期中考试模拟题（十）答案 2022.11

一、1. 0.6　2. $\dfrac{5}{8}$　3. 1　4. $f(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3(y-3)}{2}}, & y>3\\ 0, & y\le 3\end{cases}$　5. 5

二、 1. B　2. C　3. A　4. C　5. B

三、设 $A=\{中级职员\}$，$B=\{职员通过测试\}$.

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}=\frac{75\%\times 80\%}{75\%\times 80\%+25\%10\%}=96\%$$

四、(1) X 和 Y 的分布律分别为

X	0	1	2
P	0.64	0.32	0.04

Y	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

X 与 Y 相互独立，(X,Y)的分布律如右表.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.16	0.08	0.01
1	0.32	0.16	0.02
2	0.16	0.08	0.01

（2）$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.32$，

$D(Y)=0.5$，

$D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)=4\times 0.32+0.5=1.78$.

五、（1）由连续的条件有：$\begin{cases}A+B\arcsin\dfrac{-a}{a}=0\\ A+B\arcsin\dfrac{a}{a}=1\end{cases}$，可得 $A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{\pi}$.

（2）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a\\ 0, & |x|\ge a\end{cases}$.

（3）因为方程 $t^2+Xt+\dfrac{a^2}{16}=0$ 有实根，则 $X^2-\dfrac{a^2}{4}\ge 0$，故

$$P\left(X^2-\frac{a^2}{4}\ge 0\right)=P\left(X\ge\frac{a}{2}\right)+P\left(X\le-\frac{a}{2}\right)=\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}dx+\int_{-a}^{-\frac{a}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{2}{3}.$$

六、 (1) X 的边缘概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 3x\mathrm{d}y=3x^2, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$

Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 3x\mathrm{d}x=\dfrac{3(1-y^2)}{2}, & 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) 当 $0\le y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, & y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

(3) 因为 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 或 $f_{X|Y}(x|y)\ne f_X(x)$，所以 X 与 Y 不独立。

七、（1）$\varphi(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 1\cdot f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{z-1}^{z} f_Y(y)\mathrm{d}y$.

当 $z\le 0$ 时，$\varphi(z)=\int_{z-1}^{z} f_Y(y)\mathrm{d}y=0$；

当 $0<z\le 1$ 时，$\varphi(z)=\int_{z-1}^{z} f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^z \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-z}$；

当 $z>1$ 时，$\varphi(z)=\int_{z-1}^{z} f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{z-1}^{z}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-z}(\mathrm{e}-1)$；

故概率密度为 $\varphi(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ 1-\mathrm{e}^{-z} & 0<z\le 1.\\ \mathrm{e}^{-z}(\mathrm{e}-1) & z>1\end{cases}$

（2）$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x e^{-y}dy=e^{-1}$

八、(1) $X_i\sim E(\lambda)$，则 $E(X_i)=\dfrac{1}{\lambda}=10$，$D(X_i)=\dfrac{1}{\lambda^2}=100$，

$$E(X_1^2+X_2)=E(X_1^2)+E(X_2)=D(X_1)+\left[E(X_1)\right]^2+E(X_2)=210$$

(2) L_1 的寿命 $Y_1=\min\{X_1,X_2\}$，Y_1 的分布函数 $F_{Y_1}(y_1)$

当 $y_1>0$ 时，$F_{Y_1}(y_1)=1-\left[1-F_{X_1}(y_1)\right]\left[1-F_{X_2}(y_1)\right]=1-e^{-0.1y_1}\cdot e^{-0.1y_1}=1-e^{-0.2y_1}$

当 $y_1\le 0$ 时，$F_{Y_1}(y_1)=1-(1-0)(1-0)=0$.

L_2 的寿命 $Y_2=\min\{X_3,X_4,X_5\}$ 的分布函数 $F_{Y_2}(y_2)=\begin{cases}1-e^{-0.3y_2}, & y_2>0;\\ 0, & y_2\le 0.\end{cases}$

(3) L 的寿命 $Y=\max\{Y_1,Y_2\}$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}\left(1-e^{-0.2y}\right)\left(1-e^{-0.3y}\right), & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$