第二章思考题

1、求$l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{k/x}$；（$e^{k(n+1)/2}$）

解：一般，求$l=\lim f(x)^{g(x)}$，其中$\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$，

$$l=\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$
$$=e^{\lim g(x)\ln[1+(f(x)-1)]}$$

而 $\ln(1+(f(x)-1))\sim f(x)-1$，

所以 $l=e^{\lim g(x)(f(x)-1)}$。下面反复用到此公式。

注：$\exp\{\ \}$表示e的指数部分。

$$l=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{k}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)\right\}}$$

$$\because \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{k}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)\right\}$$
$$=\exp\left\{k\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{nx}\right\}$$
$$=\exp\left\{k\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))+(2x+o(x))+\cdots+(nx+o(x))}{nx}\right\}$$
$$=\exp\left\{k\lim_{x\to o}\frac{(x+2x+\cdots+nx)+o(x)}{nx}\right\}=\exp\left\{\frac{k(n+1)}{2}\right\}$$

$$\therefore l=e^{k(n+1)/2}$$

2、求$l=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{a_1^{1/x}+a_2^{1/x}+\cdots+a_n^{1/x}}{n}\right)^{x},(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$；（$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$）

解：令$t=1/x,x\to\infty\Rightarrow t\to 0$；

$$l=e^{\lim\limits_{t\to 0}\left\{\frac{a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t-n}{nt}\right\}}$$

$$\because \exp\left\{\lim_{t\to 0}\frac{(a_1^t-1)+(a_2^t-1)+\cdots+(a_n^t-1)}{nt}\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{t\to 0}\frac{(t\ln a_1+o(t))+(t\ln a_2+o(t))+\cdots+(t\ln a_n+o(t))}{nt}\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{t\to 0}\frac{t\ln(a_1a_2\cdots a_n)+o(t)}{nt}\right\}=\exp\left\{\frac{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}{n}\right\}$$

$\therefore l = e^{\frac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

3、求$l = \lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$；（$e^{-1/6}$）

$l = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x - x}{x^3}\right\}}$

$\because \exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\right\} = \exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^3/6 + o(x^3)}{x^3}\right\} = \exp\{-1/6\}$

$\therefore l = e^{-1/6}$

4、求$l = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$；　（$-\frac{e}{2}$）

$$l = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e}{x} = e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}} - 1}{x}$$
$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = e\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{e}{2}$$

5、求$l = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$；（$e^{-1/2}$）

6、求$l = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{e^x} - e^{e^{\sin x}}}{x - \sin x}$；（$e$）

解：
$$l = \lim_{x\to 0}\frac{e^{e^{\sin x}}\left(e^{e^x - e^{\sin x}} - 1\right)}{x - \sin x} = e\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$
$$= e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{x - \sin x} - 1\right)}{x - \sin x} = e\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x - \sin x} = e$$

7、已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 + \frac{f(x)}{\sin x}} - 1}{x\ln(1 + x^2)} = 2$，求$c, k$使$f(x) \sim cx^k\ (x \to 0)$；（$c = k = 4$）

解：左=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{2\sin x}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^4} = 2$；

所以 $f(x) \sim 4x^4 \Rightarrow k = c = 4$。

8、设$x \to 0$时，无穷小量

$u = \sqrt[4]{1 - a\arctan^2 x} - 1$与$v = \ln\cos x$等价，求常数$a$。（$a = 2$）

9、$x \to 0^+$时，$1 - \cos\sqrt{x}$与$\ln\sqrt{1 + ax}$等价，求常数a。（$a = 1$）

10、求$l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$；（$e^{-1/2}$）

$$l=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(1+x)^{1/x}-e}{e}\right\}}$$

$$\because \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{e}\right\}=\exp\left\{\frac{1}{e}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{e}{2}\right)\right\},\therefore l=e^{-1/2}$$

注：中间用了题 4 的结果。

11、求$l=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；（$\dfrac{1}{2}$）

$$l=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(1+(x-1))}{(x-1)\ln(1+(x-1))}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\left((x-1)-(x-1)^2/2+o\left((x-1)^2\right)\right)}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}$$

12、求$l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/(e^x-1)}$；（$e^{-1/2}$）

$$l=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{1}{e^x-1}\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right\}}$$

$$\because \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\therefore l=e^{-1/2}$$

13、求$l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1-x}{e^{\sin^2 x}-1}(1+x)^{1/x}$；（$-\dfrac{e}{2}$）

14、$x\to 0$时，$u=\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{1-x}-1\sim cx^k$，求常数$c,k$。（$c=-\dfrac{2}{3},k=1$）

15、求$l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^2}-3^{x^2}}{(2^x-3^x)^2}$；（$1/\ln(2/3)$）

16、求$l=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n^2+2^n\right)^{1/n}$；（2）

$$\because \sqrt[n]{2^n}<\left(1+n^2+2^n\right)^{1/n}<\sqrt[n]{3\cdot 2^n}\Rightarrow l=2$$

17、求$l=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$；（$e^{2/3}$）

$$l=e^{\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{1-\cos x}\frac{\tan x-x}{x}\right\}}$$

$$\because \exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\cos x}\frac{\tan x-x}{x}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3}{x^3/2}\right\}=\exp\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$\therefore l=e^{2/3}$$

18、求$l=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{3+\cos x}{4}\right)^x-1\right]$；（$-\frac{1}{8}$）

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(e^{x\ln\frac{(3+\cos x)}{4}}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\cdot x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{4x^2}=-\frac{1}{8}$$

19、求$l=\lim_{x\to 0}\left(e^x-\sin x\right)^{1/\sin^2 x}$；（$e^{1/2}$）

$$l=e^{\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^x-\sin x-1}{\sin^2 x}\right\}}$$

$$\because \exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\sin^2 x}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+x^2/2+o\left(x^2\right)\right)-\left(x-x^3/6+o\left(x^3\right)\right)-1}{x^2}\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\therefore l=e^{1/2}$$

20、求$l=\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$；（$e$）

令$t=1/x$，则

$$l=\exp\left\{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t+\cos t-1}{t}\right\}=e$$

21、求$l=\lim_{x\to\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$；（$\ln a$）

解：法一

$$l=\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}\ln a}-e^{\frac{1}{x+1}\ln a}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2e^{\frac{1}{x+1}\ln a}\left(e^{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\ln a}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\ln a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}\ln a=\ln a$$

法二 令$t=1/x,x\to\infty\Rightarrow t\to 0$；

$$l=\lim_{t\to 0}\frac{a^t-a^{\frac{t}{1+t}}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{a^{\frac{t}{1+t}}\left(a^{t-\frac{t}{1+t}}-1\right)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{a^{\frac{t^2}{1+t}}-1}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{1+t}\ln a}{t^2}=\ln a$$

22、求$l=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\ln(1+x^2)}$；（$1/\sqrt{e}$）

23、求$l=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\frac{x}{e^x-1}\right)$；（4）

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^3}{x^4}\frac{e^x-1-x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{8\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}=4\text{；}$$

24、求$l=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$；（$-1/4$）

解：令$t=1/x$，则

$$l=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{2}{2\sqrt{1+2t}}-2\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{2t}=-\frac{1}{4}$$

25、设$n>4$（n为正整数）使$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^n+7x^4+2)^\alpha-x\right]=C(\neq 0)$；

试确定n,α的值。（$n=5,\alpha=1/5$）

解

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^n+7x^4+2\right)^{\alpha}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\alpha n}\left(1+\frac{7}{x^{n-4}}+\frac{2}{x^n}\right)^{\alpha}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[x^{\alpha n-1}\left(1+\frac{7}{x^{n-4}}+\frac{2}{x^n}\right)^{\alpha}-1\right]=c\neq 0$$

$\therefore \alpha n-1=0\Rightarrow \alpha=1/n$;

由

$$C=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{7}{x^{n-4}}+\frac{2}{x^n}\right)^{1/n}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{7}{x^{n-4}}+\frac{2}{x^n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{x^{n-5}}+\frac{2}{x^{n-1}}\right)\neq 0$$

知$n=5$。从而$\alpha=1/5$。

26、设函数$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$有无穷间断点$x=0$及可去间断点$x=1$;

试确定常数a,b。($a=0,b=e$)

解;因为$x=0$为无穷间断点，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0;$$

所以 $a=0,b\neq 1$;

又$x=1$为可去间断点，所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$存在，

从而$\lim\limits_{x\to 1}\left(e^x-b\right)=0\Rightarrow b=e$

27、设$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|(x-\pi)}$，求出其所有间断点，并说明其类型。(0 跳跃，$\pi$可去)

解： $x=0,\pi$ 是其间断点;

1) $f\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{-x(x-\pi)}=\dfrac{1}{\pi},f\left(0^+\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x(x-\pi)}=-\dfrac{1}{\pi}$;

所以 $x=0$是跳跃间断点;

2） $f\left(\pi^-\right)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{x(x-\pi)}\overset{t=x-\pi}{=}\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{\sin(\pi+t)}{(\pi+t)t}=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{-\sin t}{(\pi+t)t}=-\dfrac{1}{\pi}$，

$f\left(\pi^+\right)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sin x}{x(x-\pi)}\overset{t=x-\pi}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin(\pi+t)}{(\pi+t)t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{-\sin t}{(\pi+t)t}=-\dfrac{1}{\pi}$；

所以 $x=\pi$ 是可去间断点。

28、若 a,b,c 为正数，讨论方程 $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}=0$ 的根的个数。

解：方程等价于

$a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)=0,(x\neq1,2,3)$；

即 $f(x)$ 为左边的二次方程，则它至多有两个零点。

又 $\because f(1)=2a>0,f(2)=-b<0,f(3)=2c>0$，

故由零点存在定理，$f(x)$ 在 $(1,2),(2,3)$ 内分别有零点；所以原方程根的个数为 2 。

29、利用不等式 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 证明数列

$x_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$ 的极限是 $\ln 2$ 。

证：由 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 得 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，则

$x_n<\ln\dfrac{n+1}{n}+\ln\dfrac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\dfrac{n+n}{n+n-1}=\ln\dfrac{2n}{n}=\ln 2$，

$x_n>\ln\dfrac{n+2}{n+1}+\ln\dfrac{n+3}{n+2}+\cdots+\ln\dfrac{n+n+1}{n+n}=\ln\dfrac{n+n+1}{n+1}=\ln\left(1+\dfrac{n}{n+1}\right)\to\ln 2$；

所以 x_n 的极限是 $\ln 2$ 。

29、证明：$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛。

证：利用不等式 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，得

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<0\Rightarrow\{x_n\}\downarrow$；

又 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$，

所以 $x_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)+x_1=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)+1=\frac{1}{n+1}>0$；

$\{x_n\}$单调递减有下界，故收敛。

31、设 $n>1$ 为正整数，函数 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续，且 $f(0)=f(n)$；证明：

存在 $a\in[0,n-1]$，使 $f(a)=f(a+1)$。

证：令 $F(x)=f(x)-f(x+1)$，知其在 $[0,n-1]$ 上连续；

若 m,M 分别为 $F(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上的最小最大值，则

$$m\le\frac{1}{n}(F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1))\le M\ ;$$

又 $F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=f(0)-f(n)=0$；

故由介值定理知，存在 $a\in[0,n-1]$，使 $F(a)=0$，即 $f(a)=f(a+1)$。

32、指出 $f(x)=\left(1-e^{x/(x-1)}\right)^{-1}$ 的间断点与类型。

解：$x=0,1$ 是间断点。

1） $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-e^{x/(x-1)}\right)^{-1}=\infty$，$\therefore x=0$ 是无穷间断点；

2） $f(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(1-e^{x/(x-1)}\right)^{-1}=1, f(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(1-e^{x/(x-1)}\right)^{-1}=0$；

$\therefore x=1$ 是跳跃间断点。

33、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$f(0)\ne0$；且对一切 x,y 有

$f(x+y)=f(x)f(y)$；证明：$f(x)$ 处处连续。

证：由 $f(0)=f(0+0)=f^2(0)$，又 $f(0)\ne0\Rightarrow f(0)=1$；

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $\lim\limits_{\Delta x}f(\Delta x)=f(0)=1$；

所以 $\forall x_0\in R$，

$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)f(\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)(f(\Delta x)-1)$；

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0)(f(\Delta x)-1)=0$；

故 $f(x)$ 处处连续。

34、证明下列递归数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

1）设 $x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}\ (n=1,2,\cdots)$；

2）设 $x_1=a>0, x_2=b>0, x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}\ (n=1,2,\cdots)$；

3）设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}\ (n=1,2,\cdots)$；

解：1）

$$x_2-x_1=b-a,$$
$$x_3-x_2=-\frac{1}{2}(b-a),$$
$$x_4-x_3=\frac{1}{2^2}(b-a),$$
$$\cdots$$
$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{(-1)^n}{2^n}(b-a),$$

全部相加，得 $x_{n+2}=x_1+(b-a)\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right)\to a+\dfrac{2}{3}(b-a)$；

2）令 $y_{n+2}=\ln x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(\ln x_{n+1}+\ln x_n)=\dfrac{1}{2}(y_{n+1}+y_n)$；

则 $y_1=\ln x_1=\ln a, y_2=\ln x_2=\ln b$，

由 1）知

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+2}=y_1+\frac{2}{3}(y_2-y_1)=\ln a+\frac{2}{3}(\ln b-\ln a),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{ab^2}$。

3）由已知 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}\ (n=1,2,\cdots)\Rightarrow 1<x_n\le 2$；

由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}=\dfrac{x_{n-1}-x_n}{x_nx_{n-1}}$ 知 $\{x_n\}$ 不单调；

但由$x_{n+1}-x_{n-1}=\dfrac{x_{n-2}-x_n}{x_nx_{n-2}}=\dfrac{x_{n-1}-x_{n-3}}{x_nx_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}}$知奇、偶子列$\{x_{2k-1}\},\{x_{2k}\}$

分别单调。且由

$x_1=1,x_2=2,x_3=\dfrac{3}{2},x_4=\dfrac{5}{3}$知，$\{x_{2k-1}\}$递增，$\{x_{2k}\}$递减；

从而$\{x_{2k-1}\},\{x_{2k}\}$均收敛。设其极限分别为a,b，则在

$x_{2k+1}=1+\dfrac{1}{x_{2k}},x_{2k}=1+\dfrac{1}{x_{2k-1}}$两边取极限，得

$$a=1+\frac{1}{b},b=1+\frac{1}{a}\Rightarrow a=b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$。

35、设$a>0,0<x_1<1/a,x_{n+1}=x_n(2-ax_n)(n=1,2,\cdots)$。证明：$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

36、设$x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}(n=1,2,\cdots)$。证明：$\{x_n\}$存在并等于$\sqrt{3}$。

证：因为$x_{n+1}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}$，

①若$x_n<\sqrt{3}$，则$x_{n+1}>x_n$，即$\{x_n\}$递增且有上界$\sqrt{3}$；

②若$x_n=\sqrt{3}$，则$x_{n+1}=x_n$，即$\{x_n\}$为常数列$\{\sqrt{3}\}$；

③若$x_n>\sqrt{3}$，则$x_{n+1}<x_n$，即$\{x_n\}$递减且有下界$\sqrt{3}$；

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$l$；在递推关系式中令$n\to\infty$即可求出$l=\sqrt{3}$。

37、设$a>0,\sigma>0,a_1=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{\sigma}{a}\right),a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{\sigma}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$；

证明：$\{x_n\}$存在并等于$\sqrt{\sigma}$。

证：$a_1=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{\sigma}{a}\right)\geq\sqrt{a\cdot\dfrac{\sigma}{a}}=\sqrt{\sigma},a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{\sigma}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\dfrac{\sigma}{a_n}}=\sqrt{\sigma}$；

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\sigma}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2a_n}\left(\sigma-a_n^2\right)\leq 0$$；

所以$\{a_n\}$递减有下界，从而存在极限，设为l，则由递推关系式得

$$l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{\sigma}{l}\right)\Rightarrow l=\sqrt{\sigma}\text{ 。}$$

38、设 $a_1>b_1>0$，记

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}},n=1,2,\cdots$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限都存在且等于 $\sqrt{a_1b_1}$ 。

证：显然 $a_n>0,b_n>0$；当 $n\geq 2$ 时

$a_n-b_n=\dfrac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}>0$。由题设 $a_1>b_1\Rightarrow a_n>b_n$；

$a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}<\dfrac{a_{n-1}+a_{n-1}}{2}=a_{n-1}$；即 $\{a_n\}$ 递减且有下界 0；

$b_{n+1}-b_n=\dfrac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n}>0$，即 $\{b_n\}$ 递增且由 $b_n<a_n<a_1$ 知，$\{b_n\}$ 有上界 a_1；

故数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均有极限，分别记为 a,b；在上述两个递推关系式中令 $n\to\infty$，得

$a=\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow a=b$；又 $a_nb_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\cdot\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}=a_{n-1}b_{n-1}=\cdots=a_1b_1$；

得 $a=b=\sqrt{a_1b_1}$

39、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$f(0)=0,f(1)=1$。证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$f(\xi)=1-\xi$。

证：令 $F(x)=f(x)+x-1$，则 $F(x)\in C[0,1]$；

又，$F(0)=-1<0,F(1)=1>0$，由零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使

$F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi-1$。

40、证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且对任何 $\forall x\in[a,b],f(x)\neq 0$，

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负。

证：反证法。不妨设 $\exists x_1,x_2\in(a,b),x_1<x_2,f(x_1)<0,f(x_2)>0$；则 $f(x)$ 在

$\left[x_1,x_2\right]$上满足零点定理；故存在$\xi\in\left(x_1,x_2\right)\subset\left[a,b\right]$，使$f(\xi)=0$，与已知矛盾。

41、设$f(x)$在$x=0$连续，且对任何实数x，有$f(2x)=f(x)$；证明$f(x)$是常数函数。

证：由$f(2x)=f(x)$，得

$f(x)=f(x/2)=f\left(x/2^2\right)=\cdots=f\left(x/2^n\right)$，又$f(x)$在$x=0$连续，所以

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x/2^n\right)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}x/2^n\right)=f(0)$。

42、（习题 2.4）9.若$f(x)$在(a,b)上连续，且$f\left(a^+\right),f\left(b^-\right)$存在，证明$f(x)$在$(a,b)$上有界.

法一 因为$f\left(a^+\right)$存在，由局部有界定理，$\exists\delta_1>0,M_1>0$，当$a<x<a+\delta_1$时，$\left|f(x)\right|\le M_1$；

同理，因为$f\left(b^-\right)$存在，由局部有界定理，$\exists\delta_2>0,M_2>0$，当$b-\delta_2<x<b$时，$\left|f(x)\right|\le M_2$；

又$f(x)$在(a,b)连续，故在$\left[a+\delta_1,b-\delta_2\right]\subset(a,b)$上连续，

所以$\exists M_3>0$，$\forall x\in\left[a+\delta_1,b-\delta_2\right]$，有$\left|f(x)\right|\le M_3$；令$M=\max\left\{M_1,M_2,M_3\right\}$，

则$\forall x\in(a,b),\left|f(x)\right|\le M$ 。

法二 作辅助函数

$$F(x)=\begin{cases}f\left(a^+\right),x=a\\ f(x),a<x<b\\ f\left(b^-\right)\end{cases}$$

显然，$F(x)$在(a,b)上连续；又

$F\left(a^+\right)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f\left(a^+\right)=F(a)$，

$F\left(b^-\right)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f\left(b^-\right)=F(b)$；

所以 $F(x)$在$[a,b]$上连续，从而必有界；故$f(x)$有界。

43、（习题 2.4）10 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$f(+\infty)=1$，证明$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界。

证：由$f(+\infty)=1$知，对$\varepsilon=1,\exists X>0$，当$x>X$时，$\left|f(x)-1\right|<1$；

所以$\left|f(x)\right|=\left|f(x)-1+1\right|\le\left|f(x)-1\right|+1<2$；

又 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 连续，从而必有界，设为 $M_1>0$；令 $M=\max\{2,M_1\}$，则 $\forall x\in[a,+\infty)$，

$|f(x)|\le M$ 。

44、（习题 2.1）8 已知 $x_n\le a\le y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$；证明：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ 。

证：由 $x_n\le a\le y_n$，得 $0\le a-x_n\le y_n-x_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a-x_n)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

而 $y_n=(y_n-x_n)+x_n$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}y_n&=\lim_{n\to\infty}((y_n-x_n)+x_n)=\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)+\lim_{n\to\infty}x_n\\&=\lim_{n\to\infty}x_n=a\end{aligned}$$