第 11周习题课参考内容

积分的计算和证明

一、计算定积分

1．求 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx.$

解： $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx.=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx=4\sqrt{2}-4\text{。}$$

2．设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x\le 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2}f(x)dx$.

解： 注意不存在整个$[-1,2]$区间内 $f(x)$ 的原函数，无法直接用 Newton-Leibniz 公式。可利用积分区间可加性：

解法一： $\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx$

在每个小区间$[-1,0],[0,2]$内分别可以用 N-L 公式：

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{3}{2}，\quad \int_0^2 f(x)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^2=4，$$

故 $\int_{-1}^{2}f(x)dx=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$。

解法二：注意在$[-1,1]$上 $f(x)$ 是奇函数，所以 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$，

$$\int_{-1}^{2}f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x+1)dx=\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_1^2=\frac{5}{2}\text{。}$$

3．求 $\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

解： 积分中令 $u=-x$， $\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int_3^4\frac{du}{\sqrt{u^2-4}}$，

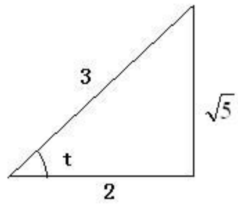
再令 $u=\frac{2}{\cos t}$，则 $\sqrt{u^2-4}=2\tan t$， $du=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$，

当 $u=3$ 时 $t=\arccos\frac{2}{3}$，当 $u=4$ 时 $t=\frac{\pi}{3}$，

$$\int_{-4}^{-3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int_3^4\frac{du}{\sqrt{u^2-4}}=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin t}{2\tan t\cos^2 t}dt=\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\arccos\frac{2}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)d(\sin t)$$

令 $y=\sin t$，当 $t=\arccos\frac{2}{3}$ 时 $y=\frac{\sqrt{5}}{3}$（见右图），



当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)dy=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\Bigg|_{\frac{\sqrt{5}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\ln(3+\sqrt{5})+\ln 2$$

二、变上限积分定义的函数

1. 设 $F(x)=\int_0^{x^4}(t-1)e^{t^2}dt$，求 $F(x)$ 的单调上升区间。

解：$F'(x)=4x^3(x^4-1)e^{x^8}$，

可见仅在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 中 $F'(x)>0$，从而 $F(x)$ 单调上升。

2. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$ 的极大值点。

解：计算 $f'(x)=2x(x^2-1)e^{-x^2}$（函数处处可导），

令 $f'(x)=0$，解得只有 3 个临界点 $x=0,\pm1$；

用 2 阶导数检验：$f''(x)=(-4x^4+10x^2-2)e^{-x^2}$，

$f''(\pm1)=4e^{-1}>0$，可见 $x=\pm1$ 都是 $f(x)$ 的极小值点；

$f''(0)=-2<0$，只有 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点。

3. 设 $f(x),g(x)\in C[0,+\infty)$，$f(x)>0$，$g(x)$ 单调增加，

求函数 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 的增减区间。

解：由于

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}$$

$$=\frac{f(x)[g(x)\int_0^x f(t)dt-\int_0^x f(t)g(t)dt]}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}=\frac{f(x)\int_0^x f(t)[g(x)-g(t)]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2},$$

而 $g(x)$ 单调增加，对于 $t\in[0,x]$， $g(x)\ge g(t)$，所以 $\varphi'(x)\ge 0$，
故 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加。

4. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ne 0$，求常数 a,b,c 的值。

解：首先由分子趋于 0 但整个极限 $=c\ne 0$ 判断，极限应该是 $\dfrac{0}{0}$ 型，所以 $b=0$；

如果可以应用 L'Hospital 法则，注意 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$，则可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^3}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

为保证可应用 L'Hospital 法则，上述极限应该存在且有限（依题意 c 有限）；

注意分母趋于 0，故分子也应趋于 0，所以 $a=1$，因此 $c=\dfrac{1}{2}$。

5. 设 $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，求 $F^{(8)}(0)=?$ $F^{(9)}(0)=?$ $F^{(10)}(0)=?$

解：首先 $F'(x)=\ln(1+x^8)$， $F''(x)=\dfrac{8x^7}{1+x^8}$，以下利用 Leibniz 公式，得到

$$F^{(8)}(x)=8[\frac{x^7}{1+x^8}]^{(6)}=8[(x^7)^{(6)}\frac{1}{1+x^8}+6(x^7)^{(5)}(\frac{1}{1+x^8})'+\cdots]$$

$$=8[6!x\cdot\frac{1}{1+x^8}+6!x^2\cdot\frac{-8x^7}{(1+x^8)^2}+\cdots],\quad F^{(8)}(0)=0;$$

$$F^{(9)}(x)=8[\frac{x^7}{1+x^8}]^{(7)}=8[(x^7)^{(7)}\frac{1}{1+x^8}+7(x^7)^{(6)}(\frac{1}{1+x^8})'+\cdots]$$

$$=8[7!\frac{1}{1+x^8}+7!x\cdot\frac{-8x^7}{(1+x^8)^2}+\cdots],\quad F^{(9)}(0)=8!;$$

$$F^{(10)}(x)=8[\frac{x^7}{1+x^8}]^{(8)}=8[(x^7)^{(8)}\frac{1}{1+x^8}+8(x^7)^{(7)}(\frac{1}{1+x^8})'+\cdots]$$

$$=8[8\cdot 7!\cdot\frac{-8x^7}{(1+x^8)^2}+\frac{8\cdot 7}{2}\cdot 7!x\cdot(\frac{1}{1+x^8})''+\cdots],\quad F^{(10)}(0)=0.$$

注：类似的分析可得 $F'(0)=F''(0)=\cdots=F^{(8)}(0)=0$。

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x(\ln t)^2\,dt}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^3}=?$

解：应用三次 L'Hospital 法则（中间经过化简 $x\to 1,\cos x\to\cos 1$），

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x(\ln t)^2\,dt}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{6x\cos(x^2)\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^2}=\frac{1}{6\cos 1}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{6\cos 1}\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x/x}{4x\cos(x^2)\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)}=\frac{1}{12\cos^2 1}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\left(\sin(x^2)-\sin 1\right)}$$

$$=\frac{1}{12\cos^2 1}\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{2x\cos(x^2)}=\frac{1}{24\cos^3 1}\text{。}$$

7. 设曲线 $y=f(x)$ 由 $x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du$ 及 $y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u}\cos 2udu$ 确定，

求该曲线在 $t=\pi/2$ 的点处的法线方程（法线与切线互相垂直）。

解：计算 $x'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{-u}\sin\frac{u}{3}du\right)=e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{-u}\sin\frac{u}{3}du+\sin\frac{t}{3}.$

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{-u}\cos 2udu\right)=e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{-u}\cos 2udu+\cos 2t.$$

由此 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{y'(\pi/2)}{x'(\pi/2)}=\frac{-1}{1/2}=-2$，

即曲线在 $t=\pi/2$ 点处的切线斜率为 -2，而法线与切线垂直，其斜率应为 $\frac{1}{2}$，

所以法线方程为 $y-y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[x-x(\frac{\pi}{2})]$，

注意 $x(\frac{\pi}{2})=y(\frac{\pi}{2})=0$，故法线方程为 $y=\frac{x}{2}$。

三、积分证明题

1．设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，求证

$$\int_0^a f(u)(a-u)du=\int_0^a[\int_0^u f(t)dt]du\text{。}$$

证：记 $F(u)=\int_0^u f(t)dt$，右式可以利用分部积分方法处理，

$$\text{右式}=\int_0^a F(u)du=uF(u)\big|_0^a-\int_0^a uF'(u)du$$

$$=a\int_0^a f(t)dt-\int_0^a uf(u)du=\int_0^a f(u)(a-u)du\text{。}$$

法二：令 $G(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x[\int_0^u f(t)dt]du$，则

$$G(x)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du-\int_0^x[\int_0^u f(t)dt]du\text{，}$$

$$G'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)-\int_0^x f(t)dt=0,$$

所以 $G(a)\equiv G(0)=0$，此即为所需要证的。 □

2．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)dx\ge(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)。$$ 【这是课本上问题 7.1 第 1 题的另一个版本】

证：将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 点展开成 1 阶 Taylor 公式，带 Lagrange 型余项：

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2,（\xi\in[a,b]）$$

已知 $f''(\xi)\ge 0$，故

$$f(x)\ge f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}),\quad x\in[a,b],$$

利用积分的保序性质，将上述不等式两边从 a 到 b 积分，

注意到 $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx=\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b=0$，就得到

$$\int_a^b f(x)dx\ge(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)。$$ □

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\le 0$，$x\in[0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)dx\le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$

证：类似上题考虑，利用 $f''(x)\le 0$，得到

$$f(x)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3}),\quad x\in[0,1],$$

再用 x^2 替换 x 得到（注意 x^2 仍在 $[0,1]$ 中）

$$f(x^2)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3});$$

上式两边从 0 到 1 积分，由于 $\int_0^1(x^2-\frac{1}{3})dx=0$，得到

$$\int_0^1 f(x^2)dx\le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$ □

推广：题设条件下有 $\int_0^1 f(x^a)dx\le f\left(\frac{1}{a+1}\right)$，$a>0$。

4．设 $f\in C^1[a,b]$，$f(a)=0$，求证：

（1）$\max\limits_{a\le x\le b}f^2(x)\le(b-a)\int_a^b[f'(x)]^2dt$；（2）$\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dt$。

证：分析题意，导数的积分可以考虑应用 Newton-Leibniz 公式。

由题设，Newton-Leibniz 公式给出 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt$，$\forall x\in[a,b]$，

应用 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$(*)\quad f^2(x)=(\int_a^x f'(t)dt)^2\le(\int_a^x 1dt)(\int_a^x[f'(t)]^2dt)=(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2dt\text{。}$$

由此导出 $f^2(x)\le(b-a)\int_a^b[f'(t)]^2dt$，$\forall x\in[a,b]$，从而（1）成立；

进一步注意（*）式可导出 $f^2(x)\le(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2dt$，两端在 $[a,b]$ 上积分即得

$$\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b(x-a)dx\int_a^b[f'(t)]^2dt=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(t)]^2dt\text{，（2）得证。}\quad\square$$

注：本题是课本问题 7.3 第 1 题，练习题 7.3 第 7 题是其简单情况，第 5 题可以类似考虑。

5*. 设 $f\in C[0,\pi]$，利用积分的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$。

证明：先利用区间可加性，将区间 $[0,\pi]$ 上积分分成 n 段区间上的积分，

每段上 $\sin nx$ 不变号（便于应用积分中值定理并计算积分）：

$$\int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}f(x)|\sin nx|dx\text{，}$$

在每个区间上应用积分中值定理，得到 $\xi_k\in[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi]$，使得

$$\text{上式}=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\frac{\pi}{n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx\quad(n\to\infty)\text{，}$$

最后一步是利用区间 $[0,\pi]$ 上均匀分割的 Riemann 和式的极限得到积分。

课本中部分题目提示

练习题 7.1 第 8 题（积分值估计）

思路：只须证 $\int_{-a}^b(ab-x^2)f(x)dx\ge0$，为此分析：当 $-a\le x\le b$ 时

$$ab-x^2=(b-x)(x+a)+(b-a)x\ge(b-a)x$$

再利用 $\int_{-a}^b xf(x)dx=0$ 即可。

练习题 7.2 第 6 题（积分等式）

思路：利用归纳递推：$n=0$等式显然成立，考虑$n=k+1$的情况，为此注意

$$\sin(k+1+\frac{1}{2})x=\sin(k+\frac{1}{2})x\cdot\cos x+\cos(k+\frac{1}{2})x\cdot\sin x$$

$$=\sin(k+\frac{1}{2})x\cdot(1-2\sin^2\frac{x}{2})+\cos(k+\frac{1}{2})x\cdot 2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

以下利用归纳假设，并把剩余各项合并得到积分为零。

问题 7.2 第 3，4 题（积分极限证明）

思路：两题目有类似之处，以第 4 题为例分析如下：取$\varepsilon>0$充分小

$$f^p(x_p)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)dt\ge\frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^p(b-\varepsilon)dt=\frac{\varepsilon}{b-a}f^p(b-\varepsilon)$$

从而 $f(x_p)\ge(\frac{\varepsilon}{b-a})^{\frac{1}{p}}f(b-\varepsilon)>(\frac{\varepsilon}{b-a})^{\frac{1}{p}}f(b-2\varepsilon)$

注意 $\lim\limits_{p\to\infty}(\frac{\varepsilon}{b-a})^{\frac{1}{p}}=1$，所以 p 充分大后 $f(x_p)\ge f(b-2\varepsilon)$，$x_p\ge b-2\varepsilon$。

问题 7.3：第 3 题（积分值估计）

已知$f\in C[a,b]$且单调增，求证$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

思路 1：注意要证不等式事实上对于所有$b>a$都成立，可以考虑上限 b 为变量：

令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，$a\le x\le b$，则

$$F'(x)=xf(x)-[\frac{a+x}{2}f(x)+\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt]=\frac{x-a}{2}f(x)+\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt,$$

利用 f 单调性……导出$F'(x)\ge 0$，从而$F(b)\ge F(0)=0$。

思路 2：考虑要证不等式左右二积分相减：

$$\int_a^b xf(x)dx-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx=\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx,$$

注意$x-\frac{a+b}{2}$在两个区间上都不变号，两个积分可以分别应用中值定理，

最终导出相减结果大于等于 0 ……