西安交通大学考试题

课　程　概率论与数理统计(A 卷)

专业班号 ____________________　　考 试 日 期　2019 年 1 月 7 日

姓　　名 ____________________　　学 号__________　期中 ☐　　期末 ☑

备用数据：$\Phi(\bullet)$：标准正态分布函数，$t_\alpha(n)$：自由度为 n 的 t 分布的上 α 分位数.

$\Phi(1)=0.841,\ \Phi(1.645)=0.95,\ \Phi(1.96)=0.975,\ \Phi(2)=0.977;$

$t_{0.025}(8)=2.306,\ t_{0.025}(16)=2.120,\ t_{0.05}(8)=1.860,\ t_{0.05}(16)=1.746.$

一、完成下列各题 （每小题 6 分，共 30 分）

1. 某学院一、二、三、四年级各有 100 名学生，其中男生分别有 80、70、85、75 名，从该学院随机选一名学生，A 表示选到的是一年级学生，B 表示选到的是男生，则 $\overline{A\cup B}$ 表示什么？其概率是多少？

2. 某小区有 $n(n\geqslant 4)$个业主申请停车位，实际停车位有 $m(m+4<n)$个，管理员采用抽签方法确定停车位的使用权，求：(1) 前 4 个排队者中至少有 1 个人抽中的概率；(2) 第 4 个排队者抽中的概率.

3. 某热线电话在 t 小时内接到的呼叫次数 X_t 服从参数为 $t/2$ 的泊松分布，设在两个不重叠的时间段接到的呼叫次数相互独立.
(1) 求 8 点到 12 点至少接到 1 次呼叫的概率；
(2) 若已知 8 点到 12 点至少接到 1 次呼叫，求在 8 点到 10 点没有接到呼叫的概率.

4. 二维随机变量(X,Y)在以(1,0)，(1,1)，(0,1)为顶点的三角形区域服从均匀分布．求：（1）$P(X+Y<1.5)$的值；（2）(X,Y)的分布函数值 $F(1.5, 0.5)$.

5. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_4$ 是 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值.

(1) 求 $P(|\bar{X}|>\sigma)$；(2) 若 $\dfrac{cX_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}}\sim t(3)$，求 c 的值.

二.(10 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从指数分布，$E(X)$=2，Y~$B(1, 0.4)$，令 $U=\frac{1}{2}e^{-\frac{X}{2}}$，$V=X+Y$，分别求 U, V 的分布函数.

三.(12 分) 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 对 X 独立重复观察 100 次，观察值为 $X_1,\dots,X_{100}$，记 Y 为$\{X_i<0.5\}$(i=1,...,100)出现的次数，$Z=X_1+\dots+X_{100}$．求：(1) $\sum_{i=1}^{60}X_i$ 与 $\sum_{i=41}^{100}X_i$ 的相关系数；(2) $P(Y>45)$的近似值；(3) Z 的近似分布(要求写出参数).

四. (12 分)设(X, Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3y}{2}, & |x|<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1) 求 $P(X+Y>1)$的值；(2)求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $P(X>0.2|Y=0.5)$ 的值；(3) 判断 X 与 Y 是否相关？说明理由.

五. (10 分) 超市中有两种商品，它们每月销售量之间存在相关性，设商品甲月销售件数(单位：千件)$X\sim N(5.25,\ 0.64)$，商品乙月销售件数(单位：千件)$Y\sim N(2.53, 0.25)$，且(X, Y)服从正态分布，X 与 Y 的相关系数 $\rho=0$. 求: (1) 一个月中这两种商品销售总量超过 7.5 千件的概率；(2) 一个月中甲销售量超过乙销售量 2 倍的概率.(注：结果用$\Phi(\cdot)$表示)

六. (16 分) 设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}/\beta^{\alpha}, & 0<x<\beta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 未知参数$\alpha>1, \beta>0$， $X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的简单随机样本. (1) 若 $\alpha=3$，求 β 的矩估计量 $\hat{\beta}$，并判断 $\hat{\beta}$ 是否为 β 的无偏估计量，说明理由；(2) 若 $\beta=3$，求 α 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}$，并判断 $\hat{\alpha}$ 是否为 α 的相合(一致)估计量，说明理由.

七. (10 分) 某培训班声称经过培训，学员掷实心球的成绩能够提高 1 米以上. 为检验他们的说法是否符合实际，随机选出 9 人，记录他们培训前和培训后的成绩如下（单位：米）：

培训前成绩 xi	9.63 7.61 6.28 8.32 5.40 5.82 6.89 8.17 5.78	$\bar{x}=7.10$	$s_X^2=2.0352$
培训后成绩 yi	10.24 8.75 7.05 8.91 6.51 6.58 8.02 9.08 6.32	$\bar{y}=7.94$	$s_Y^2=1.938$
差值 zi=yi-xi	0.61 1.14 0.77 0.59 1.11 0.76 1.13 0.91 0.54	$\bar{z}=0.84$	$s_Z^2=0.058575$

设差值数据来自正态分布，在显著水平 0.05 下，检验 H_0:平均成绩提高 1 米及以上, H_1:平均成绩提高不到 1 米.