系统建模与动力学分析

学　时　数：48学时
学　　　分：3
任 课 教 师 ：闫　涛
工 作 单 位 ：电信学部自动化学院综合所
办 公 地 点 ：兴庆校区东二楼361
　　　　　　创新港4-6168
邮　　　箱：yantao@xjtu.edu.cn

第四章　电系统

- 电路基本定律及建模
- 相似系统
- 运算放大器
- 模拟计算机

电路基本定律

- 电压：在导体中产生电流流动所需要的电动势，单位是伏特(V)
- 电荷：电荷是电流对时间的积分，单位是库仑 (C)，1库仑是1秒钟内1安培电流输送的电荷值，即

$$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$$

- 在米制单位制中，1库仑是在1V/m电场中所受到1N力的电荷值，即

$$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{V}$$

- 电流：表示电荷的流动率，电流的单位是安培(A)。如果 dq C 电荷在 dt 时间内穿过给定的截面，此时电流 i 为

$$i = dq/dt$$

电路基本定律

- 1安培的电流是每秒输送1库伦的电荷，即

$$1\,A = 1\,C/s$$

- 如正电荷流是从左向右（或负电荷流从右向左），则电流流动是从左向右。

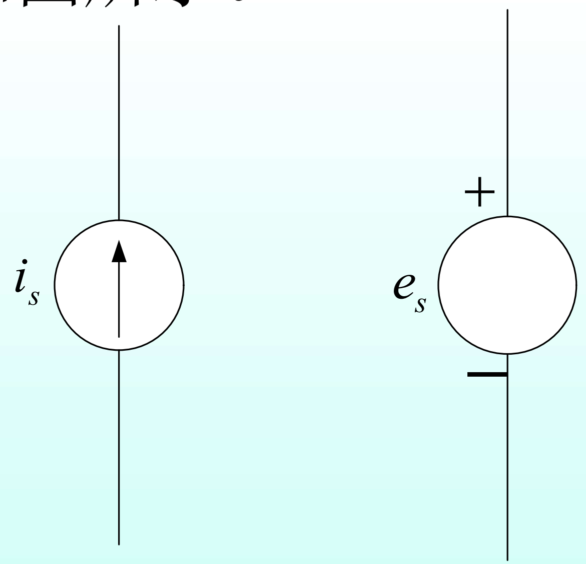
- 电流源和电压源

- 电流源表示一能源，它产生一规定的电流，一般是时间的函数，而与电源的端电压无关。

- 电流源一般包括晶体管和设计成恒电流的功率供给装置。图示为一直流恒定的电流源。

电路基本定律

- 电压源是一种能源，它供给一规定电压，一般是时间的函数，是完全与电流独立的。
- 电压源一般包括有旋转的发电机、电池和电子系统供给恒电压的功率供给装置。
- 电压源和电流源的电路符号如图所示。
- 一个电池可以由一个纯电压源和一个内电阻来表示，后者要考虑其热损失。



电路基本定律

- 三类基本电路元件
- 电阻：定义为使电流发生单位变化所需要的电压变化。

$$电阻R=\frac{电压变化V}{电流变化A}$$

- 线性电阻的电阻R可以由下式给出

$$R=e_R/i$$

- 其中 e_R 是电阻两端的电压，i 是通过电阻的电流。电阻的单位是欧姆(Ω) 。

$$欧姆=\frac{伏特}{安培}$$

电路基本定律

- 电阻的倒数称为电导，单位是西门子(S)。

$$电导 = \frac{1}{R} = G\ (\mathrm{S})$$

- 电阻不能用任何形式贮存电能，它能把电能耗散为热。
- 真实的电阻不可能是线性的，其总是存在着某些电容和电感效应。
- 电容元件：电容定义为使单位电压变化所需要的电荷值的变化。电容是在两个板间对于一定的端电压能储存的电荷值的一种度量。

$$电容C = \frac{电荷值的变化}{电压的变化}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$$

电路基本定律

- 电容器的电容C可由下式给出

$$C = q / e_C$$

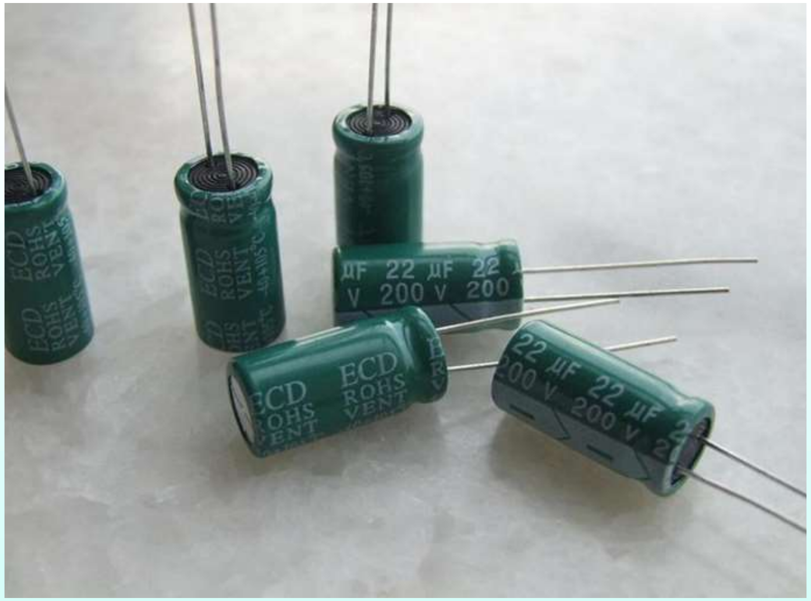
- 其中 q 是电荷的贮存量，e_C 是电容的端电压。电容的单位是法拉(F)。

$$法拉 = \frac{安培 \cdot 秒}{伏特} = \frac{库伦}{伏特}$$

- 由于$i = dq/dt$和$e_C = q/C$，

$$i = C\frac{de_C}{dt}, \quad de_C = \frac{1}{C} idt$$

$$\Rightarrow \quad e_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t idt + e_C(0)$$



电路基本定律

- 一个纯电容能贮存能量并能重新释放所有的能量，但实际的电容总是存在各种损失。这些能量损失可用功率系数来表示。
- 功率系数：交流电压每周能量的损失与每周储存的能量之比。因此，功率系数希望是小的数值。
- 电感元件：
- 围绕一个运动的电荷或电流，周围存在着一个感应区域，称为磁场。
- 如果有一个回路在一个随时间而变化的磁场中，则回路将产生感应电动势。

电路基本定律

- 感应电压与电流变化率（每秒电流的变化）之比定义为电感。

$$电感 = \frac{感应电压的变化}{每秒电流的变化}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A/s}}$$

- 电感效益可分为自感和互感。
- 自感是单个线圈的性质，它是当由线圈电流引起的磁场耦合线圈本身时产生的。感应电压的大小正比于耦合电路的磁通量的变化率。
- 如果电路不包含铁磁体元件（例如铁心），磁通量变化率正比于 di/dt。

电路基本定律

- 自感应或简单感应 L 是感应电压 e_L (V)和电流变化率（每秒电流的变化）di/dt(A/s)之间的比例常数。

$$L = \frac{e_L}{di/dt}$$

- 电感的单位是亨利(H)。当1安培每秒的变化率将感应1伏特电动势时，此电路就具有1亨利电感。

$$亨利 = \frac{伏特}{安培/秒} = \frac{韦伯}{安培}$$

- 对于电感线圈，有

$$e_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t e_L dt + i_L(0)$$

电路基本定律

- 由于大量的电感线圈是金属导线线圈，它们总是具有一定的电阻。由电阻存在而引起的能量损失用品质系数Q表示。

- 品质系数：表示储存与消散能量的比率。一个高Q值一般表示电感线圈含有小的电阻值。

- 互感表示电感线圈之间的影响，这是由于它们的磁场之间的相互作用而引起的。

- 当两个电感线圈中任一个有1安培每秒的电流变化时，对另一个电感线圈感应产生1伏特的电动势，则它们间的互感M是1亨利。

电路基本定律

- 欧姆定律(Ohm’s Law)：电路中的电流正比于作用在电路上的总电动势，反比于电路中的总电阻。

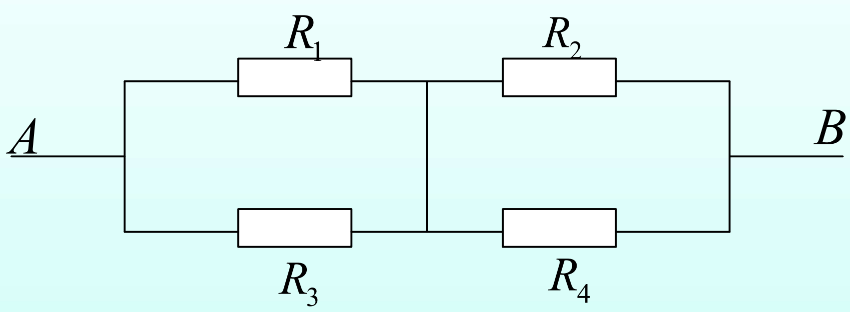
$$i = e / R$$

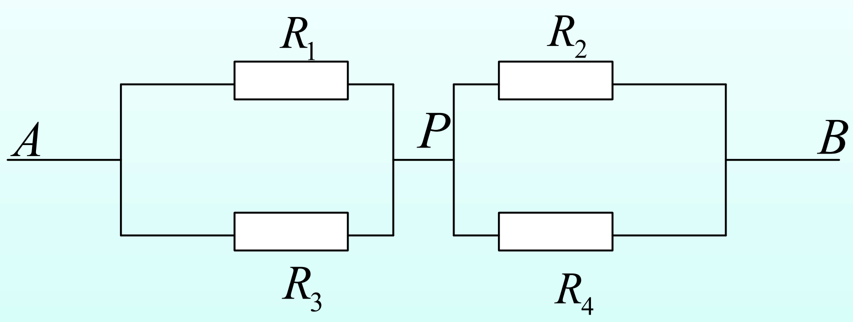
- 其中i是电流(A)，e是电动势(V)而R是电阻(Ω)。
- 串联电路。串联电阻的合成电阻是各分电阻之和。
- 并联电路。并联电阻的合成电阻的倒数是各分电阻的倒数之和。
- 串联和并联电阻的合成电阻

电路基本定律

- 例：研究下图所示的电路在点A和B之间的合成电阻。
- 在此电路中，R_1和R_3是并联，R_2和R_4是并联。并由这两并联电阻组成串联电路。

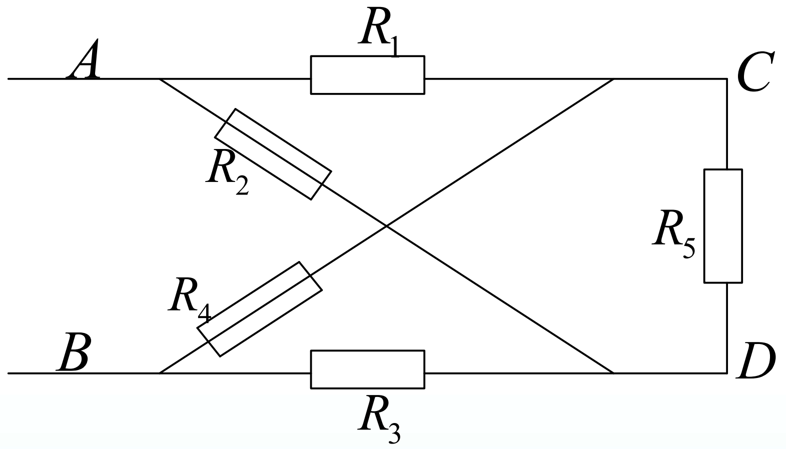
$$R_{AP}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3},\quad R_{PB}=\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}\quad\Rightarrow\quad R=R_{AP}+R_{PB}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}$$





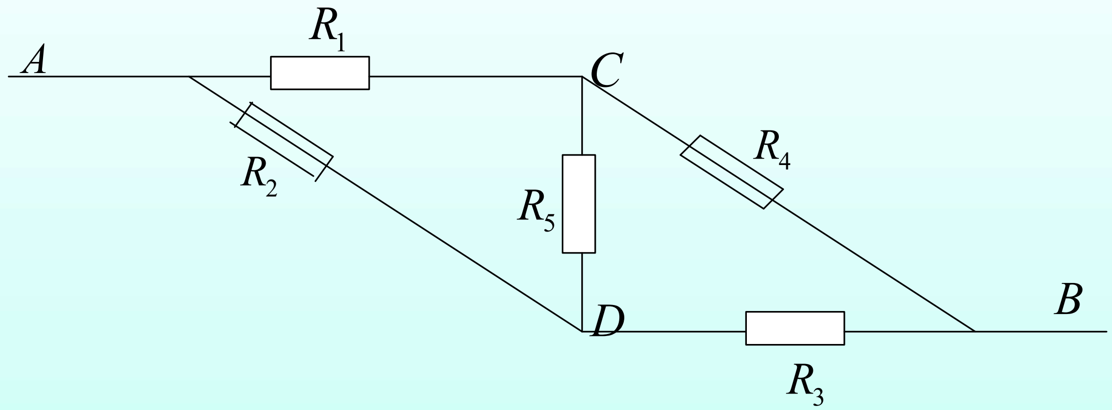
电路基本定律

- 例题A-3-2. 求右图中所给定电路的A和B点间的电阻。
- 此电路等价于下图所示的电路。
- 因为$R_1=R_4$，$R_2=R_3$，在点C和D之间电压是相等的，因此电阻R_5无电流通过。



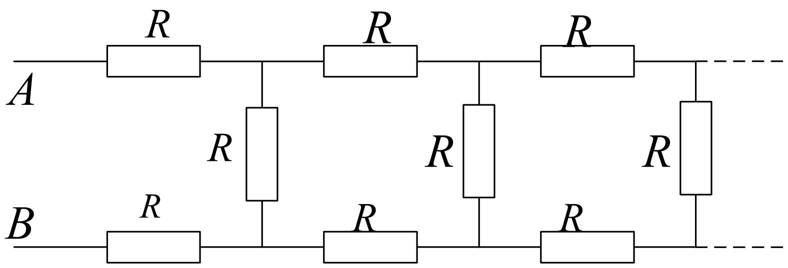
- 电阻R_5在点A和B之间对总电阻值无作用，故它可从电路中移去。于是

$$\frac{1}{R_{AB}}=\frac{1}{R_1+R_4}+\frac{1}{R_2+R_3}$$

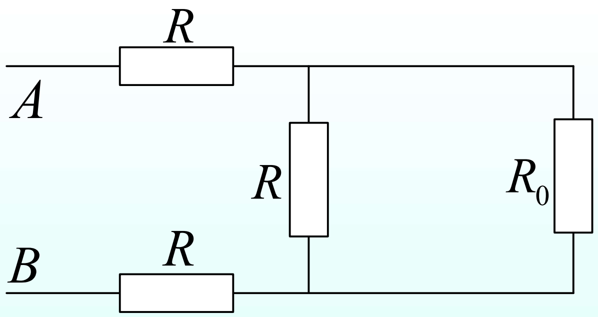


电路基本定律

- 例题A-3-4. 求右图所示电路的A与B点间的合成电阻，它是由无限多电阻连接成$\prod$形所组成。



- 设点A和B间的合成电阻为R_0。把前三个电阻与其它电阻分离开。
- 因为电路是由无限多电阻合成，前三个电阻对合成电阻值无影响。



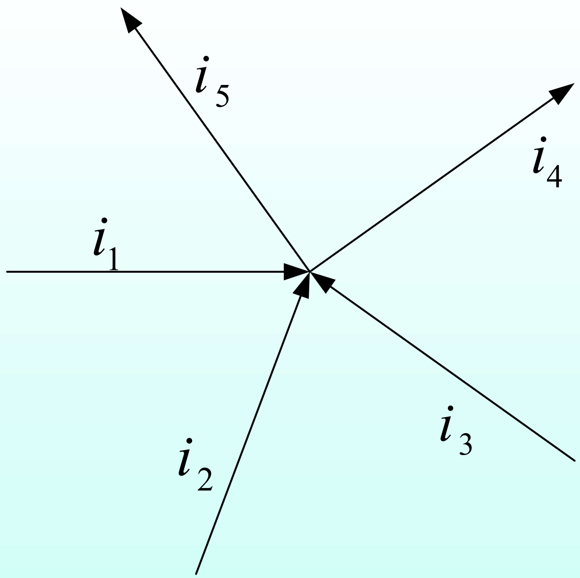
- 因此在点C和D间的合成电阻同样是R_0。点A和B间的电阻可求得为

$$R_0 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}} = 2R + \frac{RR_0}{R_0 + R} \Rightarrow R_0 = R + \sqrt{3}R$$

电路基本定律

- 基尔霍夫定律 (Kirchoff's Law)
- 基尔霍夫电流定律（节点定律）：所有进入和流出同一节点的电流的代数和等于零。即进入一节点的电流和等于同一节点流出的电流和。
- 节点是指在一个电路中有三个或更多个导线连接在一起的点。
- 右图可用基尔霍夫电流定律表示为

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$



电路基本定律

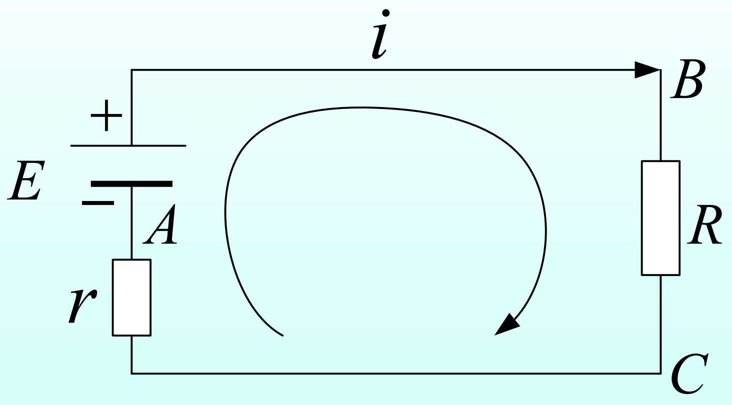
- **基尔霍夫电压定律（环路定律）**：在任何瞬时电路中绕任何环路的电压代数和为零。即绕环路电压降值之和等于电压升值之和。

- 电压的升值发生在从负极到正极通过一电动势源；或与电流流动相反的方向通过一电阻。电压的降值发生在从正极到负极通过一电动势源；或与电流流动方向同向通过一电阻。

- 如图例所示

$$e_{AB} + e_{BC} + e_{CA} = 0$$

$$\Rightarrow \ E - iR - ir = 0 \ \Rightarrow \ i = \frac{E}{R + r}$$



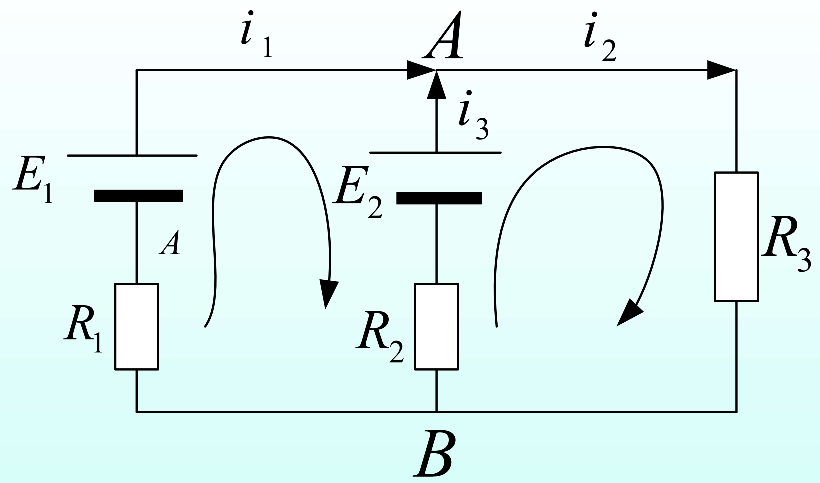
电路基本定律

- 具有两个或更多个环路的电路。

- 可同时使用基尔霍夫电流定律和电压定律。第一步写出电流方程式以决定每一导线的电流方向。第二步是确定我们在每一环路中所遵循的方向。

- 在右图中，假定电流方向如图所示。

  在 A 点： $i_1 + i_3 - i_2 = 0$



- 对于左环路：

$$E_1 - E_2 + i_3 R_2 - i_1 R_1 = 0$$

- 对于右环路：

$$E_2 - i_2 R_3 - i_3 R_2 = 0$$

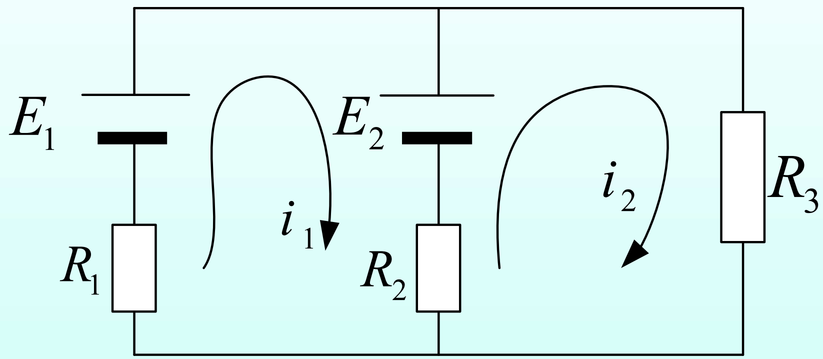
电路基本定律

- 首先从前面三个方程式中消去i_2，其后解i_1和i_3，得

$$i_1 = \frac{E_1(R_2+R_3)-E_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1} \qquad i_3 = \frac{E_2(R_1+R_3)-E_1R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

$$i_2 = i_1 + i_3 = \frac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

- 对于环路使用循环的电流来写方程式。
- 在此方法中，我们假设有一循环电流存在于每一环路中。



电路基本定律

- 应用基尔霍夫电压定律于电路，得方程式
- 对于左环路： $E_1 - E_2 - R_2(i_1 - i_2) - R_1 i_1 = 0$
- 对于右环路： $E_2 - R_3 i_2 - R_2(i_2 - i_1) = 0$
- 通过电阻R_2的净电流是i_1和i_2之间的差。对i_1，i_2解

$$i_1 = \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \qquad i_2 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

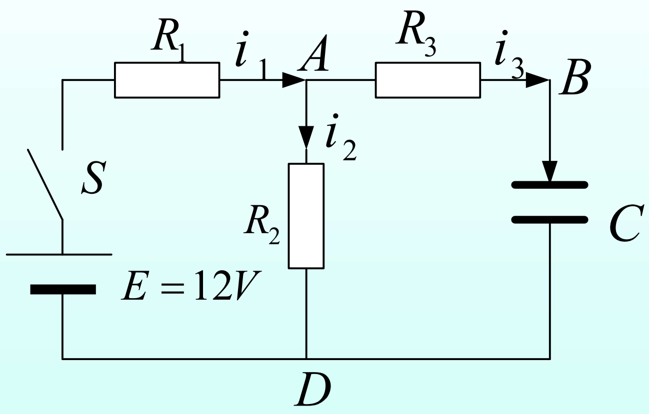
- 上解证实了 $i_3 = i_2 - i_1$ 。

电路基本定律

- 建立数学模型和电路分析
- 获得数学模型的节点法。应用基尔霍夫电流定律于电路中每一个节点，写出方程式。
- 例 3-1. 下图所示的电路，假设在 $t=0$ 时接通开关 S，这样把 $E=12\text{V}$ 作为电路的输入。求电压 $e_A(t)$ 和 $e_B(t)$，其中 e_A 和 e_B 分别是 A 点和 B 点处的电压。假设电容无初始充电。
- 选择节点 D 作为参考点 $(e_D=0)$

在节点 A $\quad i_1-i_2-i_3=0$

$$i_1=\frac{E-e_A}{R_1}\qquad i_2=\frac{e_A-e_D}{R_2}=\frac{e_A}{R_2}\qquad i_3=\frac{e_A-e_B}{R_3}$$



电路基本定律

- 因此

$$\frac{E-e_A}{R_1}-\frac{e_A}{R_2}-\frac{e_A-e_B}{R_3}=0$$

- 在点B，i_3等于$C\,d(e_B-e_D)/dt=C\,de_B/dt$。因此

$$\frac{e_A-e_B}{R_3}=C\frac{de_B}{dt}$$

- 电压$e_A(t)$和$e_B(t)$可以由以上方程式确定为时间的函数。

- 当$2R_1=R_2=R_3$，$R_3C=1$时，可得

$$\dot{e}_B+\frac{3}{4}e_B=6$$

电路基本定律

- 令 $x = e_B - 8$，上式可写为

$$\dot{x} + \frac{3}{4}x = 0$$

- 上述方程式的解可用 $x = Ke^{\lambda t}$ 求得。将其代入上式为

$$K\lambda e^{\lambda t} + \frac{3}{4}Ke^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4} = -0.75$$

- 因此可得 $e_B(t) = Ke^{-0.75t} + 8$

- K 由初始条件决定。因为电容器无初始充电，

$$e_B(t) = 8(1 - e^{-0.75t}) \qquad e_A(t) = \dot{e}_B(t) + e_B(t) = 8 - 2e^{-0.75t}$$

电路基本定律

- 注意：$e^{-4}=0.0183$ 和 $e^{-6}=0.00248$。那么，对于 $t>8$，我们近似认为 $e_A(t)=e_B(t)=8\text{V}$。因此，对于 $t>8$，R_3 无功率耗散。功率连续不断地由电阻 R_1 和 R_2 所耗散。

- 获得数学模型的环路法

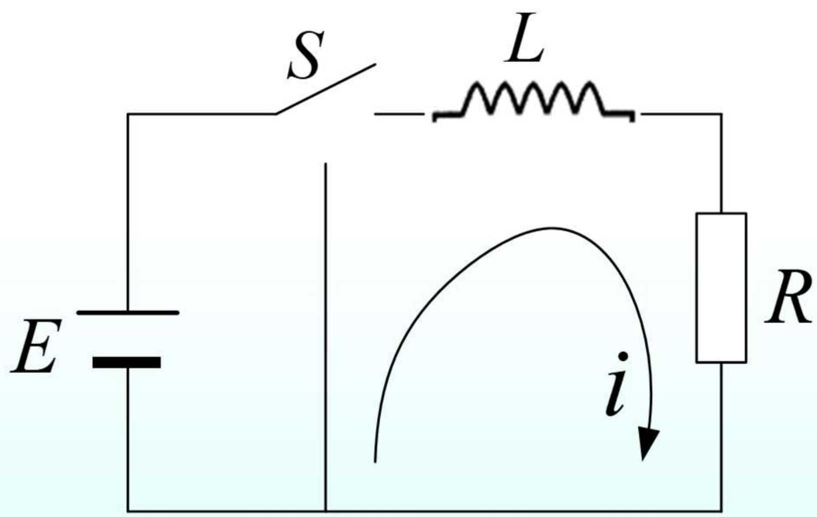
- 首先要标明未知电流，并任意假定电流绕环路的方向。然后应用基尔霍夫电压定律写出方程式。

- 例3-2. 假定如图所示的电路中开关 S 在 $t<0$ 时是切断的，在 $t=0$ 时是接通的。这里只包含有一个环路。任意选择电流绕环路的方向，可得方程式为

电路基本定律

$$E - L\frac{di}{dt} - Ri = 0 \;\Rightarrow\; L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

- 在开关 S 刚接通的瞬时，感应线圈中的电流不能瞬时由零变到有限值，因此 $i(0)=0$。



- 令 $x = i - E/R$，则上式简化为

$$L\frac{dx}{dt} + Rx = 0$$

- 假设其有一指数解

$$x = Ke^{-(R/L)t}$$

$$\Rightarrow\; i(t) = x(t) + E/R = Ke^{-(R/L)t} + E/R$$

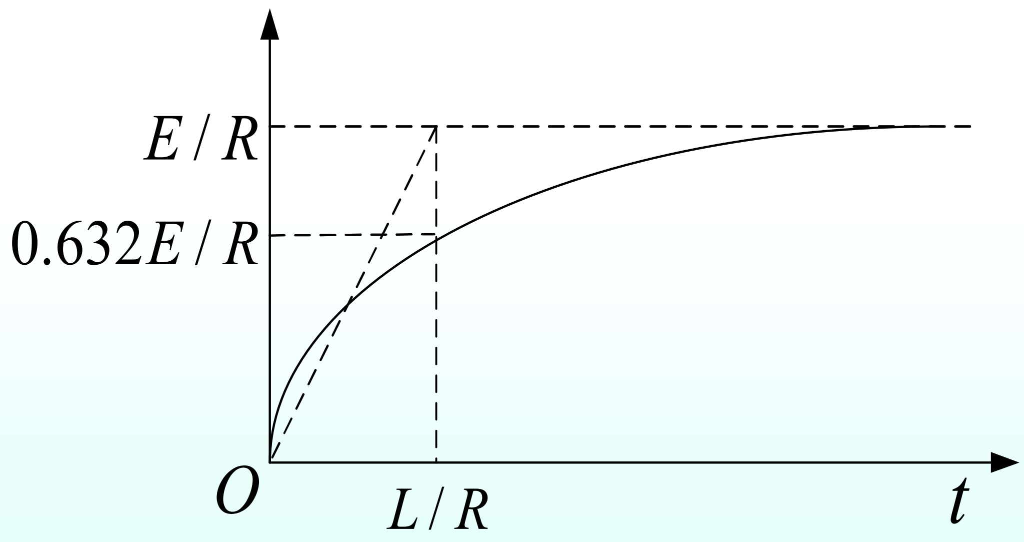
电路基本定律

- K由初始条件决定。根据 $i(0)=0$ 可得

$$i(0)=K+E/R=0 \;\Rightarrow\; K=-E/R$$

- 因此，电流$i(t)$为

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-e^{-(R/L)t}\right]$$



- 右图表示了一种类型的 $i(t)$ 与 t 的关系曲线。

电路基本定律

- 例3-3. 在上例中，假设对于$t<0$开关S是切断的，而在$t=0$时是接通的，在$t=t_1>0$时又重新切断。求对于$t \geq 0$时电流$i(t)$。

- 对于$t_1 > t \geq 0$时，电路方程式和解是

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E, \quad i(0)=0$$

$$i(t)=\frac{E}{R}\left[1-e^{-(R/L)t}\right] \quad (t_1 > t \geq 0)$$

- 在$t \geq t_1$时，开关切断，电路方程式变为

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0$$

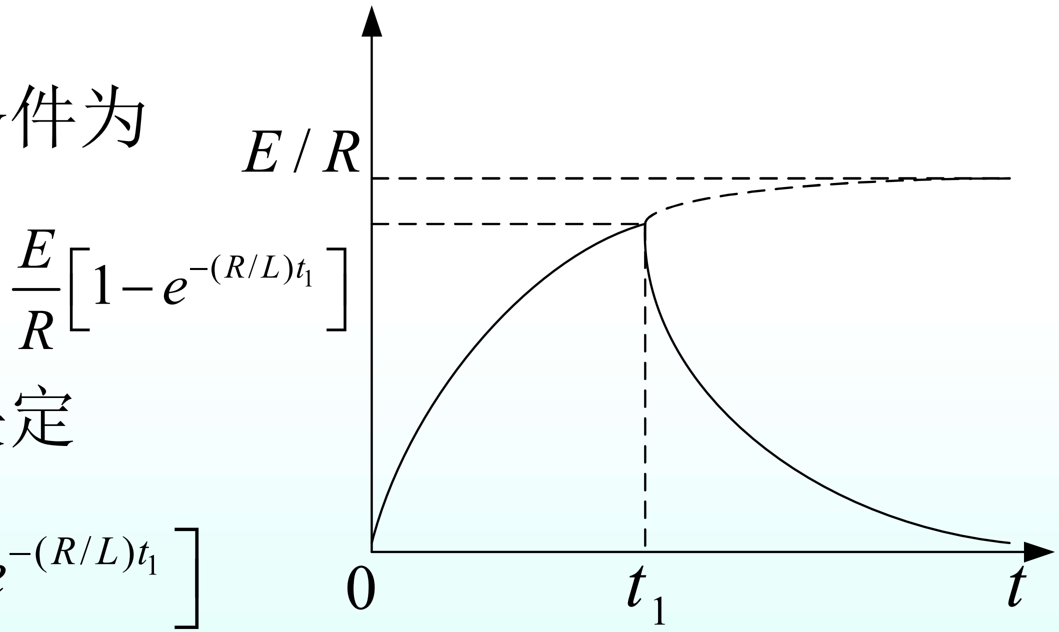
电路基本定律

- 方程式的解可以写为

$$i(t) = Ke^{-(R/L)t}$$

- 其中在 $t = t_1$ 时的初始条件为

$$i(t_1) = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t_1}\right]$$



- 常数 K 可由初始条件决定

$$i(t_1) = Ke^{-(R/L)t_1} = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t_1}\right]$$

$$\Rightarrow\ K = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t_1}\right]e^{(R/L)t_1} = \frac{E}{R}\left[e^{(R/L)t_1} - 1\right]$$

电路基本定律

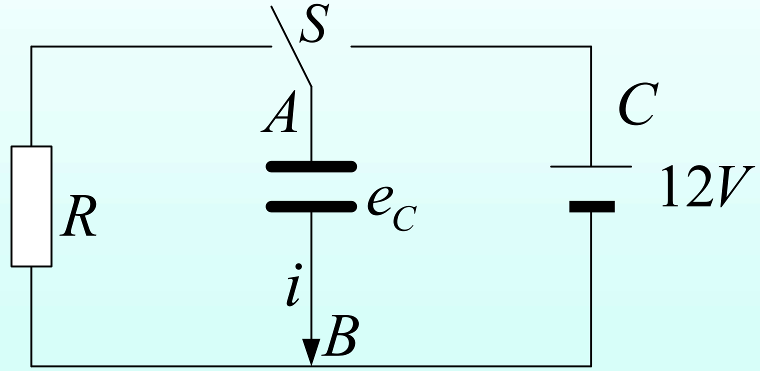
- 例 3-4. 下图是由一个电容、一个电阻和一个电池组成的电路。电容被充电到12V，并在$t=0$时开关接通电阻。求电流的时间函数$i(t)$。

- 对于$t>0$，

$$\frac{1}{C}\int idt + Ri = 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{C}\int_0^t idt + \frac{1}{C}q(0) + Ri = 0$$

- 注意 $q(0)/C = e_A(0) - e_B(0) = e_C(0) \qquad e_B(0) = 0$

- 因此 $\frac{1}{C}\int_0^t idt + Ri = -e_C(0)$



电路基本定律

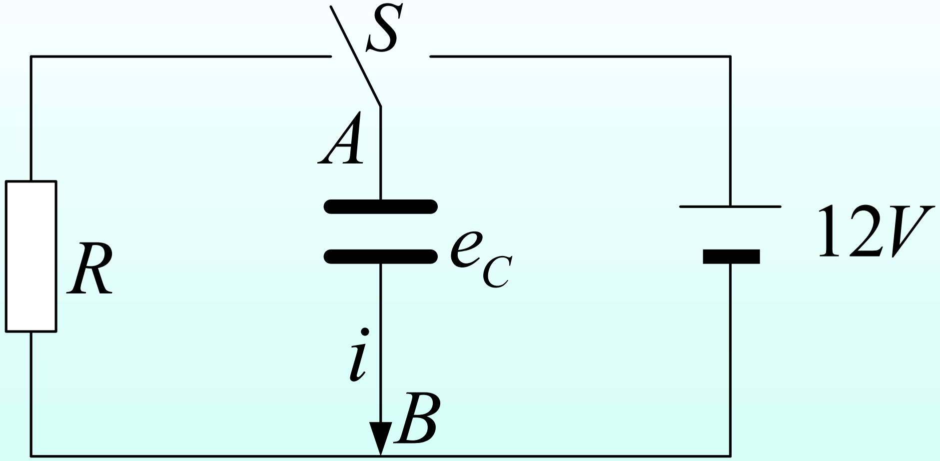
- 上式两边对时间求导数，得

$$R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$$

- 它的解可以写为

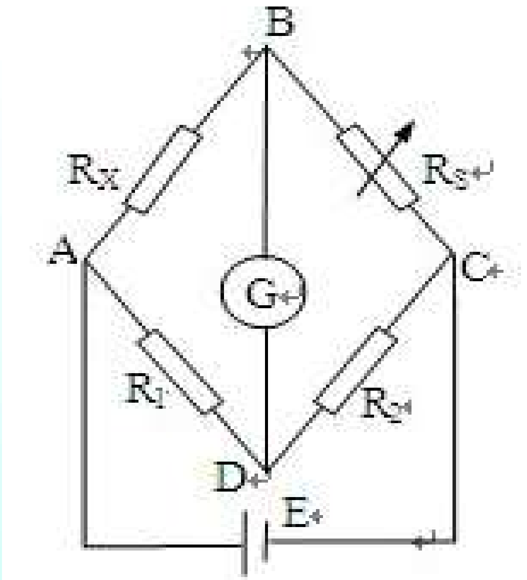
$$i(t)=Ke^{-t/RC}$$

- 根据初始条件可得K=-12/R



电路基本定律

- 惠斯顿电桥
- 下图所示为一惠斯顿电桥，它是由四个电阻，一个电池（或直流低压电源）和一个电流计所组成。电阻 R_x 是一个未知电阻。电阻 R_1 和 R_2 是一比例桥臂，它们可以做成相等。电池和电流计的位置可以交换。



电路基本定律

- 惠斯顿电桥图中有三个环路，设每一环路的电流为 i_1，i_2，i_3。
- 惠斯顿电桥的平衡条件是通过电流计的电流为零。
- 如果电桥是平衡的，则有

$$\begin{cases} R_1 i_2 = R_2(i_1 - i_2) \\ R_x i_3 = R_3(i_1 - i_3) \\ i_2 = i_3 \end{cases} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_3}$$

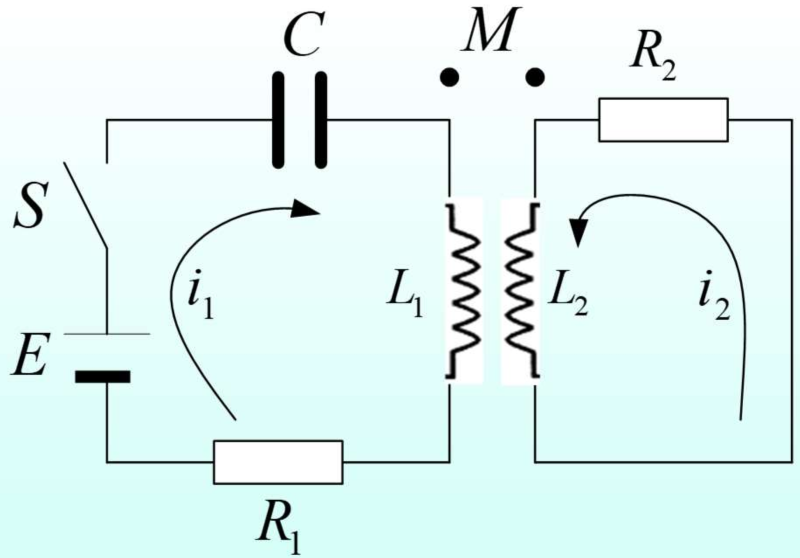
电路基本定律

- 具有互感线圈的电路

- 例 3-5. 下图的系统表示由一对互感线圈在同一磁场下耦合的两个电路的网络。假设在 $t=0$ 时接通开关 S，在电容中无初始充电，求系统数学模型。

- 假定循环电流 i_1 和 i_2 如图所示。此时
  对于电路1（左环路），有

$$E-\frac{1}{C}\int i_1 dt-L_1\frac{di_1}{dt}-M\frac{di_2}{dt}-R_1 i_1=0$$



- 对于电路2（右环路），有

$$-L_2\frac{di_2}{dt}-M\frac{di_1}{dt}-R_2 i_2=0$$

电路基本定律

- 整理这两个方程式，并注意$q_1(0)=0$，因此有

$$\int i_1 dt = \int_0^t i_1 dt + q_1(0) = \int_0^t i_1 dt$$

- 最终可得系统的数学模型

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} + R_1 i_1 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1 dt = E \\ L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = 0 \end{cases}$$

- 注意：如果一数学模型包含有积分-微分方程，我们可以对等式两边同时求微分而得到微分方程。

- 微分方程组的解可以表示为具有未定常数的指数函数形式。此常数可代入初始条件求得。

电路基本定律

- 小结
- 欧姆定律
- 串联电路和并联电路
- 基尔霍夫电流定律（节点定律）
- 基尔霍夫电压定律（环路定律）
- 建立数学模型和电路分析
- 节点法和环路法
- 惠斯顿电桥
- 具有互感线圈的电路

功率和能

- 对两线端元件，输入功率是流入该元件能量的速率。

$$P = dW/dt$$

- 因为电压是每单位电量中的能量 ($e=dW/dq$) 和电流是电量流动的速率 ($i=dq/di$)，有

$$P = \frac{dW}{dq}\frac{dq}{dt} = ei$$

- 如果 e 和 i 是随时间而变，此时功率 P 变成时间的函数。

- 通过时间间隔 $t_0 \le t \le t_f$ 输入到元件中的总能量值是

$$W = \int_{t_0}^{t_f} Pdt = \int_{t_0}^{t_f} eidt$$

功率和能

- 由电阻消耗的能量
- 单位时间内由电阻耗散或消耗的能量是

$$P = ei = i^2 R = e^2 / R$$

- 耗散的能量变为热能。电阻是一个元件的不可逆耗散功率的能量的一种度量。
- 存贮于电容中的能量
- 当有一电压作用于极板两端时，由于在电容器的极板间具有一电场，因此电容就贮存能量。

功率和能

- 输送电荷 dq 通过一势差（电压）e 所作的功是 edq。通过时间间隔 $t_0 \le t \le t_f$ 贮存于电容中的能量值是

$$贮存的能量 = \int_{t_0}^{t_f} e\frac{dq}{dt}dt = \int_{t_0}^{t_f} eC\frac{de}{dt}dt = \int_{e_0}^{e_f} Cede = \frac{1}{2}Ce_f^2 - \frac{1}{2}Ce_0^2$$

- 电容是度量元件以分离电荷形式或以一电场的形式来贮存能量的能力。

- 存贮于电感中的能量

- 通过时间间隔 $t_0 \le t \le t_f$ 贮存于电感中的能量值是

$$贮存的能量 = \int_{t_0}^{t_f} eidt = \int_{t_0}^{t_f} L\frac{di}{dt}idt = L\int_{i_0}^{i_f} idi = \frac{1}{2}Li_f^2 - \frac{1}{2}Li_0^2$$

功率和能

- 功率的产生和功率的消耗
- 电流 i 通过电池从低电压点流向高电压点（电压上升的方向和电流流动方向是相同的，它表示产生电功率）
- 电流 i 通过电阻从高电压点流向低电压点（电压上升的方向和电流流动方向是相反的，它表示耗散电功率）
- 电能和热能单位的换算

相似系统

- 相似系统 (Similarity System)：有相同的数学模型但在物理上是有区别的系统称为相似系统。
- 描述一物理系统的方程式的解可以在任何其它场合直接应用于相似系统。
- 由于一种类型的系统可能比另一种更容易用实验处理，因此，对于所要建立和研究的机械系统（或液压系统、气动系统等），我们可以用建立和研究其电模拟来代替。
- 机械-电相似。对机械系统有两种电模拟——力-电压相似和力-电流相似。

相似系统

- 力-电压相似
- 研究图(a)所示的机械系统和图(b)所示的电系统。前者的系统方程式是

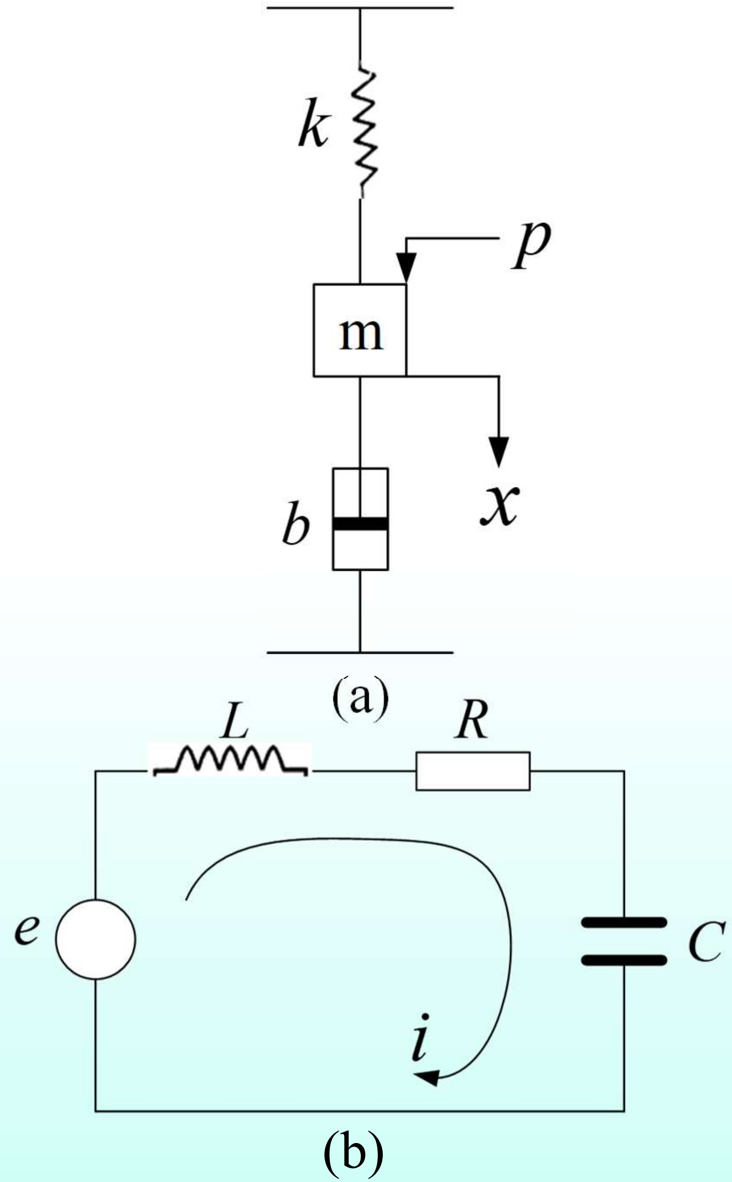
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=p$$

- 而对于电系统的方程式是

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int idt=e$$

- 表示成电荷q，最后方程式为

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=e$$



相似系统

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=p \qquad L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=e$$

- 比较上述两个方程式，可以看到两个系统的微分方程式具有相同的形式。因此这两个系统是相似系统。
- 在微分方程中对应位置所占有的项称为相似量。
- 这种相似关系称为力—电压相似（或质量—电感相似）

机械系统	电系统
力 F（力矩 T）	电压 e
质量 m（惯性矩 J）	电感 L
粘性摩擦系数 b	电阻 R
弹簧常数 k	电容的倒数 $1/C$
位移 x（角位移 θ）	电荷 q
速度 v（角速度 ω）	电流 i

相似系统

- 力—电流相似

- 研究图(a)所示的机械系统和图(b)所示的电系统。前者的系统方程式是

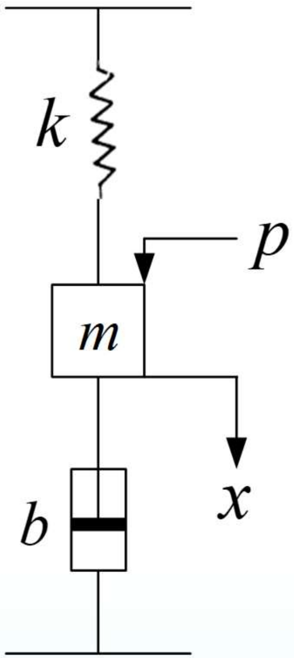
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=p$$

- 对于电系统应用基尔霍夫电流定律

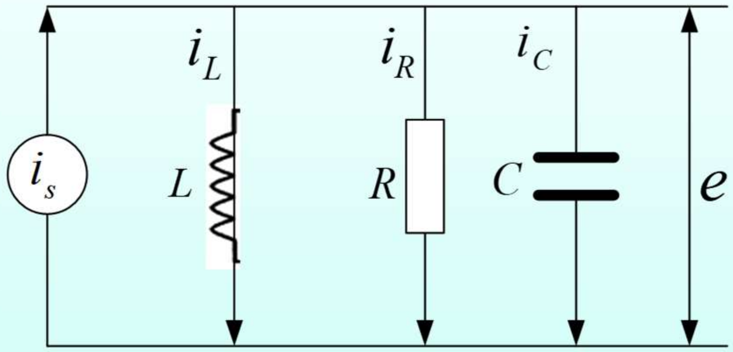
$$i_L+i_R+i_C=i$$

- 其中

$$i_L=\frac{1}{L}\int edt \quad i_R=\frac{e}{R} \quad i_C=C\frac{de}{dt}$$



(a)



(b)

相似系统

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=p$$

$$C\frac{d^2\Phi}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}+\frac{1}{L}\Phi=i_s$$

- 因此，电系统的方程式可以写为

$$\frac{1}{L}\int edt+\frac{e}{R}+C\frac{de}{dt}=i_s$$

- 由于磁通量与电压的关系为

$$\frac{d\Phi}{dt}=e$$

- 把电系统的方程式表示为磁通量，可得

$$C\frac{d^2\Phi}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}+\frac{1}{L}\Phi=i_s$$

- 因此，这两系统称为力—电流相似（或质量—电容相似）

机械系统	电系统
力 F（力矩 T）	电流 i
质量 m（惯性矩 J）	电容 C
粘性摩擦系数 b	电阻的倒数 $1/R$
弹簧常数 k	电感的倒数 $1/L$
位移 x（角位移 θ）	磁通量 Φ
速度 v（角速度 ω）	电压 e

相似系统

力—电压相似
（质量—电感相似）

机械系统	电系统
力 F（力矩 T）	电压 e
质量 m（惯性矩 J）	电感 L
粘性摩擦系数 b	电阻 R
弹簧常数 k	电容的倒数 $1/C$
位移 x（角位移 θ）	电荷 q
速度 v（角速度 ω）	电流 i

力—电流相似
（质量—电容相似）

机械系统	电系统
力 F（力矩 T）	电流 i
质量 m（惯性矩 J）	电容 C
粘性摩擦系数 b	电阻的倒数 $1/R$
弹簧常数 k	电感的倒数 $1/L$
位移 x（角位移 θ）	磁通量 Φ
速度 v（角速度 ω）	电压 e

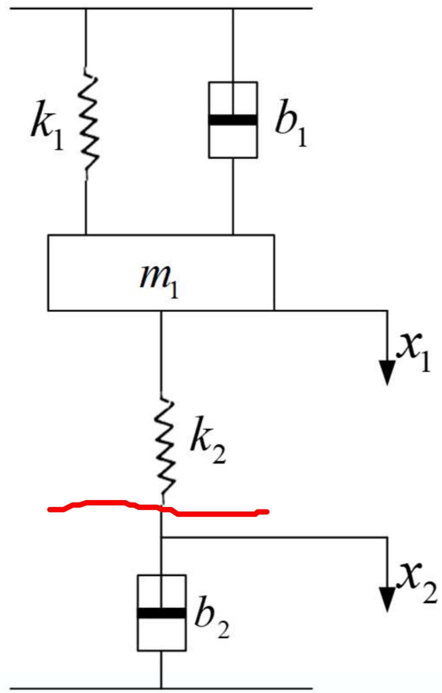
相似系统

- 例题A-3-18. 求图(a)和(b)所示系统的数学模型，并证明它们是相似系统。

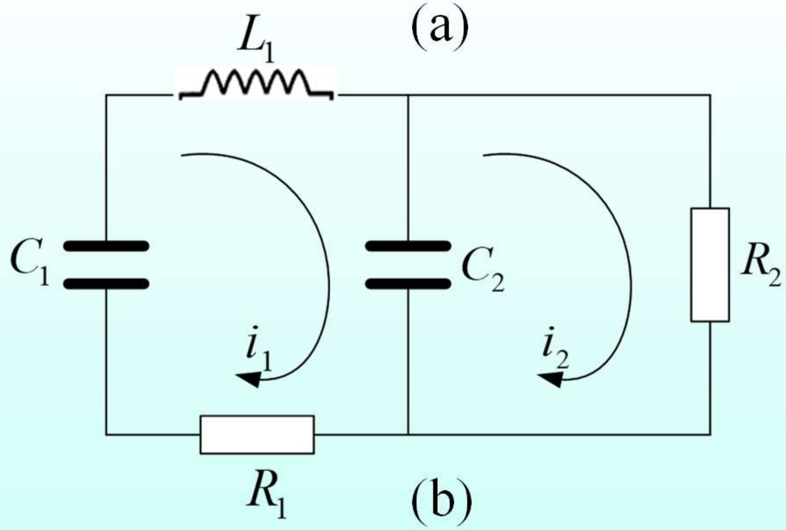
- 对于图(a)所示的机械系统的运动方程式是

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \\ b_2\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

- 对于图(b)所示的电系统，环路电压方程式是



(a)



(b)

相似系统

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C_2}\int (i_1 - i_2)dt + R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\int i_1 dt = 0 \\ R_2 i_2 + \dfrac{1}{C_2}\int (i_2 - i_1)dt = 0 \end{cases}$$

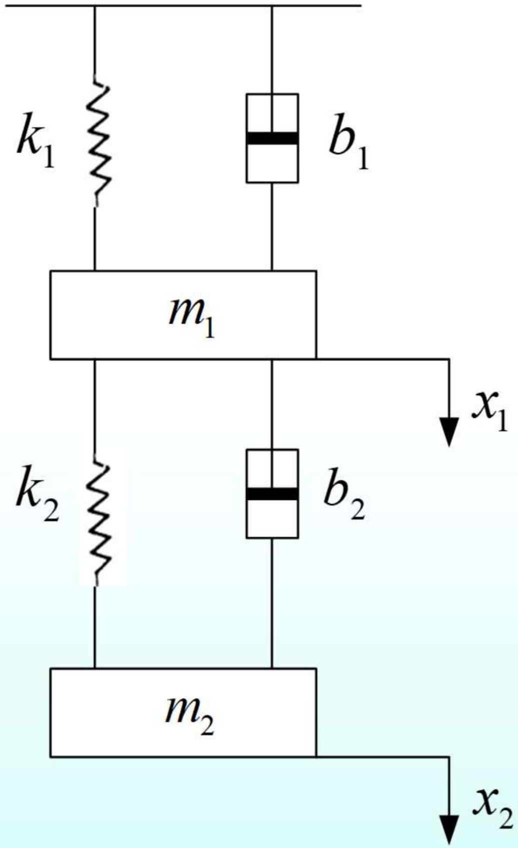
- 把上式表示成电荷q_1和q_2，前两个方程式可以写为

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \dfrac{1}{C_1}q_1 + \dfrac{1}{C_2}(q_1 - q_2) = 0 \\ R_2\dot{q}_2 + \dfrac{1}{C_2}(q_2 - q_1) = 0 \end{cases}$$

- 它构成电系统的数学模型。
- 通过比较，可知这两个系统是建立在力—电压相似基础上的。

相似系统

- 例题 A-3-19．使用力—电压相似，求下图所示机械系统的电相似。



- 机械系统的运动方程是

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

- 采用力—电压相似，对于一个相似电系统的方程式可以写为

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \dfrac{1}{C_1}q_1 + R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \dfrac{1}{C_2}(q_1 - q_2) = 0 \\ L_2\ddot{q}_2 + R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \dfrac{1}{C_2}(q_2 - q_1) = 0 \end{cases}$$

相似系统

找出公共项，这些公共项
一定在公共支路上

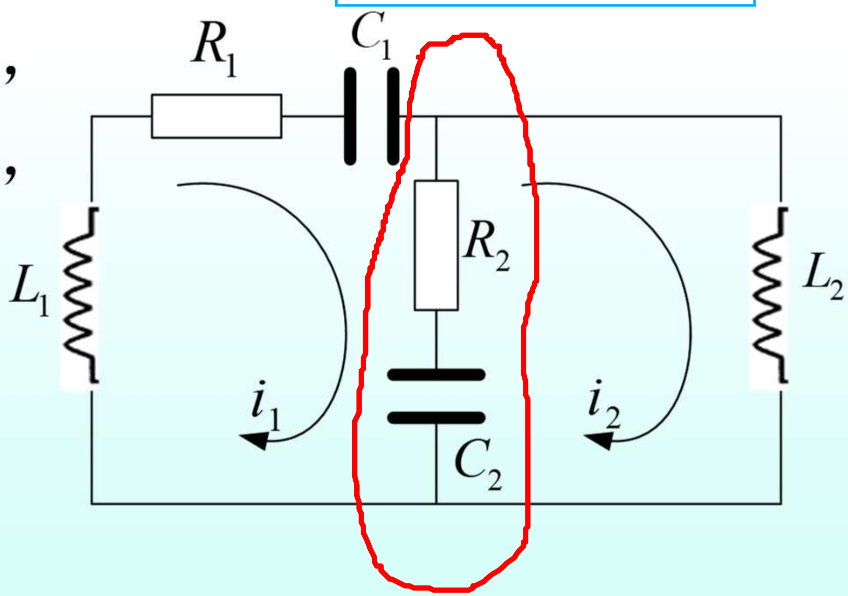
逆向

- 把 $\dot{q}_1 = i_1$ 和 $\dot{q}_2 = i_2$ 代入最后两方程式中，得

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \dfrac{1}{C_1}\int i_1 dt + R_2(i_1 - i_2) + \dfrac{1}{C_2}\int (i_1 - i_2) dt = 0 \\ L_2 \dfrac{di_2}{dt} + R_2(i_2 - i_1) + \dfrac{1}{C_2}\int (i_2 - i_1) dt = 0 \end{cases}$$

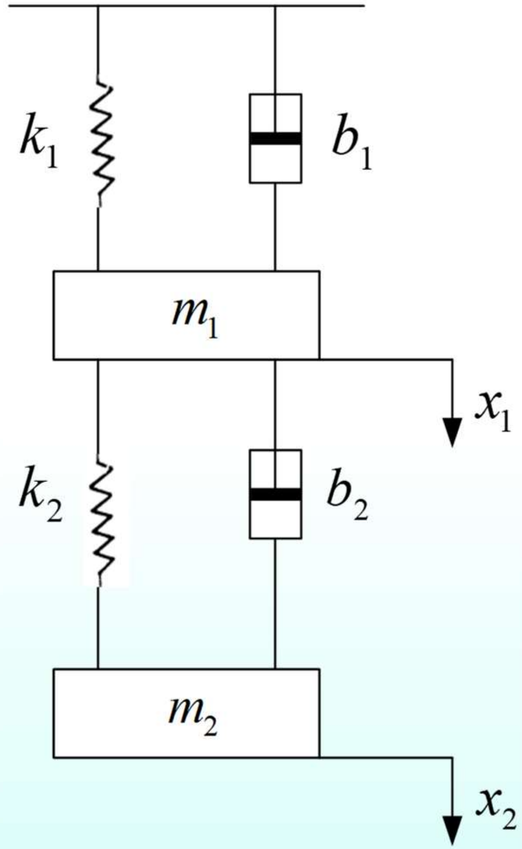
最后要列出相似量
（重要重要）

- 这两个方程是环路电压方程式，所希望的相似电系统如图所示，其中第一个方程对应该图的左半边，第二个方程对应该图的右半边。



相似系统

- 例题 A-3-20．使用力—电流相似，求下图所示机械系统的电相似。



- 机械系统的运动方程是

$$
\begin{cases}
m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1 x_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) = 0 \\
m_2\ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = 0
\end{cases}
$$

- 采用力—电流相似，对于一个相似电系统的方程式可以写为

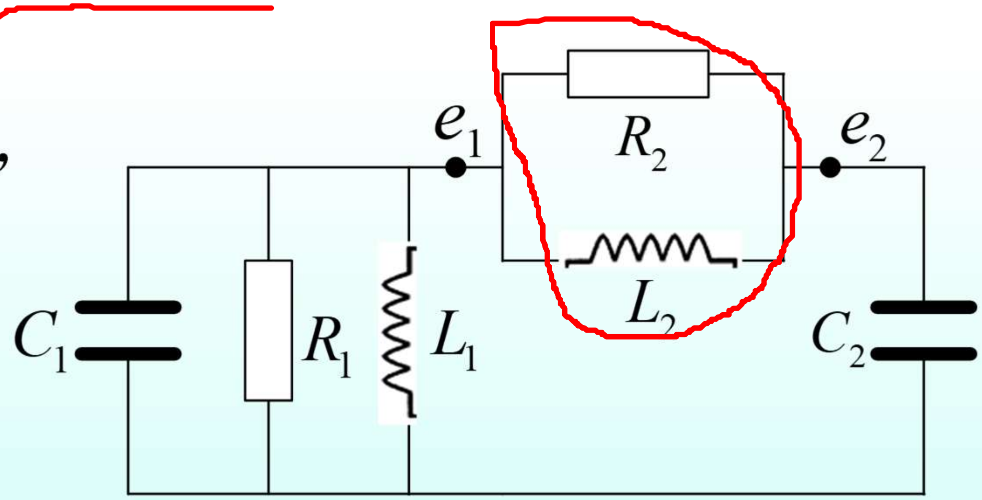
$$
\begin{cases}
C_1\ddot{\Phi}_1 + \dfrac{1}{R_1}\dot{\Phi}_1 + \dfrac{1}{L_1}\Phi_1 + \dfrac{1}{R_2}(\dot{\Phi}_1 - \dot{\Phi}_2) + \dfrac{1}{L_2}(\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \\
C_2\ddot{\Phi}_2 + \dfrac{1}{R_2}(\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_1) + \dfrac{1}{L_2}(\Phi_2 - \Phi_1) = 0
\end{cases}
$$

相似系统

- 把 $\dot{\Phi}_1 = e_1$ 和 $\dot{\Phi}_2 = e_2$ 代入最后两方程式中，得

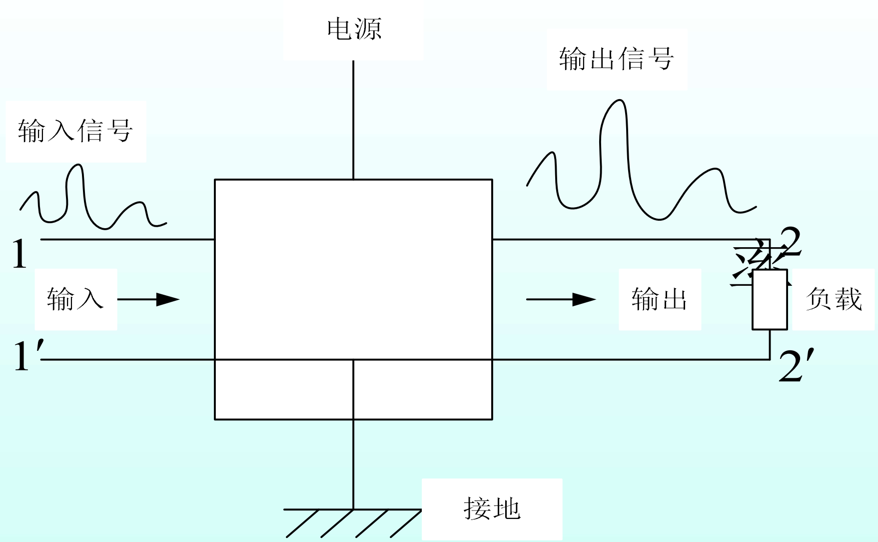
$$\begin{cases} C_1 \dfrac{de_1}{dt} + \dfrac{1}{R_1} e_1 + \dfrac{1}{L_1} \int e_1 dt + \dfrac{1}{R_2}(e_1 - e_2) + \dfrac{1}{L_2} \int (e_1 - e_2) dt = 0 \\ C_2 \dfrac{de_2}{dt} + \dfrac{1}{R_2}(e_2 - e_1) + \dfrac{1}{L_2} \int (e_2 - e_1) dt = 0 \end{cases}$$

- 这两个方程是**节点方程式**，所希望的相似电系统如图所示，其中第一个方程对应该图的左半边，第二个方程对应该图的右半边。



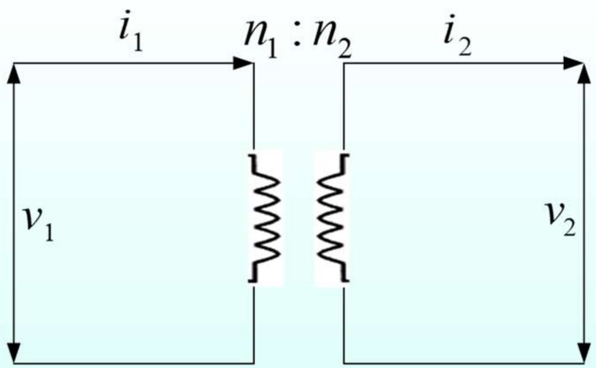
运算放大器

- 什么是放大器
- 用右图所示的装置来考虑放大器的概念。它是一种具有输入端子1-1′，输出端子2-2′，电源端子以及接地端子的装置。
- 在电源端子与接地端子之间接有直流电源。
- 若在输入端子1-1′间加有微弱的电信号，从输出端子2-2′得到比输入信号功更大的信号时，则称此装置为放大器。



运算放大器

- 放大器的定义：利用输入信号控制直流电源的电能，用与其输入信号成比例增大的变化量作为输出的装置。
- 注意：输入信号增大为输出信号，其能量是由直流电源供给的。
- 注意与变压器区分，变压器没有放大功率的作用，放大器的输入功率<输出功率，输出功率的放大部分由直流电源能量提供。



$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$v_1 i_1 = v_2 i_2$$

- 放大器可分为电压放大器、电流放大器、功率放大器、运算放大器等。

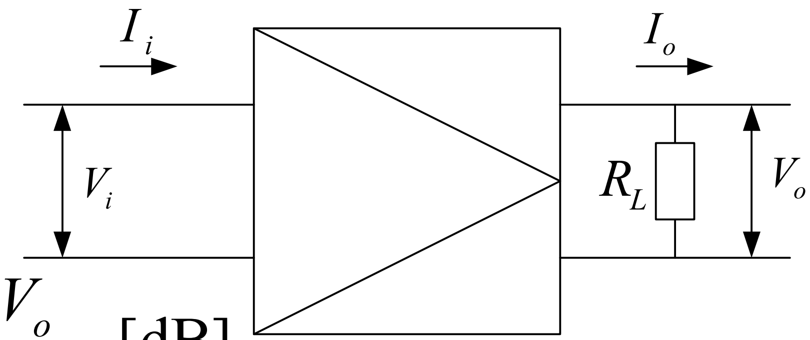
运算放大器

- 放大器性能的表示方法
- 增益与分贝
- 放大率的定义是输入信号与输出信号之比，除放大率外，也常用增益，其常以分贝(dB)为单位。
- 分贝原来是为比较输出功率 W_o 与输入功率 W_i 而采用的单位，其定义如下

$$G_p = 10\log_{10}\frac{W_o}{W_i} \quad \text{(dB)}$$

- 在放大器方面，多采用电压增益。在下图的放大器模型中，输入电压为 V_i，从输入端子向右侧看，输入电阻为 R_i，输入电流为 I_i，输出电压、输出电流、负载电阻分别取为 V_o、I_o、R_L 时，则输入输出功率分别为

运算放大器

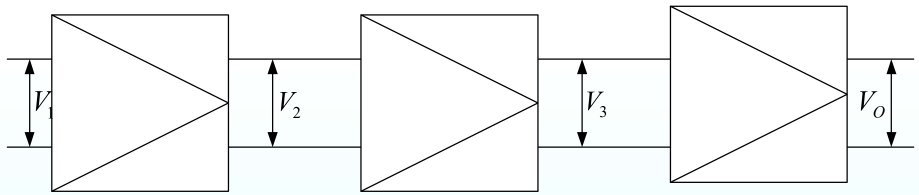


- 当 $R_i = R_L$ 时， $W_i = \dfrac{V_i^2}{R_i}$ $W_o = \dfrac{V_o^2}{R_L}$

$$G_p = 10\log_{10}\frac{W_o}{W_i} = 10\log_{10}\frac{V_o^2}{V_i^2} = 20\log_{10}\frac{V_o}{V_i} \quad [\mathrm{dB}]$$

- 则电压放大率用dB表示为

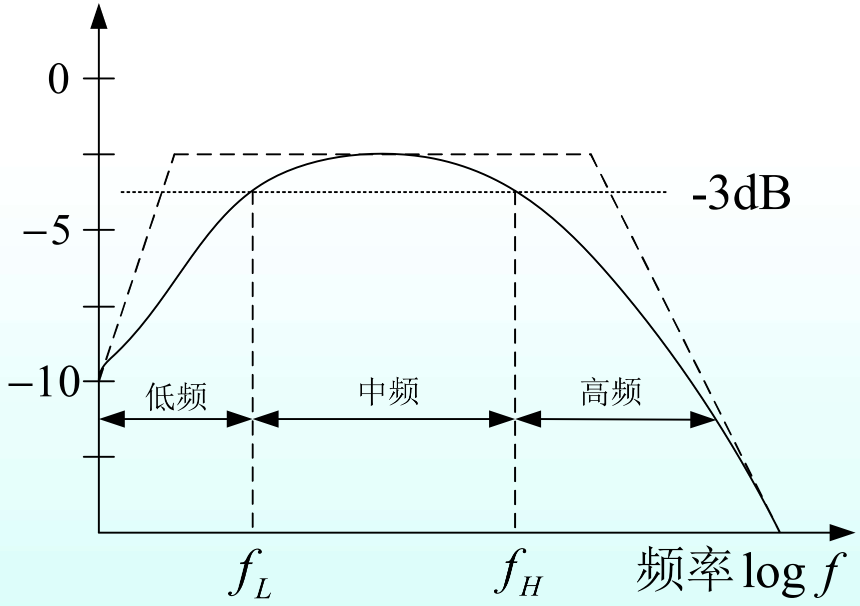
$$G_v = 20\log_{10}\frac{V_o}{V_i} = G_p \quad [\mathrm{dB}]$$



- 用dB表示电压增益的优点
- (1) 可将大范围的电压比用较小的数值表示
- (2) 放大器多级联接时，将各级的电压增益dB值相加就可求得总增益。 $G_v = G_{v1} + G_{v2} + G_{v3} \quad [\mathrm{dB}]$

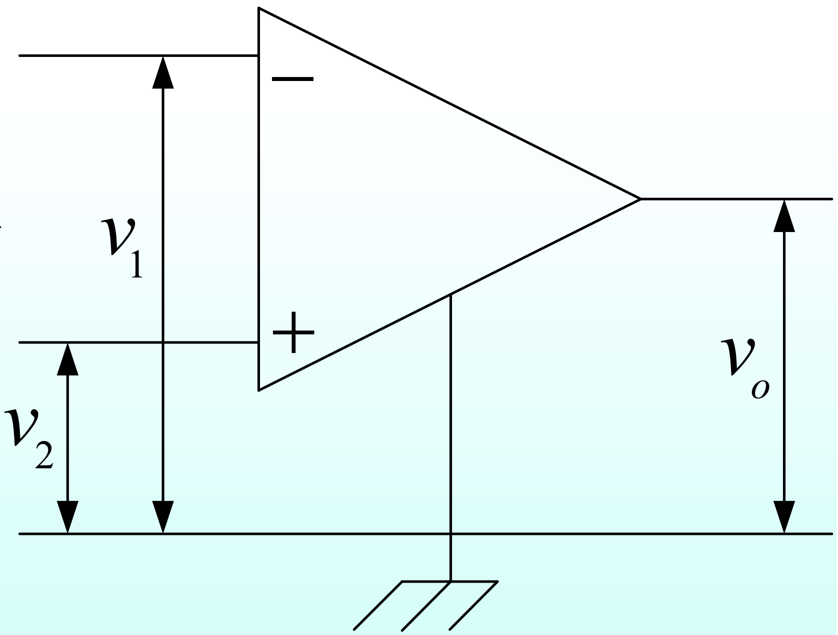
运算放大器

- 保持输入信号的振幅或者输出信号的振幅一定，将改变频率时的增益变化称为增益频率特性。
- 理想放大器对所有频率的增益是一定的，一般放大器的增益频率特性是很复杂的形状。
- 右图表示增益频率特性的一例，一般将频率特性划分为低频、中频、高频三个区来考虑。在这些区域边界的频率中，将低方称为低频截止频率，高方称为高频截止频率。截止频率一般指的是相对频率降低3dB的频率。



运算放大器

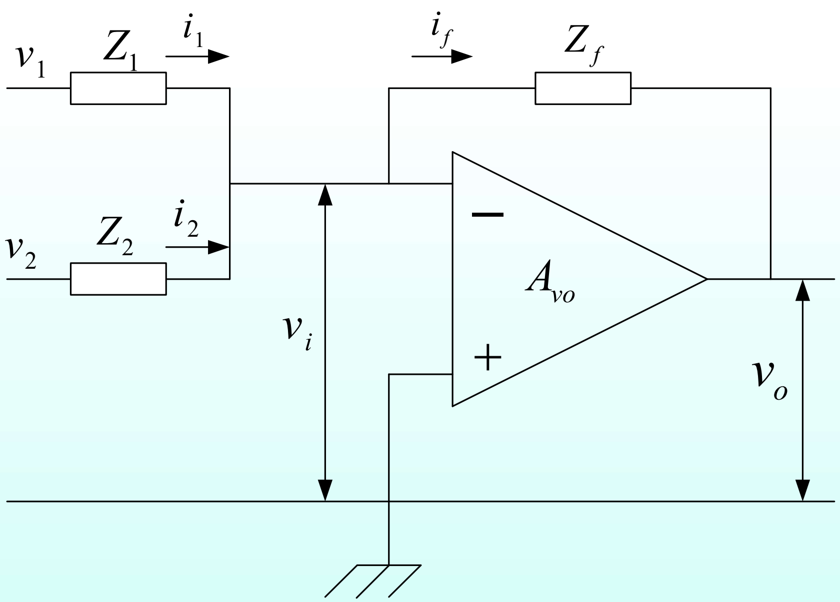
- 运算放大器(Operational Amplifier)
- 运算放大器是构成模拟计算机运算部分的重要部件，还可作为一般的各种放大、有源滤波器、模拟数字变换、调频、稳定电源等多种用途。
- 运算放大器的原理
- 运算放大器有 2 个输入端子以及 1 个输出端，在 - 侧的输入端子加有输入信号时，获得反相形状的放大输出；在 + 侧的输入端子加有输入信号时，获得同相形状的放大输出。



运算放大器

- 运算放大器的定义：具有一个信号输出端口（Out）和同相、反相两个高阻抗输入端的高增益直接耦合电压放大单元。
- 直接利用运算放大器高增益特性的应用较少，它通常与反馈电路组合使用。
- 运算放大器原理
- 运算放大器的电压增益为A_{vo} 流入放大器的电流为零，即假定输入阻抗Z_i为无穷大，利用基尔霍夫电流定律

$$i_1 + i_2 = i_f$$



运算放大器

- 即
$$\frac{v_1 - v_i}{Z_1} + \frac{v_2 - v_i}{Z_2} + \frac{v_o - v_i}{Z_f} = 0$$

- 又因为
$$A_{vo} = -\frac{v_o}{v_i}$$

- 将此式代入上式，消去v_i

$$Z_f\left(\frac{v_1}{Z_1} + \frac{v_2}{Z_2}\right) = -v_o + v_i\left[1 + Z_f\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)\right] = -v_o - \frac{v_o}{A_{vo}}\left[1 + Z_f\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)\right]$$

- 所以
$$v_o = \frac{-Z_f\left(\frac{v_1}{Z_1} + \frac{v_2}{Z_2}\right)}{1 + \frac{1}{A_{vo}}\left[1 + \left(\frac{Z_f}{Z_1} + \frac{Z_f}{Z_2}\right)\right]}$$

运算放大器

- 如果A_{vo}充分大，下式成立

$$\left|\frac{1}{A_{vo}}\left[1+\left(\frac{Z_f}{Z_1}+\frac{Z_f}{Z_2}\right)\right]\right| \ll 1$$

- 最终可得

$$v_o \approx -\left(\frac{Z_f}{Z_1}v_1+\frac{Z_f}{Z_2}v_2\right)$$

- 上式称为**运算原理（加法器）**，即对 2 个输入电压 v_1、v_2，输出电压 v_o 只根据与运算放大器外部连接的阻抗 Z_1、Z_2、Z_f 之比来决定。

运算放大器

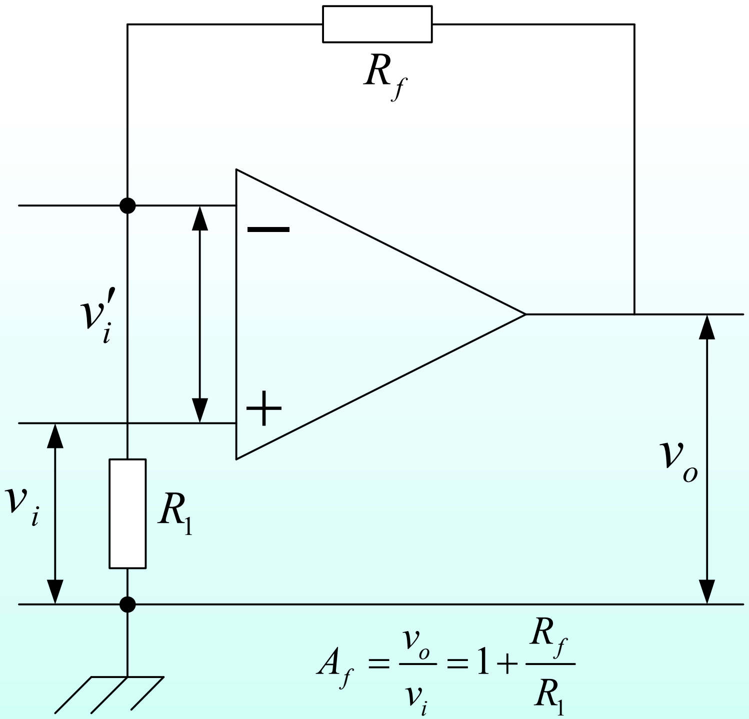
- 其更一般的形式为

$$v_o = -\left(\frac{Z_f}{Z_1}v_1 + \frac{Z_f}{Z_2}v_2 + \ldots + \frac{Z_f}{Z_n}v_n\right) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_f}{Z_i}v_i$$

- 上式当 $Z_i \to \infty$，$A_{vo} \to \infty$ 条件越接近则越正确，运算精度也越高。

- 运算放大器的基本用法

- (a) 非反相放大器
在+侧输入端子加入输入信号的使用方法



运算放大器

- 由上图可得

$$\frac{v_o - v_i' - v_i}{R_f} = \frac{v_i' + v_i}{R_1} \Rightarrow v_i' = \frac{R_1}{R_1 + R_f} v_o - v_i$$

- 由于 $v_o = -A_{vo} v_i'$

- 所以 $-\frac{v_o}{A_{vo}} = \frac{R_1}{R_f + R_1} v_o - v_i \Rightarrow v_i = \left(\frac{R_1}{R_f + R_1} + \frac{1}{A_{vo}} \right) v_o$

- 令此时的增益为A_{fN}，则

$$A_{fN} = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_f + R_1} + \frac{1}{A_{vo}}}$$

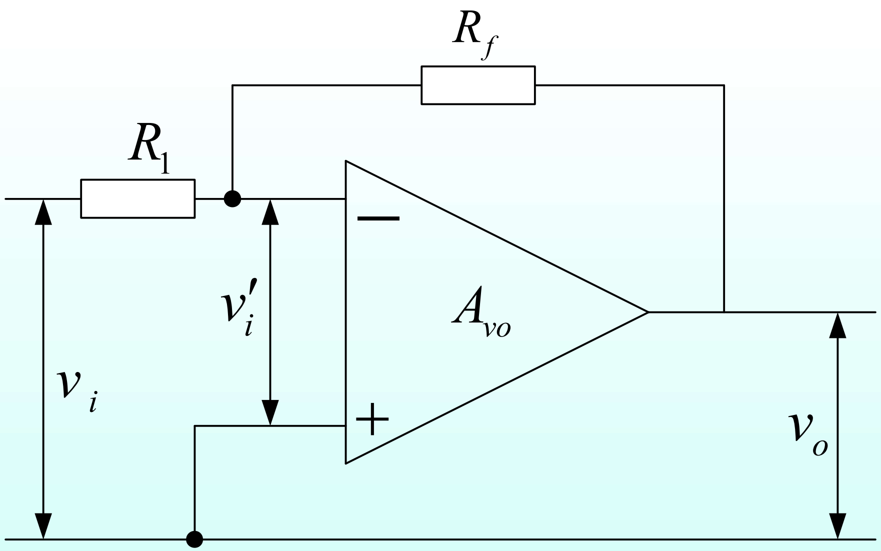
运算放大器

- 如果 $$\frac{R_f + R_1}{R_1} \ll A_{vo}$$

- 则得 $$A_{fN} \approx \frac{R_f + R_1}{R_1} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

- (b) 反相放大器——
  在-侧输入端子加入输入信号的使用方法

- 由右图可得 $$\begin{cases} \dfrac{v_o - v_i'}{R_f} + \dfrac{v_i - v_i'}{R_1} = 0 \\ v_o = -A_{vo} v_i' \end{cases}$$



$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_f}{R_1}$$

运算放大器

- 增益A_{fI}为

$$A_{fI}=\frac{v_o}{v_i}=-\frac{A_{vo}}{1+\frac{R_1}{R_f}(1+A_{vo})}$$

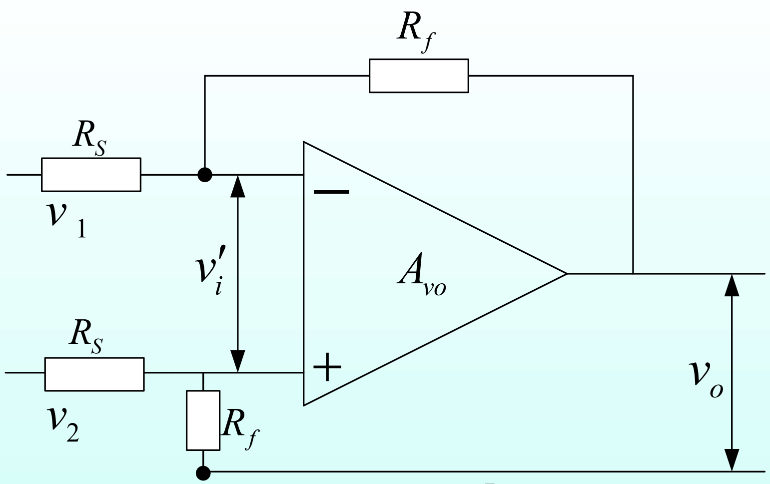
- $A_{vo}\to\infty$时，则可简化为

$$A_{fI}\approx-\frac{R_f}{R_1}$$

- (c) 减法器

$$v_i'=v_1-\frac{R_S}{R_f+R_S}(v_1-v_o)-\frac{R_f}{R_f+R_S}v_2$$

$$=\frac{R_f}{R_f+R_S}(v_1-v_2)+\frac{R_S}{R_f+R_S}v_o$$



$$A_f=\frac{v_o}{v_i}=-\frac{R_f}{R_1}$$

运算放大器

- 因此，如果下式成立

$$v_i' = -\frac{v_o}{A_{vo}} \to 0$$

- 最终可得

$$v_o = -\frac{R_f}{R_S}(v_1 - v_2)$$

- 上式即为运算放大器的减法特性，若连接两个输入端子的外部电阻不能平衡，则可能出现不能正常工作。

- (d) 微分器

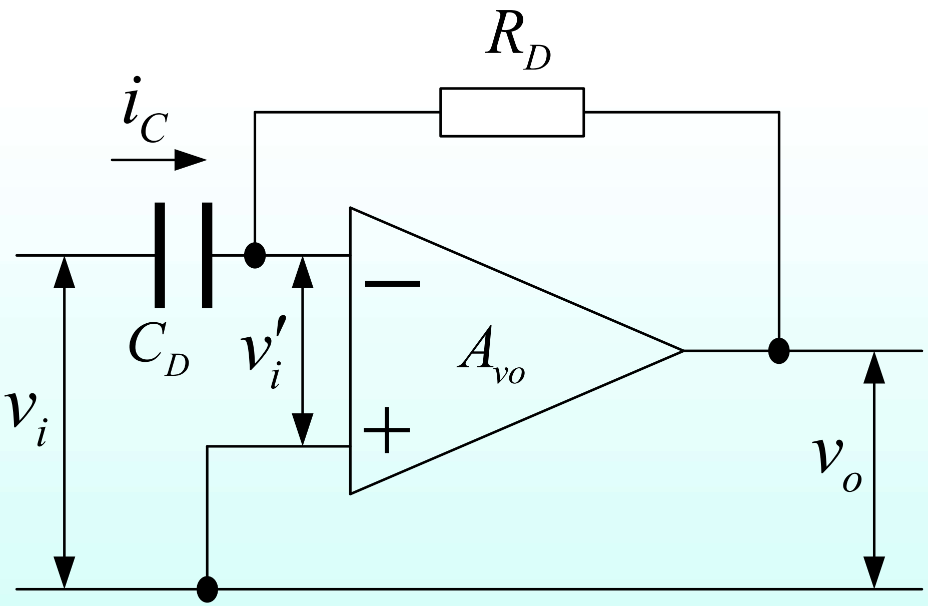
运算放大器

- 如右图所示，流过电容器C_D的电流为i_C时

$$i_C = C_D \frac{d}{dt}(v_i - v_i')$$

- 在运算放大器的输入电流为零的条件下，下式成立

$$i_C + \frac{v_o - v_i'}{R_D} = 0$$



- 因此

$$C_D \frac{d}{dt}(v_i - v_i') + \frac{v_o - v_i'}{R_D} = 0$$

- 如果$A_{vo} \to \infty$，则

$$v_i' = -v_o / A_{vo} \to 0$$

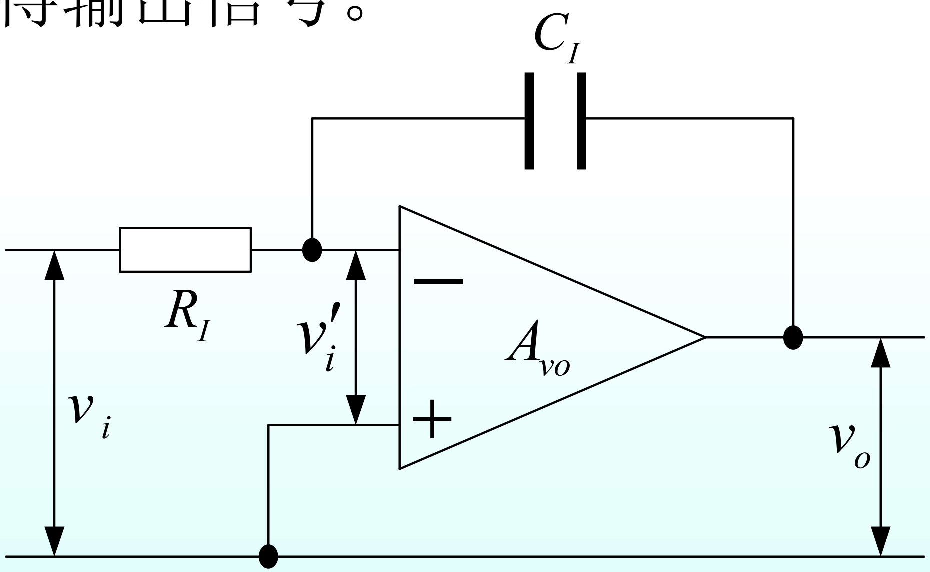
运算放大器

- 最终可得

$$C_D \frac{dv_i}{dt} + \frac{v_o}{R_D} = 0 \;\Rightarrow\; v_o = -C_D R_D \frac{dv_i}{dt}$$

- 可见其将输入信号微分可得输出信号。

- (e) 积分器



- 如右图所示

$$\frac{v_i - v_i'}{R_I} + C_I \frac{d}{dt}(v_o - v_i') = 0$$

- 当 $A_{vo} \to \infty$ 时， $v_i' \to 0$ 可得

运算放大器

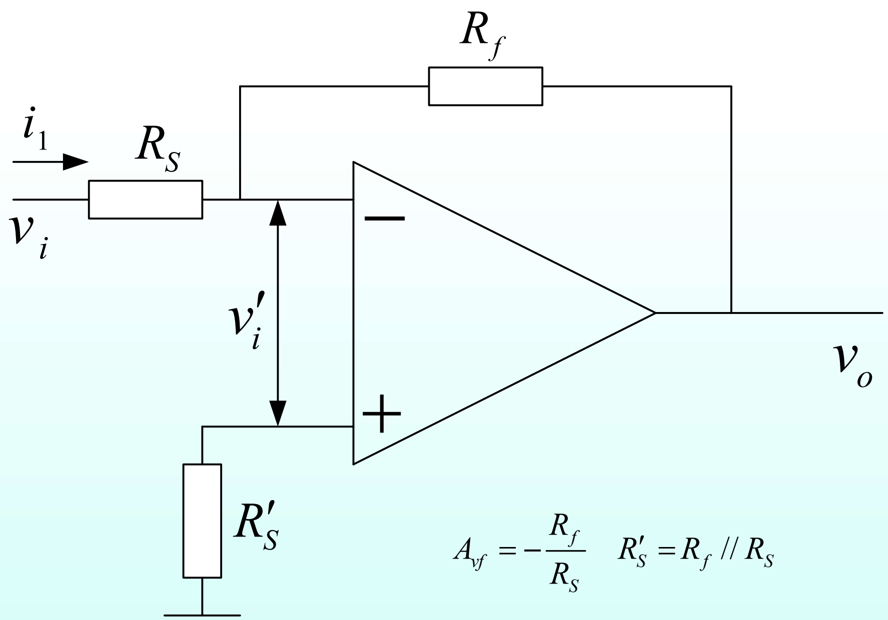
$$\frac{v_i}{R_I} = -C_I \frac{dv_o}{dt}$$

- 将上式积分，则得

$$v_o = -\frac{1}{R_I C_I}\int v_i dt$$

运算放大器

- 运算放大器的应用实例
- 实际的反相放大器原理必须考虑补偿（偏置）电压的影响。通常在+侧输入端子接入电阻R'_S，让补偿电压的效果最小来选择此电阻值。
- 右图表示有补偿电压V_{IS}时运算放大器的等效电路，考虑此图中的选择方法。

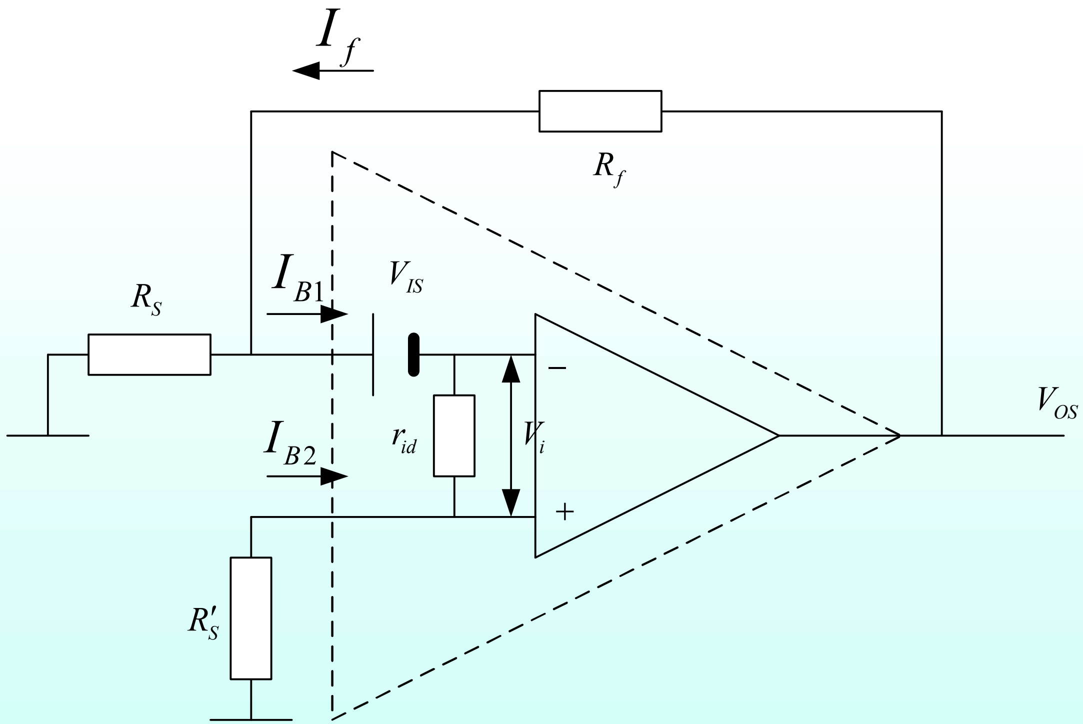


$$A_{vf} = -\frac{R_f}{R_S} \quad R'_S = R_f \,//\, R_S$$

运算放大器

- 运算放大器的应用实例
- 通过输入端子，R_f、V_{IS}、r_{id}、R_S'到接地的电流通路可写为

$$V_{OS} = I_f R_f + V_{IS} + v_i' - I_{B2} R_S'$$



运算放大器

- 通过输出端子，R_f、R_s到接地的电流通路可写为

$$V_{OS} = I_f R_f - R_S (I_{B1} - I_f)$$

- 所以

$$I_f = \frac{V_{OS} + R_S I_{B1}}{R_f + R_S}$$

- 将上式代入，最终可得

$$V_{OS} = \frac{R_f}{R_f + R_S}(V_{OS} + R_S I_{B1}) + V_{IS} + v_i' - I_{B2} R_S'$$

- 由于 $v_i' = -V_{OS} / A_{vo} \to 0$ ，整理可得

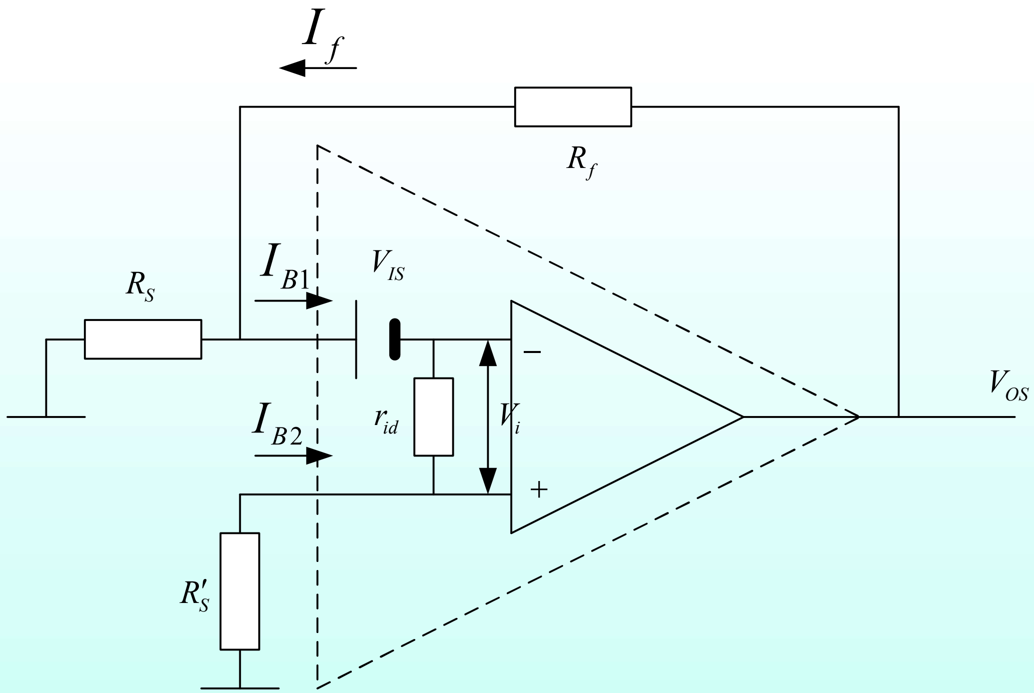
$$\left(1 - \frac{R_f}{R_f + R_S}\right) V_{OS} = V_{IS} + \frac{R_f R_S I_{B1}}{R_f + R_S} - I_{B2} R_S'$$

运算放大器

- 当 $$R_S' = R_f // R_S = \frac{R_f R_S}{R_f + R_S}$$
- 可得下式

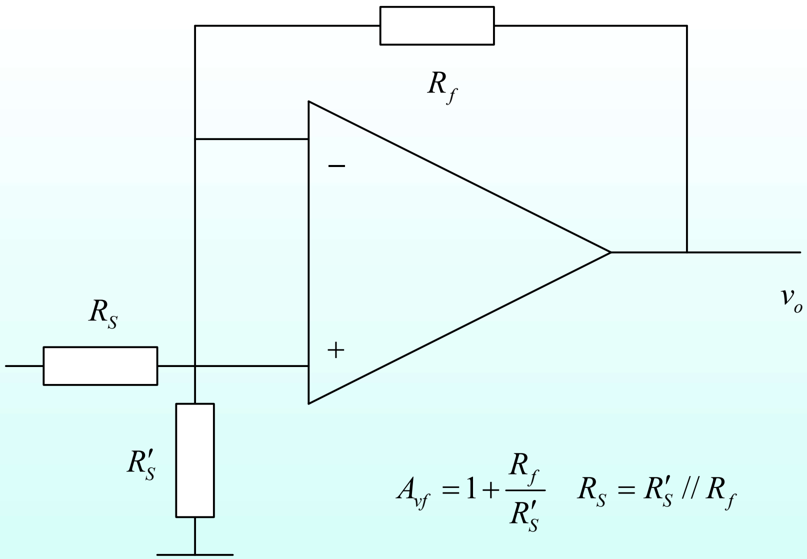
$$V_{OS} = \left(1 + \frac{R_f}{R_S}\right) V_{IS} + R_f (I_{B1} - I_{B2}) \approx \left(1 + \frac{R_f}{R_S}\right) V_{IS}$$

- 上式即等效为理想的反相放大器。

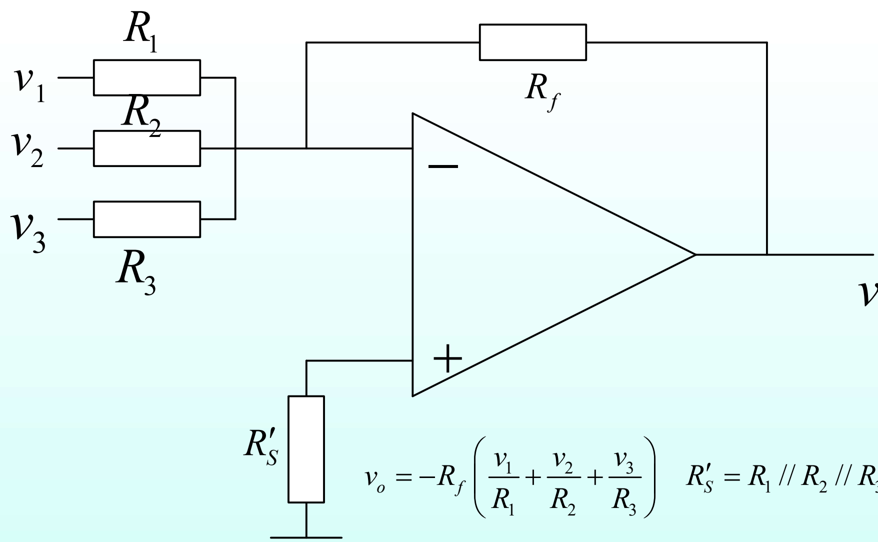


运算放大器

- 为使补偿电压的影响最小的运算放大器应用例
- 实际的非反相放大器
- 实际的加法器



$$A_{vf} = 1 + \frac{R_f}{R'_S} \qquad R_S = R'_S \,//\, R_f$$



$$v_o = -R_f\left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3}\right) \qquad R'_S = R_1 \,//\, R_2 \,//\, R_3 \,//\, R_f$$

模拟计算机

- 模拟计算机(Analogue Computer)

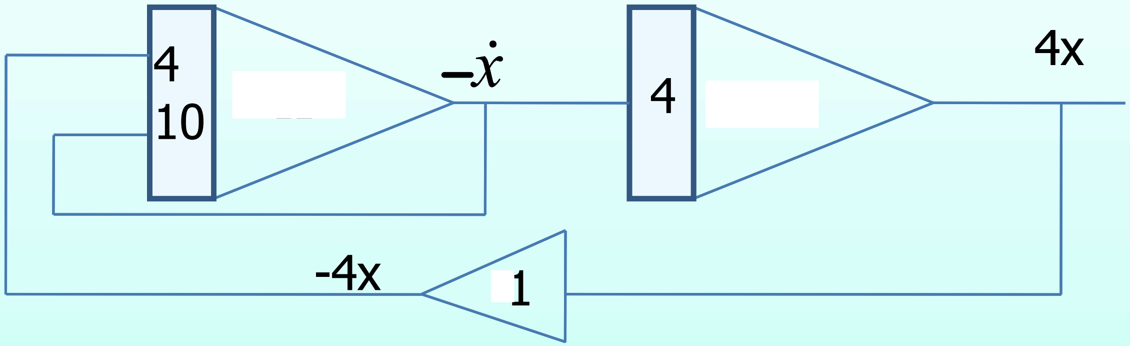
  模拟计算机可用于解微分方程，一般备有积分器、加法器、反号器、电位器和直流电源等几个部件。

  例题：考虑微分方程为 $\ddot{x}+10\dot{x}+16x=0$

  借助模拟计算机解微分方程时，总是对导数积分而不是对它们微分。其理由是寄生噪声总是出现在模拟计算机中。微分加强噪声的作用，而积分消除噪声。因此，上式改为

$$\ddot{x}=-10\dot{x}-16x$$

- 可用下图模拟



模拟计算机

- 指数函数的产生

  首先求得对应的微分方程的解是 $x(t)=20e^{-0.5t}$ 的最低阶微分方程式。

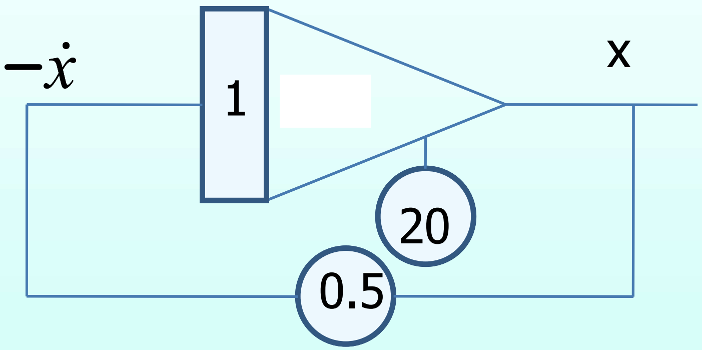
  将 $x(t)$ 对时间求导数，得 $dx/dt=-10e^{-0.5t}$

  因此，所要求的微分方程式为

$$dx/dt+0.5x=0,\quad x(0)=20$$

  由此得 $dx/dt=-0.5x$

  假设可以利用 $-dx/dt$，可得产生一个给定的指数的模拟计算机图如下：



模拟计算机

- 正弦函数的产生

  希望产生一个正弦信号 $10\sin 3t$

  首先求解是 $10\sin 3t$ 的最低阶微分方程式。

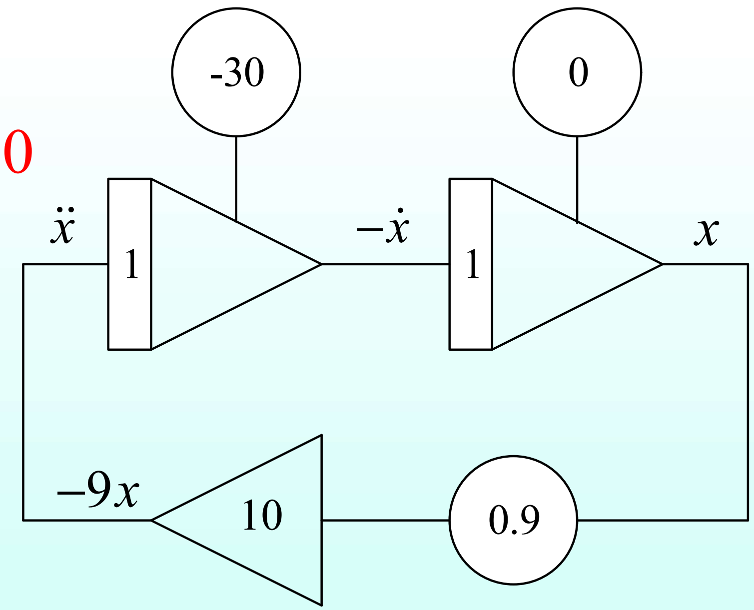
  设 $x(t)=10\sin 3t$

  于是 $d^2x/dt^2=-90\sin 3t$

  因此，所要求的微分方程式为

  $d^2x/dt^2+9x=0$， $x(0)=0$， $dx/dt(0)=30$

- 由此得 $d^2x/dt^2=-9x$
- 假设可以利用 d^2x/dt^2，
- 那么对其积分两次便可求得 x。
- 系统的模拟计算机如右图：



模拟计算机

- 时间比例尺：时间比例尺是物理系统的独立变量与模拟计算机的独立变量之间的关系。如果需要，计算机可以调成与“实际时间”相比较进行得快些、慢些或相等。

  设计算机时间与实际时间之间的关系为 $\tau = \lambda t$

  式中：λ 是时间比例尺。如果时间比例尺选择为 0.1，那么实际时间10秒等于计算机时间1 秒。

- 例题：微分方程式为 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 10\dfrac{dx}{dt} + 100x = 0; \quad x(0) = 10; \quad \dot{x}(0) = 15$
- 对此系统，有 $\omega_n = 10\ (\text{rad/s}); \quad \zeta = 0.5; \quad t_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n} = 0.8\ (\text{s})$
- 要放慢响应，有

$$\tau = \lambda t; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \lambda\frac{dx}{d\tau}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2\frac{d^2x}{d\tau^2}$$

模拟计算机

于是，系统方程成为

$$\lambda^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + 10\lambda \frac{dx}{d\tau} + 100x = 0; \quad x(0) = 10, \quad \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{\lambda} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = \frac{15}{\lambda}$$

如果选择时间比例尺为10。则得

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + x = 0; \quad x(0) = 10, \quad \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{\lambda} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1.5$$

- 对此系统，有

$$\omega_n = 1 \text{ (rad/s)}; \quad \zeta = 0.5; \quad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8 \text{ (s)}$$

- 这表明，实际系统在0.8秒后，进入稳定状态，变换后，稳定时间为8秒。

模拟计算机

- **数量比例尺**
- 它是放大器的输出电压与对应的物理量之间的关系。

注意:

- 数量比例尺应在时间比例尺之后;
- 放大器的输出电压应在适当范围，避免饱和或超过放大器的极限、以及避免实际物理系统中将发生的变量的最大值对应的输出电压太小。

模拟计算机

解微分方程式步骤如下

1. 根据需要决定时间比例尺和数量比例尺。
2. 由微分方程式中解出最高阶导数。所求得方程式的右边决定第一个积分器的输入。
3. 积分最高阶导数求得低阶导数及变量本身。把这些低阶导数项代入对于系统方程式来说是相当的部件，因此产生高阶导数和封闭回路。
4. 根据要求提出初始条件。

模拟计算机

- 例7-14. 研究下图所示的系统。假设位移 x 是从平衡位置量起。初始条件给定为

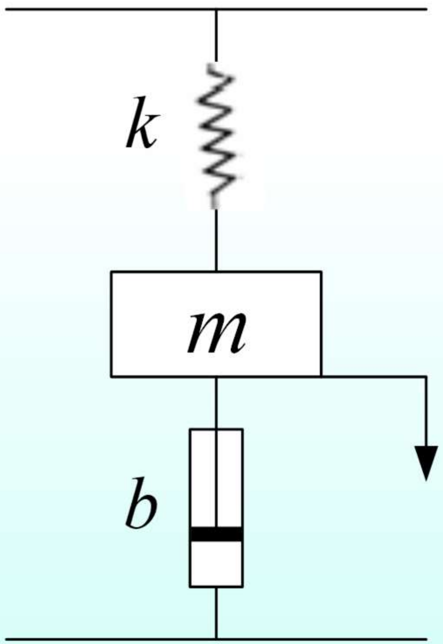
  $x(0)=0\text{m},\ dx/dt|_{t=0}=3\text{m/s}$

  试在模拟计算机上模拟此机械系统。

  系统的方程式为

  $md^2x/dt^2+bdx/dt+kx=0$

- 将 m，b，k 的数值代入
- $0.2d^2x/dt^2+1.2dx/dt+180x=0$
- 即
- $d^2x/dt^2+6dx/dt+900x=0$
- 系统的稳定时间是
- $t_s=4/(\zeta\omega_n)=1.33\text{s}$



$m=0.2\text{ kg}$

$b=1.2\text{ N}\cdot\text{s/m}$

$k=180\text{ N/m}$

模拟计算机

假设我们放慢响应和使新的稳定时间为 13.3s。即选择时间比例尺 λ 为 10。

把独立变量从 t 改变为 τ，其中 $\tau=\lambda t=10t$，则一个适当的时间比例系统方程式为

$$d^2x/d\tau^2+0.6dx/d\tau+9x=0$$

其中 $x(0)=0\text{m}$，$dx/d\tau|_{\tau=0}=0.3\text{m/s}$

将上式作为决定数量比例尺的初始方程式，解该式的高价导数得

$$d^2x/d\tau^2=-0.6dx/d\tau-9x$$

- 现在我们来决定数量比例尺，使其在每一个放大器中的最大变动幅度是 90V。
- 定义 k_1 和 k_2 作为数量比例尺，k_1 是关于电压与速度 (m/s) 的关系，k_2 是关于电压与位移 (m) 的关系。

模拟计算机

k_1 有量纲伏特秒每米 (Vs/m)， k_2 有量纲伏特每米 (V/m) 上式可重写为

$$d^2x/d\tau^2 = -(0.6/k_1)k_1 dx/d\tau - (9/k_2)k_2 x$$

为减小噪声作用和保持高的精度，将使用最小数目的放大器。由于系统是二阶的，因此必须有两个积分器。

又因为每经过一个运算放大器，符号要改变一次，因此如果回路中的运算放大器（积分器、加法器和反号器）数目是偶数的，那么输出电压将要一直增加到饱和为止。

- 所以，在每一个回路中，运算放大器的数目必须是奇数。而我们最少必须要有一个反号器，因此如图所示，放大器的最少数目需要是三个。

如图所示，第一个积分器的输出电压是 $-k_1 dx/d\tau$, 第二个积分器的输出电压是 $k_2 x$，反号器的输出电压是 $-k_2 x$。

这些输出电压必须限制在 ±90V.

对于一个二阶系统，当没有阻尼项时具有最强烈的运动，为了得到谨慎的或过分的最大值估计，可使用解

$d^2x/d\tau^2+9x=0$，$x(0)=0$，$dx/d\tau(0)=0.3$

此简化方程式的解为

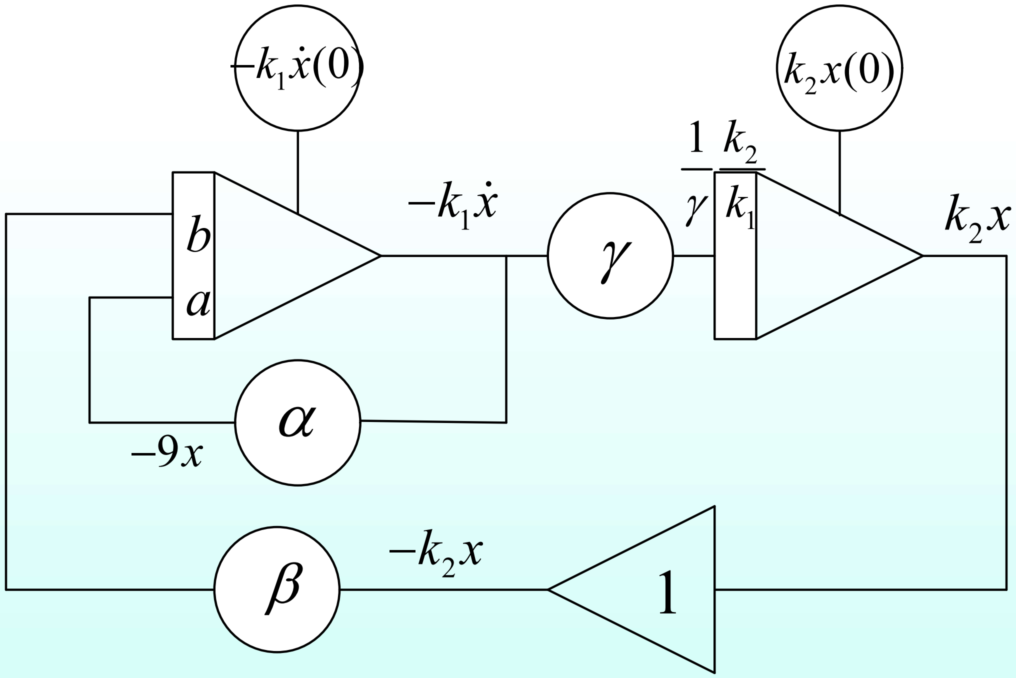
$x(\tau)=0.1\sin 3\tau$

$dx/d\tau=0.3\cos 3\tau$

从现在的解我们可以得到系统的谨慎估计为

$|x|$ 的最大值 $=|x|_{max}=0.1$

$|dx/d\tau|$ 的最大值 $=|dx/d\tau|_{max}=0.3$



模拟计算机

因此决定数量比例尺为

$$k_1 = 90/|dx/d\tau|_{\max} = 90/0.3 = 300\ \text{Vs/m}$$

$$k_2 = 90/|x|_{\max} = 90/0.1 = 900\ \text{V/m}$$

注意，对于图 7-58，我们有

$$k_1 d^2x/d\tau^2 = a\alpha(-k_1 dx/d\tau) + b\beta(-k_2 x)$$

即

$$d^2x/d\tau^2 + a\alpha(dx/d\tau) + b\beta(-k_2/k_1)x = 0$$

由于 $k_2/k_1 = 3$，上式变为

$$d^2x/d\tau^2 + a\alpha(dx/d\tau) + 3b\beta x = 0$$

将上式与前面已给出的时间比例系统方程式相比较可得

$$a\alpha = 0.6,\quad b\beta = 3$$

故我们可选择 $a = 1$，$\alpha = 0.6$，$b = 10$ 和 $\beta = 0.3$

模拟计算机

通常第二个积分器的常数设为 1 或 10，我们选择

$$k_2/(\gamma k_1)=10，得\ \gamma=0.3$$

最终，一个合适的比例计算机图表示在图 7-59 中，初始条件是

$$-k_1 dx/d\tau(0)=-300\times 0.3=-90\ \mathrm{V}$$

$$k_2 x(0)=900\times 0=0\ \mathrm{V}$$

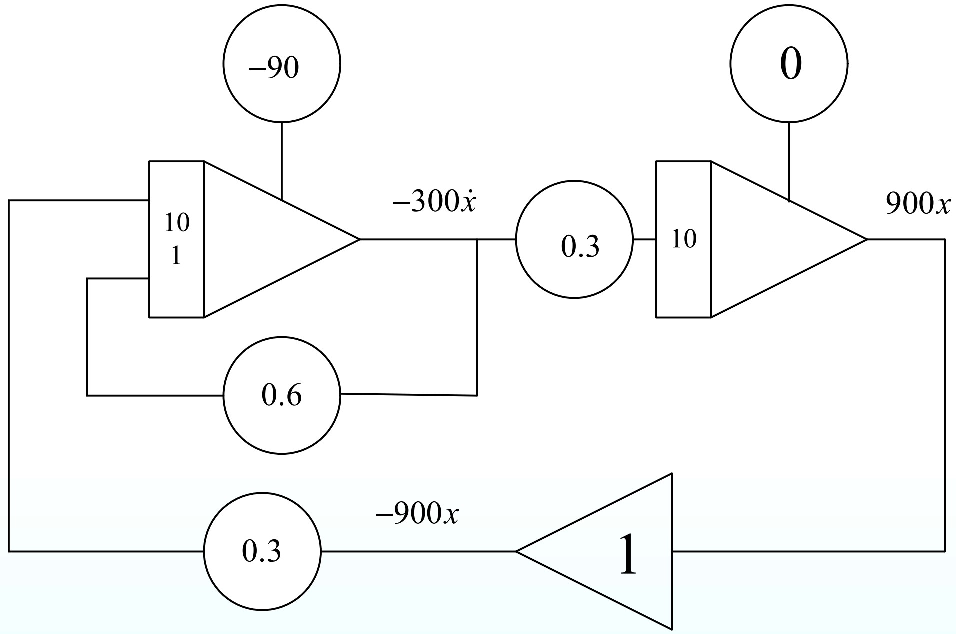
第二个积分器的输出是 $900x(\tau)$

本例中所测量到的位移和速度都是伏特，可采用下面的关系变换到米和米每秒

- 1V 对应于 (1/900)m；1V 对应于 (1/300) 米每计算机秒
- 因为目前状态为
- 10 计算机秒 = 1 真实秒
- 故　1V 对应于 (1/30) 米每秒

模拟计算机

最终可得系统设计图如下



- **注意:**
- 1. 模拟计算机只能解决具有数值初始条件的特殊方程式，不能给出具有任意常数的一般解。
- 2. 在模拟过程中可能漏掉某些重要特性，为了避免这些误差，模拟计算机可以包括真实系统的部件，但解必须在真实时间求得。

电系统

- 电路基本定律和元件（理解，熟练掌握）
- 基尔霍夫电压、电流定律（理解，熟练掌握）
- 相似系统（重点、考点，掌握判定相似系统及求出相似系统的方法）
- 运算放大器（了解，掌握使用运放消除电路负载效应）
- 模拟计算机（了解）