期中考试模拟题（三）答案 2019.4

一 1、2/9　2、3/4　3、4/9　4、3/5

5、 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(y+1)}{8(y+1)} & 0<y<e^4-1\\ 0 & 其他\end{cases}$　6、8/9　7、1/2e

二、设 $A=\{$挑选的某人是色盲患者$\}$，$B=\{$挑选的某人是男性$\}$，

（1）$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=6/10\times0.05+4/10\times0.002=0.0308$

（2）由 Bayes 公式，$P(B|A)=P(AB)/P(A)=6/10\times0.05/0.0308=\dfrac{75}{77}$。

三、由 $0.5=P\{X\le70\}=P\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\le\dfrac{70-\mu}{\sigma}\}$，得 $\mu=70$，

$P\{X\le60\}=P\{\dfrac{X-70}{\sigma}\le\dfrac{-10}{\sigma}\}=\Phi(-\dfrac{10}{\sigma})=0.25$，$\dfrac{10}{\sigma}=0.68$，$\sigma=14.71$.

四、（1） $f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2x}1dy=2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}1dx=1-\dfrac{y}{2} & 0<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$

（2）不独立，因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

（3）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

当 $z<0$ 或 $z>3$ 时　$f_Z(z)=0$

当 $0<z<1$时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{3}}^{z}1dx=\dfrac{2z}{3}$.

当 $1\le z\le3$时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{3}}^{1}1dx=1-\dfrac{z}{3}$.

五、由于 $P\{X>\dfrac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}dx=\dfrac{1}{2}$，（3 分）$Y$ 服从二项分布 $B(4,\dfrac{1}{2})$，则

$EY^2=DY+(EY)^2=npq+(np)^2=4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+(4\times\dfrac{1}{2})^2=5.$

六、注意到Y|X=x ~ U(0,x)，所以在给定X=x的条件下，Y的概率密度函数为

对 $x\in(0,1)$，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & y\in(0,x),\\ 0 & 其它\end{cases}$

（1）(X, Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & 0<y<x<1,\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（2）Y的概率密度为 $f_2(y)=\int_y^1 f(x,y)dx=\begin{cases}-\ln y & y\in(0,1),\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

（3）$P\{X+Y>1\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}dy=1-\ln 2$

七、 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

做法 1　当 $z\le 0$时，有 $F_Z(z)=0$；

当 $z>0$时，有

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint\limits_{x\le zy} f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_0^{+\infty}[\int_0^{zy}2e^{-x-2y}dx]dy=\frac{z}{z+2}$$

得 $f_Z(z)=F_Z^{'}(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+2)^2}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

做法 2　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy$ ，$f_Z(z)=F_Z^{'}(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+2)^2}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

八.（1）$\int_0^3 cx^2dx=9c=1,\quad c=\frac{1}{9}.$

（2）$E(X^2)=\int_0^3\frac{1}{9}x^4dx=\frac{27}{5}.$

（3）由题设知 Y 在区间（1，2）上为连续型随机变量，密度函数为$\frac{1}{9}\boldsymbol{y}^2$

$P(Y=2)=\int_0^1\frac{1}{9}x^2dx=\frac{1}{27},\quad P(Y=1)=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx=\frac{19}{27}.$

因此$\boldsymbol{F(y)}=\begin{cases}0 & \boldsymbol{y}<1\\ \dfrac{19}{27}+\int_1^y\dfrac{1}{9}\boldsymbol{y}^2\boldsymbol{dy} & 1\le\boldsymbol{y}<2\\ 1 & \boldsymbol{y}\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0 & \boldsymbol{y}<1\\ \dfrac{18}{27}+\dfrac{\boldsymbol{y}^3}{27} & 1\le\boldsymbol{y}<2\\ 1 & \boldsymbol{y}\ge 2\end{cases}$

（4）$P\{X\le Y\}=1-P(X>Y)=1-P(Y=1)=\frac{8}{27}$