第四章 控制系统的李雅普诺夫稳定性分析

一、控制系统稳定性概述

二、李雅普诺夫稳定性定义

三、李雅普诺夫判稳第一法（间接法）

四、李雅普诺夫判稳第二法（直接法）

五、线性定常连续系统的李雅普诺夫稳定性分析

一、 控制系统稳定性概述

稳定性（stability）：控制系统能否正常工作的前提。

控制系统的稳定性，通常有两种定义方式:

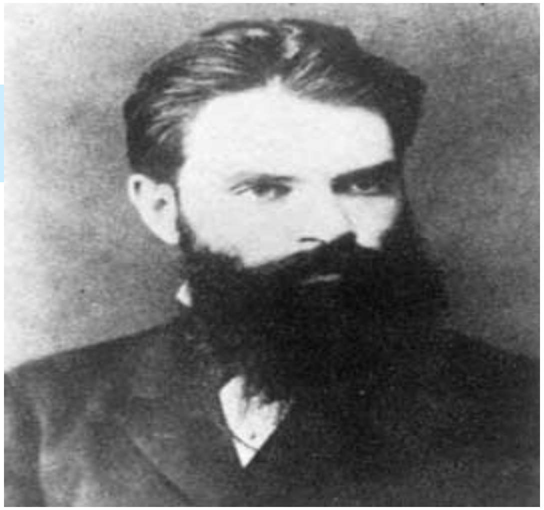
1、外部稳定性：系统在零初始条件下通过其外部状态（输入和输出）所定义的稳定性，即有界输入有界输出稳定(BIBO)。外部稳定性一般适用于线性系统。线性连续定常系统的外部稳定充要条件是：系统全部极点均具有负实部。

当 $|u(t)| \le k_1 < \infty$ 时，有 $|y(t)| \le k_2 < \infty$

外部稳定性判据：$\begin{cases} \text{劳斯—胡尔维茨稳定性代数判据} \\ \text{奈奎斯特频域稳定判据} \end{cases}$

2、内部稳定性：系统在零输入条件下，通过其内部状态变化所定义的稳定性，即状态稳定性，也称李雅普诺夫稳定。不但适用于线性系统，也适用于非线性系统。

即 $\|x(t)\| \le k < \infty$ 。当渐近稳定时，有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$



1892年, 俄国数学家Lyapunov，博士论文《运动稳定性的一般问题》

它表述了系统在遭受外界扰动偏离平衡状态，在外界扰动消失后，系统由初始偏差状态恢复到原平衡状态或平衡状态附近的的能力，更深刻地揭示了系统稳定性的本质属性。

内部稳定性判据（后面展开）： 稳 or 不稳

① 第一法（间接法，定量法）：根据系统矩阵*A*的特征根分布情况判稳。（线性定常系统：求解系统矩阵*A*的特征根；弱非线性：线性化处理后，取其一阶近似。）

② 第二法（直接法，定性法）：构造李雅普诺夫函数，根据李雅普诺夫函数的特性判稳，也就是分析能量函数的变化趋势。（适用于：线性/非线性，定常/时变系统等。）

注意:

① 尽管在定义时提到了输入和扰动作用，但对线性定常系统来说，系统稳定与否完全取决于系统本身的结构和参数，稳定性是系统本身的一种特性，而与输入作用无关；而对于非线性系统，其稳定性还与初始条件及输入作用的幅值有关。

② 对于同一个线性系统，只有在满足一定的条件下，内部稳定性和外部稳定性两种定义才有等价性。（见后描述）

二、李雅普诺夫稳定性定义

1. 平衡状态

2. 李雅普诺夫稳定性定义（4种）

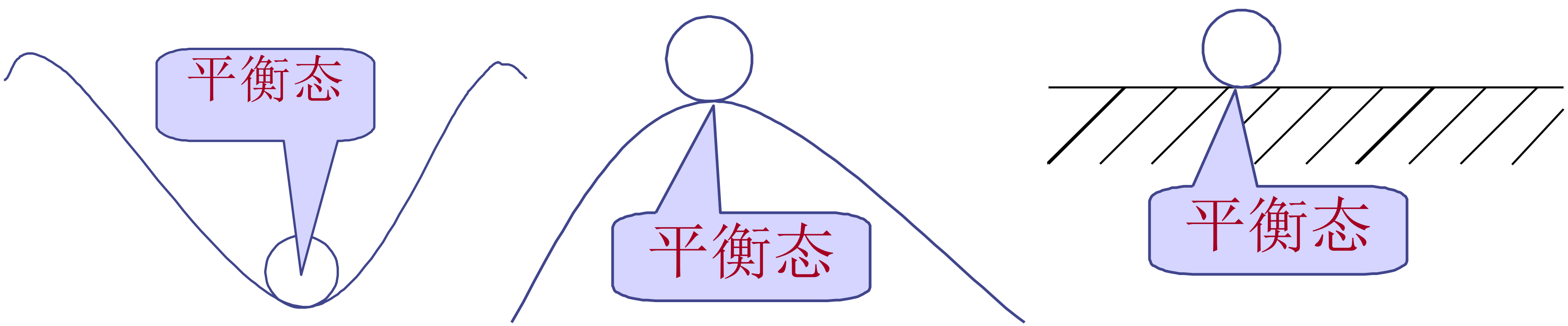
稳定、渐近稳定、大范围渐近稳定、不稳定

1. 平衡状态(equilibrium state)

考虑由如下状态方程描述的系统

$$\dot{x} = f(x,t)$$

平衡状态：对所有时间t，如果满足 $\dot{x}_e = f(x_e,t) = 0$ ，称x_e为系统的平衡状态或平衡点。f一般为时变非线性函数。如果不显含t，则为定常非线性函数。李雅普诺夫稳定性针对平衡状态而言。



系统的稳定性是相对系统的平衡状态而言的。

说明:

对于线性定常系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = f(\boldsymbol{x}_e) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_e = 0$$

(1) $\boldsymbol{A}$为非奇异阵时，$\boldsymbol{x}_e = 0$ 是其唯一的平衡状态。

$\boldsymbol{A}$为奇异阵时，系统有多个平衡状态。

(2) 非线性系统有一个或多个平衡状态，视系统方程而定。

(3) 李雅普诺夫稳定性针对某个平衡状态而言，不同的平衡状态点可能表现出不同的稳定特性。所以，稳定性必须针对所有平衡状态分别加以讨论。

[例 1] 某非线性系统方程为：$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases}$

试确定其平衡状态。

[解]：由 $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$，可得方程组：$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 = x_1 + x_2(1 - x_2^2) = 0 \end{cases}$

解得3个平衡状态为：

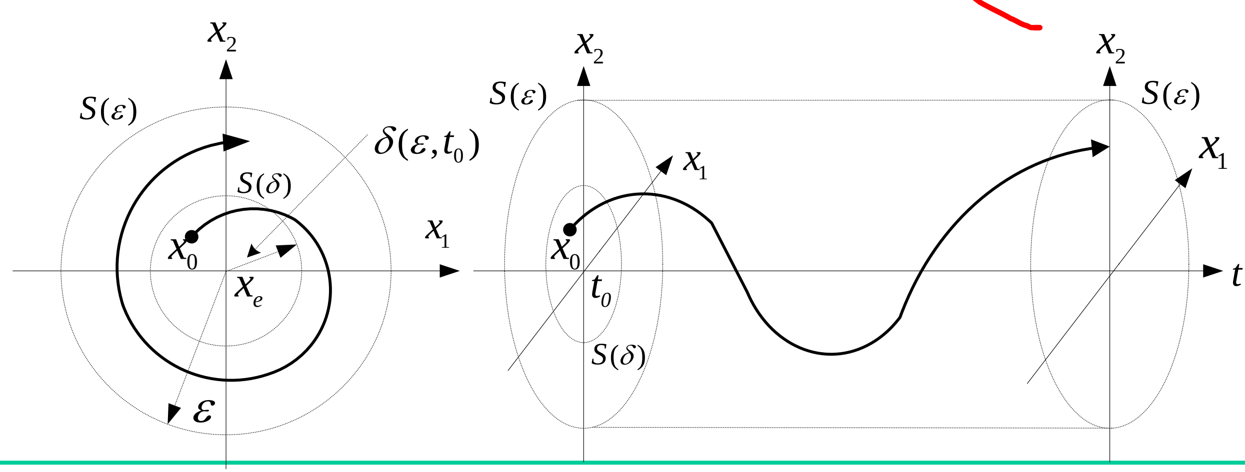
$$x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{e2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_{e3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 李雅普诺夫意义下的稳定（4种：围绕系统自由响应有界性、收敛性）

(1) 稳定与一致稳定： （系统的自由响应幅值有界）

设 x_e 为动力学系统的一个平衡状态。如果对任意正实数 $\varepsilon > 0$ 或球域 $S(\varepsilon)$，都可以找到另一个正实数 $\delta(\varepsilon, t_0)$ 或球域 $S(\delta)$，当初始状态 x_0 满足 $\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$ 时，对由此出发的 x 的运动轨迹有 $\|x(t) - x_e\| \le \varepsilon$，则平衡状态 x_e 是李雅普诺夫意义下稳定的。

如果 δ 与初始时刻 t_0 无关，则称平衡状态是一致稳定的（uniformly stable）。



说明1： $\|x_0 - x_e\| \le \delta$ 表示初始状态在以 δ 为半径，以平衡状态 x_e 为中心的球域 $S(\delta)$ 里。其中

$$\|x_0 - x_e\| = \left[(x_{10} - x_{1e})^2 + (x_{20} - x_{2e})^2 + \cdots + (x_{n0} - x_{ne})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$ 二范数

$\|x(t) - x_e\| \le \varepsilon$ 表示状态都在以 ε 为半径，以平衡状态 x_e 为中心的球域 $S(\varepsilon)$ 里。

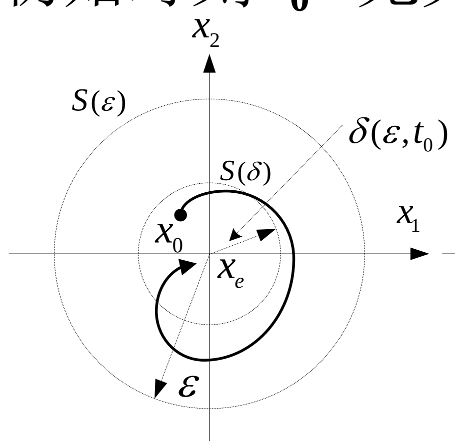
说明2： 李雅普诺夫稳定性针对平衡状态而言，反映的是平衡状态邻域的局部稳定性，即小范围稳定性。

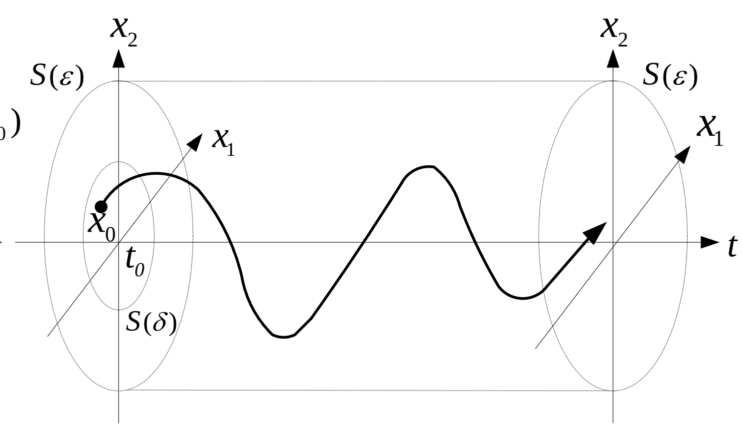
说明3： 系统做等幅振荡时，在平面上描出一条封闭曲线，只要不超过 $S(\varepsilon)$ ，就是李雅普诺夫稳定的，而经典控制则认为不稳定。

(2) 渐近稳定和一致渐近稳定：（自由响应有界并回到平衡状态）

设 $\boldsymbol{x_e}$ 为系统的平衡状态，如果它是李雅普诺夫意义下稳定的，且有：$\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)-x_e\|=0$ ，即收敛于平衡状态 $\boldsymbol{x_e}$ ，则称平衡状态 $\boldsymbol{x_e}$ 为**渐近稳定**的(asymptotically stable) 。

如果 $\boldsymbol{\delta}$ 与初始时刻 $\boldsymbol{t_0}$ 无关，则称平衡状态 $\boldsymbol{x_e}$ 为一致渐近稳定。





说明：

1、稳定和渐近稳定不同。稳定只要求状态轨迹永远不会跑出球域 $S(\varepsilon)$，在球域内如何变化不作规定。渐近稳定不仅要求状态的运动轨迹不跑出球域 $S(\varepsilon)$，最终还要收敛并无限趋近平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$。

2、渐近稳定比稳定更重要，但它是一个局部概念，平衡状态局部稳定并不意味着整个系统能正常工作。确定其渐近稳定的最大区域很重要。$\boldsymbol{S(\delta)}$：渐近稳定吸引域。

3、李雅普诺夫意义下的渐近稳定等于工程意义下的稳定。

思考：稳定与渐近稳定的区别何在?

[例 2] $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ ，判断 $\boldsymbol{x}_e = 0$ 平衡点的稳定性。

[解]

$\boldsymbol{A}$的特征值：$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$

所以有:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ e^{-t} x_{20} \end{bmatrix}$$

$t \to \infty$时，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$ 有界。

该系统是李雅普诺夫意义下稳定的，但不是渐近稳定的。

(3) 大范围渐近稳定（全局渐进稳定）

渐近稳定比稳定更重要，但它是一个局部概念。大范围渐近稳定是指：不管初始偏差有多大（即从状态空间中所有初始状态出发的轨迹），都能收敛到平衡状态。即：$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x_e\|=0$

大范围渐进稳定（全局渐进稳定）：指系统的平衡状态渐近稳定的“吸引域”为整个状态空间。

大范围渐进稳定必要条件：

✓ 整个状态空间中，只有一个平衡状态。

Remark:

✓ 对于线性定常系统，若在平衡状态处渐近稳定的，必大范围渐近稳定。

✓ 非线性系统：很难确保大范围稳定。

(3) 大范围渐近稳定（全局渐进稳定）

渐近稳定比稳定更重要，但它是一个局部概念。大范围渐近稳定是指：不管初始偏差有多大（即从状态空间中所有初始状态出发的轨迹），都能收敛到平衡状态。即：$\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)-x_e\|=0$

大范围渐进稳定（全局渐进稳定）：指系统的平衡状态渐近稳定的“吸引域”为整个状态空间。

大范围渐进稳定必要条件：

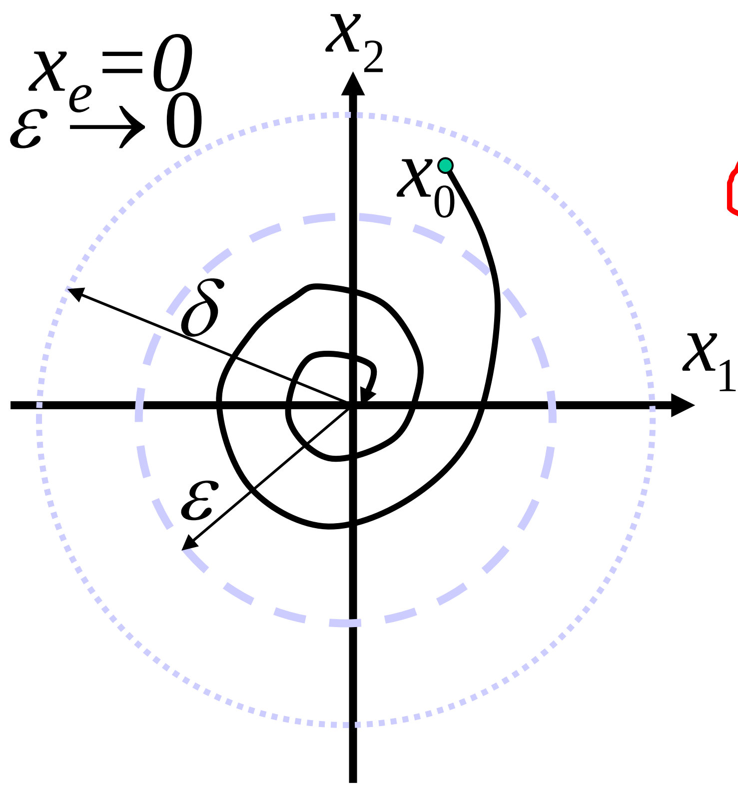
✓ 整个状态空间中，只有一个平衡状态。

Remark：

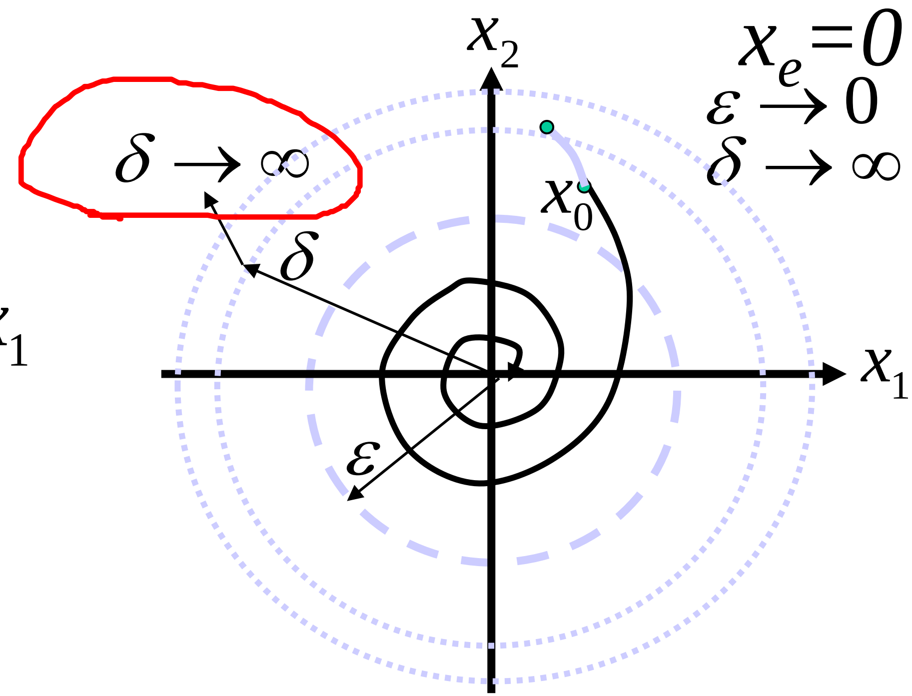
✓ 对于线性定常系统，若在平衡状态处渐近稳定的，必大范围渐近稳定。（利用：李雅普诺夫判稳第一法结合系统运动学分析）

✓ 非线性系统：很难确保大范围稳定。

(a) 局部　　(b) 大范围



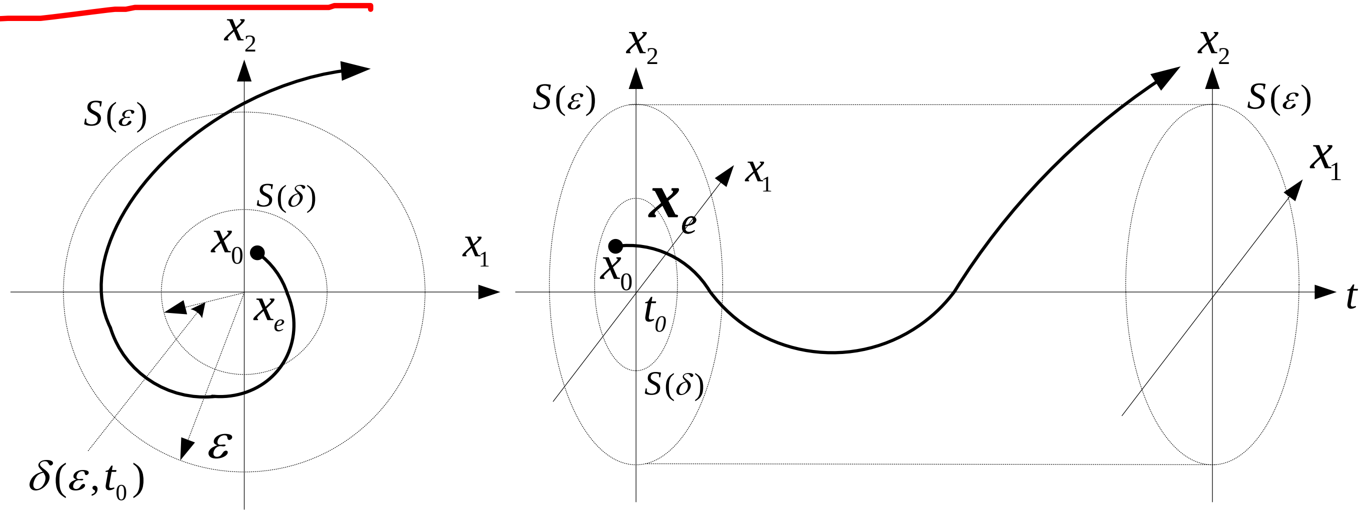
渐近稳定



大范围渐近稳定

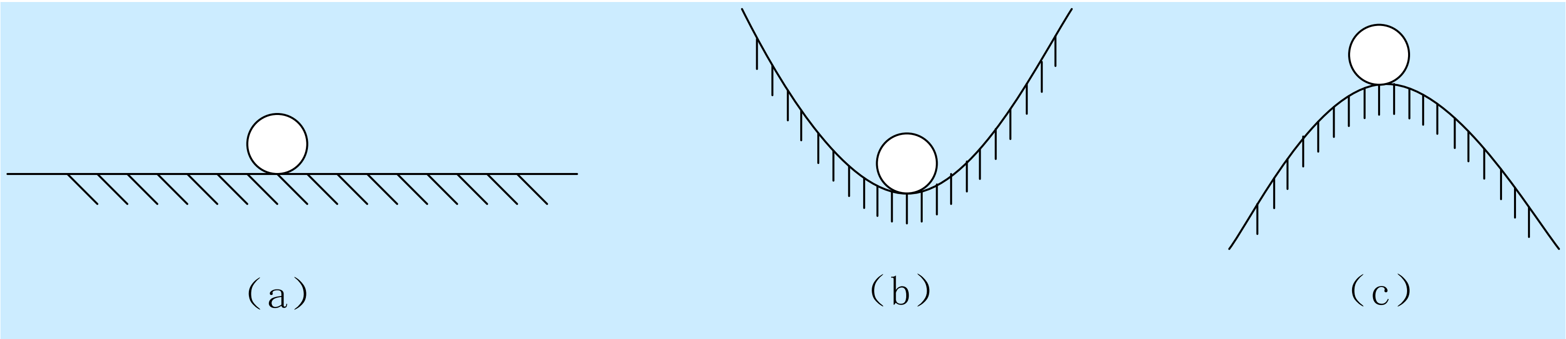
(4) 不稳定：（系统的自由响应是无界的）

如果存在某一实数 $\varepsilon>0$，不管δ多么小的，总存在由 $S(\delta)$ 内出发的某个轨迹 $x(t)$ 在某个时刻超出了 $S(\varepsilon)$，则称平衡状态是不稳定的。



说明：虽然不稳定的轨迹超出了 $S(\varepsilon)$，但并不一定趋向于无穷远处，有可能趋向于 $S(\varepsilon)$外的某个极限环。

考虑下面三种情形，小球均处于原平衡点的稳定状态，考虑其受到扰动作用后，自平衡点偏离后的系统响应。



平衡点(a)：地面有摩擦，扰动使小球偏离原平衡点，并到达另一个平衡点，自由响应有界但不返回原平衡点。(稳定)

平衡点(b)：内壁有**摩擦**，小球围绕原平衡点做衰减振荡，自由响应有界且最终返回原平衡点(渐近稳定)；如果内壁绝对**光滑**，既不消耗也不吸收能量，小球做等幅震荡，此时为稳定。

平衡点(c)：自由响应无界。(不稳定)

[小结]:

- ✓ 平衡状态定义、求法。
- ✓ 李雅普诺夫稳定性概念:

  1）稳定、一致稳定。

  2）渐近稳定、一致渐近稳定。

  3）大范围渐近稳定。

  4）不稳定。

三、李亚普诺判稳第一法
（间接法）

1．内部稳定性判据：李亚普诺判稳第一法

2．内部状态稳定性和外部稳定性的关系

外部稳定性定义及其判据（回顾）

定义：如果线性系统在有界输入量或干扰量作用下，引起的输出量的幅值是有界的，即有界输入引起的零状态响应的输出是有界的，则称系统是有界输入－有界输出（Bouned-Input-Bounded-Output）稳定的。否则，如果系统在有界输入作用下产生无界的输出，则系统是不稳定的。

函数有界的含义：对于函数 $h(t)$，在 $[0,\infty]$ 时间区间内存在实常数 k，满足 $|h(t)| \le k < \infty$。

外部稳定性是从输入输出的角度出发，考察的是系统零状态响应下的稳定性。

判据：线性连续定常系统的传递函数是 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$，当且仅当其闭环极点都在 s 平面的左半平面时，等同于系统的特征根全部具有负实部，系统才是输入输出稳定的。

[例 3] 设系统方程为： $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

试确定其外部稳定性。

BIBO稳定性，求传递函数

[解]

系统的传递函数为：

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -6 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{(s-2)}{(s-2)(s+3)} = \frac{1}{(s+3)}$$

极点位于s左半平面， $s = 2$ 的极点被对消掉了。

系统是有界输入有界输出稳定的。

1. 内部稳定性定义及判据（李氏第一法，间接法）

考虑输入量为零时的线性系统：$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\qquad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$

如果由非零初始状态$\boldsymbol{x}_0$引起的系统自由运动 $x(t)$ 有界，即：

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|\le k<\infty$$

则系统稳定。若 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=x_e$，则系统渐近稳定。

内部稳定性，又称为状态稳定性，是从状态空间描述的角度出发，考察的是系统零输入响应下的稳定性。

判据：线性连续定常系统内部渐进稳定的充要条件是：系统矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征值均具有负实部。等同于特征方程的根全部位于s平面的左半平面。

注：特征方程不等于传递函数

[例 4] 设系统方程为： $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

判断其内部稳定性。（与前面外部稳定性例子的系统相同）

[解]

求系统的特征方程：

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3) = 0$$

求得： $\lambda_1 = 2$， $\lambda_2 = -3$

系统不是内部稳定的。

2. 内部稳定性和外部稳定性的关系（SISO系统）

(1) 由于零极点对消的影响，可能会导致内部渐近稳定和外部稳定的不等价性。

(2) 如果系统是外部稳定的，则不一定是内部渐近稳定的。（有零、极点对消，消去的极点可能不在s的左半平面）

(3) 如果系统是内部渐近稳定的，则一定是外部稳定的。（系统矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值包含了传函的所有极点，包括对消掉的极点）

(4) 如果是外部稳定的，且是能控、能观测的，则一定是内部渐近稳定的。

说明：没有零极点对消

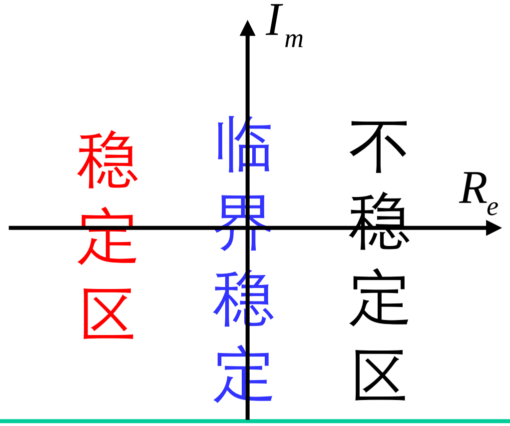
(5) 内部稳定性比外部稳定性严格。只用传递函数极点性质判定稳定性，不一定能真正反映系统稳定性能。外部稳定系统，可能由于内部状态的不稳定性使其无法正常工作。

对于SISO，且在“无零极点对消”情况下，经典控制理论中的外部稳定性与李雅普诺夫意义下内部稳定性的关系：

外部稳定性	稳定 （Re(s)<0）	临界稳定 （Re(s)=0，工程上不稳定）	不稳定 （Re(s)>0）
内部稳定性	李氏渐近稳定	李氏稳定，但非渐稳	不稳定

其中s：系统传函极点。

在s平面上的图解表示：



[小结]:

- ✓ BIBO稳定及其判据（传递函数极点全部在s左半平面）
- ✓ 内部稳定及其判据（渐近稳定：矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值全部具有负实部）
- ✓ 内部稳定和BIBO外部稳定之间的关系

四、李雅普诺夫稳定性第二法（直接法）

1. 二次型及其正定性
2. 李雅普诺夫稳定性第二法思路
3. 李雅普诺夫稳定性第二法定理（3个）

1. 二次型及其正定性

1、二次型函数$V(\boldsymbol{x})$:

$$V(\boldsymbol{x})=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

如果 $p_{ik}=p_{ki}$ ，则称 $\boldsymbol{P}$ 为实对称矩阵。

1）正定性：当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$ 时，才有$V(\boldsymbol{x})=0$；对任意 $\boldsymbol{x}\neq 0$，恒有$V(\boldsymbol{x})>0$，则 $V(\boldsymbol{x})$ 为正定。

2）负定性：当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$ 时，才有 $V(\boldsymbol{x})=0$；对任意 $\boldsymbol{x}\neq 0$，恒有 $V(\boldsymbol{x})<0$，则 $V(\boldsymbol{x})$ 为负定。

3）半正定和半负定

如果对任意 $\boldsymbol{x} \neq 0$ ，恒有 $V(\boldsymbol{x}) \geq 0$，则 $V(\boldsymbol{x})$ 为半正定。

如果对任意 $\boldsymbol{x} \neq 0$ ，恒有 $V(\boldsymbol{x}) \leq 0$，则 $V(\boldsymbol{x})$ 为半负定。

4）(半)正定和(半)负定间的关系

$V(\boldsymbol{x})$为正定，则 $-V(\boldsymbol{x})$为负定；

$V(\boldsymbol{x})$为半正定，则 $-V(\boldsymbol{x})$为半负定；

5）不定性

如果无论取多么小的零点的某个邻域，$V(\boldsymbol{x})$可为正值也可为负值，则$V(\boldsymbol{x})$为不定。

2、二次型函数$V(\boldsymbol{x})$正(负)定性判定：赛尔维斯特准则

1) 二次型 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为正定，或实对称矩阵$\boldsymbol{P}$为正定的充要条件是$\boldsymbol{P}$的所有主子行列式均为正，即：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

如果 $\Delta_1=p_{11}>0,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\Delta_n=|\boldsymbol{P}|>0$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正定，即$V(\boldsymbol{x})$正定。

2) 二次型 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为负定，或实对称阵 $\boldsymbol{P}$为负定的充要条件是$\boldsymbol{P}$ 的主子行列式满足：$\Delta_i<0$(i为奇数)，$\Delta_i>0$(i为偶数)

其中，i=1,2,$\cdots$, n 。

标量函数$V(\boldsymbol{x})$的正定性

函数	取值	正/负/不定?
$V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$	$\boldsymbol{x}\neq 0,\ V(\boldsymbol{x})>0$	
$V(\boldsymbol{x})=(x_1+x_2)^2$	$\boldsymbol{x}\neq 0,\ V(\boldsymbol{x})\geq 0$	
$V(\boldsymbol{x})=-x_1^2-x_2^2$	$\boldsymbol{x}\neq 0,\ V(\boldsymbol{x})<0$	
$V(\boldsymbol{x})=-(x_1+x_2)^2$	$\boldsymbol{x}\neq 0,\ V(\boldsymbol{x})\leq 0$	
$V(\boldsymbol{x})=x_1+x_2$	$\boldsymbol{x}\neq 0,\ V(\boldsymbol{x})\geq 0$或$\leq 0$	

[例 5]

试证明下列二次型是正定的。

$$V(x)=10x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-4x_1x_3$$

[解]：1）二次型 $V(x)$ 可写为

$$V(x)=x^TPx=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

2）利用赛尔维斯特准则，可得

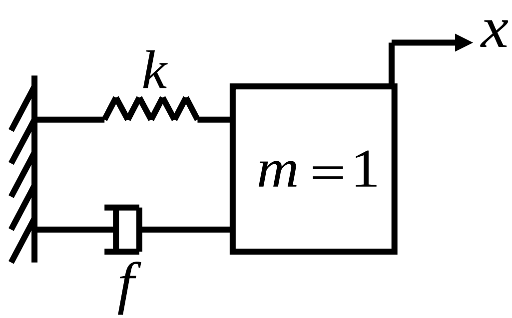
$$10>0,\quad \begin{vmatrix}10 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}>0$$

因为矩阵P的所有主子行列式均为正值，所以$V(x)$是正定的。

2. 李雅普诺夫第二法思路：直接法，用能量观点分析稳定性

如果系统的某个平衡状态是渐近稳定的，即 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_e$。那么随着系统的运动，其贮存的能量将随时间增长而衰减，直至趋于平衡状态而能量趋于极小值。

[举例说明] 弹簧－质量－阻尼系统。质量为单位质量。



系统的运动用微分方程描述如下：

$m\ddot{x}+f\dot{x}+kx=0$ 即： $\ddot{x}+f\dot{x}+kx=0$

选取状态变量：$x_1=x$，$x_2=\dot{x}$ 以弹簧伸长的长度（也即质量块的位移）和质量块的速度作为状态向量

则系统的状态方程为： $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - fx_2 \end{cases}$ ，即 $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -f \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$

则在任意时刻，系统的总能量E为：质量块动能＋弹簧位能

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

正的标量函数

可知： $E > 0$ 　当 $x > 0$ 时

$E = 0$ 　当 $x = 0$ 时

正定

能量随时间的变化率为：

$$\frac{d}{dt}E(x_1, x_2) = \frac{\partial E}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial E}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = kx_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$= kx_1x_2 + x_2(-kx_1 - fx_2) = -fx_2^2$$

所以，能量随时间的变化率为负数，即能量是衰减的。

说明:

1）实际系统很难找到一个统一的能量函数，即不能对任何系统都能找到能量函数来描述系统的能量关系。

2）李雅普诺夫引入了一个“广义能量”函数，它具备能量函数的基本属性—正的标量函数，它又能给出随着系统运动发生变化的信息，把这样的“广义能量”函数称为李雅普诺夫函数，它更具一般性。

3）第二法判稳的过程，只要找到一个正定的标量函数 $V(x)$，而 $\dot{V}(x)$ 是（半）负定的，这个系统就是稳定或渐近稳定的。而 $V(x)$ 就是系统的一个李雅普诺夫函数。

3. 李雅普诺夫第二法稳定性定理（3个）

定理1：系统状态方程为 $\dot{x} = f(x)$，且其平衡状态为 $x_e = 0$，如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数 $V(x)$，并且满足：

（1） $V(x)$ 为正定；

（2） $\dot{V}(x)$ 为负定；

则系统的平衡状态 $x_e = 0$ 是渐近稳定的，并称 $V(x)$ 是该系统的一个李雅普诺夫函数。进一步，如果还满足

（3） $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$

李雅普诺夫函数的定义

则平衡状态 $x_e = 0$ 是大范围渐近稳定的。

条件（1）保证了 $V(x)$ 具备“广义能量”函数的特性。

条件（2）表明该“能量”函数随着系统的运动不断衰减。

条件（3）表示了满足渐近稳定的条件可扩展至整个状态空间。

[例 7] 某非线性系统方程为：$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$

$x_e = 0$ 是其唯一的平衡状态，试确定平衡状态的稳定性。

首先要算出平衡状态点！！！

[解]： 1）选取正定标量函数

选 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ， 则 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 正定

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1\left[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)\right] + 2x_2\left[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\right]$$

$$= -2(x_1^2 + x_2^2)^2 \quad \text{负定}$$

由定理1可知，系统在原点处的平衡状态是渐近稳定的。同时，V(x)是系统的一个李雅普诺夫函数。

2）当 $\|x\| \to \infty$， 即 $(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$ ， 得 $V(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \infty$

则在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

问题： $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是负定难于满足，能不能用半负定代替?

定理2：设系统的状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$

$\boldsymbol{x}_e = 0$ 为其唯一的平衡状态， 如果有连续一阶偏导数的标量函数 $V(\boldsymbol{x})$ 存在，并且满足：

1） $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的。

2） $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是半负定的。

3） 对任意初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) \neq 0$，当 $t \geq t_0$，除了$\boldsymbol{x}(t) = 0$外，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 不恒等于零。

则系统在原点处的平衡状态是渐近稳定的。

4）如果 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} V(\boldsymbol{x}) = \infty$，原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

说明：$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 在非零点状态轨线上不恒等于0和恒等于0。

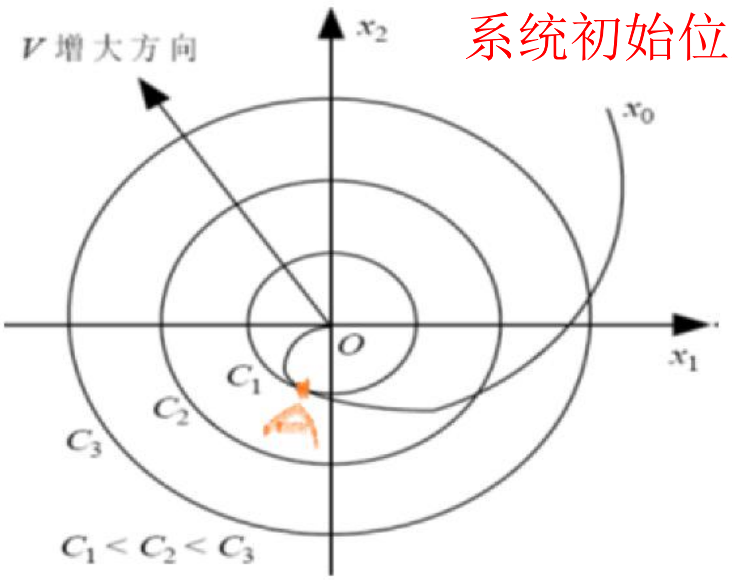
不恒等于0，意味着系统向着“能量”越来越小的方向运动过程中，仅在某个时刻与特定的等“能量”曲面 $V(\boldsymbol{x})=C$ 相切，但通过切点后并不停留在该等“能量”曲面，而是继续趋向于最小“能量”的平衡点，即该平衡状态仍然是渐近稳定的；

几何解释：

$$V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2=C$$

表示状态 x 到原点的距离，则 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 幅值表示状态x 沿系统轨线曲线趋向于原点的速度。

系统初始位置



每个圆：等能量曲面

恒等于0，意味着系统向着“能量”越来越小的方向运动的过程中，与特定的等“能量”曲面相切，并且不再离开该等“能量”曲面，形成类似于**等幅震荡**的运动状态，显然，此时系统的运动具有有界性，但不具有对于平衡状态的渐近性，因此，此时的平衡状态是李氏稳定的，但不是渐近稳定的。

注：定理2中，如果满足条件1和2，不满足条件3，则系统在平衡点处是李雅普诺夫意义下稳定的，而不是渐近稳定的。

[例9] 设系统方程为: $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2\end{cases}$ 试确定其平衡状态的稳定性。

[解]: 求平衡状态

令 $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$，得 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 是系统唯一的平衡状态。

也可以: $\boldsymbol{A}$的行列式为1，非奇异，所以原点是唯一平衡状态。

（1）选二次型函数: $V(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 > 0$ 正定

则:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 4x_1(x_2) + 2x_2(-x_1 - x_2) \\ &= 4x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ &= 2x_1x_2 - 2x_2^2 = 2x_2(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

不定

正定、半正定、负定均可以判断，但是：不定无法判断

根据李雅普诺夫第二法的相关定理，不能作出关于平衡点稳定性能的判断。

表明 $V(\boldsymbol{x})$ 没选好。继续找…

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

（2）选二次型函数：$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ ， 正定

则： $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2) = -2x_2^2 \le 0$ 半负定

由上述定理2，还应考察 $\boldsymbol{x} \ne 0$ 时 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是否恒为0的情况：

如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2x_2^2 \equiv 0$，则 $x_2 \equiv 0$，同时 $\dot{x}_2=0$，代入系统方程可得 $\boldsymbol{x}=0$ 。也就是说，只有在 $\boldsymbol{x} = 0$ 时才有 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ 。

由定理2可知，系统在原点平衡状态处是渐近稳定的。

此时，$V(\boldsymbol{x})$ 是系统的一个李雅普诺夫函数。

又 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} V(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} (x_1^2 + x_2^2) = \infty$，故平衡状态 $x_e = 0$ 为大范围渐近稳定。

（3）选二次型函数：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$V(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + 2x_1{}^2 + x_2{}^2 > 0 \qquad \text{正定}$$

则：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 4x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2(x_1 + x_2)(x_2 - x_1 - x_2) + 4x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2) \qquad \text{负定}$$

$$= -2(x_1{}^2 + x_2{}^2) < 0$$

由定理1可知，平衡状态 $x_e = 0$ 为渐近稳定。

又 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} V(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} [(x_1 + x_2)^2 + 2x_1{}^2 + x_2{}^2] = \infty$，故平衡状态 $x_e = 0$ 为大范围渐近稳定。此时，$V(\boldsymbol{x})$ 也是系统的一个李雅普诺夫函数。

例 9 分析系统的稳定性

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - (1 + x_2)^2 x_2$$

解　系统的平衡状态为$x_1 = 0, x_2 = 0$ 选取 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

（1）$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$ 是正定的；

（2）$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [2x_1 \quad 2x_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - (1+x_2)^2 x_2 \end{bmatrix} = -2x_2^2(1+x_2)^2$$

是半负定的。

（3）若 $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t \equiv 0$，$-2x_2^2(1+x_2)^2 \equiv 0 \Rightarrow x_2 \equiv 0$或 $x_2 \equiv -1$

若 $x_2 \equiv 0$，则由第2个状态方程得 $x_1 \equiv 0$

若$x_2 \equiv -1$，则由第2个状态方程得$x_1 \equiv 0$。但

$x_1 \equiv 0$，$x_2 \equiv -1$不满足第1个方程，故不是系统轨线。

Means： 在“运动轨线”的非零处，V(x)的导数不恒为0

因此，根据定理2，系统是大范围渐近稳定的。

解法2：针对以上例子，对

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2]$$

由于

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t &= (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -(x_1^2 + x_2^2) < 0 \end{aligned}$$

故该函数是系统的一个李雅普诺夫函数,并满足定理1的判稳条件。

以上表明：对于一个系统而言，李雅普诺夫函数不是唯一的，构造能判稳的能量函数缺乏一般性的规律。

定理3：设系统状态方程为：

$$\dot{x} = f(x)$$

$x_e = 0$ 为其平衡状态。如果存在一个标量函数 $V(x)$ ，它具有连续的一阶偏函数，且满足下列条件：

充分条件

$V(x)$ 在原点的某一邻域内是正定的；

$\dot{V}(x)$ 在同样的邻域内是正定的，

则系统在原点处的平衡状态是不稳定的。

[例 10] 设系统方程为：$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$

试确定其平衡状态的稳定性。

[解]：1）平衡状态

令 $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$，得 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 是系统唯一的平衡状态。

2）选李雅普诺夫函数

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ 正定

$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2$ 正定

由定理3可知，系统在原点平衡状态处是不稳定的。

二、李雅普诺夫函数说明：

1）李雅普诺夫函数是正定标量函数，一阶导数为(半)负定；

2）对于给定系统，如果存在李雅普诺夫函数，它不是唯一的，它的最简形式是二次型 $V(x)=x^T Px$ ，P是正定实对称方阵。用第二法判稳时，找到一个李雅普诺夫函数就可以。

3）上述定理除了明确指出稳定性的大范围特性外，都只表示了平衡状态附近某个邻域内的稳定性能，即局部稳定性能。

4）上述定理是充分条件，判稳过程是寻找李雅普诺夫函数，如果没找到，不能对系统的稳定性作出否定性结论。

5）构造李雅普诺夫函数需要很多技巧，使用起来很不方便。需要进一步探索构造李雅普诺夫函数的一般方法。

[小结]:

- ✓ 李雅普诺夫第二法判稳思路：寻找李雅普诺夫函数。
- ✓ 李雅普诺夫第二法稳定性定理：

1）稳定性定理1： $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是负定的。

2）稳定性定理2： $V(\boldsymbol{x})$ 是正定的，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$是半负定的，并在非零处不恒为0。

3）不稳定性定理3：$V(\boldsymbol{x})$ 是正定的，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是正定的。

4）这三个定理的条件仅是充分条件。

五、线性定常连续系统的李雅普诺夫稳定性分析

目的：用李雅普诺夫第二法分析线性定常系统 $\dot{x} = Ax$ 的稳定性

回顾：选择正定二次型函数 $V(x) = x^T P x$ 为李雅普诺夫函数。

$$\dot{V}(x) = (x^T P x)' = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P A x$$
$$= x^T (A^T P + PA) x$$

李雅普诺夫方程

定义 $A^T P + PA = -Q$， 则有 $\dot{V}(x) = -x^T Q x$

◆ 给定正定阵 P，若依照李雅普诺夫方程解出的 Q 正定，则渐近稳定。

启发：给定正定阵 Q，若基于李雅普诺夫方程解算出一个正定的 P 阵，能否给出渐稳的结论?

定理4：对于线性连续定常系统：$\dot{x} = Ax$

在平衡状态 $x_e = 0$ 处渐近稳定的充要条件是：给定任意一个正定实对称矩阵 Q，通过 $A^T P + PA = -Q$ 唯一解算出的 P 是正定实对称矩阵。

(1) 先证渐近稳定的充分性条件

即证：给定任意的实对称正定矩阵Q，若基于

$$A^T P + PA = -Q$$

解算得到的矩阵 P是实对称正定矩阵，则平衡点 $x_e = 0$ 一定是渐近稳定的。

证明：

令 $V(x) = x^T P x$。当P 为正定实对称矩阵时，此时$V(x)$ 为正定函数，同时其沿轨线对时间t的导数为：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (x^T P x)' \\ &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T P x + x^T P A x \\ &= x^T (A^T P + PA) x \\ &= -x^T Q x\end{aligned}$$

负定，所以在平衡点处渐近稳定。

(2) 再证渐进稳定的必要性

即证明：若系统在 $x_e = 0$ 处是渐近稳定的，则对任意给定的正定实对称矩阵 Q，则基于李亚谱诺夫方程

$$A^T P + PA = -Q$$

解算出的P是正定实对称矩阵。

（事实上，李亚谱诺夫方程的解唯一）

①证明唯一性：若有两个矩阵P_1和P_2满足： $A^T P + PA = -Q$

即：
$$A^T P_1 + P_1 A = A^T P_2 + P_2 A$$

则有：
$$A^T (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A = 0$$

将上式左乘 $e^{A^T t}$，右乘 e^{At}，可得：

$$e^{A^T t}\left\{A^T\left(P_1-P_2\right)+\left(P_1-P_2\right)A\right\}e^{At}=0$$

即：$$\frac{d}{dt}\left\{e^{A^T t}\left(P_1-P_2\right)e^{At}\right\}=0$$ 因为：$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)=e^{At}A=Ae^{At}$

说明 $e^{A^T t}\left(P_1-P_2\right)e^{At}$ 是常数矩阵，与t无关。显然

$$e^{A^T t}\left(P_1-P_2\right)e^{At}\Big|_{t=0}=P_1-P_2$$

系统渐近稳定时 $\lim\limits_{t\to\infty}e^{A^T t}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{At}=0$，所以 $e^{A^T t}\left(P_1-P_2\right)e^{At}\Big|_{t=\infty}=0$

从而有： $P_1-P_2=0$，即 $P_1=P_2$

证毕！

② 证明存在性：对任意给定的正定实对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$，构造实数矩阵 $\boldsymbol{P}$ 如下

$$\boldsymbol{P}=\int_0^{\infty} e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t$$

将 $\boldsymbol{P}$ 代入 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$，有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}^T\left(\int_0^{\infty} e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}dt\right)+\left(\int_0^{\infty} e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}dt\right)\boldsymbol{A}\\&=\int_0^{\infty}\left(\boldsymbol{A}^T e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}+e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}\right)dt\\&=\int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\left(e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\right)dt\\&=e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\Big|_0^{\infty}=-\boldsymbol{Q}\end{aligned}$$

满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$

其中，利用了：

$\frac{d}{dt}\left(e^{\boldsymbol{A}t}\right)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}$ ； 当系统渐近稳定时， $\lim\limits_{t\to\infty}e^{\boldsymbol{A}^T t}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{\boldsymbol{A}t}=0$ 。

③证明对称正定性：

$$\boldsymbol{P}^T=\left(\int_0^{\infty}e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}dt\right)^T=\int_0^{\infty}\left(e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\right)^T dt=\int_0^{\infty}e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}dt=\boldsymbol{P}$$ 对称阵

二次型函数： $\left(e^{\boldsymbol{A}t}\right)^T=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k t^k\right)^T=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\boldsymbol{A}^k\right)^T t^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\boldsymbol{A}^T\right)^k t^k=e^{\boldsymbol{A}^T t}$

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\int_0^{\infty}\boldsymbol{x}^T e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}dt=\int_0^{\infty}\left(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}\right)^T\boldsymbol{Q}\left(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}\right)dt\geq 0$$

只有当$\boldsymbol{x}$=0时，上式等号成立（思考为什么？）。所以，$\boldsymbol{P}$为正定阵。

说明:

1）上述判据给出了一种判断线性连续定常系统渐近稳定性的一般方法，该方法:

① 不需寻找李雅普诺夫函数;

② 不需求解系统矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值;

③ 只需解一个矩阵代数方程即可，计算简便。该矩阵方程又称为李雅普诺夫（矩阵代数）方程。

2）因为正定实对称矩阵$\boldsymbol{Q}$的形式可任意给定，且最终判断结果和$\boldsymbol{Q}$的不同形式选择无关，所以通常取$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$。

3）该判据的条件是充分且必要的。

思考：如果求得的$\boldsymbol{P}$阵不是正定的（比如负定或其它），该系统….?

定理4扩展：为计算简单，有时$\boldsymbol{Q}$可取作如下半正定矩阵：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

此时判稳需追加条件：

除了在 $\boldsymbol{x}=0$ 时有 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ 外，其它状态序列上 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 不恒等于零。

[例11] 系统如下，判断其在平衡状态$\boldsymbol{x}_e=0$ 处的稳定性。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

[解]: 1）选标量函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，其中对称阵$\boldsymbol{P}$由下式确定:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$$ 选择 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$

2）判断$\boldsymbol{P}$的符号性

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

解得: $$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}5/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

另一种方法$\boldsymbol{P}$的解为: $\boldsymbol{P}=\int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}^Tt}\boldsymbol{Q}e^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t$

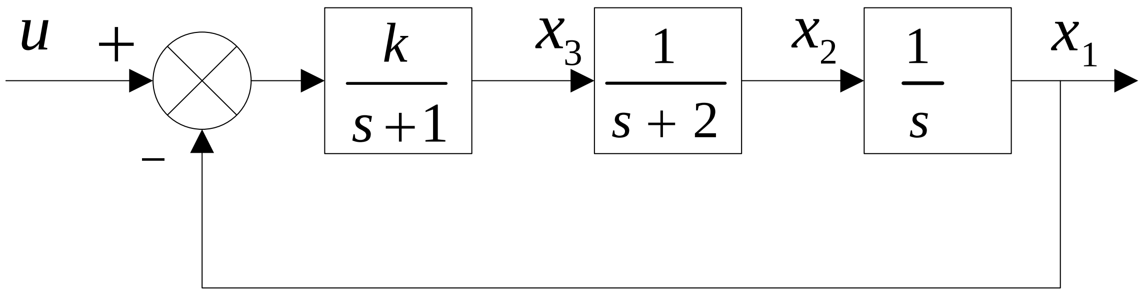
$$\Delta_1=5/4>0,\quad \Delta_2=|\boldsymbol{P}|=\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=1/4>0$$

所以$\boldsymbol{P}$正定，系统是渐近稳定的。求解完毕!

验证一下: $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\frac{1}{4}(5x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)=x_1^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2$ 正定

$\dot{V}(\boldsymbol{x})=-(x_1^2+x_2^2)$ 负定

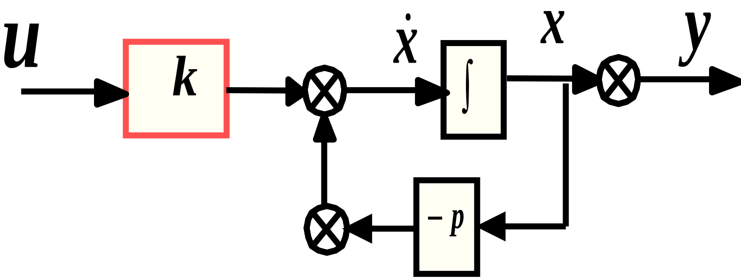
[例12] 用李雅普诺夫第二法，求使下列系统渐近稳定的k值范 围，其中$k\neq 0$ 。



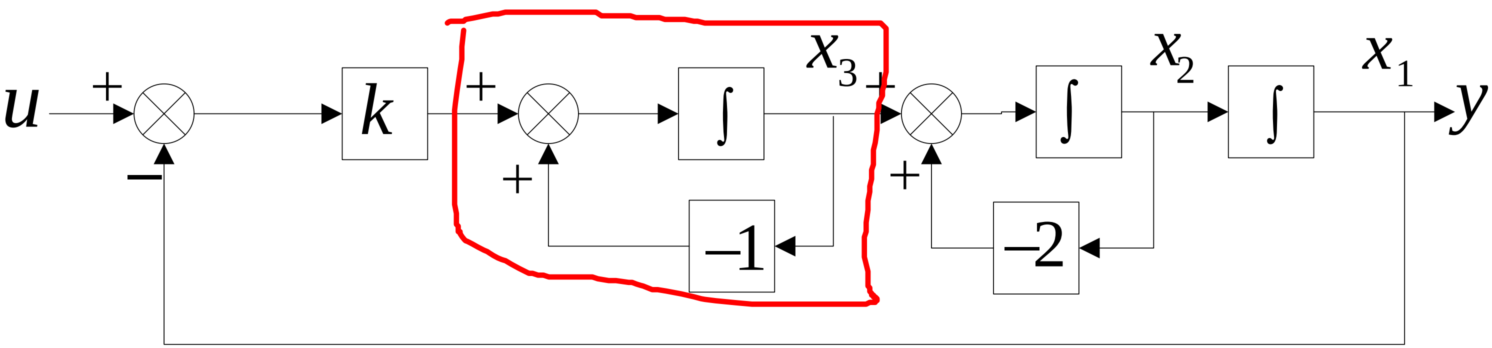
[解]:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{s+p}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-px+ku\\ y=x\end{cases}$$



1、对结构图进行变换，然后写出系统的状态方程



所以系统状态方程为:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&1\\-k&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\k\end{bmatrix}u \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&1\\-k&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

2、用李雅普诺夫第二法判稳（只考虑自由运动，故令u=0）

$|\boldsymbol{A}|=-k\neq 0$，所以原点是其唯一平衡状态

1）$\boldsymbol{Q}$ 能不能取做半正定?

如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=-x_3^2\equiv 0$ ，则 $x_3\equiv 0$，同时 $\dot{x}_3$=0，代入系统状态方程可得 $\boldsymbol{x}$=0 。也就是说，只有在 $\boldsymbol{x}=0$ 时才有 $\dot{V}(\boldsymbol{x})\equiv 0$。

所以Q可以取半正定：$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

2）由 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$ 可得：

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&1\\-k&0&-1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{12}&p_{22}&p_{23}\\p_{13}&p_{23}&p_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\\boxed{p_{12}}&p_{22}&p_{23}\\\boxed{p_{13}}&\boxed{p_{23}}&p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&1\\-k&0&-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

注意：***P*** 为正定实对称矩阵。

解得：

$$P=\begin{bmatrix}\dfrac{k^2+12k}{12-2k}&\dfrac{6k}{12-2k}&0\\\dfrac{6k}{12-2k}&\dfrac{3k}{12-2k}&\dfrac{k}{12-2k}\\0&\dfrac{k}{12-2k}&\dfrac{6}{12-2k}\end{bmatrix}$$

根据赛尔维斯特法则：如果 ***P*** 正定，则12-2k>0，且k>0

所以系统渐近稳定的k值范围为： 0<k<6

[例13] 某系统状态方程为: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$

试判断其平衡状态是否是渐近稳定的。

[解]: 1）平衡状态

令 $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$ ，得 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 是系统唯一的平衡状态。

2）选标量函数 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$ ，其中对称阵$\boldsymbol{P}$由下式确定：

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q} \qquad \text{选择 } \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$$

3）判断$\boldsymbol{P}$的正定性。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解得：
$$P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

```
A=[1,1;-1,1]
Q=[1,0;0,1];
P=lyap(A',Q)
p1=det(P(1,1))
p2=det(P)
```

可知： $\Delta_1=-\frac{1}{2}<0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}>0$

所以$\boldsymbol{P}$负定，原点平衡状态不是渐近稳定的。 解题结束！

拓展一下：此时，平衡状态到底是稳定的，还是不稳定的呢？

逆向思考，由于$\boldsymbol{P}$负定，则-$\boldsymbol{P}$正定，选二次型函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T(-\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}$ 正定，由 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$ 可得 $\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{I}$ 负定，所以 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 正定。由上一节定理3可知，平衡状态是不稳定的。

$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T(-\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)$ 正定； $\dot{V}(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$ 正定

[小结]:

✓ 李雅普诺夫第二法判稳:

注意: $\boldsymbol{Q}$ 取正定; 若$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 处不恒为0, $\boldsymbol{Q}$可取半正定。

✓ 李雅普诺夫第二法判稳过程:

1）写出状态空间描述，并求取平衡状态;

2）选定正定或半正定 $\boldsymbol{Q}$ 阵。

正定: $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$　　半正定: $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3）由 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$得到实对称阵$\boldsymbol{P}$，判断其正定性。