第七章　二次曲面与二次型

7.2 实二次型

董荣

数学与统计学院

主要内容

1. 合同变换与惯性定理
2. 正定二次型
3. 二次曲面的标准方程

正交变换法、配方法都可以将二次型化为标准形，但所得到的标准形并不惟一。

问题： 不同的可逆线性变换下，二次型的标准形的不变量是什么？

二次型由它的矩阵唯一确定，因此我们仅需研究在可逆变换前后矩阵之间的关系。

对二次型$x^T Ax$作可逆线性变换$x = Cy$，则二次型矩阵的变化为：

$$A \to C^T AC$$

其中C为可逆矩阵。

定义7.2.2：（合同矩阵）设A,B为n阶矩阵，如果存在n阶可逆矩阵C，使得 $C^TAC=B$，则称矩阵A,B**合同**，记为$A\simeq B$，并且称由A到$B=C^TAC$的变换为**合同变换**。

合同关系具有

（1）反身性： $A\simeq A$

（2）对称性：若$A\simeq B$，则$B\simeq A$

（3）传递性：若$A\simeq B$， $B\simeq D$，则$A\simeq D$

定理7.2.2：若$A\simeq B$，则A,B 具有相同的秩。

注：经过可逆线性变换后，二次型f的秩不变$(A\rightarrow C^TAC=D)$，

即： **f的标准形中非零项的个数惟一确定，它就是f的秩。**

定理7.2.3 (惯性定理) 设二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的秩为r,则不论用怎样的可逆线性变换把 f 化成标准形，标准形中系数为正的项的个数 p (从而系数为负的项的个数 $r\text{-}p$)由 f 本身唯一确定，并不依赖于所用的线性变换。

负惯性指数

正惯性指数

设二次型f经满秩线性变换(可逆线性变换)化成了标准形:

$$f=d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2\ ,$$
$$(d_i>0,i=1,\cdots,r.\text{其中}r\text{为}f\text{的秩})$$

再作满秩线性变换：$y_1=\dfrac{1}{\sqrt{d_1}}z_1,\cdots,\ y_r=\dfrac{1}{\sqrt{d_r}}z_r,\ y_{r+1}=z_{r+1},\cdots,\ y_n=z_n$

就可将f化成：$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$

称上式为f的**规范形**.

定理7.2.3 (惯性定理) 设二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的秩为r,则不论用怎样的可逆线性变换把 f 化成标准形，标准形中系数为正的项的个数 p (从而系数为负的项的个数 $r\text{-}p$)由 f 本身惟一确定，并不依赖于所用的线性变换。

负惯性指数

正惯性指数

二次型f的规范形：$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$.

由惯性定理知： 二次型的规范形是唯一的

等价二次型：$f(x)=x^TAx$ 经可逆线性变换$x=Cy$ 化成了二次型 $g(y)=y^TBy$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等价的二次型。

等价的二次型有相同的规范型

主要内容

定义7.2.3（正定二次型与正定矩阵）

设$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$是一个$n$元二次型($A$为$n$阶实对称矩阵),如果$\forall x=(x_1,\cdots x_n)^T\in R^n$,且$x\neq 0$(即$x_1,\cdots,x_n$不全为零),恒有$f(x)=x^TAx>0$则称二次型$f$为**正定二次型**,并称实对称矩阵$A$为**正定矩阵**.

例： $f(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_2^2$正定

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2$非正定,因$f(0,1,0)=-1<0$

$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2$ 非正定，因$f(0,0,1)=0$

定理7.2.4 二次型经可逆线性变换，其正定性不变。

证 设$f(x)=x^TAx \xlongequal{x=Cy,C\text{可逆}} y^T(C^TAC)y$

若$f(x)=x^TAx$正定,即$\forall x\in R^n, x\neq 0$,恒有$x^TAx>0$,

于是$\forall y\in R^n, y\neq 0$,有$Cy\neq 0$(否则$Cy=0$,则$C^{-1}Cy=0$,

即$y=0$,这与$y\neq 0$矛盾)，因此$\forall y\in R^n, y\neq 0$,有

$$y^T(C^TAC)y=(Cy)^TA(Cy)>0$$

所以,二次型$y^T(C^TAC)y$正定.

同理可证,当$y^T(C^TAC)y$正定时,有x^TAx正定.

注： 定理 7.2.4 表明A与C^TAC有相同的正定性，
即合同的矩阵有相同的正定性.

定理7.2.5 实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A的所有特征值都大于零。

证： **（必要性）** 设A为正定矩阵，λ为A的任一特征值，

x为对应于λ的特征向量，则$x \neq 0$,且$Ax = \lambda x$

$$0 < x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \lambda > 0$$

（充分性） 如果A的所有特征值都大于零,则A的最小特征值$\lambda_n > 0$,

取A的n个标准正交实特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，则对$\forall x \in R^n, x \neq 0$,

有：$x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \|x\|^2 > 0$

$$x^T Ax = (k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n)^T (k_1\lambda_1\alpha_1 + \cdots + k_n\lambda_n\alpha_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \lambda_i \geq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \lambda_n \|x\|^2 > 0.$$ 所以A为正定阵.

定理7.2.5 实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A的所有特征值都大于零

推论 如果A为正定矩阵, 则$\det(A)>0$. （必要条件）

推论 n元二次型f为正定二次型的充要条件是f的正惯性指数为n.

例： 设A为n阶正定矩阵, 证明：行列式$D=|A+I|>1$

证 A正定, 存在正交矩阵P, 使得$P^T AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$, 且$\lambda_i>0, i=1,\cdots,n$

$$\Rightarrow \quad P^T(A+I)P = P^T AP+I = \begin{bmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+1\end{bmatrix}$$

两端取行列式, 得 $|A+I|=(\lambda_1+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$

定理7.2.6 实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A与单位阵合同，即存在可逆矩阵M,使得$A = M^T M$

证：（必要性） 设A正定，则A的特征值都大于0，且存在正交阵P，

$$P^T AP = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots \lambda_n)P^T = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots \sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots \sqrt{\lambda_n})P^T$$

令 $M = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})P^T$，则$M$可逆，且$A = M^T M$

（充分性） 如果存在可逆矩阵M,使得$A = M^T M$, 则$A^T = A$,

对$\forall x \in R^n, x \neq 0$,有$Mx \neq 0$,

从而 $x^T Ax = x^T M^T Mx = (Mx)^T Mx = \|Mx\|^2 > 0$. 即$A$正定.

定理7.2.7 实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$为正定矩阵的充要条件是A的各阶顺序主子式都大于零，即

$$\Delta_1=a_{11}>0,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\qquad \cdots,\qquad \Delta_n=|A|>0,$$

A的顺序主子式指它的左上角的$r(r=1,\dots,n)$阶主子方阵的行列式.

例： 试确定实数t的取值范围，使得二次型

$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定二次型.

解

$$A=\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{bmatrix}$$

由 $\Delta_1>0$, $\Delta_2=1-t^2>0$, $\Delta_3=-t(5t+4)>0$

$$\Rightarrow -\frac{4}{5}<t<0$$

其它类型的二次型

定义7.2.4 一个n阶实对称矩阵A和二次型$x^T Ax$称为

半正定的: 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0$,都有$x^T Ax \geq 0$,且存在$x_0 \neq 0$,
使得$x_0^T Ax_0 = 0$;

负定的: 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0$,都有$x^T Ax < 0$;

半负定的: 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0$,都有$x^T Ax \leq 0$,且存在$x_0 \neq 0$,
使得$x_0^T Ax_0 = 0$;

不定的: 如果$x^T Ax$既能取到正值,又能取到负值.

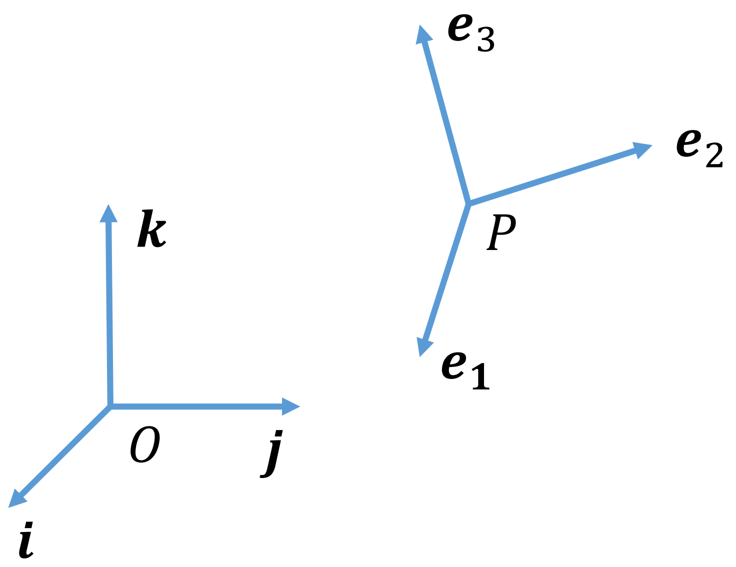
A是负定的 $\Longleftrightarrow$ $-A$是正定的

主要内容

1. 合同变换与惯性定理
2. 正定二次型
3. 二次曲面的标准方程

坐标变换： 设有空间直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$. 设$\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$是空间的另一个直角坐标系，它的位置如下确定：

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_1 = a_{11}\boldsymbol{i} + a_{21}\boldsymbol{j} + a_{31}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_2 = a_{12}\boldsymbol{i} + a_{22}\boldsymbol{j} + a_{32}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_3 = a_{13}\boldsymbol{i} + a_{23}\boldsymbol{j} + a_{33}\boldsymbol{k} \end{cases}$$



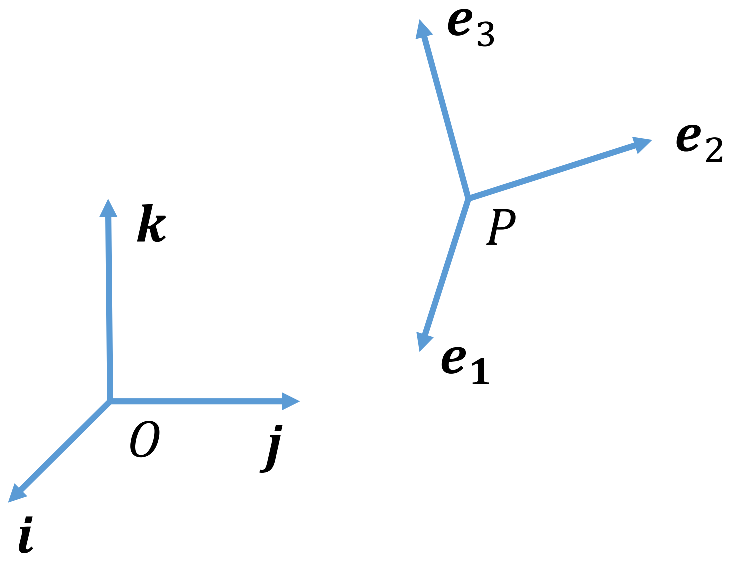
矩阵形式： $\overrightarrow{OP} = [\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\boldsymbol{\alpha}$

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3] = [\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\boldsymbol{A}$$

$\boldsymbol{A}$是标准正交基$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$到标准正交基$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$的过渡矩阵.

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\boldsymbol{A}$$

过渡矩阵$\boldsymbol{A}$的性质：矩阵$\boldsymbol{A}$是一个正交阵，且$\det(\boldsymbol{A})=1$



证：一方面有$\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

另一方面$\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle=a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+a_{3i}a_{3j}$

故$[a_{1i}\quad a_{2i}\quad a_{3i}]\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ a_{3j}\end{bmatrix}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

即矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组为标准正交向量组，因此$\boldsymbol{A}$为正交矩阵。

由于$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$成右手系，所以向量积 $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$

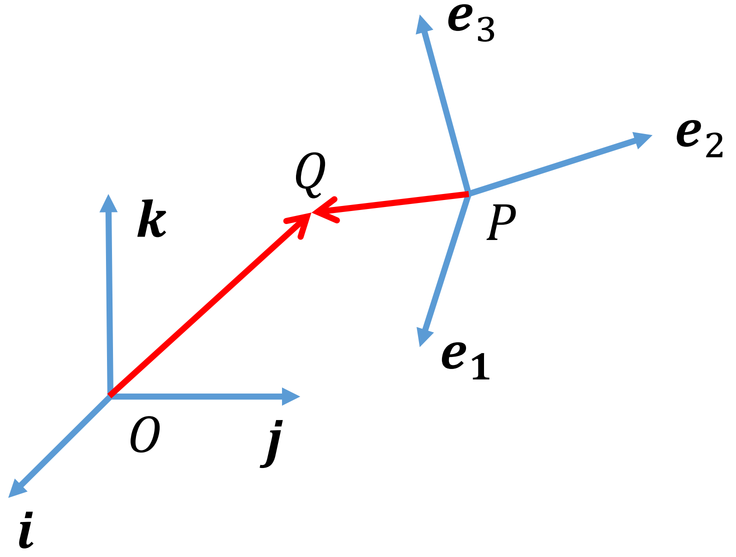
因而混合积$[\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3]=(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1$ $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=1$

由此知$\det(\boldsymbol{A})=1$

坐标变换公式

设空间中一点Q关于坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$的坐标是$(x,y,z)^T$，

再设Q关于坐标系$\{P;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$的坐标是$(x',y',z')^T$，



则 $$\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

另一方面，$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$$

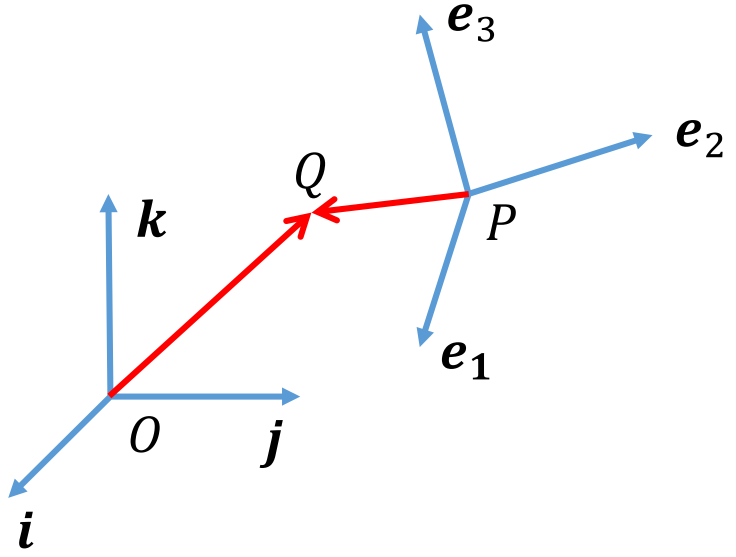
$$=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\boldsymbol{\alpha}+[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\left(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}\right)$$

点Q关于这两个坐标系的坐标$(x,y,z)^T$与$(x',y',z')^T$之间的关系：$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}$$

点 Q 关于这两个坐标系的坐标 $(x,y,z)^T$ 与 $(x',y',z')^T$ 之间的关系：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{cases} x = a_1 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y = a_2 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z = a_3 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{cases}$$

坐标变换公式



当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ 时，我们有坐标的平移公式 $\begin{cases} x = a_1 + x' \\ y = a_2 + y' \\ z = a_3 + z' \end{cases}$

当 P, O 为同一个点时，即 $\alpha = 0$，我们有坐标的旋转公式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，且行列式为1，左式是 R^3 到 R^3 的一个正交变换

若 $\boldsymbol{C}$ 是行列式为1的正交矩阵，则变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ 代表空间的一个旋转变换。