系统建模与动力学分析

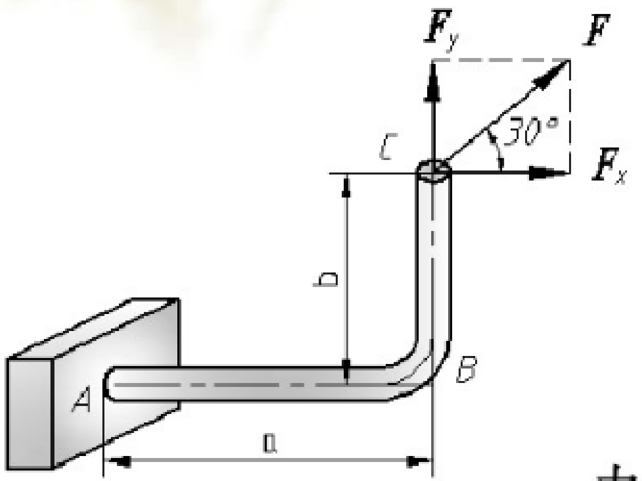
学　时　数：48
学　　　分：3

任 课 教 师：闫　涛
工 作 单 位：电信学院综合自动化研究所
办公室地点：创新港4-6168
邮　　　箱：yantao@xjtu.edu.cn

第一次作业（静力学和运动学）：第1题

如图所示，曲杆上作用一力F，已知$AB=a$，$CB=b$，试分别计算力F对点A和B的矩。

解： 用合力矩定理，将力F分解为F_x和F_y，则力F对A点的矩为



$$M_A(\boldsymbol{F})=M_A(\boldsymbol{F}_x)+M_A(\boldsymbol{F}_y)$$

$$=-F_x b+F_y a=-Fb\cos\alpha+Fa\sin\alpha$$

$$=-\frac{Fb\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}Fa$$

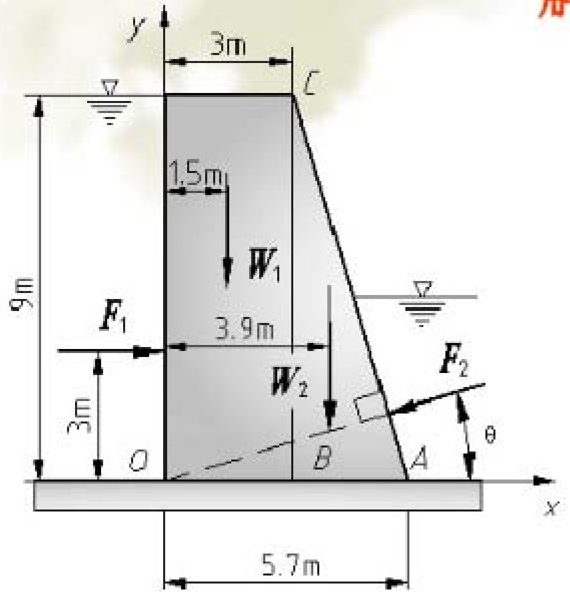
力F对B点的矩为：

$$M_B(\boldsymbol{F})=M_B(\boldsymbol{F}_x)+M_B(\boldsymbol{F}_y)$$

$$=-F_x b=-Fb\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}Fb}{2}$$

第一次作业（静力学和运动学）：第2题

重力坝受力如图。设W_1= 450 kN，W_2=200 kN， F_1=300 kN，F_2=70 kN。求力系的合力。



解：(1)取点O为简化中心，求主矢和主矩。

$$\theta = \angle ACB = \arctan\frac{AB}{CB} = 16.7°$$

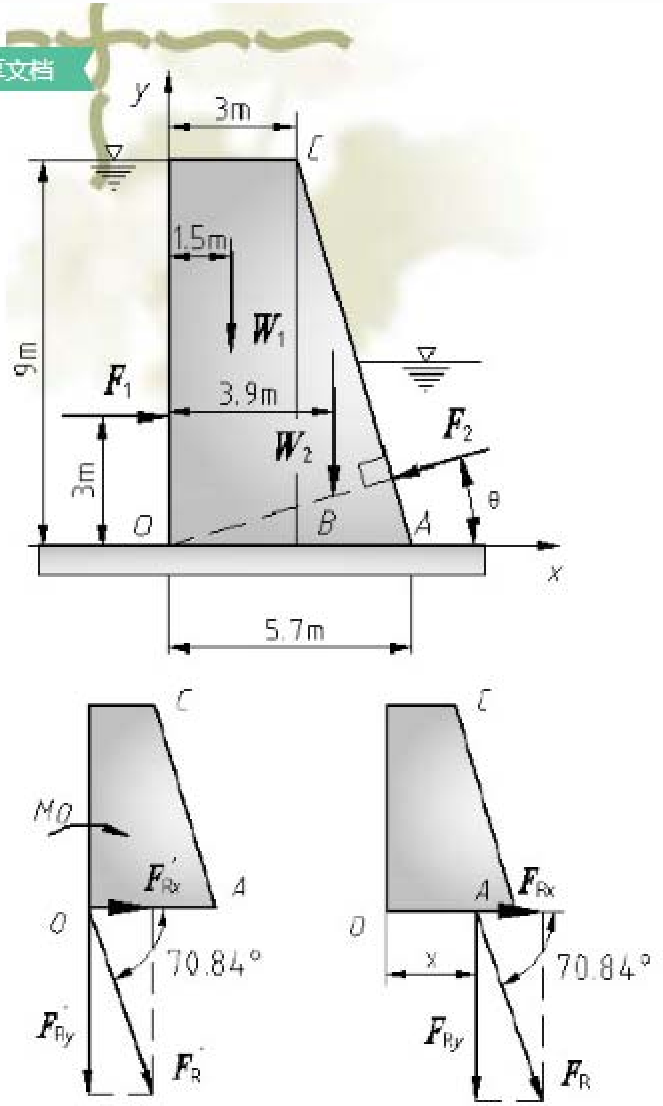
$$F'_{Rx} = \sum F_x = F_1 - F_2\cos\theta = 232.9\text{kN}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_y = -W_1 - W_2 - F_2\sin\theta = -670.1\text{kN}$$

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4\,\text{kN} \qquad \tan\alpha = \frac{|F'_{Ry}|}{|F'_{Rx}|} \qquad \alpha = 70.84°$$

$$M_O = \sum M_O(\boldsymbol{F}) = -3F_1 - 1.5W_1 - 3.9W_2 = -2355\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

第一次作业（静力学和运动学）：第2题



主矢和主矩　　　合力

$$F'_{Rx} = 232.9\,\text{kN} \qquad F'_{Ry} = -670.1\,\text{kN}$$

$$M_O = -2355\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

（2）求合力：

$$F_R = F_R' = 709.4\,\text{kN}$$

$$M_O(\boldsymbol{F}_R) = M_O(\boldsymbol{F}_{Rx}) + M_O(\boldsymbol{F}_{Ry})$$

合力作用线到O点的距离

$$x = \frac{M_O}{F_{Ry}} = 3.514\,\text{m}$$

第一次作业（静力学和运动学）：第3题

铰接四边形机构中的$O_1A=O_2B=100mm$，$O_1O_2=AB$，杆O_1A以等角速度$\omega=2rad/s$绕O_1轴转动。AB杆上有一套筒C，此筒与CD杆相铰接，机构各部件都在同一铅直面内。求当$\phi=60°$时CD杆的速度和加速度。

解：

动点：C。

动系：固连于AB杆上的坐标系。

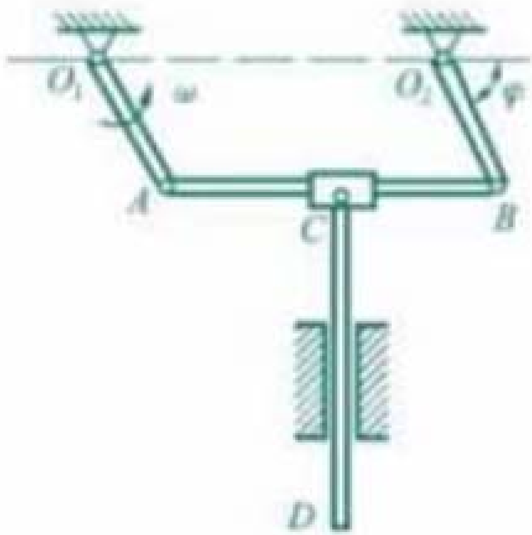
静系：固连于地面的坐标系。

绝对速度：C相对于地面的速度。

相对速度：C相对于AB杆的速度。

牵连速度：AB杆相对于地面的速度。

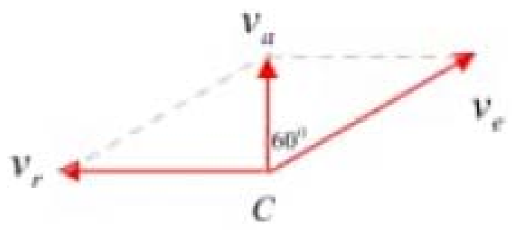
$$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$$



第一次作业（静力学和运动学）：第3题

$$v_e = v_C = v_A = O_1A \cdot \omega = 100 \times 2 = 200(mm/s)$$

$$v_a = v_e \cos 60^0 = 200 \times 0.5 = 100(mm/s)$$

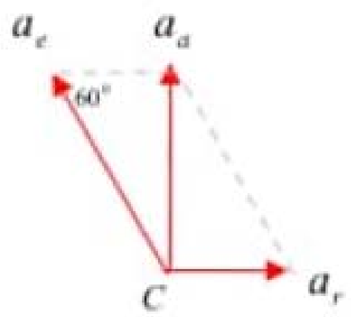


$$v_{CD} = v_C = v_a = 100(mm/s)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

$$a_e = a_A$$

$$a_e^\tau = 0$$



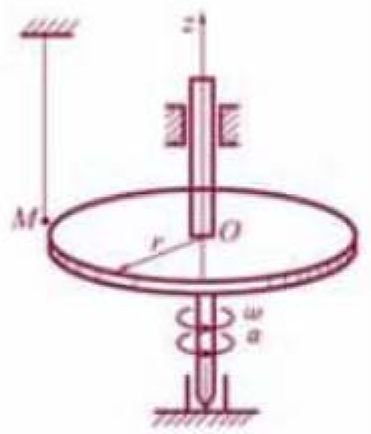
$$a_e = a_e^n = \frac{v^2}{O_1A} = O_1A \cdot \omega^2 = 100 \times 2^2 = 400(mm/s^2)$$

$$a_a = a_e \sin 60^0 = 400 \times 0.866 = 346.4(mm/s^2)$$

$$a_{CD} = a_C = a_a = 346.4(mm/s)$$

第一次作业（静力学和运动学）：第4题

半径为 r 的圆盘可绕垂直于盘面且通过盘心 O 的铅直轴 z 转动。一小球M悬挂于盘边缘的上方。设在图示瞬时圆盘的角速度及角加速度分别为 ω 及 α，若以圆盘为动参考系，试求该瞬时小球的科氏加速度及相对加速度。



动点：小球M。

动系：固连于圆盘上的坐标系。

静系：固连于地面的坐标系。

绝对速度：小球M相对于地面的速度。

相对速度：小球M相对于圆盘的速度。

牵连速度：圆盘上与小球M相重点相对于地面的速度。

$a_e^n = r\omega^2$

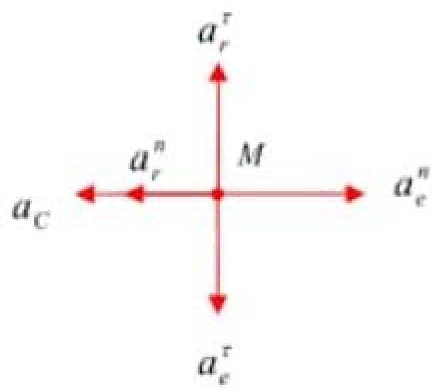
$a_e^\tau = r\alpha$

$a_C = 2\omega v_r \sin\theta = 2\omega \cdot r\omega \cdot \sin 90^0 = 2r\omega^2$，方向如图所示。

$a_r^n = r\omega^2$

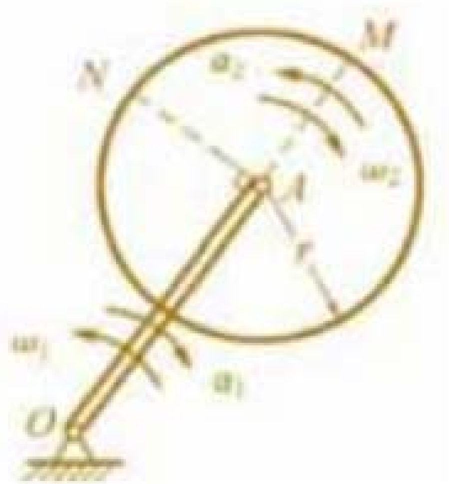
$a_r^\tau = r\alpha$

$a_r = \sqrt{(a_r^n)^2 + (a_r^\tau)^2} = \sqrt{r^2\omega^4 + r^2\alpha^2} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$



第一次作业（静力学和运动学）：第5题

曲柄OA，长为2 r，绕固定轴O转动；圆盘半径为r，绕A轴转动。已知 $r=100mm$，在图示位置，曲柄OA的角速度 $\omega_1=4rad/s$，角加速度 $\alpha_1=3rad/s^2$，圆盘相对于OA的角速度 $\omega_2=6rad/s$，角加速度 $\alpha_2=4rad/s^2$。求圆盘上M点和N点的绝对速度和绝对加速度。



解：

动点：M、N。

动系：固连于OA杆上的坐标系。

静系：固连于地面的坐标系。

绝对速度：M、N相对于地面的速度。

相对速度：M、N相对于OA杆的速度。

牵连速度：OA杆（包括其延长线）上与M、N相重点相对于地面的速度。

$$\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r$$

M点的速度：

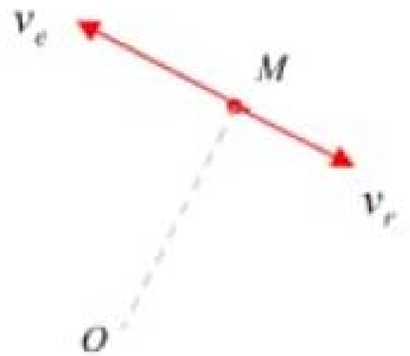
第一次作业（静力学和运动学）：第5题

M点的速度：

$$v_e = (OA + r)\omega_1 = 3r\omega_1 = 3\times 100\times 4 = 1200(mm/s)$$

$$v_r = r\omega_2 = 100\times 6 = 600(mm/s)$$

$$v_a = v_e - v_r = 1200 - 600 = 600(mm/s)$$（方向与 $\vec{v_e}$ 相同）



第一次作业（静力学和运动学）：第5题

$v_M = v_a = 600(mm/s)$

M点的加速度：

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

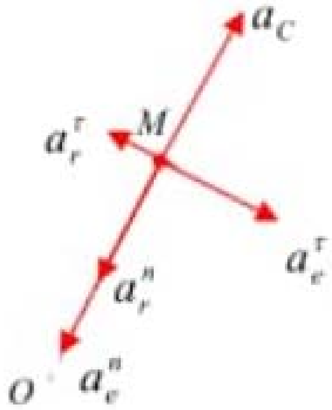
$$a_e^\tau = 3r\alpha_1 = 3\times100\times3 = 900(mm/s^2)$$

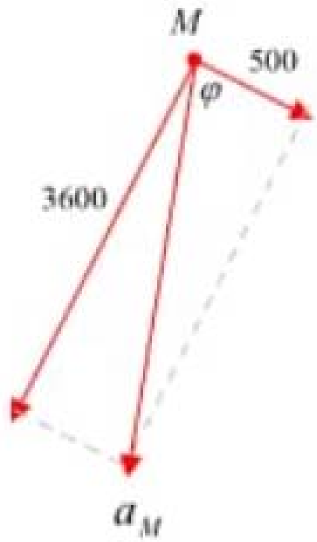
$$a_e^n = 3r\omega_1^2 = 3\times100\times4^2 = 4800(mm/s^2)$$

$$a_r^\tau = r\alpha_2 = 100\times4 = 400(mm/s^2)$$

$$a_r^n = r\omega_2^2 = 100\times6^2 = 3600(mm/s^2)$$

$$a_C = 2\omega_1 v_r \sin\theta = 2\times4\times600\times\sin90^0 = 4800(m/s^2)$$





$$a_M = a_a = \sqrt{(a_e^n + a_r^n - a_C)^2 + (a_e^\tau - a_r^\tau)^2}$$

$$a_M = \sqrt{(4800+3600-4800)^2 + (900-400)^2} = 3634.56(mm/s^2)$$

$$\varphi = \arccos\frac{500}{3634.56} = 82.09^0$$

第一次作业（静力学和运动学）：第5题

N点的速度：

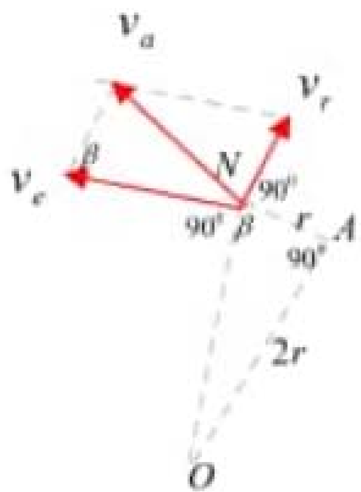
$$v_e = \sqrt{5} r\omega_1 = \sqrt{5} \times 100 \times 4 = 894.43 (mm/s)$$

$$v_r = r\omega_2 = 100 \times 6 = 600 (mm/s)$$

$$\beta = \arccos \frac{r}{\sqrt{5} r} = 63.43^0$$

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 - 2 v_e v_r \cos\beta}$$

$$v_a = \sqrt{(400\sqrt{5})^2 + 600^2 - 2 \times 400\sqrt{5} \times 600 \times \frac{1}{\sqrt{5}}} = 824.62 (mm/s)$$



第一次作业（静力学和运动学）：第5题

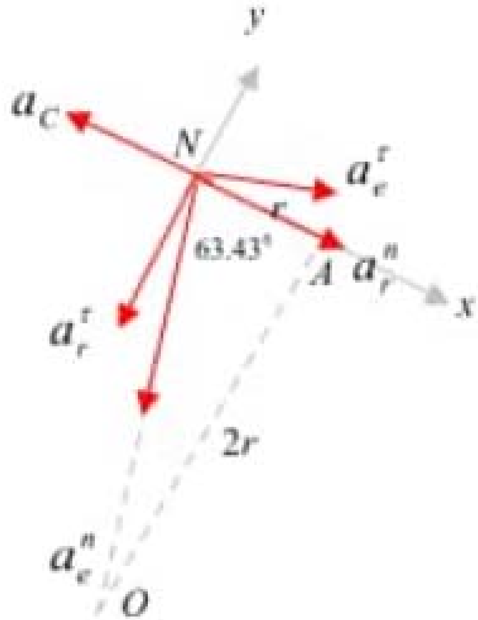
N点的加速度：

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$a_e^\tau = \sqrt{5} r\alpha_1 = \sqrt{5} \times 100 \times 3 = 670.82 (mm/s^2)$$

$$a_e^n = \sqrt{5} r\omega_1^2 = \sqrt{5} \times 100 \times 4^2 = 3577.71 (mm/s^2)$$

$$a_r^\tau = r\alpha_2 = 100 \times 4 = 400 (mm/s^2)$$



第一次作业（静力学和运动学）：第5题

$$a_r^n = r\omega_2^2 = 100\times 6^2 = 3600(mm/s^2)$$

$$a_C = 2\omega_1 v_r \sin\theta = 2\times 4\times 600\times \sin 90^0 = 4800(m/s^2)$$

$$\sum a_{ax} = a_r^n + a_e^\tau \cos 26.57^0 + a_e^n \cos 63.43^0 - a_C$$

$$= 3600 + 670.82\cos 26.57^0 + 3577.71\cos 63.43^0 - 4800$$

$$= 1000.25(mm/s^2)$$

$$\sum a_{ay} = -a_r^\tau - a_e^n \cos 26.57^0 + a_e^\tau \sin 26.57^0$$

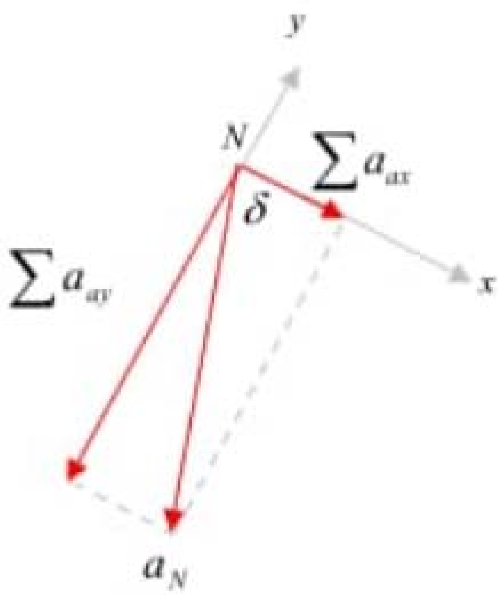
$$= -400 - 3577.71\cos 26.57^0 + 670.82\sin 26.57^0$$

$$= -3299.81(mm/s^2)$$

$$a_N = a_a = \sqrt{(\sum a_{ax})^2 + (\sum a_{ay})^2}$$

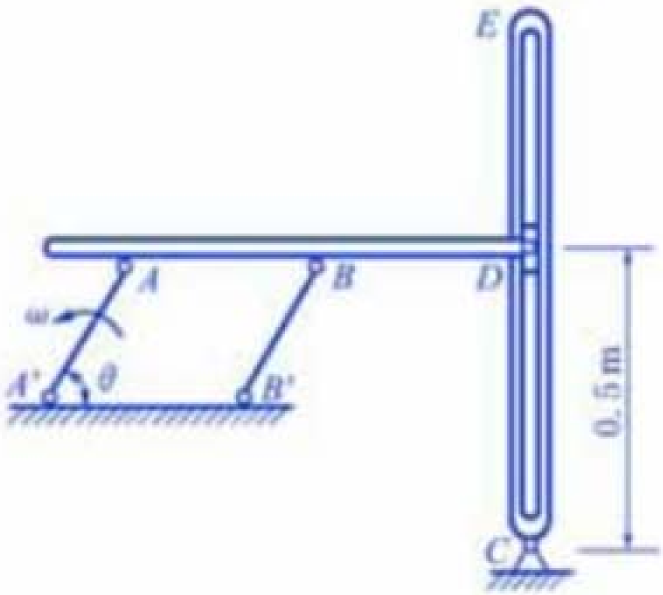
$$= \sqrt{1000.25^2 + (-3299.81)^2} = 3448.08(mm/s^2)$$

$$\delta = \arccos\frac{\sum a_{ax}}{a_a} = \arccos\frac{1000.25}{3448.08} = 73.14^0$$



第一次作业（静力学和运动学）：第6题

在图示机构中，已知AA′=BB′=r=0.25m，且AB=A′B′。连杆AA′以匀角速度ω=2rad/s绕A′转动，当θ=60°时，槽杆CE位置铅直。求此时CE的角速度及角加速度。



解：

动点：D。

动系：固连CE上的坐标系。

静系：固连于地面的坐标系。

绝对速度：D相对于地面的速度。

相对速度：D相对于CE杆的速度。

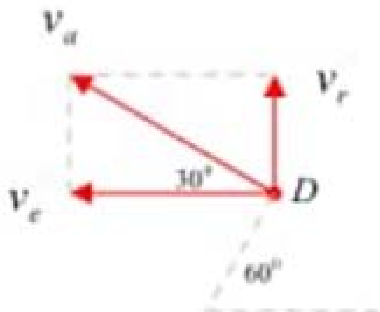
牵连速度：CE杆上与D相重点相对于地面的速度。

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$v_a = v_D = v_A = r\omega = 0.25 \times 2 = 0.5(m/s)$$

$$v_e = CD \cdot \omega_{CE} = v_a \cos 30^0$$

$$0.5 \times \omega_{CE} = 0.5 \times \cos 30^0$$



第一次作业（静力学和运动学）：第6题

$\omega_{CE} = 0.866(rad/s)$

$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$

$a_C = 2\omega_{CE} v_r \sin\theta$

$= 2\times 0.866\times(0.5\times 0.5)\times \sin 90^0 = 0.433(m/s^2)$

$a_e^\tau = CD\cdot \alpha_{CE} = 0.5\alpha_{CE}$

$a_a^\tau = r\cdot \alpha_{CE} = 0.5\times 0 = 0$

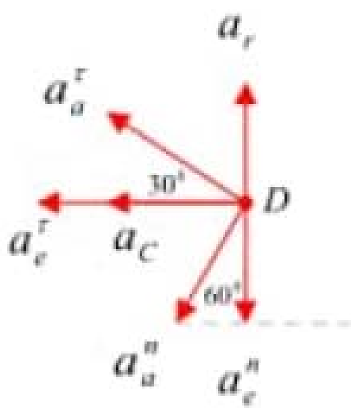
$a_a^n = r\cdot\omega^2 = 0.25\times 2^2 = 1(m/s^2)$

$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$ 在 $\vec{a}_C$ 方向的投影为：

$a_a^n \cos 60^0 = a_C + a_e^\tau$

$1\times 0.5 = 0.433 + 0.5\alpha_{CE}$

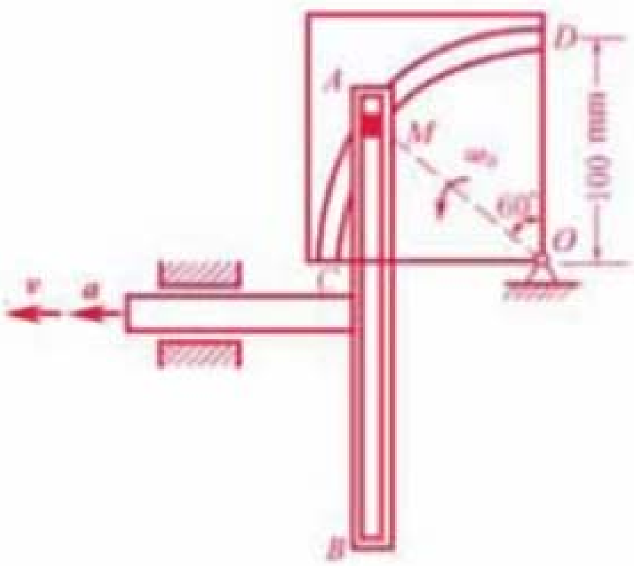
$\alpha_{CE} = 0.134(rad/s)$



第一次作业（静力学和运动学）：第7题

销钉M可同时在AB、CD两滑道内运动，CD为一圆弧形滑槽，随同板以匀角速$\omega_0 = 1rad/s$绕O转动；在图示瞬时，T字杆平移的速度$v = 100mm/s$，加速度$a = 120mm/s^2$。试求该瞬时销钉M对板的速度与加速度。

解：



动点：M。

动系：固连于T形板上的坐标系。

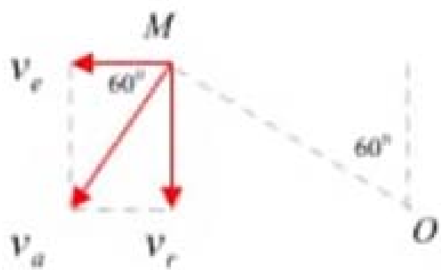
静系：固连于地面的坐标系。

绝对速度：M相对于地面的速度。

相对速度：M相对于T形板的速度。

牵连速度：T形板上与M相重点相对于地面的速度。

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$



$$v_e = 100mm/s$$

$$v_a = \frac{v_e}{\cos 60^0} = \frac{100}{0.5} = 200(mm/s)$$

$v_r = v_a \sin 60^0 = 200 \times 0.866 = 173.2(mm/s)$（相对于AB）

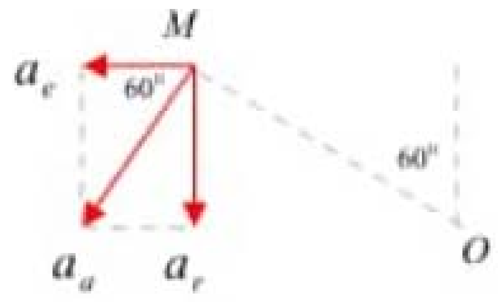
第一次作业（静力学和运动学）：第7题

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

$$a_e = a = 120mm/s^2$$

$$a_a = \frac{a_e}{\cos 60^0} = \frac{120}{0.5} = 240(mm/s^2)$$

$$a_r = a_a \sin 60^0 = 207.85(mm/s^2)$$ （相对于A B）



若取

动点：M。

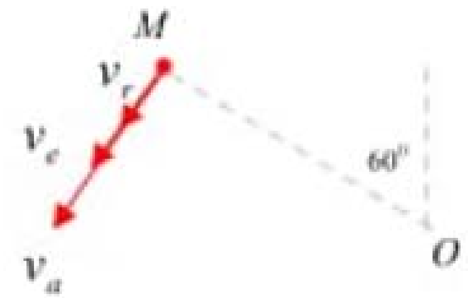
动系：固连于方形板上的坐标系。

静系：固连于地面的坐标系。

绝对速度：M相对于地面的速度。

相对速度：M相对于方形板的速度。

牵连速度：方形板上与M相重点相对于地面的速度。



第一次作业（静力学和运动学）：第7题

则：

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

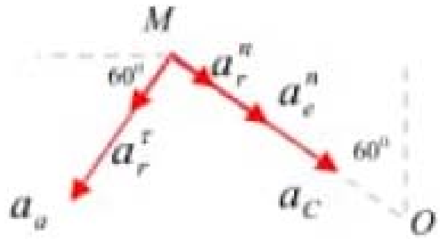
销钉相对于C D滑槽（方形板）的速度：

$$200 = OM \cdot \omega_0 + v_{\text{相对于方形板}}$$

$$v_{\text{相对于方形□板}} = v_a - OM \cdot \omega_{□} = 200 - 100 \times 1 = 100(mm/s)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$a_C = 2\omega_0 v_r \sin\theta = 2 \times 1 \times 100 \times \sin 90^0 = 200(mm/s^2)$$



$$a_e^n = OM \cdot \omega_0^2 = 100 \times 1^2 = 100(mm/s^2)$$

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{OM} = \frac{100^2}{100} = 100(mm/s^2)$$

$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$ 在 $\vec{a}_a$ 方向上的投影为：

$$a_a = a_r^\tau$$

$$a_r^\tau = 240(mm/s^2)$$

$$a_r = \sqrt{(a_r^\tau)^2 + (a_r^n)^2} = \sqrt{240^2 + 100^2} = 260(mm/s^2)$$

第一次作业（静力学和运动学）：第8题

[习题7-22] 半径为 r 的空心圆环刚连在A B轴上，A B的轴线在圆环轴线平面内。圆环内充满液体，并依箭头方向以匀相对速度 u 在环内流动。A B轴作顺时针方向转动（从A向B看），其转动的角速度 ω 为常数，求M点处液体分子的绝对加速度。

解：

动点：M。

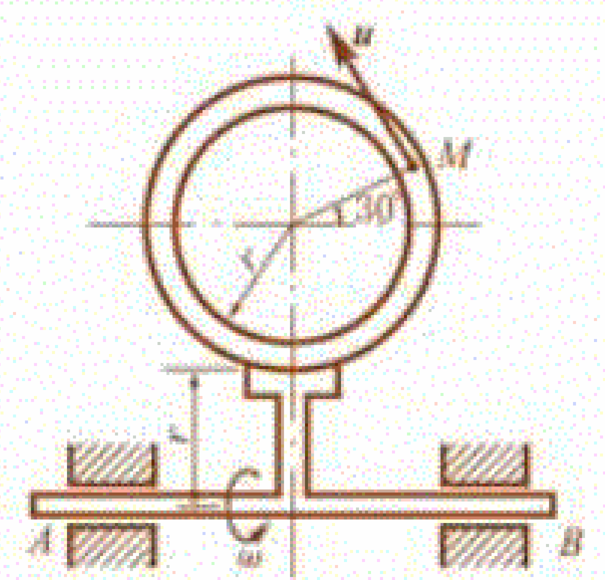
动系：固连于空心圆环上的坐标系。

静系：固连于地面的坐标系。

绝对速度：M相对于地面的速度。

相对速度：M相对于空心圆环的速度。

牵连速度：空心圆环上与M相重点相对于地面的速度。



第一次作业（静力学和运动学）：第8题

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$a_C = 2\omega v_r \sin\theta = 2\omega v \sin 120^0 = \sqrt{3}\omega v$$

$$a_r = a_r^n = \frac{v^2}{r}$$

$$a_e^n = (2r + r\sin 30^0)\cdot\omega^2 = \frac{5r\omega^2}{2}$$

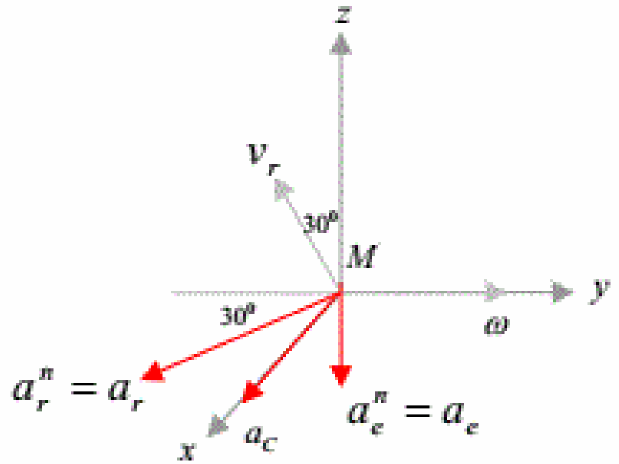
$$a_{ax} = a_C = \sqrt{3}\omega v$$

$$a_{ay} = -a_r \cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}v^2}{2r}$$

$$a_{az} = -a_r \sin 30^0 - a_e^n = -\frac{v^2}{2r} - \frac{5r\omega^2}{2}$$

$$a_a = \sqrt{(a_{ax})^2 + (a_{ay})^2 + (a_{az})^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}\omega v)^2 + (-\frac{\sqrt{3}v^2}{2r})^2 + (-\frac{v^2}{2r} - \frac{5r\omega^2}{2})^2}$$



第一次作业（静力学和运动学）：第8题

$$=\sqrt{3\omega^2 v^2+\frac{3v^4}{4r^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{v^2}{r}+5r\omega^2\right)^2}$$

$$\alpha=\arccos\frac{a_{ax}}{a_a};\quad \beta=\arccos\frac{a_{ay}}{a_a};\quad \gamma=\arccos\frac{a_{az}}{a_a}。$$