第一章 傅里叶分析与采样信号

郑南宁 教 授

本章主要内容

- 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示
- 非周期连续时间信号的傅里叶变换（FT）
- 卷积与相关
- 连续时间信号的采样
- 采样信号的频域表示-离散时间傅里叶变换（DTFT）
- 连续时间信号的采样和重建—采样定理

1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示

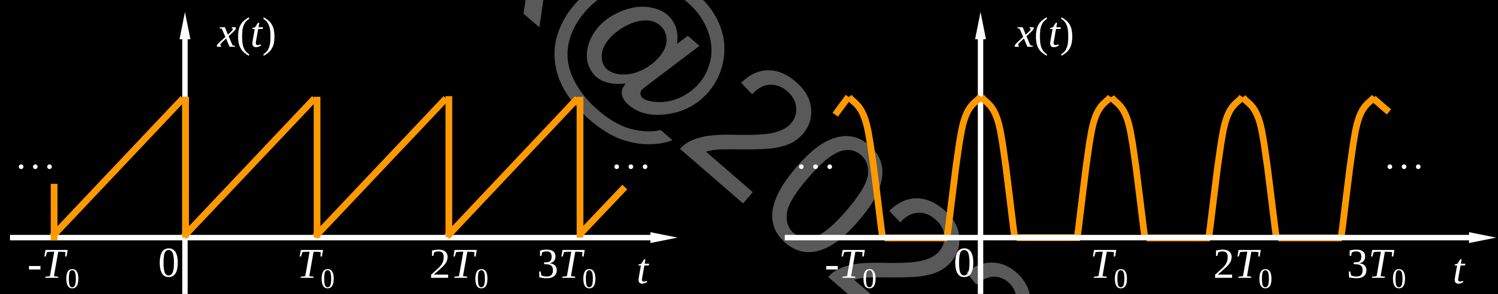
连续时间周期信号

定义：若一个连续时间信号$x(t)$是周期的，那么对于一切 t，存在某个正值T，有

$$x(t) = x(t+T)$$

使上式成立的最小正值 T 称为$x(t)$的基本周期T_0，信号$x(t)$以周期 T_0周而复始地重复再现，其表达式

$$x(t) = x(t+T_0) = x(t+2T_0) = \cdots = x(t+nT_0) \qquad t \in (-\infty, \infty)$$



(a) 锯齿波　　(b) 半波整流

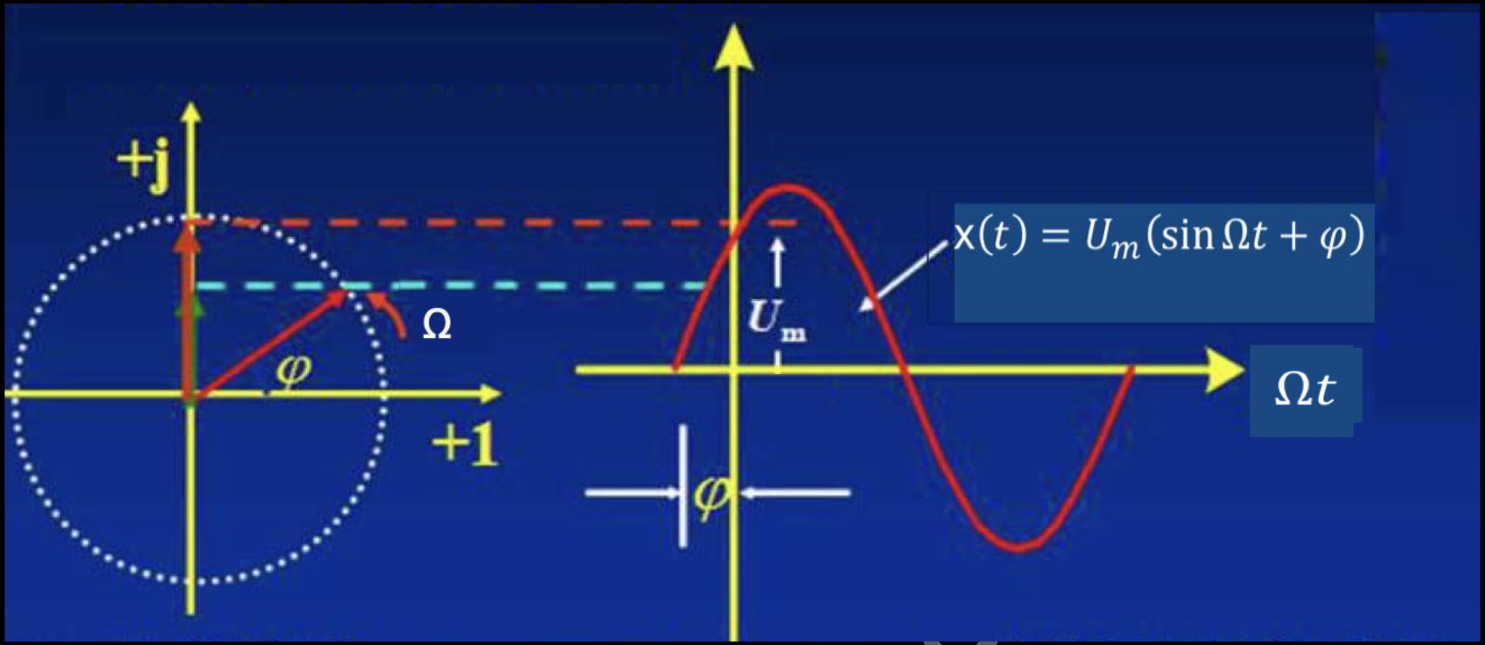
性质：周期分别为T_1和T_2的两个周期信号线性叠加后，是否仍是周期信号，取决于T_1和 T_2之间是否有最小公倍数。若存在最小公倍数，则周期 T_0为

$$T_0 = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

$$T_1/T_2 = n_2/n_1 = \text{有理数}，n_1, n_2\text{为整数}$$

1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示

连续时间周期信号的频率、角频率和周期



频率 （frequency ）$f_o = \frac{1}{T_o}$： 每秒变化的次数（单位：赫兹 Hz）

角频率 （angular frequency） $\Omega = 2\pi f_o$ （$\frac{2\pi}{T_o}$）：每秒变化的弧度（单位：rad/s）

1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示

傅里叶级数的本质

"任何周期信号都可以用一组成谐波关系的正弦信号的加权和来表示"

1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示

- 任一连续时间信号在一定约束条件下可用级数形式表示

1、**三角函数型傅里叶级数**

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega_0 t+b_n\sin n\Omega_0 t)$$ 基波频率 $\Omega_0=2\pi/T_0$

其中，傅里叶系数为 $$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\cos n\Omega_0 t\,dt \quad n=0,1,2\ldots$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\sin n\Omega_0 t\,dt \quad n=1,2\ldots$$

2、**指数型傅里叶级数（讨论）**

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\Omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\Omega_0)e^{jn\Omega_0 t}$$ 形式简单，易于频域分析

其中，傅里叶系数为 $$c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=X(n\Omega_0)$$

1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示

连续时间周期信号展开为FS应满足的条件

狄利克雷（Dirichlet）条件

将周期为T_0的周期信号$x(t)$分解成傅里叶级数形式，$x(t)$ 必须在任一区间$[t, t+T_0]$内，满足狄利克雷（Dirichlet）条件，即

1、在一个周期内信号绝对可积，即

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|\mathrm{d}t < \infty$$

2、在一个周期内只有有限个不连续点，且这些点处的函数值必须是有限值；

3、在一个周期内只有有限个最大值和最小值。

条件1是充分条件但不是必要条件，且任一有界的周期信号都能满足这一条件；
条件2、3是必要条件但不是充分条件

1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示

连续时间周期信号的频域分析

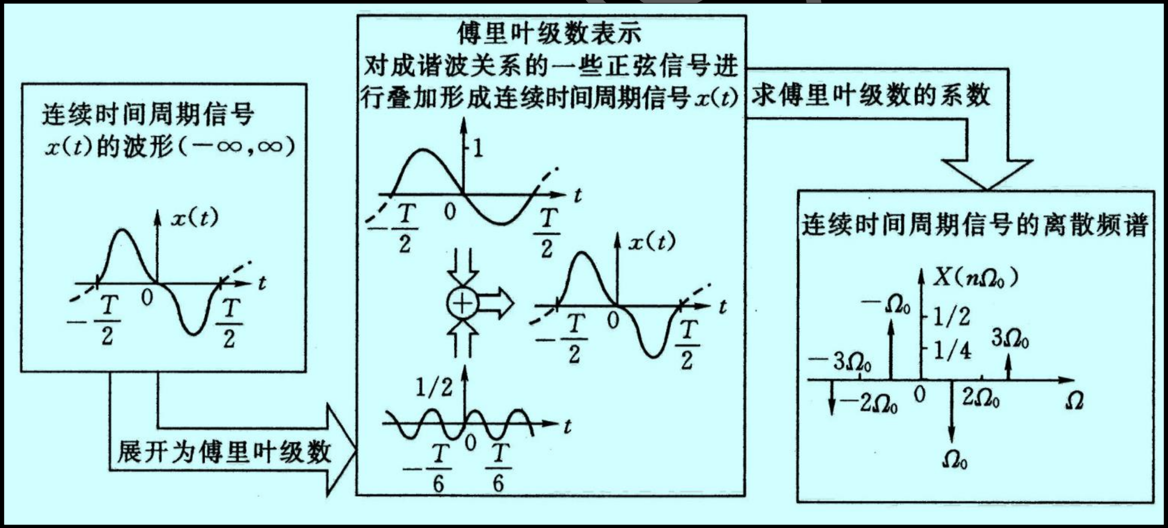
用频率函数来表征任意周期信号的方法称为周期信号的频域分析

任意波形的周期信号$x(t)$都可以用反映信号频率特性的频谱$X(n\Omega_0)$来描述，而$X(n\Omega_0)$是离散频率$n\Omega_0$的复函数，则$x(t)$与$X(n\Omega_0)$之间存在着一 一对应的关系，即

$$x(t) \Leftrightarrow X(n\Omega_0) = |X(n\Omega_0)|e^{j\theta(n\Omega_0)}$$

其中：$|X(n\Omega_0)|$是幅频特性，$\theta(n\Omega_0)$是相频特性

信号的频谱与时域波形的关系



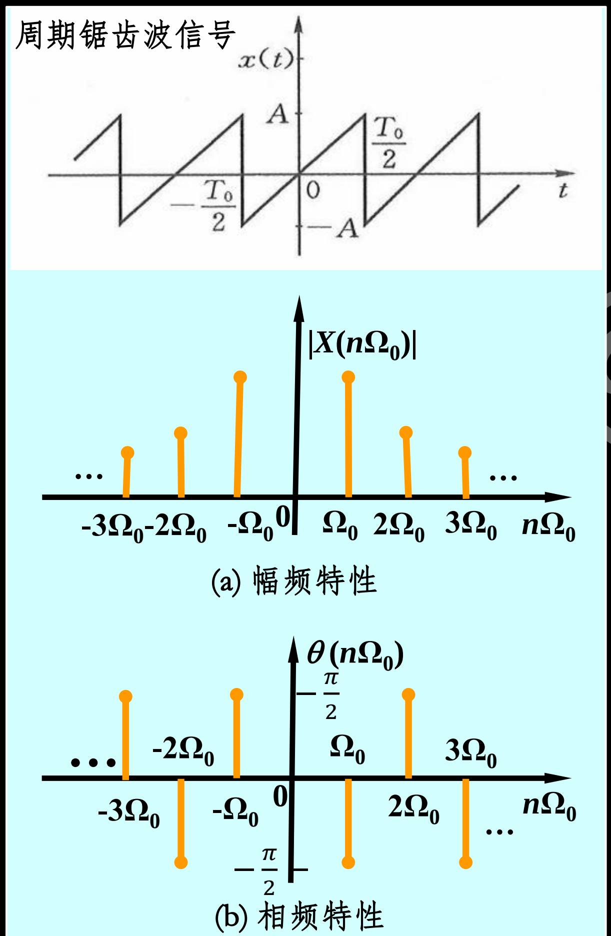
① 频率高低对应波形变化的快慢—时域波形变化越剧烈，则频谱中高频分量多；时域波形变化慢，则频谱中高频成分少

② 谐波幅度的大小反映了时域波形取值的大小

③ 相位的变化对应波形在时域出现的不同时刻

1.1 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示

■ 连续时间周期信号频谱的特点



连续时间周期信号的离散频谱

1. **离散性**
   频谱是由离散的非周期性谱线组成，每根谱线代表一个谐波分量
2. **谐波性**
   频谱的谱线只在基波频率的整数倍处出现
3. **收敛性**
   频谱中各谱线的幅度随着谐波次数增加而逐渐衰减

1.2 非周期连续时间信号的傅里叶变换（FT）

（从傅里叶级数到傅里叶变换）

1.2.1 非周期信号的傅里叶表示

- 实际工程中的大量信号是非周期、能量有限
- 在数学上，任何周期信号可以看作非周期信号的周期延拓而形成。而非周期信号可看成是周期信号的周期趋于无穷大的极限情况

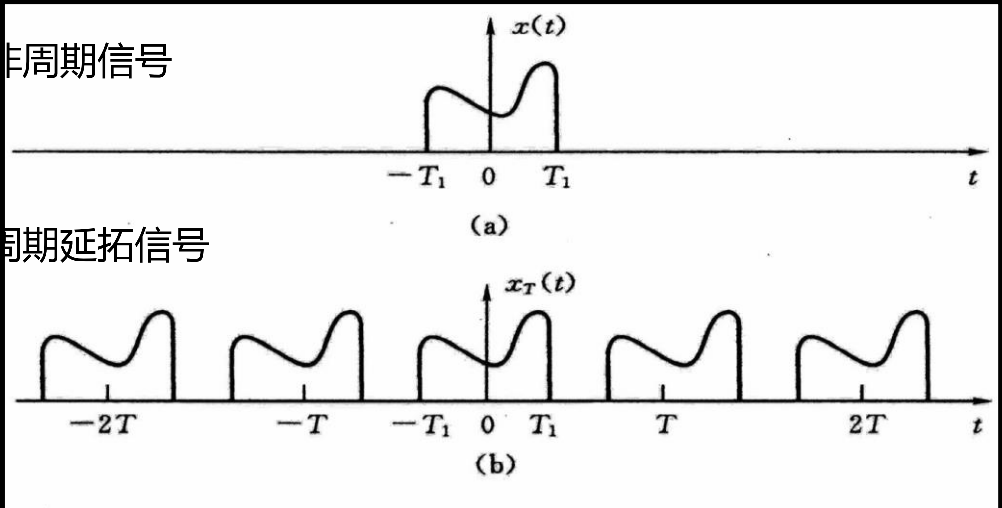


图 1.5 非周期信号 $x(t)$ 与其周期延拓信号 $x_T(t)$

非周期信号和周期信号的关系

$$\begin{cases} x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+nT) \\ x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t) \end{cases}$$

(推导)

1.2 非周期连续时间信号的傅里叶变换（FT）

1.2.2 从傅里叶级数（FS）导出非周期信号的傅里叶变换（FT）

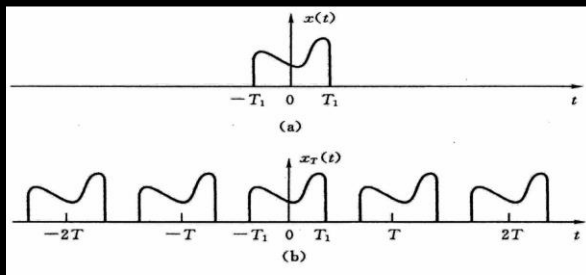


图 1.5 非周期信号 $x(t)$ 与其周期延拓信号 $x_T(t)$

周期信号与非周期信号的关系

$$x(t)=\lim_{T\to\infty}x_T(t)$$

周期信号的傅里叶级数

$$x_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\Omega_0)e^{\mathrm{j}n\Omega_0 t}$$

$X(n\Omega_0)$ 代入 $x_T(t)$

傅里叶级数的系数

$$X(n\Omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_T(t)e^{-\mathrm{j}n\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$

$$x_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_T(t)e^{-\mathrm{j}n\Omega_0 t}\mathrm{d}t\right]e^{\mathrm{j}n\Omega_0 t}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Omega_0}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}x_T(t)e^{-\mathrm{j}n\Omega_0 t}\mathrm{d}t\right]e^{\mathrm{j}n\Omega_0 t}$$

对上式的 T 取极限 (当$T\to\infty$时，$\Omega_0=\frac{T}{2\pi}=\mathrm{d}\Omega$，相邻谱线间隔趋于无限小，$\Omega_0\to\mathrm{d}\Omega$ 变成频率的连续变量，离散变量 $n\Omega_0\to\Omega$，由此，得到

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\underline{\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}dt}\right]e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

方括号部分即为连续时间非周期信号的傅里叶变换

$$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

举例：非周期矩形脉冲信号的频谱分析（讨论）

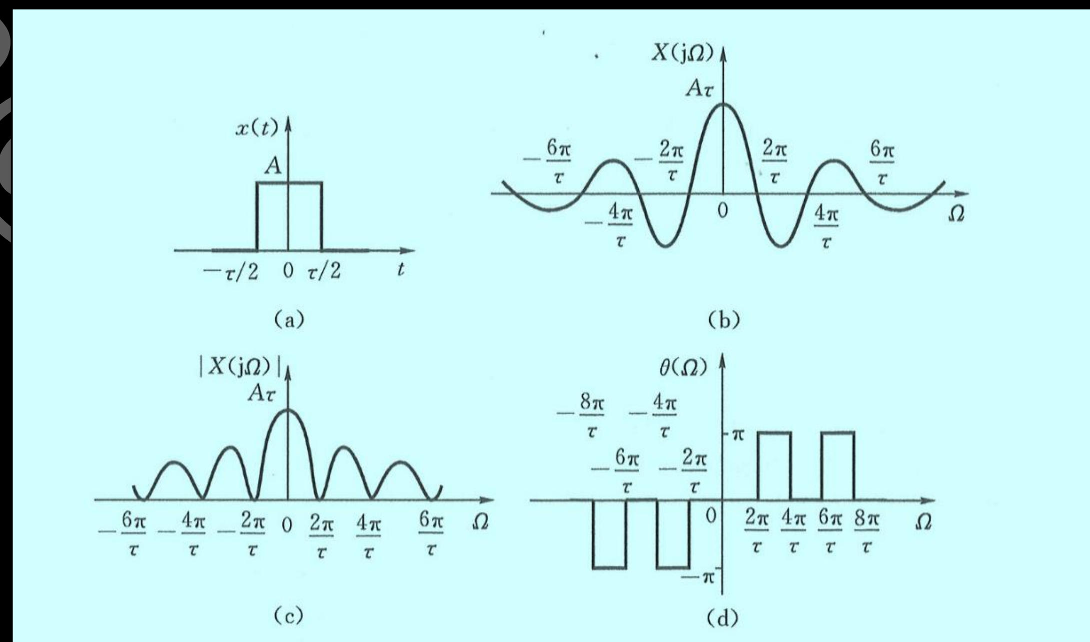
$$x(t)=\begin{cases}A, & -\dfrac{\tau}{2}\le t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

傅里叶变换为

$$X(\mathrm{j}\Omega)=A\tau\frac{\sin\left(\dfrac{\Omega\tau}{2}\right)}{\left(\dfrac{\Omega\tau}{2}\right)}$$

注意：在$X(\mathrm{j}\Omega)$的表达式保留了相消的因子τ，是为了给出$\frac{\sin(x)}{x}$形式，这种形式函数在傅里叶分析和线性时不变系统的研究中经常出现，称为sinc函数

非周期矩形信号的连续频谱



1.2 非周期连续时间信号的傅里叶变换（FT）

1.2.3 连续时间非周期信号的傅里叶变换对表示的一般形式

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

以上的变换对可表示为

$$X(j\Omega)=\mathcal{F}[x(t)],\quad x(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(j\Omega)]$$

或用符号记作 $x(t)\Leftrightarrow X(\mathrm{j}\Omega)$

$X(\mathrm{j}\Omega)$是一个复函数，可写成如下形式

$$X(\mathrm{j}\Omega)=\mathrm{Re}[X(j\Omega)]+\mathrm{j}\ \mathrm{Im}[X(j\Omega)]$$

实部　　虚部

$\mathrm{e}^{j\Omega t}=\cos(\Omega t)+j\sin(\Omega t)$

当$x(t)$为实函数时，则有

$$\mathrm{Re}[X(\mathrm{j}\Omega)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos(\Omega t)\,dt\quad,\quad \mathrm{Im}[X(\mathrm{j}\Omega)]=-\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin(\Omega t)\,dt$$

上式重写

$$\mathrm{Re}[X(\mathrm{j}\Omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\Omega t)\,dt \;,\quad \mathrm{Im}[X(\mathrm{j}\Omega)] = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\Omega t)\,dt$$

因此，**Re**$[X(\mathrm{j}\Omega)]$ 为Ω的偶函数， **Im**$[X(\mathrm{j}\Omega)]$ 为Ω的奇函数，即

$$\mathrm{Re}[X(\mathrm{j}\Omega)] = \mathrm{Re}[X(-\mathrm{j}\Omega)],\quad \mathrm{Im}[X(\mathrm{j}\Omega)] = -\mathrm{Im}[X(-\mathrm{j}\Omega)],\quad X^*(\mathrm{j}\Omega)=X(-\mathrm{j}\Omega)$$

也可以用幅度频谱和相位频谱表示$X(\mathrm{j}\Omega)$，即

$$X(\mathrm{j}\Omega) = |X(\mathrm{j}\Omega)|e^{\mathrm{j}\theta(\Omega)}$$

幅度频谱

$$|X(\mathrm{j}\Omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2|X(j\Omega)| + \mathrm{Im}^2|X(j\Omega)|}$$

相位频谱

$$\theta(\Omega) = \arctan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[X(\mathrm{j}\Omega)]}{\mathrm{Re}[X(\mathrm{j}\Omega)]}$$

$X(n\Omega_0)$与$X(\mathrm{j}\Omega)$之间的关系

$$X(n\Omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-\mathrm{j}n\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$

当$|t| < T/2$时，$x_T(t)=x(t)$，其他时间区间$x(t)=0$，故$X(n\Omega_0)$表达式可改写为

$$X(n\Omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathrm{j}n\Omega_0 t}\mathrm{d}t$$

比较

$$X(\mathrm{j}\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$X(n\Omega_0) = \frac{1}{T}X(\mathrm{j}\Omega)\big|_{\Omega=n\Omega_0}$$

周期信号$x_T(t)$的傅里叶系数$X(n\Omega_0)$正比于一个周期内$x_T(t)$信号的傅里叶变换$X(\mathrm{j}\Omega)$的样本

1.2 非周期连续时间信号的傅里叶变换（FT）

1.2.4 周期信号FS与非周期信号FT的区别

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\mathrm{j}n\Omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(n\Omega_0)e^{\mathrm{j}n\Omega_0 t}$$

$$c_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-\mathrm{j}n\Omega_0 t}\mathrm{d}t=X(n\Omega_0)$$

$$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

连续时间周期信号$x(t)$的FS

↓

时域函数$x(t)$的周期性造成其频谱的离散性和谐波性

↓

连续时间非周期信号$x(t)$的FT

↓

时域函数$x(t)$的非周期性造成其频谱不具有离散性和谐波性

↓

时域函数的连续性带来了其频域函数的非周期性

以上讨论可以清楚地看到，傅里叶变换的基本概念就是通过无始无终的正弦（或指数）信号来表示任意连续时间信号

1.3 连续时间傅里叶变换的性质

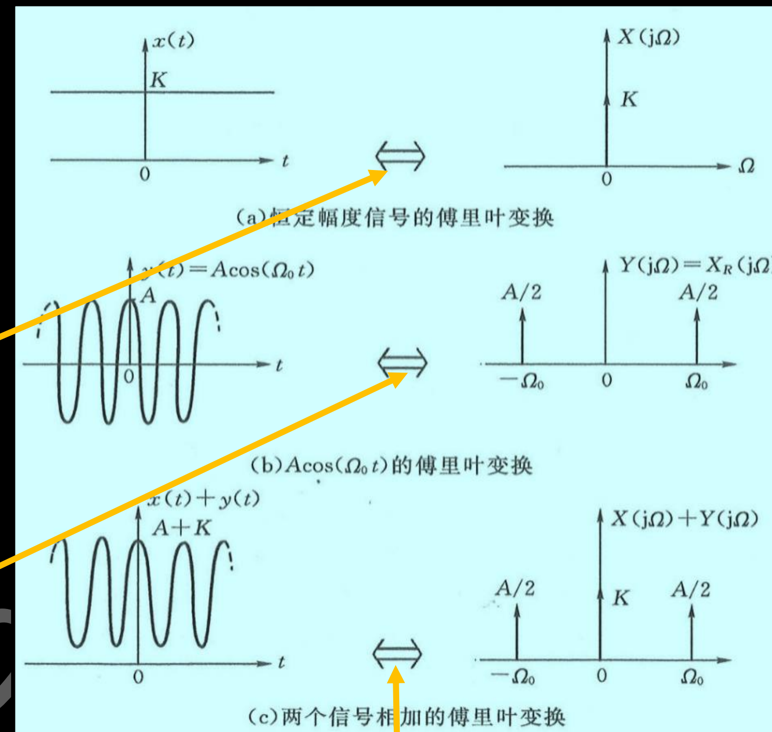
1.3.1 线性性质

若有 $x(t) \Leftrightarrow X(j\Omega)$

$y(t) \Leftrightarrow Y(j\Omega)$

则对任意常数a_1和a_2，有傅里叶变换对

$$a_1 x(t) + a_2 y(t) \Leftrightarrow a_1 X(\mathrm{j}\Omega) + a_2 Y(\mathrm{j}\Omega)$$



举例 考虑x(t)和y(t)有如下傅里叶变换

$$x(t) = K \Leftrightarrow X(\mathrm{j}\Omega) = K\delta(\Omega)$$

$$y(t) = A\cos(\Omega_0 t) \Leftrightarrow Y(\mathrm{j}\Omega) = \frac{A}{2}\delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{A}{2}\delta(\Omega + \Omega_0)$$

由线性性质，得到

$$x(t) + y(t) = K + A\cos(\Omega_0 t) \Leftrightarrow X(j\Omega) + Y(j\Omega) = K\delta(\Omega) + \frac{A}{2}\delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{A}{2}\delta(\Omega + \Omega_0)$$

1.3 连续时间傅里叶变换的性质

1.3.2 对偶性（互易性）

连续时间非周期信号的傅里叶变换对

比较

$$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

二者形式上相似，这一对称性导至傅里叶变换时-频域的对偶性。若 $x(t)$ 和 $X(\mathrm{j}\Omega)$ 是一对傅里叶变换对，则有

$$\boxed{X(\mathrm{j}t)\Leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)}$$

（讨论）

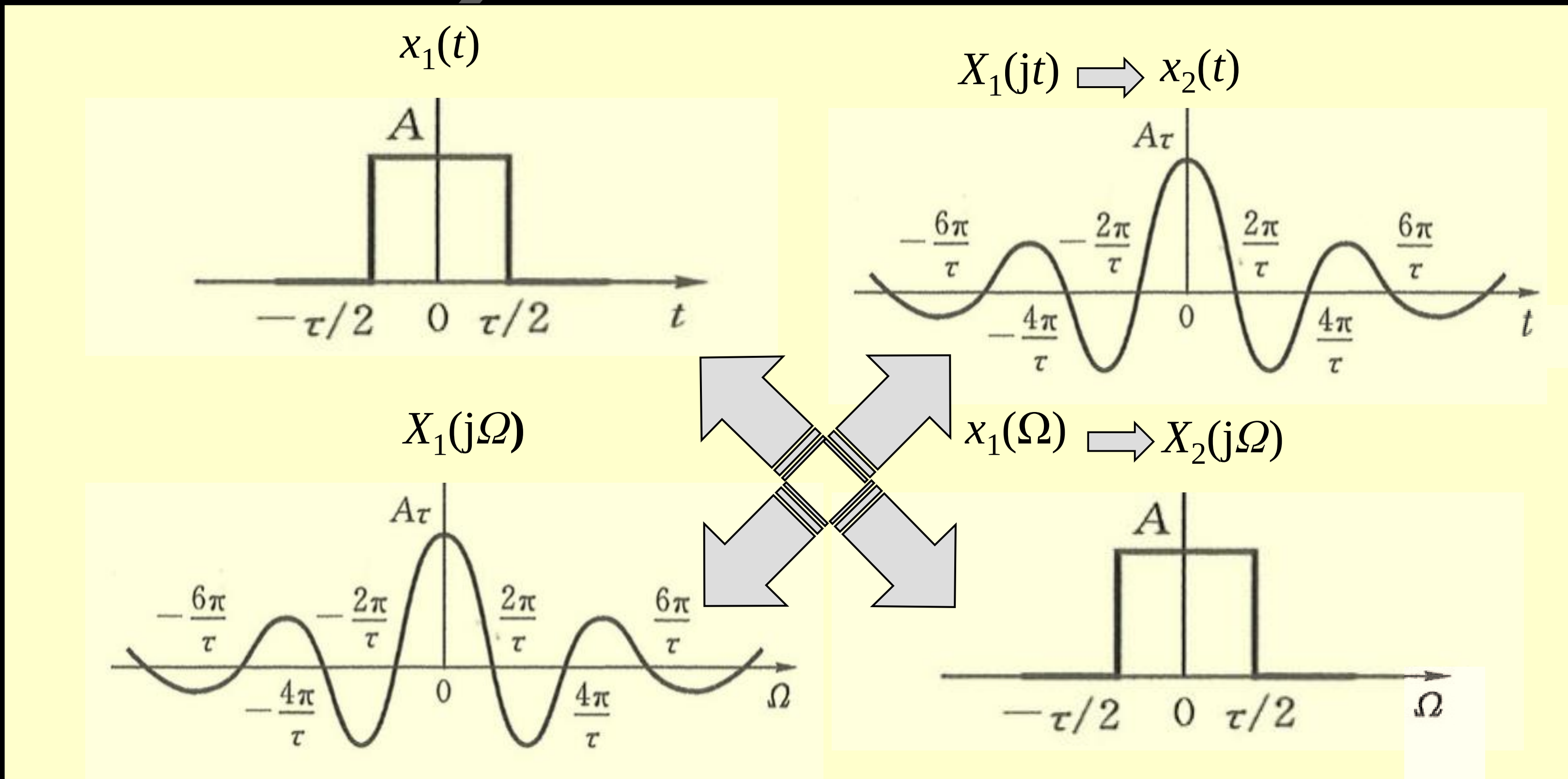
对偶性又称互易性：若 $x(t)$ 的频谱为$X(\mathrm{j}\Omega)$，那么在时域中存在一个其波形与 $X(\mathrm{j}\Omega)$ 相同的时域信号$X(\mathrm{j}t)$，而$X(\mathrm{j}t)$的频谱的波形与时域信号 $x(t)$ 的波形相似, 为$x(-\Omega)$。

若 $x(t)$ 是偶函数，有

$$\boxed{X(\mathrm{j}t)\Leftrightarrow 2\pi x(\Omega)}$$

举例：矩形脉冲函数与sinc函数的对偶性

若$x_1(t)$的频谱是$X_1(j\Omega)$，那么在时域一定存在一个波形与$X_1(j\Omega)$相同的时域信号$x_2(t)$，而$x_2(t)$的频谱$X_2(j\Omega)$的波形与时域信号$x_1(t)$的波形相似



对偶性是一个很有意义的关系：在上图的两个例子中，傅里叶变换对都是由形式为sinc函数和一个矩形脉冲函数组成，它们各自出现在时域和频域

1.3 连续时间傅里叶变换的性质

1.3.3 时间尺度变化

若$x(t)$的傅里叶变换是 $X(\mathrm{j}\Omega)$，则 $x(kt)$ 的傅里叶变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(kt)\, e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

k 是非零实常数， 令$kt = t'$，将 $t = \frac{t'}{k}$代入

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\, e^{-j\Omega \frac{t'}{k}}\mathrm{d}\frac{t'}{k}$$

$$= \frac{1}{|k|} X\left(\mathrm{j}\frac{\Omega}{k}\right)$$

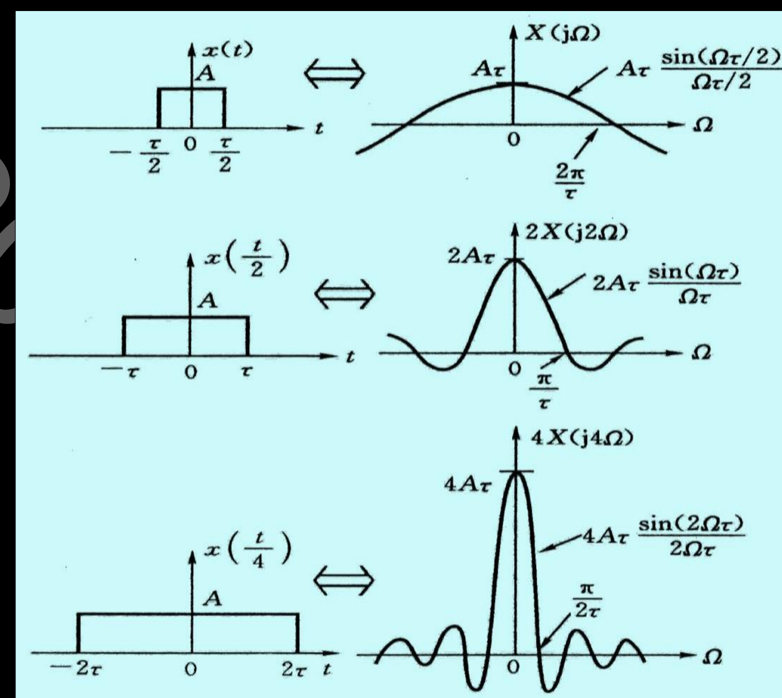
得到信号时间尺度改变的傅里叶变换对

$$\boxed{x(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\mathrm{j}\frac{\Omega}{k}\right)}$$

$k > 1$ 信号波形时间压缩，导致其频谱扩展、幅度减小

$k < 1$ 信号波形时间扩展，导致其频谱压缩、幅度增大

信号时域尺度的扩展导致其频域尺度的压缩和幅度的增大



矩形脉冲信号的时间尺度变化导致频谱变化

1.3 连续时间傅里叶变换的性质

1.3.4 频率尺度变化

若 $X(\mathrm{j}\Omega)$ 的傅里叶反变换是 $x(t)$，则 $X(\mathrm{j}k\Omega)$ 的傅里叶反变换为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}k\Omega)\, e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

k 是非零实常数， 令$k\Omega = \Omega'$， 将 $\Omega = \frac{\Omega'}{k}$ 代入

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega')\, e^{\mathrm{j}\frac{\Omega'}{k}t}\mathrm{d}\frac{\Omega'}{k}$$

$$= \frac{1}{|k|}x\left(\frac{t}{k}\right)$$

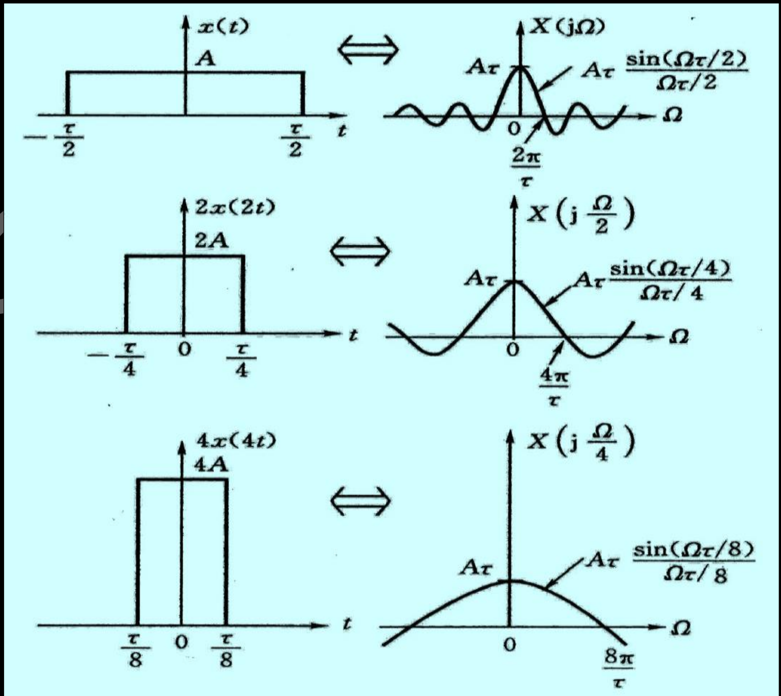
得到信号频率尺度改变的傅里叶变换对

$$\boxed{\frac{1}{|k|}x\left(\frac{t}{k}\right) \Leftrightarrow X(\mathrm{j}k\Omega)}$$

$k>1$ 频谱扩展，导致其时域信号时间尺度压缩、幅度增大

$k<1$ 频谱压缩，导致其时域信号时间尺度扩大、幅度减小

信号频域尺度的扩展导致其频域尺度的压缩和幅度的增大



矩形脉冲信号频率尺度变化导致时间信号变化

1.3 连续时间傅里叶变换的性质

1.3.5 时间移位

若$x(t)$ 的自变量 t 移位一个常量 t_0，$u = t - t_0$，则 $x(u)$ 的傅里叶变换为

$$\boxed{x(t-t_0) \Leftrightarrow X(\mathrm{j}\Omega)e^{-\mathrm{j}\Omega t_0}}$$ （频域线性相移）

对式 $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$

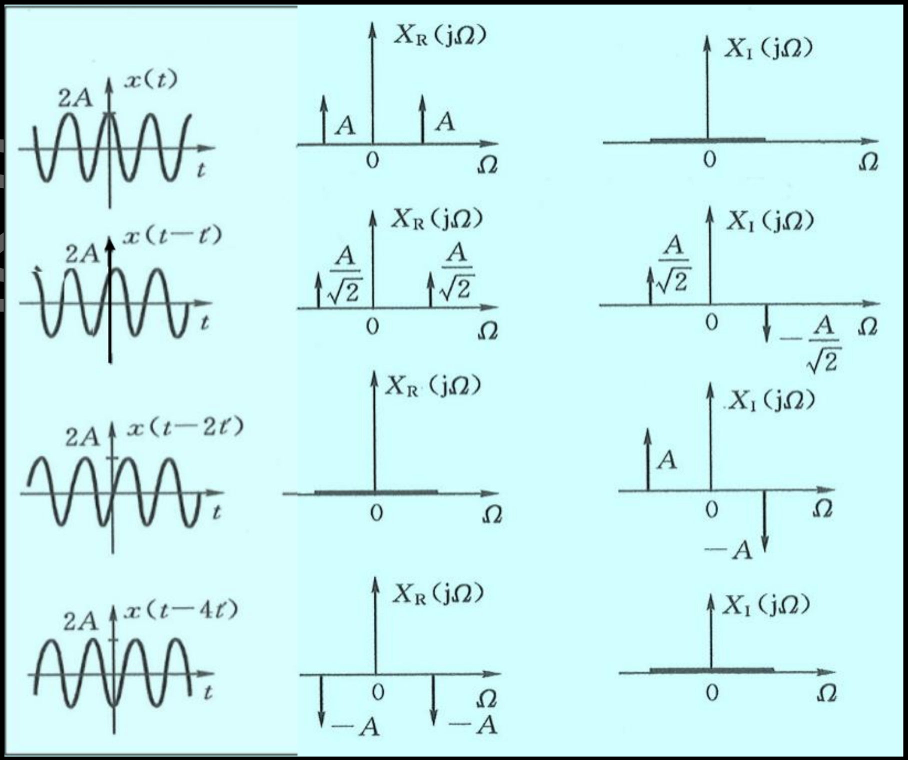
进行变量替换 $u = t - t_0$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\,e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,e^{-\mathrm{j}\Omega(u+t_0)}\mathrm{d}u$$

$$= e^{-\mathrm{j}\Omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-\mathrm{j}\Omega u}\mathrm{d}u$$

$$= e^{-\mathrm{j}\Omega t_0}\,X(\mathrm{j}\Omega)$$



时间移位在频域中产生线性相移$e^{-j\Omega t_0}$

1.3 连续时间傅里叶变换的性质

1.3.6 频率移位

若 $X(j\Omega)$ 的自变量 Ω 移位一个常量 Ω_0，则对应的傅里叶反变换$x(t)$被乘以 $e^{j\Omega_0 t}$，即

$$\boxed{x(t)e^{\mathrm{j}\Omega_0 t} \Leftrightarrow X[\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)]}$$

(调制特性)

推导：

对式 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)\, e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$

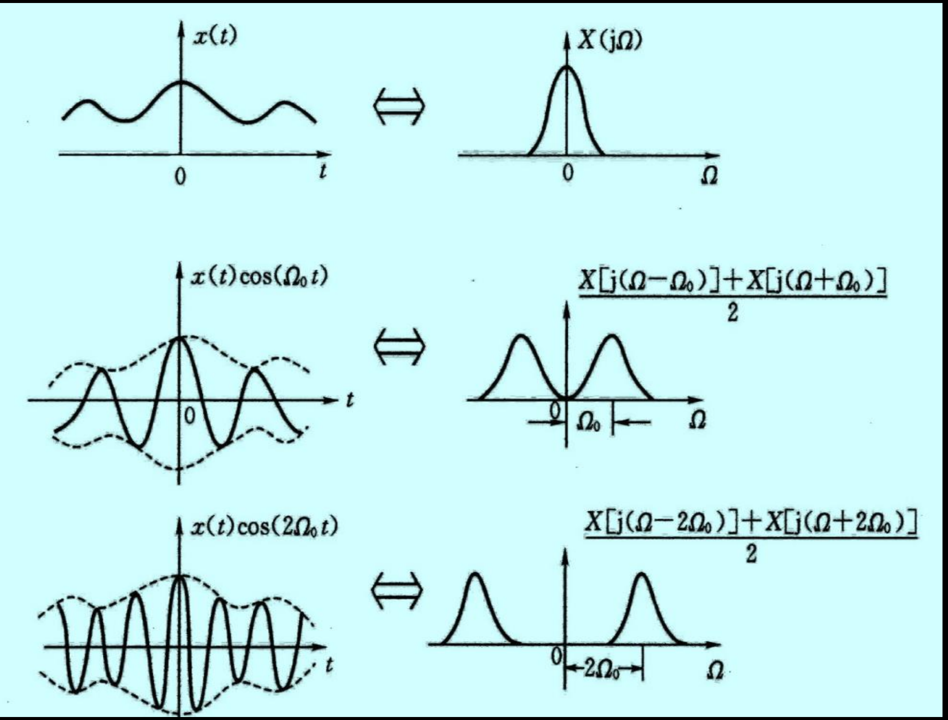
进行变量替换 $v=\Omega-\Omega_0$ ，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X[\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)]\, e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}v)\, e^{\mathrm{j}(v+\Omega_0)t}\mathrm{d}v$$

$$=e^{\mathrm{j}\Omega_0 t}\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}v)\, e^{\mathrm{j}vt}\mathrm{d}v}$$

$$=e^{j\Omega_0 t}\underline{x(t)}$$



时域信号与一个余弦函数相乘带来其频率的位移Ω_0，$x(t)$称为调制信号，余弦信号称为载波或被调信号

1.3 连续时间傅里叶变换的性质

1.3.7 微分特性

若有 $x(t) \Leftrightarrow X(\mathrm{j}\Omega)$，则

时域微分特性：$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \mathrm{j}\Omega X(\mathrm{j}\Omega)$，$\dfrac{\mathrm{d}^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (\mathrm{j}\Omega)^n X(\mathrm{j}\Omega)$

频域微分特性：$-\mathrm{j}tx(t) \Leftrightarrow \dfrac{dX(\mathrm{j}\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}$，$(-\mathrm{j}t)^n x(t) \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}^n X(\mathrm{j}\Omega)}{\mathrm{d}\Omega^n}$

1.3.8 积分特性

若有 $x(t) \Leftrightarrow X(\mathrm{j}\Omega)$，则

$x^{(-1)}(t)$表示$x(t)$的一次积分

时域积分特性：$\boxed{x^{(-1)}(t)} = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Leftrightarrow \pi X(0)\delta(\Omega) + \dfrac{1}{\mathrm{j}\Omega} X(j\Omega)$

频域积分特性：$\pi x(0)\delta(t) - \dfrac{1}{\mathrm{j}t} x(t) \Leftrightarrow X^{(-1)}(\mathrm{j}\Omega) = \int_{-\infty}^{\Omega} x(\mathrm{j}\eta)\,\mathrm{d}\eta$

(连续时间傅里叶变换的微积分性质的推导证明作为习题)

1.4 连续信号的卷积与相关

1.4.1 卷积的定义

计算$x(t)$与$h(t)$的卷积，必须求出$x(t) * h(t)$在任意时刻t的值。

卷积表达式

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

两个函数可以互为反转和移位操作的函数

$$y(t) = h(t) * x(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

首先将$x(t)$、$h(t)$的自变量 t 换为τ，得到$x(\tau)$、$h(\tau)$，右图给出计算过程的图解

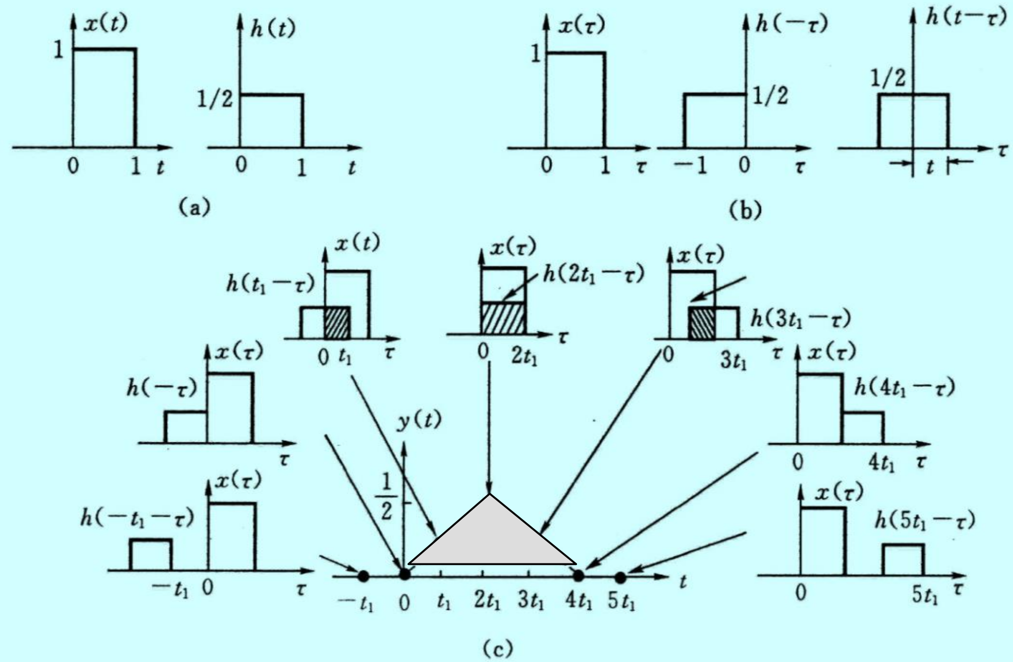
连续信号卷积的图解

(1) 反转：把 $h(\tau)$相对纵轴做镜像对称，得到 $h(-\tau)$；

(2) 移位：把 $h(-\tau)$移动一个 t 值；

(3) 相乘：将移位后的函数 $h(t-\tau)$乘以 $x(\tau)$；

(4) 积分：$h(t-\tau)$和 $x(\tau)$乘积曲线下的面积即为 t 时刻的卷积值。



卷积：一种加权求和，不仅包含当前时间的响应，也含有之前的响应

卷积的性质

- 交换律 $$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$
- 结合律 $$[x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t) = x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)]$$
- 分配率 $$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$
- 微积分性质

若$x^{(1)}(t)$、$x^{(-1)}(t)$分别表示信号$x(t)$的一阶导数和一次积分，且有

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

则有

$$y^{(1)}(t) = x_1^{(1)}(t) * x_2(t) = x_1(t) * x_2^{(1)}(t)$$

$$y^{(-1)}(t) = x_1^{(-1)}(t) * x_2(t) = x_1(t) * x_2^{(-1)}(t)$$

推广为一般形式 $$y^{(i+j)}(t) = x_1^{(i)}(t) * x_2^{(j)}(t)$$

($x^{i\text{或}j}(t)$表示$x(t)$的 i 或 j 次积分)

1.4 连续信号的卷积与相关

1.4.2 时域卷积定理

卷积公式与其傅里叶变换的关系称为**卷积定理**，即

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t) \Leftrightarrow H(\mathrm{j}\Omega)X(\mathrm{j}\Omega)}$$

时域卷积定理

上式表明，时域中的卷积对应于频域的相乘 （推导）

对 $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 两边进行傅里叶变换，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

交换上式等号右边的积分顺序，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty}\left[h(t-\tau)e^{-j\Omega t}\ \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$

（接下页）

上式重写

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-\mathrm{j}\Omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} [\, h(t-\tau) e^{-\mathrm{j}\Omega t}\ \mathrm{d}t\,] \mathrm{d}\tau$$

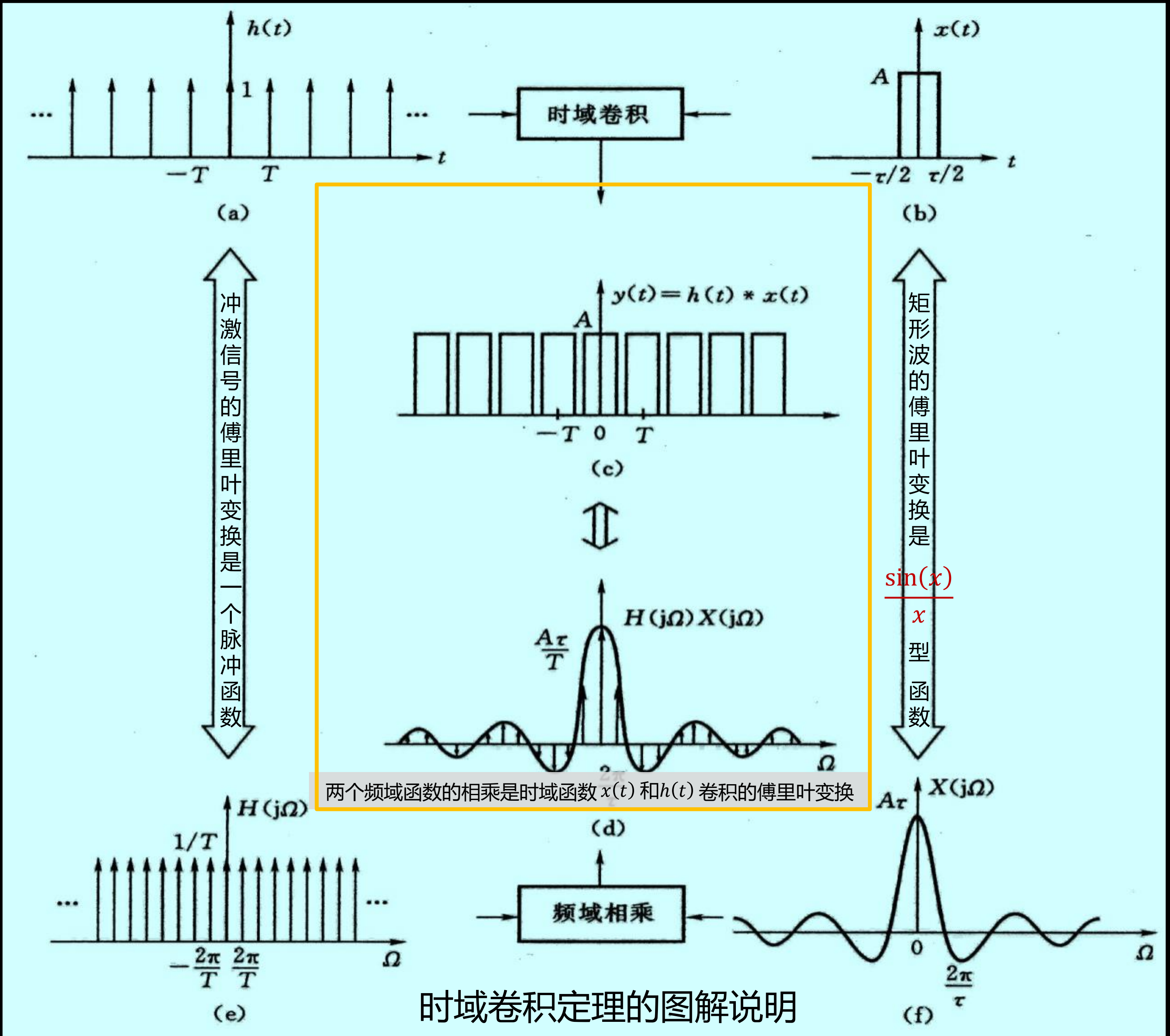
令$\alpha = t - \tau$，上式方括号中的积分项变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{-\mathrm{j}\Omega(\alpha+\tau)} \mathrm{d}\alpha = e^{-\mathrm{j}\Omega(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{-\mathrm{j}\Omega(\alpha)} \mathrm{d}\alpha = e^{-\mathrm{j}\Omega(\tau)} H(\mathrm{j}\Omega)$$

得到

$$\boxed{Y(\mathrm{j}\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-\mathrm{j}\Omega(\tau)} H(\mathrm{j}\Omega)\, \mathrm{d}\tau = H(\mathrm{j}\Omega) X(\mathrm{j}\Omega)}$$

以上证明了时域卷积对应于频域傅里叶变换的乘积



时域卷积定理的图解说明

1.4 连续信号的卷积与相关

1.4.3 频域卷积定理

频域的卷积可转换为时域上的相乘，即

$$\boxed{h(t)x(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} H(\mathrm{j}\Omega) * X(\mathrm{j}\Omega)}$$

频域卷积定理

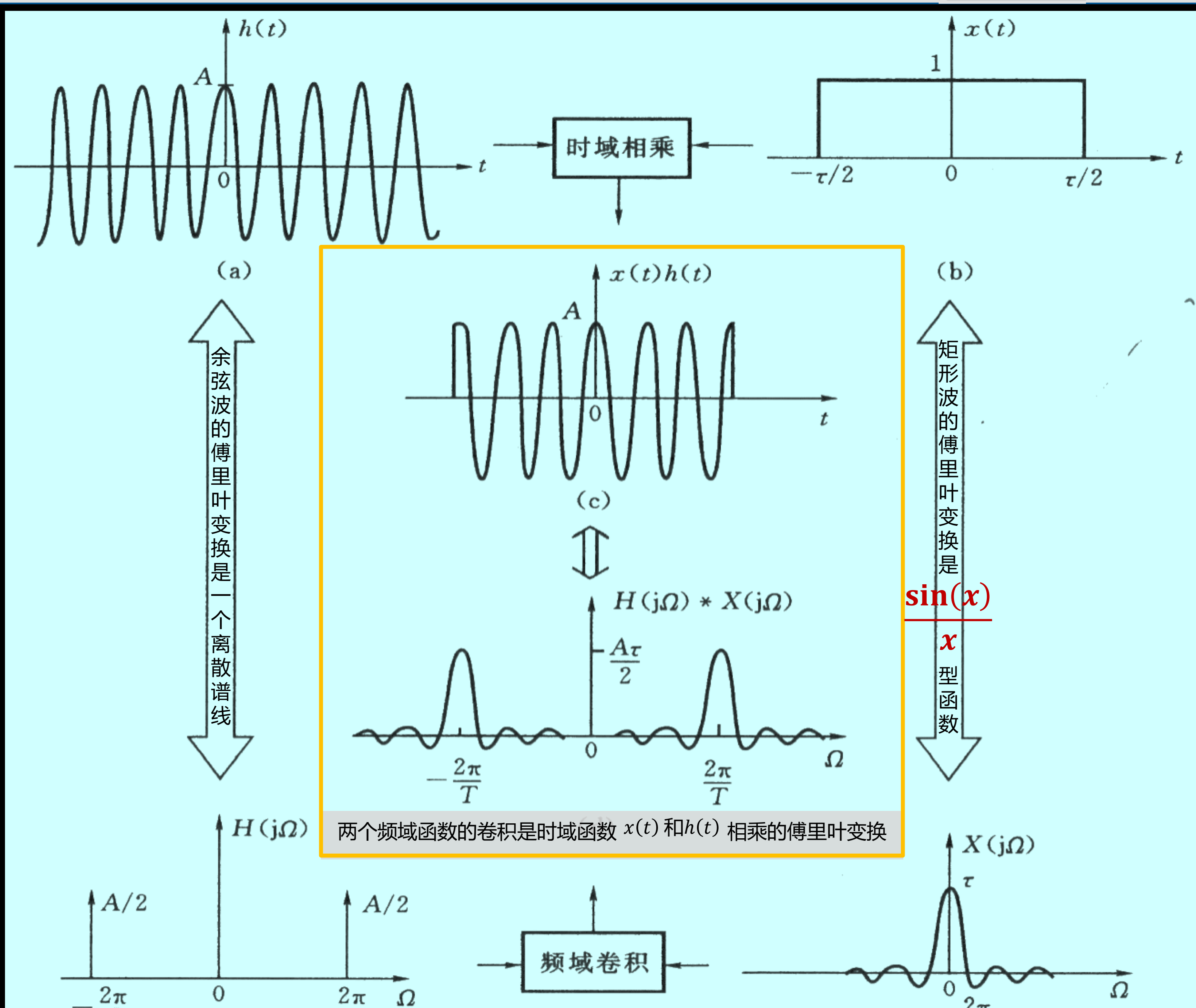
两个时域信号$h(t)$和$x(t)$ 的乘积的傅里叶变换等于这两个函数各自傅里叶变换的卷积$H(\mathrm{j}\Omega) * X(\mathrm{j}\Omega)$乘以 $\frac{1}{2\pi}$

（讨论）

与时域卷积定理

$$\boxed{h(t) * x(t) \Leftrightarrow H(\mathrm{j}\Omega)X(\mathrm{j}\Omega)}$$

比较，可看出频域域卷积与时域卷积定理之间存在着对偶关系



频域卷积定理的图解说明

1.4 连续信号的卷积与相关

1.4.4 函数的相关

- 定义

若$x(t)$、$h(t)$是能量有限的信号，则相关积分定义为

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

- 说明

1、相关函数是两个信号之间时移 τ 的函数

2、若$x(t)$和$h(t)$不是同一信号，则 $y(t)$为互相关函数

3、若$x(t)$和$h(t)$是同一信号，即 $x(t)=h(t)$，则 $y(t)$为自相关函数，且

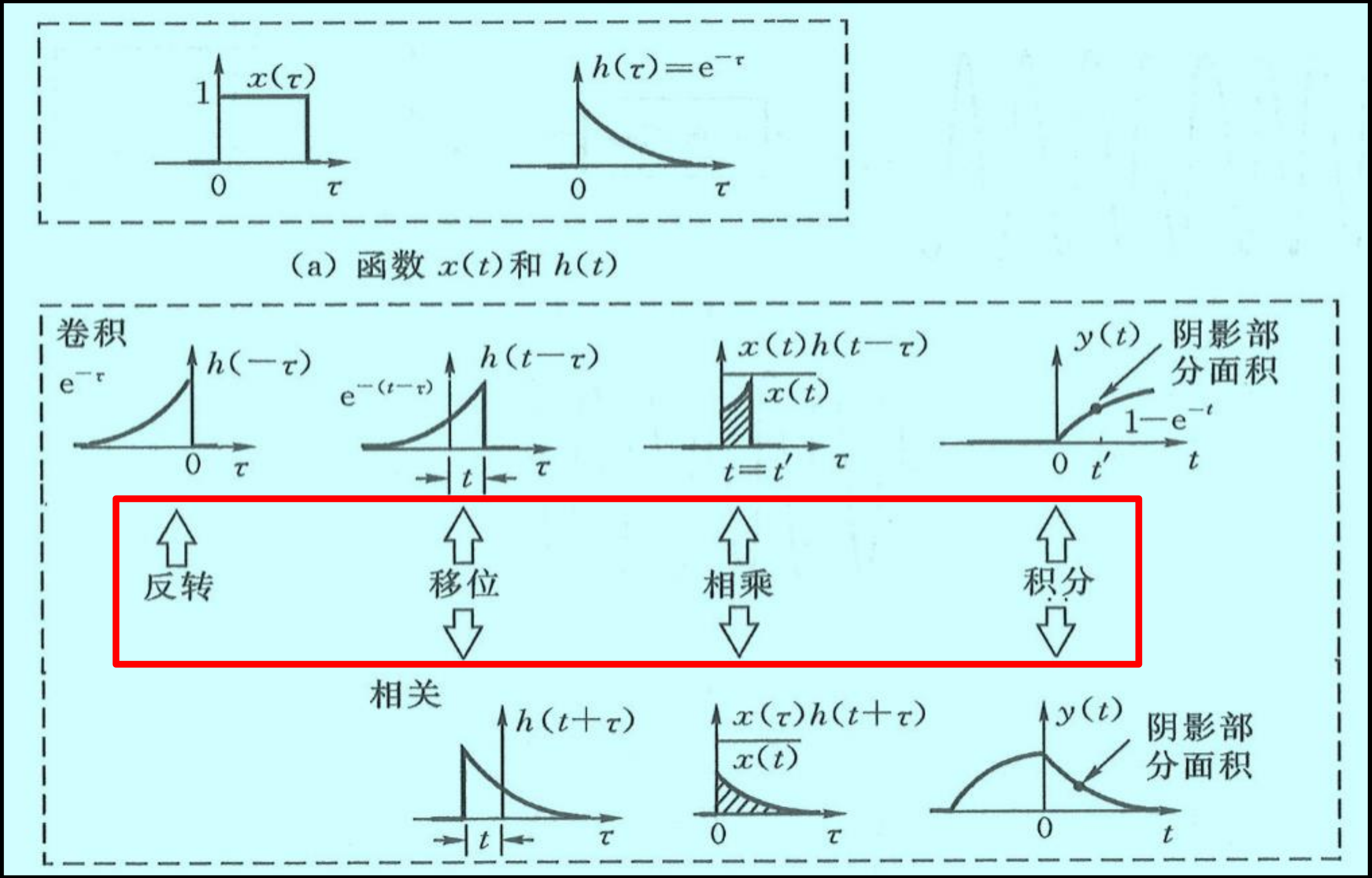
$$y(t) = R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

则实信号 $x(t)$ 的自相关函数是时移 τ 的偶函数，即

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$$

(举例)

举例：计算两个连续时间实信号的卷积和相关的比较



1.4 连续信号的卷积与相关

1.4.5 相关定理

- 相关积分的傅里叶变换对

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau \Leftrightarrow H(\mathrm{j}\Omega)X^{*}(\mathrm{j}\Omega)}$$

若$x(t)$是实偶函数，那么$X(\mathrm{j}\Omega)$是实函数，有$X(\mathrm{j}\Omega)= X^{*}(\mathrm{j}\Omega)$，

在这个条件下，相关积分的傅里叶变换是$H(\mathrm{j}\Omega)X(\mathrm{j}\Omega)$，与卷积积分的傅里叶变换相同，即

$$h(t) * x(t) \Leftrightarrow H(\mathrm{j}\Omega)X(\mathrm{j}\Omega)$$

(推导)

卷积积分与相关积分的区别

1、卷积计算是无序的，即$h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$， 两个函数可以互为反转和移位；而相关积分是有序的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t+\tau)\, d\tau \neq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t+\tau)\, d\tau$$

2、对于同一个时间位移值τ， 卷积积分和相关积分中的移位函数的移动方向相反

3、物理意义：卷积通常用来分析信号通过线性系统后输出的变化，而相关往往是用来分析或检测信号的相似性

1.5 连续时间信号的采样

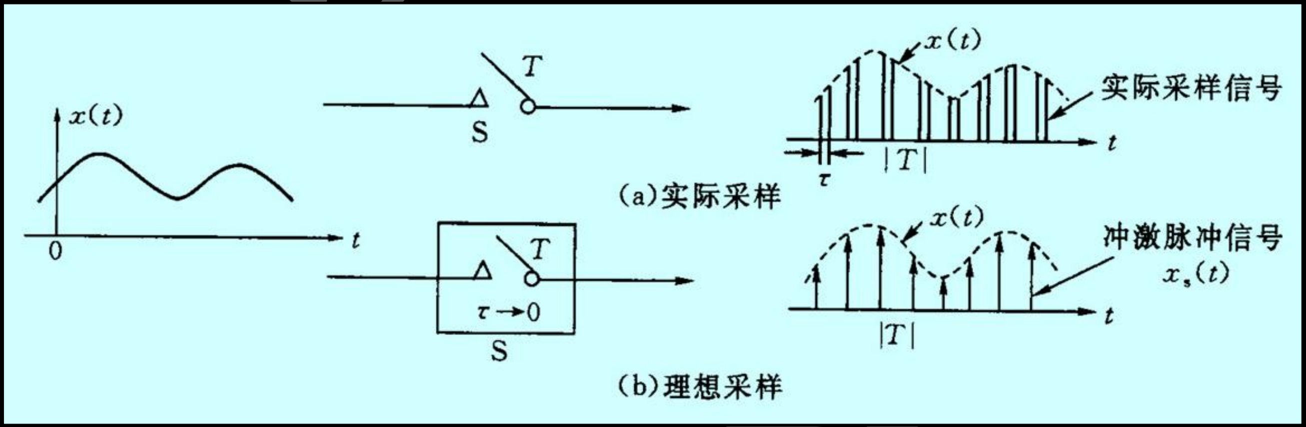
- 原信号与采样信号之间的关系
- 采样信号的频域表示：离散时间傅里叶变换（DTFT）
- 采样前后信号频谱的变化
- 从采样信号中不失真地恢复原始信号的条件(时域采样定理)

1.5 连续时间信号的采样

1.5.1 采样过程

- 理想采样与实际采样

采样器是一个开关，每隔 T 秒接通（接通时间为 τ ）和断开输入信号，实现对输入信号的采样；实际采样和理想采样的过程如图所示



- 采样信号—离散时间信号

$$x_a(t)|_{t=nT} = \{x(nT)\} = \{\dots, x(-T), x(0), x(T), x(2T), \dots\}$$

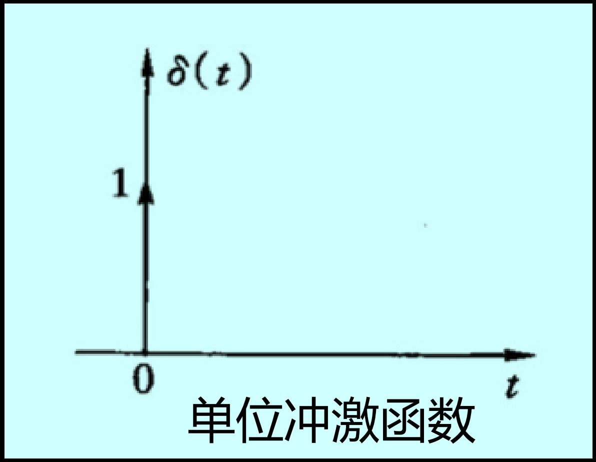
式中 -∞<n<∞ 取整数。$x(nT)$仍是一种时间上离散而幅值连续的模拟信号

τ为采样时间， T为采样周期， $f_s=\frac{1}{T}$ 称为采样频率，若用弧度/秒（rad/s）表示采样频率，则为 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$

1.5 连续时间信号的采样

1.5.2 采样函数

$$\delta(t)=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$



冲激强度为 1

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

单位冲激函数$\delta(t)$与$x(t)$相乘时，只有在$t=0$时，$x(t)$存在，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)\mathrm{d}t=x(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=x(0)$$

单位冲激函数$\delta(t)$的筛选性质

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}1, & t=t_0\\ 0, & t\neq t_0\end{cases}$$

其冲激强度仍是1，即

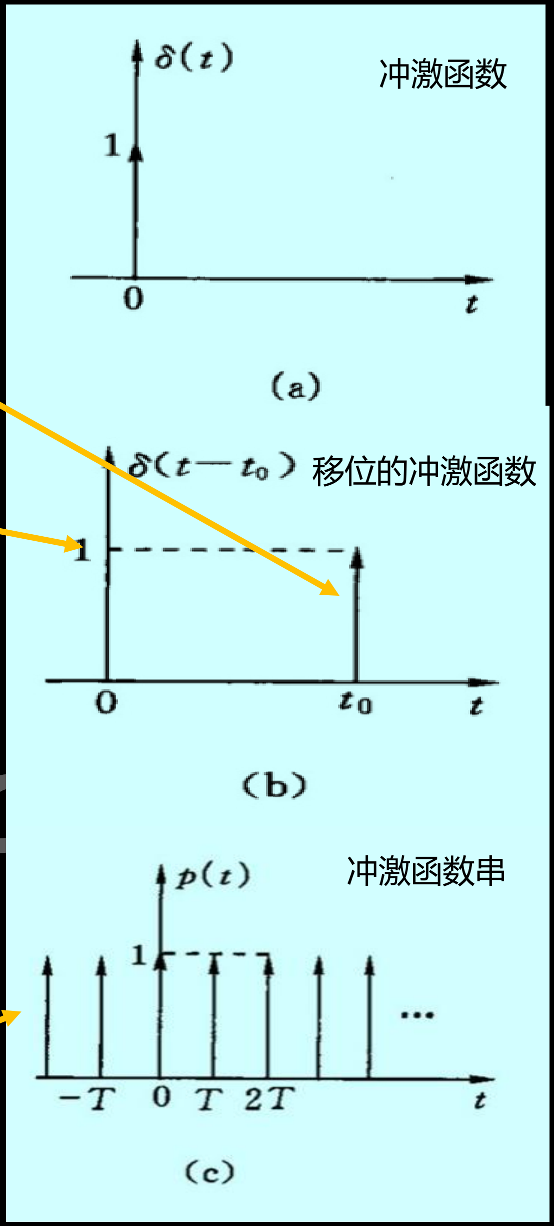
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1$$

t_0 是任意实数，筛选函数选取$t=t_0$时，信号$x(t)$的值为

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=x(t_0)$$

令上式 $t_0=nT$ $(-\infty<n<\infty)$，得到一组周期冲激串，将其定义为理想采样脉冲函数$p(t)$

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



- **采样在数学上等效为以下运算**

乘积关系在推导采样前后信号的频谱关系时很有用

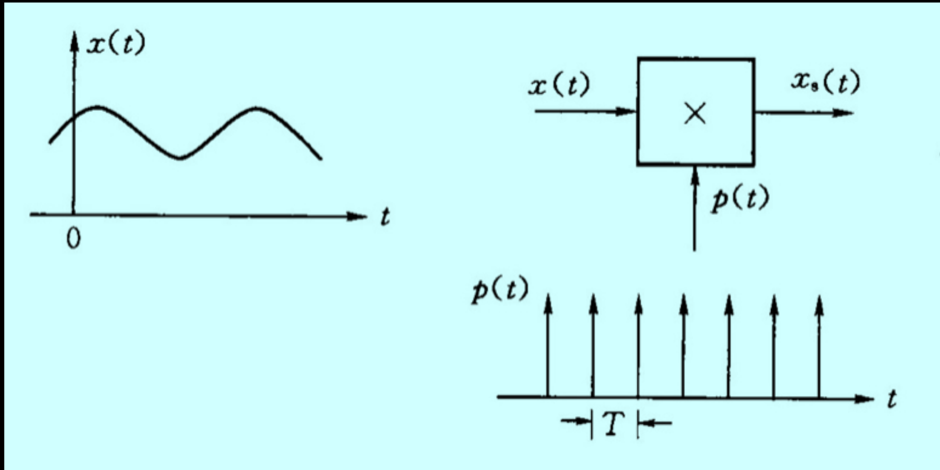
理想采样脉冲$p(t)$的连续时间信号$x(t)$相乘

$$x_s(t) = x(t)p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

由冲激信号的筛选性质，上式又可表示为

$$x_s(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

- **以采样间隔T对连续时间信号的理想采样过程（也可看作是一种调制）**



离散采样的等效调制过程

1.5 连续时间信号的采样

1.5.3 采样信号的频域表示—离散时间傅里叶变换（DTFT）

非周期信号$x(t)$的连续时间傅里叶变换对

$$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

对任何能量有限信号，其的傅里叶变换总是存在。因此，采样信号的傅里叶变换（FT）为

$$X_s(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_s(t)e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

$$X_s(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

将上式重写如下

$$X_s(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-\mathrm{j}\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

交换积分号和求和号的位置，并根据 δ 函数的筛选性质，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)dt=1$$

$t=nT$

当 $t=nT$ 时，得到

该式定义为采样信号 $x_s(t)$ 的离散时间傅里叶变换（DTFT） →

$$X_s(\mathrm{j}\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-\mathrm{j}\Omega nT}$$

(DTFT)

采样信号的频谱是 ΩT 的连续函数。由于 $e^{\mathrm{j}(\Omega T)n}=e^{\mathrm{j}(\Omega T+2\pi)n}$，$\Omega T$ 只能在[-π，π]内取值，因此采样信号频谱 $X_s(\mathrm{j}\Omega)$ 的周期为[$-\frac{\pi}{T}$，$\frac{\pi}{T}$]，并考虑到 $\mathrm{d}(\Omega T)=T\mathrm{d}(\Omega)$，$x_s(t)$ 的离散时间傅里叶变换的系数 $x(nT)$ 由下列积分计算

该式定义为采样信号 $x_s(t)$ 的离散时间傅里叶反变换（IDTFT） →

$$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X_s(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega nT}d\Omega$$

(IDTFT)

$t=nT$

连续时间傅里叶反变换 → $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)e^{j\Omega t}\mathrm{d}\Omega,$

采样信号的离散时间傅立叶变换对

DTFT $$X_s(\mathrm{j}\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-\mathrm{j}\Omega nT}$$

把采样信号$x_s(t)$的所有样本$x(nT)$产生的频谱分量叠加起来，得到采样信号$x_s(t)$的频谱$X_s(\mathrm{j}\Omega)$，每个样本 $x(nT)$ 对频谱的贡献是 $x(n\mathrm{T})e^{-\mathrm{j}\Omega nT}$，$x(nT)$ 是频谱的幅度，ΩnT 是频谱的相位

IDTFT $$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X_s(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega nT}d\Omega$$

离散时间傅里叶变换的系数$x(nT)$由上式积分计算，它把$x_s(t)$的样本$x(nT)$表示成无限个复正弦 $\frac{1}{2\pi}e^{\mathrm{j}\Omega nT}$ 在频率 $(-\frac{\pi}{T},\ \frac{\pi}{T})$ 区间的叠加，每个复正弦分量的大小由$X_s(\mathrm{j}\Omega)$确定

1.6 用信号的样本表示连续时间信号—采样定理

采样函数与连续时间信号相乘（采样过程）

$$x_s(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

采样信号表达式确定了连续时间信号与其采样信号的时域关系， $x_s(t)$ 和 $x(t)$ 两者都有各自的傅里叶变换表示

连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶反变换 $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}d\Omega$

采样信号$x_s(t)$的傅里叶变换的系数 $x(nT) = \dfrac{T}{2\pi}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega nT}d\Omega$

我们感兴趣的是：模拟信号经采样后，其频谱发生了什么样的变化，即$X(\mathrm{j}\Omega)$和$X_s(\mathrm{j}\Omega)$究竟有什么样的对应关系？$X_s(\mathrm{j}\Omega) \xrightarrow{?} X(\mathrm{j}\Omega)$ （推导）

下面讨论 $X(\mathrm{j}\Omega)$与 $X_s(\mathrm{j}\Omega)$ 的关系

连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶反变换 IDTFT

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega}$$

为分析$X(\mathrm{j}\Omega)$和$X_s(\mathrm{j}\Omega)$的对应关系，将 $t = nT$代入$x(t)$表达式中，得到

$$\boxed{x(nT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\Omega}$$

将上式的积分$\int_{-\infty}^{\infty}$表示为无限多积分之和，每个积分的区间宽度为 $\frac{2\pi}{T}$，中心为 $\frac{2\pi r}{T}$，r 为整数，即

$$\boxed{x(nT)=\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{(-2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(-2r+1)\pi}{T}}X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\Omega}$$

这里用离散的求和号是希望找到与离散时间傅里叶变换的关系

把上式重写

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{(-2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(-2r+1)\pi}{T}}X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\Omega$$

为把每一项的积分区间统一移到 [-π/T，π/T]， 对上式进行变量替换 $v=\Omega+2\pi r/T$，则有dΩ=dv, 得

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X\left(\mathrm{j}v-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}r\right)e^{\mathrm{j}\left(v-\frac{2\pi}{T}r\right)nT}\mathrm{d}v$$

考虑到 $e^{-\mathrm{j}2\pi rn}=1$ 并换回积分变量 $\Omega=v$，则有

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X\left(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}r\right)e^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\Omega$$

交换积分与求和的次序

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}X\left(\mathrm{j}\Omega-\frac{2\pi r}{T}\right)\right]e^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\,\Omega$$

把上式重写

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X\left(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}r\right)e^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\Omega$$

交换上式中积分与求和的次序，得

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}X\left(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}r\right)\right]e^{\mathrm{j}\Omega nT}\,\mathrm{d}\Omega$$

$$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X_s(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega nT}d\Omega$$

与采样信号的傅里叶变换表示比较，形式相同

得到用$X(\mathrm{j}\Omega)$表示$X_s(\mathrm{j}\Omega)$的关系式

$$X_s(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X\left(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}r\right)$$

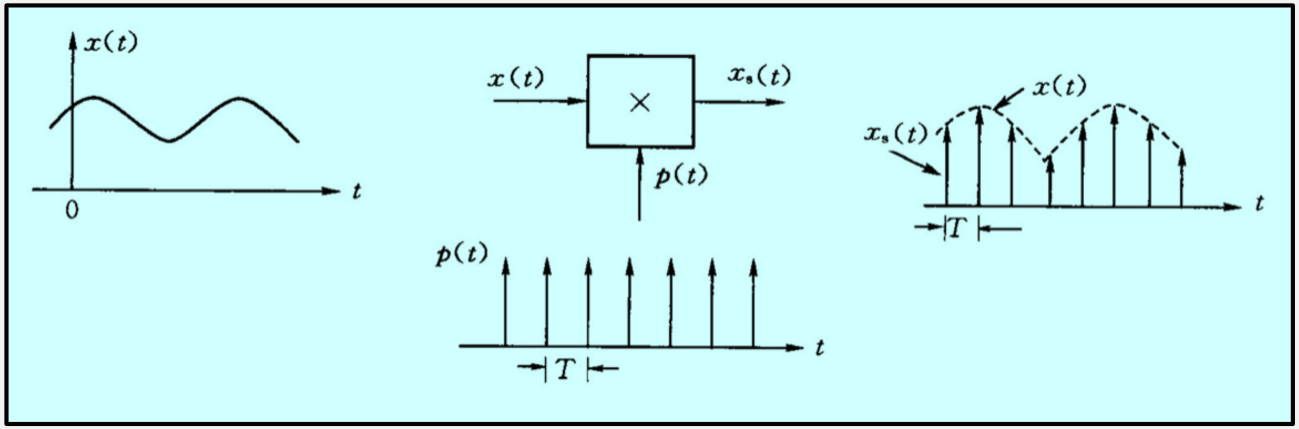
该式说明采样信号的频谱是由原信号$x(t)$的频谱$X(\mathrm{j}\Omega)$以及无限个经过采样频率$\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$整数倍平移的原信号频谱（幅度均乘以$1/T$）叠加而成，即频谱产生了周期延拓

讨论

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(\mathrm{j}\Omega - \mathrm{j}\frac{2\pi r}{T}\right)$$

上式给出了$x(t)$与其经冲激信号$p(t)$采样后的信号 $x_s(t)|_{t=nT}$两者频谱之间的关系

$$x_s(t)|_{t=nT} = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt)\delta(t-nT)$$



$$X_s(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(\mathrm{j}\Omega - \mathrm{j}\frac{2\pi r}{T}\right)$$

上式中的$\frac{2\pi}{T} = \Omega_s$，$X_s(\mathrm{j}\Omega)$也可表示为以下形式

$$X_s(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X[\mathrm{j}(\Omega - r\Omega_s)]$$

1、上式说明了$X(\mathrm{j}\Omega)$与$X_s(\mathrm{j}\Omega)$关系，该式恰好是周期延拓的定义式，其周期为Ω_s

2、$X_s(\mathrm{j}\Omega)$的频谱是周期函数，周期为Ω_s；也就是说采样信号 $x_s(t)$ 的频谱是原连续时间信号$x(t)$的频谱以采样频率Ω_s为周期进行无限周期延拓的结果，其频谱幅度为原来的$1/T$

改变采样周期 T 究竟会带来采样信号频谱的什么变化?

假设：
1、$X(j\Omega)$是实函数，相位恒为零，即$X(j\Omega)=|X(j\Omega)|$

2、假定信号的非零的最高频率为Ω_0

当 T 过大时，即$\Omega_s-\Omega_0<\Omega_0$，出现频谱“混叠”现象

当 T 取足够小，即$\Omega_s-\Omega_0>\Omega_0$，没有频谱“混叠”现象

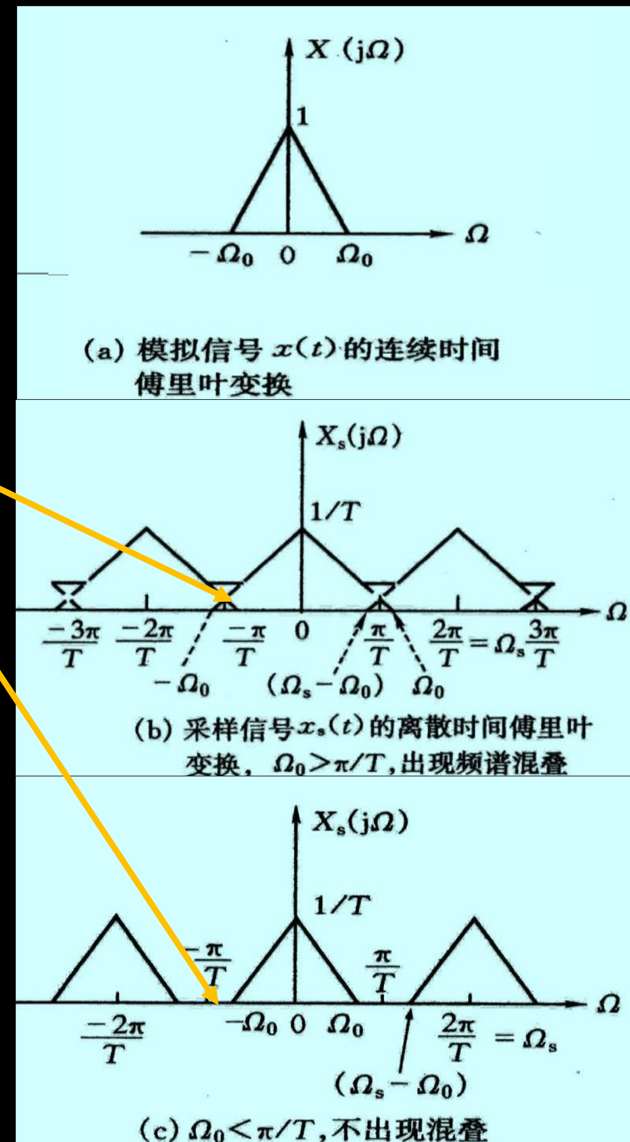
因此，只有在 $\Omega_s>2\Omega_0$ 的条件下，采样信号的频谱采不会出现原模拟信号频谱的混叠。

即，采样频率 f_s 必须满足

$$\Omega_s > 2\Omega_0 \quad 或 \quad f_s \geq 2f_{\max}$$

$$式中 \quad f_s=\frac{\Omega_s}{2\pi}, \quad f_0=\frac{\Omega_0}{2\pi}$$

(讨论)



(a) 模拟信号 $x(t)$ 的连续时间傅里叶变换

(b) 采样信号 $x_s(t)$ 的离散时间傅里叶变换，$\Omega_0>\pi/T$，出现频谱混叠

(c) $\Omega_0<\pi/T$，不出现混叠

■ 需要注意

在实际工作中，为了避免频谱混淆现象发生，采样频率总是选得比奈奎斯特频率更大些，例如选到Ω_s取$(3\sim4)\Omega_0$。同时为了避免高于折叠频率的杂散频谱进入采样器造成频谱混淆，一般在采样器前加入一个保护性的前置低通滤波器，其截止频率为$\Omega_s/2$，以便滤除掉输入的模拟信号中高于$\Omega_s/2$的频率分量。

1.7 利用内插由样本重建信号

若一个信号$x(t)$是有限带宽的，即频谱在$|\Omega|> \Omega_0$时幅值为零。当信号时间持续t_n，按采样定理确定的采样间隔$T\leq\frac{\pi}{\Omega_0}$（采样频率$f_s \geq 2f_0$）对信号$x(t)$进行采样，则信号$x(t)$完全可由$t_n/T$个样本值信号重建

推导如下：

连续时间信号的傅立叶反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

若$x(t)$的最高频率为Ω_0，且采样频率足够高$\Omega_s > 2\Omega_0$（$\frac{1}{T} \geq \frac{\Omega_0}{\pi}$，没有混叠）

上式的积分上下限$\int_{-\infty}^{\infty}$可用$\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}$替代，并将$X(\mathrm{j}\Omega) = TX_s(\mathrm{j}\Omega)$代入上式，得到

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} TX_s(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

而上式中采样信号的傅立叶变换（DTFT）为

$$X_s(\mathrm{j}\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-\mathrm{j}\Omega nT}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}TX_s(\mathrm{j}\Omega)e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

$$X_s(\mathrm{j}\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-\mathrm{j}\Omega nT}$$

代入采样样本$x(nT)$的傅里叶变换）

得到

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}T[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-\mathrm{j}\Omega nT}\}\,e^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$$

交换积分与求和的顺序，并将积分求出，得到

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Tx(nT)\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}e^{\mathrm{j}\Omega(t-nT)}\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{T}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{2\sin[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)]}{(t-nT)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\sin[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

由$x(t)$的采样样本$x(nT)$重构模拟信号$x(t)$的内插公式

由采样值$x(nT)$恢复$x(t)$的内插公式

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Tx(nT)\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}e^{j\Omega(t-n)T}\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{T}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{2\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)\right]}{(t-nT)}$$

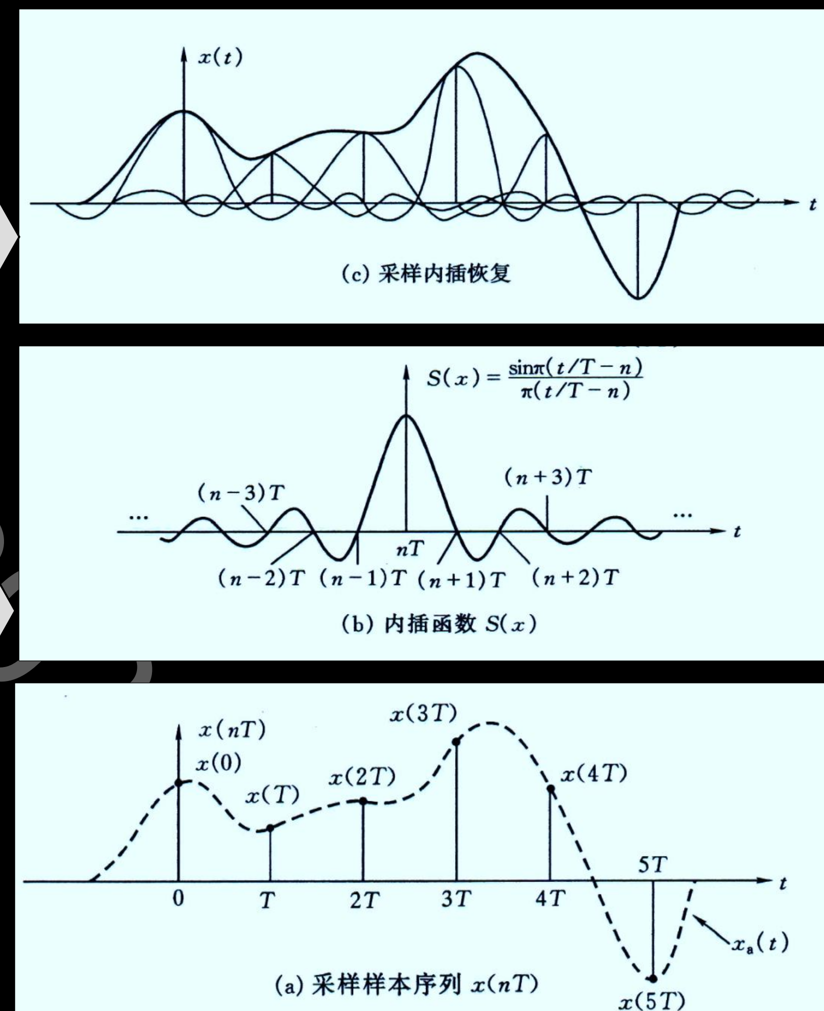
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

采样函数定义为 $S(x)=\frac{\sin(x)}{x}=\mathrm{sinc}(x)$

式中 $x=\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)$

内插公式又可写成

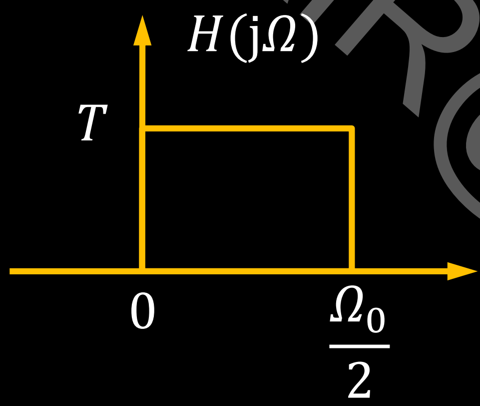
$$x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\mathrm{sinc}(\pi[\frac{t}{T}-n])$$

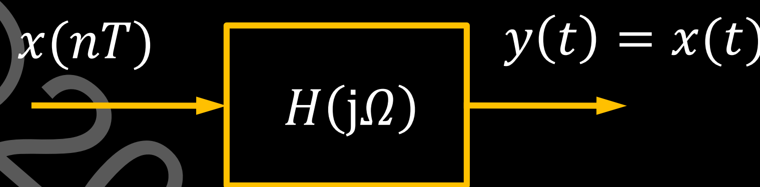


由采样值$x(nT)$恢复$x(t)$

举例：利用理想低通滤波器给出满足采样定理的内插函数

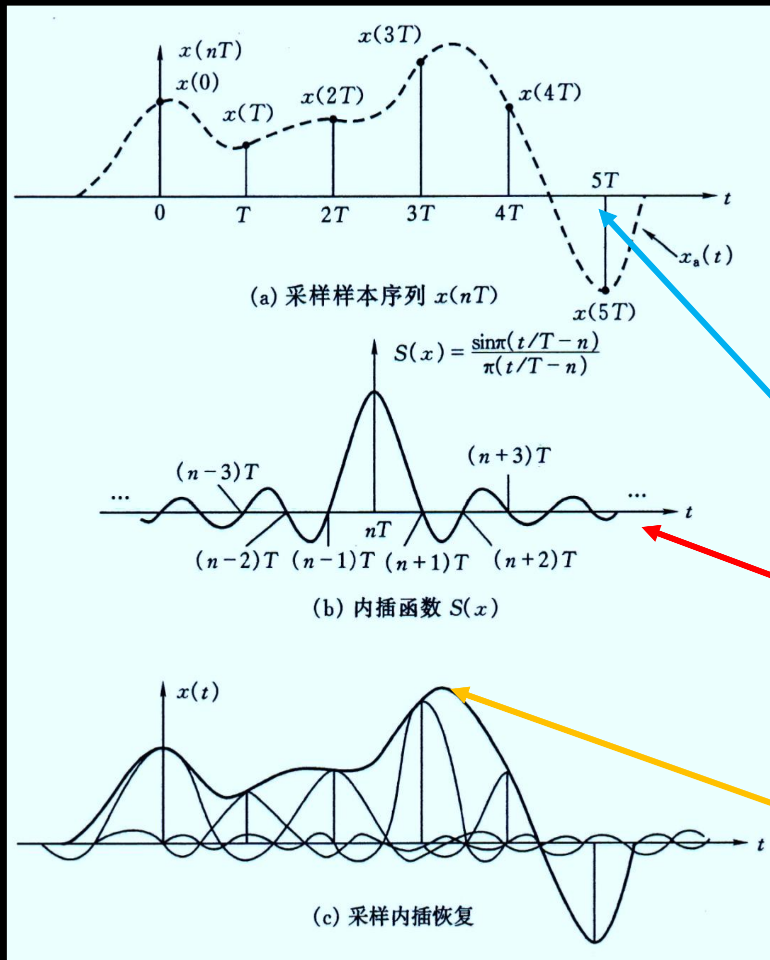
$$H(\mathrm{j}\Omega)=\begin{cases} T, & |\Omega|<\dfrac{1}{2}\Omega_0 \\ 0, & |\Omega|\geq\dfrac{1}{2}\Omega_0 \end{cases}$$





理想低通滤波器的输出
(推导)

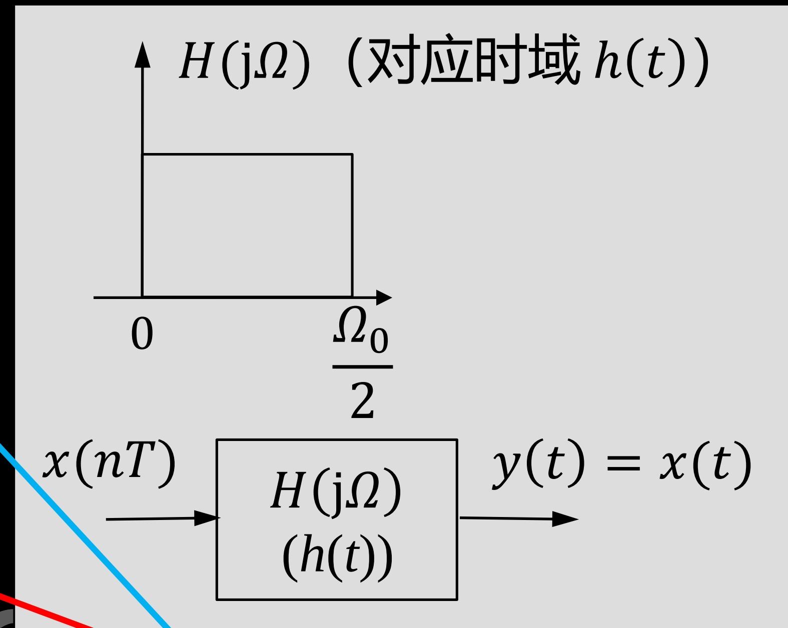
$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$



(a) 采样样本序列 $x(nT)$

(b) 内插函数 $S(x)$

(c) 采样内插恢复



$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

周期信号的傅里叶级数—非周期信号的连续时间傅里叶变换—采样信号的离散时间傅里叶变换

连续时间周期信号的傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} X(n\Omega_0)e^{jn\Omega_0 t}$$

$$x_T(t)=\lim_{T\to\infty} x(t+T)$$

$$\frac{2\pi}{T}=d\Omega\,,\quad n\Omega_0=\Omega$$

连续时间非周期信号的傅里叶变换

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

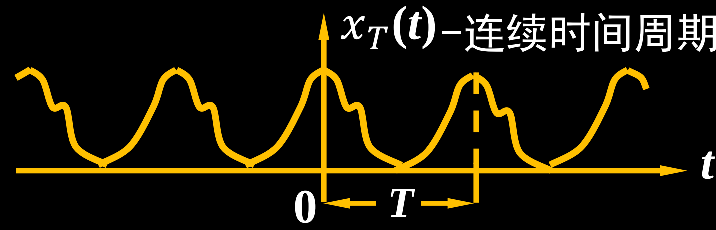
$t=nT$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

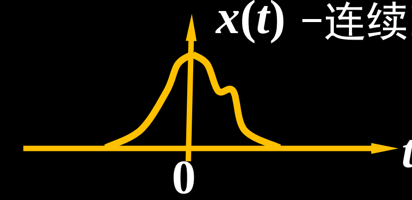
采样信号的离散时间傅里叶变换

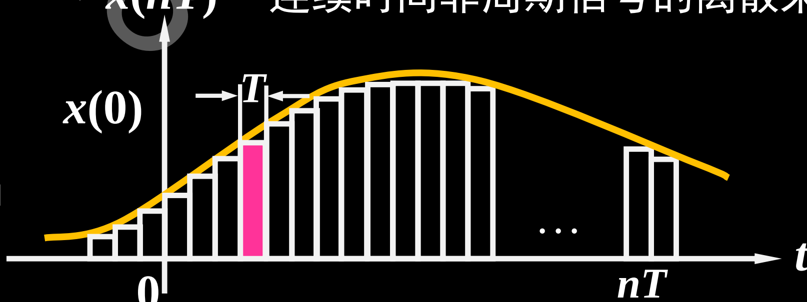
$$X_s(j\Omega)=\sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\Omega nT}$$

$$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_s(j\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega$$



周期延拓

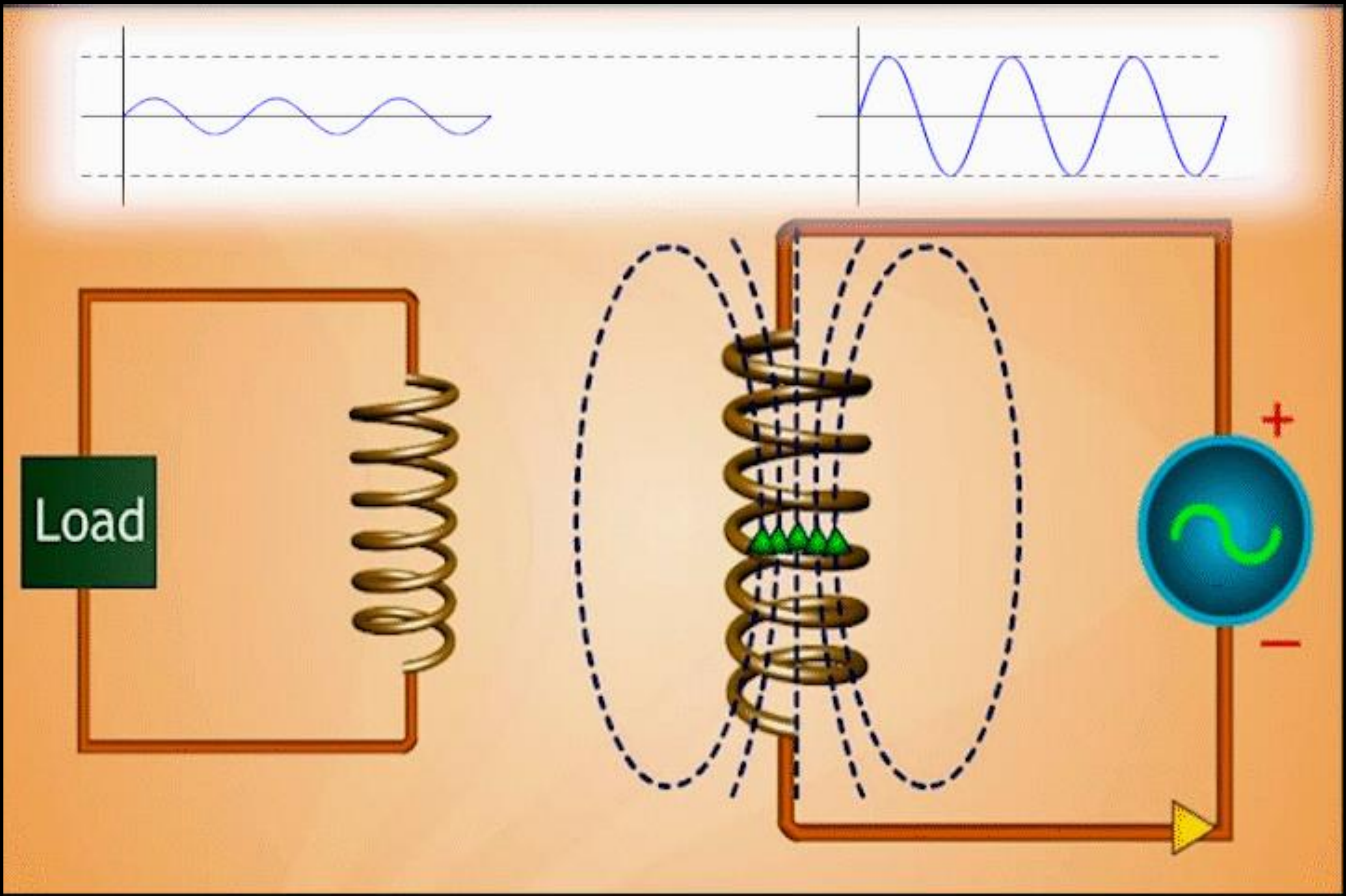




本章小结

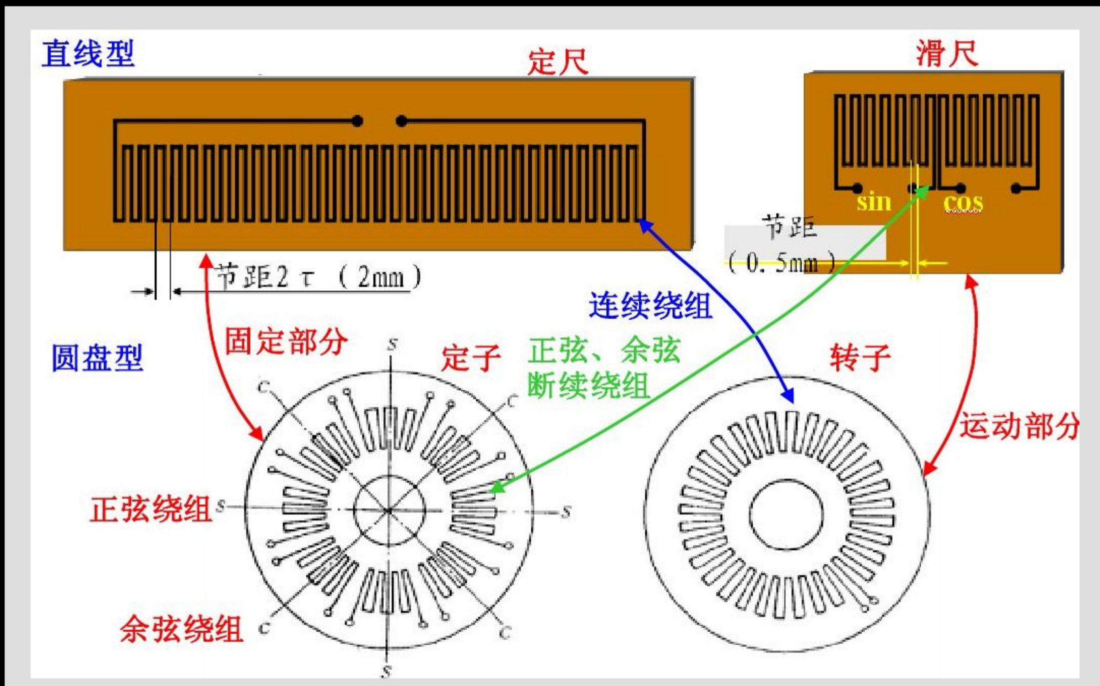
- 连续时间周期信号的傅里叶级数（FS）表示
- 非周期连续时间信号的傅里叶变换（FT）
- 卷积与相关
- 连续时间信号的采样
- 离散时间信号的傅里叶变换（DTFT）—采样信号的频域表示
- 采样定理—由采样信号恢复连续时间信号（信号的重建）

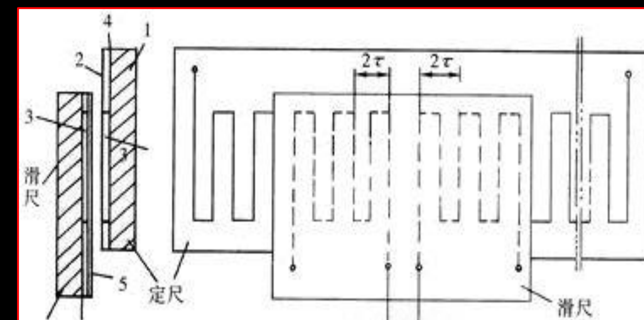
傅里叶级数在实际中的应用-位移的测量

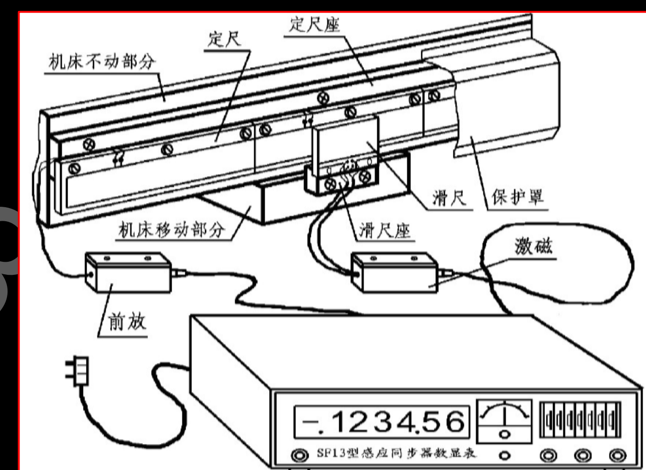


感应同步器

- 感应同步器是利用两个平面形绕组的互感随位置不同而变化的原理，即电磁耦合原理, 将位移或转角转化成电信号的位置检测装置







原理： 位移 → 两个平面绕组间的互感变化 → 电量

- 输入感应同步器滑尺绕组的是频率、相位相同而幅值不同的交流电压，根据输入和定尺输出电压的幅值变化，也可得出滑尺的位移量

- 滑尺绕组加上激励电压时，定尺绕组产生的感应电势随着滑尺移动的位置作周期性变化。滑尺位置移动 2τ，定尺的感应电势变化一周。因此，物理性位移可用定尺感应电势的变化表示

设加到正、余弦绕组上的激励电压为

$$u_i = U_m \sin \omega t$$

则正、余弦绕组在定尺绕组上产生的感应电势分别为

$$e_s = KU_m \cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) \cos \omega t$$

感应同步器的最大电磁耦合系数

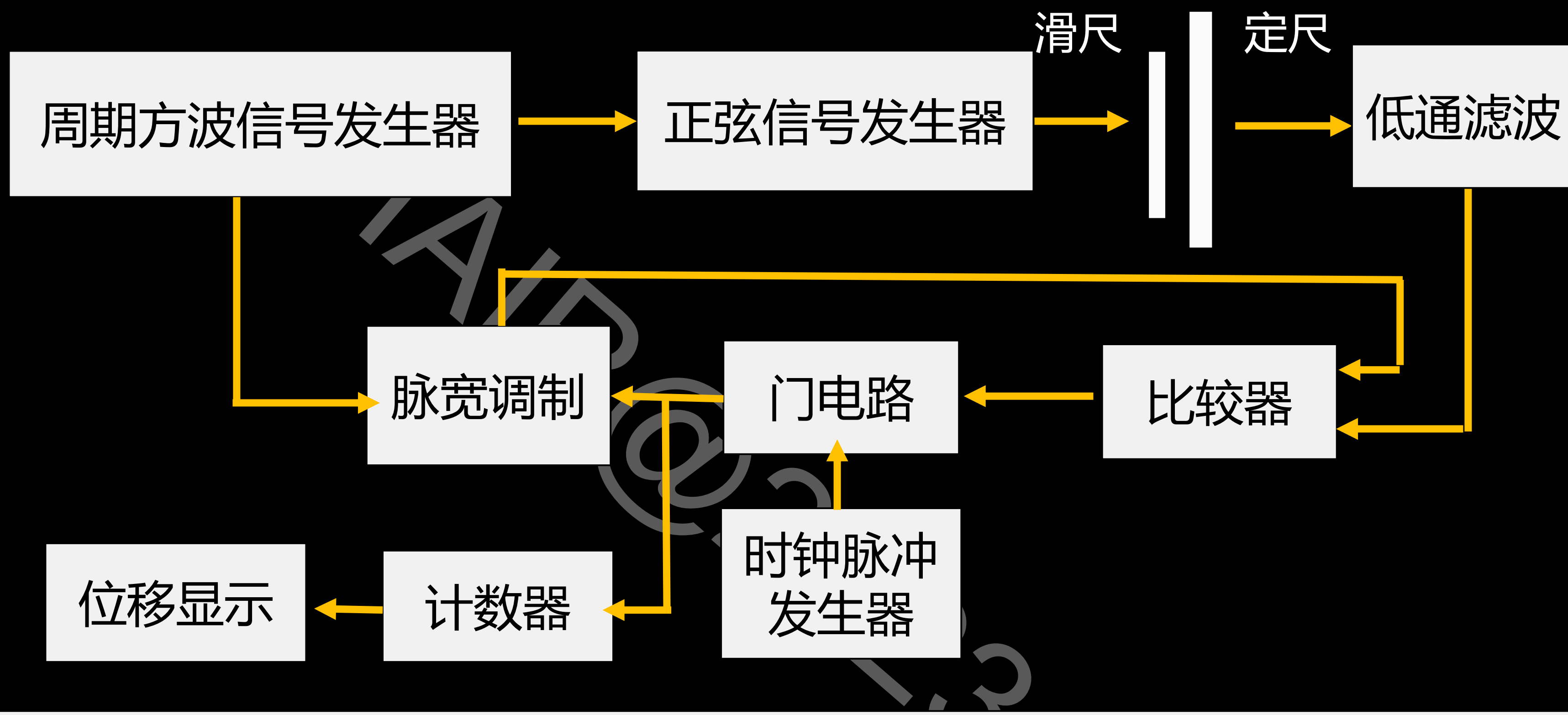
$$e_c = KU_m \sin(2\pi \frac{x}{\lambda}) \cos \omega t$$

$\lambda = 2\tau$

e_s——单正弦绕组激励时，定尺绕组产生的感应电势

e_c——单余弦绕组激励时，定尺绕组产生的感应电势

数字位移测量装置的基本原理



位移变化 → 相角 $\theta = 2\pi\frac{x}{\lambda}$ 变化 → 感应电势的振幅E_m变化

→ 幅值比较电路 → 测量出幅值变化，转换成位移的数值