

离散数学辅助教材

概念分析结构思想与推理证明

第一部分

集合论

刘国荣

交大电信学院计算机系

离散数学习题解答

习题一 (第一章集合)

1. 列出下述集合的全部元素:

1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是偶数} \wedge x < 15\}$

2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 4 + x = 3\}$

3) $C = \{x \mid x \text{ 是十进制的数字}\}$

[解] 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

2) $B = \emptyset$

3) $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2. 用谓词法表示下列集合:

1) $\{\text{奇整数集合}\}$

2) $\{\text{小于 7 的非负整数集合}\}$

3) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

[解] 1) $\{n \mid n \in \mathbb{I} \wedge (\exists m \in \mathbb{I})(n = 2m + 1)\};$

2) $\{n \mid n \in \mathbb{I} \wedge n \geq 0 \wedge n < 7\};$

3) $\{p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p > 2 \wedge p < 30 \wedge \neg(\exists d \in \mathbb{N})(d \neq 1 \wedge d \neq p \wedge (\exists k \in \mathbb{N})(p = k \cdot d))\}.$

3. 确定下列各命题的真假性:

1) $\emptyset \subseteq \emptyset$

2) $\emptyset \in \emptyset$

3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

6) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

7) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

8) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

[解] 1) 真。因为空集是任意集合的子集;

2) 假。因为空集不含任何元素;

3) 真。因为空集是任意集合的子集;

4) 真。因为 \emptyset 是集合 $\{\emptyset\}$ 的元素;

5) 真。因为 $\{a, b\}$ 是集合 $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ 的子集;

6) 假。因为 $\{a, b\}$ 不是集合 $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ 的元素;

7) 真。因为 $\{a, b\}$ 是集合 $\{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ 的子集;

8) 假。因为 $\{a, b\}$ 不是集合 $\{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ 的元素。

4. 对任意集合 A, B, C , 确定下列命题的真假性:

1) 如果 $A \in B \wedge B \in C$, 则 $A \in C$ 。

2) 如果 $A \in B \wedge B \in C$, 则 $A \in C$ 。

3) 如果 $A \subset B \wedge B \in C$, 则 $A \in C$ 。

[解] 1) 假。例如 $A=\{a\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{\{a\}, \{b\}\}$, 从而 $A \in B \wedge B \in C$ 但 $A \notin C$ 。

2) 假。例如 $A=\{a\}$, $B=\{a, \{a\}\}$, $C=\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$, 从而 $A \in B \wedge B \in C$, 但 $A \notin C$ 。

3) 假。例如 $A=\{a\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{\{a\}, a, b\}$, 从而 $A \subset B \wedge B \in C$, 但 $A \notin C$ 。

5. 对任意集合 A, B, C , 确定下列命题的真假性:

1) 如果 $A \in B \wedge B \subseteq C$, 则 $A \in C$ 。

2) 如果 $A \in B \wedge B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ 。

3) 如果 $A \subseteq B \wedge B \in C$, 则 $A \in C$ 。

3) 如果 $A \subseteq B \wedge B \in C$, 则 $A \subseteq C$ 。

[解] 1) 真。因为 $B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x (x \in B \Rightarrow x \in C)$, 因此 $A \in B \Rightarrow A \in C$ 。

2) 假。例如 $A=\{a\}$, $B=\{\{a\}, \{b\}\}$, $C=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ 从而 $A \in B \wedge B \subseteq C$, 但 $A \notin C$ 。

3) 假。例如 $A=\{a\}$, $B=\{\{a, b\}\}$, $C=\{\{a, \{a, b\}\}\}$, 从而 $A \subseteq B \wedge B \in C$, 但 $A \notin C$ 。

4) 假。例如 $A=\{a\}$, $B=\{\{a, b\}\}$, $C=\{\{a, b\}, b\}$, 从而 $A \subseteq B \wedge B \in C$, 但 $A \notin C$ 。

6. 求下列集合的幂集:

1) $\{a, b, c\}$

2) $\{a, \{b, c\}\}$

3) $\{\emptyset\}$

4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

5) $\{\{a, b\}, \{a, a, b\}, \{a, b, a, b\}\}$

[解] 1) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

2) $\{\emptyset, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{a, b\}\}\}$

3) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

5) $\{\emptyset, \{\{a, b\}\}\}$

7. 给定自然数集合 N 的下列子集:

$$A=\{1, 2, 7, 8\}$$

$$B=\{x|x^2<50\}$$

$$C=\{x|x \text{ 可以被 } 3 \text{ 整除且 } 0\leq x\leq 30\}$$

$$D=\{x|x=2^K, K\in I\wedge 0\leq K\leq 6\}$$

列出下面集合的元素:

$$1) A\cup B\cup C\cup D$$

$$2) A\cap B\cap C\cap D$$

$$3) B\setminus(A\cup C)$$

$$4) (A'\cap B)\cup D$$

[解] 因为 $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$,
 $D=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \}$, 故此

$$1) A\cup B\cup C\cup D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 21, 24, 27, 30, 32, 64\}$$

$$2) A\cap B\cap C\cap D=\emptyset$$

$$3) B\setminus(A\cup C)=\{4, 5\}$$

$$4) (A'\cap B)\cup D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 32, 64\}$$

8. 设 A 、 B 、 C 是集合, 证明:

$$1) (A\setminus B)=A\setminus(B\setminus C)$$

$$2) (A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$$

$$3) (A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B$$

[证明] 1) 方法一: $(A\setminus B)\setminus C$

$$=(A\cap B')\cap C' \quad (\text{差集的定义})$$

$$=A\cap(B'\cap C') \quad (\text{交运算的结合律})$$

$$=A\cap(B\cup C)' \quad (\text{deMorgan 律})$$

$$=A\setminus(B\cup C) \quad (\text{差集的定义})$$

方法二: 对任一元素 $x\in(A\setminus B)\setminus C$, 则 $x\notin C$, 同时, $x\in A\setminus B$, $x\in A$, $x\notin B$,

所以, $x\in A$, $x\notin B\cup C$, 即 $x\in A\setminus(B\cup C)$, 由此可见 $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\cup C)$ 。

反之, 对任一元素 $x\in A\setminus(B\cup C)$, 则 $x\in A$, 且 $x\notin B\cup C$, 也就是说 $x\notin A$, $x\notin B$, $x\notin C$ 。所以 $x\in(A\setminus B)\setminus C$, 由此可见 $A\setminus(B\cup C)\subseteq(A\setminus B)\setminus C$ 。

因此 $A\setminus(B\setminus C)$ 。

2) 方法一: $(A\setminus B)\setminus C$

$$=A\setminus(B\cup C) \quad (\text{根据 1)})$$

$$\begin{aligned}
&= A \setminus (C \cup B) && \text{(并运算交换律)} \\
&= A \setminus ((C \cup B) \cap X) && \text{(0—1 律)} \\
&= A \setminus ((C \cup B) \cap (C \cup C')) && \text{(0—1 律)} \\
&= A \setminus (C \cup (B \cap C')) && \text{(分配律)} \\
&= (A \setminus C) \setminus (B \cap C') && \text{(根据 1)} \\
&= (A \setminus C) \setminus (B \cap C) && \text{(差集的定义)}
\end{aligned}$$

方法二：对任一元素 $x \in (A \setminus B) \setminus C$ ，可知 $x \in A$ ， $x \notin B$ ， $x \notin C$ ， $x \in A \setminus C$ 。又由 $x \notin B$ ， $x \notin B \setminus C$ ， $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ 。所以 $(A \setminus B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ 。

反之，对任 $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ ，可知 $x \in A \setminus C$ ， $x \notin B \setminus C$ 。由 $x \in A \setminus C$ ，可知 $x \in A$ ， $x \notin C$ 。又因为 $x \notin B \setminus C$ 及 $x \notin C$ ，可知 $x \notin B$ 。所以， $x \in (A \setminus B) \setminus C$ 。因此 $(A \setminus B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ 。

由此可得 $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$ 。

3) 方法一： $(A \setminus C) \setminus C$

$$\begin{aligned}
&= A \setminus (B \cup C) && \text{(根据 1)} \\
&= A \setminus (C \cup B) && \text{(并运算交换律)} \\
&= (A \setminus C) \setminus B && \text{(根据 1)}
\end{aligned}$$

方法二：对任一元素 $x \in (A \setminus B) \setminus C$ ，可知 $x \in A$ ， $x \notin B$ ， $x \notin C$ 。由 $x \in A$ ， $x \notin C$ ，所以， $x \in A \setminus C$ 。又由 $x \notin B$ ， $x \in (A \setminus C) \setminus B$ 。所以， $(A \setminus B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \setminus B$ 。

同理可证得 $(A \setminus C) \setminus B \subseteq (A \setminus B) \setminus C$ 。

9. 设 A 、 B 是 X 全集的子集，证明：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A' \cup B = X \Leftrightarrow A \cap B' = \emptyset$$

[解](采用循环证法)

(1) 先证 $A \subseteq B \Rightarrow A' \cup B = X$ ；

$$\begin{aligned}
\text{方法一：} A' \cup B &= A' \cup (A \cup B) && \text{(因为条件 } A \subseteq B \text{ 及定理 4)} \\
&= (A' \cup A) \cup B && \text{(}\cup\text{的结合律)} \\
&= (A \cup A') \cup B && \text{(}\cup\text{的交换律)} \\
&= X \cup B && \text{(互补律)} \\
&= X && \text{(零壹律)}
\end{aligned}$$

方法二： $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ (定理 4)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow B = A \cup B && \text{(等号=的对称性)} \\
&\Rightarrow A' \cup B = A' \cup (A \cup B) && \text{(两边同时左并上 } A') \\
&\Rightarrow A' \cup B = (A' \cup A) \cup B && \text{(}\cup\text{的结合律)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A' \cup B = (A \cup A') \cup B \quad (\cup \text{的交换律})$$

$$\Rightarrow A' \cup B = X \cup B \quad (\text{互补律})$$

$$\Rightarrow A' \cup B = X \quad (\text{零壹律})$$

方法三：因为 $A' \subseteq X$ 且 $B \subseteq X$ ，所以根据定理 2 的 3') 就有 $A' \cup B \subseteq X$ ；

另一方面，由于 $B \subseteq A' \cup B$ 及根据换质位律可得 $B' \subseteq A' \subseteq A' \cup B$ ，因此，由互补律及再次应用定理 2 的 3')，可得 $X = B \cup B' \subseteq A' \cup B$ ，即 $X \subseteq A' \cup B$ ；

所以， $A' \cup B = X$ 。

(2) 次证 $A' \cup B = X \Rightarrow A \cap B' = \emptyset$ ；

$$A' \cup B = X \Rightarrow (A' \cup B)' = X' \quad (\text{两边同时取补运算'})$$

$$\Rightarrow (A')' \cap B' = X' \quad (\text{de Morgan 律})$$

$$\Rightarrow A \cap B' = X' \quad (\text{反身律})$$

$$\Rightarrow A \cap B' = \emptyset \quad (\text{零壹律})$$

(3) 再证 $A \cap B' = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$ ；

方法一： $A = A \cap X$ (零壹律)

$$= A \cap (B \cup B') \quad (\text{互补律})$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap B') \quad (\text{分配律})$$

$$= (A \cap B) \cup \emptyset \quad (\text{条件 } A \cap B' = \emptyset)$$

$$= A \cap B \quad (\text{零壹律})$$

$$\subseteq B \quad (\text{定理 2 的 3)})$$

方法二： $A \cap B' = \emptyset \Rightarrow B = B \cup \emptyset$ (零壹律)

$$= B \cup (A \cap B') \quad (\text{条件 } A \cap B' = \emptyset)$$

$$= (B \cup A) \cap (B \cup B') \quad (\text{分配律})$$

$$= (A \cup B) \cap (B \cup B') \quad (\cup \text{的交换律})$$

$$= (A \cup B) \cap X \quad (\text{互补律})$$

$$= A \cup B \quad (\text{零壹律})$$

$$\Rightarrow A \subseteq B \quad (\text{定理 4 的 2)})$$

10. 对于任意集合 A, B, C ，下列各式是否成立，为什么？

$$1) A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$$

$$2) A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$$

[解] 1) 不一定。例如： $A = \{a\}$ ， $B = \{a, b\}$ ， $C = \{b\}$ 。显然有

$A \cup B = A \cup C$ ，但 $B \neq C$ 。

2) 不一定。例如： $A = \{a\}$ ， $B = \{a, b\}$ ， $C = \{b, c\}$ 。显然有

$A \cap B = A \cap C$, 但 $B \neq C$ 。

11. 设 A, B 为集合, 给出下列等式成立的充分必要条件:

- 1) $A \setminus B = B$
- 2) $A \setminus B = B \setminus A$
- 3) $A \cap B = A \cup B$
- 4) $A \oplus B = A$

[解] 1) $A \setminus B = A \cap B'$, 由假设可知 $A \setminus B = B$, 即 $A \cap B' = B$ 。由此可知 $B = A \cap B' \subseteq B'$, 故此 $B = B \cap B' = \emptyset$ 。

由假设可知 $A = A \setminus \emptyset = A \setminus B = B = \emptyset$ 。所以当 $A \setminus B = B$ 时有 $A = B = \emptyset$ 。

反之, 当 $A = B = \emptyset$ 时, 显然 $A \setminus B = B$ 。

因此 $A \setminus B = B$ 的充分必要条件是 $A = B = \emptyset$ 。

2) 设 $A \setminus B \neq \emptyset$, 则有元素 $a \in A \setminus B$, 那么, $a \in A$, 而由假设 $A \setminus B = B \setminus A$ 。所以 $a \in B \setminus A$, 从而 $a \notin A$, 矛盾。所以 $A \setminus B = \emptyset$, 故 $A \subseteq B$ 。另一方面由 $B \setminus A = A \setminus B = \emptyset$ 。可得 $B \subseteq A$ 。因此当 $A \setminus B = B \setminus A$ 时, 有 $A = B$ 。

反之, 当 $A = B$ 时, 显然 $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$

因此, $A \setminus B = B \setminus A$ 的充要条件是 $A = B$ 。

3) 由于 $A \cup B = A \cap B$, 从而 $A \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq B$, 以及 $B \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq A$ 故此 $A \cup B = A \cap B$, 有 $A = B$ 。

5) 根据定理 6 的 1) 有 $A \oplus \emptyset = A$, 由已知条件 $A \oplus B = A$, 可得 $A \oplus B = A \oplus \emptyset$ 。

从而由对称差的消去律可得 $B = \emptyset$ 。

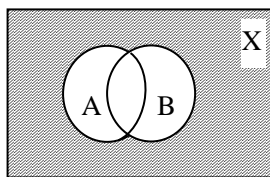
反之, 若 $B = \emptyset$, 则 $A \oplus B = A \oplus \emptyset = A$ 。

所以 $A \oplus B = A$ 的充分必要条件为 $B = \emptyset$ 。

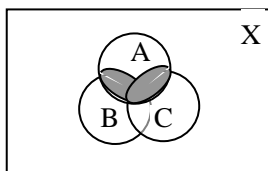
12. 对下列集合, 画出其文图:

- 1) $A' \cap B'$
- 2) $A \setminus (B \cup C)'$
- 3) $A \cap (B' \cup C)$

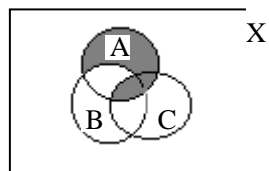
[解]



$A' \cap B'$



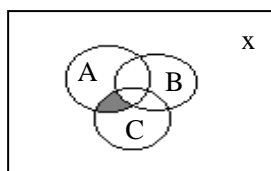
$A \setminus (B \cup C)'$



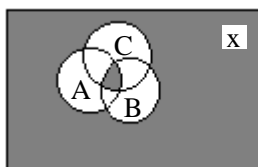
$A \cap (B' \cup C)$

13. 用公式表示出下面图中的阴影部分

[解]



$$(A \cap C) \setminus B$$



$$(A \cup B \cup C) \cup (A \cap B \cap C)'$$

14. 试用成员表法证明

1) $(A \oplus B) \oplus C = A (B \oplus C)$

2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq AB'$

[解] 1) 成员表如下

A	B	C	$A \oplus B$	$(A \oplus B) \oplus C$	$B \oplus C$	$A \oplus (B \oplus C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

成员表中运算结果 $\oplus C$ 及 $A \oplus (B \oplus C)$ 的两列状态表明, 全集中的每一个体对它俩有相同的从属关系, 故

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

1) 成员表如下:

A	B	C	$A \cup B$	$(B \cup C)$	$(B \cup C)'$	$(A \cup B) \cap (B \cup C)'$	B'	$A \cap B'$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0

成员表中运算结果 $(A \cup B) \cap (B \cup C)'$ 及 $A \cap B'$ 的两列状态表明，全集中的每一个体，凡是从属 $(A \cup B) \cap (B \cup C)'$ 的，都从属 $A \cap B'$ ，故

$$(A \cup B) \cap (B \cup C)' \subseteq A \cap B'$$

注：自然数集 N 取为 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

习题二（第二章 关系）

1. 设 $A=\{1, 2, 3, \}$, $B=\{a, b\}$ 求

1) $A \times B$ 2) $B \times A$ 3) $B \times B$ 4) $2^B \times B$

[解] 1) $A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

2) $B \times A = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$

3) $B \times B = \{ (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) \}$

4) $2^B = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$

$2^B \times B = \{ (\emptyset, a), (\emptyset, b), (\{a\}, a), (\{a\}, b), (\{b\}, a), (\{b\}, b), (\{a, b\}, a), (\{a, b\}, b) \}$

2. 使 $A \subseteq A \times A$ 成立的集合 A 存在吗？请阐明理由。

[解] 一般地说，使 $A \subseteq A \times A$ 成立的集合 A 不存在，除非 $A = \emptyset$ 。

否则 $A \neq \emptyset$ ，则存在元素 $x \in A \times A$ ，故有 $y_1, y_2 \in A$ ，使 $x = (y_1, y_2)$ ，从而 $y_1, y_2 \in A \times A$ ，故此有 y_1, y_2, y_3, y_4 ，使 $y_1 = (y_1, y_2)$, $y_2 = (y_3, y_4)$,。这说明 A 中每个元素 x ，其结构为元组的无穷次嵌套构成，这不可能。我们讨论的元的结构必须是由元组的有限次嵌套构成。

3. 证明 $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

[证] 必要性：即证 $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

若 $A \times B = \emptyset$ ，则 $A = \emptyset$ 或者 $B = \emptyset$

若 $A \times B \neq \emptyset$ ，则 $A \neq \emptyset$ 且 $B \neq \emptyset$ ，因此对任何 $x \in A$ 及任何 $y \in B$ 就有 $(x, y) \in A \times B$ ，根据 $A \times B = B \times A$ ，可得 $(x, y) \in B \times A$ ，故此可得 $x \in B$, $y \in A$ ，因此而得 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，所以由 \subseteq 的反对称性 $A = B$ 。

充分性：即证 $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B \Rightarrow A \times B = B \times A$ 这是显然的。

4. 证明 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

[证] 证法一：（元素法）对任一 $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ 有 $x \in A \cap B$, $y \in C \cap D$ ，于是 $x \in A$, $x \in B$, $y \in C$, $y \in D$ 。因而 $(x, y) \in A \times C$ ，且 $(x, y) \in B \times D$ ，所以 $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$ 。因而 $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$

另一方面，对任一 $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$ ，于是有 $(x, y) \in A \times C$ 且 $(x, y) \in B \times D$ ，因而 $x \in A$, $y \in C$, $x \in B$, $y \in D$ 。所以 $x \in A \cap B$, $y \in (C \cap D)$ 。所以 $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ 。因而 $(A \times C) \cap (B \times D) \subseteq (A \cap B) \times (C \cap D)$ 。

综合这两个方面有 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

证法二：（逻辑法）对任何 x, y

$$(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D)$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \quad (\wedge \text{的结合律、交换律})$$

$$\Rightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times D$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$$

由 x, y 的任意性，可得： $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

5. 下列各式中哪些成立，哪些不成立？对成立的式子给出证明，对不成立的式子给出反例。

$$1) (A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$$

$$2) (A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$$

$$3) (A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$$

$$4) (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

$$5) (A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$$

[解] 1) 不成立。设 $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$, $D=\{d\}$, 则 $(a, -d) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$, 但 $(a, -d) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$ 。所以 $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$ 不成立。事实上有： $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$ 。

2) 不成立。设 $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=D=\{c\}$, 则 $(a, c) \in (A \times C) \setminus (B \times D)$ 但 $(a, c) \notin (A \setminus B) \times (C \setminus D)$ 。因而 $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$ 不成立。事实上有： $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$ 。因为 $A \setminus B \subseteq A$, $C \setminus D \subseteq C$, 故有 $(A \times C) \setminus (B \times D) \subseteq A \times C$ ；又若 $(x, y) \in (A \setminus B) \times (C \setminus D)$ 故此 $x \in A \setminus B$, 从而 $x \notin B$, $y \in C \setminus D$, 从而 $y \notin D$, 故此 $(x, y) \notin B \times D$ 综合这两方面，有 $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$ 。

3) 不成立。设 $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{a\}$, $D=\{b\}$, 则 $(a, b) \in (A \oplus B) \times (C \oplus D)$, 但 $(a, b) \notin (A \times C) \oplus (B \times D)$ 。所以 $(A \oplus B) \times (C \oplus D) \subseteq (A \times C) \oplus (B \times D)$ 不成立。又设 $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{a\}$, $D=\{c\}$ 则 $(a, c) \in (A \times C) \oplus (B \times D)$, 但 $(a, c) \notin (A \oplus B) \times (C \oplus D)$ 。所以 $(A \times C) \oplus (B \times D) \subseteq (A \oplus B) \times (C \oplus D)$ 不成立。因此 $(A \oplus B) \times (C \oplus D)$ 与 $(A \times C) \oplus (B \times D)$ 无任何包含关系。总之 $(A \oplus B) \times (C \oplus D) = (A \times C) \oplus (B \times D)$ 不成立。

4) 成立。证明如下：对任一 $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$ ，有 $x \in A$, $x \notin B$, $y \in C$ 于是 $(x, y) \in A \times C$ ，且 $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$ ，且 $(x, y) \notin B \times C$ (否则 $x \in B$)，所以 $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$ 。因而 $(A \setminus B) \times C \subseteq (A \times C) \setminus (B \times C)$ 。

又对任一 $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$ ，有 $(x, y) \in A \times C$ ，且 $(x, y) \notin B \times C$ 从而 $x \in A$, $y \in C$ 及 $x \notin B$ 。即 $x \in A \setminus B$, $y \in C$ ，故此 $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$ 。所以 $(A \times C) \setminus (B \times C) \subseteq (A \setminus B) \times C$ 。

因而 $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ 。

另一种证明方法：

$$\begin{aligned}
 & (A \times B) \times C \\
 &= (A \cap B') \times C \quad (\text{差集的定义}) \\
 &= (A \times C) \cap (B' \times C) \quad (\text{叉积对交运算的分配律}) \\
 &= (A \times C) \cap (B \times C)' \\
 &\quad (\text{因 } (B \times C)' = (B' \times C)) \cap (B \times C)' \cup (B' \times C)' \\
 &\quad \text{但 } (A \times C) \cap (B \times C)' = ((A \times C) \cap (B' \times C)) \cup \emptyset \\
 &\quad \quad \quad = (A \times C) \cap (B' \times C) \\
 &= (A \times C) \cap (B' \times C) \quad (\text{差集的定义})
 \end{aligned}$$

证法三：(逻辑法) 对任何 x, y

$$\begin{aligned}
 & (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \\
 \Rightarrow & (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \notin B \times C \\
 \Rightarrow & (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C) \\
 \Rightarrow & (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) & (\wedge \text{对} \vee \text{的分配律}) \\
 \Rightarrow & (x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C) \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) & (\wedge \text{的结合律、交换律}) \\
 \Rightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C & (\wedge \text{及} \vee \text{的零壹律、} \wedge \text{的结合律}) \\
 \Rightarrow & x \in A \setminus B \wedge y \in C \\
 \Rightarrow & (x, y) \in (A \setminus B) \times C
 \end{aligned}$$

由 x, y 的任意性，可得： $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ 。

5) 成立。证明如下：对任一 $(x, y) \in (A \oplus B) \times C$ ，故此 $x \in A \oplus B$, $y \in C$ 于是 $x \in A$ 且 $x \notin B$ ，或者 $x \notin A$ 且 $x \in B$ 。因此 $(x, y) \in (A \times C) \oplus (B \times C)$ 。所以 $(A \oplus B) \times C \subseteq (A \times C) \oplus (B \times C)$ 。

对任一 $(x, y) \in (A \times C) \oplus (B \times C)$ 。则 $(x, y) \in A \times C$ 且 $(x, y) \notin B \times C$ ，或者 $(x, y) \notin A \times C$ 且 $(x, y) \in B \times C$ 。因此 $x \in A$, $y \in C$, $x \notin B$ ，或者 x

$\in B, y \in C, x \notin A$ 。所以 $x \in A \setminus B$, 或 $x \in B \setminus A$, 并且 $y \in C$, 故此 $x \in A \oplus B, y \in C$ 。因此 $(x, y) \in (A \oplus B) \times C$, 即 $(A \times C) \oplus (B \times C) \subseteq (A \oplus B) \times C$ 。

综合两方面、就有 $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$

另一种证明方法: $(A \oplus B) \times C$

$= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \times C$ (对称差的定义)

$= (((A \setminus B) \times C) \cup ((B \setminus A) \times C))$ (叉积对并运算的分配律)

$= ((A \times C) \setminus (B \times C) \cup (B \times C) \setminus (A \times C))$ (根据 4))

$= (A \times C) \oplus (B \times C)$ (对称差的定义)

6. 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a\}$, 求出所有由 A 到 B 的关系。

[解]: $R_0 = \emptyset, R_1 = \{(1, a)\}, R_2 = \{(2, a)\}, R_3 = \{(3, a)\},$

$R_4 = \{(1, a), (2, a)\}, R_5 = \{(1, a), (3, a)\}, R_6 = \{(2, a), (3, a)\},$

$R_7 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$

7. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, R_1 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 4)\}, R_2 = \{(1, 4), (2, 3),$

$(3, 4)\}$, 求: $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \setminus R_2, R_1', \mathcal{D}(R_1), \mathcal{D}(R_2), \mathcal{R}(R_1),$

$\mathcal{R}(R_2), \mathcal{D}(R_1 \cup R_2), \mathcal{R}(R_1 \cap R_2)$

[解]: $R_1 \cup R_2 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(3, 4)\}$

$R_1 \setminus R_2 = \{(1, 3), (2, 2)\}$

$R_1' = (A \times A) \setminus R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

$\mathcal{D}(R_1) = \{1, 2, 3\}, \mathcal{R}(R_1) = \{2, 3, 4\},$

$\mathcal{D}(R_2) = \{1, 2, 3\}, \mathcal{R}(R_2) = \{3, 4\}$

$\mathcal{D}(R_1 \cup R_2) = \{1, 2, 3\}, \mathcal{R}(R_1 \cap R_2) = \{4\}$

8. 对任意集合 A 及上的关系 R_1 和 R_2 , 证明

1) $\mathcal{R}(R_1 \cup R_2) = \mathcal{R}(R_1) \cup \mathcal{R}(R_2)$

2) $\mathcal{R}(R_1 \cap R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1) \cap \mathcal{R}(R_2)$

[证] 1) 一方面, 由于 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2, R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$, 根据定理 1, 有 $\mathcal{R}(R_1) \subseteq \mathcal{R}(R_1 \cup R_2), \mathcal{R}(R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1 \cup R_2)$ 故

$\mathcal{R}(R_1) \cup \mathcal{R}(R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1 \cup R_2)$

另一方面, 若 $x \in \mathcal{R}(R_1 \cup R_2)$ 那么存在着 $y \in A$, 使 $(y, x) \in (R_1 \cup R_2)$ 因此 $(y, x) \in R_1$, 或者 $(y, x) \in R_2$, 从而 $x \in \mathcal{R}(R_1)$ 或者 $x \in \mathcal{R}(R_2)$ 于是 $x \in \mathcal{R}(R_1) \cup \mathcal{R}(R_2)$, 所以 $\mathcal{R}(R_1 \cup R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1) \cup \mathcal{R}(R_2)$ 。

11. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 定义 A 上的下列关系

$$R_1=\{ (1, 1), (1, 2), (3, 3), (3, 4) \}, R_2=\{ (1, 2), (2, 1) \}$$

$$R_3=\{ (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4) \}$$

$$R_4=\{ (1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1) \}$$

$$R_5=\{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

$$R_6=A \times A, R_7=\emptyset$$

请给出上述每一个关系的关系图与关系矩阵, 并指出它具有的性质。

[解]:

1)

$$1 \quad 0 \longrightarrow 0 \quad 2$$

$$2 \quad 1 \longrightarrow 1 \quad 3$$

$$R_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

R_1 是反对称的, 传递的。

2)

$$R_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

R_2 是反自反的, 对称的。

3)

$$R_3 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

R_3 是自反的, 对称的, 传递的, 因此是等价关系。循环的 综合这两方面, 就有

$$(R_1 \cup R_2) = \mathcal{R}(R_1) \cup \mathcal{R}(R_2)。$$

2) 由于 $R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$, $R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$, 根据定理 1, 有 $\mathcal{R}(R_1 \cap R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1)$, \mathcal{R}

$(R_1 \cap R_2) \subseteq R_2$, 所以 $\mathcal{R}(R_1 \cap R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1) \cap \mathcal{R}(R_2)$ 反方向的包含不

成立, 反全由第 7 题可得, 那里 $\mathcal{R}(R_1 \cap R_2) = \{4\}$, $\mathcal{R}(R_1) \cap \mathcal{R}(R_2) = \{2,$

$3, 4\} \cap \{3, 4\} = \{3, 4\}$ 因此

$$\mathcal{R}(R_1) \cap \mathcal{R}(R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1 \cap R_2)$$

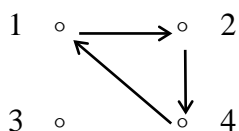
9. 设 A 有 n 个元素的有限集合, 请指出 A 上有多少个二元关系? 并阐明理由。

[解] A 上有 2^{n^2} 个元关系。因为叉积 $A \times A$ 有 n^2 个元素, 因而 $A \times A$ 有 2^{n^2} 个子集, 而每个子集都是 A 上的一个二元关系。

10. 定义在整数集合 I 上的相等关系、“ \leq ”关系、“ $<$ ”关系, 全域关系, 空关系, 是否具有表中所指的性质, 请用 Y (有) 或 N (无) 将结果填在表中。

性质 关系	自反的	反自反的	对称的	反对称的	传递的
相等关系	Y	N	Y	Y	Y
\leq 关系	Y	N	N	Y	Y
$<$ 关系	N	Y	N	Y	Y
全域关系	Y	N	Y	N	Y
空关系	N	Y	Y	Y	Y

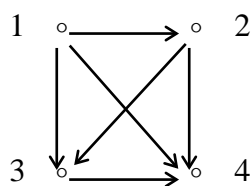
4)



$$R4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R4 是反对称的, 循环的。

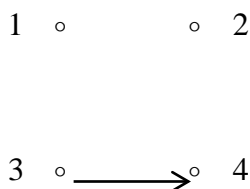
5)



$$R5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R5 是反自反的, 反对称的, 传递的。

6)



$$R6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R ; 综合两方面, 有 $R = \check{R}$ 。

充分性

若 $R = \check{R}$, 则对任何 $(x, y) \in R$, 由 $R = \check{R}$ 可得 $(x, y) \in \check{R}$ 。从而由逆关系的定义, 可知 $(y, x) \in R$ 这说明 R 是对称的。

4) 必要性

若 R 是反对称的, 则对任何 $(x, y) \in \check{R}$, 即有 $(x, y) \in R$ 及 $(x, y) \in \check{R}$, 从逆关系的定义, 就有 $(x, y) \in R$ 及 $(y, x) \in R$, 因此, 利用 R 的反对称性, 可得 $x=y$ 。于是就有 $(x, y) = (x, x) \in I_A$, 所以 $R \cap \check{R} \subseteq I_A$ 。

充分性

若 $R \cap \check{R} \subseteq I_A$, 则对任何 $(x, y) \in R$ 及 $(y, x) \in R$, 从逆 \check{R} 关系的定义, 可得 $(x, y) \in R$ 及 $(x, y) \in \check{R}$, 也即 $(x, y) \in R \cap \check{R}$, 利用 $R \cap \check{R} \subseteq I_A$ 可得 $(x, y) \in I_A$, 于是 $x=y$ 。所以 R 是反对称的。

5) 必要性

若 R 是传递的, 则对任何 $(x, y) R \circ R$, 由复合关系的定义可知, 存在着 $y \in A$, 使 $(x, y) \in R$ 且 $(y, y) \in R$, 从而利用 R 的传递性, 可知 $(x, y) \in R$ 。所以

$$R \circ R \subseteq R。$$

充分性

$R \circ R$ 。从而利用 $R \circ R \subseteq R$ 可得 $(x, y) \in R$ 。所以 R 是传递的。

证法二:

1) \Rightarrow): 对任何 x ,

$$x \in A$$

$$\Rightarrow (x, x) \in I_A$$

(I_A 是幺关系, 因此是自反关系)

$$\Rightarrow (x, x) \in R$$

(R 是自反关系)

所以 $I_A \subseteq R$;

\Leftarrow): 对任何 $x \in A$,

$$x \in A$$

$$\Rightarrow (x, x) \in I_A$$

(I_A 是幺关系, 因此是自反关系)

$$\Rightarrow (x, x) \in R$$

(因 $I_A \subseteq R$)

所以, R 是自反关系;

2) \Rightarrow) 首先 $\emptyset \subseteq I_A \cap R$;

其次, 对任何 $x, y \in A$, 若

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in I_A \cap R \\
& \Rightarrow (x,y) \in I_A \wedge (x,y) \in R \\
& \Rightarrow x=y \wedge (x,y) \in R & (I_A \text{ 是幺关系, 因此是自反关系}) \\
& \Rightarrow (x,x) \in R
\end{aligned}$$

则与 R 是反自反关系, $(x,x) \notin R$ 矛盾。故 $I_A \cap R \subseteq \emptyset$;

因此, 由包含关系 \subseteq 的反对称性, 可得 $I_A \cap R = \emptyset$;

\Leftarrow): 对任何 $x \in A$, 若

$$\begin{aligned}
& (x,x) \in R \\
& \Rightarrow (x,x) \in I_A \wedge (x,x) \in R & (I_A \text{ 是幺关系, 因此是自反关系}) \\
& \Rightarrow (x,x) \in I_A \cap R \\
& \Rightarrow (x,x) \in \emptyset & (\text{因 } I_A \cap R = \emptyset)
\end{aligned}$$

则与空集不含任何元素, $(x,x) \notin \emptyset$ 矛盾。

故对任何 $x \in A$, $(x,x) \notin R$;

所以, R 是反自反关系;

3) \Rightarrow 对任何 $x, y \in A$

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in R \\
& \Leftrightarrow (y,x) \in R & (R \text{ 是对称关系}) \\
& \Leftrightarrow (x,y) \in \check{R}
\end{aligned}$$

所以, $R = \check{R}$;

\Leftarrow): 对任何 $x, y \in A$

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in R \\
& \Rightarrow (x,y) \in \check{R} & (R = \check{R}) \\
& \Rightarrow (y,x) \in R
\end{aligned}$$

所以, R 是对称的;

4) \Rightarrow 对任何 $x, y \in A$

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in R \cap \check{R} \\
& \Rightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \in \check{R} \\
& \Rightarrow (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \\
& \Rightarrow x=y & (R \text{ 是反对称关系}) \\
& \Rightarrow (x,y) \in I_A & (I_A \text{ 是自反关系})
\end{aligned}$$

所以, $R \cap \check{R} \subseteq I_A$;

\Leftarrow): 对任何 $x, y \in A$

$$\begin{aligned}
& (x,y) \in R \\
& \Rightarrow (x,y) \in \check{R} \\
& \Rightarrow (y,x) \in R
\end{aligned}
\quad (R=\check{R})$$

所以, R 是对称的;

13. 设 A, B 为有穷集合, $R, S \subseteq A \times B$, $M_R = (x_{ij})_{m \times n}$, $M_S = (y_{ij})_{m \times n}$

1) 为了 $R \subseteq S$, 必须且只须 $\forall i \forall j (x_{ij} \leq y_{ij})$

2) 设 $M_{R \cup S} = (Z_{ij})_{m \times n}$, 那么 $Z_{ij} = x_{ij} \vee y_{ij}$, $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$.

3) 设 $M_{R \cap S} = (t_{ij})_{m \times n}$, 那么 $t_{ij} = x_{ij} \wedge y_{ij}$

$i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$.

[证] 由于 A, B 是有穷集合, 不妨设

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

1) 必要性

若 $R \subseteq S$, 则对任何 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 对任何 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 若 $(a_i, b_j) \in R$, 则 R 的关系矩阵 $M_R = (x_{ij})_{m \times n}$ 中第 i 行第 j 列元素 $x_{ij}=1$, 根据 $R \subseteq S$, 可得 $(a_i, b_j) \in S$, 从而得 S 的关系矩阵 $M_S = (y_{ij})_{m \times n}$ 中第 i 行第 j 列元素 $y_{ij}=1$, 由于是 $1 \leq 1$ 故此 $x_{ij} \leq y_{ij}$; 若 $(a_i, b_j) \notin R$, 则 R 的关系矩阵 $M_R = (x_{ij})_{m \times n}$ 中第 i 行第 j 列元素 $x_{ij}=0$, 因此由 S 的关系矩阵 $M_S = (y_{ij})_{m \times n}$ 中第 j 列元素 $y_{ij} \geq 0$, 可得 $x_{ij} \leq y_{ij}$. 总之, 有 $(\forall i)(\forall j)(x_{ij} \leq y_{ij})$.

2) 充分性

若 $(\forall i)(\forall j)(x_{ij} \leq y_{ij})$, 则对任何 $(a_i, b_j) \in R$, 就有 R 的关系

矩阵 $M_R = (x_{ij})_{m \times n}$ 中第 i 行第 j 列元素 $x_{ij}=1$, 由于 $x_{ij} \leq y_{ij}$, 所以 $y_{ij} \geq 1$, 故此 $y_{ij} \geq 1$ 这说明 S 的关系矩阵 $M_S = (y_{ij})_{m \times n}$ 中第 i 行第 j 列元素 y_{ij} 为 1, 因此必有

$$(a_i, b_j) \in S, \text{ 所以 } R \subseteq S.$$

2) 对任何 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 对任何 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 若 $Z_{ij}=1$, 则 $(a_i, b_j) \in R \cup S$, 故此 $(a_i, b_j) \in R$ 或者 $(a_i, b_j) \in S$, 于是 $x_{ij}=1$ 或者 $y_{ij}=1$. 从而 $b_j \notin S$, 于是 $x_{ij}=0$ 且 $y_{ij}=0$. 从而 $x_{ij} \vee y_{ij}=0$. 因而 $Z_{ij}=x_{ij} \vee y_{ij}=0$;

综合上述两种情况, 就有 $Z_{ij}=x_{ij} \vee y_{ij}$, $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$.

3) 对任何 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 对任何 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 若 $t_{ij}=1$, 则 $(a_i, b_j) \in R \cap S$, 故此 $(a_i, b_j) \in S$ 且 $(a_i, b_j) \in R$, 于是 $x_{ij}=1$, 且 $y_{ij}=1$ 从而 $x_{ij} \wedge y_{ij}=1$. 因而 $t_{ij}=x_{ij} \wedge y_{ij}=1$; 若 $t_{ij}=0$, 则 $(a_i, b_j) \notin R \cap S$, 故此 $(a_i, b_j) \notin S$, 于

是 $x_{ij}=0$ 或者 $y_{ij}=0$, 从而 $x_{ij} \wedge y_{ij}=0$ 。因而 $t_{ij}=x_{ij} \wedge y_{ij}=0$ 。

综合上述两种情况, 就有 $t_{ij}=x_{ij} \wedge y_{ij}$, $i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$ 。

14. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, R_1, R_2 为 A 上的关系, $R_1=\{(1, 1), (1, 2), (2, 4)\}$,
 $R_2=\{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 2)\}$, 求 $R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1, R_1 \circ R_2 \circ R_1 R_1^3$

$$[\text{解}] M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1)

$$M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_1} \circ M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1° \longrightarrow 1°
 2° 2°
 3° 3°
 4° 4°

无论从复合关系图还是从复合关系矩阵
 都可得 $R_1 \circ R_2 = \{(1, 3), (1, 4)\}$

R_1 R_2

$$2) M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_2} \circ M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1° 1°
 2° 2°
 3° 3°
 4° 4°

无论从复合关系图还是从复合关系矩阵
 都可得 $R_2 \circ R_1 = \{(3, 4)\}$

R_2 R_1

$$3) M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_2} \circ M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1° 1° 1°
2° 2° 2°
3° 3° 3°
4° 4° 4°
- 无论从复合关系图还是从复合关系矩阵
都可得 $R_1 \circ R_2 \circ R_1 = \emptyset$

$$M_{R_1^3} = M_{R_1} \circ M_{R_1} \circ M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 1° ° ° °1
2° ° ° °2
3° ° ° °3
4° ° ° °4
- 无论从复合关系图还是从复合关系矩阵
都可得 $R_1 \circ R_1 \circ R_1^3 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 4) \}$

R1 R1 R1

15) 设 R_1, R_2, R_3 是 A 上的二元关系, 如果 $R_1 \subseteq R_2$, 证明

$$1) R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$$

$$2) R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2$$

[证明] 1) 对任何 $(x, y) \in R_1 R_3$, 由复合关系之定义, 必存在 $z \in A$, 使得 $(x, z) \in R_1$ 且 $(z, y) \in R_3$, 利用 $R_1 \subseteq R_2$ 可知 $(x, z) \in R_2$ 且 $(z, y) \in R_3$, 再次利用复合关系之定义, 有 $(x, y) \in R_2 \circ R_3$. 所以 $R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$.

2) 对任何 $(x, y) \in R_3 \circ R_1$, 由复合关系之定义, 必有 $z \in A$, 使得 (x, z)

$\in R_3$ 且 $(z, y) \in R_1$, 再由复合关系之定义, 有 $(x, y) \in R_3 \circ R_2$ 。所以 $R_3 \circ R_1 \subseteq R_3 \circ R_2$ 。

16. 设 A 是有限个元素的集合, 在 A 上确定两个不同的关系 R_1 和 R_2 , 使得 $R_1^2 = R_1$, $R_2^2 = R_2$

因为, 令 $R_1 = \emptyset$, 则 $R_1 \circ R_1 = \emptyset$, 故此 $R_1^2 = R_1 = \emptyset$ 。

令 $R_2 = A \times A$, 则 $R_2^2 = R_2 \circ R_2 \subseteq A \times A = R_2$, 故需证明 $R_2 \subseteq R_2 \circ R_2 = R_2^2$ 。为此, 对任何 $x, y \in A$, $(x, y) \in A \times A = R_2$, 一定存在着 $z \in A$ (至少有 $z=x$ 或 $z=y$ 存在), 使 $(x, z) \in A \times A = R_2$ 且 $(z, y) \in A \times A = R_2$, 故此 $(x, y) \in R_2 \circ R_2 = R_2^2$, 所以 $R_2 \subseteq R_2 \circ R_2 = R_2^2$ 。于是 $R_2^2 = R_2 = A \times A$ 。

2) 由于 A 是有限个元素的集合, 是不心设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

令 $R_1 = \{ (a_i, a_j) \mid a_i \in A \wedge a_j \in A \wedge | \leq i \leq n \wedge | \leq j \leq n - | \}$

$R_2 = \{ (a_n, a_n) \} \cup R_1$

则 $R_1 R_2$, 即 R_1 与 R_1 是不同的关系。我们来证明 $R_1^2 = R_1$, $R_2^2 = R_2$,

(a) 先证 $R_1^2 = R_1$

若 $(a_i, a_j) \in R_1$, 则由 R_1 的定义必定 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq i \leq n-1$, 并且一定存在着 $1 \leq k \leq n-1$ (至少有 $k=j$ 存在), 使 $(a_i, a_k) \in R_1$ 且 $(a_k, a_j) \in R_1$, 从而 $(a_i, a_j) \in R_1 \circ R_1 = R_1^2$ 。故此 $R_1 \subseteq R_1^2$ 。

若 $(a_i, a_j) \in R_1^2 = R_1 \circ R_1$, 则存在着 k , $1 \leq k \leq n-1$, 使 $(a_i, a_k) \in R_1$ 且 $(a_k, a_j) \in R_1$, 于是由 R_1 的定义, 必有 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, 从而根据 R_1 的定义, 有 $(a_i, a_j) \in R_1$ 。故此 $R_1^2 = R_1$

综合两个方面, 可得 $R_1^2 = R_1$ 。

(b) 次证 $R_2^2 = R_2$

若 $(a_i, a_j) \in R_2$, 则由 R_2 的定义, 要么 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, 要么 $i=n$, $j=n$ 若 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n-1$, 则一定存在着 $1 \leq k \leq n-1$ (至少有 $k=j$ 存在), 使 $(a_i, a_k) \in R_2$ 且 $(a_k, a_j) \in R_2$, 从而 $(a_i, a_j) \in R_2 \circ R_2 = R_2^2$; 若 $i=n$, $j=n$, 则 $(a_i, a_j) = (a_n, a_n) \in R_2$, 那么 $(a_n, a_n) \in R_2$, 所以 $(a_i, a_j) = (a_n, a_n) \in R_2 \circ R_2 = R_2^2$ 因此 $R_2 \subseteq R_2^2$ 。

若 $(a_i, a_j) \in R_2^2 = R_2 \circ R_2$, 则存在着 k , 使 $(a_i, a_k) \in R_2$ 且 $(a_k, a_j) \in R_2$, 于是由 R_2 的定义, 有 $k=n$ 或者 $1 \leq k \leq n-1$ 。

若 $k=n$, 则由 $(a_i, a_k) \in R_2$ 必有 $i=n$, 所以无论 $1 \leq j \leq n-1$ 还是 $j=n$, 由 R_2 的定义, 有 $(a_i, a_j) = (a_n, a_j) \in R_2$;

若 $1 \leq k \leq n-1$, 则由 $(a_i, a_k) \in R_2$ 必有 $1 \leq j \leq n-1$ 故此 $(a_i, a_j) \in R_2$ 总之

证得 $R_2^2 = R_2$ ，综合两方面，我们证明了 $R_2^2 = R_2$ 。

17. 设 R 是集合 A 上的反对称关系， $|A|=h$ ，指了在 $R \cap \bar{R}$ 的关系矩阵中有多少个非零值？

[解] 由第 12 题的 4) R 是反对称关系当且反当 $R \cap \bar{R} \subseteq I_A$ ，及 $|A|=n$ 可知，在 $R \cap \bar{R}$ 的关系矩阵中非零值最多不超过 n 个。

18. 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系，判断下列命题的真假性，并阐明理由。

- 1) 如果 R_1 和 R_2 都是自反的，那么 $R_1 \circ R_2$ 是自反的。
- 2) 如果 R_1 和 R_2 都是反自反的，那末 $R_1 \circ R_2$ 是反自反的。
- 3) 如果 R_1 和 R_2 都是对称的，那末 $R_1 \circ R_2$ 是对称的。
- 4) 如果 R_1 和 R_2 都是反对称的，那末 $R_1 \circ R_2$ 是反对称的。
- 5) 如果 R_1 和 R_2 都是传递的，那末 $R_1 \circ R_2$ 是传递的。

[解] 1) 真。由于 R_1 和 R_2 都是自反的，因而对任何，都有 $(x, x) \in R_1$ ， $(x, x) \in R_2$ 。因此，对任何 $x \in A$ ，都有 $(x, x) \in R_1 \circ R_2$ 。所以 $R_1 \circ R_2$ 是自反的。

2) 假。令 $A=\{a, b\}$ ， $R_1=\{(a, b)\}$ ， $R_2=\{(b, a)\}$ 。那么 $R_1 \circ R_2=\{(a, a)\}$ ，它就不是 A 上的反自反关系。

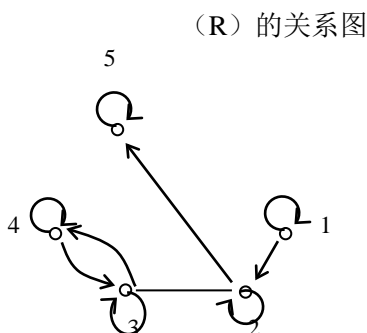
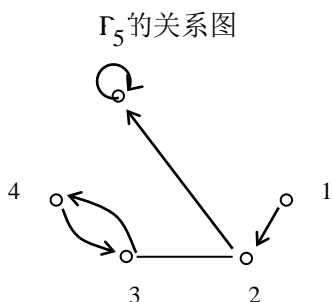
3) 假。令 $A=\{a, b, c\}$ ， $R_1=\{(a, b), (b, a)\}$ ， $R_2=\{(b, c), (c, b)\}$ 。那末 $R_1 \circ R_2=\{(a, c)\}$ ，就不是 A 的对称关系。

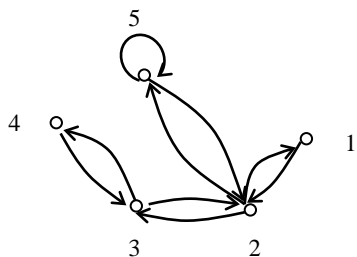
4) 假。令 $A=\{a, b, c, d\}$ ， $R_1=\{(a, c), (b, c)\}$
 $R_2=\{(c, b), (d, a)\}$ 易证 R_1, R_2 都是反对称关系。但是 $R_1 \circ R_2=\{(a, b), (b, a)\}$ 就不是 A 上的反对称关系。

5) 假。令 $A=\{a, b, c\}$ ， $R_1=\{(a, c), (b, a), (b, c)\}$ ， $R_2=\{(c, b), (a, c), (a, b)\}$ ，易证 R_1 和 R_2 都是传递关系，但 $R_1 \circ R_2=\{(a, b), (b, b), (b, c)\}$ 就不是 A 上的传递关系。

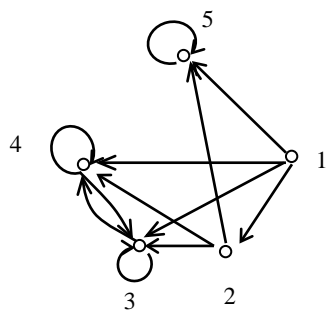
19. 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $R \subseteq A \times A$ ， $R=\{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 5)\}$ 用作图方法矩阵运算的方法求 $r(R)$ ， $s(R)$ ， $t(R)$ 。

[解] 1) 作图法：





$S(R)$ 的关系图



$t(R)$ 的关系图

因此:

$$r(R) = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5) \}$$

$$s(R) = \{ (1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (5, 5) \}$$

$$t(R) = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5) \}$$

2) 矩阵运算法:

$$MR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{t(R)} = M_{I_A UR} = M_{I_A} VM_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{S^{(R)}} = \mathbf{M}_{\text{RUR}} = \mathbf{M}_{\text{RVMR}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_{R \circ R} = \mathbf{M}_R \circ \mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^3} = \mathbf{M}_{R^2 \circ R} = \mathbf{M}_{R^2} \circ \mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}^4} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}^3 \circ \mathbf{R}} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}^3} \circ \mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\mathbf{R}^2}$$

$$M_{t(R)} = M_{RUR^2UR^3} = M_R VM_{R^2} VM_{R^3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 与 1) 作图法一致。

20. 设 $R \subseteq A \times A$, 证明

1) $(R^+)^+ + R + 2) = R^*$

[证明] 1) 一方面, 由于 $(R^+)^+$ 是 R^+ 的传递闭包, 所以 $R^+ \subseteq (R^+)^+$; 另一方面,

由于 R^+ 是 R 的传递闭包, 故此 R^+ 是传递的。由于 $R^+ \subseteq (R^+)^+$ 及传递闭包 $(R^+)^+$ 是包含 R^+ 的最小传递关系, 就有 $(R^+)^+ \subseteq R^+$ (定理 4 之 3); 所以 $(R^+)^+ = R^+$ 。

2) 一方面, 由于 $(R^*)^*$ 是 R^* 的自反传递闭包, 所以 $R^* \subseteq (R^*)^*$; 另一方面, 由于 R^* 是 R 的自反传递闭包, 故此 R^* 是自反的传递的。由于 $R^* \subseteq (R^*)^*$ 及自反传递闭包 $(R^*)^*$ 是包含 R^* 的最小自批传递关系, 就有 $(R^*)^* \subseteq R^*$ (定理 5 的 3))。所以 $(R^*)^* = R^*$ 。

21. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, RAA , $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 3), (3, 3)\}$

1) 证明 R 不是传递的;

2) 求 R_1 , 使 $R_1 \supseteq R$ 并且 R_1 是传递的;

3) 是否存在 R_2 , 使 $R_2 \supseteq R$, $R_2 \neq R_1$ 并且 R_2 是传递的。

[解] 1) 由于 $(1, 2) \in R$ 且 $(2, 4) \in R$ 但 $(1, 4) \notin R$, 这说明 R 不是传递的。

2) 由于 R^+ 是包含 R 的最小传递关系, 所以, 取 $R_1 = R^+$ 即为所求。现在求 R^+

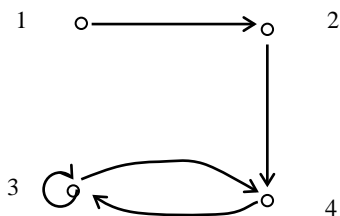
$$R^2 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$R^3 = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

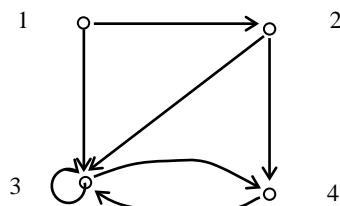
$$R^4 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$\text{故此 } R_1 = R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\} \text{ (因为 } |A|=4 \text{ 有限)}$$

其关系图如下:



R 的关系图



R_1 的关系图

3) 能。因为 R_1 并非全关系 (否则, 当 R_1 是全关系时, 就找不到了), 所以只要取 $R_2 = A \times A$ 是 A 上的全关系就可满足 $R_2 \supseteq R$, $R_2 \neq R$, 并且全关系 R_2 显然是一个传递关系。

22. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$, 定义 $A \times A$ 上的关系如下:

$$(a, b) R (c, d) :: a+d=b+c$$

1) 证明 R 是 $A \times A$ 上的等价关系;

2) 求 $[(2, 5)]_R$;

3) $R \subseteq A \times A$ 对吗? 请阐明理由。

1) [证明]

(a) R 是自反的

对于任何 $(a, b) \in A \times A$, 由于 $a+b=b+a$, 所以 $(a, b) R (a, b)$ 。

(b) R 是对称的

对于任何 $(a, b), (c, d) \in A \times A$, 若 $(a, b) R (c, d)$, 则有 $a+d=b+c$ 从而 $c+b=a+d$, 所以可得 $(c, d) R (a, b)$ 。

(c) R 是传递的

对于任何 $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A$, 若 $(a, b) R (c, d)$, 且 $(c, d) R (e, f)$, 于是有 $a+d=b+c$ 及 $c+f=d+e$, 二式相加有 $a+f+c+d=b+e+c+d$, 两边同时减 $c+d$, 可得 $a+f=b+e$, 从而可得 $(a, b) R (e, f)$ 。

综合 (a)、(b)、(c)、说明 R 是 $A \times A$ 上的等价关系。

2) [解] 因为 $\{(2, 5)\}R = \{(a, b) \mid (a, b) \in A \times A \text{ 且 } (a, b) R (2, 5)\}$

$$= \{(a, b) \mid (a, b) \in A \times A \wedge a+5=b+2\}$$

$$= \{(a, b) \mid (a, b) \in A \times A \wedge b=a+3\}$$

$$= \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)\}$$

3) [答] $R \subseteq A \times A$ 不对。因为 R 是 $A \times A$ 上的关系，所以 $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A) = (A \times A)^2$ 。

23. 设 A 是一个非空集合， $R \subseteq A \times A$ 。如果 R 在 A 上是对称的，传递的，下面的推导说明 R 在 A 上是自反的：

对任意的 $a, b \in A$ ，由于 R 是对称的，有：

$$aRb \Rightarrow bRa$$

于是 $aRb \Rightarrow aRb \wedge bRa$ ，又利用 R 是传递的，得：

$$aRb \wedge bRa \Rightarrow aRa$$

从而说明 R 是自反的。

上述推导正确吗？请阐明理由。

[答] 上述推导不正解。推殖民地的谬论误在于假设 A 的每个元素都由 R 关联着 A 的某一别的元素。如果这不是真的，那么对称性的条件的假设就始终是假的，因此结论当然是假的。因而在一个空集上的空关系都是平凡的对称和可传递，但不是自反的。另外关系 $\{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ 是自反的和传递的，但在集合 $\{a, b, c\}$ 上不是自反的。

24. 设 R 是集合 A 上的等价关系，证明 \tilde{R} 也是集合 A 上的等价关系。

[证明] 证法一：

(a) \tilde{R} 是自反的

对任意的 $a \in A$ ，由于 R 是自反的，所以 $(a, a) \in R$ ，再由逆关系的定义有 $(a, a) \in \tilde{R}$

(b) \tilde{R} 是对称的

对任何 $(a, b) \in \tilde{R}$ 由逆关系的定义，有 $(b, a) \in R$ ，由 R 的对称性，可得 $(a, b) \in R$ ，再由逆关系的定义，就有 $(b, a) \in \tilde{R}$ 。

(c) \tilde{R} 是传递的

对任何 $(a, b) \in \tilde{R}$ 及 $(b, c) \in \tilde{R}$ ，由逆关系的定义，有 $(b, a) \in R$ 及 $(c, b) \in R$ ，根据 R 的传递性，可得 $(c, a) \in R$ ，再次由逆关系的定义，就有 $(a, c) \in \tilde{R}$ 。

综合 (a) (b) (c) 可知 \tilde{R} 是等价关系。

证法二：

(a) \tilde{R} 是自反的：

对任何 $a, a \in A$

$$\Rightarrow (a, a) \in R$$

(R 都是自反的)

$$\Rightarrow (a, a) \in \tilde{R}$$

所以, \tilde{R} 是自反的;

(b) \tilde{R} 是对称的:

对任何 $a, b \in A, (a, b) \in \tilde{R}$

$$\Rightarrow (b, a) \in R$$

$$\Rightarrow (a, b) \in R$$

(R 是对称的)

$$\Rightarrow (b, a) \in \tilde{R}$$

所以, \tilde{R} 是对称的;

(c) \tilde{R} 是传递的:

对任何 $a, b, c \in A,$

$$(a, b) \in \tilde{R} \wedge (b, c) \in \tilde{R}$$

$$\Rightarrow ((b, a) \in R \wedge (c, b) \in R$$

$$\Rightarrow ((c, b) \in R \wedge (b, a) \in R$$

(\wedge 的交换律)

$$\Rightarrow (c, a) \in R$$

(R 是传递的)

$$\Rightarrow (a, c) \in \tilde{R}$$

(R 是对称的)

所以, \tilde{R} 是对称的;

综合 (a)、(b)、(c), 可知 \tilde{R} 是 A 上的等价关系。

25. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系

1) 证明 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的等价关系;

2) 用例于证明 $R_1 \cup R_2$ 不一定是 A 上的等价关系 (要尽可能小地选取集合 A)。

[证] 1) 证法一:

(a) $R_1 \cap R_2$ 是自反的

对任何 $a \in A$, 由于 R_1, R_2 都是 A 上的自反关系, 所以 $(a, a) \in R_1$ $(a, a) \in R_2$, 因此 $(a, a) \in R_1 \cap R_2$

(b) $R_1 \cap R_2$ 是对称的

对任何的 $(a, b) \in R_1 \cap R_2$, 就有 $(a, b) \in R_1$ 且 $(a, b) \in R_2$, 由 R_1, R_2 都是 A 上的对称关系, 所以 $(a, b) \in R_1$ 且 $(b, a) \in R_2$, 所以 $(b, a) \in R_1 \cap R_2$ 。

(c) $R_1 \cap R_2$ 是传递的

对任何的 $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ 及 $(b, c) \in R_1 \cap R_2$, 就有 $(a, b) \in R_1, (a, b) \in R_2$ 及 $(b, c) \in R_1, (b, c) \in R_2$, 于是 $(a, b) \in R_1$ 且 $(b, c) \in R_1$ 及 $(a, b) \in R_2$ 且 $(b, c) \in R_2$ 由于 R_1, R_2 都是 A 上的传递关系, 所以 $(a, c) \in R_1$ 及 $(a, c) \in R_2$, 因此 $(a, c) \in R_1 \cap R_2$ 。

综合 (a), (b), (c), 可知 $R_1 \cap R_2$ 是等价关系。

证法二:

(a) $R_1 \cap R_2$ 是自反的:

对任何 $a, a \in A$

$$\Rightarrow (a, a) \in R_1 \wedge (a, a) \in R_2 \quad (R_1, R_2 \text{ 都是自反的})$$

$$\Rightarrow (a, a) \in R_1 \cap R_2$$

所以, $R_1 \cap R_2$ 是自反的;

(b) $R_1 \cap R_2$ 是对称的:

对任何 $a, b \in A, (a, b) \in R_1 \cap R_2$

$$\Rightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2$$

$$\Rightarrow (b, a) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_2 \quad (R_1, R_2 \text{ 都是对称的})$$

$$\Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$$

所以, $R_1 \cap R_2$ 是对称的;

(c) $R_1 \cap R_2$ 是传递的:

对任何 $a, b, c \in A,$

$$(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \cap R_2$$

$$\Rightarrow ((a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2) \wedge ((b, c) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2)$$

$$\Rightarrow ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1) \wedge ((a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2) \quad (\wedge \text{ 的结合律、交换律})$$

$$\Rightarrow (a, c) \in R_1 \wedge (a, c) \in R_2 \quad (R_1, R_2 \text{ 都是传递的})$$

$$\Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$$

所以, $R_1 \cap R_2$ 是传递的;

综合 (a)、(b)、(c), 可知 $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的等价关系。

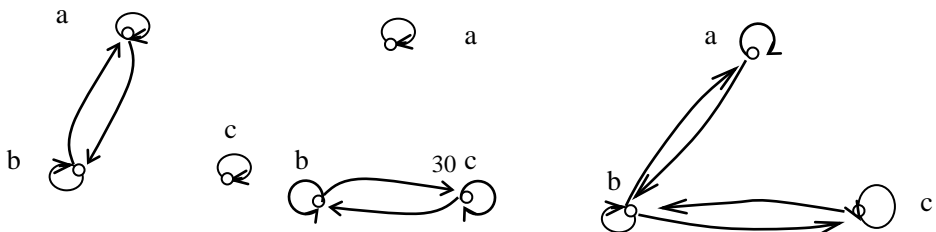
2) 两个自反的 (对称的) 关系的并将是自反的 (对称的), 但是, 两个传递关系的并却未必是传递的。我们就从破坏传递性出发来构造反例:

$$\text{令 } R_1 = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a) \}$$

$$R_2 = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b) \}$$

当 $A = \{a, b, c\}$ 时, R_1, R_2 显然都是等价关系。但是

$R_1 \cup R_2 = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b) \}$ 都不是 A 上的等价关系, 因为 $R_1 \cup R_2$ 不传递: $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ 且 $(b, c) \in R_1 \cup R_2$, 但 $(a, c) \notin R_1 \cup R_2$; 同样 $(c, b) \in R_1 \cup R_2$ 且 $(b, a) \in R_1 \cup R_2$, 但 $(c, a) \notin R_1 \cup R_2$ 。



R_1 关系图

R_2 关系图

$R_1 \cup R_2$ 关系图

而且 $|A|$ 不可能再少了。因为任何少于 3 个元素的集合上的自反, 对称关系一定是传递的!

26. 设 R 是 A 上的等价关系, 将 A 的元素按 R 的等价类顺序排列, 请指出此等价关系 R 的关系矩阵 MR 有何特征?

[解] 将 A 的元素按其上的等价关系 R 的等价类顺序排列, 这样产生的等价关系 R 的关系矩阵 MR , 经过适当的矩阵分块, MR 的分块矩阵将成为准对角阵, 准对角阵的对角线上的每一块都是一个全 1 方阵, 它正好对应于等价关系 R 的一个等价块。

27. 设 A 是 n 个元素的有限集合, 请回答下列问题, 并阐明理由。

- 1) 有多少个元素在 A 上的最大的等价关系中?
- 2) A 上的最大的等价关系的秩是多少?
- 3) 有多少个元素在 A 上的最小的等价关系中?
- 4) A 上的最小的等价关系的秩是多少?

[答] 1) A 上最大的等价关系是全关系 $R_1 = A \times A = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in A \}$ 因此有 n^2 个元素在 A 上的最大的等价关系 R_1 中, 因为所有 n^2 个二元组都在 $R_1 = A \times A$ 中。

2) A 上的最大的等价关系 R_1 的秩是 1。这是因为 A 中任何两个元素都有全关系 $R_1 = A \times A$, 因此 R_1 的等价块包含了 A 的所有元素, A 的所有元素都在同一个等价块中。

3) A 上的最小的等价关系是么关系 $R_2 = IA = \{ (a, a) \mid a \in A \}$ 因此它中有 n 个元素, 即 n 自反对。

4) A 上的最小的等价关系的秩是 n , 因为么关系的每一个元素都自成一个等价块, 每一等价块中也只有一个元素。

28. 设 R_1 和 R_2 是非容集合 A 上的等价关系, 对下列各种情况, 指出哪些是 A 上的等价关系; 若不是, 用例子说明。

- 1) $A \times A \setminus R_1$
- 2) $R_1 \setminus R_2$
- 3) R_1^2
- 4) $r(R_1 \setminus R_2)$ ($R_1 \setminus R_2$ 的自反闭包)
- 5) $R_1 \circ R_2$

[解] 1) 不是。设 $A = \{a\}$, 并且 $R_1 = \{ (a, a) \}$, 则 R_1 是 A 上的等价关系, 但 $A \times$

$A \setminus R_1 = \{ (a, a) \setminus (a, a) \} = \emptyset$ 就不是 A 上的等价关系, 因为空关系不是自反的。

2) 不是。设 $A = \{ (a, b) \}$ 并且 $R_1 = \{ (a, a), (b, b), (a, b), (b, a) \}$, $R_2 = \{ (a, a), (b, b) \}$, 则 R_1, R_2 都是 A 上的等价关系, 但是, $R_1 \setminus R_2 = \{ (a, b), (b, a) \}$ 就不是 A 上的等价关系, 因为 $R_1 \setminus R_2$ 不自反。

3) 是。

证法一: 因 R_1 是等价关系, 因而 R_1 是传递的, 故此由第 12 题之 5) 有 $R_1^2 = R_1 \circ R_1 \subseteq R_1$ 。另一方面, 结任何 $(a, b) \in R_1$, 由于 R_1 是自反的, 故此 $(b, b) \in R_1$, 从而由复合关系之定义, 有 $(a, b) \in R_1 \circ R_1$, 所以 $R_1 \subseteq R_1^2$, 从而 $R_1^2 = R_1$, 因此由 R_1 是等价关系, 知 R_1^2 也是等价关系。

证法二:

一方面, 对任何 $a, b \in A, (a, b) \in R_1^2$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\exists c \in A)((a, c) \in R_1 \wedge (c, b) \in R_1) \\ &\Rightarrow (\exists c \in A)((a, b) \in R_1) \quad (R_1 \text{ 是传递的}) \\ &\Rightarrow (a, b) \in R_1 \text{ (带量词的基本逻辑等价式: } (\exists x)p \Leftrightarrow p \text{)} \end{aligned}$$

所以, $R_1^2 \subseteq R_1$;

另一方面, 对任何 $a, b \in A, (a, b) \in R_1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (b, b) \in R_1 \quad (R_1 \text{ 是自反的}) \\ &\Rightarrow (a, b) \in R_1^2 \end{aligned}$$

所以, $R_1 \subseteq R_1^2$;

综合这两方面, 就有 $R_1^2 = R_1$;

4) 是。设 $A = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b) \}$ 。 $R_1 = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, a), (c, a) \}$, 则 R_1, R_2 都是 A 上的等价关系。

$R_1 \setminus R_2 = \{ (a, b), (b, a), (b, c), (c, b) \}$

$r(R_1 \setminus R_2) = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b) \}$

因此 $r(R_1 \setminus R_2)$ 不是 A 上的等价关系, 因为 $r(R_1 \setminus R_2)$ 不是传递的, $(a, b) \in r(R_1 \setminus R_2)$ 且 $(b, c) \in r(R_1 \setminus R_2)$, 但是 $(a, c) \notin r(R_1 \setminus R_2)$ 。

5) 不是。令 $A = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a) \}$, $R_2 = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c) \}$ 不上的等价关系, 因为 $R_1 \circ R_2$ 不对称, $(a, c) \in R_1 \circ R_2$, 但 $(c, a) \notin R_1 \circ R_2$ 。

29. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 请指出 A 上所有等价关系是多少? 并阐明理由。

[解] A 上的等价关系共有 14 个。根据 A 上的划分与 A 上的等价关系一一对应的原理，我们只需求出 A 上有多少个划分就行了。

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ 型划分，一个；

$\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$ 型划分，六个；

$\{\{a, b, \}, \{c, d\}\}$ 型划分，三个；

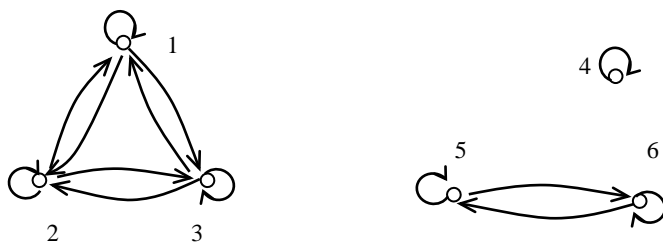
$\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$ 型划分，四个；

$\{\{a, b, c, d\}\}$ 型划分，一个。

总计：1+6+3+4+1=15 。

30. 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，确定 A 上的等价关系 R，使此 R 能产生划分 $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}\}$

[解] 这样的 $R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5)\}$



R 的关系图

31. 设 R 是集合 A 上的关系

R 是循环 $\therefore := (\forall a \in A) (\forall b \in A) (\forall c \in A) (aRb \wedge bRc \Rightarrow cRa)$

证明：R 是自反的和循环的，当且仅当 R 是等价关系。

[证] 证法一：

必要性

若 R 是自反的和循环的，我们来证 R 是等价关系，为此证明

(a) R 是自反的。

必要性条件所给。

(b) R 是对称的

对任何 $(a, b) \in R$ ，由于 R 是自反的，所以 $(b, b) \in R$ ，再根据 R 是循环的可得 $(b, a) \in R$ 。

(c) R 是传递的

对任何 $(a, b) \in R$ ， $(b, c) \in R$ ，由于 R 是循环的，所以 $(c, a) \in R$ ，利用 R 是对称的，就得到 $(a, c) \in R$ 。

充分性

若 R 是等价关系，我们来证 R 是自反的和循环的。

1) R 是自反的。

因 R 是等价关系，故 R 是自反的。

2) R 是循环的

对任何 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ ，由于 R 是传递的，所以 $(a, c) \in R$ 。

由于 R 是对称的， $(c, a) \in R$ 。

证法二：

\Rightarrow):

(a) R 是自反的：已知；

(b) R 是对称的：

对任何 $a, b \in A, (a, b) \in R$

$\Rightarrow (a, b) \in R \wedge (b, b) \in R$ (R 是自反的)

$\Rightarrow (b, a) \in R$ (R 是循环的)

所以， R 是对称的；

(c) R 是传递的：

对任何 $a, b, c \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$

$\Rightarrow (c, a) \in R$ (R 是循环的)

$\Rightarrow (a, c) \in R$ (R 是对称的)

所以， R 是传递的；

综合 (a), (b), (c) 可知 R 是等价关系；

\Leftarrow):

(a) R 是自反的：

因为 R 是等价关系，所以 R 是自反的；

(b) R 是循环的：

对任何 $a, b, c \in A, (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$

$\Rightarrow (a, c) \in R$ (R 是传递的)

$\Rightarrow (c, a) \in R$ (R 是对称的)

所以， R 是循环的；

32. 设 Π_1 和 Π_2 是非空集合 A 的划分，说明下面各种情况哪些是 A 的划分？哪些不是 A 的划分？哪些可能是 A 的划分？并阐明理由。

- 1) $\Pi_1 \cup \Pi_2$
- 2) $\Pi_1 \cap \Pi_2$
- 3) $\Pi_1 \setminus \Pi_2$
- 4) $(\Pi_1 \cap (\Pi_2 \setminus \Pi_1)) \cup \Pi_1$

[解] 1) 可能。如果 $\Pi_1 = \Pi_2$, 则 $\Pi_1 \cup \Pi_2$ 是 A 的划分; 如果, $\Pi_1 \neq \Pi_2$, 则 $\Pi_1 \cup \Pi_2$ 不是 A 的划分; 例如 $A = \{a, b\}$, $\Pi_1 = \{\{a\}, \{b\}\}$, $\Pi_2 = \{\{a, b\}\}$, 但 $\Pi_1 \cup \Pi_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 就不是 A 的划分, 因为 $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \neq \emptyset$, 就不是 A 的划分, 因为 $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \neq \emptyset$ 。

2) 可能。如果 $\Pi_1 = \Pi_2$, 则 $\Pi_1 \cap \Pi_2$ 是 A 的划分; 如果, $\Pi_1 \neq \Pi_2$, 则 $\Pi_1 \cap \Pi_2$ 不是 A 的划分; 例如 $A = \{a, b\}$, $\Pi_1 = \{\{a\}, \{b\}\}$, $\Pi_2 = \{\{a, b\}\}$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, 就不是 A 的划分。

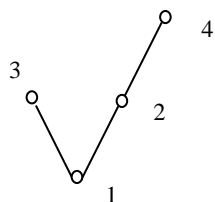
3) 可能。如果 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, 则 $\Pi_1 \setminus \Pi_2 = \Pi_1$ 是 A 的划分; 如果 $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, 则 $\Pi_1 \setminus \Pi_2$ 不是 A 的划分; 例如 $A = \{a, b, c\}$, $\Pi_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\Pi_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{\{a\}\}$ 因此 $\Pi_1 \setminus \Pi_2 = \{\{b\}, \{c\}\}$ 就不是 A 的划分。因为 $\{b\} \cup \{c\} = \{b, c\} \neq A$ 。

4) 是。因为 $(\Pi_1 \cap (\Pi_2 \setminus \Pi_1)) \cup \Pi_1 = \emptyset \cup \Pi_1 = \Pi_1$, 是 A 的划分。

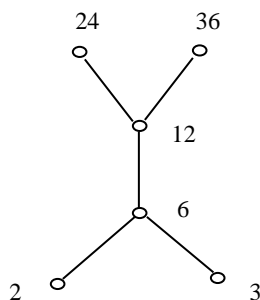
33. 对下列集合上的整除关系画出哈斯图, 并对 3) 中的子集 $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{4, 8, 12\}$ 找出最大元素, 最小元素, 极大元素, 极小元素, 上确界, 下确界。

- 1) $\{1, 2, 3, 4\}$
- 2) $\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$
- 3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

[解]



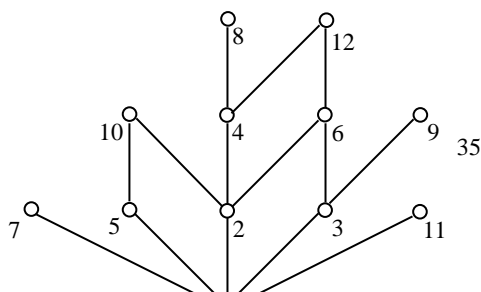
1) 的 Hasse 图



2) 的 Hasse 图

在 3) 的 Hasse 图中可以看出,

① $\{2, 3, 6\}$ 的最大元素为 6; 极大元素也为 6; 极小元素为 2 和 3; 上确界



为 6；下确界为 1；没有最小元素。

②{2, 4, 6}的极大元素为 4 和 6；最小素为 2；极小元素也为 2；上确界为 12；下确界为 2；

③{4, 8, 12}的极大元素为 8, 12；最小元素为 4；极小元素也为 4；下确界为 4；没有最大元素；没有上确界。

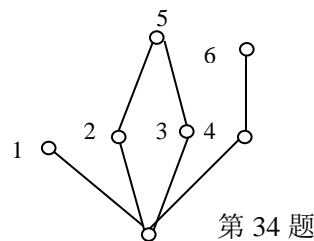
性质 集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
{2,3,6}	6	无	6	2,3	6,12	1	6	1
{2,4,6}	无	2	4,6	2	12	1,2	12	2
{4,8,12}	无	4	8,12	4	无	1,2,4	无	4

3)的特殊元素表

34. 对下面半序集合 (A, \leq) 的哈斯图，写出集合 A 及半序关系 \leq 的所有元素。

[解] $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\leq = \{ (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (1, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 6) \}$ 第 34 题



35. 设 R 是集合 X 上的半序关系， $A \subseteq X$ ，证明 $R \cap (A \times A)$ 是 A 上的半序关系。

[证].证法一：令 $R_1 = R \cap (A \times A)$ ，则 $R_1 \subseteq A \times A$ ，所以 R_1 是 A 上的关系，我们只需证明在 A 上 R 是自反的，反对称的，传递的即可。

(a) R_1 是自反的

对任何 $a \in A$ ，由于 $A \subseteq X$ ，所以 $a \in X$ ，由于 R 在 X 上是自反的，故此 $(a, a) \in R$ ；由于 $a \in A$ ，显然 $(a, a) \in A \times A$ ；所以 $(a, a) \in R \cap (A \times A)$ ，即 $(a, a) \in R_1$ 。

(b) R_1 是反对称的

对任何 $(a, a) \in R_1$ 且 $(b, a) \in R_1$, 由 $R_1 = R \cap (A \times A)$, 故有 $(a, b) \in R$ 且 $(b, a) \in R$, 以及 $a, b, c \in A$. 利用 R 的传递性, 可得 $(a, c) \in R$, 利用 $a, c \in A$ 可得 $(a, c) \in A \times A$, 所以 $(a, c) \in R \cap (A \times A)$, 即 $(a, c) \in R_1$.

证法二: 令 $R_1 = R \cap (A \times A)$, 由于 $R \cap (A \times A) \subseteq A \times A$, 所以 $R_1 \subseteq A \times A$, 因此 R_1 是 A 上的关系。

① R_1 是自反的

对任何 $a, a \in A$

$$\Rightarrow (a, a) \in R \wedge (a, a) \in A \times A \quad (R \text{ 是 } X \text{ 上的自反关系及 } A \subseteq X)$$

$$\Rightarrow (a, a) \in R \cap (A \times A)$$

$$\Rightarrow (a, a) \in R_1 \quad (R_1 \text{ 的定义})$$

所以, R_1 是自反的;

② R_1 是反对称的

对任何 $a, b \in A$

$$(a, b) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_1$$

$$\Rightarrow (a, b) \in R \cap (A \times A) \wedge (b, a) \in R \cap (A \times A) \quad (R_1 \text{ 的定义})$$

$$\Rightarrow ((a, b) \in R \wedge (a, b) \in A \times A) \wedge ((b, a) \in R \wedge (b, a) \in A \times A)$$

$$\Rightarrow ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \wedge ((a, b) \in A \times A \wedge (b, a) \in A \times A) \quad (\wedge \text{ 的结合律、交换律})$$

$$\Rightarrow ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \quad (\text{基本逻辑蕴涵式: } p \wedge q \Rightarrow p)$$

$$\Rightarrow a = b \quad (R \text{ 是反对称的})$$

所以, R_1 是反对称的;

③ R_1 是传递的

对任何 $a, b, c \in A$

$$(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1$$

$$\Rightarrow (a, b) \in R \cap (A \times A) \wedge (b, c) \in R \cap (A \times A) \quad (R_1 \text{ 的定义})$$

$$\Rightarrow ((a, b) \in R \wedge (a, b) \in A \times A) \wedge ((b, c) \in R \wedge (b, c) \in A \times A)$$

$$\Rightarrow ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \wedge ((a, b) \in A \times A \wedge (b, c) \in A \times A) \quad (\wedge \text{ 的结合律、交换律})$$

$$\Rightarrow ((a, c) \in R \wedge (a, c) \in A \times A) \quad (R \text{ 是传递的, 全关系 } A \times A \text{ 是传递的})$$

$$\Rightarrow (a, c) \in R \cap (A \times A)$$

$$\Rightarrow (a, c) \in R_1 \quad (R_1 \text{ 的定义})$$

所以, R_1 是传递的;

综合①、②、③, 可知 R_1 是 A 上的半序关系。

36. 设 (A, \leq_1) 和 (A, \leq_2) 是两个半序集合, 定义 $A \times B$ 上的关系 \leq_3 如下: 对于 $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \leq_3 \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \leq_1 \wedge (b_1, b_2) \in \leq_2$$

证明 \leq_3 是 $A \times B$ 上的半序关系。

[证].证法一: 对于任何 $(a, b) \in A \times B$, 就有 $a \in A$ 及 $b \in B$, 从而利用 \leq_1 及的自反性, 可得 $(a, a) \in \leq_1$ 且 $(b, b) \in \leq_2$ 因此由 \leq_3 的定义, 可知 $((a, b), (a, b)) \in \leq_3$ 。

(b) \leq_3 是反对称的

对任何 $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \leq_3$ 及 $((a_2, b_2), (a_1, b_1)) \in$, 由 \leq_3 的定义, 可知 $(a_1, a_2) \in \leq_1$ 且 $(a_2, a_1) \in \leq_1$ 及 $(b_1, b_2) \in \leq_2$ 且 $(b_2, b_1) \in \leq_2$ 利用 \leq_1 及 \leq_2 的反对称性, 可得 $a_1=a_2$ 及 $b_1=b_2$, 因此 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ 。

(c) \leq_3 是传递的

对任何 $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \leq_3$ 及 $((a_2, b_2), (a_3, b_3)) \in \leq_3$, 由 \leq_3 的定义, 可知 $(a_1, a_2) \in \leq_1$ 且 $(a_2, a_3) \in \leq_1$ 及 $(b_1, b_2) \in \leq_2$ 且 $(b_2, b_3) \in \leq_2$ 。利用 \leq_1 及 \leq_2 的传递性, 可得 $(a_1, a_3) \in \leq_1$ 及 $(b_1, b_3) \in \leq_2$ 。再次利用 \leq_3 的定义, 可得 $((a_1, b_1), (a_3, b_3)) \in \leq_3$ 。

证法二:

① \leq_3 是自反的

对任何 $(a,b), (a,b) \in A \times B$

$$\Rightarrow a \in A \wedge b \in B$$

$$\Rightarrow (a,a) \in \leq_1 \wedge (b,b) \in \leq_2 \quad (\leq_1, \leq_2 \text{ 都是自反的})$$

$$\Rightarrow ((a,b), (a,b)) \in \leq_3 \quad (\leq_3 \text{ 的定义})$$

所以, \leq_3 是自反的;

② \leq_3 是反对称的

对任何 $(a,b), (c,d) \in A \times B$

$$((a,b), (c,d)) \in \leq_3 \wedge ((c,d), (a,b)) \in \leq_3$$

$$\Rightarrow ((a,c) \in \leq_1 \wedge (b,d) \in \leq_2) \wedge ((c,a) \in \leq_1 \wedge (d,b) \in \leq_2) \quad (\leq_3 \text{ 的定义})$$

$$\Rightarrow ((a,c) \in \leq_1 \wedge (c,a) \in \leq_1) \wedge ((b,d) \in \leq_2 \wedge (d,b) \in \leq_2) \quad (\wedge \text{ 的结合律、交换律})$$

$$\Rightarrow a=c \wedge b=d \quad (\leq_1, \leq_2 \text{ 都是反对称的})$$

$$\Rightarrow (a,b) = (c,d)$$

所以, \leq_3 是反对称的;

③ \leq_3 是传递的

对任何 $(a,b), (c,d), (e,f) \in A \times B$

$$((a,b), (c,d)) \in \leq_3 \wedge ((c,d), (e,f)) \in \leq_3$$

$$\Rightarrow ((a,c) \in \leq_1 \wedge (b,d) \in \leq_2) \wedge ((c,e) \in \leq_1 \wedge (d,f) \in \leq_2) \quad (\leq_3 \text{ 的定义})$$

$$\Rightarrow ((a,c) \in \leq_1 \wedge (c,e) \in \leq_1) \wedge ((b,d) \in \leq_2 \wedge (d,f) \in \leq_2) \quad (\wedge \text{ 的结合律、交换律})$$

$$\Rightarrow (a,e) \in \leq_1 \wedge (b,f) \in \leq_2 \quad (\leq_1, \leq_2 \text{ 都是反对称的})$$

$$\Rightarrow ((a,b), (e,f)) \in \leq_3 \quad (\leq_3 \text{ 的定义})$$

所以, \leq_3 是传递的;

综合①、②、③, 可知 \leq_3 是 $A \times B$ 上的半序关系。

37. 对于非空集合 A , 是否存在这样的关系 R , 它即是等价关系又是半序关系? 若有, 请举出例子。

[解] 有。只有一种, 那就是 A 上的幺关系 I_A , 它即是等价关系, 又是半序关系。

证法一: 否则, 如果有 $a \in A$ 及 $b \in A$ 且 $a \neq b$, 使得 $(a, b) \in R$, 那么由 R 是反对称的, 就将有 $(b, a) \in R$, 再由 R 是反对称的, 就得到 $a=b$, 矛盾。这个矛盾说明同时为等价关系和半序关系的 R 只能是幺关系 I_A 。

证法二：设 R 即是一等价关系，又是一半序关系。则

一方面，对任何元素 $a, b \in A$,

$$(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$$

(R 的对称性)

$$\Rightarrow a = b$$

(R 的反对称性)

$$\Rightarrow (a, b) \in I_A$$

所以， $R \subseteq I_A$;

另一方面，对任何元素 $a \in A$,

$$(a, a) \in I_A \Rightarrow (a, b) \in R$$

(R 的自反性)

所以， $I_A \subseteq R$;

综合这两方面，有 $R = I_A$ 。

38. 对于下列每一种情况，举出有限集合和无限集合的例子各一个。

1) 非空半序集合，其中某些子集没有最大元素;

2) 非空半序集合，其中有一子集存在最大下界，但没有最小元素;

3) 非空序集合，其中有一子集存在上界，但没有最小上界。

[解] 1) (a) 令 $A = \{a, b, c\}$, 则 $(2^A, \subseteq)$

为半序集，其中子集

$$B_1 = \{\{c\}, \{a, b\}\}$$

$$B_2 = \{\{b\}, \{a, c\}\}$$

等均没有最大元素;

(b) 半序集 (N, \leq)

的子集 $B_1 = \{x | x = 2n \wedge n \in N\}$

$$B_2 = \{P | P \in N \wedge P \text{ 为素数}\}$$

等均没有最大元素;

2) (a) 令 $= \{1, 2, 3, 4, 9, 14, 15\}$

“1”为整除关系， $a|b ::= a$ 整除 b

则 $(A, |)$ 为半序集合，其中子集

$B = \{4, 9, 14, 15\}$ 有最大下界 1，但没有

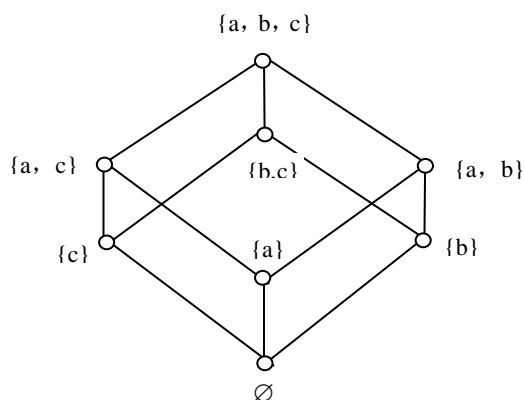
界小元素。(b) 半序集 (R, \leq) 的子集

$$B = (0, 1) = \{x | x \in R \wedge 0 < x \leq 1\}$$

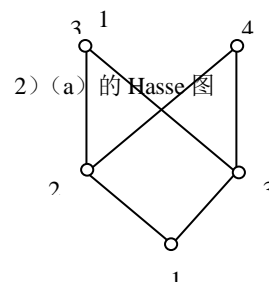
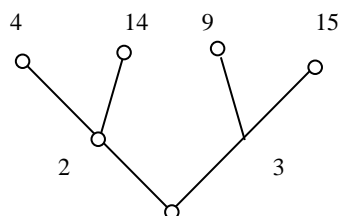
有最大下界 0，但没有最小元素。

3) (a) 令 $A = \{1, 2, 3, 30, 42\}$, “1”仍

为 2) 的 (a) 所定义的整除关系。则 $(A,$



1) 的 (a) 的 Hasse 图



2) (a) 的 Hasse 图

3) 的 (a) 的 Hasse

1) 为半序集，其中子集

$B=\{2, 3\}$ 有上界 30, 42, 但没有最小上界。半序集 (Q, \leq) 的子集

$B=\{x|x \in Q \wedge 0 < x \leq \sqrt{2}\}$ 有上界 2, $\frac{3}{2}$ 等, 但无最小上界 (若有最小上界, 必为

$\sqrt{2}$, 但 $\sqrt{2} \notin Q$)。

39. 指出下面的集合中, 哪些是半序集合, 线序集合或良序集合?

1) $(2^N, \subseteq)$

2) $(2^{\{a\}}, \subseteq)$

3) $(2^\emptyset, \subseteq)$

[解] 结果如下表

	半序集合	线性序集合	良序集合
$(2^N, \subseteq)$	Y	N	N
$(2^{\{a\}}, \subseteq)$	Y	Y	Y
$(2^\emptyset, \subseteq)$	Y	Y	Y

其中: Y—yes; N—not。

40. 设 R 是 A 上的二元关系, 若 R 是自反的, 对称的, 则称 R 为一个相容关系。

1) 举出两个相容关系的例子

2) 设 R_1, R_2 是 A 上的相容关系, 那么 $R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ 是 A 上的相容关系吗?

请阐明理由。

[解]1) (a) 令 $A=\{\text{ball, bed, dog, let, egg}\}$

$R=\{(x, y) | x, y \in A \wedge x \text{ 和 } y \text{ 含有相同的字母}\}$ 则 R 是 A 上的相容关系。

(b) 令 $A=\{2166, 243, 375, 648, 455\}$

$R=\{(x, y) | x, y \in A \wedge x \text{ 和 } y \text{ 含有相同的数字}\}$ 则 R 是 A 上的相容关系。

2) 证法一 (a) $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的相容关系。因为

① $R_1 \cap R_2$ 是自反的

对任何 $a \in A$, 由于 R_1, R_2 都是相容关系, 所以 R_1, R_2 都是自反的, 从而 $(a, a) \in R_1, (a, a) \in R_2$ 故 $(a, a) \in R_1 \cap R_2$ 。

② $R_1 \cap R_2$ 是对称的

对任何 $(a, b) \in R_1 \cap R_2$, 可得 $(a, b) \in R_1$ 且 $(a, b) \in R_2$ 。由于

R_1, R_2 都是相容关系, 所以 R_1, R_2 都是对称的, 从而 $(b, a) \in R_1$ 且 $(b, a) \in R_2$, 故此 $(b, a) \in R_1 \cap R_2$ 。

(b) $R_1 \cup R_2$ 是 A 上的相容关系。因为

① $R_1 \cup R_2$ 是自反的

对任一 $a \in A$, 由于 R_1, R_2 都是相容关系, 所以 R_1, R_2 都是自反的, 从而 $(a, a) \in R_1, (a, a) \in R_2$, 故此 $(a, a) \in R_1 \cup R_2$ 。

② $R_1 \cup R_2$ 是对称的

对任何 $(a, b) \in R_1 \cup R_2$, 可得 $(a, b) \in R_1$ 或 $(a, b) \in R_2$ 。由于 R_1, R_2 都是相容关系, 所以 R_1, R_2 都是对称的, 从 $(b, a) \in R_1$ 或 $(b, a) \in R_2$, 故此 $(b, a) \in R_1 \cup R_2$ 。完 (1996 年 1 月 20 日)

证法二 (a) $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的相容关系。因为

① $R_1 \cap R_2$ 是自反的

对任何 $a, a \in A \Rightarrow (a, a) \in R_1 \wedge (a, a) \in R_2$ (R_1, R_2 都是自反的)
 $\Rightarrow (a, a) \in R_1 \cap R_2$

所以, $R_1 \cap R_2$ 是自反的;

② $R_1 \cap R_2$ 是对称的

对任何 $a, b \in A, (a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2$
 $\Rightarrow (b, a) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_2$ (R_1, R_2 都是对称的)
 $\Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$

所以, $R_1 \cap R_2$ 是对称的;

综合①、②, 可知 $R_1 \cap R_2$ 是相容关系;

(b) $R_1 \cup R_2$ 是 A 上的相容关系。因为

① $R_1 \cup R_2$ 是自反的

对任何 $a, a \in A \Rightarrow (a, a) \in R_1 \vee (a, a) \in R_2$ (R_1, R_2 都是自反的)
 $\Rightarrow (a, a) \in R_1 \cup R_2$

所以, $R_1 \cup R_2$ 是自反的;

② $R_1 \cup R_2$ 是对称的

对任何 $a, b \in A, (a, b) \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1 \vee (a, b) \in R_2$
 $\Rightarrow (b, a) \in R_1 \vee (b, a) \in R_2$ (R_1, R_2 都是对称的)
 $\Rightarrow (b, a) \in R_1 \cup R_2$

所以, $R_1 \cup R_2$ 是对称的;

综合①、②, 可知 $R_1 \cup R_2$ 是相容关系;

习题三（第三章函数）

1. 在下列关系中，哪些级构成函数？

1) $\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x+y < 10 \}$

2) $\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y=x^2 \}$

3) $\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x=y^2 \}$

[解] 1) 不能；1) 能；3) 不能。

2. 下列集合能否定义函数？若能，指出它的定义域和值域。

1) $\{ (1, (2, 3)), (2, (3, 4)), (3, (3, 20)) \}$

2) $\{ (1, (2, 3)), (2, (3, 4)), (1, (2, 4)) \}$

3) $\{ (1, (2, 3)), (2, (3, 4)), (3, (2, 3)) \}$

4) $\{ (1, (2, 3)), (2, (3, 4)), (3, (1, 4)), (4, (1, 4)) \}$

[解] 1) 能， $(f) = \{1, 2, 3\}$ ， $(f) = \{ (2, 3), (3, 4), (1, 4) \}$ ；

2) 不能；

3) 能， $(f) = \{1, 2, 3\}$ ， $(f) = \{ (2, 3) \}$ ；

4) 能， $(f) = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $(f) = \{ (2, 3), (3, 4), (1, 4) \}$ 。

3. 在下列函数中，哪些是单射的、满射的、双射的？

1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n^2 + 1$

2) $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}, f(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ 1 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

3) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ 1 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

4) $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, f(m, n) = m^n$

5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 17$

6) $f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = \log_{10} n$

7) $f: (2^x)^2 \rightarrow (2^A)^2, f(A_1, A_2) = (A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2)$

[解] 1) 单射；2) 满射；3) 即不是单射，也不是满射；4) 满射；5) 双射；6) 单射；

7) 即不是单射，也不是满射。

4. 设 A, B 为有限集合， $|A|=m, |B|=n$ ，为使下面的结论为真， m, n 应满足怎样的条件？

1) 存在从 A 到 B 的单射函数；

2) 存在从 A 到 B 的满射函数；

3) 存在从 A 到 B 的双射函数；

[解] 1) mn ; 2) mn ; 3) $m=n$ 。

5. 对下称每一组集合 X, Y , 构造从 X 到 Y 的双射函数。

1) $X = (0, 1), Y = (0, 2)$

2) $X = I, Y = N$

3) $X = N, Y = N \times N$

4) $X = I \times I, Y = N$

5) $X = R, Y = (0, \infty)$

6) 6) $X = (-1, 1), Y = R$

7) 7) $X = [0, 1], Y = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

8) 8) $X = 2^{\{a, b, c\}}, Y = \{0, 1\}^{\{a, b, c\}}$

[解] 1) 构造 $f: (0, 1) \rightarrow (0, 2), f(x) = 2x, x \in (0, 1)$

则 $f^{-1}: (0, 2) \rightarrow (0, 1), f^{-1}(x) = \frac{x}{2}, x \in (0, 2)$

2) 构造 $f: I \rightarrow N, f(n) = \begin{cases} 2(n+1)^2, & \text{当 } n \geq 0 \\ -(2n+1), & \text{当 } n < 0 \end{cases} \quad n \in I$

则 $f^{-1}: N \rightarrow I, f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad n \in N$

3) 构造 $f_l: N \rightarrow N \times N, f_l(n) = (k+1, l+1), n \in N$

这里 k 满足 $2|n, 2^2|n, \dots, 2^k|n$ 及 $2^{k+1} \nmid n$ ($k \in N \cup \{0\}$)

$l = \frac{1}{2}[(n/2^k) - 1] \quad (l \in N \cup \{0\})$

则 $f_l^{-1}: N \times N \rightarrow N, (k, l) \mapsto n, \quad k, l \in N$

这里 $n = 2^{k-1}(2(l-1) + 1)$

编码方法如下图所示：

1	3	5	7	9	11	13	15
(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
2	6	10	14	18	22	26	30
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)	(2, 8)
4	12	20	28	36	44	52	60
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)	(3, 8)
8	24	40	56	72	88	104	120
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 8)
16	48	80	112	144	176	208	240
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	(5, 7)	(5, 8)
32	96	160	224	288	352	416	480
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	(6, 7)	(6, 8)
64	192	320	448	576	704	832	960
(7, 1)	(7, 2)	(7, 3)	(7, 4)	(7, 5)	(7, 6)	(7, 7)	(7, 8)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

第 5 题 3) 的图 (a)

构造 $f_2: f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$f_2(n) = \begin{cases} (k, l) & , \text{ 当 } m \text{ 为奇数} \\ (l, k) & , \text{ 当 } m \text{ 为偶数} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

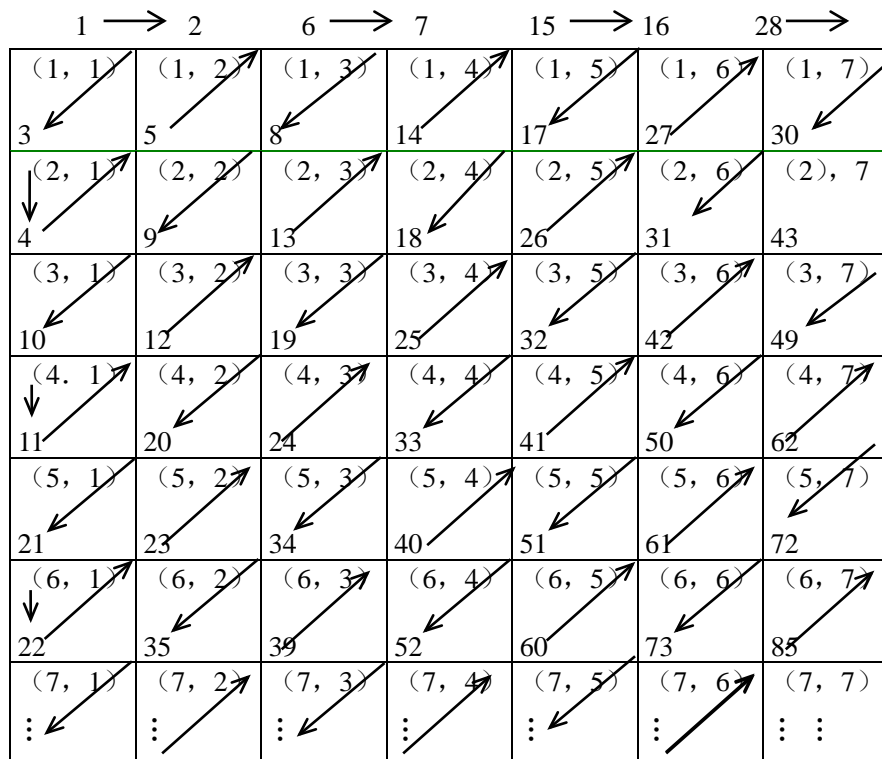
其中: m 满足不等式 $\frac{1}{2} m(m+1) < n \leq \frac{1}{2} (m+1)(m+2)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\begin{cases} k := n - \frac{1}{2} m(m+1) \\ l := m - k + 2 \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{N}$$

则 $f_2^{-1}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_2^{-1}(Y, S) = n, \quad r, S \in \mathbb{N}$

$$\text{其中: } n = \begin{cases} \frac{1}{2} (r+s-1)(r+s-2) + s, & \text{ 当 } r+s \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{2} (r+s-1)(r+s-2) + r, & \text{ 当 } r+s \text{ 为奇数} \end{cases}$$

编码方法如下图所示



第5题3)的图(b)

4) 构造 $f: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(r, s) = n$ $r, s \in \mathbb{I}$

其中: $k = |r| + |s|$

$$l = 1 + 2k(k+1)$$

$$n = \begin{cases} (1 - 3k + 1) + r, & \text{当 } S \geq 0 \text{ 时} \\ (1 - k + 1) - r, & \text{当 } S < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

则 $f^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, $f^{-1}(n) = (r, s)$, $n \in \mathbb{N}$

其中: 寻找 k 满足不等式 $1 + 2k(k-1) < n \leq 1 + 2k(k+1)$

令 $l = 1 + 2k(k+1)$

$$n_1 = n - (1 - 3k + 1) = (3k - 1) - (l - n)$$

$$n_2 = n - (1 - k + 1) = (k - 1) - (l - n)$$

$$\text{若 } |n_1| \leq k, \text{ 则令 } \begin{cases} r = n_1 \\ s = k - |r| \end{cases}$$

$$\text{若 } |n_2| < k, \text{ 则令 } \begin{cases} r = -n_2 \\ s = -(k - |r|) \end{cases}$$

5) 构造 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

则 $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$

6) 构造 $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x}{(x+1)(x-1)}$, $x \in (-1, 1)$

则 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $f^{-1}(x) = \frac{2y}{\sqrt{4y^2 + 1} + 1}$, $x \in [0, 1]$

7) 构造 $f: [0, 1] \rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $f = g \circ h$

其中: $h: [0, 1] \rightarrow$, $h(x) = \frac{1}{4}(x+1)$, $x \in [0, 1]$

$$g: [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$$

$$g(x) = \begin{cases} r_1 & , \text{当 } x = \frac{1}{4} \\ r_2 & , \text{当 } x = \frac{1}{2} \\ r_{i+2} & , \text{当 } x = r_i (i = 1, 2) \\ x & , \text{否则} \end{cases}$$

这里 $r_1, r_2, \dots, r_n \dots (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 是该区间内所有的有理数。

于是: $f^{-1}: (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \rightarrow [0, 1]$

其中: $g^{-1}: (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \rightarrow [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \text{当 } x = r_1 \\ \frac{1}{2} & , \text{当 } x = r_2 \\ r_{i-2} & , \text{当 } x = r_i (i = 3, 4, \dots) \\ x & , \text{否则} \end{cases}$$

$r_1, r_2, \dots, r_n \dots \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 为该区间内所有有理数。

$$h^{-1}: [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, 1]$$

$$h^{-1}(x) = 4(x - \frac{1}{4}) = 4x - 1$$

8) 构造: $f: 2^{\{a, b, c\}} \rightarrow \{0, 1\}^{\{a, b, c\}}$

$$f(B) = g, \quad B \in 2^{\{a, b, c\}} \text{ (或 } B \subseteq \{a, b, c\})$$

$$g \in \{0, 1\}^{\{a, b, c\}} = \{h \mid h: \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

$$g \text{ 满足 } \{x \mid x \in \{a, b, c\} \wedge g(x) = 1\} = B$$

或者更明确地:

$$f(\emptyset) = g_0, \quad g_0(a) = 0, \quad g_0(b) = 0, \quad g_0(c) = 0;$$

$$f(\{a\}) = g_1, \quad g_1(a) = 1, \quad g_1(b) = 0, \quad g_1(c) = 0;$$

$$f(\{b\}) = g_2, \quad g_2(a) = 0, \quad g_2(b) = 1, \quad g_2(c) = 0;$$

$$f(\{c\}) = g_3, \quad g_3(a) = 0, \quad g_3(b) = 0, \quad g_3(c) = 1;$$

$$f(\{a, b\}) = g_4, \quad g_4(a) = 1, \quad g_4(b) = 1, \quad g_4(c) = 0;$$

$$f(\{a, c\}) = g_5, \quad g_5(a) = 1, \quad g_5(b) = 0, \quad g_5(c) = 1;$$

$$f(\{b, c\}) = g_6, \quad g_6(a) = 0, \quad g_6(b) = 1, \quad g_6(c) = 1;$$

$$f(\{a, b, c\}) = g_7, \quad g_7(a) = 1, \quad g_7(b) = 1, \quad g_7(c) = 1;$$

$$\text{于是 } f^{-1}: \{0, 1\}^{\{a, b, c\}} \rightarrow 2^{\{a, b, c\}}$$

$$f^{-1}(g) = B, \quad B = \{x \mid x \in \{a, b, c\} \wedge g(x) = 1\}$$

$$\text{或者 } f^{-1}(g_0) = \emptyset; \quad f^{-1}(g_1) = \{a\}; \quad f^{-1}(g_2) = \{b\}; \quad f^{-1}(g_3) = \{c\};$$

$$f^{-1}(g_4) = \{a, b\}; \quad f^{-1}(g_5) = \{a, c\}; \quad f^{-1}(g_6) = \{b, c\}; \quad f^{-1}(g_7) = \{a, b, c\}$$

c)

	117	89	65	45	29	17	31	49	71	97	127
	(-5,3)	(-4,3)	(-3,3)	(-2,3)	(-1,3)	(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)
	88	64	44	28	16	8	18	32	50	72	98
	(-5,2)	(-4,2)	(-3,2)	(-2,2)	(-1,2)	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)
	63	43	27	15	7	3	9	19	33	51	73
	(-5,0)	(-4,0)	(-3,0)	(-2,0)	(-1,0)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
	85	61	41	25	13	5	11	21	35	53	75
	(-5,-1)	(-4,-1)	(-3,-1)	(-2,-1)	(-1,-1)	(0,-1)	(1,-1)	(2,-1)	(3,-1)	(4,-1)	(5,-1)
	112	84	60	40	24	12	22	36	54	76	102
	(-5,-2)	(-4,-2)	(-3,-2)	(-2,-2)	(-1,-2)	(0,-2)	(1,-2)	(2,-2)	(3,-2)	(4,-2)	(5,-2)

	142	111	83	59	39	23	37	55	77	103	133
	(-5,-3)	(-4,-3)	(-3,-3)	(-2,-3)	(-1,-3)	(0,-3)	(1,-3)	(2,-3)	(3,-3)	(4,-3)	5,-3
	178	142	110	82	58	38	56	78	104	134	168
	(-5,-4)	(-4,-4)	(-3,-4)	(-2,-4)	(-1,-4)	(0,-4)	(1,-4)	(2,-4)	(3,-4)	(4,-4)	(5,-4)

第5题4)的图

6. 设 f 和 g 是由数, $f \subseteq g$ 并且 $(g) \subseteq \mathcal{D}(f)$, 证明 $f = g$ 。

[证明] 因为已知 $f \subseteq g$, 故只需证明 $g \subseteq f$ 即可得 $f = g$ 。为此用反证法。

假设 $g \not\subseteq f$, 从而存在着 $(x, y) \in g$, 使得 $(x, y) \notin f$ 。由 $(x, y) \in g$ 可知

$x \in \mathcal{D}(g)$, 根据已知 $\mathcal{D}(g) \subseteq \mathcal{D}(f)$, 有 $x \in \mathcal{D}(f)$ 。于是存在着 y_1 , 使得

$(x, y) \in f$ 。又从已知 $f \subseteq g$, 可得 $(x, y_1) \in g$ 。由于 g 是函数, 根据函数是后者唯一的关系这个定义, 就得到 $y = y_1$ 。从而 $(x, y) \in f$, 与反证假设 $(x, y) \notin f$ 矛盾, 这个矛盾说明假设错误, 于是必有

$$g \subseteq f \quad \text{。}$$

7. 设 f 和 g 是函数, 证明也是函数。

[证] 只需证明对任何 $x \in \mathcal{D}(f \cap g)$ 存在着唯一的 y , 使得 $(x, y) \in f \cap g$ 即可。

(a) 存在性

若有 $x \in \mathcal{D}$, 由于 f 及 g 是由数, 因而也是关系, 所以也是一个关系, 从而应有 y 存在, 使 $(x, y) \in f \cap g$ 。

若 $f \cap g$ 是空集, 自然 $\mathcal{D}(f \cap g) = \emptyset$, 从而对任何 $x, x \notin \mathcal{D}(f \cap g)$ 。

(b) 唯一性

若存在着 y_1, y_2 , 使 $(x, y_1) \in f \cap g, (x, y_2) \in f \cap g$, 则 $(x, y_1) \in f$ 且 $(x, y_2) \in f$, 由 f 是由数, 后者唯一就可得 $y_1 = y_2$ 。

8. 设 $f: X \rightarrow Y$ 是函数, A, B 是 X 的子集, 证明:

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

3) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

[证明] 1) 若 $y \in f(A \cup B)$ 则有 $x \in A \cup B$, 使 $f(x) = y$ 。即有 $x \in A$ 或者 $x \in B$, 使 $f(x) = y$ 。若 $x \in A$, 使 $f(x) = y$, 则 $y \in f(A)$; 若 $x \in B$, 使 $f(x) = y$, 则 $y \in f(B)$ 。总之 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$, 从而 $y \in f(A) \cup f(B)$ 所以,

$$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$$

若 $y \in f(A) \cup f(B)$, 则 $y \in f(A)$ 或者 $y \in f(B)$, 若 $y \in f(A)$, 则存在着 $x_1 \in A$, 使 $f(x_1) = y$, 即存在着 $x_1 \in A \cup B$, 使 $f(x_1) = y$, 故 $y \in f(A \cup B)$; 若 $y \in f(B)$, 则存在着 $x_2 \in B$, 使 $y = f(x_2)$, 即存在着 $x_2 \in A \cup B$, 使 $y = f(x_2)$, 故 $y \in f(A \cup B)$ 。总之, $y \in f(A \cup B)$ 。所以

$$f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)。$$

因此

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)。$$

2) 若 $y \in f(A \cap B)$, 则存在着 $x \in A \cap B$, 使 $y = f(x)$ 。即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 使 $y = f(x)$ 。从而 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$, 从而 $y \in f(A) \cap f(B)$ 。所以

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)。$$

令 $f: X \rightarrow X$, $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\}$ 。并且取 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, 则 $A \cap B = \{2\}$, $f(A) = f(B) = \{3, 4\}$, $f(A \cap B) = \{3\}$ 。从而 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ 是严格真包含。因此等号一般不成立。

3) 设 y 是任一使得 $y \in f(A) \setminus f(B)$ 的元素。那么有某 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 但是, 对每个 $z \in B$, 都有 $y \neq f(z)$ 。因此 $x \in A \setminus B$, 并且由于 $y = f(x)$, 这就是推出 $y \in f(A \setminus B)$ 。由 y 是任意的, 这就建立了

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$$

令 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f: X \rightarrow X$, $f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 2), (4, 5), (5, 1)\}$ 。取 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, 则 $A \setminus B = \{1, 2\}$, 于是 $f(A) = \{5, 4, 2\}$, $f(B) = \{2, 5\}$, $f(A \setminus B) = \{5, 4\}$, $f(A) \setminus f(B) = \{4\}$ 。由于 $\{4\} \subset \{5, 4\}$, 故此 $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$ 是真包含, 等号不成立。

9. 设 $f: X \rightarrow Y$, 定义函数 $g: Y \rightarrow 2^X$, 使得对任意的 $y \in Y$

$$g(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

证明: 如果 f 是满射函数, 则 g 是单射函数。

[证明] 对于任意的 $y_1, y_2 \in Y$ 且 $y_1 \neq y_2$, 我们来证 $g(y_1) \neq g(y_2)$ 。首先我们来证 $g(y_1) \neq \emptyset$ 且 $g(y_2) \neq \emptyset$ 。由于 $f: X \rightarrow Y$ 是满射函数, 故此存在着 $x_1, x_2 \in X$, 使得 $f(x_1) = y_1$, 因此 $x_1 \in g(y_1) = \{x \in X \mid f(x) = y_1\}$, $x_2 \in g(y_2) = \{x \in X \mid f(x) = y_2\}$, 所以 $g(y_1) \neq \emptyset$, $g(y_2) \neq \emptyset$ 。其次来证 $g(y_1) \cap g(y_2) = \emptyset$ 。否则, 此交集非空, 则存在着 $x \in X$, 使 $x \in g(y_1) \cap g(y_2)$, 从而 $x \in g(y_1)$ 且

$x \in g(y_2)$, 于是 $f(x) = y_1$, $f(x) = y_2$, 从而 $y_1 = y_2$ 与 $y_1 \neq y_2$ 的取法矛盾, 因此这样的 x 不存在, $g(y_1) \cap g(y_2) = \emptyset$ 。最后, $g(y_1) \neq g(y_2)$ 。否则, $g(y_1) = g(y_2)$, 则 $g(y_1) \cap g(y_2) = g(y_1) \cap \emptyset$, 矛盾。因此 g 是单射函数

10. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$

1) 求 $f \circ g$ 和 $g \circ f$

2) 说明上述函数是单射、满射还是双射的?

[解] 1) $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 对于任意 $x \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 3$$

$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1) + 2 = x^2 + 1$$

2) (a) $f \circ g$ 不是单射的

因为 $(f \circ g)(-(x+4)) = (x+4)^2 - 4(x+4) + 3$

$$= (x+4)(x+4-4) + 3$$

$$= (x+4)x + 3$$

$$= x^2 + 4x + 3$$

$$= (f \circ g)(x)$$

但是, 除 $x=2$ 外, 一般 $-(x+4) \neq x$, 故此 $f \circ g$ 不是单射函数。

(b) $f \circ g$ 不是满射的

因为 $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 3$

$$= (x+2)^2 - 1$$

$$\geq -1$$

故此 $\mathcal{R}(f \circ g) = [-1, +\infty] \neq \mathbb{R}$ 。所以 $f \circ g$ 不是满射的。

(c) 综合 (a)、(b)、 $f \circ g$ 也不是双射的。

(d) $g \circ f$ 不是单射的

因为 $(g \circ f)(-x) = (-x)^2 + 1$

$$= x^2 + 1$$

$$= (g \circ f)(x)$$

但是, 除 $x=0$ 外, 一般 $-x \neq x$, 故此 $g \circ f$ 不是单射的。

(f) $g \circ f$ 不是满射的

因为 $(g \circ f)(x) = x^2 + 1 \geq 1$, 故此 $\mathcal{R}(g \circ f) = [1, +\infty] \neq \mathbb{R}$ 。所以 $g \circ f$ 不是满射的。

(g) 综合 (d)、(f), $g \circ f$ 当然也不是双射的。

11. 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$

1) 作双射函数 $f: A \rightarrow A$, 使 $f \neq I_A$, 并求 $f^2, f^3, f^{-1}, f \circ f^{-1}$

2) 是否存在双射函数 $g: A \rightarrow A$, 使 $g \neq I_A$, 但 $g^2 = I_A$

[解] 散 1) 定义 $f: A \rightarrow A$, $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ 则显然 f 是双射的
且 $f \neq I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ 。

$$\begin{aligned} f^2 &= f \circ f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\} & f^2 &= x \\ f^3 &= f \circ f^2 = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\} & f^3 &= 5-x \\ f^{-1} &= \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\} & f^{-1} &= 5-x \\ f \circ f^{-1} &= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} = I_A & f \circ f^{-1} &= I_A \end{aligned}$$

2) 存在。定义 $g: A \rightarrow A$, $g = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$ 则显然 gf, gI_A
且 g 是双射的, 但是有

$$g^2 = g \circ g = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} = I_A。$$

12. 设 $|X| = n$, 从 X 到 X 的双射函数 P 称为集合 X 上的置换,
整数 n 称为置换的阶。一个 n 阶置换 $P: X \rightarrow X$, 用如下形式表示:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \end{pmatrix}, \quad P(x_i) \in X$$

给定三阶置换 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求逆置换 P^{-1} 及 P 与 P^{-1} 的复合 $P \diamond P^{-1}$ 。

$$\begin{aligned} [\text{解}] P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ P \diamond P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. 设 A 是无限集合, B 是有限集合, 回答下列问题并阐明理由

- 1) $A \cap B$ 是无限集合吗?
- 2) $A \cup B$ 是无限集合吗?
- 3) $A \setminus B$ 是无限集合吗?

[答] 1) 不是。因为 $A \cap B \subseteq B$, 而 B 是有限集合, 所以 $A \cap B$ 是有限集合。

2) 是。因为 $A \cup B \subseteq A$, 而 A 是无限集合, 所以 $A \cup B$ 是无限集合。

3) 是。因为 A 是无穷集合, 因此 A 含有一可数子集 A_1 , 从而 $A=A_1 \cup A_2$ 这里 $A_2=A \setminus A_1$ 。于是 $A \setminus B = (A_1 \cup A_2) \setminus B = (A_1 \setminus B) \cup (A_2 \setminus B)$ 。由 (另一证法否则 $A \setminus B$ 有限, 则 $A = (A \setminus B) \cup B$ 两个有限集合之并仍为有限矛盾) 于任何可数集中取出有穷个元素之后, 剩下的集合仍旧是可数集, 故此可数集 A_1 与有限集合的差 $A_1 \setminus B$ 仍是一可数集, 因此由 $A \setminus B = (A_1 \setminus B) \cup (A_2 \setminus B) \subseteq A_1 \setminus B$, 即知 $A \setminus B$ 中含有一可数子集 $A_1 \setminus B$ 。所以 $A \setminus B$ 是无限集合。

14. 设 A, B, C, D 为集合, 若 $A \approx C, B \approx D$, 证明 $A \times B \approx C \times D$ 。

[证明] 由于 $A \approx C, B \approx D$, 所以由等势的定义知存在着二个双射函数 $g: A \rightarrow C$ 和 $h: B \rightarrow D$ 。从而我们可构造一个双射函数:

$$f: A \times B \rightarrow C \times D$$

对于任何 $(a, b) \in A \times B, f(a, b) = (g(a), h(b))$

于是 f 是双射函数, 其逆函数为

$$f^{-1}: C \times D \rightarrow A \times B$$

对于任何 $(c, d) \in C \times D, f^{-1}(c, d) = (g^{-1}(c), h^{-1}(d))$

因此,

$$A \times B \approx C \times D$$

15. 设 a, b 为任意实数, $a < b$, 证明 $[0, 1] \approx [a, b]$

[证明] 构造函数

$$f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$$

$$f(x) = (b-a) \cdot x + a, \quad x \in [0, 1]$$

此函数是双射的, 其逆函数为

$$f^{-1}: [a, b] \rightarrow [0, 1]$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in [a, b] \quad (\text{由于 } a < b, \text{ 故 } b-a > 0 =$$

因此 $[0, 1] \approx [a, b]$ 。

16. 计算下列集合的基数

1) $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in I\}$;

2) 所有整系数的一次多项式集合;

3) $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge a^2 + b^2 = 1\}$;

4) 实数轴上所有两不相交的有限开区间组成集合。

[解] 1) $|\{(a, b, c) \mid a, b, c \in I\}| =$ 因为整数集 I 是可数的 (参见第 5 题的 2)。

又从 $\{a, b, c \mid a, b, c \in I\} = I \times I \times I$ 为三个 (有限个) 可数集的叉积, 因而是可数的。

2) 所有整系数的一次多项式集合 $=\{ax+b|a, b \in I\}$, 因此

$$|\{ax+b|a, b \in I\}| = |\{(a, b) | a, b \in I\}| = |I \times I| = \aleph$$

3) $|\{(a, b) | a, b \in \mathbb{R} \wedge a^2+b^2=1\}| = \aleph$ 。因为存在着双射函数:

$$S: \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R} \wedge a^2+b^2=1\} \rightarrow [0, 1]$$

$$S(x, y) = \frac{\theta}{2\pi}, \quad (x, y) \in \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R} \wedge a^2+b^2=1\}$$

$$\text{其中 } \theta = \begin{cases} \arccos x, & \text{当 } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos x, & \text{当 } y < 0 \end{cases}$$

其逆函数 $S^{-1}: [0, 1] \rightarrow \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R} \wedge a^2+b^2=1\}$

$$S^{-1}(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

因此 $|\{(a, b) | a, b \in \mathbb{R} \wedge a^2+b^2=1\}| = |[0, 1]| = \aleph$

4) 实数轴上所有两两不相交的有限开区间组成的集合的基数是 \aleph 。

因为我们可在每个开区间中任取一有理数与此区间对应, 由于这此开区间是两两不相交的, 因而不同的区间就对应于不同的有理数 (实际上是建立了一个单射), 故所述开区间类与有理数集的一子集等势, 从而或是有限的或是可当选的; 但不可能是有限的。因为已知每个开区间都是有限的, 而有限个有限开区间的并仍是有限集 (有限开集), 从而必能包含在区间与它之内的每个有限开区间的均不相交, 符合所述开区间类的条件, 故而应在此大区间之内, 矛盾。所以这类开区间是可数的。

17. 找出三个与 N 等势的 N 的真子集。

[解] $A = \{2n | n \in N\} \subset N$, 双射函数 $f: A \rightarrow N$

$$f(m) = \frac{m}{2}, \quad m \in A, \quad \text{这是所有偶自然数集合。}$$

$B = \{2n+1 | n \in N\} \subset N$, 双射函数 $g: B \rightarrow N$,

$$g(m) = \frac{m-1}{2}, \quad m \in B, \quad \text{这是所有奇自然数集合。}$$

$C = \{P_i | i \in N \wedge P_i \text{ 为第 } i \text{ 个素数}\} \subset N$, 素数是无限多的。否则, 只有有限个, 不妨设为 P_1, \dots, P_k , 从而来考虑

$$M = 4P_1P_2 \cdots P_k + 1$$

这个数, 因为 P_1M, P_2M, \dots, P_kM , 从而 M 不能分解成素数这积, 说明 M 又是一另外的素数, 与素数只有 P_1, P_2, \dots, P_k 个矛盾。所以 C 是可数的, C 与 N 等势。

18. 证明 1) 设 A 为有限集, B 为可数集, 则 $A \times B$ 为可数集。
 2) 设 A 、 B 为可数集, 则 $A \times B$ 是可数集。
 3) 设 A 是不可数无限集合, B 是 A 的可数子集, 则 $(A \setminus B) \approx A$ 。
 4) 设 A 是任意无限集合, B 是可数集, 则 $(A \cup B) \approx A$

[证明] 1) 由于 A 为有限集, B 为可数集, 故可设

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$$

$$\text{从而 } AB = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A \wedge b_j \in B \wedge 1 \leq i \leq n \wedge j \in \mathbb{N}\}$$

从而可建立 $A \times B$ 到 \mathbb{N} 的双射 $f: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$

$$(n+1)j+i$$

$$f(a_i, b_j) = n(j-1) + i, (a_i, b_j) \in A \times B$$

其逆函数为: $\mathbb{N} \rightarrow A \times B$

$$f^{-1}(m) = (a_i, b_j), m \in \mathbb{N}$$

$$\text{其中 } i = \begin{cases} m \pmod{n}, & \text{当 } n \nmid m, \\ n, & \text{当 } n \mid m, \end{cases}$$

$$f^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow A \times B$$

寻找 k 满足

$$n(k-1) < m \leq nk$$

$$j = \begin{cases} \lfloor \frac{m-i}{n} \rfloor + 1, & \text{当 } n \nmid m, \\ m \div n, & \text{当 } n \mid m \end{cases}$$

$$\begin{cases} i = m - n(k-1) \\ j = k \end{cases}$$

因此, $A \times B$ 为可数集。

2) 因 A 、 B 为可数集, 故可设

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$$

$$\text{从而 } A \times B = \{(a_i, b_j) \mid a_i \in A \wedge b_j \in B \wedge i \in \mathbb{N} \wedge j \in \mathbb{N}\}$$

存在着从 $A \times B$ 到 \mathbb{N} 的双射 $g: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$, 对 $(a_i, b_j) \in A \times B$,

$$g(a_i, b_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(i+j-1)(i+j-2) + j, & \text{当 } i+j \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{2}(i+j-1)(i+j-2) + i, & \text{当 } i+j \text{ 为奇数} \end{cases}$$

其逆由函数可见第 5 题 3) 的函数 f_2 所以 AB 是可数的。

- 3) 首先 $A \setminus B$ 不可能是有限集合, 否则由 $A = (A \setminus B) \cup B$ 及 B 是可数集合, 根据有限集与可数集之并集为可数集 (可数集去掉有限集仍为可数集的逆用), 可知 A 是可数集, 与已知 A 是不可数集矛盾。所以 $A \setminus B$ 是无限集合, 因此包

含一可数子集 $C=\{c_1, c_2, \dots c_n \dots\}$, 即 $C \subseteq A \setminus B$

由 B 是可数集, 故此不妨设 $B=\{b_1, b_2, \dots b_n, \dots\}$ 可建立从 A 到 $A \setminus B$ 的双射如下:

$g: A \setminus B \rightarrow A \setminus B$

$$g(x) = \begin{cases} c_{2i-1} & , \text{ 当 } x = b_i \text{ 时} & (i \in \mathbb{N}) \\ c_{2i} & , \text{ 当 } x = c_i \text{ 时} & (i \in \mathbb{N}) \\ x & , \text{ 当 } x \in (A \setminus B) \setminus C \end{cases}$$

因此 $A \setminus B \approx A$ 。

4) 由于 B 是可数集, 不妨设 $B=\{b_1, b_2, \dots b_n, \dots\}$ 。由于 A 是无限集合, 因此存在某一可数集 $C \subseteq A \setminus B$, 不妨设

①若 $A \setminus B$ 是有限集合故 $AB = (A \setminus B) \cup B$ 是可数集即 $\overline{A \cup B} = \overline{B}$ 又 A 是无穷集,

故 $\overline{B} \leq \overline{A}$ 从而 $\overline{A \cup B} \leq \overline{A}$ 但 $\overline{A} \leq \overline{A \cup B}$ 故此

$$\overline{A} = \overline{A \cup B} \text{ 半 } A \cup B \approx A$$

②若 $A \setminus B$ 是无穷集合则

$$C = (c_1, c_2, \dots c_n, \dots)$$

从而可建立从 AB 到 A 的双射如下:

$f: A \cup B \rightarrow A$

$$f(x) = \begin{cases} c_{2i-1} & , \text{ 当 } x = b_i \text{ 时} & (i \in \mathbb{N}) \\ c_{2i} & , \text{ 当 } x = c_i \text{ 时} & (i \in \mathbb{N}) \\ x & , \text{ 当 } x \in (A \setminus B) \setminus C \text{ 时} \end{cases}$$

所以 $A \cup B \approx A$ (完)

96年1月25日

离散数学习题解

第二部分

代数系统

1. 设 I 为整数集合。判断下面的二元关系是否是 I 上的二元运算

a) $+=\{ (x, y), z | x, y, z \in I \text{ 且 } z=x+y \}$

b) $-=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=x-y \}$

c) $\times=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=x \times y \}$

d) $/=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=x/y \}$

e) $R=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=x^y \}$

f) $\sqrt{}=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=\sqrt[y]{x} \}$

g) $\min=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=\max(x, y) \}$

h) $\min=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=\min(x, y) \}$

i) $\text{GCD}=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=\text{GCD}(x, y) \}$

j) $\text{LCM}=\{ ((x, y), z) | x, y, z \in I \text{ 且 } z=\text{LCM}(x, y) \}$

[解] a) 是。由于两个整数之和仍为整数，且结果唯一，故知 $+: I^2 \rightarrow I$ 是 I 上的一个二元运算。

b) 是。由于两个整数之差仍为整数，且结果唯一，故知 $-: I^2 \rightarrow I$ 是 I 上的一个二元运算。

c) 是。由于两个整数这积仍为整数，且结果唯一，故知 $\times: I^2 \rightarrow I$ 是 I 上的一个二元运算。

d) 不是：例如若 $x=5, y=6$ ，则 $z=x/y=5/6 \notin I$ ；当 $y=0$ 时 $z=x/y=x/0$ 无定义。

e) 不是。例如若 $x=2, y=-2$ ，则 $z=x^y=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4} \notin I$ ；若 $x=y=0$ ，则 $z=x^y=0$ ，

$$\text{则 } z=\chi\sqrt{x}=\sqrt{2} \notin I;$$

g) 是。由于两个整数中最大者仍为整数，且结果唯一。故知 $\max: I^2 \rightarrow I$ 是 I 上的一个二元运算。

h) 是。由于两个整数中最小者仍为整数，且结果唯一。故知 $\min: I^2 \rightarrow I$ 是 I 上的一个二元运算。

i) 是。由于两个整数的最大公约数仍为整数，且结果唯一。故知 $\text{GCD}: I^2 \rightarrow I$ 是 I 上的一个二元运算。

j) 是。由于两个整数的最小公倍数仍为整数，且结果唯一。故知 $\text{LCD}: I^2 \rightarrow I$ 是 I 上的一个二元运算。

注：两个整数 a 和 b 的最大公约数 $\text{GCD}(a, b)$ 定义为同时除尽 a 和 b 的正整数中最大的一个；两个数 a 数 b 的最小公倍数 $\text{LCM}(a, b)$ 定义为同时是 a 和 b 的正倍数中最小的一个。

2. 设 $X = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}\}$ 问普通数的加法是否是 X 上的二元运算？普通数的乘法呢？

[答] 普通的加法运算不是 X 是 X 上的二元运算，因为存在着 $x_1 = 2 \in X$, $x_2 = 2^2 \in X$, 使 $x_1 + x_2 = 2 + 2^2 = 6 \notin X$ 。

普通的乘法运算是 X 上的二元运算，因为对于任意的 $x_1 = 2^{n_1} \notin X$, $x_2 = 2^{n_2} \notin X$, 这里 $n_1, n_2 \notin \mathbb{N}$, 都有 $x_1 \cdot x_2 = 2^{n_1} \cdot 2^{n_2} = 2^{n_1 + n_2} \in X$ (因为 $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$)。

3. 设 $\langle X, * \rangle$ 是代数系统, $*$ 是 X 上的二元运算, 若有元素 $e_l \in X$, 使 $\forall x \in X$, 有 $e_l * x = x$, 则称 e_l 是关于 $*$ 的左幺元。若有元素 $e_r \in X$, 使 $\forall x \in X$, 有 $x * e_r = x$, 则称 e_r 是关于 $*$ 的右幺元。

a) 试举出公含有左幺的代数系统的例子。

b) 试举出仅含有左幺的代数系统的例子。

c) 证明：在代数系统中，若关于 $*$ 有左幺元和右幺元，则左幺元等于右幺元。

[解]：a) 构造代数系统 $\langle X, * \rangle$ 如下：

令 $X = \{a, b, c, d\}$, $*$: $X \times X \rightarrow X$, 其运算表如下：

$*$	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	a	b	c	c
d	a	b	c	d

则此代数系统含有左幺元 b, d , 但不含右幺元。

b) 构造代数系统 $\langle X, * \rangle$ 如下：

令 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ $*$: $X \times X \rightarrow X$, 其运算表如下：

$*$	1	2	3	4
1	1	2	4	3
2	2	1	3	4

3	3	4	1	2
4	4	4	2	3

则此代数系统含有右幺元 1，但不含左幺元。

c) [证] 因为代数系统 $\langle X, * \rangle$ 关于 $*$ 运算存在着左、右幺元， $e_l, e_r \in X$ 则

$$e_l = e_l * e_r = e_r \in$$

4. 设 $\langle X, * \rangle$ 是代数系统， $*$ 是 X 上的二元运算。若有元素 $O_l \in X$ ，使 $\forall x \in X$ ，有 $O_l * x = O_l$ 是关于 $*$ 的左零元。若有元素 $O_r \in X$ ，使 $\forall x \in X$ ，有 $x * O_r = O_r$ ，则称 O_r 是关于 $*$ 的右零元。

a) 试举出公含有左零元的代数系统的例子。

b) 试举出仅含有左零元的代数系统的例子。

c) 证明：在代数系统中，若关于 $*$ 有左零元和右零元，则左零元等于右零元。

[解] a) 构造代数系统 $\langle X, * \rangle$ 如下：

令 $X = \{a, b, c\}$ ， $*$ ： $X \times X \rightarrow X$ ，其运算表如下：

*	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	b	c	a

则 a 和 b 都是左零元，但没有右零元。

b) 构造代数系统 $\langle X, * \rangle$ 如下：

令 $X = \{1, 2, 3\}$ ， $*$ ： $X \times X \rightarrow X$ ，其运算表如下：

*	1	2	3
1	2	3	3
2	3	1	3
3	1	2	3

则 3 是右零元，但没有左零元。

c) [证] 因为代数系统 $\langle X, * \rangle$ 关于 $*$ 运算存在着左、右零元, $O_l, O_r \in X$, 则

$$O_l = O_l * O_r = O_r$$

5. 当给出一个代数系统的二元运算表时, 如何从表上判断这个二元运算是否满足结合律, 是否满足交换律, 是否有么元, 是否有零元, 每个元素是否有逆元。

[答] 在一个代数系统 $\langle X, * \rangle$ 中,

- 1) 运算 $*$ 满足结合律, 当且仅当在运算表中, 对任何 $x, y \in X$, x 行每个元素与 y 的 $*$ 积对应的等于 x 与 y 列每个元素的 $*$ 积。
 - 2) 运算 $*$ 满足交换律, 当且仅当运算表关于主对角线是对称的。
 - 3) 运算 $*$ 有么元, 当且仅当存在一元素, 它所对应的行和列依次与运算表的行和列相一致。
 - 4) 运算 $*$ 有零元, 当且仅当存在一元素, 它所对应的行和列中每个元素都是蛇自己。
 - 5) 若运算 $*$ 有么元, X 中每个元素 x 有逆元, 当且仅当存在一元素 $y \in Y$, 使得 x 所在行, y 所在列的元素以及 y 所在行, x 所在列的元素都是么元。
6. 设 $\langle X, * \rangle$ 是代数系统, $*$ 是 X 上的二元运算, e 是关于 $*$ 的么元。对于 X 中的元素 x , 若存在 $y \in X$, 使得 $y * x = e$, 则称 y 是 x 的左逆元。若存在 $z \in X$, 使得 $x * z = e$, 则称 z 是 x 的右逆元。指出下表中各元素的左、右逆元的情况。

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	d	a	c	d
c	c	a	b	a	b
d	d	a	c	d	c
e	e	d	a	c	e

[解] a 是么元; b 的左逆元和右逆元都是 c ; 即 b 和 c 互为逆元; d 的左逆元是 c 而左逆元是 b ; b 有两个左逆元 c 和 d ; e 的右逆元是 c , 但 e 没有左逆元; c 有两个左逆元 b 和 e 有两个右逆元 b, d 。

7. 设 $\langle X, * \rangle$ 是代数系统, $*$ 是 X 上的二元运算。 $\forall x, y \in X$, 有 $x * y = x$ 。问 $*$ 是否满足结合律, 是否满足交换律, 是否有么元, 是否有零元, 每个元素是否有逆元。

[解] a) $*$ 运算满足结合律

因为对任何 $x, y, z \in X$, 都有

$$x * (y * z) = x * y = x = x * y = (x * y) * z$$

b) $*$ 运算不满足交换律

因为对于二个元素 $x, y \in X$, 有 $x * y = x$, 而 $y * x = y$ 。所以当 X 包含多于一个元素时, 能使 $x \neq y$, 从而 $x * y \neq y * x$ 。

c) 没有幺元

因为若有幺元 $e \in X$ 存在, 则对任何 $x \in X$, 应有 $e * x = e$, 但是 $e * x = e$, $x * e = x$, 于是推得 $x = e$, 当 X 中包含多于一个元素时, 就会有 $x \neq e$, 矛盾。

d) 没有零元, 仿 c) 保证。

e) 对于每个元素都没有逆元。因为没有幺元存在。

并且若存在一个元素 $a \in X$, 使得对每个元素 $x \in X$, 都有一个元素 $y \in X$, 使 $y * x = x * y = a$, 则有 $y = x = a$, 当 X 中包含多一个元素时, 这将不总是成立的 (只在 $x = a$, 且 a 具有幂等性时才成立)

8. 设 $\langle N, * \rangle$ 是代数系统, $*$ 是 N 上的二元运算, $\forall x, y \in N, x * y = \text{LCM}(x, y)$ 。问 $*$ 是否满足结合律, 是否满足交换律, 是否有幺元, 是否有零元, 每个元素是否有逆元。

[解] a) $*$ 运算满足结合律

因为, 对于任何 $x, y, z \in N$,

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= \text{LCM}(x * y, z) \\ &= \text{LCM}(\text{LCM}(x, y), z) \\ &= \text{LCM}(x, y, z) \\ &= \text{LCM}(x, (y * z)) \\ &= \text{LCM}(x * y, z) \\ &= x * (y * z)\end{aligned}$$

注: 关于 $\text{LCM}(\text{LCM}(x, y), z) = \text{LCM}(x, y, z)$ 我们可证明如下:

设 $C_1 = \text{LCM}(x, y, z)$, $d = \text{LCM}(x, y)$, 从而 $C_1 = \text{LCM}(d, z)$,

$C_2 = \text{LCM}(x, y, z)$, 因此只需证 $C_1 = C_2$ 即可, 为此

由于 $C_2 = \text{LCM}(x, y, z)$, 故此 $x | C_2, y | C_2, z | C_2$, 因此由 $d = \text{LCM}(x, y)$ 及 $x | C_2, y | C_2$, 从 d 的最小性有 $d \leq C_2$ 于是 $d | C_2$ (否则 $C_2 = kd + r, 0 < r < d$, 由于 $x | d, y | d$ 及 $x | C_2, y | C_2$, 故有 $x | r, y | r$, 这与 $d = \text{LCM}(x, y)$ 的最小性矛盾)。即 $d | C_2$ 且 $z | C_2$ 故此由 $C_1 = \text{LCM}(d, z)$ 的最小性, 可知 $C_1 \leq C_2$ 。

另一方面, 由 $C_1 = \text{LCM}(d, z)$ 知 $d | C_1, z | C_1$, 又由 $d = \text{LCM}(x, y)$ 知 $x | d, y | d$, 因此有 $x | C_1, y | C_1$, 并且 $z | C_1$ 。因而 $C_2 = \text{LCM}(x, y, z)$ 的最小

性可知 $C_2 \leq C_1$ 。

所以, $C_1 = C_2$ 。同理可证 $\text{LCM}(x, \text{LCM}(y, z)) = \text{LCM}(x, y, z)$ 。

b) *运算满足交换律

因为 对于任何 $x, y \in N$,

$$\begin{aligned}x * y &= \text{LCM}(x, y) \\&= \text{LCM}(y, x) \\&= y * x\end{aligned}$$

(c) *运算有么元 $1 \in N$ 。

因为, 对于任何 $x \in N$,

$$\begin{aligned}x * 1 &= \text{LCM}(x, 1) \\&= x \\&= \text{LCM}(1, x) \\&= 1 * x\end{aligned}$$

(d) *运算没有零元。因为 $0 \notin N$ 。

(e) 对于每个元素 $x \in X$, 若 $x \neq 1$, 则对每个元素 $y \in N$, 都有 $x * y = y * x = \text{LCM}(x, y) \geq x \neq 1$, 故此没有逆元素。

9. 设 $\langle X, * \rangle$ 是代数系统, $*$ 是 X 上的二元运算。 x 是 X 中的任一元素, 若有 $x * x = x$, 则称 x 是幂等元。

若 $*$ 是可结合的, 且 $\forall x, y \in X$, 当 $x * y = y * x$ 时, 有 $x = y$ 。

证明: X 中每个元素都是幂等元。

[证] 对于任何 $x \in X$, 令 $x_i = x * x$, $x_j = x$, 于是

$$\begin{aligned}x_i * x_j &= (x * x) * x \\&= x * (x * x) \quad (\text{结合律}) \\&= x_j * x_i\end{aligned}$$

从而由怕给性质, 有 $x_i = x_j$, 即 $x * x = x$ 。

因此, 由 x 的任意性, 可知 X 中每个元素都是幂等元。

10. 设 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 是代数系统, \oplus 和 \otimes 分别是 X 上的两上二元运算。若 $\forall x \in X$, 有 $x \oplus y = x$ 。证明 \otimes 关于 \oplus 是可分配的。

[证] 对于任何 $x, y, z \in X$

$$\begin{aligned}x \otimes (y \oplus z) &= x \otimes y \\&= (x \otimes y) \oplus \\&= (y \oplus z) \otimes x = y \otimes x = (y \otimes x) (z \otimes x)\end{aligned}$$

因此代数系统 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 中 \otimes 关于 \oplus 是可分配的。

11. 设 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 是代数系统, \oplus 和 \otimes 分别是 X 上的两上二元运算。 e_1 和 e_2 分别是关于 \otimes 和 \oplus 的么元, 且 \oplus 对于 \otimes 满足分配律, \otimes 对于 \oplus 满足分配律。证明: $\forall x \in X$, 有 $x \otimes x = x$, $x \oplus x = x$

[证] (a) 先证 $e_1 \otimes e_1 = e_1$

$$\begin{aligned} e_1 \otimes e_1 &= e_1 \oplus (e_1 \otimes e_1) && (e_1 \text{ 是 } \otimes \text{ 么元}) \\ &= (e_2 \otimes e_1) \oplus (e_1 \otimes e_1) && (e_2 \text{ 是 } \otimes \text{ 么元}) \\ &= (e_2 \oplus e_1) \otimes e_1 && (\otimes \text{ 对 } \oplus \text{ 的分配}) \\ &= (e_2 \otimes e_1) && (e_1 \text{ 是 } \oplus \text{ 么元}) \\ &= e_1 && (e_2 \text{ 是 } \otimes \text{ 么元}) \end{aligned}$$

(b) 次证 $e_2 \oplus e_2 = e_2$

$$\begin{aligned} e_2 \oplus e_2 &= e_2 \otimes (e_2 \oplus e_2) && (e_2 \text{ 是 } \otimes \text{ 么元}) \\ &= (e_1 \oplus e_2) \otimes (e_2 \oplus e_2) && (e_1 \text{ 是 } \oplus \text{ 么元}) \\ &= (e_1 \otimes e_2) \oplus e_2 && (\oplus \text{ 对 } \otimes \text{ 的分配}) \\ &= e_1 \oplus e_2 && (e_2 \text{ 是 } \otimes \text{ 么元}) \\ &= e_2 && (e_1 \text{ 是 } \oplus \text{ 么元}) \end{aligned}$$

(c) 最后, 我们来证 $x \oplus x = x$, $x \otimes x = x$

$$\begin{aligned} x \oplus x &= (x \otimes e_2) \oplus (x \otimes e_2) && (e_2 \text{ 是 } \otimes \text{ 么元}) \\ &= x \otimes (e_2 \oplus e_2) && (\otimes \text{ 对 } \oplus \text{ 的分配}) \\ &= x \otimes e_2 && (\text{利用 (b)}) \\ &= x && (e_2 \text{ 是 } \otimes \text{ 么元}) \\ x \otimes x &= (x \oplus e_1) \otimes (x \oplus e_1) && (e_1 \text{ 是 } \oplus \text{ 么元}) \\ &= x \oplus (e_1 \otimes e_1) && (\oplus \text{ 对 } \otimes \text{ 的分配}) \\ &= x \oplus e_1 && (\text{利用 (a)}) \\ &= x && (e_1 \text{ 是 } \oplus \text{ 么元}) \end{aligned}$$

证法二:

$$\begin{aligned} x &= x \oplus e_2 && (e_2 \text{ 为 } \oplus \text{ 的么元}) \\ &= x \otimes (e_2 \oplus e_1) && (e_1 \text{ 为 } \otimes \text{ 么元}) \\ &= x \otimes [e_2 \oplus (e_1 \otimes e_2)] && (e_2 \text{ 为 } \otimes \text{ 么元}) \\ &= x \otimes [(e_2 \oplus e_1) \otimes (e_2 \oplus e_2)] && (\oplus \text{ 对 } \otimes \text{ 的分配律}) \\ &= x \otimes [(e_2 \otimes (e_2 \oplus e_2))] && (e_1 \text{ 为 } \oplus \text{ 么元}) \\ &= x \otimes (e_2 \oplus e_2) && (e_2 \text{ 为 } \otimes \text{ 么元}) \\ &= (x \otimes e_2) \oplus (x \otimes e_2) && (\otimes \text{ 对 } \oplus \text{ 分配律}) \\ &= x \oplus x && (e_2 \text{ 为 } \otimes \text{ 么元}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= x \oplus e_1 \quad (e_1 \text{ 为 } \otimes \text{ 的幺元}) \\
&= x \oplus (e_1 \otimes e_2) \quad (e_2 \text{ 为 } \otimes \text{ 幺元}) \\
&= x \oplus [e_1 \otimes (e_1 \oplus e_2)] \quad (e_2 \text{ 为 } \oplus \text{ 幺元}) \\
&= x \oplus [(e_1 \otimes e_1) \oplus (e_1 \otimes e_2)] \quad (\otimes \text{ 对 } \oplus \text{ 的分配律}) \\
&= x \oplus [(e_1 \otimes e_1) \oplus e_1] \quad (e_2 \text{ 为 } \otimes \text{ 幺元}) \\
&= x \oplus (e_1 \otimes e_1) \quad (e_1 \text{ 为 } \otimes \text{ 幺元}) \\
&= (x \oplus e_1) \oplus (x \oplus e_1) \quad (\oplus \text{ 对 } \otimes \text{ 分配律}) \\
&= x \otimes x \quad (e_1 \text{ 为 } \oplus \text{ 幺元})
\end{aligned}$$

12. 设 $X = \{a, b, c, d\}$, \oplus 和 \otimes 分别是 X 上的两个二元运算, 其运算表如下:
算表如下:

\oplus	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

\otimes	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

取 $S_1 = \{b, d\}$, $S_2 = \{a, d\}$, $S_3 = \{b, c\}$, 问 $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$, $\langle S_2, \oplus, \otimes \rangle$, $\langle S_3, \oplus, \otimes \rangle$, 分别是 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 的子代数系统吗? 为什么?

[解]

\oplus	b	d
b	b	b
d	b	d

\otimes	b	d
b	b	d
d	d	d

因此 $\langle S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 的子代数。因 \oplus, \otimes 在 $S_2 = \{b, d\}$ 内封闭。

\oplus	b	d
b	b	d
d	d	d

\otimes	a	b
a	a	a
b	a	b

因此 $\langle S_3, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 的子代数。因 \oplus, \otimes 在 $S_3=\{b, d\}$ 内封闭。

\oplus	b	c
b	b	a
c	a	c

\otimes	b	c
b	b	d
c	d	c

13. 设 $\langle X, * \rangle$ 是 X 上的二元运算。若 $\forall a, b, c \in X$, 有 $a*a=a$ 且 $(a*b)*(c*d)=(a*c, b*d)$ 证明:

$$a*(b*c) = (a*b)*(a*c)$$

[证] 对任何 $a, b, c \in X$,

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= (a*a)*(b*c) \quad (\text{幂等性 } a*a=a) \\ &= ((a*b)*(a*c)) = ((a*b)*(c*d)) = (a*c)*(b*d) \quad (\text{利用}) \end{aligned}$$

14. 设 $\langle X, * \rangle$ 是代数系统, $*$ 是 X 上的二元运算, R 是 X 上的等价关系。若 $\forall a, b, c, d \in X$ 当 $(a, b) \in R$ 且 $(c, d) \in R$ 时, 有 $(a*c, b*d) \in R$, 则称 R 是 X 上关于 $*$ 的同余关系, 称 R 产生的等价类是关于 $*$ 的同余类。

考察代数系统 $\langle I, + \rangle$, I 是整数集合, $+$ 是整数加法。问以下的元关系是 I 上的关于 $+$ 的同余关系吗?

- a) $R=\{ (x, y) \mid x, y \in I \text{ 且 } ((x < 0 \text{ 且 } y < 0) \text{ 或 } (x \geq 0 \text{ 且 } y \geq 0)) \}$
- b) $\{ (x, y) \mid x, y \in I \text{ 且 } ((x < 0 \text{ 且 } |x-y| < 10$
- c) $\{ (x, y) \mid x, y \in I \text{ 且 } ((x=0 \text{ 且 } y=0) \text{ 或 } (x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0)) \}$
- d) $\{ (x, y) \mid x, y \in I \text{ 且 } x \geq y \}$

[解] a) 这不是一个同余关系, 因为

$$(-1, -2) \in R \text{ 且 } (1, 1) \in R, \text{ 但 } (-1+1, -2+1) = (0, -1) \notin R.$$

b) 这不是一个同余关系, 因为它不是一个等价关系。实际上它是自反的和对称

的，但不是传递的，例如取 $x=-8, y=1, z=8$ ，由于 $|-8-1|=9 < 0, |1-8|=7 < 10$ ，故有 $(-8, 1) \in R$ 且 $(1, 8) \in R$ 。但 $|-8-8|=6 > 10$ ，所以 $(-8, 8) \notin R$

c) 这不是一个同余关系，因为 $(-1, -2) \in R$ 且 $(1, 1) \in R$ ，但 $(-1+1, -2+1) = (0, -1) \notin R$

d) 这不是一个同余关系，因为它不是一个等价关系。实际上它是自反的和传递的，但不是对称的，例如取 $x=8, y=7$ ，于是有 $8 \geq 7$ ，从而 $(8, 7) \in R$ ，但 $7 \neq 8$ ，故 $(7, 8) \notin R$ 。

15. 设 $S=\{a, b\}$, $X=\langle 2^S, \cap, \cup, >, Y=\langle \{0, 1\}, \wedge, \vee, - \rangle$ 。

证明： Y 是 X 的同态象。

[证] 如下构造的函数 h 是一个从 X 到 Y 的同态：

$$h: 2^S \rightarrow \{0, 1\}$$

$$h(\emptyset) = 0$$

$$h(\{a\}) = 0, h(\{b\}) = 1, h(S) = 1$$

容易验证： $h(A \cap B) = h(A) \wedge h(B)$

$$h(A \cup B) = h(A) \vee h(B) \quad (A, B \subseteq S)$$

$$h(A') = \overline{h(A)}$$

并且 h 显然是满射的，因此 Y 是 X 同态象。

16. 设 R 是实数集合， $+$ 和 \times 是实数的加法和乘法。 $X=\langle R, + \rangle$, $Y=\langle R, \times \rangle$ ，问 Y 是否是 X 的同态象。

[答] Y 不是 X 的同态象。否则将存在着从 X 到 Y 的满同态函数 h ，从而对于 $0 \in R$ ，由 h 是满射的，可知存在着 $r_0 \in R$ ，使 $h(r_0) = 0$ ，于是对任何 $r \in R$ ，由于 $r - r_0 = r + (-r_0) \in R$ ，所以 $h(r) = h(r_0 + (r - r_0)) = \{r' \mid r' \in R \wedge (\exists r \in R) (h(r) = r')\} = \{0\} \neq R$

17. 设 N 是自然数集合， \times 是自然数乘法， $X=\langle N, \times \rangle$, $Y=\langle \{0, 1\}, \times \rangle$ ，证明： Y 是 X 的同态象。

[证] 如下构造的函数 h 是一个从 X 到 Y 的同态

$$h: N \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\begin{aligned} h(2n) &= 0 \\ h(2n-1) &= 1 \end{aligned} \quad , n \in N$$

$$\text{于是 } h(2m \times 2n) = h(2 \cdot 2mn) = 0 = 0 \times 0 = h(2m) \times h(2n)$$

$$h(2m \times (2n-1)) = h(2 \cdot m(2n-1)) = 0 = 0 \times 1 = h(2m) \times h(2n-1)$$

$$\begin{aligned} h((2m-1) \times (2n-1)) &= h(2(mn-m-n+1)-1) \\ &= 1 = 1 \times 1 = h(2m-1) \times h(2n-1) \end{aligned}$$

所以 h 满足同态公式，另外 h 显然是满射，因而 Y 是 X 的同态象。

18. 设 $S=\{a, b, c\}$, $X=\langle \{\emptyset, S\}, \cap, \cup, ' \rangle$, $Y=\langle \{a, b\}, S, \cap, \cup, ' \rangle$ 。

问 X 和 Y 是否同构，为什么？

[答] X 和 Y 不同构。因为 $Y=\langle \{a, b\}, S, \cap, \cup, ' \rangle$ 不是代数系统，补运算 $'$ 关于 $\{\{a, b\}, S\}$ 不封闭，这可见下表：

		$'$
	$\{a, b\}$	$\{c\}$
S	\emptyset	

而如果存在着 X 和 Y 的同构，则从 X 是代数系统，知 Y 也应该是代数系统，矛盾。

19. 设 $\langle X, * \rangle$ 和 $\langle Y, \oplus \rangle$ 是两个代数系统， $*$ 和 \oplus 分别是 X 和 Y 上的二元运算，且满足交换律，结合律。 f_1 和 f_2 都是从 $\langle X, * \rangle$ 到 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的同态函数。

令 $h: X \rightarrow Y$

$$h(x) = f_1(x) \oplus f_2(x)$$

证明： h 是从 $\langle X, * \rangle$ 到 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的同态函数。

[证] 对于任何 $a, b \in X$, $h(a*b) = f_1(a*b) \oplus f_2(a*b)$ (h 的定义)

$$= (f_1(a) \oplus f_1(b)) \oplus (f_2(a) \oplus f_2(b)) \quad (f_1 \text{ 和 } f_2 \text{ 是同态函数})$$

$$= (f_1(a) \oplus f_1(b)) \oplus (f_2(a) \oplus f_2(b)) \quad (\oplus \text{ 的结合律})$$

$$= (f_1(a) \oplus f_2(a)) \oplus (f_1(b) \oplus f_2(b)) \quad (\oplus \text{ 的结合律})$$

$$= (f_1(a) \oplus f_2(a)) \oplus (f_1(b) \oplus f_2(b)) \quad (\oplus \text{ 的结合律})$$

$$= h(a) \oplus h(b) \quad (h \text{ 的定义})$$

20. 设 $\langle X, f_1 \rangle$, $\langle Y, f_2 \rangle$, $\langle Z, f_3 \rangle$ 是三个代数系统。 f_1, f_2, f_3 分别是 X, Y, Z 上的二元运算。证明：若 h_1 是从 $\langle X, f_1 \rangle$ 到 $\langle Y, f_2 \rangle$ 的同态函数， h_2 是从 $\langle Y, f_2 \rangle$ 到 $\langle Z, f_3 \rangle$ 的同态函数，则 $h_2 \circ h_1$ 是从 $\langle X, f_1 \rangle$ 到 $\langle Z, f_3 \rangle$ 的同态函数。

[证] 对于任何 $x, y \in X$,

$$(h_2 \circ h_1)(xf_1y) = h_2(h_1(xf_1y))$$

$$= h_2(h_1(x) f_2 h_1(y)) \quad (h_1 \text{ 是 } \langle X, f_1 \rangle \text{ 到 } \langle Y, f_2 \rangle \text{ 的同态})$$

$$= h_2(h_1(x) f_3 h_2(h_1(y))) \quad (h_2 \text{ 是 } \langle Y, f_2 \rangle \text{ 到 } \langle Z, f_3 \rangle \text{ 的同态})$$

$$= (h_2 \circ h_1)(x) f_3 (h_2 \circ h_1)(y)$$

所以 $h_2 \circ h_1$ 是从 $\langle X, f_1 \rangle$ 到 $\langle Z, f_3 \rangle$ 的同态函数。

21. 设 $\langle S, * \rangle$ 是有限含么半群。证明：在 $*$ 的运算表中，任何两行或任何两列均不相同。

[证] 因为 $\langle S, * \rangle$ 是有限含么半群, 故可设

$$S = \{s_0 = e, s_1, \dots, s_{n-1}\}$$

则在 $*$ 的运算表中, 对关于任何 $s_i, s_j \in S$ ($s_i \neq s_j, 0 \leq i, j \leq n-1$) 的两行为:

$$s_i * s_0, s_i * s_1, \dots, s_i * s_{n-1};$$

$$s_j * s_0, s_j * s_1, \dots, s_j * s_{n-1}$$

为证此两行互不相同, 只需证明 $(\exists k) (0 \leq k \leq n-1 \wedge s_i * s_k \neq s_j * s_k)$ 即可。而这样的 k 是存在的, 只需取 $k=0$ 即得:

$$s_i * s_0 = s_i * e = s_i \neq s_j = s_j * e = s_j * s_0$$

从而, 由 $s_i, s_j \in S$ 的任意性, 可知, 在 $*$ 运算表中, 任何两行均互不相同。

关于列的结论, 同理可证。

22. 设 k 是一正数, $N_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, $*_k$ 是 N_k 上的一个二元运算。 $\forall a, b \in N_k, a *_k b = (a \times b) \bmod k$ 。

a) 当 $k=6$ 时, 写出 $*_6$ 的运算表;

b) 证明: 对任意的正整数 $k, \langle N_k, *_k \rangle$ 是半群。

a) [解]

$*_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

b) [证] 1) $*_k$ 是 N_k 上的二元运算

由于 $0 \leq (a \times b) \bmod k < k$, 故 $a *_k b \in N_k$, 即 $*_k$ 关于 N_k 封闭, 并且运算结果唯一 (因为若有 $i = (a \times b) \bmod k, j = (a \times b) \bmod k$, 则 $0 \leq i < k, 0 \leq j < k, a \times b = kr_1 + i, a \times b = kr_2 + j$, 于是有 $kr_1 + i = kr_2 + j$ 不妨设 ji 从而 $k(r_1 - r_2) = j - i$, 故此 $k | j - i$, 但是 $0 \leq j - i < k$ (因为 $j \geq i$) 故只能 $j - i = 0$, 因此 $j = i$ 。

2) $*_k$ 满足结合律

因为对于任何 $a, b, c \in N_k$

$$\begin{aligned}
(a *_k b) *_k c &= [(a \times b) \bmod k] *_k c \\
&= \{[(a \times b) \bmod k] \times c\} \bmod k \\
&= ((a \times b \times c)) \bmod k \\
&= \{a \times [(b \times c) \bmod k]\} \bmod k \\
&= a *_k [(b \times c) \bmod k] \\
&= a *_k (b *_k c)
\end{aligned}$$

综合 1), 2) 可得 $\langle N_k, *_k \rangle$ 是半群

23. 设 $\langle S, * \rangle$ 是半群, $a \in s$ 。在 s 上定义二元运算 \oplus 如下

$$\forall x, y \in s, x \oplus y = x * a * y$$

证明: $\langle S, \oplus \rangle$ 是半群。

[证] (a) \oplus 是 s 上的二元运算

由于 $\langle S, * \rangle$ 是半群, 故 $*$ 是 s 上的二元运算, 因此 $*$ 运算具有封闭性和运算结果唯一性。因此由 \oplus 的定义可知 \oplus 具有封闭性和运算结果唯一性。

(b) \oplus 满足结合律

对于任何 $x, y, z \in s$

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= (x * a * y) \oplus z \\
&= (y) * a * z \\
&= x * a * (y * a * z) \quad (* \text{运算的结合律}) \\
&= x * a * (y \oplus z) \\
&= x \oplus (y \oplus z)
\end{aligned}$$

综合 (a), (b) 可知 $\langle S, \oplus \rangle$ 是半群。

24. 设 $\langle S, * \rangle$ 是半群。证明: s 中至少有一个幂等元。

[证] 因为 $\langle S, * \rangle$ 是半群, 所以 $*$ 运算具有封闭性, 因而可知对于任何元素 $y \in s$, 都有 $y^2 = y * y \in s, y^3 = y^2 * y \in s, \dots$ 。又由 $\langle S, * \rangle$ 是有限的, 可知 s 是有限集, 所以存在着 $j > i$, 使得 $y^j = y^i$, 从而令 $P = j - i$, 那么就有 $y^i = y^j = y^{P+i} = y^P * y^i$, 因此可得 $y^{i+1} = y^P * y^{i+1}, \dots$, 也就是对任何 $g \geq i$, 都有 $y^g = y^P * y^g$ 。所以, 从 p_1 总可找到 $k \geq 1$, 使 $kp \geq i$ 。故此, 令 $x = y^{kp} \in s$, 则 x 就是 s 中的一个幂等元, 推证如下:

$$\begin{aligned}
x * x &= y^{kp} * y^{kp} \\
&= (y^{P+i} * y^{(k-1)P}) * y^{kp} \quad (\text{利用上述性质}) \\
&= y^{(k-1)P} * y^{kp} \\
&= \dots \\
&= y^P * y^{kp} \\
&= y^{kp}
\end{aligned}$$

$$=x$$

25. 设 R 是实数集合。在 R 上定义二元运算 $*$ 如下

$$\forall x, y \in R, x*y = x+y+xy$$

证明: $\langle R, * \rangle$ 是含么半群。

[证] (1) $*$ 运算是实数集 R 上的二元运算。

因为普通实数加法 $+$ 和乘法 \times 都是封闭的和运算结果唯一的, 因此由它们定义的 $*$ 运算也是封闭的、运算结果唯一。

(2) $*$ 运算满足结合律。

对于任何 $x, y, z \in R$, 因为

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= (x*y)+z+(x*y)z = (x+y+xy)+z+(x+y+xy)z \\ &= x+y+z+xy+xz+yz+xyz \\ (x*y)*z &= x+(y*z)+x(y*z) = x+(y+z+yz)+x(y+z+yz) \\ &= x+y+z+xy+xz+yz+xyz \end{aligned}$$

所以 $(x*y)*z = x(y*z)$

(3) $o \in R$ 为么元

对于任何 $x \in R$ 因为

$$\begin{aligned} o*x &= o+x+o \cdot x = x \\ x*o &= x+o+x \cdot o = x \end{aligned}$$

故此 $o*x = x*o = x$

综合 (1) (2) (3) 证得 $\langle R, * \rangle$ 是含么半群。

26. 设 $\langle S, * \rangle$ 是可交换半群。证明: $\forall x, y \in S$, 若 x, y 是幂等元, 则有 $(x*y)* (x*y) = x*y$ 。

$$\begin{aligned} [\text{证}] \quad (x*y)* (x*y) &= x*(y*x)*y && (*\text{可结合}) \\ &= x*(x*y)*y && (*\text{可交换}) \\ &= (x*x)*(y*y) && (*\text{可结合}) \\ &= x*y && (x, y \text{ 为幂等元}) \end{aligned}$$

27. 设 $\langle S, * \rangle$ 是半群。., $y \in s$, 若 $x \neq y$, 则 $x*y \neq y*x$ 。证明:

- a) $\forall x \in s$, 有 $x*x = x$
- b) $\forall x, y \in s$, 有 $x*y*x = x$;
- c) $\forall x, z \in s$, 有 $x*y*z = x*z$;

[证] 对任何 $x, y \in s$ 若 $x*y = y*x$, 则 $x = y$ (否则 $x \neq y$, 于是 $x*y \neq y*x$, 矛盾)。

a) 对任何 $x \in s$, 因为 $(x*x)*x = x*(x*x)$ ($*$ 可结合)

所以 $x^*x=x$

b) 对任何 $x, y \in S$, $(x^*y^*x)^*x$

$$=x^*y^*(x^*x) \quad (*\text{可结合})$$

$$=x^*y^*x \quad (\text{由 a})$$

$$=(x^*x)^*y^*x \quad (\text{由 a})$$

$$=x^*(x^*y^*x) \quad (*\text{可结合})$$

所以 $x^*y^*x=x$

c) 对任何 $x, y, z \in S$, 有 $(x^*y^*z)^*(x^*z)$

$$=x^*y^*(z^*x^*z) \quad (*\text{可结合})$$

$$=x^*y^*z \quad (\text{由 b})$$

$$=(x^*z^*x)^*y^*z \quad (\text{由 b})$$

$$=(x^*z)^*(x^*y^*z) \quad (*\text{可结合})$$

所以 $x^*y^*z=x^*z$

28. 设 $\langle S, * \rangle$ 是半群。证明: $\forall x, y, z \in S$, 若 $x^*z=z^*x$ 且

$$y^*z=z^*y, \text{ 则 } (x^*y)^*z=z^*(x^*y)。$$

[证] 对任何 $x, y, x \in S$

$$(x^*y)^*z$$

$$=x^*(y^*z) \quad (*\text{可结合})$$

$$=x^*(z^*y) \quad (y \text{ 与 } z \text{ 可交换})$$

$$=(x^*z)^*y \quad (*\text{可结合})$$

$$=(z^*x)^*y \quad (x \text{ 与 } z \text{ 可交换})$$

$$=z^*(x^*y) \quad (*\text{可结合})$$

29. 设 $\langle \{x, y\}, * \rangle$ 是半群, $x^*x=y$ 。证明:

a) $x^*y=y^*x$;

b) $y^*y=y$ 。

[证] a) $x^*y = x^*(x^*x)$ (因 $x^*x=y$)

$$= (x^*x)^*x \quad (*\text{可结合})$$

$$=y^*x \quad (\text{因 } x^*x=y)$$

b) $y^*y = (x^*x)^*y$ (因 $x^*x=y$)

$$=x^*(x^*y) \quad (*\text{可结合})$$

根据 $*$ 运算的封闭性, 可知 $x^*y=x$ 或者 $x^*y=y$

若 $x^*y=x$, 则 $y^*y=x^*$ (因 $x^*y=x$)

$$=x^*x \quad (\text{由 } x^*y=x)$$

$$=y \quad (\text{由 } x*x=y)$$

若 $x*y=y$, 则 $y*y=x*(x*y)$

$$=x*y \quad (\text{由 } x*y=y)$$

$$=y \quad (\text{由 } x*y=y)$$

因此 无论如何, $y*y=y$ 。

30. $\langle S, * \rangle$ 是半群。若有 $a \in s$, $\forall x \in s$, $\exists u, Q \in S$, 使得

$$a*u=v*a=x$$

证明: $\langle S, * \rangle$ 是含么半群。

[证] 只需证明半群 $\langle S, * \rangle$ 中含有么元即可。

取 $x=a$, 那么, 存在 $u_a, v_a \in s$, 使 $a*u_a=v_a*a=a$

对于 s 中任一元素 b , 那么存在 $u_b, v_b \in s$, 使得

$$a*u_b=v_b*a=b$$

于是 $bu_a = (v_b*a)*u_a \quad (\text{因 } v_b*a=b)$

$$=v_b(a*u_a) \quad (*\text{可结合})$$

$$=v_b*a \quad (\text{因 } au_a=a)$$

$$=b \quad (\text{因 } u_b*a=b)$$

所以 u_a 是右么元。

并且 $v_a b = v_a*(a*u_b) \quad (\text{因 } a*u_b=b)$

$$= (v_a*a)*u_b \quad (*\text{可结合})$$

$$=a*u_b \quad (\text{因 } u_a*a=a)$$

$$=b \quad (\text{因 } a*u_b=b)$$

所以 v_a 是左么元。但是

将 $b*u_a=b$ 中的 b 取为 u_a , 则有 $v_a*u_a=v_a$;

将 $u_a*b=b$ 中的 b 取为 u_a , 则有 $v_a*u_a=u_a$;

故此, 可得 $u_a=v_a$ 。所 $u_a (=v_a)$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的么元。

从而, $\langle S, * \rangle$ 是含么半群。

31. 设 $\langle S, * \rangle$ 是含么半群。Zs, z 是关于*的左零元。证明: $\forall x \in s$, $x*z$ 也是关于*的左零元。

[证] 由于 z 是关于*的左零元, 所以对于任意 $a \in s$, 都有

$$z*a=z$$

因而 对任何 $x \in s$, 对任何 $a \in s$, 都有

$$(x*z)*a=x*(z*a) \quad (*\text{可结合})$$

$$=x*z \quad (z \text{ 为左零元}, z*a=z)$$

这说明 $x*z$ 也为左零元。

32. 设 $\langle S, * \rangle$ 是含么半群。 $S^s = \{f \mid f: s \rightarrow s\}$, \circ 是函数的合成运算。

a) 证明: $\langle S^s, * \rangle$ 是半群;

b) 证明: 存在从 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle S^s, \circ \rangle$ 的同态函数。

[证] a) 由于 \circ 是函数的合成运算, 而 $S^s = \{f \mid f: s \rightarrow s\}$ 是所有从 s 到 s 的函数的集合, 因此 \circ 运算封闭且运算结果唯一; 并且 \circ 运算当然具有结合律, 故此 $\langle S^s, \circ \rangle$ 是一半群。

b) 令 $h: s \rightarrow s^s$, 对于所有的 $a \in s$

$h(a) = f_a$; 这时 $f_a: s \rightarrow s$, 对于任何 $x \in s$

有 $f_a(a) = a*x$

由于 $\langle S, * \rangle$ 是半群, 故 $*$ 是 s 上的二元运算。因此 $*$ 运算封闭, 且运算结果唯一, 因此如上定义的 f_a 后者唯一, 是从 s 到 s 的函数, 即 $f_a \in S^s$ 。因此 h 的定义是良定义的。

对于任何 $a, b \in s$ $h(a*b) = f_{a*b}$

而对于任何 $x \in s$, $(x) f_{a*b}(x)$

$$\begin{aligned} &= (a*b) * x \\ &= a * (b*x) && (* \text{ 的结合律}) \\ &= a * (f_b(x)) \\ &= f_a(f_b(x)) \\ &= (f_a \circ f_b)(x) \end{aligned}$$

所以, 有 $f_{a*b} = f_a \circ f_b$, 因此, $h(a*b) = f_a \circ f_b = h(a) \circ h(b)$ 。故此 h 满足同态公式。

因而存在从 $\langle S, * \rangle$ 到 $\langle S^s, \circ \rangle$ 的同态函数。

33. 设 f 是从半群 $\langle X, * \rangle$ 到 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的同态函数, 证明: 若 x 是 X 中的幂等元, 则 Y 中也存在幂等元。

[证] 由于 $f(x) \oplus f(x) = f(x*x)$ (f 是同态函数, 满足同态公式)

$$= f(x) \quad (\text{因 } x \text{ 是幂等元, 故 } x*x=x)$$

且 $f(x) \in Y$, 故此 $f(x)$ 是 Y 中的幂等元。即 Y 中也存在幂等元。

34. 设 f 是从半群 $\langle X, * \rangle$ 到 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的同态函数, 问下列结论是否为真。

a) $\langle X, * \rangle$ 在 f 下的同态象是 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的子代数系统;

b) $\langle X, * \rangle$ 在 f 下的同态象是半群;

c) 若 $\langle X, * \rangle$ 是含幺交换半群, 则 $\langle X, * \rangle$ 在 f 下的同态象也是含幺可交换半群。

[解] a) 真。因为 1) $f(X) \subseteq Y$ 。这点是根据事实 $f: X \rightarrow Y$ 得出的。2) 集合 $f(X)$ 在运算 \oplus 下是封闭的, 即, 如果 $a, b \in f(X)$, 那么 $a \oplus b \in f(X)$ 。因为若 $a, b \in f(X)$, 那么存在着 $x, y \in X$, 使得 $f(x) = a$ 且 $f(y) = b$ 。进一步, 由 X 在 $*$ 运算下封闭 (因 $\langle X, * \rangle$ 为半群) 可知存在着某一 $z \in X$, 使 $z = x * y$ 因此

$$\begin{aligned} a \oplus b &= f(x) \oplus f(y) \\ &= f(x * y) \quad (f \text{ 是同态函数, 满足同态公式}) \\ &= f(z) \\ &\in f(X) \end{aligned}$$

运算结果的唯一性是自动遗传, 因为 $\langle Y, \oplus \rangle$ 至少是一代数系统, 故 \oplus 应是 Y 上的二元运算, 具有运算结果唯一性。

故由 1) 和 2), 可知 $\langle X, * \rangle$ 在 f 下的同态象 $\langle f(X), \oplus \rangle$ 是 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的子代数系统。

b) 真。因为 3) 运算 \oplus 在集合 $f(X)$ 上满足结合律, 即, 如果 $a, b, c \in f(X)$, 那么 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ 。因若 $a, b, c \in f(X)$, 那么存在着 $x, y, z \in X$, 使 $f(x) = a$ 且 $f(y) = b$ 及 $f(z) = c$, 故此

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= (f(x) \oplus f(y)) \oplus f(z) \\ &= f(x * y) \oplus f(z) && (f \text{ 满足同态公式}) \\ &= f((x * y) * z) && (f \text{ 满足同态公式}) \\ &= f(x * (y * z)) && (\langle X, * \rangle \text{ 为半群, } * \text{ 运算有结合律}) \\ &= f(x) \oplus f(y * z) && (f \text{ 满足同态公式}) \\ &= f(x) \oplus (f(y) \oplus f(z)) && (f \text{ 满足同态公式}) \\ &= a \oplus (b \oplus c) \end{aligned}$$

于是由 a) 的 1), 2) 及这里的 3), 可知 $\langle X, * \rangle$ 在 f 下的同态象 $\langle f(X), \oplus \rangle$ 是半群。

c) 真。因为 4) $\langle f(X), \oplus \rangle$ 含有幺元, 即 若 $e \in X$ 是含幺半群 $\langle X, * \rangle$ 的幺元, 那么 $f(e) \in f(X)$ 就是 $\langle f(X), \oplus \rangle$ 的幺元。因为对任何 $a \in f(X)$, 存在着 $x \in X$, 使 $f(x) = a$, 故此

$$\begin{aligned} a \oplus f(e) &= f(x) \oplus f(e) \\ &= f(x * e) && (f \text{ 满足同态公式}) \\ &= f(x) && (x * e = x) \\ &= a \end{aligned}$$

同理可证 $f(e) \oplus a = a$, 因而 $a \oplus f(e) = f(e) \oplus a = a$ 。5) 运算 \oplus 在 $f(X)$ 上满足交换律, 即, 对任何 $a, b \in f(X)$, 都有 $a \oplus b = b \oplus a$ 。因若 $a, b \in f(X)$ 则存在着 $x, y \in X$, 使 $f(x) = a$ 且 $f(y) = b$, 因此

$$\begin{aligned} a \oplus b &= f(x) \oplus f(y) \\ &= f(x * y) \quad (f \text{ 满足同态公式}) \\ &= f(y * x) \quad (\langle X, * \rangle \text{ 是含幺可交换半群, 故 } * \text{ 有交换律}) \\ &= f(y) f(x) \quad (f \text{ 满足同态公式}) \\ &= b \oplus a \end{aligned}$$

综合 a) 的 1) 2), b) 的 3), 和这里的 4) 和 5), 可知, 若 $\langle X, * \rangle$ 是含幺可交换半群, 则 $\langle X, * \rangle$ 在 f 下的同态象 $\langle f(X), \oplus \rangle$ 也是含幺可交换半群。

35. 设 $N_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, N_6 上的 $+_6$ 运算定义如下

$$\forall a, b \in N_6, a +_6 b = (a + b) \bmod 6$$

求了半群 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的运算表如下:

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

从运算表看出 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 是一循环半群, 生成元是 1, 5。因而除两个平凡子半群 $\langle \{0\}, +_6 \rangle$ 及 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 外, 任何包含 1 或 5 的子集都不能构成真子半群。所以考虑 $\{0, 2, 3, 4\}$ 的子集, 由于 $2 +_6 3 = 5$, $3 +_6 4 = 1$, 故此任何包含 2 或 4 的子集中不能包含 3。另外 $2 +_6 2 = 4$, $3 +_6 3 = 0$, $4 +_6 4 = 2$, 故此单元集上运算 $+_6$ 不封闭。因而 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的真子半群只有二个 $\langle \{0, 3\}, +_6 \rangle$ 及 $\langle \{0, 2, 4\}, +_6 \rangle$, 它们的运算表如下:

$+_6$	0	3
0	0	3
3	3	0

$+_6$	0	2	4
0	0	2	4
2	2	4	0
4	4	0	2

36. 证明：含么半群的子半群可以是一个含么半群，但不是子含么半群。

[证] $\langle N_6, +_6 \rangle$ 是一个含么半群，其么元为 1。运算表如下：

x_6	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

$\langle \{4, 2\}, x_6 \rangle$ 是 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的子半群，并且是含么半群，其么元为 4。运算为但是它不是 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的子含么半群，因为 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 的么元 $1 \notin \{4, 2\}$ 。

37. 设 $\langle S, * \rangle$ 是含么半群，么元为 e

$$S_1 = \{x \mid x \in S^1 \text{ 且 } \exists y (y * x) = e\}$$

证明： $\langle S_1, * \rangle$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的子含么半群。

[证] 1) 集合 S_1 在运算 $*$ 下是封闭的，即，若 $x_1, x_2 \in S_1$ ，则 $x_1 * x_2 \in S_1$ 。因若 $x_1, x_2 \in S_1$ 则 $x_1, x_2 \in S$ ，存在着 y_1, y_2 使 $y_1 * x_1 = e, y_2 * x_2 = e$ 。于是有 $x_1 * x_2 \in S$ (S 在 $*$ 运算下封闭，因 $\langle S, * \rangle$ 是半群)，并且存在着 $z = y_2 * y_1$ ，使

$$\begin{aligned} z * (x_1 * x_2) &= (y_2 * y_1) (x_1 * x_2) \\ &= y_2 * (y_1 * x_1) * x_2 \quad (\text{的结合律}) \\ &= y_2 * (e * x_2) \\ &= y_2 * x_2 \quad (e \text{ 是么元, } e * x_2 = x_2) \\ &= e \end{aligned}$$

故此 $x_1 * x_2 \in S_1$ 。

2) $*$ 运算在 S_1 上满足结合律，这点由 $*$ 运算在 S 上的结合律遗传而来。

3) $\langle S_1, * \rangle$ 含有 $\langle S, * \rangle$ 的幺元 e 。因为 $e \in S$, 且存在着 e 使 $e * e = e$, 所以 $e \in S_1$ 。

综合上述 1), 2), 3), 证得 $\langle S_1, * \rangle$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的含幺半群。

38. 写出所有不同构的一阶, 二阶, 三阶, 四阶, 五阶, 六阶, 七阶, 八阶群。

[解] 由于素数阶群是循环群, 故此一阶, 二阶, 三阶, 五阶, 七阶群各只有一个, 其运算表分别如下:

*	e
e	e

一阶群

*	e	a
e	e	a
a	a	e

二阶群

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

三阶群

*	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

五阶群

*	e	a	b	c	d	f	g
e	e	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g	e
b	b	c	d	f	g	e	a
c	c	d	f	g	e	a	b
d	d	f	g	e	a	b	c
f	f	g	e	a	b	c	d
g	g	e	a	b	c	d	f

七阶群

四阶群已知有两个, 一个是循环群, 一个是 Klein4 群, 其运算表如下:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	d	e	a

四阶循环群

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Klein 四群

而六阶和八阶的情况比较复杂。我们先来讨论六阶群的情况：

(一) (1) 六阶群 $\langle G, * \rangle$ 一定有三阶子群。

对于 $|G|=6$, 6 的正因子只有 1, 2, 3 和 6。若 $G=\langle a \rangle$ 是 6 阶循环群, 则 $H=\langle a^2 \rangle$ 是一个三阶子群; 若 G 不是循环群, 则 G 中非幺元的阶只能是 2 或 3。若 G 中有一个非幺元 b 的阶是三, 则 $H=\langle b \rangle$ 是 G 的一个三阶子群。若 G 中非幺元的阶都是二, 则对任何 $a, b \in G$, 并且 a 和 b 是不同的非幺元, 就有

$$a^2=e, \quad b^2=e, \quad (a*b)^2=e$$

从而 $a^{-1}=a, \quad b^{-1}=b, \quad (a*b)^{-1}=a*b$

又因为 $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}=b*a$, 所以 $a*b=b*a$, 所以 G 是交换群。现在来考察 G 的子集 $H=\{e, a, b, a*b\}$, 这里 a, b 是 G 中的两个不同的非幺元。显然 $a*b \neq e, \neq a, \neq b$, (如 $a*b \neq e$, 否则, 有 $a^{-1}=b$, 又 $a^{-1}=a$, 从而 $a=b$ 与 a 与 b 不同矛盾。余者同理可证) *关于 H 的运算表如下:

*	e	a	b	a*b
e	e	a	b	a*b
a	a	b	a*b	b
b	b	a*b	e	
a*b	a*b	d	e	

(运算表利用 G 的可交换性来编制)

所以 H 在 $*$ 运算下封闭, $\langle H, * \rangle$ 实际上与 Klein 四群同构。于是 H 是 G 的一个四阶子群, 根据 Lagrange 定理, 必有 $4 \mid 6$, 这不可能。因此 G 中非幺元都是二阶的。

(2) 偶阶群 $\langle G, * \rangle$ 一定含有一个二阶的非幺元 (见 41 题) 即含有二阶子群。

(3) 若任何群 $\langle G, * \rangle$ 的子群 $\langle H, * \rangle$ 在 G 中的指数为 2, 则 $\langle H, * \rangle$ 为正规子群, 即 $H \triangleleft G$ 。(见 58 题 (a))

设六阶群的含有的三阶子群为 $H_1 = \langle a \rangle = \{e, a, a^2\}$ 二阶子群为 $G_2 = \langle b \rangle = \{e, b\}$, 令 $H = H_1 H_2$, 即

$$H = \{e, aa^2, b, ab, a^2b\}$$

(这里 $a*b$ 简记为 ab , a^2*b 简记为 a^2b , 以下类同, 不再交代)。

由于 a, b 分别是三、二阶元素, 故 $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ 。容易验证 $H = H_1 H_2$ 中 6 个元素是两两不同的 (例, 如 $a^2 \neq b$, 否则 $a^2 = bH_1 \cap H_2 = \{e\}$, 矛盾。略验证)。所以 $G = H = H_1 H_2$ 。

下面分两种情况来讨论:

(a) 若 $a*b = b*a$, 这时 G 是交换群, 又由于 $a*b = ab$ 是阶元素, 因此 G 是六阶循环群。利用 G 的可交换性及 $a^3 = e, b^2 = e$ 可构成 $*$ 运算的运算表发下:

*	e	ab	a ²	b	a	a ² b
e	e	ab	a ²	b	a	a ² b
ab	ab	a ²	b	a	a ² b	e
a ²	a ²	b	a	a ² b	e	ab
b	b	a	a ² b	e	ab	a ²
a	a	a ² b	e	ab	a ²	b
a ² b	a ² b	e	ab	a ²	b	a

它与 $\langle N_6, +_6 \rangle$ 同构, 同构函数 $f: G \rightarrow N_6$ $f(e) = [0]_6, f(ab) = [1]_6, f(a^2) = [2]_6, f(b) = [3]_6, f(a) = [4]_6, f(a^2b) = [5]_6$ 。

(b) 若 $a*b \neq b*a$, 这时 G 是非交换群。由于 $H_1 = \langle a \rangle = \{e, a, a^2\}$ 在 G 中指数 $|G|/|H_1| = 6/3 = 2$, 所以 $H_1 \triangleleft G$ 。因此对于 $b \in G, a \in H_1$ 根据正规子群的条件可知

$$b^{-1}ab = bab \in H_1 \quad (\text{因为 } b^2 = e, \text{ 故 } b^{-1} = b)$$

显然可得 $bab = a^2$ (否则, 若 $bab = e$, 则 $a = (b^{-1})^2 = b^2 = e$, 矛盾; 同样, 若 $bab = a$, 则 $ab = b^{-1}a = ba$, 于是 G 是交换群, 矛盾)。故此 $ab = b^{-1}a^2 = ba^2$ 。利用 $b^2 = e, a^3 = e, b^{-1} = b$ 及 $bab = a^2, ab = ba^2$ 等可编制 $*$ 的运算表如下, 计算过程如右:

*	e	ab	a ²	b	a	a ² b	
e	e	ab	a ²	b	a	a ² b	b*a ² b=abb=a
ab	ab	a ²	b	a	a ² b	e	b*a=babb ⁻¹ =a ² b
a ²	a ²	b	a	a ² b	e	ab	a ² b*a ² b=a ² abb=e
b	b	a	a ² b	e	ab	a ²	a ² b*a=b=a ² b=a
a	a	a ² b	e	ab	a ²	b	a ² b*a=aba ² b=ab
a ² b	a ² b	e	ab	a ²	b	a	a ² b*a ² =aabb=a ²
							ab*ab=aa ² =e
							ab*a=ba ² a=b
							ab*a ² =aab=a ² b

它与三次六阶对称群 $\langle S_3, \diamond \rangle$ 同构，其中 $s_3 = \{e, \tau, \sigma^2\tau, \sigma\tau, \sigma\sigma^2\} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ $\sigma = (123)$, $\tau = (12)$, $e = (1)$ 同构函数 $f: G \rightarrow S_3$, $f(e) = e = p_1$, $f(b) = \tau = p_2$, $f(a^2b) = \sigma^2\tau = p_3$, $f(ab) = \sigma\tau = p_4$, $f(a) = \sigma = p_5$, $f(a^2) = \sigma^2 = p_6$

所以，六阶群只有六阶循环群及三次六阶对称群 $\langle S_3, \diamond \rangle$ (二) (1) 八阶群 $\langle G, * \rangle$ 一定含有四阶子群。

对于 $|G| = 8$, 8 的正因子只有 1, 2, 4 和 8。若 $G = \langle a \rangle$ 是 8 阶循环群，则 $H = \langle a \rangle$ 是一个四阶子群；若 G 不是循环群，则 G 中非幺元的阶数只能是 2 或 4。若 G 中有一个非幺元 b 的阶是四，则 $H = \langle b \rangle$ 是 G 的一个四阶子群，这样得到的都是四阶循环群。若 G 中非幺元的阶都是 2，则对任何 $a, b \in G$, 并且 a 和 b 是不同的非幺元，就有

$$a^2 = e, b^2 = e, (a*b)^2 = e$$

从而

$$a^{-1} = a, b^{-1} = b, (a*b)^{-1} = a*b$$

又因为 $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} = b*a$ 所以 $a*b = b*a$, 即 G 是交换群。现在来考察 G 的子集 $H = \{e, a, b, ab\}$, 这里 a, b 是 G 中的两个不同的非幺元。显然 $ab \neq e$, $\neq a$, $\neq b$ (如 $a \neq e$, 否则, 有 $a^{-1} = b$, 又 $a^{-1} = a$, 从而 $a = b$, 与 a 与 b 不同矛盾。余者同理要证) *关于 H 的运算如下:

*	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

(编制可用 G 的可交换性)

所以 H 在 $*$ 运算下封闭, $\langle H, * \rangle$ 实际上与 Klein 四群同构。

2) (a) 设八阶群 $\langle G, * \rangle$ 所含的四阶群为四阶循环 $H_1 = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3\}$,

由于 H_1 在 G 中的指数为 2, 故可取 $b \in G$ 而 $b \notin H_1$, 那么由右陪集理论可知。

$$G = H_1 H_1 b = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

由于 $|G| = 8$, 故此这八个元素应该是两两不相同的 (实际上, 利用 $b \notin H_1$, 即 $b \neq e, b \neq a, b \neq a^2, b \neq a^3$, 可以 a 是四阶的, 可证它们互不相同, 例如, $a^2 \neq a^3b$, 否则 $ab = e$, 从而 $a^{-1} = b$, 但 $a^{-1} = a^3$, 故有 $b = a^3$ 矛盾, 其余略去验证)。

现在我们来考虑 b^2 , 当然有 $b^2b, b^2 \neq ab, b^2 \neq a^2b, b^2 \neq a^3b$ 否则, 由消去律, 将有 $b = e$ 或 $b = a$ 或 $b = a^2$ 或 $b = a^3$, 与 $b \notin H_1$ 矛盾, 因此, 只能 $b^2 = e$ 或 $b^2 = a$ 或 $b^2 = a^2$ 或 $b^2 = a^3$ 。

(1) 若 $b^2 = e$, 则 $b^{-1} = b$

(10) 若 $ab = ba$, 则 G 是交换群, 利用交换性及 $a^4 = e, b^2 = e, b^{-1} = b$, 等构成的 $*$ 运算表如下:

*	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
e	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
a	a	a ²	a ³	e	ab	a ² b	a ³ b	b
a ²	a ²	a ³	e	ab	a ² b	a ³ b	b	ab
a ³	a ³	e	a	a ²	a ³ b	b	ab	a ² b
b	b	ab	a ² b	a ³ b	e	a	a ²	a ³
ab	ab	a ² b	a ³ b	b	a	a ²	a ³	e
a ² b	a ² b	a ³ b	b	a	a ²	a ³	e	a
a ³ b	a ³ b	b	ab	a ² b	a ³	e	a	a ²

由于 a, a^3, ab, a^3b 是 G 中四阶元素, a^2b, a^2b 是 G 中的二阶元素, 因此 G 中无八阶元素, 因而 G 不是循环群。

$$G = \langle S_2, * \rangle$$

(2⁰) 若 $ab \neq ba$, 则 G 是非交换群, 由于 H_1 在 G 中指数为 2 故 $H_1 \triangleleft G$, 因此对于 $b \in G, a \in H_1$,

显然 $bab = a^3$ (否则, 若 $bab = e$, 则 $a = (b^{-1})^2 = b^2 = e$, 矛盾; 同样, 若 $bab = a$, 则 $ab = b^{-1}a = ba$, 于是 G 可交换, 矛盾; 最后, 若 $bab = a^2$, 则 $ab = b^{-1}a^2 = ba^2$, 于是

$$(ab * ab) * ab = a^3 * ab = b$$

$$ab * (ab * ab) = ab * a^3 = ba^3 = ba = babb = a^2b$$

由于 $b \neq a^2b$, (否则有 $a^2=e$, 则 a 为二阶的, 与 a 四阶的矛盾)

故此 $(ab*ab)*ab \neq ab*(ab*ab)$, 从而 G 不具有结合律, 与 G 是群矛盾。故此 $ab=b^{-1}a^3=ba^3$ 。利用 $b^2=e$, $a^4=e$, $b^{-1}=b$ 及 $bab=a^3$, $ab=ba^3$ 等可编制的*运算表如下,

计算过程如右:

*	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
e	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
a	a	a ²	a ³	e	ab	a ² b	a ³ b	b
a ²	a ²	a ³	e	ab	a ² b	a ³ b	b	ab
a ³	a ³	e	ab	a ²	a ³ b	b	ab	a ² b
b	b	<u>a³b</u>	<u>a²b</u>	<u>ab</u>	e	a ³	<u>a²</u>	<u>a</u>
ab	ab	b	a ³ b	a ² b	a	e	a ³	a ²
a ² b	a ² b	ab	b	a ³ b	a ²	a	e	a ³
a ³ b	a ³ b	a ² b	ab	b	a ³	a ²	a	e

$$b*a=babb=a^3b$$

$$b*a^2=ba^2aa^3=aba^3=aab=a^2b$$

$$b*a^3=ab$$

$$b*a^2b=a^2bb=a^2$$

$$b*a^3b=abb=a$$

四阶元素: a, a^3 ;

二阶元素: a^2, b, ab, a^2b, a^3b ;

因 G 中无八阶元素, 因而 G 不是循环群; 又因 G 不可交换, 故与 (I^0) 中的可交换八阶群不同构。

(2) 若 $b^2=a$, 则 $b^8=(b^2)^4=a^4=e$, 故 b 是 G 的八阶元素。另外 $ab=b^2b=b^3=bb^2=ba$, 故此 G 是可交换的, 因此 G 是八阶循环群, 即

$G=\langle b \rangle$, 因此与 (2) 的结果相同。

(4) 若 $b^2=a^2$, 于是

(1⁰) 若 $ab=ba$, 则 G 是交换群, 利用交换性及 $a^4=e$, $b^2=a^2$, 等, 并令 $c:=ab$, 可构成运算如下:

当然, 表中

$c=ab$	$c^2=abab=e$,	$c^{-1}=c$
$ac=aab=a^2b$	$ac=aab=aba=ca$	
$a^2c=a^2ab=a^3b$	具有交换律	
$a^3c=a^3ab=b$		

*	e	a	a ²	a ³	c	ac	a ² c	a ³ c
e	e	a	a ²	a ³	c	ac	a ² c	a ³ c
a	a	a ²	a ³	e	ac	a ² c	a ³ c	c
a ²	a ²	a ³	e	a	a ² c	a ³ c	c	ac
a ³	a ³	e	ac	a ²	a ³ c	c	ac	a ² c

c	c	<u>ac</u>	a ² c	a ³ c	e	a	<u>a²</u>	a ³
ac	ac	a ² c ²	a ³ c	c	a	a ²	a ³	e
a ² c	a ² c	a ³ c	c	ac	a ²	a ³	e	a
a ³ c	a ³ c	c	ac	a ² c	a ³	e	a	a ²

$$G = \langle S_3^1, * \rangle$$

它显然与 (1) 中 (1⁰) 的可交换非循环八阶群同构, 这里的 a 对应于那群中的 a, 这里的 c 对应那群中的 b。

(2) 若 $ab \neq ba$, 则 G 是非交换群。由于 H_1 在 G 中指数为 2, 故 $H_1 \triangleleft G$, 因此对于 $b \in G$, $a \in H_1$, 根据正规子群的条件可知

$$b^{-1}ab = b^3ab \in H_1, \quad (\text{因为 } b^4 = e, \quad b^{-1} = b^3, \quad (b^3)^{-1} = b)$$

显然 $b^3ab = a^3$ (否则, 若 $b^3ab = e$, 则 $a = b^4 = e$, 矛盾; 同样, 若 $b^3ab = a$, 则 $ab = ba$, 于是 G 可交换, 矛盾; 最后, 若 $b^3ab = a^2$, 则 $ab = ba^2 = b^3$) 于是

$$(ab*ab)*ab = b^6*ab = a^2*ab = a^3b$$

$$ab*(ab*ab) = ab*b^6 = ab*a^2 = a.ab = a^2b$$

但 $a^3b \neq a^2b$ (否则 $a = e$, 矛盾), 因此

($ab*ab)*ab \neq ab*(ab*ab)$ 故 G 将不满足结合律, 与 G 是群矛盾。) 故此 $ab = ba^3$ 等编制*的运算表如下, 计算过程如右:

*	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
e	e	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
a	a	a ²	a ³	e	ab	a ² b	a ³ b	b
a ²	a ²	a ³	e	a	a ² b	a ³ b	b	ab
a ³	a ³	e	a	a ²	a ³ b	b	ab	a ² b
b	b	<u>a³b</u>	<u>a²b</u>	ab	a ²	<u>a</u>	<u>e</u>	<u>a³</u>
ab	ab	b	a ³ b	a ² b	a ³	a ²	a	e

$$b*a = ba^3a^2 = abb = a^3b$$

$$b*a^2 = aba^3 = aab = a^2b$$

$$b*ab = bba^3 = a^2a^3 = a$$

$$b*a^2b = a^2bb = aa^2 = e$$

$$b*a^3b = abb = aa^2 = a^3$$

四阶元素: a, a³, b, ab, a²b, a³b

二阶元素: a²;

没有八阶元素, 故不是循环群; 不可交换, 故与 (1) 的 (1⁰) 中的交换群不同构; 由于引群中只有一个二阶元素, 所以与 (1) 的 (2⁰) 中的不可交换群不同构 (因为那个群有五个二阶元素)。

$$\begin{array}{c|cccccccc} a^2b & a^2b & ab & b & a^3b & e & a^3 & a^2 & a \\ a^3b & a^3b & a^2b & ab & b & a & e & a^3 & a^2 \end{array}$$

$$G = \langle S_4, * \rangle$$

实际上，此八阶群称为四元数群（有关四元数及其群的详细定义请参见莫宗坚等著《代数学》北京大学出版社（上下班册）第二章 §1 习题 7）

(b) 若八阶群 $\langle G, * \rangle$ 所含的四阶子群为 Klein 四群 $H_2 = \{e, a, b, c\}$ 其中 $a^2 = b^2 = c^2 = e$ 其中 $c = ab$ 。由于 H_2 在 G 中的指数为 2，故可取 $d \in G$ 且 $d \notin H_2$ ，那么由右陪集理论可知

$$G = H_2 \cup H_2d = \{e, a, b, c, d, ad, bd, cd\}$$

现在我们来考虑 d 的阶：首先 d 的阶不可能是八。否则 G 是循环群 $G = \langle d \rangle = \{e, d, d^2, d^3, d^4, d^5, d^6, d^7\}$ ，其中二阶元素只有 d^4 一个，这与已知 G 中有三个二阶元素矛盾。其次若 d 的阶为四，则 G 中存在着一个四子循环子群 $H'_1 = \{e, d, d^2, d^3\}$ 这种情况我们在 (a) 讨论过了；所以我们可设 d 的阶为二，即 $d^2 = e$ ，故 $d^{-1} = d$ 。由于 H_2 在 G 中指数为 2，故 $H_2 \triangleleft G$ ，因此对于 $d \in G$ ， $a, b, c \in H$ ，根据正规子群的条件可知

$$d^{-1}ad = dad \in H_2, \quad d^{-1}bd = dbd \in H_2, \quad d^{-1}cd = dcd \in H_2$$

(1) 若 $dad = a$ ，则

(1⁰) 若 $dbd = b$ ，于是 $dcd = c$ ，故此有 $ad = da$ ， $bd = db$ ， $cd = dc$ ，从而由 H_2 是交换群，知 G 也是交换群，于是 $*$ 的运算如下：

	e	a	b	ab	d	ad	bd	abd
e	e	a	b	ab	d	ad	bd	abd
a	a	e	ab	b	ad	d	abd	bd
b	b	ab	e	a	bd	abd	d	ad
ab	ab	b	a	e	abd	bd	ad	d
d	d	ad	bd	abd	e	a	b	ab
ad	ad	d	abd	bd	a	e	ab	b
bd	bd	abd	d	ad	b	ab	e	a
abd	abd	bd	ad	d	ab	b	a	e

二阶元素为：

a, b, ab, d, ad, bd, abd 。

所以，没有八阶元素，不循环群，没有四阶元素，所以与 s_2, s_3, s_4 都不同构。

$$G = \langle S_5, * \rangle$$

(2⁰) 若 $dbd=c$, 则 $dcd=b$, 于是有 $bd=dc$ 等, 从而由 $bd*bd=dc*bd=dabbd=dad=a$, 故 bd 是四阶元素, 这种情况我们在 (a) 中讨论过了。

(2) 若 $dad=b$, 则 $dbd=a$, $dcd=c$ 这种情况同 (1) 的 (2⁰) ad 将是四阶的。

(3) 若 $dad=c$, 则 $dcd=a$, $dbd=b$ 这种情况也同 (1) 的 (2⁰) ad 仍是四阶的。

综合 (a)、(b) 可知, 不同构的八阶群共有五个, 一个是八阶循环群, 一个是可交换群 $\langle S_2, * \rangle$, 一个是不可交换群 $\langle S_3, * \rangle$, 一个是四元数群 $\langle S_4, * \rangle$, 一个是可交换的元素阶全为二的群 $\langle S_5, * \rangle$ 。

39. 设 $\langle G, * \rangle$ 是群。证明: $\forall a, b \in G$

a) 存在唯一的 $x \in G$, 使得 $a*x=b$;

b) 存在唯一的 $y \in G$, 使得 $y*a=b$ 。

[证] a) 由于 $\langle G, * \rangle$ 是群, 故对任何元素 $a \in G$, 其逆元素 $a^{-1} \in G$ 存在。因此存在着

$x=sa^{-1}*b \in G$, 使得

$$a*x=a(a^{-1}*b)=(a*a^{-1})*b=e*b=b$$

另外, 若还存在着 $c \in G$, 使 $a*c=b$, 则

$$c=e*c=(a^{-1}*a)*c=a^{-1}*(a*c)=a^{-1}*b$$

这说明这样的 $x=a^{-1}*b$ 的存在是唯一的。

b) 同理可证。

40. 设 $\langle S, * \rangle$ 是半群, e 是关于 $*$ 的左幺元。若 $\forall x \in S$, 存在 $y \in S$, 使得 $y*x=e$ 。

证明

a) $\forall a, b, c \in S$, 若 $a*b=a*c$, 则 $b=c$

b) $\langle S, * \rangle$ 是群。

[证] a) 对任何 $a, b, c \in S$, 若

$$a*b=a*c$$

则由于存在着 $d \in S$, 使 $d*a=e$, 故此, 有

$$d*(a*b)=d*(a*c)$$

根据半群 $\langle G, * \rangle$ 的结合律, 有

$$(d*a)*b=(d*a)*c$$

从而

$$e*b=e*c$$

根据 e 为左幺元, 可得 $b=c$

b) 由于 $\langle G, * \rangle$ 已是半群, 为此只需证以下两点:

1) e 是 $*$ 的幺元

由于 e 是 $*$ 的左幺元, 故只需证 e 是 $*$ 的右幺元即可, 对任何 $x \in S$, 因为存在着 $y \in S$, 使 $y*x=e$, 故

$$y*(x*e) = (y*x)*e = e*e = e$$

$$y*x=e$$

故此 $y*(x*e) = y*x$, 因此由 a) 的结论, 可得

$$x*e=x$$

2) 对于每个元素 $x \in S$, 存在着 $y \in S$, 使

$$y*x=x*y=e$$

即 $x^{-1}=y$ 。即逆元存在。

因为已知存在着左逆元, 因此只需证明左逆元也是右逆元即可。对任何 $x \in S$, 已知存在着 $y \in S$, 使 $y*x=e$, 关于这个左逆元 y , 有

$$y*(x*y) = (y*x)*y = e*y = y$$

$$y*e=y$$

故此 $y*(x*y) = y*e$, 因此由 (a) 的结论, 可得

$$x*y=e$$

41. 设 $\langle G, * \rangle$ 是群, $|G|=2n$ 。证明: G 中至少有一个二阶元素。

[证] 因为群 $\langle G, * \rangle$ 中的元素互逆, 即元素 a 的逆元是 a^{-1} , a^{-1} 的逆元是 a 。因而, G 中逆元不等于自身的元素必为偶数个 (包括零个)。

但是 G 包含偶数个元素, 因此 G 中逆元等于自身的元素个数也必为偶数个, 而 G 的幺元 e , 它的逆元等于自身, 所以, G 中至少还有另一个元素 a , 使 $a^{-1}=a$, 从而 $a^2=a*a=a^{-1}*a=e$, 且 $a \neq e$ 即 a 是一个二阶元素。

42. 设 $\langle G, * \rangle$ 是群。证明: $\langle G, * \rangle$ 是交换群的充分必要条件是 $\forall a, b \in G$, 有 $(a*b)* (a*b) = (a*a)* (b*b)$ 。

[证] 1) 必要性

若 $\langle G, * \rangle$ 是交换群 (阿贝尔群), 那么对任何的 $a, b \in G$,

$$(a*b)* (a*b) = a*(b*a)*b \quad (\text{结合律})$$

$$= a*(a*b)*b \quad (\text{交换律})$$

$$= (a*a)* (b*b) \quad (\text{结合律})$$

2) 充分性

若对任何的 $a, b \in G$, 有 $(a*b)* (a*b) = (a*a)* (b*b)$ 则 $\langle G, * \rangle$ 是交换群, 这可证明如下:

$$a*b = e*(a*b)*e$$

$$\begin{aligned}
&= (a^{-1} * a) * (a * b) (b * b^{-1}) \\
&= a^{-1} * ((a * a) * (b * b)) b^{-1} && (\text{结合律}) \\
&= a^{-1} * ((a * b) * (a * b)) b^{-1} && (\text{已知条件}) \\
&= (a^{-1} * a) * (b * a) * (b * b^{-1}) && (\text{结合律}) \\
&= e * (b * a) * e \\
&= b * a
\end{aligned}$$

43. 设 $\langle S, * \rangle$ 是含幺半群。证明：若 $\forall x \in S$, 有 $x = x * e$, 则 $\langle S, * \rangle$ 是交换群

[证] 因为对任 $x \in S$, 有 $x * x = e$, 因此 $x^{-1} = x$ 。所以 $\langle S, * \rangle$ 是群。

又对任何 $a, b \in S$, 因为有

$$a * b = a^{-1} * b^{-1} = (b * a)^{-1} = b * a$$

所以 $\langle S, * \rangle$ 是交换群。

44. 设 $\langle G, * \rangle$ 是群。证明：若 $\forall a, b \in G$, 有

$$a^3 * b^3 = (a * b)^3, a^4 * b^4 = (a * b)^4, a^5 * b^5 = (a * b)^5$$

则 $\langle G, * \rangle$ 是交换群。

[证] 对任何 $a, b \in G$, 因为群有结合律, 故

$$\begin{aligned}
a * b &= a^{-4} * a^5 * b^5 * b^{-4} \\
&= a^{-4} * (a * b)^5 * b^{-4} && (\text{利用 } a^5 * b^5 = (a * b)^5) \\
&= a^{-3} * (b * a)^4 * b^{-3} && ((a * b)^5 = a * (b * a)^4 * b \text{ 利用结合律}) \\
&= a^{-4} * (a * b)^4 * b^{-1} * (b * a) * b^{-3} \\
&= a^{-4} * (a^4 * b^4) * b^{-1} * (b * a) * b^{-3} && (\text{利用 } a^4 * b^4 = (a * b)^4) \\
&= (b^4 * a) * b^{-3} \\
&= b * a^{-2} * (a^2 * b^2) * (b * a) * b^{-3} \\
&= b * a^{-3} * (a^3 * b^3) * b^{-1} * (b * a) * b^{-3} \\
&= b * a^{-3} * (a * b)^3 * b^{-1} * (b * a) * b^{-3} && (\text{利用 } a^3 * b^3 = (a * b)^3) \\
&= b * a^{-2} * (b * a)^3 * b^{-3} \\
&= b * a^{-3} * (a * b)^4 * b^{-4} \\
&= b * a^{-3} * (a^4 * b^4) * b^{-4} && (\text{利用 } a^4 * b^4 = (a * b)^4) \\
&= b * a
\end{aligned}$$

因此 $\langle G, * \rangle$ 是交换群。

45. 设 $\langle G, * \rangle$ 是群。证明：除幺元外, 不可能有别的幂等元。

[证] 用反证法。假设除幺元外, 还存在着别的幂等元, 不妨设是 a , 那么 $a \in G$, $a \neq e$ 且 $a * a = a$ 。但是

$a=e*a=(a^{-1}*a)*a=a^{-1}*(a*a)=a^{-1}*a=e$, 矛盾。

46. 设 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群。证明: $\langle H_1 \cap H_2, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

[证] 显然 $H_1 \cap H_2 \subseteq G$ 。又因为 $e \in H_1$ 且 $e \in H_2$, 故 $e \in H_1 \cap H_2$, 从而 $H_1 \cap H_2$ 非空。

对于任意的 $a, b \in H_1 \cap H_2$, 则有 $a, b \in H_1$, 且 $a, b \in H_2$, 由于 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$ 都是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 所以 $a*b^{-1} \in H_1$ 且 $a*b^{-1} \in H_2$, 因此 $a*b^{-1} \in H_1 \cap H_2$, 从而 $\langle H_1 \cap H_2, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

47. 设 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群。令

$$H_1 H_2 = \{h_1 * h_2 | h_1 \in H_1 \text{ 且 } h_2 \in H_2\}$$

$$H_2 H_1 = \{h_2 * h_1 | h_2 \in H_2 \text{ 且 } h_1 \in H_1\}$$

证明: $\langle H_1 H_2, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群的充分必要条件是

$$H_1 H_2 = H_2 H_1$$

[证] 先证必要性

若 $\langle H_1 H_2, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 则 $H_1 H_2 = H_2 H_1$ 。

对于任何 $h_1 * h_2 \in H_1 H_2$, 因为 $\langle H_1 H_2, * \rangle$ 构成群, 所以 $(h_1 * h_2)^{-1} \in H_1 H_2$,

因此存在着 $h_1' \in H_1, h_2' \in H_2$, 使 $(h_1 * h_2)^{-1} = h_1' * h_2'$, 并且由于 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, *$

\rangle 都构成群, 因此 $(h_1')^{-1} \in H_1, (h_2')^{-1} \in H_2$, 从而 $(h_2')^{-1} * (h_1')^{-1} \in H_2 H_1$ 。

于是

$$h_1 * h_2 = ((h_1 * h_2)^{-1})^{-1} = (h_1' * h_2')^{-1} = (h_2')^{-1} * (h_1')^{-1} \in H_2 H_1 \text{ 所以 } H_1 H_2$$

$\subseteq H_2 H_1$ 。

对于任何 $h_2 * h_1 \in H_2 H_1$, 于是 $h_2 \in H_2, h_1 \in H_1$ 。由于 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$

都构成群, 所以 $h_2' \in H_2, h_1' \in H_1$, 从而

$$(h_2 * h_1)^{-1} = h_1^{-1} * h_2^{-1} \in H_1 H_2$$

又因为 $\langle H_1 H_2, * \rangle$ 构成群, 故此

$$h_2 * h_1 = (h_2 * h_1)^{-1} \in H_1 H_2$$

因此 $H_2 H_1 \subseteq H_1 H_2$ 。

由此可得 $H_1 H_2 = H_2 H_1$

次证充分性

若 $H_1H_2=H_2H_1$, 则 $\langle H_1H_2, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

根据群 $\langle G, * \rangle$ 的封闭性及 H_1H_2 的定义可得 $H_1H_2 \subseteq G$ 。又由 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$ 都是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 因而 $e \in H_1, e \in H_2$, 所以 $e=e_1*e \in H_1H_2$ 故 H_1H_2 非空。

对于任何 $a=h_1*k_1 \in H_1H_2, b=h_2*k_2 \in H_1H_2$, 从而 $h_1, h_2 \in H_1, k_1, k_2 \in H_2$, 由于 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$ 构成群, 故 $h_2^{-1} \in H_1, k_2^{-1} \in H_2$, 从而有 $b^{-1}=(h_2*k_2)^{-1}=k_2^{-1}*h_2^{-1} \in H_2H_1$ 。由于 $H_1H_2=H_2H_1$, 于是存在着 $h_3 \in H_1, k_3 \in H_2$, 使 $b^{-1}=h_3*k_3 \in H_1H_2$, 另外由 $k_1*h_3 \in H_2H_1$ 可知存在着 $h_4 \in H_1, k_4 \in H_2$, 使 $k_1*h_3=h_4*k_4 \in H_1H_2$, 最后, 由 $\langle H_1, * \rangle$ 及 $\langle H_2, * \rangle$ 的封闭性, 可知存在着 $h_5 \in H_1, k_5 \in H_2$, 使 $h_5=h_1*h_4 \in H_1, k_5=k_4*k_3 \in H_2$ 。因而

$$\begin{aligned} a*b^{-1} &= (h_1*k_1) * (h_3*k_3) = h_1 * (k_1*h_3) * k_3 = h_1 * (h_4*k_4) * k_3 \\ &= (h_1*h_4) * (k_4*k_3) = h_5*k_5 \in H_1H_2 \end{aligned}$$

所以 $\langle H_1H_2, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

48. 证明: 循环群的子群是循环群。

[证] 设 $\langle H, * \rangle$ 是循环群 $\langle G, * \rangle = \langle a \rangle$ 的一个子群, 则 H 中的元素都可表示成 a 的一些正方幂。设 a^m 是 H 中指数最小的正方幂, 我们来证 $\langle H, * \rangle = \langle a^m \rangle$ 。为此只要证明 H 中任一元素都可表示成 a^m 的正方幂。

任取 H 中一个元素 a^l , 根据带余除法, 可知有非负整数 q 及 n , 使

$$l=qm+n \quad \text{且 } 0 \leq n < m$$

于是由 $\langle H, * \rangle$ 构成群, 可知 $(a^m)^q \in H$, 从而 $(a^m)^{-q} \in H$, 于是

$$a^l * (a^m)^{-q} = a^n \in H$$

由 m 的选择必须有 $n=0$, 所以 $a^l = (a^m)^q$, 这说明 $\langle H, * \rangle = \langle a^m \rangle$, 因而 $\langle H, * \rangle$ 循环群。

49. 设 $\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

[证] XG 是显然的。由于 $eH=H=He$, 故 $e \in X$, 从而 X 非空。

对任何 $x, y \in X$, 则有 $x, y \in G, xH=Hx, yH=Hy$ 。对于任何 $y^{-1}h \in y^{-1}*H$, 有 $h \in H$, 从而 $h*y \in Hy$, 从而存在着 $h_1 \in H_1$, 使 $y*h_1 \in yH$ 且 $h*y=y*h_1$, 故此 $y^{-1}*h=h_1y^{-1}$, 因此 $y^{-1}*h \in Hy^{-1}$, 因而 $y^{-1}Hhy^{-1}$, 同理可证 $Hy^{-1} \subseteq y^{-1}H$, 故此 $y^{-1}H=Hy^{-1}$, 于是对任何 $(x*y^{-1}) * h (x*y^{-1}) H$, 存在着 $h_1h_2 \in H$, 使得

$$\begin{aligned} (x*y^{-1}) * h &= x * (y^{-1}*h) \\ &= x * (h_1*y^{-1}) \quad (\text{因为 } y^{-1}H=Hy^{-1}) \\ &= (x*h_1) * y^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (h_2^*x) * y^{-1} \text{ (因为 } xH=Hx) \\
&= h_2^* (x^*y^{-1}) \\
&= H (x^*y^{-1})
\end{aligned}$$

所以 $(x^*y^{-1})H \subseteq H(x^*y^{-1})$ 。同理可证 $H(x^*y^{-1}) \subseteq (x^*y^{-1})H$ 。

故此 $(x^*y^{-1})H = H(x^*y^{-1})$ 。显然 $x^*y^{-1} \in G$ ，因此

$$x^*y^{-1} \in X$$

从而 $\langle X, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

50. 设 $G = \{f | f: \mathbb{R}/\mathbb{R} \text{ 且 } f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ ，其中 \mathbb{R} 是实数集合， 0 是 G 上的函数复合运算。

a) 证明: $\langle G, 0 \rangle$ 是群;

b) 设 $S_1 = \{f | f(x) = x + b, x, b \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{f | f(x) = ax, a, x \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ 。证明: $\langle S_1, 0 \rangle$ 和 $\langle S_2, 0 \rangle$ 都是 $\langle G, 0 \rangle$ 的子群。

[证] a) [1] 0 运算关于 G 是封闭的

对于任何 $f_1, f_2 \in G$, $f_1 0 f_2$ 是函数的复合，因而运算结合唯一。对任何 x ，有 f_1

$$(x) = a_1x + b_1 \quad f_2(x) = a_2x + b_2, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \quad a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0 \text{ 于是}$$

$$(f_1 0 f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(a_2x + b_2) = a_1(a_2x + b_2) + b_1$$

$$= a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$$

由于 $a_1a_2, a_1b_2 + b_1 \in \mathbb{R}$ ，且 $a_1a_2 \neq 0$ 故此 $f_1 0 f_2 \in G$

[2] 0 运算在 G 上是结合的。因为函数的复合运算是结合的。

[3] 么元为 $I(x) = x$ 。

由于 $1 \neq 0, 1 \in \mathbb{R}, 0 \in \mathbb{R}$ ，故 $I(x) = x \in G$ ，另外对任何 $f \in G$ ，显然有 $I 0 f = f 0 I = f$ ，所以 $I(x)$ 为 G 的么元。

[4] 对于每个 $f \in G$ ， f 的逆元 $f^{-1} \in G$ 存在。

$$\text{对于任何 } f \in G, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \text{ 其逆元素 } f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\left(\text{显然 } \frac{1}{a}, \frac{b}{a} \in \mathbb{R}, \frac{1}{a} \neq 0 \right) \text{ 属于 } G, \text{ 很容易验证 } f^{-1} 0 f = f 0 f^{-1} = I$$

因此 $\langle G, 0 \rangle$ 是群。

b) 因为 S_1 是由 G 中 $a=1$ 的那些函数构成的，所以 S_1 是 G 的一个特殊子集，即 $S_1 \subseteq G$ ；又 $I(x) = x \in S_1$ ，故 S_1 非空。

又对任何 $f, g \in S_1$, $f(x) = x + b, g(x) = x + c, b, c \in \mathbb{R}, g^{-1}(x) = x - c \in S_1$ ，使得 $(f 0 g^{-1})(x) = f(g^{-1}(x)) = f(x - c) = (x - c) + b = x + (b - c)$ ，由于 $b - c \in \mathbb{R}$ ，

故 $f \circ g^{-1} \in S_1$, 所以 $\langle S_1, 0 \rangle$ 是 $\langle G, 0 \rangle$ 的子群。

因为 S_2 是由 G 中 $b=0$ 的那些函数构成的, 所以 S_2 是 G 的一个特殊子集, 即 $S_2 \subseteq G$; 又 $I(x) = x \in S_2$, 故 S_2 非空。

又对任何 $f, g \in S_2$, $f(x) = ax$, $g(x) = dx$, $a, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $d \neq 0$, $g^{-1}(x) = \frac{1}{d}x$, 使得

$$\begin{aligned} (f \circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x)) \\ &= f\left(\frac{1}{d}x\right) \\ &= \frac{a}{d}x \end{aligned}$$

因为 $\frac{a}{d} \in \mathbb{R}$, 且 $\frac{a}{d} \neq 0$, 故此 $f \circ g^{-1} \in S_2$ 。所以 $\langle S_2, 0 \rangle$ 是 $\langle G, 0 \rangle$ 的子群。

51. 设 $Z_6 = \{[1], [2], [3], [4], [5]\}$, $+_6$ 是 Z_6 上的模 6 加法。

$$\forall [a], [b] \in Z_6, [a] +_6 [b] = [(a+b) \bmod 6]$$

写出群 $\langle Z_6, +_6 \rangle$ 的所有子群及其相应的左陪集。

[解] 由于 $\langle Z_6, +_6 \rangle$ 是循环群, $[1]$ 是生成元。 $[0]$ 是幺元。根据循环群的子群都是循环群, 知 $\langle Z_6, +_6 \rangle$ 的子群都是循环群。根据 Lagrange 定理: $\langle Z_6, +_6 \rangle$ 的子群的阶只能是 1, 2, 3, 6 除平凡子群外, 只需找 Z_6 中的二阶元素和三阶元素即可生成二、三阶子循环群。

$\langle \{[0]\}, +_6 \rangle$ 为一阶子群, 其左陪集为

$$\{[0]\}, \{[1]\}, \{[2]\}, \{[3]\}, \{[4]\}, \{[5]\}$$

二阶子群为: $\langle \{[0], [3]\}, +_6 \rangle$ 其左陪集为:

$$\{[0], [3]\}, \{[1], [4]\}, \{[2], [5]\}$$

三阶子群: $\langle \{[0], [2], [4]\}, +_6 \rangle$ 其左陪集为:

$$\{[0], [2], [4]\}, \{[1], [3], [5]\}$$

六阶子群就是 $\langle Z_6, +_6 \rangle$, 其左陪集为:

$$\{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$$

52. 证明: 在由群 $\langle G, * \rangle$ 的子群 $\langle H, * \rangle$ 所确定的左陪集中, 只有一个陪集是子群。

[证] 群 $\langle G, * \rangle$ 中子群 $\langle H, * \rangle$ 的所有左陪集中, 有一个是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 这就是 $eH = H$ 。这说明了存在性。

如果还有 $a \in G$, 使得 $\langle H, * \rangle$ 的左陪集 aH 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 那么至少有 $e \in aH$, 从而存在着 $d \in H$, 使 $a*d=e$, 从而 $a=d^{-1}$, 由于 H 是群, 故有 $a=d^{-1} \in H$, 从而 $aH=H$ 。这证明了唯一性。

53. 设 P 是素数。证明: P^m 阶群中必有一个 P 阶子群。

[证] 设群 $\langle G, 0 \rangle$ 是任一阶为 P^m 的群。由于 $P > 1$, 故 $P^m > 1$, 从而必存在一元素 $a \in G$, $a \neq e$, 设 a 的阶为 n , 那么由 Lagrange 定理, 必有 $n | P^m$ 。便 $n \neq 1$ (因 $a \neq e$), 所以可设 $n = P^t$, $t \geq 1$ 。若 $t=1$, 那么 $n=P$, 因而循环子群 $\langle a \rangle$ 是一个阶为 P 的子群。若 $t > 1$, 则令 $b = a^{P^{t-1}}$, 那么 b 的阶为 P , 而循环子群 $\langle b \rangle$ 是一个阶为 P 的子群。

54. 证明: 循环群的同态象是循环群。

[证] 设群 $\langle G, 0 \rangle$ 是任一循环群, $\langle h(G), * \rangle$ 是该循环群之同态象, h 为同态函数。设 $a \in G$ 是 G 的生成元, 于是 $G = \langle a \rangle$, 并设 $g_0 = h(a)$, 则 $g_0 \in h(G)$, 由同态象的定义, 可知有 $a^m \in G = \langle a \rangle$, 使 $h(a^m) = g$, 根据同态公式可知 $g = h(a^m) = [h(a)]^m = (g_0)^m$ 。这样, $h(G)$ 的每一个元都是 g_0 的方幂。因而 $h(G) = \langle g_0 \rangle$, 从而 $\langle h(G), * \rangle$ 也为循环群。

55. 设 $\langle G, * \rangle$ 是群, $a \in G$, $f: G \rightarrow G$, $f(x) = a*x*a^{-1}$ 。证明: f 是从 $\langle G, * \rangle$ 到 $\langle G, * \rangle$ 的同构函数。

[证] (1) f 是双射函数

(a) f 是单射函数。对于任何 $x, y \in G$, 若 $f(x) = f(y)$, 从而有 $a*x*a^{-1} = a*y*a^{-1}$, 于是由群的消长律, 就有 $x=y$ 。因此 f 是单射。

(b) f 是满射函数。对于任何 $y \in G$, 存在着

$$\begin{aligned} x = a^{-1}*y*a \in G, \text{ 使得 } f(x) &= a*x*a^{-1} = a*(a^{-1}*y*a)*a^{-1} \\ &= (a*a^{-1})*y*(a*a^{-1}) = e*y*e = y \end{aligned}$$

(2) f 是同态函数

$$\begin{aligned} \text{对于任何 } x, y \in G, f(x*y) &= a*(x*y)*a^{-1} \\ &= (a*x*a^{-1})*(a*y*a^{-1}) = f(x)*f(y). \end{aligned}$$

从而 f 满足同态公式, 故此 f 是同态函数。

由 (1), (2) 可见, f 是从 $\langle G, * \rangle$ 到 $\langle G, * \rangle$ 的同构函数。

56. 设 f, g 是从群 $\langle X, * \rangle$ 到群 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的同态函数。证明 $\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle X, * \rangle$ 的子群。其中

$$H = \{x | x \in X \text{ 且 } f(x) = g(x)\}$$

[证] 根据 H 的定义, 显然有 $H \subseteq X$ 。设 e_X 群 $\langle X, * \rangle$ 的幺元, e_Y 是群 $\langle Y, \oplus \rangle$ 的幺元, 那么由 f, g 都是群同态可知:

$$f(e_X) = e_Y = g(e_X)$$

从而 $e_X \in H$, 故 H 非空。

对于任何 $a, b \in H$, 于是就有 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ 。

由 f, g 是群同态可知, $f(b^{-1}), g(b^{-1}) = (g(b))^{-1}$,

即得 $f(b^{-1}) = g(b^{-1})$, 因此

$$\begin{aligned} f(a * b^{-1}) &= f(a) * f(b^{-1}) \\ &= g(a) \otimes g(b^{-1}) \\ &= g(a * b^{-1}) \end{aligned}$$

所以, $a * b^{-1} \in H$, 因此 $\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle X, * \rangle$ 的子群。

57. 设 $\langle G, * \rangle$ 是群

$$R = \{ (x, y) \mid x, y \in G \text{ 且 } \exists z (y = z * x * z^{-1}) \}$$

证明: R 是 G 上的等价关系。

[证] (a) R 是自反的

对于任何 $x \in G$, 由于存在着 $x \in G$, 使 $x = x * x * x^{-1}$ 故此 $(x, x) \in R$ 。因而 R 自反。

(b) R 是对称的

如果 $(x, y) \in R$, 那么一定存在着 $z \in G$, 使 $y = zx^{-1}$ 从而存在着 $z^{-1} \in G$, 使 $x = z^{-1} * y (z^{-1})^{-1}$ 故此 $(y, x) \in R$, 所以 R 对称。

(c) R 是传递的

如果 $(x, y) \in R$, 且 $(y, z) \in R$, 那么存在着 $g_1, g_2 \in G$ 使 $y = g_1 * x * g_1^{-1}$, $z = g_2 * y * g_2^{-1}$, 从而存在着 $g = g_2 * g_1$, 使 $z = g_2 * y * g_2^{-1} = g_2 (g_1 * x * g_1^{-1}) * g_2^{-1} = (g_2 * g_1) * x (g_1^{-1} * g_2^{-1}) = (g_2 * g_1) * x * (g_2 * g_1)^{-1} = g * x * g^{-1}$, 故此 $(x, z) \in R$ 。于是 R 是传递的。

由 (a), (b), (c) 可见, R 是 G 上的等价关系。

58. 设 $\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群。若 $\forall a \in G$, 有 $aH = Ha$, 则称 $\langle H, * \rangle$ 为群 $\langle G, * \rangle$ 的不变子群。

a) 设 $\langle G, * \rangle$ 是偶数阶群, $\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群, $|H| = |G|/2$, 证明: $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的不变子群。

b) 设 $\langle G, * \rangle$ 是群, $H = \{ a \mid a \in G \text{ 且 } (\forall b \in G) (a * b = b * a) \}$ 。

证明: $\langle H, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的不变子群。

c) 设 $\langle H_1, * \rangle, \langle H_2, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的不变子群。证明: $\langle H_1 \cap H_2, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的不变子群。

[证] 不变子群也称为正规子群。记作 $H \triangleleft$ 或 $G \triangleright H$ 。

a) $|G|/|H|$ 称为子群 H 在群 G 的指数, 记作 $|G:H|$ 。因而这里 $|G:H|=2$ 。对于任意的 $a \in G$, 若 $a \in H$, 则有

$$aH = H = Ha$$

若 $a \notin H$, 则由于 H 的指数为 2, 从而有 $G = H \cup aH$ 且 $G = H \cup Ha$, 因此, 有 $aH = Ha$ 。因此 $\langle H, * \rangle$ 是不变子群。

b) ①先证 $\langle H, * \rangle$ 是一子群。

由 H 的定义, 显然有 $H \subseteq G$ 。其次由于 $e \in G$ 且对任何的 $b \in G$, 有 $e*b = b = b*e$, 故 $e \in H$, 因而 H 非空。对于任何 $a, c \in H$, 对于一切的 $b \in G$, 有 $a*b = b*a$ 以及 $c*b = b*c$, 即 $c^{-1}*b = b*c^{-1}$ 。

所以, 对一切的 $b \in G$, 就有

$$\begin{aligned} (a*c^{-1}) * b &= a * (c^{-1} * b) \\ &= a * (b * c^{-1}) \\ &= (a * b) * c^{-1} \\ &= (b * a) * c^{-1} \\ &= b * (a * c^{-1}) \end{aligned}$$

因此, $a*c^{-1} \in H$ 。所以, $\langle H, * \rangle$ 是一个子群。

②对于任何元素 $b \in G$, 对于任何元素 $a \in H$, 因为有 $a*b = b*a$, 所以 $bH = Hb$ 。故此 $\langle H, * \rangle$ 是不变子群。

c) 由于 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$ 是 G 的两个不变子群。那么 $\langle H_1 \cap H_2, * \rangle$ 是 G 的一个子群 (习题 46)。我们先来证对任何元素 $a \in G$, 均有

$$a(H_1 \cap H_2) = aH_1 \cap aH_2, (H_1 \cap H_2)a = H_1a \cap Ha$$

对于任何 $a*h \in a(H_1 \cap H_2)$, 这里 $h \in H_1 \cap H_2$, 则有 $h \in H_1$ 且 $h \in H_2$, 故此 $a*ha \in H_1$ 且 $a*h \in aH_2$, 因此 $a*h \in aH_1 \cap aH_2$, 从而 $a(H_1 \cap H_2) \subseteq aH_1 \cap aH_2$; 另一方面, 若 $b \in aH_1 \cap aH_2$, 那么 $b \in aH_1$ 且 $b \in aH_2$, 从而存在着 $h_1 \in H_1$ 及 $h_2 \in H_2$, 使 $b = a*h_1$, 和 $b = a*h_2$, 于是 $a*h_1 = a*h_2$, 根据群 G 的消去律可知, $h_1 = h_2$, 不妨设为 h , 于是有 $h \in H_1$ 及 $h \in H_2$, 从而 $h \in H_1 \cap H_2$, 因此 $b = a*h \in a(H_1 \cap H_2)$, 因而 $aH_1 \cap aH_2 \subseteq a(H_1 \cap H_2)$ 。由此可见 $a(H_1 \cap H_2) = aH_1 \cap aH_2$ 。同理可证 $(H_1 \cap H_2)a = H_1a \cap H_2a$ 。

对于任何元素 $a \in G$, 由于 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$ 是 G 的不变子群, 因此有 $aH_1=H_1a$ 和 $aH_2=H_2a$, 从而

$$a(H_1 \cap H_2) = aH_1 \cap aH_2 = H_1a \cap H_2a = (H_1 \cap H_2)a$$

所以 $\langle H_1 \cap H_2, * \rangle$ 是 G 的不变子群。

59. 设 I 是整数集合, \otimes 和 \oplus 是 I 上的两个二元运算。

$$\forall a, b \in I, a \oplus b = a + b - 1$$

$$a \otimes b = a + b - ab$$

证明: $\langle I, \oplus, \otimes \rangle$ 是有么元的交换环。

[证] 1) $\langle I, \oplus \rangle$ 是交换群

封闭性: 对于任何 $a \in I, b \in I, a \oplus b = a + b - 1 \in I$, 且运算结果唯一。

结合律: 结 对任何 $a \in I, b \in I, c \in I$,

$$(a \oplus b) \oplus c = (a + b - 1) \oplus c = (a + b - 1) + c - 1 = a + b + c - 2$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c - 1) = a + (b + c - 1) - 1 = a + b + c - 2$$

$$\text{故 } (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

有么元: 么元为 $1 \in I$, 对任何 $a \in I$,

$$1 \oplus a = 1 + a - 1 = a + 1 - 1 = a \oplus 1$$

有逆元: 对任何 $a \in I$, 有 $-a+2 \in I$, 使得

$$(-a+2) \oplus a = (-a+2) + a - 1 = 1$$

$$a \oplus (-a+2) = a + (-a+2) - 1 = 1$$

$$\text{故 } (-a+2) \oplus a = a \oplus (-a+2) = 1$$

交换律: 对任何 $a, b \in I$, 有

$$a \oplus b = a + b - 1 = b + a - 1 = b \oplus a$$

2) $\langle I, \otimes \rangle$ 是交换半群

封闭性: 对任何 $a, b \in I, a \otimes b = a + b - ab \in I$, 且运算结果唯一。

结合律: 对任何 $a, b, c \in I$

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \otimes c &= (a + b - ab) \otimes c = (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c \\ &= a + b + c - (ab + ac + bc) + abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \otimes (b \otimes c) &= a \otimes (b + c - bc) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) \\ &= a + b + c - (ab + ac + bc) + abc \end{aligned}$$

$$\text{故 } (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

交换律: 对任何 $a, b \in I$, 有

$$a \otimes b = a + b - ab = b + a - ba = b \otimes a$$

3) \otimes 对 \oplus 满足分配律

对任何 $a, b, c \in I$, 有

$$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= a \otimes (b+c-1) = a + (b+c-1) - a(b+c-1) \\ &= a+b+c-1-ab-ac+a \\ &= (a+b-ab) + (a+c-ac) -1 \\ &= (a \otimes b) + (a \otimes c) -1 \\ &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \end{aligned}$$

由于 \otimes 是可交换的, 因此另一分配公式

$$(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$$

也成立。

由此可见 $\langle I, \oplus, \otimes \rangle$ 是一个交换环。

60. 设 $\langle X, +, \times \rangle$ 是代数系统, $+$ 和 \times 是普通数的加法和乘法。问当 X 取下列集合时, $\langle X, +, \times \rangle$ 是整环吗? 为什么?

- a) $X = \{x \mid x=2n, n \in I\}$
- b) $X = \{x \mid x=2n+1, n \in I\}$
- c) $X = \{x \mid x \geq 0, x \in I\}$
- d) $X = \{x = a+b\sqrt[4]{5}, a, b \in R\}$
- e) $X = \{x \mid x = a+b\sqrt{3}, a, b \in R\}$ 。

[解] a) 不是整环。因为关于普通乘法没有幺元, 即 $1 \notin X$ 。

b) 不是整环。因为 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是环, 两个奇数相加是偶数, 不是奇数, 普通加法运算在奇整数集 X 上不封闭。

c) 不是整环。因为 $\langle X, +, \times \rangle$ 不是环, 每个正整数的负元小于零, 普通加法运算没有负元 (加法幺元) 存在。

d) 是整环。证明如下:

对任何 $a, b, c, d \in R$,

$$(a+b\sqrt[4]{5})(c+d\sqrt[4]{5}) = (ac+bd\sqrt[4]{5}) + (ad+bc)\sqrt[4]{5}$$

这里 $(a+c), (b+d), (ac+bd\sqrt[4]{5}), (ad+bc)$ 仍是实数。

所以 X 对普通加法和乘法来说是封闭的。

普通加法和乘法运算适合结合律, 交换律和分配律。

零元为 $0=0+0 \cdot \sqrt[4]{5} \in X$

幺元为 $1=1+0 \cdot \sqrt[4]{5} \in X$

对于任何 $a+b\sqrt[4]{5} \in X$, 其负元 $(-a) + (-b)\sqrt[4]{5} \in X$ 且 $(a+b\sqrt[4]{5}) + ((-a) + (-b)\sqrt[4]{5}) = 0$

两个非零实数的乘积不等于零。

所以 $\langle X, +, \times \rangle$ 是一个整环。

e) 是整环。证明如下:

对任何 $a, b, d \in \mathbb{R}$,]

$$(a+b\sqrt{3}) + (c+d\sqrt{3}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{3}$$

$$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3}) = (ac+3bd) + (ad+bc)\sqrt{3}$$

这里 $(a+c)$, $(b+d)$, $(ac+3bd)$, $(ad+bc)$ 仍是实数。

所以 X 对普通加法和乘法来说是封闭的。

普通加法和乘法运算适合结合律, 交换律和分配律。

零元为 $0=0+0 \cdot \sqrt{3} \in X$

幺元为 $1=1+0 \cdot \sqrt{3} \in X$

对任何 $a+b\sqrt{3} \in X$, 其负元为 $-a-b\sqrt{3} \in X$ 。即

$$(a+b\sqrt{3}) + (-a-b\sqrt{3}) = 0。$$

两个非零实数的乘积不等于零。

所以 $\langle X, +, \times \rangle$ 是一个整环。

61. 设 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是环, $\forall x \in R$, 有 $x \oplus x = 0$, 其中 0 是关于 \oplus 的幺元;

a) $\forall x \in R$, 有 $x \oplus x = 0$, 其中 0 是关于 \oplus 的幺元;

b) $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是交换环。

[证] a) 对于任意的元素 $a \in R$, 因为 \oplus 的封闭性, 所以有 $a \oplus a \in R$ 。因而 $((a \otimes a) \oplus (a \otimes a)) \oplus ((a \otimes a) \oplus (a \otimes a)) = a \oplus a$ 再次利用 $a \otimes a = a$, 就有

$$(a \oplus a) \oplus (a \oplus a) = a \oplus a$$

因为 $\langle R, \oplus \rangle$ 是一个群, 所以 $a \oplus a$ 的逆元 (负元) 存在, 即 $-(a \oplus a) \in R$, 故此有 $(a \oplus a) \oplus (a \oplus a) \oplus (-(a \oplus a)) = (a \oplus a) \oplus (-(a \oplus a))$

因此

$$a \oplus a = 0$$

c) 对于任意元素 $a, b \in R$, 由 \oplus 运算的封闭性, 有 $a \oplus b \in R$ 故此

$$(a \oplus b) \otimes (a \oplus b) = a \oplus b$$

利用 \oplus 运算对 \otimes 运算的分配律, 可得

$$(a \otimes a) \oplus (a \otimes b) \oplus (b \otimes a) \oplus (b \otimes b) = a \oplus b$$

再次利用 $a \otimes a = a$, $b \otimes b = b$, 就得到

$$a \oplus (a \otimes b) \oplus (b \otimes a) \oplus b = a \oplus b$$

由 a, b 的负元 $-a, -b \in R$ 存在, 可得

$$(a \otimes b) \oplus (b \otimes a) = 0$$

又由 \otimes 运算的封闭性, 可知 $a \otimes b \in R$ 因而由 a) 的结论可得

$$(a \otimes b) \oplus (a \otimes b) = 0$$

所以 $(a \otimes b) \oplus (a \otimes b) \oplus (b \otimes a) = 0 \oplus (b \otimes a)$

即

$$a \otimes b = b \otimes a$$

所以 \otimes 运算是可交换的, 故 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是交换环。

62. 设 X 是所有有理数对 (x, y) 的集合。在 X 上定义两个二元运算 \oplus, \otimes 如下

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$$

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

问 $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 是否地环, 它有元零因子, 关于 \otimes 运算是否有么元, 哪些元素关于 \otimes 运算有逆元。

[解] 对于任何 $a, b, c, d \in Q$ 由于

$a+c, b+d, ac, bd \in Q$, 故此 $(a, b) \otimes (c, d) \in X$, $(a, b) \otimes (c, d) \in X$, 即 X 对 \oplus 运算, \otimes 运算封闭。

由于普通加法和乘法有结合律, 交换律和分配律, 所以易验证 \oplus 运算和 \otimes 运算有结合律, 交换律和分配律。

\oplus 运算的么元(零元)存在, 为 $(0, 0) \in X$

对任何 $(a, b) \in X$, 其负元为 $(-a, -b) \in X$ 存在

所以, $\langle X, \oplus, \otimes \rangle$ 是环。

关于 \otimes 运算有么元存在, 为 $(1, 1) \in X$

它有零因子, 因为当 $a, b \in Q$ $a \neq 0$ $b \neq 0$ 时, 有 $(a, 0) \neq (0, 0)$, $(0, b) \neq (0, 0)$ 但是

$$(a, 0) \otimes (0, b) = (0, 0)$$

对于 $a, b \in Q$, $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时 $(a, b) \in X$ 有逆元(关于 \otimes 运算)其逆元为

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \in X。$$

63. 设 I 是整数集合, $+$ 和 \times 是整数的加法和乘法。证明: 对任何整数 m , $\langle \{mx \mid x \in I\}, +, \times \rangle$ 是环 $\langle I, +, \times \rangle$ 的子环。

[证] 对于任何 $a, b \in I$,

$$ma + mb = m(a + b)$$

$$ma \cdot mb = m \cdot mab$$

这里 $a+b, mab$ 仍是整数, 所以 $\{mx \mid x \in I\}$ 对普通加法和乘法封闭。

普通加法和乘法具有结合律、交换律和分配律。

零元 $0 = m \cdot 0 \in \{mx \mid x \in I\}$

对于任何 $mx \in \{mx \mid x \in I\}$ 其负元 $-mx = m \cdot (-x) \in \{mx \mid x \in I\}$ 存在。

显然 $\{mx \mid x \in I\} \subseteq I$, 故此, $\langle \{mx \mid x \in I\}, +, \times \rangle$ 是环 $\langle I, +, \times \rangle$ 的子环。

64. 证明: 环的同态象是环。

[证] 设 $\langle X, +, * \rangle$ 是一环, h 是 X 上的同态函数, $h(X)$ 为其同态象, 我们来证 $\langle h(X), \oplus, \otimes \rangle$ 是一环。

① $\langle h(X), \oplus \rangle$ 是交换群

封闭性: 对任何 $a, b \in h(X)$, 存在着 $x, y \in X$, 使 $h(x) = a$,

$h(y) = b$, 因此根据同态公式, 有

$$a \oplus b = h(x) \oplus h(y) = h(x+y)$$

根据 $+$ 运算的封闭性知 $x+y \in X$, 因而 $a \oplus b = h(x+y) \in h(X)$ 。

结合律: 对任何 $a, b, c \in h(X)$, 存在着 $x, y, z \in X$, 使 $h(x) = a$, $h(y) = b$,

$h(z) = c$, 根据同态公式及 $+$ 运算的结合律有

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= (h(x) \oplus h(y)) \oplus h(z) = h(x+y) \oplus h(z) = h((x+y)+z) \\ &= a \oplus (b \oplus c) \end{aligned}$$

有么元: 设 $0 \in X$ 为交换群 $\langle X, + \rangle$ 的么元, 则 $0' = h(0) \in h(X)$ 是 $\langle h(X),$

$\oplus \rangle$ 的么元, 因为对任何 $a \in h(X)$, 存在着 $x \in X$, 使 $h(x) = a$, 由

$x+0=0+x=x$, 及同态公式就有

$$a \oplus 0' = h(x) \oplus h(0) = h(x+0) = h(x) = a$$

$$0' \oplus a = h(0) \oplus h(x) = h(0+x) = h(x) = a$$

从而 $a \oplus 0' = 0' \oplus a = a$

有逆元: 对任何 $a \in h(X)$, 存在着 $x \in X$, 使 $h(x) = a$, 由交换群 $\langle X, + \rangle$ 中

每一元都存在着逆元, 可得有 $-x \in X$ 存在

使 $x + (-x) = (-x) + x = 0$

因此, 令 $-a = h(-x) \in h(X)$, 则 $-a$ 为 a 的逆元

因为由同态公式, 有

$$a \oplus (-a) = h(x) \oplus h(-x) = h(x+(-x)) = h(0) = 0'$$

$$(-a) \oplus a = h(-x) \oplus h(x) = h((-x)+x) = h(0) = 0'$$

从而 $a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0'$

可交换: 对 $a, b \in h(X)$, 存在着 $x, y \in X$, 使 $h(x) = a$, $h(y) = b$

根据同态公式及运算 $+$ 的交换律, 可得

$$a \oplus b = h(x) \oplus h(y) = h(x+y) = h(y+x) = h(y) \oplus h(x)$$

$$=b\oplus a$$

② $\langle h(X), \otimes \rangle$ 是半群

封闭性: 对任何 $a, b \in h(X)$, 存在着 $x, y \in X$, 使 $h(x) = a, h(y) = b$,

因此由同态公式及 \times 运算的封闭性, 就有

$$a \otimes b = h(x) \otimes h(y) = h(x * y) \in h(X)$$

结合律: 对任何 $a, b, c \in h(X)$, 存在着 $x, y, z \in X$, 使 $h(x) = a, h(y) = b,$

$h(z) = c$, 根据同态公式及 $*$ 运算的结合律, 有

$$\begin{aligned} a \otimes b \otimes c &= (h(x) \otimes h(y)) \otimes h(z) = h(x * y) \otimes h(z) \\ &= h((x * y) * z) = h(x * (y * z)) = h(x) \otimes h(y * z) \\ &= h(x) \otimes (h(y) \otimes h(z)) = a \otimes (b \otimes c) \end{aligned}$$

③ \otimes 运算对 \oplus 运算有分配律: 对任何 $a, b, c \in h(X)$, 存在着 $x, y, z \in X$, 使 $h(x) = a, h(y) = b, h(z) = c$, 根据 $*$ 运算对 $+$ 运算的分配律及两个同态公式, 就有

$$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= h(x) \otimes (h(y) \oplus h(z)) \\ &= h(x) \otimes h(y + z) \\ &= h(x * (y + z)) \\ &= h((x * y) + (x * z)) \\ &= h(x * y) \oplus h(x * z) \\ &= (h(x) \otimes h(y)) \oplus (h(x) \otimes h(z)) \\ &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \end{aligned}$$

同理可证 $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$

65. 设 $\langle S, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的子环。若 $\forall x \in S, \forall y \in R$, 有 $x \otimes y \in S, y \otimes x \in S$, 则称 $\langle S, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的理想。

a) 求环 $\langle Nm, +_m, \times_m \rangle$ 的所有子环和理想, 其中 m 分别是 6, 8, 11。

b) 设 $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$ 和 $\langle S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的理想。证明: $\langle S_1 \cap S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 和 $\langle S_1 S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 也是 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的理想, 其中 $S_1 S_2 = \{x \oplus y \mid x \in S_1, y \in S_2\}$ 。

c) 设 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是交换环, $a \in R$, 0 是关于 \oplus 的么元。证明: $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的理想, 其中

$$S = \{x \mid x \in R \text{ 且 } x \otimes a = 0\}$$

[解] a) ① 环 $\langle N_6, +_6, \times_6 \rangle$, $N_6 = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$ 它的子环有

$$\langle \{[0]_6\}, +_6, \times_6 \rangle$$

$$\langle \{[0]_6, [3]_6\}, +_6, \times_6 \rangle$$

$$\langle \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}, +_6, \times_6 \rangle$$

$$\langle N_6, +_6, \times_6 \rangle$$

它们都是环 $\langle N_6, +_6, \times_6 \rangle$ 的理想。

② 环 $\langle N_8, +_8, \times_8 \rangle$, $N_8 = \{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\}$, 它的子环有

$$\langle \{[0]_8\}, +_8, \times_8 \rangle$$

$$\langle \{[0]_8, [4]_8\}, +_8, \times_8 \rangle$$

$$\langle \{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\}, +_8, \times_8 \rangle$$

$$\langle N_8, +_8, \times_8 \rangle$$

它们都是环 $\langle N_8, +_8, \times_8 \rangle$ 的理想。

③ 环 $\langle N_{11}, +_{11}, \times_{11} \rangle$

$\langle \{[0]_{11}\}, +_{11}, \times_{11} \rangle$ 和 $\langle N_{11}, +_{11}, \times_{11} \rangle$ 。它们是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的仅有的两个理想。

b) 1° 先证 $\langle S_1 \cap S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的理想。

① 由于 $\langle S_1, \oplus \rangle$ 和 $\langle S_2, \oplus \rangle$ 都是 $\langle R, \oplus \rangle$ 的子交换群, 因此, 根据习题 46, 知 $\langle S_1 \cap S_2, \oplus \rangle$ 也是 $\langle R, \oplus \rangle$ 的子群; \oplus 的交换遗传, 故此, $\langle S_1 \cap S_2, \oplus \rangle$ 也是 $\langle R, \oplus \rangle$ 的子交换群。

② 由于 $\langle S_1, \oplus \rangle$ 和 $\langle S_2, \oplus \rangle$ 都是 $\langle R, \oplus \rangle$ 的子半群, 显然 $S_1 \cap S_2 \subseteq R$; 又因为 $0 \in S_1$, 所以 $0 \in S_1 \cap S_2$, 从而 $S_1 \cap S_2$ 非空; 对于任何 $a, b \in S_1 \cap S_2$, 则有 $a, b \in S_1$, $a, b \in S_2$, 从而由 $\langle S_1, \oplus \rangle$ 和 $\langle S_2, \oplus \rangle$ 的封闭性可得 $a \otimes b \in S_1$, $a \otimes b \in S_2$, 所以 $a \otimes b \in S_1 \cap S_2$, 因而 $\langle S_1 \cap S_2, \otimes \rangle$ 具有封闭性; \otimes 运算的结合遗传; 所以 $\langle S_1 \cap S_2, \otimes \rangle$ 是 $\langle R, \otimes \rangle$ 的子半群。

③ \otimes 运算对 \oplus 运算的分配律遗传。

①, ②, ③ 已证明了 $\langle S_1 \cap S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的子环。

④ 由于对于任何 $x \in S_1$, $x \in S_2$, $y \in R$, 都有 $x \otimes y, y \otimes x \in S_1$, $x \otimes y, y \otimes x \in S_2$, 因此, 对任何 $x \in S_1 \cap S_2$, $y \in R$, 就有 $x \in S_1$, $x \in S_2$, 所以 $x \otimes y, y \otimes x \in S_1$ 及 $x \otimes y \in S_2$, 因而 $x \otimes y, y \otimes x \in S_1 \cap S_2$ 。所以 $\langle S_1 \cap S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 具有内吸性。

综合这四点, 可知是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的一个理想。

2° 次证 $\langle S_1 S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的理想。

① 由于 $\langle S_1, \oplus \rangle$ 和 $\langle S_2, \oplus \rangle$ 都是 $\langle R, \oplus \rangle$ 的子交换群, 并由 $\langle R, \oplus \rangle$ 是交换群, \oplus 运算具有交换律。得到

$$S_1 S_2 = \{S_1 \oplus S_2 \mid S_1 \in S_1 \text{ 且 } S_2 \in S_2\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{S_2 S_1 | S_1 \in S_2 \text{ 且 } S_1 \in S_1\} \\
&= S_2 S_1
\end{aligned}$$

从而根据习题 47 可得 $\langle S_1 S_2, \oplus \rangle$ 是 $\langle R, \oplus \rangle$ 的子群； \oplus 运算的交换律遗传；所 $\langle S_1 S_2, \oplus \rangle$ 是 $\langle R, \oplus \rangle$ 的子交换群。

② 由于 $\langle S_1, \otimes \rangle$ 和 $\langle S_2, \otimes \rangle$ 都是 $\langle R, \otimes \rangle$ 的子半群，根据 R 对 \oplus 运算的封闭性，可知 $S_1 S_2 = \{S_1 \oplus S_2 | S_1 \in S_1 \text{ 且 } S_2 \in S_2\} \subseteq R$ ；由于 $0=0 \in S_1 S_2$ ，知 $S_1 S_2$ 非空；对于任何 $a, b \in S_1 S_2$ ，知存在着 $s_1, s_1' \in S_1, s_2, s_2' \in S_2$ ，使得 $a = s_1 \oplus s_2, b = s_1' \oplus s_2'$ ，根据 \otimes 对 \oplus 的分配律以及 \oplus 的结合律可知

$$\begin{aligned}
a \otimes b &= (s_1 \oplus s_2) \otimes (s_1' \oplus s_2') \\
&= ((s_1 \otimes s_1') \oplus (s_1 \otimes s_2')) \otimes ((s_2 \otimes s_1') \oplus (s_2 \otimes s_2'))
\end{aligned}$$

根据 $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$ 是理想，具有内吸性，所以 $s_1 \otimes s_2' \in S_1, s_1 \otimes s_1' \in S_1$ 从而由 S_1 对 \oplus 运算的封闭性，可知 $(s_1 \otimes s_1') \oplus (s_1 \otimes s_2') \in S_1$ ，根据 $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$ 是理想，具有内吸性，所以 $s_2 \otimes s_1' \in S_2, s_2 \otimes s_2' \in S_2$ ，从而由 S_2 对运算的封闭性，可知 $(s_2 \otimes s_1') \oplus (s_2 \otimes s_2') \in S_2$ ，因而 $a \otimes b = ((s_1 \otimes s_1') \oplus (s_1 \otimes s_2')) \oplus ((s_2 \otimes s_1') \oplus (s_2 \otimes s_2')) \in S_1 S_2$ ，所以 $\langle S_1 S_2, \otimes \rangle$ 是封闭的； \otimes 运算的结合律遗传；所以 $\langle S_1 S_2, \otimes \rangle$ 是 $\langle R, \otimes \rangle$ 的子半群。

③ \otimes 运算对 \oplus 运算的分配律遗传。

①，②，③ 已证明了 $\langle S_1 S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的子环。

④ 由于 $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$ 和 $\langle S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 都是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的理想，故都具有内吸性。因此，对任何 $x = s_1 \oplus s_2 \in S_1 S_2$ （其中 $s_1 \in S_2$ ）， $y \in R$ ，根据 \otimes 对 \oplus 的分配律，可得

$$\begin{aligned}
x \otimes y &= (s_1 \oplus s_2) \otimes y = (s_1 \otimes y) \oplus (s_2 \otimes y) \\
y \otimes x &= y \otimes (s_1 \oplus s_2) = (y \otimes s_1) \oplus (y \otimes s_2)
\end{aligned}$$

根据内吸性，可知 $s_1 \otimes y, y \otimes s_1 \in S_1, s_2 \otimes y, y \otimes s_2 \in S_2$ ，因此 $x \otimes y = (s_1 \otimes y) \oplus (s_2 \otimes y) \in S_1 S_2, y \otimes x = (y \otimes s_1) \oplus (y \otimes s_2) \in S_1 S_2$ 故此环 $\langle S_1 S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 具有内吸性。

综合这四点，可知 $\langle S_1 S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的一个理想。

c) 由于 $0 \otimes a = 0$ ，故 $0 \in S = \{x | x \in R \text{ 且 } x \otimes a = 0\}$ ，所以 S 非空；对于任何 $x, y \in S$ ，就有 $x \otimes a = 0, y \otimes a = 0$ ，所以根据 \otimes 对 \oplus 的分配律以及 \otimes 的结合律可得

$$\begin{aligned}
(x \oplus y) \otimes a &= (x \otimes a) \oplus (y \otimes a) = 0 \oplus 0 = 0 \\
(x \otimes y) \otimes a &= (x \otimes a) \otimes (y \otimes a) = 0 \otimes 0 = 0
\end{aligned}$$

所以 $x \oplus y, x \otimes y \in S$ ，故此 S 关于 \oplus 和 \otimes 运算封闭； \oplus 运算的结合律，交换律， \otimes 运算的结合律，对 \oplus 的分配律等都遗传；由于 $0 \in S$ 已知，故关于 \oplus 运算有么元

(零元); 对于任何 $x \in S$, 就有 $x \otimes a = 0$, 因而由 \otimes 的分配, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \otimes a \\ &= (x \oplus (-x)) \otimes a \\ &= (x \otimes a) \oplus ((-x) \otimes a) \\ &= 0 \oplus ((-x) \otimes a) \\ &= (-x) \otimes a \end{aligned}$$

故此 $-x \in S$; 所以 $\langle S, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的子环。

对于任何 $x \in S, y \in R$, 就有 $x \otimes a = 0$, 于是, 由 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是交换环, 知 \otimes 运算具有交换律, 加上 \otimes 运算的结合律, 可得

$$\begin{aligned} (x \otimes y) \otimes a &= x \otimes (y \otimes a) = x \otimes (a \otimes y) = (x \otimes a) \otimes y = 0 \otimes y = 0 \\ (y \otimes x) \otimes a &= y \otimes (x \otimes a) = y \otimes 0 = 0 \end{aligned}$$

因此, $xy, y \otimes x \in S$, 所以 $\langle S, \oplus, \otimes \rangle$ 具有内吸性。

综合各点, 可知 $\langle S, \oplus, \otimes \rangle$ 是环 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 的一个理想。

66. 求解域 $\langle F, \oplus, \rangle$ 中的方程组

$$x \oplus (c \otimes y) = a \quad (1)$$

$$(c \otimes x) \oplus y = b \quad (2)$$

[解] 由于 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 是域, 所以 $0, 1 \in F$ 并且对任何元素 $x \in F$, 存在着负元和逆元, $-x, x^{-1} \in F$ 。我们采用缩记法, 对任何 $x, y \in F$, $x \oplus y$, 记为 $x+y$, $x \otimes y$ 记为 $x \cdot y$ 或 xy , 并且 $x \oplus (-y)$ 记为 $x-y$, 利用 $-x = (-1) \cdot x$ 及 $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -x \cdot y$, 我们可以将 (1) (2) 变为

$$x+cy=a \quad (3)$$

$$cx+y=b \quad (4)$$

从而由 (3) 可得 $x=as-cy$ (5), 将 (5) 代入 (4) 可得

$$c(a-cy)+y=b$$

$$\text{或者} \quad ca-c^2y+y=b$$

$$\text{或者} \quad (c^2-1)y=ca-b$$

$$\text{从而} \quad y=(c^2-1)^{-1}(ca-b) \quad (6)$$

代入 (5) 可得

$$x=a-c(c^2-1)^{-1}(ca-b) \quad (7)$$

因此, 原方程组的解为

$$\begin{cases} x = a - c(c^2 - 1)^{-1}(ca - b) & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = (c^2 - 1)^{-1}(ca - b) & (9) \end{cases}$$

$$\text{或者} \begin{cases} x = a \oplus [(-c) \otimes ((c \otimes c) \oplus (-1))^{-1} \otimes ((c \otimes a) \oplus (-b))] & (10) \\ y = ((c \otimes c) \oplus (-1))^{-1} \otimes ((c \otimes a) \oplus (-b)) & (11) \end{cases}$$

67. 设 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 是域, $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 的子环. 问 $\langle R, \oplus, \otimes \rangle$ 是否是整环?

[解] 不一定. 有反例, 令 F =实数集, \oplus 为普通加法 \otimes 为普通乘法, 故此 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 是实数域. 令 R =偶整灵敏集 $\{\cdots-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$, 则 $\langle R, +, \times \rangle$ 是 $\langle F, +, \times \rangle$ 的子环. 但 $\langle F, +, \times \rangle$ 的乘法幺元 $1 \notin R$, 故此 $\langle R, +, \times \rangle$ 不是整环.

68. 设 $\langle X, +, \times \rangle$ 是代数系统, $+$ 和 \times 是普通数的加法和乘法, 当 X 为下列集合时, 问 $\langle X, +, \times \rangle$ 是否是域? 为什么?

- a) $X = \{x \mid x \geq 0, x \in I\}$
- b) $X = \{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \in Q\}$
- c) $X = \{x \mid x = a + b\sqrt[3]{5}, a, b \in Q\}$
- d) $X = \{x \mid x = a + b\sqrt{5}, a, b \in Q\}$
- e) $X = \{x \mid x = a/b, a, b \in N, a \neq kb\}$

其中, I 为整数集合, Q 为有理数集合, N 为自然数集合.

[解] a) 不是. 因为对于任何 $x \in X, x \neq 0, x$ 的负元和逆元不存在.

b) 是域. 根据习题 60 的 e) 的解, 已证得 $\langle X, +, \times \rangle$ 是整环. 其次, 设 $a + b\sqrt{3}$ 是 F 的任一非零元, 那么 a 与 b 不能都等于零, 此时 $a^2 - 3b^2 \neq 0$, 否则将有 $a^2 = 3\sqrt{3}b^2$. 若 $b=0$, 将有 $a=0$, 与假设矛盾; 若 $b \neq 0$, 将有 $\pm\sqrt{3}$, 与 $\frac{a}{b}$ 是

有理数矛盾. 容易算出

$$(a + b\sqrt{3}) \left(\frac{a}{a^2 - 3b^2} - \frac{b}{a^2 - 3b^2} \right) = 1$$

并且 $\frac{a}{a^2 - 3b^2} - \frac{b}{a^2 - 3b^2} \in Q$ 故此

$$(a + b\sqrt{3})^{-1} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} - \frac{b}{a^2 - 3b^2} \sqrt{3} \in X$$

即逆元 (关于乘法) 存在 因此 $\langle X, +, \times \rangle$ 是域.

c) 不是. 因为关于乘法不封闭. 即对于任何 $a, b, c, d \in Q$

$$(a + b\sqrt[3]{5}) \in X, (c + d\sqrt[3]{5}) \in X, \text{当 } bd \neq 0 \text{ (即 } b \neq 0 \text{ 且 } d \neq 0 \text{) 时 } (a + b\sqrt[3]{5})(c + d\sqrt[3]{5}) = ac + (ad + bc + bd\sqrt[3]{5})\sqrt[3]{5}$$

虽然 $ac \in Q$, 但是 $ad + bc + bd\sqrt[3]{5} \notin Q$, 不是有理数, 因此

$$ac + (ad + bc + bd\sqrt[3]{5})\sqrt[3]{5} \notin X$$

故 $(a+b\sqrt[3]{5})(c+d\sqrt[3]{5}) \notin X$

d) 是域。仿习题 60 的 e) 的证明, 易证 $\langle X, +, \times \rangle$ 是整环。并且仿上边 b) 易证, 对任何元素 $a+b\sqrt{5} \in X$, 且 a 与 b 不同时为零, 有乘法逆元存在

$$(a+b\sqrt{5})^{-1} = \frac{a}{a^2-5b^2} - \frac{b}{a^2-5b^2}\sqrt{5} \in X$$

所以 $\langle X, +, \times \rangle$ 是域。

e) 不是。因为关于加法没有零元及负元。

69. 设 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 是域, $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$ 和 $\langle S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是证明: $\langle S_1 \cap S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 的子域。

[证] 显然 $S_1 \cap S_2 \subseteq F$; 另外由于 $0, 1 \in S_1, 0, 1 \in S_2$, 故 $0, 1 \in S_1 \cap S_2$, 所以 $S_1 \cap S_2$ 非空; 对任何 $a, b \in S_1 \cap S_2$ 由于 $\langle S_1, \oplus, \otimes \rangle$ 和 $\langle S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 的子域, 所以 $a \oplus (-b), a \otimes b^{-1} \in S_1, a \oplus (-b), a \otimes b^{-1} \in S_2$, 故此 $a \oplus (-b), a \otimes b^{-1} \in S_1 \cap S_2$, 所以 $\langle S_1 \cap S_2, \oplus, \otimes \rangle$ 是域 $\langle F, \oplus, \otimes \rangle$ 的子域。

70. 问是否有 4 个元素的域。若有, 请写出其运算表。若没有, 请说明理由。

[解] 有 4 个元素的域。因为 $4=2^2$, 2 为素数, 根据有限域的 Galois 理论, 对任何素数 p , 对任何自然数 n , P^n 阶有限域存在, 因此 4 阶有限域存在。

模 $1+x+x^2$ 的多项式为 $\langle F_2[x], \oplus, \otimes \rangle$, 其中

$F_2[x] = \{0, 1, x, 1+x\}$, 运算表如下:

\otimes	0	1	x	$1+x$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$1+x$
x	0	x	$1+x$	1
$1+x$	0	$1+x$	1	x

\oplus	0	1	x	$1+x$
0	0	1	x	$1+x$
1	1	0	$1+x$	x
x	x	$1+x$	0	1
$1+x$	$1+x$	x	1	0

容易验证环 $\langle F_2[x], \oplus, \otimes \rangle$ 是域, 因为乘法有么元 1, 运算表对称、乘法有交换律, 乘法各逆元存在 (1 的逆元为自己, x 与 $1+x$ 互为逆元), 所以 $\langle F_2[x], \oplus, \otimes \rangle$ 是 4 个元素的域。

离散数学习题解答

习题五（第五章 格与布尔代数）

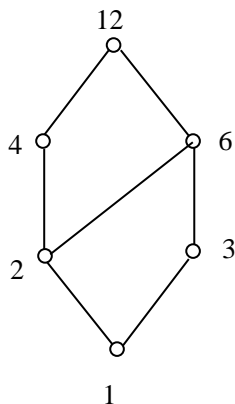
1. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是半序集, \leq 是 L 上的整除关系。问当 L 取下列集合时, $\langle L, \leq \rangle$ 是否是格。

a) $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

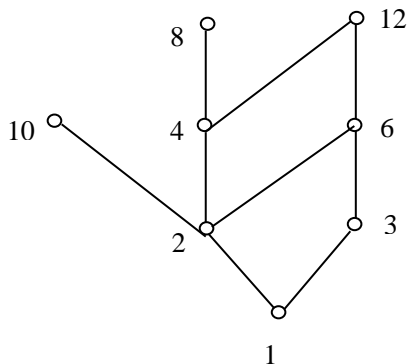
b) $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

c) $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

[解] a) $\langle L, \leq \rangle$ 是格, 因为 L 中任两个元素都有上、下确界。

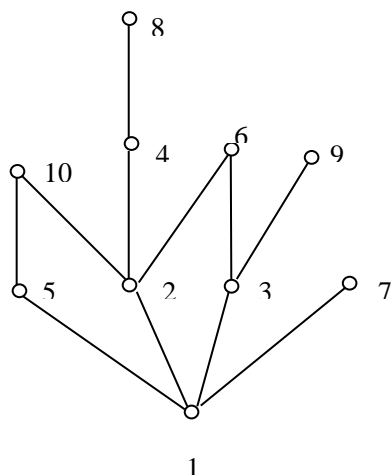


- b) $\langle L, \leq \rangle$ 不是格。因为 L 中存在着两个元素没有上确界。
例如: $8 \oplus 12 = \text{LUB}\{8, 12\}$ 不存在。



c) $\langle L, \leq \rangle$ 不是格。因为 L 中存在着两个元素没有上确界。

倒例如: $4 \oplus 6 = \text{LUB}\{4, 6\}$ 不存在。



2. 设 A, B 是两个集合, f 是从 A 到 B 的映射。证明: $\langle S, \subseteq \rangle$ 是 $\langle 2^B, \subseteq \rangle$ 的子格。其中

$$S = \{y | y = f(x), x \in 2^A\}$$

[证] 对于任何 $B_1 \in S$, 存在着 $A_1 \in 2^A$, 使 $B_1 = f(A_1)$, 由于 $f(A_1) = \{y | y \in B \wedge (\exists x)(x \in A_1 \wedge f(x) = y)\} \subseteq B$ 所以 $B_1 \in 2^B$, 故此 $S \subseteq 2^B$; 又 $B_0 = f(A) \in S$ (因为 $A \in 2^A$), 所以 S 非空;

对于任何 $B_1, B_2 \in S$, 存在着 $A_1, A_2 \in 2^A$, 使得 $B_1 = f(A_1), B_2 = f(A_2)$, 从而

$$\begin{aligned} L \cup B\{B_1, B_2\} &= B_1 \cup B_2 = f(A_1) \cup f(A_2) \\ &= f(A_1 \cup A_2) \quad (\text{习题三的 8 的 1}) \end{aligned}$$

由于 $A_1 \cup A_2 \subseteq A$, 即 $A_1 \cup A_2 \in 2^A$, 因此 $f(A_1 \cup A_2) \in S$, 即上确界 $L \cup B\{B_1, B_2\}$ 存在。

对于任何 $B_1, B_2 \in S$, 定义 $A_1 = f^{-1}(B_1) = \{x | x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$, $A_2 = f^{-1}(B_2) = \{x | x \in A \wedge f(x) \in B_2\}$, 则 $A_1, A_2 \in 2^A$, 且显然 $B_1 = f(A_1), B_2 = f(A_2)$, 于是

$$\begin{aligned} \text{GLB}\{B_1, B_2\} &= B_1 \cap B_2 = f(A_1) \cap f(A_2) \\ &\supseteq f(A_1 \cap A_2) \quad (\text{习题三的 8 的 2}) \end{aligned}$$

又若 $y \in B_1 \cap B_2$, 则 $y \in B$, 且 $y \in B_2$ 。由于 $y \in B_1 = f(A_1) = \{y | y \in B \wedge (\exists x)(x \in A_1 \wedge f(x) = y)\}$, 于是存在着 $x \in A_1$, 使 $f(x) = y$, 但是 $f(x) = y \in B_2$ 。故此 $x \in A_2 = f^{-1}(B_2) = \{x | x \in A \wedge f(x) \in B_2\}$, 因此 $x \in A_1 \cap A_2$, 从而 $y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$, 所以

$$\text{GLB}\{B_1, B_2\} = B_1 \cap B_2 = f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

这说明 $\text{GLB}\{B_1, B_2\} = B_1 \cap B_2 = f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$ 于是从 $A_1 \cap A_2 \in 2^A$ 可知 $f(A_1 \cap A_2) \in S$, 即下确界 $\text{GLB}\{B_1, B_2\}$ 存在。

因此, $\langle S, \subseteq \rangle$ 是 $\langle 2^B, \subseteq \rangle$ 的子格。

3. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是格, 任取 $a, b \in L$ 且 $a \leq b$ 。证明 $\langle B, \leq \rangle$ 是格。其中

$$B = \{x \mid x \in L \quad \text{且} \quad a \leq x \leq b\}$$

[证] 显然 $B \subseteq L$; 根据自反性及 $a \leq b \leq b$

所以 $a, b \in B$, 故此 B 非空;

对于任何 $x, y \in B$, 则有 $a \leq x \leq b$ 及 $a \leq y \leq b$, 由于 $x, y \in L$, 故有 $z_1 = x \oplus y$ 为下确界 $\in L$ 存在。我们只需证明 $z_1, z_2 \in B$ 即可, 证明方法有二, 方法一为: 由于

$a \leq x$, 所以 $a \oplus x = x$, 于是

$$\begin{aligned} z_1 &= x \oplus y \\ &= (a \oplus x) \oplus y \quad (\text{利用 } a \oplus x = x) \\ &= a \oplus (x \oplus y) \quad (\text{由 } \oplus \text{ 运算结合律}) \end{aligned}$$

因此 $a \leq z_1$; 另一方面, 由 $y \leq b$ 可知 $y \oplus b = b$, 由 $x \leq b$ 可知 $x \oplus b = b$, 于是

$$\begin{aligned} z_1 \oplus b &= (x \oplus y) \oplus b \\ &= x \oplus (y \oplus b) \quad (\text{由 } \oplus \text{ 运算结合律}) \\ &= x \oplus b \quad (\text{利用 } y \oplus b = b) \\ &= b \quad (\text{利用 } x \oplus b = b) \end{aligned}$$

因此 $z_1 \leq b$, 即 $a \leq z_1 \leq b$ 所以 $z_1 \in B$

由于 $a \leq x$ 及 $a \leq y$, 所以 $a^*x = a$, $a^*y = a$, 因而

$$\begin{aligned} a^*z_2 &= a^*(x^*y) \\ &= (a^*x)^*y \quad (\text{由 } * \text{ 运算结合律}) \\ &= a^*y \quad (\text{利用 } a^*x = a) \\ &= a \quad (\text{利用 } a^*y = a) \end{aligned}$$

因而 $a \leq z_2$; 又由于 $y \leq b$, 所以 $y^*b = y$ 于是

$$\begin{aligned} z_2 &= x^*y \\ &= x^*(y^*b) \\ &= (x^*y)^*b \quad (\text{利用 } * \text{ 运算结合律}) \\ &= z_2^*b \end{aligned}$$

从而 $z_2 \leq b$, 即 $a \leq z_2 \leq b$ 所以 $z_2 \in B$

因此 $\langle B, \leq \rangle$ 是格 (是格 $\langle L, \leq \rangle$ 的子格)。

方法二：根据上、下确界性质，由 $a \leq x$, $a \leq y$, 可得 $a \leq x*y$, (见附页数)

4. 设 $\langle L, \leq, *, \oplus \rangle$ 是格。 $\forall a, b \in L$, 证明: (附页)

$a \leq x \leq \oplus y$, 即 $a \leq z_2$, $a \leq$

又由 $x \leq b$, $y \leq b$, 可得 $x \oplus y \leq b$, $x*y \leq y \leq b$, 即 $z_1 \leq b$, $z_2 \leq b$

所以 $a \leq z_1 \leq b$, $a \leq z_2 \leq b$, 故此 $z_1, z_2 \in B$

$a*b < a$ 且 $a*b < b \Leftrightarrow a$ 与 b 是不可比较的。

[证] 先证 \Rightarrow

用反证法, 假设 a 与 b 是可比较的, 于是有 $a \leq b$ 或者 $b \leq a$ 。

当 $a \leq b$ 时, $a*b=a$ 与 $a*b < a$ (得 $a*b \neq a$) 矛盾;

当 $b \leq a$ 时, $a*b=b$ 与 $a*b < b$ (得 $a*b \neq b$) 矛盾;

因此假设错误, a 与 b 是不可比较的。

次证 \Leftarrow

由于 $a*b \leq a$, $a*b \leq b$ 。如果 $a*b \leq a$, 则 $a \leq b$, 与 a 和 b 不可比较的已知条件矛盾, 所以 $a*b \neq a$, 故此 $a*b < a$; 如果 $a*b=b$, 则 $b \leq a$, 也与 a 和 b 不可比较的已知条件矛盾, 所以 $a*b \neq b$, 故此可得 $a*b < b$ 。

5. 设 $\langle L, \leq, *, \oplus \rangle$ 是格。证明:

a) $(a*b) \oplus (c*d) \leq (a \oplus c) * (b \oplus d)$

b) $(a*b) \oplus (b*c) \leq (c \oplus a) \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$

[证] a) 方法一, 根据上、下确界的性质, 由

$a*b \leq a \leq a \oplus c$ 及 $a*b \leq b \leq b \oplus d$ 所以得到

$$a*b \leq (a \oplus c) * (b \oplus d)$$

又由 $c*d \leq c \leq a \oplus c$ 及 $c*d \leq d \leq b \oplus d$, 所以得到

$$c*d \leq (a \oplus c) * (b \oplus d)$$

因此 $(a*b) \oplus (c*d) \leq (a \oplus c) * (b \oplus d)$

方法二 $(a*b) \oplus (c*d)$

$$\leq [(a \oplus c) * (a \oplus d)] * [(a \oplus c) * (b \oplus d)]$$

(分配不等式, 交换律, 结合律, 保序性)

$$\leq (a \oplus c) * (b \oplus d) \quad (\text{保序性})$$

b) 方法一, 根据上、下确界的性质

由 $a*b \leq a \leq a \oplus b$, $a*b \leq b \leq b \oplus c$, $a*b \leq a \leq c \oplus a$ 可得

$$a*b \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

同理可得

$$b * c \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

及 $c * a \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$

所以

$$(a \oplus b) \oplus (b \oplus c) \oplus (c \oplus a) \leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

方法二: $(a \oplus b) \oplus (b \oplus c) \oplus (c \oplus a)$

$$\leq [b * (a \oplus c)] \oplus (c * a) \quad (\text{交换律, 结合律, 分配不等式, 保序性})$$

$$\leq [b \oplus (c * a)] * [(a \oplus c) \oplus (c * a)] \quad (\text{分配不等式, 交换律, })$$

$$\leq [(a \oplus b) * (b \oplus c)] * (a \oplus c) \quad (\text{分配不等式, 结合律, 交换律, 吸收律, 保序性})$$

性)

$$\leq (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a) \quad (\text{结合律})$$

6. 设 I 是整数集合。证明: $\langle I, \min, \max \rangle$ 是分配格。

[证] 由于整数集合 I 是全序集, 所以任何两个整数的最小者和最大者是存在的, 因此

$\langle I, \min, \max \rangle$ 是格是格是显然的。

下面我们来证 $\langle I, \min, \max \rangle$ 满足分配律

对于任何 $a, b, c \in I$ 有

$$a * (b \oplus c) = \min\{a, \max\{b, c\}\}$$

$$(a * b) \oplus (a * c) = \min\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\}$$

(1) 若 $b \leq c$ 时, 当

(a) $a \leq b$, 则 $a \leq c$, 故此

$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \min\{a, c\} = a$$

$$\max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{a, a\} = a$$

(b) $b \leq a \leq c$, 则

$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \min\{a, c\} = a$$

$$\max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{b, a\} = a$$

(c) $c \leq a$, 则 $b \leq a$, 因此

$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \min\{a, c\} = c$$

$$\max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{b, a\} = c$$

(2) 若 $c \leq b$ 时, 当

(a) $a \leq c$, 则 $a \leq b$, 故此

$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \min\{a, b\}$$

$$\max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \min\{a, a\} = a$$

(b) $c \leq a \leq b$, 则

$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \min\{a, b\} = a$$

$$\max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{a, c\} = a$$

(c) $b \leq a$, 则 $c \leq a$, 因此

$$\min\{a, \max\{b, c\}\} = \min\{a, b\} = b$$

$$\max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{b, c\} = b$$

综合 (1) (2) 总有

$$a * (b \oplus c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

根据对偶原理, 就还有

$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

因此 $\langle I, \min, \max \rangle$ 是分配格。

7. 设 $\langle A, *, \oplus, \max \rangle$ 是分配格, $a, b \in A$ 且 $a \leq b$. 证明:

$$f(x) = (x \oplus a) * b$$

是从 A 到 B 的同态函数。其它

$$B = \{x | x \in A \text{ 且 } a \leq x \leq b\}$$

[证] 由于 $a \leq x \oplus a$, 及已知 $a \leq b$, 所以 $a \leq (x \oplus a) * b$; 其次 $(x \oplus a) * b \leq b$, 所以 $a \leq f(x) \leq b$, 因而 $f(x)$ 是从 A 到 B 的函数。

对于任何 $x, y \in A$,

$$f(x \oplus y) = ((x \oplus y) \oplus a) * b$$

$$= ((x \oplus a) \oplus (y \oplus a)) * b \quad (\text{幂等律, 交换律, 结合律})$$

$$= ((x \oplus a) * b) ((y \oplus a) * b) \quad (\text{分配律})$$

$$= f(x) \oplus f(y)$$

$$f(x * y) = ((x * y) \oplus a) * b$$

$$= ((x \oplus a) * (y \oplus a)) * b \quad (\text{分配律})$$

$$= ((x \oplus a) * b) ((y \oplus a) * b) \quad (\text{幂等律, 交换律, 结合律})$$

$$= f(x) * f(y)$$

所以, f 满足同态公式, 因而 f 是从 A 到 B 的同态函数。

8. 证明: 一个格是分配格的充分必要条件是 $\forall a, b, c \in L$, 有 $(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) = (a \oplus b)$

$$* (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

[证] 必要性。对于任何 $a, b, c \in L$,

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a)$$

$$= (b * (a \oplus c)) \oplus (c * a) \quad (\text{交换律, 分配律})$$

$$= (b \oplus (c * a)) * ((a \oplus c) \oplus (c * a)) \quad (\text{分配律})$$

$$= (b \oplus c) * (b \oplus a) * (a \oplus c) \quad (\text{分配律, 吸收律})$$

$$=(a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a) \quad (\text{交换律})$$

充分性, f 满足同态公式, 因而 f 是从 A 到 B 的同态函数。

8. 证明: 一个格是分配格的充分必要条件是 $\forall a, b, c \in L$, 有

$$(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) = (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)$$

[证] 必要性。对于任何 $a, b, c \in L$,

$$\begin{aligned} & (a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \\ &= (b * (a \oplus c)) \oplus (c * a) \quad (\text{交换, 分配律}) \\ &= (b \oplus (c * a)) ((a \oplus c) \oplus (c * a)) \quad (\text{分配律}) \\ &= (b \oplus c) * (b \oplus a) * (a \oplus c) \quad (\text{分配律, 吸收律}) \\ &= (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a) \quad (\text{交换律}) \end{aligned}$$

充分性, 对于任何 $a, b, c \in L$

$$\begin{aligned} & a \oplus (b * c) \\ &= (a \oplus (a * c)) \oplus (b * c) \quad (\text{吸收律}) \\ &= ((a \oplus (a * b)) \oplus (a * c)) \oplus (b * c) \quad (\text{吸收律}) \\ &= (a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) \oplus a \quad (\text{交换律, 结合律}) \\ &= ((a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a)) \oplus a \quad (\text{已知条件}) \\ &= ((a \oplus b) * (a \oplus c) * (b \oplus c)) \oplus ((b \oplus c) * a) \oplus a \quad (\text{交换律, 吸收律}) \\ &= ((a \oplus b) * (a \oplus c) * (b \oplus c)) \oplus ((b \oplus c) * a) \oplus (a * (a \oplus b) * (a \oplus c)) \quad (\text{吸收律}) \\ &= (((a \oplus b) * (a \oplus c)) \oplus (b \oplus c)) * ((b \oplus c) \oplus a) * (a \oplus ((a \oplus b) * (a \oplus c))) \quad (\text{已知条件}) \\ &= (((a \oplus b) * (a \oplus c)) \oplus (b \oplus c)) * (a \oplus b \oplus c) * ((a \oplus b) * (a \oplus c)) \quad (\text{因为 } a \oplus ((a \oplus b) * (a \oplus c)) = (a \oplus b) * (a \oplus c)) \\ &= (((a \oplus b) * (a \oplus c)) \oplus (b \oplus c)) * (((a \oplus b) \oplus c) * (a \oplus b) * (a \oplus c)) \quad (\text{结合律}) \\ &= (((a \oplus b) * (a \oplus c)) \oplus (b \oplus c)) * ((a \oplus b) * (a \oplus c)) \quad (\text{吸收律, 结合律}) \\ &= (a \oplus b) * (a \oplus c) \quad (\text{吸收律}) \end{aligned}$$

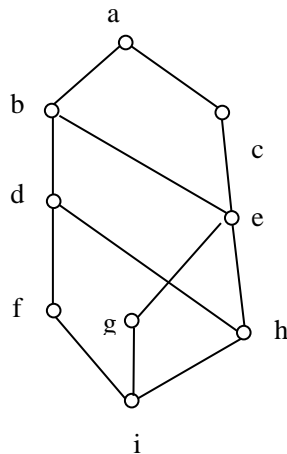
根据对偶原理 还有 $a * (b \oplus c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$

所以格 L 是分配格。

9. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是格。其 Hasse 图如右

- 找出格中每个元素的补元;
- 此格是有补格吗?
- 此格是分配格吗?

[解] a) 最小元 $0=i$; 最大元 $1=a$;



故此格为有界格。

a 和 i 互为补元；f 和 C 互为补元；其余 b, d, e, g, h 等都没有补元。

b) 根据 a) 可知，此格不是有补格。

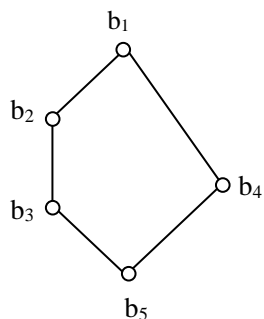
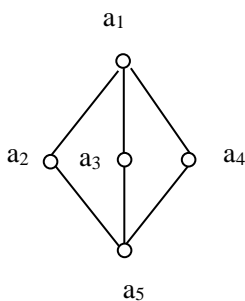
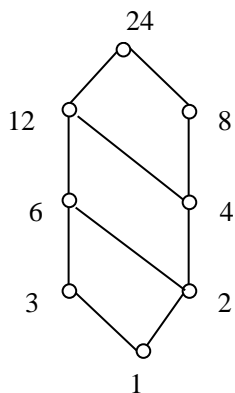
c) 此格不是分配格，因为 $f \oplus (g * h) = f \oplus i = f$

$$(f \oplus g) * (f \oplus h) = b * d = d$$

因为去掉 g 结点后所形成的子格与分配格 $\langle S_{24}, I, \text{GCD}, \text{LCM}, 1, 24 \rangle$ 同构，因此若此格不是分配格，则必有子格

$$h * (f \oplus g) = h * b = h$$

$$(h * f) \oplus (h * g) = i \oplus i = I$$



$\langle S_{24}, I, \text{GCD}, \text{LCM}, 1, 24 \rangle$

两个不是分配格的特殊格

与两个不是分配格的特殊格同构，并且此子格必含有 g 点。而特殊不分配格之图或是含有五个结点的圈，或是有六个结点：gebdfi; gebdhi; gehdfi; 或是有八个结：gecabdfi; gecabdh; 或是只有一个四结点的圈：gehi。因此此格绝不会有含 g 点的子格与两个不是分配格的特殊格同构。

10. 设 $\langle L, \leq, *, \oplus \rangle$ 是有界格。x, y \in L, 证明：

a) 若 $x \oplus y = 0$, 则 $x = 0$ 且 $y = 0$ 。

b) 若 $x * y = 1$, 则 $x = 1$ 且 $y = 1$ 。

[证] a) 对任何 x, y \in L, 若 $x \oplus y = 0$, 则

$$\begin{aligned} x &= x * (x \oplus y) && (\text{吸收律}) \\ &= x * 0 && (x \oplus y = 0) \\ &= 0 && (0-1 \text{ 律}) \\ y &= y * (y \oplus x) && (\text{吸收律}) \\ &= y * (x \oplus y) && (\text{交换律}) \end{aligned}$$

$$=y*0 \quad (x\oplus y=0)$$

$$=0 \quad (0-1 \text{ 律})$$

b) 对任何 $x, y \in L$, 若 $x*y=1$, 则

$$x=x\oplus (x*y) \quad (\text{吸收律})$$

$$=x\oplus 1 \quad (x*y=1)$$

$$=1 \quad (0-1 \text{ 律})$$

$$y=y\oplus (y*x) \quad (\text{吸收律})$$

$$=y\oplus (x*y) \quad (\text{交换律})$$

$$=y\oplus 1 \quad (x*y=1)$$

$$=1 \quad (0-1 \text{ 律})$$

11. 在有界格中, 0 是 1 的唯一补元, 1 是 0 的唯一补元。

[证] 由于 $1\oplus 0=1$, $1*0=0$, 所以 0 与 1 互为补元。

下面我们先来证 0 是 1 的唯一补元:

对于任何元素 a 属于有界格, 若 a 是 1 的补元, 则必有 $1\oplus a=1$, 及 $1*a=0$, 于是必有

$$a=a*(a\oplus 1) \quad (\text{吸收律})$$

$$=a*(1\oplus a) \quad (\text{交换律})$$

$$=a*1 \quad (\text{由 } 1\oplus a=1)$$

$$=1*a \quad (\text{交换律})$$

$$=0 \quad (\text{由 } 1*a=0)$$

从而 0 是 1 的唯一补元。

次证 1 是 0 的唯一补元。

对于任何元素 a 属于有界格, 若 a 是 0 的补元, 则必有 $0\oplus a=1$, $0*a=0$ 。于是必有

$$a=a(a*0) \quad (\text{吸收律})$$

$$=a(0\oplus a) \quad (\text{交换律})$$

$$=a\oplus 0 \quad (\text{由 } 0*a=0)$$

$$=0\oplus a \quad (\text{交换律})$$

$$=1 \quad (\text{由 } 0\oplus a=1)$$

12. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是格, $|L| \geq 2$ 。证明: L 中不存在以自己为补元的元素。

[证] 用反证法, 假设 L 中存在着以自己为补元的元素, 不妨是 $b \in L$, 那么 $b\oplus b=1$,

$b*b=0$, 于是由幂等律, 可得

$$b=b*b=0, b\oplus b=1,$$

从而有 $0=b=1$, 即 $0=1$

因此, 对于任何元素 $a \in L$, 都有 $a=0=1$ (因为 $0 \leq a \leq 1$), 从而 $|L|=1$, 这与已知 $|L| \geq 2$ 矛盾。

13. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 是全序集, $|L| \geq 3$. 证明: $\langle L, \leq \rangle$ 是格, 但不是有补格。

[证] 由于 $\langle L, \leq \rangle$ 是全序集, 那么 L 中任意两个元素都可比较, 于是 L 中任意两个元素都有上确界和下确界, 因此 $\langle L, \leq \rangle$ 是格。

下面我们来证 $\langle L, \leq \rangle$ 不是有补格, 用反证法:

否则 $\langle L, \leq \rangle$ 是有补格, 则对任何 $a \in L$, 都存在着一个元素 $b \in L$, 使 $a \oplus b = 1$ 及 $a * b = 0$ 。由于 $\langle L, \leq \rangle$ 是全序集, 所以任二元素可比较, 从而

$$\textcircled{1} \text{ 若 } a \leq b, \text{ 则 } a = a * b = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } b \leq a, \text{ 则 } a = a \oplus b = 1$$

因此 $|L|=2$, 与已知 $|L| \geq 3$ 矛盾。

14. 在有界的分配格中, 证明: 具有补元的那些元素组成一个子格。

[证] 设 $\langle L, *, \oplus, 0, 1 \rangle$ 是有界分配格, 令

$$L' = \{x | x \in L \wedge (\exists y \in L)(x * y = 0 \wedge x \oplus y = 1)\}$$

我们来证 $\langle L', *, \oplus, 0, 1 \rangle$ 是 $\langle L, *, \oplus, 0, 1 \rangle$ 的子格:

显然 $L' \subseteq L$; 其次易证 $0, 1 \in L'$, 故此 L' 非空; 对于任何 $a_1, a_2 \in L'$, 我们来证 $a_1 * a_2, a_1 \oplus a_2 \in L'$

为证 $a_1 * a_2 \in L'$, 只需找出 $a_1 * a_2$ 的补元即可。由于 $a_1, a_2 \in L'$, 故此存在着 $b_1, b_2 \in L$, 使 $a_1 * b_1 = 0, a_1 \oplus b_1 = 1$ 以及 $a_2 * b_2 = 0, a_2 \oplus b_2 = 1$, 于是构造出 $a_1 * a_2$ 补元为 $b_1 b_2 \in L$ 。这是因为

$$(a_1 * a_2) * (b_1 \oplus b_2) = ((a_1 * a_2) * b_1) \oplus ((a_1 * a_2) * b_2) \quad (\text{分配律})$$

$$= ((a_1 * b_1) * a_2) \oplus (a_1 * (a_2 * b_2)) \quad (\text{交换律})$$

$$= (0 * a_2) \oplus (a_1 * 0) \quad (\text{由 } a_1 * b_1 = 0, a_2 * b_2 = 0)$$

$$= 0 \oplus 0 \quad (\text{由 } 0-1 \text{ 律})$$

$$= 0$$

$$(a_1 * a_2) \oplus (b_1 \oplus b_2) = (a_1 \oplus (b_1 \oplus b_2)) * (a_2 \oplus (b_1 \oplus b_2)) \quad (\text{分配律})$$

$$= ((a_1 \oplus b_2) \oplus b_1) * ((a_2 \oplus b_2) \oplus b_1) \quad (\text{交换律, 结合律})$$

$$= (1 \oplus b_2) * (1 \oplus b_1) \quad (\text{由 } a_1 \oplus b_1 = 1 \text{ 及 } a_2 \oplus b_2 = 1)$$

$$= 1 * 1 \quad (\text{由 } 0-1 \text{ 律})$$

$$= 1$$

为证 $a_1 \oplus a_2 \in L'$ 只需找出 $a_1 \oplus a_2$ 的补元即可。由于 a_1, a_2 的补元是 b_1, b_2 ,

故构造出 $a_1 \oplus a_2$ 的补元为 $b_1 * b_2 \in L$ 。这是因为

$$\begin{aligned}(a_1 \oplus a_2) * (b_1 * b_2) &= (a_1 * (b_1 * b_2)) \oplus (a_2 * (b_1 * b_2)) \quad (\text{分配律}) \\ &= ((a_1 * b_2) * b_1) \oplus ((a_2 * b_2) * b_1) \quad (\text{交换律, 结合律}) \\ &= (0 * b_2) \oplus (0 * b_1) \quad (\text{由 } a_1 * b_1 = 0 \text{ 及 } a_2 * b_2 = 0) \\ &= 0 \oplus 0 \quad (\text{由 } 0-1 \text{ 律}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_1 \oplus a_2) \oplus (b_1 * b_2) &= ((a_1 \oplus a_2) \oplus b_1) * ((a_1 \oplus a_2) \oplus b_2) \quad (\text{分配律}) \\ &= ((a_1 \oplus b_1) \oplus a_2) * (a_1 \oplus (a_2 \oplus b_2)) \quad (\text{交换律, 结合律}) \\ &= (1 \oplus a_2) * (a_1 \oplus 1) \quad (\text{由 } a_1 \oplus b_1 = 1 \text{ 及 } a_2 \oplus b_2 = 1) \\ &= 1 * 1 \quad (\text{由 } 0-1 \text{ 律}) \\ &= 1\end{aligned}$$

15. 求 $\langle S_{12}, 1 \rangle$ 的所有子格, 其中, S_{12} 是 12 的所有因子的集合 1 是 S_{12} 上的整除关系。

[解] 一个结点: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{12\}$

二个结点: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\},$
 $\{1, 12\}$

$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 12\}$

$\{3, 6\}, \{3, 12\}$

$\{4, 12\}$

$\{6, 12\}$

三个结点: $\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 12\}$ $\langle S_{12}, 1 \rangle$ 的图

$\{1, 3, 6\}, \{1, 3, 12\}$

$\{1, 4, 12\}$

$\{1, 6, 12\}$

$\{2, 4, 12\}, \{2, 6, 12\}$

$\{3, 6, 12\}$

四个结点: $\{1, 2, 4, 12\}, \{1, 2, 6, 12\}, \{1, 3, 6, 12\}$

$\{1, 2, 3, 6\}, \{2, 4, 6, 12\}, \{1, 3, 4, 12\}$

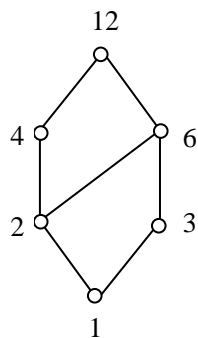
六个结点: $S_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

都是 $\langle S_{12}, 1 \rangle$ 的子格。

16. 证明: 一个格 $\langle L, \leq \rangle$ 分配格的充分必要条件是 $\forall a, b, c \in L$, 有

$$(a \oplus b) * c \leq a \oplus (b * c)$$

[证] 必要性



对任何 $a, b, c \in L$

$$\begin{aligned}(a \oplus b) * c &= (a * c) \oplus (b * c) && (\text{分配律}) \\ &\leq a \oplus (b * c) && (\text{由 } a * c \leq a, \text{ 及保序性})\end{aligned}$$

充分性

$$\begin{aligned}\text{一方面, 由 } a \oplus (b * c) &\leq a \oplus b && (\text{根据 } b * c \leq b \text{ 及保序性}) \\ \text{和 } a \oplus (b * c) &\leq a \oplus c && (\text{根据 } b * c \leq c \text{ 及保序性})\end{aligned}$$

及上、下确界的性质可得

$$a \oplus (b * c) \leq (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

另一方面 $(a \oplus b) * (a \oplus c) \leq a \oplus (b * (a \oplus c))$ (已知条件)

$$\begin{aligned}&= a \oplus ((a \oplus c) * b) && (\text{交换律}) \\ &\leq a \oplus (a \oplus (c * b)) && (\text{已知条件 } (a \oplus c) * b \leq a \oplus (c * b) \text{ 及保序性}) \\ &= (a \oplus a) \oplus (b * c) && (\text{结合律, 交换律}) \\ &= a \oplus (b * c) && (\text{幂等律})\end{aligned}$$

所以, 综合这两方面, 得到分配律

$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$$

根据对偶原理, 可得另一分配律

$$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$$

所以格 $\langle L, \leq \rangle$ 是分配格。

17. 设 $\langle L_1, R_1 \rangle$ 和 $\langle L_2, R_2 \rangle$ 是两个格, $f: L_1 \rightarrow L_2$ 是从 $\langle L_1, R_1 \rangle$ 到 $\langle L_2, R_2 \rangle$ 的同态函数。证明: f 的同态象是 $\langle L_2, R_2 \rangle$ 的子格。

[证] f 的同态象 $f(L_1) = \{y : y \in L_2 \wedge (\exists x \in L_1) (f(x) = y)\}$

我们来证 $\langle f(L_1), R_2 \rangle$ 是 $\langle L_2, R_2 \rangle$ 的子格:

显然 $f(L_1) \subseteq L_2$; 若 L_1 非空, 则有 $a \in L_1$, 从而有 $b = f(a) \in f(L_1)$ 故 $f(L_1)$ 非空。

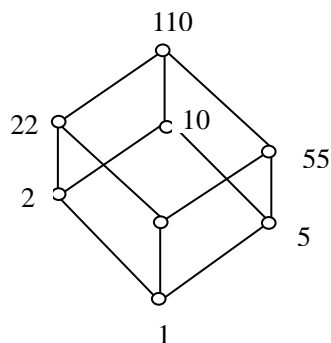
对于任何 $b_1, b_2 \in f(L_1)$, 存在着 $a_1, a_2 \in L_1$, 使 $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$, 从而

$$\begin{aligned}b_1 \oplus_2 b_2 &= f(a_1) \oplus_2 f(a_2) \\ &= f(a_1 \oplus_1 a_2) && (\text{同态公式}) \\ &\in f(L_1) && (\text{因 } \langle L_1, R_1 \rangle \text{ 是格, 故})\end{aligned}$$

\oplus_1 运算封闭, 从而 $a_1 \oplus_1 a_2 \in L_1$)

因此 $\langle f(L_1), R_1 \rangle$ 是 $\langle L_2, R_2 \rangle$ 子格。

18. 设 $B = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$ 。证明: $\langle B, \text{GCD}, \text{LCM} \rangle$ 是布尔代数。其中, GCD 是求最大公约数, LCM 是求最小公倍



数, $x' = 110/x$ 。

[证] 我们已证过 $\langle N, \text{GCD}, \text{LCM}, \rangle$ 是分配格, 故此为证 $\langle B, \text{GCD}, \text{LCM} \rangle$ 是分配格, 只需证 $\langle B, \text{GCD}, \text{LCM} \rangle$ 是 $\langle N, \text{GCD}, \text{LCM}, \rangle$ 的子格即可。

易于验证, 对于任何 $a, b \in B$, 恒有 $\text{GCD}\{a, b\}, \text{LCM}\{a, b\} \in B$ 故此两个运算 GCD, LCM 关于 B 封闭。因而 $\langle B, \text{GCD}, \text{LCM} \rangle$ 是分配格。

又由于 1 和 110 互为补元; 2 和 55 互为补元; 5 和 22 互为补元; 10 和 11 互为补元, 所以 $\langle B, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 是有补的分配格, 故此 $\langle B, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 是布尔代数。

19. 设 $L_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $L_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 16, 24\}$ 。

a) $\langle L_1, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 是布尔代数吗? 为什么?

b) $\langle L_2, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 是布尔代数吗? 为什么?

[解] a) $\langle L_1, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 不是布尔代数。

因为 $\langle L_1, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 虽是分配格 ($\langle N, 1, \text{GCD}, \text{LCM}, \rangle$ 的子格) 但不是有补格, 元素 2, 6 没有补元。所以不是布尔代数。

b) $\langle L_2, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 也不是布尔代数。

因为虽然 $\langle L_2, \text{GCD}, \text{LCM}, ' \rangle$ 是分配格 ($\langle N, 1, \text{GCD}, \text{LCM}, \rangle$ 的子格), 但不是有补格, 元素 2, 4, 6, 12 没有补元。所以也不是布尔代数。

20. 设 $\langle B, *, \oplus, ' \rangle$ 是布尔代数。证明下列布尔恒等式。

a) $a \oplus (a' * b) = a \oplus b$

b) $a * (a' \oplus b) = a * b$

c) $(a * c) \oplus (a' * b) \oplus (b * c) = (a * c) \oplus (a' * b)$

d) $(a \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a') = (a' \oplus b) * (b' \oplus c) * (c' \oplus a)$

e) $(a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a) = (a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a)$

[证] a) $a \oplus (a' * b) = (a \oplus a') * (a \oplus b)$ (分配律)

$$= 1 * (a \oplus b) \quad (\text{由 } a \oplus a' = 1)$$

$$= a \oplus b \quad (0-1 \text{ 律})$$

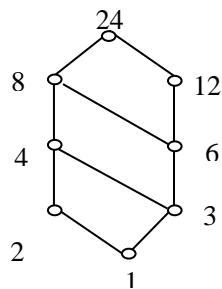
b) $a * (a' \oplus b) = (a * a') \oplus (a * b)$ (分配律)

$$= 1 \oplus (a * b) \quad (\text{由 } a * a' = 0)$$

$$= a * b \quad (0-1 \text{ 律})$$

c) 由于 $(a * c) \oplus (a' * b) = (a \oplus a') * (a \oplus b) * (a' * c) * (b * c)$

(分配律, 结合律, 交换律)



$$= (a \oplus b)^* (a' \oplus c)^* (b \oplus c) \quad (\text{由 } a \oplus a' = 1)$$

并且因为 $b^*a \oplus b$, $c^*a \oplus c$, 从而由保序性, 得到

$$b^*c \leq (a \oplus b)^* (a' \oplus c)$$

又由 $b^*c \leq b \oplus c$ 及下确界的性质, 得到

$$b^*c \leq (a \oplus b)^* (a' \oplus c)^* (b \oplus c)$$

所以

$$b^*c \leq (a^*c) \oplus (a' \oplus b)$$

所以

$$(a^*c) \oplus (a' \oplus b) \oplus (b^*c) = (a^*c) \oplus (a' \oplus b)$$

$$\text{d) 令 } B = (a \oplus b')^* (b \oplus c')^* (c \oplus a'), C = (a \oplus b)^* (b' \oplus c)^* (c' \oplus a)$$

于是为证 $B=C$, 根据布尔代数的性质: 消去律。

$$= a' \oplus b' \oplus c' \quad (\text{交换律})$$

所以 $a' \oplus B = a' \oplus c$

从而由消去律, 有 $B=C$ 即

$$(a \oplus b')^* (b \oplus c')^* (c \oplus a') = (a' \oplus b)^* (b' \oplus c)^* (c' \oplus a)$$

$$\text{e) 令 } B = (a \oplus b)^* (b \oplus c)^* (c \oplus a)$$

$$C = (a^*b) \oplus (b^*c) \oplus (c^*a)$$

由于 $a^*B = a^* (a \oplus b)^* (b \oplus c)^* (c \oplus a)$

$$= a^* (b \oplus c)^* (c \oplus a) \quad (\text{吸收律})$$

$$= a^* (a \oplus c)^* (b \oplus c) \quad (\text{交换律})$$

$$= a^* (b \oplus c) \quad (\text{吸收律})$$

$$a^*C = a^* [(a^*b) \oplus (b^*c) \oplus (c^*a)]$$

$$= (a^*a^*b) \oplus (a^*b^*c) \oplus (a^*a^*c) \quad (\text{分配律, 交换律})$$

$$= (a^*b) \oplus (a^*b^*c) \oplus (a^*c) \quad (\text{幂等律})$$

$$= (a^*b) \oplus (a^*c) \quad (\text{分配律})$$

所以 $a^*B = a^*C$

又由于 $a' \oplus B = a' \oplus (a \oplus b)^* (b \oplus c)^* (c \oplus a)$

$$= a' \oplus b^* (b \oplus c)^* (c \oplus a) \quad (\text{反身性, 及本题 b))}$$

$$= a' \oplus b^* (c \oplus a) \quad (\text{吸收律})$$

$$= a' \oplus b^*c \quad (\text{交换律, 反身律, 本题 b))}$$

$$a' \oplus C = a' \oplus [(a^*b) \oplus (b^*c) \oplus (c^*a)]$$

$$= (a' \oplus a^*b) \oplus (a' \oplus b^*c) \oplus (a' \oplus a^*c) \quad (\text{分配律, 交换律})$$

$$\begin{aligned}
&= (0 * b) \oplus (a' * b * c) \oplus (0 * c) && (\text{由 } a' * a = 0) \\
&= 0 \oplus (a' * b * c) \oplus 0 && (1-1 \text{ 律}) \\
&= a' * b * c
\end{aligned}$$

只需证 $a * B = a * C$ 和 $a' * B = a' * C$ 即可

$$\begin{aligned}
\text{由于 } a * B &= a * (a \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a') \\
&= a * (b \oplus c') * (c \oplus a') && (\text{吸收律}) \\
&= a * (a' \oplus c) * (b \oplus c') && (\text{交换律}) \\
&= a * c * (c' \oplus b) && (\text{本题 b}) \text{ 及交换律} \\
&= a * c * b && (\text{本题 b}) \\
&= a * b * c && (\text{交换律})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a * C &= a * (a' \oplus b) * (b' \oplus c) * (c' \oplus a) \\
&= a * b * (b' \oplus c) * (c' \oplus a) && (\text{本题 b}) \\
&= a * b * c * (c' \oplus a) && (\text{本题 b}) \\
&= a * b * c * a && (\text{本题 b}) \\
&= a * a * b * c && (\text{交换律}) \\
&= a * b * c && (\text{幂等律})
\end{aligned}$$

所以 $a * B = a * C$

$$\begin{aligned}
\text{又由于 } a' * B &= a' * (a \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a') \\
&= a' * ((a') \oplus b') * (b \oplus c') * (c \oplus a') && (\text{反身性}) \\
&= a' * b' * ((b')' \oplus c') * (c \oplus a') && (\text{本题 b}) \text{ 及反身性} \\
&= a' * b' * c' * ((c')' \oplus a') && (\text{本题 b}) \text{ 及反身性} \\
&= a' * b' * c' * a' && (\text{本题 b}) \\
&= a' * a' * b' * c' && (\text{交换律}) \\
&= a' * b' * c' && (\text{幂等性})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a' * C &= a' * (a' \oplus b) * (b' \oplus c) * (c' \oplus a) \\
&= a' * (b' \oplus c) * (c' \oplus a) && (\text{吸收律}) \\
&= a' * ((a') \oplus c') * (b' \oplus c) && (\text{交换律及反身性}) \\
&= a' * c' * ((c')' \oplus b') && (\text{本题 b}) \text{ 及反身性交换律} \\
&= a' * c' * b' && (\text{本题 b})
\end{aligned}$$

所以 $a * B = a' * C$

故根据消去律得到 $B = C$, 即

$$(a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a) = (a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a)$$

21. 设 $\langle B, *, \oplus, ' \rangle$ 是布尔代数, 简化下列布尔表达式。

a) $(a * b) \oplus (a * b * c) \oplus (b * c)$

b) $(a * b) \oplus (a * b' * c) \oplus (b * c)$

c) $(a * b) \oplus (a' * b * c') \oplus (b * c)$

d) $((a * b') \oplus c) * (a \oplus b) * c$

[解] a) $(a * b) \oplus (a * b * c) \oplus (b * c)$

$$= (a * b) \oplus (b * c) \quad (\text{因为吸收律})$$

$$= b * (a \oplus c) \quad (\text{分配律})$$

b) $(a * b) \oplus (a * b' * c) \oplus (b * c)$

$$= (a * b) \oplus [((a * b') \oplus b) * c] \quad (\text{分配律})$$

$$= (a * b) \oplus [(a * b) * c] \quad (\text{20 题 a})$$

$$= (a * b) \oplus (a * c) \oplus (b * c) \quad (\text{分配律})$$

c) $(a * b) \oplus (a' * b * c') \oplus (b * c)$

$$= (b * (a \oplus (a' * c'))) \oplus (b * c) \quad (\text{分配律})$$

$$= (b * (a \oplus a') * (a \oplus c')) \oplus (b * c) \quad (\text{分配律})$$

$$= (b * (a \oplus c)) \oplus (b * c) \quad (\text{互补 } a \oplus a' = 1)$$

$$= b * (a \oplus c' \oplus c) \quad (\text{分配律})$$

$$= b \quad (\text{互补 } c' \oplus c = 1)$$

d) $((a * b') \oplus c) * (a \oplus b') * c$

$$= ((a * b') \oplus c) * c * (a \oplus b') \quad (\text{交换律})$$

$$= c * (a \oplus b') \quad (\text{吸收律})$$

22. 设 $\langle B, *, \oplus, ' \rangle$ 是布尔代数。在 B 上定义二元运算 \odot 如下

$$\forall a, b \in B, a \odot b = (a * b') (a' * b)$$

证明: $\langle B, \odot \rangle$ 是交换群

[证] ①封闭性

对于任何 $a, b \in B$, 由于 $*, \oplus, '$ 运算的封闭性, 可知 $a \odot b = (a * b) \oplus (a * b) \in$

B , 因此 \odot 运算具有封闭性。

②结合律

对于任何 $a, b, c \in B$,

$$(a \odot b) \odot c$$

$$((a \odot b) * c') \oplus ((a \odot b)' * c)$$

$$\begin{aligned} &= (((a * b') \oplus (a' * b)) * c') \oplus (((a * b') \oplus (a' * b))' * c) \\ &= (a * b' * c') \oplus (a' * b * c') \oplus (((a' \oplus b) * (a \oplus b')) * c) \\ &\quad (\text{分配律, deMorgan 律, 反身律}) \\ &= (a * b' * c') \oplus (a' * b * c') \oplus ((a * b) \oplus (a' \oplus b')) * c \\ &\quad (\text{分配律, 互补律, 0—1 律}) \\ &= (a * b' * c') \oplus (a' * b * c') \oplus (a * b * c) \oplus (a' * b' * c) \\ &= (a * b * c) \oplus (a * b' * c') \oplus (a' * b * c') \oplus (a' * b' * c) \quad (\text{交换律}) \end{aligned}$$

$$a \odot (b \odot c)$$

$$\begin{aligned} &= (a * (b \odot c)') \oplus (a' * (b \odot c)) \\ &= (a * ((b' \oplus c) * (b \oplus c'))) \oplus (a' * b * c') \oplus (a' * b' * c) \\ &\quad (\text{de Morgam 律, 反身律, 分配律}) \\ &= (a * ((b * c) \oplus (b' * c'))) \oplus (a' * b * c') \oplus (a' * b' * c) \\ &\quad (\text{分配律}) \end{aligned}$$

所以 $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$

所以 \odot 运算具有结合律

③交换律

对任何 $a, b \in B$, $a \odot b$

$$\begin{aligned} &= (a * b') \oplus (a' * b) \\ &= (a' * b) \oplus (a * b') \quad (\oplus \text{运算交换律}) \\ &= (b' * a) \oplus (b * a') \quad (* \text{运算交换律}) \\ &= b \odot a \end{aligned}$$

所以运算具有结合律

④有么元 0:

首先 $0 \in B$, 其次

$$\begin{aligned}
 a \odot 0 &= (a * 0') \oplus (a' * 0) \\
 &= (a * 1)(a' * 0) \quad (\text{由 } 0' = 1) \\
 &= a \oplus 0 \quad (0-1 \text{ 律}) \\
 &= a \quad (0-1 \text{ 律})
 \end{aligned}$$

由运算交换律也有 $0 \odot a = a$ 即

$$0 \odot a = a \odot 0 = a$$

所以 0 是 \odot 运算的幺元。

⑤ 于任何 $a \in B$, 其逆元是 a 自己, 因为

$$\begin{aligned}
 a \odot a &= (a * a') \oplus (a' * a) \\
 &= 0 \oplus 0 \quad (\text{互补律}) \\
 &= 0 \quad (\text{幂等律})
 \end{aligned}$$

因此, $\langle B, \odot \rangle$ 是一个交换群。

23. 设 $\langle B, *, \odot, ' \rangle$ 是一个交换群。

如下

$$\forall a, b \in B, a + b = (a * b') \oplus (a' * b)$$

$$a \cdot b = a * b$$

a) 证明: $\langle B, +, \cdot \rangle$ 是环

b) 找出关于 \cdot 的幺元;

c) 证明: $\forall a \in B, a + a = 0, a + 0 = a, a + 1 = a'$;

d) 证明: $\forall a, b \in B, (a + b) + b = a$;

e) 证明: $\forall a, b, c \in B, a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

[证] a) 由于这里定义的十运算与 22 题的 \odot 运算的定义相同, 因此 $\langle B, + \rangle$ 是交换群。

其次 \cdot 运算就是运算, 故此具有封闭性及结合律, 因此 $\langle B, \cdot \rangle$ 是半群。

对任何 $a, b, c \in B$, 由于

$$a \cdot (b+c) = a * ((b * c') \oplus (b' * c))$$

$$= (a * b * c) \oplus (a * b' * c) \quad (\text{分配律})$$

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = ((a * b) * (a * c)') \oplus (a * b)' * (a * c)$$

$$= ((a * b) * (a \oplus c)) \oplus ((a \oplus b) * (a * c))$$

(deMorgan 律)

$$= (a * b * c') \oplus (a * b' * c)$$

(分配律, 互补律, 0—1 律)

$$\text{所以 } a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

由于 \cdot 和 $+$ 运算都有交换律, 故另一分配律不需证

所以 $\langle B, +, \cdot \rangle$ 是环 (实际上是含么交换环)

b) \cdot 的么元是 1, 因为

$$1 \cdot a = 1 * a = a * 1 = a \cdot 1$$

c) 对任何 $a \in B$, $a+a=0$ 在 22 题的证明⑤已证;

$a+0=a$ 在 22 题的证明中④已证;

$$a+1 = (a * 1') \oplus (a' * 1)$$

$$= (a * 0) \oplus (a' * 1) \quad (\text{由 } 1' = 0)$$

$$= 0 \oplus a' \quad (0-1 \text{ 律})$$

$$= a' \quad (0-1 \text{ 律})$$

d) 对任何 $a, b \in B$

$$(a+b) + b$$

$$= ((a+b) * b') \oplus ((a+b)' * b)$$

$$= (((a * b') \oplus (a' * b)) * b') \oplus (((a * b') * (a * b))' * b)$$

$$= (a * b' * b') \oplus (a' * b * b') \oplus (((a' \oplus b) * (a \oplus b')) * b)$$

(分配律, 结合律 de Morgan 律, 反身律)

$$= (a * b') \oplus (((a * b) \oplus (a' * b)) * b)$$

(幂等律, 互补律 0-1 律, 分配律, 交换律)

$$= (a * b') \oplus (a * b * b) \oplus (a' * b' * b)$$

(分配律)

$$= (a * b') \oplus (a * b)$$

(幂等, 互补律, 0-1 律)

$$= a * (b \oplus b) \quad (\text{分配律})$$

$$= a \quad (\text{互补律, 0-1 律})$$

e) 根据 a) 的证明, 分配律已成立。

24. 设 $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$ 和 $\langle B, \cap, \cup, - \rangle$ 是两个布尔代数, f 是从 $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$ 到 $\langle B, \cap, \cup, - \rangle$ 的满同态函数。证明:

$$f(O_A) = O_B \quad f(1_A) = 1_B$$

其中, O_A 和 O_B 分别是 A, B 中的最小元, 1_A 和 1_B 分别是 A, B 中的最大元。

[证] 对于任何 $a \in A$, 由于 A 是布尔代数, 所以存在着补元 $\bar{a} \in A$ 使得

$$O_A = a \wedge \bar{a} \quad \text{及} \quad 1_A = a \vee \bar{a} \quad (\text{互补律})$$

又由于 B 是布尔代数, f 是从 A 到 B 的同态函数, 从而有

$$f(\bar{a}) = (f(a))' \quad (\text{同态公式})$$

于是

$$\begin{aligned} f(O_A) &= f(a \wedge \bar{a}) \\ &= f(a) \cap f(\bar{a}) \quad (\text{同态公式}) \\ &= f(a) \cap (f(a))' \\ &= O_B \quad (\text{互补律}) \\ f(1_A) &= f(a \vee \bar{a}) \\ &= f(a) \cup f(\bar{a}) \quad (\text{同态公式}) \\ &= f(a) \cup (f(a))' \\ &= 1_B \end{aligned}$$

25. 设 a, b, b_2, \dots, b_r 是布尔代数 $\langle B, \leq, *, \oplus, ' \rangle$ 的原子。证明: $a b_1 \oplus b_1 \oplus \dots \oplus b_r$ 的充分必要条件是存在 i ($1 \leq i \leq r$), 使 $a = b_i$ 。

[证] 必要性

用反证法。假设对每个 i , $1 \leq i \leq r$, 都有 $a \neq b_i$, 那么由 a, b_i ($1 \leq i \leq r$) 都是原子, 因此 $a * b_i = 0$ (否则有 $a = a * b_i = b_i$, 与假设 $a \neq b_i$ 矛盾)。从而

$$\begin{aligned} &a * (b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r) \\ &= (a * b_1) \oplus (a * b_2) \oplus \dots \oplus (a * b_r) \quad (\text{分配律}) \\ &= 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \\ &= 0 \quad (0-1 \text{ 律}) \end{aligned}$$

但是由已知 $a \leq b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r$, 从下确界的性质可知

$$a * (b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_r) = a$$

从而得到 $a = 0$, 这与已知 a 是原子, $a \neq 0$ 矛盾,

充分性

若对某个 i , $1 \leq i_0 \leq r$, 使 $a = b_{i_0}$ 。则由上确界的性质可知

$$a \leq b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_{i_0-1} \oplus a \oplus b_{i_0+1} \oplus \cdots \oplus b_r$$

$$= b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_{i_0-1} \oplus b_{i_0+1} \oplus \cdots \oplus b_r \quad (\text{因为 } a = b_{i_0})$$

26. 设 b_1, b_2, \dots, b_r 是有限布尔代数 $\langle B, *, \oplus, ' \rangle$ 的所有原子。

证明：

$y=0$ 的充分必要条件 $\forall i (1 \leq i \leq r)$, 都有 $y * b_i = 0$

[证] 必要性

对于任何 $b_i (1 \leq i \leq r)$ $y * b_i = 0 * b_i = 0$ 总是成立, 因为 $y=0$

充分性

根据布尔代数的元素的原子表示定理, 可知

$$y = \bigoplus_{b_i \in S(y)} b_i \quad \text{这里 } S(y) = \{b_i : 1 \leq i \leq r \wedge b_i \leq y\}$$

因此, $y = y * y$ (幂等律)

$$= y \bigoplus_{b_i \in S(y)} b_i$$

$$= \bigoplus_{b_i \in S(y)} (y * b_i) \quad (\text{分配律})$$

$$= \bigoplus_{b_i \in S(y)} 0 \quad (\text{因为对任何 } i, 1 \leq i \leq r, \text{ 都有 } y * b_i = 0)$$

$$= 0 \quad (0-1 \text{ 律})$$

27. 设 $\langle \{0, 1\}, *, \oplus, ' \rangle$ 是布尔代数。写出下列布尔表达式的析取范式和合取范式。

$$a) (x_1 * x_2) \oplus (x_2 * x_3) \oplus (x_2' * x_3)$$

$$b) (x_1' * x_2 * x_3') \oplus (x_1 * x_2' * x_4) \oplus (x_2 * x_3' * x_4')$$

[解] a) 令 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 * x_2) \oplus (x_2 * x_3) \oplus (x_2' * x_3)$ 是 $\{0, 1\}^3$ 到 $\{0, 1\}$ 函数, 则其

运算表为

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1

1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

根据 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 的元组可构造出 f 的合取范式为

$$(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)' (x_1 \oplus x_2' \oplus x_3)(x_2 \oplus x_1' \oplus x_3) = M_3 * M_5 * M_7$$

根据 $f(x_1, x_2, x_3)=1$ 的元组可构造出 f 的析取范式为

$$(x_1' \oplus x_2' \oplus x_3) \oplus (x_1' \oplus x_2 \oplus x_3) \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_7$$

b) 令 $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 * x_2 * x_3) \oplus (x_1' * x_2' * x_4) \oplus (x_2 * x_3' * x_4')$

是 $\{0, 1\}^4$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数，于是

析取范式：

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= (x_1' * x_2' * x_3') \oplus (x_1' * x_2' * x_4) \oplus (x_2 * x_3' * x_4')$$

$$= (x_1' * x_2' * x_3' (x_4 \oplus x_4')) \oplus (x_1' * x_2' * (x_3 \oplus x_3') * x_4) \oplus ((x_1 \oplus x_1') x_2 * x_3' * x_4')$$

$$= (x_1' * x_2' * x_3' * x_4) \oplus (x_1' * x_2' * x_3' * x_4') \oplus (x_1' * x_2' * x_3' * x_4')$$

$$= m_4 \oplus m_9 \oplus m_{11} \oplus m_{12} \oplus m_{13}$$

合取范式：

$$(f(x_1, x_2, x_3, x_4))' \quad (\text{由去掉 } f \text{ 中的那些小项后剩下的小项构成})$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus (x_1, x_2, x_3, x_4') \oplus (x_1' * x_2' * x_3' * x_4')$$

$$\oplus (x_1' * x_2' * x_3' * x_4') \oplus (x_1' * x_2 * x_3 * x_4) \oplus$$

[解] a) 令 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 * x_2) \oplus (x_2 * x_3) \oplus (x_3' * x_3)$ 是 $\{0, 1\}^3$ 到 $\{0, 1\}$ 函数，则其

运算表为

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1

0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

根据 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 的元组可构造出 f 的合取范式为

$$(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)^* (x_1 \oplus x'_2 \oplus x_3)(x_2 \oplus x'_1 \oplus x_3) = M_3^* M_5^* M_7$$

根据 $f(x_1, x_2, x_3)=1$ 的元组可构造出 f 的析取范式为

$$(x'_1 \oplus x'_2 \oplus x_3) \oplus (x'_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \oplus m_1 \oplus m_3 \oplus m_5 \oplus m_6 \oplus m_7$$

$$b) \text{ 令 } g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^* x_2^* x_3) \oplus (x_1^* x'_2 x_4) \oplus (x_2^* x'_3 x'_4)$$

是 $\{0, 1\}^4$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数，于是

析取范式：

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$= (x_1^* x_2^* x'_3) \oplus (x_1^* x'_2 x_4) \oplus (x_2^* x'_3 x'_4)$$

$$= (x_1^* x_2^* x'_3 (x_4 \oplus x'_4)) \oplus (x_1^* x'_2 (x_3 \oplus x'_3) x_4) \oplus ((x_1 \oplus x'_1) x_2^* x'_3 x'_4)$$

$$= (x_1^* x_2^* x'_3 x_4) \oplus (x_1^* x'_2 x'_3 x'_4) \oplus (x_1^* x'_2 x_3 x_4) \oplus (x_1^* x'_2 x'_3 x'_4)$$

$$= m_4 \oplus m_9 \oplus m_{11} \oplus m_{12} \oplus m_{13}$$

合取范式：

$$(f(x_1, x_2, x_3, x_4))' \quad (\text{由去掉 } f \text{ 中的那些小项后剩下的小项构成})$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4) \oplus (x_1, x_2, x_3, x'_4) \oplus (x_1^* x'_2 x_3 x'_4)$$

$$\oplus (x_1^* x'_2 x'_3 x'_4) \oplus (x'_1 x_2^* x_3 x_4) \oplus (x'_1 x_2^* x_3 x'_4)$$

$$\oplus (x'_1 x_2^* x'_3 x_4) \oplus (x'_1 x'_2 x_3 x_4) \oplus (x_1^* x'_2 x_3 x'_4)$$

$$\oplus (x'_1 x'_2 x'_3 x_4) \oplus (x'_1 x'_2 x'_3 x'_4)$$

因此

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
& = (f(x_1, x_2, x_3, x_4))'' \quad (\text{反身律}) \\
& = (x'_1 \oplus x'_2 \oplus x'_3 \oplus x'_4) * (x'_1 \oplus x'_2 \oplus x'_3 \oplus x_4) * (x'_1 * x'_2 * x'_3 * x_4) \\
& \quad * (x'_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4) * (x_1 \oplus x'_2 \oplus x'_3 \oplus x'_4) * (x_1 \oplus x'_2 \oplus x'_3 \oplus x_4) \\
& \quad * (x'_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4) * (x_1 \oplus x_2 \oplus x'_3 \oplus x'_4) (x_1 \oplus x_2 \oplus x'_3 \oplus x_4) \\
& \quad * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x'_4) * (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4) \\
& = M_0 * M_1 * M_5 * M_7 * M_8 * M_9 * M_{10} * M_{12} * M_{13} * M_{14} * M_{15}
\end{aligned}$$

28. 设 $\langle 2^X, \cap, \cup, ' \rangle$ 到 $\langle B, \wedge, \vee, - \rangle$ 的满同态函数。

[证] (1) 后者唯一

用反证法。对于任何 $x \in 2^X$, 若有 $y_1, y_2 \in B$, 且 $y_1 y_2$ 使得 $g(x)=y_1$, 且 $g(x)=y_2$, 则由于

$$\begin{aligned}
& (x, y_1) \in g \wedge (x, y_2) \in g \\
& \Rightarrow (x, 0) \in g, (x, 1) \in g \quad (\text{由于 } y_1 \neq y_2, \text{ 且 } y_1, y_2, \text{ 且 } y_1, y_2 \in B = \{0, 1\}) \\
& \Rightarrow b \in x \wedge b \notin x
\end{aligned}$$

矛盾, 故引假设 $y_1 \neq y_2$ 错误, 从而 $y_1 = y_2$, g 是后者唯一的。

$$(2) \mathcal{D}(g) = 2^X$$

$$(3) g \text{ 是满射数, } \mathcal{R}(g) = B$$

由于 $B = \{0, 1\}$, 并且存在着 $x_1 = \{a, c\}$, 和 $x_2 = \{a, b\}$ 使 $g(x_1) = 0$, $g(x_2) = 1$, 故 $\mathcal{R}(g) = B$ 。

(4) g 满足同态公式, 即 g 保持运算。

对于任何 $x \in 2^X$, 由于

$$\begin{aligned}
& g(x') = 1 \\
& \Leftrightarrow b \in x' \\
& \Leftrightarrow b \notin x \\
& \Leftrightarrow g(x) = 0
\end{aligned}$$

$$\overline{g(x)} = 1$$

所以 $g(x') = \overline{g(x)}$

对于任何 $x_1, x_2 \in 2^X$, 由于

$$\begin{aligned}g(x_1 \cap x_2) &= 1 \\ \Leftrightarrow b \in x_1 \cap x_2 \\ \Leftrightarrow b \in x_1 \wedge b \in x_2 \\ \Leftrightarrow g(x_1) = 1 \wedge g(x_2) = 1 \\ \Leftrightarrow g(x_1) \wedge g(x_2) &= 1\end{aligned}$$

所以 $g(x_1 \cap x_2) = g(x_1) \wedge g(x_2)$

由于 $g(x_1 \cup x_2) = 1$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow b \in x_1 \cup x_2 \\ \Leftrightarrow b \in x_1 \vee b \in x_2 \\ \Leftrightarrow g(x_1) = 1 \vee g(x_2) = 1 \\ \Leftrightarrow g(x_1) \vee g(x_2) &= 1\end{aligned}$$

所以 $g(x_1 \cup x_2) = g(x_1) \vee g(x_2)$

综合以上四条, 可知 g 是从 $\langle 2^X, \cap, \cup, ' \rangle$ 到 $\langle B, \wedge, \vee, - \rangle$ 到的满同态函数。

离散数学习题解答

习题六 (第六章 图论)

1. 从日常生活中列举出三个例子, 并由这些例子自然地导出两个无向图及一个向图。

[解] ①用 V 代表全国城市的集合, E 代表各城市间的铁路线的集合, 则所成之图 $G = (V, E)$ 是全国铁路交通图。是一个无向图。

② V 用代表中国象棋盘中的格子点集, E 代表任两个相邻小方格的对角线的集合, 则所成之图 $G = (V, E)$ 是中国象棋中“马”所能走的路线图。是一个无向图。

③用 V 代表 FORTRAN 程序的块集合, E 代表任两个程序块之间的调用关

系，则所成之图 $G+(V, E)$ 是 FORTRAN 程序的调用关系图。是一个有向图。

2. 画出下左图的补图。

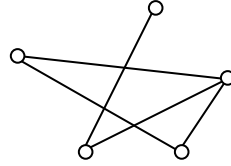
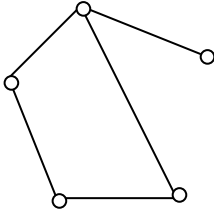


图 \overline{G}

[解] 左图的补图如右图所示。

3. 证明下面两图同构。

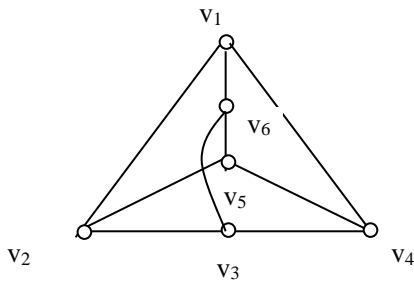


图 G

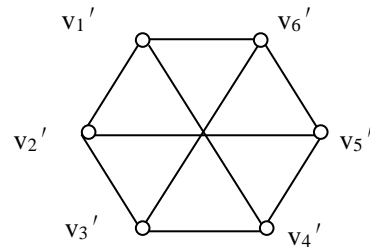


图 G'

[证] 存在双射函数 $\varphi: V \rightarrow V'$ 及双射函数 $\psi: E \rightarrow E'$

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= v_1' & \varphi(v_1, v_2) &= (v_1', v_2') \\ \varphi(v_2) &= v_2' & \varphi(v_2, v_3) &= (v_2', v_3') \\ \varphi(v_3) &= v_3' & \varphi(v_3, v_4) &= (v_3', v_4') \\ \varphi(v_4) &= v_4' & \varphi(v_4, v_5) &= (v_4', v_5) \\ \varphi(v_5) &= v_5' & \varphi(v_5, v_6) &= (v_5', v_6') \\ \varphi(v_6) &= v_6' & \varphi(v_6, v_1) &= (v_6', v_1') \\ & & \varphi(v_1, v_4) &= (v_1', v_4') \\ & & \varphi(v_2, v_5) &= (v_2', v_5') \\ & & \varphi(v_3, v_6) &= (v_3', v_6') \end{aligned}$$

显然使下式成立:

$$\psi(v_i, v_j) = (v_i, v_j') \Rightarrow \varphi(v_i) = v_i' \wedge \varphi(v_j) = v_j'$$

$$(1 \leq i \cdot j \leq 6)$$

于是图 G 与图 G' 同构。

4. 证明 (a), (b) 中的两个图都是不同构的。

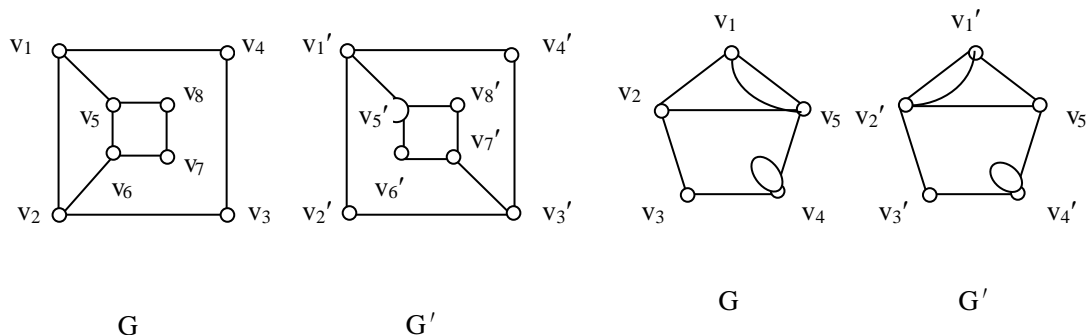


图 G 中有一个长度为 4 的圈 $v_1v_2v_6v_5v_1$, 其各顶点的度均为 3 点, 而在图 G' 中却没有这样的圈, 因为它中的四个度为 3 的顶点 v_1', v_5', v_7', v_3' 不成长度的 4 的圈。

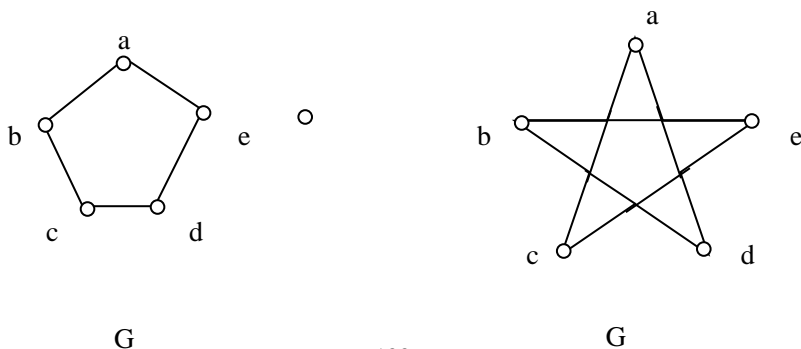
图 G 中' 有四个二度结点, v_6', v_8', v_4' , 它们每个都和两个三度结点相邻, 而 G 中一个区样的结点都没有。

在 (b) 中, 图 G' 中有一 2 度结点 v_3' , 它相邻的两个项点 v_2', v_4' 的度均为 4, 而在图 G 中却没有这样的点。

5. 一个图若同构于它的外图, 则称此图为自补图。在满足下列条件的无向简单图中:

- 1) 给出一个五个结点的自补图;
- 2) 有三个或一结点的自补图吗? 为什么?
- 3) 证明: 若一个图为自补图, 则它对应的完全图的边数不清必然为偶数。

[解] 1) 五个结点的自补图如左图 G 所示



同构函数 $\varphi: V \rightarrow V$ 及 $\psi: E \rightarrow \bar{E}$ 如下:

$$\begin{array}{ll} \varphi(a)=a & \psi(a, b)=(a, c) \\ \varphi(b)=c & \psi(b, c)=(c, e) \\ \varphi(c)=e & \psi(c, d)=(e, d) \\ \varphi(d)=b & \psi(d, e)=(b, d) \\ \varphi(e)=d & (e, a)=(d, a) \end{array}$$

2) (a) 没有三个结点的自补图。因为三个结点的完备图的边数为 $\frac{3(3-1)}{2}=3$ 为

奇数, 所以由下面 3) 的结论, 不可能有自补图。

(b) 有五个结点的自补图。1) 中的例子即是一个五个结点的自补图。

3) 证: 一个图是一个自补图, 则它对应的完全图的边数必为偶数。

因为若一个图 G 是自补图, 则 $G \cup \bar{G}$ 是对应的完全图, 而且 $E \cap \bar{E} = \emptyset$, G 现 \bar{G} 同构, 因此它们的边数相等, 即 $|E| = |\bar{E}|$, 因此对应的完全图的边数 $|E^*| = |E| + |\bar{E}| = 2|E|$, 是偶数。

实际上, n 个项点 ($n > 3$) 的自补图 G , 由于其对应的完全图的边数 $|E^*| = \frac{n(n-1)}{2}$, 因此有 $\frac{n(n-1)}{2} = 2|E|$, 为偶数。这里 $n \geq 4$ 。对于所有大于或等于 4 的正整数, 都可表达成 $n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ 的形式, 这里 $k=1, 2, \dots$ 。其中只有 $n=4k, 4k+1$, 才能使 $\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数, 所以自补图的项点数只能是 $4k$ 或 $4k+1$ 形式, ($k \in \mathbb{N}$)

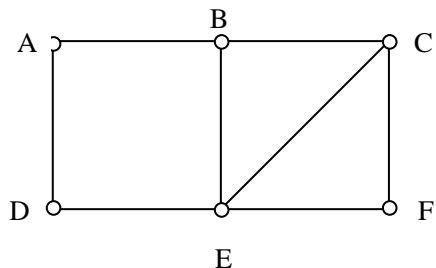
6. 证明在任何两个或两个以上人的组内, 总存在两个人在组内有相同个数的朋友。

[证] 令上述组内的人的集合为图 G 的项点集 V , 若两人互相是朋友, 则其间联以一边。所得之图 G 是组内人员的朋友关系图。显然图 G 是简单图, 图中项点的度恰表示该人在组内朋友的个数, 利用图 G , 上述问题就抽象成如下的图论问题: 在简单图 G 中, 若 $|V| \geq 2$, 则在 G 中恒存在着两个项点, $v_1, v_2 \in V$, 使得它们的度相等, 即 $\deg(v_1) = \deg(v_2)$ 。其证明如下:

若存在着一个项点 $v \in V$, 使得 $\deg(v)=0$, 则图 G 中各项点的度最大不超过 $n-2$ 。因此 n 个项点的度在集合 $\{0, 1, 2, \dots, n-2\}$ 里取值, 而这个集合只有 $n-1$ 个元素, 因此, 根据鸽笼原理, 必有两个项点的度相同。

若不存在一个度为零的顶点，则图 G 中各项点的度最大不超过 $n-1$ 。因此 n 个顶点的度在集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 中取值，这个集合只有 $n-1$ 个元素，因此，根据鸽笼原理，必有两具顶点的度相同。

7. 设图 G 的图示如右所示：



- 1) 找出从 A 到 F 的所有初级路；
- 2) 找出从 A 到 F 的所有简单路；
- 3) 求由 A 到 F 的距离。

[解] 1) 从 A 到 F 的初级路有 7 条

$P_1: (A, B, C, F)$, $P_2: (A, B, C, E, F)$, $P_3: (A, B, E, F)$

$P_4: (A, B, E, C, F)$, $P_5: (A, D, C, E, F)$, $P_6: (A, D, E, C, F)$

$P_7: (A, D, E, B, C, F)$ 。

2) 从 A 到 F 的简单路有 9 条

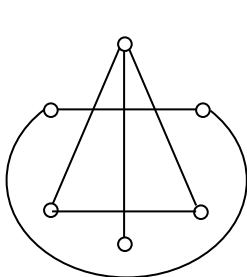
除了上述 1) 中 7 条外，不有 $P_8: (A, D, E, C, B, E, F)$

$P_9: (A, D, E, B, C, E, F)$ 。

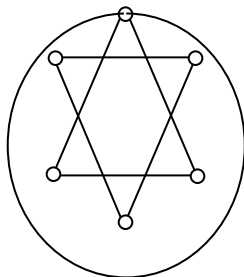
3) 从 A 到 F 的距离为 3。

由图可看出，显然从 A 到 F ，一步不可能到达，二步也不可到达；但有长度为 3 的路，比如 P_1, P_3, P_5 等能从 A 到 F ，故从 A 到 F 的距离为 3。

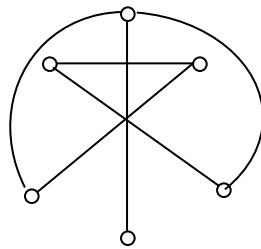
8. 在下面的图中，哪此是边通图？哪些是简单图？



(a)



(b)



(c)

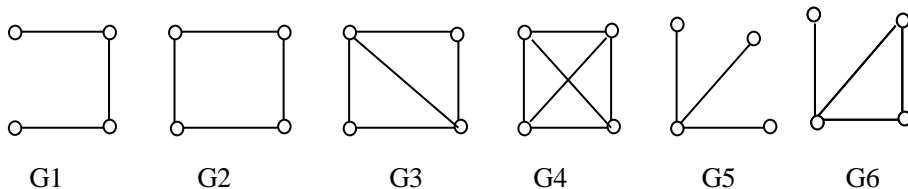
[解] (1) 图 (2) 与图 (b) 不连通，它们能分成两个边通支。所以只有图 (c) 是连能图。

(2) 图 (c) 是简单图，图因为它显然无平等边，无自环。图 (a)、(b) 是多重图 (a) 有平行边 (b) 有自环。

9. 求出所有具有四个结点的简单无向连通图。

[解] 在不同构的意义下, 具有四个结点的简单无向连通图共有 6 个。

如下面所示:



(实际上, 具有四个结点的简单图共有 11 个, 这可由 Pölya 定理得证。参见卢开澄的《组合数学—算法与分析》上册 P241-P244)。

10. 设 G 是一个简单无向图, 且为 (n, m) 图, 若

$$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

证明 G 是连通图。

[证] 用反证法。假若简单无向图 G 不是连通图, 那么 G 必可成 $K (\geq 2)$ 个连通分支 G_1, G_2, \dots, G_k , 每个连通分支 $G_i (1 \leq i \leq k)$ 都是一个简单无向图, 因此它们分别为 $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \dots, (n_k, m_k)$ 图显然有 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, 且 $n_i \leq n-1 (1 \leq i \leq k)$ 于是有

$$\begin{aligned}
 m &= m_1 + m_2 + \dots + m_k \\
 &\leq \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} + \dots + \frac{n_k(n_k-1)}{2} \\
 &\leq \frac{(n-1)(n_1-1)}{2} + \frac{(n-1)(n_2-1)}{2} + \dots + \frac{(n-1)(n_k-1)}{2} \\
 &= (n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot ((n_1-1) + (n_2-1) + \dots + (n_k-1)) \\
 &= \frac{1}{2} (n-1)((n_1+n_2+\dots+n_k)-k) \\
 &= \frac{1}{2} (n-1)(n-k) \\
 &\leq \frac{1}{2} (n-1)(n-2) \quad (k \geq 2)
 \end{aligned}$$

这与已知 $m > \frac{1}{2} (n-1)(n-2)$ 矛盾。

因此假设错误，G 是连通图。

11. 设 $G=(V, E)$ 是无向完全图（无自环）， $|V|=n$

1) 求 G 中有多少初级圈？

2) 设 $e \in E$ ，求含有 e 的初级圈有几个？

3) 设 $u, v \in V, u \neq v$ ，求由 u 到 v 有几条初级路？

[解] 1) 在一个有 n 个结点的无向完全图（无自环）中，构成一个初级圈，至少需 3 个结点，至多有 n 个结点，故 G 中初级圈的个数为

$$\frac{2!}{2} \binom{n}{3} + \frac{3!}{2} \binom{n}{4} + \cdots + \frac{(n-2)!}{2} \binom{n}{n-2} + \frac{(n-1)!}{2} \binom{n}{n} \\ = \sum_{k=3}^n \frac{1}{2} A_n^k (\text{个})$$

即将从 n 个结点中选出的 k 个结点进行排列，然后除去重复：每个排列的倒排列（除 2）；长为 k 的圈排列可形成 k 个线排列（除 k）。

2) 含有边 e 的初级圈为

$$A_{n-2}^1 + A_{n-2}^2 + \cdots + A_{n-2}^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} A_{n-2}^k (\text{个})$$

即，从 u 到 v 的直接边（完全图，该边存在）是一条；再将该直接边加到其它初级路里，就构成了含边 (u, v) 的初级圈，从而由 2) 可得如上数值。

12. 试证在简单有向图中

1) 每个结点及每条边都属于且只属于一个弱分图；

2) 每个结点及每条边都至少属于一个单向分图。

[证] 1) 有向图中的弱连通性建立了 G 中结点集合 V 上的等价关系，因此构成了 V 上的一个划分；同时，还建立了边集上的一个划分。因此，每一个弱连通支就是一个“划分块”。设 G_1, G_2, \cdots, G_k 为 G 的所有弱连通分图，则有：

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cdots \cup V(G_k)$$

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cdots \cup E(G_k)$$

并且，当 $i \neq j$ 时， $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$ ， $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ 。因此，每个结点及每条边都属于且只属于一个弱图。

2) 有向图中的单向连通性建立了 G 中结点集合 V 上的一个相容关系，因此构成了 V 上的一个覆盖；同时，还建立了边集上的一个覆盖；每一个单向分图就是一个“覆盖快”。设 G_1, G_2, \cdots, G_k 为 G 的所有单向分图，则有

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \cdots \cup V(G_k)$$

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_k)$$

因此，每个结点及每条边都至少属于一个单向分图。

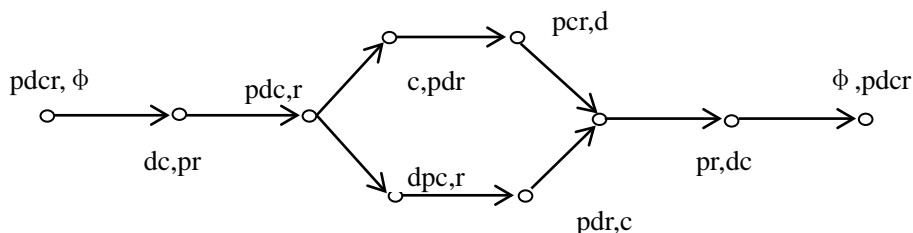
13. 试用有向图描述下述问题的解法路径：某人 m 带一条狗 d ，一只猫 c 和一只兔子 r 过河，没有船，他每次游过河时只能带一只动物，当没有人管理时狗和兔子不能相处，猫和兔子也不能相处。在这些条件的约束下，他怎样才能将这三只动物从北岸带往南岸？

[解] 将人，狗，兔中任意几种在一起的情况看作是一种状态；一个布局是一个二元组，由两个互补的状态构成，二元组的前者表示河北岸的状态，后者表示河南岸的状态。初始布局为 (pdc, ϕ) ，终止布局为 (ϕ, pdc) 安全布局有十种，不安全布局有六种，它们是：

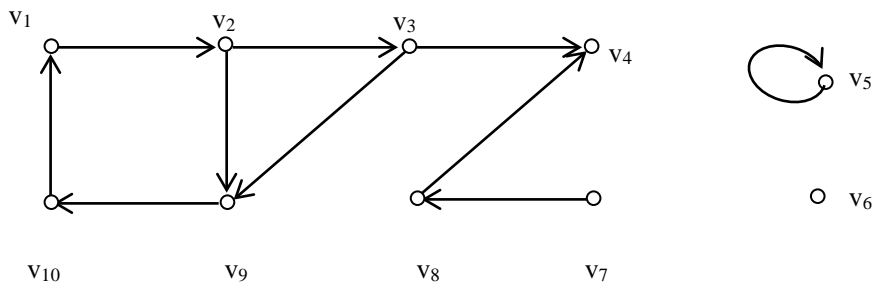
$(dr, pc), (cr, pd), (dcr, p),$

$(pc, dr), (pd, cr), (p, dcr)。$

按题意构造有向图，其解法路径如下：



14. 求下列图中的所有强连通支，单向连通支，弱连通支。



[解] 1) 有六个强连通支，它们是：

$G_1 = (\{v_1, v_2, v_3, v_9, v_{10}\}, \{(v_1, v_2), (v_2, v_9), (v_9, v_{10}), (v_{10}, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_9)\})$

$G_2 = (\{v_4\}, \phi), G_3 = (\{v_8\}, \phi), G_4 = (\{v_7\}, \phi),$

$G_5 = (\{v_5\}, \{(v_5, v_5)\}), G_6 = (\{v_6\}, \phi)。$

2) 有四个单向连通支, 它们是:

$$G_1 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10}\}, \{(v_1, v_2), (v_2, v_9), (v_9, v_{10}), (v_{10}, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_9), (v_3, v_4)\}),$$

$$G_2 = (\{v_4, v_7, v_8\}, \{(v_7, v_8), (v_8, v_4)\}),$$

$$G_3 = (\{v_5\}, \{(v_5, v_5)\}), G_4 = (\{v_6\}, \emptyset)$$

3) 有三个弱连通支, 它们是

$$G_1 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}, \{(v_1, v_2), (v_2, v_9), (v_9, v_{10}), (v_{10}, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_9), (v_3, v_4), (v_7, v_8), (v_8, v_4)\}),$$

$$G_2 = (\{v_5\}, \{(v_5, v_5)\}), G_3 = (\{v_6\}, \emptyset)$$

15. 给出有向图如下所示:

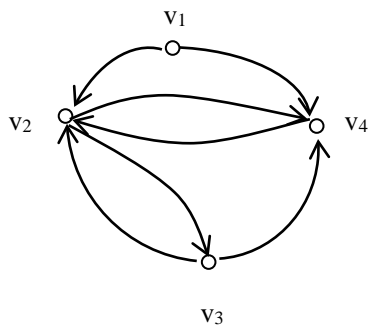
1) 求它的邻接矩阵 A ;

2) 求 A^2, A^3, A^4 , 指出从 v_1 到 v_4 长度为 1, 2, 3, 4 的路径各有几条?

3) 求 $A^T, A^T A, A A^T$, 说明 $A^T A$ 和 $A A^T$ 中元素 $(2, 3)$ 和 $(2, 2)$ 的意义;

4) 求 $A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}$ 及可过矩阵 R ;

5) 求出强度通支。



[解] 1) 它的邻接矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

从 v_1 到 v_4 长度为 1 的路有 1 条, 是 (v_1, v_4) ;

从 v_1 到 v_4 长度为 2 的路有 1 条, 是 $(v_1, v_2), (v_2, v_4)$;

从 v_1 到 v_4 长度为 3 的路有 2 条, 是:

$(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$;

$(v_1, v_4), (v_4, v_2), (v_2, v_4)$ 。

从 v_1 到 v_4 长度为 4 的路有 3 条, 是:

$(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_4)$;

$(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_2), (v_2, v_4)$;

$(v_1, v_4), (v_4, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$;

3)

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A} \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

在 $A^T A$ 中, 元素 $(2, 3) = 0$ 的意义是:

不存在着这样的结点, 从它发出的边同时终止于结点 v_2 及 v_3 ;

在 $A^T A$ 中，元素 $(2, 2) = 3$ 的意义是： $\overrightarrow{\text{deg}}(v_2) = 3$ ，即结点 v_2 的入度为 3。

在 AA^T 中, 元素 $(2, 3) = 1$ 的意义是: 存在着一个结点, v_4 从 v_2 及 v_3 发出的边同时终之于它;

在 AA^T 中, 元素 $(2, 2)=2$ 的意义是: $\overleftarrow{\deg}(v_2)=2$, 即结点 v_2 的出度为 2。

4)

$$\mathbf{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

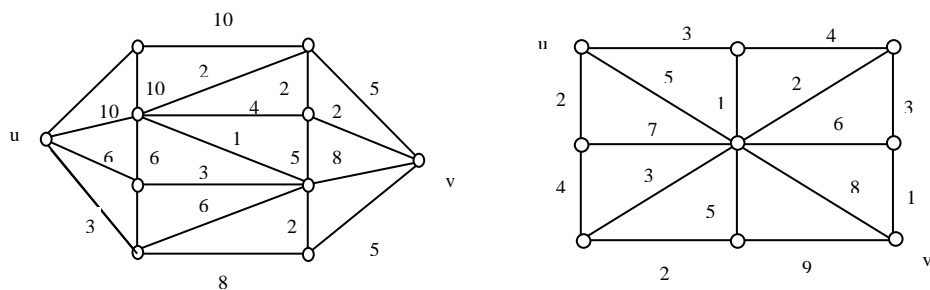
$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \vee \mathbf{A}^{(2)} \vee \mathbf{A}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5) • 强连通支为

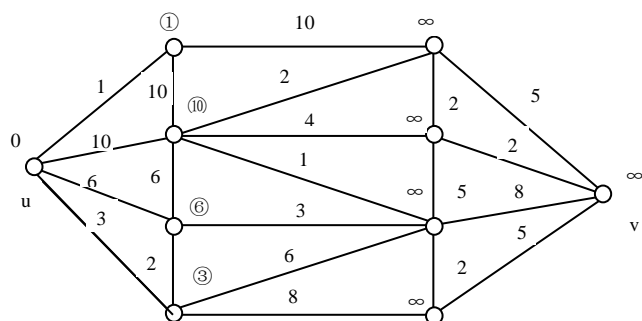
$$G_1 = (\{v_1\}, \Phi)$$

$$G_2 = (\{v_2, v_3, v_4\}, \{(v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_2)\})$$

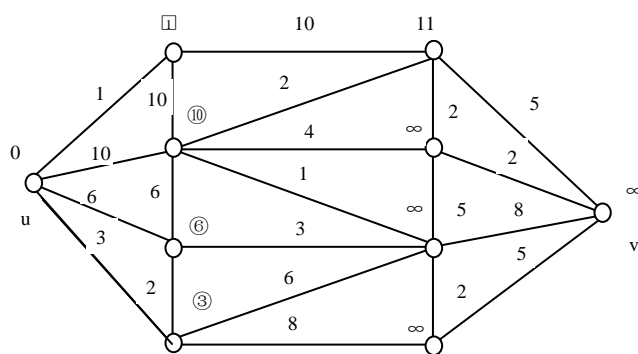
16. 利用 Dijkstra 算法, 求出下面图中从 u 到 v 的所有最短路径及路径长度。



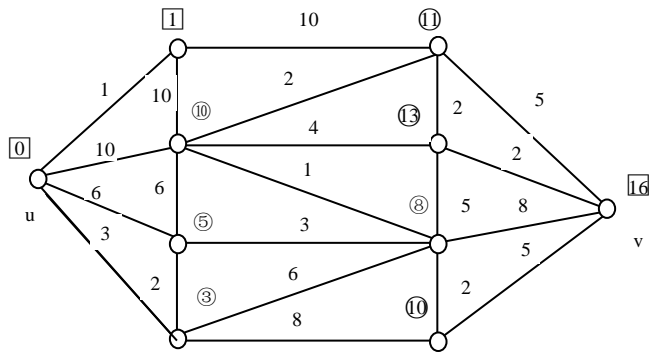
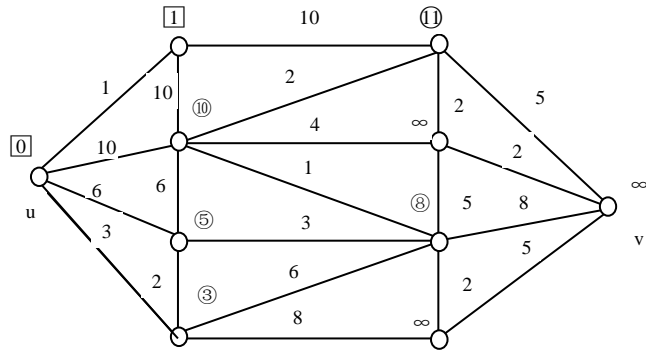
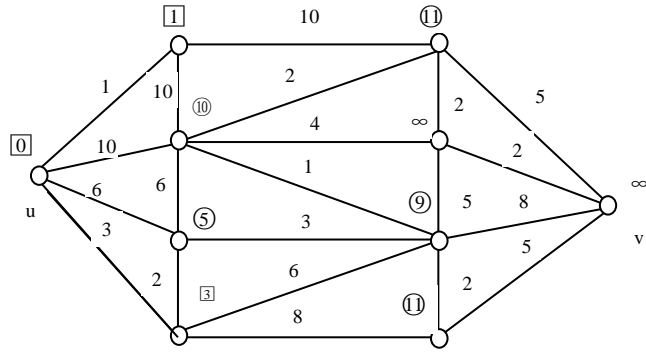
(1)

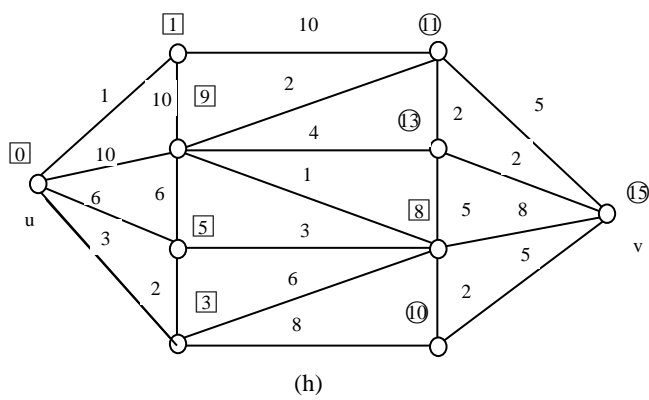
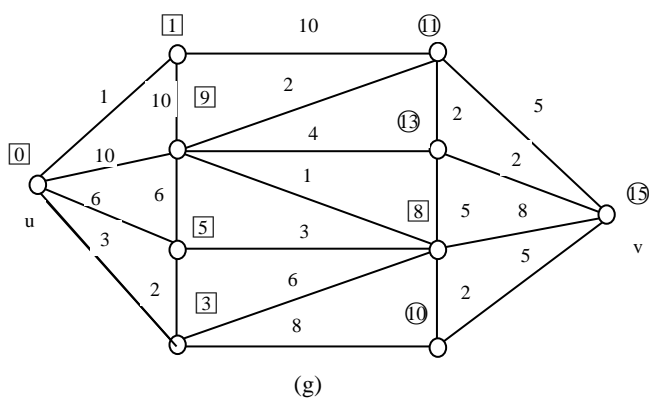
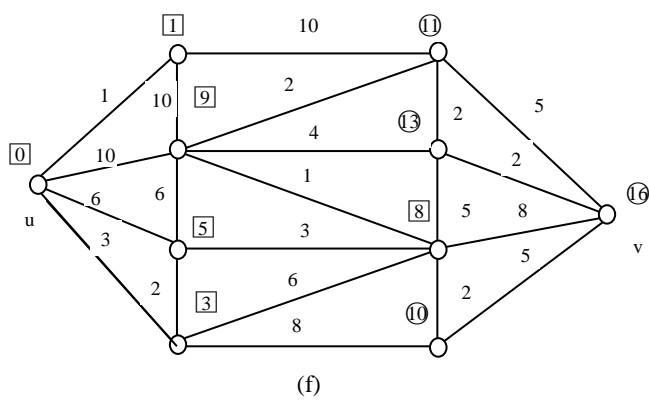


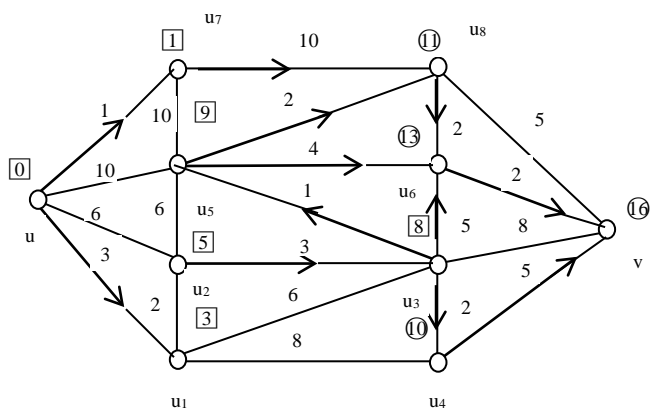
(a)



(b)







从 u 到 v 的最短路径共有五条：

$$P_1=(u,u_1,u_3,u_4,v)$$

$$P_2=(u,u_1,u_2,u_3,u_5,u_6,v)$$

$$P_3=(u,u_1,u_2,u_3,u_6,v)$$

$$P_4=(u,u_1,u_2,u_3,u_5,u_8,u_6,v)$$

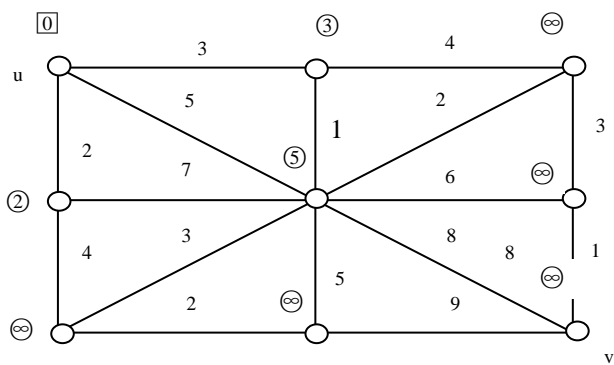
$$P_5=(u,u_7,u_8,u_6,v)$$

从 u 到 v 的最短路长为：

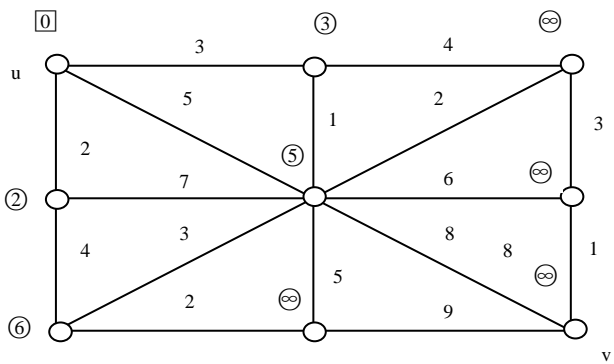
$$W(P_1)=W(P_2)=W(P_3)=15。$$

(j)

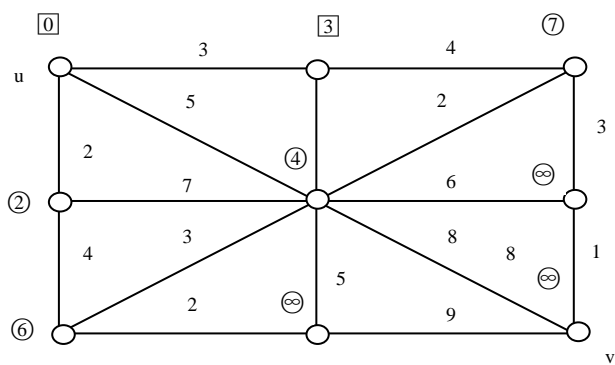
(2)



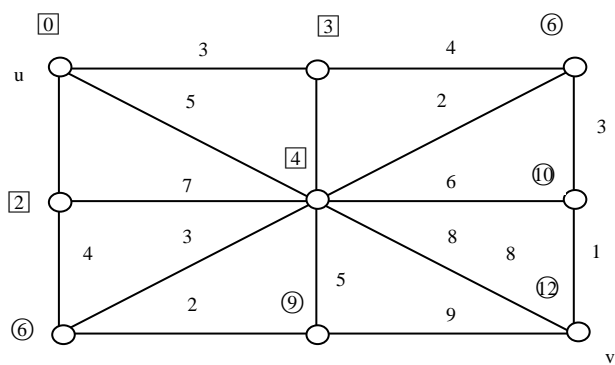
(a)



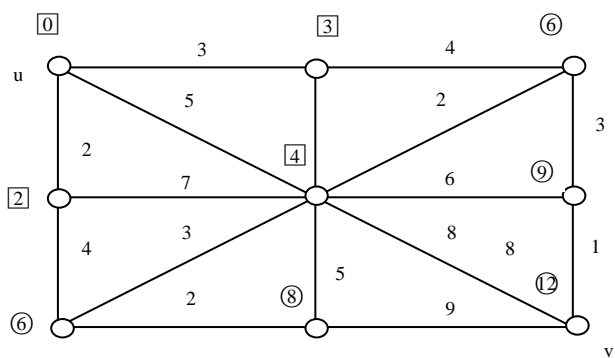
(b)



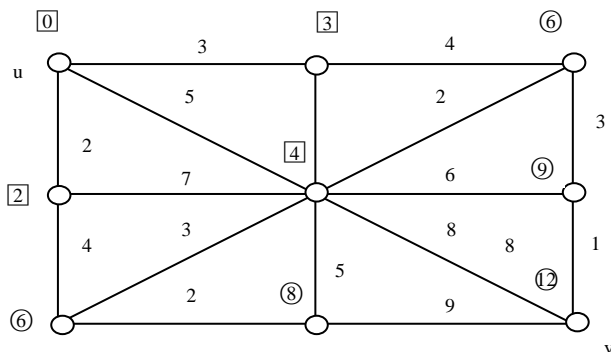
(c)



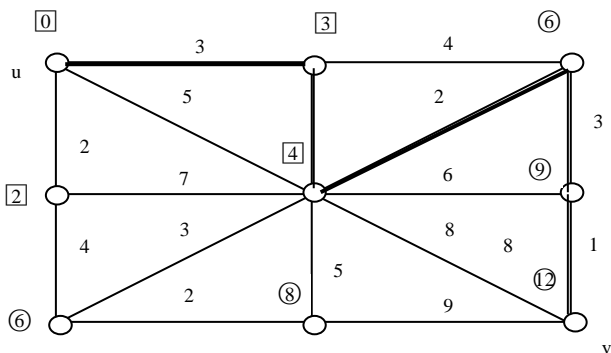
(d)



(e)



(f)



(g)

17. 在 Dijkstra 算法中, 增加一个记忆系统, 使得此算法不仅能给出从 u 到 v 的最短路的长, 而且可以给出一条最短路径。

[解] 观察 Dijkstra 算法的 NQ2, 容易看出每当确定出一个新的标记点 t_0 时, 由初始结点 u 到结点 t_0 的最短路就可以确定下来了 (但可能不唯一)。因而, 该路中心至少有一点 P 。直接与结点 t_0 相邻。故此, 修正的算法如下:

算法一: 在确定从结点 u 到结点 v 的最短路的路长的同时,

NQ1. $P := \{u\}$; $T := V \setminus P$; $S(u) := [u]$; $d(u) := 0$;

$(\forall t \in T)(d(t) := \infty)$

NQ2. $(\forall t \in T)(d(t) := \min_{p \in P} \{d(p) + W(p, t)\})$;

$(\exists t_0 \in T)(\forall t \in T)(d(t_0) \leq d(t))$;

$(\exists P_0 \in P)(d(t_0) = d(P_0) + W(P_0, t_0))$;

$S(t_0) := [S(p_0) \mid t_0];$ (表结构)

$N_3. P := PU\{t_0\}; T := T \setminus \{t_0\}; \text{mark}(t_0) := d(t_0)$

$N_4. \text{if } t_0 = v \text{ then exit else goto } N_2;$

我们也可以采用回溯方法。

算法二：在 Dijkstra 算法之后增加一个回溯系统，求出一条从 u 到 v 的最短路径。

$N_1. P := \{u\}; T := V \setminus P; d(u) := 0; (\forall t \in T)(d(t) := \infty);$

$N_2. (\forall t \in T)(d(t) := \min_{p \in P} \{d(t), d(p) + w(p, t)\});$

$(\exists t_0 \in T)(\forall t \in T)(d(t_0) \leq d(t));$

$N_3. P := PU\{t_0\}; T := T \setminus \{t_0\}; \text{mar}(t_0) := d(t_0)$

$N_4. S := [v]; g := v$

$N_5. (\exists p \in P)(d(p) = d(g) = W(p, q));$

$s := [p \mid s];$

$q := p;$

$N_6. \text{if } g = u \text{ then exit else goto } N_3$

以上两种算法都直接给出了从结点 u 到结点 v 的最短路径。但是，算法一的记忆比较庞大，而算法二又重复了 Dijkstra 算法中的一些判断过程。我们综合以上两种算法，又有如下

算法三：在求出从结点 u 到结点 v 的最短路径之间各结点的最短长度 d 值以及前驱结点（紧前结点）

$N_1. P := \{u\}; T := V \setminus P; d(u) := 0; (\forall t \in T)(d(t) := \infty);$

$N_2. (\forall t \in T)(d(t) := \min_{p \in P} \{d(t), d(p) + w(p, t)\});$

$(\exists t_0 \in T)(\forall t \in T)(d(t_0) \leq d(t));$

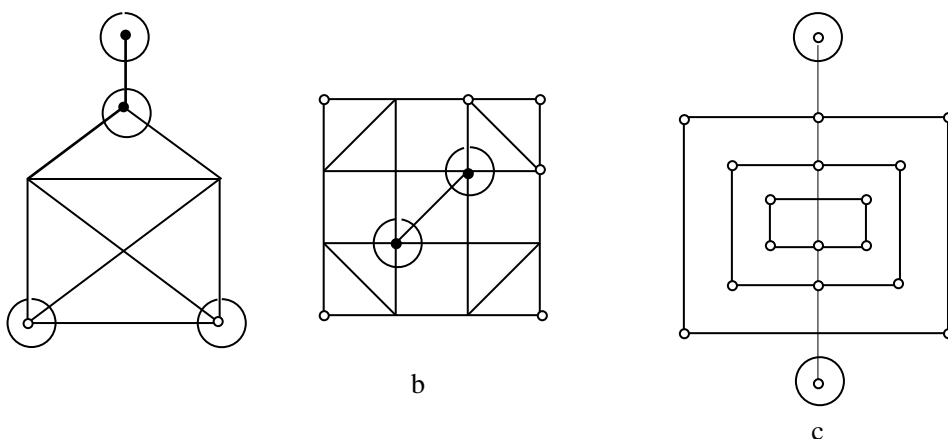
$(\exists p \in P)(d(p) = d(t_0) + w(p, t_0));$

$N_3. P := PU\{t_0\}; T := T \setminus \{t_0\}; \text{mark}(t_0) := (p_0, d(t_0));$

$N_4. \text{if } t_0 = v \text{ then exit else goto } N_2;$

算法三并未直接给出从结点 u 到结点 v 的最短路径，但它的记忆系统比较简单，计算方便。要给出从结点 u 到 v 的最短路径时，只要从终步 v 开始，根据标记的第一个分量，向前回溯即可得到。

18. 判断下列图示能否一笔画。



[解] 根据本章 § 2 定理 2: 图中奇结点的个数是偶数。所以奇结点的个数为 $2k$, 当 $k=0, 1$ 时, 此图是一笔画的, 而当 $k>1$ 时, 则此图是 k 笔画的。于是

图(a), 不是一笔画, 因为它的奇结点为四个 (用 \odot 表示);

图 (b), (c) 都是一笔画, 因为它的奇结点是二个;

19. 设 G 是有向图, 证明 G 是 Euler 图的充要条件是: G 是强连通的, 且 G 中每一结点的进度等于出度。

[证] 必要性

若 G 是 Euler 图, 则 G 中含有有向 Euler 圈, 并且 G 中无孤立点, 从而 G 中每个结点都与一条有向边相连。由于每条有向边都必须有在 Euler 圈上, 因此每个结点也都在有向 Euler 圈上, 所以从任一结点出发都可到达另一任意结点, 故此 G 是强连通的。

而且, 又由于每条有向边只能在有向 Euler 圈中出现一次, 于是每一个结点, 有一边进来, 就应有一边出去, 再有一边进来, 就应再有一边出去; 这样, 每一结点的进度必然等于出度。

充分性

因为 G 是强连通的, 故 G 中任何两个结点都可互相到达, 因此 G 中存在着有向简单圈。不妨设 C 是 G 中长度最长的有向简单圈套, 则 C 必是 G 中的有向 Euler 圈, 从而 G 是 Euler 图。

否则, 必有边 e 不在圈 C 中, 但 e 的一个端点在 C 上, 不然的话, 则图 G

一定不强连通，这和已知条件矛盾。由于对于图 G 中每个点 v , $\overrightarrow{\deg}_G(u) = \overleftarrow{\deg}_G(u)$, 并且 C 是一个有向圈, 从而对图 $G_1 = (V(G), E(G) \setminus C)$ 仍有 $\overrightarrow{\deg}_{G_1}(u) = \overleftarrow{\deg}_{G_1}(u)$, 故此在 G_1 中一定存在含有 e 的有向圈 C_1 中一定存在含 e 的有向圈 C_1 , $C \cup C_1$ 显然仍是 G 中的有向圈, 且此有向圈的长度大于 C 的长度, 这和 C 是 G 中最长的有向圈的假定相矛盾, 故 C 一定是 G 中的有向 Euler 圈。

这个有向 Euler 圈 C 可利用一个算法给出:

N01. 以 G 中任一结点出发, 沿着有向边走成一个圈, 而且是简单圈套;

N02. 若此圈已是有向 Euler 圈, 出口;

N03. 否则, 除此圈外, 必仍有若干边不在其中, 这些边中至少有一条边以引中至少有一条边以此圈中的某一结点为起点, 以这个结点为起点走出一个圈 (这个别圈不应含原圈中的任一边, 并且是一简单圈);

N04. 将此圈插入原圈中, 得到一个新的长度更长的简单圈, 然后 goto N02.

20. 设 G 是连通的无向图, 且有 $2k > 0$ 奇结点。证明: 在 G 中存在 k 条边不重的简单路 $G_1, C_2, C_3 \cdots C_k$, 使

$$E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup E(C_3) \cup \cdots \cup E(C_k)$$

[证] 设 $v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{2k}$ 为 G 中的 $2k$ 个奇结点, 在 v_i 和 v_{i+k} 两个结点间连以新边 e_i^* ($i=1, 2, \cdots, k$), 所得之图记为 G^* , 则 G^* 的每个结点的度均为偶数, 又由于 G 连通, 则 G^* 也是连通的, 根据 Euler 定理, 知在 G^* 中存在 Euler 圈 C^* 。若我们从 C^* 中除去这 k 条新边 e_i^* ($i=1, 2, \cdots, k$), 则 C^* 就分解成 k 条边不重的简单路 $C_1, C_2, C_3 \cdots C_k$, 并且显然有 $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup E(C_3) \cdots \cup E(C_k)$ 。

21. 构造一个长度为 16 的 De Bruijn 序列。

[解] 我们定义一个有向图 D_4 如下: D_4 的项点是 3 位二进制数 $p_1p_2p_3$, 其中 $p_i=0$ 或 1。存在一条以项点 $p_1p_2p_3$ 为起点, 以项点 $q_1q_2q_3$ 为终点的向边 $(p_1p_2p_3, q_1q_2q_3)$ 当且仅当 $p_2=q_1, p_3=q_2$ 。另外, D_4 的每条有向边 $(p_1p_2p_3, p_2p_3p_4)$ 上都标以四位二进制数 $p_1p_2p_3p_4$ 。 D_4 如下图 1 所示:

显然, D_4 是连通的, 并且 D_4 的每个项点都具有入度 2 和出度 2, 故由有向图的 Euler 定理, 知 D_4 中存在着一一条有向 Euler 圈, 这条有向 Euler 圈从图 1

可容易得到为

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}$ 。

它可看作是 D_4 的弧的序列，它产生一个长为 $2^4=16$ 位二进制数 0000111100101101

（它恰好是由 $a_i(i=\overline{1,16})$ 的第一位数字组成），和鼓轮表面的设计要求符合。用这个 16 位二进制数设计的鼓轮如图 2 所示：

这个 16 位二进制数就是要求的长度为 16 的 De Bruijn 序列。

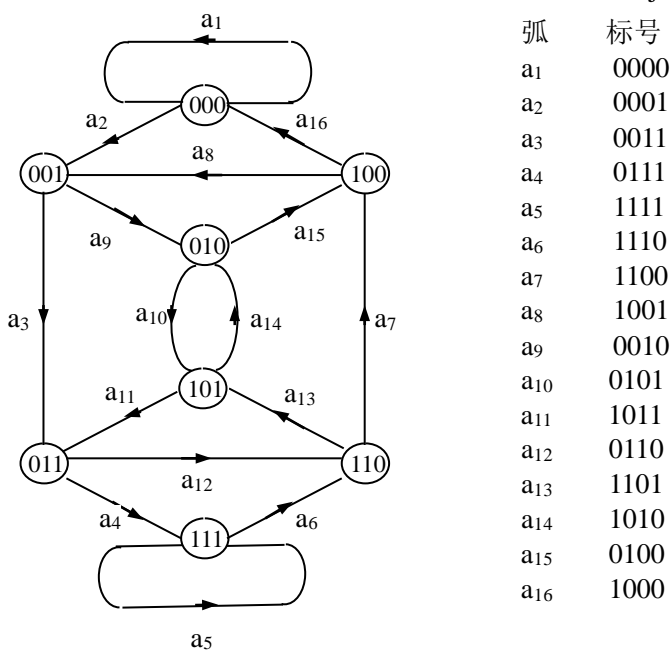


图 1

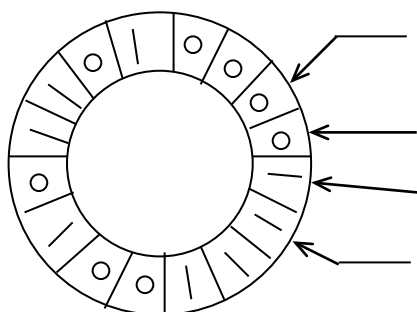


图 2

22. 1) 画一个图示，使它既有一条 E-圈，又有一条 H-圈；
- 2) 画一个别图示，使它有一条 E-圈，但没有一条 H-圈；
- 3) 画一个图示，使它没有一条 E-圈，但有一条 H-圈；
- 4) 画一个图示，使它既没有一条 E-圈，又没有一条 H-圈；

[解] (a) 图 1 既有 E-圈, 又有 H 圈。

(b) 图 2 有 E-圈, 但没有 H-圈。

(c) 圈 3 有 H-圈, 但没有 E-圈。

(d) 图 4 既没有 E-圈, 又没有 H-圈。

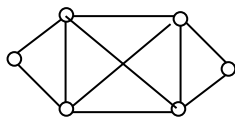


图 1

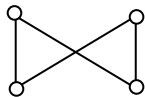


图 2

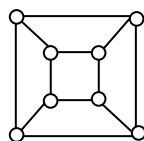


图 3

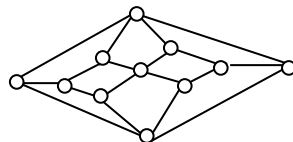


图 4

图 2 不存在 H-圈, 是因为存在着 $S = \{\text{中间点}\}$, 使 $W(G \setminus S) = 2$ 个连通支数, 而

$|S| = 1$, 从而 $W(G \setminus S) \not\leq |S|$ 故由定理 1 判定 H-图的必要条件可知不存在 H-圈。

图 3 不存在 E-圈, 是因为 G 中存在 8 个结点的度均为 3, 是奇数。图 4 中不存在 H-圈, 因为 G 是一个偶图 (二分图), 而偶图要有圈, 必须结点数为偶数 (即 $|X| = |Y|, |V| = |X| + |Y| = 2|X|$), 而 G 的结点数为 11 个, 是奇数, 不是偶数。

23. 若 $G = (V, E)$ 有 Hamilton 路, 证明对 V 中任一非空子集 S , 均有 $W(G \setminus S) \leq |S| + 1$ 。

[证] 设 $G = (V, E)$ 中的 Hamilton 路为 C , 路的两个端点为 v_1 , 及 v_2 。我们给 G 增加一个新结点, v^* 及两个新边 (v^*, v_1) 和 (v^*, v_2) 而得到图 G^* , 于是 G^* 中就有 Hamilton 圈 G^* (它由 Hamilton 路 C 及关联新点 v^* 的两个新边构成)。令 $S^* = S \cup \{v^*\}$, 则显然有 $G \setminus S = C^* \setminus S^*$ 。从而根据定理 1 有 Hamilton 圈的必要条件, 有

$$W(G \setminus S) = W(G^* \setminus S^*) \leq |S^*| = |S| + 1.$$

24. 雄辩地证明下面的图示中没有 Hamilton 路。

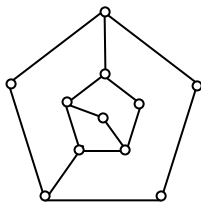


图 1

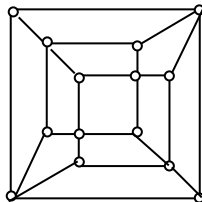


图 2

[证] (1) 将图 1 标记为图 3。

图 3 中存在着 Hamilton 路, 比如 $H = (b, c, h, g, k, i, d, e, a, f, j)$

但是, 图 3 中不存在 Hamilton 圈。因为, 结点 e, j 均为 2 度结点, 故若 Hamilton 圈, 则引 H -必通过 e, j 及其关联的四条边, 因此在边 (a, e) 及 (f, j) 上各增加一个结点 l, m , 得到图 4, 显然, 图 1, 即图 3 有 H-圈当且仅当图 4 有 H-圈。

取 $S=\{a, e, l, g, i, c\}$, 则 $G \setminus S=\{m, f, j, k, b, h, d\}$ 这 7 个孤立点, 因此 $W(G \setminus S)=7$, 而 $|S|=6$, 故此有

$$W(G \setminus S) \not\leq |S|$$

根据定理 1, 有 H-圈的必要条件, 知图 4 中没有 H-圈, 因此图中没有 H-圈。

(2) 图 2 中不存在 H 路。

证法一: 将图中偶结点全标为 A, 奇结点全标为 B, 取 $S=\{\text{偶结点}\}$ 则 $G \setminus S$ 为 8 个孤立奇结点, 于是 $W=8$, 而 $|S|=6$ 。从而有 $W(G \setminus S) \not\leq |S|+1$, 于是根据第 23 题的结论, 有 H-路的必要条件, 知无 H-路存在。

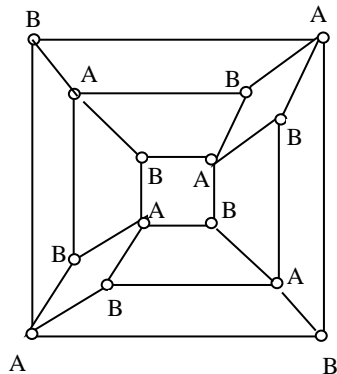


图 5

证法二: 注意到图中的标号, 奇、偶结点交错,

因此是一个偶图 (二分图) 于是若有 H-路, 则奇偶结点之差不得超过 1。但是这里奇结点 (标为 B) 有 8 个, 偶结点 (标为 A) 有 6 个, 其差为 2。所以不可能有一条 H-路。

25. 有七位客人入席, A 只会讲英语; B 会讲汉语; C 会讲英语, 意大利语及俄语; D 会讲汉语及日语; E 会讲意大利语及德语; F 会讲法语, 日语及俄语; G 会讲德语和法语。问主人能否把诸位安排在一张圆桌上, 使每一位客人与左右邻不用翻译便可交谈。若能安排, 请给出一个方案。

[解] 能安排, 其方案为:

$$H = (A, B, D, F, G, E, C, A)$$

将每个人作为一个顶点, 如果两个人会讲同一种语言, 就在代表他们的二个顶点间连一条边, 边上标明二人公用的语言, 这样就可得一简单无向图 G。所求问题转化为图 G 中有无 Hamilton 圈问题。

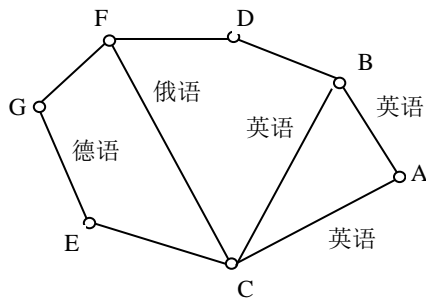


图 G

而上边指出的圈 H 正好是图 G 的一条 Hamilton 圈, 因此问题得到解决。

26. 假设在一次集合上, 任意两人合起来能够认识其余 $n-2$ 个人。证明这 n 个人可以排成一行, 使得除排头与排尾外, 棋逢对手余的每个人都认识自己的左右邻。

[证] 我们来构造一个 n 阶图 G, 图 G 的顶点代表 n 个人, 两个认识的人对应的顶点间连一条边, 从而图 G 满足:

对任意二顶点 u 和 v , 都有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n-2$ (不包括 u, v 在内)。

所求问题转化为, 证明图 G 中存在一条 Hamilton 路。为此, 我们证明:

对任意二顶点 u 和 v , 都有 $\deg(u)+\deg(v)\geq n-1$ 。分情况证明如下:

1) 若 u 和 v 相邻 (即 u 和 v 表示之二人认识), 则有

$$\deg(u)+\deg(v) \geq (n-2)+2=n > n-1$$

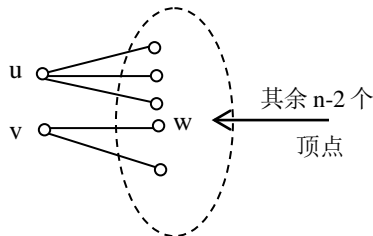
2) 若 u 和 v 不相邻 (即 u 和 v 表示之二人不认识) 则仍有

$$\deg(u)+\deg(v) \geq n-1 > n-2$$

否则, 由已知 $\deg(u)+\deg(v)\geq n-2$ 知 $\deg(u)+\deg(v)=n-2$ 。那么, G 中除 u 和 v 外的余 $n-2$ 个点, 每个顶点都恰与 u 或 v 之一相邻。今考察其中一点 w , 设它与 v 相邻, 则它必不与 u 相邻。于是对于 v, w 这一对顶点, 它们都不与除去它们之后的 $n-2$ 个顶点中之一顶点 u 相邻, 这就与题设条件: 任二顶点合起来都与其余

$n-2$ 个顶点相邻, 相矛盾。

综合 1), 2) 并且根据定理 2, 有 Hamilton 路的充分条件, 可知图 G 中存在着一一条 H 路。



27. 如何由无向图 G 的邻接矩阵判断 G 是否为二分图?

[解] 二分图 $G=(V, E)$ 实际上是顶点集 V 的一个划分 $\{X, Y\}$, 有两上划分块, 而划分和等价关系对应, 因此我们将判定 G 是二分图转化为判定某一相应的关系是等价关系。

N01. 令 $A:=(a_{ij})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{当}(v_i, v_j) \text{或}(v_j, v_i) \in E. \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

(于是 A 显然是对称短矩阵, 即 $A^T=A$ 。)

N02. 求 $A^{(2)}:=A \circ A=(a_{ij}^{(2)})_{n \times n}$, 其中 $a_{ij}^{(2)}=\bigvee_{k=1}^n (a_{ik} \wedge a_{kj})$ 。

(由于 $(A^{(2)})^T=A^T \circ A^T=A \circ A=A^{(2)}$ 故 $A^{(2)}$ 是对称矩阵。) $v_i, v_j \in XVY$,

$$a_{ij}^{(2)}=1 \Leftrightarrow v_i, v_j \in Y \text{ (同时)}$$

N03. 令 $B:=E \vee A^{(2)}=(b_{ij})$, (其中 E 是 n 阶单位) 其中

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{当} i=j \text{ 时} \\ a_{ij}^{(2)}, & \text{当} i \neq j \text{ 时} \end{cases} \text{ (则} B \text{ 显然是自反的对称的.)}$$

No4. 求 $B^{(2)}=BB=(b_{ij}^{(2)})$, (其中 E 是 n 阶单位) 其中 $b_{ij}^{(2)}=\bigvee_{k=1}^n (b_{ik} \wedge b_{kj})$ 。

No5. 求 $B^{(2)}=B$, (即 B 是传递的, 因而是等价的。) 输出 “图 G 是二分图”, 出口; 否则 (即 B 不是传递的, 因而不是等价的。) 输出 “ G 不是二分图”, 出口。

28. 证明: 如果 G 是二分图 G 为 (n, m) 图, 那么 $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。

[证] 设二分图 $G=(V, E)$ 的顶点集 V 是划分为二部分 X, Y 。因为 $|V|=n$, 所以不

妨设 $|X|=\frac{n}{2}+k$, (这里 $k \geq 0$) 从而 $|Y|=\frac{n}{2}-k$ 。

因于二分图的边数小于其对应的完全二分图的边数
故此:

$$m \leq (\frac{n}{2}+k)(\frac{n}{2}-k) = \frac{n^2}{4} - k^2 \leq \frac{n^2}{4}$$

29. 设 $G=(V, E)$ 是二分圈, $V=V_1 \cup V_2$, 证明:

1) 若 G 中有 H —圈, 则 $|V_1|=|V_2|$;

2) 若 G 中有 H —路, 则 $|V_2|-1 \leq |V_1| \leq |V_2|+1$ 。

[证] 1) 证法一: 若 G 中有 H —图, 由于 G 是二分图, 则在 G 中去掉 V_2 后, 就只剩下 V_1 中的 $|V_1|$ 个孤立点; 同样, 在 G 中去掉 V_1 后, 就只剩下 V_2 中的 $|V_2|$ 个孤立点。因此由定理 1, 有 Hamilton 圈的必要条件, 可知:

$$|V_1|=W(G \setminus V_2) \leq |V_2|, |V_2|=W(G \setminus V_1) \leq |V_1|$$

因此, 可得 $|V_1|=|V_2|$ 。

证法二: 设 $C=(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{l-1}, v_l, v_1)$ 是二分图中的一条 Hamilton 圈, 从而有 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$, 于是 $|V|=l$ 。

不妨设 $v_1 \in V_1$, 观察圈 C 中的各结点, 有:

$$v_1 \in V_1 \Rightarrow v_2 \in V_2 \Rightarrow v_3 \in V_1 \Rightarrow v_4 \in V_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_\tau \in V_2$$

从而有 $v_1, v_3, \dots, v_{\tau-1} \in V_1 \cup V_2$, 故此

$$V_1=\{v_1, v_3, \dots, v_{\tau-1}\}, V_2=\{v_2, v_4, \dots, v_\tau\}$$

所以

$$|V_1|=\frac{\tau}{2}=|V_2|。$$

2) 证法一: 若 G 中有 H —路, 由于 G 是二分图, 则在 G 中去掉 V_2 后, 就只剩下 V_1 中的 $|V_1|$ 个孤立点; 同样, 在 G 中去掉 V_1 后, 就只剩下 V_2 中的 $|V_2|$ 个孤

立点。因此由习题 23 有 Hamilton 路的必要条件, 可知

$$|V_1| = W(G \setminus V_2) \leq |V_2| + 1$$

$$|V_2| = W(G \setminus V_1) \leq |V_1| + 1, \text{ 于是 } |V_2| - 1 \leq |V_1|$$

故此

$$|V_1| - 1 \leq |V_1| \leq |V_2| + 1 \quad \circ$$

证法二: 设 $C = (v_1, v_2, \dots, v_\tau)$ 是二分图中的一条 Hamilton 路, 从而 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_\tau\}$, 于是 $|V| = \tau$ 。根据 1) 的证法二:

(a) 若 $v_1 \in V_1, v_\tau \in V_1$, 则 $v_{\tau-1} \in V_2$ 故此 $\tau - 1$ 为偶数, τ 为奇数, 于是

$$|V_1| = \frac{\tau-1}{2} + 1, \text{ 而 } |V_2| = \frac{\tau-1}{2} \quad \text{因此}$$

$$|V_1| = |V_2| + 1$$

(b) 若 $v_1 \in V_1, v_\tau \in V_2$, 则 τ 为偶数, 于是

$$|V_1| = \frac{\tau}{2} = |V_2|$$

(c) 若 $v_1 \in V_2, v_\tau \in V_1$, 同 (b) 可证 $|V_1| = |V_2|$

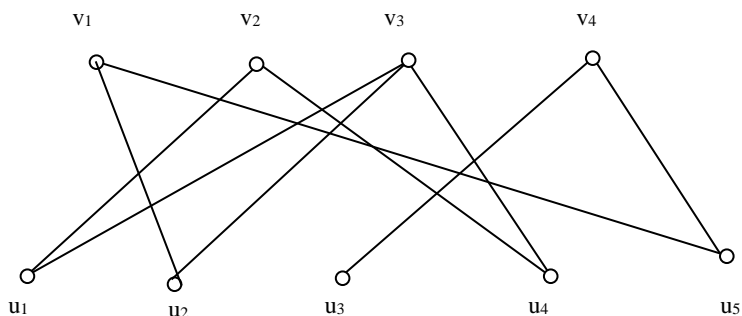
(d) 若 $v_1 \in V_2, v_\tau \in V_2$, 则同 (a) 可证

$$|V_2| = |V_1| + 1, \text{ 即 } |V_2| - 1 = |V_1|$$

综合以上四点, 有

$$|V_2| - 1 \leq |V_1| \leq |V_2| + 1 \quad \circ$$

30. 在下面的图示中, 是否存在 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 到 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 的完美匹配? 若存在, 请指出它的一个完美匹配。



[解] 不存在 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 到 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 的完美匹配。

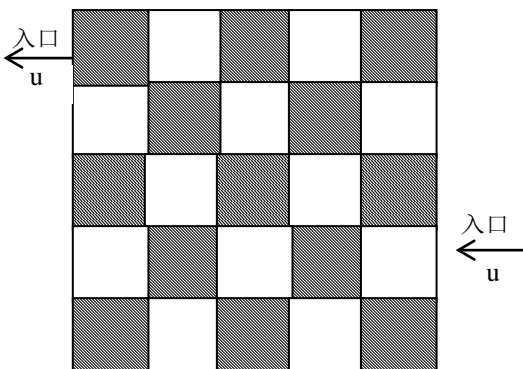
因为这两个互补结点子集的结点个数不相同。

31. 某展览会共有 25 个展室, 布置如下图所示, 有阴影的展室陈列实物, 无阴影的展室陈列图片, 邻室之间均有门可通。有人希望每个展室都恰去一次, 您能否为

他设计一条路线？

[解] 不能。

因为，若我们将每个展室看作一个顶点，并且 V_1 是无阴影展室的顶点集， V_2 是有阴影展室的顶点集，将邻室之间的门通道看作相应两顶点的边，于是我们得到一个二分图 G 。从而问题转化为问图 G 中是否有从起点（入口） $u \in V_1$ 到终点（出口） $v \in V_2$ 的一条 Hamilton 路？而



这样的 H 路存在的必须条件是 $|V_1| = |V_2|$ （参见 29 的 2）证法=b)). 但是 $|V_1| = 12 \neq 13 = |V_2|$ ，故不满足必要条件，所以没有从 u 到 v 的 Hamilton 路。

32. 证明：小于 30 条边的平面简单图有一个结点的度数小于等于 4。

[证] 用反法：假设简单平面图的所有结点的度数都大于 4，因而都大于等于 5，则由 § 2 定理 1，有

$$2m = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) \geq \sum_{i=1}^n 5 = 5n$$

故此

$$n \leq \frac{2}{5}m$$

由于简单平面图无平等边，自环，所以任一区域都至少由三条或以上的边围成，故利用欧拉公式的推论公式： $m \leq 3n - 6$ ，有

$$m \leq 3 \cdot \frac{2}{5}m - 6$$

因此， $m \geq 30$ ，这与已知条件 $m < 30$ 矛盾。所以，假设错误，小于 30 条边的简单平面图必有一个结点的度数小于等于 4。

33. 在由 $(r+1)^2$ 个结点构成的 r^2 个正方形网格所组成的平面图上，验证 Euler 公式的正确性。

[证] 如此的平面图，结点数 $n = (r+1)^2$

$$\begin{aligned} \text{边数 } m &= (r+1)r + (r+1)r = 2(r+1)r \\ &= 2r^2 + 2r \end{aligned}$$

$$\text{面数 } f = r^2 + 1 \quad (\text{外部为 } -4r \text{ 条边围成的面})$$

$$\text{于是 } n - m + f = (r+1)^2 - (2r^2 + 2r) + (r^2 + 1)$$

$$\begin{aligned}
 &= (r^2 + 2r + 1) - (2r^2 + 2r) + (r^2 + 1) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

故此 Euler 公式对此类图正确。

34. 运用 kuratowski 定理证明下图是非平面图。

[证] (1) 给图 G 中结点打上标号, 并用黑点标记要删去的边。

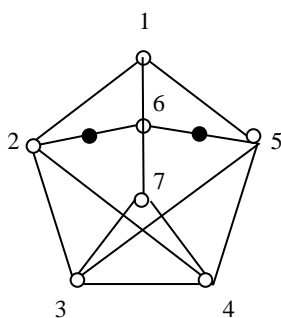


图 G

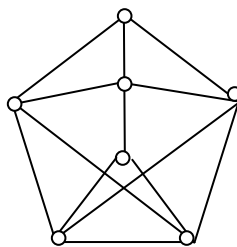


图 G

(2) 去掉图 G 中打黑点的边, 得图 G 的子图。

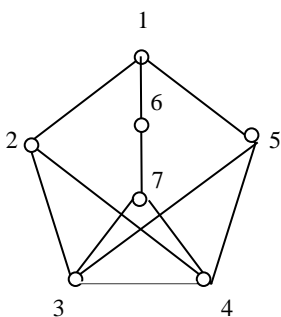
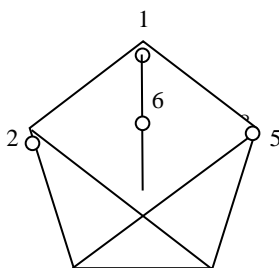
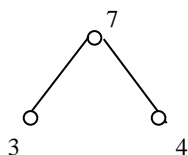


图 G 的子图

(3) 对图 G 的子图进行变形。





(4) 用 kuratowski 技术对图 G 的子图（变形后的）进行处理：

图 G 的子图

从而，在 kuratowski 技术下，(3) 与 $K_{3,3}$ 同构，因而根据 Kuratowski 定理，此图 G 是非平面图。

35. 证明树是只有一个区域的平面图。

[证] 证法一 由于树无圈套在，因此根据 kuratowski 定理，可知树是平面图（否则，必须有圈，矛盾），因此可用 Euler 定理。对于树， $m=n-1$ ，故此由 $n-m+r=2$ ，得树的区域数

$$r=2+m-n=2+(n-1)-n=1$$

证法二 用归纳法，施归纳于树的结点数 n 。

当 $n=1$ 时，很显然为平面图只有一个区域，题意为真

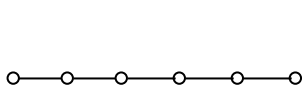
当 $n=k$ 时，假设题意为真。

当 $n=k+1$ 时，我们来证题意为真。

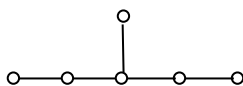
事实上，由于 T 是树，故 T 中至少有一个悬挂点，在 T 中删去此结点，得到一个 k 个结点的边通图 T' ，显然 T' 中无圈。于 T' 是一个具有 k 个结点的树，于是根据归纳假设， T' 是只有一个区域的平面图。这时将删去的结点重新插入 T' 中以得到 T ，由于悬挂点不改变图的平面性和区域数，因此 T 仍是中仍一个区域的平面图。

36. 请画出具有六个结点的各种不同构的自由树。

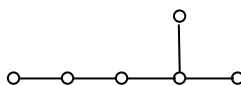
[解] 共有六种，图示如下：



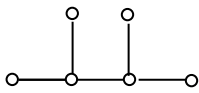
(1)



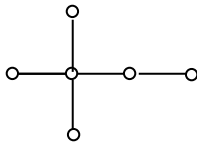
(2)



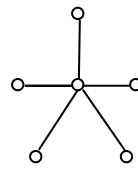
(3)



(4)



(5)



(6)

37. 证明任意一棵树中至少有两片叶子。

[证] 当结点数 $n \geq 2$ 时, 任意一棵树必至少有两片叶子。否则, 假设某树中最多只有一片叶了, 那么其中 $n-1$ 结点都不是叶子, 故此这 $n-1$ 个点的度都大于等于 2, 于是根据各结点的度的总和是边数的二倍可知

$$2n-2=2(n-1)=2m=\sum_{i=1}^n \deg(v_i) \geq 2(n-1)+1=2n-1, \text{ 矛盾。}$$

38. 在一棵树中, 度数为 2 的结点有 n_2 个; 度数为了的结点有 n_3 个; \cdots ; 度数为 k 的结点有 n_k 个; 问它有几个度数为 1 的结点?

[解] 设这棵树的项点数为 n , 边数为 m , 度为 1 的结点数为 x 。从而

$$n=x+n_2+n_3+\cdots+n_k$$

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i)=2m=2(n-1)=2n-2$$

$$\text{但是 } \sum_{i=1}^n \deg(v_i)=1 \cdot x+2 \cdot n_2+3 \cdot n_3+\cdots+k \cdot n_k$$

$$=2(x+n_2+n_3+\cdots+n_k)-2$$

$$\text{于是解得 } x=n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k+2$$

因此, 度为 1 的结点共有 $n_3+2n_4+\cdots+(k-2)n_k+2$ 个。

39. 设 $G=(V, E)$ 是连通的 (n, m) 无向图, 证明 $m \geq n-1$ 。

[证] 既然 G 是一个连通的无向图, 那么 G 一定包含一个生成树。

又因 $|V|=n$, 于是生成树的边数为 $n-1$, 从而

$$m=|E| \geq n-1$$

40. 若 $G=(V, E)$ 是 (n, m) 无向图, 且 $n \leq m$, 则 G 中必有圈。

[证] 用反证法。假设 G 中无圈, 则

(a) 当 G 连通时, 有 G 是一棵树, 从而 $m=n-1 < n$, 与已知 $n \leq m$ 矛盾。

(b) 当 G 不连通时, 有 G 是森林, 不妨设 G 有 k 个树, 每个树的结点数分别

为 n_1, n_2, \cdots, n_k , 边数分别是 $n_1-1, n_2-1, \cdots, n_k-1$ 。显然 $\sum_{i=1}^k n_i=n$ 因此, G 的

总数

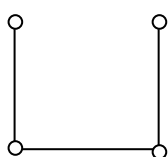
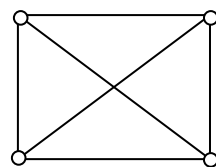
$$m = \sum_{i=1}^n (n_i - 1) = \sum_{i=1}^n n_i - \sum_{i=1}^n 1 = n - k < n \quad (k > 1)$$

与已知 $n \leq m$ 矛盾。

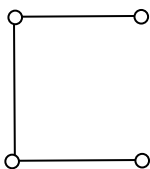
41. 求出左上图中的全部生成树。

[解] 此图共有 16 个生成树，（详见王朝瑞《图论》P259

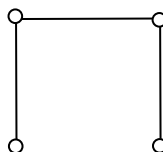
Cayley (1889) 定理：n 阶完全图的生成树有 n^{n-2} 个，故 4 阶完全图的生成树有 $4^2=16$ 个）



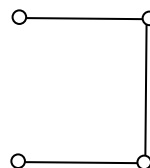
(1)



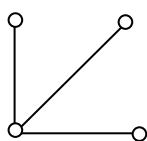
(2)



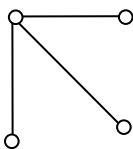
(3)



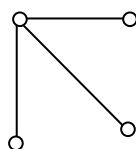
(4)



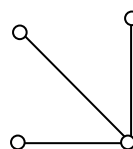
(5)



(6)

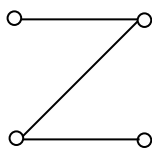


(7)

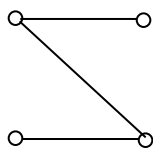


(8)

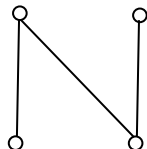
(8)



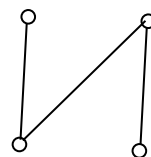
(9)



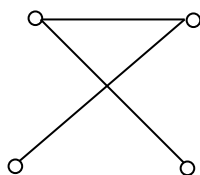
(10)



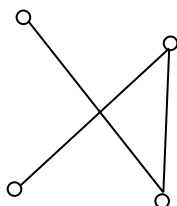
(11)



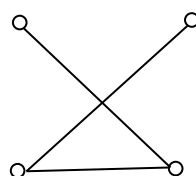
(12)



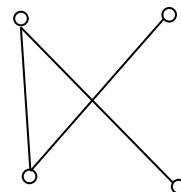
(13)



(14)



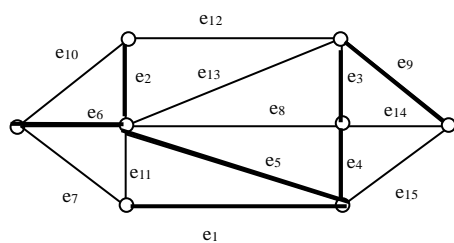
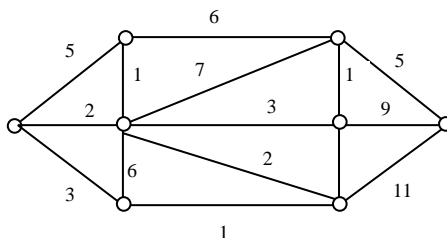
(15)



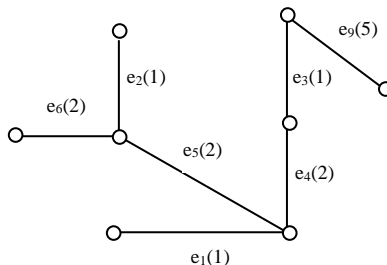
(16)

42. 求出左下图的最小生成树。

[解] 利用 **kruskal** 算法，先将各边按大小排队如图 (a) (树相等的边顺序任意)。然后逐边检查，若 e_i 和 T 不构成圈，就将 e_i 插入 T 中。最后得到最小生成树 T 如图 (b) 所示。



(a)



(b)

$$T: = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9\}$$

$$W(T) = W(e_1) + W(e_2) + W(e_3) + W(e_4) + W(e_5) + W(e_6) + W(e_9)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 5$$

$$= 14$$

43. 由简单有向图的邻接矩阵如何判断它是否为有根树？若有根树，又如何确定树根及树叶？

[答] (a) 邻接矩阵，只有当一列其元素全为零且其余 $n-1$ 列均只有一个元素为 1，其它元素都为零时，该简单有向图是有根树。

(b) 若有根树，其邻接矩阵中元素全为零的一列所对应的项点是树根；而元素全为零的行所对应的顶点都是树叶。

44. 设 G 为有根树，证明：当把有向边视为无向边时， G 为自由树叶。

[证] (1) 注意到有根树中只有一个结点进数为零（即根结点），其它 $n-1$ 个结点的进

数均为 1。根据第六章 §2 定理 1 (2)，有向图中诸结点的进数之和等于边数，可知有根树的边数为 $n-1$ ；(2) 又因为有根树从根结点可达任一结点（第七章 §2 定义 1 (3)），于是当把有向边视为无向边时，有根树应为弱连通图。综合 (1)、(2) 根据第七章 §1 定理 1 的 3)，可知，当我们把有向边视为无向边时，有根树 G 是自由树。

45. 设 $G=(V, E)$ 为有向图，若 G 在弱连通意义下无圈，证明 G 中必有入度为 0 的结点，且 G 中必有出度为 0 的结点。

[证] 用反证法。假设有向图 G 中无进度为 0 的结点，于是 G 中任一结点，之进度都大于等于 1，从而 G 中诸结点的进度之和大于等于 n 。根据第六章 §2 定义 1 (2)，有向图中诸结点的进数之和等于边数，可知有向图 G 的边数 m 大于等于 n 。又当忽视有向边的方向时，已知 G 是一个连通图，从而 G 中有圈（否则， G 连通且无圈，根据树的定义， G 为树，根据第七章 §1 的定理 1.3) 或 4) 知 $m=n-1$ ，这与 $m \geq n$ 矛盾），这与 G 在弱连通意义下无圈矛盾。

因此可见 G 中必有进度为 0 的结点。

同理可证 G 中必有出度为 0 的结点。

46. 设 T 为二叉树，证明：

1) T 的第 l 层上的结点总数不超过 2^l (其中 $l \geq 0$)；

2) 若 T 的高度为 h ，则 T 至多只有 $2^{h+1}-1$ 个结点。

[证] 1) 用归纳法。[基始步]，当 $l=0$ 时，由二叉树只有一个结点，即根结点，故结论为真。[归纳假设]，当 $l=k$ 时，结论为真。即第 k 层上的结点总数不超过 2^k 。[归纳步]，当 $l=k+1$ 时，由于二叉树中，每个结点至多有 2 个儿子，于是第 $k+1$ 层结点总数不超过

$$\begin{aligned} & \text{第 } k \text{ 层结占总数} \cdot 2 \\ & \leq 2^k \cdot 2 \text{ (归纳假设)} \\ & = 2^{k+1} \end{aligned}$$

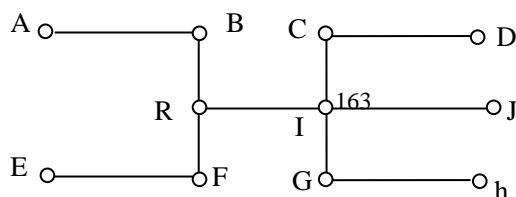
即当 $l=k+1$ 时，结论也真。故对于任何自然数 $l \geq 0$ ，1) 是真的。

2) 由于每一层（第 l 层）结点总数不超过 2^l ，于是二叉树 T 的结点数不超过

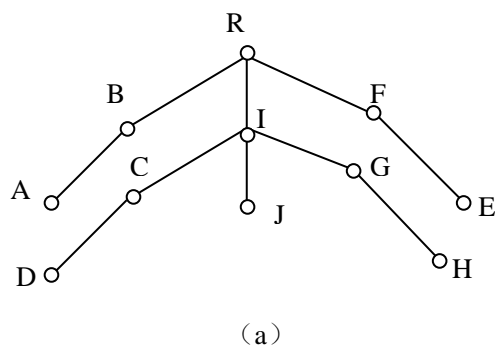
$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^h = \frac{2^{h+1} - 1}{2 - 1} = 2^{h+1} - 1$$

因此 2) 得证。

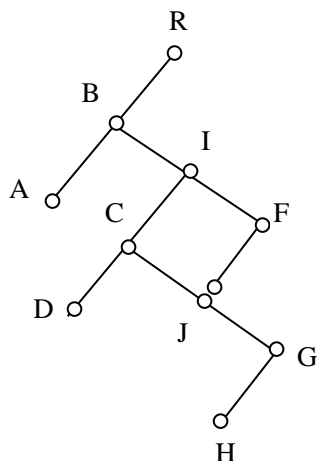
47. 将下图表示成以 R 为根的自顶向下的有根树，然后再将有根树化为二叉树。



[解] 转化后的自顶向下的有根树如图 (a) 所示:



相关的二叉树如图 (b) 所示:



48. 对于表达式

$$(35xyz^2+6w/x) - x^3/(yw)$$

用中序画成二叉树。

[解] 要把所给表达式表示成二对树, 首先要变换成:

$$(35*x*y*(z*z)+(6w)/x) -(x*x*x)/(y*w)$$

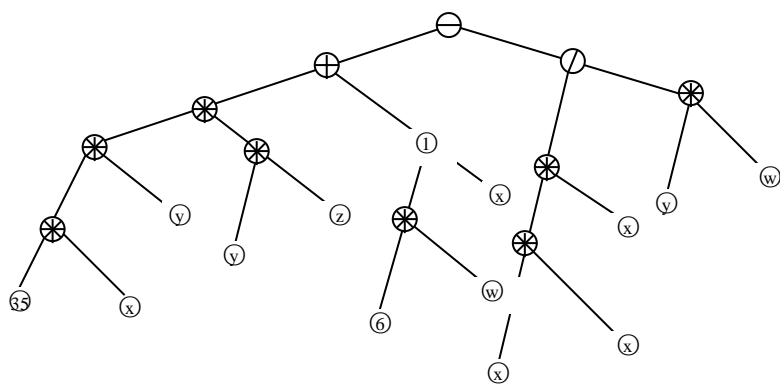
再由此式画出二叉树如图 (a)

因此, 其前序波兰表达式 (前序历遍):

$$-+***35xy*zz/*6wx/*xxx*yw$$

其后序波兰表达式 (后序历遍):

$$35x*y*zz**6w*x/+xxx*x*yw*/-$$



(a)