高数期末复习

（2020-2021第二学期）

数学与统计学院　吴慧卓

第七章　无穷级数

一、常数项级数审敛法 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用级数的性质

(1)若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于s，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$也收敛，且其和为ks.

(2)若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于s和σ，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛于$s \pm \sigma$.

注意：收敛+收敛=收敛，收敛+发散=发散，发散+发散=不确定

(3)在级数中去掉、添加或改变有限项，不改变级数的敛散性.

(4)收敛级数加括号仍收敛且和不变.

注意：（1）加括号后收敛，原级数未必收敛；
（2）加括号后发散，原级数必发散。

(5)级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的必要条件：若收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

3. 正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

满足

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ 不定

其它法判别

- 部分和极限
- 比较审敛法
- 积分判别法

$\rho < 1$ 收 敛

$\rho > 1$ 发 散

常用的两个结论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$

4. 任意项级数审敛法

概念： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛，称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛} \\ \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ 发散，称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛} \end{cases}$$

Leibniz判别法： 若 $u_n \geq u_{n+1} > 0$，且 $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$，

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛，且余项 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

【例1】判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+1}$ 的敛散性 $(a>0)$.

【例2】判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na}{n+1}\right)^{n}\ (a>0)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n}n!}{n^{n}}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\sqrt{\pi}}{n}\right)$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)^{p}\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}},\ p>0$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^{2}\frac{n\pi}{3}}{2^{n}}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin n\alpha}{n^{2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

【例3】判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$是否收敛？如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

【例4】

设常数$\lambda>0$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$【　　】.

(A)发散　　(B)条件收敛

(C)绝对收敛　　(D)敛散性与λ有关

二、幂级数

1. 收敛半径、收敛区间、收敛域

（1）定义：形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

（2）Abel定理：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在$x = x_0$处收敛，则当$|x| < |x_0|$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在$x = x_0$处发散，则当$|x| > |x_0|$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$发散.

（3）幂级数收敛的三种情况及收敛半径：

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ R &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \end{aligned}}$$

2. 幂级数的性质

（1）有理运算性质 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$与$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2

$R = \min\{R_1, R_2\}$

则 **1）加减法：** $\sum a_n x \pm \sum b_n x^n = \sum (a_n \pm b_n) x^n$

2）乘法： $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

（2）分析性质 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为 R ，和函数为 $s(x)$

则 1）和函数 $s(x)$ 在 $(-R, R)$ 上连续.

2）和函数 $s(x)$在 $(-R, R)$上可导，且可逐项求导.

3）和函数 $s(x)$在 $(-R, R)$上可积，且可逐项积分.

注：求导和积分后的幂级数与原级数有相同的收敛半径.

（3）几个常用的幂级数的和函数

1. $$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x \qquad D=(-\infty,+\infty)$$

2. $$x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots=\sin x \qquad D=(-\infty,+\infty)$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}+\cdots=\cos x \qquad D=(-\infty,+\infty)$$

3. $$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}, \qquad D=(-1,1)$$

$$x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots=-\ln(1-x) \qquad D=[-1,1)$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\ln(1+x) \qquad D=(-1,1]$$

【例8】 设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$在$x=0$处收敛，在$x=2$处发散，

则该幂级数的收敛半径为 $\underline{\quad 1 \quad}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n \text{在} x=0 \text{处收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{在} t=-1 \text{处收敛} \xrightarrow{Abel\text{定理}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{的收敛半径} R \geq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n \text{在} x=2 \text{处发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{在} t=1 \text{处发散} \xrightarrow{Abel\text{定理}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{的收敛半径} R \leq 1$$

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$在$x=-1$处条件收敛，则该幂级数的收敛半径

$R=$ 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n \text{在} x=-1 \text{处条件收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{在} t=-2 \text{处收敛} \xrightarrow{Abel\text{定理}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{的收敛半径} R \geq 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n \text{在} x=-1 \text{处条件收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{在} t=-2 \text{处条件收敛}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{的收敛半径} R \leq 2, \text{否则，若} R > 2, \text{则} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{在} t=-2 \text{处绝对收敛}$$

【例7】求幂级数的收敛域及和函数（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$

$$R=1, D=(-1,1)$$

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)$$

$$\therefore S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x), x\in(-1,1)$$

$$(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n \qquad R=+\infty, D=(-\infty,+\infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\left(\frac{x}{2}\right)^2e^{\frac{x}{2}}+\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}$$

【例9】 求常数项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

考虑幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n = S(x)$　　　$R=1, D=[-1,1]$

$$S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right]x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^n = x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1} = -x\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{x}[-\ln(1-x)-(x-\frac{x^2}{2})]$$

$$\therefore S(x) = -\frac{1}{2}x\ln(1-x)+\frac{1}{2x}[\ln(1-x)+(x-\frac{x^2}{2})]$$

$$\therefore S(\frac{1}{2}) = \frac{3}{32}$$

3. 函数展开成幂级数

（1）Taylor定理

设$f \in C^{(\infty)}, x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, 则 f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$

内能展开为它在 x_0 处的taylor级数的充要条件是

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

f 在 x_0 处的taylor展开式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

f 的Maclaurin展开式

（2）几个常用的展开式

1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + \cdots \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, |x| < 1$$

4. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \qquad x \in (-1, 1)$$

5. $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

$$x \in (-1, 1)$$

（3）函数展开成幂级数的两种方法

直接法 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

间接法（重点）

根据幂级数的唯一性，从某些已知函数的展开式出发，利用幂级数的性质（四则运算，逐项求导，逐项积分）以及变量代换等方法，求得所给函数的展开式.

【例11】将下列函数展开为x的幂级数.

(1) $f(x)=\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$　　(2) $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$

提示： $f(x)=\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{3}{3-x}=\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$　　$|x|<2$

(2)解法一　$f'(x)=\arctan x$　$f''(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　$f(0)=f'(0)=0$

$$f'(x)=f'(x)-f'(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$|x|\le 1$

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x(-1)^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

解法二(2) $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$

$$\because \arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \qquad (-1\le x\le 1)$$

$$=\int_0^x [1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}+\cdots]dt$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

$$\because \quad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

$$\therefore \quad \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\cdots, \quad (-1\le x\le 1)$$

故 $\quad x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}. \ (x\in[-1,1])$$

【例12】 将$f(x)=x^4\ln(1+x)$展开为x的幂级数，并求$f^{(100)}(0)$.

$$x^4\ln(1+x)=x^4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+4}}{n}$$

$$f(x)=x^4\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!}=-\frac{1}{96}\Rightarrow f^{(100)}(0)=-100!\frac{1}{96}$$

三、傅里叶级数

1. 傅里叶系数与傅里叶级数

设$f(x)$是周期为2π的周期函数，且在$[-\pi, \pi]$上可积，则称

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

为$f(x)$的傅里叶系数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

条件？

2. 狄利克雷收敛定理

设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上分段单调，而且除有限个第一类间断点外都连续，那么它的*Fourier*级数在$[-\pi,\pi]$上收敛，且其和函数为

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{是}f(x)\text{的连续点；} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{是}f(x)\text{的间断点；} \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi \end{cases}$$

以下均假定函数在给定区间上满足狄利克雷收敛定理的条件.

3. 周期为 2π 的函数的展开

(1) $[-\pi,\pi]$ 上展开

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

(2) $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数的展开

$f(x)$ 为奇函数：$a_n=0\left(n=0,1,2,\cdots\right)$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

$f(x)$ 为偶函数：$b_n=0\left(n=1,2,\cdots\right)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

(3) $[0,\pi]$展开为正弦级数或余弦级数

作奇延拓

展为正弦：$a_n = 0\left(n = 0, 1, 2, \cdots\right)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx dx \qquad \left(n = 1, 2, \cdots\right)$$

作偶延拓

展为余弦：$b_n = 0\left(n = 1, 2, \cdots\right)$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx dx \qquad \left(n = 0, 1, 2, \cdots\right)$$

4. 周期为 $2l$ 的函数的展开

(1) $[-l,l]$ 上展开

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\qquad(n=1,2,\cdots)$$

(2) $[-l,l]$ 上奇偶函数的展开

$f(x)$ 为奇函数：$a_n=0\,(n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$f(x)$ 为偶函数：$b_n=0\,(n=1,2,\cdots)$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

(3) $[0,l]$展开为正弦级数或余弦级数

作奇延拓

展为正弦：$a_n = 0\left(n = 0,1,2,\cdots\right)$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad \left(n = 1,2,\cdots\right)$$

作偶延拓

展为余弦：$b_n = 0\left(n = 1,2,\cdots\right)$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad \left(n = 0,1,2,\cdots\right)$$

5. 定义在$[a, b]$上且周期为 $b-a$的函数的傅里叶展开

记$l=\dfrac{b-a}{2}$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \quad =\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos n\frac{2\pi}{b-a}xdx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad =\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin n\frac{2\pi}{b-2}xdx$$

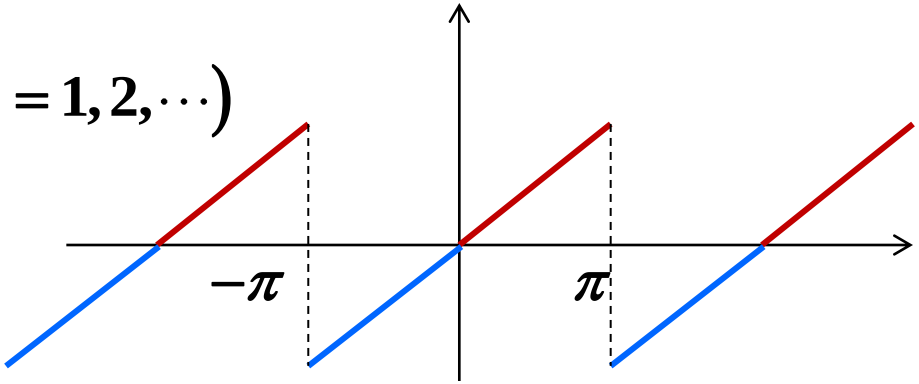
$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right]}$$

$$\boxed{=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\frac{2\pi}{b-a}x+b_n\sin n\frac{2\pi}{b-a}x\right]}$$

【例13】将$f(x)=x$在$[0,\pi]$上展开为正弦级数.

将$f(x)$作奇延拓　　$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$



$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx$$

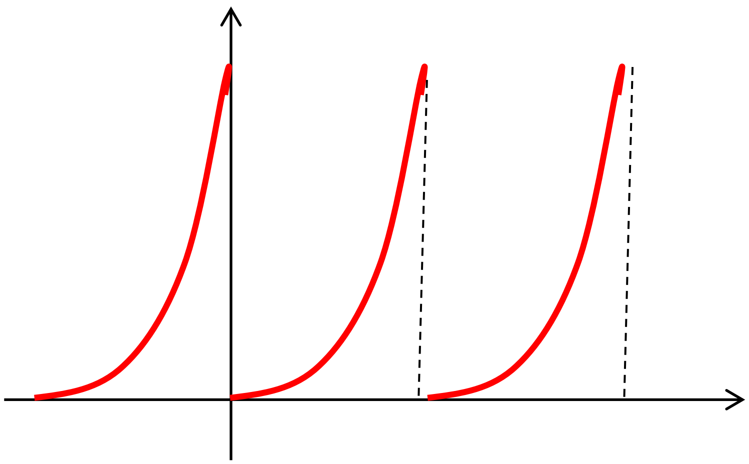
$$=(-1)^n\frac{2}{n}$$

$$\therefore\ f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}, \qquad x\in[0,\pi)$$

$$S(\pi)=0$$

【例14】将$f(x)=x^2$在$[0,2\pi]$上展开为以2π为周期的傅里叶级数，

并由此求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n^2}$$

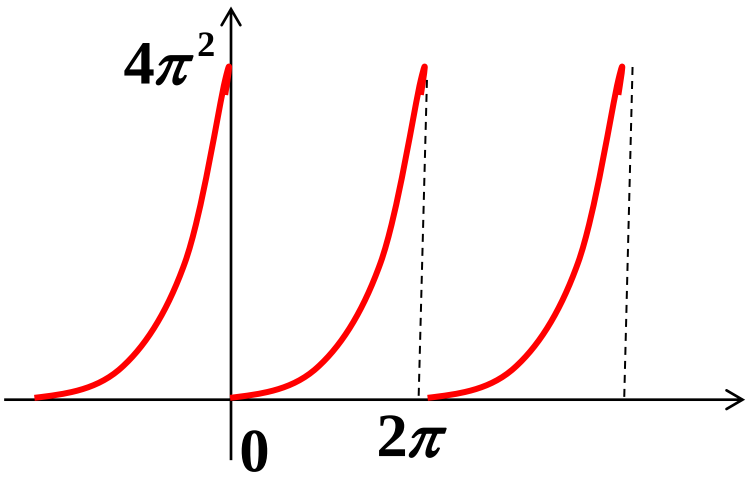
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=-\frac{4\pi}{n}$$

$$x^2\sim\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

$$\therefore x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},x\in(0,2\pi)$$

【例14】将$f(x)=x^2$在$[0,2\pi]$上展开为以2π为周期的傅里叶级数，

并由此求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.



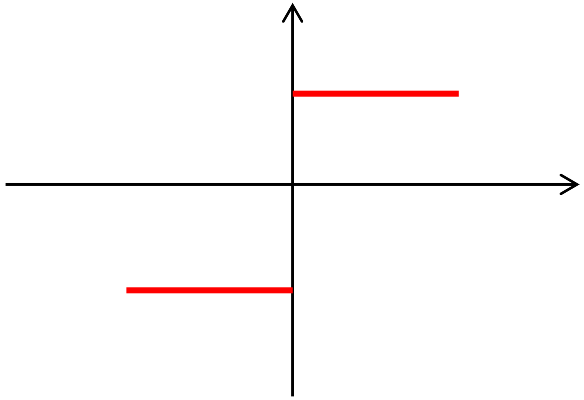
$$x^2 \sim \frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

$$\therefore S(x)=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=x^2,\ x\in(0,2\pi)$$

$$S(0)=S(2\pi)=\frac{0+4\pi^2}{2}=2\pi^2$$

$$\therefore S(0)=2\pi^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

【例15】 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在$[-\pi,\pi]$上傅里叶级数的和函数$S(x)=$ ________



$$S(x)=\begin{cases}-1, -\pi<x<0\\ 1, 0<x<\pi\\ 0, x=0,\pi\end{cases}$$

【例17】设$f(x)=x^2\ (0\le x\le 1)$，而$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad (-\infty<x<+\infty)$

其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin nx dx\ (n=1,2,\ldots)$，则$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$【　B　】

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$