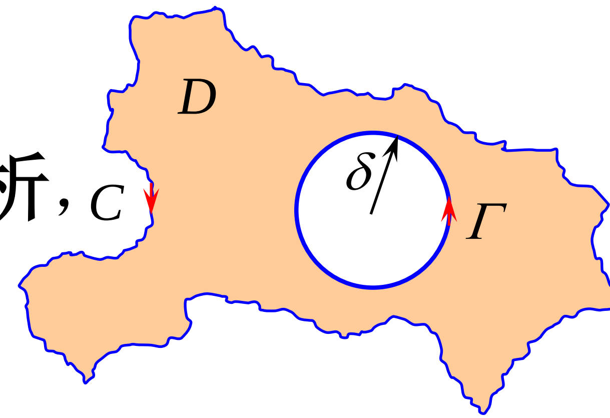
第三章 复变函数的积分

§3.3 柯西积分公式

§3.4 解析函数的高阶导数

§3.3 柯西积分公式

一、柯西积分公式



定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在边界 C 上连续，$z_0 \in D$，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

证明 如图，以 z_0 为圆心，d 为半径作圆 G，则

(思路)

$$左边 = f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}dz,$$

$$右边 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz,$$

$$|右边 - 左边| \le \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}ds,$$

$$|\text{右边} - \text{左边}| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\mathrm{d}s,$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}\cdot 2\pi\delta = \varepsilon,$$ （当 δ 充分小时）

即只要 d 足够小，所证等式两边的差的模可以任意小，

由于左边与右边均为常数，与 d 无关，故等式成立。

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，

在边界 C 上连续，$z_0 \in D$，

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

意义 将 z_0 换成 z，积分变量 z 换成 ξ，则上式变为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi,\ (z\in D).$$

- 解析函数在其解析区域内的值完全由边界上的值确定。
- 换句话说，解析函数可用其解析区域边界上的值以一种特定的积分形式表达出来。

注意 柯西积分公式中的区域 D 可以是多连域。

其边界为 $C = C_1 + C_2^-$ ，

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

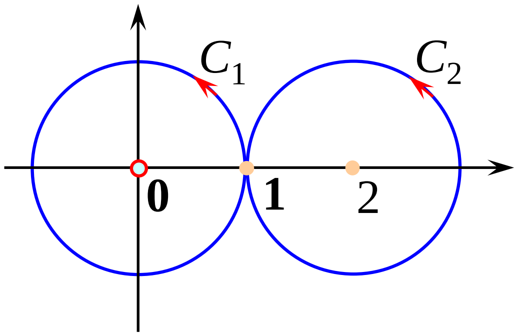
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z,\ (z_0 \in D).$$

应用

- 反过来计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$.
- 推出一些理论结果，从而进一步认识解析函数。

例1 计算 $I=\oint_C \frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$，其中 C 为：

(1) $C_1: |z|=1$; (2) $C_2: |z-2|=1$.



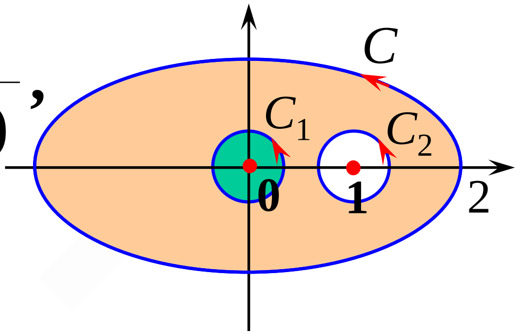
解 (1) $I=\oint_{C_1}\frac{\boxed{\cos z}}{z}\mathrm{d}z$ 在 $|z|\le 1$ 上解析

$$\xlongequal{\text{(柯西积分公式)}} 2\pi i\cdot \cos z\Big|_{z=0}=2\pi i.$$

(2) $I=\oint_{C_2}\frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$ (函数$\frac{\cos z}{z}$ 在 $|z-2|\le 1$上解析)

$$\xlongequal{\text{(柯西积分定理)}} 0.$$

例2 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 如图所示。



解 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$，则 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z(z-1)}$，

令 $C_1:\ |z|=\dfrac{1}{3}$， $C_2:\ |z-1|=\dfrac{1}{3}$，

则 $I=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$ **(复合闭路定理)**

$$=\oint_{C_1}\frac{\left(\dfrac{2z-1}{z-1}\right)}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\left(\dfrac{2z-1}{z}\right)}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$\overset{\text{(柯西积分公式)}}{=\!=\!=}\ 2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z-1}\right|_{z=0}+2\pi i\cdot\left.\frac{2z-1}{z}\right|_{z=1}=4\pi i.$$

例3 计算 $I=\oint_{|z|=2}\frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz.$

解 $$I=\oint_{|z|=2}\frac{\left(\frac{z}{9-z^2}\right)}{z-(-i)}dz.$$

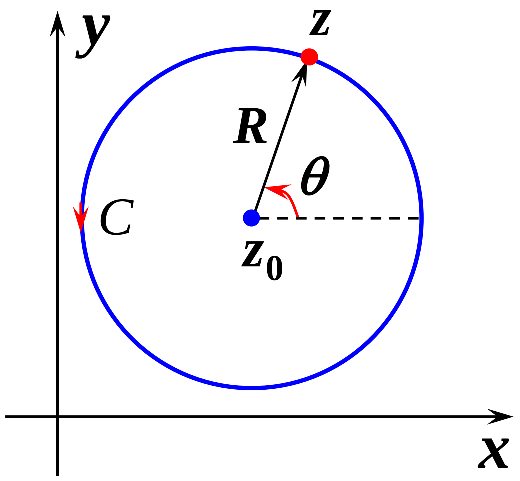
$$=2\pi i\cdot\left.\frac{z}{9-z^2}\right|_{z=-i}=\frac{\pi}{5}.$$

- 试考虑积分路径为 $|z|=4$ 的情况。

二、平均值公式

定理 (平均值公式) 如果函数$f(z)$在$|z-z_0|<R$内解析，在$|z-z_0|\le R$上连续，

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta.$$



证明 由柯西积分公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

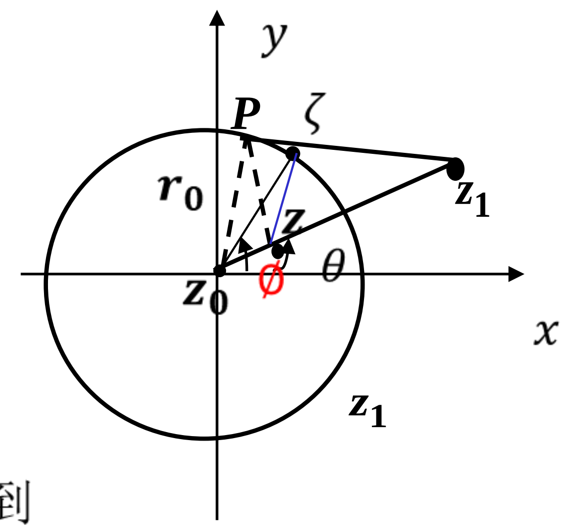
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}Re^{i\theta}i\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta.$$

思考问题： 圆内其它点的函数值如何用边界上点的值刻画呢？

运用柯西积分公式，对于圆内的任意一点z,可以找到它关于圆周的对称点z_1。ζ表示圆周C上的任一点。

令$\zeta = r_0\, e^{i\phi}$,　　$|Pz_0|^2 = |z_0 z||z_0 z_1|$



$$\boxed{\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}\right)d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\zeta}{\zeta-z} - \frac{\zeta}{\zeta-z_1}\right) f(\zeta)\, d\phi \end{aligned}}$$

令$z = re^{i\theta}$，则 $z_1 = \frac{{r_0}^2}{r}e^{i\theta} = \frac{\zeta\bar\zeta}{re^{-i\theta}} = \frac{\zeta\bar\zeta}{\bar z}$, 注意到

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - z_1} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\zeta}{\zeta - \frac{\zeta\bar\zeta}{\bar z}} = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar z}{\bar z - \bar\zeta} = \frac{\zeta\bar\zeta - z\bar z}{|\zeta - z|^2} = \frac{{r_0}^2 - r^2}{|\zeta - z|^2}$$

而 $|\zeta - z|^2 = {r_0}^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\phi - \theta)$

$$\boxed{f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{({r_0}^2 - r^2) f(r_0 e^{i\phi})}{{r_0}^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\phi - \theta)}\, d\phi}$$

应用：

一个半径为1的圆形薄板，板的上下两面绝热，圆周边缘的温度为 y^2。求稳恒状态下的温度分布规律。

$$f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{({r_0}^2-r^2)f(r_0e^{i\phi})}{{r_0}^2+r^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)}d\phi$$

若$u(r,\theta)=Re\left(f\left(re^{i\theta}\right)\right)$,则有

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{({r_0}^2-r^2)u(r_0,\phi)}{{r_0}^2+r^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)}d\phi$$

圆域泊松积分公式

将$r_0=1, u(r_0,\emptyset)=r_0 sin\emptyset$,代入到该公式，则可以回答圆盘内的温度分布。

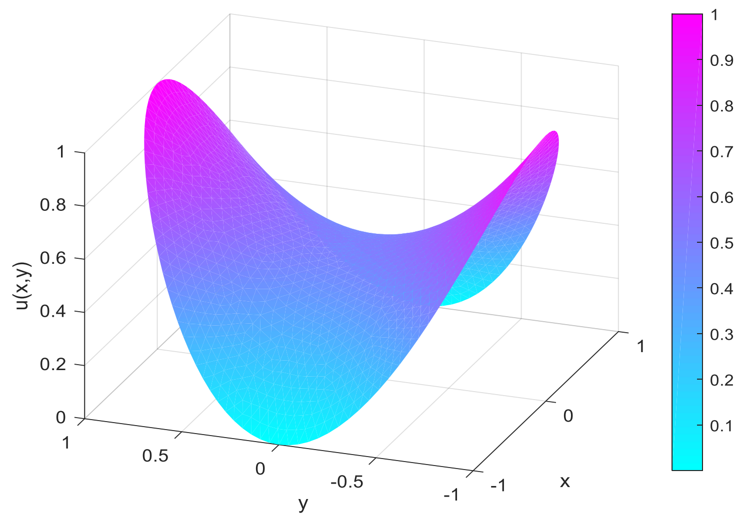
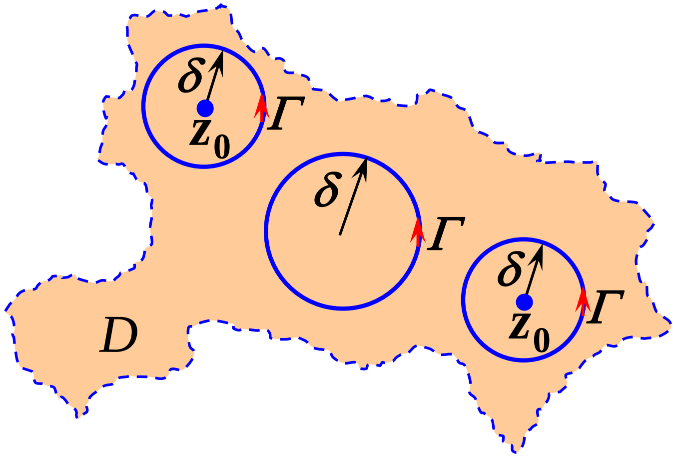


图 圆形薄板的温度分布

定理(最大模原理) 如果函数 $f(z)$在 D 内解析, 且不为常数则在 D 内$|f(z)|$没有最大值。

证明 (略)



理解 如图，函数$f(z)$在解析区域 D 内任意一点 z_0 的函数值是以该点为圆心的圆周上所有点的函数值的平均值, 因此$|f(z_0)|$不可能达到最大, 除非 $f(z)$ 为常数。

推论 1 在区域 D 内解析的函数，如果其模在 D 内达到最大值，则此函数必恒为常数。

推论 2 若 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析，在 $\overline{D}$ 上连续，则 $|f(z)|$ 在D的边界上能达到最大值。

例4 设函数 $f(z)$在全平面解析,又 $\forall r>0, M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$

证明 $M(r)$是r的单调上升函数。

证 由最大模原理及其推论可知，

必在 $|z|=r$ 上取得，

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|=\max_{|z|\le r}|f(z)|.$$

因此，当 $r_1<r_2$ 时，有

$$M(r_1)=\max_{|z|\le r_1}|f(z)|\le\max_{|z|\le r_2}|f(z)|=M(r_2).$$

即$M(r)$ 是 r的单调上升函数。

§ 3.4 解析函数的高阶导数

一、高阶导数定理

分析 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 在 $\overline{D} = D + C$ 上连续

则由柯西积分公式有 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, \ (z \in D).$

又 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(\zeta - z)^{-1}] = (\zeta - z)^{-2}, \quad \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[(\zeta - z)^{-1}] = 2(\zeta - z)^{-3},$

$$\cdots\cdots \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = n!(\zeta - z)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}},$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, \ (z \in D).$$

(?)

定理 如果函数 $f(z)$在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $f(z)$ 的各阶导数均在 D 上解析，

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$$

证明（略）

意义 <u>解析函数的导数仍解析</u>。

应用
- 反过来计算积分 $\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).$
- 推出一些理论结果。

例1 计算 $\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$

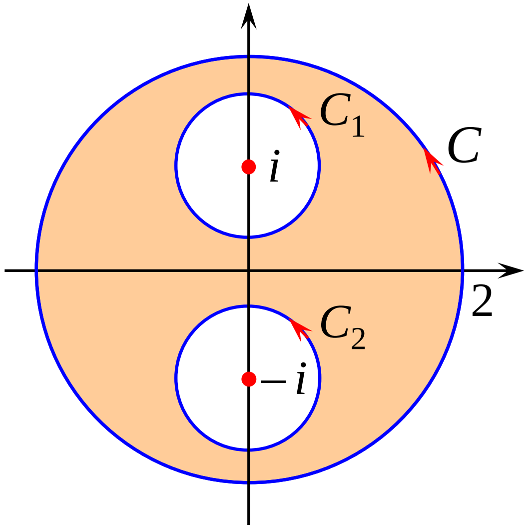
解 $$\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \cos'' z \Big|_{z=i}$$

$$= -\pi i \cos i = -\frac{\pi i}{2}(e + e^{-1}).$$

例2 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{100}} dz.$

解 $$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{100}} dz = \frac{2\pi i}{99!} (e^z)^{(99)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{99!}.$$

例3 计算 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$



解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}=\dfrac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}.$

如图，作 C_1， C_2两个小圆，

则 $I=\oint_{C_1}f(z)dz+\oint_{C_2}f(z)dz$ **(复合闭路定理)**

$$=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z+i)^2}\cdot\frac{dz}{(z-i)^2}+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z-i)^2}\cdot\frac{dz}{(z+i)^2}$$

$$\overset{\text{记为}}{=\!=} I_1+I_2.$$

(2) $I_1 = \oint_{C_1} \boxed{\frac{e^z}{(z+i)^2}} \cdot \frac{dz}{(z-i)^2}$

$$\underline{\underline{\text{(高阶导数公式)}}} \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]' \Bigg|_{z=i}$$

$$= \frac{\pi}{2}(1-i)e^i .$$

同样可求得 $I_2 = -\frac{\pi}{2}(1+i)e^{-i} .$

(3) $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}[(1-i)e^i - (1+i)e^{-i}] = \sqrt{2}\pi i \sin(1-\frac{\pi}{4}) .$

二、柯西不等式

定理 设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $|f(z)|<M$，

$$|f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!M}{R^n},\quad (n=1,2,\cdots).$$ (柯西不等式)

证明 $\forall R_1: 0<R_1<R$，函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R_1$ 上解析，

$$\Rightarrow\ f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,\ (n=1,2,\cdots).$$

$$\Rightarrow\ |f^{(n)}(z_0)|\le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\mathrm{d}s\le\frac{n!M}{R_1^n},$$

令 $R_1\to R$，即得 $|f^{(n)}(z_0)|\le \dfrac{n!M}{R^n},\ (n=1,2,\cdots).$

三、刘维尔定理

定理 设函数 $f(z)$ 在全平面上解析且有界，则 $f(z)$为一常数。

证明 设 z_0 为平面上任意一点，

$\forall R>0$，函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 上解析,且 $|f(z)|<M$，

根据柯西不等式有 $|f'(z_0)| \le \dfrac{M}{R}$，

令 $R\to+\infty$，即得 $f'(z_0)=0$，

由 z_0 的任意性，知在全平面上有 $f'(z)\equiv 0$，

则 $f(z)$ 为一常数。

四、莫雷拉定理

函数$f(z)$在单连通D内连续且对D内任一闭曲线 Γ有 $\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

则函数$f(z)$ 在 D 内解析

令$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$， $z, z_0 \in D$，利用定义证明 $F'(z) = f(z).$

再利用高阶导数公式可知$f(z)$解析

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析的充要条件是函数$f(z)$在D内连续且对D内任一闭曲线有

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

例4(代数基本定理) 设函数 $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$,

其中$a_n \neq 0$, n为正整数, 证明方程 $f(z)=0$在全平面上至少有一个根。

证(反证法) 假设$f(z)=0$ 在全平面上无根,即 $f(z)\neq 0\ (\forall z)$,

则函数 $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 在全平面上解析,

又 $$\lim_{z\to\infty}\phi(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

故$\varphi(z)$ 在全平面上有界, 根据刘维尔定理有

$\varphi(z)=C$ (常数), $\Rightarrow$ $f(z)=C_1$(常数), 与题设矛盾。

例5 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析，且

$$\left|f(z)-z\right|\le\frac{1}{|2-z|},$$ 证明 $\left|f'(0)\right|\le 2.$

证 (1) 任取正数 $r<2$,(注意 $f(z)$ 在 $|z|=2$ 上的性态不知道)

则函数 $f(z)$ 在 $|z|\le r$ 内解析,由高阶导数公式有

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z,$$

$$\Rightarrow |f'(0)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)-z+z}{z^2}\mathrm{d}z\right|,$$

$$\Rightarrow |f'(0)|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)-z|+|z|}{|z|^2}\mathrm{d}s,$$

(1) $|f'(0)| \le \dfrac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r} \dfrac{|f(z)-z|+|z|}{|z|^2}\,\mathrm{d}s,$

(2) 由 $|f(z)-z| \le \dfrac{1}{|2-z|}$,有

$$|f'(0)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r} \frac{1}{|z|^2\cdot|2-z|}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r} \frac{1}{|z|}\,\mathrm{d}s$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r} \frac{1}{|z|^2\cdot(2-|z|)}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi r}\cdot 2\pi r,$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \le \frac{1}{2\pi r^2(2-r)}\cdot 2\pi r + 1,$$

(1) $|f'(0)| \le \dfrac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\dfrac{|f(z)-z|+|z|}{|z|^2}\,\mathrm{d}s,$

(2) $|f'(0)| \le \dfrac{1}{2\pi r^2(2-r)}\cdot 2\pi r+1 = \dfrac{1}{r(2-r)}+1,$

(3) 令 $r=1$ 得 $|f'(0)| \le 2.$

例6 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析, 且满足 $|f(z)-2|\le|z|$.

证明 $\displaystyle\frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\frac{dz}{z}=f'(0)$.

证 (1) 由于 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析, 根据高阶导数定理可得

在 $|z|<2$ 内 $f'(z)$ 也解析;

(2) 由 $|f(z)-2|\le|z|$ 可得

在 $|z|<2$ 内, $f(z)\neq 0$,

$\Rightarrow\ z+\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $|z|<2$ 内解析;

(3) 根据柯西积分公式有

$$\frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\frac{dz}{z}=2\pi i\cdot\frac{1}{\pi i}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\bigg|_{z=0}$$

$$=\frac{2f'(0)}{f(0)};$$

(4) 由 $|f(z)-2|\le|z|,\Rightarrow\ |f(0)-2|\le 0,\ \Rightarrow\ f(0)=2;$

即得 $\displaystyle\frac{1}{\pi i}\oint_{|z|=1}\left(z+\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\frac{dz}{z}=f'(0).$

四、小结与思考

一、柯西积分公式

二、平均值公式

三、最大模原理

四、高阶导数定理

五、柯西不等式

六、刘维尔定理