第四章 微分中值定理

1、设 $f(x),g(x)$ 均在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，若 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $g'(\xi)f(\xi)+f'(\xi)=0$。

提示：作辅助函数 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$

类似地 若证明 $g'(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=0$，作辅助函数 $F(x)=e^{g(x)}f'(x)$ 等等。

2、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且 $f'(0)=0$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)-(\xi-1)^2f''(\xi)=0$。

提示：等式变形 $-\dfrac{1}{(\xi-1)^2}f'(\xi)+f''(\xi)=0\Rightarrow F(x)=e^{1/(x-1)}f'(x)$。

2、设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，且 $\forall x\in(a,b),g''(x)\neq0$；

若 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$ 。提示 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$

3、设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且在 (a,b) 上 $g'(x)\neq0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ 。提示：$F(x)=(f(a)-f(x))g(x)-f(x)(g(x)-g(b))$

4、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，且 $f(0)=f(1)=0$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使

$f''(\xi)=2f'(\xi)/(1-\xi)$。提示：$F(x)=(1-x)^2f'(x)$ 或 $F(x)=e^{2\ln(1-x)}f'(x)$；

这里，应该先由 $f(0)=f(1)=0$，满足 Rolle 定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$，使 $f'(\xi_1)=0$；$F(x)$ 再在 $[0,\xi_1]$ 上满足 Rolle 定理证明结论。

5、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0,f(x)>0\ (0<x<1)$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使

$$\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$ 。提示：$F(x)=f^2(x)f(1-x)$

进一步 可证 $\dfrac{mf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{nf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

6、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，则

①在$(0,1)$中存在$x_1 < x_2$，使$\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$；

②在$(0,1)$中存在$x_1 < x_2 < x_3$，使$\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}=3$。

证：①由介值定理，对$f(0)=0<\dfrac{1}{2}<1=f(1), \exists c \in (0,1)$，使$f(c)=\dfrac{1}{2}$；

再由中值定理，

$f(c)-f(0)=\dfrac{1}{2}-0=f'(x_1)(c-0),\ 0<x_1<c$，

$f(1)-f(c)=1-\dfrac{1}{2}=f'(x_2)(1-c),\ c<x_2<1$，

所以 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2c+2(1-c)=2$；

②$\because f(0)=0<\dfrac{i}{3}<1=f(1),(i=1,2), \therefore \exists c_i \in (0,1), f(c_i)=\dfrac{i}{3},(i=1,2)$

$\therefore f(c_1)-f(0)=\dfrac{1}{3}-0=f'(x_1)(c_1-0), 0<x_1<c_1$，

$f(c_2)-f(c_1)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}=f'(x_2)(c_2-c_1), c_1<x_2<c_2$，

$f(1)-f(c_2)=1-\dfrac{2}{3}=f'(x_3)(1-c_2), c_2<x_2<1$，

$\therefore \dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}+\dfrac{1}{f'(x_3)}=3c_1+3(c_2-c_1)+3(1-c_2)=3$。

8、设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$f(0)=0, f(1)=1$，对于任给的实数$\lambda_1, \lambda_2>0$，且满足$\lambda_1+\lambda_2=1$，求证：存在两个不相等的实数$\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$，使成立：

$\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}=1$。

证明：根据介值定理，对于$f(0)=0<\lambda_1<1=f(1)$，存在一个实数$0<c_1<1$，

使得$f(c_1)=\lambda_1$，在区间$[0,c_1],[c_1,1]$对函数分别使用拉格朗日微分中值定理，

则至少存在$\xi_1 \in (0,c_1), \xi_2 \in (c_1,1)$，成立：

$f(c_1)-f(0)=\lambda_1=f'(\xi_1)c_1$，$f(1)-f(c_1)=1-\lambda_1=\lambda_2=f'(\xi_2)(1-c_1)$，

将上述两个式子联立，可得$\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}=c_1+(1-c_1)=1$，即结论成立。

9、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=0, f(1/2)=1, f(1)=1/2$；

证明：① $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=\xi$；

② $\exists\eta\in(0,1)$，使 $f'(\eta)=1$。

证：① $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $F(1/2)F(1)=-\dfrac{1}{4}<0$，

由零点定理，存在 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\in(0,1)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$；

② $G(x)=f(x)-x$，则 $G(x)$ 在 $[0,\xi]$ 连续，在 $(0,\xi)$ 可导，且

$G(0)=0=G(\xi)$；故由 Rolle 定理，存在 $\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使

$G'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)=1$。

10、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$；证明：

①存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=\xi$；

②对任何实数 λ，存在 $\eta\in(0,1)$，使 $f'(\eta)-3\lambda[f(\eta)-\eta]=1$。

证：①令 $F(x)=f(x)-x$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上满足零点定理，故存在 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\subset(0,1)$，

使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$；

②令 $G(x)=e^{-3\lambda x}[f(x)-x]$ 在 $[0,\xi]$ 上满足 Rolle 定理，故存在 $\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$，

使 $G'(\eta)=0$，即 $f'(\eta)-3\lambda[f(\eta)-\eta]=1$。

11、、设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内一阶可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=3,\ f(3)=1$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明： 由于函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，利用介值定理，有至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得

$$f(\eta)=1.$$

再在区间 $[\eta,3]$ 上，$f(x)$ 满足罗尔定理的三个条件，所以至少存在在一点 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

12、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(1/2)=1$。

①证明：$\exists\eta\in(0,1)$，使 $f(\eta)=\eta$；

②证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)+\dfrac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}(f(\xi)-\xi)=1$。

证：①令 $F(x)=f(x)-x$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上满足零点定理，故存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\subset(0,1)$，

使 $f(\eta)=\eta$；

②分析：由 $f'(\xi)+\dfrac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}(f(\xi)-\xi)=1\Rightarrow f'(x)-1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}(f(x)-x)=0$，

令 $G(x)=e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}(f(x)-x)$，易知 $G(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足 Rolle 定理，

故存在 $\xi\in(0,\eta)\in(0,1)$，使 $f'(\xi)+\dfrac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}(f(\xi)-\xi)=1$。

13、设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上可微，且 $f(0)\cdot f(2)>0, f(0)\cdot f(1)<0$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证明：由题设，$f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 处以及 $x=1,x=2$ 处异号，于是由连续函数的零点定理知存在 $\eta_1\in(0,1),\eta_2\in(1,2)$，使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$.

设 $g(x)=e^{-x}f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 可导，且 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,2)$，使 $g'(\xi)=0$，即有 $f'(\xi)=f(\xi)$.

14、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$；试证：存在 $c\in(0,1)$，使 $cf'(c)+nf(c)=0$。提示：$F(x)=x^n f(x)$。

15、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$；试证：存在 $c\in(0,1)$，使 $cf'(c)+\dfrac{1}{n}f(c)=0$。提示：$F(x)=\sqrt[n]{x}f(x)$

16、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)f(b)>0, f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$；

证明：对任何实数k，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=kf(\xi)$。

证：由已知，$f(a),f(b)$同号，$f(a),f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$异号，从而$f(b),f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$异号；

所以，$\exists\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right),\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$，使得$f(\xi_1)=0,f(\xi_2)=0$；

再令 $F(x)=e^{-kx}f(x)$，显然$F(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$满足 Rolle 定理条件，从而结论成立。

17、设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上具有二阶导数，且

$f(a)=f(b)=0,f(c)<0\ (a<c<b)$；证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使$f''(\xi)>0$。

证：由拉格朗日中值定理有

$f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a),(a<\xi_1<c)\Rightarrow f'(\xi_1)<0$，

$f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c),(c<\xi_2<b)\Rightarrow f'(\xi_2)>0$；

所以，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使$f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0$。

18、设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\neq 0$，试证存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使

得：$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

解 对$\dfrac{f(x)}{e^x}$在$[a,b]$上用柯西中值定理，$\exists\eta\in(a,b)$，

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}，（1），$$

又$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，代入（1）式即得所证等式.

19、设 $0<x_1<x_2$，证明$x_1\ln x_2-x_2\ln x_1=(\ln\xi-1)(x_1-x_2)$，其中$\xi$在$x_1$与$x_2$之间.

证：目标关系变形后等同于 $$\frac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{\ln x_2}{x_2}-\dfrac{\ln x_1}{\ln x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}，$$

于是取$f(x)=\dfrac{\ln x}{x},g(x)=\dfrac{1}{x}$，在区间$[x_1,x_2]$上应用柯西定理，

便有 $\dfrac{\dfrac{\ln x_2}{x_2}-\dfrac{\ln x_1}{\ln x_1}}{\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}}=\dfrac{1-\ln\xi}{\xi^2}(-\xi^2)=\ln\xi-1$，$\xi$ 在 x_1 与 x_2 之间。化简即得。

20、设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，证明：

（1）至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；（2）至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

证：（1）假设 $\forall x\in(a,b), f(x)\neq 0$，不妨设 $f(x)>0$，则有

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geq 0；\quad f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leq 0$$

与 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$ 矛盾，故 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 。

（2）因 $f(x)$ 在 $[a,\xi]$ 及 $[\xi,b]$ 上分别满足罗尔定理条件，故 $\exists\eta_1,\eta_2$，使得

$$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0，\ a<\eta_1<\xi<\eta_2<b，$$

而 $f'(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上满足罗尔定理条件，所以 $\exists\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

21、设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 连续，在 $(0,4)$ 可导，若 $f(0)=1$，

且 $f(1)+f(2)+f(3)=f(4)=2$；证明：存在 $\xi\in(0,4)$，使 $f'(\xi)=0$ 。

证：$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上连续，从而有最大值 M，最小值 m；

因 $m\leq\frac{1}{4}[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=1\leq M$，由介值定理，

存在 $\xi_1\in[1,4]$，使 $f(\xi_1)=1$；又 $f(0)=1$，从而 $f(x)$ 在 $[0,\xi_1]$

上满足 Rolle 定理；故存在 $\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,4)$，使 $f'(\xi)=0$ 。

22、如果记 $\xi=\theta\cdot x$，$0<\theta<1$，则拉格朗日中值公式 $f(x)-f(0)=xf'(\xi)$ 可以写作：

$f(x)-f(0)=xf'(\theta x),0<\theta<1$，$\theta$ 的大小通常与 x 相关.（1）若 $f''(0)\neq 0$，试证：

$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$；（2）设 $f(x)=\arctan x$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

证明 （1）由 $f(x)-f(0)=xf'(\theta x), 0<\theta<1$，来凑二阶导数：

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{\theta x}\quad（将 f'(\theta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x} 代入）$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{\theta x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}}{\theta}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)$

故从 $f''(0)\neq0$ 推出，$\lim\limits_{x\to0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

（2）$\arctan x-0=\dfrac{1}{1+(\theta x)^2}x, 0<\theta<1$，解出

$$\theta^2=\frac{\dfrac{x}{\arctan x}-1}{x^2}=\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x},$$

$$\lim_{x\to0}\theta^2=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

23、设 $f(x)=e^x$，1）求满足 $f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$ 的 θ（$0<\theta<1$）;

1）求 $\lim\limits_{h\to0}\theta$。

解：1）由拉格朗日中值定理

$e^{x+h}-e^x=e^{x+\theta h}h$，两边消除 e^x 得 $\theta=\dfrac{1}{h}\ln\dfrac{e^h-1}{h}$；

2）$\therefore\lim\limits_{h\to0}\theta=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\ln\dfrac{e^h-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}\ln\left(1+\dfrac{e^h-1-h}{h}\right)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1-h}{h^2}=\dfrac{1}{2}$

24、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导。$f'(0)=0, f''(0)=2$。求 $l=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}$.

解：依据拉格朗日中值公式，存在介于 $x,\tan x$ 之间的实数 ξ，使得

$$l=\lim_{x\to0}\frac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)(\tan x-x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=f''(0)\cdot1\cdot\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2x}-1}{3x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{3x^2}\lim_{x\to0}\cos^2x=\frac{2}{3}。$$

（其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=1$是因$\xi$介于$x,\tan x$之间，而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$用夹逼原则得来）

25、设$f(x)$满足$f'(0)=0$，$f''(0)$存在，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^3}\cdot f'(\xi)$，（$\xi$介于$x$与$\ln(1+x)$之间）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}=f''(0)$$

由夹挤准则可得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=1$，因此$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{1}{2}f''(0)$。

26、已知$f(x)$在$x=0$处有三阶导数，且$f(0)=0,f'(0)=0,\ f''(0)=2,f'''(0)=3$，

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x^2}{x^3}$。

解：法 1：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-2x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)-2}{6x}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\frac{1}{6}f'''(0)=\frac{1}{2}$

注意，若如下用洛必达法则由于超出题给条件（需要三阶导函数存在以及在原点的连续性而判错。

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-2}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{6}=\frac{1}{6}f'''(0)=\frac{1}{2}$$

法 2：借助皮亚诺余项的 Taylor 公式，并代入条件化简，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)=x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

27、设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=6$，求$l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}$。

解：法一 因$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,(0<\xi<x)$

所以 $f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x$，（$0<\xi<\sin^2 x$）

故$l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x}{x^4}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)=\frac{1}{2}f''(0)=3$。

法二　因 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$

所以　$f(\sin^2 x)=3\sin^4 x+o(\sin^4 x)$，

故　$l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin^4 x+o(\sin^4 x)}{x^4}=3$。

法三

$$
\begin{aligned}
l&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f''(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(0)=3
\end{aligned}
$$

法四

$$
\begin{aligned}
l&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)2\sin x\cos x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)-f'(0)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0)=3
\end{aligned}
$$

注：如果条件改为设 $f(x)$ 具有二阶导数，只有法二和法四成立。

28、求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

解：$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1$。

30、若 $0<\alpha<1$，求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^\alpha-n^\alpha\right)$

解：法一　$l=\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{n}=\alpha\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0$；

法二　$\because\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha<\left(1+\frac{1}{n}\right)$，

$\therefore 0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]<n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$，

上式令 $n\to\infty$，得 $l=0$。

29、求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

解：$l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}(\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\frac{\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2})$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{(\cos 2x-1)+1}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{(\cos 3x-1)+1}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$$ 。

30、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $f'(0)=0, f''(0)=2$；

求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\tan x)-f(x)}{x^4}$；

解：由中值定理 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)(\tan x-x)}{x^4}$，（$\xi$ 在 x 与 $\tan x$ 之间）

$\therefore l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{x}\cdot\dfrac{\tan x-x}{x^3}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}=f''(0)=2,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$；

所以 $l=\dfrac{1}{3}$ 。

31、求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2(1-\cos x)}}{x^4}$

解：$l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\xi}\left(x^2-2(1-\cos x)\right)}{x^4}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2\left(x^2/2!-x^4/4!+o(x^4)\right)}{x^4}=\dfrac{e}{12}$ 。

推广：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $f'(0)=0, f''(0)=2$；

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f\left(2(1-\cos x)\right)}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)\left(x^2-2(1-\cos x)\right)}{x^6}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x^2}\cdot\frac{x^2-2(1-\cos x)}{x^4}=f''(0)\cdot 1\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

（ξ 在 x^2 与 $2(1-\cos x)$ 之间）

32、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $f'(0)=0, f''(0)=2$；

求 $l=\lim_{x\to 0}\frac{f(\arctan x)-f(\sin x)}{(e^{x}-1)\ln(1+x^{3})}$

解：$l=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)(\arctan x-\sin x)}{x^{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{\arctan x-\sin x}{x^{3}}=-\frac{1}{3}$。

33、求 $l=\lim_{x\to a}\frac{\sin x^{x}-\sin a^{x}}{a^{x^{x}}-a^{a^{x}}}\quad(a>1)$

解：法一 设 $f(t)=\sin t, g(t)=a^{t}$，由 Cauchy 中值定理，

存在 $\xi\in(a^{x},x^{x})$，不妨设 $x>a$

$l=\lim_{x\to a}\frac{\cos\xi(x^{x}-a^{x})}{a^{\xi}\ln a(x^{x}-a^{x})}=\frac{\cos a}{a^{a}\ln a}$。

法二 由洛必达法则

$l=\lim_{x\to a}\frac{\cos x^{x}\cdot x^{x}(\ln x+1)-\cos a^{x}\cdot a^{x}\ln a}{a^{x^{x}}\ln a\cdot x^{x}(\ln x+1)-a^{a^{x}}\ln a\cdot a^{x}\ln a}=\frac{\cos a^{a}}{a^{a^{a}}\ln a}$。

34、求 $l=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$

解：$l=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}+\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sec^{2}\xi(\tan x-\sin x)}{\tan x-\sin x}+\frac{\tan(\sin x)(1-\cos(\sin x))}{\tan x(1-\cos x)}\right]$，（$\sin x<\xi<\tan x$）

$=1+\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sin^{2}x/2)}{x\cdot(x^{2}/2)}=2$。

法二

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(x+\frac{1}{3}x^{3}+o(x^{3})\right)-\sin\left(x-\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})\right)}{\frac{1}{2}x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{1}{3}x^{3}\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}x^{3}\right)^{3}+o(x^{3})-\left[\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{6}x^{3}\right)^{3}+o(x^{3})\right]}{\frac{1}{2}x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{\frac{1}{2}x^3}=2\text{。}$$

35、求 $l=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$

解：令 $t=1/x$，

$$l=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t/t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+(\sin t-t)/t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=-\frac{1}{6}$$

38、求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

解：$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(e^{\ln n/n}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{\ln n}{n}=0$。

36、求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right),(a\neq 0)$

解：法一　利用中值定理

$$l=\lim_{n\to\infty}n^2\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\right)\qquad（\xi\text{ 在 }\frac{a}{n}\text{ 和 }\frac{a}{n+1}\text{ 之间}）$$

$$\therefore l=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\cdot\frac{a}{1+\xi^2}=a\text{。}$$

法二　利用 $Taylor$ 公式

$$f(x)=\arctan x,f(0)=0,f'(x)=\frac{1}{1+x^2},f'(0)=1,\ f''(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2},\ f''(0)=0,$$

$$\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o\left(x^2\right)=x+o\left(x^2\right)$$

$$\therefore l=\lim_{n\to\infty}n^2\left[\left(\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{a}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2a}{n(n+1)}+\frac{o\left(1/n^2\right)}{1/n^2}\right]=a$$

法三　利用洛必达法则

$$l=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(a/x)-\arctan(a/(x+1))}{1/x^2},\ \text{令 } t=1/x,x\to+\infty\Rightarrow t\to 0^+;$$

$$l=\lim_{t\to 0^+}\frac{\arctan(at)-\arctan\left(\frac{at}{t+1}\right)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{a}{1+(at)^2}-\frac{a}{(t+1)^2+(at)^2}}{2t}=a\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2+2t}{2t}=a$$

37、设 $f(x)=\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是常数，$\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$，已知对一切实数 x，有 $|f(x)|\le|x|$，试证：$|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n|\le 1$。

证：因为 $|f(x)|\le|x|$，所以 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le 1$ 。于是

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_1\varphi(x)+\alpha_2\varphi(2x)+\cdots+\alpha_n\varphi(nx)}{x}\right|$$

$$=\left|\alpha_1\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}+2\alpha_2\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(2x)-\varphi(0)}{2x-0}+\cdots+n\alpha_n\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(nx)-\varphi(0)}{nx-0}\right|$$

$$=|\alpha_1\varphi'(0)+2\alpha_2\varphi'(0)+\cdots+n\alpha_n\varphi'(0)|=|\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n|\le\lim_{x\to 0}1=1\text{。}$$

46、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b]$ 上可导.

（1）若 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=A$，证明 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右导数 $f'_+(a)$ 存在，且 $f'_+(a)=A$.

（2）反过来，当 $f'_+(a)$ 存在时，极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 是否一定存在？若存在，请证明；若可能不存在，请举反例.

证：（1） $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}f'(\xi)=A$.

（2）可能不存在.

反例为：$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x},x\ne 0;\\0, \quad x=0.\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},x\ne 0;\\0, \quad x=0.\end{cases}$

显然 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ 不存在.