第 13 周习题课参考内容

微分方程：求解-性质-应用

一、微分方程初等求解法

1. 求微分方程 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解。

解：方程为可分离变量型 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = (1+x)\mathrm{d}x$，

上式两端积分得 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \arctan y = \int (1+x)\mathrm{d}x = x + \frac{x^2}{2} + c$，

即 $\arctan y = x + \dfrac{x^2}{2} + c$，其中 c 为任意常数。 □

2. 求微分方程 $y' + \dfrac{2xy}{x^2+4} = 0$ 满足 $y(0) = 1$ 的特解。

解：方程可分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x$（当 $y \neq 0$ 时），

两端积分得 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| = -\int \frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}(x^2+4) = -\ln(x^2+4) + \ln\tilde{c}$$

即 $y = \dfrac{c}{x^2+4}$，其中 $c = \pm e^{\tilde{c}}$ 为任意常数，

将 $y(0) = 1$ 代入上式，得 $c = 4$，满足初始条件的特解为 $y = \dfrac{4}{x^2+4}$。 □

3. 求出微分方程 $\tan y dx - \cot x dy = 0$ 的所有解曲线。

解：为了将原方程通过分离变量积分求解，先考虑

$$y \neq k\pi, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}，\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \Lambda，$$

这时有 $\dfrac{\cos y}{\sin y}dy - \dfrac{\sin x}{\cos x}dx = 0$，$\displaystyle\int \frac{\cos y}{\sin y}dy - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = 0$

积分可得原方程的通解 $\sin y \cos x = C$；

再代入方程直接计算发现

$y = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 是原方程的一族解曲线，

$x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 也是一族解曲线，

综上便得到原方程所有解曲线。 □

4．求出方程 $y' = \sqrt{|y|}$ 的所有解（*选做部分：求在整个ℝ上的解）。

解：若 $y > 0$，则分离变量得 $\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = dx$，积分得 $2\sqrt{y} = x - C > 0$；

若 $y < 0$，类似地计算有 $-2\sqrt{-y} = \int \dfrac{dy}{\sqrt{-y}} = \int dx = x - C < 0$；

此外 $y \equiv 0$ 也是一个特解.

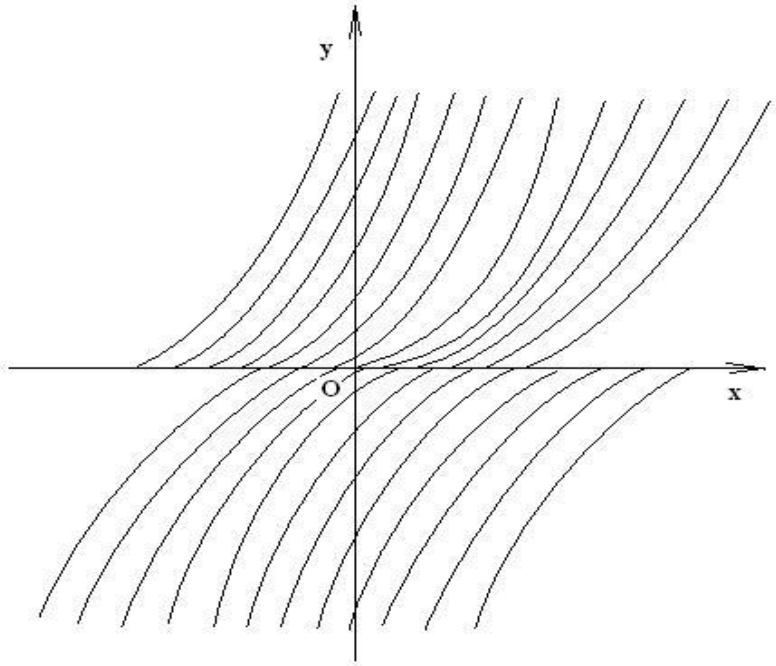
*但在上面三类解中，前两类都只定义在半无界区间上(C 为任意常数)。

经过组合可以得到以下四类定义在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上的解：

（1）$y = \begin{cases} \dfrac{(x-C)^2}{4}, & x > C, \\ 0, & x \le C; \end{cases}$ （2）$y = \begin{cases} -\dfrac{(x-C)^2}{4}, & x < C, \\ 0, & x \ge C; \end{cases}$ （3）$y \equiv 0$；

（4）$y = \begin{cases} -\dfrac{(x-C_1)^2}{4}, & x < C_1, \\ 0, & C_1 \le x \le C_2, \\ \dfrac{(x-C_2)^2}{4}, & x > C_2, \end{cases}$ 其中 $C_1 \le C_2$ 为两个常数。

积分曲线族示意图如下：



注*：对于这个方程，右端函数在 y=0 点附近不满足 Lipschitz 条件（请自己检验）；
观察上面解曲线族，任取 x_0，满足初始条件 $y(x_0) = 0$ 的解不是唯一的
——这样的解有无穷多个。

5．解方程 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{\sin x}{x}$。

解：作为一阶线性方程求解，由通解公式

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(C + \int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx\right)$$

$$=\frac{1}{x}(C+\int \sin x \cdot dx)=\frac{1}{x}(C-\cos x)\text{。}$$

法二：用积分因子法，方程两边同乘x，得 $x y'+y=\sin x$，

也即 $(x y)'=\sin x$，（左端凑出带有未知函数的导数）

两边积分得 $x y=\int \sin x dx+C=-\cos x+C$，

所以 $y=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$。 □

6. 解方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$。

解：当$x>0$时，原方程可化为：

$$y'=\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x}$$ （齐次型方程：用初等变换可化为分离变量型方程），

令 $y=ux$ 整理得：

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x},$$

积分得：$\arcsin u=\ln(Cx)$， （C为任意正常数）

将$y=ux$代入，整理得原方程的通解：$y=x\sin(\ln Cx)$，$x>0$；

当$x<0$时，原方程可化为：

$$y'=-\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x},$$

同上方法解得 $y=x\cos(\ln|Cx|)$，$x<0$。 □

注：在$x=0$点，由方程本身可得$y=0$（但仅有一点的值，已经不构成微分方程）。

7. 求方程$(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=0$的通解。

解：观察组合方程中各项，其中

$$(1+y)dx+xdy=d(x+xy), \quad (y^2+y^3)dy=d(\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}),$$

综上

$$(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=d(x+xy+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4})=0,$$

也即 $\frac{d}{dx}(x+xy+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4})=0$，

所以 $x+xy+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}=C$，$C$为任意常数。 □

二、微分方程解的性质

1. 试研究 $\begin{cases} y'=x^3+xy^2 \\ y(0)=0 \end{cases}$ 之解所确定函数的增减区间，极值点及凸凹区间。

解：由方程可见，$x>0$时$y'>0$，函数严格单调增；$x<0$时$y'<0$，函数严格单调减；

因此函数在$x=0$达到极小值（也是最小值）$y(0)=0$，所以$y\ge 0$。

将方程再求导一次，得

$$y''=x^2+y^2+x\left(2x+yy'\right)=3x^2+y^2+x^4y+x^2y^3\ge 0,$$

可见函数是处处下凸的。 □

2. 已知$y=y(x)$是定解问题$\begin{cases}y'=x^2+y^2\\ y(0)=0\end{cases}$在区间$\left(-a,a\right)$内的唯一解。

试研究该函数的增减性、凹凸性、以及奇偶性。

解：由方程知 $y'\ge 0$，且当$x\ne 0$时$y'>0$，故$y=y(x)$严格单调增；

又因为 $y(0)=0$，所以$x>0$时$y>0$，$x<0$时$y<0$；

为研究解的凹凸性，将方程求导一次

$$y''=2x+2yy'=2x+2y(x^2+y^2),$$

可见$x>0$时$y''>0$，$y=y(x)$下凸，$x<0$时$y''<0$，$y=y(x)$上凸，$x=0$是拐点。

令$f(x)=-y(-x)$，则

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(-y(-x)\right)=y'(-x)=(-x)^2+\left(y(-x)\right)^2=x^2+\left(f(x)\right)^2,$$

此外$f(0)=y(0)=0$，可见$f(x)$也是初值问题$\begin{cases}y'=x^2+y^2\\ y(0)=0\end{cases}$的解。

由题意该问题解的唯一，所以$y(x)=f(x)=-y(-x)$，即$y(x)$是奇函数。 □

3. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，求证：对于方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=f(x)$ 的一切解$y(x)$，均有$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$。

证：设$y=y(x)$是方程任一解，记$y(x_0)=y_0$，则该解可表达为

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x+x_0}[y_0+\int_{x_0}^{x}f(s)\mathrm{e}^{(s-x_0)}\mathrm{d}s],$$

取极限（推导中应用 L'Hospitial 法则）

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{y_0}{\mathrm{e}^{x-x_0}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^{x}f(s)\mathrm{e}^{(s-x_0)}\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{x-x_0}}$$

$$=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\mathrm{e}^{x-x_0}}{\mathrm{e}^{x-x_0}}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0。$$ □

4. 设$f(x)$是周期为T的连续函数，$a\in\mathbf{R}$，$y=y(x)$满足

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x),\quad y(0)=y(T)。$$

求证$y(x)$是以T为周期的函数。

证：考虑函数$u(x)=y(x)-y(x+T)$满足的方程

$$\frac{du}{dx}+au=f(x)-f(x+T)=0,$$

解得　$u(x)=Ce^{-ax}$；

此外由已知条件 $u(0)=y(0)-y(T)=0$，代入上式得$C=0$；

综上 $u(x)\equiv 0$，可见$y(x)\equiv y(x+T)$，即$y(x)$是以T为周期的函数。　□

推广：考虑将$a\in\mathbf{R}$推广为周期为T的连续函数$a(x)$。

三、微分方程的应用

1. 设 $f(x)=\sin x+\int_0^x e^t f(x-t)dt$，其中 $f(x)$为连续函数，求 $f(x)$。

解：显然 $f(x)$为可导函数，可以将积分等式求导化为微分方程。

为了对变上限积分求导，需要消除被积函数中的变量x，

为此，引入积分变量代换$u=x-t$，则$dt=-du$，因此

$$f(x)=\sin x+e^x\int_0^x e^{-u}f(u)du,\quad f(0)=0,$$

上式两端乘以e^{-x}（以便求导去掉积分号），之后对x求导：

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}f(x)-e^{-x}\sin x\right)=\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-u}f(u)du,$$

$$-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)+e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x=e^{-x}f(x),$$

整理得到

$$\begin{cases} f'-2f=\cos x-\sin x \\ f(0)=0 \end{cases}$$

解出 $f(x)=e^{2x}\int_0^x(\cos t-\sin t)e^{-2t}dt=\frac{1}{5}(e^{2x}+3\sin x-\cos x)$。

2．在 XOY 坐标平面上，连续曲线 L 过点$M(1,0)$，其上任意点$P(x,y)(x\neq 0)$处的切线的斜率与直线 OP 的斜率之差等于ax（常数$a>0$），求 L 的方程。

解：设 L 的方程为$y=y(x)$，于是$y(1)=0$；

L 在点$P(x,y)$处切线斜率为$k=y'(x)$，直线 OP 的斜率$k_1=\frac{y}{x}$。

由题设知$k-k_1=ax$，即 $y'-\frac{y}{x}=ax$。

所以 $y=y(x)$ 满足以下定解问题：$\begin{cases} y'-\dfrac{y}{x}=ax \\ y(1)=0 \end{cases}$

解出该一阶线性方程的通解 $y=x(C+a\int dx)=Cx+ax^2$，

令 $x=1$ 得 $C+a=0$，$C=-a$，

故曲线 L 的方程为二次抛物线 $y=ax(x-1)$。

3．设曲线 L 位于 XOY 平面第一象限内，L 上任意一点 M 的切线与 y 轴交于点 A，则 A 到 M 的距离与 A 到原点 O 的距离总是相等，已知 L 经过点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，求 L 的方程。

解：设 L 的方程为 $y=y(x)$，取 L 上任意一点 M (x,y)，该点的切线方程为

$$Y-y=y'(x)(X-x)$$

在切线与 y 轴的交点 A 处，

$$X=0,Y=y-xy'(x),$$

于是，A 到原点 O 的距离 $|AO|=|y-xy'|$，

而 A 到 M 的距离

$$|AM|=\sqrt{(x-0)^2+(y-(y-xy'))^2}=\sqrt{x^2[1+(y')^2]},$$

由题意 $|y-xy'|=\sqrt{x^2[1+(y')^2]}$，化简得到

$$2xyy'-y^2=-x^2,$$

观察可见，令 $z=y^2$ 可将方程化为一阶线性方程

$$z'-\frac{z}{x}=-x,$$

求解得到通解 $z=Cx-x^2$，从而 $y=\sqrt{Cx-x^2}$（曲线在第一象限），

代入已知条件 $y(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$，得到 $C=3$，所以曲线 L 的方程

$$y=\sqrt{3x-x^2},\quad 0<x<3。$$

4*. 某湖泊总水量为 V，每年中流入含污染物的污水量为 $V/6$，不含污染物的水量为 $V/6$，流出水量为 $V/3$。在污染治理之前湖中有污染物总量 $5M$，超过国家标准。开始治理污染后，限定排入湖中污水浓度不超过 M/V。求多少年后湖中污染物的总量降至 M。

解：令 $m(t)$ 为第 t 年湖内污染物的总量，则

排入污染物浓度 M/V，排出污染物浓度 m/V，

每年污染物的减少量 = 排出量 − 排入量，由题意得：

$$-\frac{dm}{dt}=\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}-\frac{M}{V}\cdot\frac{V}{6},$$

整理得到一阶线性方程

$$\frac{dm}{dt}+\frac{m}{3}=\frac{M}{6},$$

解出通解　$m(t)=Ce^{-\frac{t}{3}}+\frac{M}{2}$，

代入初值　$m(0)=5M$，得到　$C=\frac{9M}{2}$，也即　$m(t)=\frac{M(9e^{-\frac{t}{3}}+1)}{2}$；

令　$m(t)=M$，解得　$t=6\ln 3\approx 6.6$（年）。