60. (1) 不是. $1 \notin X$. 无幺元

(2) 不是 $\langle X, + \rangle$ 不是代数系统, 不封闭

(3) 不是 $\langle X, + \rangle$ 不是交换群. 无逆元

(4) 不是. $\langle X, \times \rangle$ 不是半群. 不封闭.

$\forall a, b, c, d \in Q$. $a+b\sqrt[4]{5} \in X$. $c+d\sqrt[4]{5} \in X$.

$(a+b\sqrt[4]{5}) \times (c+d\sqrt[4]{5}) = ac + (ad+bc)\sqrt[4]{5} + bd\sqrt{5}$

$= (ac + bd\sqrt{5}) + (ad+bc)\sqrt[4]{5}$

由于 $ac+bd\sqrt{5} \notin Q$, 则 $\langle X, \times \rangle$ 不是代数系统, 不封闭.

(5) 是. 证明: (一) $\langle X, + \rangle$ 是交换群

①封闭性. $\forall a, b, c, d \in Q$, $a+b\sqrt{3} \in X$, $c+d\sqrt{3} \in X$.

$a+b\sqrt{3} + c+d\sqrt{3} = (a+c) + (b+d)\sqrt{3} \in X$

即 X 对 $+$ 运算封闭。

② 结合律 $\forall a, b, c, d, e, f \in Q$ $a+b\sqrt{3}$, $c+d\sqrt{3}$, $e+f\sqrt{3} \in X$.

$(a+b\sqrt{3} + c+d\sqrt{3}) + e+f\sqrt{3}$

$= a+b\sqrt{3} + (c+d\sqrt{3} + e+f\sqrt{3})$

$+$ 运算有结合律。

③ 幺元: $0+0\sqrt{3} \in X$.

$\forall a, b \in Q$, $a+b\sqrt{3} \in X$,

$(0+0\sqrt{3}) + (a+b\sqrt{3}) = (a+b\sqrt{3}) + (0+0\sqrt{3}) = a+b\sqrt{3}$, $+$ 有幺元

④ 有逆元: $\forall a, b \in Q$, $a+b\sqrt{3} \in X$.

$\exists c, d \in Q$, $c+d\sqrt{3} \in X$.

$(a+b\sqrt{3}) + (c+d\sqrt{3}) = 0+0\sqrt{3}$

当 $c=-a$, $d=-b$ 时成立.

$(-a+(-b)\sqrt{3}) + (a+b\sqrt{3})$

$= (a+b\sqrt{3}) + (-a+(-b)\sqrt{3})$

$= 0+0\sqrt{3}$

即 $+$ 运算有逆元。

⑤ 交换律: $\forall a+b\sqrt{3} \in X$, $c+d\sqrt{3} \in X$

$(a+b\sqrt{3}) + (c+d\sqrt{3}) = (c+d\sqrt{3}) + (a+b\sqrt{3})$

即 $+$ 运算有逆元。

综上. $\langle X, + \rangle$ 是交换群.

(二). $\langle X, \times \rangle$ 是交换含幺半群.

(1) 封闭性，$\forall a+b\sqrt{3},\ c+d\sqrt{3} \in X$,

$(a+b\sqrt{3}) \times (c+d\sqrt{3}) = ac + (ad+bc)\sqrt{3} + 3bd$

即 X 对 × 运算封闭 $= (ac+3bd) + (ad+bc)\sqrt{3} \in X$

(2) 结合律. $\forall a+b\sqrt{3} \in X,\ c+d\sqrt{3} \in X,\ e+f\sqrt{3} \in X$

$((a+b\sqrt{3}) \times (c+d\sqrt{3})) \times (e+f\sqrt{3})$

$= ((ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}) \times (e+f\sqrt{3})$

$= ((ac+3bd)e + 3f(ad+bc)) + \sqrt{3}(f(ac+3bd) + e(ad+bc))$

$= (a+b\sqrt{3}) \times ((c+d\sqrt{3}) \times (e+f\sqrt{3}))$

即 × 运算有结合律.

(3) 有幺元. $\forall a+b\sqrt{3} \in X,\ \exists c, d \in Q$

$(a+b\sqrt{3}) \times (c+d\sqrt{3}) = (ac+3bd) + (bc+ad)\sqrt{3} = a+b\sqrt{3}$

$\Rightarrow c = 1,\ d = 0$

$c+d\sqrt{3} = 1+0\sqrt{3} \in X$.

$(1+0\sqrt{3}) + (a+b\sqrt{3}) = (a+b\sqrt{3}) + (1+0\sqrt{3})$

$= a+b\sqrt{3}$

即 × 运算有幺元.

④ 交换律. $\forall a+b\sqrt{3}\in X$, $c+d\sqrt{3}\in X$

$$(a+b\sqrt{3})\times(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}$$
$$=(c+d\sqrt{3})\times(a+b\sqrt{3})$$

即 $\times$ 运算有交换律.

综上, $<X,\times>$ 是交换含幺半群.

(三) 分配律. $\forall a+b\sqrt{3}, c+d\sqrt{3}, e+f\sqrt{3}\in X$.

$$(a+b\sqrt{3})\times((c+d\sqrt{3})+(e+f\sqrt{3}))$$
$$=(a+b\sqrt{3})\times((c+e)+(d+f)\sqrt{3})$$
$$=(a(c+e)+3b(d+f))+(a(d+f)+b(c+e))\sqrt{3}$$
$$=(a+b\sqrt{3})\times(c+d\sqrt{3})+(a+b\sqrt{3})\times(e+f\sqrt{3})$$

即 $\times$ 运算对 $+$ 运算有分配律.

(四) 无零因子. $\forall a+b\sqrt{3}\in X$, $c+d\sqrt{3}\in X$,

当 $a+b\sqrt{3}\neq 0+0\sqrt{3}$ 且 $c+d\sqrt{3}\neq 0+0\sqrt{3}$. 即 $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge c\neq 0\wedge d\neq 0$ 时,

$$(a+b\sqrt{3})\times(c+d\sqrt{3})=(3bd+ac)+\sqrt{3}(bc+ad)\neq 0+0\sqrt{3}$$

否则 $\begin{cases}3bd+ac=0\\ bc+ad=0\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}3d & c\\ c & d\end{vmatrix}=3d^2-c^2=0$

即 $d=c=0$ 或 $\frac{c}{d}=\sqrt{3}$ (与 $c,d\in Q$ 矛盾)

(与 $c\neq 0\wedge d\neq 0$ 矛盾)

所以 $(a+b\sqrt{3})\times(c+d\sqrt{3})\neq 0$

所以 X 关于 $\times$ 运算无零因子

综上, $<X,+,\times>$ 是一个整环.

62. (一) $<X, \oplus>$ 是交换群

① 封闭性：$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X$.

$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in X$. 所以 X 关于 $\oplus$ 运算封闭

② 结合律：$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in X$

$$((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)) \oplus (x_3,y_3) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \oplus (x_3,y_3)$$
$$= (x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3)$$
$$= (x_1,y_1) \oplus (x_2+x_3, y_2+y_3)$$
$$= (x_1,y_1) \oplus ((x_2,y_2) \oplus (x_3,y_3))$$

所以 $\oplus$ 运算有结合律.

③ 有幺元. $\forall (a,b) \in X$. $(0,0) \in X$

$(a,b) \oplus (0,0) = (a,b)$

$(0,0) \oplus (a,b) = (a,b)$

即 $(0,0)$ 为幺元

④ 逆元. $\forall (a,b) \in X$. $(-a,-b) \in X$.

$(a,b) \oplus (-a,-b) = (0,0)$

$(-a,-b) \oplus (a,b) = (0,0)$

所以 $\oplus$ 运算有逆元。

⑤ 交换律 $\forall (a,b) \in X$, $(c,d) \in X$

$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

$= (c+a, d+b)$

$= (c,d) \oplus (a,b)$

所以 $\oplus$ 有交换律.

所以综上 $<X, \oplus>$ 是交换群.

(二) $<X, \otimes>$ 是半群.

① 封闭性. $\forall (x_1,y_1) \in X$, $(x_2,y_2) \in X$.

$(x_1,y_1) \otimes (x_2,y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \in X$.

所以 X 关于 $\otimes$ 运算具有封闭性.

② 结合律：$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in X$.

$$((a,b) \otimes (c,d)) \otimes (e,f)$$
$$= (ac, bd) \otimes (e,f)$$
$$= (ace, bdf)$$
$$= (a,b) \otimes (ce, df)$$
$$= (a,b) \otimes ((c,d) \otimes (e,f))$$

所以 $\otimes$ 运算具有结合律.

综上, $<X, \otimes>$ 是半群.

(三) 分配律 $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in X$.

$$(a,b) \otimes ((c,d) \oplus (e,f))$$
$$= (a,b) \otimes (c+e, d+f)$$
$$= (a \times (c+e), b \times (d+f))$$
$$= (ac, bd) \oplus (ae, bf)$$
$$= ((a,b) \otimes (c,d)) \oplus ((a,b) \otimes (e,f))$$

所以 $\otimes$ 运算对 $\oplus$ 运算有分配律.

综上, $<X, \oplus, \otimes>$ 是环.

$\otimes$运算有幺元.

$\forall (a,b) \in X$, $\exists (c,d) \in X$

使 $(c,d) \otimes (a,b) = (a,b) \otimes (c,d) = (a,b)$

即 $(ac, bd) = (ac, bd) = (a,b)$

取 $c=1, d=1$

$\exists (1,1) \in X$, $(1,1) \otimes (a,b) = (a,b) \otimes (1,1) = (a,b)$

即 $\otimes$运算有幺元.

$\exists (a,0), (0,b) \in X$, 且 $a \neq 0, b \neq 0$.

即 $(a,0) \neq (0,0)$, $(0,b) \neq (0,0)$.

$(a,0) \otimes (0,b) = (0,0)$

即 $\otimes$含有零因子为 $(a,0), (0,b)$, $(a \neq 0, b \neq 0)$

$\forall (a,b) \in X$, 当 $a \neq 0, b \neq 0$ 时,

$(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) \in X$,

$(a,b) \otimes (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = (1,1)$

$(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) \otimes (a,b) = (1,1)$

所以 $\forall (a,b) \in X$, $a \neq 0, b \neq 0$ 有逆元 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$.

69.

① 包含性: $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1 \subseteq F$

$(S_1 \cap S_2) \setminus \{0\} \subseteq S_1 \setminus \{0\} \subseteq F \setminus \{0\}$

② 非空性 $0 \in S_1 \wedge 0 \in S_2$

$\Rightarrow 0 \in S_1 \cap S_2$

$\Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \phi$

$1 \in S_1 \setminus \{0\} \wedge 1 \in S_2 \setminus \{0\}$

$\Rightarrow 1 \in (S_1 \cap S_2) \setminus \{0\}$

$\Rightarrow (S_1 \cap S_2) \setminus \{0\} \neq \phi$

③ 混合封闭性:

$\forall a, b \in S_1 \cap S_2$

$a \in S_1 \cap S_2 \wedge b \in S_1 \cap S_2$

$\Rightarrow a \in S_1 \wedge b \in S_1 \wedge a \in S_2 \wedge b \in S_2$

$\Rightarrow a \oplus (-b) \in S_1 \wedge a \oplus (-b) \in S_2$

$\Rightarrow a \oplus (-b) \in S_1 \cap S_2$

$\forall a, b \in (S_1 \cap S_2) \setminus \{0\}$

$a \in (S_1 \cap S_2) \setminus \{0\} \wedge b \in (S_1 \cap S_2) \setminus \{0\}$

$\Rightarrow a \in S_1 \setminus \{0\} \wedge b \in S_1 \setminus \{0\} \wedge a \in S_2 \setminus \{0\} \wedge b \in S_2 \setminus \{0\}$

$\Rightarrow a \otimes b^{-1} \in S_1 \setminus \{0\} \wedge a \otimes b^{-1} \in S_2 \setminus \{0\}$

$\Rightarrow a \otimes b^{-1} \in (S_1 \cap S_2) \setminus \{0\}$

扫描全能王 创建