期中考试模拟题（一）答案 2018.4

一．计算下列各题(每小题 5 分，共 40 分)

1. 设随机事件 A 与 B，且 $P\left(\overline{B}\right)=0.7$，$P\left(A\overline{B}\right)=0.2$，求 $P\left(\overline{A}\overline{B}\right)$.

解 $P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right)-P\left(AB\right)=0.2$

$$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)=1-(P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right))=0.5$$

2. 某大楼有 4 部电梯，现有 3 个工作人员要乘电梯，假定选择那部电梯是随机的，求 3 个人中至少有 2 个人在同一部电梯的概率.

解 设 A={3 个人分别在不同部电梯}，$P(A)=\dfrac{C_4^3\cdot 3!}{4^3},P(\bar{A})=1-\dfrac{C_4^3\cdot 3!}{4^3}=\dfrac{5}{8}$.

3.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，以 Y 表示对 X 进行三次独立观察中 $\{X\le\dfrac{1}{2}\}$ 出现的次数，求概率 $P(Y=2)$.

解 $p=P\left(X\le\dfrac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\dfrac{1}{4}$，由已知 $Y\sim B(3,\ \dfrac{1}{4})$

所以 $P(Y=2)=C_3^2(\dfrac{1}{4})^2\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{64}$

4.设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0\ , & x<0.\end{cases}$ 求 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解一 当 $x>0$ 时函数 $y=e^x$ 单调增，反函数为 $x=h(y)=\ln y$，于是 $Y=e^X$ 的概率密度为 $f_Y(y)=f_X(h(y))\,|\,h'(y)|=\begin{cases}e^{-\ln y}\cdot\dfrac{1}{y}, & y\ge 1,\\ 0\ , & y\le 1.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y\ge 1,\\ 0\ , & y<1.\end{cases}$

解二 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=\begin{cases}0\ , & y<1,\\ P(X\le\ln y), & y\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0\ , & y<1,\\ \int_0^{\ln y}e^{-x}dx, & y\ge 1,\end{cases}=\begin{cases}0\ , & y<1,\\ -e^{-x}\Big|_0^{\ln y}, & y\ge 1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0\ , & y<1,\\ 1-e^{-\ln y}, & y\ge 1.\end{cases}=\begin{cases}0\ , & y<1,\\ 1-\dfrac{1}{y}, & y\ge 1.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y\ge 1,\\ 0\ , & y<1.\end{cases}$$

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 与 $N\left(\mu,2\sigma^2\right)$，其中 $\sigma>0$ 是未知参数，记 $Z=X-Y$. 求 Z 的概率密度 $f\left(z\right)$.

解因为随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$， $Y\sim N\left(\mu,2\sigma^2\right)$，所以

$Z=X-Y\sim N\left(0,3\sigma^2\right)$，因此 Z 的概率密度 $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi\sigma^2}}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$。

6. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\left\{X=-2\right\}=\dfrac{1}{2}$， $P\left\{X=1\right\}=a$， $P\left\{X=3\right\}=b$，若 $EX=0$，求 DX.

解 由概率分布律的性质及 $EX=0$ 得

$$\begin{cases}P\left\{X=-2\right\}+P\left\{X=1\right\}+P\left\{X=3\right\}=\dfrac{1}{2}+a+b=1\\ E\left(X\right)=-2\times\dfrac{1}{2}+1\times a+3\times b=0\end{cases}，\quad 即\quad \begin{cases}a+b=\dfrac{1}{2}\\ a+3b=1\end{cases}，$$

解得 $a=b=\dfrac{1}{4}$，所以 $DX=EX^2=\left(-2\right)^2\times\dfrac{1}{2}+1^2\times\dfrac{1}{4}+3^2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{2}$

7. 设 X 与 Y 相互独立均服从 $exp(\lambda)$，求 $P\{1<min(X,Y)\le 2\}$.

解 X 的概率密度和分布函数为： $f(x)=\begin{cases}e^{-x},x>0\\ 0,x\le 0\end{cases}, F(x)=\begin{cases}1-e^{-x},x>0\\ 0,x\le 0\end{cases}$,

$$Z=min(X,Y),F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=1-e^{-z}\cdot e^{-z}=1-e^{-2z}$$

$$P\{1<min\left(X,Y\right)\le 2\}=F\left(2\right)-F\left(1\right)=e^{-4}-e^{-2}$$

8. 设二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2;\mu,\sigma^2;0\right)$，求 $E\left(XY^2\right)$.

解 因为 $\left(X,Y\right)\sim N\left(\mu,\sigma^2;\mu,\sigma^2;0\right)$，所以 X,Y 相互独立，且 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. 从而 X,Y^2 相互独立，因此有

$$E\left(XY^2\right)=E\left(X\right)E\left(Y^2\right)=\mu\left[D\left(Y\right)+E^2\left(Y\right)\right]=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$$

二. (10 分) 有两个盒子, 第一个盒子中有 40 个黑球, 10 个白球, 第二个盒子中有 12 个黑球, 18 个白球, (1) 现随机地取一个盒子, 再从这个盒子中取出一个球, 求这个球为白球的概率；(2) 已知取出的球是白球，求此球属于第二个盒子的概率.

解：设 A 表示事件“任取一球为白球”, B_i 表示事件“取到第 i 个箱子”，i=1,2，

（1）根据全概率公式得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5}$$

（2）根据贝叶斯公式得 $P(B_2|A)=\dfrac{P(AB_2)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum\limits_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{4}$

三、(12 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k\,\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0 & ,\ \text{其他} \end{cases}$$

试求：(1) 常数 k；(2)边缘密度函数 $f_X(x)$及$f_Y(y)$；(3)判断 X与Y 是否相互独立，为什么？ (4) $P\{0<X\le 1, 0<Y\le 2\}$。

解：(1). $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=k\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-(3x+4y)}dxdy=\dfrac{k}{12}$

从而，$k=12$

(2). $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12e^{-(3x+4y)}dy, x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}4e^{-4x}, & y>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

（3）在整个平面上 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X与Y 相互独立

（4） $P\{0<X\le 1,0<Y\le 2\}=\int_0^1\int_0^2 12e^{-(3x+4y)}dxdy=(1-e^{-3})(1-e^{-8})$

四.(10 分) 设随机变量 X,Y 相互独立, X 在区间[0,3]上服从均匀分布, Y 服从参数为 2 的指数分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解： $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, 0<x<3\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$ ， $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, y>0\\ 0,\text{其它}\end{cases}$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$z\le 0$时，$f_X(x)f_Y(z-x)=0$，$f_Z(z)=0$

$0<z<3, f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^z\frac{1}{3}\cdot 2e^{-2(z-x)}dx=\frac{1}{3}(1-e^{-2z})$

$z\le 3, f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^3\frac{1}{3}\cdot 2e^{-2(z-x)}dx=\frac{1}{3}(e^{6-2z}-e^{-2z})$

五.(12 分) 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2

0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

（1）求$P\left\{X=2Y\right\}$；（2）求$Cov\left(X-Y,Y\right)$。

解：（1）$P\left\{X=2Y\right\}=P\left\{X=0,Y=0\right\}+P\left\{X=2,Y=1\right\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$，

（2）$Cov\left(X-Y,Y\right)=Cov\left(X,Y\right)-Cov\left(Y,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)-D\left(Y\right)$

X的概率分布为

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

所以$E\left(X\right)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，

Y的概率分布为

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

所以$E\left(Y\right)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$，$E\left(Y^2\right)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$，

从而$D\left(Y\right)=E\left(Y^2\right)-\left[E\left(Y\right)\right]^2=\frac{2}{3}$，

XY的可能取值为0，1，2，4，且

$$P\left\{XY=0\right\}=P\left\{X=0,Y=0\right\}+P\left\{X=0,Y=1\right\}+P\left\{X=0,Y=2\right\}$$
$$+P\left\{X=1,Y=0\right\}+P\left\{X=2,Y=0\right\}=\frac{7}{12},$$

$P\left\{XY=1\right\}=P\left\{X=1,Y=1\right\}=\frac{1}{3}$，

$P\left\{XY=2\right\}=P\left\{X=1,Y=2\right\}+P\left\{X=2,Y=1\right\}=0$，

$P\left\{XY=4\right\}=P\left\{X=2,Y=2\right\}=\frac{1}{12}$，

所以，XY的概率分布为

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

$$E\left(XY\right)=0\times\frac{7}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times0+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.$$

故$Cov\left(X-Y,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)-D\left(Y\right)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$

六、（12 分）设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）Y的边缘密度函数$f_Y(y)$；（2）条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$， $f_{X|Y}(x|4)$；

（3）$P\{X>2|Y=4\}$及$P\{X>2|Y<4\}$.

解：（1） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\mathrm{e}^{-y}dx=y\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$.

（2） $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

$$f_{X|Y}(x|\ 4)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（3） $P\{X>2|Y=4\}=\int_2^{+\infty}f_{X|Y}(x|\ 4)dx=\int_2^4\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}$

$$P\{X>2|Y<4\}=\frac{P\{X>2,Y<4\}}{P\{Y<4\}}=\frac{\int_2^4dx\int_x^4\mathrm{e}^{-y}dy}{\int_0^4y\mathrm{e}^{-y}dy}=\frac{\mathrm{e}^{-2}-3\mathrm{e}^{-4}}{1-5\mathrm{e}^{-4}}$$

七、（4 分）设$X\sim P(\lambda_1),\ Y\sim P(\lambda_2)$，且$X$，$Y$相互独立，证明$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

证明：$P(X=k)=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}$，$P(Y=k)=\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2},k=0,1,2,\cdots$，因此

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$