

西安交通大学考试题 (B卷)

成绩

课 程 复变与积分变换

系 别 \_\_\_\_\_

考试日期 2008 年 月 日

专业班号 \_\_\_\_\_

姓 名 \_\_\_\_\_

学 号 \_\_\_\_\_ 期中 ☐ 期末 ☒

一. 填空题(直接将结果写在横线上;每小题4分)

1.  ~~$(1+i)^{1/3} =$~~  \_\_\_\_\_

2.  ~~$i^{i+1} =$~~  \_\_\_\_\_

3. 设  $S_r$  为曲线  $z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$ , 其中  $r > 0$  为一常数, 则  $\int_{S_r} \frac{\cos z - 1}{z} dz$   
= \_\_\_\_\_

4. ~~设  $z = x + iy, f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面上处处解析, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_,  $c =$  \_\_\_\_\_,  $d =$  \_\_\_\_\_。~~

5.  $\int_{|z|=2} \frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3} dz =$  \_\_\_\_\_。

二. 解答题(每小题5分)

1. 计算积分  $\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2 + 1} dz$ 。

2. 证明  $\sin(in), (n = 1, 2, \dots)$ , 是一个无界数列, 并判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(in)}{n^2}$  的敛散性。

3. 试求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} z^n$  的收敛半径。

4. 设  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶零点, 问  $z_0$  是  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  的什么样的奇点, 并求  $\text{Res} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)}, z_0 \right]$ 。

5. 讨论函数  $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$  的连续性、可导性与解析性。

6. 求直线  $\operatorname{Im}(z) = 0$  在映射  $w = \frac{z-i}{z+i}$  下的像曲线。

7. 计算  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ 。

三. (7分) 求一个共形映射, 使在该映射下, 区域  $\{z : |z| < 1, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$  与区域  $\{w : \operatorname{Im}(w) > 0\}$  是一一对应。

四. (10分) 将函数  $f(z) = z/(1+z^2)$  分别在  $|z| < 1$  以及  $0 < |z-i| < 2$  内展开为幂级数。

五. 计算题. (每小题6分)

1. 求 Fourier 变换  $\mathcal{F}[e^{-|t|}]$ 。

2. 求 Laplace 变换  $\mathcal{L}[\cos(t - \frac{\pi}{3})]$ 。

3. 求函数  $f(t) = t \cdot u(t)$  与  $g(t) = \sin t \cdot u(t)$  的卷积  $f * g$ 。

六. 用 Laplace 变换求解方程 (10分)

$$\begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y(t) = t - e^{-2t}, & (t > 0) \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$