2021—2022 学年第一学期 期中考试模拟题

《高等数学》(共 8页)

(**考试时间**：2021 **年** 11 **月** 6 **日**，15：00-17：30，**共** 2 **小时** 30 **分钟**)

班级______	考场______
姓名______	座号______

成绩	

*** 预祝考生们在考试中取得理想成绩 ***

命题：大数据 01 张锦羽、计算机 006 唐培元、力学理 81 叶义晨、人工智能 001 刘海若.
排版：越杰 001 曾云海.(以上排名不分先后，按照专业拼音及班级序号排序)

一. 单项选择题 (共 5 题，每题 3 分，共 15 分)

1. 设 $x \to 0$ 时,$\mathrm{e}^{\tan x} - \mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为 (　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

2. 设数列 x_n 与 y_n 满足：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列说法正确的是 (　).

A. 若 x_n 发散，则 y_n 有界
B. 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小
C. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小
D. 必有 x_n 为无穷小或 y_n 为无穷小

3. 已知 $f(x)$ 在 x=0 的某个邻域内连续，且 $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos(x)} = 2$, 则在点 x=0 处 $f(x) =$ (　).

A. 不可导　　　　　B. 可导且 $f'(x) \neq 0$
C. 取得极大值　　　D. 取得极小值

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$(　).

A. 等于 1　　B. 为无穷大　　C. 不存在，但不是无穷大　　D. 等于 0

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}, n=1,2,3\cdots \end{cases}$，则 (　).

A.x=0 是 $f(x)$ 的第一类间断点
B.x=0 是 $f(x)$ 的第二类间断点
C.$f(x)$ 在 x=0 处连续但不可导
D.$f(x)$ 在 x=0 处可导

二. 填空题 (共 4 题，每题 3 分，共 12 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{3\arctan x+b\sin 2x}{\ln(1+x)}, x>0 \\ 1, x=0 \\ \frac{1-\sqrt[a]{1-x^2}}{x^2}, x<0 \end{cases}$，在点 x=0 处连续，

则 a=___,b=___.

2. 如果函数 $y=f(x)$ 满足 $f^{'}(0)=-1$，那以下说法正确的是_____.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1$

(2)$f(x)$ 在 x=0 处连续

(3)$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{e}^h-1)-f(-h)}{h}=-2$

(4)$f(x)$ 在 x=0 的邻域内单调递减

3. 设函数 $f(x)=\frac{\cos x}{1+x}$ 在 x=0 处的泰勒展开式为 $a+bx+cx^2+dx^3$，则泰勒展开式为______（带 x^3 的高阶无穷小）.

4. 设函数 $f(x)$ 在点 x=0 的某个邻域内可展开成泰勒级数，且 $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，则 $f(0),f^{'}(0)f^{''}(0)$ 分别为_____.

三. 解答题 (共 7 题，第一题 20 分，第 2-4 题每题 8 分，第 5 题 9 分，第 6-7 题每题 10 分，共 73 分)

(每小题 5 分，共 20 分)1. 计算下列极限或导数.

(1).$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

(2). 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^2}=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

(3). 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}}}{\ln^2(2x-1)}$.

(4). 已知函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}$ $(0<\mathrm{t}<\pi)$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

2.(共 8 分) 求函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x-1|\,|x-2|}$ 的间断点，并说明间断点的类型.

3.(共 8 分) 试求函数 $f(x)=(2x+10)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极值、单调区间、渐近线.

4.(共 8 分) 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\le x\le 1} f(x)=-1$，证明 $\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|\ge 8$.

5.(共 9 分) 已知数列 x_n 满足 $x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n(3-x_n)(n=1,2,3\cdots)$，且 $0<x_1<3$，证明 x_n 收敛，并且求其极限.

6.(共 10 分) 设函数 $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}$，试写出 $f(x)$ 在 x=0 处的四阶麦克劳林公式 (带拉格朗日余项).

7.(共 10 分)$f(x)$ 在 [0,1] 二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$, 求证存在 $\zeta\in(0,1)$, 使得 $f^{''}(\zeta)=f(\zeta)$.

四. 附加题 (不算在总分内，第 1-2 题每题 6 分，第 3 题 8 分，共 20 分)

1.(共 6 分) 设数列 x_n 中的每一项 x_n 都满足方程：

$$nx - 1 + \ln x = 0$$

证明 x_n 收敛，并求其极限.

2.(共 6 分) 设 $f(x)$ 在 [-2,2] 上二阶可导，且 $|f(x)| \leq 1$，$f^2(0) + [f^{'}(0)]^2 = 4$，求证在 (-2,2) 上至少存在一点 ζ，使得 $f(\zeta) + f^{''}(\zeta) = 0$.

3.(共 8 分) 设数列 x_n 定义如下：$x_1=\sqrt{5}$,$x_{n+1}=x_n^2-2, n\geq 1$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{x_{n+1}}$.