XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

试题选讲

董荣

数学与统计学院

1. 设x,y,z为两两互不相同的数，则行列式$\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ y+z & x & x^2 \\ z+x & y & y^2 \end{vmatrix}=0$的充要条件是【 B 】

$(A)\ xyz=0 \quad (B)\ x+y+z=0 \quad (C)\ x=-y,z=0 \quad (D)\ y=-z,x=0$

$$\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ y+z & x & x^2 \\ z+x & y & y^2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ z-x & x-z & x^2-z^2 \\ x-y & y-x & y^2-x^2 \end{vmatrix} = (x-z)(y-x)\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ -1 & 1 & x+z \\ -1 & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} (x-z)(y-x)\begin{vmatrix} x+y & z & z^2 \\ -1 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & y-z \end{vmatrix} = (x-z)(y-x)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-z)(y-x)(y-z)(x+y+z)=0$$

$\because x\neq z, y\neq x, y\neq z \qquad \therefore x+y+z=0$

2. 设A为n阶方阵$(n\geq 3)$, 若$A^3=O$, 则下式中未必成立的是 【A】

(A) $A=O$ (B) $(A^T)^3=O$ (C) $A^4=O$ (D) $|A|=0$

$$(B): O=(A^3)^T=(AAA)^T=(A^TA^TA^T)=(A^T)^3$$

$$(C): A^4=A^3A=O$$

$$(D): 0=|A^3|=|A||A||A| \Rightarrow |A|=0$$

3. 设A为n阶可逆矩阵$(n\geq 2)$, I为n阶单位矩阵,则$\left((A^*)^*\right)^{-1}=$【$D$】

(A) $|A|^{n-1}I$　　(B) $|A|^{1-n}I$　　(C) $|A|^{n-1}A^*$　　(D) $|A|^{1-n}A^*$

公式：$AA^*=A^*A=\det(A)\,I$　　$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$　　$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{A}{|A|}$$

$$\left((A^*)^*\right)^{-1}=\left(|A|^{n-2}A\right)^{-1}=\frac{1}{|A|^{n-2}}A^{-1}=\frac{1}{|A|^{n-2}}\frac{A^*}{|A|}=|A|^{1-n}A^*$$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2018} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2019} =$ 【C】

$(A)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $(B)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ $(C)\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ $(D)\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

$$原式 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2018} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2}\right)^{1009} = I, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2019} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为非零向量且$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c},\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a},\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$,

则$\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|+\|\vec{c}\|=$【D】

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两垂直,

$$\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\sin(\vec{b},\vec{c})=\|\vec{b}\|\|\vec{c}\|,\quad \|\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{c}\|,\quad \|\vec{c}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$$

$$\|\vec{a}\|=(\|\vec{a}\|\|\vec{c}\|)\left(\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\right)=\|\vec{a}\|^2\|\vec{c}\|\|\vec{b}\|=\|\vec{a}\|^3$$

$$\because \|\vec{a}\|=\|\vec{a}\|^3,\|\vec{a}\|>0,\therefore \|\vec{a}\|=1$$

同理$\|\vec{b}\|=1,\|\vec{c}\|=1$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

二、填空题

6. 已知x_1,x_2,x_3为方程$x^3+px+q=0$的三个根，则$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0$.

方程$x^3+px+q=0$的三个根x_1,x_2,x_3满足：

$$x^3+px+q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-x_1x_2x_3$$

$$\Rightarrow (x_1+x_2+x_3)=0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0$$

7. 设$\alpha=(1,2,3)$, $\beta=(1,-1,1)$, 则$(\alpha^T\beta)^{2020}=2^{2019}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$.

$$\alpha^T\beta=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}$$

$$(\alpha^T\beta)^2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & -4 & 4\\ 6 & -6 & 6\end{bmatrix}=2\alpha^T\beta$$

$$(\alpha^T\beta)^{2020}=2^{2019}\alpha^T\beta$$

8. 设A为3阶方阵,且$|A|=2$,则$\left|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}-3A\right|=-16$.

公式:$AA^* = A^*A = \det(A)\,I$ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

$$\left|\left(\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}-3A\right|=\left|2\left(A^*\right)^{-1}-3A\right|$$

$$=\left|2\frac{A}{|A|}-3A\right|$$

$$=\left|-2A\right|$$

$$=(-2)^3|A|=-16$$

9. 设有直线$L_1:\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-3}{5}$，$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，

则过直线L_1且与L_2平行的平面方程为$3x+y-7z+16=0$.

平面的法向量与L_1和L_2都垂直

$$\vec{n}=(9,8,5)\times(2,1,1)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 9 & 8 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}9 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}9 & 8\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=(3,1,-7)$$

直线L_1上的点都在平面上,(1,2,3)在平面上

可写出平面的点法式方程：

$$3(x-1)+(y-2)-7(z-3)=0$$

$$\Rightarrow 3x+y-7z+16=0$$

10. 以$A(1,1,1),B(2,0,1),C(0,0,1),D(1,3,2)$为顶点的四面体体积为$\frac{1}{3}$.

$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\ \ \overrightarrow{AC}\ \ \overrightarrow{AD}]\right|$$

11. 已知A是3阶矩阵，B是4阶矩阵，且$|A|=12$，$|B|=-6$，求矩阵

$D=\begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}A \\ -B & C \end{pmatrix}$**的行列式$|D|$的值**

$$\begin{vmatrix} O & \frac{1}{2}A \\ -B & C \end{vmatrix}=(-1)^{(3\times 4)}\left|\frac{1}{2}A\right||-B|=(\frac{1}{2})^3|A|(-1)^4|B|=-9$$

例： 设有非零多项式$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x \end{vmatrix}$

其中$a_{ij}(i,j=1,2,3)$为实常数，则多项式$f(x)$的次数为？

（A）3次 （B）2次 （C）1次 （D）≤ 1次

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{13} & a_{12}-a_{13} & a_{13}+x \\ a_{21}-a_{23} & a_{22}-a_{23} & a_{23}+x \\ a_{31}-a_{33} & a_{32}-a_{33} & a_{33}+x \end{vmatrix}$$

若$a_{11}=a_{13}$，$a_{21}=a_{23}, a_{31}=a_{33}$，则$f(x)=0$, 与题意矛盾

例： 设A为3阶矩阵，将A的第二行加到第一行得B，再将B的第一列的-1倍加到第二列得C。记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$C$=?

(A) $C=P^{-1}AP$　　(B) $C=PAP^{-1}$

(C) $C=P^{T}AP$　　(D) $C=PAP^{T}$

解： 将A的第二行加到第一行得B，对应的初等矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

将B的第一列的-1倍加到第二列得C，对应的初等矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例： 设n阶矩阵A满足$A^2-2A+3I=0$，则$A^{-1}=?$

解： 由于$A^2-2A+3I=0$，我们有$A(A-2I)=-3I$，从而得到$A\left(-\frac{1}{3}(A-2I)\right)=I$，可知$A^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2I)$

例： 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

B为3阶非零矩阵，且$AB=O$，则$t=?$

解： 矩阵$B=(b_1,b_2,b_3)$，由于$AB=O$，我们可知方程组$Ax=0$必有非零解.

从而 $|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & t-8 & 11\\ 0 & -7 & 7\end{vmatrix}=0$$

可以计算得到$t=-3$.

例：设单位向量满足$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=?$

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$$=-\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-1+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{c}=-1+\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{a}=-1+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-1$$

$2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)=-3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$=-3/2

例： 求过点$A(-3,0,1)$且与平面$\pi_1: 3x-4y-z+5=0$平行，与直线

$$\ell_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

相交的直线ℓ的方程.

解： 设直线ℓ的方向向量为(a,b,c)，ℓ与平面π_1平行，即与平面的法向量$(3,-4,-1)$垂直

$$3a-4b-c=0.$$

$\ell: \frac{x+3}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z-1}{c}$, 与$\ell_1$有交点, 令$t=\frac{x+3}{a}$，直线的参数方程为

$$x=at-3, y=bt, z=ct+1$$

带入ℓ_1的方程中，可得$t=\frac{1}{a-2b}=\frac{-1}{b+c}$.

从而$b=\frac{4}{5}a, c=-\frac{a}{5}$，取$a=-5$，得到方向向量为$(-5,-4,1)$, 则 $\ell: \frac{x+3}{-5}=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{1}$.

例： 求过平面 $\pi_1: 2x+5y-3z+4=0$ 与平面 $\pi_2: -x-3y+z-1=0$ 的交线 L，且与平面 π_2 垂直的平面方程．

解： L的方向向量为 $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=(-4,1,-1)$

所求平面的法向量 $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 1 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=(-2,5,13)$

取L上的点 $P_0(-7,2,0)$，在所求平面上，

$$-2(x+7)+5(y-2)+13z=0$$

$$2x-5y-13z+24=0$$

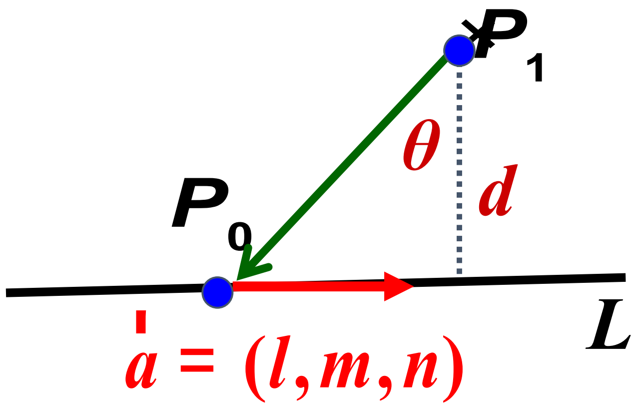
例： 求点 $P_1(1,0,-1)$ 到直线 $L: \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-4}{1}$，的距离 d.

解： 在L上取一点$P_0(1,-2,4)$, L的方向向量为 $\vec{a}=(2,0,1)$,于是有 $d=\frac{\|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}$

$$\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{a}=(0,2,-5)\times(2,0,1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -5\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=(2,-10,-4)$$

$$\|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{a}\|=\sqrt{2^2+10^2+4^2}=2\sqrt{30}$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{5}\qquad d=\frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}}=2\sqrt{6}$$



例： 判别二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性.

解：

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1=a_{11}=-5<0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=26>0,\quad \Delta_3=|A|=-80<0,$$

所以 f 为负定.

例： 判定$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^3+2ax_1x_2+2bx_2x_3$的正定性

证： 对应的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & b\\ 0 & b & 1\end{bmatrix}$$

则各阶顺序主子式为

$$\Delta_1=1,\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a^2,\Delta_3=1-(a^2+b^2)$$

当$a^2+b^2<1$时，有$\Delta_1>0,\Delta_2>0,\Delta_3>0$，此时$f$为正定的；

当$a^2+b^2\geq 1$时，有$\Delta_1>0,\Delta_3\leq 0$, 此时$f$为不定二次型。

例：二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) 2,0　　(B) 1,1　　(C) 2,1　　(D) 1,2

解：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$

$$=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$$

所以$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

则$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)$，特征值为-1，3，0,

故该二次型的正惯性指数为1，负惯性指数为1.