西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第二章 矩阵

第四节：初等变换与初等矩阵

董荣

数学与统计学院

作业

习题2.4

(A) 1， 3(2)， 6， 9， 10

注：这次作业先不做，下次讲完后再做

回顾

可逆矩阵求逆的方法：

若A可逆，则其逆矩阵 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^{*}$,

其中A^{*}是A的伴随矩阵：

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

代数余子式
(n-1阶)

有没有一种更简单的矩阵求逆方法呢？

本节课教学内容

1 初等变换与初等矩阵的概念

2 初等变换与初等矩阵的关系

3 阶梯形矩阵

1 初等变换与初等矩阵的概念

定义1 (初等行变换) 对矩阵施行的下列3种变换称为初等行变换:

(1) 交换第i行与第j行的位置(记为$r_i \leftrightarrow r_j$)

(2) 用非零数k乘矩阵的第i行(记为kr_i)

(3) 把矩阵的第i行的k倍加到第j行上去(记为r_j+kr_i)

例如

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}=B$$

1 初等变换与初等矩阵的概念

定义2 (初等列变换) 对矩阵施行的下列3种变换称为初等列变换:

(1) 交换第i列与第j列的位置(记为$c_i \leftrightarrow c_j$)

(2) 用非零数k乘矩阵的第i列(记为kc_i)

(3) 把矩阵的第i列的k倍加到第j列上去(记为$c_j + kc_i$)

例如

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$$

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

1 初等变换与初等矩阵的概念

定义3 (矩阵等价)如果矩阵A经过有限次初等行(列)变换变成矩阵B，则称矩阵A与B行(列)等价.

矩阵行等价和矩阵列等价统称为矩阵等价，记作 $A \cong B$.

矩阵等价关系具有下列性质：

(1) 自反性： $A \cong A$

(2) 对称性： $if \quad A \cong B \Rightarrow B \cong A$

(3) 传递性： $if \quad A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$

$$A \xrightarrow{r_j + kr_i} B$$

$$B \xrightarrow{r_j - kr_i} A$$

1 初等变换与初等矩阵的概念

定义4 (初等矩阵) 对单位矩阵只作1次初等变换所得到的矩阵，称为初等矩阵.

3种初等变换对应3种初等矩阵.

(1) 互换单位矩阵I的第i行(列)与第j行(列)得初等矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\downarrow r_1 \leftrightarrow r_3$$

$$\begin{array}{c} \\ P(i,j) = \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 第i列 & 第j列 \end{array}$$

例如 $P(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

容易验证 $P(i,j)\,P(i,j)=I$

$P(i,j)$可逆, 逆矩阵为$P(i,j)$

↓

同型初等矩阵

1 初等变换与初等矩阵的概念

(2) 用非零数k乘单位矩阵I的第i行(或第i列)得初等矩阵:

$$P(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ 第i列 \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_3}$$

例如 $P(3(-2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

容易验证 $P(i(k))\,P(i(1/k)) = E$

$P(i(k))$可逆, 逆矩阵为$P(i(1/k))$

同型初等矩阵

1 初等变换与初等矩阵的概念

(3) 把单位矩阵I的第i行的k倍加到第j行上去（或把I的第j列的k倍加到第i列上去）得初等矩阵:

$$
P(i(k),j)=\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & \vdots & \ddots & & & \\
 & & k & \cdots & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 第i列 & & 第j列 & & \end{array} &
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_3}
$$

例如 $P(3(-2),2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

容易验证 $P(i(k),j)\,P(i(-k),j)=E$

$P(i(k),j)$可逆, 逆矩阵为$P(i(-k),j)$

同型初等矩阵

本节课教学内容

1 初等变换与初等矩阵的概念

2 初等变换与初等矩阵的关系

3 阶梯形矩阵

2 初等变换与初等矩阵的关系

初等变换与初等矩阵有什么关系呢？

例 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，求$P(1,2)A$, $AP(2(k))$, $P(3(k),2)A$.

解

$$P(1,2)A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AP(2(k))=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2 初等变换与初等矩阵的关系

初等变换与初等矩阵有什么关系呢?

例1 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,求$P(1,2)A, AP(2(k)), P(3(k),2)A$.

$$P(3(k),2)A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2 初等变换与初等矩阵的关系

定理1 (初等变换与初等矩阵的关系)

对矩阵A施行一次初等行变换，相当于对A左乘一个相应的初等矩阵；对矩阵A施行一次初等列变换，相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

用矩阵乘法表示初等行变换	用矩阵乘法表示初等列变换
$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$,则$B = P(i,j)A$	$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B$,则$B = AP(i,j)$
$A \xrightarrow{kr_i} B$,则$B = P(i(k))A$	$A \xrightarrow{kc_i} B$,则$B = AP(i(k))$
$A \xrightarrow{r_j + kr_i} B$,则$B = P(i(k),j)A$	$A \xrightarrow{c_i + kc_j} B$,则$B = AP(i(k),j)$

2 初等变换与初等矩阵的关系

定理1 (初等变换与初等矩阵的关系)

对矩阵A施行一次初等行变换，相当于对A左乘一个相应的初等矩阵；对矩阵A施行一次初等列变换，相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

A与B行等价 $\Leftrightarrow$ 存在初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_s$使$P_s\ldots P_2P_1A=B$.

若令$P=P_s\ldots P_2P_1$，则有

$$PA=B,$$

其中P为可逆矩阵.

2 初等变换与初等矩阵的关系

定理1 (初等变换与初等矩阵的关系)

对矩阵A施行一次初等行变换，相当于对A左乘一个相应的初等矩阵；对矩阵A施行一次初等列变换，相当于对A右乘一个相应的初等矩阵.

A与B列等价 $\Leftrightarrow$ 存在初等矩阵$Q_1,Q_2,\ldots,Q_t$使$AQ_1Q_2\ldots Q_t=B$.

若令$Q=Q_1Q_2\ldots Q_t$，则有

$$AQ=B,$$

其中Q为可逆矩阵.

2 初等变换与初等矩阵的关系

A与B**等价** $\Longleftrightarrow$ 存在初等矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_s, Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$使 $P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B$.

若令$P = P_s \cdots P_2 P_1$, $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$，则有

$$PAQ = B,$$

其中P, Q为可逆矩阵.

当矩阵A与B等价时，必存在可逆矩阵P, Q使$PAQ=B$，其中P, Q可以表示成若干初等矩阵之积.

思考：反之, 若存在可逆矩阵P, Q使$PAQ=B$, A与B一定等价吗？

是否任何可逆矩阵都能表示成若干初等矩阵之积的形式？

例 设A是3阶方阵，将A的第1行与第3行对换得B，再把B的第2行加到第3行得C，求满足$PA=C$的可逆矩阵P.

解 $P(1,3)A=B,\quad P(1,3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$P(2(1),3)B=C,\quad P(2(1),3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad P(2(1),3)P(1,3)A=C,$$

故$P=P(2(1),3)P(1,3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

本节课教学内容

1 初等变换与初等矩阵的概念

2 初等变换与初等矩阵的关系

3 阶梯形矩阵

3 阶梯形矩阵

定义5 (阶梯形矩阵) 称满足下列两个条件的矩阵为**阶梯形矩阵**：

1) 若有零行(元素全为零的行)，则零行都位于**底部**；
2) 各非零行的首非零元素都位于**前一行**首非零元的**右边**.

例 判断下列矩阵是否为阶梯型矩阵.

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

√ √ ×

3 阶梯形矩阵

定义6 (简化行阶梯形矩阵) 称满足下列条件的矩阵为**简化行阶梯形矩阵(行最简形)**.

1)阶梯形矩阵；

2)各非零行的首非零元均为1；

3)首非零元所在列其它元素均为0.

例 下面三个矩阵都是简化行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 阶梯形矩阵

定理2 对于任一非零矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$都可通过有限次初等**行**变换把它**化成阶梯形矩阵**，进一步可**化为简化行阶梯型矩阵(行最简形)**.

例 用初等行变换将矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

化成简化行阶梯形矩阵。

3 阶梯形矩阵

解

$$A=\begin{pmatrix}0&4&-12&2\\3&-1&-6&-2\\-1&-1&6&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-1&-1&6&2\\3&-1&-6&-2\\0&4&-12&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+3r_1}\begin{pmatrix}-1&-1&6&2\\0&-4&12&4\\0&4&-12&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}-1&-1&6&2\\0&-4&12&4\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}r_3]{-r_1,\ -\frac{1}{4}r_2,}\begin{pmatrix}1&1&-6&-2\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-3&-1\\0&1&-3&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3,}\begin{pmatrix}1&0&-3&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

简化行阶梯形矩阵
(行最简形)

3 阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 & 2 \\ 3 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

简化行阶梯形矩阵(行最简形)

继续进行初等列变换：

$$\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4+3c_2]{c_4+3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

非零矩阵经初等变换可化为左上角是单位阵、其余元素都是0的矩阵，称为A在等价意义下的标准形。

3 阶梯形矩阵

回顾:定义6 称满足下列条件的矩阵为简化行阶梯形矩阵(行最简形).

1)阶梯形矩阵;

2)各非零行的首非零元均为1;

3)首非零元所在列其它元素均为0.

例 设B是可逆矩阵A经有限次初等行变换所化成的简化行阶梯形矩阵，证明$B=I$.

证 $B=PA$, $\det(P)\neq 0, \det(A)\neq 0$ ⇒ $\det(B)\neq 0$ ⇒ B无零行

B { 阶梯形&方阵&无零行 ⇒ 首非零元素全部位于对角线上; 首非零元均为1; 首非零元所在列其它元素均为0 } ⇒ B为单位阵

3 阶梯形矩阵

定理3 设A为n阶方阵，则下列条件**相互等价**:

(1) A是可逆矩阵;

(2) A可经有限次初等行变换化成同阶单位矩阵I (即A行等价于同阶单位阵);

(3) A可表示成若干个初等矩阵之积.

证 采用循环证法

(1)→(2): 前面例子已经证明了，一个可逆矩阵经过有限次初等行变换化成的行最简形就是单位阵

利用定理3可得到一种较为简单的求逆矩阵的方法.

(2)→(3): 存在初等矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_m$使$P_m \ldots P_2 P_1 A = I$

故 $A = (P_m \ldots P_2 P_1)^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \ldots P_m^{-1}$

(3)→(1): 设 $A = Q_1 Q_2 \ldots Q_m$, 其中Q_i, $i=1\ldots m$为初等矩阵.

有 $\det(Q_i) \neq 0$, $i=1\ldots m$. 故 $\det(A) \neq 0$, A可逆, 证毕.