第一章　习题 1.1（A）

1. 利用公式（1.1.6）求解方程组$\begin{cases}3x_1+2x_2=6,\\5x_1+3x_2=8.\end{cases}$

解　$\because D=\begin{vmatrix}3&2\\5&3\end{vmatrix}=-1\neq 0\quad D_1=\begin{vmatrix}6&2\\8&3\end{vmatrix}=2,\ D_2=\begin{vmatrix}3&6\\5&8\end{vmatrix}=-6,$

$\therefore x_1=\dfrac{D_1}{D}=-2,\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=6.$

2. 任意改换行列式 D 的第 i 行元素和第 j 列元素，而 D 的其他元素不变，问 D 的 (i,j) 元素的代数余子式的 A_{ij} 值是否会改变?

解 不会改变。由 (i,j) 元素的代数余子式的定义知 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，而 M_{ij} 是删去的第 i 行和第 j 列元素后由剩余元素按照它们原来的相对位置所形成的 $n-1$ 阶行列式。

3.　求行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\3&5&-8&9\\2&0&-4&2\\1&2&10&4\end{vmatrix}$$

的（3,4）元素的余子式 M_{34} 及代数余子式 A_{34}.

解

$$M_{34}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\3&5&-8\\1&2&10\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&-8\\2&10\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix}3&-8\\1&10\end{vmatrix}=104$$

$A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-104.$

4．设有两个行列式，

$$D_1=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}\qquad D_2=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

不用具体计算，说明 D_1 的第 4 行元素的余子式之和 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=D_2$.

解　将 D_2 按第 4 行展开有

$$D_2=(-1)^{4+1}(-1)M_{41}+(-1)^{4+2}M_{42}+(-1)^{4+3}M_{43}+(-1)^{4+4}M_{44}$$

$$=M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}。$$

5．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix}2&1&4\\-4&3&7\\4&6&10\end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\db&-dc&de\\fb&fc&fe\end{vmatrix}$.

解（1）$\begin{vmatrix}2&1&4\\-4&3&7\\4&6&10\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}2&1&4\\0&5&15\\0&4&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}2\begin{vmatrix}5&15\\4&2\end{vmatrix}=-100.$

（2）$\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\db&-dc&de\\fb&fc&fe\end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&e\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\0&0&2e\\0&2c&2e\end{vmatrix}$

=4*agbcdef.*

注：该题也可以直接用对角线法则来计算。

6. 计算下列 n 阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&n\end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$.

解（1）解法 1 ：按第 n 行展开

$$\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&n\end{vmatrix}=n\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&2&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

解法 2 ：利用行列式的性质，通过交换行，换成对角行列式，再计算。

（2）按第 1 行展开

$$\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x&y&\cdots&0&0\\0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix}y&0&\cdots&0&0\\x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&y\end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

（B）

1. 设 b 为非零常数，分别用 b^{i-j} 去乘行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的 (i,j) 元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，证明所得行列式与 D 相等。

解 由题设所得行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-2}a_{13} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ ba_{21} & a_{22} & b^{-1}a_{23} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ b^2a_{131} & ba_{32} & a_{33} & \cdots & b^{3-n}a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-3}a_{n3} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

每列提出 $b^{2-j}(j=1,\cdots,n)$，然后每行提出 $b^{i-2}(i=1,\cdots,n)$，可得

$$=bb^0b^{-1}\cdots b^{2-n}\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-1}a_{13} & \cdots & b^{-1}a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ ba_{131} & ba_{32} & ba_{33} & \cdots & ba_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-2}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-2}a_{n3} & \vdots & b^{n-2}a_{nn} \end{vmatrix}=D$$

2. 试就 3 阶行列式来验证行列式的性质 1. 1. 1.

解　按第一行展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

按第一行展开

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

比较可得，结论成立。

习题 1.2 (A)

1. 计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a-b & a & a \\ a & a & a+c & a \\ a & a & a & a-c \end{vmatrix}$；　　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$；　　（6）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x & x \\ 1 & x & 0 & x & x \\ 1 & x & x & 0 & x \\ 1 & x & x & x & 0 \end{vmatrix}$.

解

（1）$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{\underset{c_1+c_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$=-2(x^3+y^3).$$

（2）$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-z\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-z^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix}=1-x^2-y^2-z^2.$$

注：按零元素较多的行或列展开计算简单。

（3）$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a-b & a & a \\ a & a & a+c & a \\ a & a & a & a-c \end{vmatrix}\overset{c_i-c_4}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & a \\ 0 & -b & 0 & a \\ 0 & 0 & c & a \\ c & c & c & a-c \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{按第1行展开}}{=\!=\!=}b\begin{vmatrix} -b & 0 & a \\ 0 & c & a \\ c & c & a-c \end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ c & c & c \end{vmatrix}$$

$$=b\left[-b\begin{vmatrix}c & a\\ c & a-c\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}0 & c\\ c & c\end{vmatrix}\right]+ac\begin{vmatrix}0 & -b\\ c & c\end{vmatrix}=b^2c^2.$$

（4）
$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}10\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=160.$$

（5）
$$\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_4]{\substack{r_1-3r_4\\ r_2+5r_4}}\begin{vmatrix}0 & 16 & -10 & 11\\ 0 & -24 & 18 & -20\\ 0 & 10 & -5 & 5\\ 1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}16 & -10 & 11\\ -12 & 9 & -10\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2+6r_3]{r_1-8r_3}\begin{vmatrix}0 & -2 & 3\\ 0 & 3 & -4\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=40；$$

（6）
$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & x & x & x\\ 1 & x & 0 & x & x\\ 1 & x & x & 0 & x\\ 1 & x & x & x & 0\end{vmatrix}\xlongequal{c_i-xc_1\ (i=2,3,4,5)}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -x & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -x & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -x & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}c_i+c_1\ (i=2,3,4,5)}\begin{vmatrix}\frac{4}{x} & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -x & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x\end{vmatrix}=4x^3.$$

2. 证明：

（1）
$$\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1\\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2\\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}；$$

（2）
$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)；$$

（3）
$$\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}=0.$$

证明：

（1）左边
$$=\begin{vmatrix}(1-x)(a_1-b_1) & a_1x+b_1 & c_1\\ (1-x)(a_2-b_2) & a_2x+b_2 & c_2\\ (1-x)(a_3-b_3) & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}=(1-x)\begin{vmatrix}a_1-b_1 & a_1x+b_1 & c_1\\ a_2-b_2 & a_2x+b_2 & c_2\\ a_3-b_3 & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=(1-x)\begin{vmatrix}a_1(1+x) & a_1x+b_1 & c_1\\ a_2(1+x) & a_2x+b_2 & c_2\\ a_3(1+x) & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\text{右边}.$$

（2） 解法 1
$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-a^3r_1]{r_2-ar_1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a\\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

解法 2 加边法，构造范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & x\\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3\end{vmatrix}=(x-a)(x-b)(x-c)[(b-a)(c-b)(c-a)]$$

其中的系数为$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$即为所求行列式的值

（3）
$$\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i - c_1}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 利用公式（1.1.2）及公式（1.1.6）计算行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$.

解（1）$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -20.$

（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2.$

（3）$\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_5} -\begin{vmatrix} a & a & a & 0 & 0 \\ b & d & c & 0 & 0 \\ b^2 & d^2 & c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & bc & ab \\ 0 & 0 & 0 & da & cd \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & d & c \\ b^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} bc & ab \\ da & cd \end{vmatrix} = abd(c-b)(d-b)(d-c)(c^2-a^2).$$

4. 计算下列n阶行列式

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　（2）$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

解（1）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + \sum_{i=2}^{n} r_i} (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

（2）列和相同，将第 2 到第 n 列加到第 1 列，并提出公因子，有

$$\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

第 2 到第 n 行分别减去第 1 行，得

$$=(b+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (b+\sum_{i=1}^{n} a_i)b^{n-1}.$$

（3）第 2 到第 n 行分别减去第 1 行，再按第 2 行展开，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

（4） 第 2 行到第 n 行分别减去第 1 行，再将第 k 列的$\dfrac{a_1}{a_k}$倍分别加到第 1 列

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{a_1}{a_k} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}).$$

5. 利用递推公式计算行列式：

$$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

解 按第 1 行展开，然后利用递推关系有

$$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=(1-a)D_4+aD_3$$

$$=(1-a)[(1-a)D_3+aD_2]+a[(1-a)D_2+aD_1]=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

其中 $D_1=1-a,\ D_2=(1-a)^2+a=1-a+a^2$.

6. 利用 Vandermonde 行列式计算下列 $n+1$ 阶行列式：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

分析：利用行列式的性质，通过相邻行和相邻列的交换化成 Vandermonde 行列式，再计算。

解 第 $k(k=n+1,\cdots,2)$ 行依次与第 $k-i(i=1,\cdots,k-1)$ 行交换，得

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-1)^n \end{vmatrix}$$

再第 $k(k=n+1,\cdots,2)$ 列依次与第 $k-i(i=1,\cdots,k-1)$ 列交换，得

$$=(-1)^{n(n+1)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix}=n!(n-1)!\cdots 2!1!.$$

7. 证明（其中 D_k 为 k 阶行列式，未写出的元素都是零，以下都这样约定）：

(1) $$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)；$$

证明：用数学归纳法，当 n=1 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1$,结论成立;

设 n=k-1 时结论成立，即 $D_{2(k-1)}=\prod\limits_{i=1}^{k-1}(a_id_i-b_ic_i)$,则当 n=k 时，按第 1 列展开，有，

$$D_{2k}=a_kd_kD_{2(k-1)}+(-1)^{2k+1}c_k(-1)^{2k}b_kD_{2(k-1)}=(a_kd_k-c_kb_k)D_{2(k-1)}=\prod_{i=1}^{k}(a_id_i-b_ic_i)$$

即结论成立.

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n；$$

证明：将 D_n 按第 1 列展开，再利用递推关系，有

$$D_n=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}=xD_{n-1}+a_n$$
$$=x[xD_{n-2}+a_{n-1}]+a_n=x^2D_{n-2}+xa_{n-1}+a_n$$
$$=\cdots=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\text{。}$$

即结论成立.也可以用数学归纳法证明。

(3) $$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\quad(a\neq b)；$$

证明：将 D_n 按第 1 行展开，有 $D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$

于是 $D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=b^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=b^n$;

$D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})=a^2(D_{n-2}-bD_{n-3})=\cdots=a^n$;

联立上面两式可得 $D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\quad(a\neq b)$，即结论成立.

也可以用数学归纳法证明。

(4) $$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos n\alpha;$$

证明：用数学归纳法，当 n=1 时，$D_1=\cos\alpha, D_2=\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos 2\alpha,$ 结论成立;

设 $D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha, D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha,$ 则将 D_n 按第 n 行展开，再将第 1 项展开，再合并，可得

$D_n=-D_{n-2}+2\cos\alpha D_{n-1}=\cos n\alpha.$

即结论成立.

（B）

1. 利用公式（1.2.2）及行列式的性质证明：

$$D_{m+n}=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}.$$

证明： 将第 m+1 列做 m 次相邻列的交换移到第 1 列；再将 m+2 列做 m 次相邻列的交换移到第 2 列；……；最后将 m+n 列做 m 次相邻列的交换移到第 n 列，共经过 mn 次交换后，得（1.2.2），利用（1.2.2）可得结论成立；

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}$$

2. 计算下列行列式

（1）$D_n=\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|, i,j=1,\cdots,n.$

解 用第 i 行减去第 $i-1(i=n,\cdots,2)$ 行，再将第 n 列分别加到其余列，可得

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2\\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}n-1 & n & n+1 & \cdots & n-1\\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -1\\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

（2）$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix},\quad a_1\neq 0.$$

解 将第 1 行的 $-\dfrac{a_i}{a_1}$ 倍加到第 $i(i=2,\cdots,n)$ 行，再将第 $j(j=2,\cdots,n)$ 列的 $\dfrac{a_j}{a_1}$ 倍加到第 1 列，

可得

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -\dfrac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\dfrac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2).$$

习题 1.3 (A)

1. 用 Cramer 法则求解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4,\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11,\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11;\end{cases}$

解 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=60\neq 0$，满足 Cramer 法则的条件；

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=180;\ D_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=60;\ D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=60;$$

所以方程组的解为：$x_1=\dfrac{D_1}{D}=3;\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=1;\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=1.$

（2）$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+a_1^3x_4=1, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+a_2^3x_4=1, \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3+a_3^3x_4=1, \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3+a_4^3x_4=1. \end{cases}$（其中 a_1,a_2,a_3,a_4 为互不相同的常数）

解 因为系数行列式是 Vandermonde 行列式，且 a_1,a_2,a_3,a_4 为互不相同的常数

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)\neq 0,$$

满足 Cramer 法则的条件；$\because D_1=D,\ D_2=D_3=D_4=0$（均有两列相同）

所以方程组的解为：$x_1=\dfrac{D_1}{D}=1;\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=0;\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=0;\ \ x_4=\dfrac{D_4}{D}=0.$

2. 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ 3x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$$

存在非零解，试求 λ 的值。

解 因为齐次线性方程组有非零解，所以系数行列式等于零，于是由 $D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 得

$\lambda^2-2\lambda+1=0$，即 $\lambda=1$。

3. Cramer 法则的理论结果是：如果由 n 个方程，n 个未知量组成的线性方程组的系数行列式不等于零，则该方程组必有惟一解，试说明这个命题的逆否命题。

解 如果由 n 个方程，n 个未知量组成的线性方程组无解或有无穷多解，则该方程组的系数行列式必等于零。

4. 证明：过平面上两个不同点 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$ 的直线的方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

解 过平面上的两个不同点 $M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2)$ 的直线的方程为

$$y-y_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & 0 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

5. 求 3 次多项式 $f(x)$，是满足 $f(-1)=0,\ f(1)=4,\ f(2)=3,\ f(3)=16$。

解 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，则 $f(-1)=-a+b-c+d=0$；

$f(1)=a+b+c+d=4$；$f(2)=8a+4b+2c+d=3$；$f(3)=27a+9b+3c+d=16$，

可以看作以 a,b,c,d 为未知量的线性方程组，解该四元线性方程组，因为系数行列式

$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}=48\neq 0$，所以该方程组有唯一解 $a=\dfrac{D_1}{D}=2;\ b=\dfrac{D_2}{D}=-5;$

$c=\dfrac{D_3}{D}=0;\ d=\dfrac{D_4}{D}=7.$ 即 $f(x)=2x^3-5x^2+7.$

（B）

设 $a_i(i=0,1,2,3)$ 为常数，且 $a_3\neq 0$，试利用 Cramer 法则和 Vandermonde 行列式的结论证明：3 次代数方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$ 不会有 4 个不同的根。

解 设该 3 次代数方程有 4 个不同的根 $x_i(i=1,2,3,4)$，则

$$a_0+a_1x_i+a_2x_i^{\,2}+a_3x_i^{\,3}=0\quad(i=1,2,3,4)$$

该方程组是以 a_0,a_1,a_2,a_3 为未知量的齐次线性方程组，且系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)\neq 0.$$

所以该方程组只有零解，即 $a_0=a_1=a_2=a_3=0$，矛盾，从而结论成立

第 1 章习题

1. 填空题

（1）行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$ _____ .

解 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 140.$

（2）行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ _____ .

解 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$

（3）关于的代数方程 $\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ 的全部根为______.

解 由行和相同得 $\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & x-4 & 0 \\ 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 3 & x-5 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3),$$

所以关于 x 的代数方程的全部根为 1,2,3.

（5） 已知 n 阶行列式 D 的值为 $a \neq 0$，且 D 的每一行元素之和都等于 b，则 D 的第 1 列元素的代数余子式之和 $A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1} =$ _____.

解 将第 2 到第 n 列加到第 1 列，提出公因子，并按第 1 列展开：

$$D = b\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b(A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1}) = a.$$

$$\because\ a \neq 0,\ \therefore\ b \neq 0. \quad \therefore\ A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1} = \frac{a}{b}.$$

（6） 若方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$，只有零解，则常数 λ 与 μ 满足的条件是_____.

解 系数行列式 $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = \mu(1-\lambda) \neq 0$

所以 λ 和 μ 应满足的条件是 $\lambda \neq 1$ 且 $\mu \neq 0$.

2. 单项选择题

（1）若 n 阶行列 $D = 0$，则（ ）

（A） D 中必有一行（列）元素全为零.

（B） D 中必有两行（列）元素对应成比例.

（C）以 D 为系数行列式的非齐次线性方程组必有唯一解.

（D）以 D 为系数行列式的齐次线性方程组必有非零解.

解 选项（A）和（B）可以分别举反例 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

选项（C）不满足 Cramer 法则的条件.

选项（D）利用 Cramer 法则的推论 1.3.2 反证可得，所应选（D）.

（2）设 A_{ij} 为 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ 的 (i, j) 元素的代数余子式，则

$A_{31} + 2A_{32} + 3A_{33} + 4A_{34} = (\ )$

（A） 0 .（B） 1 .（C） -1 .（D） 16 .

解 由行列式的性质有，$A_{31} + 2A_{32} + 3A_{33} + 4A_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

第 1 行与第 3 行完全一样，行列式等于 0，所以选(A).

或者利用行列式的性质 1.1.8 有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0, i \neq k$，所以选(A).

（3）记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为（ ）

（A）1.（B）2.（C）3.（D）4.

解 第2,3,4列分别减去第1列得 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}=-x(-5x+5)=0，$$

所以应选(B).

6. 设 M_{ij} 为行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i,j) 元素的余子式，试计算 $M_{13}+2M_{23}+5M_{33}$.

解 $M_{13}+2M_{23}+5M_{33}=(-1)^{1+3}M_{13}-2(-1)^{2+3}M_{23}+5(-1)^{3+3}M_{33}$

$$=A_{13}-2A_{23}+5A_{33}+0A_{43}=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-105$$

4. 计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$；　（4）$\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$.

解（1）$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_1-3r_4 \\ r_2-2r_4 \\ r_3+r_4}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\substack{c_2-2c_1 \\ c_3+4c_1}} -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 15 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}=-18.$$

（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & -3 & -7 \\ -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\substack{c_2+2c_1 \\ c_3-3c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -13 & 8 \\ -2 & -5 & 14 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -13 & 8 \\ -5 & 14 \end{vmatrix}=-142.$$

（3）$D \xlongequal{\text{拆}c_1} \begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & xy & xz \\ 0 & y^2+1 & yz \\ 0 & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$

$$=x^2\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ y & y^2+1 & yz \\ z & yz & z^2+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y^2+1 & yz \\ yz & z^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=x^2\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+y^2+z^2+1=x^2+y^2+z^2+1$$

（5）按第1行展开有：

$$D_5=2aD_4-a^2D_3=2a(2aD_3-a^2D_2)-a^2D_3=3a^2D_3-2a^3D_2$$
$$=3a^2(2aD_2-a^2D_1)-2a^3D_2=4a^3D_2-3a^4D_1=4a^3\cdot 3a^2-3a^4\cdot 2a=6a^5.$$

5. 用 Cramer 法求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+2x_3+4x_4=\dfrac{1}{2}, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+15x_4=1. \end{cases}$$

解 $\because D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 15 \end{vmatrix}\neq 0,\ D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 15 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}D,$

且 D_2, D_3, D_4 中都有两列成比例，所以都等于 0，

由 *Cramer* 知：

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2,3,4. \quad \therefore x_1 = \frac{1}{2}, \ \ x_i = 0, i = 2,3,4.$$