期中考试模拟题（七）2021.5

一、填空题（每小题 4 分，共 32 分）

1. 设 A,B,C 为随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，$P(C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(AB|\bar{C})=$________.

2. 设随机变量 X,Y,Z 相互独立且取值均为 0 和 1，$P(Z=1)=0.25$，$P(XY+Z=1)=0.55$，则 $P(XY=1)=$__________.

3. 设事件 A,B,C 满足 $A\cup C=B\cup C$，$C-A=C-B$，化简事件 $(A\bar{B})\cup(\bar{A}B)=$_________.

4. 设 X 表示10次独立重复射击中命中目标的次数，每次射中目标的概率为0.4，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$__________.

5. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 $X\sim\exp(1)$，则 $P\{\max(X,Y)>1\}=$______________ .

6. 为从 2 个次品 8 个正品的 10 个产品中将 2 个次品挑出，随机地从中逐个抽取测试，则不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出的概率等于_________.

7. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y=X^2$，则 Y 的概率密度为________________________ .

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$，则 $D(X+2Y+1)=$________.

二、计算题（共 60 分）

1. (12 分) 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=1)=P(X=3)=0.5$，在给定 $X=i$ 的条件下，Y 服从均匀分布 $U(0,\ i),\ i=1,3$．求 (1) Y 的分布函数；(2) Y 的概率密度；(3) 期望 $E(Y)$.

2. (10 分) 甲箱中有 2 个红球 8 个白球，乙箱中有红、白球各一个，第一次从甲箱中任取一球后，观其颜色不放回；而从乙箱中任取一球放入甲箱后，再第二次从甲箱中任取一球。已知从甲、乙两箱取球是相互独立的。
   (1) 求第二次从甲箱中取出红球的概率；
   (2) 已知第二次从甲箱中取出红球，求红球来自乙箱的概率。

3. (8 分) 某厂家生产的每台仪器以概率 0.7 可以直接出厂，以概率 0.3 需进一步调试，经调试后以概率 0.8 可以出厂，以概率 0.2 定为不合格产品不能出厂。现该厂新生产了 $n\,(n>2)$ 台仪器(假设各台仪器生产过程相互独立)，记 X 为新生产的 n 台仪器中可以出厂的台数，求 (1) X 的概率分布；(2) 新生产的仪器中至少有两台仪器不能出厂的概率。

4. (20 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} ax, & 0<x<1, |y|<x \\ 0, & 其他 \end{cases}$. 求：

⑴ 常数 a； ⑵ X 和 Y 的边缘概率密度； ⑶ $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度；

⑷ X 与 Y 是否相互独立？为什么？ ⑸ 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

(6) $P\left\{X+Y\geq\dfrac{1}{2}\right\}$.

5. (10 分) 设随机变量 U 服从区间 $(-2,2)$ 上的均匀分布，令

$$X=\begin{cases} -1, & U\leq -1 \\ 1, & U>-1 \end{cases}, \quad Y=\begin{cases} -1, & U\leq 1 \\ 1, & U>1 \end{cases}$$

求：⑴ X 与 Y 的联合分布律； ⑵ 方差 $D(X+Y)$.

三、(8 分) 设随机变量 X 的方差存在.

(1) 证明：对任意实常数 c，有 $E\left[(X-E(X))^2\right]\leq E\left[(X-c)^2\right]$，且等号成立的充要条件是 $c=E(X)$；

(2) 利用（1）的结论，证明：对任意给定的实常数 $a,b\,(a<b)$，有

$$\frac{(b-a)^2}{12}\leq\frac{1}{9}(a^2-ab+b^2).$$