离散数学
Discrete Mathematics

西安交通大学 计算机学院

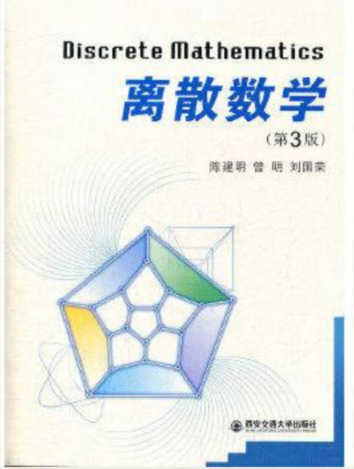
联系方式

任课教师：李文

电话：13991953790

邮箱：leewhen@mail.xjtu.edu.cn

办公室：西一楼548



课程要求

* 加入课程微信群

  通知 答疑

* 用NetID登录学校的思源学堂

  查看课程公告，下载课程资源，上传课后作业

课程安排

48课时　4学时/周

上课时间：1--12周

考试：　14周左右

形式：　闭卷

教学方式与要求

* 作业　　　　独立完成、按时提交
* 课堂练习　　积极参与
* 成绩计算　　平时35%　（作业10%，课堂测试25%）

　　　　　　　期末考试65%

离散数学-序言

离散数学是现代数学的一个重要分支，其研究对象是各种离散量的结构及相互关系，是计算机科学基础理论的核心课程，是计算机学科许多课程的先修课程。

通过学习，可以掌握处理各类离散结构的描述工具和方法，培养大家用数学语言符号对研究对象进行准确、严谨的表达、分析、计算、推演，为后续课程的学习打下基础，课程宗旨是提高抽象思维、逻辑推理能力、综合分析归纳能力。

离散数学-序言

- 内容：数理逻辑、集合论、代数系统、布尔代数、图论。
- 离散数学具有抽象性、非线性、非寻绎性、构造性、结构性、整体性等结构性数学特点。
- 方法和手段

  证明方法：包括（数学）归纳法、演绎法、反证法、归谬法、二难法、二分法、枚举法（穷举法）、相容排斥法等方法，特别着重于存在性、结构性、构造性方法，以及各部分内容自己所特有的方法。

目　录

第三章　集合（set）

§1. 集合理论中的一些基本概念

- 个体与集合之间的关系
- 集合的表示法
- 集合与集合之间的关系
- 幂集

§2. 集合代数-集合的基本运算

- 集合的补运算
- 集合的交运算和并运算
- 集合的宏运算

第三章　集合 (set)

§1.集合理论中的一些基本概念

A,B,X;

{在座的同学},{…,-1,0,1,…}

N,I,Q,R,C;

$\{x|x\in R\wedge x^2=1\}$

……

第三章　集合（set）

§1. 集合理论中的一些基本概念

1. 凡具有某种特殊性质的对象的汇集称之为集合。

——莫斯科大学那汤松教授

2. 凡可供吾人思维的，不论它有形或无形，都叫做物。具有某种条件的物，称它们的全部谓之一集。

——复旦大学陈建功教授

3. 集就是“乌合之众”。不考虑怎样“乌合”起来的，众可以具体，可以抽象。

——南开大学杨宗磐教授

集合的任意性：

组成集合的元素任意；

构成的法则任意；

什么都可以构成集合，不加任何限制。

4. 集合是由总括某些个体成一个整体而成的。对于每个个体，只设其为可思考的对象，辨别它的异同。个体之间并不需要有任何关系。

——集合论之父 G · Cantor（1845-1918）

事实：

(a)承认集合的存在性。即，接受集合概念；

(b)承认集合是由一些个体（对象）组成的。这些个体称为该集合的成员或(member,element)；

(c)承认个体是可辩认的。即，一个个体要么是一个集合的成员，要么不是；二者必居其一，也只居其一。

集合的确定性：

确定性是说集合确定；

个体确定；

集合与个体之间的关系确定。

集合的概念：

1.个体（元素）

2.个体的可辨认性

3.集合（动词，汇到一块）

- 通常用**小写拉丁字母**表示个体：a、b、c、d、…
- 通常用**大写拉丁字母**表示集合：A、B、C、D、…
- 有时还用**德文花写字母**表示集合：$\mathscr{B}$, $\wp$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{M}$, …
- 关于个体的辨认有赖于各方面公认的知识。

个体 ⇆ 集合

关系?

	个体	集合
个体	二元关系（第四章）	属于
集合	属于	包含、相等

一、个体与集合之间的关系

个体与集合之间的关系称为**属于关系**。

对于某个 **个体a** 和某个 **集合A** 而言，只有两种可能：

(1) a 属于(belong to)A，

记为 $a \in A$（记号$\in$是希腊字 εστΙ 的第一个字母，意思是“是”。由意大利数学家G·Peano首先采用），同时称 a是A的元素或A的成员。

(2) a 不属于 A,

记为 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$，称 a 不是 A 的元素或a 不是 A 的成员。

✱ 判断个体 a 属于 A 还是不属于 A，必须使用个体的可辨认性。

二、集合的表示法（用花括号{ } 表示集合）

(1)文字表示法：用文字表示集合的元素，两端加上花括号。

例如： A={今天到课的同学}；

B={离散数学中代数系统、图的概念和定理}。

* 比较粗放。比较适合在对集合中的元素了解甚少、不详，难以用精确的数学语言来刻划时使用。

二、集合的表示法（用花括号{ } 表示集合）

(2)元素列举法（罗列法）：将集合中的元素逐一列出，两端加上花括号。

例如：{1,2,3}

{…,-1,0,1,…}

元素之间用逗号隔开

* 比较适合集合中的元素有限（较少或有规律），无限（离散而有规律）的情况。

二、集合的表示法

（用花括号{ } 表示集合）

(3) 谓词表示法：　　{ x:P(x) } 或者{ x|P(x) }

其中：P 表示x所满足的性质（一元谓词）。

例如： **A**=$\{x|x\in R\wedge x^2=1\}$

问题：　B={−1, 1}？

比较适合在对集合中的元素性质了解甚详，且易于用精确的数学语言来刻划时使用。

外延与内涵

- **外延** (extension)：集合{ x:P(x) }称为性质谓词P(x) 的外延；

- **内涵** (intension, connotation)：性质谓词P(x) 称为集合{ x:P(x) }的内涵；采用谓词法定义集合，关键是要得出内涵P(x)，并且显然有如下的：

- **概括原理：**集合{ x:P(x) }恰由那些满足性质谓词P(x) 的元素组成。

即 $x \in \{ x:P(x) \} \Leftrightarrow$ 当且仅当 P(x)真

悖论 (paradox)

所谓悖论是指这样一个所谓的命题P，由P真立即推出P假；由P假立即推出P真；即:

$$P\text{真} \Leftrightarrow P\text{假}$$

理发师悖论：

某偏远小山村仅有一位理发师。这位理发师规定：

他只给那些不给自己刮脸的人刮脸。

问题：这位理发师的脸由谁来刮？

理发师悖论：

问题：这位理发师的脸由谁来刮？

如果他给自己刮脸，那么，按他的规定：他不应该给自己刮脸；

如果他不给自己刮脸，那么，按他的规定：他应该给自己刮脸。

罗素悖论 (Russell paradox (1902))

罗素1902年在集合论中发现了如下的悖论。他构造了这样一个集合：

$$\mathbf{S}=\{\, x \mid x \notin x \,\}$$

问题：S∈S成立吗？

- 罗素悖论的发现，几乎毁灭集合论，动摇数学的基础，倾危数学的大厦。直接引发了数学的第三次危机。

罗素悖论 (Russell paradox (1902))

S={ x | $x \notin x$ }， S∈S成立吗？

如果S∈S， 那么，按罗素给S的定义，则应有 **S $\notin$ S**；

如果S $\notin$ S， 那么，按罗素给S的定义，则应有 S∈S。

新问题：S $\notin$ S 与S∈S同时成立？！

解决悖论

类型论和形式化公理化集合论(ZF和ZFC公理系统)。

近年来，基于ZFC公理系统和一阶逻辑(谓词逻辑)，提出了抽象的计算机程序设计语言Z语言。

在公理化集合论中，引进了类(class)的概念。

$$\text{类}\begin{cases}\text{不包含悖论的类}\quad (\boldsymbol{OK}\,\text{类})---\text{集合}\,(\text{可进行运算}\ )\\ \text{包含悖论的类}\quad (\text{固有类}\ )-\text{非集合}\ (\text{不能进行运算}\ )\end{cases}$$

* 本章所讲解的集合论是“朴素（naive）”集合论；所讨论的集合一般也不会产生悖论。

三、集合的名字

(1)大写的拉丁字母：例如A、B；

(2)小写的希腊字母：例如α、β；

(3)花写的德文字母：例如$\wp, \Re$；

不够用时可以加下标。

同一个集合可以有几个名字。

四、集合的相等（equality）

外延性原理：

两个集合相等，当且仅当，它们的成员完全相同。

即： $A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \Leftrightarrow x\in B)$；

集合不相等，记为$A\neq B$ 。

集合的无序性：　　集合中的元素是无序的。

为了使用方便，可任意书写集合中元素的顺序。

一般情况下，通常采用字母序、字典序，有时还需要强行命名一种序。

无重复性： 集合中元素的重复是无意义的。

包（bag）**：** 若允许元素重复称为包。

集合的性质： 任意性、确定性、无序性、无重复性。

五、空集（empty,null,void set）： 记为 $\varnothing$

空集是没有成员的集合，即：

$$\forall x(x \notin \varnothing) \quad （空集公理），$$

所以 $\varnothing=\{\ \}$；

空集是集合（作这点规定是运算封闭性的要求）。

空集是唯一的。因为若有两个空集，则它们有完全相同的元素（都没有任何元素），所以它们相等，是同一集合。

六、全集（universe of discourse）：记为 X

全集是所要研究的问题所需的全部对象（元素）所构成的集合。

全集给个体（研究的对象）划定适当的范围。

七、单元素集合（singleton set）

只含一个元素的集合称为单元素集。

例如 { a }； { 张三 }；

- $\varnothing \in \{\varnothing\}$？ $\varnothing \in \{a,\{\varnothing\},c\}$？

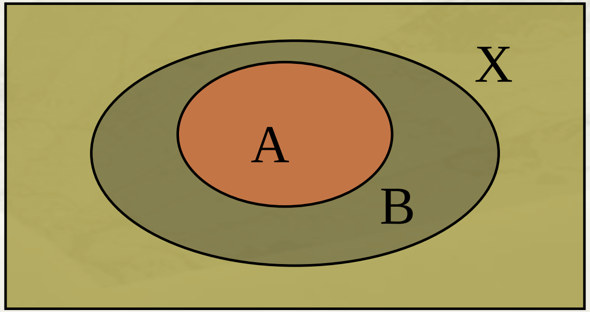
差别在于级别。即，右边的集合级别高。

- 单元素集合是构造复杂集合的“**原子**”。

八、子集（subset）

对于两个集合A，B，若A中的每个元素x都是B 的一个元素，则称A包含在B中（或者B包A ），记为 $A\subseteq B$，同时称A是B的子集（称B是A 的超集(superset)) 。

即：$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \Rightarrow x\in B)$ 。



真子集（proper subset）

称A是B的真子集或者A真包含在B中（或者B真包含A ），记为

$A \subset B$。即 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$。

子集的两种特殊情况（平凡子集）：

(1)空集（见下面定理2）；

(2)每个集合自己（见下面定理1的(1)）。

九.集合与集合之间的关系

集合与集合之间的关系：

(1)B包含A， $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$；

(2)A包含B， $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$；

(3)A等于B， $A=B \Leftrightarrow \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$；

(4)A与B互不包含， $\neg(A \subseteq B) \wedge \neg(B \subseteq A)$

$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \wedge \exists y(y \in B \wedge y \notin A)$；

定理1.设A,B,C为任意三个集合。那么

(1) 自反性： $A \subseteq A$ (每个集合是它自己的子集)；

(2) 反对称性：$A\subseteq B \wedge B\subseteq A \Rightarrow A=B$ ；

(3) 传递性： $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$ 。

$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)$

[证明]. （采用逻辑法）

(1)**证明**$A \subseteq A$

$\forall x\,(x\in A\Rightarrow x\in A)$

(同一律： $p\Rightarrow p$)

$\Rightarrow A\subseteq A$

采用逻辑法时每一步推导的理由，包括已知条件，定义，定理，逻辑规则

所以包含关系$\subseteq$是自反的；

(2) **证明 $A\subseteq B \wedge B\subseteq A \Rightarrow A=B$ ；**

$A\subseteq B$ $\Leftrightarrow$
$\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)$

$A\subseteq B\wedge B\subseteq A$

$\Rightarrow\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\Rightarrow x\in A)$

$\Rightarrow\forall x((x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in A))$

(∀量词对∧ 的分配律：$\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\Leftrightarrow\forall x(A(x)\wedge B(x))$)

$\Rightarrow\forall x(x\in A\Leftrightarrow x\in B)$

$\Rightarrow A=B$

所以包含关系⊆是反对称的；

采用逻辑法时每一步推导的理由，包括已知条件，定义，定理，逻辑规则

(3) 证明 $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$

$A\subseteq B\wedge B\subseteq C$

$\Rightarrow \forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\Rightarrow x\in C)$

推导的理由

$\Rightarrow \forall x((x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in C))$

($\forall$量词对$\wedge$的分配律： $\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\Leftrightarrow\forall x(A(x)\wedge B(x))$)

$\Rightarrow \forall x(x\in A\Rightarrow x\in C)$

（(假言)三段论原则： $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)\Rightarrow p\rightarrow r$ ）

$\Rightarrow A\subseteq C$

所以包含关系$\subseteq$是传递的。

定理2.空集是任一集合的子集。即 $\varnothing \subseteq A$ 。

一般证明思路：

$\forall x \in \varnothing$

…

$x \in A$

故有$\varnothing \subseteq A$

开头与空集定义矛盾，这个证明是错误的！

$A \not\subseteq B$成立

$\Leftrightarrow \neg \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$

[证明一].(采用元素法，反证法)

假设$\varnothing \subseteq A$不成立，即$\exists x \in \varnothing \wedge x \notin A$，与空集定义矛盾，故假设不成立，故$\varnothing \subseteq A$成立。

定理2.空集是任一集合的子集。即 $\varnothing \subseteq A$ 。

[证明二].(采用逻辑法)

推导的理由：逻辑变换规则

$\forall x(x \notin \varnothing)$ (空集的定义)

$\Leftrightarrow \forall x \neg (x \in \varnothing)$

$\Rightarrow \forall x\ (\neg(x \in \varnothing) \vee x \in A)$ (析取构成式：$\neg p \Rightarrow (\neg p \vee q)$)

$\Rightarrow \forall x(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$ (联结词归约：$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \to q)$)

$\Rightarrow \varnothing \subseteq A$ 。

十.幂集(power set)：

定义1.幂集

一个集合A的所有子集构成的集合称为A的幂集。

记为 2^A(或P(A))，即 $2^A=\{B : B\subseteq A\}$。

- A的两个平凡子集∅和A都属于A的幂集。即

$\emptyset \in 2^A$，$A \in 2^A$。

例1. 若A={1,2,3}，则

$2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

注：(1) 包含关系$\subseteq$两边必须是集合，并且这两个集合的级别（广义上）相同；

(2)属于关系$\in$左边是元素（广义上），右边是集合，两边级别差一级。

定义2.基数

一个有穷集合（有限集合——元素个数有限的集合）A中元素的个数称为A的基数。记为 $|A|$ (或 $^{\#}A$, $\overline{\overline{A}}$)。

基数的性质：

(1)齐性： $|\varnothing|=0$ ；

(2)非负性： $|A|\geq 0$ （对任何集合A ）；

定理3. 若A是有限集合， 则有 $|2^A| = 2^{|A|}$ 。

[证明].由于集合A有限，故可设 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，于是 $|A|=n$。

A的子集按其基数大小可分为0，1，2，…，n共n+1类。

A的所有k个元素的子集（基数为k的类）为从n个元素中取k个元素的组合数C_n^k ；

……

另外，因$\varnothing\subseteq A$，故（按加法原理）

$$|2^A| = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

由于二项式定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$

令x=y=1，则有$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ ，

从而，有 $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$ 。

定理4. 若A，B是两个集合，那么，$A=B \Leftrightarrow 2^A = 2^B$。

[证明]. “$\Leftarrow$”：

一方面，

$A \subseteq A$ (自反性)

$\Rightarrow A \in 2^A$ (因为$2^A=\{C:C\subseteq A\}$)

$\Rightarrow A \in 2^B$ （充分性条件： $2^A = 2^B$)

$\Rightarrow A \subseteq B$ (因为$2^B=\{C:C\subseteq B\}$)

……

另一方面，

$B \subseteq B$ （自反性）

$\Rightarrow B \in 2^B$ (因为2^B $=\{A:A \subseteq B\}$)

$\Rightarrow B \in 2^A$ (充分性条件： $2^A = 2^B$)

$\Rightarrow B \subseteq A$ (因为2^A $=\{B:B \subseteq A\}$)

由包含关系的反对称性，得到 $A=B$ 。

“$\Rightarrow$” :?

§2.集合代数　集合的基本运算

定义1.余(补或非)运算((absolute)complment)

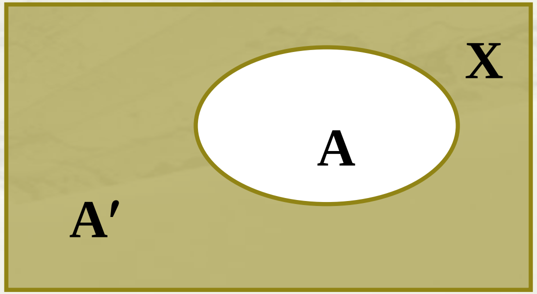
设X是全集，一元运算

$':2^X \to 2^X$　　对任何集合$A \subseteq X$，

使得　$A'=\{x : x \in X \wedge x \notin A\}$　　(当全集明确时，$A'=\{x : x \notin A\}$)

称为集合的余运算。称A′是A关于X的余集。

余运算有时也记为$\overline{A}$，或~A或¬A。



定理1(1.3).余运算基本定理

设X是全集，A，B是X的子集。则

(1) $(A')'=A$； 反身律(对合律)

(2) $A\subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$； 换质位律（逆否律）

(3) $A=B \Rightarrow A'=B'$ ；

(4) $X'=\varnothing$，$\varnothing'=X$。 零壹律

设X是全集，A、B是X的子集。则

(1) $(A')'=A$；　　反身律(对合律)

[证明].(采用逻辑法)

(1) 对任何元素$x\in X$,

$$x\in(A')'$$

$$\Leftrightarrow x\notin A'$$

$$\Leftrightarrow x\in A$$

所以 $(A')'=A$；

设X是全集，A，B是X的子集。则　　(4) $X'=\varnothing$，$\varnothing'=X$。

[证明].对任何元素x，$x\in X'$

$\Leftrightarrow x\notin X$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing$

所以　$X'=\varnothing$ 。　证明正确吗?

对任何元素x，$x\in\varnothing'$

$\Leftrightarrow x\notin\varnothing$

$\Leftrightarrow x\notin X'$　　(已证：$X'=\varnothing$)

$\Leftrightarrow x\in X$

所以　$\varnothing'=X$。

设X是全集，A，B是X的子集。则　(4) $X'=\varnothing$，$\varnothing'=X$。

[证明].对任何元素x，$x\in X'$

$\Leftrightarrow x\notin X$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing$　与空集公理矛盾!

所以　$X'=\varnothing$ 。

A⊈B成立

$\Leftrightarrow \neg\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)$

[证明].（元素法，反证法）要证$X'=\varnothing$，即要证$X'\subseteq\varnothing\wedge\varnothing\subseteq X'$，其中$\varnothing\subseteq X'$已证，假设$X'\subseteq\varnothing$不成立，即$\exists x\in X'\wedge x\notin\varnothing$，由补集定义，有$x\notin X\wedge x\notin\varnothing$，与运算封闭性要求（所有$x\in X$）矛盾，假设不成立。

即$X'\subseteq\varnothing$成立，再由$\varnothing\subseteq X'$，有$X'=\varnothing$。

定义1.2.交运算、并运算(intersection,union)

设X是全集。

(1)二元运算 $\cap$:$2^X \times 2^X \to 2^X$

对任何集合$A,B \subseteq X$，使得

$$A \cap B = \{ x : x \in A \wedge x \in B \}$$

称为集合的交运算。称$A \cap B$为A与B的交集。

- $\cap$ 英语读作cap（帽子）。
- 若$A \cap B = \varnothing$,则称A与B互不相交(pairwise)disjoint)。

(2)二元运算 $\cup: 2^X \times 2^X \to 2^X$

对任何集合A,B $\subseteq$X， 使得

$A \cup B = \{ x : x \in A \vee x \in B \}$

称为集合的并运算。称A∪B为A与B的并集。

- ∪英语读作cup（酒杯）。

定理2.交、并、余运算的基本定理

设X是全集，A，B，C是X的三个子集。则

(1) $A\cap A=A$，$A\cup A=A$； 幂等律

(2) $A\cap A'=\varnothing$，$A\cup A'=X$； 互补律

(2’) $A\cap X=A$，$A\cup X=X$； 零壹律

(2”) $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$； 零壹律

(3) $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$ 上界

$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$； 下界

(3’) $A\subseteq C\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\cup B\subseteq C$； 上确界

(3”) $C\subseteq A\wedge C\subseteq B\Rightarrow C\subseteq A\cap B$； 下确界

……

(4) $A\cap(A\cup B) = A$， $A\cup(A\cap B) = A$； 吸收律

(5) $A\cap B= B\cap A$， $A\cup B= B\cup A$； 交换律

(6) $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$， 结合律

$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$；

(7) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$， 分配律

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$。

(3') $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

[证明]. (3')(采用逻辑法)

对任何元素$x \in X$，

$x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Rightarrow x \in C \vee x \in C$ (已知：$A \subseteq C$，$B \subseteq C$)

$\Rightarrow x \in C$ (幂等律：$p \vee p \Leftrightarrow p$)

所以，$A \cup B \subseteq C$。

（7）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

(7)先证：$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (采用元素法)

对任何元素$x\in X$，若$x\in A\cap(B\cup C)$，则$x\in A$，且$x\in B\cup C$。于是$x\in A$，且$x\in B$或者$x\in C$ 。

若$x\in B$，则$x\in A$且$x\in B$，于是$x\in A\cap B$；

若$x\in C$，则$x\in A$且$x\in C$，于是$x\in A\cap C$；

综合$x\in A\cap B$或者$x\in A\cap C$，因此$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

所以，$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

次证：$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$(采用包含法)

由(3)有$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B\subseteq B\cup C$（逐步放大法）。

于是根据(3”)可得 $A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C)$

3”: $C\subseteq A \wedge C\subseteq B$
$\Rightarrow C\subseteq A\cap B$

同理可得 $A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C)$

于是根据(3’)可得

3’: $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{C} \wedge \mathbf{B}\subseteq\mathbf{C}$
$\Rightarrow \mathbf{A}\cup\mathbf{B}\subseteq\mathbf{C}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$ 。

最后，根据包含关系的反对称性，就得到

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 。

定理3. de Morgan律（对偶律）

设A，B为两个集合。则

$(1)(A\cup B)' = A'\cap B'$，

$(2)(A\cap B)' = A'\cup B'$。

[证明].只证(1)

先证：$(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$ (采用包含法)

由定理2(3)有 $A\subseteq A\cup B$，　$B\subseteq A\cup B$，

于是由定理1(2)可得　$(A\cup B)'\subseteq A'$，$(A\cup B)'\subseteq B'$

再用定理2(3”)，就有　$(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$；

3’’:$C\subseteq A \wedge C\subseteq B$

$\Rightarrow C\subseteq A\cap B$

次证：$A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$ (采用逻辑法)

对任何元素$x\in X$，

$x\in A'\cap B'$

$\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'$

$\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\notin A\cup B$ (否则 $x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\vee x\in B$， 这与$x\notin A\wedge x\notin B$矛盾)

$\Rightarrow x\in(A\cup B)'$

所以 $A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$

根据包含关系的反对称性，就得到 $(A\cup B)'=A'\cap B'$ 。

定理4 设A，B为两个集合。则下面三式等价。

(1)$A \subseteq B$；

(2)$A \cup B = B$；

(3)$A \cap B = A$。

三式等价的含义：
(1) $\Leftrightarrow$ (2)且(2) $\Leftrightarrow$ (3)且(1) $\Leftrightarrow$ (3)。
证明时可以采用循环论证法：
(i) $\Rightarrow$ (j) $\Rightarrow$ (k) $\Rightarrow$ (i)。
其中i, j, k不同。

[证明].(采用**循环论证法**)

(1)$\Rightarrow$(2)：(采用包含法) (即：$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$)

根据定理2(3)， 得到 $B \subseteq A \cup B$；

由已知条件$A \subseteq B$，及自反性$B \subseteq B$，根据定理2(3')， 得到 $A \cup B \subseteq B$；

最后，根据包含关系的反对称性， 就得到 $A \cup B = B$ 。

(2)⇒(3)：(采用变换法(公式法))（即：$A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$）

$A \cap B = A \cap (A \cup B)$ (根据(2)条件 $A \cup B = B$)

$= A$ (根据定理2(4)吸收律)

即 $A \cap B = A$。

(3)⇒(1)：(采用：包含法)（即：$A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$）

$A = A \cap B$ (根据(3)条件 $A \cap B = A$)

$\subseteq B$ (根据定理2 (3) $A \cap B \subseteq B$)

即 $A \subseteq B$。

定义3 . 差运算(difference)

设X是全集。 二元运算

$$\backslash : 2^X \times 2^X \to 2^X$$

对任何集合A，B⊆X，使得

$$A \backslash B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$$

称为集合的差运算。称 A\B 为 A 和 B 的差集。

* 差集也称为相对补(relative complement)。

而余运算可看成绝对补，即 $A' = X \backslash A$ ；

- 由差运算、交运算、余运算的定义知

  $A \setminus B = A \cap B'$，称差运算为宏运算;

- 注：交、并、余三个运算是线性有关的吗?

  根据反身律、 **de Morgan**律， 有

  $A \cap B = (A' \cup B')'$;

  $A \cup B = (A' \cap B')'$。

定理5.差运算基本定理

设X是全集，A，B，C是X的三个子集。则

(1)$A\backslash B\subseteq A$；

(2)$A\subseteq B\Rightarrow A\backslash B=\varnothing$；

(3)$A\backslash A=\varnothing$；

(4)$X\backslash A=A'$； $A\backslash X=\varnothing$；

(5)$A\backslash\varnothing=A$； $\varnothing\backslash A=\varnothing$；

(6)$A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$； 交对差的分配律

(7)$A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$；

(8)$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$； 相对补的de Morgan律

(9) $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$。 相对补的de Morgan律

[证明].(采用包含法和变换法(公式法))

(1)$A\backslash B=A\cap B'$

$\subseteq A$ (根据定理2 (3)$A\cap B'\subseteq A$)；

(2)$A\backslash B=A\cap B'$

$=(A\cap B)\cap B'$ (由已知$A\subseteq B$根据定理4(3)有$A\cap B=A$)

$=A\cap(B\cap B')$ (结合律)

$=A\cap\varnothing$ (互补律$B\cap B'=\varnothing$)

$=\varnothing$ (零壹律)

$(7)A\backslash(B\backslash C)=A\backslash(B\cap C')$

$=A\cap(B\cap C')'$

$=A\cap(B'\cup C)$ (de Morgan律,反身律)

$=(A\cap B')\cup(A\cap C)$ (分配律)

$=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$;

(6)$A\cap(B\backslash C)$

$$
\begin{aligned}
&= A\cap(B\cap C') \\
&=\varnothing\cup(A\cap B\cap C') && \text{(零壹律,结合律)} \\
&=(B\cap\varnothing)\cup(A\cap B\cap C') && \text{(零壹律)} \\
&=(B\cap A\cap A')\cup(A\cap B\cap C') && \text{(互补律,结合律)} \\
&=(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C') && \text{(交换律)} \\
&=(A\cap B)\cap(A'\cup C') && \text{(分配律)} \\
&=(A\cap B)\cap(A\cap C)' && \text{(de Morgan律)} \\
&=(A\cap B)\backslash(A\cap C)\quad ;
\end{aligned}
$$

$(8) A\backslash(B\cup C)=A\cap(B\cup C)'$

$=A\cap(B'\cap C')$ (de Morgan律)

$=(A\cap A)\cap(B'\cap C')$ (幂等律)

$=(A\cap B')\cap(A\cap C')$ (结合律，交换律)

$=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$ ；

$(9) A\backslash(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'$

$=A\cap(B'\cup C')$ (de Morgan律)

$=(A\cap B')\cup(A\cap C')$ (分配律)

$=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$ 。

定义4. 对称差（环和）运算(symmetric difference)

设X是全集， 二元运算

$\oplus : 2^X \times 2^X \to 2^X$ ，

对任何集合A,B⊆X，使得

$$A\oplus B=\{x : (x\in A\wedge x\notin B) \vee (x\in B\wedge x\notin A) \}$$

称为集合的对称差运算，称 A⊕B 为 A 和 B 的对称差集。

* 由环和运算和交、并、余、差运算的定义可知

$$A\oplus B= (A\backslash B)\cup (B\backslash A)=(A\cap B')\cup (B\cap A')$$

因此环和运算也是宏运算。

定理6 .环和运算基本定理

设X是全集，A，B，C是X的三个子集。则

(1)$A\oplus B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$ ；

(2)$A\oplus\varnothing=A$ ； （空集是环和的幺元）

$A\oplus X=A'$ ；

(3)$A\oplus A=\varnothing$； （（环和）自逆元）

$A\oplus A'=X$ ；

……

(4)$A'\oplus B' = A\oplus B$;

(5)$(A\oplus B)' = A'\oplus B = A\oplus B'$;

(6) $A\oplus B = B\oplus A$; （交换律）

(7) $A\oplus(B\oplus C) = (A\oplus B)\oplus C$; （结合律）

(8$A\cap(B\oplus C) = (A\cap B)\oplus(A\cap C)$; (交对环和的分配律）

(9) $A\oplus B = A\oplus C \Rightarrow B=C$ 。 （消去律）

[证明].(采用变换法(公式法))只证(5)，(7)，(9)

(5) $(A\oplus B)'$

$=((A\cap B')\cup(A'\cap B))'$

$=(A\cap B')'\cap(A'\cap B)'$ (de Morgan律)

$=(A'\cup B)\cap(A\cup B')$ (de Morgan律，反身律)

$=((A'\cup B)\cap A)\cup((A'\cup B)\cap B')$ (分配律)

$=(A'\cap A)\cup(B\cap A)\cup(A'\cap B')\cup(B\cap B')$ (分配律，结合律)

$=(A\cap A')\cup(A\cap B)\cup(A'\cap B')\cup(B\cap B')$ (交换律)

$=\varnothing\cup(A\cap B)\cup(A'\cap B')\cup\varnothing$ (互补律)

$=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ (零壹律)

……

$A'\oplus B=(A'\cap B')\cup(A''\cap B)$

$=(A'\cap B')\cup(A\cap B)$ (反身律)

$=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ (交换律)

$A\oplus B'=(A\cap B'')\cup(A'\cap B')$

$=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ (反身律)

所以 $(A\oplus B)'=A'\oplus B=A\oplus B'=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ ；

$(7) A \oplus (B \oplus C)$

$= (A \cap (B \oplus C)') \cup (A' \cap (B \oplus C))$

$= (A \cap ((B \cap C) \cup (B' \cap C'))) \cup (A' \cap ((B \cap C') \cup (B' \cap C)))$

(根据本定理的(5))

$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$

(分配律，结合律)

……

$(A\oplus B)\oplus C$

$=((A\oplus B)\cap C')\cup((A\oplus B)'\cap C)$

$=(((A\cap B')\cup(A'\cap B))\cap C')\cup(((A\cap B)\cup(A'\cap B'))\cap C)$

(根据本定理的(5))

$=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B'\cap C)$ (分配律，结合律)

$=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$ (交换律，结合律)

所以 $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$ ；

$(9) B=\varnothing\oplus B$ (根据本定理的(2))

$=(A\oplus A)\oplus B$ (根据本定理的(3))

$=A\oplus(A\oplus B)$ (根据本定理的(7)结合律)

$=A\oplus(A\oplus C)$ (已知条件$A\oplus B=A\oplus C$)

$=(A\oplus A)\oplus C$ (根据本定理的(7)结合律)

$=\varnothing\oplus C$ (根据本定理的(3))

$=C$ (根据本定理的(2))。

定义5 .环积运算

设X是全集，二元运算

$$\otimes : 2^X \times 2^X \to 2^X$$

对任何集合A,B$\subseteq$X，使得

$$A \otimes B = \{x : (x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \notin A)\}$$

称为集合的环积运算。称 $A \otimes B$ 为 A 和 B 的环积集。

- 由环积运算和交、并、余运算的定义可知

$$A \otimes B = (A \cup B') \cap (B \cup A')$$

因此环积运算也是宏运算。

*定理7.环积运算基本定理

设X是全集，A，B，C是X的三个子集。则

(1)$A\otimes B = (A\cap B)\cup(A'\cap B') = (A\cap B)\cup(A\cup B)'$；

(2)$A\otimes B = (A\oplus B)' = A'\oplus B = A\oplus B'$；

(3)$A\otimes\varnothing = A'$；

$A\otimes X = A$；　　（全集是环积的幺元）

(4)$A\otimes A = X$；　　（自己是自己（环积）的逆元）

$A\otimes A' = \varnothing$；

……

(5) $A'\otimes B' = A\otimes B$；

(6) $(A\otimes B)' = A'\otimes B = A\otimes B'$；

(7) $A\otimes B = B\otimes A$； 交换律

(8) $A\otimes(B\otimes C) = (A\otimes B)\otimes C$； 结合律

(9) $A\cup(B\otimes C) = (A\cup B)\otimes(A\cup C)$； 分配律 (并对$\otimes$的)

(10) $A\otimes B = A\otimes C \Rightarrow B=C$。 消去律

* [证明].(采用变换法(公式法))只证(9)

(9)$A \cup (B \otimes C)$

$=A \cup ((A \cup B') \cap (A' \cup B))$

$=(A \cup B \cup C') \cap (A \cup B' \cup C)$ (分配律，结合律)

$=X \cap (A \cup B \cup C') \cap X \cap (A \cup B' \cup C)$ (零壹律)

$=(A \cup B \cup A') \cap (A \cup B \cup C') \cap (A \cup C \cup A') \cap (A \cup B' \cup C)$

(互补律，零壹律，交换律，结合律)

$=((A \cup B) \cup (A' \cap C')) \cap ((A' \cap B') \cup (A \cup C))$

(交换律，结合律，分配律)

$=((A \cup B) \cup ((A \cup C)')) \cap ((A \cup B)' \cup (A \cup C))$ (de Morgan律)

$=(A \cup B) \otimes (A \cup C)$;

定义5.

(1)初级交：$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x : (\forall k \in N)(1 \le k \le n)(x \in A_k)\}$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \{x : (\forall k \in N)(k \ge 1)(x \in A_k)\}$

(2)初级并：$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : (\exists k \in N)(1 \le k \le n)(x \in A_k)\}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \{x : (\exists k \in N)(k \ge 1)(x \in A_k)\}$

(3)广义交：$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x : (\forall \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma)\}$

(4)广义并：$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x : (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma)\}$

这里：γ—称为索引，下标，指标；　　Γ—称为索引集，下标集，指标集。

定理8.

(1)分配律：

$$A\cap(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\cap A_\gamma)$$

$$A\cup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\cup A_\gamma)$$

$$A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap A_\gamma)$$

$$A\cup(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cup A_\gamma)$$

(2) de Morgan律：

$$(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)'=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma'$$

$$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)'=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma'$$

[证明].(采用逻辑法)

(1)只证第三式

对任何元素$x \in X$，

$$x \in A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A \wedge x \in A_\gamma)$$ (量词前移：$p \wedge \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x (p \wedge A(x))$)

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A \cap A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap A_\gamma)$$

所以 $A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap A_\gamma)$；

(2) 只证第二式

对任何元素$x \in X$，

$$x \in \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)'$$

$$\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

$$\Leftrightarrow \neg\left(x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)\neg(x \in A_\gamma)$$ (量词对偶律：$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$)

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(x \notin A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma')$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma'$$

所以 $\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma'$ 。