第六章 最优控制基础

一、最优控制概述

二、基于动态规划的最优控制

三、线性二次型最优控制问题

第1节 最优控制概述

1. 最优控制理论的形成
2. 最优控制问题的基本要素
3. 最优控制问题的一般提法

◆ 经典控制理论

输出反馈控制：

（1）**设计方法多建立在试探**的基础上，方法不严密，在很大程度上**依赖于设计人员的实践经验**，因此设计结果不可能实现严格的最优。

（2）对于多输入多输出、时变系统等复杂的系统，用经典设计方法无能为力。

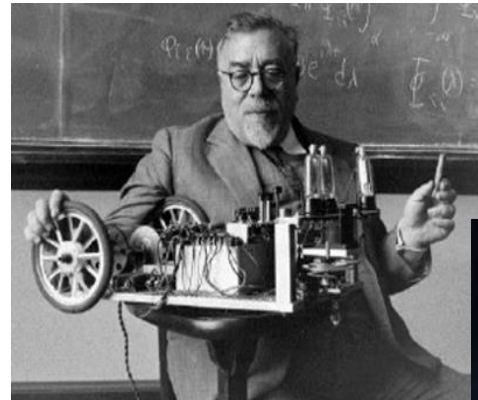
◆ 现代控制理论

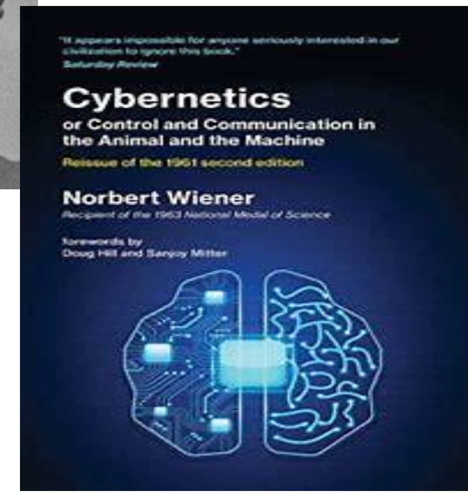
状态反馈控制：目的是使闭环系统稳定或具有好的动态响应。

最优控制：是现代控制理论的重要组成部分。研究的中心问题：对于一个控制系统，基于系统的状态方程和给定的控制约束下，如何选择控制规律，使得某种性能指标达到最优。

在**严格的数学基础上**获得最优控制规律，实现最优控制。

1、最优控制理论的形成





先期工作：

诺伯特·维纳 (Norbert Wiener)（1894-1964)，美国科学院院士，MIT教授，数学家，**控制论之父**。

- ✓ 1948年发表《控制论—关于在动物和机器中控制和通讯的科学》，引进了信息、反馈和控制等重要概念，**奠定了控制论(Cybernetics)的基础**，并提出了**相对于某一性能指标**进行**最优设计**的概念。
- ✓ 1950年，米顿纳尔(Medonal)首先将这个概念用于研究继电器系统在单位阶跃作用下的过渡过程的时间最短最优控制问题。

钱学森（1911—2009）

- ✓ 出生于上海，祖籍浙江杭州，系统科学家、空气动力学家，工程控制论创始人之一，中科院学部委员、中国工程院院士，**两弹一星功勋奖章**获得者。

- ✓ 1934年获交通大学学士学位，1936年获MIT硕士学位，1939年获美国加州理工学院博士学位（师从冯·卡门，同年和导师提出著名的“卡门-钱”公式）；1955年回国，1956年任中科院力学研究所第一任所长，1957年任国防部第五研究院第一任院长，1959年9月来到西安交大看望师生，学校2009年5月授予钱老“最受崇敬校友”荣誉。

普朗特、钱学森和冯·卡门

- ✓ 1954年，编著出版**《工程控制论》（上下册）**，系统揭示了控制论对自动化、航空、航天、电子通信等科学技术的意义和重大影响。其中**“最优开关曲线”**等素材，直接促进了**最优控制理论的形成和发展**。

理论形成阶段：

- ✓ 贝尔曼（Richard E Bellman）(1920 ～1984)
  美国数学家，美国科学院院士，动态规划的创始人。

贝尔曼，R.

1956年，为解决**多级决策过程最优化问题**，贝尔曼(R. E. Bellman)创立“动态规划”理论，依据最优性原理，用一组基本的递推关系式使过程连续地最优转移，将一个多阶段决策过程转化成为若干单阶段决策过程。

多级决策过程：整个过程可分成“若干个互相联系的阶段”，在每一阶段都需要作出决策。各个阶段决策的选取不能任意确定，它依赖于当前面临的状态，又影响以后的发展，要求能保证整个决策序列的最优。

✓ 庞特里亚金(Pontryagin)（1908～1988）

前苏联数学家。研究领域涉及拓扑学、代数、控制论等。以庞特里亚金的“**极大值原理**”著称于世 。

1956－1958年，庞特里亚金创立“极大值原理”。它是最优控制理论的主要组成部分和该理论发展史上的一个里程碑。由于**放宽了有关条件使得许多古典变分法和动态规划方法**无法解决的工程技术问题得到解决，所以它**是解决最优控制问题的一种最普遍的有效的方法。**

同时，庞特里亚金在《最优过程的数学理论》著作中已经把最优控制理论初步形成了一个完整体系。

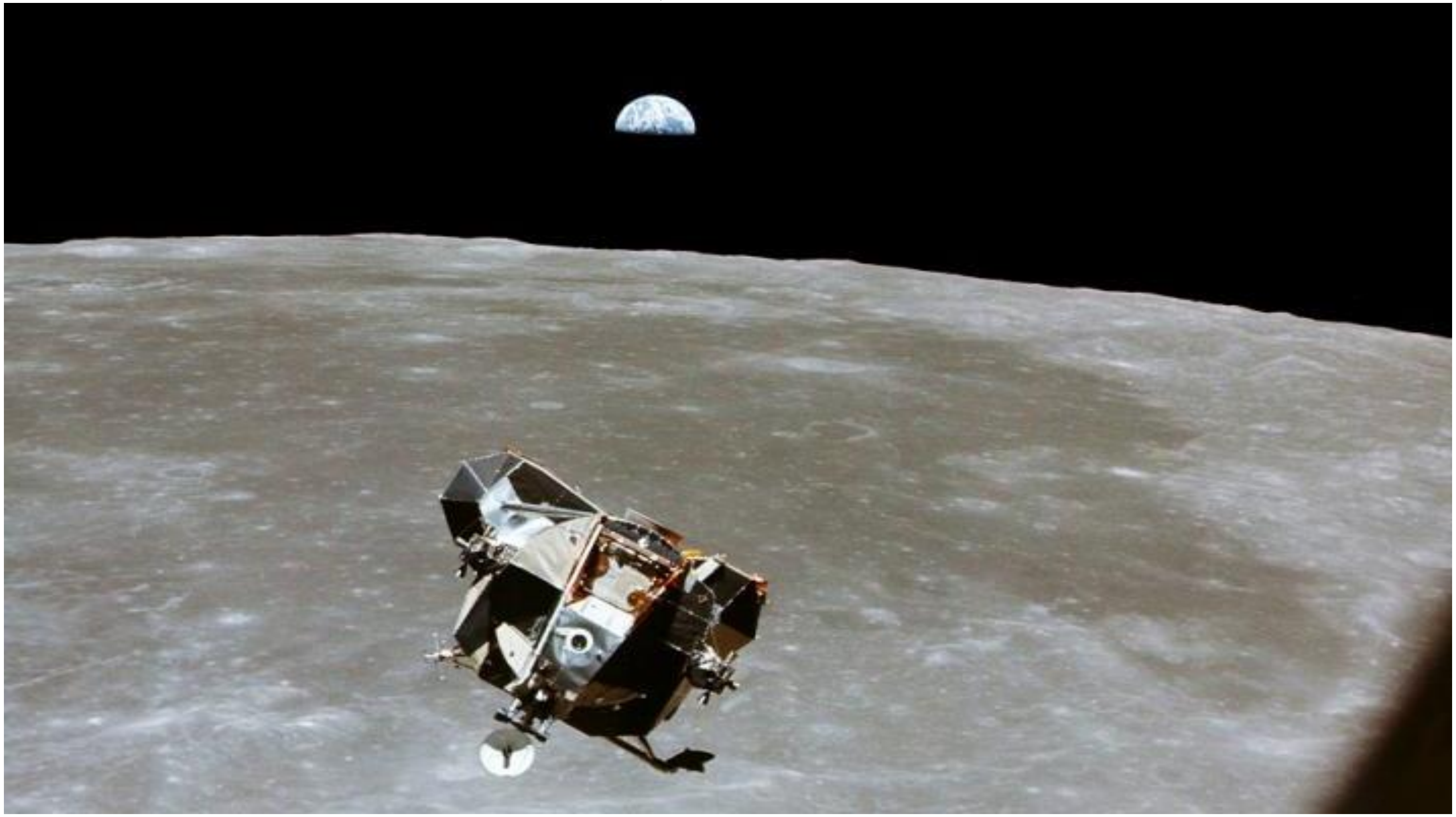
✓ 卡尔曼（Rudolf Emil Kalman）(1930-2016)，匈牙利裔**美国数学家**。提出卡尔曼滤波，提出系统的能控性和能观性概念，为现代控制理论的出现奠定基础。

--卡尔曼1960年发表的卡尔曼滤波算法论文《A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems》，该算法**促成了过去50年间的许多基础性技术发明**，如把阿波罗号宇航员送上月球的**航天计算机系统**、把人类探索世界的触角伸向深海和外行星的**机器人**，以及几乎所有需要从噪声数据中估算现实世界状态的发明成果……。

-- IFAC（International Federation of Automatic Control）第一届世界大会于1960年召开,卡尔曼、贝尔曼和庞特里亚金分别在会上作了“控制系统的一般理论”、“动态规划”和“最优控制理论”的报告,**宣告了最优控制理论的诞生**,人们也称这三个工作是现代控制理论的三个**里程碑**。

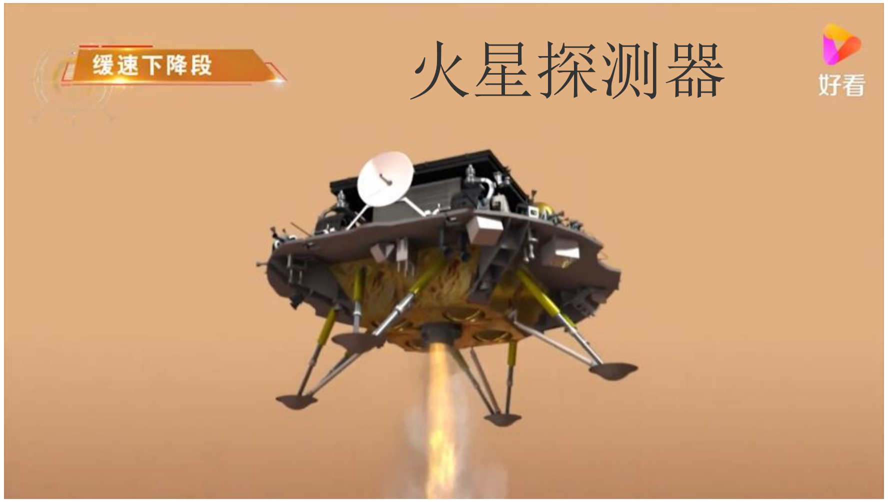
2、最优控制问题的基本要素

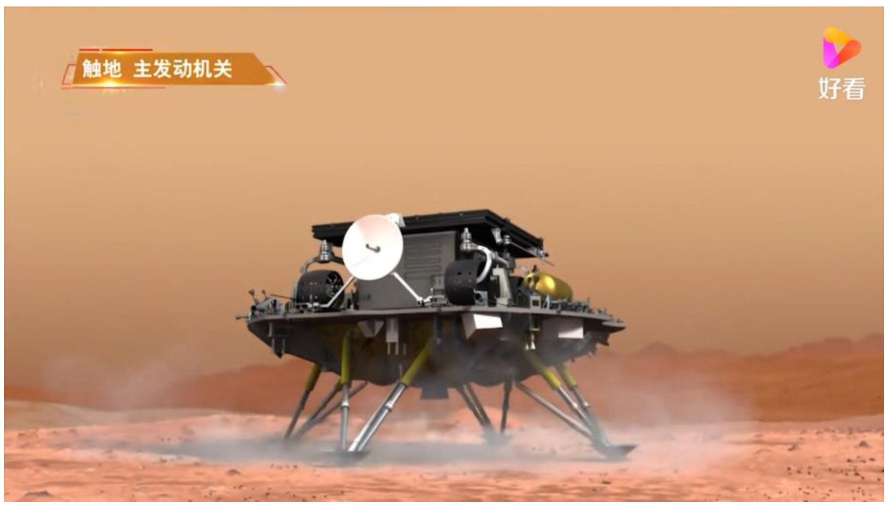
最优控制问题实例：飞船软着陆

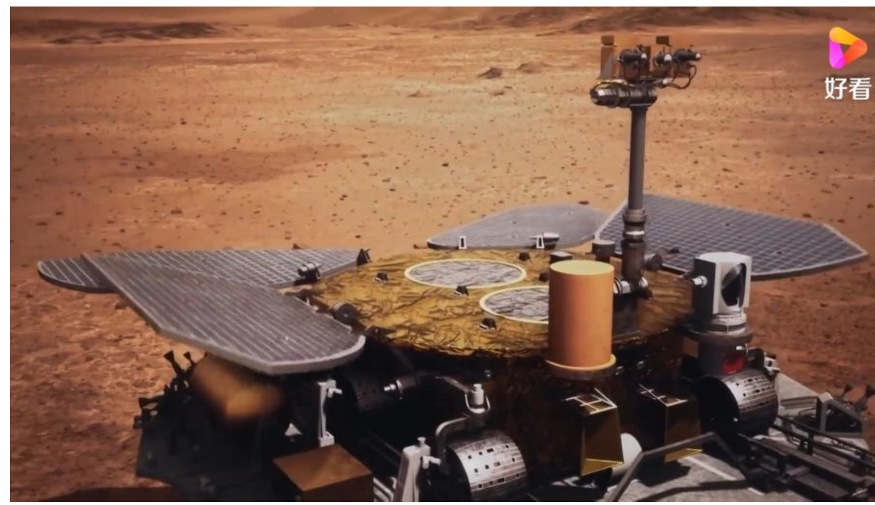


飞船在月球表面实现软着陆，需要选择发动机推力的最优控制律，使燃料消耗最少。

“控制有闭集约束的最小燃耗控制问题”

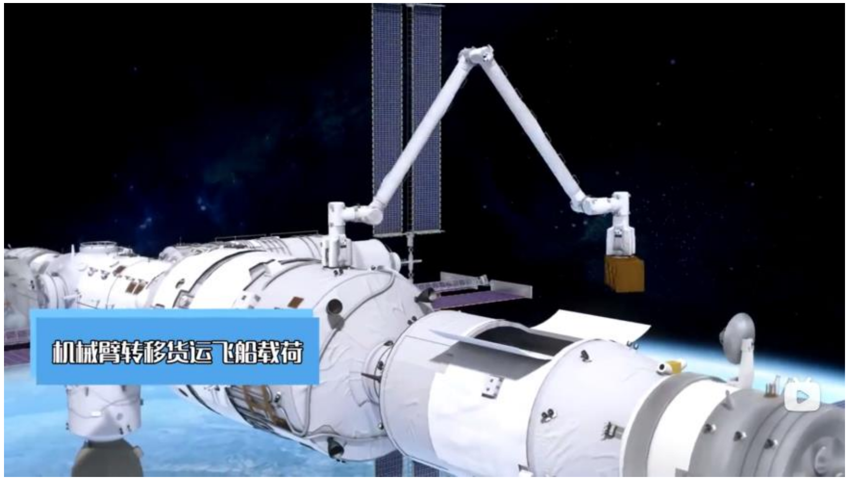


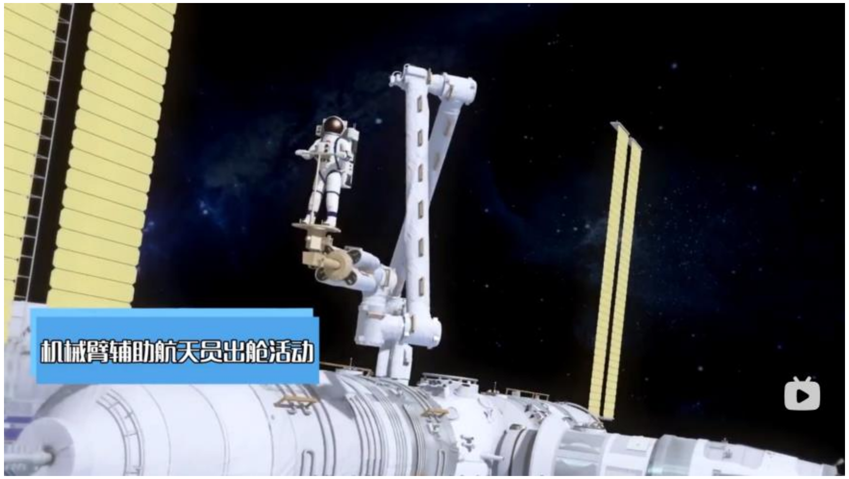




2021年5月15日，*天问一号*探测器着陆火星乌托邦平原南部预选区

天问探火背后的功臣：轻装上天背后的“瘦身教练”（材料：新型镁锂合金）





2021年4月29日，中国空间站天和核心舱发射成功

机械臂: 转运载荷、协助航天员出舱、监视来访飞行器等

关键：为空间机械臂装上“眼睛” （空间站机械臂视觉系统）

例1 飞船软着陆：在月球表面着陆时速度必须为零，由发动机的推力变化来完成。

问题： 如何选择推力，使燃料消耗最少。

$h(t)$ —— 高度

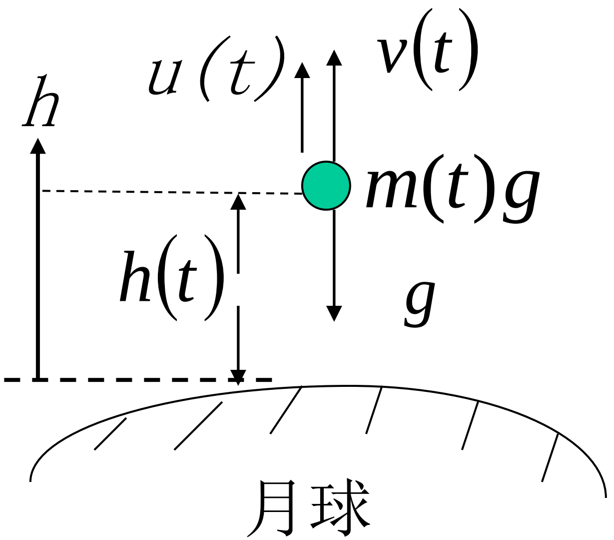
$v(t)$ —— 速度

$u(t)$ —— 发动机推力

$m(t)$ —— 飞船在t时刻总质量

M —— 飞船自身质量（不含燃料）

g —— 月球表面重力加速度



分析：

飞船自重

燃料初始质量

已知条件：

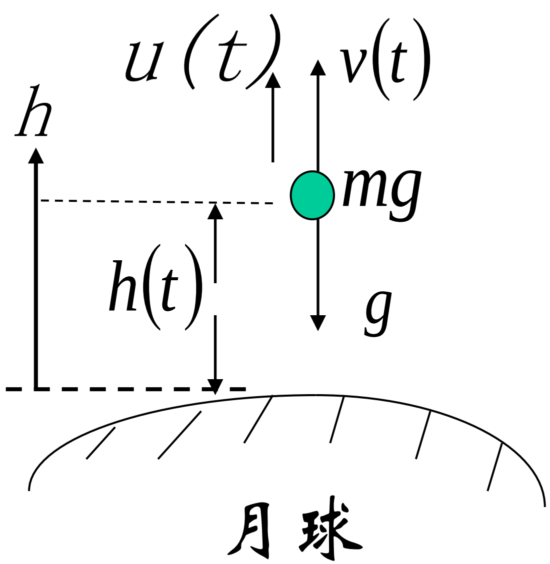
$$m(0)=M+F=m_0$$ 飞船初始质量

$$h(0)=h_0$$ 启动着陆初始高度

$$v(0)=v_0<0$$ 初始速度（向上为正）

$t_0=0$ —— 初始时间

1） 系统运动方程



$$\dot{h}(t)=v(t)$$

$$\dot{v}(t)=\frac{u(t)}{m(t)}-g$$

$$\dot{m}(t)=-ku(t)$$

假设推力与燃料的消耗量成正比

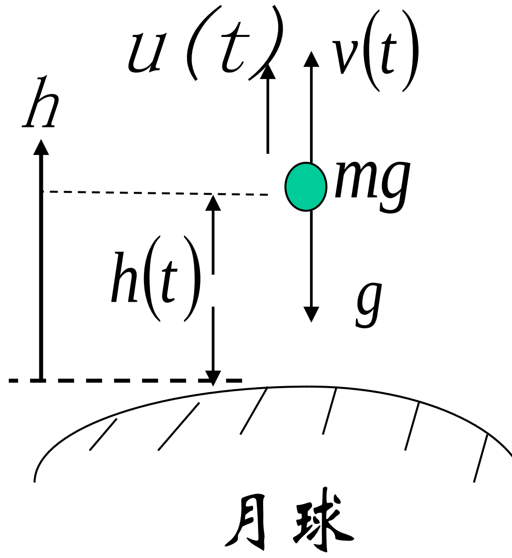
k —— 常数

2) 边界条件

初始条件 $h(0)=h_0, v(0)=v_0$， $m(0)=m_0$

末端条件 $h(t_f)=0, v(t_f)=0$

（t_f： 末端时间）



3) 控制约束：

$$0 \le u(t) \le u_{\max}$$

4) 性能指标

选择 $u^*(t)$， 使 $h(t_0) \to h(t_f)$ 所用燃料最省

$$\Rightarrow \quad J = m(t_f) = \max$$

J 是 $u(t)$ 的函数！

分析：　最优控制模型：$\Longrightarrow$ 泛函最优化

$$J=m(t_f)\Rightarrow \max$$ 性能指标函数

$\Longrightarrow$ $J=J(u(t))$

控制变量是时间的函数；
优化目标是**函数**的函数

$\Longrightarrow$ 泛函优化

三种求解方法：

经典变分法
极大值原理
动态规划法

$$\left.\begin{aligned}\dot h(t)&=v(t)\\ \dot v(t)&=\frac{u(t)}{m(t)}-g\\ \dot m(t)&=-ku(t)\end{aligned}\right\}$$ 运动方程

$$0\le u(t)\le u_{\max}$$ 控制约束

$$\left.\begin{aligned}&m(0)=m_0\\ &h(0)=h_0\quad v(0)=v_0\\ &h(t_f)=0,\quad v(t_f)=0\end{aligned}\right\}$$ 边界条件

3、最优控制问题的一般提法

最优控制问题就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题。

系统状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ 初始状态为 $\boldsymbol{x}(t_0)$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为$\boldsymbol{n}$ 维状态向量；$\boldsymbol{u}$ 为$\boldsymbol{r}$ 维控制向量；$\boldsymbol{f}$ 为$\boldsymbol{n}$ 维向量函数，它是 $\boldsymbol{x}$ 、$\boldsymbol{u}$ 和t 的连续函数，并且对$\boldsymbol{x}$ 、t 连续可微。

寻求在 $[t_0, t_f]$上的最优控制 $\boldsymbol{u} \in R_u$ ，以将系统状态从 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 转移到 $\boldsymbol{x}(t_f)$ ，并使性能指标

$$J = \phi[\boldsymbol{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\,\mathrm{d}t$$

最优。其中 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ 是$\boldsymbol{x}$ 、$\boldsymbol{u}$ 和t 的连续函数。

一般最优控制问题四个要素

1) 受控系统的数学模型 $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$

2) 容许控制 $u(t) \in R_u$ R_u：容许控制集合

3) **边界条件**

$x(t_0) \in \Omega_0$ Ω_0：给定初值集合

$x(t_f) \in \Omega_f$ Ω_f：给定终值集合

4) **目标泛函（性能指标）**

综合型：$J(u(\cdot)) = \Phi\left(x(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} L\left(x(t), u(t), t\right) dt$

积分型：$J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt$

终端型：$J(u(\cdot)) = \Phi\left(x(t_f), t_f\right)$

寻求容许控制，在满足运动方程及边界条件约束下使系统的目标泛函达到最大或最小。

二、基于动态规划的最优控制

1. 动态规划的基本原理

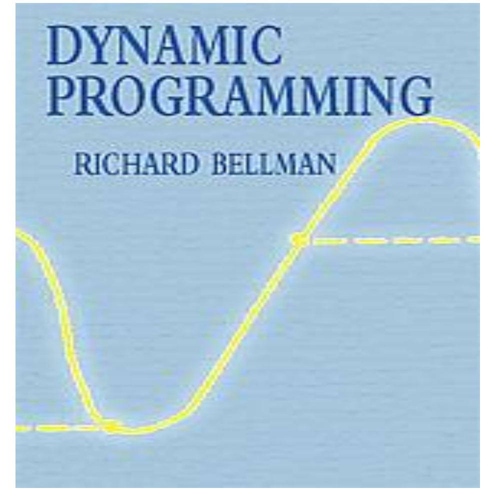
2. 离散系统的最优控制（重点掌握）

- 连续定常系统状态方程的离散化
- 贝尔曼最优性原理
- 动态规划递推方程

3. 连续系统的最优控制（了解）

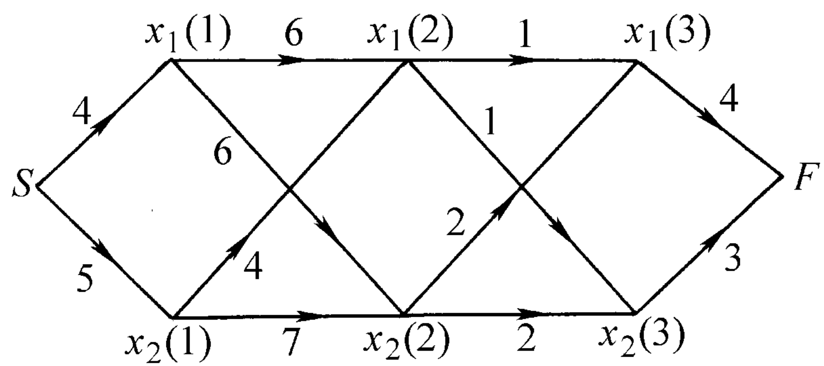
- 连续系统最优性原理
- 连续系统动态规划基本方程（HJB）

1. 动态规划基本原理



动态规划：1956年由美国数学家R.Bellman提出。

动态规划是**解决多级决策过程最优化**的一种数学方法。



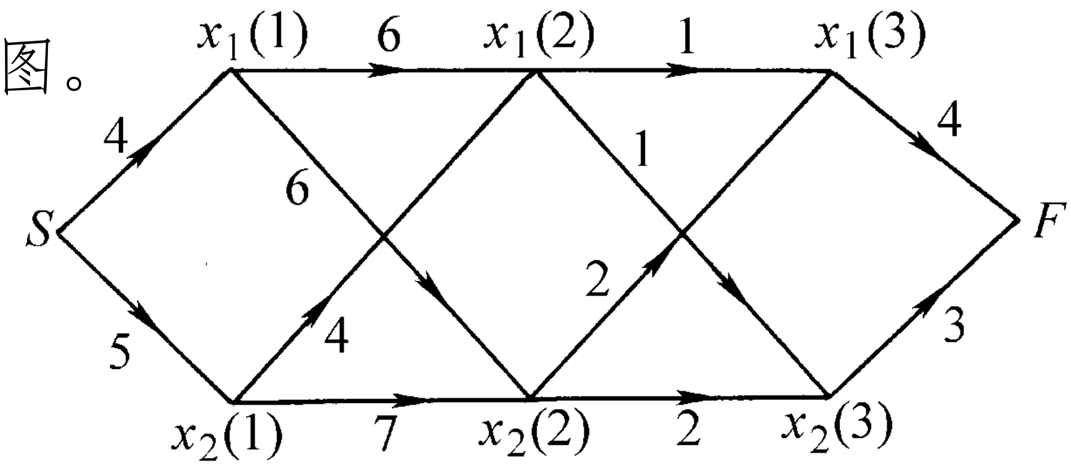
多级决策过程——把一个决策过程按时间或空间顺序分为**若干阶段**，然后给每一步作出“决策”(或控制)，以使整个过程取得最优的效果。

动态规划法的基本思想

右图为某小城镇交通路线图。起点站为S，终点站为F，

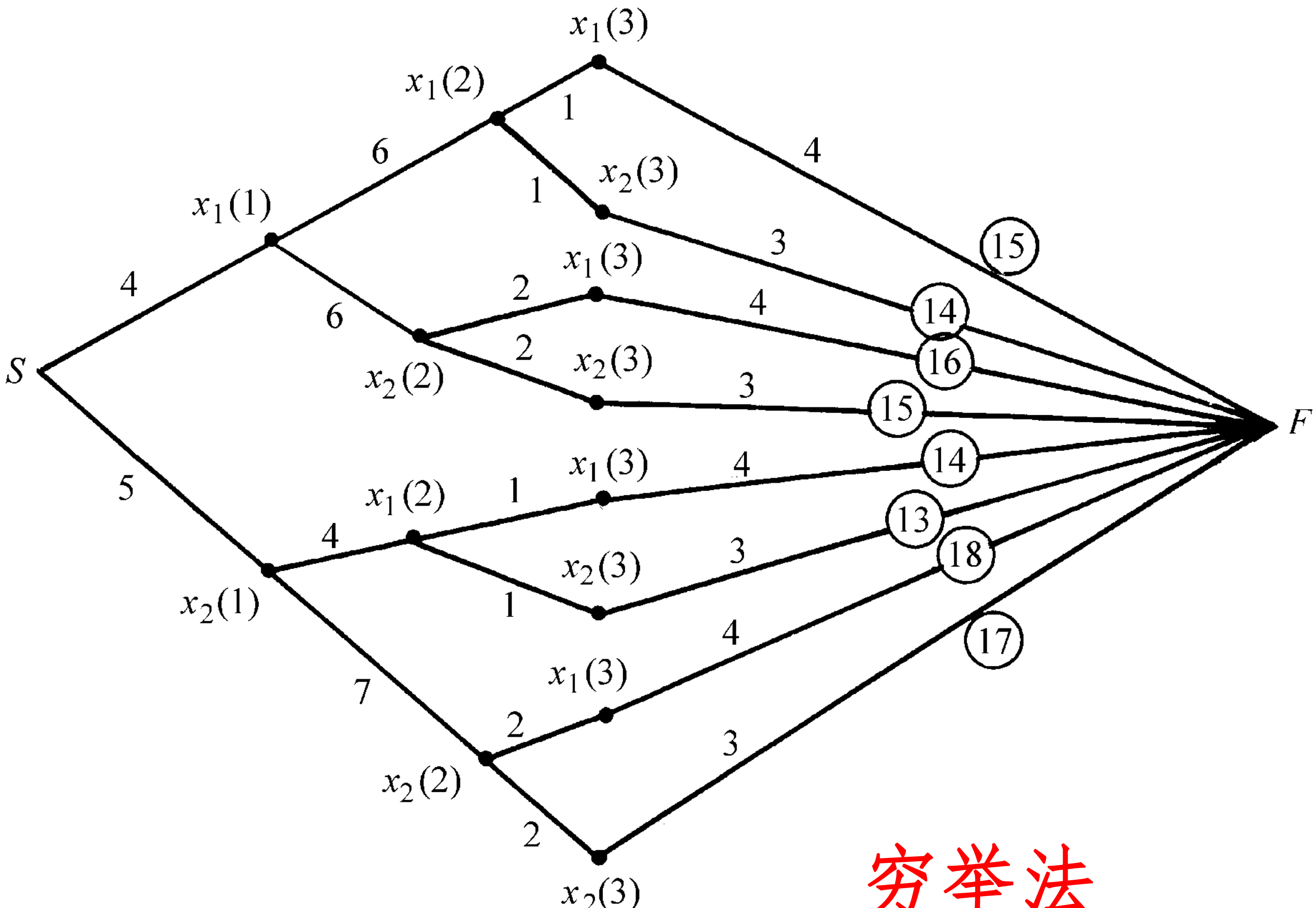
$x_1(1)$　$x_1(2)$　$x_1(3)$

$x_2(1)$　$x_2(2)$　$x_2(3)$



站与站之间的里程标在图上，要求选择一条路线走法，使里程最短。这是一个最短路径问题。

- 一种办法是将从S 到F 所有可能走法都列出来，并且把每种走法的里程标在各条路线上，找出最短的。


S
F
x1(1)
x2(1)
x1(2)
x2(2)
x1(2)
x2(2)
x1(3)
x2(3)
x1(3)
x2(3)
x1(3)
x2(3)
x1(3)
x2(3)
4
5
6
6
4
7
1
1
2
2
1
1
2
2
4
3
4
3
4
3
4
3
15
14
16
15
14
13
18
17

穷举法

第二个办法：动态规划法（逆向分级计算法）。从终点开始，逐段向前倒推，直至起始节点。依次计算出各节点至终点的最优值，确定各节点至终点的最优路径。

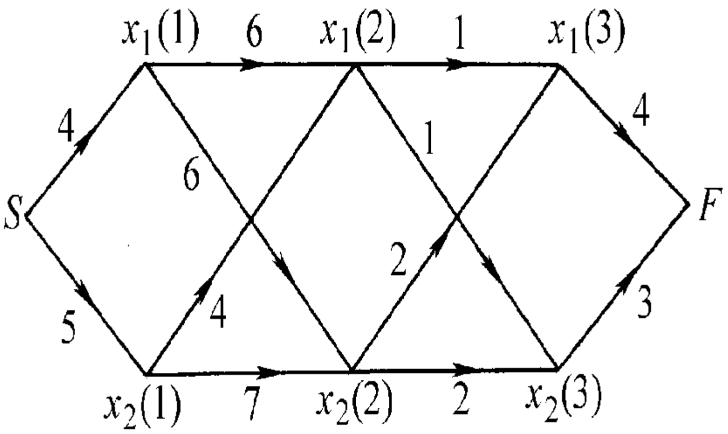
具体的分级决策过程如下：

为每个节点引入两个属性：

$J[A]$：从节点A到终点F的最短距离

$P[A]$：节点对应的最优上级节点

记相邻两个阶段节点的距离为：$d[A,B]$

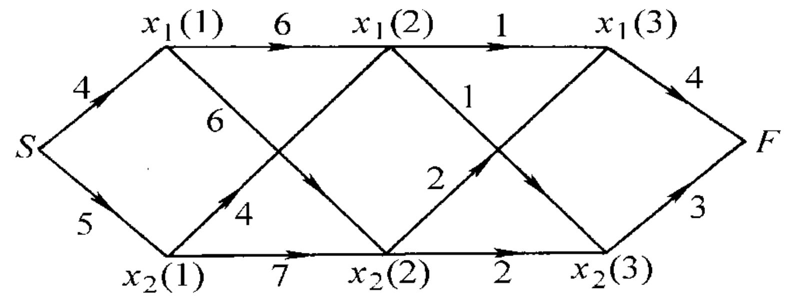


（1）对于节点 $x_i(3), i=1,2$

$$J\left[x_1(3)\right]=d[x_1(3),F]=4, P[x_1(3)]=F$$

$$J\left[x_2(3)\right]=d[x_2(3),F]=3, P[x_2(3)]=F$$

将本级节点相应的最优上级节点记录于变量 $P[x_i(3)]$ 。



（2）对于节点 $x_i(2), i=1,2$

$$J\left[x_1(2)\right]=\min\begin{Bmatrix} d[x_1(2),x_1(3)]+J[x_1(3)] \\ d[x_1(2),x_2(3)]+J[x_2(3)] \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 1+4 \\ 1+3 \end{Bmatrix}=4, P[x_1(2)]=x_2(3)$$

$$J\left[x_2(2)\right]=\min\begin{Bmatrix} d[x_2(2),x_1(3)]+J[x_1(3)] \\ d[x_2(2),x_2(3)]+J[x_2(3)] \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 2+4 \\ 2+3 \end{Bmatrix}=5, P\left[x_2(2)\right]=x_2(3)$$

将本级节点相应的最优上级节点记录于变量 $P[x_i(2)]$

（3）对于节点 $x_i(1), i=1,2$

$$J\left[x_1(1)\right]=\min\begin{Bmatrix} d[x_1(1),x_1(2)]+J[x_1(2)] \\ d[x_1(1),x_2(2)]+J[x_2(2)] \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 6+4 \\ 6+5 \end{Bmatrix}=10, P\left[x_1(1)\right]=x_1(2)$$

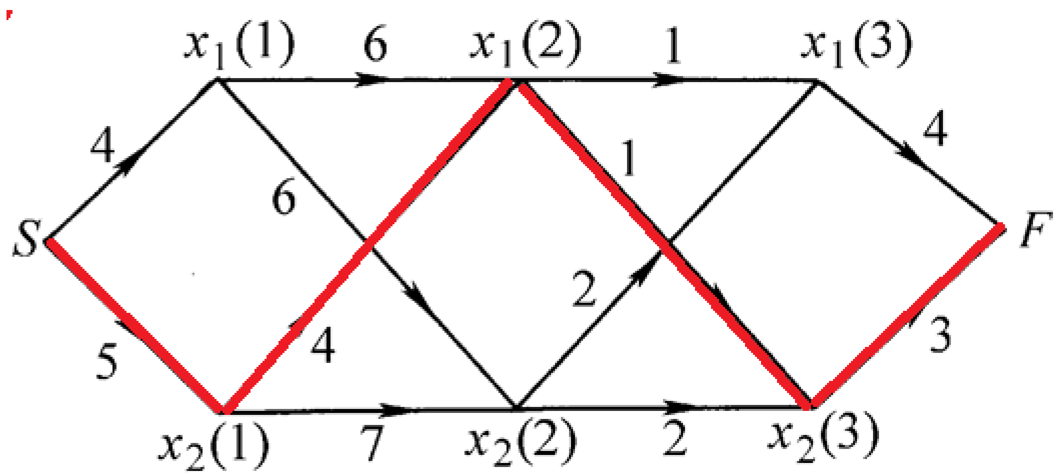
$$J\left[x_2(1)\right]=\min\begin{Bmatrix} d[x_2(1),x_1(2)]+J[x_1(2)] \\ d[x_2(1),x_2(2)]+J[x_2(2)] \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 4+4 \\ 7+5 \end{Bmatrix}=8, P\left[x_2(1)\right]=x_1(2)$$

将本级节点相应的最优上级节点记录于变量 $P[x_i(1)]$ 。

（4）对于初始节点S

$$J[S]=\min\begin{Bmatrix} d[S,x_1(1)]+J[x_1(1)] \\ d[S,x_2(1)]+J[x_2(1)] \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 4+10 \\ 5+8 \end{Bmatrix}=13, P[S]=x_2(1)$$

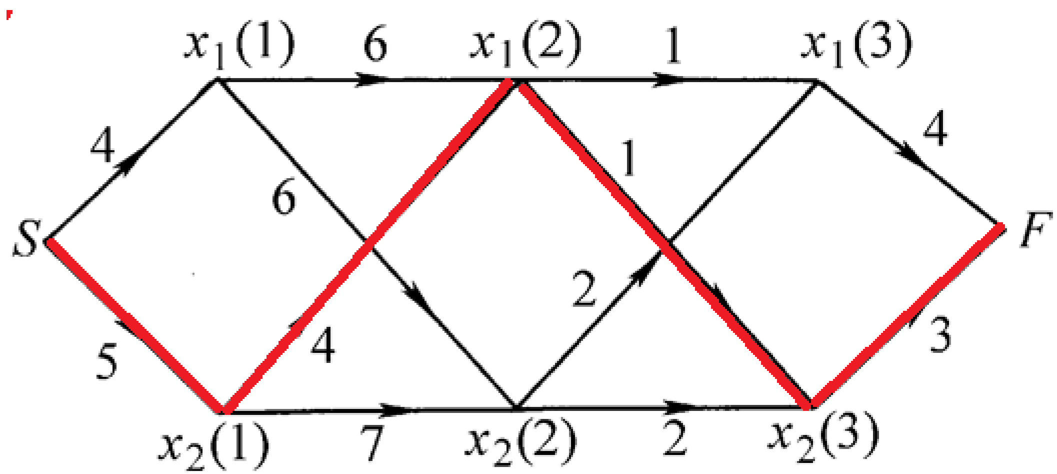
本级节点相应的最优上级节点：记录于变量$P[S]$



最优路径为 $S, P[S], P[P[S]], \ldots$ 直至终点F

多级决策问题最优决策序列遵循的最优性原理：

✓ 最优路径上任一节点至终点的路径必定也是最优的。



2 离散系统的最优控制

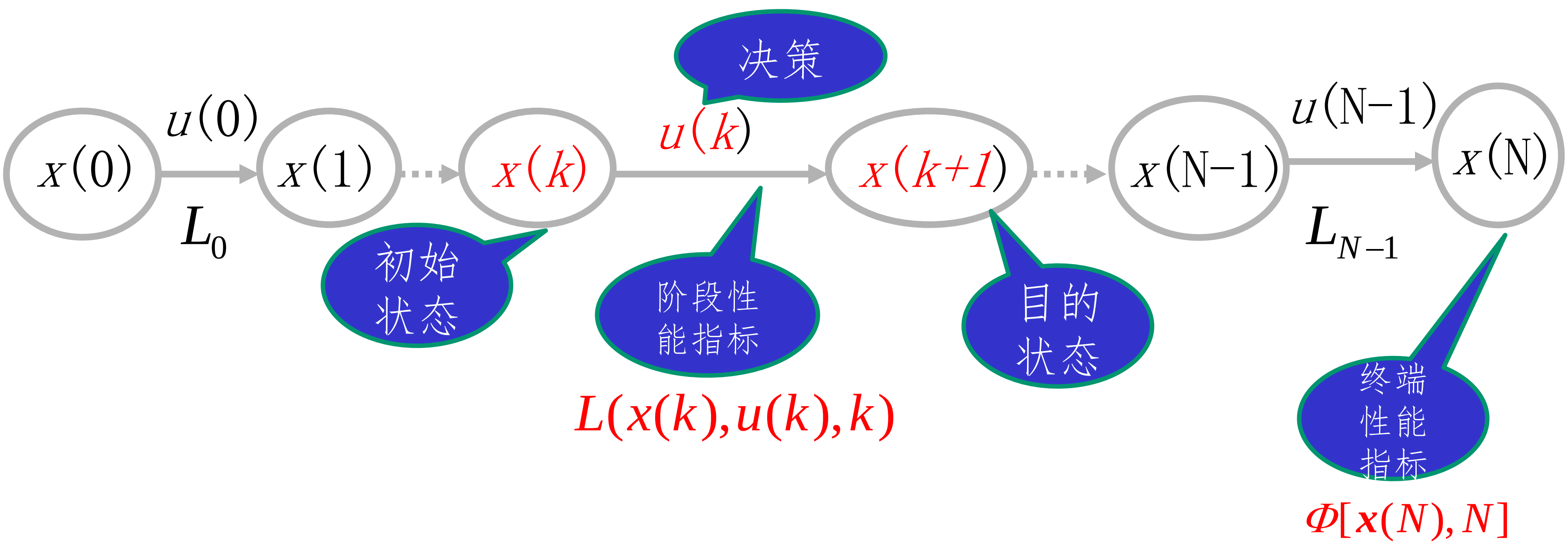
设控制系统的状态方程为 $x(k+1)=f\left[x(k),u(k),k\right](k=0,1,\cdots,N-1)$

式中$x(k)$是k时刻的n维状态向量，$u(k)$是k时刻的r维容许控制向量，初值$x(0)$。

优化性能指标

$$J[\mathbf{x}(0),\mathbf{u}(0),\mathbf{u}(1),\ldots,\mathbf{u}(N-1)]=\Phi[\mathbf{x}(N),N]+\sum_{i=0}^{N-1}L[\mathbf{x}(i),\mathbf{u}(i),i]$$

问题： 求控制序列$\{\mathbf{u}^*(k)\}(k=0,\ldots,N-1)$使性能指标$\boldsymbol{J}$达到极小



1）连续定常系统状态方程的离散化（补充）

□ 精确离散化

线性定常系统：$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

<u>离散化精确方程为</u>：$\begin{cases} x[(k+1)T] = G(T)x(kT) + H(T)u(kT) \\ y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \end{cases}$

其中：

$$G(T) = \Phi(T) = e^{AT}$$

$$H(T) = \left(\int_0^T \Phi(t)dt\right)B = \left(\int_0^T e^{At}dt\right)B$$

<u>推导过程</u>：直接从定常系统非齐次状态方程的解中进行离散化

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \qquad (1)$$

$$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \qquad (1)$$

令 $t_0=kT, t=(k+1)T$ ， 有

$$x[(k+1)T]=\Phi(T)x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi[(k+1)T-\tau]Bu(\tau)d\tau \qquad (2)$$

在时间区间 $[kT,(K+1)T]$ 上，令 $u(t)\equiv u(kT)$

有

$$x[(k+1)T]=\Phi(T)x(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}\Phi[(k+1)T-\tau]d\tau Bu(kT)$$

$$\overset{t=(k+1)T-\tau}{=}\Phi(T)x(kT)-\int_{T}^{0}\Phi(t)dtBu(kT)$$

$$=\underline{\Phi(T)}x(kT)+\underline{\left(\int_{0}^{T}\Phi(t)dt\right)}Bu(kT)$$

$$x[(k+1)T]=G(T)x(kT)+H(T)u(kT)$$

[例]：请写出下列连续时间系统当采样周期为T时的离散化方程。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

[解]:先求连续系统的状态转移矩阵：

$$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}(sI-A)^{-1}=L^{-1}\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

所以：$$G(T)=\Phi(T)=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T})\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$H(T)=\left(\int_0^T\Phi(t)dt\right)B=\int_0^T\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}dt\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}T+\frac{1}{4}e^{-2T}-\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2}e^{-2T}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

□ 近似离散化

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

用差商代替微商

$$\begin{cases} x[(k+1)T] = G(T)x(kT) + H(T)u(kT) \\ y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \end{cases}$$

其中：

$$G(T) = I + AT$$
$$H(T) = BT$$

一阶差商

推导过程：仿导数定义，即用 $\dfrac{x[(k+1)T]-x[kT]}{T}$ 代替 $\dot{x}$

$$\frac{x[(k+1)T]-x[kT]}{T} = Ax(kT) + Bu(kT)$$

$$\Rightarrow x[(k+1)T] = (I + AT)x(kT) + BTu(kT)$$

说明：采样周期非常小时，这种近似的精度可以接受。
非特别指定，离散化指的是精确离散化。

2）贝尔曼最优性原理

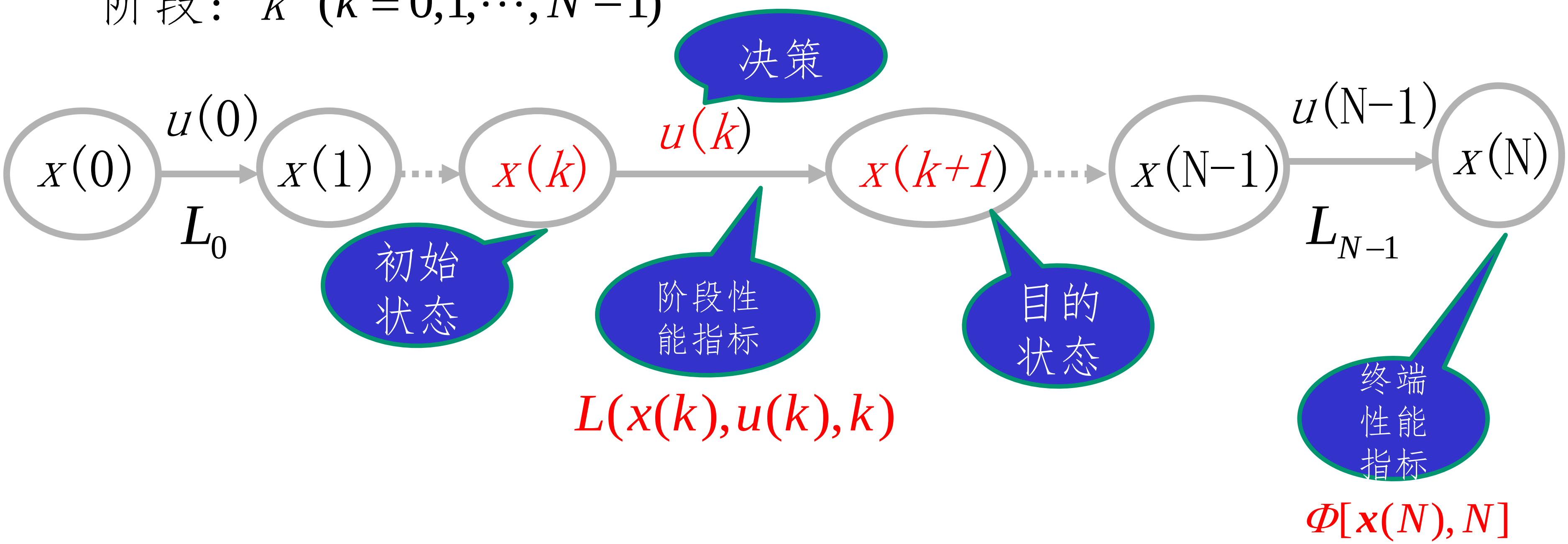
状态演化方程： $x(k+1)=f\left[x(k),u(k),k\right]$

目的是：找到最优控制序列，使优化如下整体性能指标。

$$J[\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\ldots,\boldsymbol{u}(N-1)]=\Phi[\boldsymbol{x}(N),N]+\sum_{i=0}^{N-1}L[\boldsymbol{x}(i),\boldsymbol{u}(i),i]$$

将离散时间最优控制问题考虑为一个多级决策过程：

阶段： $k\ \ (k=0,1,\cdots,N-1)$



贝尔曼最优性原理（动态规划的理论基础）

对于一个N级决策过程，其初始状态为 $x(0)$ ，其最优策略为 $\{u^*(0),u^*(1),\dots,u^*(N-1)\}$,$\{x^*(1),x^*(2),\dots,x^*(N)\}$ 为相应的最优状态序列。那么对于以第k级状态$x^*(k)$为初态的任一个$N-k$级子决策也必然是最优的。$(0\le k\le N-1)$

证明： 令 $u_0^*=\left\{u^*(0),u^*(1),\dots,u^*(N-1)\right\}$ 为始于状态 $x(0)$，使性能指标极小的最优控制序列，

$J^*[x(0)]\triangleq J[x(0),u^*(0),u^*(1),\dots,u^*(N-1)]$ 从 $x(0)$ 出发的最小代价。

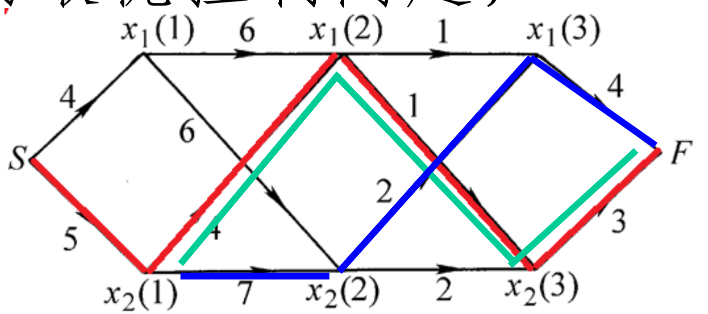
$$=\Phi[x^*(N),N]+\sum_{i=1}^{N-1}L[x^*(i),u^*(i),i]+L[x(0),u^*(0),i]$$

对于开始状态为中间状态$x^*(k)$的最优控制问题，

假设另有一个决策序列

$$\bar{u}_k=\{\bar{u}(k),\bar{u}(k+1),\dots,\bar{u}(N-1)\}$$

$$\bar{u}_k\neq u_k^*=\{u^*(k),u^*(k+1),\dots,u^*(N-1)\}$$



最优控制序列的子序列也是最优的！

令$J[\boldsymbol{x}^*(k),\boldsymbol{u}]$为从$\boldsymbol{x}^*(k)$出发，以 $\boldsymbol{u}$ 为控制序列获得的性能指标。若有

$$J[\boldsymbol{x}^*(k),\bar{\boldsymbol{u}}_k] < J[\boldsymbol{x}^*(k),\boldsymbol{u}_k^*]$$

那么，

$$J[\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{u}^*(0),\boldsymbol{u}^*(1),\ldots,\boldsymbol{u}^*(k-1),\bar{\boldsymbol{u}}_k] = \sum_{i=0}^{k-1} L[\boldsymbol{x}(i),\boldsymbol{u}^*(i),i] + J[\boldsymbol{x}^*(k),\bar{\boldsymbol{u}}_k]$$

$$< \sum_{i=0}^{k-1} L[\boldsymbol{x}(i),\boldsymbol{u}^*(i),i] + J[\boldsymbol{x}^*(k),\boldsymbol{u}_k^*] = J[\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{u}^*(0),\boldsymbol{u}^*(1),\ldots,\boldsymbol{u}^*(N-1)]$$

$$= J^*[\boldsymbol{x}(0)]$$

表明存在另外一个决策序列

$$\left\{\boldsymbol{u}_0^*,\boldsymbol{u}_1^*,\ldots,\boldsymbol{u}_{k-1}^*,\bar{\boldsymbol{u}}_k\right\} = \left\{\boldsymbol{u}_0^*,\boldsymbol{u}_1^*,\ldots,\boldsymbol{u}_{k-1}^*,\bar{\boldsymbol{u}}(k),\bar{\boldsymbol{u}}(k+1),\ldots,\bar{\boldsymbol{u}}(N-1)\right\} \neq \boldsymbol{u}_0^*$$

使得总体性能指标最小，与 $J^*[\boldsymbol{x}(0)]$ 是最小代价矛盾，最优性原理得证。*最优控制序列的子序列也是最优的！*

3）离散系统动态规划递推方程

$$J^*[\boldsymbol{x}(k)]=\min_{\boldsymbol{u}(k)}\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k]+J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\}$$

$$J[\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\ldots,\boldsymbol{u}(N-1)]=\Phi[\boldsymbol{x}(N),N]+\sum_{i=0}^{N-1}L[\boldsymbol{x}(i),\boldsymbol{u}(i),i]$$ 整体优化目标

从$\boldsymbol{x}[0]$出发的最优性能指标

$$J^*[\boldsymbol{x}(0)]\triangleq\min_{u(0),u(1),\cdots,u(N-1)}J[\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{u}(1),\ldots,\boldsymbol{u}(N-1)]$$

$$=J[\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{u}^*(0),\boldsymbol{u}^*(1),\ldots,\boldsymbol{u}^*(N-1)]$$

$$=\Phi[\boldsymbol{x}^*(N),N]+\sum_{i=0}^{N-1}L[\boldsymbol{x}^*(i),\boldsymbol{u}^*(i),i]$$

其中

从$x(0)$出发的最优控制序列： $\{\boldsymbol{u}^*(0),\boldsymbol{u}^*(1),\ldots,\boldsymbol{u}^*(N-1)\}$

从$x(0)$出发的最优状态序列： $\{\boldsymbol{x}^*(1),\boldsymbol{x}^*(2),\ldots,\boldsymbol{x}^*(N)\}$

类似地，可定义从$x(k)$出发的最优性能指标

$$J^*[\boldsymbol{x}(k)]=\Phi[\boldsymbol{x}^*(N),N]+\sum_{i=k}^{N-1}L[\boldsymbol{x}^*(i),u^*(i),i]$$

$$J^*[\boldsymbol{x}(k)] = \min_{\boldsymbol{u}(k)}\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] + J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\}$$

证明过程: $J^*[\boldsymbol{x}(k)]$

$$= \Phi[\boldsymbol{x}^*(N),N] + \sum_{i=k+1}^{N-1} L[\boldsymbol{x}^*(i),u^*(i),i] + L[\boldsymbol{x}(k),u^*(k),k]$$

贝尔曼最优性原理

$$= J^*[\boldsymbol{x}^*(k+1)] + L[\boldsymbol{x}(k),u^*(k),k]$$

$$= J^*[f\left[x(k),u^*(k),k\right]] + L[\boldsymbol{x}(k),u^*(k),k]$$

$$= \min_{\boldsymbol{u}(k)}\left\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] + J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\right\}$$ 简单的单级优化问题!

上述递推公式包含了这样一个事实：求最优控制$u^*(k)$时利用了k+1阶段基于$x(k+1)$求得的最优控制$u^*(k+1)$，. . . ，$u^*(N-1)$ 。这说明$u^*(k+1)$，. . . ，$u^*(N-1)$ 是从k阶段开始的最优控制策略$u^*(k)$ 、$u^*(k+1)$ ，. . . ，$u^*(N-1)$的一部分，尽管求k+1阶段优化问题解时不知道k阶段的最优控制是什么。

$$J^*[\boldsymbol{x}(k)] = \min_{\boldsymbol{u}(k)}\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] + J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\} \qquad (*)$$

利用动态规划求解离散系统最优控制的过程：

- $k=N$，求解 $J^*[\boldsymbol{x}(N)] = \Phi[\boldsymbol{x}(N),N]$
- $k=N-1$，利用动态规划递推方程，获得本阶段最优控制输入$\boldsymbol{u}^*(N-1)$

$$J^*[\boldsymbol{x}(N-1)] = \min_{\boldsymbol{u}(N-1)}\{L[\boldsymbol{x}(N-1),\boldsymbol{u}(N-1),N-1] + \Phi[\boldsymbol{x}(N),N]\}$$

- 对于$k=N-2,\cdots,1,0$，应用动态规划递推方程

$$J^*[\boldsymbol{x}(k)] = \min_{\boldsymbol{u}(k)}\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] + J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\}$$

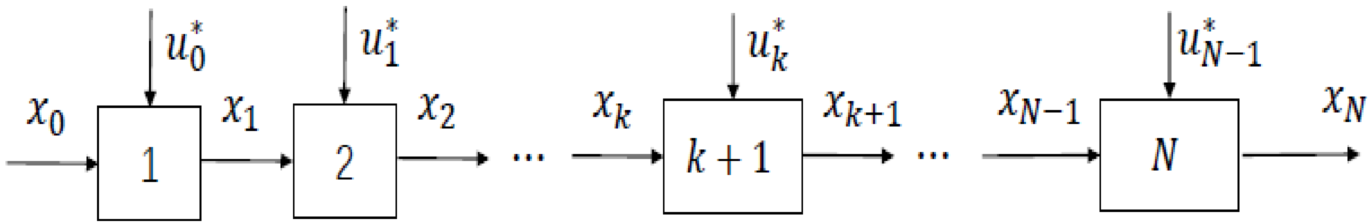
逐步逆向递推，依次可以获得最优控制序列

$$\boldsymbol{u}^*(N-2),\ldots,\boldsymbol{u}^*(1),\boldsymbol{u}^*(0)$$

- 代入状态方程得到最优状态序列。

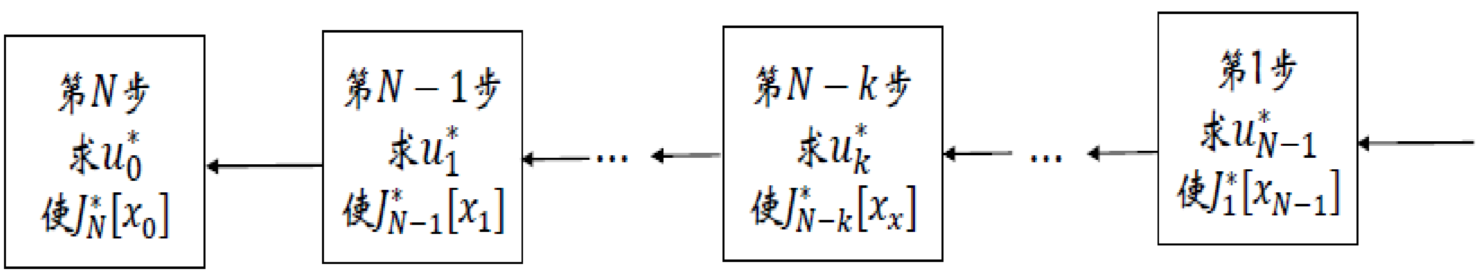
$$\{\boldsymbol{x}^*(1),\boldsymbol{x}^*(2),\ldots,\boldsymbol{x}^*(N)\}$$

给定初值：$x(0)=x_0$，寻求一个最优控制序列$\{u_k^*\}$ $(k=0,1,\cdots,N-1)$使性能指标取得极小值。



控制过程顺序

动态规划法依据最优性原理进行逆向分级计算



动态规划法求解顺序

例2 线性定常离散系统的状态方程为

$$x(k+1)=x(k)+u(k)$$

初始状态为 $x(0)$，性能指标为

$$J=\frac{1}{2}cx^2(N)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}u^2(k)$$

寻求最优控制序列 $u(k)$，使性能指标 J 极小化 $(N=2)$

解：运用动态规划法来求解

$$L[\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k),k]=\frac{1}{2}\mathbf{u}^2(k),\varPhi[\mathbf{x}(N),N]=\frac{1}{2}c\mathbf{x}^2(N)$$

1） 从最后一级开始（k=$\mathbf{N}$=2），$J^*[\mathbf{x}(N)]=\varPhi[\mathbf{x}(N),N]$

$$J^*[x(2)]=\frac{1}{2}cx^2(2)$$

优化目标 $J=\frac{1}{2}cx^2(N)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}u^2(k)$

2） 向前倒推一级，即 $k=N-1=1$

基于动态规划递推方程：

$$J^*[\boldsymbol{x}(k)]=\min_{\boldsymbol{u}(k)}\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k]+J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\}$$

$$J^*[x(1)]=\min_{u(1)}\left\{\frac{1}{2}u^2(1)+J^*[x(2)]\right\}=\min_{u(1)}\left\{\frac{1}{2}u^2(1)+\frac{1}{2}cx^2(2)\right\}$$

$$=\min_{u(1)}\left\{\frac{1}{2}u^2(1)+\frac{1}{2}c[x(1)+u(1)]^2\right\}$$

因为$u(k)$不受限制，故$u^*(1)$ 可以通过下式求得

$$\frac{\partial J^*[x(1)]}{\partial u(1)}=u(1)+cx(1)+cu(1)=0$$

$$u^*(1)=-\frac{cx(1)}{1+c} \qquad J^*[x(1)]=\frac{cx^2(1)}{2(1+c)}$$

$$x^*(2)=x(1)+u^*(1)=\frac{x(1)}{1+c}$$

$$J^*[\boldsymbol{x}(k)] = \min_{\boldsymbol{u}(k)}\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] + J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\}$$

3） 再向前倒推一级，即 $k=0$

$$J^*[x(0)] = \min_{u(0)}\left\{\frac{1}{2}u^2(0) + J^*[x(1)]\right\} = \min_{u(0)}\left\{\frac{1}{2}u^2(0) + \frac{cx^2(1)}{2(1+c)}\right\}$$

$$= \min_{u(0)}\left\{\frac{1}{2}u^2(0) + \frac{c[x(0)+u(0)]^2}{2(1+c)}\right\}$$

由 $\dfrac{\partial J^*[x(0)]}{\partial u(0)} = 0$ $\qquad u^*(0) = -\dfrac{cx(0)}{1+2c}$ $\qquad J^*[x(0)] = \dfrac{cx^2(0)}{2(1+2c)}$

解得 $\qquad x^*(1) = \dfrac{1+c}{1+2c}x(0)$ $\qquad x^*(2) = \dfrac{1}{1+2c}x(0)$

注意：对一个多级决策过程来说，在每考虑一级时，都不是孤立地只把这一级的性能指标最小的决策作为最优决策，而总是把这一级放到全过程中间去考虑（从整个系统考虑），取全过程的性能指标最优的决策作为最优决策。

动态规划递推方程 $J^*[\boldsymbol{x}(k)] = \min\limits_{\boldsymbol{u}(k)}\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] + J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\}$

- 系统观念：**马克思主义认识论和方法论**的重要内容。强调系统是由**相互作用、相互依赖**的若干组成部分结合而成的、具有特定功能的有机体。

- 钱学森学长：我国**系统科学和系统工程**的开创者和奠基人。从系统思想到系统实践的整个创新链条中，在工程、技术、科学直到哲学的不同层次上，钱老都作出了开创性贡献。他**开创了中国航天事业的系统工程实践**，两弹一星、神舟系列飞船等航天系统工程，就是运用系统观点的成功案例。

- 系统观念的应用：

（1）PID控制器参数的整定，就是应用系统观念。三个参数中任何一个参数调整，都可由其他参数变化来补偿。

➢ 系统观念的应用（续）：

（2）2022年10月，党的二十大报告中提出了六个坚持，第5个就是坚持系统观念。系统观念贯穿在整个二十大报告中，比如推动高质量发展、推动绿色发展等。

（4）推进双碳进程中，习近平总书记在2022年1月24日中共中央政治局第三十六次集体学习中，指出要把系统观念贯穿“双碳”工作全过程，注重处理好4对关系。

（5）落脚到我们个人成长：将个人理想追求融入国家发展大势之中，在民族复兴伟业之中实现人生价值。

3. 连续系统的最优控制(不讲)

设连续系统动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t), u(t), t) \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}(t) \in R^n, u(t) \in R^m$$

控制信号$\boldsymbol{u}(t)$ 受到限制，即 $\boldsymbol{u}(t) \in R_u$ 。

性能指标为：

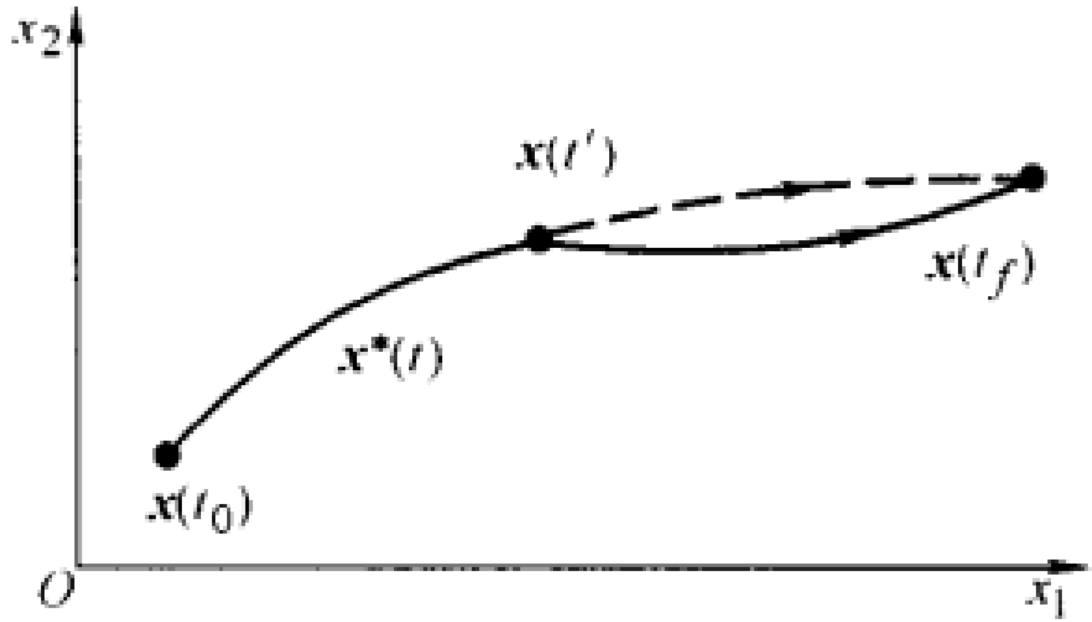
$$J = \Phi\left[\boldsymbol{x}(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} L\left[\boldsymbol{x}(t), u(t), t\right] dt$$

求最优控制 $\boldsymbol{u}(t)$ ，使J 最小

求解时，用到连续系统的最优性原理。

1）连续系统的最优性原理

如果对于初始时刻 t_0 和初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，$\boldsymbol{u}^*(t)$和 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 是系统的最优控制和最优轨线。那么，对于 $t'\in[t_0,t_f]$ 以 $\boldsymbol{x}(t')$为初始状态的后半段，也必是所研究的系统的最优控制规律和最优状态轨线。



从$x(t)$开始的最优性能指标：

$$J^*\left[\boldsymbol{x}(t),t\right]=\min_{u[t,t_f]}\left\{\Phi\left[\boldsymbol{x}(t_f),t_f\right]+\int_t^{t_f}\mathrm{L}\left[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\right]dt\right\}$$

将最优过程分为两段：

$$=\min_{u[t,t_f]}\left\{\Phi\left[\boldsymbol{x}(t_f),t_f\right]+\int_t^{t+\Delta}\mathrm{L}\left[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\right]dt+\int_{t+\Delta}^{t_f}\mathrm{L}\left[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\right]dt\right\}$$

式中Δ为很小的正数。

由

$$J^*[\boldsymbol{x}(t),t]=\min_{u[t,t_f]}\left\{\Phi\left[\boldsymbol{x}(t_f),t_f\right]+\int_t^{t+\Delta}L\left[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\right]dt+\int_{t+\Delta}^{t_f}L\left[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\right]dt\right\}$$

连续系统的最优性原理

$$J^*[\boldsymbol{x}(t),t]=\min_{u[t,t+\Delta]}\left\{\int_t^{t+\Delta}L\left[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\right]dt+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\min_{u[t+\Delta,t_f]}\left(\Phi\left[\boldsymbol{x}(t_f),t_f\right]+\int_{t+\Delta}^{t_f}L\left[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\right]dt\right)}_{\boxed{J^*[\boldsymbol{x}(t+\Delta),t+\Delta]}}\right\}$$

$$J^*[\boldsymbol{x}(t),t]=\min_{\substack{u(t)\\ t\in[t,t+\Delta]}}\left\{\int_t^{t+\Delta}L\big[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\big]dt+J^*[\boldsymbol{x}(t+\Delta),t+\Delta]\right\}$$

对比：离散系统动态规划递推方程

$$J^*[\boldsymbol{x}(k)]=\min_{\boldsymbol{u}(k)}\{L[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k]+J^*[\boldsymbol{x}(k+1)]\}$$

2）连续系统动态规划基本方程（HJB）

$$J^*[\boldsymbol{x}(t),t]=\min_{u(t)}\left\{\int_t^{t+\Delta}\mathrm{L}\left[\boldsymbol{x}(t),u(t),t\right]dt+J^*[\boldsymbol{x}(t+\Delta),t+\Delta]\right\}$$

$$t\in[t,t+\Delta]$$

假定$J^*[\boldsymbol{x}(t),t]$ 是存在的且是连续的，并且有连续的一阶、二阶偏导数，并且Δ很小，则有

$$\int_t^{t+\Delta}L(\boldsymbol{x},u,t)dt=L(\boldsymbol{x},u,t)\cdot\Delta+o(\Delta^2)$$

$$J^*\left[\boldsymbol{x}(t+\Delta),t+\Delta\right]\approx J^*\left[\boldsymbol{x}(t),t\right]+\left[\frac{\partial J^*\left[\boldsymbol{x}(t),t\right]}{\partial\boldsymbol{x}}\right]^T\dot{\boldsymbol{x}}(t)\Delta+\frac{\partial J^*\left[\boldsymbol{x}(t),t\right]}{\partial t}\Delta$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)\Delta\approx\boldsymbol{x}(t+\Delta)-\boldsymbol{x}(t)$$

$$\Rightarrow J^*\left(\mathbf{x}(t),t\right)=\min_{u(t)}\left\{L\left(\mathbf{x},u,t\right)\Delta+J^*\left(\mathbf{x}(t),t\right)+\left[\frac{\partial J^*\left(\mathbf{x}(t),t\right)}{\partial \mathbf{x}(t)}\right]^T\dot{x}(t)\Delta+\frac{\partial J^*\left(\mathbf{x}(t),t\right)}{\partial t}\Delta\right\}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial J^*\left(\mathbf{x}(t),t\right)}{\partial t}=\min_{u(t)}\left\{L\left(\mathbf{x},u,t\right)+\left[\frac{\partial J^*\left(\mathbf{x}(t),t\right)}{\partial \mathbf{x}}\right]^T\dot{\mathbf{x}}\right\}$$

注意到：$\dot{\mathbf{x}}(t)=f\left(\mathbf{x}(t),u(t),t\right)$

哈密顿（*H*）函数

$$\Rightarrow -\frac{\partial J^*\left(\mathbf{x}(t),t\right)}{\partial t}=\min_{u(t)}\left\{\mathrm{L}\left(\mathbf{x},u,t\right)+\left[\frac{\partial J^*\left(\mathbf{x}(t),t\right)}{\partial \mathbf{x}}\right]^T f\left(\mathbf{x},u,t\right)\right\}$$

连续系统动态规划基本方程---哈密顿-雅可比--贝尔曼（HJB）方程

3）用动态规划法解连续系统最优控制问题的步骤

①求满足 $\min_{u(t)} \boldsymbol{H}$ 的解$\boldsymbol{u}^*(t)$ （隐式解）

$$\text{其中，} \boldsymbol{H} = L(\boldsymbol{x},u,t) + \left[\frac{\partial J^*(\boldsymbol{x}(t),t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T f(\boldsymbol{x},u,t) \qquad (1)$$

若 $\boldsymbol{u}(t)$ 不受限制，则在引入哈密顿函数时，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial u} + \left[\frac{\partial J^*}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

如果$\boldsymbol{u}(t)$ 受限，即 $u(t) \in R_u$ ，在确定$\boldsymbol{u}^*(t)$ 时，只能用分析方法。

②将$\boldsymbol{u}^*(t)$代入HJB方程，解出 $J^*[\boldsymbol{x}(t),t]$

③将 $J^*[\boldsymbol{x}(t),t]$ 代回$\boldsymbol{u}^*(t)$ ，就得到最优控制$\boldsymbol{u}^*(t)$ 的显式解。

$$u^*(t) = u^*\left[\boldsymbol{x}(t), \frac{\partial J^*[\boldsymbol{x}(t),t]}{\partial \boldsymbol{x}}, t\right] \qquad (2)$$

④ 将最优控制代入系统状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}^*(t), t)$$

$$\boldsymbol{x}(t)\Big|_{t=t_0} = \boldsymbol{x}(t_0) \qquad (3)$$

可以求出最优轨线 $\boldsymbol{x}^*(t)$ 。

例3 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u$$

初始状态 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

控制u不受约束，性能指标为

$$J = \int_0^{\infty} (2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2)dt$$

求最优控制$u^*(t)$，使性能指标J为最小。

解： 构造H函数：

$$H=2x_1^2+\frac{1}{2}u^2+\begin{bmatrix}\frac{\partial J^*}{\partial x_1} & \frac{\partial J^*}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ u\end{bmatrix}$$ $\Leftarrow$ $H=L(\boldsymbol{x},u,t)+\left[\frac{\partial J^*(\boldsymbol{x}(t),t)}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T f(\boldsymbol{x},u,t)$

由于 $$-\frac{\partial J^*}{\partial t}=\min_{u(t)} H$$

得到HJB方程： $$-\frac{\partial J^*}{\partial t}=\min_{u(t)}\left\{2x_1^2+\frac{1}{2}u^2+\frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial J^*}{\partial x_2}u\right\}$$

① *求 u*隐式解* u不受约束→ $$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

$$\Rightarrow \quad u^*=-\frac{\partial J^*}{\partial x_2}$$

② *将u*代入HJB方程，得到J**

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial J^*}{\partial t}=\left\{2x_1^2+\frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x_2}\right)^2\right\}$$

J^* 不显含t，所以

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial J^*}{\partial t}=\left\{2x_1^2+\frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x_2}\right)^2\right\}=0$$

性能指标为二次型函数，设其解为：

$$J^*(x(t),t)=a_1x_1^2+2a_2x_1x_2+a_3x_2^2 \quad (*)$$

将（*）代入 $-\frac{\partial J^*}{\partial t}=0$ ，有 $2x_1^2+\frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x_2}\right)^2=0$

$$(1-a_2^2)x_1^2+(a_1-2a_2a_3)x_1x_2+(a_2-a_3^2)x_2^2=0$$

上式对所有t时刻x成立，故有（注：性能指标为正定）

$$a_1=2 \qquad a_2=1 \qquad a_3=1$$

$$J^*[x(t),t]=2x_1^2(t)+2x_1(t)x_2(t)+x_2^2(t)$$

*③ 将J*代回u*，得到u*显示解*

$$u^*(t)=-\frac{\partial J^*}{\partial x_2}=-2x_1-2x_2$$ *状态反馈控制*

④ 将最优控制u*代入状态方程，可求出最优状态轨线（略）

最优性能指标为：

$$J^*[x(0),0]=2x_1^2(0)+2x_1(0)x_2(0)+x_2^2(0)$$

由于初始状态 $x_1(0)=1, x_2(0)=0$

$$\Rightarrow \quad J^*[x(0),0]=2$$

顺序：u^*隐式解 $\rightarrow J^* \rightarrow u^*$显示解 $\rightarrow x^* \rightarrow J^*$

说明：本例是典型的无限时间状态调节器问题，也可以用本章后面第三节的方法进行求解，求得的u*和J*与此相同。

三、线性二次型最优控制问题

1. 二次型性能指标

2. 无限时间状态调节器（掌握）

3. 有限时间状态调节器（了解）

1、二次型性能指标

给定如下状态空间模型（线性时变）

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) & , \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

$y_r(t)$为理想输出，定义实际输出与理想输出之间的误差 $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{y}_r(t) - \boldsymbol{y}(t)$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为$\boldsymbol{n}$ 维状态向量；$\boldsymbol{u}$ 为$\boldsymbol{r}$ 维控制向量，且$\boldsymbol{u}$ 不受限制。寻找一个最优控制 $\boldsymbol{u}^*$ ，使

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\boldsymbol{e}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)\right]d(t)$$

为极小。

其中，F为 $n \times n$ 对称半正定常数阵；$\boldsymbol{Q}(t)$为 $n \times n$ 对称半正定时变阵，$\boldsymbol{R}(t)$ 为 $n \times n$ 对称正定时变阵。

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{T}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\boldsymbol{e}^{T}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{u}^{T}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)\right]d(t)$$

对稳态误差要求

对动态误差要求

对控制能量的要求

线性二次型问题的三种重要情形：

1) 输出跟踪器

$$\boldsymbol{y}_r(t) \neq 0, \boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{y}_r(t) - \boldsymbol{y}(t)$$

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f) F e^T(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[e^T(t) Q e(t) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt$$

2) 输出调节器 $\boldsymbol{y}_r(t) = 0, \boldsymbol{e}(t) = -\boldsymbol{y}(t)$

$$J = \frac{1}{2} y^T(t_f) F y^T(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[y^T(t) Q y(t) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt$$

3) 状态调节器

$$\boldsymbol{y}_r(t) = 0, \boldsymbol{C}(t) = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{e}(t) = -\boldsymbol{y}(t) = -\boldsymbol{x}(t)$$

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x^T(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt$$

- 第一项：强调了终端时刻系统状态与平衡状态的偏差尽可能小；
- 第二项：希望系统的整个运动轨迹与平衡状态的偏差尽可能小；
- 第三项：希望控制能量尽可能小；
- 宗旨：用不大的控制保持较小的误差！

2. 无限时间状态调节器（掌握）

Q半正定，R正定

前提：线性定常系统、对控制无约束，终端状态自由，$t_f=\infty$

对于完全能控线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{x}(t)\Big|_{t=t_0} = \boldsymbol{x}(t_0)$$

J 中不含末值项

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left[x(t)^{\mathrm{T}}Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right]\mathrm{d}t$$

最优控制存在且唯一 $u^* = -R^{-1}B^TPx$

常数阵 P 满足如下黎卡提矩阵代数方程

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

将最优控制式代入状态演化方程式，得

$$\dot{x} = (A - \underbrace{BR^{-1}B^TP}_{K})x$$

由全状态反馈构成的最优控制系统是渐近稳定的。此时，令李氏函数为：

$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，正定。

$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}$，负定。

从而可获得最优轨线。最优性能指标 $J^* = \frac{1}{2}x^T(0)\bar{P}x(0)$

例： 考虑下列可控系统：

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u$$

性能指标：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2\right]dt \qquad \left(a - b^2 > 0\right)$$

求最优控制$u(t)$使性能指标J为最小。

解 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}, \; R = 1$

由于 $a - b^2 > 0$ ，则Q为正定阵。

最优解：$u^*(t) = -R^{-1}B^TPx = -1*(0 \quad 1)Px$

最优解：

$$u^*(t) = -1*(0 \quad 1)Px$$

其中，P 满足矩阵黎卡提方程：

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

令： $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_{12} = 1 \\ p_{22} = \sqrt{a+2} \\ p_{11} = \sqrt{a+2} - b \end{cases}$

最优解：

$$u^*(t) = -1*(0 \quad 1)Px = (-p_{12} \quad -p_{22})x$$
$$= (-1 \quad -\sqrt{a+2})x$$

3. 有限时间状态调节器(t_f 有限)---了解

定理1 设线性时变系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\ ,\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

其中，$\boldsymbol{x}(t)$ 表示 n 维状态向量; $\boldsymbol{u}(t)$ 是 r 维控制向量，且不受约束;

$\boldsymbol{A}(t)$ 、$\boldsymbol{B}(t)$ 分别为 $n\times n$, $n\times r$ 维的时变矩阵，其各元在 $[t_0,t_f]$

上连续且有界，$t_f<\infty$ 。**寻找一个最优控制 $\boldsymbol{u}^*$ ，使**

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}\right]\mathrm{d}t$$

为极小。

极小化性能指标式的最优控制$\boldsymbol{u}^*(t)$

$$\boldsymbol{u}^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

系统的最优性能指标为 $J^*=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$

Note：线性时变系统、对控制没有约束，终端状态自由，t_f固定

其中，$P(t)$ 为$n\times n$ 维对称非负定矩阵。满足下列黎卡提（Riccati）矩阵微分方程

$$-\dot{P}(t)=P(t)A(t)+A^{T}(t)P(t)-P(t)B(t)R^{-1}B^{T}(t)P(t)+Q(t)$$

并满足终端边界条件 $P(t_f)=F$

最优控制： $u^{*}(t)=-R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)x(t)=K(t)x(t)$

最优解具有状态反馈形式！其中P阵对称、时变！

通过求解如下线性向量微分方程，可得到最优状态曲线

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\&=[A(t)-B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)P(t)]x(t)\quad,\quad x(t_0)=x_0\end{aligned}$$

本章小结

1. 最优控制问题的数学描述

2. 基于动态规划的最优控制

   动态规划理论基础：最优性原理

   动态规划关键：递推方程

   哈密顿-贝尔曼方程

3. 线性二次型最优控制

   二次型性能指标

   黎卡提（Riccati）矩阵微分方程

   黎卡提（Riccati）矩阵代数方程