

第一章 行列式

第1.2节 行列式的计算

曹相湧

数学与统计学院

Email: caoxiangyong@xjtu.edu.cn

上节回顾

- 2阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

- n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

余子式

行列式的基本性质

性质1 行列式与它的转置行列式**相等**，即 $D^T = D$

性质2 **互换**行列式的**任意两行**(列)的位置, 行列式的值**反号** $r_i \leftrightarrow r_j \ (c_i \leftrightarrow c_j)$

性质3 行列式 D 等于它的**任一行**(列)各元素分别与其对应的代数余子式的乘积之和

性质4 行列式的**某一行**(列)中所有的元素都**乘以数 k** ，等于用数 k 乘此行列式 $kr_i \ (kc_i)$

性质5 若行列式的**某一行**(列)的元素都是**两数之和**, 则可将此行列式写成两个行列式的和

性质6 若行列式 D 有**两行**(列)的对应元素**相等**, 则 $D = 0$

性质7 把行列式的**某一行**(列)的各元素**乘以同一数**然后**加到另一行**(列)对应的元素上去, 行列式不变

$$r_i + kr_j \quad (c_i + kc_j)$$

性质8 行列式的**任一行**(列)各元素与**另一行**(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于0; 即

$$\text{当 } i \neq k \text{ 时, } a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0$$

$$\text{当 } j \neq s \text{ 时, } a_{1j}A_{1s} + a_{2j}A_{2s} + \cdots + a_{nj}A_{ns} = 0$$

下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \prod a_{ii}$$

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \prod a_{ii}$$

副下三角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod a_{i,n-i+1}$$

副上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\ a_{n-1,n-1} & \vdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod a_{i,n-i+1}$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n;$$

副对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_1 d_2 \cdots d_n.$$

例1 若 A_{ij} 为 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 的 (i, j) 元素的代数余子式, 则 $A_{31} - 2A_{32} + 3A_{33} = ?$

解:

$$1A_{31} - 2A_{32} + 3A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

逆用性质3

例

设 M_{ij} 为行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

的 (i, j) 元素的余子式,

试计算 $M_{13} + 2M_{23} + 5M_{33}$.

解

$$M_{13} + 2M_{23} + 5M_{33} = (-1)^{1+3} M_{13} - 2(-1)^{2+3} M_{23} + 5(-1)^{3+3} M_{33}$$

$$= A_{13} - 2A_{23} + 5A_{33} + 0A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -105$$

例 已知 n 阶行列式 D 的值为 $a \neq 0$, 且 D 的每行元素之和都等于常数 b , 则 D 的第1列元素的代数余子式之和 $A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 利用行列式的性质, 将第 $2, \cdots, n$ 列都加到第1列, 再按第1列展开可得

$$D = b \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b(A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1}) = a.$$

$$\because a \neq 0, \therefore b \neq 0. \quad \therefore A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1} = \frac{a}{b}.$$

例2 若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$, 求以下行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 7$$

$$(2) \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ -3a & -3b & -3c \end{vmatrix} = 21$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{vmatrix} = 7$$

例3 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解法1:

$$\begin{aligned} D_n &= n(-1)^{n+n} M_{nn} \\ &= (-1)^{n+n} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!. \end{aligned}$$

解法2:

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! \\ &= (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} n! \end{aligned}$$

引入以下记号

行变换

$$r_i \leftrightarrow r_j$$

$$kr_i$$

$$r_i + kr_j$$

列变换

$$c_i \leftrightarrow c_j$$

$$kc_i$$

$$c_i + kc_j$$

例4

$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$$

行(列)变换性质

解:

$$D \xrightarrow{\underline{\underline{c_1 - c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 100 & 204 \\ -1 & 200 & 395 \\ 1 & 300 & 600 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{c_3 - 2c_2}}} \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{c_2 \div 100}}} 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{c_2 - 3c_1}}} 100 \begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{\underline{c_3 + c_2}}} 100 \begin{vmatrix} 3 & -8 & -4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 100 \cdot 20 = 2000$$

例5

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解: $D = 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (-6) \cdot (-7) = 42$$

降阶法：选择零元素较多的行或列来展开

4阶 \rightarrow 3阶 \rightarrow 2阶

例6

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 10 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$c_2 + c_1$
 $=$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 10 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$r_4 - 2r_3$
 $=$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 10 & 3 \\ -6 & 0 & -15 & -4 \end{vmatrix} = -1(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -6 & -15 & -4 \end{vmatrix}$$

$c_1 - c_3$

$c_2 - 3c_3$
 $=$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

降阶法：先利用性质7将行列式的某行(列)较多元素化为零，再按该行(列)来展开

4阶 \rightarrow 3阶 \rightarrow 2阶

行列式的计算方法

1. 直接用定义和性质3（非零元素很少时可用）

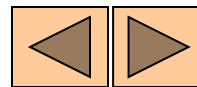
2. 化三角行列式法

利用性质，将原行列式化成一个三角行列式，再快速计算.

3. 降阶法

利用性质，将某行(列)的元素尽可能化为0，然后再按该行(列)展开.

$$n\text{阶} \rightarrow n-1\text{阶} \rightarrow \cdots \rightarrow 2\text{阶}$$



一些特殊行列式的计算

1. 奇数阶反对称行列式的值为零

$D = |a_{ij}|$ 为对称行列式 $\longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

是对称行列式

$D = |a_{ij}|$ 为反对称行列式 $\longleftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$ (必有 $a_{ii} = 0$)

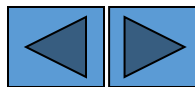
例

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

是反对称行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

不是反对称行列式



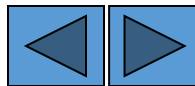
例 证明奇数阶反对称行列式的值为零

证

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{转置}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{各行提}-1} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

当n为奇数时有 $D = -D \Rightarrow D = 0$



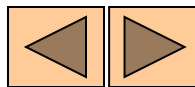
2. 主对角线非零的“箭形”行列式

例：

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ d_n & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

化成三角形行列式

$$\begin{array}{c} c_1 - \frac{d_i}{a_i} \times c_{i+1} \\ \hline \hline i=1,2,\cdots,n \end{array} \begin{vmatrix} a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{a_i} b_i & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & a_n \end{vmatrix} = (a_0 - \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{a_i} b_i) a_1 \cdots a_n$$



练习

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和.

解： 第一行各元素的代数余子式之和为

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n! \left(1 - \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \right).$$

3. 除对角线以外各行元素对应相同, 则可化成三角形 行列式或箭形行列式

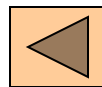
可化箭形行列式

例

$$\begin{vmatrix} x_1 - b & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 - a & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 - a & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 - a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\times (-1) \\ \text{row 2, 3, 4} \leftarrow \text{row 1}}} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^3 x_1$$

另

$$D = x_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 - a & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 - a & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_4 - a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-x_i c_1 + c_i \\ i=2,3,4}} x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$$



4. 某行（列）至多有两个非零元素的行列式，可用降阶法或定义或递推公式法或归纳法求解

例

$$D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

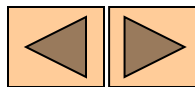
n 阶

按第一列展开

$$= a \begin{vmatrix} a & b & & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$n-1$ 阶 $n-1$ 阶

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n$$



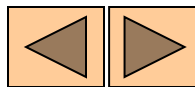
5. 各行(列)总和相等的行列式

例 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_i (i=2,3,\dots,n)}$

$$\begin{vmatrix} x + (n-1)y & y & y & \cdots & y \\ x + (n-1)y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x + (n-1)y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = [x + (n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1 + r_i (i=2,3,\dots,n)} [x + (n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$= [x + (n-1)y](x-y)^{n-1}$$



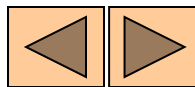
5. 各行(列)总和相等的行列式

例 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{c_1 + c_i (i = 2, 3, \dots, n)}}$

$$\begin{vmatrix} x + (n-1)y & y & y & \cdots & y \\ x + (n-1)y & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x + (n-1)y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} = [x + (n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & x & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x + (n-1)y] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$$

$$= [x + (n-1)y](x-y)^{n-1}$$



6. 范德蒙德 (Vander monde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$$\begin{aligned} &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \cdots (x_{n-1} - x_1)(x_n - x_1) \\ &\quad (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \cdots (x_{n-1} - x_2)(x_n - x_2) \\ &\quad (x_4 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_3)(x_n - x_3) \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad (x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_{n-2}) \\ &\quad (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

6. 范德蒙德 (Vander monde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

都是范德蒙行列式.

6. 范德蒙德 (Vander monde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

证明(数学归纳法)

1. 当 $n = 2$ 时, 有 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$, 结论成立
2. 假设对于 $n - 1$ 阶范德蒙行列式结论成立
下证对 n 阶范德蒙行列式结论也成立

6. 范德蒙德 (Vander monde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

从第 n 行开始，逐行减去上一行的 x_1 倍

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按第1列展开

6. 范德蒙德 (Vander monde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$$V_n = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$n-1$ 阶

6. 范德蒙德 (Vander monde) 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$V_n \neq 0 \Leftrightarrow$
 x_1, x_2, \dots, x_n 互不相等

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$n-1$ 阶

根据归纳假设有：

$$\begin{aligned} V_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \\ &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \end{aligned}$$

综上所述，结论成立 ($n \geq 2$)

例 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}.$$

解：每一行提取各行的公因子，得

$$D_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} = n! \prod_{n \geq i > j \geq 1} (i - j)$$

$$= n! (2-1)(3-1)(4-1) \cdots (n-1) \\ \cdot (3-2)(4-2) \cdots (n-2) \\ \cdot (4-3) \cdots (n-3) \\ \vdots \\ [n - (n-1)]$$

$$= n! (n-1)! (n-2)! \cdots 2! 1!.$$

n阶范德蒙行列式

7. 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

证明：（数学归纳法）记 $D_1 = \det(a_{ij})_{n \times n}$ $D_2 = \det(b_{ij})_{m \times m}$

则只需证 $D = D_1 D_2$

1. 当 $n = 1$ 时，将 D 按第 1 行展开

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} (-1)^{1+1} D_2 = D_1 D_2 \quad \text{结论成立}$$

7. 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

2. 假设对 $n-1$ 阶行列式 D_1 结论成立, 则当 D_1 为 n 阶行列式时, 记 D_1 的代数余子式为 A_{ij} , D 的代数余子式为 D_{ij} , 则 D 按第1行展开

$$D = \sum_{j=1}^n a_{1j} D_{1j}$$

$$D_{1j} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1,j-1} & c_{1,j+1} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m,j-1} & c_{m,j+1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$D_{1j} = A_{1j} D_2 \quad D = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} D_2 = D_1 D_2 \quad \text{结论成立}$$



例14: 证明

(三对角行列式)

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix} = \begin{cases} \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}, & \text{若 } p \neq q \\ (n+1)p^n, & \text{若 } p = q \end{cases}$$

其中 p 和 q 是 $x^2 - ax + bc = 0$ 的两个根.

证明: 把 D_n 按照第一行展开, 可得递推关系:

$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1} - bcD_{n-2} = (p+q)D_{n-1} - pqD_{n-2} \\ &= pD_{n-1} + q(D_{n-1} - pD_{n-2}) \end{aligned}$$

据此可得: $D_n - pD_{n-1} = q(D_{n-1} - pD_{n-2}) = q^2(D_{n-2} - pD_{n-3})$
 $= \cdots = q^{n-2}(D_2 - pD_1)$

又因为 $D_2 = a^2 - bc = (p+q)^2 - pq = p^2 + pq + q^2$,
 $D_1 = a = p + q$



所以 $D_n - pD_{n-1} = q^{n-2}(p^2 + pq + q^2 - p^2 - pq) = q^n$

同理 $D_n - qD_{n-1} = p^n$

当 $p \neq q$ 时,

$$D_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

当 $p = q$ 时,

$$D_n = pD_{n-1} + p^n = p(pD_{n-2} + p^{n-1}) + p^n = p^2D_{n-2} + 2p^n$$

$$= p^2(pD_{n-3} + p^{n-2}) + 2p^n = p^3D_{n-3} + 3p^n$$

\vdots

$$= p^{n-1}D_1 + (n-1)p^n = 2p^n + (n-1)p^n = (n+1)p^n$$

练习



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

$$D_5 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

解： 首先, 写出方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$, 求得它的根为 1, 3,
由于这两个根**不相等**, 所以由**例14结论**可知

$$D_5 = \frac{3^{5+1} - 1^{5+1}}{3 - 1} = 364$$

作业

习题1.2

(A) 1 (1) (2) (5), 2 (2), 3 (3), 4 (2) (4)
5, 6, 7 (1) (3)

(B) 1, 2 (2)