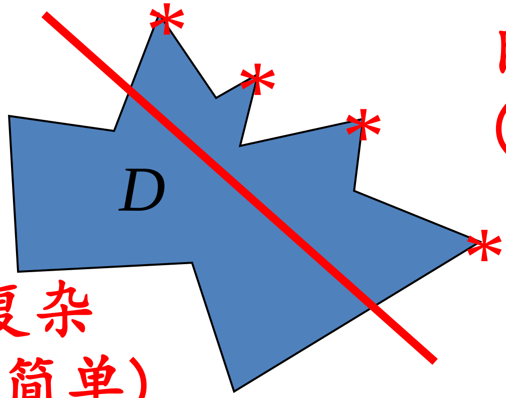
凸函数与凸规划
Convex Function & Convex Programming

电信学部·自动化科学与工程学院
系统工程研究所
吴江

Outline

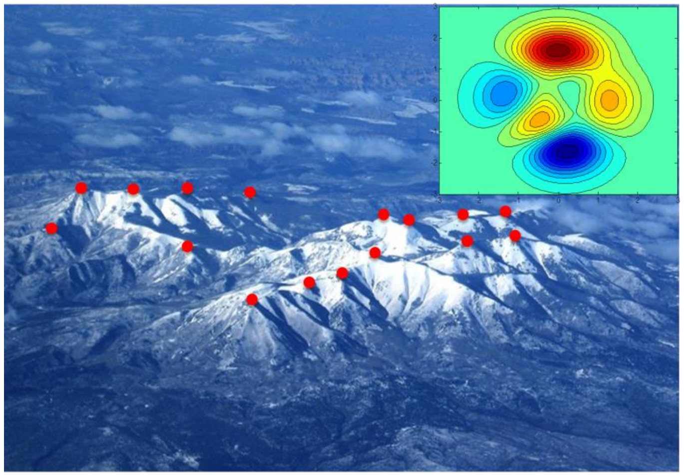
- 凸函数及其性质
- 凸规划及其性质

引言-非线性规划



目标函数复杂
(可行域简单)

可行域复杂
(目标函数简单)



有一类非线性规划问题，它的可行域几何结构简单，目标函数性态良好，导致**任一局部最优解也是全局最优解**，这就是**凸规划(Convex Programming)**问题。

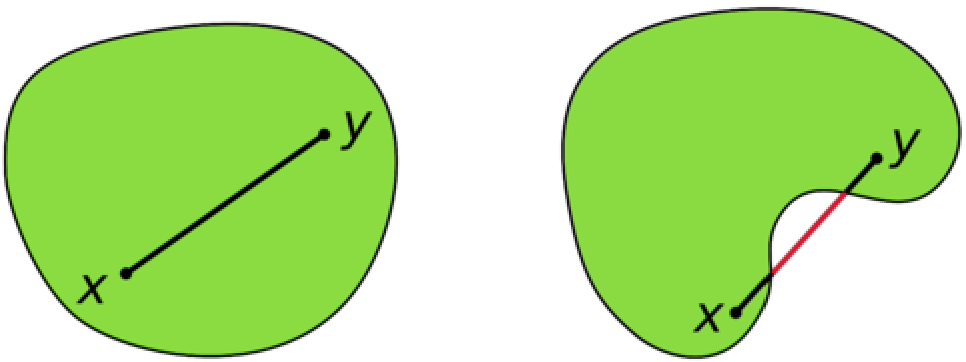
凸规划在实际应用中很常见，凸性是大部分非线性规划理论和算法的核心和基石。

凸集

- 定义：

  $S \subset R^n$, 若$\forall\, x,\ y \in S,\ \lambda \in [0,1]$

  $\Rightarrow\ \lambda x + (1-\lambda) y \in S$, 则称$S$是凸集



- 性质：任意多个凸集的交集仍然是凸集

凸函数

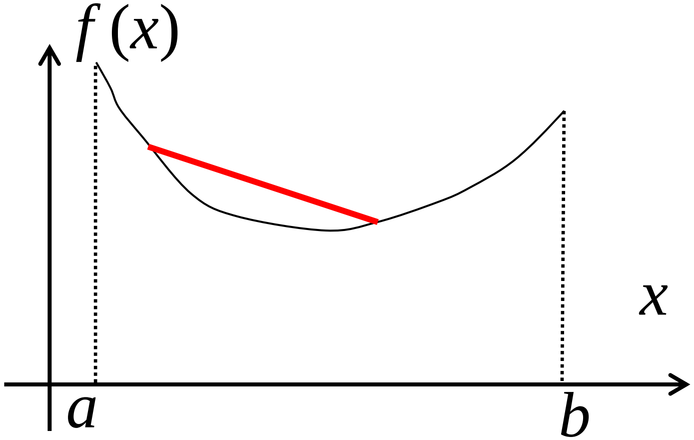
- $S \subset R^n$ 是非空凸集, f: $S \to R^1$ ，若∀α∈(0,1), 有:
  $$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \le \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2), \forall x^1, x^2 \in S$$
- 则称f是S上的凸函数

- 严格凸函数: 若∀α∈(0,1), 有:
  $$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) < \alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2)$$
  $$\forall x^1, x^2 \in S, x^1 \ne x^2$$
- 凹函数: 若$-f$为S上的(严格)凸函数, 则f为S上的(严格)凹函数

凸函数举例

例1. $f(x) = \sin(x)$在 $[\pi, 2\pi]$上是凸函数，在$[0, 2\pi]$上不是凸函数。

例2. 线性函数 $f(x) = a^T x + b$ 在 R^n上是凸函数，也是凹函数。



凸函数：割线段始终位于曲线上方
凸函数定义域必须为凸集

例3. 二次型函数 $f(x) = x^T Ax$ (其中A为实对称阵)在 R^n 上是凸函数的充分必要条件是A为半正定矩阵。

凸函数的性质

- 定理一：$S\subset R^n$ 是非空凸集，
  - $f: S\to R^1$ 是 S 上的凸函数，且 $\alpha\geq 0$，则 αf 是 S 上的凸函数
  - $f_1, f_2: S\to R^1$ 是 S 上的凸函数，则 f_1+f_2 是 S 上的凸函数
- 定理二：$S\subset R^n$ 是非空凸集，$f: S\to R^1$ 是 S 上的凸函数，$c\in R^1$，则 $H_s(f, c)=\{x|x\in S 且 f(x)\leq c\}$ 是凸集.
- 定理三：$S\subset R^n$ 是非空开凸集，$f: S\to R^1$ 可微，则
  - f 是 S 上的凸函数的充要条件是

$$\nabla f(x^1)^T(x^2-x^1)\leq f(x^2)-f(x^1), \forall x^1, x^2\in S$$

  - f 是 S 上的严格凸函数的充要条件是

$$\nabla f(x^1)^T(x^2-x^1)< f(x^2)-f(x^1), \forall x^1, x^2\in S$$

凸函数的判定

- $S\subset R^n$ 是非空开凸集，$f: S\to R^1$ **二阶连续可导**，则 f 是 S 上的凸函数的充要条件是 $\nabla^2 f(x)$ 在 S **半正定**

怎样根据二阶导数判断函数凸性？

$$f: R^n \to R^1$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

一阶导数：梯度

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

二阶导数：Hesse 阵

- 例: $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$

凸规划

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & g_i(x) \le 0, i = 1,2,\dots p \\ & h_j(x) = 0, j = 1,2,\dots q \\ & x \in R \end{aligned}$$

- 若满足下述两个条件，则该问题为一个凸规划问题
  - $D = \{x \mid g_i(x) \le 0, i = 1,2,\dots p, h_j(x) = 0, j = 1,2,\dots q\}$ 是R^n中的一个**凸集**
  - $f(x)$是D上的一个**凸函数**

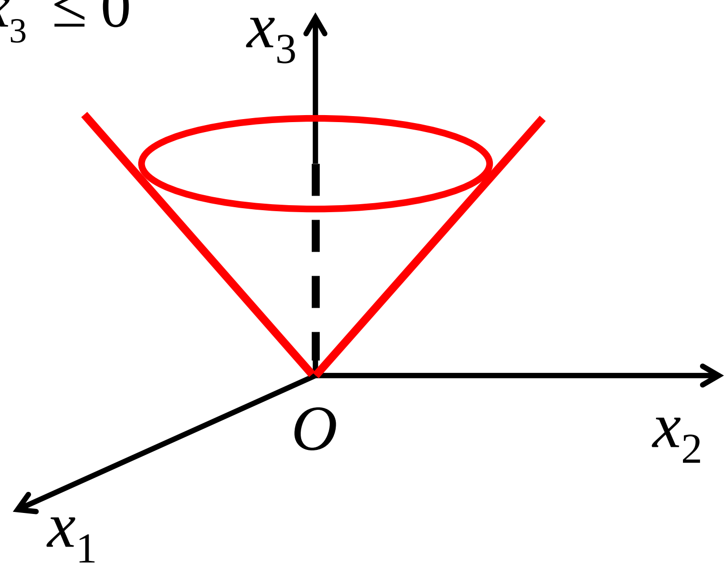
凸规划例子及性质

例 考虑非线性规划：

$$(NLP)\begin{cases}\min\ x_1^2+x_2^2-3x_1-4x_2\\ s.t.\quad x_1^2+x_2^2-x_3^2\le 0\\ \qquad\quad x_3\ge 0\end{cases}$$

结论：是凸规划！

锥约束、锥规划



思考：用定义证明可行域是凸集。

凸函数与凸规划的性质

- 凸规划的任意局部最优解都是它的整体最优解
- 凸集在任意点具有可行方向
- 沿下降方向必可找到最优解

"事实上，优化问题的分水岭不是线性和非线性，而是凸性与非凸性"

—— R. Tyrrell Rockafellar, SIAM, 1993,.