概率论与数理统计期末考试试题(2018.1.12)

一、填空题(共 6 道小题，每小题 2 分，满分 12 分，把答案填在题中横线上)

1. 设 A,B 为两个随机事件，且有 $P(\bar{A})=0.4, P(B)=0.4, P(\bar{B}|A)=0.5$，则 $P\left(\bar{B}|(A\cup B)\right)=$____________.

2. 设某车间有三台机床，在一小时内三台机床不要求工人维修的概率分别为 0.9、0.8、0.85，假设三台机床是否需要维修是相互独立的，则一小时内三台车床至少有一台不需要维护的概率为__________.

3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布（$\lambda>0$），且已知 $E[(X-2)(X-3)]=2$，则 $\lambda=$________.

4. 设 $D(X)=25$，$D(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X+Y)=$____________.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，X 在 $(0,2\theta)$ 服从均匀分布，其中 $\theta>0$，则 $D(\bar{X})=$________.

6. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 2\sigma\}\leq$________.

二、选择题（共 6 道小题，每小题 2 分，满分 12 分，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．对任意事件 A、B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是（　　）．

（A）$A\subset B$　　（B）$\overline{B}\subset\overline{A}$　　（C）$A\overline{B}=\Phi$　　（D）$\overline{A}B=\Phi$

2．设随机变量 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，且 X 与 Y 相互独立，设 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$（　　）．

（A）$N(0,5)$　　（B）$N(0,-3)$　　（C）$N(0,46)$　　（D）$N(0,54)$

3．已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，令 $Y=-2X$，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为（　　）．

（A）$2f_X(-2y)$　　（B）$f_X(-\frac{y}{2})$　　（C）$-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$　　（D）$\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$

4．设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$、$f_Y(y)$ 分别为 X、Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为（　　）．

（A）$f_X(x)$　　（B）$f_Y(y)$　　（C）$f_X(x)f_Y(y)$　　（D）$\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

5．设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 X 的一个样本，则下列总体均值的估计量中，最有效的为（　　）．

（A）$\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{6}X_3+\frac{1}{3}X_4$　　（B）$\frac{1}{9}X_1+\frac{1}{9}X_2+\frac{3}{9}X_3+\frac{4}{9}X_4$

（C）$\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3+\frac{1}{4}X_4$　　（D）$\frac{1}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{1}{5}X_3+\frac{2}{5}X_4$

6．在假设检验中，设 H_1 为备择假设，则（　　）为犯第一类错误．

（A）H_1 正确，接受 H_1　　（B）H_1 正确，拒绝 H_1

（C）H_1 不正确，接受 H_1　　（D）H_1 不正确，拒绝 H_1

三 、解答下列各题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 仪器中有三个元件，它们损坏的概率都是 0.2，并且损坏与否相互独立. 当一个元件损坏时， 仪器发生故障的概率为 0.25，当两个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.6，当三个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.95， 当三个元件都不损坏时，仪器不发生故障. 求：（1）仪器发生故障的概率；（2）仪器发生故障时恰有二个元件损坏的概率.

---

2. 一口袋中有 6 个球，在这 6 个球上分别标有数字-3，-3，1，1，1，2，从这袋中任取一球，设各个球被取到的可能性相同，以 X表示取出的球上标有的数字，求 X的分布律与分布函数.

3．设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，令 $Y=\begin{cases}2, X\le 1\\ X, 1<X<2\\ 1, X\ge 2\end{cases}$.

(1) 求 Y 的分布函数，(2) 求 $P\{X\le Y\}$

4．为了测定一台机床的质量，把它分解成 75 个部件来称量．假定每个部件的称量误差（单位：kg）服从区间（−1, 1）上的均匀分布，且每个部件称量误差相互独立，试求机床重量的总误差的绝对值不超过 10kg 的概率．（$\Phi(2)=0.9772$）

5．已知一批零件的长度 $X(\mathrm{cm})$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，求 μ 的置信水平为 0. 95 的置信区间.

（$u_{0.025}=1.96, u_{0.05}=1.645, t_{0.025}(15)=2.1315, t_{0.05}(15)=1.7531$）

四、解答下列各题（共 3 小题，每小题 12 分，共 36 分）

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其 他}.\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 关于 X, 关于 Y 的边缘密度函数；(2) 判断 X 与 Y 是否相互独立；(3) 求 $P\{X+Y\le 1\}$.

2. 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\alpha^{\beta}x^{-\beta-1}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>1$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本.

（1） 当 $\alpha=1$ 时，求 β 的矩估计量；

（2） 当 $\beta=2$ 时，求 α 的极大似然估计量.

3. 某纯净水生产厂用自动灌装机灌装纯净水，该自动灌装机正常灌装量 $X \sim N(18, 0.4^2)$，现测量该厂 9 个灌装样品的灌装量（单位：L）如下：

18. 0, 17. 6, 17. 3, 18. 2, 18. 1, 18. 5, 17. 9, 18. 1, 18. 3.

在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，试问（1）该天灌装是否合格？（2）灌装量精度是否在标准范围内？