第三节 多元数量值函数的导数与微分

作业 P57习题5.3（A）

1(单号小题）2(1); 4(1); 6; 7; 11; 12(1); 14; 18; 21; 23(1); 26(1)(3); 28; 30(4); 31(1); 35; 36(1)

3.1 偏导数

定义3.1 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内

极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$; $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$; $\left.z_x\right|_{(x_0,y_0)}$;

$f_x(x_0,y_0)$; $f_1(x_0,y_0)$.

注: $$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

同样可定义对y的偏导数

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$$

若函数 $z = f(x, y)$ 在域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 或 y 偏导数存在，则该偏导数称为**偏导函数**，也简称为**偏导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad f_x(x, y), \quad f_1(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z_y, \quad f_y(x, y), \quad f_2(x, y)$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数 .

例如, 三元函数$u = f(x, y, z)$ 在点(x, y, z) 处对x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z) = ?$$

(请自己写出)

$$f_z(x,y,z) = ?$$

如果 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 x 及y 的偏导数均存在,

则称$z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可偏导。

例1．求$z=x^2+3xy+y^2$在点(1, 2）处的偏导数.

解法1：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2\cdot 1+3\cdot 2=8,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=3\cdot 1+2\cdot 2=7$$

解法2：$z\big|_{y=2}=x^2+6x+4$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,2)}=(2x+6)\Big|_{x=1}=8$$

$$z\big|_{x=1}=1+3y+y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,2)}=(3+2y)\Big|_{y=2}=7$$

例2. 设 $z=x^y\ (x>0,$ 且 $x\neq 1)$，求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$$

证： $\because\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$

$$\therefore\ \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=x^y+x^y=2z$$

例3. 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数 .

解：

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

例4. 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$ (R 为常数)，

求证：$\dfrac{\partial p}{\partial V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial T} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$

证： $p = \dfrac{RT}{V}$， $\dfrac{\partial p}{\partial V} = -\dfrac{RT}{V^2}$

$V = \dfrac{RT}{p}$， $\dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{R}{p}$

$T = \dfrac{pV}{R}$， $\dfrac{\partial T}{\partial p} = \dfrac{V}{R}$

$$\therefore \frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{pV} = -1$$

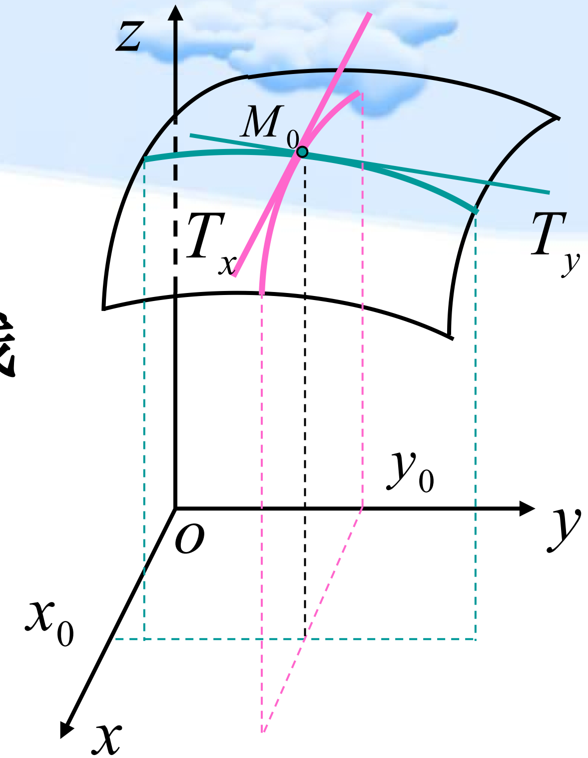
说明： 此例表明，偏导数记号是一个**整体记号，不能**看作分子与分母的商！

二元函数偏导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线

M_0T_x **对 x 轴的斜率.（沿与x轴平行的方向的变化率）**



$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点M_0处的切线 M_0T_y **对y轴的斜率.（沿与y轴平行的方向的变化率）**

例5 $$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)\Big|_{x=0}=0$$

$$f_y(0,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)\Big|_{y=0}=0$$

在上节已证 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$并不连续!

注意: 函数在某点各偏导数都存在,

并不能保证在该点连续.

在上册课本中，我们知道 ：边长为*x*的正方形，当边长改变一点点时，面积的改变量是

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= (x+\Delta x)^2 - x^2 = \underbrace{2x\Delta x}_{\text{线性主部}} + \Delta x^2$$

称函数改变量的线性主部为微分

引例　设长方形的长为*x*，宽为*y*，当长和宽均改变一点点时，求面积的改变量.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$= (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = \underbrace{x\Delta y + y\Delta x}_{\text{线性主部}} + \Delta x\Delta y$$

类似定义二元函数的全微分

3.1 全微分

定义3.2(全微分) 设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域 $U(x_0,y_0)$内有定义. 如果

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

$$= a_1\Delta x + a_2\Delta y + o(\rho)$$

其中，a_1,a_2是与$\Delta x,\Delta y$无关的两个常数，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$f$在点$(x_0,y_0)$处可微，$a_1\Delta x + a_2\Delta y$为$f$在$(x_0,y_0)$的全微分，记作 $dz\big|_{(x_0,y_0)}$或$df(x_0,y_0)$, 即

$$dz\big|_{(x_0,y_0)} = a_1\Delta x + a_2\Delta y,\quad dz\big|_{(x_0,y_0)} = a_1 dx + a_2 dy$$

注:若函数在域D内各点都可微, 则称此函数在D内可微.

当ρ充分小时,全微分就是f在(x_0,y_0)处改变量的近似值.

定理3.1（可微的必要条件）

设$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)可微，则

(1) f在(x_0,y_0)连续；

(2) f在(x_0,y_0)处的两个偏导数均存在，且有

$$a_1=f_x(x_0,y_0),\ a_2=f_y(x_0,y_0),\ \text{即}$$

$$df(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy.$$

证(1) $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)可微$\Rightarrow \Delta z=a_1\Delta x+a_2\Delta y+o(\rho)$,

$\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$, 而 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$$\therefore \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=\lim_{\rho\to 0}[f(x_0,y_0)+\Delta z]$$

$$=f(x_0,y_0)$$

即f在(x_0,y_0)连续.

(2) 由$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)可微，

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=a_1\Delta x+a_2\Delta y+o(\rho)$$

当$\Delta y=0$时，上式仍成立，此时$\rho=|\Delta x|$,

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=a_1\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=a_1=f_x(x_0,y_0),$$

同理可得 $a_2=f_y(x_0,y_0)$.

$$df(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy.$$

注：定理3.1的逆定理不成立．即：

偏导数存在函数不一定可微！

例6 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性和可微性.

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2},$$ f 在 $(0,0)$ 连续

$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$， 但

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此，函数在点 $(0,0)$ 不可微．

定理3.2（可微的充分条件） 设$f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$在(x_0,y_0)的某一邻域内存在，且在(x_0,y_0)处连续，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微.

证： $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

$$= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)]$$

$$+ [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]$$

$$= f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

（由连续的定义及极限与无穷小的关系） $\boxed{(0<\theta_1, \theta_2<1)}$

$f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$在(x_0,y_0)处连续,

$$\Delta z = [f_x(x_0,y_0)+\alpha]\Delta x + [f_y(x_0,y_0)+\beta]\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0 \right)$$

$$\Delta z = \cdots = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0\right)$$

注意到 $\boxed{\left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}\right| \le |\alpha| + |\beta| \to 0}$，故有

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)$$

所以函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微.

推广：类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如，三元函数 $u = f(x, y, z)$ 可微，则它的全微分为：

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$