行列式

物理试验班 001 丰啸天

2021 年 10 月 17 日

1 行列式的定义

1.1 引入

行列式最早在 1545 年由意大利的卡当在求解二元一次方程组时引入. 对于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

可见当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解；当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 时，有可能无解，也有可能有无数解，这取决于系数是否于常数项对应成比例.

因此，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 时决定方程组解的情况的决定性因素. 决定为 determine，其名词化便是 determinant，简写为 det. 现在我们知道，一个二阶矩阵的行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3}$$

类似地，还可以定义更高阶矩阵的行列式. 从线性方程组的消元操作不改变解的性质，即不改变行列式是否为 0，可以引出行列式的第二公理化定义.

1.2 行列式的第二公理化定义

设 $M_n(\mathbb{F})$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上全体 n 级矩阵的集合，满足下列性质的映射 $\det : M_n(\mathbb{F}) \mapsto \mathbb{F}$

1. 倍乘：$\det(\ldots, \lambda A_i, \ldots) = \lambda \det(\ldots, A_i, \ldots)$
2. 一行加到另一行：$\det(\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_j, \ldots) = \det(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots)$
3. 正规化条件：$\det(I) = 1$

是唯一确定的，叫做矩阵 A 的行列式，记作 $\det A$.

倍乘对应着将线性方程组中某一个方程乘一个系数 λ，一行加到另一行对应着消元操作. 正规化条件是额外添加的条件. 这也同时对应着矩阵的初等行变换.

1.3 行列式的第一公理化定义

注意到交换两个方程组的顺序，方程组的解不变，只是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 要反号，但这不改变其是否为 0. 还注意到线性方程组的解可以线性叠加.

由此可以引出行列式的第一公理化定义：设 $M_n(\mathbb{F})$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上全体 n 级矩阵的集合，满足下列性质的映射 $\det: M_n(\mathbb{F})\mapsto\mathbb{F}$

1. 反对称性：$\det(\cdots,A_i,\cdots,A_j,\cdots)=-\det(\cdots,A_j,\cdots,A_i,\cdots)$
2. 多重线性:$\det(\ldots,aY_i+bZ_i,\cdots)=a\det(\cdots,Y_i,\cdots)+b\det(\cdots,Z_i,\cdots)$
3. 正规化条件：$\det(I)=1$

是唯一确定的，叫做矩阵 A 的行列式，记作 $\det A$.

1.4 逆序数

定义 1.1. $1,2,3,\cdots,n$ 的一个全排列称为一个 n 元排列.

例如：1,2,3 形成的 3 元排列有 123,132,213,231,312,321. 进一步很容易可以得到，n 元排列的总数是 $n!$.

定义 1.2. 顺序定义为数字从小到大排列，对 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，任取一对数 $a_i,a_j(i<j)$，如果 $a_i<a_j$，则称这一对数构成一个顺序. 逆序定义为数字从大到小排列，对 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，任取一对数 $a_i,a_j(i<j)$，如果 $a_i>a_j$，则称这一对数构成一个顺序.

定义 1.3. 一个排列中，逆序对的总数称为这个排列的逆序数，记作 τ. 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，2431 的逆序数为 4，记作 $\tau(2431)=4$. 其所有的逆序对为 21,43,41,31.

命题 1.4. 自然排列 $123\cdots n$ 是一个偶排列，逆序数 $\tau(123\cdots n)$ 为 0.

定义 1.5. 把一个排列中的某一对数互换位置，其余数不动，此操作称为一个对换.

命题 1.6. 对换改变排列的奇偶性.

命题 1.7. 任一 n 元排列与排列 $123\cdots n$ 可经过一系列对换互变，并且所做对换的次数与这个 n 元排列有相同的奇偶性.

例 1.8. 如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 r，求 n 元排列 $j_n\cdots j_2j_1$ 的逆序数.

构造顺序和逆序的双射即可证明.

例 1.9. 设在由 $1,2,\cdots,n$ 形成的 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k}$ 中，

$$a_1<a_2<\cdots<a_k, b_1<b_2<\cdots<b_{n-k}$$

求排列 $a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k}$ 的逆序数.

证明. 在 a_1 后面比 a_1 小的数有 a_1-1 个，在 a_2 后面比 a_2 小的数有 $a_2-1-1=a_2-2$ 个（注意 $a_1<a_2$），依次类推，在 a_i 后面比 a_i 小的数有 a_i-i 个，而在排列 $b_1b_2\cdots b_{n-k}$ 没有逆序数，因此

$$\begin{aligned}&\tau\left(a_1a_2\cdots a_kb_1b_2\cdots b_{n-k}\right)\\ =&\left(a_1-1\right)+\left(a_2-1\right)+\cdots+\left(a_k-k\right)\\ =&\sum_{i=1}^{k}a_i-\frac{k(k+1)}{2}\end{aligned}\tag{4}$$

□

1.5 n 阶行列式的逆序数定义

n 级矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的行列式定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\tag{5}$$

其中求和号 $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有 n 元排列求和，也就是让列指标构成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 元排列. 即，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是取自不同行，不同列的 n 个元素的乘积，再加上一个符号项. 把

这 n 个元素按照行指标成自然顺序排好位置，当列指标构成的排列是偶排列时，此项带正号；是奇排列时，此项带负号.

如果行指标不成自然顺序排列，按照某个确定的行顺序 $i_1i_2\cdots i_n$，依次取不同列指标的元素. 此时行列式的表达式变成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{6}$$

2 行列式的应用

2.1 行列式的性质

例 2.1. *利用逆序数定义，验证行列式满足：*

1. *行列式的反对称性，即交换某两行（列）的元素，行列式反号.*
2. *行列式的多重线性.*
3. *矩阵的转置与矩阵本身的行列式相等.*
4. *把一行（列）的倍数加到另一行（列）上，行列式的值不变.*
5. *行列式按第 i 行展开式.*

证明. 性质 1 利用逆序数对换反号即可. 性质 2 利用乘法分配律. 性质 3 利用公式 (6) 中行列指标的对称性. 性质 4 先利用乘法分配律，再利用反对称性，对换两元素相同行的行指标，得到分离出得来的项为 0. 性质 5 将行列式按照 $i123\cdots(i-1)(i+1)\cdots n$ 的行指标展开即可. □

例 2.2. *若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 矩阵，求证：$\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$.*

证明. 注意到 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列元素

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \tag{7}$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\det(B)\\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}\\
&\quad b_{j_1k_1}b_{j_2k_2}\cdots b_{j_nk_n}\\
&= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}\left(\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b_{j_1k_1}b_{j_2k_2}\cdots b_{j_nk_n}\right)\\
&= \sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}(\boldsymbol{AB})_{1k_1}(\boldsymbol{AB})_{2k_2}\cdots(\boldsymbol{AB})_{nk_n}\\
&= \det(\boldsymbol{AB})
\end{aligned}
\tag{8}
$$

□

3 行列式按 k 行展开

n 级矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中，取定第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行 $(1\leq k<n)$，其中 $i_1<i_2<\cdots<i_k$，则 $\det\boldsymbol{A}$ 等于这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式乘积之和，即

$$
|\boldsymbol{A}| = \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i'_1,\cdots,i'_{n-k}\\ j'_1,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix}
\tag{9}
$$

行列式按 k 行展开又称为 Laplace 定理．请读者自证．

4 习题

例 4.1. 利用分块矩阵的方法证明 $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$.

证明. 一方面，考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，将其按前 n 行展开，则

$$
\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = \det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}
\tag{10}
$$

另一方面，对分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 进行分块初等变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \tag{11}$$

不改变行列式的值．因此再对 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 前 n 行展开，得

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} &= \det(-\boldsymbol{AB}) \det(\boldsymbol{I})(-1)^{1+2+\cdots+n+n+1\cdots+2n} \\ &= (-1)^n \det(\boldsymbol{AB})(-1)^{n(2n+1)} \\ &= \det(\boldsymbol{AB})(-1)^{n(2n+2)} \\ &= \det(\boldsymbol{AB}) \end{aligned} \tag{12}$$

□

例 4.2. 从代数方程解的角度说明范德蒙德行列式．

证明．设范德蒙德行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{13}$$

对于任意的 i, j，当 $x_i = x_j$ 时，行列式为 0，当 $x_i \neq x_j$ 时，行列式非 0，因此 $x_i - x_j$ 应当是范德蒙德行列式的一个因式． □

例 4.3. 通过 *Taylor* 级数定义方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 e 指数函数

$$\exp(\boldsymbol{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^n}{n!}$$

可以证明，这个定义对于任意矩阵都是收敛的，因此是个好的定义．假设 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角矩阵 $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，求证：$\det(\exp(\boldsymbol{A})) = \exp(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}))$．

这一关系在计算机科学和物理中有较多应用．当各位学完《特征值与特征向量》后，可以回头看看，此恒等式实际上对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都成立，并不局限于对角矩阵．

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是一个对角矩阵 $\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，因此

$$\boldsymbol{A}^k = \operatorname{diag}\left\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k\right\} \tag{14}$$

于是

$$\begin{aligned}
\exp(\boldsymbol{A}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \operatorname{diag}\left\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k\right\} \\
&= \operatorname{diag}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_1^k, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_2^k, \cdots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda_n^k\right\} \\
&= \operatorname{diag}\left\{\mathrm{e}^{\lambda_1}, \mathrm{e}^{\lambda_2}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n}\right\}
\end{aligned} \tag{15}$$

因此 $\det(\exp(\boldsymbol{A})) = \exp(\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}))$. □

5 行列式的几何意义

5.1 几何意义

矩阵的行列式表示矩阵对应的线性变换对空间的伸缩率.

矩阵的行列式表示列向量张成的平行多面体的有向体积.

5.2 公式的第三种解释

例 5.1. 利用行列式的几何意义说明 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$.

证明. 矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的线性变换即为先用 $\boldsymbol{B}$ 作用，在用 $\boldsymbol{A}$ 作用. 对空间的总伸缩率等于两次伸缩率的乘积. □

5.3 Hadamard 不等式

定理 5.2 (Hadamard inequality)**.** 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}$，有 $|\det(\boldsymbol{A})| \leq \|\boldsymbol{\alpha_1}\|\,\|\boldsymbol{\alpha_2}\|\cdots\|\boldsymbol{\alpha_n}\|$ 成立.

证明. 不等式左边表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 互有夹角构成的平行多面体的体积，不等式右边表示这些向量的模长两两正交构成的平行多面体的体积，后者显然大于前者，当且仅当向量组两两正交. $\square$