Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

单纯形法
Simplex Method

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- 单纯形法的基本思路（几何）
- 单纯形法的基本理论（代数）

已有结论

$$\min \quad c^T x$$
$$s.t. \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

1. 寻找初始基本可行解(端点)
2. 判断可行解是否为最优解
3. 寻找更好的基本可行解

只需在有限个顶点中寻找最优解！

1947年，单纯形法(Simplex Method)

George Dantzig (1947)

可行域 → 多面凸集边界 → 顶点

R^n → R^{n-1} → C_m^n

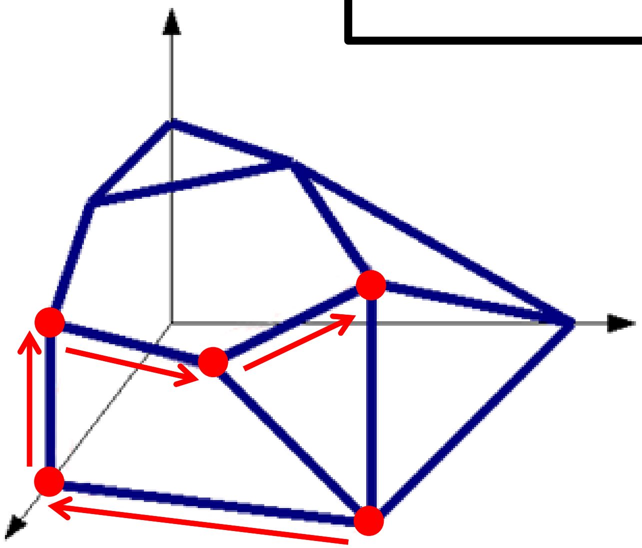
关键的解原理 - 几何原理

起始步骤：　　找出初始顶点，准备开始迭代

最优性检验：　　当前的顶点是否是最优解？

如果不是　　如果是 → 停止

迭代：　　进行一次迭代，找出**更好的顶点**



- ✓ 获取相邻顶点信息比其他顶点快
- ✓ 沿Z的增长率(max)最大的边寻找顶点
- ✓ 所有边Z的增长率为负，则为最优解

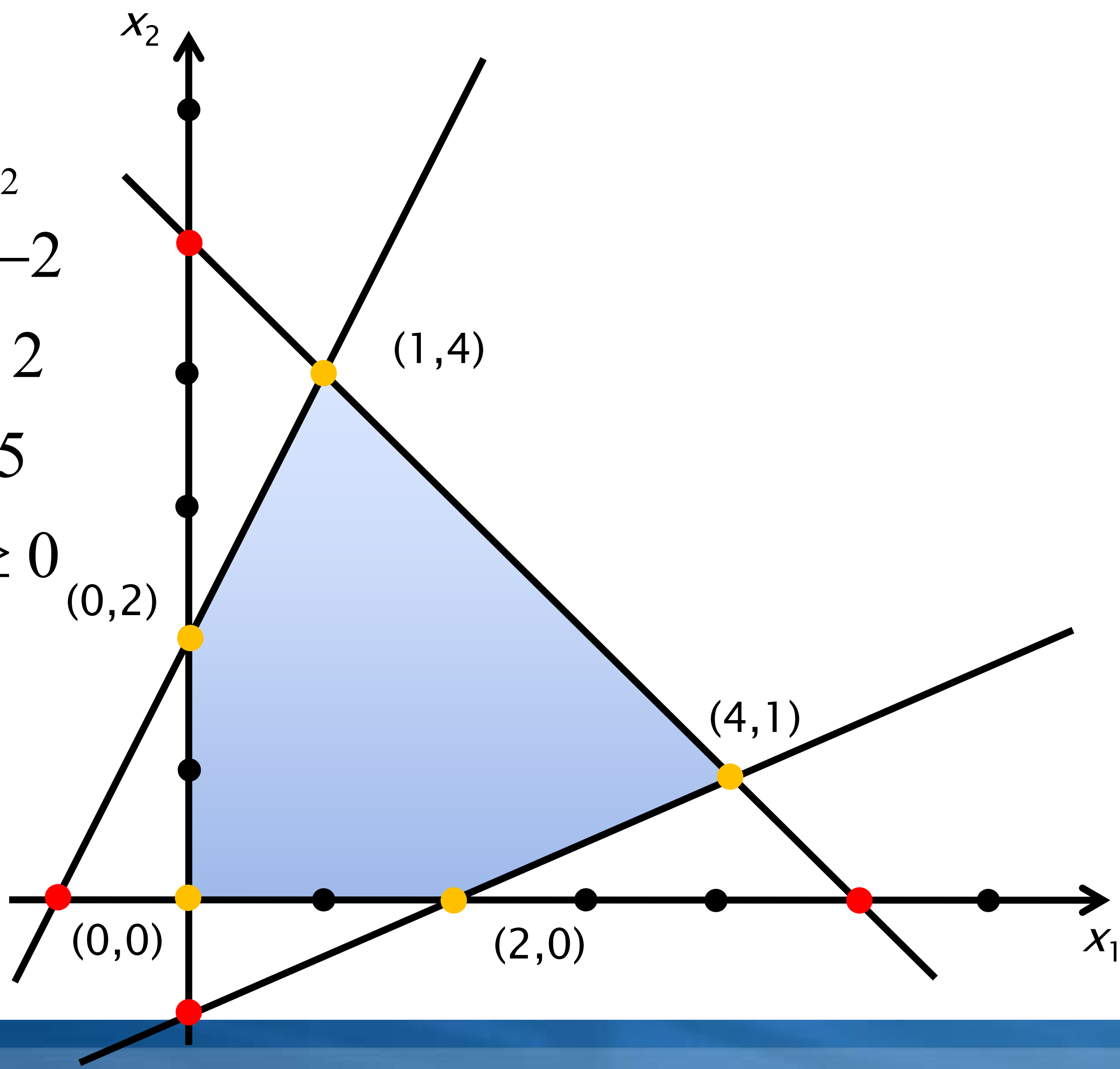
Outline

- 单纯形法的基本思路（几何）
- 单纯形法的基本理论（代数）

1. 寻找初始基本可行解(端点)
2. 判断可行解是否为最优解
3. 寻找更好的基本可行解

例:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



基本可行解的定义

$$\min \quad c^T x$$
$$s.t. \quad Ax = b \longrightarrow A = [B, N] \qquad x = \begin{pmatrix} \overline{x}_B \\ \overline{x}_N \end{pmatrix}$$
$$x \geq 0$$

基本可行解：

—**基矩阵B**，使得$B^{-1}b \geq 0$时的基本解：

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

基本可行解 $\longleftrightarrow$ 可行基

基本解的性质

- 每个变量均可做为非基变量或基变量
- 基变量的个数等于约束方程的个数(m)
- 非基变量的个数等于变量总数减去约束条件个数($n-m$)
- 非基变量的值设为0($n-m$的自由度)
- 基变量$x_B = B^{-1}b$
- 非退化：基变量均为正；退化：基变量有零值

两个重要公式

- 两个重要的下标集

$$\{B_1, B_2, \ldots, B_m\} \qquad \{N_1, N_2, \ldots, N_{n-m}\}$$

$$B = \left(A_{B_1}, A_{B_2}, \ldots, A_{B_m}\right) \qquad N = \left(A_{N_1}, A_{N_2}, \ldots, A_{N_{n-m}}\right)$$

- 问题转化

$$Ax = b \Longleftrightarrow x_B = \bar{b} - B^{-1} N x_N$$

$$z = c^T x \Longleftrightarrow z = c_B^T \bar{b} - (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N$$

z_0 $\qquad$ ζ^T_N

原问题的等价问题

对应于基本可行解 $\bar{x}=\begin{pmatrix}\bar{b}\\0\end{pmatrix}$ ， $\bar{b}\geq 0$

等价问题为:

$$\begin{aligned}\min\quad & z=z_0-\zeta^T x\\ s.t.\quad & x_B+B^{-1}Nx_N=\bar{b}\\ & x\geq 0\end{aligned}$$

最优顶点判定

定理1：若当前基本可行解对应的，$\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T \le 0$ 则它是最优基本可行解。

定义1： $\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T$ 称为当前基的检验数向量。

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min & z = c_B^T \bar{b} - \zeta_N^T x_N \\ s.t. & x_B = \bar{b} - B^{-1} N x_N \\ & x_B \ge 0,\ x_N \ge 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{几何意义}\ \frac{\partial z}{\partial x_{N_j}} = -\zeta_{N_j}}$$

寻找更好的顶点（1/3）

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min & z = c_B^T \bar{b} - \zeta_N^T x_N \\ s.t. & x_B = \bar{b} - B^{-1} N x_N \\ & x_B \ge 0,\ x_N \ge 0 \end{cases}$$

当$\zeta_{N_k} > 0$时，

$\bar{a}_{N_k}$也有正分量？

$$x_B = \bar{b} - x_{N_1}\bar{a}_{N_1} - x_{N_2}\bar{a}_{N_2} - \cdots - x_{N_k}\bar{a}_{N_k} - \cdots - x_{N_{n-m}}\bar{a}_{N_{n-m}}$$

让 x_{N_k} 从0↑，保持其余x_{N_j}仍为0，x_B按等式约束变化，则$z\downarrow$？

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_i} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 - x_{N_k}\bar{a}_{1,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_i - x_{N_k}\bar{a}_{i,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_m - x_{N_k}\bar{a}_{m,N_k} \end{pmatrix}$$

x_{N_k}最多可增加到多大？

$$x_{N_k} \to \theta = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,N_k}} \middle| \bar{a}_{i,N_k} > 0 \right\}$$

寻找更好的顶点（2/3）

$$\begin{pmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_i} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 - x_{N_k}\bar{a}_{1,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_i - x_{N_k}\bar{a}_{i,N_k} \\ \vdots \\ \bar{b}_m - x_{N_k}\bar{a}_{m,N_k} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_{N_k} \to \theta = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,N_k}} \middle| \bar{a}_{i,N_k} > 0 \right\}}$$

设最小比在$i = r$处取得，

则$x_{B_r} \to 0$，$x_{N_k} \to \theta$

新可行解是否是为基本可行解？

考察可能的正分量：$\left\{ x_{B_1} \quad \cdots \quad x_{B_{r-1}} \quad x_{N_k} \quad x_{B_{r+1}} \quad \cdots \quad x_{B_m} \right\}$

对应A中的列向量组：$\left\{ a_{B_1} \quad \cdots \quad a_{B_{r-1}} \quad a_{N_k} \quad a_{B_{r+1}} \quad \cdots \quad a_{B_m} \right\}$

是否线性无关？

答：线性无关！

是基本可行解！

$$\boxed{\begin{aligned} &B^{-1}\left(a_{B_1} \quad \cdots \quad a_{B_{r-1}} \quad a_{N_k} \quad a_{B_{r+1}} \quad \cdots \quad a_{B_m} \right) \\ &= \left(e_1 \quad \cdots \quad e_{r-1} \quad \bar{a}_{N_k} \quad e_{r+1} \quad \cdots \quad e_m \right) \end{aligned}}$$

寻找更好的顶点：结论及回顾（3/3）

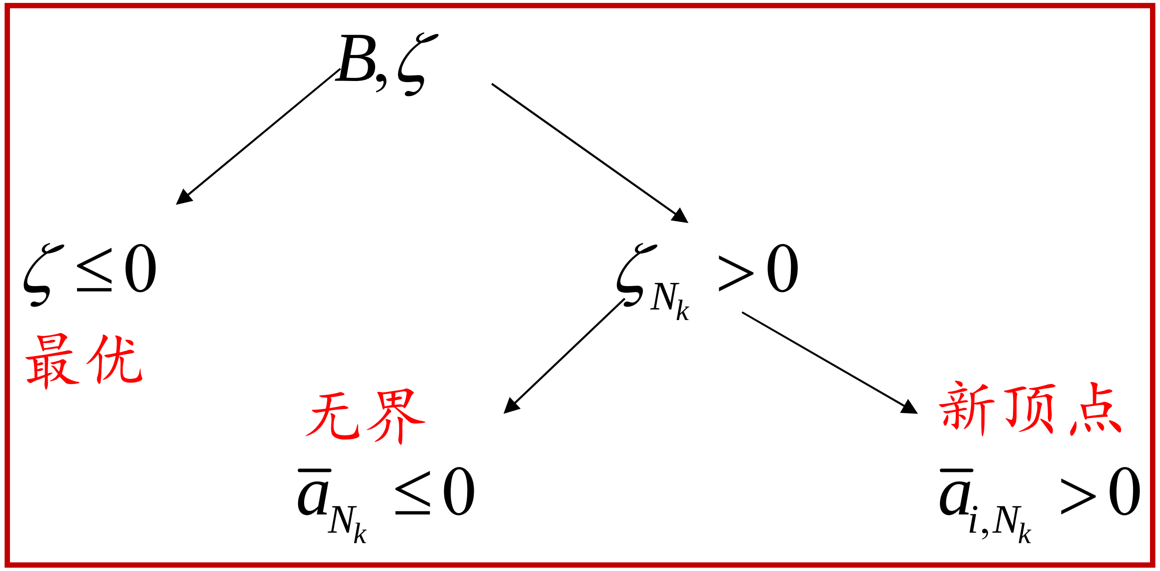
定理3：若当前基本可行解对应的检验数有正分量 $\zeta_{N_k} > 0$ 且 $\overline{a}_{N_k}$ 也有正分量，则可以得到一个更好的基本可行解。

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min & z = c_B^T \overline{b} - \zeta_N^T x_N \\ s.t. & x_B = \overline{b} - B^{-1} N x_N \\ & x_B \geq 0,\ x_N \geq 0 \end{cases}$$

消元法：
变量消去
约束继承

$$\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T \leq 0$$

锲而不舍
百折不挠



最优性准则

- 若可行基B对应的检验数向量$\zeta\leq 0$，则此可行基对应的基本可行解为**最优解**。且最优值为$c_B^T\bar{b}$

- 若向量ζ的第k个分量$\zeta_k>0$，而向量$\bar{A}_k=B^{-1}A_k\leq 0$则原问题**无界**。

- 对于非退化的基本可行解$\bar{x}$，若向量ζ中$\zeta_k>0$，而其相应的向量$\bar{A}_k$ **至少有一个正分量**，则有一个**新的基本可行解** $\hat{x}$ 使得 $c^T\hat{x}<c^T\bar{x}$

单纯形法步骤

- 获取初始可行基
- 计算检验数向量 $\zeta^T = c_B^T B^{-1} A - c^T$
- 求 $\zeta_k = \max\{\zeta_j \mid 1 \le j \le n\}$
- 若$\zeta_k \le 0$，停止，已找到最优解
- 若 $\bar{A}_k \le 0$，停止，原问题无界
- 求 $\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \mid \bar{a}_{ik} > 0, i = 1,\ldots,m\right\} = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$
- 以A_k代替A_{Br}得到新基，转第2步

作业

- P72 3
- P72 4
- P73 9
- P74 12