2021-2022学年线性代数复习与提升讲座(一)

1. 1-3章基本内容总结
2. 典型例题选讲

数学与统计学院　　张芳

一、行列式的基本内容总结

1. 行列式的定义 $D \underline{\underline{def}} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, ← a_{ij}的代数余子式

2. 行列式的性质

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}D, & if\ k=i\\ 0, & if\ k\neq i\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{is}=\begin{cases}D, & if\ s=j\\ 0, & if\ s\neq j\end{cases} \qquad j=1,2,\cdots,n$$

•展开转换提拆变、三个(0)推论并不难；

3. **行列式的计算技巧**：分析，探求行列式的结构

i、直接按定义展开（低阶或稀疏）；

ii、利用性质把行列式化为三角形行列式；

iii、靠边，化零，尽可能把行列式化为爪型，递推公式；

iv. 特殊(范德蒙)行列式的计算（作公式用）；

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & & \cdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j).$$

- **低稀三角爪，特殊用公式**

4. 重要公式

(1) A是n阶方阵, $|A| = |A^T|$

(2) A 是 n 阶方阵 ，A 可逆 ，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

(3) $|kA| = k^n|A|$ (A 是 n 阶方阵)

(4) $|AB| = |A||B|$

$|A+B| \neq |A| + |B|$ (A, B是n阶方阵)

(5) $\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$, $\begin{vmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$, $A_{m\times m}$, $B_{n\times n}$

(6) $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 其中$\lambda_i$是$n$阶方阵$A$的特征值.

5. 行列式的应用

i、用Cramer法则解方程组

解方程组的两个条件

(1) 方程个数等于未知量个数；

(2) 系数行列式不等于零.

$$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2,\cdots,n$$

ii、求伴随矩阵

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

iii、判定n个n维向量组的线性相关性

$$\det(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = 0?$$

iv、求矩阵的特征值

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

v、判定正定二次型

各阶顺序主子式大于零

第1章 典型例题

例1 (求抽象矩阵的行列式) 设A为3阶方阵, $\det(A)= -2$, 将A按列分块为 $A= (a, b, c)$, 令$B= (c-2a, 3b, a)$, 则 $\det(B)=$ (　　) .

分析：将B按照行列式的性质，拆分，换列等变为已知的行列式,或者直接进行变换。

提示：$\det(B)=\det([c-2a, 3b, a])$

$= \det([c, 3b, a]) +\det([-2a, 3b, a])$

$= 3\det([c, b, a])$

$=-3\det([a, b, c])=6$

例2 (求抽象矩阵的行列式) 设A为n阶方阵，$det(A)=c$, 将A按列分块为$A=(a1 , a2 , \dots , an)$，令$B=(a1+a2, a2+a3 , \dots , an+a1)$,则det(B)=(   ).

分析：将B写成矩阵乘积的形式，进行计算。

$$\boxed{|AB| = |A||B|}$$

提示：$B= (a1+a2, a2+a3 , \dots , an+a1)$,

$=(a1, a2 , \dots , an)P$

$$\text{其中：} P = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}, \det(P) = 1 + (-1)^{n+1}.$$

于是：$\det(B)= \det(A)\det(P)=2c$($n$为奇数) 或$0$($n$为偶数)

例3　设A为3阶矩阵，I为3阶单位阵，$I-A, I+A$, $3I-A$都不可逆，试求A的行列式.

解　A的特征值有1，-1，3，det(A)=-3.

$$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\text{，其中 }\lambda_i\text{是}n\text{阶方阵 }A\text{的特征值 .}$$

例4（2022）

$$\text{解方程D} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-4 & -6 \\ -3 & -6 & \lambda-9 \end{vmatrix} = 0.$$

0, 0, 14

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}; r(A) = 1$$

解题方法： 1 对角线法则；
2 靠边化零；
3 特征值的特殊求法

例5（2008）

若向量组 $\alpha_1=(0,1,\lambda)^T,\alpha_2=(\lambda,1,0)^T,\alpha_3=(0,\lambda,1)^T$，线性相关，则 $\lambda=$ <u>$-1,0,1$</u>

解 $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)=-\lambda(1-\lambda^2)=0,$

例6（2007）

若向量组 $\alpha_1=(1,1,\lambda)^T,\alpha_2=(1,\lambda,1)^T,\alpha_3=(\lambda,1,1)^T$，的秩为2，则 $\lambda=$ <u>-2</u>

解 $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2)=\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0,$

例7 设A_{ij}为$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&4&6&1\\5&6&7&9\\6&8&9&5\end{vmatrix}$的$(i,j)$元素的代数余子式，

则$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=$（A）

(A)0.　　(B)1.　　(C)-1.　　(D)16.

解

由行列式的性质有，$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&4&6&1\\1&2&3&4\\6&8&9&5\end{vmatrix}$

第1行和第3行完全一样，行列式等于0，$\therefore$ 选A.

或者利用行列式的性质 1.1.8: $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0, i\neq k$, $\therefore$ 选A.

提升题

1.设向量$\alpha=(1,3,-5,4)^T$,矩阵$A=\alpha\alpha^T$，则$\det(A)$等于多少？

$(a)0$ $(b)1$ $(c)51$ $(d)\sqrt{51}$ 【 a 】

$(2)A=\alpha\alpha^T$的秩是多少？ b

$(3)\alpha\alpha^T$的非零特征值？ c

$(4)A=\alpha\alpha^T$的迹$tr(A)$等于？

(5)一般地，当α时n维非零列向量呢？

二、矩阵的基本内容总结

1. 矩阵的运算

- 加法
- 数乘

线性运算

- 矩阵与矩阵相乘

$$AB \overset{?}{=} BA$$

$$AM = AN \overset{?}{\Rightarrow} M = N$$

$$AB = O \overset{?}{\Rightarrow} A = O \ .or.\ B = O$$

- 方阵的幂
- 方阵的行列式

$$|A+B| \overset{?}{=} |A| + |B|$$

- 伴随矩阵

$$\boxed{AA^* = A^*A = |A|E.} \qquad \boxed{\det(A^*) = [\det(A)]^{n-1}.}$$

- 转置矩阵　对称矩阵　反对称矩阵

初等矩阵，过渡矩阵，正交矩阵，正定矩阵

正交矩阵 $AA^T = A^T A = I,$

①A是正交阵的充分必要条件是

A的列(行)向量是标准正交组.

②正交变换后向量的范数,内积,夹角保持不变。

③ **若A为正交矩阵，则**

(I) $|A| = \pm 1;$

(II) $A^{-1} = A^T;$

(III) A^{-1}, A^T, A^***为正交矩阵;**

正定矩阵

$\forall x \neq 0$,有$f(x) = x^T Ax > 0$,则A为正定矩阵.

①正定矩阵充要条件所有特征值都大于零;

②正定矩阵充要条件正惯性指数为n;

③正定矩阵充要条件存在可逆阵，使得 $A = M^T M$,

即：与单位矩阵合同

④正定矩阵充要条件A的各阶顺序主子式都大于零;

设A正定,则:

(1)A^T, A^{-1}, A^*, A^m都是正定矩阵(m为正整数);

(2)$a_{ii} > 0(i = 1,2,\cdots,n)$;

(3)存在正定矩阵B,使得$A = B^2$.

2 伴随矩阵的一些常用公式

$$A^* = |A|A^{-1}$$

$$\boxed{AA^* = A^*A = |A|E}$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

$$\left(A^*\right)^* = |A|^{n-2} A$$

$$A = |A|\left(A^*\right)^{-1}.$$

$$(kA)^* = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$$

$$(AB)^* = B^*A^*$$

例：已知$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求$\det(2AA^*)$ =64

3、逆矩阵

i 逆矩阵的概念及运算性质.

$$AB = BA = E,$$

若 $AB = E$ 或 $BA = E$ ，则 $B = A^{-1}$

ii 逆矩阵 A^{-1}存在 $\Leftrightarrow |A| \neq 0. \Leftrightarrow r(A) = n$

iii 逆矩阵的计算方法：(1) 定义法

(2) 利用公式 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

(3) 初等变换法

iv 逆矩阵的应用

解方程组、解矩阵方程、基变换与坐标变换、求线性变换的逆变换

4. 分块矩阵 与一般矩阵之间的运算性质类似：

（1）加法　同型矩阵，采同相同的分块法；

（2）数乘　数 k 乘矩阵 A，需 k 乘 A 的每一个子块；

（3）乘法　若 A 与 B 相乘，需 A 的列的划分与 B 的行的划分相一致.

（4）转置　先大转置，而后小转置.

（5）分块对角阵的行列式与逆阵 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$；

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{-1} \end{pmatrix};\quad A^n=\begin{pmatrix} A_1^{n} & & \\ & \ddots & \\ & & A_s^{n} \end{pmatrix};$$

（6）两种特殊的分块法：按行分块与按列分块.

5、矩阵的初等变换

i、定义

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij},$$

ii、初等矩阵

$$P_i(k)^{-1} = P_i(\frac{1}{k})$$

$$P_{ij}(k)^{-1} = P_{ij}(-k)$$

iii、（行）阶梯形矩阵　行最简形　秩标准型

iv、应用：解方程组、求矩阵的秩、求矩阵的逆、求向量组的秩与极大无关组

6. 矩阵的秩

i 矩阵秩的概念

矩阵A中非零子式的最高阶数（零矩阵的秩为0）

ii 矩阵秩的结论

(1) 若$A_{m\times n}\neq 0$,则$:1\le r(A)\le \min\{m,n\}$

(2) $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$ (P176, 3T)

(3) 阶梯型矩阵的秩等于它的非零行的个数

(4) $A_{n\times n}, r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0;\quad r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0$

(5) 设$A_{m\times n}, P_{m\times m}$及$Q_{n\times n}$均可逆,则有

$$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A)$$

秩标准型$:PAQ=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}_{m\times r}\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix}_{r\times n}$

(6) $\forall A$, $r(A) = A$的列秩 $= A$的行秩(三秩相等)

(7) $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

(8) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

(9) $r(A_{m\times n}) = 1 \Leftrightarrow A = \alpha\beta^T$,其中$\alpha, \beta$是$m$和$n$维非零列向量

(10) $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

(11) $r(A) \le r(A, b) \le r(A) + 1$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & O \\ O & O \end{bmatrix}_{m\times n} Q^{-1} = \alpha\beta^T$$

将P^{-1}按列分块记为$(\alpha, \xi_2, \cdots, \xi_m)$

Q^{-1}按行分块$(\beta^T, \eta_2^T, \cdots, \eta_n^T)^T$

iii 矩阵秩计算方法:

(1) 定义法

(2)初等变换法

(3)利用秩的有关结论

iv 矩阵秩的应用

判定矩阵是否可逆、
判定方程组解的情况、
求向量组的秩与极大无关组的秩、
求二次型的秩,线性变换的秩

第2章 典型例题

例8 设矩阵A和$E-A$可逆，其中E为单位矩阵，若矩阵B满足$[E-(E-A)^{-1}]B=A$,则$B-A=$(　　　　).

解

$$\Rightarrow B-A=(E-A)^{-1}B$$

$$\Rightarrow (E-A)(B-A)=B=B-A+A$$

$$\Rightarrow (E-A-E)(B-A)=A$$

$$\Rightarrow B-A=-E$$

例9 已知$A^*=\begin{pmatrix}4&3&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&3&-6\\0&0&-3&3\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$和$A$.

分析：

(1) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$,关键在于 $|A|$.

(2) $AA^*=|A|E$

$\Rightarrow A=|A|(A^*)^{-1}$.

解 $\because AA^*=|A|E$，两边取行列式 $\Rightarrow |A||A^*|=|A|^4$.

$\therefore |A|=-3, A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=(\cdots)$

$$A_1^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-3\\1&4\end{pmatrix},$$

$$\because (A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&0\\0&A_2^{-1}\end{pmatrix},$$

$$A_2^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&6\\3&3\end{pmatrix}$$

$\therefore A=|A|(A^*)^{-1}=(\cdots)$

例10 设n维向量$\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T$，其中$a<0$，已知矩阵$A=E-\alpha\alpha^T$的逆矩阵为$B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$，求常数$a$.

解

$$E=(E-\alpha\alpha^T)(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)$$

$$=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\underline{\alpha^T\alpha}\alpha^T$$

又 $\alpha^T\alpha=\begin{pmatrix}a & 0 & \cdots & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\0\\\vdots\\0\\a\end{pmatrix}=2a^2$,

故有$(\frac{1}{a}-1-2a)\alpha\alpha^T=O$, 又$\alpha\alpha^T\neq O$,

$$\Rightarrow \frac{1}{a}-1-2a=0,\quad \text{即} a=-1 \text{或} a=\frac{1}{2},$$

由题设 $a<0$，故 $a=-1$.

例11计算

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2021} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2022} = ? \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$


8:54 88%

题目 2/15 倒计时 01:22:10

2、单选

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

矩阵 X 满足 $AXB=C$，则 $X=$（ ）

(10分)

A

$$P_{ij}(k)^{-1} = P_{ij}(-k)$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例12 设A为5阶矩阵，将A的第2行与第4行换行后，再将第2, 4列对换得到矩阵B, 则A 与B 【 】

（A）等价、相似且合同

（B）等价、相似但不合同

（C）等价但不相似也不合同

（D）不等价、不相似也不合同

解答 应选（**A**）.

依题意知：$PAP = B$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij} = P_{ij}^{T},$$

等价：$PAQ = B$

相似：$P^{-1}AP = B$

合同：$P^{T}AP = B$

提升题 设矩阵$A_{m\times m}, B_{n\times n}$,证明:$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A)+r(B).$

证明 设$r(A)=r, r(B)=t$,则存在可逆矩阵 P_1, Q_1

及P_2, Q_2,使得 $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ $P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} E_t & O \\ O & O \end{pmatrix}$

故存在可逆矩阵 $\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$,使得

$$\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1AQ_1 & O \\ O & P_2BQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O & & \\ O & O & & \\ & & E_t & O \\ & & O & O \end{pmatrix}$$

$$\therefore r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r+t = r(A)+r(B).$$

三. 直线与平面

1. 向量及运算

i 向量的数量积（结果是一个数量）

ii 向量的向量积 （结果是一个向量）

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left\|\vec{a}_2 \times \vec{a}_1\right\|$$

iii 向量的混合积（结果是一个数量）

$$V_{A-BCD} = \frac{1}{6}\left|[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3]\right|$$

（注意共面的条件）

三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面 $\Longleftrightarrow$ $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0.$

2. 平面的方程：三元一次方程

点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n}=(A, B, C)$,

一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$

截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

参数式方程

$$\begin{cases} x = x_0 + sL_1 + tL_2 \\ y = y_0 + sM_1 + tM_2 \\ z = z_0 + sN_1 + tN_2 \end{cases}$$

3. 直线的方程：两个三元一次方程

对称式方程 $$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0),\ \vec{s}=(l,m,n),$$

参数方程 $$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

一般式方程 $$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$$

4. 直线 平面之间的位置关系

两平面的位置关系

(1) Π_1与Π_2相交 $\Leftrightarrow \vec{n}_1$与$\vec{n}_2$不平行

(2) Π_1与Π_2平行不重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$

(3) Π_1与Π_2重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

两直线的位置关系

(1) L_1 与 L_2 异面

$\Leftrightarrow$ 三向量 $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ 不共面. $\Leftrightarrow [\vec{s}_1 \quad \vec{s}_2 \quad \overrightarrow{p_1p_2}] \neq 0$

(2) L_1 与 L_2 相交于一点

$\Leftrightarrow$ 三向量 $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ 共面，且 $\vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$

(3) L_1 与 L_2 平行而不重合 $\Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \not\parallel \overrightarrow{P_1P_2}$

(4) L_1 与 L_2 重合 $\Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$

直线与平面的位置关系

（1）直线与平面相交于一点

$$\Leftrightarrow Al + Bm + Cn \neq 0.$$

（2）直线与平面平行，但直线不在平面上

$$\Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

（3）直线在平面上

$$\Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

5. 距离

i 点到平面的距离

$$d = |(\overrightarrow{P_1P_0})_{\vec{n}}| = \left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0\right| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ii 点到直线的距离

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_0}\| \cos\theta = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}$$

iii 异面直线的距离

$$d = \left|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \frac{\vec{s}_1 \times \vec{s}_2}{\|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\|}\right| = \frac{\left|[\vec{s}_1 \quad \vec{s}_2 \quad \overrightarrow{p_1p_2}]\right|}{\|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\|}$$

4 综合：各类直线平面的方程的求解。

例13 已知直线$L_1: \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x+y=1 \\ z=3 \end{cases}$

则两直线【 】(A) 重合；(B) 相交；(C)平行； (D) 异面.

解:

$$L_2: \begin{cases} x+y=1 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{0}$$

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{P_1P_2}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ 共面，不平行.

Key:B

例14 求过三个平面 $2x+y-z-2=0,\ x-3y+z+1=0$ $x+y+z-3=0$的交点，且平行于平面 $x+y+2z-2=0$ 的平面的方程。

方法1：求线性方程组的唯一解(1,1,1)，用点法式得到。

方法2：设过三个平面交点的平面束为

$$2x+y-z-2+\lambda(x-3y+z+1)+\mu(x+y+z-3)=0$$

且**平行**于平面 $x+y+2z-2=0$

由法向量平行得 $\lambda=-\dfrac{1}{4},\quad \mu=-\dfrac{19}{4}$

即 $x+y+2z-4=0$


美梦成真
战胜疫情
Thank you
西安交通大学：张芳