2018 ～2019 学年第 一 学期

《 微积分（一)》课程考试试卷(A 卷) 解答

一． 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.）

1. 以下关于数列的命题，正确的是【 】.

A. 一个有界数列与一个无界数列的和是无界数列

B. 两个无界数列的和是无界数列

C. 一个有界数列与一个无界数列的乘积是无界数列

D. 两个无界数列的乘积是无界数列

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则函数 $\sqrt[3]{f(x)}$ 在 $x=a$ 处【 】.

A. 可导 B. 不连续 C. 连续但不一定可导 D. 不可导

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内【 D 】

A. 有界 B. 可导 C. 存在最大值 D. 原函数存在

4. 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 有【 B 】.

A. 一个极小值和一个极大值 B. 一个极小值 C. 两个极小值 D. 两个极大值

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内满足 $f'(x)<0, f''(x)>0$. 则在区间 (a,b) 内【 A 】

A. $f(x)$ 单调减少，曲线 $y=f(x)$ 下凸. B. $f(x)$ 单调减少，曲线 $y=f(x)$ 上凸.

C. $f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 下凸. D. $f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 上凸.

6. 设 $M=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x, N=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\sec x}\mathrm{d}x, K=\int_0^{\pi/4}\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$，则 M,N,K 的大小关系为【 B 】.

A. $M<N<K$ B. $M<K<N$ C. $N<M<K$ D. $K<N<M$

二． 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上.）

7. 设 $u=x+a\ln(1-x)+bx\sin(3x)$ 是 x 的 3 阶无穷小，则 $a=$______，$b=$______.

分析 根据泰勒展开 $u=x+a\left(-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx(3x+o(x^2))$

$$=(1-a)x+(3b-\frac{a}{2})x^2-\frac{a}{3}x^3+o(x^3)$$

是 x 的 3 阶无穷小,所以 $a=1, b=1/6$.

8. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 3$ 的拐点坐标为____________ .

分析 令 $y'' = 6x - 12 = 0$,得 $x = 2$.易知拐点坐标为 $(2,-3)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\tan t\mathrm{d}t}{\sin x^4} =$_____ .

分析 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\tan t\mathrm{d}t}{\sin x^4} = \dfrac{\tan(1-\cos x)\sin x}{4x^3} = \dfrac{1}{8}$.

10. 曲线 $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$ 的长度为________.

分析 $l = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\mathrm{d}t = 24\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\mathrm{d}t = 12$.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程.）

11. 求曲线 $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 5}\ (x > 0)$ 的渐近线.

解 $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+5}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4 + 2x^{-1} + 5x^{-2}} = 2$, （3 分）

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+2x+5} - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+5}{\sqrt{4x^2+2x+5}+2x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+5x^{-1}}{\sqrt{4+2x^{-1}+5x^{-2}}+2} = \dfrac{1}{2}$, (6 分）

于是得斜渐近线 $y = 2x + \dfrac{1}{2}$,曲线没有其它渐近线. (7 分）

12. 写出 $f(x) = \ln(1+x)$ 带 Lagrange 余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ （3 分）

$f(0) = 0, f'(0) = 1, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ （5 分）

所以 $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, 0 < \theta < 1, x > -1$.（7 分）

13. 求不定积分 $I = \int\dfrac{\sqrt{x-3}}{2x}\mathrm{d}x$.

解 作代换 $\sqrt{x-3} = t, x = t^2 + 3, t > 0, \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, （2 分）

得到 $I=\int\frac{t^2}{t^2+3}\mathrm{d}t=t-3\int\frac{1}{t^2+3}\mathrm{d}t$ （5 分）

$$=\sqrt{x-3}-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}+C.$$ （7 分）

14. 求定积分 $I=\int_0^{1/2}x\arcsin x\mathrm{d}x$.

解 $I=\frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^{1/2}-\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ （3 分）

$$=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}\sin^2 t\mathrm{d}t.$$ （5 分）

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/6}\cos 2t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{48}=\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{48}.$$ （7 分）

15. 求反常积分 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$.

解 $J=\int\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(-\cos x)=-\mathrm{e}^{-2x}\cos x-\int(-\cos x)(-2\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x$

$$=-\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^{-2x}\cos x-2(\mathrm{e}^{-2x}\sin x-\int\sin x(-2\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x)$$ (4 分)

所以 $J=-\mathrm{e}^{-2x}\frac{2\sin x+\cos x}{5}+C$

$$I=\left[-\mathrm{e}^{-2x}\frac{2\sin x+\cos x}{5}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{5}.$$ （7 分）

16. 求微分方程 $y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x$ 的通解。

解 这是一个伯努利方程. 令 $u=1/y$, 将原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{u}{x}=-\ln x.$$ （2 分）

这是一个一阶线性微分方程. 根据通解公式得到

$$u=x(\int-\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+C)=x(C-\frac{\ln^2 x}{2}).$$ (6 分)

所以原方程通解为 $xy(C-\frac{\ln^2 x}{2})=1.$ （7 分）

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程.）

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x}, x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)\\ \mathrm{e}, \quad\quad x=0\end{cases}$. 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

解 当 $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ 时,

$$f'(x)=(1+x)^{1/x}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}. \quad\quad (2\text{ 分})$$

而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. （4 分）

又因 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}=f'(0)$.

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续. 在其他地方 $f'(x)$ 显然连续. 综上 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 处处连续.（7 分）

18. 求平面图形 $0\le y\le\cos x, 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 绕 y 轴旋转所得立体的体积.

解法一 按圆柱体积微元，得到

$$V=2\pi\int_0^{\pi/2}x\cos x\mathrm{d}x\text{（4 分）}=2\pi\left[x\sin x+\cos x\right]_0^{\pi/2}=\pi^2-2\pi. \quad\quad (7\text{ 分})$$

解法二 按平行截面体体积公式得到

$$V=\pi\int_0^1\arccos^2 y\mathrm{d}y\text{（4 分）}$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2}t^2\sin t\mathrm{d}t=\pi\cdot2t\sin t+(2-t^2)\cos t\Big|_0^{\pi/2}=\pi^2-2\pi. \quad\quad (7\text{ 分})$$

五. 综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程.）

19. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶可导，且 $f(a)=f(b)$，$|f''(x)|\le M$. 证明: $|f'(a)+f'(b)|\le M(b-a)$.

证法一 由罗尔定理知存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$.再用拉格朗日中值定理可得（2 分）

$$|f'(a)-f'(c)|=|f''(\xi)(a-c)|\le M(c-a), \text{即} |f'(a)|\le M(c-a),$$

$$|f'(b)-f'(c)|=|f''(\eta)(b-c)|\le M(b-c), \text{即} |f'(b)|\le M(b-c), \quad\quad (4\text{ 分})$$

进而得

$$|f'(a)+f'(b)|\le|f'(a)|+|f'(b)|\le M(b-a). \quad\quad (5\text{ 分})$$

证法二 记 $c=\dfrac{a+b}{2}, h=c-a=b-c$，则由 Taylor 公式得

$$f(c)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(\xi)h^2,$$

$$f(c)=f(b)-f'(b)h+\frac{1}{2}f''(\eta)h^2, \qquad \text{（4 分）}$$

以上二式相减（注意 $f(a)=f(b)$）得

$$[f'(a)+f'(b)]h=\frac{1}{2}[f''(\eta)-f''(\xi)]h^2.$$

又 $|f''(x)|\le M$，所以有

$$|f'(a)+f'(b)|\le Mh=\frac{1}{2}M(b-a). \qquad \text{（5 分）}$$

20. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，并且 $f''(x)\le 0$.证明 $\int_a^b f(x)dx\ge\frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$.

证法一 设 $F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{(t-a)(f(a)+f(t))}{2}$, 则 $F(a)=0$. （2 分）

对 $F(t)$ 求导得到

$$F'(t)=\frac{f(t)-f(a)-(t-a)f'(t)}{2}=\frac{(t-a)(f'(\xi)-f'(t))}{2}\ge 0, \qquad \text{（4 分）}$$

从而 $F(t)$ 单调递增, $F(b)\ge F(a)=0$.即不等式成立. (5 分)

证法二 由已知，函数 $f(x)$ 为上凸函数.于是成立

$$f((1-t)a+tb)\ge(1-t)f(a)+tf(b), 0\le t\le 1. \qquad \text{（2 分）}$$

对此不等式在 $[0,1]$ 上积分得

$$\int_0^1 f((1-t)a+tb)\mathrm{d}t\ge\int_0^1((1-t)f(a)+tf(b))\mathrm{d}t \qquad \text{（4 分）}$$

左边换元，右边计算即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}.$$

（5 分）