参数估计

参数估计

参数：反映总体某方面特征的量

比如：合格率，均值，方差，中位数…

参数估计的形式：点估计和
区间估计

例如：天气预报

明天的最高温度：12°C. ——点估计

明天的最高温度：11°C —13°C. ——区间估计

参数估计

设总体X有未知参数$\theta, X_1, \cdots, X_n$是总体X的简单随机样本.

点估计：构造合适的统计量$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$用来估计未知参数$\theta$，$\hat{\theta}$称为参数$\theta$的点估计量.

当给定样本观察值$x_1, \cdots, x_n$时，$\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$称为参数$\theta$的点估计值。

- 常用的点估计方法：

  矩估计法、极大似然估计法.

参数估计

- 例6.1.1 某纺织厂细纱机在某一时间内的断头次数X服从参数为λ的Poisson分布，其中λ未知，如何确定参数λ的值？

矩估计

对随机变量$\boldsymbol{X}$和非负整数$\boldsymbol{k}$，若$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^{k}\right)$存在，则称$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^{k}\right)$为$\boldsymbol{X}$的$\boldsymbol{k}$阶原点矩，简称$\boldsymbol{k}$阶矩；若$\boldsymbol{E}\left[\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})\right)^{k}\right]$存在，则称$\boldsymbol{E}\left[\left(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})\right)^{k}\right]$为$\boldsymbol{X}$的$\boldsymbol{k}$阶中心矩.

期望是一阶矩，方差是2阶中心距。

矩估计

（一）矩估计法

统计思想：以样本矩估计总体矩，以样本矩的函数估计总体矩的函数.

理论根据：辛钦大数定律和依概率收敛的性质.

假设$\mu_j = E(X^j)$存在，$j = 1, \dots, k$.

则
$$\hat{\mu}_j = A_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j,\ j = 1, \dots, k, \xrightarrow{P} \mu_j,\ j = 1, \cdots, \mu_k$$

$$h(\widehat{\mu_1, \cdots, \mu_k}) = h(A_1, \cdots, A_k)$$

矩估计

设总体X的分布函数为$F(x;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)$，其$\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k$为未知参数。

设$X_1, X_2, \dots, X_n$为来自总体X的样本，若$E(X^m)=\mu_m(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_k)$存在$(m=1,\dots,k)$，$m$阶样本矩为$A_m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^m$ $(m=1,\dots,k)$，则

矩估计

$$令\begin{cases}\mu_1(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\dots,\hat\theta_k)=A_1\\ \dots\\ \mu_k(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\dots,\hat\theta_k)=A_k\end{cases}$$

这是包含k个未知参数$\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_k$的方程组，从中解出方程组的解 $\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_k$。

用$\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_k$分别作为$\theta_1,\cdots,\theta_k$的估计量，这一方法称为矩估计法。

这种估计量称为矩估计量；矩估计量的观察值称为矩估计值。

矩估计：一个未知参数

1）先求出E(X)=$\mu_1(\theta)$

2）解出 θ=g(E(X))

3） $\hat{\theta} = g(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$ 为θ的矩估计量。

矩估计：两个未知参数

1）计算 $\mathrm{E}X, \mathrm{E}X^2$

$$\mathrm{E}X = \mu_1(\theta_1, \theta_2)$$

$$\mathrm{E}X^2 = \mu_2(\theta_1, \theta_2)$$

2）解出 θ_1, θ_2，用$\mathrm{E}X, \mathrm{E}X^2$ 表示

$$\begin{cases} \theta_1 = f_1(\mathrm{E}X, \mathrm{E}X^2) \\ \theta_2 = f_2(\mathrm{E}X, \mathrm{E}X^2) \end{cases}$$

3）用$\bar{X}$代替 $\mathrm{E}X$，用 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 代替 $\mathrm{E}X^2$，有

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = f_1(\bar{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) \\ \hat{\theta}_2 = f_2(\bar{X}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2) \end{cases}$$

即为 θ_1, θ_2 的矩估计量。

设某城市一天中发生火警的次数X服从参数为λ的泊松分布，λ未知，有以下样本值；试估计参数λ(用矩估计法）。

火警次数k	0	1	2	3	4	5	6	
有k次火警的天数n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\sum = 250$

解： $\mu_1 = EX = \lambda \quad A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

所以，矩估计量：$\hat{\lambda} = \bar{X}.$

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{250}(0\times 75 + 1\times 90 + \cdots + 6\times 1) = 1.22$$

设总体$X\sim U[a,b]$,a,b未知；$X_1,\dots,X_n$是X的样本，
求：a,b的矩估计量

解：$\mu_1=EX=\dfrac{a+b}{2}$,

$$\mu_2=EX^2=DX+(EX)^2=\frac{(b-a)^2}{12}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

令 $\dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$ (1)

$$\frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12}+\left(\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \qquad (2)$$

(1) 代入 (2), 得:

$$\frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2=\mathrm{B}_2$$

$$\therefore \quad \hat{b}-\hat{a}=2\sqrt{3\,\mathrm{B}_2}$$

$$\hat{a}+\hat{b}=2\bar{X}$$

解得: $\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{3\,\mathrm{B}_2}$

$$\hat{b}=\bar{X}+\sqrt{3\,\mathrm{B}_2}$$

设总体X的均值μ，方差σ^2存在，μ,σ^2 为未知参数，设 $X_1,\cdots,X_n$是X的样本；

求：μ, σ^2的矩估计量。

解：$\mu_1 = EX = \mu,$

$$\mu_2 = EX^2 = DX + (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

令 $\hat{\mu} = \bar{X},\qquad \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$

所以 $\hat{\mu} = \bar{X},\qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = B_2$

结　论

无论总体X服从何种分布，总体均值EX= μ, 总体方差DX=σ^2作为未知参数，其矩估计量一定是样本均值和样本二阶中心矩，即：

$$\hat{\mu}=\bar{X},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

极大似然估计

- 假设袋中有若干只白色和黑色的小球，事先并不知道白球多还是黑球多，只知道两种球个数之比是1：9，若连续抽取两次（有放回），每次一只，结果发现两只全是白球，试判断袋中白球多还是黑球多？

解:

设p为白球所占的比例，于是连续抽取两次，白球个数为X，则

$$P(X=x)=C_2^x p^x(1-p)^{2-x}$$

$$P(X=2)=0.1*0.1=0.01\ \ if \quad p=0.1$$
$$P(X=2)=0.9*0.9=0.81\ \ if \quad p=0.9$$

极大似然估计

原则：

以样本$X_1, X_2, \ldots X_n$的观测值$x_1, \ldots x_n$来估计参数$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$，若选取$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$使观测值出现的概率最大，把$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k$作为参数 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$的估计量。

离散情况

(1). 若总体X为离散型，其分布律

$$P\{X=x\}=p(x;\theta),$$

的形式为已知，θ为待估参数。

样本 $X_1,\dots,X_n$取$x_1,\dots,x_n$的概率， 即事件

$\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\}$ 发生的概率为：

$$P\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\}=P(X_1=x_1)\dots P(X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

记：$L(\theta)=L(x_1,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$

$L(\theta)$称为样本的似然函数。

离散情况

由极大似然估计法：选择使$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$达到最大的参数$\hat{\theta}$，作为θ的估计值，即取$\hat{\theta}$使得：

$$L(x_1,\ldots,x_n;\hat{\theta}) = \max_{\theta} L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$$

$\hat{\theta}$与$x_1,\cdots,x_n$有关，记为$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$；

称其为参数θ的极大似然估计值。

$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$称为参数$\theta$的极大似然估计量。

连续情况

(2).若总体X为连续型，其概率密度$f(x;\theta)$, 形式已知，θ为待估参数;

则$X_1,\cdots,X_n$的联合密度： $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

设 $x_1,\cdots,x_n$是$X_1,\cdots,X_n$的样本观测值，则随机点$(X_1,\cdots,X_n)$ 落在 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的邻域（边长分别为$dx_1,\cdots,dx_n$的n维立方体）内的概率近似为：

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\, dx_i$$

取$\theta=\hat{\theta}$，使上述概率达到最大值。

连续情况

但$\prod_i dx_i$不随θ而变，故只需考虑：

$$L(\theta)=L(x_1,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

的最大值，$L(\theta)$称为样本的似然函数。

若 $$L(x_1,\ldots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta} L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$$

则称$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$为$\theta$的极大似然估计值。

称$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的极大似然估计量。

单参数情况

一般，$L(\theta)$可导，从而

令：$$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=0,\ \text{求得}\ \theta.$$

由于 $L(\theta)$为乘积形式，求导后复杂．而$L(\theta)$与$\ln L(\theta)$极值点相同，因此θ的极大似然估计也可从下述方程解得：

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0.$$

多参数情况

若总体的分布中包含多个参数$\theta_1,\cdots,\theta_k$,

则似然函数为$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)$

可令 $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1}=0, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_k}=0 \end{cases}$. 或 $\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_1}=0, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_k}=0 \end{cases}$.

（似然方程组）　　（对数似然方程组）

解k个方程组求得$\theta_1,\cdots,\theta_k$的极大似然估计值。

设$X\sim B(1,p)$; $X_1,\ldots,X_n$是来自X的样本

试求参数p的极大似然估计量。

解：设$x_1,\cdots,x_n$是一个样本值。X的分布律为：

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},\quad x=0,1;$$

故似然函数为 $$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i},$$

而 $$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p).$$

令 $$\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0.$$

解得p的极大似然估计值

$$\hat{\mathrm{p}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

即p的极大似然估计量为：

$$\hat{\mathrm{p}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

与矩估计量相同。

设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$; (μ,σ^2)为未知参数，$X_1,\dots,X_n$是X的样本

求：μ,σ^2的极大似然估计量。

解：X的概率密度为：

$$p(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

似然函数为：

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\}$$

$$=(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases}$ 即：$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0 \end{cases}$

解得：$\hat{\mu} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = B_2$$

某元件寿命X的密度

$$p(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$$

θ 是未知参数，$x_1,\cdots\ x_n$ 是样本观察值。求 θ 的极大似然估计量。

解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i\geq\theta, i=1,\cdots n\\ 0, & 其它\end{cases}$

当一切 $x_i\geq\theta$ 时有

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta).$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2n>0,\quad 故\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0无解.$$

从似然函数本身考虑，

$L(\theta)$ 单调递增，θ 越大，$L(\theta)$ 越大

又因 θ 要满足 $\theta\le x_i, i=1,\cdots n.$

即取 $\theta=\min\{x_i\}$ 时 $L(\theta)$ 最大，

从而得极大似然估计量：

$$\hat{\theta}=\min\{X_i\}.$$

极大似然估计的不变性

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计，$u=u(\theta)$ 是 θ 的函数，且有单值反函数：

则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的极大似然估计.

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$是$\sigma^2$的极大似然估计

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$有单值反函数，

故 $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$

是σ的极大似然估计.

常用标准

- 无偏性（Unbiasedness）
- 有效性（Efficiency）
- 相合性（Consistency）

无偏性

定义：若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,满足

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,$$

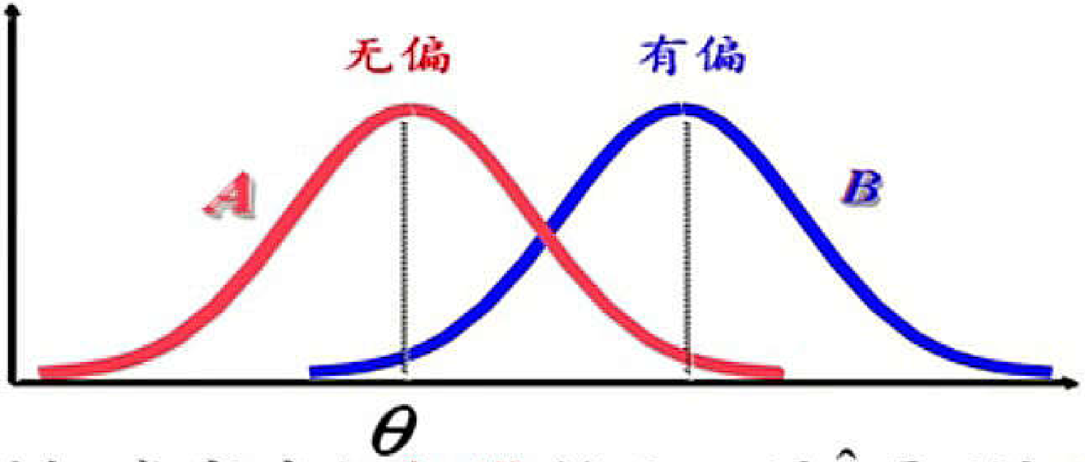
则称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计量.

若$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta$,那么$E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差,

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量.

无偏性

- 无偏性 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$



若$\hat{\theta}_1$的概率密度如红线所示，则$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计.

若$\hat{\theta}_2$的概率密度如蓝线所示，则$\hat{\theta}_2$是θ的有偏估计.

我们不可能要求每一次由样本得到的估计值与真值都相等，但可以要求这些估计值的平均值与真值相等.

设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)\ (k \geq 1)$存在,又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的样本,则不论总体服从何种分布, k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是k阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

证 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 X 同分布,

故有 $E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

即 $$E(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \mu_k.$$

总结：

样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 $\boldsymbol{\mu} = E(X)$ 的无偏估计量.

样本二阶矩 $A_2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 是总体二阶矩 $\mu_2 = E(X^2)$ 的无偏估计量.

例： 设总体X服从均匀分布$U(0,\theta)$, θ是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$.

(1)求θ的矩估计,判断是否无偏;

(2)求θ的极大似然估计,判断是否无偏.

(1) 矩估计：

由$\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} x dx = \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \theta = 2\mu_1 \Rightarrow$ θ的矩估计 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$

因为$E(\hat{\theta}) = E\left(2\overline{X}\right) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = \theta,$

所以$\hat{\theta} = 2\overline{X}$是$\theta$的无偏估计.

(2) 极大似然估计：

X的概率密度

$$f_X(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$\Rightarrow L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\le x_1,\cdots,x_n\le\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$L(\theta)$关于$\theta>0$递减，

而θ的范围为: $\theta\ge x_{(n)}=\max\{x_1,\ldots,x_n\}$,

所以，θ的极大似然估计量

$$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$

根据式3.4.7，$X_{(n)}$的分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(x)=\left[F(x)\right]^{n}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^{n}}{\theta^{n}}, & 0\le x\le\theta,\\ 1, & x>\theta.\end{cases}$$

求导数得密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^{n}}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此有:

$$E\left(\hat{\theta}_L\right) = E\left(X_{(n)}\right) = \int_0^\theta \frac{x \cdot nx^{n-1}}{\theta^n} dx$$

$$= \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta$$

$$E\left[\frac{n+1}{n}\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right]$$
$$= \frac{n+1}{n} E(\hat{\theta}_L)$$
$$= \theta$$

所以$\frac{n+1}{n}\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是$\theta$的无偏估计量.

- 设总体X的均值$E(X)=\mu$,方差$D(X)=\sigma^2$,$(X_1,\dots,X_n)$为来自总体的简单随机样本，试证明

1. $\bar{X}^2$是μ^2的渐进无偏估计量
2. 样本二阶中心矩B_2是σ^2的渐进无偏估计量

1. 证： $E(\bar{X}) = E(X) = \mu$， $D(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$$E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

当$n \to \infty$时， $\dfrac{\sigma^2}{n} \to 0$

故$\bar{X}^2$是μ^2的渐进无偏估计量

2. 证：

$$E(X_i) = E(X) = \mu，D(X_i) = D(X) = \sigma^2$$

$$E\left(X_i^2\right) = D(X_i) + (EX_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

因而 $E\left(B_2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\bar{X}^2)$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[D(X_i)+(EX_i)^2]-[D(\bar{X})+(E\bar{X})^2]$$

$$=(\sigma^2+\mu^2)-(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

当$n\rightarrow\infty$时，$\frac{n-1}{n}\sigma^2\rightarrow\sigma^2$

故B_2是σ^2的渐进无偏估计量

$$E(B_2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

若以 $\dfrac{n}{n-1}$ 乘 B_2, 所得到的估计量就是无偏的.

(这种方法称为**无偏化**).

$$E\left(\frac{n}{n-1}B_2\right)=\frac{n}{n-1}E(B_2)=\sigma^2.$$

因为 $\dfrac{n}{n-1}B_2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=S^2$,

即 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

➢ 纠偏方法

如果$E(\hat{\theta})=a\theta+b,\theta\in\Theta$，其中$a,b$是常数，且$a\neq 0$，

则$\frac{1}{a}(\hat{\theta}-b)$是$\theta$的无偏估计.

$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，

不一定有$g(\hat{\theta})$是$g(\theta)$的无偏估计量

特别：

即S^2是σ^2的无偏估计,

但，S并不是σ的无偏估计

有效性

- 一个参数可能存在多个无偏估计

若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，

可以比较 $D(\hat{\theta}_1)$ 和 $D(\hat{\theta}_2)$.

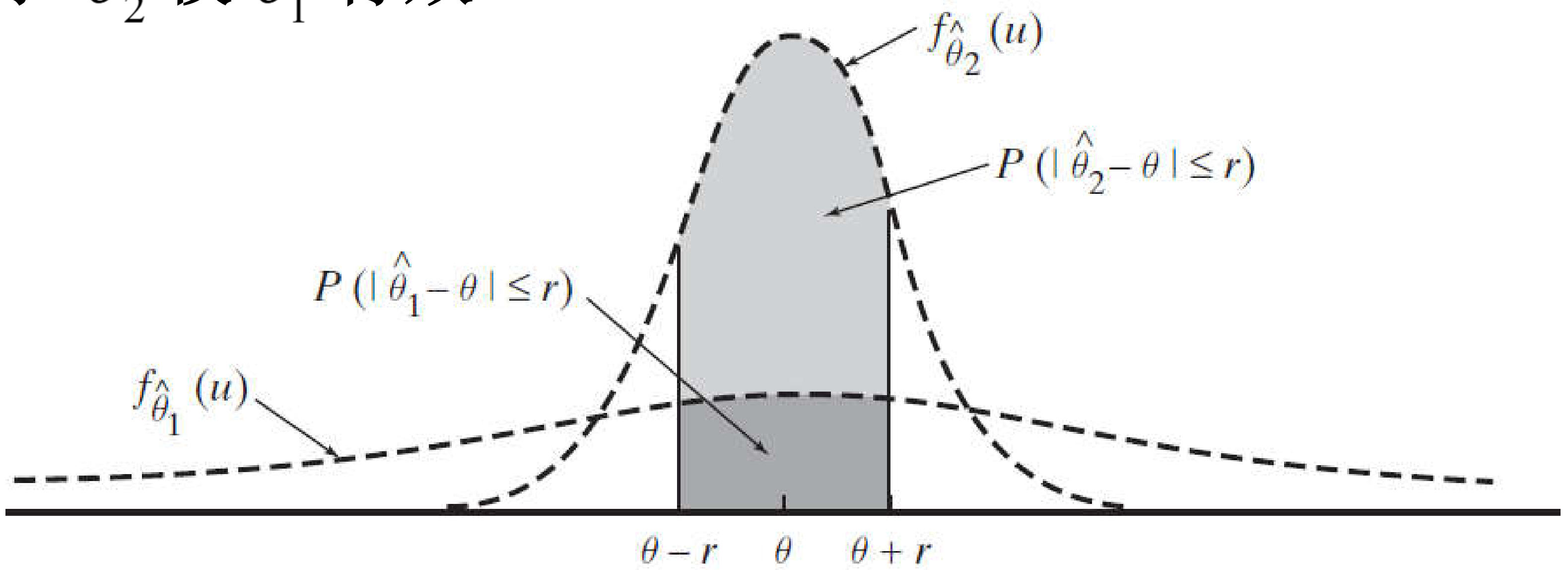
以方差小为好，这就引进了有效性这一概念 .

有效性

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\cdots,X_n)$

都是参数θ的无偏估计量，若对任意n，$D(\hat{\theta}_2)\le D(\hat{\theta}_1)$

则称 $\hat{\theta}_2$ 较 $\hat{\theta}_1$ 有效.



$$P(\theta-r\le\hat{\theta}_2\le\theta+r)>P(\theta-r\le\hat{\theta}_1\le\theta+r)$$

有效性

例： 设总体$X \sim U[0,\theta]$, $X_1,\cdots,X_n$为一样本.

已知θ的两个无偏估计为

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}, \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}.$$

试判别$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$哪个更有效($n \geq 2$时)?

有效性

解： $D\left(\hat{\theta}_1\right)=D\left(2\overline{X}\right)=4\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\theta^2}{12}=\dfrac{\theta^2}{3n}$

$X_{(n)}$**的密度函数为**

$$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$\Rightarrow E\left(X_{(n)}\right)=\int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta,$$

$$E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

有效性

于是$D\left(\hat{\theta}_2\right)=\dfrac{(n+1)^2}{n^2}\left\{E\left(X_{(n)}^2\right)-\left[E\left(X_{(n)}\right)\right]^2\right\}=\dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$

当$n\geq 2$时，

$$\therefore D\left(\hat{\theta}_1\right)=\frac{\theta^2}{3n}>\frac{\theta^2}{n(n+2)}=D\left(\hat{\theta}_2\right)$$

$\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$ 更有效$(n\geq 2$时$)$

例：设总体 X，且 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 X 的样本。

(1) 设常数 c_i 不全相等，$i=1,2,\cdots,n$. $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1.$

证明 $\hat{\mu}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 μ 的无偏估计量

(2) 证明 $\hat{\mu} = \overline{X}$ 比 $\hat{\mu}_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$ 更有效

证 (1) $E(\hat{\mu}_1) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i E(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mu = \mu$

(2) $$D(\hat{\mu}_1)=\sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

而 $$1=\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} c_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} c_i c_j$$

$$\le\sum_{i=1}^{n} c_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(c_i^2+c_j^2)=n\sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$\sum_{i=1}^{n} c_i^2\ge\frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $D(\bar{X})=\frac{1}{n}\sigma^2\le\sum_{i=1}^{n} c_i^2\sigma^2=D(\hat{\mu}_1)$

结论 算术均值比加权均值更有效.

相合性

- 无偏性与有效性都研究固定样本量的情况
- 相合性关注样本量$n \to \infty$的情况

定义 设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是总体参数$\theta$的估计量. 若当$n \to \infty$时,

$\hat{\theta}_n$依概率收敛于θ, 即 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是总体参数θ的一致(相合)估计量.

记$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta(n \to \infty)$

均方相合性

定义 如果，当$n \to \infty$时，$\hat{\theta}$均方收敛于θ，即

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}-\theta)^2 = 0$$

则称$\hat{\theta}$为θ的均方相合估计量，

$$\text{记} \quad \hat{\theta} \xrightarrow{L_2} \theta(n \to \infty)$$

- 证明$\hat{\theta} \xrightarrow{L_2} \theta$必然有$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$

例： 设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是一样本，

证明$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$和$\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$都是$\theta$的相合估计.

证明：$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} \xrightarrow{P} 2E(X) = \theta$,

$\Rightarrow \hat{\theta}_1$是$\theta$的相合估计.

$$E\left(\hat{\theta}_2\right)=\theta, \quad D\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

由切比雪夫不等式，$\forall \varepsilon>0$，当$n\to\infty$时，

$$0\le P\left\{\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|<\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{D\left(\hat{\theta}_2\right)}{\varepsilon^2}=1-\frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}\to 1$$

所以$\hat{\theta}_2$也是θ的相合估计.

- 设总体X的2m阶矩存在，$(X_1, \dots, X_n)$为来自总体的简单随机样本，试证明样本k阶原点矩A_k作为总体k阶原点矩$\mu_k (1 \le k \le m)$的估计量，既是相合估计量，又是均方相合估计量

- 如果$\hat{\theta}$是θ的相合估计，常数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,则$a_n\hat{\theta} + b_n$是$a\theta + b$的相合估计。

- 如果$\hat{\theta}$是θ的相合估计，函数$g(t)$在θ处连续，则$g(\hat{\theta})$是$g(\theta)$的相合估计，并且这结果对g是多元函数时也成立。

- 证明如果总体X的四阶矩存在，则样本方差S^2和样本二阶中心矩B_2都是方差σ^2的相合估计， S和$\sqrt{B_2}$都是总体标准差σ的相合估计

- 经验分布函数$F_n(x) = 1/n \sum_{i=1}^{n} I(X_i \leq x)$是总体分布函数的$F(x)$的

1. 无偏估计量
2. 相合估计量
3. 均方相合估计量

区间估计

根据具体样本观测值，点估计提供一个明确的数值.

但这种判断的**把握有多大**，点估计本身并没有告诉人们. 为弥补这种不足，提出区间估计的概念.

区间估计

- 定义 $X_1, \dots, X_n$为来自总体X的一个样本，θ是总体的未知参数，对于给定值$\alpha(0 < \alpha < 1)$,若统计量$\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)$满足

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

则称随机区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$为$\theta$的置信度为1-$\alpha$的双侧置信区间，$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$分别称为置信下限和置信上限，1-$\alpha$为置信度。

区间与置信水平

说明：参数θ虽然未知，但是确定的值.

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$是统计量，随机的，依赖于样本.

置信区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$是随机的，依赖于样本. 样本不同，算出的区间也不同.

对于有些样本观察值，区间覆盖θ，但对于另一些样本观察值，区间则不能覆盖θ.

区间与置信水平

例： 设总体$X \sim N(\mu,4)$，μ未知，$X_1,\ldots,X_4$是一样本.

则$\overline{X} \sim N(\mu,1)$.

$$P(\overline{X}-2<\mu<\overline{X}+2)=P(|\overline{X}-\mu|<2)$$

$$=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$\Rightarrow (\overline{X}-2,\overline{X}+2)$是$\mu$的置信水平为0.95的置信区间.

区间与置信水平

若$\mu = 0.5$,当$\bar{x}$分别为3, 2, 1时，对应区间为：

$$(1,5), \quad (0,4), \quad (-1,3)$$

对于一个具体的区间而言，或者包含真值或者不包含真值，无概率可言。

$(\bar{X}-2, \bar{X}+2)$是μ的置信水平为0.95的置信区间中“置信水平为0.95”的意义是什么？.

区间与置信水平

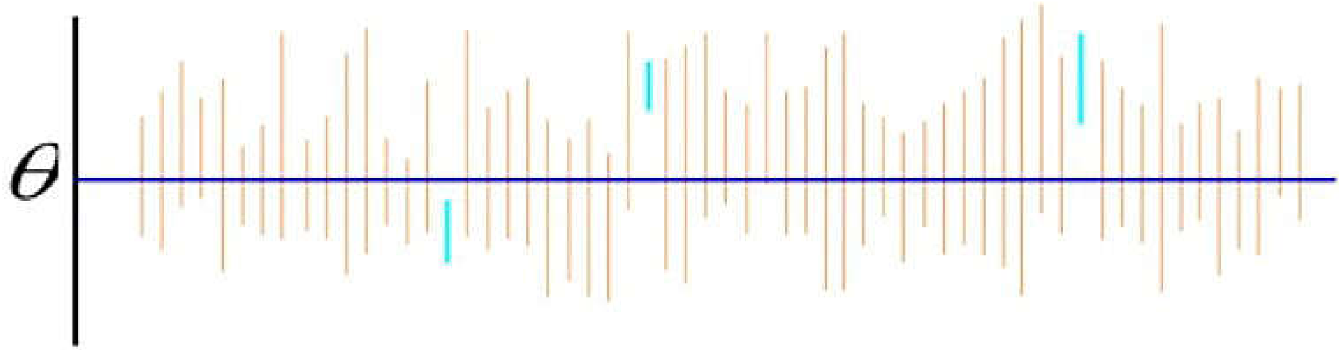
一般地，$P\left\{\hat{\theta}_1(X_1,\ldots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,\ldots,X_n)\right\}=1-\alpha$,

则置信区间$\left(\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2\right)$的含义为：

反复抽样多次(各次样本容量都为n).每个样本值确定一个区间$\left(\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2\right)$,每个这样的区间或包含$\theta$的真值,或不包含$\theta$的真值.

这些区间中，包含θ真值的比例约为$1-\alpha$.

区间与置信水平



如反复抽样10000次，当$\alpha=0.05$,即置信水平为95%时，10000个区间中包含θ真值的约为9500个；当$\alpha=0.01$,即置信水平为99%时，10000个区间中包含θ的真值的约为9900个.

区间与置信水平

定义：称置信区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$的平均长度$E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$为区间的精确度，精确度的一半为误差限.

注意：在给定的样本容量下，置信水平和精确度是相互制约的.

已得到

$(\bar{X}-2, \bar{X}+2)$是μ的置信水平为0.9544的置信区间

同理可得

$(\bar{X}-1, \bar{X}+1)$是μ的置信水平为0.6826的置信区间

置信水平高，精确度低
精确度高，置信水平低

区间与置信水平

相同的置信水平也可以得到不同的区间估计.在这些区间估计中如何选择呢?

已得到

$(\bar{X}-2,\bar{X}+2)$是μ的置信水平为0.9544的置信区间

类似可计算得:

$(\bar{X}-1.89,\bar{X}+2.14)$是$\mu$的置信水平为0.9544的置信区间.

Neyman原则:在置信水平达到$1-\alpha$的置信区间中,选精确度尽可能高的置信区间.

区间估计

- 构造置信区间的一般步骤：
  1. 由样本$X_1, \dots, X_n$，寻求一个样本与θ的函数$Z(X_1, \dots, X_n; \theta)$,它包含$\theta$，但$Z$的分布完全已知，这样的$Z$称为枢轴量
  2. 对于给定的置信度1-α，确定两个常数啊a,b,使得$P\{a < Z(X_1, \dots, X_n; \theta) < b\} = 1 - \alpha$
  3. 将不等式$a < Z(X_1, \dots, X_n; \theta) < b$改写为$\widehat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) < \theta < \widehat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n)$的形式，则随机区间$(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$就是$\theta$的一个置信度为1-$\alpha$的双侧置信区间
  4. 根据一次具体抽样所得的样本值$x_1, \dots, x_n$就可计算得到一个具体的置信区间

区间估计

- 在求解置信区间的步骤中，关键是选择合适的$Z(X_1,\dots,X_n;\theta)$,并确定他的分布.
- 注意：选取的Z只能含有未知参数θ，而不能含有其他的未知参数， Z的分布还必须是可求的，且它的分布不依赖于任何未知参数.
- 在许多实际问题中，这是较难的，由于正态总体比较容易解决，可考虑样本容量较大时的极限分布，求其大样本置信区间.

单侧区间估计

- 定义 $X_1, \ldots, X_n$为来自总体X的一个样本，θ是总体的未知参数，对于给定值$\alpha(0 < \alpha < 1)$，

  若统计量$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, \ldots, X_n) < \theta\} = 1 - \alpha$$

则称$(\underline{\theta}, +\infty)$为$\theta$的置信度为1-$\alpha$的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为单侧置信下限(界)

若统计量$\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$满足

$$P\{\theta < \bar{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

则称$(-\infty, \bar{\theta})$为θ的置信度为1-α的单侧置信区间，$\bar{\theta}$称为单侧置信上限(界)

正态总体均值的置信区间

1. **假定条件(σ^2 已知)**
   - **总体服从正态分布,且总体方差(σ^2)已知**
   - **如果不是正态分布，可以由正态分布来近似 ($n \geq 30$)**

2. 使用正态分布统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

3. 总体均值 μ 在**1-**α置信水平下的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mathrm{U}_{\alpha/2}\,,\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mathrm{U}_{\alpha/2}\right)$$

正态总体均值的置信区间

【例】从过去10例买了汽车擦碰险并发生修车理赔的案例中，估计出平均理赔费用为540。假定理赔费服从正态分布，且总体标准差σ =299，试建立该理赔费总体均值的置信区间，给定置信水平为0.95。

解： 已知 $X\sim N(\mu，299^2)$， $\bar{x}=540$，$n=10$，$1-\alpha=0.95$，$U_{\alpha/2}=1.96$

总体均值μ的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{U}_{\alpha/2}\ ,\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{U}_{\alpha/2}\right)$$

$$=\left(540-1.96\frac{299}{\sqrt{10}},540+1.96\frac{299}{\sqrt{10}}\right)$$

$$=(354.68,725.32)$$

我们可以95％的概率保证理赔的总体均值在354.68～725.32之间

正态总体均值的置信区间

【例】某种零件长度服从正态分布，从该批产品中随机抽取９件，测得其平均长度为21.4 mm。已知总体标准差 σ =0.15mm，试建立该种零件总体平均长度的置信区间，给定置信水平为0.95。

解：已知 $X \sim N(\mu, 0.15^2)$，$\bar{x}=2.14$，
$n=9$, $1-\alpha = 0.95$，$U_{\alpha/2}=1.96$
总体均值 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2}, \ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2}\right)$$
$$=\left(21.4-1.96\frac{0.15}{\sqrt{9}}, 21.4+1.96\frac{0.15}{\sqrt{9}}\right)$$
$$=(21.302, 21.498)$$

我们可以95％的概率保证该种零件的平均长度在21.302～21.498 mm之间

非正态总体

【例】某大学从该校学生中随机抽取100人，调查到他们平均每天参加体育锻炼的时间为26分钟。试以95%的置信水平估计该大学全体学生平均每天参加体育锻炼的时间（已知总体方差为36）。

解：已知 $\bar{x}=26$, $\sigma=6$，$n=100$, $1-\alpha=0.95$，$U_{\alpha/2}=1.96$

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2}\ ,\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\alpha/2}\right)$$

$$=\left(26-1.96\frac{6}{\sqrt{100}},26+1.96\frac{6}{\sqrt{100}}\right)$$

$$=(24.824,27.176)$$

我们可以95%的概率保证平均每天参加锻炼的时间在**24.824～27.176** 分钟之间

总体均值的置信区间

1. **假定条件(σ^2 未知)**
   - **总体方差（σ^2）未知**
   - **总体必须服从正态分布**
2. **使用 *t* 分布统计量**

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t\,(n-1)$$

3. 总体均值 μ 在**1-**α置信水平下的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}\right)$$

σ^2 未知、大样本实例

【例】在学术期刊发表论文时需要经过**3**至**5**名审稿人的严格审查。一项关于审稿人如何进行审稿的调查研究中，样本由管理类学术杂志的**64**位审稿人组成，他们被问及对一个典型的审稿完整过程来说，审查一篇论文需花费多少时间。调查得出，其样本均值 $\bar{x}$ = **5.4**小时，标准差 ***s*** = **3.6**小时。 建立总体均值μ的**99%**的置信区间，并进行解释。

解： $\bar{x}$ =5.4, s=3.6， n=64, 1-α = 0.99，$t_{\alpha/2}$=2.66。 $U_{\alpha/2}$=2.58,

利用**t**统计量进行区间估计

$$\left(\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2},\ \bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}\right)$$

$$=\left(5.4-2.66\frac{3.6}{\sqrt{64}},5.4+2.66\frac{3.6}{\sqrt{64}}\right)=(4.2,6.6)$$

正态总体方差的区间估计

1. 假设总体服从正态分布(**μ**未知)
2. 使用 χ^2 统计量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

3. 总体方差在1-α置信水平下的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\ ,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

正态总体方差的区间估计

- 【例】为了知道产品质量的稳定性，对某种金属的10个样品组成的一个随机样本作抗拉强度试验。假设抗拉强度服从正态分布，从实验数据算出的样本方差为**4**。试求σ^2的95%的置信区间。

正态总体方差的区间估计

解: 已知$n=10$，$s^2=4$，$1-\alpha=95\%$

σ^2置信度为95%的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

$$= \left(\frac{(10-1)4}{19.0228}, \frac{(10-1)4}{2.7004}\right)$$

$$= (1.8925, 13.3314)$$

两正态总体均值差的区间估计

- 1. 假定条件(σ_1^2和σ_2^2 已知)
  - 两个总体都服从正态分布
  - 两个样本是独立的随机样本
- **2. 两个独立样本均值之差的抽样分布服从正态分布，其期望值为**

$$E(\bar{X}-\bar{Y})=\mu_1-\mu_2$$

其标准误差为

$$\sigma_{(\bar{X}-\bar{Y})}=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

3. 使用正态分布统计量

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

4. 两个总体均值之差$\mu_1-\mu_2$在$1-\alpha$ 置信水平下的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-U_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\bar{X}-\bar{Y})+U_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

- 【例】一个银行负责人想知道储户存入两家银行的存款金额差异。他从两家银行各抽取了一个由25个储户组成的随机样本，样本均值如下：银行A：4500元；银行B:3250元。设已知两个银行中储户的存款总体服从方差分别为σ_A^2=2500和σ_B^2=3600的正态分布。试求$\mu_A - \mu_B$的区间估计
- （1）置信度为95%
- （2）置信度为99%

解:已知

$X_A \sim N(\mu_A, 2500)$

$X_B \sim N(\mu_B, 3600)$

$\bar{x}_A = 4500$,

$\bar{x}_B = 3250$,

$\sigma_A^2 = 2500$

$\sigma_B^2 = 3600$

$n_A = n_B = 25$

(1) $\mu_A - \mu_B$ 置信度为**95%**的置信区间为

$$(4500-3250) \pm 1.96\sqrt{\frac{2500}{25}+\frac{3600}{25}}$$

$$(1219.78\,,1280.62)$$

(2) $\mu_A - \mu_B$ 置信度为**99%**的置信区间为

$$(4500-3250) \pm 2.58\sqrt{\frac{2500}{25}+\frac{3600}{25}}$$

$$(1209.7\,,1290.3)$$

两正态总体均值差的区间估计

1. 假定条件(σ_1^2和σ_2^2未知，但相等)
   - 两个总体都服从独立正态分布
   - σ_1^2、σ_1^2未知，但$\sigma_1^2=\sigma_1^2$
2. 使用t分布统计量

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\,(n_1+n_2-2)$$

$$S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_{1n_1}^2+(n_2-1)S_{2n_2}^2}{n_1+n_2-2}}$$

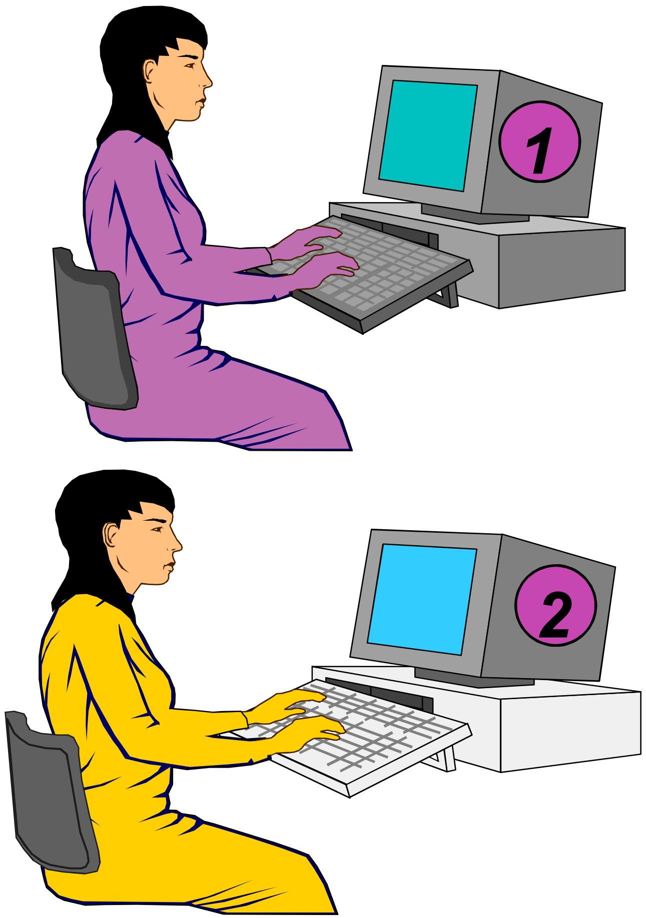
使用 t 分布统计量

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\,(n_1+n_2-2)$$

两个总体均值之差μ_1-μ_2在**1-**α置信水平下的置信区间为

$$(\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

■【例】为比较两位银行职员为新顾客办理个人结算账目的平均时间长度，分别给两位职员随机安排了10位顾客，并记录下为每位顾客办理账单所需的时间（单位：分钟），相应的样本均值和方差分别为： $x_1=22.2$，$s_1^2=16.63$，$x_2=28.5$，$s_2^2=18.92$。假定每位职员办理账单所需时间均服从正态分布，且方差相等。试求两位职员办理账单的服务时间之差的95%的区间估计。



解:已知

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

$\bar{x}_1 = 22.2$,

$\bar{x}_2 = 28.5$,

$s_1^2 = 16.63$

$s_2^2 = 18.92$

$n_1 = n_2 = 10$

$\sigma_1^2 = \sigma_1^2$

$$s_W = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(10 - 1)16.36 + (10 - 1)18.92}{10 + 10 - 2}}$$

$$= 4.2$$

μ_1- μ_2置信度为**95%**的置信区间为

$$(22.2 - 28.5) \pm (2.1)(4.2)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}$$

$$= (-10.2, -2.4)$$

1. 假定条件(σ_1^2和σ_2^2未知，且不等)
   - 两个总体都服从独立正态分布
   - σ_1^2、σ_1^2未知，且$\sigma_1^2 \neq \sigma_1^2$
2. 当n_1，n_2充分大时，近似认为

$$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_{1n_1}^2}{n_1} + \dfrac{S_{2n_2}^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

3. 使用正态分布统计量

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_{1n_1}^2}{n_1}+\frac{S_{2n_2}^2}{n_2}}}\overset{近似}{\sim} N(0,1)$$

4. 两个总体均值之差$\mu_1-\mu_2$在$1-\alpha$ 置信水平下的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-U_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_{1n_1}^2}{n_1}+\frac{S_{2n_2}^2}{n_2}},(\bar{X}-\bar{Y})+U_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_{1n_1}^2}{n_1}+\frac{S_{2n_2}^2}{n_2}}\right)$$

两正态总体方差比的区间估计

1. 假定条件(μ_1，μ_2未知)
   - 两个总体都服从独立正态分布
   - μ_1，μ_2未知
2. 使用F分布统计量，

$$F=\frac{\sigma_2^2 S_{1n_1}^2}{\sigma_1^2 S_{2n_2}^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$

3. 得σ_1^2/σ_2^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2 F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

- 设$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$是两个独立的总体，为了比较两个总体的方差，随机从两个总体抽取样本，$n_1=9, n_2=10$, $S_{1n_1}^2=7.99$, $S_{2n_2}^2=15.39$,求两个总体方差比例σ_1^2/σ_2^2的置信度为95%的置信区间

查表得 $F_{0.025}(8,9)=4.1$ $F_{1-0.025}(8,9)=4.36$

$$\left(\frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_{1n_1}^2}{S_{2n_2}^2F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$
$$=(0.066,1.18)$$