1. $A = \dot{\Phi}(0)$

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \\ -4e^{-2t}+2e^{-t} & -4e^{-2t}+e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$t=0 \Rightarrow \dot{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

2. $A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}$, $A^4 = I$

$$A^7 - A^3 + 2I = A^3 \cdot A^4 - A^3 + 2I = 2I = \begin{bmatrix} 2&0&0&0 \\ 0&2&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \end{bmatrix}$$

3. $u = 1(t)$

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$t_0 = 0$

$$\Rightarrow x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\,d\tau$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $|\lambda I - A| = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = P\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-2e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 4e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ -4e^{-t}+5e^{-2t} \end{bmatrix}$$