第 8 章

习题 8.1（A）

1、判断下列映射是否为线性映射：

（1）从 $\boldsymbol{R}^3$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的映射：$T(x_1,x_2,x_3)^T=(2x_1+x_2,2x_2-3x_3)^T$；

（2）$\boldsymbol{R}^2$ 上的旋转变换：$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$；

（3）从 $\boldsymbol{V}$ 到自身的映射：$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_0$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 中一固定的非零向量；

（4）从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射：$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{A}$ 为一固定的 $\boldsymbol{n}$ 阶实方阵。

解：（1）从 R^3 到 R^2 的映射：$T(x_1,x_2,x_3)^T=(2x_1+x_2,2x_2-3x_3)^T$

$=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

是线性变换

（2）R^2 上的旋转变换：$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

是线性变换

（3）不是。

$T(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+\alpha_0\neq T(\alpha)+T(\beta)=\alpha+\alpha_0+\beta+\alpha_0$。

（4）不是。$T(x+y)=(x+y)^TA(x+y)\neq T(x)+T(y)$。

2、设 $\boldsymbol{W}$ 是欧氏空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个子空间，$|\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r|$ 是 $\boldsymbol{W}$ 的一个标准正交基，设 $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ 为 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{Proj}_{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{\alpha}=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}_r\rangle\boldsymbol{e}_r$，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{R}$，证明：$\boldsymbol{T}$ 是线性变换（称 $\boldsymbol{T}$ 为 $\boldsymbol{V}$ 到 $\boldsymbol{W}$ 的正交射影）。

证明：$\forall\alpha,\beta\in V$，$k\in R$

$\boldsymbol{T}(\alpha+\beta)=\mathbf{Proj}_{\boldsymbol{W}}(\alpha+\beta)=\langle\alpha+\beta,\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1+\cdots+\langle\alpha+\beta,\boldsymbol{e}_r\rangle\boldsymbol{e}_r$

$=\left(\langle\alpha,\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1+\langle\beta,\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1\right)+\cdots+\left(\langle\alpha,\boldsymbol{e}_r\rangle\boldsymbol{e}_r+\langle\beta,\boldsymbol{e}_r\rangle\boldsymbol{e}_r\right)$

$=\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle\alpha,e_r\rangle e_r+\langle\beta,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle\beta,e_r\rangle e_r$

$=T(\alpha)+T(\beta)$

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}\alpha)=\mathbf{Proj}_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{k}\alpha)=\langle\boldsymbol{k}\alpha,\boldsymbol{e}_1\rangle\boldsymbol{e}_1+\cdots+\langle\boldsymbol{k}\alpha,\boldsymbol{e}_r\rangle\boldsymbol{e}_r$

$=k\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\cdots+k\langle\alpha,e_r\rangle e_r$

$=k(\langle\alpha,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle\alpha,e_r\rangle e_r)$

$=kT(\alpha)$

所以，T 是 $V\to W$ 的一个线性变换。

3、设 $\boldsymbol{\alpha}_0=(\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{c}_0)^T$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 中一固定向量，令 $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ 为 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_0\times\boldsymbol{\alpha}$，$\forall\boldsymbol{\alpha}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\in\boldsymbol{R}^3$，证明：$\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的线性算子。

证明：$\forall\alpha,\beta\in R^3$，$k\in R$，$\alpha_0=(a_0,b_0,c_0)^T\in R^3$

$T(\alpha+\beta)=\alpha_0\times(\alpha+\beta)=\alpha_0\times\alpha+\alpha_0\times\beta=T(\alpha)+T(\beta)$

$T(k\alpha)=\alpha_0\times k\alpha=k(\alpha_0\times\alpha)=kT(\alpha)$

故，T 是 R^3 上的线性算子。

4、设 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的基，$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$，证明：$\boldsymbol{T}$ 为零变换的充要条件是 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{0}(\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1},\cdots,\boldsymbol{n})$。

证明：充分性：因为 $T(\alpha)$ 是零变换，

所以，$\forall\alpha\in V$，$T(\alpha)=0$，故有 $T(e_i)=0$（$i=1,2,\cdots,n$）。

必要性：因为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性空间 V 的基，所以 $\forall\alpha\in V$，

$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{e}_n$，

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2)+\cdots+\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_n)$

又 $\because T(e_i)=0$，$i=1,2,\cdots,n$

$\therefore T(\alpha)=0$，故 T 为零变换。

5、证明：$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R})$ 的充要条件是存在实常数 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，使得 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$。

证明：充分性：因为存在实常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，有 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$

所以，$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in R^n$，$k\in R$，

$T\left[(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T+(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\right]$

$=a_1(x_1+y_1)+a_2(x_2+y_2)+\cdots+a_n(x_n+y_n)$

$=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)+(a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n)$

$=T(x_1+x_2+\cdots+x_n)^T+T(y_1+y_2+\cdots+y_n)^T$

$T\left[k(x_1+x_2+\cdots+x_n)^T\right]=T(kx_1+kx_2+\cdots+kx_n)^T$

$=a_1kx_1+a_2kx_2+\cdots+a_nkx_n$

$=k(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)=kT(x_1+x_2+\cdots+x_n)^T$

故，$T\in L(R^n,R)$。

必要性：设 $T\in L(R^n,R)$，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 R^n 中的基本单位向量组，设 $T(e_i)=a_i$，$i=1,2,\cdots,n$，$a_i\in R$

则，$\forall\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)^T\in\boldsymbol{R}^n$

$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$

根据线性变换的定义有：

$T(\alpha)=T(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$

$=x_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\cdots+x_nT(e_n)$

$=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$。

6、设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个基，$\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{R}^2)$，定义 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)=(\boldsymbol{1},-\boldsymbol{1},\boldsymbol{2})^T$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{3},\boldsymbol{2})^T$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3)=(-\boldsymbol{3},\boldsymbol{1},\boldsymbol{2})^T$，求 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{2e}_1-\boldsymbol{3e}_2+\boldsymbol{4e}_3)$。

解：$T(2e_1-3e_2+4e_3)=2T(e_1)-3T(e_2)+4T(e_3)$

$=2(1,-1,2)^T-3(0,3,,2)^T+4(-3,1,,2)^T$

$=(-10,-7,6)^T$。

7、设 $\boldsymbol{T}_1$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上旋转 $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{3}}$ 的变换，$\boldsymbol{T}_2$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上旋转 $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$ 的变换（关于 $\boldsymbol{R}^2$ 上的旋转变换见本习题 1（2）题），求 $\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{T}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ 及 $\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$。

解：

$$\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\cos\alpha-\boldsymbol{y}\sin\alpha\\\boldsymbol{x}\sin\alpha+\boldsymbol{y}\cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\boldsymbol{x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{y}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}-\sqrt{3}\boldsymbol{y}\\\sqrt{3}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{x} & -\sqrt{3}\boldsymbol{y}\end{bmatrix}$$

8、设 $\boldsymbol{T}\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^3)$，定义

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)^T=(4\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-2\boldsymbol{x}_3-3\boldsymbol{x}_4,2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3-4\boldsymbol{x}_4,6\boldsymbol{x}_1-9\boldsymbol{x}_3+9\boldsymbol{x}_4)^T$：

（1）判别下列向量中哪些是 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})$ 中的向量：$\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{6},\boldsymbol{8},\boldsymbol{6})^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-\boldsymbol{1},\boldsymbol{3},\boldsymbol{4})^T$；

（2）判别下列向量中哪些是$\ker(T)$中的向量：$\xi_1=(-3,8,-2,0)^T$，$\xi_1=(2,0,0,1)^T$；（3）求出$\ker(T)$及$R(T)$的基，指出T的零度及秩。

解：$T\in L(R^4,R^3)$，且

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(4x_1+x_2-2x_3-3x_4,2x_1+x_2+x_3-4x_4,6x_1-9x_3+9x_4)^T$$

$$=\begin{pmatrix}4&1&-2&-3\\2&1&1&-4\\6&0&-9&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=Ax$$

（1）要判断α_1,α_2是否属于$R(T)$，即判断$Ax=\alpha_1$，$Ax=\alpha_2$这两个非齐次线性方程组是否有解，即判断是否有：$r(A)=r(A|\alpha_1)$，$r(A)=r(A|\alpha_2)$，经计算：$r(A)=r(A|\alpha_1)=3$，$r(A)=r(A|\alpha_2)=3$，故，$\alpha_1,\alpha_2\in R(T)$。

（2）要判断ξ_1,ξ_2是否属于$\ker(T)$，即判断ξ_1,ξ_2是否为齐次线性方程组$Ax=0$的解。

经计算得，$Ax=0$的基础解系为：$k(3,-8,2,0)^T$，$k\in R$

故，$\xi_1\in\ker(T)$，$\xi_2\notin\ker(T)$。

（3）$\ker(T)$即为$Ax=0$的解空间，由（1）得，$\ker(T)$的基为：$(3,-8,2,0)^T$，$\dim(\ker(T))=1$

$R(T)$即为矩阵A的列空间，所以，$R(T)$的基即为矩阵A的列向量组的极大线性无关组。

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-2&-3\\2&1&1&-4\\6&0&-9&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-3/2&0\\0&1&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

由此得$R(T)$的一个基为：$(4,2,6)^T$，$(1,1,0)^T$，$(-3,-4,9)^T$

$\dim(R(T))=3$。

9、设$T\in L(R^3)$，定义为$T(x)=Ax$，$\forall x\in R^3$，其中$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{pmatrix}$；

（1）证明：几何上$R(T)$代表过原点的平面，并求该平面的方程；

（2）证明：几何上$\ker(T)$代表过原点的直线，并求该直线的方程。

证明：（1）$R(T)=A\alpha$，$\alpha=(x,y,z)^T\in R^3$

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y+3z\\5x+6y-4z\\7x+4y+2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\in R^3$$

经计算得：$-5X+Y=-7X+Z$，故：$2X+Y-Z=0$

即：$R(T)$为过原点的平面，平面方程为：$2X+Y-Z=0$。

（2）$\ker(T)=\{x|Ax=0,x\in R^3\}$

$\ker(T)$即为齐次线性方程组$Ax=0$的解空间。

$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&6&-4\\7&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&14/11\\0&1&-19/11\\0&0&0\end{pmatrix}$，可得，$\ker(T)$是：

过原点的直线：$\dfrac{x}{-14}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z}{11}$。

10、设$T_1,T_2\in L(R^2)$，定义为$T_1(x,y)^T=(y,z)^T$，$T_2(x,y)^T=(0,z)^T$，求$T_1T_2(x,y)^T$及$T_2T_1(x,y)^T$，问是否有$T_1T_2=T_2T_1$？

解：

$$T_1T_2(x,y)^T=T_1\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},T_2T_1(x,y)^T=T_2\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix},T_1T_2\ne T_2T_1。$$

11、设$T:R^n\to R^m$是线性变换，定义为$T(x)=Ax$，对下列各题中的矩阵A，确定T是否为单射：（1）$A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\\-3&6\end{pmatrix}$；（2）$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&5\\2&-1&2\\-1&3&0\end{pmatrix}$。

解：$T:R^n\to R^m$. 由定理 8.1.4 知，要证明T是单射，只要证明$\ker(T)=\{0\}$，$T(x)=Ax$，$\ker(T)$就是齐次线性方程组$Ax=0$的解空间。

（1）$A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\\-3&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=1$，即$Ax=0$的解空间维数为 1，所以，

$\ker(T)\ne\{0\}$，说明不是单射.

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&5\\2&-1&2\\-1&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=3$，即$Ax=0$的解空间维数为 3，所以，$\ker(T)=\{0\}$，说明是单射.

12、证明：线性变换的和及数量乘积都是线性变换。

证明：线性变换的和：

设，$T_1,T_2\in L(V,W)$，$k\in F$

$(T_1+T_2)(\alpha+\beta)=T_1(\alpha+\beta)+T_2(\alpha+\beta)$

$=T_1(\alpha)+T_1(\beta)+T_2(\alpha)+T_2(\beta)$

$=[T_1(\alpha)+T_2(\alpha)]+[T_1(\beta)+T_2(\beta)]$

$=(T_1+T_2)(\alpha)+(T_1+T_2)(\beta)$

$(T_1+T_2)(k\alpha)=T_1(k\alpha)+T_2(k\alpha)=kT_1(\alpha)+kT_2(\alpha)$

$=k(T_1(\alpha)+T_2(\alpha))$

说明：两线性变换的和为线性变换。

$(kT)(\alpha+\beta)=k(T(\alpha+\beta))=k(T(\alpha)+T(\beta))=kT(\alpha)+kT(\beta)$

$=(kT)(\alpha)+(kT)(\beta)$

$(kT)(m\alpha)=k(T(m\alpha))=k(mT(\alpha))$

$=m(kT(\alpha))$

$=m(kT(\alpha))$

说明：数与线性变换的乘积为线性变换。

13、设，定义映射$(T_1-T_2):V\to W$为$(T_1-T_2)(\alpha)=T_1(\alpha)-T_2(\alpha)\quad\forall\alpha\in V$，证明：$T_1-T_2$为线性变换。

证明：$(T_1-T_2)(\alpha+\beta)=T_1(\alpha+\beta)-T_2(\alpha+\beta)\quad\forall\alpha,\beta\in V$，$k\in F$

$=T_1(\alpha)+T_1(\beta)-[T_2(\alpha)+T_2(\beta)]$

$=(T_1-T_2)(\alpha)+(T_1-T_2)(\beta)$

$(T_1-T_2)(k\alpha)=T_1(k\alpha)-T_2(k\alpha)=kT_1(\alpha)-kT_2(\alpha)$

$=k(T_1-T_2)(\alpha)$

因此，T_1-T_2为线性变换。

14、设$T_i\in L(V)(i=1,2,3)$，证明：（1）$(T_1+T_2)T_3=T_1T_3+T_2T_3$，（2）若$T_1T_2=T_2T_1$，且$T_1$可逆，则$T_1^{-1}T_2=T_2T_1^{-1}$。

证明：（1）设$\alpha\in V$，$T_3(\alpha)=\beta\in V$

则：$[(T_1+T_2)T_3](\alpha)=(T_1+T_2)[T_3(\alpha)]=(T_1+T_2)(\beta)$

$=T_1(\beta)+T_2(\beta)$

$=T_1(T_3(\alpha))+T_2(T_3(\alpha))$

$=T_1T_3(\alpha)+T_2T_3(\alpha)$。

(2)因为，$T_1T_2=T_2T_1$，且T_1可逆，所以，$T_2=T_1^{-1}T_1T_2=T_1^{-1}T_2T_1$

故，$T_2T_1^{-1}=T_1^{-1}T_2T_1T_1^{-1}=T_1^{-1}T_2$。

（B）

1、设V_1,V_2,V_3都是有限维线性空间，$T_2\in L(V_1,V_2)$，$T_1\in L(V_2,V_3)$，证明$rank(T_1T_2)\le \min|rank(T_1),rank(T_2)|$。

证法 1：**因为T_2不一定是满射，所以$T_2(V_1)\subset V_2, T_1(T_2(V_1))\subset T_1(V_2)$**

$rank(T_1T_2)=\dim[T_1T_2(V_1)]=\dim\{T_1(T_2(V_1))\}\le\dim\{T_1(V_2)\}$

$=rank(T_1)$

同理：**因为T_1不一定是单射.**

$rank(T_1T_2)=\dim\{(T_1T_2(V_1))\}=\dim\{T_1(T_2(V_1))\}\le\dim\{T_2(V_1)\}$

$=rank(T_2)$。

所以有$\mathbf{rank}(T_1T_2)\le\mathbf{min}\{\mathbf{rank}(T_1),\mathbf{rank}(T_2)\}$

证法 2：设$T_2\in L(V_1,V_2)$对应的矩阵为B，$rank(T_2)=\mathrm{r}(B)$;

设$T_1\in L(V_2,V_3)$对应的矩阵为A，$rank(T_1)=\mathrm{r}(A)$;

线性变换的乘积对应矩阵的乘积，$T_1T_2\in L(V_1,V_3)$对应的矩阵为AB.

$R(T_1T_2)$与AB的列空间同构. $rank(T_1T_2)=\mathrm{r}(AB)$。

因为$\mathrm{r}(AB)\le\mathbf{min}\{\mathrm{r}(A),\mathrm{r}(B)\}$。

所以有$\mathbf{rank}(T_1T_2)\le\mathbf{min}\{\mathbf{rank}(T_1),\mathbf{rank}(T_2)\}$

2、设V上的线性算子T满足$T^2=T$，证明：$V=\ker(T)\oplus R(T)$。

证明：$\forall\alpha\in V$，$\alpha=[\alpha-T(\alpha)]+T(\alpha)$

$T(\alpha-T(\alpha))=T(\alpha)-T^2(\alpha)=T(\alpha)-T(\alpha)=0$

所以，$\alpha-T(\alpha)\in\ker(T)$，又，$T(\alpha)\in R(T)$

$\therefore V=\ker(T)+R(T)$

$\forall\beta\in R(T)$，有$\alpha\in V$，使得$T(\alpha)=\beta$

$\therefore T(\beta)=T^2(\alpha)=T(\alpha)=\beta$，

若$\beta\ne0$，$T(\beta)\ne0$，$\therefore\beta\notin\ker(T)$。

由此有：$\ker(T)\cap R(T)=\{0\}$，

所以有$V=\ker(T)\oplus R(T)$

习题 8.2

（A）

1、设T为$F[x]_3$上的线性算子，定义$T(f(x))=f(x+1)-f(x)$，求T在基$1,x,x^2,x^3$下的矩阵。

解：$f_1(x)=1$，$T(f_1(x))=1-1=0=(1\quad x\quad x^2\quad x^3)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$f_2(x)=x$，$T(f_2(x))=(x+1)-x=1=(1\quad x\quad x^2\quad x^3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

同理得：$f_3(x)=x^2$，$T(f_3(x))=(1\quad x\quad x^2\quad x^3)\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$

$f_4(x)=x^3$，$T(f_4(x))=(1\quad x\quad x^2\quad x^3)\begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}$

故，T在基$1,x,x^2,x^3$的秩阵为$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

2、证明：若$T\in L(R^n,R^m)$，则必存在实矩阵$A_{m\times n}$使得$\forall x\in R^n$，成立$T(x)=Ax$。

证明；因为$T\in L(R^n,R^m)$，设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$R^n$中的基本单位向量组，并设：

$T(\varepsilon_i)=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{mi})^T$ （$i=1,2,\cdots,n$），

$\forall x\in R^n$，$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$

故，$T(x)=T(a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n)$

$=a_1T(\varepsilon_1)+a_2T(\varepsilon_2)+\cdots+a_nT(\varepsilon_n)$

$=(T(\varepsilon_1)\quad T(\varepsilon_2)\quad\cdots\quad T(\varepsilon_n))(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)^T$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=Ax$$

[在此：必须选R^n中的基本单位向量组作为R^n的基]

3、设$T:F[x]_2-F[x]_1$，是一线性变换，定义为$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0+a_1)-(2a_1+3a_2)x$；（1）求$T$在基$B$，$B'$下的矩阵，其中$B=|1,x,x^2|$，$B'=|1,x|$；（2）用（1）求出的矩阵对$F[x]_2$中任意向量$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$验证公式（8.2.7）。

解：（1）由已知得：$T(1)=1=(1\quad x)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$T(x)=1-2x=(1\quad x)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$T(x^2)=-3x=(1\quad x)\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

故，T在基B，B'下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&-3\end{pmatrix}$。

（2）$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，$f(x)$在基B下的坐标为$(a_0,a_1,a_2)^T$

$T(f(x))=T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0+a_1)-(2a_1+3a_2)x$

$=(1\quad x)\begin{pmatrix}a_0+a_1\\-2a_1-3a_2\end{pmatrix}$

$T(f(x))$在基B'下的坐标为$(a_0+a_1,-2a_1-3a_2)^T$

显然有：$\begin{pmatrix}a_0+a_1\\-2a_1-3a_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$，验证公式（8.2.7）。

4、设$T\in L(R^4,R^3)$，T在基$B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，$B'=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}3&-2&1&0\\2&6&2&1\\-3&0&7&1\end{bmatrix}$，其中，$\alpha_1=(0,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(2,1,-1,-1)^T$，$\alpha_3=(1,4,-1,2)^T$，$\alpha_4=(6,9,4,2)^T$，$\beta_1=(0,8,8)^T$，$\beta_2=(-7,8,1)^T$，$\beta_3=(-6,9,1)^T$，求$\alpha_1=(1,-2,1,-2)^T$在基$B$下的坐标，并求$T(\alpha)$。

解：设$\alpha=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4$

即$(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4)(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(1,-2,1,-2)^T$

解得，$x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=-1$，$x_4=0$

由公式（8.2.7）得，$y=(y_1,y_2,y_3)^T=A(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$

$=(2,5,-10)^T$

故，$T(\alpha)=2\beta_1+5\beta_2-10\beta_3=(25,-50,-5)^T$ 。

5、设$\dim(V)=n$，$\dim(W)=m$，$n>m$，$T\in L(V,W)$，问T是否为单射？

解法 1：由于$T\in L(V,W)$，且$\dim(V)=n$，$\dim(W)=m$，$n>m$

故，由定理 8.1.3 知，$nullity(T)+rank(T)=n$

而，$rank(T)\le m$

则，$nullity(T)\ge n-m>0$

说明：T不是单射。

解法 2：由于$T\in L(V,W)$，且 ，$\dim(V)=n$，$n>m$

所以，与T对应的矩阵$A_{m\times n}$满足$m<n$，故$r(A)<n$

则方程组$Ax=0$必存在非零解，故，T不是单射。

6、设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是线性空间V的基，$T\in L(V)$，证明：T可逆的充要条件是$T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$线性无关。

证法 1：由定理 8.1.9：T可逆$\Leftrightarrow rank(T)=n\Leftrightarrow T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$线性无关.

证法 2：T可逆$\Leftrightarrow$与T对应的矩阵$A_{n\times n}$可逆$\Leftrightarrow A$的列空间的秩为$n\Leftrightarrow A$的列向量组线性无关。

又$\because\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的基，线性无关。

故，$T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$线性无关。

7、设T,S都是R^3上线性算子，定义为：$T(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1,x_2,x_1+x_3)^T$；$S(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1+x_2-x_3,0,x_3-x_1-x_2)^T$，求$TS$、$ST$、$T^2$、$T+S$、$2T$、$T^{-1}$。

解：由$T(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1,x_2,x_1+x_3)^T$知，与$T$对应的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$S(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1+x_2-x_3,0,x_3-x_1-x_2)^T$知，

与S对应的矩阵$B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

由定理 8.2.1 知

与TS对应的矩阵$AB=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$TS(x_1,x_2,x_3)^T=(AB)x$

与ST对应的矩阵$BA=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，故$ST(x)=BAx$

与T^2对应的矩阵$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，故$T^2(x)=A^2x$

与$T+S$对应的矩阵为$A+B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$，故$(T+S)(x)=(A+B)x$

与$2T$对应的矩阵为$2A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，故$2T(x)=2Ax$

与T^{-1}对应的矩阵为$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，故$T^{-1}(x)=A^{-1}x$。

8、设T是$F[x]_2$上的线性算子，T在基$|x^2,x,1|$下的矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{bmatrix}$，求$T$在基$|x^2,x^2+x,x^2+x+1|$下的矩阵。

解：基$(x^2,x,1)$与基(x^2,x^2+x,x^2+x+1)之间的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

即：$(x^2,x^2+x,x^2+x+1)=(x^2,x,1)C$

而，$T(x^2,x,1)=(x^2,x,1)A$

故，$T(x^2,x^2+x,x^2+x+1)=T(x^2,x,1)C$

$=(x^2,x,1)AC$

$=(x^2,x^2+x,x^2+x+1)C^{-1}AC$

则：T在基(x^2,x^2+x,x^2+x+1)下的矩阵为$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}2&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{pmatrix}$。

9、设$T\in L(R^3)$，$T(\alpha_1)=(-5,0,3)^T$，$T(\alpha_2)=(0,-1,6)^T$，$T(\alpha_3)=(-5,-1,9)^T$，其中$\alpha_1=(-1,0,2)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(3,-1,0)^T$，求T在基$\varepsilon_1=(1,0,1)^T$，$\varepsilon_2=(0,1,0)^T$，$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$下的矩阵。

解：由已知得，$(T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3))=\begin{pmatrix}-5&0&-5\\0&-1&-1\\3&6&9\end{pmatrix}=A=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A$

$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)B$

$(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)B^{-1}$

故，$T(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(T(\varepsilon_1)\ \ T(\varepsilon_2)\ \ T(\varepsilon_3))=(T(\alpha_1)\ \ T(\alpha_2)\ \ T(\alpha_3))B^{-1}$

$=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)AB^{-1}$

则，T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$AB^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5&20&-20\\-4&-5&-2\\27&18&24\end{pmatrix}$。

10、设$T\in L(V)$，T在V的基e_1,e_2,e_3下的矩阵为$A=\begin{bmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{bmatrix}$，求$T$在基$\beta_1=2e_1+3e_2+e_3$，$\beta_2=3e_1+4e_2+e_3$，$\beta_3=e_1+2e_2+2e_3$下的矩阵。

解：e_1,e_2,e_3到基β_1,β_2,β_3之间的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\1&1&2\end{pmatrix}$

即：$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(e_1\ \ e_2\ \ e_3)C$

又因为：$T(e_1\ \ e_2\ \ e_3)=(e_1\ \ e_2\ \ e_3)A$

故，T在基β_1,β_2,β_3下的矩阵为$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$。

（B）

1、设$T\in L(V)$，证明：如果T在V的任一基下的矩阵都相同，则T是数乘变换。

证明：设A是线性变换T在某个基下的矩阵，则A对于任意可逆矩阵C，有$C^{-1}AC$也是线性变换T在另外一个基下的矩阵，由题意有，$C^{-1}AC=A$，即$AC=CA$，特别取$C=E_{ij}$，其中：$1\le i<j\le n$，i行j列处元素为 1，其余元素为零的矩阵。则由$AE_{ij}=E_{ij}A$，得，A为数量矩阵。

2、设V为复数域C上的线性空间$T\in L(V)$，若存在数$\lambda_0\in C$及V中非零向量α，使得$T(\alpha)=\lambda_0\alpha$，则称$\lambda_0$为$T$的一个特征值，称$\alpha$为$T$的对应于特征值$\lambda_0$的特征向量，设$T$在$V$的基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的矩阵为$A$，证明：$\lambda_0$为$T$的特征值且$\alpha$为对应的特征向量$\Leftrightarrow\lambda_0$为$A$的特征值且$x$为对应的特征向量，其中$x$为$\alpha$在基$e_1,e_2,\cdots,e_n$下的坐标向量。

证明：设$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n=(e_1,e_2,\cdots,e_n)x$

其中：$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

则，$T(\alpha)=T(e_1,e_2,\cdots,e_n)x=(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))x$

$=(e_1,e_2,\cdots,e_n)Ax$

$\lambda_0\alpha=\lambda_0(e_1,e_2,\cdots,e_n)x=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\lambda_0 x$

故，$T(\alpha)=\lambda_0\alpha \Leftrightarrow (e_1,e_2,\cdots,e_n)Ax=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\lambda_0 x$

$\Leftrightarrow (e_1,e_2,\cdots,e_n)(Ax-\lambda_0 x)=0$

由于$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性无关$\Leftrightarrow Ax=\lambda_0 x$

$\alpha\in\forall$非零向量，$x\in C^n$亦非零向量。

故得证。

3、设$T\in L(V)$,，T在V的基$B=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|$下的矩阵为$A$，证明：$T$在$V$的某基$B'=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$下的矩阵为对角矩阵$D\Leftrightarrow A$相似于对角矩阵$D$，并在$A$可相似对角化时，求出及$B'$。

“$\Rightarrow$”$T\in L(V)$,T在V的基$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$下的矩阵为$A$，$T$在$V$的某基$B'=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$下的矩阵为对角矩阵$D$，则由定理知$A$与$D$相似，说明$A$可对角化。

“$\Leftarrow$”设A相似于对角矩阵D，即存在可逆矩阵C，满足$C^{-1}AC=D$，由于$B=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为$V$的基，$T$在$V$的基$B$下的矩阵为$A$，故，$B'=BC=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}C$也为$V$的基。且，

$T(B')=T[\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}]C=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}AC=B'\cdot C^{-1}AC=B'D$

故得知，T在V的基B'下的矩阵为$C^{-1}AC=D$，且为对角矩阵；

且有$B'=BC=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}C$为$V$的另一个基

4、设V上的线性算子T在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A$，对下列矩阵$A$。问是否存在$V$的基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$，使得$T$在这个基下的矩阵为对角矩阵？若是，求出这个基及对应的对角矩阵。（1）$A=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$；（2）$A=\begin{bmatrix}6&-5&-3\\3&-2&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$。

解：由上题的结论可进行求解。

（1）$A=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=0$，得$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，

$\lambda_1=1$对应的特征向量为$(1,1,1)^T$，

$\lambda_2=\lambda_3=2$对应的特征向量为$(1,1,0)^T$，$(0,1,3)^T$。

则A可对角化，且$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}$，$C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

并且存在V的基$B'=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)C$

线性变换T在基B'下的矩阵为$diag(1,2,2)$。

（2）$A=\begin{bmatrix}6&-5&-3\\3&-2&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=0$，得$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，

$\lambda_1=\lambda_2=1$对应的特征向量为$(1,1,0)^T$，

因此，A不可对角化，故不存在V的基。

5、设T是n维欧氏空间V上的线性算子，如果$\forall\alpha,\ \beta\in V$，都有$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$，则称$T$为正交变换，设$T\in L(V)$，证明下列各命题是相互等价的。(1) T是正交变换；(2) T是保长度的，即$\forall\alpha\in V$，都有$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$；（3）如果$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的标准正交基，则$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基；（4）$T$在任一标准正交基下的矩阵为正交矩阵。

证明：（1）$\Rightarrow$（2）若T是正交变换，则有$\forall\alpha,\ \beta\in V$，$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$，

故，$\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle$

$\|T(\alpha)\|^2=\|\alpha\|^2$，即，$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$.

(2)$\Rightarrow$(1)若$\forall\alpha\in V$，都有，$\|T(\alpha)\|=\|\alpha\|$，两边平方得，

$\|T(\alpha)\|^2=\|\alpha\|^2$，即，$\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle$，$\langle T(\beta),T(\beta)\rangle=\langle\beta,\beta\rangle$

故，$\langle T(\alpha+\beta),T(\alpha+\beta)\rangle=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle$。

$2\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle+\langle T(\alpha),T(\alpha)\rangle+\langle T(\beta),T(\beta)\rangle=2\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha,\alpha\rangle+\langle\beta,\beta\rangle$

则，$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$

（1）$\Rightarrow$（3）若$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V一组标准正交基，则$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$

若T是正交变换，则有：$\langle T(e_i),T(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$

即，也是$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$一组标准正交基。

(3)$\Rightarrow$(1) 若$e_1,e_2,\cdots,e_n$是V的标准正交基，$T\in L(V)$，

$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基。

设$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$，$\beta=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$

$T(\alpha)=x_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\cdots+x_nT(e_n)$

$T(\beta)=y_1T(e_1)+y_2T(e_2)+\cdots+y_nT(e_n)$，由标准正交基性质得，

$\langle\alpha,\beta\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，$\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

故得，$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle T(\alpha),T(\beta)\rangle$，$T$是正交变换。

（3）$\Rightarrow$（4），设$e_1,e_2,\cdots,e_n$为V的标准正交基，T在该基下的矩阵为A，则，

$T(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$

若$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基，则矩阵$A$相当于欧氏空间$V$的两组标准正交基间的过渡矩阵，则$A$一定是正交矩阵。

(4)$\Rightarrow$(3)，设$e_1,e_2,\cdots,e_n$为V的标准正交基，T在该基下的矩阵为A，且A是正交矩阵，则，

$T(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n))=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A$

由第五章的习题结论可知，$T(e_1),T(e_2),\cdots,T(e_n)$也是$V$的标准正交基。

第 8 章习题

1、设有R^2得即$B:\varepsilon_1=(1,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,1)^T$；R^3的基B': $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(0,1,1)^T$，$T\in L(R^2,R^3)$，定义为$T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$，$\forall x=(x_1,x_2)^T\in R^2$。（1）求$T$的值域与秩、核与零度；（2）$T$是否为单射？（3）求$T$在基$B,B'$下的矩阵。

解：由定义$T(x)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\alpha_3$，

得，$T(x)=x_1(\alpha_1+\alpha_3)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)=x_1(1,2,1)^T+x_2(1,1,2)^T$

（1）故，$R(T)=span((1,2,1)^T,(1,1,2)^T)$，所以，$rank(T)=2$。

（2）令，$T(x)=0$，即得$x_1(1,2,1)^T+x_2(1,1,2)^T=(0,0,0)^T$

可知，$x_1=0$，$x_2=0$，即$x=(0,0)^T$

故，$\ker(T)=\{0\}$，$nuuity(T)=0$，

由定理知，T是单射。

因为，$rank(T)=2<3$，所以，T不是满射。

（3）$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2))=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)A$

即，$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}A$

故，$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$。

2、设$T\in L(R[x])$，定义为$T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$，$\forall f(x)\in R[x]_2$（1）求T在基$|1,\ x,x^2|$下的矩阵A；（2）求T在基$|1,\ x,1+x^2|$下的矩阵B；（3）求

矩阵 S，使得 $B=S^{-1}AS$；(4)若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)$，求 $T^n(f(x))(n=2,3,\cdots)$。

解，（1）因为，$T(f(x))=xf'(x)+f''(x)$

$f_1(x)=1$，$T(f_1(x))=0=(1,x,x^2)(0,0,0)^T$

$f_2(x)=1$，$T(f_2(x))=x=(1,x,x^2)(0,1,0)^T$

$f_3(x)=1$，$T(f_3(x))=2x^2+2=(1,x,x^2)(2,0,2)^T$

故 $T(1,x,x^2)=(T(1),T(x),T(x^2))=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=(1,x,x^2)A$。

（2）同理求得，

$$T(1,x,1+x^2)=(T(1),T(x),T(1+x^2))=(1,x,1+x^2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=(1,x,1+x^2)B$$

（3）$(1,x,1+x^2)=(1,x,x^2)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(1,x,x^2)S$

得，$B=S^{-1}AS$。

（4）$f(x)=a_0+a_1x+a_2(1+x^2)=(1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^T$

故，$T^n(f(x))=T^n((1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^T)$

$=T^{n-1}(T(1,x,1+x^2)(a_0,a_1,a_2)^T)$

$=T^{n-1}((1,x,1+x^2)B\cdot(a_0,a_1,a_2)^T)$

…

$=(1,x,1+x^2)B^n(a_0,a_1,a_2)^T$

$=(1,x,1+x^2)(a_0,a_1,2^na_2)^T$

$=a_1x+2^na_2(1+x^2)$

3、已知 $T\in L(R^3)$，T 在基 $B:\alpha_1=(-1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，（1）求 T 在基 $B':\varepsilon_1=(1,0,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,1,0)^T$，$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵；（2）求 $T(1,2,-5)^T$。

解：（1）由题设知，由 B' 到 B 的过渡矩阵为 $C=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，

则，由 B 到 B' 的过渡矩阵为 $C^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，

故，$T\in L(R^3)$ 在基 B' 下的矩阵为 $D=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}$。

（2）$T(1,2,-5)^T=T((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)(1,2,-5)^T)$

$=D(1,2,-5)^T=(11,6,-7)^T$

4、设 $T\in L(V)$，T 在 V 的基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\-4&3&-2\\-4&-2&3\end{bmatrix}$。（1）$T$ 是否可逆？，若 T 可逆，求 T^{-1}；（2）试求 V 的另一基，使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵。

解：（1）$|A|=25\neq 0$，故，A 可逆，所以，T 可逆，

又因为 $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix}$，

则，$T^{-1}=(e_1\quad e_2\quad e_3)\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{pmatrix}$

（2）将居住 A 对角化，$|\lambda E-A|=0$，得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=5$，对应的特征向量分别为：$\alpha_1=(0,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,-2,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,-2)^T$，

故，有基为：e_2+e_3，e_1-2e_2，e_1-2e_3，

T 在这一组基下的矩阵为 $diag(1,5,5)$。

5、设 $T\in L(V)$，T 在 V 的基 $B:e_1,e_2,e_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}$。（1）证明 $T^2=T$；(2)求 $R(T)$ 和 $\ker(T)$ 的基，并证明将它们合在一起可构成 V 的基 B'；(3)求 T 在 B' 下的矩阵；(4)证明 $\forall\alpha\in R(T)$，恒有 $T(\alpha)\in R(T)$，$\forall\beta\in\ker(T)$，恒有 $T(\beta)\in\ker(T)$。

解：（1）线性变换相乘等于对应的矩阵相乘，故，要证明 $T^2=T$，只要证明 $A^2=A$ 就可以了。

因为 $A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}A$，故，$T^2=T$。

（2）$R(T)=(e_1\quad e_2\quad e_3)A=span(e_1,-e_2+2e_3)$，$Ax=0$ 的解为 $\ker(T)$ 中的元素，在基 e_1,e_2,e_3 下的坐标，故，$\ker(T)=span(e_2-e_3)$。

又因为，$(e_1,-e_2+2e_3,e_2-e_3)=(e_1\quad e_2\quad e_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}=-1\neq 0$，

所以，$R(T)$，$\ker(T)$ 的基合在一起构成 V 的一个基 B'，

其中，$R(T)$ 的基为：$e_1,-e_2+e_3$，

$\ker(T)$ 的基为：e_2-e_3。

（3）T 在基 B' 下的矩阵为

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}=diag(1,1,0)$$

（4）由（1）知，T 是可逆线性变换，

$\forall\alpha\in R(T)$，$\exists\beta\in V$，使得，$T(\beta)=\alpha$

故，$T(\alpha)=T(T(\beta))=T^2(\beta)=T(\beta)=\alpha\in R(T)$

所以，$T(\alpha)\in R(T)$。

$\forall\beta\in\ker(T)$，得，$T(\beta)=0$，

$T(0)=0=T^2(\beta)=T(\beta)=0$

所以，$T(\beta)\in\ker(T)$。

6、设 $T\in L(V,W)$，V 为有限维空间，已知 $T(e_1),\cdots,T(e_r)$ 为 $R(T)$ 的基（其中 $e_i=V,i=1,\cdots,r$），又知 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 $\ker(T)$ 的基，试证明向量组 $(I):e_1,\cdots,e_r,\beta_1,\cdots\beta_s$ 是 V 的基.

证明：已知 $T(e_1),\cdots,T(e_r)$ 为 $R(T)$ 的基（其中 $e_i=V,i=1,\cdots,r$），

$\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 $\ker(T)$ 的基，

设存在一组常数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,l_1,l_2,\cdots l_s$ 满足

$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s=0 \quad (1)$

$T(k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_re_r+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_s\beta_s)=T(0)=0$

$k_1T(e_1)+k_2T(e_2)+\cdots+k_rT(e_r)=0\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_r=0$

将 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 代入（1）得 $l_1=l_2=\cdots=l_s=0$

所以，$e_1,e_2,\cdots,e_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

再证明 V 中任一向量 α 都可由 $e_1,e_2,\cdots,e_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示.

设 $T(\alpha)=a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+\cdots+a_rT(e_r)$.

记向量$\alpha_0=\alpha-(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r)$

$T(\alpha_0)=T(\alpha-(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r))=T(\alpha)-a_1T(e_1)-a_2T(e_2)-\cdots-a_rT(e_r))=0$

$\alpha_0\in\ker(\mathrm{T})$

α_0可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示.

即$\alpha_0=b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_s\beta_s$.

故$\alpha=\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r+b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_s\beta_s$

因此，$e_1,e_2,\cdots,e_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是V的基.