第6章　变结构控制

第6.2节　相平面法（Phase plane method）

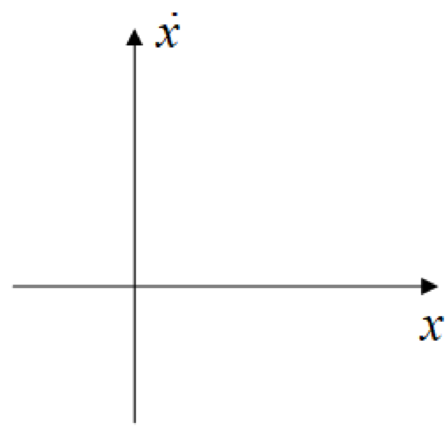
注意，相平面法是针对二阶系统的

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

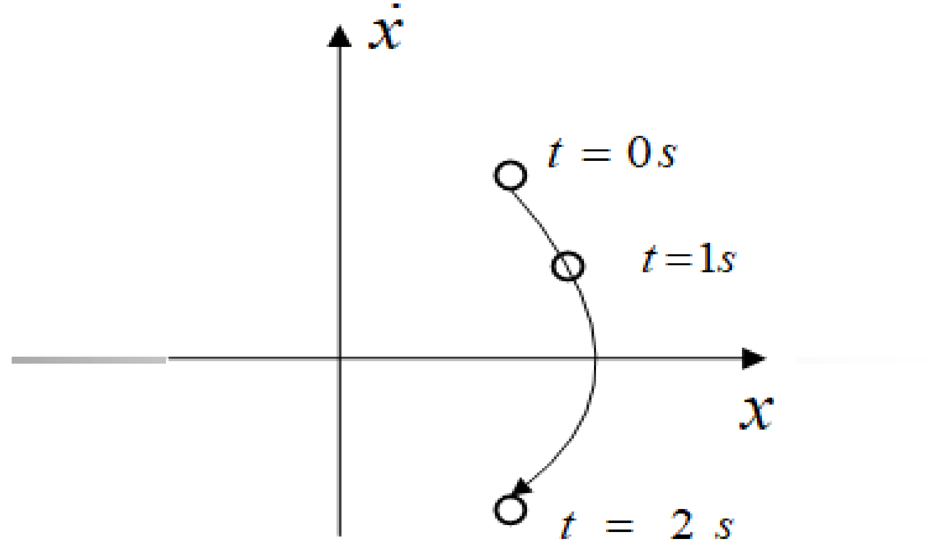
相平面法为了描述系统的运动，首先建立了一个坐标系

x

$\dot{x}$

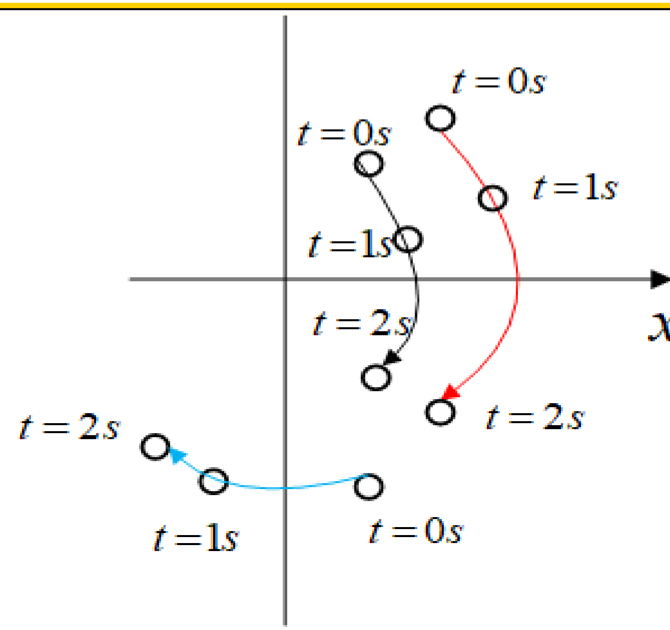


原则1：系统随时间运动在相平面上表现为轨迹，用箭头表示随时间变化，系统状态的运动

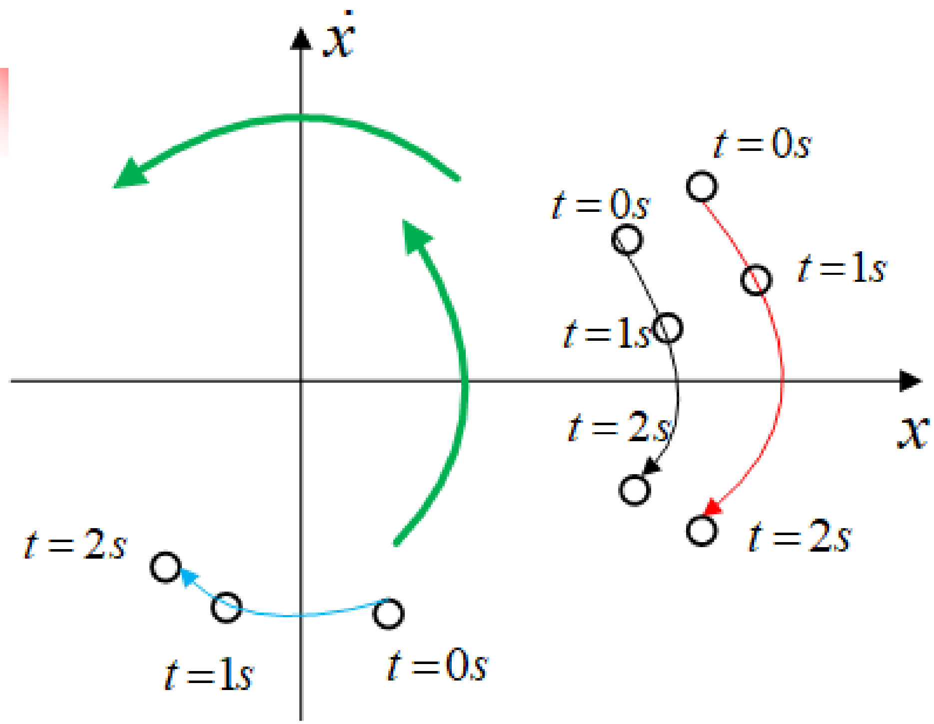


问题1：一个系统在相平面运动将形成几条轨迹？1条？2条？

原则2：同一个系统从不同初值出发，将在相平面内形成若干条轨迹，所以一般以轨迹簇的形式存在



问题2：像绿色这样的轨迹存在吗？

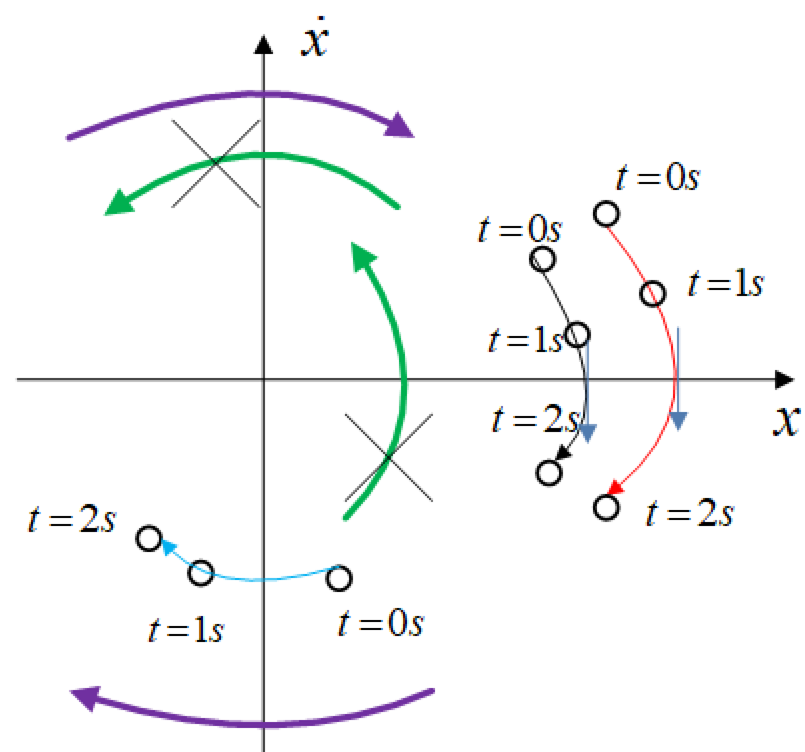


思考：$\dot{x}$ 的含义是什么？

$\dot{x}>0, x$将怎么变化？

$\dot{x}<0, x$将怎么变化？

原则3：上半平面运动一定是从左向右的，下半平面运动一定是从右向左的。穿越横轴时，一定是垂直的



例子1 $\ddot{x}+4x=0$ ⇨ $\lambda_{1,2}=\pm 2i$

问题3：A由什么决定

$$x(t)=A\cos(\omega t+\theta)$$

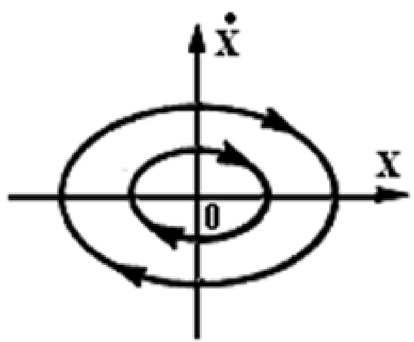
$$\dot{x}(t)=-A\omega\sin(\omega t+\theta)$$

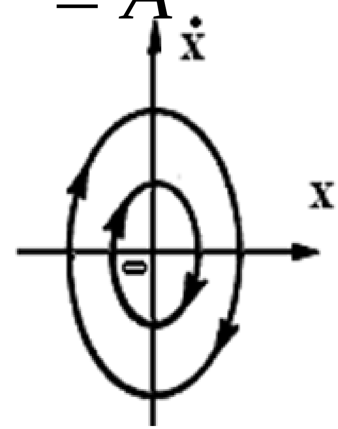
$$\omega=2$$

$$\ddot{x}(t)=-A\omega^{2}\cos(\omega t+\theta)$$

$$x^{2}+\left(\frac{x}{\omega}\right)^{2}=A^{2}$$

$\omega<1$





$\omega>1$

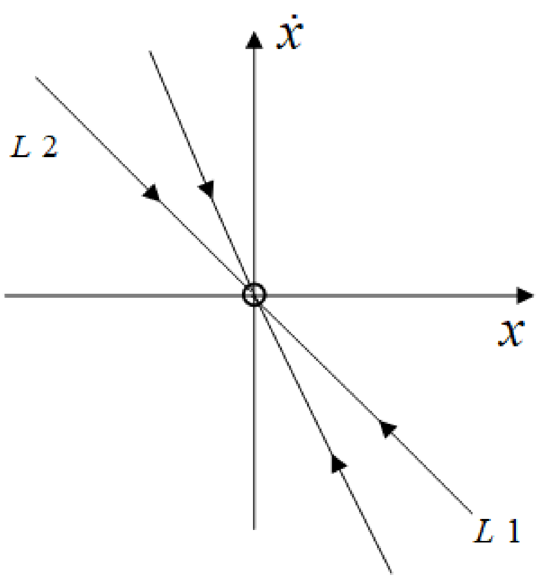
例子2 $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0$ ⇒ $x(t)=Ae^{-t}+Be^{-2t}$

$\dot{x}(t)=-Ae^{-t}-2Be^{-2t}$

问题3：A、B由什么决定？

$A=0$ ⇒ $\dot{x}+2x=0$ $L1$

$B=0$ ⇒ $\dot{x}+x=0$ $L2$



问题4：现在图上是几条轨迹？

$t\to\infty$

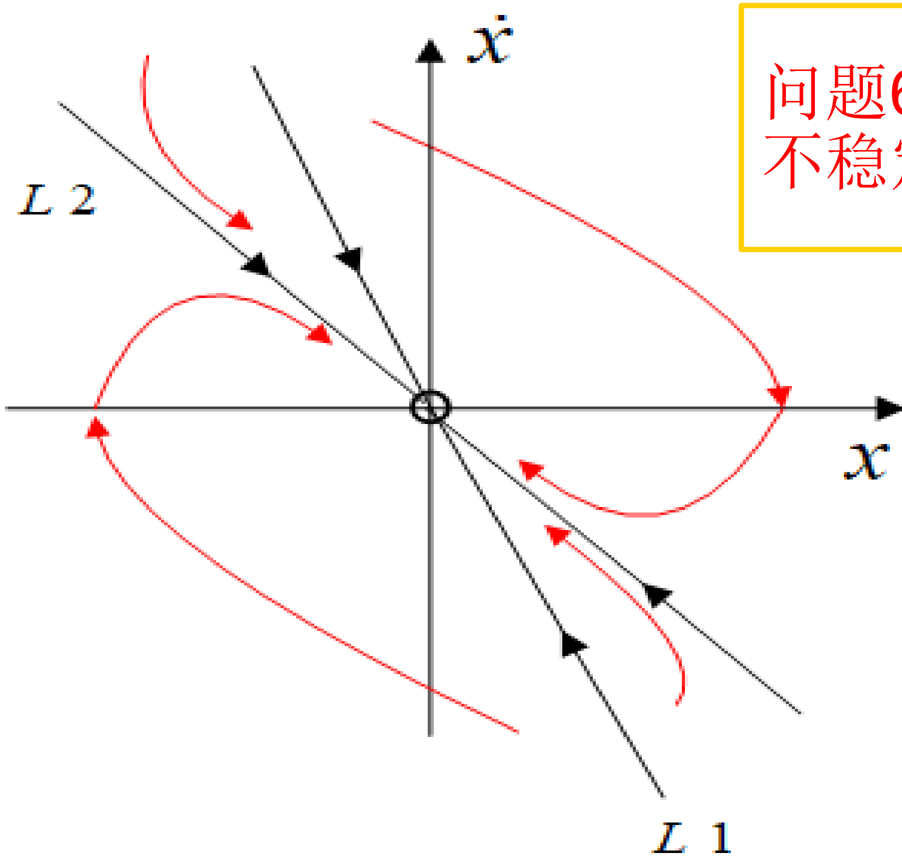
⇓

$x(t)\approx Ae^{-t}$

$\dot{x}(t)\approx -Ae^{-t}$

问题5：随着时间增大，A和B哪一项先近似消失

结论：随着时间增大，系统轨迹趋近于L2



问题6：这个系统是稳定还是不稳定？

例子3，设某二阶控制系统S2为：

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} = u \\ u = 3x \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$$

这个系统的特征根为： $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

$$x(t) = Ae^{3t} + Be^{-t} \Rightarrow \dot{x}(t) = 3Ae^{3t} - Be^{-t}$$

假设某个初值令 $A = 0$

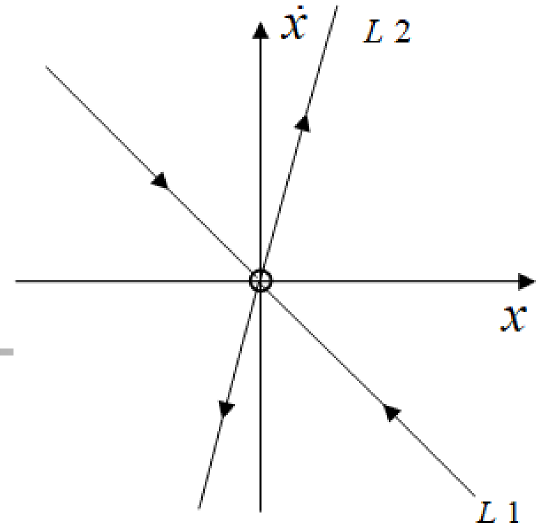
$$A = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = Be^{-t} \\ \dot{x} = -Be^{-t} \end{cases} \Rightarrow L1: \dot{x} + x = 0$$

假设某个初值令 $B = 0$

$$B = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = Ae^{3t} \\ \dot{x} = 3Ae^{3t} \end{cases} \Rightarrow L2: \dot{x} - 3x = 0$$

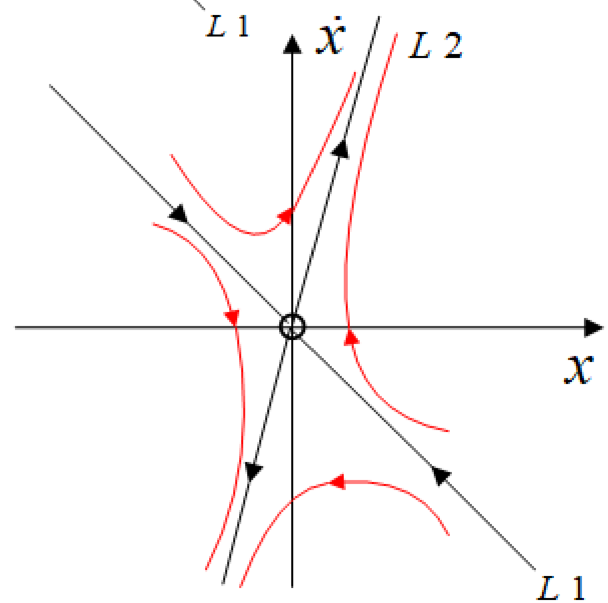
A=0,B=0时，

系统相轨迹线



$$t \to \infty$$

$$\begin{cases} x = Ae^{3t} + Be^{-t} \\ \dot{x} = 3Ae^{3t} - Be^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = Ae^{3t} \\ \dot{x} = 3Ae^{3t} \end{cases} \Rightarrow$$



可知，当t趋于无穷大时，系统状态趋于直线L2

由相轨迹图可知，该系统不稳定

问题7：有没有轨迹是稳定的？

例子4，设某二阶控制系统S1为：

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} = u \\ u = -2x \end{cases} \Rightarrow \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$$

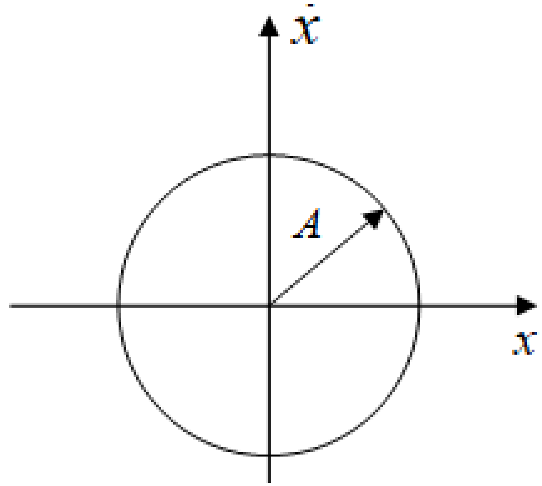
这个系统的特征根为： $\lambda_{1,2} = 1 \pm 1i$

$$x(t) = Ae^{t}\cos(t+\theta)$$

$$\dot{x}(t) = Ae^{t}\cos(t+\theta) - Ae^{t}\sin(t+\theta)$$

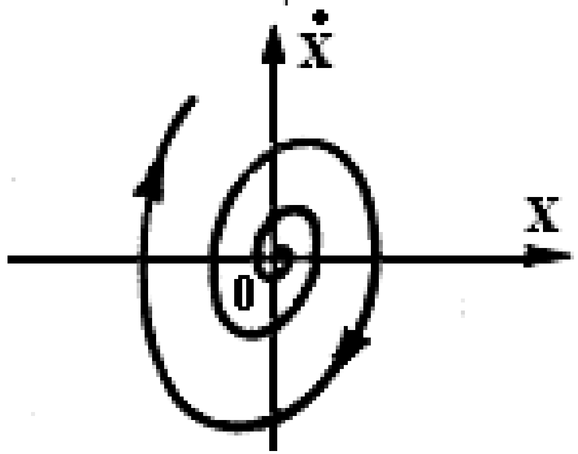
$$\begin{cases} \ddot{x} = u \\ u = -x \end{cases} \Rightarrow \lambda = \pm 1j \Rightarrow \begin{array}{l} x = A\cos(t+\theta) \\ \dot{x} = -A\sin(t+\theta) \end{array}$$

$$\dot{x}^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow$$



$$x(t) = Ae^t\cos(t+\theta) \Rightarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ae^t\cos(t+\theta) - Ae^t\sin(t+\theta)$$

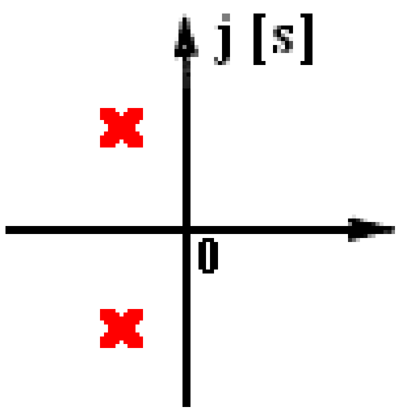


例子中的系统是不稳定

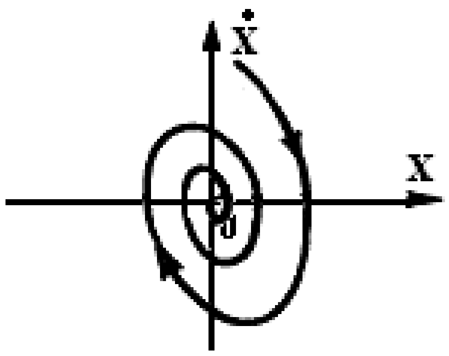
$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} = u \\ u = -2x \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$$

这个系统的特征根为：$\lambda_{1,2} = -1 \pm 1i$

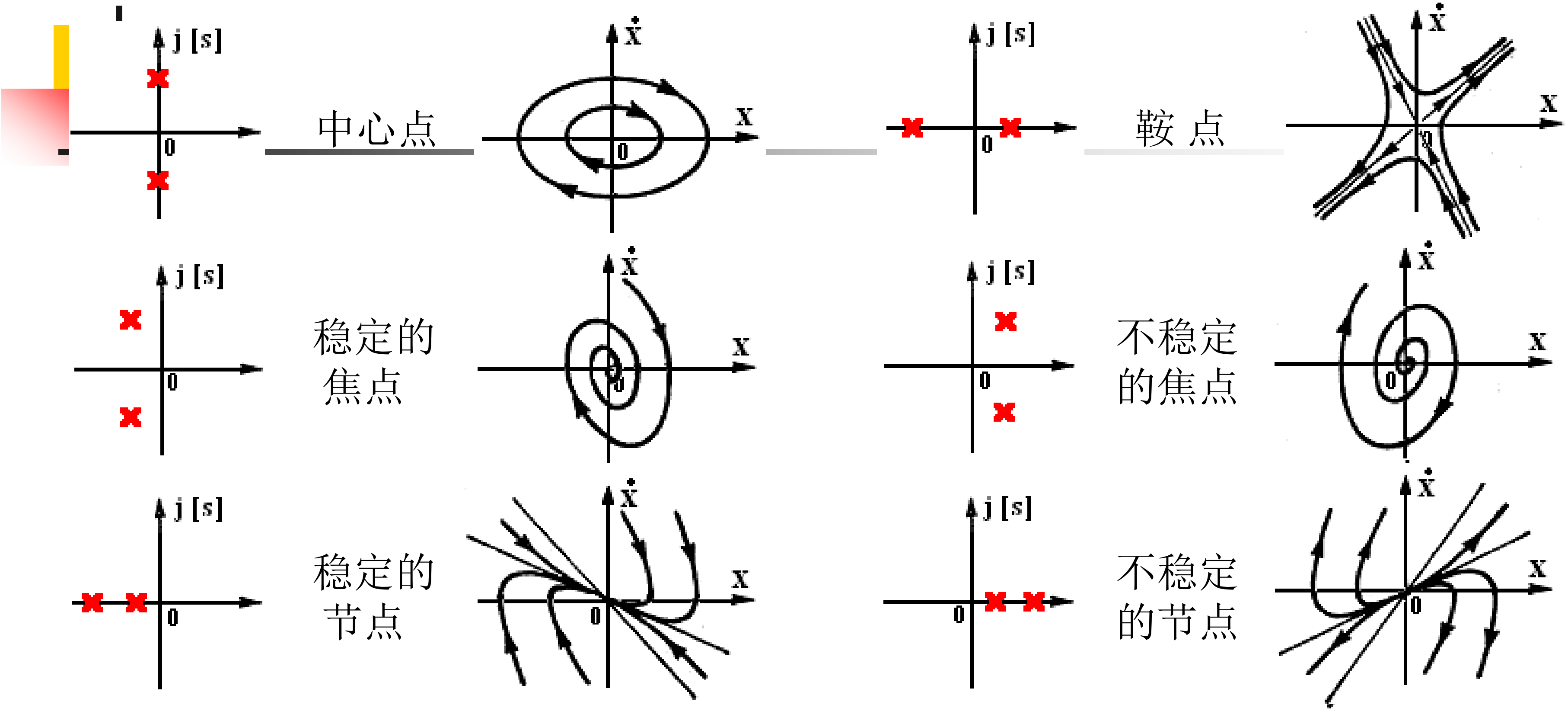
$$x(t) = Ae^{-t}\cos(t+\theta) \qquad \dot{x}(t) = -Ae^{-t}\cos(t+\theta) - Ae^{-t}\sin(t+\theta)$$



稳定的
焦点



极点分布　奇点　相迹图　　极点分布　奇点　相迹图

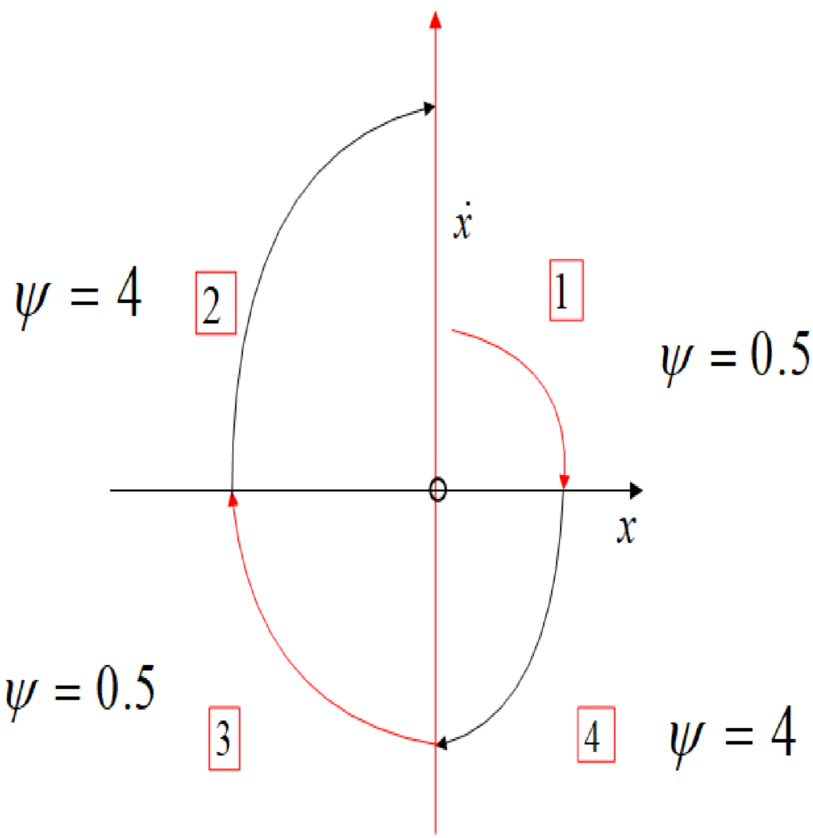


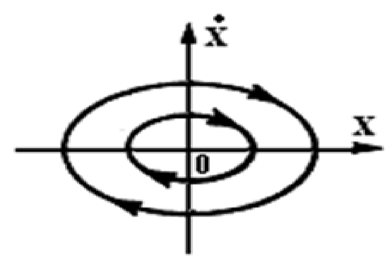
问题：我们这节课是要讲什么？

例子S1，设某二阶控制系统为：

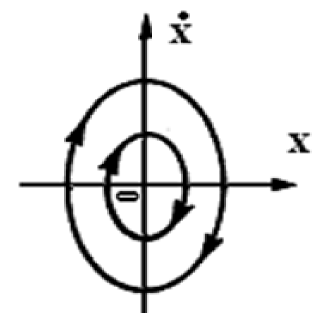
$$\ddot{x} = u \quad u = \begin{cases} -0.5x & x\dot{x} > 0 \\ -4x & x\dot{x} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} + \psi x = 0$$

$$\psi = \begin{cases} 0.5 & x\dot{x} \ge 0 \quad \text{一、三象限} \\ 4 & x\dot{x} \le 0 \quad \text{二、四象限} \end{cases}$$



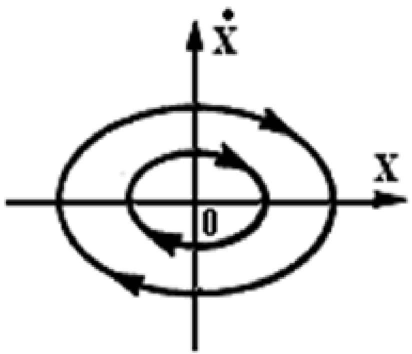


$a_2^2 < 1$

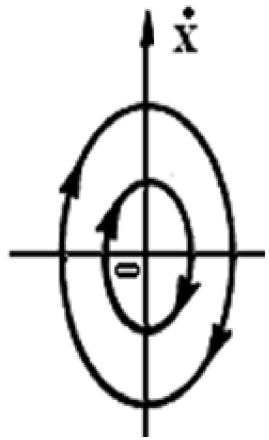


$a_1^2 > 1$

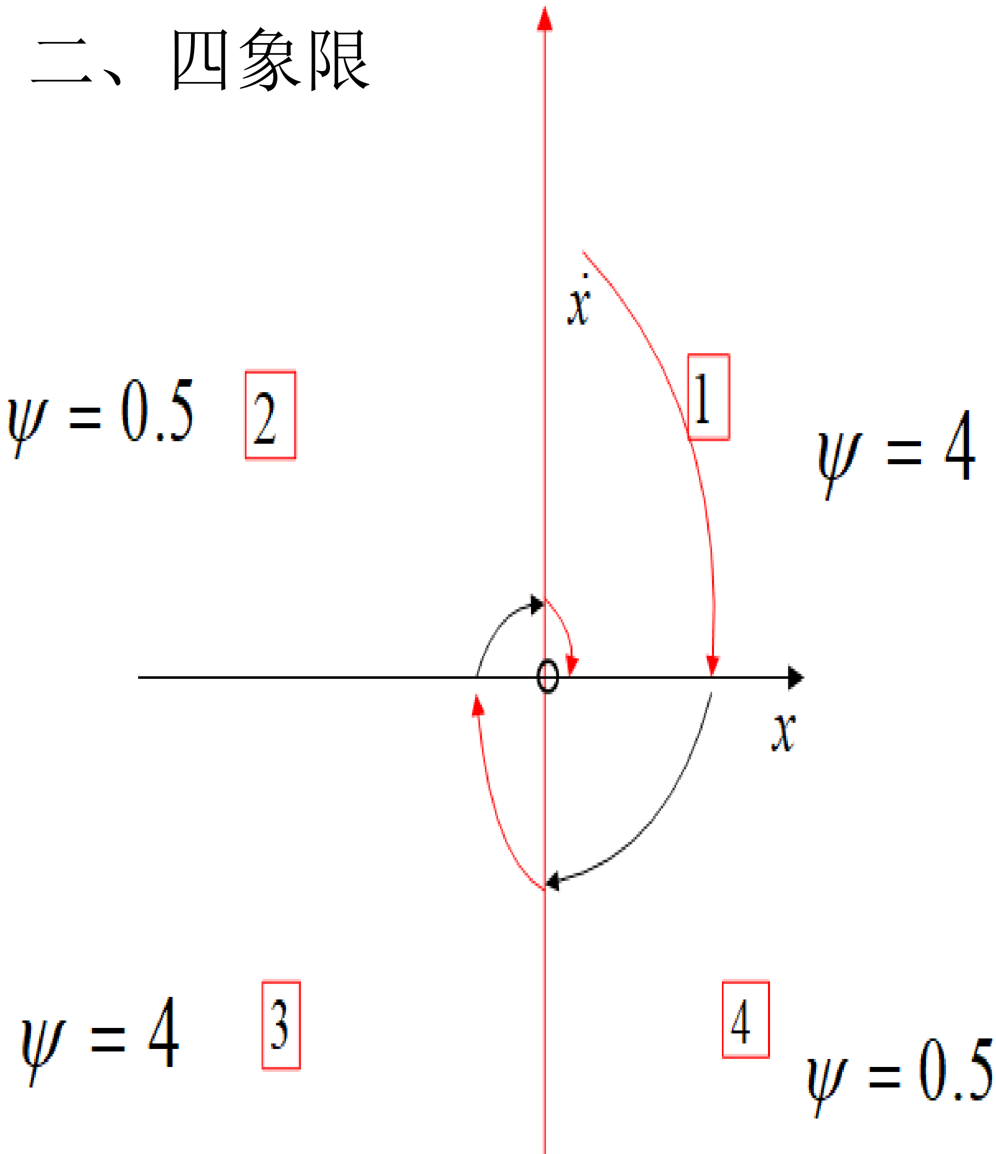
$$\psi=\begin{cases}4 & x\dot{x}\geq 0 \quad 一、三象限 \\ 0.5 & x\dot{x}\leq 0 \quad 二、四象限\end{cases}$$



$a_2^2<1$



$a_1^2>1$



例子S2，设某二阶控制系统S3为：

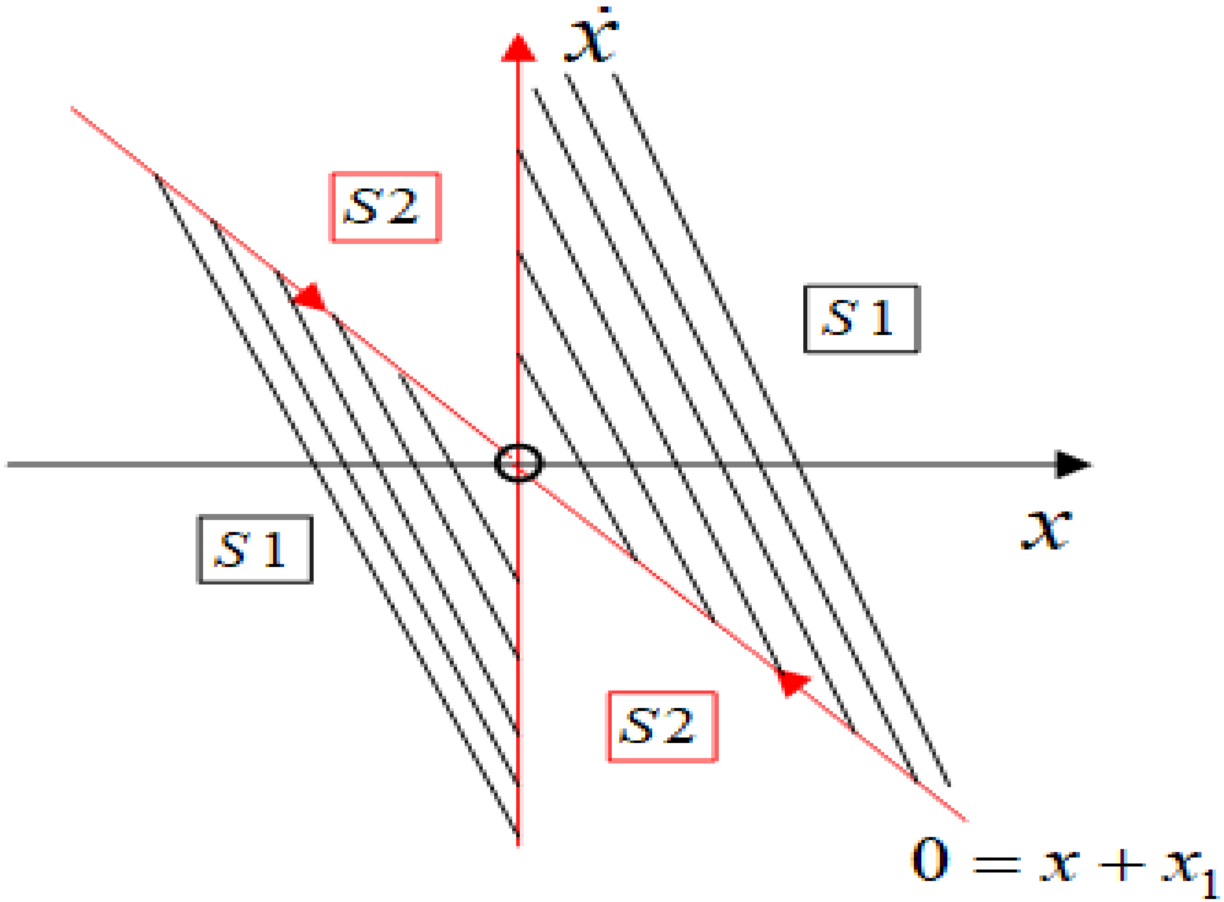
$$\ddot{x} - 2\dot{x} = u$$

$$u = \begin{cases} -2x & xs > 0 \\ 3x & xs \le 0 \end{cases}, \quad s = x + \dot{x}$$

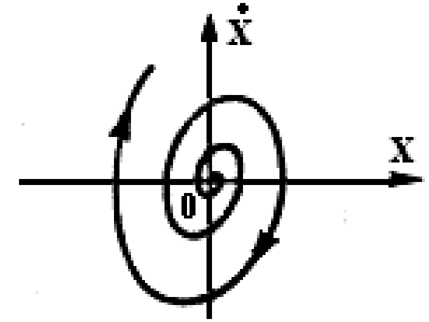
$$\Downarrow$$

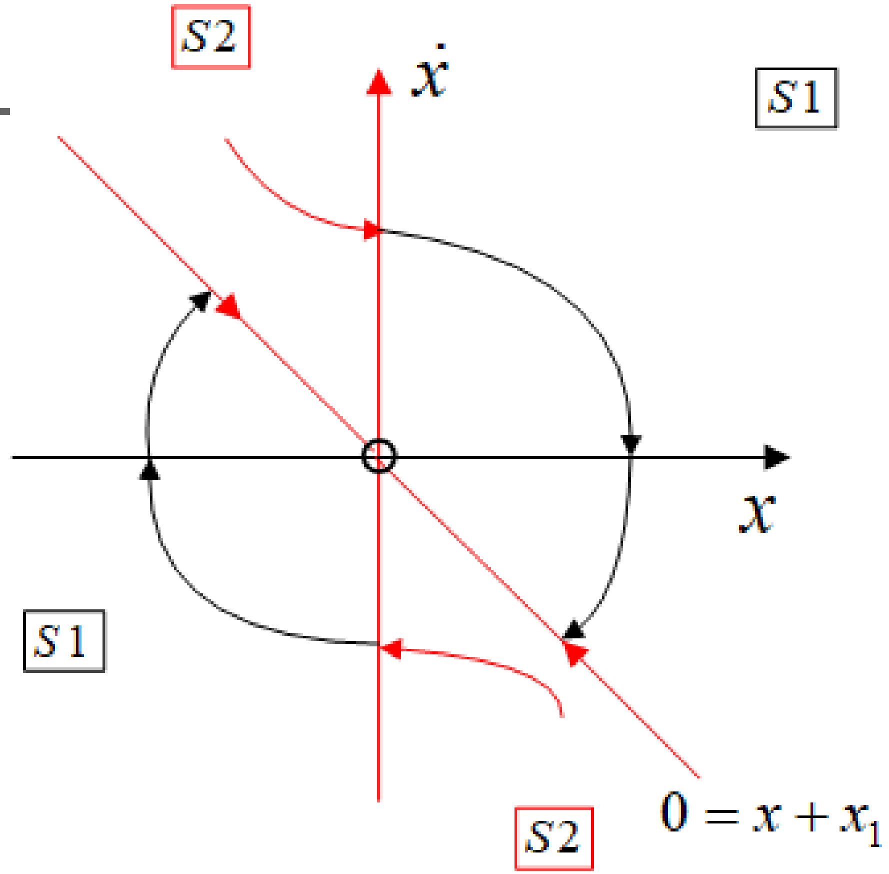
$$S3: \begin{cases} S1: \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0 & xs > 0 \\ S2: \ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0 & xs \le 0 \end{cases}, \quad s = x + \dot{x}$$

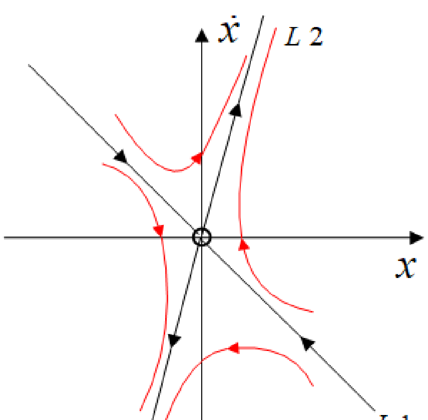
$$xs > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x > 0 \wedge x + \dot{x} > 0 \\ x < 0 \wedge x + \dot{x} < 0 \end{array}$$



$S1 \quad \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 1i$







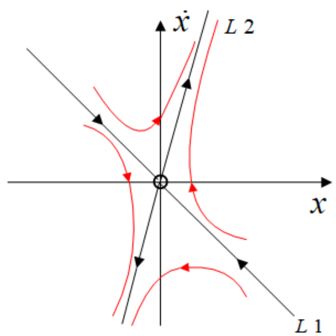
$L1: \dot{x} + x = 0$

$L2: \dot{x} - 3x = 0$

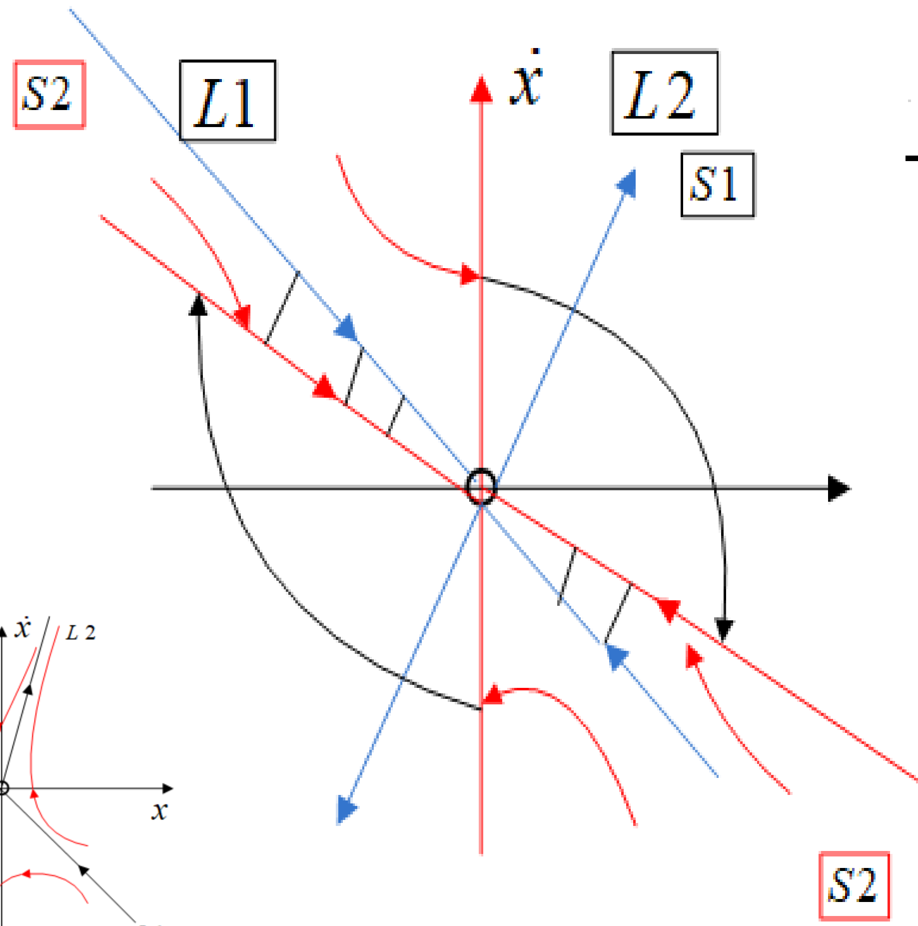
$\lambda_{1,2} = 3, -1 \Leftarrow \ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0 \quad S2$

设某二阶控制系统S3为： $\ddot{x}-2\dot{x}=u$

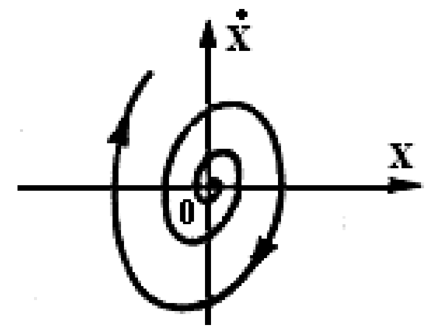
$$u=\begin{cases}-2x & xs>0\\ 3x & xs\le 0\end{cases},\quad s=\alpha x+\dot{x},0<\alpha<1$$

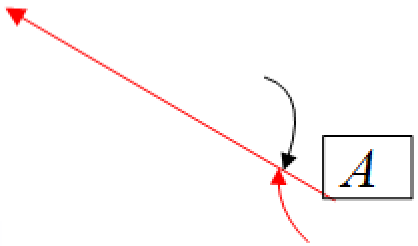


S4的相轨迹图

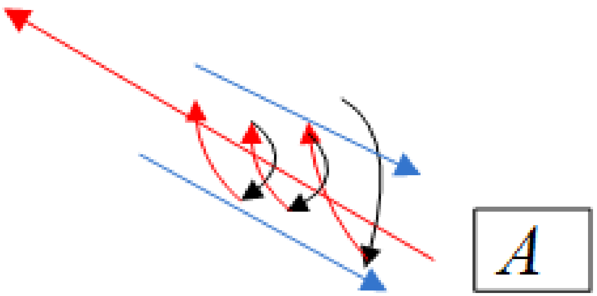


$S:0=\alpha x+\dot{x},\alpha<1$





问题8：轨迹达到A点后会静止吗？



问题9：理想情况下，这个宽度是是多少？

由于宽度趋近于零，导致系统将沿着S向原点趋近，好像沿着S滑向原点，这种运动形式就称为滑动模态（sliding mode）。

那么实际滑动是什么样子呢？

系统的状态轨迹均指向切换线，这意味着系统状态点一旦进入便只能沿着该线运动而不再离开。在保证渐近稳定的情况下，后者产生了“新”的状态轨迹，且鲁棒性更强

这种沿s=0滑动至原点的特殊运动成为滑动运动，这时前面任何一种固定结构下所没有的运动。

直线s=0称为切换流形，函数成为切换函数。

在滑模运动下，系统的运动规律有简单的微分方程dx+cx=0描述，解为x(t) = x(0)exp(-ct)

显然，方程阶数比原系统低，而且仅与参数c有关，即不受系统参数变化或干扰的影响，具有很强的鲁棒性。

变结构控制实现方式的讨论

方式1：“就地取材”型

- 类似系统s2,通过对各子系统有益运动部分的“精心拼接”，实现组合运动的稳定性。
- 缺点：干扰、参数扰动的影响并未消除

方式2：无中生有（滑动模态）

- 创造出任何子系都不包含的新轨迹
- 优点：有可能具有独立于各子系统的特性，提高系统的鲁棒性