期中考试模拟题（四）答案 2019.11

一　1. $A_1A_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3$；　2. 0.2；

3. $f_Y(y)=\begin{cases}1/8, & -5\le y\le 3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$　4. 0.5；　5. 181.

二 1.C　2. B　3. D　4. C　5. A

三（10 分） 设 A 表示从取出的 2 张钞票中任取 1 张是假钞； B_i 表示从 20 张钞票中任取的 2 张钞票中有 i 张假钞，$i=0,1,2,$ 则（1）由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)\ =\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}\times 0+\frac{C_5^1C_{15}^1}{C_{20}^2}\times\frac{1}{2}+\frac{C_5^2}{C_{20}^2}\times 1=\frac{1}{4}$$

（2）由 Bayes 公式 $P(B_2\mid A)=\dfrac{P(AB_2)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\dfrac{C_5^2}{C_{20}^2}/\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{19}$.

四（10 分） X 与 Y 的取值均为 0, 1，$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0,Y=1\}=$

$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1,Y=1\}=0.25$，所以 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.25	0.25
1	0.25	0.25

(X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\begin{cases}0,\ x<0 \text{ 或 } y<0,\\ 0.25,\ 0\le x<1, 0\le y<1,\\ 0.5,\ 0\le x<1,\ y>1\text{或}0\le y<1,\ x>1,\\ 1,\ x\ge 1,\ y\ge 1.\end{cases}$

五（10 分）（1）由题意，$X\sim N(170,36)$，则 $\dfrac{X-170}{6}\sim N(0,1)$。

设车门的高度为 h，h 应满足 $P\{X>h\}<0.01$，而

$$P\{X>h\}=1-P\{X\le h\}=1-P\{\frac{X-170}{6}\le\frac{h-170}{6}\}=1-\Phi(\frac{h-170}{6})<0.01$$

即 $\Phi(\dfrac{h-170}{6})>0.99$，查表得 $\dfrac{X-170}{6}>2.33$，故 $h>183.98$

（1） 先求任一男子身高超过 182cm 的概率 p，显然，

$$p=P\{X>182\}=P\{\frac{X-170}{6}>\frac{182-170}{6}\}=1-\Phi(2)=0.0228$$

设 Y 为 100 个男子中身高超过 182cm 的人数，则 $Y\sim B(100, 0.0228)$，所求概率为

$$P\{Y\le 2\}=\sum_{k=0}^{2}P\{Y=k\}=\sum_{k=0}^{2}C_{100}^k 0.0228^k\cdot 0.9772^{100-k}\approx\sum_{k=0}^{2}\frac{2.28^k e^{-2.28}}{k!}=0.6013$$

六（10 分）（1）先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}=$

$$=\begin{cases}0,\ z\le 0,\\ \displaystyle\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy,\ z>0\end{cases}=\begin{cases}0,\ z\le 0,\\ \displaystyle\iint\limits_{\substack{|x-y|\le z\\ x>0,y>0}} e^{-x-y}dxdy,\ z>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0,\ z\le 0,\\ \int_0^z dx\int_0^{x+z} e^{-x-y}dxdy+\int_z^{+\infty}dx\int_{x-z}^{x+z}e^{-x-y}dxdy,\ z>0\end{cases}=\begin{cases}0,\ z\le 0,\\ 1-e^{-z},\ z>0.\end{cases}$$

从而 $Z=|X-Y|$ 的概率密度为 $f(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}e^{-z},\ z>0,\\ 0,\ z\le 0.\end{cases}$

（2）$F_U(z)=P\{U\le z\}=1-P\{X>z,Y>z\}=1-\int_z^{+\infty}dx\int_z^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}1-e^{-2z},\ z>0,\\ 0,\ z\le 0.\end{cases}$

（3）$P\{X+Y<5\}=\displaystyle\iint\limits_{x+y<5} f(x,y)dxdy=\int_0^5 dx\int_0^{5-x}e^{-(x+y)}dy=1-6e^{-5}$

八（12 分）（1）区域 G 的面积为 $A=\int_{-1}^1(1-x^2)dx=\dfrac{4}{3}$。所以 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3/4, & 0\le y\le 1-x^2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0,\ \text{其他},\\ \int_0^{1-x^2}\dfrac{3}{4}dy,\ -1<x<1,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{4}(1-x^2),\ -1<x<1,\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0,\ \text{其他},\\ \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\dfrac{3}{4}dx,\ 0<y<1,\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\sqrt{1-y},\ 0<y<1,\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$

（3）因为 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以，$X$ 与 Y 不相互独立。

（4）当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}\sqrt{1-y}},-\sqrt{1-y}<x<\sqrt{1-y},\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}},-\sqrt{1-y}<x<\sqrt{1-y},\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

$$P\{X \ge \frac{1}{4} | Y = \frac{1}{2}\} = \int_{1/4}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sqrt{2}}{2} dx = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

八（12 分）（1） $F(y) = P\{Y \le y\} = P\{Y \le y, X = 1\} + P\{Y \le y, X = 2\}$

$$= P\{X = 1\}P\{Y \le y | X = 1\} + P\{X = 2\}P\{Y \le y | X = 2\}$$

$$= \frac{1}{2}(P\{Y \le y | X = 1\} + P\{Y \le y | X = 2\})$$

$$= \begin{cases} 0,\ y < 0, \\ \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{3y}{4}, 0 \le y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2}, 1 \le y < 2, \\ 1,\ y \ge 2, \end{cases} = \begin{cases} 0,\ y < 0, \\ \frac{3y}{4}, 0 \le y < 1, \\ \frac{y}{4} + \frac{1}{2}, 1 \le y < 2, \\ 1,\ y \ge 2. \end{cases}$$

（2）Y 的概率密度为 $f(y) = F'(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, 0 < y < 1, \\ \frac{1}{4}, 1 < y < 2, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$

（3） $E(Y) = \int_0^1 \frac{3}{4} y dy + \int_1^2 \frac{1}{4} y dy = \frac{3}{4}$。