

第六章 数字滤波器的基本原理 与特性

回顾:

- ① 任意离散时间序列都可以用单位采样序列的加权的表征
- ② 离散时间系统
- ③ 线性时不变系统的单位采样响应 $h(n)$
- ④ 因果性与稳定性
- ⑤ 任何离散线性时不变系统都可以用常系数差分方程来表征

⑥ 离散线性时不变系统的 $h(n)$

有限长冲激响应 FIR

无限长冲激响应 IIR

⑦ 利用差分方程导出系统函数 $H(z)$

$H(e^{j\omega})$

□ 离散线性移不变系统的单位抽样响应

LTI系统可由其冲激响应 $h(n)$ 完全刻画

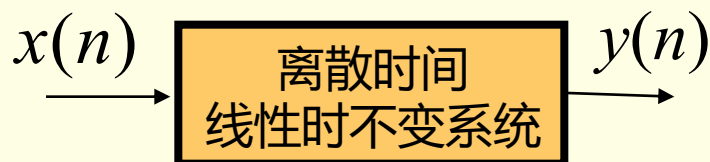
$$\begin{aligned} y(n) &= T \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m) \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) T\{\delta(n-m)\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) = x(n) * h(n) \end{aligned}$$

对于因果系统

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) h(n-m) = x(n) * h(n)$$

□ 差分方程与系统函数

- 线性常系数差分方程表示的离散LTI系统



$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M \frac{a_k}{b_0} x(n-k) - \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{b_0} y(n-k), \quad b_0 \neq 0$$

- 线性常系数差分方程表示的离散LTI系统具有 z^{-1} 的有理函数形式的系统函数

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

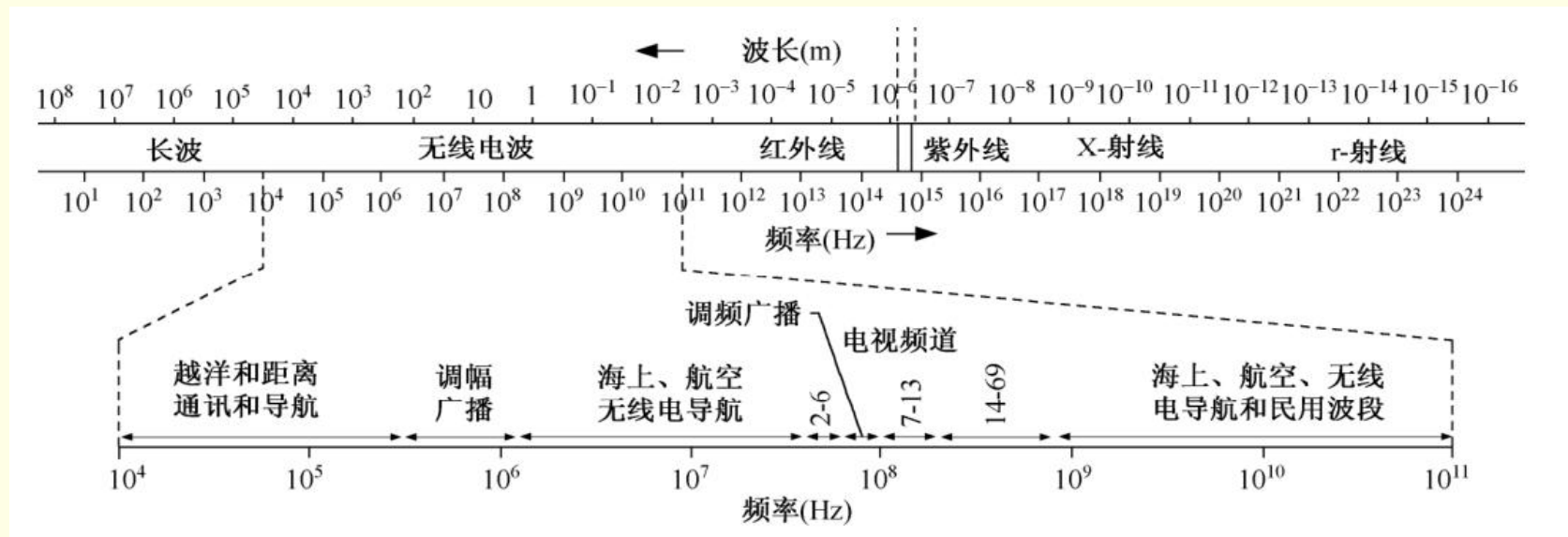
□ 频率响应

- 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 定义为系统对复指数输入信号（特征函数） $e^{j\omega n}$ 的复增益（特征值）；
- 若系统的傅里叶变换存在

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i e^{-j\omega i}}{\sum_{k=0}^N b_k e^{-j\omega k}}$$

数字滤波器的频率响应是由 z 平面中单位圆上的系统函数值确定的。

第六章 数字滤波器的基本原理 与特性



名称	符号	频率	波段	波长	主要用途
甚低频	VLF	3-30KHz	超长波	1000Km-100Km	海岸潜艇通信；远距离通信；超远距离导航
低频	LF	30-300KHz	长波	10Km-1Km	越洋通信；中距离通信；地下岩层通信；远距离导航
中频	MF	0.3-3MHz	中波	1Km-100m	船用通信；业余无线电通信；移动通信；中距离导航
高频	HF	3-30MHz	短波	100m-10m	远距离短波通信；国际定点通信；移动通信
甚高频	VHF	30-300MHz	米波	10m-1m	电离层散射；流星余迹通信；人造电离层通信；对空间飞行体通信；移动通信
超高频	UHF	0.3-3GHz	分米波	1m-0.1m	小容量微波中继通信；对流层散射通信；中容量微波通信；移动通信
特高频	SHF	3-30GHz	厘米波	10cm-1cm	大容量微波中继通信；大容量微波中继通信；数字通信；卫星通信；国际海事卫星通信
极高频	EHF	30-300GHz	毫米波	10mm-1mm	再入大气层时的通信；波导通信

- 数字滤波器指输入输出均为数字信号，通过一定运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。

优点：

- 高精度、稳定、体积小、重量轻、灵活，不要求阻抗匹配，可实现特殊滤波功能

6.1 数字滤波器的基本原理

6.1.1 滤波器的基本类型与指标

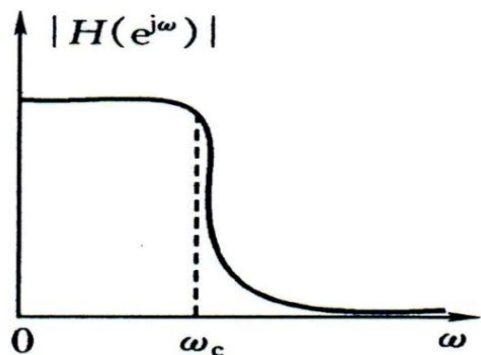
1、数字滤波器的分类

经典滤波器：选频滤波器

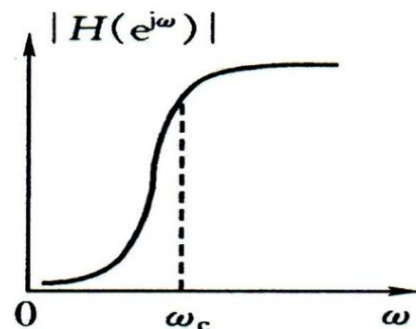
现代滤波器：维纳滤波器、卡尔曼滤波器 自适应滤波器等

选频滤波器按功能分：

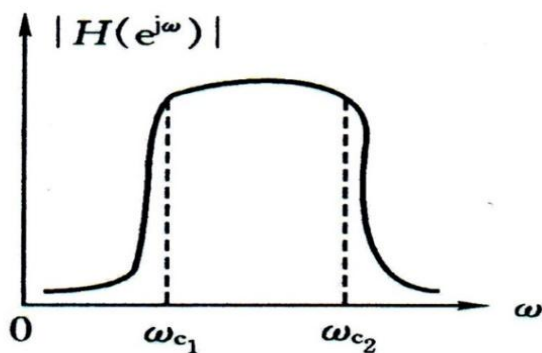
低通、高通、带通、带阻、全通 滤波器



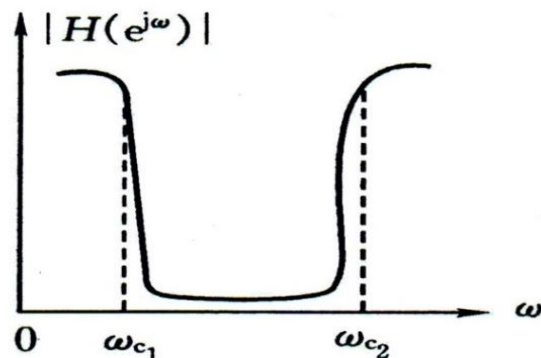
(a) 低通



(b) 高通

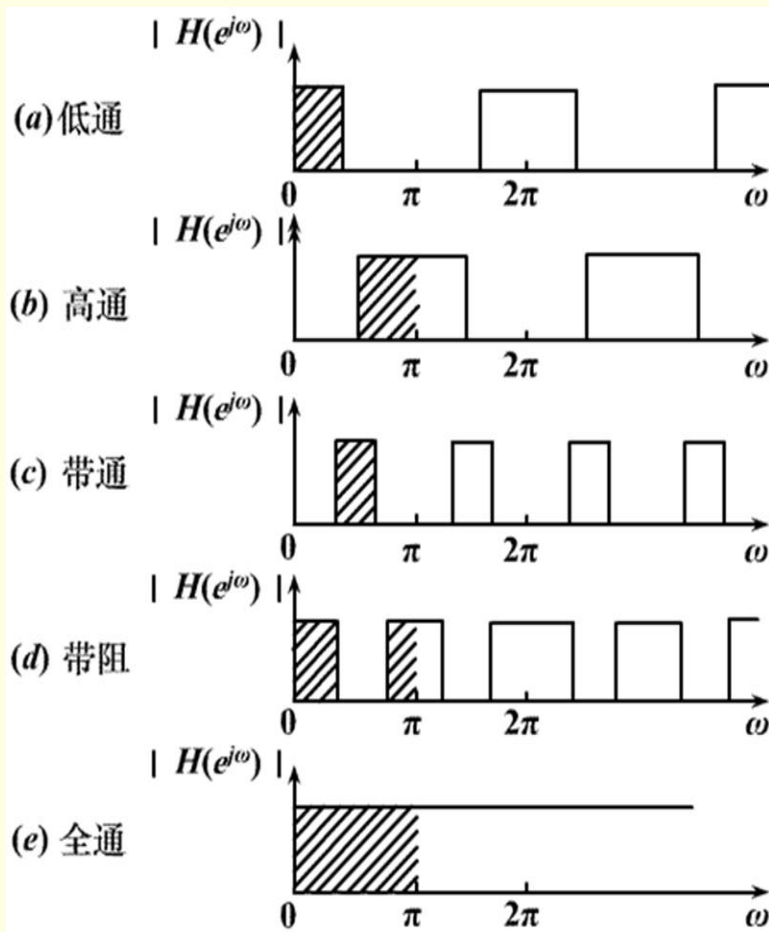


(c) 带通



(d) 带阻

图 6.1 滤波器的四种类型



其特点为：

(1) 频率变量以数字频率 ω 表示；

$$\omega = \Omega T$$

(Ω 为模拟角频率, T 为抽样时间间隔)

(2) 以数字抽样频率

$$\omega_s = 2\pi f_s \times T = 2\pi$$

为周期；

(3) 频率特性只限于

$$0 \leq |\omega| \leq \omega_s/2 = \pi$$

范围，这是因为依取样定理，实际频率特性只能为抽样频率的一半。

2.数字滤波器的技术要求

□ 选频滤波器的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\beta(j\omega)}$$

- $|H(e^{j\omega})|$ 为幅频特性：表示信号通过该滤波器后各频率成分的衰减情况
- $\beta(j\omega)$ 为相频特性：反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况

理想滤波器不可实现，只能以实际滤波器逼近

通带

$$0 \leq \omega \leq \omega_c$$

$$1 - \alpha_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1$$

阻带

$$\omega_r \leq \omega \leq \pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \alpha_2$$

过渡带

$$\omega_c \leq \omega \leq \omega_r$$

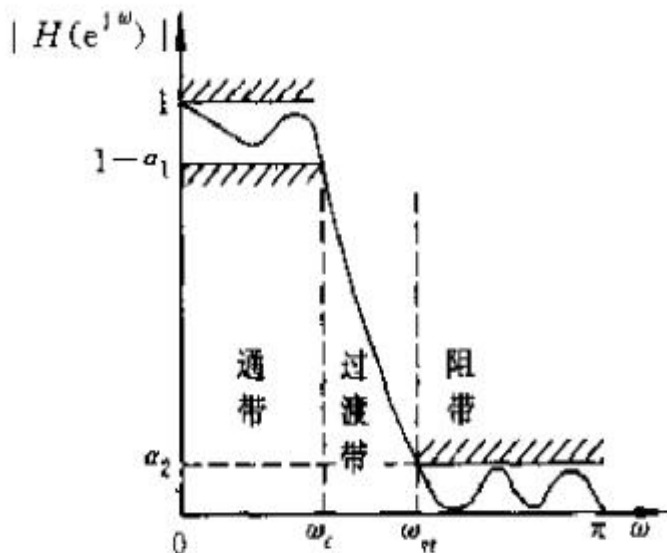


图 6-1 理想低通滤波器逼近的误差容限

ω_c : 通带截止频率

ω_r : 阻带截止频率

α_1 : 通带容限

α_2 : 阻带容限

□ 通带最大衰减:

$$\delta_1 = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_c})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_c})| = -20\lg(1 - \alpha_1)$$

□ 阻带最小衰减:

$$\delta_2 = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_{st}})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_{st}})| = -20\lg \alpha_2$$

■ 其中: $|H(e^{j0})| = 1$

当 $|H(e^{j\omega_c})| = \sqrt{2}/2 = 0.707$ 时, $\delta_1 = 3dB$

称 ω_c 为3dB通带截止频率

6.1.2 滤波器的基本方程与分类

□ 滤波器的基本方程

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

$x(n)$ 和 $y(n)$
是滤波器的输入与输出序列,
 a_k 和 b_k 是滤波器系数

□ 滤波器的分类 — 递归与非递归

线性常系数差分方程表达 $y[n] = \sum_{i=0}^M a_i x[n-i] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k]$ (IIR)

当系数 b_k 全部为零时, 滤波器为**非递归**的

$$y[n] = \sum_{i=0}^M a_i x[n-i] \quad \text{(FIR)} \quad \text{MA滤波器}$$

当系数 b_k 不是全部为零时, 滤波器为**递归**的

$$y[n] = x[n] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \quad \text{或} \quad y[n] = \sum_{i=0}^M a_i x[n-i] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k]$$

AR滤波器 **ARMA滤波器**

滤波器的系统函数与冲激响应

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

$(z = e^{j\omega})$

6.2 数字滤波器的基本特性

6.2.1 FIR滤波器的基本特性与类型

$h(n)$ 是FIR滤波器的单位脉冲响应，长度为 N ，则其系统函数为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

- 收敛域包括单位圆；
 - z 平面上有 $N-1$ 个零点；
 - $z=0$ 是 $N-1$ 阶极点；
- (展开级数可以说明)

特点：FIR滤波器的单位冲激响应是有限长的，因此是稳定和容易实现**线性相位**。

1、线性相位与广义线性相位

对于长度为 N 的 $h(n)$ 系统函数为：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$H(\omega)$ 称为幅频函数， $\theta(\omega)$ 称为相频函数

$$\theta(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[H(e^{j\omega})]}{\text{Re}[H(e^{j\omega})]} \right\}$$

注意：

- $H(\omega)$ 为 ω 的实函数，可能取负值；
- $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅度响应，总是正值；
- 相频特性与滤波器对输入信号产生的时延有密切关系

什么是线性相位

线性相位是指 $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数，产生的相移是一常数，即：

$$\theta(\omega) = -\omega\tau, \tau \text{ 为常数};$$

线性相位

(举例：理想延迟系统)

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \omega\tau, \theta_0 \text{ 是起始相位}$$

广义线性相位

定义：

相延迟： $-\frac{\theta(\omega)}{\omega}$ 群延迟： $-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$

注意：群延迟偏离某个常数的程度表明相位特性的非线性程度

线性相位与广义线性相位都满足群延迟是一个常数 $-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \tau$

设一离散时间系统的幅频特性为1，相频特性具有如下线性相位：

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

当信号 $x(n)$ 通过该系统后，输出 $y(n)$ 的频率特性

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\tau\omega} X(e^{j\omega}) \\ &= |X(e^{j\omega})| e^{j \arg[X(e^{j\omega})] - j\tau\omega} \end{aligned}$$

所以 $y(n) = x(n - \tau)$

输出 $y(n)$ 等于输入时间上的位移。

2、相位与h(n)的对称性

(1) 线性相位 $\theta(\omega) = -\omega\tau$ 对应h(n)的偶对称

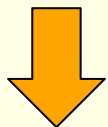
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{-j\omega\tau} = H(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

$$H(\omega)\cos(\omega\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)$$

$$H(\omega)\sin(\omega\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)$$

$$\tan(\omega\tau) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega\tau)\cos(\omega n) - \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega\tau)\sin(\omega n) = 0$$



(应用三角函数的恒等关系)

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[(\tau - n)\omega] = 0$$

**$h(n)$ 是以 $(N-1)/2$ 偶对称实序列，
即： $h(n) = h(N-1-n)$**

$h(n)$ 是以 $(N-1)/2$ 的偶对称实序列，即： $h(n) = h(N-1-n)$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(\tau - n)] = 0$$

线性相位的条件
$$\begin{cases} \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$h(n)$ 的长度 N 又可分奇偶数

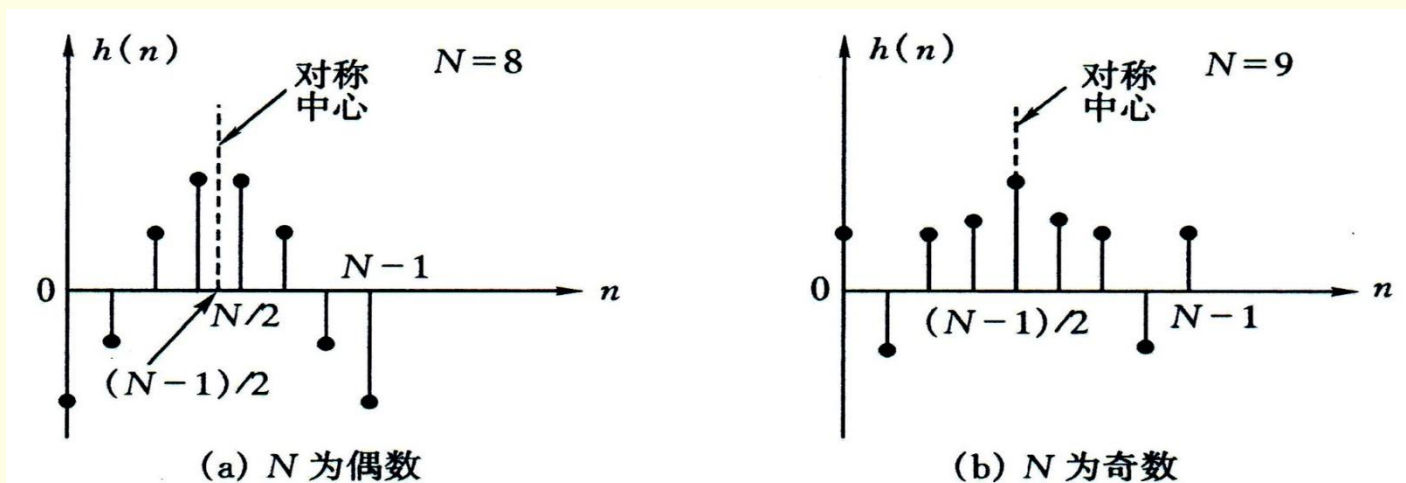


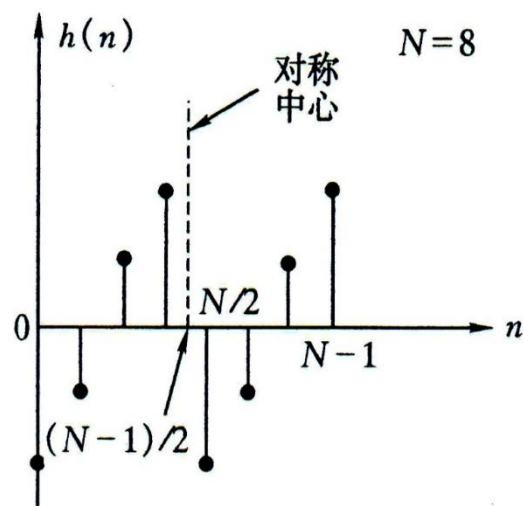
图 6.4 $h(n)$ 偶对称时的冲激响应

(2) 广义线性相位 $\theta(\omega) = \theta_0 - \omega\tau$ 对应 $h(n)$ 的奇对称

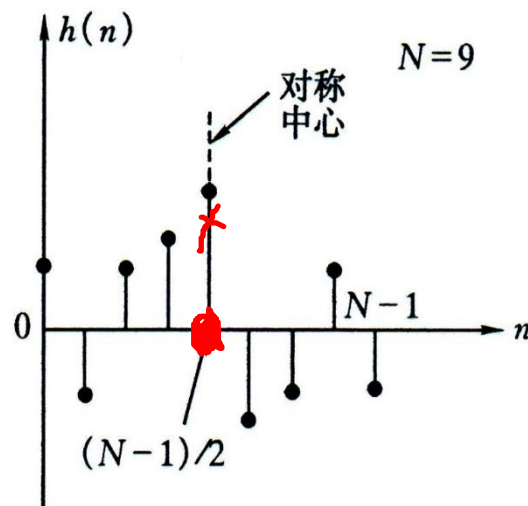
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)} = H(\omega)e^{j(\theta_0 - \omega\tau)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos[\omega(n - \tau)] = 0$$

$h(n)$ 是以 $(N-1)/2$ 奇对称实序列，
即： $h(n) = -h(N-1-n)$



(a) N 为偶数



(b) N 为奇数

图 6.5 $h(n)$ 奇对称时的冲激响应

广义线性相位的条件：

$$\begin{cases} \tau = \frac{N-1}{2} \\ \theta_0 = \pm \frac{\pi}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n) \end{cases}$$

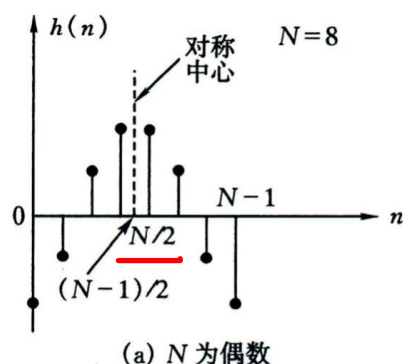
小结：FIR滤波器是线性相位的充分必要条件：

$h(n)$ 为实数序列且 $h(n) = \pm h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$

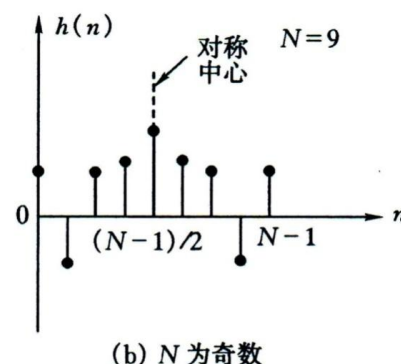
线性相位FIR滤波器 $h(n)$ 的四种时域特性

2、偶对称

N 为偶数



(a) N 为偶数



(b) N 为奇数

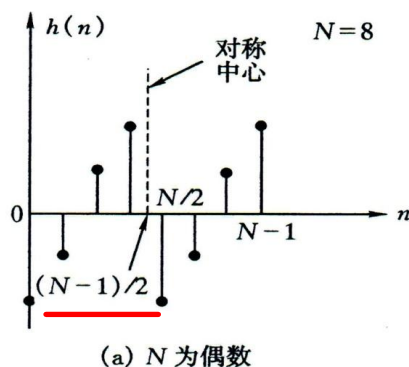
图 6.4 $h(n)$ 偶对称时的冲激响应

1、偶对称

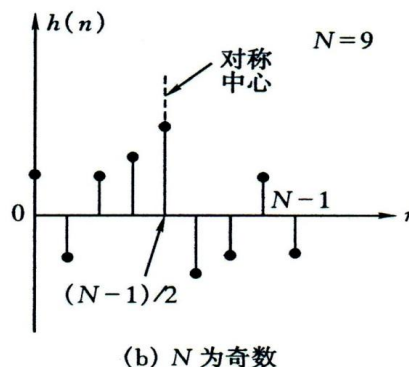
N 为奇数

4、奇对称

N 为偶数



(a) N 为偶数



(b) N 为奇数

图 6.5 $h(n)$ 奇对称时的冲激响应

3、奇对称

N 为奇数

由频率响应函数的级数展开
推导 $h(n)$ 分别在偶对称和奇对称
时的幅频函数 $H(\omega)$

线性相位一般形式

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j(\alpha+\beta\omega)}$$

FIR滤波器的系统函数为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

引入 $e^{-j\omega M}$

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{e^{-j\omega M}}_{\text{引入}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{j\omega(M-n)}$$

将上式右边的级数展开：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M} [& h(0)e^{j\omega M} + h(1)e^{j\omega(M-1)} + h(2)e^{j\omega(M-2)} + \dots \\ & + h(N-2)e^{j\omega(M-N+2)} + h(N-1)e^{j\omega(M-N+1)} \end{aligned}$$

注意：令 $M = \frac{N-1}{2}$

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[h(0)e^{j\omega \frac{N-1}{2}} + h(1)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-1)} + h(2)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-2)} + \right. \\
 &\quad \left. \cdots + h(N-2)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-N+2)} + h(N-1)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-N+1)} \right] \\
 &\quad \left(-(\frac{N-1}{2}-1) \right) \quad \left(-\frac{N-1}{2} \right) \\
 &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[\underbrace{h(0)e^{j\omega \frac{N-1}{2}}}_{\text{red circle}} + h(1)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-1)} + h(2)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-2)} + \right. \\
 &\quad \left. \cdots + h(N-2)e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-1)} + \underbrace{h(N-1)e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}}_{\text{red circle}} \right]
 \end{aligned}$$

利用复数 $e^{j\omega \frac{N-1}{2}} = \cos(\omega \frac{N-1}{2}) + j\sin(\omega \frac{N-1}{2})$, $e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} = \cos(\omega \frac{N-1}{2}) - j\sin(\omega \frac{N-1}{2})$

合并同类项

$$\begin{aligned}
 &\downarrow \\
 &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left\{ \underbrace{[h(0) + h(N-1)]}_{\text{red underline}} \cos\left(\omega \frac{N-1}{2}\right) + j[h(0) - h(N-1)] \sin\left(\omega \frac{N-1}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. [h(1) + h(N-2)] \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-1\right)\right] + j[h(1) - h(N-2)] \sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-1\right)\right] + \cdots \right\} \\
 &H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j(\alpha+\beta\omega)} = H(\omega)e^{j\alpha}e^{j\beta\omega}
 \end{aligned}$$

偶对称情况:

$$e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ [h(0) + h(N-1)] \cos\left(\omega\frac{N-1}{2}\right) + j[h(0) - h(N-1)] \sin\left(\omega\frac{N-1}{2}\right) + \right. \\ \left. [h(1) + h(N-2)] \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - 1\right)\right] + j[h(1) - h(N-2)] \sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - 1\right)\right] + \dots \right\}$$

将上式与频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 比较:

$$e^{j\beta\omega} = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{j(\alpha + \beta\omega)} = H(\omega) e^{j\alpha} e^{j\beta\omega} \quad (\text{讨论})$$

要使 $H(\omega)$ 是实数 $\alpha = 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$, 当 $\alpha = 0$ 时, 上式的虚数部分:

$j[h(1) - h(N-1)]$ 、 $j[h(1) - h(N-2)] + \dots$ 为零, 即 $h(1) = h(N-1)$ 、 $h(1) = h(N-2)$, \dots 由此推得:

$$\underline{h(n) = h(N-1-n)}$$

得到

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{-j\omega M}, \quad M = \frac{N-1}{2}$$

(讨论 N 分别为奇数和偶数时的幅频函数)

$h(n)$ 为偶对称的FIR滤波器的幅频函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(N-n-1)z^{-n} = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-m-1)}$$

令： $N-1-n=m$, 则有

$$= z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m = z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1)} z^n] = z^{-\frac{(N-1)}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{1}{2} \left[z^{-n+\frac{N-1}{2}} + z^{n-\frac{N-1}{2}} \right] \right]$$

将 $z = e^{j\omega}$ 代入上式，得到：

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

$$\theta(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega$$

相频函数

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

幅频函数

$h(n)$ 为奇对称的FIR滤波器的幅频函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = -\sum_{n=0}^{N-1} h(N-n-1)z^{-n} = -\sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-m-1)}$$

$$= -z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m = -z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} - z^{-(N-1)} z^n] = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \frac{1}{2} [z^{-n+\frac{N-1}{2}} - z^{n-\frac{N-1}{2}}]$$

将 $z=e^{j\omega}$ 代入上式, 得到:

$$H(e^{j\omega}) = -je^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n - \frac{N-1}{2})]$$

幅频函数 $H(\omega)$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(\frac{N-1}{2} - n)]$$

相频函数

$$\theta(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega + \frac{\pi}{2}$$

3 线性相位FIR滤波器幅频函数的四种类型

(1) I型 $h(n)=h(N-n-1)$, N 为奇数

由前面推导的幅度函数 $H(\omega)$ 为:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

特点:

- $h(n)$ 对 $(N-1)/2$ 偶对称, 余弦项也对 $(N-1)/2$ 偶对称;
- 以 $(N-1)/2$ 为中心, 把两两相等的项进行合并, 因 N 为奇数, 余下中间项 $n=(N-1)/2$

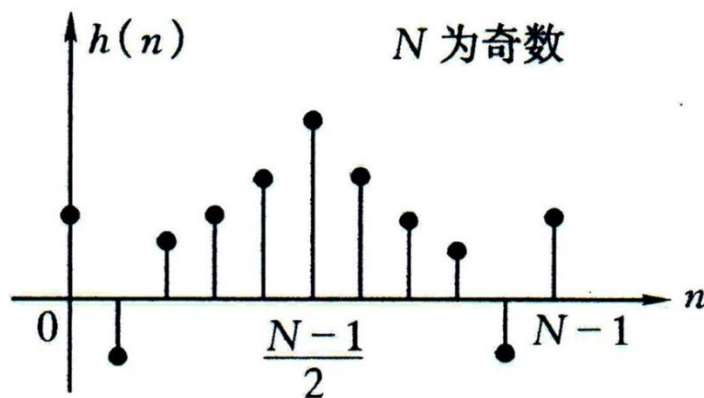
$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

$$\text{令 } m = \frac{N-1}{2} - n$$

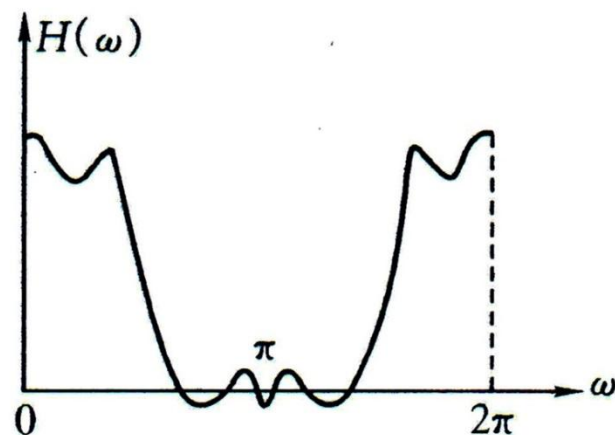
$$= h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{(N-1)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos \omega n$$

$$= \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos \omega n$$

其中 $a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$, $a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), n = 1, 2, 3, \dots, \frac{N-1}{2}$



(a) 单位冲激响应



(b) 幅频特性

图 6.6 $h(n)$ 偶对称 N 为奇数时 FIR 滤波器的特性

幅频函数特点：

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos \omega n$$

- (1) 式中 $\cos \omega n$ 项对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 皆为偶对称，则幅度特性对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 是偶对称的。
- (2) 可实现所有滤波特性（低通、高通、带通、带阻）。

(2) II型 $h(n)=h(N-n-1)$, N 为偶数

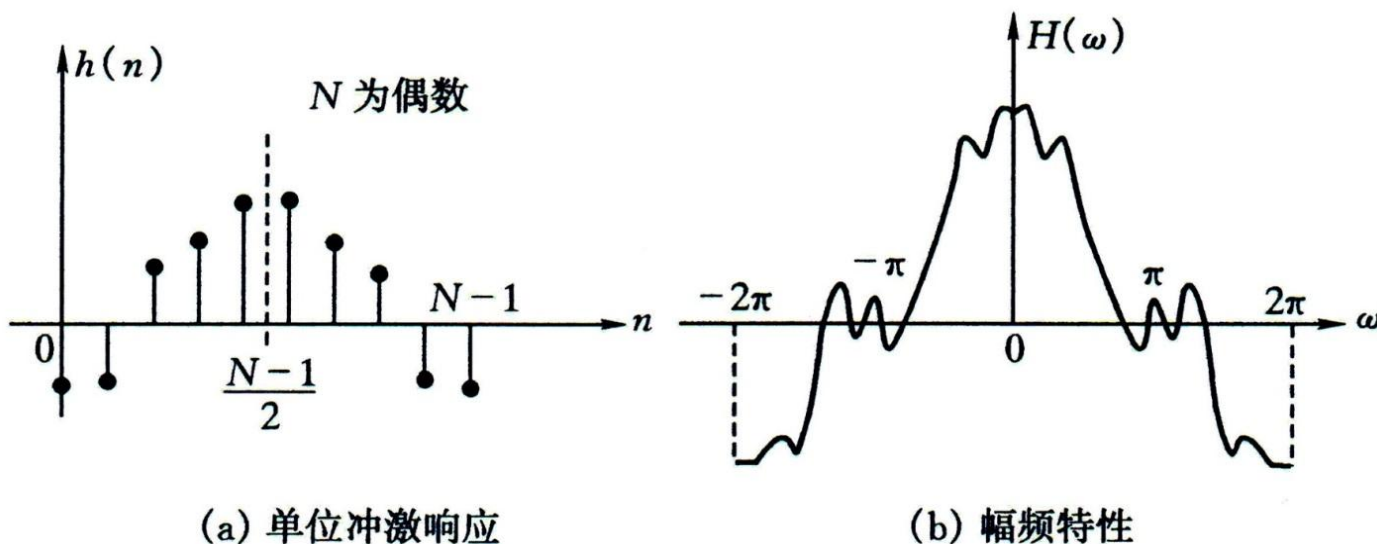
推导情况和前面 N 为奇数类似，不同点是由于 N 为偶数，相等的项合并成 $N/2$ 项。

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right]$$

$$\begin{aligned} \text{令 } m &= \frac{N}{2} - n \\ &= \sum_{m=1}^{N/2} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \cos\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

其中：

$$= \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad \underline{b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}}$$

图 6.7 $h(n)$ 偶对称 N 为偶数时 FIR 滤波器的特性

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

幅频函数特点：

- (1) 由于 $\cos(\omega(n-1/2))$ 对 $\omega = \pi$ 奇对称，所以 $H(\omega)$ 在 $\omega = \pi$ 呈奇对称；
- (2) 当 $\omega = \pi$ 时， $\cos(\omega(n-1/2)) = 0$ ，故 $H(\pi) = 0$ ，即 $H(z)$ 在 $z = -1$ 处有一零点，因此这种情况不能用于设计 $\omega = \pi$ 时 $H(\omega) \neq 0$ 的滤波器，即不能实现高通、带阻滤波器。

(3) III型: $h(n) = -h(N-n-1)$, N 为奇数

由于 $h(n) = -h(N-n-1)$, 当 $n = \frac{N-1}{2}$ 时:

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right) = -h\left(N - \frac{N-1}{2} - 1\right) = -h\left(\frac{N-1}{2}\right) \Rightarrow h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

由前面推导的幅频函数可得:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right]$$

$$\text{令 } m = \frac{N-1}{2} - n \quad H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin \omega n \quad \theta(\omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\omega + \frac{\pi}{2}$$

其中:

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

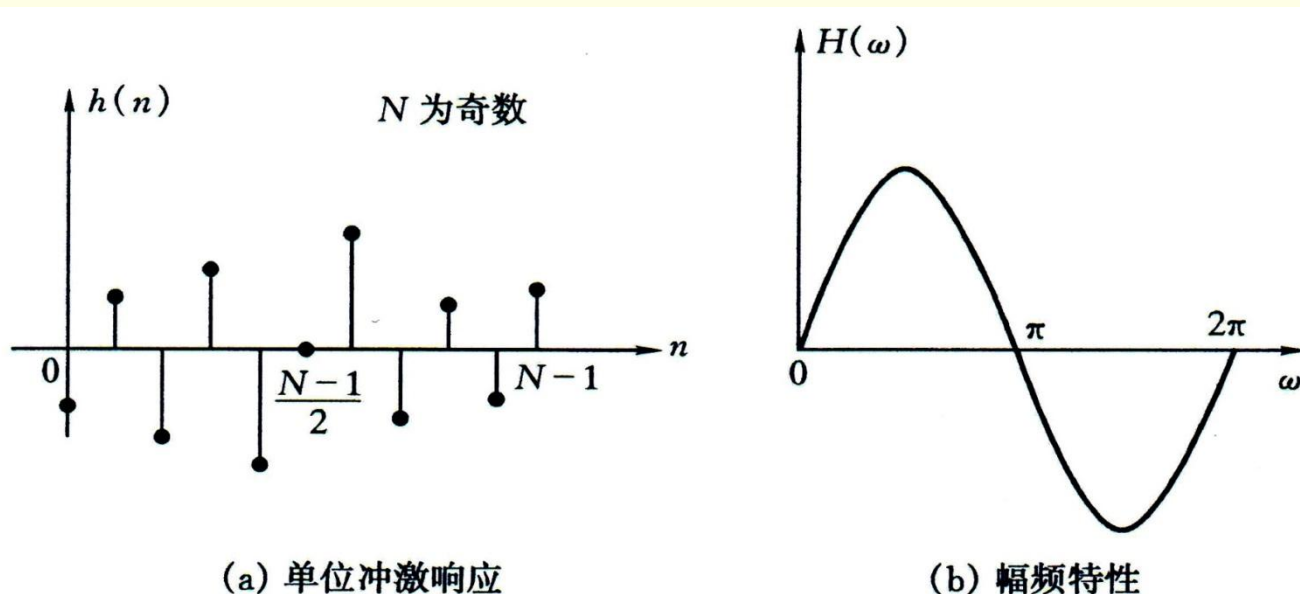


图 6.8 $h(n)$ 奇对称 N 为奇数时 FIR 滤波器的特性

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin \omega n$$

幅频函数特点：

- (1) 幅频函数 $H(\omega)$ 在 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称；
- (2) $H(\omega)$ 在 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 处值为 0，即 $H(z)$ 零点在 $z = \pm 1$ 处，不能用于 $H(0) \neq 0$ 和 $H(\pi) \neq 0$ 的滤波器设计，但可以实现带通滤波器。

4. IV型: $h(n) = -h(N-n-1)$, N 为偶数

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{m=1}^{N/2} 2h\left(\frac{N}{2} - m\right) \sin\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

其中:

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), n = 1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2}$$

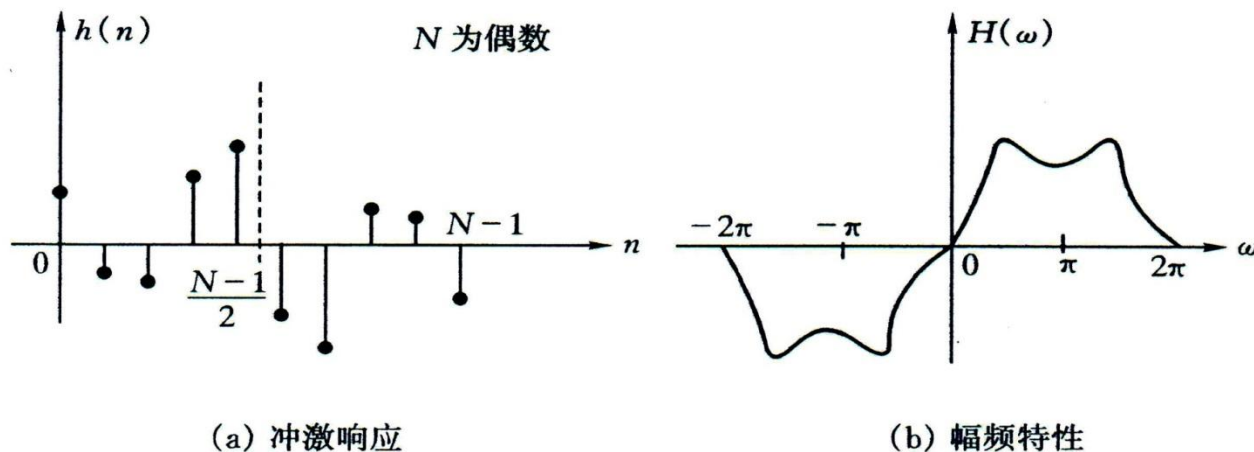


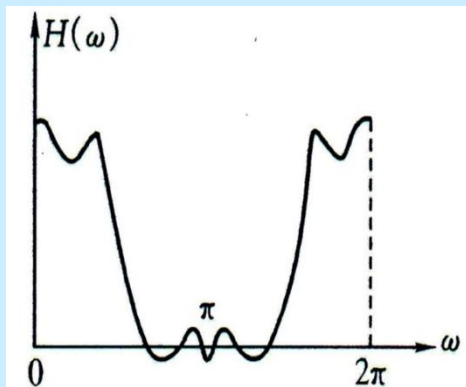
图 6.9 $h(n)$ 奇对称 N 为偶数时 FIR 滤波器的冲激响应特性

幅频函数特点：

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

(1) 由于 $\sin[\omega(n-1/2)]$ 在 $\omega=0$ 、 2π 处都为 0，因此 $H(\omega)$ 在 $\omega=0$ 、 2π 处也为 0，即 $H(z)$ 在 $z=1$ 处有零点；并对 $\omega=0, 2\pi$ 呈奇对称，故不能实现低通、带阻滤波器。

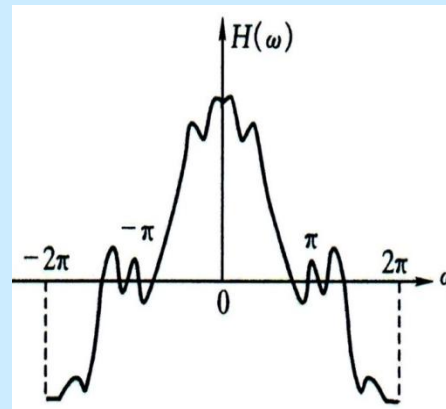
(2) 由于 $\sin[\omega(n-1/2)]$ 在 $\omega=0$ 、 2π 处都呈奇对称，对 $\omega=\pi$ 呈偶对称，故幅频函数 $H(\omega)$ 在 $\omega=0, 2\pi$ 也呈奇对称，在 $\omega=\pi$ 处呈偶对称。



$$H(\omega) = H(-\omega),$$

$\omega = 0$ 处
频率偶对称,
 $H(2\pi + \omega)$
 $= H(\omega)$ 周期 2π

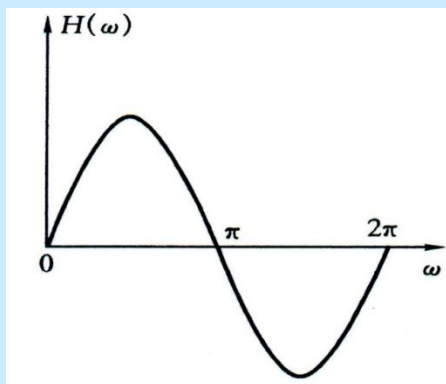
I型 $h(n)=h(N-n-1)$, N 为奇数



$$H(\omega) = H(-\omega),$$

$\omega = 0$ 处
频率偶对称,
 $H(\pi + \omega) =$
 $-H(\pi - \omega)$
 $\omega = \pi$ 处
频率奇对称,
 $H(4\pi + \omega)$
 $= H(\omega)$ 周期 4π

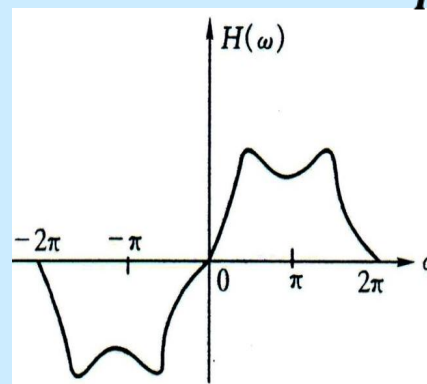
II型 $h(n)=h(N-n-1)$, N 为偶数



$$H(\omega) = -H(-\omega),$$

$\omega = 0$ 处
频率奇对称,
 $H(\pi + \omega) =$
 $-H(\pi - \omega)$
 $\omega = \pi$ 处
频率奇对称,
 $H(2\pi + \omega)$
 $= H(\omega)$ 周期 2π

III型 $h(n)=-h(N-n-1)$, N 为奇数



$$H(\omega) = -H(-\omega),$$

$\omega = 0$ 处
频率奇对称,
 $H(\pi + \omega) =$
 $-H(\pi - \omega)$
 $\omega = \pi$ 处
频率偶对称,
 $H(4\pi + \omega)$
 $= H(\omega)$ 周期 4π

IV型 $h(n)=-h(N-n-1)$, N 为偶数

小结：四种线性相位FIR 滤波器

I型： 偶、奇，四种滤波器都可设计。

II型： 偶、偶，可设计低、带通滤波器，不能设计高通和带阻。

III型： 奇、奇，只能设计带通滤波器，其它滤波器都不能设计。

IV型： 奇、偶，可设计高通、带通滤波器，不能设计低通和带阻。

4、FIR滤波器系统函数 $H(z)$ 的零点位置

$$h(n) = \pm h(N-n-1)$$

(讨论)



$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

表明：

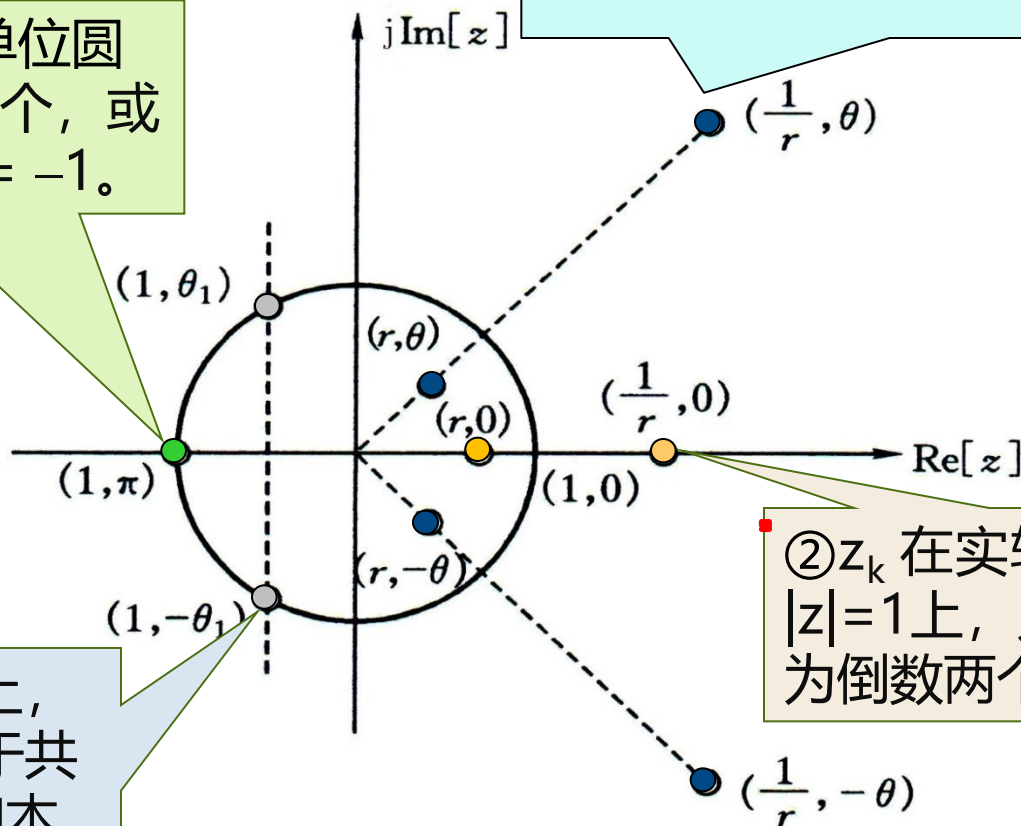
- 如果 $z = z_k$ 是 $H(z)$ 的零点，则 $z = z_k^{-1}$ 也是 $H(z)$ 的零点。
- 由于 $h(n)$ 为实序列，零点必定共轭成对。则 z_k^* 和 $(z = z_k^{-1})^*$ 也是 $H(z)$ 的零点；即 $H(z)$ 的零点必定互为倒数的共轭对。
- 所以线性相位滤波器的零点必须是互为倒数的共轭对，这种共轭对共有四种情况。

FIR滤波器的零点位置

④ z_k 在实轴上和单位圆上，则零点只有一个，或位于 $z=1$ 或位于 $z=-1$ 。

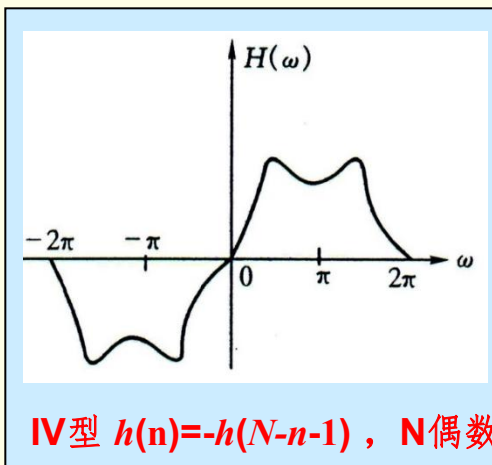
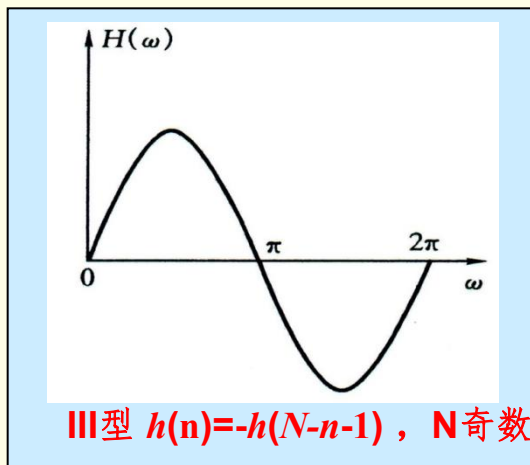
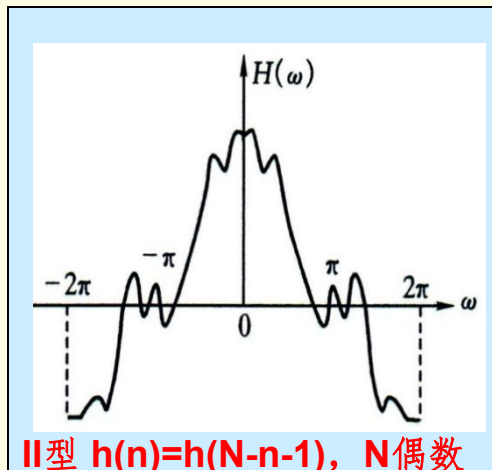
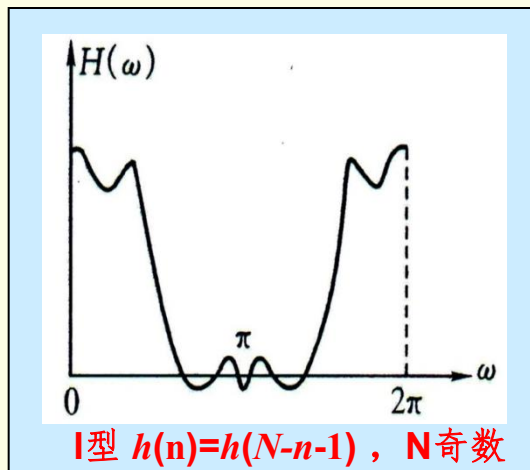
③ 当 z_k 不在实轴上，但在 $|z|=1$ 上，由于共轭对的倒数是它们本身，故此时零点是一组共轭对。

① z_k 既不在单位圆上，也不在实轴上，有四个互为倒数的两组共轭对。



② z_k 在实轴上，不在 $|z|=1$ 上，则零点是互为倒数两个实数零点。

$$H(z_k) = \pm z_k^{N-1} H(z_k^{-1}) = 0$$



我们从幅度响应的讨论中已经知道, 对于第二种FIR滤波器 ($h(n)$ 偶对称, N 为偶数), $H(\pi)=0$ 即 $z = e^{j\pi} = -1$ 是 $H(\omega)$ 的零点, 既在单位圆, 又在实轴, 所以, 必有单根; **不能设计高通和带阻。**

同样道理, 对于第三种FIR滤波器, $h(n)$ 奇对称, N 为奇数, 因 $H(0)=0, H(\pi)=0$ 所以 $z=1$, $z=-1$ 都是 $H(z)$ 的单根; **只能设计带通滤波器**

对于第四种滤波器, $h(n)$ 奇对称, N 为偶数, $H(0)=0$, 所以 $z=1$ 是 $H(z)$ 的单根。所以 $h(n)$ 奇对称 $\rightarrow H(0)=0$, N 为偶数 $\rightarrow H(\pi)=0$; **不能设计低通和带阻。**

例 $N=5$, $h(0) = h(1) = h(3) = h(4) = -1/2$, $h(2) = 2$, 求幅度函数 $H(\omega)$ 。

解： N 为奇数并且 $h(n)$ 满足偶对称关系，I 型线性相位 FIR 滤波器

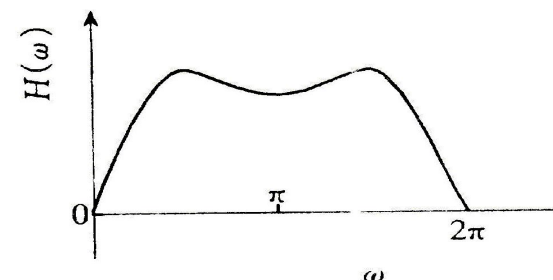
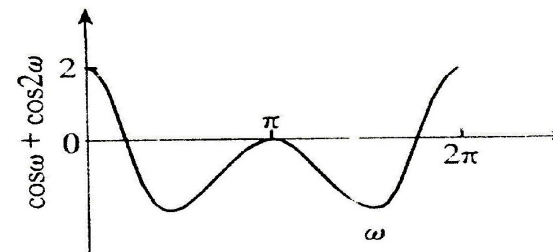
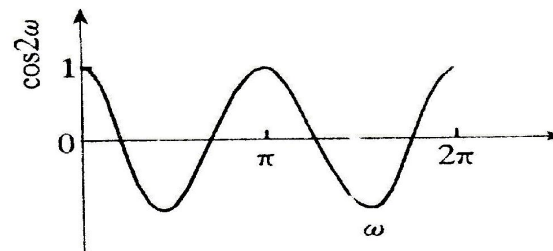
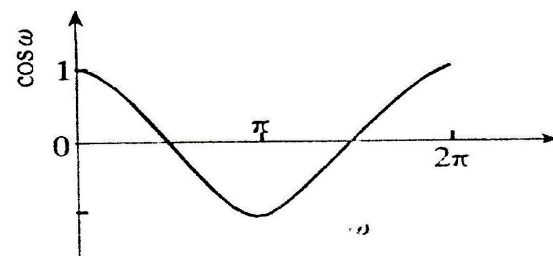
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos \omega n$$

$$a(0) = h(2) = 2$$

$$a(1) = 2h(3) = -1$$

$$a(2) = 2h(4) = -1$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= 2 - \cos\omega - \cos 2\omega \\ &= 2 - (\cos\omega + \cos 2\omega) \end{aligned}$$



6.2.2 IIR滤波器的基本特性

1. IIR滤波器的系统函数与极-零分布

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

$b_0 = 1$, 其余 $b_k \neq 0$, $a_M \neq 0$ $b_N \neq 0$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (z = e^{j\omega})$$

2. IIR滤波器的相位特性

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$
$$\theta(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[H(e^{j\omega})]}{\text{Re}[H(e^{j\omega})]} \right\}$$

$H(\omega)$ 称为幅频函数， $\theta(\omega)$ 称为相频函数，如果用相位函数和幅度函数 $|H(z)|$ 来表示滤波器的系统函数，即

$$H(z) = |H(z)|e^{j\theta(\omega)}$$

显然，还有 $H(z^{-1}) = |H(z^{-1})|e^{j\theta(\omega)}$

将 $z = e^{j\omega}$ 带入上面两式讨论（推导）。

$$H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\theta(e^{j\omega})} \quad \frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} = e^{2j\theta(e^{j\omega})}$$

$$\theta(\omega) = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} \right] = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(z)}{H(z^{-1})} \right]_{z=e^{j\omega}}$$

□ 相延迟响应:

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} = \frac{1}{2j\omega} \ln \left[\frac{H(z)}{H(z^{-1})} \right]_{z=e^{j\omega}}$$

■ 群延迟响应

相位对角频率的导数的负值

$$\begin{aligned}\tau_g(e^{j\omega}) &= -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \\ &= -\operatorname{Re}\left[z \frac{dH(z)}{dz} \frac{1}{H(z)}\right]_{z=e^{j\omega}}\end{aligned}$$

若滤波器通带内 $\tau(e^{j\omega}) = \text{常数}$ ，则为线性相位滤波器

3、全通系统

对所有 ω , 满足: $|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$

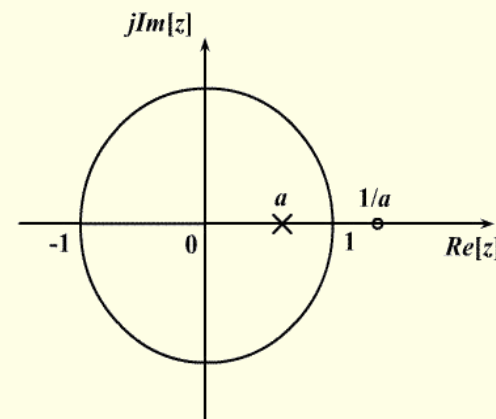
称该系统为全通系统

□ 一阶全通系统:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad a \text{ 为实数}$$

$$0 < |a| < 1$$

极点: $z = a$ 零点: $z = 1/a$

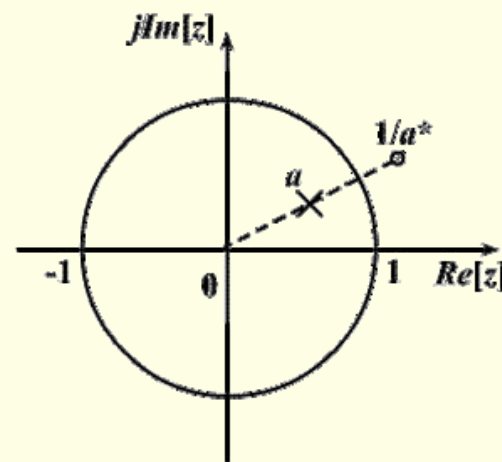


a 为实数, $0 < a < 1$ 时, 一阶全通系统的零点-极点位置

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad a \text{ 为复数}$$

$$0 < |a| < 1$$

极点: $z = a$ 零点: $z = 1/a^*$



a 为复数, $0 < |a| < 1$ 时, 一阶全通节的零点-极点位置

零极点以单位圆为镜像对称

□ 实系数二阶全通系统

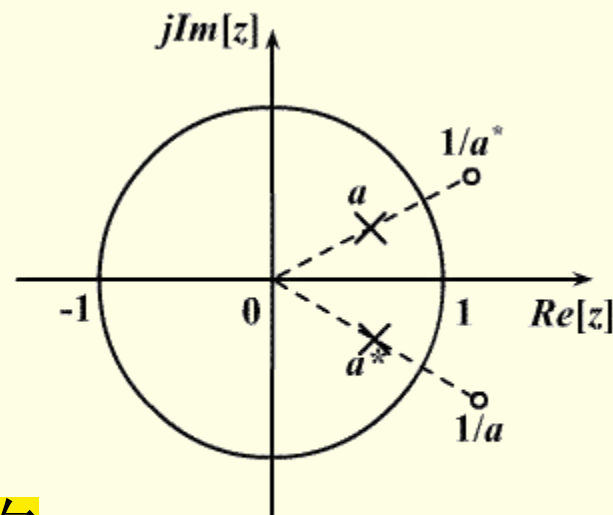
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - a}{1 - a^* z^{-1}} \quad |a| < 1$$

极点： $z = a, a^*$

零点： $z = 1/a^*, 1/a$

两个零点（极点）共轭对称

零点与极点以单位圆为镜像对称



二阶全通系统的零点-极点位置

□ N 阶数字全通滤波器

$$\begin{aligned} H(z) &= \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \\ &= \pm \frac{d_N + d_{N-1}z^{-1} + \dots + d_1 z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N-1} z^{-(N-1)} + d_N z^{-N}} \\ &= \pm \frac{z^{-N} D(z^{-1})}{D(z)} \end{aligned}$$

极点: $D(z)$ 的根 $z_p = r e^{\pm j\omega} \quad r < 1$

零点: $D(z^{-1})$ 的根 $z_o = \frac{1}{r} e^{\pm j\omega} \quad r < 1$

□ 全通系统的应用

- 1) 任一因果稳定系统 $H(z)$ 都可以表示成全通系统 $H_{ap}(z)$ 和最小相位系统 $H_{min}(z)$ 的级联

$$H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z)$$

令： $H(z) = H_1(z)(z^{-1} - z_0)(z^{-1} - z_0^*)$

其中： $H_1(z)$ 为最小相位延时系统，

$1/z_0, 1/z_0^*, |z_0| < 1$ 为单位圆外的一对共轭零点

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z) (z^{-1} - z_0) (z^{-1} - z_0^*) \frac{1 - z_0^* z^{-1}}{1 - z_0^* z^{-1}} \cdot \frac{1 - z_0 z^{-1}}{1 - z_0 z^{-1}} \\ &= H_1(z) (1 - z_0^* z^{-1}) (1 - z_0 z^{-1}) \frac{z^{-1} - z_0}{1 - z_0^* z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - z_0^*}{1 - z_0 z^{-1}} \\ &= H_{\min}(z) \cdot H_{ap}(z) \end{aligned}$$

把 $H(z)$ 单位圆外的零点： $z = 1/z_0, 1/z_0^*, |z_0| < 1$

映射到单位圆内的镜像位置： $z = z_0, z_0^*$

构成 $H_{\min}(z)$ 的零点。

而幅度响应不变：

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})| \cdot |H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

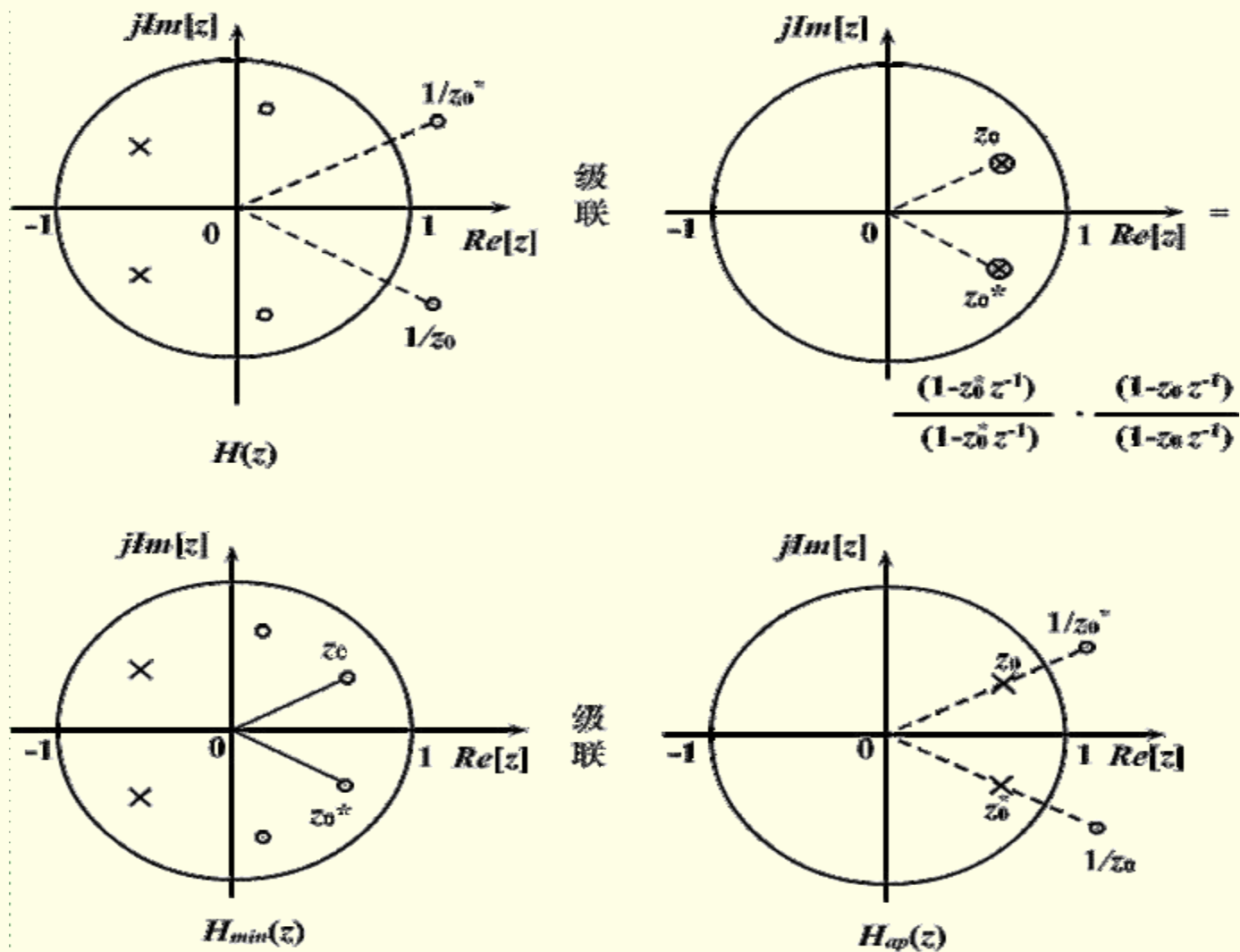


图6-6 系统的等效变换

2) 级联一个全通系统可以使非稳定滤波器变成一个稳定滤波器

单位圆外极点: $z = \frac{1}{r} e^{\pm j\theta}$, $|r| < 1$

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - re^{j\theta}}{1 - re^{-j\theta} z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta} z^{-1}}$$

把非稳定系统的单位圆外的极点映射到单位圆内

3) 作为相位均衡器，校正系统的非线性相位，而不改变系统的幅度特性

$$H(z) = H_d(z) \cdot H_{ap}(z)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) \cdot H_{ap}(e^{j\omega})$$

$$= |H_d(e^{j\omega})| \cdot |H_{ap}(e^{j\omega})| \cdot e^{j[\varphi_d(\omega) + \varphi_{ap}(\omega)]}$$

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \tau_d(\omega) + \tau_{ap}(\omega) \rightarrow \tau_0$$

$$e^2 = [\tau(\omega) - \tau_0]^2 = [\tau_{ap}(\omega) + \tau_d(\omega) - \tau_0]^2$$

利用均方误差最小准则求均衡器 $H_{ap}(z)$ 的有关参数

◆ 最小相位延时系统（系统函数的极零点都在单位圆内）的性质

- 1) 在 $|H(e^{j\omega})|$ 相同的系统中，具有最小的相位滞后
- 2) 最小相位延时系统的能量集中在 $n = 0$ 附近，而总能量相同
$$\sum_{n=0}^m |h(n)|^2 < \sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 \quad m < N-1$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |h_{\min}(n)|^2$$
- 3) 最小相位序列的 $h_{\min}(0)$ 最大: $h_{\min}(0) > h(0)$
- 4) 在 $|H(e^{j\omega})|$ 相同的系统中， $h_{\min}(n)$ 唯一
- 5) 级联一个全通系统，可以将一最小相位系统转变成一相同幅度响应的非最小相位延时系统

6.2.3 FIR和IIR数字滤波器的比较

1. 性能方面：

FIR滤波器

优点：可以得到严格的线性相位。

缺点：由于滤波器传输函数的极点固定在原点，所以只能用较高阶数的滤波器达到性能指标。

IIR滤波器：极点可位于单位圆内任何地方。

优点：较低阶数滤波器实现，存储单元少，所以经济且效率高；

缺点：相位是非线性的，往往可选择性越好，相位非线性越严重。

2. 结构方面:

- **FIR**一般采用非递归型结构，由于**FIR**的单位冲激响应 $h(n)$ 有限长，可采用**FFT**运算，其运算速度快，误差小；
- **IIR**滤波器往往对应递归型结构，极点要控制在单位圆内，系统才确保稳定，缺点是有限字长效应时，容易产生寄生振荡。

3. 应用方面：

- **FIR**滤波器能适应某些特殊的应用，如构成微分器或积分器，因而适应性更大，范围更广。
- **IIR**设计较简单，主要应用于设计具有片断常数特性的滤波器，如低通、高通、带通及带阻等滤波器。

在语音通信中，对相位线性特性要求不高，可以选用经济高效的**IIR滤波器实现**；而在图像通信中，对相位的线性特性要求较高，则要用稍为复杂的**FIR滤波器来实现**。

本章小结:

- 数字滤波器基本概念与分类
- 线性相位FIR数字滤波器基本特性
- FIR滤波器幅频函数的四种类型
- FIR滤波器系统函数的零点位置
- IIR滤波器的基本特性
- FIR和IIR数字滤波器的比较