一. 1. 解：$\overline{A \cup B}$ 表示选到二、三、四年级的女生，其概率为 7/40.

2. 解：(1) $1-C_{n-m}^{4}/C_{n}^{4}$，(2) m/n.

3. 解：(1) $X_4 \sim P(2), P(X_4 \geq 1)=1-P(X_4=0)=1-e^{-2}$，(2) $\frac{P(X_2=0)P(Y_2 \geq 1)}{P(X_4 \geq 1)}=\frac{1}{1+e}$.

4. 解：$P(X+Y<1.5)=3/4$, $F(1.5, 0.5)=1/4$.

5. 解：(1) $\bar{X} \sim N(0, \sigma^2/4), P(|\bar{X}|>\sigma)=2(1-\Phi(2))=0.046$,

(2) $\frac{X_1}{\sigma} \sim N(0,1), \frac{X_2^2+X_3^2+X_4^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3)$, 且相互独立，$\frac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}} \sim t(3), \Rightarrow c=\sqrt{3}$.

二. 解：X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\ 0, & x \leq 0.\end{cases}$ Y 的分布律 $P(Y=0)=0.6, P(Y=1)=0.4$.

$F_U(u)=P(U \leq u)=P(\frac{1}{2}e^{-\frac{X}{2}} \leq u)$, 当 $u<0$ 时，$F_U(u)=0$，当 $u \geq 1/2$ 时，$F_U(u)=1$，当 $0 \leq u<1/2$

时，$F_U(u)=P(\frac{1}{2}e^{-\frac{X}{2}} \leq u)=P(X \geq -2\ln(2u))=2u$. 即 $F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ 2u, & 0 \leq u<\frac{1}{2},\\ 1, & u \geq \frac{1}{2}.\end{cases}$ 4 分

根据全概率公式，$F_V(v)=P(X+Y \leq v)=P(Y=0)P(X \leq v)+P(Y=1)P(X \leq v-1)$

$$=\begin{cases}0, & v<0,\\ 0.6(1-e^{-\frac{v}{2}}), & 0 \leq v<1,\\ 1-0.6e^{-\frac{v}{2}}-0.4e^{-\frac{v-1}{2}}, & v \geq 1.\end{cases}$$ 10 分

三．解：记 $Var(X)=\sigma^2$，(1) $Cov(\sum_{i=1}^{60}X_i,\sum_{i=41}^{100}X_i)=20\sigma^2, Var(\sum_{i=1}^{60}X_i)=Var(\sum_{i=41}^{100}X_i)=60\sigma^2$，

所以，$\sum_{i=1}^{60}X_i$ 与 $\sum_{i=41}^{100}X_i$ 的相关系数为 $\dfrac{Cov(\sum_{i=1}^{60}X_i,\sum_{i=41}^{100}X_i)}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{60}X_i)Var(\sum_{i=41}^{100}X_i)}}=\dfrac{1}{3}$；　　4 分

(2) $P(X<0.5)=\int_0^{0.5}6x(1-x)dx=0.5$，$Y\sim B(100,0.5)$，根据中心极限定理，$Y\overset{近似}{\sim}N(50,25)$，

$P(Y>45)\approx 1-\Phi(-1)=\Phi(1)=0.841$；　　8 分

(3) $E(X)=\int_0^1 6x^2(1-x)dx=0.5, E(X^2)=\int_0^1 6x^3(1-x)dx=0.3, Var(X)=0.05$

根据中心极限定理 $Z=X_1+\ldots+X_{100}\overset{近似}{\sim}N(50,5)$．　　12 分

四．解：（1）$P(X+Y>1)=\int_{0.5}^1 dy\int_{1-y}^{y}\dfrac{3y}{2}dx=\dfrac{5}{16}$，　　2 分

(2) Y 的边际密度函数 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{y}\dfrac{3y}{2}dx=3y^2, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & -y<x<y,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 为均匀分布密度函数，

所以 $P(X>0.2|Y=0.5)=0.3$；　　8 分

(3) 计算得，$E(X)=0$，$E(XY)=0$，所以 $Cov(X,Y)=0$，因此 X 与 Y 不相关.　　12 分

五．解：$X\sim N(5.25, 0.64)$，$Y\sim N(2.53, 0.25)$，$\rho=0$.

(1) $X+Y\sim N(7.78, 0.89)$，$P(X+Y>7.5)=\Phi(0.2968)$；　　5 分

(2) $X-2Y\sim N(0.19, 1.64)$, $P(X>2Y)=P(X-2Y>0)=\Phi(0.1484)$.　　10 分

六. 解:(1) $f(x;3,\beta)=\begin{cases}3x^2/\beta^3, & 0<x<\beta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $\mu_1=E(X)=\int_0^\beta x\,3x^2/\beta^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{3\beta}{4}$, $\hat{\mu}_1=\bar{X}$,

所以，β 的矩估计量 $\hat{\beta}=\dfrac{4\bar{X}}{3}$；$E(\hat{\beta})=\dfrac{4E(\bar{X})}{3}=\beta$，$\hat{\beta}$ 是 β 的无偏估计量；

7 分

(2) $f(x;\alpha,3)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}/3^\alpha, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

似然函数 $L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,3)=\dfrac{\alpha^n(x_1\dots x_n)^{\alpha-1}}{3^{n\alpha}}$

对数似然函数 $l(\alpha)=n\ln\alpha+(\alpha-1)(\ln x_1+\dots+\ln x_n)-n\alpha\ln 3$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}l(\alpha)=\frac{n}{\alpha}+\ln x_1+\dots+\ln x_n-n\ln 3=0$$

所以，α 的最大似然估计量 $\hat{\alpha}=\dfrac{-n}{\ln X_1+\dots+\ln X_n-n\ln 3}=\dfrac{-1}{\frac{1}{n}(\ln X_1+\dots+\ln X_n)-\ln 3}$；

根据辛钦大数定律，当 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}(\ln X_1+\dots+\ln X_n)\xrightarrow{P}E(\ln X)$，

$$E(\ln X)=\int_0^3 \ln x\,\alpha x^{\alpha-1}/3^\alpha\,\mathrm{d}x\overset{t=\ln x}{=}\int_{-\infty}^{\ln 3}\alpha t\mathrm{e}^{\alpha t}/3^\alpha\,\mathrm{d}t=\ln 3-\frac{1}{\alpha},$$

所以 $\hat{\alpha}=\dfrac{-1}{\frac{1}{n}(\ln X_1+\dots+\ln X_n)-\ln 3}\xrightarrow{P}\alpha$，$\hat{\alpha}$ 是 α 的相合(一致)估计量. 16 分

七. 解：根据题意，差值数据来自正态总体 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，

要检验 $H_0:\mu\ge 1, H_1:\mu<1$，

该检验的拒绝域为 $t=\dfrac{\bar{Z}-1}{S_Z/\sqrt{9}}\le -t_{0.05}(8)$，

计算得 $t=-1.98<-t_{0.05}(8)=-1.86$，

落在拒绝域内，所以拒绝原假设，即认为培训后平均成绩提高不到 1 米. 10 分