1.3.2　“杨辉三角”与二项式系数的性质

【学习目标】 1.了解杨辉三角，会用杨辉三角求二项式乘方次数不大时的各项的二项式系数.2.理解二项式系数的性质并灵活运用.

问题导学

预习新知　夯实基础

知识点　“杨辉三角”与二项式系数的性质

$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数，当 n 取正整数时可以表示成如下形式：

$(a+b)^1$-------------------------1　1

$(a+b)^2$-----------------------1　2　1

$(a+b)^3$---------------------1　3　3　1

$(a+b)^4$-------------------1　4　6　4　1

$(a+b)^5$-----------------1　5　10　10　5　1

$(a+b)^6$---------------1　6　15　20　15　6　1

思考 1　从上面的表示形式可以直观地看出什么规律?

思考 2　计算每一行的系数和，你又能看出什么规律?

思考 3　二项式系数的最大值有何规律?

梳理　(1)杨辉三角的特点

①在同一行中，每行两端都是 1，与这两个 1 等距离的项的系数相等.

②在相邻的两行中，除 1 以外的每一个数都等于它“肩上”两个数的和，即 $C_{n+1}^{k}=C_{n}^{k-1}+C_{n}^{k}$.

(2)二项式系数的性质

性质	内容
对称性	$C_n^m=C_n^{n-m}$，即二项展开式中，与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等
增减性与最大值	如果二项式的幂指数 n 是偶数，那么展开式中间一项 $T_{\frac{n}{2}+1}$ 的二项式系数最大
	如果 n 为奇数，那么其展开式中间两项 $T_{\frac{n+1}{2}}$ 与 $T_{\frac{n+1}{2}+1}$ 的二项式系数相等且同时取得最大值
各二项式	二项展开式中各二项式系数的和等于 2^n，即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots$

系数的和	$+C_n^n=\underline{2^n}$
	奇数项的二项式系数之和等于<u>偶数</u>项的二项式系数之和，都等于 2^{n-1}，即 $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^2+C_n^4+C_n^6+\cdots=\underline{2^{n-1}}$

思考辨析　判断正误

1．杨辉三角的每一斜行数字的差成一个等差数列．(　　)

2．二项式展开式的二项式系数和为 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$.(　　)

3．二项式展开式中系数最大项与二项式系数最大项相同．(　　)

题型探究

启迪思维　探究重点

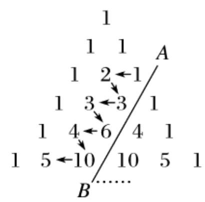
类型一　与杨辉三角有关的问题

例 1　(1)杨辉三角如图所示，杨辉三角中的第 5 行除去两端数字 1 以外，均能被 5 整除，则具有类似性质的行是(　　)

第 0 行	1
第 1 行	1　1
第 2 行	1　2　1
第 3 行	1　3　3　1
第 4 行	1　4　6　4　1
第 5 行	1　5　10　10　5　1
……	……　　　……

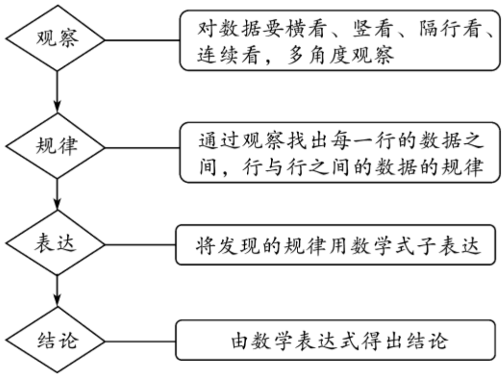
A．第 6 行　B．第 7 行　C．第 8 行　D．第 9 行

(2)如图，在杨辉三角中，斜线 AB 上方箭头所示的数组成一个锯齿形的数列：1,2,3,3,6,4,10,…，记这个数列的前 n 项和为 $S(n)$，则 $S(16)$等于(　　)



A．144　B．146　C．164　D．461

反思与感悟　解决与杨辉三角有关的问题的一般思路



跟踪训练 1　如图所示，在由二项式系数所构成的杨辉三角中，第________行中从左至右的第 14 个数与第 15 个数的比为 2∶3.

第 0 行　1
第 1 行　1　1
第 2 行　1　2　1
第 3 行　1　3　3　1
第 4 行　1　4　6　4　1
第 5 行　1　5　10　10　5　1
……　……　……

类型二　二项式系数和问题

例 2　已知$(2x-1)^5=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$.

求下列各式的值：

(1)$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5$；

(2)$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|$；

(3)$a_1+a_3+a_5$.

引申探究

在本例条件下，求下列各式的值：

(1)$a_0+a_2+a_4$；

(2)$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$；

(3)$5a_0+4a_1+3a_2+2a_3+a_4$.

反思与感悟　二项展开式中系数和的求法

(1)对形如$(ax+b)^n$，$(ax^2+bx+c)^m(a，b，c\in\mathbf{R}，m，n\in\mathbf{N}^*)$的式子求其展开式的各项系数之和，常用赋值法，只需令 $x=1$ 即可；对$(ax+by)^n(a，b\in\mathbf{R}，n\in\mathbf{N}^*)$的式子求其展开式各项系数之和，只需令 $x=y=1$ 即可．

(2)一般地，若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则 $f(x)$展开式中各项系数之和为 $f(1)$，

奇数项系数之和为 $a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$，

偶数项系数之和为 $a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$.

跟踪训练 2　在二项式$(2x-3y)^9$的展开式中，求：

(1)二项式系数之和；

(2)各项系数之和；

(3)所有奇数项系数之和.

类型三　二项式系数性质的应用

例 3　已知 $f(x)=(\sqrt[3]{x^2}+3x^2)^n$ 展开式中各项的系数和比各项的二项式系数和大 992.

(1)求展开式中二项式系数最大的项；

(2)求展开式中系数最大的项.

反思与感悟　(1)二项式系数的最大项的求法

求二项式系数的最大项，根据二项式系数的性质对$(a+b)^n$中的 n 进行讨论．

①当 n 为奇数时，中间两项的二项式系数最大．

②当 n 为偶数时，中间一项的二项式系数最大．

(2)展开式中系数的最大项的求法

求展开式中系数的最大项与求二项式系数最大项是不同的，需要根据各项系数的正、负变化情况进行分析．如求$(a+bx)^n(a，b\in\mathbf{R})$的展开式中系数的最大项，一般采用待定系数法．设展开式中各项系数分别为 $A_0，A_1，A_2，\cdots，A_n$，且第 $k+1$ 项最大，应用$\begin{cases}A_k\geqslant A_{k-1}，\\A_k\geqslant A_{k+1}，\end{cases}$解出 k，即得出系数的最大项．

跟踪训练 3　写出$(x-y)^{11}$的展开式中：

(1)二项式系数最大的项；

(2)项的系数绝对值最大的项；

(3)项的系数最大的项和系数最小的项；

(4)二项式系数的和；

(5)各项系数的和.

达标检测

1．观察图中的数所成的规律，则 a 所表示的数是(　　)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ & & 1 & & 4 & & a & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

A．8　B．6　C．4　D．2

2．$(1+x)^{2n+1}$的展开式中，二项式系数最大的项所在的项数是(　　)

A．n，$n+1$　　B．$n-1$，n

C．$n+1$，$n+2$　　D．$n+2$，$n+3$

3．已知$\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$展开式中，各项系数的和与其各项二项式系数的和之比为 64，则 n 等于(　　)

A．4　　B．5

C．6　　D．7

4．设$(-3+2x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_0+a_1+a_2+a_3$ 的值为________.

5．已知$\left(\dfrac{1}{4}+2x\right)^n$的展开式中前三项的二项式系数的和等于 37，则展开式中二项式系数最大的项的系数为________.

规律与方法

1．二项式系数的性质可从杨辉三角中直观地看出．

2．求展开式中的系数或展开式中的系数的和、差的关键是给字母赋值，赋值的选择则需根据所求的展开式系数和特征来确定．一般地对字母赋的值为 0,1 或－1，但在解决具体问题时要灵活掌握．

3．注意以下两点：(1)区分开二项式系数与项的系数．

(2)求解有关系数最大时的不等式组时，注意其中 $k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$．

课时对点练

注重双基　强化落实

一、选择题

1．如图是与杨辉三角有类似性质的三角形数垒，a，b 是某行的前两个数，当 $a=7$ 时，b 等于(　　)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 2 & & 2 & & & & \\ & & & 3 & & 4 & & 3 & & & \\ & & 4 & & 7 & & 7 & & 4 & & \\ & 5 & & 11 & & 14 & & 11 & & 5 & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a & b & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \end{array}$$

A．20　B．21　C．22　D．23

2．若$\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$的展开式中只有第 6 项系数最大，则该展开式中的常数项为(　　)

A．210　　B．252

C．462　　D．10

3．已知关于 x 的二项式$\left(\sqrt{x}+\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$展开式的二项系数之和为32，常数项为80，则 a 的值为(　　)

A．1　B．±1　C．2　D．±2

4．$(x-1)^{11}$ 的展开式中，x 的奇次幂的系数之和是(　　)

A．2 048　B．$-1\ 023$　C．$-1\ 024$　D．1 024

5．若 $x^{10}=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$，则 a_8 的值为(　　)

A．10　　B．45

C．-9　　D．-45

6．设$\left(5x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式的各项系数和为 M，二项式系数和为 N，若 $M-N=240$，则展开式中 x 的系数为(　　)

A．-150　B．150　C．300　D．-300

7．已知$(2x-1)^n$ 二项展开式中，奇次项系数的和比偶次项系数的和小 3^8，则 $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n$的值为(　　)

A．2^8　　B．2^8-1　　C．2^7　　D．2^7-1

8．关于下列$(a-b)^{10}$ 的说法，错误的是(　　)

A．展开式中的二项式系数之和是 1 024

B．展开式的第 6 项的二项式系数最大

C．展开式的第 5 项或第 7 项的二项式系数最大

D．展开式中第 6 项的系数最小

二、填空题

9．已知$(1+x)^{10}=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_{11}x^{10}$，若数列 a_1，a_2，a_3，…，$a_k(1\leqslant k\leqslant 11，k\in \mathbf{Z})$是一个单调递增数列，则 k 的最大值是________.

10．在$\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}}\right)^n$的展开式中，所有奇数项系数之和为 1 024，则中间项系数是________.

11．若 $x^4(x+3)^8=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{12}(x+2)^{12}$，则 $\log_2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=$_____.

三、解答题

12．设$(2-\sqrt{3}x)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}$，求下列各式的值.

(1)求 a_0；

(2)$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{100}$；

(3)$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$；

(4)$(a_0+a_2+\cdots+a_{100})^2-(a_1+a_3+\cdots+a_{99})^2$；

(5)$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{100}|$.

13．已知$\left(x+\dfrac{m}{x}\right)^n$展开式的二项式系数之和为 256.

(1)求 n；

(2)若展开式中常数项为$\dfrac{35}{8}$，求 m 的值；

(3)若$(x+m)^n$展开式中系数最大项只有第 6 项和第 7 项，求 m 的取值情况.

四、探究与拓展

14．设$(3x-2)^6=a_0+a_1(2x-1)+a_2(2x-1)^2+\cdots+a_6(2x-1)^6$，则$\dfrac{a_1+a_3+a_5}{a_0+a_2+a_4+a_6}=$________.

15．已知$(\sqrt[3]{x}+x^2)^{2n}$的展开式的系数和比$(3x-1)^n$的展开式的系数和大 992，求$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$的展开式中：

(1)二项式系数最大的项；

(2)系数的绝对值最大的项.