西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：复变函数与积分变换 课时：48 考试时间：2007年月日

一. 填空题

1. $2^{1/6}\,e^{i(1/12+2k/3)\pi}\,,(k=0,1,2)$；　　2. $i\,e^{-(1/2+2k)\pi}\,,(k=0,\pm1\,,\pm2\,,\cdots)$；

3. 0；　　4. $a=2,b=-1,c=-1,d=2$；　　5. 0

二. 解答题

1. $\int\limits_{|z|=2}\frac{\cos\ z}{z^2+1}dz=2\pi\,i\left\{\text{Res}\left[\frac{\cos\ z}{z^2+1},i\right]+\text{Res}\left[\frac{\cos\ z}{z^2+1},-i\right]\right\}$ (2分)

$=2\pi\,i\left\{\frac{\cos(i)}{2i}+\frac{\cos(-i)}{-2i}\right\}$ (2分) $=0$ (1分)

2. 注意到

$$\left|\frac{\sin(\,i\,n\,)}{n^2}\right|=\left|\frac{e^{-n}-e^{n}}{2n^2}\right|\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty\ （3分）$$

可知$\sin(\,i\,n\,)\,,(n=1,2,\cdots)$，是一个无界数列，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\,i\,n\,)}{n^2}$ 是发散的。(**2分**)

3. 显然有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\ln n}{n}\right|^{1/n}=1\ （4分）$$

因此题目中的幂级数的收敛半径为**1** 。(1分)

4. 将 $f(z)$ 写成如下形式

$$f(z)=(z-z_0)^m\,q(z)$$

其中 $q(z)$ 在点 z_0 处解析，且 $q(z_0)\neq0$ 。(**1分**) 从而

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-z_0}\frac{m\,q(z)+(z-z_o)q'(z)}{q(z)}\ （2分）$$

若记

$$h(z)=\frac{m\,q(z)+(z-z_o)q'(z)}{q(z)}$$

则 $h(z)$ 是一个在点 z_0 处解析的函数，且 $h(z_0)=m\neq0$ 。因此 z_0 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点，且 $\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]=m$ 。（2分）

5. 将 $f(z)$ 写成如下形式

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}\quad（1分）$$

可知函数 $f(z)$ 在原点处不连续，其它点处连续。(**1分**）通过讨论 $u(x,y),v(x,y)$ 的可微性以及考察 Cauchy–Riemann 方程是否成立的问题，可以得知，$f(z)$ 在 $\{z: z\neq 0, Re(z)=\pm Im(z)\}$ 上可导，其余点处不可导。(2分）由此可知 $f(z)$ 处处不解析。(1分）

6. 当 $z=x$ 为实数时，$w=\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x-i}{x+i}$ 满足 $|w|=1$ 。(3分）所以，直线 $Im(z)=0$ 在映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下的像曲线为 $|w|=1$ 。(2分）

7. 原式 $=2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{z^2+2z+2},-1+i\right]$ (2分) $=2\pi i\dfrac{1}{2i}$ (2分) $=\pi$ (1分)

三. 令 $\xi=z^2,\eta=\dfrac{1+\xi}{1-\xi},w=\eta^2$,（**4分**）则映射 $w=\left(\dfrac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2$（**3分**）即将区域 $\{z: |z|<1, \mathrm{Re}(z)>0,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$ 与区域 $\{w: \mathrm{Im}(w)>0\}$ 一一对应起来，而且该映射在区域 $\{z: |z|<1, \mathrm{Re}(z)>0,\ \mathrm{Im}(z)>0\}$ 上还是处处共形的。

四. **i)** 当 $|z|<1$ 时，

$$f(z)=z/\left(1+z^2\right)=z\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1}\quad（4分）$$

ii) 当 $0<|z-i|<2$ 时，

$$f(z)=\frac{1}{z-i}\left\{1-\frac{i}{(z-i)+2i}\right\}=\frac{1}{z-i}\left\{1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{2^{n+1}}(z-i)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{z-i}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{2^{n+2}}(z-i)^n\quad（6分）$$

五. 1. 令 $h(t)=e^{-t}u(t), f(t)=e^{-|t|}$ 则 $f(t)=h(t)+h(-t)$（3分）从而

$$\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right]=\mathscr{F}[h(t)+h(-t)]=\frac{1}{1+i\omega}+\frac{1}{1-i\omega}=\frac{2}{1+\omega^2}\quad（3分）$$

2. 原式 $=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2}\cos(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t)\right]$（2分）$=\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{s^2+1}=\frac{1}{2}\frac{s+\sqrt{3}}{s^2+1}$（4分）

3. **由 Laplace 变换的卷积定理，我们有**

$$\mathscr{L}\left[(f*g)(t)\right]=\mathscr{L}\left[f(t)\right]\cdot\mathscr{L}\left[f(t)\right]\ （2分）\ =\frac{2}{s^2}\frac{1}{s^2+1}\ （2分）$$

所以

$$(f*g)(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+1}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\right]=(t-\sin t)\cdot u(t)\ （2分）$$

五.　令 $Y(s)=\mathscr{L}\left[y(t)\right]$，（2 分）**则**

$$\left(s^2-s-2\right)Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s+2}\quad（3分）$$

所以

$$Y(s)=-\frac{1}{s^2\,(s+2)}\quad（2分）$$

从而

$$\begin{aligned}
y(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[Y(s)\right]=-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2\,(s+2)}\right]\\
&=-\ \mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2\,(s+2)},s=0\right]-\ \mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{s^2\,(s+2)},s=-2\right]\\
&=-\frac{2t-1}{4}-\frac{e^{-2t}}{4}=-\frac{e^{-2t}+2t-1}{4}\quad（3分）
\end{aligned}$$