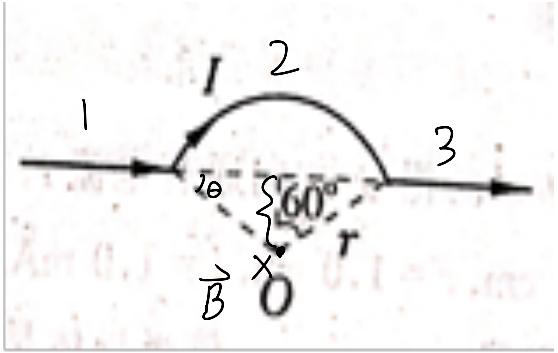
习题讨论课

2022年6月7日

1.将一无限长直导线弯成如图所示的形状，其上载有电流I，试计算圆心O点处$\boldsymbol{B}$的大小。



解：

叠加原理 $\vec{B}=\vec{B_1}+\vec{B_2}+\vec{B_3}$

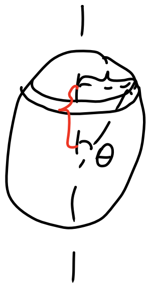
$$B_1=B_3=\frac{\mu_0 I}{4\pi r\cos 60^\circ}(\cos 0^\circ-\cos 30^\circ)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{2r}\frac{1}{3}=\frac{\mu_0 I}{6r}$$

$$B=B_1+B_2+B_3=\frac{\mu_0 I}{r}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{1}{6}\right)$$

2. 一半径为R的球面上均匀分布着电荷，面密度为σ_0，当它以角速度ω 绕直径旋转时，试求在球心处的磁感应强度B的大小。

解：取与转轴垂直的微圆环做为研究对象



$$I=\frac{q}{t} \qquad t=\frac{2\pi}{w} \qquad dq=\sigma_0 ds$$

$$ds=Rd\theta\cdot 2\pi(R\sin\theta)=2\pi R^2\sin\theta d\theta$$

$$dI=\frac{dq}{t}=\frac{w\,dq}{2\pi}=\frac{w\sigma_0 2\pi R^2\sin\theta d\theta}{2\pi}=w\sigma_0 R^2\sin\theta d\theta$$

$$dB=\frac{\mu_0(R\sin\theta)^2}{2R^3}dI$$

$$B=\int_0^{\pi}dB=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 R^4\sin^3\theta\, w\sigma_0 d\theta}{2R^3}=\frac{\mu_0 R w\sigma_0}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\frac{2}{3}\sigma_0\mu_0 wR$$

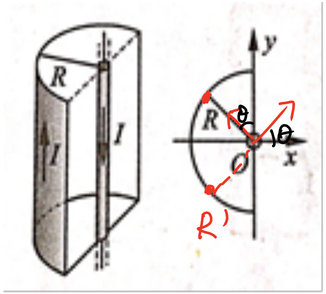
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \, d\theta$$

$$\begin{cases} n = 1, 3, 5, 7 \cdots & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \, d\theta = \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 1} \\ n = 2, 4, 6 \cdots & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \, d\theta = \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. 如图所示，一半径为R的无限长半圆柱面导体，其上电流与其轴线上一无限长直导线的电流等值反向，电流I 在半圆柱面上均匀分布。试求：

（1）轴线上导线单位长度所受的力。

（2）若将另一无限长直导线（通有大小、方向与半圆柱面相同的电流I ）代替圆柱面，产生同样的作用力，该导线应放在何处？



解:(1) 根据对称性 O点处. $B=B_y$ $B_x=0$

圆柱面看成竖直方向长直导线叠加

$$dB=\frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{d\theta}{\pi}I\sin\theta$$

$$B=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I\sin\theta}{2\pi^2 R}d\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

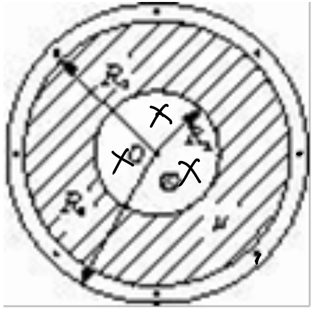
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{\pi R^2}\vec{j}$$

$$\vec{F}=I\vec{L_0}\times\vec{B}=\frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}\vec{i}$$

(2) 长直导线平行于z轴，与x轴交于 $(-d,0)$ $(d>0)$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi d}=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \Longrightarrow d=\frac{\pi R}{2}$$ 导线应放在 $(-\frac{\pi R}{2},0)$ 处

4. 一长直同轴电缆，其横截面尺寸如图所示，中间充满磁导率为 μ 的各向同性非铁磁质，传导电流从内芯流入，又从外导体流出，试求磁场强度 H 和磁感应强度 B 的分布。



解：电流均匀分布 $j_1=\frac{I}{\pi R_1^2}$ $\quad j_2=\frac{I}{\pi(R_3^2-R_2^2)}$

安培环路定理 $\oint \vec{H}d\vec{l}=\sum I$ $\quad B=\mu H=\mu_0\mu_r H$

$r<R_1$ $\quad H=\frac{j_1\pi r^2}{2\pi r}=\frac{Ir}{2\pi R_1^2}$ $\quad B=\frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$

$R_1<r<R_2$ $\quad H=\frac{I}{2\pi r}$ $\quad B=\frac{\mu I}{2\pi r}$

$R_2<r<R_3$ $\quad H=\frac{I}{2\pi r}\left(1-\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right)$ $\quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1-\frac{r^2-R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right)$

$r>R_3$ $\quad H=0\,(A/m)$ $\quad B=0\,(T)$

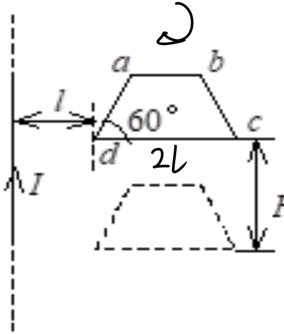
5. 如图所示，一长直导线通有电流I，其旁共面地放置一匀质金属梯形线框$abcda$，已知：$da = ab = bc = L$，两斜边与下底边夹角均为60°，d点与导线相距l。令线框从静止开始自由下落H高度，且保持线框平面与长直导线始终共面，求：

(1)下落高度为H的瞬间，线框中的感应电流为多少？

(2) 该瞬时线框中电势最高处与电势最低处之间的电势差为多少？

解：(1) $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 0$ 感应电流为0.

(2) $cd = 2L$



机械能是否守恒

$\varepsilon_{dc} = \int_d^c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^{2L} \sqrt{2gH} \frac{\mu_0 I}{2\pi(l+x)} dx$

$= \sqrt{2gH} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(l+x) \Big|_0^{2L}$

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

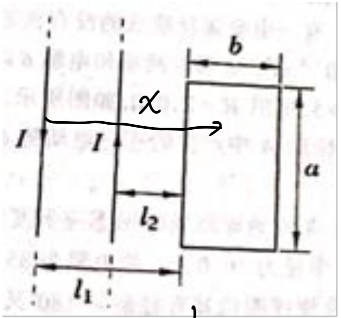
$= \sqrt{2gH} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l+2L}{l}$

$\varepsilon_{dc} > 0$ $\quad U_c > U_d$ $\quad U_{cd} = \sqrt{2gH} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{l+2L}{l}$

6. 如图所示，两条平行长直载流输电导线，和一矩形的导线框共面，已知两导线中的电流同为$I=I_0\sin\omega t$，但方向相反，导线框的长为a，宽为b。试求：

（1）输电回路与导线框之间的互感系数；

（2）回路中的感应电动势。



解：(1) 长直导线磁场 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 取向外为正

导线框中磁场 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-(l_1-l_2)}\right]$

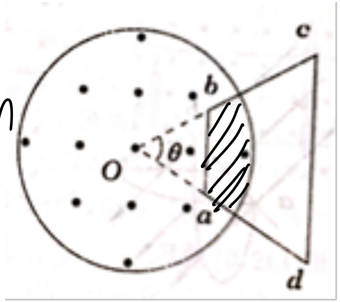
$$\Phi=\int_{l_1}^{l_1+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-(l_1-l_2)}\right]a\cdot dx=\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left[\ln\frac{l_1+b}{l_1}-\ln\frac{l_2+b}{l_2}\right]$$

$$=\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{(l_1+b)l_2}{l_1(l_2+b)}$$

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{(l_1+b)l_2}{(l_2+b)l_1}$$

(2) $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-\mu_0 a}{2\pi} \ln\frac{(l_1+b)l_2}{l_1(l_2+b)} \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 w I_0 a}{2\pi} \ln\frac{l_2(l_1+b)}{l_1(l_2+b)} \cos(wt)$

7. 均匀磁场 $\boldsymbol{B}$被限制在半径 $R = 0.10$ m的无限长圆柱空间内，方向垂直纸面向外，设磁场以 $\frac{dB}{dt} = 100$ T/s的匀速率增加，已知$\theta = \frac{\pi}{3}$，$Oa = Ob = 0.04$ m，试求等腰梯形abc导线框$abcd$ 内的感应电动势，并判断感应电流的方向。



解：$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$　　$\Phi = B \cdot S$　　$d = Oa = Ob = 0.04m$

$$S = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 \approx 4.5 \times 10^{-3} m^2$$

$\Phi = BS$　　$\varepsilon = -\frac{dBS}{dt} = -S\frac{dB}{dt} = -100S = -0.45V$

$|\varepsilon| = 0.45V$　　根据楞次定律 $\longrightarrow$ 感应电流顺时针方向

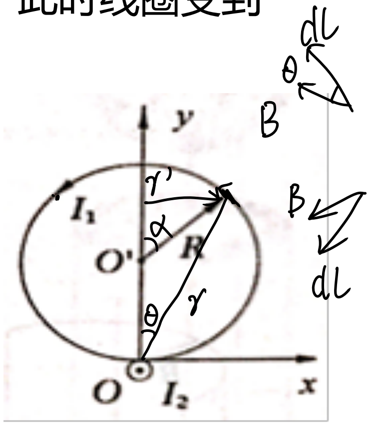
使用感生电动势求解

8. 真空有一半径为R的圆线圈通有电流 I_1，另有一电流I_2 的无限长直导线，与圆线圈平面垂直，且与圆线圈相切（彼此绝缘），如图所示，试求：

（1）圆线圈在图示位置时所受到的磁力矩；

（2）圆线圈将怎样运动；

（3）若无限长直导线 I_2改放在圆线圈中心位置，此时线圈受到的磁力矩为多大。



解:(1) 取圆线圈做为研究对象. 取一电流元 Idl

此位置 $B=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$ $\qquad \vec{F}=\underline{I\,d\vec{l}\times\vec{B}}$

方向：y轴右侧. $\vec{F}$向外 . y轴左侧 $\vec{F}$ 向里

$dF=IdlB\sin\theta=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}Idl\sin\theta$

对y轴 磁力矩 $\qquad d\vec{M}=\vec{r}\times d\vec{F}=r\sin\theta\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}I_1\sin\theta\, dl$

$\underline{dl \neq r d\theta}$ $\quad dl = R d\alpha = 2R d\theta$

$$dM = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi} \sin^2\theta \, 2R \, d\theta$$

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2}$$ y轴负向

(2) 从上向下看，顺时针

(3) 磁力矩为 0.

测试题：

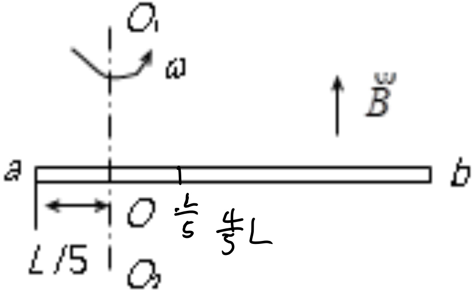
如图所示，一根长为L的金属细杆ab绕竖直轴o_1o_2以角速度ω在水平面内旋转。o_1o_2在离细杆a端L /5处。若已知地磁场在竖直方向的分量为$\vec{B}$。求ab两端间的电势差$U_a - U_b$ 。

解：

$$\varepsilon = \int_{-\frac{L}{5}}^{\frac{4}{5}L} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_{-\frac{L}{5}}^{\frac{4}{5}L} \omega r B\, dr$$

$$= \frac{\omega B}{2} r^2 \Big|_{\frac{L}{5}}^{\frac{4}{5}L}$$

$$= \frac{3}{10}\omega B L^2$$



$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$

$U_b > U_a$

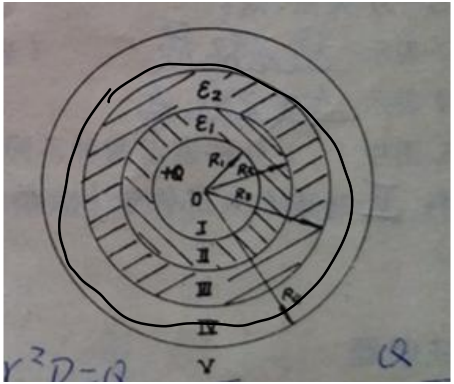
$U_{ab} = U_a - U_b = -\frac{3}{10}\omega B L^2$

3.球形电容器由半径为R_1的导体球与它同心的均匀球壳构成，其间有两层同心的均匀介质球壳介电常数分别是ε_1和ε_2，两层介质的分界面半径是R_2，导体球壳的内半径为R_3，球壳外半径为R_4，球壳外是真空。设内球带电荷Q，球壳不带电，求：

（1）各区域的电场强度

（2）两导体球间的电势差

（3）球形电容器的电容



解：(1) $\oint E\cdot ds=\frac{q}{\varepsilon_0}$ $\qquad \oint D\cdot ds=\Sigma q$

$D=\varepsilon E \qquad E_1=E_4=0$

$R_1<r<R_2$： $E_2=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_1}$ $\qquad R_2<r<R_3$： $E_3=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_2}$

$r>R_4$： $E_5=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$ $\qquad$ 方向均由球心指向无穷远处.

(2) $$U = \int E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_1} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_2} dr$$

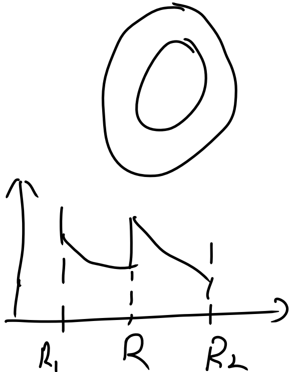
$$= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_1 R_1} - \frac{1}{\varepsilon_1 R_2} + \frac{1}{\varepsilon_2 R_2} - \frac{1}{\varepsilon_2 R_3} \right]$$

(3) $$C = \frac{Q}{U}$$

6.两共轴的导体圆筒，内筒的半径是R_1，外筒的半径是R_2（ $R_2 < 2R_1$ ）,其间充的两层均匀介质，分界面的半径是R，内层电介质的相对介电常数为ε_{γ_1}，外层电介质的相对介电常数为ε_{γ_2}（ $\varepsilon_{\gamma_2} = \varepsilon_{\gamma_1}/2$），两层介质的击穿电场强度都是$E_b$。试问当电压升高时，内外层介质哪一层先击穿，并计算此时所加的最大电压。

解: $\oint E\cdot ds = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$　　设圆筒单位长度带电量 λ

$E\cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$　　$E = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0\varepsilon_r}$



内层 $R_1<r<R$ 时.　　$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}} \le \frac{\lambda}{2\pi R_1\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}$

外层 $R<r<R_2$时 $E_2=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}\le\frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$

$\frac{E_{1max}}{E_{2max}}=\frac{R\varepsilon_{r2}}{R_1\varepsilon_{r1}}=\frac{R}{2R_1}<\frac{R_2}{2R_1}<1$ 外层先击穿

$E_b=E(R)=\frac{\lambda}{2\pi R\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$ $\lambda=E_b\pi R\varepsilon_0\varepsilon_{r1}$

$U=\int_{R_1}^{R}\frac{E_bR}{2r}dr+\int_{R}^{R_2}\frac{E_bR}{r}dr=\frac{E_bR}{2}\ln\frac{R}{R_1}+E_bR\ln\frac{R_2}{R}$

$=E_bR\left[\frac{1}{2}\ln\frac{R}{R_1}+\ln\frac{R_2}{R}\right]$