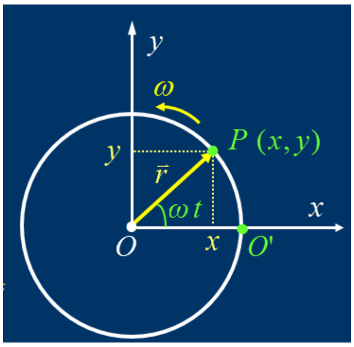
彭·大物

运动学、功和能

2022年3月期

彭康书院学业辅导与发展中心

轨迹方程与运动方程的转化



例 1 用直角坐标、位矢、自然坐标表示的质点运动学方程

解： 以圆心 O 为原点。建立直角坐标系 OXY，O’为起始时刻，设 t 时刻质点位于 P(x，y)，

用直角坐标系表示的质点运动学方程为：

$$x = r\cos wt, y = r\sin wt$$

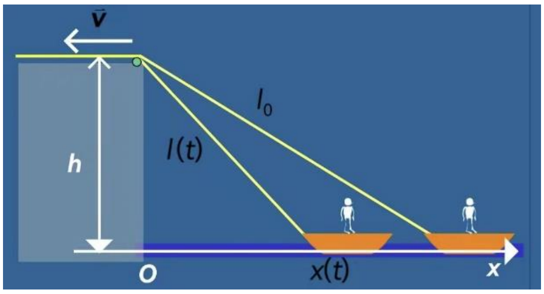
位矢表示为：

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r\cos wt\mathbf{i} + r\sin wt\mathbf{j}$$

自然坐标表示为

$$s = rwt$$

例 2 如图所示，以速度 v 用绳跨一定滑轮拉湖面上的船，已知绳初长 l_0，岸高 h，求船的运动方程



解： 取坐标系如图所示

依题意有

$$l(t) = l_0 - vt$$

坐标表示为

$$x(t) = \sqrt{(l_0 - vt)^2 - h^2}$$

!! 质点运动学的基本问题之一是确定质点运动学方程，为正确写出质点运动学方程，要先确定参考系和坐标系，明确起始条件等，找出质点坐标随时间变化的函数关系。

运动学的两类问题

第一类问题：已知运动方程求任意时刻的速度与加速度（微分问题）

例 3 已知一质点的运动方程 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j}$

求：（1） $t = 1$ s 到 $t = 2$ s 质点的位移

（2） $t = 2$ s 时 $\mathbf{v}, \mathbf{a}$

（3）轨迹方程

解：（1）由运动方程得 $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

（2） $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=2\mathbf{i}-2t\mathbf{j}$ 　 $\mathbf{a}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-2\mathbf{j}$

当 $t=2$ s 时， $\mathbf{v}_2=2\mathbf{i}-4\mathbf{j},\mathbf{a}_2=-2\mathbf{j}$

（3） $y=2-\frac{x^2}{4}$

例 4 已知质点的运动方程为：

$$\mathbf{r}=2t\mathbf{i}+(6-2t^2)\mathbf{j}$$

试求：

（1） 质点的轨道方程。

（2） 在 $t_1=1s$ 和 $t_2=2s$ 之间的 $\vartriangle\mathbf{r}$ 和 $\vartriangle$r

（3） 在 $t_1=1s$ 时的速度和加速度

（4） 在什么时刻质点的位矢与速度矢量恰好垂直？

（5） 在什么时刻质点离原点最近？

分析：这是二维运动情况。在运动方程中，消去 t，即得到轨道方程。应注意区分 $\vartriangle\mathbf{r}$、$\vartriangle r$,$\vartriangle s$ 之间的区别。根据矢量分析，当两个矢量 A 和 B 垂直时，则 A·B=0. 计算质点离原点最近时，需用求导的方法得到极值。

解：（1） 依题意，质点在 Oxy 平面内运动，运动方程的分量式为

$$x=2t,y=6-2t^2$$

消去 t，得质点的轨道方程： $y=6-\frac{x^2}{2}$ ，其轨迹为抛物线。

（2）在 $t_1=1s$ 和 $t_2=2s$ 之间的 $\vartriangle$r矢量为

$$\vartriangle\mathbf{r}=\mathbf{r}(t2=2s)-\mathbf{r}(t1=1s)=(4\mathbf{i}-2\mathbf{j})m-(2\mathbf{i}+4\mathbf{j})m=(2\mathbf{i}-6\mathbf{j})m$$

当然，也可以表示为大小和方向（与 X 轴正向间夹角）的形式：

$$|\vartriangle\mathbf{r}|=\sqrt{(\vartriangle x)^2+(\vartriangle y)^2}=\sqrt{2^2+6^2}m=6.32m$$

$$\theta=\arctan\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}=-71^o33'54"$$

而 $\vartriangle r$ 为

$$\vartriangle r=|\mathbf{r}_2|-|\mathbf{r}_1|=\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}-\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}=\sqrt{4^2+2^2}-\sqrt{2^2+4^2}=0$$

（3）根据定义：

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(2\mathbf{i}-4t\mathbf{j})\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-4\mathbf{j}\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

把 t_1=1s 带入得

$$\mathbf{v}=(2\mathbf{i}-4\mathbf{j})\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\mathbf{a}=-4\mathbf{j}\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

速度的大小和方向为

$$v=\sqrt{2^2+(-4)^2}\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=4.47\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\theta=\arctan\frac{-4}{2}=-63^o26'5''$$

加速度为

$$a=4\ \ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

方向沿 y 轴负方向

（4）当 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{v}$ 垂直时，$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}$=0，即

$$\left[2t\mathbf{i}+(6-2t^2)\mathbf{j}\right]\cdot\left(2\mathbf{i}-4t\mathbf{j}\right)=0$$

得

$$4t(5-2t^2)=0$$

$$t=0, t=\sqrt{\frac{5}{2}}\ \ \text{s}=1.58\ \ \text{s}，t=-1.58\ \ \text{s}(舍去)$$

（5）质点离原点的距离就是位置矢量的大小：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2t)^2+(6-2t^2)^2}$$

求极值，使得 $\frac{dr}{dt}=0$，最后整理得

$$8t(2t^2-5)=0$$

$$t=0, t=\sqrt{\frac{5}{2}}\ \ \text{s}=1.58\ \ \text{s}，\ t=-1.58\ \ \text{s}（舍去）$$

例 5 已知质点的位矢随时间变化函数形式 $\mathbf{r}=R(\cos wt\mathbf{i}+\sin wt\mathbf{j})$。试求：

（1） 质点轨迹

（2） 速度和加速度，并证明其指向一点

解：（1）由

$$\mathbf{r}=R(\cos wt\mathbf{i}+\sin wt\mathbf{j})$$

可知

$$x=R\cos wt, y=R\sin wt$$

消去t之后，得

$$x^2+y^2=R^2$$

运动轨迹是以原点为圆心，半径为R的圆

（2）质点速度为

$$\mathbf{v}=-R\omega(\sin\omega t\mathbf{i}-\cos\omega t\mathbf{j})$$

质点的加速度

$$\mathbf{a}=-R\omega^2(\cos\omega t\mathbf{i}+\sin\omega t\mathbf{j})=-\omega^2(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})=-\omega^2\mathbf{r}$$

负号表示加速度方向总是指向圆心。

第二类问题：已知加速度或速度求速度和位移（积分问题）

例 6 已知$\mathbf{a}=16\mathbf{j}$，$t=0$时，$\mathbf{v_0}=6\mathbf{i}$，$\mathbf{r_0}=8\mathbf{k}$

求：$\mathbf{v}$和运动方程

解：由已知有

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{a}=16\mathbf{j} \qquad \int_{\mathbf{v_0}}^{\mathbf{v}}d\mathbf{v}=\int_0^t 16dt\mathbf{j}$$

代入初始条件

$$\mathbf{v}=6\mathbf{i}+16t\mathbf{j} \qquad \int_{\mathbf{r_0}}^{\mathbf{r}}d\mathbf{r}=\int_0^t(6\mathbf{i}+16t\mathbf{j})dt$$

代入初始条件

$$\mathbf{r_0}=8\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}=6t\mathbf{i}+8t^2\mathbf{j}+8\mathbf{k}$$

例 7、一物体悬挂在弹簧上作竖直振动，其加速度为$a=-ky$，式中k为常量，y是以平衡位置为原点所测得的坐标。假设振动的物体在坐标y_0处的速度为v_0，试求速度v与坐标y的函数关系式

分析：本题中加速度为位置的函数，可以利用积分变量变换：

$$a(y)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\bullet\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$$

又$a=-ky$，所以有

$$-ky=v\frac{dv}{dy}$$

$$-\int kydy=\int vdv$$

$$-\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}v^2+C$$

当$y=y_0$时，$v=v_0$则有

$$C = -\frac{1}{2}{v_0}^2 - \frac{1}{2}k{y_0}^2$$

所以速度 v 与坐标 y 的函数关系式为

$$v^2 = {v_0}^2 + k({y_0}^2 - y^2)$$

解题方法总结：第二类问题（积分问题），已知质点的加速度（或速度）随时间的变化的关系和初始条件（即 $t=0$ 时刻的速度 $\mathbf{v}_0$ 和位矢 $\mathbf{r}_0$），求质点在任意时刻的速度和运动方程，这类问题采用积分方法

需要注意的是，由加速度 $\mathbf{a}$ 求速度 $\mathbf{v}$ 时，根据函数的具体形式，应采取不同的方法。例如，对于一维运动，若已知 $a=a(t)$，可直接积分：

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt$$

若已知 $a=a(v)$，先分离变量再积分：

$$a(v) = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}$$

若已知 $a=a(x)$，先通过积分变量变换，进行换元后再积分：

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = \int_{v_0}^{v} v dv$$

伽利略变换问题

例 8 设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处，然后又向西飞回 A 处，飞机相对空气保持不变的速率 v_1，而空气相对地面的速度是 v_2，A 和 B 之间距离为 l，试求下列三种情况下飞机来回飞行的时间。

（1） 空气是静止的

（2） 空气的速度向东

（3） 空气的速度向北

分析：在求解相对运动物体时，应注意三个研究对象：其一是运动物体；其二是绝对参考系（静系）；其三是相对参考系（动系）。在本题中，飞机为运动物体，地面为绝对参考系，空气相对地面运动，为相对参考系，明确这三者之间的关系，即可根据速度变换关系求解

解：（1）空气是静止的，即 $v_2 = 0$，那么飞机相对地面往返飞行速度大小都为 v_1，飞机往返的时间为：

$$t_1 = t_{AB} + t_{BA} = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_1} = \frac{2l}{v_1}$$

（2）根据速度变换关系，飞机从 A 处向东飞到 B 处时相对于地面的速度大小为

$$v_{AB} = v_1 + v_2$$

从 B 处向东飞到 A 处时相对地面的速度大小为

$$v_{BA} = v_1 - v_2$$

所以飞机往返的时间：

$$t2 = tAB + tBA = \frac{l}{v_1 + v_2} + \frac{l}{v_1 - v2} = \frac{2v_1 l}{{v_1}^2 - {v_2}^2} = \frac{2l/v_1}{1-(v_2/v_1)^2} = \frac{t_1}{1-(v_2/v_1)^2}$$

（3）当空气的速度 v_2 向北时，根据速度变换关系，飞机相对于地面的飞行速度 v 和飞机相对于空气速度 v_1 为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

飞机从 A 飞到 B，还是从 B 飞到 A，相对于地面的速度大小均为

$$v = \sqrt{{v_1}^2 - {v_2}^2}$$

所以，飞机往返的时间为

$$t3 = tAB + tBA = \frac{2l}{v} = \frac{2l/v_1}{\sqrt{1-(v_2/v_1)^2}} = \frac{t_1}{\sqrt{1-(v_2/v_1)^2}}$$

概念辨析：

设质点的运动函数为 $x = x(t), y = y(t)$，在计算质点的速度时，有以下两种解法：

（1） 先求出 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，然后求出 $v = \frac{dr}{dt}, a = \frac{d^2 r}{dt^2}$

（2） 先求出 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 然后求出

$$v = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}, \quad a = \sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2}$$

试问哪种方法正确？差异何在？

解：质点的速度和加速度是矢量，根据已知的质点平面运动参量方程：

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$$

可知，质点的速度和加速度分量为

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \end{array}\right\}$$

这样，质点的速度和加速度大小分别为

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}, a = \sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2 + (\frac{d^2y}{dt^2})^2}$$

所以（2）的说法是正确的，在（1）的说法中，由于$r=\sqrt{x^2+y^2}$为质点到坐标原点的距离，$\frac{dr}{dt}$只是表示距离随时间的变化率，因此（1）是错的

!!!! 在书中的课后题里有很多类似的题目，请同学们注意

圆周运动问题

例 9 一物体由 A 点静止出发，做半径为 R 的圆周运动，切向加速度的大小为一常量a_τ，问：

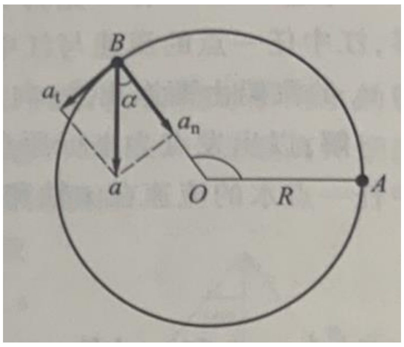
（1）经过多少时间 t，它的总加速度$\mathbf{a}$恰与半径 R 的夹角α

（2）在上述时间内物体所经过的路程 s 是多少？

解：（1）物体的总加速度$\mathbf{a}$为

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_\tau$$

由图可知



$$\tan\alpha=\frac{a_\tau}{a_n}=\frac{a_\tau}{\frac{(a_\tau t)^2}{R}}=\frac{R}{a_\tau t^2}$$

所以有

$$t=\sqrt{\frac{R}{a_\tau}\cot\alpha}$$

（2）物体经过的路程：

$$s=\frac{1}{2}a_\tau t^2=\frac{1}{2}R\cot\alpha$$

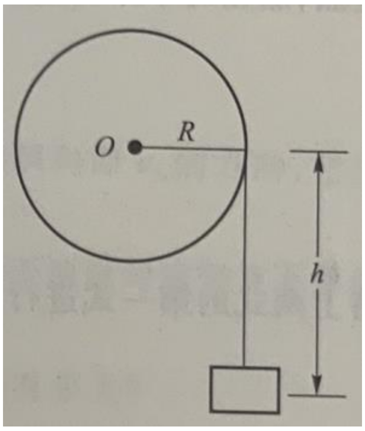
例 10 如图所示，一个半径为R的圆盘可以绕水平轴自由转动，一轻绳绕在盘子的边缘，其一端系一物体，在重力的作用下，物体从静止开始匀加速度下降，在Δt时间内下降的距离为h，试求：物体开始下降后的$t(t>\Delta t)$时刻，轮边缘的切线加速度和向心加速度。

解：设物体的加速度大小为a，从题意知a与a_τ相等，由

$$h=\frac{1}{2}a_\tau\Delta t^2$$

得

$$a_\tau = \frac{2h}{\triangle t^2}$$



圆盘的角加速度为

$$\alpha = \frac{a_\tau}{R} = \frac{2h}{R\triangle t^2}$$

因此圆盘的角速度ω为

$$\omega = \int_0^t \alpha dt = \frac{2ht}{R\triangle t^2}$$

圆盘线速度为

$$v = R\omega = \frac{2h}{\triangle t^2} \cdot t$$

最后可得轮缘的切向加速度（等于物体下落的加速度a）和向心加速度分别为

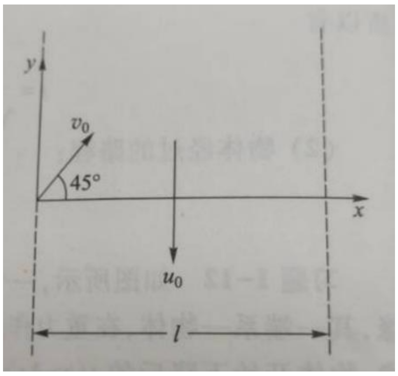
$$a_\tau = a = \frac{2h}{\triangle t^2}$$

$$a_n = \omega^2 R = \frac{4h^2 t^2}{R\triangle t^4}$$

速度分解与合成问题，在伽利略变换中也有，水中行船模型

例 11 有一宽为l的大江，江水由北向南流去，设江中心流速为u_0靠两岸的流速为 0，江中任意一点的流速与江中心流速之差和江心至该点的距离的平方成正比。今有相对江水的速度为v_0的汽船由西岸出发，向东偏北45^o方向航行，试求其航线轨迹方程以及到达东岸的地点。

解：以出发点为坐标原点，向东取为x轴，向北取为y轴，因流速为$-y$方向，由题意可知，江中任一点水的流速在x轴与y轴的两个分量分别为



$$u_x = 0$$

$$u_y = a(x - l/2)^2 + b$$

而且在$x=0$和$x=l$处，$u_y = 0$；在$x = l/2$处，$u_y = -u_0$。将这些已知数据带入上式，整理后得：

$$a = \frac{4u_0}{l^2}$$

$$b = -u_0$$

从而可得

$$u_y=-\frac{4u_0}{l^2}(l-x)x$$

显然，船相对于岸的速度 $\mathbf{v}$ 在 x 轴和 y 轴的两个分量分别为

$$v_x=\frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

$$v_y=\frac{v_0}{\sqrt{2}}+u_y$$

将上两式的第一式进行积分，有

$$x=\frac{v_0}{\sqrt{2}}t$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{v_0}{\sqrt{2}}\frac{dy}{dx}=\frac{v_0}{\sqrt{2}}-\frac{4u_0}{l^2}(l-x)x$$

整理后得

$$dy=\left[1-\frac{4\sqrt{2}u_0}{l^2v_0}(l-x)x\right]dx$$

对上式积分

$$\int_0^y dy=\int_0^x\left[1-\frac{4\sqrt{2}u_0}{l^2v_0}(l-x)x\right]dx$$

从而得到轨迹方程

$$y=x-\frac{2\sqrt{2}u_0}{lv_0}x^2+\frac{4\sqrt{2}u_0}{3l^2v_0}x^3$$

到达东岸的地点 (x',y') 为

$$x'=l,y'=y_{x=l}=l(1-\frac{3\sqrt{2}u_0}{3v_0})$$

等时圆模型

例 12 如图所示 ad,bd,cd 是竖直面内三根固定的光滑细杆，a,b,c,d 位于同一光滑圆周上，a 点为圆周的最高点，d 点是最低点。每根杆上都套有一个小滑环(图中未画出)，三个滑环分别从 a,b,c 处释放（初速度为 0），用 t_1,t_2,t_3 依次表示各滑环到达 d 所用的时间，则：

$A: t_1 < t_2 < t_3$

$B: t_1 > t_2 > t_3$

$C: t_3 > t_1 > t_2$

$D: t_1 = t_2 = t_3$

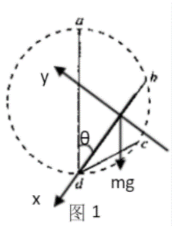


图 1

追击相遇问题

速度相同时用位移判断能否追上，用位移时间关系找到相遇时间

速度分解问题

此类问题的核心是找到实际运动，通过分解求解（沿杆、沿绳方向速度相同）

牛顿定律

（1）变质量系统的速度与加速度

例 13 如图所示，一辆总质量为m_0的装满沙子的小车，车下有一可调节的小孔，当小孔打开时，沙子从小孔中竖直漏出，设每秒均匀漏出沙子的质量为$\vartriangle m$，当小车在水平恒力$\mathbf{F}$作用下，在水平地面上由静止开始运动时，沙子也同时开始从小孔漏出，忽略小车行进过程中的摩擦，试求t时刻小车速度和加速度的值

分析：沙子漏出，小车在运动过程中质量是变化的，因为小车在水平方向上受到的恒力$\mathbf{F}$是已知的，所以可以利用动量定理的微分形式，建立小车运动速度和时间之间的微分关系，求解微分关系，就可以得到任意时刻小车速度和加速度的值

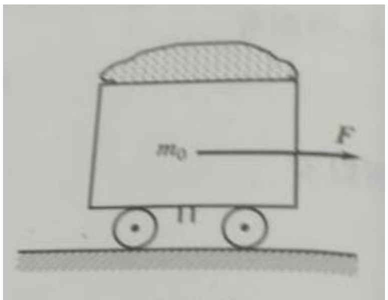


图 2-4

解：设t时刻小车的质量为

$$m(t) = m_0 - t\vartriangle m$$

小车的速度为$v(t)$，$t+dt$时刻小车的质量为

$$m(t+dt) = m(t) - dm$$

小车的速度为

$$v(t+dt) = v(t) + dv$$

动量定理列出水平方向的方程

$$Fdt = \left[m(t) - dm\right](v+dv) + dmv - m(t)v$$

略去二阶小量

$$Fdt = m(t)dv = (m_0 - t\vartriangle m)dv$$

$$\int_0^t \frac{F}{m_0 - t\vartriangle m}dt = \int_0^v dv$$

$$v = \frac{F}{\vartriangle m}\ln\frac{m_0}{m_0 - \vartriangle mt}$$

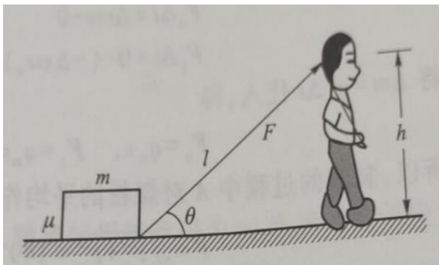
小车的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m_0 - \vartriangle mt}$$

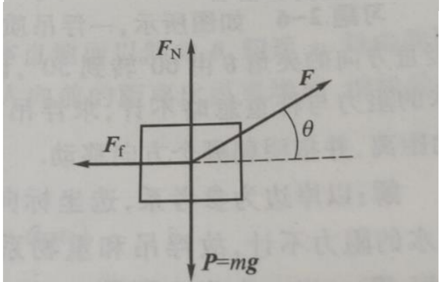
受力分析与静力平衡

例 14 如图所示，一人在平地上拉一个质量为m的木箱均匀的前进，木箱与地面的摩擦因数$\mu = 0.6$，设此人前进时，肩上绳的支撑点距地面高度为$h = 1.5$m，问绳长l为多长时最省力？

解：设绳子与水平方向的夹角为θ，则$\sin\theta = h/l$，木箱受力如图所示，匀速前进时，拉力为F，根据牛顿第二定律有



题 2-4 图



题 2-4 解图

$$F\cos\theta - F_f = 0$$

$$F\sin\theta + F_N - mg = 0$$

$$F_f = \mu F_N$$

得

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

令

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{\mu mg(-\sin\theta + \mu\cos\theta)}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2} = 0$$

所以

$$\tan\theta = \mu = 0.6, \theta = 30^o 57'36"$$

且

$$\frac{d^2F}{d\theta^2} > 0$$

故

$$l = h/\sin\theta = 2.92$$

此时最省力

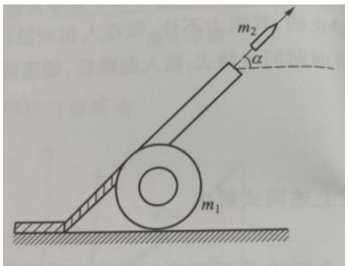
动量定理

例 14 如图所示，水平地面上一辆静止的炮车发射炮弹，跑车的质量为m_1，炮身仰角为α，炮弹质量为m_2，炮弹刚出口时，相对于炮身的速度为u，不记地面摩擦

（1） 求炮弹刚出口时，炮车的反冲速度大小

（2） 若炮筒长为l，求发炮过程中炮车移动的距离

解：（1）以炮弹与炮车为系统，以地面为参考系，水平方向动量守恒，设炮车相对地面的速率为v_{1x}，则有



题 2-9 图

$$m_1 v_{1x} + m_2(u\cos\alpha + v_{1x}) = 0$$

$$v_{1x} = -\frac{m_2 u\cos\alpha}{m_1 + m_2}$$

即炮车向后退。

（2）以$u(t)$表示发炮过程中任意时刻炮弹相对炮身的速度，则该瞬时炮车的速度应为

$$v_{1x}(t) = -\frac{m_2 u(t)\cos\alpha}{m_1 + m_2}$$

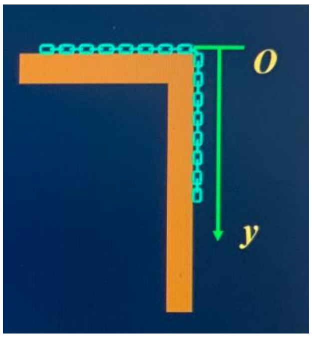
积分求炮车后退距离：

$$\triangle x = \int_0^t v_{1x}(t)dt = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\int_0^t u(t)\cos\alpha dt = -\frac{m_2 l\cos\alpha}{m_1+m_2}$$

即向后退了$\dfrac{m_2 l\cos\alpha}{m_1+m_2}$的距离。

注：第一问是人跳船问题的变题，人跳船时，人相对地面的速度$v_{人}$与船相对地面的速度$v_{船}$满足$m_{人}\mathbf{v}_{人} + m_{船}\mathbf{v}_{船} = m_{人}\mathbf{v}_{人\mathbf{0}} + m_{船}\mathbf{v}_{船\mathbf{0}}$；但人跳船时，人的起跳速度是相对船而言的，并不是相对地面的速度。第二问是经典的人船模型。

例 15 长为l的均质链条，部分置于水平面上另一部分自然下垂，已知链条与水平面间的静摩擦因数为μ_0，滑动摩擦因数为μ



求：（1）满足什么条件时，链条将开始滑动

（2）若下垂部分长度为b时，链条自静止开始滑动，当链条末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？

解：（1）以链条的水平部分为研究对象，设链条的每单位长度的质量为ρ，沿铅垂向下取Oy轴。

设链条下落长度$y=b_0$时，处于临界状态

$$\rho b_0 g-\mu_0\rho(l-b_0)g=0$$

解得：

$$b_0=\frac{\mu_0}{1+\mu_0}l$$

当$y>b_0$，拉力大于最大静摩擦力时，链条将开始滑动。

（2）以整个链条为研究对象，链条在运动过程中各部分之间相互作用的内力的功之和为零

重力的功

$$A=\int_b^l \rho ygdy=\frac{1}{2}\rho g(l^2-b^2)$$

摩擦力做的功

$$A'=-\int_b^l \mu\rho(l-y)gdy=-\frac{1}{2}\mu\rho g(l-b)^2$$

根据动能定理有：

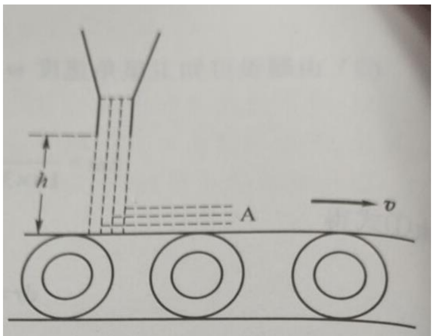
$$\frac{1}{2}\rho g(l^2-b^2)-\frac{1}{2}\mu\rho g(l-b)^2=\frac{1}{2}\rho lv^2-0$$

解得

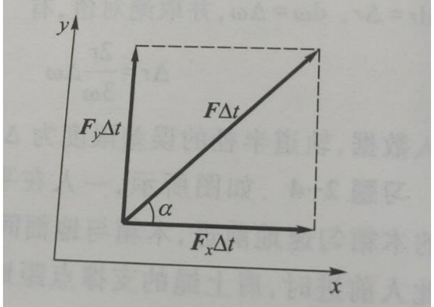
$$v=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-b^2)-\frac{\mu g}{l}(l-b)^2}$$

动量定理的应用

例 16 如图所示，用传送带 A 输送煤粉，料斗口在 A 上方高 $h=0.5$ m 处，煤粉自料斗口自由落在 A 上，设料斗口连续卸煤的流量为 $q_m = 40kg/s, A$ 以 $v = 2.0\ m/s$ 的水平速度匀速向右运动，如果不考虑相对传送带静止的煤粉质量，求装煤过程中煤粉对 A 的作用力的大小和方向。



题 2-5 图



题 2-5 解图

解: 煤粉自料斗口下落，接触传送带前具有竖直向下的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

设煤粉与 A 相互作用的 Δt 时间内，落于传送带上的煤粉质量为

$$\Delta m = q_m \Delta t$$

设 A 对煤粉的平均作用力为 F，如图所示，由动量定理，写出分量式为

$$F_x \Delta t = \Delta m v - 0$$
$$F_y \Delta t = 0 - (-\Delta m v_0)$$

将 $\Delta m = q_m \Delta t$ 代入，得

$$F_x = q_m v, F_y = q_m v_0$$

所以，装煤过程中 A 对煤粉的平均作用力大小为

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = 149N$$

F 与 x 轴正向的夹角为

$$\alpha = \arctan(F_x / F_y) = 57.4^o$$

由牛顿第三定律可知，煤粉对 A 的作用力 $F' = F = 149N$，方向与图中 F 相反。

彭康学导团持续招募中，搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描下方二维码，关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。

彭小招1.0

群号：647383944

PKSTU 微信公众号