彭·高数

高等数学下期末试题集

（2010-2021）

彭康书院学业辅导与发展中心

目录

2021 年高数下期末试题

一、 填空题

~~1.~~ 曲面 $\sin^2 x+\cos(y+z)=\frac{3}{4}$ 在点 $(x,y,z)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},0\right)$ 处的切平面方程是 ________________。

~~2.~~ 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛半径 R 等于 ____________。

~~3.~~ 若 $\mathbb{R}^2$ 上的可微函数 $u(x,y)$ 的梯度 $\mathbf{grad}\,u=(2x+e^x\sin y,e^x\cos y)$，且 $u(0,\pi)=2$，则 $u(x,y)=$ ____________________。

~~4.~~ 设 $L:x=2\cos t,y=2\sin t,z=2t(0\le t\le\pi)$，则 $\int_L\frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s=$ ____________。

~~5.~~ 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\le x\le 0\\ x^2+1, & 0\le x\le 1\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，其和函数记为 $S(x)$，则 $S\left(-\frac{15}{2}\right)=$ ______________。

二、 选择题

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2=0\\ 0, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处 （ ）

   (A) 连续且偏导数存在 (B) 沿各个方向的方向导数都存在，但不可微

   (C) 可微 (D) 连续但偏导数不存在

~~2.~~ 设空间区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 1\right\}$，则 Ω 的体积等于 （ ）

   (A) $4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r$ (B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r$

   (C) $4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r$ (D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r$

~~3.~~ 设 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2,z\ge 0$，在以下四组积分中，一组中两个积分同时为 0 的是 （ ）

   (A) $\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (B) $\iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

   (C) $\iint_\Sigma y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ (D) $\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\iint_\Sigma 1\mathrm{d}x\mathrm{d}z$

4. 二次积分 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1/x}^1 ye^{xy}\mathrm{d}y$ 的值为 （ ）

   (A) $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$ (B) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$ (C) $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}$ (D) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^2+\mathrm{e}$

~~5.~~ 下列命题中正确的是 （ ）

(A) 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$

(B) 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，必存在$N\in\mathbb{N}_+$，当$n>N$时，恒有$a_n>\dfrac{1}{n}$

(C) 设$f(x)=x-\sin x$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$绝对收敛

(D) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

三、 计算题

~~1.~~ 设函数$f(u,v)$具有连续二阶偏导数，$z=xf\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

~~2.~~ 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截部分。

~~3.~~ 求函数$z=\dfrac{x^3}{3}-xy+\dfrac{y^2}{2}-2y$的极值。

4. 计算曲线积分$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\left[2x+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]\mathrm{d}y$，其中有向曲线$C:y=x\sin x$，方向：

$A(\pi,0)\to O(0,0)$。

~~5.~~ 计算第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z - 3x^2 y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 1)$ 的下侧。

6. (1) 将函数 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 展开成麦克劳林级数；

(2) 利用(1)中所得级数，求积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的值(注：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$)。

五、将函数 $f(x) = x - \dfrac{\pi}{2} + \left| x - \dfrac{\pi}{2} \right| (0 \le x \le \pi)$ 展成余弦级数。

六、求幂级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$的和函数，并求$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和。

~~七、~~函数$f(x,y)$满足$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且$f(0,y)=y+1$，$L_t$是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线，计算曲线积分

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y$$

并求$I(t)$的最小值。

八、设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且单调增加有上界。证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\right]$收敛。

2020 年高数下期末试题

一、 选择题

~~1.~~ 函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

（1） 在点 (x_0,y_0) 处连续；

（2） 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数连续；

（3） 在点 (x_0,y_0) 处可微；

（4） 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数存在；

则如下表示的推导关系成立的是 （ ）

(A) $(2)\to(3)\to(1)$ (B) $(3)\to(2)\to(1)$ (C) $(3)\to(4)\to(1)$ (D) $(3)\to(1)\to(4)$

~~2.~~ 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 f(r\sin\theta, r\cos\theta) r\mathrm{d}r$ 等于 （ ）

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

~~3.~~设 L 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\oint \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=$ （ ）

(A) 0 (B) 2π (C) $-\pi$ (D) -2π

~~4.~~ 设级数 $\sum_1^{+\infty} u_n$ 收敛，则下列级数中必定收敛的是 （ ）

(A) $\sum_1^{+\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$ (B) $\sum_1^{+\infty} u_n{}^2$ (C) $\sum_1^{+\infty} u_{2n-1}-u_{2n}$ (D) $\sum_1^{+\infty} u_n-u_{n+1}$

~~5.~~ 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式 $f(x)=\begin{cases}-x, -\pi\le x\le 0\\ 0, 0<x\le\pi\end{cases}$，则

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=-\pi$ 收敛于 （ ）

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) π

二、 填空题

~~1.~~设曲面 $S: z=x+f(y-z)$，其中 f 可导，则该曲面在任一点处切平面的法向量 n 与向量 $(1,1,1)$ 的夹角 θ 为 ________。

~~2.~~ $\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx =$ ________。

~~3.~~ 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ ______。

~~4.~~ 已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}=5$， $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n=$ ________。

~~5.~~ 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^{3n+4}$ 的和函数 $S(x)$ 为 ________。

三、 计算题

~~1.~~ 设 $u=f(x,y,z)$， $\varphi(x^2,e^y,z)=0$， $y=\sin x$，其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$。

~~2.~~ 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\right\}$ 上的最大值与最小值。

~~3.~~ 设 n 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的单位切向量，且与 OZ 轴正向夹角呈锐角，求函数 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $(0,1,2)$ 处沿向量 n 的方向导数。

~~4.~~ 设是Ω是曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=2-x^2-y^2$所围成的立体，求Ω的体积V和表面积S。

~~5.~~ 计算曲面积分$\int_L (2xy-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中$L$为抛物线$2x=\pi y^2$从点$(0,0)$到点$(\frac{\pi}{2},1)$的一段弧。

~~6.~~ 设S是半空间$x>0$中任意有向封闭曲面，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内存在连续的一阶导数，满足$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，又$\oint\!\!\oint_S xf(x)dy\wedge dz-xyf(x)dz\wedge dx-e^{2x}zdx\wedge dy=0$，求$f(x)$。

~~7.~~ 计算三重积分$\iiint\limits_{(V)}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2 dv$，其中$(V)$为球体$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$a,b,c$为正数。

四、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$

(1) 将函数 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数；

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。

五、设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$，其中 a_n $(n=0,1,2...)$ 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数，求证：$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛。

2019 年高等数学下册期末试题

一、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 函数 $uu = 2xxyy - zz^2$ 在点 $(2, -1, 1)$ 处沿 $II = (1, 2, -2)$ 的方向导数是______.

2. 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}(x+1)^n$ 的收敛域是______.

3. 曲面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $M_0(2, 1, 4)$ 处的切平面方程为__________.

4. 设曲线 L 是从点 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(1, 2, 2)$ 的直线段, 则对弧长的曲线积分 $\int_L xe^{yz}\,\mathrm{d}s =$________.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x(-\infty < x < +\infty)$, 其中 $a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right) =$______.

二、计算题 (每小题 6 分，共 18 分)

1. 设函数 $u = f(x, y, z)$, f 具有连续的二阶偏导数, 且 $z = \mathrm{e}^x \sin y$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

2. 计算 $\int_C -y^2dx + xdy + z^2dz$, 其中曲线 C 是平面 $y + z = 4$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 的交线, 且从 z 轴正向往下看是逆时针方向.

3. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 2$ 部分.

三、计算题 (每小题 7 分，共 21 分)

1. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 与圆锥面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围空间闭区域 Ω 的体积.

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$.

3. 计算 $\iiint_{\Omega} (2\sin y + z)\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 2z, z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

四、解答题 (每小题 8 分，共 32 分)

1. 求曲线积分 $\int\limits_L \dfrac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L 为摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t - \pi, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 由 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

2. 求椭圆 $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ 上的点到点 $M(0, 0, 2)$ 的最长距离和最短距离.

3. 求向量场 $\vec{A} = (2x + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 通过抛物面 $\Sigma : z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 1)$ 下侧的通量.

4. 将函数 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}(-\pi \le x \le \pi)$ 展开成傅里叶级数.

五、(8 分) 将 $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 的和.

六、(6 分) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$, L 为 D 的边界正向.
证明: $\displaystyle\int_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x \ge \frac{5}{2}\pi^2$.

2018 年高数下期末试题

一、单选题

1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的某个领域内有定义，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $f(x,y)$ 在点 P 处的偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在该点一定可微

B. 若 $f(x,y)$ 在点 P 处连续，则 $f(x,y)$ 在该点的偏导数一定存在

C. 若 $f(x,y)$ 在点 P 处有极限，则 $f(x,y)$ 在该点一定连续

D. 若 $f(x,y)$ 在点 P 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点连续且偏导数一定存在

2. 若 $f(x,y)$ 在 D：$a\le x\le b,c\le y\le d$ 上有二阶连续偏导数，则 $\iint\limits_{D}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy=$（　　）

A. $f(a,d)-f(b,d)-f(b,c)+f(a,c)$　　B. $f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c)$

C. $f(a,d)-f(b,d)-f(a,c)+f(b,c)$　　D. $f(b,d)-f(a,d)-f(a,c)+f(b,c)$

3. 若 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $I=\oint_L (x+1)^2 ds=$（　　）

A. $\frac{28}{3}\pi$　　B. 8π　　C. $\frac{19}{3}\pi$　　D. 12π

4. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)=$（　　）

A. $2f(2)$　　B. $f(2)$　　C. $-f(2)$　　D. 0

二、计算题

1. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程和法线方程.

2. 求密度为 1 的抛物体V：$x^2+y^2\le z\le 1$绕z轴的转动惯量.

3. 设S为上半球面$x^2+y^2+z^2=4, z\ge 0$，计算$\iint\limits_{(s)}(x+y+z)dS$.

4. 计算$I=\int_L\left[y^2+\sin^2(x+y)\right]dx+\left[x^2-\cos^2(x+y)\right]dy$，其中$L$为曲线$y=\sqrt{1-x^2}$从上点 A(1,0) 到 B(0,1) 的一段弧.

5. 计算积分$I=\oint\limits_C zdx+xdy+ydz$，其中$C$为$x+y+z=1$被三个坐标面所截的三角形的边界，方向与三角形上侧的法向量构成右手法则.

6. 设 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$，计算 $\operatorname{div}\left[\operatorname{grad} f(x,y,z)\right]$ 和 $\operatorname{rot}\left[\operatorname{grad} f(x,y,z)\right]$.

7. 计算 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$.

三、解答题

1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性、可微性.

2. 在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点 P，使得函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 P 沿方向 $n=(1,-1,0)$ 的方向导数最大，并求此方向导数的最大值.

3. 计算 $I=\oiint\limits_{(s)}(x-y+z)dy\wedge dz+(y-z+x)dz\wedge dx+(z^2-x+y)dx\wedge dy$，其中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 所围立体表面的外侧.

4. 设 L 是不经过点 $(2,0)$，$(-2,0)$ 的分段光滑的简单正向闭曲线，试就 L 的不同情形计算曲线积分：

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]dy$$

2017 年高数下期末试题

一、计算题

1. 求 $u=4x^2+y^2+z^2$ 在点 M(1,0,2) 处的梯度及最大方向导数.

2. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin\frac{\pi}{2^n} \quad (a>0)$ 的敛散性.

3. 将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展成余弦级数.

4. 设 $u=f(t), t=\varphi(xy,x)$，其中 f，φ 具有连续的二阶导数及偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

5. 求曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=-t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

6. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的所有极值.

7. 计算累次积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy$.

8. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D (xy+|y|)dxdy$，其中 $D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$.

9. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^3}{r^3}dy\wedge dz+\frac{y^3}{r^3}dz\wedge dx+\frac{z^3}{r^3}dx\wedge dy$， $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

10. 求第一型曲线积分 $I=\int_L\sqrt{2y^2+z^2}ds$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x-y=0\end{cases}$.

11．求双曲抛物面（马鞍面）$z = xy$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截下那部分的面积.

二、解答题

1．讨论 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在性、可微性、偏导函数的连续性.

2．计算第二型曲线积分 $I=\int_L \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx+\dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy$，其中 L 是从点 $\mathrm{A}(-a,0)$ 经上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(y\geq 0)$，到点 $\mathrm{B}(a,0)$ 的弧段.

3.（学习高数Ⅰ者做（1），学习高数Ⅱ者做（2））

（1）判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^{\frac{3}{2}}}$的一致收敛性.

（2）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n$的收敛域及和函数$S(x)$.

4. 计算曲线积分$\int_{(C)}(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中曲线$(C)$为球面$x^2+y^2+z^2=4x$与柱面$x^2+y^2=2x$的交线，其方向为从$oz$轴正向看进去为逆时针方向$(z\geq 0)$.

2016 年高数下期末试题

一、填空题

1. 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^2+y+1$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=ax+y^2+2$，则 $a=$__________.

2. 设三元函数 $f(x,y,z)=\int_0^{x+y+z}\cos^2 t^2 dt$，则 $df\big|_{(1,0,-1)}=$__________________.

3. 设 $f(x)=\int_x^1 e^{\frac{y^2}{2}}dy$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$__________________________.

4. 函数 $z=3x+4y$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大值为__________.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi\le x<0 \\ x^2, & 0\le x<\pi \end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(-\pi)=$

__________________________.

二、单选题

1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则必有（　　）

A. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续

B. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数不存在

C. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数至少有一个不连续

D. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿某个方向的方向导数不存在

2. 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内偏导数存在. 若 $f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零，且满足等式 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+2\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-f(x,y)$，则 $f(x,y)$ 在 D 上（　　）

A. 存在非零的最大值　　　　B. 存在非零的最小值

C. 只在边界上取得最大值和最小值　　　　D. 能在边界上取得最大值和最小值

3. 设 $I_1=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} e^{xyz}dv$，$I_2=\iiint\limits_{|x|\le 1,|y|\le 1,|z|\le 1} e^{xyz}dv$，$I_3=\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\le 1} e^{xyz}dv$，则（　　）

A. $I_3<I_1<I_2$　　B. $I_1<I_2<I_3$　　C. $I_2<I_3<I_1$　　D. $I_1<I_3<I_2$

4. 质点在变力 $\vec{F}=\{P(x,y),0\}$ 的作用下沿平面有向曲线 L 移动，则该力所做的功为（　　）

A. 0　　B. $\int_L P(x,y)dx$　　C. $\int_L P(x,y)dy$　　D. $\int_L P(x,y)ds$

5. 设 L 是曲线 $x^2+y^2=a^2$，则曲线积分 $\int_L (x+y)^2 ds$ 为（　　）

A. a^2　　B. a^3　　C. $2\pi a^3$　　D. πa^4

6. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $(b_n \neq 0)$，则下列级数中一定发散的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|+|b_n|)$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n{}^2+b_n{}^2)$

三、简答题

1. 设函数 $z=f(xy,\sin y)$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 求曲线 $\begin{cases} 3x^2+2y^2+3z^2=12 \\ z=x \end{cases}$ 在点 $(1,\sqrt{3},1)$ 处的切线与法平面方程.

3. 求 $\iint_D \frac{x\cos y}{y} dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2(x\geq 0)$ 和直线 $x=0, y=4$ 围成的平面区域.

4. 求$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv$，其中$\Omega$是由曲面$z^2=x^2+y^2$，$z=1$与$z=2$所围成的区域.

5. 求函数$f(x,y)=2x^2-3xy+2y^2-x+2y$的极值.

6. 计算曲线积分$\int_L(y+\frac{e^y}{x})dx+e^y\ln xdy$，其中$L$为平面曲线$x=1+\sqrt{2y-y^2}$上从点$(1,0)$到点$(2,1)$的一段有向弧段.

7.（学习高数Ⅰ者做（1），学习高数Ⅱ者做（2））

（1）证明：函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

（2）设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域$N(0,r)$内具有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

8. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x_0=2$ 处展开为幂级数，并指出收敛区间.

9. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)2^n}{n!}$ 的和.

10. 设三元函数 P,Q,R 在单连通区域 Ω 内有一阶连续偏导数，Γ 是 Ω 内的简单曲线.

（1）写出曲线积分 $I=\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关的一个充分条件.

（2）计算积分 $I=\int_\Gamma (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，其中 Γ：$x=a\cos t, y=a\sin t, z=t$ 上从点 $(a,0,0)$ 到点 $(-a,0,\pi)$ 的一段.

11. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S \dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中曲面 S 为：$1-\dfrac{z}{7}=\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}(z\geq 0)$ 的上侧.

2015 年高数下期末试题

一、单选题

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的二重极限（　　）

A. 等于 0　　B. 等于 1　　C. 等于 2　　D. 不存在

2. 设曲面 $S:x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$，取上侧，$S_1$ 为 S 位于第一卦限部分，则有（　　）

A. $\iint\limits_S xdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$　　B. $\iint\limits_S ydS=4\iint\limits_{S_1} ydS$

C. $\iint\limits_S xdy\wedge dz=4\iint\limits_{S_1} xdy\wedge dz$　　D. $\iint\limits_S ydy\wedge dz=4\iint\limits_{S_1} ydy\wedge dz$

3. 设曲线 $C:x^2+y^2=1$，取逆时针方向，则 $\oint_C (y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy=$（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{3\pi}{8}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{5\pi}{8}$

4. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿方向 $\vec{l}=(1,\sqrt{3})$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=$（　　）

A. 0　　B. $\dfrac{3}{8}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　　D. 3

二、填空题

1. 设 $f(x,y)=x^3y-\sin(x^2-y^2)$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,3)}=$____________.

2. 空间曲线 $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{4}\right)$ 处的切线与 Ox 的夹角 $\alpha=$______.

3. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\dfrac{\cos y}{y}dy=$____________.

4. 设空间曲线 C 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+y+z=\dfrac{3R}{2}\end{cases}$，其中常数 $R>0$，则 $\oint_C yds=$__________.

三、解答题

1. 设函数 $f(u,v)$ 具有一阶连续偏导数， $z=\int_0^{xy} f(e^t,t)dt$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^z-2x+yz=e$ 在 $(0,0,1)$ 点的某领域内确定的隐函数，求全微分 $dz|_{(0,0)}$.

3. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n,(x>0)$ 的敛散性.

4. 将 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}|x|$ 在 $|x|\le\pi$ 上展开为 Fourier 级数.

5. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$的收敛域及和函数.

6.（学习高数Ⅰ者做（1)，学习高数Ⅱ者做（2)）

（1）证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$，在区间$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛。但在$(0,+\infty)$内不一致收敛.

（2）将函数$f(x)=\frac{x+4}{2x^2-5x-3}$在$x_0=1$处展开为幂级数.

7. $I=\iint_D\sqrt{\left|y-x^2\right|}dxdy$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$.

8. 设Σ是旋转抛物面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$，取上侧，计算第二类曲面积分：

$$I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

9. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有连续的导数，L是由点$A(3,\frac{2}{3})$到点$B(1,2)$的直线段，求：

$$\int_L\left[\frac{x}{y^2}-xf(xy)\right]dy-\left[\frac{1}{y}+yf(xy)\right]dx$$

10. 在曲面$z=4-x^2-y^2$位于第一卦限部分上求一点P，使P点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，并求此最小体积.

11. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$，证明：函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

12. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D:x^2+y^2\leq 1$ 上有二阶连续的偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$，证明：

$$I=\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\frac{\pi}{2e}$$

2014 年高数下期末试题

一、计算题

1. 在曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 上求一点，使曲面在该点处的切平面平行于平面 $2x+2y-z=0$.

2. 设 f 是连续函数，交换积分次序：$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x}f(x,y)dy$.

3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\lambda-e)^2\lambda^n n!}{n^n}\quad(\lambda\ge 0)$ 的敛散性.

4. 已知曲线 $L:y=x^2(0\le x\le 1)$ 上任意一点处的线密度在数值上与该点的横坐标相同，求曲线的质量.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x\le 0\\ x & 0<x<2\end{cases}$ ，将 $f(x)$ 展为以 4 为周期的 Fourier 级数.

6. 将函数 $f(x)=\ln(4x-5)$ 展开为 $x-2$ 的幂级数.

7. 计算三重积分 $\iiint\limits_V z dv$，其中 V 是由不等式 $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$ 确定的空间区域.

8. 求向量场 $\vec{A}=\{z+x^2, x, z^2+3y\}$ 穿过曲面 Σ： $z=x^2+y^2 (0 \le z \le 1)$ 下侧的通量.

9. 计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $0 \le z \le 1$ 之间的部分.

10. 计算第二型线积分 $\int\limits_L ye^{y^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy$，其中 L 为 $y=\sqrt[3]{x}$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的曲线段.

11. 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad}(\sqrt{x^2+y^2+z^2})]$.

12.（学习高数Ⅰ者做（2），学习高数Ⅱ者做（1））

（1）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n+1)3^n}$ 的收敛域及和函数.

（2）判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性，并讨论是否可以逐项求导.

13. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数，求 $\frac{dy}{dx}$.

14. 计算 $\iint\limits_{(D)} x[1+y\sin^2(x^2+y^2)]d\sigma$，其中 (D) 是由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 所围成的区域.

15. 设函数$\varphi(y),\psi(y)$具有连续导数，对平面内的任意分段光滑简单闭曲线C，有曲线积分

$\oint_C 2[x\varphi(y)+\psi(y)]dx+[x^2\psi(y)+2xy^2+2x\varphi(y)]dy=0$，求：

（1）求满足条件$\varphi(0)=-2,\psi(0)=0$的函数$\varphi(y),\psi(y)$.

（2）计算$\int_{(1,1)}^{(0,0)}2[x\varphi(y)+\psi(y)]dx+[x^2\psi(y)+2xy^2+2x\varphi(y)]dy$.

16. 设$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

（1）计算$A=\iint\limits_D |xy-1|dxdy$.

（2）设$f(x,y)$在D上连续，且$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0,\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$，证明存在$(\xi,\eta)\in D$，使

$|f(\xi,\eta)|\ge\dfrac{1}{A}$.

2013 年高数下期末试题

1．求函数 $u=x^2+y^2+z^4-3xz$ 在点 $M_0(1,1,1)$ 处 $\vec{l}=(1,2,2)$ 方向的方向导数.

2．求曲面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 在点 $M(2,2,0)$ 处的切平面方程.

3. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^2y-xz^3=1$ 所确定，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}$.

4. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 的敛散性.

5. 将 $f(x)=|x|$，$|x|\le\pi$ 展开成 Fourier 的级数.

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-2x^2}$ 在 $x_0=0$ 处展开为幂级数.

7．设 L 是从点 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 的直线段，计算曲线积分 $\int_L (x+y)ds$.

8. 设 $z=xf(xy,\dfrac{x}{y})$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

9. 计算 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$.

10. 设有一物体由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$ 所围成，已知它在任意的点 $\left(x,y,z\right)$ 处的密度 $\rho=z$，求此物体的质量 m .

11. 计算曲线积分 $\int_{AB}(e^x\sin y+y+1)dx+(e^x\cos y-x)dy$，其中 AB 为曲线 $y=-\sqrt{-x^2+8x-7}$ 从 $A(7,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一段弧.

12. 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}x\cos^2(1+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\sin^2(1+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+4(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

13.（学习高数Ⅰ者做（1），学习高数Ⅱ者做（2））

（1） 求函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}$ 的和函数，证明：对 $\forall\delta>0$，级数在区间 $[\delta,+\infty)(\delta>0)$ 一致收敛，但在其收敛域内不一致收敛.

（2） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

14. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 的连续性、可导性、可微性.

15. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{1}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D 是 $x^2+y^2\leq 1$，求 $f(x,y)$.

16. 设对任意的分片光滑有向封闭曲面 S，都有：

$$\oiint\limits_S (y+1)f'(x)dy\Lambda dz+(y-y^2)f(x)dz\Lambda dx+[zyf'(x)-2ze^x]dx\Lambda dy=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续的二阶导数，求 $f(x)$.

17. 证明：$\oint\limits_L [xf(y)+x^2]dy-[\dfrac{y}{f(x)}+2y^2]dx\geq 2\pi+6a\pi$，其中 L 为圆周曲线 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$，$(a>0)$ 的正向，$f(x)$ 连续取正值.

2012 年高数下期末试题

一、计算题

1．求曲线 $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,\tan\frac{t}{2})$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切线方程.

2．求曲面 $z-e^{z}+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程.

3. 设 f 是连续函数, 交换下列积分次序 $\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^{2}}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

4. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\sqrt{n}$ 的敛散性.

5. 将 $f(x)=\begin{cases} x+\frac{\pi}{2} & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ 展开为以 2π 为周期的正弦级数.

6. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$，$(a>0)$，计算线积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$.

7. 已知 $z=f(2x-y, y\sin x)$，$f(u,v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8. 计算 $\iint\limits_D \sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $x=0, y=\frac{\pi}{2}, y=\pi$ 及 $x=y^2$ 所围的平面区域.

9. 设有一物体, 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成, 已知它在任意点 (x,y,z) 处的密度 $\mu=z$, 求此物体的质量.

10. 计算曲线积分 $\int_L e^x[\cos y\mathrm{d}x+(y-\sin y)\mathrm{d}y]$, 其中 L 是 $y=\sin x$ 从 $A(0,0)$ 到点 $B(\pi,0)$ 的弧段.

11. 计算第二型面积分 $\iint_\Sigma xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+(z+1)dx\wedge dy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 xoy 平面上方部分, 方向取上侧.

12. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛域及和函数.

13.（学习高数Ⅰ者做（1），学习高数Ⅱ者做（2））

（1）证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}2^{-nx}$，在区间 $[\delta,+\infty](\delta>0)$ 一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

（2）将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+3x-2}$ 在 $x_0=2$ 处展开为幂级数.

14.　计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$，其中曲面 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上介于平面 $z=1$ 于 $z=2$ 之间的部分.

[redacted]数 $u=x+y+z$，在条件 $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0\ (a>0)$ 下的最小值，并证明：

若 Σ 为[redacted] $x^2+y^2+z^2=2ax+2ay+2az-2a^2$，$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)^3\mathrm{d}S\geq 108\pi a^5$.

2011 年高数上期末试题

一、填空题

1. 曲线 $x=t^3, y=2t, z=t$ 上相应于 $y=2$ 的点处的切线方程是________________.

2. $u=z\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为_____________.

3. 第一型曲线积分 $\oint\limits_{x^2+y^2=1} x^2 ds=$__________________.

4. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$ 的收敛半径 $R=$______.

5. 设函数 $u=e^{xyz}+\int_0^{xy}t\sin t dt$，则 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)=$_______________________.

二、单选题

1. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某个二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，则常数 a,b 分别是(　　)

A. −2 和 2　　B. 2 和−2　　C. −3 和 3　　D. 3 和−3

2. 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ 可写成(　　)

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　D. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

3. 对于常数 $k>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan(\dfrac{1}{n}+\dfrac{k}{n^2})$ (　　)

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 收敛性与 k 取值有关

4. 设 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\dfrac{dxdy}{1+\cos^2 x+\sin^2 y}$，则 I 满足(　　)

A. $\dfrac{2}{3}\le I\le 2$　　B. $2\le I\le 3$　　C. $0\le I\le\dfrac{1}{2}$　　D. $-1\le I\le 0$

5. 设 $L: x^2+y^2=R^2$，其方向为正，则 $\oint_L -yx^2dx+xy^2dy=$(　　)

A. $-\dfrac{\pi}{2}R^4$　　B. 0　　C. $\dfrac{\pi}{2}R^4$　　D. $\dfrac{2\pi}{3}R^3$

三、计算题

1. 设 $z = f(e^x \sin y, y)$， f 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 计算二次积分 $\int_0^1 dy \int_{3y}^3 e^{x^2} dx$.

3. 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$ 上各点的密度等于该点到坐标原点的距离，求该球体的质量.

4. 求曲面 $xy - z^2 + 1 = 0$ 上距离原点最近的点.

[redacted]. 设 Σ 为[redacted]$y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截的部分，计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} (x+y+z)dS$.

6. 已知 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})$，试证曲线积分 $I=\int_A^B\left[x-\varphi(x)\right]\dfrac{y}{x}dx+\varphi(x)dy$ 在右半平面 $(x>0)$ 内与路径无关，并求当 A,B 两点分别为 $(1,0)$ 和 (π,π) 时该积分的值.

7. 函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？偏导数是否存在？是否可微？请说明理由.

8. [redacted]曲面 Σ 是[redacted] $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与两球面 $x^2+y^2+z^2=1$， $x^2+y^2+z^2=2$ 所围立体表面的外侧，计算 $\iint\limits_{\Sigma}$ [redacted] $dz+\left[y^3+f(xy)\right]dz\wedge dx+z^3dx\wedge dy$，其中 $f(u)$ 是连续可微的奇函数.

9. 将函数 $f(x)=|x|,|x|\le\pi$ 展开成傅里叶级数.

10. 将函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x+4}{2x^2-5x-3}$ 在 $x=1$ 处展开成 $x-1$ 的幂级数并指出收敛域.

11．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛域及和函数.

12．设 $a>0,b>0$ 为常数，$f(t)$ 是连续函数，且 $f(t)\neq 0$，证明：

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{(b+1)f(\frac{x}{a})+(a-1)f(\frac{x}{a})}{f(\frac{x}{a})+f(\frac{y}{b})}dxdy=\frac{\pi}{2}ab(a+b)$$

2010 年高数上期末试题

一、填空题

1. 若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在 $(1,-1)$ 处取得极值，则常数 $a=$________.

2. 曲线 $x=t^2, y=t^3, z=t^{2/3}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的一个切向量与 oz 轴正向成钝角. 则它与 ox 轴正向夹角的余弦 $\cos\alpha=$____________.

3. 交换二次积分的积分次序（其中 $f(x,y)$ 连续）：$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f\,\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f\,\mathrm{d}y=$______________.

4. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=4$，则 $\oint_L 2y^2\,\mathrm{d}s=$____________.

二、单选题

1. 二阶常系数线性非齐次微分方程 $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\cos 2x$ 的特解 y^* 的形式为（　　）

A. $a\mathrm{e}^x\cos 2x$　　B. $a\mathrm{e}^x\sin 2x$　　C. $\mathrm{e}^x x(a\cos 2x+b\sin 2x)$　　D. $ax\mathrm{e}^x\cos 2x$

2. 设曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外法线的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=$（　　）

A. πR^3　　B. $2\pi R^3$　　C. $3\pi R^3$　　D. $4\pi R^3$

3. 设 $f(u)$ 是连续函数，平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$，则 $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=$（　　）

A. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$　　D. $\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$

4. 过曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{5}$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面在各坐标轴上的截距之和为（　　）

A. $x_0+y_0+z_0$　　B. 5　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}+\frac{1}{\sqrt{y_0}}+\frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$

5. 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处下列结论不一定成立的是（　　）

A. 连续　　B. 偏导数存在　　C. 偏导数连续　　D. 曲面 $z=f(x,y)$ 的切平面存在

6. 设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$（　　）

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 收敛性与 a 取值有关

三、计算题

1．设 $z=f(\frac{x}{y},x^2+y)$，其中 f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

2．在圆锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h\,(R>0,h>0)$ 所围的锥体内作一个底面平行 xoy 平面的长方体，求此长方体体积的最大值.

3．设力场 $\vec{F}=\{\phi(y)\cos x-\pi y,\phi'(y)\sin x-\pi\}$，其中 $\varphi(y)$ 具有一阶连续的导数，$A(\pi,2),B(3\pi,4)$ 为力场中的两点． $AmB\,(\pi\le x\le 3\pi)$ 是力场中位于直线段 $\overline{AB}$ 下方的一条光滑曲线段，且 AmB 与 $\overline{AB}$ 所围成的平面区域 D 的面积为 2，质点 M 在场力 $\vec{F}$ 的作用下由点 A 沿 AmB 移动到点 B，求场力 $\vec{F}$ 所作的功.

4．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\;(0\le z\le 1)$ 的下侧.

5. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数，并满足 $\oint_L [\mathrm{e}^x - f'(x)]y\,\mathrm{d}x + f'(x)\,\mathrm{d}y = 0$，其中 L 为 xoy 平面上任意一条逐段光滑的封闭曲线，求 $f(x)$.

6.（学习高数Ⅰ者做（1)，学习高数Ⅱ者做（2））

（1）讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-nx}$ 在 $\left[\delta,+\infty\right)(\delta>0)$ 上的一致收敛性并求和.

（2）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0\le x\le 1\\ 2 & , \quad 1<x<2\end{cases}$ 在 $[0,2]$ 上将 $f(x)$ 展成以 4 为周期的正弦级数，并指出级数在 $x=5$ 处的值.

8. 计算 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$, 其中 L 是圆 $x^2+y^2=1$ 的一周, 方向为逆时针.

本试题集由彭康学导团制作，所有题目均改编自往年真题，鉴于教材改版和内容调整，已对部分题目进行了删减和修改。本试题集的编制及发放属于公益服务活动，如有打印店以此盈利，请勿购买。未经允许，请勿复印转载。

彭康学导团 QQ 学习群：647383944

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描下方二维码关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。