线性规划导论
Introduction to Linear Programming(LP)

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- LP问题的基本概念
- 可行域与基本可行解

举例（1）

列奥尼德·康托罗维奇（《生产组织与计划的数学方法》，1939）

（生产计划问题）在金属制品零件加工中，设有三个铣床、三个六角车床和一个自动机床共同生产由两个零件组成的某产品。机床的生产率见下表。问：如何安排每日生产计划以获得当天成品的最大产量?

机床组	机床数	每个机床的生产率（/天）	
		零件I	零件II
铣床	3	10	20
六角车床	3	20	30
自动车床	1	30	80

举例（2）

George Dantzig
(1947)

（运输问题）现要从两个仓库运送原料到三个工厂。具体情况如下表。求最优（运费最小）的运输方案?

运费 (元/吨)		工厂 1	工厂 2	工厂 3	库存 (吨)
仓库	1	2	1	3	50
	2	2	2	4	30
需求（吨）		40	15	25	

线性规划的一般形式

$D=\varnothing$： **不可行**
$D\neq\varnothing$： **无界**
或**有最优解**

$$\max(\min) \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1,\ldots,p \\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = p+1,\ldots,m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,\cdots,q \\ & x_j \gtrless 0, \quad j = q+1,\cdots,n \end{aligned}$$

自由变量

价值系数c_j、价值向量c
约束矩阵（系数矩阵）A、右端向量b
可行解x、可行域D

LP问题的标准型

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

一般形式->标准形式?

将一般形式转化为标准形式

$$\text{Max} \ \rightarrow \ \text{Min}$$

$$\leq \ \rightarrow \ =$$

$$\geq \ \rightarrow \ =$$

$$\gtrless \ \rightarrow \ ?$$

例：化以下问题为标准型

$$\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 5x_2 \\
s.t. \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 - x_2 \ge 1 \\
& x_1 \ge 0
\end{aligned}$$

Outline

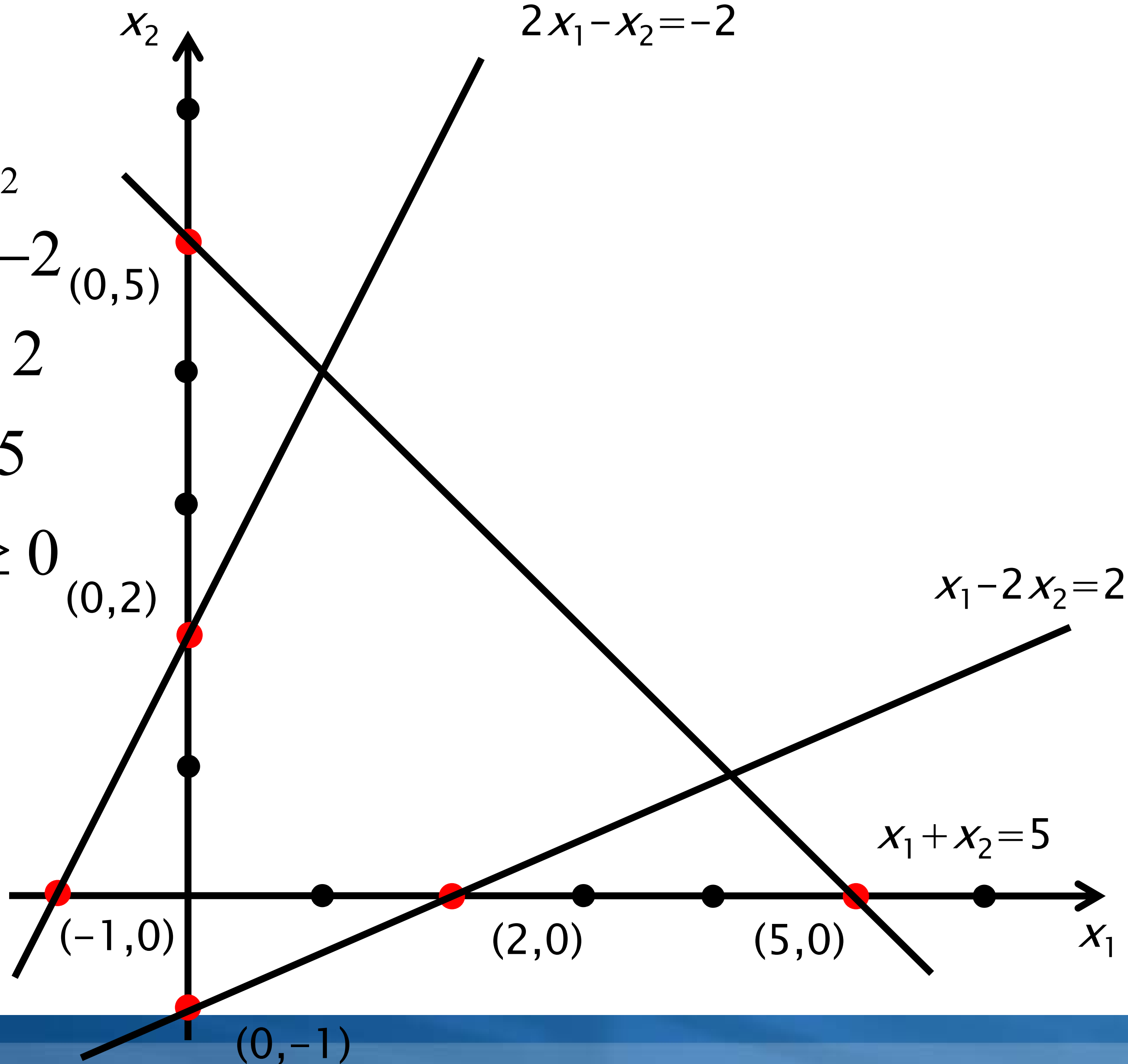
- LP问题的基本概念
- 可行域与基本可行解

例：解如下线性规划问题

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 \ge -2 \\
& x_1 - 2x_2 \le 2 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

图解法

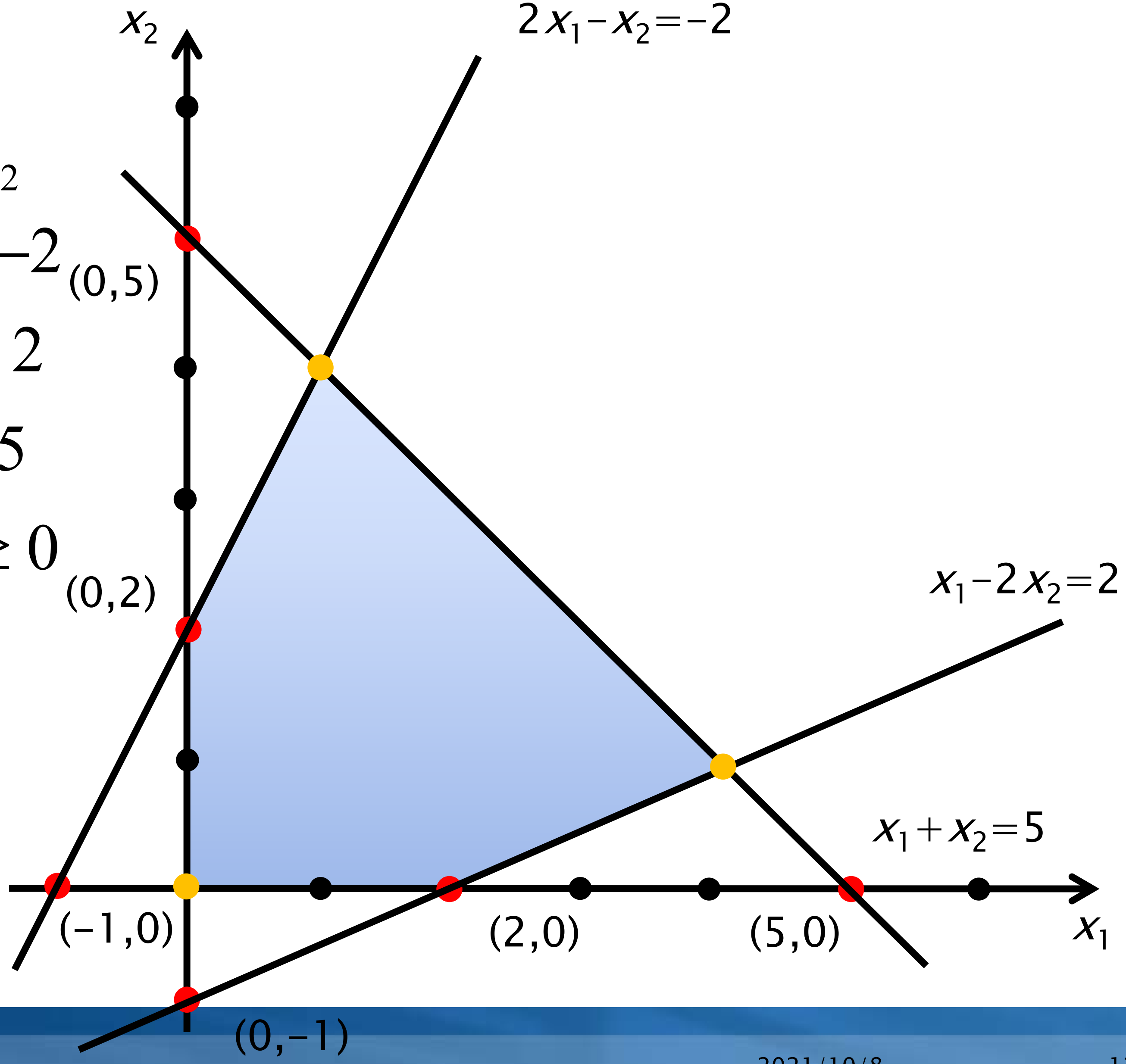
$$\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



图解法

$$\min \quad z = x_1 - x_2$$

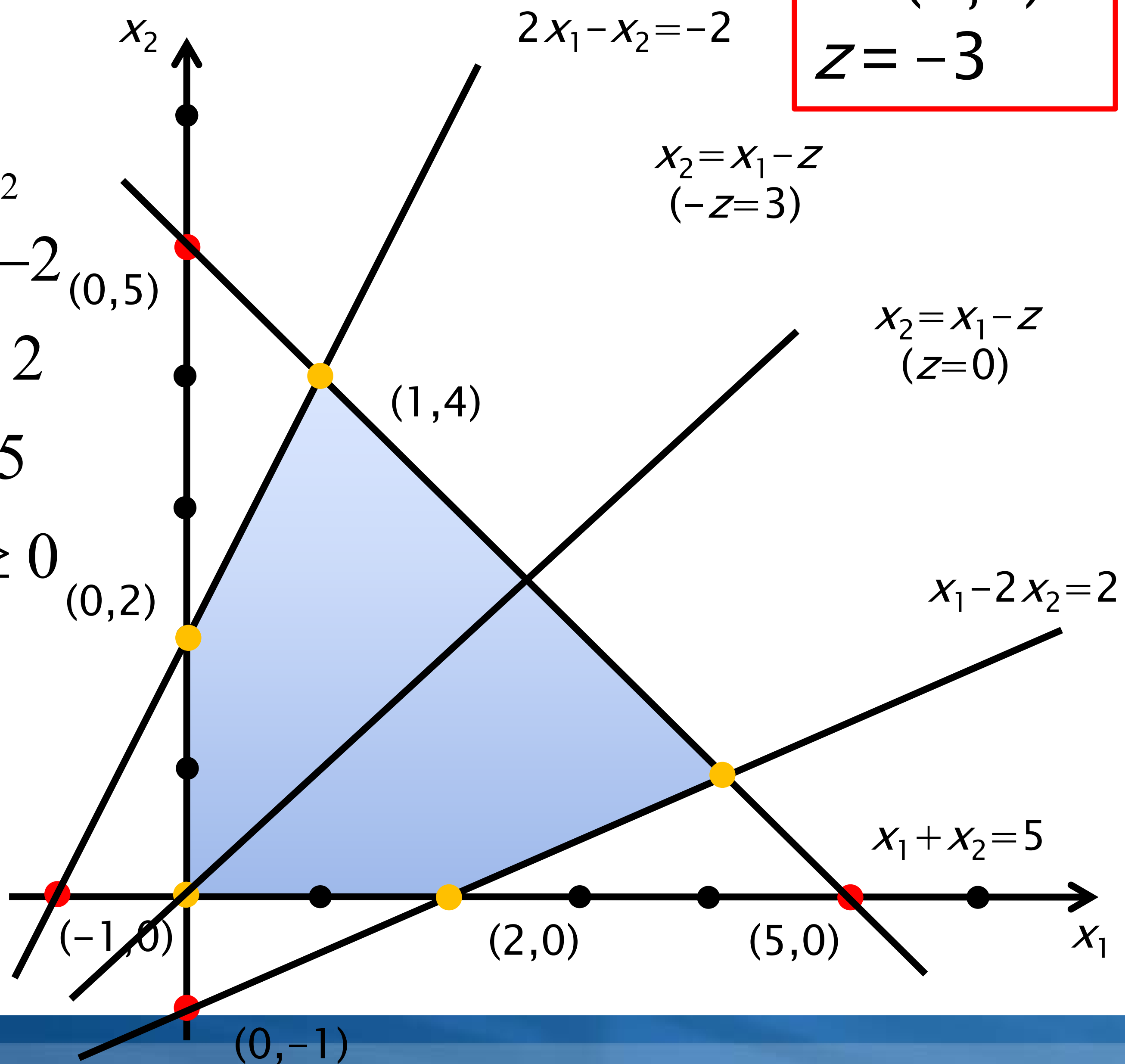
$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



图解法

$$\min \quad z = x_1 - x_2$$

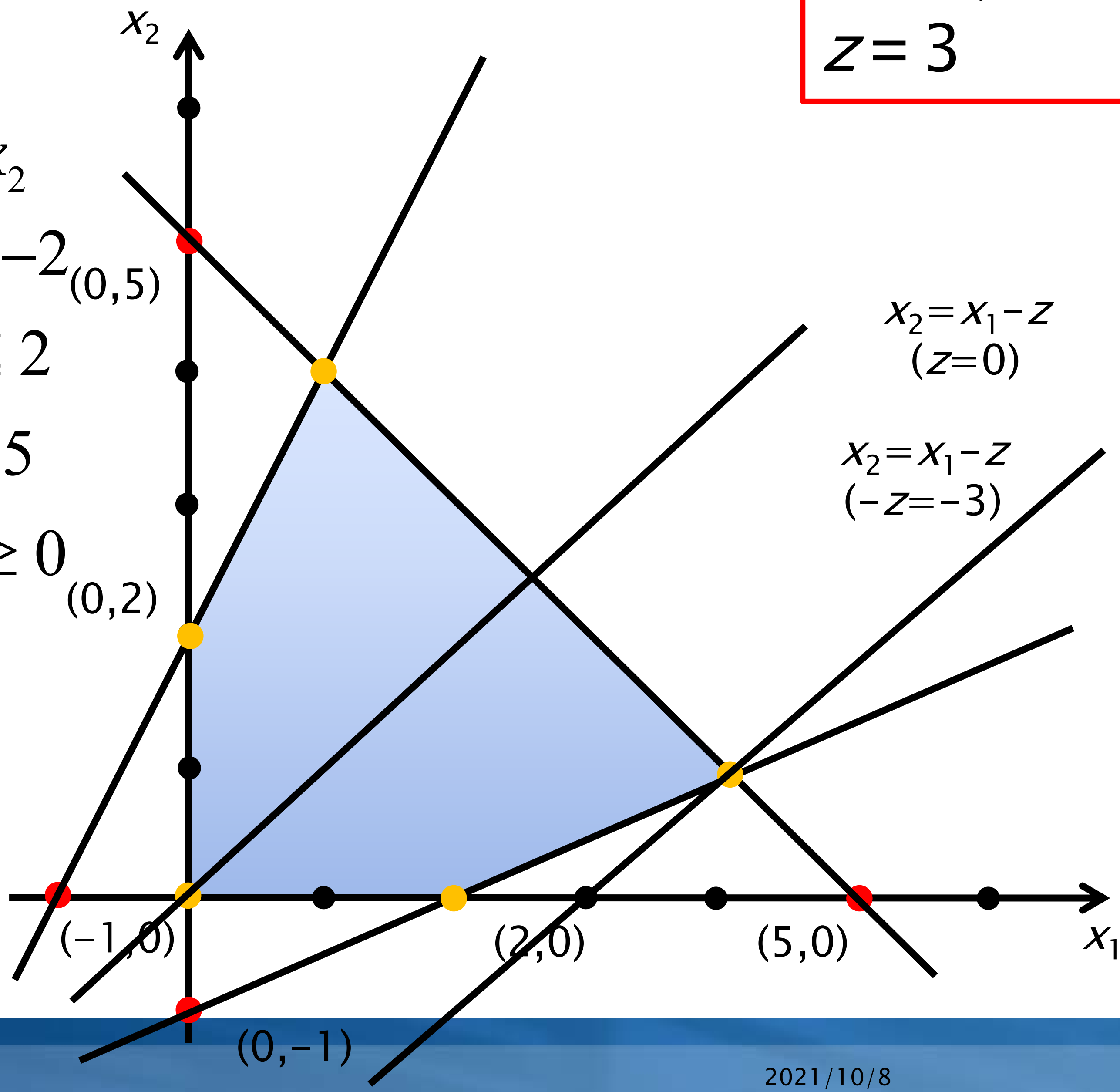
$$\begin{aligned} s.t. \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$x = (1,4)^T$
$z = -3$

图解法

$$\boxed{\max}\quad z = x_1 - x_2$$
$$s.t.\quad 2x_1 - x_2 \geq -2$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



$$\boxed{\begin{array}{l} x = (4,1)^T \\ z = 3 \end{array}}$$

图解法

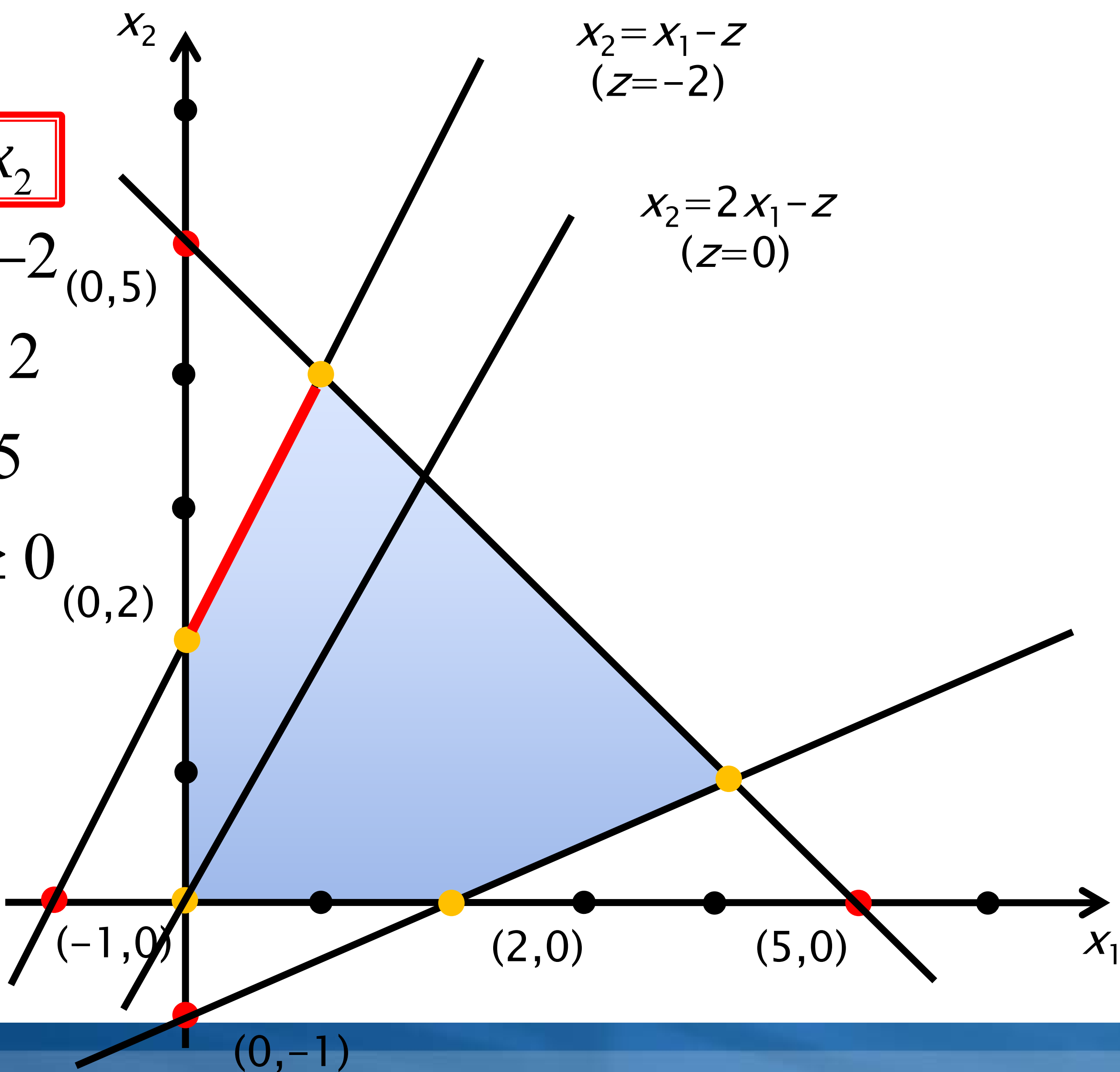
$$\min \quad \boxed{z = 2x_1 - x_2}$$

$$s.t. \quad 2x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



两个重要结论

- 线性规划的**可行域*D***是若干个半平面的交集，它形成了一个有界或无界的**凸多边形**

- 对于给定的线性规划问题，如果它有**最优解**，最优解总可以在*D*的某个**顶点**上达到

可行区域的几何结构

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

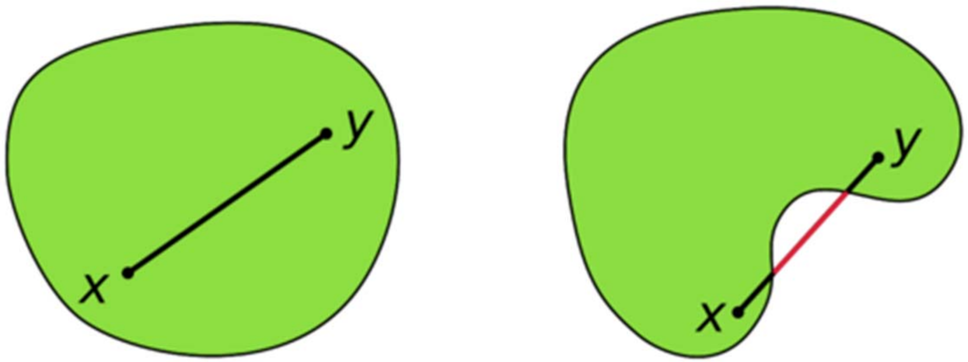
$$\boxed{D = \left\{ x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0 \right\} \neq \varnothing}$$

凸集

- 定义：

  $S \subset R^n$, 若 $\forall x, y \in S, \lambda \in [0,1]$

  $\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S$, 则称 S 是凸集



- 性质：任意多个凸集的交集仍然是凸集

多面凸集

- 超平面：$b \in R$, $a \in R^n$若, 称集合

$$H = \left\{ x \in R^n \mid a^T x = b \right\}$$

为R^n中的一个超平面

- 闭半空间：

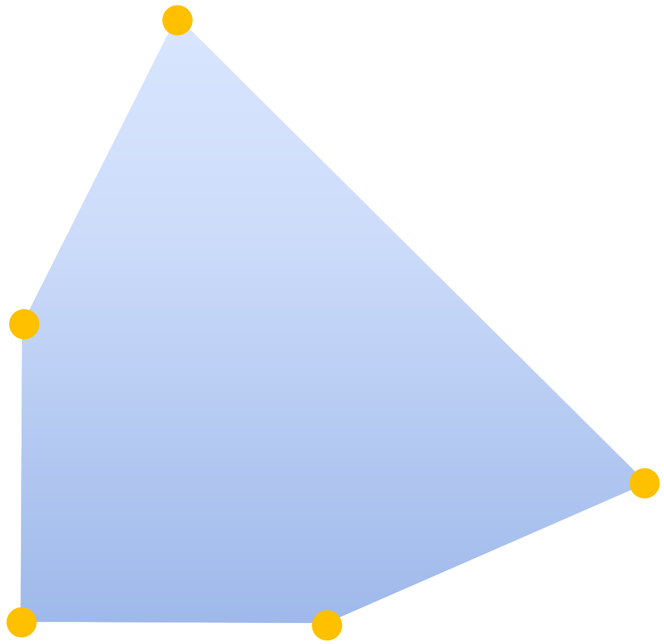
$$H^+ = \left\{ x \in R^n \mid a^T x \geq b \right\}$$

$$H^- = \left\{ x \in R^n \mid a^T x \leq b \right\}$$

- 多面凸集：有限多个闭半空间的交集

$$D = \left\{ x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}$$

顶点



设S为凸集，$x \in S$。若$\forall y, z \in S$, 且$y \neq z$, $\forall \lambda \in (0,1)$

$$\Rightarrow x \neq \lambda y + (1-\lambda) z$$, 则称x是S凸集的一个顶点

基本可行解-定义（1）

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad x = \begin{pmatrix} \overline{x}_B \\ \overline{x}_N \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

假设矩阵(A, b)的秩为$\mathrm{rank}(A) = m$。当我们将矩阵A的列进行适当调整以后，记$A = [B, N]$，其中矩阵B是一个$m \times m$维的可逆矩阵，而矩阵N是一个$m \times (n-m)$维的矩阵。

令$x = \{x_B, x_N\}^T$，则$Ax = b$可记作$Bx_B + N x_N = b$

解得$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$

基本可行解-定义（2）

- 基（基矩阵）：B，A的任意线性无关列构成的矩阵
- 基变量：x_{B_i}，（$i=1,\ldots,m$）
- 非基变量：x_{N_i}，（$i=1,\ldots,n-m$）
- 基本解：

$$x=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 基本可行解：当$B^{-1}b\geq 0$时的基本解
- 可行基：此时与之对应的B

例:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\
& x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\
& x_j \geq 0 (j = 1, \ldots, 5)
\end{aligned}
$$

线性规划基本定理

- 基本可行解判定
  - 可行解 $\bar{X}$ 是基本可行解的充要条件是它的正分量所对应的A中列向量线性无关
  - $\bar{X}$ 是基本可行解的充要条件是$\bar{X}$ 是可行域D中的顶点
- 基本可行解存在性
  - 若有可行解，则至少有一个基本可行解
  - 有有限最优值，则一定存在一个基本可行解是最优解

对于标准形式的LP问题，只需在基本可行解的集合中进行搜索

三个重要结论

- 线性规划的**可行域*D***是若干个闭半空间的交集，它形成了一个有界或无界的**多面凸集**
- 对于给定的线性规划问题，如果它有**最优解**，最优解总可以在*D*的某个**顶点**上达到
- 顶点即**基本可行解**，可由**可行基矩阵**求得