§2.1 Laplace 变换的概念

一、Laplace变换的引入

二、Laplace变换的定义

三、几个常用函数的Laplace变换

四、Laplace 变换的性质

五、卷积与卷积定理

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的“局限性”?

- 当函数 $f(t)$ 满足 Dirichlet 条件，且在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积时，便可以进行古典意义下的 Fourier 变换。

- 在工程实际问题中，许多以时间 t 为自变量的函数(比如起始时刻为零的因果信号等)在 $t<0$ 时为零，而有些甚至在 $t<0$ 时根本没有意义。

- 因此在对这些函数进行 Fourier 变换时，没有必要(或者不可能)在整个实轴上进行。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换要进行改造？

基本想法

(1) 将函数 $f(t)$ 乘以一个单位阶跃函数 $u(t)$，

使得函数在 $t<0$ 的部分补零（或者充零）；

(2) 将函数再乘上一个衰减指数函数 $\mathrm{e}^{-\beta t}(\beta>0)$，

使得函数在 $t>0$ 的部分尽快地衰减下来。

- 这样，就有希望使得函数 $f(t)\cdot u(t)\cdot \mathrm{e}^{-\beta t}$ 满足 Fourier 变换的条件，从而对它进行 Fourier 变换。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换要进行改造？

实施结果

$$\mathscr{F}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+j\omega)t}\mathrm{d}t$$

将上式中的 $\beta + j\omega$ 记为 s，就得到了一种新的变换：

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{记为}} F(s).$$

注意　上述广义积分存在的关键：

变量 s 的实部 $\mathrm{Re}\, s = \beta$ 足够大。

二、Laplace变换的定义

定义 设函数 $f(t)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的实值函数，如果对于复参数 $s=\beta+j\omega$，积分 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在复平面 s 的某一区域内收敛，则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换或像函数，记为 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，即

$$\boxed{F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.}$$

相应地，称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换或像原函数，记为 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

例如

$$\mathscr{L}[1]=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re}s>0)$$

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re}s>0)$$

$$\mathscr{L}[\operatorname{sgn}t]=\int_0^{+\infty}\operatorname{sgn}t\,e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\qquad (\operatorname{Re}s>0)$$

$$\mathscr{L}[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}\,dt=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a},\qquad (\operatorname{Re}s>\operatorname{Re}a)$$

注意　进行积分时，确定 s 的取值范围，保证积分存在。

Laplace变换存在定理

定理 设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$时，满足：

(1) 在任何有限区间上分段连续；

(2) 具有有限的增长性，

即存在常数 c 及 $M > 0$，使得 $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{ct}$，

(其中，c 称为函数 $f(t)$ 的"增长"指数)。

则象函数 $F(s)$在半平面 $\mathrm{Re}\,s > c$ 上一定存在且解析。

三、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

解 (2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

$$=\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0}=1.$$

三、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

解 (3) $\mathscr{L}[t^m]=\int_0^{+\infty} t^m e^{-st}\,dt=\dfrac{1}{-s}\int_0^{+\infty} t^m d e^{-st}$

$$=\frac{1}{-s}t^m e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{m}{s}\int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-st}\,dt=\frac{m}{s}\mathscr{L}[t^{m-1}]$$

$$=\frac{m(m-1)}{s^2}\mathscr{L}[t^{m-2}]=\cdots=\frac{m!}{s^m}\mathscr{L}[1]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

三、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$;

解 (5) $$\mathscr{L}[\cos at]=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{jat}e^{-st}\,dt+\int_0^{+\infty} e^{-jat}e^{-st}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}[e^{jat}]+\mathscr{L}[e^{-jat}]\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ja}+\frac{1}{s+ja}\right)=\frac{s}{s^2+a^2}.$$

三、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$;

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$;

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$;

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$;

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}$;

(6) $\mathscr{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}$.

解 (6) $$\mathscr{L}[\sin at]=\frac{1}{2j}\left(\int_0^{+\infty}e^{jat}e^{-st}\,dt-\int_0^{+\infty}e^{-jat}e^{-st}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\mathscr{L}[e^{jat}]-\mathscr{L}[e^{-jat}]\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-ja}-\frac{1}{s+ja}\right)=\frac{a}{s^2+a^2}.$$

四、 Laplace 变换的性质

1. 线性性质

设 a，b 为常数，则有

$$\mathscr{L}[a\,f(t)+b\,g(t)]=a\,F(s)+b\,G(s);$$

$$\mathscr{L}^{-1}[a\,F(s)+b\,G(s)]=a\,f(t)+b\,g(t).$$

例 求函数 $f(t)=\sin 2t\sin 3t$ 的 Laplace 变换。

解 $f(t)=\sin 2t\sin 3t=\dfrac{1}{2}(\cos t-\cos 5t)$,

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{2}(\mathscr{L}[\cos t]-\mathscr{L}[\cos 5t])$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+25}\right)$$

$$=\frac{12s}{(s^2+1)(s^2+25)}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 $F(s)=\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s-1}$,

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$=e^{2t}-e^{t}.$$

2. 相似性质(尺度性质)

性质 设 a 为任一正实数，则 $\mathscr{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$.

证明 $\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}dt$

$$\xlongequal{令x=at}\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(x)e^{-\frac{s}{a}x}dx=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

3. 延迟性质

性质 设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$, 则对任一非负实数 τ 有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

证明 $\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\int_\tau^{+\infty} f(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \overset{\text{令}x=t-\tau}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-sx}\cdot\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

例 设 $F(s)=\dfrac{1}{s-1}\mathrm{e}^{-2s}$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 由于 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-1}]=\mathrm{e}^t u(t)$，根据延迟性质有

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{t-2}u(t-2)$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{t-2}, & t>2,\\ 0, & t<2.\end{cases}$$

类似理解书上例8

4. 位移性质

性质 设 a 为任一复常数，则 $\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$.

例如 $\mathscr{L}[e^t\cos t]=\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$. $\mathscr{L}[e^t\sin t]=\dfrac{1}{(s-1)^2+1}$.

5. 微分性质

性质 $\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$; 导数的象函数

一般地，有

$$\boxed{\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).}$$

例　求函数 $f(t)=t^m$ 的Laplace变换(m为正整数)。

解　利用导数的象函数性质来求解本题

由 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0$ 以及 $f^{(m)}(t)=m!$ 有

$$\mathscr{L}[f^{(m)}(t)]=\mathscr{L}[m!]$$

$$=s^m F(s)-s^{m-1}f(0)-s^{m-2}f'(0)-\cdots-f^{(m-1)}(0)$$

$$=s^m\mathscr{L}[f(t)]=s^m\mathscr{L}[t^m],$$

故有 $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{1}{s^m}\mathscr{L}[m!]=\dfrac{m!}{s^m}\mathscr{L}[1]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}.$

性质 $F'(s)=-\mathscr{L}[t\,f(t)]$; 象函数的导数

一般地，有 $F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^n f(t)]$.

例 求函数 $f(t)=t\sin\omega t$ 的 Laplace 变换。

解 已知 $\mathscr{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$,

根据象函数的导数性质有

$$\mathscr{L}[t\sin\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

例 求函数 $f(t)=t^2\cos^2 t$ 的 Laplace 变换。

解 $t^2\cos^2 t = \dfrac{1}{2}t^2(1+\cos 2t)$,

已知 $\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}$, $\mathscr{L}[\cos 2t]=\dfrac{s}{s^2+2^2}$,

根据线性性质以及象函数的导数性质有

$$\mathscr{L}[t^2\cos^2 t]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2^2}\right]$$

$$=\frac{2(s^6+24s^2+32)}{s^3(s^2+4)^3}.$$

6. 积分性质

性质 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s).$ 积分的象函数

证明 令 $g(t)=\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $g'(t)=f(t)$ 且 $g(0)=0$,

由微分性质有

$$\mathscr{L}[g'(t)]=sG(s)-g(0)=sG(s),$$

$$\Rightarrow\quad G(s)=\frac{1}{s}\mathscr{L}[g'(t)]=\frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)],$$

即得 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s).$

例　求函数 $f(t)=\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t$ 的 Laplace 变换。

解　已知 $\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$，

根据微分性质有

$$\mathscr{L}[t\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{4s}{(s^2+4)^2},$$

再由积分性质得

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2}=\frac{4}{(s^2+4)^2}.$$

性质 $\int_s^{\infty} F(s)\mathrm{d}s = \mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}]$. 象函数的积分

例 求函数 $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ 的 Laplace 变换。

解 已知 $\mathscr{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$，根据象函数的积分性质有

$$\mathscr{L}[\frac{\sin t}{t}] = \int_s^{\infty} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2} - \arctan s.$$

即 $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan s.$$

- 在上式中，如果令 $s=0$，则有 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$

五、卷积与卷积定理

1. 卷积

- 按照上一章中卷积的定义，两个函数的卷积是指

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

- 如果函数满足：当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$，则有

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\quad (t\geq 0).$$

- 显然，由上式给出的卷积的仍然满足交换律、结合律以及分配律等性质。

例 求函数 $f_1(t)=t$ 与 $f_2(t)=\sin t$ 的卷积。

解 $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$=\int_0^t \tau\,\mathrm{d}\cos(t-\tau)=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=t+\sin(t-\tau)\Big|_0^t=t-\sin t.$$

2. 卷积定理

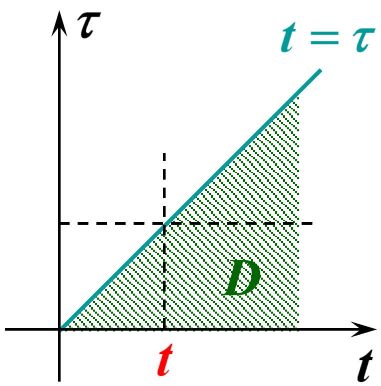
定理 $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s).$

证明 左边 $=\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \iint_D f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-st} d\tau dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) [\underline{\underline{\int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-st} dt}}] d\tau$$



$$\underline{\underline{\text{记为}}} \int_0^{+\infty} f_1(\tau)\, I\, d\tau$$

$$= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot F_2(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) = \text{右边。}$$

其中 $I = \int_\tau^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-st} dt \underline{\underline{\text{令 } x=t-\tau}}$

$$e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f_2(x) e^{-sx} dx = e^{-s\tau} F_2(s),$$

第二章拉普拉斯变换

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 由于 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$，$\mathscr{L}\left[\dfrac{s}{s^2+1}\right]=\cos t$，故有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\cos t*\cos t$$

$$=\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

小结

Gamma 函数的定义和基本性质

定义 当$\alpha>0$时，该反常积分收敛。

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt$$

对任意$\alpha\in(0,\ \infty)$有定义，且$\Gamma(\alpha)>0$。

$$\Gamma(Z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt,\ \mathrm{Re}(Z)>0$$

基本性质

$z=1$

1 $\Gamma(1)=1$

证明 $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1$

2 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$

证明 $\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z+1-1}dt=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z}dt=-\int_0^{\infty} t^{z}d(e^{-t})$

$$=-e^{-t}t^{z}\Big|_0^{\infty}+z\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma(z)$$

② $\Gamma(n)=(n-1)!$ 阶乘函数

证明 $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$

$$=(n-1)(n-2)\cdots 1\Gamma(1)=(n-1)!$$

第二章拉普拉斯变换

3 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

证明

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-x}d\sqrt{x}$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-u^2}du=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

4 $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

证明

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{5}{2}+1\right)$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$$

5 $\Gamma(z)$ 在全平面无零点

当 $-1<\alpha<0,\ \Gamma(\alpha)=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}\quad \lim\limits_{\alpha\to 0^{+}}\Gamma(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0^{+}}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\infty$

解释

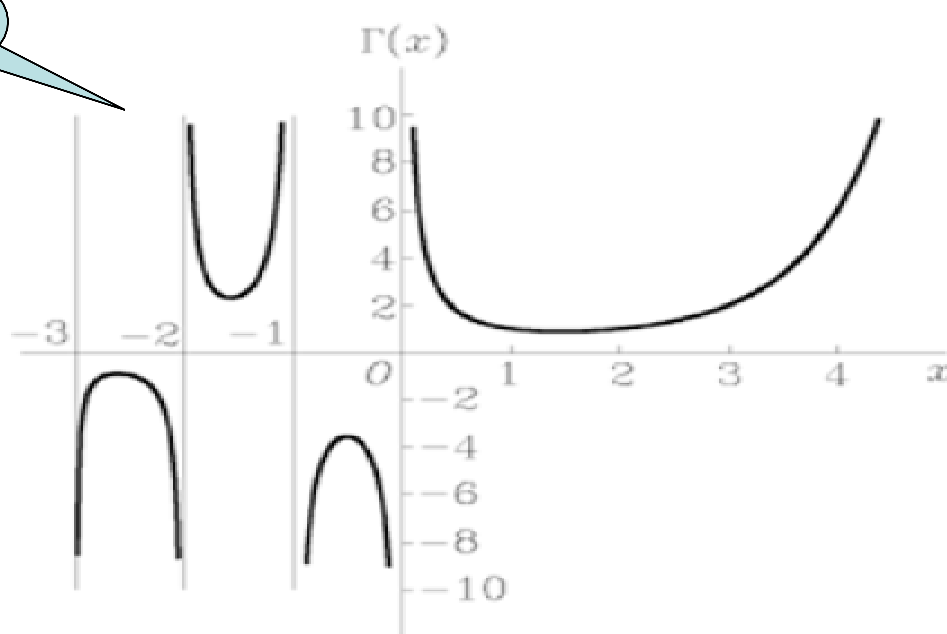


图 8.3 自变量取实数时的 Γ 函数值

6 $\Gamma(z)$ 在区间（0，∞）内有二阶连续导数，且只有唯一的极小值点，且极值点介于1和2之间。

7 $\Gamma(z)$ 在负整数处左右极限或为正无穷或为负无穷，习惯上约定

(跳过?)