第七章　二次曲面与二次型

7.1 曲面与空间曲线
7.2 实二次型

董荣

数学与统计学院

作业：

习题7.2

(A) 5, 6(2)(4)(6), 8, 10(2), 11, 12, 15(2), 16(1), 18, 21, 22, 23

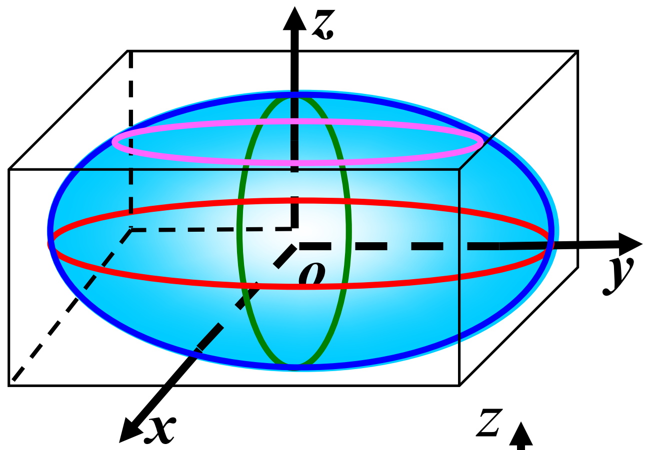
(B) 4, 6

主要内容

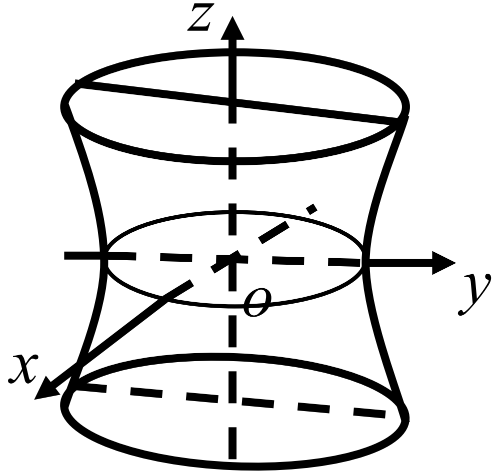
1. 五种典型的二次曲面
2. 曲线在坐标面上的投影与空间区域的简图
3. 二次型及其矩阵表示
4. 二次型的标准形

五种典型的二次曲面

(1)椭球面: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0, b>0, c>0)$$

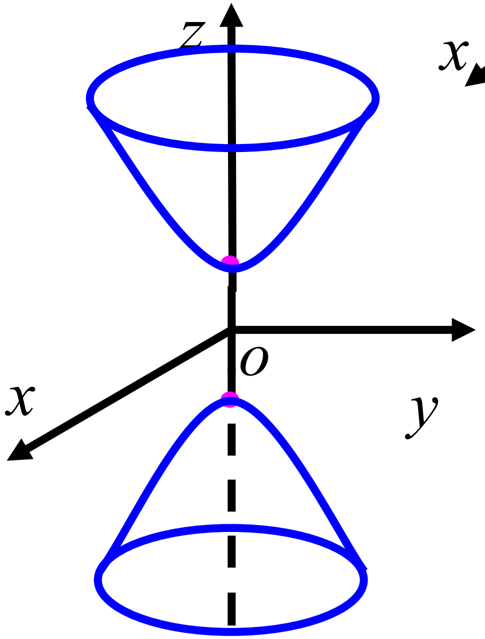


(2)单叶双曲面: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0, b>0, c>0)$$



(3)双叶双曲面: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$$(a>0, b>0, c>0)$$

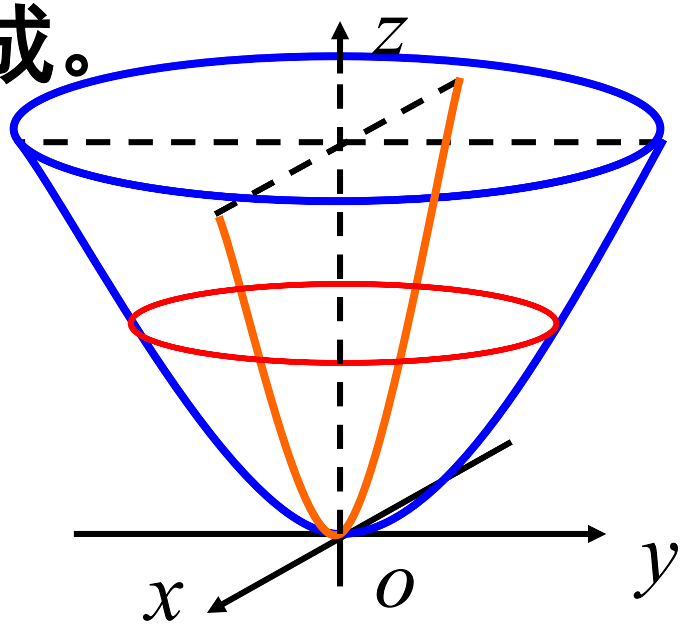


(4) 椭圆抛物面: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$,（$p>0$, $q>0$）

说明: (1)当$p=q$时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z \quad (p>0)$$ ——旋转抛物面

由xoz面上的抛物线$x^2=2pz$绕z轴旋转而成。

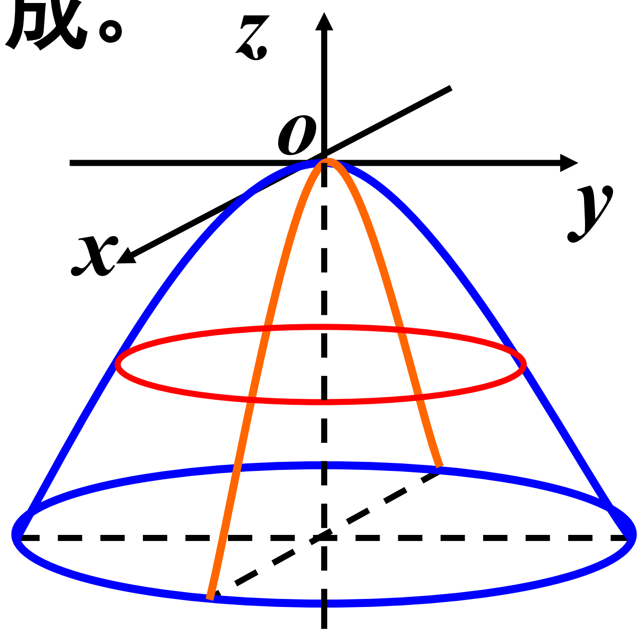


(4) 椭圆抛物面: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$,（$p>0$, $q>0$）

说明: (1)当$p=q$时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z\ \ (p>0)$$ ——旋转抛物面

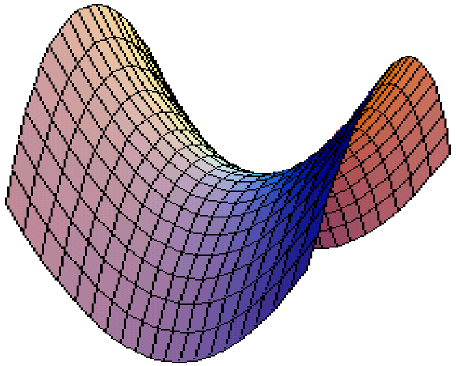
由xoz面上的抛物线$x^2=2pz$绕z轴旋转而成。



(2)当$p<0$, $q<0$时，

椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ 开口向下。

(5) 双曲抛物面(马鞍面) $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,q>0)$

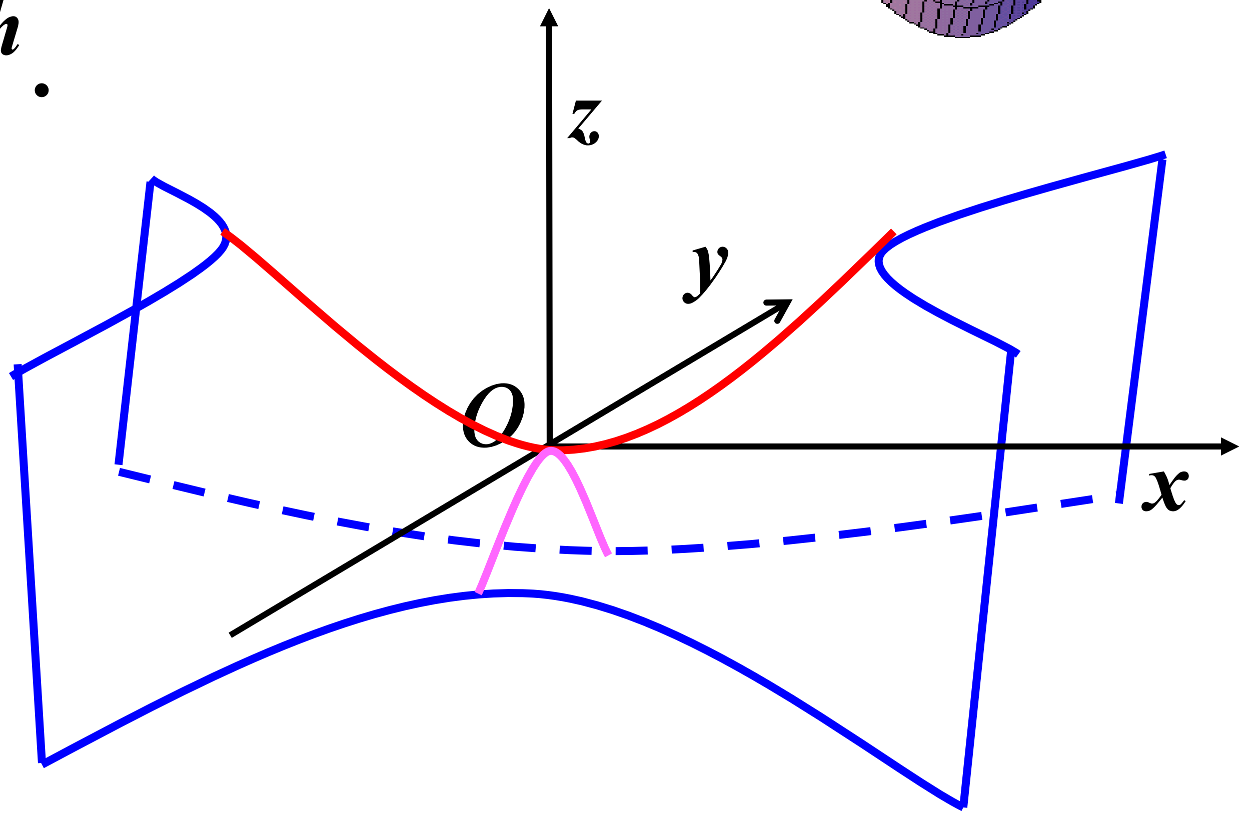


对称于Ozx和Oyz,关于z轴对称,但没有对称中心.

与$z=h$的交线:$h=0$时是一对在原点相交的直线;$h\neq 0$时是双曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2h\\ z=h\end{cases}.$

与Oxz的交线为抛物线 $\begin{cases}x^2=2pz\\ y=0\end{cases}.$

与Oyz的交线为抛物线 $\begin{cases}y^2=-2qz\\ x=0\end{cases}.$



无心二次曲面:椭圆抛物面与双曲抛物面都没有对称中心

主要内容

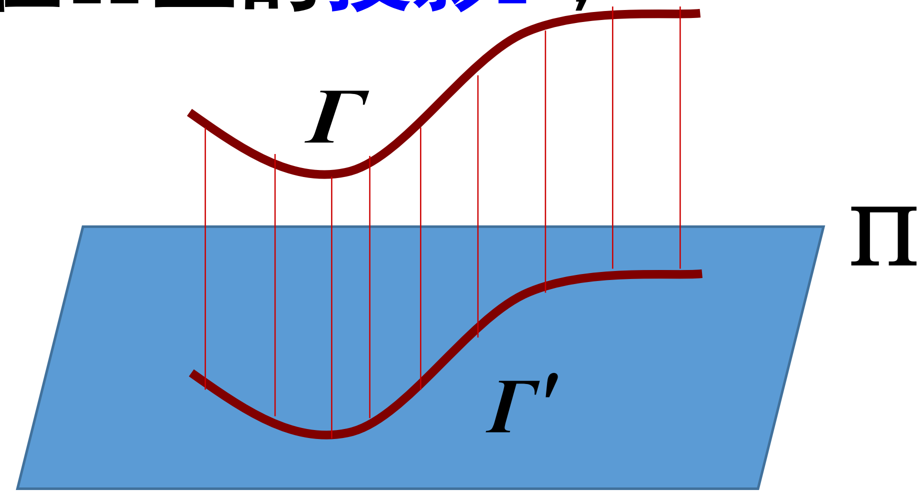
1. 五种典型的二次曲面
2. 曲线在坐标面上的投影与空间区域的简图
3. 二次型及其矩阵表示
4. 二次型的标准形

曲线在坐标面上的投影

定义（投影、投影柱面）

设Γ是一条曲线, Π是一个平面, 过Γ上每点做Π的垂线, 连接这些垂足形成的曲线称为Γ在Π上的**投影**Γ',

这些垂线构成一个柱面,
称为Γ到Π的**投影柱面**.



显然, Γ在Π上的投影就是投影柱面与Π的交线Γ'.

问题：设曲线Γ方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，如何求$\Gamma$在$Oxy$的投影.

(1) 消去变量 z 后得投影柱面 $h(x,y)=0$.

(2) Γ在Oxy的投影方程为$\begin{cases} h(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

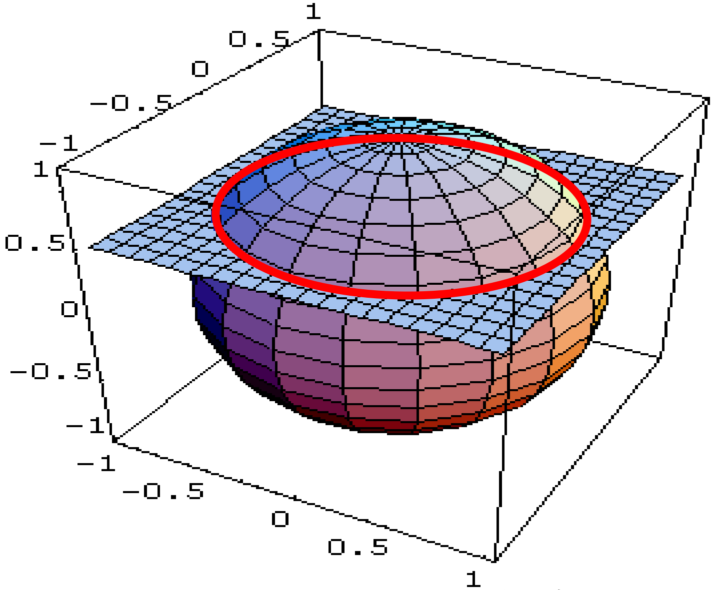
若曲线Γ方程组中有一个不含z，它就是所求的到Oxy 的投影柱面.

类似地，可求空间曲线在其他坐标面上的投影

Oyz 面上的投影 $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

Oxz面上的投影 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在各坐标平面上投影曲线的方程。



解 (1) 消去变量z后得: $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$,

在xoy面上的投影为: $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$

(2) 因为曲线在平面$z=\dfrac{1}{2}$上,

所以在xoz面上的投影为

线段: $\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases}$ $\quad |x|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

(3)同理，在yoz面上的投影为

线段: $\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases}$ $\quad |y|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

空间区域的简图

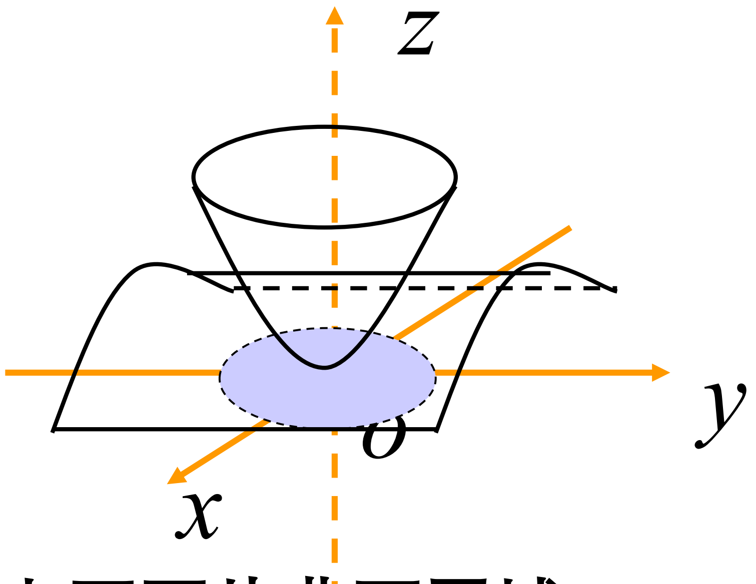
例 **空间区域Ω是由曲面$z=3x^2+y^2$与$z=1-x^2$围成，画出该区域的简图。**

解 (1) 曲面$\boldsymbol{z=3x^2+y^2}$表示顶点在原点，对**称轴为z轴，**开口朝上的椭圆抛物面。

(2) 曲面$\boldsymbol{z=1-x^2}$表示以抛物线

$$\begin{cases} \boldsymbol{z=1-x^2} \\ \boldsymbol{y=0} \end{cases}$$

为准线，母线平行于$\boldsymbol{y}$轴抛物柱面。



空间区域Ω是由下方为椭圆抛物面，上方为抛物柱面的上下两片曲面围城。

(3)两个曲面交线

$$:\begin{cases} z=3x^2+y^2 \\ z=1-x^2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 4x^2+y^2=1 \\ z=1-x^2 \end{cases}$$

Ω在oxy面的投影区域为椭圆域

$$:\boldsymbol{4x^2+y^2\le 1}$$

主要内容

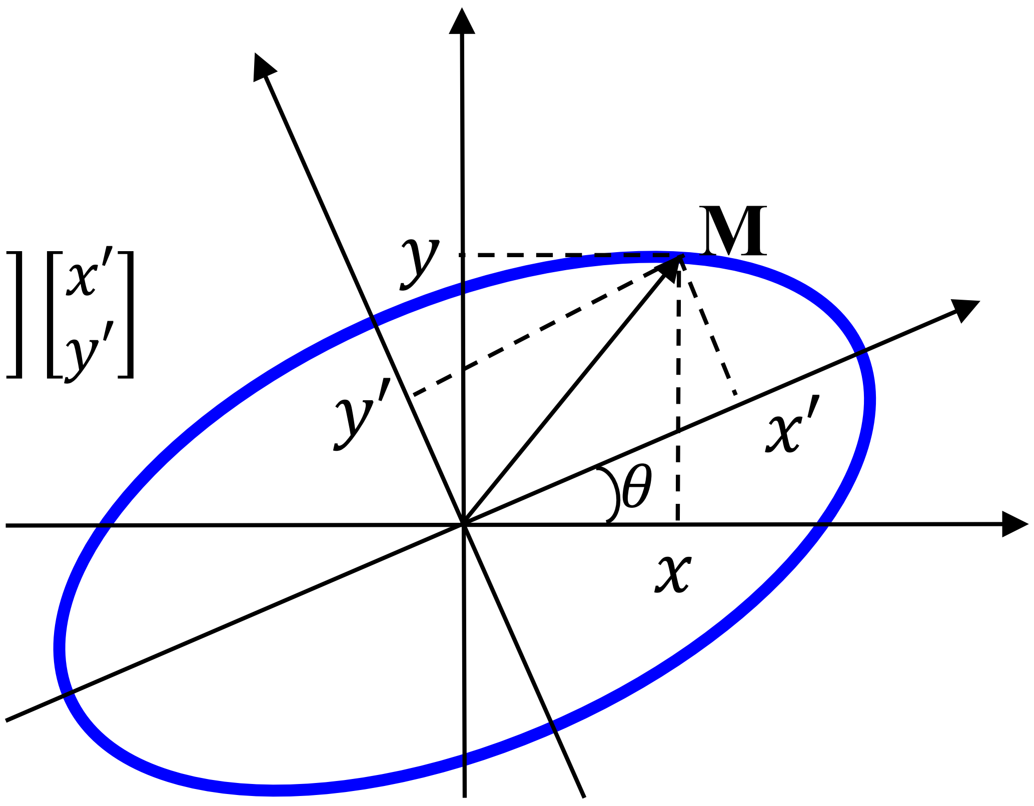
1. 五种典型的二次曲面
2. 曲线在坐标面上的投影与空间区域的简图
3. 二次型及其矩阵表示
4. 二次型的标准形

平面直角坐标系中，为了研究二次曲线

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

我们可以适当地选取坐标旋转变换

$$\begin{cases} x = x'cos\theta - y'sin\theta \\ y = x'sin\theta + y'cos\theta \end{cases} \quad 即 \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



从而可以把上述二次曲线化简为标准方程

$$\tilde{a}x'^2 + \tilde{b}y'^2 = 1$$

若$\tilde{a} > 0, \tilde{b} > 0$，则该二次曲线为原$xy$坐标系中一个旋转后的椭圆曲线.

关键：去掉交叉乘积项，只保留平方项

定义7.2.1（二次型）：

含有n个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式函数

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ \cdots\cdots \\ +a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为n元二次型.

注：①当系数a_{ij}为实数时，f称为实二次型；

②当系数a_{ij}为复数时，f称为复二次型.

本课程主要讨论实二次型。

定义7.2.1（二次型）：

含有n个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式函数

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\
+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\
\cdots\cdots \\
+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为n元二次型.

令$a_{ji}=a_{ij}$,则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,于是

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= \quad & a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
&\cdots\cdots \\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad =x_1(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+x_2(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)$$
$$+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)$$

令$a_{ji}=a_{ij}$,则$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$,于是

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= \quad & a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\ & +a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ & \cdots\cdots \\ & +a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad = x_1(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n)+x_2(a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n)$$

$$+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n)$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^T A x$$

因为$a_{ij}=a_{ji}$,故$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为实对称矩阵

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx$$ 其中矩阵A为实对称矩阵.

二次型f $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 实对称矩阵A

实对称矩阵A称为二次型f的矩阵； A的秩称为二次型f的秩.

f称为实对称矩阵A的二次型；

例： $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+7x_3^2+6x_1x_2-2x_2x_3$ $\quad A=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&0&-1\\0&-1&7\end{pmatrix}$

例： $f=x^TBx,\ B=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&3&0\\1&4&2\end{pmatrix}$， f是二次型,

但B不是f的矩阵. f对应的矩阵 $A=\dfrac{1}{2}(B+B^T)$.

$x^TAx=\frac{1}{2}(x^TBx+x^TB^Tx)$

$=\frac{1}{2}(x^TBx+(x^TBx)^T)=x^TBx$

主要内容

1. 五种典型的二次曲面
2. 曲线在坐标面上的投影与空间区域的简图
3. 二次型及其矩阵表示
4. 二次型的标准形

二次型的标准形： 只含平方项的二次型，

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 = y^T D\ y, \quad D = diag(k_1, \cdots, k_n).$$

问题： 对$f = x^T Ax$, 寻找可逆线性变换$x = Qy$, 使得

$$f = x^T Ax \overset{x=Qy}{=\!=\!=} y^T(Q^T AQ)y = y^T D\ y$$ 为标准形

定理7.2.1 对 $f = x^T Ax$, 存在正交变换 $x = Qy$ 化 f 为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是 f 的矩阵$A = (a_{ij})$的全部特征值.

用正交变换化二次型为标准形的步骤

1. 将二次型表成矩阵形式 $f = x^T Ax$，求出 A;

2. 求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$;

4. 将特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 正交化，单位化，得 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，

   记 $Q = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$;

5. 取正交变换 $x = Qy$，则得 f 的标准形 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

例： 求一个正交变换 $x = Qy$，把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

化为标准形.

解： 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda+3)(\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$$

当 $\lambda_1 = -3$ 时，解方程 $(-3I - A)x = 0$，

$$得基础解系\ \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例： 求一个正交变换$x = Qy$，把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

化为标准形.

解： 当$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$时，解方程$(I - A)x = 0$

可得正交的基础解系 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$

单位化即得 $e_1 = [\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}]^T, e_2 = [\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0]^T,$

$$e_3 = [0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}]^T,$$

$$e_4 = [\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}]^T$$

例： 求一个正交变换$x=Qy$,把二次型

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4.$$

化为标准形.

解： 即存在正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad 使Q^TAQ=D=\begin{pmatrix} -3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Q不唯一

正交变换$x=Qy$就可将f化为标准形 $f=-3y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

用配方法化二次型成标准形

例： 化 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2+4x_1x_3-2x_2x_3$为标准形，并求所用的可逆变换矩阵.

解： 先把含 x_1 的项配方：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3)^2-x_2^2-3x_3^2-2x_2x_3$$

再把含 x_2 的项配方：

$$=(x_1+2x_3)^2-(x_2+x_3)^2-2x_3^2$$

作可逆变换

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases},\ \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-2y_3 \\ x_2=y_2-y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases},\ \Rightarrow x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y=Qy$$

标准形：$f=y_1^2-y_2^2-2y_3^2$.　可逆变换：$x=Qy$.

例： 化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 成标准形,并求所用的变换矩阵.

解 在f 中不含平方项.由于含有x_1x_2乘积项,故令

$$x_1 = y_1 + y_2,\quad x_2 = y_1 - y_2,\quad x_3 = y_3,\qquad x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y = Py$$

代入可得 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3.$

再配方，得 $f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$

$$令\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}\quad 即\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3, \\ y_2 = z_2 - 2z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}\qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z = Qz$$

即有$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$ 可逆变换：$x = PQz$

在配方法中，一般地，可用以上两个例题的方法找到可逆线性变换，将二次型化为标准形。