§2.2 Laplace逆变换

一、反演积分公式——Laplace逆变换公式

二、求Laplace逆变换的方法

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

1. 公式推导

推导 (1) 由 Laplace 变换与 Fourier 变换的关系可知，

函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=F(\beta+j\omega)$

就是函数 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换，

即 $F(s)=F(\beta+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t.$

(2) 根据 Fourier 逆变换，在 $f(t)$ 的连续点 t 处，有

$$f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

1. 公式推导

推导 (2) 根据 Fourier 逆变换，在 $f(t)$ 的连续点 t 处，有

$$f(t)u(t)e^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

(3) 将上式两边同乘 $e^{\beta t}$，并由 $s=\beta+j\omega$，有

$$f(t)u(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}\,ds.$$

即得 $\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}\,ds,\ (t>0).}$

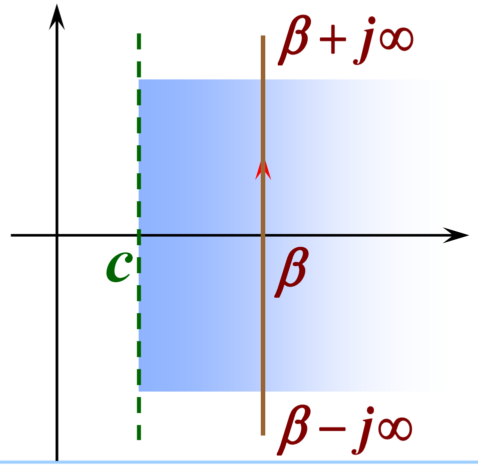
一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

2. 反演积分公式

- **根据上面的推导，得到如下的 Laplace 变换对:**

$$\begin{cases} F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt; & (A) \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}\,ds,\ (t>0). & (B) \end{cases}$$

定义 称 (B) 式为**反演积分公式**。



注 **反演积分公式中的积分路径是 s 平面上的一条直线 $\mathrm{Re}\,s=\beta$, 该直线处于 $F(s)$ 的存在域中。**

二、求 Laplace 逆变换的方法

1. 留数法

- **利用留数计算反演积分。**

定理　设函数 $F(s)$ 除在半平面 $\mathrm{Re}\,s \le c$ 内有有限个孤立奇点 $s_1, s_2, \cdots s_n$ 外是解析的，且当 $s \to \infty$ 时，$F(s) \to 0$，则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta - j\infty}^{\beta + j\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}\,s$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[F(s)\mathrm{e}^{st},\ s_k],\ (t > 0).$$

2. 查表法

- **利用 Laplace 变换的性质，并根据一些已知函数的 Laplace 变换来求逆变换。**

二、求 Laplace 逆变换的方法

几个常用函数的 Laplace 逆变换

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}]=1.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}]=e^{at}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{m!}{s^{m+1}}]=t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}]=e^{at}t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+b^2}]=\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}]=e^{at}\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{b}{s^2+b^2}]=\sin bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}]=e^{at}\sin bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta(t).$$

例　已知 $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解　**方法一　利用查表法求解**

(1) $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s-2}$.

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-a}]=e^{at}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

$$=2\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}]+3\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}]$$

$$=2e^{-t}+3e^{2t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 **方法二 利用留数法求解**

(1) $s_1=-1, s_2=2$ 为 $F(s)$ 的一阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-1]=\left.\frac{5s-1}{s-2}e^{st}\right|_{s=-1}=2e^{-t},$$

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st},2]=\left.\frac{5s-1}{s+1}e^{st}\right|_{s=2}=3e^{2t}.$$

(2) $f(t)=\mathrm{Res}[F(s)e^{st},-1]+\mathrm{Res}[F(s)e^{st},2]$

$$=2e^{-t}+3e^{2t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解

(1) $$F(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)^2}$$

$$=\frac{1}{s-2}+\frac{-1}{s-1}+\frac{-1}{(s-1)^2}.$$ **(重根)**

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right]=e^{at}$，$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^2}\right]=t\,e^{at}$，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=e^{2t}-e^{t}-t\,e^{t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 (1) $$F(s)=\frac{(s+1)^2}{[(s-1)^2+4](s-3)}$$

$$=\frac{2}{s-3}+\frac{-1\cdot(s-1)+2\cdot 1}{(s-1)^2+2^2},\ \text{(复根)}$$

$$\Rightarrow (s+1)^2=A[(s-1)^2+2^2]+[B(s-1)+2C](s-3),$$

令 $s=3$，得 $A=2$;

令 $s=1+2i$，得 $(2+2i)^2=(2iB+2C)(2i-2)$,

$$\Rightarrow B=-1,\ C=1,$$

$$F(s)=2\cdot\frac{1}{s-3}-\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}+\frac{2}{(s-1)^2+2^2},$$

由 $$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}]=e^{at},$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}]=e^{t}\cos 2t,$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2+2^2}]=e^{t}\sin 2t,$$

得 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=2e^{3t}-e^{t}\cos 2t-e^{t}\sin 2t.$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{(s-1)^2}$， $\Rightarrow\ f(t)=1-e^t+te^t$.

利用查表或观察法求拉氏逆变换常用到部分分式分解

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots.+b_{m-1}s+b_m}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots.+a_{n-1}s+b_n},m<n$$

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)]+L^{-1}[F_2(s)]+\ldots+L^{-1}[F_n(s)]$$
$$= f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t)$$
$$F(s)= F_1(s)+F_2(s)+\ldots+F_n(s)$$

条件： 分母多项式能分解成因式

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

多项式极点 $-p_1,-p_2,\ldots,-p_n$

多项式零点 $-z_1,-z_2,\ldots,-z_m$

（1）分母有不等实根 $s_1, \cdots, s_n$

$$\boxed{F(s)=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-s_n}}$$

等式两边同乘$(s-s_1)$

$$(s-s_1)F(s)=\frac{\cancel{(s-s_1)}k_1}{\cancel{s-s_1}}+\underbrace{\frac{(s-s_1)k_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{(s-s_1)k_n}{s-s_n}}_{=0}$$

$$k_1=(s-s_1)F(s)\Big|_{s=s_1}$$

$$k_2=(s-s_2)F(s)\Big|_{s=s_2}$$

$$\cdots$$

$$k_n=(s-s_n)F(s)\Big|_{s=s_n}$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i e^{s_i t}$$

第二章拉普拉斯变换

例. $F(s)=\dfrac{-s^2-s+5}{s(s^2+3s+2)}$

$$=\frac{-s^2-s+5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{s+2}$$

$$k_1=F(s)s\big|_{S=0}=2.5$$

$$k_2=F(s)(s+1)\big|_{S=-1}=-5$$

$$k_3=F(s)(s+2)\big|_{S=-2}=1.5$$

$$f(t)=2.5-5\mathrm{e}^{-t}+1.5\mathrm{e}^{-2t}\quad(t\geq 0)$$

(2) 分母有共轭复根

假设只有两个根 $s_{1,2} = -\alpha \pm \mathrm{j}\omega$

$$\boxed{F(s) = \frac{k_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\omega} + \frac{k_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\omega}}$$

可根据前面介绍的方法求出 k_1, k_2。

（3）分母 有相等的实根（重根）

$$F(s)=\frac{F_1(s)}{(s-s_1)^2}=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{(s-s_1)^2}$$

等式两边乘 $(s-s_1)^2$

$$F(s)(s-s_1)^2=k_1(s-s_1)+k_2$$

$$k_2=[(s-s_1)^2F(s)]\Big|_{s=s_1}$$

$$k_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-s_1)^2F(s)]\Big|_{s=s_1}$$

$$f(t)=k_1\mathrm{e}^{s_1t}+k_2t\mathrm{e}^{s_1t}\qquad(t\geq 0)$$

从分母的最高次幂对应的系数开始求

例1 $$F(s)=\frac{2s+5}{(s+1)^2}=\frac{k_1}{(s+1)}+\frac{k_2}{(s+1)^2}$$

$$k_2=\frac{2s+5}{(s+1)^2}(s+1)^2\Big|_{s=-1}=3$$

$$k_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(2s+5)\Big|_{s=-1}=2$$

$$f(t)=2\mathrm{e}^{-t}+3t\mathrm{e}^{-t}\qquad t\geq 0$$

例2 $$F(s)=\frac{s^2+2s+2}{(s+2)^3}=\frac{k_{21}}{(s+2)}+\frac{k_{22}}{(s+2)^2}+\frac{k_{23}}{(s+2)^3}$$

等式两边乘 $(s+2)^3$

$$F(s)(s+2)^3=k_{21}(s+2)^2+k_{22}(s+2)+k_{23}$$

$$k_{23}=\frac{s^2+2s+4}{(s+2)^3}(s+2)^3\Big|_{s=-2}=2$$

第二章拉普拉斯变换

$$F(s)(s+2)^3 = k_{21}(s+2)^2 + k_{22}(s+2) + k_{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[F(s)(s+2)^3] = 2k_{21}(s+2) + k_{22}$$

$$k_{22} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\frac{s^2+2s+2}{(s+2)^3}(s+2)^3]\Big|_{s=-2} = (2s+2)\Big|_{s=-2} = -2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[F(s)(s+2)^3] = 2k_{21}$$

$$k_{21} = \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[\frac{(s^2+2s+2)}{(s+2)^3}(s+2)^3]\Big|_{s=-2} = \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[2s+2]\Big|_{s=-2} = 1$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)} + \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^3}$$

$$f(t) = \mathrm{e}^{-2t} - 2t\mathrm{e}^{-2t} + t^2\mathrm{e}^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

（4）一般多重根情况 $F(s)=\dfrac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\cdots+a_m}{(s-s_1)^n}$

$$\boxed{F(s)=\frac{k_1}{s-s_1}+\frac{k_2}{(s-s_1)^2}+\cdots+\frac{k_{n-1}}{(s-s_1)^{n-1}}+\frac{k_n}{(s-s_1)^n}}$$

$$k_n=[(s-s_1)^nF(s)]\Big|_{s=s_1}$$

$$k_{n-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-s_1)^nF(s)]\Big|_{s=s_1}$$

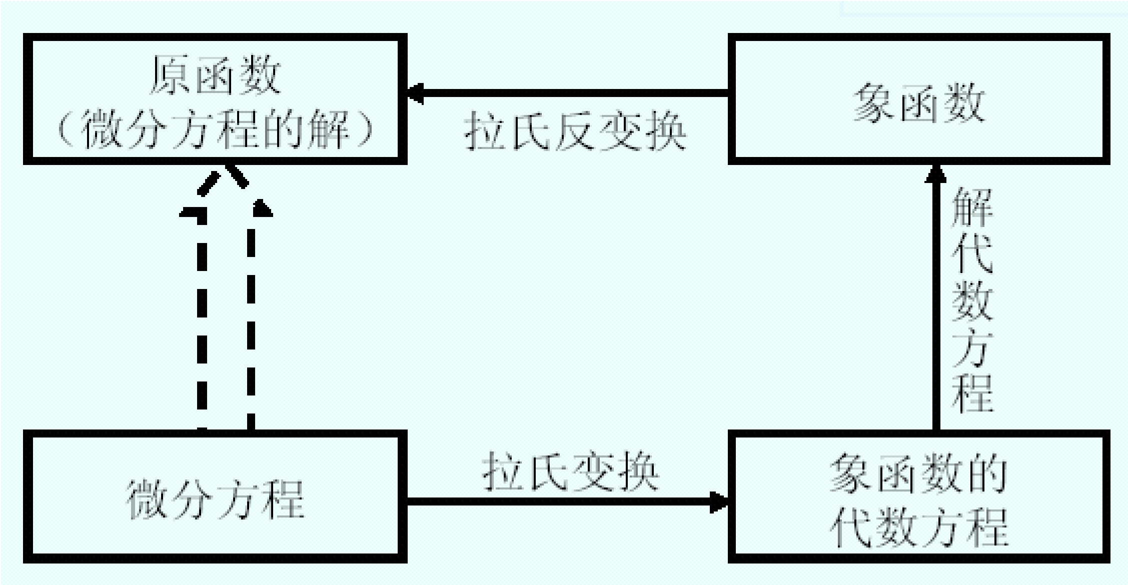
$$k_{n-2}=\frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[(s-s_1)^nF(s)]\Big|_{s=s_1}$$

$$\vdots$$

$$k_1=\frac{1}{(n-1)!}\times\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}}[(s-s_1)^nF(s)]\Big|_{s=s_1}$$

四、拉氏变换求解线性微分方程

- 将微分方程通过拉氏变换变为 s 的代数方程；
- 解代数方程，得到有关变量的拉氏变换表达式；



例 求解微分方程$y''(t)+\omega^2 y(t)=0$，$y(0)=0, y'(0)=\omega.$

解：对方程两边取拉氏变换，并利用线性性质及微分性质，有

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=0,$$ 其中$Y(s)=L[y(t)]$,

代入初值即得： $Y(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$,

求逆变换，则可以得到：

$$y(t)=L^{-1}[Y(\omega)]=L^{-1}[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}]=\sin\omega t.$$

例 设有线性微分方程 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 6$，初始条件 $\dot{y}(0) = y(0) = 2$

解 方程两边拉氏变换

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 5sY(s) - 5y(0) + 6Y(s) = \frac{6}{s}$$

代入初始条件 $Y(s) = \frac{2s^2 + 12s + 6}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{2s^2 + 12s + 6}{s(s+2)(s+3)}$

部分分式展开法求得 $Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+3} + \frac{5}{s+2}$

拉氏反变换 $y(t) = 1 - 4e^{-3t} + 5e^{-2t} \quad (t > 0)$

稳态分量 $y(\infty) = 1$ 瞬态分量 $-4e^{-3t} + 5e^{-2t}$

终值定理校验 $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2s^2 + 12s + 6}{(s+3))(s+2)} = 1$

例、利用拉普拉斯变换求解方程组

$$\begin{cases} y''-x''+x'-y=\mathrm{e}^{t}-2 \\ 2y''-x''-2y'+x=-t \end{cases},\quad \begin{cases} y(0)=y'(0)=0 \\ x(0)=x'(0)=0 \end{cases}.$$

解：对方程两边取拉氏变换，并利用线性性质及微分性质，有

$$\begin{cases} s^2Y(s)-s^2X(s)+sX(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s}, \\ 2s^2Y(s)-s^2X(s)-2sY(s)+X(s)=-\dfrac{1}{s^2}, \end{cases}$$

其中 $X(s)=L[x(t)],Y(s)=L[y(t)],$

经计算得到： $Y(s)=-\dfrac{1}{s(s-1)^2}$

对其进行逆变换，则可以得到：

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}]=1+t\,\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{t}$$

$X(s),x(t)?$

✓应用拉氏变换法求解微分方程时，由于初始条件已自动地包含在微分方程的拉氏变换式中，因此，不需要根据初始条件求积分常数的值就可得到微分方程的全解。

✓如果所有的初始条件为零，微分方程的拉氏变换可以简单地用s^n代替d^n/dt^n得到。