牛顿(Isaac Newton, 1642—1727)

英国物理学家、数学家、天文学家，经典物理学的奠基人。

重要贡献有万有引力定律、经典力学、微积分和光学。

- 万有引力定律：总结了伽利略和开普勒的理论和经验，用数学方法完美地描述了天体运动的规律。
- 牛顿运动定律：《自然科学的数学原理》中含有牛顿运动三条定律和万有引力定律，以及质量、动量、力和加速度等概念。
- 光学贡献：牛顿发现色散、色差及牛顿环，他还提出了光的微粒说。
- 反射式望远镜的发明

我不知道世人将如何看我，但是，就我自己看来，我好象不过是一个在海滨玩耍的小孩，不时地为找到一个比通常更光滑的贝壳而感到高兴，但是，有待探索的真理的海洋正展现在我的面前。

第二章 牛顿运动定律 Newton's Laws of Motion

2-1 牛顿运动三定律

一、牛顿第一定律 Law of inertia

任何质点都保持静止或匀速直线运动状态，直到其它物体作用的力迫使它改变这种状态为止。

第一定律引进了二个重要概念

- 惯性 Inertia —— 质点不受力时具有保持静止或匀速直线运动状态的性质,其大小用质量量度。
- 力 Force —— 是质点改变运动状态的原因。

质点处于静止或匀速直线运动状态时：

$$\sum \vec{F}_i = 0$$ （静力学基本方程）Body in equilibrium

二、牛顿第二定律　Newton's second law

某时刻质点动量对时间的变化率正比于该时刻作用在质点上所有力的合力。

$$\sum \vec{F}_i \propto \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \sum \vec{F}_i = k\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

取适当的单位，使 $k=1$，则有

$$\sum \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

当物体的质量不随时间变化时

$$\sum \vec{F}_i = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

- 直角坐标系下为

$$\sum F_{ix} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad \sum F_{iy} = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \qquad \sum F_{iz} = m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

- 自然坐标下 natural coordinates

$$\sum F_{in} = m a_n = m \frac{v^2}{\rho} = m \frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$\sum F_{i\tau} = m a_\tau = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

讨论

(1) 第二定律只适用于**质点**的运动情况

(2) 以下两种情况下，质量不能当常量

- 物体在运动中质量有所增减,如火箭、雨滴问题。
- 高速（$v > 10^6$ m/s) 运动中,质量与运动速度相关,如相对论效应问题。

三、牛顿第三定律 Newton's third law

当物体 A 以力 $\vec{F}$ 作用于物体 B 时，物体 B 也同时以力 $\vec{F}'$ 作用于物体 A 上，$\vec{F}$ 和 $\vec{F}'$ 总是大小相等，方向相反，且在同一直线上。

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

第三定律揭示了**力**的两个性质 Action and reaction

- **成对性** —— 物体之间的作用是相互的。
- **同时性** —— 相互作用之间是相互依存，同生同灭。

讨论

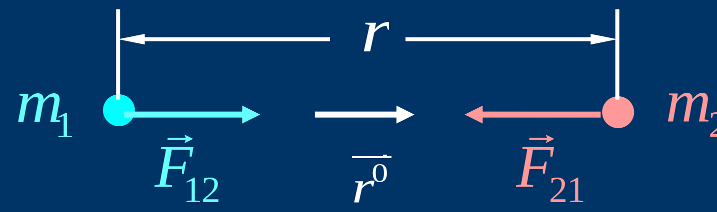
第三定律是关于力的定律，它适用于接触力。对于非接触的两个物体间的相互作用力，由于其相互作用以有限速度传播，存在延迟效应。

2-2 力学中常见的几种力

一、万有引力 Law of universal gravitation

质量为 m_1、m_2，相距为 r 的两质点间的万有引力大小为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

用矢量表示为 $\vec{F}_{21} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}^{\,0}$

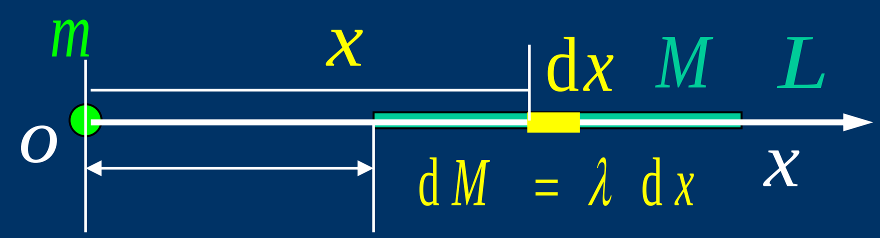
说明

(1) 依据万有引力定律定义的质量叫**引力质量**，常见的用天平称量物体的质量，实际上就是测引力质量；依据牛顿第二定律定义的质量叫**惯性质量**。实验表明：对同一物体来说，两种质量总是相等。

(2) 万有引力定律只直接适用于两质点间的相互作用

例： 如图所示，一质点 m 旁边放一长度为 L 、质量为 M 的杆，杆离质点近端距离为 l 。

求： 该系统的万有引力大小。



解： $|F| = GmM/l^2$ ？

质点与质量元间的万有引力大小为

$$\mathrm{d}f = G\frac{m\mathrm{d}M}{x^2} = G\frac{mM\mathrm{d}x}{Lx^2}$$

杆与质点间的万有引力大小为

$$f = \int_l^{l+L}\mathrm{d}f = \int_l^{l+L} G\frac{mM}{Lx^2}\mathrm{d}x = G\frac{mM}{L}\int_l^{l+L}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = G\frac{mM}{l(l+L)}$$

当 $l >> L$ 时 $G\dfrac{mM}{l(l+L)} \rightarrow G\dfrac{mM}{l^2}$

(3) **重力 Gravity**是地球对其表面附近物体万有引力的分力

设地球半经为R，质量为M，物体质量为m，考虑地球自转后物体重力为

为物体所处的地理纬度角

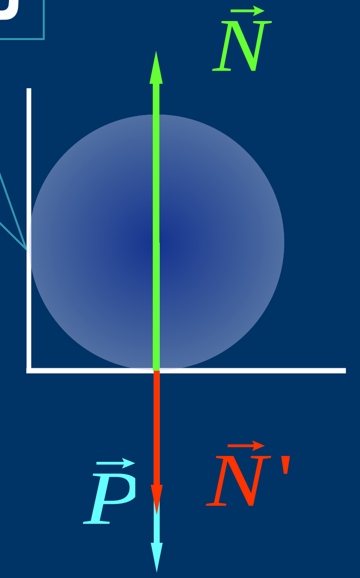
$$P = G\frac{Mm}{R^2}(1 - 0.0035\cos^2\varphi)$$

二、弹性力 Elastic force

无形变，无弹性力

- 当两宏观物体有接触且发生微小**形变**时，形变的物体对与它接触的物体会产生力的作用，这种力叫**弹性力**。
- 在形变不超过一定限度内，弹簧的弹性力 遵从**胡克定律**

$$\vec{f} = -kx\,\vec{i}$$



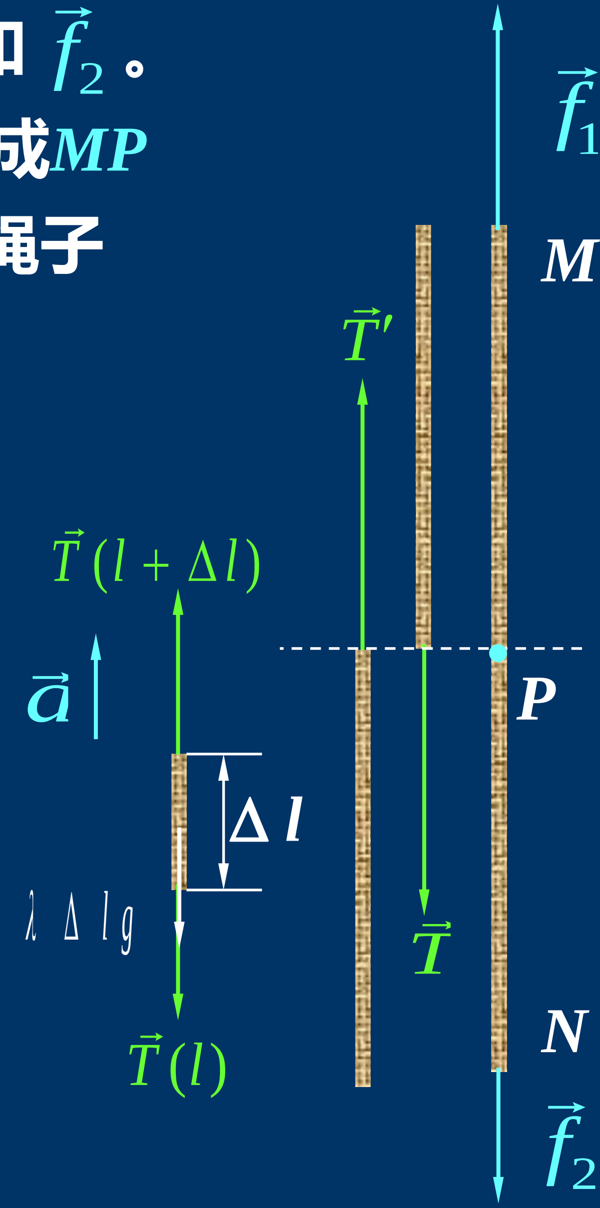
- 绳子在受到拉伸时，其内部也同样出现**弹性张力**。

设绳子MN 两端分别受到的拉力为 $\vec{f}_1$ 和 $\vec{f}_2$ 。想象把绳子从任意点P 切开，使绳子分成MP 和NP 两段， 其间的作用力大小T 叫做绳子在该点P 的**张力**。如图所示。

设绳子以垂直加速度 $\vec{a}$ 运动，绳子质量线密度为 λ， 则其上任一小段 Δl 满足下列方程

$$T(l+\Delta l)-T(l)-\lambda g\Delta l=\lambda\Delta la$$

由方程看出：一般情况下，绳子上各处的张力大小是不相等的，但在绳子的质量可以忽略不计时，绳子上各处的张力相等。



三、摩擦力 Frictional force

1. 静摩擦力

当两相互接触的物体彼此之间保持**相对静止**，且沿接触面有相对运动趋势时，在接触面之间会产生一对阻止上述运动趋势的力，称为**静摩擦力**。

说明

静摩擦力的大小随引起相对运动趋势的外力而变化。最大静摩擦力为 $f_{max}=\mu_0 N$（μ_0 为最大静摩擦系数，N 为正压力)

2. 滑动摩擦力

两物体相互接触，并有**相对滑动**时，在两物体接触处出现的相互作用的摩擦力，称为**滑动摩擦力**。

$$f = \mu N$$ （μ 为滑动摩擦系数)

3. 物体运动时的流体阻力

当物体穿过液体或气体运动时，会受到流体阻力，该阻力与运动物体速度方向相反，大小随速度变化。

(1) 当物体速度不太大时，流体为层流，阻力主要由流体的粘滞性产生。这时流体阻力与物体速率成正比。

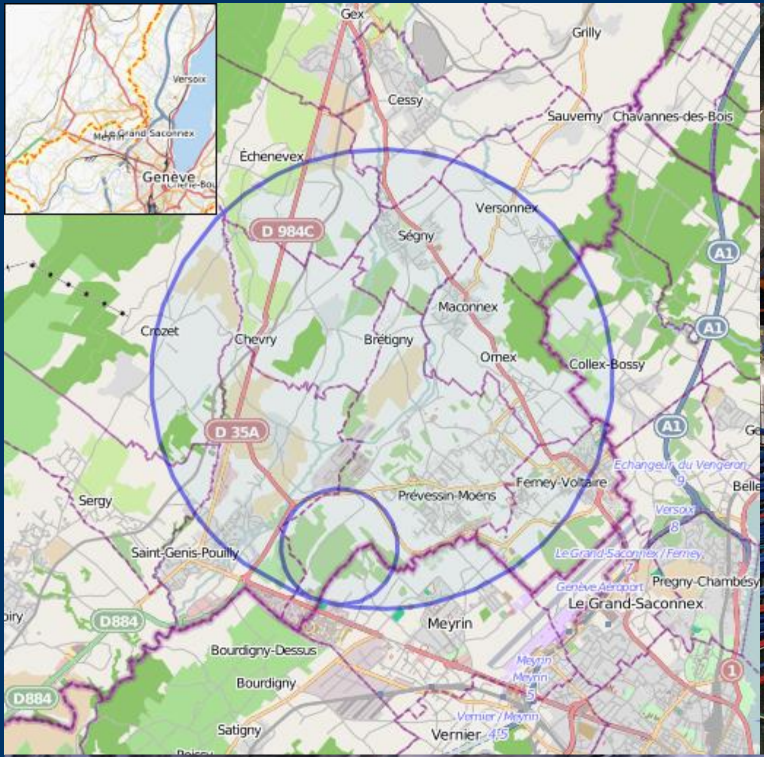
$$f = bv$$

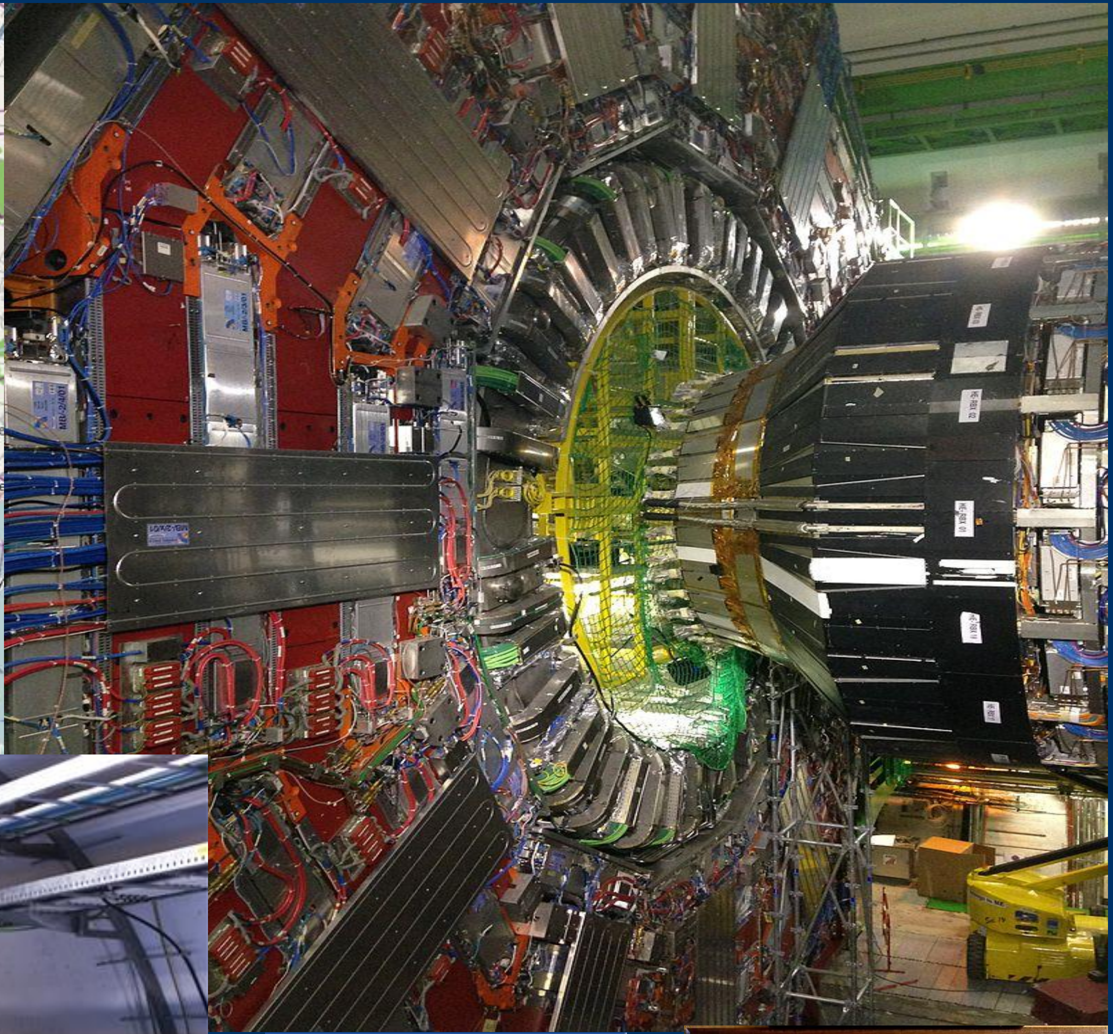
(2) 当物体穿过流体的速率超过某限度时(低于声速)，流体出现旋涡，这时流体阻力与物体速率的平方成正比。

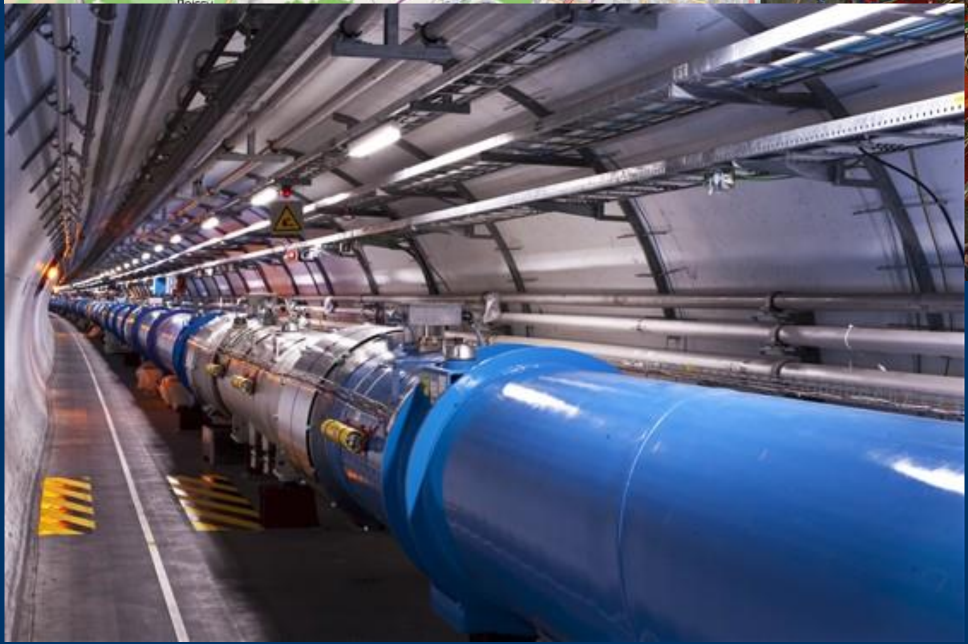
$$f = cv^2$$

(3) 当物体与流体的相对速度提高到接近空气中的声速时，这时流体阻力将迅速增大。

$$f \propto v^3$$


Gex
Grilly
Cessy
Sauverny
Chavannes-des-Bois
Versoix
Le Grand Saconnex
Meyrin
Genève
Échenevex
Versonnex
Ségny
D 984C
A1
Maconnex
Crozet
Chevry
Brétigny
Ornex
Collex-Bossy
D 35A
Echangeur du Vengeron
Sergy
Prévessin-Moëns
Ferney-Voltaire
Saint-Genis-Pouilly
Le Grand-Saconnex / Ferney
Genève Aéroport
Pregny-Chambésy
Le Grand-Saconnex
Meyrin
D884
Bourdigny-Dessus
Bourdigny
Satigny
Vernier / Meyrin
Vernier





CERN


WHERE THE
WEB
WAS BORN

2-3 牛顿运动定律的应用 Applications of Newton's Laws

第一定律 —— "力"的基本概念（惯性、定义）

第二定律 —— "力"产生的效果（对应关系）

第三定律 —— "力"的基本性质（相互作用）

牛顿运动定律的正确性被大量事实所证明。它是质点动力学的基本定律，也是整个力学理论的重要基础。

一、质点动力学的两类问题

◎ 微分问题：$\vec{r}, s, \vec{v}, \vec{a} \Rightarrow \vec{F}$

例1：已知一质量为 *m* 的物体，其运动学方程为

$$\vec{r} = A\cos\omega t\vec{i} + B\sin\omega t\vec{j}$$

求：$\vec{F} = ?$

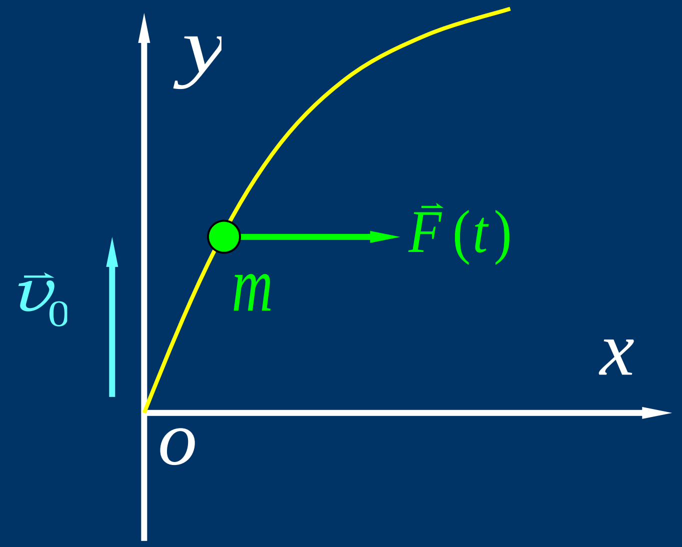
解：$\vec{r} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

$$= -A\omega^2\cos\omega t\vec{i} - B\omega^2\sin\omega t\vec{j} = -\omega^2\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = -\omega^2 m\vec{r}}$$

◎ **积分问题：** $\vec{F} \Rightarrow \vec{r}, s, \vec{v}, \vec{a}$

例2：设一高速运动的带电粒子沿竖直方向以 v_0 向上运动，从时刻 $t = 0$ 开始粒子受到 $F = F_0 t$ 水平力的作用，F_0 为常量，粒子质量为 m 。



求：粒子的运动轨迹。

解：水平方向有 $F_x = F_0 t = m a_x$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_0^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t \frac{F_0 t}{m} \mathrm{d}t$$

$$v_x = \frac{F_0 t^2}{2m} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{F_0 t^2}{2m} \mathrm{d}t \Rightarrow x = \frac{F_0}{6m} t^3$$

竖直方向有 $F_y = m a_y = 0$ $\qquad y = v_0 t$

运动轨迹为 $x = \dfrac{F_0}{6 m v_0^3} y^3$

二、牛顿运动定律的应用

例1：设一物体在离地面上空高度等于地球半径处由静止落下。

求：它到达地面时的速度(不计空气阻力和地球的自转)。

解：以地心为坐标原点，物体受万有引力 $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{r}_0$

在地面附近有 $G\frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow GM = gR^2$

可得： $-g\frac{R^2m}{r^2} = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\frac{R^2}{r^2}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -g\frac{R^2}{r^2}$$

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v = -gR^2\int_{2R}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \qquad v^2 = \frac{2gR^2}{r} - gR$$

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{r} - gR} \xrightarrow{r=R} v = \sqrt{gR}$$

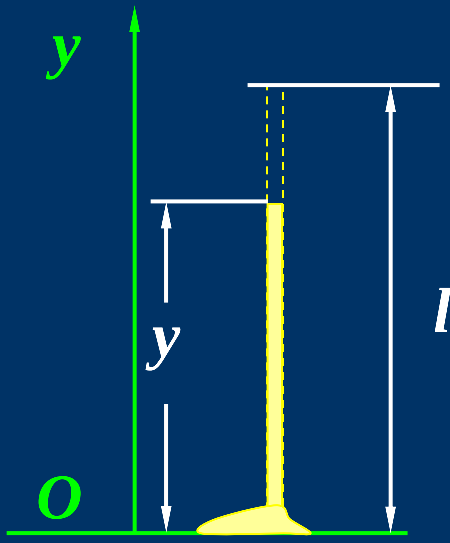
例2：一柔软绳长 l，线密度 ρ，一端着地开始自由下落.

求：下落到任意长度 y 时刻，给地面的压力为多少?

解：在竖直向上方向建坐标，地面为原点(如图).

取整个绳为研究对象　　设压力为 N

$$N-\rho g l=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\dot{p} \qquad p=\rho y v$$



$$N=\rho g l+\rho\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}v+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}y=v^2-yg$$

$$(l-y)2g=v^2 \qquad v^2-yg=2(l-y)g-yg$$

$$N=3\rho g(l-y)$$

三、解题思路和方法

应用牛顿运动定律求解质点动力学的一般步骤：

1. 选取研究对象
2. 分析受力情况和运动情况，画出受力图
3. 选取坐标系
4. 列方程（对应的动力学微分方程）求解
5. 讨论

例3： 以初速度v_0 竖直向上抛出一质量为m 的小球，小球除受重力外，还受一个大小为$\alpha m v^2$ 的粘滞阻力。

求： 小球上升的最大高度。

解：

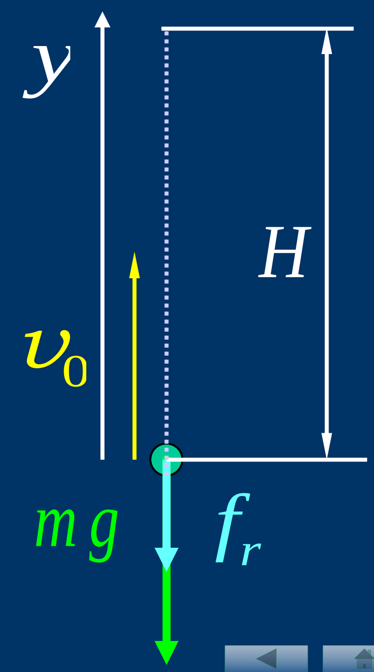
$$f=-m(g+\alpha v^2)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g-\alpha v^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}v \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}y}=-g-\alpha v^2$$

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{(g+\alpha v^2)}=\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}(g+\alpha v^2)}{(g+\alpha v^2)}=-2\mathrm{d}y$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_{v_0}^{0}\mathrm{d}(\ln(g+\alpha v^2))=-2\int_0^H \mathrm{d}y$$

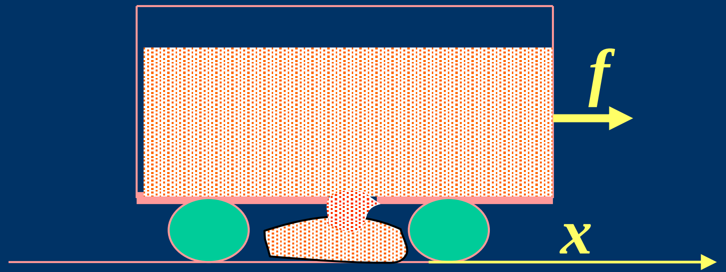
$$H=\frac{1}{2\alpha}\ln\left(\frac{g+\alpha v_0^2}{g}\right)$$



例4： 装沙子后总质量为M 的车由静止开始运动，运动过程中合外力始终为 f ，每秒漏沙量为 ρ 。

求： 车运动的速度。

解： 取车和沙子为研究对象，地面参考系如图，$t=0$ 时 $v=0$



$$f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v+m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\xrightarrow{\dot{m}=-\rho} \quad f=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-\rho v$$

$$\xrightarrow{m=M-\rho t} \quad f+\rho v=(M-\rho t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

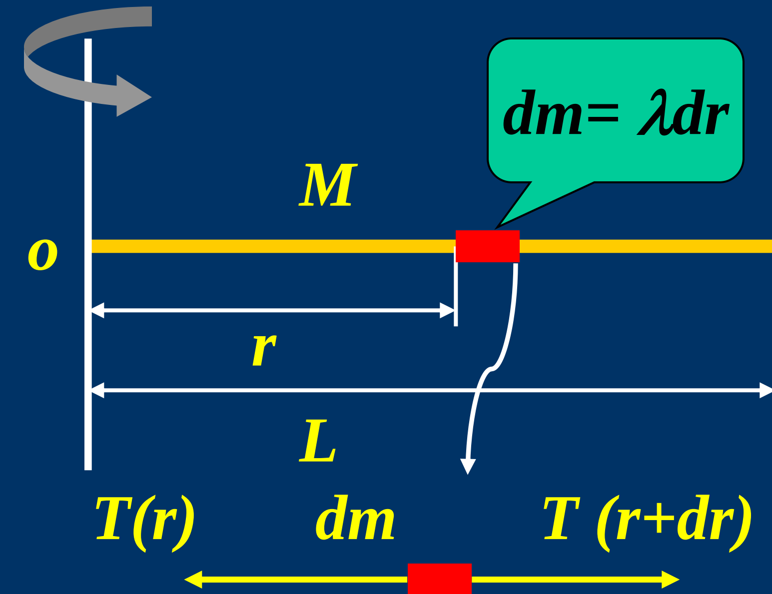
$$\frac{\mathrm{d}v}{f+\rho v}=\frac{\mathrm{d}t}{M-\rho t} \qquad \int_0^v \mathrm{d}(\ln(f+\rho v))=-\int_0^t \mathrm{d}(\ln(M-\rho t))$$

$$\ln\frac{f+\rho v}{f}=-\ln\frac{M-\rho t}{M} \qquad v=\frac{f}{\rho}\left(\frac{M}{M-\rho t}-1\right)$$

例5：一细绳如图示，质量 M 且分布均匀，长度 L 。现使细绳以角速度 ω 在水平面旋转。转动中忽略 重力与空气阻力，

求：距转轴为 r 处绳中的张力 $T\ (r)$？

解：取质量元 dm



$$dm = \lambda dr = \frac{M}{L} dr$$

质点作圆周运动

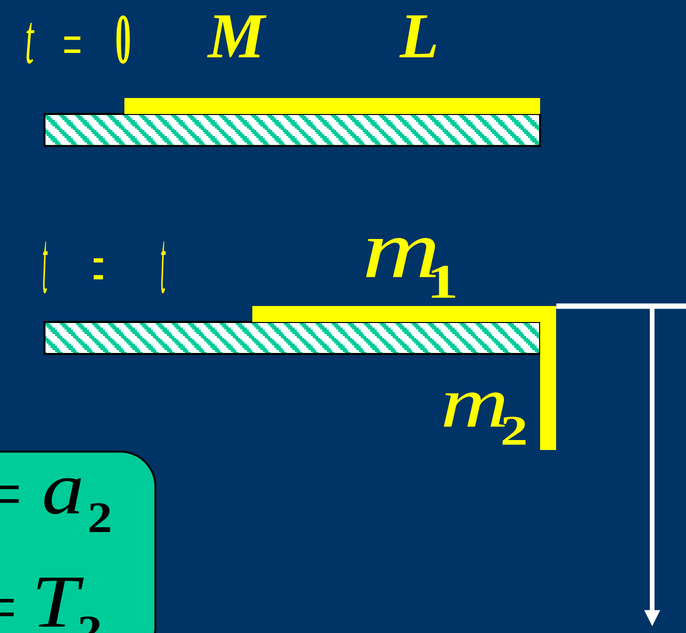
$$T(r) - T(r+dr) = dm \cdot a$$

$$= \frac{M dr}{L} \frac{v^2}{r} = \frac{M}{L} dr \cdot r\omega^2$$

$$dT = -\frac{M\omega^2}{L} r dr \quad \Rightarrow \quad \int_0^{T(r)} dT = -\int_0^r \frac{M\omega^2}{L} r dr$$

$$\int_{T(r)}^{0} dT = -\int_r^L \frac{M\omega^2}{L} r dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(r) = \frac{M\omega^2}{2L}(L^2 - r^2)}$$

例6： 有一条长为L，质量为M 的均匀分布的链条，放在光滑水平桌面上，当链条的一端被推出桌子边缘，在重力作用下，链条从静止开始下落，



求： 1. 链条刚离开桌面时的速度?

2. 若链条与桌面有摩擦，设摩擦系数为 μ，链条应垂下多长时可开始下滑？ （思考）

解： 在 t 时刻，根据牛顿定律

$$a_1 = a_2$$
$$T_1 = T_2$$

ab: $$T_1 = m_1 a_1 = m_1 \frac{dv_1}{dt}$$

bc: $$m_2 g - T_2 = m_2 \frac{dv_2}{dt}$$

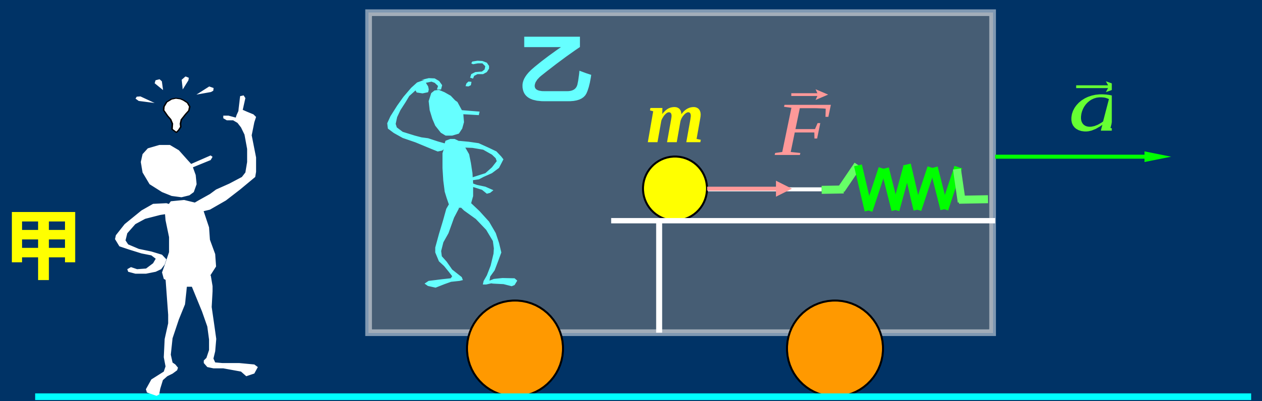
$$\frac{dv}{dt} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{x}{L} g$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^L \frac{x}{L} g\,dx$$

$$\boxed{v = \sqrt{gL}}$$

2-4 牛顿运动定律的适用范围 Scope of Newton's Laws

一、惯性系



地面参考系中的观察者甲：

有力 $\vec{F}$ 和加速度 $\vec{a}$ 即 $\vec{F} = m\vec{a}$ ——牛顿定律适用

运动车厢参考系中的观察者乙：

有力 $\vec{F}$ 无加速度 $\vec{a}$ 即 $m\vec{a} = 0, \vec{F} \neq 0$ ——牛顿定律不适用

结论： 牛顿第二定律不能同时适用于上述两种参考系

惯性系：牛顿运动定律适用的参照系

讨论

(1) 严格的惯性系是关于参照系的一种理想模型。大多数情况下，通常取地面参照系为惯性参照系。

(2) 相对于一惯性系作**匀速直线**运动的参照系都是惯性系。

二、牛顿运动定律的适用范围

牛顿运动定律适用于**宏观**物体的**低速**运动。

说明

(1) 物体的高速运动遵循相对论力学的规律；微观粒子的运动遵循量子力学的规律。

(2) 牛顿力学是一般技术科学的理论基础和解决实际工程问题的重要依据和工具。

三、惯性力

设 S' 系(非惯性系) 相对 S 系(惯性系) **平动**，加速度为 $\vec{a}_e$。

质点 m 在 S 系和 S' 系的加速度分别为 $\vec{a}_a, \vec{a}_r$

由伽俐略变换有 $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$

在 S 系：$\vec{F} = m\vec{a}_a = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e$

在 S' 系：$\vec{F} - m\vec{a}_e = m\vec{a}_r$

引入**虚拟力**或**惯性力** $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_e$

则 $\vec{F} + \vec{F}_0 = m\vec{a}_r$ 牛顿第二定律形式上成立

说明

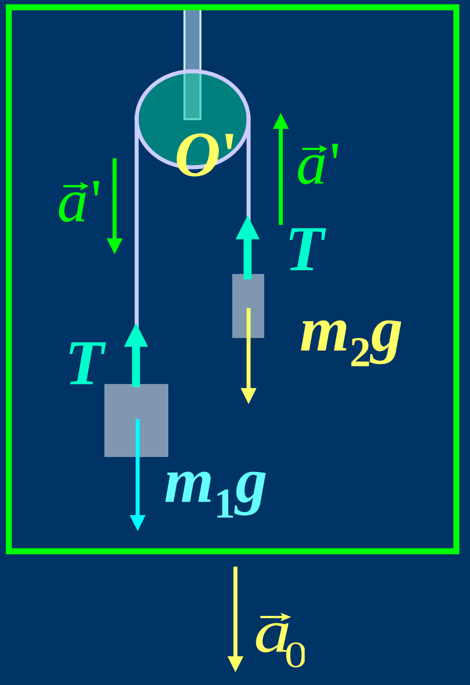
(1) **惯性力**是**虚拟力**，没有施力者，也没有反作用力。不满足牛顿第三定律。

(2) 惯性力的概念可推广到非平动的非惯性系。

例1： 质量分别为 m_1 和 m_2 的两物体用轻细绳相连接后，悬挂在一个固定在电梯内的定滑轮的两边。滑轮和绳的质量以及所有摩擦均不计。当电梯以 $a_0=g/2$ 的加速度下降时。

求： m_1 和 m_2 的加速度和绳中的张力。

解： 取电梯为参考系



对 m_1 有 $m_1 g - T - m_1 a_0 = m_1 a'$

对 m_2 有 $m_2 g - T - m_2 a_0 = -m_2 a'$

$$a' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g - a_0)$$

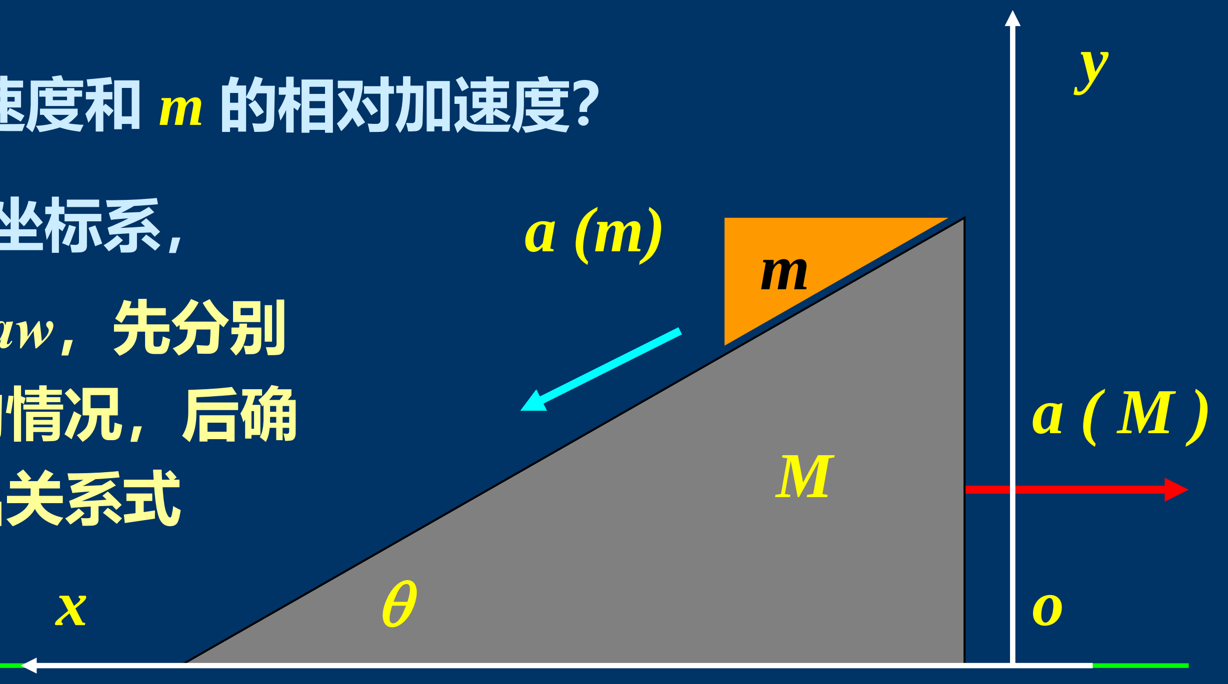
$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g - a_0)$$

$a_1 = a' + a_0$　　$a_2 = -a' + a_0$

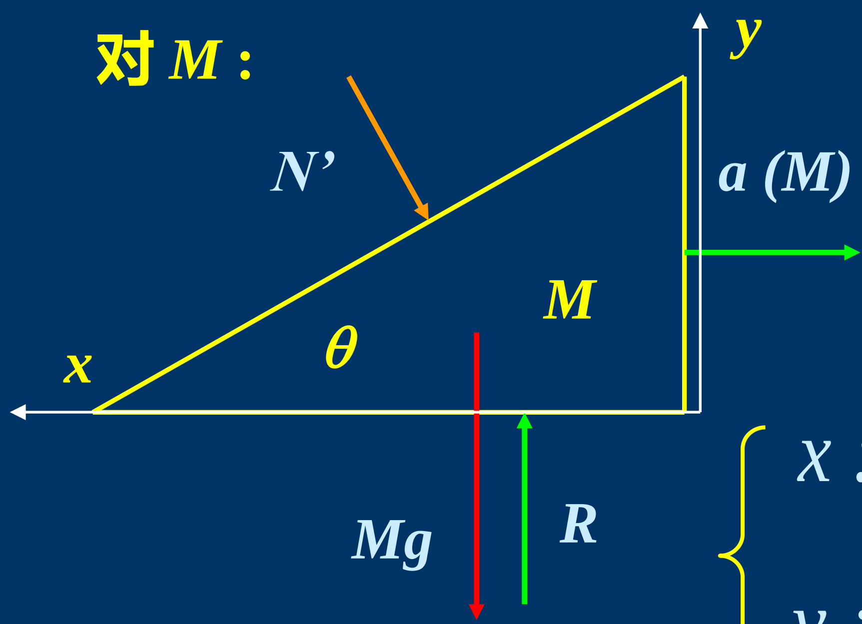
例2 试分析 M 的加速度和 m 的相对加速度?

解：由题意建立直角坐标系，

根据*Nowtnon's Law*，先分别分析两个物体的运动情况，后确定受力情况，再列出关系式



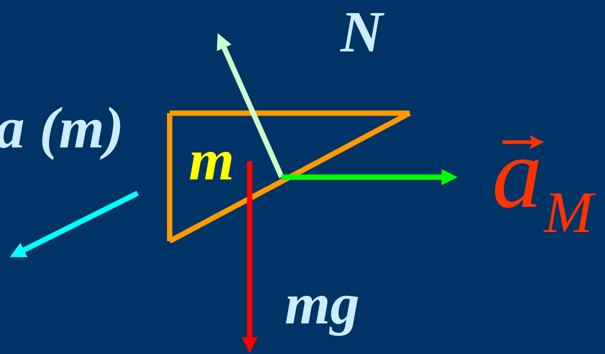
对 M：



$$\begin{cases} x: -N'\sin\theta = -Ma_M \\ y: R - Mg - N'\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x: N\sin\theta = ma_m\cos\theta - ma_M \\ y: N\cos\theta - mg = -ma_m\sin\theta \end{cases}$$

对 m：



解得：

$$\boxed{a_M = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g}$$

$$\boxed{a_m = \frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g}$$

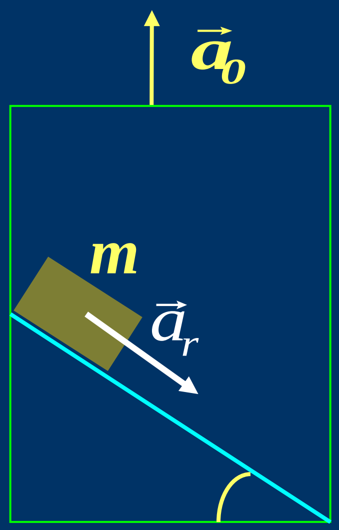
试求，正压力 $N = ?$

Caution：矢量分解简化运算；物理量相对参照系要统一

例3： 一光滑斜面固定在升降机的底板上，如图所示，当升降机以匀加速度a_0上升时，质量为m 的物体从斜面顶端开始下滑。

求： 物体对斜面的压力和物体相对斜面的加速度。

解： 方法(一)　取地面为参考系



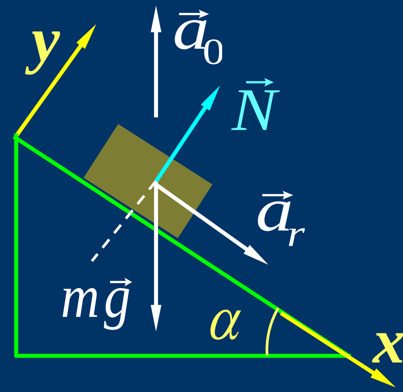
设物体的加速度为 $\vec{a}$　　$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_0$

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_0)$$

x 方向　$mg\sin\alpha = m(a_r - a_0\sin\alpha)$

y 方向　$N - mg\cos\alpha = ma_0\cos\alpha$

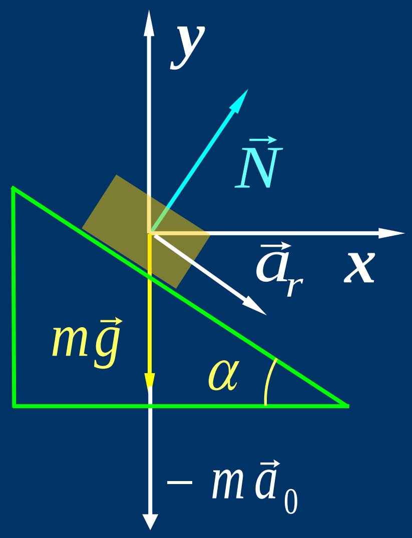
$$\begin{cases} N = m(g + a_0)\cos\alpha \\ a_r = (g + a_0)\sin\alpha \end{cases}$$



方法(二)　取升降机为参考系

惯性力 $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_0 = m\vec{a}_r$$



x 方向 $N\sin\alpha = ma_r\cos\alpha$

y 方向 $N\cos\alpha - mg - ma_0 = -ma_r\cos\alpha$

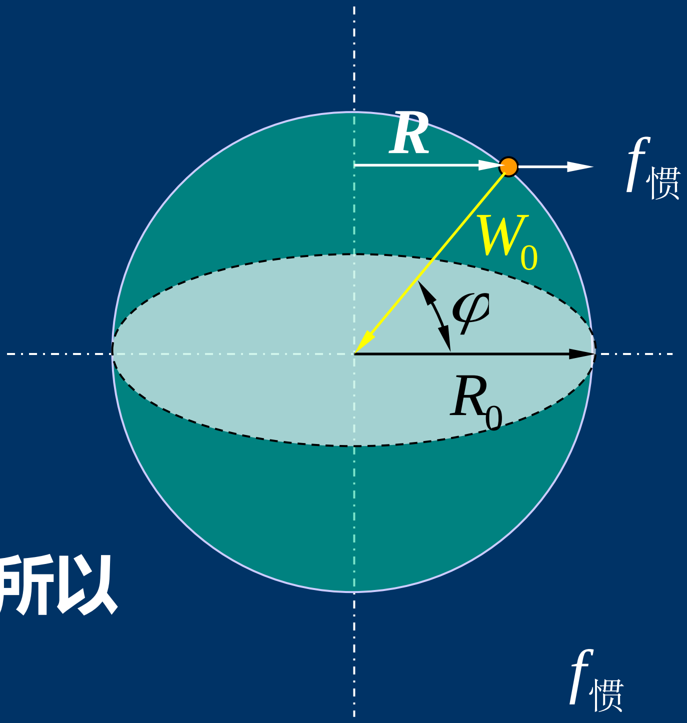
$$\begin{cases} N = m(g+a_0)\cos\alpha \\ a_r = (g+a_0)\sin\alpha \end{cases}$$

例4：重力和纬度关系

解：物体的重量是用它作用于支撑物上的力来衡量的.

$$\vec{W}_{\varphi}=\vec{W}_{0}+\vec{f}_{惯}$$

$$f_{惯}=mR\omega^{2}=m(R_{0}\cos\varphi)\omega^{2}$$



由于 $\cos\varphi\le 1\quad W_{0}>>f_{惯}$

W_0**与** W_{φ}**的大小和方向都相差不多, 所以**

$$W_{\varphi}\approx W_{0}-f_{惯}\cos\varphi$$

$$=G\frac{Mm}{R^{2}}(1-0.0035\cos^{2}\varphi)$$