西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第五章：线性空间与欧氏空间

第一节 线性空间的基本概念

董荣
数学与统计学院

作业：

习题5.1

(A) 1(3)，3(1)(4)，4，5，8，10

第一节　线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义

2. 线性空间的基本性质

3. 线性空间的子空间

4. 基、维数、向量的坐标

5. 基变换与坐标变换

6. 线性空间的同构

一、线性空间的定义

定义（线性空间） 设V是一个非空集合，F是一个数域，

在V上定义一种(加法)运算：$\forall\alpha\in V,\beta\in V$，$\alpha+\beta\in V$，

在V与F之间定义一种(数乘)运算：$\forall\alpha\in V,k\in F$，$k\alpha\in V$；

满足：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$，$\forall k$，$l\in F$

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) V中存在一个零元，

使得$\forall\alpha\in V$，有$\alpha+0=\alpha$;

(4) $\forall\alpha\in V,\exists$负元$-\alpha\in V$,

使得$\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

则称V对此加法和数乘在数域F上做成一个线性空间，或称向量空间。 V中的元素称为向量。

如果F是实数域，则称实线性空间

例1　向量空间F^n, R^n, C^n,分别是F, R, C上的线性空间.

例2　$F^{m\times n}$，$R^{m\times n}$：元素属于F或R的$m\times n$矩阵的全体，
按照矩阵的加法和数与矩阵的乘法，构成
数域F或R上的线性空间.

例3　$F[x]_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i\in F, i=1,2,\cdots,n\}$
按照多项式的加法与数与多项式的乘法
构成数域F上的线性空间.

$F[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \mid a_i\in F, i=0,1,2,\cdots\}$
按照多项式的加法与数与多项式乘法构成数域F上的线性空间.

例4　$C[a,b]=\{f(x) \mid f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}\}$
按照函数的加法与实数与函数的乘法构成一个实线性空间.

例5 齐次线性方程组$Ax=0$的所有解的集合

$$S=\left\{x\in R^n \,\middle|\, A\in R^{m\times n}, Ax=0\right\}$$

对向量的加法和数乘构成线性空间，称为齐次线性方程组$Ax=0$的解空间.

例6 $V=\{(a,b)\mid a,b\in R\}$

若定义：

加法：$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

数乘：$k(a,b)=(ka,0)$

则： 不构成线性空间,因为 $\mathbf{1}(a,b)=(a,0)\neq(a,b)$

例7 非齐次线性方程组$Ax=b$ 的解集合不构成线性空间

因为,若$Ax_0=b$,但$A(2x_0)=2Ax_0=2b\neq b$.

第一节　线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构

线性空间的基本性质

性质5.1.1 线性空间的零元素是惟一的。

$\forall\ \alpha, \alpha+0_1=\alpha, \alpha+0_2=\alpha$, 则 $0_1=0_2$.

性质5.1.2 线性空间的任一元素的负元素是惟一的。

性质5.1.3 $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$, $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$

性质5.1.4 如果$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则$k=0$或$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$

若$k\neq 0$, 则$k^{-1}(k\boldsymbol{\alpha})=k^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$,

$(k^{-1}k)\ \boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$, 则$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

第一节　线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构

定义5.1.2（子空间）设W是线性空间V的一个**非空子集**，如果W按照V中所定义的线性运算也构成一个线性空间，则称W为V的一个**子空间**。

线性空间需对其上所定义的线性运算(加法与数乘)封闭，同时满足：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) W中存在一个零元，使得$\forall\alpha\in W$，有$\alpha+0=\alpha$;

(4) $\forall\alpha\in W$, $\exists$负元$-\alpha\in W$，使得$\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

定义5.1.2（子空间）设W是线性空间V的一个非空子集，如果W按照V中所定义的线性运算也构成一个线性空间，则称W为V的一个**子空间**。

定理5.1.1 设W是线性空间V的非空子集，则

$$W\text{为}V\text{的子空间} \Longleftrightarrow W\text{对}V\text{中的线性运算封闭}$$

例1 设0为线性空间V中的零向量，则由单个零向量构成的集合{0}是V的一个子空间，称它为V的**零子空间**.

例2 数域F上的所有n阶方阵所形成的集合构成数域F上的一个线性空间.

其中的上三角形矩阵；下三角形矩阵；对称矩阵；反对称矩阵均构成这个线性空间的子空间

例3 设$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$是线性空间$V$中两个取定的向量，则由$\boldsymbol{\alpha_1}$与$\boldsymbol{\alpha_2}$的所有线性组合所组成的$V$的子集

$$W=\{k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}\mid k_i\in F,i=1,2\}$$

是V的一个子空间。

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha_1}+l_2\boldsymbol{\alpha_2},\ k_i,l_i\in \boldsymbol{F},\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\boldsymbol{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha_1}+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha_2}$$

$$k(k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2})=kk_1\boldsymbol{\alpha_1}+kk_2\boldsymbol{\alpha_2},k\in \boldsymbol{F}$$

通常称W为由向量$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$生成的$V$的子空间，并记成$span\{\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}\}$

$$span\{\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}\}=\{k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}\mid k_i\in F,i=1,2\}$$

一般的，设$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_m}$是线性空间$V$中一组向量，则$V$的子集

$$\{k_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha_m}\mid k_i\in F,i=1,2,\cdots,m\}$$

是V的一个子空间，称为由$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_m}$生成的$V$的子空间，并记为$span\{\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha_m}\}$

例4 判断$\boldsymbol{R}^3$的下列子集是否构成$\boldsymbol{R}^3$的子空间：

（1）$W_1 = \{(x, 2x, 3y)^T \mid x, y \in \boldsymbol{R}\}$

（2）$W_2 = \{(1, x, y)^T \mid x, y \in \boldsymbol{R}\}$

解 （1）W_1中的任意向量可写成

$$\boldsymbol{\alpha} = (x, 2x, 3y)^T = (x, 2x, 0)^T + (0,0,3y)^T$$
$$= x(1,2,0)^T + y(0,0,3)^T$$

即W_1中的任意向量都可以表示成两个向量$\boldsymbol{\alpha_1} = (1,2,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha_2} = (0,0,3)^T$的线性组合，因此$W_1$是由$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}$生成的$\boldsymbol{R}^3$的子空间:

$$W_1 = span\{(1,2,0)^T, (0,0,3)^T\}$$

（2）W_2显然对线性运算不封闭，因此不构成$\boldsymbol{R}^3$的子空间。

第一节　线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构

在线性空间中，我们也可以定义线性表示，线性相关，线性无关等基本概念。

例：考虑连续函数空间$C[a,b]=\{f(x):f(x)在[a,b]上连续\}$，任取$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_r(x)\in C[a,b]$，这些函数线性无关，是指任取$r$个数，若

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_rf_r(x)=0$$ ⟶ 零函数

则有$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

例：考虑线性空间$F^{m\times n}$，任取一族矩阵$\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\cdots,\boldsymbol{A_r}\in F^{m\times n}$，这族矩阵线性无关，是指任取$r$个数，若

$$k_1\boldsymbol{A_1}+k_2\boldsymbol{A_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{A_r}=\boldsymbol{0}$$ ⟶ 零矩阵

则有$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

定义5.3.1（基，维数，向量的坐标）如果在线性空间V中存在一组向量$\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$，满足

(1) $\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$线性无关

(2) $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\alpha}$可由$\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$线性表示：

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha_n},\qquad (x_i\in F,i=1,\cdots,n)$$

则称$\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$为$V$的一个**基**；

称基中所含向量的个数n为V的**维数**，记为$\dim(V)=n$，并称V为n维线性空间；

称有序数$x_1,\cdots,x_n$为向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$下的**坐标**，记为$(x_1,\cdots,x_n)^T$

注：零空间是惟一的没有基的线性空间，规定零空间的维数是零。

若在线性空间V中可以找到任意多个线性无关的向量，则称V是**无限维线性空间**，否则称V为**有限维线性空间**。

若将线性空间V看做向量组，则V的基与维数分别相当于V的**极大无关组**与**秩**，因此有

(1) 线性空间的基不是惟一的，但基中所含向量的个数是惟一的，因此维数的定义是有意义的。

(2) 对于n维线性空间V， V中任意n个线性无关的向量都可以看做V的基。

(3) 线性空间V中向量$\boldsymbol{\alpha}$用基向量线性表示是惟一的，这表明，在给定基下，向量$\boldsymbol{\alpha}$的坐标$(x_1,\cdots,x_n)^T$是惟一确定的。

若$\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$是线性空间$V$的基，则$V$可表示为

$$V=\{x_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha_n}\mid x_i\in F,i=1,\cdots,n\}$$

因此，V可以看做由基向量生成的线性空间。

$$V=span\{\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}\}$$

例：n维基本单位向量组

$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)^T,\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{n}}=(0,0,\cdots,1)^T$

是F^n的一个基（标准基）.

对于F^n中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)^T$，由于

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}}$$

故$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{1}},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{n}}$下的坐标是$(a_1,\cdots,a_n)^T$.

对于F^n中另一组基

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,\cdots,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,\cdots,1)^T,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n=(0,0,\cdots,1)^T,$

$\boldsymbol{\alpha}$在这组基下的坐标为$(a_1,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1})^T$

同一向量在不同基下的坐标一般是不同的。

例： 证明向量组$\boldsymbol{\alpha_1}=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha_2}=(2,4,5)^T,\boldsymbol{\alpha_3}=(1,2,3)^T$是$\boldsymbol{R}^3$的一个基，并求$\boldsymbol{\alpha}=(0,2,3)^T$在此基下的坐标。

思路： 由于$\boldsymbol{R}^3$是3维线性空间，因此，我们仅需证明$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$线性无关。由于$det(\boldsymbol{\alpha_1}\ \ \boldsymbol{\alpha_2}\ \ \boldsymbol{\alpha_3})\neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$线性无关.

然后再求解方程组$x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+x_3\boldsymbol{\alpha_3}=\boldsymbol{\alpha}$,

$$(x_1,x_2,x_3)^T=(-1,-1,3)^T.$$

例： n元齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系就是它的解空间的基，基础解系所含向量的个数$n-r(\boldsymbol{A})$就是解空间的维数。

例： 元素属于数域F的$m\times n$的矩阵的全体，按照矩阵的加法和数与矩阵的乘法，构成数域F上一个线性空间，记为$F^{m\times n}$. 给出$F^{2\times 2}$的一组基，并求

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

的坐标。

基E_{ij}，(i,j)元是1，
其余元都是0，
$m\times n$维

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+a_{22}\boldsymbol{E}_{22}$$

$\boldsymbol{A}$在这组基下的坐标为 $(a_{11},a_{12},a_{21},\ a_{22})^T$，$\boldsymbol{F}^{2\times 2}$是2×2=4维空间.

例：验证在$F[x]_3$中，$p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2, p_3 = x^3$线性无关。

$F[x]_3$中任一多项式$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$都可由$p_0, p_1, p_2, p_3$线性表示

$$f(x) = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

p_0, p_1, p_2, p_3是它的一组基（标准基），$F[x]_3$是4维空间.

由此，我们是否可以给出一个无穷维空间的例子？？

$$F[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \mid a_i \in F, i = 0,1,2,\cdots\}$$

对于任意正整数N都有$1, x, x^2, \cdots, x^N$线性无关，因此$F[x]$中有任意多个线性无关的向量，$F[x]$是无限维线性空间.

第一节　线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构

同一向量在不同基下的坐标是不一样的，那么随着基的改变，向量的坐标是如何变化的？

定义5.1.4 （过渡矩阵） 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$n$维线性空间$V$的两个基，第2个基可由第1个基线性表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\beta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$$

其中$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$为常数，称矩阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$的**过渡矩阵**。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\beta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n \end{cases}$$ (基变换公式)

“形式的”记法: $[\boldsymbol{\beta}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n] = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$[\boldsymbol{\beta}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n] = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{A}$$ (基变换公式)

由基$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵

设由基$\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$到基$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{B}$:

$$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n] = [\boldsymbol{\beta}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n]\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{AB}$$

从而我们得到$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$，即$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$都是可逆矩阵，且有$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

过渡矩阵是可逆的.

定理5.1.2 设n维线性空间V的两个基：

$$(I): \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \quad (II): \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$$

且由基(I)到基(II)的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}$，设V中向量$\boldsymbol{\alpha}$在基(I)的坐标为$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$， $\boldsymbol{\alpha}$在基(II)下的坐标为$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，则有坐标变换公式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \quad 或 \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

证：由假设，有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{x}$$

同理得到 $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\beta}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_n]\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

例： 已知$\boldsymbol{R}^3$有两个基

$$(I):\boldsymbol{\alpha_1}=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha_2}=(1,0,-1)^T,\boldsymbol{\alpha_3}=(1,0,1)^T$$

$$(II):\boldsymbol{\beta_1}=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\beta_2}=(2,3,4)^T,\boldsymbol{\beta_3}=(3,4,3)^T$$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵

(2) 求向量$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha_1}+2\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3}$在基$(II)$下的坐标

解： (1)设由基(I)到基(II)的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}$，则有

$$[\boldsymbol{\beta_1}\quad\boldsymbol{\beta_2}\quad\boldsymbol{\beta_3}]=[\boldsymbol{\alpha_1}\quad\boldsymbol{\alpha_2}\quad\boldsymbol{\alpha_3}]\boldsymbol{A}$$

从而我们可以得到 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha_1}\quad\boldsymbol{\alpha_2}\quad\boldsymbol{\alpha_3}]^{-1}[\boldsymbol{\beta_1}\quad\boldsymbol{\beta_2}\quad\boldsymbol{\beta_3}]$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

思考： 如果$[\boldsymbol{\alpha_1}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha_n}]$不是方阵怎么求过渡矩阵？

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta_1}=a_{11}\boldsymbol{\alpha_1}+a_{21}\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha_n}\\\boldsymbol{\beta_2}=a_{12}\boldsymbol{\alpha_1}+a_{22}\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha_n}\\\qquad\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{\beta_n}=a_{1n}\boldsymbol{\alpha_1}+a_{2n}\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha_n}\end{cases}$$

例：已知$\boldsymbol{R}^3$有两个基

$$(I): \boldsymbol{\alpha_1} = (1,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha_2} = (1,0,-1)^T, \boldsymbol{\alpha_3} = (1,0,1)^T$$

$$(II): \boldsymbol{\beta_1} = (1,2,1)^T, \boldsymbol{\beta_2} = (2,3,4)^T, \boldsymbol{\beta_3} = (3,4,3)^T$$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵

(2) 求向量$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha_1} + 2\boldsymbol{\alpha_2} - \boldsymbol{\alpha_3}$在基$(II)$下的坐标

(2)已知向量$\boldsymbol{\alpha}$在基(I)下的坐标为$\boldsymbol{x} = (1,2,-1)^T$，

设$\boldsymbol{\alpha}$在基(II)下的坐标为$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$，由坐标的变换公式有

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

第一节　线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构

引例：设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是n维线性空间$V$的一组基，则任何$\boldsymbol{\alpha}\in V$，存在$F^n$中的一个向量$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$使得

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

反过来，若给定了F^n中的一个向量$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$，则可以确定$\boldsymbol{V}$中的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$

因而，我们找到了一个双射$f:V\to F^n$

$$f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T \longrightarrow \text{坐标映射}$$

坐标映射f有如下性质(保线性)：

$$f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\beta}),\qquad f(k\boldsymbol{\alpha})=kf(\boldsymbol{\alpha})$$

其中$k\in F$

对抽象的n维线性空间的讨论可归结为对F^n的讨论！

注：设f是集合A到集合B的一个映射，如果B中的每个元素都是A中对应元素在f下的像，则称f为满射；如果A中不同元素在f下的像也不同，则称f为单射；如果f既是满射又是单射，则称f为双射或一一对应的映射。