答案

一. 填空 .

1. $e^{-(\frac{1}{4}+2k)\pi+i\ln\sqrt{2}}$.

2. πi

3. $-\frac{\pi}{12}i$

4. $e^z(z+1)$

5. 0

二. 选择 .

1. B 2. C 3. D 4. C 5. A

三.解：由已知 $\mu_x-\nu_x=2x, \mu_y-\nu_y=-2y$, 又 $\mu_x=\nu_y, \mu_y=-\nu_x$, 于是

$$\begin{cases}\nu_y=x+y\\ \nu_x=y-x\end{cases} \qquad \begin{cases}\nu_y=x+y\\ \nu_x=x-y\end{cases}$$

$$\nu=xy+\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C_1, \quad \mu=xy+\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C_2$$

由已知 $C_1=C_2$, 因此 $f(z)=xy+\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C+i[xy+\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C]$, 其中 C 为任意实数。

四.解：

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z+i-i}=\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{1}{z-i}}=\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z-i})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z^2}=(-1/z)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-i)^{-n-2}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(z-i)^{n+3}} \qquad 1<|z-i|<+\infty$$

五.解：

$$\frac{\sin z-z}{z^3}=-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5}-...+...$$

故 $z=0$ 是可去奇点，$z=\infty$ 是本性奇点。

六.解：

$$I=-2\pi iRes[\frac{1}{(1+z^2)e^{\frac{1}{z}}},\infty]=2\pi iRes[\frac{1}{t(1+t^2)e^t},0]=2\pi i\cdot 1=2\pi i$$

七.解: 设 $R(z)=\frac{1}{1+z^4}$, $R(z)$ 在上半平面奇点为 $z_1=e^{\frac{i\pi}{4}}, z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$, 均为一级极点，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i[Res(\frac{1}{z^4},z_1)+Res(\frac{1}{z^4},z_2)]$$

$$=\pi i\cdot(-\frac{1}{4})(z_1+z_2)=-\frac{\pi i}{4}(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{3\pi}{4}})=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

八.解：

$$z_1=iz, z_2=\sqrt{z_1}, z_3=\frac{z_2-1}{z_2+1}, z_4=z_3^4$$

$$\omega=\frac{z_4-i}{z_4+i}=\frac{(\sqrt{iz}-1)^2-i}{(\sqrt{iz}+1)^2+i}$$