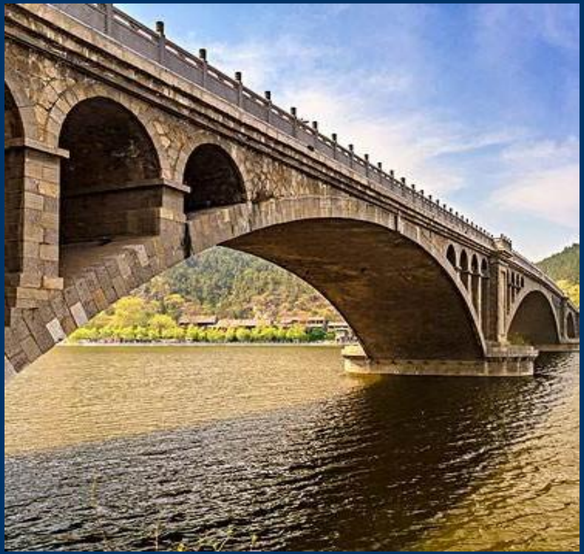
前面讨论了质点和质点系的运动学与动力学规律，下面将讨论具有一定形状和大小的物体的运动。



具有形状和大小的实际物体的运动一般是较复杂的，它可以平移、转动，还可能发生形变。为了使问题简化，一般假定物体无论受多大外力或转动得多快都不变形，称这样的物体为刚体。Rigid Body

刚体力学的基本方法：设想将刚体分割成许多部分，每一部分都小到可看作一个质点，称作刚体的“质元”，对于刚体，它的任意两质元之间的距离始终保持不变。因此，刚体就像是一个冻结了的质点系，由于每个质元服从质点力学规律，由此出发，推演出刚体的运动规律。

基本内容：*刚体运动学→刚体动力学（刚体的平动、刚体的定轴转动，刚体的平面运动等）。*

第五章 刚体及其基本运动 *Motions of Rigid Body*

一、刚体

定义： 受力时形状和体积完全不变化的质点系

★说明

(1) 特殊的质点系。

(2) 在力作用下，组成物体的所有质点间的距离始终保持不变。

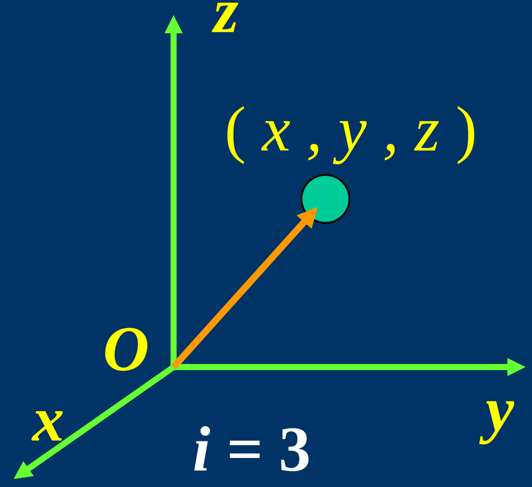
(3) 理想化模型

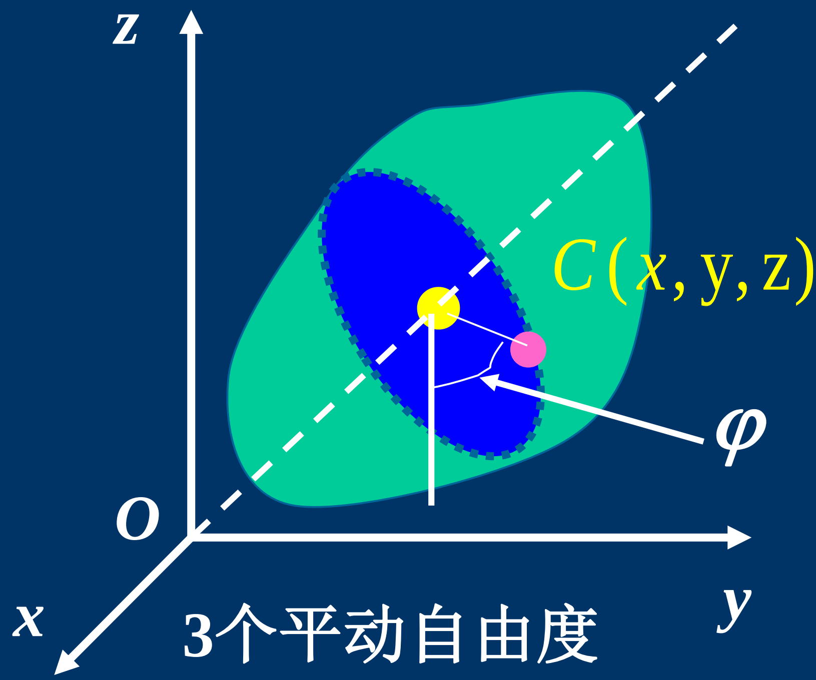
(4) 有关质点系的规律都可用于刚体。

(5) 刚体的特点，规律的表示还可较一般的质点系有所简化。

二、自由度

确定物体的位置所需要的独立坐标数 —— 物体的自由度数





3个平动自由度
3个转动自由度

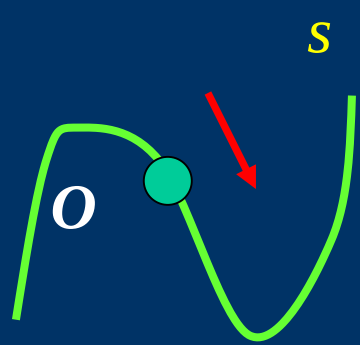
一个可以在空间自由运动的质点 自由度数=3

一个可以在空间自由运动的刚体 自由度数=6

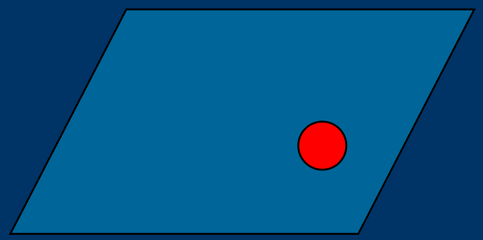
- 当刚体受到某些限制 ——自由度减少

限制在平面或曲面上运动的质点　　自由度数=2

限制在直线或曲线上运动的质点　　自由度数=1

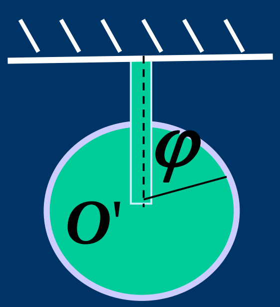


$i = 1$



$i = 2$

- 定轴转动仅有一个自由度



三、刚体的平动 translation

定义：刚体运动时，若在刚体内所作的任一条直线都始终保持和自身平行 —— 刚体平动

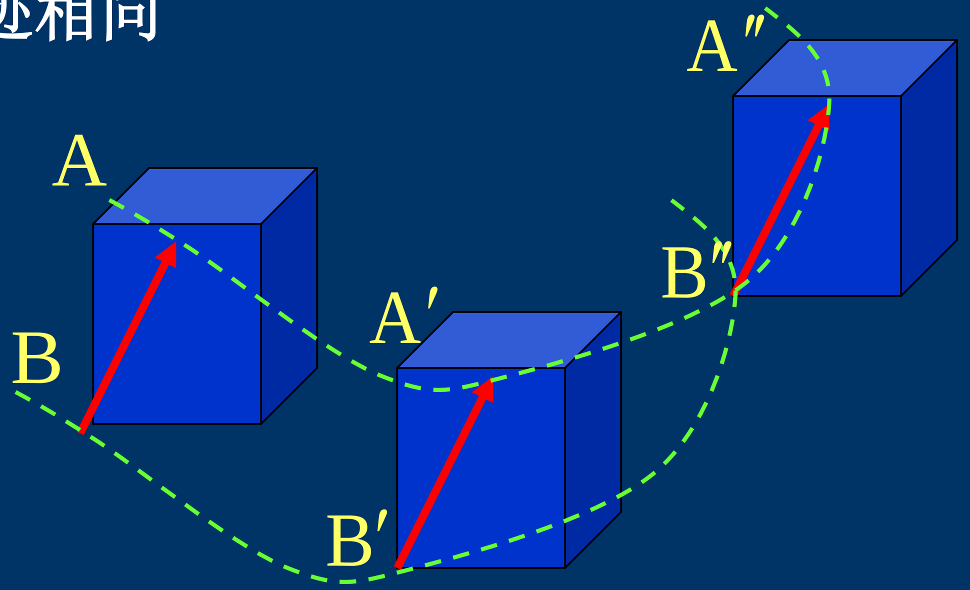
例如：　升降机　　汽缸中的活塞

- 平动的特点

(1) 刚体上各质点的运动轨迹相同

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_B \\ \vec{a}_A &= \vec{a}_B\end{aligned}}$$



(2) 用质心的运动　来代替　刚体的平动

四、刚体绕定轴转动　*Rotation about affixed axis*

转动：刚体内各点都绕同一直线作圆周运动

例如：陀螺　门　直升飞机的螺旋桨

转轴固定不动　------定轴转动

例如：门　固定在地面上的电动机转子

> 刚体的平动和绕定轴转动是刚体的
> 两种最简单最基本运动

★ 说明

平动和转动，可以描述所有质元的运动。

例如：　一个车轮的滚动，

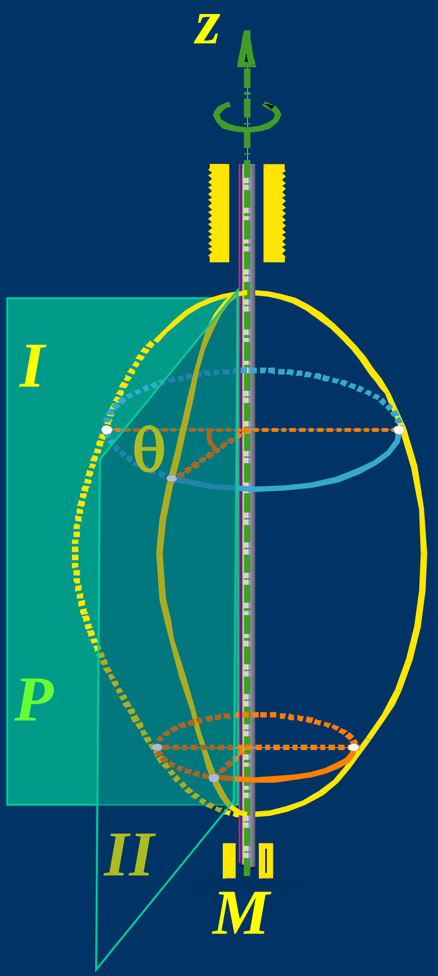
拧紧或松开螺帽，　钻头

1. 描述刚体绕定轴转动的角量

角坐标 $\theta = f(t)$

角速度 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = f'(t)$

角加速度 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = f''(t)$



当 $\beta = C \longrightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ (\theta - \theta_0) = \omega t + \dfrac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$

与质点的匀加速直线运动公式相象

2. 定轴转动刚体上各点的速度和加速度

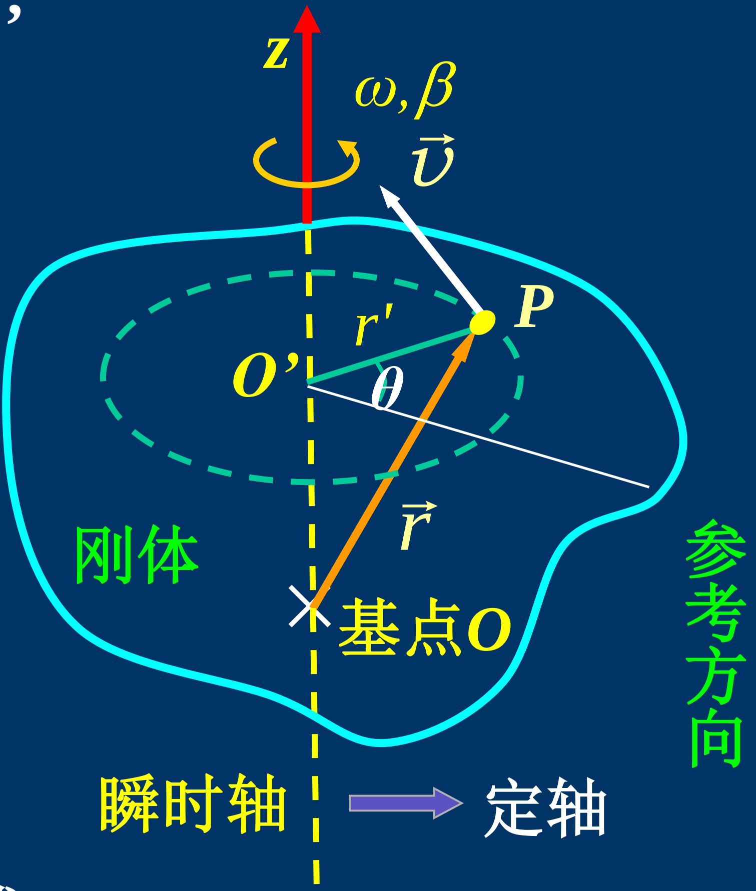
任意点都绕同一轴作圆周运动，

且 ω，β 都相同

$$\upsilon = r'\omega$$

$$a_n = r'\omega^2$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = r'\beta$$



速度与角速度的矢量关系式

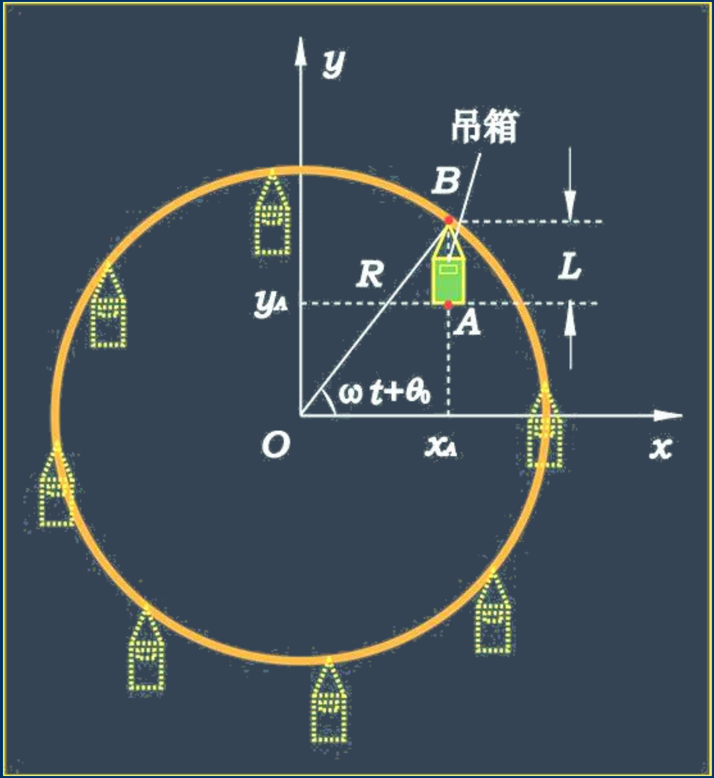
$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

加速度与角加速度的矢量关系式

$$a_\tau = \vec{\beta} \times \vec{r} \qquad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

例： 一大型回转类“观览圆盘”如图所示。圆盘的半径R=25 m，供人乘坐的吊箱高度L=2 m。若大圆盘绕水平轴均速转动，转速为0.1 r/min。

求： 吊箱底部A点的轨迹及A点的速度和加速度的大小。



解： $$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{10\times 60}=\frac{\pi}{300}$$

吊箱平动

$$x_A=x_B=R\cos(\omega t+\theta_0)$$

$$y_A=y_B-L=R\sin(\omega t+\theta_0)-L$$

$$x_A^2+(y_A+L)^2=R^2$$

$$v_{Ax} = \frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin(\omega t + \theta_0)$$

$$v_{Ay} = \frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t} = R\omega\cos(\omega t + \theta_0)$$

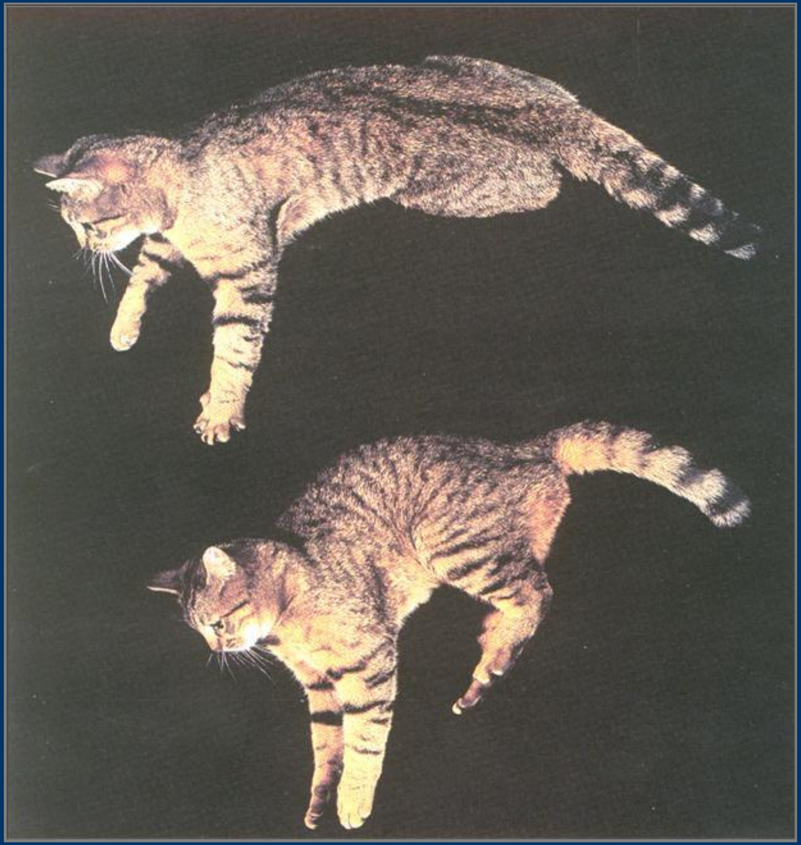
$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = R\omega = \frac{25\pi}{300} = 0.26\ \mathrm{m/s}$$

$$a_{Ax} = \frac{\mathrm{d}v_{Ax}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$a_{Ay} = \frac{\mathrm{d}v_{Ay}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\sin(\omega t + \theta_0)$$

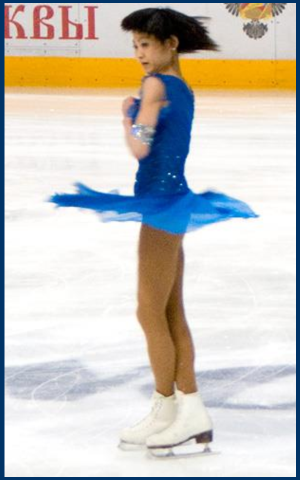
$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = R\omega^2 = \frac{25\pi^2}{300^2} = 2.7\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

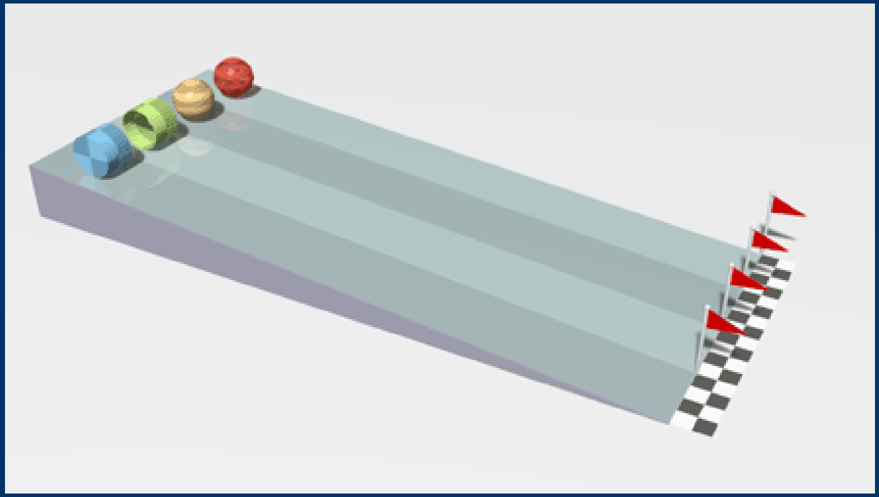
第六章 刚体动力学 *Mechanics of Rigid Body*



猫之谜题

长期观察表明猫从高层楼房阳台掉到楼外人行道上时，受伤程度将随高度的增加而减少，为什么？





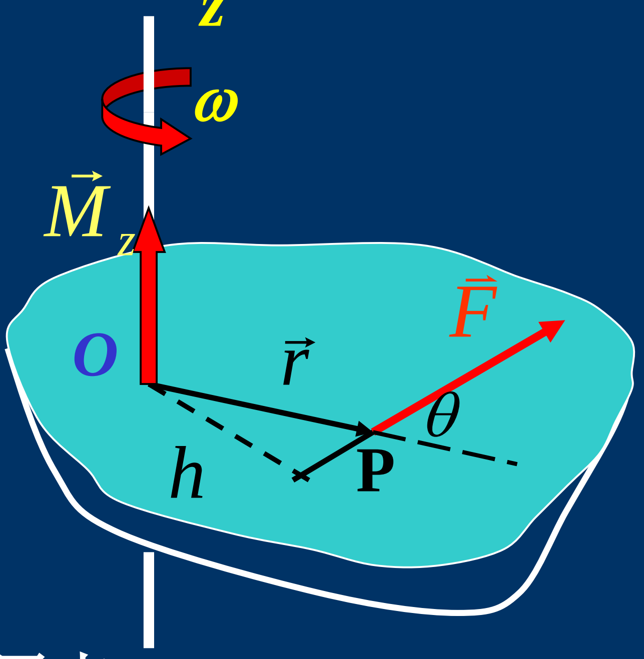
§6.1 力矩 刚体转动定律 *Torque & Law of Rotation*

一. 力矩 Torque

- 力 ⟶ 改变质点的运动状态 ⟶ 质点获得加速度
- ? ⟵ 改变刚体的转动状态 ⟵ 刚体获得角加速度

定义：力 F 的大小与 O 点到 F 的作用线间垂直距离 h 的乘积

$$M_z(F) = Fh = Fr\sin\theta$$



矢量式 $\boxed{\vec{M}_z = \vec{r}\times\vec{F}}$

- 力矩是矢量

  —— 反映力的大小、方向和作用点

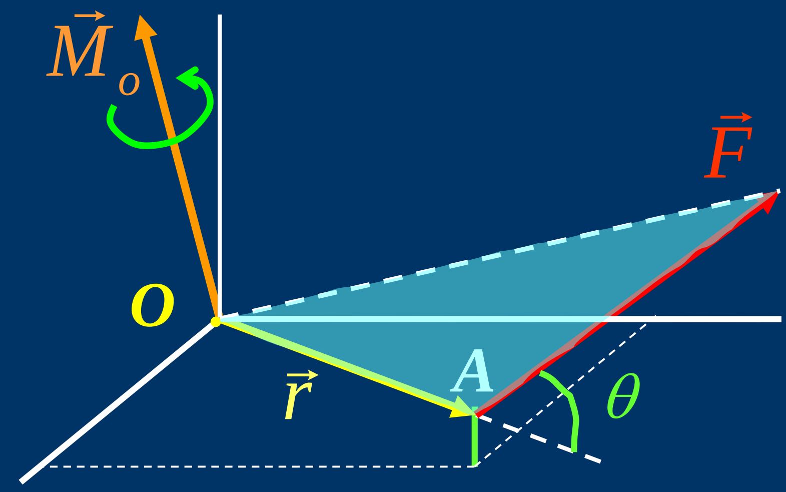
- 在刚体的定轴转动中，力矩矢量只有两个指向

★ **讨论**

(1) 力对点的力矩

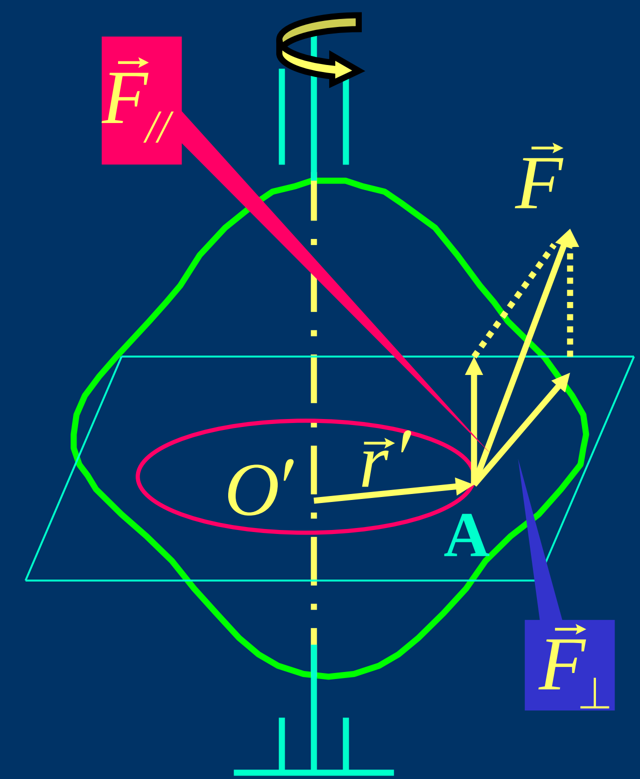
—更为一般的物体转动

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



(2) 力对定轴的力矩

力对轴的力矩为 $\vec{M}_Z = \vec{r}' \times \vec{F}_{\perp}$



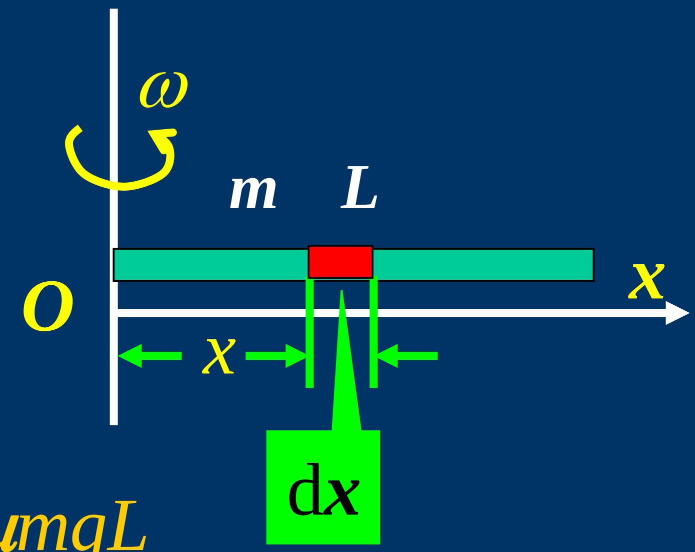
★ **说明**

(1) 力对任意点的力矩，在通过该点的任一轴上的投影，等于该力对该轴的力矩。

(2) 力矩随参考点而变

例 已知棒长 L ,质量 m，在摩擦系数为 μ 的桌面转动 (如图)

求 摩擦力对转轴的力矩



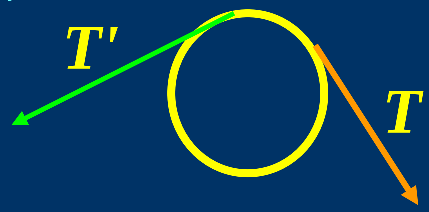
解 $$\mathrm{d}m=\frac{m}{L}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}f=\mu\mathrm{d}m\cdot g$$

根据力矩 $$\mathrm{d}M'=-\mu\frac{m}{L}\cdot gx\mathrm{d}x$$

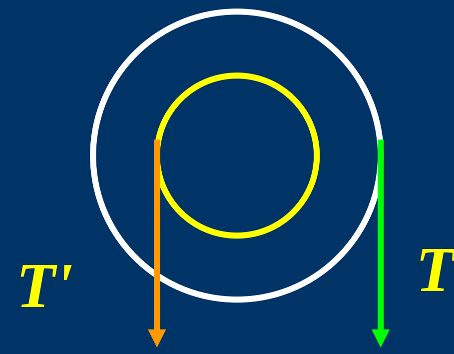
$$M'=\int_0^L-\mu\frac{m}{L}\cdot gx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mu mgL$$

- 在定轴转动中，力矩可用代数值进行计算

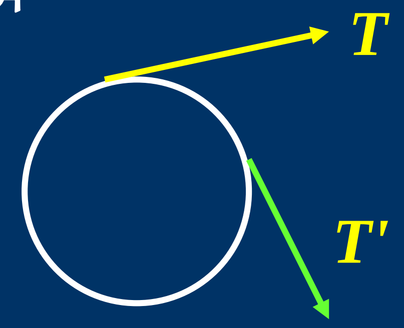
例如



$$\sum M_i=TR-T'R$$



$$\sum M_i=TR-T'r$$



$$\sum M_i=TR+T'R$$

二. 转动定律 ——刚体绕轴转动的动力学方程

实验证明
- 当 M 为零时， 则刚体保持静止或匀速转动
- 当存在 M 时，β 与 M 成正比，而与J 成反比

$$M \propto J\beta \longrightarrow M = kJ\beta$$

刚体的转动定律 $\boxed{M_z = J_z\beta}$

作用在刚体上所有的外力对定轴 z 轴的力矩的代数和

刚体对 z 轴的转动惯量

刚体绕 z 轴转动的角加速度

★ 说明

(1) M 正比于 β，力矩越大，刚体的 β 越大

(2) 力矩相同，若转动惯量不同，产生的角加速度不同

(3) 与牛顿定律比较:$M \to F, J \to m, \beta \to a$

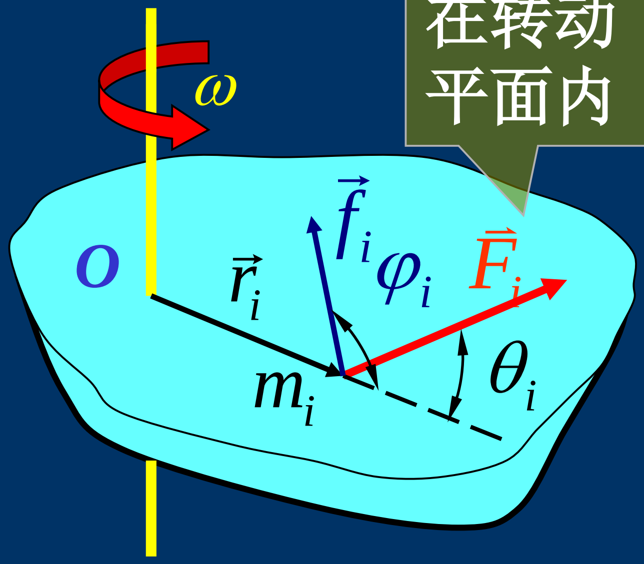
- **理论推证**

取一质量元 $\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$

$\Downarrow$

切线方向 $F_{i\tau} + f_{i\tau} = m_i a_{i\tau}$

法线方向 $F_{in} + f_{in} = m_i a_{in}$



对固定轴的力矩 $F_{i\tau} r_i + f_{i\tau} r_i = m_i a_{i\tau} r_i = m_i r_i^2 \beta$

$$F_i \sin\theta_i r_i + f_i \sin\varphi_i r_i = m_i r_i^2 \beta$$

对所有质元 $\sum F_i \sin\theta_i r_i + \sum f_i \sin\varphi_i r_i = (\sum m_i r_i^2)\beta$

合外力矩 M

合内力矩 = 0

刚体的转动惯量 J

$M_z = J_z \beta$ 结论：刚体的转动定律 —— 质点的牛顿定律

三. 转动惯量 *Rotational inertia*

定义式

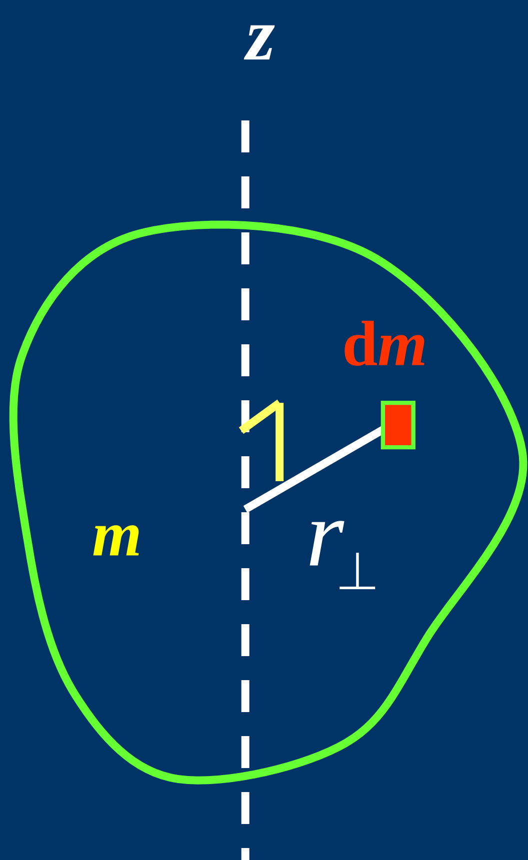
$$J_z = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^{\ 2}$$

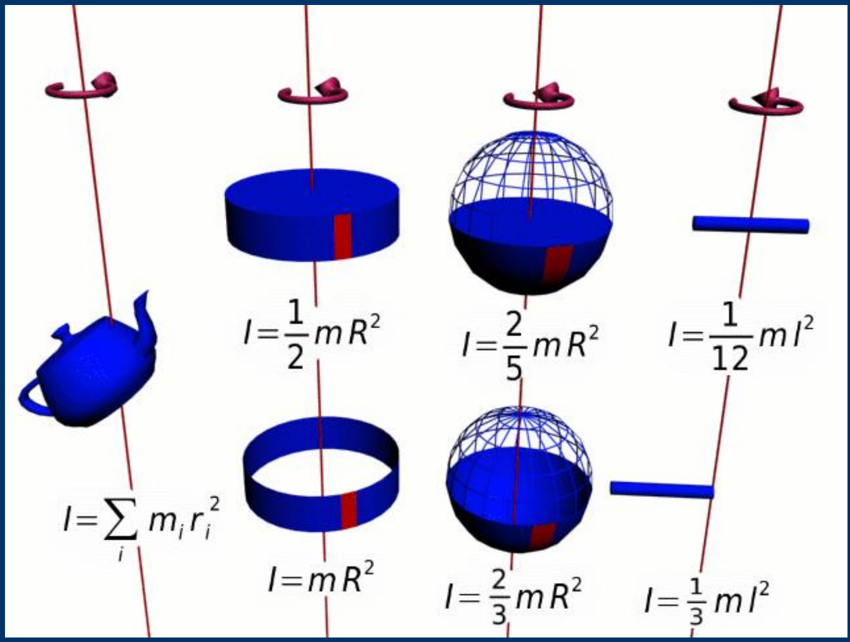
质量不连续分布

$$\boxed{J_z = \sum m_i r_{i\perp}^{\ 2}}$$

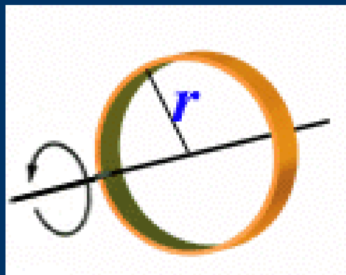
质量连续分布

$$\boxed{J = \int_V r_\perp^{\ 2} \mathrm{d}m}$$

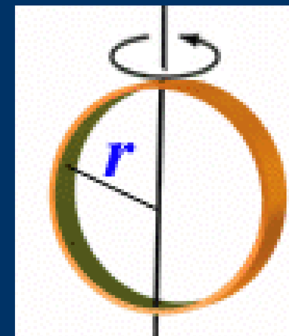




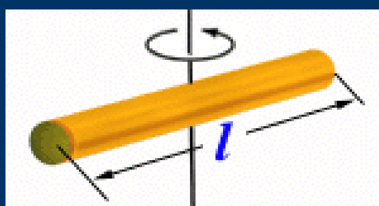
几种典型刚体的转动惯量



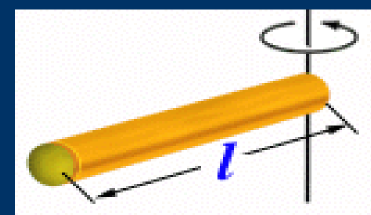
$$J = mr^2$$



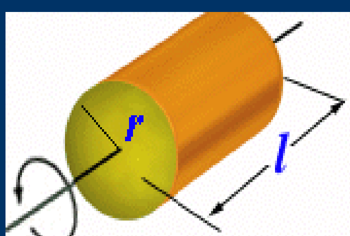
$$J = mr^2/2$$



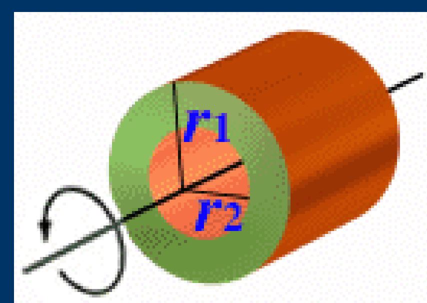
$$J = ml^2/12$$



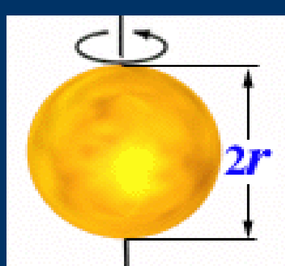
$$J = ml^2/3$$



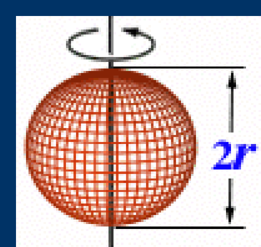
$$J = mr^2/2$$



$$J = m(r_1^2 + r_2^2)/2$$

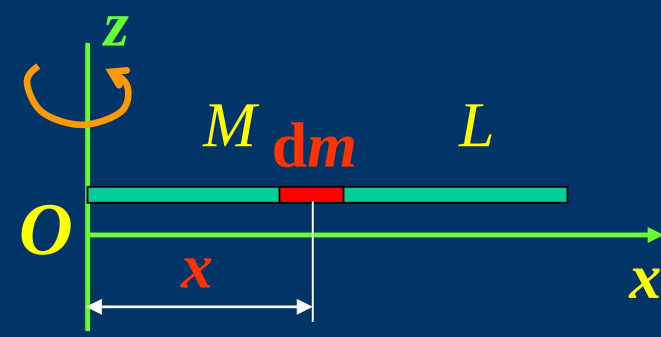


$$J = 2mr^2/5$$



$$J = 2mr^2/3$$

● 转动惯量的三个要素

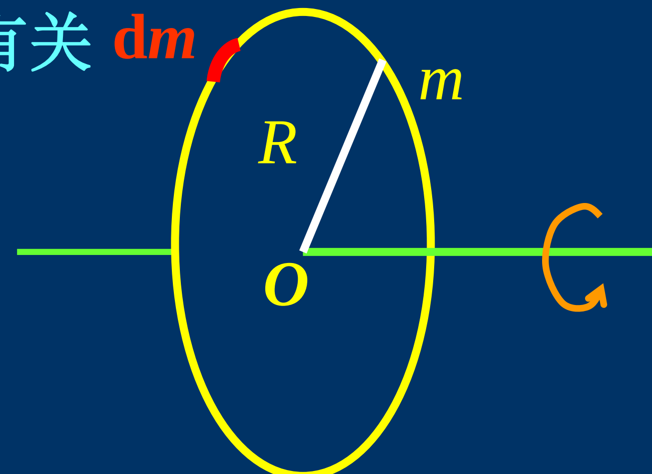


(1) J 与刚体的总质量有关

例 两根等长、质量均匀分布的细木棒和细铁棒 绕端点轴转动惯量

$$J=\int_0^L x^2\lambda \mathrm{d}x=\int_0^L x^2\frac{M}{L}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ML^2 \longrightarrow J_{铁}>J_{木}$$

(2) 当刚体质量一定，J 与质量分布有关



例 圆环绕中心轴旋转的转动惯量

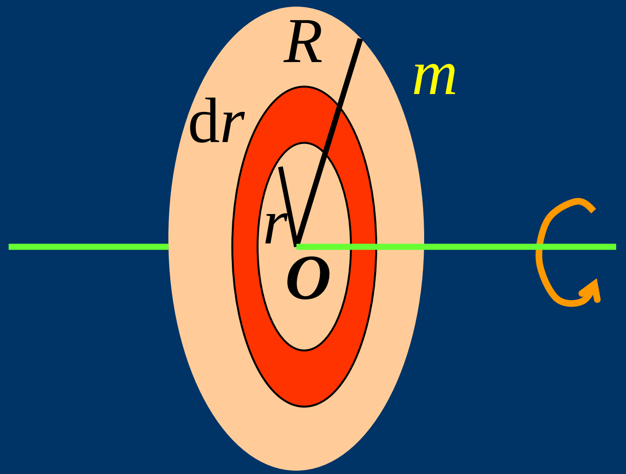
$$J=\int_0^m R^2\mathrm{d}m=R^2\int_0^m \mathrm{d}m=mR^2$$

★ 问题 质量分布的均匀性对圆环绕中心轴旋转的转动惯量有影响吗?

例 质量均匀分布的圆盘绕中心轴旋转的转动惯量

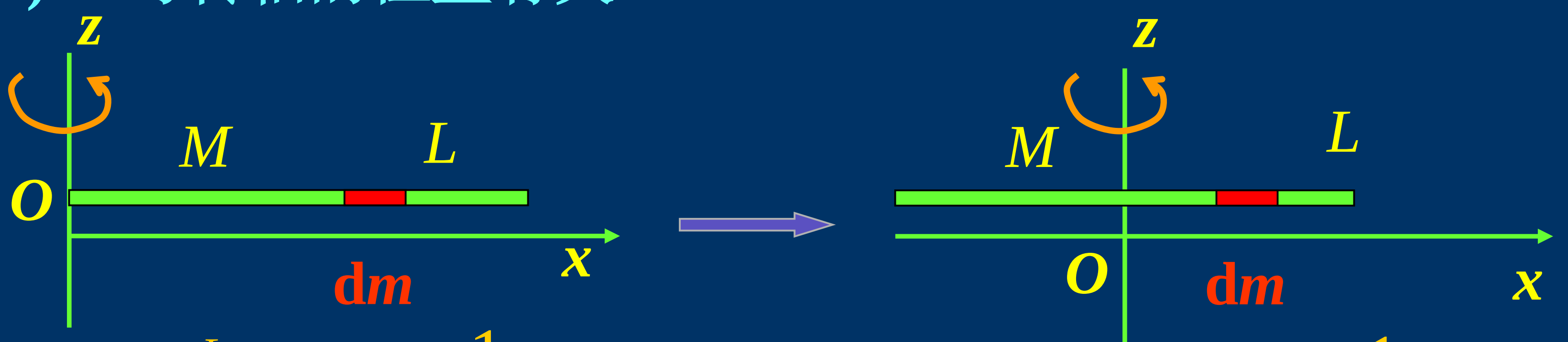
$$\mathrm{d}s = 2\pi r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\mathrm{d}r = \frac{2mr}{R^2}\mathrm{d}r$$



$$J = \int_0^m r^2 \mathrm{d}m = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 \mathrm{d}r = \frac{m}{2} R^2$$

(3) J 与转轴的位置有关



$$J = \int_0^L x^2 \lambda \mathrm{d}x = \frac{1}{3} ML^2$$

$$J = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \frac{1}{12} ML^2$$

结论： 刚体的转动惯量与刚体的质量、形状、大小、密度和转轴的位置均有关

单位（SI）： $\mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m}^2$

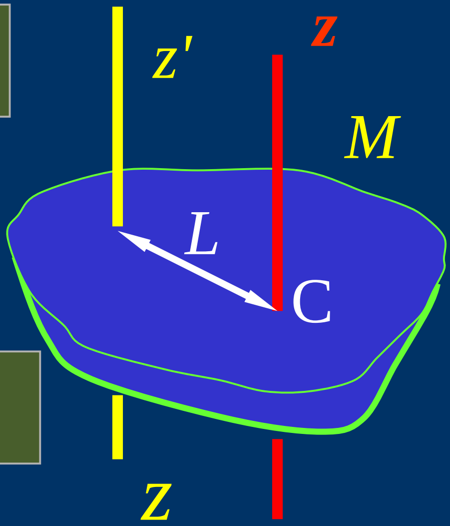
四. 平行轴定理

两轴间垂直距离

$$J_{z'} = J_z + ML^2$$

刚体绕任意轴

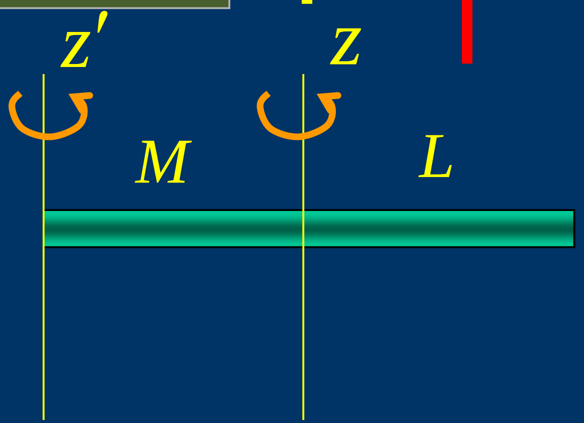
刚体绕通过质心的轴



例 求均匀细棒对其一端点的转动惯量

$$J'_Z = J_Z + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$J_z = \frac{1}{12}ML^2$$

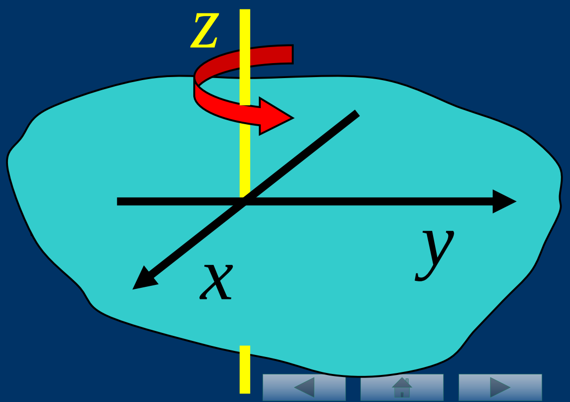


- 薄板垂直轴定理

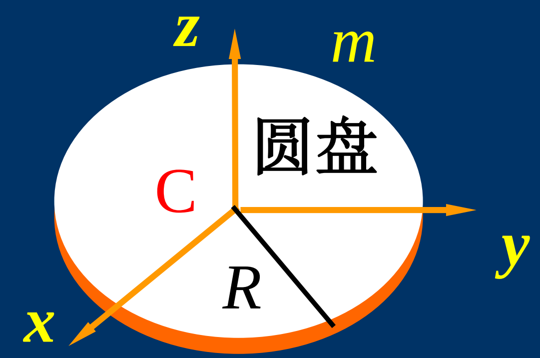
$$J_z = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$$

$$= \sum \Delta m_i x_i^2 + \sum \Delta m_i y_i^2$$

$$\boxed{= J_y + J_x}$$



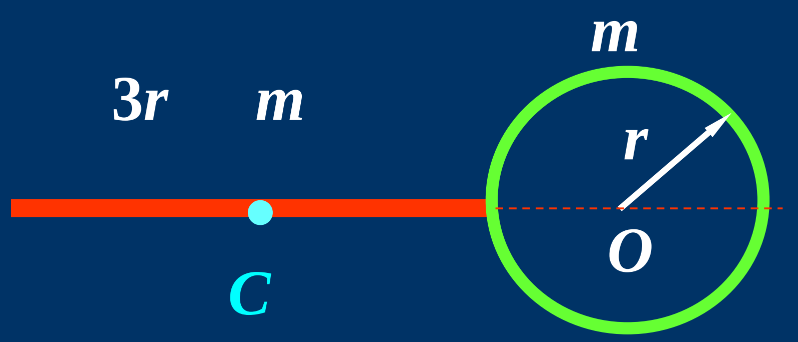
例 求对圆盘的一条直径的转动惯量



已知 $J_z = \frac{1}{2}mR^2$

垂直轴定理 $\begin{cases} J_z = J_x + J_y \\ J_x = J_y \end{cases} \Rightarrow J_x = J_y = \frac{1}{4}mR^2$

例 求对过圆环中心且垂直于圆环平面的转轴 O 的转动惯量



解 $J_{棒,c} = \frac{1}{12}m(3r)^2$

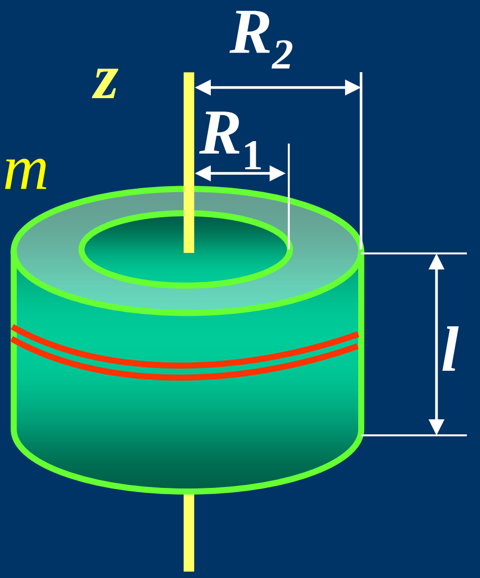
$J_{棒,O} = J_{棒,C} + m(\frac{3}{2}r + r)^2$

$J_{环,o} = mr^2$

$J_O = J_{环,O} + J_{棒,O} = 8mr^2$

例 求空心圆柱绕中心轴的转动惯量

解 为两个实心圆柱绕中心轴的转动惯量的差值



圆盘绕中心轴旋转的转动惯量为

$$\mathrm{d}J = \frac{\mathrm{d}m}{2} R^2 \qquad \mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}V = \rho \cdot \pi R^2 \cdot \mathrm{d}l$$

$$\rho = \frac{m}{(\pi R_2^2 - \pi R_1^2) l}$$

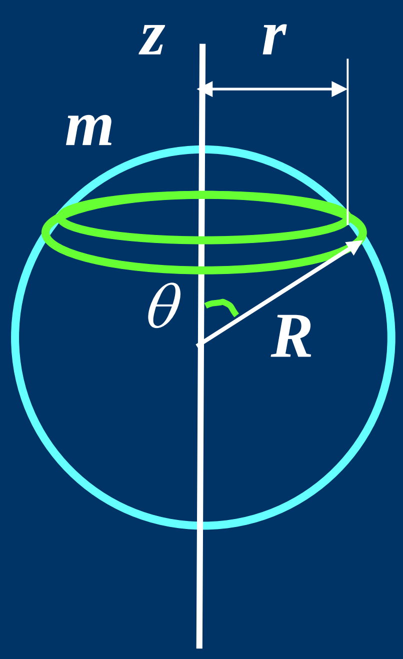
实心圆柱绕中心轴的转动惯量为

$$J = \int_0^l \frac{\rho \cdot \pi R^2 \cdot \mathrm{d}l}{2} R^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi R^4 l$$

空心圆柱绕中心轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{2}(\rho \cdot \pi R_2^4 l - \rho \cdot \pi R_1^4 l) = \frac{1}{2} m(R_2^2 + R_1^2)$$

例 求均匀的薄球壳绕直径的转动惯量



解 切为许多垂直于轴的圆环

$$\mathrm{d}J = r^2 \cdot \mathrm{d}m \qquad \mathrm{d}m = \sigma \cdot 2\pi r \cdot R\mathrm{d}\theta$$

$$\sigma = m/4\pi R^2 \qquad r = R\sin\theta$$

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{2}\sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}J = r^2 \cdot \mathrm{d}m = (R\sin\theta)^2 \cdot \frac{m}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

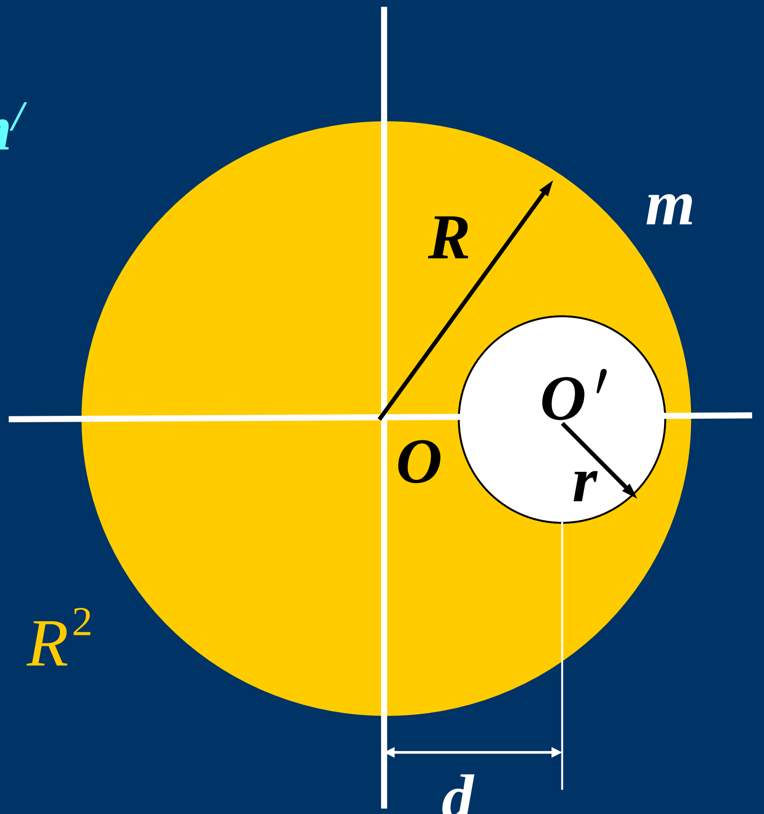
$$J = \int_0^{\pi} (R\sin\theta)^2 \cdot \frac{m}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}mR^2$$

例 从半径为R 的均质圆盘上挖掉一块半径为r 的小圆盘，该系统的质量为m,两圆盘中心O 和O' 相距为d ，且$(d + r) < R$

求 挖掉小圆盘后，该系统对垂直于盘面, 且过中心轴的转动惯量

解 使用补偿法 设小圆盘的质量为m'

则填满后的总质量为$m+m'$



$$\frac{m+m'}{m'} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2}$$

$$m' = \frac{mr^2}{(R^2 - r^2)} \qquad J_{满} = \frac{1}{2}(m+m')R^2$$

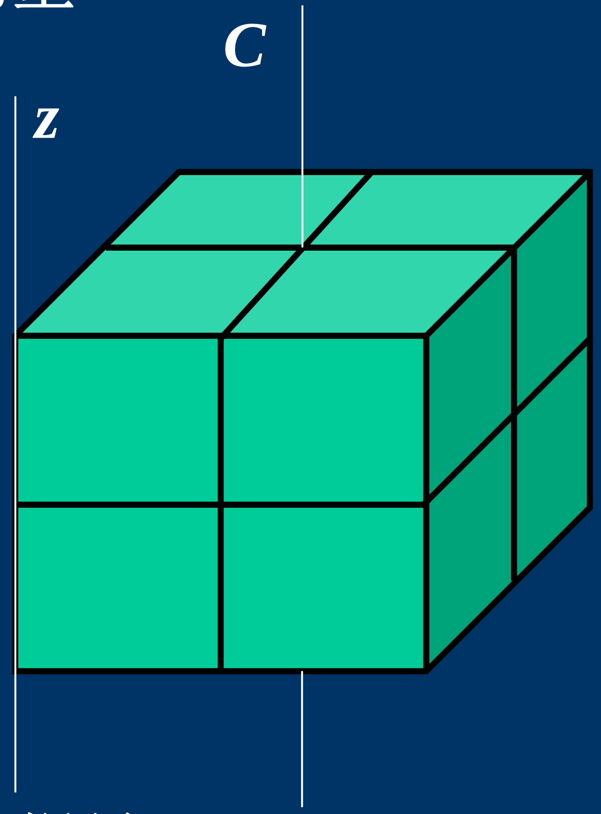
$$J_{小o} = \frac{1}{2}m'r^2 + m'd^2 \qquad J = J_{满} - J_{小o}$$

例 求均匀立方体(边长l、质量m)绕通过面心的中心轴的转动惯量

标度变换方法求 J

解

- 设 $J_C = k \cdot ml^2$　k是一个无量纲的量



- 立方体绕棱边的转动惯量为

$$J_z = J_C + m\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot ml^2$$

- 分成八个相同的小立方体

他们绕各自棱边的转动惯量为

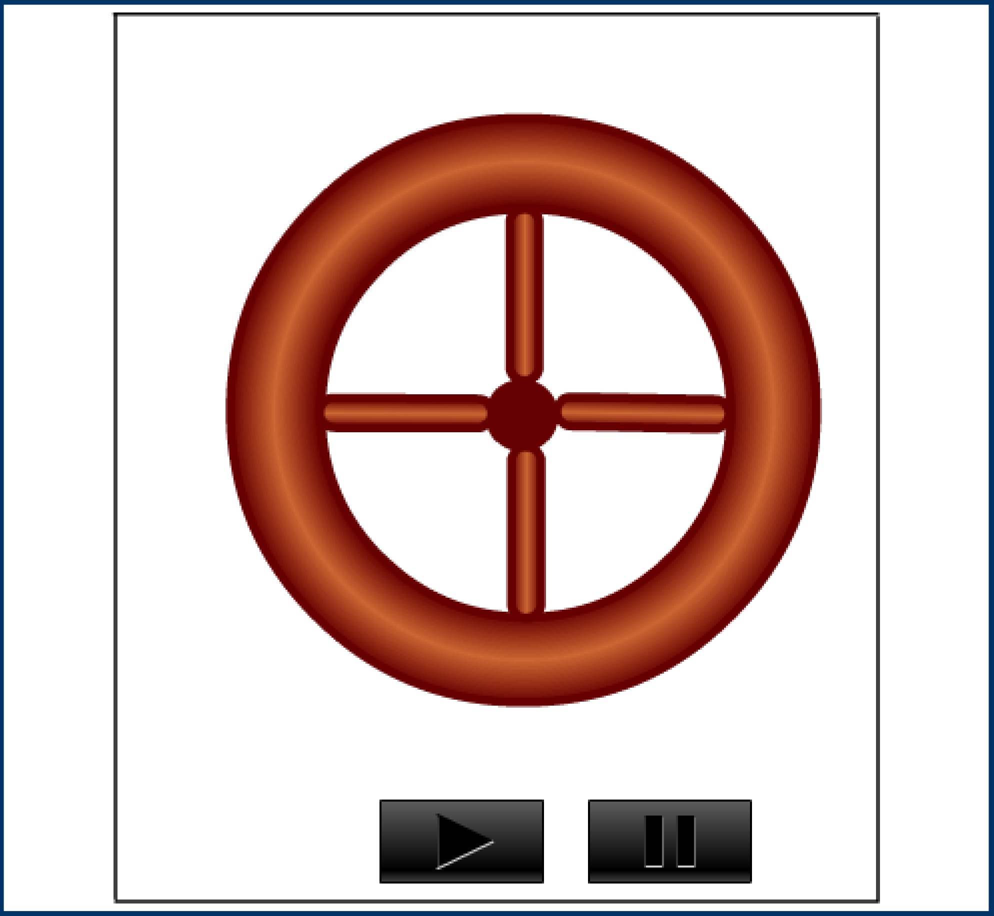
$$J_{小} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{m}{8}\right) \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

- 八个相同的小立方体绕棱边的转动惯量=J_C　即

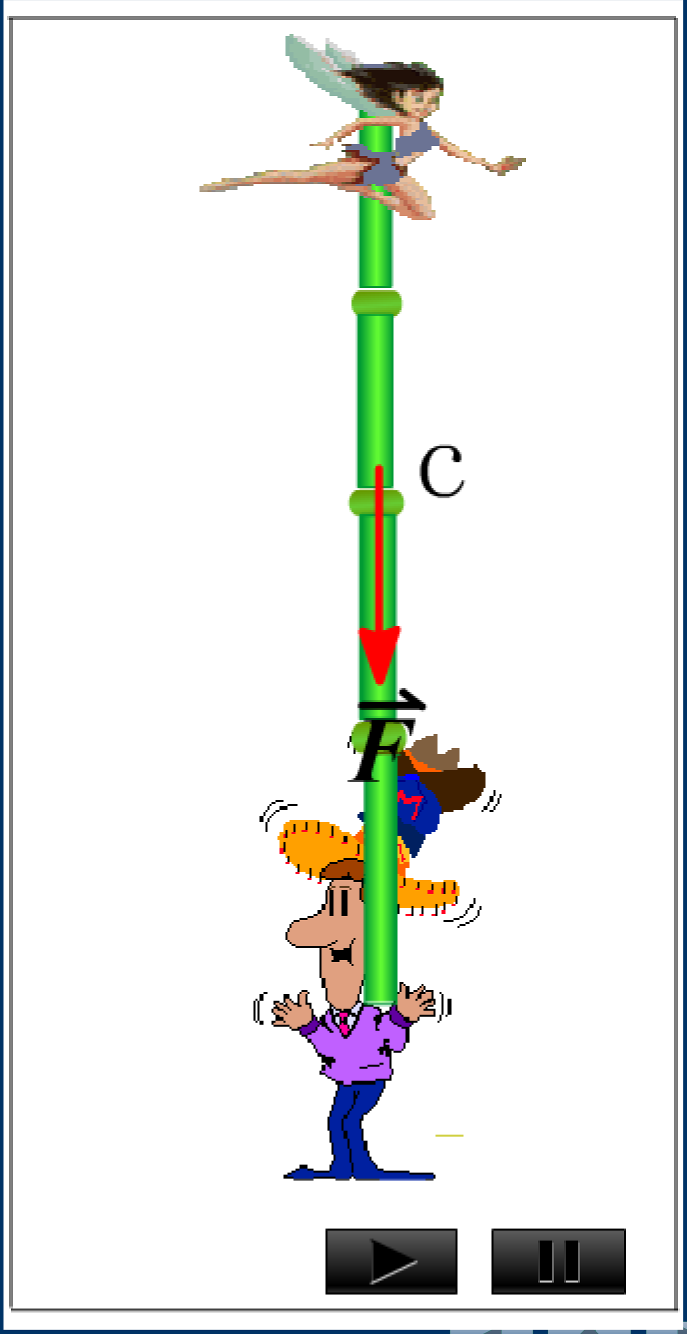
$$J_C = 8J_{小} \qquad k = \frac{8}{32}\left(k + \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow k = \frac{1}{6} \qquad J_C = \frac{1}{6}ml^2$$

五. 转动定律的应用举例

用刚体力学转动定律思考分析问题

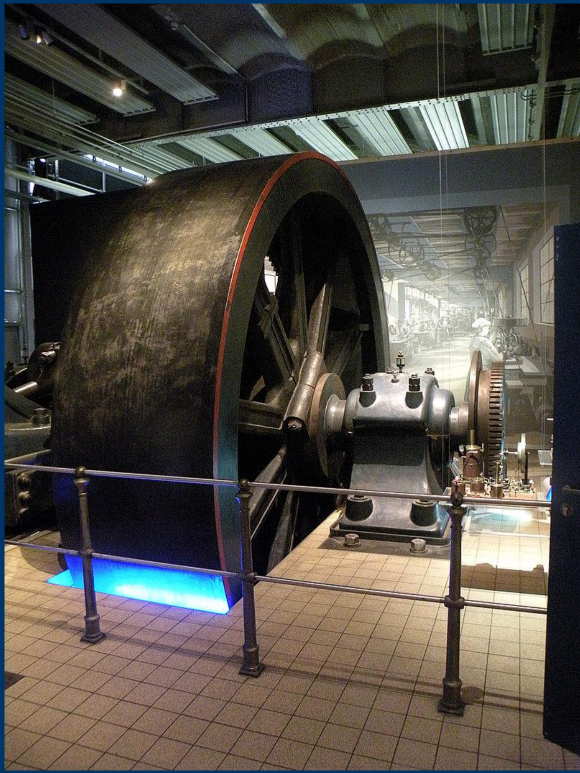


飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘？



竿子长些还是短些较安全？

例　一个作定轴转动的轮子，对轴的转动惯量为 J=2.0kg．m^2，正以角速度 ω_0 匀速转动。现对轮子加一恒定的力矩 M=-7.0N • m，经过时间 t=8.0s 时轮子的角速度为 $-\omega_0$

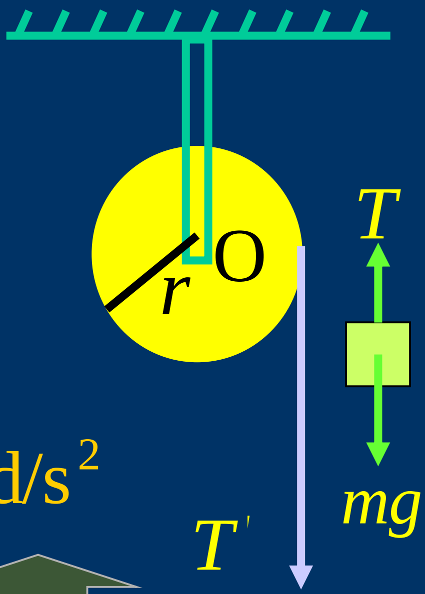


求 ω_0

解 $M = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$　　$\int_0^t M\mathrm{d}t = \int_{\omega_0}^{-\omega_0} J\mathrm{d}\omega$

$Mt = -2J\omega_0$　　$\omega_0 = 14\mathrm{rad/s}$

例 一轻绳绕在半径 r =20cm 的飞轮边缘，在绳端施以F=98N 的拉力，飞轮的转动惯量 J=0.5kg·m^2，飞轮与转轴间的摩擦不计，



求 (1) 飞轮的角加速度

(2) 如以重量P=98N的物体挂在绳端，试计算飞轮的角加速度

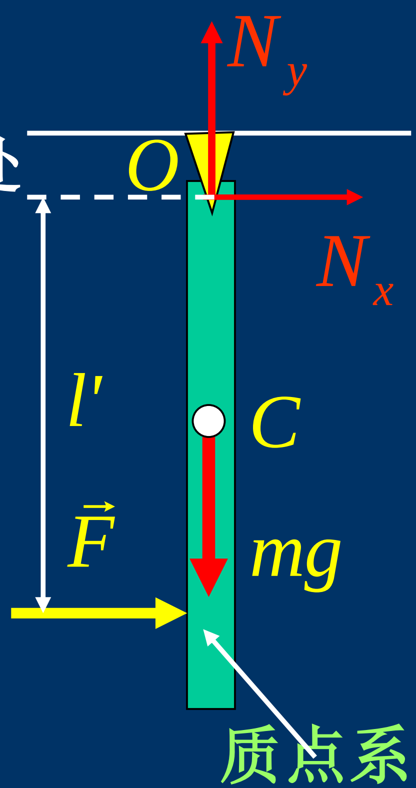
解 (1) $Fr = J\beta \qquad \beta = \dfrac{Fr}{J} = \dfrac{98\times 0.2}{0.5} = 39.2\ \mathrm{rad/s^2}$

(2)
$$\left.\begin{aligned} mg - T &= ma \\ Tr &= J\beta \\ a &= r\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta = \frac{mgr}{J + mr^2}$$

$$= \frac{98\times 0.2}{0.5 + 10\times 0.2^2} = 21.8\ \mathrm{rad/s^2}$$

两者区别

例 一个刚体系统，如图所示，已知，转动惯量 $J=\dfrac{1}{3}ml^2$，现用一水平冲力作用于距轴为 l' 处



求 轴对棒的作用力(也称轴反力)。

解 设轴对棒的作用力为 N， $\longrightarrow$ N_x, N_y

由转动定律 $\quad Fl' = J\beta$

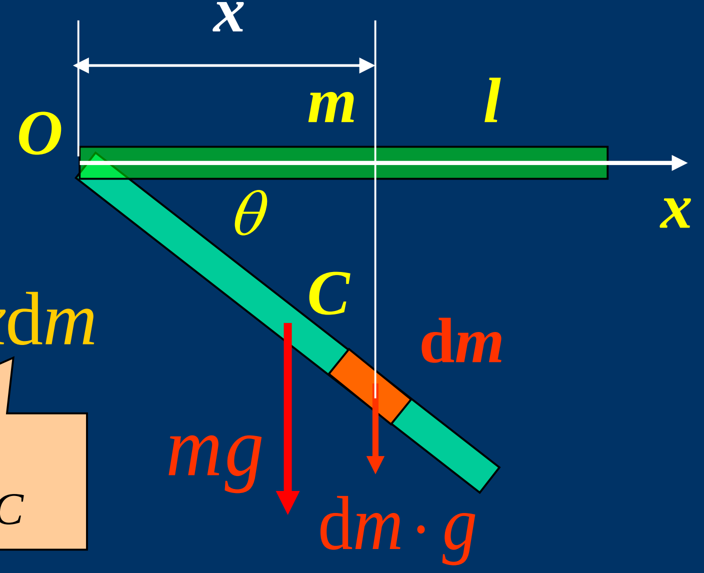
由质心运动定理
$$\begin{cases} F + N_x = ma_{cx} = m\dfrac{l}{2}\beta \\ N_y - mg = ma_{cy} = m\dfrac{l}{2}\omega^2 = 0 \end{cases}$$

打击中心

$$\begin{cases} N_x = \dfrac{ml}{2}\dfrac{Fl'}{J} - F = F\left(\dfrac{3l'}{2l} - 1\right) \longrightarrow l' = \dfrac{2}{3}l \longrightarrow N_x = 0 \\ N_y = mg \end{cases}$$

- 质心运动定理与转动定律联用

例　一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置



求　它由此下摆 θ 角时的 ω

解　取一质元　$M = \int x \mathrm{d}m \cdot g = g\int x \mathrm{d}m$

$$\int x\mathrm{d}m = m x_C$$

$$M = mgx_C$$

$$M = \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

由转动定律

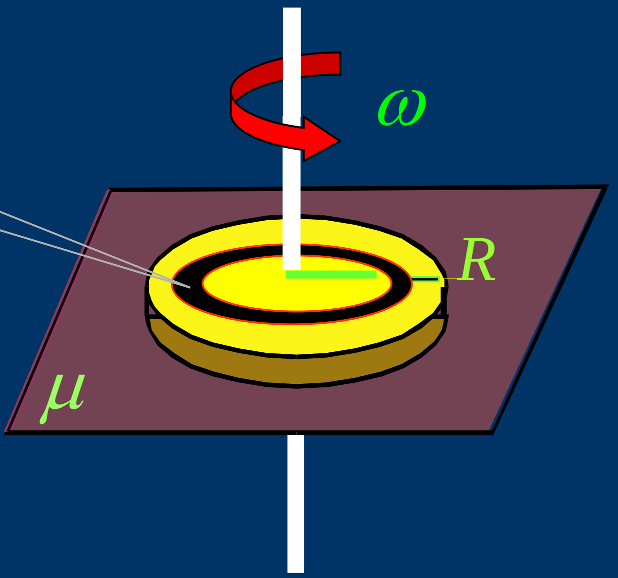
$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{1}{2}mgl\cos\theta\,\frac{3}{ml^2} = \frac{3g\cos\theta}{2l} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta}\frac{3g\cos\theta}{2l}\mathrm{d}\theta \longrightarrow \omega^2 = \frac{3g\sin\theta}{l}$$

例 圆盘以 ω_0 在桌面上转动, 受摩擦力而静止

求 到圆盘静止所需时间

解 取一质元 $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \boxed{\sigma \cdot 2\pi\, r\mathrm{d}r}$



$$\mathrm{d}M = r\mathrm{d}f = r \cdot \mu g \mathrm{d}m$$

摩擦力矩 $$M = \int_0^R \mathrm{d}M = \frac{2}{3}\mu m g R$$

由转动定律 $$M = -J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \frac{2}{3}\mu m g R = -\frac{1}{2} m R^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

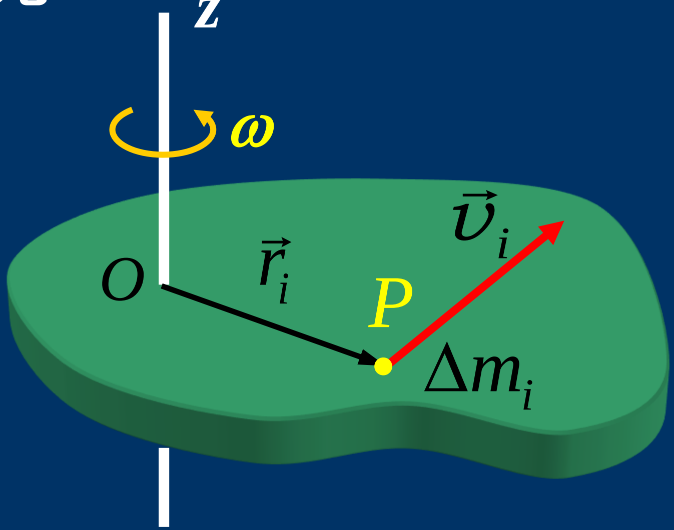
$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{\omega_0}^0 \frac{3R}{4\mu g}\mathrm{d}\omega \longrightarrow t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

§ 6.2 绕定轴转动刚体的动能 动能定理

一. 转动动能

设系统包括有 N 个质量元

$$\begin{cases} \Delta m_1, \Delta m_2, \ldots\ldots, \Delta m_i, \ldots\ldots, \Delta m_N \\ \vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots\ldots \vec{r}_i, \ldots\ldots \vec{r}_N \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots, \vec{v}_i, \ldots\ldots \vec{v}_N \end{cases}$$



取 Δm_i ,其动能为

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

各质量元速度不同，但角速度相同

刚体的总动能

$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$$

结论 绕定轴转动刚体的动能等于刚体对转轴的转动惯量与其角速度平方乘积的一半

二. 力矩的功

力的累积过程——力矩的空间累积效应

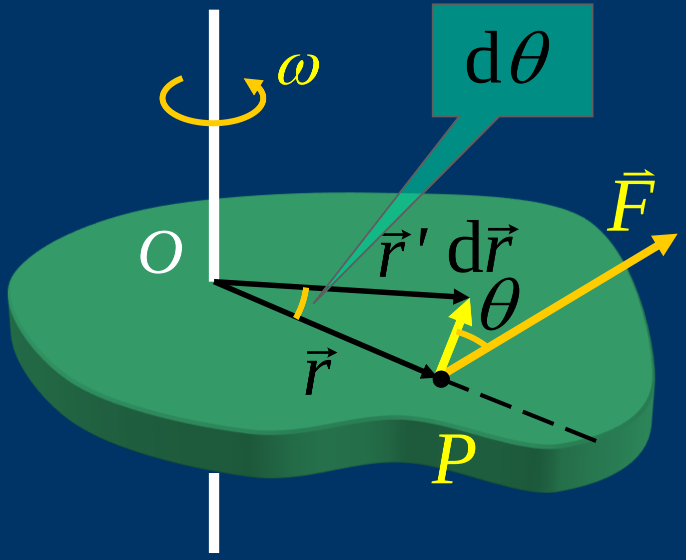
- 功的定义

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$

$$= Fr\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= F_\tau r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= M\mathrm{d}\theta$$



力矩作功的微分形式

- 对一有限过程

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta \text{ (积分形式)} \xrightarrow{\text{若 } M = C} A = M(\theta_2 - \theta_1)$$

讨论

(1) 合力矩的功 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sum_i M_i \mathrm{d}\theta=\sum_i\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_i\mathrm{d}\theta=\sum_i A_i$

(2) 力矩的功就是力的功。

(3) 内力矩作功之和为零。

三. 转动动能定理 —— 力矩功的效果

$$\mathrm{d}A=M\mathrm{d}\theta=(J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}\theta=J\omega\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2)$$

对于一有限过程

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}A=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2)=\frac{1}{2}J\omega_2{}^2-\frac{1}{2}J\omega_1{}^2=\Delta E_k$$

绕定轴转动刚体在任一过程中动能的增量，等于在该过程中作用在刚体上所有外力所作功的总和。这就是绕定轴转动刚体的——动能定理

- 刚体的机械能

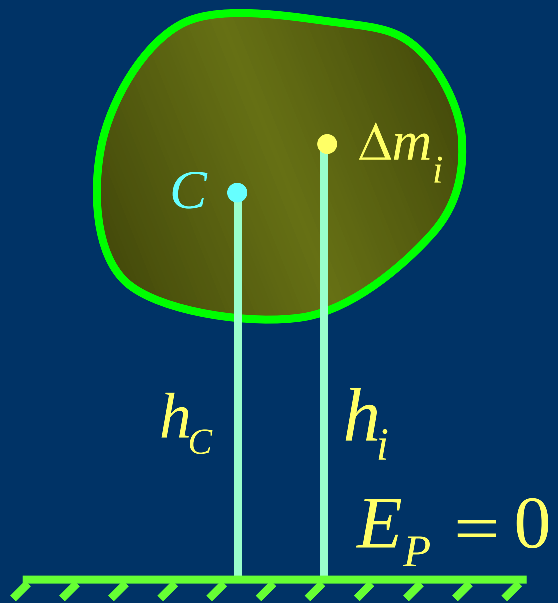
$$E = E_K + E_P$$

刚体重力势能

$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i$$

$$= mg\frac{\sum \Delta m_i h_i}{m} = mgh_C$$

质心的势能



刚 体 的 机械能

$$\boxed{E = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_C}$$

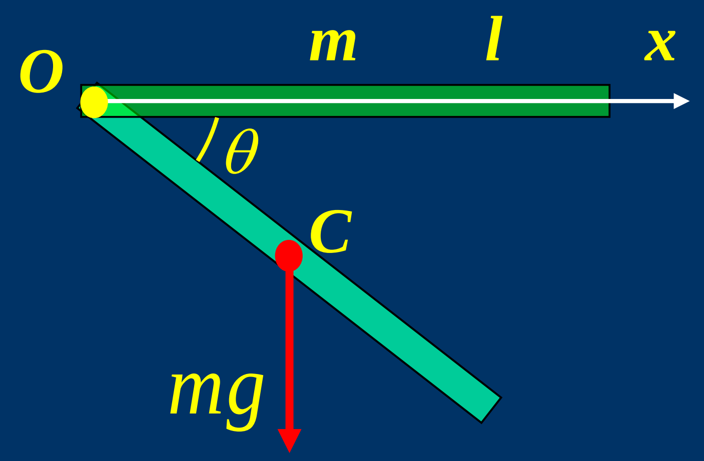
- 刚体的机械能守恒

$$\boxed{\frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_C = C}$$

对于包括刚体的系统，功能原理和机械能守恒定律仍成立

例 一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置

求 它由此下摆 θ 角时的 ω



解 $$M=\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

由动能定理

$$A=\int_0^\theta M\mathrm{d}\theta=\int_0^\theta\frac{l}{2}mg\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

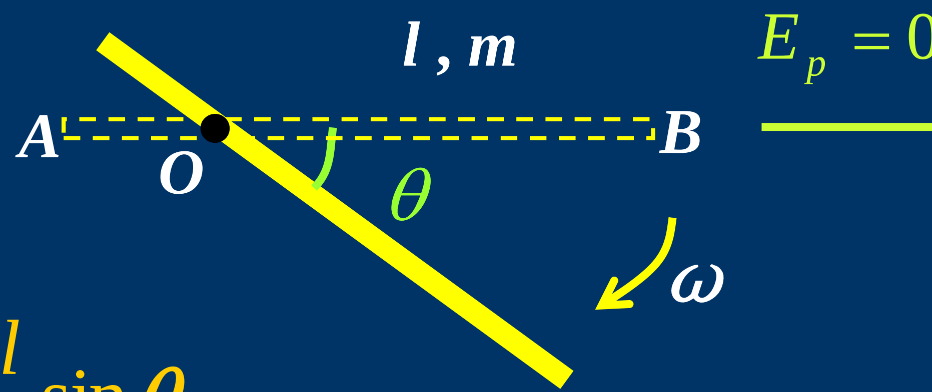
$$=\frac{lmg}{2}\sin\theta-0=\frac{1}{2}J\omega^2-0 \qquad J=\frac{1}{3}ml^2$$

$$\longrightarrow\ \omega^2=\frac{3g\sin\theta}{l}\ \longrightarrow\ \omega=\left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{1/2}$$

此题也可用机械能守恒定律方便求解

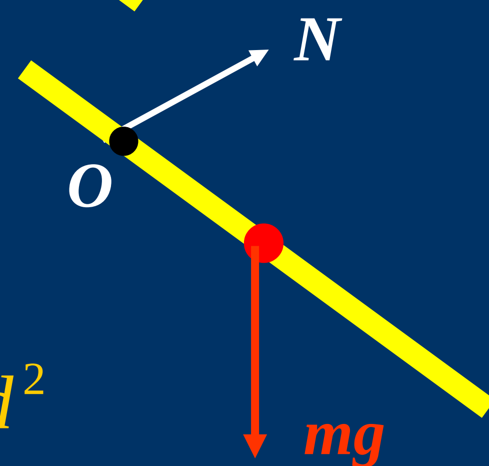
例 均匀直杆质量 m，长为l。初始水平静止，轴光滑，$AO = l/4$

求 杆下摆θ角后的角速度ω



解 选(杆+地球)系统，只有重力作功，E守恒。

$$E_{p1} = 0 \qquad E_{p2} = -mg\frac{l}{4}\sin\theta$$



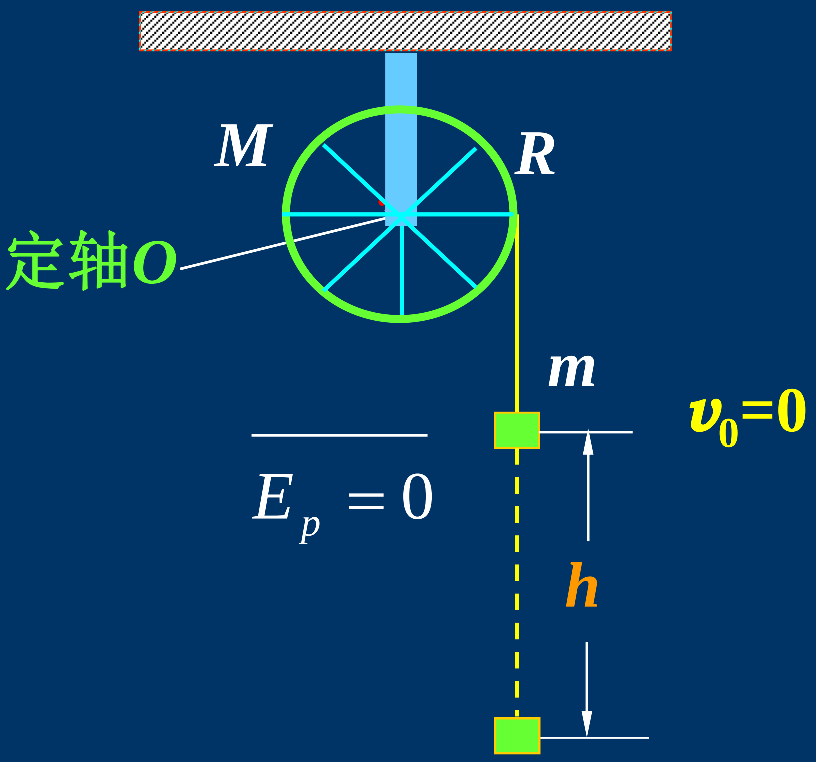
$$E_{k1} = 0, \qquad E_{k2} = \frac{1}{2}J_O\omega^2,$$

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2 - mg\frac{l}{4}\sin\theta = 0 \qquad J_O = J_C + md^2$$

$$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ml^2 \qquad \omega = 2\sqrt{\frac{6g\sin\theta}{7l}}$$

例 一匀质圆盘,忽略轴处的摩擦力, 绳子不计质量且不伸长

求 物体m下落高度h 时的速度



解 选(滑轮、物体、地球)

为研究系统，只有重力作功，

E守恒。

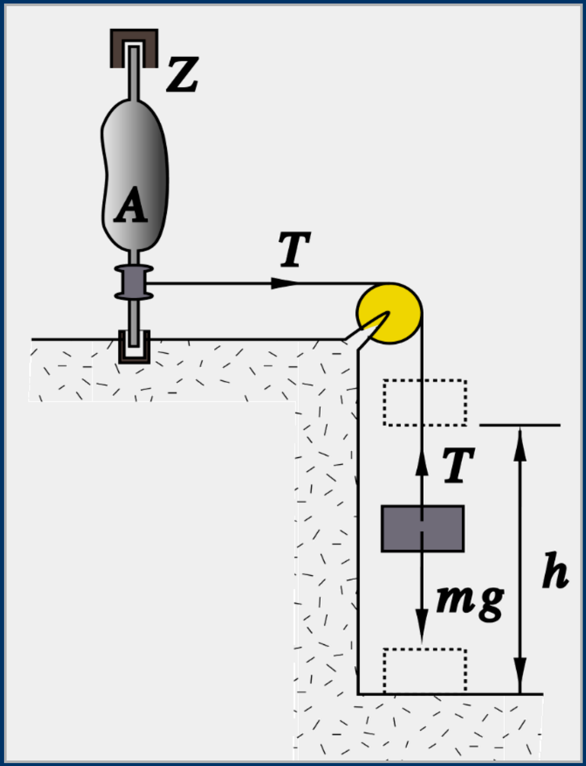
$$0=\frac{1}{2}J_O\omega^2+\frac{1}{2}mv^2-mgh$$

$$J_O=\frac{1}{2}MR^2 \qquad v=R\omega$$

$$v=\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

例 图示装置可用来测量物体的转动惯量。待测物体A装在转动架上，转轴Z上装一半径为r 的轻鼓轮，绳的一端缠绕在鼓轮上，另一端绕过定滑轮悬挂一质量为 m 的重物。重物下落时，由绳带动被测物体 A 绕 Z 轴转动。今测得重物由静止下落一段距离 h，所用时间为t，

求 物体A对Z 轴的转动惯量J_z。设绳子不可伸缩，绳子、各轮质量及轮轴处的摩擦力矩忽略不计。



解 分析(机械能) $E_{P1}=0 \quad E_{k1}=0$

$$E_{P2}=-mgh$$

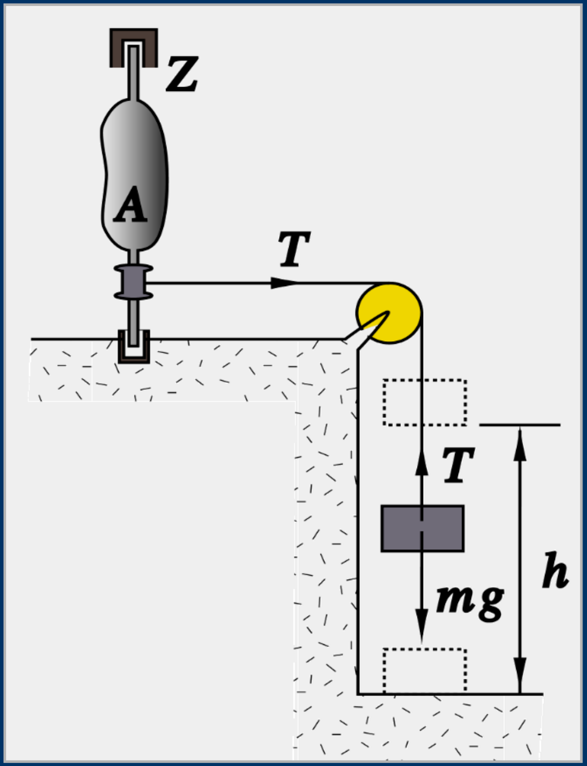
$$E_{k2}=m\upsilon^2/2+J_Z\omega^2/2$$

$$=\upsilon^2(mr^2+J_Z)/(2r^2)$$

机械能守恒 $\quad -mgh+\upsilon^2(mr^2+J_Z)/(2r^2)=0$

$$mgh=\frac{\upsilon^2}{2r^2}(mr^2+J_z)$$

$$\begin{cases} mg\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=2\upsilon\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\dfrac{1}{2r^2}(mr^2+J_z) \\ \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\upsilon,\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=a \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad a=\frac{mgr^2}{mr^2+J_z}=\text{常量}$$

$$h=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{mgr^2}{mr^2+J_z}t^2 \quad \Rightarrow \quad J_z=mr^2(\frac{gt^2}{2h}-1)$$

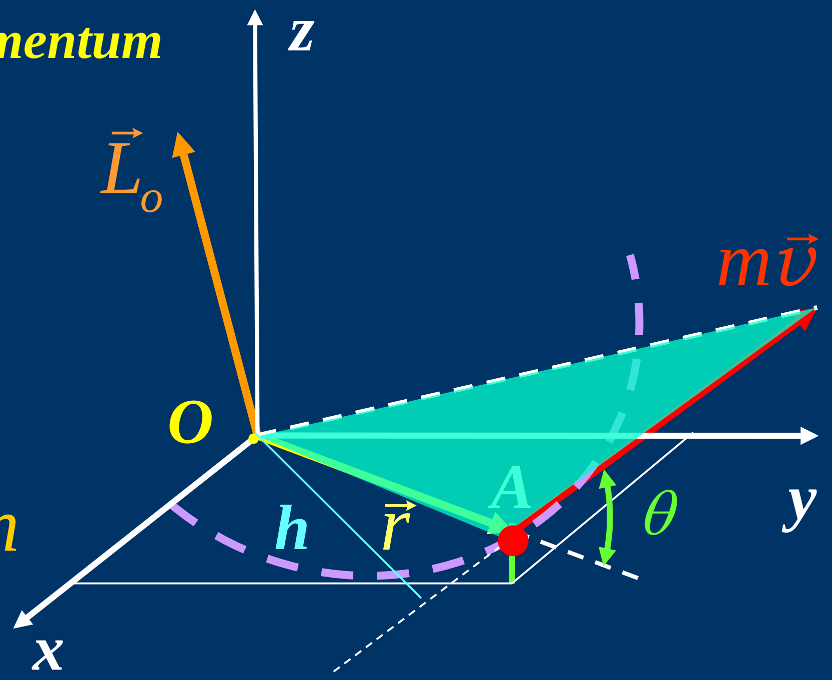
若滑轮质量不可忽略，怎样？

§ 6.3 动量矩和动量矩守恒定律 *Angular Momentum*

一. 动量矩 (角动量) *Angular Momentum*

力矩对时间的积累效应

- 质点的动量矩



$$\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$$

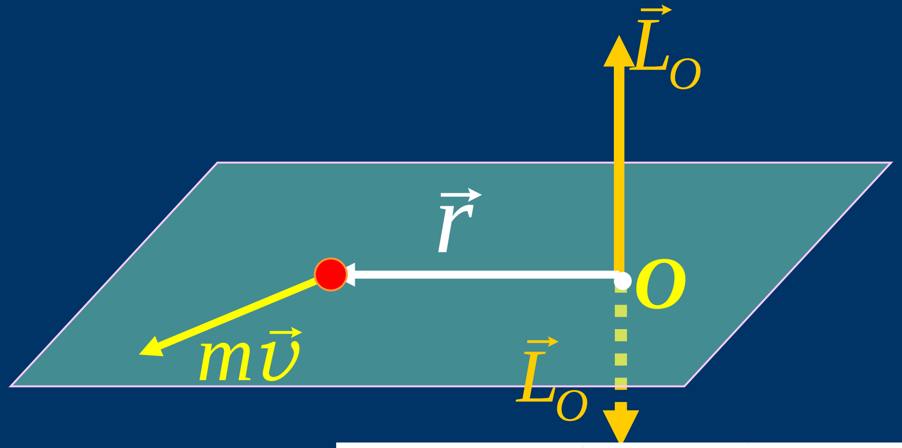
其大小 $L_o = mv\underline{r\sin\theta} = mvh$

三角形的面积的2倍

质点的动量矩的分量形式

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

当质点在平面内运动时



$\vec{L}_o$ 只有两个取向

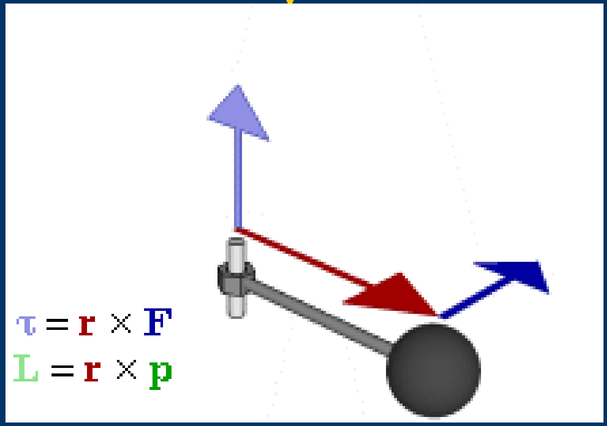
视为代数量

特例：质点作圆周运动

$$L = mrv$$

注意：区分动量与动量矩

（匀速定轴转动匀质圆盘）



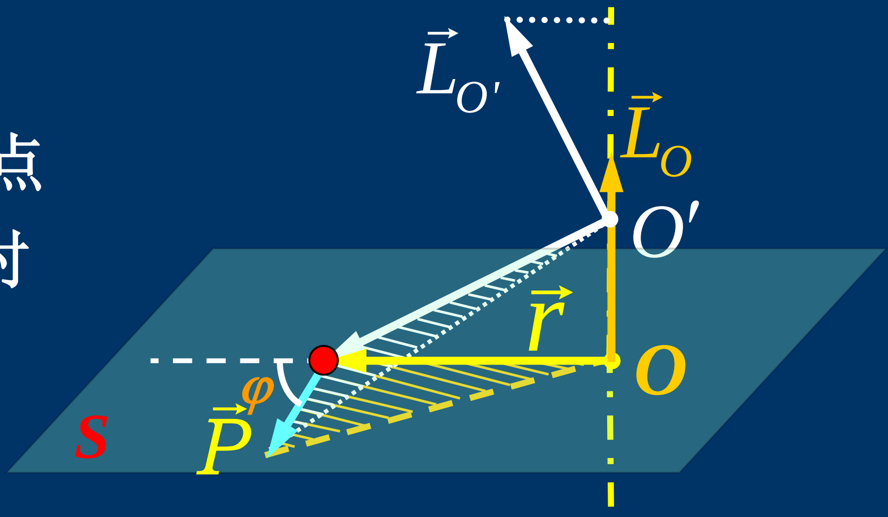
★ 说明

(1) 质点的动量矩取决于
- 质点的动量
- 位矢 — 取决于固定点的选择，动量矩随参考点而变

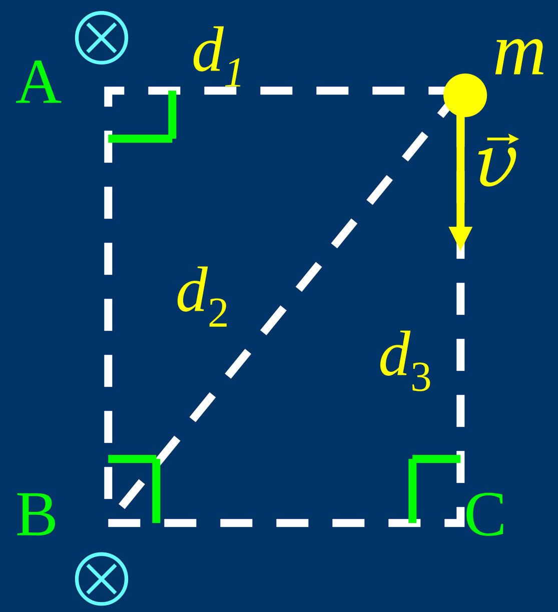
(2)当质点作平面运动时，质点对运动平面内某参考点O 的动量矩也称为质点对过O 垂直于运动平面的轴的动量矩

(3)与力矩类似

质点对某点的动量矩,在通过该点的任意轴上的投影就等于质点对该轴的动量矩



例 一质点m，速度为υ，如图所示，A、B、C 分别为三个参考点,此时m 相对三个点的距离分别为 d_1、d_2、d_3



求 此时刻质点对三个参考点的动量矩

解 $L_A = d_1 m\upsilon \quad L_B = d_1 m\upsilon \quad L_C = 0$

2. 质点的动量矩定理

$$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M} \qquad \vec{v}\times m\vec{v}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times m\vec{v}$$

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$$ (质点动量矩定理的微分形式)

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$ (质点动量矩定理的积分形式)

质点所受合力矩的冲量矩等于质点的动量矩的增量

说明

(1) 冲量矩是质点动量矩变化的原因

(2) 质点动量矩的变化是力矩对时间的积累结果

3. 质点动量矩守恒定律

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$常矢量 ——质点动量矩守恒定律

★ 讨论

(1) 质点动量矩定理适合于惯性系中一个固定参考点

(2) 守恒条件 $\vec{M}_O = 0$

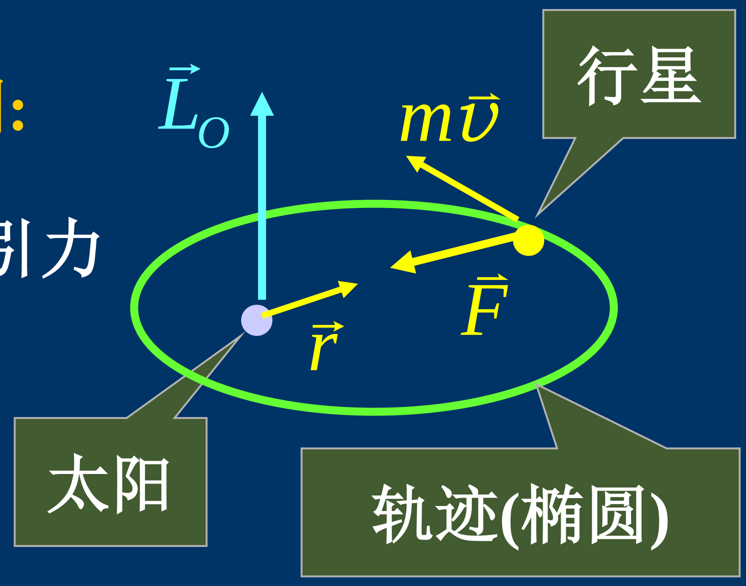
(3) 动量矩是否守恒与参考点的选择有关

(4) 常用于解决单摆运动、行星运动

(5) $\boxed{\text{开普勒第一定律}}$

质点仅受一个来自于固定点的引力或斥力 ⟶ 有心力的作用，质点将被限制在与动量矩垂直的平面内运动。

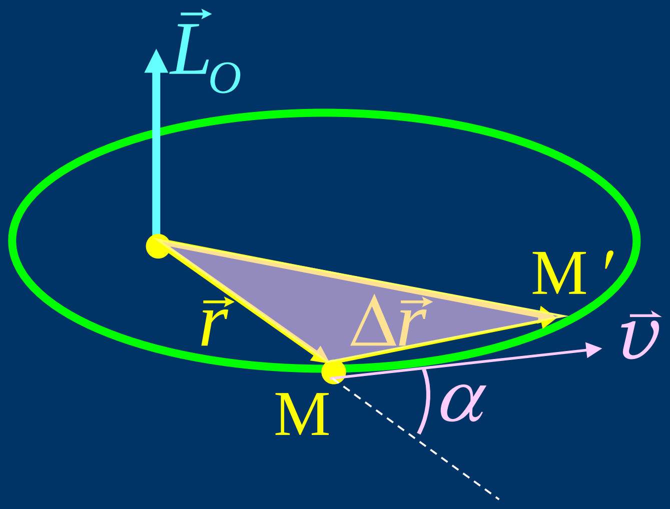
例:



(6) 开普勒第二定律

$$L = m\upsilon r\sin\alpha = m\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}r\sin\alpha$$

$$= 2m\frac{\frac{1}{2}|\Delta\vec{r}|r\sin\alpha}{\Delta t} = 2m\frac{\Delta S}{\Delta t}$$



由太阳到行星的矢径，在相同的时间内扫过相等的面积

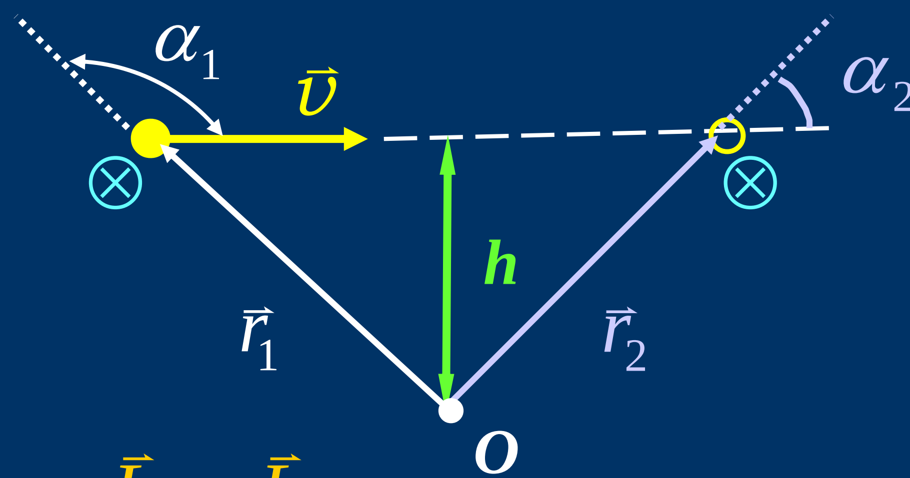
例 证明：一个做匀速直线运动的质点，对任一固定点的动量矩保持不变

证 $\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{\upsilon}$

$$|\vec{L}_1| = m\upsilon r_1\sin\alpha_1 = m\upsilon h$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times m\vec{\upsilon}$$

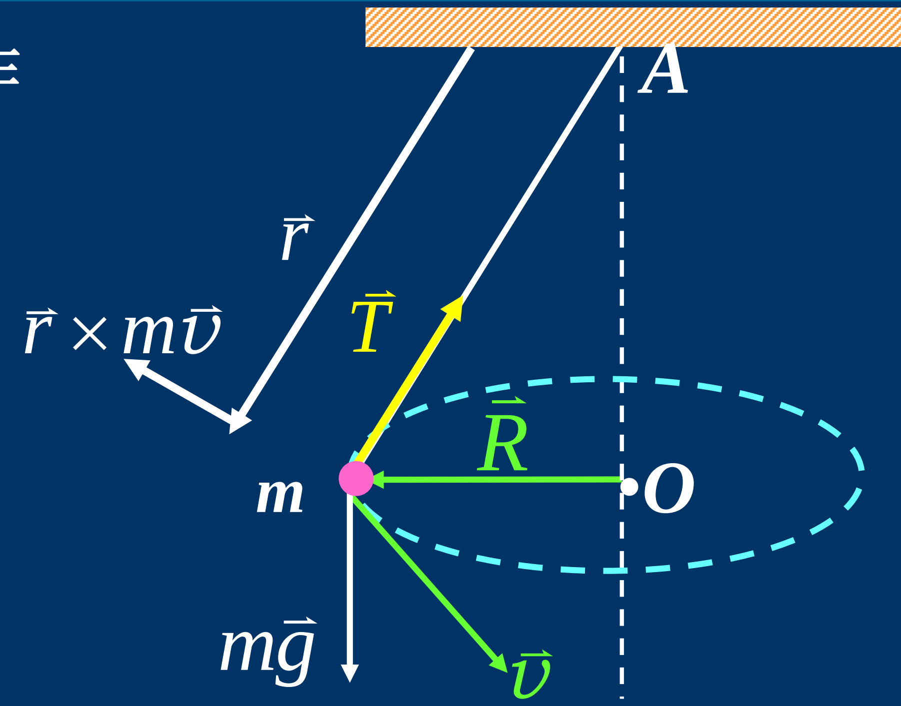
$$|\vec{L}_2| = m\upsilon r_2\sin\alpha_2 = m\upsilon h$$



$$\vec{L}_2 = \vec{L}_1$$

例　一质量为m的质点以速率v作圆锥摆运动。

求　分别以圆心O 和悬挂点A为参考点，分析张力力矩、重力力矩、合力力矩和质点的动量矩



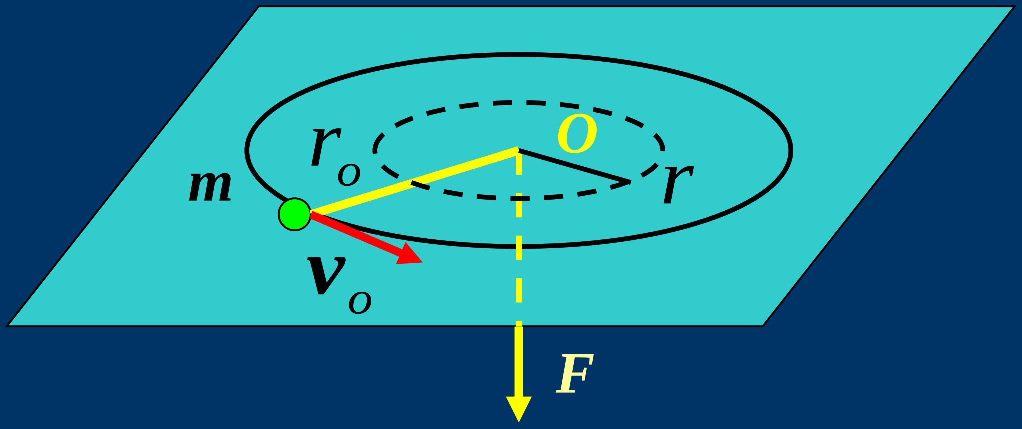
解

	张力力矩	重力力矩	合力力矩	动量矩
O	$\vec R\times\vec T$ 方向 $-\vec v$	$\vec R\times m\vec g$ $\vec v$	$\vec R\times(m\vec g+\vec T)=0$	$\vec R\times m\vec v=C$
A	$\vec r\times\vec T=0$	$\vec r\times m\vec g$ $\vec v$	$\vec r\times(m\vec g+\vec T)$ $=\vec r\times m\vec g$ $\vec v$	$\vec r\times m\vec v$

思考　参考点选取——合力矩与动量矩的变化

例　质点绕定点运动，如图：

缓慢拉绳，求 ***F*** *所做的功？*



解　作用在质点上的力对 ***O*** 点的力矩为零

➡ *质点的动量矩守恒*

$$L_0 = mv_0 r_0 = L = mvr \Rightarrow v = v_0\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

$$r_0 > r \Rightarrow v > v_0$$

外力作功

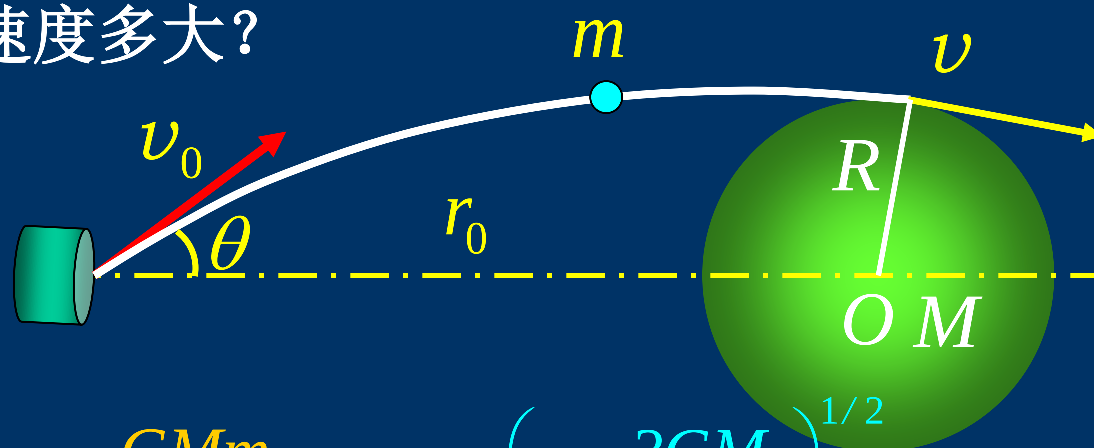
$$A = \Delta E_K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^{\,2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\,2} = \frac{1}{2}mv_0^{\,2}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right]$$

结论：中心力场中，力矩恒为零。故质点对力心的动量矩守恒！

例 发射一宇宙飞船去考察一 质量为 M 、半径为 R 的行星，当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时，以速度 v_0 发射一质量为 m 的仪器。要使该仪器恰好掠过行星表面

求 θ 角及着陆滑行的初速度多大？



解 引力场(有心力)

系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$v = v_0\left(1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2}\right)^{1/2}$$

质点的对 O 点的动量矩守恒 ⟶ $mv_0r_0\sin\theta = mvR$

$$v = \frac{v_0r_0\sin\theta}{R} = 4v_0\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2}\right)^{1/2}$$

三. 刚体定轴转动的动量矩定理和动量矩守恒定律

- 刚体定轴转动的动量矩

刚体上任一质点对 Z 轴的动量矩都具有相同的方向

$$L_Z = \sum_i \Delta m_i \upsilon_i r_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = J_Z \omega$$

$L_Z = J_Z \omega$ 所有质元的动量矩之和

- 刚体定轴转动的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}L_Z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_Z \omega) \xrightarrow{\text{转动定律}} \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_Z \omega) = M_Z}$$

$$\boxed{(J_Z \omega)_t - (J_Z \omega)_{t_0} = \int_{t_0}^{t} M_Z \mathrm{d}t}$$ 动量矩定理

当 $M_z = 0 \longrightarrow \boxed{L_z = J\omega = C}$ 定轴的动量矩守恒定律

★ 注意

比较

$$M_Z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J_Z\omega) \longrightarrow F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})$$

$$\int_{t_0}^{t} M_Z \mathrm{d}t = (J_Z\omega)_t - (J_Z\omega)_{t_0} \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = m\upsilon_2 - m\upsilon_1$$

$$M_z = 0 \longrightarrow \vec{F} = 0$$

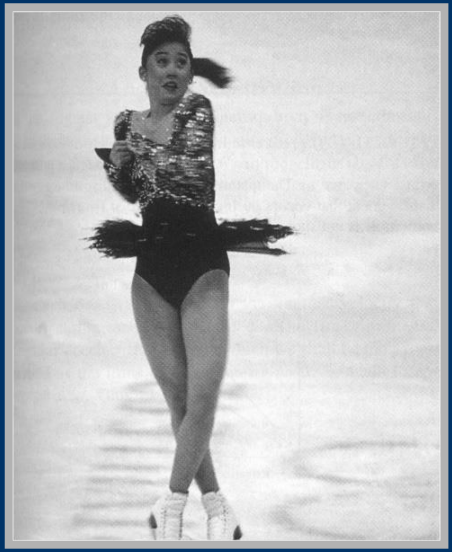
说明

(1) 变形体绕某轴转动时，若其上各点(质元)转动的角速度相同，则变形体对该轴的动量矩

$$\sum m_k r_k^2 \omega = J(t)\omega$$

当变形体所受合外力矩为零时，变形体的动量矩也守恒

$$J(t)\omega = \text{常量} \longrightarrow J(t)\nearrow \quad \omega\searrow \qquad J(t)\searrow \quad \omega\nearrow$$

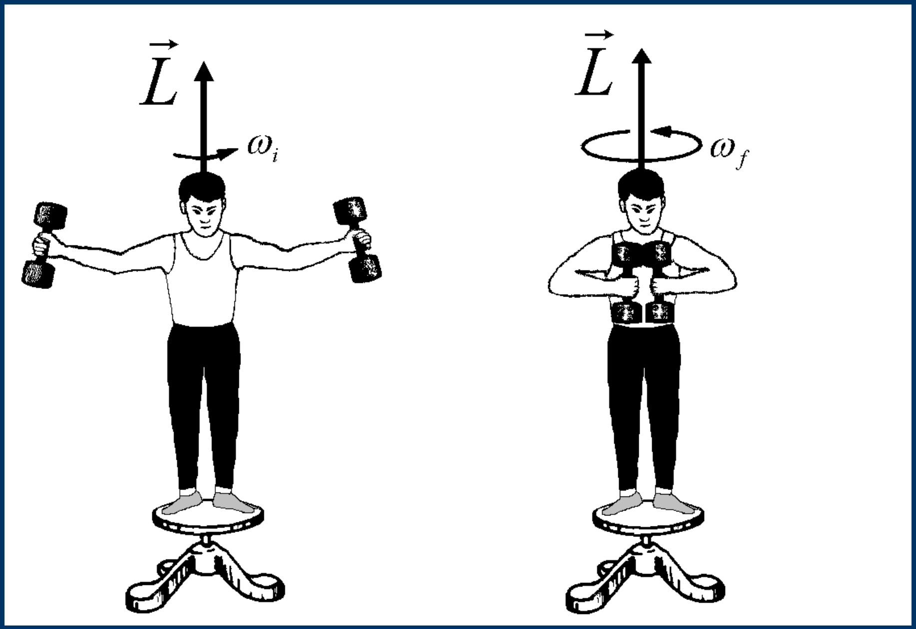


(2) 绕定轴转动的物体系

当 $M_z = 0$ ⟶ $\boxed{L_z = J\omega = C}$

如：人站在转台上，用手拨动轮子，则转台会向相反的方向转动

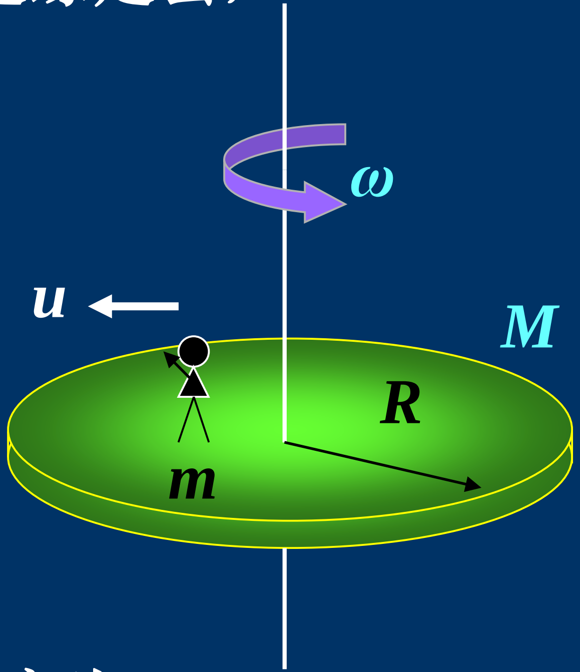
因为：内力矩只能改变物体系内各物体的动量矩，但不能改变物体的总动量矩



例 有一转台，初始的角速度为ω_0　有一个人站在转台的中心，以相对于转台的恒定速度u沿半径向边缘走去，

求 人走了t时间后，转台转过的角度

解 选(人和转台)为系统



人和转台组成的系统不受对竖直轴的外力矩

因此，系统对竖直轴的动量矩守恒

在时间t内，　人走到距转台中心的距离为　$r = ut$

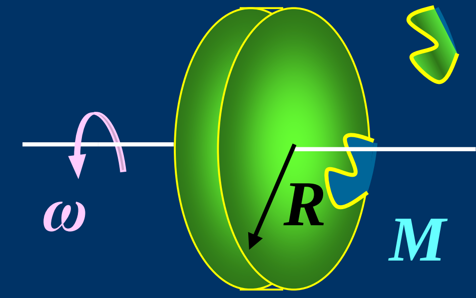
$$\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)\omega_0 = \left(\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{\omega_0}{1+\dfrac{2mu^2t^2}{MR^2}}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \theta = \int_0^\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t = \frac{R\omega_0}{u\sqrt{2m/M}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{ut\sqrt{2m/M}}{R}\right)$$

例 一飞轮如图，某一瞬时有一质量为m的碎片从飞轮的边缘飞出，且速度方向正好竖直向上。忽略重力矩的影响

求 (1) 碎片能上升的最大高度

(2) 余下部分的角速度，角动量，转动动能



解 (1) 碎片离盘时的初速度为 $v_0 = R\omega$

所以碎片能上升的最大高度为 $h_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2g} = \dfrac{R^2\omega^2}{2g}$

(2) 由碎片和余下部分组成的系统, 在碎片离盘的前后不受对转轴的外力矩的作用　系统对转轴的角动量守恒

$$\frac{1}{2}MR^2\cdot\omega = mv_0R + \left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega' \longrightarrow \omega' = \omega$$

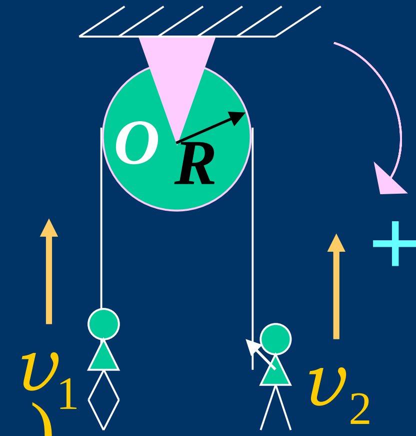
角动量为 $\left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega = \left(\frac{1}{2}M - m\right)R^2\omega$

转动动能为 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}(M - 2m)R^2\omega^2$

例 如图，两个质量均为m的小孩，各抓住跨过滑轮绳子的两端。一个用力向上爬，另一个则抓住绳子不动。若滑轮的质量和轴上的摩擦力都可忽略，开始时两小孩都不动

求 (1) 哪一个小孩先到达滑轮

(2) 若两个小孩质量不等时情况如何



解 (1) 以小孩、滑轮作为系统

则系统对O点的总角动量为 $L_O = mR(v_1 - v_2)$

而系统所受的外力矩只有两个小孩的重力矩，且合力矩为零

所以系统对O点的总角动量守恒　　开始时两小孩都不动

所以 $v_1 = v_2 = 0$　　$\therefore L_O = 0$

随后 $v_1 \neq 0$　$v_2 \neq 0$　但 $L_O = 0$

$\therefore v_1 = v_2$

(2) 若两个小孩质量不等 $m_1 \neq m_2$

系统所受的外力矩为 $M_O = (m_2 - m_1)gR$

系统对 O 点的总角动量为 $L_O = R(m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2)$

开始时两小孩都不动 所以 $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$ $\therefore L_O = 0$

随后 $\upsilon_1 \neq 0$ $\upsilon_2 \neq 0$ $L_o \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O = (m_2 - m_1)gR$$

若 $m_1 > m_2$ $\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} < 0 \longrightarrow m_1\upsilon_1 < m_2\upsilon_2$ $\therefore \upsilon_1 < \upsilon_2$

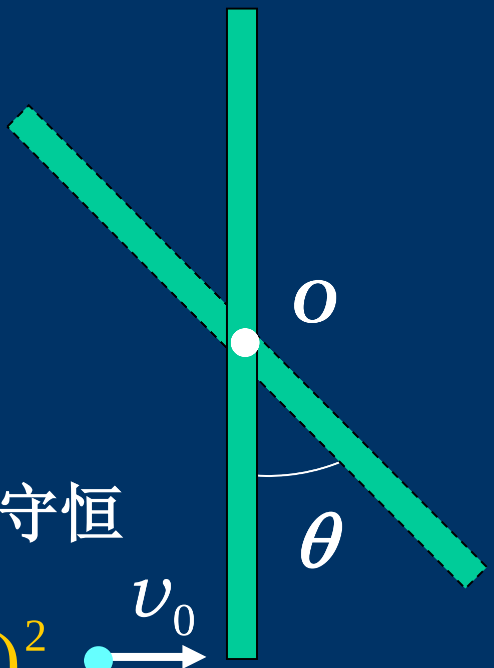
若 $m_1 < m_2$ $\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} > 0 \longrightarrow m_1\upsilon_1 > m_2\upsilon_2$ $\therefore \upsilon_1 > \upsilon_2$

总之，在任何情况下总是体轻的小孩上升的快，先到达滑轮。

例 一质量为M，长为l 的均匀细直杆，可绕通过其中心O且与杆垂直的光滑水平固定轴，在竖直平面内转动。质量为m的子弹沿水平方向射入杆的下端且留在杆内，并使杆摆动，若杆摆动的最大偏角为θ

求 (1) 子弹入射前的速度v_0

(2) 最大偏角θ时，杆转动的角加速度



解 (1) 选(子弹+杆)为研究对象

该系统在子弹入射前后对O点的角动量守恒

$$mv_0\cdot\tfrac{1}{2}l = J\omega \qquad J=\frac{1}{12}Ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

杆上摆的过程中，仅有重力矩作功，机械能守恒

$$\tfrac{1}{2}J\omega^2=\tfrac{1}{2}mgl(1-\cos\theta)$$

$$v_0=\sqrt{\frac{(M+3m)gl(1-\cos\theta)}{3m}}$$

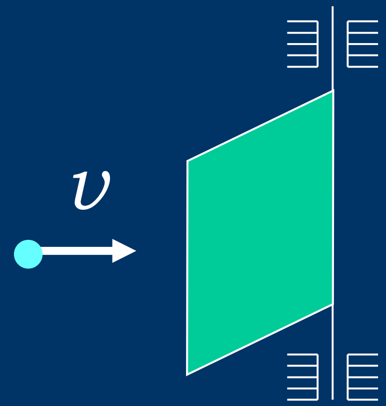
(2) $M = J\beta$

$$-mg\cdot\frac{1}{2}l\sin\theta = J\beta$$

$$\beta=\frac{6mg\sin\theta}{(M+3m)l}$$

例 如图所示，一质量为M的均质方形薄板，其边长为L，铅直放置着，它可以自由地绕其一固定边转动，转动惯量为 $(1/3)ML^2$ 若有一质量为m，速度为$\boldsymbol{v}$的小球垂直于板面碰在板的边缘上。设碰撞是完全弹性的。

求 碰撞后，小球的速度和板转动的角速度



解 选(小球+板)为研究对象

该系统在碰撞前后对轴的角动量守恒

$$m v \cdot L = m v' \cdot L + J\omega$$

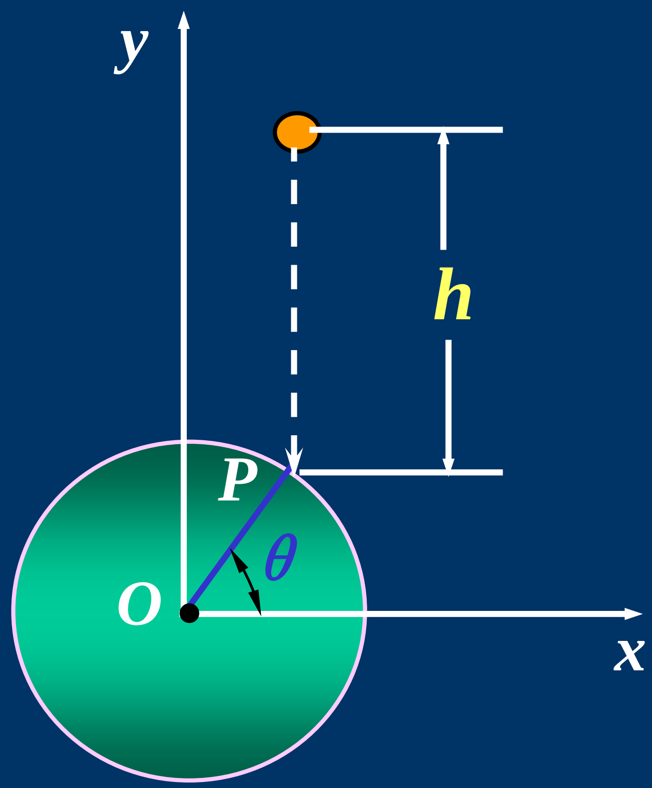
碰撞是完全弹性的，机械能守恒 $\frac{1}{2}m v^2 = \frac{1}{2}m v'^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

$$\omega = \frac{6mv}{L(M+3m)} \qquad v' = \frac{v(3m-M)}{(M+3m)}$$

例 一质量为$2m$，半径为R的均质圆盘，可绕通过其中心O且与盘面垂直的光滑水平固定轴，在竖直平面内转动。有一质量为m的粘土块从h的高度自由落下到图示P点，且$\theta=60^0$

求 (1) 碰撞后瞬刻盘的ω_0

(2) P转到x轴时盘的 β，ω



解 (1) $mgh=\frac{1}{2}mv^2 \qquad v=\sqrt{2gh}$

选(粘土块+圆盘)为研究对象

作用时间短，可以忽略重力的矩

该系统对O点的角动量守恒

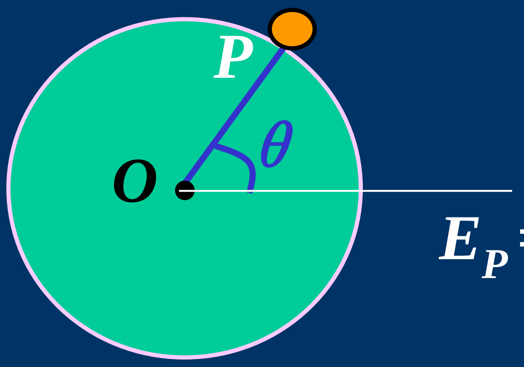
$$mvR\cos\theta=J\omega_0$$

$$J=\frac{1}{2}(2m)R^2+mR^2=2mR^2$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta$$

(2) (m + 圆盘+地球)为系统，只有重力作功，机械能守恒

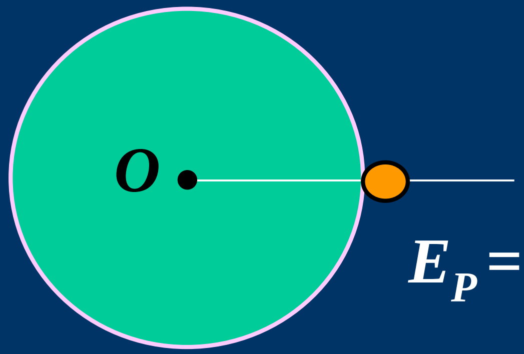
$$mgR\sin\theta + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$



$$\omega = \sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta + \frac{g}{R}\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{2R}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}(h + 4\sqrt{3}R)}$$

当P点转到x轴时，(m + 圆盘)系统所受力矩仅为 mgR

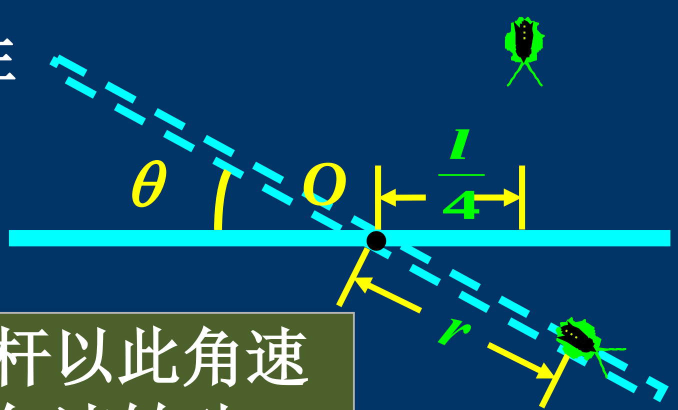


$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{mgR}{2mR^2} = \frac{g}{2R}$$

例 一长为 l 的匀质细杆，可绕通过中心的固定水平轴在铅垂面内自由转动，开始时杆静止于水平位置。一质量与杆相同的昆虫以速度 v_0 垂直落到距点 O $l/4$ 处的杆上，昆虫落下后立即向杆的端点爬行，如图所示。若要使杆以匀角速度转动

求 昆虫沿杆爬行的速度。

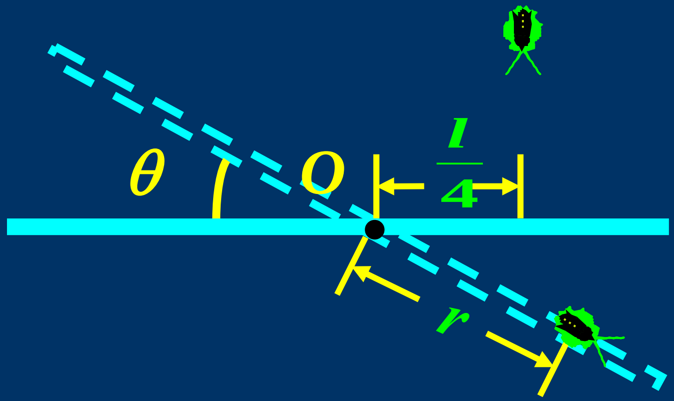
解 昆虫落到杆上的过程为完全非弹性碰撞，对于昆虫和杆构成的系统，作用时间短，可以忽略重力的矩合外力矩为零，动量矩守恒



此后杆以此角速度作匀速转动。

$$mv_0\frac{l}{4}=[\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2]\omega \longrightarrow \omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

转动定律 $M_z = \dfrac{\mathrm{d}(J_z\omega)}{\mathrm{d}t}$



使杆以匀角速度转动

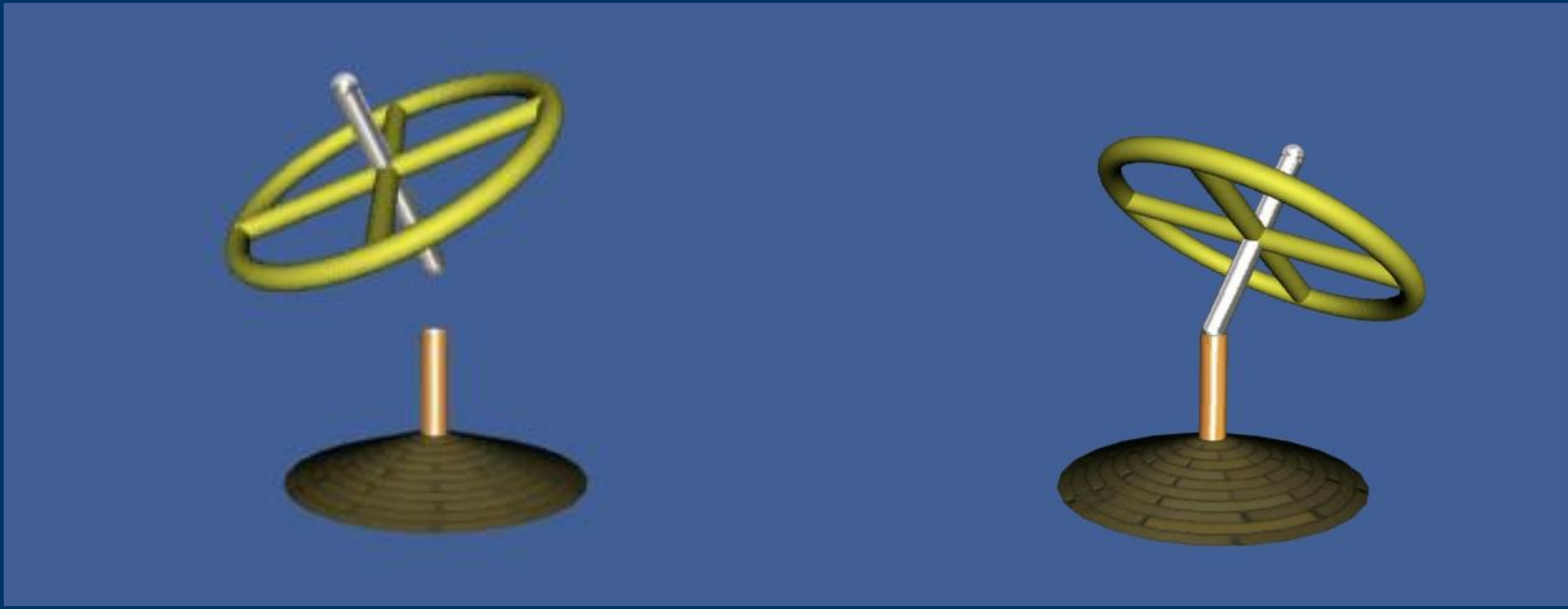
$$M_z = \omega \frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t}$$

其中 $M_Z = mgr\cos\theta$ $J_z = (\frac{1}{12}ml^2 + mr^2)$

代入得 $mgr\cos\theta = 2m\omega r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{g\cos\theta}{2\omega} = \frac{g}{2\omega}\cos\omega t = \frac{7lg}{24\upsilon_0}\cos(\frac{12}{7l}\upsilon_0 t)$$

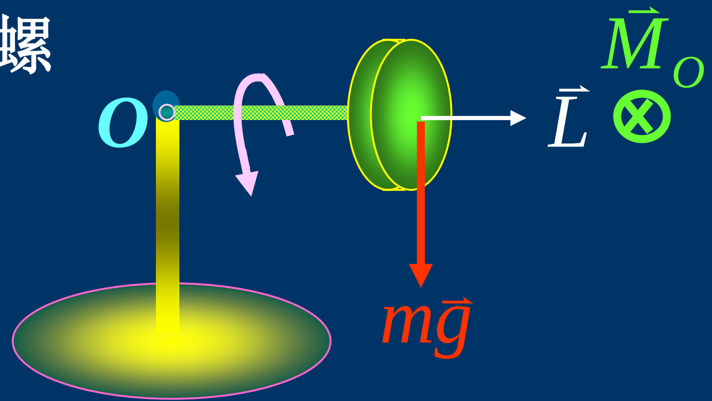
不倒的陀螺

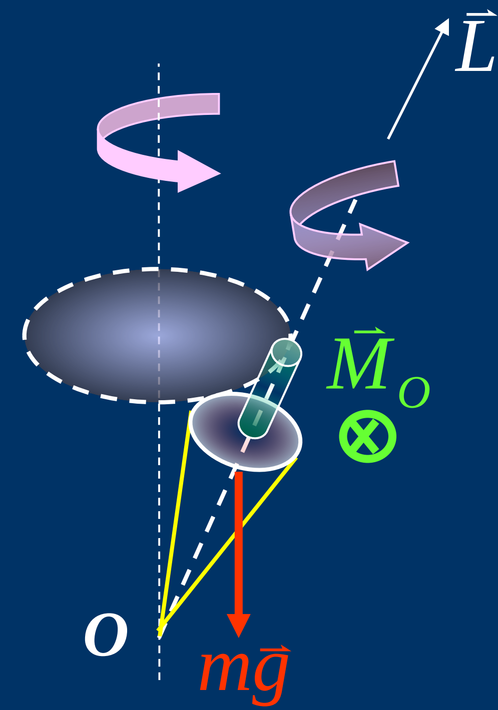


旋进(进动，precession)

- 定义：高速旋转的物体其自转轴在空间转动的现象。

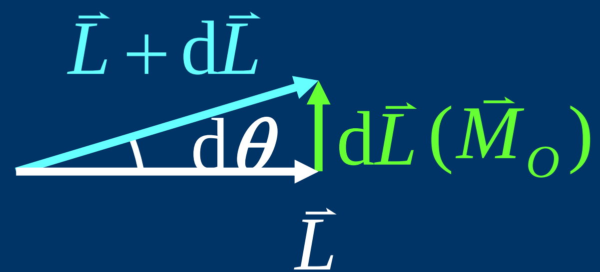
  例：回转仪、陀螺





- 为什么有此现象？ 分析如下：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M} \Longrightarrow \vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$$



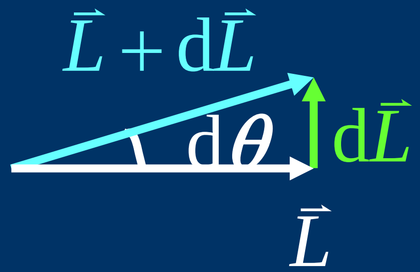
使得下一时刻的动量矩的矢量也在水平面内，所以自转轴就不会向下倾斜了。而是向后偏转了，继续不断的偏转就成形成了自转轴的转动。

★ **结论**

进动现象正是自旋的物体在外力矩的作用下沿外力矩的方向改变其动量矩矢量的结果

- 进动的角速度

dt时间内　　动量矩的增量为 $\mathrm{d}\vec{L}$



$\because \mathrm{d}\vec{L} << \vec{L}$　　$\therefore \mathrm{d}L = L\mathrm{d}\theta = J\omega\mathrm{d}\theta$

由动量矩定理　$\mathrm{d}L = M\mathrm{d}t \longrightarrow J\omega\mathrm{d}\theta = M\mathrm{d}t$

而 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 即为进动的角速度 $\boxed{\omega_P = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{M}{J\omega}}$

外力矩

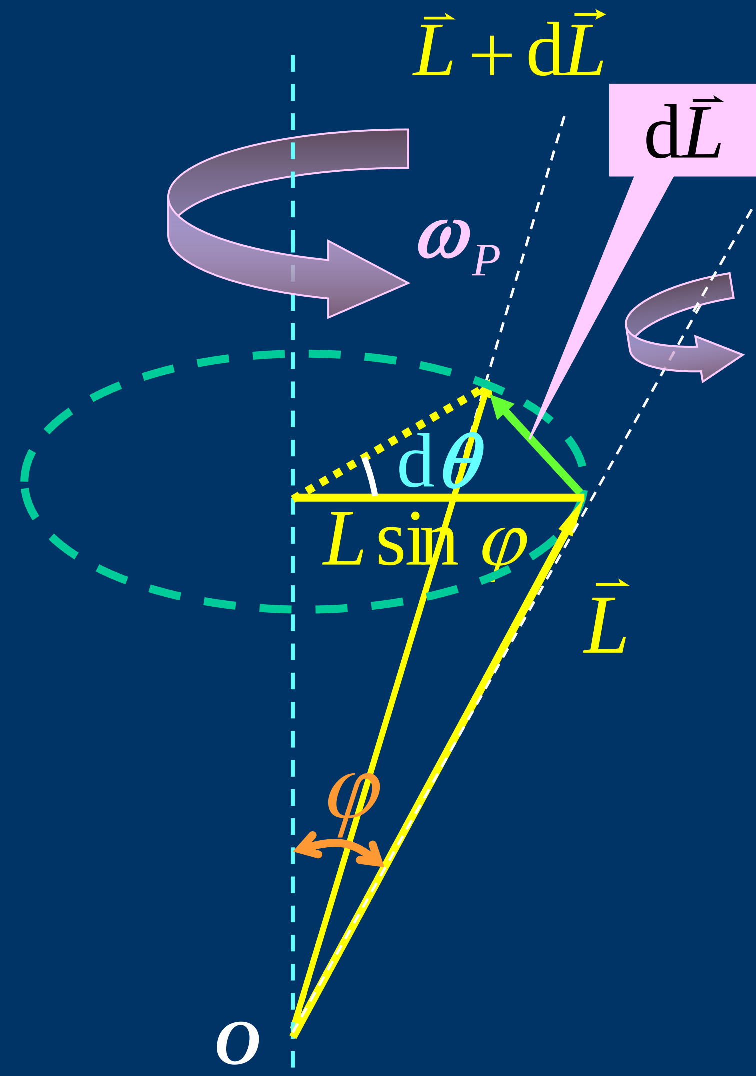
自转动量矩

陀螺的进动的角速度

$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 即为进动的角速度

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}L &= L\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}L &= M\mathrm{d}t \end{aligned}\right\}$$

$$L\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta = M\mathrm{d}t$$



$$\boxed{\omega_P = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L\sin\varphi}}$$

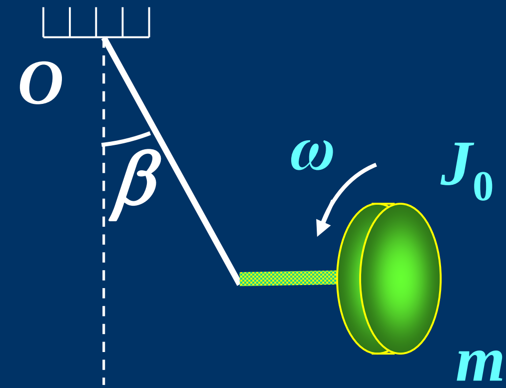
★ 说明

(1) 以上分析及计算是近似的　　因为未计入进动的动量矩

(2) 公式使用的前提: $\omega >> \omega_P$

例 在长为 l 的轴的一端，装上回转仪的轮子，轴的另一端吊在长为L的绳子上，当轮子绕轴快速转动时，轮将在水平面上绕过支点O的铅直轴作均匀进动

求 绳与铅直线所成的小角度β



解

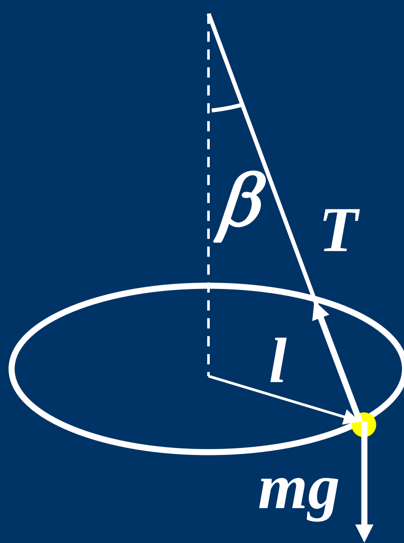
- 轮子在自身重力矩的作用下，作匀速进动

进动的角速度为 $\omega_P = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{M}{L}$

$$M = mgl \quad L = J_0\omega \qquad \omega_P = \frac{mgl}{J_0\omega}$$

- 质心作半径近似为l 的圆周运动

$$mg\,\mathrm{tg}\beta = m\omega_P{}^2 l \qquad \beta = \frac{m^2 g l^3}{J_0^2\omega^2}$$



- 运动学 $\boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}$（矢量表述和初始条件）
  - 直角坐标系 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$
  - 自然坐标系 $s = s(t)$（角量与线量之间的关系）
  - $v = \dfrac{ds}{dt}\tau$ ⟹ $a = \dfrac{d^2 s}{dt^2}\tau + \dfrac{v^2}{\rho}n$
  - 相对运动 $\boldsymbol{v}_{绝} = \boldsymbol{v}_{相} + \boldsymbol{v}_{牵}$ （画出矢量图）
- 运动学中需注意的几个问题：
  - 建立运动学方程和初始条件的确立
  - 根据具体问题变换变量
  - 曲率半径的求解方法
  - 直角坐标系与自然坐标系之间的互换关系

- 动力学
  - 核心 $F=\frac{dP}{dt}=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}$
    - $m=C \Rightarrow F=ma$
    - 直角系中表述
    - 自然系中表述
  - 牛顿定律的直接运用（两类问题和惯性系）

F

功和能 $A=\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$ → 保守力 → 势能

动能定理 ⟷ 机械能

动量、冲量 $\boldsymbol{I}=\int_t^{t'}\boldsymbol{F}dt=\Delta\boldsymbol{P}$ → 动量定理

- 动力学中需注意的几个问题：
  - 变力的功 （设计积分路径和初始条件）（包括功率）

$$A=\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int F_x dx+F_y dy+F_z dz=\int F\cos\theta dS$$

  - 判断力的保守性 （包括由势能求保守力的方法）
  - 质点与质点系的动量和冲量的矢量表述
  - 确定质心和质心运动定理的应用
  - 变质量问题
  - 动量和能量守恒定律的系统性和成立条件

（注意：两种守恒定律同时存在的情况）

- 刚体力学
  - 刚体运动学

刚体的平动、定轴转动和平面运动

（自由度的概念）

刚体定轴转动的描述 （相对运动问题）

$$\theta,\omega,\beta \Leftrightarrow s,v,a(a_\tau,a_n)$$

- 刚体动力学
  - 核心 $M = J\dfrac{d\omega}{dt}$ ⇒
    - 转动定律的直接运用
    - （会计算简单刚体的转动惯量）
  - 力矩的功 $A = \int_1^2 M d\theta = \Delta E_k$ 转动动能
- 动量矩
  - 质点动量矩 $L = r \times p = r \times mv$
  - 刚体动量矩 $\vec{L} = J\vec{\omega}$

冲量矩

$$\Delta L = \int M dt$$

$$M = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{M} = 0$$ 动量矩守恒定律

- 刚体力学中需注意的几个问题：
  - 力矩、动量矩、冲量矩的矢量性
  - 会计算简单的转动惯量和转动惯量的可加性 （平行轴定理）
  - 变力矩的确定，转动定律与牛顿运动定律并用的问题
  - 刚体的机械能和机械能守恒关系

    （仅考虑在重力场中的情况）

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_C = C$$

  - 质点系的动量矩守恒和刚体的动量矩守恒关系

$$\Delta L = 0 \begin{cases} \sum r_i \times m_i v_i = C \\ \sum J_i \omega_i = C \end{cases}$$

质点与刚体结合的问题

（注意三个守恒定律成立的条件）