本章主要内容

1. 双边Z变换及其收敛域ROC。
2. ROC的特征，各类信号的ROC，零极点图。
3. Z反变换，利用部分分式展开进行反变换。
4. 由零极点图分析系统的特性。
5. 常用信号的Z变换，Z变换的性质。
6. 用Z变换表征LTI系统，系统函数，LTI系统的Z变换分析法，系统的级联与并联型结构。
7. 单边Z变换，增量线性系统的分析。

主讲教师：阎鸿森 教授
王 霞 副教授

10.0 引言 (Introduction)

Z 变换与拉氏变换相对应，是离散时间傅里叶变换的推广。Z 变换的基本思想、许多性质及其分析方法都与拉氏变换有相似之处。当然，Z 变换与拉氏变换也存在着一些重要的差异。

10.1 双边 Z 变换

The z-Transform

一. 双边Z变换的定义:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$ 其中 $z=re^{j\omega}$是一个复数。

当$r=1$时，$z=e^{j\omega}$即为离散时间傅里叶变换。

这表明：**DTFT就是在单位圆上进行的Z变换。**

$$X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}=\mathbb{F}[x(n)r^{-n}]$$

可见：对 $x(n)$ 做 Z 变换就等于对 $x(n)r^{-n}$ 做**DTFT**。

因此，**Z** 变换是对**DTFT**的推广。

二. Z变换的收敛域（ROC）：

Z变换与**DTFT**一样存在着收敛问题。

1. 并非任何信号的**Z**变换都存在。

2. 并非**Z**平面上的任何复数都能使 $X(z)$ 收敛。

Z平面上那些能使 $X(z)$ 收敛的点的集合，就构成了 $X(z)$ 的收敛域（**ROC**）。

例1. $x(n)=a^n u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

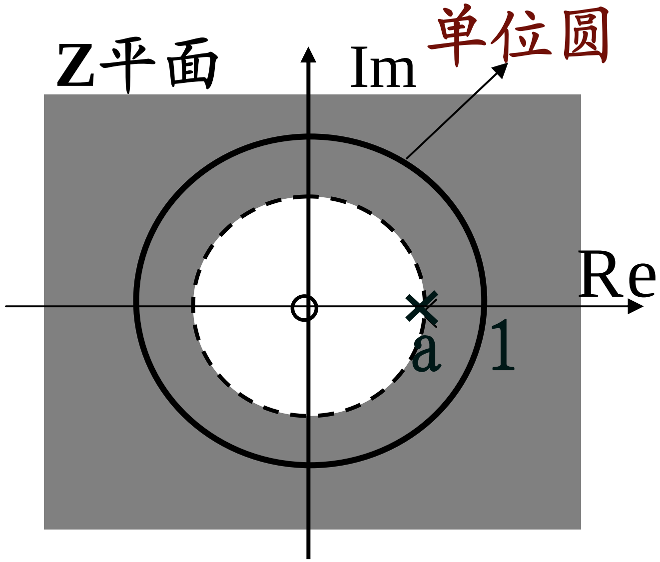
$|z|>|a|$时收敛

当$|a|<1$ 时， ROC包括了单位圆。

此时， $x(n)$的DTFT存在。

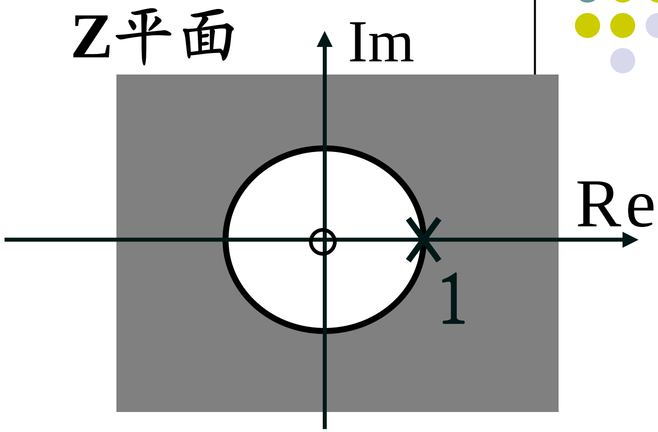
$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

显然有 $X(z)|_{z=e^{j\omega}}=X(e^{j\omega})$



例2. $x(n)=u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$



ROC: $|z|>1$

此时，ROC不包括单位圆，所以不能简单地

从 $X(z)$ 通过将 $z\rightarrow e^{j\omega}$ 得到 $X(e^{j\omega})$。

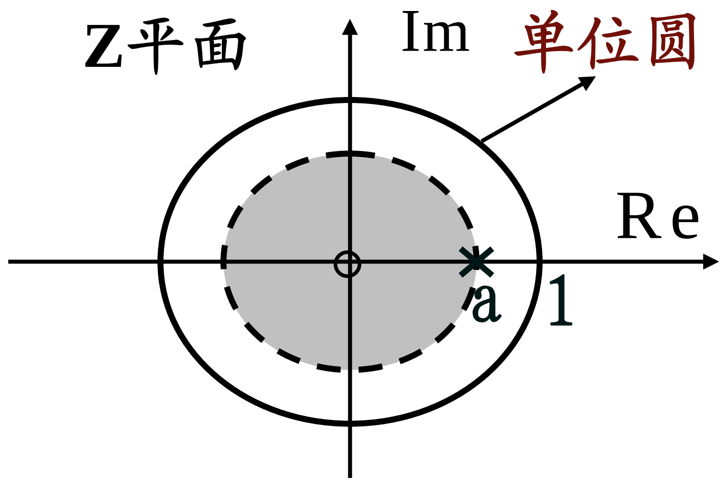
$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

例3. $x(n) = -a^n u(-n-1)$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

ROC: $|z| < |a|$

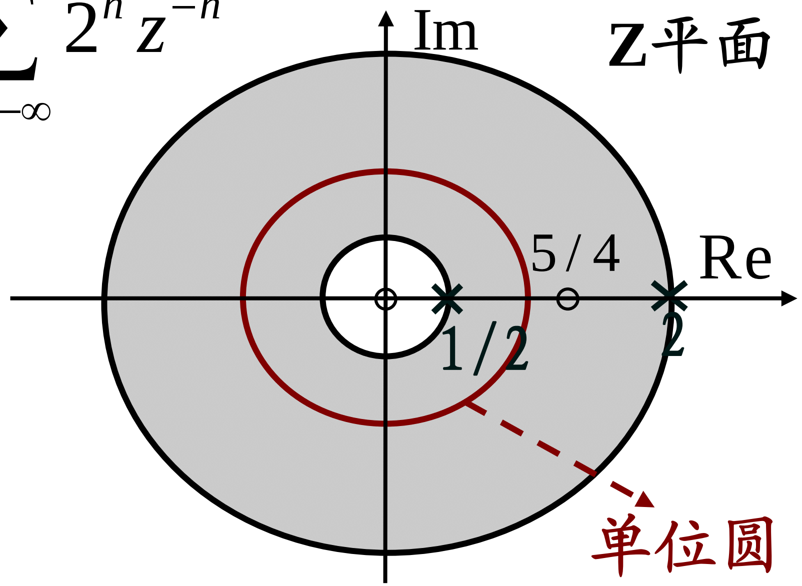


例4. $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)-2^n u(-n-1)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^{-n}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\mathrm{ROC}:\frac{1}{2}<|z|<2$$



一般情况下，$X(z)$的ROC是Z平面上一个以原点为中心的圆环。

结 论:

1）Z变换存在着收敛问题，不是任何信号都存在Z变换，也不是任何复数Z都能使$X(z)$收敛。

2）仅仅由$X(z)$的表达式不能唯一地确定一个信号，只有$X(z)$连同相应的ROC一道，才能与信号$x(n)$建立一一对应的关系。

3）Z变换的ROC，一般是Z平面上以原点为中心的环形区域。

4）如果 $x(n)=\sum_i x_i(n)$，则其**ROC**是各个$x_i(n)$的**ROC**的公共部分。若没有公共区域则表明 $x(n)$ 的**Z** 变换不存在。

5）当 $X(z)$是有理函数时，其**ROC**的边界总是由 $X(z)$ 的极点所在的圆周界定的。

6）若 $X(z)$ 的**ROC**包括单位圆，则有

$$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

三. $X(z)$的几何表示——零极点图:

如果$X(z)$是有理函数，将其分子多项式与分母多项式分别因式分解可以得到:

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=M\frac{\prod_i (1-z_i z^{-1})}{\prod_p (1-z_p z^{-1})}$$

由其全部的零、极点即可确定出$X(z)$，最多相差一个常数因子M 。

因此，若在 Z 平面上表示出 $X(z)$ 的全部零、极点，即构成 $X(z)$ 的几何表示——零极点图。

如果在零极点图上同时标出ROC，则由该零极点图可以唯一地确定一个信号。

零极点图对描述LTI系统和分析LTI系统的特性，具有重要的用途。

10.2 Z 变换的ROC

The Region of Convergence for the z-Transform

ROC的特征:

1. $X(z)$的ROC是Z平面上以原点为中心的环形区域。

2. 在ROC内，$X(z)$无极点。

3. 有限长序列的ROC是整个有限Z平面（可能不包括$z=0$，或$|z|=\infty$）。

$[N_1,\infty)$

4. 右边序列的ROC是某个圆的外部，但可能不包括$|z|=\infty$。

设 $x(n)$ 是右边序列，定义于 $[N_1,\infty)$，

由 $x(n)$，$N_1 \le n < \infty$，有 $X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$

若$|z| = r_0 \in \mathrm{ROC}$，则有 $\sum_{n=N_1}^{\infty} \left|x(n) r_0^{-n}\right| < \infty$

如果$r_1 > r_0$，则

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \left|x(n) r_1^{-n}\right| = \sum_{n=N_1}^{\infty} \left|x(n) r_0^{-n}\right| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^n$$

$$\le \sum_{n=N_1}^{\infty} \left| x(n) r_0^{-n} \right| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1} < \infty \qquad \therefore |z| = r_1 \in \mathrm{ROC}$$

当 $N_1 < 0$ 时，由于 $X(z)$ 的展开式中有若干个**Z**的正幂项，此时 $|z|$ 不能为 ∞ 。

5. 左边序列的**ROC**是某个圆的内部，但可能不包括 $z = 0$ 。

若 $r_0 \in \mathrm{ROC}$ ， $r_1 < r_0$ ，则有

$$\sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n) r_1^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n) r_0^{-n} \right| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{n}$$

$$\le \sum_{n=-\infty}^{N_1} \left| x(n) r_0^{-n} \right| \cdot \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{N_1} < \infty \qquad \therefore r_1 \in \mathrm{ROC}$$

当$N_1 > 0$时，由于$X(z)$的展开式中包括有若干个Z的负幂项，所以 Z 不能为零。

6. 双边序列的Z变换如果存在，则**ROC**必定是一个环形区域。

例**1.** $x(n) = \begin{cases} a^n, 0 \le n \le N-1, & a > 0 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$

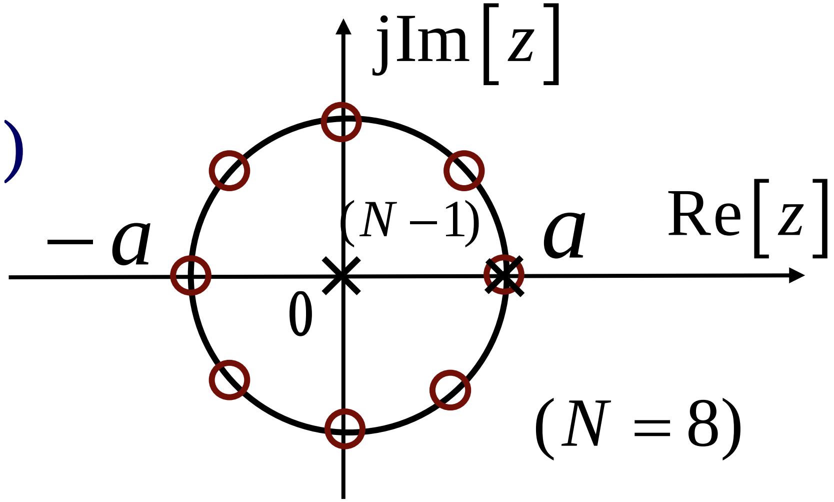
$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n}=\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}=\frac{z^N-a^N}{z^{N-1}(z-a)}$$

极点：$z=a$（一阶）

$z=0$ （N－1阶）

零点：$z=ae^{j\frac{2\pi}{N}k}$

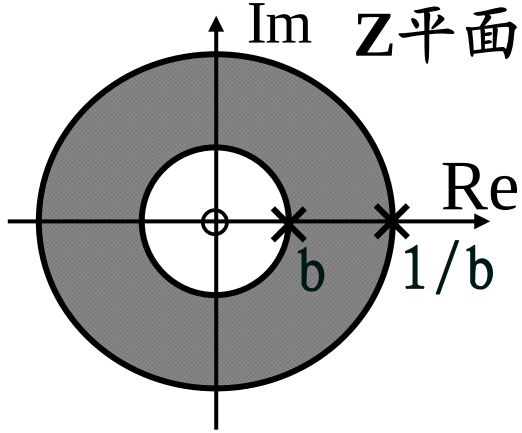
$(k=0,1\cdots N-1)$



在 $z=a$ 处，零极点抵消，使有限 Z平面内

无极点。ROC : $|z|>0$（即整个有限Z平面）

例2. $x(n)=b^{|n|},\quad b>0$



$$x(n)=b^{n}u(n)+b^{-n}u(-n-1)$$

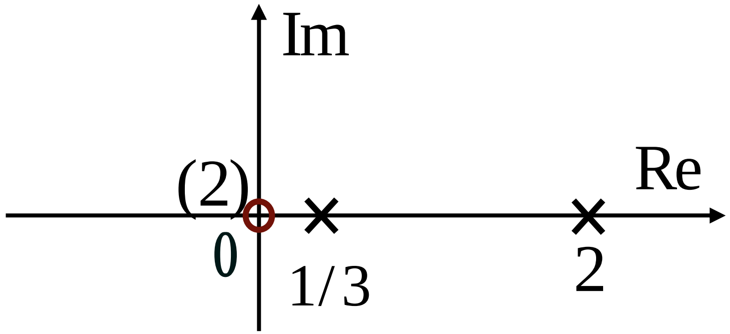
$$b^{n}u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-bz^{-1}},\quad |z|>b$$

$$b^{-n}u(-n-1)\leftrightarrow-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}},\quad |z|<b^{-1}$$

在 $b>1$ 时，两部分的收敛域无公共部分，表明此时 $X(z)$不存在。

$0<b<1$时，**ROC**为 $b<|z|<1/b$

例3. $X(z)=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$



极点： $z_1=\dfrac{1}{3}, \quad z_2=2$

零点： $z=0$ （二阶）

若其ROC为：

① $|z|>2$ 则 $x(n)$ 为右边序列，且是因果的，但其傅里叶变换不存在。

② $|z| < \frac{1}{3}$ 时 $x(n)$是左边序列，且是反因果的，其傅里叶变换不存在。

③ $\frac{1}{3} < |z| < 2$ 时 $x(n)$是双边序列，其傅里叶变换存在。

ROC是否包括$|z| = \infty$，是$x(n)$是否因果的标志。

ROC是否包括$z = 0$，是$x(n)$是否反因果的标志。

ROC若包含单位圆，则 $X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 。

10.3 Z-反变换

The Inverse Z-Transform

一. Z-反变换:

$$\because X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) r^{-n} e^{-j\omega n}$$

$$\therefore x(n) r^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) r^{n} e^{j\omega n} d\omega$$

令 $z = re^{j\omega}$ ， 则 $dz = jre^{j\omega} d\omega = jz d\omega$

当 ω从 $0 \rightarrow 2\pi$ 时，**Z沿着ROC内半径为 r** 的圆变化一周。

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

其中 C 是 ROC 中逆时针方向的圆周。

二. 反变换的求取:

1. 部分分式展开法:

当 $X(z)$是有理函数时，可将其展开为部分分式

$$X(z) = \sum_i \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}}$$（假定 $X(z)$是有理真分式）

步骤： 1. 求出$X(z)$的所有极点a_i ；

2. 将$X(z)$展开成部分分式;

3. 根据总的ROC，确定每一项的ROC;

4. 利用常用变换对和Z变换的性质求出每一项的反变换。

例： $$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$ $$\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$$

将$X(z)$展开成部分分式有：

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$\mathrm{ROC}_1:|z|>1/4$

$\mathrm{ROC}_2:|z|<1/3$

ROC_1 $\quad$ ROC_2

$$\therefore x(n)=(\frac{1}{4})^n u(n)-2(\frac{1}{3})^n u(-n-1)$$

2. 幂级数展开法:（长除法）

由$X(z)$的定义，将其展开为幂级数，有

$$X(z)=\cdots+x(-n)z^n+\cdots+x(-1)z+$$

$$x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots+x(n)z^{-n}+\cdots$$

展开式中 z^{-n} 项的系数即为 $x(n)$。当 $X(z)$ 是有理函数时，可以通过长除的方法将其展开为幂级数。

- 由于右边序列的展开式中应包含无数多个Z的负幂项，所以要按降幂长除。
- 由于左边序列的展开式中应包含无数多个Z的正幂项，所以要按升幂长除。
- 对双边序列，先要将其分成对应信号的右边和左边的两部分，再分别按上述原则长除。

例. $X(z)=\dfrac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

$$\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

ROC_1 ROC_2

$\mathrm{ROC}_1:|z|<1/2$

$\mathrm{ROC}_2:|z|>1/3$

所以前一项按升幂长除，后一项按降幂长除。

幂级数展开法的缺点是当$X(z)$较复杂（含多个极点时）难以得出$x(n)$的闭式。

$$
\begin{array}{r l}
 & -12z-24z^2-48z^3-\cdots \\
-\frac{1}{2}z^{-1}+1 \,\big) & 6 \\
 & \underline{6-12z} \\
 & .....12z \\
 & \underline{.....12z-24z^2} \\
 & ....24z^2 \\
 & \underline{............24z^2-48z^3} \\
 & ....48z^3
\end{array}
$$

$$-6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)z^{-n}-\cdots$$

分子与分母均按升幂的次序排列，然后进行长除。

$$-6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

$$5 + \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{5}{9}z^{-2} + \cdots$$

$$1 - \frac{1}{3}z^{-1} \,\Big)\, 5$$

$$5 - \frac{5}{3}z^{-1}$$

$$\cdots\cdots \frac{5}{3}z^{-1}$$

$$\cdots\cdots \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{5}{9}z^{-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{5}{9}z^{-2}$$

分子与分母均按降幂的次序排列，然后进行长除。

$$\boxed{5(\frac{1}{3})^n u(n)}$$

$$\therefore \quad x(n) = -6(\frac{1}{2})^n u(-n-1) - 5(\frac{1}{3})^n u(n)$$

3. 留数法: 对有理函数的 $X(z)$ 由留数定理有:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_i \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_i]$$

z_i 是C内的极点。

$$n\geq 0\text{时，}x(n)=\sum_i \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_i]$$

z_i 是C内的极点。

$$n<0\text{时，}x(n)=-\sum_i \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_i]$$

z_i 是C外的极点。

10.4. 由零极点图对离散时间傅里叶变换几何求值

Geometric Evaluation of the Fourier Transform from the Pole-Zero Plot

当**ROC**包括$|z|=1$时，**Z** 变换在单位圆上的情况就是 $X(e^{j\omega})$，因此也可以利用零极点图对其进行几何求值。

其方法与拉氏变换时完全类似:

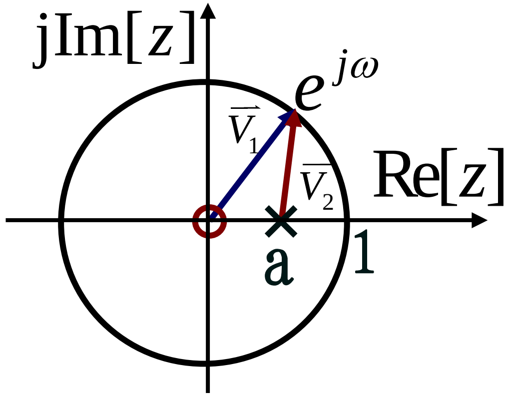
考查动点在单位圆上移动一周时，各极点矢量和零点矢量的长度与幅角的变化情况，即可反映系统的频率特性。

例1. 一阶系统 $y(n)-ay(n-1)=x(n)$

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>a \qquad h(n)=a^n u(n)$$

当$|a|<1$时，**ROC**包括单位圆。

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$



$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\vec{V}_1\right| / \left|\vec{V}_2\right|$$

显然，$\left|\vec{V}_1\right| = 1$, $\left|H(e^{j\omega})\right|$取决于$\left|\vec{V}_2\right|$的变化。

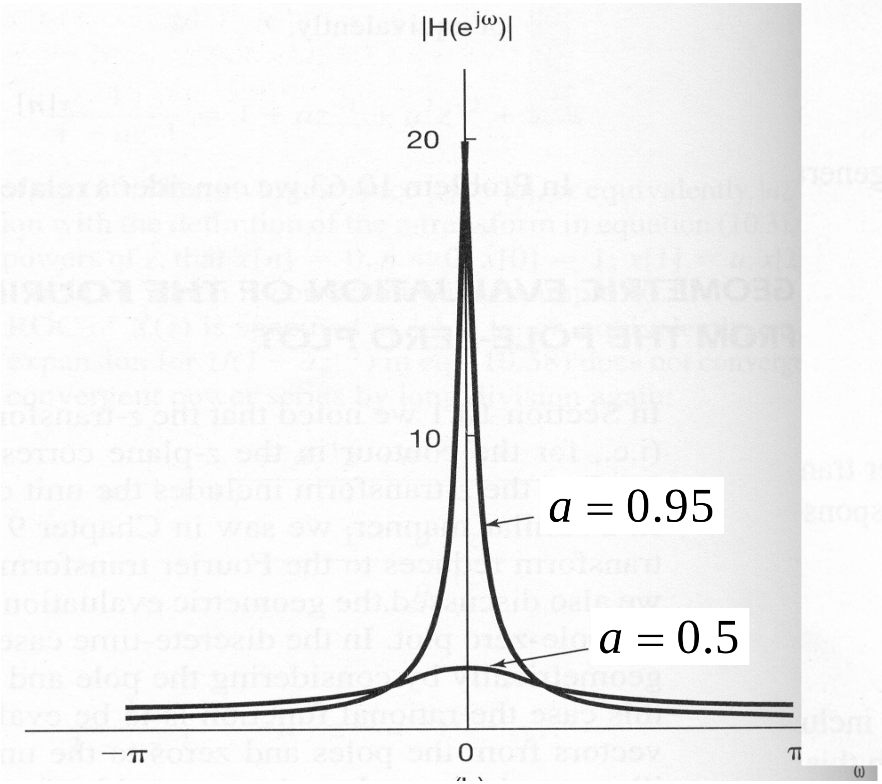
❖ 当$0 < a < 1$时，

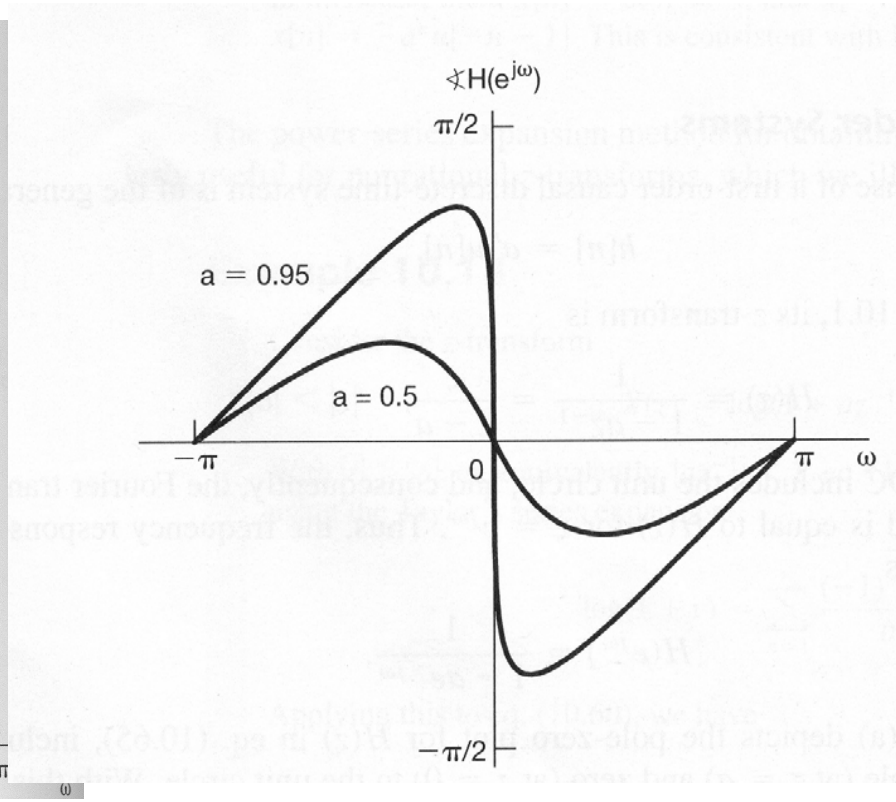
在$\omega = 0$处，$\left|H(e^{j\omega})\right|$有最大值。

当$\omega = \pi$时，$\left|H(e^{j\omega})\right|$有最小值。

$\left|H(e^{j\omega})\right|$随$\omega$呈单调变化。

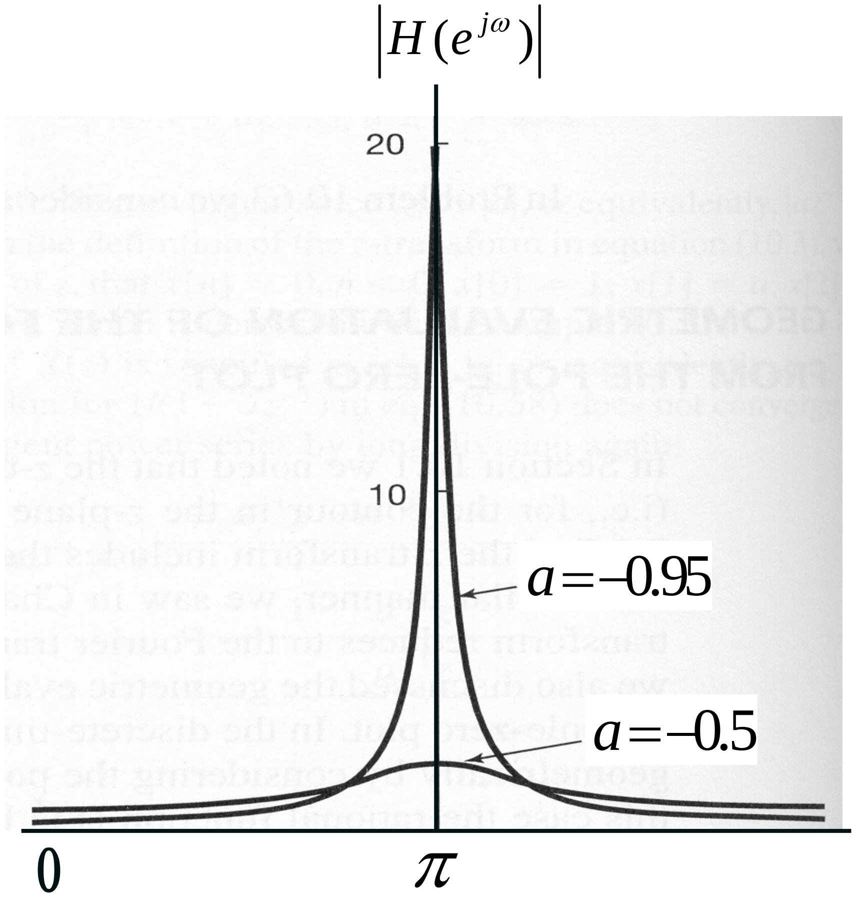
一阶系统的频率特性：　$0 < a < 1$



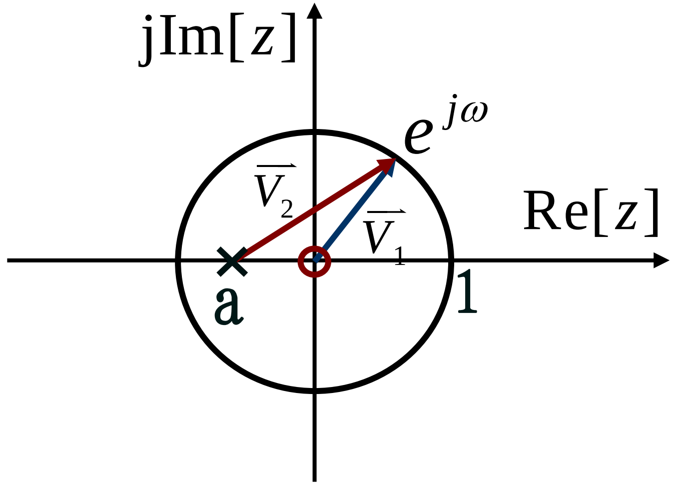


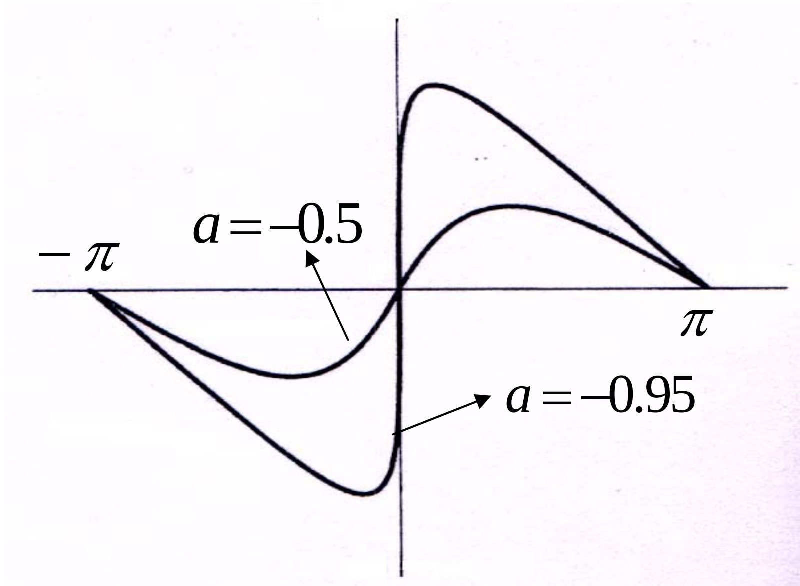
幅频特性　　　　相频特性

❖当 $-1<a<0$ 时，



幅频特性





相频特性

可以看出：

- $|a|$越小，极点靠原点越近，系统的频率响应越平缓，系统的带宽越宽；此时 $h(n)$ 衰减越快， $s(n)$上升越快。

- $|a|$越大，极点靠单位圆越近，系统频响越尖锐，频响的极大值越大，系统带宽越窄，相位的非线性程度越厉害。

例2. 二阶系统:

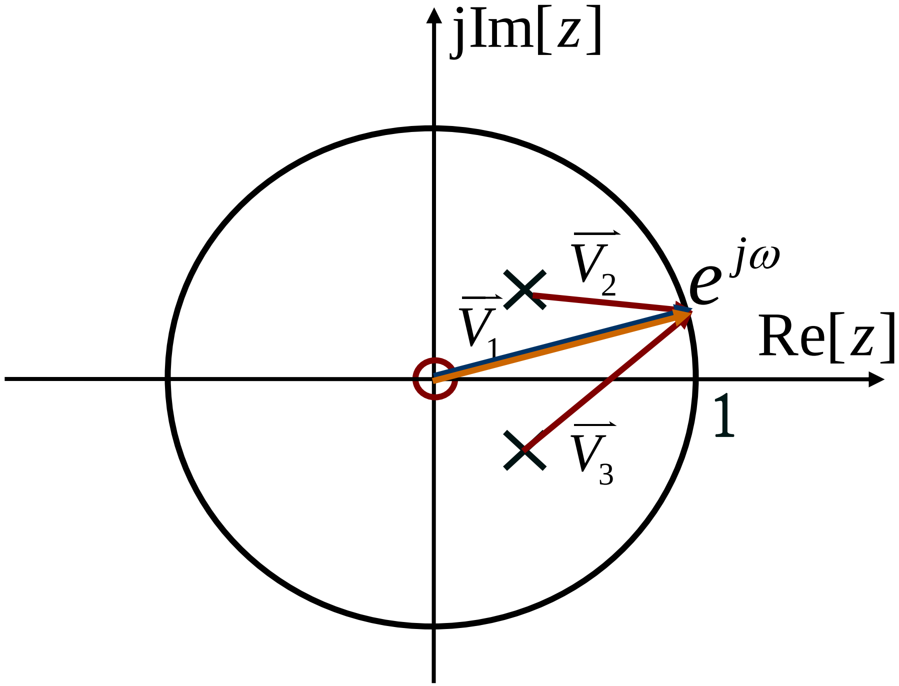
$$y(n)-2r\cos\theta\, y(n-1)+r^2 y(n-2)=x(n)$$

$0<r<1,\quad 0\le\theta\le\pi$ （系统欠阻尼）

$$H(z)=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2 z^{-2}}$$

$$h(n)=r^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}u(n)$$

极点：$z_{1,2}=re^{\pm j\theta}$ 零点：$z=0$ （二阶）



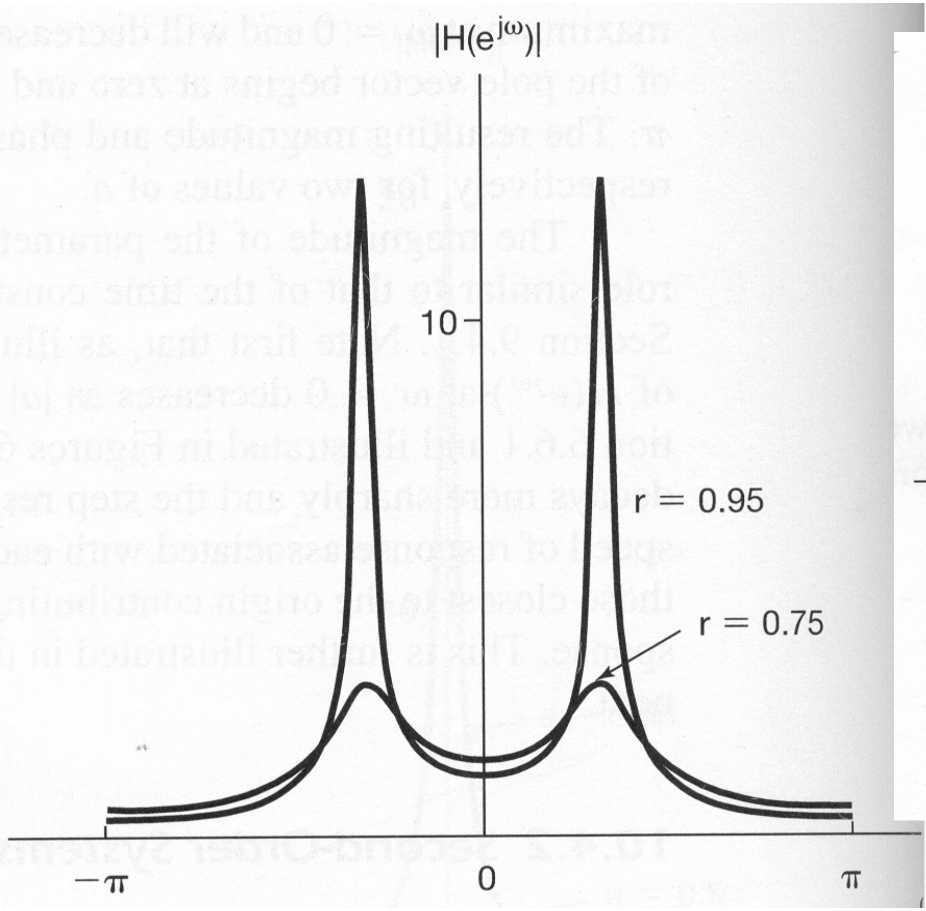
考查动点在单位圆上移动一周时，各极点矢量和零点矢量的长度与幅角的变化情况，即可得到二阶系统的频率特性。

当ω从$0\to\pi$时，在靠近$\omega=\pm\theta$处频率响应会出现极大值。

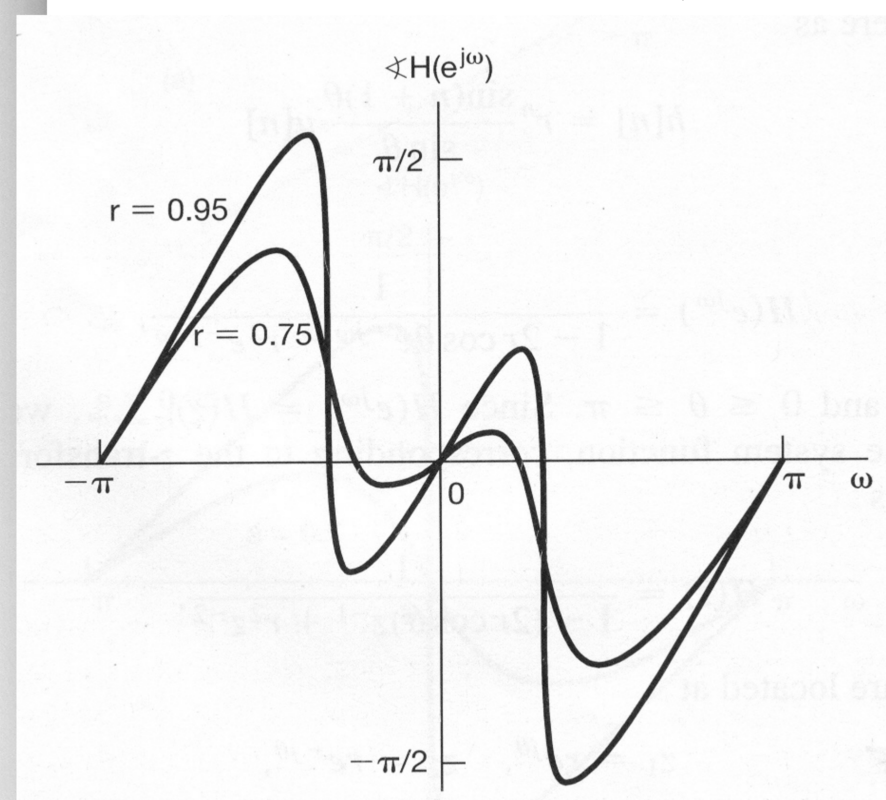
若**r**越接近于**1**，$\left|H(e^{j\omega})\right|$的峰值越尖锐。由于极点远离原点，$h(n)$和$s(n)$的变化速率越慢。

随着**r**减小，极点逐步靠近原点，频率响应趋于平坦，而$h(n)$和$s(n)$的变化速率会加快。

二阶系统的频率特性：　$0 < r < 1,\quad 0 \le \theta \le \pi$

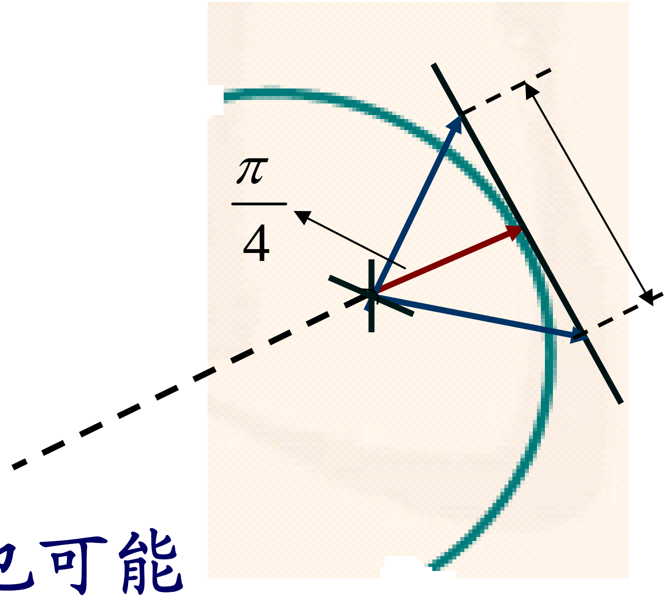


幅频特性



相频特性

当极点很靠近单位圆时，也可以从零极点图粗略确定系统的带宽。



更一般的情况，二阶系统也可能有两个实数极点，此时系统处于过阻尼或者欠阻尼状态。其特性相当于两个一阶系统级联的结果。

（二阶系统具有重阶正实数极点的情况）

10.5 Z变换的性质

Properties of the Z-transform

Z变换的许多性质与DTFT的性质相似，其推论方法也相同。这里主要讨论其ROC的变化。

1. 线性:

$$x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_1$$

$$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_2$$

则 $$ax_1(n)+bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(z)+bX_2(z)$$

ROC：包括 $R_1 \cap R_2$

❖ 如果在线性组合过程中出现零极点相抵消，则ROC可能会扩大。

2. 时移:

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x(n-n_0) \leftrightarrow X(z)z^{-n_0}$

$\mathrm{ROC}: R$ 但在 $z=0$ 和 $|z|=\infty$ 可能会有增删。

❖ 由于信号时移可能会改变其因果性，故会使ROC 在 $z=0$，$|z|=\infty$ 有可能发生改变。

3. Z 域尺度变换:

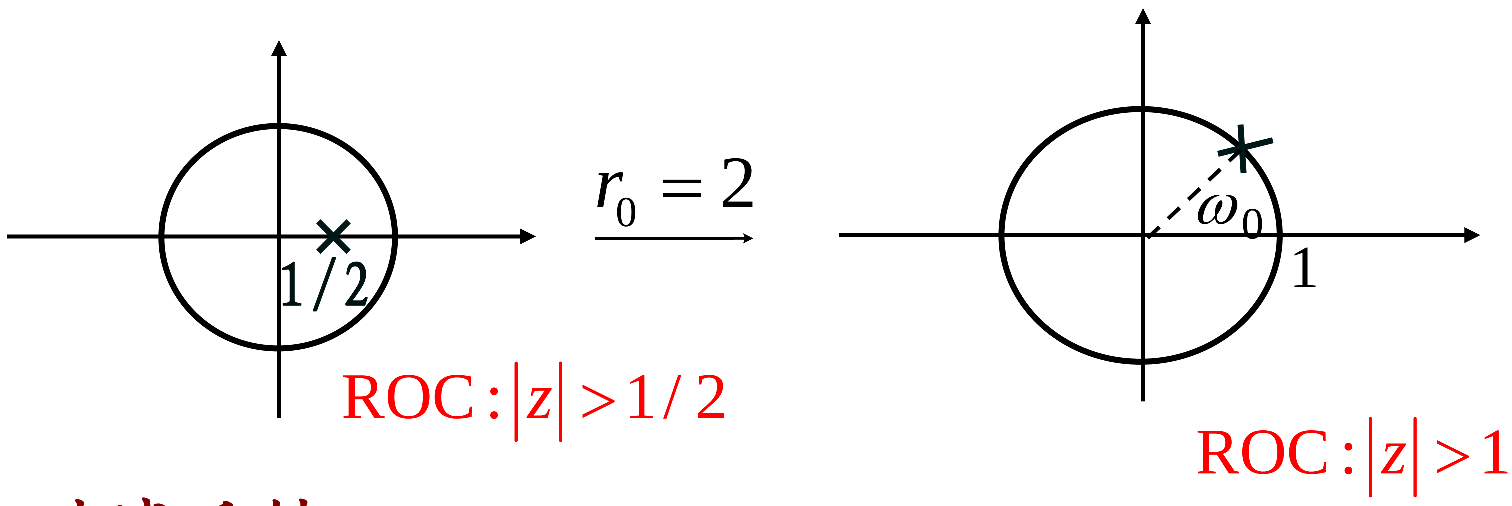
若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$　　ROC : R

则 $z_0^n x(n) \leftrightarrow X(z/z_0)$　　ROC : $|z_0| R$

$\because |z| \in R$ 时 $X(z)$ 收敛，故 $|z/z_0| \in R$ 时，$X(z/z_0)$ 收敛。

$\therefore |z| \in |z_0| R$　　当 $z_0 = e^{j\omega_0}$ 时，即为移频特性。

若 z_0 是一般复数 $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$，则 $X(z/z_0)$ 的零极点不仅要将 $X(z)$ 的零极点逆时针旋转一个角度 ω_0，而且在径向有 r_0 倍的尺度变化。



4. 时域反转:

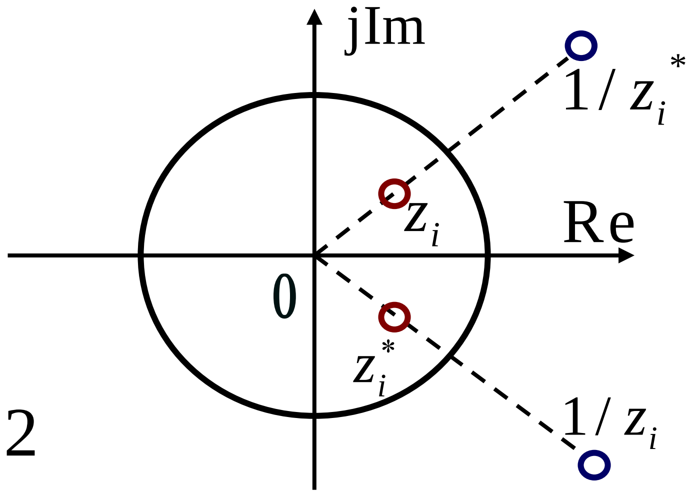
若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$　　ROC: R

则 $x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1})$　　ROC: $1/R$ (收敛域边界倒置)

❖ 信号在时域反转，会引起 $X(z)$ 的零、极点分布按倒量对称发生改变。

❖ 如果 z_i 是 $X(z)$ 的零/极点，则 $1/z_i$ 就是 $X(z^{-1})$ 的零/极点。实序列时 z_i^* 也是 $X(z)$ 的零/极点，因此 $1/z_i^*$ 也是 $X(z^{-1})$ 的零/极点。

即： $X(z)$ 与 $X(z^{-1})$ 的零极点呈共轭倒量对称。



例： 若 $X(z)$ 的**ROC**为

$$\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$$

则 $X(z^{-1})$ 的**ROC**为 $\frac{2}{3}<|z|<2$

5. 时域内插:

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \text{ROC}: R$

$$x_k(n) = \begin{cases} x(n/k) & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

则 $x_k(n) \leftrightarrow X(z^k) \qquad \text{ROC}: R^{1/k}$

证明:

$$X_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n) z^{-n} = \sum_{\substack{r=-\infty \\ n=rk}}^{\infty} x(r) z^{-rk} = X(z^k)$$

6. 共轭对称性:

若 $x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$

则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(z^*) \qquad \mathrm{ROC}: R$

❖当 $x(n)$是实信号时，$x^*(n) = x(n)$，于是有

$$X(z) = X^*(z^*)$$

表明如果 $X(z)$ 有复数零极点，必共轭成对出现。

7. 卷积性质:

若 $x_1(n) \leftrightarrow X_1(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_1$

$$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z) \qquad \mathrm{ROC}: R_2$$

则 $x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(z) X_2(z)$ ROC包括 $R_1 \cap R_2$

如果在相乘时出现零极点抵消的情况则**ROC**可能会扩大。

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) X_2(z) z^{-m} = X_1(z) X_2(z)$$

该性质是**LTI**系统**Z**变换分析法的理论基础。

8. Z 域微分:

若 $x(n) \leftrightarrow X(z)$　　　　ROC : R

则 $nx(n) \leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$　　　　ROC : R

利用该性质可以方便地求出某些非有理函数$X(z)$的反变换，或具有高阶极点的$X(z)$的反变换。

例1.　$X(z) = \ln(1 + az^{-1})$　　　$|z| > |a|$

$$\because \frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \leftrightarrow a(-a)^{n-1}u(n-1) = nx(n)$$

$$\therefore x(n) = \frac{a}{n}(-a)^{n-1}u(n-1) = -\frac{1}{n}(-a)^{n}u(n-1)$$

例2: $X(z) = \dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z| > |a|$

$$\because a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = -\frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$-z\frac{d\widehat{X}(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad \therefore x(n)=na^n u(n)$$

9. 初值定理:

若 $x(n)$是因果信号，且 $x(n)\leftrightarrow X(z)$

则 $x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)$

证明：将$X(z)$按定义式展开有：

$$X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots+x(n)z^{-n}+\cdots$$

显然当$z\longrightarrow\infty$时有 $\lim_{z\to\infty} X(z)=x(0)$

10. 终值定理：

若 $x(n)$是因果信号，且 $x(n) \leftrightarrow X(z)$，$X(z)$ 除了在 $z=1$可以有一阶极点外，其它极点均在单位圆内，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$

证明:

$\because x(n)=0,\ n<0,\quad X(z)$除了在 $z=1$可以有单阶极点外，其它极点均在单位圆内，

$\therefore (z-1)X(z)$在单位圆上无极点

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to 1}\sum_{n=-1}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

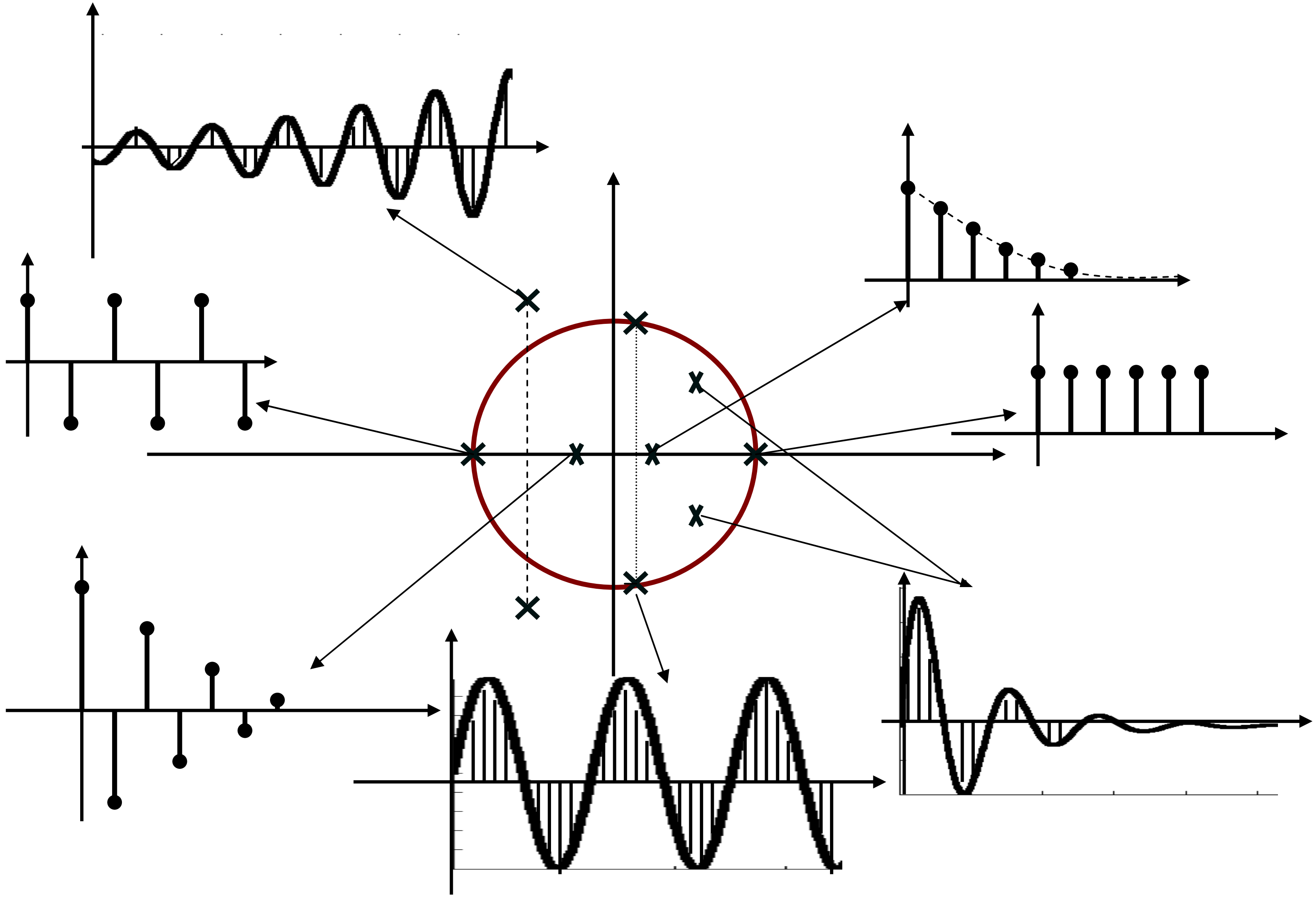
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=-1}^{m}[x(n+1)-x(n)]$$

$$=\lim_{m\to\infty}[x(0)-x(-1)+x(1)-x(0)+\cdots+x(m+1)-x(m)]$$

$$=\lim_{m\to\infty}x(m+1)=\lim_{n\to\infty}x(n)$$

这其实表明：如果 $x(n)$有终值存在，则其终值等于$X(z)$在 $z=1$ 处的留数。

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\mathrm{Res}[X(z),1]$$



Z平面上极点位置与信号模式的关系示意图

10.6 常用信号的Z变换对

Some Common Z-Transform Pairs

（自学）

10.7 利用Z变换分析与表征LTI系统

Analysis and Characterization of LTI Systems Using Z-Transforms

一. 系统特性与$H(z)$的关系:

LTI系统的特性可以由$h(n)$或$H(e^{j\omega})$描述，因而也可以由$H(z)$连同ROC来表征。

$H(z)$称为系统函数。系统的特性应该在系统函数中有所表现。

1. 因果性：如果**LTI**系统是因果的，则 $n<0$ 时有 $h(n)=0$, 所以，$H(z)$的**ROC**是最外部极点的外部，并且包括$|z|=\infty$ 。

2. 稳定性：若**LTI**系统稳定，则 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$，即 $h(n)$ 的**DTFT**存在，表明单位圆在 $H(z)$ 的**ROC**内。即$H(z)$的**ROC**必须包括单位圆。

因此，因果稳定的LTI系统其$H(z)$的全部极点必须位于单位圆内。反之亦然？

当$H(z)$是关于Z的有理函数时，因果性要求$H(z)$分子的阶数不能高于分母的阶数。

二. LTI系统的Z变换分析法:

分析步骤:

1）由$x(n)$求得$X(z)$及其ROC$:R_1$。

2）由系统的描述求得$H(z)$及其ROC$:R_2$。

3） 由$Y(z)=X(z)H(z)$得出$Y(z)$并确定它的

ROC：包括 $R_1 \cap R_2$ 。

4）对$Y(z)$做反变换得到 $y(n)$ 。

三. 由LCCDE描述的LTI系统的$H(z)$:

由差分方程描述的LTI系统，其方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

对方程两边做 Z 变换可得:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} X(z)$$ —— 代数方程

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$ 是一个有理函数。

$H(z)$ 的**ROC**需要通过其它条件来确定，如:

1. 系统的因果性或稳定性。

2. 方程是否具有一组零初始条件等。

例：由下列差分方程做出网络结构，并求其系统函数 **H(z)** 和单位脉冲响应 **h(n)**。

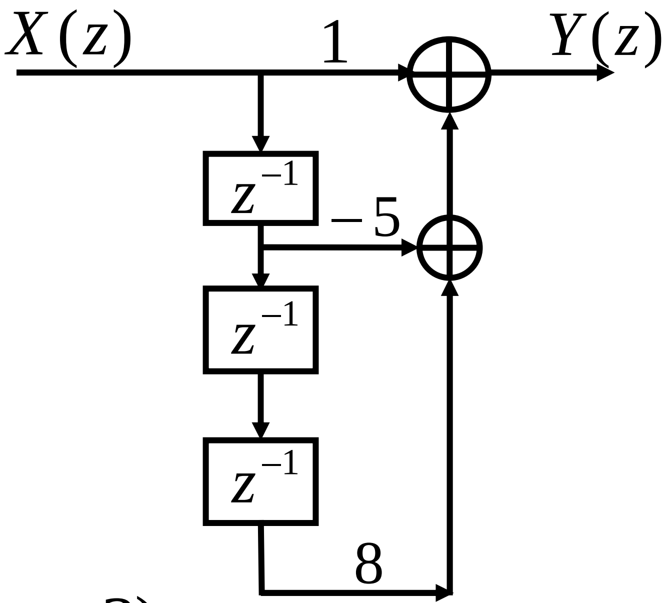
(1) $y(n) = x(n) - 5x(n-1) + 8x(n-3)$

解：由方程可得

$$Y(z) = (1 - 5z^{-1} + 8z^{-3})X(z)$$

$$H(z) = 1 - 5z^{-1} + 8z^{-3}$$

$$h(n) = \delta(n) - 5\delta(n-1) + 8\delta(n-3)$$



FIR系统

$$(2) \quad y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

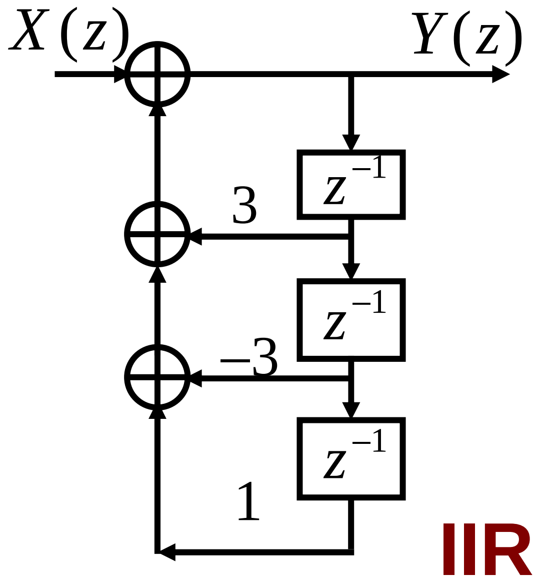
解：由方程可得

$$(1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3})Y(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})^3}$$

利用 Z 变换的性质可得

$$h(n)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)u(n)$$



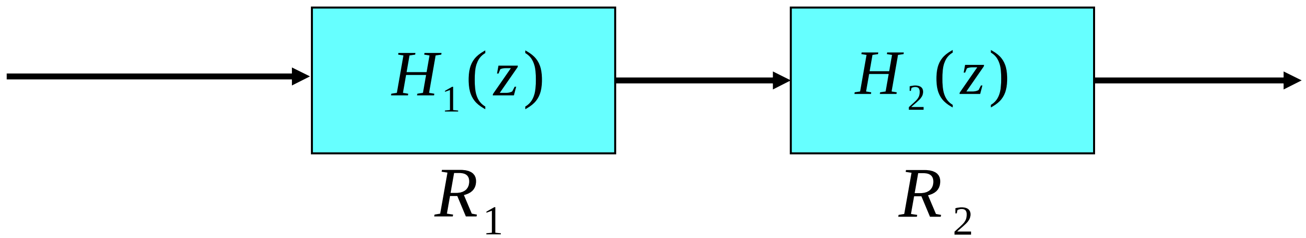
IIR系统

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

System Function Algebra and Block Diagram Representations

一. 系统互联时的系统函数:

1. 级联:

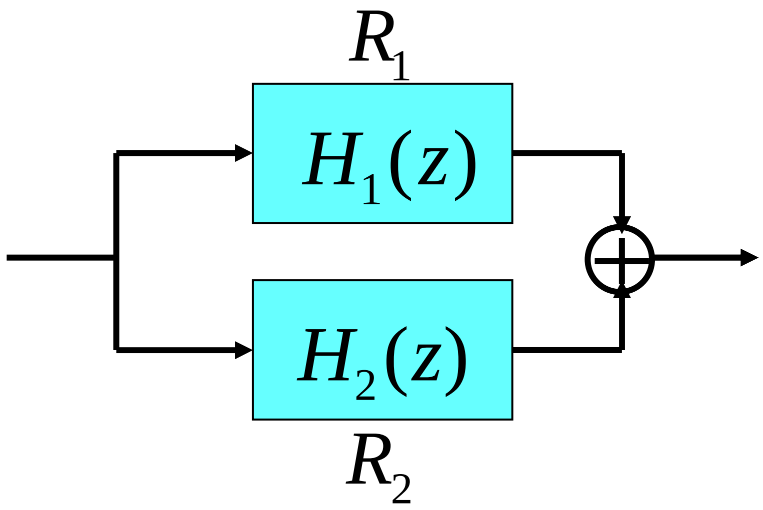


$$H(z) = H_1(z) H_2(z)$$ **ROC包括** $R_1 \cap R_2$

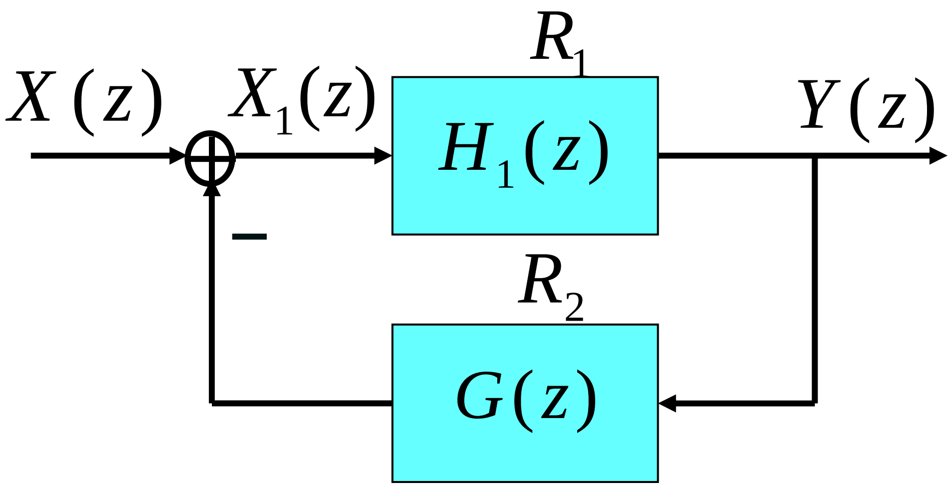
2. 并联:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

ROC包括 $R_1 \cap R_2$



3. 反馈联接:



由系统框图可

列出如下方程:

$$X_1(z) = X(z) - Y(z)G(z)$$

$$Y(z) = X_1(z)H_1(z)$$

$$= X(z)H_1(z) - Y(z)H_1(z)G(z)$$

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)G(z)}$$ **ROC：包括** $R_1 \cap R_2$

二. LTI系统的级联型与并联型结构:

由LCCDE描述的LTI系统，其系统函数是有理函数，可将其因式分解或展开成部分分式。

1 .级联型:

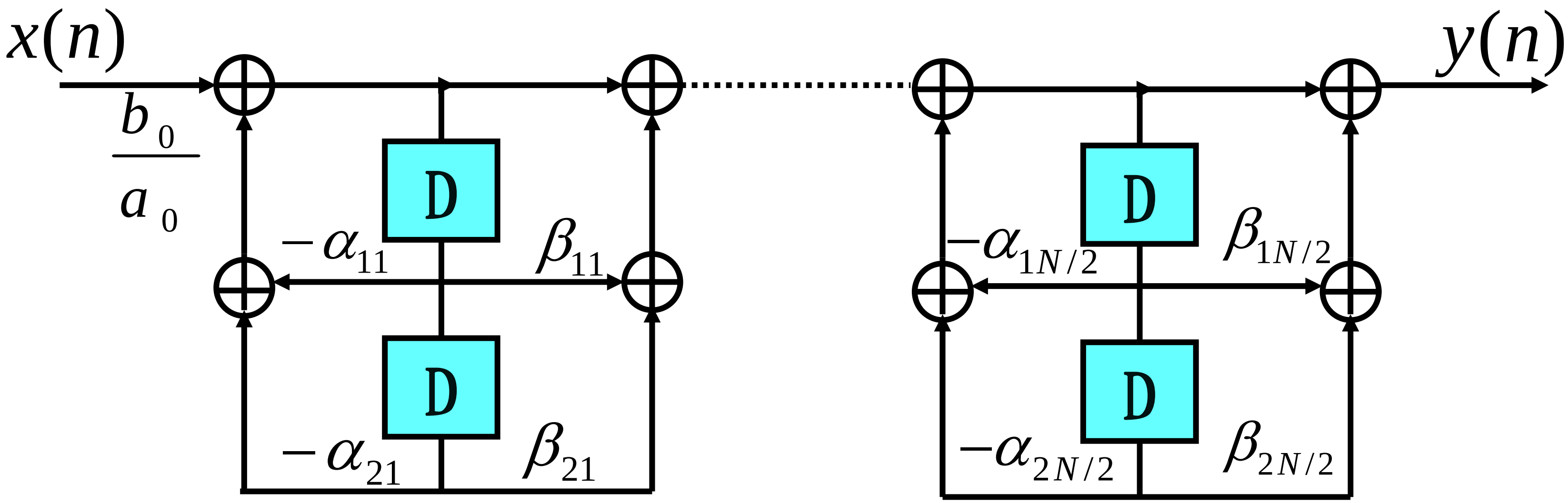
将$H(z)$因式分解，在无重阶零极点时可得

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0}{a_0}\prod_{k=1}^{N}\frac{1+\mu_k z^{-1}}{1+\eta_k z^{-1}}$$ N为偶数时

$$=\frac{b_0}{a_0}\prod_{k=1}^{N/2}\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}=\frac{b_0}{a_0}\prod_{k=1}^{N/2}H_k(z)$$

其中$H_k(z)$是二阶（或一阶）系统函数。

由此即可得系统的级联型结构:



LTI系统的级联型结构

2. 并联型：

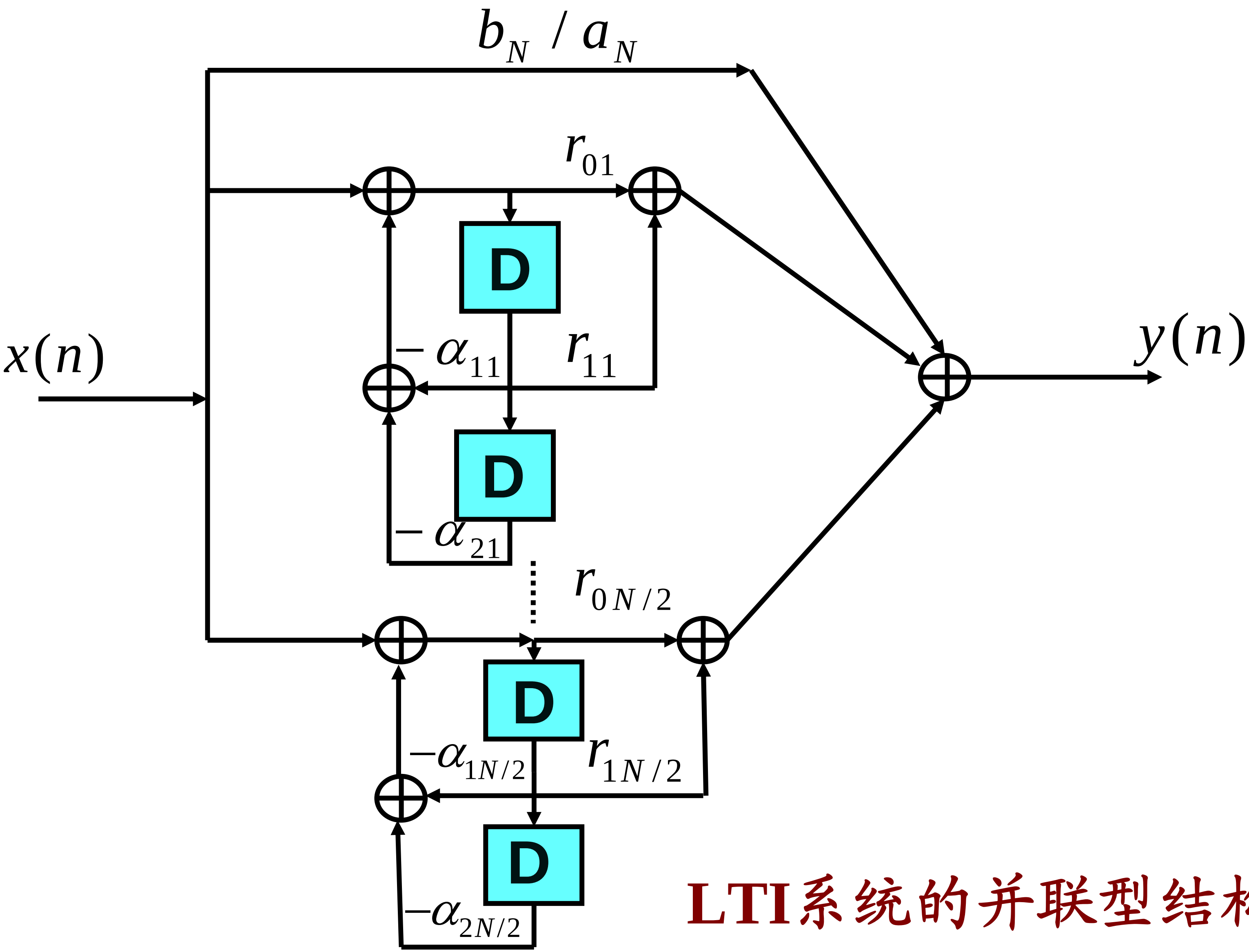
将$H(z)$展开成部分分式，在无重阶极点时有

$$H(z)=\frac{b_N}{a_N}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1+\eta_k z^{-1}}$$

N为偶数时

$$=\frac{b_N}{a_N}+\sum_{k=1}^{N/2}\frac{r_{0k}+r_{1k}z^{-1}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}$$

$$=\frac{b_N}{a_N}+\sum_{k=1}^{N/2}H_k(z)$$



LTI系统的并联型结构

10.9 单边Z变换:

The Unilateral Z-Transform

一. 单边Z 变换:

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

单边Z变换是双边Z变换的特例，也就是因果信号的双边Z变换。因此单边Z变换$\chi(z)$的**ROC**一定是最外部极点的外部，并且包括$|z|=\infty$。

所以在讨论单边Z变换时，不再强调其ROC。

它的反变换也一定与双边Z变换的反变换一致。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \chi(z)z^{n-1}dz$$

如果信号 $x(n)$不是因果序列，则其双边Z变换 $X(z)$与单边Z变换$\chi(z)$不同。

例1: $x(n)=a^n u(n)$

对其做双边Z变换有:

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

对其做单边Z变换有:

$$\chi(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a| \qquad \text{显然} \quad \chi(z)=X(z)$$

例2. $x(n)=a^{n+1}u(n+1)$

对其做双边Z变换有: $X(z)=\dfrac{z}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$

对其做单边Z变换有:

$$\chi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}z^{-n}=\frac{a}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

可见 $\chi(z) \neq X(z)$

这是因为$x(n)$在 $n<0$ 的部分对双边Z变换起作用，而对单边Z变换不起作用所致。

二. 单边Z变换的性质:

只要所涉及的信号是因果信号，单边Z变换除了时移特性与双边Z变换略显不同外，其它性质与双边Z变换的情况是一致的。

时移特性:

若 $x(n) \leftrightarrow \chi(z)$

则 $x(n-1) \leftrightarrow z^{-1}\chi(z) + x(-1)$

$x(n+1) \leftrightarrow z\chi(z) - zx(0)$

Proof:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} x(m)z^{-(m+1)}$$

$$= x(-1) + z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

$$= z^{-1}\chi(z) + x(-1)$$

同理可推得:

$$x(n-2) \leftrightarrow z^{-2}\chi(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

Proof:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} x(m)z^{-(m-1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-(m-1)} - x(0)z = z\chi(z) - zx(0)$$

同理可推得:

$$x(n+2) \leftrightarrow z^{2}\chi(z) - z^{2}x(0) - zx(1)$$

单边Z变换在将LCCDE变换为代数方程时，可以自动将方程的初始条件引入，因而在分析增量线性系统问题时特别有用。

三. 利用单边Z变换分析增量线性系统:

$$y(n)+3y(n-1)=x(n),$$

$$x(n)=u(n), \qquad y(-1)=1$$

则 $\tilde{Y}(z)+3[z^{-1}\tilde{Y}(z)+y(-1)]=\chi(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

由差分方程可得 $H(z)=\dfrac{1}{1+3z^{-1}}$

$$\widetilde{Y}(z)=\frac{1}{1+3z^{-1}}[\chi(z)-3]$$

$$=\underbrace{\frac{\chi(z)}{1+3z^{-1}}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}=H(z)\chi(z)+\underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}$$

$$=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})}-\frac{3}{1+3z^{-1}}=\frac{1/4}{1-z^{-1}}-\frac{9/4}{1+3z^{-1}}$$

$$\therefore y(n)=[\frac{1}{4}-\frac{9}{4}(-3)^{n}]u(n)=\frac{1}{4}[1-9(-3)^{n}]u(n)$$

$$=\frac{1}{4}[1-(-3)^{n+2}]u(n)$$

强迫响应　　　自然响应

10.10 小结： Summary

1. 建立了对离散时间信号和系统进行Z变换分析的方法，讨论的基本方法及许多结论分别与第九章和第五章相对应。

2. 与拉氏变换的情况对照，可以发现S平面与Z平面之间存在着一种映射关系，$z=e^{sT}$ 就是这种映射关系。

将连续时间信号$x_c(t)$采样，可以得到：

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)$$

对其做拉氏变换有：$X_p(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT)e^{-snT}$

对采样所得到的样本序列 $x(n)=x_c(nT)$ 做 **Z**

变换有：

$$x(n)\leftrightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT)z^{-n}$$

比较两式，可以得出 **S** 平面与 **Z** 平面之间有：

$z=e^{sT}$ ——**S平面与Z平面之间的映射关系**

$$\because z = re^{j\omega}, s = \sigma + j\Omega \qquad \therefore r = e^{\sigma T}, \omega = \Omega T$$

映射过程:

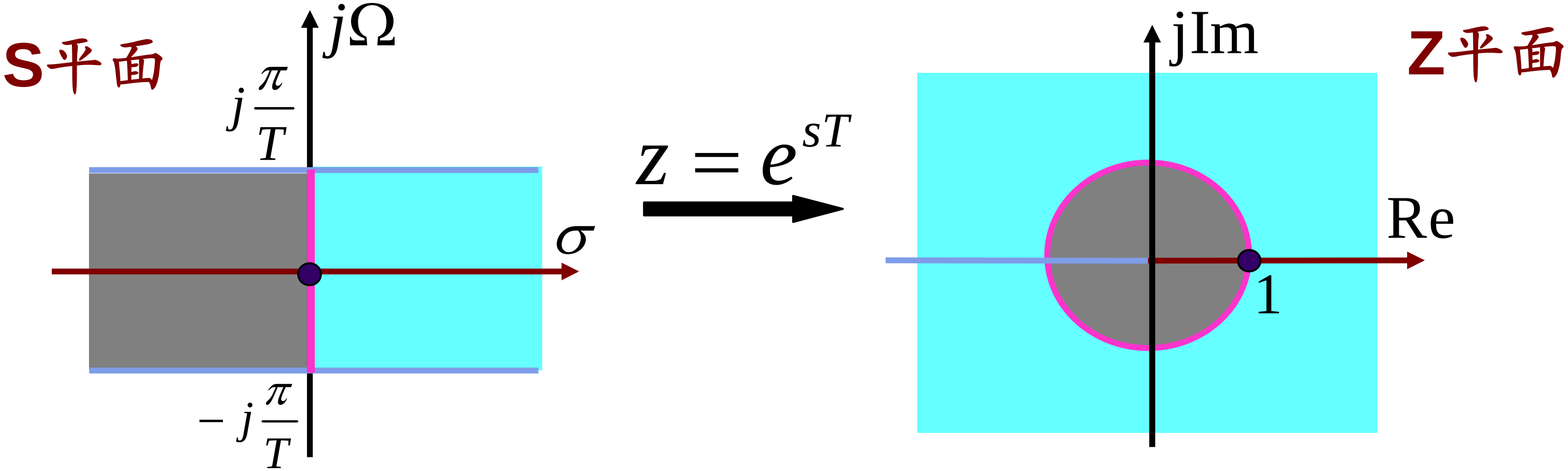
$$\sigma < 0, \quad r < 1$$

$$\sigma > 0, \quad r > 1$$

$$\sigma = 0, \quad r = 1$$

$$-\pi \le \omega \le \pi, \quad -\frac{\pi}{T} \le \Omega \le \frac{\pi}{T}$$

$$\omega = 0, \quad \Omega = 0$$



这种映射关系在数字信号处理，特别是数字系统设计中是非常重要的。明确了这种关系就很容易对Z 变换与拉氏变换的关系及差异之处有更清楚的认识。

3. 利用**Z**变换分析**LTI**系统，较之**DTFT**具有更方便，适用范围更广泛的优点。

4. 单边**Z**变换是分析增量线性系统的有力工具。

- 第一次：6, 8, 12, 15
- 第二次：17, 22, 27, 29, 31
- 第三次：20, 34, 46, 48