XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

对偶理论及对偶单纯形法
Duality Theory and Dual Simplex Method

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- 对偶线性规划
- 对偶理论
- 对偶单纯形法

对偶线性规划的例子

- （营养问题）某种混合饲料由n种配料混合而成。要求其必须含有m种不同的营养 成分，且每份饲料中第i种营养成分的含量不低于b_i (i=1,2…m)．又已知每单位的第j种配料中第i种营养成分的量为a_{ij}. 每单位第j种配料的价格为c_j．试问:在保证营养的前提下,应如何配方，使混合饲 料的费用最小?
- 某企业打算生产各种单一的营养成分,并与这些配料竞争市场份额.假设该企业对第i种营养成分的定价为w_i,则在保证具有价格优势的前提下,应如何定价,可使企业收益最大?

对偶线性规划的例子

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

$$s.t. \quad a_{1,j} w_1 + a_{2,j} w_2 + \cdots + a_{m,j} w_m \le c_j; \ (1 \le j \le n)$$

$$w_1, w_2, \cdots, w_m \ge 0$$

$$\max \quad b^T w$$
$$s.t. \quad A^T w \le c$$
$$w \ge 0$$

形式上的对称关系

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \cdots + a_{i,n} x_n \ge b_i$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m)$$
$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$$

$$\min \quad z = c^T x$$
$$s.t. \quad Ax \ge b$$
$$x \ge 0$$

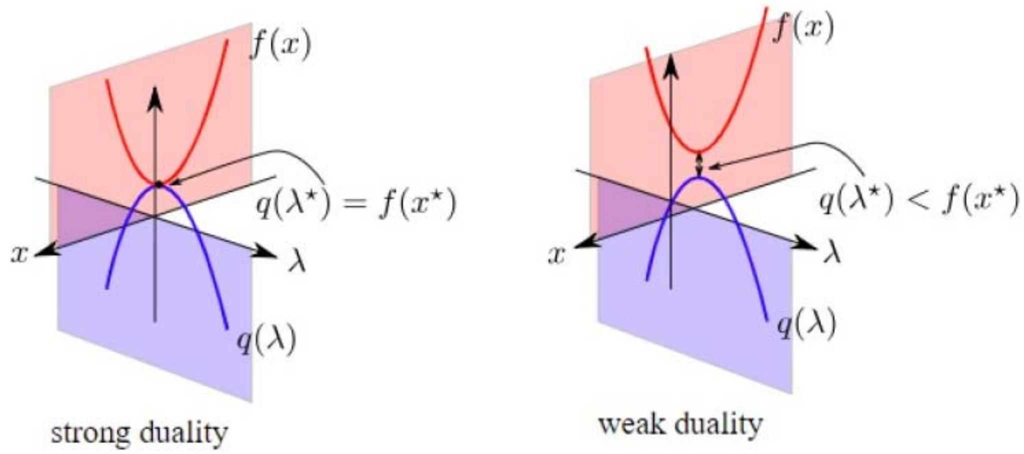
对偶问题举例

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & Ax \preceq b, \quad Cx = d \end{array}$$

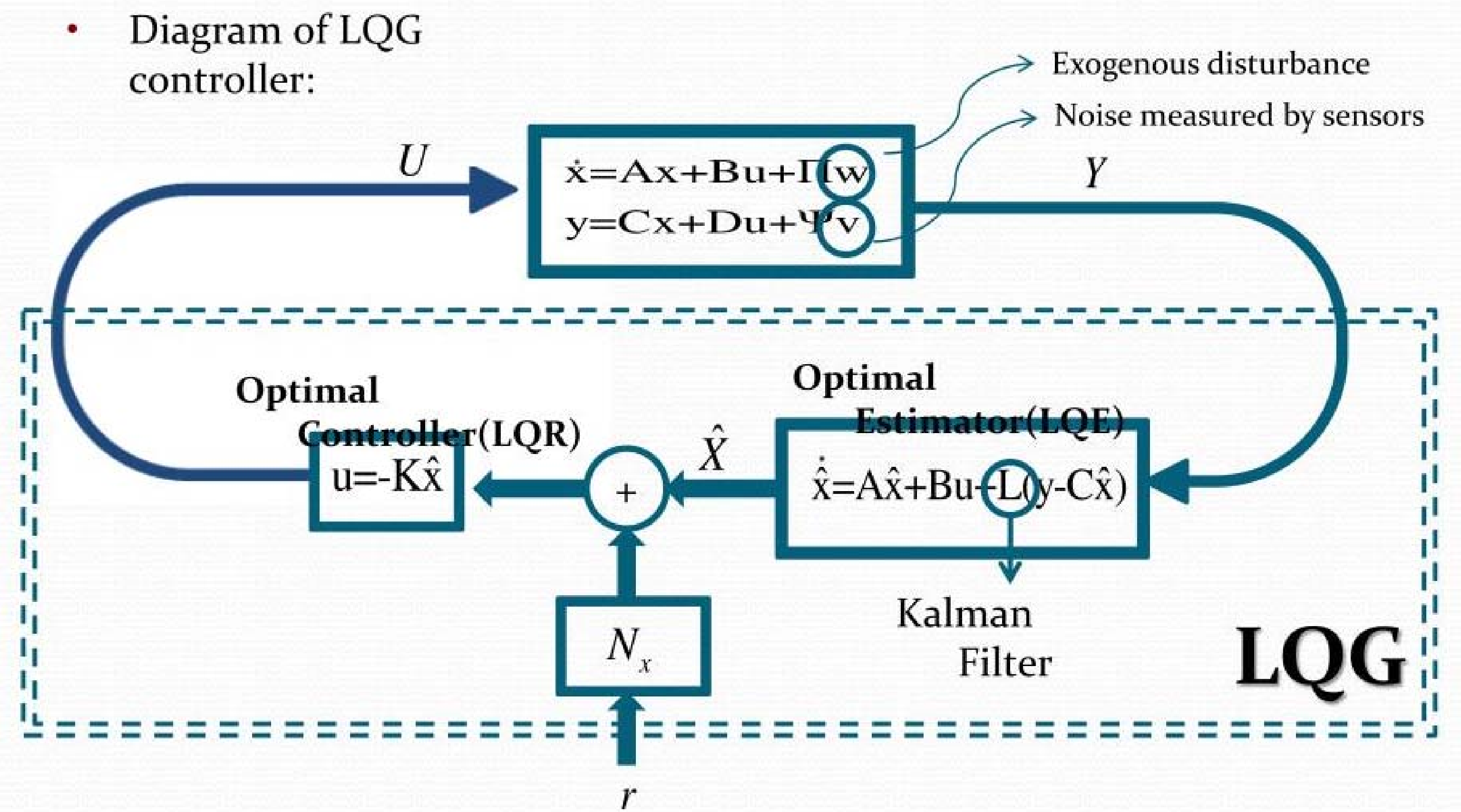
dual function

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathbf{dom}\, f_0} \left(f_0(x) + (A^T\lambda + C^T\nu)^T x - b^T\lambda - d^T\nu \right) \\ &= -f_0^*(-A^T\lambda - C^T\nu) - b^T\lambda - d^T\nu \end{aligned}$$

$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\, f}(y^T x - f(x))$



对偶问题举例



1. P. D. Joseph and J. T. Tou, “On linear control theory,” AIEE Trans. Applicat. Ind., vol. 80, pp. 193–196, 1961
2. M. Athans, “The role and use of the stochastic linear-quadratic-Gaussian problem in control system design,” IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-16, pp. 529–552, 1971

标准形式的对偶问题定义

- 对于标准LP问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- 其对偶形式为:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & b^T w \\
s.t. \quad & A^T w \leq c
\end{aligned}
$$

非标准形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x + o^T y \\ s.t. \quad & [A \quad -I]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ s.t. \quad & \begin{bmatrix} A^T \\ -I \end{bmatrix} w \leq \begin{pmatrix} c \\ o \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & b^T w \\ s.t. \quad & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

原问题与对偶问题之间的联系

P	D
约束i	变量i
目标函数	约束右端项

$$
\begin{array}{lll}
\min & c^T x & \\
s.t. & a_i^T x = b_i & \\
 & a_i^T x \geq b_i & \\
 & x_j \geq 0 & \\
 & x_j \gtrless 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\max & b^T w \\
s.t. & w_i \gtrless 0 \\
 & w_i \geq 0 \\
 & A_j^T w \leq c_j \\
 & A_j^T w = c_j
\end{array}
$$

例:写出如下问题的对偶形式

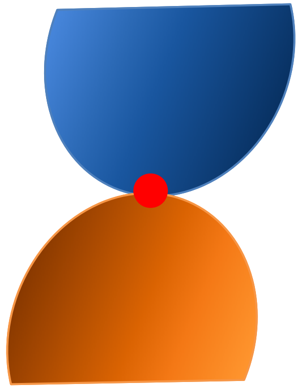
$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 5x_1 + 21x_3 \\
s.t. \quad & x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\max \quad & b^T w \\
s.t. \quad & A^T w \leq c
\end{aligned}
$$

Outline

- 对偶线性规划
- 对偶理论
- 对偶单纯形法

定理(1/3)



- 定理1: 对偶问题的对偶为原问题
- 定理2: 设*x*为(P)的可行解, *w*为(D)的可行解, 则

$$c^T x \geq b^T w$$

- 证明:

$$Ax = b, w \geq 0 \qquad w^T Ax = w^T b$$

$$A^T w \leq c, x \geq 0 \qquad x^T A^T w \leq x^T c$$

- 定理3: *x*, *w*分别为(P) (D)的可行解, 且 $c^T x = b^T w$ 则*x*, *w*分别为各自的最优解

定理(2/3)

定理4： (P) 和 (D) 同时有最优解 $\Longleftrightarrow$ 同时有可行解。

(P) \ (D)	有最优解	无界	无解
有最优解	①	×	×
无界	×	×	②
无解	×	②	③

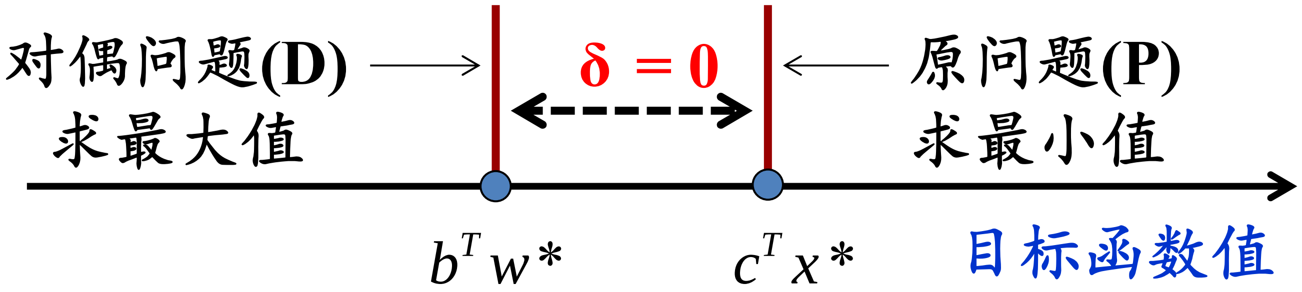
$$(P)\begin{cases}\min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0\end{cases}$$

$$(D)\begin{cases}\max & b^T w \\ s.t. & A^T w \leq c\end{cases}$$

定理5：若(P) (D)均可行,则二者最优目标值相等

定理(3/3)

定理5(互补松紧性)：设 x 和 w 分别为 (P) 和 (D) 的可行解，则它们分别为 (P) 和 (D) 的最优解 $\Longleftrightarrow$ $(A^Tw - c)^Tx = 0$ 。



$$(P)\begin{cases} \min & c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \max & b^T w \\ s.t. & A^T w \leq c \end{cases}$$

δ: 对偶间隙(Duality Gap)

注意：线性规划的对偶间隙是0！

对偶理论的经济学解释

列奥尼德·康托罗维奇 (1975)

边际成本/边际价格

$$(P)\begin{cases}\min & z=c^T x \\ s.t. & Ax \ge b \\ & x \ge 0\end{cases}$$

成本最小

系统需求

$$(D)\begin{cases}\max & b^T w \\ s.t. & A^T w \le c \\ & w \ge 0\end{cases}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^*$$

最优成本对需求的导数

需求增加一个单位时最优成本的增加量

影子价格

$$(P)\begin{cases}\max & z=c^T x \\ s.t. & Ax \le b \\ & x \ge 0\end{cases}$$

利润最大

资源约束

$$(D)\begin{cases}\min & b^T w \\ s.t. & A^T w \ge c \\ & w \ge 0\end{cases}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^*$$

最大利润对资源的导数

假定第i种资源的市场价为λ_i，资源买卖量为Δb_i

Outline

- 对偶线性规划
- 对偶理论
- 对偶单纯形法

对偶可行基

在标准LP问题中，若某个基B使得$w^T = C^T_B B^{-1}$满足$W^T A \leq C^T$. 则称B为一个对偶可行基

$$\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$w^T A - c^T \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$A^T w \leq c$$

对偶可行≠原始问题可行

单纯形法 Vs. 对偶单纯形法

- 单纯形法的实质: 从一个原始可行基出发,在保持基原始可行的前提下, 不断进行基迭代. 直到找到一个对偶可行基.

$$\bar{b} \geq 0 \rightarrow \zeta^T \leq 0$$

- 对称问题: 从一个对偶可行基出发,在保持基对偶可行前提下,不断进行基迭代. 直至发现一个原始可行基.

对偶单纯形法基本步骤

- 得到初始对偶可行基
- 求 $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i \mid i = 1,2,\ldots,m\}$
- 若 $\bar{b}_r \geq 0$. 停, 已得到最优解. 否则继续
- 若 $\bar{a}_{rj} \geq 0, j = 1,2,\ldots,n$. 则问题无可行解. 停
- 求 $\dfrac{\zeta_k}{\bar{a}_{rk}} = \min\{\dfrac{\zeta_j}{\bar{a}_{rj}} \mid \bar{a}_{rj} < 0, j = 1,2,\ldots,n\}$
- x_k入基, x_{Br}出基. 自新的对偶可行解开始迭代

对偶单纯形法举例

例：求解线性规划问题

$$\min \quad z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3$$

$$s.t. \quad 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \geq 24$$

$$5x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 8$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3$$

解：第一步，化为标准形式

$$\min \quad z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3$$

$$s.t. \quad 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - x_4 = 24$$

$$5x_1 + x_2 + 5x_3 - x_5 = 8$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5$$

第二步，建立单纯形表

最小比列

负最大元

z	-4	-2	-6	0	0	0
x_4	-2	-4*	-10	1	0	-24
x_5	-5	-1	-5	0	1	-8

x_2入基

x_4出基

z	-4	-2	-6	0	0	0
x_2	-2	-4	-10	1	0	-24
x_5	-5	-1	-5	0	1	-8

对偶单纯形法举例

x_3入基
x_5出基

z	-3	0	-1	$-1/2$	0	12
x_2	$1/2$	1	$5/2$	$-1/4$	0	6
x_3	$-9/2$	0	$-5/2$	$-1/4$	1	-2

最小比列

z	-3	0	-1	$-1/2$	0	12
x_2	$1/2$	1	$5/2$	$-1/4$	0	6
x_5	$-9/2$	0	$-5/2^{*}$	$-1/4$	1	-2

负最大元

化为标准
单纯形表

z	-4	-2	-6	0	0	0
x_2	-2	-4	-10	1	0	-24
x_5	-5	-1	-5	0	1	-8

对偶单纯形法举例

思考：

1. 和两阶段法比较，哪个更简便？
2. 什么样的问题适合用对偶单纯形法求解？
3. 怎样获得初始对偶可行基？

z	-3	0	-1	$-1/2$	0	12
x_2	$1/2$	1	$5/2$	$-1/4$	0	6
x_3	$-9/2$	0	$-5/2$	$-1/4$	1	-2

化为标准单纯形表

z	$-6/5$	0	0	$-2/5$	$-2/5$	$12\frac{4}{5}$
x_2	-4	1	0	$-1/2$	1	4
x_3	$9/5$	0	1	$1/10$	$-2/5$	$4/5$

$\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$，已得最优解。

作业

- P77 23(1)题