# 第六章

14. (1) 不是

证明:R是等价关系, $\forall a,b,c,d \in X$, $(a,b)\in R \wedge (c,d)\in R$

①若 $a<0 \wedge b<0$ 时,

1) 当 $c<0 \wedge d<0$ 时, $a+c<0$, $d+b<0$

$(a+c, b+d)\in R$

2) 当 $c\geqslant 0 \wedge d\geqslant 0$ 时, $a+c$, $d+b$ 未知

所以R不是 Z 上关于 + 的同余关系.

(2) 不是.

证明: R不是X上的等价关系.

R无传递性.

例如: $x=0$, $y=9$, $z=18$

$(x,y)\in R \wedge (y,z)\in R$, 但 $(x,z)\notin R$

(3). 不是

证明: R是等价关系.

$\forall a,b,c,d\in X$, $(a,b)\in R\wedge(c,d)\in R$

①若 $a=0 \wedge b=0$

1)当 $c=0\wedge d=0$ 时 $a+c=0$, $b+d=0$

$(a+c, b+d)\in R$

2) 当 $c\neq 0\wedge d\neq 0$ 时, $a+c\neq 0$, $b+d\neq 0$

$(a+c, b+d)\in R$

2) 若 $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

① 当 $c=0 \wedge d=0$ 时 $a+c \neq 0$，$b+d \neq 0$，

$(a+c, b+d) \in R$

② 当 $c \neq 0 \wedge d \neq 0$ 时，$a+c$，$b+d$ 未知。

所以，R不是Z上关于+的同余关系。

(4) 不是

R 不是 X上的等价关系。

R 无对称性。

17. 证明：$\forall n \in N$，$h(n)=\begin{cases} 0 & n为偶数 \\ 1 & n为奇数 \end{cases}$

$\forall a, b \in N$.

① a.b均为奇数 $h(a \times b) = 1$ $h(a) \times h(b) = 1 \times 1 = 1$

有 $h(a \times b) = h(a) \times h(b)$

② a.b至少有一个为偶数 $h(a \times b) = 0$

$h(a \times b) = 0$ $h(a) \times h(b) = 0$

有 $h(a \times b) = h(a) \times h(b)$

综上，有 $h(a \times b) = h(a) \times h(b)$

由于 h 为满射

所以，Y是X 的同态象

20. $\forall\ x, y \in X$

$(h_2 \circ h_1)(x f_1 y) = h_2(h_1(x f_1 y))$

$= h_2(h_1(x) f_2 h_1(y))$

$= (h_2 \circ h_1)(x)\ f_3\ (h_2 \circ h_1)(y)$

所以、$h_2 \circ h_1$ 满足同态公式

所以、$h_2 \circ h_1$ 是从 $\langle X, f_1 \rangle$ 到 $\langle Z, f_3 \rangle$ 的同态函数。

补充题：

证明：① $(2^A, \cap, \cup)$ 与 $(B, \wedge, \vee)$ 同类型

② $h(\phi \cap \phi) = h(\phi) = 1$

$h(\phi) \wedge h(\phi) = 1 \wedge 1 = 1$

有 $h(\phi) \wedge h(\phi) = h(\phi \cap \phi)$

$h(\phi \cap A) = h(\phi) = 1$

$h(\phi) \wedge h(A) = 1 \wedge 0 = 0$

$h(\phi \cap A) \neq (h(\phi) \wedge h(A))$

所以 $h$ 不是从 $(2^A, \cap, \cup)$ 到 $(B, \wedge, \vee)$ 的同态函数。

13. 证明 ① 封闭性，$\forall x,y\in S$，

$x \oplus y = x * a * y$

由 $a\in S$，且 $<S,*>$是半群

所以 $x*a*y\in S$

所以 $x\oplus y \in S$，封闭性已证

② 结合律 $\forall x,y,z\in S$

$(x\oplus y)\oplus z = (x*a*y)\oplus z$ （定义）

$= x*a*y*a*z$ （定义）

$= x*a*(y*a*z)$ （$<S,*>$是半群）

$= x*a*(y\oplus z)$ （定义）

$= x\oplus(y\oplus z)$ （定义）

即 $(x\oplus y)\oplus z = x\oplus(y\oplus z)$

综上，$<S,\oplus>$是半群

27. (1) 假设 $x*x \neq x$

令 $x*x=y$

则 $y*x = x*x*x$

$= x*(x*x)$ $<S,*>$是半群

$= x*y$

由题定义 当 $x\neq y$时，$x*y\neq y*x$

则 $x=y$，与 $x*x\neq x$矛盾

则 $x*x=x$

(2) 证明: $(x*y*x)*x = x*y*(x*x)$ (1)的结论

$= (x*y*x*)$

$= x*(x*y*x x)$

令 $x*y*x=z$

即 $z*x = x*z$.

由题意, 得 $z=x$

即 $x*y*x=x$

(3) 证: $(x*y*z)*(x*z)$

$= x*y*(z*x*z)$ (结合律)

$= x*y*z$ (2)

$= (x*z*x)*y*z$ (2)

$= (x*z)*(x*y*z)$ (结合律)

即 $(x*y*z)*(x*z) = (x*z)*(x*y*z)$

所以 $x*y*z = x*z$

29. (1) 证明 $x*y = x*(x*x)$ (定义)

$= (x*x)*x$ (结合律)

$= y*x$

即 $x*y = y*x$

(2) $y*y = y*(x*x)$

$= (y*x)*x = (x*y)*x$

令 $x*y = z$. $z \in \{x, y\}$

① $z=x$ 时，则 $y*y=x*x$
$=y$，
即 $y*y=y$
② $z=y$ 时，则 $y*y=y*x$
$=x*y$
$=z$
$=y$
即 $y*y=y$
综上，$y*y=y$

30. 令 $x=a \Rightarrow \exists\ m,n\in S$
$a*m=n*a=a$
$\forall x\in S,\ \exists\ \alpha,\beta\in S,\ a*\alpha=\beta*a=x$
$x*m=(\beta*a)*m$
$=\beta*(a*m)$ 结合律
$=\beta*a$
$=x$
$n*x=n*(a*\alpha)$
$=(n*a)*\alpha$ 结合律
$=a*\alpha$
$=x$

当$x=n$时

$n*m=n$

当$x=m$时，$n*m=m$

则 $n=m$

则 $\langle S,*\rangle$有幺元

则 $\langle S,*\rangle$为含幺半群.