西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第六章　特征值与特征向量

第一节：　矩阵的特征值与特征向量

第二节：　矩阵相似与矩阵的对角化

董荣
数学与统计学院

作业：

习题6.2

(A) 2，4，5(2)，6，9，11，14(2)，16

主要内容

1、特征值和特征向量的性质

2、相似矩阵

3、矩阵可对角化的条件

4、实对称矩阵的对角化

一、特征值和特征向量的性质

性质6.1.1 设n阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

则

(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$;

(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

推论 n阶方阵A可逆$\Leftrightarrow A$的n个特征值全不为零.

n阶方阵A不可逆$\Leftrightarrow A$至少有1个零特征值.

性质6.1.2 设λ为方阵A的一个特征值,则：

(1) 对任何正整数m, λ^m为方阵A^m的一个特征值

(2) 对任何多项式$f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$, $f(\lambda)$为矩阵$f(A)=a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 I$的一个特征值.

证： (1) $Ax=\lambda x$, $A^2x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda Ax=\lambda^2 x$

$$\Rightarrow A^m x=A^{m-1}\lambda x=\lambda A^{m-1}x=\lambda^2 A^{m-2}x=\cdots=\lambda^m x$$

(2) $f(A)x=(a_m A^m+\cdots+a_1 A+a_0 I)x=a_m A^m x+\cdots+a_1 Ax+a_0 Ix$

$$=a_m\lambda^m x+\cdots+a_1\lambda x+a_0 x=(a_m\lambda^m+\cdots+a_1\lambda+a_0)x$$

$$=f(\lambda)x$$

例： 三阶方阵A的三个特征值为1, 2, 0, 则 $|2I+3A^2|=?$

解： $f(A)=2I+3A^2$的特征值为$f(\lambda)=2+3\lambda^2$, 即 5, 14, 2,

所以矩阵$2I+3A^2$的行列式为140.

性质6.1.3 若数λ为n阶可逆矩阵的A的一个特征值，则

$\lambda \neq 0$, 且$\dfrac{1}{\lambda}$为A^{-1}的一个特征值,$\det(A)\lambda^{-1}$为A^{*}的一个特征值.

证： (1) $|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$,所以$A$的任一特征值都不等于0

$Ax = \lambda x$，两边都左乘A^{-1},得$x = \lambda A^{-1} x$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} x = A^{-1} x \qquad \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\text{为}A^{-1}\text{的特征值}$$

(2) 要证$|A|\dfrac{1}{\lambda}$为A^{*}的特征值，就是要证$|A|\dfrac{1}{\lambda} x = A^{*} x$

有$|A|\dfrac{1}{\lambda} x = |A| A^{-1} x = A^{*} x$，得证。

性质6.1.4 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是矩阵$A$的互不相同的特征值，$x_i$是$A$的属于特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$的特征向量，则$x_1,x_2,\cdots,x_m$线性无关. 即属于互不相同特征值的特征向量线性无关.

证明思路： 以m=3为例. 设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是矩阵$A$的互不相同的特征值，

x_1,x_2,x_3是A的属于$\lambda_i(i=1,2,3)$的特征向量，$Ax_i=\lambda_i x_i, i=1,2,3.$

设有一组数k_1,k_2,k_3使得 $k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3=0$

$$A(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)=\lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2+\lambda_3k_3x_3=0$$

$$A(\lambda_1k_1x_1+\lambda_2k_2x_2+\lambda_3k_3x_3)=\lambda_1^2k_1x_1+\lambda_2^2k_2x_2+\lambda_3^2k_3x_3=0$$

$$\Rightarrow [k_1x_1\ k_2x_2\ k_3x_3]\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0,\text{ 故}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}\text{可逆}$$

$$\Rightarrow [k_1x_1\ k_2x_2\ k_3x_3]=0 \quad \Rightarrow k_i=0, i=1,2,3.$$

性质6.1.4 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是矩阵$A$的互不相同的特征值，$x_i$是$A$的属于特征值$\lambda_i\,(i=1,2,\cdots,m)$的特征向量，则$x_1,x_2,\cdots,x_m$线性无关. 即属于互不相同特征值的特征向量线性无关.

推广 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是矩阵$A$的互不相同的特征值，$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ik_i}$为$A$的属于$\lambda_i$的一组线性无关特征向量$(i=1,2,\cdots,m)$，则向量组 $\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1k_1};\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2k_2};\cdots;\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mk_m}$ 线性无关.

性质6.1.5 矩阵A的任何特征值的几何重数不大于代数重数.

例： 设λ_1，λ_2是矩阵A的两个不同特征值，x_i为属于λ_i的特征向量$(i=1,2)$. 证明：x_1+x_2不是A的特征向量.

证明： 反证法。设x_1+x_2是矩阵A的属于λ_0的特征向量,则

$$A(x_1+x_2)=\lambda_0(x_1+x_2)$$

$$\Rightarrow Ax_1+Ax_2=\lambda_0 x_1+\lambda_0 x_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=\lambda_0 x_1+\lambda_0 x_2$$

$$\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_0)x_1+(\lambda_2-\lambda_0)x_2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1-\lambda_0=0,\lambda_2-\lambda_0=0$$

与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾.

主要内容

1、特征值和特征向量的性质

2、相似矩阵

3、矩阵可对角化的条件

4、实对称矩阵的对角化

二、相似矩阵

定义6.2.1（相似矩阵） 对于$A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$,若存在可逆矩阵$P_{n\times n}$,使得$P^{-1}AP=B$,则称A与B相似,或A相似于B,记为$A\sim B$,并称由$A\rightarrow P^{-1}AP=B$的变换为相似变换,

- 如果A与一个对角矩阵相似,则称A可相似对角化,简称为A**可对角化**.

相似矩阵的简单性质：

(1)反身性：$A\sim A$

(2)对称性：若$A\sim B$,则$B\sim A$;　　$A=PBP^{-1}=(P^{-1})^{-1}BP^{-1}$

(3)传递性：若$A\sim B$, $B\sim C$,则$A\sim C$.

定理6.2.1 设n阶矩阵A与B相似,则

(1) $\det(A)=\det(B)$;

(2) $r(A)=r(B)$;

(3) A与B有相同的特征多项式(有相同的特征值).

(4) 若A可逆，则 $A^{-1}\sim B^{-1}$

证明: (1) $P^{-1}AP=B \Rightarrow |P^{-1}AP|=|B| \Rightarrow |P^{-1}||A||P|=|B| \Rightarrow |A|=|B|$

(2) $P^{-1}AP=B$, 显然B是由A经初等变换得到的，故$r(A)=r(B)$

(3) $|\lambda I-B|=|\lambda P^{-1}IP-P^{-1}AP|=|P^{-1}||\lambda I-A||P|=|\lambda I-A|$

(4) 若A可逆，因$|B|=|A|\neq 0$，故B也可逆

$$B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$$

定理6.2.1 设n阶矩阵A与B相似,则

(1) $\det(A)=\det(B)$;

(2) $r(A)=r(B)$;

(3) A与B有相同的特征多项式(有相同的特征值) .

(4) 若A可逆，则 $A^{-1}\sim B^{-1}$

注意：•定理(1)(2)(3)的逆命题不真,

例如$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$有相同的行列式，相同的秩

及相同的特征多项式$(\lambda-1)^2$

但是它们不相似，因为**与单位矩阵相似的只能是单位矩阵.**

$$若B=P^{-1}IP\Rightarrow B=I$$

定理6.2.1 设n阶矩阵A与B相似,则

(1) $\det(A)=\det(B)$;

(2) $r(A)=r(B)$;

(3) A与B有相同的特征多项式(有相同的特征值).

(4) 若A可逆，则 $A^{-1}\sim B^{-1}$

注意： •对角阵$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$的全部特征值即为对角线元素$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

$$\text{因为}|\lambda I-D|=\begin{vmatrix}\lambda-\lambda_1 & & & \\ & \lambda-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-\lambda_n\end{vmatrix}=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0$$

•若A与对角阵$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$相似,则$A$的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

•并非任何矩阵都可以对角化，例如$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$就不能对角化。

本节的两个主要问题：

(1) 方阵A可对角化的条件；

(2) 如果A可对角化, 那么如何求可对角化A的矩阵P ?

主要内容

1、特征值和特征向量的性质

2、相似矩阵

3、矩阵可对角化的条件

4、实对称矩阵的对角化

三、矩阵可对角化的条件

定理6.2.2（矩阵可对角化的充要条件）

n阶方阵A可对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

证 "$\Rightarrow$",设A可对角化,即存在可逆矩阵P使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \xlongequal{\text{记为}} D$$

设P按列分块为$P=\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{bmatrix}$,由$P$可逆知$p_1,p_2,\cdots,p_n$线性无关.

由$P^{-1}AP=D$,可得$AP=PD$

定理6.2.2（矩阵可对角化的充要条件）

n阶方阵A可对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

$$P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix},\quad D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$$P^{-1}AP=D \Rightarrow AP=PD$$

即 $$A\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

得 $$\begin{bmatrix} Ap_1 & Ap_2 & \cdots & Ap_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 p_1 & \lambda_2 p_2 & \cdots & \lambda_n p_n \end{bmatrix}$$

即 $$Ap_i=\lambda_i p_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

因为$p_i\neq 0 \Rightarrow \lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值，且$p_1,\cdots,p_n$依次为对应的特征向量.

由P可逆知$p_1,p_2,\cdots,p_n$线性无关.　**必要性得证**

将以上的证明倒推上去,就是充分性的证明.

定理6.2.2（矩阵可对角化的充要条件）

n阶方阵A可对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

定理6. 2. 2的证明过程告诉我们：

若存在可逆矩阵$P=\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$使得$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

则$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征值，且$p_1,p_2,\cdots,p_n$依次为对应的$n$个线性无关的特征向量.

推论6. 2. 1 （矩阵可对角化的一个充分条件）如果n阶矩阵A有n个不同的特征值，则矩阵A可相似对角化.

推论6. 2. 2 （矩阵可对角化的充要条件）n阶矩阵A可相似对角化

$\Leftrightarrow$ A的任一n_i重特征值λ_i对应n_i个线性无关的特征向量（A的每个特征值的几何重数等于代数重数）

如果方阵A可对角化, 那么如何将其对角化呢?

答： ① 求出A的所有特征值： $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

② 求出每个特征值的线性无关的特征向量，从而得到A的n个线性无关的特征向量：$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

③ 令 $P = [\, \xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_n \,]$，则有 $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

注意： P 中向量$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$的顺序要与$D$中$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$的顺序一致，即 ξ_i 是对应于 λ_i 的特征向量(i=1,2,…,n)。

例： 方阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\5&5&0\\0&0&2\end{bmatrix}$是否相似于对角矩阵？若是，

求可逆矩阵P及对角矩阵D，使得$P^{-1}AP=D$.

解 由A的特征方程

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-5&\lambda-5&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-5&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda)=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

A有3个互不相同的特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.故$A$必可对角化.

例： 方阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\5&5&0\\0&0&2\end{bmatrix}$是否相似于对角矩阵？若是，

求可逆矩阵P及对角矩阵D，使得$P^{-1}AP=D$.

$$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

对$\lambda_1=0$，解方程组$(0I-A)x=0$，$-A\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，得基础解系$\xi_1=[1,-1,0]^T$

对$\lambda_2=2$，解方程组$(2I-A)x=0$，得基础解系$\xi_2=[0,0,1]^T$

对$\lambda_3=6$，解方程组$(6I-A)x=0$，得$\xi_3=[1,5,0]^T$，

则ξ_1,ξ_2,ξ_3就是A的3个线性无关的特征向量.

令矩阵$P=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&0&5\\0&1&0\end{bmatrix}$，则有$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}$

主要内容

1、特征值和特征向量的性质

2、相似矩阵

3、矩阵可对角化的条件

4、实对称矩阵的对角化

四、实对称矩阵的对角化

对称矩阵： 满足$A^T = A$或$a_{ij} = a_{ji}(\forall i, j = 1,2,\cdots,n, i \neq j)$,

共扼矩阵： 称$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$为复矩阵$A = (a_{ij})$的共轭矩阵

矩阵的共扼运算满足：

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$$

$$\overline{kA} = \overline{k}\ \overline{A}$$