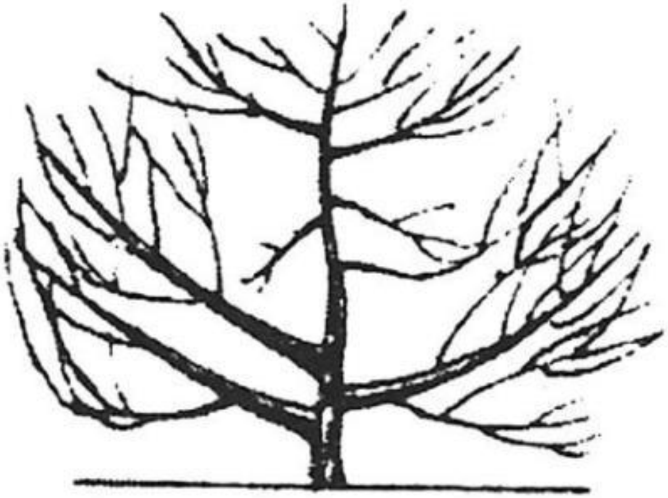
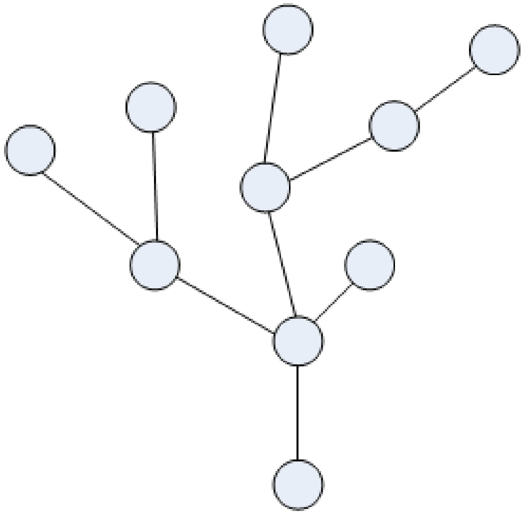
图与网络分析第2节

树、支撑树、最小树

西安交通大学电信学院系统工程研究所

翟桥柱、吴江

树：定义与性质

树：连通且无回路的(无向)图。
一定是简单图，也是最简单、基本、非常重要的图

一个无回路的图，其每一个连通分支都是一棵树，因此无回路的图也就是若干棵互不连通的树构成的图，称为**森林**

树有哪些重要特性？

树：定义与性质

定理5.3.1： 设$G = (V, E)$是无向图，且$|V| = N$, 则以下陈述等价：

(1) G连通且无回路

(2) G有N-1 条边且无(初级)回路

(3) G连通且有N-1 条边

(4) G连通且每条边都是割边

(5) G的任意两顶点间有唯一(初级)路相连

(6) G无回路，但在任意一对不相邻的顶点间加一条边，则构成唯一的一个(初级)回路。

树的等价定义

定理5.3.2： 设$G = (V, E)$是一棵树，且$|V| = N \geqslant 2$, 则G至少有两个次为 1 的顶点。

证明： 由$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2|E| = 2N - 2$可知

支撑树：定义与性质

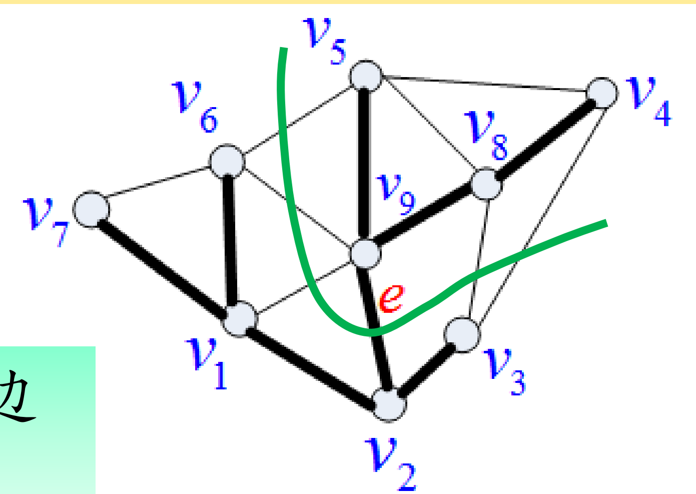
树的很多重要应用，与支撑树、最小(支撑)树有关

支撑树： 设$G=(V,E)$是无向图，$T=(V,E')$是G的一个支撑子图，若T是一棵树，则称其为G的一个支撑树。

反树： 设$T=(V,E')$是G的一个支撑树，则称$T^*=E\setminus E'$是T的反树。 **注意：反树不是图，只是边集的一个子集**

定理5.3.3： $G=(V,E)$有支撑树当且仅当G连通。

定理5.3.4： $T=(V,E')$是G的一个支撑树，$e\in E'$，则存在唯一一个割集$\Omega(e)\subseteq T^*\cup\{e\}$。



例： **支撑树：** 粗边对应支撑图；**反树：** 细边
唯一割集： 与绿线相交的所有边

支撑树：定义与性质

树的很多重要应用，与支撑树、最小(支撑)树有关

支撑树： 设$G=(V,E)$是无向图， $T=(V,E')$是G 的一个支撑子图，若 T 是一棵树，则称其为 G 的一个支撑树。

反树： 设$T=(V,E')$是G 的一个支撑树，则称$T^*=E\setminus E'$ 是 T 的反树。 **注意：反树不是图，只是边集的一个子集**

定理5.3.5： 设$T_1=(V,E_1)$和$T_2=(V,E_2)$是G 的两个支撑树，且$|E_1\setminus E_2|=k$，则T_1 和T_2可以经过 k 次迭代互换。

$$\left\{e_1^{(1)},e_2^{(1)},\cdots,e_k^{(1)}\right\},\left\{\cdots\cdots\cdots\right\},\left\{e_1^{(2)},e_2^{(2)},\cdots,e_k^{(2)}\right\}$$

T_1的边

T_2的边

最小树：定义与性质

树的很多重要应用，与支撑树、最小(支撑)树有关

最小树： 设$G=(V,E,W)$是无向网络，$T=(V,E')$是G的一个支撑树，则称 $W(T)=\sum_{e\in E'}w(e)$ 为树 T 的权。G 的所有支撑树中权最小的支撑树称为 G 的最小树。

注意：最小树首先是支撑树；最小树可能不唯一

怎样求得最小树？

对一个有限连通图，虽然只有有限个支撑树，但不能通过枚举来寻找最小树，因支撑树数目巨大。最小树的高效获取方法建立在最优性条件基础上(最小树的充分、必要条件)

最小树：定义与性质

定理5.4.1： 设$G=(V,E,W)$是无向网络， 则$T=(V,E')$是G的一个最小树当且仅当 $\forall e\in T^*, w(e)=\max\limits_{e'\in C(e)} w(e')$ 。其中，$C(e)\subseteq T+e$是$T+e$中的唯一一个初级回路。

证明： 必要性，显然。充分性，广义“同一法”。任取一个最小树 $\tilde{T}=(V,\tilde{E})$，证明T 和 $\tilde{T}$ 的权相同。

设 $\left|\tilde{E}\setminus E'\right|=k \quad \Rightarrow \{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_k\},\{\cdots\cdots\cdots\},\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$

$\Rightarrow \min\{w(\tilde{e}_1),w(\tilde{e}_2),\cdots,w(\tilde{e}_k)\}=\min\{w(e_1),w(e_2),\cdots,w(e_k)\}$

取$e_i=\arg\min\{w(e_1),w(e_2),\cdots,w(e_k)\}\Rightarrow T+e_i-\tilde{e}_j=\tilde{T}'$

$\tilde{T}'$ 也是一棵最小树，且和T的不同边数仅有k-1条，…

最小树：定义与性质

定理5.4.2：设$G=(V,E,W)$是无向网络，则$T=(V,E')$是G的一个最小树当且仅当$\forall e\in E', w(e)=\min\limits_{e'\in\Omega(e)} w(e')$。其中，$\Omega(e)\subseteq T^*+e$是$T^*+e$中的唯一一个割集。

证明：必要性，显然。充分性，应用定理5.4.1。

$\forall\tilde{e}\in T^*\Rightarrow E'+\tilde{e}$的回路中任取$T$中一边$e$，形成割集，…

P208，定理5.4.3，定理5.4.4最小树的唯一性判定条件

求最小树的两个常用算法：

- Kruskal算法(1956，贪心算法，Greedy Algorithm)
- Dijkstra算法(1959，Prim算法的改进，标号法)

Dijkstra算法效率更高，但Kruskal算法有某些特殊应用（边稀疏）

最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

思想： 设$G=(V,E,W)$是连通的无向网络，$|V|=n$，$|E|=m$，从G的m条边中选权值尽量小的n-1条边，且不构成回路

算法:

Step 1. 对m条边按权值由小到大排序，使 $w(e_1)\le w(e_2)\le\cdots\le w(e_m)$ 置 $S=\phi, i=0, j=1$.

Step 2. 若$i=n$-1, 停，$G(S)$即为最小树，否则继续。

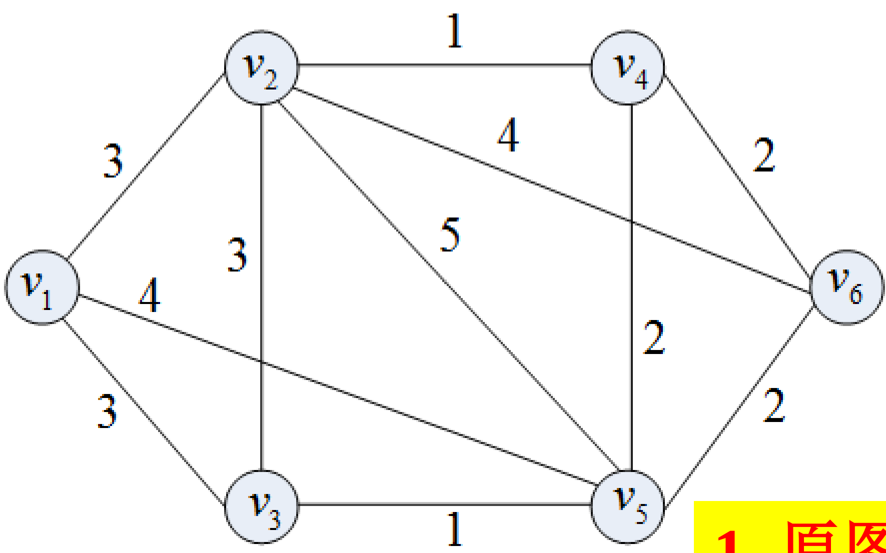
Step 3. 若$S\cup\{e_j\}$无回路，置 $S=S\cup\{e_j\}, i=i+1, j=j+1$，转Step2；否则置 $j=j+1$转Step3.

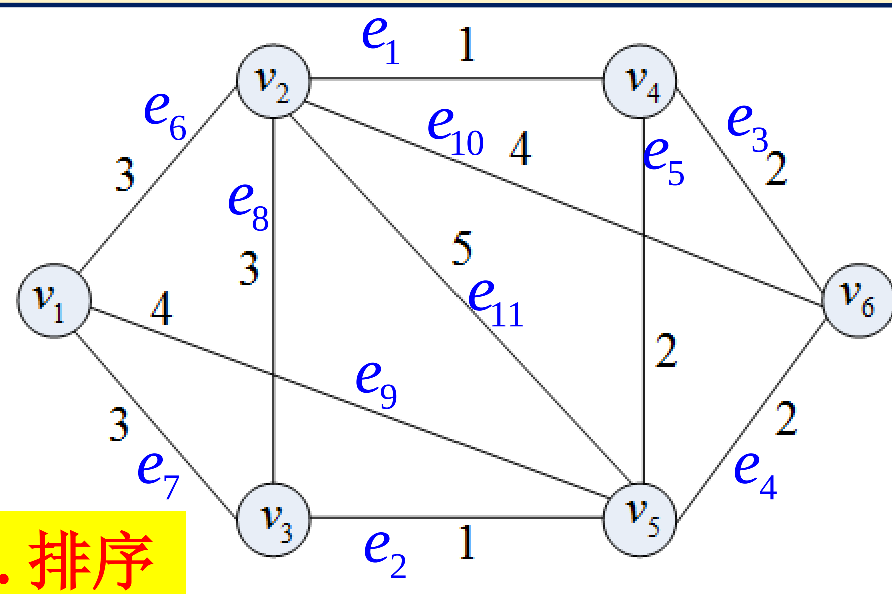
算法说明:

- 去掉环，重边中只保留权值最小边
- 正确性：基于定理5.4.1
- 无回路判断：顶点所属连通分支标记法
- 计算复杂性：P209

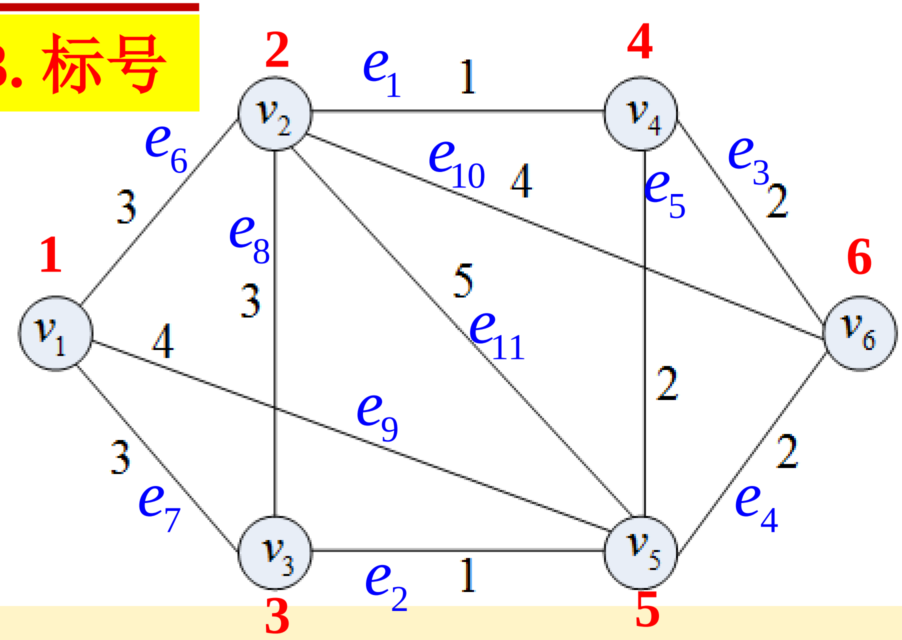
S: 树中的边；*i*:已找到多少条边；*j*:已检验至第几条边

最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)





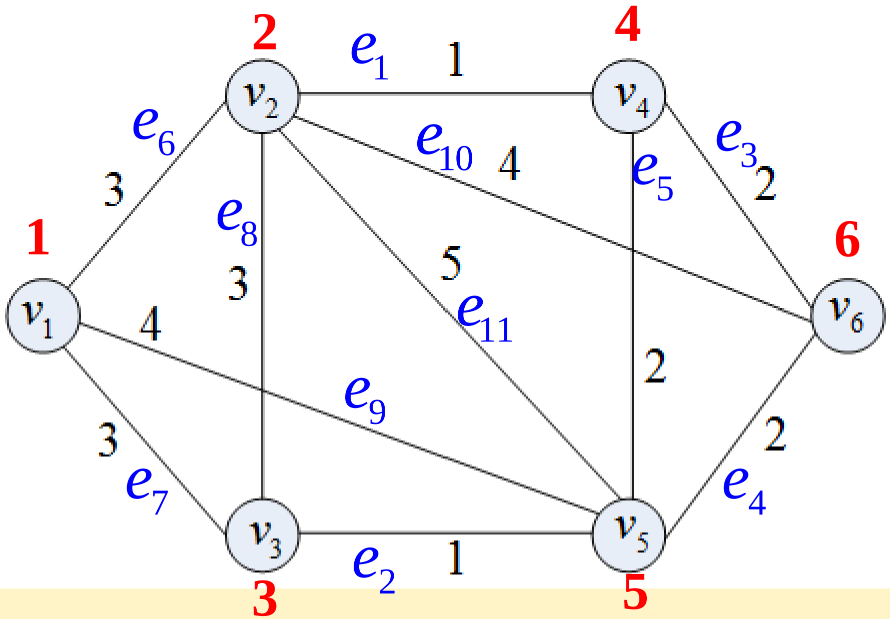
1. 原图	2. 排序
4. 迭代	3. 标号



最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2$，修改标号

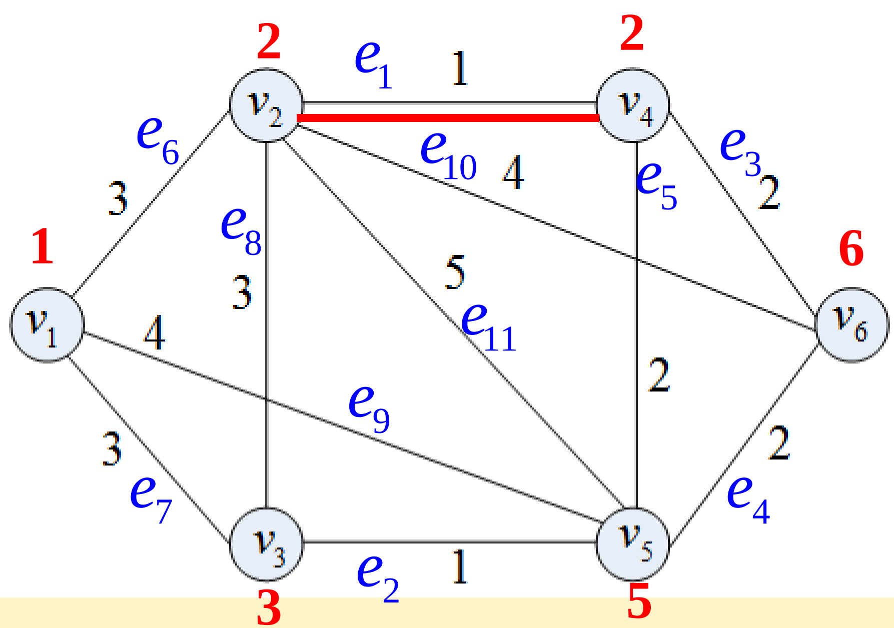


最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号

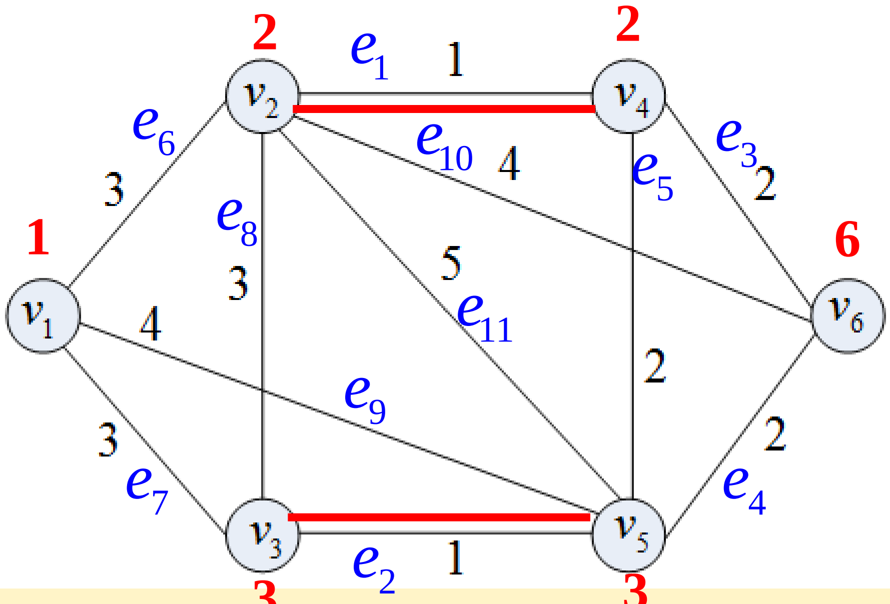


最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号



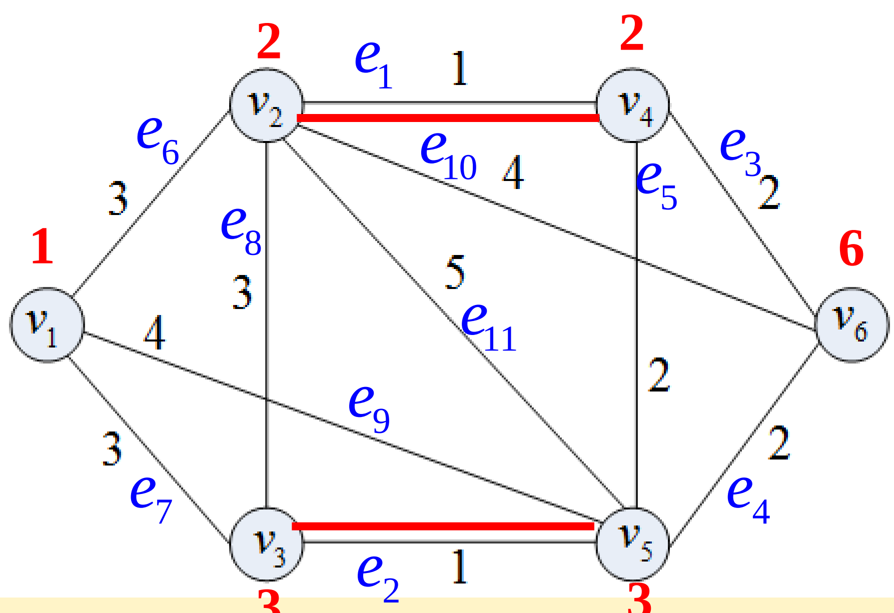
最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号

$i\neq 5, e_3$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_3\}, i=3,\ j=4,$ 修改标号



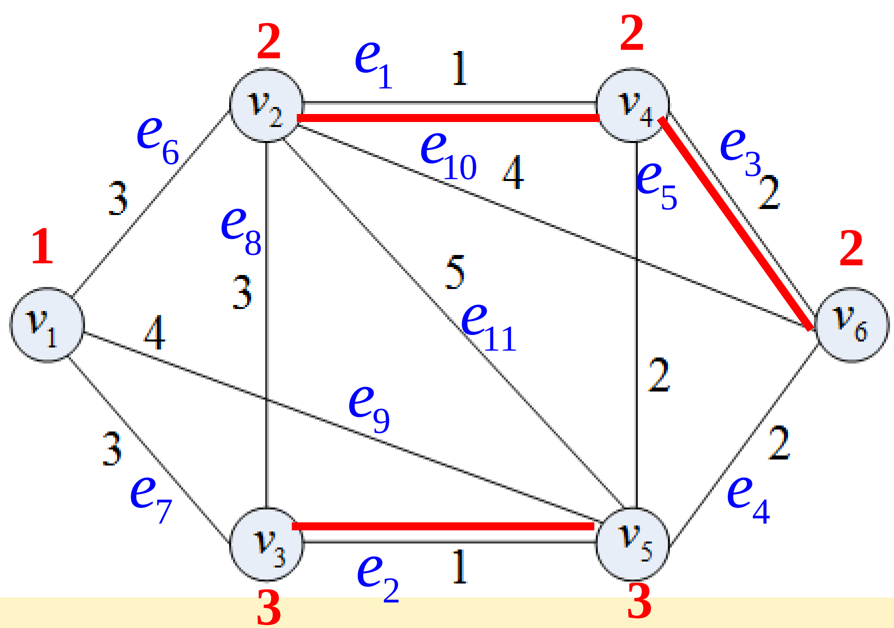
最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\bigcup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\bigcup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号

$i\neq 5, e_3$ 两端点标号不同, $S=S\bigcup\{e_3\}, i=3,\ j=4,$ 修改标号



最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

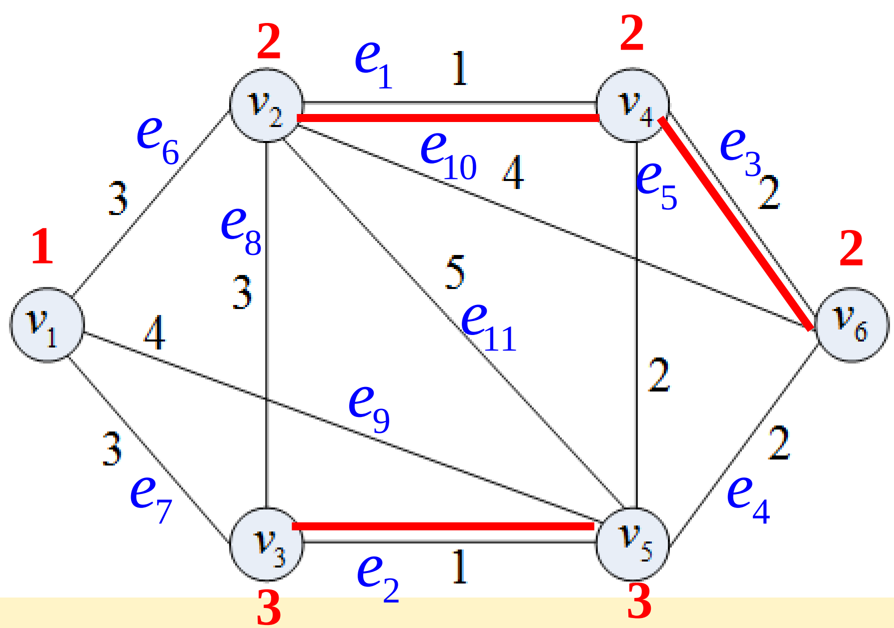
$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\bigcup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\bigcup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号

$i\neq 5, e_3$ 两端点标号不同, $S=S\bigcup\{e_3\}, i=3,\ j=4,$ 修改标号

$i\neq 5, e_4$ 两端点标号不同, $S=S\bigcup\{e_4\}, i=4,\ j=5,$ 修改标号



最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

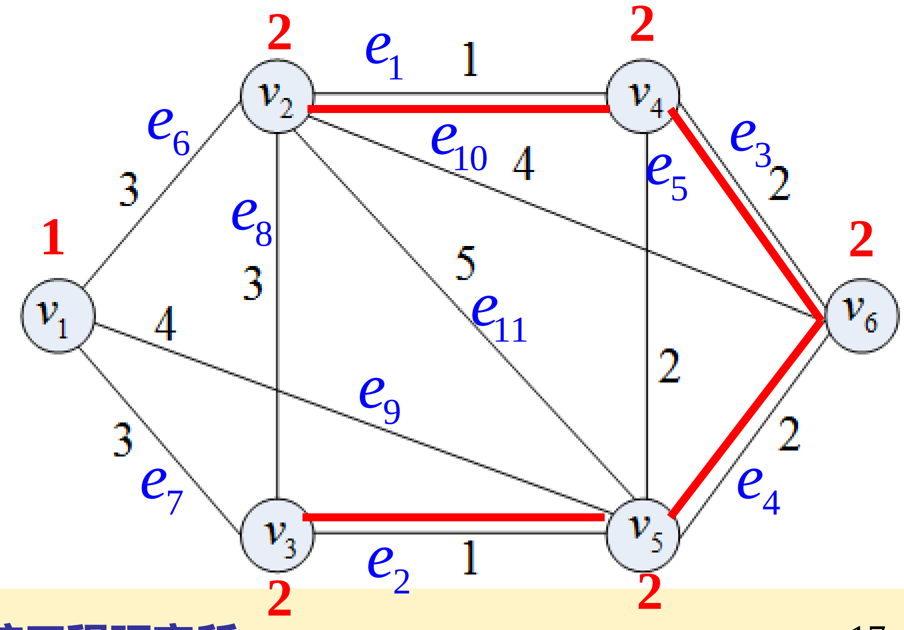
$S=\phi, i=0, j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1, j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_2\}, i=2, j=3,$ 修改标号

$i\neq 5, e_3$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_3\}, i=3, j=4,$ 修改标号

$i\neq 5, e_4$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_4\}, i=4, j=5,$ 修改标号



最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

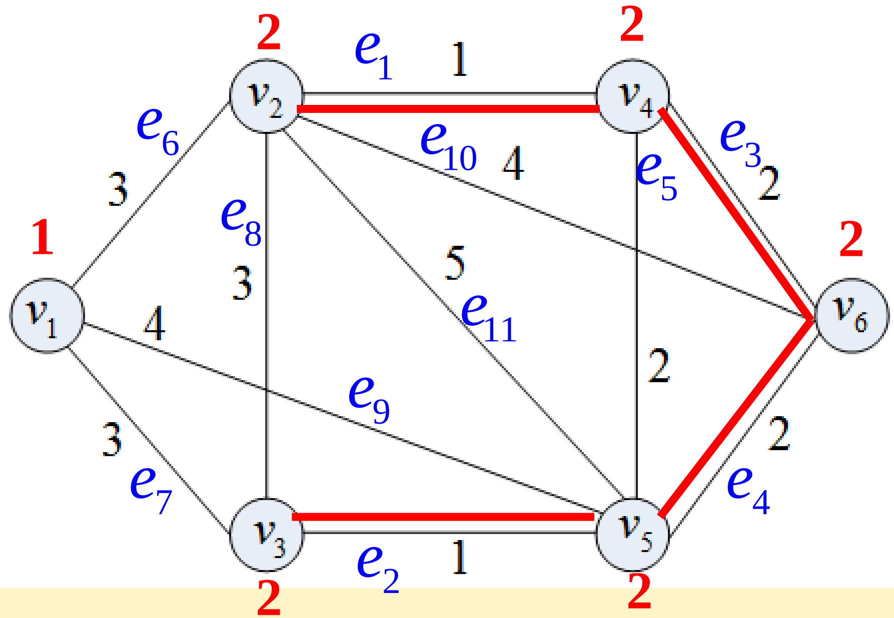
$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\bigcup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\bigcup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号

$i\neq 5, e_3$ 两端点标号不同, $S=S\bigcup\{e_3\}, i=3,\ j=4,$ 修改标号

$i\neq 5, e_4$ 两端点标号不同, $S=S\bigcup\{e_4\}, i=4,\ j=5,$ 修改标号

$i\neq 5, e_5$ 两端点标号相同， $j=6$



最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号

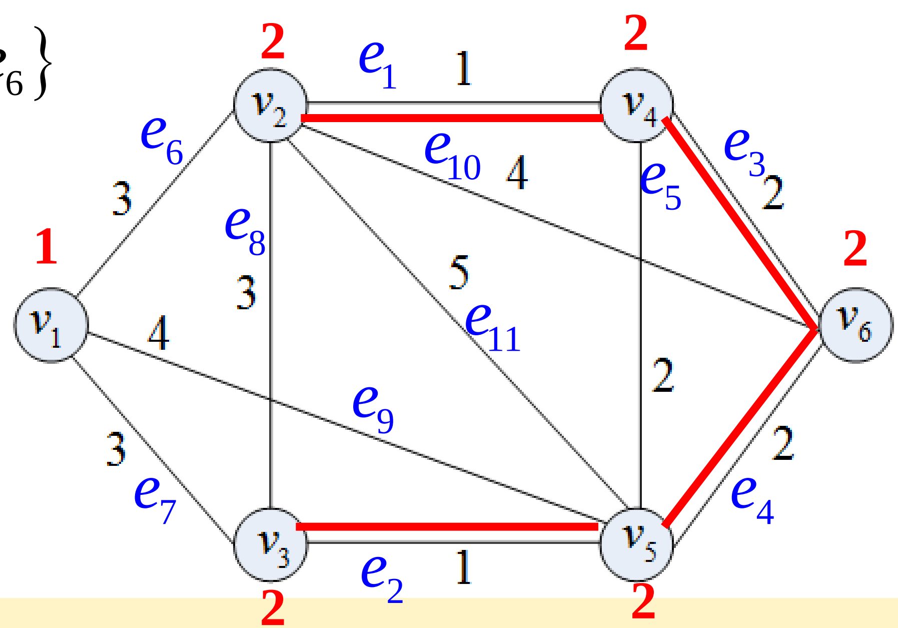
$i\neq 5, e_3$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_3\}, i=3,\ j=4,$ 修改标号

$i\neq 5, e_4$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_4\}, i=4,\ j=5,$ 修改标号

$i\neq 5, e_5$ 两端点标号相同， $j=6$

$i\neq 5, e_6$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_6\}$

$, i=5,\ j=7,$ 修改标号



最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号

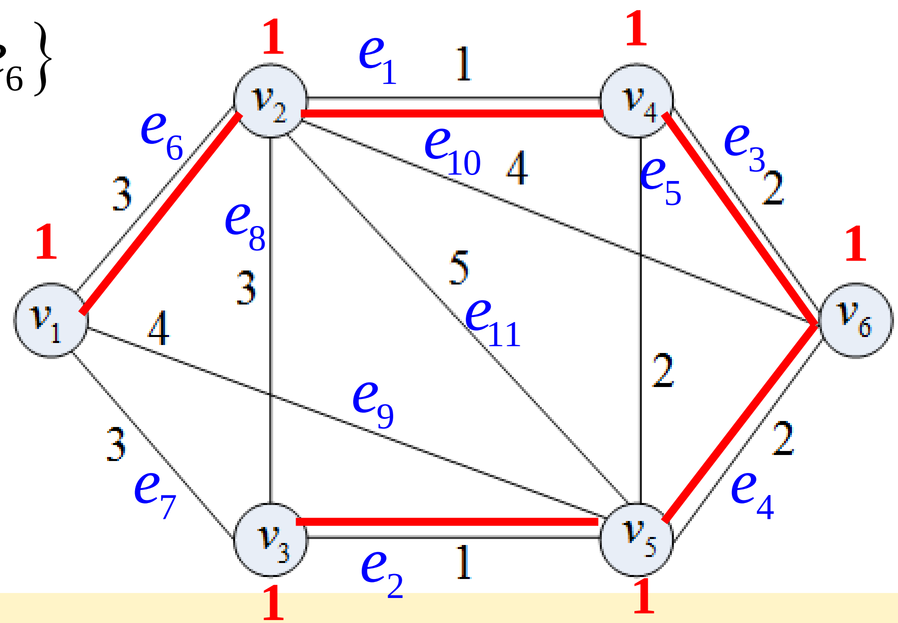
$i\neq 5, e_3$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_3\}, i=3,\ j=4,$ 修改标号

$i\neq 5, e_4$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_4\}, i=4,\ j=5,$ 修改标号

$i\neq 5, e_5$ 两端点标号相同， $j=6$

$i\neq 5, e_6$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_6\}$

$, i=5,\ j=7,$ 修改标号



最小树：Kruskal算法(1956, Greedy Algorithm)

$S=\phi, i=0,\ j=1.$

$i\neq 5, e_1$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_1\}=\{e_1\}, i=1,\ j=2,$ 修改标号

$i\neq 5, e_2$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_2\}, i=2,\ j=3,$ 修改标号

$i\neq 5, e_3$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_3\}, i=3,\ j=4,$ 修改标号

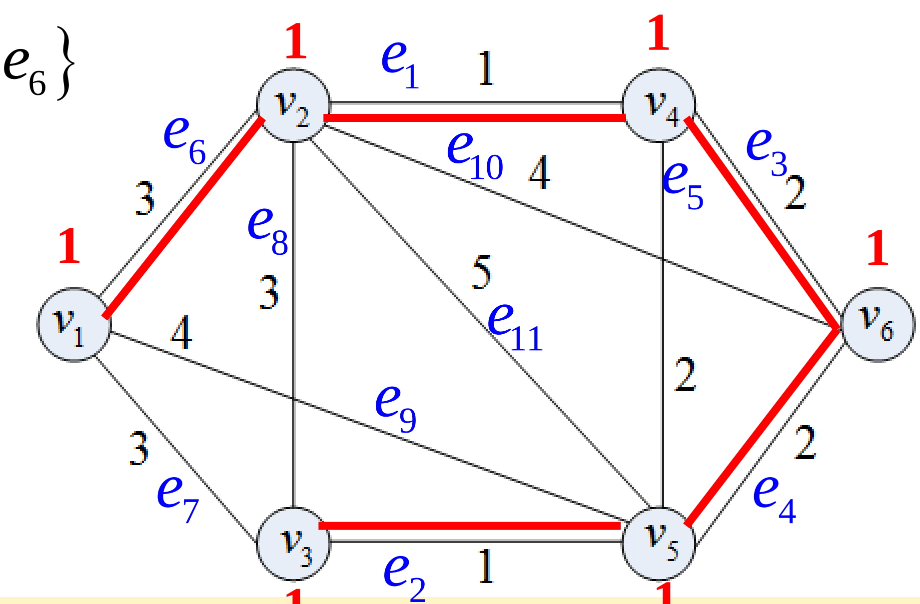
$i\neq 5, e_4$ 两端点标号不同, $S=S\cup\{e_4\}, i=4,\ j=5,$ 修改标号

$i\neq 5, e_5$ 两端点标号相同， $j=6$

$i\neq 5, e_6$ 两端点标号不同， $S=S\cup\{e_6\}$

$, i=5,\ j=7,$ 修改标号

$i=5,$ 计算结束



最小树：Dijkstra算法(1959，标号法)

出发点： 避免排序、回路判断；

设$G=(V,E,W)$是连通的无向网络，$|V|=n$，$|E|=m$

Step 1. 置 $p_j=1;(2\le j\le n)$

$u_j=w_{1,j}, S=\phi, R=\{2,3,\cdots,n\}$

Step 2. 求 $u_k=\min\limits_{j\in R} u_j=w_{i,k}$，置

$S=S\bigcup\{e_{p_k,k}\}, R=R\setminus\{k\}$

Step 3. 若 $R=\phi$，停；否则

对 $j\in R$，若$w_{k,j}<u_j$置$u_j=w_{k,j}, p_j=k$

转Step2；.

算法

S: 树中的边；**R**:尚未关联到树中的顶点

u_j:当前树外顶点到树中顶点的最小距离

p_j:指针，最小距离对应边的树中顶点号

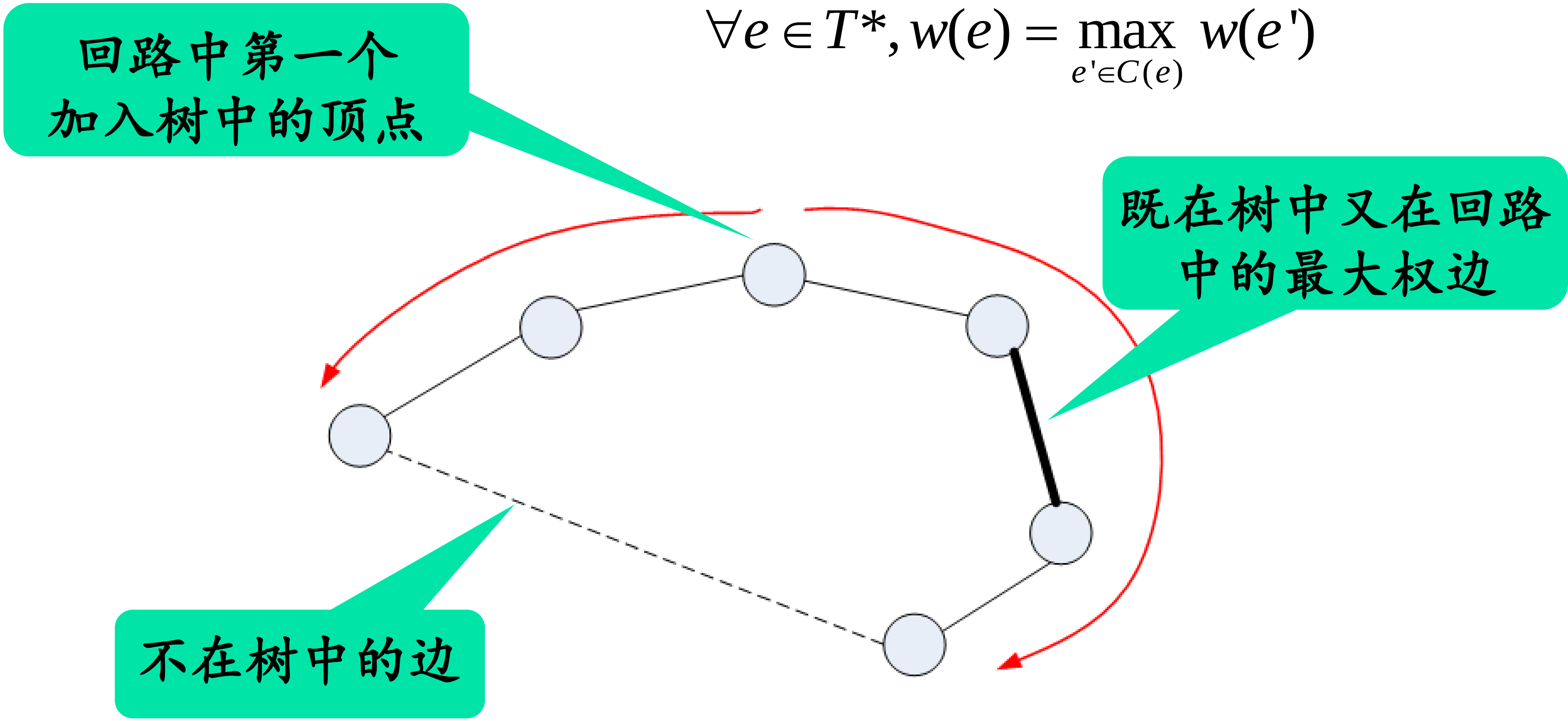
算法说明：

- 假定G为简单图(非本质假设)
- 除初始步外，每次加入一个顶点、一条边
- 双重标号
- 显然得到一棵树
- 无需回路判断
- 计算复杂性P210
- 正确性：基于定理5.4.1或5.4.2

最小树：Dijkstra算法(1959，标号法)

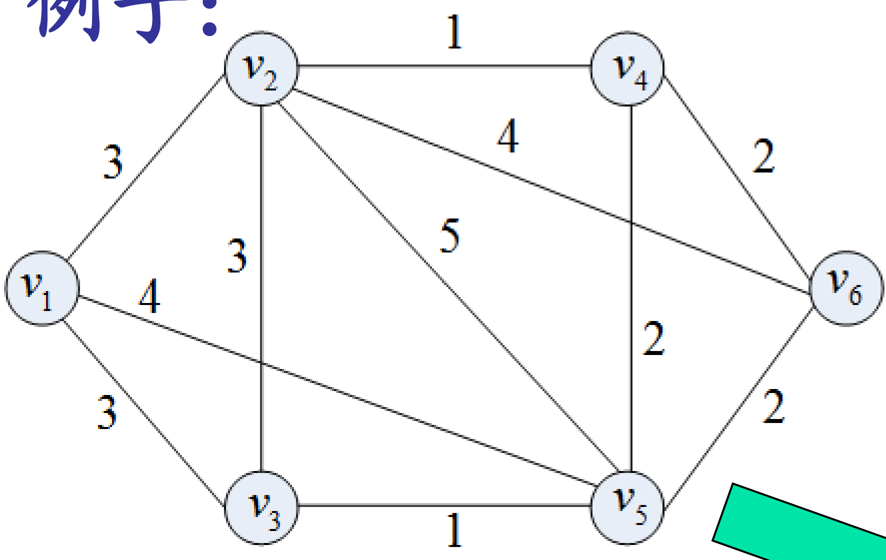
Dijkstra算法的正确性：几何解释

$$\forall e \in T^*, w(e) = \max_{e' \in C(e)} w(e')$$

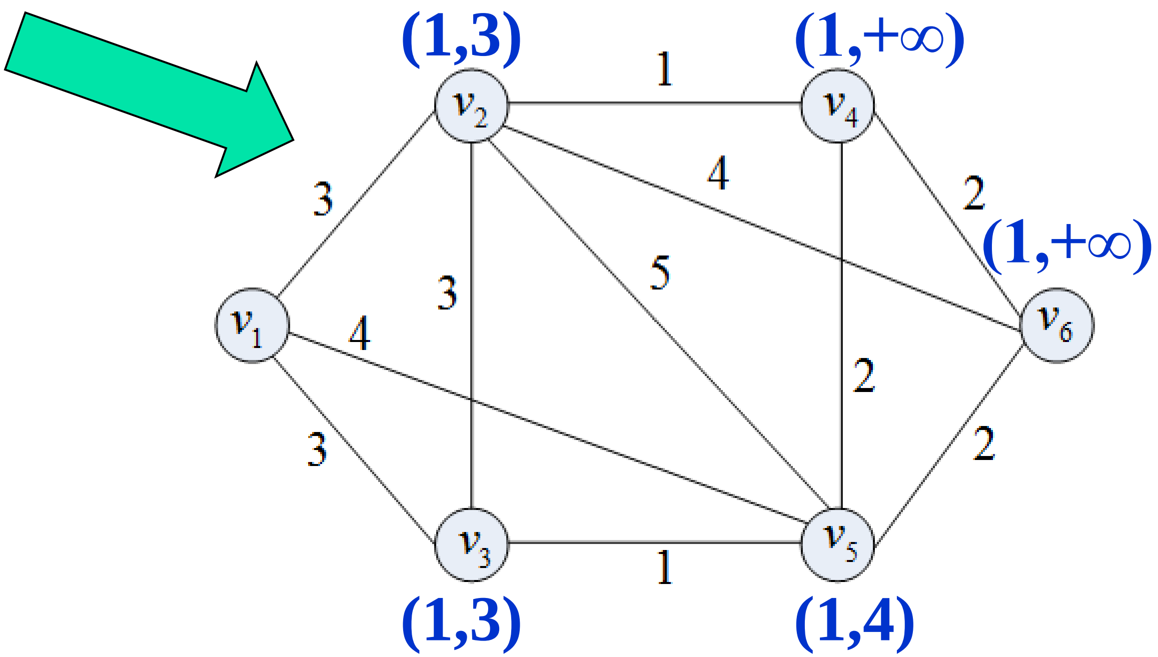


最小树：Dijkstra算法(1959，标号法)

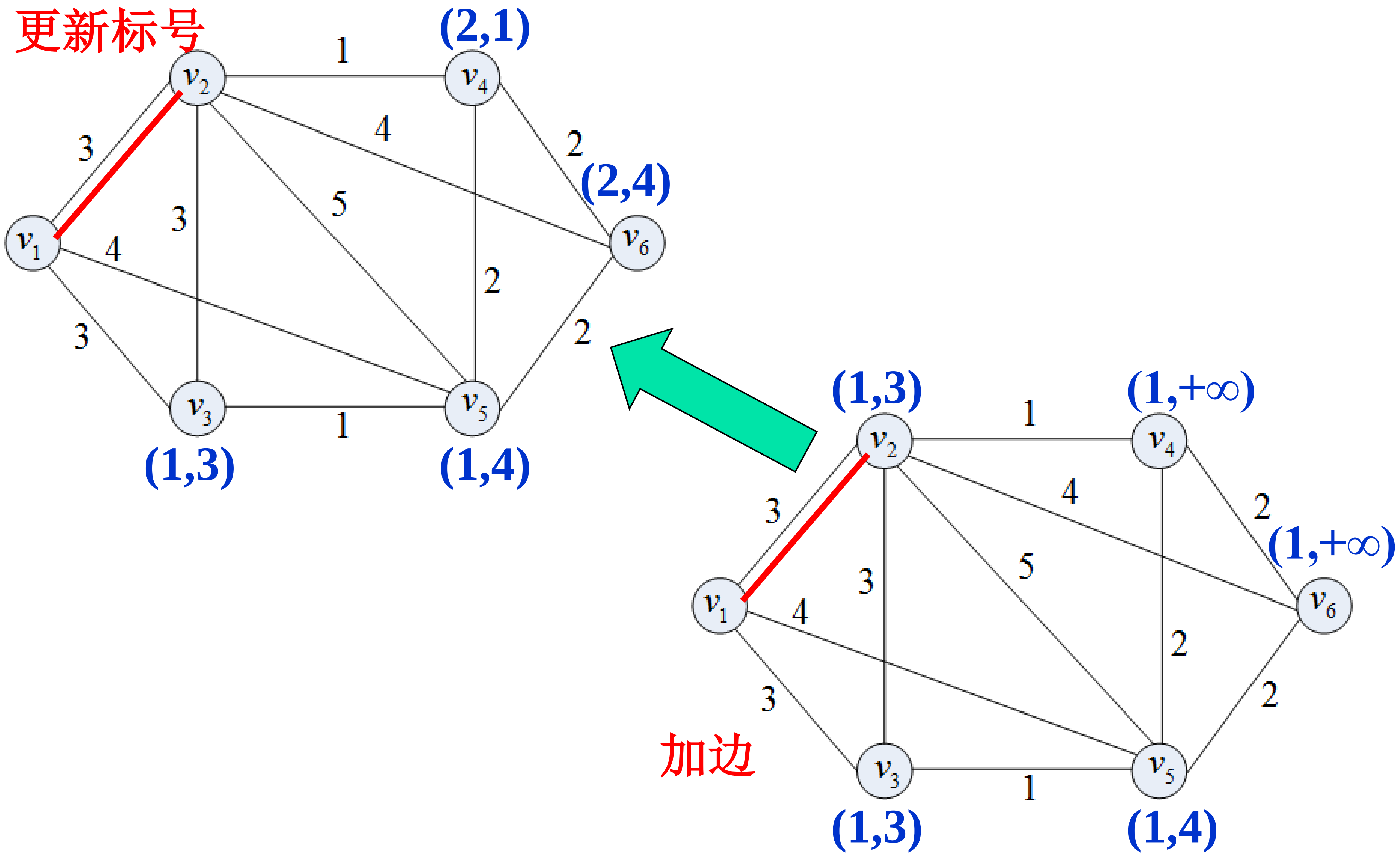
例子：



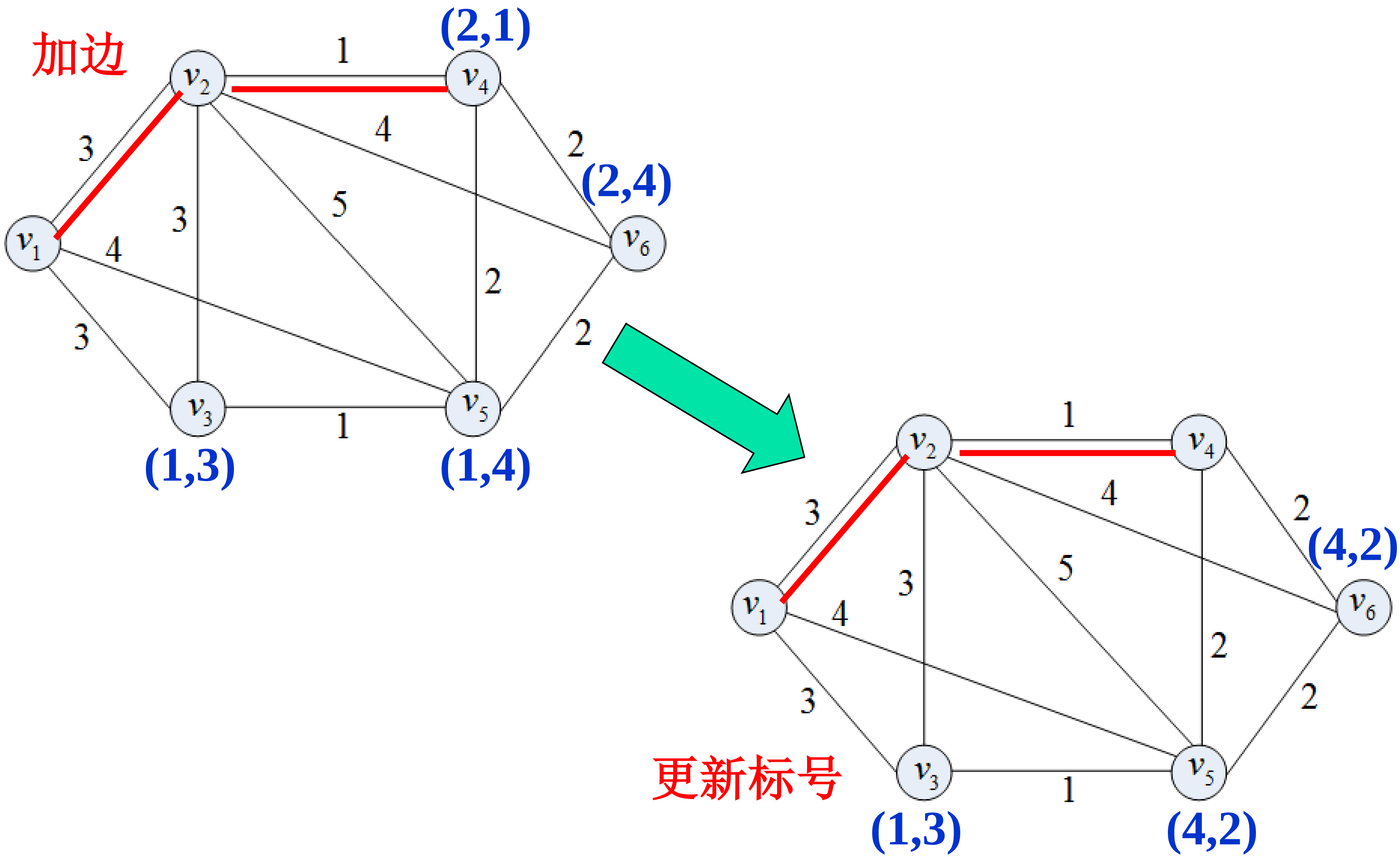
初始标号



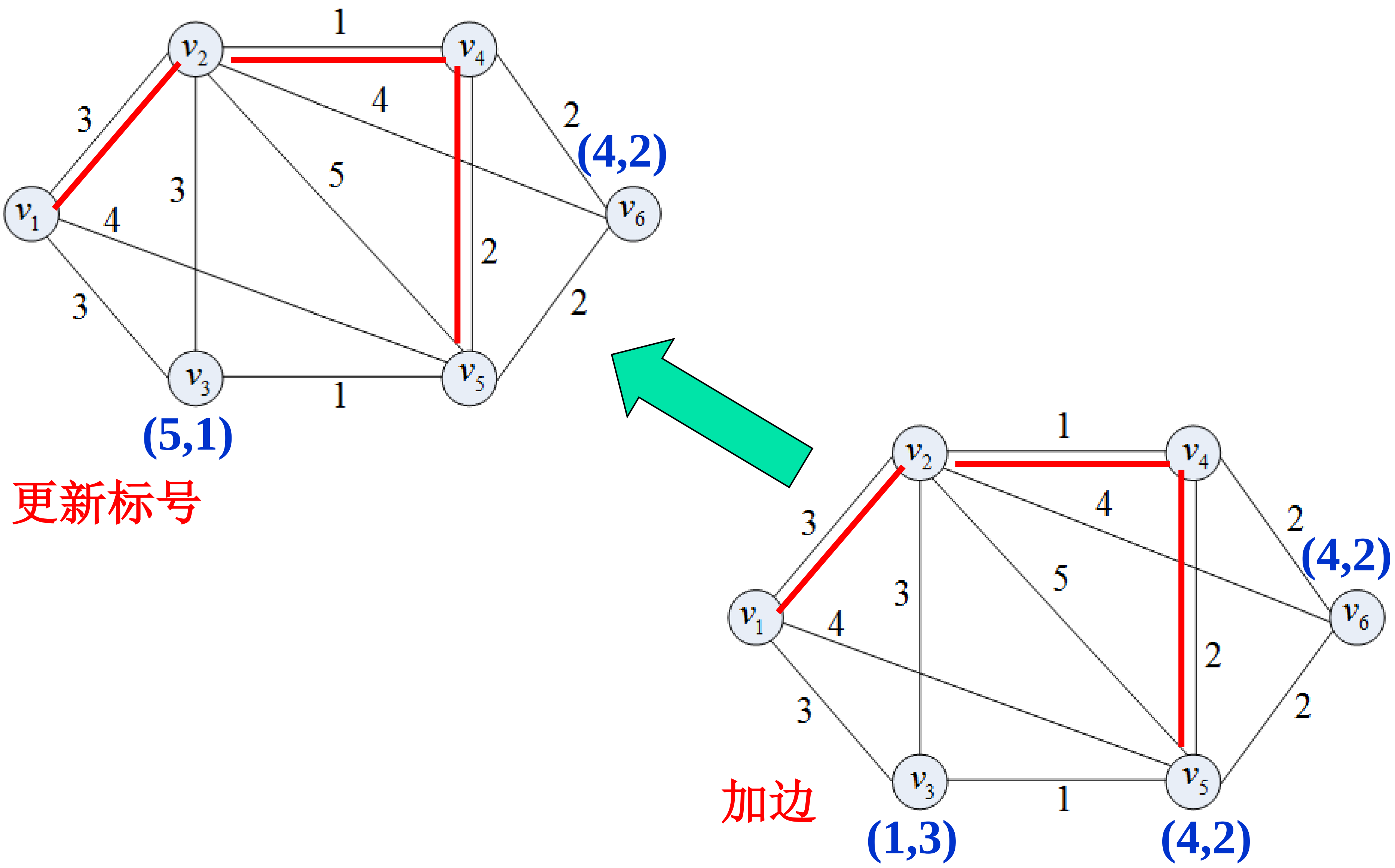
最小树：Dijkstra算法(1959，标号法)



最小树：Dijkstra算法(1959，标号法)

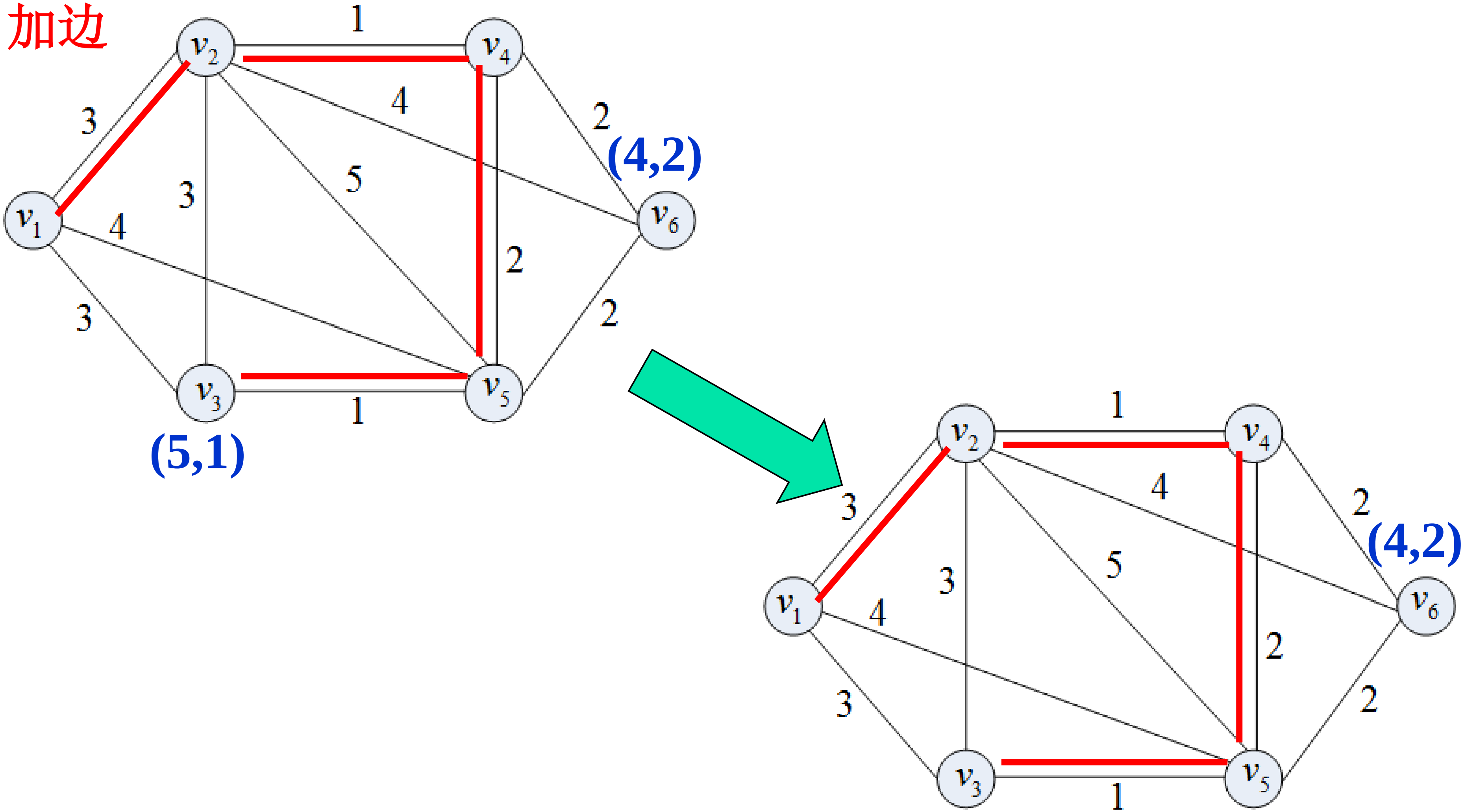


最小树：Dijkstra算法(1959，标号法)



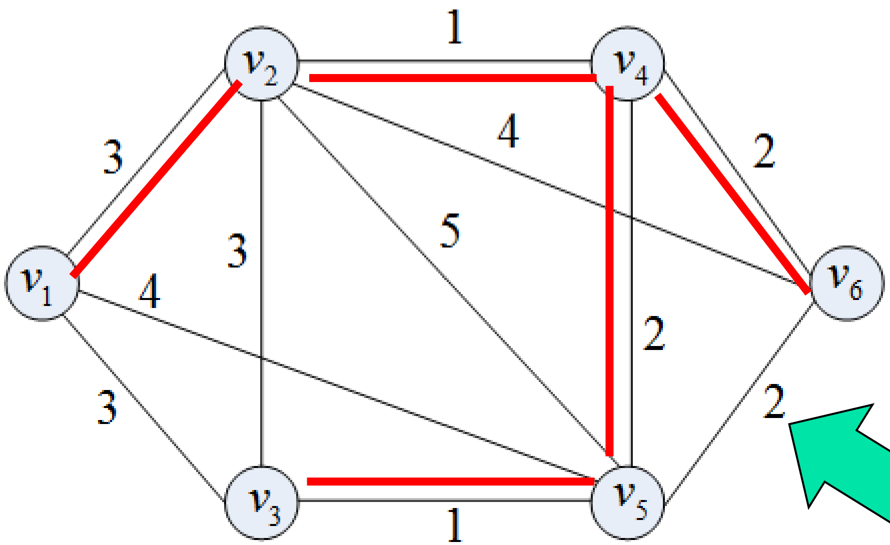
最小树：Dijkstra算法(1959，标号法)

加边

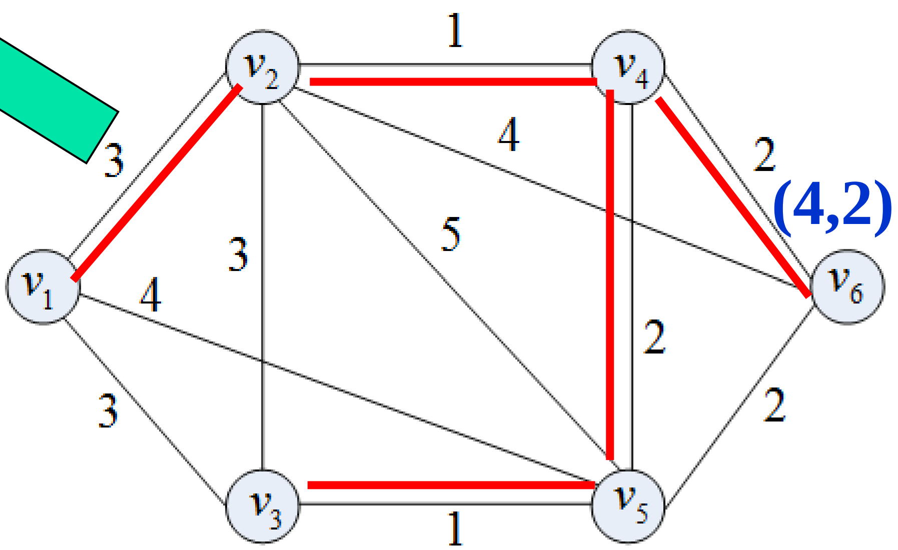


更新标号

最小树：Dijkstra算法(1959，标号法)



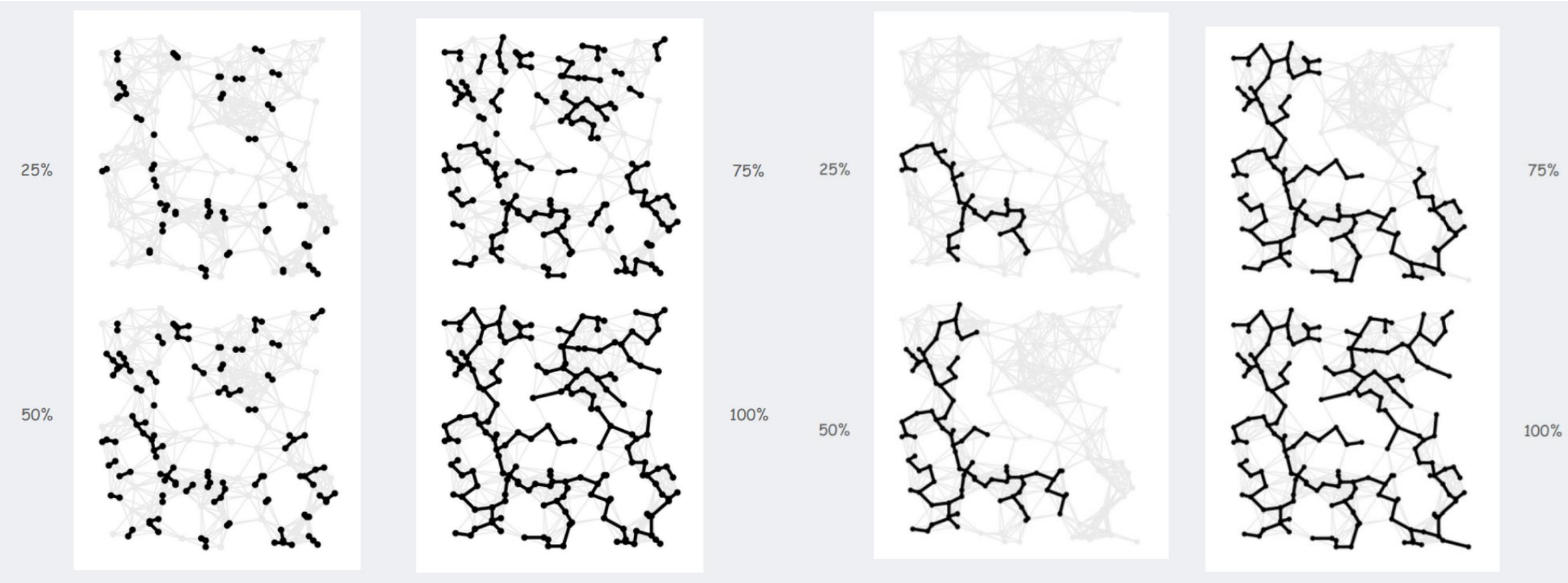
计算结束



加边

最小树：Kruskal’s vs Dijkstra’s

Kruskal’s *Dijkstra’s*

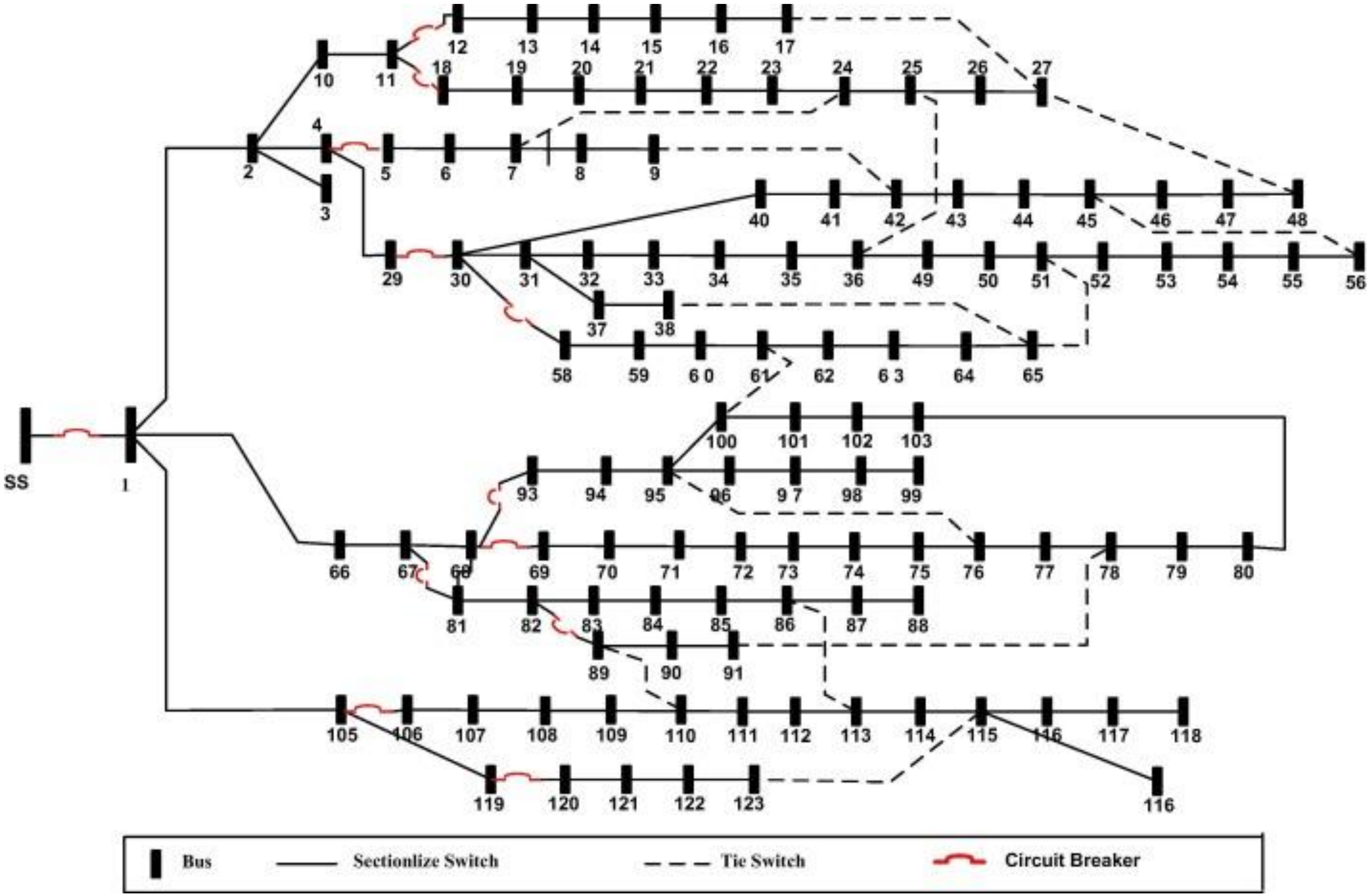


Algorithm 1 (Two Nearest Fragments)
Add a shortest edge which joins different fragments.

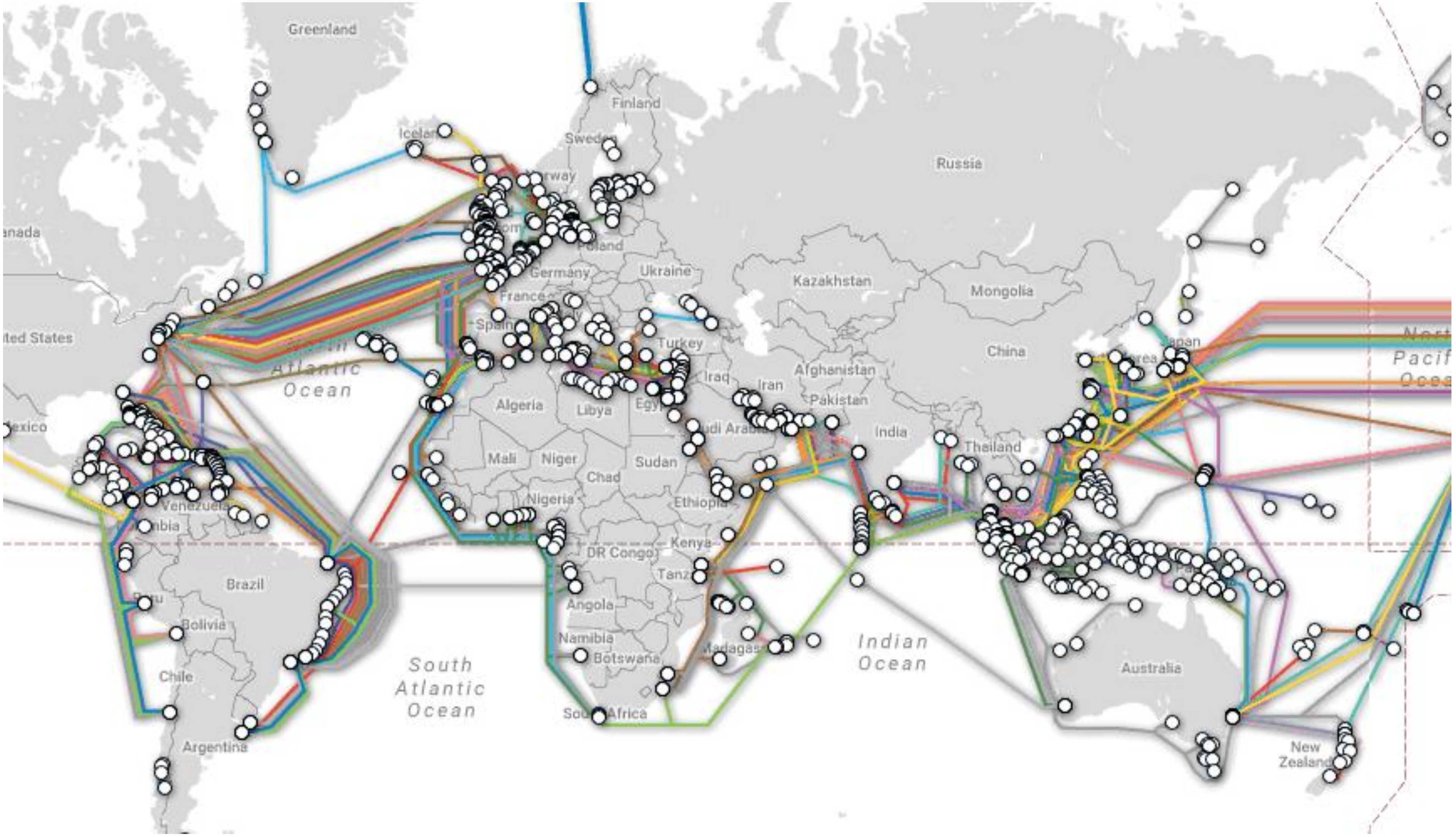
Algorithm 2 (Nearest Neighbor)
(A vertex v is arbitrarily chosen.) Add a shortest edge which joins the fragment containing v to another fragment.

Graham, Ronald L. and Pavol Hell. “On the History of the Minimum Spanning Tree Problem.” *Annals of the History of Computing* 7 (1985): 43-57.

最小树应用

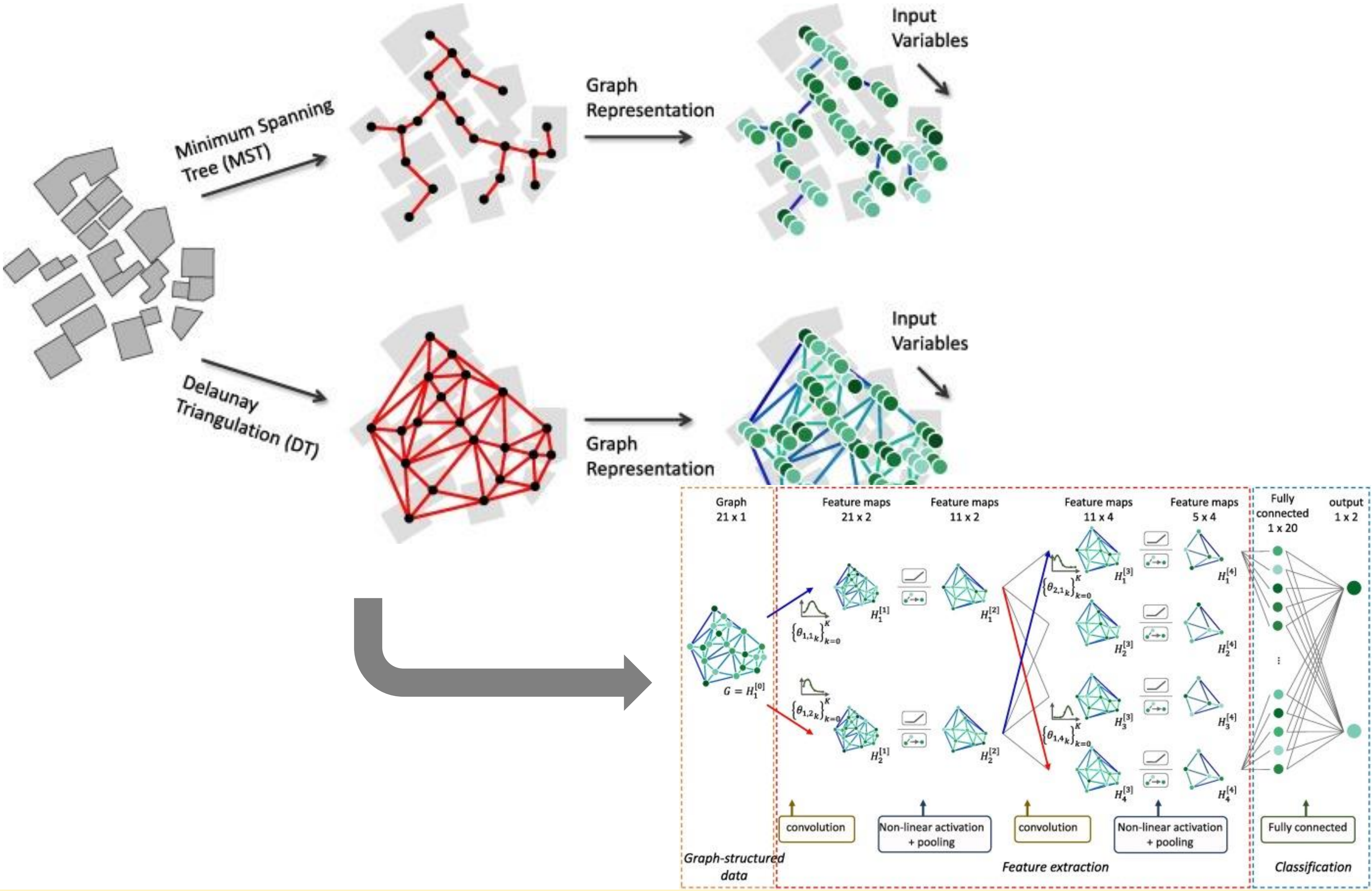


最小树应用



Greenland
Finland
Sweden
Russia
Ukraine
Kazakhstan
Mongolia
Germany
Poland
France
Spain
Turkey
China
Iraq
Iran
Afghanistan
Pakistan
India
Thailand
Algeria
Libya
Mali
Niger
Chad
Sudan
Nigeria
Ethiopia
Kenya
DR Congo
Angola
Namibia
Botswana
South Africa
Indian
Ocean
South
Atlantic
Ocean
Ocean
Brazil
Bolivia
Chile
Argentina
Venezuela
Australia
New
Zealand

最小树应用

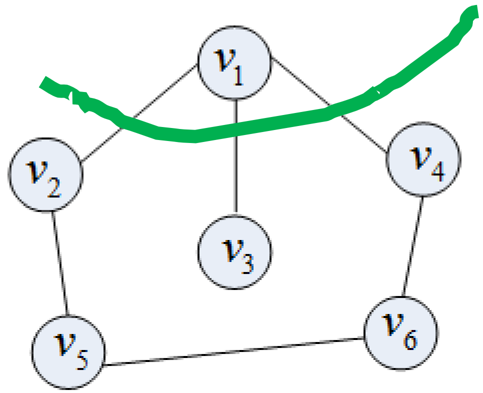


Minimum Spanning Tree (MST)
Graph Representation
Input Variables
Delaunay Triangulation (DT)
Graph Representation
Input Variables
Graph 21 x 1
Feature maps 21 x 2
Feature maps 11 x 2
Feature maps 11 x 4
Feature maps 5 x 4
Fully connected 1 x 20
output 1 x 2
convolution
Non-linear activation + pooling
convolution
Non-linear activation + pooling
Fully connected
Graph-structured data
Feature extraction
Classification

谢谢！

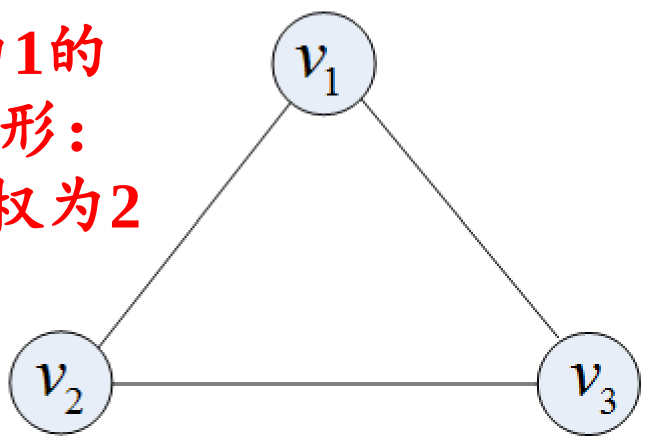
最小树：补充内容

勘误：P209算法解释，不是割集；P210图无标注



Steiner树:

边长为1的正三角形：最小树权为2



补充中心点后：最小树权为$\sqrt{3}$