第七章　二次曲面与二次型

7.1 曲面与空间曲线

董荣

数学与统计学院

作业：

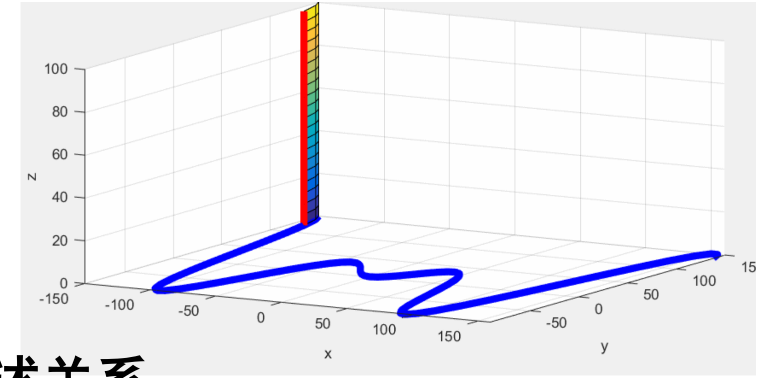
习题7.1

(A) 1(2)(3)(6)(9), 5, 7, 8(1)(2), 10, 12(2)

(B) 1

1 曲面与空间曲线的方程

曲面：在空间坐标系中一个动点或一条动曲(直)线按一定的条件或者规律运动而产生的几何轨迹．记为S



曲面的方程

如果曲面S与三元方程$f(x, y, z)=0$有下述关系：

(1)曲面S上任一点的坐标都满足该方程；

(2)满足方程的任一点都在曲面S上.

则称方程$f(x, y, z)=0$为曲面S的方程，曲面S为该方程的几何图形.

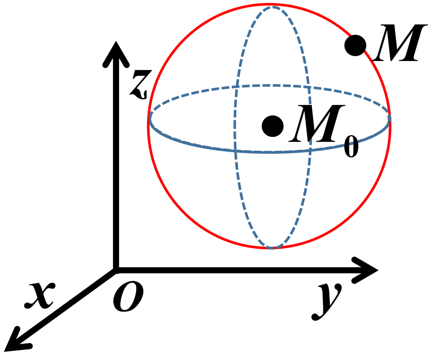
曲面方程形式：直角坐标方程、参数方程等.

例 建立球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为R的球面的方程.

解 设$M(x,y,z)$是球面上的任一点，根据题意有 $|MM_0|=R$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

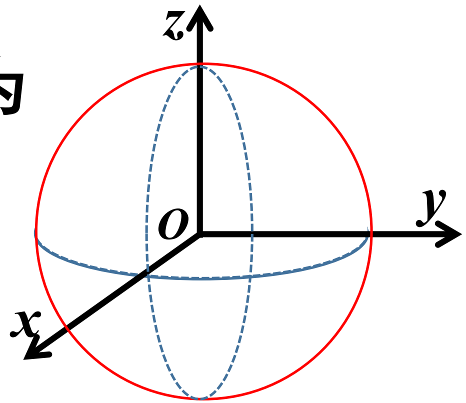
球面方程：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$



特别地：

球心在原点时方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



建立球心在原点、半径为R的球面的参数方程.

设$P(x,y,z)$是球面上的任一点，xoy面上投影点为Q,

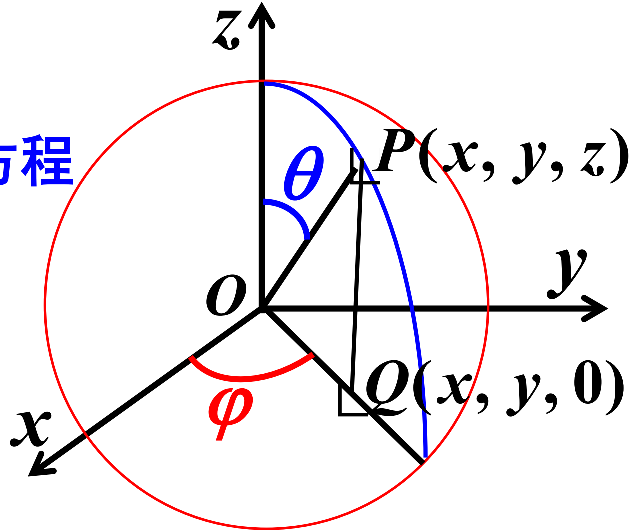
记正z轴到$\overrightarrow{OP}$的角度为$\theta\ (0\le\theta\le\pi)$, 则$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = R\sin\theta$,

再记正x轴到$\overrightarrow{OQ}$的角度为$\varphi\ (0\le\varphi\le 2\pi)$,

则P点的坐标可表示为:

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{pmatrix}.$$

球面的参数方程



球心不在原点而在(x_0, y_0, z_0)时

$$\begin{cases} x = x_0 + R\sin\theta\cos\varphi \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = z_0 + R\cos\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{pmatrix}.$$

一般地，曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad (u,v) \in D. \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

→ 是指由R^2的某区域D到R^3的一个映射

D为u,v平面内的某个区域。

对于曲面上的每个点$P(x,y,z)$，其坐标(x,y,z)必定是区域D内某点(u,v)在参数方程所定义的映射下的像。

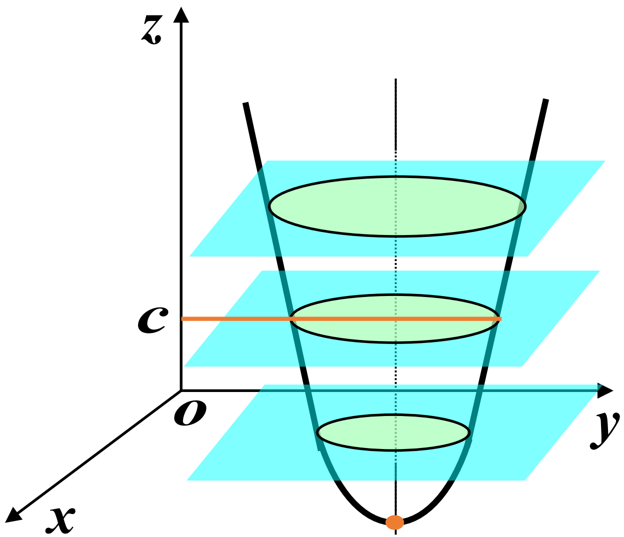
例 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$的图形是怎样的？

解 根据题意有 $z\geq -1$

用平面$z=c$去截图形，得到交线为一圆：

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c\geq -1)$$

其圆心在$(1,2,c)$，半径为$r=\sqrt{1+c}$



当平面$z=c$自下而上移动时，

半径r随c的增大而增大，即截口圆逐渐增大.

图形上不封顶，下有底.

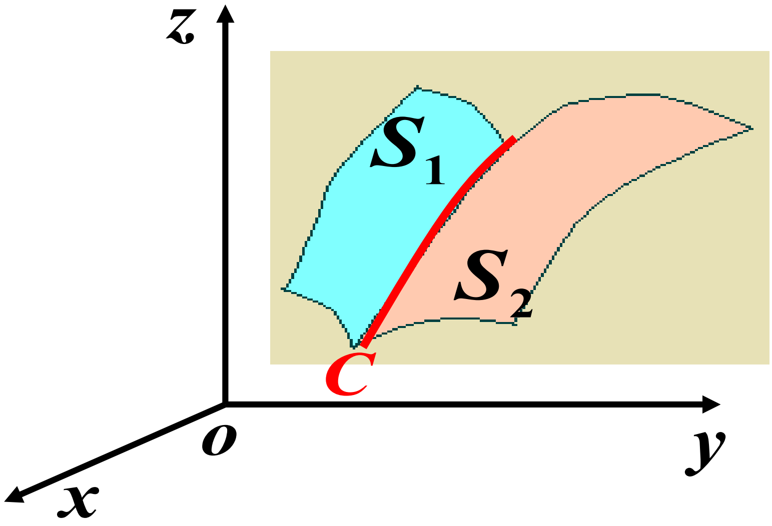
——平行截面法或截痕法

定义（曲线的方程）

空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

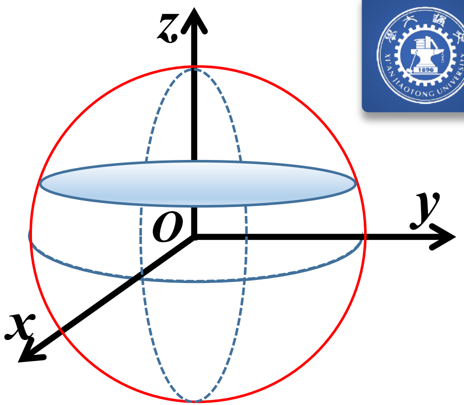
空间曲线的**一般方程**或**直角坐标方程**可表示为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



曲线上的点坐标同时满足两个方程,
满足方程的点都在曲线上.

例 方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$表示怎样的曲线？



解 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 & \leftarrow \text{球面} \\ z=1 & \leftarrow \text{平面} \end{cases}$

表示平面$z=1$上以$(0,0,1)$为中心，半径为2的圆。

该曲线可用参数方程表示为$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t, \quad 0\le t<2\pi \\ z=1 \end{cases}$

空间曲线的参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \quad t\in I \\ z=z(t) \end{cases}$ ⇨ 是指由R的某区间I到R^3的一个映射

例 如果空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升(其中ω, v是常数)，试求动点M形成轨线的参数方程。

解 取时间t为参数，动点从A点出发，经过t时间，运动到$M(x, y, z)$点

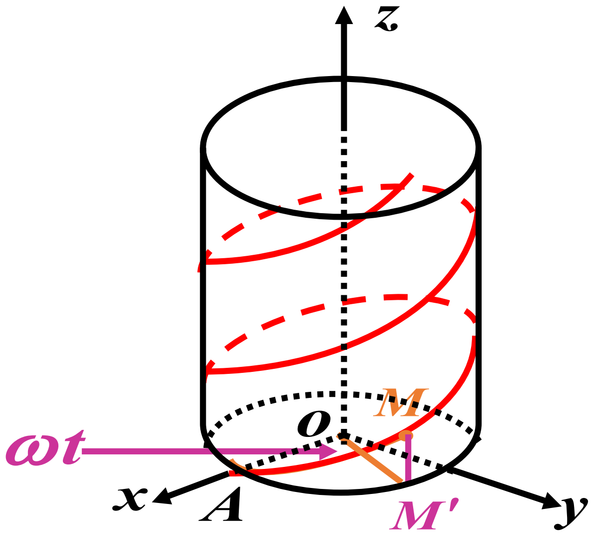
M在xoy面上的投影M'坐标为$(x, y, 0)$.则

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

螺旋线的参数方程

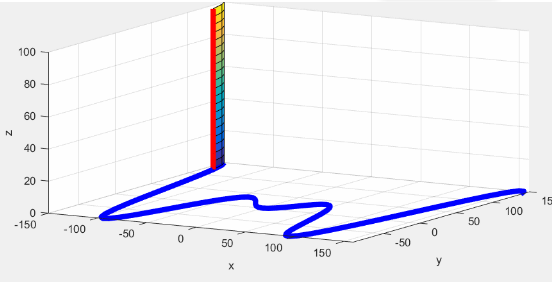
若令：$\theta = \omega t, b = \dfrac{v}{\omega}$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$



2 柱面

定义(柱面) 平行于定直线C并沿定曲线Γ移动的直线L所形成的曲面称为柱面.

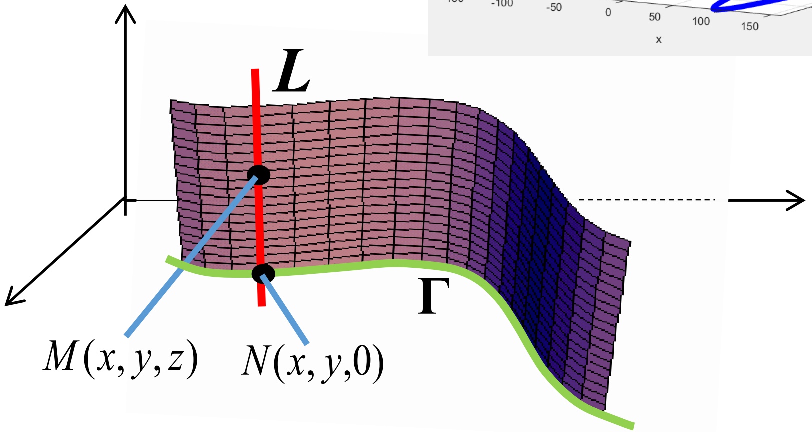


- 定曲线Γ叫柱面的准线；
- 动直线L 叫柱面的母线.

常用到母线平行于坐标轴的柱面方程

设柱面S的母线平行于z轴，准线为Oxy面的曲线

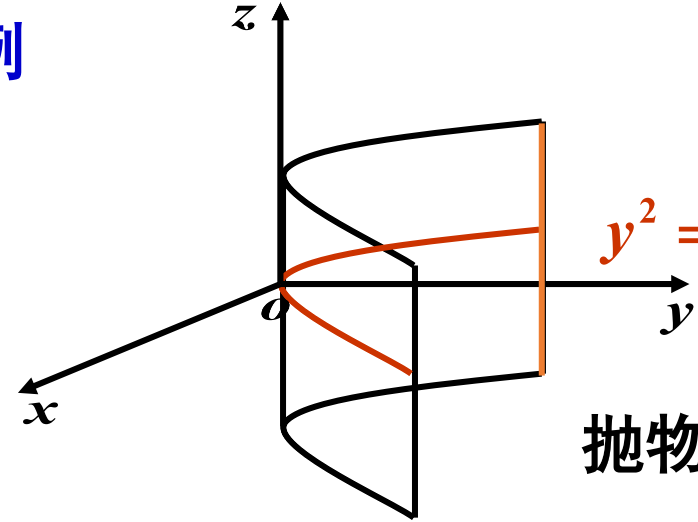
$$\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



则柱面S的方程为 $f(x,y)=0$

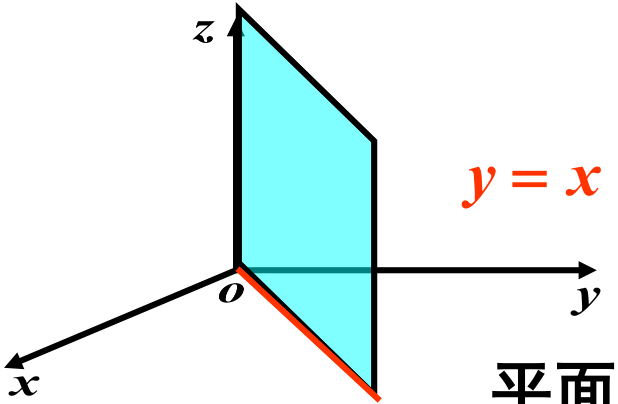
曲面S上任一点M，过M点的母线交准线于N,则N点在准线上；由N点坐标满足准线方程得曲面方程.

例



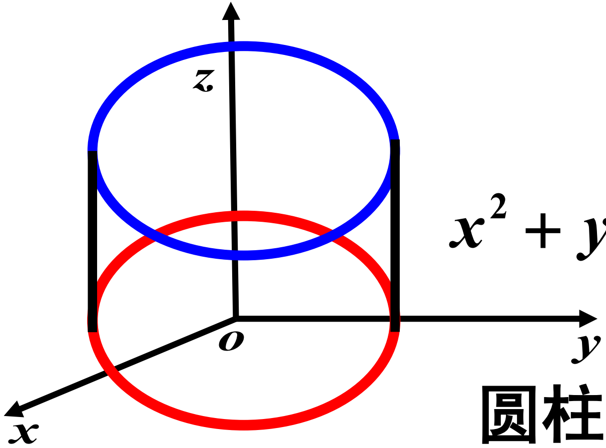
$$y^2 = 2x$$

抛物柱面



$$y = x$$

平面



$$x^2 + y^2 = a^2$$

圆柱面

母线平行于z轴的柱面的方程：$f(x, y) = 0$

同理 $g(y,z)=0$ 表示母线平行于x 轴的柱面

其准线方程为$\begin{cases} g(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

$h(z,x)=0$ 表示母线平行于y 轴的柱面

其准线方程为 $\begin{cases} h(z,x)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 母线 // z 轴的双曲柱面

$x^2=2pz$ 母线 // y 轴的抛物柱面

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 母线 // z 轴的椭圆柱面

例 建立母线平行于$C: x=y=z$，且准线为

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$ 的柱面方程.

解 设$M(x,y,z)$为柱面上任一点，过M的母线交准线于$N(x_0,y_0,z_0)$

由母线平行向量$\vec{a}=(1,1,1)$知 $\dfrac{x_0-x}{1}=\dfrac{y_0-y}{1}=\dfrac{z_0-z}{1}=t$

$\therefore\Rightarrow\quad x_0=x+t,\quad y_0=y+t,\quad z_0=z+t$

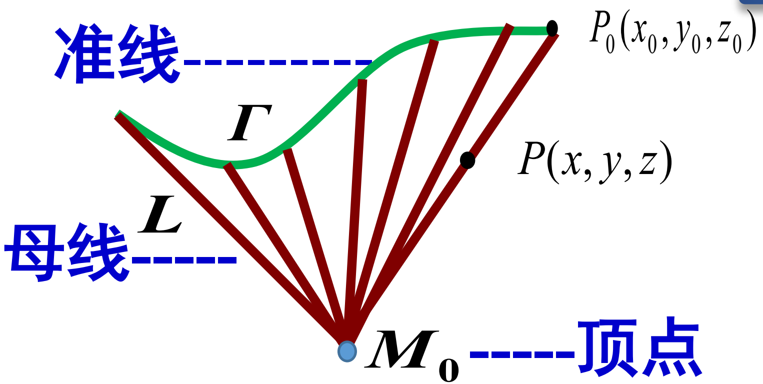
又$\because\ x_0,\ y_0,\ z_0$在准线Γ上，即有

$$\begin{cases} (x+t)^2+(y+t)^2+(z+t)^2=a^2 \\ (x+t)+(y+t)+(z+t)=0 \end{cases}$$

消去t得 $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=3a^2$ 即为所求.

定义(锥面)

设动直线L沿定曲线Γ 移动并始终通过定点M_0，由动直线 L移动所形成的曲面称为**锥面**。



例 求顶点为原点准线为 $\Gamma:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=z_0 \end{cases}$ 的锥面方程.

解 设P是锥面上的点，过P点的母线与准线交于P_0，

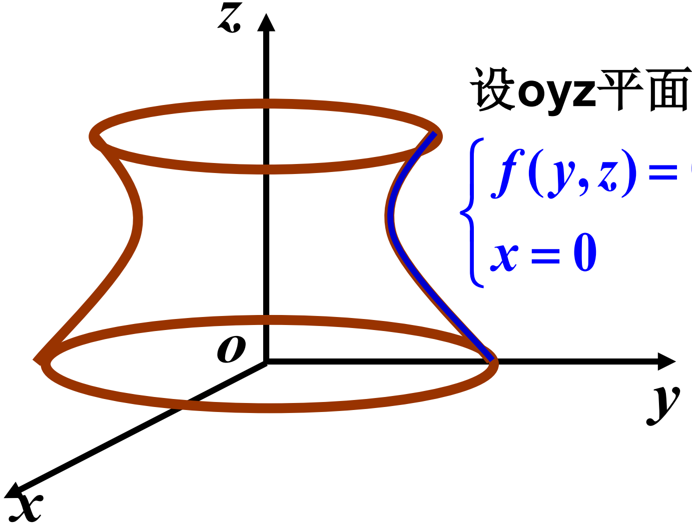
则由$M_0P_0 // M_0P$得：$\dfrac{x_0}{x}=\dfrac{y_0}{y}=\dfrac{z_0}{z} \Rightarrow x_0=\dfrac{z_0x}{z}, y_0=\dfrac{z_0y}{z}$

由x_0,y_0,z_0在准线上， $\Rightarrow f\left(\dfrac{z_0x}{z},\dfrac{z_0y}{z}\right)=0$ --------锥面方程

定义（旋转面）

一条平面曲线绕其所在平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面称为**旋转面**.

这条定直线叫旋转面的**轴**.



设oyz平面内的曲线:

$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

例 设曲线$L:\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$，求该曲线绕$z$轴一周生成旋转面$S$的方程.

解 设曲面上点$M(x,y,z)$, 曲线上对应的点$M_1(0,y_1,z_1)$

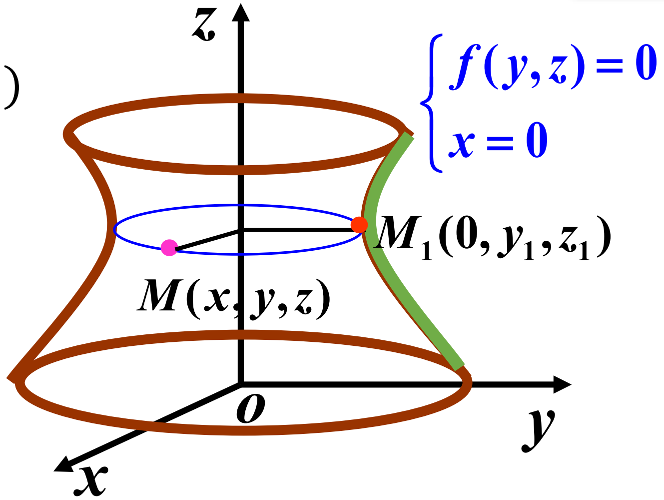
(1)两点到z轴的距离相等：$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$.

(2) 同一平面上：$z=z_1$,

由y_1,z_1满足曲线方程$f(y_1,z_1)=0$，即

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0,$$

------所求旋转面方程



同理：

该曲线绕y轴旋转一周生成旋转面 的方程为 $f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$

曲线$\begin{cases} g(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$，

绕x轴一周生成旋转面方程： $g\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

绕y轴一周生成旋转面方程： $g\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$

曲线$\begin{cases} h(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$，

绕x轴一周生成旋转面方程： $h\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

绕z轴一周生成旋转面方程： $h\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$

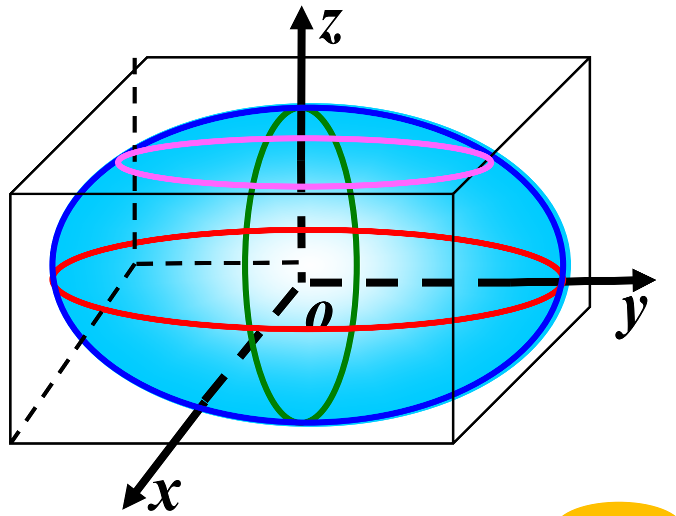
3、 五种典型的二次曲面

(1)椭球面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0, b>0, c>0)$

$|x|\le a, |y|\le b, |z|\le c$， 对称于各坐标轴, 坐标面与原点.

与各坐标面的交线(椭圆)：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}.$$



椭球面的中心、主轴、主平面、顶点

若$a>b>c$:半长轴、半中轴、半短轴

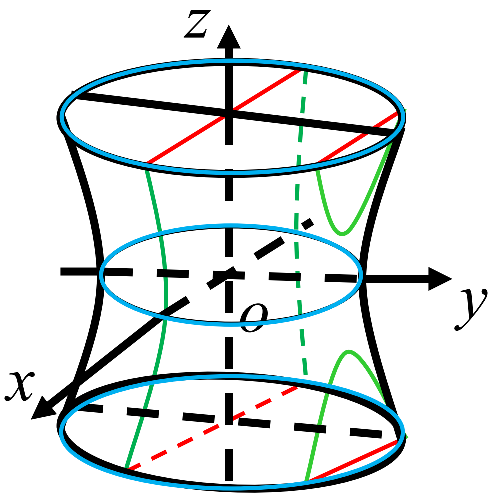
a,b,c有两个相等：旋转椭球面

a,b,c三个相等：球面

(2)单叶双曲面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>0, b>0, c>0)$

与平面$z = z_1$的交线是椭圆：对称于各坐标轴, 坐标面与原点.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_1{}^2}{c^2}\\ z=z_1\end{cases}$$



与平面$y=y_1$的交线是双曲线：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1{}^2}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$

与平面$x = x_1$的交线是双曲线:

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x_1{}^2}{a^2}\\ x=x_1\end{cases}$$

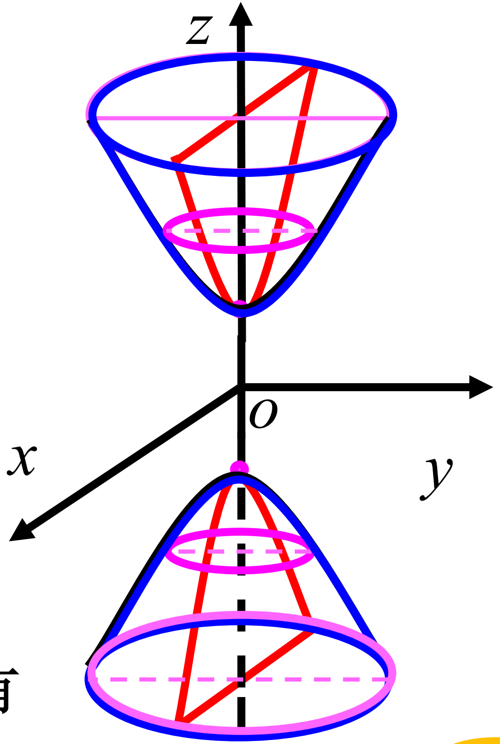
(3)双叶双曲面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\ (a>0,b>0,c>0)$

对称于各坐标轴, 坐标面与原点, 且 $|z|\geq c$.

与 $z=h$ 的交线是椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1\\ z=h\end{cases}$.

与 yoz, xoz 面的交线是双曲线,

且有共同的实轴 z.



旋转双叶双曲面: $a=b$.

有心二次曲面: 椭球面、单叶双曲面，双叶双曲面都有唯一的对称中心.

(4) 椭圆抛物面: $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$，（$p>0$，$q>0$）

曲面在 xoy 平面上方，过坐标原点 $O(0,0,0)$ ------顶点.

对称于ozx面与oyz面，关于z轴对称，无对称中心

与平面$z=z_1(z_1>0)$的交线为椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_1}+\dfrac{y^2}{2qz_1}=1\\ z=z_1\end{cases}$

与坐标面y=0的交线为抛物线 $\begin{cases}x^2=2pz\\ y=0\end{cases}$

与坐标面x=0的交线为抛物线 $\begin{cases}y^2=2qz\\ x=0\end{cases}$