

期中考试模拟题（二）答案 2018.11

一、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{1}{2} - C_{2n}^n (\frac{1}{2})^{2n+1}$ 3. \leq 4. $1 - e^{-2} - 2e^{-2}$

5. $f(y) = \begin{cases} 0.5\lambda e^{\lambda \frac{y-3}{2}}, & y < 3 \\ 0, & y \geq 3 \end{cases}$

二、解答下列各题（每小题 7 分, 共 42 分）

1、解：由 $a+b+0.5=1$ 及 $(-2)0.5+a+3b=0$, 得 $a=b=0.25$, $D(X)=4.5$

2、解：由 $p(A/B) + p(\bar{A}/\bar{B}) = 1$ 得 $\frac{p(AB)}{p(B)} + \frac{p(\overline{A \cup B})}{1-p(B)} = 1$

$$(1-p(B))p(AB) + p(B)(1-p(A \cup B)) = p(B)(1-p(B))$$

将 $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$ 代入化简得 $p(AB) = p(A)p(B)$

所以事件 A 与 B 独立

3、解：由 $p(A) = p(B) = p(C) = 0.6$, 事件 A,B,C 两两独立, $p(B \cup C / A) = 0.2$

即 $p(B \cup C / A) = \frac{p(AB) + p(AC) - p(ABC)}{p(A)} = 0.2$, 得 $p(ABC) = 0.6$

所求概率 $p = \overline{p(ABC)} = 1 - p(ABC) = 0.4$

4、解： $p(X=i, Y=k) = p(X=i)p(Y=k/X=i) = (\frac{1}{3})(\frac{k-i}{9-2i}), i=1,2,3; k=4,5$

$$p(Y=4) = \frac{122}{315}, p(Y=5) = \frac{193}{315}$$

5、解：Y 的分布函数 $F(y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ (\frac{2}{3})\sqrt{y}, & 0 \leq y < 1, \\ (\frac{1}{3})(1+\sqrt{y}), & 1 \leq y < 4, \\ 1 & y \geq 4 \end{cases}$

所求密度为 $f(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \text{ or } y \geq 4 \\ \frac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4, \end{cases}$

6、解： $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \text{ or } y \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1, y \geq 1 \\ xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ y, & x \geq 1, 0 < y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1, \end{cases}$

三、(15 分) 解：(1) $\int_0^1 dx \int_x^1 ae^x dy = a((2-x)e^x)_0^1 = a(e-2) = 1$ 得 $a = \frac{1}{e-2}$;

(2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{e-2}(1-x)e^x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{other}, \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^y-1}{e-2}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{other}, \end{cases}$

(3) 因为在 $0 < x < 1, x < y < 1$ 内, 有 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立

(4) $P(X+Y < 0.5) = \int_0^{0.25} dx \int_x^{0.5-x} \frac{e^x}{e-2} dy = \frac{(5-4x)e^x}{2(e-2)} \Big|_0^{0.25} = \frac{4e^{0.25}-5}{2(e-2)}$

四、(10 分) 解： $f_X(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1, \\ 0, & \text{other}, \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{other}, \end{cases}$

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \begin{cases} 1-|z|, & |z| < 1, \\ 0, & |z| \geq 1, \end{cases}$

五、(18 分) 解：(1) $f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$, 当 $0 < y < 1$ 时,

$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{other}, \end{cases}$

(2) $P(X \leq x|Y = 0.25) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|0.25)dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 16x^2, & 0 \leq x < 0.25, \\ 1, & x \geq 0.25 \end{cases}$

(3) $P(X < 0.5|Y < 0.5) = \frac{P(X < 0.5, Y < 0.5)}{P(Y < 0.5)} = 1$

(4) $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, y) dy = \begin{cases} 2z, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(5) $E(X^2Y^2) = \int_0^1 dx \int_x^1 x^2 y^2 8xy dy = \int_0^1 2x^3(1-x^4)dx = \frac{1}{4}$