西安交通大学入学数学测试

2020 年 8 月 7 日

1　2016 年西安交通大学入学数学测试

2016 年 8 月 24 日

一、填空题：(本大题共 14 小题，每题 5 分，共 70 分.)

1. 设 $f(n)$ 是正整数 n 的各个数字之和，则使 $f(n)=22$ 成立的最小的 n 是 ________

2. 设 $(a+1)(b+1)=2$, 则 $\arctan a+\arctan b=$________

3. 已知 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是 ________

4. 设 n 为正整数，若整数 x,y 满足 $|x|+|y|\leq n$, 则整点 (x,y) 的个数为 ________

5. 设 $2016=8^3a_3+8^2a_2+8a_1+a_0(1\leq a\leq 7,a_i\in N)$, 则 $a_3=$ ________

6. 两个或两个以上的整数除以 N(N 为整数，$N>1$), 若所得的余数相等且都是非负数，则数学上定义这两个或两个以上的数同余，若 $69,90$ 和 125 对于某个 N 是同余的，则对于同样的 $N,81$ 同余于 ________

7. 已知复数 z 的模 $|z|=1$, 则 $|z^2-z+1|$ 的最大值为 ________

8. 对于函数 $y=f(x),f(x+1)-f(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x 处的一阶差分 Δy, 对于 Δy 在 x 处的一阶差分称为 $f(x)$ 在 x 处的二阶差分 $\Delta^2 y$，则函数 $y=f(x)=x+3^x$ 在 x 处的二阶差分 $\Delta^2 y=$ ________

9. 已知 $f_1(x)=\frac{3x-1}{x+1}$，对于 $n=1,2,3\cdots$, 定义 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$, 则 $f_{35}(3)=$ ________

10. 已知钝角 $\triangle ABC$ 的最大边长为 2，其余两边长分别为 a,b, 则 $\{(x,y)|x=a,y=b\}$ 所表示的平面图形的面积为 ________

11. 一矩形的一边在 x 轴上，另两个顶点在函数 $y=\frac{x}{1+x^2}(x>0)$ 的图像上，则此矩形绕 x 轴旋转而成的几何体的面积的最大值为 ________

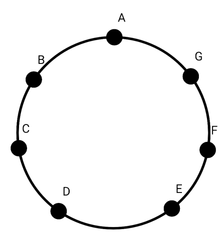
12. 边长为 1 的正五边形的对角线长为 ________

13. 非空集合 $\{t|f(x)在区间[t,t^2-2t-2]上为奇数\}$ 的元素为 ________

14. 某停车场有 4 行 4 列 16 个停车位，车辆停放任意一个车位是等可能的，现有 4 辆型号不同的汽车停放，则每一行每一列只停放 1 辆车的概率 ________

二、(8 分) 证明给定的正数 ε, 都存在正数 δ, 使得对任意的正数 x,y, 只要 $|x-y|<\delta$, 就有 $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<\varepsilon$.

三、(8 分) 圆周上有 7 盏灯 (如图), 每盏灯有两种状态“开”或“关”进行切换. 对任意一盏灯进行开关切换时, 同时切换与之相邻的两盏灯, 称此过程为一次操作. 问: 不论各盏灯的初始状态如何, 是否总能经过一系列的上述操作, 使得所有灯都处于“开”的状态. 请建立数学模型证明你的结论.



四、(7 分) 试设计一种求 π 近似值的算法，试给出求解步骤或程序框图.

五、(7 分) 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，对于任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|f(x)-f(y)|\leq(x-y)^2$ 证明：对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 及任意的正整数 n, 都有 $|f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{n}(x-y)^2$

2 2017 年西安交通大学入学数学测试

2017 年 8 月

一、选择题：(本大题共 10 小题，每题 4 分，共 40 分.)

1. 已知复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$, 若 $(z+2\bar{z})(1-2i)=3-4i$(i 为虚数单位) 则在复平面内，复数 z 对应的点位于 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 设向量 a,b 满足 $|a+b|=5, |a-b|=1$, 则 $a\cdot b=$ (　　)

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

3. 已知圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ 被直线 $ax+y-2=0$ 所截的弦长为 4, 则 $a=$ (　　)

A.3　　B.-3　　C.4　　D.-4

4. 定义在区间 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 使不等式 $2f(x)<xf'(x)<3f(x)$ 恒成立，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，则 (　　)

A.$8<\frac{f(2)}{f(1)}<16$　　B. $4<\frac{f(2)}{f(1)}<8$　　C. $3<\frac{f(2)}{f(1)}<4$　　D.$2<\frac{f(2)}{f(1)}<3$

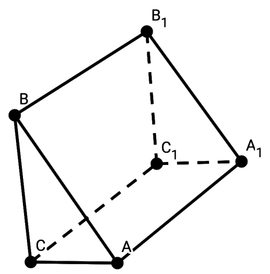
5. 中国古代数学名著《张丘建算经》中记载“今有女善织，日益功疾 (注：从第 2 天开始，每天比前一天多织相同的布)，第一天织 5 尺布，现一月 (按 30 天计算) 共织 390 尺布”, 则从第 2 天起，每天比前一天多织 (　　) 尺布.

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{8}{15}$　　C.$\frac{16}{29}$　　D.$\frac{16}{31}$

6.$(ax^2-\frac{1}{x})^9$ 展开式中的各项系数和为 1，则该展开式中常数项为 (　　)

A.672　　B.-672　　C.5376　　D.-5376

7. 一块石料表示的几何体恰好是一个直三棱柱，底面是一个直角三角形, 其中
$AC=3, BC=4, \angle ABC=90°$, 则棱长 $AA_1=10$, 将该石材切削，打磨，加工成球，则能得到的最大球的表面积等于 (　　)



A.$\frac{\pi}{2}$　　B. 4π　　C. $\frac{27\pi}{2}$　　D.32π

8. 设 x,y 满足 $\begin{cases} 2x+y\geq 4 \\ x-y\geq 1 \\ x-2y\leq 2 \end{cases}$, 若 $z=ax+y$ 只在点 $A(2,0)$ 处取得最小值，则实数 a 的取值范围是 (
)

A.$(-\frac{1}{2},2)$　　B. $(-2,\frac{1}{2})$　　C. $(-2,1)$　　D.$(\frac{1}{2},1)$

9. 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，A,B 是抛物线上两个动点，且满足 $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$，设线段中点 P 在 l 上的投影为 Q, 则 $\frac{|PQ|}{|AB|}$ 的最大值为 (　　)

A.$\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 函数 $f(x)=\lg|x-1|-|\sin\pi x|(-3\leq x\leq 5)$ 的所有零点之和为 (　　)

A.0　　B.8　　C.12　　D.16

二、填空题：(本大题共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

12. 已知 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, 则 $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin 2\alpha}=$ _________

13. 已知 $a=\int_0^\pi \sin x dx$, 则二项式 $(a\sqrt{x}-\frac{3}{x})^6$ 的展开式中常数项为 _________(用数字作答)

14. 已知 A 是双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$ 上任意一点, 过点 A 分别作双曲线的两条渐近线的垂线，垂足分别为 A_1, A_2, 则 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AA_2}$ 的值是 _________

15. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 底面 $ABCD$ 为正方形，$SA\perp$ 底面$ABCD$. 如果该四棱锥外接球半径为 3, 则此四棱锥体积的最大值为 ________

16. 若“任意 $x\in[-1,1], x^2+1<m$”是真命题，则实数 m 的最小值为 ________

三、解答题 (解答应写成必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本小题满分 12 分) 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n 且 $S_2=1, a_4=2a_2+a_3$,

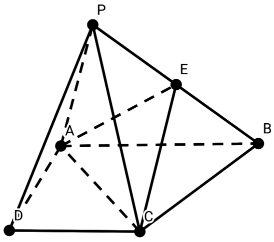
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(6n-3)a_n$, 其前 n 项和为 T_n, 求使得不等式 $T_n>2017$ 成立的正整数 n 的最小值.(参考数据: $2^7=128, 2^8=256, 2^9=512$).

18. (本小题满分 12 分) 如图，在四校锥 $P-ABCD$ 中,$PC\perp$ 底面$ABCD$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AB\perp AD, AB//CD, AB=2, AD=CD=1$，$E$ 是 PB 上一点

(1) 求证: 平面 $EAC\perp$ 平面 PBC;

(2) 若 E 是 PB 的中点，且二面角 $P-AC-E$ 的余弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.



19. (本小题满分 10 分) 已知 A 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点, 其离心率为 $\frac{1}{2}$, 圆 $x^2+y^2-2\sqrt{3}y+2=0$ 的圆心与椭圆 C 的上项点重合.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 $l:y=kx+1$ 与椭圆 C 交于 M N 两点 (不同于点 A), 若 $\angle MAN$ 为钝角，求实数 k 的取值范围.

20. (本小题满分 10 分) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-a\ln x+x$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a<0$, 设 $g(x)=f(x)-x, h(x)=-2x\ln x+2x$, 若对任意

$x_1,x_2\in[1,+\infty)\left(x_1\neq x_2\right),\left|g\left(x_2\right)-g\left(x_1\right)\right|\geq\left|h\left(x_2\right)-h\left(x_1\right)\right|$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

附加题

报考工科试验班 (钱学森班)、理科试验班的同学可在第 17-20 题中任意选择少做一题 (须在选择少做题处明确标注“弃做”), 但必须做下面两题，单独计分.

1. (10 分) 设 n 是正整数,$S=\{1,2,\cdots,n\}$. 设 A,B 均为 S 的子集且 $A\cup B=S$. 问: 这样的 A,B 构成的“有序对”(即当 $A\neq B$ 时把 A,B 和 B,A 视为两对) 有多少个?

2.(10 分) 对任意的正整数 n, 设 $S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$. 证明: 对任意的正数 M 以及正整数 n, 都存在正整数 p, 使得 $S_{n+p}\geq S_n+M$

3　2019 年西安交通大学入学数学测试

2019 年 8 月 21 日

一、填空题：(本大题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分.)

1. 设复数 z 满足 $|z|=2, z^3=a+bi, a,b$ 为实数, 则 $a+b$ 最小值为 ________

2. 函数 $f(x)=|x+1|+|x+2|+\cdots+|x+19|$ 最小值是 ________

3. 如果 $\cos x+\cos y+\cos z=0, \sin x+\sin y=\sin z$, 那么 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=$ ________

4. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, n\left(a_{n+1}-1\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 则 $\frac{1}{a_{2020}-a_{2019}}=$ ________

5. 把 10 名游客分成两个小组，并在每个小组中选出一个组长，共有 ________ 个方案.

6. 若函数 f 对任意实数 x 都有 $xf(x)=2f(1-x)+3$, 则 $f(3)=$ ________

7. 将正整数列 1 2 3, $\cdots$ 中的完全平方数都去掉后剩下的数按原来的顺序构成数列 $\{a_n\}$, 则 $a_{1975}=$ ________

8. 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+26}+\sqrt{14-x}$ 的最大值是 ________

9. 若正四面体内切球半径为 1 则该正四面体的棱长为 ________

10. 平面直角坐标系中，若由由射线 $y=2x(x\geq 0)$ 和 $y=3x(x\geq 0)$ 所构成的角的角平分线方程为 $y=kx(x\geq 0)$, 则 $k=$ ________

11. 若用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\sum\limits_{k=1}^{100}[\sqrt{k}]=$ ________

12. 设 a,b 为正实数, 则 $a^b>b^a$ 成立的 a,b 取值范围是 ________

二、(10 分)$0<a<b$, 证明 $\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}>\frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}$.

三、(10 分) 设 n 是正整数,$f(x)$ 是 n 次多项式，并且对任意的 $k\in\{0,1,\cdots,n\}$ 都有 $f(k)=\frac{n-k}{k+1}$, 求 $f(n+1)$

四、(10 分) 已知平面上第一象限内有 n 个互异的点 $(x_i,y_i)\,(i=1,2,\cdots,n)$, 试寻找一条直线 $f(x)=ax$ 使得该直线与这所有点“最接近”（即每个 $x=x_i$ 处直线上的值 $f(x_i)$ 与已知值 y_i 之差的平方和最小）.

五、(10 分) 是否存在整数集 $\mathbb{Z}$ 上的函数 $f:\mathbb{Z}\to\{-1,0,1\}$, 对任意的整数 $x,y\in\mathbb{Z}$, 只要 $|x-y|\in\{2,3,5\}$ 就有 $f(x)\neq f(y)$? 证明你的结论.