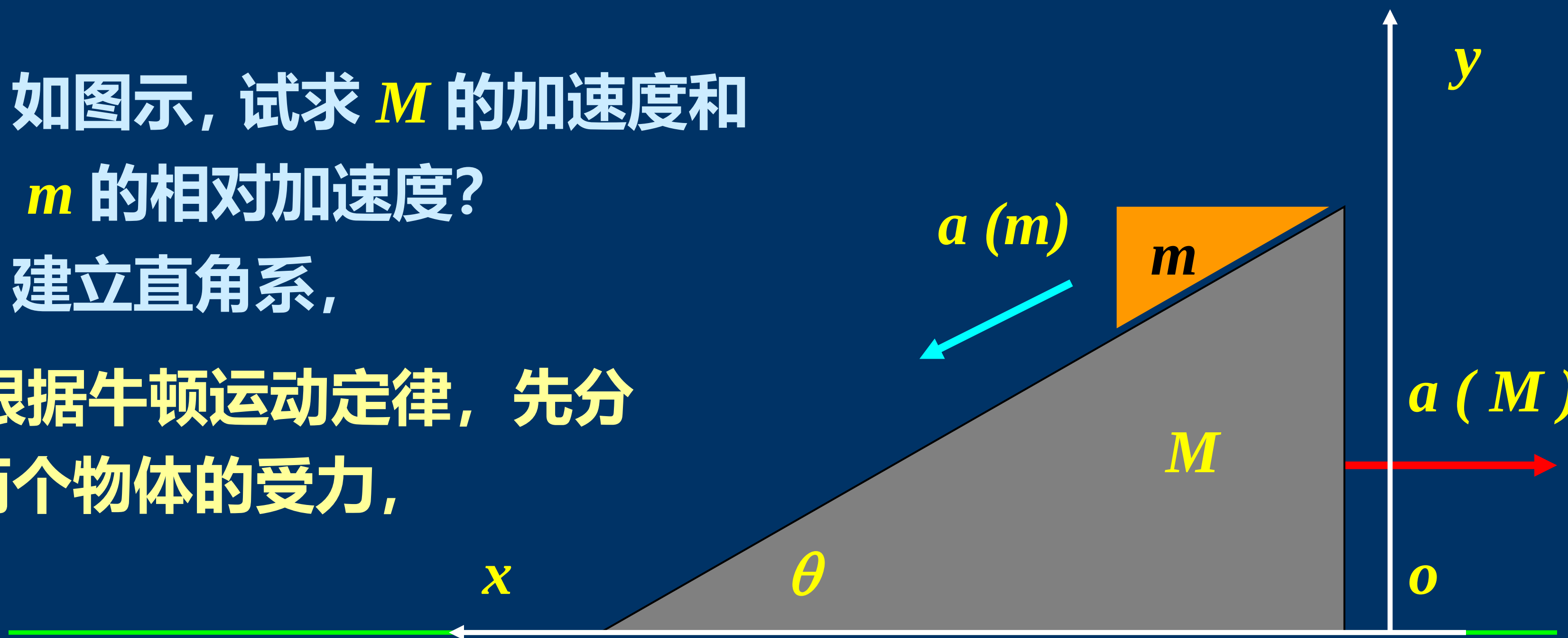
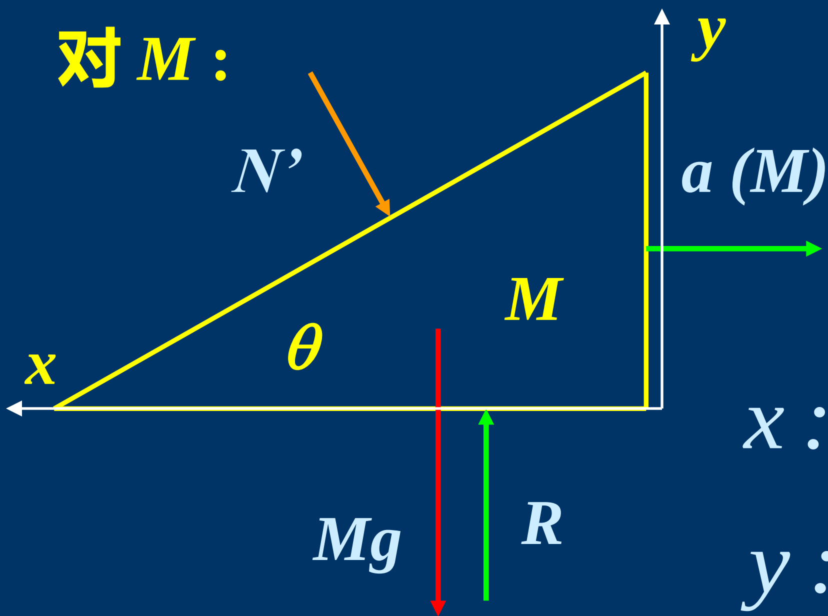
例2　如图示，试求 M 的加速度和 m 的相对加速度?

解：建立直角系，

根据牛顿运动定律，先分析两个物体的受力，



对 M：



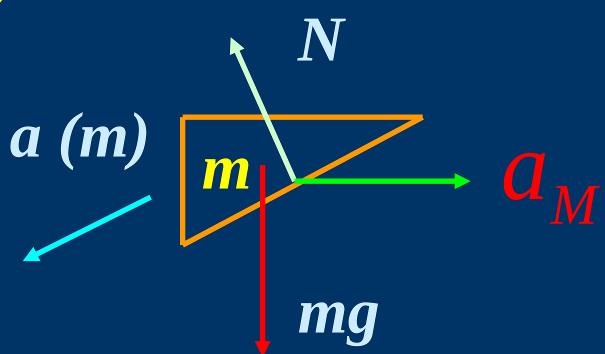
$$x: -N'\sin\theta = -Ma_M$$

$$y: R - Mg - N'\cos\theta = 0$$

$$x: N\sin\theta = ma_m\cos\theta - ma_M$$

$$y: N\cos\theta - mg = -ma_m\sin\theta$$

对 m：



$$\boxed{a_M = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g}$$

$$\boxed{a_m = \frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g}$$

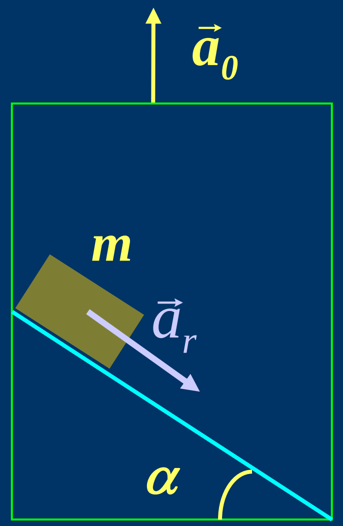
求解正压力 $N=?$

Caution：矢量分解简化运算。物理量相对参照系要统一。

例3 一光滑斜面固定在升降机的底板上，如图所示，当升降机以匀加速度a_0上升时，质量为m 的物体从斜面顶端开始下滑。

求 物体对斜面的压力和物体相对斜面的加速度。

解 方法（一）取地面为参考系

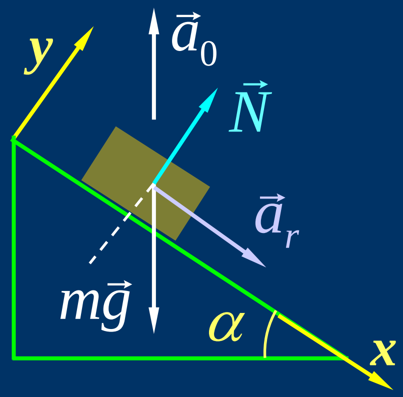


设物体的加速度为 $\vec{a}$ $\quad \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_0$

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} = m(\vec{a}_r + \vec{a}_0)$$

x 方向 $\quad mg\sin\alpha = m(a_r - a_0\sin\alpha)$

y 方向 $\quad N - mg\cos\alpha = ma_0\cos\alpha$



$$\begin{cases} N = m(g + a_0)\cos\alpha \\ a_r = (g + a_0)\sin\alpha \end{cases}$$

方法（二）取升降机为参考系

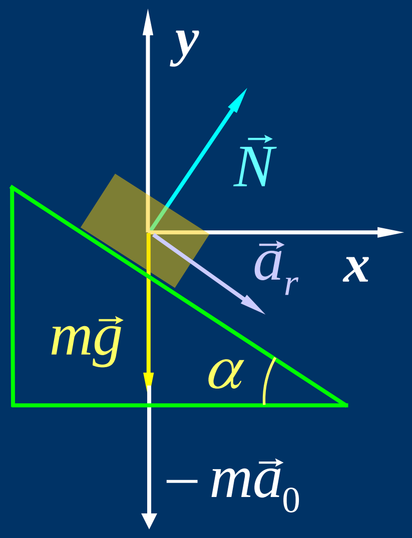
惯性力 $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$

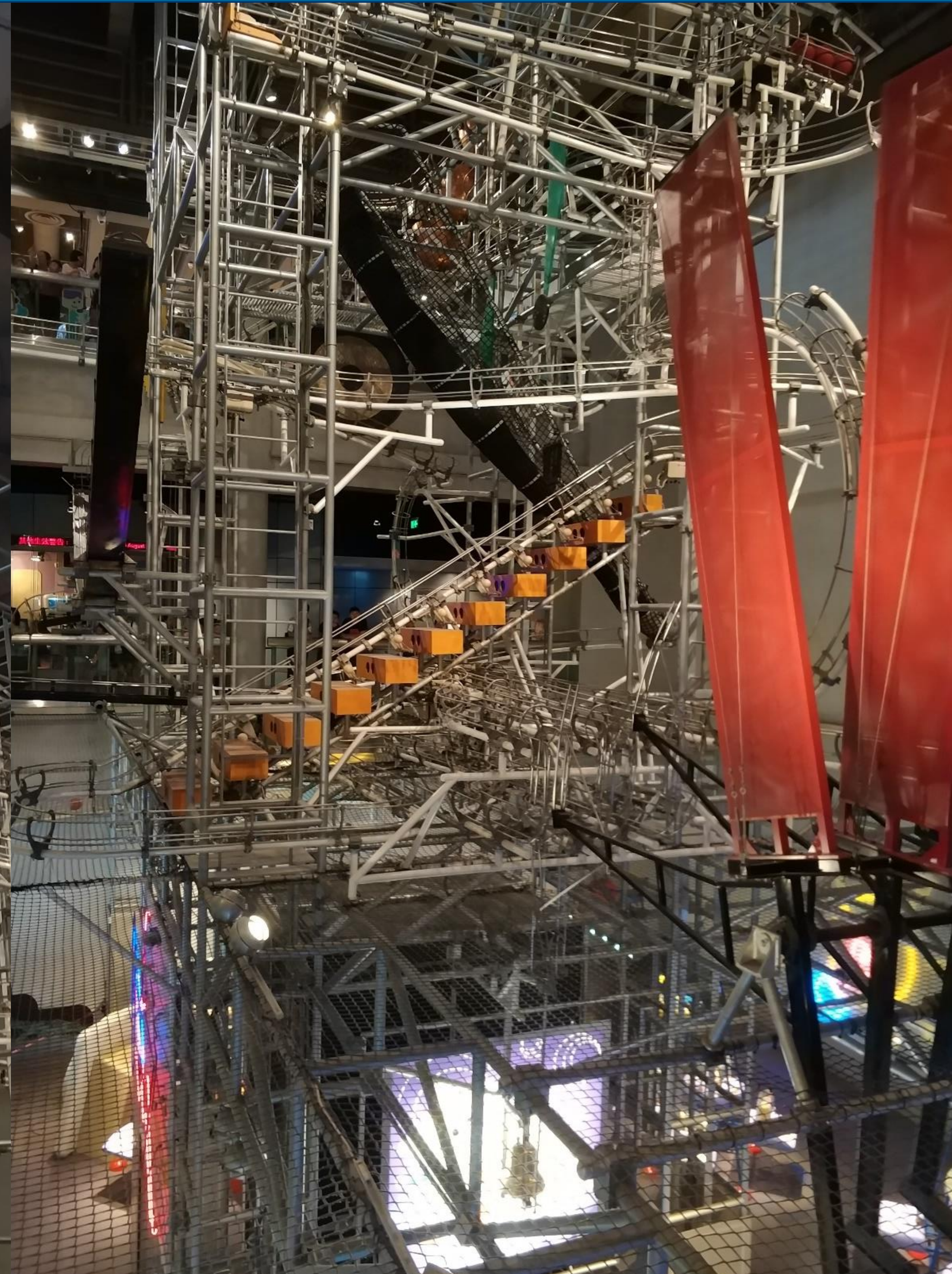
$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_0 = m\vec{a}_r$$

x 方向 $N\sin\alpha = ma_r\cos\alpha$

y 方向 $N\cos\alpha - mg - ma_0 = -ma_r\cos\alpha$

$$\begin{cases} N = m(g + a_0)\cos\alpha \\ a_r = (g + a_0)\sin\alpha \end{cases}$$





第三章 功和能 Work & Energy

经历一段空间	Force	经历一段时间
力的空间累积	$\vec{F}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$	力的时间累积
Change of Energy	物体状态变化	*Change of Momentum*

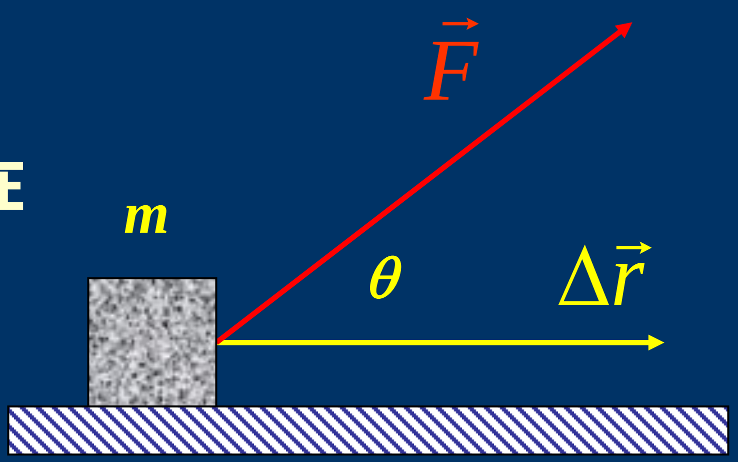
- 力作用于物体 ⇒ 位移（空间变化）⇒ *Work* ⇒ 能量变化

3.1 功 功率（*Work and Power*）

- 功的概念 恒力的功

定义：作用在运动质点上的恒力 $\vec{F}$，在力的作用点位移 $\Delta\vec{r}$ 上所作的功 A

$$\boxed{A = F\Delta r\cos\theta}$$



• 变力的功及其计算★

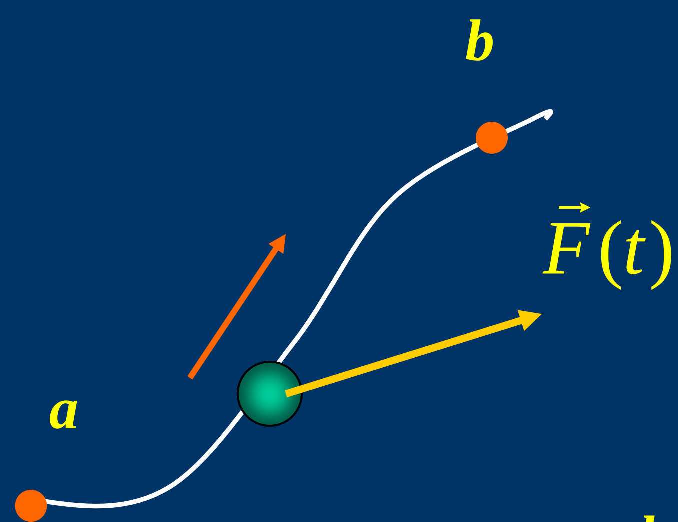
问题：物体受变力 F 的作用，从 a 点移动到 b 点，变化的力所作的功?

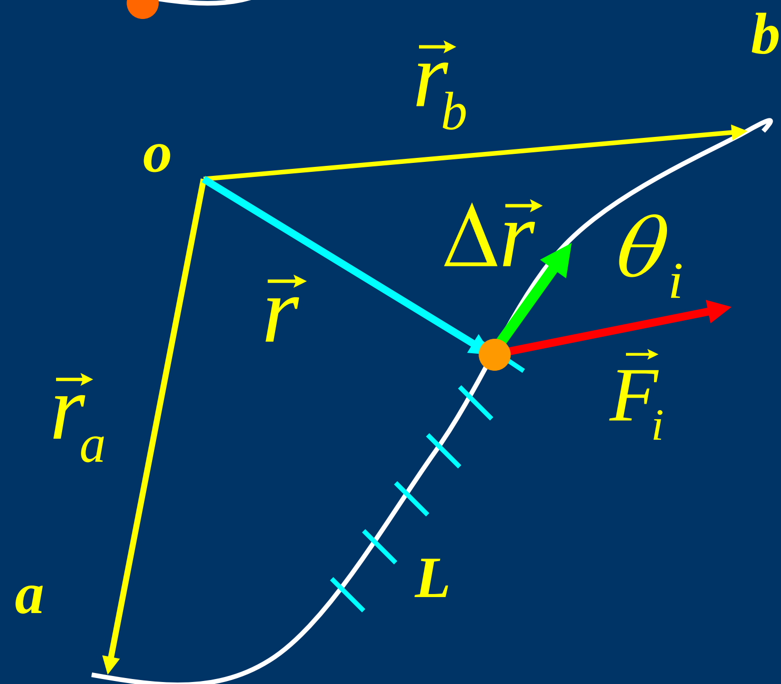
思路：将 ab 分割成若干微小位移 $\longrightarrow$ 每段微小位移上，变力 $\vec{F}_i$ 大小均可近似为恒力 $\longrightarrow$ 用恒力功的公式求解元功

$$\Delta A_i = F_i \Delta r_i \cos\theta_i$$

$$dA = F\left|d\vec{r}\right|\cos\theta = F ds\cos\theta$$

$$= \vec{F}\cdot d\vec{r}$$





• 变力对物体所作的功为

$$\boxed{A = \int_L dA = \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

$$n \to \infty, \Delta s_i = \left|\Delta\vec{r}_i\right| \to 0$$

$\vec{F}$ 在ab一段上的功 $\boxed{A=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$ **力与质点元位移标积的线积分**

在直角坐标系中

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$$

$$A=\int_{a(L)}^{b}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$$

在自然坐标系中 $\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\mathrm{d}s \Longrightarrow \boxed{A=\int_{a(L)}^{b}F\cos\theta\mathrm{d}s}$

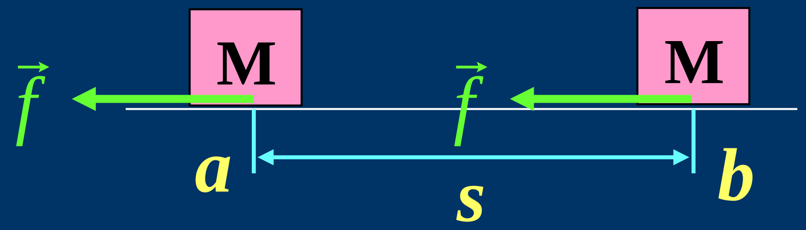
说明

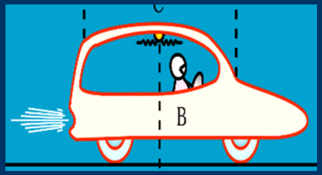
(1) 功是标量，且有正负

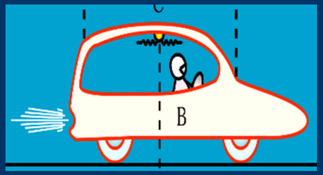
(2) 功是过程量。一般来说，功的值与质点运动的路径有关。

功是过程的函数

(3) 功的计算与参考系的选取有关, 或功的计算依赖于参考系的选取







(4) 合力的功等于各分力的功的代数和

$$A=\int_{a(L)}^{b}\vec F\cdot \mathrm{d}\vec r=\int_{a(L)}^{b}(\vec F_1+\vec F_2+\cdots+\vec F_\mathrm{n})\cdot \mathrm{d}\vec r$$

$$=\int_{a(L)}^{b}\vec F_1\cdot \mathrm{d}\vec r+\int_{a(L)}^{b}\vec F_2\cdot \mathrm{d}\vec r+\cdots+\int_{a(L)}^{b}\vec F_n\cdot \mathrm{d}\vec r$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

(5) 内力的功

质点系内任意两质点间的相互作用的内力，总是成对出现的。

$$\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{ij}$$

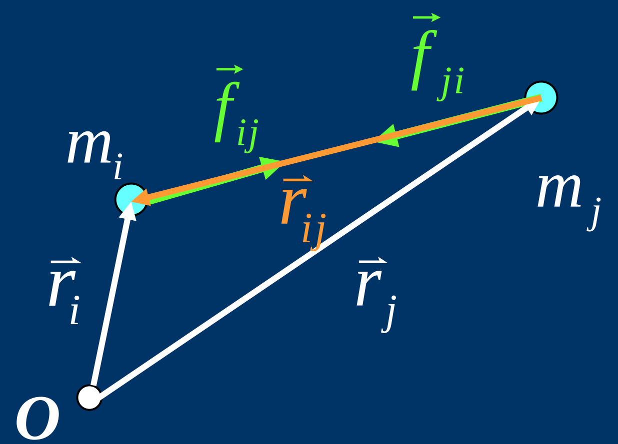
$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

$$\mathrm{d}A = \vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i + \vec{f}_{ji}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_j$$

$$= \vec{f}_{ij}\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_i - \mathrm{d}\vec{r}_j)$$

$$= \vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$= \vec{f}_{ij}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_{ij}$$



两个质点间的相互作用力所做的元功之和，等于其中一个质点所受的力和此质点相对于另一个质点的元位移的点积

由于 $\mathrm{d}\vec{r}_i$ $\mathrm{d}\vec{r}_j$ 未必相等，$\mathrm{d}\vec{r}_{ij}$ 一般不为零的。

所以一对内力的元功之和一般不为零的，一对内力做功之和一般也不为零

相对位矢及相对元位移与参照系无关， 所以一对内力做功之和也应与参照系无关。 这是任何一对作用力反作用力所做功之和的重要特点

功率 Power

力在单位时间内所作的功，称为功率。

平均功率 $\boxed{\overline{P}=\dfrac{\Delta A}{\Delta t}}$

当$\Delta t\to 0$时的瞬时功率 $P=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta A}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{P=\frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=F\upsilon\cos\theta}$$

例 已知 $m=2\mathrm{kg}$，在 $F=12t$ 作用下由静止做直线运动

求 $t=0\to 2t$ 内F作的功及$t=2s$ 时的功率。

解 $a=\dfrac{F}{m}=6t=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$ $\quad\upsilon=3t^2=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $\quad\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$

$$A=\int_0^x F\mathrm{d}x=\int_0^t F\cdot 3t^2\mathrm{d}t=\int_0^2 36t^3\mathrm{d}t=144J$$

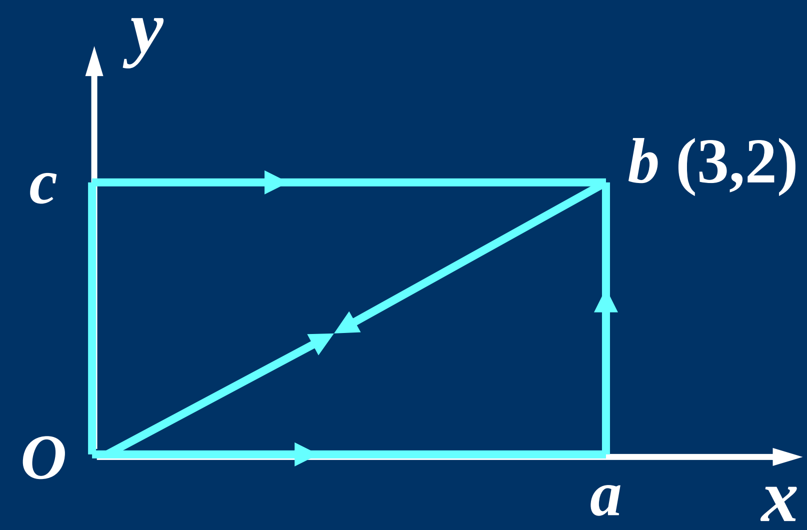
$$P=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=12t\cdot 3t^2=288W$$

例1 质点在力 $\vec{F} = 2y^2\vec{i} + 3x\vec{j}$ 作用下沿图示路径运动。(SI)制

求 $\vec{F}$ 在以下路径上的功

(1) A_{oa} (2) A_{ob}

(3) A_{ab} (4) A_{ocbo}



解 (1) oa 的方程为 $y = 0$

$$A = \int F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \qquad F_x = 2y^2 \qquad \mathrm{d}y = 0 \qquad A_{oa} = 0$$

(2) $y = \dfrac{2}{3}x \qquad \mathrm{d}y = \dfrac{2}{3}\mathrm{d}x$

$$A = \int F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y = \int_0^3 2\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)^2 \mathrm{d}x + 3x\cdot\frac{2}{3}\mathrm{d}x \qquad A_{ob} = 17$$

(3) $x = 3 \qquad \mathrm{d}x = 0 \qquad A = \displaystyle\int_0^2 9\mathrm{d}y \qquad A_{ab} = 18$

例2 质量为**10kg** 的质点，在外力作用下做平面曲线运动，该质点的速度为 $\vec{\upsilon} = 4t^2\vec{i} + 16\vec{j}$，开始时质点位于坐标原点。

求 在质点从 $y = 16\text{m}$ 到 $y = 32\text{m}$ 的过程中，外力做的功。

解

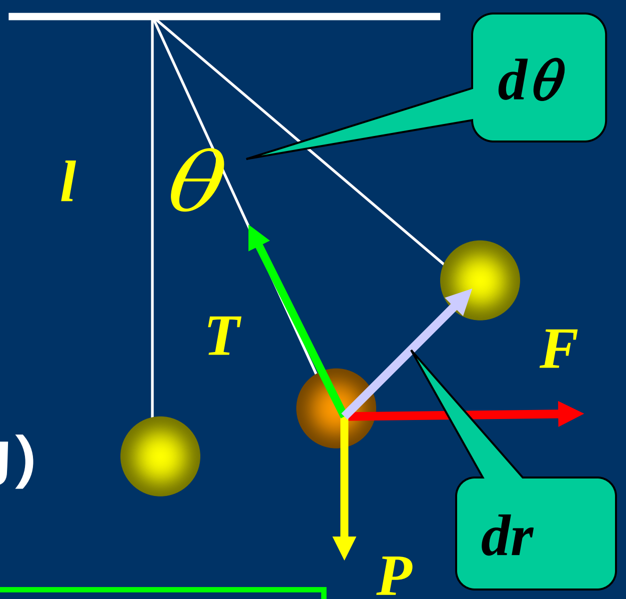
$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 4t^2\mathrm{d}t$$

$$\upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 16 \Rightarrow y = 16t \Rightarrow \begin{cases} y = 16 & t = 1 \\ y = 32 & t = 2 \end{cases}$$

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = 80t \qquad F_y = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$A = \int F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y = \int_1^2 320t^3\mathrm{d}t = 1200\ \text{J}$$

例3　重量为 P 的摆锤系在细绳下端绳长为 l，上端固定。现有一个水平力 F 从零逐渐增大，方向不变，缓慢地作用在摆锤上，一直拉到绳子与竖直方向成 θ_0 的位置。试求变力的功。



解：由题意，合力平衡（拉力、重力、张力）

水平方向：$F - T\sin\theta = 0$

竖直方向：$T\cos\theta - P = 0$

$$\boxed{F = Ptg\theta}$$

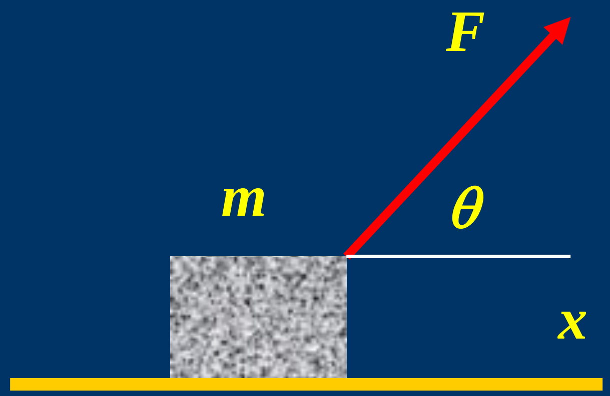
当摆锤在任意 θ 位置时，变力所作的元功 dA 为

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cos\theta ds = Ptg\theta\cos\theta ds = P\sin\theta l d\theta$$

当 $\theta = \theta_0$ 时，该变力所作的功 A 为

$$\boxed{A = \int_0^{\theta_0} Pl\sin\theta d\theta = Pl(1-\cos\theta_0)}$$

例4　光滑水平面上一质量为m 的物体从 $t=0$ 开始，物体受到力 $F=bt$ 作用，b 为常矢量，它与水平面保持成 θ 角，物体在此力作用下，沿水平面滑动一段距离后离开水平面。



分析：在沿水平面滑动过程中该力作的功?

解：　Force ⟺ 随时间变化 ⟹ 力是变力

$$A=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow A=\int_L bt\cos\theta dx\,?$$

由牛顿定律可知

$$a_x=\frac{F_x}{m}=\frac{bt\cos\theta}{m} \Rightarrow dv_x=a_x dt=\frac{bt\cos\theta}{m}dt$$

$$v_x=\int_0^t a_x dt=\int_0^t \frac{bt\cos\theta}{m}dt$$

$$v_x=\frac{b\cos\theta t^2}{2m}$$

元功: $$\boxed{dA = F_x dx = F_x v_x dt = \frac{b^2\cos^2\theta t^3}{2m}dt}$$

当$t = t_0$,物体离开水平面,

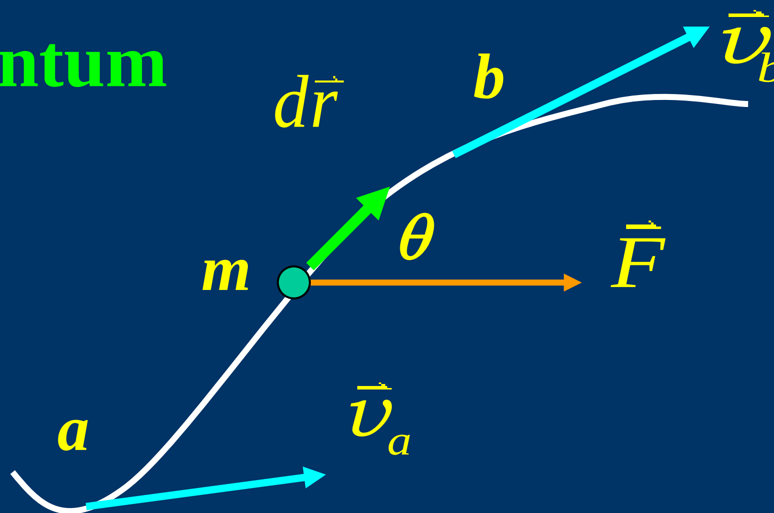
则$F_y = bt_0\sin\theta = mg$

作用力作功

$$t_0 = \frac{mg}{b\sin\theta}$$

$$\boxed{A = \int_0^{t_0}\frac{b^2\cos^2\theta t^3}{2m}dt = \frac{m^3g^4\cos^2\theta}{8b^2\sin^4\theta}}$$

3-2 动能定理 Theorem of momentum



一、质点动能定理

设质点在合力 $\vec{F}$ 作用下,从 a 点运动到 b 点, 力 $\vec{F}$ 作的元功 dA 为

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = v\,dv$$

$$dA = \frac{m d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\,\frac{mv^2}{2}$$

$$dA = dE_k$$ ——动能定理的微分形式

物体从 a 点运动到 b 点，有

$$\boxed{A = \int_a^b dA = \int_{v_a}^{v_b} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_b^{\,2} - \frac{1}{2}mv_a^{\,2}}$$

——动能定理的积分形式

说明

(1) 动能定理反映了力在空间上累计作用（功）与质点机械运动量（动能）变化之间的关系

(2) E_k 是一个状态量，A 是过程量。

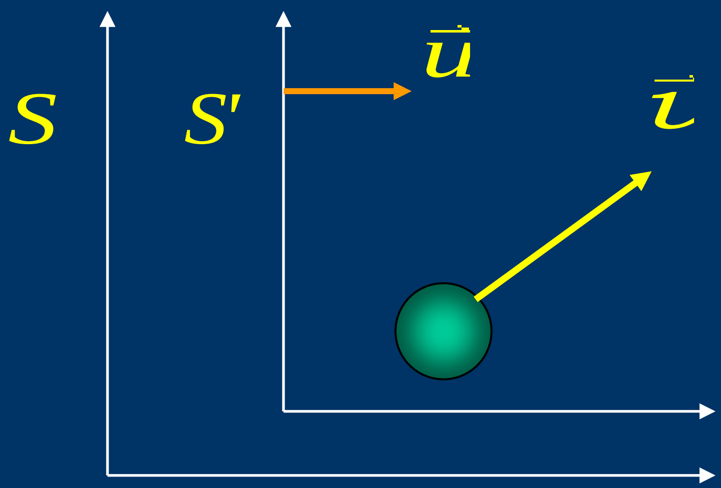
(3) 动能定理只用于惯性系。

(4) 动能与参照系选取有关

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$=\frac{1}{2}m(\vec{v}'+\vec{u})\cdot(\vec{v}'+\vec{u})$$

$$=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}m(2\vec{v}'+\vec{u})\cdot\vec{u}$$

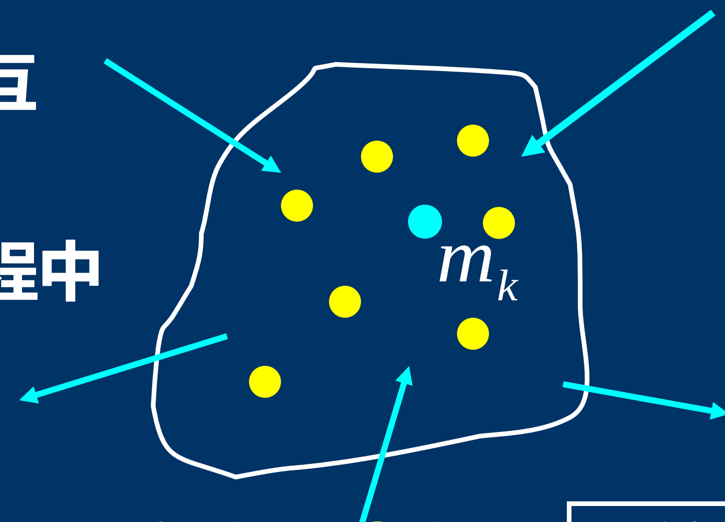


动能与参照系选取有关

二、质点系的动能定理 ★

- 对于质点系，系统和外界有相互作用，质点之间也有相互作用。

取系统中任一质点，在某一过程中



$$A_k = \frac{1}{2}m_k v_{k2}^{\ 2} - \frac{1}{2}m_k v_{k1}^{\ 2}$$

• 外力 • 内力

当考虑整个质点系后，则有

$$\sum A_k = \sum \frac{1}{2}m_k v_{k2}^{\ 2} - \sum \frac{1}{2}m_k v_{k1}^{\ 2} = E_{k2} - E_{k1}$$

系统动能

在系统的功中，有外力的功，也有系统内力的功，即

$$\boxed{\sum A_k = E_{k2} - E_{k1} = \sum A_k^{\ e} + \sum A_k^{\ i}}$$

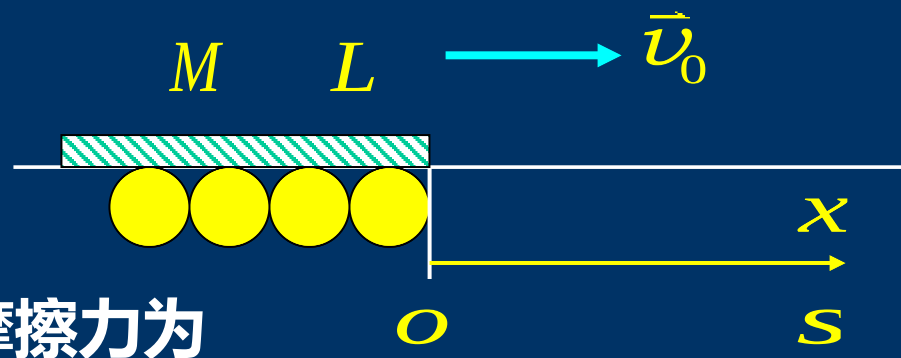
$\boxed{\sum A_k^{\ e}}$ 外力功

$\boxed{\sum A_k^{\ i}}$ 内力功

★质点系动能定理 —— 质点系统从一个状态变到另一状态，系统动能增量等于所有外力和内力对质点系作功的总和。

例1：传送机通过滑道将长L、质量为M 的匀质物体以初速度 v_0 向右送上台面，物体前端在台面上滑动 S 距离后停下来。已知滑道上摩擦可不计，物体与台面的摩擦系数为 μ，而且 $S > L$

求：物体的初速度?



解： $A_f = \int F \cdot dx = -\int_0^S \mu M g\, dx$

设物体前端到达 x 处时，摩擦力为

$$0 < x < L:\ f = \mu \frac{M}{L} g x \qquad x \geq L:\ f = \mu M g$$

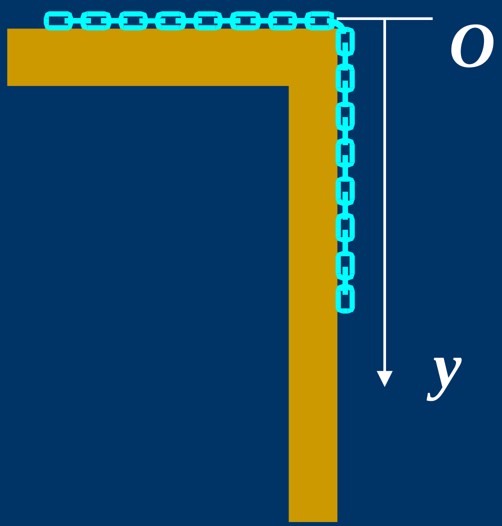
$$A_f = -\int_0^L \frac{\mu M}{L} g x\, dx - \int_L^S \mu M g\, dx = -\mu M g\left(S - \frac{L}{2}\right)$$

根据动能定理 $A_f = \Delta E_k = 0 - \frac{1}{2} M v_0^2$ ➡ $\boxed{v_0 = \sqrt{2\mu g\left(S - \frac{L}{2}\right)}}$

例2：长为l 的均质链条，部分置于水平面上，另一部分自然下垂，已知链条与水平面间静摩擦系数为μ_0，滑动摩擦系数为μ

求：(1)满足什么条件时，链条将开始滑动

(2) 若下垂部分长度为b 时，链条自静止开始滑动，当链条末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？



解：(1) 以链条的水平部分为研究对象，设链条每单位长度的质量为ρ，沿铅垂向下取Oy 轴。

设链条下落长度 $y=b_0$ 时，处于临界状态

$$\rho b_0 g - \mu_0 \rho (l - b_0) g = 0 \Longrightarrow b_0 = \frac{\mu_0}{1+\mu_0} l$$

当 $y > b_0$，拉力大于最大静摩擦力时，链条将开始滑动。

(2) 以整个链条为研究对象，链条在运动过程中各部分之间相互作用的内力的功之和为零，

重力的功 当垂下的绳子的长度为y时，此时再向下移动$\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}A = \rho y g \mathrm{d}y \qquad A = \int_b^l \rho y g \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\rho g(l^2 - b^2)$$

摩擦力的功

$$\mathrm{d}A' = -\mu\rho(l - y)g\mathrm{d}y \qquad A' = -\int_b^l \mu\rho(l - y)g\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\mu\rho g(l - b)^2$$

根据动能定理有 $$\frac{1}{2}\rho g(l^2 - b^2) - \frac{1}{2}\mu\rho g(l - b)^2 = \frac{1}{2}\rho l \upsilon^2 - 0$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2) - \frac{\mu g}{l}(l - b)^2}$$

量纲——力学基本量

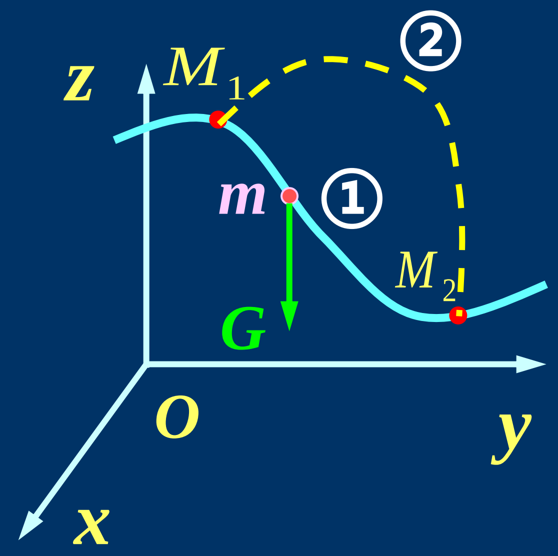
Linear/translational quantities

Dimensions	1	L	L^2
T	time: t s	absement: $\mathbf{A}$ m s	
1		distance: d, position: $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{x}$, displacement m	area: A m^2
T^{-1}	frequency: f s^{-1}, Hz	speed: v, velocity: $\mathbf{v}$ $m\ s^{-1}$	kinematic viscosity: ν, specific angular momentum: $\mathbf{h}$ $m^2\ s^{-1}$
T^{-2}		acceleration: $\mathbf{a}$ $m\ s^{-2}$	
T^{-3}		jerk: $\mathbf{j}$ $m\ s^{-3}$	
M	mass: m kg		
MT^{-1}		momentum: $\mathbf{p}$, **impulse**: $\mathbf{J}$ $kg\ m\ s^{-1}$, N s	action: $\mathcal{S}$, actergy: $\aleph$ $kg\ m^2\ s^{-1}$, J s
MT^{-2}		force: $\mathbf{F}$, weight: $\mathbf{F}_g$ $kg\ m\ s^{-2}$, N	energy: E, work: W $kg\ m^2\ s^{-2}$, J
MT^{-3}		yank: $\mathbf{Y}$ $kg\ m\ s^{-3}$, $N\ s^{-1}$	power: P $kg\ m^2\ s^{-3}$, W

3-3 几种常见力的功

一、重力的功

重力mg 在曲线路径 M_1M_2 上的功为



$$A=\int_{M_1(1)}^{M_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{M_1(1)}^{M_2}F_z dz$$

$$=\int_{Z_1(1)}^{Z_2}(-mg)\,dz=mg(z_1-z_2)$$

结论

(1) 重力的功只与始、末位置有关，而与质点所行经的路径无关。

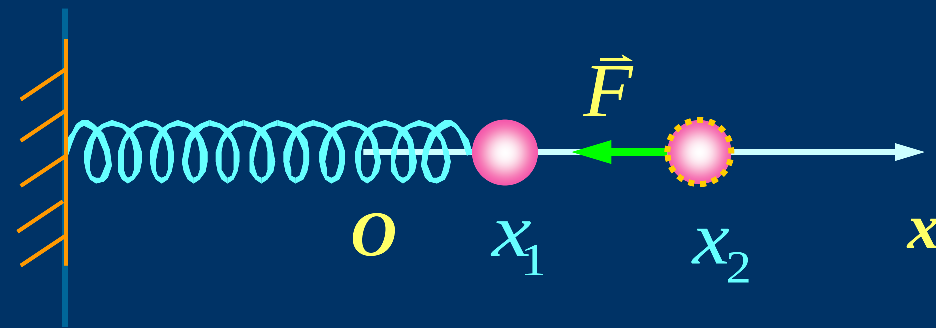
(2) 质点上升时，重力作负功；质点下降时，重力作正功。

(3) 质点沿任意闭合路径运动一周沿路径重力所作的总功必为零。

$$\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

二、弹性力的功

弹簧弹性力



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

由x_1到x_2路程上弹性力的功为

$$A = \int_{x_1}^{x_2} -kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

结论

(1) 弹性力的功只与始、末位置有关，而与质点所行经的路径无关。

(2) 弹簧的变形减小时，弹性力作正功；弹簧的变形增大时，弹性力作负功。

(3) 质点沿任意闭合路径运动一周时，弹性力的功也必为零。

$$\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

(4) 适用于质点沿**任意曲线**移动时弹性力作功的计算。

三、万有引力的功

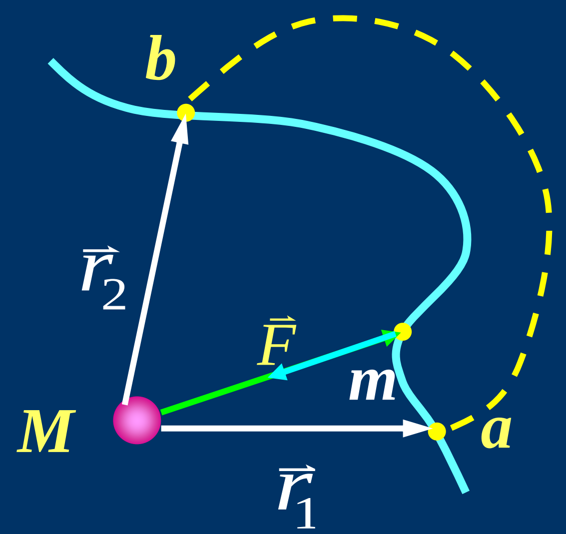
$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{r}^{\,0} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}$$

$\vec{F}$ **在位移元** $\mathrm{d}\vec{r}$ **上的元功为**

$$\vec{r}\cdot d\vec{r} = rdr$$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= -G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$



万有引力 $\vec{F}$ **在全部路程中的功为**

$$A = \int_{r_1(L)}^{r_2} -G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r = GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

结论

(1) 万有引力的功，也是只与始、末位置有关，而与质点所行经的路径无关。

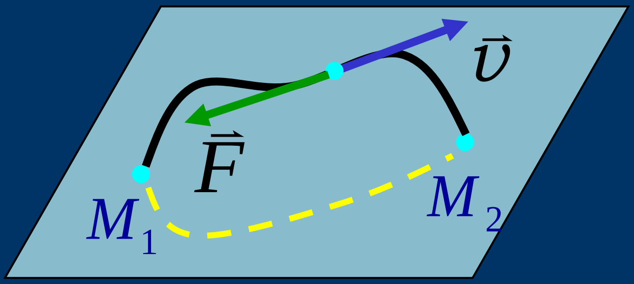
(2) 质点移近质点时，万有引力作正功；质点远离质点 时，万有引力作负功。

(3) 质点沿任意闭合路径运动一周时，万有引力的功也必为零。

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

四、摩擦力的功

$$\vec{F} = -\mu m g \vec{\tau}$$



摩擦力 $\vec{F}$ 在这个过程中所作的功为

$$A = \int_{M_1(L)}^{M_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{M_1(L)}^{M_2} \mu m g \vec{\tau} \cdot ds\vec{\tau} = -\int_{M_1(L)}^{M_2} \mu m g \mathrm{d}s$$

$$A = -\mu m g s$$

结论

摩擦力的功，不仅与始、末位置有关，而且与质点所行经的路径有关。沿任意闭合路径一周,摩擦力所作的总功不为零。

五、保守力和非保守力

Conservative force & non-conservative force

力场 当质点所受到的力仅为它的位矢的函数时，即

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

我们将 $\vec{F}(\vec{r})$ 表示的质点受力的空间分布称为力场

如果力所做的功与路径无关，而只决定于物体的始末相对位置，这样的力称为保守力。

保守力沿闭合路径一周所做的功为零。 即 $\oint_L \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

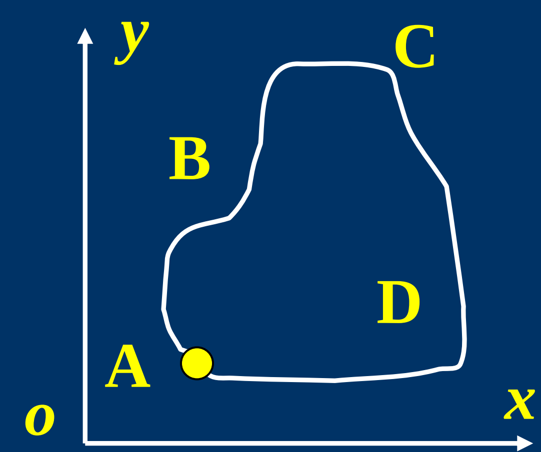
例如:重力、万有引力、弹性力都是保守力。

作功与路径有关的力称为非保守力。 例如: 摩擦力

例1：分析下述力场的保守性

$$\vec{F}_1 = ay\vec{j}\,(y > 0)$$

$$\vec{F}_2 = bx\vec{j}\,(x > 0)$$



解：构建质点运动轨迹，根据功的定义：

$$\oint_{ABCD} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \oint ay\vec{j} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= \oint ay\vec{j} \cdot dy\vec{j} = \oint aydy = \int_{y_1}^{y_1} aydy = 0 \quad \text{保守力}$$

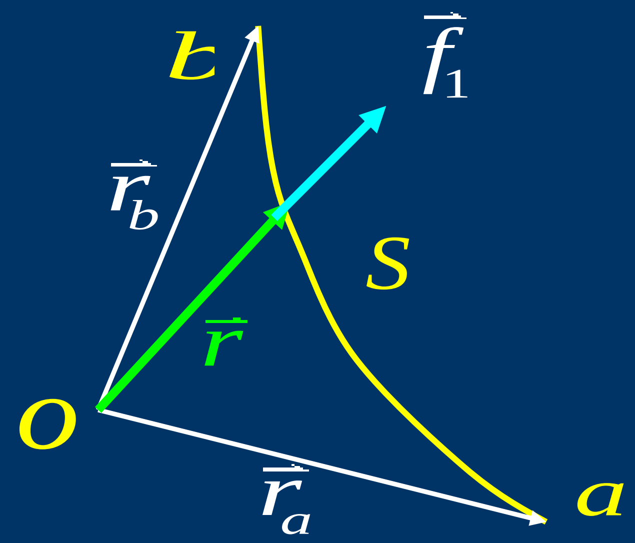
$$\oint_{ABCD} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \oint bx\vec{j} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$= \oint bx\vec{j} \cdot dy\vec{j} = \oint bxdy = \int_{ABC} bxdy + \int_{CDA} bxdy \neq 0 \quad \text{非保守力}$$

例2： 质点在力的作用下，由位置 $\vec{r}_a$ 运动到位置 $\vec{r}_b$ 路程为 S，若两个力的函数分别为

$$\vec{f}_1 = k\vec{r}_0 \qquad \vec{f}_2 = k\vec{v}_0$$

k 为常数。分析它们的保守性?



解： 根据功的定义和保守力的性质

$$A_1 = \int_a^b \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_a^b k\vec{r}_0\cdot d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_b} k\,dr = k(r_a - r_b)$$

$$\vec{r}_0 \cdot d\vec{r} = dr$$

$\vec{f}_1$ 为保守力

$$A_2 = \int_a^b k\vec{v}_0\cdot d\vec{r} = \int_a^b k\,ds = kS$$

$$\vec{v}_0 \cdot d\vec{r} = \left|d\vec{r}\right| = ds$$

$\vec{f}_2$ 为非保守力

3-4 势能 机械能守恒定律 Conservation of mechanical energy

一、质点在保守力场中的势能

当在保守力场（在任意点受保守力作用）中，质点从 A 运动到 B，所做的功与路径无关，而只与始末位置有关时，

引入一仅与位置有关的函数，A 点的函数值减去 B 点的函数值

定义为从 A点运动到 B点过程中保守力所做的功：

$$\boxed{A_{\text{保}} = E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_P}$$

该函数定义为势能函数（势能）

- **势能零点** —— 比较质点在保守力场中各点势能大小

定义：

$$\boxed{E_P = \int_P^{P_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{P_0}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

P_0 称为势能零点

说明

(1) 可以用保守力所作的功来度量。

(2) 是相对值，与所取零势能位有关。

例如：在弹性力场中 $\vec{F} = -kx\vec{i}$

如选$x=x_0$为势能零点，则势能函数为

$$E_p = \int_x^{x_0} -kx\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\vec{i} \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

如选$x=0$为势能零点，则势能函数为

$$E_p = \int_x^{0} -kx\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\vec{i} \qquad E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

(3) 蕴藏在保守力场中与位置有关的能量 。

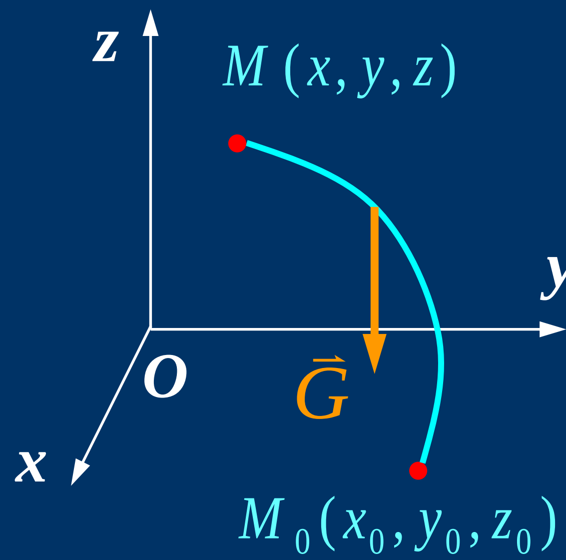
(4) 为整个系统所有，不属于某个物体 。它实质上是一种相互作用能

(5) 已知保守力确定势能函数 $E_p = \int_M^{M_0} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

1. 重力势能

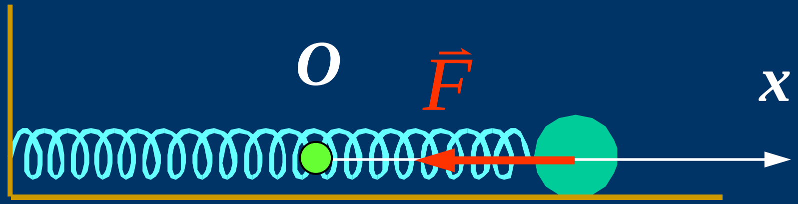
$$E_p = \int_z^{z_0} (-mg)\mathrm{d}z = mg(z - z_0)$$

$$A = -(mgz_0 - mgz)$$



2. 弹性势能

选弹簧原长处为零势能位置



$$E_p = \int_x^0 (-kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$$

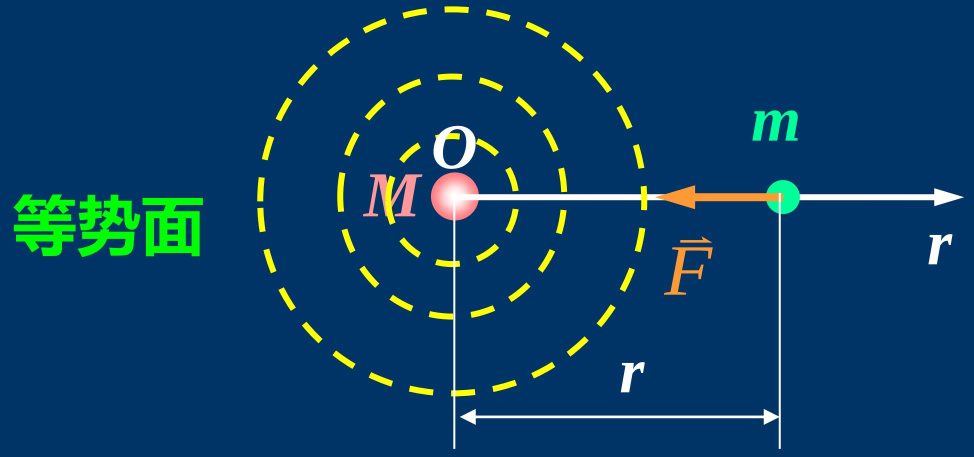
$$A = -(0 - \frac{1}{2}kx^2)$$

3. 万有引力势能

习惯上选**无穷远处**为万有引力势能的零势能位置

$$E_p=\int_r^{\infty}(-G\frac{mM}{r^2})\mathrm{d}r$$

$$=-G\frac{mM}{r}$$



例如

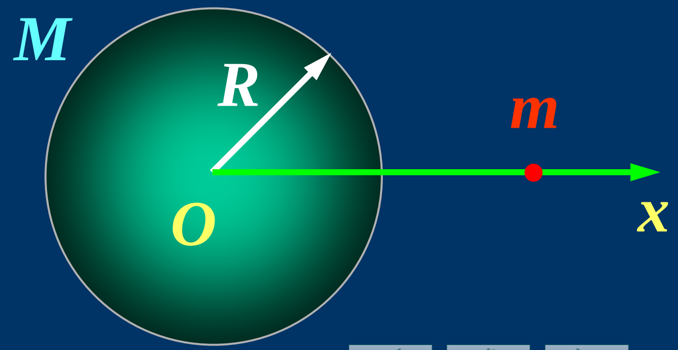
在质量为M、半径为R、密度为ρ的球体的万有引力场中

(1) 质点在球外任一点，与球心距离为x，

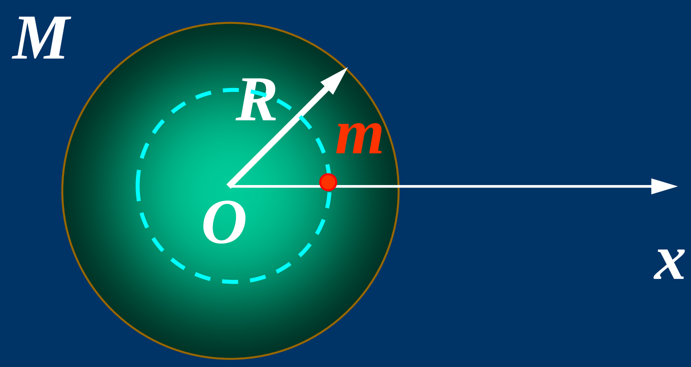
质点受到的万有引力为

$$f=G\frac{Mm}{x^2}$$

$$E_p=\int_x^{\infty}-G\frac{Mm}{x^2}\mathrm{d}x=-G\frac{Mm}{x}$$



(2) 质点在球内任一点C，与球心距离为x，质点受到的万有引力为



$$f = G\frac{4}{3}\pi\rho m x$$

$$E_p = \int_x^R -G\frac{4}{3}\pi\rho m x \mathrm{d}x + \int_R^\infty -G\frac{Mm}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -G\frac{2}{3}\pi\rho m(R^2 - x^2) - G\frac{Mm}{R}$$

$$= -GMm\left(\frac{3R^2 - x^2}{2R^3}\right)$$

- 在保守力场中，质点从起始位置 1 到末了位置2，保守力的功 A 等于质点在始末两位置势能增量的负值。

$$\boxed{A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p}$$

说明

(1) 由于势能零点可以任意选取，所以某一点的势能值是相对的。

(2) 保守力场中任意两点间的势能差与势能零点选取无关。

二、保守力场与势能的微分关系

$$\mathrm{d}A=-\mathrm{d}E_p=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$E_p=E_p(x,y,z)$ **直角系中，势能全微分为：**

$$\mathrm{d}E_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial E_p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial E_p}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}=-\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)=-\nabla E_p}$$

例：一个在 *xoy* 平面内运动的质点，所受的作用力为

$$\vec{F} = x^2y^2\vec{i} + x^2y^2\vec{j}$$ 判断该力的保守性？

解：一般依靠 $\boxed{A = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$ 判断

已知

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_P}{\partial y \partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 E_P}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 E_P}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 E_P}{\partial x \partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$$

$$F_x = x^2y^2$$

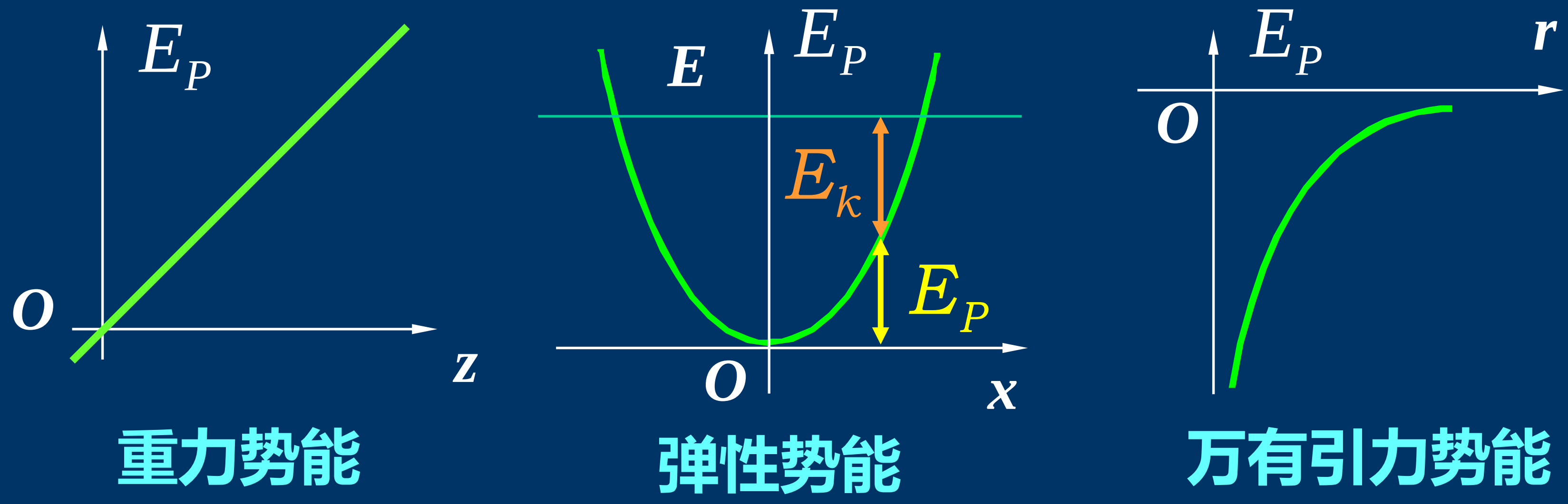
$$F_y = x^2y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2x^2y \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy^2$$

因此，*F* 不是保守力

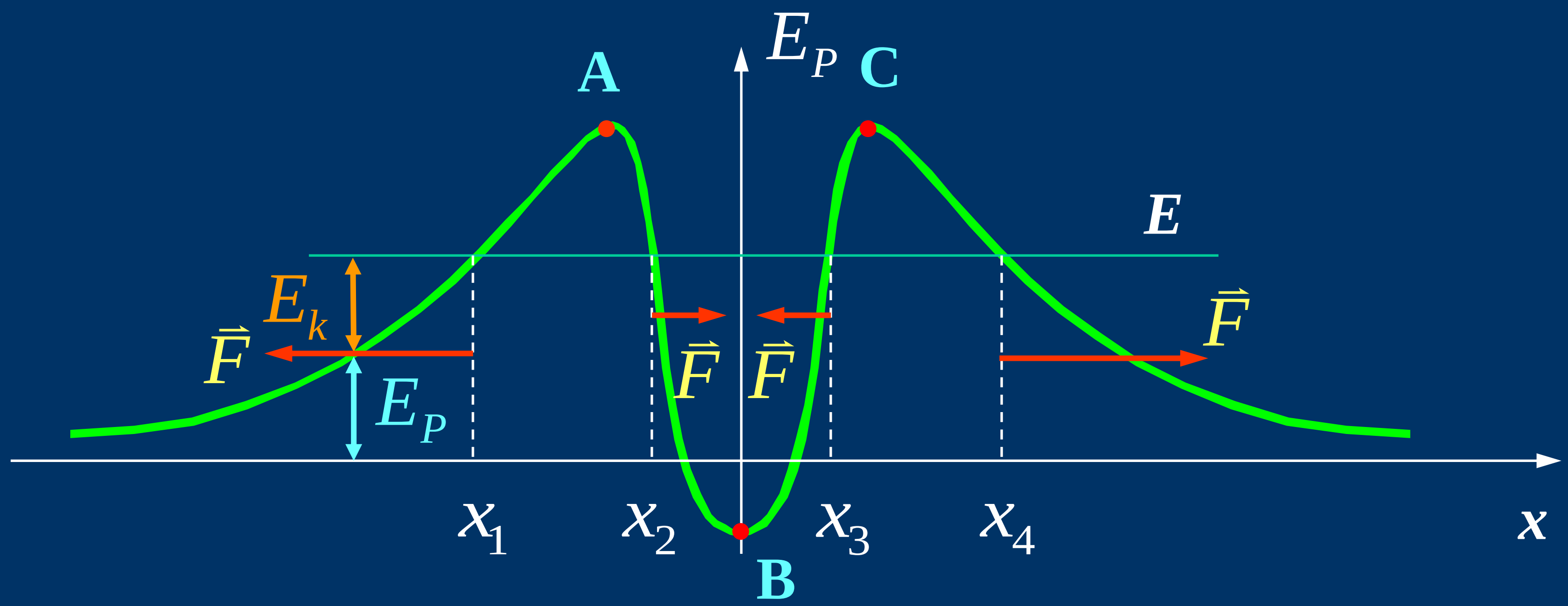
三、势能曲线

质点的势能与位置坐标的关系可以用图线表示出来。



由公式 $\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right)$ 可知：

由势能曲线可以求保守力。势能曲线上某点斜率的负值，就是该点对应的位置处质点所受的保守力。



质点运动范围 $E_k = E - E_p > 0$

$(-\infty \to x_1)$ $(x_2 \to x_3)$ $(x_4 \to \infty)$

质点在$(x_2 \to x_3)$内释放 **做往复振动**

B点 $\vec{F} = 0$ **稳定平衡位置**

A、C点 $\vec{F} = 0$ **非稳定平衡位置**

说明

(1) 势能曲线的斜率为正，保守力为负；势能曲线的斜率为负，保守力为正；

(2) 如果斜率为零，则保守力为零。 且势能的极小值处，为稳定平衡，势能的极大值处，为非稳定平衡，

(3) 且保守力场中，质点的机械能为常量。

四. 机械能守恒定律

对质点系 $A_{外}+A_{内}=\Delta E_k$

$$A_{外}+A_{保内}+A_{非内}=\Delta E_k$$

$$A_{外}-\Delta E_p+A_{非内}=\Delta E_k$$

$$A_{外}+A_{非内}=\Delta E_k+\Delta E_p=\Delta E$$ 机械能增量

只有保守内力做功

$$\boxed{E=E_k+E_p=\text{常数}}$$ 机械能守恒定律(积分形式)

$$\boxed{\mathrm{d}(E_k+E_p)=0}$$ 机械能守恒定律(微分形式)

例　把一个物体从地球表面上沿铅垂方向以第二宇宙速度

$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$ 发射出去，阻力忽略不计，

求　物体从地面飞行到与地心相距 nR_e 处经历的时间。

解　根据机械能守恒定律有

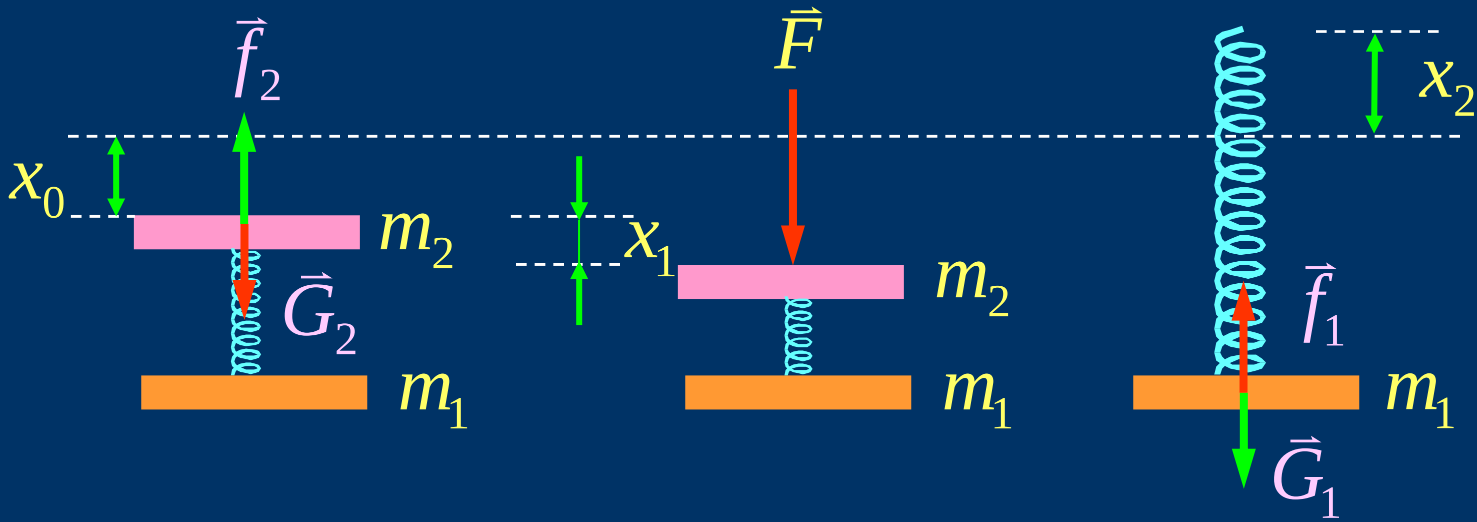
$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - G\frac{M_e m}{R_e} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{M_e m}{x} \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{2GM_e}{x}}$$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\upsilon} = \frac{1}{\sqrt{2GM_e}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{t_1}\mathrm{d}t = \int_{R_e}^{nR_e}\frac{1}{\sqrt{2GM_e}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \qquad t_1 = \frac{2}{3\sqrt{2GM_e}}R_e^{3/2}\left(n^{3/2}-1\right)$$

例 用弹簧连接两个木板m_1、m_2，弹簧压缩x_0。

求 给m_2上加多大的压力能使m_1离开桌面？



解 整个过程只有保守力作功，机械能守恒

$$x_0 = \frac{m_2 g}{k} \qquad x_1 = \frac{F}{k} \qquad x_2 = \frac{m_1 g}{k}$$

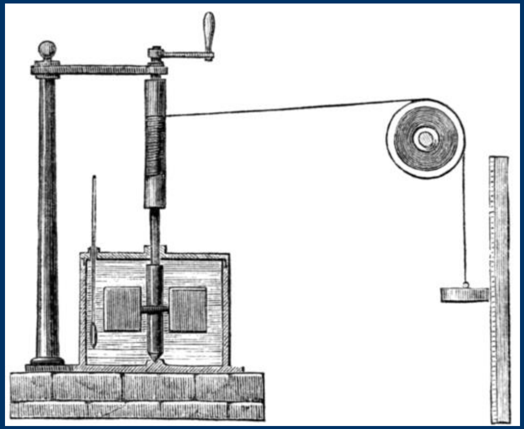
$$\frac{1}{2}k(x_0 + x_1)^2 = \frac{1}{2}kx_2{}^2 + m_2 g(x_0 + x_1 + x_2)$$

$$F = (m_1 + m_2)g$$

§ 3.5　能量守恒定律

能量不能消失，也不能创造，只能从一种形式转换为另一种形式。对一个封闭系统来说，不论发生何种变化，各种形式的能量可以互相转换，但它们总和是一个常量。这一结论称为能量转换和守恒定律。

例如：利用水位差推动水轮机转动，能使发电机发电，将机械能转换为电能。



电流通过电热器能发热，把电能又转换为热能。

讨论

1. **能量守恒定律可以适用于任何变化过程**
2. **功是能量交换或转换的一种度量**
3. **机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现**

例 一质量为**2.0g**的子弹, 在枪筒中前进时所受的合力 $F=400-\frac{8000}{9}x(N)$ 其中**x**以米为单位, 开枪时子弹在**x=0**处, 已知子弹出口速度为**300m/s .**

求 枪筒的长度

解 由动能原理 $A=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=E_{k2}-E_{k1}$

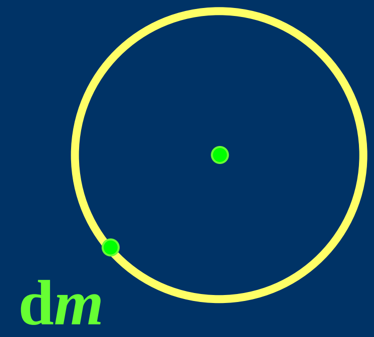
$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^x(400-\frac{8000}{9}x)\mathrm{d}x$$

$$E_{k2}-E_{k1}=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=\frac{1}{2}\cdot 2\times 10^{-3}\cdot 300^2-0$$

$$x=0.45\mathrm{m}$$

例 若将一质量线密度为 λ 的均匀细线弯成半径为R的圆环，则质量为m的质点放在环的中心时的引力势能和引力

解



$$\mathrm{d}W = -G\frac{m\cdot \mathrm{d}m}{R}$$

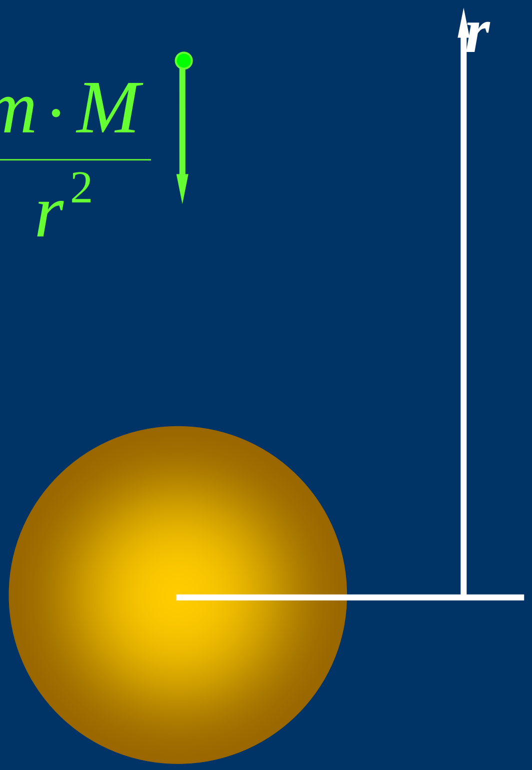
$$W = \int -G\frac{m\cdot \mathrm{d}m}{R} = -G\frac{m\cdot(2\pi R\cdot\lambda)}{R}$$

$$= -2\pi G\lambda m$$

$$\vec{F} = 0$$

例 已知地球的半径为R, 质量为M. 现由一质量为m的物体, 在离地面高度为$2R$处, 以地球和物体为系统, 若取地面为势能零点, 则系统的引力势能为 $W=\int_{3R}^{R}-G\frac{m\cdot M}{r^2}\mathrm{d}r$;若取无穷远处为势能零点, 则系统的引力势能为

$$-G\frac{m\cdot M}{r^2}$$

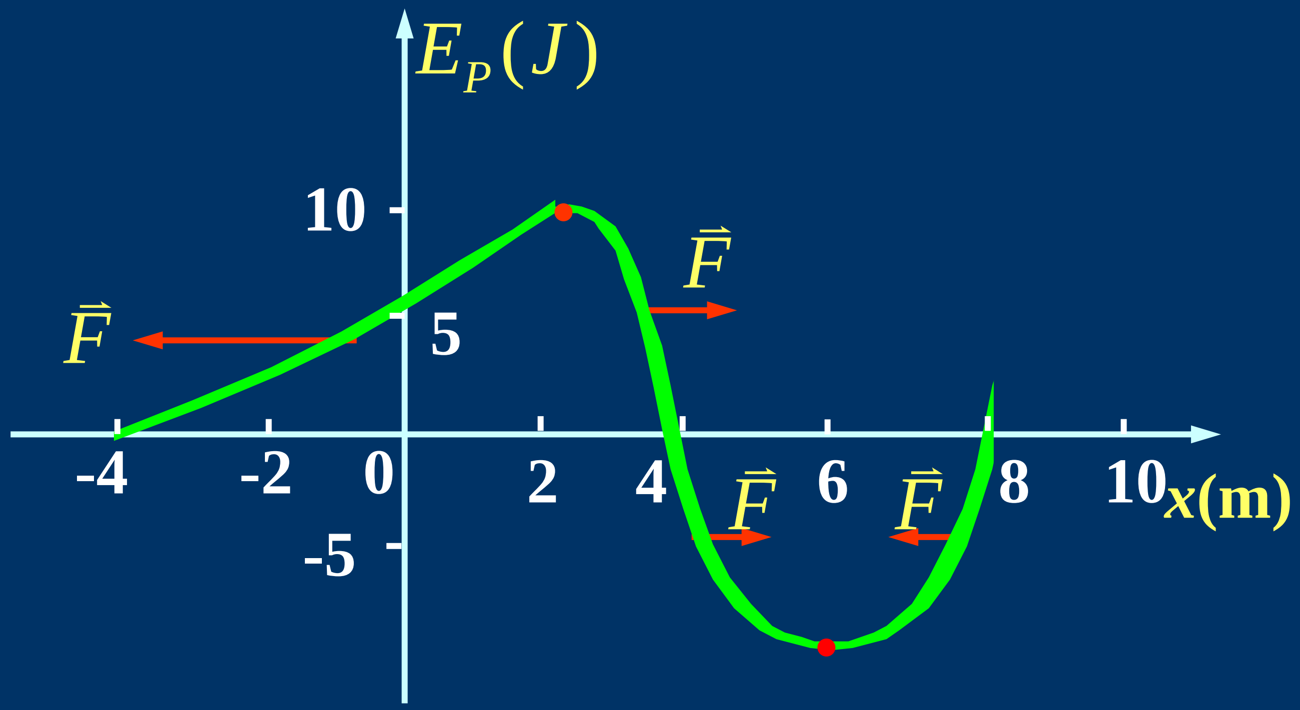


$$W=\int_{3R}^{\infty}-G\frac{m\cdot M}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$\vec{F}=-G\frac{m\cdot M}{r^2}$$

$$W=\int_{3R}^{R}-G\frac{m\cdot M}{r^2}\mathrm{d}r$$

例 一维保守力的势能曲线如图所示，有一粒子自右向左运动，通过此保守力场区域时，在 $2 < x < 6$ 区域所受的力 $\vec{F}_x > 0$；在 $-4 < x < 2$　$6 < x < 8$ 区域所受的力 $\vec{F}_x < 0$；在 $x = 2$　$x = 6$ 区域所受的 $\vec{F}_x = 0$。



例 宇宙飞船关闭发动机返回地球的过程, 可以认为是仅在地球万有引力作用下运动. 若 m 表示飞船的质量, M 表示地球质量, G 表示引力常量, 则飞船从距地球中心 r_1 处下降到 r_2 处的过程中, 动能的增量为

解

$$\int_{r_1}^{r_2} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathrm{d}r = \Delta E_k$$

$$\Delta E_k = GMm\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

例 一特殊弹簧，弹性力$F=-kx^3$，k 为劲度系数，x为形变量。现将弹簧水平放置于光滑的平面上，一端固定，一端与一质量为 m 的滑块相连而处于自然状态，今沿弹簧长度方向给滑块一个冲量，使其获得一速度 υ 。

求 弹簧压缩的最大长度。

解 弹簧压缩x

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2=\int_0^x kx^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}kx^4$$

$$x=\left(\frac{2m\upsilon^2}{k}\right)^{\frac{1}{4}}$$

例　倔强系数为k 的弹簧, 上端固定, 下端悬挂重物. 当弹簧伸长x_0, 重物在O处达到平衡, 现取重物在O处时各种势能均为零, 则当弹簧长度为原长时, 系统的重力势能__$mgx_0 = kx_0^2$__; 系统的弹性势能__$W = \int_0^{x_0} -kx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}kx_0^2$__; 系统的总势能__$\frac{1}{2}kx_0^2$__