§1.3 傅立叶变换的性质

- 一、基本性质
- 二、卷积与卷积定理
- *三、利用Matlab实现Fourier 变换
- *四、Fourier变换在微分方程求解的应用

一、基本性质

- 在下面给出的基本性质中，所涉及到的函数的 Fourier 变换均存在,且 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)], G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$.
- 对于涉及到的一些运算(如求导、积分、极限及求和等)的次序交换问题，均不另作说明。

直接进入基本性质汇总?

1. 线性性质

性质 设 a, b 为常数，则

$$\mathscr{F}\left[af(t)+bg(t)\right]=aF(\omega)+bG(\omega)$$

一、基本性质

2. 位移性质

性质 设 t_0, ω_0 为实常数，则

$$(1)\ \mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-j\omega t_0}F(\omega);\quad \text{(时移性质)}$$

$$(2)\ \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}f(t).\quad \text{(频移性质)}$$

证明 (1) $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{\text{令 } x=t-t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-j\omega x}\cdot\mathrm{e}^{-j\omega t_0}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-j\omega t_0}F(\omega);$$

(2) 同理，可得到频移性质。

一、基本性质

2. 位移性质

性质 设 t_0, ω_0 为实常数，则

$$(1)\mathscr{F}[f(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}F(\omega);$$ (时移性质)

$$(2)\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t).$$ (频移性质)

- 时移性质表明：当一个信号沿时间轴移动后，各频率成份的大小不发生改变，但相位发生变化；
- 频移性质则被用来进行频谱搬移，这一技术在通信系统中得到了广泛应用。

一、基本性质

3. 相似性质

性质　设a为非零常数，则$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left[\frac{\omega}{a}\right]$.

证明 (1) 当 $a>0$ 时，

$$\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\underline{\underline{令x=at}}\ \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-j\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right);$$

(2) 当$a<0$时，

同理可得$\mathscr{F}[f(at)]=-\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

一、基本性质

3. 相似性质

性质　设a为非零常数，则$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left[\frac{\omega}{a}\right]$.

- 相似性质表明，若信号被压缩$(a>1)$，则其频谱被扩展；
  若信号被扩展$(a<1)$，则其频谱被压缩。

- 事实上，在对矩形脉冲函数的频谱分析中已知，
  脉冲越窄，则其频谱(主瓣)越宽；
  脉冲越宽，则其频谱(主瓣)越窄。

相似性质正好体现了脉冲宽度与频带宽度之间的反比关系。

一、基本性质

3. 相似性质

性质　设a为非零常数，则$\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left[\frac{\omega}{a}\right]$.

- 在电信通讯中，

  为了迅速地传递信号，希望信号的脉冲宽度要小；

  为了有效地利用信道，希望信号的频带宽度要窄。

- 相似性质表明这两者是矛盾的，因为同时压缩脉冲宽度和频带宽度是不可能的。

一、基本性质

4. 微分性质

性质 若 $\lim_{|t|\to+\infty} f(t)=0$, 则$\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega F(\omega)$.

证明 由 $\lim_{|t|\to+\infty} f(t)=0$, 有 $\lim_{|t|\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}=0$,

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=j\omega F(\omega).$$

一、基本性质

4. 微分性质

性质 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t)=0$，则 $\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega F(\omega)$.

一般地，若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0$，$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，

则 $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(\omega)$.

一、基本性质

4. 微分性质

- 同理，可得到像函数的导数公式

$$\mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)]=-jtf(t);$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^n f(t).$$

- 上式可用来求$t^n f(t)$的 Fourier 变换.

一、基本性质

5. 积分性质

性质 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t=0$，则 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega)$.

证明 令 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} g(t)=0$,

由微分性质有$\mathscr{F}[g'(t)]=j\omega G(\omega)$,

又 $g'(t)=f(t)$，有 $\mathscr{F}[f(t)]=j\omega\mathscr{F}[g(t)]$,

即得$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega)$.

一、基本性质

6. 帕塞瓦尔(Parseval)等式

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.}$$

证明 由$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$，有 $\overline{F(\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t$，

右边$=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot\overline{F(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t$$

$=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ = 左边.

一、基本性质(汇总)

线性性质 $\mathscr{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega).$

位移性质 $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-j\omega t_0}F(\omega);$ (时移性质)

$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}f(t).$ (频移性质)

相似性质 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right).$

一、基本性质(汇总)

微分性质 $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(\omega);$

$$\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^n f(t).$$

积分性质 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega).$

Parseval等式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$

(直接进入 Parseval 等式举例?)

(返回)

例1 设 $f(t)=u(t)\cdot 2\cos\omega_0 t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 已知 $\mathscr{F}[u(t)]=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$,

又 $f(t)=u(t)\cdot(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$,

根据线性性质和频移性质有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega+\omega_0)+\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$=\frac{2j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

例2 已知抽样信号$f(t)=\dfrac{\sin 2t}{\pi t}$的频谱为 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le 2,\\ 0, & |\omega|>2.\end{cases}$

求信号$g(t)=f(2t)$的频谱$G(\omega)$.

解 根据相似性质有

$$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\mathscr{F}[f(2t)]$$

$$=\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)=\begin{cases}1/2, & |\omega|\le 4,\\ 0, & |\omega|>4.\end{cases}$$

例3 设 $f(t)=t^2\cos t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 令 $g(t)=\cos t$,则 $f(t)=t^2 g(t)$,

又已知 $G(\omega)=\mathscr{F}[\cos t]=\pi\delta(\omega-1)+\pi\delta(\omega+1)$,

根据微分性质 $\mathscr{F}^{-1}[G''(\omega)]=(-jt)^2 g(t)$,有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[t^2 g(t)]=-G''(\omega)$$

$$=-\pi\delta''(\omega-1)-\pi\delta''(\omega+1).$$

例4 求积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\omega$的值。

解 设矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leq 1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$

已知$f(t)$的频谱为$F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$,

由 Parserval等式有$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{-1}^{1}1^2\mathrm{d}t=4\pi.$$

由于被积函数为偶函数,故有$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}$.

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

定义 设函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 对任何实数 t 都收敛，它在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义了一个自变量为 t 的函数，称此函数为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积，记为 $f_1(t) * f_2(t)$，即

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

性质 (1) 交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t).$$

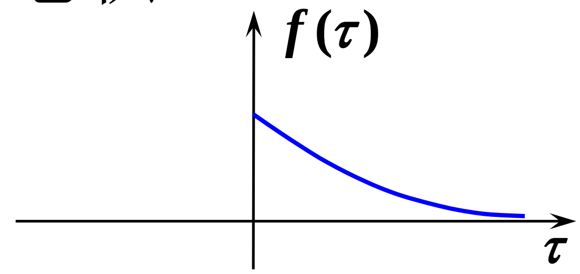
(2) 结合律

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t).$$

(3) 分配律

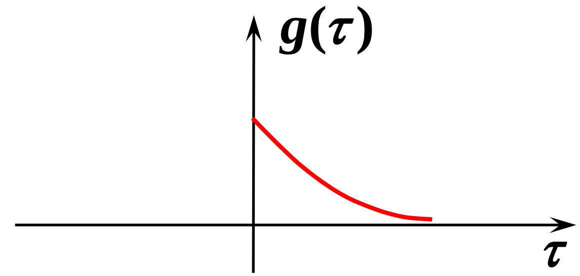
$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

例5 设$f(t)=e^{-\alpha t}u(t), g(t)=e^{-\beta t}u(t)$，其中$\alpha>0,\beta>0$，且$\alpha\neq\beta$，求函数$f(t)$和$g(t)$的卷积。



解 $f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$,

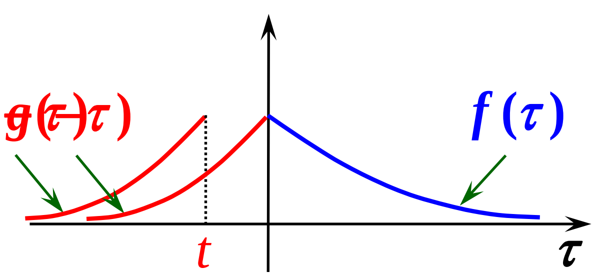
(1) 当$t\le 0$ 时，$f(t)*g(t)=0.$



(2) 当$t>0$ 时，

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$



$$=\frac{\mathrm{e}^{-\beta\tau}-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}.$$

从上面的例子可以看出

(1) 在计算一些分段函数的卷积时，如何确定积分限是解题的关键。如果采用图形方式则较容易确定积分限。

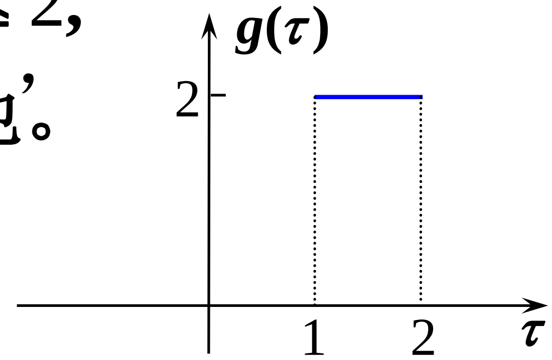
(2) 卷积由反褶、平移、相乘、积分四个部分组成。即首先将函数$g(\tau)$反褶并平移到t, 得到$g(t-\tau)=g(-(\tau-t))$, 再与函数 $f(t)$相乘后求积分,得到卷积 $f(t)*g(t)$.

因此，卷积又称为褶积或卷乘。

- 另外，利用卷积满足交换律这一性质，适当地选择两个函数的卷积次序，还可以使积分限的确定更直观。

例6 设 $f(t)=t^2u(t), g(t)=\begin{cases}2, 1\le t\le 2,\\ 0,\ \text{其他}。\end{cases}$

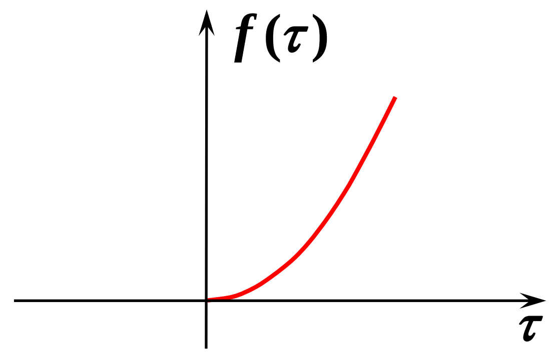
求函数 $f(t)$和$g(t)$的卷积。



解 由卷积的定义及性质有

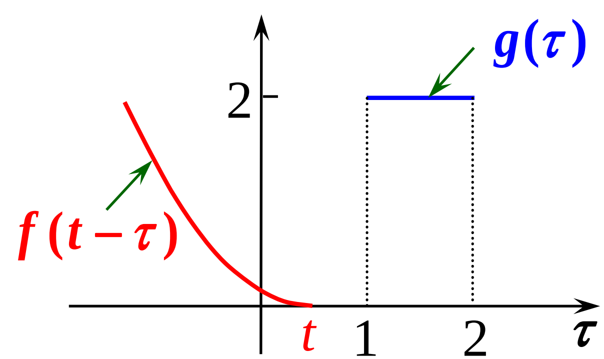
$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

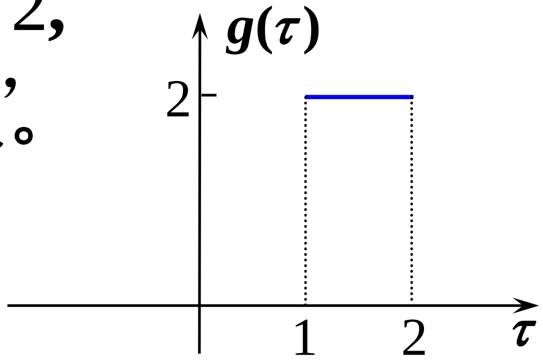


(1) 当 $t\le 1$ 时，

$$f(t)*g(t)=0.$$

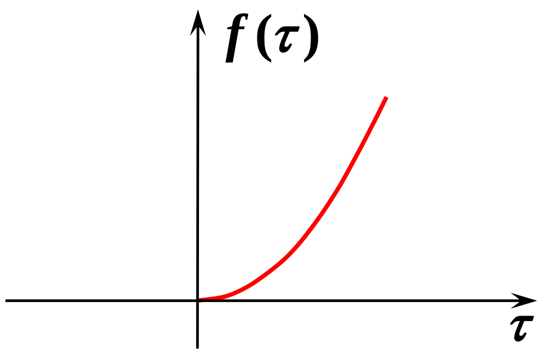


例6 设 $f(t)=t^2u(t), g(t)=\begin{cases}2, 1\le t\le 2,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$



求函数 $f(t)$和$g(t)$的卷积。

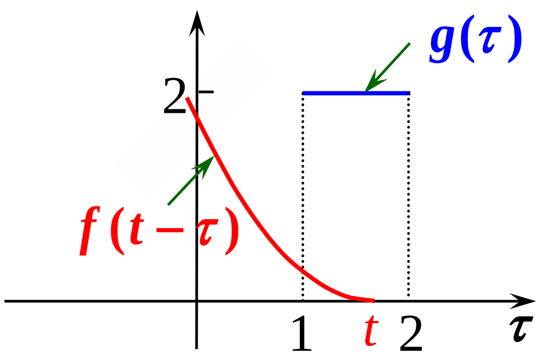
解 由卷积的定义及性质有



$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

(2) 当 $1<t<2$ 时,

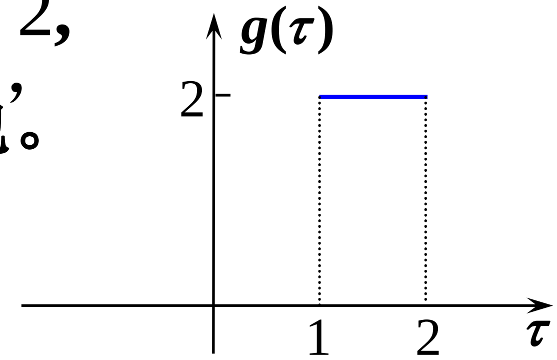


$$f(t)*g(t)=\int_1^t 2\cdot(t-\tau)^2\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{2}{3}(t-1)^3.$$

例6 设 $f(t)=t^2u(t), g(t)=\begin{cases}2, 1\le t\le 2,\\ 0, \text{ 其他。}\end{cases}$

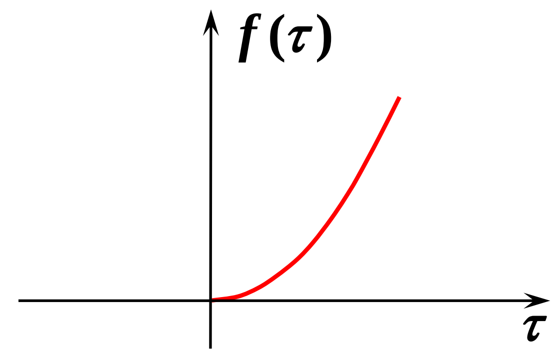
求函数 $f(t)$和$g(t)$的卷积。



解 由卷积的定义及性质有

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

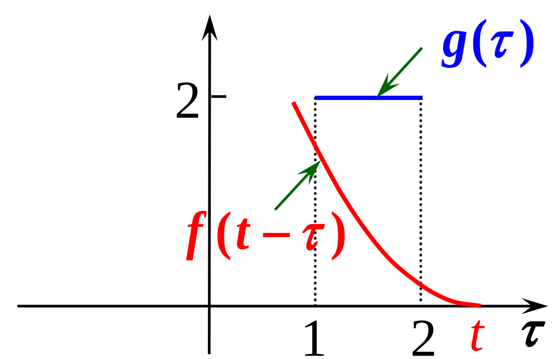
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$



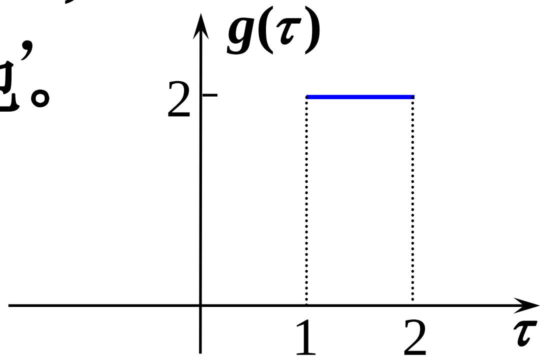
(3) 当 $t\ge 2$ 时，

$$f(t)*g(t)=\int_1^2 2\cdot(t-\tau)^2\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{2}{3}[(t-1)^3-(t-2)^3].$$



例6 设 $f(t)=t^2u(t),\ g(t)=\begin{cases}2, & 1\le t\le 2,\\ 0, & 其他。\end{cases}$

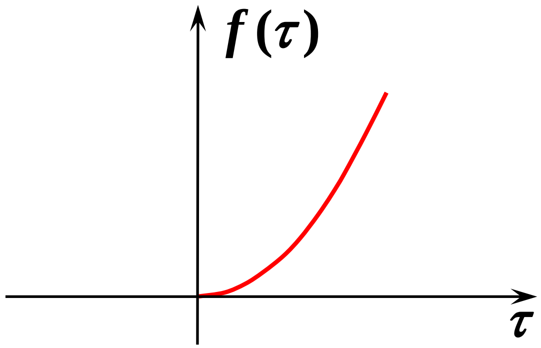


求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

解 由卷积的定义及性质有

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$



综合得

$$f(t)*g(t)=\begin{cases}0, & t\le 1,\\ 2(t-1)^3/3, & 1<t<2,\\ 2[(t-1)^3-(t-2)^3]/3, & t\ge 2.\end{cases}$$

二、卷积与卷积定理

2. 卷积定理

定理 设 $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathcal{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，则有

$$\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega); \qquad (A)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega)*F_2(\omega)]=2\pi f_1(t)\cdot f_2(t). \qquad (B)$$

证明 $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)*f_2(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-j\omega(t-\tau)}\mathrm{d}t]\mathrm{d}\tau=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega);$$

同理可证 (*B*) 式。

二、卷积与卷积定理

*3. 卷积的物理意义

背景（1）如何从收到的实际信号中分离出“想要”的某个频带内的信号。

（2）如何从收到的实际信号中消除在传输过程中加入的高频干扰噪声。

问题 设有某信号为$f(t)$,试将该信号的低频成份完全保留,而高频成份完全去掉,即对其进行理想低通滤波。

二、卷积与卷积定理

3. 卷积的物理意义

方法 方法一 在频率域中实现

（1）求出信号$f(t)$频谱函数$F(\omega)$.

（2）令$H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le a,\\ 0, & |\omega|>a.\end{cases}$ （理想低通滤波器）

（3）将$F(\omega)$与$H(\omega)$相乘，得到$\tilde{F}(\omega)=F(\omega)\cdot H(\omega)$.

(4) 对$\tilde{F}(\omega)$作 Fourier 逆变换，得到 $\tilde{f}(t)=\mathscr{F}^{-1}[\tilde{F}(\omega)]$.

- 显然，新的信号$\tilde{f}(t)$中完全保留了原信号$f(t)$中频率低于a的频率成份，而去掉了频率高于a 的频率成份。

二、卷积与卷积定理

3. 卷积的物理意义

方法 方法二 在时间域中实现

（1） 令$H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le a,\\ 0, & |\omega|>a.\end{cases}$（理想低通滤波器）

（2） 求$h(t)=\mathscr{F}^{-1}[H(\omega)]=\dfrac{\sin at}{\pi t}$.（理想低通滤波因子）

（3） 计算卷积 $\tilde{\tilde{f}}(t)=f(t)*h(t)$.

- 由卷积定理，信号$\tilde{\tilde{f}}(t)$与方法一中信号$\tilde{f}(t)$是一样的，这正是卷积的意义和价值。

注 $H(\omega)$与$h(t)$分别又称为频率响应函数与冲激响应函数。

例7 求函数$h(t)$和$\delta(t)$的卷积。

解 方法一 $$h(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=h(t).$$

方法二 已知$\delta(t)$的 Fourier 变换为 $D(\omega)=\mathcal{F}[\delta(t)]=1$,

令 $H(\omega)=\mathcal{F}[h(t)]$,根据卷积定理有

$$h(t)*\delta(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)\cdot D(\omega)]$$

$$=\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]=h(t).$$

注 (1) 一般地，有$h(t)*\delta(t-t_0)=h(t-t_0)$.

(2) 本例的结论被用来获取或者检测系统的冲激响应函数。

例8 设函数 $f(t)=\dfrac{\sin at}{\pi t}, g(t)=\dfrac{\sin bt}{\pi t}$, 其中, $a>0, b>0$, 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

解 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为抽样信号,其频谱分别为

$$F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le a,\\ 0, & |\omega|>a,\end{cases}\quad G(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le b,\\ 0, & |\omega|>b.\end{cases}$$

令 $c=\min(a,b)$, 则 $F(\omega)\cdot G(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le c,\\ 0, & |\omega|>c.\end{cases}$

根据卷积定理有

$$f_1(t)*f_2(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=\frac{\sin ct}{\pi t}.$$

例9 求$f(t)=e^{-at}u(t)\cos bt(a>0)$的Fourier变换。

(跳过?)

解 方法一 利用卷积定理求解

令$g(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，$h(t)=\cos bt$，

则$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{a+j\omega}$，

$$H(\omega)=\mathscr{F}[h(t)]=\pi[\delta(\omega+b)+\delta(\omega-b)],$$

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[g(t)\cdot h(t)]=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*H(\omega)$$

$$=\frac{\pi}{2\pi}[G(\omega)*\delta(\omega+b)+G(\omega)*\delta(\omega-b)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+b)}+\frac{1}{a+j(\omega-b)}\right]=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+b^2}.$$

例10 求 $f(t)=e^{-at}u(t)\cos bt(a>0)$的Fourier变换。

解 方法二 利用频移性质求解

令 $g(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，则 $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{a+j\omega}$，

又 $f(t)=\dfrac{1}{2}[g(t)\mathrm{e}^{-jbt}+g(t)\mathrm{e}^{jbt}]$，

根据频移性质有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{1}{2}[G(\omega+b)+G(\omega-b)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+b)}+\frac{1}{a+j(\omega-b)}\right]=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+b^2}.$$