§5.2 留数

一、留数的概念

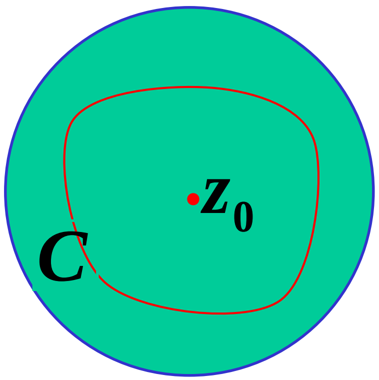
二、留数的计算方法

三、留数定理

四、函数在无穷远点的留数

一、留数的概念

引入　设 z_0 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点;



z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<R$

邻域内包含 z_0 的任一条正向简单闭曲线

$f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内的洛朗级数: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$

$$f(z)=\cdots+c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\cdots+c_0$$

$$+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$$

积分 $\oint_C f(z)dz$

$$= \cdots + c_{-n}\underbrace{\oint_C (z-z_0)^{-n}dz}_{0\ (\text{高阶导数公式})} + \cdots + c_{-1}\underbrace{\oint_C (z-z_0)^{-1}dz}_{2\pi i} + \cdots$$

$$+\oint_C c_0\,dz + \oint_C c_1(z-z_0)dz + \cdots + \oint_C c_n(z-z_0)^n dz + \cdots$$

0 (柯西-古萨基本定理)

$= 2\pi i \boxed{c_{-1}}$ 洛朗级数中负幂项 $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ 的系数

即 $c_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \boxed{= \mathrm{Res}[f(z), z_0]}$ $\boxed{f(z)\text{在}\ z_0\ \text{的留数}}$

定义 设 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 内展开成洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots,$$

称 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 处的**留数**，记作：

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z,$$

其中, C 是 z_0的去心邻域内绕 z_0的一条简单闭曲线.

注 有时直接称 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数.

二、留数的计算方法

1. 可去奇点,

方法 如果 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点， 则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0.$

2. 本性奇点,

方法 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$ 展开成洛朗级数求 c_{-1}.

注 (1)在具体展开的时候， 并不需要写出“完整”的洛朗级数, 只需将其中负一次幂的系数 c_{-1} 求出来就可以了。

(2) 对于不是本性奇点的情况， 该方法有时也是很有效的, 而且在使用该方法时， 并不需要知道奇点的类型。

例1. 求下列函数在奇 点处的留数

$$(1)\ f_1(z)=\frac{\sin z}{z},\qquad (2)\ f_2(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}.$$

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的可去奇 点，故

$$\operatorname{Res}[f_1(z),0]=0.$$

(2) $z=0$ 是 $f_2(z)$ 的可去奇 点，故

$$\operatorname{Res}[f_2(z),0]=0.$$

例2. 求下列函数在奇 点处的留数

$$(1)\ f_1(z)=ze^{\frac{1}{z}},\qquad (2)\ f_2(z)=z^2\cos\frac{1}{z}.$$

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的本性奇 点，

将 $f_1(z)$在$z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，

$$ze^{\frac{1}{z}}=z+1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z}+\cdots,$$ 所以 $\mathrm{Res}[f_3(z),0]=\frac{1}{2!}$.

(2) $z=0$ 是 $f_2(z)$ 的本性奇点，

将 $f_2(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\cdot\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+\cdots\right)$$

$$=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+\cdots,\qquad\Rightarrow\quad \mathrm{Res}[f(z),0]=0.$$

例3. 求函数 $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z-1}$ 在奇 点处的留数.

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开，

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z-1}=(z-1+1)^2\cos\frac{1}{z-1}$$

$$=[(z-1)^2+2(z-1)+1]\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(-2\cdot\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z-1}+\cdots,$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{Res}[f(z),1]=-1.$$

例4. 求函数 $f(z)=(1+z)e^{\frac{1}{z}}$ 在奇 点处的留数.

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点,

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内洛朗展开,

$$f(z)=(1+z)e^{\frac{1}{z}}=(1+z)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

$$=\cdots+\left(1+\frac{1}{2!}\right)\frac{1}{z}+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{3}{2}.$$

3. 极点

方法 如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点, 则有如下计算法则

法则1 如果 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点（简单极点），那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z).$$

证明：由于 z_0 是 $f(z)$ 的简单极点，因此

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (0 < |z - z_0| < \delta)$$

在上式两端乘以 $(z - z_0)$ 有，$(z - z_0) f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+1}$

再两端取极限得，$\lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z) = c_{-1}$

例5. 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在奇 点处的留数

解 $z=0$和$z=1$均为$f(z)$的一阶极点,

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1}=-1,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z}=1.$$

例6. 求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}$ 在奇 点处的留数.

解 (1) $z=1$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to1}(z-1)f(z)$

$$=\lim_{z\to1}\frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}}=e$$

(2) $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点,

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}e^{\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\cdot(1+z+z^2+\cdots)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

$$=\cdots-\frac{1}{z}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right),$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{Res}[f(z),0]=-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)=-e.$$

法则2 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}, P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0都解析，

如果 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$，那么 z_0为

$f(z)$ 的一阶极点，且有 $\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

证 因为$Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$

所以z_0为 $Q(z)$ 的一阶零点,

z_0 为 $\dfrac{1}{Q(z)}$ 的一阶极点.

因此 $$\frac{1}{Q(z)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$,

$$f(z)=\frac{1}{z-z_0}\cdot P(z)\varphi(z).$$

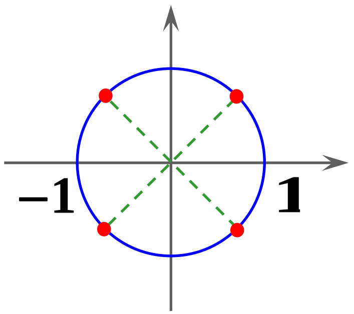
在 z_0 解析且 $P(z_0)\varphi(z_0)\neq 0.$

所以 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点,

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

例7. 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ 在奇 点处的留数



解 函数 $f(z)$ 有四个简单极点,

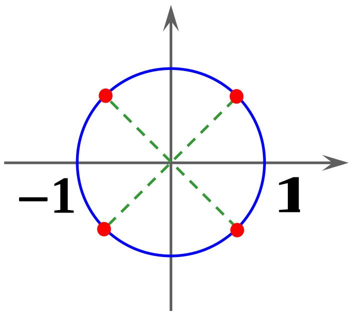
$$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},\quad z_2=e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad z_3=e^{\frac{3\pi}{4}i},\quad z_4=e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\lim_{z\to z_1}[(z-z_1)f(z)]$$

$$=\lim_{z\to z_1}\frac{z^2}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}=?\ (\text{麻烦})$$

第五章 留数及其应用

例7. 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ 在奇 点处的留数



解 函数 $f(z)$ 有四个简单极点，

$$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},\quad z_2=e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad z_3=e^{\frac{3\pi}{4}i},\quad z_4=e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{z^2}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{1}{4z}\right|_{z=z_1}=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

同理 $\operatorname{Res}[f(z),z_2]=\left.\dfrac{1}{4z}\right|_{z=z_2}=\dfrac{1}{4}e^{\frac{\pi}{4}i},$

$$\operatorname{Res}[f(z),z_3]=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i},\quad \operatorname{Res}[f(z),z_4]=\frac{1}{4}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

法则3 如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，那么

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

证 $f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+$

$$+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$

$$+c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

两边求 $m-1$ 阶导数，

两边求 $m-1$ 阶导数,

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

$$=(m-1)!c_{-1}+(\text{含有 } z-z_0 \text{ 正幂的项})$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]=(m-1)!c_{-1},$$

所以 $\text{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$ [证毕]

例8. 求下列函数在奇 点处的留数

$$(1)\ f_1(z)=\frac{\cos z}{4z^3},\qquad (2)\ f_2(z)=\frac{\sin z}{4z^3}.$$

解 (1) $z=0$ 是 $f_1(z)$ 的三阶极点，

$$\mathrm{Res}[f_1(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\cdot\frac{\cos z}{4z^3}\right)''=-\frac{\cos z}{8}\Bigg|_{z=0}=-\frac{1}{8}.$$

(2) $z=0$ 为 $f_2(z)$ 的二阶极点，

$$\mathrm{Res}[f_2(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{\sin z}{4z^3}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{4z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z-\sin z}{4z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{8}=0.$$

例9. 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 处的留数

解 方法一 利用洛朗展式求留数

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域展开，

$$f(z)=\frac{1}{z^6}\cdot\left[z-\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}+\frac{1}{7!}z-\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}[f(z),0]=-\frac{1}{5!}.$$

例9. 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 在 $z=0$ 处的留数

解 方法二 利用极点的留数计算法则求解

由于 $z=0$ 是 $f(z)$ 三阶极点，

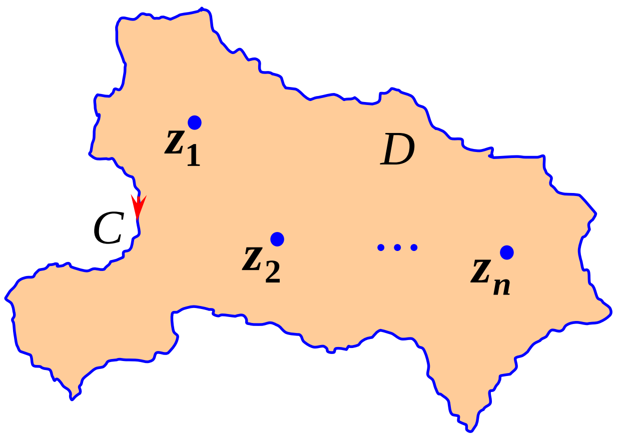
$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}[z^3 f(z)]''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{(z^2-12)\sin z+6z\cos z+6z}{z^5}$$

(罗比达法则) $$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{z^2\cos z+4z\sin z-2\cos z}{5!}=-\frac{1}{5!}.$$

三、留数定理及应用

留数定理 函数 $f(z)$ 在区域 D内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析，C是D内包围各奇点的一条正向简单闭曲线，那么

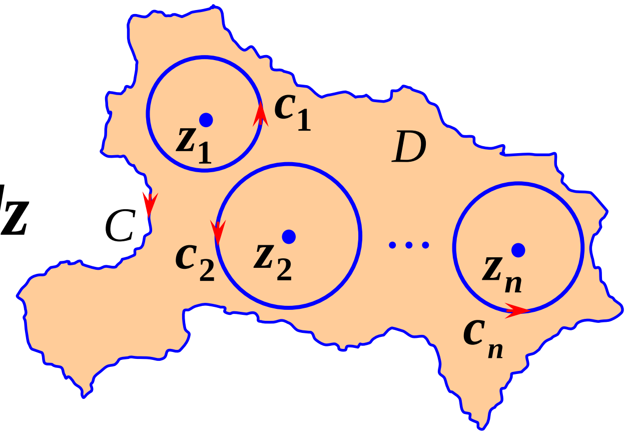


$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

说明：留数定理将沿封闭曲线C 积分转化为求被积函数在C 内各孤立奇点处的留数.

证 如图，将孤立奇点用含于 D 内且互不重叠的圆圈包围起来，根据复合闭路定理有

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz$$



两边同时除以 $2\pi i$ ，且

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)dz + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)dz$$

$$= \mathrm{Res}[f(z), z_1] + \mathrm{Res}[f(z), z_2] + \cdots + \mathrm{Res}[f(z), z_n]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$ 即可得. [证毕]

例10. 计算 $I=\oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}dz$，其中 C 为 $|z|=2$.

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有两个奇点：

可去奇点 $z=0$，一阶极点 $z=1$，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=0.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin^2 z}{z^2}=\sin^2 1.$$

$$I=2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right)=2\pi i\sin^2 1.$$

例11. 计算 $I=\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$，其中 C为 $|z|=2$.

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有两个奇点：

一阶极点 $z=0$，二阶极点 $z=1$，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2 f(z)]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0.$$

$$I=2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right)=2\pi i.$$

例12. 计算 $I=\oint_C \frac{e^z}{\cos\pi z}dz$ ，其中 C为 $|z|=1.$

解 被积函数 $f(z)$的奇点为 $z_k=k-\frac{1}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$

但在$|z|<1$ 内只有两个简单极点：$z_0=-\frac{1}{2},\ z_1=\frac{1}{2},$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\left.\frac{e^z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=z_0}=\left.\frac{e^z}{-\pi\sin\pi z}\right|_{z=z_0}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{e^z}{-\pi\sin\pi z}\right|_{z=z_1}=-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}},$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{2}}\right)=-4i\,\mathrm{sh}\frac{1}{2}.$$

例13. 计算 $I=\oint_C \dfrac{e^{\cos z}}{\sqrt{2-2\sin z}}dz$ ，其中 C 为 $|z|=\pi$.

解 被积函数 $f(z)$ 在 $|z|<\pi$ 内有两个奇点:

简单极点 $z_1=\dfrac{\pi}{4}$，$z_2=\dfrac{3\pi}{4}$，

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\left.\frac{e^{\cos z}}{(\sqrt{2-2\sin z})'}\right|_{z=z_1}=\left.\frac{e^{\cos z}}{-2\cos z}\right|_{z=z_1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\left.\frac{e^{\cos z}}{-2\cos z}\right|_{z=z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$I=2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=-2\sqrt{2}\pi i\,\mathrm{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例14. 计算 $I=\oint_C \sin\frac{z}{z-1}dz$ ，其中 C为 $|z|=2$.

解 令 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$， $z=1$为 $f(z)$ 的本性奇点，

将 $f(z)$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 内展开为洛朗级数：

$$f(z)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\cdots\right)$$

$$+\cos 1\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\cdots\right),$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Res}[f(z),1]=\cos 1$, $\Rightarrow$ $I=2\pi i\cos 1$.

例15. 计算$I=\oint_C \frac{1}{z^{101}(1-z^2)}dz$，其中 C为$|z|=0.5$.

解 令 $f(z)=\frac{1}{z^{101}(1-z^2)}$， $z=0$ 为 $f(z)$ 的 101 阶极点。

将 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内展开为洛朗级数：

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}=\frac{1}{z^{101}}+\frac{1}{z^{99}}+\cdots+\frac{1}{z}+z+z^2+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Res}[f(z),0]=1,$$

$$\Rightarrow \quad I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=2\pi i.$$

例16. 计算 $I=\oint_C \frac{e^z-1}{z^3}dz$ ，其中 C为 $|z|=1$.

解 方法一 利用极点的留数计算法则求解

$z=0$为被积函数 $f(z)$ 的二阶极点，

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot\frac{e^z-1}{z^3}\right)'=\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z-1}{z}\right)'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{ze^z-e^z+1}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

方法二 利用高阶导数公式求解

$$I=\frac{2\pi i}{2!}(e^z-1)''\Big|_{z=0}=\pi i.$$

例16. 计算 $I=\oint_C \frac{e^z-1}{z^3}dz$，其中 C为 $|z|=1$.

解 方法三 利用洛朗展式求解

将被积函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域展开,

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\cdot[(1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\cdots)-1]$$

$$=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots,$$

$$\Rightarrow \quad \text{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}.$$

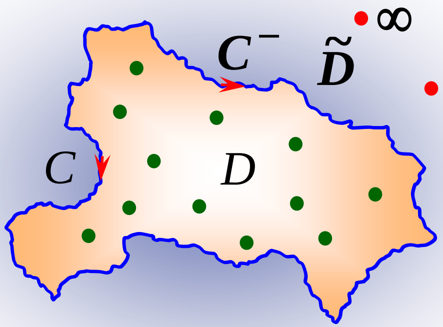
$$\Rightarrow \quad I=2\pi i\,\text{Res}[f(z),0]=\pi i.$$

四、函数在无穷远点的留数

一般说来, 闭路积分只与该闭路所包围的区域内的奇点有关，但为什么又要引入无穷远点的留数呢?

设想 ● 如图, 设C是一条简单闭曲线,

则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$



● 将曲线C围成的区域记为D,

而曲线 C^- 围成的区域记为 $\tilde{D}$.

● 如果区域D内的奇点很多，但区域 $\tilde{D}$ 内的奇点很少,

甚至只有无穷远点 ∞ 为奇点, 则计算等式右边的积分显然比计算等式左边的积分要 “省心” 的多。

1. 函数在无穷远点的性态

定义 如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 ∞ 的去心邻域 $R<|f(z)|<+\infty$ 内解析，则称点 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点.

手段 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则点 $z=\infty$ 对应于点 $\xi=0$，

相应地，$f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)\xlongequal{\text{记为}}\varphi(\xi)$，

因此，函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的性态可由函数 $\varphi(\xi)$ 在原点 $\xi=0$ 的性态来刻画。

注：通过转换，关于有限远奇点的定义判别，极限判别，以及极点判别方法都可以使用。

例17. 设 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$，问$z=\infty$是否为$f(z)$的孤立奇点?

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$， 则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{\xi}}\overset{\text{记为}}{=\!=}\varphi(\xi)$，

可知 $\xi=0$， $\xi_k=\dfrac{1}{k\pi}$， $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 均为$\varphi(\xi)$ 的奇点，

由于 $\xi=0$不是$\varphi(\xi)$的孤立奇点，

因此 $z=\infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点。

例18. 设 $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1}{\xi}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\xi^2}}$

$$=\frac{\xi^2}{\xi(1+\xi)} \overset{\text{记为}}{=\!=} \varphi(\xi),$$

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的可去奇点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

例19. 设 $f(z)=\dfrac{1+z^2}{1+z}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=\dfrac{1+\dfrac{1}{\xi^2}}{1+\dfrac{1}{\xi}}$

$$=\frac{1+\xi^2}{\xi(1+\xi)} \overset{\text{记为}}{=\!=} \varphi(\xi),$$

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的一阶极点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的一阶极点。

第五章 留数及其应用

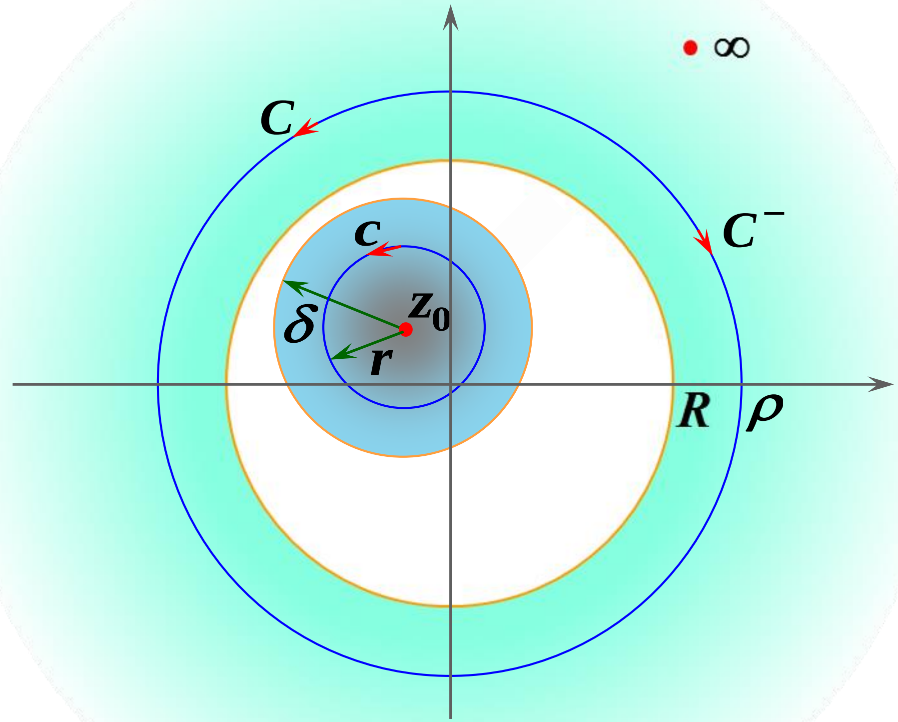
例20. 设 $f(z)=e^{z}$，试判断奇点 $z=\infty$ 的类型。

解 令 $z=\dfrac{1}{\xi}$，则 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=e^{\frac{1}{\xi}} \xlongequal{\text{记为}} \varphi(\xi)$，

由于 $\xi=0$ 是 $\varphi(\xi)$ 的本性奇点，

因此 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

2. 函数在无穷远点的留数



定义 设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < +\infty$ 内解析,

则 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数为:

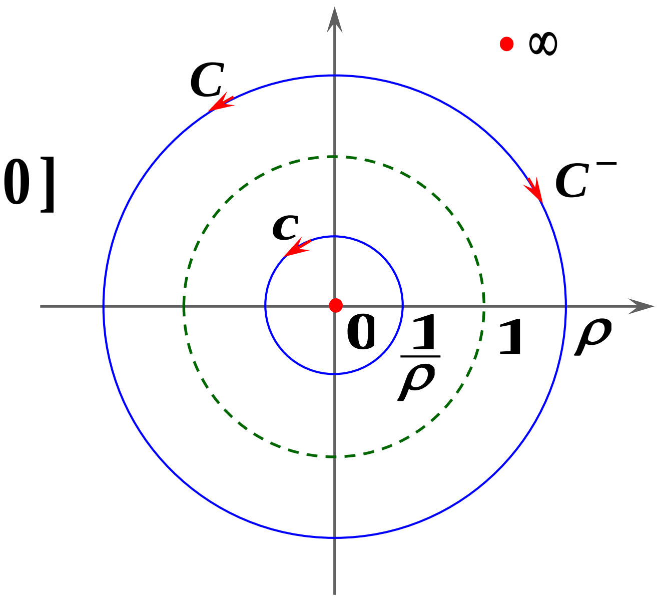
$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z,$$ 其中,C 为 $|z| = \rho > R$.

对比 函数 $f(z)$ 在"有限"孤立奇点 z_0 的留数为:

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f(z)\,\mathrm{d}z,$$ 其中,c 为 $|z| = r < \delta$.

如何计算在无穷远点的留数?

法则4. $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$



推导 如图,

已知 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z$,

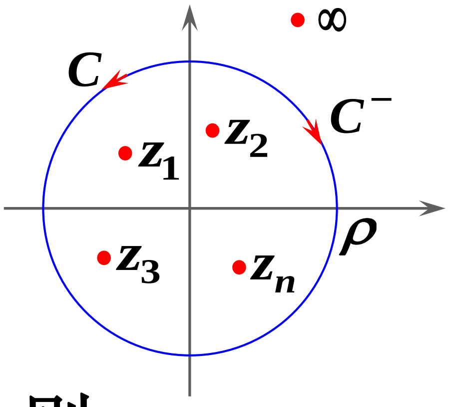
令 $z=\frac{1}{\xi}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}f\left(\frac{1}{\xi}\right)\cdot\frac{1}{\xi^2}\mathrm{d}\xi$

$$=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].$$

在无穷远点的留数有何用处?

定理 设 $f(z)$ 在扩充平面上除有限个孤立奇点

$z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$ 外处处解析,



则 $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0.$

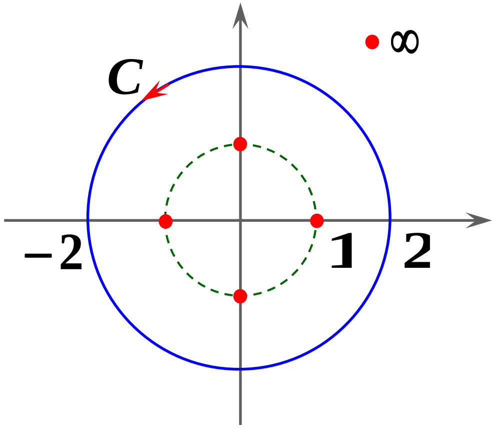
证明 如图,令 ρ 充分大,即 $\rho > \max_k |z_k|$,则

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\,dz$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k],$$ 即证。

例21. 计算 $I=\oint_C \frac{z^3}{z^4-1}dz$, 其中$C$为 $|z|=2$.

解 函数 $f(z)=\frac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|=2$ 内



有四个一阶极点 $z_k=e^{\frac{2k\pi}{4}i}$, $k=0,1,2,3$,

由留数定理有

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]$$

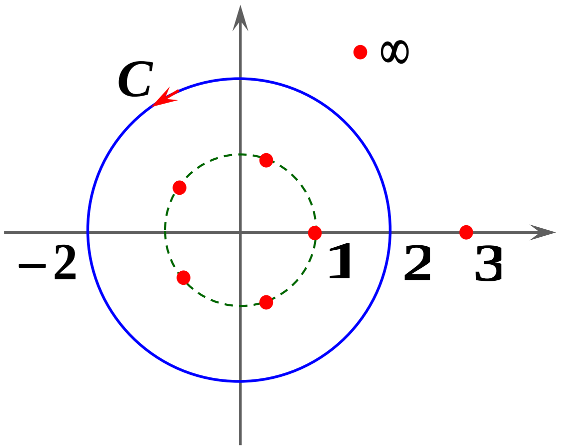
$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1-z^4)},0\right]=2\pi i.$$

第五章 留数及其应用

例22. 计算 $I=\oint_C \dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}dz$, 其中$C$为 $|z|=2$.

解 (1) 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}$ 在$|z|=2$ 内有五个

一阶极点, $z_k=e^{\frac{2k\pi}{5}i}$, $k=0,1,2,3,4$,



由留数定理有

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{4}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

$$=-2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\right).$$

例22. 计算 $I=\oint_C \frac{1}{(z^5-1)^3(z-3)}dz$，其中$C$ 为 $|z|=2$.

解 (2) $\text{Res}[f(z),3]=\lim\limits_{z\to 3}(z-3)f(z)=\frac{1}{(3^5-1)^3}$,

$$\text{Res}[f(z),\infty]=-\text{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$$

$$=-\text{Res}[\frac{z^{14}}{(1-z^5)^3(1-3z)},0]=0$$

$$I=-2\pi i\left(\text{Res}[f(z),3]+\text{Res}[f(z),\infty]\right)$$

$$=-\frac{2\pi i}{(3^5-1)^3}=-\frac{2\pi i}{14172488}.$$

小 结

一、留数的概念

二、留数的计算方法

三、留数定理

四、函数在无穷远点的留数

附：留数(Residu)的产生

1814年 柯西第一个注意到了留数的概念。

1826年 柯西在他的研究报告中首次使用了“residu”(即留数、残数、剩余)这个术语。

- 柯西在“求沿着两条有相同起点与终点且包围着函数极点的路径积分之差”时得到了这个概念。这也是使用该名称的缘故。

1829年 柯西创建了留数理论。

附：关于极点的留数计算法则的说明

若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots,$$

$$(z-z_0)^n f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{n-m}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{n-1}+a_0(z-z_0)^n+\cdots,$$

(其中 $n\geq m$)

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]=(n-1)!a_{-1}+(z-z_0)\varphi(z),$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)].\quad (\text{其中 } n\geq m)}$$