第 1 章 复数与复变函数

1.1 复数及复平面

~~1-1~~ 若 $|z|=1, \omega = z^n + \dfrac{1}{z^n}$（$n$ 是正整数），则（　　）.

（A）$\mathrm{Re}(\omega)=0$　　（B）$\mathrm{Im}(\omega)=0$　　（C）$\arg(\omega)=0$　　（D）$\arg(\omega)=\pi$

解　由 $|z|=1$ 知 $\dfrac{1}{z}=\overline{z}$，因此

$$z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + \overline{z^n}\ \text{为实数，故}\ \mathrm{Im}(\omega)=0.\qquad \text{选（B）}$$

$|z|=1$时 $z^n = \overline{z^n} = 1/z^n$.

~~1-2~~ $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n} + \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{3n} =$（　　）.

（A）$(-1)^n 2$　　（B）$(-1)^{n-1}2$　　（C）2　　（D）-2

解 由 $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}$ 及 $\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}$ 知，等式中两项皆为 1.　　选（C）

1-3　$|(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n| =$（　　）.

（A）$2^n \cos^n \dfrac{\theta}{2}$　　（B）$2^n \sin^n \dfrac{\theta}{2}$　　（C）$2^{\frac{n}{2}}(1+\cos\theta)^{n/2}$　　（D）$2^{\frac{n}{2}}(1+\sin\theta)^{n/2}$

解 $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2(1+\cos\theta)$

故　$|(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n| = 2^{\frac{n}{2}}(1+\cos\theta)^{n/2}$.　　选（C）

本题容易错选(A)项，因为 $2(1+\cos\theta) = 4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ **得** $|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$**. 错在** $\cos\dfrac{\theta}{2}$ 应加上绝对值.

1-4　$\max\{|z^4 + \mathrm{i}z^2| \,\big|\, |z| \le 1\} =$（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　（B）$\sqrt{\dfrac{11}{4}}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$　　（D）2

解　由 $|z^4 + \mathrm{i}z^2| \le |z|^4 + |z|^2 \le 2$, 而当 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ 时，

$z^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \mathrm{i}z^2 = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -1, |z^4 + \mathrm{i}z^2| = 2$，故最大值为 2　　.选（D）

用不等式确定最大值是常用方法.

~~1-5~~　对任意复数 z_1, z_2，证明不等式

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

证 1

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \le |z_1 + z_2| + |z_2|$$

故　$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$，同理　$|z_2| - |z_1| \le |z_1 + z_2|$

即　$-|z_1 + z_2| \le |z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$

也就是　$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2|$.

证 2（代数法）　设 $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k (k=1,2)$

则只要证　$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$

即只要证　$x_1x_2 + y_1y_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$　　（1）

只要证　$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$

此不等式等价于　$x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1y_1x_2y_2 \ge 0$

由于 x_k, y_k 皆是实数，上式左边是完全平方式，故此不等式成立，也就是

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$成立，以下同证 1.

证 3 （三角法）.设 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，

则 $|z_1+z_2|^2=(r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)^2$

$$=r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)\le r_1^2r_2^2+2r_1r_2$$

$$=(r_1+r_2)=(|z_1|+|z_2|)^2$$

即 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ 成立，以下同证 1.

~~1-6~~ 当 $|z|\le 1$ 时，求 $|z^n+\alpha|$ 的最大与最小值，n 是正整数，a 是复常数.

解 1 （代数法）.由 1-5 题知.

$||z|^n-|z||\le|z^n+\alpha|\le|z^n|+|a|\le 1+|\alpha|$

我们知道，当 $|z^n|=1$，且向量 z^n 与 α 夹角为 $0°$ 时右边不等式等号成立.故 $|z^n+\alpha|$ 的最大值是 $1+|\alpha|$.

对左边不等式，要分情况讨论.

（1）若 $|\alpha|>1$，则 $|z^n+\alpha|\ge|\alpha|-|z^n|\ge|\alpha|-1$. 等号当 $|z|=1$, 且 z^n 与 α 方向相反时成立.这时最小值是 $|\alpha|-1$.

（2）若 $|\alpha|\le 1$，则由 $|z^n+\alpha|\ge 0$，当 $z^n=-\alpha$ 时等号成立，最小值为 0.

总之，不论 α 为何复数，$|z^n+1|$ 的最大值是 $1+|\alpha|$；而当 $|\alpha|>1$ 时，最小值为 $|\alpha|-1$. 当 $|\alpha|\le 1$ 时，最小值为 0.

解 2 （几何法）.我们仅就 $|\alpha|>1$ 加以证明.由 $|z|\le 1$ 知 $|z^n|\le 1$。即 z^n 是闭单位圆上一点. $|z^n+\alpha|$ 表示 z^n 点到 $-\alpha$ 点的距离.很明显（初等几何）当 z^n 位于如图 1.2 的 ω_1 的位置时，z^n 与 $-\alpha$ 距离最大，且最大值就是 $1+|\alpha|$；当 z^n 位于 ω_2 点时，$|z^n+\alpha|$ 最小，最小值为 $|\alpha|-1$.

$|\alpha|\le 1$ 的情况请读者自己研究.

~~1-7~~ 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$，且 $z_1+z_2+z_3=0$ 证明以 z_1,z_2,z_3 为顶点的三角形是正三角形.

证 1 记 $|z_1|=a$，则

$$|z_1|^2=|z_2+z_3|^2=2(|z_2|^2+|z_3|^2)-|z_2-z_3|^2|$$

得 $|z_2-z_3|^2=3a^2$. 同样 $|z_3-z_1|^2=|z_1-z_2|^2=3a^2$

即得 $|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|$. 命题得证.

证 2 设 $z_k=ae^{i\theta_k}\ (k=1,2,3)$

因而有 $a(e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}+e^{i\theta_3})=0$, 即

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0.$$

不妨设 $0\le\theta_1<\theta_2<\theta_3\le 2\pi$. 则

$$(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2=\cos^2\theta_3,\ (\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2=\sin^2\theta_3.$$

于是 $2+2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)=1$.

即 $\cos(\theta_2-\theta_1)=-\dfrac{1}{2}, \theta_2-\theta_1=\dfrac{2}{3}\pi$.

同理，$\theta_3-\theta_2=\dfrac{2}{3}\pi$，说明 z_1,z_2,z_3 在圆周上且 $\overset{\frown}{z_1z_2},\overset{\frown}{z_2z_3}$ 与 $\overset{\frown}{z_3z_1}$ 的度数均为 $\dfrac{2}{3}\pi$, 所以 z_1,z_2,z_3 为顶点的三角形是正三角形.

1-8 证明复数形式的柯西（Cauchy）不等式：

$$|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k|\le\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^2.$$

证 对任意 n 个复数，由三角不等式.知

$$|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k|\le\sum_{k=1}^{n}|a_k||\beta_k|.$$ （见 1-5 题）.

再由关于实数的柯西不等式得

$$|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k|^2\le(\sum_{k=1}^{n}|a_k||\beta_k|)^2\le\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2\sum_{k=1}^{n}|\beta_k|^2.$$

说明它的几何意义。

1-9 若复数 z_1,z_2,z_3 满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

证明 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

证 由已知等式取模可得

$$|z_2-z_1||z_2-z_3|=|z_1-z_3|^2 \quad (1)$$

又由已知等式知

$$\frac{(z_2-z_1)-(z_3-z_1)}{z_3-z_1}=\frac{(z_1-z_3)-(z_2-z_3)}{z_2-z_3}$$

即 $\dfrac{z_2-z_3}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$，从而有

$$|z_1-z_2||z_3-z_1|=|z_2-z_3|^2 \quad (2)$$

（1）、（2）两式相比得 $\dfrac{|z_2-z_3|}{|z_1-z_3|}=\dfrac{|z_1-z_2|^2}{|z_2-z_3|^3}$

故 $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$，代入（1）即可得所要证明的结论：

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|.$$

1-10 设实数 $|r|<1$，求下面级数的和.

（1）$\sum_{k=0}^{\infty}r^k\cos k\theta$ （2）$\sum_{k=1}^{\infty}r^k\sin k\theta$

解 记 $a_k=r^k\mathrm{e}^{ik\theta}=(r\mathrm{e}^{i\theta})^k(k=0,1,\cdots)$

于是 $$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{i\theta}}=\frac{1}{1-r\cos\theta-\mathrm{i}r\sin\theta}=\frac{1-r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

故 （1）$$\sum_{k=0}^{\infty}r^k\cos k\theta=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

（2）$$\sum_{k=1}^{\infty}r^2\sin k\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

1.2 复变函数、极限与连续性

一个复函数 $\omega=f(z)$ 可以看作是从 z 平面到 ω 平面上的一个映射（也可称为变换）.

1-11 已知映射 $\omega=\dfrac{1}{z}$，求

（1）圆周 $|z|=2$ 的像；（2）直线 $y=x$ 的像；（3）区域 $x>1$ 的像.

解 （1）$|\omega|=\dfrac{1}{|z|}\Big|_{|z|=2}=\dfrac{1}{2}$，是 ω 面上以原点为圆心，$\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆周.

（2）$\omega=\dfrac{1}{x(1+\mathrm{i})}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2x}$. 则 $u=\dfrac{1}{2x},v=-\dfrac{1}{2x}$，像是直线 $u=-v$.

（3）先看直线 $x=1$ 的像. $\omega=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}y}=\dfrac{1-\mathrm{i}y}{1+y^2}$,则 $u=\dfrac{1}{1+y^2}, v=\dfrac{-y}{1+y^2}, u^2+v^2=u$, 是以 $\omega=\dfrac{1}{2}$ 为圆心，$\dfrac{1}{2}$ 为半径的偏心圆，而由 $z=0$ 的像是 $\omega=\infty$，在圆外部，因此，$x>1$ 的像是圆的内部，即 $u^2+v^2<u$.

~~1-12~~ 设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{Im}^2(z)}{z^2}, & z\neq 0\\ \alpha, & z=0\end{cases}$, 则（　　）.

（A）$\alpha=0$ 时，$f(z)$ 连　　　（B）$\alpha=\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ 时，$f(z)$ 连续

（C）$\alpha=1$ 时，$f(z)$ 连　　　（D）不论 α 为何值，$f(z)$ 在 $z=0$ 处均不连续

解　记 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $z^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy.\mathrm{Im}^2(z)=y^2$, 故当 $z\neq 0$ 时

$$f(z)=\frac{y^2(x^2-y^2)-2xy^3\mathrm{i}}{(x^2+y^2)^2}$$

考虑 $u(x,y)=\dfrac{y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$，令 $y=kx$，得

$u(x,kx)=\dfrac{k^2(1-k^2)}{(1+k^2)^2}, x\to 0$ 时极限不同

故 $z\to 0$ 时，$u(x,y)$ 极限不存在. 因此，不论 α 取何值，$f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续.　选（D）.

相当于用极坐标研究二元函数的极限.

~~1-13~~ 求极限：$\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\overline{z}+2z-\overline{z}-2}{z^2-1}$

解　原极限$=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\overline{z}(z-1)+2(z-1)}{(z-1)(z+1)}$

$=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\overline{z}+2}{z+1}=\dfrac{3}{2}.$

复函数的极限与实二元函数极限的关系.

即 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ **与** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y), \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$ **两问题是等价的.**

~~1-14~~ 证明定理：设 $z=x+\mathrm{i}y, z_0=x_0+\mathrm{i}y_0. f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=u_0+iv_0$$

的充要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$

证　必要性. 由 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=u_0+\mathrm{i}v_0$ 知，对任意 $\varepsilon>0, \exists\delta>0$，只要

$$0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

便有　$|u(x,y)-u_0+i(v(x,y)-v_0)|<\varepsilon.$

这时 $|u(x,y)-u_0|\leq|u(x,y)-u_0+\mathrm{i}(v-v_0)|<\varepsilon$

$|v(x,y)-v_0|\leq|u(x,y)-u_0+\mathrm{i}(v(x,y)-v_0)|<\varepsilon$

即　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$ 及 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

充分性.对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$, 只要

$$\sigma < \rho = |z - z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1$$

便有 $$|u(x,y) - u_0| < \varepsilon / 2 \qquad (1)$$

又存在 $\delta_2 > 0$, 只要 $0 < \rho < \delta_2$

便有 $$|v(x,y) - v_0| < \varepsilon / 2 \qquad (2)$$

成立.取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，因此，只要 $0 < \rho < \delta$，(1)、(2) 便成立，由三角不等式

$$|(u+iv)-(u_0+iv_0)| \le |u-u_0| + |v-v_0| < \varepsilon$$

成立.即 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0$.

本问题的逆问题成立吗？

~~1-15~~ 设 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \alpha$，证明

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |\alpha|.$$

证　对 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 $0 < \rho < \delta$，便有

$$||f(z)| - |\alpha|| \le |f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

成立.

即 $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |\alpha|$.

本题证明方法与证明二元实函数极限不存在的方法相同。

~~1-18~~ 证明 $f(z) = (\dfrac{\bar{z}}{z} - \dfrac{z}{\bar{z}})$ 在（0，0）点的极限不存在.

证 1　设 $z = re^{i\theta}$，则 $\dfrac{\bar{z}}{z} - \dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{r^2(e^{-2i\theta} - e^{2i\theta})}{r^2} = -2i\sin 2\theta$，故在 $z = 0$ 点的极限不存在.

证 2　记 $z = x + iy$，则 $\dfrac{\bar{z}}{z} - \dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}^2 - z}{x^2 + y^2} = \dfrac{-4ixy}{x^2 + y^2}$，当 $z \to 0$ 时，由 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在，知此函数在 $z = 0$ 极限不存在.

~~1-16~~ 证明 $f(z) = \arg z$ 在负实轴上不连续。

证　$z = 0$, $f(z)$ 无意义，故不连续.

设 $\mathrm{Im}(z) = y$, 则 $\lim\limits_{\substack{y \to 0^+ \\ x < 0}} f(z) = \pi$.

而 $$\lim_{\substack{y \to 0^- \\ x < 0}} f(z) = -\pi.$$

因此，在负实轴上任一点 x 处 $y \to 0$ 的极限均不存在，即对任意 $x_0 < 0, \lim\limits_{z \to x_0} f(z)$ 不存在，故不连续.

用复数指数形式可将这种和变为等比数列之和.而且，往往是一次便求得两个和.

1-17 求和

(1) $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$

(2) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$

解　$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{nix}$

$$=\frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}=\frac{1-\cos(n-1)x-i\sin(n+1)x}{1-\cos x-i\sin x}$$

$$=\frac{1-\cos(n+1)x-i\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}\cdot(1-\cos x+i\sin x)$$

$$=\frac{1-\cos x+\cos nx-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}$$

$$+i\frac{\sin x+\sin nx-\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$$

以上实部即本题（1）的结果，虚部是（2）的结果.即

（1）$1+\cos x+\cdots\cos nx=\dfrac{1-\cos x+\cos nx-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}$

（2）$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin x+\sin nx-\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$

注意：z_1、z_2、z_3是点，而$z_2-z_1,z_3-z_2,\cdots$是平面向量。

1-18 证明三点 z_1、z_2、z_3 构成正三角形顶点的充分必要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$.

证 必要性.设$\Delta z_1z_2z_3$是正三角形.则必有

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}.$$

这是因为z_2-z_1,z_3-z_1,z_3-z_2的模相等，且夹角相等.

即 $-(z_1-z_2)^2=(z_3-z_2)(z_3-z_1)$

即 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$

充分性.由$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$

得
$$(z_1-z_2)^2=(z_2-z_3)(z_3-z_1)$$
$$(z_2-z_3)^2=(z_1-z_2)(z_3-z_1)$$
$$(z_3-z_1)^2=(z_1-z_2)(z_2-z_3)$$

取模易得 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

即三角形三边相等，为正三角形.

这也是一般二元实函数的重要性质。

1-19 证明：若$\omega=f(z)$在有界闭集上连续，则必有界.

证 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.在E上连续，则$u(x,y),v(x,y)$均在E上连续，从而$F(x,y)=\sqrt{u^2+v^2}$连续，因而有界，即存在正数M，使$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}<M$成立.

这都是二元实函数在有界闭集上的重要性质。

1-20 证明：若$\omega=f(z)$在有界闭集E上连续，则$|f(z)|$在E上能达到其最大值与最小值.

证 如上题.由$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$在E上连续，故能达到最大、最小值.即存在(x_1,y_1)及$(x_2,y_2)\in E$,

$$|f(x_1+iy_1)|=\sqrt{u_1^2+v_1^2}=M$$

而
$$|f(x_2+iy_2)|=\sqrt{u_2^2+v_2^2}=m$$

使对任意$(x,y)\in E$，皆有不等式

$$m \le |f(x+\mathrm{i}y| \le M$$

成立.

第 2 章　解析函数

2.1　解析函数的概念及 C-R 条件

复数作为复数域的向量，是一维向量，或复数是复数域上的一维线性空间.

2-1　$f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ 点可导的充分必要条件是（　　　）.

（A）在 (x_0, y_0) 点 u, v 可导，且满足 C-R 条件，即 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在 (x_0, y_0) 成立

（B）$f(z)$ 在 (x_0, y_0) 点的一个邻域内可导

（C）在 (x_0, y_0) 点 u, v 可微，且满足 C-R 条件

（D）在 (x_0, y_0) 点 u, v 具有连续的偏导数，且满足 C-R 条件

解　由上题的推导过程知，若 $f(z)$ 在 z_0 点可导，则 u, v 在 (x_0, y_0) 可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b.$$

在 (x_0, y_0) 点成立.

反之，若 u, v 在 (x_0, y_0) 可微，且满足 C-R 条件，则

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta z} \\ &= \frac{u_x \Delta x + u_y \Delta y + \mathrm{i}(v_x \Delta x + v_y \Delta y)}{\Delta z} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z} \\ &= \frac{u_x(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + \mathrm{i}(v_x \Delta x + v_x \mathrm{i}\Delta y)}{\Delta z} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z} \\ &= \frac{(u_x + \mathrm{i}v_x)\Delta z}{\Delta z} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}\end{aligned}$$

故　$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = u_x + iv_x$$　选（C）.

2-2　若 $u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \ne 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, $v(x, y) = xy$, $f(z) = u + \mathrm{i}v$，则函数 $f(z)$（　　　）.

（A）仅在原点可导　（B）处处不可导　（C）除原点外处处可导　（D）处处可微

解　$u(x, y)$ 在原点虽有 $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ 但不可微；而除原点外 u, v 可微但不满足 C-R 条件，因此，$f(z)$ 处处不可导.　选（B）.

$f(z) = \bar{z}$ 如此简单一个函数却处处连续但不可导！

~~2-3~~　若 $f(z) = (x^2 - y^2 + ax + by) + \mathrm{i}(cxy + 3x + 2y)$ 处处解析，则 $(a, b, c) =$（　　　）.

（A）$(3,2,2)$　（B）$(-2,-3,2)$　（C）（$(2,-3,2)$　（D）$(-2,3,2)$

解　由 C-R 条件及

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + a, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + b, \frac{\partial v}{\partial x} = cy + 3, \frac{\partial v}{\partial y} = cx + 2.\ 故\ c = 2, a = 2, b = -3.$$

~~2-3~~　若 $f(z) = xy^2 + \mathrm{i}x^2 y$ 则 $f(z)$（　　　）.

（A）令在直线 $y = x$ 上可导　（B）仅在直线 $y = -x$ 上可导

（C）仅在（0，0）点解析　（D）仅在（0，0）点可导

解 $u_x = y^2, u_y = 2xy, v_x = 2xy, v_y = x^2$，要满足 C-R 条件，要求

$y^2 = x^2$ 及 $2xy = -2xy$，只有（0，0）点能满足此条件. 选（D）.

要记住在极坐标下的 C-R 条件.

$\Delta z \sim ri\Delta\theta e^{i\theta} + \Delta r e^{i\theta}$ **中"~"表示等价(无穷小)的意思** $(\Delta z \to 0)$**.这里由于是极坐标故** $\Delta u = u(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta) - u(r,\theta)$; $\Delta v = v(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta) - v(r,\theta)$ **而** $\Delta z = (r+\Delta r)e^{i(\theta+\Delta\theta)} - re^{i\theta}$ **当** $\Delta\theta = 0, \Delta z = \Delta r e^{i\theta}$ **令** $\Delta r = 0, \Delta z = re^{i\theta}(\sin\Delta\theta - 1 + i\sin\Delta)$ $\sim re^{i\theta} i\Delta\theta (\Delta\theta \to 0)$ **"~"是等价无穷小的等价符号.**

2-4 导出在极坐标下的 C-R 条件.

解 即 $z = re^{i\theta}, u = u(r,\theta), v = v(r,\theta), f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta), f(z)$ 在 (r,θ) 处可导的 C-R 条件，分两种解法.

1.用坐标变换法

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{-y}{r^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{y}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 的变化与之一样，故由 C-R 条件

得 $$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

及 $$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}\frac{x}{r} + \frac{y}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

$x\times(2) - y\times(1)$得

$y\times(2) + x\times(1)$

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \\ r\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial\theta} \end{cases}$$

这便是在极坐标下 C-R 条件.

2.直接用定义

$$f(z+\Delta z) - f(z) = u(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta) - u(r,\theta) + i\Delta v$$
$$= \Delta u + i\Delta v$$

而 $$\Delta z = (r+\Delta r)e^{i(\theta+\Delta\theta)} - \Delta re^{i\theta}$$
$$re^{i\theta}(e^{i\Delta\theta} - 1) + \Delta re^{i(\theta+\Delta\theta)}$$

当 $\Delta r \to 0, \Delta\theta \to 0$ 时，$\Delta z \sim ri\Delta\theta e^{i\theta} + \Delta re^{i\theta}$

故 $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z}$ 存在，令 $\Delta\theta = 0$ 有

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta z\to 0\\(\Delta\theta=0)}}\frac{u(r+\Delta r,\theta) - u(r,\theta)}{\Delta re^{i\theta}} + i\lim_{\substack{\Delta r\to 0\\(\Delta\theta=0)}}\frac{v(r+\Delta r,\theta) - u(r,\theta)}{\Delta re^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

令 $\Delta r = 0, \Delta\theta \to 0$ 亦有

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta\theta\to 0\\(\Delta x=0)}}\frac{u(r,\theta+\Delta\theta) - u(r,\theta)}{ri\Delta\theta e^{\theta}} + \lim_{\substack{\Delta\theta\to 0\\(\Delta r=0)}}\frac{v(r,\theta+\Delta\theta) - v(r,\theta)}{r\Delta\theta e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} - i\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

比较上面等式得 $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \end{cases}$$

与解 1 所得结果一致.

2-5 研究下列函数的可导性与解析性

（1） $f(z)=x^2-\mathrm{i}y$

（2） $f(z)=2x^3+3\mathrm{i}y^3$

（3） $f(z)=\mathrm{e}^x\cos y-\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$

（4） $f(z)=\sin x\mathrm{ch}y+i\cos x\mathrm{sh}y$

解 （1） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial x}=-1.$ 仅当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时 C-R 条件成立，故此函数在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上处处可导. 而在复平面上处处不解析.

（2） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0;\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial x}=9y^2$，因此， $f(z)$ 仅在两相交直线 $2x^2=3y^2$ 上处处可导，在全平面处处不解析.

（3） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y,\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y;\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y,\dfrac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y.$ C-R 条件处处成立，且 u,v 偏导数处处连续，因而处处可微，即 $f(z)$ 处处解析.

（4） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\mathrm{ch}y,\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x\mathrm{sh}y;\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\mathrm{sh}y,\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos x\mathrm{ch}y.$
u,v 的偏导数处处连续，且 C-R 条件成立，故 $f(z)$ 处处解析.

~~2-6~~ 若 $u+iv$ 是区域 D 内的解析函数，那么， $v+iu$ 在 D 内是否也是解析函数？

解 只有当 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内为常数时， $v+iu$ 才在 D 内解析，否则 $v+iu$ 不解析.

由 C-R 条件， $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，若 $v+\mathrm{i}u$ 也解析，则有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial x}.$ 于是 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$，故 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,v\equiv\beta$ 为常数，从而 $u=\alpha$ 也是常数.

结论，若 $u+\mathrm{i}v$ 是 D 内不为常数值的解析函数，则 $v+\mathrm{i}u$ 在 D 内不解析.

2-7 如果 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，证明 $(\dfrac{\partial}{\partial x}|f(z)|)^2+(\dfrac{\partial}{\partial y}|f(z)|)^2=|f'(z)|^2$.

证 $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，故

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}},\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

由 C-R 条件得 $\dfrac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\dfrac{-uv_x+vu_x}{\sqrt{u^2+v^2}}$

故
$$(\frac{\partial}{\partial x}|f(x)|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|)^2=\frac{(u^2+v^2)u_x^2+(u^2+v^2)v_x^2}{u^2+v^2}$$
$$=u_x^2+v_x^2=|f'(z)|^2.$$

~~2-8~~ 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，证明

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$$

证 $|f(z)|^2=u^2+v^2$

故
$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2=2(uu_x+vv_x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx}) \qquad (1)$$

同样 $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy}) \qquad (2)$$

由 C-R 条件，知 $f'(z)=u_x+iv_y=v_y-\mathrm{i}u_y$.

$$|f'(z)|^2=u_x^2+v_y^2=u_y^2+v_y^2$$

及 $$u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0$$

将（1）、（2）两式相加得

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2=4|f'(z)|^2\ .$$

2-~~9~~ 如果 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 均在 D 内解析，证明 $f(z)$ 是常数.

证 设 $f(z)=u+iv$，则 $\overline{f(z)}=u-iv$. 由 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$.
得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0,$ 从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0, u=\alpha$ 是实常数，$v=\beta$ 是实常数，$f(z)=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是常数.

2-10 设 $f(z)$ 在 z 点可导 $(z\neq 0)$，证明

$f'(z)=\frac{r}{z}(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r})$，其中 $z=re^{i\theta}$

证 在极坐标下 $f'(z)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r})=\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\mathrm{i}\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial u}{\partial\theta})$
（后面的式子是顺便写出来的）故

$$f'(z)=\frac{r}{z}(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r})$$

也可写作 $$f'(z)=\frac{1}{z}(\frac{\partial v}{\partial\theta}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial\theta}).$$

2.2 初等函数及其解析性

复变量的指数函数具有周期性.

2-11 若 $\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}$，则（　　）.

（A）$z_1=z_2$　　（B）$z_1=z_2+2k\pi$ (k 为任意整数)

（C）$z_1=z_2+\mathrm{i}k\pi$　　（D）$z_1=z_2-2\mathrm{i}k\pi$

解 由于 e^z 的周期为 $2\pi\mathrm{i}$，故有

$z_1-z_2=2m\pi\mathrm{i}$（取 $m=-k, k$ 为任意整数）

得 $z_1=z_2-2k\pi\mathrm{i}.$

要注意 $\mathrm{Ln}z$ 与 $\ln z$ 的联系与区别.

2-12 关于复数的对数函数，下面公式正确的是（　　）.

（A）$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$　　（B）$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2$

（C）$\mathrm{Ln}z^2=2\mathrm{Ln}z$　　（D）$\ln z^2=2\ln z$

解 由定义

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(z_1z_2)&=\mathrm{Ln}|z_1z_2|+\mathrm{iArg}(z_1z_2)\\&=\mathrm{Ln}|z_1|+\mathrm{iArg}z_1+\mathrm{Ln}|z_2|+\mathrm{iArg}z_2\\&=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2.\end{aligned}$$

（B）不正确在于$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}|z_1z_2|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_1z_2)$

而当$\arg z_1+\arg z_2>\pi$, 或$\arg z_1+\arg z_2\le -\pi$时， $\arg(z_1z_2)\ne \arg z_1+\arg z_2$，故（B）不成立.

~~2-13 Ln(−1)~~和它的主值分别是（ ）.

（A）$\mathrm{Ln}(-1)=(k+\frac{1}{2})\pi\mathrm{i}, (k$ 为整数）主值$\ln(-1)=0$

（B）$\mathrm{Ln}(-1)=(2k-1)\pi\mathrm{i}$, 主值$\ln(-1)=\pi\mathrm{i}$

（C）$\mathrm{Ln}(-1)=(2k-1)\pi\mathrm{i}$, 主值$\ln(-1)=-\pi\mathrm{i}$

（D）$\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+\mathrm{i}\mathrm{A}\operatorname{rg}(-1)$，主值$\ln(-1)=\pi\mathrm{i}$

解 $\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+\mathrm{i}\mathrm{A}\operatorname{rg}(-1)=\mathrm{i}(2m+1)\pi.$，取$m=k-1$($m$为整数，$k$也是整数）得

$\mathrm{Ln}(-1)=\mathrm{i}(2k-1)\pi$, $\ln(-1)=\pi\mathrm{i}.$ 选（B）.

注意复变量的三角函数与实变量三角函数的联系与差别.

~~2-14 设 k 为整数，则方程 $\sin z=0$~~的根是（ ）.

（A）$z=k\pi\mathrm{i}$ （B）$z=2k\pi$ （C）$z=k\pi$ （D）$z=2k\pi$

解 即 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=0$，即 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}=1$. 设 $z=x+\mathrm{i}y, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{-2y}(\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x)=1$，故 $y=0, \cos 2x=1, x=k\pi.$ 选（C）

2-15 证明对数函数的下列性质.

（1）$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$ （2）$\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$

并说明以上性质对于函数$\ln z$未必成立.

证 （1）$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}|z_1z_2|+i\mathrm{Arg}(z_1z_2)$

$=\mathrm{Ln}|z_1|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Ln}|z_2|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z_2$

$=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$

（2）可用（1）的结果：

$$\mathrm{Ln}z_1=\mathrm{Ln}(\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2)=\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}+\mathrm{Ln}z_2.$$

故 $\mathrm{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2.$

以上等式成立的意思是说

$\mathrm{Arg}(z_1z_2)$与$\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$是相同的集合.而对于主值：

$$\ln(z_1z_2)=\ln|z_1z_2|+\mathrm{i}\arg(z_1z_2),$$
$$\ln z_1=\ln|z_1|+\mathrm{i}\arg z_1$$
$$\ln z_2=\ln|z_2|+\mathrm{i}\arg z_2.$$

不一定总有$\arg z_1+\arg z_2=\arg(z_1z_2).$

如 $z_1=-1-\mathrm{i}, z_2=-\mathrm{i}$, 则 $z_1z_2=-1+\mathrm{i}$

$$\arg(z_1)=-\frac{3}{4}\pi, \arg z_2=-\frac{\pi}{2}, \arg(z_1z_2)=\frac{3}{4}\pi$$

$$\arg z_1+\arg z_2=-\frac{5}{4}\pi\ne\arg(z_1z_2).$$

故 $\ln z_1+\ln z_2$一般不一定与$\ln z_1z_2$相等，但当$\pi<\arg z_1+\arg z_2\le\pi$时，公式成立，

如 $\ln(-1)=\ln(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i})=\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\mathrm{i}\pi$不成立.

$\ln z^2\ne 2\ln z$ **这是复函数与实函数不同之处，值得注意。**

$\ln\sqrt{z}=\dfrac{1}{2}\ln z$ **都是成立的.**

2-16 说明下列等式是否正确.

（1）$\mathrm{Ln}z^2=2\mathrm{Ln}z$；（2）$\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}z$

解 （1）不正确，因为

$$\mathrm{Ln}z^2=2\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z^2$$

而 $2\mathrm{Ln}z=2\ln|z|+2\mathrm{i}\mathrm{Arg}z.$

由于 $2\mathrm{Arg}z=2\arg z+4k_1\pi,(k_1$ 是整数）

而 $\mathrm{Arg}z^2=2\arg z+2k_2\pi,(k_2$ 是整数）

两个集合不相同.

（2）正确 $\arg\sqrt{z}$ 一般有两个值，一个是 $\dfrac{1}{2}\arg z$，另一个是 $\dfrac{1}{2}\arg z+\pi.$

故 $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\dfrac{1}{2}\ln|z|+\mathrm{i}(\dfrac{1}{2}\arg z+k\pi)$

而
$$\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}z=\dfrac{1}{2}\ln|z|+\dfrac{\mathrm{i}}{2}(\arg z+2\pi)$$
$$=\dfrac{1}{2}\ln|z|+\mathrm{i}(\dfrac{1}{2}\arg z+m\pi). \quad ①$$

而 $\sqrt{2\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ 或 $-1-\mathrm{i}.$

$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})=\dfrac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}(\dfrac{\pi}{4}+2m_1\pi) \quad ②$$

$$\mathrm{Ln}(-1-\mathrm{i})=\dfrac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}(2m_2\pi-\dfrac{3}{4}\pi)$$
$$=\dfrac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}[(2m_2-1)\pi+\dfrac{\pi}{4}] \quad ③$$

②式对应于①式 $k=2m$，为偶数时的值；③式对应于①式 $k=2m_2-1$ 即奇数的值，故它们是相等的.

反过来，便可以看出（1）不成立的原因.

若
$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})^2=\ln 2+2\mathrm{i}\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i})$$
$$=\ln 2+\mathrm{i}(\dfrac{\pi}{2}+4k\pi) \quad ④$$

而
$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})^2=\ln 2\mathrm{i}=\ln 2+\mathrm{i}(\dfrac{\pi}{2}+2k_2\pi) \quad ⑤$$

④式比⑤式中的虚部少了“一半”原因是尚有

$$\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})^2=\mathrm{Ln}(-1-\mathrm{i})^2$$

而 $2\mathrm{Ln}(1+i)$ 与 $2\mathrm{Ln}(-1-\mathrm{i})$ 是不一样的.

2-17 求下列各式的值:

(1) $\exp[(1+\mathrm{i}\pi)/4]$ (2) 3^{i} (3) $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ (4) $\ln(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$

解 （1）
$$\exp[(1+\mathrm{i}\pi)/4]=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})$$
$$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}(1+\mathrm{i}).$$

（2）$3^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln 3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ln 3+\mathrm{i}2k\pi)}=e^{-2k\pi}(\cos\ln 3+\mathrm{i}\sin\ln 3),(k$ 是整数）

（3）$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{iLn}(1+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\frac{1}{2}\ln 2+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}=e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}(\cos\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}\sin\ln\sqrt{2})$

（4）$\ln(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=-(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi)+\mathrm{i}\ln\sqrt{2}$（$k$ 是整数）.

2-18　讨论函数$\ln z$和$\mathrm{Ln}z$的解析性及其导数.

解　$\omega=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$，此函数在$z=0$点和负实轴上不连续，在$z=0$时$\ln|z|$无意义；在负实轴$y=0$上，$x<0$，当$\lim\limits_{y\to 0^+}\arg z=\pi$；而$\lim\limits_{y\to 0^-}(\arg z)=-\pi$，故不连续；从而$\ln z$不可导. 而除$z=0$和负实轴外，反函数$z=\mathrm{e}^{\omega}$存在，且$z'=\mathrm{e}^{\omega}\neq 0$，故

$$(\ln z)'=\frac{1}{\mathrm{e}^{2}}=\frac{1}{z}$$

即除原点和负实轴外，$\ln z$处处可导，且

$$(\ln z)'=\frac{1}{z}$$

对于$\ln z=\ln z+2k\pi\mathrm{i}$（$k$为整数），对每个固定的$k$，$\mathrm{Ln}z$也是除原点和负实轴外处处可导，且

$$(\mathrm{Ln}z)'=(\ln z)'=\frac{1}{z}.$$

即$\mathrm{Ln}z$在它每一个单值的分支上（即对每个固定整数k），除原点和负实轴外处处可导，且$(\mathrm{Ln}z)'=\dfrac{1}{z}$.

2-19 研究幂函数$w=z^{a}$的解析性质，并求其导数.

解　$w=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}z}=\mathrm{e}^{\alpha(\mathrm{Ln}z+2k\pi)}$

因此，z^{a}是多值函数，对应于$\mathrm{Ln}z$的每个单值分支，幂函数也是单值的，且$\mathrm{Ln}z$的每个单值分支上除$z=0$和负实轴外处处解析，因而，幂函数在每个单值分支（即对每个固定的k），除原点与负实轴外处处解析，且

$(z^{n})'=[\mathrm{e}^{\alpha(\ln z+\mathrm{i}2k\pi)}]'=z^{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha}{z}=\alpha z^{\alpha-1}$，对每个固定的$k$均成立.

注意$\sqrt{z}$的两个分支不一样.

2-20 求$(\sqrt{z})'\big|_{z=-1}$的值.

解　$\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\mathrm{Ln}z+\mathrm{i}2k\pi)}$有 2 个单值分支，对应$k=0$和$k=1$.

故　$(\sqrt{z})'_{z=-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\Big|_{z=-1}=\dfrac{1}{\pm 2\mathrm{i}}=\pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}.$

即对应$k=0$的分支$\sqrt{z}\big|_{z=-1}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\mathrm{i}\pi)}=\mathrm{i}$

这时$\sqrt{z}'\Big|_{z=-1}=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{\mathrm{i}}{2}.$

而对应$k=1$的分支$\sqrt{z}'\Big|_{z=-1}=\dfrac{1}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{2}.$

第 3 章　复变函数的积分

3.1　复变函数积分、柯西积分定理与解析函数的导数

复变函数的积分本质上是二元函数的第二类线积分.

积分时用到$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2}\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2}\theta\mathrm{d}\theta=\pi;\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$

~~3-1~~ 设 C 是 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$， θ 从 $-\pi$ 到 π 的一周，则 $\int_C \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z=$（　　　）.

（A）-π　　（B）π　（C）$-\pi\mathrm{i}$　（D）$\pi\mathrm{i}$

解　$x=\cos\theta, y=\sin\theta, \mathrm{Re}(z)=\cos\theta, \mathrm{d}z=(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$

故　$\int_C \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z=\int_{\pi}^{-\pi}-\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi\mathrm{i}.$　　　选（D）.

~~3-2~~ $\oint_{|z|=1}\dfrac{\sin\pi z}{2z+1}\mathrm{d}z=$（　　　）.

（A）$2\pi\mathrm{i}$　（B）$-2\pi\mathrm{i}$　（C）$\pi\mathrm{i}$　（D）$-\pi\mathrm{i}$

解　原式$=2\pi\mathrm{i}\left.\dfrac{\sin\pi z}{2}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-\pi\mathrm{i}.$　　　选（D）.

这些题均可用留数做，在这里是为了熟悉柯西积分公式及复合闭路定理.

~~3-3~~ $\oint_{|z|=1}\dfrac{\cos 2\pi z}{8z^2+6z+1}\mathrm{d}z=$（　　）.

（A）0　　（B）$\pi\mathrm{i}$　（C）$-\pi\mathrm{i}$　（D）$2\pi\mathrm{i}$

解　$8z^2+6z+1=(4z+1)(2z+1)$，在 $|z|<1$ 内被积函数有 2 个奇点：$z=-\dfrac{1}{2}$ 和 $z=-\dfrac{1}{4}$，故

原式$=\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}\left.\dfrac{\cos 2\pi z}{2z+1}\right|_{z=-\frac{1}{4}}+\pi\mathrm{i}\left.\dfrac{\cos 2\pi z}{4z+1}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=\pi i.$　　　选（B）.

~~3-5~~ $\oint\limits_{|x+1|=\frac{2}{3}}\dfrac{\sin\pi z}{2z^2+3z+1}\mathrm{d}z=$（　　　）.

（A）0　（B）$\pi\mathrm{i}$　（C）$2\pi\mathrm{i}$　（D）$-2\pi\mathrm{i}$

解　$z=-1$ 和 $z=-\dfrac{1}{2}$ 都是奇点，故

原式$=2\pi\mathrm{i}\left.\dfrac{\sin\pi z}{2z+1}\right|_{z=-1}+\pi\mathrm{i}\left.\dfrac{\sin\pi z}{z+1}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=2\pi\mathrm{i}.$　　　选（C）.

高阶导数公式.

~~3-6~~ $\oint_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^3}\mathrm{d}z=$（　　）.

（A）$\dfrac{\pi}{3}\mathrm{i}$　（B）$\dfrac{2\pi}{3}\mathrm{i}$　（C）$\pi\mathrm{i}$　（D）$2\pi\mathrm{i}$

解　原式$=\pi\mathrm{i}(\mathrm{e}^z)''\big|_{z=0}=\pi\mathrm{i}.$　　　选（C）.

用二阶导数算.

~~3-7~~ $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^2+3z+2)^3} =$（　　）.

（A）0　（B）$4\pi i$　（C）$6\pi i$　（D）$12\pi i$

解　原式 $= \pi i \left(\frac{1}{(z+2)^3} \right)'' \Bigg|_{z=-1} = 12\pi i.$　　　　选（D）.

二阶导数公式及 $\bar{z}^3 = \frac{1}{z^3} |z|^3 = \frac{8}{z^3}.$

~~3-8~~ 设 $f(z) = \int_{|\xi|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{4}\xi}}{\zeta - z} d\zeta$，试求 $f(i), f(-i)$ 及 $f(3-4i)$ 的值.

解　$f(i) = 2\pi i e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\pi(-1+i),\ f(-i) = 2\pi i e^{-\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}\pi(1+i).$

又　$|3-4i| = 5 > 2$，故 $f(3-4i) = 0.$

$|\zeta| = \rho$**,故** $\zeta = \rho e^{i\theta}$ **将** $|d\zeta|$ **化为** $d\zeta$ **再做积分.**

3-9　计算 $I = \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - a|^2}$，其中 $|a| \neq \rho, \rho > 0$ 是常数.

解　设 $\zeta = \rho e^{i\theta}$，则 $|d\zeta| = \rho d\theta = \rho \frac{\rho i e^{i\theta} d\theta}{\rho i e^{i\theta}} = -\rho i \frac{d\zeta}{\zeta}.$

于是　$$I = \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{-i\rho d\zeta}{\zeta(\zeta-a)(\bar{\zeta}-\bar{a})} = -i\rho \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{d\zeta}{(\zeta-a)(\rho^2 - \bar{a}\zeta)}$$

$$= i\rho \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{d\zeta}{(\zeta-a)(\bar{a}\zeta - \rho^2)}$$

若　$|a| < \rho$ 时，原式 $= -2\pi\rho \frac{1}{|a|^2 - \rho^2} = \frac{2\pi\rho}{\rho^2 - |a|^2}.$

当　$|a| > \rho$ 时，原式 $= -2\pi\rho \frac{1}{\bar{a}(\zeta - a)} \Bigg|_{\zeta = \frac{\rho^2}{a}} = \frac{2\pi\rho}{|a|^2 - \rho^2}.$

3.2　解析函数与调和函数

~~3-11~~ 如果 $f(z) = u + iv$ 是解析函数，试证：

~~(1)~~ $\overline{i\overline{f(z)}}$ 也是解析函数.

（2）$-u$ 是 v 的共轭调和函数.

证　（1）$\overline{i\overline{f(z)}} = -if(z)$ 是解析函数.

（2）$-\mathrm{i}f(z)=v-\mathrm{i}u$ 为解析函数，故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

注意解析函数与调和函数的关系.

~~3-12 求~~ $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ 的共轭调和函数.

解 $u=x^3-y^3+3xy(x-y)$，故 $u_{xx}=6x+6y, u_{yy}=-6y-6x$，故 u 是调和函数，以下求 v.

由 C-R 条件得

$$v_x=3y^2-3x^2+6xy;\quad v_y=3x^2+6xy-3y^2$$

可用以下三种方程求 v.

1.（凑全微分法）

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v&=(3y^2-3x^2+6xy)\mathrm{d}x+(3x^2+6xy-3y^2)\mathrm{d}y\\&=3y^2\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y^2+3x^2\mathrm{d}y+3y\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}(x^3+y^3)\\&=2(3xy^2+3x^2y-x^3-y^3)\end{aligned}$$

故 $v=3xy(x+y)-x^3-y^3+C.$

2.（偏积分法）

$$v=\int v_x\mathrm{d}x+f(y)=3y^2x-x^3+3x^2y+g(y)$$

$$v_y=6xy+3x^2+g'(y)=3x^2+6xy-3y^2$$

故 $g'(y)=-3y^2, g(y)=-y^3+C$

因此 $v=3y^2x+3x^2y-x^3-y^3+C.$

3.（线积分法）

由于 $v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y$ 是全微分表示式，故

$$v=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3y^2-3x^2+6xy\mathrm{d}x)+(3x^2+6xy-3y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$\begin{aligned}&=\int_0^x-3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2+6xy-3y^2)\mathrm{d}y+C\\&=-x^3+3x^2y+3xy^2-y^3+C.\end{aligned}$$

~~3-13 设~~ $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是上半平面的解析函数，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $f(z)$.

解 $u_x=\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$u_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，求 u，用偏积分法：

$$u=\int\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+g(y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)$$

$u_y=\dfrac{y}{x^2+y^2}+g'(y)$，故 $g'(y)=0, g(y)=C$

故 $f(z)=\ln r+\mathrm{i}\arctan\dfrac{y}{x}+C$ （C 是实常数）

或 $f(z)=\ln z+C$，其中 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$， C 是实常数.

这里有两个待定的函数.

首先 $u=x^2+\alpha(y)$ 要是调和函数，而 v 是 u 的共轭调和函数.

~~3-14~~ 若 $f(z)=x^2+\alpha(y)+iv(x,y)$ 解析且 $f(0)=f'(0)=0$，求实函数 $a(y),v(x,y)$ 及 $f(z)$.

解 $u=x^2+\alpha(y)$，调和，故

$$u_{yy}=-u_{xx}=-2=\alpha''(y)$$

$$\alpha(y)=-y^2+C_1y+C_2$$

由 C-R 条件，$u_x=2x=v_y$

而 $$-u_y=2y+C_1=v_x$$

因此 $$v=2xy+C_1x+C_3$$

由 $f(0)=0$ 得 $C_2=C_3=0$

由 $f'(0)=0$ 得 $C_1=0$，

故，$\alpha(y)=-y^2$； $v(x,y)=2xy$； $f(z)=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=z^2$.

~~3-15 设~~ $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 解析，且 $u_x+v_x=0$，求 $f(z)$.

解 $f'(z)=u_x-\mathrm{i}v_y=u_x(1-\mathrm{i})$

故解析函数 $\dfrac{f'(z)}{1-\mathrm{i}}$ 的虚部为 0，从而有

$u_x = C_1$ 是实常数，于是 $f'(z) = C_1(1-\mathrm{i})$

由此　　　　$f(z) = C_1(1-\mathrm{i})z + C$　　（C 是复常数）

通过做这些题，熟悉解析函数与调和函数之间的关系.

3-16　设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在 $|z|\le 1$ 上连续，且在 $|z|=1$ 上 $|f(z)-z|\le|z|$，证明 $|f'(\frac{1}{2})|\le 8$.

证　$|f'(\frac{1}{2})| = \left|\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\dfrac{f(z)}{(z-\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}z\right|$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z)|}{|z-\frac{1}{2}|^2}\mathrm{d}\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z)-z|+|z|}{(|z|-\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2}{\frac{1}{4}}\mathrm{d}\theta = 8. \qquad (|z|=1)$$

用关于解析函数的柯西积分公式来证明调和函数的平均值公式，使证明过程简单.

3-17　如果 u 是区域 D 内的调和函数，C 为 D 内以 z_0 为圆心的正向圆周：$|z-z_0|=r$，它的内部全含于 D，试证：

（1）$u(x_0,y_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$ 即调和函数在任一点 (x_0,y_0) 的值，等于它在圆周 C 上的平均值.

（2）$u(x_0,y_0) = \dfrac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)r\mathrm{d}y\mathrm{d}r$

证　（1）由柯西公式：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

在 C 上，$z = z_0 + r\mathrm{e}^{i\varphi}, \mathrm{d}z = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$，故

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+r\mathrm{e}^{i\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

由于 $u(x_0,y_0)$ 即 $f(z_0)$ 的实部，故有

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

(2) $u(x_0,y_0) = \dfrac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0}u(x_0,y_0)r\mathrm{d}r$

$$=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi) r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

这个积分实际是$u(x,y)$在圆域：$|z-z_0|\le r_0$上的平均值.

3-18 如果$f(z)$在区域D内解析，C为D内的正向圆周：$|z|=R$，它的内部全含于D，设z为C内一点，证明

$$\int_C \frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}\mathrm{d}\zeta=0$$

证 被积函数为$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-R^2/\overline{z}}$，由于

$\left|\dfrac{R^2}{\overline{z}}\right|=\dfrac{R^2}{|\overline{z}|}>R$，表示$\dfrac{R^2}{\overline{z}}$是圆外一点，故$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-R^2/\overline{z}}$在圆内处处解析，因此

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-R^2}\mathrm{d}\zeta=\oint_C \frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}\mathrm{d}\zeta=0$$

至此，得出$f(z)$的一种积分表示式.

3-19 条件如上题，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{(R^2-z\overline{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}\mathrm{d}\zeta$$

证 由$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

及 $\displaystyle\oint_C \frac{\overline{z}f(\zeta)}{R^2-\zeta\overline{z}}\mathrm{d}\zeta=0$，得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}f(\zeta)}{R^2-\zeta\overline{z}}\right]\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{(R^2-z\overline{z})}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

便是所要证明的结论.

泊松积分公式作为圆内调和函数，在圆上满足已知条件的泊松问题的解即

$\begin{cases}\Delta u=0, x^2+y^2<R^2\\ u|_{x^2+y^2=R^2}=f(x,y)\end{cases}$ $(u(R\cos\theta, R\sin\theta)$**的已知的）的解.**

3-20 证明泊松（Poisson）积分公式：

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(R\cos\theta,R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta$$

这里，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta, u(x,y)$ 是调和函数，这个公式表示：调和函数在圆内（$r<R$）任一点的值，可用它在圆周上的值来确定.

证 设 $v(x,y)$ 是 u 的共轭调和函数，则 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数.由上题的结果知

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(R^2-z\overline{z})}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

令 $z=re^{i\varphi},\zeta=\mathrm{Re}^{\mathrm{i}}$, 则 $\mathrm{d}\zeta=\mathrm{Rie}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$

而 $z\overline{z}=r^2,(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})=(\zeta-z)(R^2-Rre^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}-re^{\mathrm{i}\varphi})(\mathrm{Re}^{-\mathrm{i}\theta}-re^{-\mathrm{i}\varphi})\\
&=\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}[\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}-Rr(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})]\\
&=\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}[\mathrm{R}^2+r^2-2Rr(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)]\\
&=\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta}(R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2)
\end{aligned}$$

故

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(\mathrm{Re}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta$$

取实部即得

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(R\cos\theta,R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

便是所要证明的结论.

第 4 章　级数

4.1　数列极限

4.1　设幂函数 $\alpha^{f(z)}$ 取 $\mathrm{e}^{\alpha\ln f(z)}$ 的分支，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{\mathrm{i}}{n})^n=$（　　）.

（A）不存在　　（B）1　　（C）$\cos1+i\sin1$　　（D）e

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{\mathrm{i}}{n})^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{i}{n})}$

而 $\ln(1+\frac{\mathrm{i}}{n})=\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n^2})+i\arctan\frac{1}{n}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{\mathrm{i}}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n^2})+\lim\limits_{n\to\infty}n\mathrm{i}\arctan\frac{1}{n}=\mathrm{i}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{\mathrm{i}}{n})^n=\mathrm{e}^i=\cos1+i\sin1.$　　选（C）.

$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$ **的充要条件是：** $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$.

~~4-2~~ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+ni}{1-ni}=$（　　）.

（A）$-1+2\mathrm{i}$　　（B）$1+2\mathrm{i}$　　（C）$2+\mathrm{i}$　　（D）∞

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+ni}{1-ni}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\mathrm{i}}{\frac{1}{n}-\mathrm{i}}=-1+2\mathrm{i}.$　　　　选（A）.

~~4-3~~ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{n\pi\mathrm{i}}{2}}$ 的收敛性为（　　）.

（A）通项不趋于 0　（B）通项趋于 0，发散　（C）绝对收敛　（D）条件收敛

解　由 $\mathrm{e}^{\frac{n\pi\mathrm{i}}{2}}=(\mathrm{i})^n$，当 $n=4k+1$ 为 $i(k=0,1,2,\cdots),n=4k+3$ 为 $-i$；$n=4k+2$ 为 $-1,n=4(k+1)$ 为 1，故此级数可分为两个交错级数：

实部为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k}$；虚部为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$，均条件收敛.故此级数条件收敛.　　　　选（D）.

复数项级数收敛的充分必要条件是实部与虚部两个实数项级数皆收敛.

$\sin\dfrac{\alpha}{n}\sim\dfrac{\alpha}{n},\alpha$ **是不为 0 的复常数.**

4-4　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{\mathrm{i}}{n}}{n}$ 为（　　）.

（A）通项不趋于 0　（B）条件收敛　（C）通项趋于 0 但发散　（D）绝对收敛

解　由 $\left|\sin\dfrac{\mathrm{i}}{n}\right|=\left|\mathrm{ish}\dfrac{1}{n}\right|=\mathrm{sh}\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，故级数绝对收敛.　　　　选（D）.

$\sin n$ **有界，但** $\sin(ni)$ **无界且** $\sin(ni)$ **与** e^n **是同阶的无穷大量** $(n\to\infty)$.

~~4-5~~ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{\sin(in)}$ 收敛性为（　　）.

（A）绝对收敛　（B）通项不趋于 0　（C）通项趋于 0 但发散　（D）条件收敛

解　$\sin(in)=\mathrm{ish}n=\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{2}$，故此级数绝对收敛.　　　　选（A）.

4.2　幂级数

检比法与检根法仍旧是复数项级数敛散性的重要判别法，因为它们判断的级数若收敛必为绝对收敛，故应用时取 $|z_n|$，（z_n 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$ 的通项）. 这样，在应用时与实数项级数无本质区别.

~~4-6~~ 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{in^2}z^n$ 的收敛半径为（　　）.

（A）0　（B）1　（C）2　（D）∞

解　由检比法 $|\mathrm{e}^{in^2}z^n|^{\frac{1}{n}}=|z|$，故收敛半径为 1.　　　　选（B）.

~~4-7 幂级数~~ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3+4\mathrm{i})^n z^{2n}$ ~~的收敛半径为~~（　　）.

（A）5　（B）$\dfrac{1}{5}$　（C）$\sqrt{5}$　（D）$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(3-4\mathrm{i})^n z^{2n}|}=5\cdot|z|^2$，故收敛半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. 选（D）.

~~4-8~~ 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ 的收敛半径 R 及和函数为（ ）.

（A）$\dfrac{1}{(1-z)^2}, R=1$ （B）$\dfrac{1}{1-z}, R=1$ （C）$\dfrac{z}{(1-z)^2}, R=1$ （D）$\dfrac{1}{z-1}, R=1$

解 由 $\dfrac{z}{1-z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ 得

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n=\dfrac{z}{(1-z)^2}, |z|<1.$ 选（C）

~~4-9 设 $f(z)=\ln(1+z^2)$~~，则 $f^{(4)}(0)=$（ ）.

（A）0 （B）-6 （C）12 （D）-12

解 $\ln(1+z^2)=z^2-\dfrac{z^4}{2}+\cdots$ 因此，$\dfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)=-\dfrac{1}{2}$，$f^{(4)}(0)=-12.$ 选（D）.

4-10 设 $\int_0^z \dfrac{\ln(1-\zeta^2)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta=\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n z^n$，则 $(C_3, C_5)=$（ ）.

（A）$(-1,-\dfrac{1}{2})$ （B）$(-\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{15})$ （C）$(-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{10})$ （D）$(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{15})$

解 $\dfrac{\ln(1-\zeta^2)}{\zeta^2}=\dfrac{1}{\zeta^2}(\zeta^2+\dfrac{\zeta^4}{2}+\dfrac{\zeta^6}{3}+\cdots)$

故 $\int_0^z \dfrac{\ln(1-\zeta^2)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta=-z-\dfrac{1}{6}z^3-\dfrac{z^5}{15}-\cdots.$ 选（B）.

4.3 泰勒级数

~~4-11~~ $\sin\dfrac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 点的泰勒展开式中，z^3 项的系数 C_3 和级数的收敛半径 R 是 $(C_3,R)=$（ ）.

(A)(0,1) (B)$(\dfrac{5\cos 1-6\sin 1}{6},1)$ (C)$(\dfrac{5\cos 1-6\sin 1}{6},\infty)$ (D)$(\dfrac{-\sin 1+2\cos 1}{2},1)$

解 $(\sin\dfrac{1}{1-z})'=\dfrac{1}{(1-z)^2}\cos\dfrac{1}{1-z}$

$$(\sin\frac{1}{1-z})''=\frac{2}{(1-z)^3}\cos\frac{1}{1-z}-\frac{1}{(1-z)^4}\sin\frac{1}{1-z}$$

$$(\sin\frac{1}{1-z})'''=\frac{6}{(1-z)^4}\cos\frac{1}{1-z}-\frac{2}{(1-z)^5}\sin\frac{1}{1-z}-\frac{4}{(1-z)^5}\sin\frac{1}{1-z}-\frac{1}{(1-z)^6}\cos\frac{1}{1-z}$$

$\sin\dfrac{1}{1-z}$ 只在 $|z|<1$ 内解析，故 $R=1.$ 选（B）.

~~4-12~~ 已知 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$，证明 $f(z)$ 解析，并求 $f^{(10)}(0)$.

解 由 $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},|z|<+\infty.$

故 $$\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n},0<|z|<+\infty$$

于是 $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n},|z|<+\infty$$

因此，$f(z)$ 解析，且 $\dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}=\dfrac{(-1)^5}{11!}$，由此 $f^{(10)}(0)=-\dfrac{1}{11}$.

~~4-13~~ 求 $\cos z-\mathrm{i}\sin z$ 在 $z=-1$ 处的泰勒展开式.

解 $\cos z-\mathrm{i}\sin z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}-\mathrm{i}(z+1)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-\mathrm{i})^n}{n!}(z+1)^n$，$|z+1|<+\infty.$

~~4-14 求~~ $f(z)=\displaystyle\int_{|\zeta|=1}\frac{\sin^2\zeta}{(z-\zeta)^2}\mathrm{d}\zeta$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式.

解 $f(z)=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}\sin^2 z, & |z|<1\\ 0, & |z|>1\end{cases}.$

故 $f(z)=\pi i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(2n-1)!}z^{2n-1},|z|<1.$

4-15 设 $\displaystyle\oint_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{d}\zeta}{(z\zeta-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，求 $a_n(n=0,1,2,\cdots).$

解 $\displaystyle\oint_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{d}\zeta}{(z\zeta-z)^2}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(1-z)^2}=2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1},|z|<1.$

$a_n=2(n+1)\pi\mathrm{i}\quad(n=0,1,2,\cdots).$

4.4 罗伦级数

4-16 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n\mathrm{e}^{-|n|}z^n$ 的收敛区域为（ ）.

(A) $|z|<\mathrm{e}$ (B) $|z|>\mathrm{e}$ (C) $\mathrm{e}^{-1}<|z|<\mathrm{e}$ (D) $\varnothing$

解 在 $\sum\limits_{-\infty}^{-1}n\mathrm{e}^{-|n|}z^n$ 中，令 $m=-n$，

得 $$-\sum_{m=1}^{+\infty}m\mathrm{e}^{-m}z^{-m}=-\sum_{m=1}^{\infty}m(\mathrm{e}^{-1}z^{-1})^m$$

故当 $\mathrm{e}^{-1}|z|^{-1}<1$ 也即 $|z|>\mathrm{e}^{-1}$ 时收敛.

而 $$\sum_{n=0}^{\infty}n\mathrm{e}^{-n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(\mathrm{e}^{-1}z)^n$$

当 $\mathrm{e}^{-1}|z|<1$，即 $|z|<\mathrm{e}$ 时收敛.

故 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}n\mathrm{e}^{-}|n|z^n$ 的收敛区域为 $\mathrm{e}^{-1}<|z|<\mathrm{e}.$ 选（C）.

~~4-17~~ 设 $\dfrac{1}{z(z-1)}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-1)^n,|z-1|>1$，则 $a_{-3}=$（ ）.

（A）1　　（B）-1　　（C）0　　（D）-2

解 $\dfrac{1}{z(z-1)}=\dfrac{1}{(z-1)^2(1+\dfrac{1}{z-1})}=\dfrac{1}{(z-1)^2}\cdot(1-\dfrac{1}{z-1}+\cdots)$

故 $a_{-3}=-1.$　　选（B）.

4-18 ~~设~~ $\cancel{\dfrac{1}{1+z^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z^n,(|z|>1)}$，则 $C_0=$（　　）.

（A）1　　（B）0　　（C）-1　　（D）2

解 $\dfrac{1}{1+z^2}=\dfrac{1/z^2}{1+\dfrac{1}{z^2}}=\dfrac{1}{z^2}(1-\dfrac{1}{z^2}+\cdots),C_0=0.$　　选（B）.

4-19 ~~设~~ $\cancel{\dfrac{z^2}{e^{\frac{1}{z}}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n,|z|>0}$，~~则~~ $\cancel{a_{-7}=}$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{7!}$　　（B）$-\dfrac{1}{7!}$　　（C）$\dfrac{1}{9!}$　　（D）$-\dfrac{1}{9!}$

解 $z^2e^{-\frac{1}{z}}=z^2(1-\dfrac{1}{z}+\cdots+\dfrac{1}{9!}\dfrac{1}{z^9}+\cdots),a_{-7}=-\dfrac{1}{9!}.$

4-20 ~~设~~ $\cancel{e^{\frac{z}{z-1}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-1)^n}$，~~则~~ $\cancel{a_{-3}=}$（　　）.

（A）$\dfrac{-1}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{3!}$　　（C）$\dfrac{e}{3!}$　　（D）$-\dfrac{e}{3!}$

解 $e^{\frac{z}{z-1}}=e^{(1+\frac{1}{z-1})}=e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$

$$=e(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots)a_{-3}=\frac{e}{3!}.$$　　选（C）.

4-21 若 $\dfrac{1}{1-\cos z}=\sum_{n=-8}^{+\infty}a_n z^n,0<|z|<\dfrac{\pi}{2}$，则 $a_2=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{2\times5!}$　　（B）$\dfrac{1}{5!}$　　（C）$\dfrac{1}{3!}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

解 由$1-\cos z=\dfrac{z^2}{2}-\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}-\cdots$

故 $$\frac{1}{1-\cos z}=\frac{2}{z^2}\left(\frac{1}{1-\frac{z^2}{2\times3!}+\frac{z^4}{3\times5!}-\cdots}\right)$$

$$\frac{1}{1-\frac{z^2}{2\times3!}+\frac{z^4}{3\times5!}+\cdots}=1+(\frac{z^2}{2\times3!}-\frac{z^4}{3\times5!}-\cdots)+(\frac{z^2}{2\times3!}-\frac{z^4}{3\times5!}-\cdots)^2+\cdots$$

$$=1+\frac{z^2}{2\times3!}+(\frac{1}{4\times(3!)^2}-\frac{1}{3\times5!})z^4+\cdots$$

故 $\dfrac{1}{1-\cos z}=\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}z^2+\cdots;a_2=\dfrac{1}{5!}.$　　选（B）.

4-22 $\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n$，那么 $a_n=0(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的充要条件是（　　）.

（A）$0<|z|<1$　　（B）$|z|>0$　　（C）$|z|<1$　　（D）$|z|>1$

解　若$|z|<1$，则$\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}=\cos^3\zeta(1-\zeta^2 z^2+\cdots)$，这时$\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}\mathrm{d}\zeta\equiv 0$，故$a_n\equiv 0$.

若$|z|>1$，则$\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}=\dfrac{1}{\zeta z}\cos^3\zeta(1-\dfrac{1}{\zeta z}+\cdots)$，故$F(z)=\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\cos^3\zeta}{1+\zeta z}\mathrm{d}z\neq 0, a_n$不会全为0. $|z|=1$时，$\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\cos^3\zeta}{1-\zeta z}\mathrm{d}\zeta$无意义.　　选（C）.

4-23　证明：若$f(z)$在$|z|>0$解析，且$|f(z)|\leq|z|^{-\frac{3}{2}},|z|>0$，则$f(z)=0$.

证　设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z_n$　　$C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z$

$$|C_n|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}S}{R^{n+1}\cdot R^{3/2}}=\frac{1}{R^{n+3/2}}$$

当　$n>-2$　　$|C_n|\leq\lim_{R\to\infty}\dfrac{1}{R^{n/3/2}}=0$

当　$n\leq-2$　　$|C_n|\leq\lim_{R\to 0}\dfrac{1}{R^{n/3/2}}=0$

故　$C_n=0, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 即$f(z)=0$.

~~4-24　在$0<|z|$~~<1的区域内，将函数$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$展开为罗伦级数.

解　$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z(z-1)}+\frac{1}{z(z-2)}$$
$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2z(1-z/2)}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n-1}})z^{n-1}.$$

~~4-25~~　求函数$\dfrac{1}{z(z-1)^2}$在$|z-1|>1$上的罗伦展开式.

解　$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+(z-1)}$$
$$=\frac{1}{(1-z)^3}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+3}}.$$

4-26　求函数$\dfrac{1}{z(z-1)^2}$在$|z|>1$上的罗伦展开式.

解　$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{(1-\dfrac{1}{z})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+2}}.$$

4-27　求函数$\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$在$|z-i|>2$上的罗伦展开式.

解　$$\frac{1}{(1+z^2)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{(2i+z-i)^2}=\frac{1}{(z-i)^4}\cdot\frac{1}{(1+\dfrac{4i}{z-i})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(-2i)^{n-1}}{(z-i)^{n+3}}.$$

~~4-28~~　求$\oint_{|\zeta|=1}\dfrac{\sin\zeta}{1-\zeta z^2}\mathrm{d}\zeta$在$|z|>1$的罗伦展开式.

解 $\oint_{|\zeta|=1}\frac{\sin\zeta}{1-\zeta z^2}\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{z^2}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\sin\zeta}{\zeta-\frac{1}{z^2}}\mathrm{d}\zeta=-2\pi\mathrm{i}\frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z^2}$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{4(n+1)}},|z|>1.$$

4-29 设 $\oint_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{(z\zeta-\zeta)^2}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n}$，求 a_n.

解 $\oint_{|\zeta|=1}\frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^2(z-1)^2}\mathrm{d}\zeta=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{z^2}\frac{1}{(1-\frac{1}{z})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi\mathrm{i}}{z^{n+1}}$

因此 $a_0=a_1=0,a_n=2(n-1)\pi\mathrm{i}\quad(n=2,3,\cdots).$

4-30 设 k 是实数，且 $|k|<1$，证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-j}{1-2k\cos\theta-k^2}$$

证 1 在 $|z|>k$ 中由

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{k}{z}}=\frac{1}{z}(1+\frac{k}{z}+\frac{k^2}{z^2}+\cdots)$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 得 $\frac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta}$

由实部与实部，虚部与虚部相等得

$$\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta$$

$$\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta$$

证 2 由 $\sum_{n=0}^{\infty}k^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sum_{n=0}^{\infty}(k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{1}{1-k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-k\cos\theta+\mathrm{i}k\sin\theta)}{1-2k\cos\theta+k^2}=\frac{\cos\theta-k+\mathrm{i}\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

第 5 章 留数及其应用

5.1 孤立奇点

奇点的分类是计算留数的基础.

~~5-1 函数~~ $\frac{\sin z}{z^2}$ 在 $z=0$ 点是（ ）.

（A）本性奇点 （B）可去奇点 （C）一级极点 （D）二级极点

解 $\dfrac{\sin z}{z^2}=\dfrac{1}{z^2}(z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{3!}+\cdots$ 故 $z=0$ 是它的一级极点.　选（C）.

~~5-2~~ $z=0$ 是函数 $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的（　　）.

（A）本性奇点　（B）可去奇点　（C）一级极点　（D）非孤立奇点

解 取 $z=\dfrac{1}{k\pi}$,k 为任意非零整数，皆有 $\sin\dfrac{1}{z}=0$，因而在 $z=0$ 的任一邻域皆有此函数 $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的无限个奇点.　选（D）.

5-3　$z=\mathrm{i}$ 是函数 $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+\mathrm{e}^{\pi z})}$ 的（　　）.

（A）本性奇点　（B）二级极点　（C）一级极点　（D）三级极点

解 由 $1+z^2=(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$ 及 $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=0$ 但 $(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})'\big|_{z=1}=\pi\mathrm{e}^{\pi z}\big|_{z=\mathrm{i}}=-\pi\neq 0$，故 i 是此函数的二极点.

~~5-4~~　$z=1$ 是函数 $\dfrac{z}{\mathrm{e}^{1-z}}$ 的（　　）.

（A）本性奇点　（B）一级极点　（C）可去奇点　（D）二级极点

解 $\dfrac{z}{\mathrm{e}^{1-z}}=\mathrm{e}^{(-1+\frac{z}{1-z})}=\mathrm{e}^{-1}(1+\dfrac{1}{1-z)}+\dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{(1-z)^2}+\cdots)$ 故 $z=1$ 是此函数的本性奇点.

选（A）

5-5 若 $f(z)$ 在 z_0 点的罗伦级数有无限项，但不出现 $z-z_0$ 的正整数幂的项.则 z_0 点的函数 $\varphi(z)=1/f(z)$ 的（　　）.

（A）本性奇点　（B）极点　（C）解析的点　（D）可去奇点

解 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\dfrac{1}{(z-z_0)^n}$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.从而 $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0, z_0$ 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点.　选（D）.

用罗伦级数展开计算留数是基本方法之一.

5.2　留数与留数定理

~~5-6~~ $\mathrm{Res}(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\sin\dfrac{1}{z},0)=$（　　）.

（A）0　（B）1　（C）2　（D）$\dfrac{1}{2}$

解 $(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\sin\dfrac{1}{z})=(1+\dfrac{1}{z}+\cdots)(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!z^3}+\cdots)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\cdots$　选（B）.

当 $z\to 0$ 时，$\ln(1+z)\sim\sin z\sim\mathrm{e}^z-1\sim z$，这些，均与实函数是一致的.

~~5-9~~　~~$\mathrm{Res}(z^2\tan\dfrac{1}{z},0)=$~~（　　）.

（A）$\dfrac{1}{3}$　（B）$-\dfrac{1}{3}$　（C）$\dfrac{1}{6}$　（D）$-\dfrac{1}{6}$

解 $\tan\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3z^3}+\cdots$

因此， $\mathrm{Res}(z^2\tan\frac{1}{z},0)=-\frac{1}{3}.$ 选（B）.

$\cos\frac{1}{z}$ **是偶函数** $a_{-1}=0.$

~~5-10 $\mathrm{Res}(\cos\frac{1}{z},0)=$（ ）~~.

（A）0 （B）1 （C）$\frac{1}{2}$ （D）$-\frac{1}{2}$

解 $\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2z^2}+\cdots$，故 $\mathrm{Res}(\cos\frac{1}{z},0)=0.$ 选（A）.

~~5-11 $\mathrm{Res}(z\cos\frac{1}{z},0)=$（~~ ）.

（A）0 （B）1 （C）$\frac{1}{2}$ （D）$-\frac{1}{2}$

解 $z\cos\frac{1}{z}=z-\frac{1}{2z}+\cdots$, 故 $\mathrm{Res}(z\cos\frac{1}{z},0)=-\frac{1}{2}.$ 选（D）.

在 $z=1$ 处的留数，也可令 $z-1=t$.

~~5-12~~ $\mathrm{Res}(e^{\frac{z}{z-1}},1)=$（ ）.

（A）0 （B）1 （C）e （D）e^{-1}

解 $e^{\frac{z}{z-1}}=e^{(1+\frac{z}{z-1})}=e(1+\frac{1}{z-1}+\cdots)$，故 $C_{-1}=e.$ 选（C）.

~~5-13~~ $\mathrm{Res}(z-1)e^{1/z^2},0)=$（ ）.

（A）1 （B）-1 （C）$1/2$ （D）$-\frac{1}{2}$

解 $(z-1)e^{1/z^2}=(z-1)(1+\frac{1}{z^2}+\cdots)=-1+z+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\cdots$ 选（A）.

故 $C_{-1}=1.$

要注意求 $z=\frac{\pi}{2}$ 点的留数，要展成 $z-\frac{\pi}{2}$ 的罗伦级数.

5-14 $\mathrm{Res}(\sin\frac{\pi z}{2z-\pi},\frac{\pi}{2})=$（ ）.

（A）0 （B）$\pi/4$ （C）$-\frac{\pi}{2}$ （D）$\frac{\pi}{2}$

解 $\mathrm{Res}\frac{\pi z}{2z-\pi}=\sin\frac{\pi z-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}}{2(z-\pi/2)}=\sin[\frac{\pi}{2}+\frac{\frac{\pi^2}{4}}{z-\pi/2}]=\cos\frac{\frac{\pi^2}{4}}{z-\pi/2}$

其罗伦级数不含 $\frac{1}{z-\pi/2}$ 的项，故 $C_{-1}=0$. 选（A）.

也可令 $z-1=t$ 来作.

~~5-15 $\mathrm{Res}(ze^{\frac{1}{1-z}},1)=$（ ）~~.

（A）1 （B）-1 （C）$\frac{1}{2}$ （C）$-\frac{1}{2}$

解 $ze^{\frac{1}{1-z}}=(z-1)e^{\frac{1}{1-z}}+e^{\frac{1}{1-z}}$

$$=(z-1)(1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2(1-z)^2}+\cdots)+1+\frac{1}{1-z}+\cdots$$

$$=(z-1)-\frac{1}{2(z-1)}+\cdots.$$ 选（D）.

5-16 $\mathrm{Res}(\sin\frac{z}{z+1},1)=$（ ）.

（A）$\cos 1$ （B）$-\cos 1$ （C）$\sin 1$ （D）$-\sin 1$

解 $\sin\frac{z}{z+1}=\sin(1-\frac{1}{z+1})=\sin 1\cos\frac{1}{z+1}-\cos 1\sin\frac{1}{z+1}$, 而 $\sin\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)^3}+\cdots$, $\cos\frac{1}{z+1}$ 的罗伦级数中不出现 $\frac{1}{z+1}$ 的项，故 $C_{-1}=-\cos 1.$ 选（B）.

对本性奇点求留数一般都用罗伦展开，试总结以上各题求留数方法.

5-17 $\mathrm{Res}(\sin z\sin\frac{1}{z},0)=$（ ）.

（A）0 （B）1 （C）e （D）e^{-1}

解 $\sin z\sin\frac{1}{z}=(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots)(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\cdots)$，不出现 $\frac{1}{z}$ 的项. 选（A）.

5-18 设 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^3}g(z)$，而 $g(z)$ 在 z_0 点解析，$g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则 $m=$（ ）.

（A）1 （B）2 （C）3 （D）0

解 由 z_0 是 $g(z)$ 的一级零点，故 z_0 是 $\frac{1}{(z-z_0)^3}$ 的二级极点. 选（B）.

本问题是要读者灵活运用求极点处留数的方法，不要硬套公式.

5-19 设 z_0 是 $f(z)$ 的三级极点，则 $\mathrm{Res}(f(z),z_0)=$（ ）.

（A）$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{3!}[(z-z_0)^3 f(z)]'''$ （B）$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{2!}[(z-z_0)^2 f(z)]''$

（C）$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{3!}[(z-z_0)^4 f(z)]'''$ （D）$\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)^3 f(z)]'''$

解 设 $f(z)=\frac{C_{-3}}{(z-z_0)^3}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\cdots$

则 $(z-z_0)^4 f(z)=C_{-3}(z-z_0)+C_{-2}(z-z_0)^2+C_{-1}(z-z_0)^3+\cdots$

故 $[(z-z_0)^4 f(z)]'''=3!C_{-1}+4!C_0(z-z_0)+\cdots$

$C_{-1}=\frac{1}{3!}\lim\limits_{z\to z_0}[(z-z_0)^4 f(z)]'''.$ 选（C）.

先分清极点的级数，再求留数.

5-20 $\mathrm{Res}(\frac{1-\cos z}{z-\sin z},0)=$（ ）.

（A）0 （B）3 （C）1/3 （D）1

解 $1-\cos z$ 是 $z=0$ 的二级零点；$z-\sin z$ 是三级零点，因此，$z=0$ 是 $\frac{1-\cos z}{z-\sin z}$ 的一级极点.

$$\mathrm{Res}(\frac{1-\cos z}{z-\sin z},0)=\lim_{z\to 0}\frac{z(1-\cos z)}{z-\sin z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{z-\sin z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{3z^2}{1-\cos z}=3.$$ 选（B）.

$z=0$ **是** $\dfrac{\cos z}{1-e^z}$ **的一级极点.**

~~5-21~~ ~~$\mathrm{Res}(\dfrac{\cos z}{1-e^z},0)=$（ ）~~.

（A）0　（B）1　（C）-1　（D）2

解　$\mathrm{Res}(\dfrac{\cos z}{1-e^z},0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\cos z}{1-e^z}=-1.$　　选（C）.

$z=3\pi$ **是** $\dfrac{3\pi-z}{\sin^2 z}$ **的一级极点.**

5-22　$\mathrm{Res}(\dfrac{3\pi-z}{\sin^2 z},3\pi)=$（ ）.

（A）1　（B）-1　（C）3π　（D）$-\dfrac{1}{3\pi}$

解　$\lim\limits_{z\to 3\pi}(z-3\pi)\dfrac{3\pi-z}{\sin^2 z}=-1$　　选（B）.

5-23　$\mathrm{Res}(\dfrac{2z-3\pi}{\cos^2 z},\dfrac{3}{2}\pi)=$（ ）.

（A）2　（B）-2　（C）4　（D）-4

解　$\lim\limits_{z\to 3\pi/2}(z-\dfrac{3}{2}\pi)\dfrac{2(z-\dfrac{3}{2}\pi)}{\cos^2 z}=2.$　　选（A）.

$z=i$ **是** $\dfrac{\mathrm{sh}\pi z}{(z^2+1)^2}$ **的一级极点.**

5-24　$(\mathrm{Res}\dfrac{\mathrm{sh}\pi z}{(z^2+1)^2},i)=$（ ）.

（A）$\pi/4$　（B）$-\pi/4$　（C）$\pi/2$　（D）$-\pi/2$

解　$\mathrm{sh}\pi z=\dfrac{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}{2}=-\dfrac{e^{\pi(z-i)}-e^{-\pi(z-i)}}{2}=-\mathrm{sh}\pi(z-i)$.故

$\mathrm{Re}\,s(\dfrac{\mathrm{sh}\pi z}{(z^2+1)^2},i)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{-\mathrm{sh}\pi(z-i)}{(z+i)^2(z-i)}=\dfrac{-\pi}{(2i)^2}=\dfrac{\pi}{4}.$　　选（A）.

由 $\tan z$ **与** z **是等价无穷小知** $\lim\limits_{z\to 0}z\cot z=1.$

5-25　$\mathrm{Res}(\tan z+\cot z,0)=$（ ）.

（A）0　（B）1　（C）-1　（D）2

解　$\tan z$ 在 0 点解析，而

$\lim\limits_{z\to 0}z\cot z=1$，故 $C_{-1}=1.$　　选（B）.

$z=0$ **时，** $\ln(1+z)\sim z$ **是一级零点.**

~~5-26~~ ~~$\mathrm{Re}\,s(\dfrac{1+e^z}{\ln(1+z)},0)=$（ ）~~.

（A）0　（B）1　（C）-1　（D）2

解　$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z(1+e^z)}{\ln(1+z)}=2.$　　选（D）.

$1-\cos z^2\sim\dfrac{1}{2}z^4$ **是** $z=0$ **的 4 级零点.**

~~5-27~~ ~~Res~~$(\frac{z^3}{1-\cos z^2},0)=$（　　）.

（A）1　（B）-1　（C）2　（D）0

解　$\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^4}{1-\cos z^2}=2.$　　　　选（C）.

$\sin(w-\pi)$ 在 $w=\pi$ 是一级零点.

5-28　$\mathrm{Res}(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}},\frac{1}{\pi})=$（　　）.

（A）π^2　（B）$1/\pi^2$　（C）1　（D）-1

解　令 $\frac{1}{z}=w$，则

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}=\frac{1}{\sin w}=\frac{1}{-\sin(w-\pi)}$$

而 $\lim\limits_{z\to 1/\pi}(z-\frac{1}{\pi})/\sin\frac{1}{z}=\lim\limits_{w\to\pi}\frac{1}{w\pi}\cdot\frac{\pi-w}{-\sin(w-\pi)}=\frac{1}{\pi^2}$　　　　选（B）.

$1-e^z$ 在 $z\to 0$ 时是一级零点.

5-29　$\mathrm{Res}(\frac{1}{1-e^z}+\cot z,0)=$（　　）.

（A）0　（B）1　（C）-1　（D）2

解　$\lim\limits_{z\to 0}(\frac{z}{1-e^z})=-1$，而 $\lim\limits_{z\to 0}z\cot z=1$，故留数为 0.　　　　选（A）.

直接用 $z=0$ 是 $f(z)\cdot\varphi(z)$ 的一级极点也可得到相同结果.

~~5-30~~ 函数 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 解析，$f(z)$ 以 $z=0$ 为一级极点，且留数为 1，则 $\mathrm{Res}(f(z)\varphi(z),0)=$（　　）.

（A）$\varphi(0)$　（B）$\varphi'(0)$　（C）$2\pi\varphi(0)$　（D）$2\pi\varphi'(0)$

解　记 $\varphi(z)=a_0+a_1z+\cdots$

$$f(z)=\frac{1}{z}+C_0+C_1z+\cdots$$

则　$f(z)\cdot\varphi(z)=\frac{a_0}{z}+\cdots$　　故

$\mathrm{Res}(f(z)\varphi(z),0)=a_0=\varphi(0).$　　　　选（A）.

注意 $-i$ 是函数的二级极点.

~~5-31~~ $\mathrm{Re}\,s(\frac{z^2+1}{(z+i)^3},-i)=$（　　）.

(A)0　(B)1　(C)-1　(D)2

解　$\lim\limits_{z\to i}[(z-i)]'=1.$　　　　选(B).

这里 $f(z)=f(-z)$ 时也称为偶函数，则偶函数在 $z=0$ 的留数为 0.

~~5-32~~ ~~Re s~~$(\frac{\sin z}{z^3},0)=$ ~~（　　）~~.

（A）0　（B）1　（C）$1/3$　（D）$1/6$

解　$\frac{\sin z}{z^2}$ 是偶函数，罗伦级数中不出现 $\frac{1}{z}$ 的项，故 $C_{-1}=0$.　　　　选（A）.

若令 $z-k\pi=w$ 则 $\cot^3 z=\cot^3 w$ 在 $w=0$ 是三级极点，求留数可得相同结果.

5-33　$\operatorname{Re}s(\cot^3 z, k\pi)=$（　　），（$k$ 为一整数）.

（A）$(-1)^{k-1}$　（B）-1　（C）$(-1)^k 2$　（D）2

解　$$\cot^3 z=\frac{\cos^3 z}{\sin^3 z}=\frac{(-1)^k\cos^3(z-k\pi)}{(-1)^k\sin^3(z-k\pi)}$$

$$=\frac{\cos^3(z-k\pi)}{\sin^3(z-k\pi)}=\frac{\cos 3(z-k\pi)+3\cos(z-k\pi)}{3\sin(z-k\pi)-\sin 3(z-k\pi)}$$

$$=\frac{(1-\frac{9}{2}(z-k\pi)^2+\cdots)+3(1-\frac{1}{2}(z-k\pi)^2+\cdots)}{3[(3-k\pi)-\frac{1}{3!}(3-k\pi)^3+\cdots]-3[(z-k\pi)-\frac{3^3}{3!}(z-k\pi)^3+\cdots]}$$

$$=\frac{4-6(z-k\pi)^2+\cdots}{4(z-k\pi)^3(1-\frac{1}{2}z^2+\cdots)}=\frac{1}{(z-k\pi)^3}-\frac{1}{z-k\pi}+\cdots$$

$C_{-1}=-1.$　　　　选（B）.

注意 $z=\mathrm{i}$ 是函数的二级极点.

~~5-34~~　$\operatorname{Re}s(\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z^2+1)},\mathrm{i})=($　　$).$

(A)$\frac{\mathrm{i}}{4}$　(B)$-\frac{\mathrm{i}}{4}$　(C)$\frac{1}{4}$　(D)$\frac{-1}{4}$

解　$\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}(\frac{1}{z+\mathrm{i}})'=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\frac{(-1)}{(z+\mathrm{i})^2}=\frac{1}{4}.$　　　　选（C）.

偶函数在 0 点的留数为 0.

~~5-35~~　$\operatorname{Res}(\frac{1}{z\sin z},0)=$（　　）.

（A）0　（B）1　（C）-1　（D）$1/6$

解　$\frac{1}{z\sin z}$ 的罗伦展式中不出现 $\frac{1}{z}$ 的项.　　　　选（A）.

~~5-36~~　$\operatorname{Res}(\frac{z^3}{(z+1)^3},-1)=$（　　）.

(A) -1　(B) -2　(C) -3　(D) -6

解　$\lim\limits_{z\to-1}(z^3)''=-6$，故 $\operatorname{Res}(\frac{z^3}{(z+1)^3},-1)=-3$.　　　　选（C）.

虽然本题函数在 $z=0$ 是三级极点，但这样作更简便.

解 2 用罗伦展开法作更简便.

~~5-37~~　$\operatorname{Res}(\frac{z-\sin z}{z^6},0)=$（　　）.

（A）0　（B）$\frac{1}{5!}$　（C）$-\frac{1}{5!}$　（D）$\frac{-1}{3!}$

解 1　$\lim\limits_{z\to 0}(\frac{z-\sin z}{z^6}\cdot z^6)^{(5)}=-1$

故　$\operatorname{Re}s(\frac{z-\sin z}{z^6},0)=-\frac{1}{5}.$

解 2 $z-\sin z=\frac{1}{3!}z^3-\frac{1}{5!}z^5+\cdots$

故 $\frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!}\frac{1}{z}+\cdots.$ 选（C）.

$z=0$ **是 3 级极点但这样作更好.**

~~5-38~~ $\mathrm{Res}(\frac{1-e^{-z}}{z^4},0)=$（ ）.

（A）$\frac{1}{3!}$ （B）$-\frac{1}{3!}$ （C）$\frac{1}{4!}$ （D）$-\frac{1}{4!}$

解 $\lim\limits_{z\to 0}(1-e^{-z})'''=1$，故 $\mathrm{Res}(\frac{1-e^{-z}}{z^4},0)=\frac{1}{3!}.$ 选（A）.

~~5-39~~ $\mathrm{Res}(\frac{1}{ze^z\sin z},0)=$（ ）.

（A）0 （B）-1 （C）1 （D）2

解 $\lim\limits_{z\to 0}(\frac{ze^{-z}}{\sin z})'=\lim\limits_{z\to 0}[\frac{e^{-z}(\sin z-z\cos z)}{\sin^2 z}-\frac{ze^{-z}}{\sin z}]=-1.$ 选（B）.

用罗伦展式作更简单.

5-40 $\mathrm{Res}(\frac{1}{z\sin^2 z},0)=$（ ）.

（A）1 （B）-1 （C）$\frac{1}{3}$ （D）$-\frac{1}{3}$

解 $$\frac{1}{z\sin^2 z}=\frac{2}{z(1-\cos^2 z)}=\frac{2}{z(2z^2-\frac{2}{3}z^4+\cdots)}$$

$$=\frac{1}{z^3(1-\frac{1}{3}z^2+\cdots)}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3z}+\cdots$$

$C_{-1}=\frac{1}{3}.$ 选（C）.

~~5-41 求证，如~~果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级零点，那么 z_0 是 $f'(z_0)$ 的 $m-1$ 级零点.

证 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$

故 $$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)$$
$$=(z-z_0)^{m-1}[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)]$$
$$=(z-z_0)^{m-1}\psi(z)$$

$\psi(z)$ 在 z_0 解析，且 $\psi(z_0)=m\psi(z_0)\neq 0$，故 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

洛必达法则可用于复变函数的极限.

~~5-42~~ 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，则

$\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$（或两端为$\infty$）.

证 设 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),g(z)=(z-z_0)^n\psi(z)\varphi(z_0)\neq 0,\psi(z_0)\neq 0$ 均解析.

若 $m<n$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\infty$

及 $m>n,\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=0$ 是明显的，故只要证明 $m=n$ 的情况.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

而 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{m\varphi(z_0)}{m\psi(z_0)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$.

注意 $z=k\pi$ 和 $k\pi\mathrm{i}$ 皆是函数的孤立奇点.

5-43 判定 $\frac{1}{\mathrm{sh}z}-\frac{1}{\sin z}$ 孤立奇点的类型，并求相应奇点处的留数.

解 （1）$z=0$ 是一个孤立奇点.

而 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z-\mathrm{sh}z}{\sin z\mathrm{sh}z}=0$，故这是可去的奇点从而 $\mathrm{Res}(\frac{1}{\mathrm{sh}z}-\frac{1}{\sin z},0)=0$.

（2）$z\neq 0,\mathrm{sh}z=0z=k\pi\mathrm{i},k=\pm1,\pm2,\cdots),\sin z=0,z=k\pi,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$

因此，$z=\pm k\pi$ 和 $\pm k\pi\mathrm{i}$ 均是此函数的一级极点，且

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{\mathrm{sh}z}-\frac{1}{\sin z},k\pi\mathrm{i})=\lim_{z\to k\pi\mathrm{i}}(z-k\pi\mathrm{i})\frac{1}{\mathrm{sh}z}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch}(k\pi\mathrm{i})}=\frac{1}{\cos(k\pi)}=(-1)^k,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{\mathrm{sh}z}-\frac{1}{\sin z},k\pi)=\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)\frac{-1}{\sin z}$$

$$=\frac{-1}{\cos k\pi}=(-1)^{k+1},(k=\pm1,\pm2,\cdots).$$

$f'(z)$ 中无 $(z-z_0)^{-1}$ 项.

~~5-44~~ 证明：若 $f(z)$ 以 z_0 为一级极点，则 $\mathrm{Re}\,s(f'(z),z_0)=0$.

证 记 $f(z)=\frac{C_{-1}}{(z-z_0)}+\varphi(z),\varphi(z)$ 在 z_0 是解析函数，则

$$f'(z)=\frac{-C_{-1}}{(z-z_0)^2}+\varphi'(z).$$

即 $f'(z)$ 在 z_0 点的罗伦级数中，不含 $\frac{1}{z-z_0}$ 的项，故 $\mathrm{Res}(f'(z),z_0)=0$.

5-45 函数 $\cos z-\sin z$ 在 $z=\infty$ 的奇点类型与留数是什么？

解 由于 $\cos z-\sin z$ 在 $R<z<+\infty$（R 为任意正实数）解析，故且故 $\cos z-\sin z$ 是 ∞ 的本性奇点，而

$$\mathrm{Res}(f(z),\infty)=-\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$$

故 $\mathrm{Res}(\cos z-\sin z,\infty)=0$.

注意求在 ∞ 点的留数的公式.

5-46 求函数 $\frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}$ 在 ∞ 点的留数.

解 1 由 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$

而 $f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{1-z^2}=(1+z^2+z^4+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-3}}{3!}+\cdots)$

故$\frac{1}{z}$的项系数为 $\quad 1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots=\mathrm{sh}1$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{sh}1.$$

解 2 在有限点$\frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}$有$z=\pm1$是一级极点

$$\mathrm{Res}(\frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1},\pm1)=\pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pm1}.$$

故 $\quad \mathrm{Res}(\frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1},\infty)=-(\frac{1}{2}\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{sh}1.$

也可用$\lim\limits_{z\to0}zf(z)=\lim\limits_{z\to0}f(z)/(1/z)=1$，故$z=0$是$f(z)$的一级极点.

~~5-47 已知~~ $f(z)$在$0<|z|<1$内解析，且$\lim\limits_{z\to0}zf(z)=1$，证明$z=0$是$f(z)$的一级极点且$\mathrm{Res}(f(z),0)=1.$

证 由$f(z)$在$0<|z|<1$内解析，知

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_nz^n,\quad 0<|z|<1$$

而由$zf(z)\to1$知上述展开的负幂次项有且仅有$\frac{1}{z}$的一项，故$z=0$是一级奇点.

且 $$\mathrm{Res}(f(z),0)=\lim_{z\to0}zf(z)=1.$$

注意本题与对数留数的联系.

5-48 已知$f(z)$以$z=0$为n级零点，证明$\mathrm{Res}(f'(z)/f(z),0)=n.$

证 记$f(z)=z^n\varphi(z),\varphi(z)$在 0 点解析，且$\varphi(0)\neq0$，于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{nz^{n-1}\varphi(z)+z^n\varphi'(z)}{z^n\varphi(z)}=\frac{n}{z}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

由$\varphi(0)\neq0$，知$\varphi'(z)/\varphi(z)$在 0 点解析，故

$$\mathrm{Res}(f'(z)/f(z),0)=n.$$

应将这些与对数留数相联系（5-48 题、5-49 题）.

5-49 已知$z=0$是函数$f(z)$的n级极点，证明$\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)},0]=-n.$

证 设$f(z)=z^{-n}\varphi(z),\varphi(z)$在$z=0$解析，且$\varphi(0)\neq0$，于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-nz^{-n-1}\varphi(z)+z^{-n}\varphi'(z)}{z^{-n}\varphi(z)}=\frac{-n}{z}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

$\varphi'(z)/\varphi(z)$在$z=0$解析，故

$$\mathrm{Res}(f'(z)/f(z),0)=-n.$$

注意在$|z|<2$内有n个奇点. 即$z^n+1=(z-w_0)(z-w_1)\cdots(z-w_{n-1})$而求$\lim\limits_{z\to w_k}(z-w_k)\frac{z^{n-1}}{z^n+1}$用洛必达法则作更简单.

5-50 $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^{n-1}}{z^n+1}\mathrm{d}z=$（ ），（$n$是正整数）.

（A）0 （B）$2\pi\mathrm{i}$ （C）$2n\pi\mathrm{i}$ (D)$\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}$

解 记$w_0,w_1,\cdots,w_{n-1}$是$z^n+1=0$的n个根，则这n个点皆是被积函数在$|z|<2$内的一级极点，故

$$\mathrm{Res}(\frac{z^{n-1}}{z^n+1},w_k)=\lim_{z\to w_k}(z-w_k)\frac{z^{n-1}}{z^n+1}=\frac{1}{n},(k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

故 $\oint_{|z|=2}\frac{z^{n-1}}{z^n+1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}=2\pi\mathrm{i}.$ 选（B）.

$\cos z=\sin(\frac{\pi}{2}-z)\sim\frac{\pi}{2}-(z\to\frac{\pi}{2})$, **故** $z=\frac{\pi}{2}$ **是** $\frac{1}{\cos z}$ **的一级极点.**

5-51 $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z\cos z}=$（ ）.

（A）$2\pi\mathrm{i}$ （B）0 （C）$2\pi\mathrm{i}+8\mathrm{i}$ （D）$\cos(2\pi\text{-}8)\mathrm{i}$

解 在$|z|<2$内被积函数有三个奇点：$z=0$是一级极点，$z=\pm\frac{\pi}{2}$也是一级极点.

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z\cos z},0)=1$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z\cos z},\frac{\pi}{2})=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z-\frac{\pi}{2}}{z\cos z}=\frac{-2}{\pi}$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z\cos z},-\frac{\pi}{2})=\frac{-2}{\pi}$$

留数和为$1-\frac{4}{\pi}$，积分为$2\pi\mathrm{i}(1-\frac{4}{\pi})$. 选（D）.

$\tan z=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-a)}$ **而** $\tan(\frac{\pi}{2}-z)\sim\frac{\pi}{2}-z$ **故** $z=\frac{\pi}{2}$ **是** $\tan z$ **的一级极点.**

5-52 $\oint_{|z|=3}\tan z\mathrm{d}z=$（ ）.

（A）$4\pi\mathrm{i}$ （B）$-4\pi\mathrm{i}$ （C）$8\pi\mathrm{i}$ （D）$-8\pi\mathrm{i}$

解 在$|z|<3$内$\tan z$有$\pm\frac{\pi}{2}$ 2 个一级极点.

$$\mathrm{Res}(\tan z,\frac{\pi}{2})=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z(z-\frac{\pi}{2})}{\cos z}=-1$$

$$\mathrm{Res}(\tan z,-\frac{\pi}{2})=\lim_{z\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin z(z+\frac{\pi}{2})}{\cos z}=-1$$

留数和为-2，积分为$-4\pi\mathrm{i}$. 选（B）.

5-53 $\oint_{|z|=1}z\mathrm{e}^{\frac{1-z}{z}}\mathrm{d}z=$（ ）.

（A）$\pi\mathrm{e}^{-1}\mathrm{i}$ （B）$2\pi\mathrm{i}$ （C）$2\pi\mathrm{e}^{-1}\mathrm{i}$ （D）$-2\pi\mathrm{i}$

解 $z\mathrm{e}^{\frac{1-z}{z}}=\mathrm{e}^{-1}z\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}^{-1}z(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots)$

$C_{-1}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$，故积分值为$\pi\mathrm{e}^{-1}\mathrm{i}$. 选（A）.

z^5-1 **有 5 个根，均分布在单位圆上.** $w_k^5=1$, **故** $\frac{1}{w_k^4}=w_k$.

5-54 $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^5-1}=$（　　）.

（A）0　（B）$2\pi\mathrm{i}$　（C）$5\sqrt{2}\pi\mathrm{i}$　（D）$\frac{\sqrt{2}}{5}\pi\mathrm{i}$

解　设 w_1,w_2,w_3,w_4 和 w_5 是 $z^5-1=0$ 的 5 个不同的根，则在 $|z|<2$ 内被积函数有 5 个一级极点即 $z=w_k(k=1,2,3,4)$，因此，留数和为 $\sum_{k=1}^{5}\frac{w_k}{5}=0$，从而积分为 0.　选（A）.

注意 $|z|=1$ **时** $\overline{z}=\frac{1}{z}$ **，因此** $z=0$ **是** $z\cos\overline{z}$ **的本性奇点.**

5-55 $\oint_{|z|=1} z\cos\overline{z}\mathrm{d}z=$（　　）.

（A）0　（B）2π　（C）$-\pi\mathrm{i}$　（D）$2\pi\mathrm{i}$

解　$z\cos\overline{z}=z\cos\frac{1}{z}=z(1-\frac{1}{2z^2}+\cdots)$

$$\mathrm{Res}(z\cos\frac{1}{z},0)=-\frac{1}{2}$$

积分值为 $2\pi\mathrm{i}(-\frac{1}{2})-\pi\mathrm{i}$.　选（C）.

5.3　对数定理在计算实积分中的应用

5-21 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi}{2\text{-}\cos\varphi}=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z$，则 $f(z)=$（　　）.

（A）$\frac{\mathrm{i}(z^4+1)}{z^2(z^2-4z+1)}$　（B）$\frac{-(z^4+1)}{z^2(z^2+1-4z)}$

（C）$\frac{\mathrm{i}(2z+1)}{(z^2+1-4z)}$　（D）$\frac{z^4+1}{(z^2-1-4z)^2}$

解　$\frac{\cos 2\varphi}{2-\cos\varphi}=\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}}{4-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}=\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\varphi}+1}{4^{\mathrm{i}\varphi}(4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}-1)}$

令 $z=\mathrm{e}^{i\varphi}$，

则 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{2\text{-}\cos\varphi}=\oint_{|z|=1}\frac{z^4+1}{\mathrm{i}z^2(4z-z^2-1)}\mathrm{d}z$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}(z^4+1)}{z^2(z^2-4z+1)}\mathrm{d}z$$　选（A）.

5-22　计算积分 $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z-\sin z}$.

解　由 $z-\sin=\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots$，得

（1）$z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三级零点；（2）在 $0<|z|<1$ 内无零点：

$$|z-\sin z|=|z|^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{2^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots\right)$$

$$\geq|z|^3\left[\frac{1}{3!}-\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\right)\right]$$

$$>|z|^3\left[\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}\left(1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}\cdots\right)\right]>0$$

而 $\dfrac{1}{z-\sin z}=\dfrac{1}{z^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\cdots\right)}=\dfrac{3!}{z^3}+\dfrac{3}{10z}+\cdots$

故 $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z-\sin z},0\right)=\dfrac{3}{10}.$

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z-\sin z}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{5}\pi\mathrm{i}.$$

5-23 计算 $\oint_{|z|=1} z^n\cos\dfrac{1}{z}\mathrm{d}z, n$ 是正整数.

解 在 $|z|<1$ 内，$z=0$ 是 $z^n\cos\dfrac{1}{z}$ 的唯一的本性奇点，且

$$z^n\cos\frac{1}{z}=z^n\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!z^{2k}}+\cdots\right)\qquad n=2k$$

故 $\operatorname{Re}s\left(z^n\cos\dfrac{1}{z},0\right)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k\dfrac{1}{(2k)!}, & n=2k-1\end{cases}$

于是 $\oint_{|z|=1} z^n\cos\dfrac{1}{z}\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{(2k)!}, & n=2k-1\end{cases},(k=0,1,2,\cdots).$

5-24 求 $\oint_{|z|=5}\dfrac{z\mathrm{d}z}{\sin z(1-\cos z)}$ 的值.

解 $z=0$ 是被积函数的二级极点，由于其罗伦级数中无 $z^{2m+1}(m=-1,0,1,2,\cdots)$ 的项，故

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{\sin z(1-\cos z)},0\right)=0$$

在 $|z|<5$ 中，尚有 $z=\pm\pi$ 两个一级极点.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{\sin z(1-\cos z)},\pm\pi\right)=\lim_{z\to\pm\pi}\frac{(z\mp\pi)z}{\sin(z\mp\pi)(1-\cos z)}=\frac{\pm\pi}{-2}.$$

故奇点处留数之和为 0，所求积分为 0.

5-25 计算 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+2\mathrm{i}\sin\theta}.$

解 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $2\mathrm{i}\sin\theta=z-z^{-1},\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$

原积分 $=\oint_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^2+z-1)}$

若 $z^2+z-1=0$，则有 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 两个零点，仅有 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 在 $|z|<1$ 内，

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2+z-1},\frac{\sqrt{5}-1}{2})=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

于是 $$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+2\mathrm{i}\sin\theta}=\frac{2\pi}{5}\sqrt{5}.$$

5-26　计算 $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta}$.

解　令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},3\cos\theta=\frac{3(z+z^{-1})}{2}$

原积分 $=\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(3z^2+10z+3)}$

在 $|z|<1$ 内仅 $z=-\frac{1}{3}$ 一个一级极点.

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{3z^2+10z+3},-\frac{1}{3})=\frac{1}{8}$$

故 $$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta}=\frac{1}{2}\pi.$$

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}.\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta=iz\mathrm{d}\theta\ \ d\theta=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}.$$

5-27　计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2(x^2+1)}$.

解　记 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2(x^2+1)}$

$$=\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}(\frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+1)},\mathrm{i})\ +\mathrm{Res}(\frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+1)},2\mathrm{i})$$

$$=\pi\mathrm{i}(-\frac{\mathrm{i}}{9\times2}+\frac{22}{9\times4^3}\mathrm{i})=\frac{5\pi}{288}.$$

5-28　计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+6x+10)^3}$.

解　原式 $=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\frac{1}{(z^2+6z+10)^3},\mathrm{i}-3)$

$$=\pi\mathrm{i}[\frac{1}{(z+3+\mathrm{i})^3}]''\Big|_{z=\mathrm{i}-3}=\pi\mathrm{i}\frac{12}{2^5\mathrm{i}^5}=\frac{3}{8}\pi.$$

5-29　计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+4}\mathrm{d}x$.

解　原式 $=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2xi}}{x^2+4}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\frac{\mathrm{e}^{2zi}}{z^2+4},2\mathrm{i})=\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-4}}{4\mathrm{i}}=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-4}.$

5-30　计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x/2}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$.

解　原式 $=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\mathrm{i}}}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(\frac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\mathrm{i}}}{(z^2+4)^2},2\mathrm{i})$

$$=\pi\mathrm{i}[\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{2}\mathrm{i}}}{(z+2\mathrm{i})^2}]'_{z=2\mathrm{i}}=\frac{\pi}{16\mathrm{e}}.$$

5.4 *　对数留数与辐角原理

5-31　叙述函数 $f(z)$ 的对数留数的概念及其与 $f(z)$ 的零点与极点的关系.

解　设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上解析，且在 C 上 $f(z)\neq 0$，则称积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 为 $f(z)$ 关于曲线 C 的对数留数，很明显它是 $f(z)$ 的对数函数在 C 所围区域内部的留数的代数和，关于 $f(z)$ 的对数留数与 $f(z)$ 在 C 所围区域内部的空点与极点的关系可用下面定理来表述.

定理：设在简单闭曲线 C 上解析且不为零的函数 $f(z)$ 在 C 所围区域内有 N 个零点，和 P 个极点（除这些极点外处处解析），在计算零点与极点的个数时，m 级的零点或极点均算作 m 个（重）零点与极点.则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N-P$$

5-32 叙述辐角原理与路西（Rouche）定理.

解　如果 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 及其所围区域内解析，且在 C 上 $f(z)\neq 0$，那末，$f(z)$ 在 C 内零点的个数，等于 $\frac{1}{2\pi}$ 乘以当 z 沿 C 正向绕行一周时 $f(z)$ 辐角的改变量.

路西定理：设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 上和 C 内解析，且在 C 上满足 $|f(z)|>|g(z)|$，那么在 C 内 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 的零点个数相同.

5-33　利用对数留数计算以下各题：

（1）$\oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2-1}dz$　（2）$\oint_{|z|=3} \tan z dz$　（3）$\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)}dz$

解　（1）记 $f(z)=z^2-1, f'(z)=2z, f(z)$ 在 $|z|<3$ 内有 2 个零点，故

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3} \frac{2z}{z^2-1}dz = 2, \oint_{|z|=3} \frac{z}{z^2-1}dz = 4\pi i$$

（2）$(z)=\cos z, f'(z)=-\sin z, \cos z$ 在 $|z|<3$ 内有两个零点：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3} -\tan z dz = 2$$

$$\oint_{|z|=3} \tan z dz = -4\pi i$$

（3）$\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}, f(z)=z, f'(z)=1; g(z)=z+1, g'(z)=1$，而在 $|z|<3$ 中 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均是一个零点，故

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z(z+1)} = 0.$$

5-34　证明 $z^7+5z^5-z^2+z+1=0$ 在单位圆内有 5 个零点.

证　令 $f(z)=5z^5, g(z)=z^7-z^2+z+1$

则在 $|z|=1$ 上，

$$|f(z)|=|5z^5|=5$$

而 $|g(z)|=|z^7-z^2+z+1|\leq |z^7|+|z^2|+|z|+1$

$$=4<5=|f(z)|$$

而 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 5 个零点，$g(z)+f(z)$ 在 $|z|<1$ 内也有 5 个零点.

5-35　证明 n 次代数方程

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \ \ (a_n \neq 0)$$

有 n 个根.

证 取 R 是充分大的正实数，及 $f(z)=a_nz^n, g(z)=a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_0$，于是

$$|f(z)|=|a_n|R^n$$

$$|g(z)|=|a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_0|\le|a_{n-1}|R^{n-1}+|a_{n-2}|R^{n-2}+\cdots+|a_0|$$

$$\le R^{n-1}(|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_0|)\ \ (R>1)$$

于是，取 $R>(\dfrac{|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_0|}{|a_n|})$

则在 $|z|=R$ 上，有 $|f(z)|>|g(z)|$

$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 $|z|<R$ 内有相同个数的零点，而 $f(z)$ 有 n 个零点，故 $f(z)+g(z)$ 有 n 个零点，即方程 $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ 有 n 个根.

第 6 章　保角映射

6.1 分式线性映射

导数的几何意义是保角映射的理论基础.

6-1　映射 $w=z^2$ 在 $z=-\mathrm{i}$ 处的伸缩率 k 与旋转角 α 是（　　）.

（A）$k=1,\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　（B）$k=2,\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$　（C）$k=1,\alpha=-\dfrac{\pi}{2}$　（D）$k=2,\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

解　$k=|w'|_{z=-\mathrm{i}}=2,\alpha=\mathrm{Arg}f'(z)|_{z=-\mathrm{i}}=-\dfrac{\pi}{2}.$　　选（B）.

平移变换加伸缩反射得相似图形，相似比即 $|w'|$.

6-2　在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，将 $|z-1|<1$ 映射为（　　）.

（A）右半平面 $u>0$　（B）下半平面 $v<0$　（C）半平面 $u>\dfrac{1}{2}$　（D）$v<-\dfrac{1}{2}$

解 1　$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=u+\mathrm{i}v$

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

而　$|z-1|^2<1$，即 $x^2+y^2<2x$，故

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}>\frac{1}{2}.$$

选（C）.

解 2　$w=\dfrac{1}{z}$ 是分式线性变换，具有保圆性.而 $|z-1|=1$，将 $z=0$ 变到 $w=\infty, z=2$ 变到 $w=\dfrac{1}{2}, z=1+\mathrm{i}$ 变到 $w=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$，故 $w=\dfrac{1}{z}$ 将圆变为直线 $u=\dfrac{1}{2}$，而圆心 $z=1$ 变到 $w=1>\dfrac{1}{2}$，故 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 $|z-1|<1$ 变为半平面 $u>\dfrac{1}{2}$.　　（C）.

6-3　映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 $\mathrm{Im}(z)>1$ 的区域映射为（　　）.

（A）$\mathrm{Im}(w)<1$　（B）$\mathrm{Re}(w)<1$　（C）圆 $(u+\frac{1}{2})^2+v^2<\frac{1}{2}$　（D）$(u+\frac{1}{2})^2+v^2>\frac{1}{2}$

解　由 $w=\frac{1}{z}$ 的保圆性，知 $w=\frac{1}{z}$ 将 $y=1$ 映射为直线或圆，由 $z=\infty$ 映射为 $0, z=1+\mathrm{i}$，映射为 $w=\frac{1-\mathrm{i}}{2}, z=-1+\mathrm{i}$ 映为 $\frac{-1-\mathrm{i}}{2}$ 知，将 $\mathrm{Im}(z)=1$ 映射为 w 平面上的圆：

$$(u+\frac{1}{2})^2+v^2=\frac{1}{2}$$

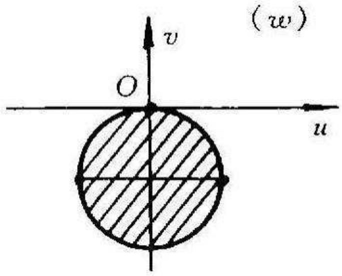

图 6-1

而 $z=2\mathrm{i}$ 映射为 $\frac{1}{2\mathrm{i}}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.故 $w=\frac{1}{z}$ 将 $\mathrm{Im}(z)>1$ 映射为圆内.　　选（C）

6-4　求将圆 $|z|<2$ 映射到右半平面，且 $w(0)=1, \arg w'(0)=\pi/2$ 的分式线性映射.

解　令 $w=\frac{ax+b}{z+b}$，则 $w'=\frac{ab-b}{(z+b)^2}$.由 $\arg w'(0)=\frac{\pi}{2}$，可令 $w'(0)=\frac{ab-b}{b^2}=\frac{a-1}{b}=\mathrm{i}$，得 $a=1+b\mathrm{i}$，

于是
$$w=\frac{(1+b\mathrm{i})z+b}{z+b}.$$

由于圆 $|z|=2$ 应映射为虚轴，故又令 $w(2)=\mathrm{i}$ 得

$2+2b\mathrm{i}+b=2\mathrm{i}+b\mathrm{i}$，解得 $b=\frac{-2(1-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=2\mathrm{i}$

于是　$w=\frac{-2+2\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}$（这时圆上点 $z=-2\mathrm{i}$ 映射为 ∞ 点，故满足所求）.

6-5　求把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射，且满足条件

（1）$w(i)=0, w(-1)=1$；　（2）$w(0)=1, w(i)=\frac{1}{2}$.

解　（1）令 $w=\frac{z-i}{cz+d}$

$w(-1)=\frac{-1-\mathrm{i}}{-c+d}=1$，即 $-1-i=-c+d$

令 $z=\infty$ 时，$w=-\mathrm{i}$，得 $c=\mathrm{i}$，$d=-1$，于是得到一个满足要求的映射

$$w=\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}z-1}$$

（2）由 $w(0)=1$，可令 $w=\frac{az+b}{z+b}$

更令 $w(\infty)=-1$，得 $a=-1$，更由 $w(\mathrm{i})=\frac{1}{2}$ 得 $2(-\mathrm{i}+b)=\mathrm{i}+b$ 故 $b=-3\mathrm{i}$，从而

$$w=\frac{-z-3\mathrm{i}}{z-3\mathrm{i}}$$

要求 $|z|=1$ 时 $|w|=1$，故取 $w=\lambda\frac{2z-1}{z-2}$ 时，$|\lambda|=1, \lambda$ 也可写作 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 只要定 θ 即可.

6-6　求将上半平面映射为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性变换.

解　设 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，将 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射为 $|w|<1$，则它将 $z=-\dfrac{b}{a}$ 映为圆心 $w=0$．而将 $z=-\dfrac{b^{-}}{\overline{a}}$ 映为 ∞，记 $\alpha=-\dfrac{b}{a},\overline{\alpha}=-\dfrac{b^{-}}{\overline{a}}$，而有 $-\dfrac{d}{c}=\overline{\alpha}$，故变换为

$$w=\frac{a}{c}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}.$$

由于 $z=0$ 变到 $|w|=1$ 上一点，即 $|\dfrac{a}{c}|=1$，记 $\dfrac{a}{c}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，

则 $$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\ （其中 \mathrm{Im}(\alpha)>0）.$$

θ 是待定实数.

6-7　求把上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射，并满足条件：

（1） $f(\mathrm{i})=0; f(-1)=1$；　（2） $f(\mathrm{i})=0,\arg f'(\mathrm{i})=0$；　（3） $f(1)=1, f(\mathrm{i})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

解　（1）设 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$，于是 $\dfrac{-1-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=1$ 即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{i}(\theta\dfrac{\pi}{2})$

所求映射为 $$w=\mathrm{i}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

（2）设映射为 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$

$$w'(z)=\frac{2\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

故 $w'(\mathrm{i})=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{\pi}{2})},\theta=\dfrac{\pi}{2}$

所求映射为 $$w=\mathrm{i}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

（3）设 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$

由 $w(1)=1$ 得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\alpha)=1-\overline{\alpha}$$
$$\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{i}-\alpha)=(\mathrm{i}-\overline{\alpha})$$

令 $\alpha=x+iy$，上两式相比得

$$\sqrt{5}(\mathrm{i}-\alpha)(1-\overline{\alpha})=(i-\overline{\alpha})(1-\alpha) \tag{1}$$

取共轭 $$\sqrt{5}\overline{(\mathrm{i}-\alpha)}(1-\overline{\alpha})=\overline{(i-\overline{\alpha})}(1-\overline{\alpha})$$

上两式两边相乘得 $5|-x+(1-y)\mathrm{i}|^2=|-x+(1+y)\mathrm{i}|^2$

解得 $$x^2+y^2=3y-1 \tag{2}$$

将（1）式乘开，比较实部与虚部可得

$$(\sqrt{5}-1)(1-x)=(\sqrt{5}+1)y \tag{3}$$

及 $$(\sqrt{5}-1)(x^2+y^2)=(\sqrt{5}-1)x+(\sqrt{5}+1)y \tag{4}$$

将（2）代入（4），消去 x^2+y^2 后解得： $y=\frac{2}{3}, x=\frac{-\sqrt{5}}{3}$，

于是 $$e^{i\theta}=\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{3}i}{1+\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{2}{3}i}=\frac{(3+\sqrt{5})+2i}{(3+\sqrt{5})-2i}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}(3+\sqrt{5})+4(3+\sqrt{5})i}{6(3+\sqrt{5})}=\frac{1}{3}(\sqrt{5}+2i)=\frac{3}{\sqrt{5}-2i}.$$

所求映射 $$w=\frac{3z+(\sqrt{5}-2i)}{(\sqrt{5}-2i)z-3}.$$

6-8　求将单位圆 $|z|<1$ 映射为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射.

解　设所求的分式线性变换把 $|z|<1$ 内的点 α 映射为 $w=0$，那么，它将 $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ 即与 α 关于 $|z|=1$ 的对称点映射为 ∞，故所求的映射为

$$w=\lambda\frac{z-\alpha}{-z+1/\bar{\alpha}}=\lambda\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{-\bar{\alpha}z+1}$$

设 $z=1$ 对应于 $|w|=1$ 上某点，则有

$1=|\lambda\bar{\alpha}|\left|\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}\right|=|\lambda\bar{\alpha}|$，故 $\lambda\bar{\alpha}=e^{i\theta}$

即 $$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\ (|\alpha|<1,\theta\text{ 是实数})$$

这时 $$w'(z)=e^{i\theta}\frac{1-\alpha\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$$

$w'(\alpha)=e^{i\theta}\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}$ 故 θ 是 $z=\alpha$ 点变换时的旋转角

同样，将 z 平面上 $|z|<1$ 映射为 w 平面上 $|w|>1$ 的分式线性变换是

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\ (|\alpha|>1,\theta\text{ 是实数})$$

6-9　求将右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 映射为单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射.

解 1　设 $w=\lambda\frac{z+b}{z+d}$，它将 $z=-b$ 映为 $w=0$ 点，而将 $z=-d$ 映为 $w=\infty$ 点.记 $a=-b$，则 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$，由对称性，$-d=(-\bar{\alpha})$.因此，$w=\lambda\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$，且 $|w(0)|=|\lambda|\left|\frac{-\alpha}{\bar{\alpha}}\right|=|\lambda|=1$，故 $\lambda=e^{i\theta}$ 得

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}\ (\mathrm{Re}(\alpha)>0,\theta\text{ 是实数}).$$

解 2　由 6-13 题，先作旋转 $\zeta=iz$，将右半平面旋转为上半平面，于是将 $\mathrm{Im}(\zeta)>0$ 变为 $|w|<1$ 的映射是（见 6-13 题）

$$w=e^{i\theta}\frac{\zeta-\beta}{\zeta-\beta}\ (\mathrm{Im}(\beta)>0)$$

故 $$w=e^{i\theta}\frac{iz-\beta}{iz-\beta}=e^{i\theta}\frac{z+i\beta}{z+i\beta}$$

记 $\mathrm{i}\beta=-\alpha$，则 $\mathrm{i}\bar{\beta}=-(\overline{\mathrm{i}\beta})=\bar{\alpha}$ 而 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$

$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$ 与解 1 的结果同.

利用 $w=0$ 与 $w=\infty$ 两点是关于两个同心圆皆对称的点而有保对称性.从而知 z_1,z_2 皆是实数，及对二圆都有对称性，从而解出 z_1 和 z_2.

6-10 求一分式线性映射，把由 $|z|>9$ 与 $|z-8|<16$ 所确定的区域映射为 w 平面上的同心圆环：$|w|<1$ 与 $|w|>r \quad (0<r<1)$.

解 本题关键在设 $w(z_1)=0, w(z_2)=\infty$，由于 0、∞ 关于两个同心圆 $|w|=1$ 与 $|w|=r$ 皆对称；故 z_1 与 z_2 **应同时与** $|z-3|=9$ **及** $|z-8|=16$ **皆对称.从而知** z_1,z_2 **应在此二圆圆心的联线上，即** z_1 与 z_2 **皆是实数，且有**

$$(z_1-3)(z_2-3)=9^2,\quad (z_1-8)(z_2-8)=16^2$$

即
$$z_1z_2-3(z_1+z_2)=9^2-9$$

$$z_1z_2-8(z_1+z_2)=16^2-8^2$$

得 $z_1+z_2=-24, z_1z_2=0$ ，**取** $z_1=0, z_2=-24$ **.**

则
$$w=\lambda\frac{z}{z+24}$$

由于 $z=0$ 在 $|z-3|<9$ 内部，故此映射将 $|z-3|=9$ 映为 $|w|=r$，而将 $|z-8|=16$ 映为 $|w|=1$

即
$$z=8+16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{2z}{z+24}$$

取 $z_1=-24, z_2=0$，则

$$w=\lambda\frac{z+24}{z}$$

这时，由 $z_1=-24$ 在 $|z-8|>16$ 内，而 $w=0$ 在 $|w|<r$ 内，故此映射将 $|z-8|=16$ 映为 $|w|=r$ 而将 $|z-3|=9$ 映为 $|w|=1$，即令 $z=3+9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ 便应有

$$|w|=|\lambda|\left|\frac{27+9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{3+9\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\right|=1.$$

故 $|\lambda|=\dfrac{1}{3}, \lambda=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 所求映射为

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z+24}{3z}.$$

6.2 几个初等函数所构成的映射

按要求一步一步变，注意每一步的要求.

6-11 试将由 $|z|<1$ 及 $|z-1|<1$ 所确定的区域保角地映射为上半平面.

解 如图 6.2，我们采取如下步骤作映射.

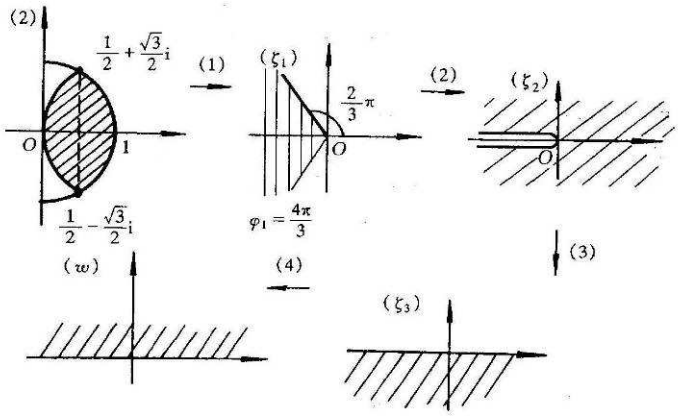

图 6.2

(1)作分式线性映射，使$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$映射于原点，而$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$映射为$w=\infty$点.

即
$$\zeta_1=\frac{2z-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2z-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$$

（2）令$\zeta_2=\zeta_1^3$，则映射成不含ζ_2的负实半轴的全平面，$2\pi\le\varphi_2<4\pi$.

（3）令$\zeta_3=\zeta_2^{1/2}$，则映射为下半平面.

（4）令$w=-\zeta_3$，则映射为上半平面，故此映射为

$$w=-\left(\frac{2z-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2z-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{3/2}$$

6-12 试将由$\mathrm{Im}(z)>1,|z|<2$所确定的区域保角地映射为上半平面.

解 如图 6.3，分以下步骤：

（1）将弓形域映射为角形域$\zeta_1=\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}$

（2）$\zeta_2=\zeta_1^3$映射为下半平面.

（3）$w=-\zeta_2$，即为所求也就是

$$w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$$

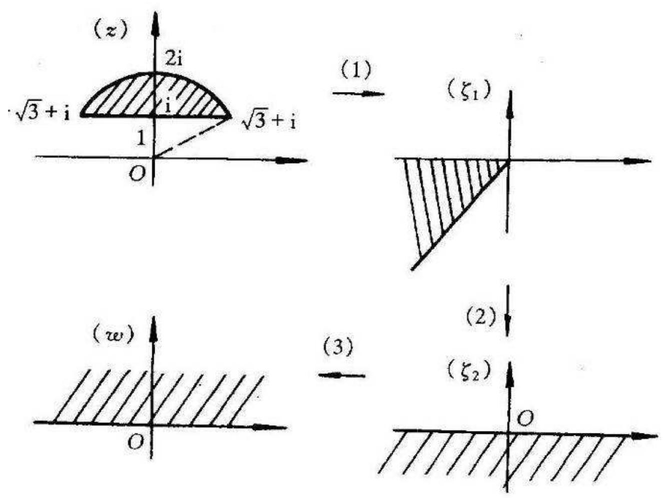

图 6.3

6-13　求把单位圆外部$|z|>1$，且沿虚轴$y>1$有割痕的域映射为上半平面的一个保角映射.

解　分以下步骤：

（1）作分式线性映射，将单位圆外部映射为半平面，并使割痕转到实轴，即$\zeta_1=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$

（2）平方且反射，使割痕到$(-1,0)$,$\zeta_2=-\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2$

（3）平移后开方得$w=(1+\zeta_2)^{\frac{1}{2}}$

即
$$w=\left[1-\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2\right]^{1/2}$$

为所求映射.

6-14　将图 6.4 z 平面中阴影部分所示区域，即由$\mathrm{Re}(z)>-1,|z|>1$所确定区域映射为上半平面.

解　分以下步骤：

（1）作分式线性映射$\zeta_1=\dfrac{z-1}{z+1}$，则所给域映射为$0<\mathrm{Re}(\zeta_1)<1$；

（2）旋转伸长，即令$\zeta_2=\pi\mathrm{i}\zeta_1$，得条形域$0<\mathrm{Im}(\zeta_2)<\pi$；

（3）作指数映射$w=\mathrm{e}^{\varphi\mathrm{i}}$即得上半平面.即映射为

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{z-1}{z+1}}$$

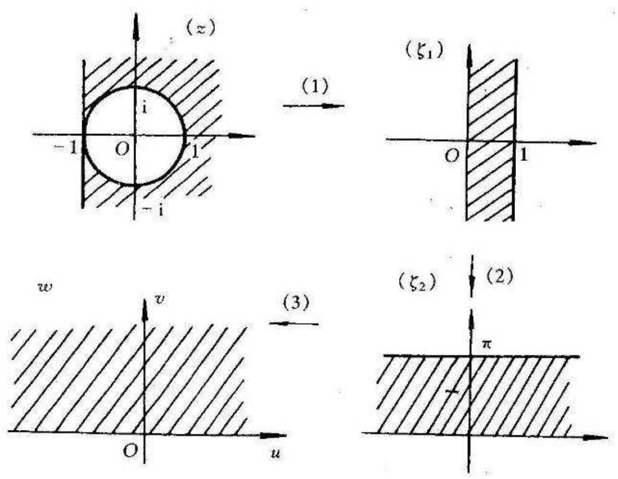

图 6.4

6-15　将如图 6.5 所示的 z 平面区域，即由 $|z|<2, |z-1|>1$ 所确定的区域，映射为上半平面.

解　（1）作分式线性变换：$\zeta_1=\dfrac{z}{z-2}$，将 $|z-1|=1$ 映射为 $\mathrm{Re}(\zeta_1)=0$，而将 $|z|=2$ 映射为 $\mathrm{Re}(\zeta_1)\dfrac{1}{2}$.由此，将已知域映射为带状域.

（2）旋转伸缩：$\zeta_2=2\pi\mathrm{i}\zeta_1$.映射为 $0<\mathrm{Im}(\zeta_2)<\pi$

（3）取指数函数的映射 $w=\mathrm{e}^{\zeta_2}$ 便是本题所求，即 $w=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{z}{z-2}}$.

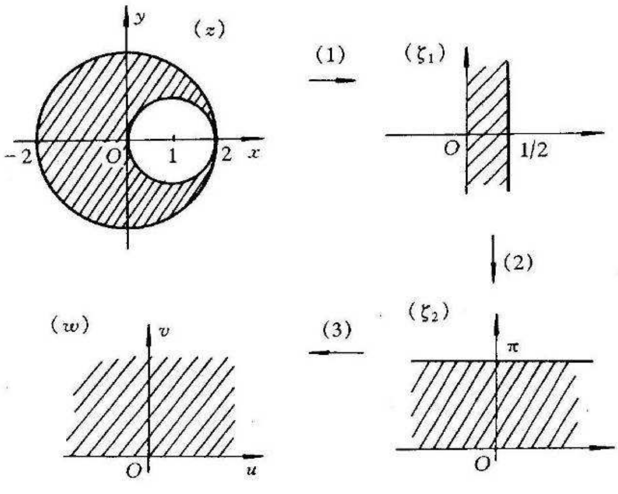

图 6.5

6-16　将沿虚轴有割痕从 $z=0$ 至 $z=2\mathrm{i}$ 的上半平面，保角地映射为上半平面.

解　（1）将上半平面映射为全平面后并平移，使割痕位于实轴的 $\zeta_1=0$ 至 $\zeta_1=4$ 处.

$$\zeta_1=4+z^2.$$

（2）开方使割痕好似被展平在实轴的 $(-2,2)$ 上：$w=\zeta_1^{\frac{1}{2}}$.即　$w=(4+z^2)^{1/2}$.（见图 6.7）

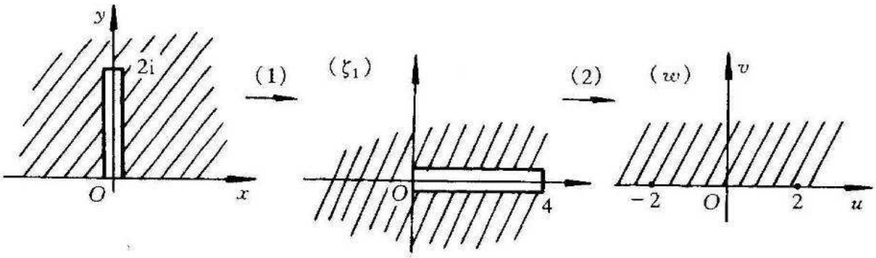

图 6.6

6-17　图 6.7 所示的 z 平面上单位圆 $|z|<1$ 中有割痕：沿实轴从 $z=0$ 至 $z=1$ 的区域，试将其保角地映射为半平面.

解（1）开方将圆映射为半圆，割痕仍在 x 轴上：$\zeta_1 = z^{\frac{1}{2}}$；

（2）作分式线性映射，将半圆映射为 $1/4$ 平面：$\zeta_2 = \dfrac{\zeta_1+1}{-\zeta_1+1}$；

（3）平方 $w=\zeta_2^2$　即 $w=\left(\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2$.

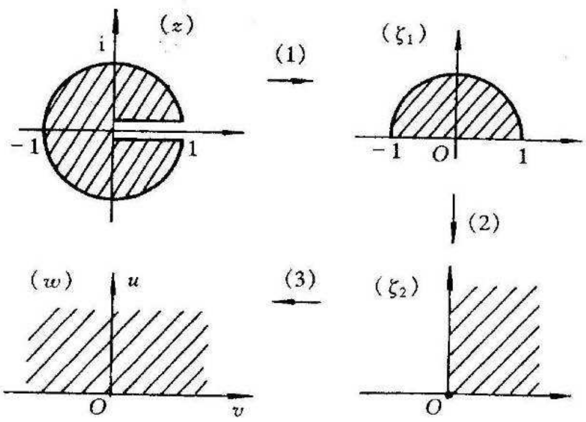

图 6.7

6-18　将图 6.8 所示，由 $\mathrm{Re}(z)>0, 0<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{\pi}{2}$ 确定的 z 平面上的区域，保角映射为上半平面.

解　（1）将其旋转伸缩于第 4 象限：$\zeta_1=-2z$

（2）取指数函数：$\zeta_2 = \mathrm{e}^{\zeta_1}$

将 ζ_1 中的区域映射为半圆域：$|\zeta_2| = \mathrm{e}^{-2x} < 1, \pi < \mathrm{Arg}\zeta_2 < 0$

（3）作分式线性映射：$\zeta_3 = \dfrac{\zeta_2-1}{\zeta_2+1}$

将半圆映射为 $1/4$ 平面.

（4）令 $w=\zeta_3^2$ 即为所求的映射，即

$$\mathrm{e} = \left(\frac{\mathrm{e}^{-2z}-1}{\mathrm{e}^{-2z}+1}\right).$$

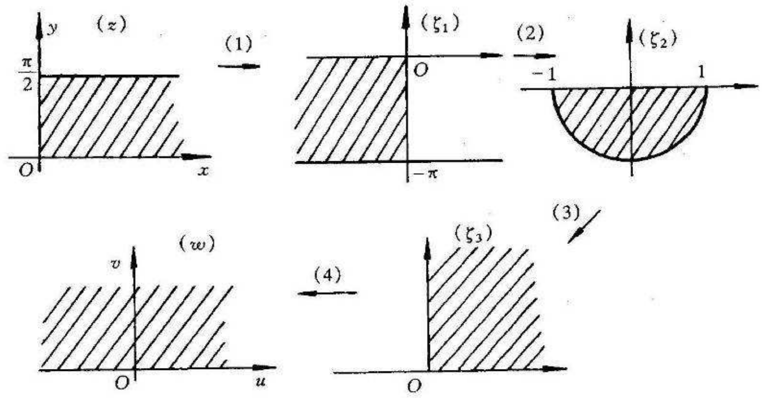

图 6.8

6-19　求把实轴上有割痕：$\frac{1}{2}\le x<1$ 的单位圆 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$ 的一个映射.

解　（1）令 $\zeta_1=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}$，使割痕在 $0\le \mathrm{Re}(\zeta_1)<1$ 上；

（2）作 $\zeta_2=\sqrt{\zeta_1}$；

（3）再作 $\zeta_3=\dfrac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}$，将半圆映射为 (ζ_3) 的 I 象限部分；

（4）作 $\zeta_4=\zeta_3^2$，便将此映射为上半平面；

（5）最后将上半平面映为单位圆：（见图 6.9）

$$w=\frac{\zeta_4-\mathrm{i}}{\zeta_4+\mathrm{i}}$$

经归纳

$$w=\frac{\zeta_4-\mathrm{i}}{\zeta_4+\mathrm{i}}=\frac{\zeta_3^2-\mathrm{i}}{\zeta_3^2+\mathrm{i}}=\frac{[(\zeta_2+1)/(\zeta_2-1)]^2-\mathrm{i}}{[(\zeta_2+1)/(\zeta_2-1)]^2+\mathrm{i}}$$

$$=\frac{(\sqrt{\zeta_1}+1)^2-\mathrm{i}(\sqrt{\zeta_1}-1)^2}{(\sqrt{\zeta_1}+1)^2+\mathrm{i}(\sqrt{\zeta_1}-1)^2}$$

$$=\frac{[\sqrt{(2z-1)/(2-z)}+1]^2-\mathrm{i}[\sqrt{(2z-1)/(2-z)}-1]^2}{[\sqrt{(2z-1)/(2-z)}+1]^2+\mathrm{i}[\sqrt{(2z-1)/(2-z)}-1]^2}$$

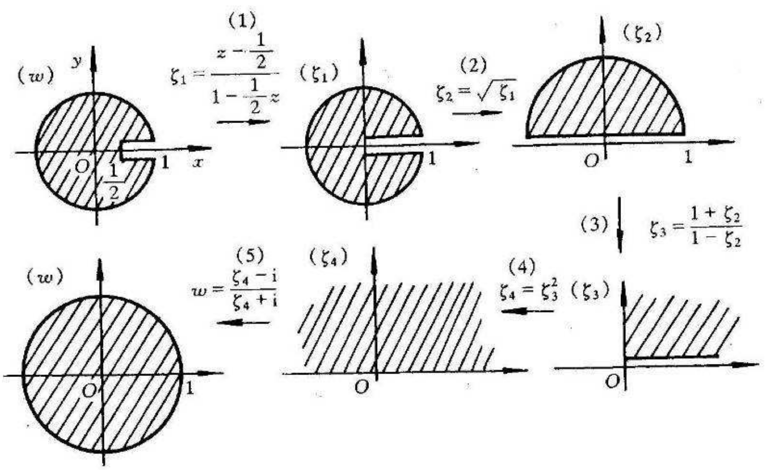

图 6.9

6-20 求把半带形域 $-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Re}(z)<\dfrac{\pi}{2},\mathrm{Im}(z)>0$，映为上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的映射 $w=f(z)$，使 $f(\pm\dfrac{\pi}{2})=\pm 1, f(0)=0.$

解 （1）作旋转与平移：$\zeta_1=\mathrm{i}z+\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2}$，使之映为 ζ_1 平面的半带形域：$0<\mathrm{Im}(\zeta_1)<\pi,\mathrm{Re}(\zeta_1)<0.$

（2）作指数映射：$\zeta_2=\mathrm{e}^{\zeta_1}$，将之映为 ζ_2 平面上的半圆域：$|\zeta_2|<1,\mathrm{Im}(\zeta_2)>0;$

（3）作分式线性映射：$\zeta_3=\dfrac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}$，将半圆域映为 ζ_3 平面第 1 象限；

（4）$\zeta_4=\zeta_3^2$，将之映为 ζ_4 的上半平面，只是未满足 $f(\pm\dfrac{\pi}{2})=\pm 1$ 及 $f(0)=0$ 的条件；

（5）由上半平面映为上半平面，且 ∞ 映为 -1,0 点映为 1 及 -1 映为 0.即得：$w=\dfrac{1+\zeta_4}{1-\zeta_4}$（见图 6.10）

归纳
$$w=\frac{1+\zeta_3^2}{1-\zeta_3^2}=\frac{1+\left(\dfrac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1+\zeta_2^2}{\zeta_2}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1+\mathrm{e}^{2\zeta_1}}{\mathrm{e}^{\zeta_1}}=-\frac{\mathrm{e}^{-\zeta_1}+\mathrm{e}^{\zeta_1}}{2}=-\frac{\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}z+\mathrm{i}\frac{\pi}{2})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{2}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\sin z$$，为所求的映射.

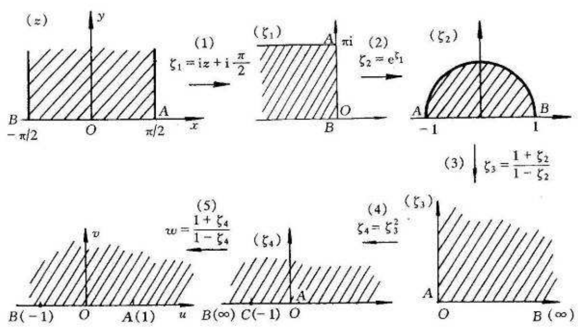

图 6.10