例1： 行列式$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = $______

解：

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 140$$

例2： 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = ?$

解： 一般情形

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$$

在本例中, 令 $x=3, a=1, n=4$, 得 $(3+3\times 1)(3-1)^3 = 48$

例3： 行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\16&9&49&25\\4&3&7&-5\\64&27&343&-125\end{vmatrix}=?$

解： 互换第二行和第三行，得

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\16&9&49&25\\4&3&7&-5\\64&27&343&-125\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\4&3&7&-5\\16&9&49&25\\64&27&343&-125\end{vmatrix}$$

（4阶范德蒙德行列式）

$$=-[(3-4)(7-4)(-5-4)(7-3)(-5-3)(-5-7)]$$

$$=-10368$$

例4： 行列式 $D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=?$

解： 用升阶法求出4阶范德蒙德行列式得值：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & x\\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(x-a)(c-b)(x-b)(x-c)$$

$$=(b-a)(c-a)(c-b)[x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc]$$

D_3就是D的展开式中x的系数，于是

$$D_3=(b-a)(c-a)(c-b)\,(ab+bc+ac)$$

例5： 关于 x 的代数方程 $\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ 的全部根为?

解： 各行的和相同

$$\begin{vmatrix} x+1 & -4 & 2 \\ 3 & x-4 & 0 \\ 3 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & x-4 & 0 \\ 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\mathrm{x}-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 3 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

所以关于x的代数方程的全部根为1,2,3

例6： 已知n阶行列式D的值为$a \neq 0$，且D的每行元素之和都等于常数b，则D的第1列元素的代数余子式之和

$$A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=? \qquad a/b$$

解： $A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例7： 若方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$，只有零解，则常数$\lambda, \mu$应满足什么条件?

解： 由Cramer法则的推论知：系数行列式不为零，即

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = \mu(1-\lambda) \neq 0$$

λ, μ应满足的条件是：$\lambda \neq 1$，且$\mu \neq 0$

例8： 设A_{ij}为$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&4&6&1\\5&6&7&9\\6&8&9&5\end{vmatrix}$的$(i,j)$元素的代数余子式，

则$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=$?

解：

$$1A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&4&6&1\\1&2&3&4\\6&8&9&5\end{vmatrix}=0$$

例9： 记行列式$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$为$f(x)$，则

方程$f(x)=0$的根的个数为?

解： 第2,3,4列分别减去第1列，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}=-x(-5x+5)=0$$

例10：设b为非零常数，分别用b^{i-j}去乘行列式$D=\det(a_{ij})$的(i,j)元素a_{ij}，证明所得行列式与D相等

证明 由题设所得行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-2}a_{13} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ ba_{21} & a_{22} & b^{-1}a_{23} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ b^{2}a_{31} & ba_{32} & a_{33} & \cdots & b^{3-n}a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-3}a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例10： 设b为非零常数，分别用b^{i-j}去乘行列式$D=\det(a_{ij})$的(i,j)元素a_{ij}，证明所得行列式与D相等

证明

由题设所得行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-2}a_{13} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ ba_{21} & a_{22} & b^{-1}a_{23} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ b^{2}a_{31} & ba_{32} & a_{33} & \cdots & b^{3-n}a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-3}a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

每列提出$b^{2-j}(j=1,\cdots,n)$

$$= bb^{0}b^{-1}\cdots b^{2-n}\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-1}a_{13} & \cdots & b^{-1}a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ ba_{31} & ba_{32} & ba_{33} & \cdots & ba_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-2}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-2}a_{n3} & \cdots & b^{n-2}a_{nn} \end{vmatrix}$$

例10：设b为非零常数，分别用b^{i-j}去乘行列式$D=\det(a_{ij})$的(i,j)元素a_{ij}，证明所得行列式与D相等

证明

由题设所得行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-2}a_{13} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ ba_{21} & a_{22} & b^{-1}a_{23} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ b^2a_{31} & ba_{32} & a_{33} & \cdots & b^{3-n}a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-3}a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

每列提出$b^{2-j}(j=1,\cdots,n)$

每行提出$b^{i-2}(i=1,\cdots,n)$

$$= bb^0b^{-1}\cdots b^{2-n}\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-1}a_{12} & b^{-1}a_{13} & \cdots & b^{-1}a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ ba_{31} & ba_{32} & ba_{33} & \cdots & ba_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b^{n-2}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & b^{n-2}a_{n3} & \cdots & b^{n-2}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= D$$

例11： 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix},\qquad a_1\neq 0$$

解： 第$i(i=2,\cdots,n)$行加上第1行的$-a_i/a_1$倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -\lambda a_2/a_1 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\lambda a_n/a_1 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

→ **剑形行列式**

第1列分别加上第$i(i=2,\cdots,n)$列的a_i/a_1倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix}\lambda-\sum a_i^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2)$$

例12：计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1+2 & \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & x_2+2 & \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & x_n+2 & \cdots & x_n+n \end{vmatrix} \qquad n\geq 3$$

解：第3列减第2列，第2列减第1列, 可以得到

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+1 & 1 & 1 \cdots & x_1+n \\ x_2+1 & 1 & 1 \cdots & x_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+1 & 1 & 1 \cdots & x_n+n \end{vmatrix}=0$$

例13：证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos(n\alpha)$$

证明： $D_1 = \cos\alpha$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

假设对$k \leq n-1$, 都有$D_k = \cos k\alpha$, 则将D_n按末行展开得递推关系：

$$D_n = 2\cos\alpha\, D_{n-1} - D_{n-2} = 2\cos\alpha\cos(\mathrm{n}-1)\alpha - \cos(\mathrm{n}-2)\alpha$$

$$= 2\cos\alpha\cos(\mathrm{n}-1)\alpha - \cos[(\mathrm{n}-1)\alpha - \alpha]$$

$$= 2\cos\alpha\cos(\mathrm{n}-1)\alpha - [\cos(\mathrm{n}-1)\alpha\cos\alpha + \sin(\mathrm{n}-1)\alpha\sin\alpha]$$

$$= \cos\alpha\cos(\mathrm{n}-1)\alpha - \sin(\mathrm{n}-1)\alpha\sin\alpha$$

$$= \cos n\alpha$$ 结论得证

例14：证明

（三对角行列式）

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}=\begin{cases} \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}, 若p\neq q \\ (n+1)p^n, 若p=q \end{cases}$$

其中p和q是$x^2-ax+bc=0$的两个根.

证明： 把D_n按照第一行展开，可得递推关系：

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}=(p+q)D_{n-1}-pqD_{n-2}$$

$$=pD_{n-1}+q(D_{n-1}-pD_{n-2})$$

据此可得：$D_n-pD_{n-1}=q(D_{n-1}-pD_{n-2})=q^2(D_{n-2}-pD_{n-3})$

$$=\cdots=q^{n-2}(D_2-pD_1)$$

又因为$D_2=a^2-bc=(p+q)^2-pq=p^2+pq+q^2$,

$$D_1=a=p+q$$

所以 $D_n - pD_{n-1} = q^{n-2}(p^2 + pq + q^2 - p^2 - pq) = q^n$

同理 $$D_n - qD_{n-1} = p^n$$

当 $p \neq q$ 时,

$$D_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

当 $p = q$ 时,

$$D_n = pD_{n-1} + p^n = p(pD_{n-2} + p^{n-1}) + p^n = p^2 D_{n-2} + 2p^n$$

$$= p^2(pD_{n-3} + p^{n-2}) + 2p^n = p^3 D_{n-3} + 3p^n$$

$$\vdots$$

$$= p^{n-1}D_1 + (n-1)p^n = 2p^n + (n-1)p^n = (n+1)p^n$$

练习

$$D_5 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

思考题(5阶的循环行列式)

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

练习

$$D_5 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

解： 首先, 写出方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ ，求得它的根为$1, 3$,

由于这两个根不相等，所以由例14结论可知

$$D_5 = \frac{3^{5+1} - 1^{5+1}}{3 - 1} = 364$$

思考题 (5阶的循环行列式)

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解: 首先, 将后4列都加到第1列, 提出公因子15, 得到

$$D_5 = 15 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

从末行开始, 自下而上地用后行减去前一行

$$= 15 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(按第1列展开)

$$D_5 = 15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{(按第1列展开)}}{=} 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(从末行起，用后1行分别减前1行)}}{=} 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{(把第2,3,4列加到第1列)}}{=} 15\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(按第1列展开)}}{=} -15\begin{vmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -15 \times (-1)^{\frac{3(3-1)}{2}} 5^3 = 1875$$