

作业

8.1(1)(3)、8.2(2)(4)(6)、8.4、8.5、8.6、8.11、8.12、8.13、8.14、8.19, 和以下2道滤波器设计题

题目1: 用双线性变换法设计一个二阶巴特沃斯带通数字滤波器, 其3dB处的截止频率分别为 $\omega_{c1}=0.4\pi$, $\omega_{c2}=0.6\pi$, 并画出正准型结构流图。

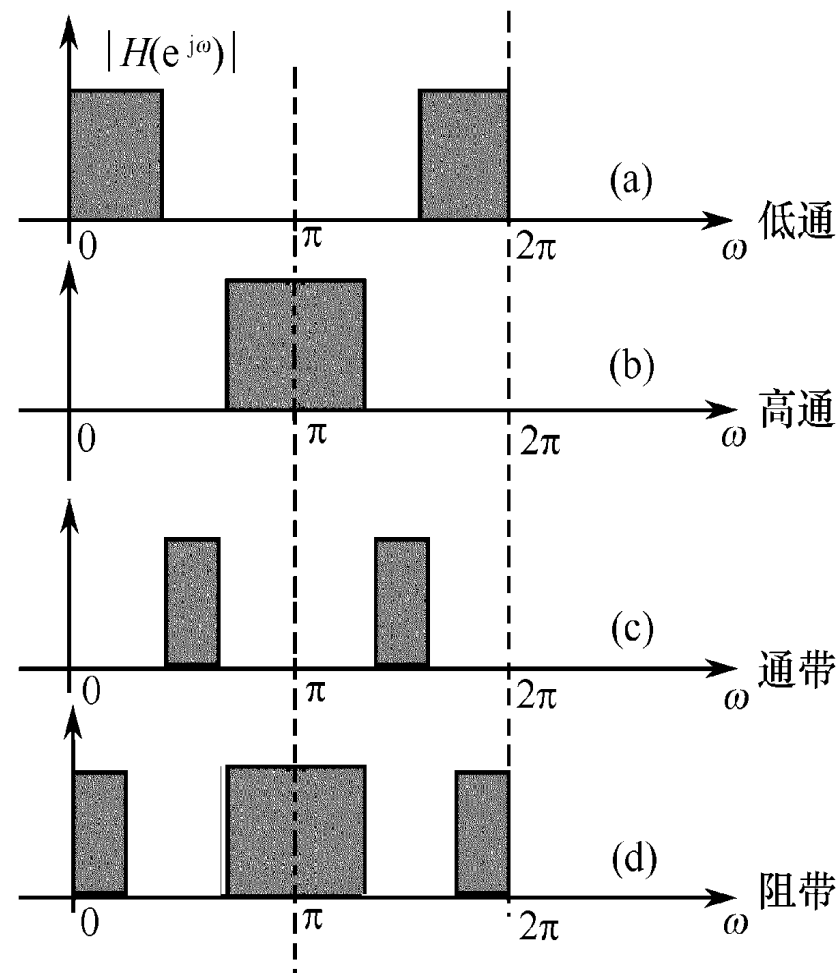
题目2: 用双线性变换法设计一个数字低通滤波器, 满足如下技术指标: (1) 通带和阻带都是频率的单调下降函数, 且没有起伏; (2) 频率在 0.5π 处的衰减为3.01dB; (3) 频率在 0.75π 处的衰减至少为15dB。要求画出直接II型结构流图。

第八章 IIR 数字滤波器设计

杨勐 副教授

回顾:

- 数字滤波器从功能上可分为低通、高通、带通、带阻
- 频率变量以数字频率 ω 表示 $\omega = \Omega T = \Omega / f_s$, 其中 Ω 为模拟角频率, T 为采样时间间隔, f_s 为采样频率;
- 数字频率以 2π 为周期;
- 频率特性只限于 $|\omega| \leq \pi$ 范围, 依据采样定理, 对应于实际模拟抽样频率的一半。



回顾:

■ 数字滤波器的系统函数与单位冲激响应

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$



IIR

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} / \sum_{k=0}^N b_k z^{-k}$$

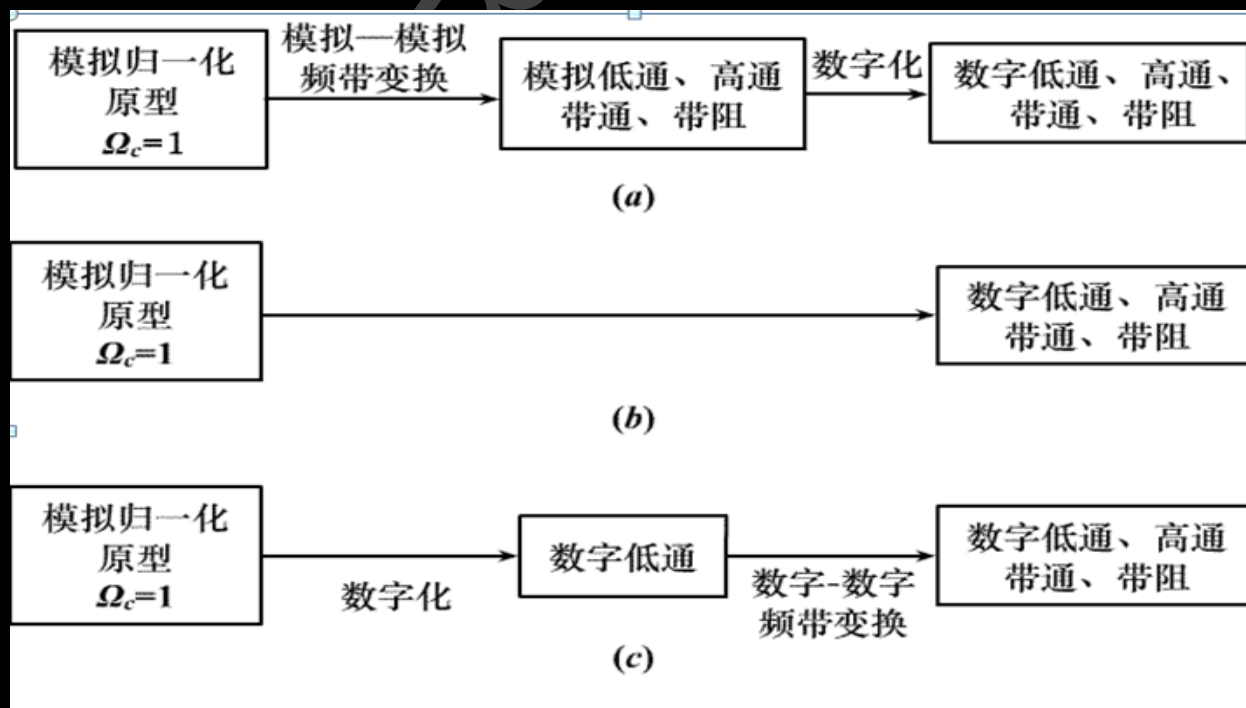
若 $b_0=1$, 其余 $b_k=0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k)$$

FIR

间接设计IIR滤波器的总体流程

- 模拟滤波器设计方法成熟，并由大量已有的数据可供使用。
借助已知的模拟滤波器的传递函数 $H(s)$ ，从 s 平面变换到 z 平面，间接实现数字滤波器的系统函数 $H(z)$
- 常见的间接设计思路包括：



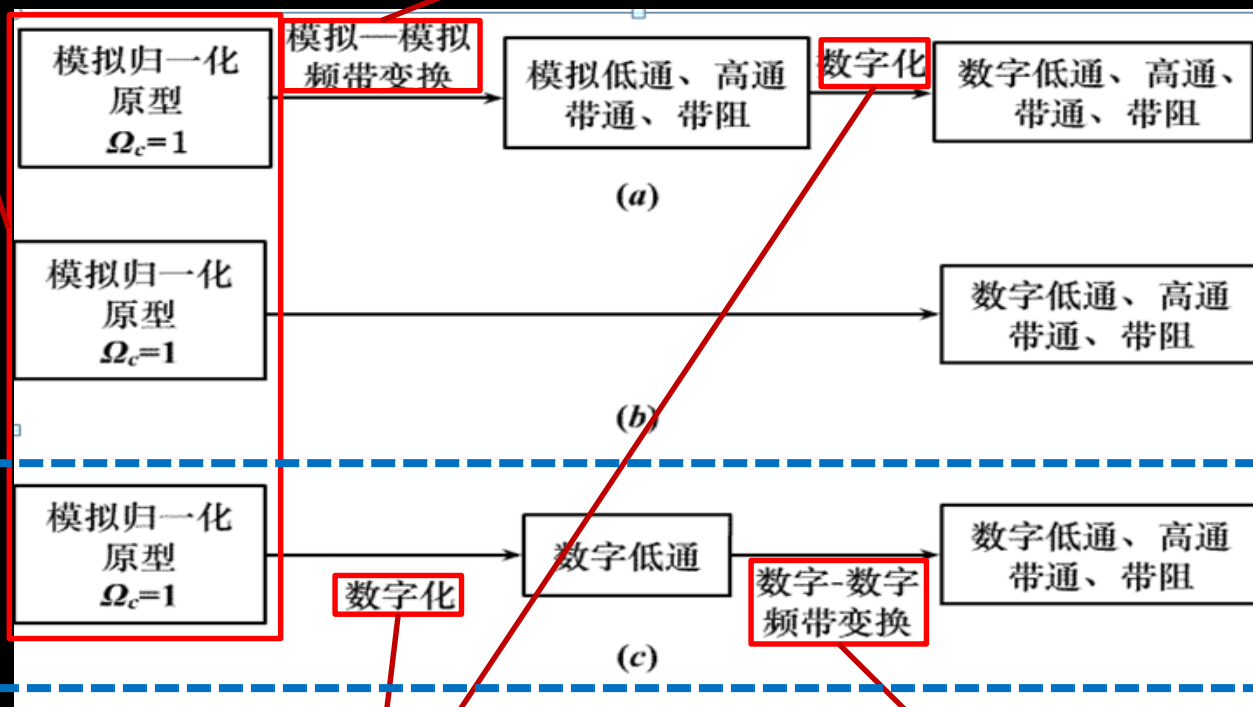
模拟原型低通滤波器

- (1) 巴特沃斯低通滤波器
- (2) 切比雪夫低通滤波器
- (3) 椭圆低通滤波器

S-S变换

- (1) 低通—低通, (2) 低通—高通,
- (3) 低通—带通, (4) 低通—带阻

本课程



两步
合一步

两步
合一步

S-Z变换

- (1) 冲激响应不变法
- (2) 双线性变换法
- (3) 匹配 z 变换法

Z-Z变换

- (1) 低通—低通
- (2) 低通—高通
- (3) 低通—带通
- (4) 低通—带阻

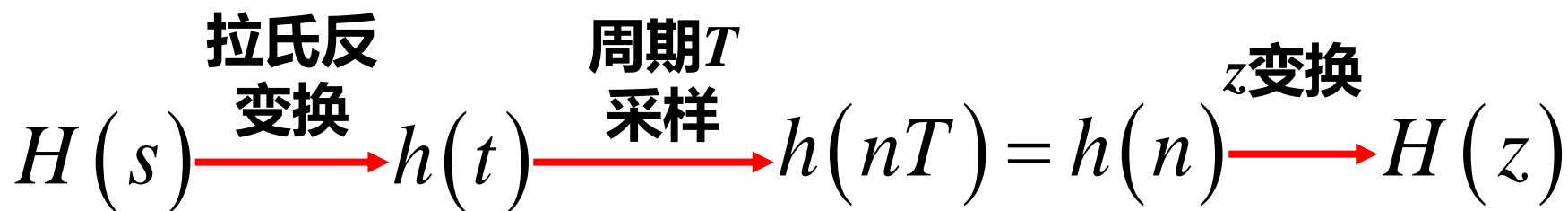
8.1 s - z 变换设计法

从 s 平面映射到 z 平面三种常用的方法：

- 冲激响应不变法：从时域的角度出发进行映射；
- 双线性不变法：从频域角度出发进行映射；
- *匹配 z 变换法：频域直接映射。

8.1 冲激响应不变法

对具有传递函数 $H(s)$ 的模拟滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ ，以周期 T 采样得到离散序列 $h(nT)$ ，用 $h(nT)$ 作为数字滤波器的冲激响应 $h(n)$ 。



s 变换到 z 变换的标准变换，其中以冲激响应 $h(n)$ 作为中间变量，且保持不变，因此称为**冲激响应不变法**。

■ 拉氏变换和z变换的数学关系

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) \delta(t - nT)$$

代入, 得

$$H(s) = \int_{t=0}^{\infty} h(t) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-nsT}$$

拉氏变换

令 $z = e^{sT}$, 得

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n}, H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

z变换

■ 推导冲激响应不变法

设模拟滤波器的传递函数 $H(s)$ 是 s 的有理函数, 分母阶次高于分子阶次 ($M < N$), 且只有单阶极点 s_{pk} ($k=1,2,\dots,N$), $H(s)$ 可表示为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M c_k s^k}{\sum_{k=0}^N d_k s^k} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

则 $H(s)$ 的反变换 $h(t)$ 可以写成

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{L\text{变换}} \frac{1}{s+a} \rightarrow h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t}, t \geq 0$$

A_k 可通过留数定理或者多项式变换得到

对 $h(t)$ 等间隔 T 采样, 得到

$$h(n) = h(t) \Big|_{t=nT} = h(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}nT} u(n)$$

(接上页)

对离散序列 $h(n)$ 进行 z 变换, 得到数字滤波器的系统函数 $H(z)$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk}T} z^{-1}} \quad \leftarrow a^n u(n) \xrightarrow{z\text{变换}} \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

对比 $H(s)$ 和 $H(z)$ 的表达式

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

可得以下对应关系

$$\frac{1}{s - s_{pk}} \Leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{s_{pk}T} z^{-1}}$$

该式反映出 s 平面和 z 平面极点的对应关系, 零点之间无对应

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

拉氏反变换

$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk} t}, t \geq 0$$

频域关系?

等间隔 T 采样

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk} T} z^{-1}}$$

 z 变换

$$h(n) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk} nT} u(n)$$

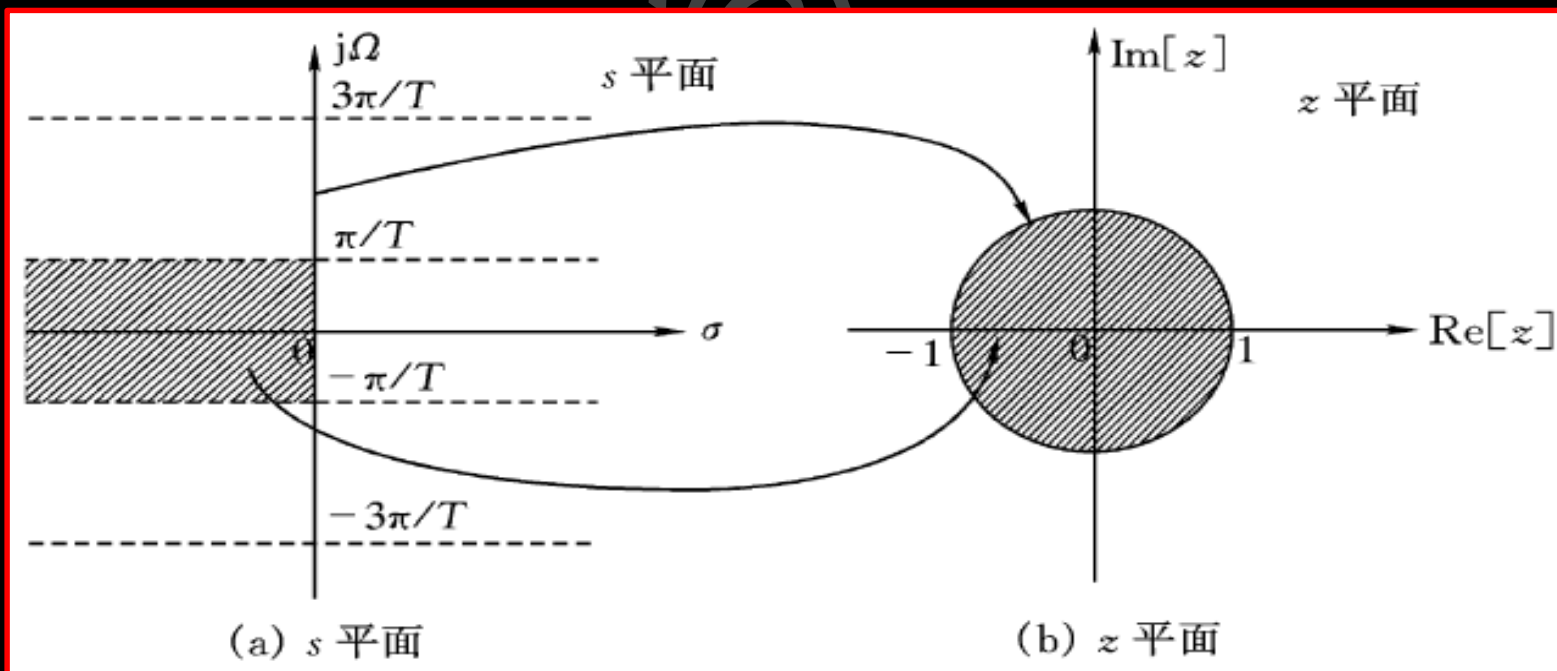
由第1章时域信号采样导致频谱周期延拓的表达式(1.80)类比可知

$$H(z) \Big|_{z=e^{st}} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H\left(s - j \frac{2\pi m}{T}\right)$$

■ 分析:

- **s 平面和 z 平面的对应关系:** 上式表明将模拟信号 $h(t)$ 的拉氏变换在 s 平面上沿虚轴按照周期 $\Omega_s = 2\pi/T$ 延拓后, 再按照 $z = e^{st}$ 的映射关系, 映射到 z 平面上, 就得到 $H(z)$, 如下图所示

$$\begin{cases} z = re^{j\omega} \\ s = \sigma + j\Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \omega = \Omega T \end{cases}$$



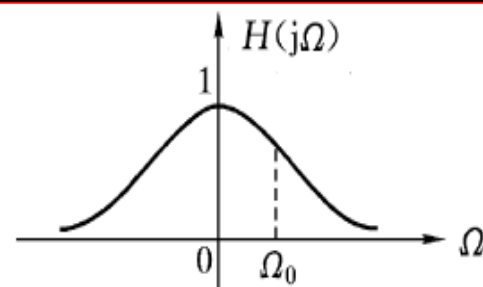
□ 混叠现象:

数字滤波器与模拟滤波器频响之间的关系

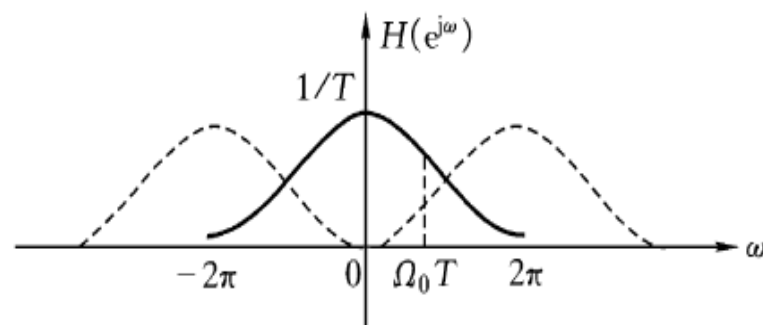
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H\left(j\Omega - j\frac{2\pi m}{T}\right)$$

如果模拟滤波器是带限的, 且最高频率满足 $\Omega_0 < \pi/T$, 则可以避免混叠; 此时, 数字滤波器的频率响应可写为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H(j\Omega) = \frac{1}{T} H\left(j\frac{\omega}{T}\right), |\omega| < \omega$$



(a) 模拟滤波器频率特性



(b) 数字滤波器频率特性

图 8.2 冲激响应不变设计法产生的频率混叠现象

二者由频率轴的线性关系 $\omega = \Omega T$ 联系起来

例8.1 设一模拟滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$$

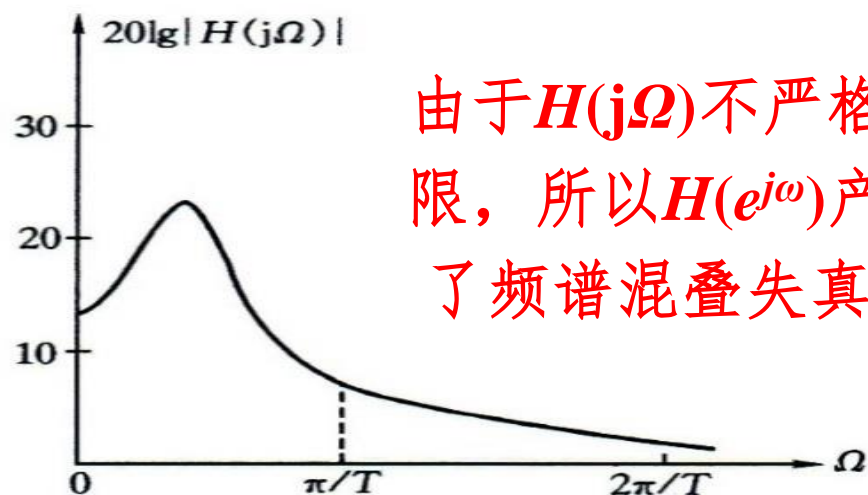
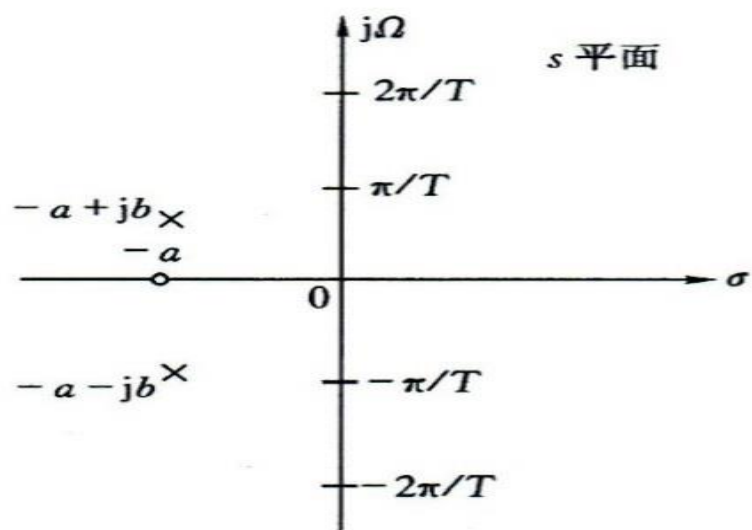
利用冲激响应不变法设计数字滤波器的系统函数，已知时域采样周期为 T 。

解：

模拟滤波器 $H(s)$ 展开 $H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s + a + jb} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + a - jb}$

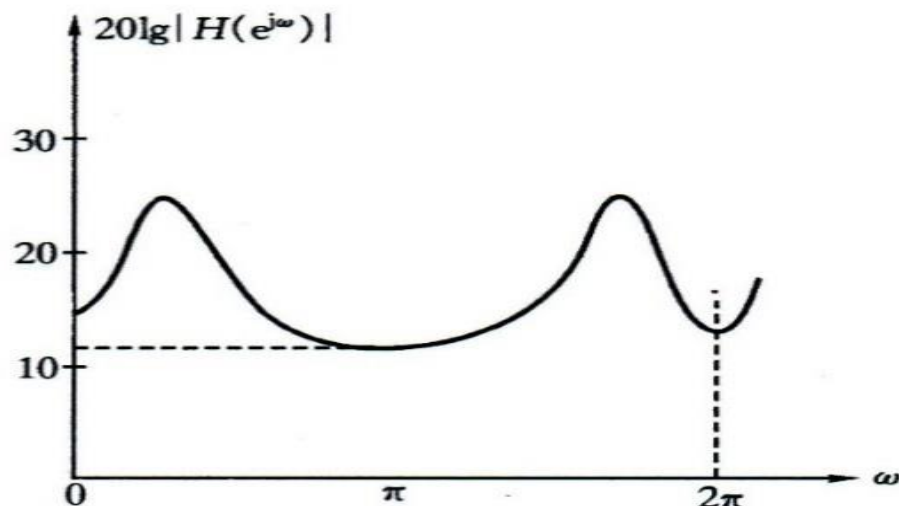
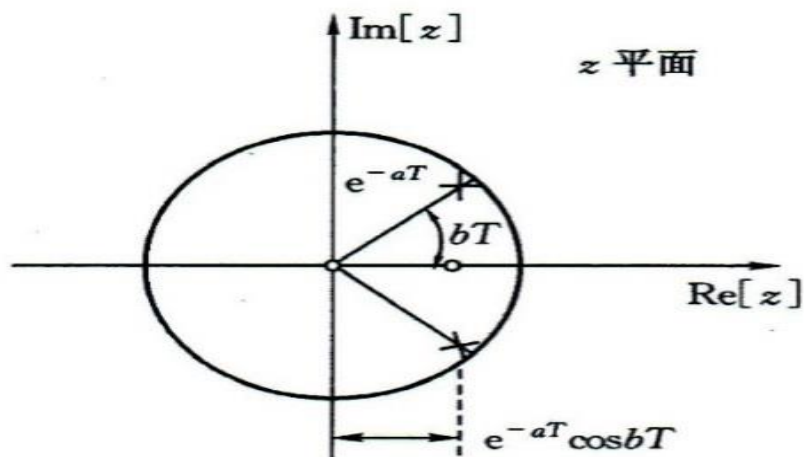
数字模拟滤波器 $H(z)$
$$H(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{-jbT} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-aT} e^{jbT} z^{-1}}$$

$$= \frac{z(z - e^{-aT} \cos bT)}{(z - e^{-aT} e^{-jbT})(z - e^{-aT} e^{jbT})}$$



由于 $H(j\Omega)$ 不严格带
限，所以 $H(e^{j\omega})$ 产生
了频谱混叠失真。

(a) 模拟滤波器的极-零点分布图和频率响应



(b) 采样后得到的离散时间系统的极-零点图和频率响应

图 8.3 例 8.1 的二阶模拟滤波器与其离散时间系统之间频域特性的对应关系

■ 冲激响应不变法特点:

□ 极点数相同;

□ 模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间呈线性关系 $\omega = \Omega T$; 数字滤波器的单位脉冲响应完全模仿模拟滤波器的单位冲激响应, **时域逼近良好**;

□ 如果模拟滤波器的频率响应不是严格限带, 该方法得到数字滤波器在**频域出现混叠现象**; 不宜用于设计高通和带阻数字滤波器 (高频部分会发生混叠), 一般仅适合低通和带通数字滤波器的设计。

8.1.2 双线性变换法

■ 基本思想

从频域出发，直接使数字滤波器的频域响应 $|H(e^{j\omega})|$ ，逼近模拟滤波器的频域响应 $|H(j\Omega)|$ ，进而求出 $H(z)$ 。

脉冲响应不变法的主要缺点是产生频率响应的混叠失真。这是因为从 s 平面到 z 平面是多值的映射关系 $z = e^{st}$ 所造成的。为了克服这一缺点，需要使 s 平面与 z 平面建立一一对应的映射关系，即先将求出的 $s=f(z)$ ，然后带入 $H(s)$ 得到 $H(z)$ ，从而在 s 平面和 z 平面建立一一对应的单值关系，从而消除了频谱混叠问题。

■ 双线性变换法的推导：寻找——对应的函数 $s=f(z)$

考虑模拟滤波器的传输函数 $H(s)$ 的部分分式展开

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M c_k s^k}{\sum_{k=0}^N d_k s^k} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}}, M < N$$

以其中一项为例，即

$$H(s) = \frac{A}{s - s_p}$$

$$\frac{df(t)}{dt} \Rightarrow sF(s)$$

该频域传递函数对应一阶微分方程（参见拉氏变换的微分性质）

$$y'(t) - s_p y(t) = Ax(t)$$

(接下页)

对模拟滤波器的输入 $x(t)$ 和 $y(t)$ 采用如下方式进行离散化

$$y'(t) = \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \quad y(t) = \frac{y(n) + y(n-1)}{2} \quad x(t) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$$

得到近似描述该模拟滤波器的差分方程

$$\frac{1}{T} [y(n) - y(n-1)] - \frac{s_p}{2} [y(n) + y(n-1)] = \frac{A}{2} [x(n) + x(n-1)]$$

对上式两边进行 z 变换, 得到

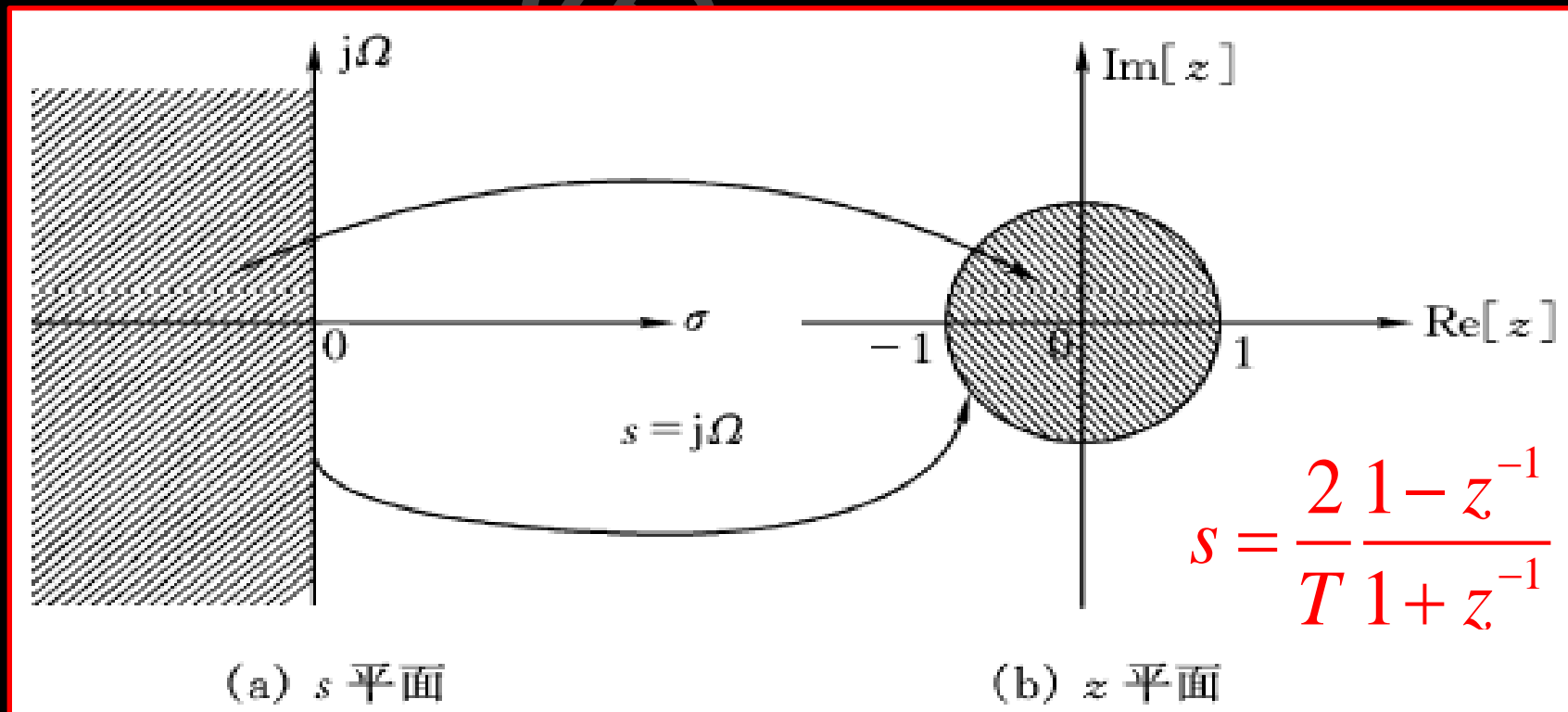
$$H(z) = \frac{A}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} - s_p} \quad \xleftarrow{\text{比较}} \quad H(s) = \frac{A}{s - s_p}$$

即得**双线性变换**(s - z)的基本关系 (单值映射关系)

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \text{ or } z = \frac{2/T + s}{2/T - s}$$

■ 双线性变换的映射关系图示

- (1) s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆上;
- (2) 位于 s 左半平面的极点映射到 z 平面的单位圆内, 因此不改变滤波器的稳定性;
- (3) **回顾:** 冲激响应不变法将 s 平条带区域的左半部分映射到 z 平面的单位圆内。



■ 双线性变换中模拟频率 Ω 与数字频率 ω 的关系

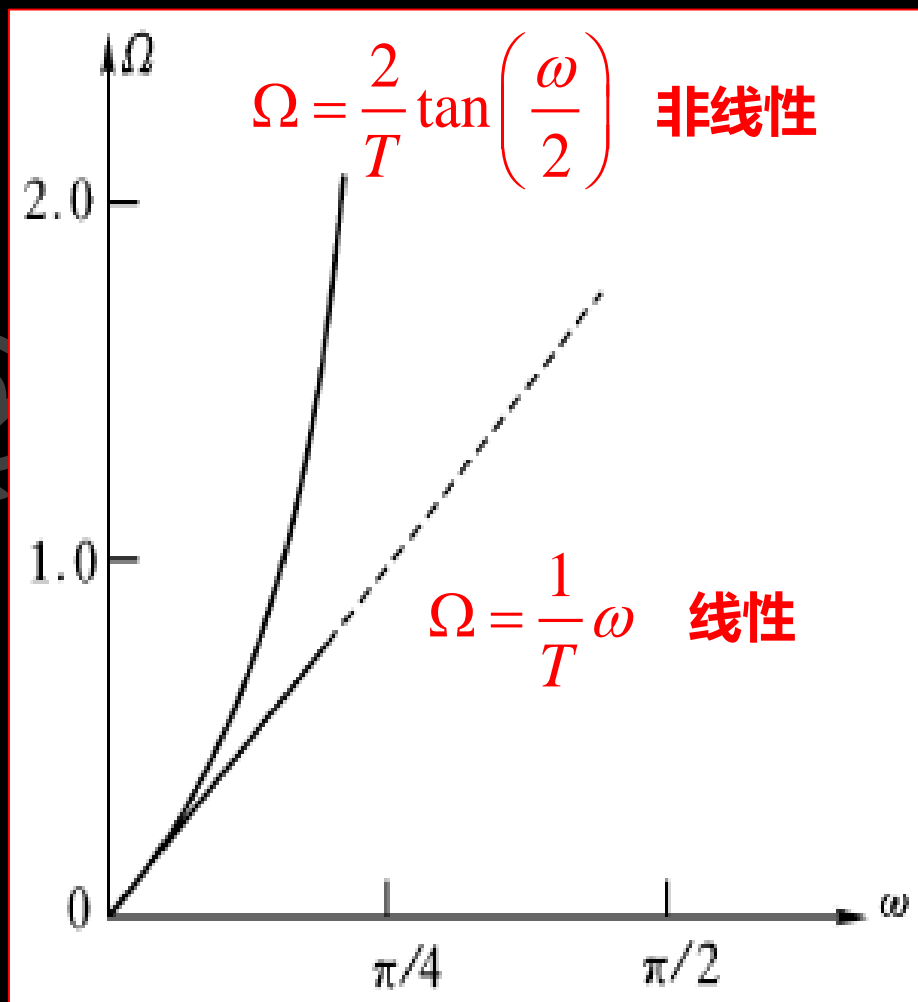
把 $z = e^{j\omega}$ 带入双线性变换

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = j\Omega$$

即 s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆

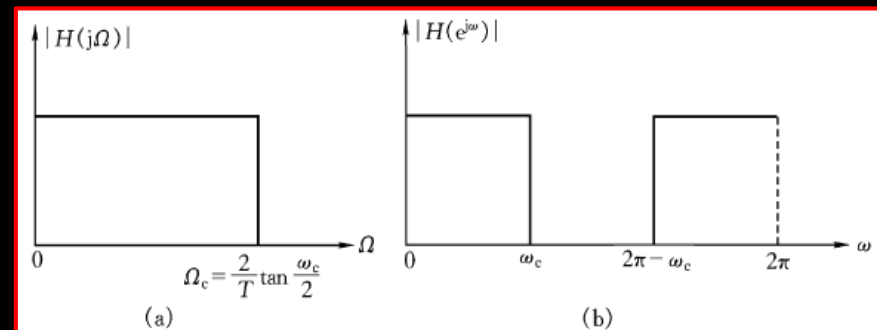
进一步展开上式

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{2}{jT} \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$



■ 双线性变换的特点

- 避免了频率混叠现象
- 模拟滤波器与数字滤波器对应的频率关系发生了畸变，不再是线性关系，这造成了**滤波器相位的非线性变化**



- 在低频段 $\omega \leq \pi/8$ ，滤波器呈近似线性关系，可直接应用于低通滤波器设计
- 大多数滤波器的幅频响应具有分段恒定常数的特性，在通带内可近似视为线性关系，只是截止频率、过渡带等位置发生了变化，可事先通过**预畸变**的方法进行修正，然后再采用双线性变换法设计所希望的滤波器。

■ 频率预畸变方法

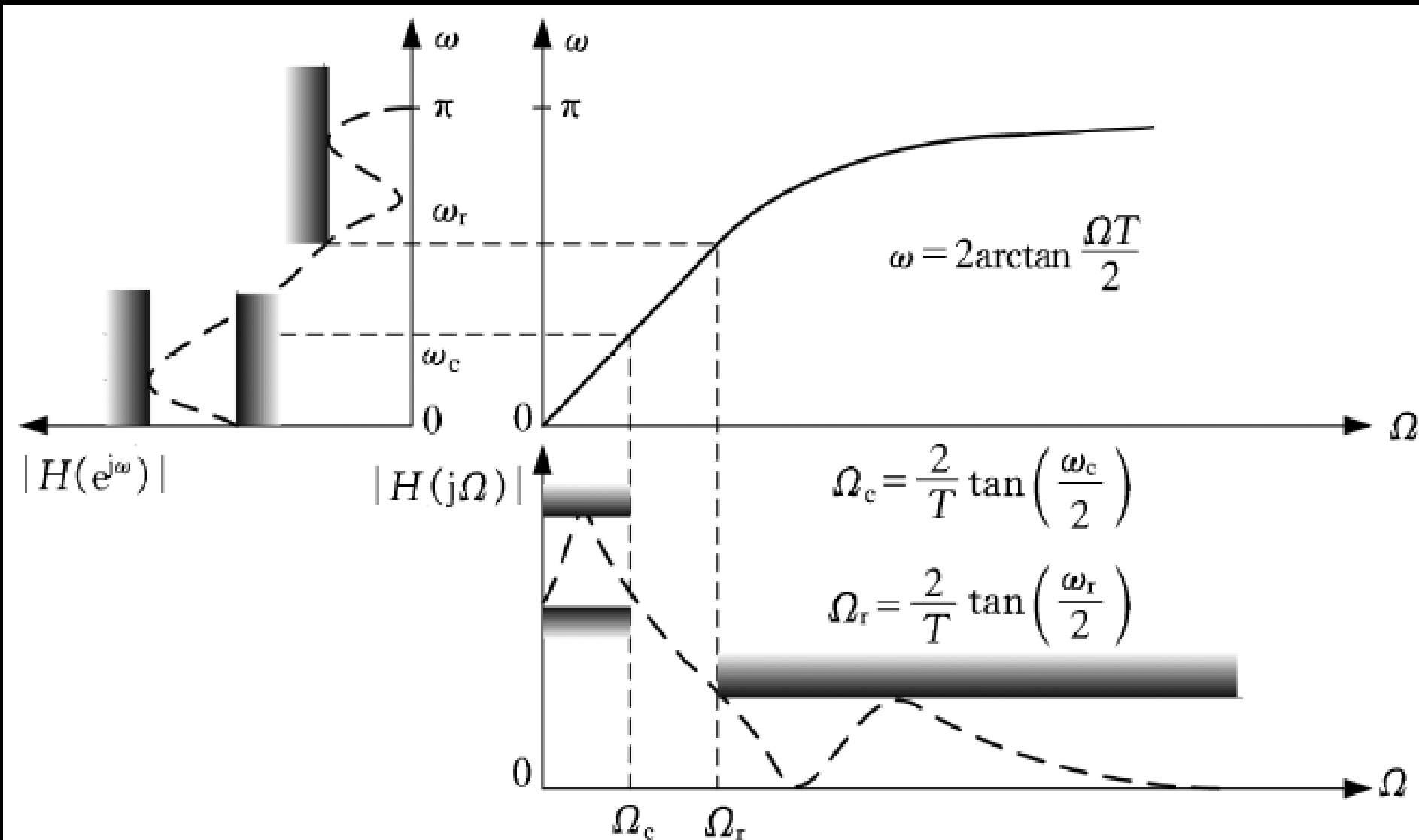
- 对所设计数字滤波器的截止频率 ω_c ，按下式进行频率预畸变，确定模拟滤波器的频率，然后通过双线性变换正好映射到所需的频率位置上。

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

- 将预畸变后的频率代入模拟滤波器 $H(s)$ ，最后求得数字滤波器的系统函数

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

频率预畸变方法



举例：巴特沃思模拟低通滤波器的系统函数如下，采用双线性变换法设计一个一阶数字低通滤波器，3dB截止频率为 $\omega_c=0.25\pi$ 。

$$H(s) = \frac{1}{1 + s/\Omega_c}$$

解：确定巴特沃思模拟低通滤波器的截止频率 Ω_c ，如下

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{0.25\pi}{2}\right) = \frac{0.828}{T}$$

则模拟滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{1}{1 + s/\Omega_c} = \frac{1}{1 + sT/0.828}$$

将双线性变换法应用于模拟滤波器

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}}} = 0.2920 \frac{1+z^{-1}}{1-0.4159z^{-1}}$$

■ 常用模拟低通滤波器特性

- 模拟滤波器研究较早，理论已经十分成熟，且有若干典型的模拟滤波器供我们选择，如巴特沃斯(Butterworth)滤波器、切比雪夫(Chebyshev)滤波器、椭圆(Ellipse)滤波器等，这些滤波器都有严格的设计公式、现成的曲线和图表供设计人员使用，利用这些现有技术来解决数字滤波器的设计问题；
- 采用这种方法时，先要设计一个合适的模拟滤波器，然后将它转换成满足给定指标的数字滤波器；
- 这种方法适合于设计幅频特性比较规则的滤波器，例如低通、高通、带通、带阻等。

■ 巴特沃斯 (Butterworth) 模拟低通滤波器

幅度函数平方

$$\left| H_a(j\Omega) \right|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

注意:

(1) N : 滤波器阶数 (注意: 1阶巴特沃斯模拟低通滤波器的幅度函数的平方为二次);

(2) Ω_c : 特指通带衰减为 $\delta_1=3\text{dB}$ 的通带截止频率, 即

$$\left| H_a(j\Omega_c) \right|^2 = 1/2 \quad \delta_1 = 20\lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_c)} \right| = 3\text{dB}$$

(3) Ω_s : 阻带截止频率, 对应阻带最小衰减 δ_2

■ 巴特沃斯 (Butterworth) 模拟低通滤波器

幅度函数平方

$$\left| H_a(j\Omega) \right|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

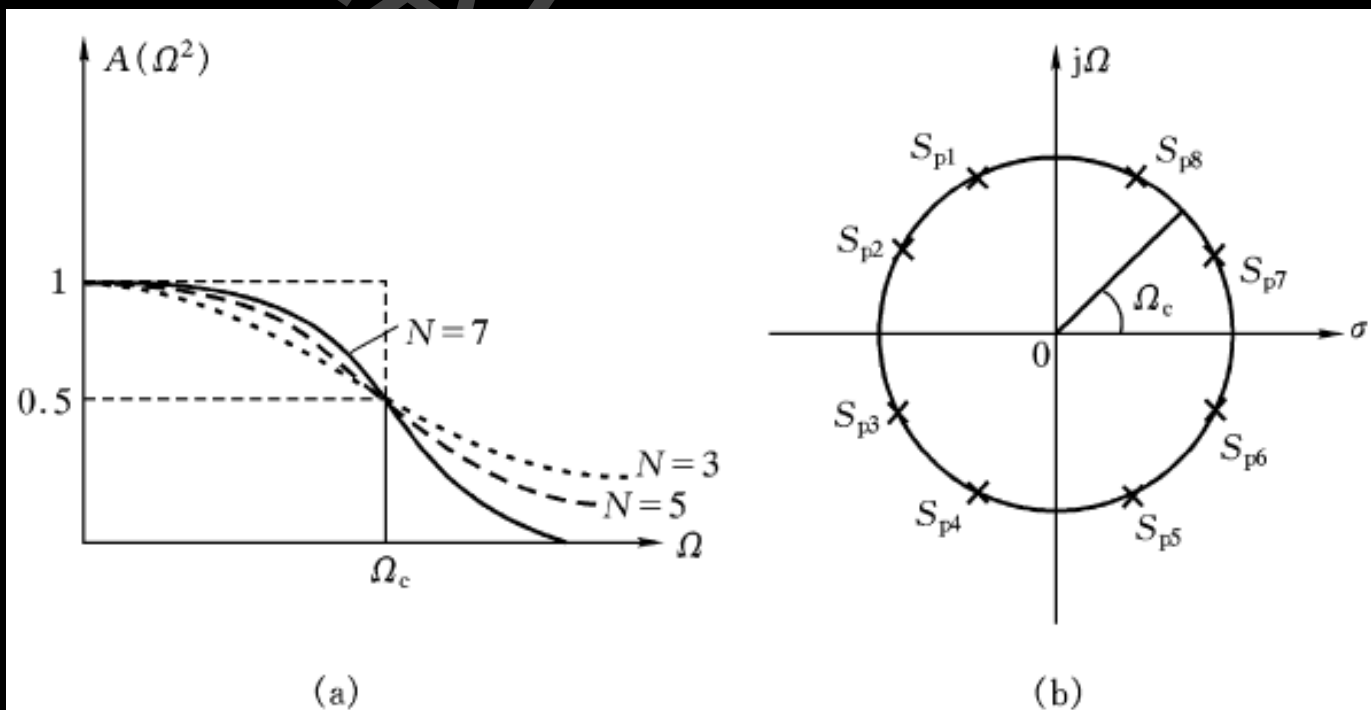


图 B.1 巴特沃斯低通滤波器的幅度特性和 $N=4$ 时的极点分布

■ 巴特沃斯 (Butterworth) 模拟低通滤波器系统函数 (查表)

系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_Ns^N}$$

归一化 ($\Omega_c = 1$)
系统函数

$$H_{an}(s) = \frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_Ns^N}$$

$$s = \frac{s}{\Omega_c}$$

表 B.1 低阶巴特沃斯滤波器的传递函数 $H(s)$

阶次	传递函数 $H(s)$
1	$\Omega_c / (s + \Omega_c)$
2	$\Omega_c^2 / (s^2 + \sqrt{2}\Omega_c s + \Omega_c^2)$
3	$\Omega_c^3 / (s^3 + 2\Omega_c s^2 + 2\Omega_c^2 s + \Omega_c^3)$
4	$\Omega_c^4 / (s^4 + 2.613\Omega_c s^2 + 3.414\Omega_c^2 s^2 + 2.613\Omega_c^3 s + \Omega_c^4)$
5	$\Omega_c^5 / (s^5 + 3.236\Omega_c s^4 + 4.236\Omega_c^2 s^3 + 4.236\Omega_c^3 s^2 + 3.236\Omega_c^4 s + \Omega_c^5)$

■ 低通滤波器的设计步骤

□ 给定技术指标：通带截止频率 Ω_p （**不一定是3dB**），通带衰减 δ_1 ；阻带截止频率 Ω_s ，阻带衰减 δ_2

□ 根据技术指标确定滤波器阶数 N 和3dB通带截止频率 Ω_c

$$\delta_1 = -20 \lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_p)} \right|$$

$$\delta_2 = -20 \lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_s)} \right|$$

$$\left| H_a(j\Omega_p) \right|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p / \Omega_c)^{2N}}$$

$$\left| H_a(j\Omega_s) \right|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}}$$

$$N \geq \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

其中：

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}, k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_2} - 1}{10^{0.1\delta_1} - 1}}$$

■ 低通滤波器的设计步骤

□ 给定技术指标：通带截止频率 Ω_p （**不一定是3dB**），通带衰减 δ_1 ；阻带截止频率 Ω_s ，阻带衰减 δ_2

□ 根据技术指标确定滤波器阶数 N 和3dB通带截止频率 Ω_c

$$\delta_1 = -20 \lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_p)} \right|$$

$$\delta_2 = -20 \lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_s)} \right|$$

$$\left| H_a(j\Omega_p) \right|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}}$$

$$\left| H_a(j\Omega_s) \right|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}}$$

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\delta_1} - 1 \right)^{-1/2N}$$

$$\Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\delta_2} - 1 \right)^{-1/2N}$$

用 Ω_p 计算时阻带指标有富裕；
用 Ω_s 计算时通带指标富裕；或
用二者的平均值计算。

举例：设计巴特沃斯数字低通滤波器，要求在频率低于 0.2π rad 的通带内幅度特性下降小于 1dB。在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内，衰减大于 15dB，分别用冲激响应不变法和双线性变换法。

解：

□用冲激响应不变法设计

(1) 数字滤波器的技术指标

$$\omega_p = 0.2\pi, \delta_1 = 1\text{dB}; \omega_s = 0.3\pi, \delta_2 = 15\text{dB}$$

(2) 模拟滤波器的技术指标：选 $T=1\text{s}$

$$\Omega_p = \omega_p / T = 0.2\pi \text{ rad/s}, \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \omega_s / T = 0.3\pi \text{ rad/s}, \delta_2 = 15\text{dB}$$

采样周期 T 在滤波器设计过程中保持一致即可

(3) 设计巴特沃斯模拟低通滤波器

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.5 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_2} - 1}{10^{0.1\delta_1} - 1}} = 10.8751$$

滤波器阶数 $N = \lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.886 \approx 6$

3dB通带截止频率 $\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\delta_1} - 1\right)^{-1/2N} = 0.7032$

(用通带技术指标, 使阻带特性较好, 改善混迭失真)

查表得模拟滤波器归一化系统函数

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

令 $s = s/\Omega_c$, 去归一化得

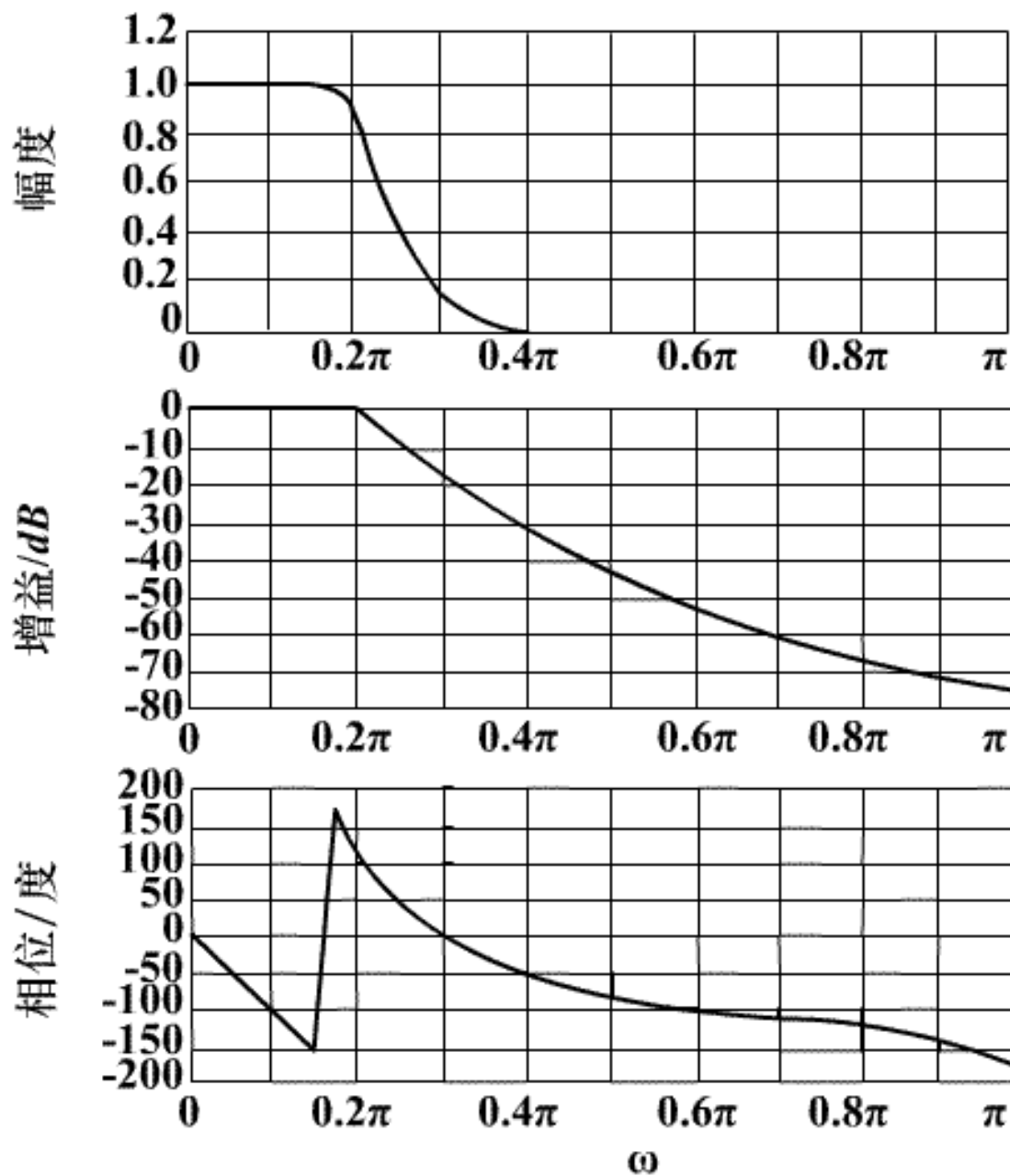
$$H_a(s) = \frac{0.1209}{s^6 + 2.716s^5 + 3.691s^4 + 3.179s^3 + 1.825s^2 + 0.121s + 0.1209}$$

(4) 将 $H_a(s)$ 展开成部分分式, 并求得数字滤波器传递函数 $H(z)$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

冲激响应不变法

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 0.1297z^{-1} + 0.6949z^{-1}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8558 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$



□用双线性变换法设计

(1) 数字滤波器的技术指标

$$\omega_p = 0.2\pi, \delta_1 = 1\text{dB}; \omega_s = 0.3\pi, \delta_2 = 15\text{dB}$$

(2) 考虑预畸变的模拟滤波器的技术指标: 选 $T=1\text{s}$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = 0.65 \text{ rad/s}, \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2} = 1.019 \text{ rad/s}, \delta_2 = 15\text{dB}$$

(3) 设计巴特沃斯模拟低通滤波器

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.568 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_2} - 1}{10^{0.1\delta_1} - 1}} = 10.8751$$

滤波器阶数 $N = \lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.306 \approx 6$

3dB通带截止频率 $\Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\delta_2} - 1\right)^{-1/2N} = 0.7662$

(用阻带技术指标, 使通带特性较好, 因无混迭问题)

(接上页)

查表得模拟滤波器归一化系统函数

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

令 $s = s/\Omega_c$, 去归一化得

$$H_a(s) = \frac{0.1209}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.48s + 0.5871)}$$

(4) 采用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$

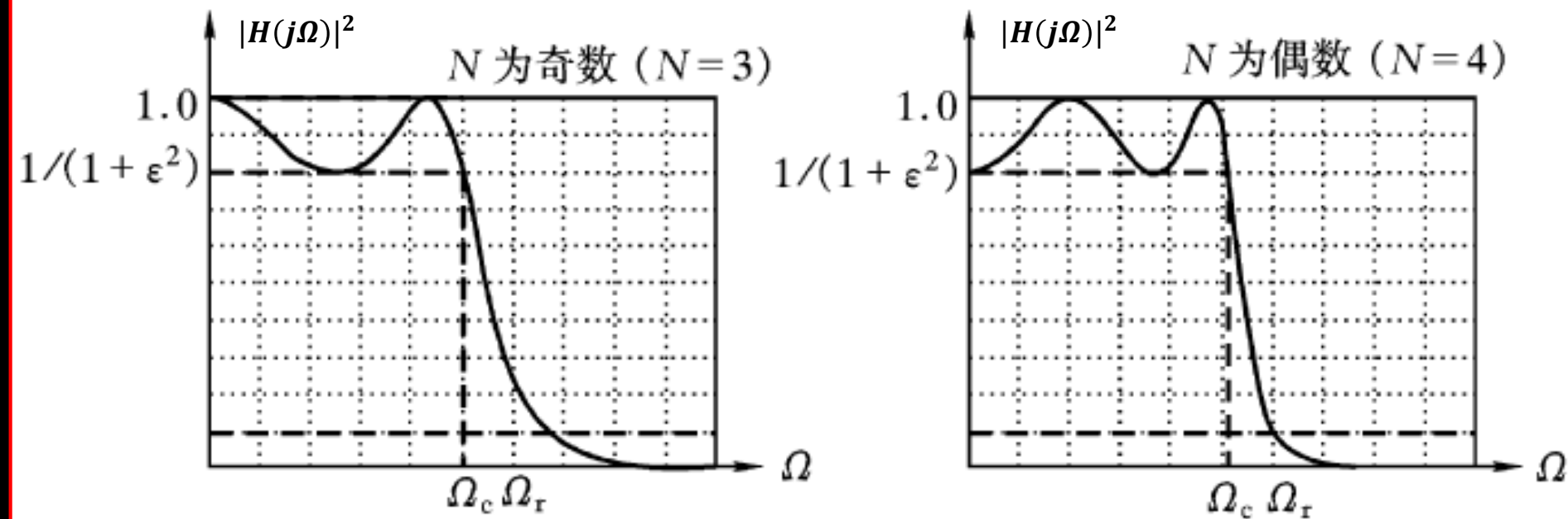
$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{1}{(1 - 1.268z^{-1} + 0.7051z^{-2})} \cdot \frac{1}{(1 - 1.01z^{-1} + 0.358z^{-2})} \cdot \frac{1}{(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$

■ 切比雪夫 (Chebyshev) I型模拟低通滤波器

幅度函数平方

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)}$$

N 是滤波器阶数； ε 表示通带波纹系数 ($0 < \varepsilon < 1$)，值越大等波纹越大； Ω_p (或 Ω_c)是通带截止频率 (不要求3dB, $\varepsilon=1$ 时是3dB)；。



■ 切比雪夫 (Chebyshev) I 型模拟低通滤波器

$T_N(x)$ 是切比雪夫多项式, 可通过查表 (工具书) 获得。

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ \vdots \\ T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x) \end{cases}$$

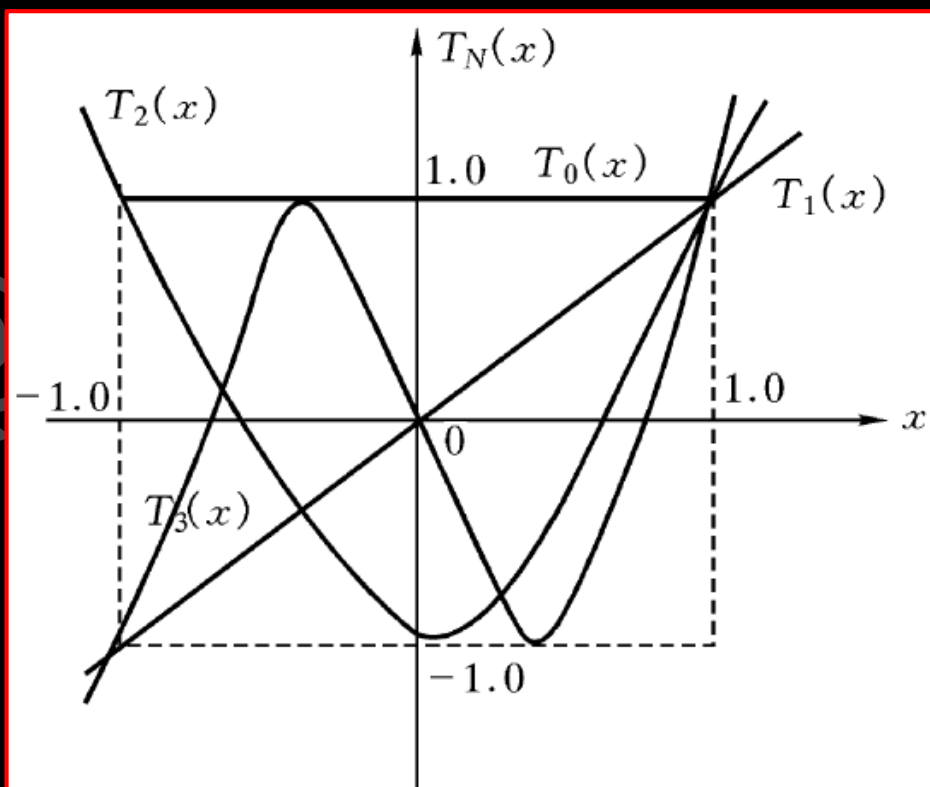


图 B.3 $T_N(x)$ 的图形

■ 切比雪夫滤波器的三个参数的计算

- 通带截止频率 Ω_p （不一定是3dB），通带衰减 δ_1 ；阻带截止频率 Ω_s ，阻带衰减 δ_2

$$\delta_1 = 20\lg \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}}{|H_a(j\Omega_p)|} = -20\lg |H_a(j\Omega_p)|$$

$$\delta_2 = 20\lg \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}}{|H_a(j\Omega_s)|} = -20\lg |H_a(j\Omega_s)|$$

- 通带等波纹系数 ε

$$|H_a(j\Omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{0.1\delta_1} - 1}$$

- 滤波器阶数 N ，等于通带内最大最小值的总数（推导略）

$$N \geq \frac{\lg \left[k_{sp} + \sqrt{k_{sp}^2 - 1} \right]}{\lg \left[\lambda_{sp} + \sqrt{\lambda_{sp}^2 - 1} \right]}$$

其中

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}, k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_2} - 1}{10^{0.1\delta_1} - 1}}$$

■ 切比雪夫 (Chebyshev) I型模拟低通滤波器系统函数 (查表)

系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_p^N}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_Ns^N}$$

归一化 ($\Omega_p = 1$)
系统函数

$$H_{an}(s) = \frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_Ns^N}$$

$$s = \frac{s}{\Omega_p}$$

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a. 1/2-dB 波纹 ($\epsilon=0.3493114, \epsilon^2=0.1220184$).										
1	2.8627752									
2	1.5162026	1.4256245								
3	0.7156938	1.5348954	1.2529130							
4	0.3790506	1.0254553	1.7168662	1.1973856						
5	0.1789234	0.7525181	1.3095747	1.9373675	1.1724909					
6	0.0947626	0.4323669	1.1718613	1.5897635	2.1718446	1.1591761				
7	0.0447309	0.2820722	0.7556511	1.6479029	1.8694079	2.4126510	1.1512176			
8	0.0236907	0.1525444	0.5735604	1.1485894	2.1840154	2.1492173	2.6567498	1.1460801		
9	0.0111827	0.0941198	0.3408193	0.9836199	1.6113880	2.7814990	2.4293297	2.9027337	1.1425705	
10	0.0059227	0.0492855	0.2372688	0.6269689	1.5274307	2.1442372	3.4409268	2.7097415	3.1498757	1.1400664

■ 低通滤波器的设计步骤

□ 给定技术指标：通带截止频率 Ω_p （不一定是3dB），通带衰减 δ_1 ；阻带截止频率 Ω_s ，阻带衰减 δ_2

□ 根据技术指标确定滤波器阶数 N 和通带波纹系数 ε

$$N \geq \frac{\lg \left[k_{sp} + \sqrt{k_{sp}^2 - 1} \right]}{\lg \left[\lambda_s + \sqrt{\lambda_s^2 - 1} \right]}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1R_p} - 1}$$

□ 查表得到模拟滤波器归一化系统函数 $H_{an}(s)$ ，令 $s = s/\Omega_c$ 去归一化得 $H_a(s)$

□ 将 $H_a(s)$ 变换成数字滤波器系统函数 $H(z)$

举例：用双线性变换法设计一个切比雪夫数字低通滤波器，要求在频率低于 0.2π rad的通带内幅度特性下降小于1dB，在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内，衰减大于15dB。

解：

(1) 数字滤波器的技术指标

$$\omega_p=0.2\pi, \delta_1=1\text{dB}; \omega_s=0.3\pi, \delta_2=15\text{dB}$$

(2) 数字滤波器的技术指标

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = 0.65 \text{ rad/s} \quad \Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2} = 1.019 \text{ rad/s}$$

(3) 设计切比雪夫模拟低通滤波器

$$\Omega_c = \Omega_p = 0.65 \text{ rad/s} \quad \varepsilon = \sqrt{10^{0.1\delta_1} - 1} = 0.5088$$

(接上页)

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_2} - 1}{10^{0.1\delta_1} - 1}} = 10.8751 \quad \lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 1.5677$$

滤波器阶数 $N \geq \frac{\lg \left[k_{sp} + \sqrt{k_{sp}^2 - 1} \right]}{\lg \left[\lambda_s + \sqrt{\lambda_s^2 - 1} \right]} = 3.0149 = 4$

查表得归一化系统函数

$$H_{an}(s) = \frac{0.2756}{0.2756 + 0.7426s + 1.4539s^2 + 0.9528s^3 + s^4}$$

去归一化

$$H_a(s) = \frac{0.04381}{(s^2 + 0.4378s + 0.1180)(s^2 + 0.1814s + 0.4166)}$$

(4) 将 $H_a(s)$ 转变成数字滤波器系统函数 $H(z)$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}}} = \frac{0.001836}{(1-1.4996z^{-1}+0.8482z^{-2})} \cdot \frac{(1+z^{-1})^4}{(1-1.5548z^{-1}+0.6493z^{-2})}$$

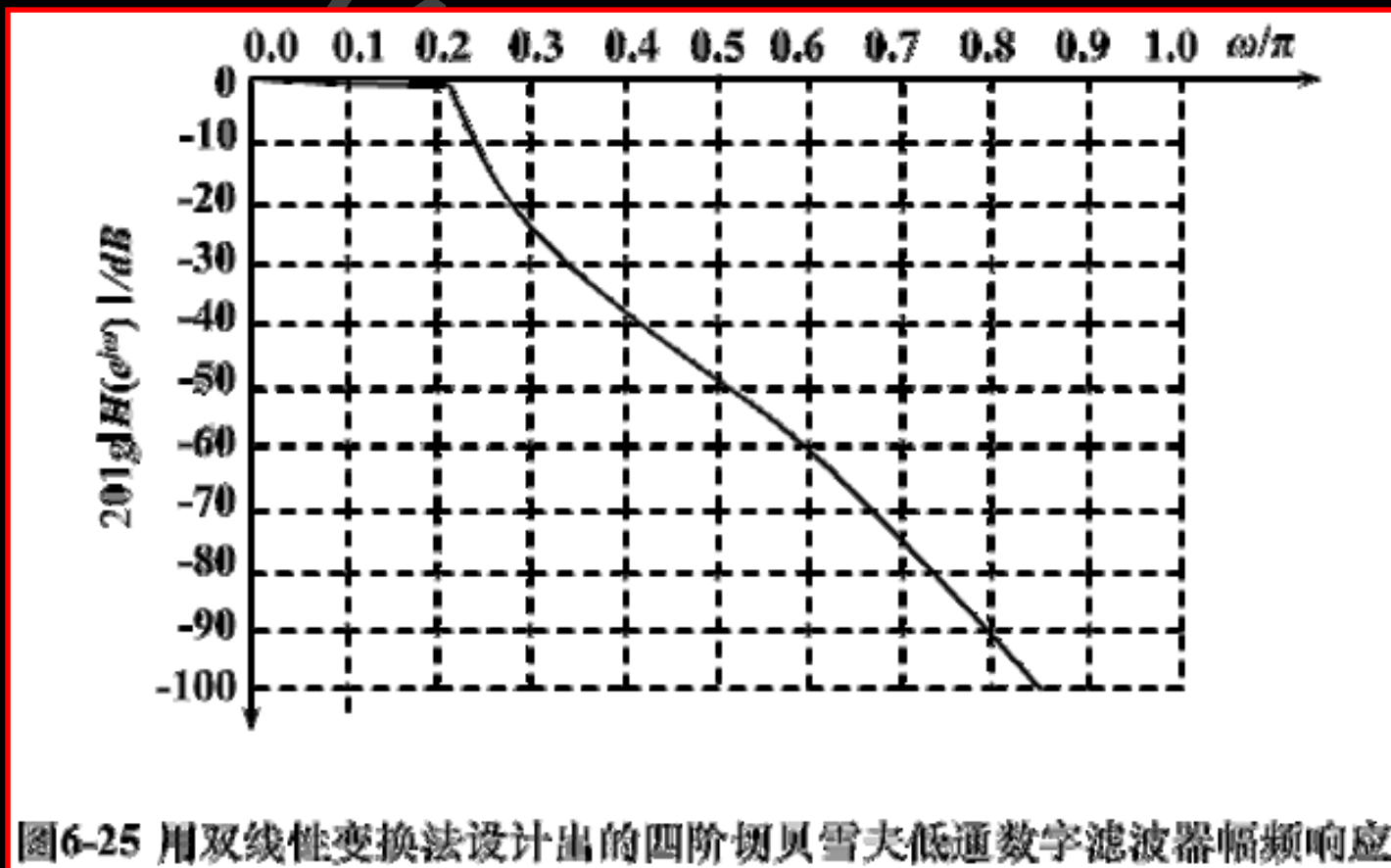
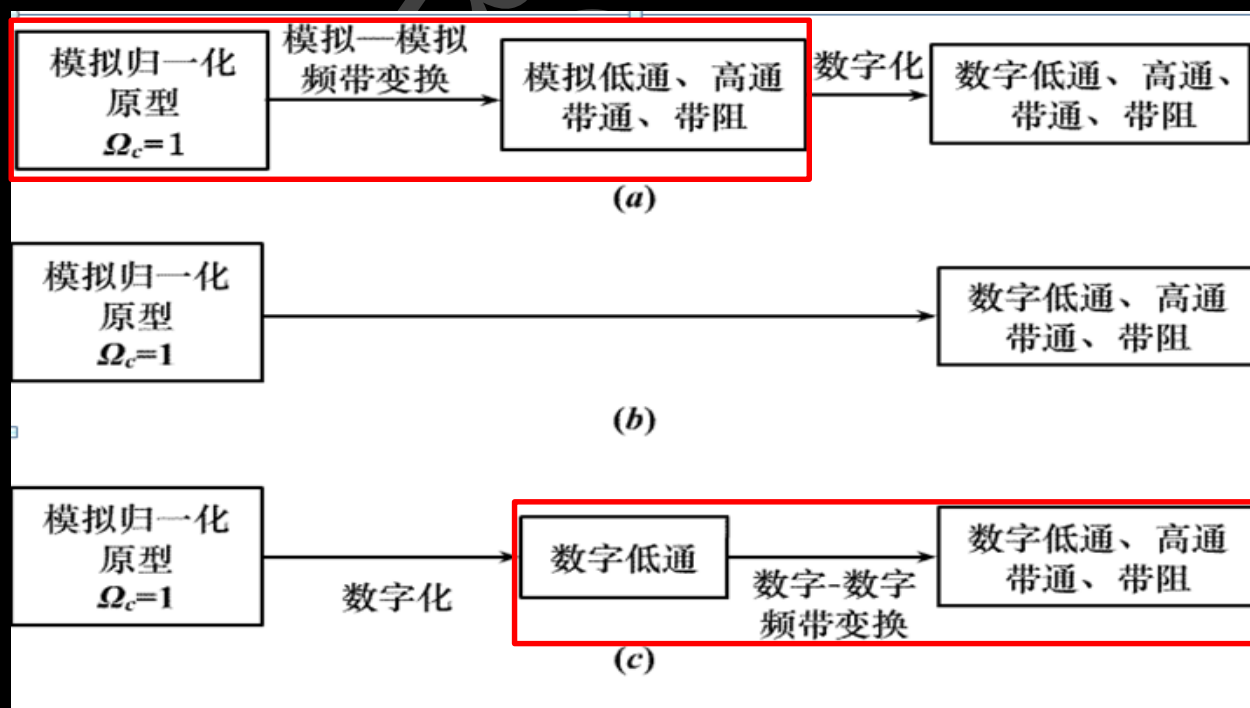


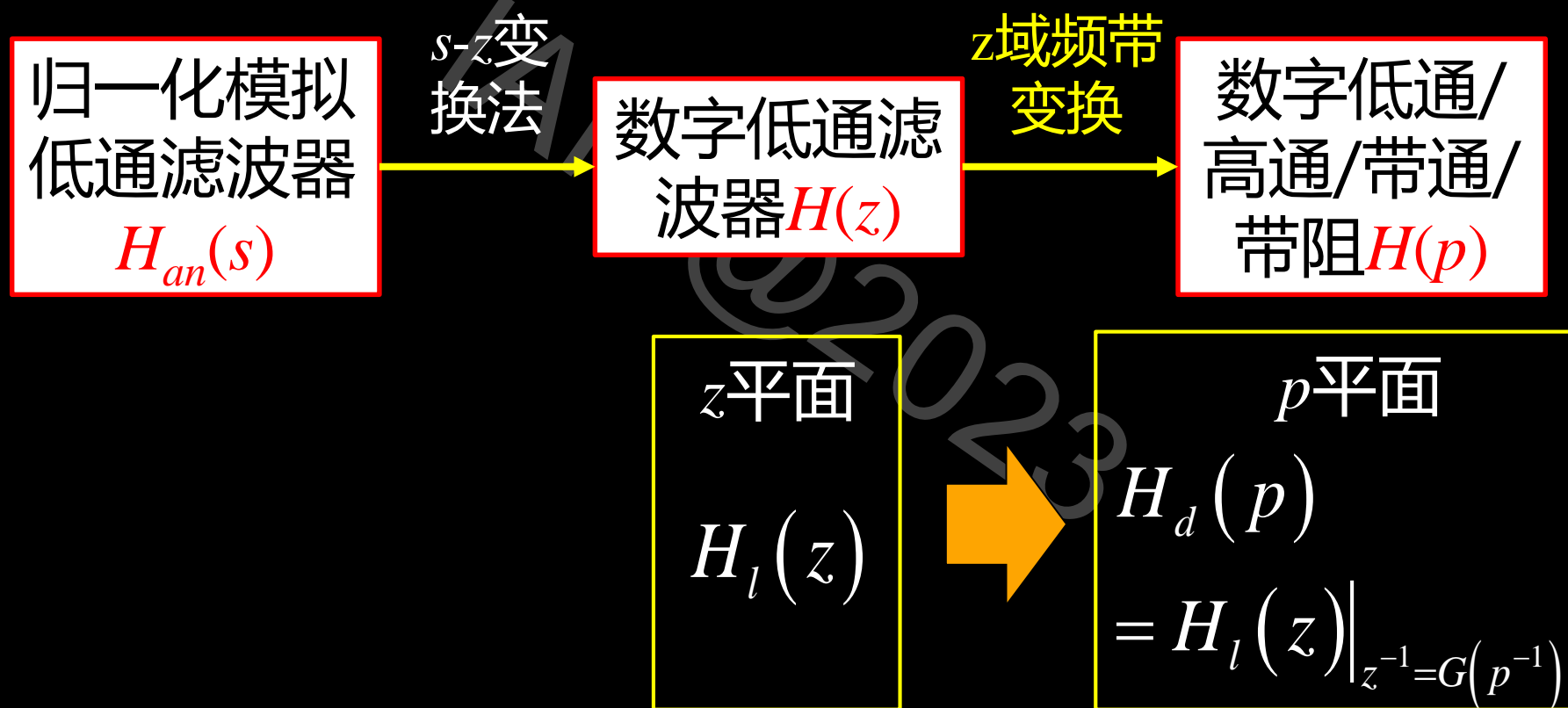
图6-25 用双线性变换法设计出的四阶切贝雪夫低通数字滤波器幅频响应

8.2 IIR滤波器的频率变换设计法

脉冲响应不变法和双线性变换法只能用于同类模拟-数字滤波器的变换，频率变换设计法可以将设计出的归一化的原型低通滤波器通过有理变换转换为低通、高通、带通与带阻滤波器，包括：**模拟频带变换**和**数字频带变换**。



8.2.1 数字频带变换设计法



■ 基本原理

$H_d(p)$ 也表示 z 平面，为区分符号

原型低通滤波器系统函数： $H_l(z)$

所希望的数字滤波器的系统函数： $H_d(p)$

如果能照导一种从 z 平面到 p 平面的映射变换关系，即

$$z^{-1} = f(p^{-1})$$

则可以从已知的 $H_l(z)$ 得到 $H_d(p)$ ，于是原型变换可表示为

$$H_d(p) = H_l(z) \Big|_{z^{-1} = f(p^{-1})}$$

实现

$$H_l(z) \xrightarrow{z^{-1}=f(p^{-1})} H_d(p)$$

z 平面

p 平面

需满足三个条件：

- **条件1：** 函数 $f(p^{-1})$ 必须是 p^{-1} 或 p 的有理函数；
- **条件2：** 希望变换以后的系统函数保持稳定性不变，因此要求 z 平面的单位圆内部必须映射为 p 的单位圆内部；
- **条件3：** 为使两个函数的频响满足一定的变换要求， z 的单位圆应映射到 p 的单位圆上。

令 θ 和 ω 分别是 z 平面和 p 平面上单位圆 $e^{j\theta}$ 和 $e^{j\omega}$ 上的频率变量, 为了使**条件3**成立, 必有

$$z^{-1} = e^{-j\theta} = f(p^{-1}) = f(e^{-j\omega}) = |f(e^{-j\omega})| e^{j \operatorname{arc}[f(e^{-j\omega})]}$$

两个频率变量满足 $f(p^{-1}) = 1, \theta = \operatorname{arc}[f(e^{-j\omega})]$

全通滤波器

$$f(p^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{p^{-1} - a_k^*}{1 - a_k p^{-1}}, |a_k| < 1$$

通过选择不同的 N 和 a_k 值, 实现低通到低通/高通/带通/带阻的不同映射。

回顾：N 阶数字全通滤波器

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \\
 &= \pm \frac{d_N + d_{N-1}z^{-1} + \dots + d_1z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + d_1z^{-1} + \dots + d_{N-1}z^{-(N-1)} + d_Nz^{-N}} \\
 &= \pm \frac{z^{-N}D(z^{-1})}{D(z)}
 \end{aligned}
 \quad 0 < |a| < 1$$

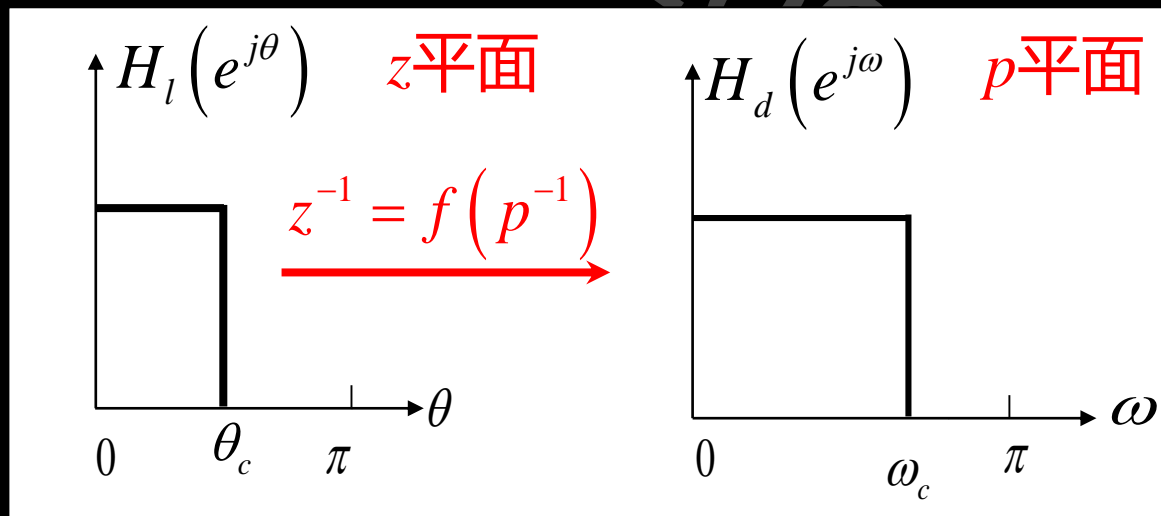
极点： $D(z)$ 的根 $z_p = re^{\pm j\omega}, r < 1$

零点： $D(z^{-1})$ 的根 $z_0 = 1/r e^{\pm j\omega}, r < 1$

■ 数字低通—数字低通

$H_l(z)$ 和 $H_d(p)$ 都是低通函数，但截止频率不相同（或者低通滤波器的带宽不同），因此当 z 平面的 θ 由 $0 \rightarrow \pi$ ， p 平面的 ω 也由 $0 \rightarrow \pi$ ，根据全通函数的性质，可确定全通函数的阶数 $N=1$ ，且必须满足两个边界条件： $f(1)=1$ 和 $f(-1)=-1$ ，满足该要求的映射函数为

$$z^{-1} = f(p^{-1}) = \frac{p^{-1} - a}{1 - ap^{-1}} \quad (\text{假设零极点为实数})$$



(接上页)

□ 将 $z = e^{j\theta}$ 和 $p = e^{j\omega}$ 代入 $z^{-1} = f(p^{-1})$, 整理即得

$$\omega = \arctan \left[\frac{(1-a^2)\sin\theta}{2a + (1+a^2)\cos\theta} \right]$$

(1) $a=0$ 时, $\omega_c = \theta_c$, 二者呈线性关系, 带宽不变;

(2) $a>0$ 时, $\omega_c < \theta_c$, 带宽变窄;

(2) $a<0$ 时, $\omega_c > \theta_c$, 带宽变宽;

□ 确定参数 a : 把 $\omega_c \rightarrow \theta_c$ 带入, 即得

$$a = \sin \left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2} \right) / \sin \left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2} \right)$$

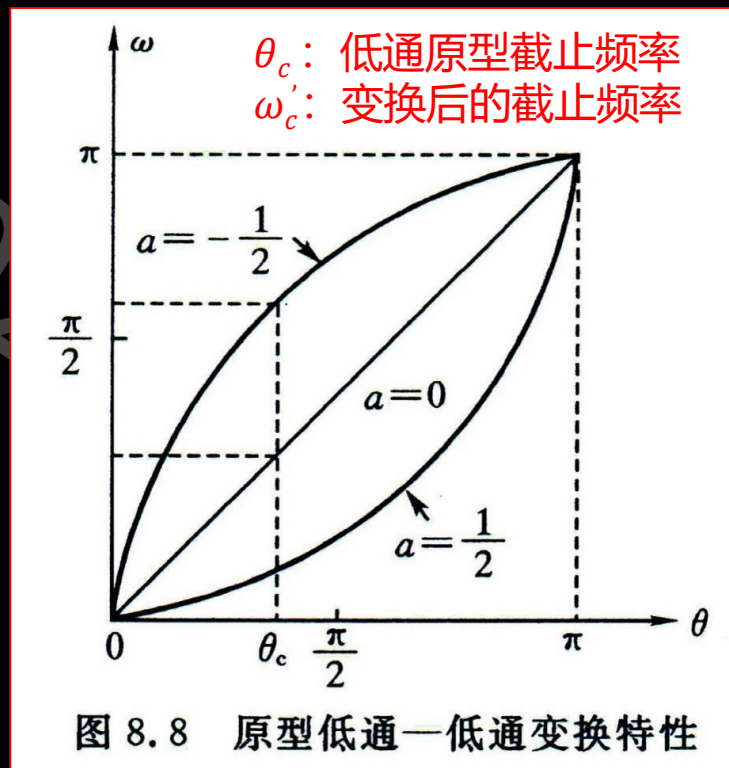


图 8.8 原型低通—低通变换特性

■ 数字低通—数字高通

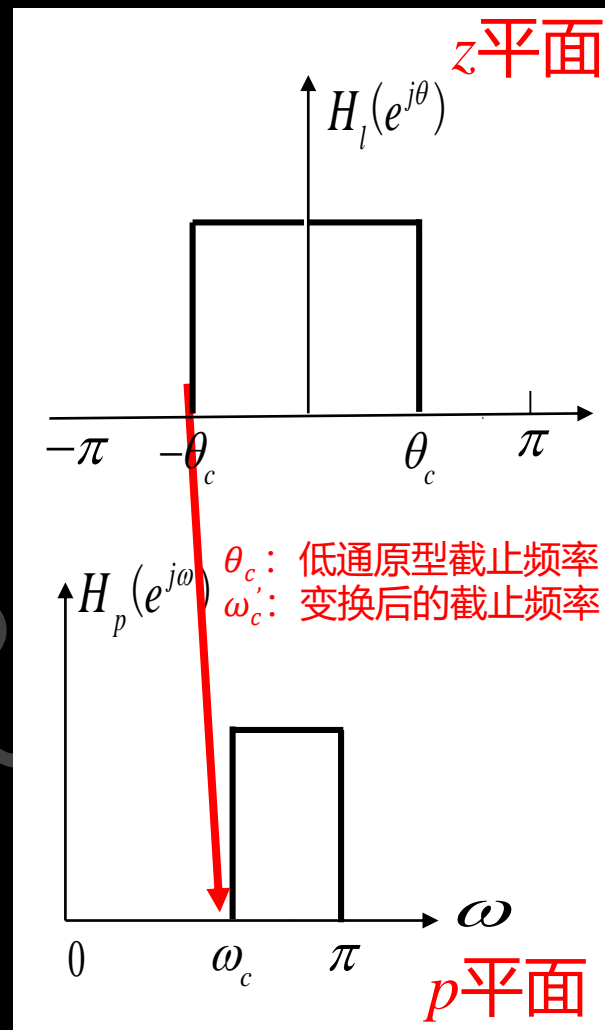
当 p 平面的 ω 由 $0 \rightarrow \pi$, z 平面的 θ 由 $-\pi \rightarrow 0$, 则有 $\omega_c \rightarrow -\theta_c$

在低通-低通变换中, 用 $-p$ 代替 p (平移 π 相位), 即得到低通-高通的变换关系:

$$z^{-1} = f(p^{-1}) = -\frac{p^{-1} + a}{1 + ap^{-1}}$$

确定参数 a : 把 $\omega_c \rightarrow -\theta_c$ 带入, 即得

$$a = -\cos\left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2}\right) / \cos\left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}\right)$$

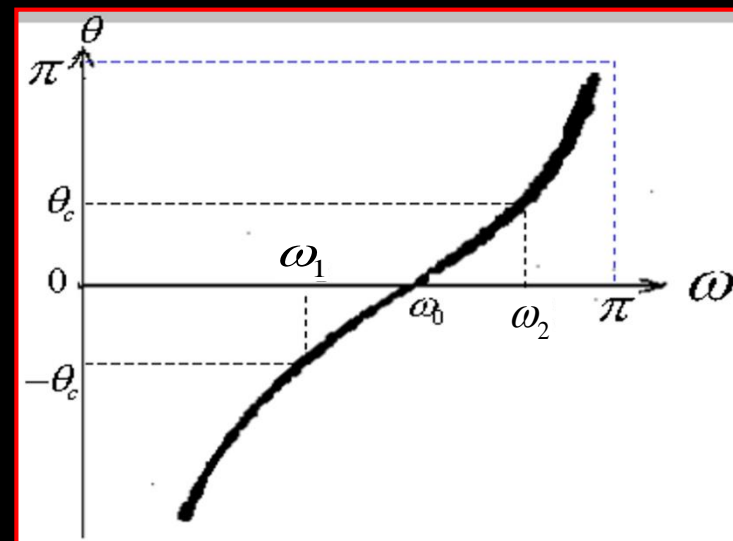


■ 数字低通—数字带通

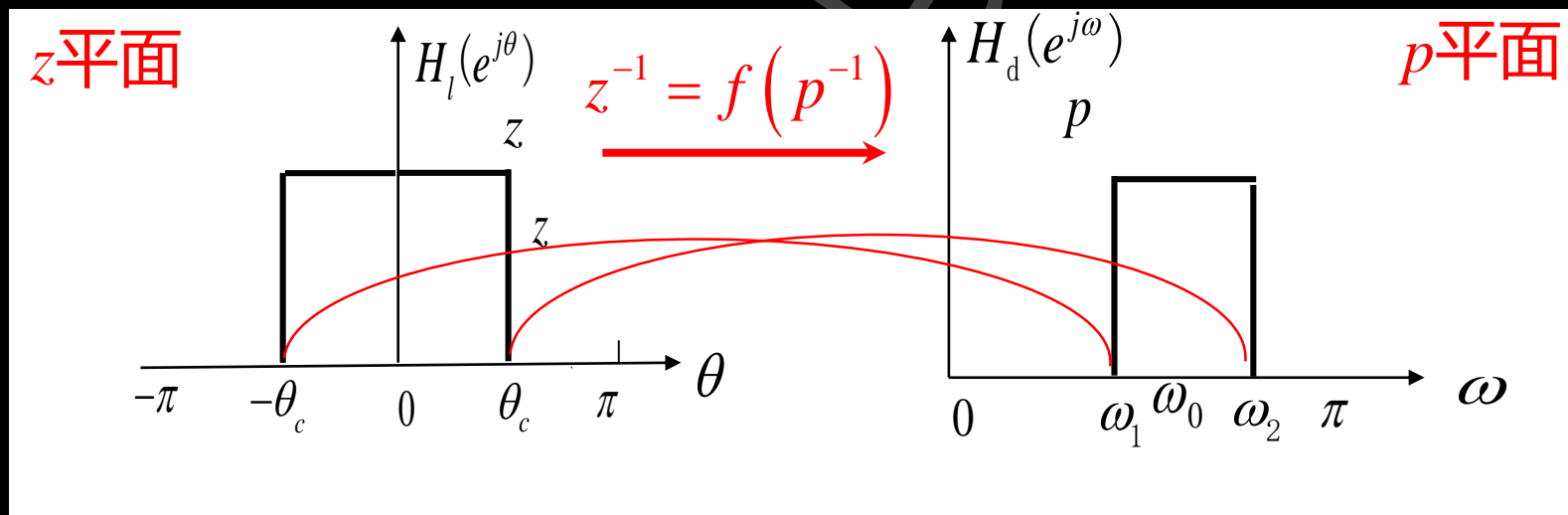
带通的上下截止频率为 ω_1 和 ω_2 ，中心频率定义为 $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$

□ 低通-带通变换把**通带**的中心频率 ω_0 映射到 $\theta=0$ ，则有

- 1) $\omega=0 \sim \omega_0 \rightarrow \theta=-\pi \sim 0$ ，因此 $\omega_1 \rightarrow -\theta_c$
- 2) $\omega=\omega_0 \sim \pi \rightarrow \theta=0 \sim \pi$ ，因此 $\omega_2 \rightarrow \theta_c$



低通-带通变换的频率关系



变换函数的确定

由于带通滤波器在 $\omega=0\sim 2\pi$ 内形成了两个通带，意味着原型低通滤波器的 θ 要在单位圆上旋转两圈，故令全通函数的阶次为 $N=2$ ，即

$$z^{-1} = f(p^{-1}) = \pm \frac{p^{-2} + d_1 p^{-1} + d_2}{d_2 p^{-2} + d_1 p^{-1} + 1}$$

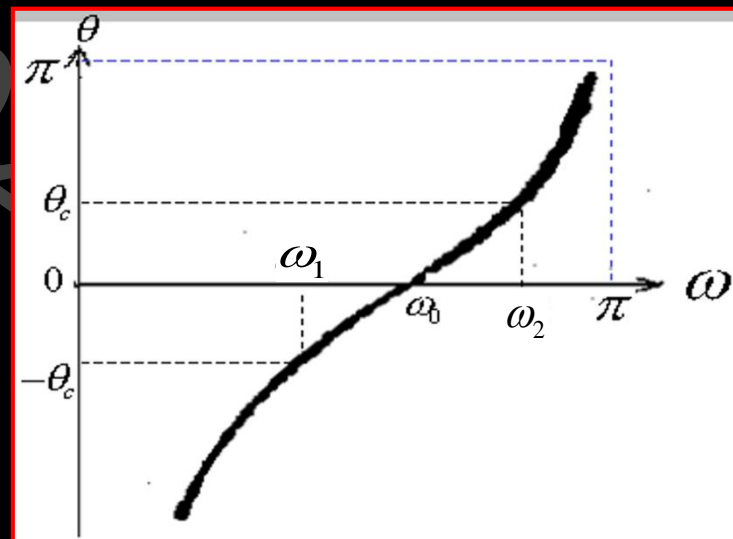
由右图知边界条件

$$\theta = \pi \rightarrow \omega = \pi \Rightarrow z^{-1} = -1 \rightarrow p^{-1} = -1$$

$$\theta = -\pi \rightarrow \omega = 0 \Rightarrow z^{-1} = -1 \rightarrow p^{-1} = 1$$

则易得全通函数取负值，即

$$z^{-1} = f(p^{-1}) = -\frac{p^{-2} + d_1 p^{-1} + d_2}{d_2 p^{-2} + d_1 p^{-1} + 1}$$



低通-带通变换的频率关系

□ 参数的确定

根据 $\omega_2 \rightarrow \theta_c$ 和 $\omega_1 \rightarrow -\theta_c$, 易得

$$\begin{cases} e^{j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + 1} \\ e^{-j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + 1} \end{cases}$$

得到

$$d_1 = -\frac{2ak}{k+1}, d_2 = \frac{k-1}{k+1}$$

其中

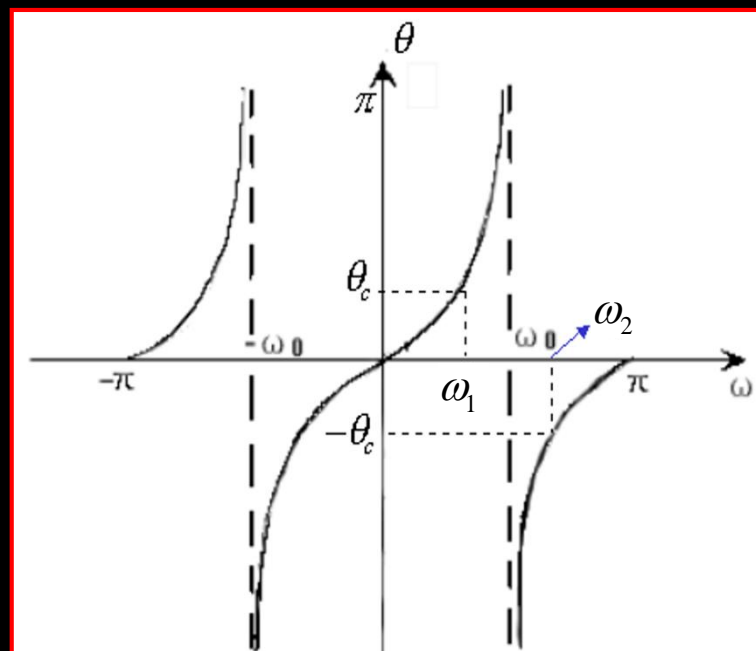
$$k = \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, a = \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} / \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

■ 数字低通—数字带阻

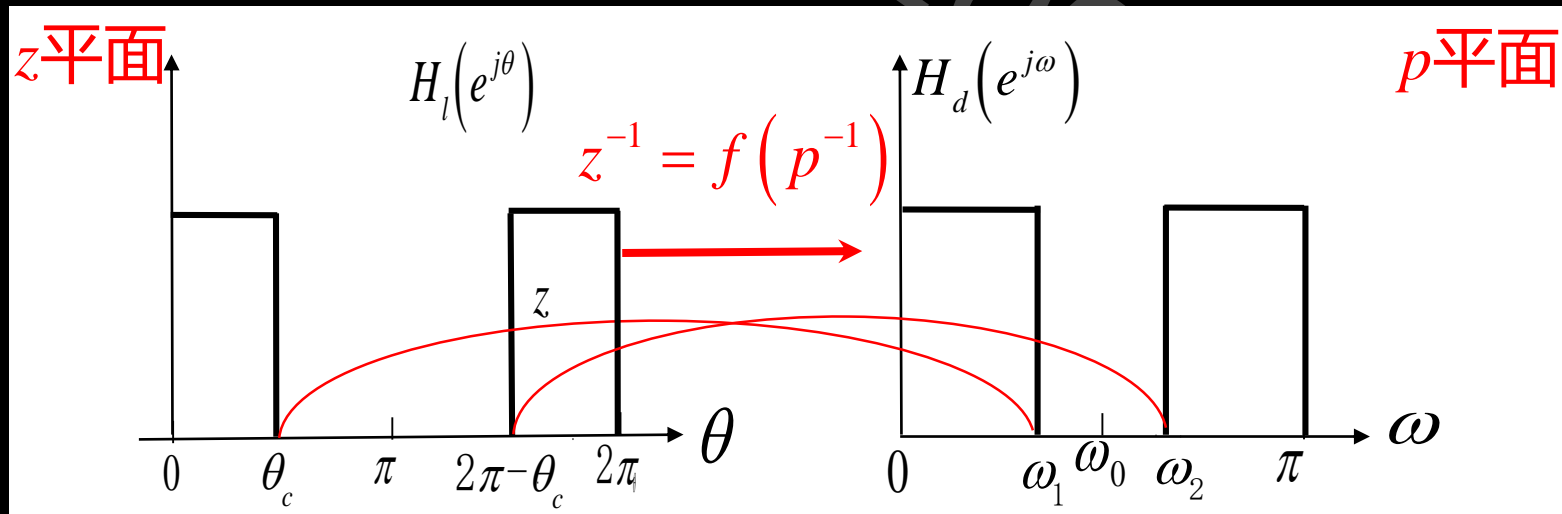
类似带通，带阻的上下截止频率为 ω_1 和 ω_2 ，中心频率为 $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$

□ 低通-带阻变换把阻带的中心频率 ω_0 映射到 $\theta = \pm\pi$ ，则有

- 1) $\omega = \omega_0 \sim \pi \rightarrow \theta = -\pi \sim 0$ ，因此 $\omega_2 \rightarrow -\theta_c$
- 2) $\omega = 0 \sim \omega_0 \rightarrow \theta = 0 \sim \pi$ ，因此 $\omega_1 \rightarrow \theta_c$



低通-带阻变换的频率关系



□ 变换函数的确定

类似带通，由于带阻滤波器在 $\omega=0\sim 2\pi$ 内形成了两个阻带，意味着原型低通滤波器的 θ 要在单位圆上旋转两圈，故阶次为 $N=2$ ，即

$$z^{-1} = f(p^{-1}) = \pm \frac{p^{-2} + d_1 p^{-1} + d_2}{d_2 p^{-2} + d_1 p^{-1} + 1}$$

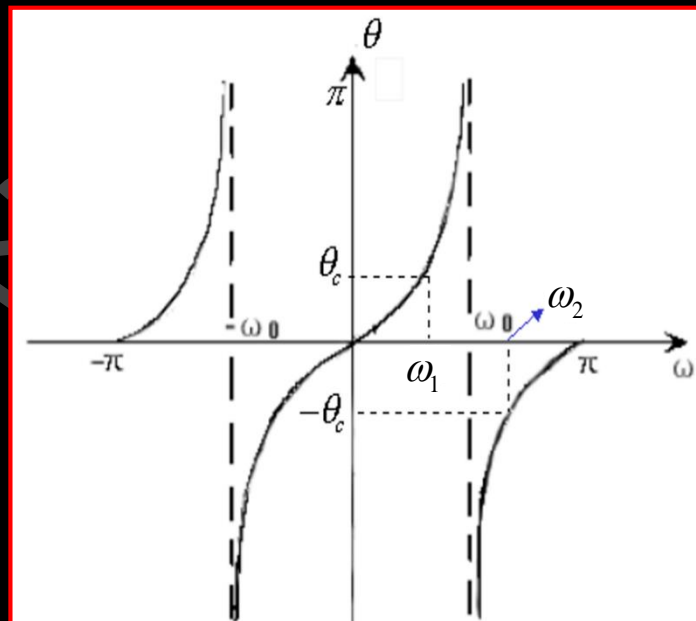
由右图知边界条件

$$\theta = 0 \rightarrow \omega = 0 \Rightarrow z^{-1} = 1 \rightarrow p^{-1} = 1$$

$$\theta = 0 \rightarrow \omega = \pi \Rightarrow z^{-1} = 1 \rightarrow p^{-1} = -1$$

则易得全通函数取正值，即

$$z^{-1} = f(p^{-1}) = \frac{p^{-2} + d_1 p^{-1} + d_2}{d_2 p^{-2} + d_1 p^{-1} + 1}$$



低通-带阻变换的频率关系

□ 参数的确定

根据 $\omega_1 \rightarrow \theta_c$ 和 $\omega_2 \rightarrow -\theta_c$, 易得

$$\begin{cases} e^{j\theta_c} = \frac{e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + 1} \\ e^{-j\theta_c} = \frac{e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + 1} \end{cases}$$

得到

$$d_1 = -\frac{2a}{k+1}, d_2 = \frac{1-k}{1+k}$$

其中

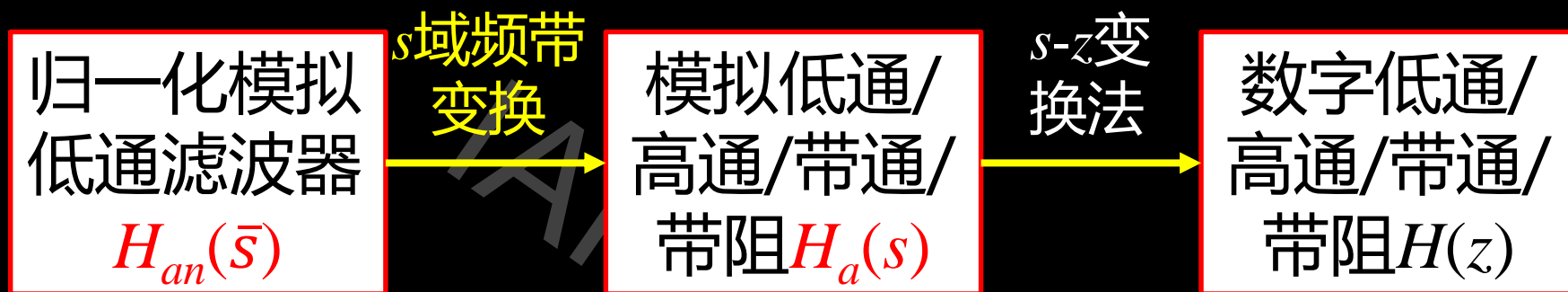
$$k = \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, a = \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} / \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

表 8.1 原型低通数字滤波器到其他类型数字滤波器的频率变换关系

滤波器类型	变换函数公式	相应的设计公式
低通	$z^{-1} = \frac{p^{-1} - a}{1 - ap^{-1}}$	$a = \frac{\sin\left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2}\right)}$
高通	$z^{-1} = -\frac{p^{-1} + a}{1 + ap^{-1}}$	$a = -\frac{\cos\left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}\right)}$
带通	$z^{-1} = -\frac{p^{-2} - \frac{2ak}{k+1}p^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}p^{-2} - \frac{2ak}{k+1}p^{-1} + 1}$	$a = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{c_2} + \omega_{c_1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{c_2} - \omega_{c_1}}{2}\right)}, k = \cot\left(\frac{\omega_{c_2} - \omega_{c_1}}{2}\right) \tan \frac{\theta_c}{2}$ 通带宽度 $\omega_{c_1} \leq \omega \leq \omega_{c_2}$
带阻	$z^{-1} = \frac{p^{-2} - \frac{2a}{1+k}p^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}p^{-2} - \frac{2a}{k+1}p^{-1} + 1}$	$a = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{c_2} + \omega_{c_1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{c_2} - \omega_{c_1}}{2}\right)}, k = \tan\left(\frac{\omega_{c_2} - \omega_{c_1}}{2}\right) \tan \frac{\theta_c}{2}$ 通带宽度 $\omega_{c_1} \leq \omega \leq \omega_{c_2}$

注： ω_c 为要求的截止频率； $\omega_{c_1}, \omega_{c_2}$ 为要求的上、下截止频率。

8.2.2 模拟频带变换设计法



s 平面
 $H_{an}(\bar{s})$
 $\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\Omega}$

s 平面
 $H_a(s)$
 $s = \sigma + j\Omega$

$$H_a(s) = H_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=G(s)} \quad H_a(j\Omega) = H_{an}(j\bar{\Omega}) \Big|_{j\bar{\Omega}=G(j\Omega)}$$

■ 归一化模拟低通—模拟低通

□ 映射关系

$$\bar{\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega = 0$$

$$\bar{\Omega} = \pm\infty \Rightarrow \Omega = \pm\infty$$

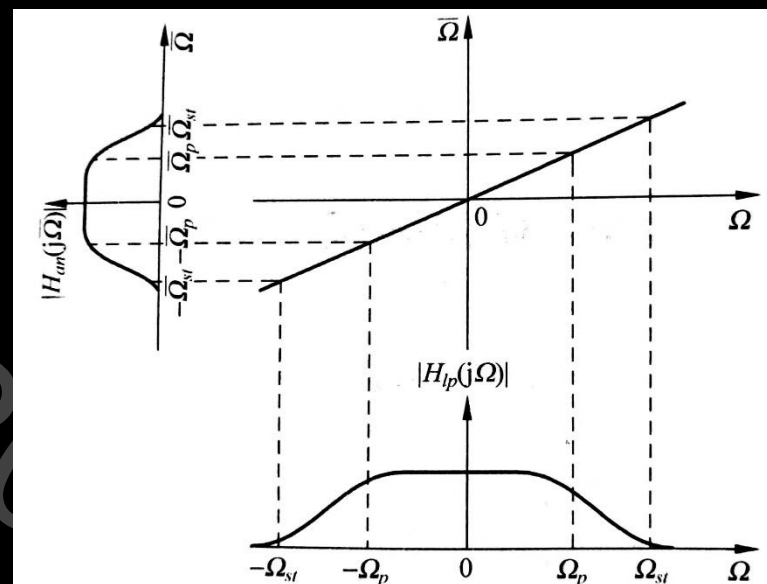
$$\bar{\Omega} = \pm\bar{\Omega}_p = \pm 1 \Rightarrow \Omega = \pm\Omega_p$$

□ 变换函数

代入求解 d

$$\bar{s} = sd, \bar{\Omega} = \Omega d$$

$$\bar{s} = \frac{s}{\Omega_p}, \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_p}$$



归一化模拟低通—模拟低通的频率变换

■ 归一化模拟低通—模拟高通

□ 映射关系

$$\bar{\Omega} = (-\infty, 0) \Rightarrow \Omega = (0, \infty)$$

$$\bar{\Omega} = (0, \infty) \Rightarrow \Omega = (-\infty, 0)$$

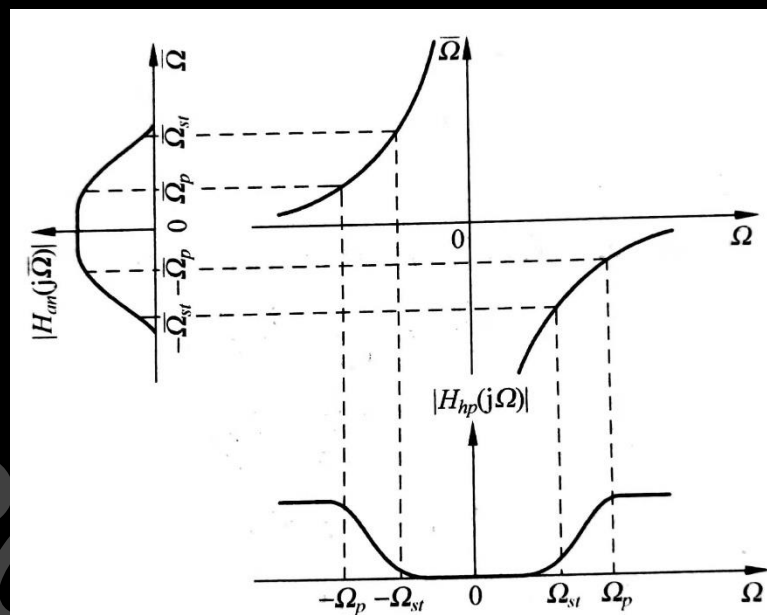
$$\bar{\Omega} = -\bar{\Omega}_p = -1 \Rightarrow \Omega = \Omega_p$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_p = 1 \Rightarrow \Omega = -\Omega_p$$

□ 变换函数

代入求解 d

$$\bar{s} = \frac{d}{s}, \bar{\Omega} = -\frac{d}{\Omega}$$



归一化模拟低通—模拟高通的频率变换

$$\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}, \bar{\Omega} = -\frac{\Omega_p}{\Omega}$$

■ 归一化模拟低通—模拟带通

□ 映射关系

$$\bar{\Omega} = -\infty \Rightarrow \Omega = -\infty, 0$$

$$\bar{\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega = -\Omega_{p0}, \Omega_{p0}$$

$$\bar{\Omega} = \infty \Rightarrow \Omega = 0, \infty$$

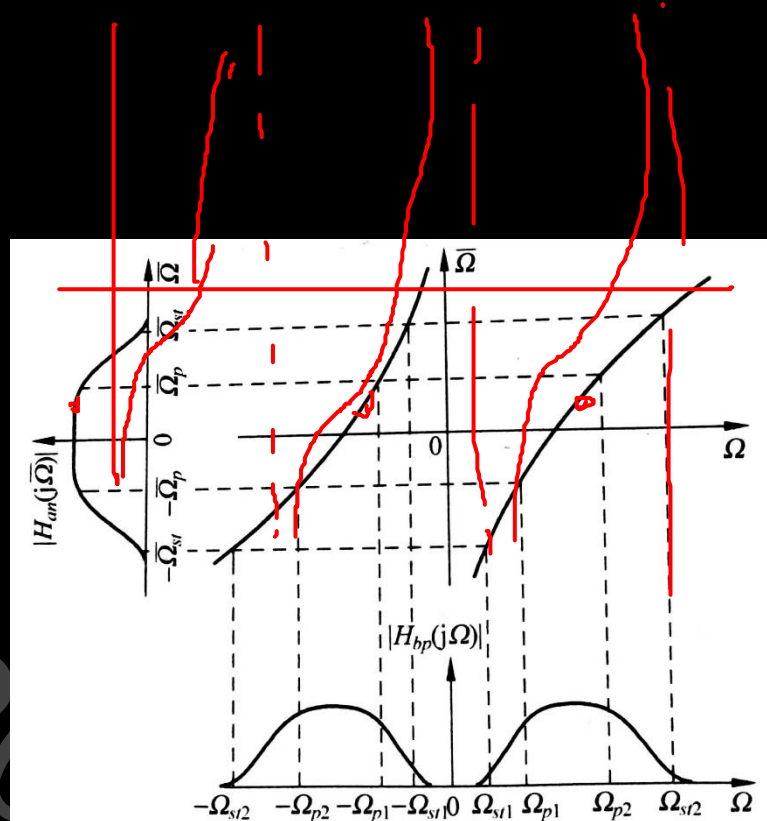
$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_p = 1 \Rightarrow \Omega = \Omega_{p2}, -\Omega_{p1}$$

$$\bar{\Omega} = -\bar{\Omega}_p = -1 \Rightarrow \Omega = \Omega_{p1}, -\Omega_{p2}$$

□ 变换函数 (分析)

代入求解 b, d

$$\bar{s} = \frac{d(s^2 + b^2)}{s}, \bar{\Omega} = \frac{d(\Omega^2 - b^2)}{\Omega}$$



归一化模拟低通—模拟带通的频率变换

$$b = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}} = \Omega_{p0}$$

$$d = \frac{1}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}} = \frac{1}{B_p}$$

■ 归一化模拟低通—模拟带通

□ 变换函数 (接上)

$$b = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}} = \Omega_{p0}$$

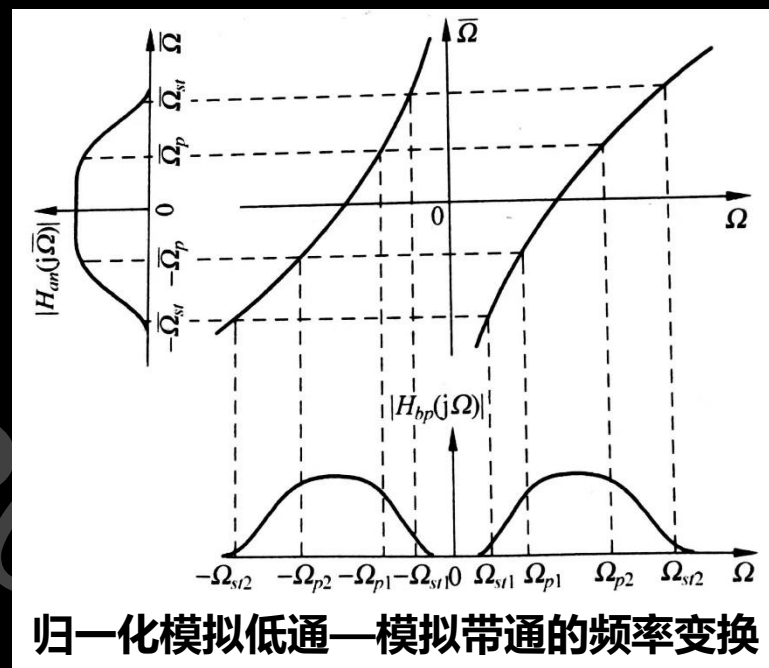
$$d = \frac{1}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}} = \frac{1}{B_p}$$

Ω_{p0} —带通滤波器的通带几何中心频率

B_p —带通滤波器的通带宽度

把参数代入变换函数即得

$$\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_{p0}^2}{B_p s} = \frac{s^2 + \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})s} \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_{p0}^2}{B_p \Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega}$$



■ 归一化模拟低通—模拟带阻

□ 映射关系

$$\bar{\Omega} = \infty \Rightarrow \Omega = \pm \Omega_{st0}$$

$$\bar{\Omega} = -\infty \Rightarrow \Omega = \pm \Omega_{st0}$$

$$\bar{\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega = 0, \pm\infty$$

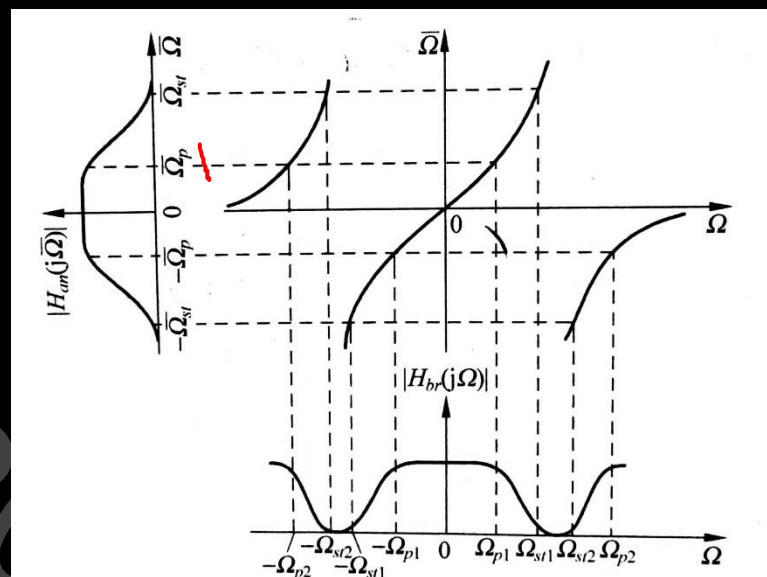
$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{st} \Rightarrow \Omega = \Omega_{st1}$$

$$\bar{\Omega} = -\bar{\Omega}_{st} \Rightarrow \Omega = \Omega_{st2}$$

□ 变换函数

代入求解 a, d

$$\bar{s} = \frac{sd}{s^2 + a^2}, \bar{\Omega} = \frac{\Omega d}{a^2 - \Omega^2}$$



归一化模拟低通—模拟带阻的频率变换

$$a = \sqrt{\Omega_{st1} \Omega_{st2}} = \Omega_{st0}$$

$$d = \bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) = \bar{\Omega}_{st} B_s$$

■ 归一化模拟低通—模拟带阻

□ 变换函数 (接上)

$$a = \sqrt{\Omega_{st1}\Omega_{st2}} = \Omega_{st0}$$

$$d = \bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) = \bar{\Omega}_{st} B_s$$

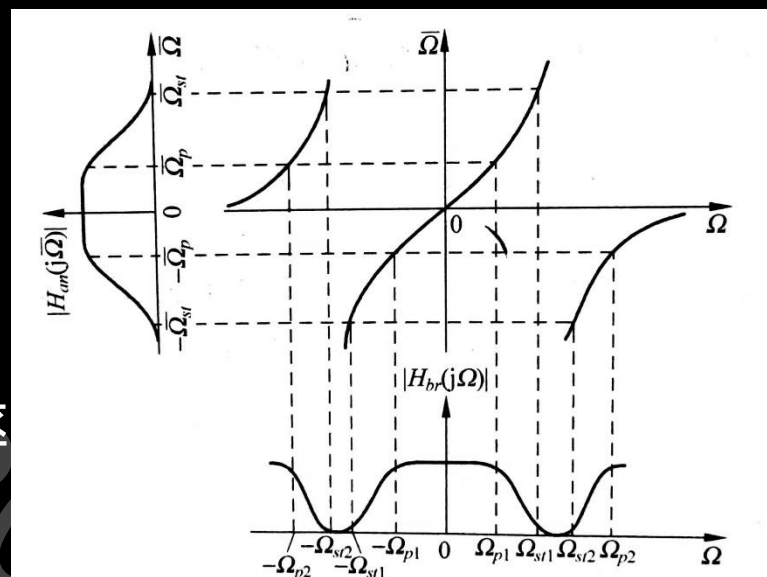
Ω_{st0} —带阻滤波器的阻带几何中心频率

B_s —带阻滤波器的阻带宽度

把参数代入变换函数即得

$$\bar{s} = \frac{\bar{\Omega}_{st} B_s s}{s^2 + \Omega_{st0}^2} = \frac{\bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) s}{s^2 + \Omega_{st1} \Omega_{st2}} \quad \bar{\Omega} = \frac{\bar{\Omega}_{st} B_s \Omega}{\Omega_{st0}^2 - \Omega^2} = \frac{\bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) \Omega}{\Omega_{st1} \Omega_{st2} - \Omega^2}$$

(备注: $\bar{\Omega}_{st} \neq 1$ 未知, 需要通过 $\bar{\Omega}_p = 1$ 求出来)



归一化模拟低通—模拟带阻的频率变换

$H_{an}(\bar{s})$: 归一化低通滤波器, $\bar{s} = j\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}_p = 1$, $\bar{\Omega}_{st}$

$H_e(s)$: 变换后的 4 种滤波器 $H_{lp}(s)$, $H_{hp}(s)$, $H_{bp}(s)$, $H_{bs}(s)$, $s = j\Omega$

$G(s)$: 变换函数 $\bar{s} = G(s)$

$$H_e(s) = H_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=G(s)} = H_{an}(G(s))$$

$H_e(s)$	$\bar{s} = G(s)$	$j\bar{\Omega} = G(j\Omega)$
低通 $H_{lp}(s)$ (通带截止频率 Ω_p)	$\bar{s} = \frac{s}{\Omega_p}$	$\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_p}$
高通 $H_{hp}(s)$ (通带截止频率 Ω_p)	$\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}$	$\bar{\Omega} = -\frac{\Omega_p}{\Omega}$
带通 $H_{bp}(s)$ (通带截止频率 Ω_{p1}, Ω_{p2})	$\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_{p0}^2}{B_p s}$	$\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_{p0}^2}{B_p \Omega}$, $\Omega_{p0} = \sqrt{\Omega_{p1} \Omega_{p2}}$, $B_p = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$
带阻 $H_{bs}(s)$ (阻带截止频率 $\Omega_{st1}, \Omega_{st2}$)	$\bar{s} = \frac{\bar{\Omega}_{st} B_s s}{s^2 + \Omega_{st0}^2}$	$\bar{\Omega} = \frac{\bar{\Omega}_{st} B_s \Omega}{\Omega_{st0}^2 - \Omega^2}$, $\Omega_{st0} = \sqrt{\Omega_{st1} \Omega_{st2}}$, $B_s = \Omega_{st2} - \Omega_{st1}$

注(1) 在对应的频率点上, 转换前、后两系统的频率响应的衰减值是相同的(例如低通 \rightarrow 带通变换中 $\bar{\Omega}_p = 1$ (低通)与 $\Omega = \Omega_{p2}$ (带通)点上衰减, 例如 2dB)是相同的。

(2) 对巴特沃思滤波器, 由于 $H_{an}(\bar{s})$ 是对 3dB 衰减处截止频率 $\bar{\Omega}_c$ 归一化的, 当 $R_p \neq 3\text{dB}$ 时, 则必须由 $R_p (\neq 3\text{dB})$ 衰减处 $\bar{\Omega}_p = 1$ 的归一化滤波器来找出其 3dB 衰减处的 $\bar{\Omega}_c$ [利用(6.5.27)式], 然后将 $H_{an}(\bar{s})$ 用 $\bar{\Omega}_c$ 去归一化为 $H_a(\bar{s}) = H_{an}(\bar{s}/\bar{\Omega}_c)$, 此 $H_a(\bar{s})$ 就是满足衰减为 $R_p (\neq 3\text{dB})$ $\bar{\Omega}_p = 1$ 的归一化低通滤波器; 当 $R_p = 3\text{dB}$ 时, 则可直接利用 $H_{an}(\bar{s})$ 作为归一化低通滤波器。对切贝雪夫滤波则可直接利用求出的归一化低通滤波器 $H_{an}(\bar{s})$ 。

□ **例题1**: 设计一个巴特沃斯型模拟带通滤波器, 通带下截止频率 $f_{p1}=200\text{Hz}$, 通带上截止频率 $f_{p2}=300\text{Hz}$, 通带衰减 $R_p=2\text{dB}$, 阻带下截止频率 $f_{st1}=100\text{Hz}$, 阻带上截止频率 $f_{st2}=400\text{Hz}$, 阻带最小衰减 $A_s=20\text{dB}$ 。

解答:

(1) 模拟频率 $\Omega_{p1}=400\pi$, $\Omega_{p2}=600\pi$, $\Omega_{st1}=200\pi$, $\Omega_{st2}=800\pi$

(2) 归一化模拟滤波器截止频率: 通带 $\bar{\Omega}_p=1$, 阻带

$$\bar{\Omega}_{st} = \min(|\bar{\Omega}_{st1}|, |\bar{\Omega}_{st2}|) = 2.5$$

较小阻带截止频率衰减满足要求, 则较大截止频率肯定满足

其中

$$\bar{\Omega}_{st2} = \frac{\Omega_{st2}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega_{st2}} = \frac{4\pi^2(160000 - 60000)}{2\pi \times 400 \times 2\pi \times 100} = 2.5$$

$$\bar{\Omega}_{st1} = \frac{\Omega_{st1}^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega_{st1}} = \frac{4\pi^2(10000 - 60000)}{2\pi \times 100 \times 2\pi \times 100} = -5$$

(3) 巴特沃斯型低通滤波器系统函数

阶次为 $N=3$ $N \geq \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = \lg \left(\sqrt{\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1}} \right) / \lg \left(\frac{\bar{\Omega}_{st}}{\bar{\Omega}_p} \right) \approx 2.8$

归一化系统函数 $H_{an}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$ $\bar{\Omega}_p = 1$

巴特沃斯滤波器归一化系统函数默认截止频率1处衰减为3dB，需要转化为截止频率1处衰减为2dB的系统函数（切比雪夫等其它类型无该要求）

3dB衰减截止频率 $\bar{\Omega}_c = \bar{\Omega}_p (10^{0.1R_p} - 1)^{-1/2N} = 1.0935$

最终归一化系统函数—— $\bar{\Omega}_p=1$ 处衰减为2dB

$$\tilde{H}_{an}(\bar{s}) = H_{an}\left(\frac{\bar{s}}{\bar{\Omega}_c}\right) = \frac{\bar{\Omega}_c^3}{\bar{s}^3 + 2\bar{\Omega}_c \bar{s}^2 + 2\bar{\Omega}_c^2 \bar{s} + \bar{\Omega}_c^3}$$

(4) 模拟带通滤波器系统函数

 $s \rightarrow z$

$$H_a(s) = \tilde{H}_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})s}}$$

$$= \frac{3.243366 \times 10^8 s^3}{s^6 + 1.3741384 \times 10^3 s^5 + 8.050235 \times 10^6 s^4 + 6.834166 \times 10^9 s^3 + 1.9068632 \times 10^{13} s^2 + 7.77099328 \times 10^{15} s + 1.3290243 \times 10^{19}}$$

* (5) 可采用双线性变换法或冲激响应不变法转化为数字滤波器

$$H_z = H_a(s) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \tilde{H}_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = G(z)}$$

归一化模拟低通—
数字低通/高通/带
通/带阻直接映射

备注：若采用双线性变换法，注意对数字滤波器的通带、阻带截止频率预畸变

□ **例题2:** 设计一个巴特沃斯型模拟带阻滤波器, 其技术指标为

$$f_{p1}=200\text{Hz}, f_{st1}=500\text{Hz}, f_{st2}=700\text{Hz}, f_{p2}=900\text{Hz}, R_p=2\text{dB}, A_s=20\text{dB}$$

解答:

(1) 归一化模拟低通滤波器通带截止频率 $\bar{\Omega}_p=1$, 需要计算阻带截止频率 $\bar{\Omega}_{st}$

$$\bar{\Omega}_{p1} = \frac{\bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) \Omega}{\Omega_{st1} \Omega_{st2} - \Omega^2} \bigg|_{\Omega=\Omega_{p1}} = 0.1290 \bar{\Omega}_{st}$$

$$\bar{\Omega}_{p2} = \frac{\bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) \Omega}{\Omega_{st1} \Omega_{st2} - \Omega^2} \bigg|_{\Omega=\Omega_{p2}} = -0.3913 \bar{\Omega}_{st}$$

$$\bar{\Omega}_p = \max(|\bar{\Omega}_{p1}|, |\bar{\Omega}_{p2}|) = 0.3913 \bar{\Omega}_{st}$$

较大通带截止频率衰减满足要求, 则较小截止频率肯定满足

因此 $\bar{\Omega}_{st} = \bar{\Omega}_p / 0.3913 = 2.5556$

(2) 巴特沃斯型低通滤波器系统函数

阶次为 $N=3$ $N \geq \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = \lg \left(\sqrt{\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1}} \right) / \lg \left(\frac{\bar{\Omega}_s}{\bar{\Omega}_p} \right) \approx 2.7345$

归一化系统函数 $H_{an}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$ 2013

巴特沃斯滤波器归一化系统函数默认截止频率1处衰减为3dB，需要转化为截止频率1处衰减为2dB的系统函数（切比雪夫等其它类型无该要求）

3dB衰减截止频率 $\bar{\Omega}_c = \bar{\Omega}_p \left(10^{0.1R_p} - 1 \right)^{-1/2N} = 1.0935$

最终归一化系统函数—— $\bar{\Omega}_p=1$ 处衰减为2dB

$$\tilde{H}_{an}(\bar{s}) = H_{an} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{\Omega}_c} \right) = \frac{\bar{\Omega}_c^3}{\bar{s}^3 + 2\bar{\Omega}_c \bar{s}^2 + 2\bar{\Omega}_c^2 \bar{s} + \bar{\Omega}_c^3}$$

(3) 模拟带阻滤波器系统函数

$$H_a(s) = \tilde{H}_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{\bar{\Omega}_{st}(\Omega_{st2} - \Omega_{st1})s}{s^2 + \Omega_{st1}\Omega_{st2}}}$$

$$= \frac{s^6 + 4.14523 \times 10^7 s^4 + 5.72765 \times 10^{14} s^2 + 2.63805 \times 10^{21}}{s^6 + 5.87364 \times 10^3 s^5 + 5.87027 \times 10^7 s^4 + 1.87651 \times 10^{11} s^3 + 0.81112 \times 10^{15} s^2 + 1.1214232 \times 10^{18} s + 2.63805 \times 10^{21}}$$

$H(s) \rightarrow H(z)$

* (5) 可采用双线性变换法或冲激响应不变法转化为数字滤波器

$$H_z = H_a(s) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \tilde{H}_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = G(z)}$$

归一化模拟低通—
数字低通/高通/带
通/带阻直接映射

备注：若采用双线性变换法，注意对数字滤波器的通带、阻带截止频率预畸变

8.4 IIR数字滤波器的基本实现结构

■ IIR滤波器的差分方程和系统函数的一般形式

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$

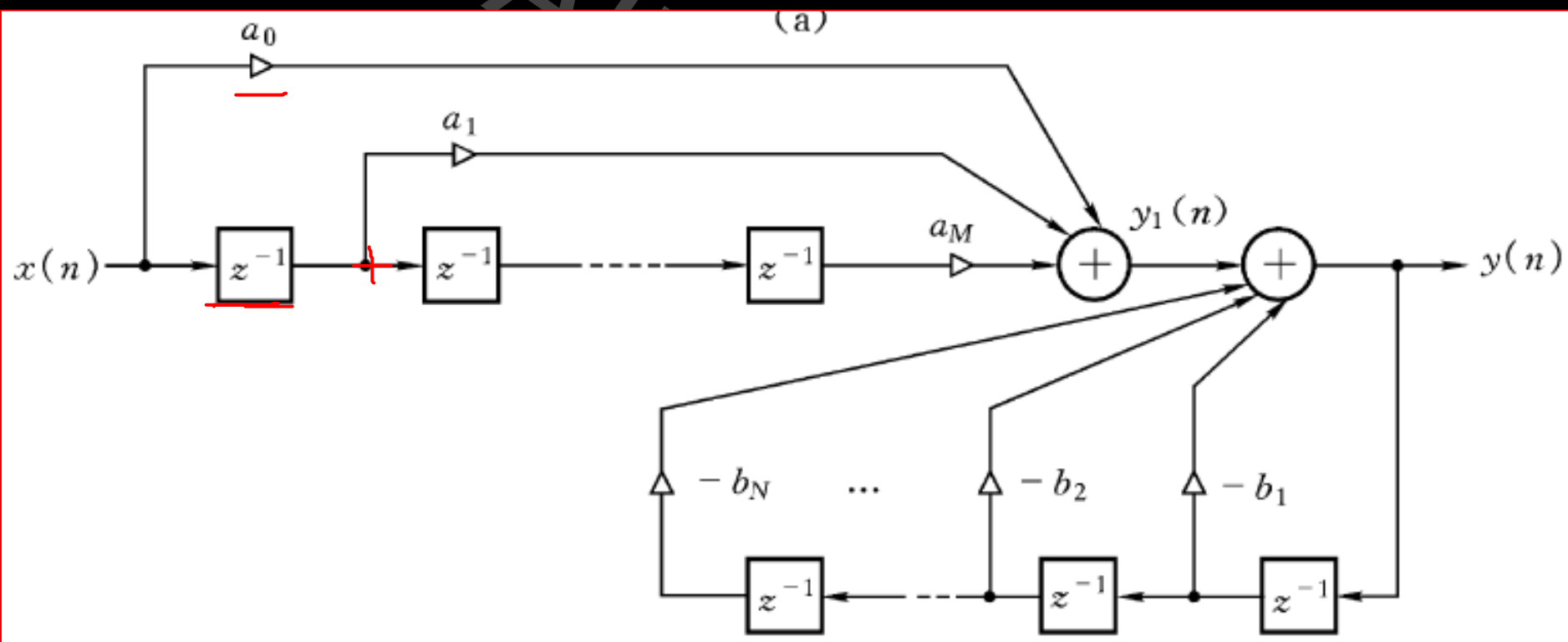
$$H(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} / \left[1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right]$$

■ 结构类型

- 直接I型
- 直接II型 (正准型)
- 级联型
- 并联型

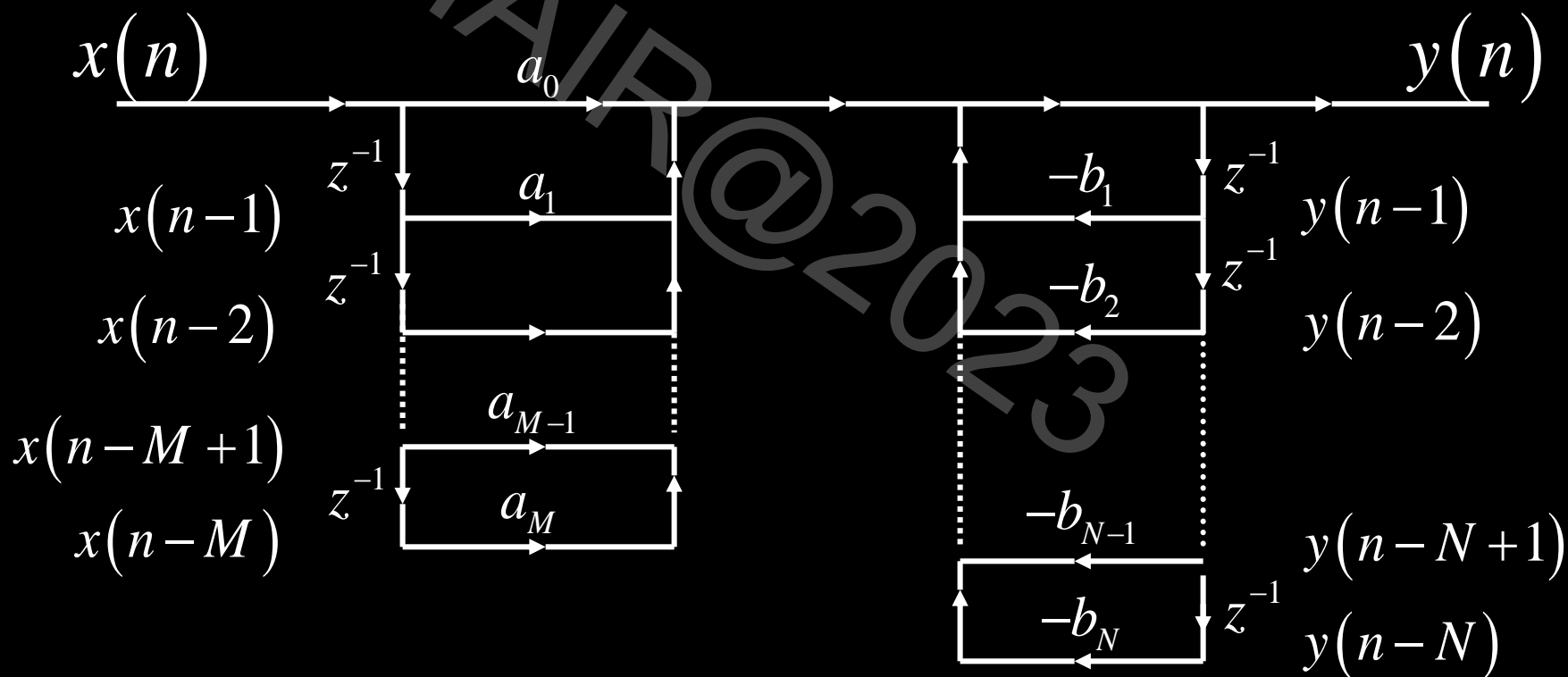
■ 直接I型：结构流图按差分方程可以直接写出。

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$



■ 直接I型：结构流图按差分方程可以直接写出。

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$



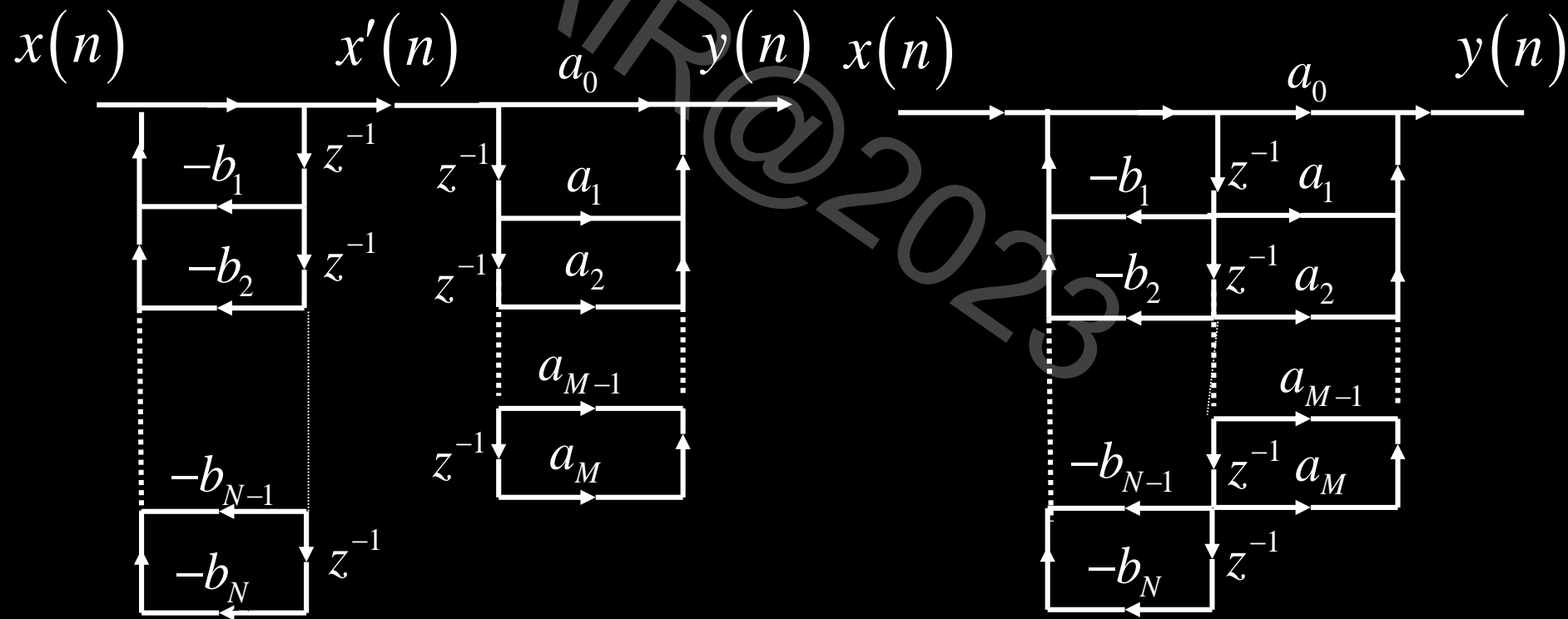
■ 直接I型的特点

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

- (1) 直接I型等价于两个网络 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的级联;
- (1) 第一个网络 $H_1(z)$ 实现零点, 即实现 $x(n)$ 加权延时;
- (2) 第二个网络 $H_2(z)$ 实现极点, 即实现 $y(n)$ 加权延时;
- (3) 第二网络 $H_2(z)$ 是输出延时, 即反馈网络;
- (4) 共需 $(M+N)$ 个存储延时单元。

■ 直接II型 (正准型)

$$H(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = H_1(z) \cdot H_2(z) = H_2(z) \cdot H_1(z)$$



■ 直接II型（正准型）的推导：设中间变量 $x'(n)$

$$x'(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N b_k x'(n-k) \quad y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x'(n-k)$$

$$\frac{X'(z)}{X(z)} = 1 / \left[1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right] \quad \frac{Y(z)}{X'(z)} = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{X'(z)} \frac{X'(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} / \left[1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right]$$

直接II型（正准型）只需 N 个延时单元，是 N 阶滤波器所需的最小延时单元数（ $N \geq M$ ）

■ 直接I型和II型的共同缺点

$$H(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} / \left[1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right]$$

- 系数 a_k 和 b_k 对滤波器的性能控制作用不明显;
- 极点对系数的变化过于灵敏, 易出现不稳定或较大误差;
- 运算的累积误差较大。

■ 级联型

先将系统函数按零、极点进行因式分解

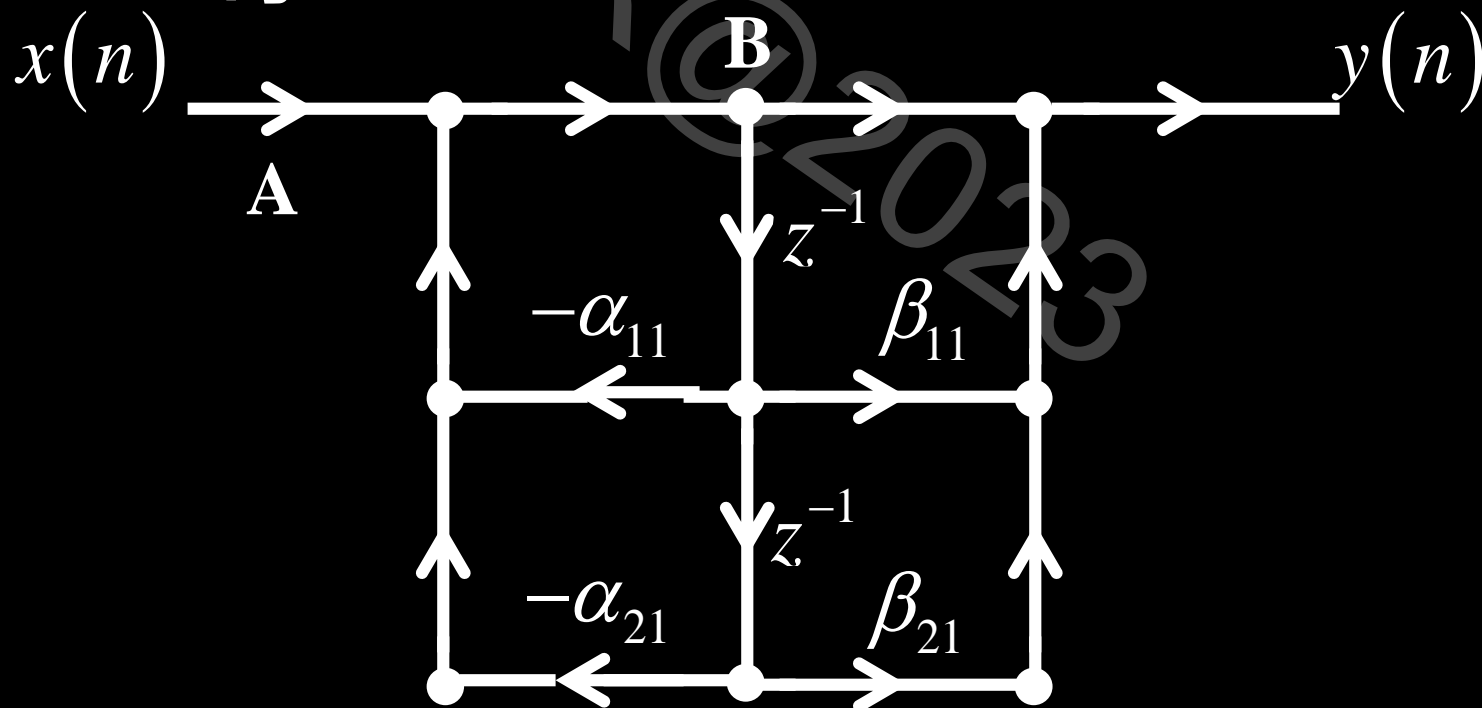
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

其中：

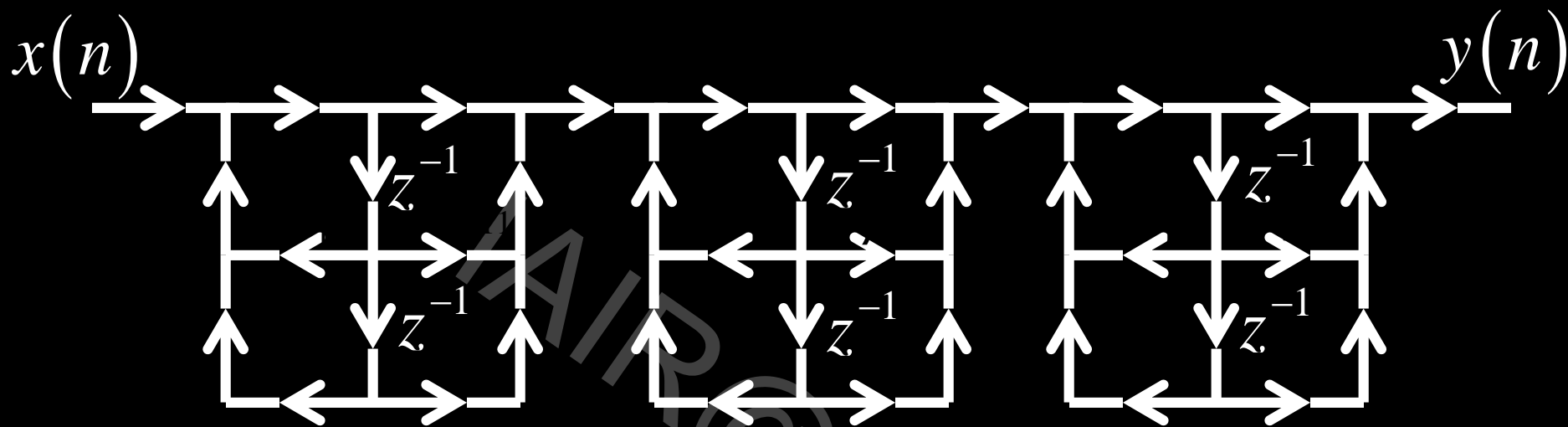
- (1) p_k 为实零点, c_k 为实极点;
- (2) q_k, q_k^* 表示复共轭零点, d_k, d_k^* 表示复共轭极点;
- (3) $M=M_1+2M_2, N=N_1+2N_2$

$$H(z) = A \prod_k \frac{(1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{(1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2})} = A \prod_k H_k(z)$$

当 $M=N=2$ 时



当 $M=N=6$ 时



注意：如果有奇数个实零点或实极点，则有一个系数 β_{2k} 或 α_{2k} 为0。

□ 并联型结构的特点：

- (1) β_{1k} 、 β_{2k} 仅影响第 k 对零点，同样 α_{1k} 、 α_{2k} 仅影响第 k 对极点，便于调节滤波器的频率特性；
- (2) 所用的存储器的个数最少；
- (3) 运算的累积误差较小。

■ 并联型

将 $H(z)$ 展成部分分式形式:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - g_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} + \sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k}$$

其中:

- A_k 、 B_k 、 c_k 、 g_k 、 G_k 均为实数, d_k 与 d_k^* 为复共轭项;
- $M < N$ 时, 不包含 $\sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k}$ 项; $M = N$ 时, 该项为常数 G_0 。

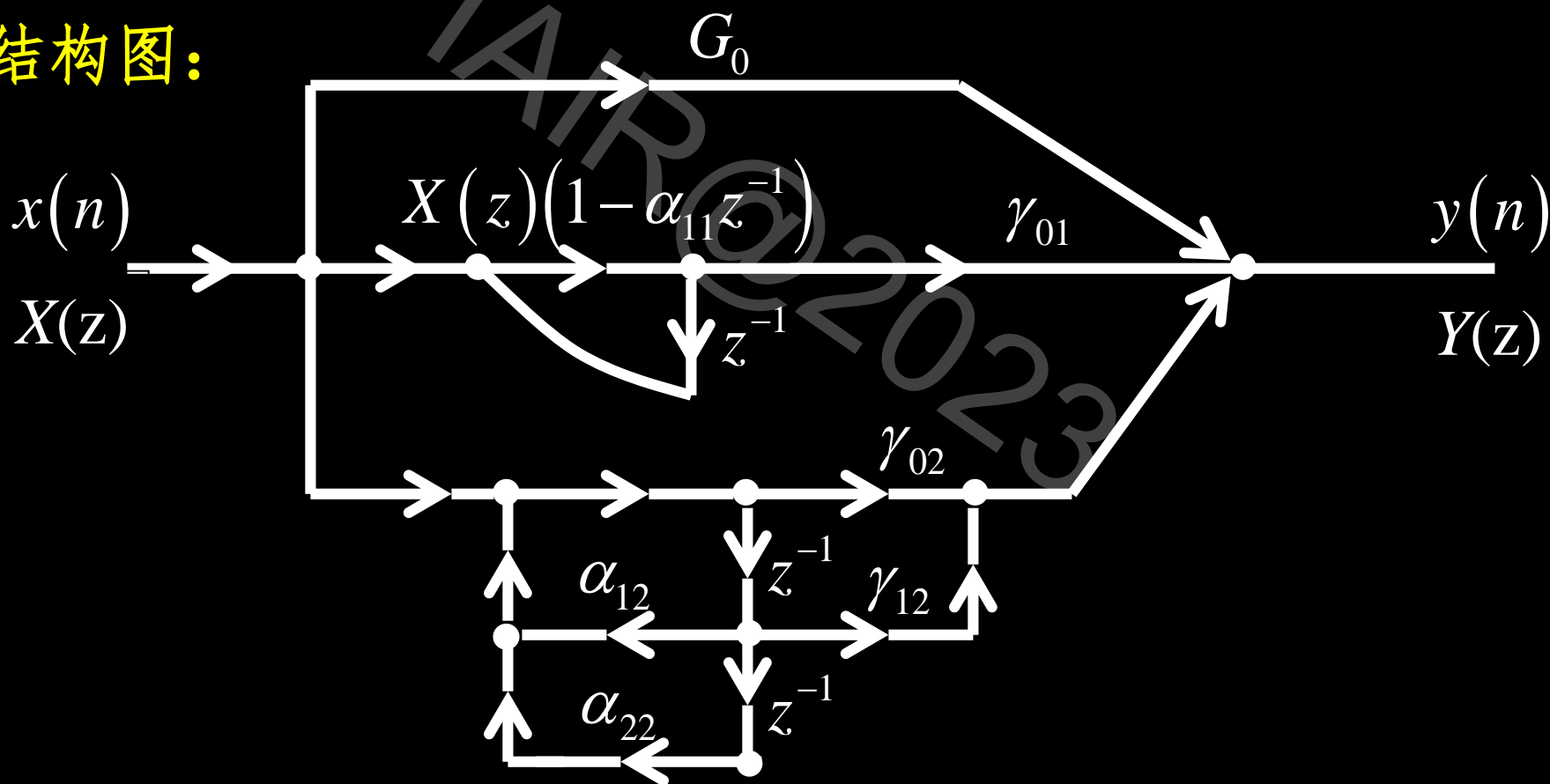
当 $M = N$ 时, 将两个一阶实极点合为一项, 将共轭极点化成实系数二阶多项式, $H(z)$ 可表为

$$H(z) = G_0 + \sum_{k=1}^{(N+1)/2} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{1k} z^{-1}} = G_0 + \sum_{k=1}^{(N+1)/2} H_k(z)$$

举例： $M=N=3$ 时，为奇数，故有

$$H(z) = G_0 + \frac{\gamma_{01}}{1 - \alpha_{11}z^{-1}} + \frac{\gamma_{02} + \gamma_{12}z^{-1}}{1 - \alpha_{12}z^{-1} - \alpha_{22}z^{-2}} = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z)$$

结构图：



■ 并联型的特点:

- 通过调整系数 α_{1k} 和 α_{2k} , 可单独调整一对极点位置, 但不能单独调整零点位置
- 各并联基本节的误差互相不影响, 故运算误差最小
- 可同时对输入信号进行运算, 故运算速度最高

举例： 设IIR数字滤波器差分方程为：

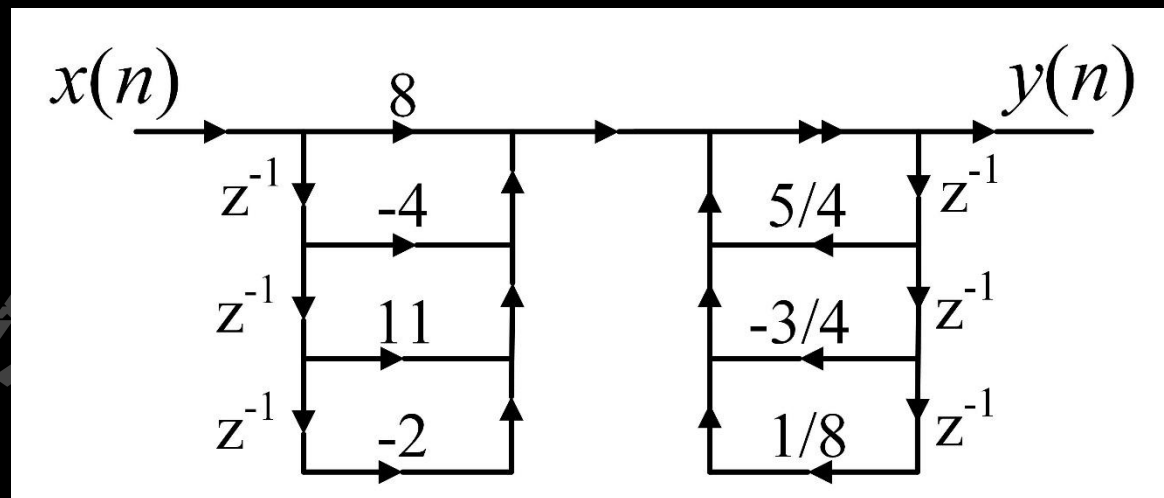
$$y(n) = 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3) \\ + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3)$$

试用四种基本结构实现此差分方程。

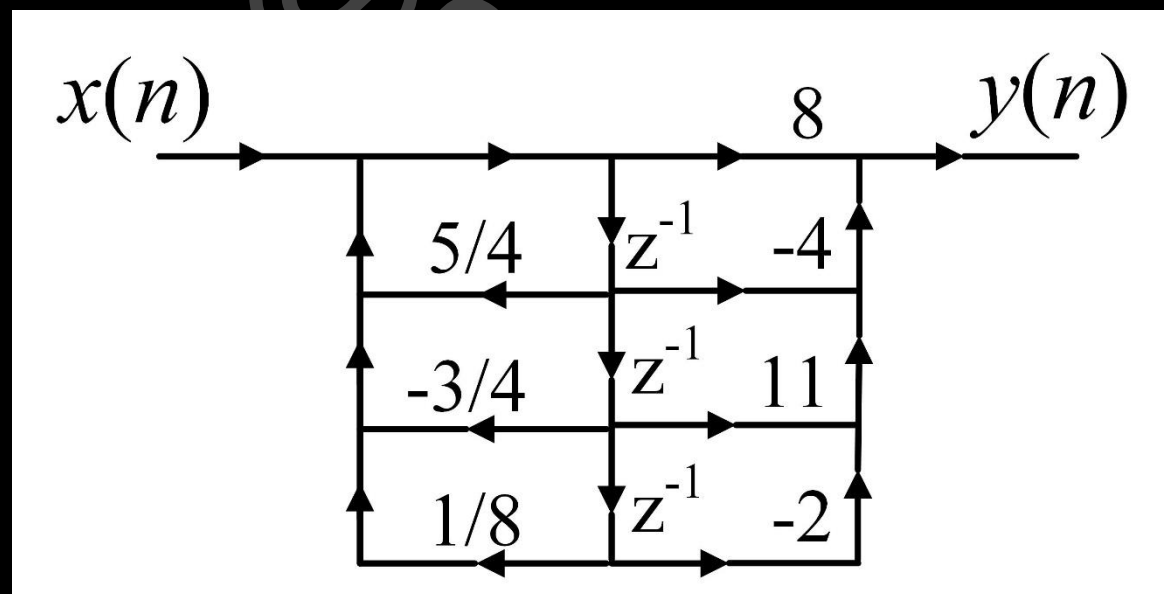
解： 对差分方程两边取z变换，得系统函数：

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

直接I型结构



直接II型结构

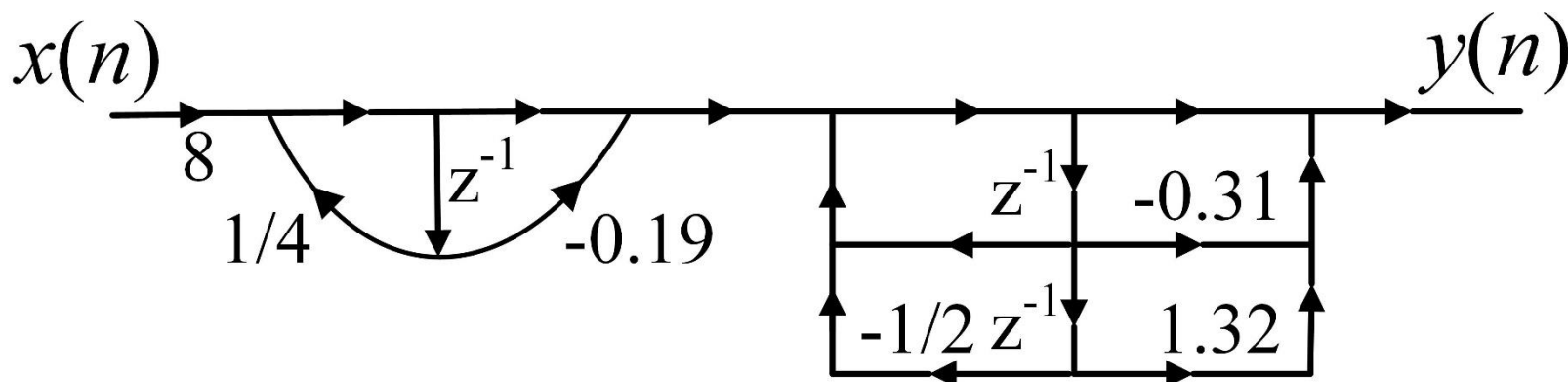


□ 级联型结构

$$H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - 1/4z^{-1})(1 - z^{-1} + 1/2z^{-2})}$$

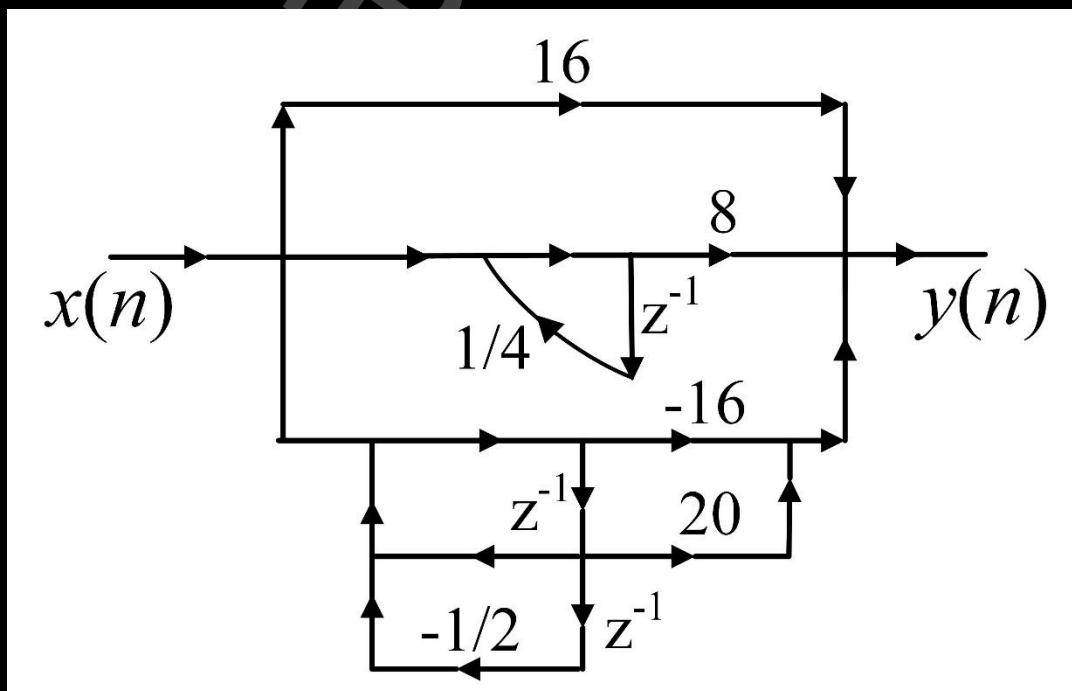
因式分解：

$$= \frac{8(1 - 0.19z^{-1})(1 - 0.31z^{-1} + 1.32z^{-2})}{(1 - 1/4z^{-1})(1 - z^{-1} + 1/2z^{-2})}$$



□ 并联型结构

部分因式分解 $H(z) = 16 + \frac{8}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$



本章总结

- 间接设计IIR滤波器的基本过程
- “模拟-数字” s-z变换设计法
 - 冲激响应不变法
 - 双线性变换法
- 巴特沃斯、切比雪夫模拟低通滤波器
- “数字-数字” 频带变换设计法
- “模拟-模拟” 频带变换设计法
- IIR滤波器的基本结构