大学物理
University Physics

Xi'an Jiaotong University

高博

gaob@xjtu.edu.cn

2022.3.1

四. 运动学的二类问题

1. 第一类问题　　已知运动学方程，求 $\vec{r}, \Delta\vec{r}, \Delta s, \vec{v}, \vec{a}$

例　已知一质点运动方程 $\vec{r} = 2t\,\vec{i} + (2 - t^2)\,\vec{j}$

求 (1) t =1s 到 t =2s 质点的位移

(2) t =2s 时 $\vec{v}$，$\vec{a}$

(3) 轨迹方程

解 (1) $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$　　$\vec{r}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$　　$\vec{r}_2 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (4-2)\vec{i} + (-2-1)\vec{j} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

(2) $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 2\vec{j} - 2t\,\vec{j}$　　$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -2\vec{j}$

当 t =2s 时　$\vec{v}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j}$，$\vec{a}_2 = -2\vec{j}$

(3) $x = 2t$　　$y = 2 - t^2$　　$y = 2 - \dfrac{x^2}{4}$

2. 第二类问题　　已知加速度和初始条件，求 $\vec{v}$, $\Delta\vec{r}$, Δs

例　已知 $\vec{a}=16\vec{j}$, $t=0$ 时 $\vec{v}(0)=6\vec{i}$,　$\vec{r}(0)=8\vec{k}$

求　$\vec{v}$和运动方程。

解　$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=16\vec{j}$　　$\mathrm{d}\vec{v}=16\mathrm{d}t\,\vec{j}$　　$\displaystyle\int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)}\mathrm{d}\vec{v}=\int_0^t 16\mathrm{d}t\,\vec{j}$

代入初始条件得　$\vec{v}(t)-\vec{v}(0)=16t\,\vec{j}$　　$\vec{v}(t)=6\vec{i}+16t\,\vec{j}$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}(t)$　　$\mathrm{d}\vec{r}=(6\vec{i}+16t\,\vec{j})\mathrm{d}t$

$$\vec{r}(t)-\vec{r}(0)=\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)}\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^t(6\vec{i}+16t\,\vec{j})\mathrm{d}t=6t\,\vec{i}+8t^2\vec{j}$$

代入初始条件　$\vec{r}(0)=8\vec{k}$　　$\vec{r}(t)=6t\,\vec{i}+8t^2\vec{j}+8\vec{k}$

例 质点以速度$v=4+t^2$ m/s 作直线运动，沿质点运动直线作OX轴，并已知 $t=3$s 时，质点位于$x=9$m处，

求 该质点的运动学方程。

解 $\frac{dx}{dt}=v(t)=4+t^2$ $\quad dx=(4+t^2)dt$ $\quad \int_9^x dx=\int_3^t(4+t^2)dt$

$x=4t+\frac{t^3}{3}-12$

例 一质点沿一直线运动，其加速度为$a=-2x$，式中x 的单位为m， a 的单位为 m/s²，设当$x=0$ 时， $v_0=4$ m/s。

求 该质点的速度v 与位置坐标 x 之间的关系。

解 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot v=-2x$ $\quad \int_4^v v\cdot dv=\int_0^x -2x\,dx$

$v^2=-2x^2+16$

例　一艘正在行驶的电艇，在发动机关闭后，有一个与它速度方向相反的加速度，其大小与它的速度平方成正比，即 $a=-kv^2$，式中k为常数，试证 明电艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为$v=v_0\,e^{-kx}$，其中v_0 是发动机关闭时的速度

证　$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot v=-kv^2$$

初始条件　$x=0$　$v=v_0$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^x -k\mathrm{d}x \qquad v=v_0e^{-kx}$$

例 质点在竖直的Oxy平面内作斜抛运动，$t=0$ 时质点在O点，$t=t_1$时质点运动到A点，如图，

$\int_0^{t_1} \upsilon_x \mathrm{d}t$ 表示 从$t=0$到t_1时间内质点位移沿x轴的投影；

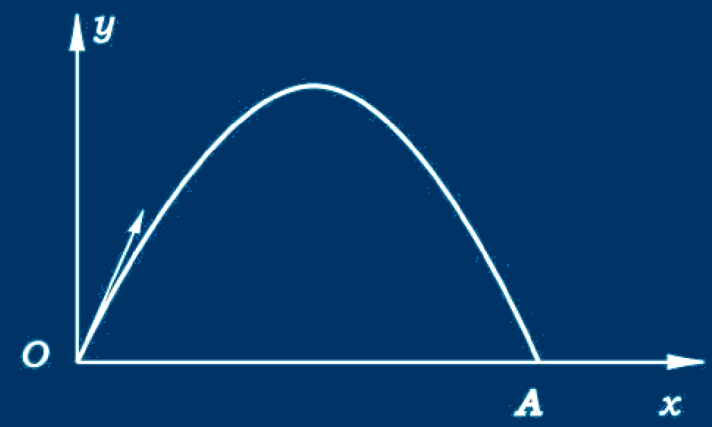
$\int_0^{t_1} \upsilon_y \mathrm{d}t$ 表示从$t=0$到t_1时间内质点位移沿y轴的投影；

$\int_0^{t_1} \upsilon \mathrm{d}t$ 表示从$t=0$到t_1时间内经历的路程；

$\int_0^{A} \mathrm{d}\vec{r}$ 表示从O点运动到A点的过程中质点的位移；

$\int_0^{A} |\mathrm{d}\vec{r}|$ 表示从O点运动到A点的过程中质点经历的路程；

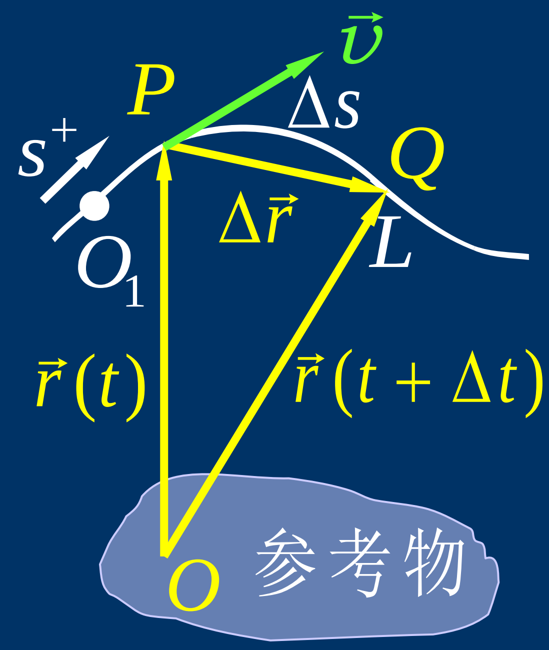
$\int_0^{A} \mathrm{d}r$ 表示从O到A的距离。



§ 1.4 用自然坐标 *Natural Coordinates* 表示平面曲线运动中的速度和加速度

一. 速度 velocity

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = 1$$

方向 $\vec{\tau}$　$\vec{\tau} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$

指向自然坐标正的一侧

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

切线上的投影

大小 $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$　　方向 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$

二. 加速度 Acceleration

$$\vec{\upsilon}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=\upsilon\vec{\tau} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}\right)=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

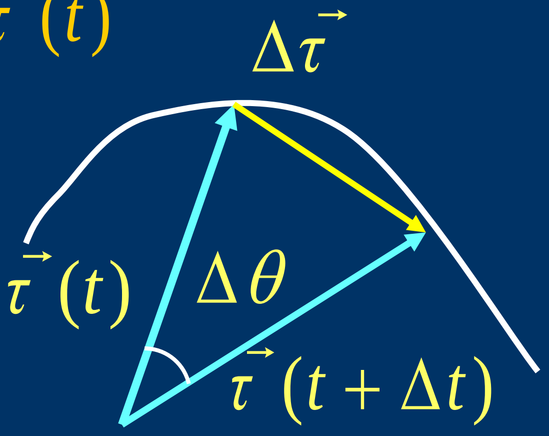
第一项　大小 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$　方向 $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}$　$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}=\vec{a}_\tau$

切向加速度

Tangential acceleration

意义　反映速度大小的变化

第二项 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$　$\Delta\vec{\tau}=\vec{\tau}(t+\Delta t)-\vec{\tau}(t)$



$$\Delta t\to 0,\ \left|\Delta\vec{\tau}\right|=\left|\vec{\tau}(t)\right|\Delta\theta,\ \Delta\vec{\tau}\to\vec{n}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} \Longleftarrow \Delta\vec{\tau}=\Delta\theta\,\vec{n}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{n}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\vec{n}=\frac{1}{\rho}\upsilon\vec{n}$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\upsilon\frac{1}{\rho}\upsilon\vec{n}=\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}=\vec{a}_n$$

法向加速度

Normal acceleration

意义　反映速度方向变化的快慢

$$\vec{a}=a_n\vec{n}+a_\tau\vec{\tau}=\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}+\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\frac{1}{\rho}\vec{n}+\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}$$

对匀速率圆周运动　$\vec{a}_n=a_n\vec{n}=\dfrac{\upsilon^2}{r}\vec{n}$

对平面曲线运动　$s=f(t)\quad \upsilon=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Leftrightarrow a_\tau,a_n,\vec{a}$

例 一汽车在半径R=200m 的圆弧形公路上行驶，其运动学方程为$s=20t-0.2t^2$(SI)．

求 汽车在 t = 1s 时的速度和加速度大小。

解 根据速度和加速度在自然坐标系中的表示形式，有

$$\upsilon=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20-0.4t \qquad \upsilon(1)=19.6(\mathrm{m/s})$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=-0.4 \qquad a_n=\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{(20-0.4t)^2}{R}$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{(-0.4)^2+\left(\frac{(20-0.4t)^2}{R}\right)^2}$$

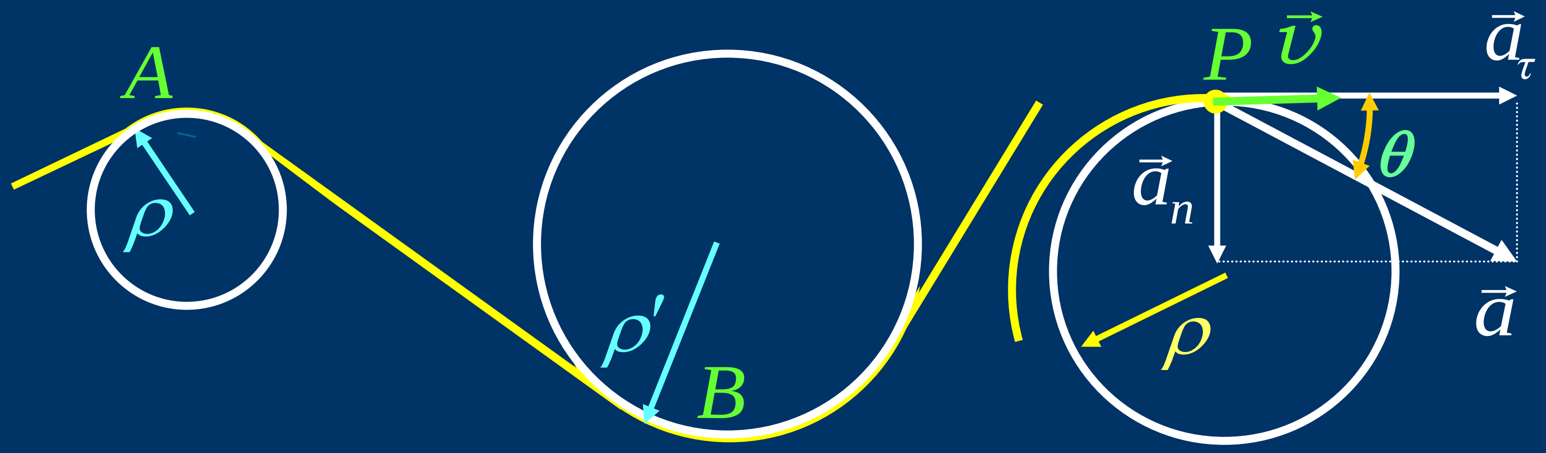
$$a(1)=\sqrt{(-0.4)^2+\left(\frac{(20-0.4\times1)^2}{200}\right)^2}=1.44(\mathrm{m/s^2})$$

讨论 Discuss

(1) 在一般情况下 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\upsilon\vec{\tau})=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\upsilon\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}+\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$

其中ρ为曲率半径，$\vec{n}$的方向指向曲率圆中心

引入曲率圆后，整条曲线就可看成是由许多不同曲率半径的圆弧所构成



$$a=\sqrt{a_\tau^{\ 2}+a_n^{\ 2}},\ \mathrm{tg}\,\theta=\frac{a_n}{a_\tau}$$

(2) 自然坐标系与直角坐标系的关系

Relations between natural coordinates and cartesian coordinates

- 当 $\Delta t \Rightarrow 0$ $\because \mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$

$$|\mathrm{d}\vec{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x}$$

- $\mathrm{d}s = \upsilon\,\mathrm{d}t = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}\,\mathrm{d}t$

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s = \int_0^t \upsilon\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore s = s_0 + \int_0^t \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}\,\mathrm{d}t$$

例 已知质点的运动方程为

$$x = A\cos\omega t,\quad y = A\sin\omega t,\quad z = Bt$$

求 在自然坐标系中任意时刻的速度

解 $\because \mathrm{d}s = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^{\ 2} + \upsilon_z^{\ 2}}\,\mathrm{d}t$

$$= \sqrt{(A\omega\sin\omega t)^2 + (A\omega\cos\omega t)^2 + B^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{A^2\omega^2 + B^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = \sqrt{A^2\omega^2 + B^2}\,\vec{\tau}$$

另一解法: $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$

例 将一根光滑的钢丝弯成一个竖直平面内的曲线，质点可沿钢丝向下滑动。已知质点运动的切向加速度为 $a_\tau = -g\sin\theta$

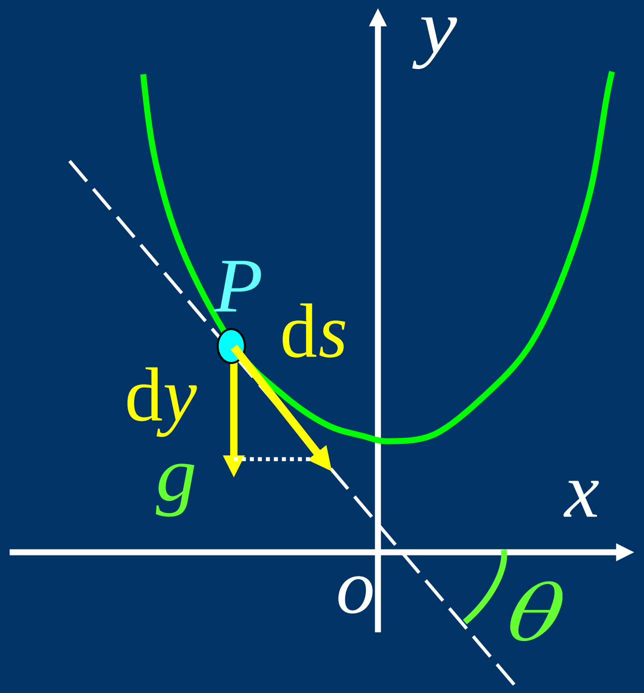
g 为重力加速度，θ 为切向与水平方向的夹角.

求 质点在钢丝上各处的运动速度.

解 由题意可知

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\sin\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

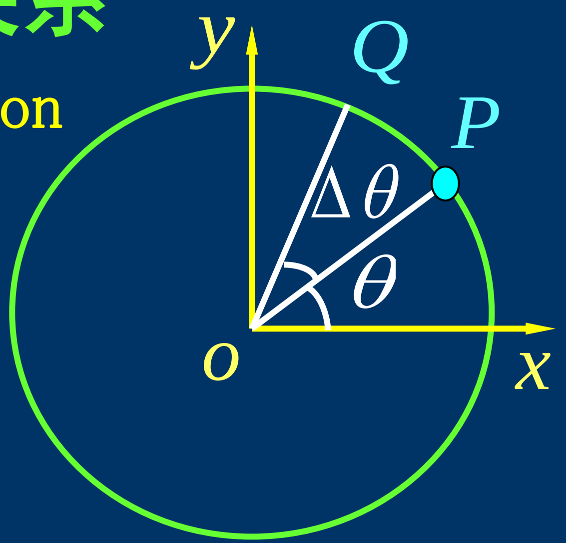
$$v\mathrm{d}v = -g\underline{\sin\theta}\,\mathrm{d}s \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$



从图中分析看出

$$\sin\theta\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}y \qquad \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -\int_{y_0}^{y} g\mathrm{d}y \Longrightarrow v^2 = v_0^{\,2} + 2g(y_0 - y)$$

§ 1.5 圆周运动 Circular motion 的角量描述 角量与线量的关系



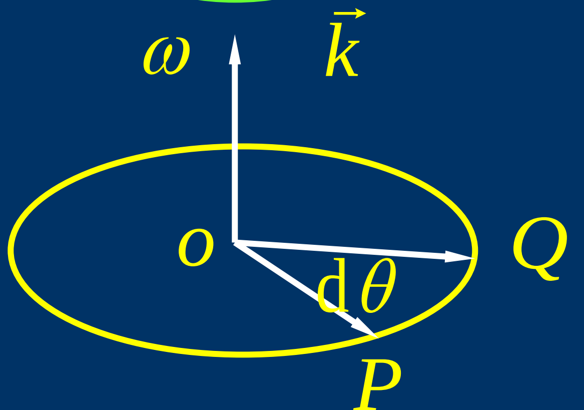
一. 角位置与角位移 Angular position and displacement

$\theta = \theta(t)$ 角位置(运动学方程)

当 $\Delta t \Rightarrow \Delta\theta$

$\Delta\theta$ 为质点圆周运动的角位移

二. 角速度 Angular velocity



质点作圆周运动的角速度为

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{k} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$ 描述质点转动快慢和方向的物理量

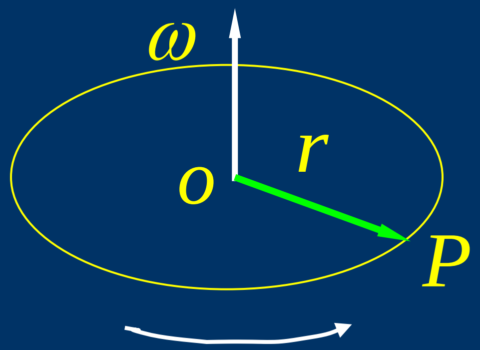
三. 角加速度 Angular acceleration

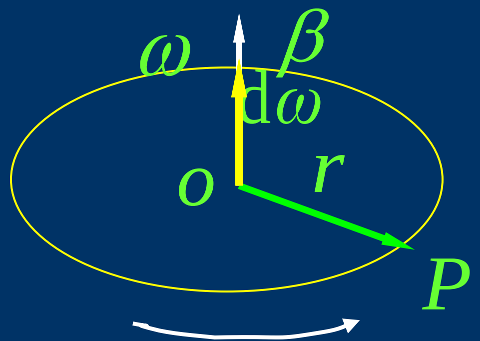
角加速度　角速度对时间的一阶导数

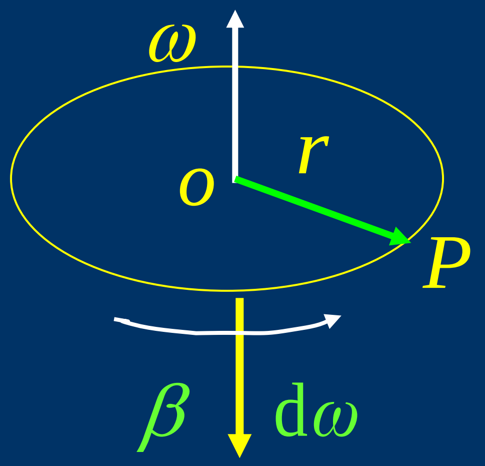
$t:\omega$　　$t+\Delta t:\omega+\Delta\omega$

$$\vec{\beta}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{k}\right)=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

角加速度的方向与 $\mathrm{d}\vec{\omega}$ 的方向相同

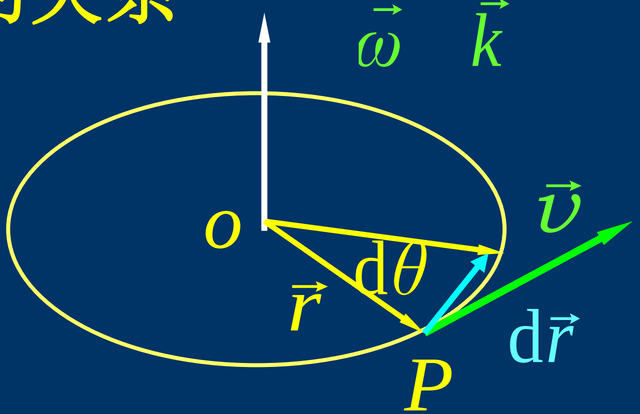






四. 角量与线量的关系

$$|\mathrm{d}\vec{r}|=r\mathrm{d}\theta$$



$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}\theta\,\vec{k}\times\vec{r}$$

- 速度与角速度的矢量关系式

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta\,\vec{k}\times\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{k}\times\vec{r}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

大小 $v=\omega r$（标量式）　方向 $\vec{\omega}\times\vec{r}$

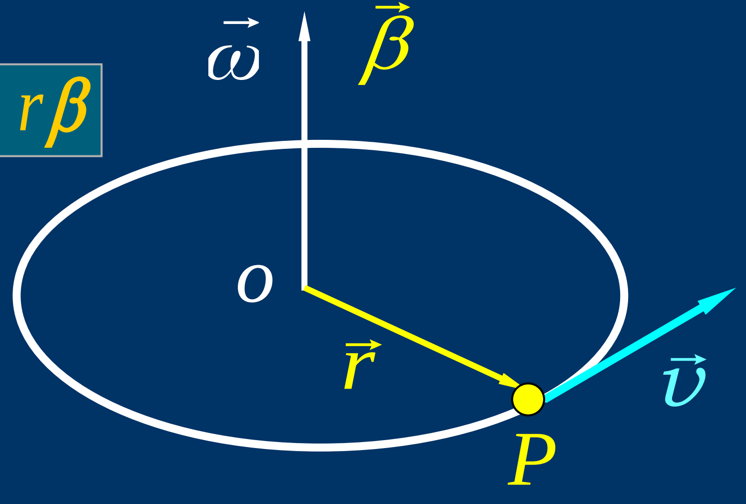
- 加速度与角加速度的矢量关系式

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{\omega}\times\vec{r})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

第一项 $\vec{\beta}\times\vec{r}\Rightarrow\vec{a}_\tau$ 大小 $\boxed{a_\tau=r\beta}$

第二项 $\vec{\omega}\times\vec{v}\Rightarrow\vec{a}_n$

大小 $\boxed{a_n=\omega v=\omega^2 r}$



例 一质点作半径为**0.1m** 的圆周运动，已知运动学方程为

$$\theta = 2 + 4t^3 (\mathrm{rad})$$

求 **(1)** 当t **=2s** 时，质点运动的a_n 和 $\vec{a}$ 以及a_τ的大小

(2) 当θ **=?** 时，质点的加速度与半径成**45°**角？

解 **(1)** 由上述公式可知

$$\because \theta = 2 + 4t^3 \qquad \therefore \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2 \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 24t$$

$$\therefore a_n = r\omega^2 = 230.4(\mathrm{m/s^2}) \qquad a_\tau = r\beta = 4.8(\mathrm{m/s^2})$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 230.5(\mathrm{m/s^2})$$

(2) 设 t' 时刻，质点的加速度与半径成**45°**角，则

$$a_\tau = a_n \qquad r\omega^2 = r\beta$$

$\therefore 144t'^4 = 24t' \Rightarrow t' = 0.55(\mathrm{s}) \quad \therefore \theta = 2 + 4t'^3 = 2.67(\mathrm{rad})$

例 一质点在水平面内以顺时针方向沿半径为**2m** 的圆形轨道运动。此质点的角速度与运动时间的平方成正比，即 $\omega = kt^2$，k 为常数. 已知质点在**2s** 末的线速度为 **32m/s**

求 t **=0.5s** 时质点的线速度和加速度

解 $\because t = 2s \quad \upsilon = 32\mathrm{m/s} \qquad \therefore k = \dfrac{\omega}{t^2} = \dfrac{\upsilon}{Rt^2} = 4s^{-3}$

$\omega = 4t^2$

当 $t = 0.5s \quad \upsilon = R\omega = 4Rt^2$

$$\upsilon = 4Rt^2 = 2.0(\mathrm{m/s}) \qquad a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = 8Rt = 8.0(\mathrm{m/s^2})$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = 2.0(\mathrm{m/s^2}) \qquad \therefore a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2} = 8.25(\mathrm{m/s^2})$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{a_n}{a_\tau}\right) = 13.6^\circ$$

§ 1.6 不同参考系中的速度和加速度变换定理简介
Galileo’s relativity principle

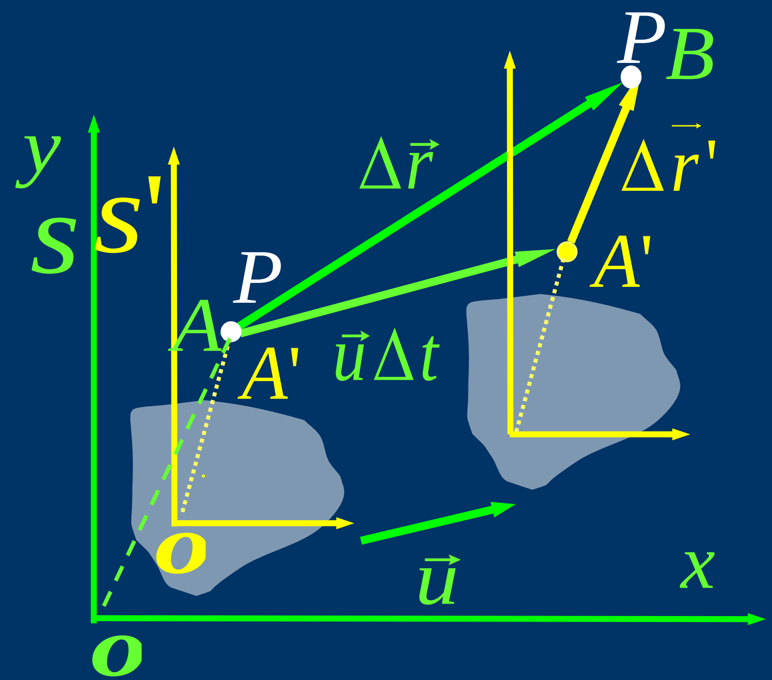
一. 基本概念

一个动点 P（研究对象）

二个参照系

绝对参照系s ，相对参照系s'

三种运动 绝对运动、相对运动、牵连运动



- s' 系相对于s 系的位移：$\vec{u}\Delta t$ — 牵连位移
- B 点相对于s' 系的位移：$\Delta\vec{r}'$ — 相对位移
- B 点相对于s 系的位移：$\Delta\vec{r}$ — 绝对位移

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \vec{u}\Delta t}$$

二. 速度变换定理　加速度变换定理

1. 速度变换

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t'}\frac{\Delta t'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{u}\Delta t}{\Delta t} \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t} \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t'}{\Delta t} = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t'} + \vec{u} \qquad \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad \vec{v}_{绝对} = \vec{v}_{相对} + \vec{v}_{牵连}$$

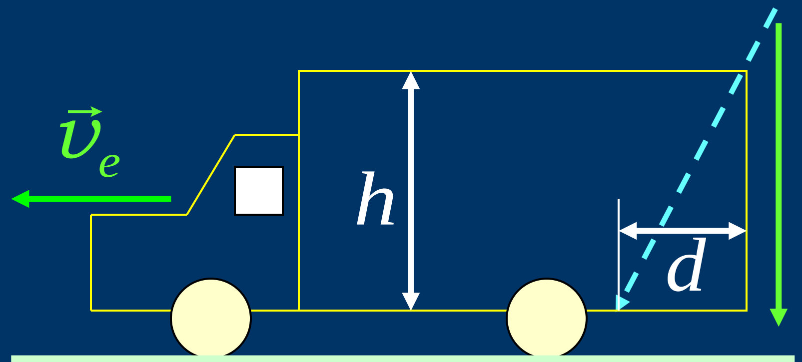
$$v_{ax} = v_{rx} + v_{ex} \qquad v_{ay} = v_{ry} + v_{ey} \qquad v_{az} = v_{rz} + v_{ez}$$

2. 加速度变换

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{绝对}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{相对}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{牵连}}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{\vec{a}_{绝对} = \vec{a}_{相对} + \vec{a}_{牵连}}$$

例 一个带篷子的卡车，篷高为h=2m，当它停在马路边时，雨滴可落入车内达 d=1m，而当它以15km/h 的速率运动时，雨滴恰好不能落入车中。

求 雨滴的速度矢量。



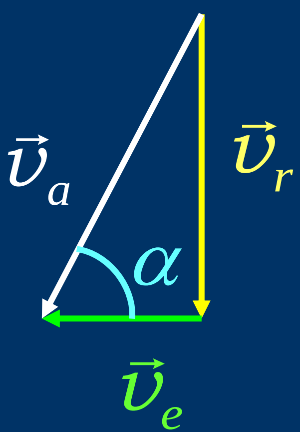
解 根据速度变换定理

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

$$\vec{v}_{雨.地} = \vec{v}_{雨.车} + \vec{v}_{车.地}$$

画出矢量图

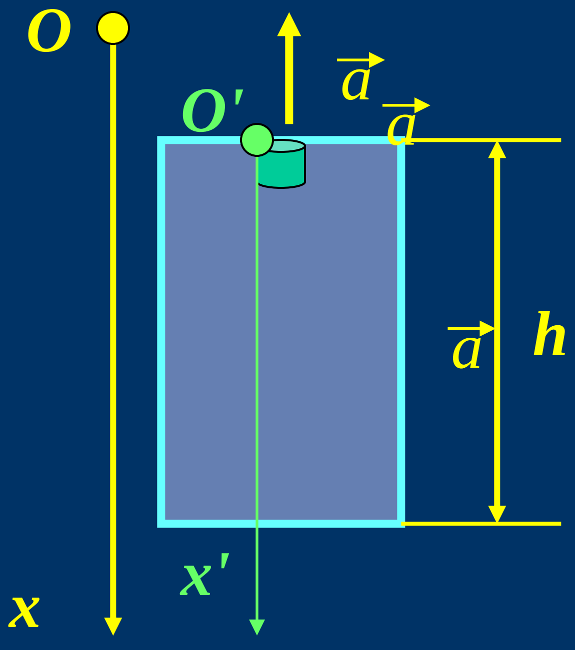
$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{h}{d}\right) = 63.4^\circ$$



$$\left|\vec{v}_a\right| = \left|\frac{\vec{v}_e}{\cos\alpha}\right| = \frac{15}{\cos\alpha} = 33.5\mathrm{km/h} = 9.3(\mathrm{m/s})$$

例 升降机以加速度 1.22 m/s² 上升，有一螺母自升降机的天花板松落，天花板与升降机的底板相距 2.74m 。

求 螺母自天花板落到底板所需的时间.



解 取螺母刚松落为计时零点.

动点为螺母, 取二个坐标系如图

三种加速度为:

$$\vec{a}_a = g\vec{i}, \qquad \vec{a}_e = -a\vec{i}, \qquad \vec{a}_r = ?$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r, \Longrightarrow \vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e$$

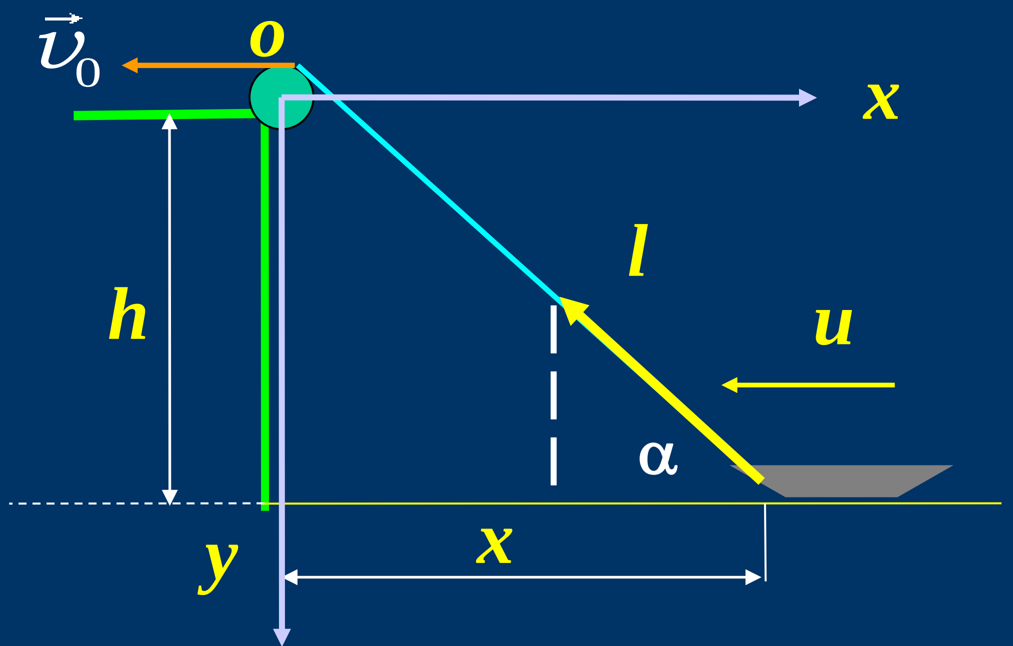
$$a_r = a_a - a_e = g + a$$

$$h = \frac{1}{2}a_r t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2\times 2.74}{9.80+1.22}} = 0.7(\mathrm{s})$$

例 如图示 求小船靠岸过程中的 u, a

解：答案:

$u = \upsilon_0 \cos\alpha$ **?**



方法1 建立运动学方程

答案1：直角坐标系

$$t: x = \sqrt{l^2 - h^2}$$

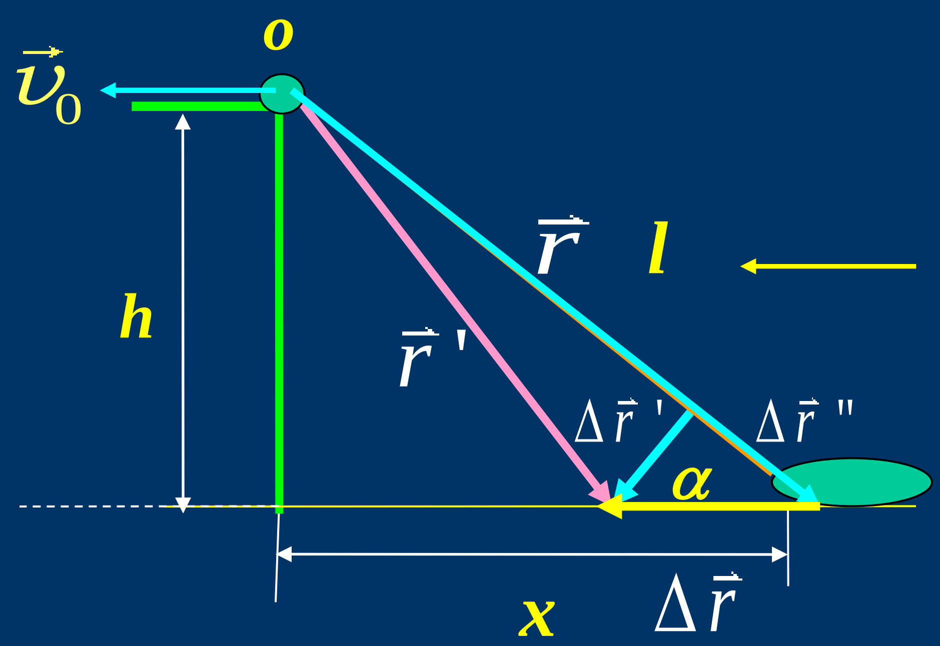
$$l = l(t), y = h = c$$ —— 运动学方程

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}\frac{dl}{dt} = \frac{l}{x}\upsilon_0 = \frac{\upsilon_0}{\cos\alpha} = u \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \ldots\ldots$$

方法2　矢量分析

解：以坐标圆点做小船的位矢，确定位移，再根据速度定义求解



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' - \Delta\vec{r}\,''$$

答案2:

$$u = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}\,' - \Delta\vec{r}\,''}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}\,''|}{\cos\alpha}\frac{1}{\Delta t} = \frac{v_0}{\cos\alpha}$$

$$u = v_0\cos\alpha$$

- 三个概念

质点、参考系、坐标系

- 四个物理量

位矢、位移、速度、加速度

- 三个坐标系

直角坐标系、自然坐标系、极坐标系

- 三种运动

直线运动、曲线运动、相对运动