习 题 课

一、一阶微分方程求解

1. 一阶标准类型方程求解

可分离变量方程 $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)}$

$$\boxed{\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx} \qquad \boxed{\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{G(y)=F(x)+C}$$

线性方程：齐次，非齐次

齐次 $y'+P(x)y=0$ $y=Ce^{\int -P(x)dx}$

非齐次 $y' + P(x)y = Q(x)$

$$\boxed{y = e^{\int -P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]}$$

2. 一阶非标准类型方程求解

变量代换法 ——代换自变量

代换因变量

代换某组合式

齐次方程 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Bernoulli方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0,1)$

例1. **求下列方程的通解**

(1) $y' + \dfrac{1}{y^2} e^{y^3 + x} = 0;$ (2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$

(3) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2};$ (4) $y' = -\dfrac{6x^3 + 3xy^2}{3x^2 y + 2y^3}.$

提示: (1) 因 $e^{y^3 + x} = e^{y^3} e^x$, 故为分离变量方程:

$$-y^2 e^{-y^3}\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$$

通解 $$\frac{1}{3} e^{-y^3} = e^x + C$$

$$(2)\ xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

方程两边同除以 x 即为齐次方程，令 $y = ux$,化为分离变量方程.

$$x > 0\text{时},\ y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \longrightarrow xu' = \sqrt{1 - u^2}$$

$$x < 0\text{时},\ y' = -\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \longrightarrow xu' = -\sqrt{1 - u^2}$$

$$(3)\ y' = \frac{1}{2x - y^2}$$

调换自变量与因变量的地位，化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - 2x = -y^2$,

用线性方程通解公式求解 .

(4) $y' = -\dfrac{6x^3 + 3xy^2}{3x^2y + 2y^3}$

这是一个齐次方程 ，令 $u = \dfrac{y}{x}$

例2. **求下列方程的通解:**

(1) $xy' + y = y(\ln x + \ln y)$

(2) $2x\ln x\,\mathrm{d}y + y(y^2\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = 0$

(3) $y' = \dfrac{3x^2 + y^2 - 6x + 3}{2xy - 2y}$

(4) $y^2(x - 3y)\,\mathrm{d}x + (1 - 3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$

提示: (1) 原方程化为 $(xy)' = y\ln(xy)$

令 $u = xy$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{u}{x}\ln u$ (分离变量方程)

(2) 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{2x\ln x}y = -\frac{y^3}{2x}$$

(**Bernoulli**方程) 令 $z = y^{-2}$

(3) $y' = \dfrac{3x^2 + y^2 - 6x + 3}{2xy - 2y}$

化方程为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3(x-1)^2 + y^2}{2y(x-1)}$

令 $t = x - 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{3t^2 + y^2}{2ty}$ (齐次方程)

令 $y = u\,t$

可分离变量方程求解

(4) $y^2(x-3y)\,\mathrm{d}x+(1-3xy^2)\,\mathrm{d}y=0$

变方程为 $y^2 x\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y-3y^2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$

$$\Big\downarrow \text{两边乘积分因子 } \mu=y^{-2}$$

$$x\,\mathrm{d}x+y^{-2}\,\mathrm{d}y-3(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=0$$

用凑微分法得通解:

$$\frac{1}{2}x^2-y^{-1}-3xy=C$$

例3. 设$F(x)=f(x)\,g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内满足以下条件: $f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0$, $f(x)+g(x)=2e^x$.

(1) 求$F(x)$ 所满足的一阶微分方程 ;

(2) 求出$F(x)$ 的表达式 .

(03考研)

解: (1) $\because\ F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$=g^2(x)+f^2(x)$$

$$=[g(x)+f(x)]^2-2f(x)g(x)$$

$$=(2e^x)^2-2F(x)$$

所以$F(x)$ 满足的一阶线性非齐次微分方程:

$$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$$

(2) 由一阶线性微分方程解的公式得

$$F(x)=e^{-\int 2\,\mathrm{d}x}[\int 4e^{2x}\cdot e^{\int 2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C]$$

$$=e^{-2x}[\int 4e^{4x}\,\mathrm{d}x+C]$$

$$=e^{2x}+Ce^{-2x}$$

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$

于是 $$F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$$

二、可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

- $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x) \longrightarrow$ 逐次积分求解
- $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x,\dfrac{dy}{dx}) \xrightarrow{\text{令 } p(x)=\frac{dy}{dx}} \dfrac{dp}{dx}=f(x,p)$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(y,\dfrac{dy}{dx}) \xrightarrow{\text{令 } p(y)=\frac{dy}{dx}} p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$

例4 求解 $\begin{cases} y'' - a y'^2 = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = -1 \end{cases}$

提示: 令 $y' = p(x)$, 则方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = a\,p^2$

积分得 $-\dfrac{1}{p} = ax + C_1$, 利用 $p\big|_{x=0} = y'\big|_{x=0} = -1$ 得 $C_1 = 1$

再解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-1}{1+ax}$, 并利用 $y\big|_{x=0} = 0$, 定常数 C_2 .

例5 求微分方程 $yy'' - y'^2 - 1 = 0$的通解。

提示: 令 $y' = p(y)$, 则方程变为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 - 1 = 0, \qquad \text{即} \quad \frac{p\,\mathrm{d}p}{1+p^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

例6 设二阶非齐次方程 $y'' + \psi(x)y' = f(x)$ 有特解 $y = \frac{1}{x}$, 而对应齐次方程有解 $y = x^2$, 求 $\psi(x), f(x)$ 及微分方程的通解 .

解: 将 $y = x^2$ 代入 $y'' + \psi(x)y' = 0$, 得 $\psi(x) = -\frac{1}{x}$

再将 $y = \frac{1}{x}$ 代入 $y'' - \frac{1}{x}y' = f(x)$ 得 $f(x) = \frac{3}{x^3}$

故所给二阶非齐次方程为 $y'' - \frac{1}{x}y' = \frac{3}{x^3}$

令 $y' = p(x)$, 方程化为 $p' - \frac{1}{x}p = \frac{3}{x^3}$

一阶线性非齐次方程

$$p' - \frac{1}{x}p = \frac{3}{x^3}$$

故 $$y' = p = e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{3}{x^3} e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C_1'\right]$$

$$= -\frac{1}{x^2} + C_1' x$$

再积分得通解 $y = \frac{1}{x} + C_1 x^2 + C_2 \quad (C_1 = \frac{1}{2} C_1')$

复习: 一阶线性微分方程通解公式

$$y' + p(x)y = f(x)$$

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int f(x) e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right]$$

例7（冷却定律与破案问题）

按照Newton冷却定律，温度为T的物体在温度为$T_0(T_0<T)$的环境中冷却的速度与温差$T-T_0$成正比。分析如下问题。

某公安局于晚上7:30发现一具女尸，当晚8:20 分法医测得尸体温度为32.6℃，一小时后尸体被抬走时测得体温为31.4℃，假定室温在几小时内均为21.1℃。由案情分析得知张某是此案的主要嫌疑犯，但张某矢口否认，并有证人说：“下午张某一直在办公室，下午5时打了一个电话后才离开办公室”，从办公室到凶案现场步行需5分钟，问张某能否被排除在嫌疑犯之外？

20:20---32.6℃, 21:20---31.4℃， 室温:21.1℃。确定死亡时间是下午5点5分以前还是以后？

分析　设T(t)表示t时刻尸体温度，并记8:20为t=0，则

T(0)= 32.6℃,T(1)= 31.4℃

假设受害者死亡时体温是正常的，即T= 37℃， 求T(t)= 37℃时的时间t

人体体温受大脑神经中枢调节，人死后体温调节功能消失，尸体温度受外界环境的影响，尸体温度的变化率服从冷却定律，即有

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = -k(T - 21.1)} \Longrightarrow T(t) = 21.1 + Ce^{-kt}$$

由T(0)= 32.6℃, T(1)= 31.4℃，得*C*=11.5, k≈0.11

$$T(t) = 21.1 + 11.5e^{-0.11t}$$

当T= 37℃时，　t=-2.95小时 ≈2小时57分钟

死亡时间T_d≈8小时20分-2小时57分钟=5时23分

结论：张某不能被排除在嫌疑犯之外

定理 2.4(线性齐次方程的通解结构)

若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$$

的 n 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k \text{为任意常数})$$

定理 2.5 非齐次线性方程

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = f(x)$$

通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y^*(x)$$

求解二阶常系数齐次线性方程

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

特征方程： $r^2 + pr + q = 0$，特征根 : r_1, r_2

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

推广:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_n y=0 \ (p_k \text{ 均为常数})$$

特征方程为 $r^n+p_1 r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$

求解特征方程,写出其线性无关的解并得出其通解

特 征 根	相应的线性无关的特解
单实根 r	e^{rx}
k重实根 r	$e^{rx},xe^{rx},x^2e^{rx},\cdots,x^{k-1}e^{rx}$
$r_{1,2}=\alpha\pm \mathrm{i}\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$
一对k重共轭复根 $\alpha+i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

求特解的方法 — **待定系数法**

1. $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$

当λ 是特征方程的 k 重根 时，可设特解

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$$

2. $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x) \cos \omega x$ 或 $e^{\lambda x} P_n(x) \sin \omega x$

1）先求如下方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_n(x) e^{(\lambda \pm i\omega)x}$$

再得原方程的特解

2）设

$$y^{*}=x^{k}e^{\lambda x}[R(x)\cos\omega x+I(x)\sin\omega x]$$

其中R与I均为与P同次幂实系数多项式，k的取法如下：

设 $\lambda+i\omega$ 是特征方程的 k 重根 ($k=0, 1$)。

Euler方程:

$$t^{n}\frac{\mathrm{d}^{n}x}{\mathrm{d}t^{n}}+a_{1}t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_{n}x=f(t)$$

作变量代换 $t=e^{\tau}$ 或 $\tau=\ln t$,

例8 求以 $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ 为通解的微分方程 .

提示: 由通解式可知特征方程的根为

$$r_1 = 1 \, , r_2 = 2 \, ,$$

故特征方程为

$$(r-1)(r-2) = 0 \, , \quad \text{即 } r^2 - 3r + 2 = 0$$

因此微分方程为

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

例9 求微分方程的通解 $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$.

特征方程特征根: $r_{1,2} = -1 \pm 2i$,

齐次方程通解: $Y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

令非齐次方程特解为 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$

代入方程可得 $A = 1/17$, $B = -4/17$

原方程通解为
$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{17}\cos 2x - \frac{4}{17}\sin 2x$$

思 考:

若 将非齐次项改为 $\sin^2 x$, 特解设法有何变化 ?

提示: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, 故 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x + D$

例 10　填空

设 $y'' + y = f(x)$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$$y^* = x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$$

2) 当 $f(x) = x\cos 2x + e^{2x}$ 时可设特解为

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x + k e^{2x}$$

例11 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (D).

$\cancel{(A)}$ $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;

$\cancel{(B)}$ $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 + C_1 + C_2)y_3$;

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

提示: (C) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解, 二者线性无关. (反证法可证)