



西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 第五章：线性空间与欧氏空间

## 第一节 线性空间的基本概念

董荣

数学与统计学院



**作业:**

**习题5.1**

**(A) 1(3), 3(1)(4), 4, 5, 8, 10**



## 第一节 线性空间的基本概念

### 1. 线性空间的定义

### 2. 线性空间的基本性质

### 3. 线性空间的子空间

### 4. 基、维数、向量的坐标

### 5. 基变换与坐标变换

### 6. 线性空间的同构



# 一、线性空间的定义

**定义（线性空间）** 设 $V$ 是一个非空集合,  $F$ 是一个数域,  
在 $V$ 上定义一种(加法)运算:  $\forall \alpha \in V, \beta \in V, \alpha + \beta \in V$ ,  
在 $V$ 与 $F$ 之间定义一种(数乘)运算:  $\forall \alpha \in V, k \in F, k\alpha \in V$ ;  
满足:  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k, l \in F$

(1)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;

(2)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;

(3)  $V$ 中存在一个零元,  
使得 $\forall \alpha \in V$ , 有 $\alpha + 0 = \alpha$ ;

(4)  $\forall \alpha \in V, \exists$ 负元 $-\alpha \in V$ ,  
使得 $\alpha + (-\alpha) = 0$ ;

(5)  $1\alpha = \alpha$ ;

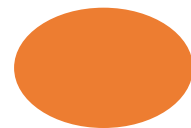
(6)  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$ ;

(7)  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ ;

(8)  $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ ;

则称 $V$ 对此加法和数乘在数域 $F$   
上做成一个**线性空间**, 或称**向量空间**。  
 $V$ 中的元素称为**向量**。

如果 $F$ 是实数域, 则称**实线性空间**





**例1** 向量空间  $F^n, R^n, C^n$ , 分别是  $F, R, C$  上的线性空间.

**例2**  $F^{m \times n}, R^{m \times n}$ : 元素属于  $F$  或  $R$  的  $m \times n$  矩阵的全体,  
按照矩阵的加法和数与矩阵的乘法, 构成  
数域  $F$  或  $R$  上的线性空间.

**例3**  $F[x]_n = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in F, i = 1, 2, \cdots, n\}$   
按照多项式的加法与数与多项式的乘法  
构成数域  $F$  上的线性空间.

$F[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots \mid a_i \in F, i = 0, 1, 2, \cdots\}$   
按照多项式的加法与数与多项式乘法构成数域  $F$  上的线性空间.

**例4**  $C[a, b] = \{f(x) \mid f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续}\}$   
按照函数的加法与实数与函数的乘法构成一个实线性空间.



**例5** 齐次线性方程组  $Ax = 0$  的所有解的集合

$$S = \{x \in R^n \mid A \in R^{m \times n}, Ax = 0\}$$

对向量的加法和数乘构成线性空间，称为齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解空间。

**例6**  $V = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$

若定义：

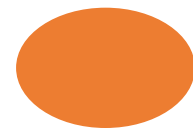
$$\text{加法} : (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$\text{数乘} : k(a, b) = (ka, 0)$$

则：**不构成**线性空间，因为  $1(a, b) = (a, 0) \neq (a, b)$

**例7** 非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解集合**不构成**线性空间

因为，若  $Ax_0 = b$ ，但  $A(2x_0) = 2Ax_0 = 2b \neq b$ 。





## 第一节 线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义

2. 线性空间的基本性质

3. 线性空间的子空间

4. 基、维数、向量的坐标

5. 基变换与坐标变换

6. 线性空间的同构



# 线性空间的基本性质

**性质5.1.1** 线性空间的零元素是惟一的。

$$\forall \alpha, \alpha + 0_1 = \alpha, \alpha + 0_2 = \alpha, \text{ 则 } 0_1 = 0_2.$$

**性质5.1.2** 线性空间的任一元素的负元素是惟一的。

**性质5.1.3**  $0\alpha = 0, (-1)\alpha = -\alpha, k0 = 0$

**性质5.1.4** 如果  $k\alpha = 0$ , 则  $k = 0$  或  $\alpha = 0$

$$\text{若 } k \neq 0, \text{ 则 } k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}0 = 0,$$

$$(k^{-1}k)\alpha = 1\alpha = \alpha, \text{ 则 } \alpha = 0.$$







## 第一节 线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构



**定义5.1.2 (子空间)** 设 $W$ 是线性空间 $V$ 的一个**非空子集**，如果 $W$ 按照 $V$ 中所定义的线性运算也构成一个线性空间，则称 $W$ 为 $V$ 的一个**子空间**。

线性空间需对其上所定义的线性运算(加法与数乘)封闭，同时满足：

- (1)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;
- (2)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;
- (3)  $W$ 中存在一个零元，使得 $\forall \alpha \in W$ , 有 $\alpha + 0 = \alpha$ ;
- (4)  $\forall \alpha \in W, \exists$ 负元 $-\alpha \in W$ , 使得 $\alpha + (-\alpha) = 0$ ;
- (5)  $1\alpha = \alpha$ ;
- (6)  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$ ;
- (7)  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ ;
- (8)  $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ ;



**定义5.1.2 (子空间)** 设 $W$ 是线性空间 $V$ 的一个非空子集, 如果 $W$ 按照 $V$ 中所定义的线性运算也构成一个线性空间, 则称 $W$ 为 $V$ 的一个**子空间**。

**定理5.1.1** 设 $W$ 是线性空间 $V$ 的非空子集, 则

$W$ 为 $V$ 的子空间  $\iff W$ 对 $V$ 中的线性运算封闭

**例1** 设 $0$ 为线性空间 $V$ 中的零向量, 则由单个零向量构成的集合 $\{0\}$ 是 $V$ 的一个子空间, 称它为 $V$ 的**零子空间**。

**例2** 数域 $F$ 上的所有 $n$ 阶方阵所形成的集合构成数域 $F$ 上的一个线性空间。  
其中的上三角形矩阵; 下三角形矩阵; 对称矩阵; 反对称矩阵均构成这个线性空间的子空间





**例3** 设 $\alpha_1, \alpha_2$ 是线性空间 $V$ 中两个取定的向量，则由 $\alpha_1$ 与 $\alpha_2$ 的所有线性组合所组成的 $V$ 的子集

$$W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \mid k_i \in F, i = 1, 2\}$$

是 $V$ 的一个子空间。

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, k_i, l_i \in F, i = 1, 2$$

$$\alpha + \beta = (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2$$

$$k(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = kk_1\alpha_1 + kk_2\alpha_2, k \in F$$

通常称 $W$ 为由向量 $\alpha_1, \alpha_2$ 生成的 $V$ 的子空间，并记成 $\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$

$$\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \mid k_i \in F, i = 1, 2\}$$

一般的，设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是线性空间 $V$ 中一组向量，则 $V$ 的子集

$$\{k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m \mid k_i \in F, i = 1, 2, \dots, m\}$$

是 $V$ 的一个子空间，称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 生成的 $V$ 的子空间，并记为

$$\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$





**例4** 判断 $\mathbf{R}^3$ 的下列子集是否构成 $\mathbf{R}^3$ 的子空间:

(1)  $W_1 = \{(x, 2x, 3y)^T \mid x, y \in \mathbf{R}\}$

(2)  $W_2 = \{(1, x, y)^T \mid x, y \in \mathbf{R}\}$

**解** (1)  $W_1$ 中的任意向量可写成

$$\begin{aligned}\alpha &= (x, 2x, 3y)^T = (x, 2x, 0)^T + (0, 0, 3y)^T \\ &= x(1, 2, 0)^T + y(0, 0, 3)^T\end{aligned}$$

即 $W_1$ 中的任意向量都可以表示成两个向量 $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$ ,  
 $\alpha_2 = (0, 0, 3)^T$ 的线性组合, 因此 $W_1$ 是由 $\alpha_1, \alpha_2$ 生成的 $\mathbf{R}^3$ 的子空间:

$$W_1 = \text{span}\{(1, 2, 0)^T, (0, 0, 3)^T\}$$

(2)  $W_2$ 显然对线性运算不封闭, 因此不构成 $\mathbf{R}^3$ 的子空间。



## 第一节 线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构



在线性空间中，我们也可以定义线性表示，线性相关，线性无关等基本概念。

**例：**考虑连续函数空间  $C[a, b] = \{f(x) : f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续}\}$ ，任取  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x) \in C[a, b]$ ，这些函数线性无关，是指任取  $r$  个数，若

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_r f_r(x) = 0 \rightarrow \text{零函数}$$

则有  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ .

**例：**考虑线性空间  $F^{m \times n}$ ，任取一族矩阵  $A_1, A_2, \dots, A_r \in F^{m \times n}$ ，这族矩阵线性无关，是指任取  $r$  个数，若

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_r A_r = 0 \rightarrow \text{零矩阵}$$

则有  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$ .





**定义5.3.1 (基, 维数, 向量的坐标)** 如果在线性空间 $V$ 中存在一组向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , 满足

(1)  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关

(2)  $\forall \alpha \in V, \alpha$ 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表示:

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n, \quad (x_i \in F, i = 1, \dots, n)$$

则称 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为 $V$ 的一个**基**;

称基中所含向量的个数 $n$ 为 $V$ 的**维数**, 记为 $\dim(V) = n$ , 并称 $V$ 为 $n$ 维线性空间;

称有序数 $x_1, \dots, x_n$ 为向量 $\alpha$ 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的**坐标**, 记为 $(x_1, \dots, x_n)^T$

**注:** 零空间是惟一的没有基的线性空间, 规定零空间的维数是零。

若在线性空间 $V$ 中可以找到任意多个线性无关的向量, 则称 $V$ 是**无限维线性空间**, 否则称 $V$ 为**有限维线性空间**。





若将线性空间 $V$ 看做向量组，则 $V$ 的基与维数分别相当于 $V$ 的**极大无关组**与**秩**，因此有

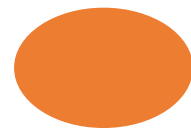
- (1) 线性空间的基不是惟一的，但基中所含向量的**个数是惟一的**，因此维数的定义是有意义的。
- (2) 对于 $n$ 维线性空间 $V$ ， $V$ 中**任意 $n$ 个线性无关的向量都可以看做 $V$ 的基**。
- (3) 线性空间 $V$ 中向量 $\alpha$ 用基向量线性表示是**惟一的**，这表明，在给定基下，向量 $\alpha$ 的坐标 $(x_1, \dots, x_n)^T$ 是惟一确定的。

若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 $V$ 的基，则 $V$ 可表示为

$$V = \{x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n \mid x_i \in F, i = 1, \dots, n\}$$

因此， $V$ 可以看做由**基向量生成**的线性空间。

$$V = \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$





**例：**  $n$ 维基本单位向量组

$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n = (0, 0, \dots, 1)^T$   
是 $F^n$ 的一个基（标准基）。

对于 $F^n$ 中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \dots, a_n)^T$ ，由于

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标是 $(a_1, \dots, a_n)^T$ 。

对于 $F^n$ 中另一组基

$\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 1, \dots, 1)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (0, 1, \dots, 1)^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_n = (0, 0, \dots, 1)^T,$

$\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标为 $(a_1, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1})^T$

同一向量在不同基下的坐标一般是不同的。





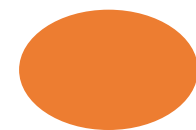
**例：**证明向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (2, 4, 5)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 2, 3)^T$ 是 $R^3$ 的一个基，并求 $\alpha = (0, 2, 3)^T$ 在此基下的坐标。

**思路：**由于 $R^3$ 是3维线性空间，因此，我们仅需证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。由于 $\det(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \neq 0$ ，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关。

然后再求解方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \alpha$ ,

$$(x_1, x_2, x_3)^T = (-1, -1, 3)^T.$$

**例：** $n$ 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系就是它的解空间的基，基础解系所含向量的个数 $n - r(A)$ 就是解空间的维数。





**例：**元素属于数域 $F$ 的 $m \times n$ 的矩阵的全体，按照矩阵的加法和数与矩阵的乘法，构成数域 $F$ 上一个线性空间，记为 $F^{m \times n}$ . 给出 $F^{2 \times 2}$ 的一组基，并求

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

基 $E_{ij}$ ,  $(i, j)$ 元是1,  
其余元都是0,  
 $m \times n$ 维

的坐标。

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + a_{22}E_{22}$$

$A$ 在这组基下的坐标为  $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$ ,  $F^{2 \times 2}$  是  $2 \times 2 = 4$  维空间.



**例：**验证在 $F[x]_3$ 中， $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2, p_3 = x^3$ 线性无关。

$F[x]_3$ 中任一多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 都可由  
 $p_0, p_1, p_2, p_3$ 线性表示

$$f(x) = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$$

$p_0, p_1, p_2, p_3$ 是它的一组基（标准基）， $F[x]_3$ 是4维空间。

由此，我们是否可以给出一个无穷维空间的例子？

$$F[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots \mid a_i \in F, i = 0, 1, 2, \cdots\}$$

对于任意正整数 $N$ 都有 $1, x, x^2, \cdots, x^N$ 线性无关，因此 $F[x]$ 中有任意多个线性无关的向量， $F[x]$ 是无限维线性空间。





## 第一节 线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构

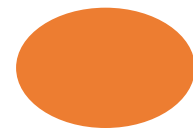


同一向量在不同基下的坐标是不一样的，那么随着基的改变，向量的坐标是如何变化的？

**定义5.1.4（过渡矩阵）** 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的两个基，第2个基可由第1个基线性表示为

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{n2}\alpha_n \\ \dots\dots\dots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

其中 $a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 为常数，称矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为由基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。





$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases} \quad (\text{基变换公式})$$

“形式的” 记法:  $[\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_n] = [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$[\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_n] = [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n] \mathbf{A} \quad (\text{基变换公式})$$

由基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基  
 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵

设由基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 到基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的过渡矩阵为 $B$ :

$$[\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n] = [\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_n] B = [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n] A B$$

从而我们得到 $AB = I$ , 即 $A, B$ 都是可逆矩阵, 且有 $B = A^{-1}$ .

过渡矩阵是可逆的.





**定理5.1.2** 设 $n$ 维线性空间 $V$ 的两个基:

$$(I): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (II): \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

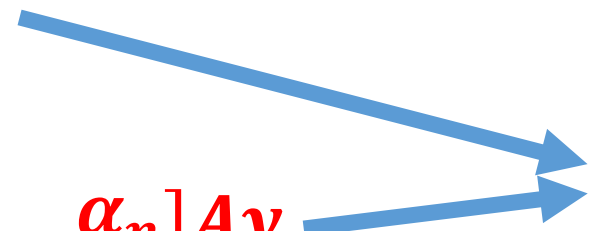
且由基 $(I)$ 到基 $(II)$ 的过渡矩阵为 $A$ , 设 $V$ 中向量 $\alpha$ 在基 $(I)$ 的坐标为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\alpha$ 在基 $(II)$ 下的坐标为 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ , 则有**坐标变换公式**

$$x = Ay \quad \text{或} \quad y = A^{-1}x$$

**证:** 由假设, 有

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n] x \end{aligned}$$

同理得到  $\alpha = [\beta_1 \quad \dots \quad \beta_n] y = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n] Ay$


$$x = Ay$$





**例：**已知 $R^3$ 有两个基

$$(I): \alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 0, -1)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T$$

$$(II): \beta_1 = (1, 2, 1)^T, \beta_2 = (2, 3, 4)^T, \beta_3 = (3, 4, 3)^T$$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵

(2) 求向量 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ 在基(II)下的坐标

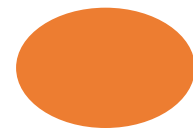
**解：**(1) 设由基(I)到基(II)的过渡矩阵为 $A$ ，则有

$$[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]A$$

$$\begin{aligned} \text{从而我们可以得到 } A &= [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^{-1}[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**思考：**如果 $[\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n]$ 不是方阵怎么求过渡矩阵？

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \quad \quad \quad \cdots \cdots \cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$





例：已知 $R^3$ 有两个基

$$(I): \alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 0, -1)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T$$

$$(II): \beta_1 = (1, 2, 1)^T, \beta_2 = (2, 3, 4)^T, \beta_3 = (3, 4, 3)^T$$

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵

(2) 求向量 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ 在基(II)下的坐标

(2) 已知向量 $\alpha$ 在基(I)下的坐标为 $x = (1, 2, -1)^T$ ,

设 $\alpha$ 在基(II)下的坐标为 $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ , 由坐标的变换公式有

$$y = A^{-1}x = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$





## 第一节 线性空间的基本概念

1. 线性空间的定义
2. 线性空间的基本性质
3. 线性空间的子空间
4. 基、维数、向量的坐标
5. 基变换与坐标变换
6. 线性空间的同构



**引例：** 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基，则任何 $\alpha \in V$ ，存在 $F^n$ 中的一个向量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ 使得

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

反过来，若给定了 $F^n$ 中的一个向量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ，则可以确定 $V$ 中的一个向量 $\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$

因而，我们找到了一个双射 $f: V \rightarrow F^n$

$$f(\alpha) = \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \longrightarrow \text{坐标映射}$$

坐标映射 $f$ 有如下性质(保线性)：

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad f(k\alpha) = kf(\alpha)$$

其中 $k \in F$

对抽象的 $n$ 维线性空间的讨论可归结为对 $F^n$ 的讨论！

**注：** 设 $f$ 是集合 $A$ 到集合 $B$ 的一个映射，如果 $B$ 中的每个元素都是 $A$ 中对应元素在 $f$ 下的像，则称 $f$ 为**满射**；如果 $A$ 中不同元素在 $f$ 下的像也不同，则称 $f$ 为**单射**；如果 $f$ 既是满射又是单射，则称 $f$ 为**双射**或**一一对应的映射**。