

期中考试模拟题（五）20220423

一、单项选择题（每小题3分，共15分）

1. 设事件 A, B 满足 $AB = \emptyset$ ，则下列结论中肯定正确的是（ ）.
- (A) \bar{A}, \bar{B} 互不相容 (B) \bar{A}, \bar{B} 相容
- (C) $P(AB) = P(A)P(B)$ (D) $P(A-B) = P(A)$
2. 设 $X \sim N(1, \sigma^2)$ ，其分布函数为 $F(x)$ ，则必有（ ）.
- (A) $F(x) + F(-x) = 1$ (B) $F(1+x) + F(1-x) = 1$
- (C) $F(x+1) + F(x-1) = 1$ (D) $F(1-x) + F(x-1) = 1$
3. 设随机变量 $X \sim U(2, 5)$ ，现对 X 进行三次独立重复观测，则恰好有两次观测值大于3的概率为（ ）.
- (A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{4}{27}$ (D) $\frac{5}{9}$
4. 设二维随机向量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$ ，其边缘分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$ ，则 $P\{X > 1, Y > 1\} =$ （ ）.
- (A) $1 - F(1, 1)$ (B) $1 - F_X(1) - F_Y(1)$
- (C) $F(1, 1) - F_X(1) - F_Y(1) + 1$ (D) $F(1, 1) + F_X(1) + F_Y(1) - 1$
5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且服从相同的分布， X 的分布函数为 $F(x)$ ，则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为（ ）.
- (A) $F^2(x)$ (B) $F(x)F(y)$ (C) $1 - (1 - F(x))^2$ (D) $(1 - F(x))(1 - F(y))$

二、填空题（每小题3分，共15分）

1. 从 $0, 1, 2, \dots, 9$ 这十个数字中不放回的任取三个数字，用 A 表示三个数字中不含0和5， B 表示三个数字中不含0或5，则 A 发生的概率为____， B 发生的概率为____， A, B 同时发生的概率为____.
2. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度， $f_2(x)$ 为 $(-1, 3)$ 上的均匀分布的概率密度，若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0) \text{ 为概率密度, 则 } a, b \text{ 应满足关}$$

系_____.

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从 $B(1, 0.6)$, 则 $P(X = Y) =$ _____.

4. 设随机变量 X 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布, 则 $P\{X \geq E(X^2)\} =$ _____.

5. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $P\{X + 2Y \leq 5\} =$ _____. (用标准正态分布的分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示)

三、(本题 10 分) 某炮台有 3 门炮, 命中率分别为 0.4, 0.5, 0.6, 3 门炮各独立发射一枚炮弹. (1) 求命中目标的概率; (2) 若恰有两门命中目标, 求第 1 门炮命中目标的概率.

四、(本题 10 分) 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = Ae^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$. 求:

(1) 常数 A ; (2) X 的分布函数 $F(x)$; (3) 设 $Y = -2X$, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

五、(本题 10 分) 已知随机变量 X 的分布律如右表,

X	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

且 $Y = X^2$. 求: (1) (X, Y) 的分布律;

(2) $P\{X = 0 | X + Y = 0\}$; (3) $E(XY), D(XY)$.

六、(本题 14 分) 已知二维随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 24(1-x)y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}. \quad \text{求: (1) } X \text{ 与 } Y \text{ 的边缘概率密度;}$$

(2) X 与 Y 是否独立? 为什么? (3) $P\{3Y \leq X\}$; (4) $f_{X|Y}(x|y)$.

七、(本题 10 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 λ_1, λ_2 的指数分布,

求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

八、(本题 16 分) 设一部手机在时间段 $[0, t]$ 内收到的微信数 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$, 其中

$\lambda = \mu t$, μ 是正常数. 每条微信是否为广告与其到达时间独立, 也与其他微信是否为广告独立. 假设每条微信是广告的概率 $p > 0$.

(1) 已知 $[0, t]$ 内收到了 n 条微信, 求其中广告微信数 Y 的分布律;

(2) 若 $p = 0.35$, 在 $[0, t]$ 内收到的 8 条微信中有几条是广告的概率最大?

(3) 计算 $[0, t]$ 内收到的广告微信数 Y 的概率分布;

(4) $[0, t]$ 内收到的广告微信数 Y 和非广告微信数 Z 是否相互独立? 为什么?