西安交通大学考试题

成绩	

课　　程　复变与积分变换

系　　别　________　　　　考试日期　2007 年 1 月 24 日

专业班号　________

姓　　名　________　　学 号 ________ 期中 ☐　期末 ☑

一.判断题(答案写在题后的括号里,对者用"✔"来表示,错者用"✖"来表示).

~~1.　对任意的复数$z\neq 0$,我们有$|\sin(z)|\leq 1$。~~　~~(　)~~

~~2.　设$f(z)$是一个复变函数，则$|f(z)|\geq \mathrm{Re}(f(z))$。~~　(　)

~~3.　$f(z)=|z|\bar{z}$~~ 在任何一点处均不可导。　(　)

4.　$\lim\limits_{z\to 0} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)=0$ 。　(　)

~~5.　对于满足 $|z|<1$ 的复数 z, $\ln(e^z)=z$。~~　(　)

~~6.　$\sqrt{z}$ 在全复平面上处处解析~~。　(　)

7.　$(z(z^2+1))^{-1}$ 在以 $z_0=0$ 为中心的区域内的 Laurent 展式为 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n-1}$ 。　(　)

8.　设$f(z)$ 在全复平面解析,且 $\lim\limits_{R\to 0^+}\int_{|z|=R} f(z)dz=0$,则 $f(0)=0$。　(　)

9.　对任意的复数α,我们有 $1^\alpha=1$。　(　)

二. 填空题(直接将结果写在横线上)

~~1.~~　$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}=$ ________ 。　　2.　$\oint_{|z|=2}\frac{\sin(z)}{(z-\sin i)^3}dz=$ ________ 。

~~3.　$(i+1)^i=$~~ ________ 。　　~~4.　设 $f(z)=e^{px}\cos y+iv(x,y)$ 是一个在全复平面上解析的函数，且$f(0)=1, p<0$,则 $p=$~~ ________ ,

$v(x,y)=$ ____________ 。

三. 将函数 $\mathbf{f(z)=\left(z^{10}\left(1+z^2\right)^2\right)^{-1}}$ 展开成 $\mathbf{z}$ 的幂级数。

四. 计算题

1. 求积分 $\displaystyle\oint\limits_{|\mathbf{z}|=\mathbf{20}} \frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}}$。
2. 求 Laplace 变换$\mathscr{L}\left[\mathbf{u(1-e^{2-t})}\right]$。
3. 求 Fourier 变换$\mathscr{F}\left[\dfrac{\mathbf{t\cos t}}{\mathbf{1+t^2}}\right]$。
4. 已知$\mathscr{F}[\mathbf{f(t)}]=\mathbf{F}(\omega)$ 求 Fourier 变换$\mathscr{F}\left[\overline{\mathbf{f(-t)}}\right]$。
5. 求 Laplace 变换$\mathscr{L}\left[\mathbf{e^{-t}}\delta\mathbf{(t)}\right]$。
6. 求函数$\mathbf{f(t)=t^{10}\cdot u(t)}$ 与 $\mathbf{g(t)=t\cdot u(t)}$ 的卷积$\mathbf{f*g}$。
7. 求积分$\int_0^{+\infty}\mathbf{t^2/(1+t^4)dt}$。
8. 求一个共形映射将区域$\{\mathbf{z}:|\mathbf{z-2}|<\mathbf{2},\pi/\mathbf{4}<\mathbf{arg(z)}<\pi/\mathbf{2}\}$ 映射为$\{\mathbf{w}:\mathbf{0}<\mathbf{arg(w)}<\pi/\mathbf{4}\}$。
9. 用 Laplace 变换求解方程$\begin{cases} y'(t)+2y(t)+\int_0^t y(\tau)d\tau=1\,, & (t>0) \\ y(0)=0 \end{cases}$

五. 证明题. 设函数 $\mathbf{f(z)}$ 和 $\mathbf{g(z)}$ 均在点 $\mathbf{z_0}$ 处解析, 且 $\mathbf{f(z_0)=0}$,$\mathbf{f'(z_0)\neq 0}$, 又 $\mathbf{z_0}$ 是 $\mathbf{g(z)}$ 的三级零点。试证, 点 $\mathbf{z_0}$ 是函数 $\dfrac{\mathbf{f(z)}}{\mathbf{g(z)}}$ 的二级极点,且

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\mathbf{f(z)}}{\mathbf{g(z)}},\mathbf{z_0}\right]=\frac{\mathbf{6f^{(2)}(z_0)g^{(3)}(z_0)-3f'(z_0)g^{(4)}(z_0)}}{\mathbf{2\left[g^{(3)}(z_0)\right]^2}}\text{。}$$