第二章 矩阵

第二节：方阵的行列式与逆矩阵

董荣
数学与统计学院

作业：

习题2.2

(A) 1(2)(3)，4，6，10，13，14，15

(B) 2

回顾上节知识：

1. 矩阵定义：由$m \times n$个数$a_{ij}(i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n)$排成的$m$行、$n$列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. 矩阵的代数运算：加法、数乘、矩阵乘法

矩阵加法的运算规律：

（1）$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ 交换律

（2）$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ 结合律

（3）$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$ 零矩阵的作用

（4）$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ 负矩阵的作用

数乘的运算规律：

假设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都为$m\times n$矩阵，$k,l$为任意常数，则有：

（1）$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\ (-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A},\ 0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

（2）$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$　　结合律

（3）$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$　　数的分配律

（4）$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$　　矩阵的分配律

矩阵乘法的运算规律(假定其中的所有运算都有意义)：

（1）$\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_{n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}$　　单位矩阵的作用

（2）$\boldsymbol{O}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{O}_{n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$　　零矩阵的作用

（3）$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$　　乘法结合律

（4）$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})$　　关于数乘的结合律

（5）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$　　左分配律

（6）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$　　右分配律

方阵的幂的运算规律：

对于任意非负整数k、l，我们有

$$A^kA^l = A^{k+l}, \qquad (A^k)^l = A^{kl}$$

矩阵转置的运算规律：

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(3) $(kA)^T = kA^T$

(4) $(AB)^T = B^TA^T$

(5) $(A_1A_2\cdots A_m)^T = A_m^TA_{m-1}^T\cdots A_2^TA_1^T$

对称矩阵： 若方阵A满足$A^T = A$.

反对称矩阵： 若方阵A满足$A^T = -A$.

第二节：方阵的行列式与逆矩阵

1.方阵的行列式

2.逆矩阵的概念

3.矩阵可逆的条件

4.逆矩阵的基本性质及应用

定义（方阵的行列式）：对于n阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，称$n$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵$\boldsymbol{A}$的行列式，简记为$\det(\boldsymbol{A})$或$|\boldsymbol{A}|$

注意：方阵是一个数表，行列式是一个数

方阵的行列式的运算规律：

（1） $\det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$

（2） $\det(k\boldsymbol{A}) = k^n \det(\boldsymbol{A})$

（3） $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$

$\det(A_{3\times4}\,B_{4\times3}) \neq \det(A_{3\times4})\det(B_{4\times3})$

（4） $\det(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m) = \det(\boldsymbol{A}_1)\det(\boldsymbol{A}_2)\cdots\det(\boldsymbol{A}_m)$

例：设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\3&2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，求 $|AB|, |A^3|, |3A|$.

解 $|A| = 6, |B| = 20,\quad |AB| = |A||B| = 120,$

$|A^3| = |A|^3 = 216,\quad |3A| = 3^3|A| = 162.$

例：证明奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

证 设A为$2n-1$阶反对称矩阵

$$det(A)=det(-A^T)$$

$$=(-1)^{2n-1}\,det\left(A^T\right)=-\det(A)$$

则 $det(A)=0.$

例：设方阵A满足$AA^T=I$且$det(A)<0$. 证明: $det(A+I)=0$.

证 $\det(A+I)=det\left(A+AA^T\right)=det(A(I+A^T))$

$$=det(A)det(I+A^T)$$

$$=det(A)det(I+A^T)^T$$

$$=det(A)det(A+I)$$

则 $(1-det(A))det(A+I)=0.$

由于$1-\det(A)>0$, $det(A+I)=0.$

第二节：方阵的行列式与逆矩阵

1.方阵的行列式

2.逆矩阵的概念

3.矩阵可逆的条件

4.逆矩阵的基本性质及应用

思考：上一节中我们学习了矩阵的加法、减法、数乘、乘积运算，那么我们能不能对矩阵定义“除法运算”呢？

在数的运算中，当数$a \neq 0$时，有$b \div a = ba^{-1}$。

其中a^{-1}满足$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$，a^{-1}称为a的逆元。

矩阵也有逆元吗？

逆矩阵：

定义：设A为n阶**方阵**，如果存在n阶方阵B，使得

$$AB = BA = I$$

则称方阵A是**可逆的**（或称为**非奇异的**），并称方阵B为方阵A的**逆矩阵**或**逆阵**，记为A^{-1}，即$A^{-1} = B$.

不存在逆阵的方阵也称为**奇异矩阵**。

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\because AB = BA = I$

$\therefore B$是A的逆矩阵.

即$A^{-1} = B$.

方阵的逆矩阵不一定存在：

例：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$的逆矩阵存在么？

有 $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+2b_{12} & 0\\ b_{21}+2b_{22} & 0\end{bmatrix}\neq \boldsymbol{I}$

所以$\boldsymbol{A}$是不可逆的.

（1）方阵可逆的条件是什么？
（2）逆矩阵是否唯一？
（3）可逆时，如何求逆矩阵？

定理1： 若方阵A可逆，则A的**逆矩阵必是唯一的**.

证 设B,C都是方阵A的逆矩阵，则有

$$AB = BA = I = AC = CA$$

于是有

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

所以A的逆矩阵是唯一的。

第二节：方阵的行列式与逆矩阵

1.方阵的行列式

2.逆矩阵的概念

3.矩阵可逆的条件

4.逆矩阵的基本性质及应用

定义：（**伴随矩阵**）设$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$为$n(n\geq 2)$阶方阵，$\det(\boldsymbol{A})$的元素$a_{ij}$的代数余子式为$A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称以$A_{ji}$为$(i,j)$元素的$n$阶方阵为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，记为$\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}=\left(A_{ij}\right)^T$$

例： 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$的伴随矩阵.

解 $A_{11}=5$，$A_{12}=-3$，$A_{21}=-2$，$A_{22}=1$ 故$A^*=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. 主互换，次变号

定理2：设$\boldsymbol{A}$为$n(n \geq 2)$阶方阵，则成立$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$

证 **回想行列式的性质**：$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det(\boldsymbol{A}), & \text{当} j = i \\ 0, & \text{当} j \neq i \end{cases}$

这条性质意味着：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det(\boldsymbol{A}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(\boldsymbol{A}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(\boldsymbol{A}) \end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}$$

同理可证：$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$

定理2：设A为$n(n \geq 2)$阶方阵，则成立$AA^* = A^*A = \det(A)\, I$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A\left(\frac{1}{\det(A)}A^*\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}A^*\right)A = I$$

定理3：（**方阵可逆的充要条件**）$n(n \geq 2)$阶方阵A可逆的充要条件是$\det(A) \neq 0$. 且当A可逆时，有

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*$$

证：(**必要性**)若A可逆，则存在方阵B，使$AB = I$，

则有$\det(A)\det(B) = 1$，故$\det(A) \neq 0$;

(**充分性**)由定理2，若$\det(A) \neq 0$，则有$A\left(\frac{1}{\det(A)}A^*\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}A^*\right)A = I$，

可知A的逆矩阵存在，并且$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*$.

例：下列矩阵是否可逆？如果可逆，求其逆矩阵

$$(1)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&4&-1\\1&0&3\\2&5&-4\end{bmatrix}\qquad (2)\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&6&4\\2&4&-1\\-1&2&5\end{bmatrix}$$

解：(1) 由于$\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}0&4&-10\\1&0&3\\0&5&-10\end{vmatrix}=-10\neq 0$，故$\boldsymbol{A}$可逆.

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}-15&11&12\\10&-10&-10\\5&-7&-4\end{bmatrix}$$

根据$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*$，计算得 $A^{-1}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-15&11&12\\10&-10&-10\\5&-7&-4\end{bmatrix}$.

(2) 由于$\det(\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}1&6&4\\0&-8&-9\\0&8&9\end{vmatrix}=0$，故矩阵$\boldsymbol{B}$不可逆.

推论1：如果$n(n \geq 2)$阶方阵$\boldsymbol{A}$的行列式 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，则

$$\det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}$$

证：在公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}$ 两端取行列式，得$\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^n$，

因为$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，可得$\det(\boldsymbol{A}^*) = [\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}$.

推论2：如果同阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$，则$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

证：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) = 1$，故$\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$，$\boldsymbol{A}$可逆.

用$\boldsymbol{A}^{-1}$左乘$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$的两端, 得$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, 其余结论可类似证明.

推论2说明：要验证方阵$\boldsymbol{B}$是方阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵，只需验证$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$或$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$中的一个就可以了。

例：设n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，证明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$可逆，并求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$.

解：因为

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{I}$$

故有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})+2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$$

化简得

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}$$

$$1/2(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}$$

这说明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$可逆，且$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=1/2(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})$

例： 求下列矩阵的逆，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}, \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0\right)$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix}$$

解：1） $\because |A| = \prod a_i \neq 0 \quad \therefore A$可逆

依对角矩阵的性质知： $A^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$

例： 求下列矩阵的逆，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{pmatrix}, \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0\right)$$

解 2）$\because |B|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod a_i \neq 0 \quad \therefore B$可逆

$$\begin{pmatrix} & & & \boxed{a_1} \\ & & \boxed{a_2} & \\ & \iddots & & \\ \boxed{a_n} & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & \boxed{a_n^{-1}} \\ & & \iddots & \\ & \boxed{a_2^{-1}} & & \\ \boxed{a_1^{-1}} & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & & & \\ & \boxed{1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

?

$$\therefore B^{-1}=\begin{pmatrix} & & & a_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & a_2^{-1} & & \\ a_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

例： 计算 $(4I+A)^T(4I-A)^{-1}\left(16I-A^2\right)$ 的行列式.

其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

解

$$\left|(4I+A)^T(4I-A)^{-1}\left(16I-A^2\right)\right|$$

$$=\left|(4I+A)^T(4I-A)^{-1}(4I-A)(4I+A)\right|$$

$$=\left|(4I+A)^T E(4I+A)\right| = \left|(4I+A)^T\right|\left|4I+A\right|$$

$$=\left|4I+A\right|^2=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}^2 = 60^2 = 3600\ ^2$$

第二节：方阵的行列式与逆矩阵

1.方阵的行列式

2.逆矩阵的概念

3.矩阵可逆的条件

4.逆矩阵的基本性质及应用

逆矩阵的基本性质：

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶可逆方阵，常数$k\neq 0$，则有：

(1) $\boldsymbol{A}^{-1}$可逆，且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$ $\Leftarrow$ $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$

(2) $\boldsymbol{A}^T$可逆，且$(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$ $\Leftarrow$ $\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^{-1})^T=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{I}$

(3) $k\boldsymbol{A}$可逆，且$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$ $\Leftarrow$ $(k\boldsymbol{A})\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$

(4) $\boldsymbol{AB}$可逆，且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ $\Leftarrow$ $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$

(5) $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$ $\Leftarrow$ $\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\det(\boldsymbol{I})=1$

性质(4)推广：若$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$均为$n$阶可逆方阵，则$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m$可逆，且$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m)^{-1}=\boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}$。特别的，我们有$(\boldsymbol{A}^m)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^m$.

例：设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，$\det(\boldsymbol{A}) = 1/2$，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，求行列式$\det[(3\boldsymbol{A})^{-1} - 2\boldsymbol{A}^*]$的值.

解　由于$(3\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}$，$2\boldsymbol{A}^* = 2\det(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$，

所以

$$D = \det\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\right) = \det\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{A}^{-1}\right)$$

$$= \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \det(\boldsymbol{A}^{-1})$$

$$= \frac{-8}{27}\frac{1}{det(A)} = \frac{-16}{27}.$$