

第4章 连续时间傅里叶变换

本章的主要内容:

1. 连续时间傅里叶变换;
2. 傅里叶级数与傅里叶变换的关系;
3. 常用信号的傅里叶变换;
4. 傅里叶变换的性质;
5. 系统的频率响应及系统的频域分析;

4.0 引言 Introduction

在工程应用中有相当广泛的信号是非周期信号，对非周期信号应该如何进行分解，什么是非周期信号的频谱表示，线性时不变系统对非周期信号的响应如何求得，就是这一章要解决的问题。

在时域可以看到，如果一个周期信号的周期趋于无穷大，则周期信号将演变成一个非周期信号；反过来，如果将任何非周期信号进行周期性延拓，就一定能形成一个周期信号。

我们把非周期信号看成是周期信号在周期趋于无穷大时的极限，从而考查连续时间傅里叶级数在 T 趋于无穷大时的变化，就应该能够得到对非周期信号的频域表示方法。



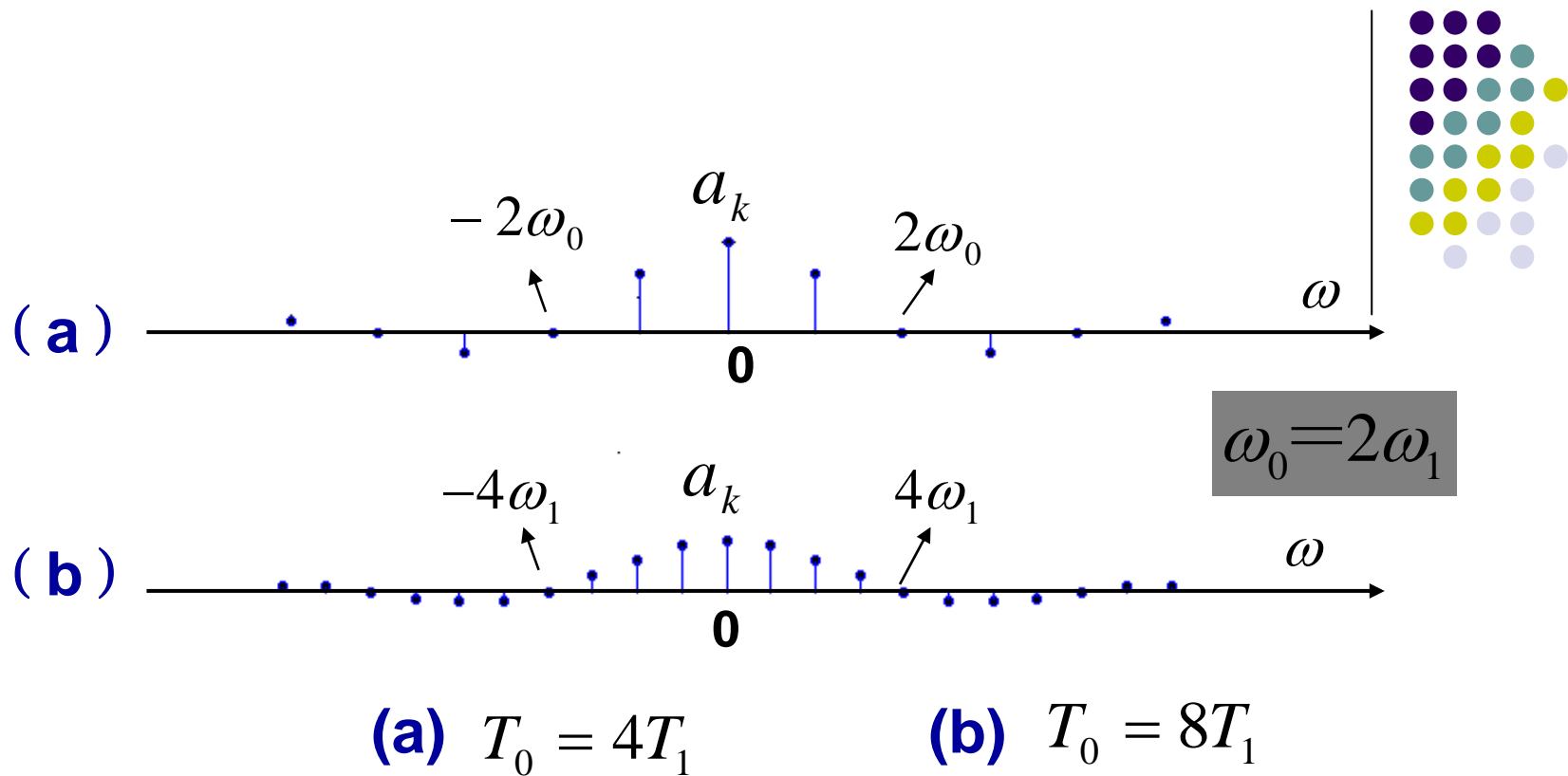
4.1 非周期信号的表示—连续时间傅里叶变换

Representation of Aperiodic Signals: The Continuous-Time Fourier Transform

一. 从傅里叶级数到傅里叶变换

我们已经看到，周期性矩形脉冲，当周期 T_0 增大时，频谱的幅度随 T_0 的增大而下降；谱线间隔随 T_0 的增大而减小；但频谱的包络不变。

再次考察周期性矩形脉冲的频谱图：



当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时，周期性矩形脉冲信号将演变成为非周期的单个矩形脉冲信号。

当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\omega$, $k\omega_0 \rightarrow \omega$, $\Sigma \rightarrow \int$

显然 $a_k = \frac{2T_1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1}$ 也随 T_0 增大而减小, 并最终趋于0。但若考查 $T_0 a_k$ 的变化, 则它在 $T_0 \rightarrow \infty$ 时应该是有限的。

于是, 我们推断出: 当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, 离散的频谱将演变为连续的频谱。

由
$$T_0 a_k = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$





如果令 $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 a_k = X(j\omega)$ 则有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{—— 连续时间傅里叶变换}$$

与周期信号的傅里叶级数对比有: $a_k = \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)$

这表明: 周期信号的频谱就是与它相对应的非周期信号频谱的等间隔样本。

根据傅里叶级数表示:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$



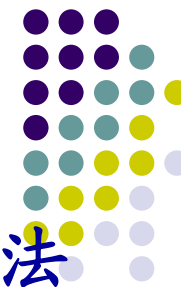
当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\omega$,

$k\omega_0 \rightarrow \omega$ $\Sigma \rightarrow \int$ 于是有:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{—— 傅里叶反变换}$$

此式表明, 非周期信号可以分解成无数多个频率连续分布、振幅为 $\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega$ 的复指数信号之和。

由于 $X(j\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} T_0 a_k = \lim_{T_0 \rightarrow \infty, f_0 \rightarrow 0} \frac{a_k}{f_0}$ 具有频谱随频率分布的物理含义, 因而称 $X(j\omega)$ 为 **频谱密度函数**。



于是，我们得到了对非周期信号的频域描述方法

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

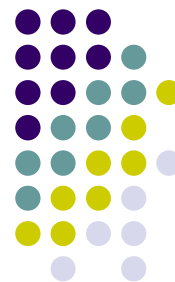
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

这一对关系被称为连续时间傅里叶变换对。

可见，周期信号的频谱是与其对应的非周期信号频谱的等间隔样本；而非周期信号的频谱是与其对应的周期信号频谱的包络。

二. 傅里叶变换的收敛

既然傅里叶变换的引出是从周期信号的傅里叶级数表示出发，讨论周期趋于无穷大时的极限得来的，傅里叶变换的收敛问题就应该和傅里叶级数的收敛相一致。



也有相应的两组条件:

1. 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ 则 $X(j\omega)$ 存在。

这表明能量有限的信号其傅里叶变换一定存在。

2. Dirichlet 条件

a. 绝对可积条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

b. 在任何有限区间内, $x(t)$ 只有有限个极值点, 且极值是有限值。

c. 在任何有限区间内, $x(t)$ 只有有限个第一类间断点。

应该指出：这些条件只是傅里叶变换存在的充分条件。

这两组条件并不等价。例如： $\frac{\sin t}{t}$ 是平方可积的，但是并不绝对可积。

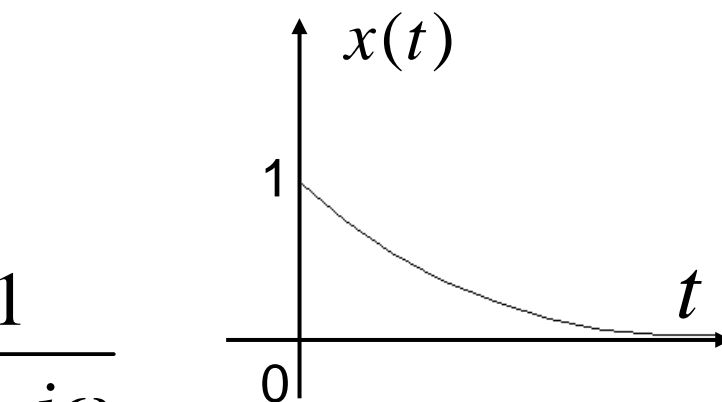
和周期信号的情况一样，当 $x(t)$ 的傅里叶变换存在时，其傅里叶变换在 $x(t)$ 的连续处收敛于信号本身，在间断点处收敛于左右极限的平均值，在间断点附近会产生 Gibbs 现象。

三. 常用信号的傅里叶变换:

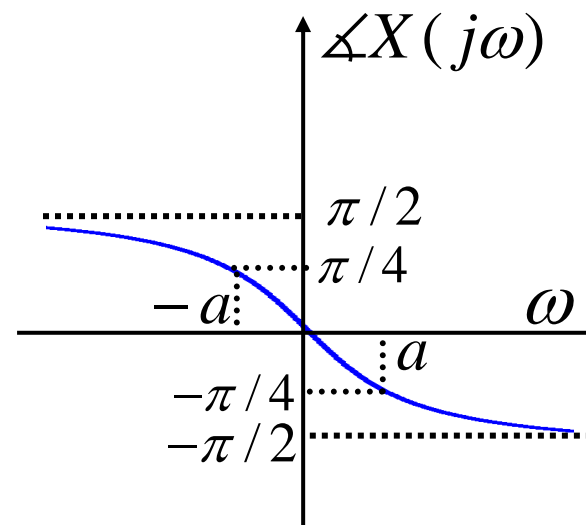
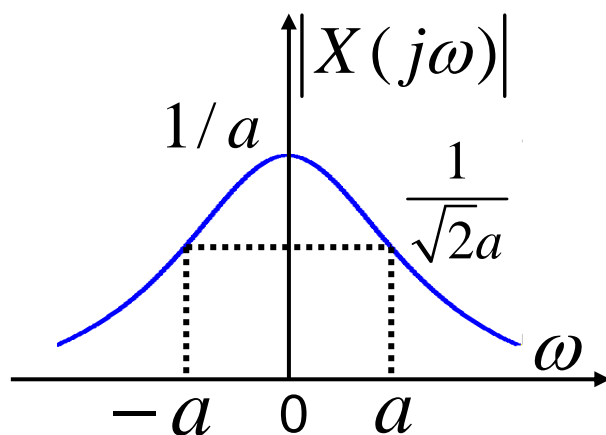
1. $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$



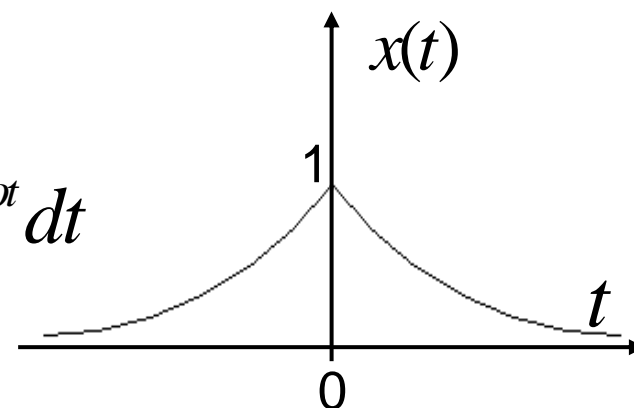
$$\angle X(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{a}$$



2. $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$

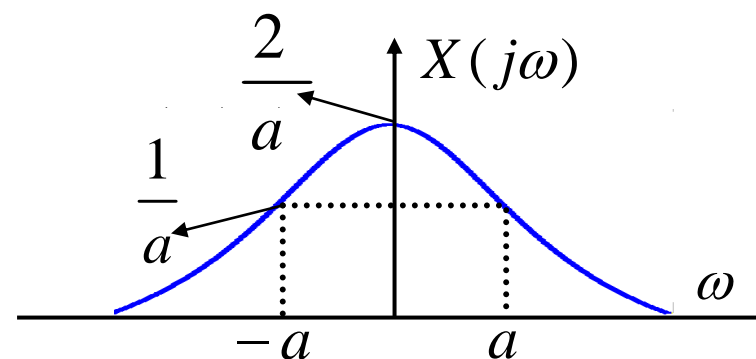
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



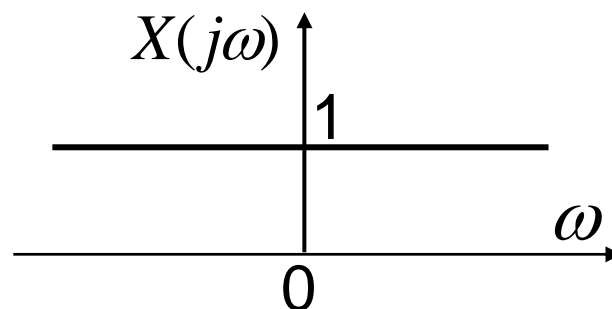
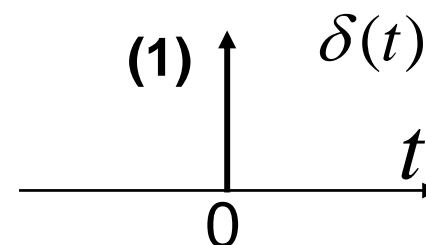
对此例有 $|X(j\omega)| = X(j\omega)$ $\angle X(j\omega) = 0$

结论： 实偶信号的傅里叶变换是实偶函数。此时可以用一幅图表示信号的频谱。



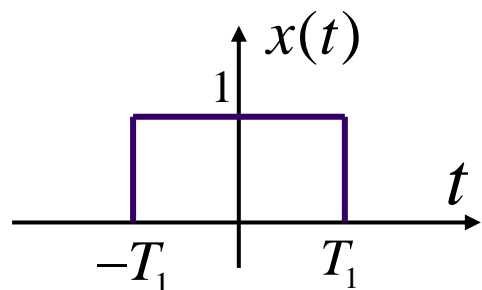
3. $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



这表明 $\delta(t)$ 中包括了所有的频率成分，且所有频率分量的幅度、相位都相同。因此，系统的单位冲激响应 $h(t)$ 才能完全描述一个LTI系统的特性， $\delta(t)$ 才在信号与系统分析中具有如此重要的意义。

4. 矩形脉冲: $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$



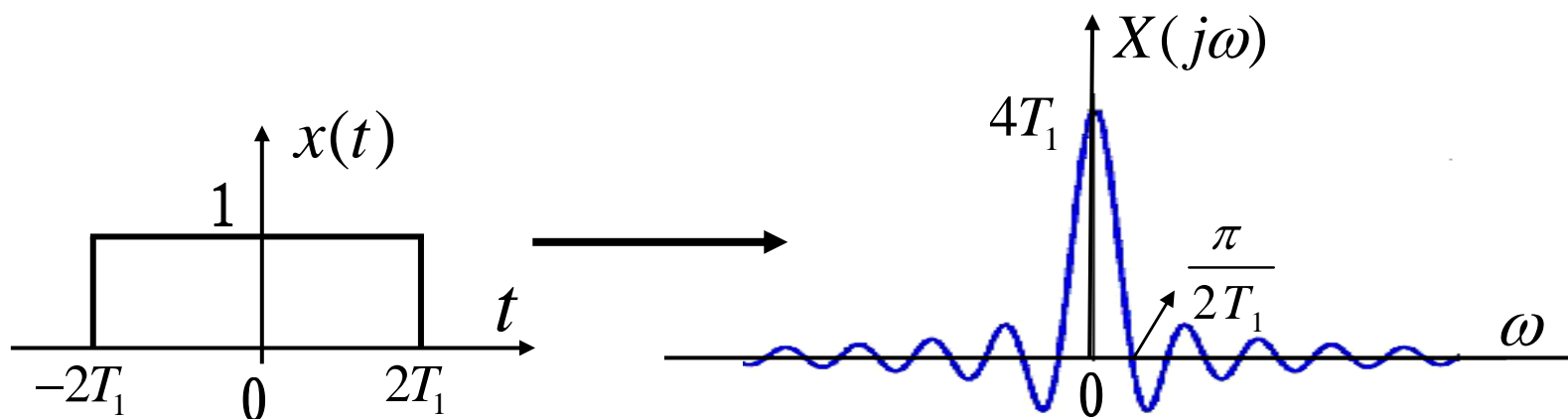
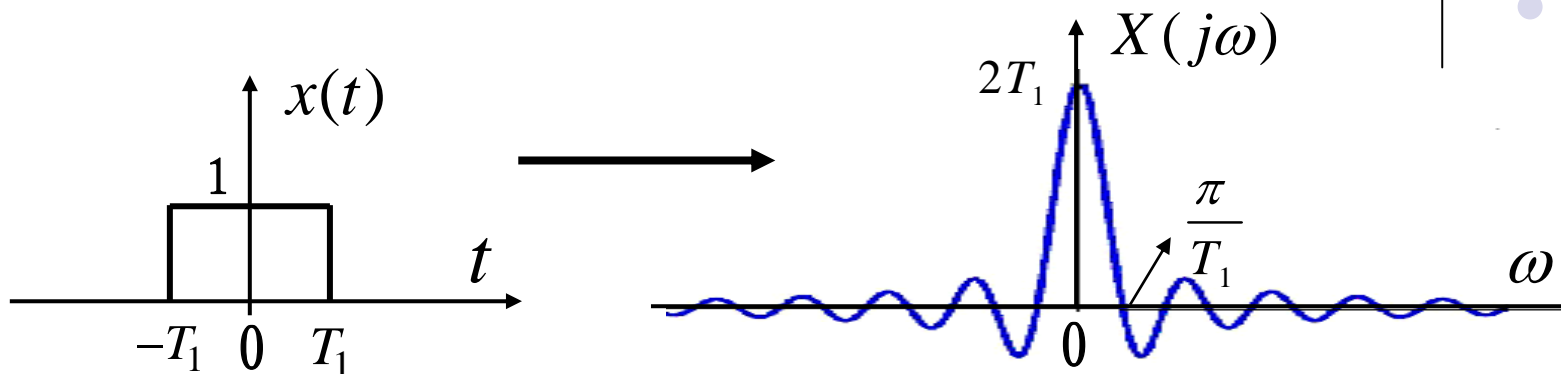
$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} = \frac{2T_1 \sin \omega T_1}{\omega T_1}$$

$$= 2T_1 \text{Sa}(\omega T_1) = 2T_1 \text{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

显然，将 $X(j\omega)$ 中的 ω 代之以 $k\omega_0$ 再乘以 $\frac{1}{T_0}$ ，即是相应周期信号的频谱

$$a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}(k\omega_0 T_1) = \frac{2T_1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1}$$

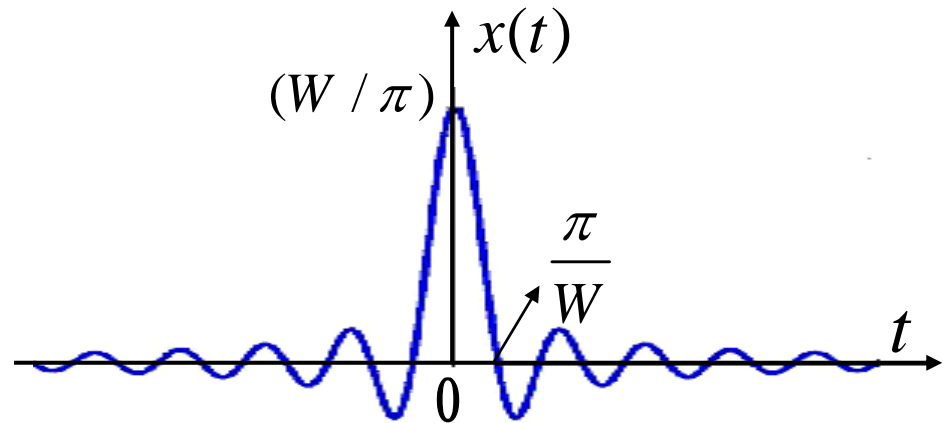
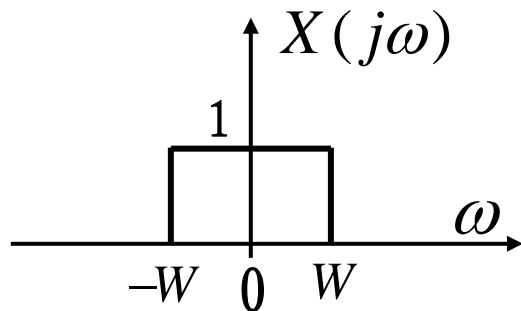
不同脉冲宽度对频谱的影响



可见，信号在时域和频域之间有一种相反的关系。

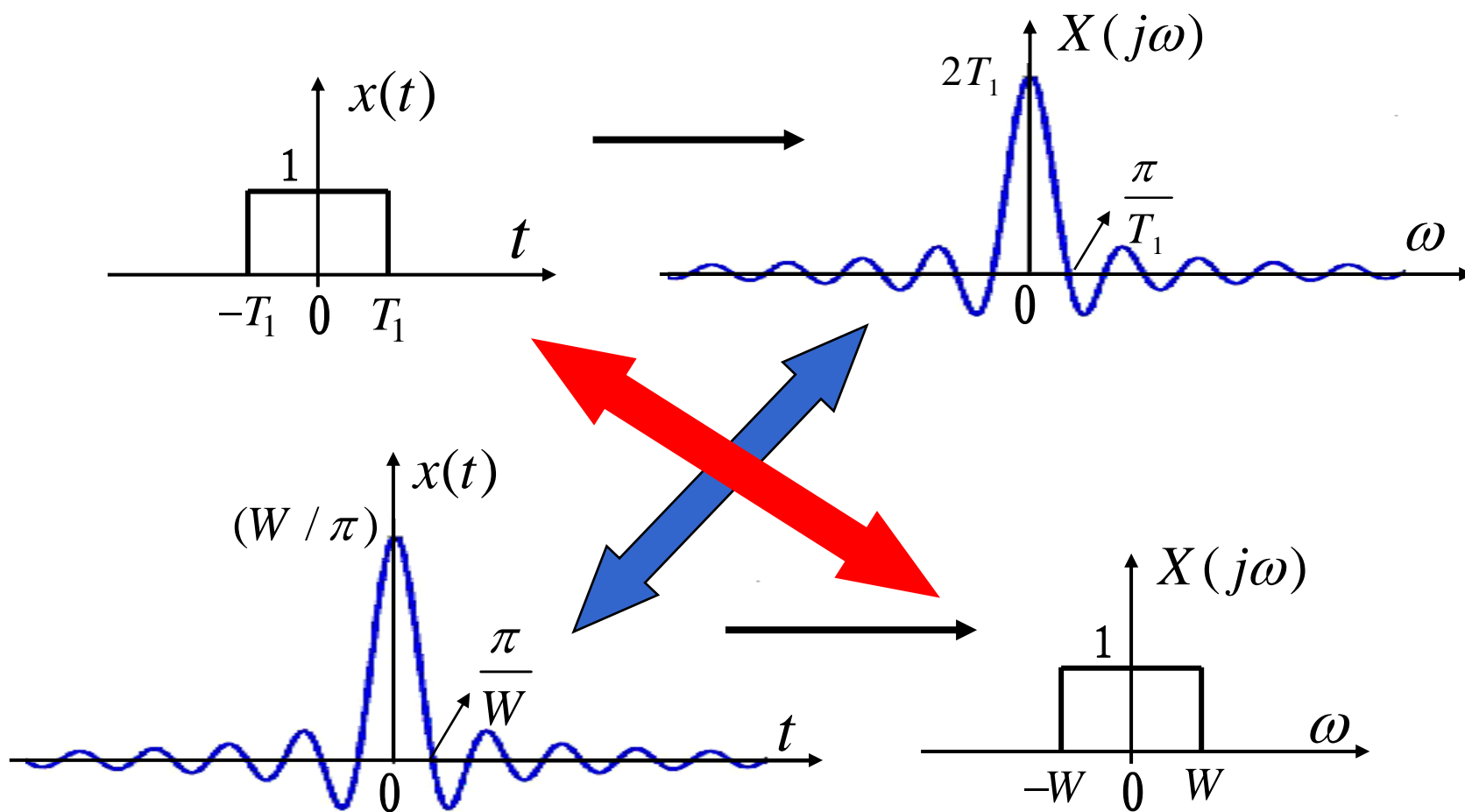
5. $X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$ (称为理想低通滤波器)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt) = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



与矩形脉冲情况对比，可以发现信号在时域和频域之间存在一种对偶关系。

对偶关系可表示如下:



同时可以看到，信号在时域和频域之间也有一种相反的关系。即信号在时域脉冲越窄，则其频谱的主瓣越宽，反之亦然。

对例5. 我们可以想到，如果 $W \rightarrow \infty$ ，则 $x(t)$ 将趋向于一个冲激。

6. 若 $x(t) = 1$ 则有 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

因为
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

所以
$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

四. 信号的带宽(**Bandwidth of Signals**):

由信号的频谱可以看出：信号的主要能量总是集中于低频分量。另一方面，传输信号的系统都具有自己的频率特性。

因而，工程中在传输信号时，没有必要把信号的所有频率分量都有效传输，而只要保证将占据信号能量主要部分的频率分量有效传输即可。

为此，需要对信号定义带宽。

通常有如下定义带宽的方法:

1. $|X(j\omega)|$ 下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时对应的频率范围。
2. 对包络是 $\text{Sa}(x)$ 形状的频谱, 通常定义主瓣宽度(即频谱第一个零点内的范围)为信号带宽。

以矩形脉冲为例, 按带宽的定义, 可以得出:

脉宽 \times 带宽等于常数 **C** (脉宽带宽积)。这清楚地反映了频域和时域的反关系。

4.2 周期信号的傅里叶变换

The Fourier Transformation of Periodic Signals

到此为止，我们对周期信号用傅里叶级数表示，非周期信号用傅里叶变换表示。因为数学描述方法的不一致，在某些情况下，会给我们带来不便。但由于周期信号不满足 **Dirichlet** 条件，因而不能直接从定义出发，建立其傅里叶变换表示。

考查 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 所对应的信号

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$



这表明周期性复指数信号的频谱是一个冲激。

若 $x(t) = e^{jk\omega_0 t}$ 则 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$

于是当把周期信号表示为傅里叶级数时，因为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

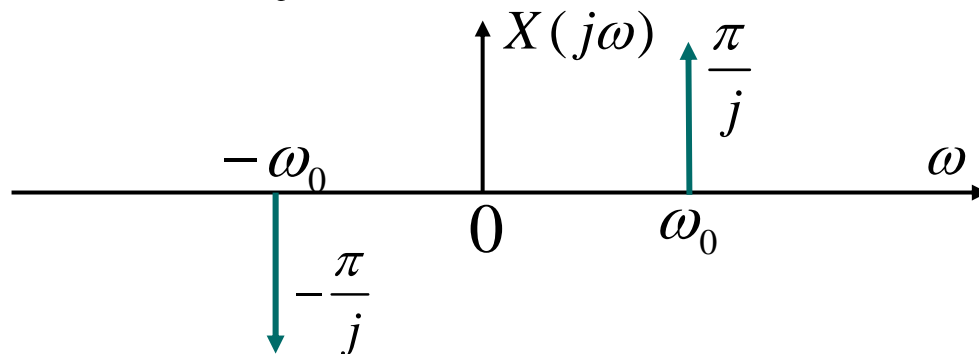
就有 $X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$

—— 周期信号的傅里叶变换表示

这表明：周期信号的傅里叶变换由一系列冲激组成，每一个冲激分别位于信号的各次谐波的频率处，其冲激强度正比于对应的傅里叶级数的系数 a_k 。

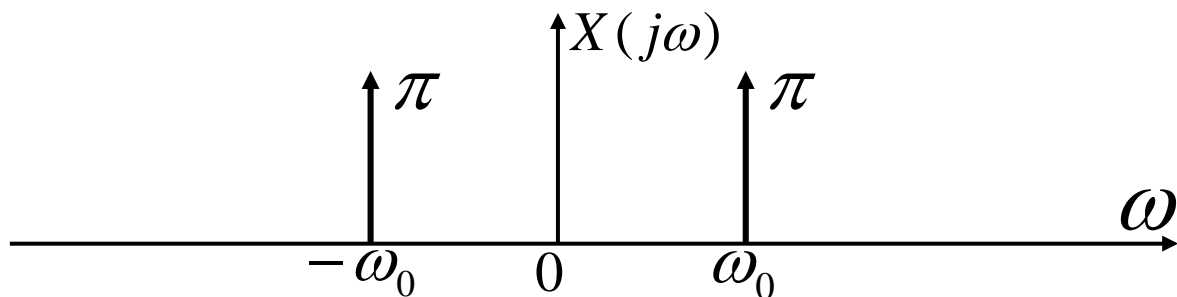
例1: $x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$



例2: $x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$

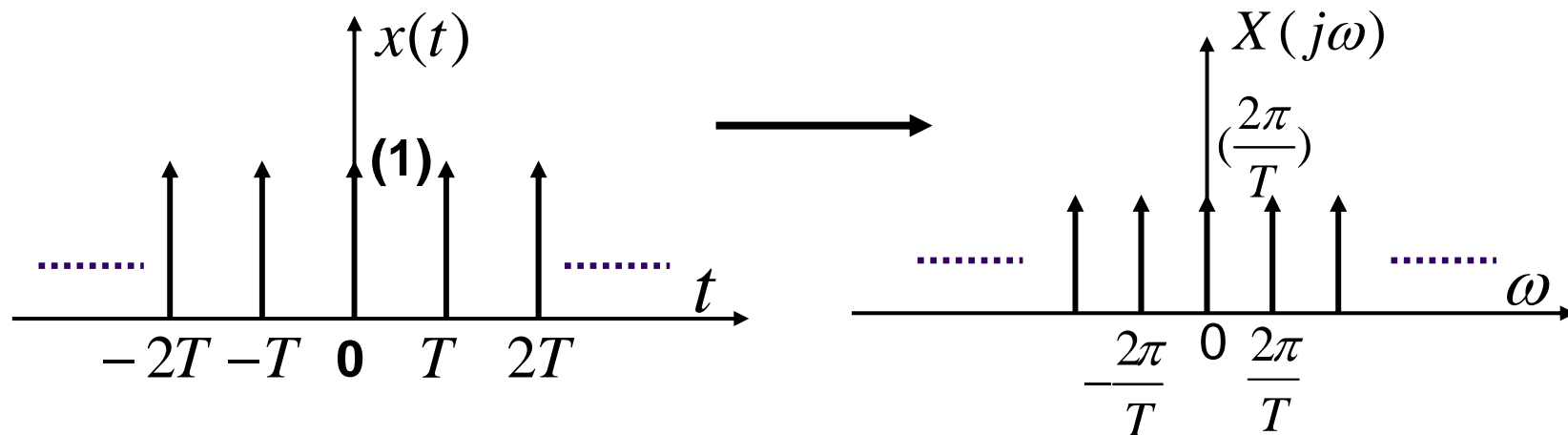
$$X(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



例3: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ —— 均匀冲激串

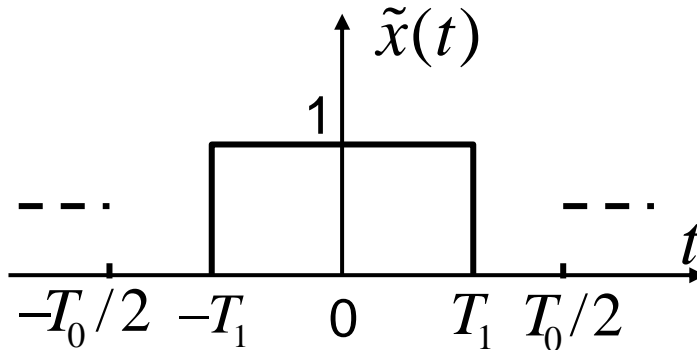
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$$

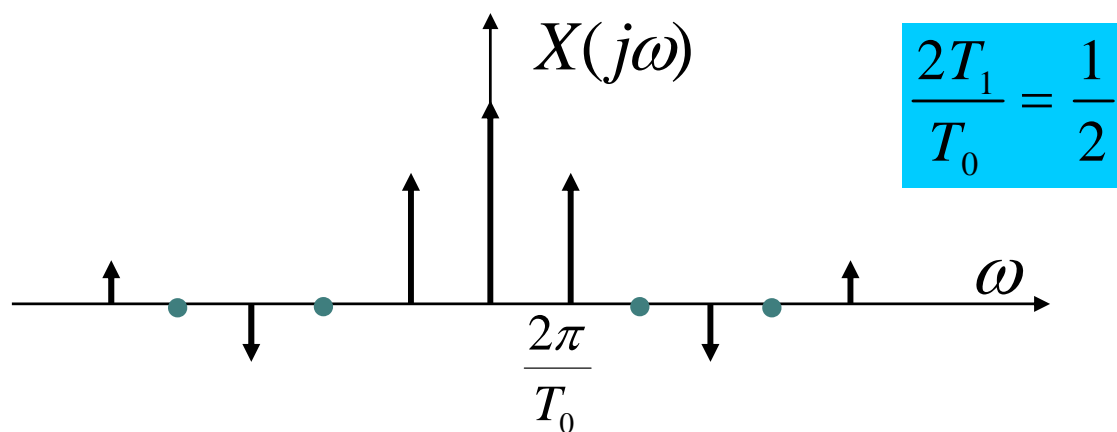


$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \longleftrightarrow X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$$

例4. 周期性矩形脉冲

$$a_k = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}\left(\frac{2\pi}{T_0} kT_1\right) = \frac{\sin \frac{2\pi}{T_0} T_1 k}{\pi k}$$


$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} kT_1\right)}{k} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T_0} k\right)$$



4.3 连续时间傅里叶变换的性质

Properties of the Continuous-Time Fourier Transform

讨论傅里叶变换的性质，旨在通过这些性质揭示信号的时域特性与频域特性之间的关系，同时掌握和运用这些性质可以简化傅里叶变换对的求取。

1. 线性: Linearity

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega), \quad y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$

则 $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$



2. 时移: Time Shifting

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则 $x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

这表明信号的时移只影响它的相频特性，其相频特性会增加一个线性的相移。

3. 共轭对称性: Conjugate and Symmetry

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

则 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$

由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ 可得

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt$$

所以 $X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t} dt$

即 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$

- 若 $x(t)$ 是实信号, 则 $x(t) = x^*(t)$

于是有: $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

- 若 $X(j\omega) = \text{Re}[X(j\omega)] + j \text{Im}[X(j\omega)]$ 则可得

$$\text{Re}[X(j\omega)] = \text{Re}[X(-j\omega)] \quad \text{即实部是偶函数}$$

$$\text{Im}[X(j\omega)] = -\text{Im}[X(-j\omega)] \quad \text{即虚部是奇函数}$$

- 若 $X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$ 则可得出

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \quad \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$$

即：模是偶函数，相位是奇函数

- 如果 $x(t) = x(-t)$ 即信号是偶函数。则

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\omega\tau} d\tau = X(-j\omega) \end{aligned}$$

表明: 实偶信号的傅立叶变换是偶函数。

又因为 $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$ 所以 $X(j\omega) = X^*(j\omega)$

表明 $X(j\omega)$ 是实函数。

- 若 $x(t) = -x(-t)$ 即信号是奇函数, 同样可以得出:

$X(j\omega) = -X(-j\omega)$ 表明 $X(j\omega)$ 是奇函数

$X(j\omega) = -X^*(j\omega)$ 表明 $X(j\omega)$ 是虚函数

- 若 $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ 则有:

$$X(j\omega) = X_e(j\omega) + jX_o(j\omega)$$

$$x_e(t) \leftrightarrow X_e(j\omega) \quad X_e(j\omega) = \operatorname{Re}[X(j\omega)]$$

$$x_o(t) \leftrightarrow jX_o(j\omega) \quad X_o(j\omega) = \operatorname{Im}[X(j\omega)]$$

例： $u(t)$ 的频谱：

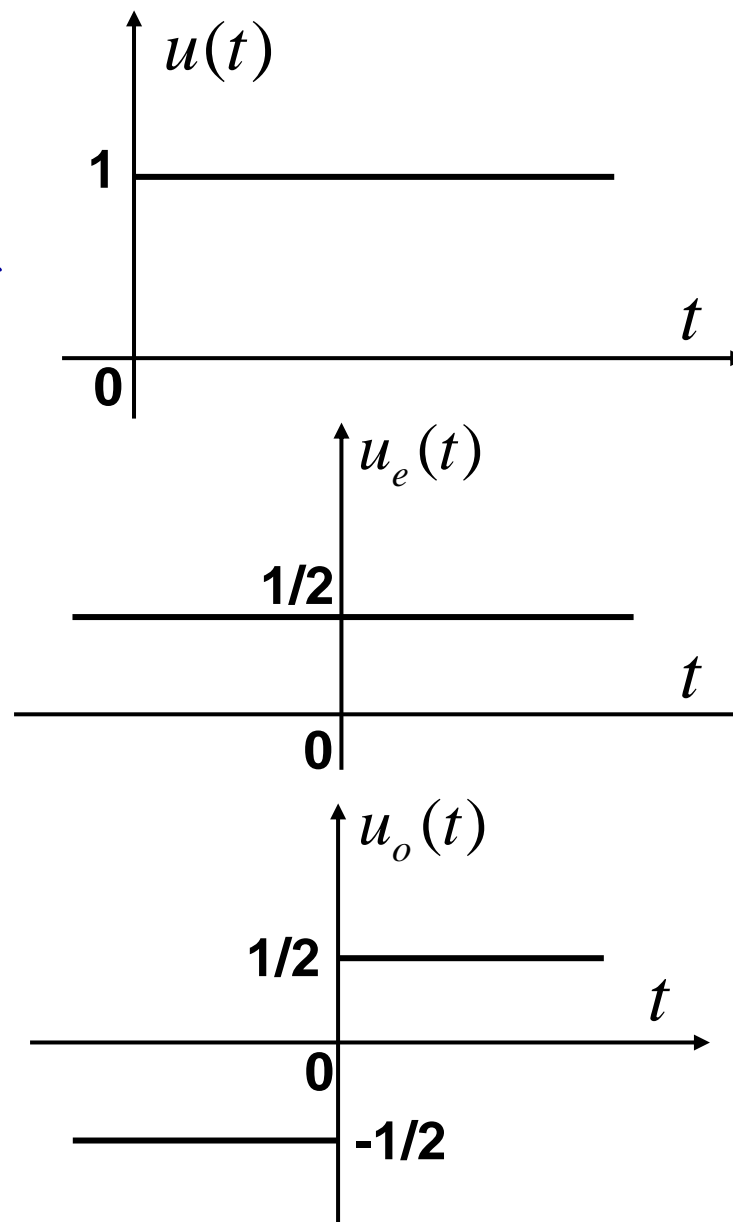
将 $u(t)$ 分解为偶部和奇部有

$$u(t) = u_e(t) + u_o(t)$$

$$u_e(t) = \frac{1}{2}$$

$$u_o(t) = \frac{1}{2} \text{Sgn}(t)$$

$$\text{Sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



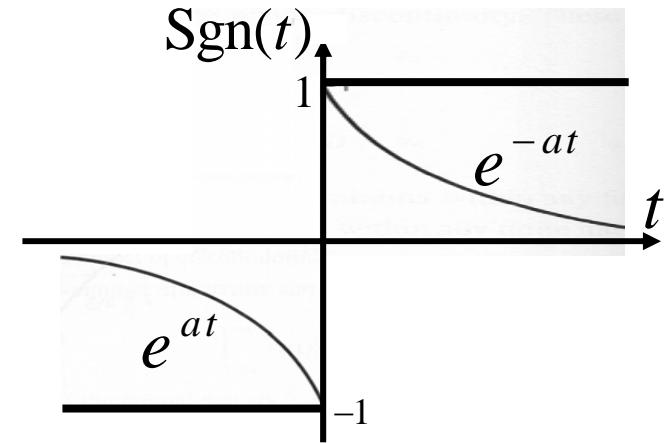
$$u_e(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega)$$

$$\text{Sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

$$\mathbb{F}[\text{Sgn}(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right]$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

$$\therefore u_o(t) = \frac{1}{2} \text{Sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$



$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

4.时域微分与积分: Differentiation and Integration

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$ (可将微分运算转变为代数运算)

(将 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ 两边对 t 微分即得该性质)

$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$ (时域积分特性)

由时域积分特性从 $\delta(t) \leftrightarrow 1$

也可得到: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$

5.时域和频域的尺度变换: Scaling

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(j\frac{\omega}{a})$

当 $a = -1$ 时, 有 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$

尺度变换特性表明: 信号如果在时域扩展 a 倍, 则其带宽相应压缩 a 倍, 反之亦然。这就从理论上证明了时域与频域的相反关系, 也证明了信号的脉宽带宽积等于常数的结论。

时域中的压缩 (扩展) 对应频域中的扩展 (压缩)

6.对偶性: Duality

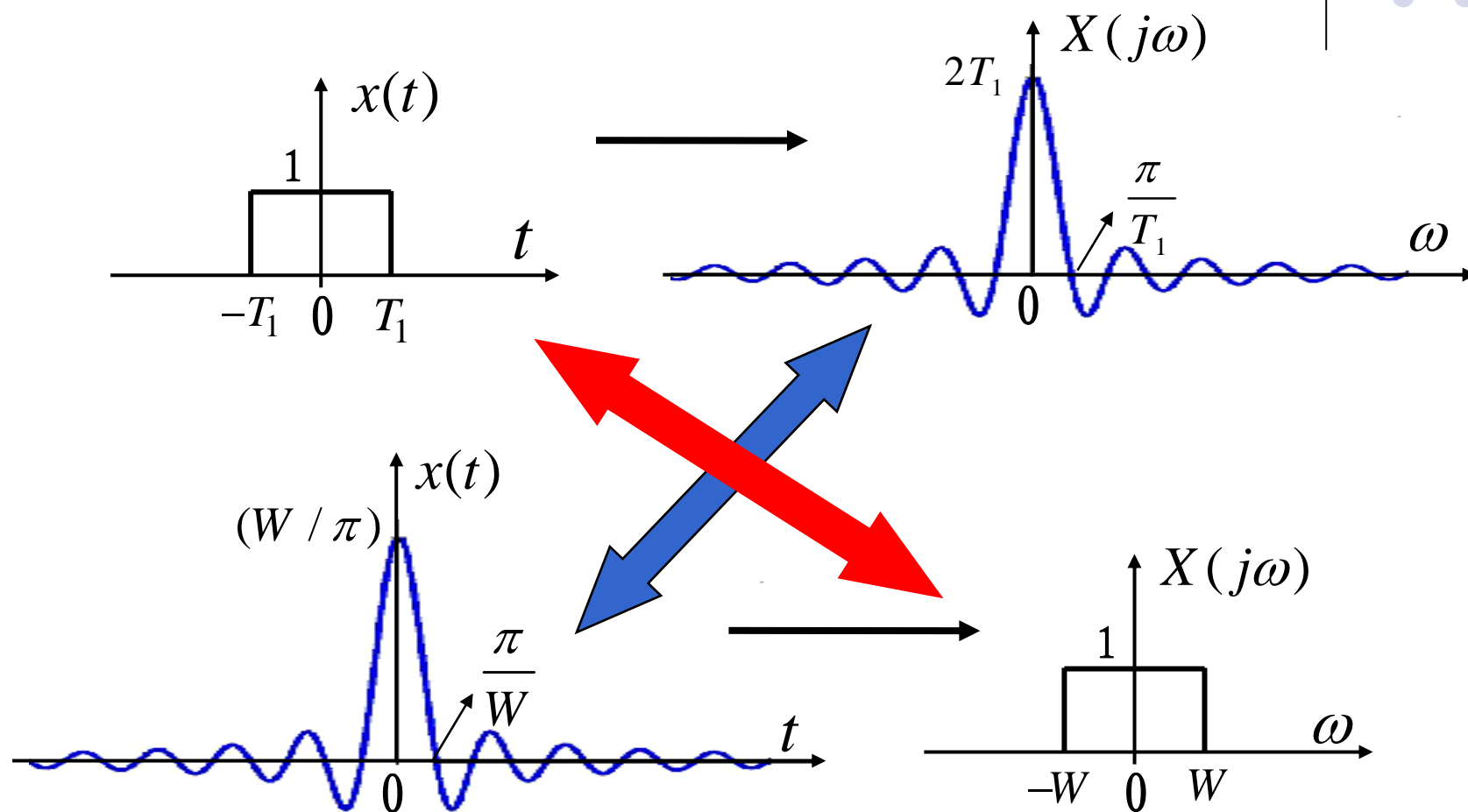
若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

证明: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$$2\pi x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{j\omega t} dt$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$



对偶性也可由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ 得到证明。

$$X(jt) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

由对偶性可以方便地将时域的某些特性对偶到频域

例如：由 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 有对偶关系 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

利用时移特性有 $X[j(t - t_0)] \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)e^{-j\omega t_0}$

再次对偶有 $2\pi x(-t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi X[j(-\omega - \omega_0)]$

根据 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ 得

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)] \quad \text{这就是移频特性}$$

7. 频域微分特性

由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ 得

$$\frac{d}{d\omega} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt$$

所以 $-jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$

该特性也可由对偶性从时域微分特性得出：

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

对 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

利用时域微分特性有 $\frac{d}{dt} X(jt) \leftrightarrow 2\pi j\omega x(-\omega)$

再次对偶得 $2\pi jtx(-t) \leftrightarrow 2\pi \frac{d}{d(-\omega)} X(-j\omega)$

由 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ 有

$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

频域微分特性

由时域积分特性，可对偶出频域积分特性

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

利用时域积分特性

$$\int_{-\infty}^t X(j\tau) d\tau \leftrightarrow \left[\frac{2\pi x(-\omega)}{j\omega} + 2\pi^2 x(0) \delta(\omega) \right]$$

再次对偶 $2\pi \left[\frac{x(-t)}{jt} + \pi x(0) \delta(t) \right] \leftrightarrow 2\pi \int_{-\infty}^{-\omega} X(j\tau) d\tau$

由 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ 有

$$\frac{x(t)}{-jt} + \pi x(0) \delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(j\tau) d\tau \quad \text{频域积分特性}$$

8. Parseval 定理:

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

这表明: 信号的能量既可以在时域求得, 也可以在频域求得。由于 $|X(j\omega)|^2$ 表示了信号能量在频域的分布, 因而称其为“能量谱密度”函数。

4.4 卷积性质 The Convolution Property

一. 卷积特性:

$$\text{若 } x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$$

$$\text{则 } x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega)$$

由于卷积特性的存在, 使得对LTI系统在频域进行分析成为可能。卷积特性所以成立的本质正是因为复指数信号是一切LTI系统的特征函数。

$$\text{由 } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ 表明:}$$



可将 $x(t)$ 分解成复指数分量的线性组合，每个 $e^{j\omega t}$ 通过LTI系统时都要受到系统与特征函数 $e^{j\omega t}$ 相对应的特征值的加权。这个特征值就是

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{故有}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

所以 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

由于 $h(t)$ 的傅氏变换 $H(j\omega)$ 就是频率为 ω 的复指数信号 $e^{j\omega t}$ 通过LTI系统时，系统对输入信号在幅度上产生的影响，所以称为系统的频率响应。

鉴于 $h(t)$ 与 $H(j\omega)$ 是一一对应的，因而LTI系统可以由其频率响应完全表征。由于并非任何系统的频率响应 $H(j\omega)$ 都存在，因此用频率响应表征系统时，一般都限于稳定系统。因为，稳定性保证了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$



利用卷积特性很容易证明时域积分特性

$$\because \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega); \quad u(t) \leftrightarrow U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

根据卷积特性有

$$x(t) * u(t) \leftrightarrow X(j\omega)U(j\omega)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow X(j\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$$

$$\text{即: } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

二. LTI系统的频域分析法:

根据卷积特性,可以对LTI系统建立在频域分析的方法,其基本步骤为:

1. 由 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

2. 根据系统的描述, 求出 $H(j\omega)$

3. $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

4. $y(t) = \mathbb{F}^{-1}[Y(j\omega)]$

4.5 相乘性质 The Multiplication Property

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$

则 $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

利用对偶性可以从卷积性质得出相乘性质

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$$

$$X_1(jt) \leftrightarrow 2\pi x_1(-\omega) \quad X_2(jt) \leftrightarrow 2\pi x_2(-\omega)$$

$$X_1(jt) * X_2(jt) \leftrightarrow 4\pi^2 x_1(-\omega) x_2(-\omega)$$

$$4\pi^2 x_1(-t) \cdot x_2(-t) \leftrightarrow 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$$

$$\therefore x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

两个信号在时域相乘，可以看成是由一个信号控制另一个信号的幅度，这就是幅度调制。其中被控制信号称为载波，控制信号是调制信号。

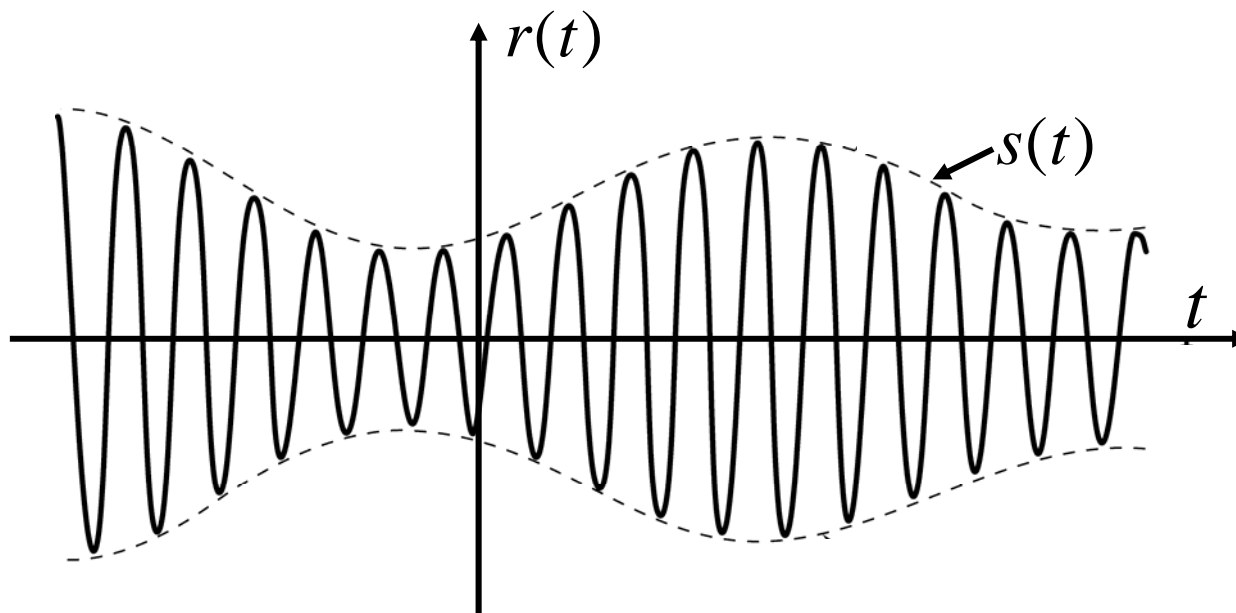
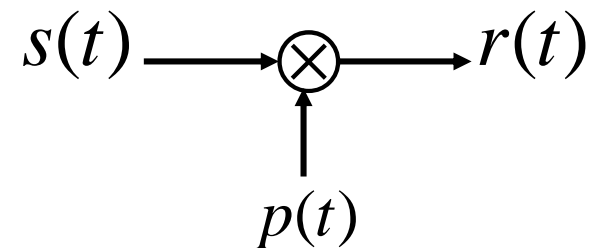
例1: $\because x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$$\therefore x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)] \quad \text{——移频性质}$$

例2. 正弦幅度调制:

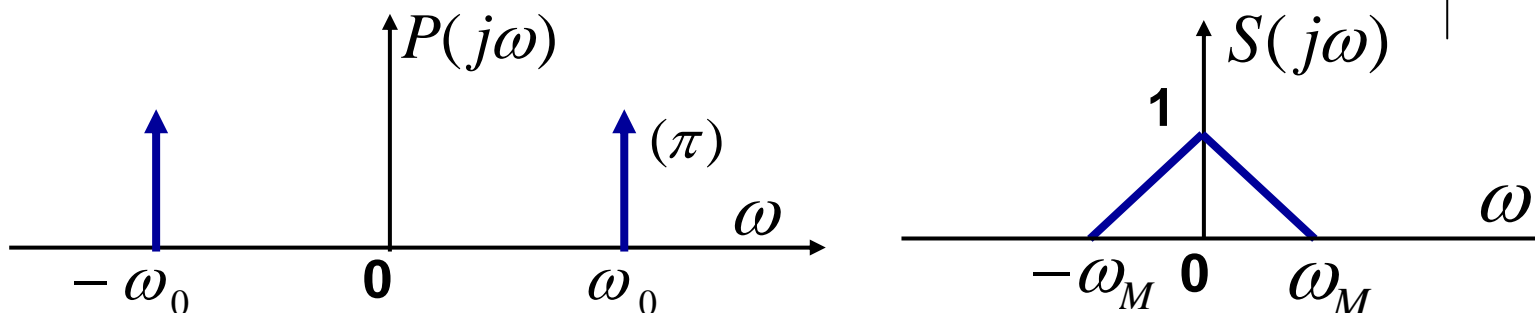
$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega), \quad p(t) = \cos \omega_0 t$$

$$r(t) = s(t)p(t)$$

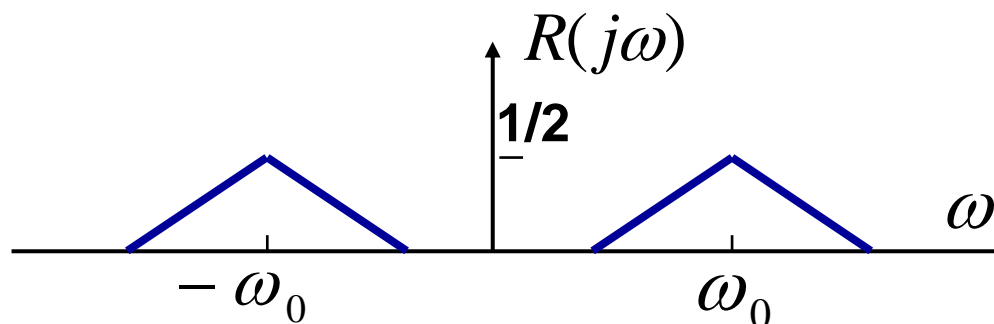




$$P(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

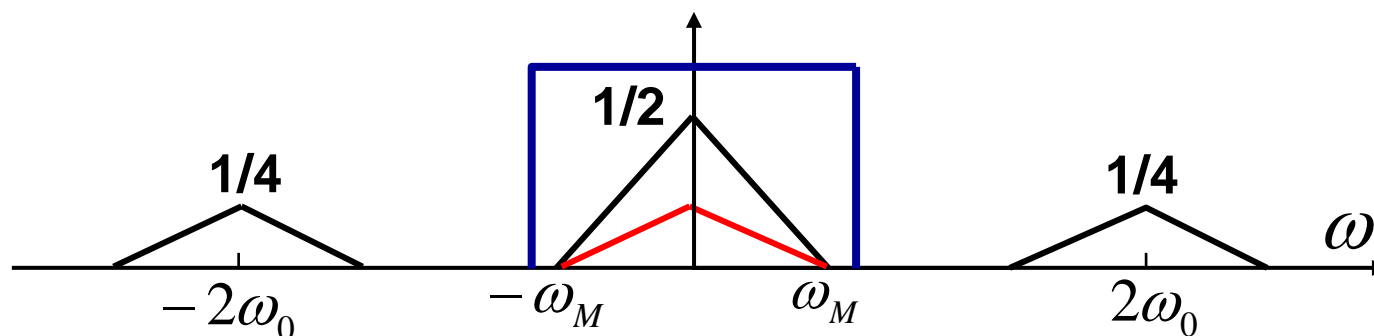


正弦幅度调制等效于在频域将调制信号的频谱搬移到载频的位置。

例3. 同步解调:

$$r(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

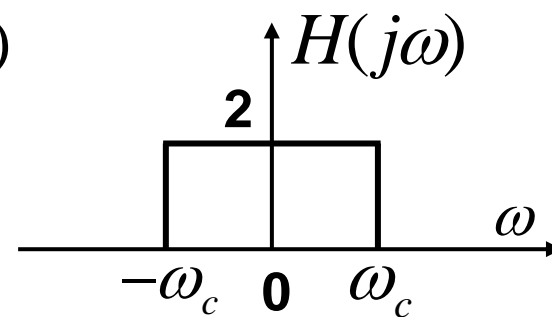
$$= \frac{1}{2} S(j\omega) + \frac{1}{4} S[j(\omega - 2\omega_0)] + \frac{1}{4} S[j(\omega + 2\omega_0)]$$



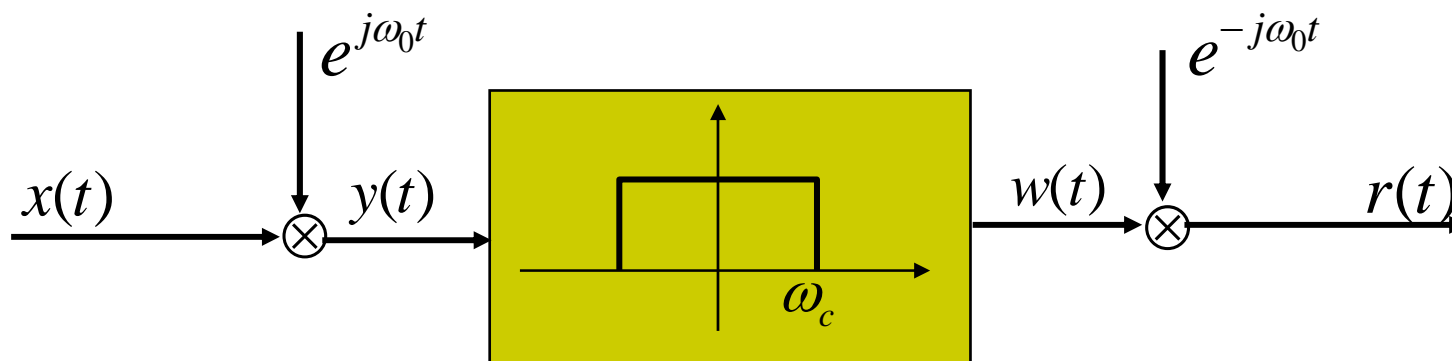
此时，用一个频率特性为 $H(j\omega)$ 的系统即可从 $r(t)$ 恢复出 $s(t)$ 。

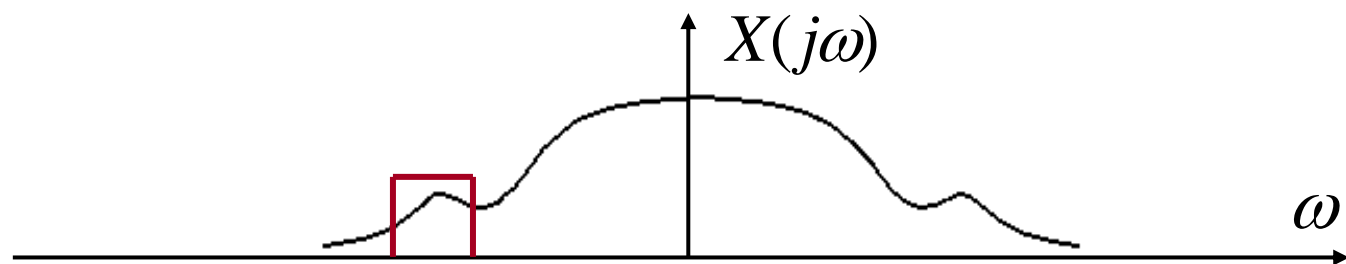
只要 $\omega_M < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_M$ 即可。

具有此频率特性的LTI系统称为理想低通滤波器。

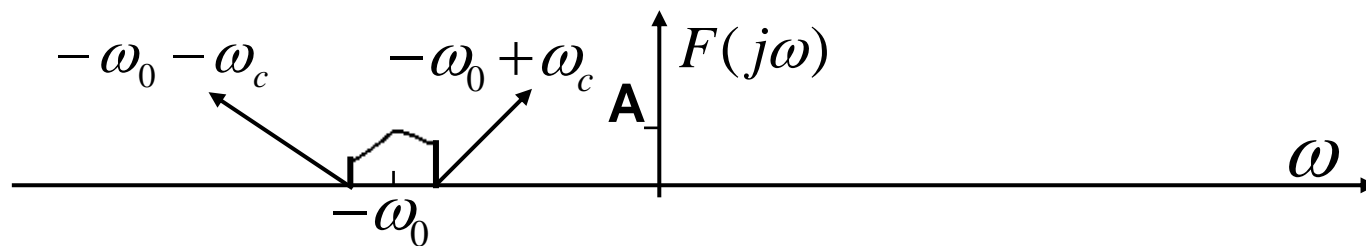
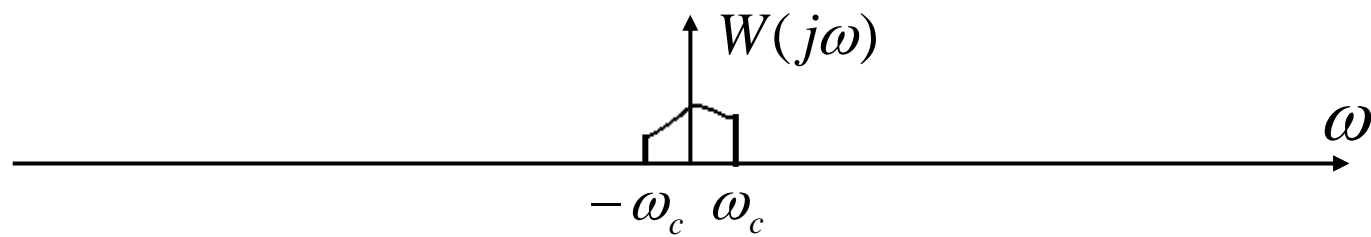
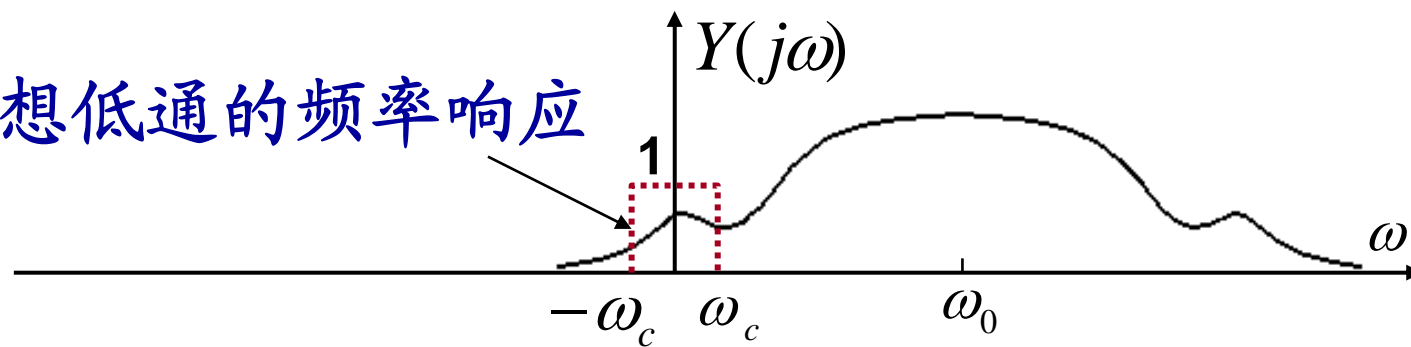


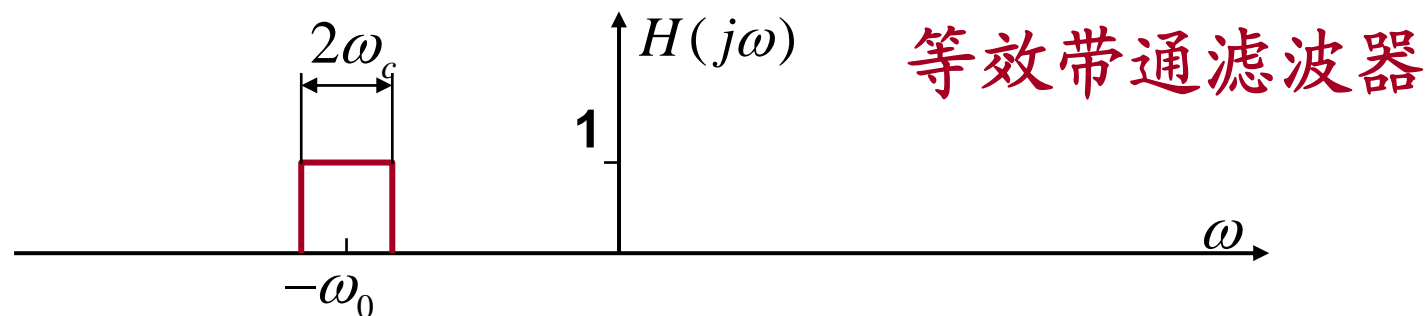
例4. 中心频率可变的带通滤波器:





理想低通的频率响应





相当于从 $X(j\omega)$ 中直接用一个带通滤波器滤出的频谱。表明整个系统相当于一个中心频率为 ω_0 的带通滤波器，改变 ω_0 即可实现中心频率可变。

4.6 傅里叶变换的性质与傅里叶变换对列表

(自学)

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Differential Equations

工程实际中有相当广泛的LTI系统其输入输出关系可以由一个线性常系数微分方程描述。一般形式的LCCDE是：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

一. 由LCCDE描述的LTI系统的频率特性：

由于 $e^{j\omega t}$ 是一切LTI系统的特征函数，因此，当系统的输入为 $x(t) = e^{j\omega t}$ 时，系统所产生的响应就是 $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ 。表明在 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的情况下，求解LCCDE即可得到 $H(j\omega)$ 。但是这种方法太麻烦，很少使用。

对LCCDE两边进行傅里叶变换有：

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

由于 $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

$$\therefore H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

可见由LCCDE描述的LTI 系统其频率特性是一个有理函数。由此可以看出，对由 LCCDE 描述的LTI系统，当需要求得其 $h(t)$ 时(比如时域分析时)，往往是由 $H(j\omega)$ 做反变换得到。

对有理函数求傅里叶反变换通常采用部分分式展开和利用常用变换对进行。

二. 频率响应的求法:

1. 用微分方程表征的系统

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

例:
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

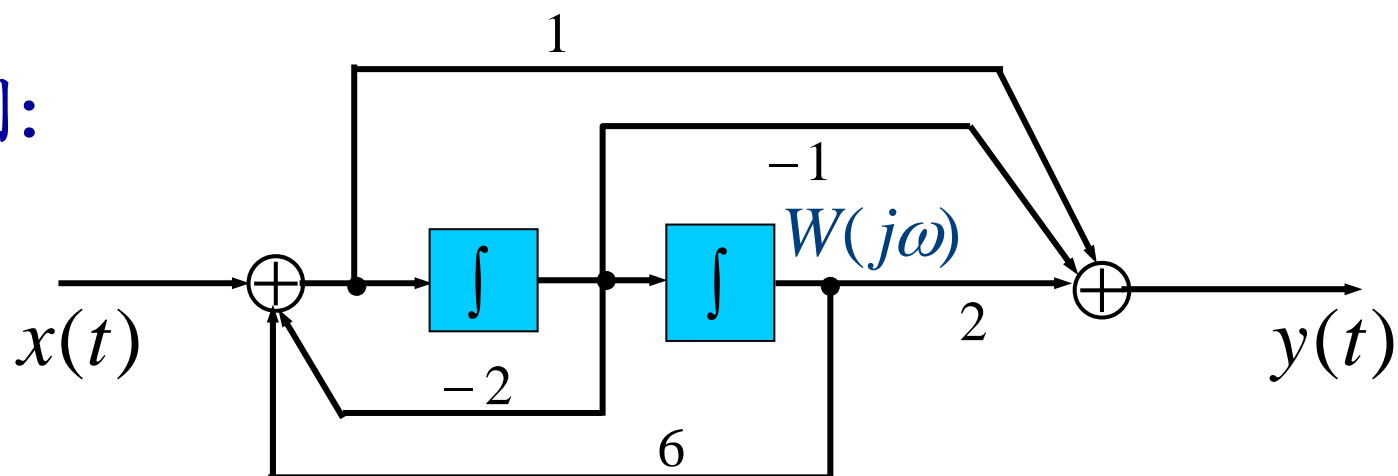
$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 6(j\omega) + 8} = \frac{j\omega + 3}{(4 + j\omega)(2 + j\omega)}$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{4 + j\omega} \right]$$

$$h(t) = \frac{1}{2} [e^{-2t} + e^{-4t}] u(t)$$

可见，对由微分方程所描述的系统通过求频率响应可以方便地求出其单位冲激响应。

2. 以方框图描述的系统

例：

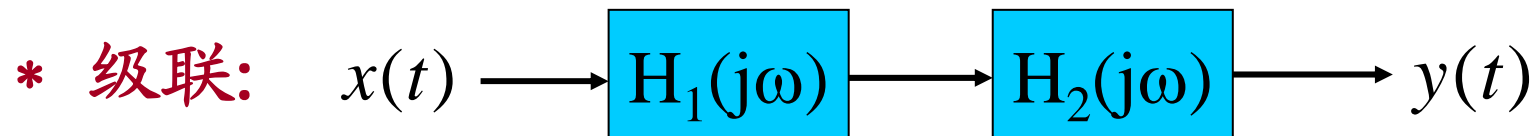


$$Y(j\omega) = 2W(j\omega) - j\omega W(j\omega) + (j\omega)^2 W(j\omega)$$

$$(j\omega)^2 W(j\omega) = X(j\omega) - 2j\omega W(j\omega) + 6W(j\omega)$$

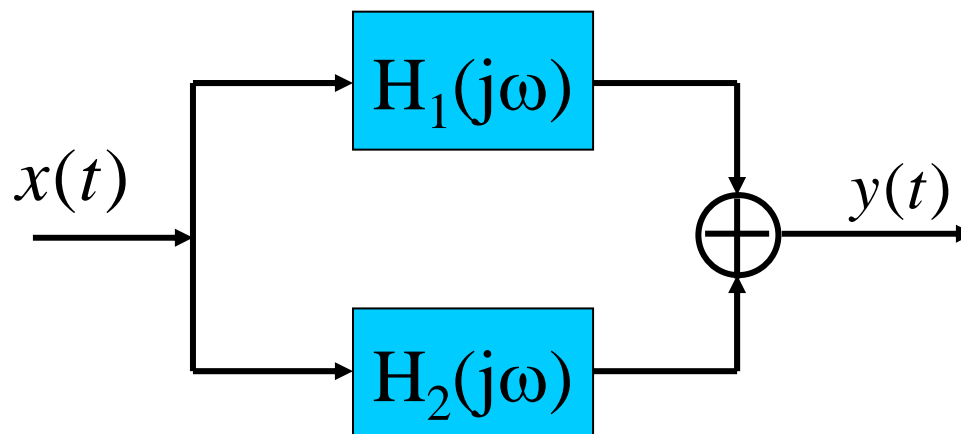
$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - (j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) - 6}$$

3. 互联系统的 $H(j\omega)$



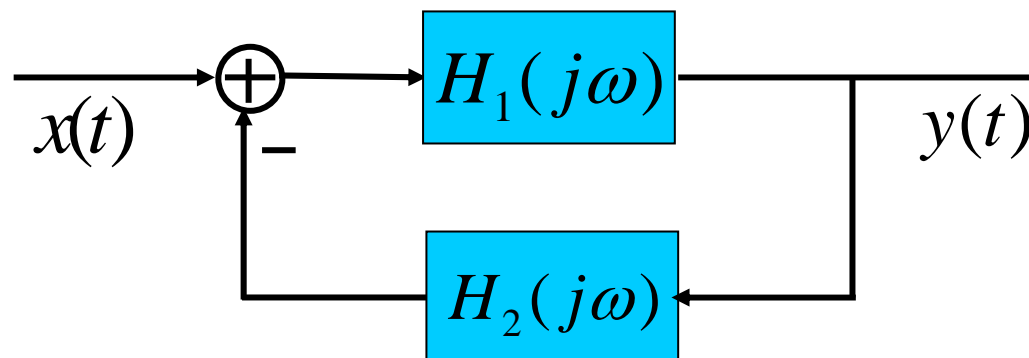
$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

* 并联:



$$H(j\omega) = H_1(j\omega) + H_2(j\omega)$$

* 反馈联结:



$$Y(j\omega) = [X(j\omega) - Y(j\omega)H_2(j\omega)]H_1(j\omega)$$

$$X(j\omega)H_1(j\omega) = Y(j\omega)[1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)]$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{H_1(j\omega)}{1 + H_1(j\omega)H_2(j\omega)}$$

4.8 小结 Summary

1. 通过连续时间傅里叶变换，建立了将连续时间信号(包括周期、非周期信号)分解为复指数信号分量的线性组合的方法。
2. 通过讨论傅里叶变换的性质，揭示了信号时域特性与频域特性的关系。卷积特性是LTI系统频域分析方法的理论基础，相乘特性则是通信和信号传输领域各种调制解调技术的理论基础。

3. 对LTI系统建立了频域分析的方法。
4. 对由LCCDE描述的LTI系统，可以很方便地由LCCDE或系统框图得到其 $H(j\omega)$ 。
5. 稳定的LTI系统可以通过其频率响应来描述。
6. 建立了系统互联时，系统频率响应与各子系统频率响应的关系。