第二节　多元函数的极限与连续

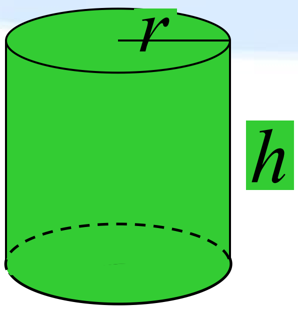
作业：P20　习题5.2（A）
1(1)(4)(5); 3(1)(3); 4(1); 5(1)(3); 6(2)(3); 8; 9; 10; 12.

2.1 多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

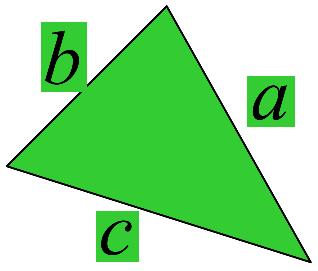
$$V = \pi r^2 h, \quad \{(r,h) \mid r>0, h>0\}$$



- 理想气体的压强

$$p = \frac{RT}{V} \ (R\text{为常数}), \quad \{(V,T) \mid V>0, T>T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c) \mid a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$

定义2. 1 设非空点集 $A \subseteq \mathbf{R}^n$，映射 $f: A \mapsto \mathbf{R}$ 称为定义在 A 上的一个 n 元数量值函数，简称 n 元函数，记作

$$w = f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

点集 $D(f)=A$ 称为 f 的定义域；

$R(f) = \{ w \mid w = f(x), x \in D(f) \}$ 称为 f 的值域.

特别地，当 $n = 2$ 时，有二元函数

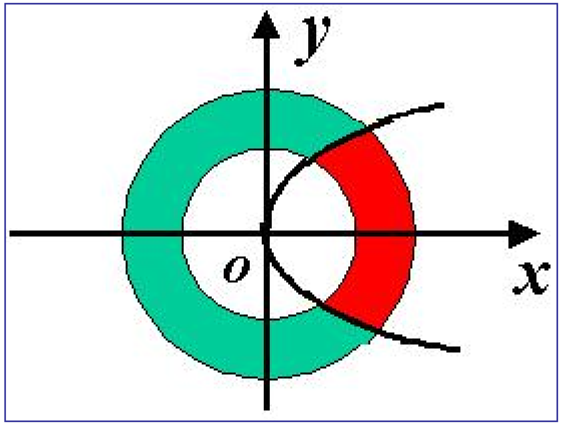
$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A \subseteq \mathbf{R}^2$$

当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in A \subseteq \mathbf{R}^3$$

例1 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解 $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$

所求定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$.

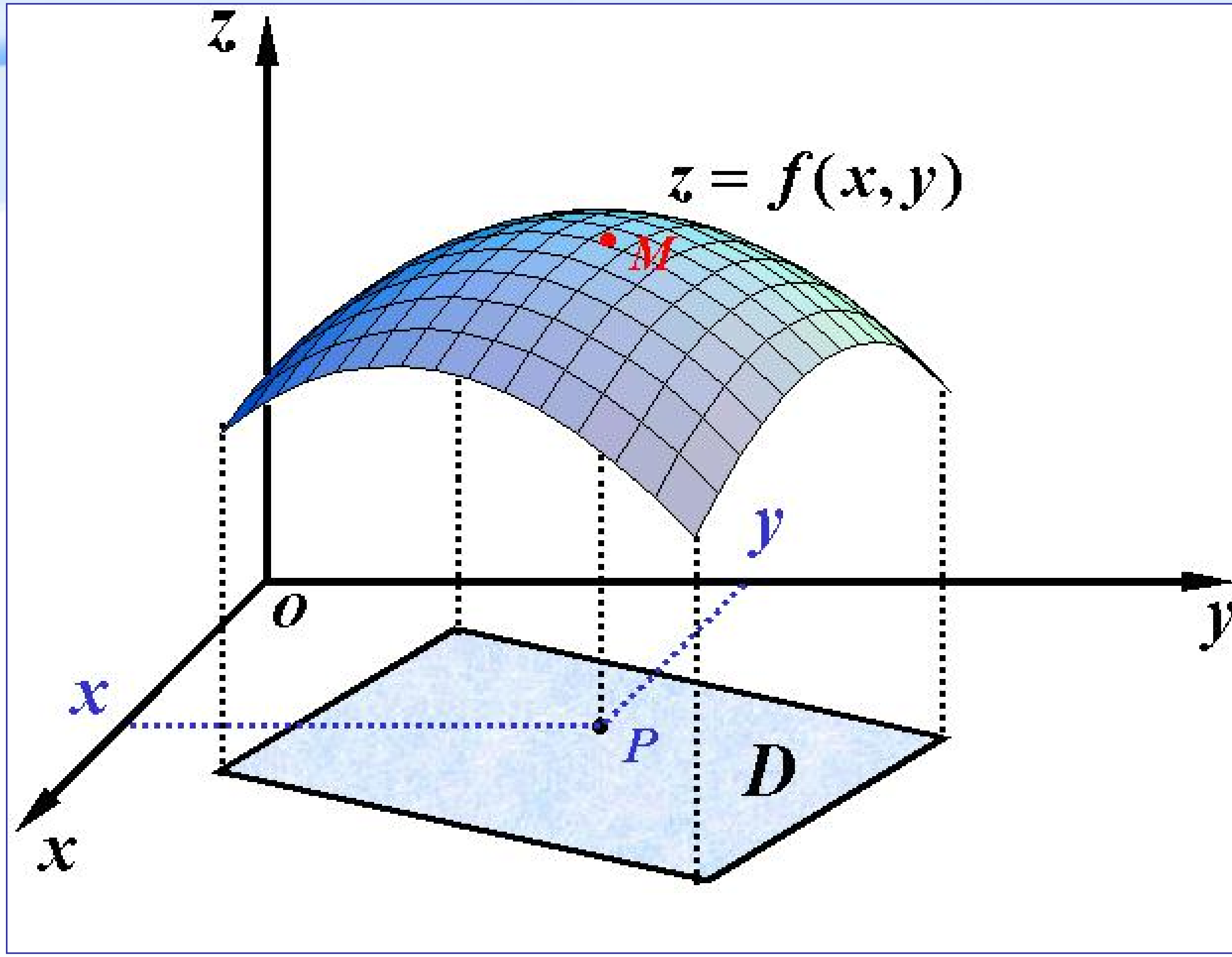
二元函数$z=f(x,y)$的图像

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D，对于任意取定的$(x,y)\in D$，对应的函数值为$z=f(x,y)$，这样，以x为横坐标、y为纵坐标、z为竖坐标在空间就确定一点$M(x,y,z)$.

当(x,y)取遍D上一切点时，得一个空间点集

$$\mathrm{Gr}f=\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

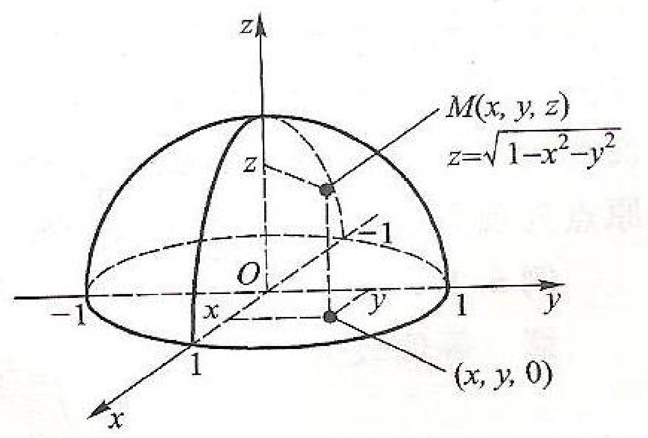
这个点集称为二元函数的图像.



二元函数的图像通常是3维空间的一张曲面.

曲面在xoy平面的投影区域就是f的定义域.

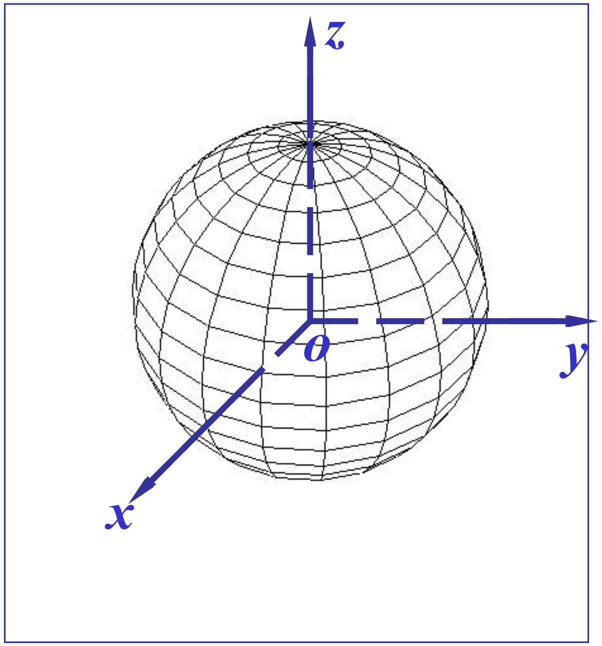
例如函数$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的图像是xoy面之上的上半球面



在xoy面上的投影域正是该函 数的定义域$A=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$.

例如$x^2+y^2+z^2=a^2$的图像是球面，它在xoy面上的投影域是该函数的定义域

$$A=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\le a^2\}.$$

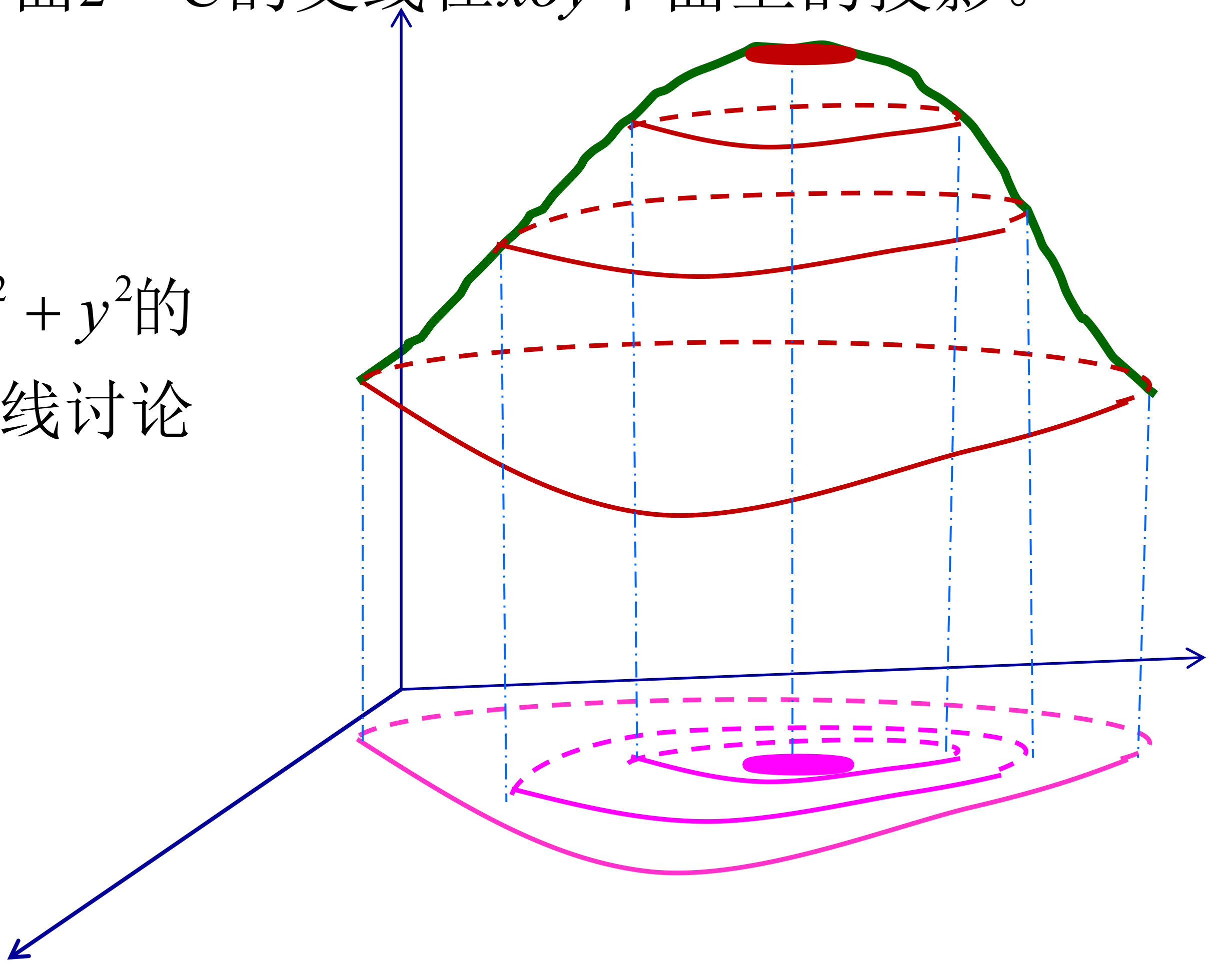


二元函数$z=f(x,y)$的等值线

等值线$f(x,y)=C$，其中C为常数。当C分别取不同值时，它表示xoy平面上的曲线族。每条 曲线表示空间曲面$z=f(x,y)$与空间平面$z=C$的交线在xoy平面上的投影。

例如等高线

例4　画出函数$z=x^2+y^2$的等值线,并由此等值线讨论此曲面的形状。



定义2.2 设 $A\subseteq \mathrm{R}^n$ 是一个点集, 称映射 $f: A\to \mathrm{R}^m\ (m\geq 2)$ 为定义在A上的一个**n元向量值函数**, 记作 $y=f(x), x\in A$,

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 是**自变量**,

$y=(y_1,y_2,\cdots y_m)\in \mathrm{R}^m$ 是**因变量**,

$f=(f_1,f_2,\cdots f_m)$.

一个n元向量值函数y=$f(x)$对应于m个n 元数量值函数:

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n). \end{cases} \qquad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$$

2.2 多元函数的极限与连续性

定义2.3(二重极限)

设$A\subseteq \mathbf{R}^2, f: A\to \mathbf{R}$ 是一个二元数量值函数，

(x_0, y_0) 是A的一个聚点，若$\exists a\in \mathbf{R}$，使得

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$(x, y)\in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta)\cap A$时，恒有

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon,$$

则称$(x, y)\to (x_0, y_0)$时$f(x, y)$有极限a，

记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = a.$

注：(1) 定义在形式上与一元函数的定义类似，因此，一元函数极限的性质(唯一性，局部有界性，局部保号性，夹逼准则等)和运算法则都可以推广过来；

注：(2) $(x,y)\in \overset{o}{U}((x_0,y_0),\delta)\Leftrightarrow$

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

(3) 定义中$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的方式是任意的；

若当点 $P(x,y)$ 以不同方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时，函数趋于不同值或有的极限不存在，则函数极限不存在.

例2. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解：设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0)， 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x}x^2}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同极限不同 ！

故 $f(x,y)$ 在 (0,0) 点极限不存在 .

例3. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$

证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

要证

证： $\because\ \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\sqrt{\varepsilon},$ 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时， 总有

$$\left|f(x,y)-0\right|\le x^2+y^2<\delta^2\ =\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例4. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

$|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$

证: $\because \left|f(x,y)-0\right| \le \left|x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right|$

$$\le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$

要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta=\varepsilon/2$，当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，总有

$$|f(x,y)-0|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

此函数定义域不包括 x, y 轴

解: $x^2y^2 \le \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2$，令 $r^2 = x^2+y^2$，则

$$\left|\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\right| \ge \frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$$

而 $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{4(1-\cos r^2)}{r^6} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r^4}{r^6} = \infty$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \infty$

$$\boxed{1-\cos r^2 \sim \frac{r^4}{2}}$$

例6. 求 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解：原式 $= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2 - 1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

定义2.4（二元连续函数）

一元连续函数

设函数$y=f(x)$在x_0的邻域内有定义

(1)如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$在$x_0$处连续.

(2)《$\varepsilon-\delta$》 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称函数$f(x)$在$x_0$处连续.

定义2.4（二元连续函数）

设二元函数$f(x,y)$定义在(x_0,y_0)的某一邻域$U(x_0,y_0)$内，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数f在(x_0,y_0)连续，否则称f在(x_0,y_0)间断.

若f中的区域D的每一点处连续，则称f在区域D连续，称f为D上的连续函数.

$\varepsilon-\delta$：

若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得$\forall(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta)\cap D$, 恒有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

例7 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在(0,0)处的连续性.

解 令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$

则 $$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\right|\leq 2\rho$$

从而 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2},$ 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|\leq 2\rho<2\delta=2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, 故函数在(0,0)处连续.

例8 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)的连续性.

解 取 $y=kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随k的不同而变化， 极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

注：二元连续函数的和，差，积，商（分母不为零的点）与复合仍为二元连续函数；

例如 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

定义域：$D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in R^2 且 x^2+y^2\neq 1\}$ 连续

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

***n*元数量值函数的极限：**

$$\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(x_{0,1},\cdots x_{0,n})} f(x_1,\cdots,x_n)=a$$

***n*元数量值函数的连续：**

$$\lim_{(x_1,\cdots,x_n)\to(x_{0,1},\cdots x_{0,n})} f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_{0,1},\cdots,x_{0,n})$$

2.3 有界闭区域上多元连续函数的性质

定理2.1 设 $A\subseteq \mathbf{R}^n$是有界闭区域, f是A上的连续函数, 则

（1）（有界性）f 在A上有界;

（2）（最大最小值定理）

f 在A上能取得它的最大值与最小值.

定理2.2（介值定理） 设$A\subseteq \mathbf{R}^n$ 是一有界闭区域, f在A上连续, m与M分别是f在A上的最小值与最大值, 如果常数μ是m与M之间的任一数, $m\le\mu\le M$, 则必$\exists x_0\in A$, 使$f(x_0)=\mu$.

定理2.3（一致连续性） 设$A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一有界闭区域，f在A上连续，则f在A上一致连续，即

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得$\forall x_1,x_2\in A$，当$\|x_1-x_2\|<\delta$时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

多元初等函数： 由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫多元初等函数

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

- 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 不同.

例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0, \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

但它在(0,0)点二重极限不存在 .

如果它们都存在, 则三者相等.

思考题 若点(x, y)沿着无数多条平面曲线趋向于点(x_0, y_0)时，函数$f(x, y)$都趋向于 A，能否断定$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$？

思考题 若点(x,y)沿着无数多条平面曲线趋向于点(x_0,y_0)时，函数$f(x,y)$都趋向于 A，能否断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$?

答: 不能.

例 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$, $(x,y)\to(0,0)$

取 $y=kx$, $f(x,kx)=\dfrac{x^3\cdot k^2x^2}{(x^2+k^4x^4)^2}\xrightarrow{x\to 0} 0$

但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

原因为若取 $x=y^2$, $f(y^2,y)=\dfrac{y^6y^2}{(y^4+y^4)^2}\to\dfrac{1}{4}$.