试题一

课程名称： 自动控制理论 （A/B 卷 闭卷）

三、（8 分）试建立如图 3 所示电路的动态微分方程，并求传递函数。

$\frac{R_2(1+R_1Cs)}{R_1+R_2+R_1R_2Cs}$

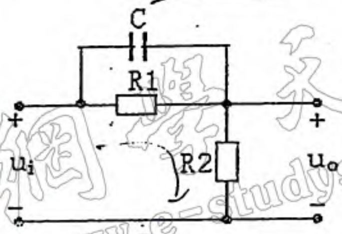


图 3

$u_o(t) = i(t)R_2(t)$
$u_i(t) = u_1(t) + u_o(t)$
$i(t) = \frac{u_1(t)}{R_1} + C\frac{du_1(t)}{dt}$

四、（共 20 分）系统结构图如图 4 所示：

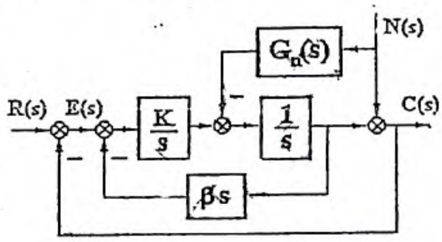


图 4

1、写出闭环传递函数 $\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$ 表达式；（4 分） $\Phi(s)=\frac{K}{s^2+K\beta s+K}$

2、要使系统满足条件：$\xi=0.707$，$\omega_n=2$，试确定相应的参数 K 和 β；（4 分） $K=4$ $\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3、求此时系统的动态性能指标 $\sigma\%$，t_s；（4 分） $t_s=\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\sigma\%=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

4、$r(t)=2t$ 时，求系统由 $r(t)$ 产生的稳态误差 e_{ss}；（4 分） $e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=2\beta=\sqrt{2}$

5、确定 $G_n(s)$，使干扰 $n(t)$ 对系统输出 $c(t)$ 无影响。（4 分） $G_n(s)=s+K\beta$

五、（共 15 分）已知某单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{K_r}{s(s+3)^2}$：

1、绘制该系统以根轨迹增益 K_r 为变量的根轨迹（求出：渐近线、分离点、与虚轴的交点等）；（8 分）

2、确定使系统满足 $0<\xi<1$ 的开环增益 K 的取值范围。（7 分） $K=\frac{K_r}{9}$

六、（共 22 分）某最小相位系统的开环对数幅频特性曲线 $L_0(\omega)$ 如图 5 所示：

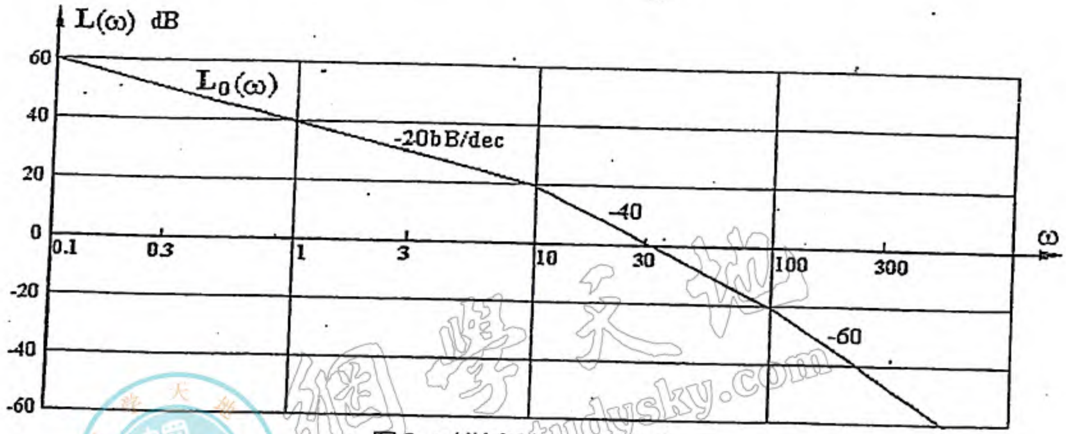


图3 对数幅频特性曲线

1、写出该系统的开环传递函数 $G_0(s)$；（8 分）

2、写出该系统的开环频率特性、开环幅频特性及开环相频特性。（3 分）

3、求系统的相角裕度 γ。（7 分）

4、若系统的稳定裕度不够大，可以采用什么措施提高系统的稳定裕度？（4 分）

试题一答案

三、（8 分）建立电路的动态微分方程，并求传递函数。

解：1、建立电路的动态微分方程

根据 KCL 有 $$\frac{u_i(t)-u_0(t)}{R_1}+C\frac{d[u_i(t)-u_0(t)]}{dt}=\frac{u_0(t)}{R_2}$$ （2 分）

即 $$R_1R_2C\frac{du_0(t)}{dt}+(R_1+R_2)u_0(t)=R_1R_2C\frac{du_i(t)}{dt}+R_2u_i(t)$$ （2 分）

2、求传递函数

对微分方程进行拉氏变换得

$$R_1R_2CsU_0(s)+(R_1+R_2)U_0(s)=R_1R_2CsU_i(s)+R_2U_i(s)$$ （2 分）

得传递函数 $$G(s)=\frac{U_0(s)}{U_i(s)}=\frac{R_1R_2Cs+R_2}{R_1R_2Cs+R_1+R_2}$$ （2 分）

四、（共 20 分）

解：1、（4 分） $$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K}{s^2}}{1+\frac{K\beta}{s}+\frac{K}{s^2}}=\frac{K}{s^2+K\beta s+K}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

2、（4分） $\begin{cases} K=\omega_n^2=2^2=4 \\ K\beta=2\xi\omega_n=2\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{cases} K=4 \\ \beta=0.707 \end{cases}$

3、（4分） $\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=4.32\%$

$$t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2.83$$

4、（4分） $G(s)=\dfrac{\dfrac{K}{s^2}}{1+\dfrac{K\beta}{s}}=\dfrac{K}{s(s+K\beta)}=\dfrac{1}{\beta s(s+1)}$ $\begin{cases} K_K=1/\beta \\ v=1 \end{cases}$

$$e_{ss}=\frac{A}{K_K}=2\beta=1.414$$

5、（4分）令：$\Phi_n(s)=\dfrac{C(s)}{N(s)}=\dfrac{\left(1+\dfrac{K\beta}{s}\right)-\dfrac{1}{s}G_n(s)}{\Delta(s)}=0$

得：$G_n(s)=s+K\beta$

五、（共15分）

1、绘制根轨迹 （8分）

(1)系统有有3个开环极点（起点）：0、-3、-3，无开环零点（有限终点）；（1分）
(2)实轴上的轨迹：$(-\infty, -3)$ 及 $(-3, 0)$；（1分）

(3) 3条渐近线： $\begin{cases} \sigma_a=\dfrac{-3-3}{3}=-2 \\ \pm 60°, \ 180° \end{cases}$ （2分）

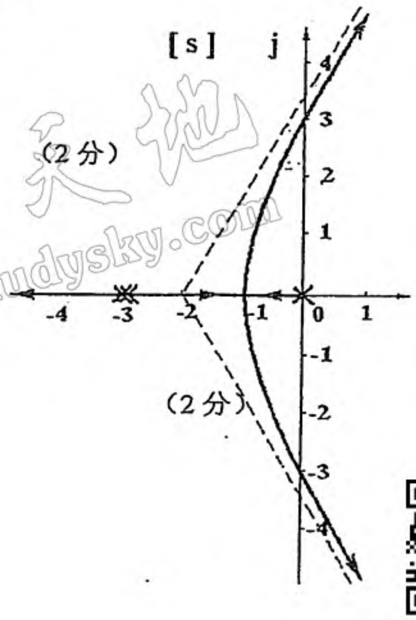
(4) 分离点： $\dfrac{1}{d}+\dfrac{2}{d+3}=0$ 得： $d=-1$ （2分）

$$K_r=|d|\cdot|d+3|^2=4$$

(5)与虚轴交点：$D(s)=s^3+6s^2+9s+K_r=0$

$\begin{cases} \mathrm{Im}[D(j\omega)]=-\omega^3+9\omega=0 \\ \mathrm{Re}[D(j\omega)]=-6\omega^2+K_r=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \omega=3 \\ K_r=54 \end{cases}$

绘制根轨迹如右图所示。



2、（7分）开环增益 K 与根轨迹增益 K_r 的关系：$G(s)=\dfrac{K_r}{s(s+3)^2}=\dfrac{\frac{K_r}{9}}{s\left[\left(\frac{s}{3}\right)^2+1\right]}$

得 $K=K_r/9$ （1分）

系统稳定时根轨迹增益 K_r 的取值范围：$K_r<54$，（2分）

系统稳定且为欠阻尼状态时根轨迹增益 K_r 的取值范围：$4<K_r<54$，（3分）

系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围：$\dfrac{4}{9}<K<6$ （1分）

六、（共22分）

解：1、从开环波特图可知，原系统具有比例环节、一个积分环节、两个惯性环节。

故其开环传函应有以下形式 $G(s)=\dfrac{K}{s(\frac{1}{\omega_1}s+1)(\frac{1}{\omega_2}s+1)}$ （2分）

由图可知：$\omega=1$ 处的纵坐标为 40dB，则 $L(1)=20\lg K=40$，得 $K=100$ （2分）

$\omega_1=10$ 和 $\omega_2=100$ （2分）

故系统的开环传函为 $G_0(s)=\dfrac{100}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{100}+1\right)}$ （2分）

2、写出该系统的开环频率特性、开环幅频特性及开环相频特性：

开环频率特性 $G_0(j\omega)=\dfrac{100}{j\omega\left(j\frac{\omega}{10}+1\right)\left(j\frac{\omega}{100}+1\right)}$ （1分）

开环幅频特性 $A_0(\omega)=\dfrac{100}{\omega\sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+1}\sqrt{\left(\frac{\omega}{100}\right)^2+1}}$ （1分）

开环相频特性：$\varphi_0(s)=-90^\circ-tg^{-1}0.1\omega-tg^{-1}0.01\omega$ （1分）

3、求系统的相角裕度 γ：

求幅值穿越频率，令 $A_0(\omega)=\dfrac{100}{\omega\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{10}\right)^2+1}\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{100}\right)^2+1}}=1$　得 $\omega_c\approx 31.6rad/s$（3 分）

$\varphi_0(\omega_c)=-90^\circ-tg^{-1}0.1\omega_c-tg^{-1}0.01\omega_c=-90^\circ-tg^{-1}3.16-tg^{-1}0.316\approx-180^\circ$　（2 分）

$\gamma=180^\circ+\varphi_0(\omega_c)=180^\circ-180^\circ=0$　（2 分）

对最小相位系统 $\gamma=0^\circ$　临界稳定

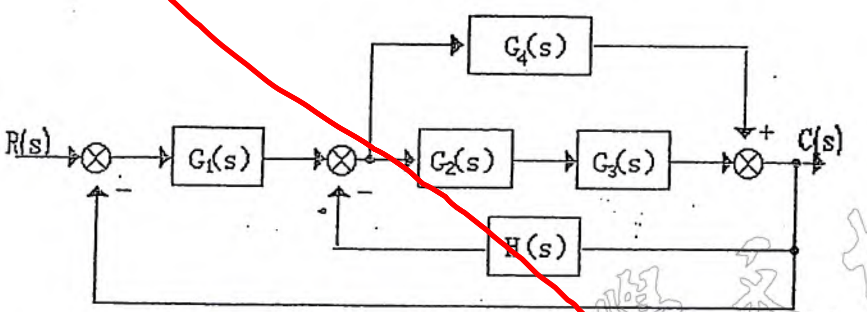
4、（4 分）可以采用以下措施提高系统的稳定裕度：增加串联超前校正装置；增加串联滞后校正装置；增加串联滞后-超前校正装置；增加开环零点；增加 PI 或 PD 或 PID 控制器；在积分环节外加单位负反馈。

试题二

课程名称：　自动控制理论　（A/B 卷　闭卷）

三、（8 分）写出下图所示系统的传递函数 $\dfrac{C(s)}{R(s)}$（结构图化简，梅逊公式均可）。

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1(G_2G_3+G_4)}{1+H(G_2G_3+G_4)+G_1G_2(\\ +G_1G_4}$$



四、（共 20 分）设系统闭环传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$，试求：

1、$\xi=0.2$；$T=0.08s$；$\xi=0.8$；$T=0.08s$ 时单位阶跃响应的超调量 $\sigma\%$、调节时间 t_s 及峰值时间 t_p。（7 分）

切线　切频　6%变

2、$\xi=0.4$；$T=0.04s$ 和 $\xi=0.4$；$T=0.16s$ 时单位阶跃响应的超调量 $\sigma\%$、调节时间 t_s 和峰值时间 t_p。（7 分）

3、根据计算结果，讨论参数ξ、T对阶跃响应的影响。（6 分）

五、（共 15 分）已知某单位反馈系统的开环传递函数为$G(S)H(S)=\dfrac{K_r(s+1)}{s(s-3)}$，试：

1、绘制该系统以根轨迹增益K_r为变量的根轨迹（求出：分离点、与虚轴的交点等）；（8 分）

$K=\frac{K_r}{3}$　$1<K<3$

2、求系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益K的取值范围。（7 分）

六、（共 22 分）已知反馈系统的开环传递函数为$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$，试：

1、用奈奎斯特判据判断系统的稳定性；（10 分）

2、若给定输入 r(t) = 2t+2 时，要求系统的稳态误差为 0.25，问开环增益K应取何值。（7 分）

3、求系统满足上面要求的相角裕度γ。（5 分）

$1+\frac{K}{s(s+1)}$　$\frac{2}{K}=0.25$　$K=8$

试题二答案

三、（8 分）写出下图所示系统的传递函数$\dfrac{C(s)}{R(s)}$（结构图化简，梅逊公式均可）。

解：传递函数$G(s)$:根据梅逊公式　$G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}P_i\Delta_i}{\Delta}$　（1 分）

4 条回路：$L_1=-G_2(s)G_3(s)H(s)$；　$L_2=-G_4(s)H(s)$，

$L_3=-G_1(s)G_2(s)G_3(s)$，　$L_4=-G_1(s)G_4(s)$　无互不接触回路。（2 分）

特征式：$\Delta=1-\sum_{i=1}^{4}L_i=1+G_2(s)G_3(s)H(s)+G_4(s)H(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)$

（2分）

2 条前向通道：$P_1=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$，　$\Delta_1=1$；

$P_2=G_1(s)G_4(s)$，　$\Delta_2=1$　（2 分）

$$\therefore G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H(s)+G_4(s)H(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}$$

（1 分）

四、（共 20 分）

解：系统的闭环传函的标准形式为：$\Phi(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$，其中 $\omega_n=\dfrac{1}{T}$

1、当 $\begin{cases}\xi=0.2\\T=0.08s\end{cases}$ 时，$\begin{cases}\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-0.2\pi/\sqrt{1-0.2^2}}=52.7\%\\t_s=\dfrac{4}{\xi\omega_n}=\dfrac{4T}{\xi}=\dfrac{4\times0.08}{0.2}=1.6s\\t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi T}{\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi\times0.08}{\sqrt{1-0.2^2}}=0.26s\end{cases}$ （4 分）

当 $\begin{cases}\xi=0.8\\T=0.08s\end{cases}$ 时，$\begin{cases}\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-0.8\pi/\sqrt{1-0.8^2}}=1.5\%\\t_s=\dfrac{4}{\xi\omega_n}=\dfrac{4T}{\xi}=\dfrac{4\times0.08}{0.8}=0.4s\\t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi T}{\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi\times0.08}{\sqrt{1-0.8^2}}=0.42s\end{cases}$ （3 分）

2、当 $\begin{cases}\xi=0.4\\T=0.04s\end{cases}$ 时，$\begin{cases}\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-0.4\pi/\sqrt{1-0.4^2}}=25.4\%\\t_s=\dfrac{4}{\xi\omega_n}=\dfrac{4T}{\xi}=\dfrac{4\times0.04}{0.4}=0.4s\\t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi T}{\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi\times0.04}{\sqrt{1-0.4^2}}=0.14s\end{cases}$ （4 分）

当 $\begin{cases}\xi=0.4\\T=0.16s\end{cases}$ 时，$\begin{cases}\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-0.4\pi/\sqrt{1-0.4^2}}=25.4\%\\t_s=\dfrac{4}{\xi\omega_n}=\dfrac{4T}{\xi}=\dfrac{4\times0.16}{0.4}=1.6s\\t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi T}{\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{\pi\times0.16}{\sqrt{1-0.4^2}}=0.55s\end{cases}$ （3 分）

3、根据计算结果，讨论参数 ξ、T 对阶跃响应的影响。（6 分）

(1)系统超调 $\sigma\%$ 只与阻尼系数 ξ 有关，而与时间常数 T 无关，ξ 增大，超调 $\sigma\%$ 减小；

（2 分）

(2)当时间常数 T 一定，阻尼系数 ξ 增大，调整时间 t_s 减小，即暂态过程缩短；峰值时间 t_p 增加，即初始响应速度变慢；（2 分）

(3)当阻尼系数 ξ 一定，时间常数 T 增大，调整时间 t_s 增加，即暂态过程变长；峰值时间 t_p 增加，

即初始响应速度也变慢。 （2 分）

五、（共 15 分）

(1)系统有有 2 个开环极点（起点）：0、3，1 个开环零点（终点）为：-1； （2 分）

(2)实轴上的轨迹：(-∞，-1) 及 (0，3)； （2 分）

(3)求分离点坐标

$\dfrac{1}{d+1}=\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d-3}$，得 $d_1=1$， $d_2=-3$； （2 分）

分别对应的根轨迹增益为 $K_r=1$， $K_r=9$

(4)求与虚轴的交点

系统的闭环特征方程为 $s(s-3)+K_r(s+1)=0$，即 $s^2+(K_r-3)s+K_r=0$

令 $s^2+(K_r-3)s+K_r\big|_{s=j\omega}=0$，得 $\omega=\pm\sqrt{3}$， $K_r=3$ （2 分）

根轨迹如图 1 所示。

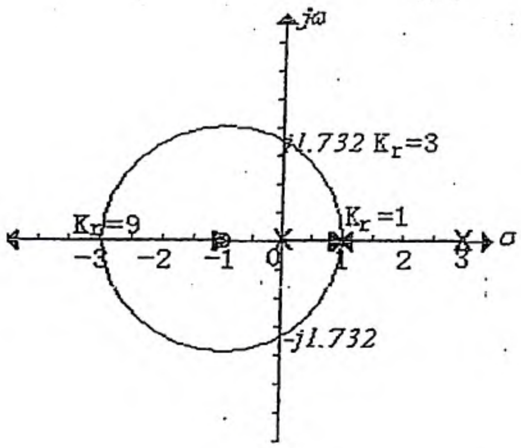


图 1

2、求系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围

系统稳定时根轨迹增益 K_r 的取值范围： $K_r\ge 3$， （2 分）

系统稳定且为欠阻尼状态时根轨迹增益 K_r 的取值范围： $K_r=3\sim 9$， （3 分）

开环增益 K 与根轨迹增益 K_r 的关系： $K=\dfrac{K_r}{3}$ （1 分）

系统稳定且为欠阻尼状态时开环增益 K 的取值范围： $K=1\sim 3$ （1 分）

六、（共 22 分）

解：1、系统的开环频率特性为 $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K}{j\omega(1+j\omega)}$ （2 分）

幅频特性：$A(\omega)=\dfrac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}$，　　相频特性：$\varphi(\omega)=-90^\circ-\arctan\omega$（2 分）

起点：　$\omega=0_+,A(0_+)=\infty,\varphi(0_+)=-90^0$；（1 分）

终点：　$\omega\to\infty,A(\infty)=0,\varphi(\infty)=-180^\circ$；（1 分）

$\omega=0\sim\infty:\varphi(\omega)=-90^\circ\sim-180^\circ$，

曲线位于第 3 象限与实轴无交点。（1 分）

开环频率幅相特性图如图 2 所示。

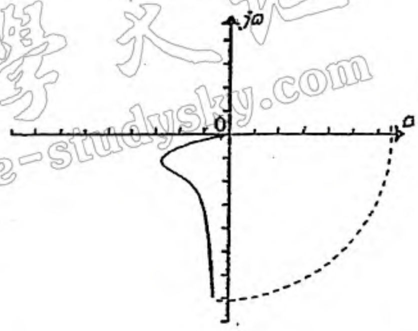


图 2

判断稳定性：

开环传函无右半平面的极点，则 $P=0$，

极坐标图不包围（−1，j0）点，则 $N=0$

根据奈氏判据，Z=P−2N=0　　系统稳定。（3 分）

2、若给定输入 $r(t)=2t+2$ 时，要求系统的稳态误差为 0.25，求开环增益 K：

系统为 1 型，位置误差系数 $K_P=\infty$，速度误差系数 $K_V=K$，　（2 分）

依题意：　$e_{ss}=\dfrac{A}{K_v}=\dfrac{A}{K}=\dfrac{2}{K}=0.25$，　（3 分）

得　$K=8$　（2 分）

故满足稳态误差要求的开环传递函数为　$G(s)H(s)=\dfrac{8}{s(s+1)}$

3、满足稳态误差要求系统的相角裕度 γ：

令幅频特性：$A(\omega)=\dfrac{8}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}=1$，得 $\omega_c=2.7$，　（2 分）

$\varphi(\omega_c)=-90^\circ-\arctan\omega_c=-90^\circ-\arctan 2.7\approx-160^\circ$，　（1 分）

相角裕度 γ：$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)=180^\circ-160^\circ=20^\circ$　（2 分）

试题三

课程名称：　自动控制理论　　（A/B 卷　闭卷）

一、（16 分）已知系统的结构如图 1 所示，其中 $G(s)=\dfrac{k(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$，输入信号为单位斜坡

$\frac{1}{K}$

函数，求系统的稳态误差(8 分)。分析能否通过调节增益 k，使稳态误差小于 0.2（8 分）。

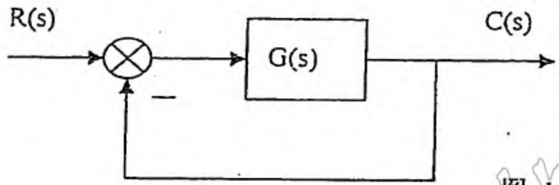


图 1

四、(16 分)设负反馈系统如图 2，前向通道传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{s(s+2)}$，若采用测速负反馈 $H(s)=1+k_s s$，试画出以 k_s 为参变量的根轨迹(10 分)，并讨论 k_s 大小对系统性能的影响(6 分)。

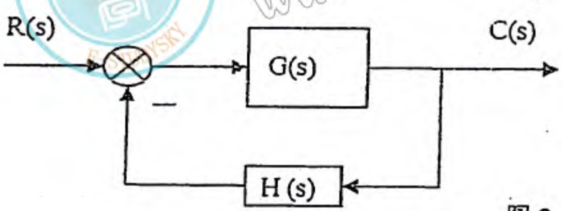


图 2

五、已知系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{k(1-\tau s)}{s(Ts+1)}$，$k,\tau,T$ 均大于 0，试用奈奎斯特稳定判据判断系统稳定性。(16 分) [第五题、第六题可任选其一]

六、已知最小相位系统的对数幅频特性如图 3 所示。试求系统的开环传递函数。(16 分)

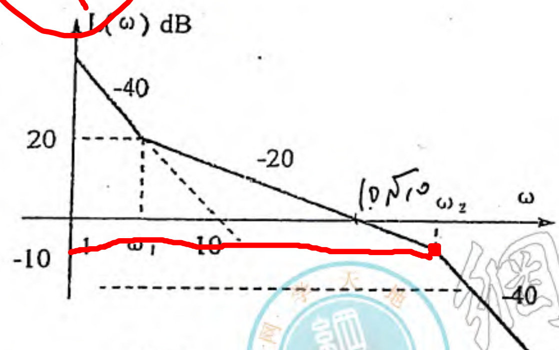


图 3

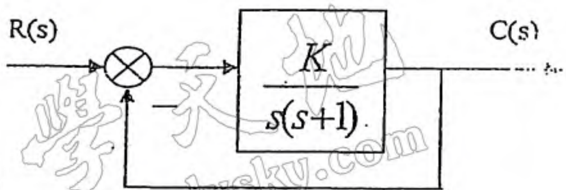


图 4

七、设控制系统如图 4，要求校正后系统在输入信号是单位斜坡时的稳态误差不大于 0.05，相角裕度不小于 40°，幅值裕度不小于 10 dB，试设计串联校正网络。(16 分)

试题三答案

三、(16 分)

解：I 型系统在跟踪单位斜坡输入信号时，稳态误差为 $e_{ss}=\dfrac{1}{K_v}$ （2 分）

而静态速度误差系数 $K_v=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot G(s)H(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\cdot\dfrac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}=K$ （2 分）

稳态误差为 $e_{ss}=\dfrac{1}{K_v}=\dfrac{1}{K}$。（4 分）

要使 $e_{ss}<0.2$ 必须 $K>\dfrac{1}{0.2}=5$，即 K 要大于 5。（6 分）

但其上限要符合系统稳定性要求。可由劳斯判据决定其上限。

系统的闭环特征方程是

$$D(s)=s(s+1)(2s+1)+0.5Ks+K=2s^3+3s^2+(1+0.5K)s+K=0$$ （1 分）

构造劳斯表如下

s^3	2	$1+0.5K$
s^2	3	K
s^1	$\dfrac{3-0.5K}{3}$	0
s^0	K	0

为使首列大于 0， 必须 $0<K<6$。

综合稳态误差和稳定性要求，当 $5<K<6$ 时能保证稳态误差小于 0.2。（1 分）

四、（16 分）

解：系统的开环传函 $G(s)H(s)=\dfrac{10}{s(s+2)}(1+k_s s)$，其闭环特征多项式为 $D(s)$

$D(s)=s^2+2s+10k_s s+10=0$，（1 分）以不含 k_s 的各项和除方程两边，得

$\dfrac{10k_s s}{s^2+2s+10}=-1$ ，令 $10k_s=K^*$，得到等效开环传函为 $\dfrac{K^*}{s^2+2s+10}=-1$ （2 分）

参数根轨迹，起点：$p_{1,2}=-1\pm j3$，终点：有限零点 $z_1=0$，无穷零点 $-\infty$ （2 分）

实轴上根轨迹分布：$[-\infty,\ 0]$ （2 分）

实轴上根轨迹的分离点：令 $\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{s^2+2s+10}{s}\right)=0$，得

$s^2-10=0,s_{1,2}=\pm\sqrt{10}=\pm 3.16$

合理的分离点是 $s_1=-\sqrt{10}=-3.16$，（2 分）该分离点对应的根轨迹增益为

$$K_1^* = \left|\frac{s^2+2s+10}{s}\right|_{s=-\sqrt{10}} = 4.33$$，对应的速度反馈时间常数 $k_s = \frac{K_1^*}{10} = 0.433$（1 分）

根轨迹有一根与负实轴重合的渐近线。由于开环传函两个极点 $p_{1,2} = -1 \pm j3$，一个有限零点 $z_1 = 0$ 且零点不在两极点之间，故根轨迹为以零点 $z_1 = 0$ 为圆心，以该圆心到分离点距离为半径的圆周。根轨迹与虚轴无交点，均处于 s 左半平面。系统绝对稳定。根轨迹如图 1 所示。（4 分）

讨论 k_s 大小对系统性能的影响如下：

（1）、当 $0 < k_s < 0.433$ 时，系统为欠阻尼状态。根轨迹处在第二、三象限，闭环极点为共轭的复数极点。系统阻尼比 ζ 随着 k_s 由零逐渐增大而增加。动态响应为阻尼振荡过程，k_s 增加将使振荡频率 ω_d 减小（$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$），但响应速度加快，调节时间缩短（$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n}$）。（1 分）

（2）、当 $k_s = 0.433$ 时（此时 $K^* = 4.33$），为临界阻尼状态，动态过程不再有振荡和超调。（1 分）

（3）、当 $k_s > 0.433$（或 $K^* > 4.33$），为过阻尼状态。系统响应为单调变化过程。（1 分）

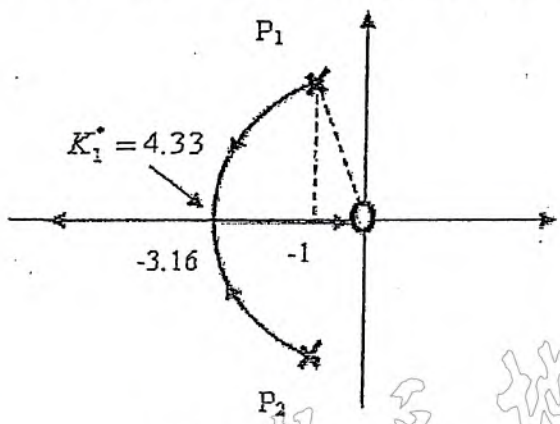


图 1 四题系统参数根轨迹

五、（16 分）

解：由题已知：$G(s)H(s) = \frac{K(1-\tau s)}{s(Ts+1)}, K, \tau, T > 0$，

系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K[-(T+\tau)\omega - j(1-T\tau\omega^2)]}{\omega(1+T^2\omega^2)} \quad （2 分）$$

开环频率特性极坐标图

起点：$\omega = 0_+, A(0_+) = \infty, \varphi(0_+) = -90^0$；（1 分）

终点：$\omega \to \infty, A(\infty) = 0, \varphi(\infty) = -270^0$；（1 分）

与实轴的交点：令虚频特性为零，即 $1-T\tau\omega^2=0$ 得 $\omega_x=\dfrac{1}{\sqrt{T\tau}}$ （2 分）

实部 $G(j\omega_x)H(j\omega_x)=-K\tau$ （2 分）

开环极坐标图如图 2 所示。（4 分）

由于开环传函无右半平面的极点，则 $P=0$

当 $K\tau<1$ 时，极坐标图不包围（−1，j0）点，系统稳定。（1 分）

当 $K\tau=1$ 时，极坐标图穿过临界点（−1，j0）点，系统临界稳定。（1 分）

当 $K\tau>1$ 时，极坐标图顺时针方向包围（−1，j0）点一圈。

$N=2(N_+-N_-)=2(0-1)=-2$

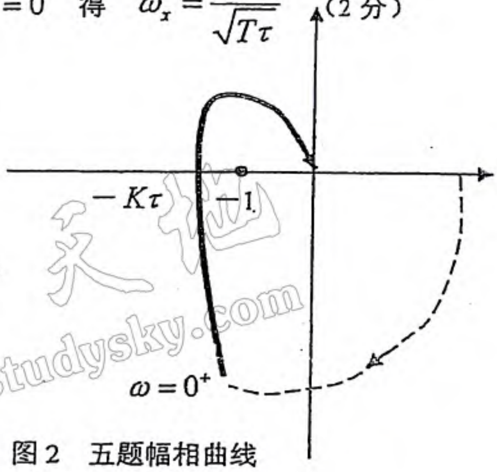


图 2　五题幅相曲线

按奈氏判据，Z=P−N=2。系统不稳定。(2 分)

闭环有两个右平面的极点。

六、(16 分)

解：从开环波特图可知，系统具有比例环节、两个积分环节、一个一阶微分环节和一个惯性环节。

故其开环传函应有以下形式 $G(s)=\dfrac{K(\frac{1}{\omega_1}s+1)}{s^2(\frac{1}{\omega_2}s+1)}$ (8 分)

由图可知：$\omega=1$ 处的纵坐标为 40dB，则 $L(1)=20\lg K=40$，得 $K=100$ (2 分)

又由 $\omega=\omega_1$ 和 $\omega=10$ 的幅值分贝数分别为 20 和 0，结合斜率定义，有

$\dfrac{20-0}{\lg\omega_1-\lg 10}=-40$，解得 $\omega_1=\sqrt{10}=3.16$ rad/s (2 分)

同理可得 $\dfrac{20-(-10)}{\lg\omega_1-\lg\omega_2}=-20$ 或 $20\lg\dfrac{\omega_2}{\omega_1}=30$

$\omega_2^2=1000\omega_1^2=10000$ 得 $\omega_2=100$ rad/s (2 分)

故所求系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{100(\frac{s}{\sqrt{10}}+1)}{s^2(\frac{s}{100}+1)}$$ (2 分)

七、（16分）

解：（1）、系统开环传函 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$，输入信号为单位斜坡函数时的稳态误差为

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=\left(\lim_{s\to 0}sG(s)H(s)\right)^{-1}=\frac{1}{K}$$，由于要求稳态误差不大于0.05，取 $K=20$

故 $G(s)=\dfrac{20}{s(s+1)}$ （5分）

（2）、校正前系统的相角裕度 γ 计算：

$L(\omega)=20\lg 20-20\lg\omega-20\lg\sqrt{\omega^2+1}$

$L(\omega_c)\approx 20\lg\dfrac{20}{\omega_c^{\ 2}}=0\to\omega_c^{\ 2}=20$ 得 $\omega_c=4.47$ rad/s

$\gamma=180^0-90^0-tg^{-1}4.47=12.6^0$； 而幅值裕度为无穷大，因为不存在 ω_x。（2分）

（3）、根据校正后系统对相位裕度的要求，确定超前环节应提供的相位补偿角

$\varphi_m=\gamma''-\gamma+\varepsilon=40-12.6+5=32.4\approx 33^0$ （2分）

（4）、校正网络参数计算

$a=\dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}=\dfrac{1+\sin 33^0}{1-\sin 33^0}=3.4$ （2分）

（5）、超前校正环节在 ω_m 处的幅值为：

$10\lg a=10\lg 3.4=5.31dB$

使校正后的截止频率 ω_c' 发生在 ω_m 处，故在此频率处原系统的幅值应为－5.31dB

$L(\omega_m)=L(\omega_c')=20\lg 20-20\lg\omega_c'-20\lg\sqrt{(\omega_c')^2+1}=-5.31$

解得 ω_c' □ 6 （2分）

（6）、计算超前网络

$a=3.4,\omega_c'=\omega_m=\dfrac{1}{T\sqrt{a}}\to T=\dfrac{1}{\omega_m\sqrt{a}}=\dfrac{1}{6\sqrt{3.4}}=0.09$

在放大3.4倍后，超前校正网络为

$$G_c(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts}=\frac{1+0.306s}{1+0.09s}$$

校正后的总开环传函为： $G_c(s)G(s)=\dfrac{20(1+0.306s)}{s(s+1)(1+0.09s)}$ （2分）

（7）校验性能指标

相角裕度 $\gamma'=180+tg^{-1}(0.306\times 6)-90-tg^{-1}6-tg^{-1}(0.09\times 6)=43^0$

由于校正后的相角始终大于$-180°$，故幅值裕度为无穷大。

符合设计性能指标要求。（1 分）

试题四

课程名称：　自动控制理论　（A/B 卷　闭卷）

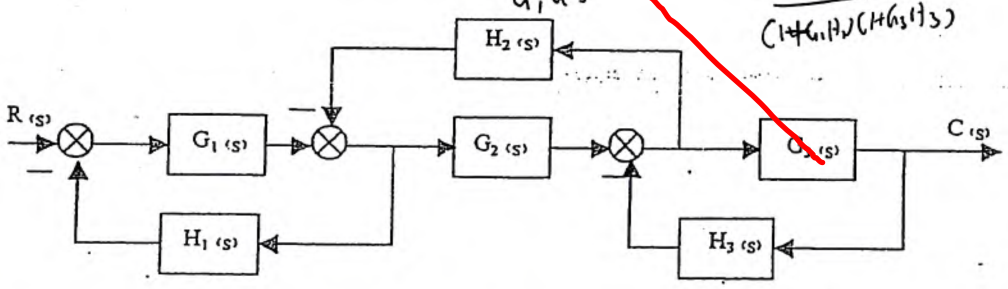
三、写出下图所示系统的传递函数$\frac{C(s)}{R(s)}$（结构图化简，梅逊公式均可）。

（8 分）

$\frac{G_1}{1+G_1H_1}\cdot\frac{G_3}{1+G_3H_3}$

$\frac{G_1G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_3)}$

$\frac{H_2}{G_1G_3}$



$\frac{G_1G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_3)+H_2}$

四、（共 15 分）已知某单位反馈系统的闭环根轨迹图如下图所示

1、写出该系统以根轨迹增益 K^*为变量的开环传递函数；（7 分）　0度根轨迹

2、求出分离点坐标，并写出该系统临界阻尼时的闭环传递函数。（8 分）

$(2s+2)(s-1)-s^2-2s=0$

$2s^2-2-s^2-2s=0$

$s^2-2s-2=0$

$(s-1)^2=3$

$s=\pm\sqrt{3}+1$

$s_1=-0.732$

$s_2=2.732$

$s^2+2s-K^*s+K^*=0$

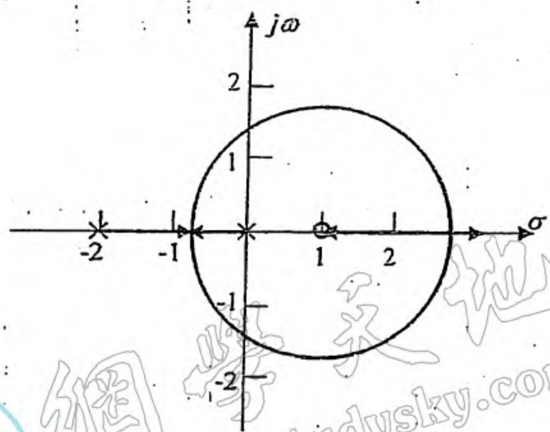
$1 \quad K^*$

$2-K^*=$

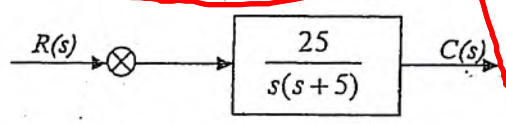
$K^*=2$

$\frac{K^*(1-s)}{s(s+2)}$

$\frac{2(1-s)}{s^2+2s-2s+2}=\frac{2(1-s)}{s^2+2}$



五、系统结构如下图所示，求系统的超调量$\sigma\%$和调节时间t_s。（12 分）



六、已知最小相位系统的开环对数幅频特性$L_0(\omega)$和串联校正装置的对数幅频特性$L_c(\omega)$如下图所示，原系统的幅值穿越频率为$\omega_c = 24.3rad/s$：（共 30 分）

$\gamma_0 = 90° - \arctan 0.1\omega_c - \arctan 0.05\omega_c$

1、 写出原系统的开环传递函数$G_0(s)$，并求其相角裕度γ_0，判断系统的稳定性；（10 分）

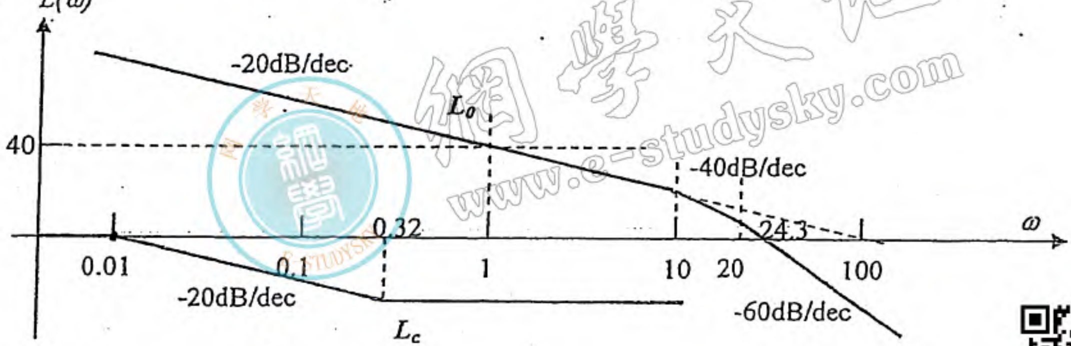
滞后校正

2、 写出校正装置的传递函数$G_c(s)$；（5 分） γ_0 $\cancel{\frac{0.01(0.32s+1)}{s}}$

3、写出校正后的开环传递函数$G_0(s)G_c(s)$，画出校正后系统的开环对数幅频特性$L_{GC}(\omega)$，并用劳斯判据判断系统的稳定性。（15 分）

$G_0(s) = \frac{100}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$

$\frac{\frac{1}{0.32}s+1}{100s+1}$



$\frac{K}{s(\frac{1}{0.32}s+1)}$

$\frac{K(\frac{1}{0.32}s+1)}{s}$ $K=0.01$

试题四答案

三、（8 分）写出下图所示系统的传递函数 $\dfrac{C(s)}{R(s)}$（结构图化简，梅逊公式均可）。

解：传递函数 $G(s)$：根据梅逊公式 $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}P_i\Delta_i}{\Delta}$ （2 分）

3 条回路：$L_1=-G_1(s)H_1(s)$，$L_2=-G_2(s)H_2(s)$，$L_3=-G_3(s)H_3(s)$ （1 分）

1 对互不接触回路：$L_1L_3=G_1(s)H_1(s)G_3(s)H_3(s)$ （1 分）

$$\Delta=1-\sum_{i=1}^{3}L_i+L_1L_3=1+G_1(s)H_1(s)+G_2(s)H_2(s)+G_3(s)H_3(s)+G_1(s)H_1(s)G_3(s)H_3(s) \quad (2分)$$

1 条前向通道：$P_1=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$，$\Delta_1=1$ （2 分）

$$\therefore G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_1(s)H_1(s)+G_2(s)H_2(s)+G_3(s)H_3(s)+G_1(s)H_1(s)G_3(s)H_3(s)}$$

（2 分）

四、（共 15 分）

1、写出该系统以根轨迹增益 K^*为变量的开环传递函数；（7 分）

2、求出分离点坐标，并写出该系统临界阻尼时的闭环传递函数。（8 分）

解：1、由图可以看出，系统有 1 个开环零点为：1（1 分）；有 2 个开环极点为：0、-2（1 分），而且为零度根轨迹。

由此可得以根轨迹增益 K^*为变量的开环传函 $G(s)=\dfrac{-K^*(s-1)}{s(s+2)}=\dfrac{K^*(1-s)}{s(s+2)}$ （5 分）

2、求分离点坐标

$\dfrac{1}{d-1}=\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}$，得 $d_1=-0.732$，$d_2=2.732$ （2 分）

分别对应的根轨迹增益为 $K_1^*=1.15$，$K_2^*=7.46$ （2 分）

分离点 d_1 为临界阻尼点，d_2 为不稳定点。

单位反馈系统在 d_1（临界阻尼点）对应的闭环传递函数为，临界阻尼 $\xi=1$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{K^*(1-s)}{s(s+2)}}{1+\dfrac{K^*(1-s)}{s(s+2)}}=\frac{K^*(1-s)}{s(s+2)+K^*(1-s)}=\frac{-1.15(s-1)}{s^2+0.85s+1.15} \quad (4分)$$

五、求系统的超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s。（12 分）

解：由图可得系统的开环传函为：$G(s)=\dfrac{25}{s(s+5)}$ （2 分）

因为该系统为单位负反馈系统，则系统的闭环传递函数为，

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{25}{s(s+5)}}{1+\frac{25}{s(s+5)}}=\frac{25}{s(s+5)+25}=\frac{5^2}{s^2+5s+5^2} \quad (2分)$$

与二阶系统的标准形式 $\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ 比较，有 $\begin{cases}2\zeta\omega_n=5\\ \omega_n^2=5^2\end{cases}$ （2分）

解得 $\begin{cases}\zeta=0.5\\ \omega_n=5\end{cases}$ （2分）

所以 $\sigma\%=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}=e^{-0.5\pi/\sqrt{1-0.5^2}}=16.3\%$ （2分）

$$t_s=\frac{3}{\zeta\omega_n}=\frac{3}{0.5\times5}=1.2s \quad (2分)$$

或 $t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}=\frac{4}{0.5\times5}=1.6s$，$t_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}=\frac{3.5}{0.5\times5}=1.4s$，$t_s=\frac{4.5}{\zeta\omega_n}=\frac{4.5}{0.5\times5}=1.8s$

六、已知最小相位系统的开环对数幅频特性 $L_0(\omega)$ 和串联校正装置的对数幅频特性 $L_c(\omega)$ 如下图所示，原系统的幅值穿越频率为 $\omega_c=24.3rad/s$：（共 30 分）

1、 写出原系统的开环传递函数 $G_0(s)$，并求其相角裕度 γ_0，判断系统的稳定性；（10 分）

2、 写出校正装置的传递函数 $G_c(s)$；（5 分）

3、写出校正后的开环传递函数 $G_0(s)G_c(s)$，画出校正后系统的开环对数幅频特性 $L_{GC}(\omega)$，并用劳思判据判断系统的稳定性。（15 分）

解：1、从开环波特图可知，原系统具有比例环节、一个积分环节、两个惯性环节。

故其开环传函应有以下形式 $G_0(s)=\frac{K}{s(\frac{1}{\omega_1}s+1)(\frac{1}{\omega_2}s+1)}$ （2分）

由图可知：$\omega=1$ 处的纵坐标为 40dB，则 $L(1)=20\lg K=40$，得 $K=100$ （2分）

$\omega_1=10$ 和 $\omega_2=20$

故原系统的开环传函为 $G_0(s)=\frac{100}{s(\frac{1}{10}s+1)(\frac{1}{20}s+1)}=\frac{100}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}$ （2分）

求原系统的相角裕度 γ_0：$\varphi_0(s)=-90^\circ-tg^{-1}0.1\omega-tg^{-1}0.05\omega$

由题知原系统的幅值穿越频率为 $\omega_c = 24.3rad/s$

$$\varphi_0(\omega_c) = -90^\circ - tg^{-1}0.1\omega_c - tg^{-1}0.05\omega_c = -208^\circ \qquad (1分)$$

$$\gamma_0 = 180^\circ + \varphi_0(\omega_c) = 180^\circ - 208^\circ = -28^\circ \qquad (1分)$$

对最小相位系统 $\gamma_0 = -28^\circ < 0^\circ$ 不稳定

2、从开环波特图可知，校正装置一个惯性环节、一个微分环节，为滞后校正装置。

故其开环传函应有以下形式 $G_c(s) = \dfrac{\frac{1}{\omega_2'}s+1}{\frac{1}{\omega_1'}s+1} = \dfrac{\frac{1}{0.32}s+1}{\frac{1}{0.01}s+1} = \dfrac{3.125s+1}{100s+1}$ (5分)

3、校正后的开环传递函数 $G_0(s)G_c(s)$ 为

$$G_0(s)G_c(s) = \frac{100}{s(0.1s+1)(0.05s+1)}\frac{3.125s+1}{100s+1} = \frac{100(3.125s+1)}{s(0.1s+1)(0.05s+1)(100s+1)} \qquad (4分)$$

用劳思判据判断系统的稳定性

系统的闭环特征方程是

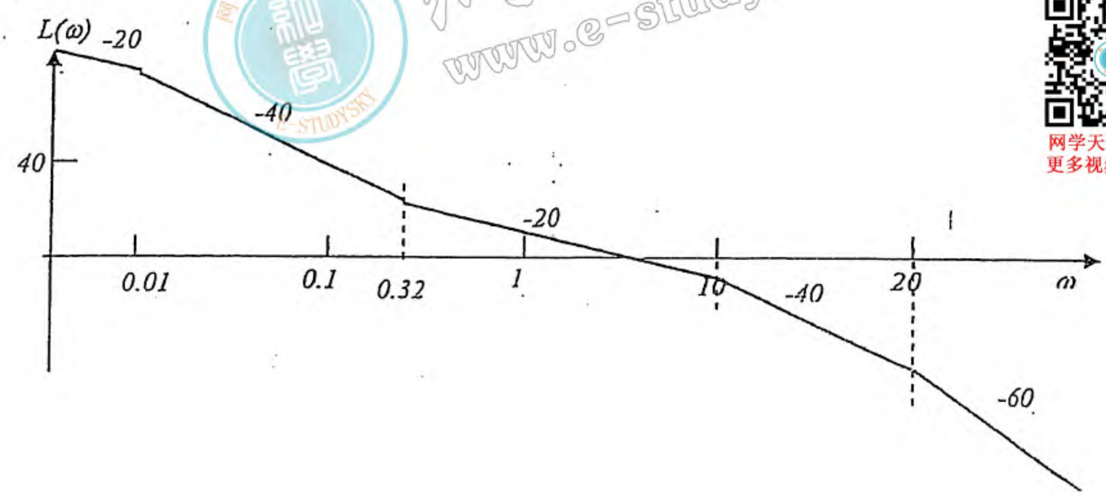
$$\begin{aligned} D(s) &= s(0.1s+1)(0.05s+1)(100s+1) + 100(3.125s+1) \\ &= 0.5s^4 + 15.005s^3 + 100.15s^2 + 313.5s + 100 = 0 \end{aligned} \qquad (2分)$$

构造劳斯表如下

s^4	0.5	100.15	100
s^3	15.005	313.5	0
s^2	89.7	100	0
s^1	296.8	0	
s^0	100	0	

首列均大于 0，故校正后的系统稳定。 (4分)

画出校正后系统的开环对数幅频特性 $L_{GC}(\omega)$



起始斜率：-20dB/dec（一个积分环节）（1 分）

转折频率：$\omega_1 = 1/100 = 0.01$（惯性环节），$\omega_2 = 1/3.125 = 0.32$（一阶微分环节），

$\omega_3 = 1/0.1 = 10$（惯性环节），$\omega_4 = 1/0.05 = 20$（惯性环节）（4 分）

试题五

班级：__________ 姓名：__________ 学号：__________

一、计算题（本大题共 2 道小题，共 15 分）

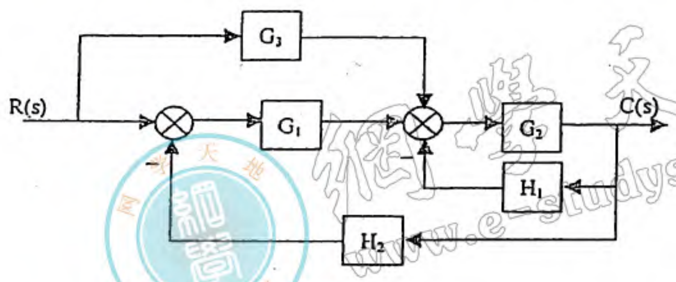
1、已知某系统在零初始条件下的单位阶跃响应为 $c(t) = 1 + 0.2e^{-t} - 1.2e^{-2t}$，求系统的脉冲响应 $g(t)$ 和传递函数 $C(s)/R(s)$。

解：$C(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{0.2}{s+1} - \dfrac{1.2}{s+2} = \dfrac{2.2s+2}{s(s+1)(s+2)}$ （2 分）

$G(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{2.2s+2}{(s+1)(s+2)}$ （2 分）

$g(t) = -0.2e^{-t} + 2.4e^{-2t}$ （3 分）

2、已知系统结构图如图所示，试利用梅森公式求传递函数 C(s)/R(s)。



解：由梅逊增益公式 $G(s)=\dfrac{\sum P_K\Delta_K}{\Delta}$　（1 分）

回路 $L_1=-G_1G_2H_2$　$L_2=-G_2H_1$　$\Delta=1+G_1G_2H_2+G_2H_1$　（3 分）

前向通道 $P_1=G_1G_2$　$\Delta_1=1$　$P_2=G_2G_3$　$\Delta_2=1$　（2 分）

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_1G_2+G_2G_3}{1+G_1G_2H_2+G_2H_1}$$　（2 分）

得分	评卷人

二、计算题（本大题共 1 道小题，共 10 分）

设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$，已知系统在单位阶跃作用下的误差函数为 $E(s)=\dfrac{s+6}{(s+2)(s+4)}$，试求系统的阻尼比，自然频率和在单位斜坡输入作用的稳态误差。

解：由 $E(s)=\dfrac{s+6}{(s+2)(s+4)}$，得特征多项式

$$D(s)=(s+2)(s+4)=s^2+6s+8$$　（2 分）

与标准形式 $D(s)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$ 相比，得

$\zeta=1.06$　$\omega_n=2\sqrt{2}=2.83$　（4 分）

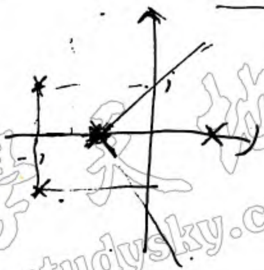
由终值定理 $e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\dfrac{s(s+6)}{(s+2)(s+4)}\bullet\dfrac{1}{s^2}=0.75$　（4 分）

$(s+3)^2=1$

三、计算题（本大题共 2 道小题，共 15 分）

某单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(S)=\frac{K^*}{(s-1)(s^2+6s+10)}$$



（1） 绘制 K^* 从 0～∞ 变化的根轨迹。

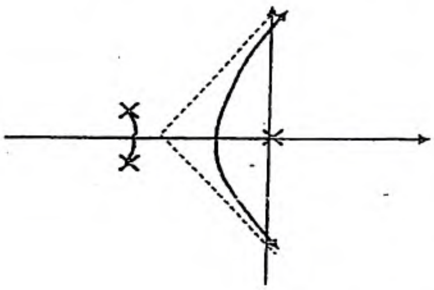
（2） 确定闭环系统稳定时 K^* 的取值范围。

解：（1）实轴上的根轨迹为 $(-\infty,1)$ （2 分）

渐近线 $\sigma_a=\dfrac{1-3+j-3-j}{3}=-\dfrac{5}{3}$ $\quad\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}$ （2 分）

分离点 $\dfrac{1}{d-1}+\dfrac{1}{d+3+j}+\dfrac{1}{d+3-j}=0$

整理得 $3d^2+10d+4=0$ $\quad d_1=-0.47\quad d_2=-2.87$ （2 分）



（2 分）

起始点 $\theta_1=180^\circ-(180^\circ-arctg\dfrac{1}{4})-90^\circ=-76^\circ$ （2 分）

与虚轴交点

$D(s)=s^3+5s^2+4s+K^*-10=0$

列劳斯表

s^3	1	4
s^2	5	K^*-10
s^1	$\dfrac{30-K^*}{5}$	
s^0	K^*-10	

令 $K^*-30=0$ 得 $K^*=30$

辅助方程 $5s^2+K^*-10=0$ 得 $s=\pm j2$ （3 分）

（2） 由 $\begin{cases}30-K^{*}>0\\ K^{*}-10>0\end{cases}$

得 $10<K^{*}<30$ （2 分）

得分	评卷人

四、计算题（本大题共 1 道小题，共 10 分）

某单位反馈系统，$G(S)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ $K,T_1,T_2>0$

（1）试概略绘制系统开环幅相曲线（要求有计算过程）；

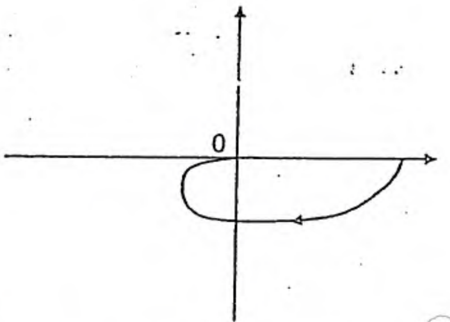
（2）利用奈氏判据判断其稳定性。

解：（1）频率特性 $G(j\omega)=\dfrac{K}{(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)}=\dfrac{K[1-T_1T_2\omega^2-j(T_1+T_2)\omega]}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$

（1 分）

起点：$\omega=0$ $G(j0)=K$ 终点：$\omega=\infty$ $G(j\infty)=0\angle-180^{\circ}$ （2 分）

令 $\mathrm{Im}\,G(j\omega)=0$ 得 $\omega_x=0$ 即系统开环幅相曲线除 $\omega=0$ 处外与实轴无交点。（2 分）



（2 分）

（2）由 $Z=P-2N=0$ 系统稳定 （3 分）

得分	评卷人

五、计算题（本大题共 1 道小题，共 20 分）

设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$，试设计一个串联校正装置，使系统满足如下指标：

$e_{ss}=\frac{1}{K}\le\frac{1}{15}\Rightarrow K=15$

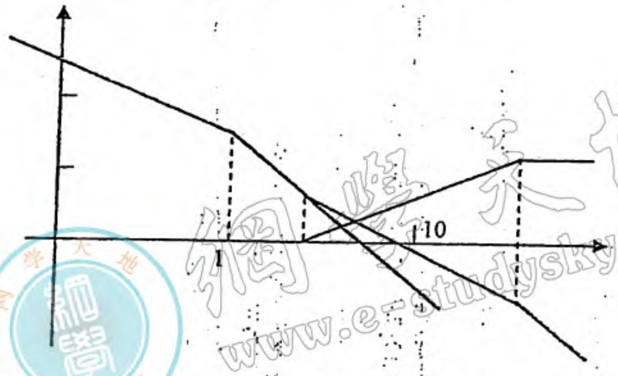
（1）在单位斜坡函数输入下的稳态误差为 $e_{ss}\le\dfrac{1}{15}$；

φ.

（2）相角裕度 $\gamma\ge45^{\circ}$；

（3）截止频率 $\omega_c\ge7.5s^{-1}$。

解：$e_{ss}=\dfrac{1}{K}\le\dfrac{1}{15}$　取 K=15　（1 分）



（3 分）

由 $40\lg\omega_c^{'}=20\lg K$　得 $\omega_c^{'}=3.9$

$\gamma^{'}=90^{\circ}-arctg\omega_c^{'}=14.4^{\circ}$　（4 分）

选取相角超前校正，选 $\omega_m=\omega_c^{''}=7.5$　（4 分）

由　$10\lg a=40\lg\dfrac{\omega_c^{''}}{\omega_c^{'}}$　得 $a=13.5$　（2 分）

$T=\dfrac{1}{\omega_c^{''}\sqrt{a}}=0.03$　（2 分）

$G_c(s)=\dfrac{1+aTs}{1+Ts}=\dfrac{1+0.4s}{1+0.03s}$　（2 分）

校验：$\gamma^{''}=90^{\circ}-arctg\omega_c^{''}+arctg0.4\omega_c^{''}-arctg0.03\omega_c^{''}=66.8^{\circ}$

满足系统要求。　（2 分）