# 第四次习题课参考解答

**习题** 1. $A$ 是 $3\times 4$ 矩阵，$s=(2,3,1,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的唯一特殊解（special solution）.

1. 求 $\mathrm{rank}(A)$ 并找出 $Ax=0$ 的全部解.
2. 求 $\mathrm{rref}(A)$.
3. $Ax=b$ 对任意 $b$ 都有解吗?

**参考解答**

1. $\mathrm{rank}(A)=3$, 全部解为 $k(2,3,1,0)^T$.

2. $rref(A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ & & & 1\end{bmatrix}$.

3. 都有解. 因为 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}([A \quad b])=3$.

**习题** 2. $Ax=b$ 和 $Cx=b$，对任意 $b$ 都有相同的解集. $A=C$ 成立吗？

**参考解答**

对任意 $x_0$, 取 $b=Ax_0$, 则 $x_0$ 也是 $Cx=b$ 的解. 则 $Cx_0=b=Ax_0$, $(C-A)x_0=0$ 对任意 $x_0$ 都成立. 所以 $A=C$.

**习题** 3. 假设 $x_1,\ldots,x_p$ 是 $Ax=b$ 的解，且 $b$ 非零。证明：$k_1x_1+\cdots+k_px_p$ 也是解当且仅当 $k_1+\cdots+k_p=1$。

**参考解答**

直接代入计算即得.

**习题** 4. $A$ 是 10 阶方阵，$A^2=0$。则 $\mathrm{rank}(A)\le 5$。

**参考解答**

法 1:

证明. 即证 $\dim N(A)\geqslant 5$. 用反证法. 设 $\dim N(A)\le 5$.

则不妨设 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 是 $N(A)$ 的一组基, 将其扩充为 $\mathbb{R}^{10}$ 的一组基 $x_1,\cdots,x_4,x_5,\cdots,x_{10}$.

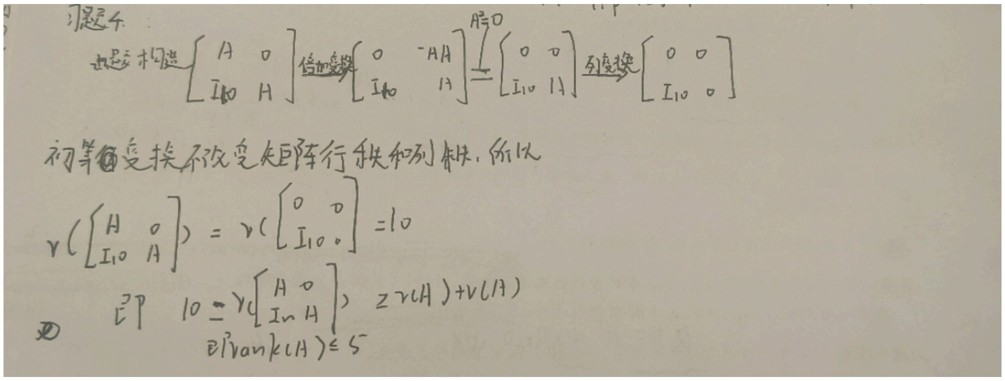
由 $A(Ax_i)=A^2x_i=0$, 则 $Ax_i\in N(A), i=5,\cdots,10$.

为证 $Ax_i$ 线性无关, 令 $\sum\limits_{i=5}^{10}k_iAx_i=0$.

则 $A\left(\sum\limits_{i=5}^{10}k_ix_i\right)=0$, 则 $\sum\limits_{i=5}^{10}k_ix_i\in N(A)$, 可以被 $N(A)$ 的基线性表示, 有 $\sum\limits_{i=5}^{10}k_ix_i=\sum\limits_{i=1}^{4}l_ix_i$.

由 $x_1,\cdots,x_{10}$ 线性无关, 可知 $k_i,l_i$ 均等于 0. 从而 $Ax_i, i=5,\cdots,10$ 线性无关, 与 $\dim N(A)\le 5$ 矛盾!

从而 $\dim N(A)\geqslant 5$, 即 $\mathrm{rank}(A)\le 5$. □




法 2:

陈俊杰同学提供了一种巧妙的解答 (上图), 欢迎同学们在习题课上提出自己的解答。

**习题** 5. 设 $V$ 为向量空间, $a_1,\dots,a_n$ 为 $V$ 中线性无关的向量, 证明当且仅当 $n$ 为奇数时, $a_1+a_2,a_2+a_3,\dots,a_{n-1}+a_n,a_n+a_1$ 时线性无关。

**参考解答**

证明. $n=1,2$ 时显然成立. 下设 $n\geqslant 3$.

令 $k_1(a_1+a_2)+k_2(a_2+a_3)+\cdots+k_n(a_n+a_1)=0$. 即 $(k_1+k_n)a_1+(k_1+k_2)a_2+\cdots+(k_{n-1}+k_n)a_n=0$.

由 $a_1,\dots,a_n$ 线性无关, 可得 $k_1+k_n=0,k_1+k_2=0,\cdots,k_{n-1}+k_n=0$. 即 $\begin{bmatrix}1 & & & 1\\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}=0.$

初等行变换可化为 $\begin{bmatrix}1 & & & & 1\\ & 1 & & & -1\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & (-1)^{n-2}\\ & & & & 1-(-1)^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}=0$

$n$ 为奇数时, 矩阵满秩, 方程组只有零解, $k_1,\cdots,k_n$ 全为零, $a_1+a_2,a_2+a_3,\dots,a_n+a_1$ 线性无关.

$n$ 为偶数时, 矩阵不满秩, 方程组有非零解, $k_1,\cdots,k_n$ 不全为零, $a_1+a_2,a_2+a_3,\dots,a_n+a_1$ 线性相关.

□

**习题** 6 (较难). 设 $A$ 是可逆实反对称矩阵, $b\in\mathbb{R}^n$。证明下列等式成立。

1. $\operatorname{rank}(A+bb^T)=n$。
2. $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{bmatrix}=n$。

**参考解答**

引理. $A$ 为反对称矩阵, 即 $A^T=-A \iff$ 对任意 $x$, 有 $x^TAx=0$.

充分性. 注意到 $x^TAx$ 是一个数, 有 $x^TAx=(x^TAx)^T=x^TA^Tx=-x^TAx$. 所以 $x^TAx=0$.

必要性. 取 $x=e_i$, 可得 $e_i^TAe_i=a_{ii}=0$. 取 $x=e_i$, 可得 $(e_i+e_j)^TA(e_i+e_j)=a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=a_{ij}+a_{ji}=0$. 即 $A^T=-A$.

□

证明.

1. 考虑方程 $(A+bb^T)x=0$。则 $x^T(A+bb^T)x=0$。但 $x^TAx=0$，因此 $(b^Tx)^2=0$，即 $b^Tx=0$，于是 $Ax=0$。而 $A$ 可逆，故 $x=0$，因此 $A+bb^T$ 可逆。
2. 利用初等行列变换，$\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 可以化成 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -b^TA^{-1}b \end{bmatrix}$。$A$ 反对称，则 $A^{-1}$ 反对称，得 $b^TA^{-1}b=0$。因此原矩阵的秩和 $A$ 相同。

$\square$

**习题** 7 (练习 2.3.11). 设 $A,B,C$ 分别为 $m\times n, n\times k, k\times s$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\leqslant \operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)$$

提示: 构造合适的分块上三角矩阵.

**参考解答**

$\begin{bmatrix} & B \\ ABC & \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} BC & B \\ ABC & \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} BC & B \\ & -AB \end{bmatrix}$. 故 $\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(\begin{bmatrix} & B \\ ABC & \end{bmatrix})=\operatorname{rank}(\begin{bmatrix} BC & B \\ & -AB \end{bmatrix})\geqslant \operatorname{rank}(-AB)+\operatorname{rank}(BC)=\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)$.

**习题** 8 (练习 2.3.19). 对二阶方阵 $A$, 如果存在 $n>2$, 使得 $A^n=O$, 求证: $A^2=O$.

**参考解答**

参考习题 11 解答.

**习题** 9 (练习 2.4.16). (Fredholm 二择一定理) 线性方程组 $Ax=b$ 有解当且仅当 $\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ b^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解. 注意: 前一个方程组中 $x$ 为未知向量, 后一个方程组中 $y$ 为未知向量.

**参考解答**

$\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$ 无解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix})<\operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ b^T & 1 \end{bmatrix}) \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix})+1=\operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A^T & \mathbf{0} \\ b^T & 1 \end{bmatrix})$

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix})+1=\operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A & b \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix})=\operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A \\ \mathbf{0} \end{bmatrix})+1 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix})=\operatorname{rank}(A) \Leftrightarrow Ax=b$ 有解.

**习题** 10 (练习 2.4.18). 设 $A,B$ 分别为 $m\times n, n\times k$ 矩阵, 证明, $\operatorname{rank}(AB)\geqslant \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-n$.

**参考解答**

在秩不等式 $\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\leqslant \operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)$ 中取三个变量分别为 $A,I_n,B$ 即得.

**习题** 11 (练习 2.4.24). 给定 $n$ 阶方阵 $A$.

1. 对任意 $k$, 证明 $\mathscr{R}(A^k)\supseteq \mathscr{R}(A^{k+1})$;
2. 假设 $\mathscr{R}(A^k)=\mathscr{R}(A^{k+1})$, 求证 $\mathscr{R}(A^{k+1})=\mathscr{R}(A^{k+2})$;
3. 求证: 存在 $k\leqslant n$, 满足 $\operatorname{rank}(A^k)=\operatorname{rank}(A^{k+1})=\cdots$. 由此证明, 如果存在 $p$ 使得 $A^p=O$, 则 $A^n=O$.

**参考解答**

证明.

1. 对任意 $y \in \mathscr{R}(A^{k+1})$, 能找到 $x$, 使得 $y = A^{k+1}x = A^k(Ax)$, 从而 $y \in \mathscr{R}(A^k)$, 即 $\mathscr{R}(A^k) \supseteq \mathscr{R}(A^{k+1})$.

2. 对任意 $y \in \mathscr{R}(A^{k+1})$, 能找到 $x$, 使得 $y = A^{k+1}x = A(A^k x)$. 由 $\mathscr{R}(A^k) = \mathscr{R}(A^{k+1})$, 则可以找到 $z$, 满足 $A^k x = A^{k+1}z$. 则 $y = A(A^{k+1}z) = A^{k+2}z \in \mathscr{R}(A^{k+2})$, 即 $\mathscr{R}(A^{k+1}) \subseteq \mathscr{R}(A^{k+2})$. 由 1 知 $\mathscr{R}(A^{k+1}) \supseteq \mathscr{R}(A^{k+2})$, 从而 $\mathscr{R}(A^{k+1}) = \mathscr{R}(A^{k+2})$.

3. 若 $A$ 可逆, 则有 $n = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2) = \cdots$. 此时 $k = 1$.

若 $A$ 不可逆. 由 1 知 $\operatorname{rank}(A^k) \geqslant \operatorname{rank}(A^{k+1})$. 若对某个 k 有 $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1})$, 由 2 可知 $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}) = \operatorname{rank}(A^{k+2}) = \cdots$. 否则, 设对所有 k 都有 $\operatorname{rank}(A^k) > \operatorname{rank}(A^{k+1})$, 必存在一个最小正整数 $p$, 使得 $\operatorname{rank}(A^p) = \operatorname{rank}(A^{p+1}) = \cdots = 0$. 由 $n > \operatorname{rank}(A) > \cdots > \operatorname{rank}(A^p) = 0$ 知 $p \leqslant n$.

□