Gomory割平面法
Gomory Cutting-plane Method

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- Gomory割平面法的基本思想
- Gomory割平面法的基本步骤
- 算例
- Gomory割平面法缺点及其现状简介

IP vs. LP

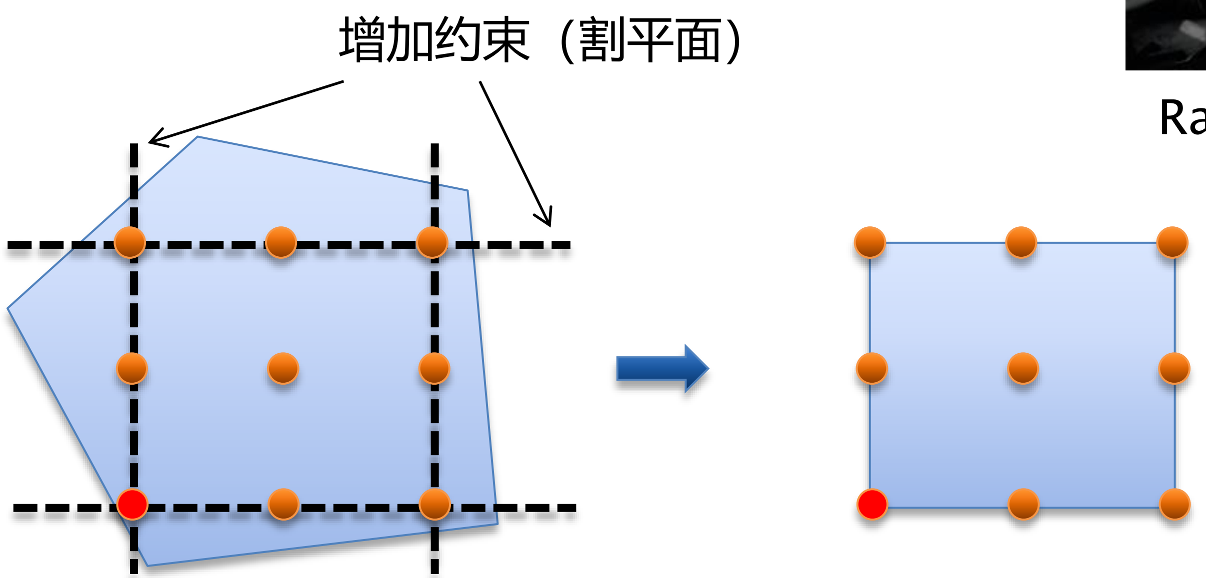
$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x \in I^n \end{aligned} \qquad \text{vs.} \qquad \begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(其中A, b, c中的元素皆为整数)

- 若（LP）无解，则（IP）无解
- 若（LP）无界，则（IP）无解或无界
- （LP）的最优值是（IP）问题**最优值的下界**
- 若（LP）的最优解为**整向量**，则它也是（IP）问题的最优解

割平面法

Ralph E. Gomory
1959

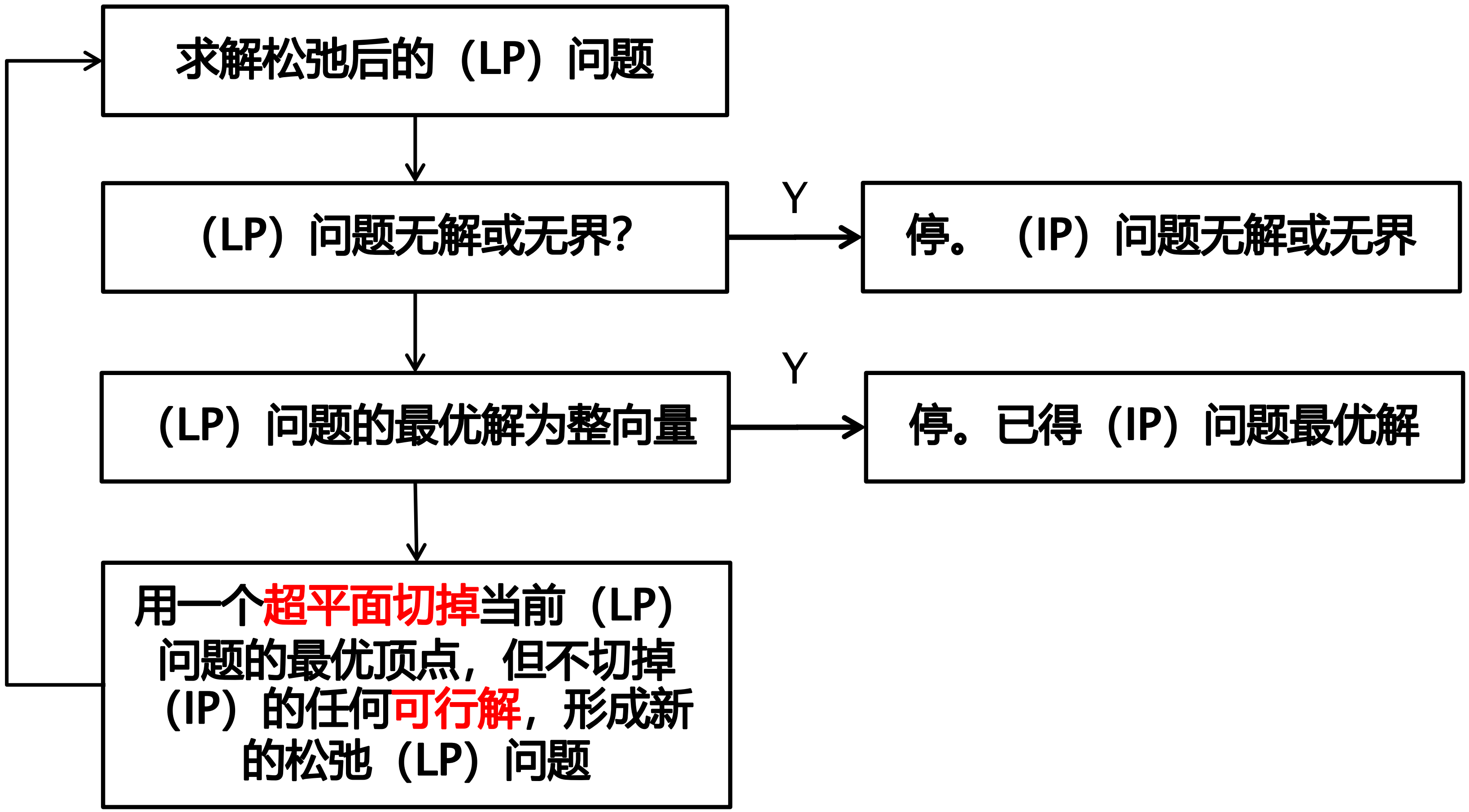


原始问题可行域

新问题可行域

先不考虑变量的取整数约束，求解相应的**线性规划**，然后不断**增加**线性约束条件（即**割平面**），将**原可行域割掉**不含整数可行解的一部分，最终得到一个**具有整数坐标顶点**的可行域，而该**顶点**恰好是原整数规划问题的**最优解**。

割平面算法框架


求解松弛后的（LP）问题
（LP）问题无解或无界?
Y
停。（IP）问题无解或无界
（LP）问题的最优解为整向量
Y
停。已得（IP）问题最优解
用一个超平面切掉当前（LP）问题的最优顶点，但不切掉（IP）的任何可行解，形成新的松弛（LP）问题

割平面的形成方法(1/2)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{最优基}B} \quad \begin{aligned} \min \quad & c_B^T \bar{b} + \zeta_N^T x_N \\ s.t. \quad & x_B + B^{-1} N x_N = \bar{b} \\ & x_B \ge 0, x_N \ge 0 \end{aligned}$$

设 $\bar{b}_l$ 不是整数, $0 \le l \le m$

则第l个约束方程为:

$$x_{B_l} + \sum_{j=1}^{n-m} \bar{a}_{lN_j} x_{N_j} = \bar{b}_l$$

诱导方程

割平面的形成方法(2/2)

- 引入取整函数:

$$x=[x]+\{x\},0\le\{x\}\le 1,[x]\in I$$

(1) $$x_{B_l}+\sum_{j=1}^{n-m}([\bar{a}_{lN_j}]+\{\bar{a}_{lN_j}\})x_{N_j}=[\bar{b}_l]+\{\bar{b}_l\}$$

(2) $$x_{B_l}+\sum_{j=1}^{n-m}[\bar{a}_{lN_j}]x_{N_j}\le[\bar{b}_l]$$

$\{b\}$!!

(1)-(2) $$\sum_{j=1}^{n-m}\{\bar{a}_{lN_j}\}x_{N_j}\ge\{\bar{b}_l\}$$

Gomory割平面条件

增加不等式约束

z	0	ζ_N^T	$C_B^T \bar{b}$
x_B	I	N	b

z	0	0	ζ_N^T	$C_B^T \bar{b}$
x_B	I	0	N	b
x_{n+1}	$0\ldots$	1	$-\{a\}^T$	$-\{b_{n+1}\}$

对偶单纯形法

§2. Gomory割平面法：例子

例：求解整数线性规划问题

$$\min \quad z=-2x_1-5x_2$$

$$s.t.\quad 2x_1-x_2+x_3=9$$

$$2x_1+8x_2+x_4=31$$

$$x_j\ge 0\text{为整数}, j=1,2,3,4$$

解：求解松弛LP，得最优单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	0	$-1/3$	$-2/3$	$-71/3$
x_1	1	0	$4/9$	$1/18$	$103/18$
x_2	0	1	$-1/9$	$1/9$	$22/9$

注意，$\bar{b}$有多个非整分量时，一般取$\{\bar{b}_l\}$最大的那一个

加入割平面：$\frac{4}{9}x_3+\frac{1}{18}x_4\ge\frac{13}{18}$

引入松弛变量，扩充单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	$-1/3$	$-2/3$	0	$-71/3$
x_1	1	0	$4/9$	$1/18$	0	$103/18$
x_2	0	1	$-1/9$	$1/9$	0	$22/9$
x_5	0	0	$-4/9^*$	$-1/18$	1	$-13/18$

应用对偶单纯形法，确定出基、入基变量：

§2. Gomory割平面法：例子

选择诱导方程：

加入割平面： $\frac{1}{8}x_4+\frac{3}{4}x_5\geq\frac{5}{8}$

引入松弛变量，扩充单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	0	$-5/8$	$-3/4$	$-185/8$
x_1	1	0	0	0	1	5
x_2	0	1	0	$1/8$	$-1/4$	$21/8$
x_3	0	0	1	$1/8$	$-9/4$	$13/8$

对偶单纯形法迭代，得到最优单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	$-1/3$	$-2/3$	0	$-71/3$
x_1	1	0	$4/9$	$1/18$	0	$103/18$
x_2	0	1	$-1/9$	$1/9$	0	$22/9$
x_5	0	0	$-4/9^{*}$	$-1/18$	1	$-13/18$

§2. Gomory割平面法：例子

选择诱导方程：

加入割平面： $\frac{1}{8}x_4+\frac{3}{4}x_5\geq\frac{5}{8}$

引入松弛变量，扩充单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	0	0	0	$-5/8$	$-3/4$	$-185/8$
x_1	1	0	0	0	1	5
x_2	0	1	0	$1/8$	$-1/4$	$21/8$
x_3	0	0	1	$1/8$	$-9/4$	$13/8$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	0	0	0	$-5/8$	$-3/4$	0	$-185/8$
x_1	1	0	0	0	1	0	5
x_2	0	1	0	$1/8$	$-1/4$	0	$21/8$
x_3	0	0	1	$1/8$	$-9/4$	0	$13/8$
x_6	0	0	0	$-1/8$	$-3/4^{*}$	1	$-5/8$

应用对偶单纯形法，确定出基、入基变量：

§2. Gomory割平面法：例子

松弛变量x_5再次成为基变量，删去其所对应的行及列！

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	0	0	0	$-1/2$	0	-1	$-45/2$
x_1	1	0	0	$-1/6$	0	$4/3$	$25/6$
x_2	0	1	0	$1/6$	0	$-1/3$	$17/6$
x_3	0	0	1	$1/2$	0	-3	$7/2$
x_5	0	0	0	$-1/6$	1	$-4/3$	$5/6$

对偶单纯形法迭代，得到最优单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	0	0	0	$-5/8$	$-3/4$	0	$-185/8$
x_1	1	0	0	0	1	0	5
x_2	0	1	0	$1/8$	$-1/4$	0	$21/8$
x_3	0	0	1	$1/8$	$-9/4$	0	$13/8$
x_6	0	0	0	$-1/8$	$-3/4^{*}$	1	$-5/8$

应用对偶单纯形法，确定出基、入基变量：

§2. Gomory割平面法：例子

松弛变量x_5再次成为基变量，删去其所对应的行及列！

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	0	0	0	$-1/2$	0	-1	$-45/2$
x_1	1	0	0	$-1/6$	0	$4/3$	$25/6$
x_2	0	1	0	$1/6$	0	$-1/3$	$17/6$
x_3	0	0	1	$1/2$	0	-3	$7/2$
x_5	0	0	0	$-1/6$	1	$-4/3$	$5/6$

化简单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	
z	0	0	0	$-1/2$	-1	$-45/2$
x_1	1	0	0	$-1/6$	$4/3$	$25/6$
x_2	0	1	0	$1/6$	$-1/3$	$17/6$
x_3	0	0	1	$1/2$	-3	$7/2$

选择诱导方程，继续迭代……

$$x^* = (3,3,6,1)\,,\ z^* = -21$$

Gomory割平面法缺点及其现状简介

Gomory割平面法：分数对偶割平面法

1. 分数：判断一个数是否为整数

   数值误差影响：-1 → -1.0001

   $$[-1]=-1 \quad , \quad \{-1\}=0$$

   $$[-1.0001]=-2, \quad \{-1.0001\}=0.9999$$

2. 对偶：中途停止计算得不到可行解

改进措施：整数对偶割平面法？原始整数割平面法？

例：解如下整数规划问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_2 \\
s.t. \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\
& -3x_1 + 2x_2 \le 0 \\
& x_1, x_2 \ge 0, \text{整数}
\end{aligned}
$$

(LP)问题

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	0	1	0	0	0
x_3	3	2	1	0	6
x_4	−3	2*	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	3/2	0	0	−1/2	0
x_3	6*	0	1	−1	6
x_2	−3/2	1	0	1/2	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	0	0	−1/4	−1/4	−3/2
x_1	1	0	1/6	−1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2

$x=(1, 3/2)^T$

Gomory割平面

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	0	0	−1/4	−1/4	−3/2
x_1	1	0	1/6	−1/6	1
x_2	0	1	1/4	1/4	3/2

([ ], { })	([ ], { })	([ ], { })
(0, 1/4)	(0, 1/4)	(1, 1/2)

割平面条件 $$\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
z	0	0	−1/4	−1/4	0	−3/2
x_1	1	0	1/6	−1/6	0	1
x_2	0	1	1/4	1/4	0	3/2
s_1	0	0	−1/4	−1/4	1	−1/2

(LP)-1问题(对偶单纯形法)

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
z	0	0	$-1/4$	$-1/4$	0	$-3/2$
x_1	1	0	$1/6$	$-1/6$	0	1
x_2	0	1	$1/4$	$1/4$	0	$3/2$
s_1	0	0	$-1/4$	$-1/4$	1	$-1/2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
z	0	0	0	0	-1	-1
x_1	1	0	0	$-1/3$	$2/3$	$\boxed{2/3}$
x_2	0	1	0	0	1	1
x_3	0	0	1	1	-4	2

割平面条件 $\frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}s_1 \geq \frac{2}{3}$

(LP)-2问题(对偶单纯形法)

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
z	0	0	0	0	-1	0	-1
x_1	1	0	0	$-1/3$	$2/3$	0	$2/3$
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	1	-4	0	2
s_2	0	0	0	$-2/3$	$-2/3$	1	$-2/3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
z	0	0	0	0	-1	0	-1
x_1	1	0	0	0	1	$-1/2$	1
x_2	0	1	0	0	1	0	1
x_3	0	0	1	0	-5	$3/2$	1
x_4	0	0	0	1	1	$-3/2$	1

作业

- P101 3. (2)