彭·核代

期末试题集(2021版)



彭康书院学业辅导与发展中心

一、单选题

1.设A是3阶方阵,将A的第2行加到第1行得矩阵B,再把B的第1列的-1倍加到第2列得矩阵C,

$$\mbox{记} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{贝 } \ (\qquad \)$$

A.
$$C = P^{-1}AP$$

B.
$$C = PAP^{-1}$$

C.
$$C = P^T A P$$

D.
$$C = PAP^T$$

2. 设矩阵
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
可逆,则直线 $\frac{x-1}{a_1-a_2} = \frac{y-2}{b_1-b_2} = \frac{z-3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-1} = \frac{y-b_1}{b_2-2} = \frac{z-c_1}{c_2-3}$ ()

A.相交于一点

3.设A为 $m \times n$ 矩阵,B为 $n \times m$ 矩阵,若BA = I是单位矩阵,则()

A.
$$r(A) = m, r(B) = m$$
 B. $r(A) = m, r(B) = n$ C. $r(A) = n, r(B) = m$ D. $r(A) = n, r(B) = n$

B.
$$r(A) = m, r(B) = n$$

C.
$$r(A) = n, r(B) = m$$

0.
$$r(A) = n, r(B) = r$$

4. 设 A 是 3 阶方阵, α_1 , α_2 为属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3 为属于特征值为-1 的特征向量,

若存在可逆矩阵
$$P$$
 ,使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,则 P 可以取为()
$$A.(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3) \qquad B. \ (\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3) \qquad C. \ (\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2) \qquad D. \ (\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$$

A.
$$(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$$

B.
$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$$

C.
$$(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$$

D.
$$(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2, \alpha_2)$$

5.二次型
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$$
 的正惯性指数与负惯性指数依次为(

二、填空颢

1.设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为 3 阶矩阵. 若 α_1, α_2 线性无关,且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$,则齐次线性方程组 AX = 0 的通解

$$2.$$
设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,则行列式 $\begin{vmatrix} O & 2A \\ A^* & O \end{vmatrix} =$ ______.

3.在全体 2 阶实矩阵所构成的实线性空间 $R^{2\times 2}$ 中, $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ 在基 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 下的坐标 为

4.设 3 阶矩阵 $A = (a_{ii})$ 的各行元之和均为 6,|A| = 2,则 A^* 第一行元之和为______

5.设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 + A = 2I$,且|A| = 4 ,则 det(A + 3I) =_______

1.求向量组
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的所有的极大无关组.

2.已知直线l的方程为 $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$.求直线l绕y轴旋转一周所得曲面的方程,并指出方程表示什么二次曲面.



(2)如果n阶矩阵A的秩为r,证明存在秩为r的n阶矩阵B,C使得A=BC.

- 4.设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^3$ 线性无关,矩阵 $A = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1)$, $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$.
 - (1)写出矩阵 B 与 γ 使得 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$, $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\gamma$;
 - (2)求线性方程组 AX = B 的通解.

5.设
$$T \in L(R^3)$$
, $T(\alpha_1) = (-5,0,3)^T$, $T(\alpha_2) = (0,-1,6)^T$, $T(\alpha_3) = (-5,-1,9)^T$. 其中 $\alpha_1 = (2,1,-1)^T$, $\alpha_2 = (2,-1,2)^T$, $\alpha_3 = (3,0,1)^T$, 求 T 在基 $\varepsilon_1 = (1,0,1)^T$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)^T$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)^T$ 下的矩阵.

- 6.设 3 阶实对称矩阵 A 各行元之和为 6,且其伴随矩阵 A^* 为零矩阵.
 - (1)求A的秩r(A);
 - (2)求 A 的全部特征值;
 - (3)求A.

- 7.设n阶方阵A满足 $A^2 = A$,I是n阶单位矩阵.证明:
 - (1) r(A) + r(A-I) = n;
 - (2) A 可以相似对角化;
 - (3)r(A) = tr(A), 其中tr(A)表示A的对角元之和.

8. (1)设向量组(I): $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 与向量组(II): $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 的秩相等,并设(II)可由(I)线性表示,试证明(I)与(II)等价;

(2)设A是 $m \times n$ 矩阵,B是 $n \times s$ 矩阵,且r(A) = r(AB),试证明存在 $s \times n$ 矩阵C,使A = ABC.



一、填空题(每题3分,共30分)

1. 设
$$\alpha = (-1,2), \beta = (3,1), 则 \alpha \beta^T = ____, \alpha^T \beta = ____, (\alpha^T \beta)^{99} = ____.$$

2. 设矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则行列式 $|AB^{-1}| =$ _____.

- 3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,如果 $\alpha_1+\alpha_2,k\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关,则 k=
- 4. 设矩阵A以及A + I均可逆,其中I为单位矩阵,记 $G = I (A + I)^{-1}$,则 $G^{-1} = I$
- 5. 过四点*A*(-1,0,1), *B*(-2,1,4), *C*(1,3,-3), *D*(0,1,-1)空间四面体 ABCD 的体积为=_____.
- 6. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$,其中列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_3 = 2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_4$,则齐次线性方程组Ax = 0的一个基础解系为_____.
- 7. 设 3 阶方阵 A 满足I A, 2I A, 3I + A都不可逆,则 A 与对角阵_____相似.

8. 由向量
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成的 R^3 的子空间的标准正交基为

二 (8 分) 计算阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+x\\ 1-x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
.

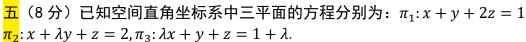
^{9.} 直线 L:x - 1 = y = z绕 Z 轴旋转所形成的旋转曲面的方程为_____.

^{10.} 设 n 阶实对称幂等矩阵 A(满足 $A^2 = A$)的秩为 r,则 $\det(I + A + A^2 + \cdots + A^n)$ =

$$\Xi$$
 (8 分) 求向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的极大线性

无关组,并将其余的向量用所求得的极大线性无关组线性表示.

四(8 分)设
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵方程 $XA = 2X + B$ 的解.



- (1) 当 λ取何值时候,这三个平面交于一点?交于一条直线?没有公共交点?
 - (2) 当它们交于一条直线时, 求直线的方程.

六(8 分)设 T 为 $F[x]_2$ 上的线性算子,T 在基 $\{x^2, x, 1\}$ 下的矩阵为 $A = \{x^2, x, x, x\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 T 在基 $\{x^2, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ 下的矩阵.
- (2) 求 $T(3x^2 2x + 1)$.

七 (10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ 有一个二重特征值

- <mark>(</mark>1)求 a 的值,并讨论 A 是否相似于对角阵.
- (2) 如果 A 相似于对角阵, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 是对角阵.

八(10 分)设二次型 $f(x_1, x_1, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 + x_4x_2x_3 + x_5x_3 + x_5$ $\frac{kx_3^2}{(1)}$, $g(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_3$. (1) 求可逆变换x = Py将f化成标准型.

- (2) 问: k满足什么条件时,存在可逆线性变换将f化成g.

- <mark>九</mark>(10 分)证明题
- 1. 设 A 为 n 阶矩阵,证明存在幂等矩阵 $F(\mathbb{D}F^2 = F)$ 及可逆矩阵 U,使得 A=FU.
- 2. 设 A 既是正交矩阵又是正定矩阵,证明 A=I。

一、单选题

1. 设有非零多项式 $f(x) = \begin{bmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & a_{13} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & a_{23} + x \\ a_{31} + x & a_{32} + x & a_{33} + x \end{bmatrix}$,其中 $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 为实常数,则多项式 f(x) 的

次数为()

A. 3 次

B. 2 次

- C. 1 次
- D. ≤1次

2. 下列矩阵中不是初等矩阵的是()

A.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 齐次线性方程组Ax=0的一个基础解系,则该方程组的基础解系还有(
 - A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$
 - B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1$
 - C. $\alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1$
 - D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1$
- 4. 在欧式空间 R^3 中,下述哪个集合可构成 R^3 的子空间()
 - A. $W_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 | x = y = z + 1 \}$
 - B. $W_2 = \{(x, y, z)^T \in R^3 | x y + z = 0 \}$
 - C. $W_3 = \{(x, y, z)^T \in R^3 | x^2 y^2 = z \}$
 - D. $W_4 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0 \text{ } \exists x = y \}$
- 5. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, 则下列正确的答案是(
 - A. A 与 B 相似且等价
 - B. A 与 B 不相似但等价
 - C. A 与 B 相似但不等价
 - D. A 与 B 不相似且不等价

二、填空题

- 2. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为1,2,2,且不能与对角矩阵相似,则 r(2E-A)=
- 3. 设 3 元非齐次线性方程组 Ax = b 的两个解向量 η_1, η_2 满足 $\eta_1 + 2\eta_2 = (1,0,1)^T$, $\eta_2 + \eta_1 = (2,-2,1)^T$,且 r(A) = 2,则该方程组的通解是

(注意: 学习了第八章线性变换者做第6题, 其余同学做第5题)

6. 设T为 2 维线性空间V 上的一个线性变换,T 在V 的基 α_1 , α_2 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,且由基 α_1 , α_2 到

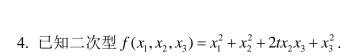
基 β_1,β_2 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,则T在V的基 β_1,β_2 下的矩阵为______

三、解答题

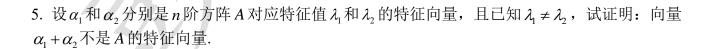
1. 计算
$$n$$
阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}$, 其中 a_1, \dots, a_n , x 为任意实常数.

2. λ 取何值时,线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + (\lambda + 3)x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \end{cases}$,有唯一解、无解、无穷多解?在有无穷多解时,求结构式通解.

- 3. R^3 中有一直线 L过点 P(1,2,3) 且垂直于平面 x+2y+3z=4.
 - (1) 求此直线L的直线方程.
 - (2) 证明过此直线 L 的平面都垂直于平面 x+2y+3z=4.
 - (3) 求此直线 L 绕 z 轴旋转所得旋转面的曲面方程.



- (1) 问t取何值时,该二次型是正定的.
- (2) 取t=1,试用正交变换化相应的二次型为标准形,并写出所用的正交变换.
- (3) t=1时, f=1表示何种二次曲面?





6. 设A,B是两个n阶实方阵, $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ 是一个分块矩阵,试证明: r(M) = r(A+B) + r(A-B).

7. 设A为n(n>1)阶实方阵,且 $\det(A)=0$,证明:A的伴随矩阵 A^* 的非零特征值(若存在)等于 $\sum_{i=1}^n A_{ii}$,其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.



一、单选题

$$1. \ \ \overset{\square}{\boxtimes} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix}, \ P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \ \overset{\square}{\boxtimes} (1, 0, 0) = 0$$

- A. $AP_1P_2 = B$ B. $AP_2P_1 = B$ C. $P_1P_2A = B$ D. $P_2P_1A = B$
- 2. 设n阶方阵A经过有限次初等变换后得到矩阵B,则(
 - A. |A| = |B|
- B. 方程组 Ax = 0 与 Bx = 0 同解
- C. $A 与 B^T$ 等价 D. 一定存在初等矩阵 P , Q , 使得 A = PBQ
- 3. 设Ax=0是非齐次线性方程组Ax=b对应的齐次方程组,则(
 - A. 若 Ax = 0 只有零解,则 Ax = b 有唯一解
 - B. 若 Ax = 0 只有非零解,则 Ax = b 有无穷多解
 - C. 若 Ax = 0有无穷多解,则 Ax = b只有零解
 - D. 若 Ax = 0有无穷多解,则 Ax = b有非零解
- 4. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & x \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, A 有特征值 $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, 且 A 有 3 个线性无关的特征向量,则 x 等于(
 - A. 2

- D. -4
- 5. 设n维向量组 β_1 , β_2 , β_3 可由 α_1 , α_2 线性表示,则(
 - A. 仅当 α_1 , α_2 线性无关时, β_1 , β_2 , β_3 线性无关
 - B. 仅当 α_1 , α_2 线性相关时, β_1 , β_2 , β_3 线性相关
 - C. β_1 , β_2 , β_3 线性无关
 - D. β_1 , β_2 , β_3 线性相关

二、填空题

- 1. 设A为 3 阶方阵,且|A-2I|=|A+I|=|2A-I|=0 ,则 $|A^*|=$ ______
- 2. 设n阶矩阵A满足 $A^2-2A+3I=0$,则 $A^{-1}=$
- 3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, B 为 3 阶 非 零 矩 阵 , 且 AB = 0 , 则 t =_____.
- 4. 二次曲面 $x^2 + 2y^2 2xy = 1$ 在 R^3 中表示的图形是 柱面.
- 5. 已知 R^3 中向量满足 |a| = |b| = 2 , $\langle a,b \rangle = \frac{\pi}{3}$, 则 |2a 3b| = _____.

三、解答题

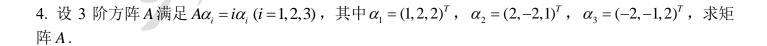
1. 求过点 A(-3,0,1) 且与平面 π_1 : 3x-4y-z+5=0 平行,与直线 l_1 : $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 相交的直线 l 的方程.

2. 已知 α_1 , α_2 , α_3 线性无关,证明 $\alpha_1+\alpha_2$, $3\alpha_2+2\alpha_3$, $\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$ 线性无关.



(1) 求参数 λ, a 的值.

(2) 求方程组Ax = b的通解.



- 5. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 \quad (a > 0)$.
 - (1) 若此二次型正定, 求参数 a 的范围.
- (2)若此二次型通过正交变换化成标准型方程为 $f(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$,求参数 a 的取值及所用的正交变换.

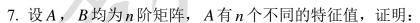


题一:设
$$T \in L(V)$$
, $T \oplus V$ 的基 α_1 , α_2 , α_3 下的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & -6 \end{bmatrix}$.

- (1) 证明 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 也是V的基.
- (2) 求T在基 β_1 , β_2 , β_3 下的矩阵.

题二: 设线性空间 $f[x]_2$ 有两个基(I) $1, x, x^2$;(II) $x^2 + x, x^2 - x, x + 1$.

- (1) 求由基(I) 到基(II) 的过渡矩阵.
- (2) 求 $f = 4x^2 + 4x + 2$ 在基(II)下的坐标.



- (1) 若 AB = BA,则 B 相似于对角矩阵.
- (2) 若 A 的特征向量也是 B 的特征向量,则 AB = BA.

一、单选题

1. 设A和B均为n阶方阵, $\det(A) = a$, $\det(B) = b$, 又设 A^* 、 B^* 分别为A、B的伴随矩阵,则 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}$ 的

伴随矩阵为(

A.
$$\begin{bmatrix} aA^* & O \\ O & bB^* \end{bmatrix}$$
 B. $\begin{bmatrix} bA^* & O \\ O & aB^* \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} bB^* & O \\ O & aA^* \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} aB^* & O \\ O & bA^* \end{bmatrix}$

B.
$$\begin{bmatrix} bA^* & O \\ O & aB^* \end{bmatrix}$$

C.
$$\begin{bmatrix} bB^* & O \\ O & aA^* \end{bmatrix}$$

D.
$$\begin{bmatrix} aB^* & O \\ O & bA^* \end{bmatrix}$$

2. 设A为 3 阶矩阵,将A的第 2 列加到第 1 列得矩阵B,再交换B的第 2 行和第 3 行得单位矩阵,

A.
$$P_1P_2$$

B.
$$P_1^{-1}P_2$$

C.
$$P_2P_1$$

D.
$$P_2 P_1^{-1}$$

3. 已知齐次线性方程组Ax=0的基础解系为 $\left(1,0,-1,0\right)^{\mathrm{T}}$,则 $A=\left[\alpha_{1} \quad \alpha_{2} \quad \alpha_{3} \quad \alpha_{4}\right]$ 的列向量组的一 个极大线性无关组是(

A.
$$\alpha_1, \alpha_2$$

B.
$$\alpha_2, \alpha_3$$

C.
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$
 D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

D.
$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$$

4. 设A是n阶实对称矩阵,P是n阶可逆矩阵,n维列向量 α 是A的属于特征值 λ 的特征向量. 则矩 阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是(

A.
$$P^{-1}\alpha$$

C.
$$P^{T}$$

D.
$$(P^{-1})^T \alpha$$

5. 设
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则下列正确的答案是(

A. A 与 B 相似且合同__

B. A与B不相似但合同

C. A与B相似但不合同

D. A 与 B 不相似且不合同

二、填空题

1. 设 A 为 n 阶 方 阵, $\det(A) = 5$, A^* 为 A 的 伴 随 矩 阵 , 则 $\det(A^* - \left(\frac{1}{10}A\right)^{-1}) =$

- 2. 设方阵A满足 $A^3 = O$,则 $(A^2 + 2A + 4I)^{-1} =$
- 3. 三元非齐次线性方程组 Ax = b的三个解向量 η_1, η_2, η_3 满足 $\eta_1 + 2\eta_2 = (3, 0, -6)^T, 2\eta_2 + \eta_3 = (2, -2, -3)^T$ 且r(A) = 2. 则该方程组的通解是
- 4. 已知空间曲线 C: $\begin{cases} 3y^2 + 4z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$,则以 C 为准线、母线方向为 $\vec{a} = (1,0,1)$ 的柱面方程为 ; 以 C 为准线、顶点为 $P_0(1,0,0)$ 的锥面方程为 ; 曲

线 C 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为

5. 设R[x]。(次数不超过 2 的一元实系数多项式全体按通常多项式的加法和数与多项式的乘法构成 的实线性空间)的内积为 $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,则 $R[x]_2$ 的一个正交基为_____

三、解答题

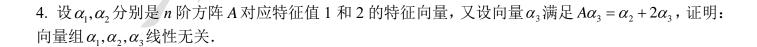
1. 计算
$$n$$
阶行列式: $D_n = \begin{vmatrix} 1+a & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+a & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+a & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+a \end{vmatrix}$.

2. 设
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
,且 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^* = 2A^{-1}X + I$,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, I 是 3 阶单位矩阵,

求矩阵X.

3. 当
$$\lambda$$
取何值时,线性方程组
$$\begin{cases} (2\lambda-2)x_1-x_2+(\lambda-2)x_3=2\lambda-1 \\ 3x_1+(1-\lambda)x_2+3x_3=-\lambda \end{cases}$$
 有惟一解、无解、无穷多解?在有无
$$(\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda \end{cases}$$

穷多解时,求结构式通解.



- 5. 一直线过点 P(1,2,3)且同时平行于 x+2y+3z=4 和 2x+3y+4z=5 两个平面.
 - (1) 求此直线方程;
 - (2) 求原点到此直线的距离;
 - (3) 求此直线绕 z 轴旋转所得旋转面的方程.



- 6. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 2x_1x_2 + 2tx_1x_3 + 4x_2x_3$.
- (1) 问 t 取何值时,该二次型是正定的.
- (2) 取t=0,试用正交变换化相应的二次型为标准形,并写出所用的正交变换.
- (3) t=0时, f=1表示何种二次曲面?



7. 设A为 $m \times n$ 的实矩阵,证明 $r(A^{T}A) = r(A)$.

一、填空题

- 1. 原点到平面 2x+2y-z=2 的距离 d=
- 2. 设A为三阶矩阵, $|A^{-1}|=2$, A^* 为A的伴随阵,则 $|3A^*|=$ _____
- 3. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的解空间的维数为_
- 4. 设 $x \neq 0$, $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$,则方程 $D 6x^2 = 0$ 的根为______
- 5. 已知三阶矩阵 A 的三个特征值分别为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=0, \lambda_3=1, f(x)=x^3-x+2$ 则 f(A)=

二、单选题

1. 设
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$
可逆,则方程组 $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = a_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = b_3 \\ c_1x_1 + c_2x_2 = c_3 \end{cases}$

A. 无解

- C. 有无穷多解
- D. 不能确定

2. 设
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = AB^{-1}$ 则 C^{-1} 中第 2 行第 3 列的元素是())

C. 1

- D. $\frac{1}{2}$
- 3. 直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+6}{-2}$ 与平面 $\Pi: x-2y+z=3$ 的夹角为(

D. $\frac{\pi}{4}$

A.
$$\frac{2}{3}\pi$$
 B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$

4. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & b \end{bmatrix}$, 则(

- A. a = 2, b = 1
- B. a = 3, b = 2
- C. a = 4, b = 3
- D. a = 5, b = 4
- 5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的负惯性指数 q=1, 且矩阵 A 满足 $A^2-A=6E$, 则二次曲面方程 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = 6$ 经正交变换 x = Qy 可化为标准型(
 - A. $\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} \frac{y_3^2}{2} = 1$

B. $\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{2} = 1$

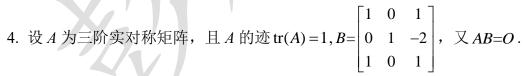
C. $\frac{y_1^2}{3} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{3} = 1$

D. $\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{3} - \frac{y_3^2}{2} = 1$

三、解答题

- 1. 设 A 为给定的三阶矩阵,E 为三阶单位阵,矩阵 B 由式 AB = A + B + 2E 确定.
- (1) 求 $(B-E)^{-1}$.
- (2) 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 B.
- 2. 己知 $\alpha_1 = (1,0,0,\lambda)^T$, $\alpha_2 = (\lambda,1,0,0)^T$, $\alpha_3 = (0,\lambda,1,0)^T$, $\alpha_4 = (0,0,\lambda,1)^T$ $\beta_1 = (1,-1,0,0)^T$, λ 为实数.
- (1) 当 λ 为何值时,向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.
- (2) 当 λ 为何值时,向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示,且表示不唯一.

- 3. 已知平面 Π_1 : x+y-z=0, Π_2 : x+2y+z=0.
 - (1) 求过点 P(1,2,1) 且与平面 Π_1 和 Π_2 的交线平行的直线的对称式方程.
 - (2) 求过平面 Π_1 和 Π_2 的交线,且与直线 $L: \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ 平行的平面方程.

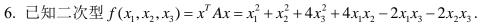


- (1) 证明 A 的秩 r(A) = 1.
- (2) 求矩阵 A 的全部特征值和特征向量.

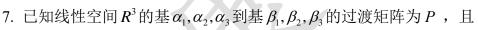
5. (1) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, 证明三个平面 $\prod_i : a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i$, i = 1, 2, 3 相交于一直

线的充分必要条件为: r(A) = r(A|b) = 2.

(2) 已知三个平面 $\prod_1: x+y+z=1, \ \prod_2: y+z=b, \ \prod_3: x+ay+2z=2$ 相交于一直线,求 a,b 的值.



- (1) 写出二次型矩阵 A.
- (2) 求正交变换 x = Qy ,将 f 化为标准型,写出正交阵 Q 和 f 的标准型.



$$\alpha_{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) $\Re \beta_1, \beta_2, \beta_3$.
- (2) 设向量 $\alpha \in \mathbb{R}^3$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下有相同的坐标,求 α .

-、单选题

- 1. 设矩阵 $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, 则行列式 |2A| 的值为(
 - A. 320

B. -320

C. 40

- 2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{1896} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2015} = ($
 - A. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$

- 3. 若向量组 α, β, γ 线性无关,向量组 α, β, δ 线性相关,则()
 - A. α 必可由 β , γ , δ 线性表示

B. β 必可由 α , γ , δ 线性表示

C. δ 必可由 α , β , γ 线性表示

- D. δ 必不可由 α , β , γ 线性表示
- $\begin{vmatrix} x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, λ =2 是二重特征值,则 x 和 y 依次为

(

- C. 3,-1
- D. -1,3

- 5. 以下说法中正确的是
 - A. 对于方阵 A,B,如果存在矩阵 C,使 $B=C^TAC$,则 A 与 B 合同
 - B. 若存在矩阵 C,使 $A=C^TC$,则 A 是正定的
 - C. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$ 是正定的
 - D. 若实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式都是正数,则 A 是正定的

二、填空题

1. 设 A 为 n 阶可逆矩阵 $(n \ge 2)$,则 $(A^*)^{-1} = ____.$

					1	0	0	-1	
2. 矩阵 $A = [\alpha_1]$	α_2 α_3	O.	α_4]经若干次初等行变换可化为	0 14 1	1	0	2	,则 A 的列向量组的秩为	
		a_3		0	0	1	3		
								0	

_____,其一个极大无关组为______,其余向量由极大无关组线性表示的关系式为

____.

3. 齐次线性方程组 Ax=0,对其系数矩阵施以初等行变换得 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,则其结构式通解为

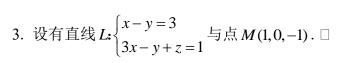
____.

三、解答题

- (1) 求 A^3 和 A^4 .
- (2) 试求一个 4 维列向量 α , 使 $A^3\alpha \neq 0$.
- (3)证明: 对于(2)中的 α ,向量组 α , $A^2\alpha$, $A^3\alpha$ 是线性无关的, α , $A\alpha$, $A^2\alpha$, $A^3\alpha$, $A^4\alpha$ 是线性相关的.

2. λ 取何值时,线性方程组 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$ 有唯一解、无解、无穷的解?并在有无穷 $-2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1$

多解时, 求其结构解.



- (1) 求L的对称式方程;
- (2) 求点M到直线L的距离.

4. 记矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$
 的第 j 个列向量为 α_j ($j = 1, 2, \dots 5$).

- (1) 证明 $W = \{Ax | x \in \mathbb{R}^5\}$ 为线性空间 \mathbb{R}^4 的子空间
- (2) 求W的基与维数.
- (3) 求 α_3 , α_4 在该基下的坐标.

- 5. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.
- (1) 求*a*的值.
- (2) 求正交变换 x=Py 化 f 为标准形.

6. 设 α , β 均为3维实单位列向量,且 α 与 β 正交,令 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$,问矩阵A是否可相似对角化?为什么?若可对角化,求与A相似的对角阵D.



一、单选题

1. 若 A 为 n 阶方阵 $(n \ge 2)$,已知 $A^2 = O$,则下式中未必成立的是(

- A. A = O
- B. $(A^T)^2 = O$
- C. $A^3 = O$
- D. |A|=0

2. 设 $\alpha_1 = [1,2,0]^T$, $\alpha_2 = [2,0,1]^T$, $\alpha_3 = [-1,k,0]^T$ 当k = () 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

A. 1

B. 2

C. -1

D. -2

3. 若方程组 AX = b中,方程的个数少于未知量的个数,则有(

A. AX = b必有无穷多解

B. AX = 0仅有零解

C. AX = 0必有非零解

D. AX = 0必无解

4. 如果 () 时,则n阶矩阵A与B相似.

- A. A和B有相同的特征值且均可相似对角化
- B. |A| = |B|

C. A与B有相同的特征多项式

D. r(A) = r(B)

二、解答题

1. 设方阵 A 满足 $A^3 = O$, 证明 I - A 可逆, 且 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

2. 设
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
, 3 阶方阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + 3A^{-1}$,求 B .

3. 证明定理: 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关,而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\beta$ 线性相关,证明 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性表示,且表示式唯一.

4. 设 $\alpha_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$, $\alpha_2 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right]^T$, $\alpha_3 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]^T$, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 构成 \mathbf{R}^3 的一组标准正交基,并求向量 $\alpha = \left[1, 2, 0\right]^T$ 在此组基下的坐标.

5. 求空间曲线 $C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$ 在各坐标平面上的投影曲线的方程.

- 6. 己知向量组 $\alpha_1 = [1, -1, 0, 0]^T$, $\alpha_2 = [-1, 2, 1, -1]^T$, $\alpha_3 = [0, 1, 1, -1]^T$, $\alpha_4 = [-1, 3, 2, -1]^T$.
 - (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组及秩,并把其余向量用该极大线性无关组线性表示.
 - (2) 设 $\beta=\left[-2,6,a,5\right]^{T}$, a取何值时, β 可由该极大线性无关组线性表示?并求表示式.

7. 已知两直线 L_1 : $\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 3x-y-z-1=0 \end{cases}$, L_2 : $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-1}$, 证明直线 L_1 和 L_2 相交,并求由直线 L_1 和 L_2 所确定的平面方程.

- 8. 二次型 $f = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 4x_1x_2 8x_1x_3 2ax_2x_3$ 经正交变换 x = Py 化成 $f = 7y_1^2 + 7y_2^2 2y_3^2$.
 - (1) 求参数a及矩阵P.
 - (2) 将该二次型的矩阵表示为秩为1的矩阵之和.

- 9. 设A为n阶可逆矩阵($n \ge 2$), α 是n维非零实列向量,令矩阵 $B = A\alpha\alpha^T$.
 - (1) 求 B 的秩.
 - (2) 求B的所有特征值及行列式det(B+2I).
 - (3) B是否可对角化? 为什么?



- 10. (1)请给出判断实对称矩阵 A 是正定矩阵的三个充要条件.
- (2) 试举例说明两个同阶正定阵的乘积未必是正定阵.
- (3) 设实对称矩阵 A, B 均是正定矩阵,且满足 AB = BA,证明 AB 也是正定矩阵.



−、单选题

- 1. 设A为 $m \times n$ 矩阵,C为n阶可逆矩阵,矩阵B = AC,则(
 - A. r(A) > r(B) B. r(A) < r(B)
- C. r(A) = r(B) D. r(B)与C有关
- 2. 设 A_{ij} 是矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的(i, j)元素的代数余子式,若 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 0 & 12 & 21 \end{bmatrix}$,

则 $11A_{31} + 12A_{32} + 13A_{33} = ($

A. 0

B. 1

C. -1

- D. 16
- 3. 若四个点A(1,0,-2),B(7,x,0),C(-8,6,1),D(-2,6,1)共面,则x = (
 - A. 0

C. 4

- D. -4
- 4. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是(
 - A. $\alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1$

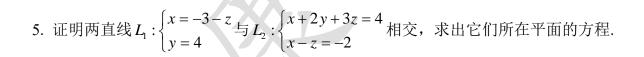
- B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$
- C. $\alpha_1 2\alpha_2, \alpha_2 2\alpha_3, \alpha_3 2\alpha_1$
- D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$
- 5. 下列哪种情况会导致n阶行列式D的值为零
 - A. 主对角线上的元素全为零
 - C. 至少有一个n-1阶子式为零
- B. 副对角线上的元素全为零
- D. 所有n-1阶子式为零

二、解答题

1. 设 $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{vmatrix}$,已知齐次线性方程组(2I - A)x = 0的基础解系含 2 个解向量,求a的值.

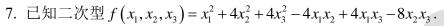
2. 设矩阵 $\mathbf{A}_{3\times 3}$ 相似于对角矩阵 $diag\{2,2,-2\}$, 求行列式 $\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}^*+5\mathbf{I}\right|$ 的值.

3. 设多项式
$$f(x) = 2x^5 + 2x^2 - x$$
, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $f(A)$.





6. 线性方程组
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$
 有解的条件是什么?求有解的情况下该方程组的所有解.

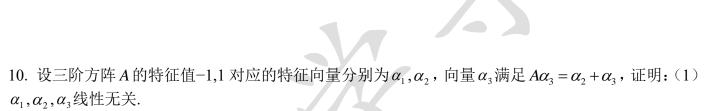


- (1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵.
- (2) 用正交变换把二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准型,并写出相应的正交变换.

8. 设矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + I$, 求矩阵 X .

9. 矩阵
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
, 线性空间 $V = \{B \mid B \in R^4$ 方程组 $Ax = B$ 有解 $\}$.

- (1)证明V是 R^4 的子空间.
- (2) 求V的基与维数.



(2) 设 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$,求 $P^{-1}AP$.



一、填空题

- 1. 若向量组 $\alpha_1 = (1+k,1,1), \alpha_2 = (1,1+k,1), \alpha_3 = (1,1,1+k)$ 线性无关,则k应满足______
- 3. 设实二次型的秩为 4, 正惯性指数为 3, 则其规范型为______
- 4. 由曲线 $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所产生的旋转曲面方程为______.
- 5. R[x], 的基 $1, x, x^2$ 到 $1, 1+x, 1+x+x^2$ 的过渡矩阵为_

二、选择题

- 1. 设n阶方程A不可逆,则一定有 ()
 - A. rank(A) < n
- B. rank(A) < n-1
- C. A=0
- D. 方程组 Ax=0 只有零解
- 2. 设A是实对称矩阵,C是实可逆矩阵, $B = C^T A C$,则(
- A. A = B 相似 B. A = B 的行列式相等 C. A = B 有相同的特征值 D. A = B 合同 3. 设 A = B 是正交矩阵,则下列结论错误的是(
 - A. |A|=1
- B. $|A|^2 = 1$
- C. $A^{-1} = A^{T}$
- D. A的行(列)向量组是正交的单位向量组
- 4. 下列矩阵中是正定矩阵的为()

A.
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

B.
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

C.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

D.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

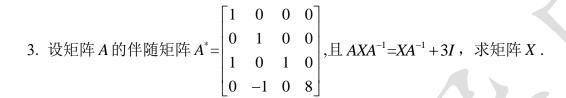
- 5. 设 $\alpha_1 = [1,1,0,0]$, $\alpha_2 = [0,0,2,2]$, $\alpha_3 = [1,0,1,0]$, $\alpha_4 = [1,2,3,4]$,则该向量组的极大线性无关组为(
 - A. α_1, α_2
- B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- C. α_1, α_3

D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

三、解答题

1. 设A为实二阶方阵,且|A|<0,证明: A与对角矩阵相似.

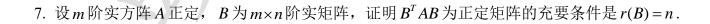
2. 设 为n阶矩阵, α 是n维列向量,若 $A\alpha \neq 0$ 但 $A^2\alpha = 0$,证明:向量组 α , $A\alpha$ 线性无关.



- 4. 已知二次型 $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + tx_3^2 2x_1x_2 + 6x_1x_3 6x_2x_3$ 的秩为 2.
 - (1) 求参数t.
 - (2) 用正交变换将二次型 $f = (x_1, x_2, x_3)$ 化为标准型,并写出所用的正交变换.

5. 求向量组 α_1 = [1,-1,2,4], α_2 = [0,3,1,2], α_3 = [3,0,7,14], α_4 = [1,-2,2,0], α_5 = [2,1,5,10] 的一个极大线性无关组,并将其余向量用此极大线性无关组表示.

- 6. 已知空间直角坐标系中三个平面方程为: π_1 :x+y+2z=1, π_2 : $x+\lambda y+z=2$, π_3 : $\lambda x+y+z=1+\lambda$.
 - (1) 当 和 取何值时这三个平面交于一点? 交于一直线? 没有公共交点?
 - (2) 当它们交于一直线时,求直线方程.



一、单选题

- 1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是()
 - A. α_1, α_2

B. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$

- D. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1$
- 2. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n], n$ 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是(
 - A. det(A) = 1

B. A的特征值全为正

C. r(A) = n

- D. x=0是方程组 Ax=0的解
- 3. 设 A 为 3 阶实对称矩阵,二次型 $f = x^{T}Ax$ 经过一个可逆线性变换 x = Cy 化为标准型 $f = y_{1}^{2} + 2y_{2}^{2}$,则必有(
 - A. A有零特征值

B. A有重特征值

C. 1,2 都是 A 的特征值

- D. 1,2 都不是 A 的特征值
- 4. 设有 4 元非齐次线性方程组 Ax = B, 系数矩阵 A 的秩 r(A) = 2, η_1, η_2, η_3 为它的三个线性无关的解向量,则它的通解为 x = (
 - A. $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$

B. $k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1) + \eta_1$

C. $k_1(\eta_1 + \eta_2) + k_2(\eta_2 + \eta_3)$

- D. $k_1(\eta_2 \eta_1) + k_2(\eta_2 \eta_3)$
- 5. 直线 L_k 通过 P_k 点,且与向量 \bar{a}_k 平行(k=1,2),则 L_1 , L_2 相交于一点的充分必要条件是(
 - A. $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = 0$, $\exists \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq 0$
- B. $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = 0$, $\exists \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \neq 0$
- C. $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} \neq 0$, $\exists \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = 0$
- D. $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} \neq 0$, $\exists \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$

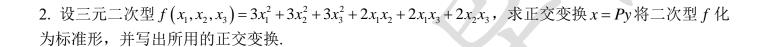
二、填空题

- 1. 若 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,则 A 的伴随矩阵 $A^* =$ ______.
- 2. 过 ox 轴和点 M (1,2,3) 的平面方程为_____.
- 3. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线的方程为______.
- 4. A 为 n 阶方阵,满足 $A^2 + A 4E = 0$,则 $(A + E)^{-1} =$
- 5. A 为 3 阶方阵,第一行元素全为 1, A_{ii} 为对应元素 a_{ii} 的代数余子式,则 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=$ _______.

三、解答题

1. 设有三元方程组
$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

- (1) 讨论 λ 取何值时该方程无解、有唯一解、有无穷多个解?
- (2) 当方程组有无穷多个解时, 求其通解.



3. 设
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
.

- (1) 求 $(A^*)^{-1}$, 其中 A^* 为A的伴随矩阵.
- (2) $\mbox{ } \mbox{ } \mbox{$

4. 设A为 $m \times n$ 阶矩阵,且r(A) = n,证明 $B = A^{T}A$ 为正定矩阵.

5. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为n阶矩阵, $\det(A) = 0$, 为 a_{ij} 对应的代数余子式, $A_{21} \neq 0$,证明:Ax = 0的通解为 $x = k(A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n})^{T}$.

6. 设 $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in})^T (i = 1, 2, \cdots, r, r < n)$ 是 n 维 实 向 量 , 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线 性 无 关 。 已 知 $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 是 线 性 方 程 组 Ax = 0 的 实 非 零 解 向 量 , 其 中 $A = (a_{ij})_{r \times n}$, 试 判 断 向 量 组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 的线性相关性.

一、单选题

1. 设A为三阶方阵,将A的第2行加到第1行得矩阵B,再将B的第1列的-1倍加到第2列得矩阵C,

记矩阵
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
,则()

- A. $C = P^{-1}AP$
- B. $C = PAP^{-1}$ C. $C = P^{T}AP$
- D. $C = PAP^{T}$

- 2. 设有线性方程组(I) $AX = O_{\cdot}(II) A^{\mathsf{T}} AX = O_{\cdot !}(II)$
 - A. (II)的解是(I)的解, (I)的解也是(II)的解
 - B. (II)的解是(I)的解,但(I)的解不是(II)的解
 - C. (I)的解不是(II)的解, (II)的解也不是(I)的解
 - D. (I)的解是(II)的解,但(II)的解不是(I)的解
- 3. 若n阶方阵A相似于对角阵,则(
 - A. A有n个不同的特征值

- B. A 为实对称阵
- C. A 有 <math>n 个线性无关的特征向量
- D. r(A) = n

二、填空颢

- 1. 设 $\lambda = 2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值,则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^2$ 的一个特征值为_
- 2. 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,则二次型 $f(x) = x^{T}Bx$ 的矩阵为_
- 3. 已知 η_1 , η_2 , η_3 是四元方程组 Ax=B的三个解, 其中 r(A)=3且 $\eta_1+\eta_2=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\eta_1 + \eta_2 = (4, 4, 4, 4)^{\mathrm{T}}$,则方程组 Ax = B的通解为_____

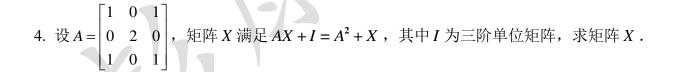
三、解答题

1. 证明两直线 $l_1: x=y=z-4, l_2: -x=y=z$ 异面,求两直线间的距离,并求与 l_1, l_2 都垂直且相交的直 线方程.

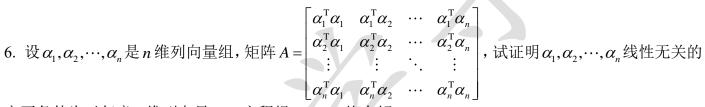
2. 线性方程组 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$,讨论 λ 取何值时,该方程组有唯一解、无解、有无穷多

解?并在有无穷多解时,求出该方程组的结构式通解.

3. 已知二次曲面方程
$$x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$$
 可经过正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ 化为柱面方程 $y'^2 + 4z'^2 = 4$,求 a , b 的值及正交矩阵 P .

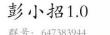


5. 矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$
, 线性空间 $\{b \mid b \in F^4,$ 方程组 $Ax = B$ 有解 $\}$,求 V 的基与维数.



充要条件为对任意n维列向量B,方程组AX = B均有解.

彭康学导团持续招募中,搜索微信公众号"彭康书院学导 团"或扫描下方二维码,关注我们,了解更多学业动态,掌握 更新学习资料。





PKSTU 微信公众号

