

第2章习题

2.4.1 作用力 \vec{F} , $AB=a$, $CB=b$, 计算 \vec{F} 对 A, B 的矩

解: 以 A 为原点, AB 方向, BC 方向分别为 x, y 轴正方向建立平面直角坐标系, 其中 \vec{i}, \vec{j} 分别为 x, y 轴正方向单位向量

$$\vec{F} \text{ 对 A 的矩 } \vec{M}_A = \vec{AC} \times \vec{F} = (a\vec{i} + b\vec{j}) \times (F_x\vec{i} + F_y\vec{j}) \\ = (aF_y - bF_x)\vec{k}$$

其中 \vec{k} 正方向为垂直于纸面向外

$$\vec{F} \text{ 对 B 的矩 } \vec{M}_B = \vec{BC} \times \vec{F} = b\vec{j} \times (F_x\vec{i} + F_y\vec{j}) \\ = -bF_x\vec{k}$$

$$\text{当 } \theta = 30^\circ \text{ 时 } \vec{M}_A = (\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b)F\vec{k} \quad \vec{M}_B = -\frac{\sqrt{3}}{2}bF\vec{k}$$

2.4.2 $W_1 = 450 \text{ kN}$, $W_2 = 200 \text{ kN}$, $F_1 = 300 \text{ kN}$, $F_2 = 70 \text{ kN}$. 求力系的合力, 取图中 O 点为简化中心。

解: 依题 $\sin\theta = \frac{2.7}{\sqrt{2.7^2 + 9^2}} = 0.28735$ $\cos\theta = 0.95783$

$$\text{主矢 } \vec{F} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -450\vec{k} - 200\vec{k} + 300\vec{i} - (70\text{k}\cos\theta\vec{i} + 70\text{k}\sin\theta\vec{j}) \\ = (232.952\text{k}\cdot\vec{i} - 670.115\text{k}\cdot\vec{j}) \text{ N}$$

其中 \vec{i}, \vec{j} 分别为 x, y 轴正方向单位向量

$$\text{主矩 } \vec{M} = \vec{M}_{W_1} + \vec{M}_{W_2} + \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} \\ = (-1.5 \times 450\text{k})\vec{k} + (-3.9 \times 200\text{k})\vec{k} + (-3 \times 300\text{k})\vec{k} + 0 \\ = [(-2355\text{k})\cdot\vec{k}] \text{ N}\cdot\text{m}$$

$\vec{F} \neq 0$ $\vec{M} \neq 0$ 又 $\vec{F} \cdot \vec{M} = 0$ 即 $\vec{F} \perp \vec{M}$

故力系可简化为合力 \vec{F}' $\vec{F}' = \vec{F} = (232.952\text{k}\cdot\vec{i} - 670.115\text{k}\cdot\vec{j}) \text{ N}$

$$\text{作用点 } O' \text{ 相对于 O 的径矢 } \vec{r}_O = \frac{\vec{F} \times \vec{M}}{F^2} = 3.135\vec{i} + 1.090\vec{j}$$

2.4.3 $O_1A = O_2B = 100\text{mm}$, $O_1O_2 = AB$, O_1A 以 $\omega = 2\text{rad/s}$ 绕 O_1 轴转动。AB 杆上有套筒 C, 筒与 CD 铰接。求 $\varphi = 60^\circ$ 时, CD 杆的速度和加速度。

解. 动杆: CD 杆 动系: AB 横杆

牵连速度 $v_e = \omega l_{O_1A} = 0.2\text{m/s}$

又绝对速度方向竖直, 相对速度方向水平

$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

故 $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_e \sin 30^\circ = 0.1\text{m/s}$, 方向竖直向上

绝对加速度方向竖直, 相对加速度方向水平

牵连加速度 $\vec{a}_e = \omega^2 l_{O_1A} = 0.4\text{m/s}^2$

又 $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$

故 $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r = \vec{a}_e \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{5}\text{m/s}^2$, 方向竖直向上

综上, CD 杆速度 $\vec{v}_a = 0.1\text{m/s}$, 方向竖直向上

加速度 $\vec{a}_a = \frac{\sqrt{3}}{5}\text{m/s}^2$, 方向竖直向上

2.4.5 求 M 点和 N 点绝对速度和绝对加速度

解. 动系: OA 杆 在该题中认为 $AM \perp AN$

牵连速度 $\vec{v}_{me} = \omega_1 \cdot l_{om} = 1.2\text{m/s}$, 方向垂直于 DM

$\vec{v}_{ne} = \omega_1 \cdot l_{on} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\text{m/s}$, 方向垂直于 DN

相对速度: $\vec{v}_{mr} = \omega_2 r = 0.6\text{m/s}$, 方向垂直于 AM

$\vec{v}_{nr} = \omega_2 r = 0.6\text{m/s}$, 方向垂直于 AN

不妨令 \vec{i} 为 OA 方向单位向量, \vec{j} 为 AN 方向单位向量

绝对速度 $\vec{v}_{ma} = \vec{v}_{me} + \vec{v}_{mr} = 1.2\vec{j} - 0.6\vec{j} = (0.6\vec{j})\text{m/s}$

$\vec{v}_{na} = \vec{v}_{ne} + \vec{v}_{nr} = -\frac{2}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j} + 0.6\vec{i} = (0.2\vec{i} + 0.8\vec{j})\text{m/s}$

牵连加速度 $\vec{a}_{me} = -\omega_1^2 3r \cdot \vec{i} - a_1 \cdot 3r \cdot \vec{j} = (-4.8\vec{i} - 0.9\vec{j})\text{m/s}^2$

$\vec{a}_{ne} = -3.2\vec{i} - 1.6\vec{j} + 0.3\vec{i} - 0.6\vec{j} = (-2.9\vec{i} - 2.2\vec{j})\text{m/s}^2$

相对加速度 $\vec{a}_{mr} = -\omega_2^2 r \vec{i} + a_2 r \cdot \vec{j} = (-3.6\vec{i} + 0.4\vec{j})\text{m/s}^2$

$\vec{a}_{nr} = -\omega_2^2 r \vec{j} - a_2 r \vec{i} = (0.4\vec{i} - 3.6\vec{j})\text{m/s}^2$

科氏加速度 $\vec{a}_{mc} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{mr} = 4.8\vec{i}$

$\vec{a}_{nc} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{nr} = 4.8\vec{j}$

绝对加速度 $\vec{a}_m = \vec{a}_{me} + \vec{a}_{mr} + \vec{a}_{mc} = (-3.6\vec{i} - 0.5\vec{j})\text{m/s}^2$

$\vec{a}_n = \vec{a}_{ne} + \vec{a}_{nr} + \vec{a}_{nc} = (-3.3\vec{i} - \vec{j})\text{m/s}^2$

综上, M 点绝对速度 $\vec{v}_{ma} = (0.6\vec{j})\text{m/s}$

M 点绝对加速度 $\vec{a}_m = (-3.6\vec{i} - 0.5\vec{j})\text{m/s}^2$

N 点绝对速度 $\vec{v}_{na} = (0.2\vec{i} + 0.8\vec{j})\text{m/s}$

N 点绝对加速度 $\vec{a}_n = (-3.3\vec{i} - \vec{j})\text{m/s}^2$

其中 \vec{i} 为 OA 方向单位向量, \vec{j} 为 AN 方向单位向量

2.4.6 求此时CE的角速度及角加速度

解. 以CE为动系

设CE角速度为 ω , 角加速度为 β
对D点: \vec{v}_{De} 方向水平 \vec{v}_{Dr} 方向竖直

$\vec{v}_{De} = \omega l_{AD} = 0.5 \text{ m/s}$ 又 $\vec{v}_{De} = \vec{v}_{De} + \vec{v}_{Dr}$
 $\vec{v}_{Dr} = \vec{v}_{De} \cos 60^\circ = 0.25 \text{ m/s}$, 竖直向上
 $\vec{v}_{De} = \vec{v}_{De} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m/s}$, 水平向左

CE角速度 $\omega = \frac{v_{De}}{l_{AD}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s}$, 逆时针方向
令 j 为竖直向上单位向量, i 为水平向右单位向量

$\vec{a}_D = \omega^2 l_{AD} = 1 \text{ m/s}^2$

又 $\vec{a}_D^n = \omega^2 l_{CD} = 0.375 \text{ m/s}^2$, 竖直向下

$\vec{a}_D^t = \beta l_{CD} = 0.5\beta$, 水平方向

\vec{a}_D 竖直方向 $\vec{a}_C = 2\omega \times \vec{v}_{Dr} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m/s}^2$, 水平向左

又 $\vec{a}_D \cos \theta = \vec{a}_D^t + \vec{a}_C$

故 $\vec{a}_D^t = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \text{ m/s}^2$, 水平向左

故 $\beta = \vec{a}_D^t / l_{CD} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s}^2$, 逆时针方向

综上, CE角速度为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s}$, 逆时针方向

CE角加速度为 $\frac{2-\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s}^2$, 逆时针方向

2.4.7 试求该瞬时销钉M对板的速度与加速度

解. 动系1. CD板 动系2. T字杆 动点M

$\vec{v}_{C1} = \omega_1 l_{CD} = 0.1 \text{ m/s}$, 方向沿圆弧切向

\vec{v}_{C2} 方向沿圆弧切向, $\vec{v}_{C2} = \vec{v}_{C1} + \vec{v}_{C2}$, 方向沿圆弧切向

$\vec{v}_{C2} = 0.1 \text{ m/s}$, 水平向左 \vec{v}_{C2} 竖直方向

$\vec{v}_A = \vec{v}_{C2} + \vec{v}_{C2}$
故 $\vec{v}_A = \frac{\vec{v}_{C2}}{\cos 60^\circ} = 0.2 \text{ m/s}$

故 $\vec{v}_{r1} = \vec{v}_A - \vec{v}_{C1} = 0.1 \text{ m/s}$, 方向斜向左下与水平方向60°

\vec{v}_A \vec{v}_{r1}

☆ $\vec{a}_{C1}^n = \omega_1^2 l_{CD} = 0.1 \text{ m/s}^2$ $\vec{a}_{C1}^t = 0$ $\omega_{r1} = \frac{v_{r1}}{l_{CD}} = 1 \text{ rad/s}$

☆ $\vec{a}_{r1}^n = \omega_{r1}^2 l_{CD} = 0.1 \text{ m/s}^2$ \vec{a}_{r1}^t 待求

$\vec{a}_C = 2\omega_1 \times \vec{v}_{r1} = 0.2 \text{ m/s}^2$, 方向 $M \rightarrow C$

$\vec{a}_A = \vec{a}_{C1}^n + \vec{a}_{C1}^t + \vec{a}_{r1}^n + \vec{a}_{r1}^t + \vec{a}_C$

又 $\vec{a}_{C2} = 0.12 \text{ m/s}^2$ \vec{a}_{r2} 方向竖直

$\vec{a}_A = \vec{a}_{C2} + \vec{a}_{r2}$

令 i 为水平向右单位向量 j 为竖直向上单位向量 申明

$a_{C2} = -(\vec{a}_{C1}^n + \vec{a}_{r1}^n + \vec{a}_C) \sin 60^\circ + \vec{a}_{r1}^t \cos 60^\circ$

故 $\vec{a}_{r1} = (0.24 + \frac{2\sqrt{3}}{5}) \text{ m/s}^2$ 关键结果

故 $\vec{a}_{r1} = [0.1 \sin 60^\circ - (0.24 + \frac{2\sqrt{3}}{5}) \cos 60^\circ] i - [0.1 \cos 60^\circ + (0.24 + \frac{2\sqrt{3}}{5}) \sin 60^\circ] j$
 $= [\frac{-12-15\sqrt{3}}{100} i - \frac{12\sqrt{3}+65}{100} j] \text{ m/s}^2$

综上, 销钉对板速度 $\vec{v}_{r1} = 0.1 \text{ m/s}$, 方向斜向左下与水平60°

即 $\vec{v}_{r1} = (-\frac{1}{20} i - \frac{\sqrt{3}}{20} j) \text{ m/s}$

加速度 $\vec{a}_{r1} = [\frac{-12-15\sqrt{3}}{100} i - \frac{12\sqrt{3}+65}{100} j] \text{ m/s}^2$