复变函数试卷（A）参考答案及评分标准

一、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. $-\frac{1}{2}$;

2. $\cos(2k+1/2)\sqrt{2}\pi + i\sin(2k+1/2)\sqrt{2}\pi, k=0,\pm1,\cdots,$;

3. 二;

4.$\frac{2z-1}{z-2}i$;

5. $\frac{1}{24}$;

6. $\sqrt{2}$;

7.$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}\frac{1}{z^{2k}}$ 或 $1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{z^4}-\cdots$;

8. $m=-3, l=-3$;

9. 0;

10. $2\pi i$;

二、判别题 (打 $\surd$ 或 $\times$, 每小题 2 分, 共 20 分)

1. $\times$;

2. $\times$;

3. $\surd$;

4. $\surd$;

5. $\times$;

6. $\surd$;

7. $\surd$;

8. $\surd$;

9. $\times$;

10. $\times$;

三、(1) 当 $|z|<1$ 时, 有 $\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\cdots+z^{2k}+\cdots$ (2 分)

在上式两边对 z 求导, 得 $\frac{2z}{(1-z^2)^2} = 2z + 4z^3 + \cdots + 2kz^{2k-1} + \cdots$. (2 分)
化简后得,$\frac{1}{(1-z^2)^2} = 1 + 2z^2 + 3z^4 + \cdots + kz^{2k-2} + \cdots$. (1 分)

(2) 当 $1 < |z| < +\infty$ 时, 有 $0 < |1/z| < 1$, 故

$$\frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(1/z)^2} = -\frac{1}{z^2}(1 + (1/z)^2 + \cdots + (1/z)^{2k} + \cdots.)$$

(2 分) 在上式两边对 z 求导, 得

$$\frac{2z}{(1-z^2)^2} = 2/z^3 + 4/z^5 + \cdots + 2k/z^{2k+1} + \cdots.$$

(2 分) 化简后得,$\frac{1}{(1-z^2)^2} = 1/z^4 + 2/z^6 + \cdots + k/z^{2k+2} + \cdots$.(1 分)

四、令 $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$,$f(z)$ 在上半平面有两个单极点:$z_1 = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ 和 $z_2 = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$.(1 分)

由有理型积分计算公式, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 2\pi i(Res[f(z), z_1] + Res[f(z), z_2]).$$

(3 分)

由留数计算公式, 有

$$Res[f(z), z_1] + Res[f(z), z_2] = \frac{z^2}{4z^3}|_{z=z_1} + \frac{z^2}{4z^3}|_{z=z_2} = -i\sqrt{2}/4.$$

(3 分)

因此 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.(2 分)

故 $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = 1/2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.(1 分)

五、区分两种情形:(1) 原点不包含在曲线 C 内. 这时 $\frac{1}{z^4}$ 在曲线 C 围成的单连通区域内解析, 由 Cauchy-Goursat 基本定理知,$\oint_C \frac{1}{z^4}dz = 0$. (3 分)

(2) 原点包含在曲线 C 内. 作一个以原点为中心, 半径 r 充分小的圆 C_r, 使得其完全包含在 C 内 (1 分). 由复合闭路定理,$\oint_C \frac{1}{z^4}dz = \oint_{C_r} \frac{1}{z^4}dz$. (2 分)

令 $z = re^{i\theta}$, 则

$$\oint_{C_r} \frac{1}{z^4}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta})^4} rie^{i\theta}d\theta = i/r^3 \int_0^{2\pi} e^{-3i\theta}d\theta = 0.$$

(1 分). 故 $\oint_C \frac{1}{z^4}dz = 0$. (1 分)

综合 (1)(2), 知 $\oint_C \frac{1}{z^4}dz = 0$.

六、证法 1: 首先证明, 若 $|\alpha| = \lambda|\beta|$, 则有 $|\alpha - \lambda^2\beta| = \lambda|\alpha - \beta|$. 事实上,

$$|\alpha - \lambda^2\beta|^2 = (\alpha - \lambda^2\beta)(\bar{\alpha} - \lambda^2\bar{\beta}) = |\alpha|^2 - \lambda^2(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + \lambda^4|\beta|^2.$$

而 $\lambda^2|\alpha - \beta|^2 = \lambda^2|\beta|^2 - \lambda^2(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) + \lambda^2|\alpha|^2$. 因此上式成立.(2 分)

因此有 $|(z - z_1) - \lambda^2(z - z_2)| = \lambda|(z - z_1) - (z - z_2)|$. 化简后得

$$|z - \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}| = \frac{\lambda}{|1 - \lambda^2|}|z_1 - z_2|.$$

即 $|z - a| = R$, 其中圆心 $a = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}$, 半径 $R = \frac{\lambda}{|1 - \lambda^2|}|z_1 - z_2|$. (2 分)

并且

$$z_1 - a = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}(z_2 - z_1), z_2 - a = \frac{1}{1 - \lambda^2}(z_2 - z_1).$$

所以有 $|z_1 - a||z_2 - a| = R^2$, 即 z_1, z_2 关于圆周对称. (3 分)

证法 2: 令 $z = x + iy$,$z_1 = x_1 + iy_1$,$z_2 = x_2 + iy_2$, 原方程等价于

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \lambda^2((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2).$$

(1 分)

整理化简得

$$(x - \frac{x_1 - \lambda^2 x_2}{1 - \lambda^2})^2 + (y - \frac{y_1 - \lambda^2 y_2}{1 - \lambda^2})^2 = \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2].$$

因此原方程表示的轨迹为一个圆.(3 分)

下同证法 1. (3 分)

七、由假设,$f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内 $0 < |z - z_0| < r$ 内解析, 故 $f(z)$ 可展成 Laurent 级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. (2 分)

由于 $f(z)$ 在 $0 < |z-z_0| < r$ 内有界, 所以存在常数 $M > 0$, 使得 $|f(z)| < M$. 由 Laurent 展开定理,

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}} d\zeta.$$

(2 分) 由积分估值公式, 有

$$|c_{-n}| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{-n+1}} ds \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{-n+1}}\oint_{C_r} ds = Mr^n.$$

(2 分) 当 $n \ge 1$ 时, 令 $r \to 0$, 得到 $c_n = 0$. 因此 $f(z)$ 的 Laurent 展式中不含负幂项, 即 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.(1 分)

八、(本题答案不唯一，只要给出一种即可)

第一步，求一共形映射将 D 映为第一象限。

分别令 C_1 和 C_2 表示以 $z=-1$ 和 $z=1$ 为圆心的圆弧, 它们相交于点 i 和 $-i$. 首先用分式线性映射把 i 映为 0, 把 $-i$ 映为 ∞, 这样将区域 D 映成 ζ 平面上张角为 $\pi/2$ 的角形域. 令 $\zeta = k\frac{z-i}{z+i}$. 在 C_1 上取一点 $\sqrt{2}-1$，令其在 ζ 下映为 i，即 $i = k\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i} = k\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(1+i)$. $k = \frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\frac{i}{1+i}$。这样由分式线性映射的保角性知,$\zeta$ 将 C_1 映为虚轴上半部分，将 C_2 映为正实轴，从而将 D 映为第一象限。(5 分)

第二步，令 $w = \zeta^2 = (\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\frac{i}{1+i})^2\frac{(z-i)^2}{(z+i)^2} = i\frac{(z-i)^2}{(z+i)^2}$, 则该映射将 D 共形地映为上半平面。(3 分)