

2013-2014秋季线性代数期末试题

考试课程

线性代数

A卷

2014年1月16日

姓名: _____ 学号: _____ 班级: _____

注: 填空题请直接在答题纸上写答案, 解答题请写清步骤。

1. (15分) 填空题(每小题3分):

- (1) 有六个互异的三阶置换阵, 它们的乘积的行列式是_____.
- (2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是 \mathbb{R}^3 中的向量, 其中 α_1, α_2 线性无关, 已知 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$, 且 $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3$, $A = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$, 则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解是_____.
- (3) 假设 M 是一个4阶实矩阵, 且是反对称阵和正交阵, 则 M 的全部特征值是_____.
- (4) 假设 P 是一个投影矩阵, 则 e^{Pt} 能写成 P 的一个多项式, 它是_____.
- (5) 若 $N(A) = N(A^2)$, 则 $N(A) \cap C(A) =$ _____.

2. (20分) 判断对错, 并给出简单的解释(每小题4分):

- (1) 3阶不可逆方阵的全体按通常的加法数乘形成3阶方阵的集合的一个子空间。
- (2) 若线性方程组 $Ax = b$ 无解, 则 A 不是行满秩的矩阵。
- (3) 设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵, P_C 是列空间 $C(A)$ 上的投影矩阵, P_R 是行空间 $C(A^T)$ 上的投影矩阵, 则 $P_C A P_R = A$.
- (4) 若实矩阵 A 和 B 有同样的四个基本子空间, 则存在实数 a 使得 $A = aB$.
- (5) 设 A 是一个 $(n+1) \times n$ 阶矩阵, $\text{rank}(A) = n$, $b \in \mathbb{R}^{n+1}$, 则 $Ax = b$ 有解当且仅当增广矩阵 $(A|b)$ 是奇异矩阵(singular matrix).

3. (7分) 设 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 考虑增广矩阵 $B = (A \mid P)$, 对 B 进行行变换得到如下矩阵 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$, 求 A^{-1} .

4. (10分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & c \end{pmatrix}$, 求 a, b, c, d 满足什么条件时, A 有4个主元, 并写出相应的 LU 分解。

5. (10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求出 A 的全部特征值和 A^{-1} 在第一行第三列的元素。

6. (14分) 设 S 是 \mathbb{R}^7 的一个4维子空间, P 是 S 上的投影矩阵。

(a) 求出 P 的7个特征值;

(b) 求出 P 的全部特征向量;

(c) 考虑一阶齐次微分方程组 $\begin{cases} \frac{du}{dt} = -Pu, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$ 其中 $u_0 \in \mathbb{R}^7$. 假设 $u = u(t)$ 是解函数, 求极限向量 $u(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$.

7. (15分)

(1) 求向量 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 在矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的列空间上的投影.

(2) 求方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的最小二乘解 \hat{x} .

(3) 不计算, 直接写出向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 在矩阵 $\begin{pmatrix} 10000 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的列空间上的投影.

8. (9分) 构造一个3阶实对称矩阵, 使其特征值为 $1, 1, -1$, 其相应特征向量有 $(1, 1, 1)$ 和 $(2, 2, 1)$.