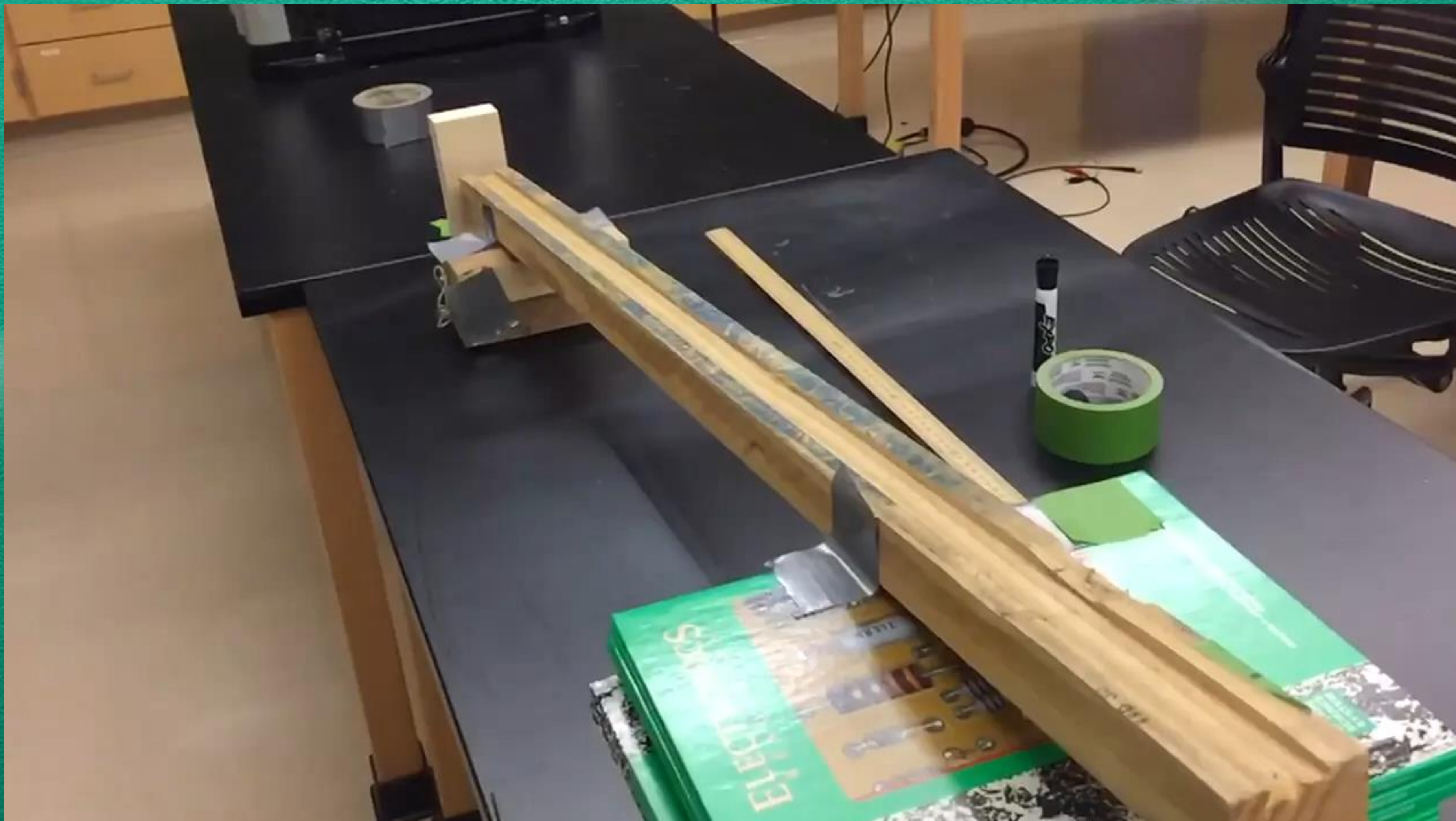
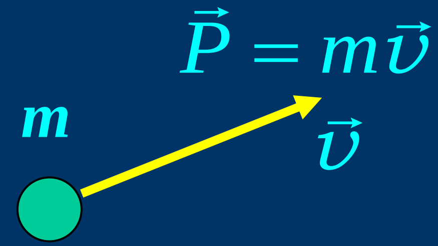


第四章 动量和冲量 *Momentum and Impulse*

- **力的空间累积 —— 功 => 能量的变化**
- 力的时间积累？ 冲量 $\vec{F}\cdot\Delta t$

  动量 $\vec{P}=m\vec{v}$



4. 1 质点动量定理 *Theorem of momentum*

牛顿运动定律

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}\vec{P}=\mathrm{d}(m\vec{v})=\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{I}$$

力F的元冲量

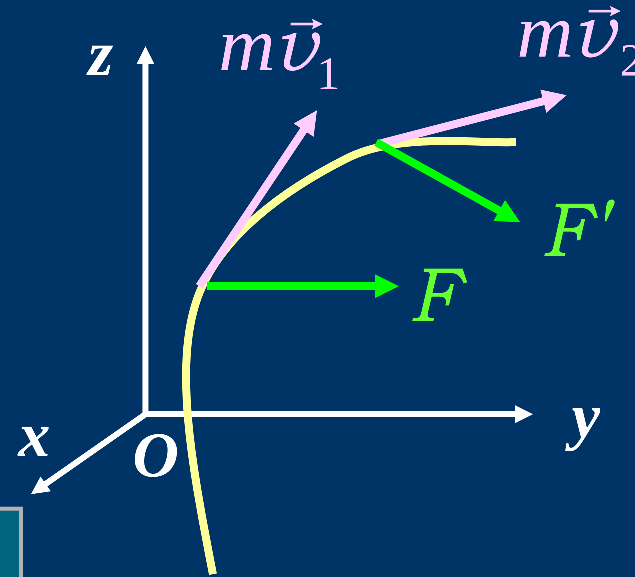
★ 结论

(1) 质点动量的增量等于合外力×作用时间的增量

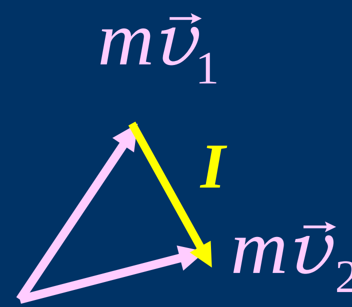
(2) 要使质点动量发生变化，仅有力的作用是不够的，力还必须累积作用一定时间

对一段有限时间， 有

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$$



质点动量的增量等于合力对质点作用的冲量 —— 质点动量定理



★讨论

(1) 物理意义：质点动量的变化依赖于作用力的时间累积过程

合力对质点作用的冲量 ⟶ 质点动量矢量的变化

(2) 矢量性：冲量的方向与动量的增量方向相同

(3) 冲量是**过程量**，动量是**状态量**，动量定理在二 者之间搭起桥梁。给我们提供了一种计算合力冲量的方法

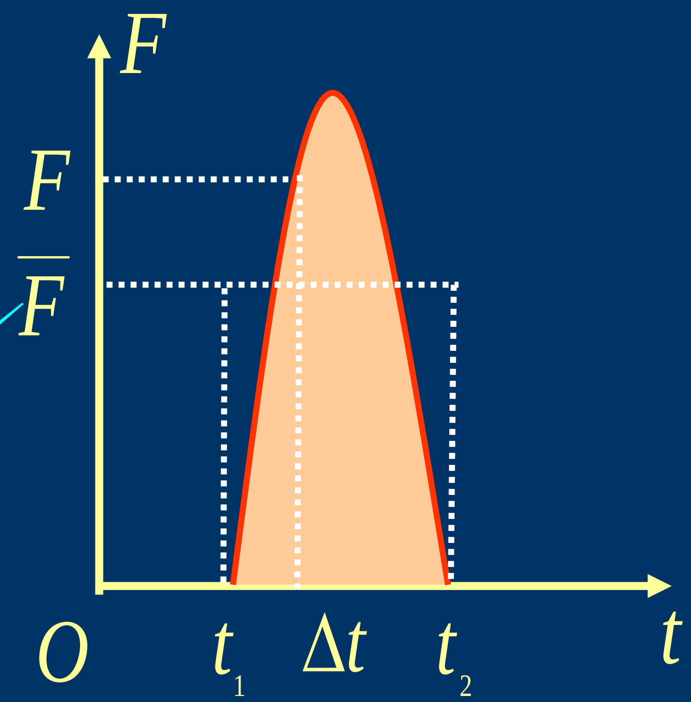
(4) 实际用途　　(5) 只适用于惯性系

$$\left.\begin{aligned} mv_{2_x}-mv_{1_x}&=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t\\ mv_{2_y}-mv_{1_y}&=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t\\ mv_{2_z}-mv_{1_z}&=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t \end{aligned}\right\}$$

在力的整个作用时间内，平均力的冲量等于变力的冲量

平均力

$$\boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=\boxed{\overline{F}}(t_2-t_1)$$



例 质量m=2.0kg 的质点，受合力 $\vec{F}=12t\vec{i}$ N 的作用，沿*Ox*轴作直线运动，已知 $t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0=0$

求 (1) 从$t=0$ 到$t=3$s 这段时间内，合力的冲量

(2) 3s末质点的速度

解 (1)

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_0^3 12t\vec{i}\,\mathrm{d}t=54\vec{i}\ \mathrm{N\cdot s}$$

(2)

$$m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$

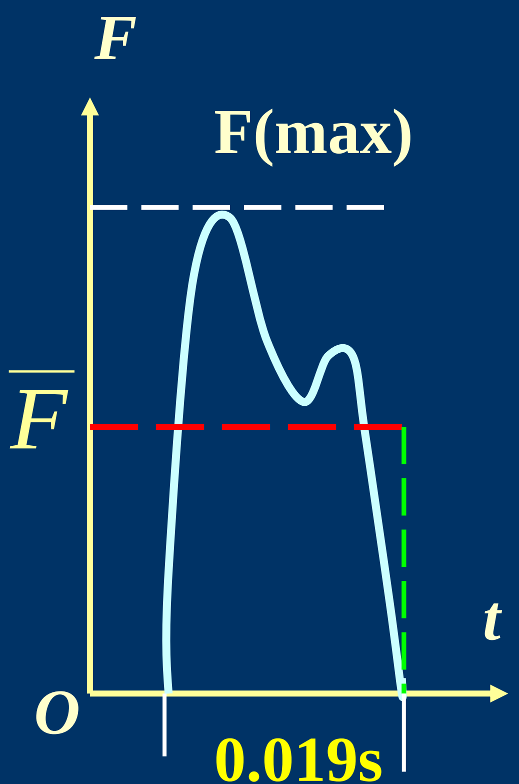
$$\vec{v}=27\vec{i}$$

例 一篮球质量0.58kg，从2.0m高度下落，到达地面后，以同样速率反弹，接触时间仅0.019s.

求 对地平均冲力?

解 篮球到达地面的速率

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times 9.8\times 2}=6.3(\mathrm{m/s})$$



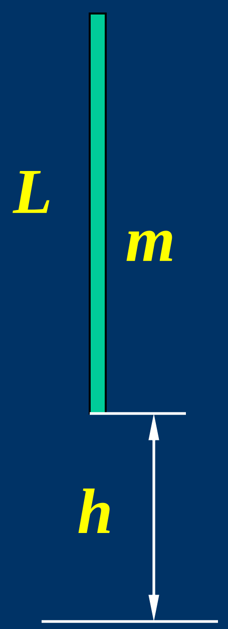
对地平均冲力

$$\overline{F}=\frac{2mv}{\Delta t}=\frac{2\times 0.58\times 6.3}{0.019}=3.8\times 10^{2}(\mathrm{N})$$

相当于 40kg 重物所受重力!

例 质量为 m 的匀质链条，全长为 L，开始时，下端与地面的距离为 h，当链条自由下落在地面上时

求 链条下落在地面上的长度为 $l\ (l<L)$时，地面所受链条的作用力?



解 设 $m_l = \lambda l = \dfrac{m}{L} l$

链条在此时的速度 $\upsilon = \sqrt{2g(l+h)}$

根据动量定理 $-f\mathrm{d}t = 0 - (\lambda \upsilon \mathrm{d}t)\upsilon$

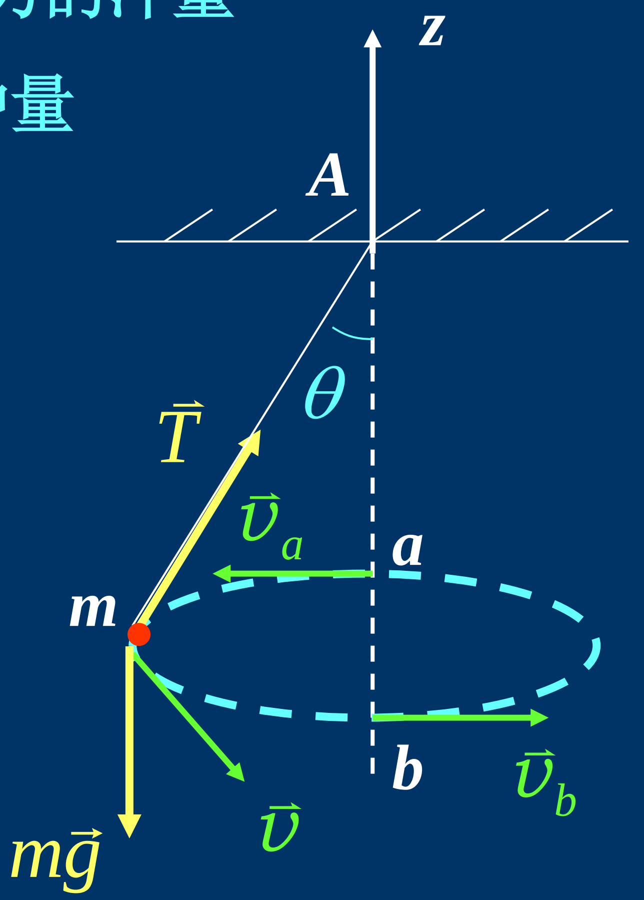
$$f = \frac{\lambda \upsilon \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\upsilon = \lambda \upsilon^2 = \frac{2m(l+h)g}{L} = f'$$

地面受力 $F = f' + m_l g = \dfrac{m}{L}(3l+2h)g$

例 质量为 m 的质点作圆锥摆运动，质点速率为 v，圆半径为 R，圆锥的夹为θ 。

求 (1) 质点绕行半周，作用在质点上重力的冲量

(2) 质点由a 到b 绕行半周，张力的冲量



解 (1) 在运动过程中，重力为恒力

$$\vec{I}_{mg} = m\vec{g}\frac{T}{2} \qquad T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$\vec{I}_{mg} = m\vec{g}\frac{T}{2} = m\vec{g}\frac{\pi R}{v}$$

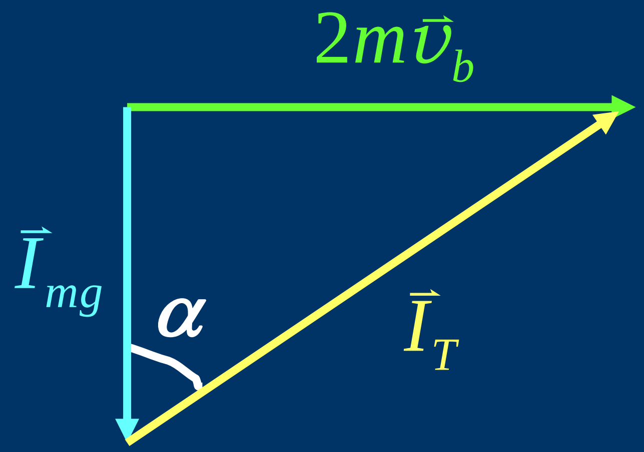
(2) 由质点动量定理

$$\vec{I}_T + \vec{I}_{mg} = m\vec{v}_b - m\vec{v}_a = 2m\vec{v}_b$$

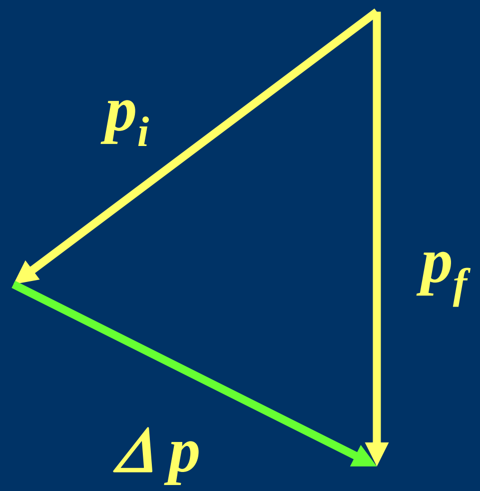
作矢量图

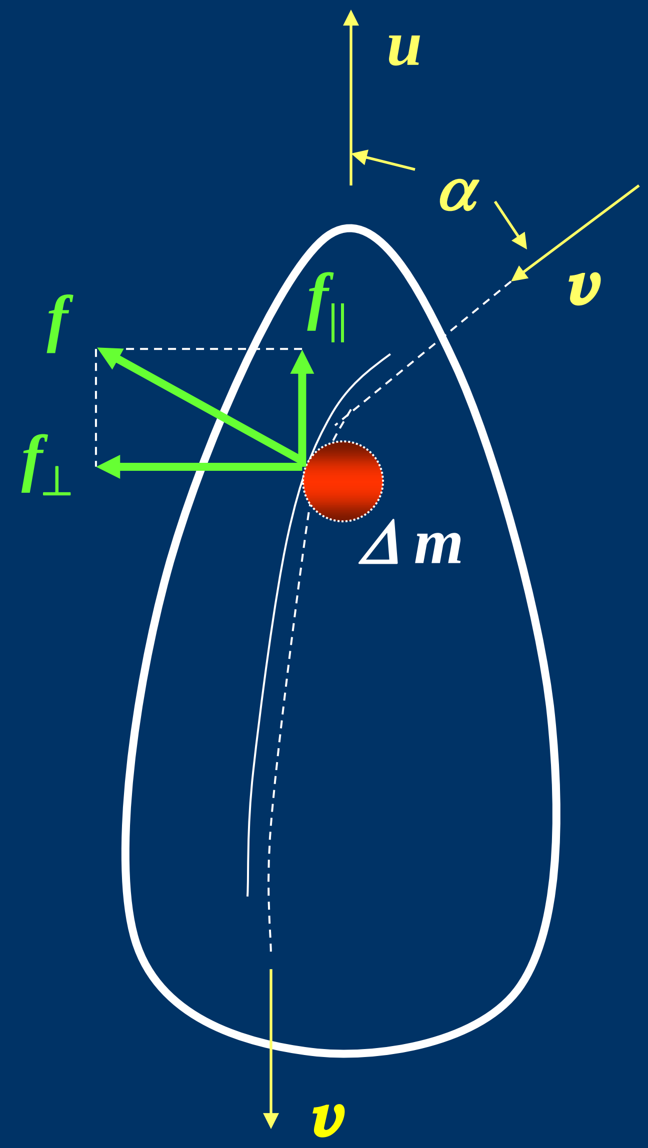
$$I_T = \sqrt{(2mv)^2 + I_{mg}^2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2mv}{I_{mg}} = \frac{2v^2}{\pi Rg}$$



例 逆风行舟





该例突出了动量的矢量性

§ 4.2 质点系动量定理 *Momentum on particles in system*

P 表示质点系在时刻 t 的动量 ⟶ $\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i$

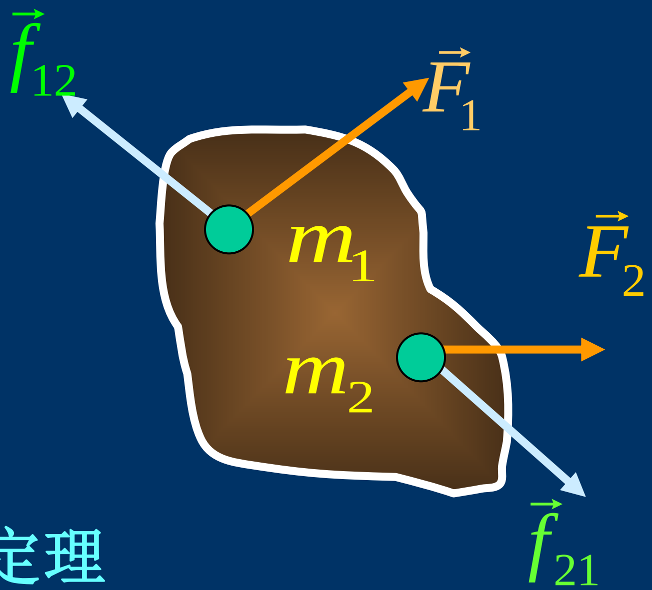
对质点m_1有

$$d(m_1\vec{v}_1)=(\vec{F}_1+\vec{f}_{12})dt$$

对质点m_2有

$$d(m_2\vec{v}_2)=(\vec{F}_2+\vec{f}_{21})dt$$

$$\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}=0$$



$$d(m_1\vec{v}_1)+d(m_2\vec{v}_2)=\vec{F}_1dt+\vec{F}_2dt$$

$$\boxed{d(\sum_i m_i\vec{v}_i)=\sum_i \vec{F}_i dt}$$

质点系动量定理

直角系

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}(\sum_i m_i v_{ix}) &= \sum_i F_{ix}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}(\sum_i m_i v_{iy}) &= \sum_i F_{iy}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}(\sum_i m_i v_{iz}) &= \sum_i F_{iz}\mathrm{d}t\end{aligned}\right\}$$

在有限时间内

$$\boxed{\sum_i m_i\vec{v}_i - \sum_i m_i\vec{v}_{i0} = \sum_i \int_{t_0}^{t} \vec{F}_i \mathrm{d}t}$$

某段时间内，质点系动量的增量，等于作用在质点系上所有外力在同一时间内的冲量的矢量和 ——质点系动量定理

★ 说明

(1) 只有外力可改变系统的总动量

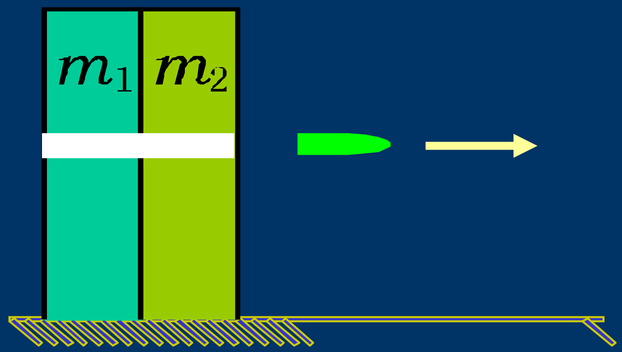
(2) 内力可改变系统内单个质点的动量 —— 内部作用复杂

(3) 只适用于惯性系

例 一粒子弹水平地穿过并排静止放置在光滑水平面上的木块，已知两木块的质量分别为 m_1,m_2 ，子弹穿过两木块的时间各为 $\Delta t_1, \Delta t_2$ ，设子弹在木块中所受的阻力为恒力 F

求 子弹穿过后， 两木块各以多大速度运动

解 子弹穿过第一木块时，两木块速度相同，均为 υ_1



$$F\Delta t_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_1 - 0$$

子弹穿过第二木块后，第二木块速度变为 υ_2

$$F\Delta t_2 = m_2\upsilon_2 - m_2\upsilon_1$$

解得

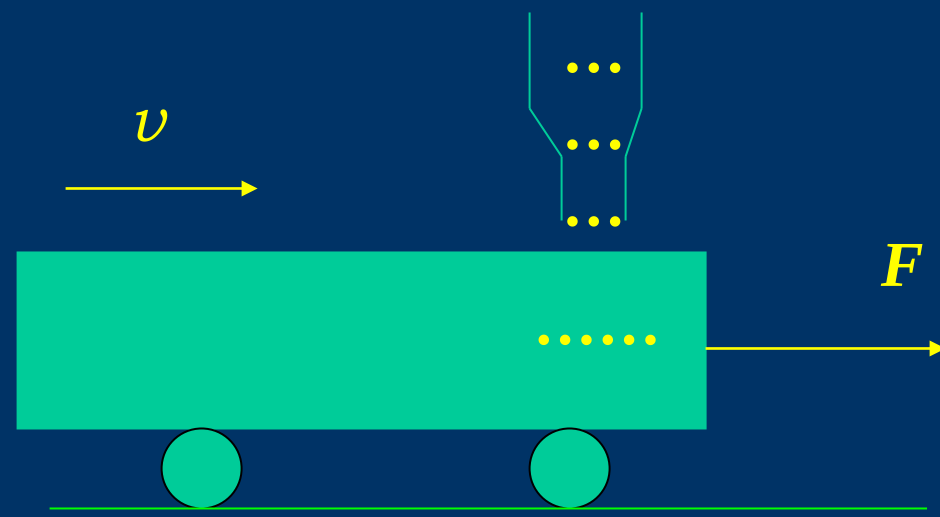
$$\upsilon_1 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} \qquad \upsilon_2 = \frac{F\Delta t_1}{m_1 + m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$$

例 一辆装煤的车以υ=3m/s的速率从煤斗下面通过， 每秒钟落入车厢的煤为Δm=5000kg，

求 如果使车厢的速率保持不变，应用多大的牵引力拉车厢？(车厢与轨道间无磨擦）

解 t, m; dt, dm



m, dm研究对象，

质点系水平方向总动量

t 时刻 $m\upsilon$

t +dt 时刻 $(m+\mathrm{d}m)\upsilon$

$\mathrm{d}p=\mathrm{d}m\cdot\upsilon=F\cdot\mathrm{d}t$

$F=\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot\upsilon=\Delta m\cdot\upsilon=1.5\times10^{4}\,\mathrm{N}$

§ 4.3 质点系动量守恒定律 *Conservation of momentum*

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{d}\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) = 0}$

质点系动量守恒定律 $\boxed{\left(\sum m_i \vec{v}_i\right) = \vec{C}}$

★ 讨论

(1) 动量守恒的分量表述

$$\boxed{\begin{aligned} F_x = 0 &\Rightarrow \left(\sum m_i v_{ix}\right) = P_x = \text{常量} \\ F_y = 0 &\Rightarrow \left(\sum m_i v_{iy}\right) = P_y = \text{常量} \\ F_z = 0 &\Rightarrow \left(\sum m_i v_{iz}\right) = P_z = \text{常量} \end{aligned}}$$

若某个方向上合外力为零，则该方向上的分动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

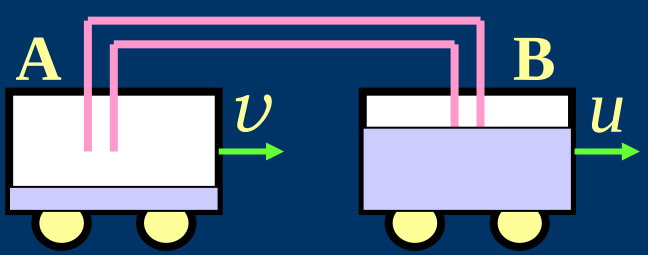
(2) 动量守恒定律适用于惯性系

(3) 在一些实际问题中，当外力<<内力，且作用时间极短时（如两物体的碰撞），往往可以略去外力的冲量，而认为动量守恒。

(4) 在牛顿力学中，因为力与惯性系的选择无关， 故动量若在某一惯性系中守恒，则在其它任何惯性系中均守恒

例 如图所示，两部运水的卡车A、B在水平面上沿同一方向运动，B的速度为u ，从B上以6kg/s的速率将水抽至A上，水从管子尾部出口垂直落下，车与地面间的摩擦不计，时刻 t 时，A车的质量为M，速度为υ 。

求 时刻 t ，A 的瞬时加速度



解 选A车M和Δt时间内抽至A车的水Δm为研究系统，水平方向上动量守恒

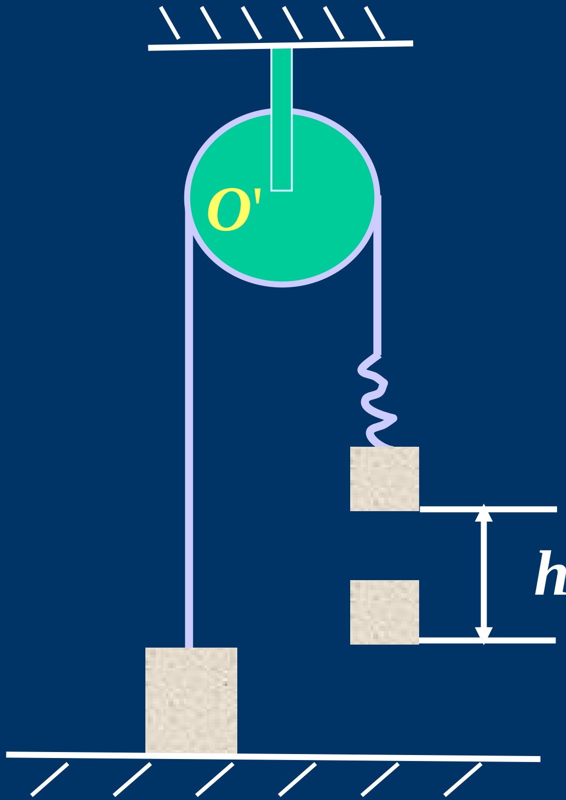
$$M\upsilon + \Delta m u = (M + \Delta m)\upsilon'$$

$$\upsilon' = \frac{M\upsilon + \Delta m u}{M + \Delta m} \qquad \Delta\upsilon = \upsilon' - \upsilon = \frac{\Delta m(u - \upsilon)}{M + \Delta m}$$

$$\Delta\upsilon \approx \frac{\Delta m}{M}(u - \upsilon) \qquad a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{u - \upsilon}{M} = \frac{6}{M}(u - \upsilon)$$

例 一绳跨过一定滑轮，两端分别拴有质量为m及M的物体，M静止在桌面上。抬高m，使绳 处于松弛状态。当m自由落下h 距离后，绳才被拉紧，

求 此时两物体的速度及M 所能上升的最大高度.



解

- 自由下落 $$mgh=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$
- 系统竖直方向动量守恒

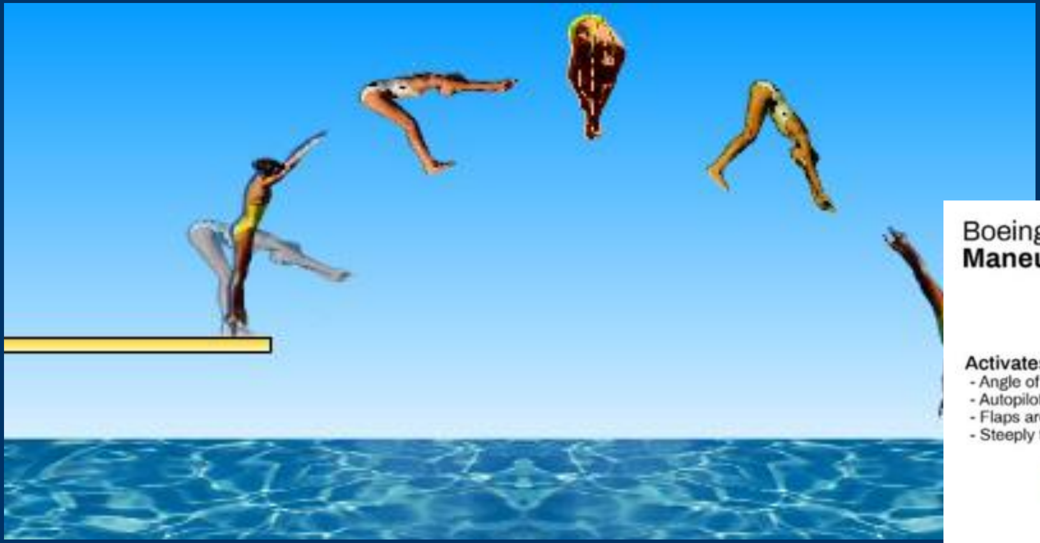
$$m\upsilon=(m+M)V$$

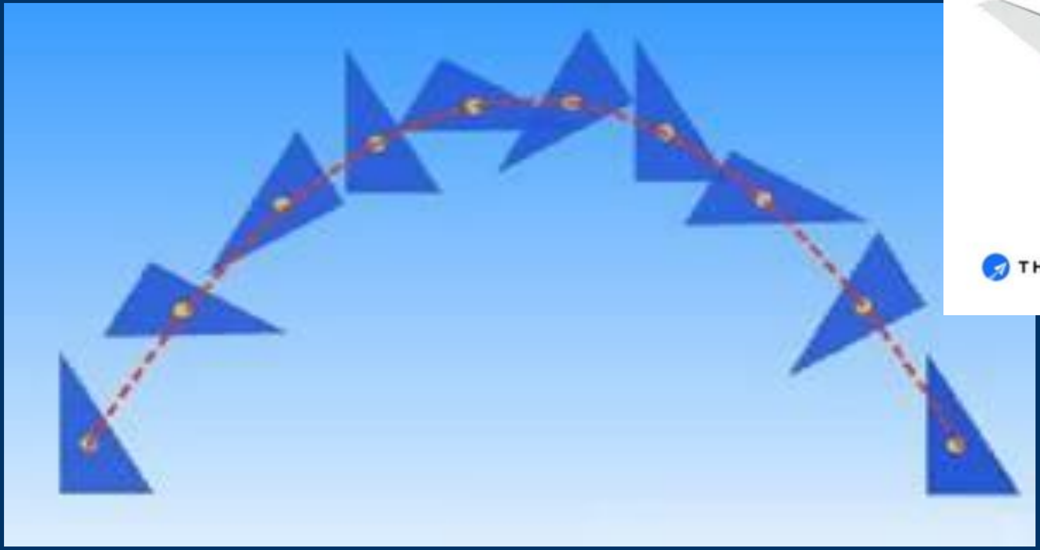
- m下降，M上升此过程机械能守恒

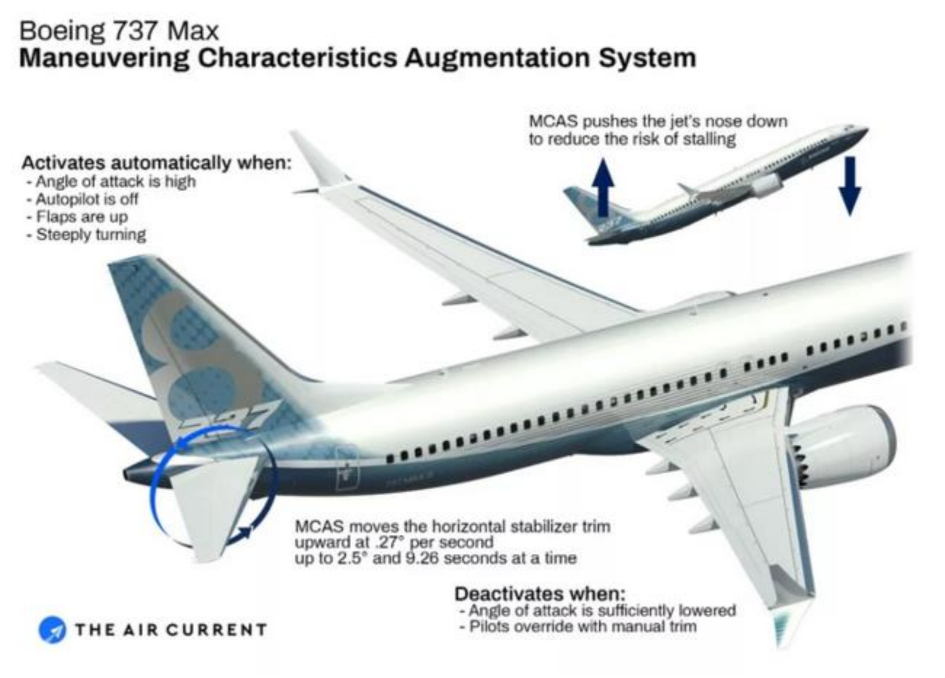
$$mgH-MgH=0-\frac{1}{2}(M+m)V^2$$

$$V=m/(m+M)\sqrt{2gh} \qquad H=\frac{m^2h}{M^2-m^2}$$

§ 4.4 质心 质心运动定理 *Center of Mass*







§ 4.4 质心　质心运动定理 *Center of Mass*

一. 质心

N个质点系统(质点系)，定义质量中心 ⟶ 质心

定义：
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$$

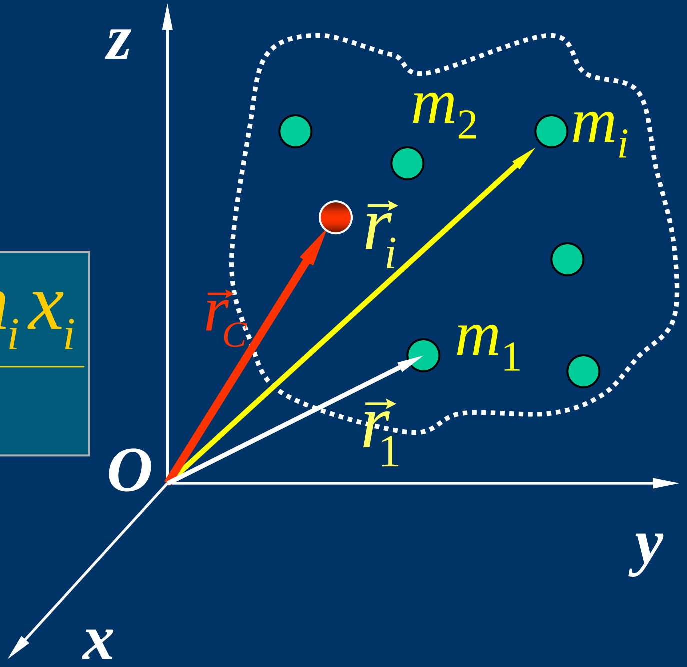
$$m_1, m_2, \ldots\ldots m_i, \ldots\ldots m_n$$

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots\ldots \vec{r}_i, \ldots\ldots \vec{r}_n$$

—— 分立系统的质心公式

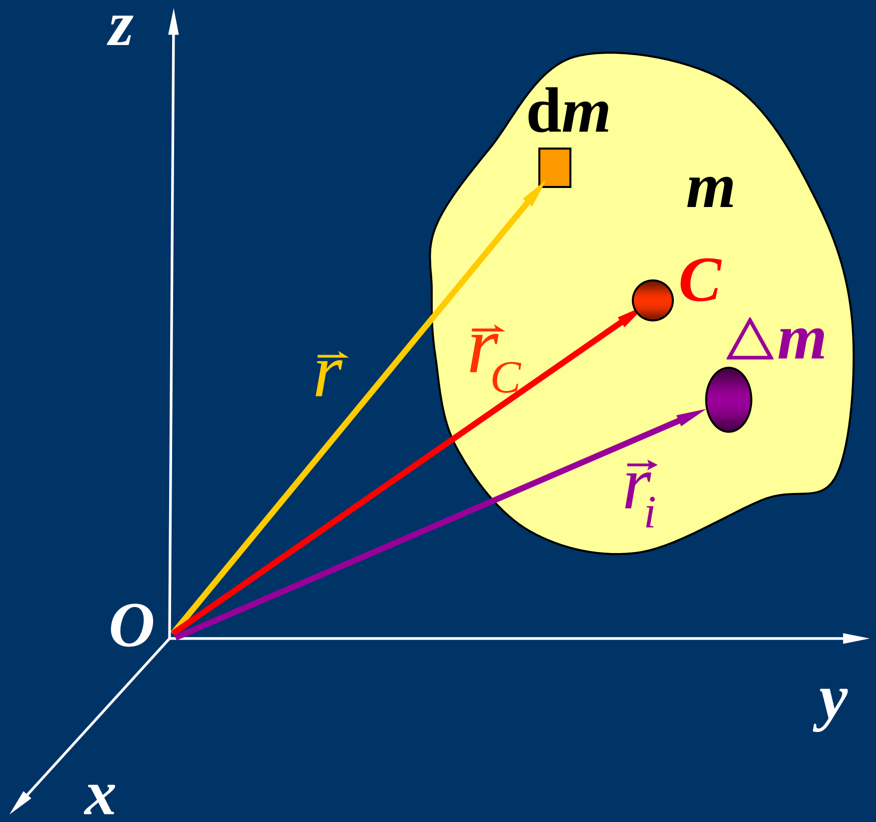
直角坐标系中的分量式
$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}$$

$$y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m} \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$



- 对于质量连续分布的系统

$$\vec{r}_C = \frac{\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{r}_i\Delta m_i}{m} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$



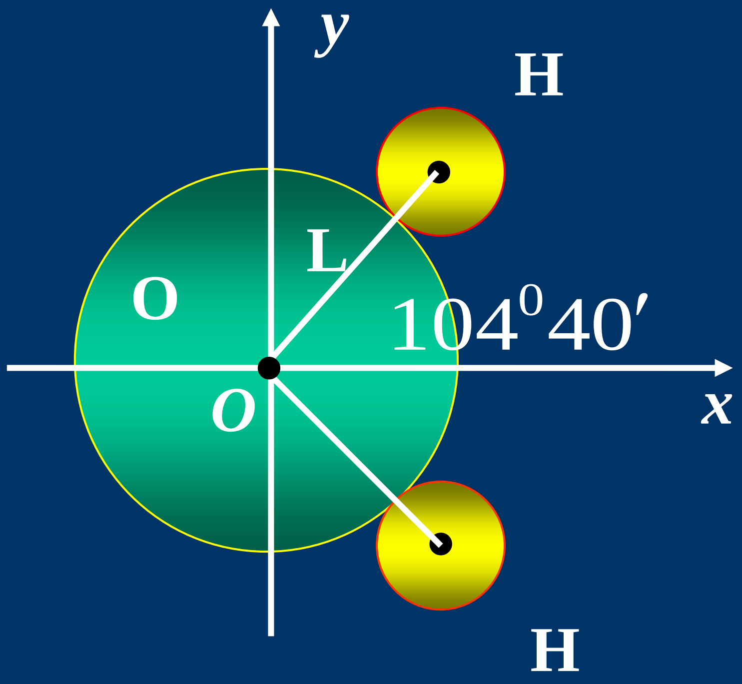
直角坐标系中的分量式

$$x_C = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int x\mathrm{d}m}{m}$$

$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m}$$

$$z_C = \frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int z\mathrm{d}m}{m}$$

例 水分子的结构模型如图所示。



求 水分子的质心

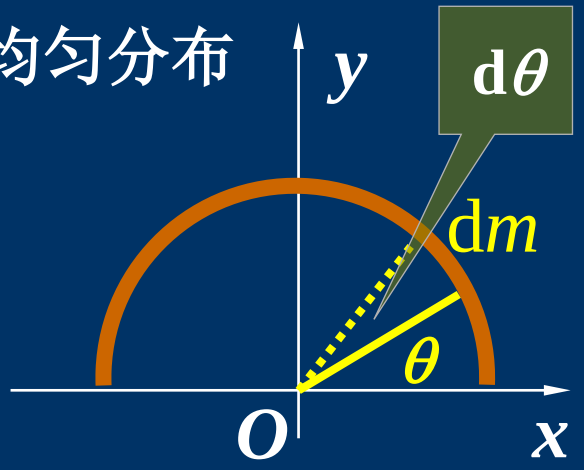
解 $y_C = 0$

$$x_C = \frac{1\times L\cos(52^\circ 20') + 1\times L\cos(52^\circ 20') + 16\times 0}{1+1+16}$$

$$= 0.068L$$

例 已知一半圆环半径为 R，质量为m, 且均匀分布

求 它的质心位置



解 建坐标系如图 $x_C = 0 \quad \mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$

$$\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R}R\mathrm{d}\theta = \frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$x = R\cos\theta \qquad y = R\sin\theta$$

$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^{\pi} R\sin\theta\frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta}{m} = \frac{2}{\pi}R$$

★ **说明**

(1) 弯曲铁丝的质心并不在铁丝上　　质心与重心的区别

(2) 质心位置只决定于质点系的质量和质量分布情况，与其它因素无关.

(3) 小线度物体(上各处 g 相等)质心和重心(重力合力的作用点)是重合的。

二. 质心运动定理 *motion theorem on mass of center*

- 质心的速度

$$\vec{v}_C=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i}{m}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\sum m_i\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{m}=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{m}=\frac{\sum\vec{P}_i}{m}$$

$$\sum\vec{P}_i=m\vec{v}_C=\vec{P}$$

$$\vec{P}=m\vec{v}_C$$

质点系的总动量

质点系的质量

质心的速度

- 质心的加速度和动力学规律

作用在质点系上的所有外力 ⟵ $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$ ⟶ 质点系的总动量

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}_C$$

质心运动定理

$$\vec{a}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}$$

直角坐标系中的分量式 $\sum_i F_{ix}=ma_{Cx}$ $\sum_i F_{iy}=ma_{Cy}$

$$\sum_i F_{iz}=ma_{Cz}$$

★ 说明

(1) 质点系内各质点由于内力和外力的作用，其运动情况可能很复杂，但有一个特殊点 ⟶ 质心

(2) 可将质点系质心的运动看作为： 一个质点的运动，

该质点集中整个系统质量，并集中系统受的外力。

与质量的分布，力作用于何处无关

(3) 质心运动状态取决于系统所受外力，内力不能使质心产生加速度。 例如: 跳水运动员、掷手榴弹

(4) 研究质心的运动意义　研究刚体的运动——　平动、转动

★ 推论

质心速度不变

若 $\sum_i \vec{F}_i = 0 \longrightarrow m\vec{a}_c = 0 \Rightarrow \vec{v}_c = \vec{C}$

即：　系统内力不会影响质心的运动

例 质量分别为m_1和m_2，速度分别为$\vec{v}_1$和$\vec{v}_2$的两质点碰撞后合为一体。

求 碰撞后二者的共同速度

解 碰撞后二者的运动速度 $\longrightarrow$ 将为质心的运动速度

$$m\vec{v}_c = \sum m_i \vec{v}_i \qquad \vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

例 两质点P与Q最初相距1.0m，都处于静止状态，P的质量为0.1kg，而Q的质量为0.3kg，P与Q以1.0×10^{-2}N的恒力相互吸引。

求 (1) 假设没有外力作用在该系统上，试描述系统质心的运动；

(2) 在距离质点P的初位置多远处，两质点将相互碰撞？

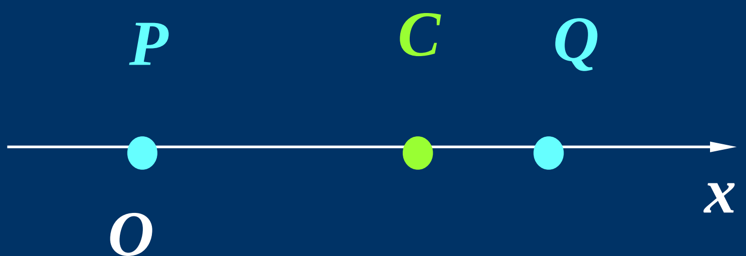
解 (1) 质心静止不动

(2) ∵质点系所受的合外力为零　　质心速度不变

质心不动，故P、Q在质心处相碰 ⟵ 开始时静止

$$x_c=\frac{m_P\times0+m_Q\times x_Q}{m_p+m_Q}=\frac{0.3\times1.0}{0.1+0.3}$$

$$=0.75\text{m}$$

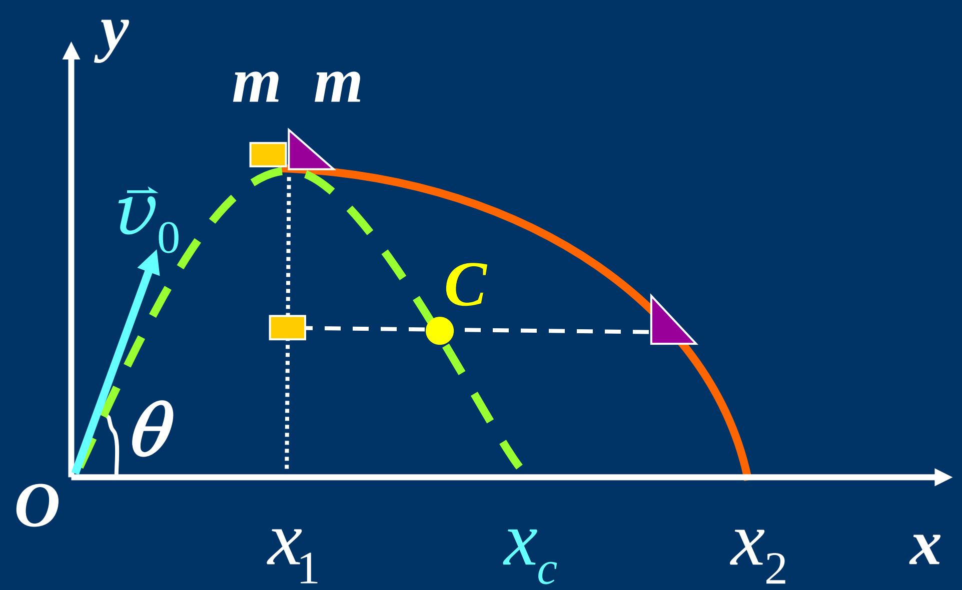


例 一枚炮弹发射的初速度为v_0，发射角为 θ，在它飞行的最高点炸裂成质量为m 两部分。一部分在炸裂后竖直下落，另一部分则继续向前飞行。

求 两部分的着地点以及质心的着地点。（忽略空气阻力）

解 炮弹没有炸裂，则下落的水平距离为

$$x_c = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

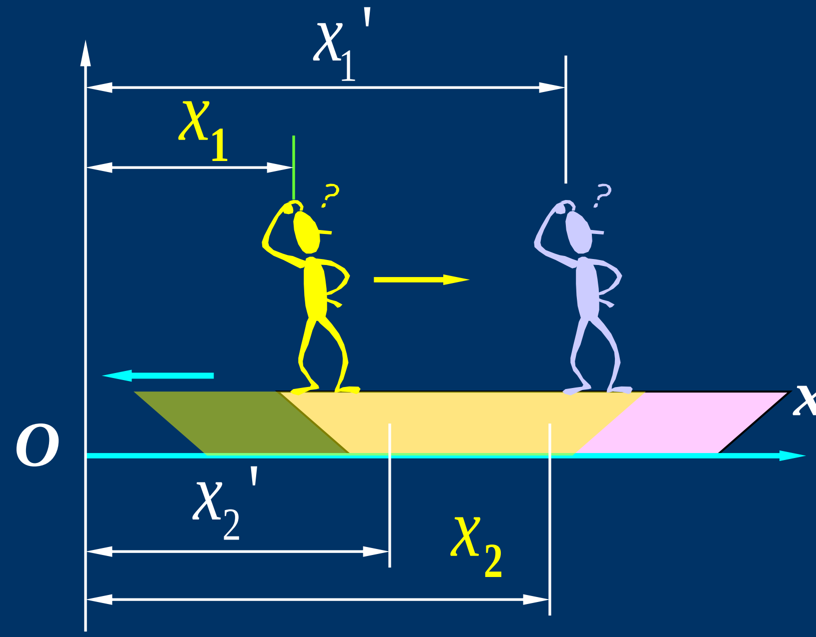


竖直下落的炮弹的一部分的水平距离为

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \qquad x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \longrightarrow x_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

例 如图所示，人与船构成质点系。人、船的质量分别为：m、M

求 人和船各移动的距离



解 在水平方向上，外力为零，则

$$a_{cx} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{cx}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad x_c = x'_c$$

开始时，系统质心位置

$$x_c = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$$

终了时，系统质心位置

$$x'_c = \frac{mx'_1 + Mx'_2}{m+M}$$

$$M\underbrace{(x_2 - x_2')}_{S} = m\underbrace{(x_1' - x_1)}_{l\text{ - }S}$$

解得 $S = \dfrac{ml}{m+M}$ $\qquad s = l - S = \dfrac{Ml}{m+M}$