正弦交流电路的分析基础

第9章

主讲人：邹建龙

时 间： 年 月 日

9 正弦交流电路的分析基础——主要内容

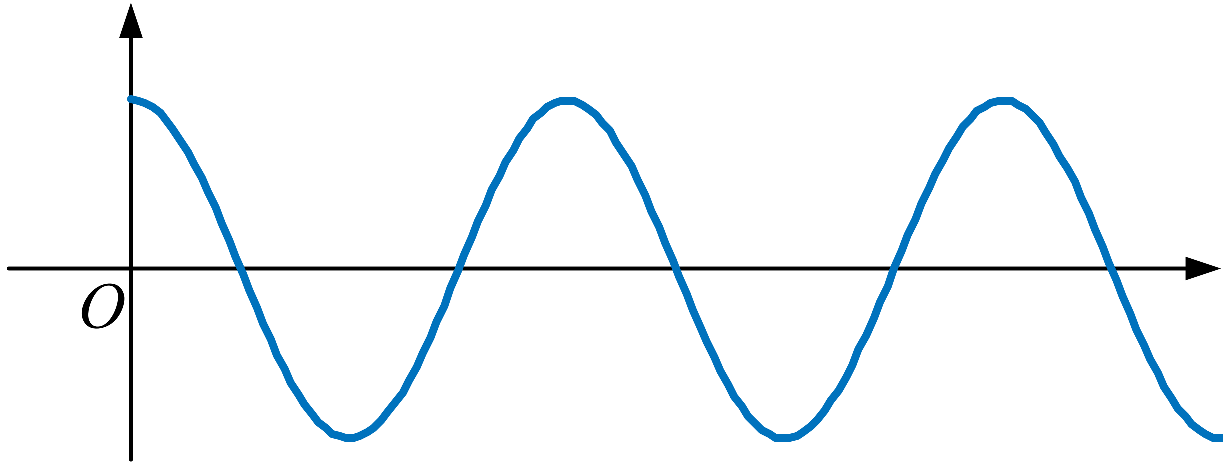
- 引言
- 9.1 正弦交流电路的定义
- 9.2 正弦量与复数
- 9.3 相量的引入
- 9.4 时域正弦量运算与相量域相量运算的对应关系
- 9.5 阻抗和导纳
- 9.6 正弦交流电路与直流电路的比较
- 小结

9 正弦交流电路的分析基础——引言

9.1 正弦交流电路的定义

正弦交流电路：

激励为正弦量的线性电路称为正弦交流电路，简称交流电路。



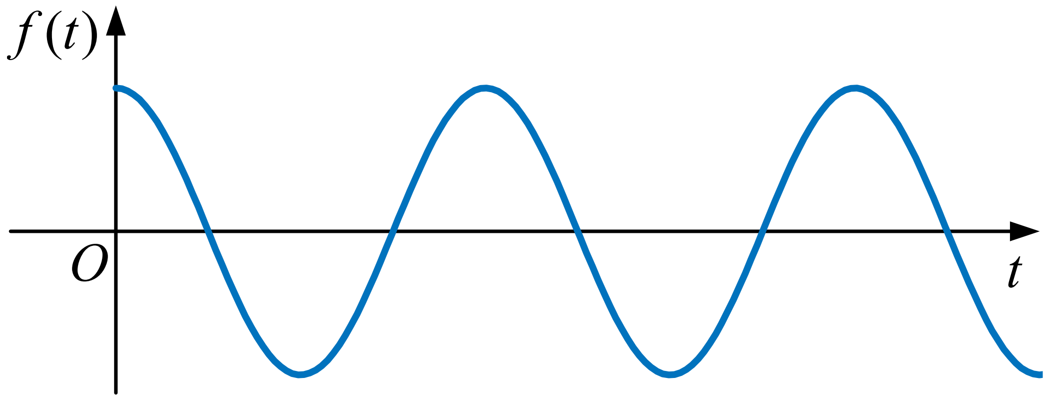
正弦交流电路的相关说明：

- 正弦交流电路是线性电路
- 正弦交流电路关注的是稳态响应
- 正弦交流电路激励是正弦量，响应是同频率的正弦量

电路中提到的正弦量一般指余弦函数。

$$f(t) = F_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Fm为振幅，**ω**为角频率，**φ**为初相位



正弦量的常用计算公式

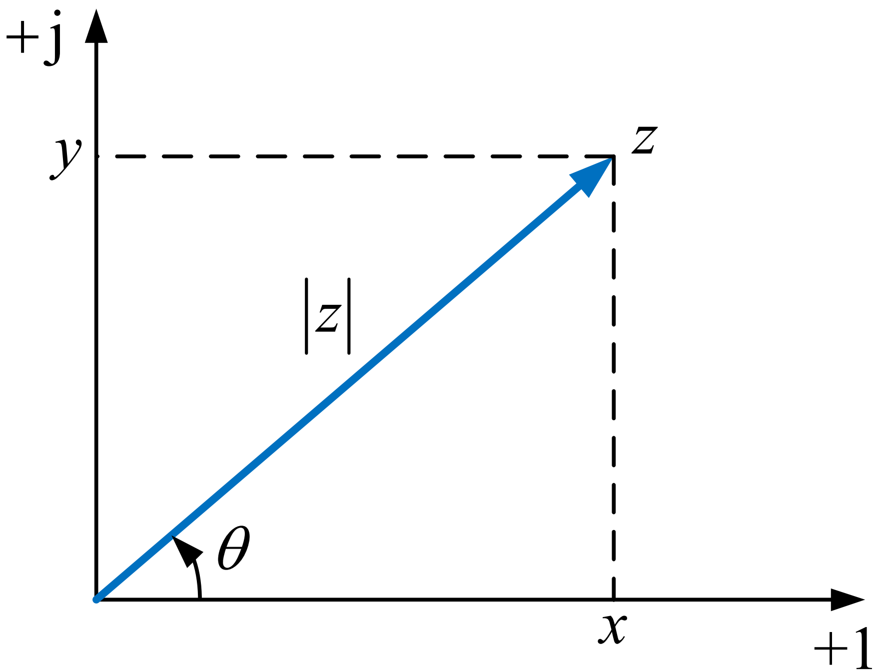
计算内容	计算结果
正弦函数转化为余弦函数的公式	$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$
余弦函数公式	$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\cos(\theta+180^\circ)=-\cos\theta$
和差化积公式	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
积化和差公式	$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ $\cos^2\theta=\cos\theta\cos\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$
其他公式	$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

复数常用的计算公式：

$$z = x + \mathrm{j}y$$

复数的直接坐标形式：

$$z = |z| \angle \theta$$



复数的直接坐标形式

内容	复数公式
复数的表示	$z=x+\mathrm{j}y=\lvert z\rvert\angle\theta$，$z_1=x_1+\mathrm{j}y_1=\lvert z_1\rvert\angle\theta_1$，$z_2=x_2+\mathrm{j}y_2=\lvert z_2\rvert\angle\theta_2$
复数的模	$\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$
复数的辐角	$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$
复数的共轭	$z^*=x-\mathrm{j}y=\lvert z\rvert\angle-\theta$，$zz^*=x^2+y^2=\lvert z\rvert^2$ （注：电路中复数的共轭用上标*表示）
复数的加减	$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{j}(y_1\pm y_2)$
复数的乘除	$z_1z_2=\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert\angle(\theta_1+\theta_2)$，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}\angle(\theta_1-\theta_2)$
与 j 相关的公式	$\mathrm{j}^2=-1$，$\dfrac{1}{\mathrm{j}}=-\mathrm{j}$，$\mathrm{j}=1\angle\dfrac{\pi}{2}$，$-\mathrm{j}=1\angle(-\dfrac{\pi}{2})$

欧拉公式是建立正弦量与复数关系的桥梁

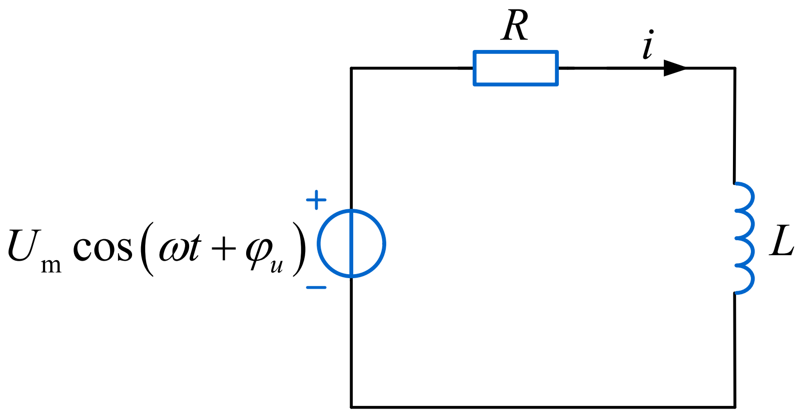
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$

$$\cos\theta = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$$

$$F_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi) = F_{\mathrm{m}} \times \mathrm{Re}\left[e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}\right] = \mathrm{Re}\left[F_{\mathrm{m}} e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}\right]$$

$$F_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left[F_{\mathrm{m}} e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}\right]$$

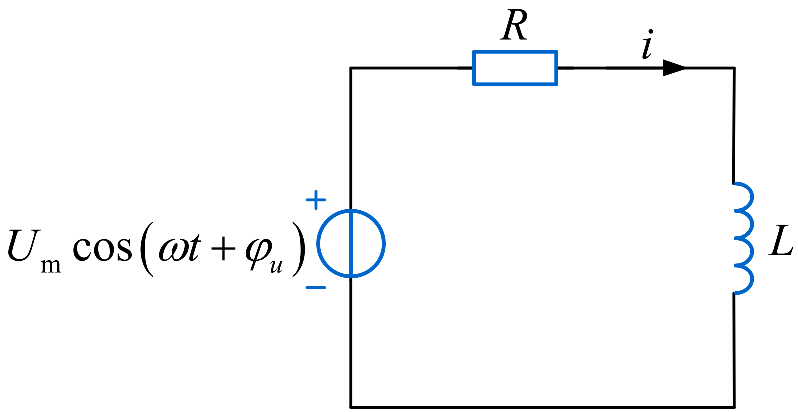
为什么正弦交流电路可以引入相量?



$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$$

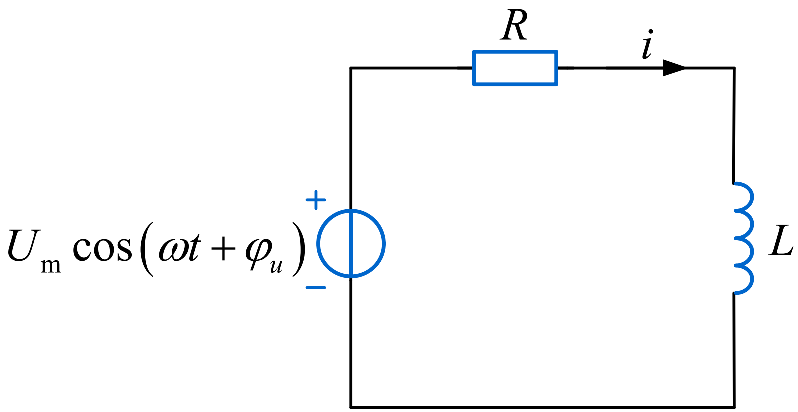
- 正弦交流电路的稳态响应即非齐次微分方程的特解
- 正弦交流电路的响应必然是与激励角频率相同的正弦量
- 正弦量中的角频率无需求解。
- 正弦量中全部都有ωt，因此无需考虑ωt
- 正弦量与复数具有一一对应关系，可将正弦量转化为复数

相量的定义



$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$$

相量的定义



$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$$

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)$$

$$=\mathrm{Re}\left[I_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[I_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\varphi_i}e^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$\dot{I}_{\mathrm{m}}=I_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\varphi_i}$ 定义为正弦量 $i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)$ 对应的振幅相量

$\dot{I}=Ie^{\mathrm{j}\varphi_i}$ 定义为 $i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)$ 对应的有效值相量，$I=I_m/\sqrt{2}$

- 电路课程中均采用有效值相量，相量必须大写，并且打点
- 相量的“相”指初相位，“量”指有效值
- 相量中不含角频率和时间，且是复数，其计算远比正弦量的计算简单，这是正弦交流电路要引入相量的根本原因

正弦量和相量的相互转化

- 正弦量与相量一一对应，可以相互转化
- 正弦量与相量相互转化的依据是相量的定义过程
- 正弦量必须写成余弦函数的形式

例题1（基础） 写出正弦量对应的相量。

$$i(t) = 2\cos\left(\omega t + 30^{\circ}\right) \mathrm{A}$$

$$u(t) = 100\sin\left(\omega t + 30^{\circ}\right) \mathrm{V}$$

正弦量和相量的相互转化

- 正弦量与相量一一对应，可以相互转化
- 正弦量与相量相互转化的依据是相量的定义过程
- 正弦量必须写成余弦函数的形式

例题1（基础） 写出正弦量对应的相量。

$$i(t) = 2\cos\left(\omega t + 30^{\circ}\right)\text{ A}$$

$$\dot{I} = \frac{2}{\sqrt{2}}\angle 30^{\circ} = \sqrt{2}\angle 30^{\circ}\text{ A}$$

$$u(t) = 100\sin\left(\omega t + 30^{\circ}\right)\text{ V}$$

$$u(t) = 100\sin\left(\omega t + 30^{\circ}\right) = 100\cos\left(\omega t + 30^{\circ} - 90^{\circ}\right) = 100\cos\left(\omega t - 60^{\circ}\right)\text{ V}$$

$$\dot{U} = \frac{100}{\sqrt{2}}\angle -60^{\circ} = 50\sqrt{2}\angle -60^{\circ}\text{ V}$$

正弦量和相量的相互转化

同步练习题1（基础） 写出正弦量对应的相量。

$$i(t)=3\cos\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\,\mathrm{A}$$

$$u(t)=20\sin\left(\omega t-135^{\circ}\right)\,\mathrm{V}$$

正弦量和相量的相互转化

同步练习题1（基础） 写出正弦量对应的相量。

$$i(t)=3\cos\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\text{A}$$

$$u(t)=20\sin\left(\omega t-135^{\circ}\right)\text{V}$$

答案：$\dot{I}=1.5\sqrt{2}\angle-\frac{2}{3}\pi\ \text{A},\quad \dot{U}=10\sqrt{2}\angle 135^{\circ}\ \text{V}$

正弦量和相量的相互转化

例题2（基础） 写出相量对应的正弦量。

$$\dot{U} = 10\angle 45^{\circ}\ \mathrm{V}$$

$$u(t) = 10\sqrt{2}\cos\left(\omega t + 45^{\circ}\right)\mathrm{V}$$

同步练习题2（基础） 已知角频率为1000 rad/s，写出相量对应的正弦量。

$$\dot{I} = \sqrt{2}\angle -\frac{\pi}{2}\ \mathrm{A}$$

$$i(t) = 2\cos\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{A}$$

正弦量和相量的相互转化

例题2（基础） 写出相量对应的正弦量。

$$\dot{U} = 10\angle 45^{\circ}\ \text{V}$$

同步练习题2（基础） 已知角频率为1000 rad/s，写出相量对应的正弦量。

$$\dot{I} = \sqrt{2}\angle -\frac{\pi}{2}\ \text{A}$$

9.4 时域正弦量运算与相量域相量运算的对应关系

定义相量的目的是将时域正弦量运算转化为相量域相量（复数）运算，从而简化计算。

下面将从3个方面介绍时域运算与相量域运算的对应关系：

- 加减运算与基尔霍夫定律
- 比例运算与欧姆定律
- 微分运算与电感、电容的电压与电流关系

- 加减运算与基尔霍夫定律

$$f_1(t)=F_{1m}\cos\left(\omega t+\varphi_1\right),\ f_2(t)=F_{2m}\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)$$

9. 4 时域正弦量运算与相量域相量运算的对应关系

加减运算与基尔霍夫定律

$$f_1(t)=F_{1m}\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)，f_2(t)=F_{2m}\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)$$

时域的同频正弦量相加 $f_1(t)+f_2(t)\Rightarrow$ 相量域的相量相加 $\dot{F}_1+\dot{F}_2$

时域的同频正弦量相减 $f_1(t)-f_2(t)\Rightarrow$ 相量域的相量相减 $\dot{F}_1-\dot{F}_2$

时域正弦量KCL方程：$\sum(\pm i_k)=0 \Rightarrow$ 相量域相量KCL方程：$\sum\left(\pm\dot{I}_k\right)=0$

时域正弦量KVL方程：$\sum(\pm u_k)=0 \Rightarrow$ 相量域相量KVL方程：$\sum\left(\pm\dot{U}_k\right)=0$

- 比例运算与欧姆定律

$$f(t)=F_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

- 比例运算与欧姆定律

$$f(t)=F_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

时域的正弦量比例运算 $kf(t) \Rightarrow$ 相量域的相量比例运算 $k\dot{F}$

时域正弦量欧姆定律：$u=Ri \Rightarrow$ 相量域相量欧姆定律：$\dot{U}=R\dot{I}$

9.4 时域正弦量运算与相量域相量运算的对应关系

- 微分运算与电感、电容的电压与电流关系

$$f(t)=F_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

- 微分运算与电感、电容的电压与电流关系

$$f(t)=F_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\varphi\right)$$

时域的正弦量微分运算 $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow$ 相量域的相量比例运算 $\mathrm{j}\omega\dot{F}$

电感时域正弦量VCR: $u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \Rightarrow$ 电感相量域相量VCR: $\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}_L$

电容时域正弦量VCR: $i_C=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \Rightarrow$ 电容相量域相量VCR: $\dot{I}_C=\mathrm{j}\omega C\dot{U}_C$

阻抗定义的由来

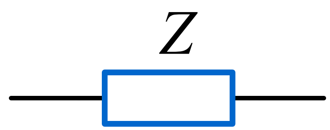
电路元件	相量域
电阻	$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$
电感	$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_L$
电容	$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_C$

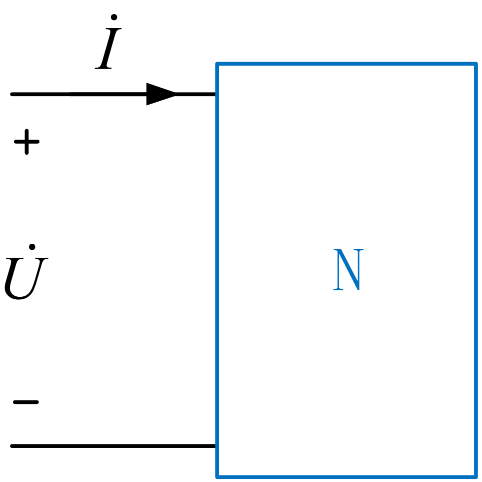
- 在正弦交流电路的相量域中，电阻、电感、电容的电压与电流都是比例关系，称为广义欧姆定律
- 电阻的比例系数为实数，电感和电容的比例系数为纯虚数，称为电抗，有“阻”有“抗”，这就可以引入阻抗的概念

阻抗定义：

在相量域中，不含独立电源的线性一端口网络的**电压相量与电流相量之比称为阻抗**，用Z表示，即

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$





$$Z_R=\frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R}=R$$

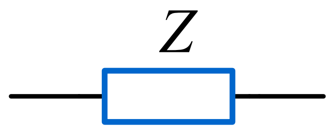
$$Z_L=\frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L}=\mathrm{j}\omega L$$

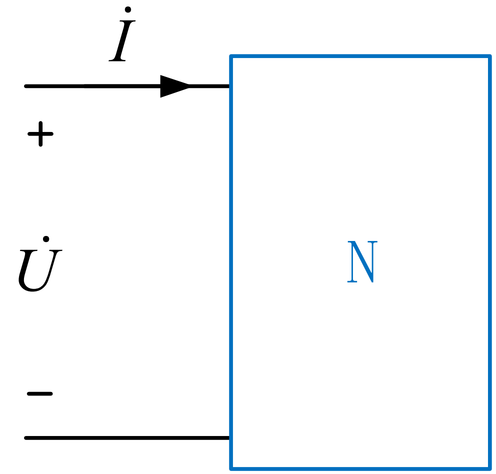
$$Z_C=\frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

9. 5 阻抗和导纳

阻抗定义：

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$





- 阻抗的图形符号与电阻相同
- 阻抗定义时要求电压与电流为关联参考方向
- 阻抗是复数，含实部和虚部，实部称电阻，虚部称电抗

阻抗的代数形式：$Z = R + \mathrm{j}X$, R称为电阻, X称为电抗

$X > 0$, 为感性阻抗；$X < 0$, 为容性阻抗

阻抗的极坐标形式：$Z = |Z| \angle \theta_z$, $|Z|$称为阻抗模值, θ_z 称为阻抗角

极坐标形式一般只在计算时可能用到，最终结果要写成代数形式

阻抗和电阻的异同

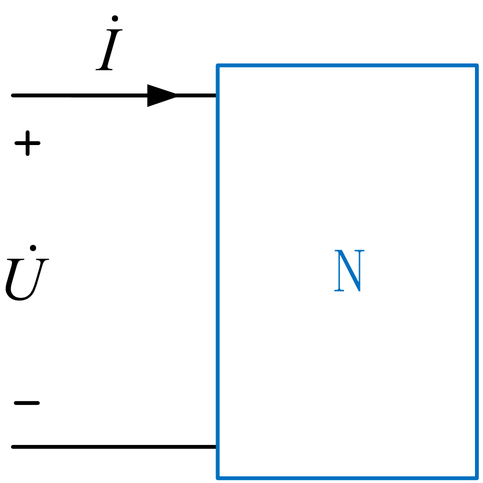
- 阻抗和电阻都满足欧姆定律，串并联等效的公式相同
- 电阻是从时域定义，而阻抗是从相量域定义
- 电阻一定是实数，而阻抗可能为复数

9. 5 阻抗和导纳

导纳定义：

在相量域中，不含独立电源的线性一端口网络的电流相量与电压相量之比称为阻抗，用*Z*表示，即

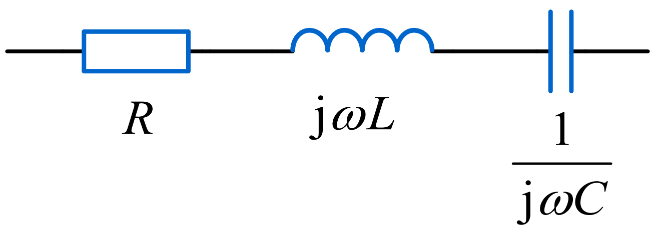
$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{Z} = G(\text{电导}) + \mathrm{j}B(\text{电纳})$$



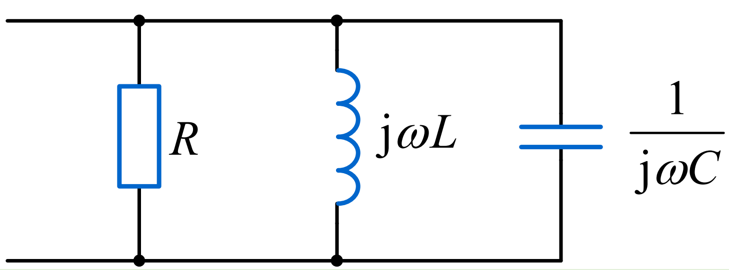
9. 5 阻抗和导纳

串并联阻抗的等效阻抗

阻抗（导纳）的串并联公式与电阻（电导）的串并联公式相同。

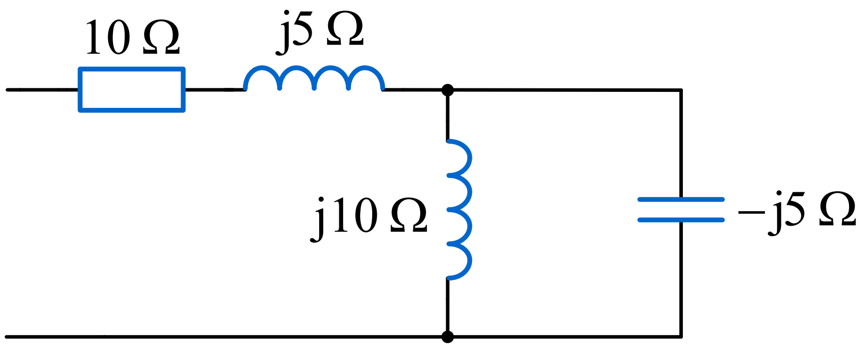


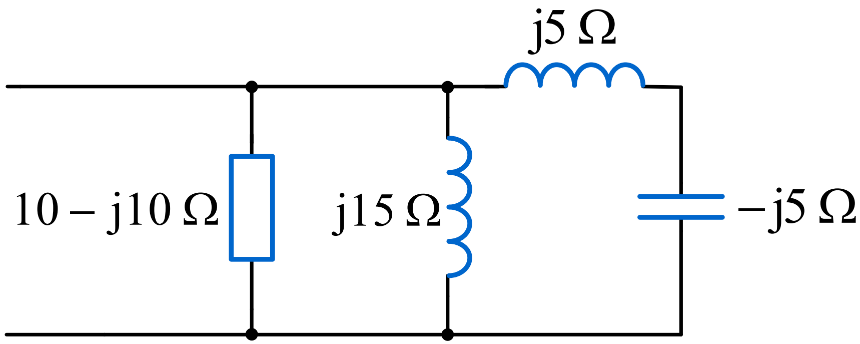
$$Z_{\mathrm{eq}} = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



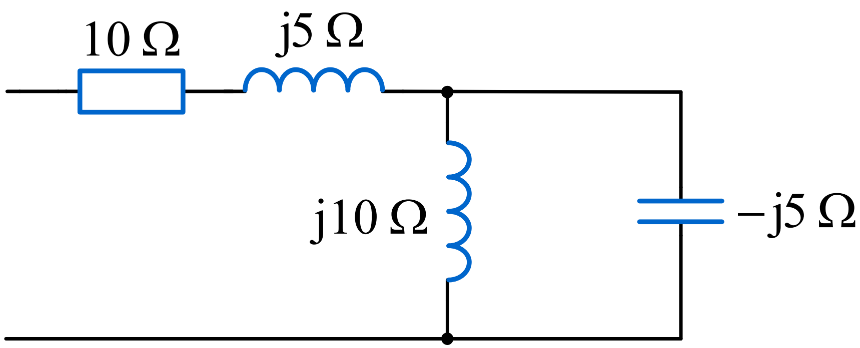
$$Z_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{Y_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C} = \frac{\dfrac{1}{R}}{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2} + \frac{\mathrm{j}\left(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{\left(\dfrac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}$$

例题3（基础） 求一端口网络的等效阻抗。

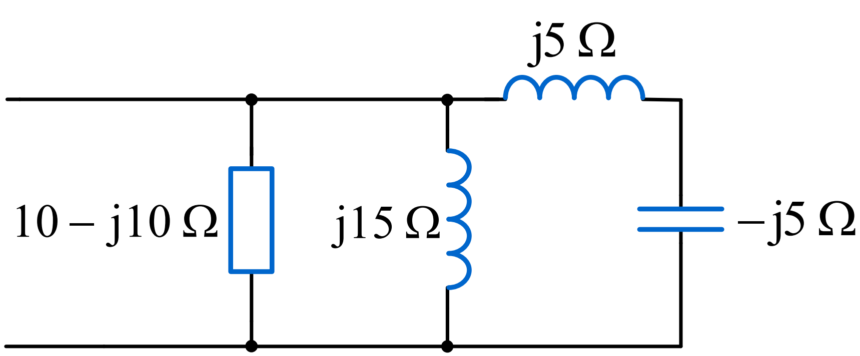




例题3（基础） 求一端口网络的等效阻抗。



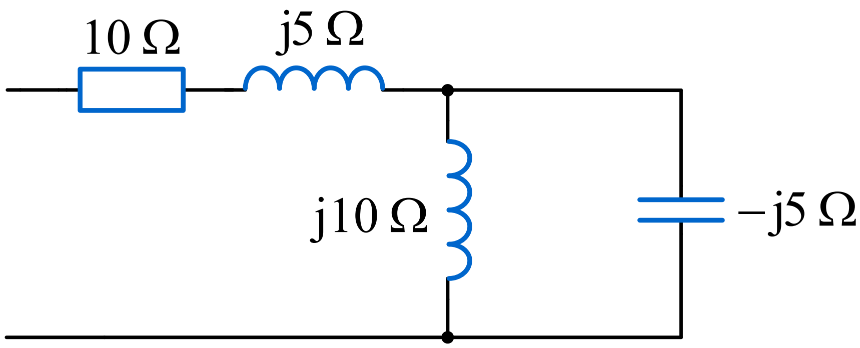
$$Z_{eq} = 10 + j5 + \frac{j10 \times (-j5)}{j10 + (-j5)} = 10 - j5\ \Omega$$

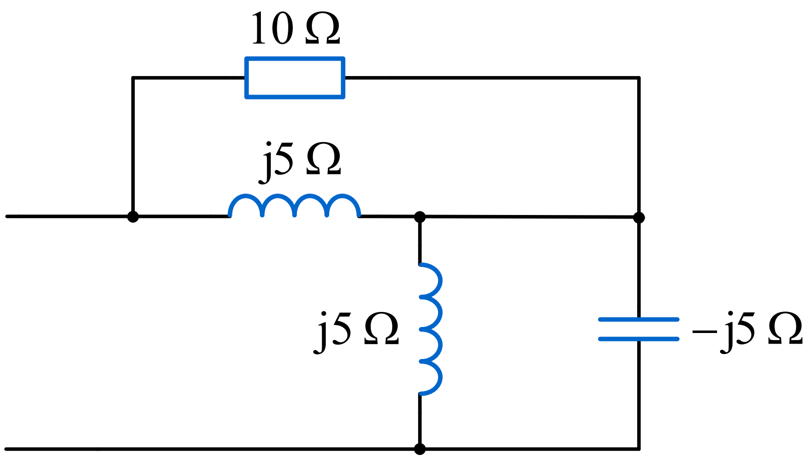


$$Z_{eq} = 0\ \Omega$$

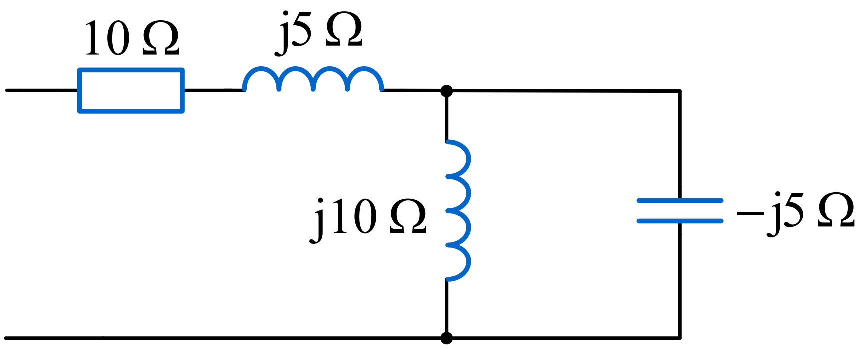
同步练习题3（基础）

求一端口网络的等效阻抗。

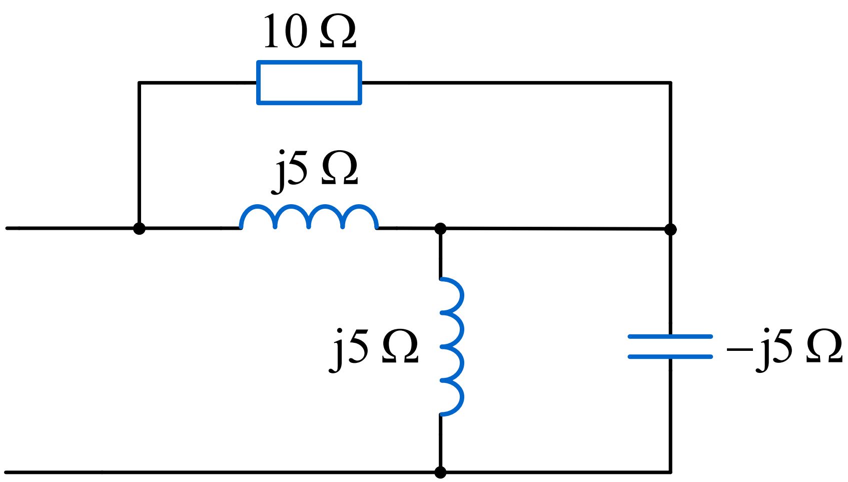




同步练习题3（基础） 求一端口网络的等效阻抗。



答案：$Z_{eq} = 20\ \Omega$



答案：$Z_{eq} = \infty$

阻抗模值与角频率的关系

电路元件	阻抗模值	阻抗模值与角频率关系
电阻	R	无关
电感	ωL	正比
电容	$\dfrac{1}{\omega C}$	反比

- 电阻阻抗模值与角频率模值无关
- 电感阻抗模值随角频率增加而增加
- 电容阻抗模值随角频率增加而减小

阻抗的电压与电流相位关系

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\varphi_u}{I\angle\varphi_i}=\frac{U}{I}\angle(\varphi_u-\varphi_i)=|Z|\angle\varphi_Z \Rightarrow \varphi_Z=\varphi_u-\varphi_i$$

阻抗角等于电压与电流相位差

9.5 阻抗和导纳——阻抗的电压与电流相位关系

阻抗类型	阻抗	阻抗角	阻抗的电压与电流相位关系
电阻	$Z = R$	$\varphi_Z = 0^\circ$	$\varphi_u - \varphi_i = 0^\circ$ 电阻的电压与电流同相位
电感	$Z = \mathrm{j}\omega L$	$\varphi_Z = 90^\circ$	$\varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$ 电感电压超前电流 90 度
电容	$Z = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}$	$\varphi_Z = -90^\circ$	$\varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$ 电容电压滞后电流 90 度
感性阻抗	$Z = R + \mathrm{j}X,\ X > 0$	$0^\circ < \varphi_Z < 90^\circ$	$0^\circ < \varphi_u - \varphi_i < 90^\circ$ 感性阻抗电压超前电流 0 至 90 度
容性阻抗	$Z = R + \mathrm{j}X,\ X < 0$	$-90^\circ < \varphi_Z < 0^\circ$	$-90^\circ < \varphi_u - \varphi_i < 0^\circ$ 容性阻抗电压滞后电流 0 至 90 度

9.6 正弦交流电路与直流电路的比较

比较内容	直流电路	正弦交流电路
激励源	恒压电压源、恒流电流源	正弦电压源、正弦电流源
KCL、KVL	成立	在时域中 KCL 和 KVL 成立，在相量域中也满足 KCL 方程和 KVL 方程的形式
等效变换 节点电压法 回路电流法	适用	适用（相量域）
电路定理	成立	成立（相量域）
应用范围	应用范围广，但远逊于正弦交流电路	应用范围极广，远超直流电路
计算分析	基于实数，相对简单	基于复数，相对复杂
电压和电流	仅有大小之分	电压和电流为正弦量 $A\cos(\omega t+\varphi)$ 振幅 A、角频率 ω、初相位 φ 均会影响电压和电流
功率类型	只有一种类型功率：瞬时功率	包含 5 种类型功率：瞬时功率、有功功率、无功功率、视在功率、复功率

9 正弦交流电路的分析基础——小结

- 正弦交流电路是激励为正弦量的线性电路
- 正弦量计算很复杂，复数计算相对简单
- 欧拉公式建立起正弦量与复数的一一对应关系
- 根据复数与正弦量的关系，可以引入相量的概念
- 相量包含有效值和初相位，不含角频率和时间，可简化分析
- 正弦量和相量可以相互转化
- 时域正弦量加减、比例运算对应相量域相量加减、比例运算
- 时域正弦量微分运算对应相量域相量比例运算，比例系数 $j\omega$
- 阻抗定义为支路电压相量与电流相量之比，导纳为阻抗倒数
- 阻抗满足广义欧姆定律，其串并联公式与电阻相同
- 阻抗较之电阻复杂，受很多因素影响
- 交流电路比直流电路复杂，差异很大，但也有相似之处

感谢大家聆听

主讲人：邹建龙

时　间：　　　年　月　日