目录

2018 年高数下期中试题

一、单选题

~~1.~~ 曲面 $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 上点 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$ 处法线与 z 轴夹角的正弦值为（　　）

A. $\frac{2\sqrt{26}}{13}$　　B. $\frac{3\sqrt{26}}{26}$　　C. $\frac{\sqrt{65}}{13}$　　D. $\frac{1}{\sqrt{26}}$

~~2.~~ 设 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy=$（其中 $D:x^2+y^2\le r$）（　　）

A. π　　B. $\frac{1}{\pi}$　　C. 1　　D. -1

~~3.~~ 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可写成（　　）

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　D. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

~~4.~~ 设 $f(x,y)=e^{x+y}[x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$，则在 $(0,1)$ 点处的两个偏导数 $f_x(0,1)$，$f_y(0,1)$ 的情况为（　　）

A. $f_x(0,1)$ 不存在，$f_y(0,1)=\frac{4}{3}e$　　B. $f_x(0,1)=\frac{1}{3}e$，$f_y(0,1)=\frac{4}{3}e$

C. $f_x(0,1)=\frac{1}{3}e$，$f_y(0,1)$ 不存在　　D. 两个偏导数均不存在

~~5.~~ 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（　　）

A. 只有一条　　B. 只有两条

C. 至少有 3 条　　D. 不存在

二、填空题

~~1.~~ 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $grad\ u|_M=$ ____________ .

~~2.~~ 设 $f(x,y)=\arctan\sqrt{x^y}$，则 $f_x(x,1)=$ __________ .

3. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{x}$ 所确定，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ ________ .

4. 设 $u=2yz-z^2$，则 u 在 $(2,-1,1)$ 处导数的最大值为 ________ .

5. 设有椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$，则它在点 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$ 处切平面方程为 ____________ .

三、解答题

1. 设 $z=f(e^{x+y},\dfrac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 D 是由 $x^2+y^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$，$x=0$ 所所围在第一象限的区域 $(a>0)$.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，问在原点 $(0,0)$ 处：偏导数是否存在？偏导数是否连续？函数是否可微？

~~4.~~ 求球面 $x^2+y^2+z^2-3z=0$ 与平面 $2x-3y+5z-4=0$ 的交线在点 $(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

~~5.~~ 已知平面两定点 $A(1,3), B(4,2)$，试在方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\geq 0, y\geq 0)$ 的椭圆上求一点 C，使得 ΔABC 的面积最大化?

~~6.~~ 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，求 $f(t)$.

2017 年高数下期中试题

一、单选题

1. 二元函数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_x(x_0,y_0)$ 存在对于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是（　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

2. 设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在点 $M(1,-2)$ 的两个偏导数分别为 $f_x(1,-2)=1$ 和 $f_y(1,-2)=-1$，则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 增加最快的方向是（　　）

A. $\vec{i}$　　B. $\vec{j}$　　C. $\vec{i}-\vec{j}$　　D. $\vec{i}+\vec{j}$

3. 设函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A. 连续但偏导数不存在　　B. 不连续但偏导数存在

C. 可微　　D. 连续且偏导数存在

4. 设 $f(x,y)$ 连续，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1 f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$ 等于（　　）

A. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　B. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

C. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　D. $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_x^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

5. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，$f(x)$ 为正值连续函数，a,b 为常数，则

$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$ 等于（　　）

A. $ab\pi$　　B. $\frac{ab\pi}{2}$　　C. $(a+b)\pi$　　D. $\frac{(a+b)\pi}{2}$

二、填空题

1. 若函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的隐函数，则 $dz|_{(1,0,-1)}=$__________.

2. 设 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则 $gradu|_{(1,2,-2)}=$__________.

3. 若 $f\in C[0,1],\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=$ ________ .

4. $\lim\limits_{c\to 0}\iint\limits_{c\le x^2+y^2\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy=$ ________ .

5. 若函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x^2-y^2,y^2-z^2)=0$ 确定的隐函数，且 $F(u,v)$ 可微，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ __________ .

三、计算题

1. 求曲线 $x=\cos(t),y=\sin(t),z=\tan(\dfrac{t}{2})$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切线方程额法平面方程.

2. 求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程和法线方程.

3. 设 $z=x^2 f(x,\dfrac{y^2}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

4. 计算二次积分 $I=\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x \sin\dfrac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 \sin\dfrac{\pi x}{2y}dy$.

5. 计算二重积分$\iint\limits_{D} xdxdy$，其中$D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le ax\}(a>0)$.

6. 在球面$x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{2}$上找一点(x_0,y_0,z_0)，使得函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点$A(0,0,1)$到点$B(2,0,1)$的方向导数具有最大值.

7. 设有函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论$f_x(x,y),f_y(x,y)$在点$(0,0)$处的连续性和$f(x,y)$在$(0,0)$处的可微性.

2016 年高数下期中试题

一、单选题

1. 若 $f(x,x^2)=x^3, f_x(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y(x,x^2)=$（　　）

A. $x+x^3$　　B. $2x^2+2x^4$　　C. x^2+x^5　　D. $2x+2x^2$

2. $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$，交换积分次序得(其中 f 连续)(　　)

A. $I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$　　B. $I=\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

C. $I=\int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dx$　　D. $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

3. 设函数 $z^2=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$则（　　）

A. $dy|_{(0,0)}=3dx+dy$

B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,0)$

C. 曲线 $z=\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$

D. 曲面 $z=\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,1,0)$

4. 函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 2 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　)

A. 无定义　　B. 连续　　C. 有极限但不连续　　D. 无极限

二、填空题

1. 曲面 $\sin xy+\sin yz+\sin xz=1$ 在点 $(1,\dfrac{\pi}{2},0)$ 处的切平面方程为____________.

2. 设函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $gradu|_M=$____________.

3. 函数 $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$，在点 $(1,-1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ 的方向导数是 ________.

4. 设 $f(x,y)\in C\left[0,1\right]$，且 $\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy=$ ________.

5. 交换二次积分次序：$\int_{-1}^1 dx\int_{-1}^{1-x^2} f(x,y)dy=$ ________________.

三、计算题

1. 设 $z=f(e^{x+y},\frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 计算 $I=\iint\limits_{(D)}(1-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中 (D) 是由 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 及 $x=0$ 所围在第一象限的区域.

3. 在曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 上求一个切平面，使该切平面在三个坐标轴是的截距之积为最大，并写出该平面的方程.

4. 设 $z=\arcsin\sqrt{x^2-y}$，求全微分 dz .

5. 求球面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 与平面 $2x-3y+5z-4=0$ 的交线在点 $(1,1,1)$ 处的切线与法平面方程.

6. 设 $z=z(x,y)$ 由 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

四、综合题

1．对任意的 x 和 y，有 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，且变量代换 $\begin{cases} x=uv \\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2) \end{cases}$，将函数 $f(x,y)$ 变换成 $g(u,v)$，试求满足关系式 $a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$ 的常数 a， b.

2．试证明：三曲面 $F_i(x,y,z)=0(i=1,2,3)$ 切同一直线 L 于点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的充分必要条件是 $\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)}=0$.

3．设函数 $f(t)\in C[0,+\infty)$ 且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy$， 求 $f(t)$.

2015 年高数下期中试题

一、单选题

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A. 极限存在　　B. 连续　　C. 可微　　D. 关于 x，y 的偏导数存在

2. 函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2-2xz+2y-3$ 在点函数 $(1,-1,2)$ 处方向导数的最大值为（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 设曲面 $z^2-xy=8(z>0)$ 上某点的切平面平行于 $x-y+2z-1=0$，则该点的坐标为（　　）

A. $(-2,2,2)$　　B. $(1,-4,2)$　　C. $(2,-2,2)$　　D. $(4,-1,2)$

4. 设 $f(u)$ 为连续函数，$F(t)=\iint\limits_{(D)} f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中 $(D):0\le y\le\sqrt{t^2-x^2}$，则 $F'(t)$ 为（　　）

A. $\pi t^2 f(t)$　　B. $2\pi t^2 f(t)$　　C. $\pi t f(t)$　　D. $2\pi t f(t)$

5. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+a}{2}}$，其中 $a>0$ 为常数，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）

A. 连续，但不可偏导　　B. 可偏导，但不连续

C. 可微，且 $df\big|_{(0,0)}=0$　　D. $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

二、填空题

1. 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

2. 设 $u=x^{yz}$，则 $du=$ ____________.

3. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=2\end{cases}$，在点 $(1,2,-1)$ 处切线的方向向量 $\bar{\tau}=$ ________.

4. 设函数$u=xy^2+z^3-xyz$，则在$(1,-1,1)$处沿方向角为$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{4}$的方向$\vec{l}$的方向导数为

______________.

5. 交换二次积分次序：$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1-x^2}f(x,y)dy=$______________________________.

三、计算题

1. 设函数$z=f(x^2-y^2,e^{xy})+\frac{y}{g(x^2+y^2)}$其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$二阶可导，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2. 设函数$F(x,y)$具有一阶连续偏导数，$z=z(x,y)$是由方程$F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})=0$确定的隐函数，试求：

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 求积分$\iint\limits_{(D)}\ln(1+x^2+y^2)d\sigma$，其中$(D)$是$x^2+y^2\le 4$位于第一象限的部分.

4. 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，函数$u(x,y,z)=f(r)$，其中f具有二阶连续导数：

（1）把$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$表示成$r$的函数.

（2）若u满足$\Delta u=0$，求$f(r)$.

5. 设向量值函数$f(x,y,z)=(x\sin x, ye^z, \cos(xz))^T$，求$\overline{f}$的 Jacobi 矩阵.

6. 求函数$f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$在闭区域$x^2+2y^2\le 3$的最大值与最小值.

7. 计算二重积分$\iint\limits_{(D)}\left|\dfrac{x+y}{2}-x^2-y^2\right|d\sigma$，其中$(D): x^2+y^2\le 1$.