第四章习题

4.1 假设 $x(t)$ 是一个周期为 1 ms 的连续时间信号，它的傅里叶级数为

$$x(t)=\sum_{k=-9}^{9}a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}$$

对于 $|k|>9$，傅里叶系数 a_k 为零，以采样间隔 $T=\frac{1}{6}\times10^{-3}$ s 对 $x(t)$ 采样，得到

$$x(n)=x\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right)$$

(1) $x(n)$ 是周期的吗？如果是，周期为多少？

(2) 采样周期 T 是否充分小且可以避免混叠？

(3) 利用 a_k 求出 $x(n)$ 的离散傅里叶级数系数。

解：

（1） $x(n)=\sum_{k=-9}^{9}a_k e^{j2\pi kn/6}$

x(t)的周期为 1ms，因此 x(n)的周期为 $N=10^{-3}/T=6$

（2） $X(j\Omega)=\sum_{k=-9}^{9}a_k\delta\left(\Omega-2\pi k/10^{-3}\right)$，其截止频率为 $\Omega_0=2\pi\cdot 9/10^{-3}$

而采样频率 $\Omega_s=2\pi/T=2\pi\cdot 6/10^{-3}<2\Omega_0=2\pi\cdot 18/10^{-3}$，因此不能避免混叠。

（3）记周期信号 $x(n)$ 为 $\tilde{x}(n)$，其 DFS 为

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j2\pi kn/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{s=-9}^{9}a_s e^{j2\pi sn/6}e^{-j2\pi kn/N}$$

$$=\sum_{s=-9}^{9}a_s\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi sn/6}e^{-j2\pi kn/N}=\sum_{s=-9}^{9}a_s\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi(s-k)n/N}=\sum_{s=-9}^{9}a_s\frac{1-e^{2\pi(s-k)}}{1-e^{j2\pi(s-k)/N}}$$

由于 $\boxed{\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi(s-k)sn/N}=\begin{cases}N, & s-k=mN,\ m\in R\\ 0, & \text{其它}\end{cases}}$

所以 $s=k+mN$

$\tilde{X}(0)=6(a_0+a_6+a_{-6})$，$\tilde{X}(1)=6(a_1+a_7+a_{-5})$，$\tilde{X}(2)=6(a_2+a_8+a_{-4})$

$\tilde{X}(3)=6(a_3+a_9+a_{-3}+a_{-9})$，$\tilde{X}(4)=6(a_4+a_{-2}+a_{-8})$，$\tilde{X}(2)=6(a_5+a_{-1}+a_{-7})$

知识要点：1）信号周期（由最低频子信号决定）和最高频率的区别；2）复指数的正交求和公式，作业4.10页用到该公式。

4.10 考虑复序列

$$x(n)=\begin{cases} e^{j\omega_0 n}, & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

数字滤波器设计的基本表达式

(1) 求 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$；

(2) 求有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT；

(3) 对于 $\omega_0=2\pi k_0/N$，其中 k_0 为整数的情况，求 $x(n)$ 的 DFT。

解：(1) $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-0}^{N-1}e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n}$$

即

$$X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j(\omega-\omega_0)N}}{1-e^{-j(\omega-\omega_0)}}=\frac{e^{-j(\omega-\omega_0)(N/2)}}{e^{-j(\omega-\omega_0)/2}}\frac{\sin[(\omega-\omega_0)(N/2)]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]}$$

$$X(e^{j\omega})=e^{-j(\omega-\omega_0)((N-1)/2)}\frac{\sin[(\omega-\omega_0)(N/2)]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]}$$

(2) 有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\omega_0 n}W_N^{kn}=\frac{1-e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)N}}{1-e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)}}$$

$$X(k)=e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)((N-1)/2)}\frac{\sin[((2\pi k/N)-\omega_0)(N/2)]}{\sin[((2\pi k/N)-\omega_0)/2]}$$

可以注意到

$$X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=(2\pi k/N)}$$

(3) 当 $\omega_0=2\pi k_0/N$，其中 k_0 为整数时，$x(n)$ 的 DFT 为

$$X(k)=\frac{1-e^{-j(k-k_0)2\pi}}{1-e^{-j(k-k_0)(2\pi)/N}}=e^{-j(2\pi/N)(k-k_0)((N-1)/2)}\frac{\sin[\pi(k-k_0)]}{\sin[\pi(k-k_0)/N]}$$

4.23 设 $x(n)$ 为一 N 点序列，其 N 点 DFT 为 $X(k)$，由教材中式(4.39a)和(4.39b)证明 DFT 的帕塞瓦定理

$$\sum_{m=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

解：由于

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}\right]^* \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)X(k)
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

知识要点：（1）帕斯瓦尔能量守恒定理；（2）交换求和顺序。

4.27 考虑图 4.21 所示的函数 $x(t)$，用 $N=6$ 对其采样。假如应用 DFT 对波形作谐波分析，那么采样间隔 T 应取多大？计算和画出 DFT 的结果，并与该函数的傅里叶级数比较，解释两者的差别。

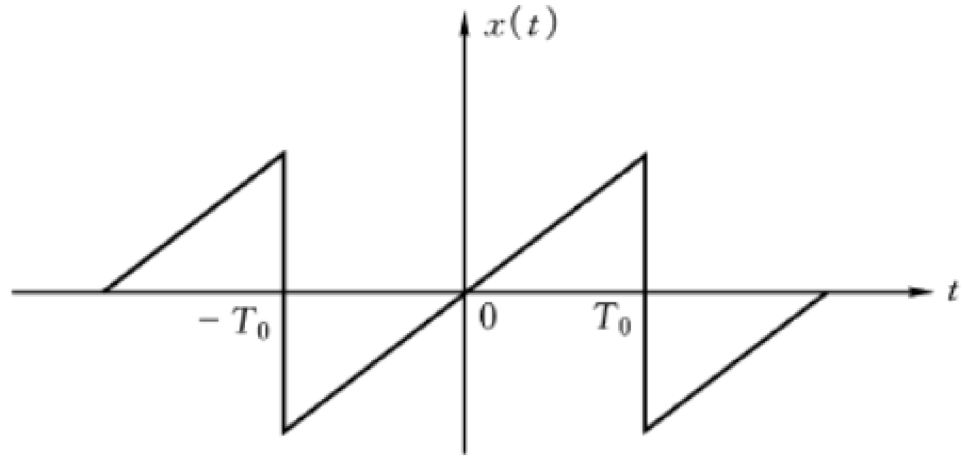


图 4.21

解：对 $x(t)$ 用 $N=6$ 进行采样，使用 DFT 进行谐波分析，信号周期为 $2T_0$，设图示信号为

$$x(t)=\frac{t}{T_0},\ t\in[-T_0,T_0]$$

且 $x(t+2T_0)=x(t)$，那么

$$a_k=\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0}\frac{t}{T_0}e^{-jkt\frac{2\pi}{2T_0}}dt=\begin{cases}j\cos(k\pi)/k\pi, & k\neq 0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

由于采样间隔 $N=6$，那么 $T=\frac{2T_0}{6}=\frac{T_0}{3}$。同时

$$x(n)=x\left(\frac{nT_0}{3}\right)=\sum_{n=0}^{5}X(k)e^{j\frac{2\pi}{6}kn}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{5}x\left(\frac{nT_0}{3}\right)e^{-j\frac{2\pi}{6}kn}=-\frac{2}{3}\mathrm{j}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

绘制 DFT 结果如图 4.22 所示。

知识要点：信号不是带限，DFT是傅里叶级数混叠的结果。注意理解采样点N、采样频率f_s、基波频率Δf等概念，以及他们与物理频率分辨率、计算频率分辨率的关系。

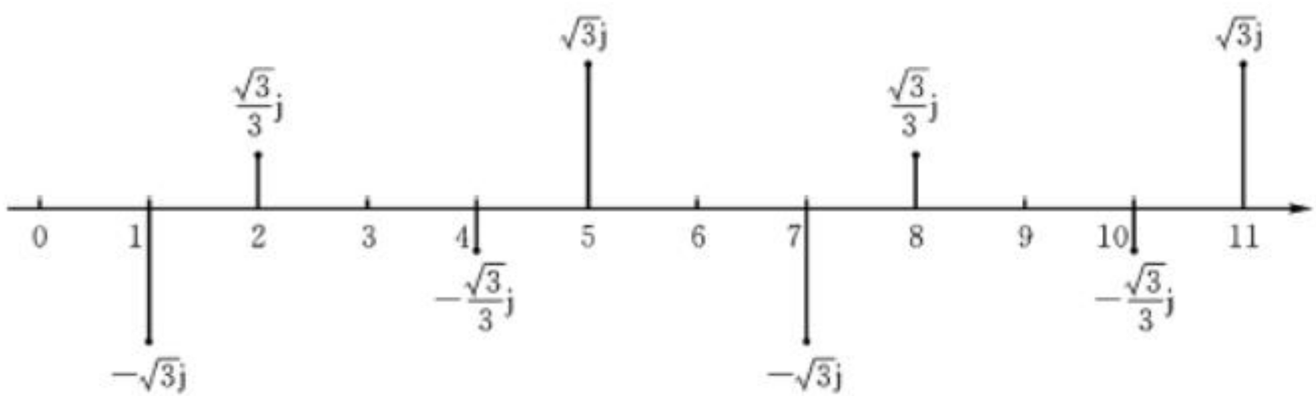


图 4.22

4.29 已知 N 点有限长序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 及 N 点的 DFT 系数 $X(k)$，导出下列各序列的 DFT。

(1) $x(N-1-n)$，$0\leqslant n\leqslant N-1$

(2) $x(2n)$，$0\leqslant n<\frac{N}{2}$，N 为偶数

(3) $y(n)=\begin{cases}x(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & N\leqslant n\leqslant 2N-1\end{cases}$

知识要点：参考上述过程可给出任意抽取信号的傅里叶变换。如果对信号进行插值、后端补零，其傅里叶变换如何？其物理意义是什么？

回顾：已知 $h(n)$ 的 DTFT 为 $H(e^{j\omega})$，计算 $h_d(n)=h(2n)$ 的 DTFT。

解答：

设 $h_p(n)=\dfrac{1+(-1)^n}{2}h(n)=\begin{cases}h(n), n=0,2,4,\ldots\\ 0,\ others\end{cases}$

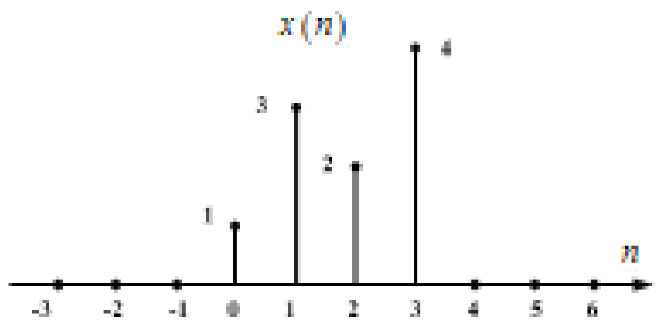
则 $H_d(e^{j\omega})=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}h_d(m)e^{-j\omega m}=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}h_p(2m)e^{-j\omega m}=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}h_p(m)e^{-j\omega m/2}=H_p(e^{j\omega/2})$

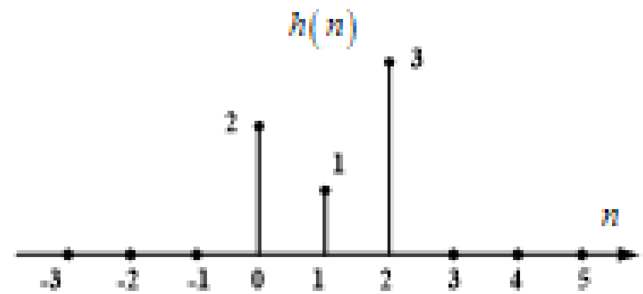
由 $h_p(n)=\dfrac{1+(-1)^n}{2}h(n)$ 得 $H_p(e^{j\omega})=\dfrac{1}{2}\left[H(e^{j\omega})+H(e^{j(\omega-\pi)})\right]$

因此 $H_d(e^{j\omega})=\dfrac{1}{2}\left[H(e^{j\omega/2})+H(e^{j(\omega/2-\pi)})\right]$

补充题目

分别计算下列有限长序列$x(n), 0 \le n \le 3$和$h(n), 0 \le n \le 2$的线性卷积$x(n) * h(n)$以及 4 点循环卷积$x(n) \textcircled{4} h(n)$。





答案：

线性卷积：$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) = \{2, 7, 10, 19, 10, 12\}$

4 点循环卷积：$y(n) = \sum_{m=0}^{4-1} x(m) h((n-m))_4 R_4(n) = \{12, 19, 10, 19\}$

例 4.7 一模拟信号 $x(t)$ 由等强度的频率为 $f_1=2$ kHz，$f_2=2.5$ kHz，$f_3=3$ kHz 的正弦信号

$$x(t)=\cos(2\pi f_1 t)+\cos(2\pi f_2 t)+\cos(2\pi f_3 t)$$

组成。利用 10 kHz 的采样频率对上述信号进行采样，分别取两种不同采样点数，即采样序列的长度为 $L=10$ 和 $L=20$。试问：取哪种序列长度可以分离该模拟信号 $x(t)$ 所含有的三个正弦信号？

解 $x(t)$ 中包含的频率分量的最小间隔为

$$\Delta f = 2.5\ \text{kHz} - 2\ \text{kHz} = 0.5\ \text{kHz}$$

要使上述信号中的三种频率分量得到分离，则物理频率分辨率必须满足

$$f_p=\frac{f_s}{L}\leqslant \Delta f$$

因此，得到

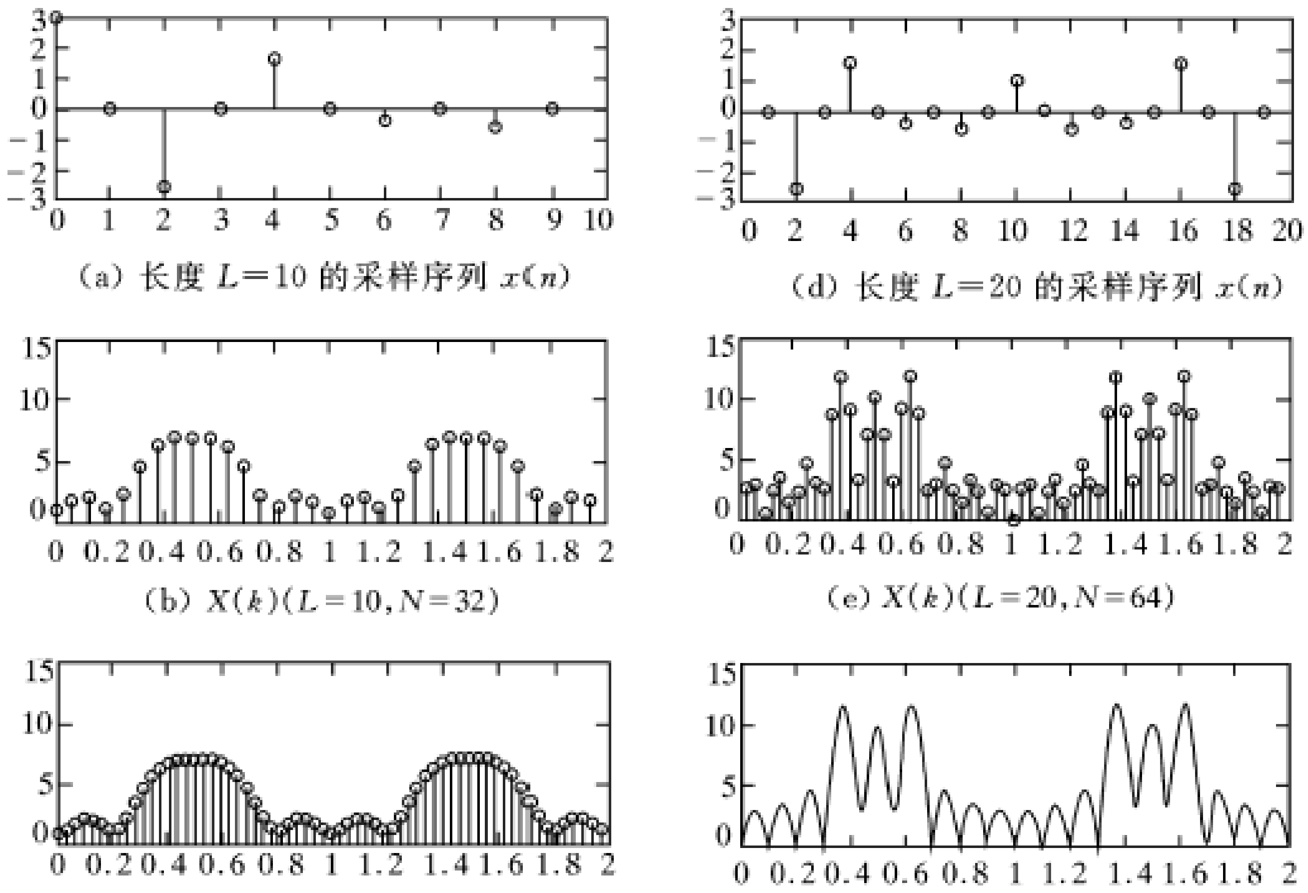
$$L \geqslant \frac{f_s}{\Delta f}$$

代入 $f_s=10$ kHz，$\Delta f=0.5$ kHz，则得到 L 必须满足

$$L \geqslant 20$$

图 4.16(a)和(d)示出了其样本数即长度 $L=10$ 和 $L=20$ 两种情况下的采样序列 $x(n)$，图 4.16(b)、(c)、(e)和(f)分别给了对应的离散傅里叶变换 $X(k)$ 和离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。从图 4.16(b)和(c)可以看出，当 $L=10$ 时，由于物理分辨率太低导致频率采样位置偏离正确的位置，不论计算分辨率如何的高(N 取大的值)，$X(k)$ 都不能分辨包含在该模拟信号中的三个频率分量；同时应该看到，相同原始序列长度 L 的条件下，频率采样点数 N 的增加

仅仅平滑了频谱。从图 4.16(e)和(f)中可以看出，对于 $L=20$，由于其物理频率分辨率等于原始信号中三个频率的最小间隔，因此在离散谱 $X(k)$ 和其连续谱 $X(e^{j\omega})$ 中均可以清楚地看到三个独立的频率分量。



(a) 长度 $L=10$ 的采样序列 $x(n)$

(d) 长度 $L=20$ 的采样序列 $x(n)$

(b) $X(k)(L=10, N=32)$

(e) $X(k)(L=20, N=64)$

(c) $X(k)(L=10, N=64)$

(f) $X(e^{j\omega})(L=20, N\to\infty)$

图 4.16　例 4.7 两个不同长度 L 的采样序列及其对应不同 N 的离散傅里叶变换 $X(k)$ 和离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$

$x(t)$，采样间隔 T，采样点数 L，总时长 TL，采样信号 $x(n)$.
$t_n=$

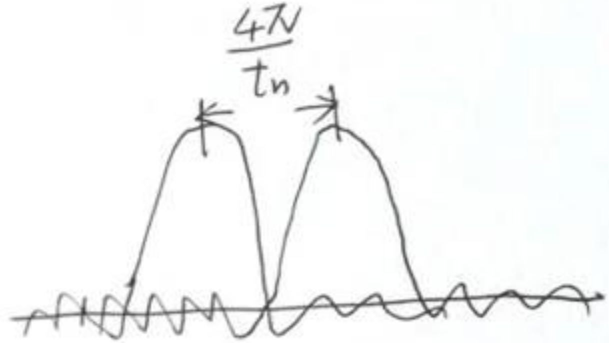
①. 物理分辨率. $\frac{1}{TL}$.

DTFT. $X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$. 存

等价于 $x(t) \cdot t_n$ 宽度的窗函数.

$\Downarrow$

$X(j\Omega) * \mathrm{sinc}$ (主瓣宽度为 $\pm\frac{2\pi}{t_n}$).



物理分辨率. $\Delta\omega \geq \frac{4\pi}{t_n}$ 或 $\Delta f \geq \frac{2}{t_n}$. 即 $t_n \geq \frac{2}{\Delta f}$.

区分信号包络频率，区间长度相当于 $\pm t_n$，即 $2t_n$.

因此 $t_n \geq \frac{1}{\Delta f}$ 即可.

②. 计算分辨率. ~~时域采样 频域[illegible]~~

频域采样 N 点. 即 $\frac{2\pi}{N}$.

第五章习题

5.16 某一线性时不变系统的输入和输出满足如下差分方程：

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}b_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}a_k x(n-k)$$

假设可用 FFT 程序来计算长度 $N=2^M$ 的任何有限长序列的 DFT，试提出一种方法，它可以用所提供的 FFT 程序来计算

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/(512))k}),\quad k=0,1,\cdots,511$$

其中 $H(z)$是该系统的系统函数。

解：由题可得：

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}a_r z^{-r}}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}$$

$$H\left(e^{j2\pi k/512}\right)=\frac{\sum_{r=0}^{M}a_r e^{-j2\pi kr/512}}{1-\sum_{i=1}^{N}b_i e^{-j2\pi ki/512}}$$

假设 $N\le 511$ 且 $M\le 511$（一般情况下，系统阶数较低），令：

$$a[n]=\begin{cases}a_n,\ 0\le n\le M\\ 0,\ M+1\le n\le 511\end{cases}$$

$$b[n]=\begin{cases}1,\ n=0\\ b_n,\ 1\le n\le N\\ 0,\ N+1\le n\le 511\end{cases}$$

令 $A[k]$ 与 $B[k]$ 分别为 $a[n]$ 与 $b[n]$ 的 512 点 DFT，则：

$$H\left(e^{j2\pi k/512}\right)=\frac{A[k]}{B[k]}$$

知识要点：上述过程a[n]和b[n]都是补零序列，FFT计算硬件实现时效率较高。大多数人先计算出h[n]，然后对其做FFT，这显然是最低效的方法。

思考题

1、为什么要对信号做FT/DFT?

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt \qquad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

2、两个信号的相关计算表示什么？在图像、AI领域有哪些应用?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t+\tau)\, d\tau$$

3、两个信号的卷积计算表示什么？在图像、AI领域有哪些应用?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$

第六章 数字滤波器的基本原理与特性

杨勐　副教授

■ 什么是数字滤波器（Digital Filter）？

- **定义**：数字滤波器指输入输出均为数字信号，通过一定运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。

- **应用**：
  （1）图像处理：图像增强、重建、优化等
  （2）深度学习：图像特征提取
  （3）通信：频率选择

- **分类**：
  经典滤波器：**选频滤波器**
  现代滤波器：维纳滤波器、卡尔曼滤波器、自适应滤波器等

回顾

- 离散线性移不变系统的单位抽样响应

LTI系统可由其冲激响应$h(n)$完全刻画

$$y(n)=T\left\{\underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)}_{x(n)}\right\}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T\left\{\delta(n-m)\right\}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

LTI系统的因果性和稳定性也完全由$h(n)$刻画

差分方程与系统函数

- 线性常系数差分方程表示的离散线性时不变系统

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} \frac{a_k}{b_0} x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{b_0} y(n-k),\ b_0 \neq 0$$

- 线性常系数差分方程表示的离散线性时不变系统具有z^{-1}的有理函数形式的系统函数

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad 或 \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}$$

离散线性时不变系统的频率响应

- 系统的频率响应$H(e^{j\omega})$定义为系统对复指数输入信号（特征函数）$e^{j\omega n}$的复增益（特征值）
- 若系统的傅里叶变换存在，则有

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H\left(z\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i e^{-j\omega i}}{\sum_{k=0}^{N}b_k e^{-j\omega k}}$$

系统的频率响应由**z平面中单位圆上的系统函数值**确定

- 数字滤波器

$x(n)$ → **离散线性时不变系统** $h(n)$ → $y(n)$

设计一个合适的$h(n)$，可以滤除输入信号$x(n)$中不需要的频率分量，产生输出$y(n)$，即系统完成离散卷积运算

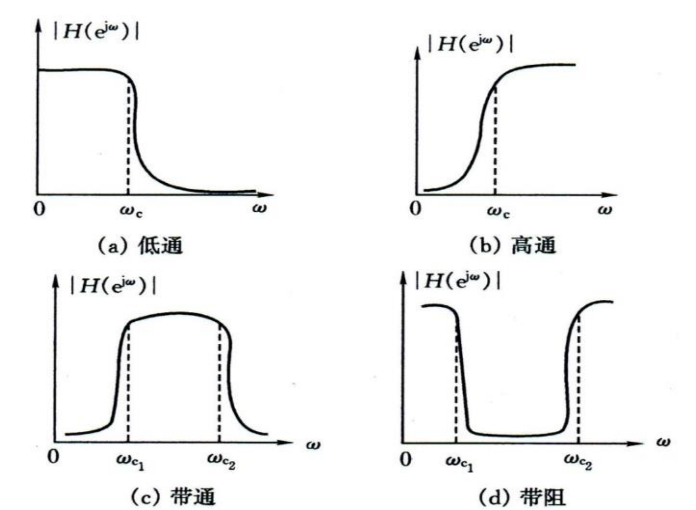
$$y(n)=x(n)*h(n)$$

这类系统称之为数字滤波器

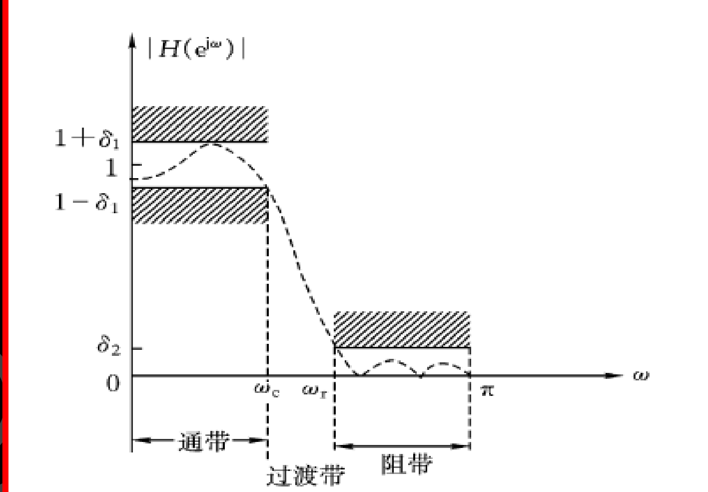
数字滤波器的输入与输出的频率关系：$Y(e^{j\omega})=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$

6.1 数字滤波器的基本原理

6.1.1 选频滤波器的基本类型与指标



滤波器的四种基本类型



理想低通滤波器的逼近误差容限

通带内指标

$$1-\delta_1 \le \left|H(e^{j\omega})\right| \le 1+\delta_1 \quad , \quad |\omega| \le \omega_c$$

$$\max_{\omega\in(0,\omega_c)} \{\left|\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| - 1\right|\} \le \delta_1, \quad (\omega_c\text{通带截止频率})$$

阻带内幅频特性逼近于0

$$\left|H(e^{j\omega})\right| \le \delta_2 \quad , \quad \omega_r \le |\omega| \le \pi \;（\omega_r - \text{阻带截止频率}）$$

滤波器的基本指标

采用相对指标描述频率响应特性，以分贝（dB）为单位表示

$$20\lg\frac{|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j\omega})|_{\max}}(\mathrm{dB})$$

通带内允许的最大衰减 $\alpha_1=20\lg\frac{|H(e^{j\omega_c})|}{|H(e^{j0})|}=20\lg(1-\delta_1)$

(**通带内衰减-3dB时，幅频响应降到0.707**)

阻带内应达到的最小衰减 $\alpha_2=20\lg\frac{|H(e^{j\omega_r})|}{|H(e^{j0})|}=20\lg(\delta_2)$

(**阻带内衰减-40dB时，幅频响应达到0.01**)

滤波器的主要技术指标：

- 阶数
- 通带截止频率ω_c及最大衰减α_1
- 阻带截止频率ω_r及最小衰减α_2

6.1.2 滤波器的基本方程与分类

- 滤波器的基本方程

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

$x(n)$和$y(n)$是滤波器的输入输出序列，a_k和b_k是滤波器

- 滤波器的分类 —**递归与非递归**

当$b_0=1$，其余系数b_k不是全部为零时，滤波器为**递归**的，又称**IIR**滤波器；**IIR**滤波器分为自回归移动平均（**ARMA**）和自回归（**AR**）滤波器（当$a_0=1$，其系数余$a_k=0$）

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} a_i x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$$ **ARMA滤波器**

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k y(n-k)$$ **AR滤波器**

当$b_0=1$，其余系数b_k全部为零时，滤波器为**非递归**的，又称**FIR**滤波器

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} a_i x(n-k)$$ **MA滤波器**

这里将递归与IIR滤波器对应，非递归与FIR滤波器对应，但它们之间不是唯一对应的，递归同样适用于FIR滤波器实现，非递归也可实现IIR滤波器。要把实现方法与冲激响应区分开来。

滤波器的系统函数与冲激响应

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}$$

LTI系统可由其冲激响应$h(n)$完全刻画

$$y(n) = T\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T\{\delta(n-m)\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$$

对于因果系统

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$$

6.2 数字滤波器的基本特性

6.2.1 FIR滤波器的基本特性与类型

$h(n)$是FIR滤波器的单位冲激响应，长度为N，则其系统函数为：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}=h(o)+h(1)z^{-1}+\ \cdots+h(N-1)z^{-(N-1)}$$

- 收敛域包括单位圆；
- z平面上有N-1个零点；
- z=0是N-1阶极点;

$H(z)$为z^{-1}的$N-1$阶多项式。其离散时间傅里叶变换为

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

显然$H(e^{j\omega})$是频率的周期函数，周期为2π，即

$$H(e^{j\omega})=H(e^{j(\omega+2\pi m)}),\quad m=0,\pm1,\pm2,\ \cdots$$

由于任一长度为N的序列完全由它的离散傅里叶变换 的N个采样确定，因此FIR滤波器的设计问题，就在于考虑使输出信号不失真的条件下，找出它的冲激响应系数或它的频率响应的N个采样。下面的讨论就遵循这样的思路进行。

❑ 使滤波器的输出信号不失真，冲激响应$h(n)$需满足线性相位条件

1、 $h(n)$的幅频特性和相频特性

对于长度为N 的**FIR滤波器**的单位脉冲响应$h(n)$，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$H(\omega)$为$H(e^{j\omega})$的幅频特性，$\theta(\omega)$为$H(e^{j\omega})$的相频特性

$$\theta(\omega) = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}}{\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}}\right]$$

$$= \arctan\left[\frac{-\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}\right] = -\tau\omega$$

注意：

- $H(\omega)$为ω的实函数，可能取负值；
- $|H(e^{j\omega})|$称为幅度响应，总是正值；
- 相频特性与滤波器对输入信号产生的时延有密切关系

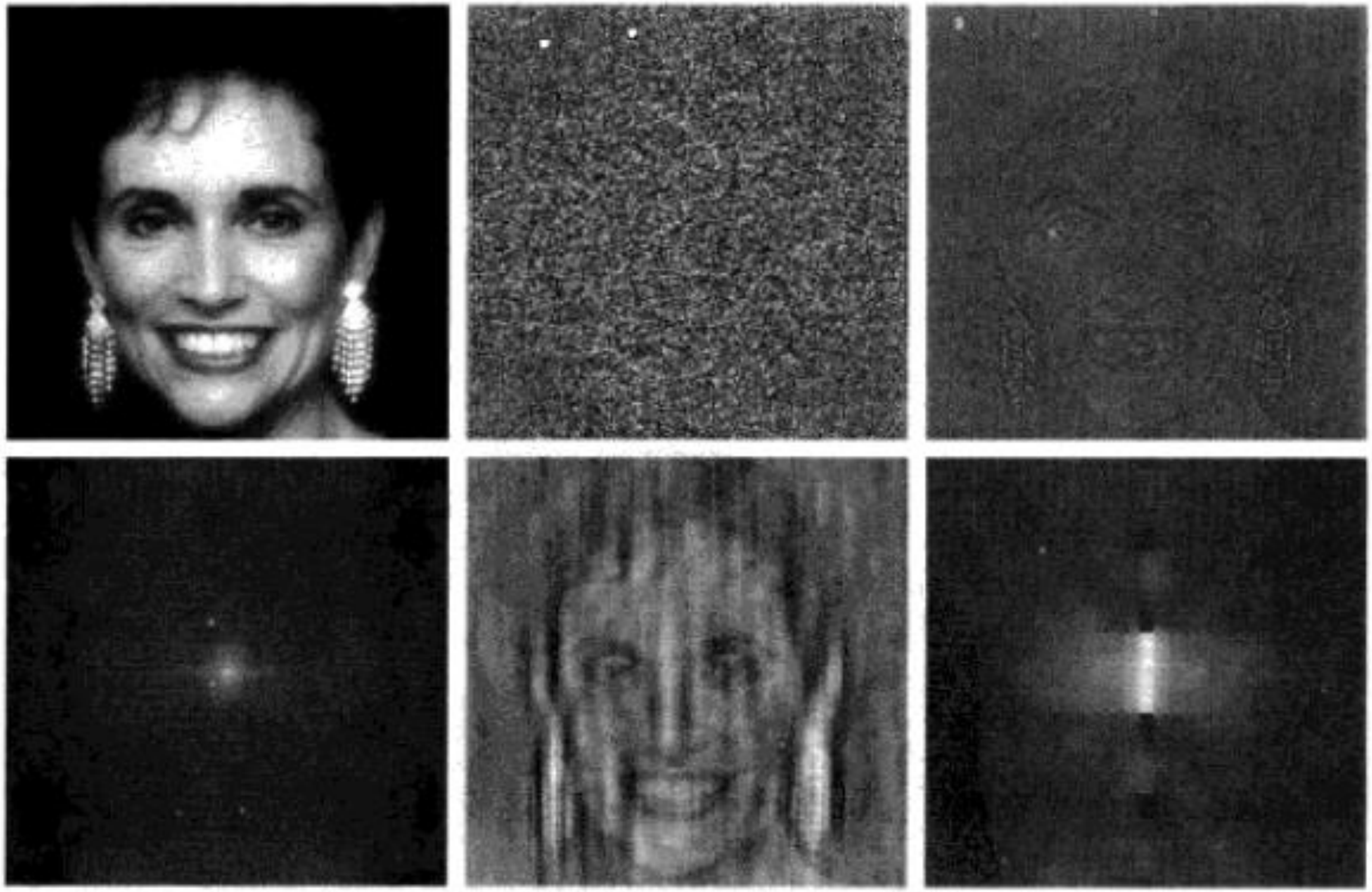


图 4.27 (a) 妇女图像；(b) 相角；(c) 仅使用相角重建的妇女图像；(d) 仅使用谱重建的妇女图像；(e) 使用对应于妇女图像的相角和对应于图 4.24 (a) 中矩形的谱重建的妇女图像；(f) 使用矩形的相角和妇女图像的谱重建的图像

2、严格线性相位与广义线性相位

线性相位是指滤波器的相频特性（相位与频率之间）是线性的, 即 $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数，产生的相移是一常数

$$\theta(\omega) = -\omega\tau$$

（严格）线性相位

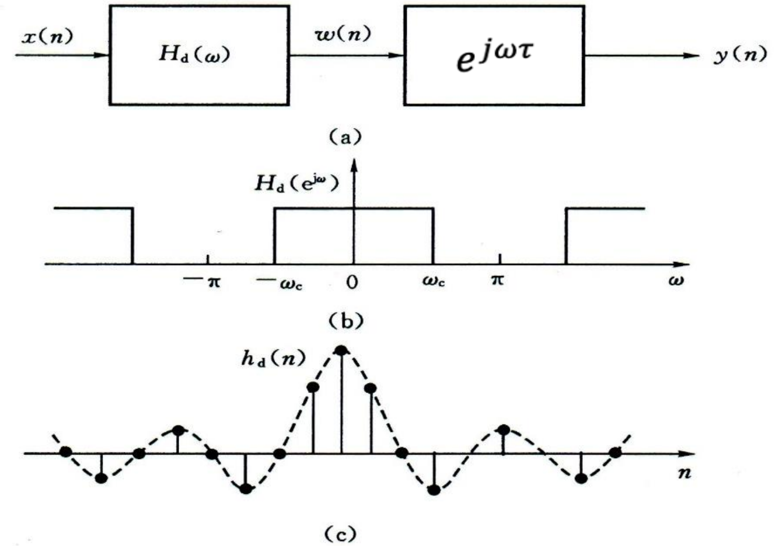
FIR滤波器的相延迟和群延迟的定义

相延迟 $\tau_p(\omega) = \dfrac{\theta(\omega)}{\omega}$

群延迟 $\tau_g(\omega) = -\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$

$\theta(\omega) = \theta_0 - \omega\tau$，$\theta_0$是起始相位

广义线性相位



(a)线性相位理想低通滤波器作为幅度滤波器和延迟级联的结构表示；(b)频率响应；(c)冲激响应

- 相延迟表示信号载波的延迟，群延迟表示信号包络的延迟
- 群延迟偏离某个常数的程度表明相位特性的非线性程度
- 严格线性相与广义线性相位都满足群延迟是一个常数 $\tau = -\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}$;
- 严格线性相位的群延迟和相延迟必定相等，都是一个常数 τ

■ **举例：** 设一离散时间系统的幅频特性为1，相频特性具有如下线性相位：

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

当信号$x(n)$通过该系统后，输出$y(n)$的频率特性

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\tau\omega}X(e^{j\omega})$$

$$= \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg\left[X(e^{j\omega})\right] - j\tau\omega}$$

所以 $y(n) = x(n-\tau)$

即，输出$y(n)$等于输入$x(n)$时间上的位移。

理想延迟系统：$h_d(n) = \delta(n-n_d)$, $H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$

❑ 滤波器冲激响$h(n)$具有严格线性相位$\theta(\omega)=-\omega\tau$的条件

由严格线性相位定义，有

$$\theta(\omega)=-\omega\tau=\arctan\left[\frac{-\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(\omega n)}\right]$$

即

$$\tan(\omega\tau)=\frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)}=\frac{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(\omega n)}$$

利用交叉相乘并用三角函数的恒等关系合并有关项

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\left[\sin(\omega\tau)\cos(\omega n)-\cos(\omega\tau)\sin(\omega n)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[(\tau-n)\omega\right]=0$$

(接上页)

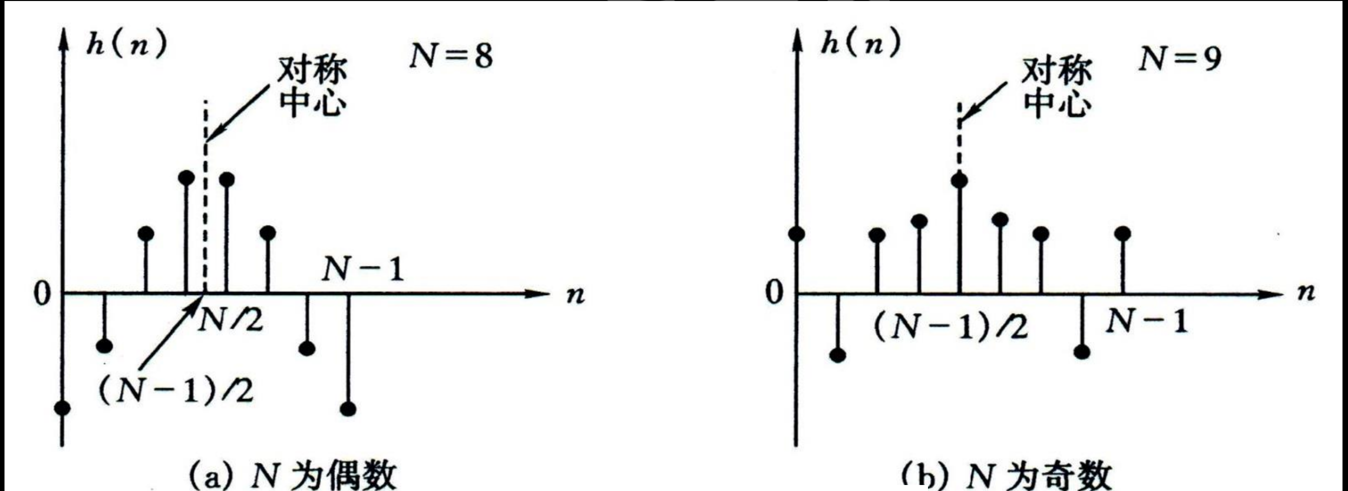
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[(\tau-n)\omega\right]=0$$

对于 n 和 τ， 解上式得到

$$\tau=\frac{N-1}{2} \text{ 和 } h(n)=h(N-1-n)\text{ , } 0\le n\le N-1 \quad \text{偶对称}$$

由此我们知道，要实现严格线性相位（相延迟和群延迟相等）的FIR滤波器的充要条件是冲激响应$h(n)$对中心点偶对称。

$h(n)$ 的长度 N 又分为奇偶数



$h(n)$ 偶对称时的冲激响应

滤波器冲激响应满足广义线性相位$\theta(\omega)=\theta_0-\omega\tau$的条件

由广义线性相位定义，有

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}=H(\omega)e^{j(\theta_0-\omega\tau)}$$

采用类似严格线性相位的方法，得到

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)+\theta_0\right]=0 \qquad \text{(A)}$$

此方程对于具有恒定群延迟系统是关于$h(n)$，τ 和 θ_0 的一个必要条件，它必须对所有ω都成立

当$\theta_0=0$或π，有

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[(n-\tau)\omega\right]=0$$

等价于严格线性相位的情形（略）

当 $\theta_0 = \pi/2$ 或 $3\pi/2$

前面的式(A) $\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)+\theta_0\right]=0$ 变成 $\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\left[(n-\tau)\omega\right]=0$

对于 n 和 τ，解上式得到

$$\tau=\frac{N-1}{2} \text{ 和 } h(n)=-(N-1-n)\text{ , } 0\le n_1\le N-1 \quad \textbf{奇对称}$$

由此我们知道，要实现广义线性相位（恒定群延迟特性）的FIR滤波器的充要条件是冲激响应$h(n)$对中心点奇对称。

$h(n)$ 的长度 N 又分为奇偶数

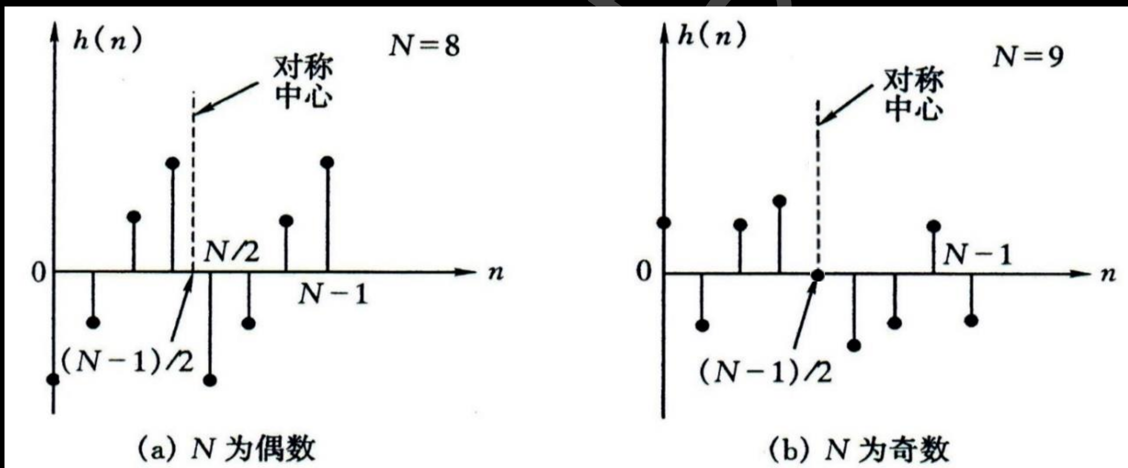
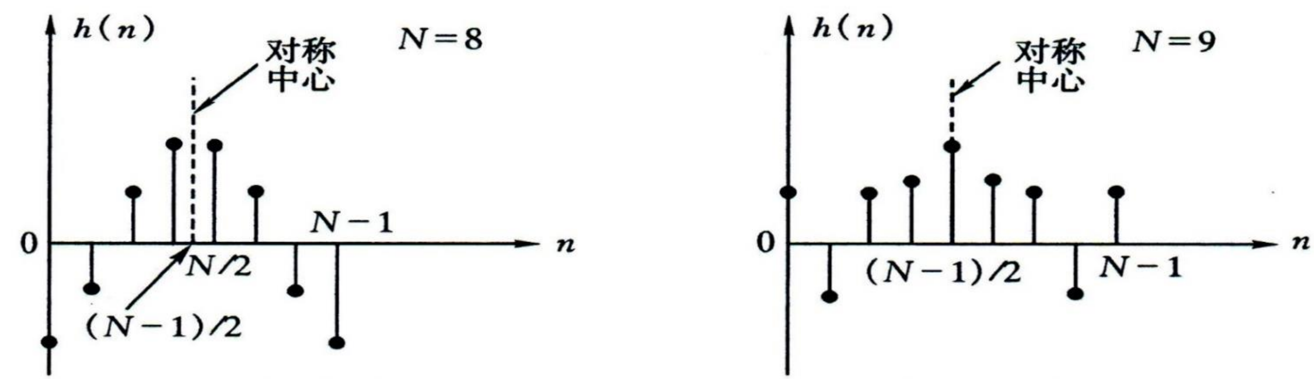


图6.5 $h(n)$ 奇对称时的冲激响应

小结：线性相位FIR滤波器$h(n)$的四种时域特性

$h(n)$ 偶对称 N为偶数

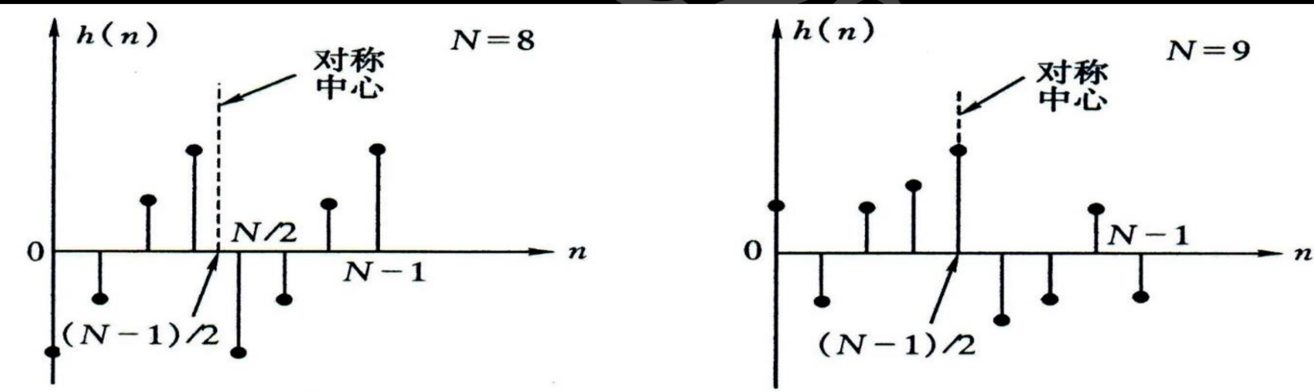


(a) N 为偶数　(b) N 为奇数

$h(n)$ 偶对称时的冲激响应

$h(n)$ 偶对称 N为奇数

$h(n)$ 奇对称 N为偶数



(a) N 为偶数　(b) N 为奇数

$h(n)$ 奇对称时的冲激响应

$h(n)$ 奇对称 N为奇数

■ 小结

- FIR滤波器是线性相位的充分必要条件：

$$\boxed{h(n)\text{为实序列且}h(n) = \pm h(N-1-n),\quad 0 \le n \le N-1}$$

（1）在严格或广义线性相位条件下，滤波器都有$(N\text{-}1)/2$采样周期的群延迟
（2）广义线性相位条件下，即$h(n)$奇对称，滤波器还要产生90°相移

- 根据N的奇偶性和$h(n)$的奇偶对称性，线性相位FIR滤波器分为四种类型：

（1） $h(n)$偶对称，N为奇数

（2） $h(n)$偶对称，N为偶数

（3） $h(n)$奇对称，N为奇数

（4） $h(n)$奇对称，N为偶数

■ 由频率响应函数的级数展开验证线性相位的条件

线性相位一般形式 $H\left(e^{j\omega}\right)=H\left(\omega\right)e^{j(\alpha+\beta\omega)}$

FIR滤波器的系统函数为

引入$e^{-j\omega M}$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}h\left(n\right)e^{-j\omega n}=e^{-j\omega M}\sum_{n=0}^{N-1}h\left(n\right)e^{j\omega(M-n)}$$

将上式右边的级数展开

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega M}\Big[h(0)e^{j\omega M}+h(1)e^{j\omega(M-1)}+h\left(2\right)e^{j\omega(M-2)}+\dots$$
$$+h\left(N-2\right)e^{j\omega(M-N+2)}+h\left(N-1\right)e^{j\omega(M-N+1)}\Big]$$

令$M=\frac{N-1}{2}$

(接下页)

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}[h(0)e^{j\omega\frac{N-1}{2}} + h(1)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-1)} + h(2)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-2)} + \cdots + h(N-2)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-N+2)} h(N-1)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-N+1)}$$

$$\left(-(\frac{N-1}{2}-1)\right) \qquad (-\frac{N-1}{2})$$

上式中的 $M = \frac{N-1}{2}$

$$= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}[h(0)e^{j\omega\frac{N-1}{2}} + h(1)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-1)} + h(2)e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-2)} + \cdots + h(N-2)e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-1)} + h(N-1)e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

利用复指数 $e^{j\omega\frac{N-1}{2}} = \cos(\omega\frac{N-1}{2}) + \mathrm{j}\sin(\omega\frac{N-1}{2})$, $e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} = \cos(\omega\frac{N-1}{2}) - \mathrm{j}\sin(\omega\frac{N-1}{2})$

展开复指数，合并同类项，得到

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left\{[h(0)+h(N-1)]\cos\left(\omega\frac{N-1}{2}\right) + j[h(0)-h(N-1)]\sin\left(\omega\frac{N-1}{2}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. [h(1)+h(N-2)]\cos\left(\omega\frac{N-1}{2}-1\right) + j[h(1)-h(N-2)]\sin\left(\omega\frac{N-1}{2}-1\right) + \ldots\right\} \qquad \textbf{(A)}$$

与线性相位一般形式比较（下页讨论）

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j(\propto+\beta\omega)} = H(\omega)e^{j\propto}e^{j\beta\omega}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left\{\left[h(0)+h(N-1)\right]\cos\left(\omega\frac{N-1}{2}\right)+j\left[h(0)-h(N-1)\right]\sin\left(\omega\frac{N-1}{2}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\left[h(1)+h(N-2)\right]\cos\left(\omega\frac{N-1}{2}-1\right)+j\left[h(1)-h(N-2)\right]\sin\left(\omega\frac{N-1}{2}-1\right)+\ldots\right\} \quad \textbf{(A)}$$

$e^{j\beta\omega}=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$

将上式与频率响应函数$H(e^{j\omega})$比较

$H(e^{j\omega})=\underline{H(\omega)}e^{j(\alpha+\beta\omega)}=\underline{H(\omega)e^{j\alpha}}e^{j\beta\omega}$（讨论）

- β的取值：　$\beta=-(N-1)/2$
- α的取值：

（1）$\alpha=0$ 时，$h(n)$偶对称，即$\boldsymbol{h(n)=h(N-1-n)}$，大括号中的项为纯实数，

（2）$\alpha=\pi/2$ 时，$h(n)$奇对称，即$\boldsymbol{h(n)=-h(N-1-n)}$，大括号中的项为纯虚数

当$h(n)$为偶对称时，FIR滤波器的幅频和相频特性

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1} h(N-n-1)z^{-n}=\sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-m-1)}$$

令 N-1-n=m, 则有

$$=z^{-(N-1)}\sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{m}=z^{-(N-1)}H(z^{-1})$$

$$H(z)=\frac{1}{2}[H(z)+z^{-(N-1)}H(z^{-1})]=z^{-(\frac{N-1}{2})}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)[\frac{1}{2}[z^{-n+\frac{N-1}{2}}+z^{n-\frac{N-1}{2}}]$$

将$z=e^{j\omega}$带入上式，即得

$$H(e^{j\omega})=e^{-j(\frac{N-1}{2})\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(n-\frac{N-1}{2})\omega]$$

幅频特性 $H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(n-\frac{N-1}{2})\omega]$

相频特性 $\theta(\omega)=-\frac{1}{2}(N-1)\omega$

当$h(n)$为奇对称时，FIR滤波器的幅频和相频特性

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=-\sum_{n=0}^{N-1}h(N-n-1)z^{-n}=-\sum_{m=0}^{N-1}h(m)z^{-(N-m-1)}$$

令 N-1-n=m, 则有

$$=-z^{-(N-1)}\sum_{m=0}^{N-1}h(m)z^{m}=-z^{-(N-1)}H(z^{-1})$$

$$H(z)=\frac{1}{2}[H(z)-z^{-(N-1)}H(z^{-1})]=z^{-(\frac{N-1}{2})}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)[\frac{1}{2}[z^{-n+\frac{N-1}{2}}-z^{n-\frac{N-1}{2}}]]$$

将$z=e^{j\omega}$带入上式，即得

$$H(e^{j\omega})=-je^{-j(\frac{N-1}{2})\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[(n-\frac{N-1}{2})\omega]$$

因此

幅频特性 $$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[(\frac{N-1}{2}-n)\omega]$$

相频特性 $$\theta(\omega)=-\frac{1}{2}(N-1)\omega+\frac{\pi}{2}$$

■ 线性相位FIR滤波器的四种类型

(1) I 型 $h(n)=h(N-1-n)$，偶对称，N为奇数

由前面推导出的幅频特性 $H(\omega)$ 为：

$$\boxed{H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[\omega(n-\frac{N-1}{2})]}$$

幅频特点：

- $h(n)$对$(N\text{-}1)/2$偶对称，余弦项也对$(N\text{-}1)/2$偶对称
- 以$(N\text{-}1)/2$为中心，把两两相等的项进行合并，因N为奇数，余下中间项 $n=(N\text{-}1)/2$

$$H(\omega)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{(N-3)/2}2h(n)\cos[(n-\frac{N-1}{2})\omega]$$

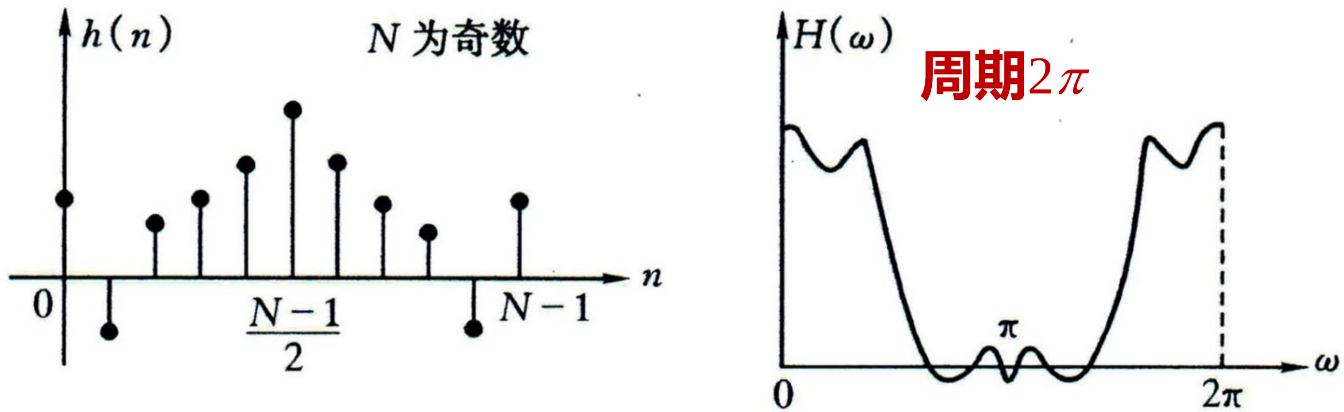
令$m=\frac{N-1}{2}-n$

$$=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{m=1}^{(N-1)/2}2h(\frac{N-1}{2}-m)\cos\omega m$$

$$=\boxed{\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos\omega n}$$

其中:

$$a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)\quad a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),n=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}$$



(a) 单位冲激响应　　(b) 幅频特性

图 6.6　$h(n)$偶对称 N 为奇数时 FIR 滤波器的特性

幅频特性：

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1/2} a(n)\cos \omega n$$

- 式中 $\cos\omega n$ 项对$\omega = 0, \pi, 2\pi$皆为偶对称，则幅频特性对$\omega = 0, \pi, 2\pi$是偶对称的
- 可实现所有滤波特性（低通、高通、带通、带阻）

(2）II 型$h(n)=h(N-1-n)$，偶对称，N为偶数

推导情况和前面N为奇数类似，不同点是由于N为偶数，相等的项合并成$N/2$项：

令$m=\frac{N}{2}-n$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos[(n-\frac{N-1}{2})\omega]=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos[\omega(\frac{N-1}{2}-n)]$$

$$=\sum_{m=1}^{N-1}2h(\frac{N}{2}-m)\cos[\omega(m-\frac{1}{2})]=\boxed{\sum_{n=1}^{N/2}b(n)\cos[\omega(n-\frac{1}{2})]}$$

其中：$$b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

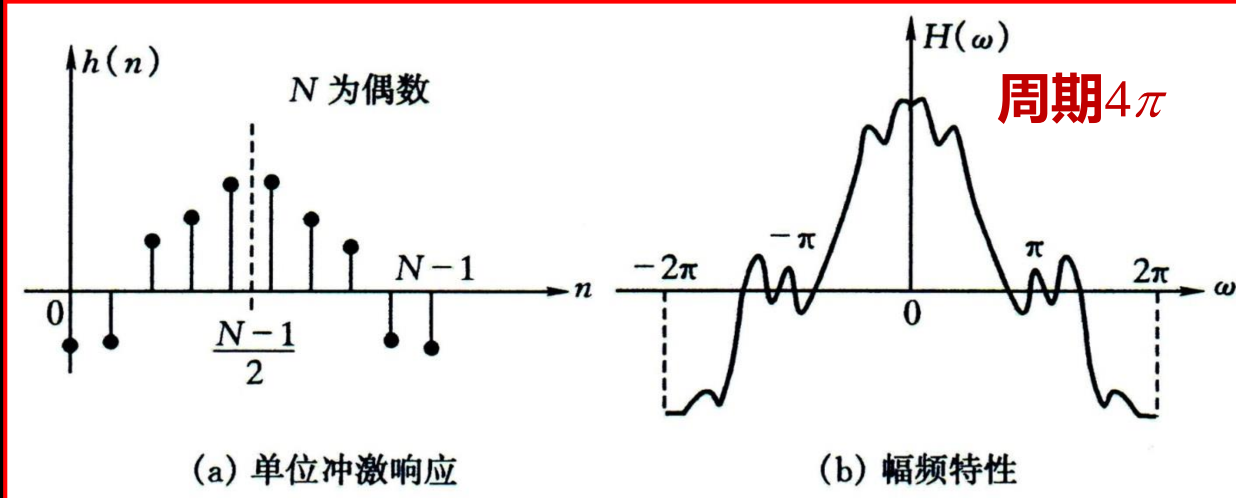


图 6.7 $h(n)$偶对称 N 为偶数时 FIR 滤波器的特性

幅频特性：

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos[\omega(n-\frac{1}{2})]$$

- 由于$\cos[\omega(n-1/2)$对$\omega=\pi$奇对称，所以$H(\omega)$在$\omega=\pi$呈奇对称
- 当$\omega=\pi$时， $\cos[\omega(n-1/2)=0$，故 $H(\pi)=0$，即$H(z)$在$z=-1$处有一零点，因此这种情况不能用于$H(\pi)\neq 0$的滤波器，即不能实现高通、带阻滤波器

(3) III 型 $h(n)=-h(N-n-1)$，奇对称，N 为奇数

由于$h(n)=-h(N-n-1)$，当$n=\frac{N-1}{2}$时

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right)=-h\left(N-\frac{N-1}{2}-1\right)=-h\left(\frac{N-1}{2}\right) \Rightarrow h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$$

由前面推导出的幅频特性$H(\omega)$为：

令$m=\frac{N-1}{2}-n$

$$\boxed{H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[\omega(\frac{N-1}{2}-n)]}$$

得到

$$\boxed{H(\omega)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n)\sin\omega n}$$

其中：

$$c(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right), n=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}$$

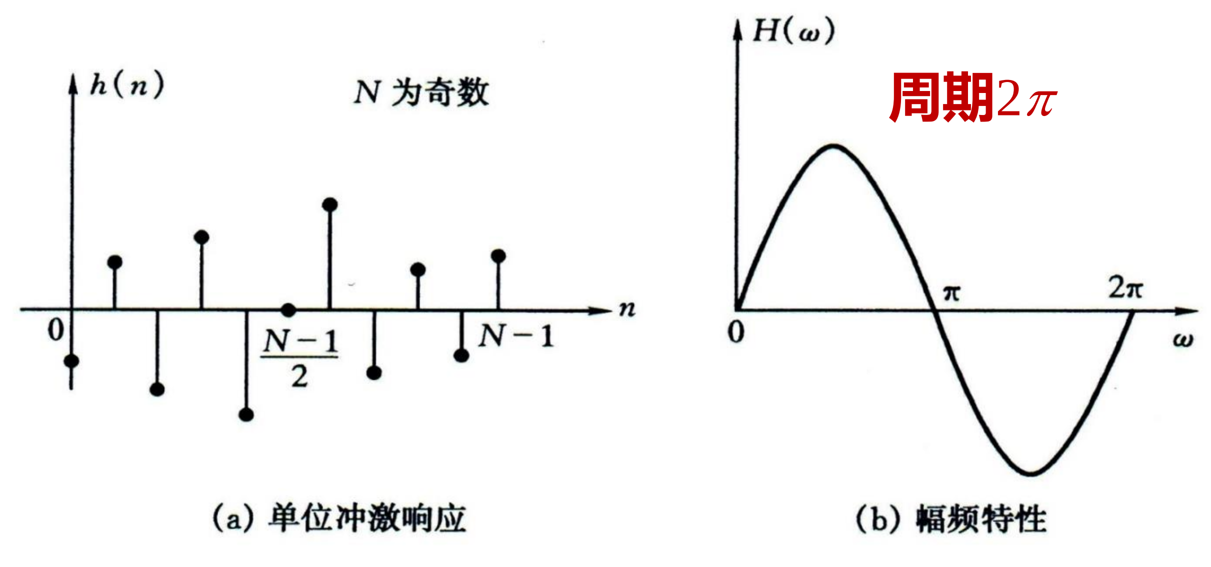


图 6.8　$h(n)$奇对称 N 为奇数时 FIR 滤波器的特性

幅频特性：

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n)\sin\omega n\,,$$

- 幅频函数$H(\omega)$在ω =0, π, 2π 呈奇对称
- $H(\omega)$在ω =0, π, 2π处值为0，即$H(z)$零点在$z=\pm1$处，不能用于$H(0)\neq 0$和$H(\pi)\neq 0$的滤波器设计，但可以实现带通滤波器

(4) IV 型 $h(n)=-h(N-n-1)$，奇对称，N为偶数

幅频特性:

$$H(\omega)=\sum_{m=1}^{N/2}2h(\frac{N}{2}-m)\sin[(m-\frac{1}{2})\omega]$$

$$\boxed{=\sum_{n=1}^{N/2}d(n)\sin[(n-\frac{1}{2})\omega]}$$

其中: $d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right), n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$

- 由于$\sin[\omega(n-½)]$在$\omega=0$、2π处都为0，因此$H(\omega)$在$\omega=0$，2π处也为0，即H(z)在z=1处有零点；并对ω=0, 2π呈奇对称，故不能实现低通、带阻滤波器
- 由于$\sin[\omega(n-½)]$在$\omega=0$、2π处都呈奇对称，对$\omega=\pi$呈偶对称，故幅频函数$H(\omega)$在$\omega=0, 2\pi$也呈奇对称，在$\omega=\pi$处呈偶对称

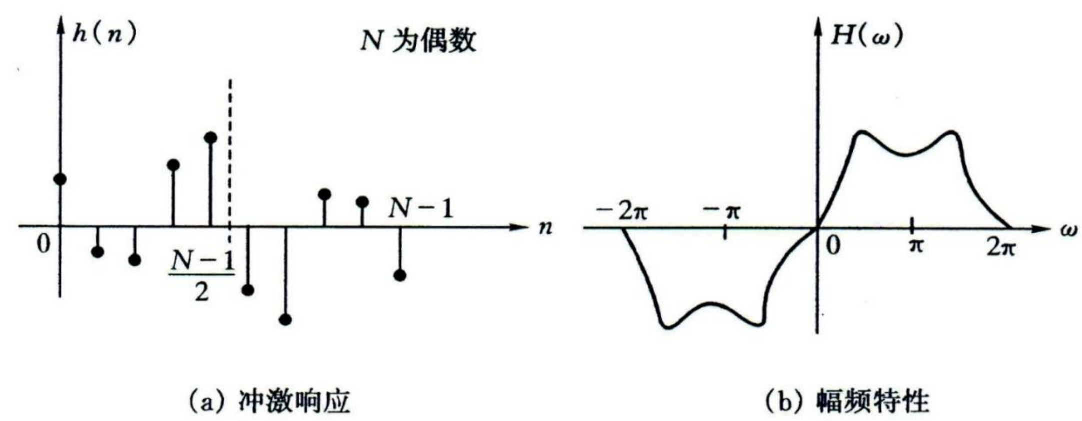
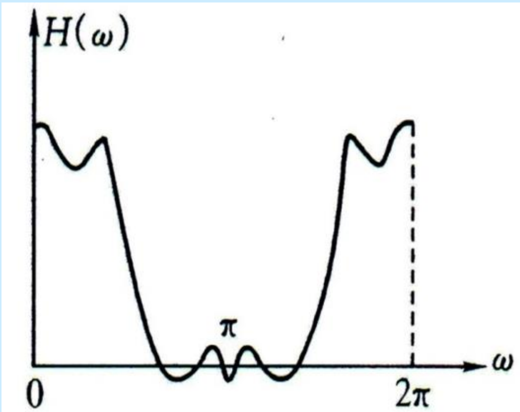


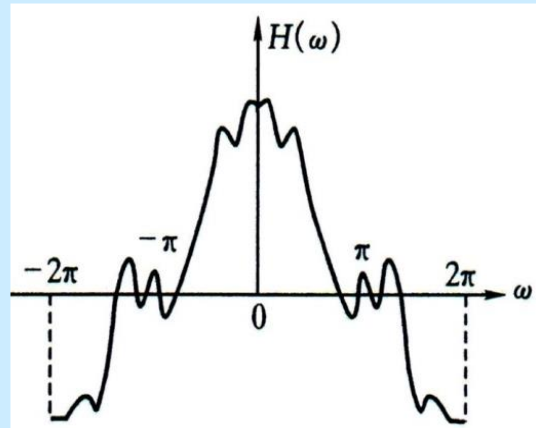
图 6.9 h(n)奇对称 N 为偶数时 FIR 滤波器的冲激响应特性

■ 线性相位FIR滤波器的四种类型幅频特性图



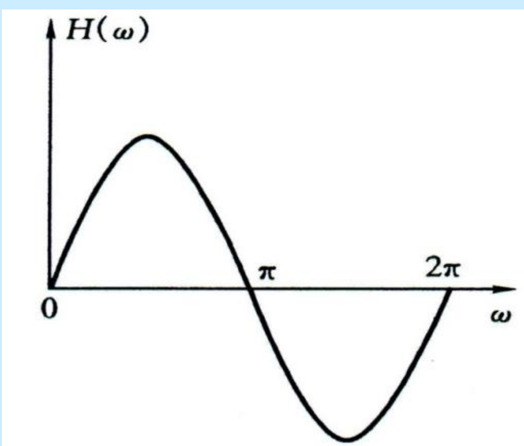
$H(\omega) = H(-\omega)$
$\omega = 0$处
频率偶对称，
$H(2\pi + \omega)$
$= H(\omega)$，周期2π

I 型 $h(n)=h(N-n-1)$，N 为奇数



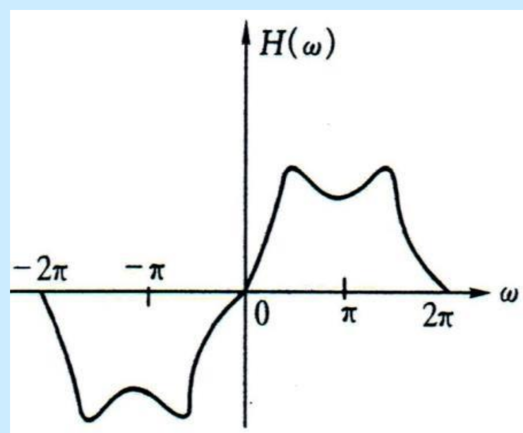
$H(\omega) = H(-\omega)$
$\omega = 0$处
频率偶对称，
$H(\pi + \omega) =$
$-H(\pi - \omega)$
$\omega = \pi$处
频率奇对称，
$H(4\pi + \omega)$
$= H(\omega)$，周期4π

II 型 $h(n)=h(N-n-1)$，N 为偶数



$H(\omega) = -H(-\omega)$，
$\omega = 0$处
频率奇对称，
$H(\pi + \omega)$
$= -H(\pi - \omega)$
$\omega = \pi$处
频率奇对称，
$H(2\pi + \omega)$
$= H(\omega)$，周期2π

III 型 $h(n)=-h(N-n-1)$，N 为奇数



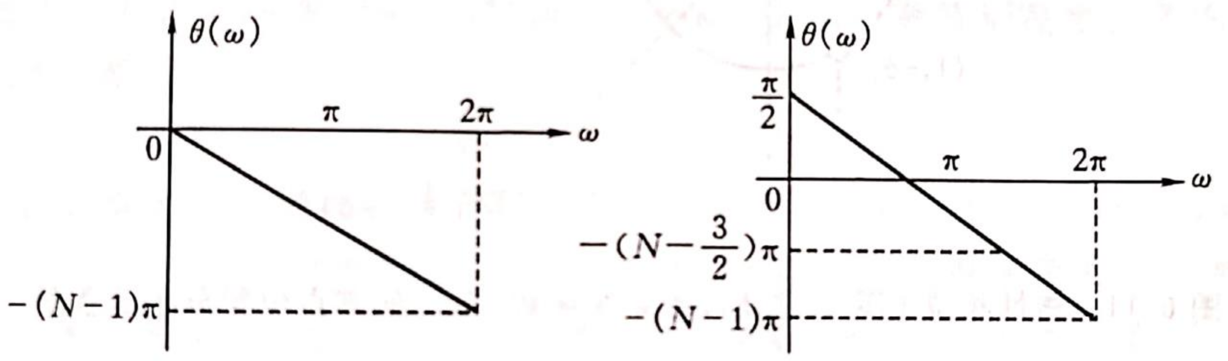
$H(\omega) = -H(-\omega)$
$\omega = 0$处
频率奇对称，
$H(\pi + \omega)$
$= -H(\pi - \omega)$
$\omega = \pi$处
频率偶对称，
$H(4\pi + \omega)$
$= H(\omega)$，周期4π

IV 型 $h(n)= - h(N-n-1)$，N 为偶数

- 线性相位FIR滤波器的频率响应都可以表达为一个线性因子$e^{j\theta(\omega)}$与一个ω的实函数$H(\omega)$之积；

当$h(n)$为偶对称时 $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$

当$h(n)$为奇对称时 $\theta(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$



(a) $h(n)$为偶对称时的相频特性　(b) $h(n)$为奇对称时的相频特性

■ 具有线性相位的FIR滤波器系统函数$H(z)$的零点分布

FIR滤波器的系统函数$H(z)$可展开为z^{-1}的$N-1$阶多项式，即

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=h(0)+h(1)z^{-1}+\cdots+h(N-1)z^{-(N-1)}$$

$$=\pm\sum_{n=0}^{N-1}h(N-1-n)z^{-n}=\pm\sum_{m=0}^{N-1}h(m)z^{-(N-1-m)}$$

$$=\pm z^{-(N-1)}\sum_{m=0}^{N-1}h(m)z^{m}=\pm z^{-(N-1)}H\left(z^{-1}\right)$$

- 收敛域包括单位圆；
- z平面上有N-1个零点；
- z=0是N-1阶极点;

$H(z)$在原点上的$N-1$阶极点对系统的稳定性无关紧要，在 z 平面内$N-1$个零点分布互为倒数，**由于$h(n)$的对称性，零点位置受到限制**。

系统函数$H(z)$的零点也是$H(z^{-1})$的零点，反之亦然，即线性相位FIR滤波器的零点必是互为倒数。

考虑 $z=re^{j\theta}$ ，考察零点的位置：

- 单位圆内非实轴上
- 单位圆内的实轴上
- 单位圆上非实轴上
- 单位圆与实轴交点

- 在单位圆内非实轴上有一个零点 $z_k = r_k e^{j\theta_k}$

$H(z^{-1})$的零点 $z_k^{-1} = \left(r_k e^{j\theta_k}\right)^{-1} = \dfrac{1}{r_k} e^{-j\theta_k}$ 也是$H(z)$的零点；

$h(n)$为实序列，$H(z)$复数零点成对出现，z_k^*与$(z_k^*)^{-1}$也是$H(z)$零点；

四个零点同时存在，构成四阶系统, 即

$$H_k(z) = (1 - z^{-1} r_k e^{j\theta_k})(1 - z^{-1} r_k e^{-j\theta_k})(1 - z^{-1}\frac{1}{r_k} e^{j\theta_k})(1 - z^{-1}\frac{1}{r_k} e^{-j\theta_k})$$

- 在单位圆内的实轴上有一个零点 $z_k = r_k$

$H(z^{-1})$的零点 $z_k^{-1} = (r_k)^{-1} = 1/r_k$ 也是$H(z)$的零点，无共轭零点；

两个零点构成二阶系统

$$H_m(z) = (1 - z^{-1} r_k)(1 - z^{-1}\frac{1}{r_k})$$

- 在单位圆上非实轴上有一个零点 $z_k = e^{j\theta_k}$

  不存在关于单位圆镜像对称的零点；

  $h(n)$为实序列，$H(z)$复零点成对出现，单位圆上z_k^*也是$H(z)$零点；

  两个零点构成二阶系统

$$H_l(z) = (1 - z^{-1}e^{j\theta_k})(1 - z^{-1}e^{-j\theta_k})$$

- 在单位圆与实轴交点上有一个零点 $z_k = 1 \quad or \quad z_k = -1$

  既无镜像零点，也无共轭零点，构成最简单的一阶系统

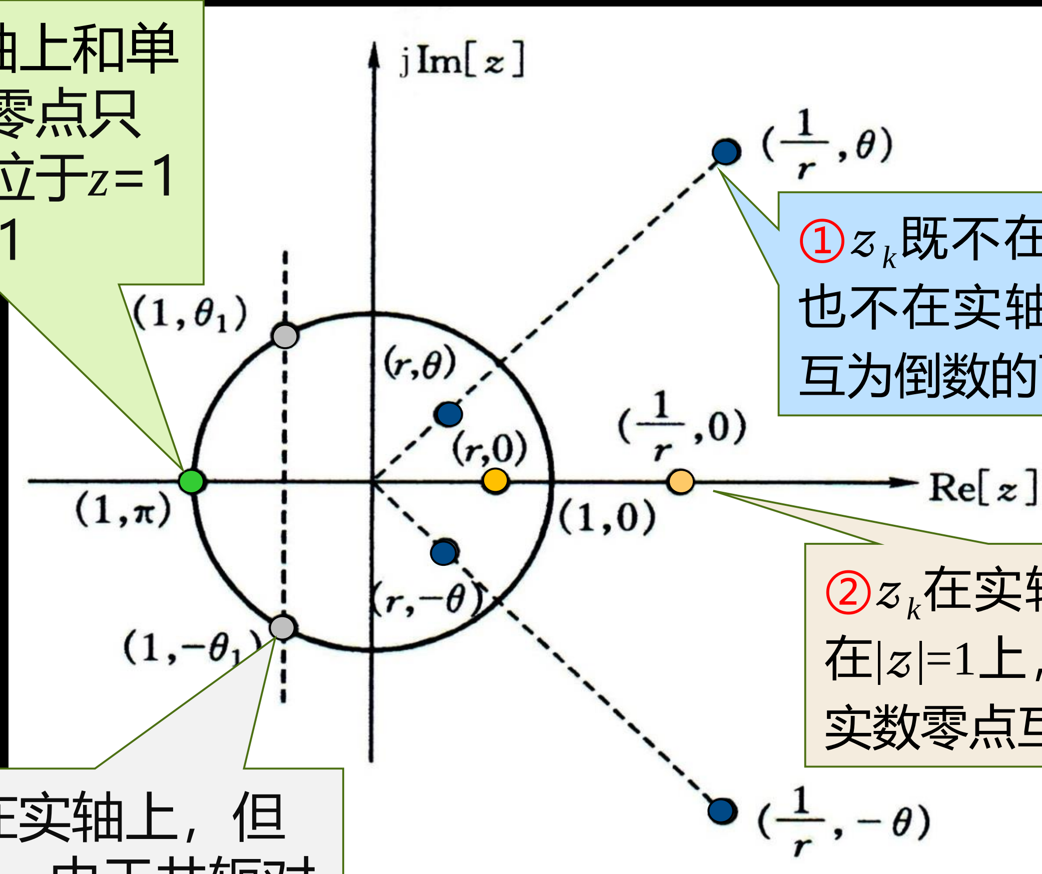
$$H_n(z) = (1 \pm z^{-1})$$

线性相位FIR滤波器的系统函数可以表达为上述各式情形的级联

$$H(z) = \left[\prod_k H_k(z)\right]\left[\prod_m H_m(z)\right]\left[\prod_l H_l(z)\right]\left[\prod_n H_n(z)\right]$$

FIR滤波器的零点位置的四种情形

④ z_k 在实轴上和单位圆上，则零点只有一个，或位于z=1或位于 z= −1



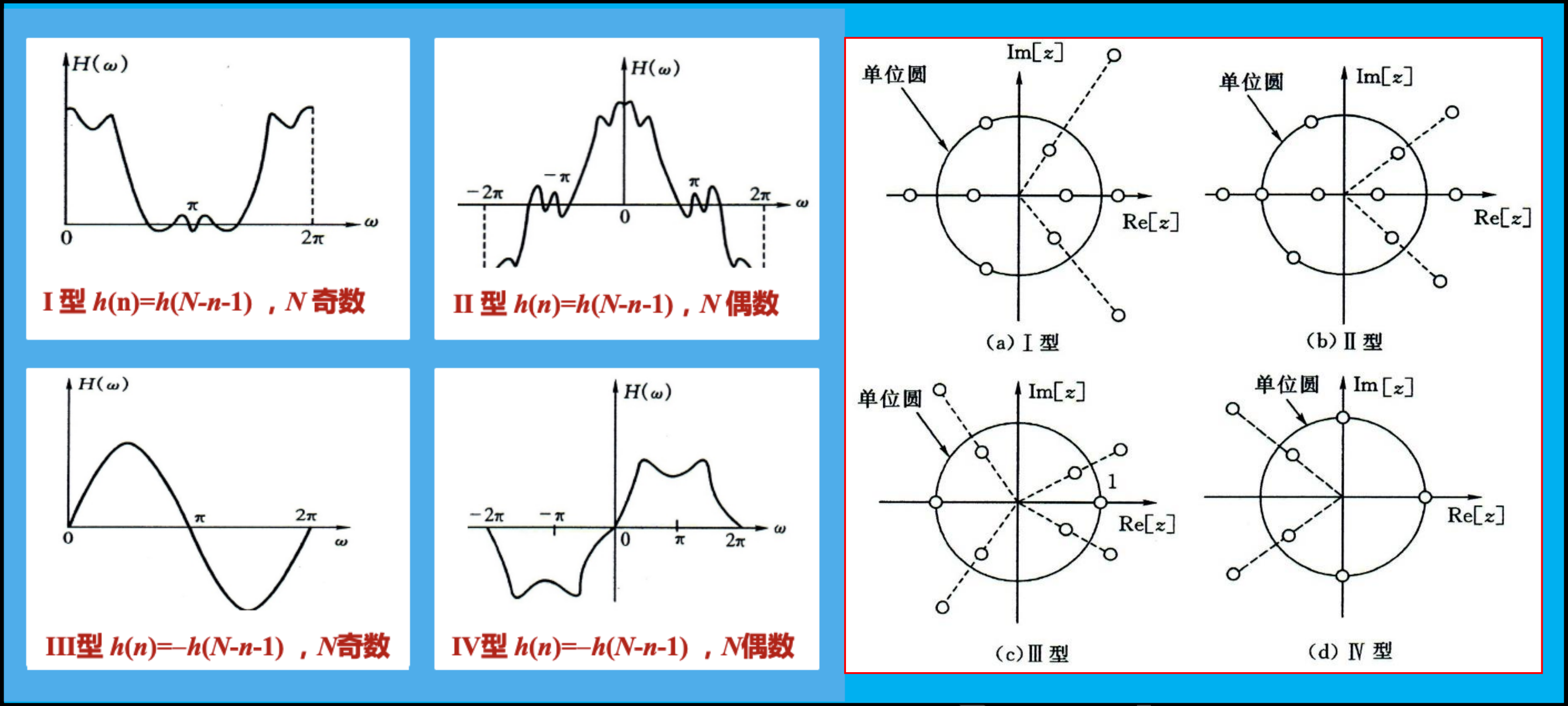
$$H(z_k) = \pm z^{N-1}H(z^{-1}) = 0$$

①z_k既不在单位圆上，也不在实轴上，有四个互为倒数的两组共轭对

②z_k在实轴上，不在$|z|$=1上，则两个实数零点互为倒数

③ z_k 不在实轴上，但在$|z|$=1上，由于共轭对的倒数是它们本身，故此时零点是一组共轭对

■ 四种线性相位FIR滤波器的频率响应及其零点分布



- I型： $h(n)$偶对称，N 为奇数；零点无限制，滤波器类型不限
- II型： $h(n)$偶对称，N 为偶数； 因$H(\pi)=0$，因此在$z=-1$处必有一阶零点，既在单位圆，又在实轴，所以，必有单根；不能设计高通、带阻
- III型： $h(n)$奇对称，N 为奇数；因$H(0)=0, H(\pi)=0$，在$z=1, -1$处必有两个一阶零点，都是$H(z)$的单根；只能设计带通
- IV型： $h(n)$奇对称，N 为偶数； 因$H(0)=0$，在$z=1$处必有一阶零点，是$H(z)$的单根：不能设计低通、带阻

举例： 已知数字滤波器N=5, $h(0) = h(1) = h(3) = h(4) = -1/2$, $h(2) = 2$，求幅度函数$H(\omega)$，并判断滤波器类型。

解： 由于 N为奇数，且$h(n)$偶对称，该滤波器是I型线性相位FIR滤波器

$$\boxed{H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos\omega n}$$

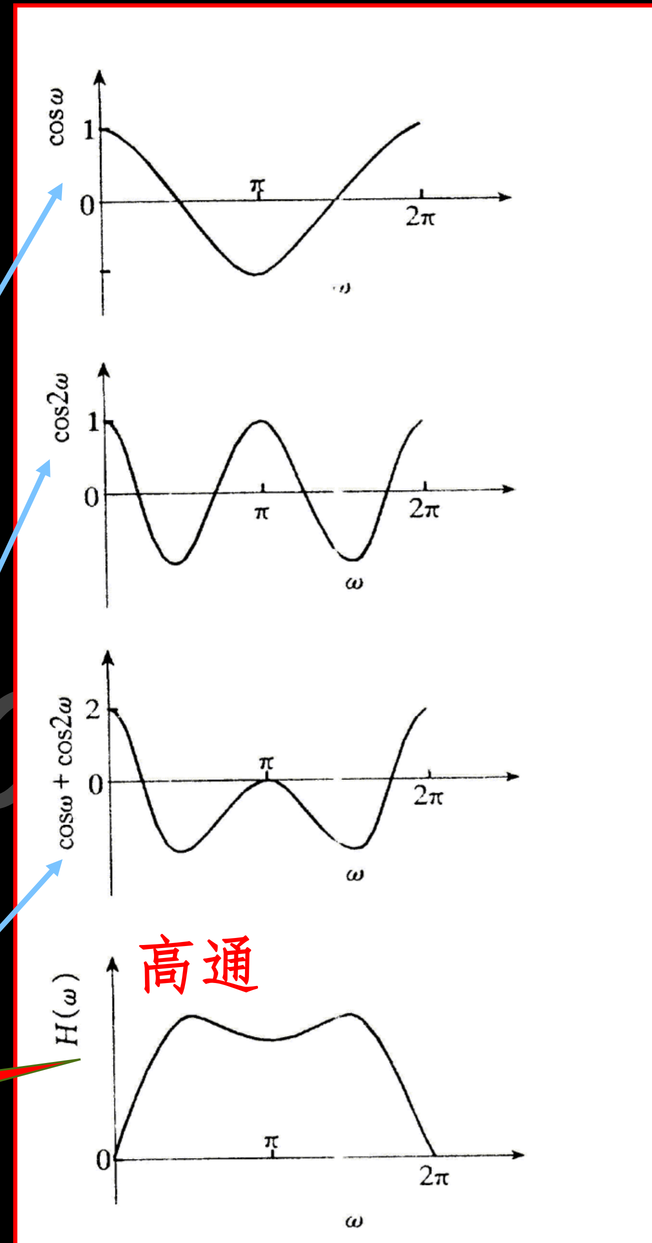
$a(0) = h(2) = 2$

$a(1) = 2h(1) = -1$

$a(2) = 2h(0) = -1$

$H(\omega) = 2 - \cos\omega - \cos 2\omega$

$= 2 - (\cos\omega + \cos 2\omega)$



6.2.2 IIR滤波器的基本特性

- 因果、稳定的IIR滤波器

$$\begin{cases} h(n) = 0, & n < 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases}$$

- 考虑有理函数形式的系统函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}$$，a_k、b_k 是实数， $a_M \neq 0$, $b_N \neq 0$

- $M \leq N$时，称为N阶滤波器，稳定性要求N个非零极点位于单位圆内
- $M > N$时，滤波器为M-N阶的FIR滤波器与N阶IIR滤波器串联
- IIR滤波器的零点决定了滤波器的性能，与滤波器稳定性无关
- 除了全部极点都在单位圆上外，不存在稳定的线性相位IIR滤波器

■ IIR滤波器的相位特性

回顾FIR线性相位滤波器 $\boxed{H(z_k) = \pm z_k^{-(N-1)} H(z_k^{-1})}$

$H(z)$和$H(z^{-1})$具有相同的零极点，因此具有线性相位且稳定的IIR滤波器是不可物理实现的（单位圆内外极点成对出现）。

□相位特性推导：

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)} \qquad H(e^{-j\omega}) = \left|H(e^{-j\omega})\right| e^{-j\theta(\omega)}$$

⬇

$$\boxed{\theta(\omega) = \frac{1}{2j}\ln\left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})}\right] = \frac{1}{2j}\ln\left[\frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})}\right]}$$

相延迟和群延迟

相延迟

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} = -\frac{1}{2j\omega}\ln\left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})}\right]$$

群延迟

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{2j}\ln\left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})}\right]\right\}$$

- IIR滤波器的群延迟不可能为常数，这是IIR滤波器与FIR滤波器的一个重要区别
- 尽管群延迟为常数难以实现，但可以在特定频带（比如通带）尽可能逼近常数，从而实现近似线性相位的IIR滤波器

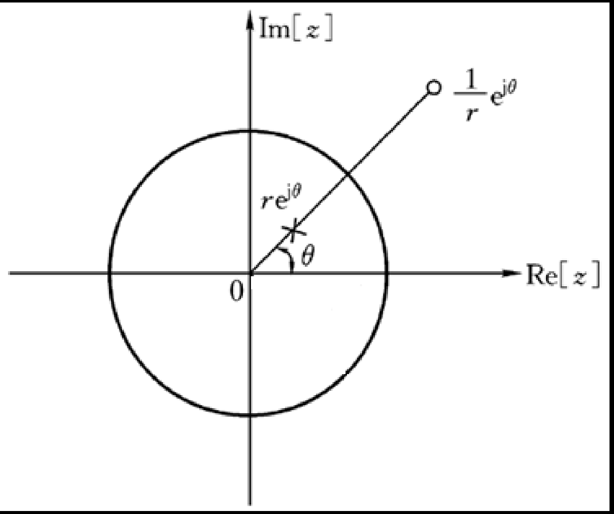
■ 全通滤波器

对所有ω，幅频特性$|H(e^{j\omega})|$为一常数的滤波器称为全通滤波器；
全通滤波器不改变信号的振幅，但可以用来逼近期望的相位特性。

全通滤波器的零极点以单位圆成镜像分布，若单位圆内有一个极点$z=a$，则单位圆外必有一个零点$z=1/a^*$。

□ 一阶全通滤波器

$$\boxed{H(z)=c\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}} \quad 0<|a|<1$$



极点： $re^{j\theta}$ 零点：$1/r\,e^{j\theta}$

为使$h(n)$为实数，a必须为实数。

二阶全通滤波器

$$H(z)=c\frac{(z-r^{-1}e^{j\theta})(z-r^{-1}e^{-j\theta})}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})}\quad ,\quad c,r,\theta\in R,0<r<1$$

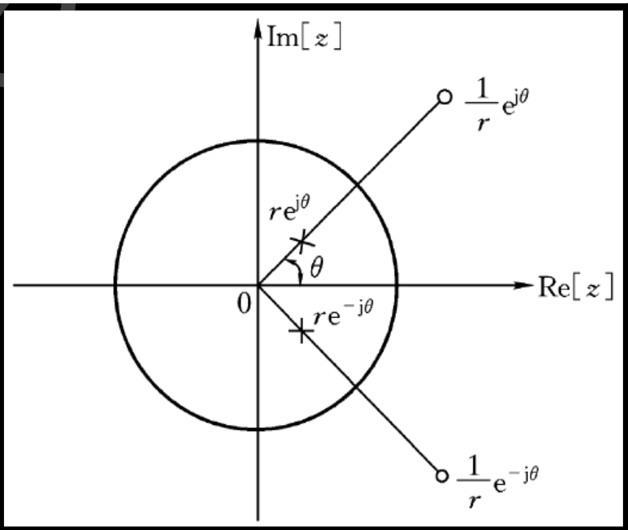
$$H(z)=c\frac{(z^2-2zr^{-1}\cos\theta+r^{-2})}{(z^2-2zr\cos\theta+r^2)}=c\frac{z^2(z^{-2}-2z^{-1}r\cos\theta+r^2)}{r^2(z^2-2zr\cos\theta+r^2)}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\left|H(z)\right|_{z=e^{j\omega}}=\left|\frac{c}{r^2}\right|=\text{constant}$$

若要$h(n)$为实序列，两个零点（极点）必须为共轭对。

共轭极点： $re^{j\theta}$、 $re^{-j\theta}$

共轭倒数零点：$1/r\,e^{j\theta}$、$1/r\,e^{-j\theta}$

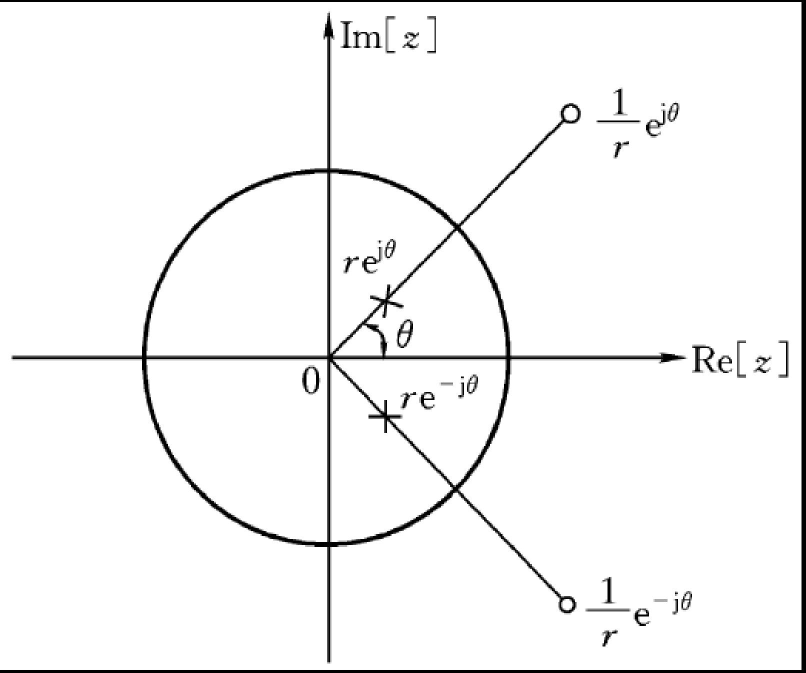


全通系统的应用

全通系统在数字系统中不改变信号的幅频特性，是一种纯相位滤波器，常见的应用包括：

（1）作为相位均衡器，校正系统的相位，而不改变系统的幅度特性；

（2）级联一个全通系统，可以改变零极点分布，使非稳定滤波器变成一个稳定滤波器。



6.2.3 FIR和IIR数字滤波器的比较

■ 性能方面

□ FIR滤波器

优点： 可以得到严格的线性相位；

缺点： 由于滤波器传输函数的极点固定在原点，所以只能用较高阶数的滤波器达到性能指标。

□ IIR滤波器

优点： 较低阶数滤波器实现，存储单元少，所以经济且效率高；极点可位于单位圆内任何地方，幅频的可选择性好；

缺点： 相位是非线性的；往往幅频可选择性（分辨率）越好，相位非线性越严重。

- **结构方面**

- **FIR滤波器**：一般采用非递归型结构，由于FIR的单位冲激响应$h(n)$有限长，可采用FFT运算，其运算速度快，误差小；
- **IIR滤波器**：往往对应递归型结构，极点要控制在单位圆内，系统才确保稳定，缺点是有限字长效应时，容易产生寄生振荡。

■ 应用方面

- **FIR滤波器：**能适应某些特殊的应用，如构成微分器或积分器，因而适应性更大，范围更广。
- **IIR滤波器：**设计较简单，主要应用于设计具有片断（部分频带）常数特性的滤波器，如低通、高通、带通及带阻等滤波器。

举例：在语音通信中，对相位线性特性要求不高，可以选用经济高效的IIR滤波器实现；而在图像通信中，对相位的线性特性要求较高，则要用稍为复杂的FIR滤波器来实现。

本章小结:

- 数字滤波器基本概念与分类
- 线性相位FIR数字滤波器基本特性
- FIR滤波器幅频函数的四种类型
- FIR滤波器系统函数的零点位置
- IIR滤波器的基本特性
- FIR和IIR数字滤波器的比较