作业： 习题1.2

(A) 1(1)(2)(6)，4(2)(4)，5，6，7(1)(2)

(B) 1

习题1.3 (A) 1, 2, 4

本节课教学内容

1. 行列式的计算
2. Cramer法则

1. 行列式的计算

例1 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

解 按对角线法则，求得左端行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$
$$= x^2 - 5x + 6$$

则有 $x^2 - 5x + 6 = 0,$

解得 $x = 2,$ 或 $x = 3.$

对2阶或3阶行列式，可直接用对角线法则进行计算

例2 计算 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

（行列式的计算可按0元素较多的行或列展开）

解

$$D = 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-6)\cdot(-7) = 42$$

例3 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

解 按第n列展开

$$D_n = n(-1)^{n+n}M_{nn} = n\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$$

按零元较多行或列展开时，注意观察行列式的特点

降阶法：利用行列式的性质，把行列式某行(列)较多的元素化成零，再从该行(列)展开.

例4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 10 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

解 $D \overset{c_1+c_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 10 & 3 \\ -1 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_3-r_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$$=(-1)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -3 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_1+r_3 \\ r_2+r_3}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -5 & 12 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -5 & 12 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 4$$

例5 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod a_{ii}$$

证

$$D=D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod a_{ii}$$

一些三角形行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod a_{i,n-i+1}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{n-1,n-1} & \vdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod a_{i,n-i+1}$$

化三角形法：通过一些变换把行列式化为三角形行列式

3种变换方法：

行(列)变换	记号	效果
交换第i行(列)和第j行(列)	$r_i \leftrightarrow r_j \quad (c_i \leftrightarrow c_j)$	行列式值反号
从第i行(列)提取公因子k	$\frac{1}{k} r_i \quad (\frac{1}{k} c_i)$	k被提到了行列式的外面
第j行(列)乘以k倍加到第i行(列)	$r_i + k r_j \quad (c_i + k c_j)$	行列式值不变

row
/rəʊ/ n. 行

column
/ˈkɒləm/ n. 列

化（上）三角形法

$$D=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{n-1,n-1} & \vdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod a_{i,n-i+1}$$

例6 计算 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$

解

$$D\overset{c_3-2c_2}{=}\begin{vmatrix} 103 & 100 & 4 \\ 199 & 200 & -5 \\ 301 & 300 & 0 \end{vmatrix}\overset{c_1-c_2}{=}\begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{\frac{1}{100}c_2}100\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-3c_1}100\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}100\begin{vmatrix} 3 & -8 & -4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=100\cdot(-1)^{\frac{3\cdot(3-1)}{2}}[(-4)\cdot5\cdot1]$$

$$=2000$$

（一个行列式总可以通过一系列的变换化为三角形行列式）

(具体方法参考教材13页 例1.2.2 解法1)

行列式的计算方法

1. 对角线法则（2、3阶行列式 ）

2. 直接用定义（2、3阶行列式 或 零元素很多时可用）

3. 化三角形行列式法

此法特点：

(1) 程序化明显，有一定普遍性。

(2) 灵活性差。

4. 降阶法

利用性质，将某行(列)的元素尽可能多地化为0，然后按行(列)展开.

$$n\text{阶} \to n-1\text{阶} \to \cdots \to 2\text{阶}$$

此方法较为灵活多变。

例7 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

"箭形（爪形）行列式"（一般可化为三角形行列式）

解

$$D \xlongequal[i=2,3,4]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ x & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \xlongequal[i=1,2,3]{c_4 + \sum c_i} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} x^4 = x^4$$

例8 计算n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

“行和相等”

解 把第2列至第n列加至第1列，提取第1列公因子

$$D_n = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\underset{(i=2,\cdots,n)}{\overset{r_i - r_1}{=\!=\!=}} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

范德蒙德(Vander monde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$\begin{aligned}=&(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_1) && j=1\\ &(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_2)(x_n-x_2) && j=2\\ &(x_4-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_3)(x_n-x_3) && j=3\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\\ &(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2}) && j=\text{n-2}\\ &(x_n-x_{n-1}) && j=\text{n-1}\end{aligned}$$

例如 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\\ 4 & 9 & 1\end{vmatrix}$ 是范德蒙德行列式

证明范德蒙德行列式 $D_n = \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$

证(数学归纳法)

1. 当$n=2$时，有 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$，结论成立。

2. 假设对于$n-1$阶范德蒙德行列式结论成立.

下证对n阶范德蒙德行列式结论也成立.

在D_n中,从第$n-1$行开始(向上)，依次把每行的$(-x_1)$倍加到下一行，则

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$n-1$阶范德蒙德行列式

根据归纳假设有：

$$\prod_{2\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

$$\begin{aligned}&(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_2)(x_n-x_2)\\ &(x_4-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_3)(x_n-x_3)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})\\ &(x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

综上所述，结论成立 $(n\ge 2)$ 。

范德蒙德(Vander monde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

$$\begin{aligned} &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_{n-1}-x_1)(x_n-x_1) \\ &\quad (x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_2)(x_n-x_2) \\ &\quad (x_4-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_3)(x_n-x_3) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad (x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2}) \\ &\quad (x_n-x_{n-1}) \end{aligned}$$

若$x_1, x_2, \cdots x_n$中有两个相等 ？

例 计算3阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$=(3-2)(-1-2)(-1-3)$

$=12$

例9 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

解 每一行提取各行的公因子，得到

$$D_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$D_n = n!\,(2-1)(3-1)(4-1)\cdots(n-1)$$

$$\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2)$$

$$\cdot(4-3)\cdots(n-3)$$

$$\vdots$$

$$[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!1!.$$

例10. 证明块对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{D_1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}}_{D_2}$$

证 记 $D_1=\det\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ $D_2=\det\left(b_{ij}\right)_{m\times m}$ 需要证 $D=D_1D_2$

由前面知识，一个行列式总能化成下三角行列式。把D_1、D_2化成下三角形行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}=a'_{11}\cdots a'_{nn},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b'_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ b'_{m1} & \cdots & b'_{mm} \end{vmatrix}=b'_{11}\cdots b'_{mm}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}=a'_{11}\cdots a'_{nn},\ D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b'_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ b'_{m1} & \cdots & b'_{mm} \end{vmatrix}=b'_{11}\cdots b'_{mm}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{化为下三角形}} \begin{vmatrix} a'_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} & & & \\ c'_{11} & \cdots & c'_{1n} & b'_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c'_{m1} & \cdots & c'_{mn} & b'_{m1} & \cdots & b'_{mm} \end{vmatrix} = a'_{11}\cdots a'_{nn}b'_{11}\cdots b'_{mm}$$

$$= D_1 D_2$$

一般有：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

例11 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}$

解 交换第2列和第5列

提取第一行公因子a之后，为范德蒙德行列式

$$D=-\begin{vmatrix} a & a & a & 0 & 0 \\ b & d & c & 0 & 0 \\ b^2 & d^2 & c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & bc & ab \\ 0 & 0 & 0 & da & cd \end{vmatrix} = -\boxed{\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & d & c \\ b^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} bc & ab \\ da & cd \end{vmatrix}$$

$$=a(d-b)(c-b)(c-d)bd(a^2-c^2)$$

例13：计算5阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

递推公式（通常是按某行或列展开后，余子式与原来有类似的结构）

解 将第2行至第5行加到第1行去

D_3 , D_4和D_5的结构相似

$$D_5=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = D_4+(-1)^{1+5}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=D_4+1$$

$$D_5=D_4+1=(D_3+1)+1=(D_2+1)+2=6$$

本节课教学内容

1. 行列式的计算
2. Cramer法则

2 Cramer法则

非齐次与齐次线性方程组的概念

设有n个未知量m个方程的线性方程组:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零，则称此方程组为非齐次线性方程组;

若常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

则称此方程组为齐次线性方程组;

对于n元齐次线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解，称它为齐次线性方程组的零解.

若有一组不全为零的数是齐次线性方程组的解，则称其为齐次线性方程组的非零解.

齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解；

例如 $\begin{cases} x_1-x_2=0\\ x_1+x_2=0 \end{cases}$只有零解； 而$\begin{cases} x_1-x_2=0\\ 2x_1-2x_2=0 \end{cases}$有非零解.

Cramer（克拉默）法则

定理 对于有n个未知量n个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果它的系数行列式不等于零，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么方程组有唯一解 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, x_3 = \dfrac{D_3}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}.$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素依次用方程组右端的常数项替代后得到的n阶行列式.

（Cramer法则的证明将在第二章第二节给出）

Cramer（克拉默）法则用于齐次线性方程组

推论1 对于n个未知量n个方程的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

如果它的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组只有零解.

推论2 如果齐次线性方程组有非零解,则它的系数行列式必为零.

例1 用Cramer法则解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ x_1+x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=2 \\ \cdots \\ x_1+(n-1)x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ nx_1+\ \ x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{其他每行}]{\text{将第一行乘}-1\text{加到}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)! \neq 0$$

方程组有唯一解

例1 用Cramer法则解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ x_1+x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=2 \\ \cdots \\ x_1+(n-1)x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ nx_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_i=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 2 & \cdots 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & \cdots 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 2 & \cdots 1 & 1 \\ n & 1 & \cdots & 2 & \cdots 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 & 2 \\ n & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=2D,$$

$(i\neq n)$

方程组的唯一解为：

$$x_i=\frac{D_i}{D}=0$$

$(i=1,2,\ldots,n-1)$

$$x_n=\frac{D_n}{D}=2$$

例2 问λ取何值时，齐次方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

解 若未知量个数与方程个数相同的齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式D=0

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ \lambda+2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

由D=0，得 λ=1 或 λ=-2. 即λ=1 或 λ=-2时，方程组可能有非零解

验证： 当λ=1时，方程组为$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 例如x_1=1, x_2=1, x_3=-2为一组非零解.

不难验证当λ=-2时，方程组也有非零解.

例3： 证明平面上三条不同的直线

$$ax+by+c=0,bx+cy+a=0,cx+ay+b=0$$

相交于一点的充分必要条件是$a+b+c=0$.

证 必要性 设所给三条直线交于一点$M(x_0,y_0)$,

则$x=x_0,y=y_0,z=1$可视为齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+cz=0, \\ bx+cy+az=0, \\ cx+ay+bz=0 \end{cases}$$ 的非零解.

从而有系数行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0.$

$$D = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(a+b+c)\cdot\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$$

因为三条直线互不相同,所以a,b,c也不全相同,

故$a+b+c=0.$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=[a^3+b^3]+c^3-3abc$$
$$=[(a+b)^3-3ab(a+b)]+c^3-3abc \qquad [Put\ (a+b)=x]$$
$$=x^3-3abx+c^3-3abc$$
$$=x^3+c^3-3abx-3abc$$
$$=(x+c)(x^2+c^2-cx)-3ab(x+c)$$
$$=(x+c)[(x^2+c^2-cx-3ab] \qquad [Replace\ x=a+b]$$
$$=(a+b+c)[(a+b)^2+c^2-c(a+b)-3ab]$$
$$=(a+b+c)[a^2+b^2+2ab+c^2-ca-bc)-3ab]$$
$$=(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca]$$

充分性 如果$a+b+c=0$,

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \\ cx+ay=-b \end{cases} \qquad (1)$$

将方程组的第一、二两个方程加到第三个方程，得

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \\ 0=0. \end{cases} \qquad (2)$$

下证此方程组（2）有唯一解.

反证法： 如果 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 0$，则 $ac = b^2 \geq 0$.

由 $b = -(a+c)$ 得 $ac = b^2 = [-(a+c)]^2 = a^2 + 2ac + c^2$,

于是 $ac = -(a^2 + c^2) \leq 0$，从而有 $ac = 0$.

$$a = 0, b = 0, c = 0$$

与题意矛盾！