离散数学
Discrete Mathematics

西安交通大学 计算机学院

任课教师：李文

第五章 函数

§ 1.函数的基本概念

§ 2.函数的复合

§ 3.集合的基数　势理论(*)

第三章 函数（function）

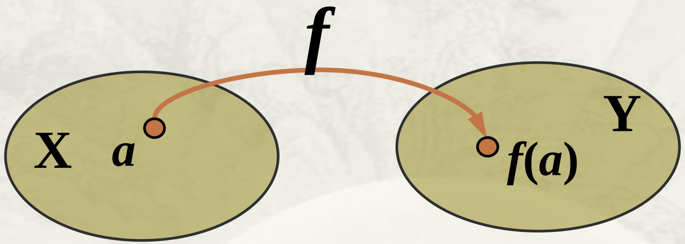
§1.函数基本概念

定义1.函数(映射(map)、变换(transformation))

函数是后者唯一的关系。即

f是由X到Y的函数，记为f :X→Y ⇔

$f \subseteq X\times Y \wedge (\forall x\in X)(\forall y\in Y)(\forall z\in Y)((x, y)\in f \wedge (x, z)\in f \Rightarrow y=z)$



函数的图象

注：函数概念主要是限制了关系概念中的一对多；但允许多对一；

•与函数概念关联的一些概念

(1)若$(x, y)\in f$，则函数惯用的记法是$y= f(x)$；称x为自变量，称y为因变量。

(2)此定义可容纳多值函数$f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ ，

$$f(x) = y_1, y_2, \ldots, y_{\mathrm{k}}$$

其修改为 $f:\mathrm{X}\to 2^{\mathrm{Y}}$ ， $f(x) = \{y_1, y_2, \ldots, y_{\mathrm{k}}\}\in 2^{\mathrm{Y}}$。

(3)定义域(domain)：称f的前域为f的定义域。即

$$\wp(f)=\{x : x\in \mathrm{X} \wedge(\exists y\in \mathrm{Y})((x, y)\in f)\}$$

$$=\{x : x\in \mathrm{X} \wedge(\exists y\in \mathrm{Y})(y= f(x))\}$$

……

(4)值域(range)：称f的后域为f的值域。即

$$\Re(f)=\{\, y : y\in Y\wedge(\exists x\in X)((x, y)\in f\,)\}$$

$$=\{y : y\in Y\wedge(\exists x\in X)(y= f(x))\}\text{。}$$

函数的定义域和值域

(5)象(image)：子集$A\subseteq X$的象定义为

$$f(A)=\{y : y\in Y\wedge(\exists x\in A)((x, y)\in f)\}$$

$$=\{y : y\in Y\wedge(\exists x\in A)(y= f(x))\}\text{。}$$

集合的象

(6)逆象(inverse image)：子集$B\subseteq Y$的逆象定义为

$$f^{-1}(B)=\{x : x\in X\wedge(\exists y\in B)((x, y)\in f)\}$$

$$=\{x : x\in X\wedge(\exists y\in B)(y= f(x))\}\text{；}$$

集合的逆象

特别地，单元素$y \in Y$的逆象是

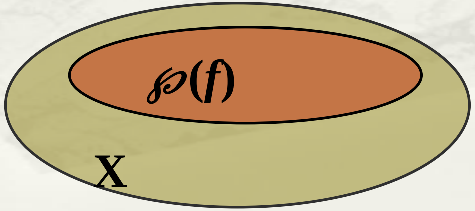
$$f^{-1}(\{y\}) = \{x : x \in X \wedge (x, y) \in f\}$$
$$= \{x : x \in X \wedge f(x) = y\}。$$

(7)全函数（full function）：处处有定义的函数。即

$\wp(f) = X$（或者$f^{-1}(Y) = X$）

(8)偏函数(partial function)：部分有定义的函数。即

$\wp(f) \subseteq X$（或者f -1(Y)$\subseteq$X）。



$\wp(f) \subseteq X$

例1.投影函数（projection function）

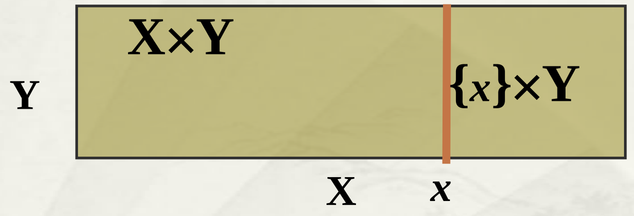
$$u^n_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_i$$

$$u^n_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i \quad (i=1,2, \ldots,n),$$

n=2时， X_i =R?

例2.截痕函数(cross function)：$f: X \to 2^{X\times Y}$，

$f(x) = \{x\}\times Y$。



例3.计算机是一个函数。即

计算机:输入空间→输出空间;

编译是一个函数。即

编译:源程序→目标程序。

例4. 一种定义离散函数的方式是采用下面的分段定义形式。

即 $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\text{是奇数} \\ x/2 & x\text{是偶数} \end{cases}$$ 。

例5.绝对值函数(absolute value function)

$f = \{(x, |x|) : x \in R\}$ (这里R是实数集) 或者

$f : R \to R^+ \cup \{0\}$， $f(x) = |x|$

(这里$R^+ = \{x : x \in R \wedge x > 0\}$是正实数集)，于是

$\wp(f) = R$，$\Re(f) = R^+ \cup \{0\}$；

……

绝对值函数可以拆成两个函数的并。即 $f = f_1 \cup f_2$ ，

这里 $f_1 = \{(x,x) : x \in \mathrm{R} \wedge x \geq 0\}$， $\wp(f_1) = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$, $\Re(f_1) = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$；

$f_2 = \{(x,-x) : x \in \mathrm{R} \wedge x < 0\}$， $\wp(f_2) = \mathrm{R}^-$, $\Re(f_2) = \mathrm{R}^+$ ；

(这里$\mathrm{R}^- = \{x: x \in \mathrm{R} \wedge x < 0\}$是负实数集)，于是：

$\wp(f) = \wp(f_1) \cup \wp(f_2) = \mathrm{R}$,

$\Re(f) = \Re(f_1) \cup \Re(f_2) = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$ ；

……

绝对值函数也可采用下面分段定义的形式。即

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{当} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{当} \quad x < 0 \end{cases}$$

例6.后继函数(successor function)　后继函数也称为Peano函数。

设(X,≤)是一全序集，并且每个元素的后继存在，即

$(\forall x\in X)(\exists y\in X)(x^{+}=y)$ ，

则关系 $P=\{(x, y) : x\in X\wedge y\in X\wedge x^{+}=y\}$ 是一函数，即所谓的后继函数。

记作： $s:X\rightarrow X$ ，

$\forall\ x\in X$ ， $s(x) = x^{+} = x +1$。

- 这里加1表示后继，并非都是普通的算术加1。
- 例如,若≤就是普通的小于等于≤全序，则
- 当X=I （整数集)时，$s(-6)=-6+1=-5$，$s(1)=1+1=2$，相当于普通算术的加1;
- 当X=E(偶整数集)时，$s(-6)=-6+1=-4$，$s(2)=2+1=4$，相当于普通算术的加2;
- 当$X=\{n : n \in I \wedge 3 \mid n\}$ （3倍数整数集)时，$s(-3)=-3+1=0$，

  $s(9)=9+1=12$，相当于普通算术的加3 。

例7.第三章§2定义的集合的并运算是一函数。即

$f \subseteq (2^X \times 2^X) \times 2^X$ ， $f = \{((x,y), z) : x, y, z \in 2^X \wedge z = x \cup y\}$

这里(x,y)是前者， z是后者；或者

$f: 2^X \times 2^X \to 2^X$ ，

$\forall (x,y) \in 2^X \times 2^X$, $f(x,y) = z = x \cup y$ ，

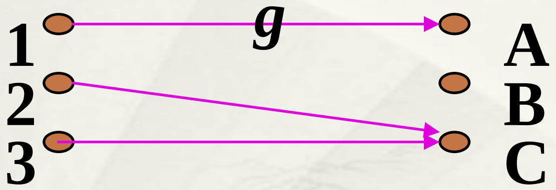
这里(x,y)是自变量， z是因变量；

因此 $f = \cup$ 。

例8. 函数可以逐点来定义。

$g:\{1,2,3\}\rightarrow\{\mathrm{A,B,C}\}$

$g(1)=\mathrm{A}$， $g(2)=\mathrm{C}$， $g(3)=\mathrm{C}$



定义2.函数的相等

函数的相等是逐点相等。即

设f ,g是由X到Y的两个函数， f,g :$X\rightarrow Y$，则

$f = g \Leftrightarrow (\forall x\in X)(f(x) = g(x))$ 。

定义.运算(operation)

对于任何自然数n≥1，n元运算f是一个从n维叉积X^n到X的函数。

即 $f: X^n \to X$ 。

关于运算， 主要考虑其封闭性。

<u>n元运算f的封闭性</u>：对于任何n个元素$x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \text{ ,}$$

或者 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ 。

例9.集合的余运算 $': 2^X \to 2^X$ 是一元运算；

集合的交，并运算 $\cap, \cup: 2^X \times 2^X \to 2^X$ 是二元运算。

例10.集合的特征函数：对于任何集合A⊆X， 定义A的特征函数

$\chi_A : X \to \{0,1\}$ 如下

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & 当x \in A时 \\ 0 & 当x \notin A时 \end{cases}$$

于是 有 $\chi_{A'}(x)=1-\chi_A(x)$

$\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)$

$\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$

$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x\in X)(\chi_A(x)\le\chi_B(x))$ $A=B \Leftrightarrow (\forall x\in X)(\chi_A(x)=\chi_B(x))$

$A=\varnothing \Leftrightarrow (\forall x\in X)(\chi_A(x)=0)$ $A=X \Leftrightarrow (\forall x\in X)(\chi_A(x)=1)$ 。

例11.谓词的特征函数：设P是X上的谓词， 定义P的特征函数

$\chi_P : X \to \{0,1\}$ 如下

$$\chi_P(x)= \begin{cases} 1 & \text{当}P(x)\text{为真时} \\ 0 & \text{当}P(x)\text{为假时} \end{cases}$$

于是 有 $\chi_{\neg P}(x)=1-\chi_P(x)$

$$\chi_{P\wedge Q}(x)=\chi_P(x)\cdot\chi_Q(x)$$

$$\chi_{P\vee Q}(x)=\chi_P(x)+\chi_Q(x)-\chi_{P\wedge Q}(x)$$

$$(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\forall x\in X)(\chi_P(x)\leq\chi_Q(x))$$

$$(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(\forall x\in X)(\chi_P(x)=\chi_Q(x))$$

$F\Leftrightarrow(\forall x\in X)(\chi_F(x)=0)$ $T\Leftrightarrow(\forall x\in X)(\chi_T(x)=1)$ 。

例13.单位函数或幺函数(identity function)：

幺函数即是幺关系。用函数的记法，即是

$I_X : X \to X$

$\forall\, x \in X$， $I_X(x) = x$ 。

显然 $D(I_X) = R(I_X) = X$ 。

定义3. 单射、满射、双射(injection,surjection,bijection)

设 f 是从X到Y的函数，即 f :X→Y 。则 称

(1) f是单射（内射）函数

$$\Leftrightarrow (\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2);$$

……

定义3. 单射、满射、双射(injection,surjection,bijection)

设 f 是从X到Y的函数，即 f :$X\to Y$ 。则 称

……

(2) f是满射函数$\Leftrightarrow(\forall y\in Y)(\exists x\in X)(f(x)=y)$

$\Leftrightarrow R(f)=Y$

$\Leftrightarrow f(X)=Y$ ；

(3) f是双射函数$\Leftrightarrow$ f既是单射函数又是满射函数。

注：●单射函数概念主要是限制了函数概念中的多对一；允许的是一对一；

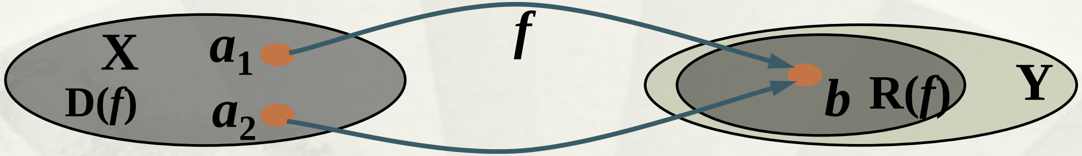
●满射函数概念主要是不允许函数的后集中存在元素无前集中元素与其对应；

●在有限集的情况，双射函数的存在，保证前集和后集一样大小。即 $|X| = |Y|$

●在有限集的情况，若 $|X| = |Y|$，则可证：

f是单射函数$\Leftrightarrow$ f是满射函数$\Leftrightarrow$ f是双射函数

注:



单射函数不允许的情况

满射函数不允许的情况

例14. 设 X={a,b,c,d} , Y={1,2,3,4}

f : X→Y,

f(a)=1, f(b)=2, f(c)=3, f(d)=4， f的性质如何？

例15. 设X,Y都是实数的集合，

f : X→Y, $f = \{ (x, y) : x \in X \wedge y \in Y \wedge y = \sin(x) \}$

若X=Y=R，正弦函数f 性质如何？

若将Y限制在 [-1,1] 之间，X=R， f 性质如何？

若将X限制在 [- π/2,π/2] 之间，Y=R， f 性质如何？

若将X限制在 [- π/2,π/2] 之间， Y限制在 [-1,1] 之间，f 性质如何？

单选题 1分

设置

设R是实数集合，f, g是从R×R到R的函数, $f(x, y)=x^y$， $g(x, y)=(x-y)/2$，那么下列结论正确的是(　　)。

A f是单射的而非满射的

B f、g是满射的

C f、g是双射的

D f、g既不是单射的，也不是满射的

提交

定理1. 逆(反)函数(inverse function)

双射函数 $f: X\to Y$ 的逆关系 $\breve{f} \subseteq Y \times X$ 是一个从Y到X的双射函数； 称其为f的逆函数，记为

$$f^{-1}: Y \to X。$$

[证].(采用逻辑法)

(1)　后者唯一(即 $\breve{f}$ 是函数):

对于任何$y \in \mathrm{Y}$，对于任何$x_1,x_2 \in \mathrm{X}$

$$(y, x_1) \in \breve{f} \wedge (y, x_2) \in \breve{f}$$

$$\Rightarrow (x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f$$

$$\Rightarrow f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$ (等号=的对称性，传递性)

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$ (f是双射，故f是单射)

(2) $\breve{f}$ 是全函数：

$D(\breve{f})=\{y : y\in Y\wedge(\exists x\in X)((y, x)\in \breve{f})\}$

$=\{y : y\in Y\wedge(\exists x\in X)((x, y)\in f)\}$

$= R(f)$

$=Y$ (f是双射，故f是满射)

(3) $\breve{f}$ 是单射：

对于任何$y_1,y_2 \in Y$

$\breve{f}(y_1) = \breve{f}(y_2)$

$\Rightarrow (\exists x \in X)(\breve{f}(y_1) = x \wedge \breve{f}(y_2) = x)$ （$\breve{f}$ 是全函数）

$\Rightarrow (\exists x \in X)(f(x) = y_1 \wedge f(x) = y_2)$

$\Rightarrow (\exists x \in X)((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f)$

$\Rightarrow y_1 = y_2$ （f 是函数,后者唯一；注意：**不是**利用等号‘=’的对称性、传递性）

(4) $\breve{f}$ 是满射：

$$R(\breve{f}) = \{x : x \in X \wedge (\exists y \in Y)((y, x) \in \breve{f})\}$$

$$= \{x : x \in X \wedge (\exists y \in Y)((x, y) \in f)\}$$

$$= D(f)$$

$$= X \qquad (f \text{ 是全函数})$$

。

定理2.

设 $f: X \to Y$ 是一双射函数。则 f 的逆函数(作为逆运算)

$f^{-1}: Y \to X$ 满足

反身性： $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

[证].函数是关系，关系的反身性前面已证。

§2.函数的复合

定义1.函数的复合运算

设 f : X→Y, g: Y→Z 是两个函数。则合成关系

$$f\circ g=\{(x, z) : x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y\in Y)((x, y)\in f \wedge(y, z)\in g)\}$$

$$=\{(x, z) : x\in X\wedge z\in Z \wedge(\exists y\in Y)(f(x)= y \wedge g(y)= z)\}$$

称为函数f和g的(左)复合(运算)， $f\circ g$称为函数f和g的复合函数。

记为 $g\circ f$: X→ Z， 对任何$x\in X$，有 $(g\circ f)(x)= g(f(x))$ 。

注： ●函数的复合其实就是关系的合成；只不过记法上有所不同；

●函数的复合是(向)左复合，右(边)优先；而关系的合成是(向)右复合，左(边)优先；

[定义1的合理性证明].要证如下两点： (1) $g \circ f$ 后者唯一 (即$g \circ f$是函数)

对于任何$x \in X$，若存在着$z_1, z_2 \in Z$，使

$(g \circ f)(x) = z_1 \wedge (g \circ f)(x) = z_2$

$\Rightarrow (x, z_1) \in g \circ f \wedge (x, z_2) \in g \circ f$

$\Rightarrow (\exists y_1 \in Y)((x, y_1) \in f \wedge (y_1, z_1) \in g) \wedge (\exists y_2 \in Y)((x, y_2) \in f \wedge (y_2, z_2) \in g)$

$\Rightarrow (\exists y_1 \in Y)(x, y_1) \in f \wedge (\exists y_1 \in Y)(y_1, z_1) \in g \wedge (\exists y_2 \in Y)(x, y_2) \in f \wedge (\exists y_2 \in Y)(y_2, z_2) \in g$

(由于 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$）

$\Rightarrow (\exists y \in Y)((x, y) \in f \wedge (y, z_1) \in g \wedge (y, z_2) \in g)$

(f 是函数，故后者唯一，即 $y_1 = y_2 = y$ ，量词前移)

$\Rightarrow (\exists y \in Y)((y, z_1) \in g) \wedge (y, z_2) \in g)$ (合取分析式：$p \wedge q \Rightarrow q$)

$\Rightarrow z_1 = z_2$ (由于g是函数，故后者唯一)

(2) $g \circ f$是全函数　　根据复合函数的定义，显然有　$D(g \circ f) \subseteq X$　；

另一方面：对于任何x，

$x \in X$

$\Rightarrow (\exists y \in Y)((x, y) \in f)$　　(条件：f是全的，故$D(f)=X$)

$\Rightarrow (\exists y \in Y)((x, y) \in f \wedge y \in Y)$　　(放大缩小法)

$\Rightarrow (\exists y \in Y)((x, y) \in f \wedge (\exists z \in Z)((y, z) \in g))$　　(条件：g是全的，故　$D(g)=Y$)

$\Rightarrow (\exists y \in Y)(\exists z \in Z)((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g)$　(量词前移：$p \wedge \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x\,(p \wedge A(x))$)

$\Rightarrow (\exists z \in Z)(\exists y \in Y)((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g)$ (同类量词交换：$\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$)

$\Rightarrow (\exists z \in Z)((x, z) \in g \circ f)$

$\Rightarrow x \in D(g \circ f)$

所以　$X \subseteq D(g \circ f)$　；　所以　$D(g \circ f)=X$　。

例1.设 X={a,b,c,d}, f : X→X，f ={(1,2),(2,3),(3,1)}，

g : X→X, g ={(1,2),(2,1),(3,3)}，计算 $g\circ f$、$f\circ g$？

注： ●函数复合没有交换律，即$g\circ f\neq f\circ g$；

●但是函数复合仍是关系的合成，因此有关关系合成的几乎所有性质都适用于函数的复合，尤其是结合律。

定义2.函数的复合幂

设 f : X→ X 是一函数。那么 定义：

(1) $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$ ；

（注意与关系合成幂的不同之处）

(2)若$f^2 = f$，则称 f 是等幂函数。

例2.设 f : I→I, $f(x)=3x+2$，计算 $f^2(x)$、 $f^3(x)$、 $f^n(x)$、 $f^{n+1}(x)$?

定理1.设 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ 是两个函数。则

(1) f 和g都是单射函数$\Rightarrow$ $g\circ f$ 也是单射函数；

(2) f 和g都是满射函数$\Rightarrow$ $g\circ f$ 也是满射函数；

(3) f 和g都是双射函数$\Rightarrow$ $g\circ f$ 也是双射函数。

[证]. (采用逻辑法)

只证(1)和(2)； (3)由(1)和(2)是显然的。

(1) 对于任何$x_1,x_2 \in X$

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

$\Rightarrow g(f(x_1))= g(f(x_2))$

$\Rightarrow f(x_1)= f(x_2)$ (g是单射)

$\Rightarrow x_1= x_2$ (f是单射)

所以$g \circ f$是单射；

(2)对于任何z

$z \in Z$

$\Rightarrow (\exists y \in Y)((y, z) \in g)$ (g是满射)

$\Rightarrow (\exists y \in Y)(y \in Y \wedge (y, z) \in g)$

$\Rightarrow (\exists y \in Y)((\exists x \in X)((x, y) \in f) \wedge (y, z) \in g)$ (f是满射)

$\Rightarrow (\exists y \in Y)(\exists x \in X)((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$ (量词前移：$p \wedge \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x(p \wedge A(x))$)

$\Rightarrow (\exists x \in X)(\exists y \in Y)((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g)$ (同类量词交换：$\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$)

$\Rightarrow (\exists x \in X)((x, z) \in g \circ f)$

所以 $(\forall z \in Z)(\exists x \in X)((x, z) \in g \circ f)$

所以$g \circ f$是满射。

定理2.设 f : X→Y 是双射函数。则

(1) $f^{-1} \circ f = I_X$ ；

(2) $f \circ f^{-1} = I_Y$ 。

[证]. 对于任何$x \in X$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$$

$= f^{-1}(y)$ (由于$D(f)=X$，因而有某个 $y \in Y$，使 $f(x)=y$)

$= x$ ($f(x)=y$ ，故 $f^{-1}(y)=x$)

$= I_X(x)$

所以 $f^{-1} \circ f = I_X$ 。

投票 最多可选1项

设置

设f是从X到Y的函数，g是从Y到Z的函数，如果g是满射函数并且f是单射函数，那么$g\circ f$一定是满射函数。

A 上述命题成立；

B 上述命题不成立。

提交

定义3.置换(permutation)

设X≠∅， |X|=n， X={x_1, x_2,… ,x_n}，则 称

P为X上的一个(n次)置换⇔P是从X到X的一个双射函数，即

P:X→X 。并且称n为置换P的阶。

注：●所有n次置换构成的集合记为S_n；

●在n个元素的集合中，不同的n阶置换的个数为n!，即| S_n |= n!；

- 通常用下面的方法表示X上的一个(n次)置换

$$P=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \end{pmatrix};$$

- 若$\forall x_i \in X$ 有 $P(x_i) = x_i$，则称P是恒等置换,记为I,可表示为

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix};$$

- P的逆函数P^{-1}称为P的逆置换，可表示为

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} P(x_1) & P(x_2) & \cdots & P(x_n) \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix};$$

●置换的合成运算◇是作为关系的合成运算(即左优先)，而不是作为函数的复合运算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

●置换的合成运算◇满足结合律，但不满足交换律。

§3.集合的基数　势理论（*）

- 概念的定义

(1)同浓：$A \approx B \Leftrightarrow$存在着一个双射$f:A \to B$　；（$\approx$是等价关系)

(2)基数或势：$\overline{\overline{A}}=\{B : B \approx A\}$；　　(以A为代表元的等价块)

(3)相等或等势(Cantor定义)：$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}} \Leftrightarrow A \approx B$；

(4)小于等于：$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow$存在着一个单射$f:A \to B$；（$\leq$是半序)

(5)严格小于：$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$。　　($<$是拟序)

注： ●将基数实际上定义为了具有相同基数的集合之集；这点恰如 人类认识数一样：

认识数5：5只羊， 5头牛， 5个人， ….。故

5={{羊$_1$，…，羊$_5$}，{牛$_1$，…，牛$_5$}，{人$_1$，…，人$_5$}，…}

这正象哲学上 认识白马概念一样，白马$_1$，白马$_2$，白马$_3$， …

白马={白马$_1$，白马$_2$，白马$_3$， …}

因此，哲学上 有‘白马非马’的论题。

●小于等于也可定义为：$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \Leftrightarrow (\exists C \subseteq B)(A \approx C)$ （这只要取C=R(*f*)即可）；

- 用集合概念来定义自然数
  - 已经用集合概念定义的如元组、叉积、关系、函数、运算、置换等基础数学概念；
  - 即将用集合概念来定义的如代数系统的群、环、域，以及格、布尔代数等抽象数学概念；
  - 图论中的有向图、无向图等应用数学概念。

……

*数学中最基本的概念——数，还没有用集合概念加以定义。好象有人所说：其它一切都是人创造的，只有自然数是上帝给予人类的。

*现代数学的思想是一切基础性数学概念都要用集合概念加以定义，‘集合论概念以一贯之！’数也概没能外。

定义集合A的直接后继$A^+:=A\cup\{A\}$，从而A^+是同时满足

①$A\in A^+$

②$A\subseteq A^+$ 的最小的集合。

可以证明A^+确实是在这两种序下A的直接后继。

利用此集合后继的定义，意大利数学家G.Peano定义自然数如下：

$0 := \varnothing$

$1 := 0^+ = \varnothing^+ = \{\varnothing\} = \{0\}$

$2 := 1^+ = \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$

$3 := 2^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

……

$n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

$n+1 := n^+ = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$

……

自然数集

$N = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$

这个集合可用如下公理来概括。

皮亚诺(Peano)公理：

1)零公理： $0 \in N$；

2)后继公理： $(\forall n)(n \in N \Rightarrow n^{+} \in N)$；

3)归纳公理：(极小性质)

$$(\forall S \subseteq N)(0 \in S \wedge (\forall n \in N)(n \in S \Rightarrow n^{+} \in S) \Rightarrow S = N)；$$

•定义四个标志性势

$\overline{\overline{\varnothing}}$ =0

$\overline{\overline{N_m}}$ =m　　　　　　其中： N_m ={0, 1, 2, …, m-1}

$\overline{\overline{N}}$ $=\aleph_0$

(可数集的势。读作：阿列夫零, 希伯莱文第一个字母)

$\overline{\overline{[0,1]}}$ $=\aleph$　　(不可数集的势之一。读作：阿列夫)

•Cantor的三大贡献

第一大贡献：可数个可数集是可数的。即 $\overline{\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k}} = \aleph_0$

[证明方法]：著明的Cantor编码法。

第二大贡献：[0,1]区间实数集是不可数的。即 $\overline{\overline{[0,1]}} = \aleph$

[证明方法]：著明的Cantor对角线法。

第三大贡献：没有最大的势。即 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{2^A}}$

[证明方法]：构造法和Russell悖论方法。

•**连续统假设**(Continuum hypothesis)

集合理论将势排序成如下的无穷队列

$0\leq 1\leq 2\leq \ldots \leq n\leq \ldots \leq \aleph_0\leq \aleph_1\leq \aleph_2\leq \ldots \leq \aleph_\alpha\leq \aleph\leq_{\alpha+1}\leq \ldots$

使得对列中每一个势都是前一势的直接后继。

人们已经证明：$2^{\aleph_0}=\aleph$

CH ： $2^{\aleph_0}=\aleph_1$(即$\aleph=\aleph_1$)

GCH ： $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$

(generalized Continuum hypothesis)

目前最好的结果：

1938年，哥德尔(Godel,K)证明 ZFC $\nvdash \neg$CH (否定不了!)

1963年，科恩(Cohen,P.J)证明 ZFC $\nvdash$ CH (证明不了!)

注： •ZFC是策梅罗 (Zermelo)1908提出的，后经弗兰克尔(Fraenkel)和斯科伦(Skolem)改进的一个形式化集合论公理系统。包含外延公理，正则公理，空集公理，无序对集公理，并集公理，幂集公理，无穷集公理，替换公理，选择公理共九大公理；其中最著名的就是第九公理——策梅罗选择公理AC(The Axiom of Choice)，它就是ZFC中的C。

•现在已有了Z—程序设计语言，它是ZFC和一阶逻辑相结合的产物。

伯恩斯坦定理(Bernstein)

对任何集合A和B，都有 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 。

[证明方法]：采用镜照耗尽法。参见程极泰《集合论》P_{99} 。