课堂练习一

1(20%)设$A=\{x|x^2>2\}$,$B=\{x|\ |x-2|<|x+3|\}$是实数集合R的子集，**用区间表示下面集合:**

(1) $A\cup B$　　(2) $A\cap B$　　(3) $A\backslash B$　　(4) $A\oplus B$

2(30%)以下集合能否成为某个集合的幂集，若能请给出相应的集合。

(1) $A=\varnothing$ $\{\phi\}$　　(2) $B=\{\varnothing\}$ ϕ　　(3) $C=\{\varnothing,\{a\}\}$

(4) $D=\{\varnothing,\{a\},\{\varnothing,a\}\}$　　(5) $E=\{\varnothing,\{a,b\},\{a\},\{b\},\{\varnothing\}\}$

3(30%)化简下列各式

(1) $(A\cap B)\cup(A\backslash B)$ A　　(2) $(A\cup(B\backslash A))\backslash B$ $A\backslash B$

(3) $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))\backslash((A\cup(B\backslash C))\cap A)$ $= B\backslash A$

4(10%) A,B,C为任意3个集合，已知$A\cup B=A\cup C$，$A\backslash B=A\backslash C$，证明B=C。

5(10%)判断 $2^{A\cup B}=2^A\cup 2^B$ 是否成立，并给出理由。

$A \cup B = A \cup C \wedge A' \cup B = A' \cup C$.

若 $B \neq C$. $\exists x (x \in B \wedge x \notin C)$

$\therefore x \in A \cup B$

$\therefore x \in A \cup C$. 故 $x \in A$.

$\therefore x \in A \setminus C$

但 $x \notin A \setminus B$.

课堂练习二

1 (40%) 判断题(T / F)：

(1)设A 是非空集合， R_1、$R_2 \subseteq A \times A$， R_1和R_2是传递的， 那么$R_1 \circ R_2$是传递的。

(2)设A 、B是非空集合，R_1、$R_2 \subseteq A \times B$，那么 $\wp(R_1 \cap R_2) = \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$ 。

(3) 设A 是一个非空集合，二元关系$R \subseteq A \times A$ ，那么R^+一定是传递关系。

(4) 良序集中每个元素都有直接后继。

(5) 半序集中任意两个元素都是可比较的。

(6) 一个集合的有限子集中极小元一定存在。

f(x) · g(x) g(f(x))

(7) 如果f是单射函数，并且g是满射函数, 那么g°f一定是满射函数。 F

(8) 如果g是满射函数，并且f是满射函数, 那么g°f一定是满射函数。 T

(9) 设 A是可数集，B是A的子集，则A\B与A等势。

(10) 非空集合A上的良序关系一定是全序关系。

课堂练习二

1 (40%) 判断题(T / F)：

(1)设A 是非空集合， R_1、$R_2 \subseteq A\times A$， R_1和R_2是传递的， 那么$R_1 \circ R_2$是传递的。

(2)设A 、B是非空集合，R_1、$R_2 \subseteq A\times B$，那么 $\wp(R_1 \cap R_2) \in \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$ 。

(3) 设A 是一个非空集合，二元关系$R \subseteq A\times A$ ，那么R^+一定是传递关系。

(4) 良序集中每个元素都有直接后继。

(5) 半序集中任意两个元素都是可比较的。

(6) 一个集合的有限子集中极小元一定存在。

(7) 如果f是单射函数，并且g是满射函数, 那么$g\circ f$一定是满射函数。

(8) 如果g是满射函数，并且f是满射函数, 那么$g\circ f$一定是满射函数。

(9) 设 A是可数集，B是A的子集，则A\B与A等势。

(10) 非空集合A上的良序关系一定是全序关系。

$(A\times A)\times(A\times A)$

2.(20%) 设A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}，定义A×A上的二元关系R：

$$R=\{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mid x_1, x_2, y_1, y_2 \in A \wedge x_1+y_1=x_2+y_2\}$$

(1) (12%)证明：R是A×A上的等价关系。

(2) (8%) 求$[(2,3)]_R$ 。

(2,3) (2,3)

(1,4) (2,3)

(4,1) (2,3)

(3,2),(2,3)

3. (15%) 设f和g是函数，如果 $f\subseteq g$，并且 $\wp(g)\subseteq\wp(f)$，

证明：$f=g$。 $f\subseteq g$. 证 $g\subseteq f$

$(x,y)\in g$ $x\in D(g)\to x\in D(f)$

$\exists y_1\ ((x,y_1)\in f)\to\exists y_1\ ((x,y_1)\in g)$

$\Rightarrow y=y_1$ $(x,y)\in f$. $g\subseteq f$

4. (25%)设R_1是A上的半序关系，R_2是B上的半序关系，定义A×B上的二元关系R_3如下：

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in R_3 \Leftrightarrow (x_1,x_2) \in R_1 \wedge (y_1,y_2) \in R_2$$

(1) (5%) R_3是A×B上的半序关系，请证明其反对称性。

(2) (10%) 若R_1是A={1,2,4}上的整除关系，R_2是B={2,3,6}上的整除关系，R_3即为定义的A×B上的半序关系，请画出R_1，R_2和R_3的哈斯图。 A×B = {(1,2)(1,3)(1,6)(2,2)(2,3)(2,6)(4,2)(4,3)(4,6)}

(3) (6%) 设C={(1,2),(1,3),(2,3)},判断C的上下确界、最大最小元、极大极小元是否存在，如果存在请具体指出。

(4) (4%) (A×B ，R_3)是否为全序集？请给出理由。

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in R_3$$

$$\Leftrightarrow (x_1,x_2) \in R_1 \wedge (y_1,y_2) \in R_3$$

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in R_3 \quad \wedge ((x_2,y_2),(x_1,y_1)) \in R_3$$

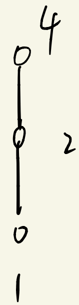
$$(x_1,x_2) \in R_1 \wedge (y_1,y_2) \in R_2 \wedge (x_2,x_1) \in R_1 \wedge (y_2,y_1) \in R_2$$

$x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

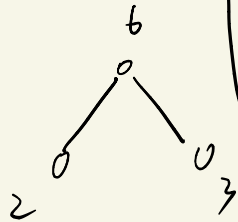
设 $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$

(2)

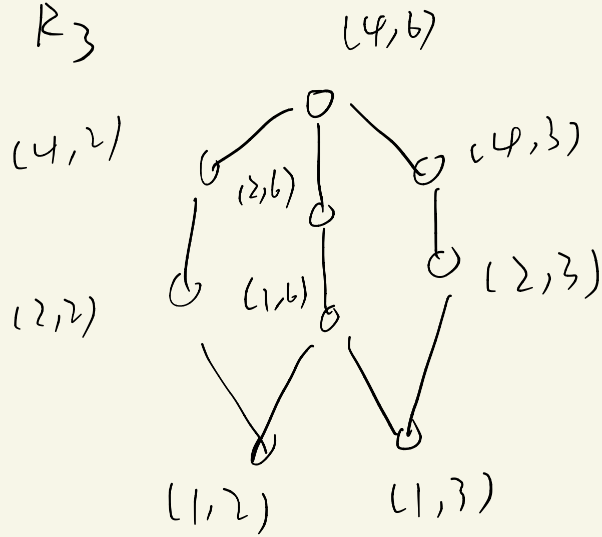
R_1



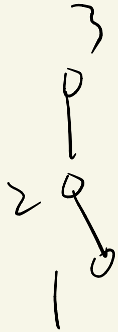
R_2



R_3



(3) C



(4) 否. Hasse图不为直线。

课堂练习三

1 (40%)判断题(T / F) 有限

(1) 设<S,*>是一个含幺半群，如果运算*满足消去律，那么<S,*>是一个群。 ✗

(2) 含幺半群的子半群一定是含幺半群。✗ (不含幺元?)

(3) 幺元是群的唯一幂等元。✓

(4) 设〈G , *〉是群，则G中必有二阶元素。✗ 偶数阶群

(5) 设〈G , *〉是群，|G|=n，设$x\in$G，若$x^m = e$， m∈ I,则$m \mid n$。✗

(6) 设〈$N_m, +_m, \times_m$〉是环，当m为素数时，〈$N_m, +_m, \times_m$〉是除环。✓

(7) 循环群的子代数系统一定是循环群。 T

<R,⊕> 交换群 子群

交换? 含幺?

(8) $G=\{1,3,4,5,9\}$, 则〈$G, \times_{11}$〉是群。✓

(9) 设〈G, * 〉是群， |G|=6，则它一定没有4 阶子群。✓

(10) 设〈F, ⊕, ⊗〉是域， 〈R, ⊕, ⊗〉是〈F, ⊕, ⊗〉的子环，则〈R, ⊕, ⊗〉是整环。

<R, ⊕> 交换群

<R, ⊗> 半群 结合律

F

课堂练习三

1 (40%)判断题(T / F)

(1) 设<S,*>是一个含幺半群，如果运算*满足消去律，那么<S,*>是一个群。 ✗ 子代数系统且半群

(2) 含幺半群的子半群一定是含幺半群。✗

(3) 幺元是群的唯一幂等元。√ $a*a=a$

(4) 设〈G , *〉是群，则G中必有二阶元素。✗ 不一定是最小m

(5) 设〈G , *〉是群，|G|=n，设$x\in$G，若$x^m = e$，m∈ I,则$m \mid n$。✗

(6) 设〈N_m, $+_m$, $\times_m$〉是环，当m为素数时，〈N_m, $+_m$, $\times_m$〉是除环。√

(7) 循环群的子代数系统一定是循环群。√

(8) G={1,3,4,5,9}, 则〈G, $\times_{11}$〉是群。√

(9) 设〈G, * 〉是群， |G|=6，则它一定没有4 阶子群。√

(10) 设〈F, ⊕, ⊗〉是域， 〈R, ⊕, ⊗〉是〈F, ⊕, ⊗〉的子环，则〈R, ⊕, ⊗〉是整环。✗ 环-√

$a^{12}=e$

$a^6=e.$　　2. 3.

2 (10%)设a是6阶群的生成元，则a^3和a^4是几阶元素?

有e.　$a^5=e$　$a=a$　$a^6=e$　$a=a$　$(a^3)^2=e.$　$(a^4)^3=e.$

3 (25%)证明：群的同态像是群。

$[0]_6, [1], \ldots\ldots$

$R<N_6, +_6, \times_6>.$

4 (25%)已知〈S_1, ⊕, ⊗〉和〈S_2, ⊕, ⊗〉是环〈R , ⊕, ⊗〉的两个子环。

$S_1=\{[0]\ [3]\}$　$S_2=\{[0], [2]\ [4]\}$

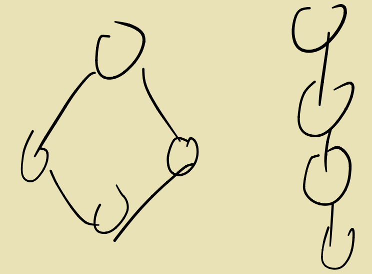
(1) 〈$S_1 \cup S_2$, ⊕, ⊗〉是环〈R , ⊕, ⊗〉的一个子环吗？请给出理由。

(2) 如果〈S_1, ⊕, ⊗〉和〈S_2, ⊕, ⊗〉都是无零因子环，那么〈$S_1 \cap S_2$, ⊕, ⊗〉一定是无零因子环吗？请阐述理由。

反例. $\exists a, b \in S_1 \cap S_2.$

$a \otimes b = 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0.$

课堂练习四



1 (40%)判断题(T / F)

(1) 4阶不同构的格只有2个。√

(2) 设 $\langle L, \preccurlyeq, *, \oplus\rangle$ 是格，则 $\forall a, b \in L$，由于 $(L, \preccurlyeq)$ 是半序集，必有 $a \preccurlyeq b$ 或者 $b \preccurlyeq a$，故总有 $a*b = a$ 或者 $a*b = b$。✗

(3) 全序格一定是模格。√

(4) 设 $\langle L, \preccurlyeq, *, \oplus\rangle$ 是分配格，对于任意的 $a \in L$，若 a 有补元，则 a 的补元是唯一的。✗ (有界) T

(5) 有限的半序集一定是格。✗

(6) 有界格一定是有限格。✗

(7) 在有界的分配格中，每个元素的补元都是唯一存在的，因而有界的分配格是布尔代数。✗

(8) 有补格一定是分配格。✗

(9) $<S_{24}, |>$ 是布尔代数，$S_n = \{x | x \in N^+ \wedge x$ 是 n 的因子$\}$。✗

(10) 有限布尔代数中，任一非最小元素 x，都可由它下面的(即小于等于它的)全部原子来表示。√

课堂练习四

1 (40%)判断题(T / F)

(1) 4阶不同构的格只有2个。✓

(2) 设〈L, ≼ , *, ⊕〉是格，则$\forall a$, $b\in L$，由于(L, ≼)是半序集，必有a≼ b 或者b≼ a，故总有$a*b = a$ 或者 $a*b = b$。✗

(3) 全序格一定是模格。✓ 有界分配格

(4) 设〈L, ≼ , *, ⊕〉是分配格，对于任意的$a\in L$，若a有补元，则a的补元是唯一的。✓ 为什么

(5) 有限的半序集一定是格。✗

(6) 有界格一定是有限格。✗

(7) 在有界的分配格中，每个元素的补元都是唯一存在的，因而有界的分配格是布尔代数。✗

(8) 有补格一定是分配格。✗ 1 2 3 4 6 8 12 24

(9) $< S_{24}, | >$是布尔代数，$S_n=\{x|x\in N^+\wedge x$是n的因子$\}$。✗

(10) 有限布尔代数中，任一非最小元素x，都可由它下面的(即小于等于它的)全部原子来表示。✓

课堂练习四

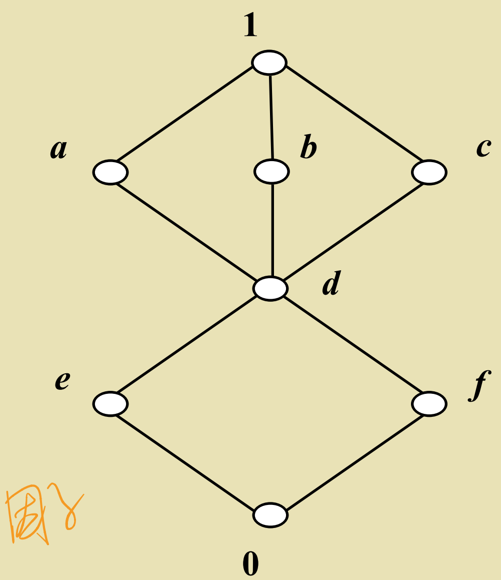
2 (20%)设<L,*, ⊕ >是格，|L|=5，请画出所有不同构的格的Hasse图。

3 (15%) 设格如右图所示，试判别：

(1) 是否是分配格？为什么？ ×

(2) 是否是有界格？为什么？ √

(3) 是否是有补格？为什么？ ×



正整

4(25%)设$S_n=\{x|x\in N^+\wedge\ x$是$n$的因子$\}$，|是$S_n$上的整除关系。

(1)(10%) 如果n=30, 请画出< S_{30}, |>的哈斯图，并给出 $B=\{2,6,15\}$的上下确界。

(2)(15%) < S_{40}, |>和 < S_{110} , |>是布尔代数吗？阐明理由。若是，则求出其原子集。