第八章　线性变换

8.1 线性变换及其运算

董荣

数学与统计学院

作业：

习题8.1

(A) 1, 3, 5, 6, 8, 11

主要内容

1 线性变换的定义及其性质

2 线性变换的核与值域

3 线性变换的运算

线性变换的定义

定义8.1.1（线性变换）

设$T:V\to W$是从线性空间V到W的一个映射. 如果$\forall \alpha,\beta\in V,k\in F$,恒有

(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$;

(2) $T(k\alpha)=kT(\alpha)$;

则称T是V到W的一个线性变换.

概念对比： 定义5.1.5 （同构映射）

设V_1,V_2是数域F上两个线性空间，f为V_1到V_2的一个映射，如果

(1) f是V_1到V_2的双射(既是满射又是单射)

(2) $\forall\ \alpha,\beta\in V_1$, 恒有$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$

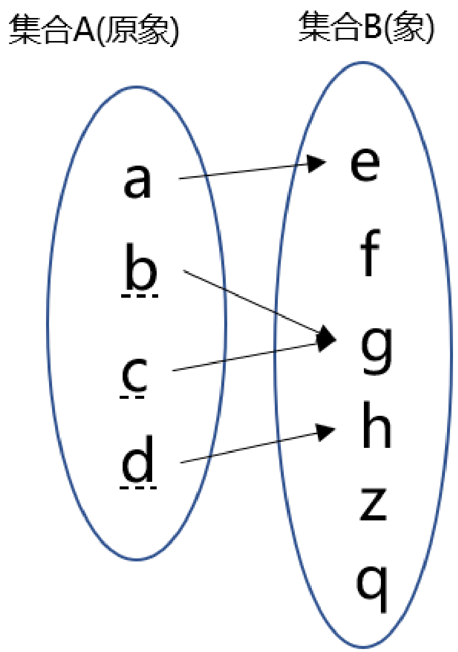
(3) $\forall\ \alpha\in V_1,k\in F$, 恒有$f(k\alpha)=kf(\alpha)$

则称映射f是同构映射。

设f是集合A到集合B的一个映射，

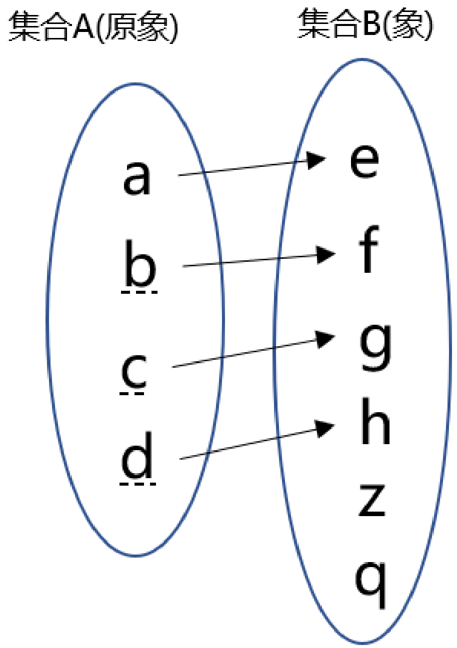
- 如果A中不同元素在f下的像也不同，则称f为**单射**；
- 如果B中的每个元素都是A中对应元素在f下的像，则称f为**满射**；
- 如果f既是满射又是单射，则称f为**双射**或**一一对应的映射**。

映射



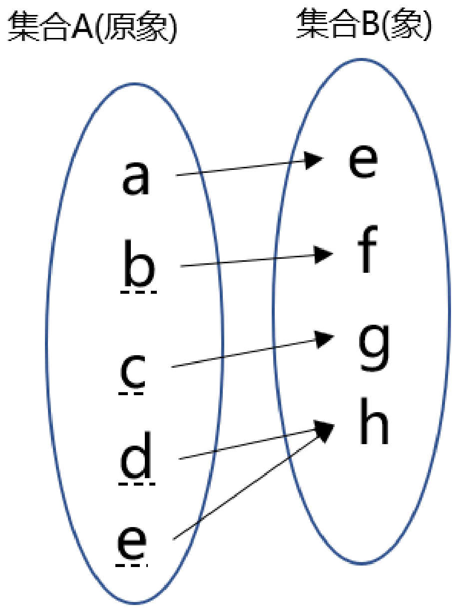
可以是1对1，多对1都行

单射



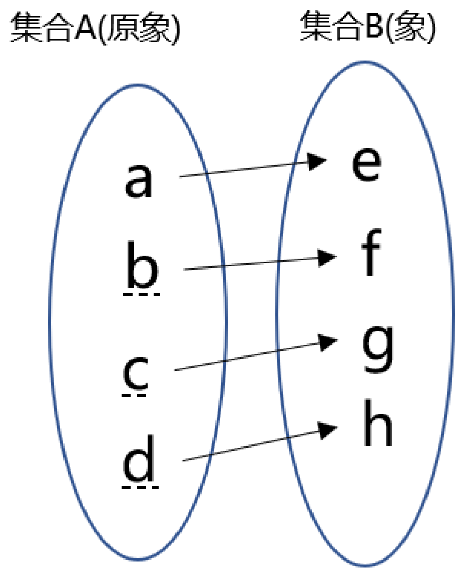
只能是1对1

满射



B中的所有元素都有原象，不存在没有原象的元素
可以是1对1，也可以是多对1

双射



只能是1对1，即是单射也是满射

线性变换的定义

定义8.1.1（线性变换）

设$T:V\to W$是从线性空间V到W的一个映射. 如果$\forall \alpha,\beta\in V,k\in F$,恒有

(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$;

(2) $T(k\alpha)=kT(\alpha)$;

则称T是V到W的一个线性变换.

V到W的线性变换的全体记为$L(V,W)$.

V到自身的线性变换的全体记为$L(V)$. 如果$T\in L(V)$,则称T是V上的线性算子.

注1：定义中的条件(1),(2)与如下等式等价：

$$\forall \alpha_1,\alpha_2\in V,\forall k_1,k_2\in F,\text{有}\quad T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2).$$

注2：如果两个线性空间同构，则它们之间的同构映射是线性变换.
反之不真，因线性变换未必是双射.

线性变换的定义

定义8.1.1（线性变换）

设$T:V\to W$是从线性空间V到W的一个映射. 如果$\forall\alpha,\beta\in V,k\in F$,恒有

(1) $T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$;

(2) $T(k\alpha)=kT(\alpha)$;

则称T是V到W的一个线性变换.

例1：设A是$m\times n$实矩阵，定义$T:R^n\to R^m$为

$$T(x)=Ax \qquad \forall x\in R^n.$$

由定义知$T\in L(R^n,R^m)$.

例2：线性空间V上的恒等变换I 是线性算子：

$$\forall\alpha\in V,\ I(\alpha)=\alpha.$$

例3： 设k是数域F中的一个数，定义T：$V \to V$为

$$T(\alpha) = k\alpha \qquad \forall \alpha \in V.$$

由定义知$T \in L(V)$,称T 为数乘变换.

例4： 定义T：$V \to W$为

$$\forall \alpha \in V, \qquad \boldsymbol{T}(\alpha) = 0.$$

由定义知$T \in L(V, W)$,称T为零变换,记为O.

例5： 设$e_1,\ldots,e_n$是线性空间V的一个基，对于$\alpha \in V$，$\alpha = k_1e_1 + \ldots + k_ne_n$，

定义$T: V \to F^n$为

$$T(\alpha) = (k_1,\ldots,k_n)^T,$$

由定义知$T \in L(V, F^n)$,称为坐标映射，是同构映射.

线性变换的基本性质

定理 8.1.1（基本性质） 设$T \in L(V,W)$,则

(1) $T(0)=0$;

(2) $T(-\alpha)=-T(\alpha)$;

(3) $T(k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r)=k_1T(\alpha_1)+\ldots+k_rT(\alpha_r)$;

(4) T 把V 中线性相关的向量组映射成为W 中线性相关的向量组;

证： 仅证(4)

设$\alpha_1,\ldots,\alpha_r \in V$ 线性相关，则有

$k_1,\ldots,k_r$不全为零，使得$k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=0$,

$$0=T(0)=T(k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r)=k_1T(\alpha_1)+\ldots+k_rT(\alpha_r)$$

所以$T(\alpha_1),\ldots,T(\alpha_r)$是$W$的线性相关组.

注意：

线性变换可能把无关组映射成为相关组.

线性变换的本质特征是保持线性运算. 由此可知:

线性变换完全由它在空间的基上的作用确定.

设$e_1,\dots,e_n$是线性空间V的一个基，对于$\alpha\in V$，$\alpha=k_1e_1+\dots+k_ne_n$，$T\in L(V,W)$,则有

$$T(\alpha)=k_1T(e_1)+\dots+k_nT(e_n)$$

由此可见,只要规定了基中每个向量在T作用下的像，也就规定了线性变换T. 因此，T由$T(e_1),\dots,T(e_n)$决定.

设$T,S\in L(V,W)$,如果$\forall\alpha\in V$,均有$T(\alpha)=S(\alpha)$,则称**线性变换T与S相等**，记为$T=S$

$$T=S\Leftrightarrow T(e_i)=S(e_i)\qquad (i=1,2,\dots n)$$

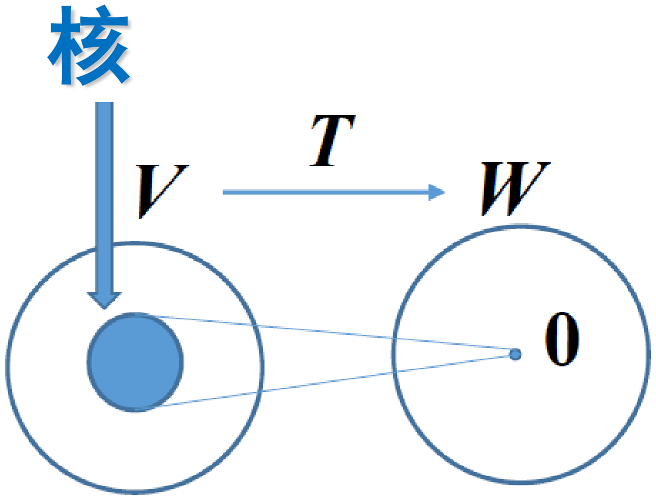
主要内容

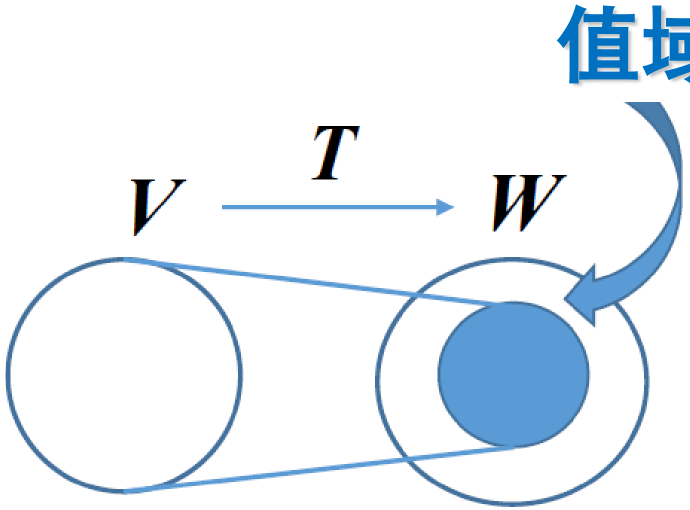
线性变换的核与值域

定义8.1.2（核与值域）

设$T \in L(V,W)$,则称V的子集$\{\alpha \in V \mid T(\alpha)=0\}$为$T$的核或零空间，记为$\ker(T)$或$T^{-1}(0)$, $null(T)$.

称W的子集$\{T(\alpha) \mid \alpha \in V\}$为$T$的值域或像空间，记为$R(T)$或$T(V)$.





例6： 设T 是R^3 到oxy 平面的正交射影：

$$T(x,y,z)^T = (x,y,0)^T, (x,y,z)^T \in R^3$$

则 $\ker(T)$就是z 轴，$R(T)$就是oxy平面.

例7： 设A是$m\times n$ 实矩阵，$T(x)=Ax(\forall x\in R^n)$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1a_{11}+x_2a_{12} \\ x_1a_{21}+x_2a_{22} \end{bmatrix}$$

则$\ker(T)$就是$Ax=0$ 的解空间，记为$N(A)$;

$R(T)$就是A的列向量生成的线性空间(列空间)，记为$R(A)$.

$$\dim(N(A))+\dim(R(A)) = n-r(A)+r(A) = \dim(R^n).$$

两例中, $\ker(T)$ 和$R(T)$ 都是相应空间的子空间,

而且$\dim(\ker(T))+\dim(R(T))$ 都等于定义域的维数.

定理8.1.2 设$T\in L(V,W)$，则

(1) $\ker(T)$是 V 的子空间；

(2) $R(T)$是 W 的子空间；

证： (1)只要证明$\ker(T)$非空且对V的线性运算封闭.

因为$T(0)=0$，故$0\in\ker(T)$，$\ker(T)$ 非空.

$\forall\alpha,\beta\in\ker(T),k,l\in F$，因为$T(k\alpha+l\beta)=kT(\alpha)+lT(\beta)=0+0=0$,

所以，$k\alpha+l\beta\in\ker(T),\ker(T)$是$V$的子空间.

(2)类似可证，$R(T)$是W 的子空间.

称$\ker(T)$的维数为T 的**零度**，记为**nullity(T)**；

称$R(T)$的维数为T 的**秩**，记为**rank(T)**，

即 $\text{nullity}(T)=\dim(\ker(T))$，$\text{rank}(T)=\dim(R(T))$.

线性变换的基本定理

定理8.1.3（秩+零度定理）

设$T \in L(V,W)$, $\dim(V)=n$, 则 $\text{nullity}(T)+\text{rank}(T)=n$

证： 设$1 \le \text{nullity}(T)=r<n$. 取$\ker(T)$的基$e_1,\dots,e_r$,

将它扩充成V的基：$e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n$,

如果能证明$T(e_{r+1}),\dots,T(e_n)$是$R(T)$的基，则$\text{rank}(T)=\dim(R(T))=n-r$

从而有$\text{nullity}(T)+\text{rank}(T)=r+n-r=n$.

对$\forall \alpha \in V$，$\alpha=c_1e_1+\dots+c_re_r+c_{r+1}e_{r+1}+\dots+c_ne_n$,

有$T(\alpha)=c_{r+1}T(e_{r+1})+\dots+c_nT(e_n)$,所以，$R(T)$由$T(e_{r+1}),\dots,T(e_n)$生成.

下面证$T(e_{r+1}),\dots,T(e_n)$线性无关.

线性变换的基本定理

定理8.1.3（秩+零度定理）

设$T \in L(V,W)$, $\dim(V) = n$, 则 $\quad \text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = n$

证: 下面证$T(e_{r+1}), \ldots, T(e_n)$线性无关.

设$k_{r+1}T(e_{r+1}) + \ldots + k_n T(e_n) = 0$,则有$T(k_{r+1}e_{r+1} + \ldots + k_n e_n) = 0$

所以$k_{r+1}e_{r+1} + \ldots + k_n e_n \in \ker(T)$,从而，存在$k_1, \ldots, k_r$使得

$k_{r+1}e_{r+1} + \ldots + k_n e_n = k_1 e_1 + \ldots + k_r e_r$

又$e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_n$是$V$的基，线性无关，所以$k_1, \ldots, k_r, \ldots, k_n$均为零

从而$T(e_{r+1}), \ldots, T(e_n)$线性无关，所以$T(e_{r+1}), \ldots, T(e_n)$是$R(T)$的基.

线性变换是单射的等价条件

定理 8.1.4 设$T \in L(V,W)$,则下列条件等价

(1) T是单射(即$T(\alpha)=T(\beta) \Rightarrow \alpha=\beta$);

(2) $\ker(T)=\{0\}$;

(3) T把V中线性无关向量组映射成为W中线性无关向量组.

证: (1) $\Rightarrow$ (2)设T是单射，任取$\alpha \in \ker(T)$, 则$T(\alpha)=0$

又$T(0)=0$，由单射定义：$\alpha=0$, 所以$\ker(T)=\{0\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$是V中任一线性无关组，

$$k_1T(\alpha_1)+\ldots+k_rT(\alpha_r)=0 \Rightarrow T(k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r)=0$$

又$\ker(T)=\{0\}$,所以$k_1\alpha_1+\ldots+k_r\alpha_r=0$.而$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性无关，所以$k_1=\ldots=k_r=0$

故$T(\alpha_1),\ldots,T(\alpha_r)$线性无关.

线性变换是单射的等价条件

定理 8.1.4 设$T \in L(V,W)$,则下列条件等价

(1) T是单射(即$T(\alpha)=T(\beta)\Rightarrow \alpha=\beta$); (2) $\ker(T)=\{0\}$;

(3) T把V中线性无关向量组映射成为W中线性无关向量组.

证: (3) $\Rightarrow$ (1) 若$\alpha,\beta \in V,\alpha \neq \beta$,则$\alpha-\beta \neq 0$, 即$\alpha-\beta$线性无关，由(3)知

$T(\alpha-\beta)$线性无关 $\Rightarrow T(\alpha-\beta)\neq 0 \Rightarrow T(\alpha)-T(\beta)\neq 0 \Rightarrow T(\alpha)\neq T(\beta) \Rightarrow T$是单射.

定理 8.1.5 设$T \in L(V,W),\dim(V)=n$, 则

$$T\text{是单射} \Leftrightarrow (4)\ \operatorname{rank}(T)=n.$$

证: $\operatorname{nullity}(T)+\operatorname{rank}(T)=\dim(V)=n$,

(4) $\Rightarrow$ (2) $\operatorname{rank}(T)=n \Rightarrow \operatorname{nullity}(T)=0 \Rightarrow \ker(T)=\{0\}$.

(2) $\Rightarrow$ (4) $\ker(T)=\{0\} \Rightarrow \operatorname{nullity}(T)=0 \Rightarrow \operatorname{rank}(T)=n$.

主要内容

线性变换的乘积

定义 8.1.3（映射的乘积）

设 $T_2:U\to V, T_1:V\to W$ 是两个映射，定义 $T_1T_2:U\to W$ 为 $T_1T_2(\alpha)=T_1(T_2(\alpha)),\forall\alpha\in U$，称 U 到 W 的映射 T_1T_2 为 T_1 与 T_2 的**乘积**（或**复合**）.

定理 8.1.6 若 T_1,T_2 都是线性变换，则映射乘积 T_1T_2 也为线性变换。

注1 映射的乘积满足**结合律**：$(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)$.

注2 设 T 是 V 上的线性算子，则可以定义 T 的**幂**：

$$T^0=I,T^k=TT^{k-1}(k=1,2,\ldots)\qquad T^{m+n}=T^mT^n,(T^m)^n=T^{mn},$$

n,m 为非负整数.

可逆线性变换

定义 8.1.4（可逆映射）

设$T:V\to W$,若存在映射$S:W\to V$,使得

$$TS=I_W,ST=I_V$$

则称T为**可逆映射**，并称S为T的**逆映射**，记为T^{-1}.

如果线性变换T是可逆映射，则称T是**可逆线性变换**.

注: T和T^{-1}互为逆映射，且$(T^{-1})^{-1}=T$.

定理 8.1.7 若$T:V\to W$是可逆线性变换，则T^{-1}也是线性变换.

证: 设$\alpha,\beta\in W$,

$$\begin{aligned}T^{-1}(\alpha+\beta)&=T^{-1}[(TT^{-1})\alpha+(TT^{-1})\beta]=T^{-1}[T(T^{-1}(\alpha))+T(T^{-1}(\beta))]\\&=T^{-1}[T(T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta))]=T^{-1}T(T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta))\\&=I_V(T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta))=T^{-1}(\alpha)+T^{-1}(\beta)\end{aligned}$$

同理可证$T^{-1}(k\alpha)=kT^{-1}(\alpha)$，所以$T^{-1}\in L(W,V)$.