2021—2022 学年第一学期　期中考试模拟试题

答　案　解　析

《高等数学》　(共 8 页)

****

命题：大数据 001 张锦羽　计算机 006 唐培元　力学理 81 叶义晨　人工智能 001 刘海若

排版：金禾 001 聂博佩　越杰 91 王彦博　自动化 94 童格

****

一. 单项选择题

1.　C

解析：$e^{\tan x}-e^{x}=e^{x}(e^{\tan x-x}-1)\sim\tan x-x\quad(x\to 0)$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

所以 $e^{\tan x}-e^{x}$ 是 x^3 的同阶无穷小

2.　C

解析：对于 C，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$，所以 y_n 为无穷小

取数列 $x_n=\begin{cases}0 & ,n=2k+1\\ 1 & ,n=2k\end{cases}\quad y_n=\begin{cases}n & ,n=2k+1\\ 0 & ,n=2k\end{cases}$

满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ 代入 A、B、D 知，A、B、D 错误

3.　D

解析：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{x^2}=2$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 且 $\exists\,\delta>0,x\in\mathring{U}(0,\delta),f(x)>0$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一邻域连续

故 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

所以 $\exists\,\delta>0,x\in\mathring{U}(0,\delta),f(x)>f(0)$

综上所述，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

4. C

解析：因为当 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$ 时，$\lim \dfrac{1}{x_n}\sin\dfrac{1}{x_n}=\infty$

当 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}(n=1,2,\cdots)$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}\sin\dfrac{1}{y_n}=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 极限不存在, 但不是 ∞，选 C

5. D

解析：首先判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续，即考察 $x=0$ 处左右极限是否等于 $f(0)$

显然 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$ 而用夹逼准则易知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}f(x)=0$ 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

接下来用定义判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导

$x<0$ 时 $f'(x)=1$，故 $f'_-(0)=1$

而 $f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\frac{1}{n}}{x}$

又 $\dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n}$ 所以 $1\leq\dfrac{\frac{1}{n}}{x}\leq\dfrac{n+1}{n}$

而当 $x\to 0$ 时，$n\to\infty$, 不等式两边都趋于 1，由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

故 $f'_-(0)=f'_+(0)$ 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

D 选项正确

二. 填空题

1. 1；-1

解析：$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\arctan x+b\sin 2x}{\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\arctan x+b\sin 2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(3\dfrac{\arctan x}{x}+b\dfrac{\sin 2x}{x})$

$=3+2b$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-(1-x^2)^{\frac{1}{a}}}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{a}(-x^2)}{x^2}=\frac{1}{a}$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)=1$

故 $a=1,b=-1$

2.　(2)(3)

解析：（1）$\dot{f}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$, 而题目未指明 f(0)=0

（2）导数定义

（3）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e^h-1)-f(0)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0)-f(-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e^h-1)-f(0)}{e^h-1}\dfrac{e^h-1}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-h)-f(0)}{-h}$

$=-1-1$

$=-2$

（4）反例：$f(x)=\begin{cases}-x+2x^2\cos(\dfrac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$$\dot{f}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{-x+2x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=-1$$

$$\dot{f}(x)=\begin{cases}-1, & x=0\\ -1+4x\cos\dfrac{1}{x}+2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$$

当 $x=\dfrac{1}{2n\pi+0.5\pi},n\in N,f(x)=1>0$

3.　$1-x+0.5x^2-0.5x^3+o(x^3)$

解析：$f(x)=\cos x\cdot\dfrac{1}{1+x}$

$=[1-0.5x^2+o(x^3)][1-x+x^2-x^3+o(x^3)]$

$=1-x+0.5x^2-0.5x^3+o(x^3)$

4.　0;0;2

解析：$f(x)$ 在 $x=0$ 的某个领域 $(-\delta,\delta)$(δ 是某个正数) 内的泰勒级数为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

故当 n 充分大时，$\frac{1}{n}\in(-\delta,\delta)$, 所以有:

$$\frac{1}{n^2}=f\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)\left(\frac{1}{n}\right)^k=f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}f''(0)\cdot\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

由此可知，$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=2$

三. 解答题

1. 计算下列极限或导数

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[n]{1+\beta x}+\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\beta x}(\sqrt[m]{1+\alpha x}-1)+\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\alpha}{m}x+\frac{\beta}{n}x}{x}$

$=\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}$

(2) 由已知：$\sin 6x+xf(x)=o(x^3)$, 得 $f(x)=o(x^2)-\dfrac{\sin 6x}{x}$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-\frac{\sin 6x}{x}+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{(6x)^3}{3!}}{x^3}=36$

(3) 令 $t=x-1$, 则

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-e^{\frac{x-1}{2}}}{\ln^2(2x-1)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-e^{\frac{t}{2}}}{\ln^2(1+2t)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-e^{\frac{t}{2}}}{4t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}+o(t^2))-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}t^2+o(t^2))}{4t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}t^2+o(t^2)}{4t^2}=-\dfrac{1}{16}$

$$(4)\begin{cases} \dot{x}(t) & = -2\sin t \\ \dot{y}(t) & = 3\cos t \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{3}{2}\cot t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\dot{x}^3(t)} = -\frac{3}{4\sin^3 t}$$

2. 易知，$x=0, x=1, x=2$ 是间断点

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{(1-x)(2-x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x\ln(-x)}{(1-x)(2-x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\ln(-x)}{2} = 0$$

$\therefore x=0$ 是可去间断点，属于第一类间断点

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln x}{(x-1)(2-x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln(1+x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x\ln x}{(1-x)(2-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{1-x} = -1$$

$\therefore x=1$ 是跳跃间断点，属于第一类间断点

当 $x\to 2^+, f(x)\to +\infty$; 当 $x\to 2^-, f(x)\to +\infty$

$\therefore x=2$ 是无穷间断点，属于第二类间断点

3. 解析：$f(x) = (2x+10)e^{\frac{1}{x-1}}$

有 $\dot{f}(x) = 2e^{\frac{1}{x-1}} - (2x+10)e^{\frac{1}{x-1}}\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2(x-4)(x+1)}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

得 $\dot{f}(x) = 0 \Rightarrow x=4, x=-1$

分析有：

$x\in(-\infty,-1), \dot{f}(x) > 0, f(x)\uparrow$

$x\in(-1,1), \dot{f}(x) < 0, f(x)\downarrow$

$x\in(1,4), \dot{f}(x) < 0, f(x)\downarrow$

$x\in(4,+\infty), \dot{f}(x) > 0, f(x)\uparrow$

当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取极大值 $8e^{-\frac{1}{2}}$

当 $x=4$ 时，$f(x)$ 取极大值 $18e^{\frac{1}{3}}$

由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0,\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, 故 $x=1$ 为一条铅垂渐近线

又 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2,\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-2x=12$, 故 $y=2x+12$ 为一条斜渐近线

4. 解析：设 $f(x)$ 在 [0,1] 上的最小值点为 x_0, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 Taylor 展开式

$$f(x)=f(x_0)+\dot{f}(x_0)(x-x_0)+\frac{\ddot{f}(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

进而知：

$$\ddot{f}(\xi)=\frac{2f(x)+2}{(x-x_0)^2}$$

取 $x=0$ 得：

$$\ddot{f}(\xi_0)=\frac{2}{x_0^2}$$

取 $x=1$ 得：

$$\ddot{f}(\xi_1)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$$

又

$$max(\ddot{f}(\xi_0),\ddot{f}(\xi_1))=\begin{cases}\frac{2}{x_0^2} & ,0<x_0<\frac{1}{2}\\ \frac{2}{(1-x_0)^2} & ,\frac{1}{2}<x_0<1\end{cases}$$

故 $max(\ddot{f}(\xi_0),\ddot{f}(\xi_1))\geq 8$, 取 $\ddot{f}(\xi)=max(\ddot{f}(\xi_0),\ddot{f}(\xi_1))$ 即可

5. 解析：先用数学归纳法证明 $x_n>0$

再由 $x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n\left(3-x_n\right)\leq\frac{2}{3}\left(\frac{x_n+3-x_n}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$

得 $0<x_n\leq\frac{3}{2}\quad(n\geq2)$（也可以直接用数学归纳法证明 $0<x_n\leq\frac{3}{2}\quad(n\geq2)$）

所以 $x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n\left(3-x_n\right)\geq\frac{2}{3}x_n\left(3-\frac{3}{2}\right)=x_n$

故 $\{x_n\}$ 从第二项开始递增, 而 $\{x_n\}$ 有上界, 故 $\{x_n\}$ 收敛

对递推公式两边取极限即得 $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n=\frac{3}{2}$

6. 解：$f\left(x\right)=\frac{3x+1}{x^2+x-2}$

$=\frac{3x+1}{(x+2)(x-1)}$

$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x+2}$

$=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{1+0.5x}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-x}$

$=\frac{5}{6}\left[1-0.5x+\left(0.5x\right)^2-\left(0.5x\right)^3+\left(0.5\right)x^4-\left(0.5x\right)^5\cdot\frac{1}{\left(1+0.5x\theta_1\right)^6}\right]-\frac{4}{3}\left[1+x+x^2+x^3+x^4+\frac{x^5}{\left(1+x\theta_2\right)^6}\right]$

$=\frac{5}{6}\left[1-0.5x+\left(0.5x\right)^2-\left(0.5x\right)^3+\left(0.5x\right)^4\right]-\frac{4}{3}\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)-\frac{5}{6}\left(0.5x\right)^5\frac{1}{\left(1+0.5x\theta_1\right)^6}-\frac{4}{3}\frac{x^5}{\left(1+x\theta_2\right)^6}$

其中 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$

7. 证明：构造 $h(x)=e^x(f(x)-\dot{f}(x))$

则 $\dot{h}(x)=e^x[f(x)-\ddot{f}(x)]$

$\because \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\frac{f(x)}{x}=1$

$\therefore f(0)=0,\dot{f}(0+0)=1\ \exists y_1>0,\ \ f(y_1)>0$

$\because \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=2$

$\therefore f(1)=0,\dot{f}(0+0)=2\ \exists y_2>y_1,\ \ f(y_2)<0$

$\therefore \exists\theta\in(y_1,y_2),\ \ f(\theta)=0$

故 $\exists\lambda\in(0,\theta),\ \ f(\lambda)=0\ \dot{f}(\lambda)=0$

又 $h(0)=f(0)-\dot{f}(0)=-1<0,h(1)=e[f(1)-\dot{f}(1)]=-2e<0$

$h(\lambda)=e^\lambda f(\lambda)>0$ 故 $\exists\xi\in(0,\pi),\ \ \dot{h}(\xi)=0$

即 $\ddot{f}(\xi)=f(\xi)$

四. 附加题

1. 解：令 $f_n\left(x\right)=nx-1+\ln x$

注意到对任意 $n\epsilon\mathbb{N}^*$, 有 $f_n\left(x\right)$ 单调递增

且 $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=-\ln n<0,f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}-1-\ln\sqrt{n}>0$

因此 $\frac{1}{n}<x_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$

根据夹逼准则知必有 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2. 解：构造 $F(x) = f(x)sinx + \dot{f}(x)cosx$

$\because f^2(0) + [\dot{f}(0)]^2 = 4, |f(x)| \le 1$

$\therefore |F(0)| = |\dot{f}(0)| = \sqrt{3} > 1$

又 $|F(-\frac{\pi}{2})| = |f(-\frac{\pi}{2})| \le 1, |F(\frac{\pi}{2})| = |f(\frac{\pi}{2})| \le 1$

故 $\exists \xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 使得 $\dot{F}(\xi) = [f(\xi) + \ddot{f}(\xi)]cos\xi = 0$

即 $f(\xi) + \ddot{f}(\xi) = 0$

3. 解: $\because x_{n+1} = x_{n+1}^2 - 2$

$\therefore x_{n+1}^2 = x_n^4 + 4 - 4x_n^2$, 即 $x_{n+1}^2 - 4 = x_n^2(x_n^2 - 4)(*)$

$\because x_2 = 3, x_3 = 5 > 4$

$\therefore$ 由数学归纳法可知：当 $n > 2$ 时,$x_n > 4$

则 $\frac{x_{n+1}^2 - 4}{x_{n+1}^2} = x_n^2 > 16$

记 $y_n = x_n^2 - 4$

则 $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1}^2 x_{n-2}^2 x_{n-3}^2 \cdots x_2^2(x_1^2 - 4) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^2 = +\infty$

$\Rightarrow y_{n+1} = y_n x_n^2$

$\Rightarrow \prod_1^n y_{n+1} = \prod_1^n y_n x_n^2$

$\Rightarrow y_{n+1} = y_1(x_1 x_2 \cdots x_n)^2$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt{\frac{x_{n+1}^2 - 4}{x_{n+1}^2}} = 1$