第四章

解析函数的级数表示

一、复数序列

1. **定义** 设 z_n 设为复数，称 $\{z_n\}(n=1,2,\dots)$ 为复数列.

2. 复数序列的极限

设$\{z_n\}(n=1,2,\dots)$为一复数列, 其中$z_n = x_n + i\,y_n$,

又设$z_0 = x_0 + i\,y_0$为一确定的复数. 如果任意给定$\varepsilon>0$,

存在正整数N, 使当$n>N$时， 总有$|z_n - z_0|<\varepsilon$成立,

则称复数列$\{z_n\}$收敛于复数z_0， 或称$\{z_n\}$以z_0为**极限**,

记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{或} \quad z_n \to z_0 (n\to\infty)$$

若复数列$\{z_n\}$不收敛，则称复数列$\{z_n\}$**发散**.

3. 复数序列收敛的充分必要条件（定理4.1）

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

例 下列复数列是否收敛？如果收敛，求出其极限.

$$(1) z_n = (1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}, \quad (2) z_n = n\cos in, \quad (3) z_n = (\frac{1+3i}{6})^n.$$

解： $(1) z_n = (1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}} = (1+\frac{1}{n})(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n})$

$$\Rightarrow x_n = (1+\frac{1}{n})\cos\frac{\pi}{n}, y_n = (1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n},$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1, \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

$\Rightarrow z_n = (1+\frac{1}{n})e^{i\frac{\pi}{n}}$收敛，且有$\lim_{n\to\infty} z_n = 1.$

$$(2) z_n = n\cos in = \frac{1}{2}n(e^{-n}+e^n) = n\cosh n$$

$$= \frac{n}{2}(e^{-n} + e^{n}) = \frac{1}{2} n e^{n}(e^{-2n} + 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n e^{n}(e^{-2n} + 1) = \infty,$$ 所以复数列$\{z\}_n$发散.

$$(3) z_n = \left(\frac{1+3i}{6}\right)^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

而$r = \left|\frac{1+3i}{6}\right| = \frac{\sqrt{10}}{6} < 1$, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0$,

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n \cos n\theta = 0,\ \lim_{n\to\infty} r^n \sin n\theta = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

(若$\lim_{n\to\infty}|z_n| = 0, \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|z_n|(\cos\theta + i\sin\theta) = 0$，即:$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$,反之也成立)

二、复数项级数

设$\{z_n\}(n=1,2,...)$为一复数列, 表达式

$$z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots$$

称为**复数项级数**, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

级数的**部分和：** $s_n=z_1+z_2+...+z_n$

如果 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 是收敛的,

记为 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$, 否则，称级数发散.

定理4.2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 都收敛.

本质：将复数项级数的审敛问题**转化**为实数项级数的审敛问题.

定理4.3 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = 0.$$

定理4.4 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

类似地，可定义复数项级数绝对收敛和条件收敛.

几点说明

(1)$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$绝对收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$均绝对收敛.

(2)因为$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$各项为非负实数，所以它的敛散性可用正项级数判定法来判定.

(3)若$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$不一定收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$是条件收敛.

例 下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right),\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!},\qquad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right].$$

解： $(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$的实部$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散， $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)$发散.

$(2)\ |z_n|=\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right|=\frac{8^n}{n!}$， 由正项级数比较判别法：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}n!}{(n+1)!8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n+1}=0<1,\ \Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}\text{为绝对收敛.}$$

(3)因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$都收敛，$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$收敛，

但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$为条件收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{2^n}i\right]$为条件收敛.

三、复变函数项级数

复变函数项级数

设$\{f_n(z)\}(n=1,2,\ldots)$为区域D内复变函数序列，则称

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$$

为复变函数项级数.

部分和： $S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$

对于D内的某一点z_0，如果$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z_0)=S(z_0)$则称级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_n(z)$在$z_0$处是收敛的.

如果级数在D内处处收敛，则它的和是D内的一个函数 $S(z)$：

$$S(z)=f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots$$

$S(z)$称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的**和函数**. D为收敛域.

四、幂级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \cdots + C_n(z-z_0)^n + \cdots$$

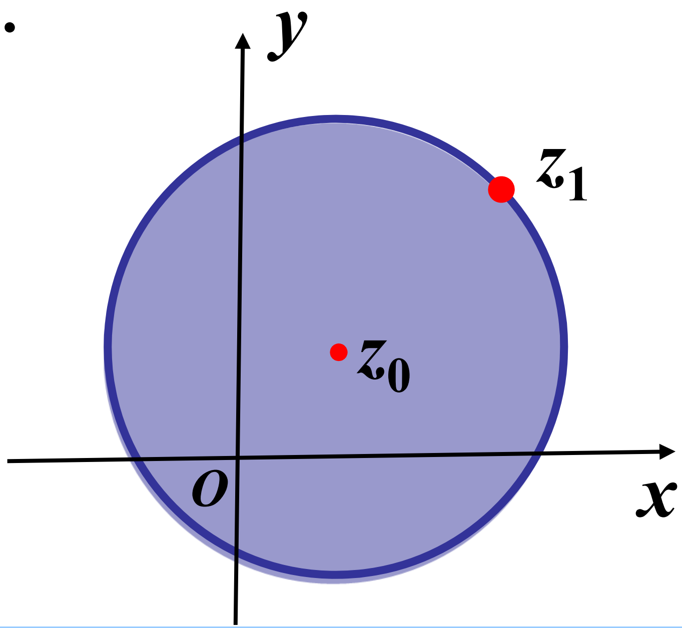
的复函数项级数称为幂级数.

其中$\{z_n\}(n=1,2,\ldots)$及z_0均为复常数.

定理4.5 (阿贝尔Abel定理)

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ 在点 $z_1(z_1 \neq z_0)$ 收敛，则级数在圆域 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 内绝对收敛；

如果幂级数在点 z_2 发散，则对满足 $|z-z_0|>|z_2-z_0|$ 的点z, 级数发散.



证明（1） 由 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z_1-z_0)^n$ 收敛，有 $\lim_{n\to+\infty} C_n(z_1-z_0)^n=0$，

则存在 M，使对所有的 n 有 $|C_n(z_1-z_0)^n|\le M$，

于是

$$|C_n(z-z_0)^n|=|C_n(z_1-z_0)^n|\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \le M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n,$$

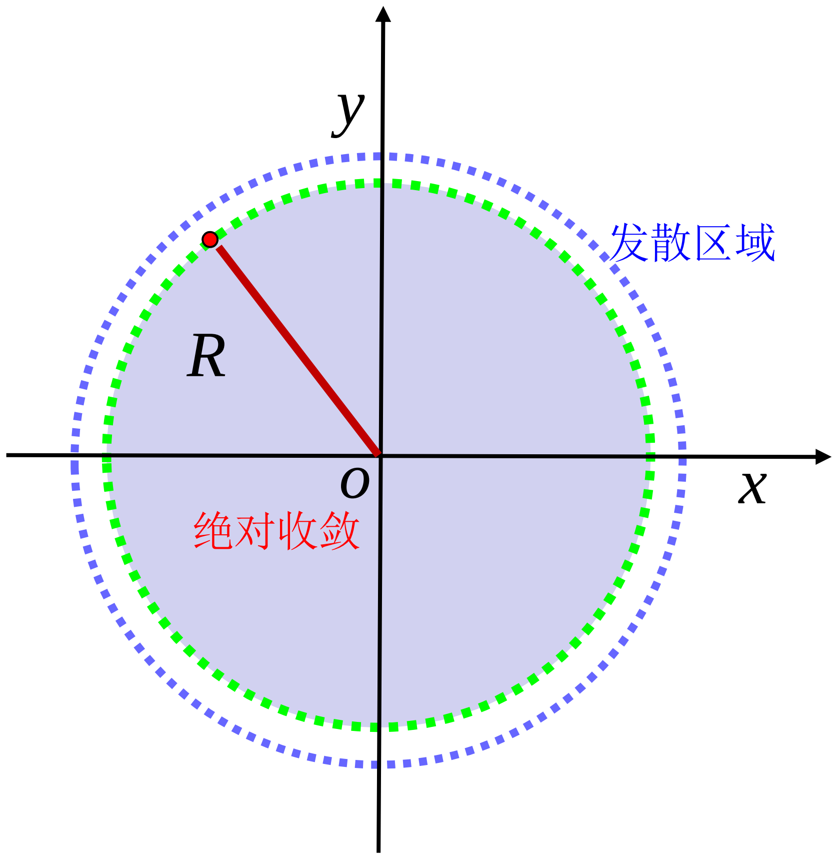
而当 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$时，$\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n<1$，因而级数

$\sum_{i=1}^{\infty} M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$收敛，由正项级数比较审敛法知，级数

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \quad (|z-z_0|<|z_1-z_0|)$ 绝对收敛

（2）提示：反证法（自行完成）.

收敛半径和收敛圆



例1 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

的收敛范围与和函数.

解 级数实际上是等比级数,

部分和为

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \begin{cases} \dfrac{1-z^n}{1-z}, (z \neq 1) \\ n, \quad (z = 1) \end{cases}$$

z=1时，级数发散.

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^n}{1 - z}, (z \neq 1)$$

当$|z| < 1$时,由于$\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$,从而有$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-z}$,

即$|z| < 1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$收敛,和函数为$\dfrac{1}{1-z}$,

当$|z| \geq 1$时,由于$n \to \infty$时z^n不趋于零,级数发散.

收敛范围为$|z| < 1$,在此范围内绝对收敛,

并有 $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad , |z| < 1.$$

收敛半径的求法

比值法： 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda \neq 0$ 则收敛半径 $R=\dfrac{1}{\lambda}$

根值法： 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \mu \neq 0$ 则收敛半径 $R=\dfrac{1}{\mu}$

若 $\lambda = 0$ 或 $\mu = 0$，则收敛半径 $R = +\infty$

若 $\lambda = +\infty$ 或 $\mu = +\infty$，则收敛半径 $R = 0$

比值法的证明，根值法类似可证明。

证明： 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|C_{n+1}||z^{n+1}|}{|C_n||z^n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right||z|=\lambda|z|$,

$\Rightarrow |z|<\dfrac{1}{\lambda}$,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|C_n||z^n|$收敛，故级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$在圆域$|z|=\dfrac{1}{\lambda}$内收敛.

假设在圆$|z|=\dfrac{1}{\lambda}$外有一点z_0，使得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz_0^n$收敛，

在圆外再取一点z_1，使$|z_1|<|z_0|$，由阿贝尔定理,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|C_n||z_1|^n$ 必定收敛

然而,$|z_1|>\dfrac{1}{\lambda}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|C_{n+1}||z_1^{n+1}|}{|C_n||z_1^n|}=\lambda|z_1|>1$，这与级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|C_n||z_1|^n$ 收敛矛盾，

所以假设不成立，因而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$在圆域$|z|=\dfrac{1}{\lambda}$外发散.

例2 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径与收敛圆.

解 由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$，得

收敛半径为 $R=1$，收敛圆为 $|z|<1$.

例3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径与收敛圆.

解 由 $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$，得

收敛半径为 $R=+\infty$，收敛圆为 $|z|<+\infty$.

幂级数的运算和性质

回答了在什么样的条件下幂级数有类似与有限项求和所具备的相应的运算性质

（1）幂级数的代数运算

（2）复合运算

（3）幂级数和函数的性质（分析性质）

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n = f(z)$的收敛半径为$R$，则和函数具有下列性质：

(1)和函数$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-a)^n$在收敛圆$|z-a|<R$内解析，且可逐项求导：

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(z-a)^{n-1}$$

(2)和函数$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z-a)^n$在收敛圆$|z-a|<R$内是可积函数，且可逐项积分：

$$\int_C f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\int_C (z-a)^n dz, C\in|z-a|<R \quad 或 \int_a^z f(\zeta)d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n+1}(z-a)^{n-1}.$$

特别指出，代换（复合）运算在把函数展开成幂级数时，有着广泛的应用.

例4 把函数$\dfrac{1}{z-b}$表示成形如$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$的幂级数（其中$a$与$b$是不相等的复常数）.

解
$$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{(z-a)-(b-a)}=-\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$
$$=-\frac{1}{b-a}-\frac{(z-a)}{(b-a)^2}-\frac{(z-a)^2}{(b-a)^3}-\cdots-\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}-\cdots,$$

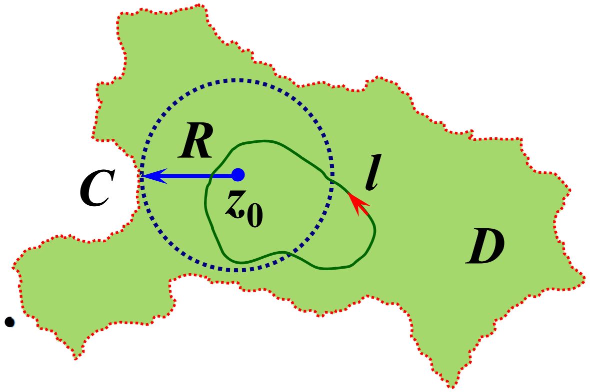
其收敛半径为 $R=|b-a|$，收敛圆为$|z-a|<|b-a|$.

五、泰勒级数

定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 的边界，$z_0 \in D$，

$$R = \min_{z \in C} |z - z_0|，\text{则当 } |z - z_0| < R \text{ 时，有}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$



其中，$C_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_l \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$

其中l为D内包围 z_0 点的任意一条闭曲线.

(1)式称为$f(z)$在z_0的泰勒展开式，它右端的级数称为$f(z)$在z_0处的泰勒级数.

取在D内任一点$z_0 \in D$为圆心，R为半径的圆周k（取正向）：$|z - z_0| = R$

$$\boxed{\text{对任何}z \in k\text{内，有柯西积分公式}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta \cdots\cdots(*)}$$

由于$z \in k$内，$\zeta \in k$上，所以有$\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$，则

$$\boxed{\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} - \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

将其代入（*）式中，得：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_k f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n + \frac{1}{2\pi i}\oint_k \left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z - z_0)^n\right]d\zeta$$

由高阶导数公式得：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_N(z)\cdots\cdots(**)$$

其中$R_N(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_k\left[\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]d\zeta,$

下面证明$\lim\limits_{N\to\infty}R_N(z)=0.$

令$\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\dfrac{|z-z_0|}{r}=q<1,$

而函数$f(z)$在$k\subset D$内解析，从而在k上连续，于是在k上有界，

即存在一个$M>0$，在k上$|f(\zeta)|\le M$，由$R_N(z)$表达式得：

$$|R_N(z)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_k \left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right| ds \le \frac{1}{2\pi}\oint_k [\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\cdot\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n] ds$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\oint_k \sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}q^n ds = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}q^n\cdot 2\pi r = \frac{Mq^N}{1-q}$$

因为$\lim\limits_{N\to\infty}\frac{Mq^N}{1-q}=\frac{M}{1-q}\lim\limits_{x\to\infty}q^N \overset{q<1}{=} 0$，所以在$k$内$\lim\limits_{N\to\infty}R_N(z)=0$.

从而在k内有：$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

称为函数$f(z)$在z_0的泰勒展开式，

右端的级数称为函数$f(z)$在z_0的泰勒级数.

注 (1) 如果$f(z)$在D内有奇点， $f(z)$在z_0的泰勒展开式成立的R等于z_0到$f(z)$的距z_0最近一个奇点之间的距离；（这也是确定泰勒级数收敛半径的一个常用途径）

(2) 泰勒展开式是唯一的；

(3) 函数在一点解析的充分必要条件是它在这点的邻域内可以展开为幂级数.（体现了解析函数的又一个重要性质）

回答了在什么样的条件下, 解析函数能用幂级数展开

将函数展开为泰勒级数的方法

1. 直接展开法

利用泰勒定理，直接计算展开系数 $C_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

例5 将函数 $f(z) = e^z$ 在 $z = 0$ 点展开为幂级数.

解 $f^{(n)}(0) = e^z\big|_{z=0} = 1, \Rightarrow a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots. \quad |z| < +\infty.$$

同理可得

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, |z| < +\infty.$$

2. 间接展开法

根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开.

例6 将函数 $f(z)=\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数.

解 (1) $f'(z)=\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{1}{1-(-z)}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$, $|z|<1.$

$$\int_0^z f'(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^n\int_0^z z^n\,\mathrm{d}z\right],$$

$$f(z)-f(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},\quad |z|<1.$$

例7 将函数 $f(z)=\dfrac{2z^2-3}{(z-2)(z^2+1)}$ 在点 $z=0$ 展开为幂级数

解 $f(z)=\dfrac{A}{z-2}+\dfrac{Bz+C}{z^2+1}=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{z+2}{z^2+1},$

$$(1)\ \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ |z|<2.$$

$$(2)\ \frac{z+2}{z^2+1}=\frac{z+2}{1-(-z^2)}=(z+2)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n},\quad |z|<1.$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}2(-1)^n z^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1},\quad |z|<1.$$

例8 将函数 $f(z)=\sin^2 z$ 在 $z=0$ 点展开为幂级数.

解 $$\sin^2 z=\frac{1}{2}(1-\cos 2z)=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}-\frac{(2z)^6}{6!}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{(2z)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(2z)^4}{2\cdot 4!}+\frac{(2z)^6}{2\cdot 6!}-\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

例9 求函数$f(z)=\dfrac{1}{z-2}$在$z=-1$的邻域内的泰勒展开式.

解: 因为函数$f(z)=\dfrac{1}{z-2}$只有奇点$z=2$,

其收敛半径$R=|2-(-1)|=3$,

所以函数在圆域$|z+1|<3$内可以展开为$z+1$的幂级数.

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z+1-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[1+\frac{z+1}{3}+\left(\frac{z+1}{3}\right)^2+\left(\frac{z+1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{z+1}{3}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{3^{n+1}}(z+1)^n,\quad |z+1|<3.$$

第四章 解析函数的级数表示

例10 试求给定幂级数在收敛圆内的和函数

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n}, \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}z^{n}.$$

解： (1) 求得收敛半径为$R=1$，$|z|<1$时，令$\dfrac{S(z)}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1}$，则

$$\int_{0}^{z}\frac{S(z)}{z}dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{z}(-1)^{n-1}nz^{n-1}dz=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{n}=\frac{z}{1+z},$$

$$\Rightarrow S(z)=z\cdot\left(\frac{z}{1+z}\right)'=\frac{z}{(1+z)^{2}}.$$

(2)求得收敛半径为$R=1$，令$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}z^{n}$，则

当$|z|<1$时，$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}z^{n-1}=\dfrac{-1}{1+z}$，

$$\Rightarrow S(z)=\int_{0}^{z}\frac{-1}{1+z}dz=-\ln(1+z),(\text{主值}).$$