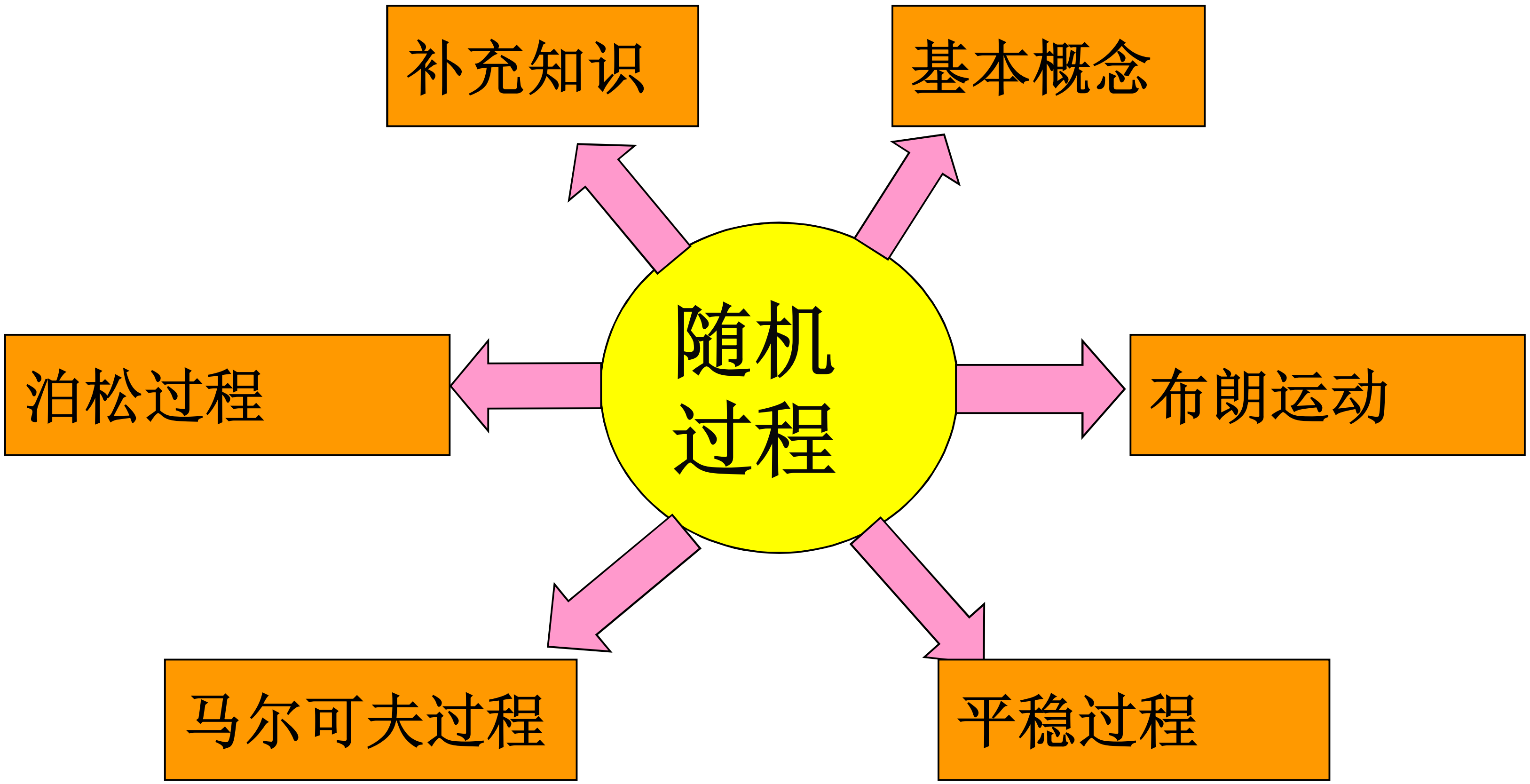
随机过程的基本知识


补充知识
基本概念
泊松过程
随机过程
布朗运动
马尔可夫过程
平稳过程

- 《概率论与数理统计》，施雨，赵小艳等，高等教育出版社
- 《随机过程及应用》，陆大金，张颢，清华大学出版社
- Probability, Random Variables and Stochastic Processes (Fourth Edition), Athanasios Papoulis

1. 随机变量概念回顾

1.1 概率空间(Ω, $\mathcal{F}$, P)

1933年苏联数学家Kolmogorov在其著作《概率论基础》一书中，首次给出概率的测度论的严格定义，建立了概率论基本体系，从而使概率论成为一严谨的数学分支。

1.1.1 样本空间(Ω)

随机试验的所有样本点构成的集合。

样本空间的例子：

E_1：抛一枚均匀的硬币，观察其正反面出现的情况；

$\Omega_1 = \{H, T\}$

E_2：记录某电话交换台在（0，T]内收到的呼叫次数；

$\Omega_2 = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$

E_3：从一批灯泡中任意抽取一只，测其寿命。

$\Omega_3 = \{t | t \geq 0, t \in R\}$

E_4：测量某一零件，考虑测量结果与真实长度的误差。

$\Omega_4 = \{x | -\infty < x < +\infty\}$

1.1.2 事件域($\mathcal{F}$)

基本事件（ω） — Ω的单点集。

随机事件 — 某些样本点组成的集合，Ω的子集，常用A、B…表示。

必然事件 (Ω) **不可能事件** (φ) — 空集。

设Ω为样本空间，$\mathcal{F}$是由Ω的子集组成的集合类，若$\mathcal{F}$满足以下三点,则称 $\mathcal{F}$为**事件域**。

1. $\Omega\in\mathcal{F}$;

2. 若 $A\in\mathcal{F}$，则 $\overline{A}\in\mathcal{F}$;

3. 若 $A_n\in\mathcal{F}$，$n=1, 2, \ldots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\in\mathcal{F}$.

事件域的一些例子

例1 设Ω是样本空间，$\mathscr{F}=\{\Omega，\varphi\}$

可以验证 $\mathscr{F}$是一个事件域，注意此时只有必然事件Ω与不可能事件φ才是事件。

例2 设 $A\subset\Omega, \mathscr{F}=\{\Omega, A, \bar{A}, \varphi\}.$

此时$\Omega, A, \bar{A}, \varphi$是事件。

例3 设 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，$\mathscr{F}$是由Ω的一切子集构成。

此时Ω的所有子集(共2^n个)都是事件。

1.1.3 概率(P)

概率是定义在事件域$\mathcal{F}$的一个集合函数，即对于事件域$\mathcal{F}$中的每一个元素A都有一个实数与之对应，这种由集合到实数的映射称为集合函数。

定义： 设$(\Omega, \mathcal{F})$是一个可测空间，对每一个集$A \in \mathcal{F}$，有一实数与其对应，记为 $P(A)$，如果它满足：

- **非负性公理**： $P(A) \geq 0$;
- **正则性公理**： $P(\Omega)=1$;
- **可列可加性公理**：若$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \ldots\ldots$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

则称 $P(A)$为事件A的概率，三元素 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间。

概率的一些例子

例1 掷一枚均匀硬币，观察其出现的结果。

样本空间$\boldsymbol{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2\}$，其中$\omega_1$表示均匀硬币出现正面，$\omega_2$表示其出现反面。

基本事件$\boldsymbol{A} = \{\omega_1\}, \overline{\boldsymbol{A}} = \{\omega_2\}$

事件域$\mathcal{F} = \{\boldsymbol{A}, \overline{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\varphi}\}$，含有$2^2$个子集

事件域上事件$\boldsymbol{A}$的概率为$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2}}$，k为事件$\boldsymbol{A}$包含的样本点的个数

则$(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$为概率空间

例2 掷一枚均匀的骰子，观察其出现的点数。

样本空间$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$，其中$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$分别表示均匀骰子出现1, 2,…,6点。

单样本点集：$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_6\}$，有$C_6^1$=6个

双样本点集：$\{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_5, \omega_6\}$，有$C_6^2$=15个

……

六样本点集：$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\} = \Omega$，有$C_6^6$=1个

事件域$\mathcal{F} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_6\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_5, \omega_6\}, \ldots, \Omega, \varphi\}$，含有$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \ldots + C_6^6 = 2^6$个子集

事件域上事件A的概率为$P(A) = \frac{k}{6}$，k为A包含的样本总数

则$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间

1.2 随机变量

随机变量以数量形式来描述随机现象，给研究带来很大方便。

定义 设 E为随机实验，Ω为样本空间，若$X=X(\omega)$ 为定义在Ω上的单值实函数，且对于任意实数 x，有

$$\{\omega: X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$$

则称 $X(\omega)$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量。

注：(1) 随机变量$X(\omega)$是样本点ω的函数，

其定义域为Ω，其值域为$R=(-\infty, +\infty)$

若 X 表示掷一颗骰子出现的点数，
则 $\{X=1.5\}$ 是不可能事件.

(2) 若 X 为随机变量，则

$$\{X = k\}\text{、}\{X \le b\}\text{、}\cdots\cdots$$

均为随机事件.

即 $\{X \le b\} = \{\omega;\ X(\omega) \le b\} \} \in \mathcal{F}$

(3) 同一样本空间可以定义不同的随机变量.

若随机变量 X 可能取值的个数为有限个或 可列个，则称 X 为离散型随机变量.

若随机变量 X 的可能取值充满某个区间 $[a, b]$，则称 X 为连续型随机变量.

1.1 随机过程概念与记号

在概率论的基本理论中，我们建立了概率空间，定义了随机变量，用于刻画随机现象的统计规律性。其主要研究一个或有限个随机变量，即一维或n维随机变量。

客观世界的随机现象十分复杂，往往需要连续不断的观察或研究随机现象的变化过程，这一变化过程已无法用随机变量或随机矢量描绘，而需用一族无限多个随机变量描绘，这就是随机过程。

随机变量	$\omega \to x(\omega)$
随机变量族	$(t, \omega) \to x(t,\omega)$

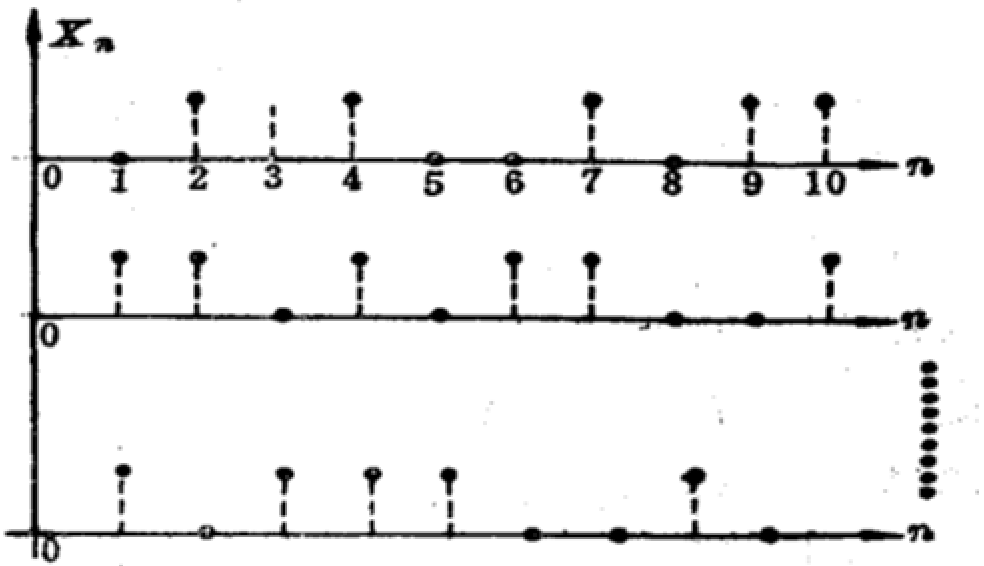
例1 某人扔一枚分币，无限制的重复地扔下去。要表示无限多次扔的结果，我们不妨记正面为1，反面为0。第 n 次扔的结果是一个随机变量 X_n 其分布律为

$$P\{X_n = 1\} = P\{X_n = 0\} = \frac{1}{2}$$

扔一次的事件用随机变量 X 表示, 扔无限次就是一个过程，用一族相互独立的随机变量

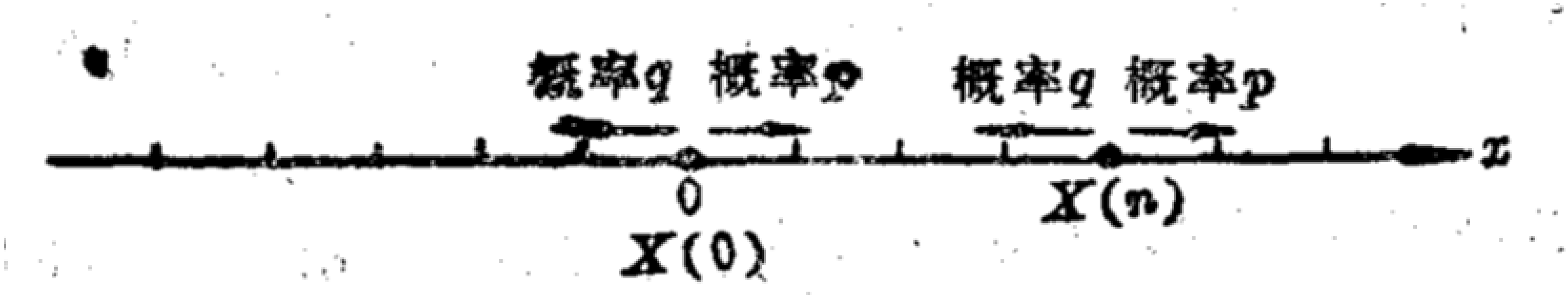
$\{X_n, n \geq 1\}$

来表示．其试验结果表示如图，



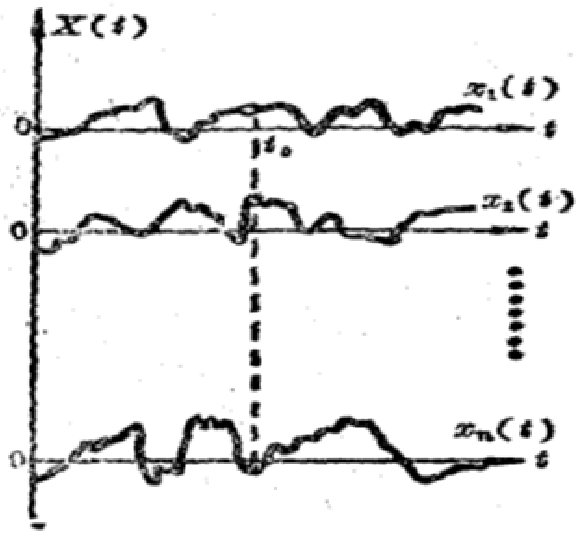
例2（直线上的随机游动）

一个醉汉在路上行走，以概率 p 前进一步，以概率 1-p 后退一步（假定步长相同），以 X(n) 记他 在时刻 n 路上的位置，则{X(n)，n ≥0 } 是随机过程。



醉汉（质点）移动图象如图。醉汉在路上（直线）的移动是随机的，故称之为质点在直线上的随机游动。

例3 热噪声电压



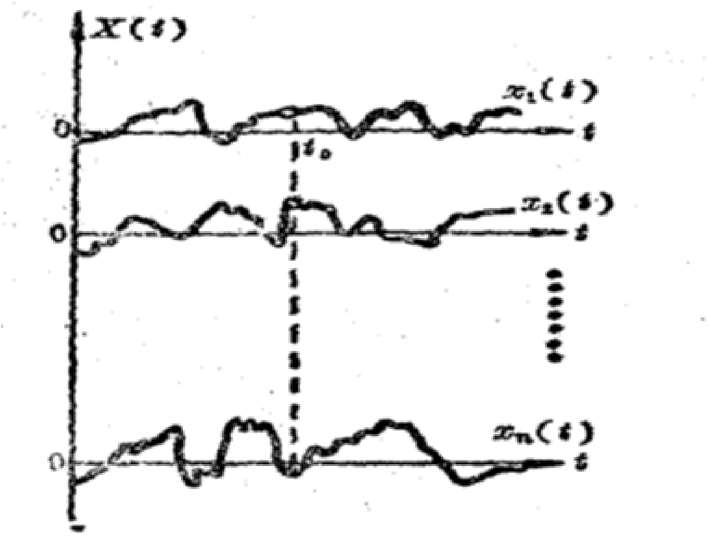
电子元件或器件由于内部微观粒子（如电子）的随机热运动所引起的端电压，称为热噪声电压。现在以电阻的热噪声电压为例。

以 $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$ 表示热噪声电压。进行一次长时间测量得到一条电压-时间曲线 $x_1(t)$，为一条样本曲线；再进行一次试验得到另一条样本曲线 $x_2(t)$，第 **n** 次试验得到样本曲线 $x_n(t)$。

一次试验所得到的样本曲线是随机的。

$\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ 怎样看成由一族随机变量构成的呢？

我们固定 $t = t_0$，考察 $X(t)$ 在 t_0 的数值 $X(t_0)$，第一次试验值为 $X_1(t_0)$，第二次试验值为 $X_2(t_0)$ …。显然，$X(t_0)$ 是一个随机变量。



于是，固定 **t** 时热噪声电压 $X(t)$ 是一个随机变量，而 **t** 变化时 $\{X(t), t \in [0,\infty)\}$ 是一族随机变量，因此 $X(t)$ 是一个随机过程。

■ 定义11.1 随机过程

设Ω为某实验的样本空间，T为一给定的集合，若对每个$t\in T$，$X(t,\omega)$是定义在Ω 的随机变量，则称$\{X(t, \omega), t\in T\}$为随机过程，简记为$\{X(t)，t\in T\}$或$\{X_t(\omega)，t\in T\}$或X_T。其中，T称为参数集。$X(t)$所对应的实数称为状态。

- 从数学上看，随机过程$\{X(t,\omega), t\in T\}$是定义在$T\times\Omega$上的二元函数，$T\times\Omega \to R$。
- 对固定的t，$X(t,\cdot)$ 是$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量；
- $X(\cdot,\omega)$ 是定义在T上的实函数，称为随机过程的一个样本函数（样本曲线、路径、轨道）。
- X(t)所有可能的取值的集合称为状态空间或相空间，记为$S \stackrel{\text{def}}{=} \{X(t,w) \mid t\in T, \omega\in\Omega\}$。

1.2 随机过程的概率特性

有限维分布函数族

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在每一时刻 $\boldsymbol{t}$ 的状态是一维随机变量；在任意两个时刻的状态是二维随机矢量；…。

对任意一个 $t \in T$

$$F(x;\ t) = P\{X(t) \leq x\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数。描绘过程在任意 $\boldsymbol{t}$ 时刻状态的统计特性。

对任意两个 $t_1, t_2 \in T$

$$\boldsymbol{F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的二维分布函数。描绘过程在任意两个时刻状态的统计特性。

一般，对任意的 $t_{1,}, t_2, \ldots, t_n \in T$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$
$$= P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots, X(t_n) \le x_n\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的 ***n*** 维分布函数。描绘过程在任意 ***n*** 个时刻状态的统计特性。

随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数，二维分布函数，…，***n*** 维分布函数，等等的全体

$$\{F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n), \qquad t_1, t_2, \ldots, t_n \in T, n \ge 1\}$$

称为随机过程 $X(t)$ 的有限维分布函数族。它描绘随机过程 $X(t)$ 的概率分布。

有限维分布函数族具有如下性质：

（1）对称性 对 $(1,2,\cdots,n)$ 的任意一种排列 $(j_1,j_2,\ldots,j_n)$

有

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots,t_n)$$
$$=F(x_{j_1},x_{j_2},\ldots.,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\ldots,t_{j_n})$$

证明

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

$$=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\ldots,x(t_n)\le x_n\}$$

$$=P\{X(t_{j1})\le x_{j1},X(t_{j2})\le x_{j2},\ldots,X(t_{jn})\le x_{jn}\}$$

$$=F(x_{j_1},x_{j_2},\ldots.,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\ldots,t_{j_n})$$

(2)相容性 对 $m < n$,有

$$\boldsymbol{F(x_1, x_2, ..., x_m; t_1, t_2, ... t_m)}$$

$$\boldsymbol{= F(x_1, x_2, ..., x_m, \infty, ..., \infty; t_1, t_2, ..., t_m, t_{m+1}, \dots t_n)}$$

证明 $F(x_1, x_2, ..., x_m, t_1, t_2, ..., t_m)$

$$= P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, ..., x(t_m) \le x_m\}$$

$$= P\{X(t_1) \le x_1, ..., X(t_m) \le x_m, X(t_{m+1}) < +\infty, \cdots, X(t_n) < +\infty\}$$

$$\boldsymbol{= F(x_1, x_2, ..., x_m, \infty, ..., \infty; t_1, t_2, ..., t_m, t_{m+1}, \dots t_n)}$$

例1 设随机过程$X(t)=te^{Y}, t>0$其中Y服从参数为λ的指数分布，求$X(t)$的一维分布函数

解：

$$F(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

于是

$$F(x;t)=P(X(t)\le x)=P(te^{Y}\le x)$$

$$=P(Y\le \ln(x/t))=F(\ln(x/t))$$

$$F(x;t)=\begin{cases}1-(x/t)^{-\lambda}, & x>t\\ 0, & x\le t\end{cases}$$

例2. 随机过程 $X(t) = A\cos t,\qquad -\infty < t < \infty,$ 其中 A 是随机变量，具有概率分布列:

A	1	2	3
p	1/3	1/3	1/3

求(1) 一维分布函数 $F(x,\frac{\pi}{4}), F(x,\frac{\pi}{2})$

(2) 二维分布函数 $F(x_1,x_2,0,\frac{\pi}{3})$.

解：求 $F(x,\frac{\pi}{4}) = P\{X(\frac{\pi}{4}) \le x\}$ $\qquad X(\frac{\pi}{4}) = A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}A$

为离散型，可能取值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

其概率对应于 $A = 1,2,3$ 的概率，因此

$$X(\frac{\pi}{4}) = A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}A \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$P\{X(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\} = P\{A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\} = P\{A = 1\} = \frac{1}{3}$$

$$P\{X(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{2}\} = P\{A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2}\} = P\{A = 2\} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P\{X(\frac{\pi}{4}) &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\} \\ &= P\{A\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\} \\ &= P\{A = 3\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$F(x, \frac{\pi}{4}) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1/3, & \frac{\sqrt{2}}{2} \le x < \sqrt{2} \\ 2/3, & \sqrt{2} \le x < \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1, & x \ge \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

再求 $F(x,\frac{\pi}{2})=P\{X(\frac{\pi}{2})\le x\}$，　　$X(\frac{\pi}{2})=A\cos\frac{\pi}{2}=0$，　　只能取 **0,**

所以　$F(x;\frac{\pi}{2})=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$

(2) 求二维分布 $F(x_1,x_2,0,\frac{\pi}{3})$.

$$F(x_1,x_2,0,\frac{\pi}{3})=P\{X(0)\le x_1,X(\frac{\pi}{3})\le x_2\}$$

$$=P\{A\cos 0\le x_1,A\cos\frac{\pi}{3}\le x_2\}$$

$$=P\{A\le x_1,\frac{A}{2}\le x_2\}=P\{A\le x_1,A\le 2x_2)$$

$$=\begin{cases}P\{A\le x_1\}, & x_1\le 2x_2\\ P\{A\le 2x_2\}, & 2x_2<x_1\end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, 0, \frac{\pi}{3}) = \begin{cases} P\{A \le x_1\}, & x_1 \le 2x_2 \\ P\{A \le 2x_2\}, & 2x_2 < x_1 \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2, 0, \frac{\pi}{3}) = \begin{cases} 0, & x_1 \le 2x_2, x_1 < 1 \text{ 或 } 2x_2 < x_1, x_2 < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & x_1 \le 2x_2, \ 1 \le x_1 < 2, \text{或} 2x_2 < x_1, \frac{1}{2} \le x_2 < 1 \\ \frac{2}{3}, & x_1 \le 2x_2, 2 \le x_1 < 3 \text{或} 2x_2 < x_1, 1 \le x_2 < \frac{3}{2} \\ 1, & x_1 \le 2x_2, x_1 \ge 3, \text{或} 2x_2 < x_1, x_2 \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

例3 设随机过程 $X(t)$ 只有两条样本曲线

$$X(t,\omega_1) = a\cos t,\ X(t,\omega_2) = a\cos(t+\pi) = -a\cos t,\quad -\infty < t < \infty$$

其中常数 $a > 0, P(\omega_1) = \dfrac{2}{3}, P(\omega_2) = \dfrac{1}{3}$ ，试求 $X(t)$ 的一维分布函数 $F(x,0), F(x,\dfrac{\pi}{4})$ 以及二维分布函数 $F(x_1,x_2,0,\dfrac{\pi}{4})$.

分析: 过程是随机初相位的简谐波. 固定 t 过程就成为随机变量, 根据题目可计算其取值和取值的概率,离散型随机变量.

对于二维分布 $F(x_1,x_2,0,\dfrac{\pi}{4})$ 考虑 $(X(0),X(\dfrac{\pi}{4}))^T$ 的取值分布，根据题目中的样本点(样本曲线)可知有两个取值,计算分布概率, 给出分布函数.

$X(t,\omega_1) = a\cos t$， $X(t,\omega_2) = a\cos(t+\pi) = -a\cos t$， $-\infty < t < \infty$

解：先求一维分布 $F(x,0), F(x,\frac{\pi}{4})$：

$X(0)$ 的可能取值为

$$X(0,\omega_1) = a\cos 0 = a,\ X(0,\omega_2) = -a\cos 0 = -a$$

对应的概率为

$$P\{X(0)=a\} = P(\omega_1) = \frac{2}{3}, P\{X(0)=-a\} = P(\omega_2) = \frac{1}{3}$$

所以分布函数为

$$F(x,0) = \begin{cases} 0, & x < -a \\ \frac{1}{3}, & -a \le x < a \\ 1, & x \ge a \end{cases}$$

$X(t,\omega_1)=a\cos t$, $X(t,\omega_2)=a\cos(t+\pi)=-a\cos t$, $-\infty<t<\infty$

同样地，$X(\frac{\pi}{4})$ 的可能取值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a,$ 其概率分别为 1/3和2/3 。

因此，分布函数为

$$F(x,\frac{\pi}{4})=\begin{cases}0, & x<-\frac{\sqrt{2}}{2}a\\ \frac{1}{3}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}a\le x<\frac{\sqrt{2}}{2}a\\ 1, & x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}a\end{cases}$$

$X(t,\omega_1)=a\cos t,\ X(t,\omega_2)=a\cos(t+\pi)=-a\cos t,\quad -\infty<t<\infty$

再求二维分布 $F(x_1,x_2;0,\frac{\pi}{4})$

随机向量 $(X(0),X(\frac{\pi}{4}))$ 的可能取值为

$$(X(0,\omega_1),X(\frac{\pi}{4},\omega_1))=(a,\frac{\sqrt{2}}{2}a)$$

$$(X(0,\omega_2),X(\frac{\pi}{4},\omega_2)=(-a,-\frac{\sqrt{2}}{2}a)$$

对应的概率为 $P\{X(0)=a,X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}a\}=P\{\omega_1)=\frac{2}{3}$

$$P\{X(0)=-a,X(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\}=P(\omega_2)=\frac{1}{3}$$

$$P\{X(0)=a, X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}a\}=P\{\omega_1)=\frac{2}{3}$$

$$P\{X(0)=-a, X(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\}=P(\omega_2)=\frac{1}{3}$$

因此分布函数为

$$F(x_1,x_2,0,\frac{\pi}{4})=\begin{cases} 0, & x_1<-a \ \ or \ \ x_2<-\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ \frac{1}{3}, & x_1\geq -a \ and \ -\frac{\sqrt{2}}{2}a\leq x_2<\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ & x_2\geq \frac{\sqrt{2}}{2}a \ and \ -a\leq x_1<a \\ 1, & x_1\geq a \ \ and \ x_2\geq \frac{\sqrt{2}}{2}a \end{cases}$$

随机过程的数字特征

定义　设有随机过程 $\{X(t), t \in T\}$，　它的数学期望和方差都是依赖于参数 t 的函数，分别称为随机过程的均值（函数）和 方差（函数）。

随机过程的均值函数用 $m(t)$ 表示，即

$$m(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x,t)\,,\ t \in T$$

其中 $F(x,t)$ 是随机过程的一维分布函数。对连续概率分布情形，有

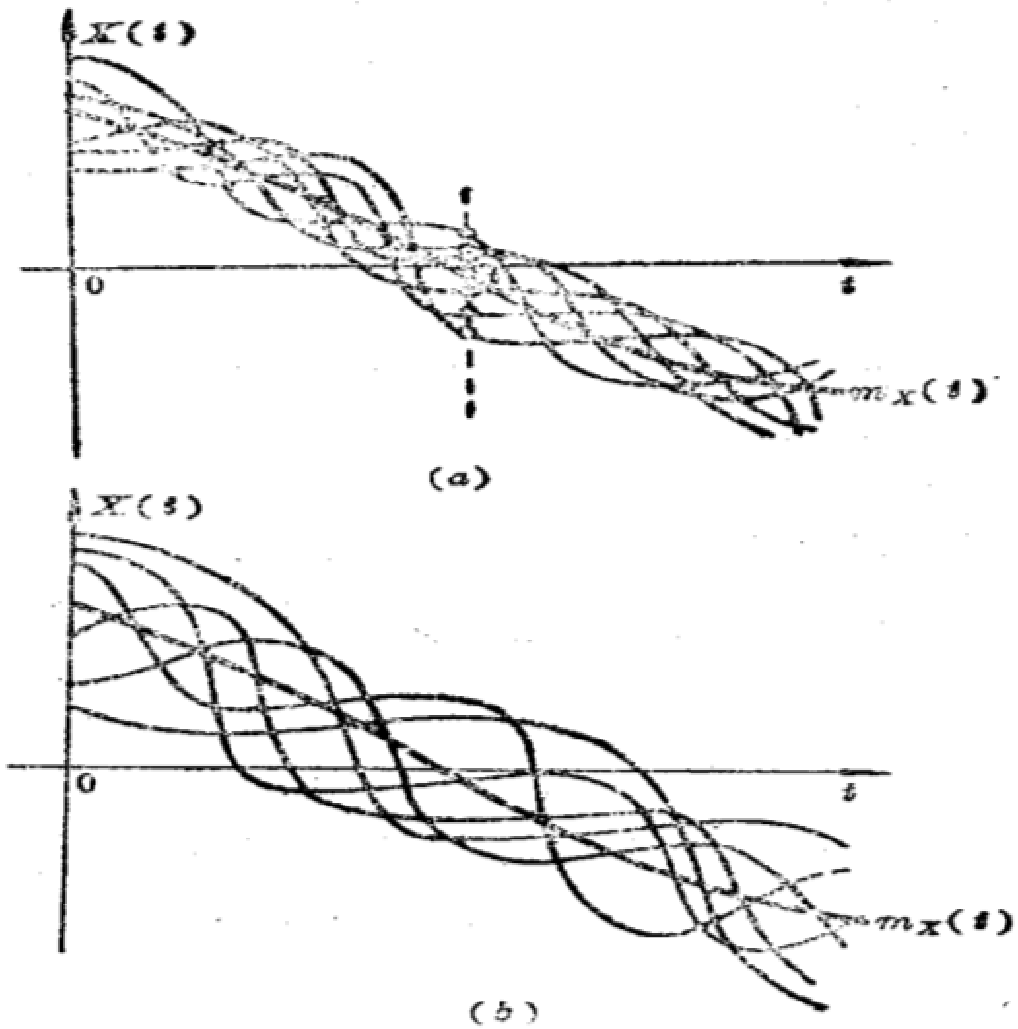
$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t) dx\,, t \in T$$

其中 $f(x,t)$ 是一维分布密度。

随机过程的数字特征

随机过程的均值函数 $m(t)$ 表示 $X(t)$ 的所有样本函数在时刻的理论平均值，如图（a）。

需要指出 $m(t)$是一条固定的曲线。 而样本曲线绕 $m(t)$曲线上下波动，如图（b）。



随机过程的数字特征

随机过程的方差用 $D(t)$ 表示，即

$$D(t)=D[X(t)]=E\{[(X(t)-m(t)]^2\},t\in T$$

而 $D(t)$ 的算术根称为随机过程的标准差，用$\delta(t)$表示；

即 $$\delta(t)=\sqrt{D(t)}=\sqrt{D[X(t)]}$$

随机过程的方差和标准差描绘它的样本曲线在各个 t 时刻对 $m(t)$的分散程度。

称 $\varphi(t)=E[X^2(t)]$ 为随机过程的均方值。

显然有 $D[X(t)]=E\left[X^2(t)\right]-\{E[X(t)]\}^2=\varphi(t)-m^2(t)$

随机过程的数字特征

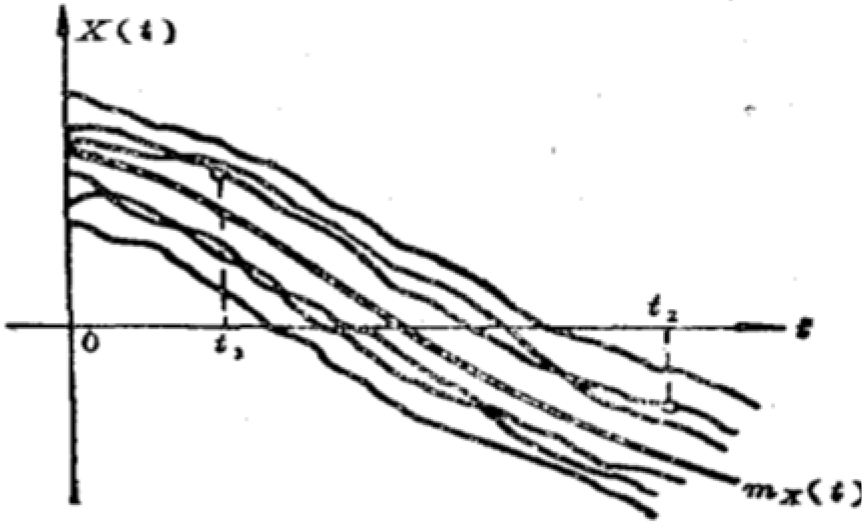
随机过程的数学期望和方差只考虑随机过程在任一时刻状态的数字特征，并没有反映在两个不同时刻的状态之间的联系。对任意两个固定时刻 $t_1,t_2\in T, X(t_1),X(t_2)$ 是两个随机变量，它们之间线性联系的密切程度可用自协方差函数来描述。

$$C_X(t_1,t_2)=Cov(X(t_1),X(t_2))$$
$$=E[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)],\qquad t_1,t_2\in T$$

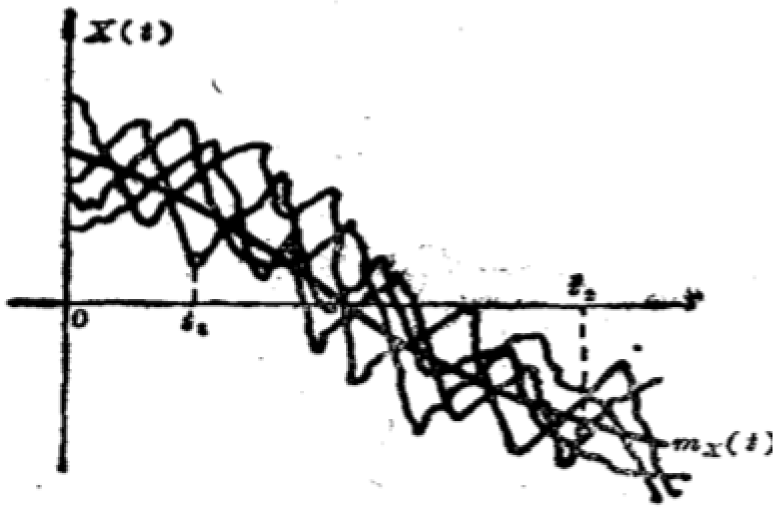
$X(t_1)$与$X(t_2)$的协方差，称为随机过程 $X(t)$ 的（自）协方差函数，记为 $C_X(t_1,t_2)$，即

随机过程的数字特征

如果两个随机过程的方差相同，可以用协方差函数绝对值的大小比较两个过程在时刻 t_1, t_2 状态的线性联系密切程度。如图(a)、(b)为具有相同数学期望和方差的两个随机过程。



(a)



(b)

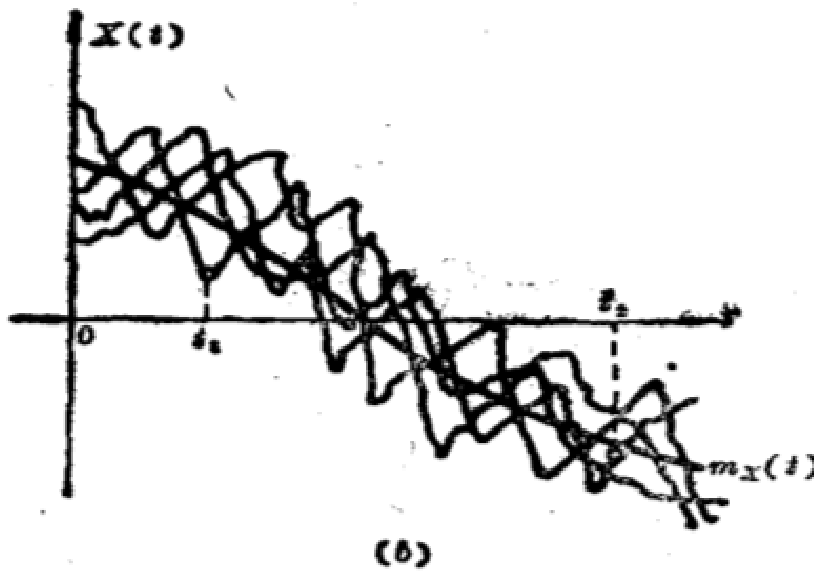
随机过程的数字特征

其中图（a）表示的随机过程的样本曲线，对每一条 $x(t)$ ，具有近似的线性关系

$$x(t_1) - m\,(t_1) \approx x(t_2) - m(t_2)$$

说明在两个时刻 t_1, t_2 的状态 $X(t_1)$和$X(t_2)$ 线性联系较密切，故 $C_X(t_1, t_2)$ 的绝对值较大；

而图(b)表示的随机过程，每一条样本曲线的变化起伏很大又不规则, 说明在两个时刻 t_1, t_2 的状态 $X(t_1)$和$X(t_2)$ 线性联系很不密切，故 $C_X(t_1, t_2)$ 的绝对值较小。



协方差函数可以表示为

$$C_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]-E[X(t_1)]E[X(t_2)]$$

这里的 $E[X(t_1)X(t_2)]$ 称为随机过程 $X(t)$ 的（自）**相关函数**，记为 $R_X(t_1,t_2)$，即

$$R_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)X(t_2)],\qquad t_1,t_2\in T$$

随机过程的协方差函数和相关函数的关系为

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m(t_1)m(t_2)$$

当 $m_X(t)\equiv 0$ 时，$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)$，此时协方差函数和相关函数是一致的.

在 $C_X(t_1,t_2)$ 的定义中，取 $t_1=t_2=t$ ，则

$$D(t)=C(t,t)=E[X^2(t)]-\{E[X(t)]\}^2=\mathrm{R}(t,t)-m^2(t)$$

即方差可由相关函数和均值函数得到.

设{X(t)，t∈T}，{Y(t)，t∈T}是两个定义在同一样本空间Ω上的随机过程，定义

互协方差函数

$$\mathrm{C}_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][Y(t_2)-m_Y(t_2)]\},t_1,t_2\in T$$

互相关函数

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)],t_1,t_2\in T$$

例1 设随机过程$X(t) = \mathrm{a}\cos(\omega_0 t + Y)$, $t \in (-\infty, +\infty)$,其中a，ω_0是大于0的常数，Y为(0,2π)上的均匀分布，求$X(t)$的均值及自相关函数。

解：

$$m(t) = E(a\cos(\omega_0 t + Y)) = \int_0^{2\pi} a\cos(\omega_0 t + y)\frac{1}{2\pi}dy = 0$$

$$R(t_1, t_2) = E(a\cos(\omega_0 t_1 + Y)\, a\cos(\omega_0 t_2 + Y))$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\cos(\omega_0 t_1 + y)\cos(\omega_0 t_2 + y)\frac{1}{2\pi}dy$$

$$= \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1/2(\cos(\omega_0(t_1 + t_2) + 2y) + \cos(\omega_0(t_1 - t_2)))\,dy$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos(\omega_0(t_1 - t_2))$$

例2　设X(t)=Ycos(θt)+Zsin(θt), t>0，Y, Z相互独立，EY=EZ=0，DY=DZ=σ^2。求{X(t), t>0}的均值函数和协方差函数。

解：

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= EX(t) = E[Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t)] \\
&= \cos(\theta t)E(Y) + \sin(\theta t)E(Z) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_X(s,t) &= E[(X(s) - EX(s))(X(t) - EX(t))] \\
&= E[X(s)X(t)] - EX(s)EX(t) \\
&= E[X(s)X(t)]
\end{aligned}
$$

$$= E[(Y\cos(\theta s) + Z\sin(\theta s))(Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t))]$$

$$= E[\cos(\theta s)\cos(\theta t)Y^2 + \sin\theta\,(s+t)YZ$$

$$+ \sin(\theta s)\sin(\theta t)Z^2]$$

$$= \cos(\theta s)\cos(\theta t)E(Y^2) + \sin\theta\,(s+t)E(YZ)$$

$$+ \sin(\theta s)\sin(\theta t)E(Z^2)$$

$$= \cos(\theta s)\cos(\theta t)DY + \sin(\theta s)\sin(\theta t)DZ$$

$$= \cos(\theta s)\cos(\theta t)\sigma^2 + \sin(\theta s)\sin(\theta t)\sigma^2$$

$$= \sigma^2\cos[(s-t)\theta]$$

例3　设$X(t)=g_1(t+\varepsilon)$，$Y(t)=g_2(t+\varepsilon)$，$g_1(t),g_2(t)$是周期为L的函数，$\varepsilon\sim U(0, L)$，求互相关函数$R_{XY}(t, t+\tau)$。

解

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

$$=E[g_1(t+\varepsilon)g_2(t+\tau+\varepsilon)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)f_\varepsilon(x)dx$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^L g_1(t+x)g_2(t+\tau+x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{L}\int_{t}^{t+L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv \\
&= \frac{1}{L}\left[\int_{t}^{L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv + \int_{L}^{t+L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv\right] \\
&= \frac{1}{L}\left[\int_{t}^{L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_{0}^{t} g_1(v+L)g_2(v+L+\tau)dv\right] \\
&= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} g_1(v)g_2(v+\tau)dv
\end{aligned}
$$

例4 在上节例3中,随机过程 $X(t)$ 总共有两条样本曲线

$$X(t,\omega_1)=a\cos t\,,X(t,\omega_2)=-a\cos t$$

其中常数 $a>0,P(\omega_1)=\dfrac{2}{3},P(\omega_2)=\dfrac{1}{3}$ ，试求 $X(t)$ 的数学期望 $m_X(t)$ 和 $R_X(t_1,t_2)$ 相关函数.

解：数学期望

$$m_X(t)=EX(t)=a\cos t\,.\frac{2}{3}+(-a\cos t).\frac{1}{3}=\frac{a}{3}\cos t$$

相关函数为

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=(a\cos t_1\,.\,a\cos t_2).\frac{2}{3}+(-a\cos t_1).(-a\cos t_2).\frac{1}{3}=a^2\cos t_1\cos t_2$$

两个随机过程的不相关与相互独立

设$X_T = \{X(t), t \in T\}$， $Y_T = \{Y(t), t \in T\}$是两个定义在同一样本空间Ω上且有同一参数集T的随机过程，若对任意的$t_1, t_2 \in T$，有：

$$C_{XY}(t_1, t_2) \equiv 0, \qquad t_1, t_2 \in T$$

则称X_T与Y_T是不相关的。

若对任意的正整数n, m以及任意的$t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, $t_1', t_2', \dots, t_m' \in T$, $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$与, $(Y(t_1'), Y(t_2'), \dots, Y(t_m'))$相互独立，则称$X_T$与$Y_T$相互独立。

两个随机过程的不相关与相互独立

设X_T的均值函数和相关函数为$m_X(t)$ 和$R_X(t_1,t_2)$， Y_T的均值函数和相关函数为$m_Y(t)$和$R_Y(t_1,t_2)$, $Z_T = X_T + Y_T$,则有

$m_Z(t) = E(X_T + Y_T) = E(X_T)+E(Y_T) = m_X(t) + m_X(t)$

$R_Z(t_1,t_2) = E[(X(t_1)+ Y(t_1)) (X(t_2)+ Y(t_2))]$

$= E[X(t_1) X(t_2)] + E[Y(t_1) X(t_2)] + E[X(t_1) Y(t_2)]$

$+ E[Y(t_1) Y(t_2)]$

$= R_X(t_1,t_2) + R_{YX}(t_1,t_2) + R_{XY}(t_1,t_2) + R_Y(t_1,t_2)$

若$m_X(t) = m_Y(t) = 0$，且X_T和Y_T不相关时，有

$$R_Z(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) + R_Y(t_1,t_2)$$

1.3 随机过程的基本类型

- **按参数集T与状态空间S分类**
  - （1）T和S都是离散的
  - （2）T是连续的，S是离散的
  - （3）T是离散的，S是连续的
  - （4）T和S都是连续的

当T可列时，称为**离散参数随机过程**(随机序列)，当T为连续区间时，称为**连续参数随机过程**。

■ 按过程的性质特点分类

1. 二阶矩过程

设随机过程$X_T = \{X(t), t \in T\}$，若对任意$t \in T$，$E[X^2(t)]$都存在（即有限），则称X_T为二阶矩过程。

由柯西-施瓦茨不等式，二阶矩过程的均值函数和相关函数都存在。

在二阶矩过程中有一些常用和重要的子类，如正态过程、正交增量过程、平稳过程，在工程技术中有些随机过程就与正态过程相关。

正态过程

设X_T = {X(t)，t ∈T}的任一有限维分布都是多维正态分布，亦即，对任意的n≥ 1和任意n个不同的t_1，t_2,…,t_n∈T，n维随机向量($X(t_1)$， $X(t_2)$， …, $X(t_n)$)的概率密度为

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n) = 2\pi^{-\frac{n}{2}}|\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right\}$$

其中，

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)^T,$$
$$\mathbf{m} = (\mathbf{m}_X(t_1),\mathbf{m}_X(t_2),\ldots,\mathbf{m}_X(t_n))^T$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_X(t_1,t_1) & C_X(t_1,t_2)\ldots & C_X(t_1,t_n) \\ C_X(t_2,t_1) & C_X(t_2,t_2)\ldots & C_X(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_X(t_n,t_1) & C_X(t_n,t_2)\ldots & C_X(t_n,t_n) \end{pmatrix}$$

则称X_T = {X(t)，t ∈T}是正态过程(高斯过程) 。

随机过程{*X*(*t*), *t* >0}的一维概率密度

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_X(t)}} \exp\{-\frac{(x - m_X(t))^2}{2D_X(t)}\}$$

随机过程{*X*(*t*)，*t*>0}的二维概率密度

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_X(s)D_X(t)\,(1-\rho_X{}^2(s,t))}} \cdot$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho_X{}^2(s,t))}\left[\frac{(x_1 - m_X(s))^2}{D_X(s)}\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\rho_X(s,t)\frac{(x_1 - m_X(s))(x_2 - m_X(t))}{\sqrt{D_X(s)D_X(t)}} + \frac{(x_2 - m_X(t))^2}{D_X(t)}\right]\right\}$$

其中，$\rho_X(s,t) = \dfrac{C_X(s,t)}{\sqrt{D_X(s)}\sqrt{D_X(t)}}$

正交增量过程

设$X_T = \{X(t)，t \ge 0\}$为二阶矩过程，若对任意的$0 \le t1 \le t2 \le t3 \le t4$，恒有

$$E\{[X(t_2) - X(t_1)]\,[(X(t_4) - X(t_3)]\}=0$$

则称$X_T = \{X(t)，t \ge 0\}$为正交增量过程。

定理：若$X_T = \{X(t)，t \ge 0\}$是正交增量过程，如果规定$X(0) = 0$，则有

$$R_X(s,t) = R_X(\min(s,t), \min(s,t)) \overset{\text{def}}{=} g(\min(s,t))$$

其中，g(t)是t的单调非降函数。

相关函数

当$s<t$时 $R_X(s,t)$ = E[X(s)X(t)]

= E{[X(s) − X(0)][X(t) − X(s) +X(s)]}

= E[X^2(s)]

$\overset{\text{def}}{=}$ g(s)

同理可得，$R_X(s,t)=\mathrm{R_X}\big(\min(s,t),\min(s,t)\big)=$ g(min(s,t))

单调非降

当$s<t$时 E{[X(t) − X(s)]^2}

= $R_X(t,t)$ $-$ $R_X(t,s)$ - $R_X(s,t)$ + $R_X(s,s)$

= g(t) - g(s)

2. 独立增量过程

设$X_T=$ {X(t)，t ≥ 0}是随机过程，若对任意有限个0 ≤ $t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$, 增量$X(t_2)-X(t_1)$，$X(t_3)-X(t_2)$, …, $X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立，则称$X_T=$ {X(t)，t ≥ 0}为独立增量过程(可加过程)。

若独立增量过程X_T 的任一增量X(s+t) - X(s)，(0 ≤ S < t) 的概率分布与s无关(仅依赖于 t-s)，则称X_T为平稳独立增量过程。

若X_T是独立增量过程，且E[X(t)]=0，E[X^2(t)]<+∞，则X_T是正交增量过程。

3. 马尔科夫过程

设$X_T=\{X_T, \mathbf{t}\in\mathbf{T}\}$ 是随机过程，其中$\mathbf{T}\in[0,+\infty)$，若对任意$n\geq 1$，任意的n个时刻$0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n\in\mathbf{T}$以及任意$s>0$ ($t_n+s\in\mathbf{T}$)，恒有

$$P\{X(t_n+s)\leq x|X(t_1)=x_1,\ldots,X(t_n)=x_n\}$$
$$=P(X(t_n+s)\leq x|X(t_n)=x_n)\quad x,x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{R}$$

成立，则称X_T是马尔可夫过程，简称马氏过程。

- T离散，S离散，则称为马氏链
- T连续，S离散，则称为连续参数马氏链
- T连续，S连续，则称为一般状态空间上的马氏过程

1.4 泊松过程与布朗运动

泊松过程

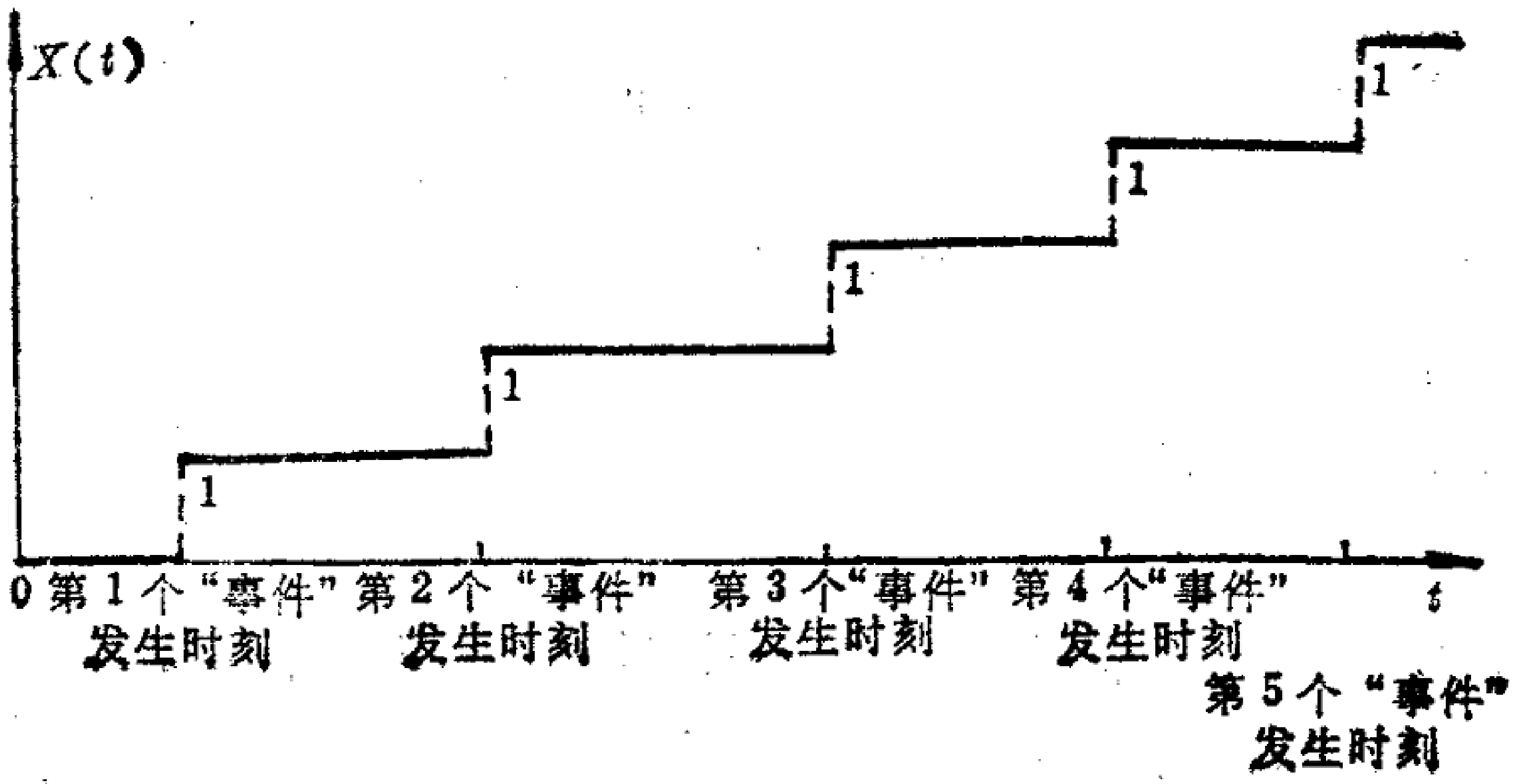
泊松过程是工程技术当中较多见的马尔科夫过程，是由法国著名数学家泊松（Poisson，Simeon-Denis）（1781—1840）证明的，1943年C.帕尔姆在电话业务问题的研究中运用了这一过程，后来于50年代在服务系统的研究中又进一步发展了它。

- 电子管中热阴极射向阳极随时间变化的总电子数
- 放射性物质放射出的随时间变化的总粒子数
- 电话交换站到来的随时间变化的呼唤总数

设$N(t)$表示时间$[0,t)$内某随机事件A出现的次数，则称随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$为计数过程。计数过程具有以下性质：

- $N(t)$取非负整数
- 对于任意的$0\leq s<t$, 有$N(s)\leq N(t)$
- 对于任意的$0\leq s<t$,过程增量$N(t)-N(s)$表示在时间间隔$(s,t]$内事件A的发生次数。

计数过程 $N(t)$ 是时间连续状态离散的随机过程。



泊松过程是计数过程中最重要的子类，其定义有两种形式，如下：

定义1 设是随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$计数过程，若其满足下列三个条件：

（1）$N(0) = 0$；

（2）$N(t)$是独立增量过程；

（3）对任意$s \geq 0$，$t > 0$，每一增量非负，服从参数为λt的泊松分布，即有

$$P\{N(t+s) - N(s) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

其中$\lambda > 0$，则称 $N(t)$ 是强度为λ的泊松（Poisson）过程。

定义2 设随机过程$\{N(t), t \geq 0\}$是计数过程，若其满足下列三个条件：

（1）$N(0) = 0$；

（2）$N(t)$是独立增量过程；

（3）对任意的$t \geq 0$及充分小的$\Delta t > 0$, 有

$$P\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\{N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t)$$

其中$\lambda > 0$，则称 $N(t)$ 是强度为λ的**泊松（Poisson）过程**。

从定义2可得知，$\{N(t), t \geq 0\}$为泊松过程，**N(t)**表示**[0,t]**时段内事件发生的次数。

（1）条件（1） 表明在初始时刻无事件发生，即

$$P[N(0)=0]=1$$

（2）条件（2）表明任意多个不相重叠的时间间隔内发生的事件数相互独立

（3）条件（3）表明**[t, t+*Δt*]**时间内发生的事件数的分布只与时间间隔***Δt***有关，与时间起点无关

（4）条件（3）表明在足够小的时间 Δt 内事件发生一次的概率与时间Δt 成正比，而在足够小的时间内事件发生次数不少于2的概率是关于Δt 的高阶无穷小。即在足够短的时间内，事件发生两次以上为小概率事件。

定理11.1 定义1与定义2是等价的。

定义1 $\Rightarrow$ 定义2

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}$$
$$=\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}$$
$$=\lambda\Delta t[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]$$
$$=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t}$$
$$=e^{-\lambda\Delta t}\left[\left(1+\frac{\lambda\Delta t}{1!}+\frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda\Delta t)^n}{n!}+\cdots\right)-1-\frac{\lambda\Delta t}{1!}\right]$$

$$= e^{-\lambda\Delta t}\left[\left(1+\frac{\lambda\Delta t}{1!}+\frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda\Delta t)^n}{n!}+\cdots\right)-1-\frac{\lambda\Delta t}{1!}\right]$$

$$= e^{-\lambda\Delta t}\left[e^{\lambda\Delta t}-1-\frac{\lambda\Delta t}{1!}\right]$$

$$= 1 - e^{-\lambda\Delta t} - \lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}$$

$$= o(\Delta t)$$

因为 $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1-e^{-\lambda h}-\lambda h\cdot e^{-\lambda h}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{0-e^{-\lambda h}(-\lambda)-\lambda[e^{-\lambda h}+he^{-\lambda h}(-\lambda)]}{1}$

$=\lim\limits_{h\to 0^+}\{\lambda e^{-\lambda h}-\lambda e^{-\lambda h}+\lambda^2 he^{-\lambda h}\}=\lim\limits_{h\to 0^+}\lambda^2 he^{-\lambda h}=0,$

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}$$

$$=1 - P\{N(t+\Delta t)-N=0\} - P\{N(t+\Delta t)-N=1\}$$

$$=1 - e^{-\lambda\Delta t} - \lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}$$

$$=1 - [1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)] - \lambda\Delta t[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]$$

$$= (\lambda\Delta t)^2 + o(\Delta t)$$

$$= o(\Delta t)$$

定义2 $\Rightarrow$ 定义1

记 $P_n(t) \triangleq P\{N(t+s)-N(s)=n\}$

$(1) n=0$，当$\Delta t>0$时，

$$
\begin{aligned}
& P_0(t+\Delta t) \\
& =P\{N(t+\Delta t+s)-N(s)=0\} \\
& =P\{N(t+s)-N(s)=0, N(t+\Delta t+s)-N(t+s)=0\} \\
& =P_0(t)\, P\{N(t+\Delta t+s)-N(t+s)=0\} \\
& =P_0(t)(1-\lambda \Delta t+o(\Delta t))
\end{aligned}
$$

于是，得到

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}$$

$$=-\lambda P_0(t)+\frac{o(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t})$$

令$\Delta t\ \rightarrow 0$，得到

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$$

$$P_0(0)=1$$

积分求解微分方程，得到

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

(2) $n \geq 1$，当$\Delta t > 0$时，

$$
\begin{aligned}
&P_n(t+\Delta t) \\
&= P\{N(t+\Delta t+s) - N(s) = n\} \\
&= P\{N(t+s) - N(s) + N(t+\Delta t+s) - N(t+s) = n\} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} P\{N(t+s) - N(s) = n-k, \\
&\qquad\qquad\qquad N(t+\Delta t+s) - N(t+s) = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t) P\{N(t+\Delta t+s) - N(t+s) = k\} \\
&= P_n(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)\big(\lambda\Delta t + o(\Delta t)\big) + o(\Delta t) \\
&= P_n(t)[1 - \lambda\Delta t] + P_{n-1}(t)\,\lambda\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

于是，得到 $\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$

令$\Delta t \to 0$，得到

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘$e^{\lambda t}$得到方程

$$e^{\lambda t}[P_n'(t) + \lambda P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

即 $$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)$$

另有 $$P_n(0) = 0$$

当$n = 1$时，有

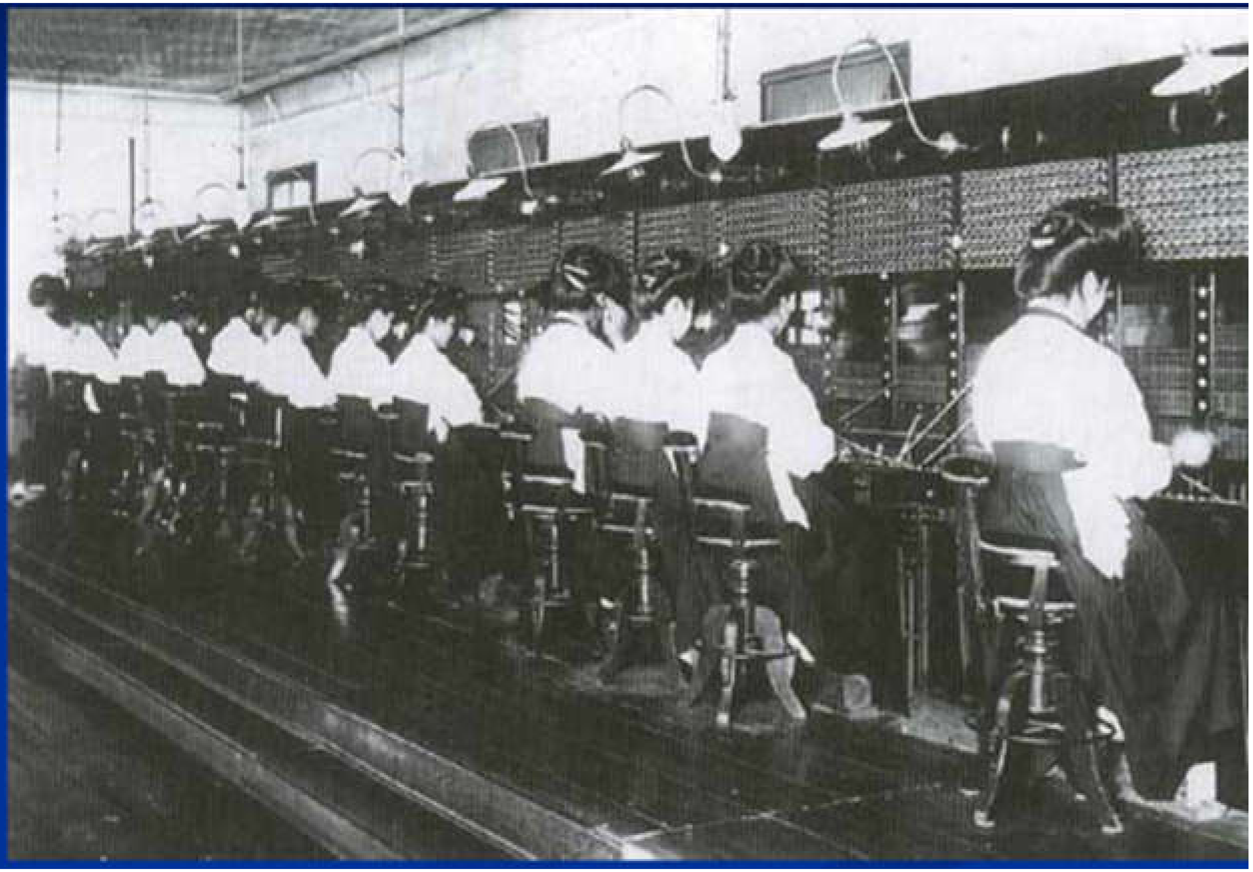
$$\frac{d}{dt}[e^{\lambda t} P_1(t)] = \lambda，P_1(0) = 0$$

解得

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

重复归纳得 $$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

考虑某一电话交换台在某段时间接到的呼叫。令N(t)表示电话交换台在 [0, t] 时间内收到的呼叫次数，则{N(t), t ≥0 }是一个泊松过程。



例1： 设**N(t)**为$[0,t)$ 时段内某电话交换台收到的呼叫次数，**N(t)**的状态空间为$\{0,1,2,\cdots\}$ ，且具有如下性质：

1）**N(0)=0**，即初始时刻未收到任何呼叫；

2）在任意多个不相重叠的时间间隔内收到的呼叫次数相互独立；

3）在**[t, t+ *Δt*]**这段时间收到的呼叫次数只与时间间隔**t** 有关，而与时间起点**s**无关；

4）在足够小的时间间隔内

$$\begin{cases} P(\Delta t\text{时间内有一次呼叫}) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \\ P(\Delta t\text{时间内收到2次及其以上呼叫}) = o(\Delta t) \end{cases}$$

可见$\{N(t), t \geq 0\}$是强度λ 的泊松过程。

考虑来到某火车站售票窗口购买车票的旅客。若记N(t) 为时间 $[0, t]$ 内到达售票窗口的旅客数，则 $\{ N(t), t \geq 0 \}$ 是一个泊松过程。

考虑机器在 $(t, t+h]$ 内发生故障这一事件。若机器发生故障，立即修理后继续工作，则在 $(t, t+h]$ 内机器发生故障而停止工作的事件数构成一个随机点过程，它可以用泊松过程来描述。

泊松过程数字特征

因为 $N(t) = N(t) - N(0) \sim Poisson(\lambda t)$

$m(t) = E(N(t)) = \lambda t$ ⇨ $\lambda = \frac{E(N(t))}{t}$ 表示强度

$D(t) = D(N(t)) = \lambda t$ ⇨ 泊松过程是二阶矩过程

由独立增量性，当$0 \le s < t$时，

$$C(s,t) = Cov\big(N(s), N(t)\big) = Cov(N(s), N(t) - N(s) + N(s))$$
$$= Cov\big(N(s), N(s)\big) = D(N(s)) = \lambda s$$

同理得到 $C(s,t) = \lambda \min(s,t)$

$R(s,t) = \lambda \min(s,t) + \lambda^2 st$

定理11.2 强度为λ的泊松过程的时间间隔序列$\{T_n, n\geq 1\}$，是相互独立的随机变量序列，且服从相同的指数分布。

定理11.3 设$\{N(t), t\geq 0\}$是计数过程，若其时间间隔$\{T_n, n\geq 1\}$是相互独立的随机变量序列，且服从相同的指数分布，则$\{N(t), t\geq 0\}$为强度为λ的泊松过程。

计数过程

T_n 独立同分布 $\Longleftrightarrow$ 强度为λ泊松过程

$T_n \sim E(\lambda)$

例2 顾客到达某商店服从参数$\lambda = 4$人/小时的泊松过程，已知商店上午9：00开门，试求到9：30时仅到一位顾客，而到11：30时总计已达5位顾客的概率。

解：设 $N(t)$表示在时间t时到达的顾客数

$$P\{N(0.5)=1, N(2.5)=5\}$$

$$= P\{N(0.5)-N(0)=1, N(2.5)-N(0.5)=4\}$$

$$=\frac{(4\times 0.5)^1}{1!}e^{-4\times 0.5}\cdot\frac{(4\times 2)^4}{4!}e^{-4\times 2}$$

$$\approx 0.0155$$

例3　设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$与 $\{N_2(t), t \geq 0\}$为相互独立且强度分别为λ_1, λ_2 的泊松过程，证明对于任意给定的 $t \in T$，

$$\{N(t) = N_1(t) + N_2(t), t \in T\}$$

仍为泊松过程。

即两个相互独立的泊松过程的叠加仍然为泊松过程，且其强度为二泊松过程的强度之和$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

证明：

（**1**） $N(0) = N_1(0) + N_2(0)$

（**2**） $N_1(t), N_2(t)$ 为独立增量过程，其和也为独立增量过程

（3）记 $N(t+s)-N(t)=N(t,t+s)$

$$P[N(t,t+s)=m]=P[N_1(t,t+s)+N_2(t,t+s)=m]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}P[N_1(t,t+s)=k,N_2(t,t+s)=m-k)]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}P[N_1(t,t+s)=k]P[N_2(t,t+s)=m-k)]$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{(\lambda_1 s)^k e^{-\lambda_1 s}}{k!}\frac{(\lambda_2 s)^{m-k}e^{-\lambda_2 s}}{(m-k)!}$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\,(m-k)!}(\lambda_1 s)^k(\lambda_2 s)^{m-k}\frac{1}{m!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}}{m!}[(\lambda_1+\lambda_2)s]^m$$ 得证

例4： 设乘客从南北两个方向在[0,t)时段内到达同一飞机场的人数$N_1(t)$和$N_2(t)$ 分别服从强度为λ_1,λ_2 的泊松过程，试求在[0,t)时段内到达机场的人数的平均值。

答案：$(\lambda_1+\lambda_2)t$

布朗运动

布朗运动是指悬浮在液体或气体中的微粒所做的永不停息的无规则运动。

将坐标系的原点取在花粉的起始位置，花粉在 t 时刻所处位置的横坐标和纵坐标分别用 $X(t)$, $Y(t)$ 表示。首先它在起始时刻位于原点；又在各个不相交时间间隔中花粉沿 x 方向的位移是互不影响，相互独立的；且在每一段时间间隔中沿 x 方向位移服从正态分布，由于左移与右移距离的概率分布是对称的，所以数学期望为零，而刻划位移分散程度的方差正比于时间间隔的长度。

定义 设$\{W(t), t \geq 0\}$是随机过程，若其满足

(1)$W(0)=0$

(2)独立增量过程

(3)增量$W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$, $\sigma>0$

则称$\{W(t), t\geq 0\}$为维纳过程，或布朗运动。

特殊地，σ等于1的维纳过程称为标准维纳过程。

需要指出，维纳过程是平稳独立增量过程。

定理1　维纳过程是正态过程。

证 维纳过程 $W(t)$ 在$t_1,t_2,\ldots,t_n(0\le t_1<t_2<\ldots<t_n)$ 时刻上的 n 维概率分布为 $(W(t_1),W(t_2),\ldots,W(t_n))^T$的联合分布。有

$$\begin{cases} W(t_1)=W(t_1)-W(0) \\ W(t_2)=[W(t_1)-W(0)]+[W(t_2)-W(t_1)] \\ W(t_3)=[W(t_1)-W(0)]+[W(t_2)-W(t_1)]+[W(t_3)-W(t_2)] \\ \cdots \\ W(t_n)=[W(t_1)-W(0)]+[W(t_2)-W(t_1)]+\cdots+[W(t_n)-W(t_{n-1})] \end{cases}$$

由维纳过程定义，

$$W(t_1)-W(0),W(t_2)-W(t_1), \cdots, W(t_n)-W(t_{n-1})$$

是相互独立的正态变量。于是有$W(t_k)$的任意线性组合

$$\sum_{k=1}^{n} a_k W(t_k)=\sum_{k=1}^{n} A_k\left[W(t_k)-W(t_{k-1})\right]$$

服从一维正态分布，利用多维正态分布性质,可得

$(W(t_1),W(t_2),\ldots,W(t_n))^T$服从 n 维正态分布。因此，

$X(t)$ 是正态过程;

定理2 维纳过程 W(*t*) 的数学期望 $m_w(t)=0$，协方差函数$C_w(s,t)=R_w(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$。

由此可见，协方差函数与 s, t 都有关，因此维纳过程不是平稳随机过程。

定理2 维纳过程 $X(t)$ 的数学期望 $m_W(t)=0$，协方差函数 $C_W(s,t)=R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$。

证 先算数学期望，

$$m_W(t)=E[W(t)]=E[W(t)-W(0)]=0$$

再算协方差函数，当 $s\le t$

$$C_W(s,t)=E[W(s)W(t)]$$

$$=E\{[W(s)-W(0)]\{[W(t)-W(s)]+[W(s)-W(0)]\}\}$$

$$=E\{[W(s)-W(0)]^2\}\ =\sigma^2 s$$

同理，当 $s>t$， $C_W(s,t)=\sigma^2 t$

综合得 $C_W(s,t)=R_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t).$