

系统建模与动力学分析

学 时 数：48学时

学 分：3

任 课 教 师：闫 涛

工 作 单 位：电信学部自动化学院综合所

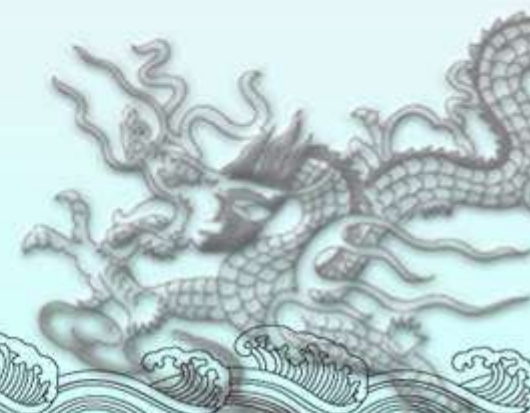
办 公 地 点：兴庆校区东二楼361

创新港4-6168

邮 箱：yantao@xjtu.edu.cn

第八章 线性系统分析

- 一阶系统的瞬态响应分析
- 二阶系统的瞬态响应分析
- 传递函数
- 频率响应和正弦传递函数
- 方块图和信号流图
- 状态空间模型
- 工业自动控制器



拉普拉斯变换引言

- ◆ 拉普拉斯变换是一种运算方法，它能够方便的用于解线性、定常的微分方程式。

- ◆ **拉氏变换的主要优点：**

时间函数的导数对应于用复变量 s 变换的乘法，因此以时间表示的微分方程变为以 s 表示的代数方程。

微分方程式的解可以用拉普拉斯变换表或部分分式展开式方法来求得。

- ◆ 在解微分方程中，初始条件是自动的引入了，并同时能得到特解和补解。

拉普拉斯变换引言

◆ 拉普拉斯变换 (Laplace Transform) 的定义:

$f(t)$: 时间的函数, 对于 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$

s : 复变数

L : 运算符号, 表示对符号后的量进行拉普拉斯积分变换

$F(s)$: $f(t)$ 的拉普拉斯变换

于是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换由下式给定

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- ◆ 由拉普拉斯变换 $F(s)$ 寻找时间函数 $f(t)$ 的反过程称为拉普拉斯反变换。拉普拉斯反变换的记号是 L^{-1} 。

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

拉普拉斯变换引言

- ◆ 拉普拉斯变换存在的条件:
- ◆ 如果拉普拉斯积分收敛, 函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在。
- ◆ 如果 $f(t)$ 在 $t > 0$ 的每个有限区间上是分段连续的, 并且当 t 趋于无穷大时它是指数级的, 积分将收敛。
- ◆ 如果存在一个正实常数 σ , 在 t 趋于无穷大时, 它使函数 $e^{-\sigma t}|f(t)|$ 趋近于零, 那么函数 $f(t)$ 便是指数级的。

拉普拉斯变换引言

- ◆ 如果 σ 大于 σ_c 时函数 $e^{-\sigma t}|f(t)|$ 的极限趋于零；而当 σ 小于 σ_c 时该极限趋于无穷大，则 σ_c 称为收敛横坐标。
- ◆ 函数 t , $\sin\omega t$, $t\sin\omega t$ 的收敛横坐标等于零；函数 e^{-ct} , te^{-ct} 以及 $e^{-ct}\sin\omega t$ 收敛横坐标等于 $-c$ 。
- ◆ 对于远比指数函数增长得快的函数，在这种情况下是不可能找到合适的收敛横坐标的值。例如， e^{t^2} , te^{t^2} 这类函数就不能进行拉普拉斯变换。

性质:

(1) 线性性质: $L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$

(2) 微分定理: $L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$$L[f''(t)] = s^2 F(s) - sf'(0) - f'(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

(3) 积分定理: (设初值为零) $L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

(4) 时滞定理: $L[f(t-T) \cdot 1(t-T)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-T) \cdot 1(t-T) dt$
 $= e^{-sT} F(s)$

(5) 初值定理: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

(6) 终值定理: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

(7) 卷积定理: $L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$

常用函数的拉氏变换:

单位阶跃函数: $f(t) = 1(t), F(s) = \frac{1}{s}$

单位脉冲函数: $F(s) = L[\delta(t)] = 1$

单位斜坡函数: $f(t) = t, F(s) = \frac{1}{s^2}$

单位抛物线函数: $f(t) = \frac{1}{2}t^2, F(s) = \frac{1}{s^3}$

正弦函数: $f(t) = \sin \omega t, F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

指数函数: $f(t) = e^{-at}, F(s) = \frac{1}{s+a}$

拉普拉斯变换引言

常用函数的拉普拉斯变换:

| $F(s)$ | $f(t), 0 \leq t$ | | |
|---------------------------------|---|---|---|
| 1. 1 | $u_1(t)$ 单位脉冲在 $t = 0$ 时 | 11. $\frac{s + \alpha}{s(s + a)(s + b)}$ | $\frac{1}{ab} \left[\alpha - \frac{b(\alpha - a)}{b - a} e^{-\alpha} + \frac{a(\alpha - b)}{b - a} e^{-b} \right]$ |
| 2. $\frac{1}{s}$ | 1 或 $u(t)$ 单位阶跃在 $t = 0$ 时 | 12. $\frac{1}{(s + a)(s + b)}$ | $\frac{1}{b - a} (e^{-a} - e^{-b})$ |
| 3. $\frac{1}{s^2}$ | t 或 $tu(t)$ 斜坡函数 | 13. $\frac{s}{(s + a)(s + b)}$ | $\frac{1}{a - b} (ae^{-a} - be^{-b})$ |
| 4. $\frac{1}{s^n}$ | $\frac{1}{(n - 1)!} t^{n-1}$ n 是一个正整数 | 14. $\frac{s + \alpha}{(s + a)(s + b)}$ | $\frac{1}{b - a} \left[(\alpha - a)e^{-a} - (\alpha - b)e^{-b} \right]$ |
| 5. $\frac{1}{s} e^{-as}$ | $u(t - a)$ 在 $t = a$ 开始的单位阶跃 | 15. $\frac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$ | $\frac{e^{-a}}{(b - a)(c - a)} + \frac{e^{-b}}{(c - b)(a - b)} + \frac{e^{-c}}{(a - c)(b - c)}$ |
| 6. $\frac{1}{s} (1 - e^{-as})$ | $u(t) - u(t - a)$ 矩形脉冲 | 16. $\frac{s + \alpha}{(s + a)(s + b)(s + c)}$ | $\frac{(\alpha - a)e^{-a}}{(b - a)(c - a)} + \frac{(\alpha - b)e^{-b}}{(c - b)(a - b)} + \frac{(\alpha - c)e^{-c}}{(a - c)(b - c)}$ |
| 7. $\frac{1}{s + a}$ | e^{-at} 指数衰减 | 17. $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | $\sin \omega t$ |
| 8. $\frac{1}{(s + a)^n}$ | $\frac{1}{(n - 1)!} t^{n-1} e^{-at}$ n 是一个正整数 | 18. $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ | $\cos \omega t$ |
| 9. $\frac{1}{s(s + a)}$ | $\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$ | 19. $\frac{s + \alpha}{s^2 + \omega^2}$ | $\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$ |
| 10. $\frac{1}{s(s + a)(s + b)}$ | $\frac{1}{ab} \left(1 + \frac{b}{a - b} e^{-a} - \frac{a}{a - b} e^{-b} \right)$ | 20. $\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$ | $\sin(\omega t + \theta)$ |

线性系统分析

- ◆ 从设计的观点，对各种系统性能采用同一基准去比较是方便的，这些基准可以用专门的特殊试验信号以及比较系统对这些输入信号的响应来建立。
- ◆ 典型的试验信号：**阶跃函数**、**斜坡函数**、**脉冲函数**和**正弦函数**。它们都是简单的时间函数，使系统的数学和实验分析能够很容易地进行。
- ◆ 采用哪种输入信号来分析系统的动态特性可以由系统在正常工作下最经常受到的输入形式来确定。
- ◆ **自然响应和强迫响应：**
 - ◆ 若系统由一个微分方程表示，
$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = p(t)$$
 - ◆ 其中系数 a_1, a_2, \dots, a_n 是常数， $x(t)$ 是因变量， t 是自变量， $p(t)$ 是输入函数。

线性系统分析

上述的微分方程有一全解 $x(t)$ ，它是由两部分组成——**补解** $x_c(t)$ 和**特解** $x_p(t)$ 。补解 $x_c(t)$ 是由使方程式的右边等于零，并解由此产生的齐次方程而求得。特解 $x_p(t)$ 与输入函数 $p(t)$ 的形式有关。

如果当时间 t 趋于无穷大，补解 $x_c(t)$ 趋于零：

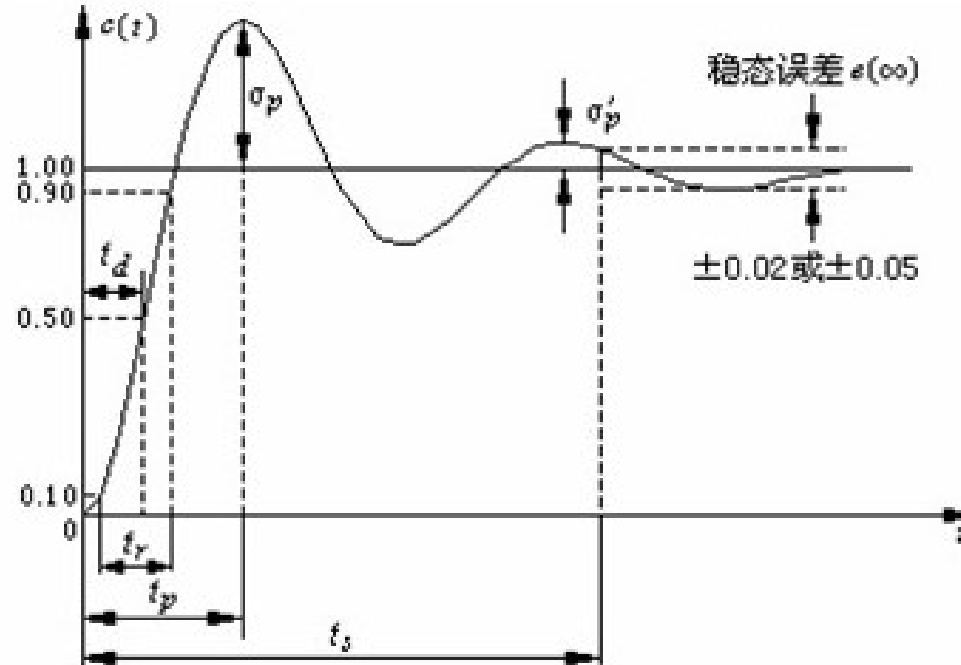
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t)$$

并且如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t)$ 是一时间有界函数，此系统说成是在稳定的状态。

- ◆ 工程中，**补解和特解分别被称为自然响应和强迫响应**。
- ◆ **说明：**尽管系统的固有性能不是它本身对任何外部的或输入函数的响应，但对这种类型性能的研究能揭示某些特性，这些特征同样在预示强迫响应等方面是有用的。

线性系统分析

- ◆ **瞬态响应和稳态响应**：动态系统的自然响应和强迫响应均是由两部分组成—瞬态响应和稳态响应。
 - ◆ **瞬态响应**是指发生在从初始状态到终了状态进行的过程。
 - ◆ **稳态响应**表示在时间趋于无穷大时系统的输出性能。
- 动态系统的瞬态响应在到达稳定状态以前经常显示出是阻尼振动。



一阶系统的瞬态响应分析

◆ 一阶系统的瞬态响应分析

◆ 例题：温度计系统建模。

其中 $\bar{\theta} + \theta_b$ — 池温度； $\bar{\theta} + \theta$ — 温度计温度； $\bar{\theta}$ — 周围温度
类似机械系统，电系统，液压和气动系统，我们用阻止热流动的热阻 R 和贮存热量的热容 C 来表征这个热力系统。

热阻 $R = \text{温度差的变化量 } K / \text{热流量的变化量 } J/s$

热容 $C = \text{热量的变化量 } J / \text{温度的变化量 } K$

系统的数学模型可以由热平衡导出。

- ◆ dt 秒进入温度计的热量 qdt ， q 为温度计热流量
- ◆ 热量贮存于热容为 C 的温度计中，温度上升 $d\theta$
- ◆ 热平衡方程：

$$C d\theta = q dt$$

- ◆ 热阻 R 为： $R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{\Delta\theta}{q} \Rightarrow q = \frac{(\bar{\theta} + \theta_b) - (\bar{\theta} + \theta)}{R} = \frac{\theta_b - \theta}{R}$

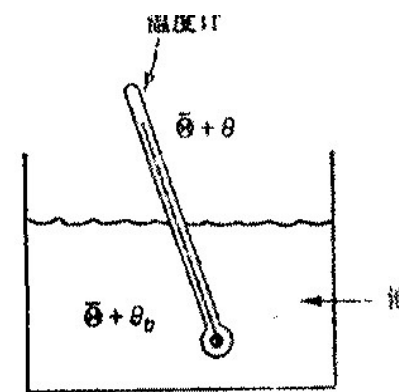


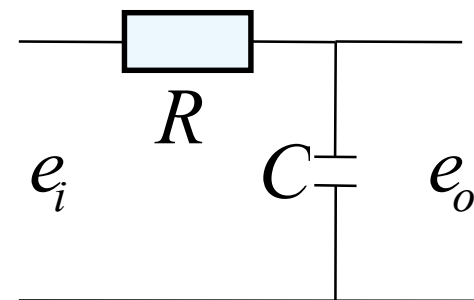
图7-1 薄玻璃容器-水银

一阶系统的瞬态响应分析

最终可得温度计的数学模型

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_b$$

与它相似的电模拟为（电—热相似）



◆ 一阶系统的阶跃响应

令上述模型中的 $RC=T$ ，因此上述模型的单边拉氏变换为

$$T(s\theta(s) - \theta(0)) + \theta(s) = \theta_b(s) \quad \theta(0) = 0 \Rightarrow \theta(s) = \frac{1}{Ts + 1} \theta_b(s)$$

◆ 注意 $\theta_b = \text{常数}$ ，我们有 $\theta_b(s) = \theta_b / s$

一阶系统的瞬态响应分析

上式变为

$$\theta(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{\theta_b}{s} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \right) \theta_b$$

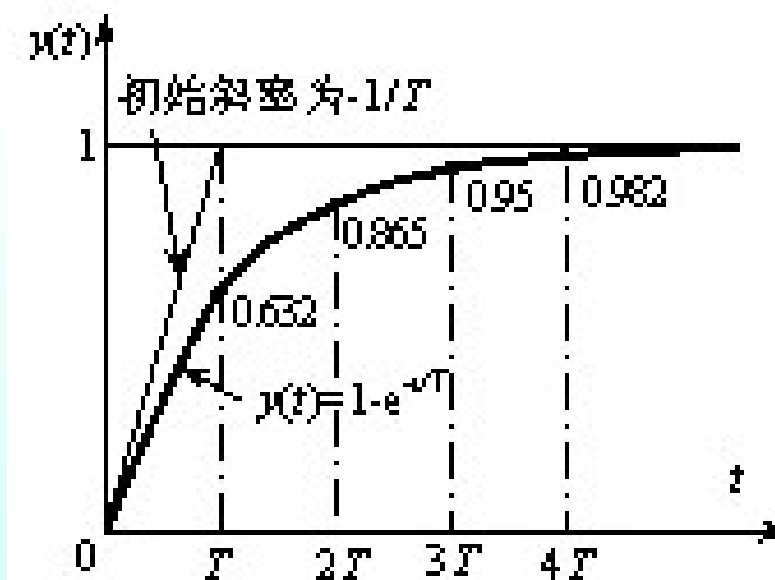
通过拉氏反变换可得

$$\theta(t) = (1 - e^{-t/T}) \theta_b$$

一阶系统的指数响应曲线

初始为 0，终了时为 θ_b

- ◆ $t=T$ 时为 $0.632\theta_b$
- ◆ $T=0$ 时切线斜率为 θ_b/T
- ◆ 当响应曲线达到最终值的 2% 的线内，认为达到稳定状态。



一阶系统的瞬态响应分析

◆ 一阶系统的斜坡响应

在上例的温度计系统中，假定在 $t=0$ 时池温和温度计温度处在稳定状态，在 $t \geq 0$ 时，热量加于池中，而池温按线性比变化——即 $\theta_b(t)=rt$ ，推导斜坡响应 $\theta(t)$ 。

首先

$$\theta_b(s) = L[\theta_b(t)] = L[rt] = r/s^2$$

那么

$$\theta(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{r}{s^2} = r \left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + (1/T)} \right)$$

◆ 它的拉氏反变换为

$$\theta(t) = r(t - T + Te^{-t/T}) \quad t \geq 0$$

一阶系统的瞬态响应分析

实际池温度与指示的温度计温度之间的误差 $e(t)$ 是

$$e(t) = rt - \theta(t) = rT(1 - e^{-t/T})$$

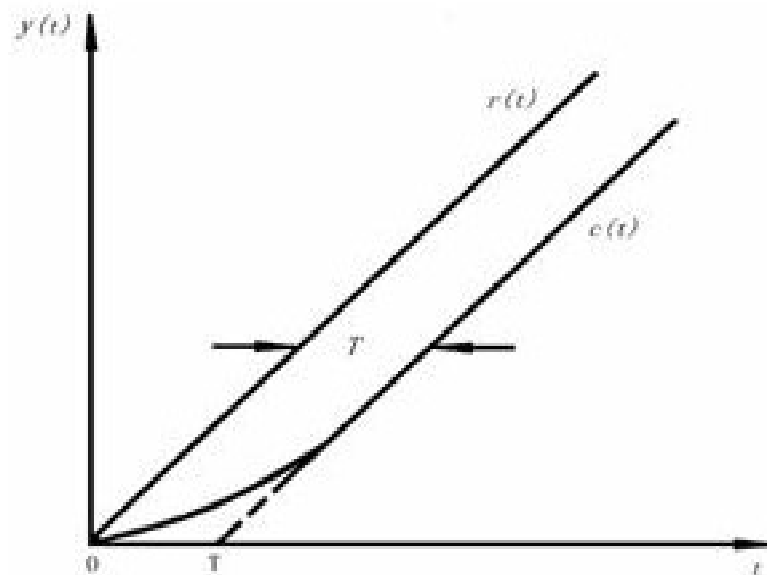
当 t 趋于无穷大, $e^{-t/T}$ 趋于 0, 误差趋于 rT 。

可见时间常数 T 越小, 按照斜坡输入的稳态误差越小。

◆ 说明:

数学分析与系统的物理结构无关, 具有上述数学模型的物理系统例子如表 7-2 (pp379)。

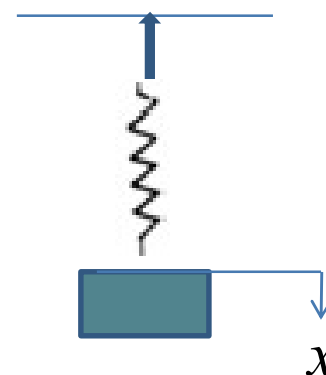
◆ 所有相似的系统对于相同的输入函数将显示相同的响应。



二阶系统的瞬态响应分析

◆ 无阻尼的自由振动----无阻尼固有振动频率

研究如右图所示的弹簧-质量系统。初始距离 $x(0)=a$ ，初始速度 $\dot{x}(0)=b$ ，系统的数学模型为（位移 x 从平衡位置量起）



$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad x(0) = a \quad \dot{x}(0) = b$$

它的单边拉氏变换为

$$m(s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + kX(s) = 0 \Rightarrow (ms^2 + k)X(s) = msa + mb$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{sa + b}{s^2 + k/m} \Rightarrow \frac{as}{s^2 + \left(\sqrt{k/m}\right)^2} + \frac{b}{\sqrt{k/m}} \frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + \left(\sqrt{k/m}\right)^2}$$

◆ 拉氏反变换为

$$x(t) = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + b \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

◆ a 和 b 与初始条件有关，若初始速度为 0， $x(t)$ 作余弦振动。

二阶系统的瞬态响应分析

由弹簧-质量-阻尼器组成的系统如图所示。

假设把质量向下拉并释放，它将作自由振动。

合成运动的振幅将在每一周期中以一定的速率减小，减小的速率与阻尼值有关。

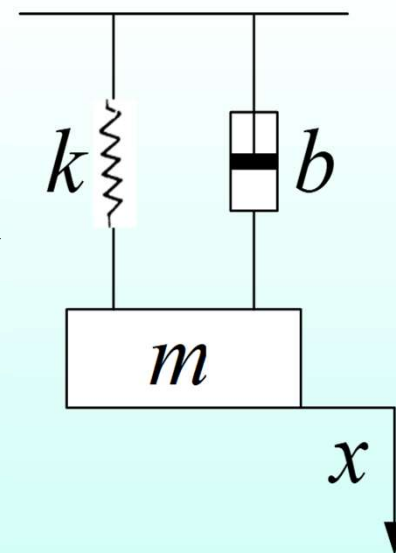
因阻尼力与运动方向相反，系统具有连续的能量损失。

该系统的数学模型是（位移 x 从平衡位置量起）

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

- 二阶系统的自然响应特性由特征方程式的根确定

$$ms^2 + bs + k = 0 \Rightarrow s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$



二阶系统的瞬态响应分析

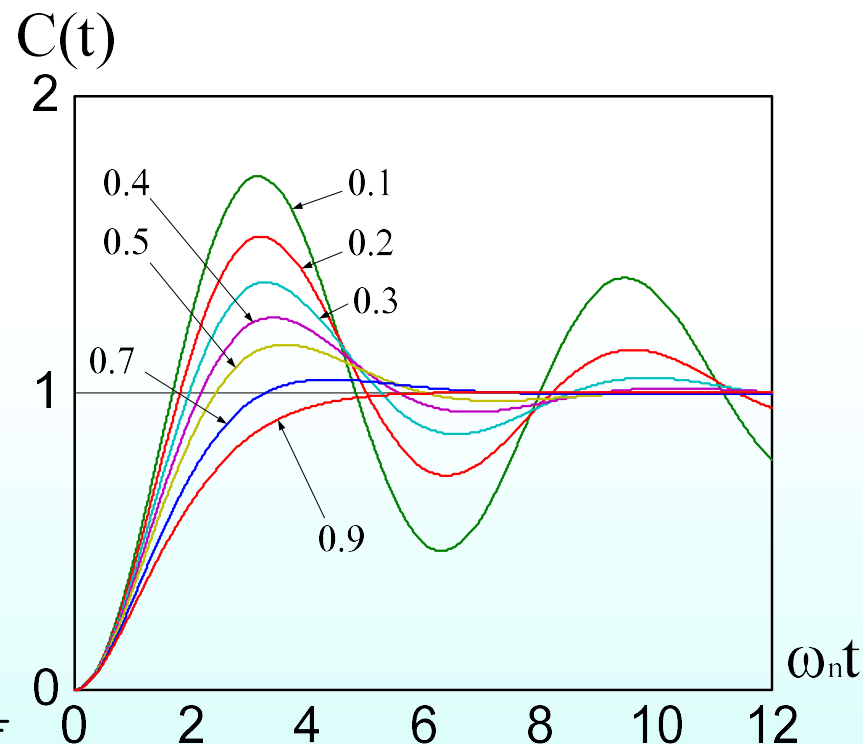
- ◆ 若阻尼系数 b 很小，满足 $b^2 < 4mk$ ，特征方程的根是共轭复数。自然响应是指数衰减的正弦曲线，系统称为欠阻尼的。
- ◆ 若增大阻尼系数 b 使它达到 $b^2 = 4mk$ ，特征方程有两个相等的根，系统称为临界阻尼的。
- ◆ 若阻尼系数 b 满足 $b^2 > 4mk$ ，特征方程有两个不等的实根，响应是两个指数衰减曲线之和，系统称为过阻尼的。

定义 $\omega_n = \sqrt{k/m}$

= 无阻尼固有振动频率

$$\zeta = \text{阻尼比} = \frac{\text{实际阻尼值}}{\text{临界阻尼值}} = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

- ◆ 此时特征方程可写为 $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$



二阶系统的瞬态响应分析

◆ 情况1——欠阻尼(Underdamping) ($0 < \zeta < 1$)

系统数学模型的单边拉氏变换和部分分式展开为

$$\left(s^2 X(s) - s\dot{x}(0) - x(0)\right) + 2\zeta\omega_n(sX(s) - x(0)) + \omega_n^2 X(s) = 0$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{(s + \zeta\omega_n)x(0)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$$

$$+ \frac{\zeta\omega_n x(0) + \dot{x}(0)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \times \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$$

二阶系统的瞬态响应分析

最后方程式的拉氏反变换为

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \frac{\zeta\omega_n x(0) + \dot{x}(0)}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$$

定义 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ = 阻尼固有振动频率

若初始速度为 0，上式可简化为

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos \left(\omega_d t - \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

二阶系统的瞬态响应分析

- 注意：由于因子阻尼插入项 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 指数衰减，因此上式所产生的简谐运动的振幅随时间而减小。

- 情况2——过阻尼(Overdamping) ($\zeta > 1$)**

此时特征方程有两个实根，

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})} = \frac{a}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{b}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

其中

$$a = \frac{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})x(0)}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad b = \frac{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})x(0)}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{\dot{x}(0)}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

- 通过拉氏逆变换获得的响应 $x(t)$ 为

$$x(t) = ae^{-\left(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t} + be^{-\left(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)t}$$

二阶系统的瞬态响应分析

- 注意：由于指数衰减项的影响，质量的运动逐渐蠕变到平衡位置。

- 情况3——临界阻尼(Critical Damping) ($\zeta=1$)**

在实际中，所有系统的阻尼比大于或小于1。

$\zeta=1$ 只具有数学上的参考价值。

此时特征方程有两个等根，为 ω_n

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{(s + 2\omega_n)x(0) + \dot{x}(0)}{s + 2\omega_n + \omega_n^2} = \frac{(s + \omega_n)x(0) + \omega_n x(0) + \dot{x}(0)}{(s + \omega_n)^2} \\ &= \frac{x(0)}{s + \omega_n} + \frac{\omega_n x(0) + \dot{x}(0)}{(s + \omega_n)^2} \end{aligned}$$

- 通过拉氏反变换可得

$$x(t) = x(0)e^{-\omega_n t} + [\omega_n x(0) + \dot{x}(0)]te^{-\omega_n t}$$

二阶系统的瞬态响应分析

- 注意：此时响应类似于过阻尼情况，质量释放后在没有振动的情况下回到其平衡位置。

三种情况在初始位移不为0，初始速度为0的情况下的响应曲线如图。

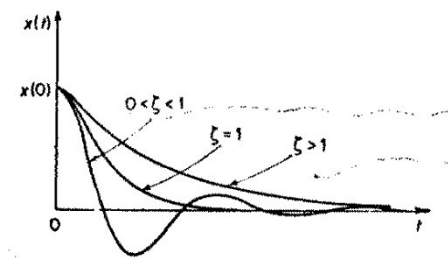


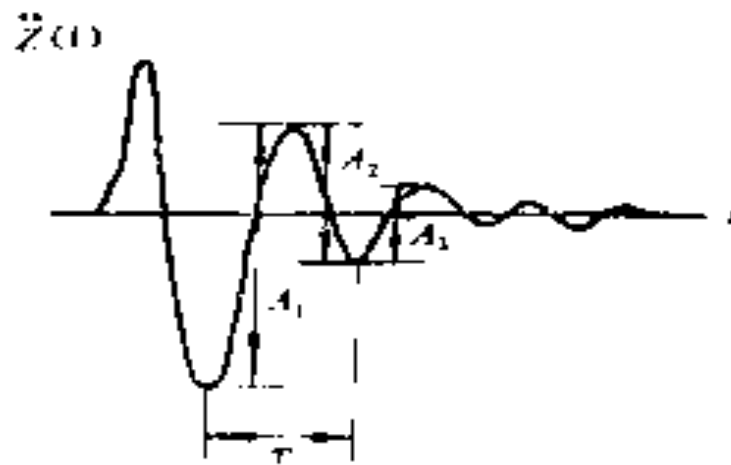
图 7-7 二阶系统不同阻尼比下的瞬态响应曲线

- 实验确定阻尼比**——通过振动的衰减速度确定阻尼比 ζ

1. 记录如图 7-8 所示的衰减或阻尼振动，振动周期 T 可以直接从与横坐标轴的交点测量求得。

2. 在 $t=t_1$ 时，测量振幅 x_1 ，在 $t=t_1+(n-1)T$ 时，测量振幅 x_n 。注意必须选择 n 足够大，使得 x_n/x_1 不在 1 附近。

- 3. 振幅从一周到下一周期的衰减可以由在 t_1 和 t_1+T 时的指数乘数比来表示。



二阶系统的瞬态响应分析

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+T)}} = \frac{1}{e^{-\zeta\omega_n T}} = e^{\zeta\omega_n T} \quad \frac{x_1}{x_n} = \frac{1}{e^{-\zeta\omega_n(n-1)T}} = e^{(n-1)\zeta\omega_n T}$$

计算对数衰减率

$$\text{对数衰减率} = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{n-1} \left(\ln \frac{x_1}{x_n} \right) = \zeta\omega_n T = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

最终阻尼比可由下式计算

$$\zeta = \frac{\frac{1}{n-1} \left(\ln \frac{x_1}{x_n} \right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\frac{1}{n-1} \left(\ln \frac{x_1}{x_n} \right) \right]^2}}$$

二阶系统的瞬态响应分析

◆ 响应时间的计算

可以根据响应曲线来估算二阶系统的响应时间。

质量移动 $x(0)$ 并无初速度的释放，其响应为

$$x(t) = \frac{x(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\omega_d t - \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

响应曲线是切于包络的指数曲线 $\pm \left(x(0)/\sqrt{1-\zeta^2}\right) e^{-\zeta\omega_n t}$

指数曲线的时间常数 T 是 $1/(\zeta\omega_n)$

◆ 系统的稳定时间可由下式确定

$$t_s = 4T = 4/(\zeta\omega_n)$$

◆ 稳定时间可以看成是系统响应时间的一个近似值，对于 $t > t_s$ ，响应曲线保持在最终值的 2% 以内。

二阶系统的瞬态响应分析

◆ 二阶系统的阶跃响应

对于一个 LRC 电路, 在 $t=0$ 时接通电源, 相当于加一个阶跃输入于系统中。电路的数学模型是

$$\ddot{q} + 2\zeta\omega_n\dot{q} + \omega_n^2q = \frac{E}{L} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \zeta = \frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}$$

假定
$$x = q - \frac{1}{\omega_n^2} \frac{E}{L} = q - CE$$

那么
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad x(0) = q_0 - CE \quad \dot{x}(0) = 0$$

- ◆ 可见该方程式与弹簧-质量-阻尼系统完全相同, 可以将前述的结果应用于该例。
- ◆ 注意: 阶跃响应基本上是与只有初始条件的响应相同, 这两种响应之间的差别只是表现在解中的常数项。

二阶系统的瞬态响应分析

- ◆ 例题：对于右图所示电系统，假定电容 C 有初始电荷 q_0 ，开关 S 在 $t=0$ 时接通，求系统的响应。

解：电路系统的数学模型是

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E \quad (1)$$

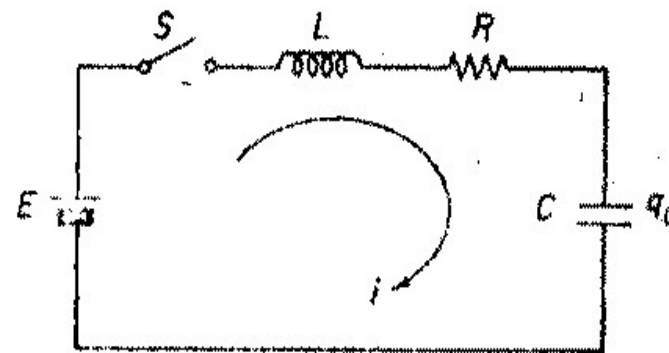


图7-10 电系统

因为 $i = dq / dt$ ，上式表示成电荷，有

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E \quad \text{或} \quad \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L} \quad (2)$$

- ◆ 根据定义，有无阻尼固有振动频率和阻尼比分别为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (\text{rad/s}) \quad \zeta = \frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}}$$

二阶系统的瞬态响应分析

(2)式可写为 $\ddot{q} + 2\zeta\omega_n\dot{q} + \omega_n^2 q = E/L$ (3)

设

$$q - \frac{1}{\omega_n^2} \frac{E}{L} = q - CE = x$$

初始条件变为 $x(0) = q_0 - CE$, $\dot{x}(0) = 0$

对于欠阻尼情况, (3)式的解为

$$q(t) = x(t) + CE = CE \left\{ 1 + e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\left(\frac{q_0}{CE} - 1 \right) \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) + \frac{(q_0/CL) - 1}{\sqrt{4L/(R^2C) - 1}} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t \right) \right] \right\}$$

- ◆ 注意: 阶跃响应基本上是与只有初始条件的响应相同, 在这两种响应之间的差别只是表现在解中的常数项。
- ◆ 对于临界阻尼和过阻尼情况, 可类似的导出响应 $q(t)$ 。

二阶系统的瞬态响应分析

- ◆ 例题：右图所示系统，忽略其它重量。假定 $b = 350.3 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ ， $k = 3503 \text{ N/m}$ ，在 $t = 0$ 时，一质量为 $m = 87.56 \text{ kg}$ 的人跳起并抓住杆。求杆将发生什么运动？

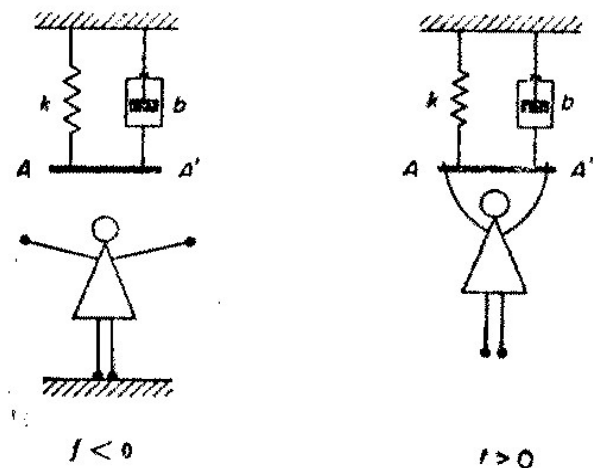


图7-11 机械系统

解：此时，相当于系统受到阶跃输入。且初始条件是

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

- ◆ 系统的数学模型或运动方程式是

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg \quad (1)$$

- ◆ 把参数代入(1)式并整理简化得

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 40x = 9.81 \quad (2)$$

二阶系统的瞬态响应分析

对(2)式作拉普拉斯变换并把代入初始条件, 结果得

$$s^2 X(s) + 4sX(s) + 40X(s) = 9.81/s$$

解出 $X(s)$ 为

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{9.81}{s(s^2 + 4s + 40)} = \frac{9.81}{40} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^2 + 4s + 40} \right) \\ &= 0.245 \left[\frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2 + 36} + \frac{1}{3} \frac{6}{(s+2)^2 + 36} \right] \end{aligned}$$

上式的拉普拉斯反变换得

$$x(t) = 0.245 \left(1 - e^{-2t} \cos 6t - \frac{1}{3} e^{-2t} \sin 6t \right) \text{ (m)}$$

- ◆ 注意: 不管采用什么单位制, 只要单位是相容的, 所得的数学模型或运动方程是相同的。

二阶系统的瞬态响应分析

◆ 二阶系统的脉冲响应

实际输入如果在短的时间间隔内有一大的幅值，它可用一脉冲函数来近似。

◆ 动量定理

刚体动量的变化量等于其所受合外力在 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 之间的积分，即冲量。

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \Rightarrow \mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{v_1}^{v_2} d(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

◆ 机械系统的脉冲响应

◆ 例题：质量为 m 的子弹射击到质量 M 中。确定质量 M 在被子弹射击后的响应。

◆ 假定子弹在 $t=0_-$ 时射中，子弹初速度是 $v(0_-)$ 。

◆ 假定子弹嵌入质量 M 中，射中后子弹与 M 的速度相同。

二阶系统的瞬态响应分析

假定 $M \gg m$ ，子弹射中质量 M 后的速度 $v(t)$ 小于 $v(0_-)$ ，且这一过程是瞬时发生的，因此 v 具有脉冲形式。

系统的运动方程式为：

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

$F(t)$ 是脉冲力，可以写为

$$F(t) = A\Delta t\delta(t) = -m\dot{v}$$

$$A\Delta t = mv(0_-) - mv(0_+) \quad v(0_+) = \dot{x}(0_+) = \text{质量 } M \text{ 的初速度}$$

因此

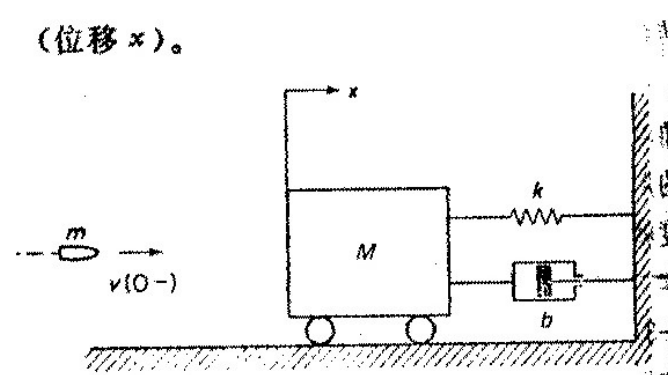
$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) = [mv(0_-) - m\dot{x}(0_+)]\delta(t)$$

◆ 对上式取单边拉氏变换，注意 $x(0_-) = \dot{x}(0_-) = 0$

$$(Ms^2 + bs + k)X(s) = mv(0_-) - m\dot{x}(0_+)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{mv(0_-) - m\dot{x}(0_+)}{Ms^2 + bs + k}$$

(位移 x)。



二阶系统的瞬态响应分析

可以应用初值定理确定 $\dot{x}(0_+)$

$$\begin{aligned}\dot{x}(0_+) &= \lim_{t \rightarrow 0_+} \dot{x}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sX(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{mv(0_-) - m\dot{x}(0_+)}{Ms^2 + bs + k} = \frac{mv(0_-) - m\dot{x}(0_+)}{M}\end{aligned}$$

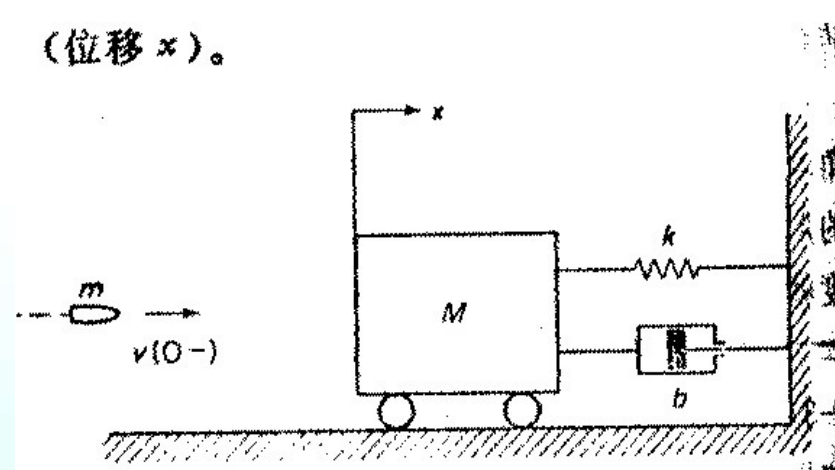
(位移 x)。

由上式可得

$$\dot{x}(0_+) = \frac{m}{M + m} v(0_-)$$

因此

$$X(s) = \frac{mv(0_-)}{M + m} \frac{M}{Ms^2 + bs + k}$$



- 通过拉氏逆变换可得脉冲响应 $x(t)$ 。
- 注意：系统若是在欠阻尼下， $x(t)$ 将出现阻尼振动；否则它将达到一最大位移，并无振动地逐渐返回到平衡位置。

传递函数

- ◆ **传递函数(Transfer Function)的定义:** 在假定所有初始条件为零的前提下, 输出量(响应函数)的拉普拉斯变换与输入量(驱动函数)的拉普拉斯变换之比。

设由微分方程表示的线性系统为

$$\begin{aligned} & a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x \\ & = b_0 p^{(m)} + b_1 p^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{p} + b_m p \quad (n \geq m) \end{aligned}$$

此系统传递函数为

$$\text{传递函数} = G(s) = \frac{L[\text{输出量}]}{L[\text{输入量}]} \bigg|_{\text{零初始条件}} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

- ◆ 如果传递函数的分母 s 的最高阶次等于 n , 称此系统为 n 阶系统。应用传递函数的概念, 可用 s 的代数方程式表示系统动力学。

传递函数

- ◆ **关于传递函数的说明：** 传递函数概念的适用范围仅限于线性定常的微分方程组。
 - 1、系统的传递函数是一数学模型。
 - 2、系统的传递函数是系统本身的性质，它与输入量或驱动函数的大小及性质无关。
 - 3、传递函数不能提供系统物理结构的任何数据关系。
 - 4、如果系统的传递函数已知，则对于各种形式的输入可以从了解系统的性质方面研究其输出响应。
- ◆ 5、系统的传递函数给出了系统动态特性的全部描述，如果传递函数未知，可以通过实验的方法或其它方法建立。
- ◆ 6、传递函数的拉普拉斯反变换是系统的脉冲响应。
- ◆ 7、传递函数可表示为零、极点和时间常数形式。

传递函数

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

式中 K^* 称为系统的根轨迹增益。或写成

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1) e^{-T_d s}}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

式中一次因子对应于实数零、极点，二次因子对应于共轭复数零、极点， τ_i, T_j 称为时间常数。

◇ 而 $K = \frac{b_m}{a_n} = K^* \frac{\prod_{i=1}^m (+z_i)}{\prod_{j=1}^n (+p_j)}$ 称为开环增益。

传递函数

设由微分方程表示的线性系统:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = b_0 p^{(m)} + b_1 p^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{p} + b_m p$$

其中 x —系统输出; p —系统输入

传递函数可由对上式两边取拉氏变换并假定所有初始条件为零

$$G(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

如果传递函数分母 s 的最高阶次等于 n , 称此系统为 n 阶系统。

◆ 建立传递函数的步骤:

- ◆ 1、写出系统的微分方程式
- ◆ 2、对微分方程式取拉普拉斯变换, 假定所有的初始条件为零
- ◆ 3、取输出量 $X(s)$ 与输入量 $P(s)$ 的比, 此值就是传递函数
- ◆ **注意: 负载效应 (Loading Effect)**

传递函数

例如质量-弹簧-阻尼系统，应用牛顿第二定律

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = p$$

对方程两边取单边拉氏变换

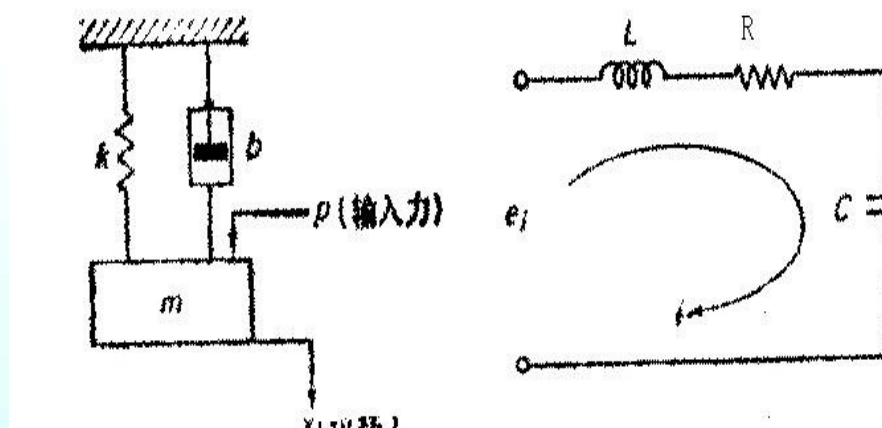
$$m(s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + b(sX(s) - x(0)) + kX(s) = P(s)$$

由于所有初始条件等于零，
上式简化为

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = P(s)$$

- 取 $X(s)$ 与 $P(s)$ 的比，可得机械系统的传递函数

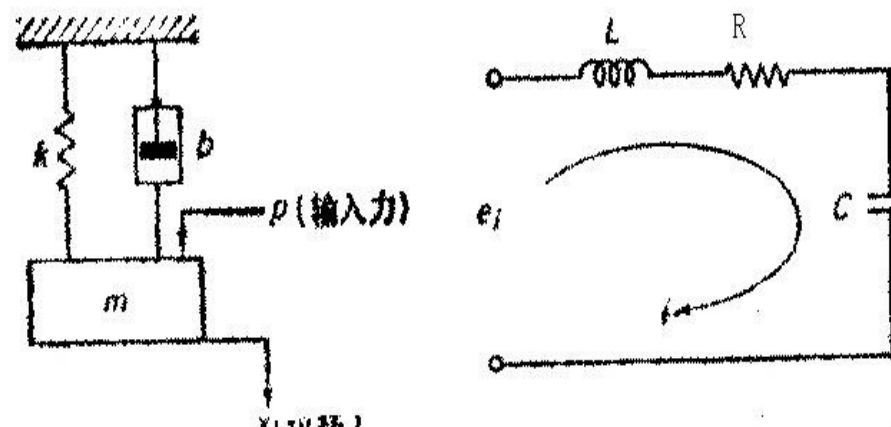
$$\text{传递函数 } G(s) = \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$



传递函数

电系统的微分方程为

$$\begin{cases} L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = e_i \\ \frac{1}{C} q = e_o \end{cases}$$



在零初始条件下，取拉普拉斯变换，并整理，可得此系统的传递函数是

$$\begin{cases} LCs^2 Q(s) + RCsQ(s) + Q(s) = CE_i(s) \\ Q(s) = CE_o(s) \end{cases}$$

◆ 取 $E_o(s)$ 与 $E_i(s)$ 的比，可得电系统的传递函数

$$\text{传递函数 } G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

传递函数

复阻抗 (Complex Impedance)

定义：在假定初始条件为零时，电路两端间电压的拉普拉斯变换 $E(s)$ 与通过此元件电流的拉普拉斯变换 $I(s)$ 的比

$$Z(s) = E(s) / I(s)$$

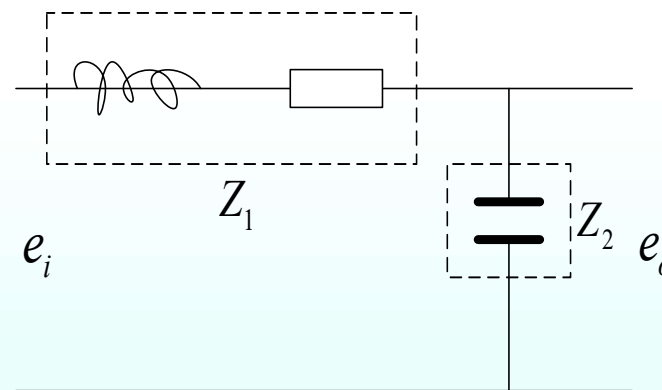
如果两端电路的元件是电阻 R ，电容 C 或电感 L ，于是复阻抗分别是由 R ， $\frac{1}{Cs}$ 或 Ls 给出。

注意复阻抗也可以有并联或串联。

用复阻抗推导电路的传递函数

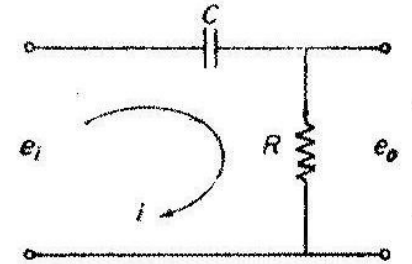
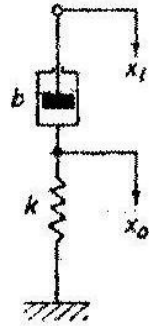
如右图所示，电路的传递函数为

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{1/(Cs)}{Ls + R + 1/(Cs)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



传递函数

- ◆ 例题：求右图所示系统的
- ◆ 传递函数，并证明这两个
- ◆ 系统是相似的。



- ◆ 解：对于机械系统，运动方程
- ◆ 为 $b(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = kx_o$ 或 $b\dot{x}_i = b\dot{x}_o + kx_o$
- ◆ 取拉普拉斯变换，在假定零初始条件下，得

$$bsX_i(s) = bsX_o(s) + kX_o(s) = (bs + k)X_o(s)$$

- ◆ 因此传递函数为
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs}{bs + k} = \frac{(b/k)s}{(b/k)s + 1}$$
- ◆ 对于电系统，有
$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R}{(1/Cs) + R} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$
- ◆ 比较所得的传递
- ◆ 函数，它们具有相同的结构形式，所以它们是相似的。

传递函数

◆ 典型环节传递函数

典型环节是构成系统的一些基本要素。主要有

◆ 比例环节（放大环节）如运算放大器和齿轮变速箱等。

$$y(t) = Kr(t) \quad \text{或} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K$$

◆ 惯性环节

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kr(t) \quad \text{或} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

对单位阶跃输入，其输出响应为 $y(t) = K(1 - e^{-t/T})$

◆ 积分环节

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t r(\tau) d\tau \quad \text{或} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts} = \frac{K}{s}$$

对单位阶跃输入，其输出响应为 $y(t) = t/T, \quad t > 0$

传递函数

◆ 微分环节

$$y(t) = \tau \frac{dr(t)}{dt} \quad \text{或} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \tau s$$

对单位阶跃输入，其输出响应为 $y(t) = \tau \cdot \delta(t)$

◆ 振荡环节

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

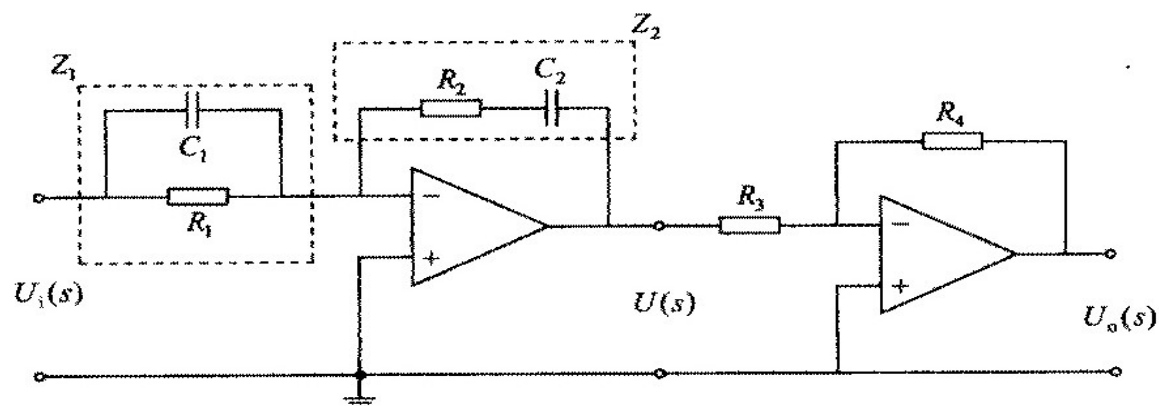
◆ 滞后环节

$$y(t) = r(t - \tau) \quad \text{或} \quad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = e^{-\tau s}$$

◆ 例如工业加热炉，其传递函数中就含有滞后环节。

传递函数

- ◆ 例题：比例、积分、微分（即 PID）控制器如图所示，试求其传递函数。



- ◆ 解：假设运算放大器为理想放大器，于是有

$$\frac{U(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

- ◆ 式中， $Z_1 = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s}$, $Z_2 = \frac{1 + R_2 C_2 s}{C_2 s}$

传递函数

于是，有

$$\frac{U(s)}{U_i(s)} = -\left(\frac{1 + R_2 C_2 s}{C_2 s}\right) \left(\frac{1 + R_1 C_1 s}{R_1}\right), \quad \frac{U_o(s)}{U(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$$

由此可得PID控制器的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{U_o(s)}{U(s)} \frac{U(s)}{U_i(s)} = \frac{R_4}{R_3} \left(\frac{1 + R_2 C_2 s}{C_2 s}\right) \left(\frac{1 + R_1 C_1 s}{R_1}\right) \\ &= K_p \left(1 + \frac{T_i}{s} + T_d s\right) \end{aligned}$$

$$\text{式中, } K_p = \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2}, T_i = \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2}, T_d = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2}$$

分别称为比例增益，积分时间常数。微分时间常数。

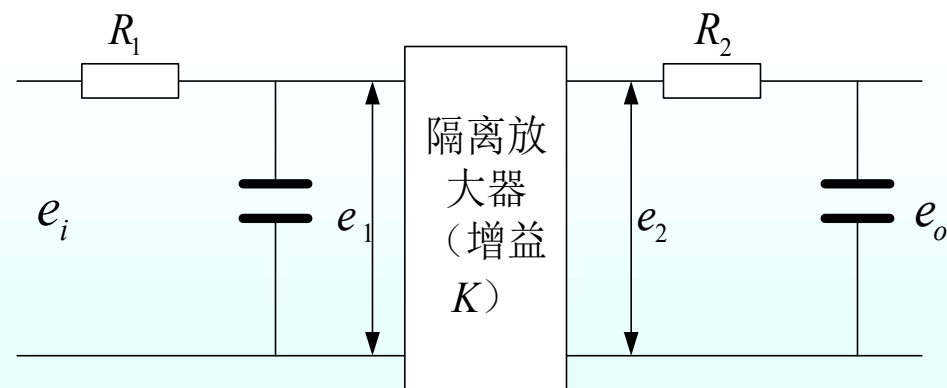
频率响应和正弦传递函数

◆ 串联无负载元件的传递函数

两个无负载串联元件所组成系统的传递函数可以在排除中间输入量和输出量下求得。此时整个系统的传递函数是各单个元件的传递函数的乘积。

如右图所示，在电路中间插入一个隔离放大器。

$$\begin{aligned}\frac{E_o(s)}{E_i(s)} &= \frac{E_1(s)}{E_i(s)} \frac{E_2(s)}{E_1(s)} \frac{E_o(s)}{E_2(s)} \\ &= \left(\frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \right) K \left(\frac{1}{R_2 C_2 s + 1} \right) \\ &= \frac{K}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}\end{aligned}$$



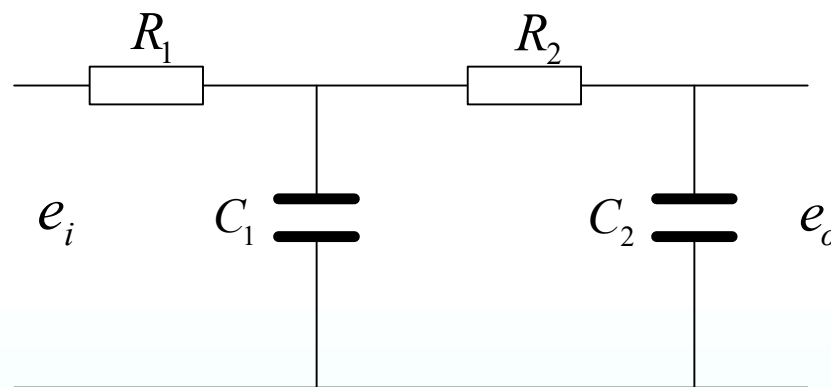
频率响应和正弦传递函数

◆ 串联有负载元件的传递函数

如右图所示有彼此作用的负载组件，这里电路的第二级 (R_2C_2 部分) 对第一级 (R_1C_1 部分) 产生一负载效应。系统的方程有：

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt = e_i$$

$$\frac{1}{C_1} \int (i_2 - i_1) dt + R_2 i_2 = -\frac{1}{C_2} \int i_2 dt = -e_o$$



◆ 对这两个方程式取拉氏变换，并假定零初始条件

$$R_1 I_1(s) + \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_2(s)] = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C_1 s} [I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) = -\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = -E_o(s)$$

频率响应和正弦传递函数

从这最后两方程式中约去 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$ 得到 $E_o(s)$ 和 $E_i(s)$ 之间的传递函数是

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

传递函数的分母中 $R_1 C_2 s$ 项表示两个简单 RC 电路的相互作用。

上述分析指出，如果两个 RC 电路串联连接，那么由第一个电路的输出就是第二个电路的输入，而整个传递函数不是 $1/(R_1 C_1 s + 1)$ 和 $1/(R_2 C_2 s + 1)$ 的乘积。

- ◆ 当负载阻抗是无穷大时，输出不损耗功率。否则就会产生功率损耗。
- ◆ 负载效应的程度决定了传递函数变化的大小。

频率响应和正弦传递函数

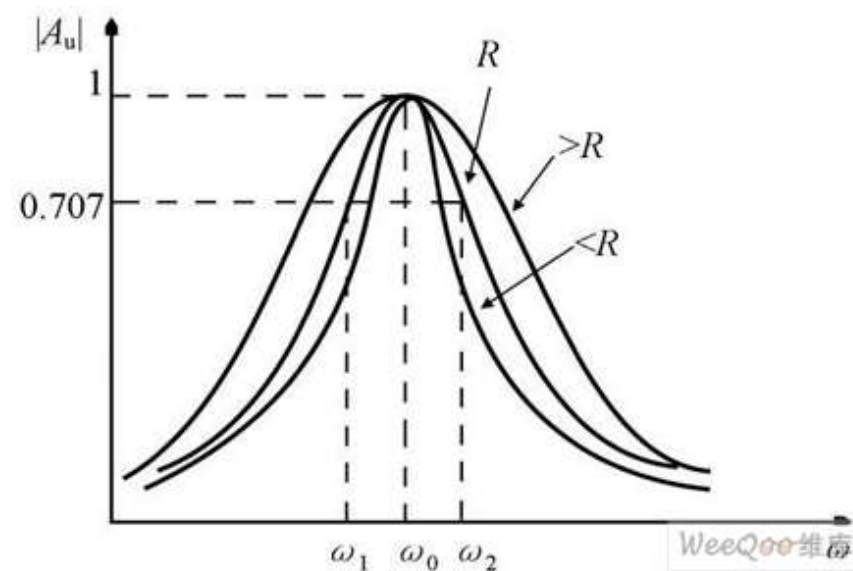
相似系统

系统有相同的传递函数（或相同的数学模型）就是相似系统。（传递函数是目前可能有的最简单和最明了的数学模型形式。）

相似系统对于相同的输入将出现相同的输出响应。对于任何给定的物理系统，数学响应能够给出一物理解释。

频率响应

定义：是指系统在正弦输入下的稳态响应。

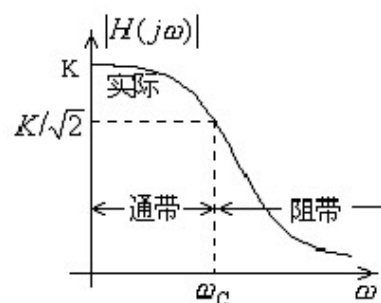


频率响应和正弦传递函数

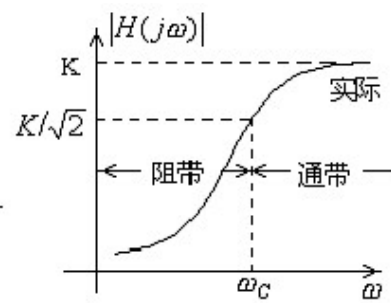
当一个正弦输入作用在线性系统上时，系统除了以输入频率振动外，还将具有按系统本身固有频率振动的倾向。

在具有阻尼的情况下，这一部分运动不能由正弦输入维持，而将逐渐消失。

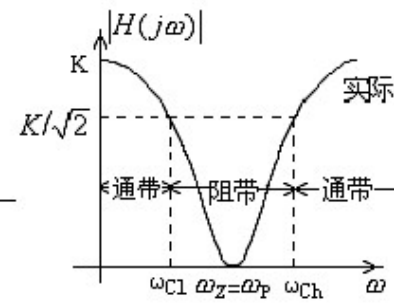
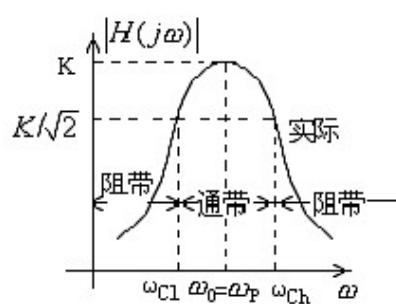
因此，最后在稳态的响应是正弦的，具有与输入相同的频率，差别仅在于振幅和相位角。



(a) 低通滤波电路



(b) 高通滤波电路



频率响应和正弦传递函数

◆ 小结:

当输入是正弦时，系统的频率响应特性可以由输出-输入的振幅比以及在输出和输入正弦之间的相位角完全描述。

在系统分析的方法中，我们在宽的范围內改变输入信号的频率，并研究由此产生的响应。

频率响应和正弦传递函数

◆ 研究频率响应的重要性

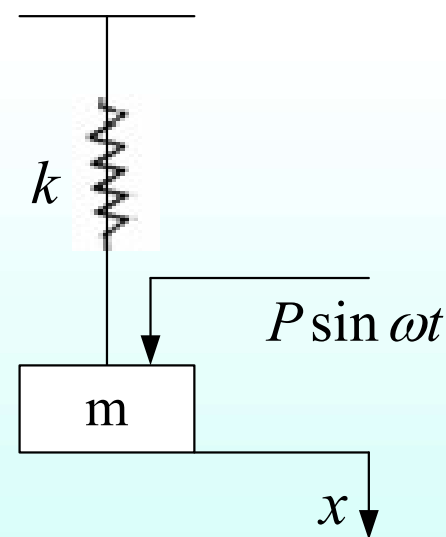
- 1、许多自然现象从本质上说是正弦的——例如，在机械和电系统中经常发生的简谐运动。
- 2、任何周期的信号可以由一系列正弦分量来代替。
- 3、正弦信号在通讯以及发电和输送电力中是重要的。

◆ 无阻尼受迫振动

如右图所示的弹簧-质量系统，其中质量受到一正弦输入力 $P\sin\omega t$ 作用，寻找系统当初始条件静止时的响应。

◆ 从平衡位置测量 x ，系统运动方程为

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{P}{m}\sin\omega t$$



频率响应和正弦传递函数

- ◆ **方法一：采用一般方法解决此问题。** 此方程式的解是由以系统本身固有频率的振动（补解）和系统以受迫振动频率的振动（特解）所组成。因此解可以写为

$$x(t) = (\text{补解}) + (\text{特解}) = \left(A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right) + (C \sin \omega t)$$

其中 A 、 B 、 C 为待定常数。

系统在 $t=0$ 时作用 $P \sin \omega t$ ，初始条件为 $x(0) = 0$ ， $\dot{x}(0) = 0$

于是 $x(0) = B = 0$ ， $x(t)$ 简化为

$$x(t) = A \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + C \sin \omega t \qquad \dot{x}(0) = A \sqrt{\frac{k}{m}} + C \omega = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C \omega \cos \omega t \qquad \Rightarrow C = -\frac{A}{\omega} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

频率响应和正弦传递函数

$x(t)$ 的二阶导数为

$$\ddot{x}(t) = -A \frac{k}{m} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t - C \omega^2 \sin \omega t$$

那么可得

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = -C \omega^2 \sin \omega t + \frac{k}{m} C \sin \omega t = \frac{P}{m} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow C \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) = \frac{P}{m} \Rightarrow C = \frac{P}{k - m \omega^2}$$

$$A = -\frac{C \omega}{\sqrt{k/m}} = -\frac{P \omega \sqrt{m/k}}{k - m \omega^2}$$

◆ 最终可得全解为

$$x(t) = -\frac{P \omega \sqrt{m/k}}{k - m \omega^2} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{P}{k - m \omega^2} \sin \omega t$$

频率响应和正弦传递函数

其中第一项是补解（由于无阻尼项，它在此系统中不衰减），第二项是特解。

◆ 方法二：采用拉氏变换。

优点：对于更复杂的系统，例如系统包含有阻尼项或系统有两个或更多个自由度，拉氏变换方法比前面所介绍的一般方法更简便。

对系统数学模型取拉氏变换并使用初始条件 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$

$$\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)X(s) = \frac{P}{m} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{P}{m} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{s^2 + (k/m)}$$

$$\Rightarrow X(s) = -\frac{P\omega\sqrt{m/k}}{k - m\omega^2} \frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + (k/m)} + \frac{P}{k - m\omega^2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

频率响应和正弦传递函数

通过拉氏反变换可得相同的结果：

$$x(t) = -\frac{P\omega\sqrt{m/k}}{k-m\omega^2} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{P}{k-m\omega^2} \sin \omega t$$

◆ 分析系统的响应方程式：

1、当激励频率 ω 趋近于零时，其固有振动频率的振幅趋近于零，而激励频率 ω 的振幅趋近于 P/k 。

2、值 P/k 是当作用静力 P 时（零频率时）所引起的质量 m 的位移。即 P/k 是静变形。

◆ 3、当频率 ω 增大时，解的分母 $k-m\omega^2$ 变小，振幅变大。

◆ 4、而当频率 ω 进一步增大，并变成等于系统的固有频率时， $\omega = \omega_n = \sqrt{k/m}$ ，产生共振。此时解的分母 $k-m\omega^2$ 为零，振幅将无限制地增大。

频率响应和正弦传递函数

5、当 ω 继续增大超过共振时，分母 $k-m\omega^2$ 变成负的，并随增大而趋于负的无穷大。

6、如果 ω 是在共振以下，振动中的受迫振动频率部分（特解）是与正弦激励同相，如果 ω 在共振以上，振动相位差 180° 。

◆ 正弦传递函数

传递函数 $G(s)$ 中用 $j\omega$ 代替 s 就定义为正弦传递函数。

当只要求其稳态的解时（特解），正弦传递函数 $G(j\omega)$ 可以使其简化，它可用来研究稳态条件下稳定的线性系统的性质

◆ 由正弦输入导出稳态输出

◆ 对于图7-27中的线性系统 $G(s)$ ，输入和输出分别用 $p(t)$ 和 $x(t)$ 表示。输入 $p(t)$ 是正弦的， $p(t)=P\sin\omega t$

频率响应和正弦传递函数

那么，稳态的输出 $x(t)$ 为

$$x(t) = |G(j\omega)|P\sin(\omega t + \varphi)$$

其中， $|G(j\omega)|$ —— $G(j\omega)$ 的模； φ ——幅角。

$|G(j\omega)| = |X(j\omega)/P(j\omega)|$ = 输出正弦与输入正弦的振幅比

$$|G(j\omega)| = |X(j\omega)/P(j\omega)|$$

$$= \tan^{-1}[G(j\omega)\text{的虚部}/G(j\omega)\text{的实部}]$$

$$= \text{输出正弦对于输入正弦的相移}$$

因此，线性系统在正弦输入下稳态的响应特性可以直接从 $G(j\omega)$ ， $X(j\omega)/P(j\omega)$ 的比求得。

证明略。

频率响应和正弦传递函数

◆ 注意:

- 1、正弦传递函数 $G(j\omega)$ 是一复数量，它可由以频率 ω 为参数的模和相位角来表示。
- 2、为了用频率响应曲线完全表征一个线性系统，必须给出振幅比和相位角两者作为频率 ω 的函数。

◆ 说明:

- 1、上式只有当 $G(s)=X(s)/P(s)$ 是一个稳定系统时才正确——也即 $G(s)$ 的所有极点都位于左半平面。
- ◆ 2、如果 $G(s)$ 的一个极点或几个极点位于右半平面，系统是不稳定的，响应将无限止的增大。对于这种不稳定的系统没有稳定状态。

频率响应和正弦传递函数

- ◆ 例 7-5. 若系统的传递函数 $G(s)=X(s)/P(s)=1/(Ts+1)$, 对于正弦输入 $p(t)=P\sin\omega t$, 分析稳态的输出 $x(t)$ 。

- ◆ 首先

$$G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}$$

- ◆ 输出-输入振幅比

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

- ◆ 相位角 φ 为

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \frac{1 - jT\omega}{1 + T^2\omega^2} = -\tan^{-1} T\omega$$

稳态的输出可求得为

$$x(t) = \frac{P}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \sin(\omega t - \tan^{-1} T\omega)$$

频率响应和正弦传递函数

- ◆ 例 7-6. 质量-弹簧-阻尼系统的运动方程式为 $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = p(t)$ 系统正弦输入为 $p(t) = P\sin\omega t$, 求其稳态输出。
- ◆ 由于初始条件对于稳态输出无作用, 我们可假定为零。上式的拉氏变换为

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = P(s)$$

- ◆ 传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

- ◆ 正弦传递函数为

$$G(j\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + jb\omega}$$

- ◆ 那么, 输出 $x(t)$ 为

$$x(t) = |G(j\omega)| P \sin(\omega t + \varphi)$$

频率响应和正弦传递函数

◆ 其中

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad \varphi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}$$

◆ 因为 $k/m = \omega_n^2$, $b/k = 2\zeta/\omega_n$, 上式还可以写为

$$x(t) = \frac{x_{st}}{\sqrt{[1 - (\omega^2 / \omega_n^2)]^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2}} \times \sin \left[\omega t - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - (\omega^2 / \omega_n^2)} \right]$$

◆ 其中 $x_{st} = P/k$ 是静变形。

◆ 将 $x(t)$ 的振幅写为 X , 振幅比 X/x_{st} 为

$$\frac{X}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega^2 / \omega_n^2)]^2 + (2\zeta\omega / \omega_n)^2}}$$

◆ 下图表示输入频率和阻尼比对稳态输出的振幅和相位角的影响。

频率响应和正弦传递函数

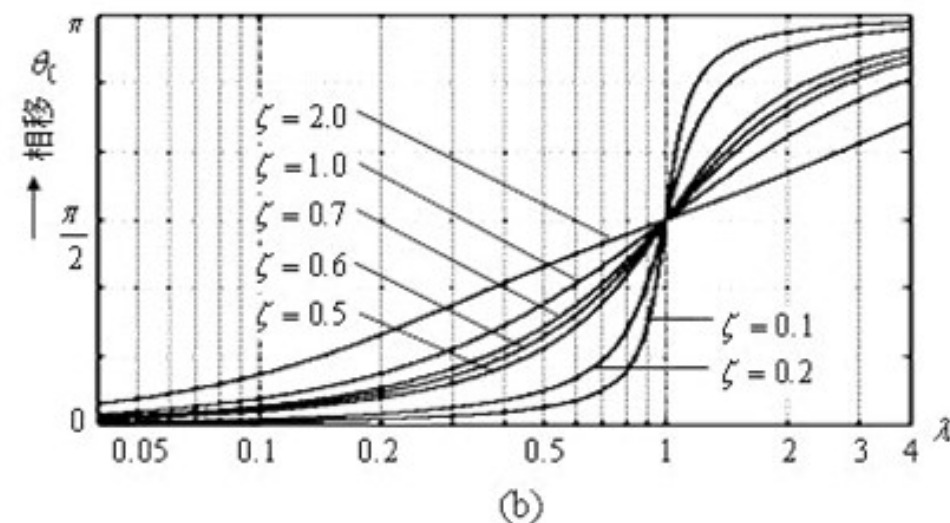
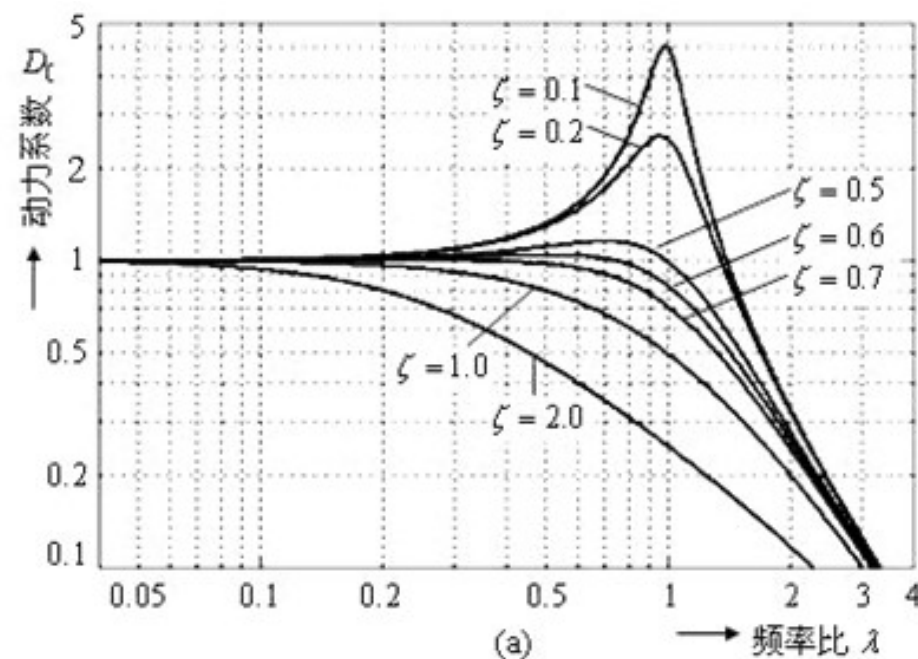
- 从图中可以看出：
- 当阻尼比增大时，振幅比减小。最大振幅发生在比无阻尼固有振动频率 ω_n 略小的频率处。用 ω_m 来表示发生最大振幅的频率

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

- 此频率比阻尼固有频率

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

- 稍微小一些。



控制系统分析

- ◆ **被控对象**：被控对象是一个设备，它是由一些机械零部件有机地组合在一起的，其作用是完成一个特定的动作。
- ◆ **扰动**：扰动是一种对系统的输出量产生相反作用的信号。根据扰动产生的位置，可分为：**内扰**或**外扰**。
- ◆ **反馈控制**：反馈控制是这样一种控制过程，它能够在存在扰动的情况下，力图减小系统的输出量与参考输入量之间的偏差，而且其工作也正是基于这一偏差基础之上的。
- ◆ **反馈控制系统**：它是一种能对输出量与参考输入量进行比较，并力图保持两者之间既定关系的系统，它利用输出量与参考输入量的偏差来进行控制。
- ◆ **闭环控制系统**：反馈控制系统常常称为是闭环控制系统。术语闭环控制总是意味着采用反馈控制作用以便减小系统的误差。闭环控制系统中，动作偏差信号是输入信号与反馈信号（它可以是控制器输出信号本身或是输出信号及它的导数的函数）之间的差，它被送入控制器以减小误差，并使系统的输出达到所希望的值。

控制系统分析

- ◆ **开环控制系统：**若系统的输出量对系统的控制作用没有影响，则称为开环控制系统。换句话说，在一个开环系统中输出量既不被测量也不反馈回来与输入量相比较。

沿时间坐标轴单向运行的任何系统，都是开环系统。

- ◆ **闭环控制系统与开环控制系统的比较**

闭环系统由于采用了反馈，因而使系统的响应对外扰和内部系统参数变化很不敏感。因此有可能采用不太精密的低成本的元件，构成精确的控制系统。相反，在开环系统的情况下，则不能做到这一点。从稳定性的观点出发，开环控制系统比较容易建造，因为它的稳定性不是重要的问题。而闭环控制系统，稳定性始终是一个重要的问题，因为闭环系统可能引起过调，从而造成系统振荡。

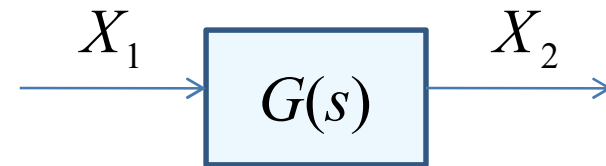
- ◆ **控制系统的一般要求：**任何一个控制系统必须是稳定的。控制系统的响应速度必须适当快，各控制系统必须能够将误差减小到零或到某一小的容许的值。
- ◆ **注意：**相对稳定性与稳态精度是不相容的，因此须在这两者之间进行有效地协调。

方块图

- ◆ **方块图 (Block Diagram):** 系统的方块图是系统中每个元件功能和信号流向的图解表示。方块图表明了系统中各种元件间的相互关系。

在方块图中，通过函数方块，可以将所有的系统变量联系起来。函数方块是加到方块上的输入信号的一种运算符号，运算结果以输出量表示。元件的传递函数通常写进相应的方块中，并以标明信号流向的箭头将这些方块连接起来。

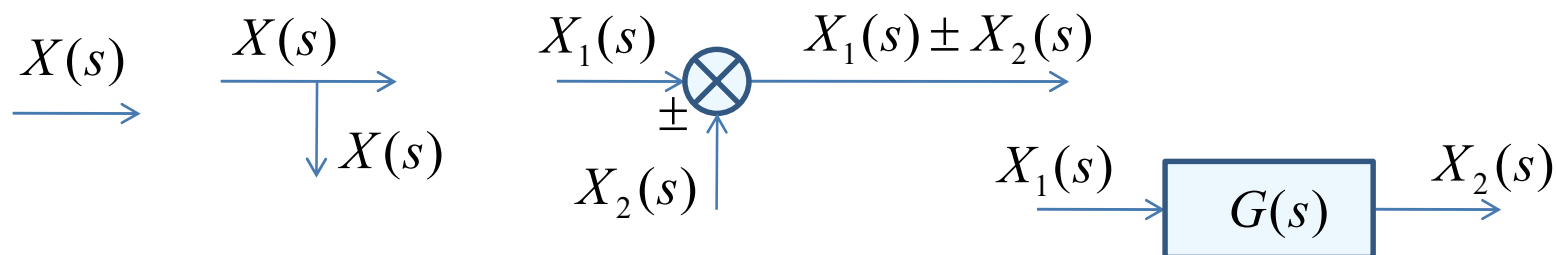
右图表示了一个方块图单元，指向方块的箭头表示输入，而从方块出来的箭头表示输出。 $X_2 = G(s)X_1$



- ◆ 从方块输出信号的量纲等于输入信号的量纲与方块中传递函数的量纲的乘积。
- ◆ 用方块图表示系统的优点是：只要依据信号流向，将各元件的方块连接起来，就能够容易地组成整个系统的方块图，并且通过方块图，还可以评价每一个元件对系统性能的影响。
- ◆ 方块图包含了与系统动态特性有关的信息，但是它不包括与系统物理结构有关的信息。
- ◆ **注意：**对于一定的系统，方块图不是唯一的。

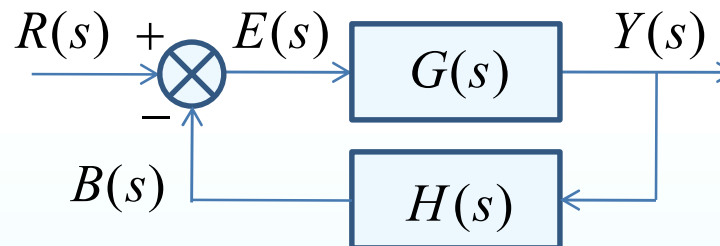
方块图

- 方块图由信号线、分支点、相加点和方块图单元组成，



闭环系统的方块图

- 右图所示闭环系统的方块图。
- 开环传递函数和前向传递函数分别为



$$\text{开环传递函数} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s) \quad \text{前向传递函数} = \frac{Y(s)}{E(s)} = G(s)$$

闭环传递函数、输入量与输出量之间的关系有

$$Y(s) = G(s)E(s) \quad E(s) = R(s) - B(s) \quad B(s) = H(s)Y(s)$$

方块图

由这些方程式消去 $E(s)$ ，得

$$Y(s) = E(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

$$[1 + R(s)H(s)]Y(s) = G(s)R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

这就是闭环传递函数，它把闭环系统的动态特性与前向通道元件和反馈通道元件的动态特性联系在一起了。

因此，输出量的拉普拉斯变换由下式给出

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

- ◆ **画方块图的步骤：**在绘制系统的方块图时，首先写出描述每一个元件动态特性的方程式。然后假定初始条件等于零，对这些方程式进行拉普拉斯变换，并把每一个拉普拉斯变换方程分别以方块的形式表示出来。最后把这些方块单元结合在一起，组成完整的系统方块图。

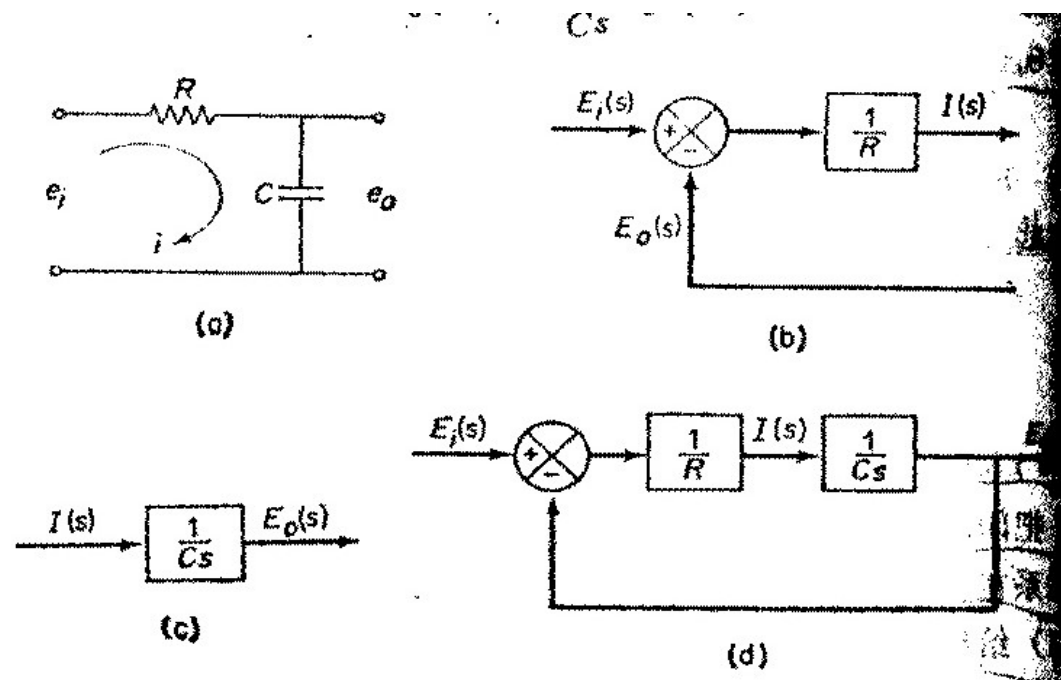
方块图

- ◆ 例题：右图所示电路，画出其方块图。

电路的方程式是

$$i = \frac{e_i - e_o}{R}$$

$$e_o = \frac{1}{C} \int i dt$$



在零初始条件下，进行拉普拉斯变换，得

$$I(s) = \frac{1}{R} [E_i(s) - E_o(s)] \quad E_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

- ◆ 其对应方块图如图(b)、(c)所示。将这两个单元方块图结合在一起，就可得到图(d)所示的系统的完整方块图。

方块图

◆ 方块图的简化

应当指出，只有当一个方块的输出量不受其后的方块影响时，才能够将它们串联连接。如果在这些元件之间存在任何**负载效应**，就必须将这些元件归并为一个单一的方块。

一个包含着许多反馈回路的复杂方块图，可以采用方块图的代数法则，经过逐步地重新排列和整理而得到简化。

当方块图简化后，新的方块却变得更加复杂，因此产生了新的零点和极点。

◆ **注意：**方块图简化的基本规则是通过有关变量的代数方程推导出来的，满足变换前后其输出量与输入量间的传递函数保持不变。归纳有以下两个原则：

- ◆ 1、前向通路中传递函数的乘积必须保持不变；
- ◆ 2、回路中传递函数的乘积必须保持不变。

方块图

| | 原 方 块 图 | 等 效 方 块 图 |
|---|---------|-----------|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |

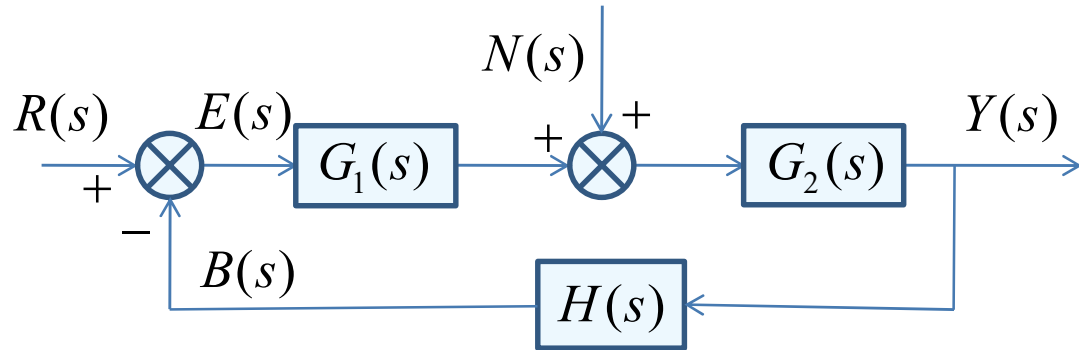
(续)

| | 原 方 块 图 | 等 效 方 块 图 |
|----|---------|-----------|
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |

带扰动闭环系统的传递函数

典型的闭环控制系统的方块图如右图所示。

- ◆ 对于线性系统，当两个输入 $R(s)$, $N(s)$ 同时作用于系统时，可
- ◆ 应用叠加原理分别对每个输入量进行单独处理，然后对其响应进行叠加，即可得到系统总的输出量。



当只有输入量时，即 $N(s)=0$ ，闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- ◆ 扰动量作用下的闭环传递函数

$$\Phi_n(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

带扰动闭环系统的传递函数

当输入量和扰动量 $R(s)$, $N(s)$ 同时作用于系统时, 输出量为

$$\begin{aligned} Y(s) &= \Phi(s)R(s) + \Phi_n(s)N(s) \\ &= \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)G_2(s)R(s) + G_2(s)N(s)] \end{aligned}$$

如果满足 $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$, $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ 的条件, 则有

$$Y(s) = \frac{1}{H(s)} R(s) + \frac{1}{G_1(s)H(s)} N(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s)$$

- 上式表明, 在一定条件下, 系统的输出只取决于反馈通道的传递函数 $H(s)$ 和系统的输入, 而与前向通道的传递函数无关, 也不受前向通道中扰动量作用的影响。当 $H(s)=1$
- 时, 有 $Y(s) \approx R(s)$, 即系统输出量是对输入信号的近似复现, 且系统对扰动具有较强的抑制能力。

带扰动闭环系统的传递函数

- ◆ **闭环系统的误差传递函数**：闭环系统在输入量和扰动量 $R(s), N(s)$ 作用时，以误差信号 $E(s)$ 作为输出量的传递函数称为误差传递函数。如下

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$G_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- ◆ 注意：系统在各种情况下的闭环传递函数的分母均相同，都等于 $1 + G_1(s)G_2(s)H(s)$ ，于是称其为闭环系统的**特征多项式**，称

$$1 + G_1(s)G_2(s)H(s) = 0$$

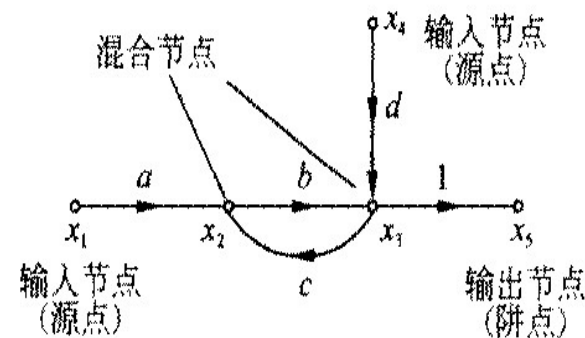
- ◆ 为闭环系统的**特征方程式**，特征方程式的解为系统的**特征值**或**闭环极点**。

信号流图

信号流图 (Signal Flow Graph) 是一种表示一组线性代数方程的图示方法。像方块图一样，它也是一种描述系统内部信号传递关系的数学图示模型。信号流图比方块图更简便明了，不用进行简化，就可利用梅森增益公式求出系统的传递函数。

◆ 信号流图的组成和建立

信号流图由节点和支路组成，如右图所示，节点表示系统中的变量，支路是连接两个节点的有向线段，增益是两个变量之间的关系式，就是两个变量之间的传递函数。



节点分为

- ◆ **输入节点**（或源点）：只有输出支路没有输入支路的节点。
- ◆ **输出节点**（或阱点）：只有输入支路没有输出支路的节点。
- ◆ **混合节点**：既有输入支路也有输出支路的节点。
- ◆ 混合节点可以通过增加一条增益为1的支路，转化为输出节点。

信号流图

- ◆ **前向通路与前向通路增益：**信号从输入节点到输出节点传递时，对任何节点只通过一次的通路，称为前向通路。而前向通路上的各支路增益之积称为前向通路增益。
- ◆ **回路与回路增益：**任何信号传递通路的起点和终点在同一节点上，且通过任何节点不多于一次的闭合通路称为回路。回路中各支路增益的乘积称为回路增益。

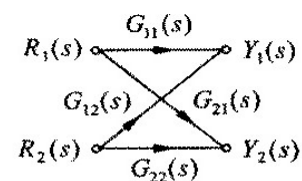
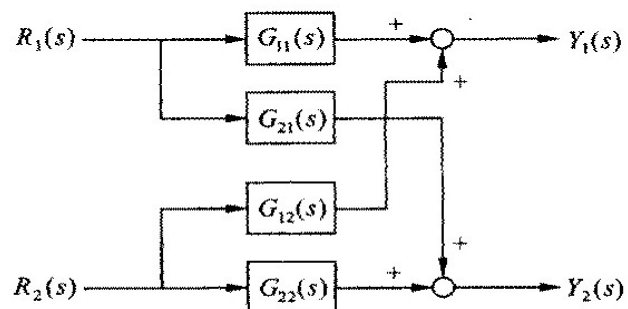
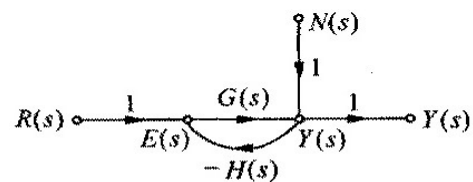
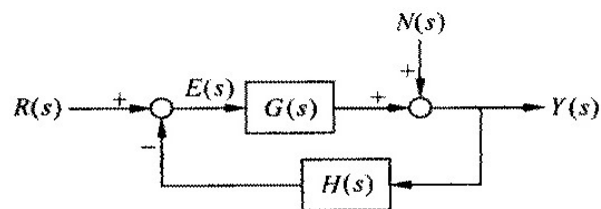
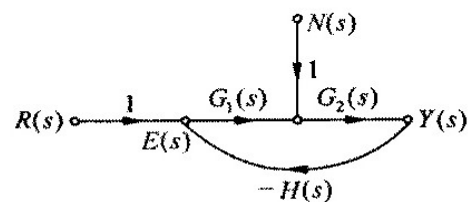
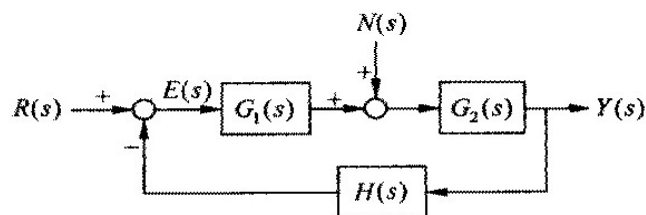
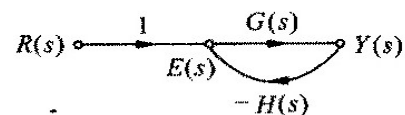
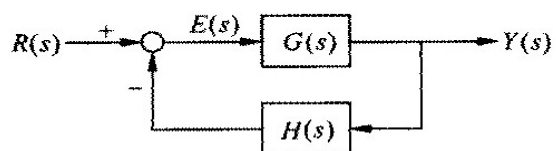
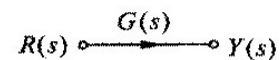
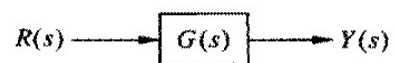
如果回路之间没有任何公共节点，则称此种回路为**互不接触回路**。

如果已经有了系统的方块图，可以很方便地画出对应的信号流图。

- ◆ **注意：**

- ◆ (1) 节点所表示的变量等于流入该节点的信号之和。
- ◆ (2) 从节点流出的每一支路信号都等于该节点所表示的变量。
- ◆ 由此可知，信号流图中的节点起到了方块图中的相加点和分支点的作用。支路增益相当于方块图中的方块中的函数。
- ◆ 当然，也可以从微分方程开始，绘制系统的信号流图。

信号流图



信号流图

- ◆ **梅森增益公式(Mason's Gain Formula):** 计算从输入节点到输出节点之间总增益的梅森公式，可以表示为

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad (1)$$

式中: P_k 是第 k 条前向通路的增益;

Δ 称为信号流图的特征式, 具体有

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots$$

$\sum_a L_a$ = 所有不同回路的回路增益之和

$\sum_{b,c} L_b L_c$ 每两个互不接回路增益乘积之和

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ 每三个互不接回路增益乘积之和

信号流图

Δ_k 等于在除去与第 k 条前向通路相接触的回路后的信号流图中，第 k 条前向通路特征式的余因式，可以从 Δ 中除去与通路 P_k 相接触的回路的路增益后得到。

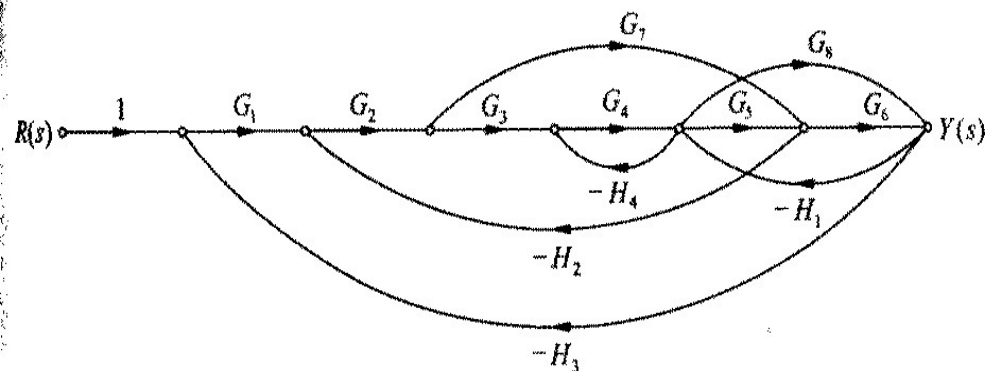
- ◆ 注意：上述求和过程，应在从输入节点到输出节点的全部可能的通路上进行。并且，(1) 式表示的是从输入节点到输出节点之间的传递函数。

如果要利用 (1) 式确定混合节点与输入节点之间的传递函数，需要从混合节点增加一条增益为 1 的支路，将混合节点变为输出节点。

- ◆ 实际上，(1) 式的 P 就是闭环系统的传递函数，而 Δ 就是闭环系统的特征多项式。

信号流图

- ◆ 例题：一系统的信号流图如右图所示。试利用梅森增益公式确定系统的传递函数。



解：由右图可知，系统有 3 条前向通路，分别为

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6; \quad P_2 = G_1 G_2 G_7 G_6; \quad P_3 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_8$$

- ◆ 8 个回路，各回路增益分别为

$$L_1 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2; \quad L_2 = -G_5 G_6 H_1; \quad L_3 = -G_8 H_1$$

$$L_4 = -G_7 H_2 G_2; \quad L_5 = -G_4 H_4; \quad L_6 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3$$

$$L_7 = -G_1 G_2 G_7 G_6 H_3; \quad L_8 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_8 H_3$$

信号流图

其中，回路 L_5 与 L_4 和 L_7 不接触， L_3 与 L_4 不接触，
因此信号流图特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + (L_5L_7 + L_5L_4 + L_3L_4)$$

余因式为

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 1, \quad \Delta_2 = 1 - L_5 = 1 + G_4H_4$$

于是可得系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2\Delta_2 + P_3}{\Delta}$$

状态空间模型

通常，系统的数学模型有两种类型。一种是系统的**输入输出模型**，它描述的是系统的外部特性，即输入与输出之间的关系，如微分方程和传递函数等。另一种是**状态空间模型**，它不仅描述了系统的外特性，而且也给出了系统的内部信息。这种模型分两段来描述输入与输出之间的信号传递。第一段描述的是系统输入对系统内部变量，即状态变量的影响；第二段描述的是系统输入和内部变量对输出变量的影响。这种模型表征了系统的所有动力学特征，是对系统的一种完全描述。

- ◆ **状态**：动态系统的状态是指完全描述系统时域行为的一个最小变量组。“最小变量组”是指这组变量之间是相互独立的。
- ◆ **状态变量**：最小变量组中的变量称为状态变量。
- ◆ **状态向量**：由状态变量构成的向量称为系统的状态向量或简称状态。
- ◆ **状态空间 (State Space)**：状态向量的取值空间称为状态空间，状态空间的维数等于系统的阶数。
- ◆ **状态轨迹**：对于某一时刻，状态向量表示为状态空间中的一个点，状态向量随时间变化将构成状态空间中的一条轨迹，即状态轨迹。

状态空间模型

- ◆ **状态方程**：描述系统状态变量与输入变量之间关系的一阶微分方程，称为系统的状态方程。状态方程表征了系统由输入引起的内部状态变化，其矩阵形式为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

式中： \mathbf{x} , \mathbf{u} 分别是 n 维**状态向量**（ n 是系统的阶数）和 r 维**输入向量**（ r 是输入变量的维数）；

$\mathbf{A}(t)$ 是 $n \times n$ 维的方阵，它表明了系统内部状态变量之间的联系，称为**系统矩阵**；

$\mathbf{B}(t)$ 是 $n \times r$ 维的矩阵，称为**输入矩阵**。

- ◆ **输出方程**：描述输出变量、状态变量和输入变量之间关系的代数方程组，称为输出方程，其矩阵形式表示为：

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}$$

- ◆ 式中： \mathbf{y} , $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ 分别是 m 维**输出向量**（ m 表示输出变量的个数）， $m \times n$ 维的**输出矩阵**， $m \times r$ 维的**前馈矩阵**。

状态空间模型

- ◆ **状态空间表达式：**状态方程和输出方程的组合，称为状态空间表达式或动态方程。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}$$

对于线性定常连续系统，其状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

- ◆ **线性系统的方块图**

- ◆ 线性连续系统的状态
- ◆ 空间表达式常用右图
- ◆ 所示的方块图来表示。

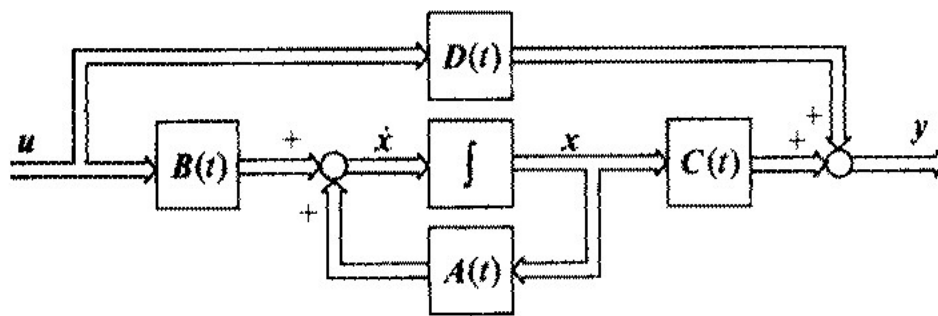


图 2.6.1 线性连续系统方块图

状态空间模型

建立状态空间表达式的方法主要有两种：一是根据物理机理直接建立状态空间表达式；二是由已知的系统输入输出模型，如微分方程、传递函数、方块图等，转化为系统的状态空间表达式。

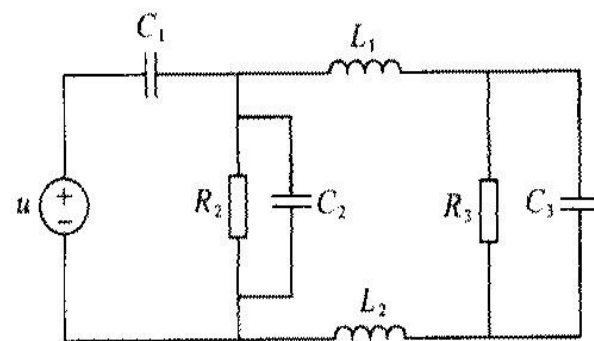
◆ 根据系统物理机理建立状态空间表达式

通常选取独立的储能元件的变量作为系统的状态变量。如弹簧的位移、质量块的运动速度、电感的电流和电容的电压等。

在选取状态变量时，应注意储能元件的独立性。例如在电系统中，纯电容回路或者由电容和独立电压源组成的回路；纯电感割集或者由电感和独立电流源组成的割集的电感上的电流变量，它们不是相互独立的。此时，电系统的独立状态变量个数为

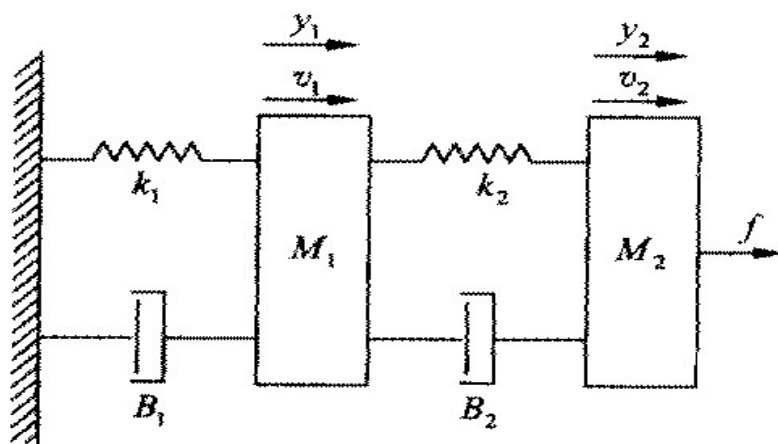
$$n = n_{CL} - (n_C + n_L)$$

- ◆ 其中： n_{CL}, n_C, n_L 分别为电系统中电容和电感元件的总数，纯电容回路数（包括由电容和独立电压源组成的回路数），纯电感割集数（包括由电感和独立电流源组成的割集数）。

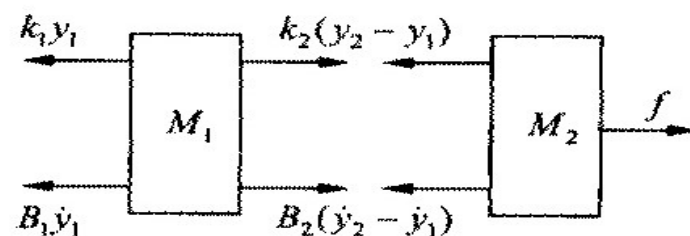


状态空间模型

- ◆ 例题：一机械系统如下图所示。试建立以力 f 为输入，两质量块的位移 y_1, y_2 为输出的状态空间表达式。



(a) 示意图



(b) 隔离体图

解：该系统有4个储能元件，它们是相互独立的。因此，可以选择这4个储能元件的变量（弹簧的位移和质量块的速度）作为状态变量。即

$$y_1, y_2, v_1, v_2$$

- ◆ 令 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = v_1 = \frac{dy_1}{dt}, x_4 = v_2 = \frac{dy_2}{dt}$

状态空间模型

对于两质量块，根据牛顿定律，有

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} = k_2(y_2 - y_1) + B_2 \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) - k_1 y_1 - B_1 \frac{dy_1}{dt} \quad (1)$$

$$M_2 \frac{dv_2}{dt} = f - k_2(y_2 - y_1) - B_2 \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) \quad (2)$$

将状态变量代入上两式，整理后得

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{M_1}(k_1 + k_2)x_1 + \frac{k_2}{M_1}x_2 - \frac{1}{M_1}(B_1 + B_2)x_3 + \frac{B_2}{M_1}x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_2}{M_2}x_1 - \frac{k_2}{M_2}x_2 + \frac{B_2}{M_2}x_3 - \frac{B_2}{M_2}x_4 + \frac{1}{M_2}f$$

状态空间模型

写成矩阵形式的系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{M_1} & \frac{k_2}{M_1} & -\frac{B_1 + B_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{k_2}{M_2} & -\frac{k_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M_2} \end{bmatrix} f$$

输出方程为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

状态空间模型

◆ 根据系统的输入输出模型-传递函数建立状态空间表达式

由传递函数建立状态空间表达式的过程称为“实现”。由于状态变量选取的非惟一性，系统的实现也不是惟一的。其中维数最低的实现称为该系统的**最小实现**。

◆ **直接分解法**：这种方法适用于传递函数的分子、分母多项式没有分解成因式的情况。具体步骤如下：

首先，根据梅森公式由传递函数得到相应的信号流图，在信号流图中定义每个积分器的输出为状态变量；然后，根据信号流图中信号传递关系，列写状态空间表达式。

◆ 例题：假设4阶系统传递函数为：

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

◆ 即

$$G(s) = \frac{b_3 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_1 s^{-3} + b_0 s^{-4}}{1 + a_3 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_1 s^{-3} + a_0 s^{-4}} \quad (1)$$

状态空间模型

如果令积分器的输出为状态变量，则积分器的输入自然就是状态变量的导数。

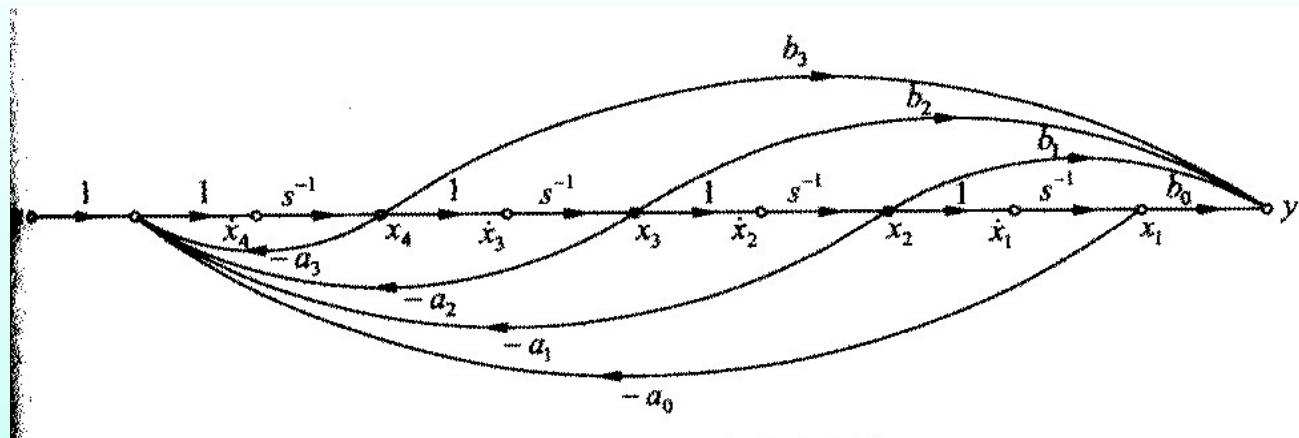
由梅森公式

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k \quad (2)$$

可知，分子是前向通道参数，分母是反馈回路参数。当所有的反馈回路相互接触，且所有前向通路与反馈回路相互接触时，

$$G(s) = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{1 - \sum_q Lq} = \frac{\text{前向通路增益之和}}{1 - \text{反馈回路增益之和}} \quad (3)$$

比较(3)式和(1)式可知，传递函数式(1)对应的信号流图中应有4条前向通路和4条反馈回路。其信号流图



状态空间模型

由信号流图可写出状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = x_3; \quad \dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_4x_4 + u$$

输出方程为

$$y = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + b_3x_4$$

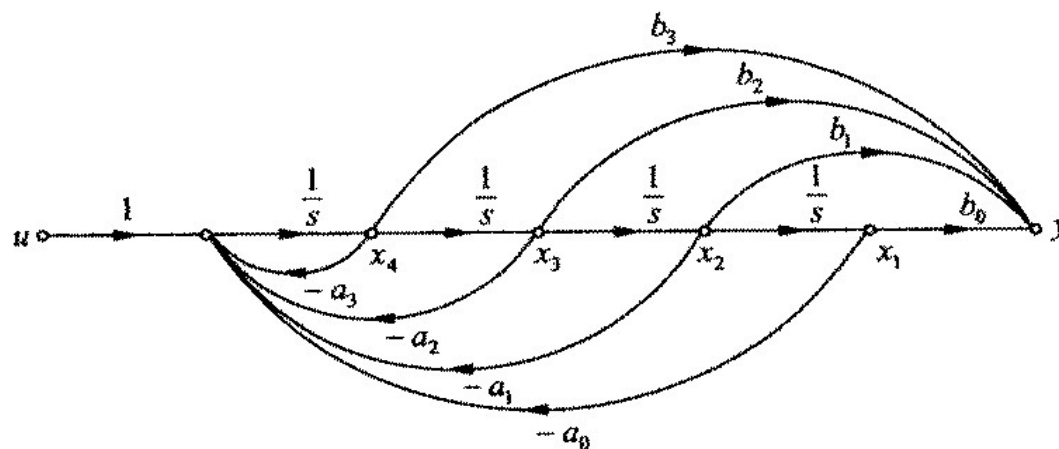
写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

状态空间模型

在上面的信号流图中，节点 $\dot{x}_i, x_{i+1}, i=1,2,3$ 可分别合并为一个节点。于是，可直接由(1)式得到如下图所示的相变量型信号流图。



上述方法可推广到 n 阶系统。其参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}]$$

$d = 0$

状态空间模型

按直接分解法得到的状态空间模型称为**能控标准型**，或者**相变量型状态空间表达式**。

输入前馈形式的信号流图如右图所示。其各状态变量间的关系为

$$\dot{x}_1 = -a_3x_1 + x_2 + b_3u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2x_1 + x_3 + b_2u$$

$$\dot{x}_3 = -a_1x_1 + x_4 + b_1u$$

$$\dot{x}_4 = -a_0x_1 + b_0u$$

$$y = x_1$$

矩阵形式的状态空间表达式为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x$$

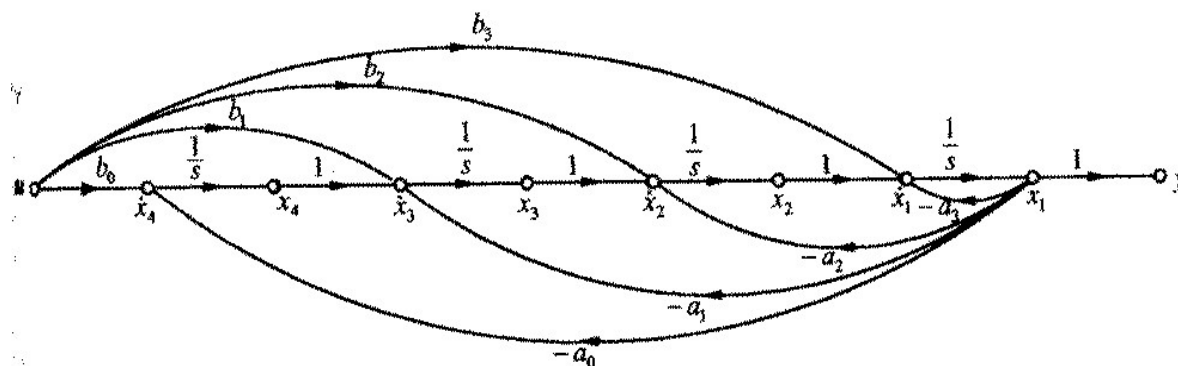


图 2.6.9 输入前馈形式的信号流图

状态空间模型

如果重新定义状态变量，则有右图所示信号流图。其状态变量间关系如下。

$$\dot{x}_1 = -a_0 x_4 + b_0 u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_4 + b_1 u$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - a_2 x_4 + b_2 u$$

$$\dot{x}_4 = x_3 - a_3 x_4 + b_3 u$$

$$y = x_4$$

用矩阵形式表示为

称为能观标准型。

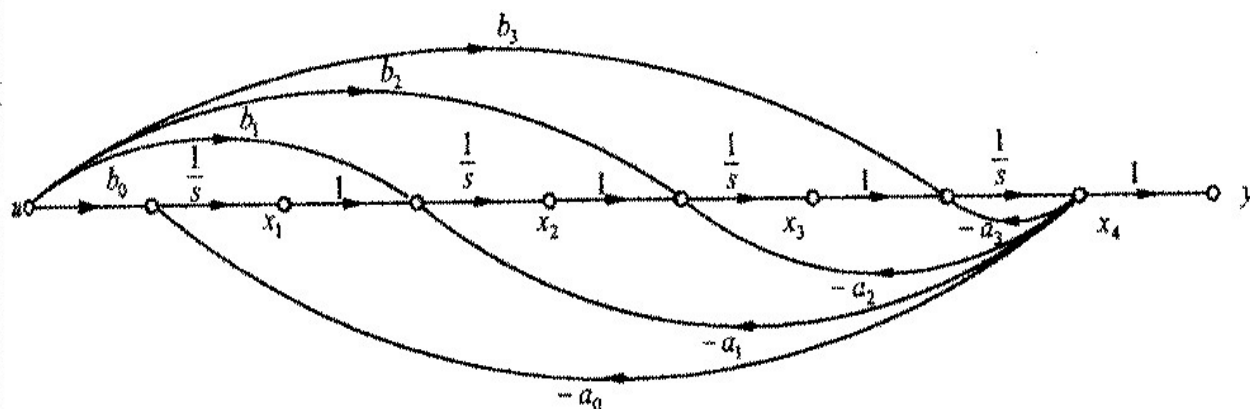


图 2.6.10 重新定义状态变量后的输入前馈信号流图

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]x$$

状态空间模型

◆ 串连分解法

传递函数为

$$G(s) = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$$

可看作 3 个 1 阶系统的串联，即

$$G(s) = \frac{k}{(s+p_1)} \left(1 + \frac{(z_1-p_2)}{(s+p_2)} \right) \left(1 + \frac{(z_2-p_3)}{(s+p_3)} \right)$$

根据直接分解法可画出每个 1 阶传递函数相应的信号流图，然后将它们串联起来得到完整的信号流图，如下图所示。

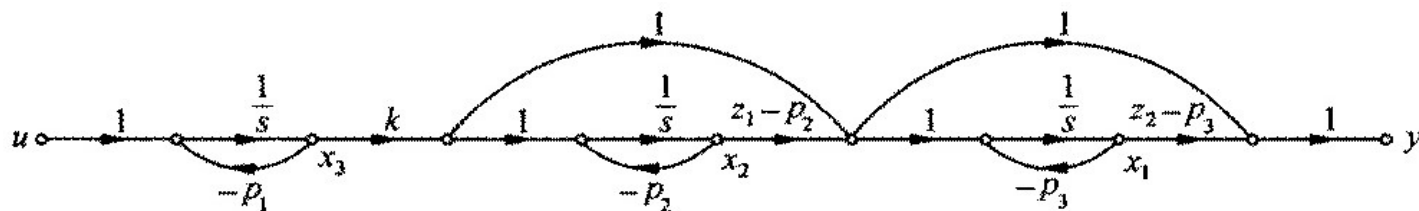


图 2.6.11 串连分解的信号流图

- ◆ 令积分器的输出为状态变量，于是系统的状态
- ◆ 方程和输出方程分别为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_3 & z_1-p_2 & k \\ 0 & -p_2 & k \\ 0 & 0 & -p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [z_2-p_3 \quad z_1-p_2 \quad k]x$$

状态空间模型

◆ 并联分解法

传递函数为

$$G(s) = \frac{Q(s)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$

首先，将传递函数展开成部分分式，即

$$G(s) = \frac{k_1}{(s + p_1)} + \frac{k_2}{(s + p_2)} + \frac{k_3}{(s + p_3)}$$

◆ 对单极点情况

可看作 3 个 1 阶环节并联。
其信号流图如图 2.6.12 所示。
状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] x$$

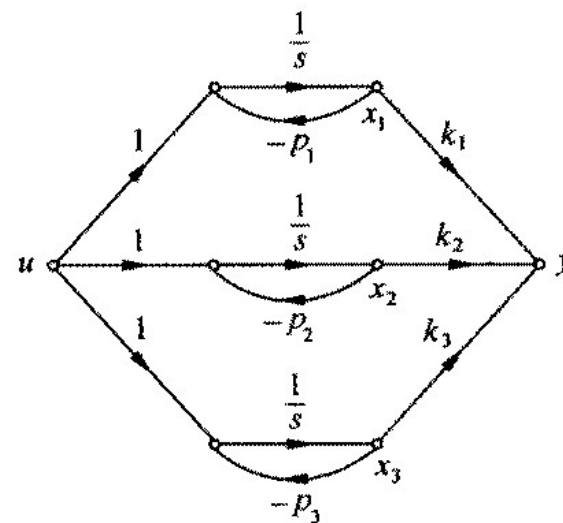


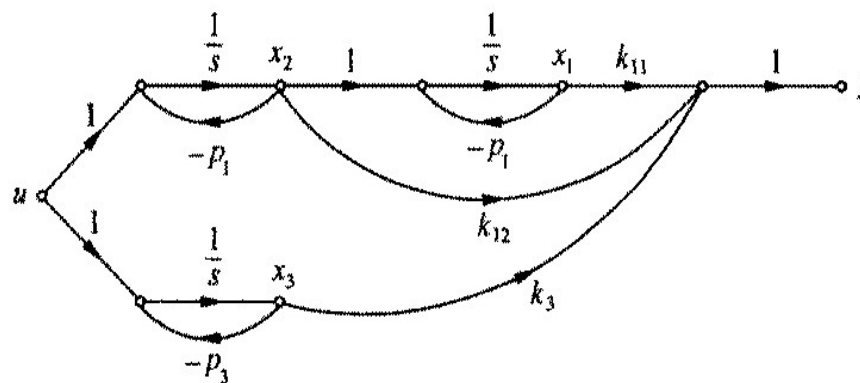
图 2.6.12 并联分解的信号流图

状态空间模型

◆ 对于有重极点情况

$$G(s) = \frac{Q(s)}{(s + p_1)^2(s + p_3)} = \frac{k_{11}}{(s + p_1)^2} + \frac{k_{12}}{(s + p_1)} + \frac{k_3}{(s + p_3)}$$

于是其信号流图如右图所示
注意：第一个积分器被两个通道所公用，这样能使系统中所含积分器的数目为最小。
对应该信号流图的状态空间表达式如右式所示：



◆ 注意：对单极点情况，称为**对角线标准型**；对有重极点的情况，如右式所示，称为**约当标准型**。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [k_{11} \quad k_{12} \quad k_3]x$$

状态空间模型

◆ 根据系统的输入输出模型—微分方程建立状态空间表达式

对于 n 阶线性定常连续系统，微分方程可表示为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1u' + b_0u$$

可求出与之对应的传递函数，利用上述方法得到其状态空间表达式。

对于微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b_0u$$

如果给定初始条件 $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, 及 $u(t), t \geq 0$

微分方程有唯一解。于是，可选取状态变量为

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)}$$

状态空间模型

于是，状态方程为

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + b_0 u$$

输出方程为

$$y = x_1$$

写成矩阵形式为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

注意：状态变量是输出变量及其各阶导数，通常称这组变量为**向变量**。

数学上称形如右式的矩阵为**友矩阵**或**相伴矩阵**。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$
$$c = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

状态空间模型

系统的状态空间表达式为: $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx + Du$$

对其进行拉普拉斯变换, 有

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

整理后得

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s) + [sI - A]^{-1} x(0)$$

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} BU(s) + C[sI - A]^{-1} x(0) + DU(s)$$

在零初始条件下, 系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1} B + D$$

组合系统的状态空间表达式

在实际物理系统中，一个系统往往由若干个子系统相互连接而成。把两个以上的子系统按一定方式相互连接而成的系统称为**组合系统**。

对于组合系统，基本的连接方式是：**并联**、**串联**和**反馈**。

假设有两个线性子系统，其状态方程和输出方程分别为：

$$s_i : \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$$

$$y_i = C_i x_i + D_i u_i \quad i = 1, 2$$

组合系统的状态向量记为 $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}$

u, y 分别是组合系统的输入和输出向量。

◆ 1、子系统并联

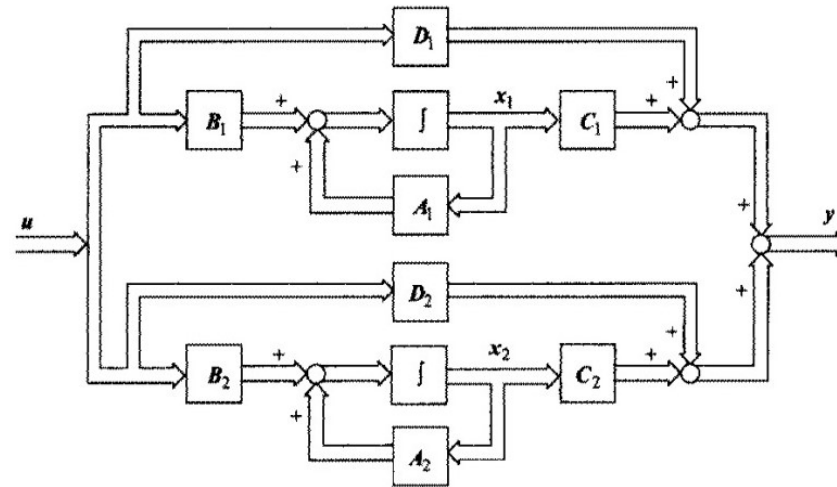
两个子系统实行并联的条件是：两个子系统的输入向量和输出向量的维数应分别相等，即 $u_1 = u_2 = u, y_1 + y_2 = y$

◆ 并联系统的特点是并联组合后，系统的状态空间表达式为：

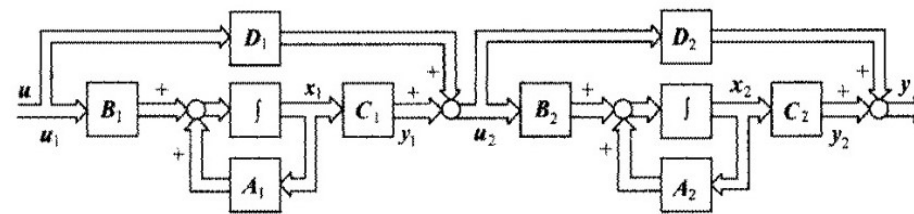
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] u$$

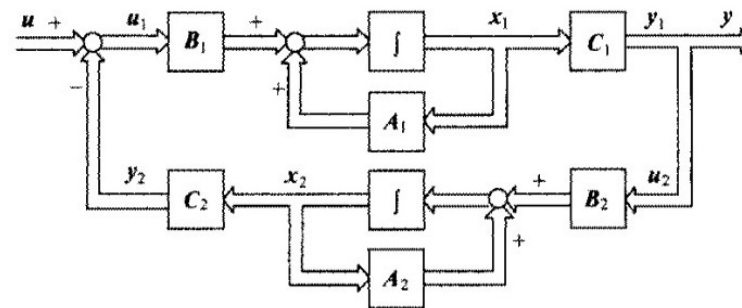
组合系统的状态空间表达式



(a) 并联连接



(b) 串联连接



(c) D_1 、 D_2 为 0 时的反馈连接

组合系统的状态空间表达式

由并联系统的特点，可推导出并连系统的传递函数阵为

$$G(s) = \sum_{i=1}^N G_i(s)$$

◆ 2、子系统串联

两个子系统实行串联的条件是：第一个系统的输出向量的维数与第二个系统的输入向量的维数相等。

两个子系统串联后组合系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 D_2 \end{bmatrix} u$$

◆ 传递函数为 $G(s) = G_2(s)G_1(s)$

◆ 注意：在串连组合系统的传递函数阵中，子系统的串联顺序不能随意互换。

组合系统的状态空间表达式

◆ 3、子系统反馈连接

两个子系统实行反馈连接的条件是：输入向量 u_1, u 以及输出向量 y_2 的维数相同，输入向量 u_2 与输出向量 y_1 的维数相同。反馈连接的特点是

$$u_1 = u - y_1, y_1 = u_2 = y$$

反馈系统的状态空间表达式为（假定 D 等于零）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

◆ 组合系统的传递函数阵为

$$G(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1} G_1(s)$$

组合系统的状态空间表达式

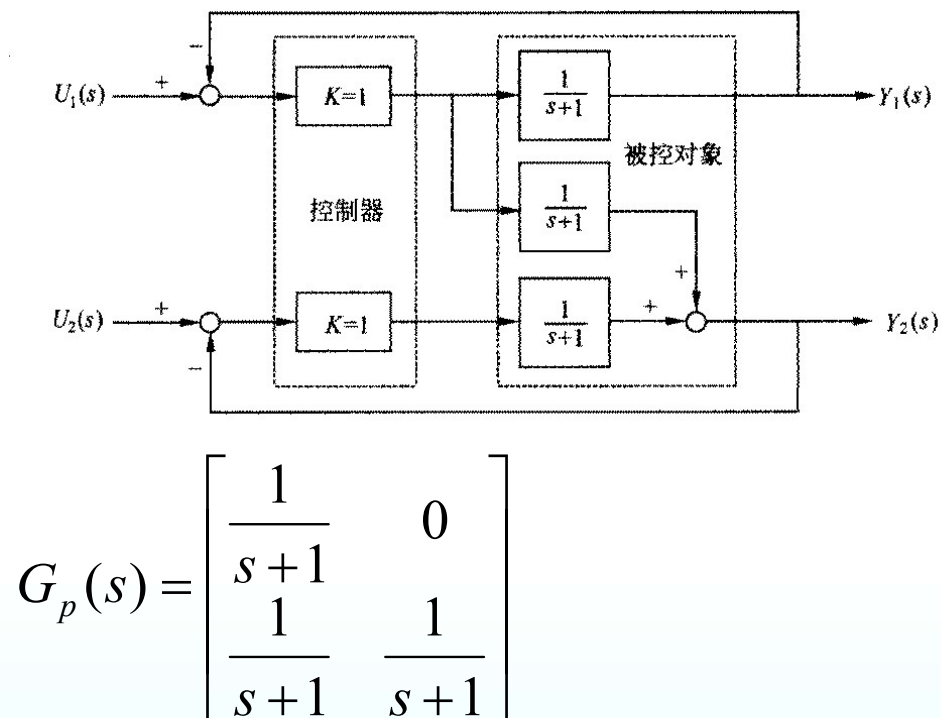
- ◆ 例题：试求右图所示两输入两输出系统的传递函数阵。

解：由系统的方块图可知，控制器的传递函数阵为

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

被控对象的传递函数阵为
反馈通道的传递函数阵为

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

- ◆ 根据反馈系统的传递函数阵的结果，得系统的传递函数为

$$G(s) = [I + G_p(s)G_c(s)H(s)]^{-1} G_p(s)G_c(s)$$

组合系统的状态空间表达式

把参数代入上式得

$$G(s) = [I + G_p(s)G_c(s)H(s)]^{-1} G_p(s)G_c(s)$$
$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

简化得

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+2} U_1(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2} U_1(s) + \frac{1}{s+2} U_2(s)$$

- ◆ 系统的输出量为
- ◆ 注意：输入输出之间存在着耦合现象。要消除耦合现象，系统传递函数阵必须是一个对角阵。消除耦合现象的过程称为解耦。

工业自动控制器

自动控制器是把对象的实际输出值与所要求的值相比较，确定误差，并产生一个使误差至零或微小值的控制信号。自动控制器中产生控制信号的作用称为控制作用。

◆ 工业控制器的分类

1. 双位或继电器型控制器
2. 比例控制器
3. 积分控制器
4. 比例-加-积分控制器
5. 比例-加-微分控制器
6. 比例-加-微分-积分控制器

◆ 工业控制系统框图

◆ 自动控制器

◆ 执行机构

◆ 被控对象

◆ 测量元件

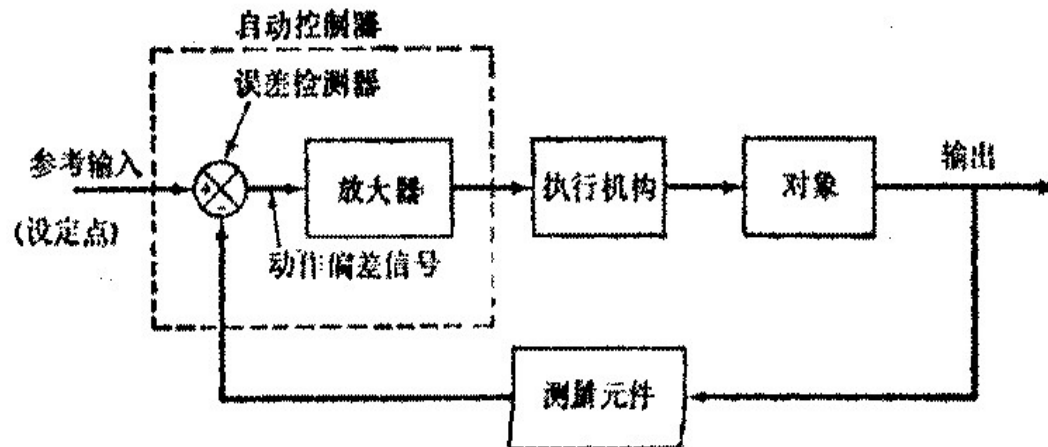


图8-9 工业控制系统的方块图，它是由一个自动控制器，

工业自动控制器

- ◆ **自动控制器**：控制器通过比较参考输入值（设定值）与输出的测量值，测出动作偏差信号，根据给定的控制策略（控制算法、控制作用），形成控制信号，再经功率放大后输出给执行机构。
- ◆ **执行机构**：执行机构是一个元件，它根据控制信号产生对被控对象的输入，使得反馈信号与参考输入信号相对应。
- ◆ **被控对象**：即被控制的物体（或系统）。
- ◆ **测量元件**：测量元件是一种装置，它把输出变量变换成为另一个合适的变量，例如位移、压力、电压，用以比较输出与参考输入信号。此元件是在闭环系统中的反馈通路中。控制器的设定点必须转换成一个与测量元件的反馈信号的单位相同的参考输入。

工业自动控制器

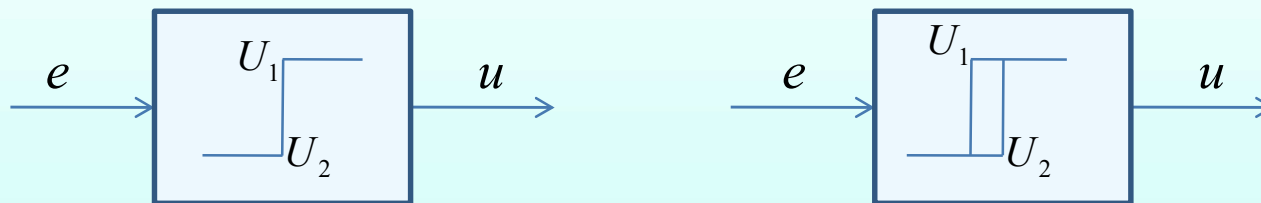
一般在工业自动控制器中，常见的控制作用有：双位或继电器型、比例型、积分型、微分和比例型、积分和比例型、积分和微分以及比例型。它们的控制作用如下。

◆ 双位或继电器型控制作用

在双位控制系统中，作用元件只有简单的通和断两个固定位置。为说明概念，设从控制器输出的信号是 $u(t)$ ，而动作偏差信号是 $e(t)$ ，控制作用表示为

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1 & e(t) > 0 \\ &= U_2 & e(t) < 0 \end{aligned}$$

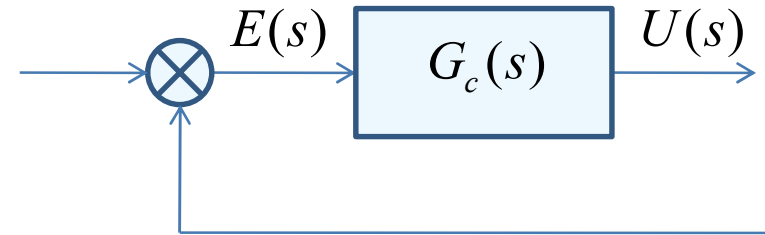
其中， U_1, U_2 是常数。开关动作之前动作偏差信号必须变化的范围，称为差动间隙。



工业自动控制器

◆ 比例、积分、微分控制作用

对于每一控制作用在控制器的输出与动作偏差信号之间的关系是由特定形式的传递函数来描述。



对于比例控制作用，控制器输出与动作偏差信号之间的关系是

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p$$

◆ 对于积分控制作用，控制器输出与动作偏差信号之间的关系是

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_c(s) = \frac{K_i}{s}$$

工业自动控制器

对于比例-积分控制作用，控制器输出与动作偏差信号之间的关系是

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

对于比例-微分控制作用，控制器输出与动作偏差信号之间的关系是

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p (1 + T_d s)$$

◆ 对于比例-微分-积分控制作用，控制器输出与动作偏差信号之间的关系是

$$\frac{U(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

瞬态响应分析

介绍：控制系统的瞬态响应分析与积分和微分控制作用对瞬态响应性能的影响。

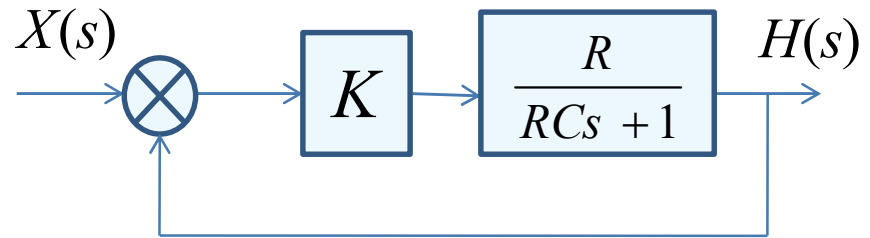
◆ 一阶系统的比例控制

假设一阶系统的传递函数为

$$G(s) = R/RCs + 1$$

控制系统方框图如右图所示

其闭环传递函数为
$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs + 1 + KR}$$



◆ 对于单位阶跃函数，其输出的拉普拉斯变换为

$$H(s) = \frac{KR}{RCs + 1 + KR} \frac{1}{s} = \frac{KR}{1 + KR} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + [(1 + KR)/RC]} \right)$$

瞬态响应分析

对上式取拉普拉斯反变换，得时域解为

$$h(t) = \frac{KR}{1+KR} \left(1 - e^{-t/(RC/(1+KR))}\right) = \frac{KR}{1+KR} \left(1 - e^{-t/T_1}\right)$$

稳态误差为

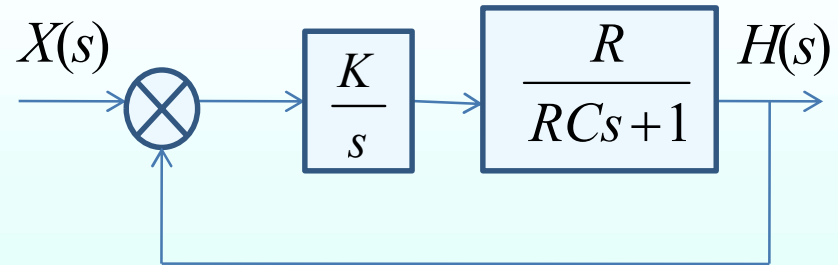
$$e(\infty) = 1 - h(\infty) = 1 - \frac{KR}{1+KR} = \frac{1}{1+KR}$$

当增益变为最大值时稳态误差（偏移）变成最小。

◆ 采用积分控制消除偏移

其闭环传递函数为

$$\frac{H(s)}{X(s)} = \frac{KR}{RCs^2 + s + KR}$$



瞬态响应分析

因此
$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{X(s) - H(s)}{X(s)} = \frac{RCs^2 + s}{RCs^2 + s + KR}$$

因为系统是稳定的，应用终值定理求得单位阶跃响应下的稳态误差为

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(RCs^2 + s)}{RCs^2 + s + KR} \frac{1}{s} = 0$$

- ◆ 注意：比例-积分控制作用正如单独积分控制作用一样，给出一好的稳态精度。
- ◆ **微分控制作用：**微分控制作用加一个比例控制器是得到具有高灵敏度控制器的一种方法。采用微分控制作用的一个优点是它能反应动作偏差的变化速率，并能在动作偏差的值变得太大之前产生有效的校正。微分控制引入一预先校正作用，有助于增加系统的稳定性。
- ◆ 注意：微分控制是根据动作偏差的变化速率而不是根据动作偏差本身而作用的，因此从不采用单独使用的形式。它总是与比例或比例-积分控制作用混合使用。

瞬态响应分析

系统最初处于静止状态，对于单位阶跃输入的瞬态响应常常显示为阻尼振荡。控制系统对单位阶跃输入的瞬态响应指标为：

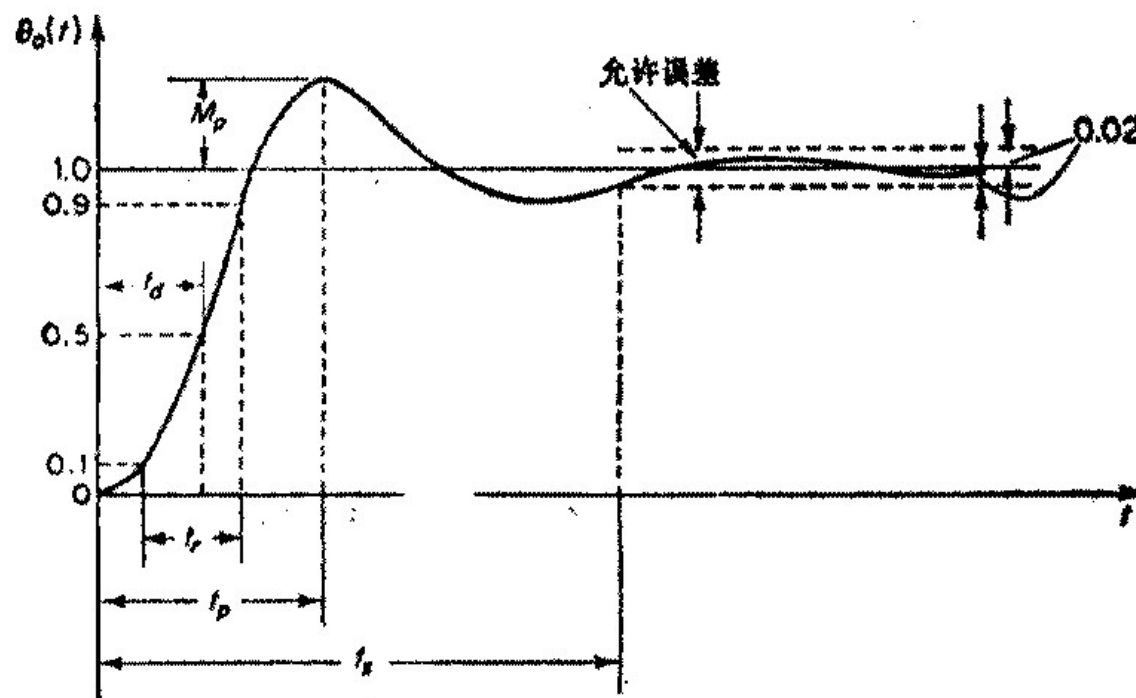
◆ 延迟时间 t_d

◆ 上升时间 t_r

◆ 峰值时间 t_p

◆ 最大超调量 M_p

◆ 调整时间 t_s



瞬态响应分析

◆ 延迟时间 t_d

◆ 上升时间 t_r

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

◆ 峰值时间 t_p $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

◆ 最大超调量 M_p

$$M_p = \theta_o(t_p) - 1 = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

◆ 调整时间 t_s $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

典型二阶系统衰减振荡瞬态过程的性能指标

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right), \quad t \geq 0$$

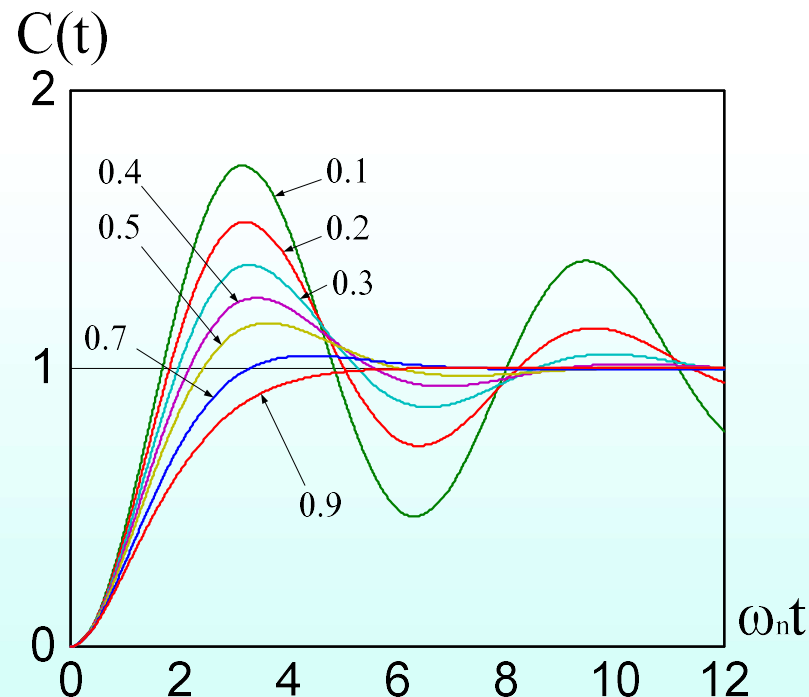
1. 上升时间 t_r : 根据定义, 当 $t = t_r$ 时, $c(t_r) = 1$ 。

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) = 1$$

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

$$\operatorname{tg} \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\text{解得: } t_r = \frac{1}{\omega_d} \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$



$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \text{tg}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

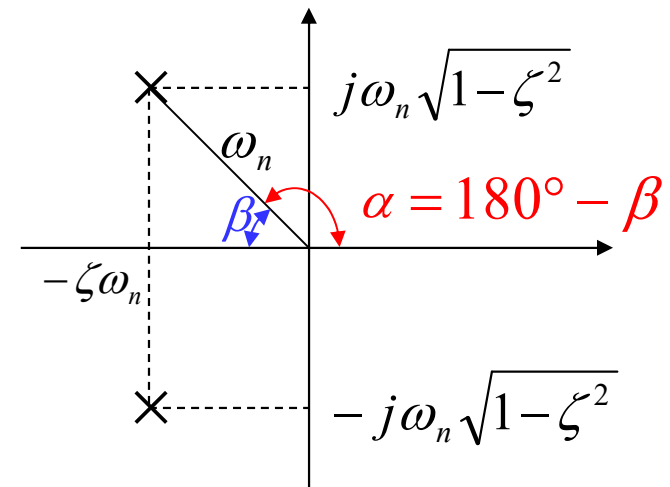
$$\alpha = \text{tg}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{-\zeta\omega_n}\right)$$

$$\text{tg}(\pi - \beta) = \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta\omega_n} = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$\text{tg}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = \pi - \beta$$

$$\therefore t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

β 称为**阻尼角**，这是由于 $\cos\beta = \zeta$ 。



2. 峰值时间 t_p : 当 $t = t_p$ 时, $c'(t_p) = 0$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0 \quad \text{其中} \quad \beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

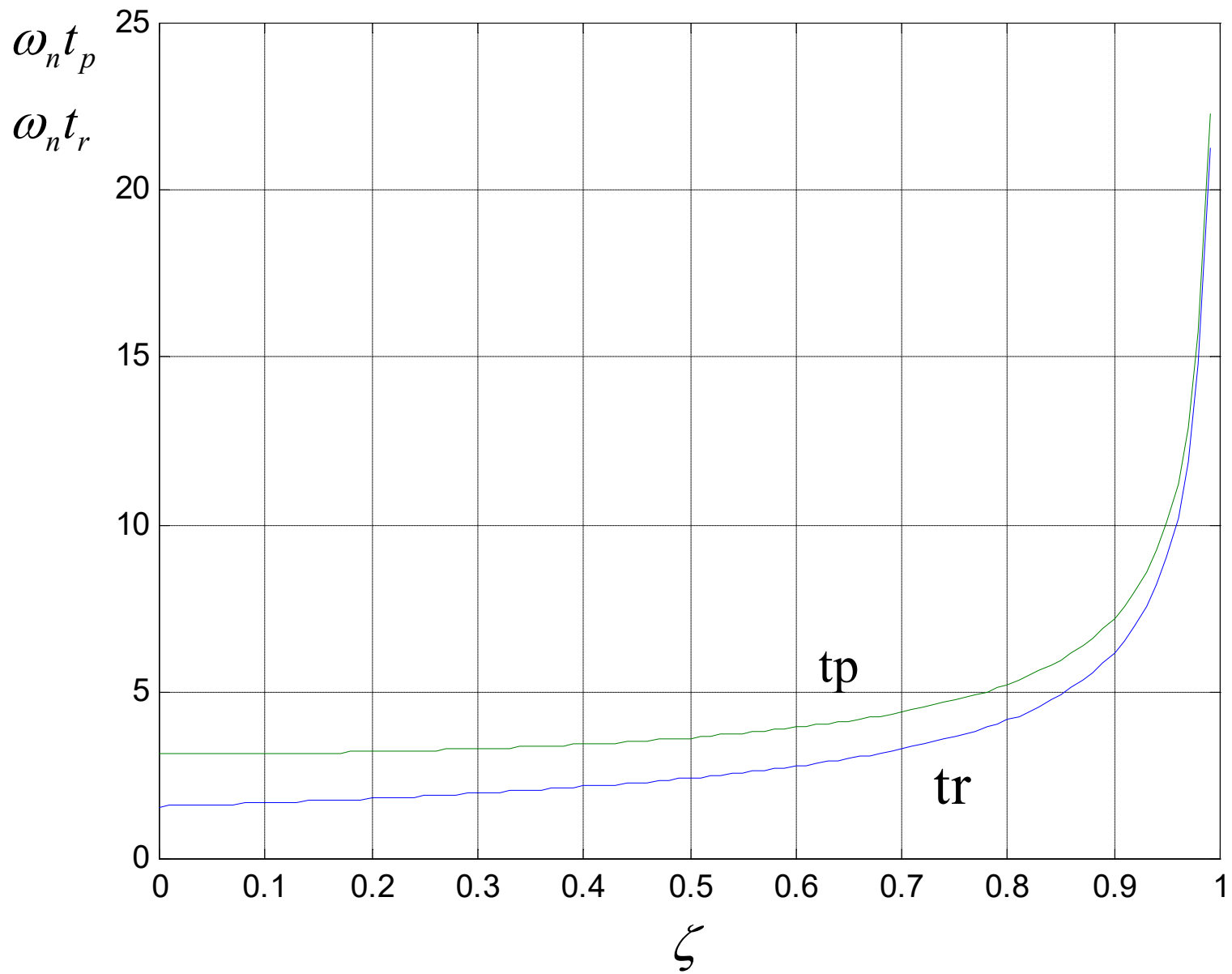
$$c'(t) = -\frac{-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_p + \beta) - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \omega_d \cdot \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

$$\zeta\omega_n \sin(\omega_d t_p + \beta) - \omega_d \cdot \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

$$\text{整理得:} \quad \operatorname{tg}(\omega_d t_p + \beta) = \frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \operatorname{tg}\beta$$

$$\omega_d t_p = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

由于 t_p 出现在第一次峰值时间, 取 $n=1$, 有: $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$



3. 最大超调量 $\delta\%$:

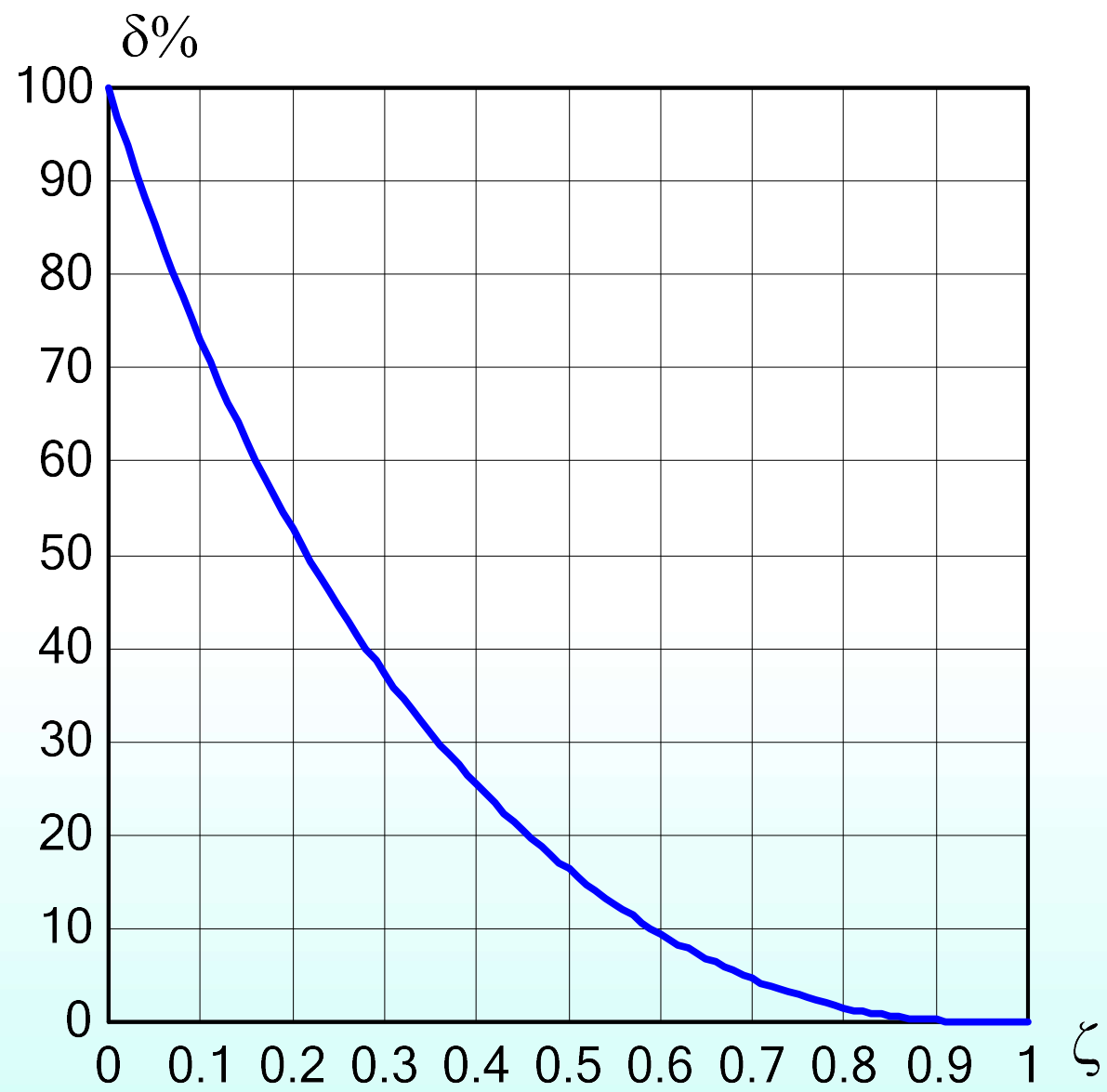
将峰值时间 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ 代入 $c(t)$ 得 $c(t_p) = c_{\max}$

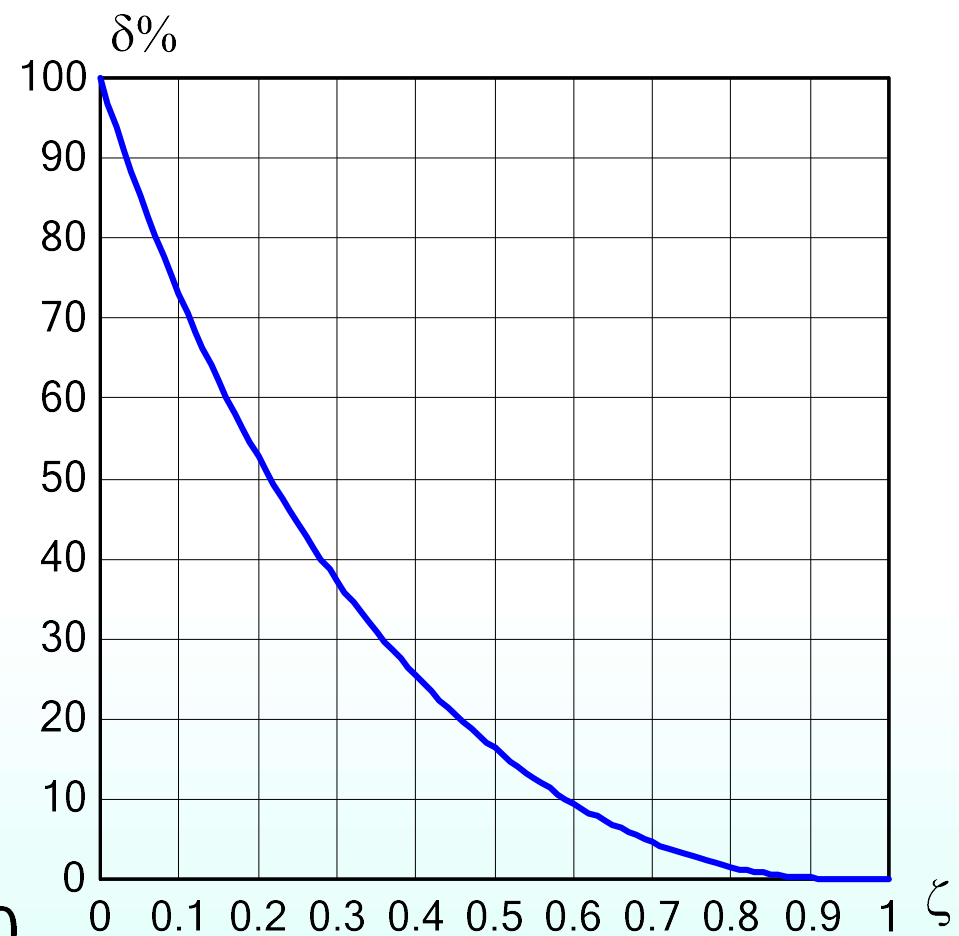
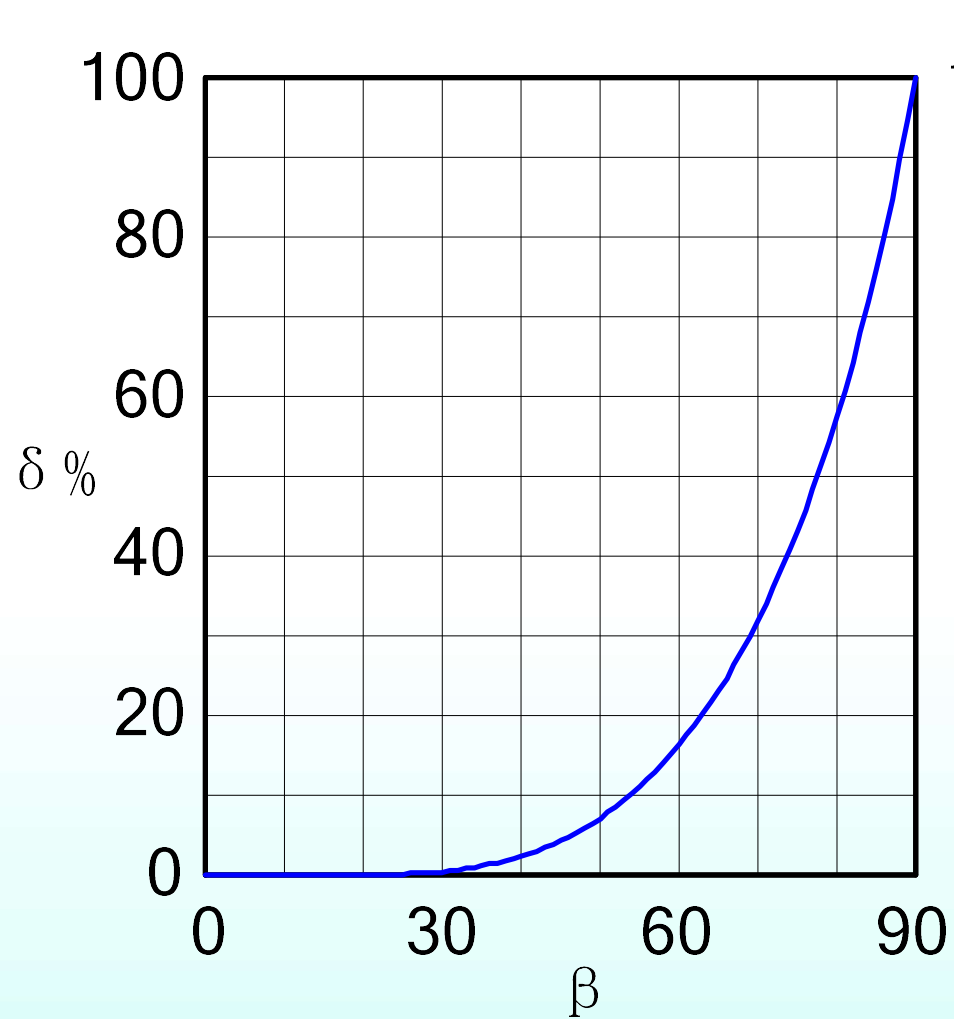
$$\begin{aligned} c_{\max} = c(t_p) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t_p} \left(\cos \omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_p \right) \\ &= 1 - e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \pi \right) = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \end{aligned}$$

$$\delta\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = (c(t_p) - 1) \times 100\%$$

$$\text{故: } \delta\% = e^{\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-\pi \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-\pi \zeta \operatorname{tg} \beta} \times 100\%$$

最大超调量仅与阻尼系数有关。





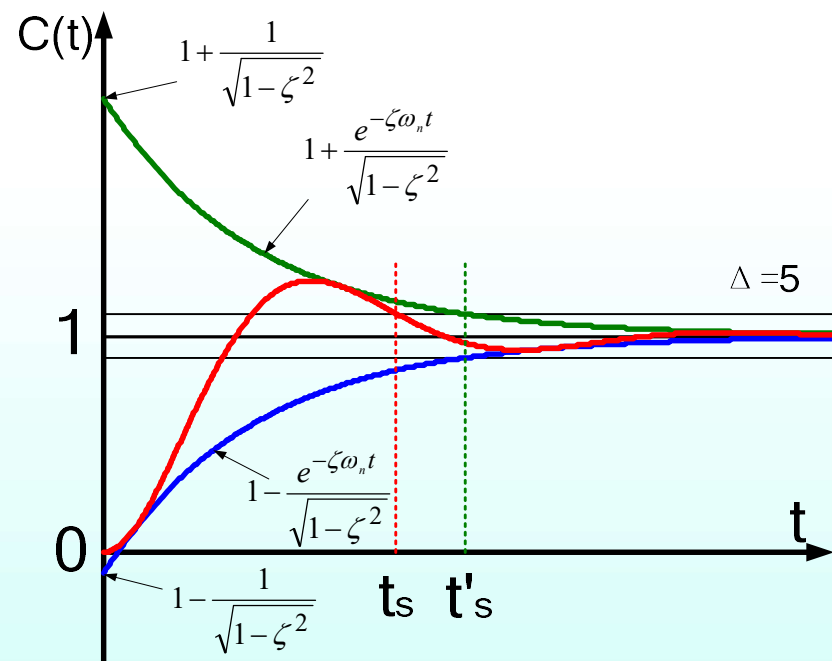
4. 调节时间 t_s :

根据调节时间的定义，当 $t \geq t_s$ 时 $|c(t) - c(\infty)| \leq c(\infty) \times \Delta\%$ 。

$$\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \right| \leq \Delta\%$$

可见，写出调节时间的表达式是困难的。由右图可知响应曲线总在一对包络线之内。包络线为

$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



由于实际响应曲线的收敛速度比包络线的收敛速度要快，因此可用包络线代替实际响应来估算调节时间。即认为响应曲线的包络线进入误差带时，调整过程结束。

当 $t=t'_s$ 时，有：

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Delta\%$$

$$t_s = -\frac{\ln(\sqrt{1-\zeta^2} \times \Delta\%)}{\zeta\omega_n}$$

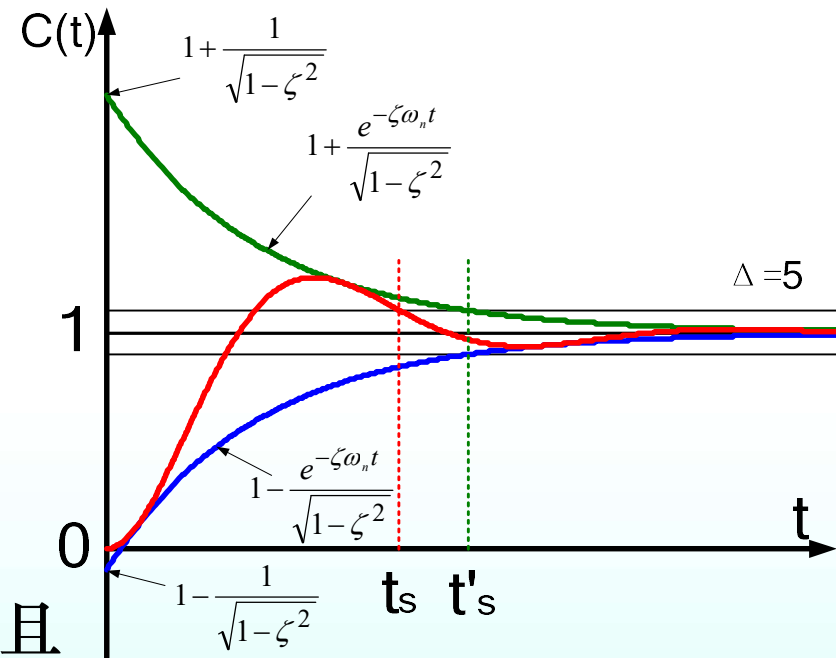
当 ζ 较小时，近似取 $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ ，且

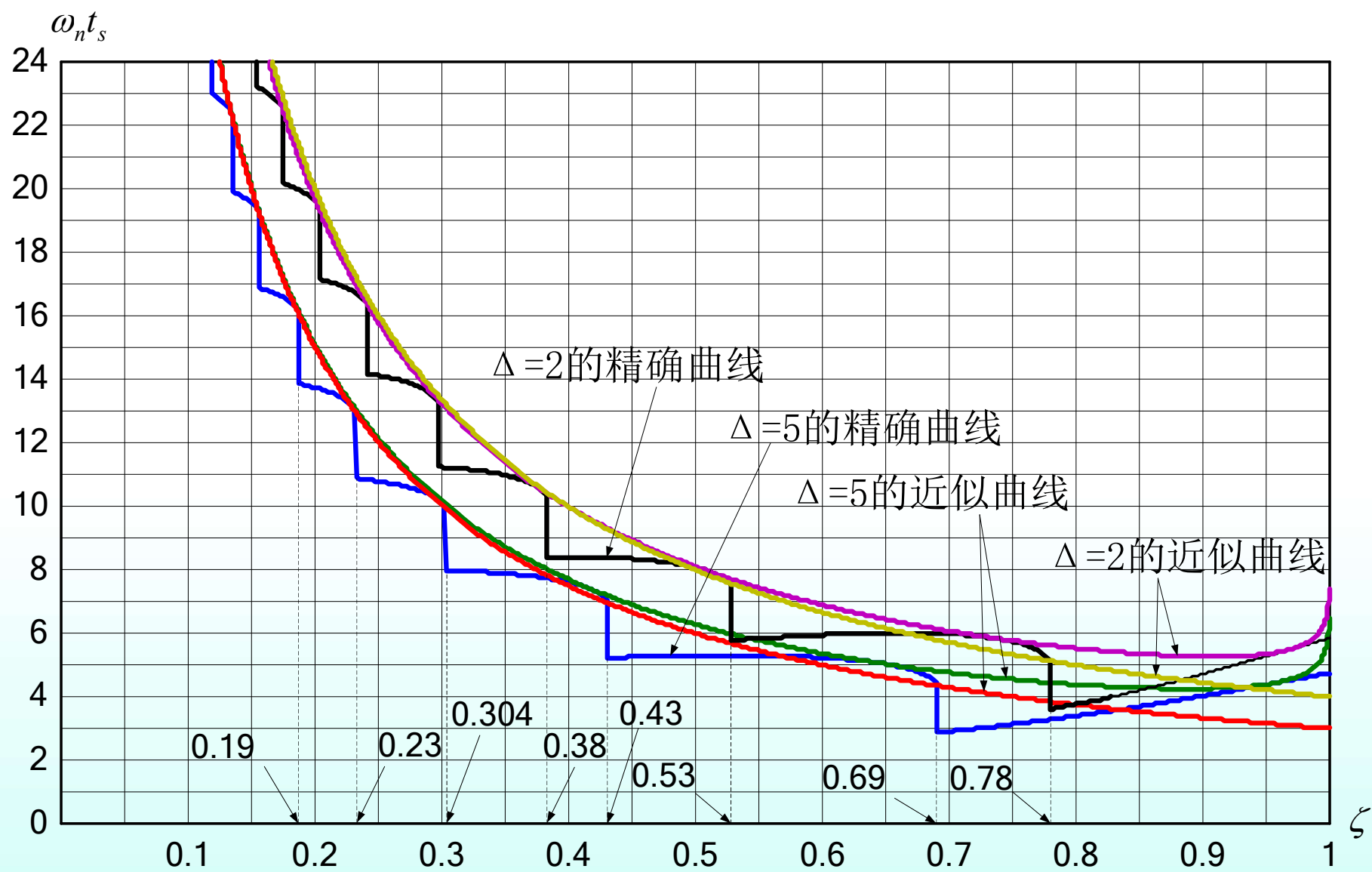
$$\ln(0.02) \approx -3.912 \approx -4$$

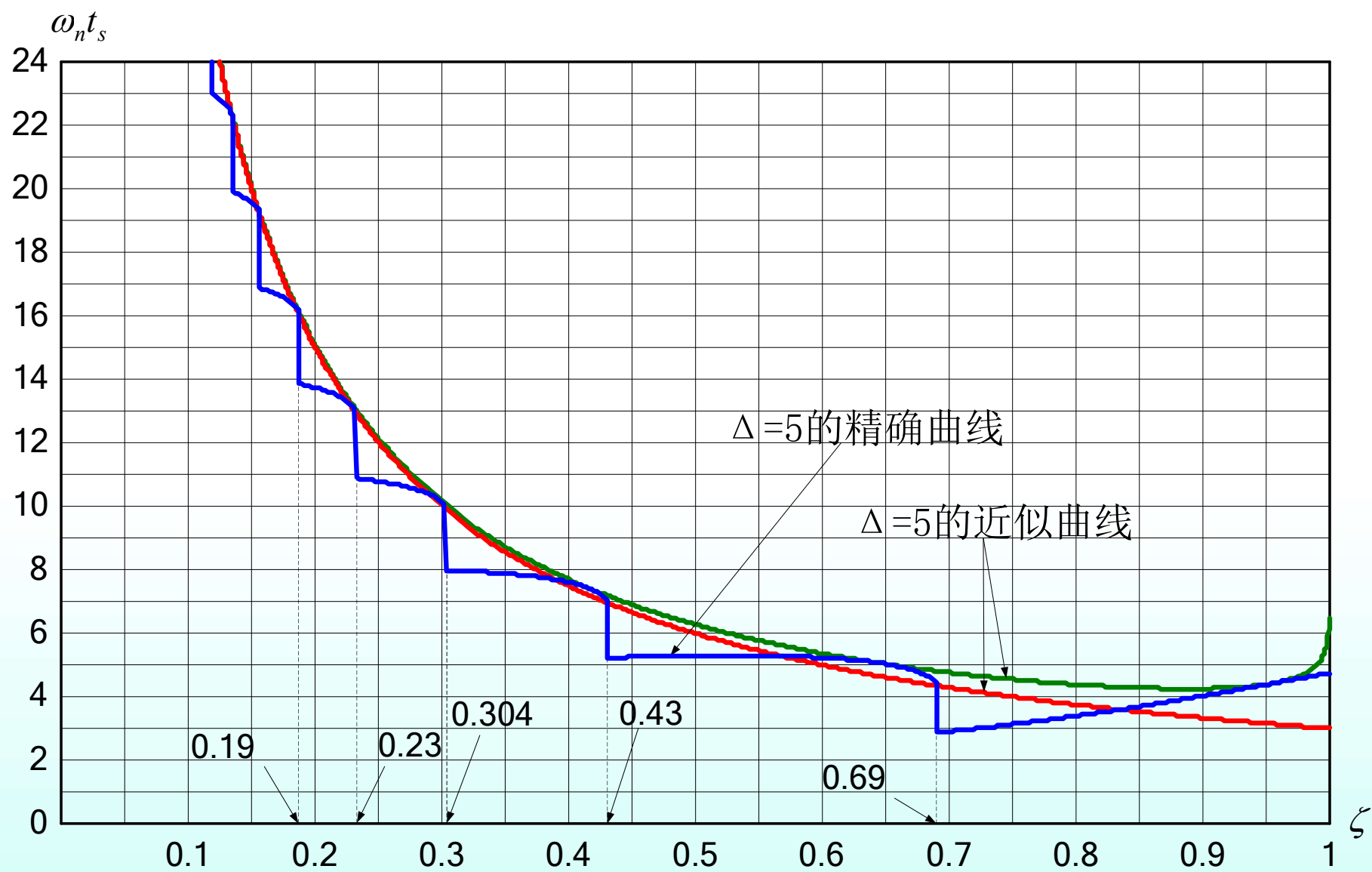
$$\ln(0.05) \approx -2.996 \approx -3$$

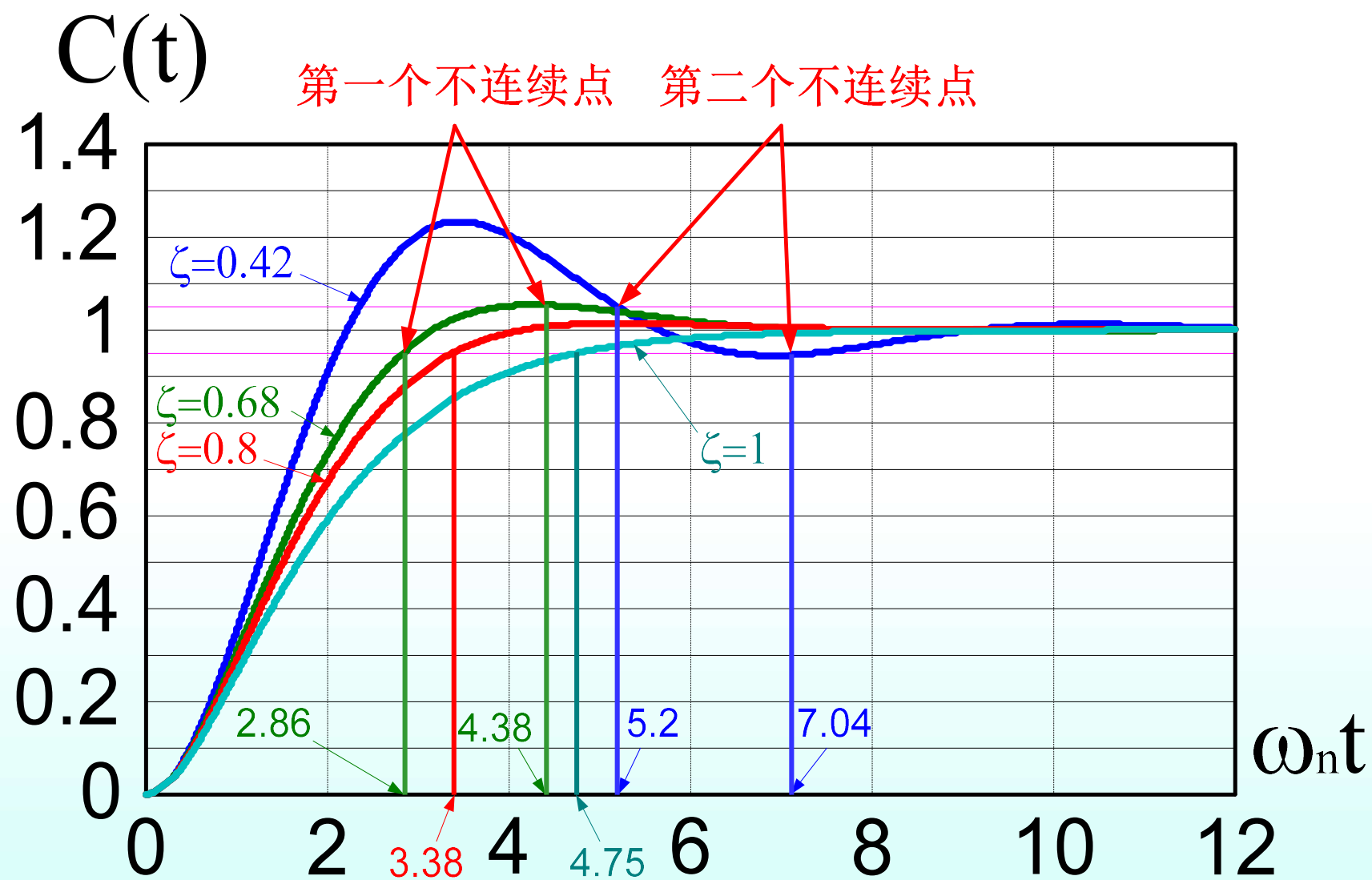
所以

$$t_s \approx \begin{cases} \frac{4}{\zeta\omega_n}, & \text{当 } \Delta = 2\% \text{ 时} \\ \frac{3}{\zeta\omega_n}, & \text{当 } \Delta = 5\% \text{ 时} \end{cases}$$









由分析知，在 $\zeta = 0.4 \sim 0.8$ 之间，调节时间和超调量都较小。工程上常取 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 作为设计依据，称为最佳阻尼常数。

5. 振荡次数N:

$$N = \frac{t_s}{t_f}$$

式中 $t_f = \frac{2\pi}{\omega_d}$ 为阻尼振荡周期。若取 $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ 和 $t_f = 2t_p = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$

$$N = \frac{t_s}{2t_p} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}$$

由此可见振荡次数N仅与阻尼系数 ζ 有关。

[总结]

□ 阻尼系数 ζ 是二阶系统的一个重要参数，用它可以直接地判断一个二阶系统的瞬态品质。在 $\zeta \geq 1$ 的情况下瞬态特性为单调变化曲线，无超调和振荡，但 t_s 长。当 $\zeta \leq 0$ 时，输出量作等幅振荡或发散振荡，系统不能稳定工作。

□ 在欠阻尼 ($0 < \zeta < 1$) 情况下工作时，若 ζ 过小，则超调量大，振荡次数多，调节时间长，瞬态控制品质差。

注意到 $\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$ 只与 ζ 有关，所以一般根据 $\delta\%$ 来选择 ζ 。

□ $\because t_s = \frac{4}{\omega_n \zeta}$ (或 $\frac{3}{\omega_n \zeta}$), $\therefore \omega_n$ 越大, \downarrow (当 ζ 一定时)

□ 为了限制超调量，并使 t_s 较小， ζ 一般取0.4~0.8，则超调量在25%~1.5%之间。