2013-1 期末试卷

一、填空题（每小题 3 分，六个小题共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=$__________

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ 2x-3, & x\geq 0 \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{df(f(x))}{dx}\right|_{x=1}=$__________

3. 当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt$ 是与 x^n 同阶的无穷小量，则 $n=$______

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$__________

5. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}dx=$__________

6. 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$__________

二、单项选择题（每小题 3 分，四个小题共 12 分）

7. 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，且 $f'(x_0)\neq 0$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy（　　）

A．是比 Δx 高阶的无穷小量；　　B．是与 Δx 同阶的无穷小量；

C．是比 Δx 低阶的无穷小量；　　D．不是无穷小量；

8. 微分方程 $y''+y'=e^x+x$ 的特解 y^* 的待定形式应写为（a、b、c 为待定常数）（　　）。

A．$y^*=ae^x+bx+c$　　B．$y^*=ae^x+bx^2+cx$

C．$y^*=axe^x+bx+c$　　D．$y^*=axe^x+bx^2+cx$

9. 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2, x\leq 2, \\ ax+b, \quad x>2, \end{cases}$ 在 $x=2$ 处可导，则必有（　　　）.

A．$a=b=2$　　B．$a=2, b=-2$　　C．$a=1, b=2$　　D．$a=3, b=2$

10. 设 $f(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的偶函数，则下面命题中正确的是（　　）

A．$\int_1^x f(t)dt$ 是奇函数　　B．$\int_1^x f(t)dt$ 是偶函数

C. $\int_0^x xf(xt)dt$ 是奇函数　　　　D. $\int_0^1 xf(xt)dt$ 是奇函数

三、（每小题 6 分，三个小题共 18 分）

11. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有三阶导数，且 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=2, f'''(0)=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x^2}{x^3}$

12. 设 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=x\ln x$ 的反函数，计算在 $x=e$ 处的导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

13. 确定函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x-1)}$ 的间断点并指出间断点的类型。

四、（每小题 6 分，三个小题 共 18 分）

14. 求曲线 $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$ 的斜渐近线方程.　**15.** 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $1+\sin x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$。

16. 求微分方程 $(1+e^x)yy'=e^x$ 满足 $y(0)=1$ 的特解。

五、本大题共三小题，每小题均有 A、B 题。A、B 两题任选一题，否则按 A 题评分。A 题满分为 8 分， B 题满分为 4 分。请将所选题题首的圆圈涂黑，表示你的选择。

○**17A.[8 分]** 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$T>0$，证明：对于任何 x 均有 $\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt$ 的充分必要条件是 $f(x)$ 是周期为 T 的函数。

○**17B.[4 分]** 设 $f(x)$ 为连续函数，证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

○**18A.** [8 分] 设容器的内壁是由抛物线 $y=x^2$ 绕 y 轴旋转一周而成的抛物面，开口朝上，内部盛有高为 h 的水。现将半径为 r 的铁球置入，设它完全浸入水中，且水没有溢出。求此时容器内的水面高度 H。

○**18B.**[4 分]求由曲线 $y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围图形之面积。

○**19A.** [8 分] 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2}{(n+2)^2}+\dfrac{4}{(n+4)^2}+\cdots+\dfrac{2n}{(3n)^2}\right]$

○**19B.** [4 分] 求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^4+\cdots+n^4}{n^5}$

六、证明题（每小题 5 分，两个小题共 10 分）

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\le f(x)\le f(b)$，A 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值。证明：存在 $\xi\in[a,b]$，

使得 $A=\dfrac{f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)}{b-a}$。

21. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上 3 阶可导，且 $f(-1)=f(1)$，$f'(0)=0$，证明：存在 $\eta\in(-1,1)$ 使 $f'''(\eta)=0$.

2014-1 期末考试试卷（大题和分数设置同前卷）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^{x}=$__________

2. 已知 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，$a\neq 0$，则 $\int xf(ax)dx=$ __________

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+\ln\dfrac{y}{x+1}=2$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________

4. 当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $\sin 3x-3\sin x$ 的主部是 __________

5. 方程 $xy'=x-y$ 满足条件 $y(\sqrt{2})=0$ 的解为__________

6. 设 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\int_0^t\dfrac{1}{1+u}du\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ __________

7. 下面选项中正确的是（　　）

A．若 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 一定可导；

B．若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，$g(x)$ 在点 x_0 不可导，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 一定不可导；

C．若 $f(x)$ 在点 x_0 不可导，$g(x)$ 在点 x_0 不可导，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 一定不可导；

D．若 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 可导，$g(x)$ 在点 x_0 可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 一定可导。

8. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处二阶可导，则在 $x=a$ 的某个邻域内（　　）。

A．$f'(x)$ 连续；　　B．$f'(x)$ 存在；

C．$f''(x)$ 连续；　　D．$f''(x)$ 存在。

9. 设 $y=f(x)$ 满足方程 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，且在 $x=c(\neq 0)$ 处 $f(x)$ 取得极值，则（　　）.

A．$f(c)$ 是 $f(x)$ 的极小值；　B．$f(c)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

C. $(c, f(c))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点；

D. $f(c)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(c, f(c))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点。

10. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)\quad(-\infty < x < +\infty)$，且在 $(0,+\infty)$ 内成立

$f'(x) > 0, f''(x) < 0$，则在 $(-\infty,0)$ 内有（　　）

A. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$　　B. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

C. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$　　D. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

11. 设 $y = \dfrac{x^2}{2-x}$，计算 $y^{(50)}(0)$，　　**12.** 计算极限 $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^1 \arctan(xt)dt}{x}$

13. 设对任何 x 有 $f(x) = 2f(x-1)$，且 $f'(0) = 1$。证明 $f'(2)$ 存在，并求其值。

14. 计算定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x|\cos 2x|dx$。　　**15.** 计算定积分 $I = \int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$。

16. 求微分方程 $y'' - y = xe^x$ 的通解。

17A.[8 分] 确定 $f(x) = e^{\frac{|x|}{\tan x}}$ 的间断点及其类型。**17B.**[4 分] 确定 $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x-1}$ 的间断点及其类型。

18A. [8 分] 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，证明：

存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $\xi^3 f''(\xi) + 6\xi^2 f'(\xi) + 6\xi f(\xi) = 0$.

18B.[4 分] 证明方程 $x = a\cos x + b\quad(a > 0, b > 0)$ 在区间 $(0, 2a+b)$ 内至少有一根。

19A. [8 分] 如右图所示，半径为 $r(r<1)$ 的小圆与半径为1的大圆相交，交点连线恰为小圆的直径。将位于小圆内，大圆外的区域 D 绕 x 轴旋转，所得立体的体积记作 V。讨论：当 r 为何值时，体积 V 达到最大？

19B. [4 分] 设 R 是由抛物线 $y = (x-1)^2$，x 轴，y 轴所围的平面区域，求 R 绕 x 轴旋转而成的立体体积。

20. 已知 $f(x) = \int_0^{x+1} \sin(e^t)dt$，证明：$|f(x)| \le 2$.

21. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3} = 2$，且在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f^{(4)}(x) \ge 0$，证明：　$f(x) \ge 2x^3$.

2015-1 期末考试试卷

一. 单项选择题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将选择结果填涂在答题卡上。

1. 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（ ）.

A. 存在且等于零　　B.存在但不一定为零　　C. 一定不存在　　D.不一定存在

2. 设 $y=f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（ ）.

A. $0<dy<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<dy$　　C. $\Delta y<dy<0$　　D. $dy<\Delta y<0$

3.关于 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$，下列结论正确的是（ ）.

A. 值为零　　B. 值大于零　　C. 值小于零　　D. 发散

4. 微分方程 $y''+4y=x\cos 2x$ 的特解待定形式应当设为（ ）.

A. $y^*=x[(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x]$　　B. $y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$

C. $y^*=x(ax\cos 2x+bx\sin 2x)$　　D. $y^*=x(ax+b)\cos 2x$

二. 填空题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将计算结果写在答题卡上。）

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$__________ .

6. 以 $[x]$ 记不超过 x 的最大整数，则右极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin[x]}{x}=$ ____________ .

7. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极_____值.。

8. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$，则 $\int xf'(x)dx=$________ .

9. 定积分 $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x}{\cos x}+\sqrt{1-x^2}\right)dx=$___________.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\sin\frac{1}{x}, & x\ne0\\ 0, & x=0\end{cases}$，若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是_______.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 求出函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x(x-1)}$ 的间断点，并说明这些间断点的类型。

12. 设 $y=\ln(x^2-3x+2)$，求 $y^{(n)}(x)$.

13. 设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

14. 求极限 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2 dt}{\sin^{10}x}$.

15. 计算 $I=\int_0^a x^2\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx$ （$a>0$）.

16. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2x}{1+x^2}=e^{-y}$ 的通解。

四. 综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 求 $a>0$，使曲线 $y=a(1-x^2)\ (|x|\le 1)$ 与它在点 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 的两条法线所围的面积最小。

18. 设 $f(x)$ 为偶函数，且满足方程 $f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)dt=-3x+2$，求 $f(x)$.

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 $N(0,r)$ 内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：当 n 充分大时，有 $\left|f(\dfrac{1}{n})\right|\le\dfrac{M}{2}\dfrac{1}{n^2}$（$M$ 为某一正数）.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\int_0^1 f(x)dx=1$.证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.