习题课

董荣
数学与统计学院

方阵A为实对称矩阵不等价于$(\bar{A})^T = A$

例：$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

习题6.2(A)4 已知3阶矩阵A与B相似，A的特征值为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，则行列式$\left|B^{-1}-I\right|=?$

解: A与B相似，故B的特征值也为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，则B^{-1}的特征值为$2, 3, 4$

现在来看$B^{-1}-I$的特征值，其特征方程为

$$\left|\lambda I-\left(B^{-1}-I\right)\right|=0$$

$$\left|(\lambda+1)I-B^{-1}\right|=0$$

显然有当$\lambda+1=2,3,4$时，上述等式成立，故$B^{-1}-I$的特征值为$1,2,3$

因此$\left|B^{-1}-I\right|=1\times2\times3=6$

由此题可得结论： 若λ是A的特征值，则$\lambda+k$是$A+kI$的特征值.

$$|\lambda I-A|=|(\lambda+k)I-(A+kI)|=0$$

例： 设$\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, a_1 \neq 0, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$

(1) 证明$\lambda = 0$是$\boldsymbol{A}$的$n-1$重特征值

(2) 求$\boldsymbol{A}$的非零特征值及n个线性无关的特征向量

证: (1)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_n - \frac{a_n}{a_1} r_1]{r_2 - \frac{a_2}{a_1} r_1 \\ \vdots} \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -\frac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1 + \frac{a_n}{a_1} c_n]{c_1 + \frac{a_2}{a_1} c_2 \\ \vdots} \begin{vmatrix} \lambda - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2)(\lambda)^{n-1}$$

则$\lambda = 0$是$\boldsymbol{A}$的$n-1$重特征值

例： 设$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T, a_1\neq 0, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$

(1) 证明$\lambda=0$是$\boldsymbol{A}$的$n-1$重特征值

(2) 求$\boldsymbol{A}$的非零特征值及n个线性无关的特征向量

证： (2) $\boldsymbol{A}$的非零特征值为$a_1^2+\cdots+a_n^2$，当$\lambda=0$时，

$$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & -a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & -a_n^2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},\quad \rightarrow a_1x_1=-a_2x_2-\cdots-a_nx_n$$

得特征向量$\boldsymbol{\xi}_i=\left(-\frac{a_{i+1}}{a_1},0,\cdots,0,1,0,\cdots,0\right)^T\quad(i=1,\cdots,n-1)$

例： 设$\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, a_1 \neq 0, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$

(1) 证明$\lambda = 0$是$\boldsymbol{A}$的$n-1$重特征值

(2) 求$\boldsymbol{A}$的非零特征值及n个线性无关的特征向量

证： (2) 当$\lambda = a_1^2 + \cdots + a_n^2$时，

$$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & -a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & -a_n^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda - a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -\dfrac{a_2}{a_1}\lambda & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_n}{a_1}\lambda & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} a_2^2 + \cdots + a_n^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -\dfrac{a_2}{a_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_n}{a_1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{a_2}{a_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{a_n}{a_1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1} x_1 = x_2 \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{a_n}{a_1} x_1 = x_n \end{cases}$$

得特征向量$\boldsymbol{\xi}_n = \left(1, \dfrac{a_2}{a_1}, \cdots, \dfrac{a_n}{a_1}\right)^T$

•如果A与一个对角矩阵相似,即$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,则称$A$**可对角化**.

方阵A可对角化的条件

n阶方阵A可对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

如果n阶矩阵A有n个不同的特征值，则矩阵A可对角化.

n阶矩阵A可对角化$\Leftrightarrow$ A的每个特征值的几何重数等于代数重数

$\Leftrightarrow$ A的每个重特征值的几何重数等于代数重数

如果方阵A可对角化, 那么如何将其对角化呢?

① 求出A的所有特征值： $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

② 求出每个特征值的线性无关的特征向量，从而得到A的n个线性无关的特征向量：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

③ 令 $P=[\,\xi_1\quad \xi_2\quad \ldots\quad \xi_n\,]$，则有 $P^{-1}AP=D=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

注意： P 中向量$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$的顺序要与$D$中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$的顺序一致，即 ξ_i是对应于 λ_i的特征向量($i=1,2,\ldots,n$)。

例 常数a,b满足什么条件时,$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化?在可对角化时,求可逆矩阵$P$,

使得$P^{-1}AP$成为对角矩阵,并求A^n

解 由A的特征方程$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-a&\lambda-1&-b\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$

得A得全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$

A可对角化$\Leftrightarrow$ A的属于$\lambda=1$的线性无关的特征向量有2个

$\Leftrightarrow$方程组$(I-A)x=0$的基础解系含有2个向量.

$\Leftrightarrow 3-r(I-A)=2$

$\Leftrightarrow r(I-A)=1$

例 常数a,b满足什么条件时，$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化？在可对角化时，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$成为对角矩阵，并求$A^n$

$$r(I-A)=1$$

$$I-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-a&0&-b\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&a+b\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$I-A$的秩为$1 \Leftrightarrow a+b=0$

故A可对角化$\Leftrightarrow a+b=0$

例 常数a,b满足什么条件时，$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化？在可对角化时，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$成为对角矩阵，并求$A^n$

当$a+b=0$时，下面来求化A为对角矩阵的矩阵P.

此时$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&-a\\1&0&0\end{bmatrix}$

对于特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$，解方程组$(I-A)x=0$，由

$$I-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-a&0&a\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

例 常数a,b满足什么条件时，$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化？在可对角化时，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$成为对角矩阵，并求$A^n$

对于特征值$\lambda_3=$-1，解方程组$(-I-A)x=0$

$$-I-A=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-a&-2&a\\-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{bmatrix}-1\\a\\1\end{bmatrix}$$

故令$P=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&a\\0&1&1\end{bmatrix}$，则有：$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}\overset{\text{记为}}{=\!=}D$

例 常数a,b满足什么条件时，$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&1&b\\1&0&0\end{bmatrix}$可对角化？在可对角化时，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$成为对角矩阵，并求$A^n$

下面求A^n：由上式可得$A=PDP^{-1}$ ⇒

$$A^n=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})$$
$$=PD(P^{-1}P)D\cdots(P^{-1}P)DP^{-1}$$
$$=PD^nP^{-1}$$

因$D^n=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&(-1)^n\end{bmatrix}$

故当$n=2k$时，$D^n=I\Rightarrow A^n=PIP^{-1}=I$

$n=2k+1$时，$A^n=A^{2k+1}=A^{2k}A=IA=A$

例 判断$A=\begin{bmatrix}4&2&-5\\6&4&-9\\5&3&-7\end{bmatrix}$是否相似于对角矩阵？

解: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&5\\-6&\lambda-4&9\\-5&-3&\lambda+7\end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1$

对于$\lambda_1=\lambda_2=0,\quad 0I-A\to\begin{bmatrix}1&2&-5\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$　　所以$r(0I\text{-}A)=2$

故属于$\lambda_1=\lambda_2=0$的线性无关的特征向量只有一个,故A不能对角化.

性质6.1.2 设λ为方阵A的一个特征值,则:

(1) 对任何正整数m, λ^m为方阵A^m的一个特征值

(2) 对任何多项式$f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$, $f(\lambda)$为矩阵$f(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 I$的一个特征值.

例: 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$, 证明:$\boldsymbol{A}$相似于一个对角阵.

证: 设$\boldsymbol{A}$的特征值为λ, 由$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$知$\lambda^2-3\lambda+2=0$

$\boldsymbol{O}$的特征值都是0

故$\boldsymbol{A}$有特征值1,2

再求$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$和$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的基础解系中的向量个数:

若$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$, 则有$r(\boldsymbol{B})+r(\boldsymbol{C})\leq n$

因为$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$

而 $n=r(\boldsymbol{I})=r\big((2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\big)\leq r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\leq n$

故有 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$ 则$n-r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+n-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=n$

所以$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量, 故$\boldsymbol{A}$可对角化.

定理6.2.3 设A为n阶实对称矩阵，则必存在n阶正交矩阵P，使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$为对角矩阵.

$P^T P = PP^T = I$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的全部特征值；

矩阵P的列向量组为A的n个标准正交的特征向量.

推论6.2.3 实对称矩阵每个特征值的几何重数等于其代数重数.

利用正交矩阵将对称矩阵对角化的方法：

1. **求出A的所有特征值;**
2. 求出A的n个线性无关的特征向量;
3. 将特征向量正交化;
4. 将特征向量单位化，组成P，则有

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$为对角矩阵.

例 已知$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&3\end{bmatrix}$与$D=\begin{bmatrix}5&&\\&b&\\&&-1\end{bmatrix}$相似,

(1)求a,b的值;

(2)求正交矩阵P使得$P^{-1}AP=D$.

性质6.1.1

(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$;

(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$
$=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

解 (1)A的特征值为$5,b,-1$,由特征值的性质6.1.1,得

$$\begin{cases}5+b+(-1)=0+0+3\\5\times b\times(-1)=|A|=4a-3\end{cases}\Rightarrow a=2,b=-1$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&2\\2&2&3\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$$

例 已知$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&3\end{bmatrix}$与$D=\begin{bmatrix}5&&\\&b&\\&&-1\end{bmatrix}$相似,

(1)求a,b的值;

(2)求正交矩阵P使得$P^{-1}AP=D$.

解 (2)对于$\lambda_1=5$,由$5I-A\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$

对于$\lambda_2=\lambda_3=-1$,由$-I-A\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, ξ_1,ξ_2,ξ_3已经正交

令$P=\begin{bmatrix}\dfrac{\xi_1}{\|\xi_1\|}&\dfrac{\xi_2}{\|\xi_2\|}&\dfrac{\xi_3}{\|\xi_3\|}\end{bmatrix}$,则有$P^{-1}AP=P^TAP=D$

例： 设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha_1}=(1,2,2)^T,\boldsymbol{\alpha_2}=(2,1,-2)^T$，求$\boldsymbol{A}$

证： 属于实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的不同特征值的特征向量必相互正交，因此属于$\lambda_3=0$的特征向量$\boldsymbol{\alpha_3}=[x_1,x_2,x_3]^T$必和$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$正交

于是有

$$\begin{cases} x_1+2\,x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

可得一个解$\boldsymbol{\alpha_3}=[2,-2,1]^T$

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}],\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以$\boldsymbol{P^{-1}}\ \boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$

则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP^{-1}}$

第五章习题：

例： 设A,B为n阶正交矩阵，且$|A| \neq |B|$，证明$A+B$为不可逆矩阵。

证： 因为A,B为正交矩阵，所以$AA^T = BB^T = I$，且$|A| = \pm 1, |B| = \pm 1$，

由于$|A| \neq |B|$，所以$|A| = -|B|$。

故有
$$
\begin{aligned}
|A+B| &= \left|AA^T\right||A+B|\left|B^TB\right| \\
&= |A|\left|A^T\right||A+B|\left|B^T\right||B| \\
&= -\left|A^T(A+B)B^T\right| \\
&= -\left|B^T + A^T\right| \\
&= -|A+B|
\end{aligned}
$$

由上式得$2|A+B| = 0$，即 $|A+B| = 0$,
从而$A+B$为不可逆矩阵。

第5章习题1 设实方阵$A=(a_{ij})_{3\times3}$满足$A^T=A^*, a_{11}=-1$,向量$b=(1,0,0)^T$,则线性方程组$Ax=b$的解为?

解 $AA^*=|A|I$,由$A^T=A^*$可得$AA^T=|A|I$

两端取行列式,可得$|A|^2=|A|^3 \Rightarrow |A|=0$或$|A|=1$

另一方面,由$A^T=A^*$可得$a_{ij}=A_{ij}$

$|A|$从第一行展开,有$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2$

$|A|$从第一列展开,有$|A|=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2$

因为$a_{11}=-1$,故$|A|=1$,且$a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{31}=0$

$$Ax=b\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x_1=1\\a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\\a_{32}x_2+a_{33}x_3=0\end{cases}$$

第5章习题1 设实方阵$A=(a_{ij})_{3\times3}$满足$A^T=A^*, a_{11}=-1$,向量$b=(1,0,0)^T$,则线性方程组$Ax=b$的解为?

解

$$Ax=b\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\\a_{32}x_2+a_{33}x_3=0\end{cases}$$

对于齐次线性方程组$\begin{cases}a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\\a_{32}x_2+a_{33}x_3=0\end{cases}\quad\cdots(\#)$,

系数行列式$\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=A_{11}=a_{11}=-1\neq0$,故方程组(#)只有零解,即$x_2=x_3=0$

$\boxed{\text{由}A^T=A^*\text{可得}a_{ij}=A_{ij}}$

因此方程组$Ax=b$的解为$(-1,0,0)^T$.

习题5.2(B)4 设$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_k$是$n$维欧式空间$V$中的标准正交向量组。
证明：对V中任何向量$\boldsymbol{\alpha}$成立不等式

$$\sum_{i=1}^{k}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i\rangle^2\le||\boldsymbol{\alpha}||^2$$

并且当且仅当$k=n$时等号成立。

证 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_k$是$n$维欧式空间$V$中的标准正交向量组，
可以扩充成V中的一组标准正交基：

$$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$$

$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\boldsymbol{\alpha}=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_n\rangle\boldsymbol{e}_n$

从而$||\boldsymbol{\alpha}||^2=\sum_{i=1}^{n}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i\rangle^2$

因此

$$\sum_{i=1}^{k}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i\rangle^2\le\sum_{i=1}^{n}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_i\rangle^2=||\boldsymbol{\alpha}||^2$$

定理5.2.3 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$n$维欧氏空间$V$的一个标准正交基，$\boldsymbol{\alpha}$是$V$中任意的向量，设

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

则

(1) $x_i=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i\rangle(i=1,\cdots,n)$，

(2) $\cdots$

(3) $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$

习题5.2(A)8： 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是欧式空间$V$中的一组向量，令行列式

$$D=\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle & \langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle\\ \langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle & \langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle & \langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle\end{vmatrix}$$

证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充要条件是行列式$D\neq 0$(称$D$为$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的格拉姆行列式)。

证 设有一组数$x_1,\cdots,x_m$，使得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}\qquad\cdots\cdots(1)$$

分别用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与(1)式两端做内积，得：

$$\begin{cases}\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle x_1+\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle x_2+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle x_m=0\\ \langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle x_1+\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle x_2+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle x_m=0\\ \qquad\vdots\\ \langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle x_1+\langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2\rangle x_2+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m\rangle x_m=0\end{cases}\qquad\cdots\cdots(2)$$

若方程组(1)(2) 同解，则：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关$\Leftrightarrow$(1)只有零解$\Leftrightarrow$ (2)只有零解$\Leftrightarrow$(2)的系数行列式$D\neq 0$

显然(1)的解是(2)的解，下面需要证明(2)的解是(1)的解。

$$x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha_m}=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\begin{cases}\langle\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_1}\rangle x_1+\langle\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}\rangle x_2+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_m}\rangle x_m=0\\ \langle\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_1}\rangle x_1+\langle\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_2}\rangle x_2+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_m}\rangle x_m=0\\ \vdots\\ \langle\boldsymbol{\alpha_m},\boldsymbol{\alpha_1}\rangle x_1+\langle\boldsymbol{\alpha_m},\boldsymbol{\alpha_2}\rangle x_2+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha_m},\boldsymbol{\alpha_m}\rangle x_m=0\end{cases} \qquad \cdots\cdots(2)$$

任取(2)的解$(x_1,\cdots,x_m)^T$，则有 $\sum_{j=1}^{m}\langle\boldsymbol{\alpha_i},\boldsymbol{\alpha_j}\rangle x_j=0\ (i=1,2,\cdots,m)\Rightarrow\sum_{j=1}^{m}\langle\boldsymbol{\alpha_i},x_j\boldsymbol{\alpha_j}\rangle=0$

两端同乘x_i得 $\langle x_i\boldsymbol{\alpha_i},\sum_{j=1}^{m}x_j\boldsymbol{\alpha_j}\rangle=0\ (i=1,2,\cdots,m)$

所以有 $\sum_{i=1}^{m}\langle x_i\boldsymbol{\alpha_i},\sum_{j=1}^{m}x_j\boldsymbol{\alpha_j}\rangle=0\Rightarrow\langle\sum_{i=1}^{m}x_i\boldsymbol{\alpha_i},\sum_{j=1}^{m}x_j\boldsymbol{\alpha_j}\rangle=0$

即有 $\left\|\sum_{i=1}^{m}x_i\boldsymbol{\alpha_i}\right\|^2=0$ 所以有 $\sum_{i=1}^{m}x_i\boldsymbol{\alpha_i}=\mathbf{0}$ 即(2)的解是(1)的解，得证。