XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY
Systems Engineering Institute
Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security

整数规划
Integer Programming

电信学院·自动化科学与技术系
系统工程研究所
吴江

Outline

- 基本概念
- 求解整数规划问题的困难
- 经典例子
- 一般方法

整数规划问题

混合整数线性规划 (MILP)

$$\min \quad z = f(x)$$

$$s.t \quad x \in D, D \subset R^n$$

$$x_i \in I, i \in J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$$

混合整数规划 (MIP)

纯整数规划 (IP)

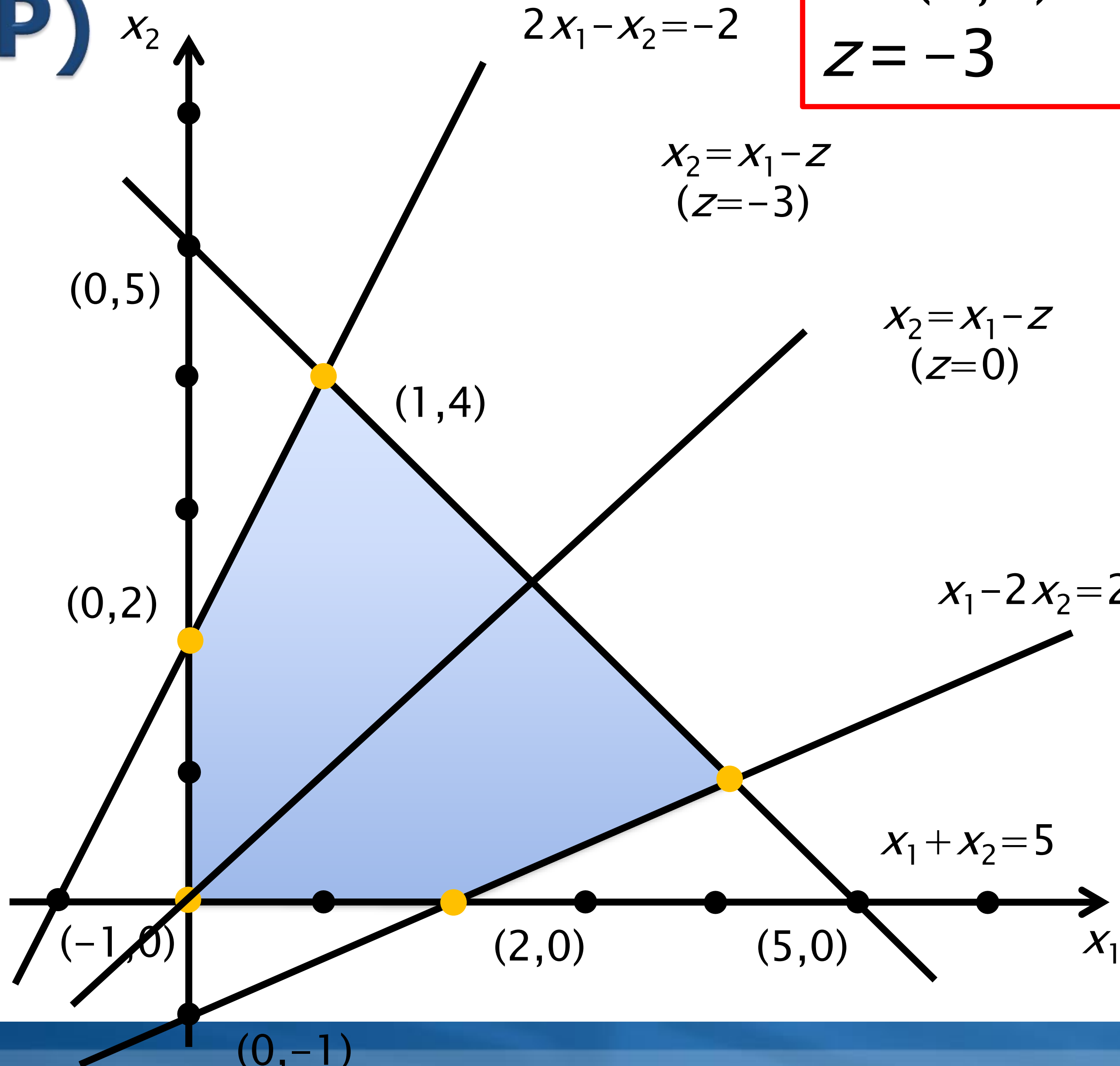
0–1 规划 (BIP)

例：解如下整数线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 - x_2 \\
s.t. \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_j \geq 0 \cap x_j \in I. j = 1, 2
\end{aligned}
$$

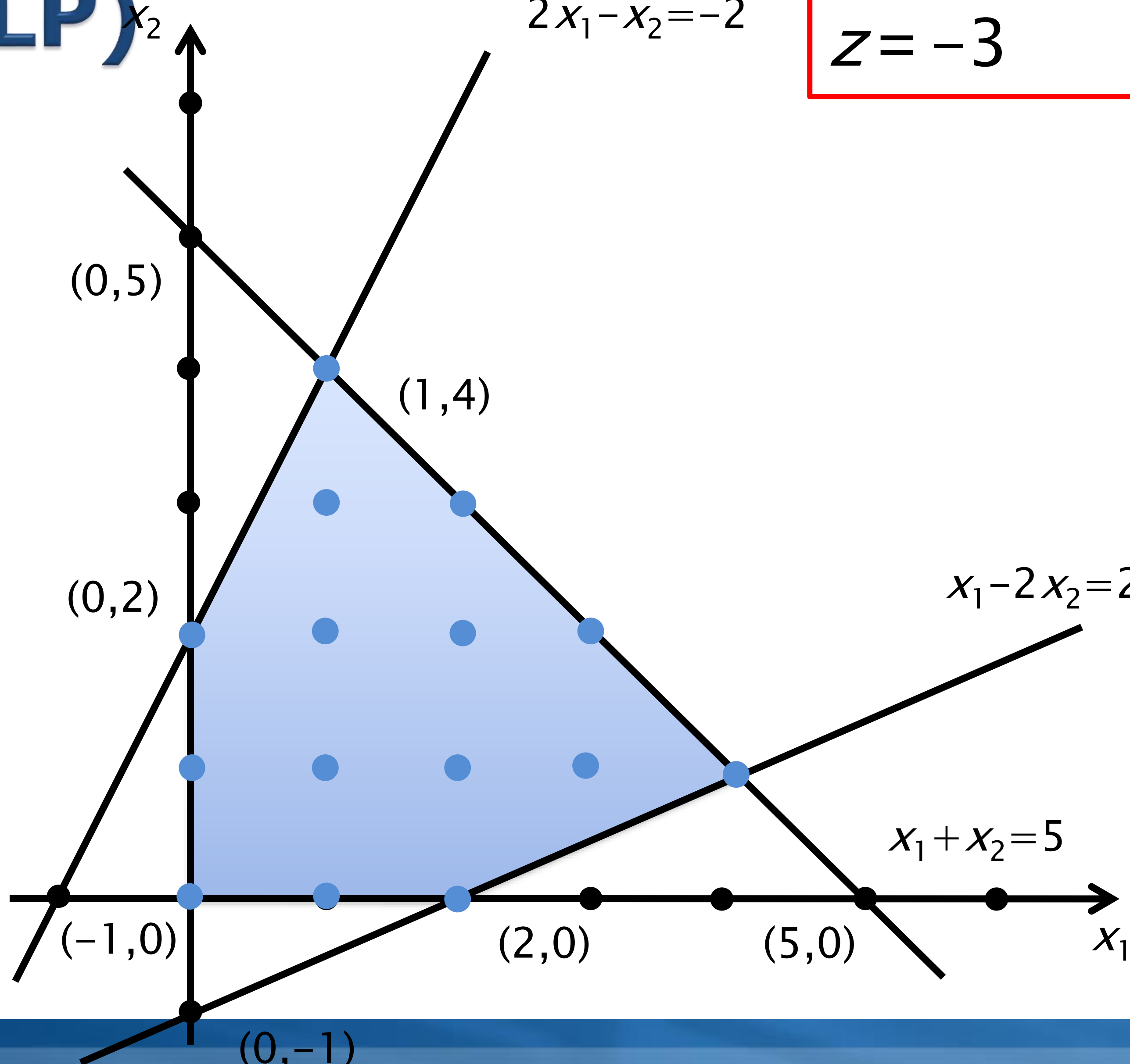
图解法(LP)

$x=(1,4)^T$
$z=-3$



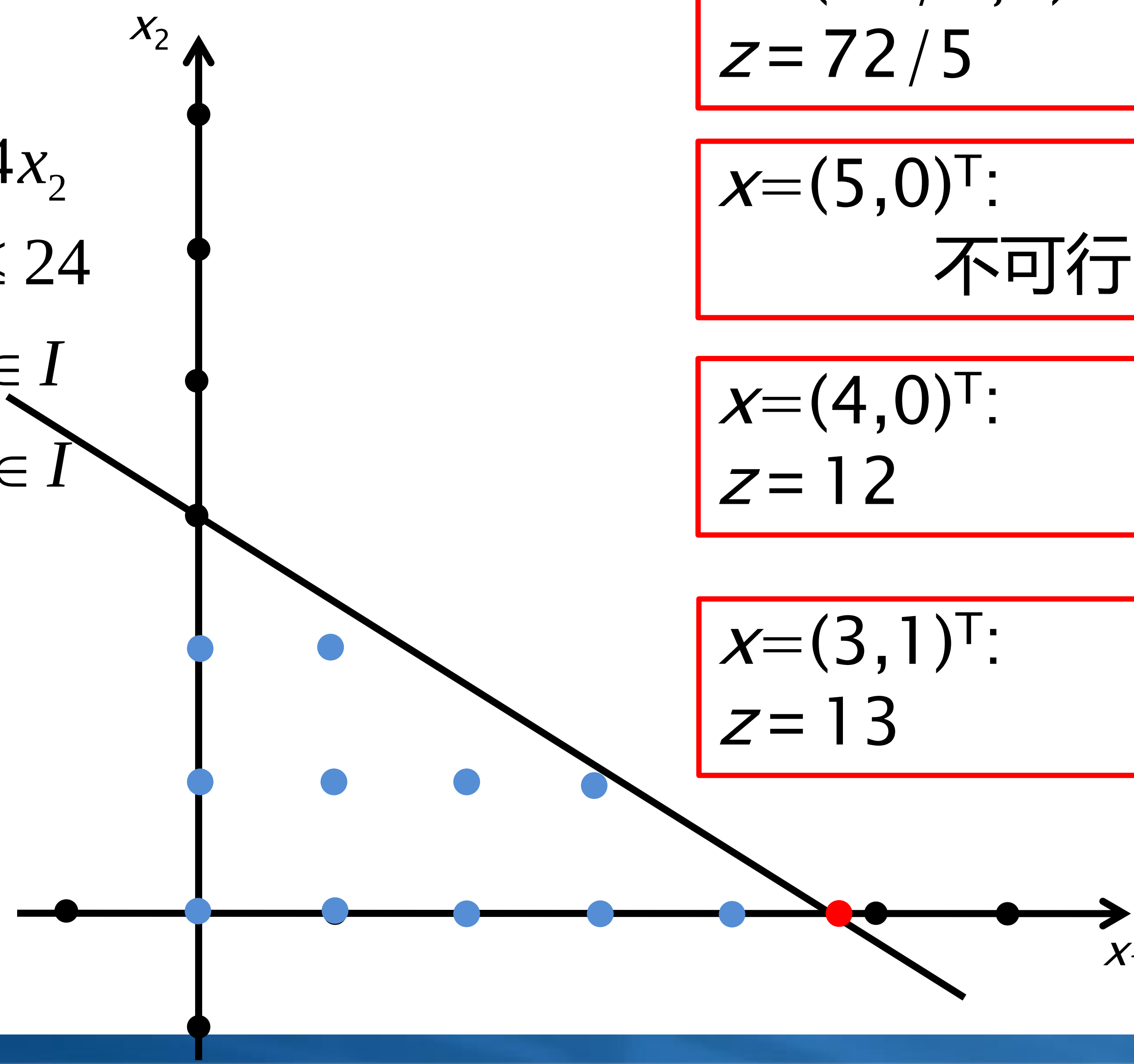
图解法(ILP)

$$x=(1,4)^T$$
$$z=-3$$



例：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 4x_2 \\ s.t. \quad & 5x_1 + 8x_2 \le 24 \\ & x_1 \ge 0, x_1 \in I \\ & x_2 \ge 0, x_2 \in I \end{aligned}$$



$x=(24/5,0)^T$
$z=72/5$

$x=(5,0)^T$:
不可行

$x=(4,0)^T$:
$z=12$

$x=(3,1)^T$:
$z=13$

整数线性规划 vs. 线性规划

原LP问题有最优解

- 原线性规划**最优解全是整数**，则整数规划最优解与线性规划最优解一致
- 有可行解，但**最优解值变差**
- 整数规划**无可行解**

Outline

- 基本概念
- 求解整数规划问题的困难
- 经典例子
- 一般方法

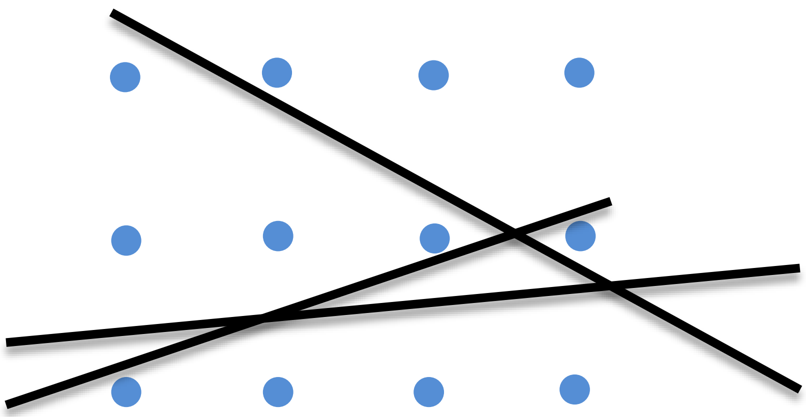
可行域复杂

- 整数约束本质上是一种非线性约束.导致可行域结构异常复杂. 传统非线性规划的最优性条件失去意义

$$x \in \{0,1\} \quad \Rightarrow \quad x(x-1)=0$$

解的存在性

- 目标有界时未必有最优解存在



穷举法

- 即使格点有限,也无法使用穷举法

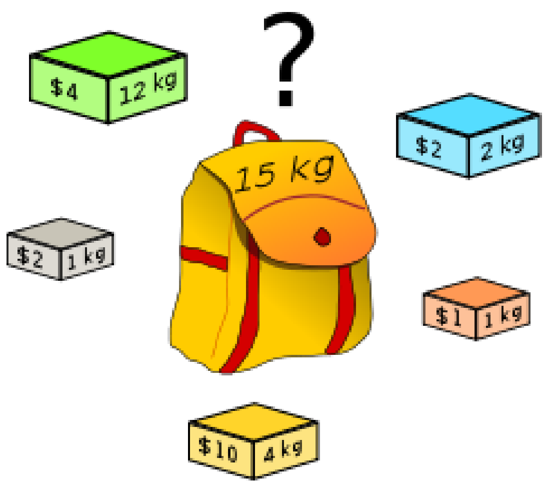
n个0-1变量: 2^n

舍入法

- 对于ILP, 先求LP,再四舍五入
  - 舍 or 入? 组合爆炸: 2^n
  - 原约束不可行: 寻找可行解

0-1背包问题(Knapsack problem)

- 给定 n 种物品，物品 j 的重量为 w_j, 价格为 c_j，在限定的总重量 W 内，我们如何选择，才能使得物品的总价格最高。



$$\max \quad z = \sum_{j}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq W$$

$$x_j \in \{0,1\}. j = 1, \ldots, n$$

投资决策问题

例： 某公司有一笔资金，总量为B，欲在 n 个候选项目中择优进行投资。已知项目 j (j =1, 2, … , n) 若决定投资，则需资金 b_j，预期收益为 c_j，试建立总收益最大的投资决策模型。

解： 引入0-1决策变量 x_j，$x_j = \begin{cases} 1, & \text{对项目 } j \text{ 投资} \\ 0, & \text{不对项目 } j \text{ 投资} \end{cases}$

$$\begin{cases} \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \le B \\ \quad x_j \in \{0,1\};\ j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

收益最大化

资金总量约束

0-1约束

背包问题
(Knapsack Problem)

同一个模型可描述来自不同领域的问题

旅行商问题(TSP)

思考：怎样建模？

刻画路线安排的关键是什么？

明确每一站的下一站！

- 有n个城市，一个推销员要从其中某一个城市出发，唯一走遍所有的城市，再回到他出发的城市，求最短的路线

Merrill M. Flood
1908–1991

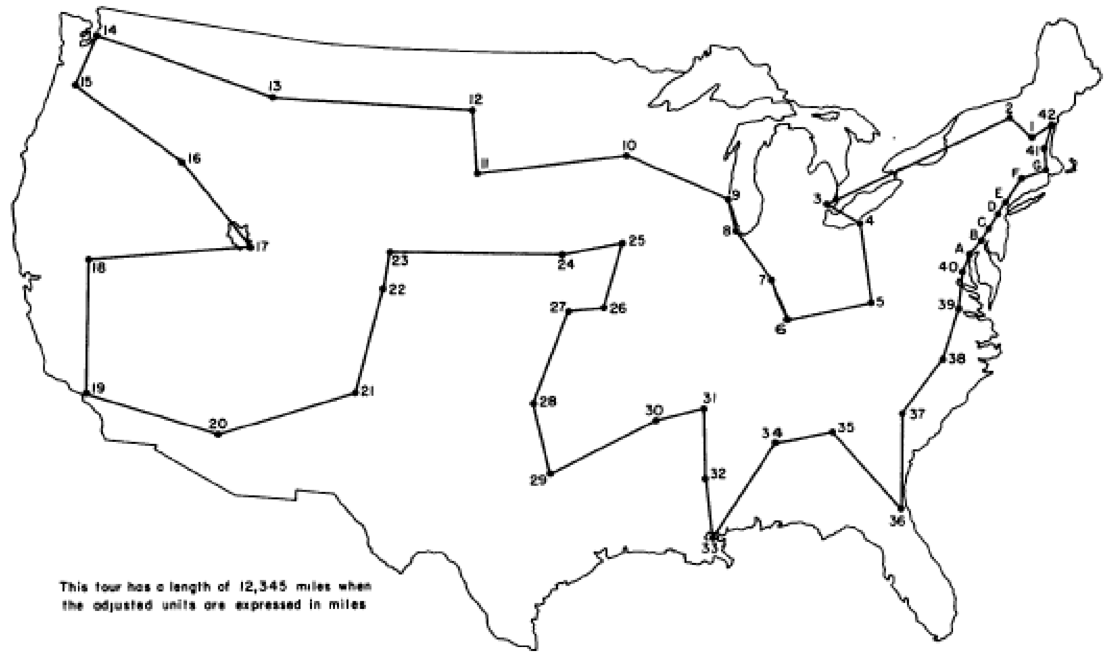


Fig. 16 The optimal tour of 49 cities

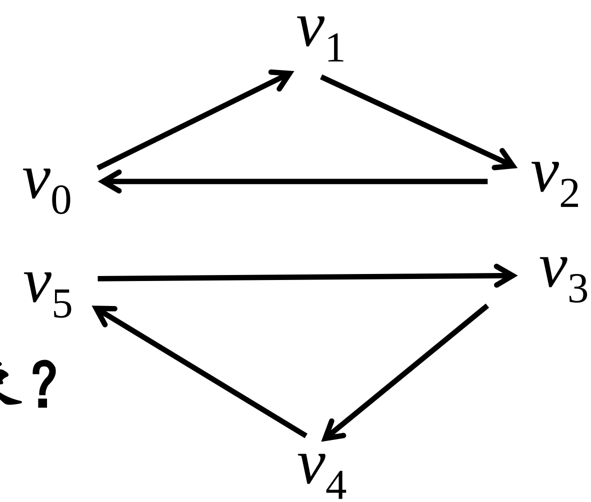
“Solution of a largescale traveling-salesman problem,” G. Dantzig, R. Fulkerson, S. Johnson, *Journal of the Operations Research Society of America*, 2, 4, 1954, 393-410

旅行商问题(TSP)

解：引入0-1决策变量 $x_{i,j}$ ，

$$x_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{如果}v_i\text{的下一站是}v_j\\ 0, & \text{如果}v_i\text{的下一站不是}v_j\end{cases}$$

思考：模型正确性？



模型一

$$\begin{cases}\min z=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}c_{i,j}x_{i,j}\\ s.t.\quad \sum\limits_{j=0,\ j\neq i}^{n}x_{i,j}=1;\ i=0,1,\cdots,n\\ \qquad\ \sum\limits_{i=0,\ i\neq j}^{n}x_{i,j}=1;\ j=0,1,\cdots,n\\ x_{i,j}\in\{0,1\};\ i,\ j=0,1,\cdots,n\end{cases}$$

思考：目标和约束？

错误：无法避免小回路

补充约束：

$$\sum_{i\in Q,\ j\in\bar{Q}}x_{i,j}\geq 1;\ \forall Q\subset\{0,1,2,\cdots,n\}$$

思考：补充约束有多少？

旅行商问题(TSP)

解：引入0-1决策变量 $x_{i,j}$ ，

$$x_{i,j}=\begin{cases}1, & 如果v_i的下一站是v_j\\ 0, & 如果v_i的下一站不是v_j\end{cases}$$

模型二

$$\begin{cases}\min z=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c_{i,j}x_{i,j}\\ s.t.\quad \sum_{j=0,\ j\neq i}^{n}x_{i,j}=1;\ i=0,1,\cdots,n\\ \qquad \sum_{i=0,\ i\neq j}^{n}x_{i,j}=1;\ j=0,1,\cdots,n\\ x_{i,j}\in\{0,1\};\ i,\ j=0,1,\cdots,n\end{cases}$$

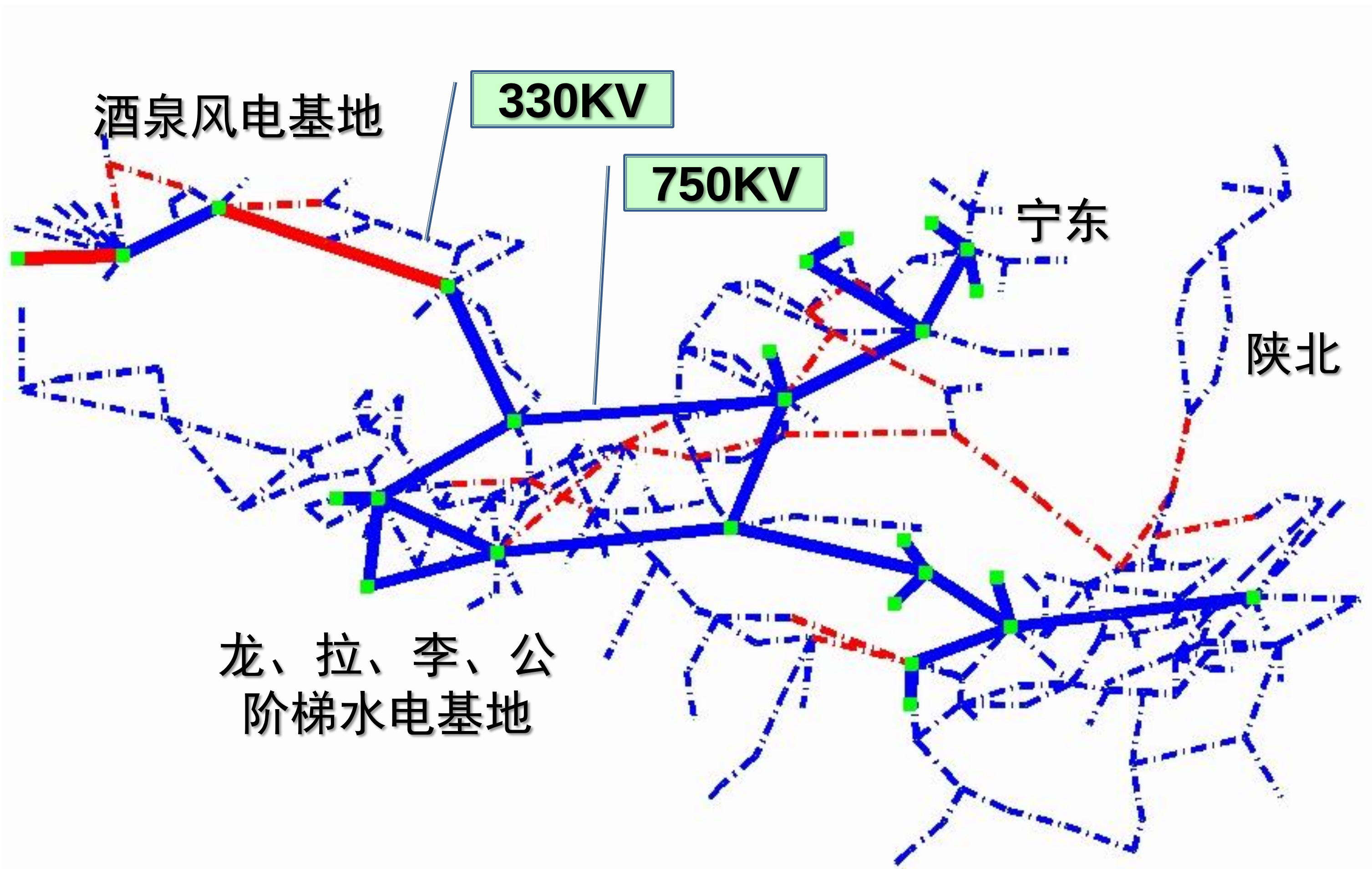
辅助变量和补充约束：

$$\begin{cases}u_i-u_j+n\,x_{i,j}\le n-1;\\ \qquad 1\le i\neq j\le n\\ u_1,u_2,\cdots,u_n\in R\end{cases}$$

注意：没有u_0

共$n(n-1)$个不等式

电力系统优化调度



整数规划问题求解的一般方法

- 全局最优化方法

- 近似最优化方法