南卷汇

2016 大一下高数期中试题汇

南洋书院学生会

制作

目录

试题

答案

西安交通大学考试题(A)卷

成绩	

课　程　高等数学(I,II)下

学　院 ________________

专业班号 ________________　考试日期　2015年4月26日

姓　名 ________________　学　号 ______________　期中 √

一、　单项选择（每小题3分，共15分）

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \qquad x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处（　　）

A　极限存在；　B 连续；　C　可微；　D 关于 x,y 的偏导数存在.

2. 函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2-2xz+2y-3$ 在点(1,-1,2)处方向导数的最大值为（　）

A　$4\sqrt{2}$；　B　$3\sqrt{2}$；　C　$2\sqrt{2}$；　D　$\sqrt{2}$

3. 设曲面上 $z^2-xy=8(z>0)$ 某点的切平面平行于 $x-y+2z-1=0$，则该点的坐标为（　　）

A　(-2,2,2)；　B (1,-4,2)；　C (2,-2,2)；　D (4,-1,,2)

4. 设 $f(u)$ 为连续函数，$F(t)=\iint\limits_{(D)} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$ 其中 $(D):0\leq y\leq\sqrt{t^2-x^2}$，则 $F'(t)$ 为（　）

A　$\pi t^2 f(t)$；　B　$2\pi t^2 f(t)$；　C　$\pi tf(t)$；　D　$2\pi tf(t)$

5.设 $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1+a}{2}}$，其中 $a>0$ 为常数，则 $f(x,y)$ 在点(0,0)处（　　）

A　连续但不可偏导；　B 可偏导但不连续；

C　可微，且 $df\big|_{(0,0)}=0$；　D　$f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在(0,0)处连续

二、　填空（每小题3分，共15分）

1. 设 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______________.

2. 设 $u=x^{yz}$，则 $du=$ ________________.

3. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=2\end{cases}$ 在点(1,2,-1)处切线的方向向量 $\vec{\tau}=$ __________.

4. 设函数$u=xy^2+z^2-xyz$，则在(1,-1,1)处沿方向角为$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{\pi}{4}$的方向$\vec{l}$的方向导数为______

5. 交换二次积分次序：$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1-x^2}f(x,y)dy=$______

三、 计算（每小题 9 分，共 45 分）

1. 设函数$z=f\left(x^2-y^2,e^{xy}\right)+\frac{y}{g\left(x^2+y^2\right)}$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$二阶可导，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2. 设函数$F(x,y)$具有一阶连续偏导数，$z=z(x,y)$是由方程$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$确定的隐函数，试求$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 求积分$\iint\limits_{(D)}\ln\left(1+x^2+y^2\right)d\sigma$，其中$(D)$是$x^2+y^2\le 4$位于第一象限的部分.

4. 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，函数$u(x,y,z)=f(r)$，其中f具有二阶连续导数，

（1） 把$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$表示成$r$的函数;

（2） 若u满足$\Delta u=0$，求$f(r)$

5. 设向量值函数$\vec{f}(x,y,z)=\left(x\sin y,ye^z,\cos(xz)\right)^T$，求$\vec{f}$的 Jacobi 矩阵.

四、（15 分）求函数$f(x,y)=2x^2+6xy+y^2$在闭区域$x^2+2y^2\le 3$的最大值与最小值.

五、（10 分）计算三重积分$\iiint\limits_{(D)}\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|d\sigma$，其中$(D):x^2+y^2\le 1$

2014 年高数(下)期中

整理人：彭钰茗

一．计算下列各题(每小题 7 分)

1. 设$f(x,y)=\arctan\sqrt{x^y}$，求$f_x(x,1)$；

2. 设$z=e^x\ln|\sin(x-2y)|$，计算$\mathrm{dz}|_{(\frac{\pi}{4},0)}$；

3. 设$u=2xy-z^2$，求u在点$(2,-1,1)$处的方向导数的最大值；

4. 求椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$在点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$处的切平面方程和法线方程；

5. 求空间曲线$x=t,y=3t^2,z=t^3$在$t=1$对应的点处切线和法平面方程；

6. 设函数$F(u,v)$具有一阶连续偏导数，$z=z(x,y)$是由方程$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$所确定的隐函数，试求表达式$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$;

7. 求二元函数$f(x,y)=x^3+y^3+3xy$的极值；

8. 交换积分次序$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1-x^2}f(x,y)\,dy$，其中$f(x,y)$连续；

9. 计算二重积分 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中$D$是由圆周 $x=\sqrt{a^2-y^2}(\mathrm{a}>0)$ 和$x=0$ 所围成的区域;

10. 求向量函数$\vec{f}(x,y,z)=(x\cos y\,,ye^x\sin xz)^T$的导数。

二.（8 分）设函数$z=f\left(x^2y,\frac{y^2}{x}\right)+xg(x^2+y^2)$，其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$二阶可导，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

三.（8 分）讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$在$(0,0)$处偏导数存在，但在不连续$(0,0)$处偏导数不连续，而$f(x,y)$却在$(0,0)$处可微。

四.（8 分）在平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$与三个坐标平面所围成的四面体内作一个以该平面为顶面，在xoy坐标面上的投影为长方体的六面体，求最大六面体的体积（其中$a,b,c>0$）。

五.（6 分）设$F(x,y)=f(x)g(y)=s\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，其中$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{s}$都是可导函数，证明$F(x,y)=\bar{C}e^{C(x^2+y^2)}$，其中$\bar{\boldsymbol{C}},\boldsymbol{C}$为任意常数。

西安交通大学考试题

成绩	

课　程　高等数学(I　II)

学　院 ________________

专业班号 ________________　　考 试 日 期　2013 年 5 月 5 日

姓　名 ________________　　学　号________________　期中 √

一、计算下列各题（$7'\times 10=70$ 分）

1. 设 $u=xy-\dfrac{x}{y}+\mathrm{e}^{xyz}$，求 $\mathrm{d}u\big|_{(1,2,0)}$

2. 设曲线为 $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2 \\ z=t \end{cases}$，求它在对应于 $t=1$ 的点处的切线方程和法平面方程.

3. 设有球面 $x^2+y^2+z^2=14$，求它在点 $(3,2,1)$ 处的切平面方程和法线方程.

4. 设方程 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$ 可确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在 $P(1,-2,1)$ 处的值.

5. 设积分区域 Ω 由抛物面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=h>0$ 所围成，求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}v$.

6. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(1-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+y^2=ax$ 及 $x=0$ 所围在第一象限的区域.

7. 计算二重积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

8. 在圆锥面 $Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h\quad(R>0,h>0)$ 所围的锥体内作底面平行于 xoy 面的长方体，求体积最大的长方体及最大体积.

9. 在一个侧面为旋转抛物面 $4z=x^2+y^2$ 的容器内装有 $8\pi(\mathrm{cm}^3)$ 的水，若给该容器再注入 $128\pi(\mathrm{cm}^3)$ 的水，问水面比原来升高多少？

10. 求向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的导数，其中 $f=\left[x\cos y, y\mathrm{e}^x, \sin(xz)\right]^T$.

二、（8 分）设 $z=f\left(\mathrm{e}^{x+y},\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

三、（8 分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续，是否可微？

四、（8 分）设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}-a\quad(a>0)$ 所围成的均匀物体，求 Ω 对 oz 轴的转动惯量 I_z.

五.（6 分）已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0,$

$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2012 年高数(下)期中

整理人：聂臻

一．填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 曲线$x=t^2$，$y=2t$，$x=t$上相应于$y=2$的点处的切线方程是______

2. u=zarctan$\frac{y}{x}$在点 A（1,0,1）处沿点 A 指向点 B（3，-2，-2）方向的方向导数为__________

3. 曲面 F（x，y，z）=$x^2+xy^2+y^3-z+1=0$，在点 M（2，-1,6）处的切平面方程为__________

4. 若函数f(x,y) $=2x^2+ax+xy^2+2y$在点（1，-1）处取得极值，则常

数 a=__________

二．计算下列各题（每小题 9 分，共 54 分）

~~1.~~ 计算$\mathrm{I}=\int_0^1 dy\int_y^1(1+e^x)\frac{sinx}{x}dx$

~~2.~~ 计算二重积分$\iint_D sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, D：$\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$

~~3.~~ 设$z=x^2f\left(x,\frac{y^2}{x}\right)$,其中f具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

~~4.~~ 求椭球面$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$被平面 x+y+z=0 截得的椭圆长半轴于短半轴之长。

~~5.~~ 在曲面$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}=1(a>0,b>0.c>0)$上作切平面，使该切平面与三坐标面所围成的体积最大，求切点的坐标。

~~6.~~ 设函数$F(x,y)=x[1+yf(x^2+y^2)]$, 其中 f（u）二阶可导，~~①~~求$\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$

~~②~~求二重积分$\iint_D F(x,y)dxdy$，其中 D 是由$y=x^3,y=1,x=-1$围成的平面区域。

三．（9 分）（学习工科数学分析者做（1），其余做（2））

~~1.~~设有二元向量值函数$\bar{f}(x,y)=\begin{pmatrix}x^2+y^2\\2xy\end{pmatrix}$，试求$\bar{f}$在点（1,1）处的导数与微分。

~~2.~~设$z=f(x,y)$，由$x-y+xe^{x-y-z}=0$所确定，求dz

~~四~~．（11 分）讨论函数$f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$在点（0,0）处是否连续，偏导是否存在，是否可微？

五.（6 分）已知$u=u\sqrt{x^2+y^2}$有连续二阶偏导数，且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=x^2+y^2$，试求函数 u 的表达式。

2009 年高数（下）期中 A

整理人：郑哲艺

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点（1，-1）处取得极值，则常数 a=____________。

2、$z=\ln(e^{-x}+\frac{x^2}{y})$，在（1,1）处沿 l={1,0}方向的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}$=____________。

3、曲线 $x=\cos t, y=\sin t, z=\tan\frac{t}{2}$ 在点（0,1,1）处的切线方程是____________。

4、交换二次积分的积分次序（其中 $f(x,y)$ 为连续函数）

$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=$____________。

5、设 M（1，-1,2）是曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，若 $f_x(1,-1)=3$，在任一点 (x,y) 处有 $xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=f(x,y)$，则曲面在 M 处的切平面方程是____________。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{4xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 间断的原因是 $f(x,y)$（　　）

A. 在原点无意义　　*B.* 在原点极限存在但原点无意义

C. 在原点极限不存在　　*D.* 在原点极限存在，但极限不等于原点的函数值

~~1、~~函数 $f(x,y)=2xy-3x^2-2y^2+10$ 在点 0（0，0）处（　　）

$A.$ 取得极大值　$B.$ 取得极小值　　$C.$ 无极值　　$D.$ 不能判定是否取得极值

~~3~~、设 $u=\arctan\dfrac{x}{y}$ 则 $grad\ u|_{(1,1)}=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\{\dfrac{1}{2}，-\dfrac{1}{2}\}$　　D. $\{-\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{2}\}$

~~4~~、设 $f(u)$ 是连续函数，平面区域 D：$0\le y\le\sqrt{1-x^2}\quad(|x|\le1)$，则 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$（　　）

$A.$ $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$　　　$B.$ $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$

$C.$ $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$　　　$D.$ $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$

~~5~~、比较 $I_1=\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 $D=(x-2)^2+(y-2)^2\le2$，则（　　）

$A.$ $I_1=I_2$　　$B.$ $I_1>I_2$　　$C.$ $I_1\le I_2$　　$D.$ $I_1\ge I_2$

三、解答下列各题（每小题 8 分，共 64 分）

~~1~~、设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

~~2、~~求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{2}$ 任一点处的切平面与三个坐标轴的截距之和。

3、计算二重积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$.

4、（说明：学习《工科分析》者做(1),其余的做(2)）

~~(1)~~求向量值函数 $f(x,y)=\begin{bmatrix}x^2\\xy\\y^2\end{bmatrix}$ 的 Jacobi 矩阵。

~~(2)~~设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x^2-y^2,y^2-z^2)$ =0 所确定，其中 $F(u,v)$ 可微，$zF_v\ne0$，求 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

~~5、~~设 $F(t)=\iint\limits_D e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}x$，其中 $D=x^2+y^2\le t^2$，求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{F'(t)}{t}$.

~~6~~、讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点（0，0）处的可微性。

~~7、~~设有一物体，它是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ 所围成，已知它在任意的点（x，y，z）处的密度 $\mu=z$，求此物体的质量 m。

~~8~~、设 $z=f(x,\dfrac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，求 dz 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x\partial^2 y}$.

~~四~~、（6 分）在第一卦限内作旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 的切平面，使得该切平面与旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2(x\ge 0,y\ge 0)$ 及三个坐标面所围成的立体的体积最小，求切点坐标。

2009 年高数（下）期中 B

整理人：郑哲艺

一．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

~~1、~~若函数 $f(x,y)=\dfrac{x^3+y}{2+y\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $f_x(1,0)=$_____________。

~~2~~、$z=\ln(e^{-x}+\dfrac{x^2}{y})$，在（1,1）处沿 l={1,0}方向的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=$_____________。

~~3、~~曲线 $x=\cos t,y=\sin t,z=\tan\dfrac{t}{2}$ 在点（0,1,1）处的切线方程是______________。

~~4~~、交换二次积分的积分次序（其中 $f(x,y)$ 为连续函数）

$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=$________________。

~~5~~、设 M（1，-1,2）是曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，若 $f_x(1,-1)=3$，在任一点 (x,y) 处有 $xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=f(x,y)$，则曲面在 M 处的切平面方程是____________。

二．单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

~~2~~、函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处（　　）

A. 极限存在　　　　　　　　　　B. 连续

C. 沿任意方向的方向导数都存在　　D. 两个一阶偏导数都存在

~~3~~、函数 $f(x,y)=2xy-3x^2-2y^2+10$ 在点 0（0，0）处（　　）

B. 取得极大值　B. 取得极小值　　C. 无极值　　D. 不能判定是否取得极值

~~4~~、设 $u=\arctan\dfrac{x}{y}$ 则 $grad\ u|_{(1,1)}=$（　　）

B. $\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\{\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\}$　　D. $\{-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\}$

~~5~~、设 $f(u)$ 是连续函数，平面区域 D: $0\le y\le\sqrt{1-x^2}$ $(|x|\le 1)$，则 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)d\sigma$（　　）

B. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)dy$　　　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x^2+y^2)dx$

C. $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 f(\rho^2)\rho d\rho$　　　　D. $\int_0^{\pi} d\theta\int_0^1 f(\rho^2)d\rho$

~~6~~、比较 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小，其中 $D=(x-2)^2+(y-2)^2\le 2$，则（　　）

A. $I_1=I_2$　　B. $I_1>I_2$　　C. $I_1\le I_2$　　D. $I_1\ge I_2$

三、解答下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

~~1~~、设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

~~2~~、求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{2}$ 任一点处的切平面与三个坐标轴的截距之和。

~~3、~~计算二重积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} \mathrm{d}y$.

~~4~~、求向量值函数 $f(x,y)=\begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix}$ 的导数及微分。

~~9~~、设 $F(t)=\iint\limits_D e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=x^2+y^2\le t^2$，求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{F'(t)}{t}$.

~~10~~、设 $z=f(x,\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

~~11、~~设有一物体，它是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ 所围成，已知它在任意的点（x，y，z）处的密度 $\mu=z$，求此物体的质量 m。

~~12、~~计算积分 $\iiint\limits_V (\frac{x}{2}+\frac{y}{3})^2 \mathrm{d}V$.其中（V）由曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 所围成。

~~13~~、已知二元函数 $f(x,y)$ 在点（0，0）的某邻域内有定义，试研究 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 与 $f(x,y)$ 在（0，0）点的可微性之间的关系。

~~10~~、在第一卦限内作旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 的切平面，使得该切平面与旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2(x\ge 0,y\ge 0)$ 及三个坐标面所围成的立体的体积最小，求切点坐标。

2008 年高数（下）期中

整理人：吕玉芳

一．解答下列各题（每小题 7 分，共 70 分）

1. 设 $f(x,y)=\arcsin\frac{y^2}{x}$,求 $\mathrm{d}f(x,y)$.

2. 设由方程 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$ 可确定 $z=z(x,y)$, 求

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,-2,1)}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,-2,1)}$。

3. 求曲面$z = x^2 + y^2 - 1$在点（2,1,4）的切平面与法线方程。

4. 求曲线$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^2 \\ z = 2t \end{cases}$ 在$t = 0$时的切线与法平面方程。

5. 设f连续，交换积分次序$\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6. 计算二重积分$\iint_{x^2+y^2\le a^2}(x^2 + \sin y + 1)dxdy$

7. 设空间立体Ω是由抛物面$z = x^2 + y^2$及平面$z = h > 0$所围成，已知它的密度为$f(x,y,z) = z^2$,试计算它的质量。

8. 求$u = 2xy - z^2$在点（2，-1，1）处的方向导数的最大值。

9. 求曲线（$a\cos t, a\sin t, kt$）的曲率。

10. （学工科分析者做①，其余做②）

设$f(x,y) = (x^2 + y^2, e^{xy})$,求$Df(1,1)$, $df(1,1)$

设方程组$\begin{cases} x^2 + y^2 = uv \\ xy^2 = u^2 - v^2 \end{cases}$,确定函数$u = u(x,y)$和$v = v(x,y)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

二．（8 分）设$z = f(x^2 y, \frac{y}{x})$，其中$f$为可微函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

三．设$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 试f（x,y）在（0,0,）处的连续性和可微性。

四．求曲面$z=1+x^2+y^2$在点$M_0(1,-1,3)$的切平面与曲面$z=x^2+y^2$所围立体的体积。

五（7 分）设函数f（x,y,z）在闭球体Ω：$x^2+y^2+z^2\le 3$上有连续的偏导数，且满足条件：①在 Ω 上$\frac{\partial f}{\partial x}=1,\frac{\partial f}{\partial y}=1,\frac{\partial f}{\partial z}=-1$，② $f(1,1,1)=11$．试求函数 f（x,y,z）并证明$7\le f(x,y,z)\le 13$，$\forall(x,y,z)\in\Omega$

参考答案

2014 年高等数学(下)期中

一、

1. $f_x(x,1)=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$;

2. $dz|_{(\frac{\pi}{4},0)}=e^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)dx-2e^{\frac{\pi}{4}}dy$;

3. $\nabla u|_{(2,-1,1)}=(-2,4,-2),\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{max}=\|\nabla u\|\|\vec{e_\tau}\|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$;

4. 切平面方程$x+2y+z-2=0$；法线方程$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}$;

5. 切线方程$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{6}=\frac{z-1}{3}$；法平面方程$x+6y+3z-22=0$；

6. 全微分法：

$$\begin{cases} F_1\left[\frac{1}{z}dx+\left(-\frac{x}{z^2}\right)dz\right]+F_2\left[\frac{1}{z}dy+\left(-\frac{y}{z^2}\right)dz\right]=0 \\ dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial x}dy \end{cases}$$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1}{\frac{x}{z}F_1+\frac{y}{z}F_2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2}{\frac{x}{z}F_1+\frac{y}{z}F_2}$，$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

7. $f_x=f_y=0$，得驻点$P_1(0,0),P_2(-1,-1)$，$\mathrm{H}f(P_1)$负定，$f(x,y)$在$(-1,-1)$处取极大值1，$x=y=0$时取$y=x,y=-x$易证$f(x,y)$无极值。综上$f(x,y)$在$(-1,-1)$处取极大值1，；

8. $\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1-x^2}f(x,y)dy=\int_{-1}^{0}dy\int_{-1}^{1}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\,dy$；

9. $\pi\sin a-\pi a\cos a$；

10. $\begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y & 0 \\ ye^x(\sin xz+z\cos xz) & e^x\sin xz & xye^x\cos xz \end{pmatrix}$；

二、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1\left(x^2y,\frac{y^2}{x}\right)xy-f_2\left(x^2y,\frac{y^2}{x}\right)\frac{y^2}{x^2}+2g'(x^2+y^2)x^2+g(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1+\frac{2y}{x}f_2+2xyg'(x^2+y^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2xf_1+x^2\left[f_{11}\cdot 2xy+f_{12}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right]+\left(-\frac{2y}{x^2}\right)f_2\\ &\quad+\frac{2y}{x}\left[f_{21}\cdot 2xy+f_{22}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)\right]+2yg'(x^2+y^2)+4x^2yg''(x^2+y^2)\\ &=2xf_1+2x^3yf_{11}+3y^2f_{12}-\frac{2y}{x^2}f_2-\frac{2y^3}{x^3}f_{22}+2yg'(x^2+y^2)\\ &\quad+4x^2yg''(x^2+y^2)\end{aligned}$$

三、

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x^2}) = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{y\to 0}(y\sin\frac{1}{y^2}) = 0$$

∴在(0,0)处偏导数存在

$$f_x = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

取$y = kx$，$\lim_{x\to 0} f_x = \lim_{x\to 0}[2x\sin\frac{1}{(1+k^2)x^2} - \frac{2}{(1+k^2)x}\cos\frac{1}{(1+k^2)x^2}] = 0-\infty$ 可知

极限不存在

∴ f_x不连续，同理f_y不连续

∴在 (0, 0) 处，偏导数不连续；

$$\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\frac{|\Delta f - f_x\,dx - f_y\,dy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|$$

$$\le \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

∴ $f(x,y)$在 (0, 0) 处可微

四、

$V = \iint_D c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})dxdy = c\int_0^x dx\int_0^y\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy = c\int_0^x[\left(1-\frac{x}{a}\right)y - \frac{1}{2b}y^2]dx = c\left(xy-\frac{x^2y}{2a}-\frac{xy^2}{2b}\right)$

$$L = xy - \frac{x^2y}{2a} - \frac{xy^2}{2b} - \lambda[\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1]$$

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{a}{2},\ y = \frac{b}{2} \qquad V_{max} = \frac{1}{8}abc$$

五、

$$\mathrm{F}_x(x,y) = f'(x)g(y) = s'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\mathrm{F}_y(x,y) = g'(y)f(x) = s'(\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

可知：$yf'(x)g(y) = xf(x)g'(y)$

令$\dfrac{f'(x)}{xf(x)} = \dfrac{g'(y)}{yg(y)} = C,\quad \dfrac{f'(x)}{f(x)} = Cx$

$f(x) = C_1e^{Cx^2},\ \ g(y) = C_2e^{Cy^2}$

$\therefore \mathrm{F}(x,y) = f(x)g(y) = \bar{C}e^{C(x^2+y^2)}$

2012 年高等数学(下)期中

一、填空题

1、$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$

2、$-\frac{2}{\sqrt{17}}$

3、$5(x-2)-(y+1)-(z-6)=0$

4、-5

二、计算下列各题

1、$I=\int_0^1 dy\int_y^1(1+e^x)\frac{sinx}{x}dx$

$=\int_0^1 \mathrm{dx}\int_0^1\frac{(1+e^x)sinx}{x}dy$

$=\int_0^1(sinx+e^x sinx)dx$

$=1\text{-}\cos 1+\frac{e(\sin 1-\cos 1)+1}{2}$

2、原式

=

$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\pi^{2\pi}sin\rho*\rho d\rho=$

$2\pi\int_\pi^{2\pi}-\rho dcos\rho=-2\pi(\rho cos\rho|_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi}cos\rho d\rho)=-2\pi(2\pi+\pi+0)=$

$-6\pi^2$

3、$z_x=xf\left(x,\frac{y^2}{x}\right)+x^2\left(f_1+f_2\frac{-y^2}{x^2}\right)=2xf\left(x,\frac{y^2}{x}\right)+x^2f_1-y^2f_2$

$z_{xx}=2f+2x\left(f_1+f_2\frac{-y^2}{x^2}\right)+2xf_1+x^2\left(f_{11}+f_{12}\frac{-y^2}{x^2}\right)-y^2\left(f_{21}+f_{22}\frac{-y^2}{x^2}\right)=$
$2f+2xf_1-\frac{2y^2}{x}f_2+2xf_1+x^2f_{11}-y^2f_{12}-y^2f_{21}+\frac{1}{x^2}y^4f_{22}=2f+4xf_1-$
$\frac{2y^2}{x}f_2+x^2f_{11}-2y^2f_{12}+\frac{y^4}{x^2}f_{22}$

4、令

$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+z^2-1\right)+\lambda_2(x+y+z)$——（3 分）

则$L_x=L_y=L_z=L_{\lambda_1=}L_{\lambda_2}=0$，即$\begin{cases}2x+\frac{2}{3}\lambda_1 x+\lambda_2=0\\ 2y+\lambda_1 y+\lambda_2=0\\ 2z+2\lambda_1 z+\lambda_2=0\end{cases}$——（5 分）

解得$x=\frac{-3\lambda_2}{6+2\lambda_1},y=\frac{-\lambda_2}{2+\lambda_1},z=\frac{-\lambda_2}{2+2\lambda_1}$——（7 分）

解得$d_1=\sqrt{\frac{11+\sqrt{13}}{6}};d_2=\sqrt{\frac{11-\sqrt{13}}{6}}$——（9 分）

5、解：设切点

$M_0(x_0,y_0,z_0),F=a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}-1;F_x=\frac{a}{2\sqrt{x_0}};F_y=\frac{b}{2\sqrt{y_0}};F_z=\frac{c}{2\sqrt{z_0}};\vec{n}=\left(\frac{a}{\sqrt{x_0}},\frac{b}{\sqrt{y_0}},\frac{c}{\sqrt{z_0}}\right)$

$$\frac{a}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{b}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{c}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

即$\frac{x}{\frac{\sqrt{x_0}}{a}}+\frac{y}{\frac{\sqrt{y_0}}{b}}+\frac{z}{\frac{\sqrt{z_0}}{c}}=1$

$V=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_0y_0}}{ab}\frac{\sqrt{z_0}}{c}=\frac{\sqrt{x_0y_0z_0}}{6abc}$；令$L=xyz+\lambda\left(a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}-1\right)$

则$L_x=yz+\lambda a\frac{1}{2\sqrt{x}}=0;L_y=xz+\lambda b\frac{1}{2\sqrt{y}}=0;L_z=xy+\lambda c\frac{1}{2\sqrt{z}}=0;$

$$\Rightarrow\begin{cases}2xyz+\lambda a\sqrt{x}=0\\ 2xyz+\lambda b\sqrt{y}=0\\ 2xyz+\lambda c\sqrt{z}=0\end{cases}\Longrightarrow a\sqrt{x}=b\sqrt{y}=c\sqrt{z}$$

代入方程：$3a\sqrt{x}=1$；所以 $x=\frac{1}{9a^2},y=\frac{1}{9b^2},z=\frac{1}{9c^2}$；

所以切点为（$\frac{1}{9a^2}$，$\frac{1}{9b^2}$，$\frac{1}{9c^2}$）。

6、解：$F_x = 1 + yf + xf' * 2x = 1 + yf + 2x^2yf'$

$$I = \iint_D x d\sigma + I_1; I_1 = \iint_D xyf(x^2 + y^2)d\sigma$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^3}^{1} xyf(x^2 + y^2)dy$$

令$\varphi(x) = \int_{x^3}^{1} yf(x^2 + y^2)dy$

则$\varphi(x) = \int_{x^3}^{1} \frac{1}{2} f(x^2 + y^2)d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\int_{x^2+x^6}^{x^2+1} f(t)dt^2$ *为偶函数*

所 以

$I_1 = \int_{-1}^{1} x * \varphi(x)dx = 0;$ *所以* $I = \int_{-1}^{1} x\, dx \int_{x^3}^{1} dy = \int_{-1}^{1}(x - x^4)dx = -2\int_0^1 x^4 dx = -\frac{2}{5}$

三 、 2 ）

$0 = dx - dy + e^{x-y-z}dx + xe^{x-y-z}(dx - dy - dz) = (1 + e^{x-y-z}dx + xe^{x-y-z})dx - (1 + xe^{x-y-z})dy - xe^{x-y-z}dz$

所以$dz = \frac{1+e^{x-y-z}dx+xe^{x-y-z}}{xe^{x-y-z}} - \frac{1+xe^{x-y-z}}{xe^{x-y-z}}dy$

四、解：$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt[3]{x^2y} = 0 = f(0,0)$ 所以连续。

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(y,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0;$ *同理* $f_y(0,0) = 0;$

若可微则 $\Delta z-(f_x\Delta x+f_y\Delta y)=o(e)$；即 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho}{\Delta z}=0$；即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2\Delta y}}{\sqrt[2]{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$；但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2\Delta y}}{\sqrt[2]{\Delta x^2+\Delta y^2}}$（沿 $\Delta x=\Delta y$）$=\frac{1}{\sqrt{2}}$；所以不可微。

五、解：令 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $u=u(z)$，且 $\frac{\partial u}{\partial y}=u'\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=u''\frac{x^2}{x^2+y^2}+u'\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=u''\frac{x^2}{x^2+y^2}+u'\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''\frac{y^2}{x^2+y^2}+u'\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

代入条件：$u''+u' * \frac{1}{z}=z^2$

解得 $u=\frac{1}{16}(x^2+y^2)^2+c_1\ln(x^2+y^2)+c_2$

2009 年高等数学(下)期中 A

一、 1、 -5　2、$\frac{2e-1}{e+1}$　3、$\vec{\rho}=(0,1,1)+\lambda(-1,0,1)$　4、$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

5、$3(x-1)+(y+1)-(z-2)=0$

二、 1、C　2、A　3、C　4、C　5、C

三、 1、$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

2、$(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})^2$

3、$\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

4、（1）$\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$

（2）$\frac{xy}{2}$

5、$2\pi e$

6、可微

7、8π

8、$dz=(f_1-\frac{y}{x^2}f_2)dx+\frac{f_2}{x}dy$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x(f_{21}-\frac{y}{x^2}f_{22})-f_2}{x^2}$

四、$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

2009 年高等数学(下)期中 B

一、1、$\frac{3}{2}$　2、$\frac{2e-1}{e+1}$　3、$\vec{\rho}=(0,1,1)+\lambda(-1,0,1)$　4、$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

5、$3(x-1)+(y+1)-(z-2)=0$

二、1、D　2、A　3、C　4、C　5、C

三、1、$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

2、$(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})^2$

3、$\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

4、$\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$

5、$2\pi e$

6、$dz=(f_1-\frac{y}{x^2}f_2)dx+\frac{f_2}{x}dy$　　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x(f_{21}-\frac{y}{x^2}f_{22})-f_2}{x^2}$

7、8π

8、$\frac{1}{144}(\frac{13}{3}\pi-1)$

9、可微

10、$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

2008 年高等数学(下)期中

一、

1、$\mathbf{d}f=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}(-\frac{y^2}{x^2}dx+\frac{2y}{x}dy)$

2、$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,-2,1)}=0,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(1,-2,1)}=-\frac{1}{5}$

3、切平面：$4x+2y-z=2$　线性方程：$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$

4、切线：$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{2}$, 切平面：$x+2z=0$

5、原式=$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$

6、$\iint_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+\sin y+1)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+1)dxdy=\pi a^2+\frac{\pi}{4}a^4$

7、$\frac{\pi}{4}h^2$

8、$2\sqrt{6}$(先求梯度，再求模)

9、$\frac{|a|}{a^2+k^2}$　　$(\frac{\|\vec{r}'\times\vec{r}''\|}{\vec{r}'})$

10、　①

$\mathrm{D}f(x,y)=\begin{bmatrix}2x & 2y\\ ye^{xy} & xe^{xy}\end{bmatrix},\mathrm{D}f(1,1)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ e & e\end{bmatrix},df(1,1)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ e & e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix}=$
$\begin{bmatrix}2(dx+dy)\\ e(dx+dy)\end{bmatrix}$

② 方程两边求偏导数 $\begin{cases}2x = v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\\ y^2 = 2u\frac{\partial u}{\partial x}-2v\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$，解得

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4xv+uy^2}{2(u^2+v^2)},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4xu-vy^2}{2(u^2+v^2)}$

二、

$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1-\frac{y}{x^2}f_2,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1+2xy\left(x^2f_{11}+\frac{1}{x}f_{12}\right)-\frac{1}{x^2}f_2-\frac{y}{x^2}(x^2f_{11}+\frac{1}{x}f_{12})$

三、

由于

$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le|y|\to 0,f_y(0,0)=$

$0.$ 但 $\lim_{p\to 0}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-[f_x(0,0)\Delta x+f_{y(0,0)}\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta y(\Delta x)^2}{\sqrt{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^3}}=$

$\frac{k}{1+k^2}$（令$\Delta y=k\Delta x$）

所以不成立。

四、

切平面法向量为 $\vec{n}=(z_x,z_y,-1)|_{M_0}=(2,-2,-1)$ 切平面方程为

$z=2x-2y-1$

从而切平面与曲线的交线是 $\begin{cases}z=2x-2y-1\\ z=x^2+y^2\end{cases}$，化简得

$(x-1)^2+(y+1)^2\le 1$

$$\nabla = \iint_D [2x - 2y - 1 - (x^2 + y^2)]dxdy$$

$$= \iint_D [1 - (x-1)^2 - (y+1)^2] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) dr = \frac{\pi}{2}$$

五、

因为 $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$，所以 $f = x + \varphi(y,z)$，又因为 $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$，所以 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1$ 所以 $\varphi = y + \psi(z)$，又因为 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \psi'(z)$ 所以 $f = x + y - z + \kappa$，又因为 $f(1,1,1) = 11$，则 $\kappa = 10$，所以 $f = x + y - z + 10$ 设 $F = x + y - z + 10 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$ 令 $F_x = F_y = F_z = 0$，解得 $M_1(1,1,-1), M_2(-1,-1,1)$ $f(M_1) = 13, f(M_2) = 7$。。。。。。。。。满足题意。