第三节 线性微分方程组

作业：P318 习题4. 3 (A)

1 (2)(3)，5, 6, 10, 11, 12

3.1 线性微分方程组的基本概念

设$a_{ij}(t), f_i(t)\in C(a,b),\ i,j=1,2,\cdots n,$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}(t)x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)\cdots+a_{1n}(t)x_n(t)+f_1(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}(t)x_1(t)+a_{n2}(t)x_2(t)+\cdots+a_{nn}(t)x_n(t)+f_n(t)$$

定义3.1：矩阵函数的连续、导数与积分

$$A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times m},\quad t\in I.$$

1）连续 $a_{ij}(t)$连续

$$\int_a^b A(t)\,\mathrm{d}t=\left(\int_a^b a_{ij}(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\times m}$$

2）导数与积分

$$\dot{A}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)=(\dot{a}_{ij}(t))_{n\times m},\quad t\in I,$$

例如

$$A(t)=\begin{pmatrix}\sin t & t\\ 1 & \cos t\end{pmatrix},\qquad t\in[0,\pi],$$

$$\dot{A}(t)=\begin{pmatrix}\cos t & 1\\ 0 & -\sin t\end{pmatrix},\qquad \int_0^{\pi}A(t)dt=\begin{pmatrix}2 & \dfrac{\pi^2}{2}\\ \pi & 0\end{pmatrix}.$$

矩阵函数的导数性质：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{CA})=\mathrm{C}\dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t};$ C是常数矩阵

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{A}\pm\mathrm{B})=\dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t}\pm\dfrac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}t};$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{AB})=\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d}t}\mathrm{B};$

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=(\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t),\cdots,\dot{x}_n(t))^T$$

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)\cdots+a_{1n}(t)x_n(t)+f_1(t)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1(t)+a_{n2}(t)x_2(t)+\cdots+a_{nn}(t)x_n(t)+f_n(t)$$

设 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$， $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$，

$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))^T$，

向量形式：

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=A(t)x(t)+f(t)\quad(2)$$ 非齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=A(t)x(t)\quad(3)$$ 齐次线性微分方程组

当$n=1$时，化为 $\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=a(t)x(t)+f(t)$，

即为一阶线性微分方程

若存在连续可微的向量值函数 $x=x(t)$ ，使

$$\frac{dx(t)}{dt}\equiv A(t)x(t)+f(t),\quad \alpha<t<\beta$$

则称$x=x(t)$ 为方程组的**解**.

通解： 方程组(2)的含有n个独立任意常数的解

特解： 不含任意常数的解

定解条件　初值条件

初值问题（cauchy问题）

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+f(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

定理（解的存在唯一性定理）

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

当$A(t)$和$f(t)$在(a,b)连续时，初值问题的解在(a,b)内存在且唯一。

3.2 线性微分方程组解的结构

1. 齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=\mathrm{A}(t)x(t) \tag{3}$$

性质：

1. $x(t)\equiv 0$ 是(3)的解，称为平凡解或零解；

2. 若(3)的解 $x(t)$ 满足初值条件 $x(t_0)=0$, 则必有 $x(t)\equiv 0.$ （解的存在唯一性定理）

3. 若 $x_i(t)(i=1,\cdots,n,\ t\in(a,b))$都是(3)的解，则 $\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)\ (t\in(a,b))$也是(3)的解.

定义3.2： 设有m个n 维向量值函数 $x_1(t),\cdots,x_m(t)$ 均在(a,b)内有定义. 如果存在不全为零的常数 $C_1,\cdots,C_m$, 使在(a,b)内成立恒等式

$$\sum_{i=1}^{m} C_i x_i(t) = C_1 x_1(t) + \cdots + C_m x_m(t) \equiv 0$$

则称 $x_1(t),\cdots,x_m(t)$ 在(a,b)内**线性相关**. 否则称**线性无关**或**线性独立**.

问题？由定义, 向量值函数的线性相关与否是对区间内的所有点来说的, 会不会在t_1处对应的常向量组线性相关, 而在t_2处对应的常向量组线性无关呢？

$$x_1 = \left(t,1\right)^T, x_2 = (1,t)^T, t \in \left(-\infty,+\infty\right)$$

定理3.1： 设 $x_i(t)(t\in(a,b),i=1,2,\cdots,m)$ 是方程组(3)的任意 m 个解，则这 m 个解在 (a,b) 内线性相关的充要条件是 $\exists t_0\in(a,b)$，使常向量组 $\{x_i(t_0)\}(i=1,2,\cdots,m)$ 线性相关.

证 必要性显然，下证充分性.

设 $\exists t_0\in(a,b)$，使 $\{x_i(t_0)\}(i=1,2,\cdots,m)$ 线性相关.

则存在不全为零的常数 $C_1,\cdots,C_m$，

$$\sum_{i=1}^{m}C_ix_i(t_0)=C_1x_1(t_0)+\cdots+C_mx_m(t_0)=0$$

可知 $x(t)=\sum_{i=1}^{m}C_ix_i(t)$ 也是(3)的解，

而 $x(t_0)=\sum_{i=1}^{m}C_ix_i(t_0)=0$，所以必有 $x(t)\equiv0$，

即 $x_i(t)\ (i=1,2,\cdots,m)$ 线性相关.

结论：
解在一点
相关(无关)，
则在区间
相关(无关).

定理3.2： 方程组(3)必存在n个线性无关的解；
其通解是这n个线性无关解的线性组合，

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t), \qquad t\in(a,b) \qquad (*)$$

证 取R^n的标准基$e_1,e_1,\cdots e_n$，作为方程组(3)的初值，

$$x_1(t_0)=e_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T,\ x_2(t_0)=e_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T,\ \cdots,$$

$$x_n(t_0)=e_n=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}^T,$$

由解的存在唯一性定理，适合如上初值的n个解

$x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 存在，由于初始向量组线性无关，

$x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots x_n(t)$也线性无关，

类似于n阶线性齐次微分方程的情况，可证(*)是(3)的通解，且包含了所有的解.

解空间

基解矩阵及其判别法

1） **基本解组**：方程组(3)的n个线性无关的特解：

$$x_1(t),\cdots,x_n(t)$$

2） **基解矩阵**

$$\mathbf{X}(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}=(x_1(t)\cdots,x_n(t))$$

齐次通解： $x(t)=\mathbf{X}(t)C, \qquad t\in(a,b),$

3) **Wronski行列式** $W(t)=\det(x_{ij}(t)), \quad t\in I$

定理3.3：方程组(3)的n个解在(a,b)线性无关

$$\Leftrightarrow \exists t_0\in(a,b),使得\det W(t_0)\neq 0$$

基解矩阵的性质

1) $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=A(t)X;$

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{dx_{ij}(t)}{dt}\right)_{n\times n}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)x_{kj}(t)\right)_{n\times n}=(a_{ij}(t))_{n\times n}\cdot(x_{ij}(t))_{n\times n}$$

$$=A(t)X(t).$$

2）若$X(t)$是基解矩阵，B是任一n阶非奇异常数矩阵，则$X(t)B$也是一个基解矩阵;

3) 若$X(t)$与$X^{*}(t)$ 是两个基解矩阵，则存在一个n阶非奇异常数矩阵B, 使

$$X(t)=X^{*}(t)B,\qquad t\in(a,b)$$

例1 验证微分方程组

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d(x_1(t))}{dt} \\ \dfrac{d(x_2(t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \dfrac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \dfrac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

的通解为

$$x = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

2 非齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(t)x+f(t) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(t)x$$

定理3.4（非齐次线性微分方程组解的结构）

通解：$$\boxed{x(t)=\mathrm{X}(t)C+x^*(t), \qquad t\in(a,b),}$$

齐次方程组的基解矩阵　　常向量　　特解

定理3.5 设 $\mathrm{X}(t)(t\in(a,b))$ 是齐次方程组(3)的一个基解矩阵，则

$$\boxed{x^*(t)=\mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t\in(a,b)}$$

就是非齐次方程组(2)满足初值条件$x^*(t_0)=0$的特解.

定理3.5 设$X(t)$ 是齐次方程组(3)的一个基解矩阵，则

$$x^*(t)=\mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad t\in(a,b)$$

是非齐次方程组(2)满足初值条件$x^*(t_0)=0$的特解.

证： 常数变易法　设(2)有特解$x^*(t)=\mathrm{X}(t)C(t)$,

代入(2)得,

$$\dot{\mathrm{X}}(t)C(t)+\mathrm{X}(t)\dot{C}(t)=A(t)\mathrm{X}(t)C(t)+f(t)$$

而 $\dot{\mathrm{X}}(t)=A(t)\mathrm{X}(t)$，所以 $\mathrm{X}(t)\dot{C}(t)=f(t)$

$X(t)$的Wronski行列式$W(t)=\det\mathrm{X}(t)\neq 0$,

$X(t)$可逆，$\dot{C}(t)=\mathrm{X}^{-1}(t)f(t)$

$$C(t)=\int\mathrm{X}^{-1}(t)f(t)dt=\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+C_1$$

$$x^*(t)=X(t)\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau+C_1\right)$$

由初值条件 $x^*(t_0)=0$, 有$C_1=0$

综合定理3.4与定理3.5　得

设 $\mathrm{X}(t)(t\in(a,b))$ 是齐次线性微分方程组的一个基解矩阵，则

$$\boxed{x^*(t)=\mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\qquad t\in(a,b)}$$

就是非齐次方程组满足初值条件 $x^*(t_0)=0$ 的特解.

非齐次通解：

$$\boxed{x(t)=\mathrm{X}(t)C+\mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

满足条件 $x(t_0)=x_0$ 的**特解**为：

$$\boxed{x^*(t)=\mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(t_0)x_0+\mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}^{-1}(\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

例2 求方程组
$$\begin{pmatrix}\dfrac{d(x_1(t))}{dt}\\ \dfrac{d(x_2(t))}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 t & \dfrac{1}{2}\sin 2t-1\\ \dfrac{1}{2}\sin 2t+1 & \sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$
满足 $x_1(0)=0, x_2(0)=1$ 的特解.

解 由例1知，$X(t)=\begin{pmatrix}e^t\cos t & -\sin t\\ e^t\sin t & \cos t\end{pmatrix}$ $\quad X^{-1}(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$

$$\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-\tau}\cos\tau & e^{-\tau}\sin\tau\\ -\sin\tau & \cos\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\tau\\ \sin\tau\end{pmatrix}d\tau$$

$$=\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-\tau}\\ 0\end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\ 0\end{pmatrix}\qquad X^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t)$ 满足条件 $x(t_0)=x_0$ 的**特解**为：

$$x^*(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}e^t\cos t & -\sin t\\ e^t\sin t & \cos t\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\ 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}(e^t-1)\cos t-\sin t\\ (e^t-1)\sin t+\cos t\end{pmatrix}$$

例2 求方程组 $\begin{pmatrix} \dfrac{d(x_1(t))}{dt} \\ \dfrac{d(x_2(t))}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \dfrac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \dfrac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

满足 $x_1(0)=0, x_2(0)=1$ 的特解.

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau}\cos\tau & e^{-\tau}\sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & -\sin t \\ e^t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} (e^t - 1)\cos t - \sin t \\ (e^t - 1)\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

3.3 常系数齐次线性微分方程组的求解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax \qquad (4) \qquad A = (a_{ij})_{n\times n}$$

设(4)有形如 $x = re^{\lambda t}$ 的特解，代入（4）

$$\lambda re^{\lambda t} = Are^{\lambda t} \qquad \lambda r = Ar$$

$$(\lambda E - A)r = 0$$

结论： 当且仅当 λ 为A的特征值时，方程组（4）有

形如 $x = re^{\lambda t}$ 的解；

非零向量r是特征值λ所对应的特征向量.

1. A有n个线性无关的特征向量的情形

定理3.6 设n阶矩阵A有n个线性无关的特征向量 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则矩阵

$$\mathrm{X}(t) = (r_1 e^{\lambda_1 t}, r_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, r_n e^{\lambda_n t})$$

为方程组(4)的一个基解矩阵，通解为

$$x(t) = (r_1 e^{\lambda_1 t}, r_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, r_n e^{\lambda_n t})C.$$

其中 $C = (C_1, C_2, \cdots C_n)$为任意常向量.

什么情况下A有n个线性无关的特征向量呢？

A的每个特征值的几何重数等于代数重数

1) A的n个特征值都是单根, A有n个不同的特征值

例3 求下列齐次线性微分方程组的通解.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}x$$

解 特征方程为 $\det(A-\lambda E)=(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)=0,$

特征值 $\lambda=1,\ 2,\ 3$

特征向量为 $r_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad r_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\quad r_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}.$

基解矩阵为

$$X(t)=(r_1e^{t},r_2e^{2t},r_3e^{3t})=\begin{pmatrix}e^{t} & 2e^{2t} & e^{3t}\\ e^{t} & 3e^{2t} & 3e^{3t}\\ e^{t} & 3e^{2t} & 4e^{3t}\end{pmatrix},$$

通解为

$$x(t)=X(t)C$$

$$=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}e^{2t}+C_3\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}e^{3t},$$

2）A有重特征值的情形

例4 求方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}x$ 的通解.

解 $\det(A-\lambda E)=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0,$

$\lambda_1=\lambda_2=2\quad \lambda_3=6$

$\lambda_1=\lambda_2=2\quad r_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, r_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\qquad \lambda_3=6\qquad r_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$

$X(t)=(r_1e^{2t},r_2e^{2t},r_3e^{6t})=\begin{pmatrix}-1e^{2t} & e^{2t} & e^{6t}\\ e^{2t} & 0 & -2e^{6t}\\ 0 & e^{2t} & 3e^{6t}\end{pmatrix},$ 通解为 $x(t)=X(t)C$

2. A没有n个线性无关的特征向量的情形

定理3.7 设 λ_i 是矩阵A的 n_i 重特征值，则方程组(4)必存在 n_i 个形如

$$x(t)=e^{\lambda_i t}\left(r_0+\frac{t}{1!}r_1+\frac{t^2}{2!}r_2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\right)$$

的线性无关的特解，其中 r_0 是齐次线性方程组

$$(\mathrm{A}-\lambda_i \mathrm{E})^{n_i} r=0, \qquad (5)$$

的非零解，而方程组(5)必有 n_i 个线性无关的解. 对于每一个解 r_0, 相应的 $r_1,\cdots,r_{n_i-1}$ 可由下列关系式确定：

$$r_1=(A-\lambda_i E)r_0,$$

$$r_2=(A-\lambda_i E)r_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{n_i-1}=(A-\lambda_i E)r_{n_i-2}.$$

定理3. 8 设n 阶矩阵A 的互不相同的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_s$ 其相应的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots n_s(n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$ 则由定理3.6 与定理3. 7所求出的方程组(4) 的诸线性无关特解的全体，必构成方程组(4) 的n个线性无关的特解，因而构成了方程组(4) 的一个基本解组.

例5 求解方程组 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}x$

$$x(t)=e^{\lambda_i t}\left(r_0+\frac{t}{1!}r_1+\frac{t^2}{2!}r_2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\right)$$

r_0 是 $(A-\lambda_i E)^{n_i}r=0$ 的非零解,

解 $\det(A-\lambda E)=-(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0.$

$\lambda_1=\lambda_2=2,\quad \lambda_3=-1.$

$\lambda_1=2,$ 由于 $A-2E$ 的秩为2,

$$(A-2E)^2=\begin{pmatrix}3&-3&-3\\-4&4&4\\-2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$r_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad r_0^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$r_1^{(1)}=(A-2E)r_0^{(1)}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$r_1=(A-\lambda_i E)r_0,$$
$$r_2=(A-\lambda_i E)r_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{n_i-1}=(A-\lambda_i E)r_{n_i-2}.$$

$$r_1^{(2)}=(A-2E)r_0^{(2)}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$x(t)=e^{\lambda_i t}\left(r_0+\frac{t}{1!}r_1+\frac{t^2}{2!}r_2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\right)$$

$$x_1(t)=e^{2t}(r_0^{(1)}+tr_1^{(1)})=\mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1+t\\-t\end{pmatrix},$$

$$x_2(t)=e^{2t}(r_0^{(2)}+tr_1^{(2)})=\mathrm{e}^{2t}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\t\\1-t\end{pmatrix}.$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}x \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=-1,\quad A+E=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{r}=\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 2\end{pmatrix},\qquad x_3(t)=e^{-t}r=e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}.$$

通解

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+C_3x_3(t)$$

$$=C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\ 1+t\\ -t\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\ t\\ 1-t\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}.$$

例6 求方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}5 & -3 & -2\\ 8 & -5 & -4\\ -4 & 3 & 3\end{pmatrix}x$ 的一个基本解组.

解 $\det(A-\lambda E)=(1-\lambda)^3=0$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

$$A-E=\begin{pmatrix}4 & -3 & -2\\ 8 & -6 & -4\\ -4 & 3 & 2\end{pmatrix},$$

计算可得 $(A-E)^2=O$, 从而$(A-E)^3=O$,

$(A-E)^3r=0$的基础解系可取为

$$r_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad r_0^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad r_0^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$r_1^{(1)}=(A-E)r_0^{(1)}=\begin{pmatrix}4&-3&-2\\8&-6&-4\\-4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\-4\end{pmatrix},$$

$$r_1=(A-\lambda_i E)r_0,$$
$$r_2=(A-\lambda_i E)r_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{n_i-1}=(A-\lambda_i E)r_{n_i-2}.$$

$$r_2^{(1)}=(A-E)r_1^{(1)}=(A-E)^2 r_0^{(1)}=0,$$

$$r_1^{(2)}=(A-E)r_0^{(2)}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix},\quad r_2^{(2)}=(A-E)r_1^{(2)}=(A-E)^2 r_0^{(2)}=0,$$

$$r_1^{(3)}=(A-E)r_0^{(3)}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix},\quad r_2^{(3)}=(A-E)r_1^{(3)}=(A-E)^2 r_0^{(3)}=0,$$

由$r_0^{(i)}, r_1^{(i)}$，$r_2^{(i)}$ $(i=1,2,3)$可得

$$x(t)=e^{\lambda_i t}\left(r_0+\frac{t}{1!}r_1+\frac{t^2}{2!}r_2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\right)$$

$$x_1(t)=e^t(r_0^{(1)}+tr_1^{(1)})=e^t\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\8\\-4\end{pmatrix}\right)=e^t\begin{pmatrix}1+4t\\8t\\-4t\end{pmatrix},$$

$$x_2(t)=e^t(r_0^{(2)}+tr_1^{(2)})=e^t\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}\right)=e^t\begin{pmatrix}-3t\\1-6t\\3t\end{pmatrix},$$

$$x_3(t)=e^t(r_0^{(3)}+tr_1^{(3)})=e^t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}\right)=e^t\begin{pmatrix}-2t\\-4t\\1+2t\end{pmatrix},$$

$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$为一个基本解组.

3. A有复特征值的情形

把线性无关的复向量值函数解构造为线性无关的实向量值函数解.

若 $x_1(t)=u(t)+iv(t)$, 是齐次方程组(4)的解，则必有

$$\dot{x}_1(t)=Ax_1(t) \quad \text{即} \quad \dot{u}(t)+i\dot{v}(t)\equiv A(u(t)+iv(t)).$$

$$\dot{u}(t)\equiv Au(t), \qquad \dot{v}(t)\equiv Av(t)$$

则 $x_2(t)=\overline{x_1(t)}=u(t)-iv(t)$ 也是(4)的解.

由于$x_1(t)$与$x_2(t)$线性无关，则

$u(t)=\dfrac{1}{2}(x_1(t)+x_2(t))$, $v(t)=\dfrac{1}{2i}(x_1(t)-x_2(t))$ 也线性无关.

结论: 设 $(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 是方程组 $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ 的基解矩阵, 其中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是一对共轭复值解向量, 记

$$u(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)), \quad v(t) = \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t))$$

则 $(u(t), v(t), x_3(t), \cdots, x_n(t))$ 也是齐次方程组的基解矩阵.

证明: 可知 $u(t), v(t)$ 是方程组的解，设

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(u(t), v(t), x_3(t), \cdots, x_n(t))$$

$$= (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))B$$

$\det(B) \neq 0$, B 可逆,

所以 $(u(t), v(t), x_3(t), \cdots, x_n(t))$ 是基解矩阵.

例7 求解初值问题 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}x,\quad x(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$

解 $\det(A-\lambda E)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2)=0,$

$\lambda_1=1,\lambda_2=1+i,\lambda_3=1-i.$

$\lambda_1=1$，得$r_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $x_1(t)=e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. $\lambda_2=1+i$，得$r_2=\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$,

$$x_2(t)=e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}=e^t(\cos t+i\sin t)\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}0\\-\sin t+i\cos t\\\cos t+i\sin t\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}0\\-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}+ie^t\begin{pmatrix}0\\\cos t\\\sin t\end{pmatrix},$$

故 $\lambda_{2,3}=1\pm i$ 所对应的

$$x_2(t)=e^t\begin{pmatrix}0\\-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}+ie^t\begin{pmatrix}0\\\cos t\\\sin t\end{pmatrix},$$

两个线性无关的实值解为

$$u(t)=e^t\begin{pmatrix}0\\-\sin t\\\cos t\end{pmatrix},v(t)=e^t\begin{pmatrix}0\\\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$$

$$x(t)=e^t\left(C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\\cos t\\\sin t\end{pmatrix}\right)=e^t\begin{pmatrix}C_1\\-C_2\sin t+C_3\cos t\\C_2\cos t+C_3\sin t\end{pmatrix}.$$

由 $x(0)=(1,1,1)$ 知，$C_1=C_2=C_3=1.$

$$x(t)=e^t\begin{pmatrix}1\\-\sin t+\cos t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

3.4 常系数非齐次线性微分方程组的求解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{A}x + f(t), \quad f \in C((a,b))$$

之前的结论：

设 $\mathrm{X}(t)(t \in (a,b))$ 是齐次方程组的一个基解矩阵，

非齐次通解： $\boxed{x(t) = \mathrm{X}(t)C + \mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$

满足条件 $x(t_0) = x_0$ 的**特解**为：

$$\boxed{x(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{X}^{-1}(t_0)x_0 + \mathrm{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathrm{X}^{-1}(\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.}$$

定理3.9

非齐次通解： $x(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{C} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$

满足条件 $x(t_0) = x_0$ 的特解为

$$x(t) = \mathrm{X}(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$\mathrm{X}(t)$ 为对应的齐次方程组满足 $\boxed{\mathrm{X}(0) = \mathrm{E}}$ 的基解矩阵.

$$x(t)=X(t)C+\int_{t_0}^{t}X(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

例8 求微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\0\\e^t\end{pmatrix}$ 的通解.

解 例7中,得到对应的齐次方程组的一个基解矩阵为

$$X_1(t)=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&-e^t\sin t&e^t\cos t\\0&e^t\cos t&e^t\sin t\end{pmatrix},\qquad X_1(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\neq E.$$

取基解矩阵为 $X(t)=X_1(t)X_1^{-1}(0)$

则$X(0)=E$,

$$X_1^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$x(t)=\mathrm{X}(t)\mathrm{C}+\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$=\mathrm{X}_1(t)\mathrm{X}_1^{-1}(0)\mathrm{C}+\int_{0}^{t}\mathrm{X}_1(t-\tau)\mathrm{X}_1^{-1}(0)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$X_1(t)X_1^{-1}(0)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^t\sin t & \mathrm{e}^t\cos t\\ 0 & \mathrm{e}^t\cos t & \mathrm{e}^t\sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & -\sin t\\ 0 & \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}_1(t-\tau)\mathrm{X}_1^{-1}(0)f(\tau)=\mathrm{e}^{t-\tau}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(t-\tau) & -\sin(t-\tau)\\ 0 & \sin(t-\tau) & \cos(t-\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \mathrm{e}^{\tau}\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ -\sin(t-\tau)\\ \cos(t-\tau)\end{pmatrix}$$

$$x(t) = \mathrm{X}(t)\mathrm{C} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$= \mathrm{X}_1(t)\mathrm{X}_1^{-1}(0)\mathrm{C} + \int_0^t \mathrm{X}_1(t-\tau)\mathrm{X}_1^{-1}(0) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t-\tau) \\ \cos(t-\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^t \\ (C_2 \cos t - C_3 \sin t)\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t(1-\cos t) \\ (C_2 \sin t + C_3 \cos t)\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \sin t \end{pmatrix}$$