第八章　线性变换

8.1 线性变换及其运算
8.2 线性变换的矩阵表示

董荣

数学与统计学院

作业：

习题8.2

(A) 1, 4, 7, 8

主要内容

1. 线性变换的运算
2. 线性变换的矩阵
3. 线性算子在不同基下的矩阵之间的关系

线性变换的乘积

定义 8.1.3（映射的乘积）

设$T_2:U\to V, T_1:V\to W$ 是两个映射，定义$T_1T_2:U\to W$为 $T_1T_2(\alpha)=T_1(T_2(\alpha)),\forall\alpha\in U$,称$U$到$W$的映射$T_1T_2$ 为T_1 与T_2的**乘积**（或**复合**）.

定理 8.1.6 若T_1,T_2都是线性变换，则映射乘积T_1T_2也为线性变换。

注1 映射的乘积满足**结合律**：$(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)$.

注2 设T是V上的线性算子, 则可以定义T 的**幂**:

$T^0=I, T^k=TT^{k-1}(k=1,2,\ldots)$ $\quad T^{m+n}=T^mT^n, (T^m)^n=T^{mn}, n, m$为非负整数.

可逆线性变换

定义 8.1.4（可逆映射）

设$T:V\to W$,若存在映射$S:W\to V$,使得

$$TS=I_W, ST=I_V$$

则称T为可逆映射，并称S为T的逆映射，记为T^{-1}.

如果线性变换T是可逆映射，则称T是可逆线性变换.

注：T和T^{-1}互为逆映射，且$(T^{-1})^{-1}=T$.

定理 8.1.7 若$T:V\to W$是可逆线性变换，则T^{-1}也是线性变换.

线性变换可逆的等价条件

定理 8.1.8 设$T \in L(V,W)$,则T 可逆的充要条件是

$$\ker(T)=\{0\}\text{且}R(T)=W.$$

注： $\ker(T)=\{0\} \Leftrightarrow T$是单射，$R(T)=W \Leftrightarrow T$是满射.

线性变换T可逆$\Leftrightarrow T$是双射（既是单射又是满射）.

定理 8.1.9 设$T \in L(V,W)$,$\dim(V)=\dim(W)=n$,则下列条件等价

(1) T是可逆线性变换； (2)T是单射； (3)T是满射;

(4)$\operatorname{rank}(T)=n$; (5)$\operatorname{nullity}(T)=0$.

证： (2)$\Rightarrow$(3) T是单射$\Rightarrow \ker(T)=\{0\} \Rightarrow \operatorname{nullity}(T)=0$

$\boxed{\operatorname{nullity}(T)+\operatorname{rank}(T)=n} \Rightarrow \operatorname{rank}(T)=n \Rightarrow R(T)=W \Rightarrow T$ 是满射.

(3)$\Rightarrow$(2) 以上各步均可倒推.

例8: 设R^3上的线性算子T 为:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \forall (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3,$$

证:T 可逆,并求T^{-1}.

证: $T(x) = Ax$,其中$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 显然,$A$可逆.

故$\ker(T) = \{x \mid Ax = 0\} = \{0\}$,所以$T$ 可逆.

$$T^{-1}(x) = A^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

线性变换的和、数乘

定义 8.1.5（线性变换的和与数乘）

设$T_1,T_2,T\in L(V,W),k\in F$,定义$T_1$ 与T_2 的加法为：

$$(T_1+T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)+T_2(\alpha),\forall\alpha\in V$$

称V 到W 的映射T_1+T_2 为T_1 与T_2 的**和**.

定义数与T 的数量乘积为：

$$(kT)(\alpha)=kT(\alpha),\forall\alpha\in V$$

称V 到W 的映射kT 为k 与T 的**数量乘法**（简称**数乘**）.

易证：线性变换的和与数乘都是线性变换；
$L(V,W)$ 关于线性变换的加法和数乘构成 F 上的线性空间.

主要内容

1. 线性变换的运算

2. 线性变换的矩阵

3. 线性算子在不同基下的矩阵之间的关系

线性变换T的矩阵：设V和W的维数分别是n和m，它们的基分别为$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$，$B'=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$ 对于$T\in L(V,W)$，$T(\boldsymbol{\alpha}_j)$可由B'惟一线性表出，即存在常数a_{ij}，使得

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\beta}_1+a_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{\beta}_m \\ T(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_{12}\boldsymbol{\beta}_1+a_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{\beta}_m \\ \cdots\cdots\cdots \\ T(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\beta}_1+a_{2n}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\beta}_m \end{cases} \qquad \boldsymbol{A}\triangleq\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

我们称矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为线性变换$T$在给定基$B,B'$下的矩阵，简称为**线性变换$T$的矩阵**.

当$W=V$时，$m=n$，取$B'=B$，则对于$T\in L(V)$，A为n阶方阵，称方阵A为线性算子T在基B下的矩阵，简称为线性算子T的矩阵.

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{\alpha_1}) = a_{11}\boldsymbol{\beta_1} + a_{21}\boldsymbol{\beta_2} + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{\beta_m} \\ T(\boldsymbol{\alpha_2}) = a_{12}\boldsymbol{\beta_1} + a_{22}\boldsymbol{\beta_2} + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{\beta_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ T(\boldsymbol{\alpha_n}) = a_{1n}\boldsymbol{\beta_1} + a_{2n}\boldsymbol{\beta_2} + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{\beta_m} \end{cases} \qquad \boldsymbol{A} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$的第k列是$T(\boldsymbol{\alpha_k})$在基$\{\boldsymbol{\beta_1},\cdots,\boldsymbol{\beta_m}\}$下的坐标向量

利用矩阵乘法，我们有

$$T[\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}] = [T(\boldsymbol{\alpha_1}),\cdots,T(\boldsymbol{\alpha_n})] = [\boldsymbol{\beta_1},\cdots,\boldsymbol{\beta_m}]\boldsymbol{A}$$

取$\boldsymbol{\alpha} \in V$，我们有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha_1} + x_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha_n} = [\boldsymbol{\alpha_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{x}$$

$$T(\boldsymbol{\alpha}) = y_1\boldsymbol{\beta_1} + y_2\boldsymbol{\beta_2} + \cdots + y_m\boldsymbol{\beta_m} = [\boldsymbol{\beta_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta_m}]\boldsymbol{y}$$

另一方面，由线性性质

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{\alpha}) &= x_1T(\boldsymbol{\alpha_1}) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{\alpha_n}) \\ &= [T(\boldsymbol{\alpha_1}) \quad \cdots \quad T(\boldsymbol{\alpha_n})]\boldsymbol{x} \\ &= [\boldsymbol{\beta_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta_m}]\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

由上述计算，发现 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

线性变换与矩阵的关系：

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\alpha} \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{基}B"'] & T(\boldsymbol{\alpha}) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{基}B'"] \\
\boldsymbol{x} \arrow[r, "\boldsymbol{A}"] & \boldsymbol{y} \ (= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})
\end{tikzcd}
$$

在给定基下，线性变换的矩阵完全代表了线性变换.

例：零变换在任何基下的矩阵都是零矩阵

例：V上的恒等变换I在任何基下的矩阵都是单位矩阵$\boldsymbol{I}$

例：V上的数乘变换I在任何基下的矩阵都是数量矩阵$k\boldsymbol{I}$

例：设T是由下式定义的$\boldsymbol{R}^2$上的线性算子：

$$T(x_1,x_2)^T=(x_1+x_2,-2x_1+4x_2)^T,\qquad \forall (x_1,x_2)^T\in R^2$$

$B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$是$\boldsymbol{R}^2$的一个基，其中$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(3,4)^T$

（1）求T在基B下的矩阵$\boldsymbol{A}$

（2）对$\boldsymbol{R}^2$的任一向量$\boldsymbol{\alpha}=(a,b)^T$，验证$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$成立

解：（1）由T的定义可知

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1)=(3,6)^T=3\boldsymbol{\alpha}_1,\qquad T(\boldsymbol{\alpha}_2)=(7,10)^T=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$$

故 $[T(\boldsymbol{\alpha}_1)\quad T(\boldsymbol{\alpha}_2)]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$，因此，$T$在基$B$下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}$

(2) 设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2$，有 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，

从而我们有 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a+\frac{3}{2}b\\ a-\frac{b}{2}\end{bmatrix}$

由上面的计算，得 $\boldsymbol{\alpha}=[a,b]^T=\left(-2a+\frac{3}{2}b\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(a-\frac{b}{2}\right)\boldsymbol{\alpha}_2$

例： 设T是由下式定义的$\boldsymbol{R}^2$上的线性算子：

$$T(x_1,x_2)^T=(x_1+x_2,-2x_1+4x_2)^T,\qquad \forall(x_1,x_2)^T\in R^2$$

$B=\{\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}\}$是$\boldsymbol{R}^2$的一个基，其中$\boldsymbol{\alpha_1}=(1,2)^T,\boldsymbol{\alpha_2}=(3,4)^T$

（1）求T在基B下的矩阵$\boldsymbol{A}$

（2）对$\boldsymbol{R}^2$的任一向量$\boldsymbol{\alpha}=(a,b)^T$，验证$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$成立

解： $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{\alpha}=[a,b]^T=\left(-2a+\frac{3}{2}b\right)\boldsymbol{\alpha_1}+\left(a-\frac{b}{2}\right)\boldsymbol{\alpha_2}$

$$T(\boldsymbol{\alpha})=[a+b,-2a+4b]^T=(-5a+4b)\boldsymbol{\alpha_1}+\left(a-\frac{b}{2}\right)\boldsymbol{\alpha_2}$$

因此，我们验证可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2a+\frac{3}{2}b\\ a-\frac{1}{2}b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5a+4b\\ 2a-b\end{bmatrix}$

即有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$成立.

在线性空间V和W中取定基后，

$$T: V \to W \rightleftarrows \text{矩阵} \boldsymbol{A}_{m\times n}$$

线性空间$L(V,W)$与线性空间$F^{m\times n}$建立了一一对应的关系。$\boxed{\text{并且这种关系还保线性}}$

定理8.2.1 由$T(\boldsymbol{\alpha}) = [\boldsymbol{\beta}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_m]\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$所表示的$L(V,W)$与$F^{m\times n}$之间的对应关系满足：

（1）线性变换的和对应于矩阵的和

（2）线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积

（3）线性变换的乘积对应于矩阵的乘积

证： （1） $T_1(\boldsymbol{\alpha}) = [\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad T_2(\boldsymbol{\alpha}) = [\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$

$$(T_1+T_2)(\boldsymbol{\alpha}) = T_1(\boldsymbol{\alpha}) + T_2(\boldsymbol{\alpha}) = [\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m](\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}$$

（2）、（3）可类似证明。

定理8.2.2 线性空间$L(V,W)$与线性空间$F^{m\times n}$是同构的，其维数为$m\times n$。

定理8.2.3 设$T \in L(V,W)$，T在一组基下的矩阵为$\boldsymbol{A}$，则

（1） $R(T)$与矩阵$\boldsymbol{A}$的列空间同构，且T的秩等于$\boldsymbol{A}$的秩

（2） $\ker(T)$与齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解空间同构，且$T$的零度等于$n-r(A)$

证: (1) 线性变换T的值域$R(T)=\{T(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{\alpha} \in V\}$为$V$的线性子空间,

$R(T)$中的向量$T(\boldsymbol{\alpha})=[\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]\boldsymbol{Ax}$，从而$\boldsymbol{Ax}$是$T(\boldsymbol{\alpha})$在基$\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}$下的坐标。

因此，线性空间$R(T)$与矩阵$\boldsymbol{A}$的列空间$U=\{\boldsymbol{Ax} \mid \boldsymbol{x} \in F^n\}$之间的映射为坐标映射，是一种同构映射。

$$\dim\big(R(T)\big)=\dim(U)=r(\boldsymbol{A})$$

(2) 的证明与 (1) 类似。

例： 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是线性空间$V$的一个基，$T$是$V$上的线性算子，$T$在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}$$

求 T 的值域与核。

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

解： （1）T的值域与$\boldsymbol{A}$的列空间同构，

设$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4]$，经计算知$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$是$\boldsymbol{A}$的列空间的基，

故对应的$T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2)$是$R(T)$的基，即$R(T)=span\{T(\boldsymbol{\alpha}_1),T(\boldsymbol{\alpha}_2)\}$

而 $$T(\boldsymbol{\alpha}_1)=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4,$$
$$T(\boldsymbol{\alpha}_2)=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{x}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4$$

$\boldsymbol{A}$的第k列是$T(\boldsymbol{\alpha}_k)$在基$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$下的坐标向量

故 $R(T)=span\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4,2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4\}$

例： 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是线性空间$V$的一个基，$T$是$V$上的线性算子，$T$在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

求 T 的值域与核。

解： （2）T的核与$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解空间同构，计算可得其基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-4,-3,2,0]^T \quad \boldsymbol{\xi}_2=[-1,-2,0,1]^T$$

故T的核为

$$\ker(T)=span\{-4\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4\}$$

定理8.2.4： 设$T \in L(V,W), \dim(V) = \dim(W) = n$，$B$和$B'$分别是$V,W$的基，$T$在$B,B'$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$，则$T$是可逆线性变换的充要条件是$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵，且当$T$可逆时，$T^{-1}$在$B',B$下的矩阵是$\boldsymbol{A}^{-1}$

证：（必要性）设T^{-1}对应的矩阵为$\boldsymbol{C}$，由于$TT^{-1} = I_W$对应的矩阵为$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{I}$，$T^{-1}T = I_V$对应的矩阵为$\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}$，故$\boldsymbol{A}$可逆，且$T^{-1}$对应的矩阵为$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}$

（充分性）若$\boldsymbol{A}$可逆，则由**定理8.2.3**知$rank(T) = r(\boldsymbol{A}) = n$，由**定理8.1.9**知$T$可逆

定理8.2.3（1）$R(T)$与矩阵$\boldsymbol{A}$的列空间同构，且T的秩等于$\boldsymbol{A}$的秩；（2）…

定理8.1.9 **设$T \in L(V,W), \dim(V) = \dim(W) = n$,则下列条件等价**

(1) T可逆; (2)T是单射; (3)T是满射; (4)rank$(T) = n$; (5)nullity$(T) = 0$.

主要内容

1. 线性变换的运算

2. 线性变换的矩阵

3. 线性算子在不同基下的矩阵之间的关系

设T是V上的线性算子，对于V上不同的基，T的矩阵一般是不同的，那么这些矩阵之间有什么关系？

定理8.2.5 设$T \in L(V), B = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}, B' = \{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$是$V$的两个不同的基，$T$在$B, B'$下的矩阵分别为$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$，且知$B$到$B'$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$，即线性算子$T$在不同基下的矩阵是相似的。

证：由已知，有
$$T[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{A}$$
$$T[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n] = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n]\boldsymbol{D}$$
$$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{C}$$

因此有
$$\begin{aligned} T[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n] &= T([\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{C}) = (T[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n])\boldsymbol{C} \\ &= [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n]\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \end{aligned}$$

因此，得
$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$$

例 设$T \in L(V)$,T在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,问是否存在$V$的基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$使得$T$在这组基下的矩阵为对角矩阵？若是，求出这组基及对应的对角矩阵.

解 易求得A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$

λ_1的特征子空间(即$(\lambda_1 I-A)x=0$ 的解空间)V_{λ_1}的基为$\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,3)^T$,
λ_3的特征子空间V_{λ_3}的基为$\xi_3=(1,1,1)^T$.

故矩阵A有三个线性无关的特征向量，A可相似对角化.

定理8.2.5 设$T \in L(V), B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}, B'=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$是$V$的两个不同的基，$T$在$B,B'$下的矩阵分别为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$，且知$B$到$B'$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$，即线性算子$T$在不同基下的矩阵是相似的。

例 设$T\in L(V)$,T在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$,问是否存在$V$的基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$使得$T$在这组基下的矩阵为对角矩阵？若是，求出这组基及对应的对角矩阵.

解

令$P=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&3&1\end{bmatrix}$　　则有$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$

取P为过渡矩阵，即$\begin{bmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{bmatrix}P$

可得$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=-\alpha_1+3\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,即$T$在这组基下的矩阵为对角矩阵$diag\{2,2,1\}$.

定理8.2.5 设$T\in L(V), B=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}, B'=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$是$V$的两个不同的基，$T$在$B,B'$下的矩阵分别为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$，且知$B$到$B'$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$，即线性算子$T$在不同基下的矩阵是相似的。

例 设T是n维线性空间V上的线性算子,$\xi\in V$,如果$T^{n-1}(\xi)\neq 0, T^n(\xi)=0$,证明:$\xi, T(\xi),\ldots,T^{n-1}(\xi)$是$V$的一组基,并求$T$在这组基下的矩阵.

证 因为$\xi, T(\xi),\ldots,T^{n-1}(\xi)$是$V$中的$n$个向量,只要证明它们是线性无关的即可.

因为$T^n(\xi)=0$,所以$T^{n+k}(\xi)=0(k\geq 1)$.

令$l_1\xi+l_2T(\xi)+\ldots+l_nT^{n-1}(\xi)=0$,

以T^{n-1}作用于等式两边,可得$l_1T^{n-1}(\xi)=0$　　而$T^{n-1}(\xi)\neq 0$,故$l_1=0$,

同理可得,$l_i=0,(i=2,\ldots n)$,

故$\xi, T(\xi),\ldots,T^{n-1}(\xi)$线性无关,是$n$维线性空间$V$中一组基.

例 设T是n维线性空间V上的线性算子，$\xi \in V$，如果$T^{n-1}(\xi) \neq 0, T^n(\xi) = 0$，证明：$\xi, T(\xi), \ldots, T^{n-1}(\xi)$是$V$的一组基，并求$T$在这组基下的矩阵.

证 为了求得T在上述基下的矩阵，对这组基继续施加变换T，有

$$T\left[\xi, T(\xi), \ldots, T^{n-2}(\xi), T^{n-1}(\xi)\right] = \left[T(\xi), T^2(\xi), \ldots, T^{n-1}(\xi), T^n(\xi)\right]$$

$$= \left[T(\xi), T^2(\xi), \ldots, T^{n-1}(\xi), 0\right]$$

而另一方面，T在基$\left\{\xi, T(\xi), \ldots, T^{n-1}(\xi)\right\}$下的矩阵$A$满足：

$$T\left[\xi, T(\xi), \ldots, T^{n-2}(\xi), T^{n-1}(\xi)\right] = \left[\xi, T(\xi), \ldots, T^{n-2}(\xi), T^{n-1}(\xi)\right]A$$

故$\left[T(\xi), T^2(\xi), \ldots, T^{n-1}(\xi), 0\right] = \left[\xi, T(\xi), \ldots, T^{n-2}(\xi), T^{n-1}(\xi)\right]A$

$$\text{得}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$