平稳过程

1. 平稳过程的概念

概念：设$X_T=\{X(t),t\in T\}$是随机过程, 若对于任意的 $n\geq 1$，任意n个时刻t_1，t_2，…，$t_n\in \mathbf{T}$，和任意的常数 τ($t_1+\tau$，$t_2+\tau$，…，$t_n+\tau \in \mathbf{T}$)，都有两个随机向量 $(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$和$(X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\ldots,X(t_n+\tau))$具有相同的概率分布, 则称随机过程$X_T=\{\{X(t),t\in T\}$具有平稳性, 并同时称此过程为严平稳过程。

平稳过程的参数集T, 一般为$(-\infty, +\infty)$, $[0, +\infty)$, $\{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, $\{0, 1, 2, \cdots\}$, 以下如无特殊说明，均认为参数集$T=(-\infty, +\infty)$.

当定义在离散参数集上时, 也称为严平稳时间序列。

定理 如果$\boldsymbol{X_T}=\{\{X(t), t\in T\}$是严平稳过程，且对任意的$t\in T$，$\boldsymbol{E}[X^2(t)]<+\infty$, 则有

(1) $\boldsymbol{E}[X(t)]$=常数，$t\in T$；

(2) $\boldsymbol{E}[X(t)X(t+\tau)]$只依赖于$\tau$, 而与$t\in T$的具体取值无关。

证：(1) 由于

$$\{\boldsymbol{E}[X(t)]\}^2\le\boldsymbol{E}[X^2(t)]<+\infty,$$

所以$\boldsymbol{E}[X(t)]$存在。

由严平稳过程的定义，对于任意的τ，$X(t)$与$X(t+\tau)$同分布，有$\boldsymbol{E}[X(t)]=E[X(t+\tau)]$

得到$\boldsymbol{E}[X(t)]$ = 常数。一般记为m_X.

（2） 由*Cauchy-Schwarze*不等式

$$\{E[X(t)X(t+\tau)]\}^2 \le E[X^2(t)]E[X^2(t+\tau)]<+\infty,$$

所以$E[X(t)X(t+\tau)]$存在。

在严平稳过程的定义中，$(X(t),X(t+\tau))$与$(X(0),X(\tau))$同分布，即有$E[X(t)X(t+\tau)]=E[X(0)X(\tau)]$

即$E[X(t)X(t+\tau)]$只依赖于τ.

所以，$R_X(t,t+\tau)$也只依赖于τ，而与$t\in T$的具体取值无关，记为$R_X(\tau)$。

进而，$C_X(t,t+\tau)=E\{[X(t)-m_x][X(t+\tau)-m_x]\}=R_X(\tau)-m_x^2$只与$\tau$有关，记为$C_X(\tau)$。

$D_x=C_x(0)=R_x(0)-m_x^2$ 为常数.

设$\boldsymbol{X_T}=\{\boldsymbol{X}(t), t\in T\}$是二阶矩过程, 如果

(1) $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}(t)] = m_x$(常数), $t\in T$;

(2) 对任意的$t, t+\tau\in T$, $\boldsymbol{R}_x(\tau)=\boldsymbol{E}[X(t)X(t+\tau)]$只依赖于$\tau$。

则称$\boldsymbol{X_T}=\{\boldsymbol{X_T}=(t), t\in T\}$为宽平稳过程, 简称为平稳过程.

特别地，当T为离散参数集时，若随机序列$\{X_n\}$满足$E(X_n^2)<+\infty$, 以及

(1) $\boldsymbol{E}[X_n]= m_x$(常数), $n\in T$;

(2) $\boldsymbol{R}_x(k)=E[X_nX_{n+k}]$只与k有关。

称$\{X_n\}$为宽平稳随机序列或宽平稳时间序列。

严平稳和宽平稳的关系

(1) 严平稳过程不一定是宽平稳过程，因为严平稳的过程不一定是二阶矩过程，但当严平稳过程是二阶矩过程时，则它一定是宽平稳过程。

(2) 宽平稳过程不一定是严平稳过程，但对于正态过程，两者是等价的

如果{X(t)}为**正态过程**，则

{X(t)}是严平稳过程⇔{X(t)}是宽平稳过程。

证明："⇒" 因正态过程是二阶矩过程，由严平稳过程性质，显然成立。

"⇐"由已知：$m_X(t)=m_X$，$R_X(t,t+\tau)$只与τ有关。

由严平稳过程定义，对任意的t_1，t_2，…，$t_n\in \mathbf{T}$，以及$t_1+\tau$，$t_2+\tau$，…，$t_n+\tau \in \mathbf{T}$，要证：（$X(t_1)$，$X(t_2)$，…，$X(t_n)$）与（$X(t_1+\tau)$，$X(t_2+\tau)$，…，$X(t_n+\tau)$）同分布。

而正态过程的分布由m_X及$R_X(t_i,t_j)$决定，m_X为常数。

$$R_X(t_i,t_j)=E\left[X(t_i)X(t_j)\right]=E\left[X(t_i+\tau)X(t_j+\tau)\right]=R_X(t_i+\tau,t_j+\tau)$$

$$\begin{aligned}&C_X(t_i+\tau,t_j+\tau)\\&=R_X(t_i+\tau,t_j+\tau)-m_X(t_i+\tau)m_X(t_j+\tau)\\&=R_X(t_i,t_j)-m_X^2=C_X(t_i,t_j)\end{aligned}$$

即(*)式成立。

下面举一些（宽）平稳过程的例子。

例1 设随机序列 $\{X(n), n=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$，其中 $X(n)$ 是互不相关的随机变量，而 $EX(n)=0, DX(n)=\sigma^2$.

试说明 $X(n)$ 是平稳序列。

解　因为 $EX(n)=0$ 是常数，又相关函数

$$R_X(m,m+n)=E[X(m)X(m+n)]$$
$$=\begin{cases}\sigma^2, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

与 m 无关，所以 $X(n)$ 是平稳序列。

这个平稳序列称为纯随机序列或白噪声序列。如果随机变量 $X(n)$ 又服从正态分布，那么称为正态白噪声。

例3 随机相位过程 $X(t) = a\cos(\omega_0 t + Y)$

其中 a,ω_0 是正常数，而随机变量 Y 服从在 $[0,2\pi]$区间上的均匀分布，试说明 $X(t)$ 是平稳过程。

解 在上一章的示例中，已经计算过$m(t)$和$R(t_1,t_2)$。

$$m(t) = E(a\cos(\omega_0 t + Y)) = \int_0^{2\pi} a\cos(\omega_0 t + y)\frac{1}{2\pi}dy = 0$$

$$\begin{aligned} R(t_1,t_2) &= E(a\cos(\omega_0 t_1 + Y)\,a\cos(\omega_0 t_2 + Y)) \\ &= \int_0^{2\pi} a^2\cos(\omega_0 t_1 + y)\cos(\omega_0 t_2 + y)\frac{1}{2\pi}dy \\ &= \frac{a^2}{2}\cos(\omega_0(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

$$R_X(\tau) = R_X(t, t+\tau) = \frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

表明数学期望是常数，相关函数仅与时间间隔有关，所以 $X(t)$ 是平稳过程。

例4 试说明如下随机过程是平稳过程

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, -\infty < t < \infty$$

其中 ω_0 是正常数，而 A, B 是独立的随机变量，且有

$$EA = EB = 0, DA = DB = \sigma^2 > 0$$

解 先算数学期望 $EX(t) = EA\cdot\cos\omega_0 t + EB\cdot\sin\omega_0 t = 0$

又相关函数

$$R_X(t, t+\tau)$$

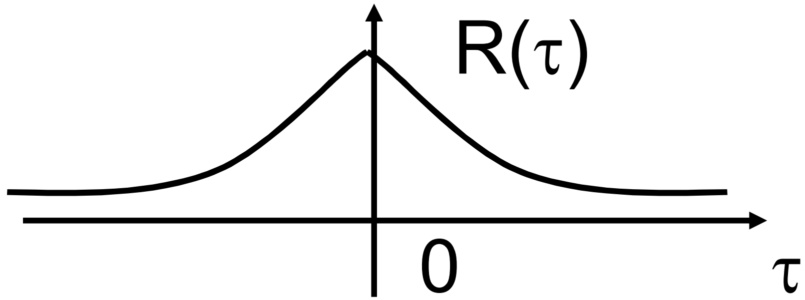
$$= E[(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)(A\cos\omega_0(t+\tau) + B\sin\omega_0(t+\tau)]$$

$$= EA^2\cdot\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + EB^2\cdot\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)$$

$= \sigma^2\cos\omega_0\tau$ 仅与 τ 有关，故 $X(t)$ 是平稳过程。

2. 相关函数的性质

2.1 自相关函数的性质



性质1. $R_X(0) \geq 0$；

证：$R_X(0)=E[X^2(t)]\geq 0$

性质2. $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$

证：由柯西-施瓦兹不等式

$$|R_X(\tau)|=|E[X(t)X(t+\tau)]|\leq\sqrt{E[X^2(t)]E[X^2(t+\tau)]}$$

$$=\sqrt{R_X(0)R_X(0)}=R_X(0)$$

性质3. $R_X(\tau)$ 为偶函数，即 $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$

证：$R_X(-\tau)=E[X(t+\tau)X(t)]= E[X(t)X(t+\tau)]= R_X(\tau)$

性质4. 非负定性. 即对任意正整数n， 任意n个实数

$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ 和 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} R_X(t_k - t_l)\ a_k a_l \geq 0$$

证： $$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} R_X(t_k - t_l)\ a_k a_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E[X(t_l)X(t_k)]\ a_k a_l$$

$$= E\left\{\sum_{k=1}^{n} X(t_k)a_k \sum_{l=1}^{n} X(t_l)a_l]\right\}$$

$$= E\left\{[\sum_{k=1}^{n} X(t_k)\ a_k]^2\right\} \geq 0$$

由协方差函数定义

$$C_X(\tau)=E[(X(t)-m_X)(X(t+\tau)-m_X)]$$

易见协方差函数也有同样的四条性质

性质1. $C_X(0)=D_X\geq 0$；

性质2. $|C_X(\tau)|\leq C_X(0)$

性质3. $C_X(\tau)$为偶函数，即$C_X(-\tau)=C_X(\tau)$

性质4. 非负定性. 即对任意正整数n，任意n个实数$t_1, t_2, \ldots, t_n\in T$ 和 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} C_X(t_k-t_l)\ a_k a_l\geq 0$$

2.2 平稳相关与互相关函数

定义 设$\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$, $t\in T$为两个平稳过程，如果它们的互相关函数$R_{XY}(t, t+\tau)$只是τ的函数，即有

$$R_{XY}(t, t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)],$$

则称$\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$是**平稳相关的**，或称$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$是联合平稳过程。

记$R_{XY}(\tau)= R_{XY}(t, t+\tau)$ 为$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$的**互相关函数**。

互相关函数的性质

性质1. $R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$

证：$R_{XY}(-\tau)=E[X(t+\tau)Y(t)]=E[Y(t)X(t+\tau)]=R_{YX}(\tau)$

性质2. $|R_{XY}(\tau)|\le\sqrt{R_X(0)R_Y(0)}$

证：$|R_{XY}(\tau)|^2=\{E[X(t)Y(t+\tau)]\}^2$

$$\le E[X^2(t)]E[Y^2(t+\tau)]=R_X(0)R_Y(0)$$

互协方差函数及性质

$$C_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(t,t+\tau)-m_X(t)m_Y(t+\tau)$$
$$=R_{XY}(\tau)-m_X m_Y$$

也不依赖于 t。可记 $C_{XY}(\tau)=C_{XY}(t,t+\tau)$

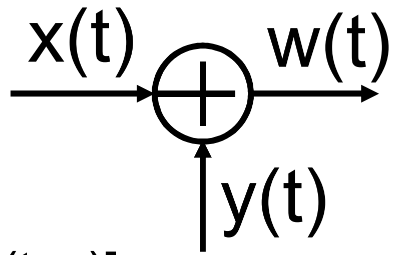
显然，互协方差函数 $C_{XY}(\tau)$ 也有相应的两条性质，即

$$C_{XY}(-\tau)=C_{YX}(\tau)$$

$$|C_{XY}(\tau)|\le\sqrt{D_X}\sqrt{D_Y}.$$

例1 如图所示，将两个平稳过程X(t)，Y(t)同时输入加法器中，加法器输出随机过程W(t)=X(t)+Y(t)，若X(t)与Y(t)平稳相关，则W(t)为平稳过程

证：$\boldsymbol{m_W(t) = E[X(t)] + E[Y(t)] = m_X + m_Y}$ 为常数



$E[W(t)W(t+\tau)]$

$=E\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\}$

$=E[X(t)X(t+\tau)]+E[X(t)Y(t+\tau)]+E[Y(t)X(t+\tau)]+E[Y(t)Y(t+\tau)]$

$=R_x(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)$

可见W(t)的自相关函数Rw(t, t+τ)只依赖于τ，所以W(t)为平稳过程.