西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：高等数学Ⅰ上　　课时：____　考试时间：2021 年 11 月 14 日

一．单项选择题（$3'\times 5=15'$）．1. D; 2. C；3.A; 4. B；5.C；

二．填空题（$3'\times 5=15'$） 1. $y'=\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}f'\left(\sqrt{x}\right)-f\left(\sqrt{x}\right)f'(-x)\right]e^{f(-x)}$；　2. $\frac{1}{2}$；

3. -6；　4. $y(-2)=-\frac{2}{e^2}$；　5. $dy=\frac{1-y}{x+e^y}dx$.

三．1. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-4}{\frac{\sin\pi x}{\pi x}\pi}=-\frac{4}{\pi}$, $1'$；　$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=0$, $2'$；　$x=0$ 为跳跃间断点；$3'$

2. $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=\frac{8}{\pi}$,　$x=-2$ 为可去间断点；　$5'$

3. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$,　$x=1$ 为可去间断点；　$7'$

4. $\lim\limits_{x\to -k}f(x)=\infty,\ k=1,3,4,5,\cdots$　$x=-k,(k=1,3,4,5,\cdots)$ 为无穷间断点；　$9'$

四．1. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}\overset{1'}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}$,　$2'$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{\cos 2x+2x\sin x}}{4x^3}\overset{3'}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}$

$\overset{4'}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+2\cos x+2\cos x-2x\sin x}{12x^2}\overset{5'}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{8\sin 2x-4\sin x-2\sin x-2x\cos x}{24x}\overset{6'}{=}\frac{1}{3}$.　$7'$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$.　$8'$

2. $\ln y=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)\right]$,　$2'$

两边对 x 求导得：$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{-2xe^{-x^2}-\sin\sqrt{5}\sin x}{2\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)}\right]$,　$6'$

所以 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{e^{\sin\frac{1}{x}}\sqrt{e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x}}\left[-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}+\frac{-2xe^{-x^2}-\sin\sqrt{5}\sin x}{2\left(e^{-x^2}+\sin\sqrt{5}\cos x\right)}\right]$.　$8'$

3. $\frac{dy}{dt}=-3+\frac{2t}{1+t^2}$, $1'$；$\frac{dx}{dt}=2+\frac{1}{1+t^2}$, $2'$；$\frac{dy}{dx}=\frac{-3+\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1}{1+t^2}}$，$3'$；$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-1$, $5'$；

$t=0$ 时，$(x,y)=(3,2)$； $6'$;切线方程为：$y-2=-(x-3)$； $7'$；法线方程为：$y-2=(x-3)$; $8'$

4. $f'(x)=-x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(5-x)x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5(2-x)}{3\sqrt[3]{x}}$，$(x\neq 0)$； $2'$ $x=0$ 为不可导点； $3'$

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'<0$， $4'$； 当 $x\in(0,2)$ 时，$f'>0$，$5'$； 当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'<0$； $6'$

所以，极小值 $f(0)=0$ ，$7'$ ；极大值 $f(2)=3\sqrt[3]{4}$. $8'$

5. $y'=-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}$， $1'$ $y''=(x-1)(x-3)\mathrm{e}^{-x}$， $3'$

所以，凹（上凹）区间为：$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ ，$5'$；凸（下凹）区间为：$(1,3)$. $6'$

拐点为：$\left(1,\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$ 和 $\left(3,\frac{10}{\mathrm{e}^3}\right)$. $8'$

6. (1) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=2$, $1'$ ； $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a$, $2'$ ；若函数 $f(x)$ 连续，则 $a=2$, $3'$ ；

(2) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b$, $4'$ ；$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}-2}{x}=2$, $5'$ ；若函数 $f(x)$ 可导，则 $b=2$, $6'$ ；

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}+1}{x^2}, & x<0;\\ 2, & x=0;\\ 2\cos 2x, & x>0.\end{cases} \qquad 8'$$

五. 1. $x_{n+1}>1$ $(n\in N_+)$ ，$1'$ ； $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{1+x_n}\left|x_n-\sqrt{2}\right|$ ， $2'$ ；

所以 $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|<\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left|x_n-\sqrt{2}\right|\overset{3'}{<}\cdots<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n\left|x_1-\sqrt{2}\right|\overset{4'}{<}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n$ ， $5'$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-\sqrt{2}\right)=0$， $6'$ ； $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\sqrt{2}$. $7'$

2. $f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$，得 $f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$， $1'$

$f'(x)-f'(0)=f''(\xi_2)x$, 得 $f'(x)=f''(\xi_2)x$, $2'$ ；因 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导，则 $f(x)$，$f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续，则在 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上必有最大值，设 $M=\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left(\left|f(x)\right|+\left|f'(x)\right|\right)=\left(\left|f(\eta)\right|+\left|f'(\eta)\right|\right)$ ，$3'$；

则 $M=\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)\right|\eta^2+\left|f''(\xi_2)\right|\left|\eta\right|\le M\left(\frac{1}{2}\eta^2+\left|\eta\right|\right)\le\frac{5}{8}M$ ，$4'$ ；故 $M=0$. $5'$

从而 $\exists\delta=\frac{1}{2}$，当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$f(x)\equiv 0$. $6'$