第二部分　导数概念、求导法则、导数的应用

重点

1. 导数定义

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. 导数的几何意义

3. 可导与连续的关系

4. 微分

定义（微分） 如果 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可微**，称 $A\Delta x$ 为微分，记为

$$\mathrm{d}\,y = A\Delta x$$

可导与可微的关系

5. 求导（微分）法则

设$y = \arcsin 2x + \dfrac{\sin x}{x} + x^x$,求$\mathrm{d}\,y$.

6. 四大微分中值定理

重点：理解每个定理的条件、结论和作用

罗尔定理

拉格朗日中值定理

柯西中值定理

定理1（皮亚诺型余项泰勒公式）

设 $f(x)$ 在 x_0 点 n 阶可导, 那么

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n}$$

麦克劳林公式

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o\left(x^n\right)}$$

定理2（拉格朗日型余项泰勒公式）

设 $f(x)$ 在含 x_0 的区间 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导，那么对 $\forall x\in(a,b)$, 至少存在一个 ξ, 使

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 在 x_0 与 x 之间.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

总结： 1. **本质：** 用多项式逼近 $f(x)$ ；用已知点的信息表示未知点。

2. Peano：定性；Lagrange：定量.

3. Peano：局部（求极限，求极值），
Lagrange：整体（求最值，证明不等式）

4. Lagrange定理是Taylor定理的特例.

5. 哪个点的信息多，哪个选为 x_0 .

四大中值定理

前三个建立 $f(x)$ 与一阶导数的关系；

Taylor建立 $f(x)$ 与高阶导数之间的关系。

几个初等函数的Maclaurin公式

$$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)}$$

1） $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

2）$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$

3）$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$

4） $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

5） $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

7.导数应用

1. 函数的单调性

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

1）若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增；

2）若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减；

2. 函数的单调性的应用

1）证明不等式

2）方程根的存在性

如果在区间 I 上严格单调 $\Rightarrow f(x)=0$ 在 I 上至多有一个实根.

如果在区间 I 上 $f(x)$ n 阶可导，且 $f^{(n)}(x)\neq 0$

$\Rightarrow f(x)=0$ 在 I 上至多有 n 个实根.

3. 函数的极值与最值

1. 极值是局部概念、最值是整体概念

【例】已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且

$$f(0)=0, \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2,$$ 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ 【　　】

（A）不可导.　　　　（B）可导，且 $f'(0)\neq 0$.

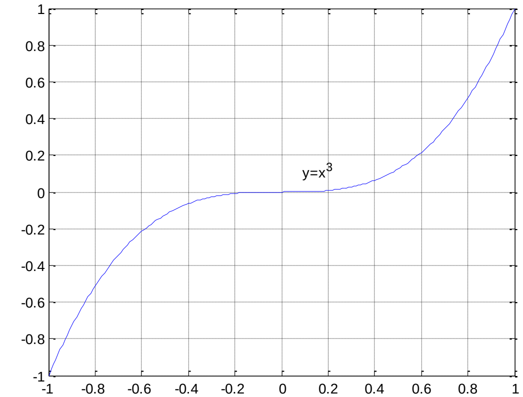
（C）取得极大值.　　（D）取得极小值.

2. 极值的判定：1个必要条件（Fermat定理），

3个充分条件（教材P157-158）

3. 最值的求法：端点和极值可疑点（驻点和不可导点）

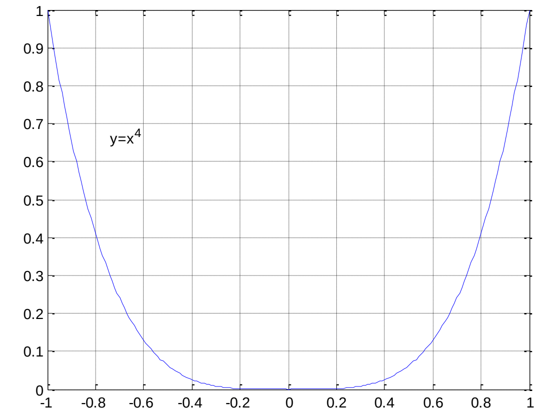
4. 曲线的凹凸性



定义 凹（凸） $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<(>)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

定理1 若在区间 I 上 $f''(x)>0(<0)$

则曲线 $y=f(x)$ 在 I 上是凹（凸）的。



定义（拐点）：凹凸区间的分界点.

定理2（拐点的必要条件）

如果函数$f(x)$在x_0二阶可导，且$(x_0, f(x_0))$是拐点，则$f''(x_0)=0$.

定理3（拐点的充分条件）

1. 如果函数$f(x)$在x_0连续，且曲线在经过x_0点时，则$f''(x)$符号发生改变，则$(x_0,\ f(x_0))$为曲线的拐点.

2. 如果函数$f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0$，则$(x_0,\ f(x_0))$为曲线的拐点.

8. 概念辨析

1.如果$f(x)$在x_0处连续，是否在x_0的邻域内连续？

$$f(x)=\begin{cases} x, x\in Q \\ 0, x\notin Q \end{cases}$$

2.如果$f(x)$在x_0处可导，是否在x_0的邻域内连续？

$$f(x)=\begin{cases} x^2, x\in Q \\ 0, x\notin Q \end{cases}$$

3.如果$f(x)$在x_0处左右导数都存在，那么函数在x_0处是否连续？

$f(x)$在x_0处连续.

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0 \Rightarrow \text{左连续}$$

同理，可以得到右连续

4.如果$f(x)$在(a,b)上可导，其导函数$f'(x)$是否在上一定连续?

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, \qquad x=0 \end{cases}$$

5. $f'_+(x_0)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$有区别吗?

上例中，$f'_+(0)$=0，但$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$不存在.

6. 区间上的导函数是否存在第一类间断点?

不存在.假设$f'(x)$有第一类间断点x_0,则$\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$存在，

$\because f(x)$在x_0处可导，故在x_0连续

$$\therefore f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x) \qquad \therefore f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

$\therefore$导函数在x_0连续，矛盾!

9. 典型例题选讲

1. 设$f(x)$在$x=0$处连续，下列命题错误的是（　　）

(A)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则$f(0)=0$；(B)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则$f(0)=0$；

(C)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则$f'(0)$存在；

(D)若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则$f'(0)$存在.

2. （17）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$, 求 $f'(1)$.

分析：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2 \Rightarrow f(1)-3f(1)=0 \Rightarrow f\left(1\right)=0$$

$$f'\left(1\right)=\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h}$$

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-f(1)+3f(1)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(e^{x^2}\right)-f(1)}{e^{x^2}-1}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\quad -3\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+\sin^2 x\right)-f\left(1\right)}{\sin^2 x}\frac{\sin^2 x}{x^2}\Rightarrow f'\left(1\right)=-1$$

3.设$f\left(x\right)=\sin(x^3)$,则$f^{15}(0)=$ ______

分析:

$$f(x)=f\left(0\right)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(15)}(0)}{15!}x^{15}+R$$

$$\sin(x^3)=x^3-\frac{1}{3!}\left(x^3\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x^3\right)^5+R$$

$$\frac{1}{5!}=\frac{f^{(15)}\left(0\right)}{15!}\quad\Rightarrow f^{(15)}\left(0\right)=\frac{15!}{5!}$$

4. 设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$所确定，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

分析：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=y'_t\frac{1}{x'_t}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'_t\frac{1}{x'(t)}=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}$$

$$x'(t)=6t+2 \qquad x''(t)=6 \quad \Rightarrow x'(0)=2, x''(0)=6$$

$$\left.\begin{aligned} e^y\sin t-y+1=0 \ \Rightarrow e^y y'(t)\sin t+e^y\cos t-y'(t)=0 \\ e^y\sin t-y+1=0\Rightarrow t=0, y=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow y'(0)=e$$

$$e^y[y'(t)]^2\sin t+e^y y''(t)\sin t+2e^y y'(t)\cos t-e^y\sin t-y''(t)=0$$

$$\Rightarrow y''(0)=e^2$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{2e^2-3e}{4}$$

5. 曲线 $y=(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$ 的拐点是

(A) $(1,0)$ (B) $(2,0)$ (C) $(3,0)$ (D) $(4,0)$

预判：

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)^3}=A\neq 0$$

$$\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)^3}=A+\alpha \Rightarrow f(x)-f(2)=A(x-2)^3+o(x-2)^3$$

$$\because f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{1}{2!}f''(2)(x-2)^2+\frac{1}{3!}f'''(2)(x-2)^3+o(x-2)^3$$

$$\therefore f''(2)=0,\ f'''(2)\neq 0$$

6.（2012年1, 2, 3）证明： $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

分析： $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0 \quad (0\le x<1)$ 偶函数

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}=x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$$

$$=x[x-\frac{1}{2}x^2+R_1(x)-(-x-\frac{1}{2}x^2+R_2(x))]=2x^2+xR_1(x)-xR_2(x)$$

$$\cos x-1-\frac{x^2}{2}=1-\frac{1}{2}x^2+R(x)-1-\frac{1}{2}x^2 \quad =-x^2+R(x)$$

$$\left.\begin{aligned}&g(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}-2x \qquad g(0)=0\\&g'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-2=\frac{2}{1-x^2}-2>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(x)\ge 0$$

即$x\ln\frac{1+x}{1-x}\ge 2x^2$

$$\left.\begin{aligned}&h(x)=\cos x-1-\frac{x^2}{2}+x^2 \qquad h(0)=0\\&h'(x)=-\sin x+x>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow h(x)\ge 0$$

即$\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge -x^2$

7. 设$f(x)$三阶可导，且$f(-1)=0,\ f(1)=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,试证存在一点$\eta\in$（$-1,1$），使得$f'''(\eta)\geq 3$.

分析:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\text{存在}\Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=0 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)x^3$$

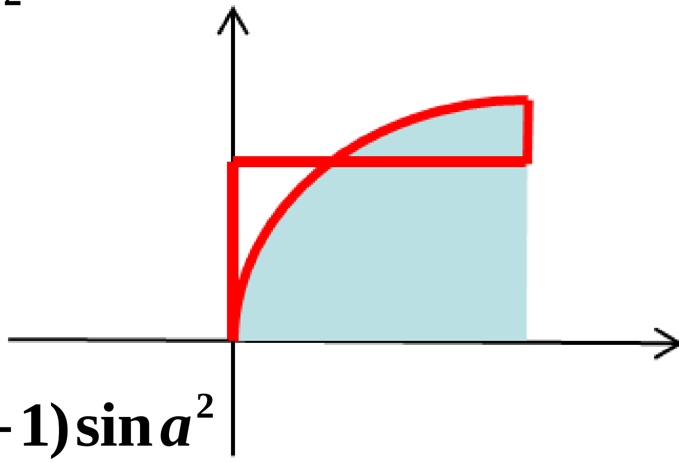
$$\left.\begin{aligned} f(-1)&=\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)=0 \\ f(1)&=\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$$

令$f'''(\eta)=\max\{f'''(\xi_1), f'''(\xi_2)\}$

$$\Rightarrow 2f'''(\eta)\geq f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$$

故存在一点$\eta\in$（$-1,1$），使得$f'''(\eta)\geq 3$.

8. 在曲线$y=\sin x^2\left(0\le x\le 1\right)$上取点$A(a,\sin a^2)(0\le a\le 1)$，过点$A$作平行于$ox$轴的直线$L$，由直线$L$，$oy$轴及曲线$y=\sin x^2(0\le x\le a)$所围的图形面积记作$S_1$，由直线$L$，直线$x=1$及曲线$y=\sin x^2(a\le x\le 1)$所围的图形面积记作$S_2$，问$a$为何值时，$S=S_1+S_2$取得最小值？



分析：

$$S_1=a\sin a^2-\int_0^a \sin x^2 dx$$

$$S_2=\int_a^1 \sin x^2 dx-(1-a)\sin a^2$$

$$S=S_1+S_2=\int_a^1 \sin x^2 dx-\int_0^a \sin x^2 dx+(2a-1)\sin a^2$$

$$S'\left(a\right)=-\sin a^2-\sin a^2+2\sin a^2+(2a-1)\cos a^2\bullet 2a$$

驻点为$a=\frac{1}{2}$　　　$\therefore a=\frac{1}{2}$时，S取得极小值.

$a<\frac{1}{2},S'(a)<0;a>\frac{1}{2},S'(a)>0$　由题意知，$a=\frac{1}{2}$时，S取得最小值.

9.设函数$f''(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$,记$\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$,

求$\varphi(x)$在$x=1$的某个邻域内的导数，并讨论$\varphi'(x)$在$x=1$的连续性.

分析: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow f(1)=f'(1)=0$

$$\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt \overset{1+(x-1)t=u}{=} \int_1^x f'(u)\frac{1}{x-1}du$$

$$=\frac{1}{x-1}\int_1^x f'(u)du = \frac{f(x)}{x-1}$$ 另，$\varphi(1)=0$

$$x\neq 1\text{时},\varphi'(x)=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}$$

$$x=1\text{时},\varphi'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}f''(1)$$

$$x \neq 1\text{时},\varphi'(x)=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}$$

$$x=1\text{时},\varphi'(1)=\lim_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}f''(1)$$

$$\lim_{x\to1}\varphi'(x)=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)(x-1)-f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)(x-1)}{(x-1)^2}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=f''(1)-\frac{1}{2}f''(1)=\frac{1}{2}f''(1)$$

所以$\varphi'(x)$在$x=1$连续.

10.设$f(x)$在$[a,b]$上可导$(a>0,b>0)$, 且满足方程

$$2\int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{\lambda(x^2-b^2)} f(x)dx=(b-a)f(b)$$

证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$2\lambda\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$

分析： $F(x)=e^{\lambda x^2}f(x)$

$$\frac{2}{(b-a)}\int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{\lambda x^2} f(x)dx=e^{\lambda b^2}f(b)=F(b)$$

$$\frac{2}{(b-a)}\int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{\lambda x^2} f(x)dx=\frac{2}{(b-a)}\frac{b-a}{2}e^{\lambda c^2}f(c)=F(c)$$

$F(b)=F(c)$,根据罗尔定理即证