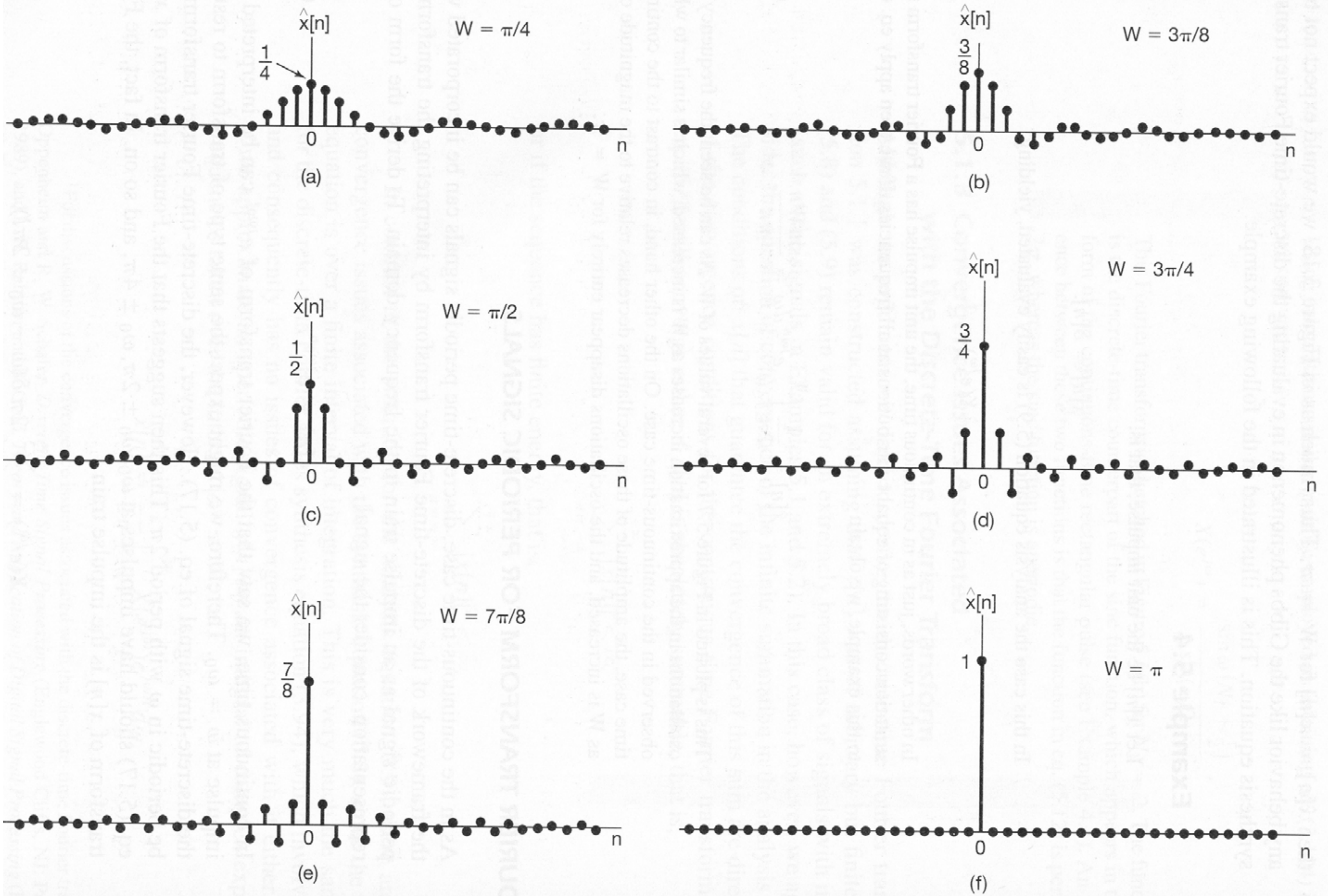
当$x(n)$是无限长序列时，由于$X(e^{j\omega})$的表达式是无穷项级数，当然会存在收敛问题。

收敛条件有两组:

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2<\infty$, 则级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ 收敛于 $X(e^{j\omega})$。

2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$, 则 $X(e^{j\omega})$ 存在，且级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ 收敛于 $X(e^{j\omega})$。

考察 $\delta(n)$ 的收敛过程，如图所示:



x̂[n]
W = π/4
1/4
0
n
(a)
x̂[n]
W = 3π/8
3/8
0
n
(b)
x̂[n]
W = π/2
1/2
0
n
(c)
x̂[n]
W = 3π/4
3/4
0
n
(d)
x̂[n]
W = 7π/8
7/8
0
n
(e)
x̂[n]
1
W = π
0
n
(f)

由图可以得到以下结论:

- 当以部分复指数分量之和近似信号时，也会出现起伏和振荡;
- 但随着 $W\uparrow$, $\tilde{x}(n)$ 的振荡频率变高，起伏的幅度趋小;
- 当 $W=\pi$时，振荡与起伏将完全消失，不会出现吉布斯(**Gibbs**)现象，也不存在收敛问题。

5.2 周期信号的DTFT

The Fourier Transform for Periodic Signals

对连续时间信号，有 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)\leftrightarrow e^{j\omega_0 t}$，由此推断，对离散时间信号或许有相似的情况。但由于DTFT一定是以 2π 为周期的，因此，频域的冲激应该是周期性的冲激串，即

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

对其做反变换有:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\int_0^{2\pi}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega=e^{j\omega_0 n}$$

可见，$\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l) \leftrightarrow e^{j\omega_0 n}$

由**DFS**有 $\tilde{x}(n)=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n},\quad \omega_0=\frac{2\pi}{N}$

因此，周期信号$\tilde{x}(n)$可以用**DTFT**表示为

$$\tilde{x}(n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{k=<N>} a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-k\omega_0-2\pi l)$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=<N>}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k-2\pi l)$$ （对L 展开）

$$=\cdots+\sum_{k=<N>}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)+\sum_{k=<N>}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k-2\pi)$$

$$+\sum_{k=<N>}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k-4\pi)+\cdots$$

$$=\cdots+\sum_{k=0}^{N-1}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)+\sum_{k=0}^{N-1}2\pi a_k\delta\left[\omega-\frac{2\pi}{N}(k+N)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}2\pi a_k\delta\left[\omega-\frac{2\pi}{N}(k+2N)\right]+\cdots$$

$$=\cdots+\sum_{k=0}^{N-1}2\pi a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)+\sum_{k=N}^{2N-1}2\pi a_{k-N}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$+\sum_{k=2N}^{3N-1}2\pi a_{k-2N}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)+\cdots$$

注意到 a_k 也以 N 为周期，于是有：

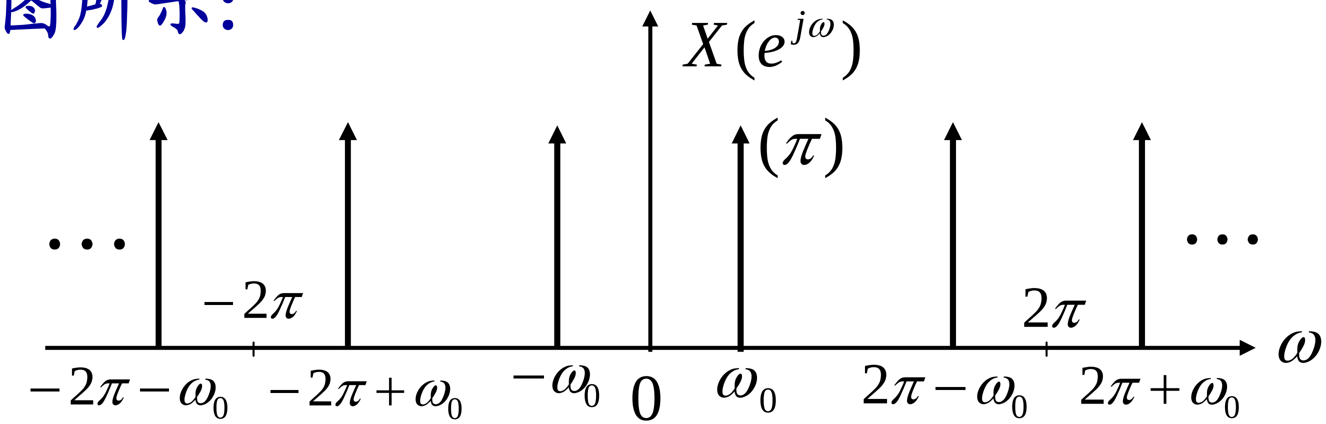
$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

比较：可以看出与连续时间傅里叶变换中相应的形式是完全一致的。

例1. $x(n)=\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})$, 它不一定是周期的。 当 $\omega_0=\frac{2\pi}{N}k$ 时才具有周期性。

$$X(e^{j\omega})=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right]$$

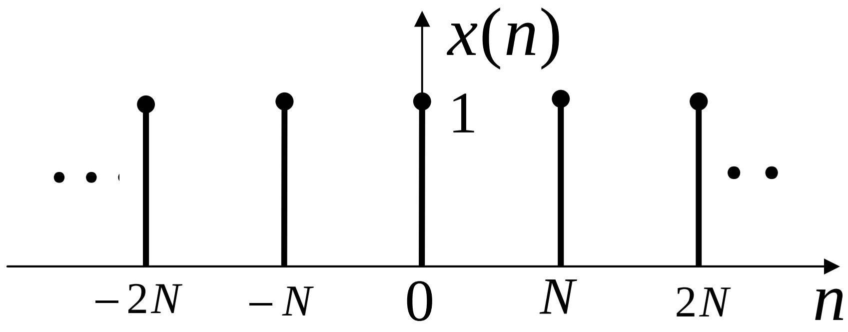
如图所示:

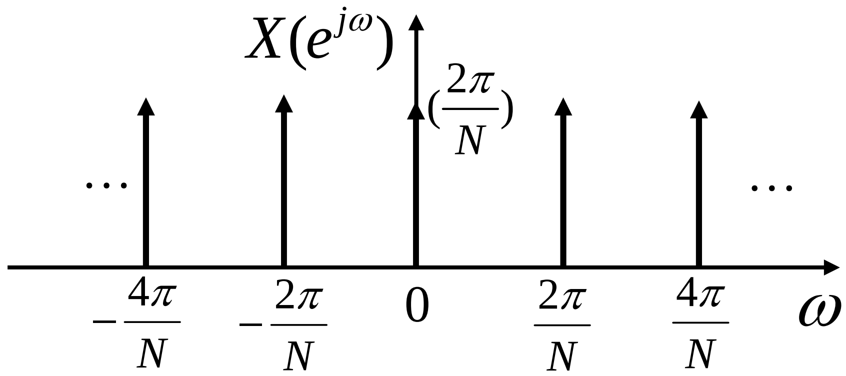


例2. $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$ —— 均匀脉冲串

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$





比较: 与连续时间情况下对应的相一致。

5.3 离散时间傅里叶变换的性质

Properties of the Discrete-Time Fourier Transform

DTFT也有很多与**CTFT**类似的性质，当然也有某些明显的差别。

通过对**DTFT**性质的讨论，目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系。

一、周期性 (periodic):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ ，则 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

比较：这是与**CTFT**不同的。

二. 线性 (linearity):

$$ax_1(n)+bx_2(n)\leftrightarrow aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

三. 时移与频移 (shifiting):

若 $x(n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则

$$x(n-n_0)\leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$ ——时移特性

$$x(n)e^{j\omega_0 n}\leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$ ——频移特性

四. 时域反转 (reflaction):

若 $x(n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x(-n)\leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

五. 共轭对称性 (symmetry properties):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$， 则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

由此可进一步得到以下结论:

1. 若 $x(n)$ 是实信号，则 $x^*(n) = x(n)$

$\therefore X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$， 即 $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$

$$\therefore \begin{cases} \left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right| \\ \measuredangle X(e^{j\omega}) = -\measuredangle X(e^{-j\omega}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] = \mathrm{Re}\left[X(e^{-j\omega})\right] \\ \mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right] = -\mathrm{Im}\left[X(e^{-j\omega})\right] \end{cases}$$

2. 若 $x(n)$ 是实偶信号，则 $x(n)=x(-n),$

$$x^*(n)=x(n) \quad \because x(-n)\leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

于是有： $X(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})=X^*(e^{j\omega}),$

即 $X(e^{j\omega})$ 是实偶函数。

3. 若 $x(n)$ 是实奇信号，$x(n)=-x(-n), \quad x^*(n)=x(n)$

于是有：$X(e^{j\omega})=-X(e^{-j\omega})=-X^*(e^{j\omega}),$

表明 $X(e^{j\omega})$ 是虚奇函数。

4. 若 $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$，则有：

$$x_e(n)\leftrightarrow \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] \qquad x_o(n)\leftrightarrow j\,\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

这些结论与CTFT的相应结论完全一致。

六. 差分与求和 (Differencing and Accumulation):

$$x(n)-x(n-1)\leftrightarrow(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)\leftrightarrow\frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

说明：在DTFT中 $(1-e^{-j\omega})$ **对应于CTFT中的** $j\omega$**。**

例: $\because u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$ $\qquad \delta(n)\leftrightarrow 1$

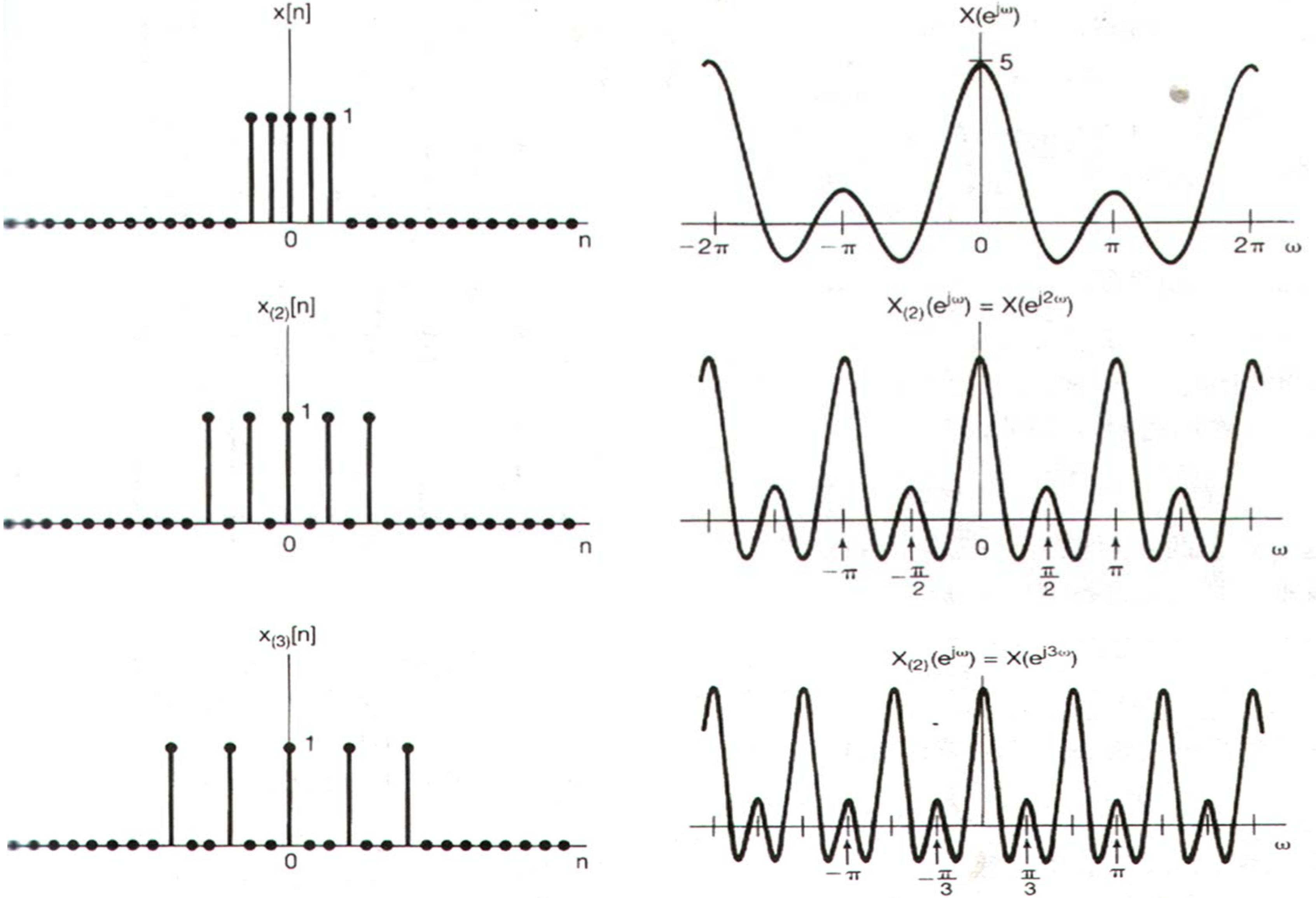
$$\therefore u(n)\leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

七. 时域内插 (interplation):

定义 $x_k(n)=\begin{cases} x(n/k), & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$

$$X_k(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_k(n)e^{-j\omega n}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_k(rk)e^{-j\omega rk}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r)e^{-j\omega rk}=X(e^{jk\omega}) \qquad \therefore x_k(n)\leftrightarrow X(e^{jk\omega})$$


x[n]
1
0
n
X(e^{jω})
5
−2π
−π
0
π
2π
ω
x_{(2)}[n]
1
0
n
X_{(2)}(e^{jω}) = X(e^{j2ω})
−π
−π/2
0
π/2
π
ω
x_{(3)}[n]
1
0
n
X_{(2)}(e^{jω}) = X(e^{j3ω})
−π
−π/3
π/3
π
ω

信号的时域与频域特性之间有一种相反的关系。

八. 频域微分(differention in frequency):

$$nx(n) \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

九. Parseval定理:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$|X(e^{j\omega})|^2$称为 $x(n)$ 的能量谱密度函数。

比较: 在DFS中有 $\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x(n)|^2 = \sum_{k=<N>}|a_k|^2$

$|a_k|^2$称为周期信号的功率谱。

5.4 卷积特性(The Convolution Property)

若 $y(n)=x(n)*h(n),$

则 $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),$

$$Y(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-m)e^{-j\omega n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)H(e^{j\omega})e^{-j\omega m}$$

$$=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$H(e^{j\omega})$ 称为系统的频率特性。

卷积特性是对LTI系统在频域分析的理论基础。

例: 求和特性的证明

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) * u(n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot U(e^{j\omega})$$

$$= X(e^{j\omega}) \cdot \left[\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \right]$$

$$= \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

5.5 相乘性质（The Multiplication Property)

如果 $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n),$

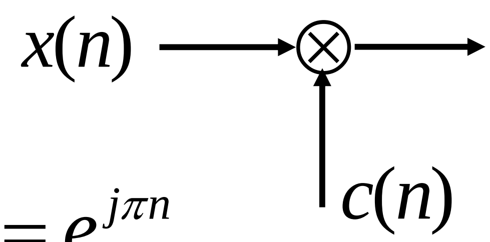
则 $Y(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

由于 $X_1(e^{j\omega})$和 $X_2(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的，

因此上述卷积称为周期卷积。

例: 考查系统



$$y(n)=x(n)\cdot c(n)$$

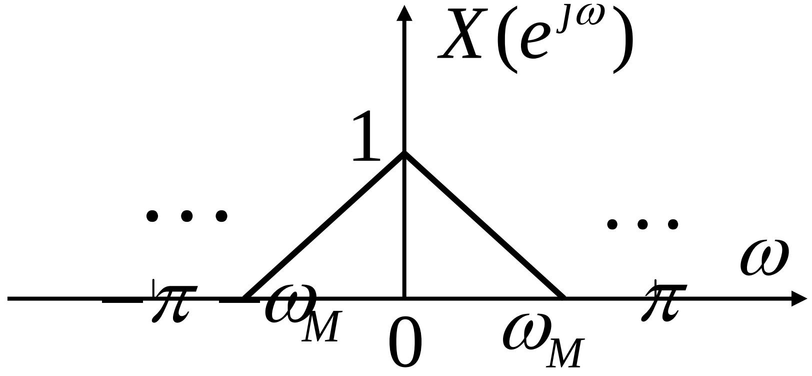
$$c(n)=(-1)^n=e^{j\pi n}$$

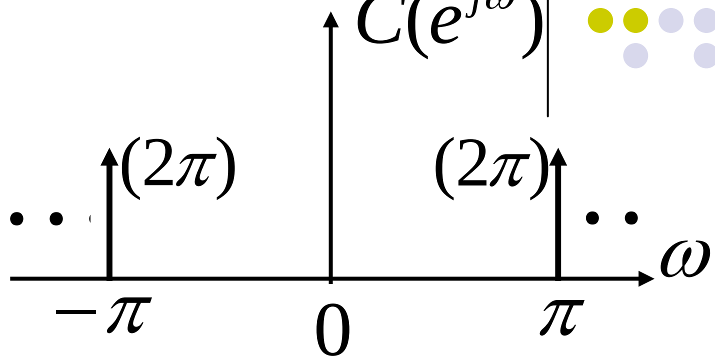
$$C(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi)$$

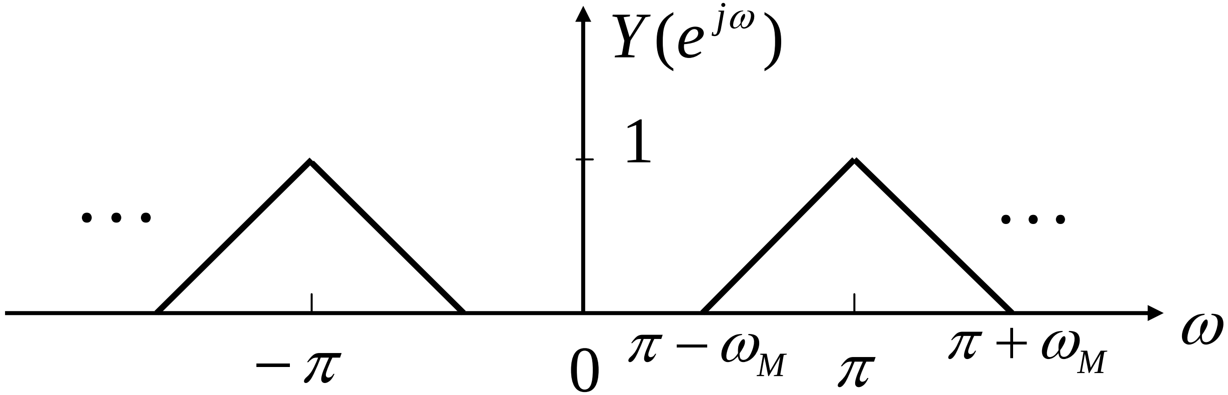
$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\otimes C(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j(\omega-\theta)})C(e^{j\theta})d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}X(e^{j(\omega-\theta)})\delta(\theta-\pi)d\theta=X(e^{j(\omega-\pi)})$$







5.6 傅里叶变换的性质及基本变换对列表

（自学）

5.7 对偶性（Duality）

一. DFS 的对偶

$$x(n)=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

由于a_k本身也是以N为周期的序列，当然也可以将其展开成 DFS 形式。

即：$a_k=\sum_{n=<N>}\frac{1}{N}x(-n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 或 $a_n=\sum_{k=<N>}\frac{1}{N}x(-k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

这表明：　序列 a_n的**DFS**系数就是 $\frac{1}{N}x(-k)$,

即：

$$x(n) \xleftrightarrow{DFS} a_k$$

$$a_n \xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N}x(-k)$$

利用对偶性可以很方便的将 **DFS** 在时域具有的性质，通过对偶得出在频域相对应的性质。

例1：从时移到频移

$$x(n) \leftrightarrow a_k \qquad a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k)$$

利用时移性质有：$$a_{n-M} \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kM}$$

由对偶性有：$$\frac{1}{N} x(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow \frac{1}{N} a_{-k-M}$$

$$\therefore x(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{-k-M}$$

$$\because x(-n) \leftrightarrow a_{-k} \quad \therefore x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{k-M}$$ 频移特性

例2: 由卷积特性到相乘特性

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow N \cdot a_k \cdot b_k$$ **DFS的卷积特性**

$$a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \qquad b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_2(-k)$$

由时域卷积性质:

$$a_n \otimes b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot \frac{1}{N} x_2(-k) \cdot N = \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot x_2(-k)$$

由对偶性: $$\frac{1}{N} x_1(-n) x_2(-n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{m=<N>} a_m b_{-k-m}$$

$$\therefore x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \sum_{m=<N>} a_m b_{k-m} = a_k \otimes b_k$$ 时域相乘性质

二. DTFT与CFS间的对偶

由 $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ 知 $X(e^{j\omega})$ 是一个以 2π

为周期的连续函数，如果在时域构造一个以 2π

为周期的连续时间信号 $X(e^{jt})$, 则可以将其表示

为**CFS** 形式:

$$X(e^{jt})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jkt}, \qquad a_k=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{jt})e^{-jkt}dt$$

由**DTFT**有： $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

比较 $x(n)$ 和 a_k 的表达式可以看出 $a_k = x(-k)$

这表明:

若 $x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$

则 $X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$

利用这一对偶关系，可以将**DTFT**的若干特性对偶到**CFS**中去；反之亦然。

例: 从CFS的时域微分到DTFT的频域微分

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{CFS} j\frac{2\pi}{T}ka_k$$ CFS的时域微分特性

若 $x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$

$$\therefore \frac{d}{dt}X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} j\frac{2\pi}{T}kx(-k) = jkx(-k), \quad (T = 2\pi)$$

$$\therefore -jnx(n) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$ DTFT的频域微分特性

例: 从CFS的卷积特性到DTFT的相乘特性

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \qquad x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x_1(-k) \qquad X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x_2(-k)$$

由CFS的卷积特性 $x_1(t) \otimes x_2(t) \leftrightarrow T a_k b_k$

$$X_1(e^{jt}) \otimes X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} 2\pi x_1(-k) x_2(-k), \quad (T = 2\pi)$$

再由对偶性:

$$2\pi x_1(n) x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1(n) x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

——**DTFT的相乘特性**

可以将对偶关系归纳为如下图表:

连续时间傅里叶级数

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

连续、周期 ⋮ 离散、非周期

离散时间傅里叶级数

$$x(n) \leftrightarrow a_k \qquad a_n \leftrightarrow \frac{1}{N}x(-k)$$

离散、周期 ⋮ 离散、周期

$$a_k = \frac{1}{T}X(j\frac{2\pi}{T}k)$$

$$x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$$

$$a_k = \frac{1}{N}X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$$

连续时间傅里叶变换

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

连续、非周期 ⋮ 连续、非周期

离散时间傅里叶变换

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

离散、非周期 ⋮ 连续、周期

可以看出：信号在时域的特性和在频域的特性之间存在以下对应关系：

时域的周期性 ⟷ 频域的离散性

时域的非周期性 ⟷ 频域的连续性

时域的离散性 ⟷ 频域的周期性

时域的连续性 ⟷ 频域的非周期性

5.8 由LCCDE表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Difference Equations

相当广泛而有用的一类离散时间LTI系统可以由一个线性常系数差分方程（LCCDE）来表征:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

一. 系统的频率响应:

$H(e^{j\omega})$刻画了LTI系统的频域特征，它是系统单位脉冲响应的傅里叶变换。

但并非所有的LTI系统都一定存在频率响应。

如果 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$，则 $H(e^{j\omega})$ 存在。

这说明: 稳定系统可以由其频率响应来描述。

由 $H(e^{j\omega})$ 所表征的系统应该是稳定系统。

二. 由LCCDE描述的系统的频率响应:

方法一: 可以从求解 $x(n)=\delta(n)$ 时的差分方程得到 $h(n)$，进而对 $h(n)$ 做傅里叶变换求得 $H(e^{j\omega})$。

方法二：可以通过求出 $x(n)=e^{j\omega n}$时方程的解而得到 $H(e^{j\omega})$，因为 $e^{j\omega n}$是LTI系统的特征函数，此时方程的解为 $y(n)=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$。

方法三：对方程两边进行DTFT变换得到 $H(e^{j\omega})$：

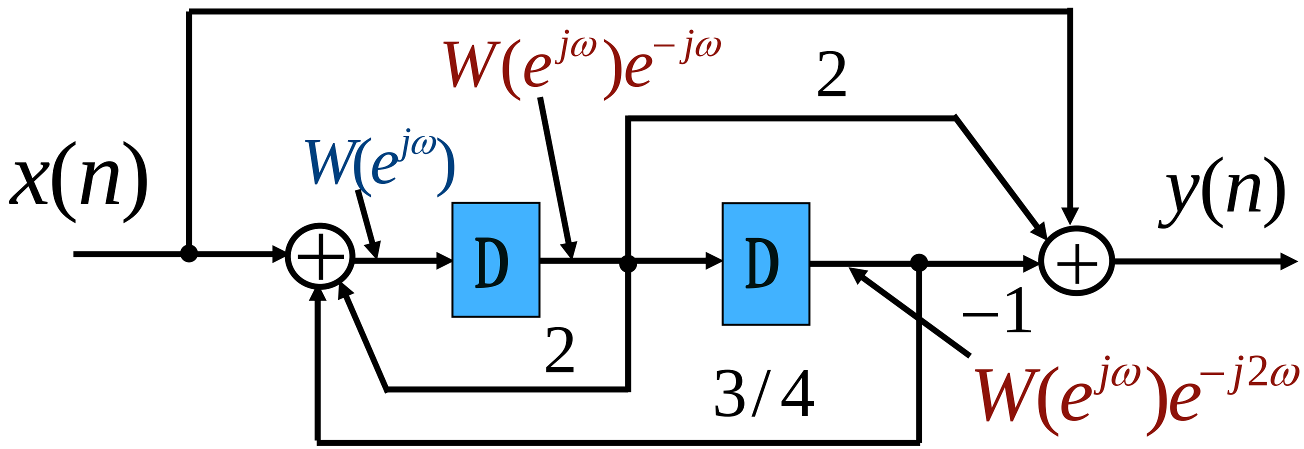
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\omega}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$ 是一个有理函数

往往是先得到 $H(e^{j\omega})$, 再反变换得到 $h(n)$ 。

三. 由方框图描述的系统:



通过对图中两个加法器的输出列方程可得到:

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{3}{4}W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} - W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

由上式可得:

$$X(e^{j\omega}) = (1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = (1 - \frac{7}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{7}{4}e^{-j2\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega}} = 1 + \frac{(2 - e^{-j\omega})e^{-j\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

四. LTI系统的频域分析方法:

1. 对输入信号做傅里叶变换，求得 $X(e^{j\omega})$。

2. 根据系统的描述，求得系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$。

3. 根据卷积特性得到 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$。

4. 对 $Y(e^{j\omega})$ 做傅里叶反变换得到系统的响应 $y(n)$。

做傅里叶变换时主要靠利用傅里叶变换的性质和常用的变换对；做反变换时主要是通过部分分式展开并利用傅里叶变换的性质和常用的变换对。

5.9 小结 Summary

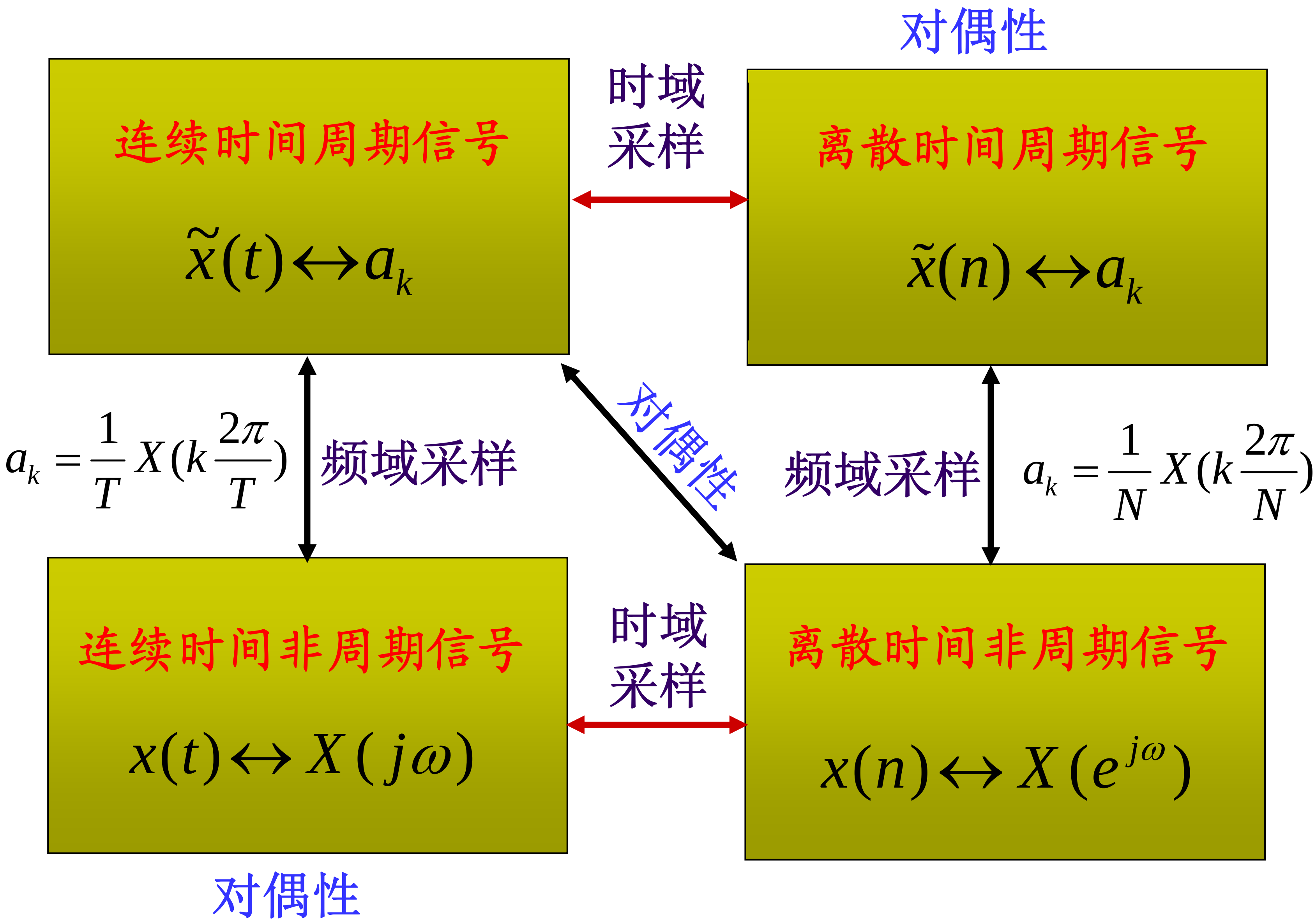
- 本章与第4章平行地讨论了DTFT，讨论的基本思路和方法与第4章完全对应，得到的许多结论也很类似。
- 通过对DTFT性质的讨论，揭示了离散时间信号时域与频域特性的关系。不仅看到有许多性质在CTFT中都有相对应的结论，而且它们也存在一些重要的差别，例如DTFT总是以2π为周期的。

- 通过卷积特性的讨论，对**LTI**系统建立了频域分析的方法。同样地，相乘特性的存在则为离散时间信号的传输技术提供了理论基础。

- 对偶性的讨论为进一步认识连续时间信号、离散时间信号、周期信号与非周期信号频域描述的几种工具之间的内在联系，提供了重要的理论根据。深入理解并恰当运用对偶性，对深刻掌握**CFS**、**DFS**、**CTFT**、**DTFT**的本质关系有很大帮助。

- 与连续时间LTI系统一样，对由 LCCDE 或由方框图描述的LTI系统，可以很方便的由方程或方框图得到系统的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$，进而实现系统的频域分析。其基本过程和涉及到的问题与连续时间LTI系统的情况也完全类似。

随着今后进一步的讨论，我们可以看到**CFS**、**DFS**、**CTFT**、**DTFT**之间是完全相通的。


对偶性
连续时间周期信号
$\tilde{x}(t) \leftrightarrow a_k$
时域
采样
离散时间周期信号
$\tilde{x}(n) \leftrightarrow a_k$
$a_k = \frac{1}{T} X(k\frac{2\pi}{T})$
频域采样
对偶性
频域采样
$a_k = \frac{1}{N} X(k\frac{2\pi}{N})$
连续时间非周期信号
$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
时域
采样
离散时间非周期信号
$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$
对偶性