南卷汇

2016年大一下离散数学期末试题

南洋书院学生会

制作

2009 年离散数学(A 卷)

一、请判断下述诸命题的正确性

1. $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2. $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

3. $(A\oplus B)\oplus B=A$

4.如果 R_1 和 R_2 是 A 上的对称关系，那么 $R_1\setminus R_2$ 一定是 A 上的对称关系。

~~5.如果 R 是 A 上的传递关系，那么 $R\circ R$ 一定是 A 上的传递关系~~。

~~6.如果 f 是单射函数，并且是 $g\circ f$ 单射函数，那么 g 一定是单射函数~~。

7.设 A,B 是两个可数集合，则 $A\cap B$ 一定是可数集合。
8.在阶数大于 1 的群中，除幺元外，没有其他的幂等元。

9.设是环，当 $(N_m,+_m,\times_m)$ 为素数时，$(N_m,+_m,\times_m)$ 是越。

10.设 $(L,\preceq,*,\oplus)$ 是格，则 $\forall a,b\in L$，总 $a*b=a$ 有或 $a\oplus b=b$。

11.有界格一定是有限格。
12.在有界格的分配格中，每个元素的补元都是唯一存在的，因而有界的分配格是布尔代数。
13.求最短路的迪杰克斯算法是沿着最短路径向前推进的。
14.强连通图一定是有向的哈密顿图。
15.至少有两个结点的树一定是二分图。

二、设 R_1 和 R_2 分别是非空集合 A 和 B 上的半序，定义 $A\times B$ 上的关系 R_3 如下：

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in R_3 \Leftrightarrow (x_1,x_1)\in R_1\wedge(y_1,y_2)\in R_2$$

(1) 证明：R_3 是 $A\times B$ 上的半序关系。

(2) 设 $A=\{1,2,4,8\}$，$B=\{1,2,3,6\}$，R_1 是 A 上的整除关系，R_2 是 B 上的整除关系，请画出 R_3 的哈斯图。

(3) 给定的集合 $\{(2,2),(2,3),(4,2),(4,3)\}$，请判断其最大值、最小值、极大元、极小元，上确界、下确界是否存在。如存在，请具体指出。

三、设 $(G,*)$ 是交换群，且 $|G|=n$。设 k 是某一正整数，定义函数 f：$G\to G$ 如下：

$$f(x)=x^k\ (\forall x\in G)$$

证明：如果$(k,n)=1$，则 f 是从$(G,*)$到$(G,*)$的自同构函数。

提示：$(k,n)=1$当且仅当同余方程$k\cdot u\equiv 1(\bmod n)$有唯一的解$u$(在$\bmod n$的意义下)。

四、 已知$(N_{12},+_{12},\times_{12})$是一环。$[3]_{12},[9]_{12}$是$N_{12}$中的两个元素，设

$$S=\{u\mid u\in N_{12}\wedge[3]_{12}\times_{12}u=[9]_{12}\times_{12}u\}。$$

那么

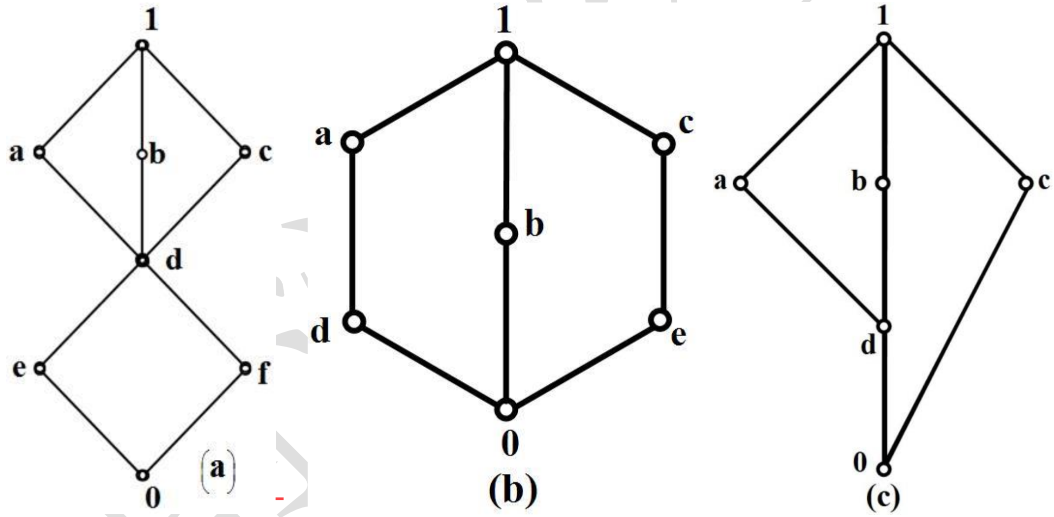
(1) 证明：$(S,+_{12},\times_{12})$是$(N_{12},+_{12},\times_{12})$的一个子环。

(2) 求$S=$

(3) $(S,+_{12},\times_{12})$是无零因子环吗？为什么？

(4) $(S,+_{12},\times_{12})$是域吗？为什么？

~~**五、** 设格L_1，L_2，L_3如下图(a)，(b)，(c)所示，试判别：~~



~~(1) L_1,L_2,L_3是否是分配格？为什么？~~

~~(2) L_1,L_2,L_3是否是有界格？为什么？~~

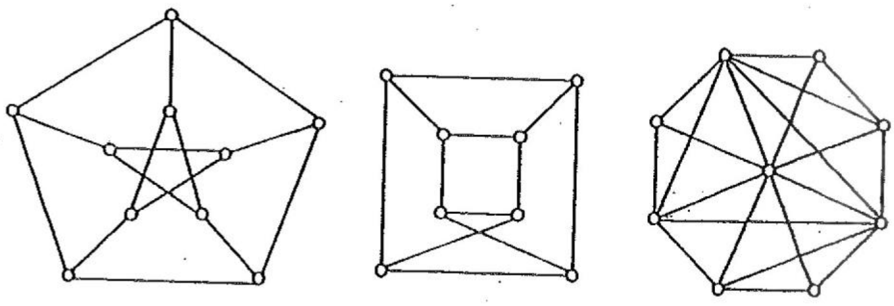
~~(3) L_1,L_2,L_3是否有补格？为什么？~~

~~(4) L_3是否是L_1的子格？为什么？~~

六、 给定图(a),(b),(c),画图示意：

(1) 彼得森图(a)不是欧拉图。至少增加几条边，才能使它成为一个欧拉图？

(2) 彼得森图不是哈密顿图，至少增加几条边，才能使它成为一个哈密顿图？
(3) 图(b)是否是平面图？为什么？
(4) 图(c)是否是平面图？为什么？



(a)　　(b)　　(c)

七、 设 $G=(V,E)$ 是一无向的简单图，$|V|=10$。

(1) 如果 $\deg(v_i)(i=1\sim10)$ 均是偶数，并且 $\sum_{i=1}^{10}\deg(v_i)=74$，那么 G 是欧拉图吗？为什么？

(2) 如果 $\sum_{i=1}^{10}\deg(v_i)=78$，那么 G 是哈密顿图吗？为什么？

2009 年期末（B 卷）

一、请判断下述诸命题的正确性

1、$(A\setminus B)\times(C\setminus D)=(A\times C)\setminus(B\times D)$

2、$(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

3、$(A\oplus B)\oplus A=B$

4、如果 R_1 和 R_2 是 A 上的对称关系，那么 $R_1\cup R_2$ 一定是 A 上的对称关系

~~5、如果 R 是 A 上的反对称关系，那么 $R\circ R$ 一定是 A 上的反对称关系~~

~~6、如果 g 是单射函数，并且 $g\circ f$ 是单射函数，那么 f 一定是单射函数~~

7、设 A，B 是两个可数集合，则 $A\cap B$ 一定是可数集合

8、设 $\langle S,*\rangle$ 是一个含幺半群，如果运算 $*$ 满足消去律，那么 $\langle S,*\rangle$ 是一个群

9、设 $(N_m,+_m,\times_m)$ 是环，当 m 为素数时，$(N_m,+_m,\times_m)$ 为除环

10、设 $(L,\preceq,*,\oplus)$ 是格，则 $\forall a,b\in L$ 总有 $a*b=a$ 当且仅当 $a\oplus b=b$

11、有界格一定是有限格
12、在有界的分配格中，每个元素的补元都是惟一存在的；因而有界的分配格是布尔代数

13、设 $G=(V,E)$ 是二分图，存在着 V 上的一个划分 $\{V_1,V_2\}$ ，如果 $|V_1|=|V_2|$ ，那么 G 中一定有 Hamiliton 路
14、强连通图一定是有向的欧拉图
15、至少有两个结点的树一定是二分图

二、设集合 A 是非空集合，R_1 和 R_2 是 A 上的二元关系，是自反的和传递的，并且 R_2 满足：$(x,y)\in R_2 \Leftrightarrow (x,y)\in R_1 \Lambda (y,x)\in R_1$

~~(1)证明：R_2 是 A 上的等价关系。~~

(2) $R_1 \cup R_2$ 是 A 上的半序关系吗？请说明理由。

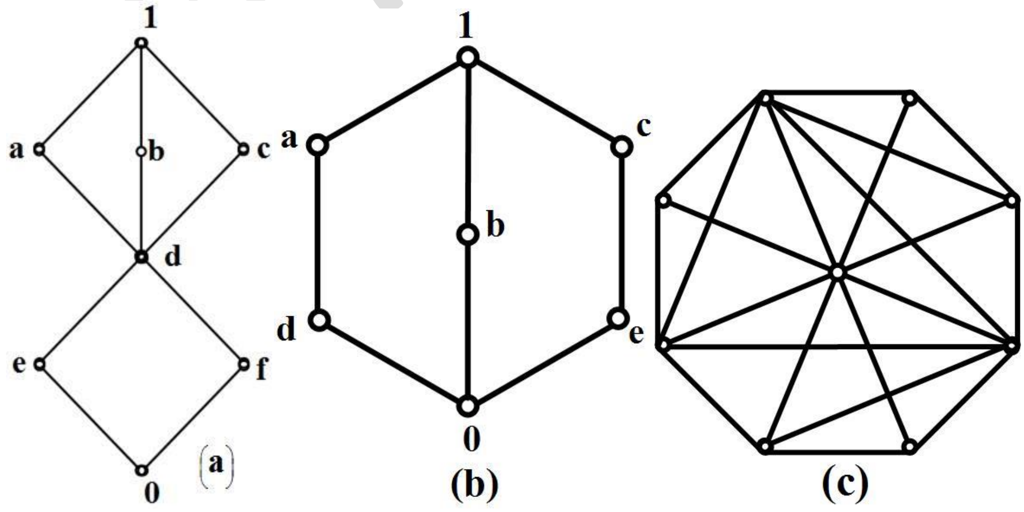
三、设是 $\langle G,*\rangle$ 群，$\forall a\in G$ 定义 $f_a: G\to G, f_a(x)=a*x, \forall x\in G, S=\{f_a \mid a\in G\}$

(1)证明是 $\langle S,\circ\rangle$ 群，其中 $\circ$ 是函数的复合。

(2)存在从 $\langle G,*\rangle$ 到 $\langle S,\circ\rangle$ 的同构函数吗?请给出理由。

四、设 $<R,\oplus,\otimes>$ 是含幺环，$u\in R$，u 有右逆元 v，下面几个说法是等价的：
①u 的右逆元多于一个；
②u 是不可逆的；
③u 是左零因子。

五、设格 L_1,L_2 如右图(a)，(b)所示，试判别：



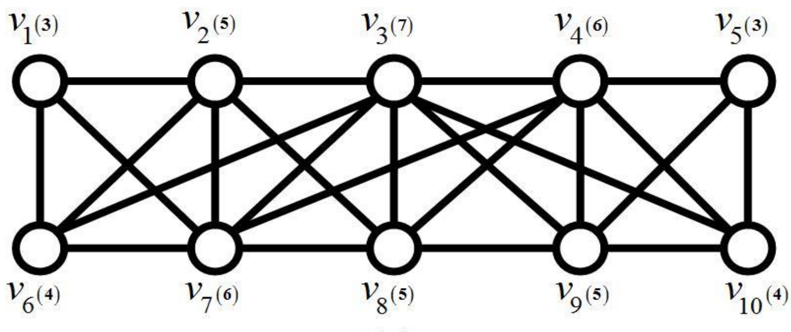
(1) L_1，L_2 是否是分配格？为什么？

(2) L_1，L_2 是否为有界格？为什么？

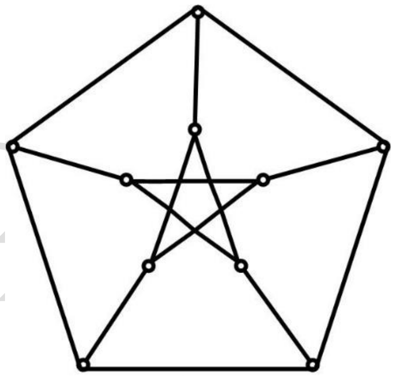
(3) L_1，L_2 是否为有补格？为什么？

六、 给定图(a),(b)，如下图所示：

(1)图(a)是否为平面图？为什么？
(2)图(b)不是欧拉图，至少增加几条边，才能使它成为一个欧拉图？

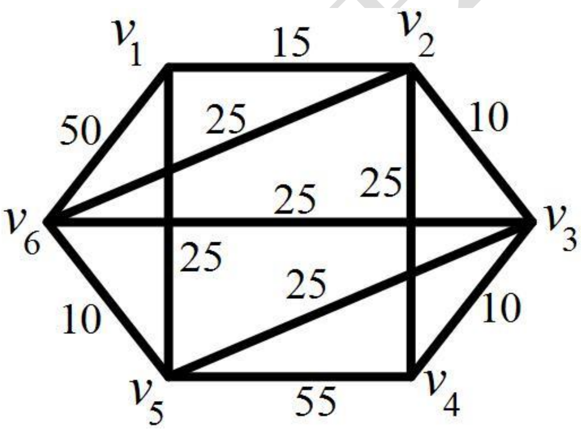


(a)


(b)

七、 带权图(网路拓扑图)如下图所示

(1)请用 *Dljkstra* 算法求出从结点到的所有最短路
(2)给出此图所有最优树(最小生成树)



离散数学(B 卷)答案

一、

题号	1	2	3	4	5	6	7	8

结论	F	T	T	T	F	T	F	F
题号 结论	9 T	10 T	11 F	12 F	13 F	14 F	15 T	

二、(1) (*a*) R_2 是自反的

对于任何 $a\in A$，由 R_1 及 R_2 的自反性，可得 $(a,a)\in R_1$ 且 $(b,b)\in R_2$ ，因此由 R_2 的定义，可知 $(a,b)\in R_2$。

(b) R_2 是反对称的

对于任何 $(a,b)\in R_2$，由 R_2 的定义，可得 $(a,b)\in R_1$ 且 $(b,a)\in R_1$，由 R_2 的定义，可知 $(b,a)\in R_2$

(c) R_2 是传递的

对于任何 $(a,b)\in R_2$ 及 $(b,c)\in R_2$，由 R_2 的定义，可得 $(a,b)\in R_1$ 且 $(b,a)\in R_1$ 及 $(b,c)\in R_1$ 且 $(c,b)\in R_1$，利用 R_{12} 的传递性，可得 $(a,\mathrm{c})\in R_1$ 及 $(\mathrm{c},a)\in R_1$。再次利用 R_2 的定义，可得 $(a,\mathrm{c})\in R_2$

综上，R_2 可知 R_2 是 *A* 上的等价关系

(2) $R_1\cup R_2$ 不是 *A* 上的半序关系。R_1，R_2 是 *A* 上的自反关系，$R_1\cup R_2$ 也是 *A* 上的自反关系，$R_1\cup R_2$ 的反对称性无法判定，$R_1\cup R_2$ 不是 *A* 上的传递关系。

三、证明：

(1) $\forall fa\in S$，fa 是从 G 到 G 的函数，$\forall fa、fb\in S$，$fa\circ fb=a*(b*x)\in S$ 并且函数的复合满足结合律，$<S,\circ>$ 是半群，设 $fe(x)=e*x$，$\forall x\in G$，

$fe\circ fa(x)=e*(a*x)=a*x=fa\circ fe(x)$，$fe$ 是关于 S 的幺元，

$fa\circ fa^{-1}(x)=a*(a^{-1}*x)=x=fe(x)=fa^{-1}(x)\circ fa$，$fa^{-1}$ 是 fa 的逆元。

综上所述，$<S,\circ>$ 是群。

(2) 存在从 $<G,*>$ 到 $<S,\circ>$ 的同构函数 $h:G\to S$，

$\forall a,b\in G \quad h(a)=f_a(x)=a*x \qquad \forall x\in G$

$(a)\,h$ 是双射函数

$\forall a,b\in G$，若 $h(a)=h(b)$，有 $f_a(x)=f_b(x)$，即 $a*x=b*x$， $\forall x\in G$

有 $a=b$， h 是单射的。

$\forall f_a\in S$，有 $h(a)=f_a$， h 是满射的。

(b) $\forall a,b\in G$， $h(a*b)=(a*b)*x=f_a\circ f_b(x)=h(a)\circ h(b)$，满足同态公式，

h 是 $<G,*>$ 到 $<S,\circ>$ 的同构函数。

四、证明：①⇒② 设 v，w 是两个不同的右逆元，$v\neq w$，$u\otimes v=e$，$u\otimes w=e$，

假设 u 可逆， u^{-1} 为它的逆元，

则 $u^{-1}\otimes(u\otimes v)=u^{-1}\otimes(u\otimes w)$，即有 $v=w$，矛盾，故 u 是不可逆的。

②⇒③ 设 u 有右逆元 v， $u\otimes v=e$， $u\neq 0$， $v\neq 0$，

u 不可逆，故 $v\otimes u\neq e$， $(v\otimes u)-e\neq 0$，

$u\otimes((v\otimes u)-e)=\left(u\otimes v\otimes u\right)-u=u-u=0$ ， u 是左零因子。

③⇒① u 是左零因子，故存在 $a\in R$， $a\neq 0$，使 $u\otimes a=0$，

设 u 有右逆元 v， $w=v\oplus a$，

$u\otimes w=u\otimes\left(v\oplus a\right)=\left(u\otimes v\right)\oplus\left(u\otimes a\right)=e\oplus 0=e$ ，

w 也是 u 的右逆元，并且 $v\neq w$。

五、（1）L_1,L_2 都不是分配格

因为 L_1 含有与钻石格同构的子格，L_2 含有与五角格同构的子格，故它们都不是分配格

（2）L_1,L_2 都是有界格

因为它们都有最大元 1，最小元 0，故它们都是有界格。

（3）L_1 不是有补格， L_2 是有补格

因为 L_1 的补元情况：

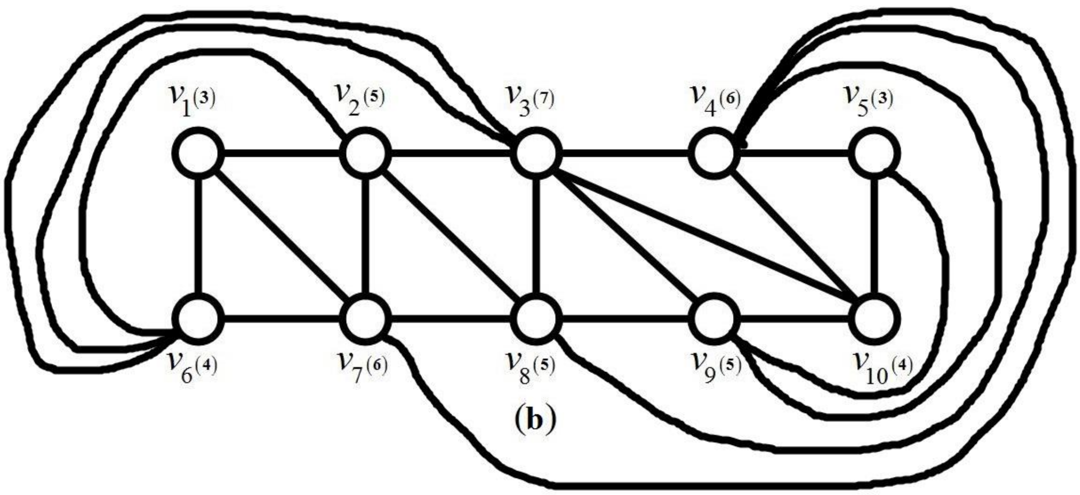
元素	0	1	a	b	c	d	e	f
补元	1	0	无	无	无	无	无	无

因为 L_2 补元的情况：

元素	0	1	a	b	c	d	e
补元	1	0	b,c,e	a,c,d,e	a,b,d	b,c,e	a,b,d

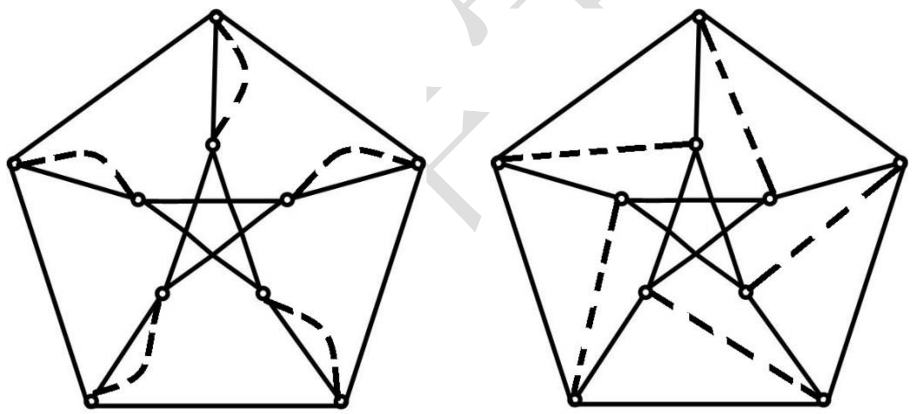
故L_1不是有补格，L_2是有补格

六、解：(1)图(a)是平面图，对图(a)采用拉边法可得下图：



(b)

(2)给彼得森图(a)至少增加 5 条边，才能使它成为一个欧拉图。



或者

七、(1)略

(2)4 棵