# 第一章　行列式

## 第1.2节　行列式的计算

曹相湧
数学与统计学院
Email: caoxiangyong@xjtu.edu.cn

# 上节回顾

- 2阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

余子式

# 行列式的基本性质

**性质1** 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^T = D$

**性质2** 互换行列式的任意两行(列)的位置，行列式的值反号 $r_i \leftrightarrow r_j \ (c_i \leftrightarrow c_j)$

**性质3** 行列式$D$等于它的任一行(列)各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和

**性质4** 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以数$k$，等于用数$k$乘此行列式 $kr_i \ (kc_i)$

**性质5**　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则可将此行列式写成两个行列式的和

**性质6** 若行列式$D$有两行(列)的对应元素相等，则$D=0$

**性质7** 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变

$$r_i + kr_j \ (c_i + kc_j)$$

**性质8** 行列式的任一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于0；即

当$i \neq k$时，$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0$

当$j \neq s$时，$a_{1j}A_{1s} + a_{2j}A_{2s} + \cdots + a_{nj}A_{ns} = 0$

**下三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod a_{ii}$$

**上三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod a_{ii}$$

**副下三角行列式**

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod a_{i,n-i+1}$$

**副上三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{n-1,n-1} & \vdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod a_{i,n-i+1}$$

对角行列式
$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n;$$

副对角行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \cdots d_n.$$

**例1** 若$A_{ij}$为$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 2 & 4\end{vmatrix}$的$(i,j)$元素的代数余子式，则$A_{31}-2A_{32}+3A_{33}=?$

**解：**

$$1A_{31}-2A_{32}+3A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 8\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=0$$

逆用性质3

**例** 设$M_{ij}$为行列式$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$的$(i,j)$元素的余子式，

试计算$M_{13}+2M_{23}+5M_{33}$.

**解** $M_{13}+2M_{23}+5M_{33}=(-1)^{1+3}M_{13}-2(-1)^{2+3}M_{23}+5(-1)^{3+3}M_{33}$

$$=A_{13}-2A_{23}+5A_{33}+0A_{43}=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-105$$

**例** 已知$n$阶行列式$D$的值为$a \neq 0$，且$D$的每行元素之和都等于常数$b$,则$D$的第1列元素的代数余子式之 和

$A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=$ _____.

**解** 利用行列式的性质，将 第$2,\cdots,n$列都加到第1列，再按第1列展开可得

$$D=b\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1})=a.$$

$\because\ a\neq 0,\ \therefore\ b\neq 0.\quad \therefore\ A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=\dfrac{a}{b}.$

**例2** 若$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$，求以下行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 7$

(2) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ -3a & -3b & -3c \end{vmatrix} = 21$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{vmatrix} = 7$

**例3** 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

**解法1:**

$$D_n = n(-1)^{n+n} M_{nn}$$

$$=(-1)^{n+n}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.$$

**解法2:**

$$D_n = (-1)^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$$

$$=(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} n!$$

## 引入以下记号

| 行变换 | 列变换 |
| --- | --- |
| $r_i \leftrightarrow r_j$ | $c_i \leftrightarrow c_j$ |
| $kr_i$ | $kc_i$ |
| $r_i + kr_j$ | $c_i + kc_j$ |

**例4** $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$

行(列)变换性质

**解：** $D \xlongequal{c_1 - c_2} \begin{vmatrix} 3 & 100 & 204 \\ -1 & 200 & 395 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - 2c_2} \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2 \div 100} 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 - 3c_1} 100 \begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 + c_2} 100 \begin{vmatrix} 3 & -8 & -4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 100 \cdot 20 = 2000$$

**例5**
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

**解:**
$$D = 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-6)\cdot(-7) = 42$$

**降阶法：选择零元素较多的行或列来展开**

4阶 $\rightarrow$ 3阶 $\rightarrow$ 2阶

**例6**

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 10 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_2+c_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 10 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-2r_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 10 & 3 \\ -6 & 0 & -15 & -4 \end{vmatrix} = -1(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & -15 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_1-c_3 \\ c_2-3c_3}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

**降阶法：先利用性质7将行列式的某行(列)较多元素化为零，再按该行(列)来展开**

$$4\text{阶} \rightarrow 3\text{阶} \rightarrow 2\text{阶}$$

# 行列式的计算方法

1. **直接用定义和性质3**（非零元素很少时可用）

2. **化三角行列式法**

利用性质，将原行列式化成一个三角行列式，再快速计算.

3. **降阶法**

利用性质，将某行(列)的元素尽可能化为0，然后再按该行(列)展开.

$$n\text{阶} \to \quad n-1\text{阶} \quad \to \cdots \to \quad 2\text{阶}$$

# 一些特殊行列式的计算

## 1. 奇数阶反对称行列式的值为零

$D=|a_{ij}|$ 为对称行列式 $\longleftrightarrow$ $a_{ij}=a_{ji}$

例
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ 是对称行列式

$D=|a_{ij}|$ 为反对称行列式 $\longleftrightarrow$ $a_{ij}=-a_{ji}$ (必有 $a_{ii}=0$)

例
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

**是反对称行列式** **不是反对称行列式**

**例** 证明奇数阶反对称行列式的值为零

**证**

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{转置}}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{各行提}-1}} \ (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

**当n为奇数时有** $D=-D \quad \Rightarrow D=0$

## 2. 主对角线非零的“箭形”行列式

例：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ d_n & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} \qquad (a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

化成三角形行列式

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_1-\frac{d_i}{a_i}\times c_{i+1}} \begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{d_i}{a_i}b_i & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} = (a_0-\sum_{i-1}^{n}\frac{d_i}{a_i}b_i)a_1\cdots a_n$$

**练习**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和.

**解：** 第一行各元素的代数余子式之和为

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\left(1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\right).$$

**3.** 除对角线以外各行元素对应相同，**则可化成三角形行列式或箭形行列式**

可化箭形行列式

**例**

$$\begin{vmatrix} x_1 - b & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2-a & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3-a & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4-a \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^3 x_1$$

**另**

$$D = x_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2-a & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3-a & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_4-a \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{-x_i c_1 + c_i} x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$$

## 4. 某行（列）至多有两个非零元素的行列式，可用**降阶法**或定义或递推公式法或归纳法求解

**例**

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$ $n$阶 $\underline{\underline{\text{按第一列展开}}}$

$$a\begin{vmatrix} a & b & & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$n$-1阶　　$n$-1阶

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$$

## 5. 各行(列)总和相等的行列式

**例** 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{c_1+c_i(i=2,3,\cdots,n)}{=\!=\!=}$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{-r_1+r_i(i=2,3,\ldots,n)}{=\!=\!=} [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

## 5. 各行(列)总和相等的行列式

**例** 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_i (i=2,3,\cdots,n)}$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$$

# 6. 范德蒙德(Vander monde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$\begin{aligned}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_1)\\ (x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_2)(x_n-x_2)\\ (x_4-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_3)(x_n-x_3)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})\\ (x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

# 6. 范德蒙德(Vander monde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

**例**

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}\qquad\qquad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 9 & 1\end{vmatrix}$$

都是范德蒙行列式.

## 6. 范德蒙德(Vander monde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

**证明(数学归纳法)**

1. 当 $n=2$ 时，有 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$，结论成立

2. 假设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立
   下证对 $n$ 阶范德蒙行列式结论也成立

# 6. 范德蒙德(Vander monde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

---

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

从第 $n$ 行开始，逐行减去上一行的 $x_1$ 倍

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

按第1列展开

## 6. 范德蒙德(Vander monde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$V_n=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$n-1$阶

## 6. 范德蒙德(Vander monde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$V_n \neq 0 \Leftrightarrow$ $x_1, x_2, \dots, x_n$互不相等

---

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$n-1$阶

根据归纳假设有：

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

综上所述，结论成立 $(n\ge 2)$

**例** 计算
$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

**解：** 每一行提取各行的公因子，得

$$D_n=n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}= n!\prod_{n\ge i>j\ge 1}(i-j)$$

n阶范德蒙行列式

$$\begin{aligned} &= n!(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1) \\ &\quad\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2) \\ &\quad\cdot(4-3)\cdots(n-3) \\ &\quad\vdots \\ &\quad[n-(n-1)] \\ &= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!. \end{aligned}$$

7. 证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

---

证明：（数学归纳法）记 $D_1=\det\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ $D_2=\det\left(b_{ij}\right)_{m\times m}$

则只需证 $D=D_1D_2$

1. 当$n=1$时，将$D$按第1行展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}D_2=D_1D_2$$

结论成立

7. 证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

---

2. 假设对$n-1$阶行列式$D_1$结论成立，则当$D_1$为$n$阶行列式时，记$D_1$的代数余子式为$A_{ij}$, $D$的代数余子式为$D_{ij}$，则$D$按第1行展开

$$D=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}D_{1j}$$

$$D_{1j}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,j-1} & c_{1,j+1} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m,j-1} & c_{m,j+1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D_{1j}=A_{1j}D_2 \qquad D=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}D_2=D_1D_2$$

结论成立

例14：证明

**（三对角行列式）**

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}=\begin{cases} \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}, \text{若} p\neq q \\ (n+1)p^n, \text{若} p=q \end{cases}$$

其中$p$和$q$是$x^2-ax+bc=0$的两个根.

**证明：** 把$D_n$按照第一行展开，可得递推关系：

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}=(p+q)D_{n-1}-pqD_{n-2}$$

$$=pD_{n-1}+q(D_{n-1}-pD_{n-2})$$

据此可得: $D_n-pD_{n-1}=q(D_{n-1}-pD_{n-2})=q^2(D_{n-2}-pD_{n-3})$

$$=\cdots=q^{n-2}(D_2-pD_1)$$

又因为$D_2=a^2-bc=(p+q)^2-pq=p^2+pq+q^2$,

$$D_1=a=p+q$$

所以 $D_n - pD_{n-1} = q^{n-2}(p^2 + pq + q^2 - p^2 - pq) = q^n$

同理 $$D_n - qD_{n-1} = p^n$$

当$p \neq q$时，

$$D_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

当$p = q$时，

$$D_n = pD_{n-1} + p^n = p(pD_{n-2} + p^{n-1}) + p^n = p^2 D_{n-2} + 2p^n$$

$$= p^2(pD_{n-3} + p^{n-2}) + 2p^n = p^3 D_{n-3} + 3p^n$$

$$\vdots$$

$$= p^{n-1}D_1 + (n-1)p^n = 2p^n + (n-1)p^n = (n+1)p^n$$

## 练习

$$D_5=\begin{vmatrix}4&3&0&0&0\\1&4&3&0&0\\0&1&4&3&0\\0&0&1&4&3\\0&0&0&1&4\end{vmatrix}$$

**解：** **首先, 写出方程** $x^2-4x+3=0$ **，求得它的根为**$1,3,$

**由于这两个根不相等，所以由例14结论可知**

$$D_5=\frac{3^{5+1}-1^{5+1}}{3-1}=364$$

# 作业

习题1.2

(A)1(1)(2)(5),2(2),3(3),4(2)(4)

5, 6, 7 (1)(3)

(B)1,2(2)