46. ① $H_1 \subseteq G \wedge H_2 \subseteq G$

$\Rightarrow (H_1 \cap H_2) \subseteq G$

② 群有幺元 $e$

$e \in H_2 \wedge e \in H_1$

$\Rightarrow e \in H_1 \cap H_2$

$\Rightarrow$ $H_1 \cap H_2$ 非空

③ $\forall a, b \in H_1 \cap H_2$

$a \in H_1 \cap H_2 \wedge b \in H_1 \cap H_2$

$\Rightarrow (a \in H_1 \wedge b \in H_1) \wedge (b \in H_2 \wedge a \in H_2)$

$\Rightarrow a * b^{-1} \in H_1 \wedge a * b^{-1} \in H_2$

$\Rightarrow a * b^{-1} \in H_1 \cap H_2$

综上，$\langle H_1 \cap H_2, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群

47. $\Leftarrow$ ① 包含性

$\forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2$ $h_1, h_2 \in G$,

$h_1 * h_2, h_2 * h_1 \in G$

所以，$H_1 H_2 \subseteq G$, $H_2 H_1 \subseteq G$

② 非空性，幺元 $e$.

$e \in H_1, e \in H_2 \Rightarrow e \in H_1 H_2 \wedge e \in H_2 H_1$

所以 $H_1 H_2$, $H_2 H_1$ 非空

③ $\forall a, b \in H_1 H_2$,

$\left(\exists \begin{array}{l} h_1, h_2 \in H_1 \\ k_1, k_2 \in H_2 \end{array}\right) a = h_1 * k_1 \in H_1 H_2 \wedge b = h_2 * k_2 \in H_1 H_2$

扫描全能王 创建

有 $h_2^{-1} \in H_1$，$k_2^{-1} \in H_2$

由 $b = h_2 * k_2 \Rightarrow b^{-1} = (h_2 * k_2)^{-1}$

$= k_2^{-1} * h_2^{-1} \in H_2 H_1$

由于 $H_1 H_2 = H_2 H_1$

所以 $k_2^{-1} * h_2^{-1} \in H_1 H_2$

即 $\exists h_3 \in H_1$，$k_3 \in H_2$，$b^{-1} = h_3 * k_3 \in H_1 H_2$

$a * b^{-1} = (h_1 * k_1) * (h_3 * k_3)$

$= h_1 * (k_1 * h_3) * k_3$

$\exists h_4 \in H_1$，$k_4 \in H_2$

$a * b^{-1} = h_1 * (h_4 * k_4) * k_3$

$= (h_1 * h_4) * (k_4 * k_3)$

$\exists h_5, k_5$，$h_5 = h_1 * h_4 \in H_1$，$k_5 = k_4 * k_3 \in H_2$

$a * b^{-1} = h_5 * k_5 \in H_1 H_2$

所以 $a * b^{-1} \in H_1 H_2$

$a * b^{-1} \in H_2 H_1$ 同理可得.

$\Rightarrow \forall h_1 * h_2 \in H_1 H_2$. $h_1 * h_2 = ((h_1 * h_2)^{-1})^{-1} = (h_2^{-1} * h_1^{-1})^{-1}$

$\exists h_3 = h_2^{-1} \in H_2$, $h_4 = h_1^{-1} \in H_1$

$h_1 * h_2 = (h_3 * h_4)^{-1}$ 由 $h_3 * h_4 \in H_2 H_1$

所以 $(h_3 * h_4)^{-1} \in H_2 H_1$

所以 $h_1 * h_2 \in H_2 H_1$ 即 $H_1 H_2 \subseteq H_2 H_1$

$H_2 H_1 \subseteq H_1 H_2$ 同理可证

所以 $H_1 H_2 = H_2 H_1$

55. ① $f$是单射函数

$f(x)=f(y)$

$\Rightarrow a*x*a^{-1}=a*y*a^{-1}$

$\Rightarrow x=y$

② $f$是满射函数

$\forall y\in G$, $\exists x=a^{-1}*y*a\in G$

$f(x)=a*(a^{-1}*y*a)*a^{-1}$

$=y$

所以$f$是双射函数

③ $f(x*y)=a*(x*y)*a^{-1}$

$=(a*x)*(a^{-1}*a)*(y*a^{-1})$

$=(a*x*a^{-1})*(a*y*a^{-1})$

$=f(x)*f(y)$

所以$f$是同态函数

综上，$f$是从$\langle G,*\rangle$到$\langle G,*\rangle$的同态函数。

57. ① 自反性 $\forall x \in G$

$$x = x * e * x^{-1}$$

所以 $(x, x) \in G$

② 对称性 $\forall x, y \in G$

$(x, y) \in R$

$\Rightarrow (\exists z \in G)(y = z * x * z^{-1})$

$\Rightarrow (\exists z \in G)(z^{-1} * y * z = x)$

$\Rightarrow (\exists z^{-1} \in G)(x = (z^{-1}) * y * (z^{-1})^{-1})$

$\Rightarrow (y, x) \in R$

③ 传递关系 $\forall x, y, z \in G$

$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R$

$\Rightarrow (\exists m \in G)(y = m * x * m^{-1})(\exists n \in G)(z = n * y * n^{-1})$

$\Rightarrow (\exists m \in G)(y = m * x * m^{-1})(\exists n \in G)(y = (n^{-1}) * z * n)$

$\Rightarrow (\exists m, n \in G)(m * x * m^{-1} = (n^{-1}) * z * n)$

$\Rightarrow (\exists m, n \in G)(z = (nm) * x * (nm)^{-1})$

$\Rightarrow (x, z) \in R$

综上，R是G上的等价关系