西安交通大学考试题

成绩	

课　程　高等数学A卷

学　院 ________　　考试日期 2019 年 6 月 日

专业班号 ________

姓　名 ________　学 号________　期中 □　期末 √

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	18	21	32	8	6	
得分							
阅卷人							

一、填空题（每小题3分，共15分）.

1. 函数 $u=2xy-z^2$ 在点 $(2,-1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=(1,2,-2)$ 的方向导数是________.

2. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{2^n}(x+1)^n$ 的收敛域是 ________.

3. 曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $M_0(2,1,4)$ 处的切平面方程为

________.

4. 设曲线 L 是从点 $O(0,0,0)$ 到 $A(1,2,2)$ 的直线段，则对弧长的曲线积分

$\int_L xe^{yz}\,ds=$________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$，$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x(-\infty<x<+\infty)$，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx(n=0,1,2,\cdots)$，则 $S(-\dfrac{5}{2})=$ ________.

二、计算题（每小题6分，共18分）.

1. 设函数 $u=f(x,y,z)$，f 具有连续的二阶偏导数，且 $z=e^x\sin y$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2. 计算 $\oint_C -y^2dx+xdy+z^2dz$，其中曲线 C 是平面 $y+z=4$ 与柱面 $x^2+y^2=2y$ 的交线，且从 z 轴正向往下看是逆时针方向.

3. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0\le z\le 2$ 部分.

西安交通大学考试题

三、计算题（每小题 7 分，共 21 分）.

1. 求曲面 $z=x^2+y^2$ 与圆锥面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围空间闭区域 Ω 的体积.

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$.

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(2\sin y+z)\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 2z,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

四、解答题（每小题 8 分，共 32 分）.

1. 求曲线积分 $\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t-\pi,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 由 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段.

2. 求椭圆 $\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 上的点到点 $M(0,0,2)$ 的最长距离和最短距离.

西 安 交 通 大 学 考 试 题

3. 求向量场 $\vec{A}=(2x+z)\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 通过抛物面 Σ: $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$ 下侧的通量.

4. 将函数 $f(x)=\sin\frac{x}{2}\ (-\pi\le x\le \pi)$ 展开成傅里叶级数.

五、(8 分) 将 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数,并求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 的和.

六、(6 分) 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$, L 为 D 的边界正向.

证明: $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\ \ge\ \frac{5}{2}\pi^2$.

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称： 高等数学（A 卷） **课时：** ______ **考试时间：** 2019 年 6 月 14 日

一、填空题

1. $\dfrac{10}{3}$； 2. $(-3,1)$； 3. $4x+2y-z-6=0$； 4. $\dfrac{3}{8}(e^3-1)$； 5. $\dfrac{3}{4}$.

二、计算题

1. 解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_x+f_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x+f_z\cdot e^x\sin y$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{xy}+f_{xz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+f_z\cdot e^x\cos y+e^x\sin y\left(f_{zy}+f_{zz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=f_{xy}+f_{xz}\cdot e^x\cos y+f_z\cdot e^x\cos y+e^x\sin y\left(f_{zy}+f_{zz}\cdot e^x\cos y\right).$$

2. 解：$D: 0\le y\le 2-x, 0\le x\le 2$,于是

$$\iint_D(3x+2y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(3x+2y)\mathrm{d}y=\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2(4+2x-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}.$$

3. 解：Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\mathrm{d}S=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_\Sigma(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho=8\sqrt{2}\pi.$$

三、计算题

1. 解：

2分 柱面. 5分 6分 7分

解法① $V=\iiint_\Omega\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{2-\rho}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\rho\left(2-\rho-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho=\dfrac{5\pi}{6}.$

解法② $\iint_D[(2-\sqrt{x^2+y^2})-(x^2+y^2)]\,d\sigma\to$ 二次积分 $\to$ 答案
6 7

$D: x^2+y^2\le 1\to$ 5分

$\int_1^2 dz\iint dxdy$

解法③ $\int_0^1 dz\iint dxdy$ $\int_0^1 \pi z\,dz+\int \frac{1}{3}\pi$ $\int_1^2\pi(2-z)^2dz$

4分

解法②. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n-1}}{(n-1)!}$

4分 e^{x^2}

解法① 2分

2. 解：收敛域$(-\infty,+\infty)$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=e^{x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=\left(xe^{x^2}\right)'=(1+2x^2)e^{x^2}, x\in(-\infty,+\infty).$$

4分 6分 7分

3. 解：由对称性，$\iiint\limits_{\Omega}2\sin y\,dV=0$,

2分 5分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}z\,dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^3\cos\varphi\sin\varphi\,dr$$

6分 7分

$$=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\frac{8\pi}{6}(-\cos^6\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7\pi}{6}.$$

$x^2+y^2=2z-z^2$

$\int_0^1 dz\iint dxdy+\int_1^2 dz\iint dxdy$

πz^2 $\quad$ $\pi(2z-z^2)$

6分

$=\frac{7\pi}{6}$ 7分

四、解答题

1. 解：① 记 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$ 3分

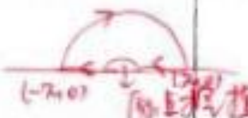
选3半径为2的圆.

故曲线积分与路径无关，可选取积分路径 $C: x=\pi\cos t, y=\pi\sin t$，$t$ 从 π 到 0. 4分.

6分 8分

$$I=\frac{1}{\pi^2}\int_{\pi}^{0}\left[-\pi\sin t(-\pi\sin t)+\pi\cos t(\pi\sin t)\right]dt=-\pi.$$

② 格林公式 补x轴.



4分 $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $t\in(0,2\pi)$

2. 解：椭圆上的点 $P(x,y,0)$ 到点 $M(0,0,2)$ 的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+4}$. 2分

设 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+4+\lambda(5x^2-6xy+5y^2-4)$，4分

$$\begin{cases}F_x'=2x+10\lambda x-6\lambda y=0,\\ F_y'=2y+10\lambda y-6\lambda x=0,\\ 5x^2-6xy+5y^2-4=0\end{cases}$$ 5分

解得四个驻点 $M_1(1,1,0)$, $M_2(-1,-1,0)$, $M_3(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$, $M_4(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 6分

$$d\big|_{M_1}=d\big|_{M_2}=\sqrt{1^2+1^2+4}=\sqrt{6}, d\big|_{M_3}=d\big|_{M_4}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

8分.

故椭圆上的点到点 $M(0,0,2)$ 的最长距离为 $\sqrt{6}$，最短距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2次型

3. 解：通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，

作有向曲面 $\Sigma_1: z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，并取上侧，设两曲面 Σ 和 Σ_1 所围成的闭区域为 Ω，记 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$，由高斯公式，得

$$\Phi=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(3+2y)\,\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma_1}z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3\,\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma_1}z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\pi\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho-\pi=\frac{3\pi}{2}-\pi=\frac{\pi}{2}.$$

4. 解：$a_n=0\,(n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(n-\frac{1}{2})x-\cos(n+\frac{1}{2})x\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n-1}\sin(n-\frac{1}{2})x-\frac{2}{2n+1}\sin(n+\frac{1}{2})x\right]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n-1}8n}{(4n^2-1)\pi},$$

当 $x=\pm\pi, S(\pm\pi)=0$,

故 $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\sin nx\ (-\pi<x<\pi)$.

五、解：$\ln\left(1+x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}x^n$，$x\in(-1,1]$，

$f'\left(x\right)=1+\ln\left(1+x\right)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}x^n$，$x\in(-1,1]$，

$\because f(0)=0$,

$\therefore f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}=x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$，$x\in(-1,1]$.

且 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}=f(1)-1=2\ln 2-1$.

六、证明：由格林公式，得

$$I=\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy.$$

D 关于直线 $y=x$ 对称，由轮换对称性，

$$\iint_D e^{\sin y}dxdy=\iint_D e^{\sin x}dxdy,$$

于是 $I=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dxdy=\int_0^\pi dy\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx.$

由于 $f(u)=e^u+e^{-u}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}x^{2n}\geq 2\left(1+\frac{1}{2}u^2\right)=2+u^2,$

故 $I=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\geq\pi\int_0^\pi(2+\sin^2 x)dx=\frac{5}{2}\pi^2.$

二. 2. $I=\iint\limits_{\Sigma_{上}}(1+2y)\,dx\wedge dy\overset{(2')}{=\!=}\iint\limits_{\underline{x^2+y^2\le 2y}}(1+2y)\,dxdy\quad(3')$

$$=\int_0^\pi d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}(1+2\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\overset{(5')}{=\!=}3\pi\quad(6')$$