第三次高数沙龙

经济统计 001 李名

2021 年 11 月 27 日

1 积分中级题目

1.1 两种积分法

1. 设 $f, g \in C[a,b]$, 证明至少存在一点 ξ∈(a,b) 使
$$f(\xi)\int_{\xi}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x = g(\xi)\int_{a}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$
2. 求不定积分 $\int \frac{1}{x(1+x^4)}\,\mathrm{d}x$(不定积分的换元法则 (I))
3. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$(不定积分的换元法则 (II))
4. 求不定积分 $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
5. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\,\mathrm{d}t$, 计算 $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$
6. 求不定积分 $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

1.2 借助递推式求积分 (I 类换元和分部积分)

1. 求不定积分 $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$
2. 计算 $\int_0^{10\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x(n \in \mathrm{N}_+)$
3. 建立 $\mathrm{I}_n = \int \tan^n x\,\mathrm{d}x$ 的递推公式

1.3 积分的综合题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$
2. $\mathrm{I} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$
3. 已知 $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x{=}\frac{\pi}{2}$, 求 $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减，求证：对 $\forall\alpha \in [0,1]$, 有:
$$\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明不等式:
$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
6. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x{=}0$

解: 方法 2 由于 $\frac{2k-1}{2k}<\sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2-1}}=\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}(k=1,2,\ldots)$, $0<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdots\frac{2n-1}{2n+1}}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$. 则由夹逼原理知所证极限式成立.

1.4 写在最后的话

就我个人的学习经验来说，积分求值类题目更强调的是一种经验性而非逻辑性，讲再多的做题方法也不如你们自己多做一做。在遇到自己不太会的题目时要学会冷静地思考，仔细想一想所学的方法能不能用来解决这道难题。或许刚刚接触积分的你们会觉得无从下手，但希望你们不要气馁。当你能自己去亲历每一道难过的难关时，已然和过去的自己不一样。最后引用冯诺依曼的一句话以共勉:

> If people do not believe that mathematics is simple,it is only because they do not realize how complicated life is.

高数很难，但坚持总会有答案。