第三次习题课

1 在6000m的高空大气层中产生一个π介子，以速度$v = 0.998c$飞向地球，假定该π介子在其自身的静止系中的寿命为2×10^{-6}s。试分别从下面两个角度，即地球上的观察者和π介子静止系中的观察者，来判断该π介子能否到达地球（已知$\sqrt{1-0.998^2} = 0.0632$，真空光速$c = 3 \times 10^8$m/s）

解：S系：地球　　S'系：π介子静止系　　$u = -0.998C$

在地球系下 π介子寿命内行进的路程是否大于大气层高度

$\Delta x = 6000m$　　$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 3.16 \times 10^{-5}s$　　$\beta = \frac{u}{c}$

$s = v\tau = 0.998C \times 3.16 \times 10^{-5}(m) \approx 9.47 \times 10^3 m > 6000m$　能

在π介子静止系下.　　$\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2} \approx 379.2m$

S'系下： $s' = u\tau_0 = 0.998c \times 2\times10^{-6}$ (m) ≈ 598.8m $> \Delta x'$ 能

2 宇宙飞船以$u=0.8c$的速度飞离地球。若地球接收到它发出的信号间隔为10s。试计算宇航员以自己的钟计时，发出的信号间隔是多少?

解: ① $\Delta t = t_2 - t_0 = 10s$

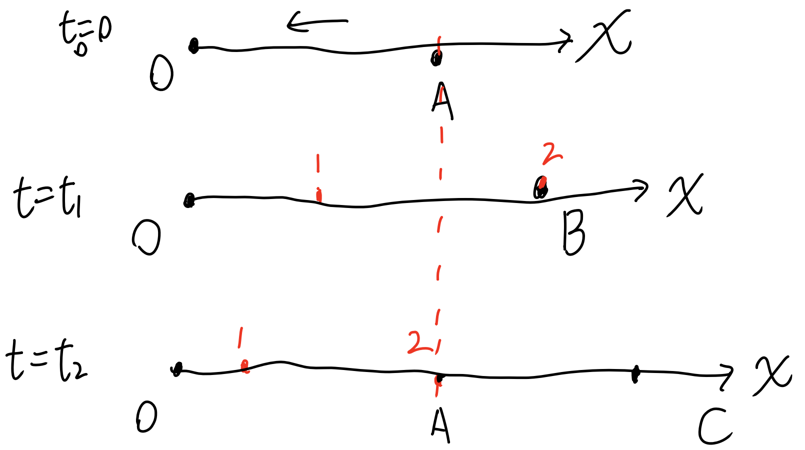
$t = t_1 - t_0$

$$\frac{d_{AB}}{0.8c} + \frac{d_{AB}}{c} = \Delta t$$

$$d_{AB} = \frac{40}{9}c\ (m)$$

$$t = t_1 - t_0 = \frac{d_{AB}}{0.8c} = \frac{50}{9}s$$

原时: $\tau_0 = \tau\sqrt{1-\beta^2} = \frac{50}{9}\times\frac{3}{5}s = \frac{10}{3}s$



事1: 地球接收到1

事2: 地球接收到2.

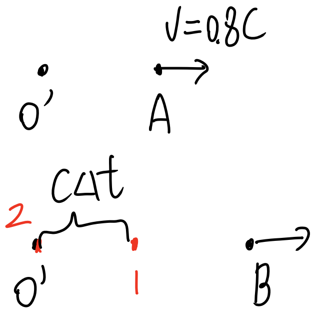
事3: 宇航员发射1

事4: 宇航员发射2

② 飞船系下，测量信号到达地球的时间间隔

Δt_{12} 啥关系? Δt_{14}

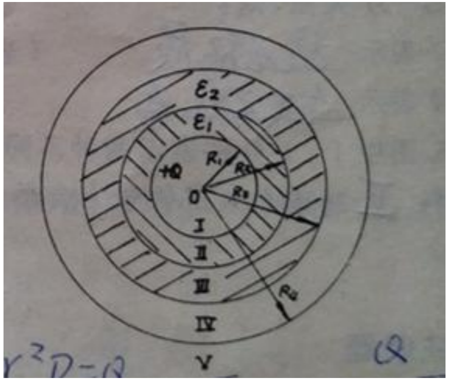
$$\tau' = \frac{\tau_0'}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10 \times \frac{5}{3} = \frac{50}{3}\,(s)$$



$$C\Delta t = [C - 0.8C]\,\tau'$$

$$\Delta t = \frac{10}{3}\,s$$

3 球形电容器由半径为R_1的导体球与它同心的均匀球壳构成，其间有两层同心的均匀介质球壳，介电常数分别为ε_1和ε_2，两层介质的分界面半径是R_2，导体球壳的内半径为R_3.球壳外半径R_4,球壳外是真空。设内球带电荷Q，球壳不带电。求：

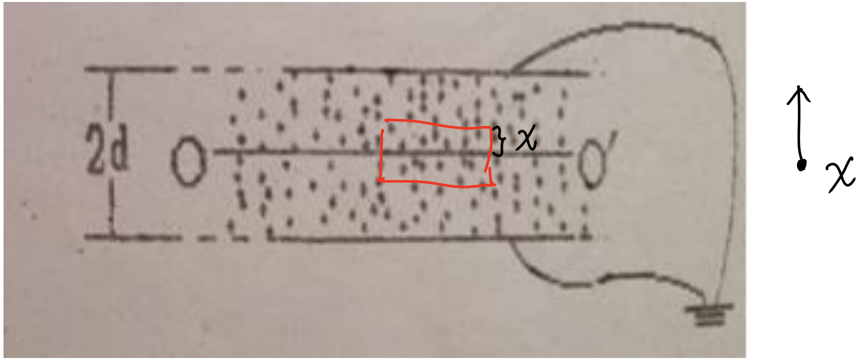


（1）各区域的电场强度

（2）两导体球间的电势差

（3）球形电容器的电容

4 两块“无限大”平行导体板，相距为$2d$，都与地连接，在板间均匀充满着正离子气体（与导体板绝缘）离子数密度为n，每个离子的带电量是q。如果忽略气体中的极化现象，可以认为电场分布相对中心平面OO'是对称的。试求两板间的场强分布和电势分布。



解：取如图所示高斯面，高 $h=2x$

底面积 S

$Q=Nq$

$N=nV=2nSx$

$Q=2nqSx$

高斯定理 $E=\frac{Q}{2S\varepsilon_0}=\frac{nqx}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{nqx}{\varepsilon_0}\vec{i} \qquad x \in (-d, d)$$

$0<x<d$: $U = \int_x^d -E\,dx = \int_x^d -\frac{nqx}{\varepsilon_0}\,dx = \frac{-nq}{2\varepsilon_0}(d^2-x^2) = U(d) - U(x)$

$$U(x) = \frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2-x^2)$$

$-d<x<0$: $U = \int_x^{-d} -E\,dx = -\frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2-x^2) = U(-d) - U(x)$

$$U(x) = \frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2-x^2)$$

$$U(x) = \frac{nq}{2\varepsilon_0}(d^2-x^2) \qquad x \in (-d, d)$$

5 氢原子是一个中心带正电q_e的原子核（可视为点电荷），外边是带负电的电子云。

在正常状态时，电子云的电荷分布密度是球对称的：$\rho = -\frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$，式中$a_0$是以常量（玻尔半径）。试求原子电场强度大小的分布。

$\rho = \rho(r)$

解：球对称分布 → 球面做高斯面，取原子核为球心，半径为r高斯面。

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$Q = q_e + \int \rho \, dV$$

$$= q_e + \int_0^r \rho \, 4\pi r^2 dr$$

$$= q_e + \int_0^r -\frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr$$

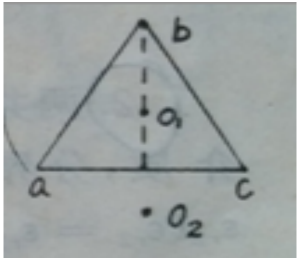
分部积分法求解

$$= \frac{q_e}{a_0^3} \left[(2a_0 r^2 + 2a_0^2 r + a_0^3) e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]$$

$$E = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2 a_0^2} \left[(2r^2 + 2a_0 r + a_0^2) e^{-\frac{2r}{a_0}} \right]$$

6 两共轴的导体圆筒，内筒的半径是R_1，外筒的半径是R_2 ($R_2 < 2R_1$）,其间充的两层均匀介质，分界面的半径是R，内层电介质的相对介电常数为$\varepsilon_{\gamma 1}$，外层电介质的相对介电常数为$\varepsilon_{\gamma 2}$（$\varepsilon_{\gamma_2} = \varepsilon_{\gamma 1}/2$），两层介质的击穿电场强度都是$E_{\mathrm{b}}$。试问当电压升高时，内外层介质哪一层先击穿，并计算此时所加的最大电压。

7 把均匀带电的绝缘细杆分为三段，拼成如图所示的正三边形，O_1为其重心，测得O_1、O_2两点的电势分别为u_1和u_2 (O_1 、O_2两点与ac对称)，现把ac棒移至无限远处，这时O_1和O_2两点的电势分别为多少?



解: 由对称性和电势叠加原理

移动前

$$U_1 = U_{ab} + U_{bc} + U_{ac}$$

$$U_{xx} = U_{xx} = \frac{U_1}{3}$$

$$U_2 = U_{ac} + U_{ab}' + U_{bc}'$$

$$U_{xx}' = U_{xx}' = \frac{U_2 - \frac{U_1}{3}}{2}$$

移动后

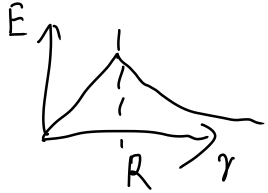
$$U_1' = U_{ab} + U_{bc} = \frac{2}{3}U_1$$

$$U_2' = U_{ab}' + U_{bc}' = U_2 - \frac{U_1}{3}$$

8 半径为R，带电量为Q的均匀球体，因电场斥力的作用，使电荷全部均匀分布在表面上，求电场力所作的功。

解：由球对称性及高斯定理，球体外的电场分布在初始状态和终了状态均不变

均匀分布时，球内的电场



取 $r<R$ 开始时电荷体密度 $\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3Q}{4\pi R^3}$

由高斯定理 $\oint E\cdot ds=\frac{Q}{\varepsilon_0}$　　$E=\frac{Q_总}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$　　$Q_总=\int\rho dV$

$=\frac{3Q}{4\pi R^3}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{Qr^3}{R^3}$

球面内电场强度 $E=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

电场能量密度：$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$　　$W=\int_0^R\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

II 电场力做的功_数值上与静电能的减小量相等

$$dA = \frac{1}{2}\Delta U dq$$

$$dq = \frac{3Q}{4\pi R^3} 4\pi r^2 dr$$

$$\Delta U = \int_r^R E\,dr = \frac{Q(R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

1 2

$+q$ $+q$

$$2 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

$$A = \int_0^R \frac{1}{2}\Delta U dq = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R}$$

9.实验表明，在靠近地面处的电场强度是$1.0\times10^{2}\mathrm{N/C}$,方向指向地球中心，在离地面$1.5\times10^{3}\mathrm{m}$高处，电场强度约为$20\mathrm{N/C}$，方向指向地球中心，则地球所带的总电荷量$Q$为多少？离地面$1.5\times10^{3}\mathrm{m}$下的大气层中电荷的平均密度$\rho$是多少？(地球可近似为球体，半径$R=6371\mathrm{km}$)

解：取同心球面作为高斯面. $r=R$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}=-4\pi R^2E_1 \qquad Q_1=-4\pi R^2E_1\varepsilon_0=-4.52\times10^5\mathrm{C}$$

取距地面1500m球面为高斯面 $r=R+h$

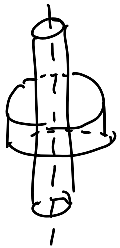
$$Q_2=-4\pi(R+h)^2E_2\varepsilon_0 \qquad \underline{Q}+Q_1=Q_2 \qquad \rho=\frac{Q_2-Q_1}{\frac{4}{3}\pi(r^3-R^3)}=\frac{3\varepsilon_0[E_1R^2-E_2(R+h)^2]}{[(R+h)^3-R^3]}$$

$$=4.72\times10^{-13}\mathrm{C/m^3}$$

测试题：

半径为 R 的无限长均匀带电直圆柱体，体密度为 ρ ，求圆柱体内外任一点的电场强度。

解：取同轴圆柱面作为高斯面 高为 L. 半径为 r

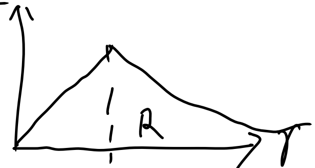


$r<R$ 时 $\quad Q=\rho\pi r^2 L \qquad \oint E\cdot ds=\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

$$E\cdot 2\pi r L=\frac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0} \qquad E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\propto r$$

$r>R$ 时 $\quad Q=\rho\pi R^2 L$

$$E\cdot 2\pi r L=\frac{\rho\pi R^2 L}{\varepsilon_0} \qquad E=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\propto r$$



补充：

根据狭义相对论，运动物体在运动方向上会发生洛仑兹收缩。现在有一列静止时200米长的火车即将以0.6c通过一条200米长的隧道。于是火车司机与隧道管理员发生了如下争执：

隧道管理员：火车由于高速行驶而发生洛仑兹收缩，所以火车的长度小于200米，必然存在某一时刻，火车整个车身都在隧道里。

火车司机：火车并没动，隧道由于在高速向火车冲过来而发生了洛仑兹收缩，所以隧道的长度小于200米，所以任何时刻火车都不可能完全在隧道里。

解：$t_1 = t_2 \qquad \Delta t = 0$

$t_1' = t_2' \qquad \Delta t' = 0$

实验1：在两隧道口安装向下的激光灯，当车尾进入隧道时，同时打开，另一个激光灯照不到车头

实验2：将激光灯移至火车头和尾，向上照射，当车尾进入隧道时，同时打开，另一个激光灯，照不到隧道

① S系：地面，S'系：火车

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 0 \\ x_1 = x_1' = 0 \end{cases} \quad x_2 = L \quad \text{根据洛伦兹正变换} \quad t_1' = 0 \quad t_2' = \frac{-uL/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-3}{4}\frac{L}{c}$$

$x_2' = \frac{5}{4}L$ 激光灯照射时车头在静止坐标 $-0.6ct_2' + L = \frac{11}{20}L = x' < L$

$$x'' = L\sqrt{1-\beta^2} + 0.6ct_2' = \frac{5}{4}L$$ （在火车系下，另一隧道口激光灯打开时，对应坐标）

② $t_1' = t_2' = 0$

$x_1' = x_1 = 0 \quad x_2' = L \quad$ 逆变换 $\quad t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{uL/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3}{4}\frac{L}{c}$

$$x_2 = L\sqrt{1-\beta^2} + 0.6ct_2 = \frac{4}{5}L + \frac{9}{20}L = \frac{5}{4}L$$

$$x_2 = \frac{x_2' + ut_2'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{4}L$$

火车隧道佯谬 同时性的相对性

S系下 $t_1 = t_2$ $\Delta t = 0$

S'系下 $t_1' = t_2'$ 不一定成立

$\Delta t' = 0$ 不一定成立.