期中考试模拟题（六）答案　2020.11

一．1　5/6　　2　1　　3　1-e^{-3}　　4 0.72　　5　$(1/3)\lambda+\lambda^2$

二、B　D　C　B　A

三、1． $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9,\quad P(AB)=0.1$

$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{ABC})=1-P(ABC)=0.97,\therefore P(ABC)=0.03$

$P(AB-C)=P(AB)-P(ABC)=0.07$

2. $A=$\{取出的产品都是合格品\}，$B_i=\{$掷一颗骰子出现i点$\}, i=1,2,3$,由全概率公式，,

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{1}{6}\times\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{3}{36}+\frac{3}{90}+\frac{1}{120}=\frac{1}{8}$$

3. $Z=2X-3Y\sim N(3,81)$)　$P\{2X-3Y>3\}=P\{Z>3\}=1-P\{Z\le 3\}=0.5$

4. $E[(X+Y)^2]=E(X^2)+2E(X)E(Y)+E(Y^2)=\lambda_1+\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)^2$

$P\{X+Y>0\}=1-P\{X+Y=0\}=1-P\{X=0,Y=0\}=1-e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}=1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=1-e^{-1}$

得$\lambda_1+\lambda_2=1$，于是$E[(X+Y)^2]=1+1=2$

5. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$S=XY$，　S的分布函数$F(s)=P\{S\le s\}$

$s\le 0$时，$F(s)=0$,则$f(s)=F'(s)=0$，　$s\ge 2$时,$F(s)=1$,则$f(s)=F'(s)=0$，

$0<s<2$时,$F(s)=P\{S\le s\}=P\{XY\le s\}=1-\int_s^2 dx\int_{\frac{s}{x}}^1\frac{1}{2}dy=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)$

于是，$f(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0<s<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

四．(1) 面积$S(D)=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=1/3$, $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2) $0<x<1$, $f_X(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2)$，$f_X(x)=\begin{cases}3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

$0<y<1$, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{y^2}^{\sqrt{y}}3dx=3(\sqrt{y}-y^2)$，

(3) 因$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，X与Y不独立

（4）在$0<x<1$下，Y的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}, & x^2<y<\sqrt{x}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（5）$P\left\{Y>X\,|\,0<X<1/2\right\}=\dfrac{P\{0<X\le 1/2, Y>X\}}{P\{0<X<1/2\}}=\dfrac{\int_0^{1/2}dx\int_x^{\sqrt{x}}3dy}{\int_0^{1/2}3(\sqrt{x}-x^2)dx}=\dfrac{4\sqrt{2}-3}{4\sqrt{2}-1}$

五 （1）Y的分布函数$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$ ，

$y\le 0$时$, F_Y(y)=0,$则$f_Y(y)=F_Y'(y)=0$； $y\ge 4$时$, F_Y(y)=1, f_Y(y)=0$

$$0<y<1, F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X<0\}+P\{0\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}}$$

$$1\le y<4\text{时}, F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-1\le X<0\}+P\{0\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{1}{8\sqrt{y}}$ ，Y的密度为 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}3/8\sqrt{y}, & 0<y<1\\ 1/8\sqrt{y}, & 1\le y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（2）$F(-\frac{1}{2},4)=P\{X\le-\frac{1}{2}, Y\le 4\}=P\{-1<X\le-\frac{1}{2}\}=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{4}$。

六. X_i的分布函数$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin(2x), & 0<x<\dfrac{\pi}{4}\\ 1, & x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

$P\{\min(X_1,\cdots,X_n)<\frac{\pi}{12}\}=1-[1-F(\frac{\pi}{12})]^n=1-(\frac{1}{2})^n$， $1-(\frac{1}{2})^n\ge\frac{15}{16}$， $n\ge 4$。