期中考试模拟题（五）解答 20220423

一 D B A C A

二 1. $\dfrac{7}{15}$，$\dfrac{14}{15}$，$\dfrac{7}{15}$ 2. $2a+3b=4$ 3. 0.52 4. e^{-4} 5. $\Phi(1)$

三. 用 $A_i\,(i=1,2,3)$ 表示第 i 门炮命中， B 表示命中目标.

（1） $P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=1-0.6\cdot 0.5\cdot 0.4=0.88$

（2）用 C 表示两门炮命中目标，则

$$P(C)=P(A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup \bar{A}_1A_2A_3)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)$$

$$=0.4\times 0.5\times 0.4+0.4\times 0.5\times 0.6+0.6\times 0.5\times 0.6=0.38$$

$$P(A_1C)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)=0.4\times 0.5\times 0.4+0.4\times 0.5\times 0.4=0.2$$

$$P(A_1\,|\,C)=\frac{P(A_1C)}{P(C)}=\frac{10}{19}$$

四 （1） $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}\mathrm{d}x=2A$，解得 $A=\dfrac{1}{2}$

（2） $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$

当 $x\le 0$， $F(x)=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}e^{x}$ 当 $x>0$， $F(x)=\dfrac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}e^{t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}e^{-t}\mathrm{d}t)=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$

（3） $f_Y(y)=\dfrac{1}{2}f(-\dfrac{1}{2}y)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|y|},-\infty<y<+\infty$

五 （1） $P(X=-1,Y=1)=P(X=-1)=0.25$

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)=0.25$， $P(X=0,Y=0)=P(X=0)=0.5$

（2） $P\{X=0\,|\,X+Y=0\}=\dfrac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{X+Y=0\}}=\dfrac{0.5}{0.25+0.5}=\dfrac{2}{3}$

（3） $Z=XY=X^3$， $E(XY)=0,\ D(XY)=0.5$

六（14 分）(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 24(1-x)y\mathrm{d}y=12(1-x)x^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 24(1-x)y\mathrm{d}x=12(1-y)^2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（2）在 $0\le y\le x\le 1$ 内， $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立。

（3） $P\{3Y\le X\}=\iint\limits_{3y\le x} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{3}x} 24(1-x)ydy=\dfrac{1}{9}$

（4）当$0<y<1$， $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2(1-x)}{(1-y)^2}, & y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

七 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} & x\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} & y\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

（1）若$z\le 0$， $f_Z(z)=0$

（2）若$z>0$， $f_Z(z)=\int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)}dx=\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\int_0^z e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}dx$

若$\lambda_1=\lambda_2=\lambda,$ $f_Z(z)=\lambda^2 z e^{-\lambda z}$；若$\lambda_1\ne\lambda_2,$ $f_Z(z)=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z})$

八 （1）收到一条微信相当于做一次伯努利试验，遇到广告是试验成功。

若$[0,t]$内收到了n条微信，则其中的广告微信数$Y\sim B(n,p)$

或 $P\{Y=k\,|\,X=n\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n.$

（2）若 $Y\sim B(n,p)$， $\dfrac{P\{Y=k\}}{P\{Y=k-1\}}=\dfrac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}=\dfrac{(n-k+1)p}{k(1-p)}\ge 1$，解得 $k\le(n+1)p$，故当$k=[(n+1)p]$时$P\{Y=k\}$的概率最大。由于$n=8,\ p=0.35$，故 $k=[(8+1)\cdot 0.35]=3$，即8条微信中有3条是广告的概率最大。

（3）对$k=0,1,2,\ldots$， $P\{Y=k\}=\sum\limits_{n=k}^{\infty}P\{X=n,Y=k\}=\sum\limits_{n=k}^{\infty}P\{X=n\}P\{Y=k\,|\,X=n\}$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$

（4） $X\sim P(\lambda)$， $Y\sim P(\lambda p)$，类似第三问的方法可得$Z\sim P(\lambda(1-p))$，且$Z=X-Y$.

$P\{Y=k,Z=j\}=P\{Y=k,X=k+j\}=P\{X=k+j\}P\{Y=k\,|\,X=k+j\}$

$$=\frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!}e^{-\lambda}\cdot C_{k+j}^k p^k(1-p)^j=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}\frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}e^{-\lambda(1-p)}=P\{Y=k\}P\{Z=j\}$$

故Y,Z相互独立。