



非正弦周期电路

非正弦周期电路

第15章

主讲人：邹建龙

时 间： 年 月 日





15 非正弦周期电路——主要内容

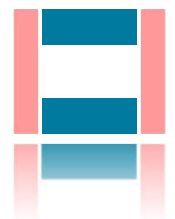
□ 引言

□ 15.1 非正弦周期信号

□ 15.2 非正弦周期电路的计算

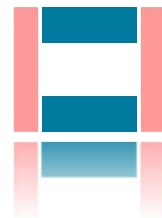
□ 15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率

□ 小结



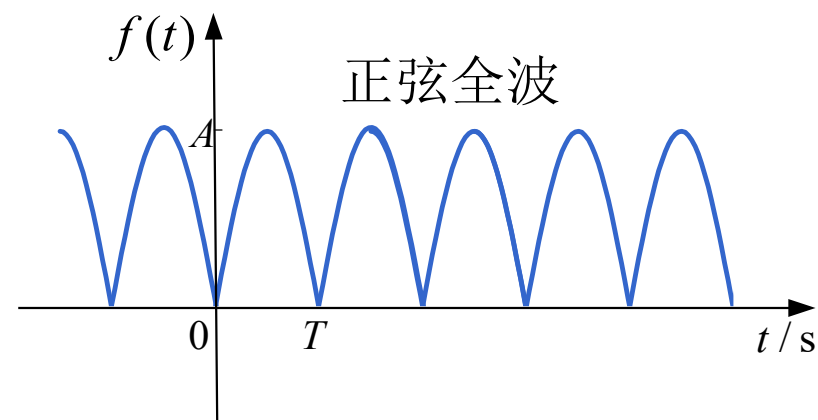
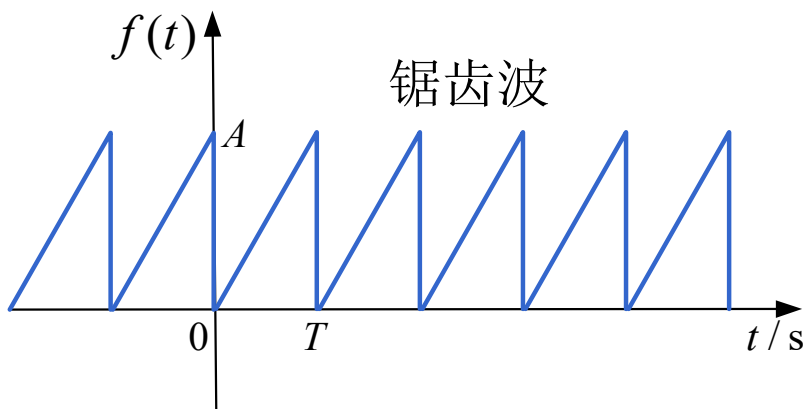
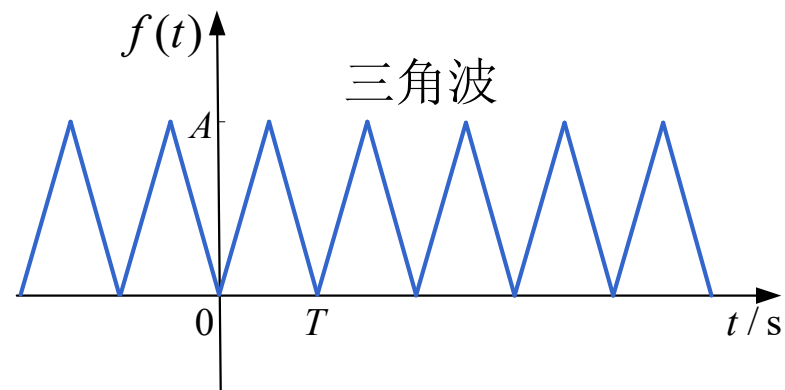
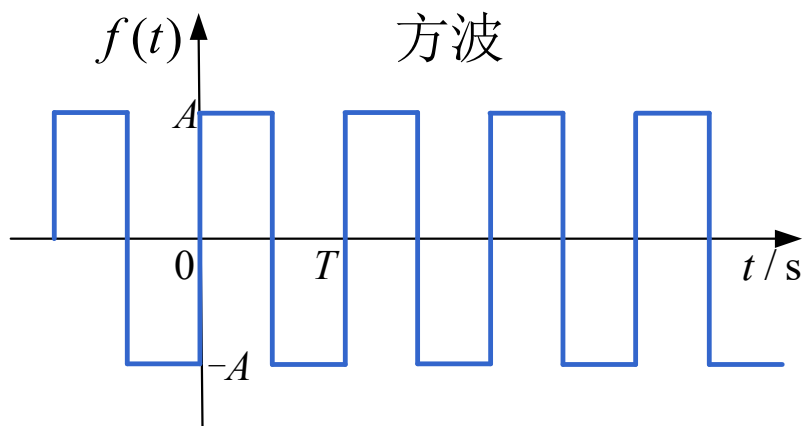


15 非正弦周期电路——引言



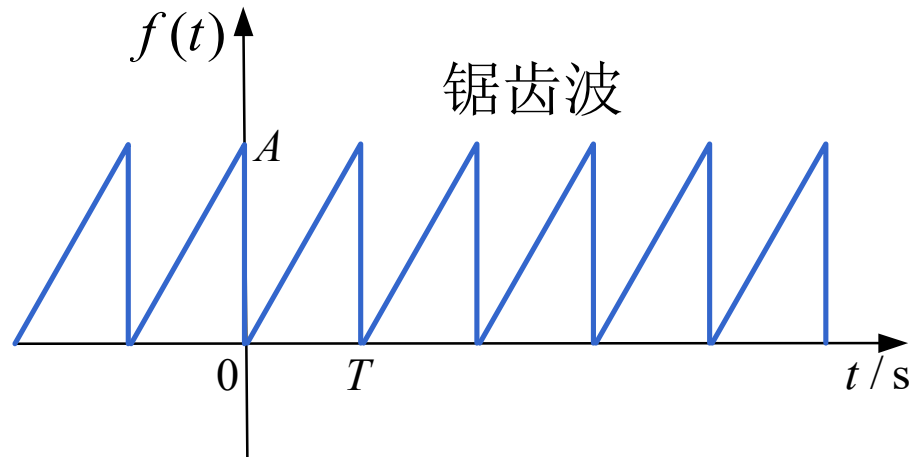
15.1 非正弦周期信号

常见的非正弦周期信号



15.1 非正弦周期信号

非正弦周期信号的傅里叶级数表示



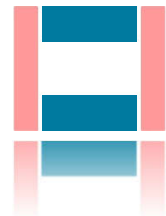
$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

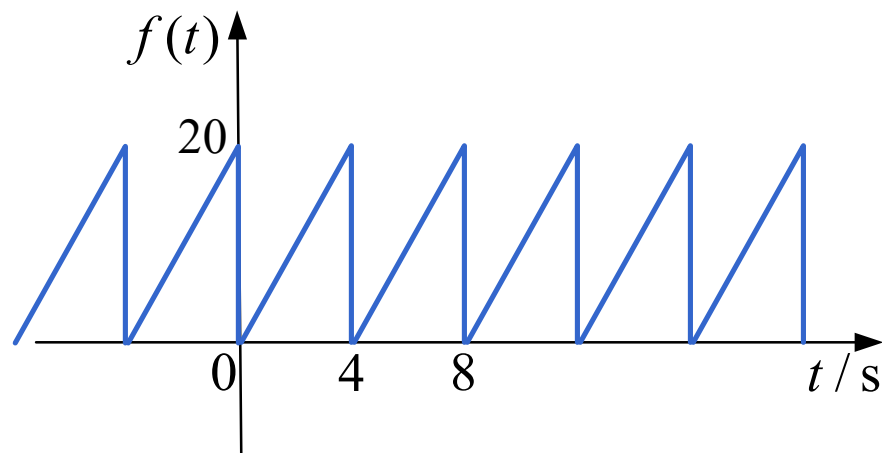
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$



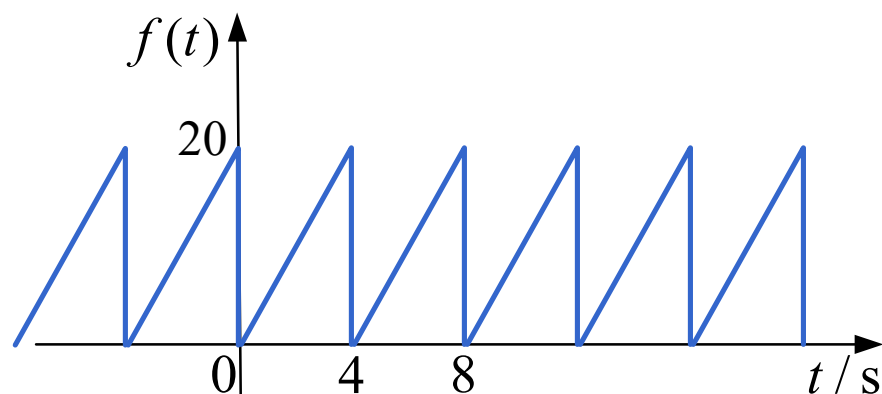
15.1 非正弦周期信号

例题1 (提高) 用傅里叶级数表示图示锯齿波。



15.1 非正弦周期信号

例题1 (提高) 用傅里叶级数表示图示锯齿波。



$$T = 4 \text{ s}$$

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

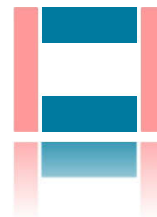
$$f(t) = 5t \quad 0 \leq t \leq 4$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^4 5t dt = \frac{5}{8} t^2 \Big|_0^4 = 10$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{4} \int_0^4 5t \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

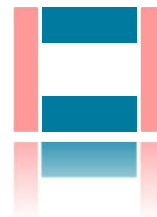
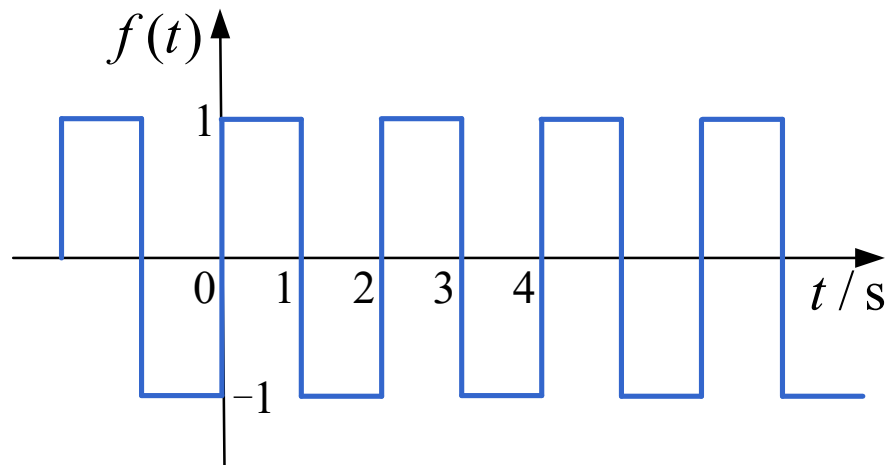
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{4} \int_0^4 5t \sin(n\omega_0 t) dt = -\frac{20}{n\pi}$$

$$f(t) = 10 - \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2} t\right)$$



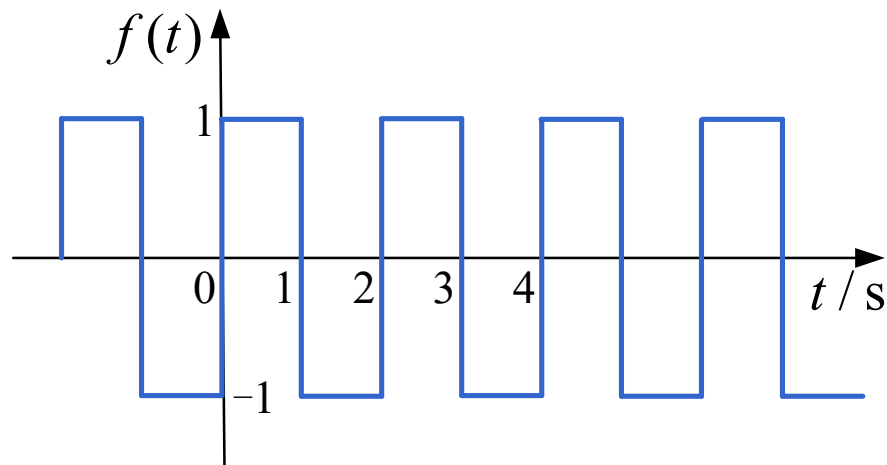
15.1 非正弦周期信号

同步练习题1 (提高) 用傅里叶级数表示图示方波。



15.1 非正弦周期信号

同步练习题1 (提高) 用傅里叶级数表示图示方波。



答案:
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)\pi t]$$

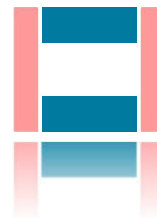
15.2 非正弦周期电路的计算

非正弦周期电路的计算步骤

第1步： 将非正弦周期激励信号用傅里叶级数表示。如果题目已经给出了傅里叶级数，则第1步可以省略。

第2步： 分别求傅里叶级数中各分量单独作用时电路的响应。其中，正弦分量单独作用时的响应需要用相量分析法求解。

第3步： 根据叠加定理，将各分量单独作用产生的响应叠加起来，即可得到电路总的响应。

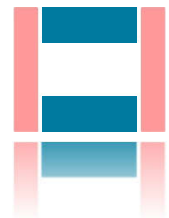
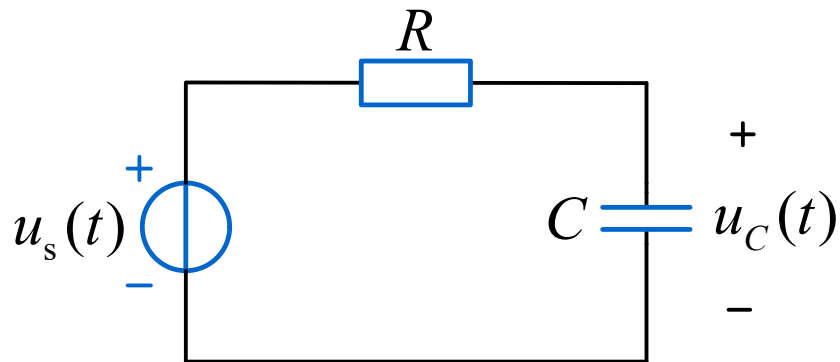


15.2 非正弦周期电路的计算

例题2 (提高)

已知 $u_s(t) = 2 + \cos 1000t + 0.5 \cos 2000t$ V,

$R = 1\ \Omega$, $C = 1000\ \mu\text{F}$, 求 $u_C(t)$ 。

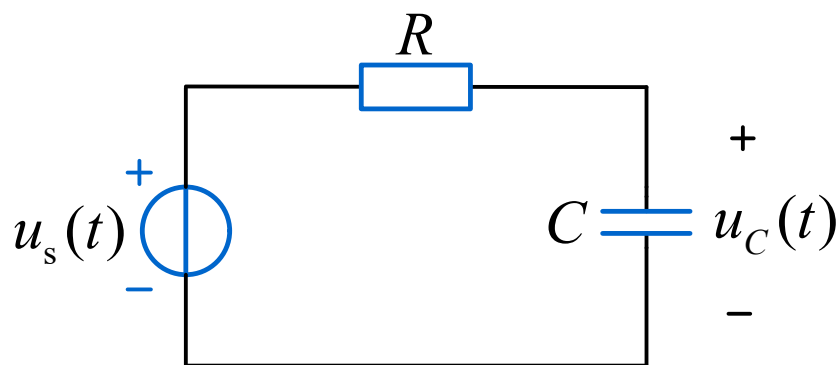


15.2 非正弦周期电路的计算

例题2 (提高)

已知 $u_s(t) = 2 + \cos 1000t + 0.5 \cos 2000t$ V,

$R = 1\Omega$, $C = 1000\mu\text{F}$, 求 $u_C(t)$ 。



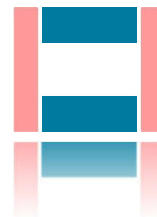
$$u_C^{(0)}(t) = 2 \text{ V}$$

$$\dot{U}_C^{(1)} = \frac{1/\sqrt{2}}{1 - j1} = 0.5 \angle 45^\circ \text{ V} \quad u_C^{(1)}(t) = 0.5\sqrt{2} \cos(1000t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{U}_C^{(2)} = \frac{0.5/\sqrt{2}}{1 - j0.5} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \angle 26.57^\circ \text{ V} \quad u_C^{(2)}(t) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cos(2000t + 26.57^\circ) \text{ V}$$

$$u_C(t) = u_C^{(0)}(t) + u_C^{(1)}(t) + u_C^{(2)}(t)$$

$$= 2 + 0.5\sqrt{2} \cos(1000t + 45^\circ) + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos(2000t + 26.57^\circ) \text{ V}$$

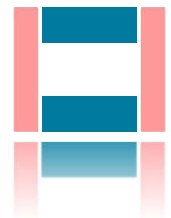
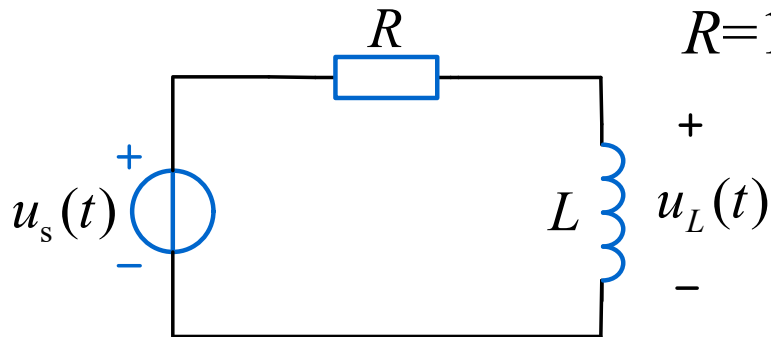


15.2 非正弦周期电路的计算

同步练习题2 (提高)

已知 $u_s(t) = 2 + \cos 1000t + 0.5 \cos 2000t$ V,

$R = 1\ \Omega$, $L = 1\ \text{mH}$, 求 $u_L(t)$ 。

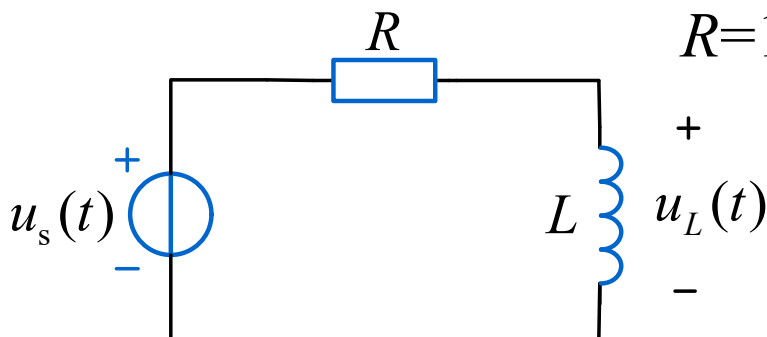


15.2 非正弦周期电路的计算

同步练习题2 (提高)

已知 $u_s(t) = 2 + \cos 1000t + 0.5 \cos 2000t$ V,

$R = 1 \Omega$, $L = 1$ mH, 求 $u_L(t)$ 。



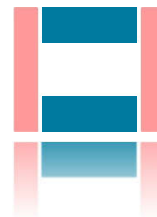
$$u_L^{(0)}(t) = 0 \text{ V}$$

$$\dot{U}_L^{(1)} = \frac{j1}{1+j1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.5 \angle 45^\circ \text{ V} \quad u_L^{(1)}(t) = 0.5\sqrt{2} \cos(1000t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$\dot{U}_L^{(2)} = \frac{j2}{1+j2} \frac{0.5}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \angle 26.57^\circ \text{ V} \quad u_L^{(2)}(t) = \frac{\sqrt{5}}{5} \cos(2000t + 26.57^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = u_L^{(0)}(t) + u_L^{(1)}(t) + u_L^{(2)}(t)$$

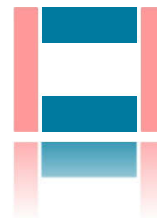
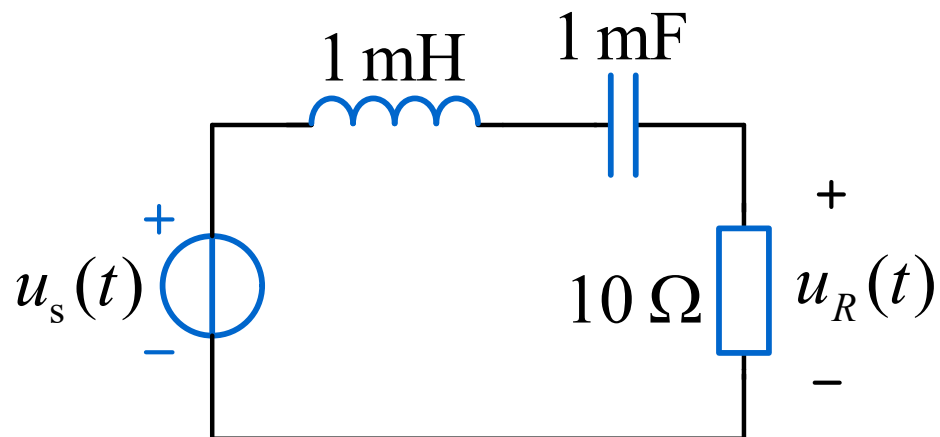
$$= 0.5\sqrt{2} \cos(1000t + 45^\circ) + \frac{\sqrt{5}}{5} \cos(2000t + 26.57^\circ) \text{ V}$$



15.2 非正弦周期电路的计算——与谐振滤波相关的计算

例题3 (基础)

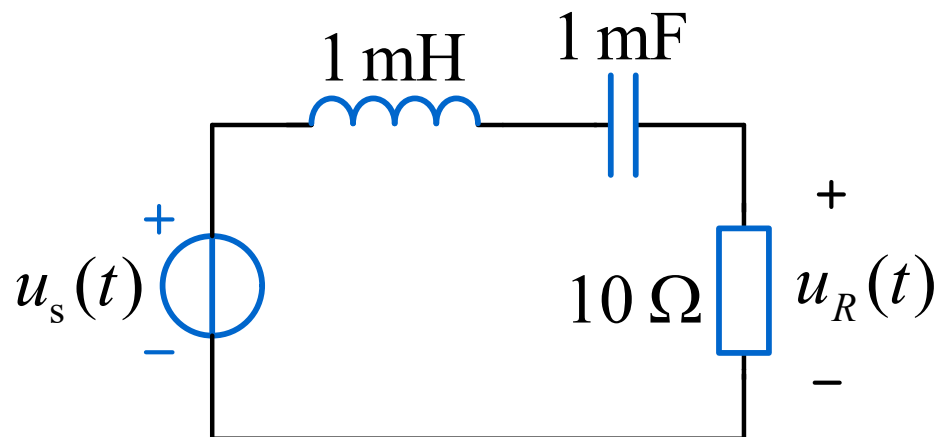
已知 $u_s(t) = 20 + 10\cos 1000t$ V, 求 $u_R(t)$ 。



15.2 非正弦周期电路的计算——与谐振滤波相关的计算

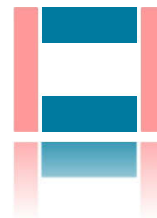
例题3 (基础)

已知 $u_s(t) = 20 + 10\cos 1000t$ V, 求 $u_R(t)$ 。



串联谐振角频率: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000\text{ rad/s}$

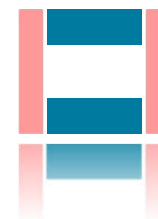
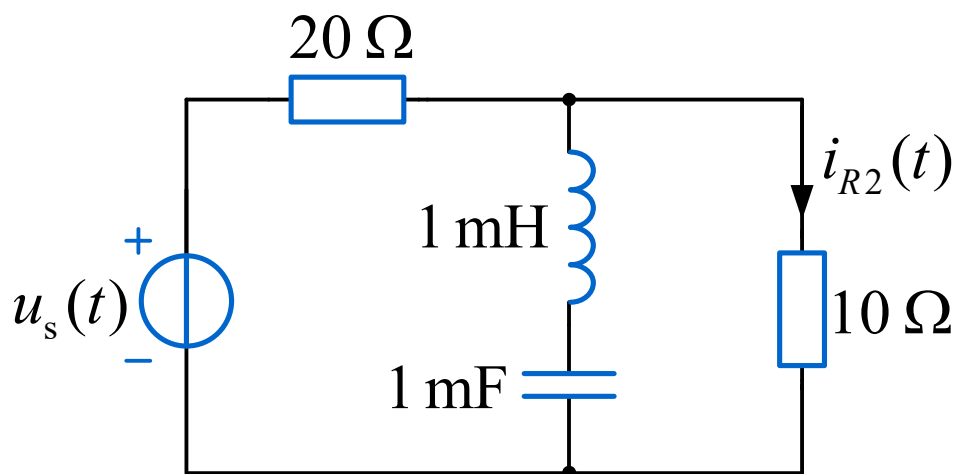
$$u_R(t) = u_R^{(0)} + u_R^{(1)} = 0 + 10\cos 1000t = 10\cos 1000t\text{ V}$$



15.2 非正弦周期电路的计算——与谐振滤波相关的计算

同步练习题3（基础）

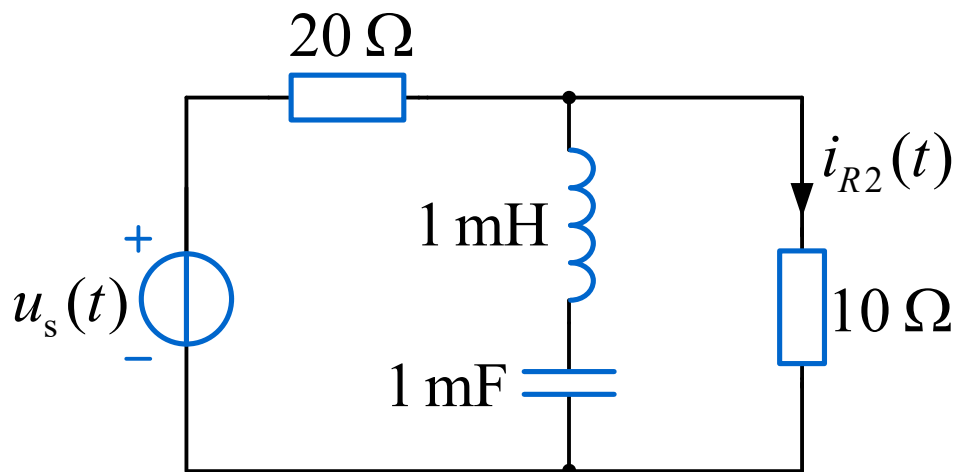
已知 $u_s(t) = 60 + 30\cos 1000t$ V，求 $i_{R2}(t)$ 。



15.2 非正弦周期电路的计算——与谐振滤波相关的计算

同步练习题3（基础）

已知 $u_s(t) = 60 + 30\cos 1000t$ V，求 $i_{R2}(t)$ 。



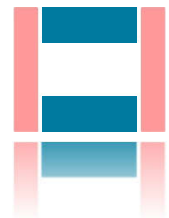
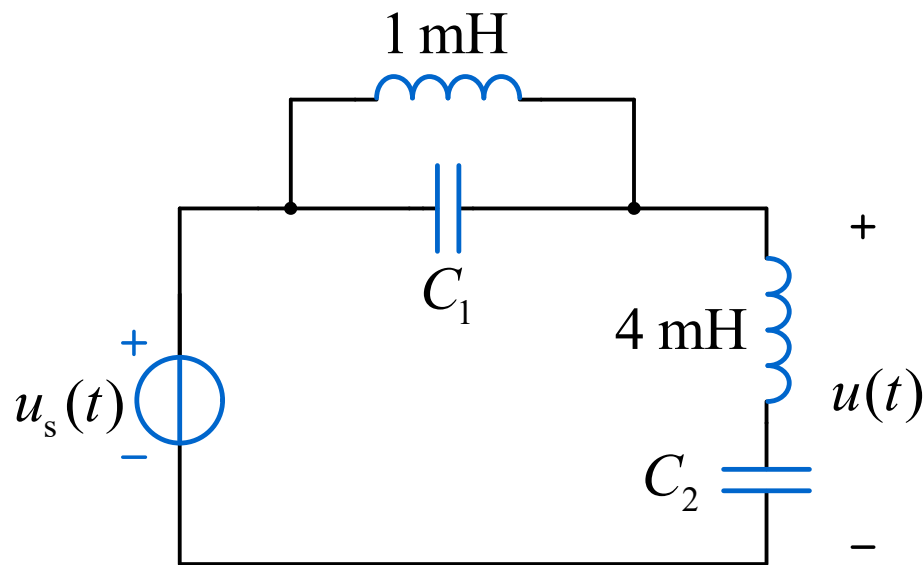
答案： $i_{R2}(t) = 2\text{ A}$

15.2 非正弦周期电路的计算

例题4 (提高)

已知 $u_s(t) = 20 + 10\cos 1000t + 5\cos 2000t$ V,

$u(t) = 20$ V, 求 C_1 和 C_2 。

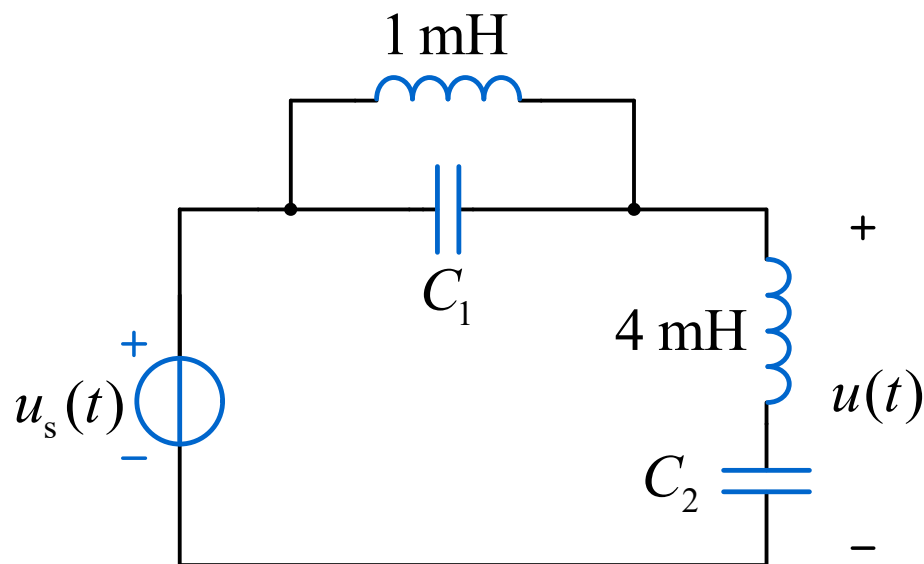


15.2 非正弦周期电路的计算

例题4 (提高)

已知 $u_s(t) = 20 + 10\cos 1000t + 5\cos 2000t$ V,

$u(t) = 20$ V, 求 C_1 和 C_2 。



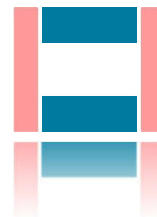
$$\frac{1}{\sqrt{1 \times 10^{-3} C_1}} = 1000 \text{ (串联谐振)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-3} C_2}} = 2000 \text{ (并联谐振)}$$

$$C_1 = 1\text{ mF} \quad C_2 = \frac{1}{16}\text{ mF}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \times 10^{-3} C_1}} = 2000 \text{ (串联谐振)}$$

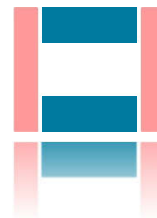
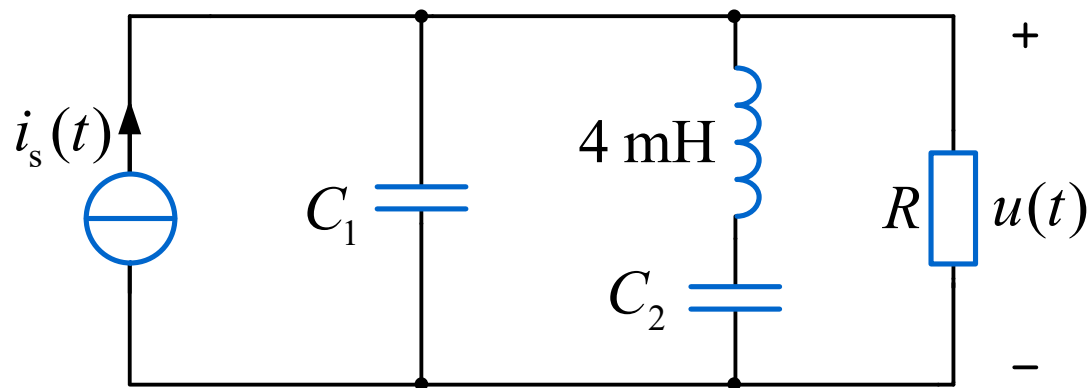
$$\frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-3} C_2}} = 1000 \text{ (并联谐振)} \quad C_1 = \frac{1}{4}\text{ mF} \quad C_2 = \frac{1}{4}\text{ mF}$$



15.2 非正弦周期电路的计算

同步练习题4 (提高)

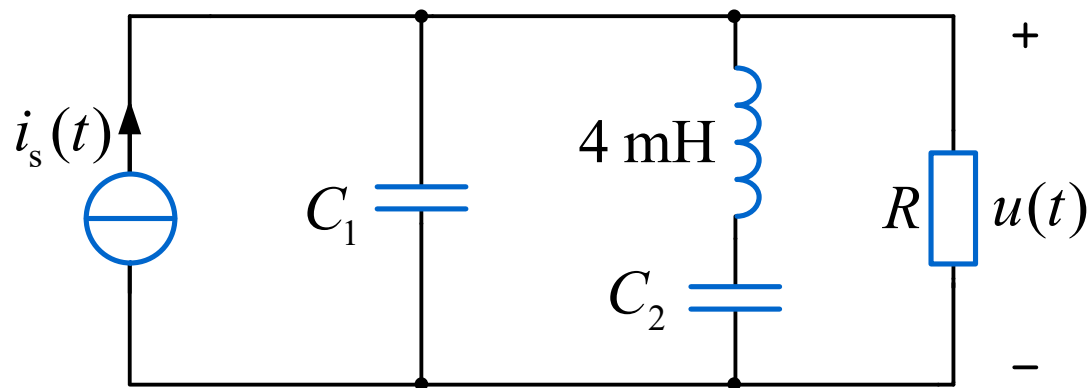
已知 $i_s(t) = 2 + \cos 1000t + 0.5 \cos 2000t$ A,
 $u(t) = 20$ V, 求 R 、 C_1 和 C_2 。



15.2 非正弦周期电路的计算

同步练习题4 (提高)

已知 $i_s(t) = 2 + \cos 1000t + 0.5 \cos 2000t$ A,
 $u(t) = 20$ V, 求 R 、 C_1 和 C_2 。



答案: $R = 10 \Omega$, $C_1 = \frac{1}{4} \text{ mF}$, $C_2 = \frac{1}{12} \text{ mF}$

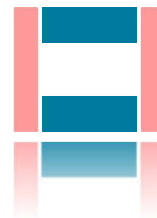
15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——有效值

非正弦周期电路的有效值定义与正弦量有效值定义相同：

恒定值为有效值的直流激励在电阻上一个周期内消耗的能量等于一个周期内非正弦周期激励在电阻上消耗的能量。

$$\frac{U^2}{R}T = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$



15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——有效值

非正弦周期电路的有效值表达式

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos \left(n\omega_0 t + \arctan \frac{-b_n}{a_n} \right) \right]$$

$$= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{2} U_n \cos \left(n\omega_0 t + \arctan \frac{-b_n}{a_n} \right) \right]$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left\{ U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{2} U_n \cos \left(n\omega_0 t + \arctan \frac{-b_n}{a_n} \right) \right] \right\}^2 dt}$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}$$

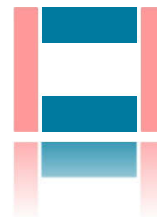
同理，非正弦周期电流有效值 $I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$



15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——有效值

例题5 (基础)

已知 $i(t) = 2 + \cos 1000t + 0.5 \cos 3000t$ V,
求电流有效值 I 。



15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——有效值

例题5 (基础)

已知 $i(t) = 2 + \cos 1000t + 0.5 \cos 3000t$ V,
求电流有效值 I 。

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 2.092 \text{ A}$$

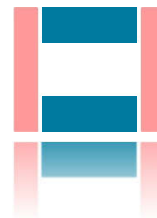




15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——有效值

同步练习题5（基础）

已知 $u(t) = 5 + 10\cos 200t + 5\cos 400t$ V,
求电压有效值 U 。



15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——有效值

同步练习题5（基础）

已知 $u(t) = 5 + 10\cos 200t + 5\cos 400t$ V,
求电压有效值 U 。

答案： $U \approx 9.083$ V

15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——平均功率

非正弦周期电路的平均功率定义与正弦交流电路的平均功率

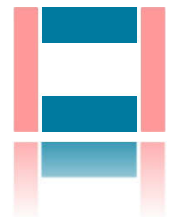
定义相同：即瞬时功率在一个周期内的平均值

$$P = \int_0^T u(t)i(t)dt$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{2}U_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_{u_n}) \right]$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{2}I_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_{i_n}) \right]$$

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[U_n I_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n}) \right] = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$



15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——平均功率

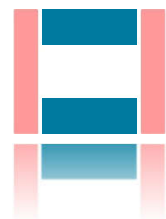
非正弦周期电路电阻的平均功率表达式

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [U_n I_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n})] = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$U_n = R I_n \quad \varphi_{u_n} - \varphi_{i_n} = 0$$

$$P_R = \left(I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \right) \times R = \frac{\left(U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 \right)}{R} = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

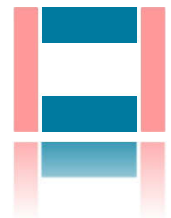
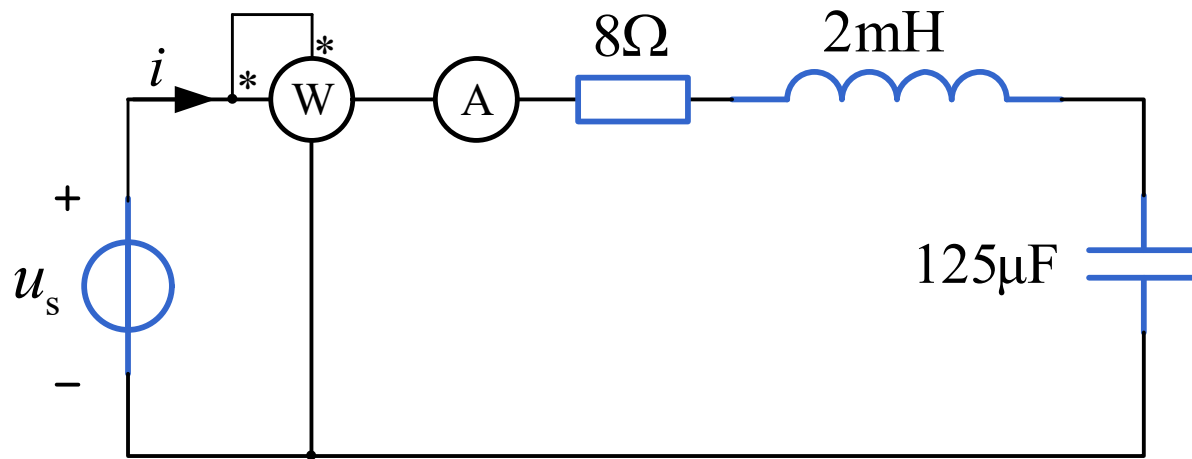
电感和电容的电压与电流相位差分别为90度和-90度，
因此，非正弦周期电路电感和电容的平均功率为零



15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——平均功率

例题6 (提高)

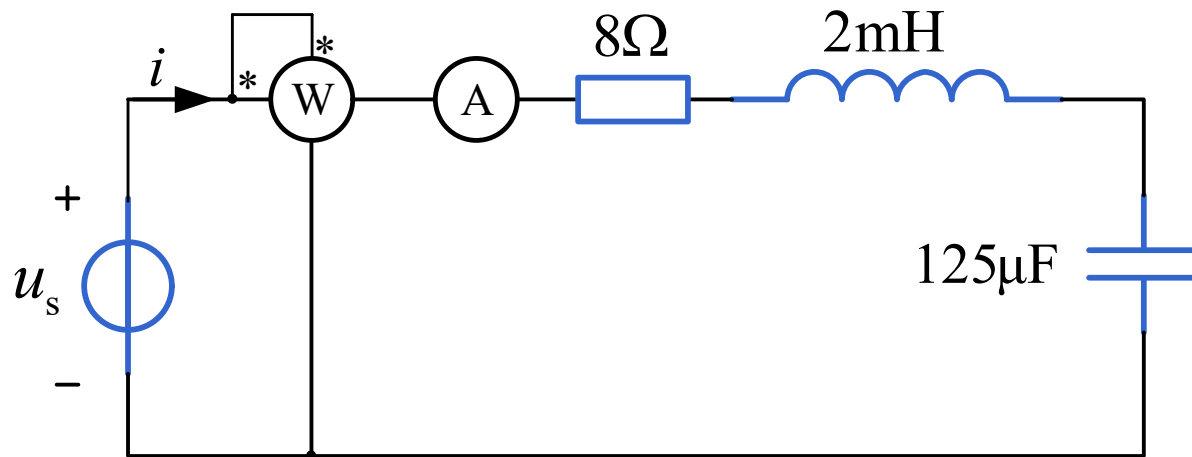
已知 $u_s(t) = 10 + 5\cos(1000t + 60^\circ) + 2.5\cos 2000t$ V,
求交流电流表和功率表的读数。



15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——平均功率

例题6 (提高)

已知 $u_s(t) = 10 + 5\cos(1000t + 60^\circ) + 2.5\cos 2000t$ V,
求交流电流表和功率表的读数。



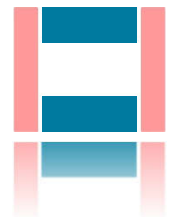
交流电流表读数
为电流有效值 I ,
功率表的读数
为平均功率 P 。

$$i^{(0)}(t) = 0 \text{ A}$$

$$\dot{I}^{(1)} = \frac{\dot{U}_s^{(1)}}{Z_{eq}^{(1)}} = \frac{5 / \sqrt{2} \angle 60^\circ}{8 - j6} = \frac{\sqrt{2}}{4} \angle 96.9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}^{(2)} = \frac{\dot{U}_s^{(2)}}{Z_{eq}^{(2)}} = \frac{2.5 / \sqrt{2}}{8 + j4 - j4} = \frac{5\sqrt{2}}{32} \angle 0^\circ \text{ A}$$

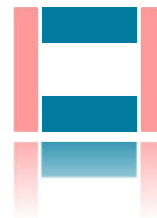
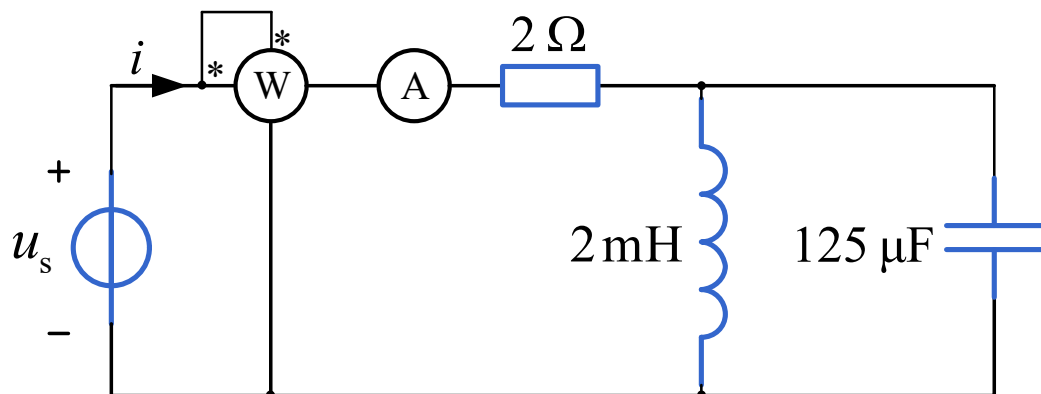
$$I = \sqrt{[I^{(0)}]^2 + [I^{(1)}]^2 + [I^{(2)}]^2} \approx 0.417 \text{ A} \quad P = I^2 R \approx 1.391 \text{ W}$$



15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——平均功率

同步练习题6 (提高)

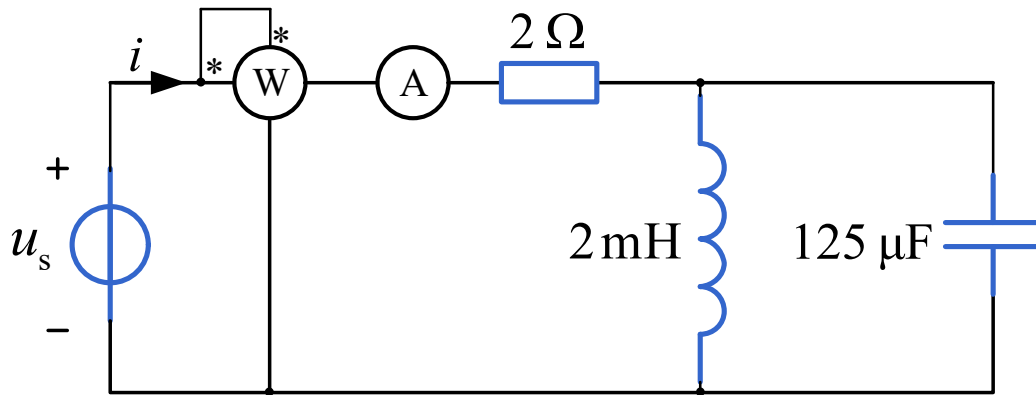
已知 $u_s(t) = 2 + 5\cos(1000t + 60^\circ) + 2.5\cos 2000t$ V,
求交流电流表和功率表的读数。



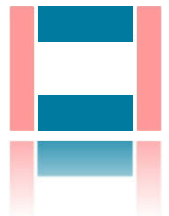
15.3 非正弦周期电路的有效值和平均功率——平均功率

同步练习题6 (提高)

已知 $u_s(t) = 2 + 5\cos(1000t + 60^\circ) + 2.5\cos 2000t$ V,
求交流电流表和功率表的读数。



答案： 电流表读数 $I \approx 1.458$ A , 功率表读数 $P = 4.25$ W



15 非正弦周期电路——小结

- 非正弦周期信号可以用展开的傅里叶级数表示
- 非正弦周期电路计算的步骤：先分解；在再叠加
- 傅里叶级数各次谐波（不同频率的正弦分量）单独作用时，需要根据相量法计算，然后再将相量形式变换回时域形式
- 非正弦周期信号的有效值即方均根值， $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$ ，即先平方、再积分求平均，最后开根号
- 非正弦周期信号的有效值等于各分量有效值的平方和开根号

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}$$

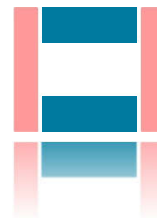
$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

- 非正弦周期电路的平均功率等于各分量平均功率之和

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [U_n I_n \cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n})]$$

电容和电感平均功率为零，电阻平均功率

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$



感谢大家聆听

主讲人：邹建龙

时 间： 年 月 日

