关于导数定义补充题

1、设 $f(2)=2, f'(2)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-4}{x-2}$。

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(f(x)-2)(f(x)+2)}{x-2}=4\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=4f'(2)=8$。

2、$f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=A$，证明：$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导。

证：$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0=f(a)$，$\therefore \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=A\Rightarrow f'(a)=A$。

3、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义。对如何 x 都有 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $0\le x\le 1$ 时，

$f(x)=x(1-x^2)$。证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

证：当 $-1\le x\le 0$ 时，$0\le x+1\le 1$；

因此 $f(x)=\dfrac{1}{2}f(x+1)=\dfrac{1}{2}(x+1)\left(1-(x+1)^2\right)=\dfrac{1}{2}(x+1)\left(-2x-x^2\right)$；

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-x^2)-0}{x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}(x+1)(x(2+x))}{x}=-1;$$

$\because f'_+(0)\ne f'_-(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在。

4、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a), f'_-(b)$ 存在；

$f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$。证明：$f(x)$ 在 (a,b) 存在零点。

证：不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$；

由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a}>0$，$\exists(a,a+\delta_1),\dfrac{f(x)}{x-a}>0$；由于 $x>a$，

可知有 $f(x)>f(a)=0$；取 $x_1\in(a,a+\delta_1), f(x_1)>0$；

类似地，$\exists(b-\delta_2,b),\dfrac{f(x)}{x-b}>0$；由于 $x<b$，

可知有 $f(x)<f(b)=0$；取 $x_2\in(b-\delta_2,b), f(x_2)<0$；

因为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 连续，且 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$，故 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b), f(\xi)=0$。

5、设函数 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是实数，n 为正整数。已知对一切实数 x 有 $|f(x)|\le|\sin x|$，证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1。$$

证：法一 $\because\ f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$，

$\therefore\ f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$；

又 $|f'(0)|=\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{|x|}=1$。

法二 由 $|f(x)|\le|\sin x|$ 知

$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$，从而 $-\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\dfrac{f(x)}{x}\le\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$，

所以 $-\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\le\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$；

又 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，（注意：$\dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数）

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，

故 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$。

法三 由 $|f(x)|\le|\sin x|$ 知

$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\Rightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\le\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x},\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 都存在

从而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\le\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\Rightarrow\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^2\le\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2,$$

即 $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx}{x}\right)^2\le 1$，

或 $\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1\sin x}{x}+\dfrac{a_2\sin 2x}{x}+\cdots+\dfrac{a_n\sin nx}{x}\right)\right)^2\le 1$

即 $(a_1+2a_2+\cdots+na_n)^2\le 1$，故 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$。

法四 因为 $\forall x$，$\left|f(x)\right| \le \left|\sin x\right| \le |x|$，故有

$$\forall x \ne 0, \quad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le 1.$$

注意 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n \sin nx}{x} = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$，

进而 $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n|$，利用极限的比较性得

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \le 1.$$

6、设 $f'(x_0)$ 存在，求 $l = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0 + 2\Delta x + \Delta x^2) - f(x_0 - 2\Delta x^2)}{\Delta x}$。

解：$l = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0 + 2\Delta x + \Delta x^2) - f(x_0 - 2\Delta x^2)}{2\Delta x + 3\Delta x^2}\cdot\dfrac{2\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = 2f'(x_0)$。

7、若 $f(1) = 0$，且 $f'(1)$ 存在，求 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x + \cos x)}{(e^x - 1)\tan x}$。

解：

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\frac{f(1 + (\sin^2 x + \cos x - 1)) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1}\cdot\frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} \\ &= f'(1)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\cos x - 1}{x^2}\right) = f'(1)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f'(1) \end{aligned}$$

8、设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{e^{n(x-1)} + 1}$，试确定常数 a, b 使 $f(x)$ 处处可导，并①求 $f'(x)$，

②试问 $f'(x)$ 是否连续？

解：$f(x) = \begin{cases} ax + b, x < 1 \\ x^2, x > 1 \\ \dfrac{1}{2}(a + b + 1) \end{cases}$

$x < 1, f'(x) = a; x > 1, f'(x) = 2x$；

由 $f(1^-) = f(1^+) = f(1) \Rightarrow a + b = 1$；

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(ax+b)-1}{x-1}=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2;$$

由 $f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow a=2\Rightarrow b=-1$；

$\therefore f'(x)=\begin{cases}2,x\le 1\\2x,x>1\end{cases}$。显然 $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=2=f'(1)$，而当 $x\ne 1$ 时，$f'(x)$ 连续，故 $f'(x)$ 在 R 上连续。

9、设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，试讨论 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充要条件。

解：①若 $f(a)\ne 0$，不妨设 $f(a)>0$。由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，从而必连续；由局部保号性定理知，存在 $x=a$ 的某邻域，在该邻域内 $f(x)>0$；从而 $|f(x)|=f(x)$ 在 $x=a$ 处可导。

②若 $f(a)=0$，当 $f(x)$ 在 $x=a$ 两侧同号时，则必有 $f'(a)=0$（$x=a$ 为极值点）；此时 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 可导，且导数值为 0：由导数定义

$$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)=0$$（不妨设 $f(x)$ 在 $x=a$ 两侧为正）；

同理可证，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处左导数为 0。

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 两侧异号，不妨设

$$g(x)=|f(x)|=\begin{cases}f(x),x\ge a\\-f(x),x<a\end{cases}$$

则

$$g'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{-f(x)-f(a)}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{x-a}=-f'_-(a)=-f'(a),$$

$$g'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)=f'(a);$$

所以，$g(x)$ 在 $x=a$ 不可导 $\Leftrightarrow g'_-(a)\ne g'_+(a)\Rightarrow f'(a)\ne 0$。

综上所述，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 不可导充要条件是 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\ne 0$。

10、已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 某邻域内满足关系式

$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$；（$x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 为 x 的高阶无穷小）

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导。求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程。

解：周期函数的导数也是周期函数，所以只需求出 $f(1)$ 及切线斜率 $f'(1)$。

由 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim\limits_{x\to 0}(8x+\alpha(x))$，得

$$f(1)-3f(1)=0 \Rightarrow f(1)=0;$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{\sin x}$,

及 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\dfrac{f(1-\sin x)}{-\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{8x}{\sin x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)$,

所以 $4f'(1)=8 \Rightarrow f'(1)=2$；

又 $f(x+5)=f(x)$，所以 $f(6)=f(1)=0, f'(6)=f'(1)=2$；

所求切线方程为 $y=2(x-6)$。

11、设 f 具有一阶连续导数，$f''(0)$ 存在，且 $f'(0)=f(0)=0$；

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$$

①试确定 a，使 $g(x)$ 处处连续；

②对上面确定的 a，证明 $g(x)$ 具有一阶连续导数。

解：① $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$；

② $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

所以 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}f''(0), x=0\end{cases}$,

因为

$$\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0)$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而 $g(x)$ 具有一阶连续导数。

12、设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$，$f(x)$ 处处可导，求 $f(\varphi(x))$ 的导数。

解：$x=0$ 时，

$$\left.\frac{df(\varphi(x))}{dx}\right|_{x=0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\varphi(x))-f(\varphi(0))}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2\sin(1/x))-f(0)}{x^2\sin(1/x)}\cdot\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=f'(0)\cdot 0=0;$$

$x\neq 0$ 时，

$$\frac{df(\varphi(x))}{dx}=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=f'\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)。$$

13、 举例说明函数在一点可导，但在该点空心邻域内不连续。

解：例 $f(x)=x^2D(x)$，其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数。

因为 $0\le\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\left|\dfrac{x^2D(x)}{x}\right|\le|x|\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$，即 $f'(0)=0$；

$\forall x_0\in N^0(0), x_0\in Q$；由实数的稠密性，$\exists\{x_n\}\subset N^0(0), x_n\in R\setminus Q, x_n\to x_0$；

但 $f(x_n)=x_n^2D(x_n)=0\to 0\neq f(x_0)=x_0^2D(x_0)=x_0^2$；即 $f(x)$ 在 x_0 不连续。

14、设 $x\le 0$ 时 $g(x)$ 有定义，且 $g''(x)$ 存在，问怎样选择 a,b,c，可使下述函数在 $x=0$ 处有二阶导数。

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, x>0\\ g(x), x\le 0\end{cases}。$$

①利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$，得 $c=g(0)$；

②利用 $f'_+(0)=f'_-(0)$，而

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'_-(0),$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(ax^2+bx+c)-g(0)}{x-0}=b\Rightarrow b=g'_-(0);$$

③利用 $f''_+(0)=f''_-(0)$，而

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=g''_-(0),$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(2ax+b)-b}{x-0}=2a\Rightarrow a=\frac{1}{2}g''_-(0)$$

15、设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处二阶可导，证明：若 $f'(1)=f''(1)=0$，则在 $x=1$ 处有

$$\frac{d}{dx}f(x^2)=\frac{d^2}{dx^2}f^2(x)。$$

证：因 $\frac{d}{dx}f(x^2)=f'(x^2)\cdot 2x$，故 $\left.\frac{d}{dx}f(x^2)\right|_{x=1}=2f'(1)=0$；

$$\frac{d}{dx}f^2(x)=2f(x)f'(x),\therefore \left.\frac{d}{dx}f^2(x)\right|_{x=1}=2f(1)f'(1)=0;$$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}f^2(x)\right|_{x=1}=\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)f'(x)-2f(1)f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)f'(x)}{x-1}$$

$$=2f(1)\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=2f(1)f''(1)=0$$

注：由所给条件可知，f 在 $x=1$ 处连续，且 f' 在 $x=1$ 处连续，但 f'' 在 $x=1$ 处不一定连续，故求 $f^2(x)$ 在 $x=1$ 处二阶导数时应用定义而不能先求导数 $f''(x)$ 后代入值 $x=1$。

16、函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续的一阶导数，且 $f'(1)=2$，求 $\lim_{x\to 1}\frac{d}{dx}f\left(\cos\sqrt{x-1}\right)$。

解：$\frac{d}{dx}f\left(\cos\sqrt{x-1}\right)=f'\left(\cos\sqrt{x-1}\right)\frac{-\sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

所以 $\left.\lim_{x\to 1^+}\frac{d}{dx}f\left(\cos\sqrt{x-1}\right)\right|_{x=1}=\lim_{x\to 1^+}f'\left(\cos\sqrt{x-1}\right)\frac{-\sin\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}=-\frac{1}{2}f'(1)=-1$。

注：函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续的一阶导数，所以 $\lim_{x\to 1^+}f'\left(\cos\sqrt{x-1}\right)=f'(1)$；

如果只是 $f'(1)=2$，则可求下列右导数：设 $g(x)=f\left(\cos\sqrt{x-1}\right)$

$$g'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f\left(1+(\cos\sqrt{x-1}-1)\right)-f(1)}{\cos\sqrt{x-1}-1}\cdot\frac{\cos\sqrt{x-1}-1}{x-1}=-\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

17、设 $f'(x)$ 处处连续，$g(x)=f(x)\sin^2 x$，求 $g''(0)$。

解：$g'(x)=f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x, g'(0)=0$，第二步必须用定义做：

$$g''(0)=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\left(f'(x)\frac{\sin x}{x}\sin x+f(x)\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=2f(0)$$

类题：设 $\varphi(u)$ 是具有连续一阶导数的函数，$f(x)=x\varphi(x^2)$，求 $f''(0)$.

解：$f'(x)=\varphi(x^2)+2x^2\varphi'(x^2)$，$f'(0)=\varphi(0)$.

利用导数定义，有：

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x^2)+2x^2\varphi'(x^2)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\varphi(x^2)-\varphi(0)}{x}+2x\varphi'(x^2)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\varphi(x^2)-\varphi(0)}{x^2}x+2x\varphi'(x^2)\right]=0.$$

18、 指出下列求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}$ 的错误，并说明原因.

因为 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$，由 $\sin x\sim x(x\to0)$，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0;$$

分析：在上述解题过程中

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$ 是正确的，

问题出在 $\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}\ (x\to0)$；

因为，当 $x=x_n=\frac{1}{n\pi}\ (n\in Z^*)$ 时，

$\sin\left(x_n^2 \sin\frac{1}{x_n}\right) = x_n^2 \sin\frac{1}{x_n} = 0$，且 x_n 在 $x=0$ 附近稠密着，

因此，当 $x \to 0$ 时

$$\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) \Big/ x^2 \sin\frac{1}{x} \text{无意义！}$$

所以 $\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)$ 与 $x^2 \sin\frac{1}{x}$ 不等价.

正确解法：

$$0 \le \left|\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) \Big/ x\right| \le \left|x^2 \sin\frac{1}{x} \Big/ x\right| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \to 0\text{；}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$.