第二章 解析函数

- 解析函数的概念
- 解析函数的充要条件
- 初等函数

第三节 初等函数

一、指数函数

二、对数函数

三、幂函数

四、三角函数

五、反三角函数

六、双曲函数与反双曲函数

一、指数函数

1. 指数函数的定义

当函数 $w = f(z)$ 在复平面内满足以下三个条件：

（1）$f(z)$在复平面内处处解析；

（2）$f'(z) = f(z)$；

（3）当 $\mathrm{Im}(z) = 0$时，$f(z) = e^x$， 其中 $x = \mathrm{Re}(z)$.

此函数称为复变数 z 的**指数函数**，记为

$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

说明：

(1) 指数函数是初等函数中最重要的函数，其余的初等函数都通过指数函数来定义。

(2) 借助欧拉公式，指数函数可以这样来记忆：

$$w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y).$$

(3) 但事实上，从定义本身来看，e^z 应理解为仅仅是种记号或者**规定**，仅仅作为代替 $\exp z$ 的符号.

2. 指数函数的性质

(1) e^z 是**单值函数**.

事实上，对于给定的复数 $z = x + iy$,

定义中的 e^x, $\cos y$, $\sin y$ 均为单值函数。

(2) $e^z \neq 0$. 因为 $e^x > 0$, $\cos y + i\sin y \neq 0$.

(3) 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

(4) e^z是以$2k\pi i$ 为周期的周期函数.

事实上，由 $e^{2k\pi i}=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1$,

有 $$e^{z+2k\pi i}=e^z\cdot e^{2k\pi i}=e^z.$$

(5) e^z 除无穷远点外，处处有定义.

事实上，在无穷远点有

当 $y=0, x\to+\infty$ 时, $e^z\to+\infty$;

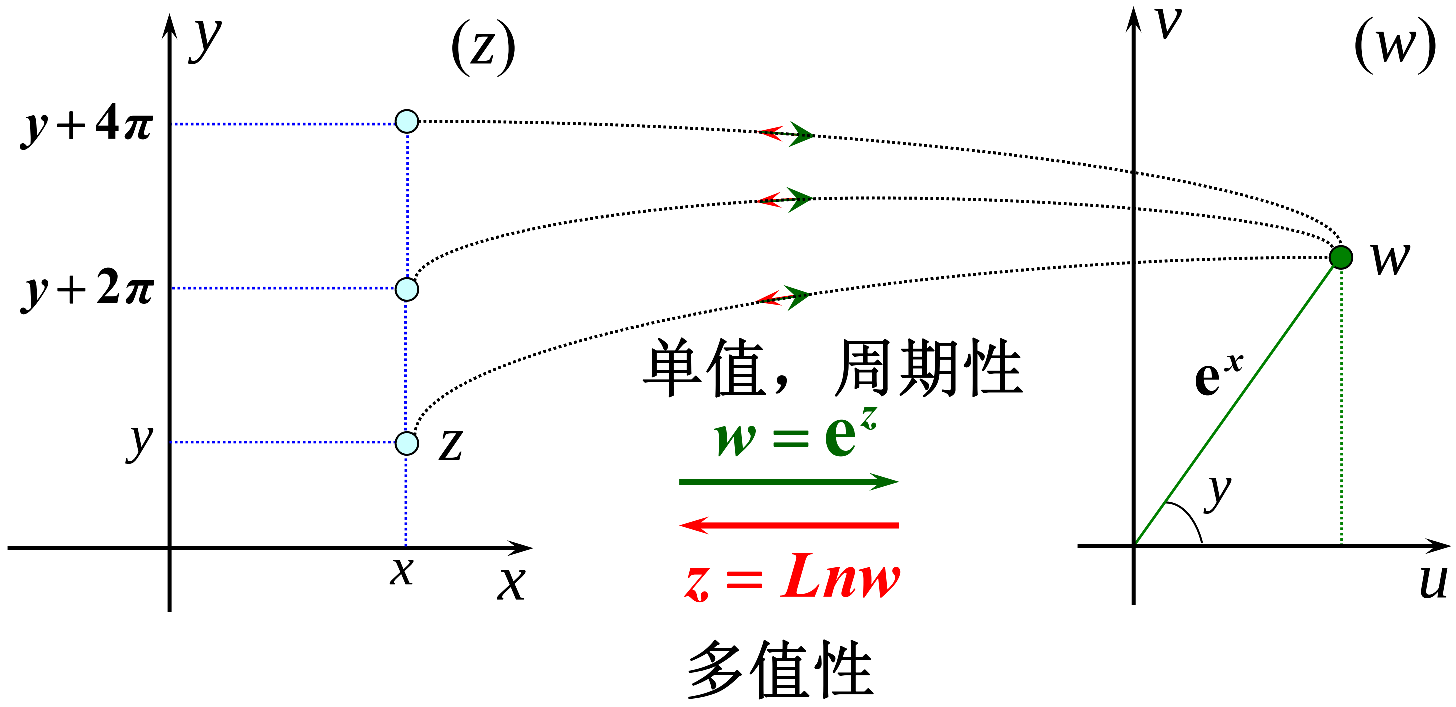
当 $y=0, x\to-\infty$ 时, $e^z\to 0$.

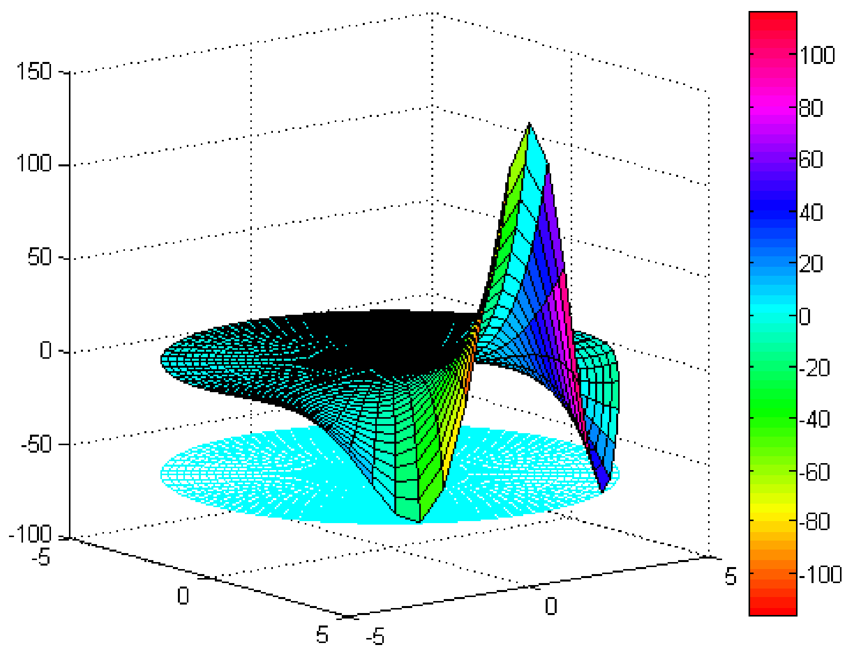
(6) e^z 在复平面内处处解析，$(e^z)'=e^z$.

(7) 映射关系：由 $w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y)=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{iy}$，有

$$\begin{cases} |w|=\mathrm{e}^x, & \text{——— 由 } z \text{ 的实部得到 } w \text{ 的模;} \\ \operatorname{Arg} w=y+2k\pi, & \text{—— 由 } z \text{ 的虚部得到 } w \text{ 的辐角.} \end{cases}$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

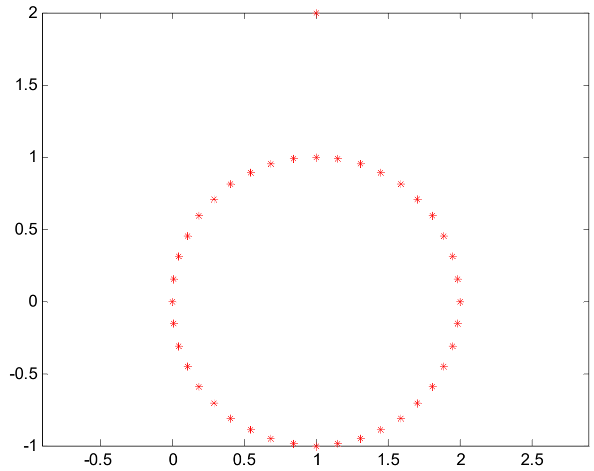


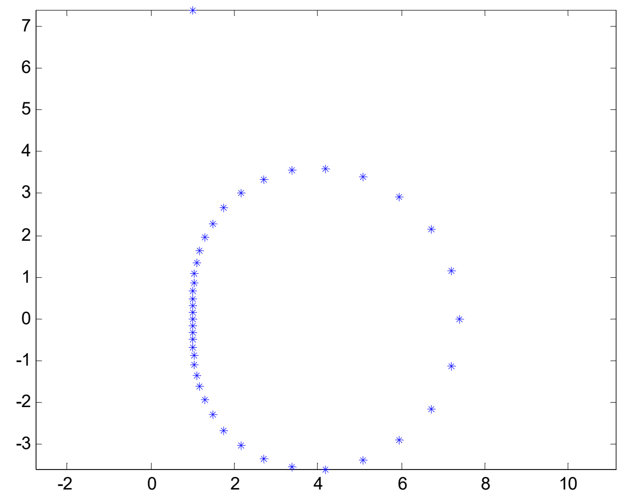


- z=5*cplxgrid(30);
- cplxmap(z,exp(z))
- colorbar('vert')

将abs(z-1)=1通过指数函数进行映射。

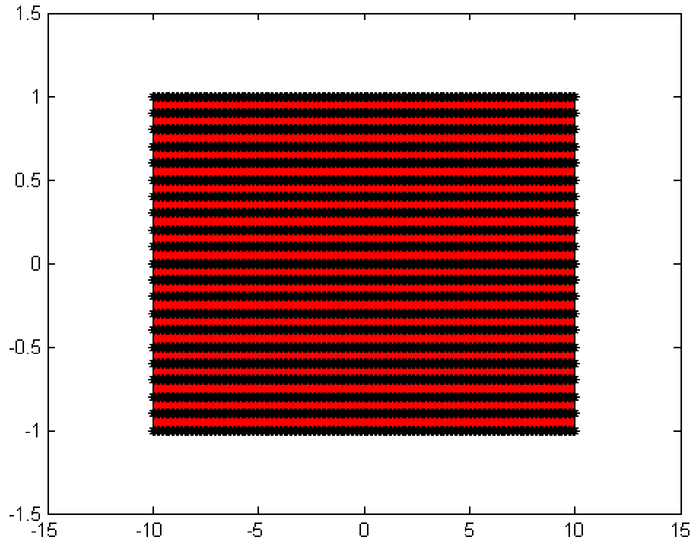
```
clear;clc;
t=0:0.05*pi:2*pi;
x=1+cos(t);y=sin(t);
z1=x+i.*y;
w=exp(z1);
for i=1:length(t)
 figure(1)
plot(z1(i),'r*','markersize',5)
hold on
% pause(0.1)
figure(2)
plot(w(i),'b*','markersize',5)
hold on
% pause(0.1)
end
```

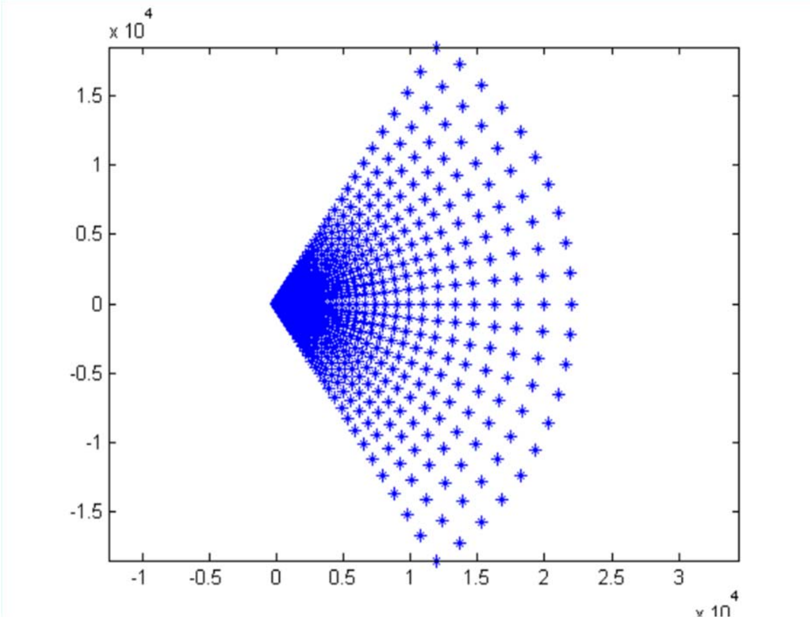




将区域{-10<x<10,-1<y<1} 通过指数函数进行映射

```
clear;clc;
x=-10:0.1:10;
y=-1:0.1:1;
[x1 y1]=meshgrid(x,y);
z1=x1+i.*y1;
figure(1)
h=fill([-10 10 10 -10],[-1 -1 1 1],….
'green','FaceColor','red')
axis([-15,15,-1.5,1.5])
hold on
plot(z1,'k*','markersize',5)
w=exp(z1);
figure(2)
plot(w,'b*','markersize',5)
%%
for i=1:21
   for j=1:201
     plot(real(w(i,j)),imag(w(i,j)),'*')
     hold on
     pause(0.1)
   end
end
axis equal
```





例 计算$e^{-3+\frac{\pi}{4}i}$的值.

解 根据指数定义:

$$e^{-3+\frac{\pi}{4}i}=e^{-3}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=e^{-3}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$$

例 计算复数 e^{2+i} 的辐角主值.

解 因为 $\mathrm{Arg}e^{z}=y+2k\pi$ (k为整数)

其辐角主值 $\arg e^{z}$ 为区间 $(-\pi,\pi]$ 内的一个角.

所以 $\mathrm{Arg}e^{2+i}=1+2k\pi,\quad \arg e^{2+i}=1;$

二、对数函数

1. 对数函数的定义

- **对数函数定义为指数函数的反函数.**

满足方程 $e^{w}=z$ 的函数 $w=f(z)$ 称为**对数函数**,

记作 $w=\operatorname{Ln} z$.

2. 对数函数的计算

令 $z=|z|e^{i\operatorname{Arg}z}=re^{i\theta}$, $w=u+iv$,

由 $e^{w}=z$, 有 $e^{u}\cdot e^{iv}=r\cdot e^{i\theta}$,

即 $w=\operatorname{Ln}z=\ln|z|+i\,Arg\,z=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i,(k\in Z)$.

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \quad (k \in Z).$$

- **显然对数函数为多值函数.**

主值(枝)

称 $w = \ln|z| + i\arg z$ 为 $w = \mathrm{Ln}\, z$ 的**主值(枝)**,

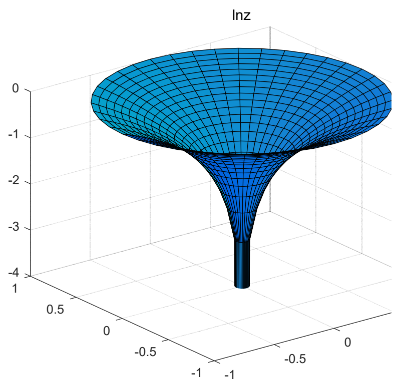
记为 $w = \ln z$. 故有 $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

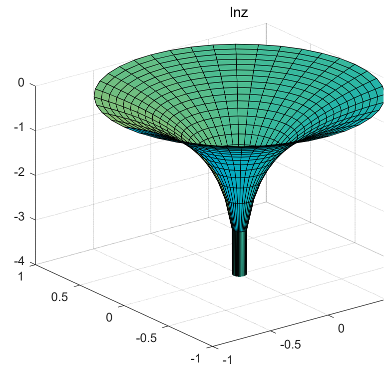
特别地, 当 $z = x > 0$ 时,

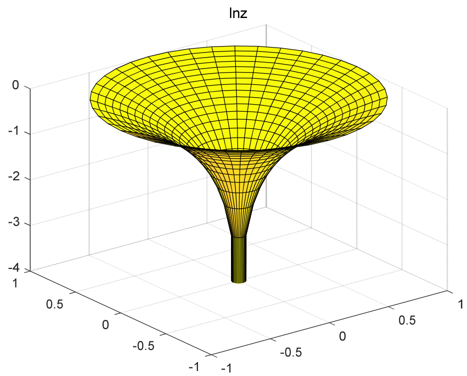
$\mathrm{Ln}\, z$ 的主值 $\ln z = \ln x$ 就是实对数函数.

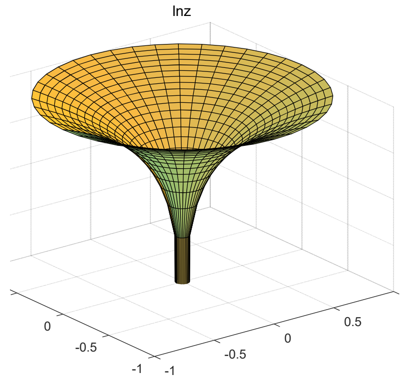
分支(枝)

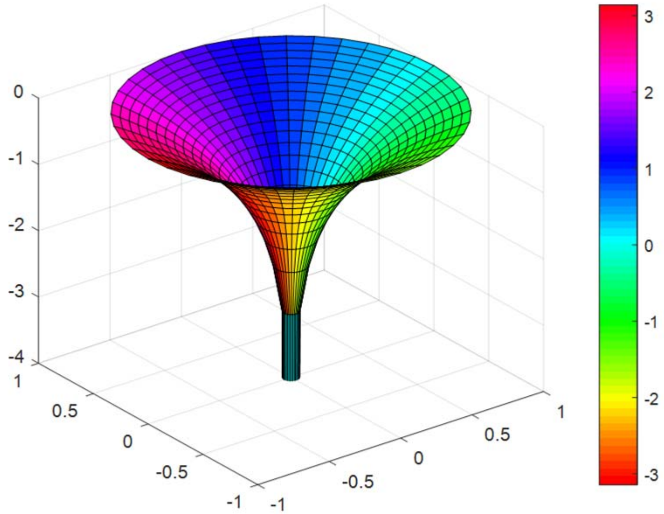
对于任意一个固定的 k, 称 $\ln z + 2k\pi i$ 为 $\mathrm{Ln}\, z$ 的一个**分支(枝)**.

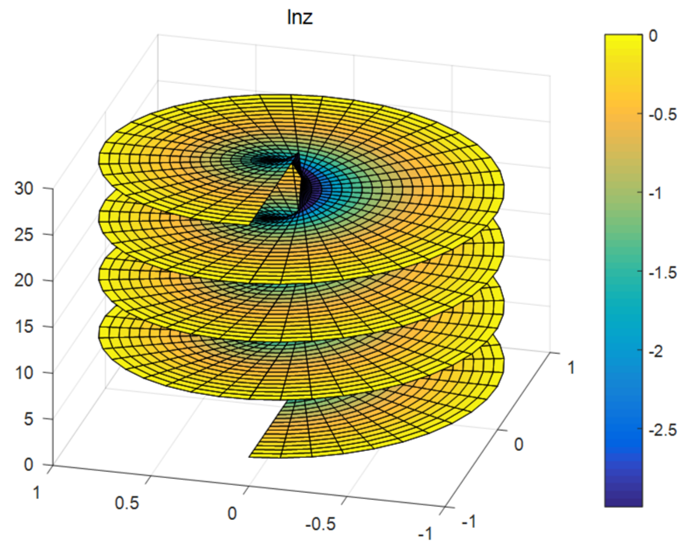

lnz


lnz


lnz


lnz




lnz

3. 对数函数的性质

(1) $w = \text{Ln}\, z$在原点无定义，故它的定义域为 $z \neq 0$.

注意到， 函数 $\arg z$在原点无定义；

或者指数函数 $e^w \neq 0$.

- **在复数域内，负实数可以求对数.**

(2) $\text{Ln}\, z$的各分支在除去原点及负实轴的复平面内连续；特别地，$\ln z$ 在除去原点及负实轴的平面内连续. **注意，函数$\arg z$ 在原点及负实轴上不连续.**

(3) $\mathrm{Ln}\,z$ 的各分支在除去原点及负实轴的复平面内解析；特别地，$\ln z$ 在除去原点及负实轴的平面内解析；**由反函数求导法则可得**

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{(\mathrm{e}^w)'_w}=\frac{1}{\mathrm{e}^w}=\frac{1}{z}.$$

进一步有 $$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Ln}\,z}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}(\ln z+2k\pi i)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{z}.$$

(4) $$\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2;$$

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2\ .$$

- $\mathrm{Ln}(z^2)=2\mathrm{Ln}z$ 成立吗？

例 求下列对数以及它们的主值.

(1) $\mathrm{Ln}(-i)$; (2) $\mathrm{Ln}(1+i)$.

解 (1) $\mathrm{Ln}(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) + 2k\pi i$

$$= \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi i = -\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i,$$

主值 $\ln(-i) = -\dfrac{\pi}{2}i$.

(2) $\mathrm{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i$

$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi i,$$

主值 $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

例 求对数 $\mathrm{Ln}\,2$ 以及它的主值.

解 $\mathrm{Ln}\,2 = \ln|2| + i\arg 2 + 2k\pi i = \ln 2 + 2k\pi i;$

主值 $\ln 2 = \ln 2.$

在实数范围内

在复数范围内

- 可见，当 z 为正实数时, $\ln z$ 与实对数函数是一致的.

例 求对数 $\mathrm{Ln}(-1)$ 以及它的主值.

解 $\mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) + 2k\pi i = (2k+1)\pi i;$

主值 $\ln(-1) = \pi i.$

- 可见，负实数是可以求对数的.

例 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解 因为 $e^z = 1 + \sqrt{3}i$,

所以 $z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$

$$= \ln\left|1 + \sqrt{3}i\right| + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$= \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

三、幂函数

1. 幂函数的定义

函数 $w = z^{\alpha}$ **规定**为 $z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ （α 为复常数，$z \neq 0$）

称为复变量 z 的**幂函数**.

还**规定**：当 α 为正实数，且 $z = 0$ 时，$z^{\alpha} = 0$.

2.幂函数的解析性

(1) 当 α 为正整数时, 幂函数 z^n 在复平面内是单值解析.

$$z^n = e^{n \operatorname{Ln} z} = e^{n[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} = |z|^n e^{in\arg z} = e^{n \ln z}$$

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

(2) 当 α为负整数时, 幂函数 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$ 是单值函数.

此时，z^{α} 除原点外处处解析，且 $(z^{\alpha})'=\alpha z^{\alpha-1}$.

(3) **当 $\alpha=0$ 时**, $z^0=e^{0\cdot Lnz}=e^0=1$.

(4) 当$\alpha=\dfrac{1}{n}$时, 幂函数 $z^{\frac{1}{n}}$是一个 n 值函数. （n 为正整数）

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z}=e^{\frac{1}{n}[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]}=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$$

$$(k=0,1,\cdots,n-1)$$

它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的.

(5) 当 $\alpha = \dfrac{p}{q}$ 时, 幂函数 $z^{\frac{p}{q}}$ 是一个 q 值函数.

（其中 p 与 q 为互素的整数，$q > 0$）

此时，z^{α} 除原点与负实轴外处处解析，

且 $(z^{\alpha})' = \alpha z^{\alpha-1}$.

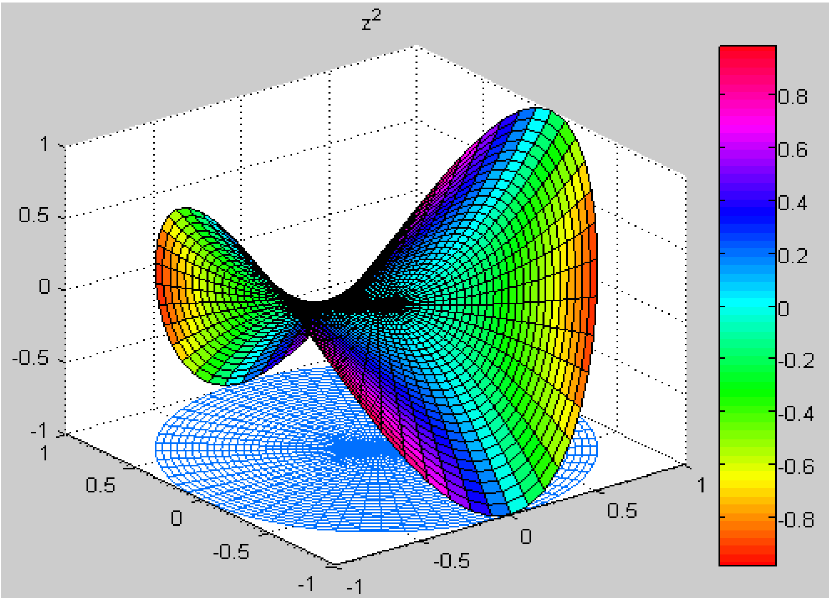
(6) 当 α 为无理数或复数($\operatorname{Im}\alpha \neq 0$)时,

z^{α}一般为无穷多值.

此时，z^{α} 除原点与负实轴外处处解析.

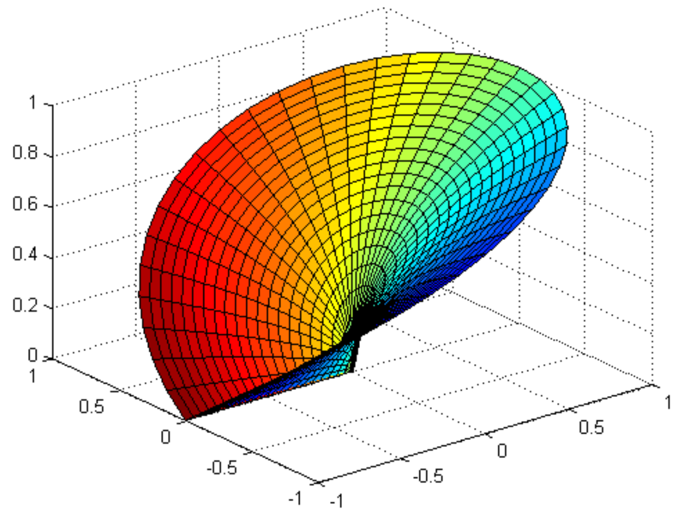
且 $(z^{\alpha})' = \alpha z^{\alpha-1}$.

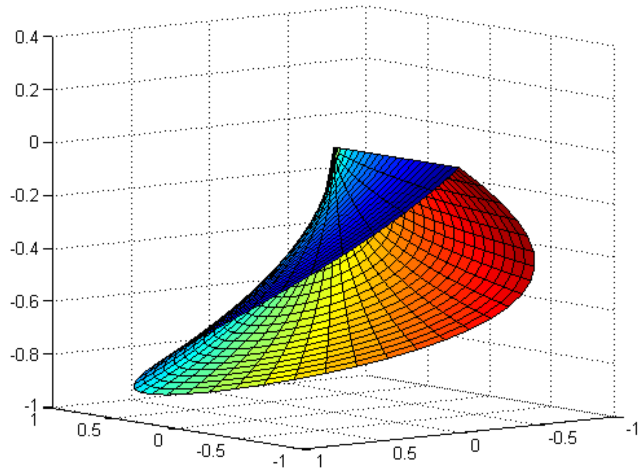
绘出幂函数 z^2 的图形

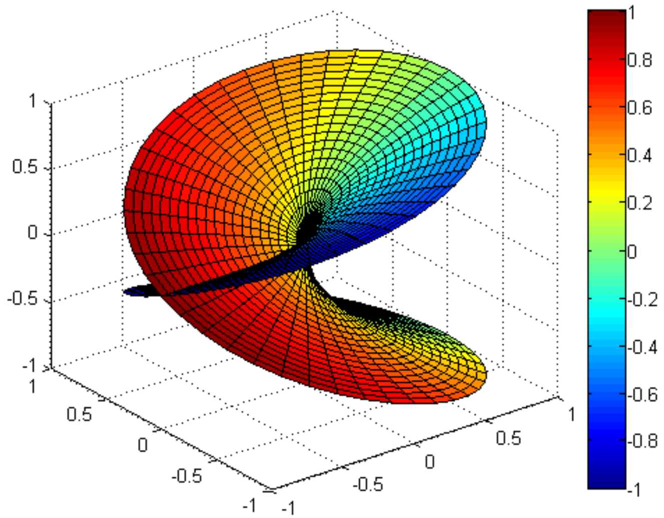



```
z=cplxgrid(30);
cplxmap(z,z.^2);
colorbar('vert');
title('z^2')
```

绘出幂函数z1/2 的图形







例 求下列函数的值.

(1) i^i (2) $1^{\sqrt{2}}$

解 (1) $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i)} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

- **可见，i^i 是正实数，它的主值是$e^{\frac{\pi}{2}}$**

(2) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{\sqrt{2}[0+i(0+2k\pi)]}$

$= e^{2\sqrt{2}k\pi i}$

$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$, $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

- **可见，命题$1^{\alpha}=1$ 复数域不成立**

四、三角函数

1. 三角函数的定义

启示　　因为 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$,

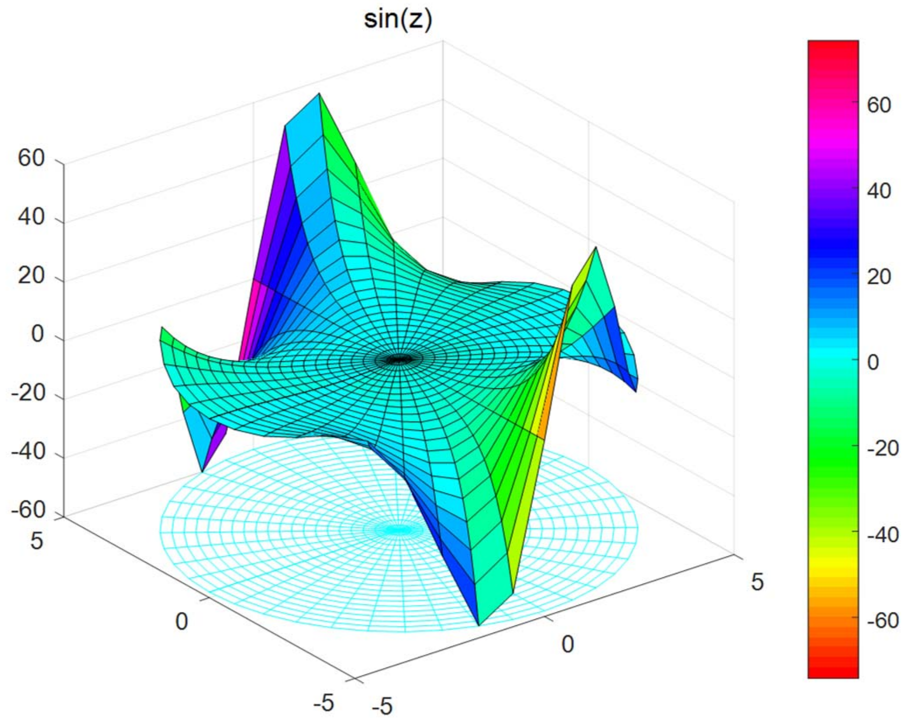
将两式相加与相减，得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\quad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

正弦函数的定义 $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$

余弦函数的定义 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$

绘出函数sin(z) 的函数图像




```
z=5*cplxgrid(20);
cplxmap(z,sin(z))
colorbar('vert')
title('sin(z)')
```

2. 三角函数的性质

(1)正弦函数和余弦函数在复平面内均为单值函数;

(2)正弦函数和余弦函数均为 2π 为周期的周期函数;

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\quad \cos(z+2\pi)=\cos z.$$

(3) $\cos z$ 为偶函数，$\sin z$ 为奇函数;

$$\cos(-z)=\cos z,\quad \sin(-z)=-\sin z.$$

(4)正弦函数和余弦函数在复平面内均为解析函数;

$$(\sin z)'=\cos z,\quad (\cos z)'=-\sin z.$$

(5)有关正弦函数和余弦函数的几组重要公式

$$a)\quad \begin{cases} \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2, \\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \\ \sin^2 z+\cos^2 z=1. \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{cases} \cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi, \\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi. \end{cases}$$

(6)注意：有界性不再成立

$\cos z$ 和 $\sin z$ 都是无界函数；

这是与实变函数完全不同的.

3. 其它三角函数的定义

正切函数 $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, 余切函数 $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$,

正割函数 $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$, 余割函数 $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$.

与正弦函数和余弦函数类似，我们也可以讨论它们的奇偶性、周期性和解析性.

例 求下列函数的值.

(1) $\cos i$ (2) $\sin(1+2i)$.

解 (1) 根据定义知 $\cos i = \dfrac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e}{2}$.

(2) 根据定义知

$$\sin(1+2i) = \frac{e^{i(1+2i)} - e^{-i(1+2i)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1)}{2i}$$

$$= \frac{e^{2} + e^{-2}}{2}\sin 1 + i\,\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}\cos 1.$$

五、反三角函数

1. 反三角函数的定义

(1)反余弦函数 $w = \text{Arc}\cos z$.

如果 $\cos w = z$,则称 w 为复变量 z 的**反余弦函数**,

由 $z = \cos w = \dfrac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$,

$$\Rightarrow \ (e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \ e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}, \quad \Rightarrow \ iw = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\Rightarrow \ w = \text{Arc}\cos z = -i\,\text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

(2)反正弦函数 $w = \mathrm{Arcsin}\, z$.

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right);$$

(3)反正切函数 $w = \mathrm{Arctan}\, z$.

$$\mathrm{Arctan}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i+z}{i-z}.$$

2. 反三角函数的性质

反正弦函数、反余弦函数和反正切函数均为多值函数.

六、双曲函数与反双曲函数

1. 双曲函数的定义

双曲正弦函数 $\sinh z = \dfrac{1}{2}(e^{z} - e^{-z});$

双曲余弦函数 $\cosh z = \dfrac{1}{2}(e^{z} + e^{-z});$

双曲正切函数 $\tanh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}};$

双曲余切函数 $\coth z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}.$

2. 双曲函数的性质

(1) $\cosh z$ 为偶函数，$\sinh z$ 为奇函数；

(2) $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 均为 $2\pi i$ 为周期的周期函数；

(3) $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 在整个复平面内处处解析的单值函数；

$$(\sin hz)' = \cos hz, \qquad (\cos hz)' = \sin hz.$$

(4) $\cos hiy = \cos y, \qquad \sin hiy = i\sin y.$

$$\begin{cases} \cosh(x+yi) = chx\cos y + ishx\sin y, \\ \sinh(x+yi) = shx\cos y + ichx\sin y. \end{cases}$$

3. 反双曲函数的定义

反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right);$

反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$

反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z};$

反双曲余切函数 $\operatorname{Arcoth} z = \dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}.$

七、小结与思考

复变初等函数是一元实变初等函数在复数范围内的自然推广，它既保持了后者的某些基本性质，但有一些性质与后者不同. 如:

1. **指数函数具有周期性.**

2. **负数无对数的结论不再成立.**

3. **三角正弦与余弦不再具有有界性.**

4. **双曲正弦与余弦都是周期函数.**