变结构控制理论

主讲：王佩
电话：15319948586
E-mail：nwpuiet@nwpu.edu.cn
办公室：航天北楼201室

主要内容

★ 变结构控制器设计

★ 全程滑模变结构控制器设计

第五章　变结构控制器设计

问题1：你觉得是将系统状态控制到零还是跟踪上期望的轨迹更有用？

变结构控制器设计的主要问题：

要求被控对象的状态/输出跟踪某一特定的期望运动轨迹，使得闭环系统的特性与**某一理想模型基本一致**。

模型参考控制：

1.性能指标明确，有解析模型可以设计

2.设计直观方面

模型参考控制实现方法：

自适应模型跟踪控制

- 基于李雅普诺夫函数或超稳定性概念设计
- 不能定量的设计误差的瞬态过程

变结构控制

- 从工程应用的角度，主要采用最终滑动模态变结构控制进行设计

5.1 控制问题数学描述

一般不确定性多变量系统可以描述为：

$$\dot{X}=(A_p+\Delta A_p(t))X(t)+(B_p+\Delta B_p(t))u(t)+D_p f_p(t)$$

标称模型为： $\dot{X}_p=A_pX(t)+B_pu(t)$

参考模型为： $\dot{X}_m=A_mX_m(t)+B_mr(t)$

问题2：我们现有已有了什么设计方法？

问题3：我们的目的是让被控对象跟踪上参考模型，意味着什么？

跟随意味系统输出与期望目标之间的误差为零

目标：要求被控对象的状态跟踪参考模型的状态，希望两者的误差为零，这样就将控制问题转化为调节器设计问题

定义误差为： $e(t) = x_m(t) - x_p(t)$

误差模型为：

$$\dot{e}(t) = \dot{x}_m(t) - \dot{x}_p(t) = A_m e(t) + [A_m - A_p]x_p + B_m r(t) - B_p u(t) - \Delta A_p x_p - \Delta B_p u(t) - D_p f_p(t)$$

误差系统的标称模型为：

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + [A_m - A_p]x_p + B_m r(t) - B_p u(t)$$

实现完全跟踪：$\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$

对于系统，

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + [A_m - A_p]x_p + B_m r(t) - B_p u(t) - \Delta A_p x_p - \Delta B_p u(t) - D_p f_p(t)$$

控制量u必须使得：

$$[A_m - A_p]x_p + B_m r(t) - B_p u(t) - \Delta A_p x_p - \Delta B_p u(t) - D_p f_p(t) = 0$$

完全跟踪的充分条件为：

1.完全跟踪的模型匹配条件

$$rank(B_p) = rank\begin{bmatrix} B_p & A_m - A_p \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} B_p & B_m \end{bmatrix}$$

2.完全跟踪的不确定性匹配条件

$$rank(B_p) = rank\begin{bmatrix} B_p & \Delta A_p \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} B_p & \Delta B_p \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} B_p & D \end{bmatrix}$$

$$F = [A_m - A_p - \Delta A_p]x_p - \Delta B_p u(t) + [B_m r(t) - D_p f_p(t)]$$

将F视为误差标称系统的参数摄动及外界干扰项，这时完全模型跟踪条件就是变结构控制系统的不变性条件。

5.2 变结构控制器设计

针对误差模型：

$$\dot{e}(t)=\dot{x}_m(t)-\dot{x}_p(t)=A_m e(t)+[A_m-A_p]x_p+B_m r(t)-B_p u(t)$$
$$-\Delta A_p x_p-\Delta B_p u(t)-D_p f_p(t)$$

选择全程滑动模态切换超平面为： $S=Ce$

变结构控制系统设计任务1：**求取滑动模态参数矩阵C，保证滑动模态运动稳定并具有良好的动态品质；**

手段：采用极点配置算法进行C阵设计

变结构控制系统设计任务2：构造滑动模态变结构控制律，确保系统到达滑动模态并不脱离滑动模态；

$$u = u_m + u_v$$

根据完全跟踪的模型匹配条件，存在控制律：

$$[A_m - A_p]x_p + B_m r(t) - B_p u(t) = 0$$

$$u_m = B_{p2}^{-1}[0 \quad I_m](A_m - A_p)x_p + B_{p2}^{-1}[0 \quad I_m]B_m r$$

匹配控制律

将匹配控制律部分带入误差模型后，误差模型将变为：

$$\dot{z}(t)=A_m z(t)-B_p u_v(t)-\Delta A_p x_p-\Delta B_p u(t)-D_p f_p(t)$$

问题2：接下来我们怎么办？依据什么条件进行设计？

$$\frac{d}{dt}(S^T QS)<0,Q>0$$

我们设计如下形式的变结构控制律：

$$u_v=g(t)(CB_p)^{-1}\operatorname{sgn}(S)$$

根据能达条件和滑模条件得到gt的一种表达式：

$$g(t) = (1 - a_5)^{-1}[a_1\|z\| + a_2\|x_p\| + a_3\|u_m\| + a_4] + \varepsilon$$

g(t)是唯一的吗？

$$a_1 = \|CA_m\|$$

$$a_2 = \psi_a\|C\|$$

$$a_3 = \psi_b\|C\|$$

$$a_4 = \|CD_p\|\psi_f$$

$$a_5 = \psi_b\|C\|\|(CB_p)^{-1}\|$$

$$1 - a_5 > 0$$

为了消除颤振： $$\mathrm{sgn}(s) \approx \frac{s}{|s| + \delta}$$

算例1 $$\dot{X}=\left(\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-6&-6&-11&-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{bmatrix}\right)X+\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&10\\10&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\b_1&0\\0&b_2\end{bmatrix}\right)u+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}f$$

式中，$a_1=0.4\sin(4\pi t),a_2=0.4\sin(4\pi t),a_3=0.7\cos(4\pi t),$

$a_4=0.5\cos(4\pi t);b_1=0.2\sin(4\pi t),b_2=0.2\sin(4\pi t);$

$x_0=[-1\quad 1\quad 1\quad -1]^T$; f为随机干扰，且$\|f\|\le\psi_f=1$

$$\dot{X}_m=\left(\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-3&-12&-19&-8\end{bmatrix}\right)X_m+\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&10\\10&1\end{bmatrix}\right)R$$

式中，$R=[r_1\quad 0]^T$ $\quad r_1=\begin{cases}2 & 0<t<10\\0 & t\le 0\end{cases}$ $\quad x_m(0)=[0\quad 0\quad 0\quad 0]^T$

要求跟随器在2s实现对参考模型的完全跟踪

按照简约标准型的划分，可知

$$A_{11}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

选择极点为-4，-4，进行极点配置，利用matlab命令

$$K=place(A_{11},A_{12},[-4 \quad -4])$$

可得：

$$K=\begin{bmatrix}16 & 8\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

则滑动模态参数矩阵C为：$C=C_2\begin{bmatrix}K & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

滑动模态为：

$$S(x)=Ce=\begin{bmatrix}16 & 8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}e$$

根据控制律设计表达式：

$$a_1 = \|CA_m\| = norm(CA_m, \inf) = 42$$

$$a_2 = \psi_a \|C\| = 60 \qquad a_3 = \psi_b \|C\| = 6$$

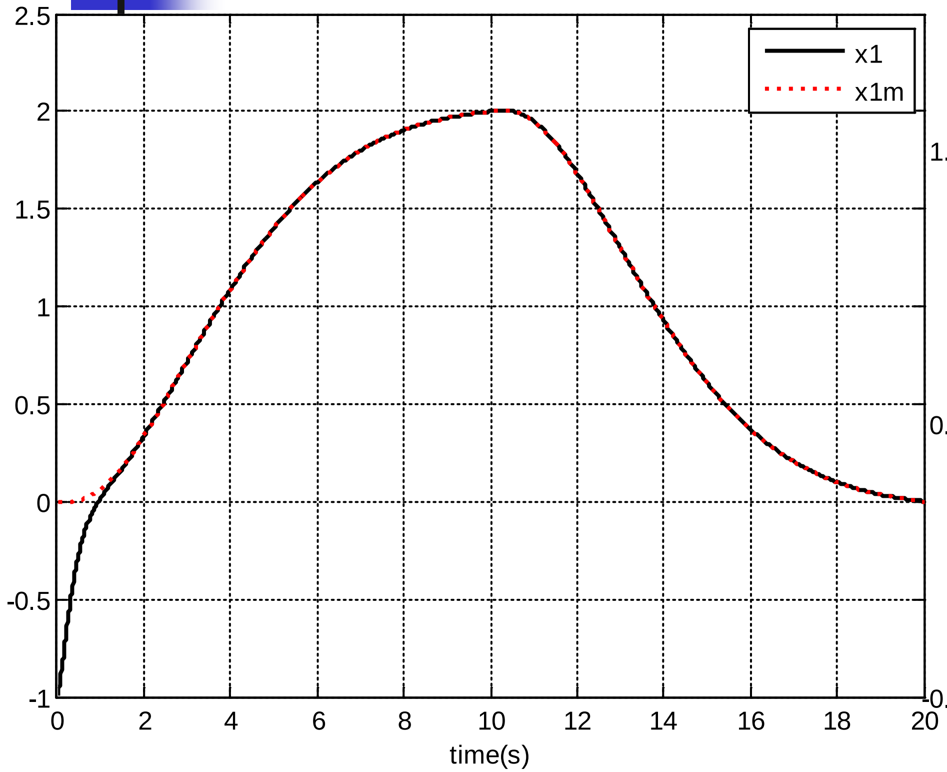
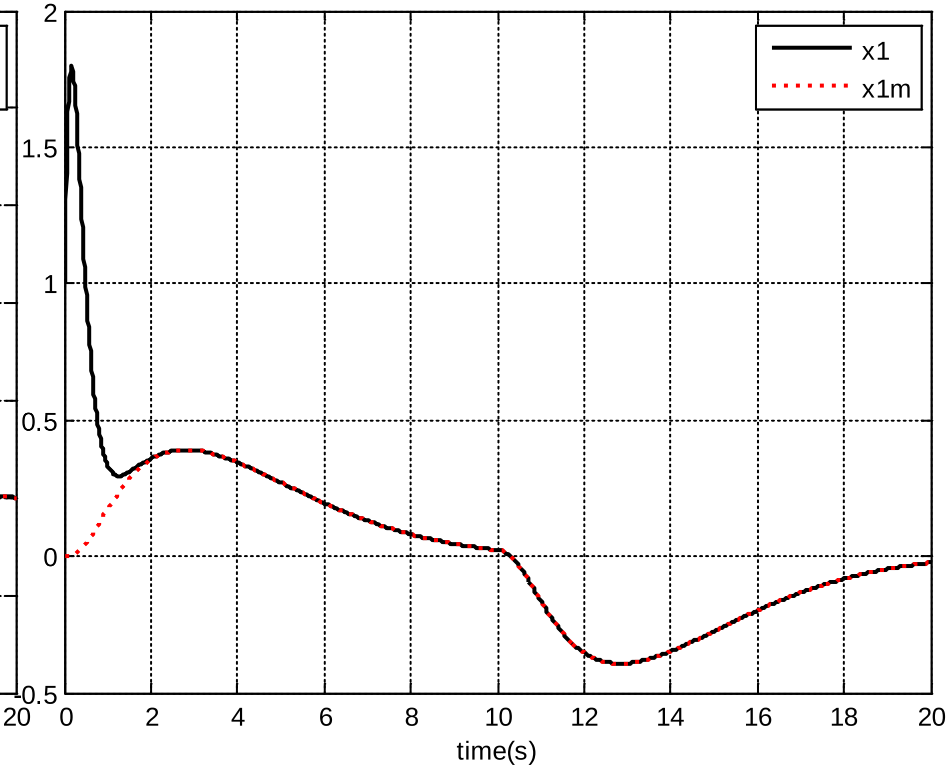
$$a_4 = \|CD_P\| \psi_f = 1 \qquad a_5 = \psi_b \|C\| \left\|(CB)^{-1}\right\| = 0.55$$

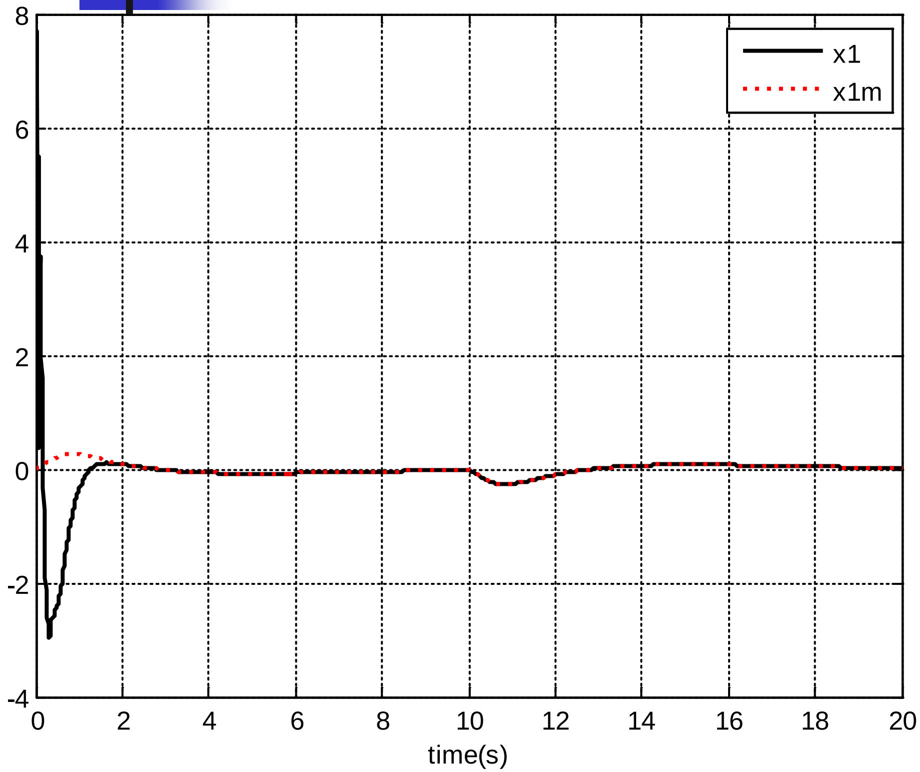
g(t)表达式为：

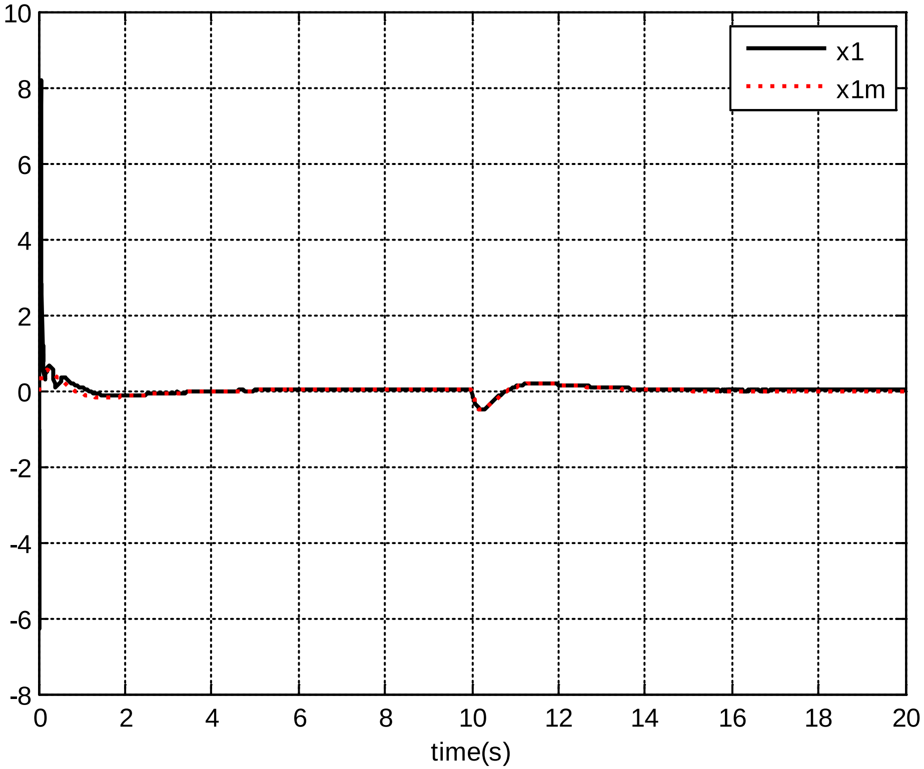
$$g(t) = (42\|e\| + 60\|X\| + 6\|R\| + 1)/0.45 + 0.1$$

控制律表达式为：

$$u(t) = -g(t)(CB)^{-1}M(s) = -g(t)\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{s_1}{|s_1| + 0.5} & \dfrac{s_2}{|s_2| + 0.5} \end{bmatrix}^T$$


x1
x1m
time(s)

x1
x1m
time(s)


x1
x1m
8
6
4
2
0
-2
-4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
time(s)


x1
x1m
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
time(s)

第六章 全程滑模变结构控制器设计

传统变结构控制器设计的局限性：

仅在系统处于滑动模态运动阶段时，才具有对系统参数摄动和外界干扰的不变性。

由缺点产生的启发：

如果能够消除能达阶段，保证系统从一开始就处于滑动运动阶段，更加充分发挥变结构控制的优势。

实现途径：

加入一个与状态有关的时变项，消除能达阶段，就可以改善系统的瞬态性能，克服未知参数摄动的影响。

6.1 全程滑动模态变结构控制问题描述

一般的不确定性多变量系统：

$$\dot{X} = (A_p + \Delta A_p(t))X(t) + (B_p + \Delta B_p(t))u(t) + D_p f_p(t)$$

设计全程滑动模态： $S(x,t) = Cx - W(t)$

增加了时变项

全程滑动模态因子： $W(t)$

全程滑模变结构调节器的设计任务：

（1）设计恰当的全程滑动模态因子；

（2）滑动模态参数矩阵；

（3）设计变结构控制律使得系统实现滑动模态运动；

6.2 全程滑动模态因子的设计

全程滑动模态的特点：

全程滑动模态超平面中有随时间变化的全程滑动模态因子，因此超平面S不仅是状态变量的函数，还是时间变量的函数。因此也称为时变滑动模态变结构控制。

全滑动模态因子应具备哪些条件?

问题1：系统初始时在滑模面上吗？

它的作用是什么？

1. 初始状态

$$S[x(0),0]=CX(0)-W(0)=0 \quad\Rightarrow\quad W(0)=CX(0)$$

2. 终值状态

问题2：系统终端在滑模面上吗？

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty} X(t)=0\\ \lim\limits_{t\to\infty} S(x,t)=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to\infty} S(x,t)=\lim_{t\to\infty} CX(t)-CW(t)=0$$

3. 过程：

$$\begin{cases}S(x,t)=CX-W(t)=0\\ \dot{S}(x,t)=C\dot{X}-\dot{W}(t)=0\end{cases}$$

问题3：系统任意时刻在滑模面上吗？

全滑动模态因子必须满足的条件

1. 初值条件： $W(0)=CX(0)$

2. 终值条件： $\lim\limits_{t\to\infty} W(t)=0$

3. 可导条件： $\begin{cases} S(x,t)=CX-W(t)=0 \\ \dot{S}(x,t)=C\dot{X}-\dot{W}(t)=0 \end{cases}$

设计全滑动模态因子为： $W(t)=CE(t)X(0)$

式中： $E(t)=\begin{bmatrix} E_1(t) & 0 \\ 0 & E_2(t) \end{bmatrix}, E(t)\in R^{n\times n}$

$$E_1(t)=diag[\exp(-\beta_1 t), \quad \cdots \quad ,\exp(-\beta_{n-m} t)]$$

$$E_2(t)=diag[\exp(-\beta_{n-m+1} t), \quad \cdots \quad ,\exp(-\beta_n t)]$$

$\mathrm{Re}(\beta_i)>0, \quad i=1,2,\cdots,n$

全滑动模态滑动超平面滑动模态参数设计

1.滑模参数矩阵C设计

(1) 极点配置法

(2) 二次型最优法

(3) 特征结构配置法

$$C = [K \quad I_m]$$

2. 滑模移动参数设计

(1) 针对x1状态

$$\beta_i = -\lambda_i (A_{11} - A_{12} K), (i = 1,2,\cdots, n-m)$$

(2) 针对x2状态

$$x_2 = E_2(t) x_2(0)$$

控制律要满足滑动模态的可达条件：

$$\frac{d}{dt}(S^T QS) < 0, Q > 0$$

$$u = -g(t)(CB)^{-1}\operatorname{sgn}(S)$$

$$g(t) = (1 - a_4)^{-1}[a_1\|x\| + a_2 + a_3\exp(-\beta_{\min} t)] + \varepsilon$$

$$a_1 = \|CA\| + \psi_a\|C\|$$

$$a_2 = \|CD\|\psi_f$$

$$a_3 = \beta_{\max}\|CX_0\|$$

$$a_4 = \psi_b\|C\|\|(CB)^{-1}\|$$

$$\operatorname{sgn}(s) \approx \frac{s}{|s| + \delta}$$

$$g(t) = (1 - a_4)^{-1}[a_1 \|x\| + a_2 + a_3 \exp(-\beta_{\min} t)] + \varepsilon$$

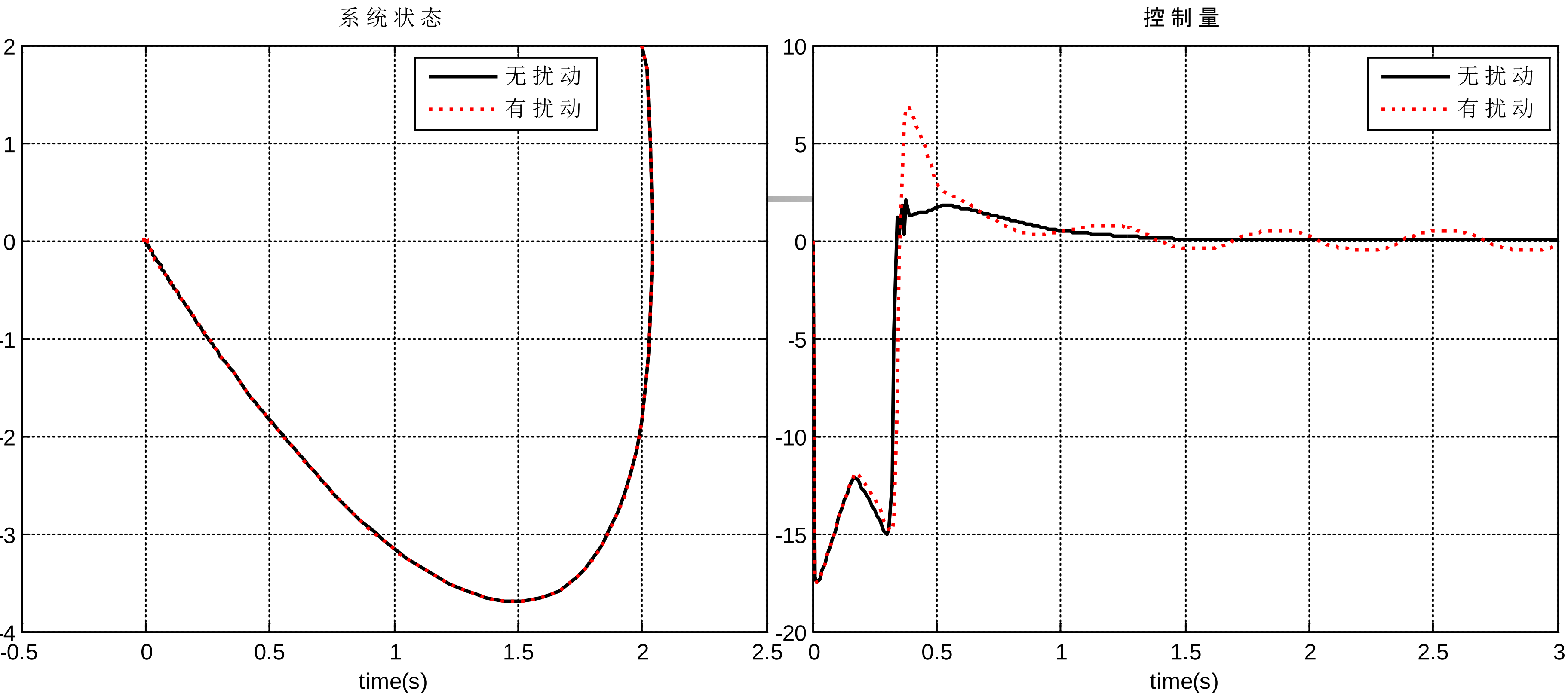
$$a_1 = \|CA\| + \psi_a \|C\|$$

$$a_2 = \|CD\| \psi_f$$

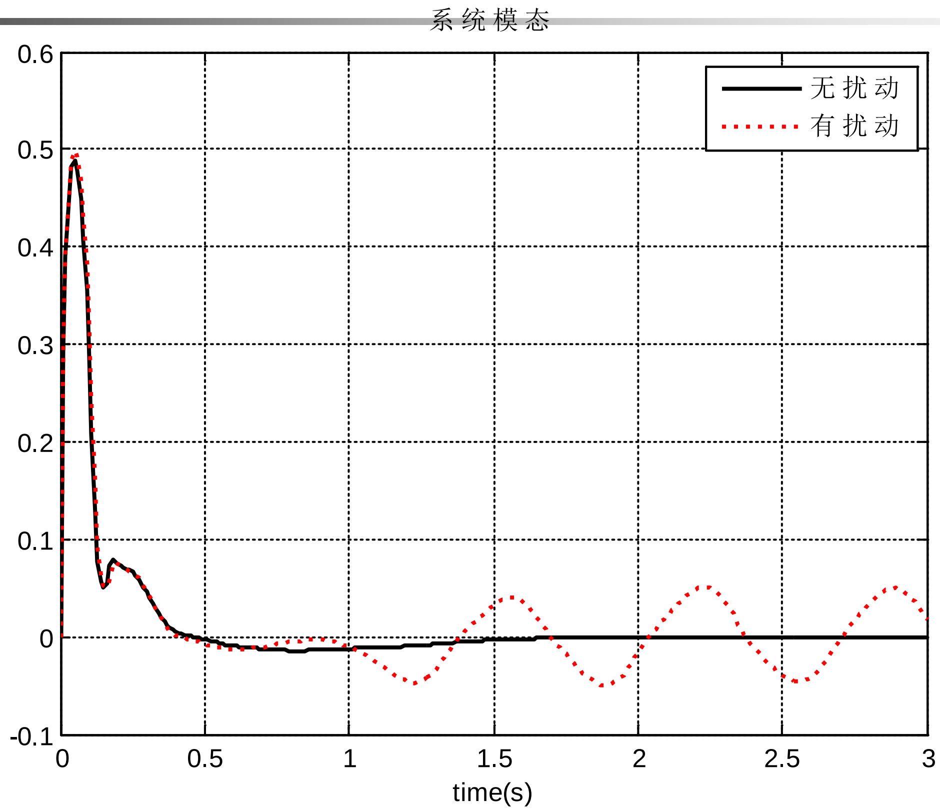
$$a_3 = \beta_{\max} \|CX_0\|$$

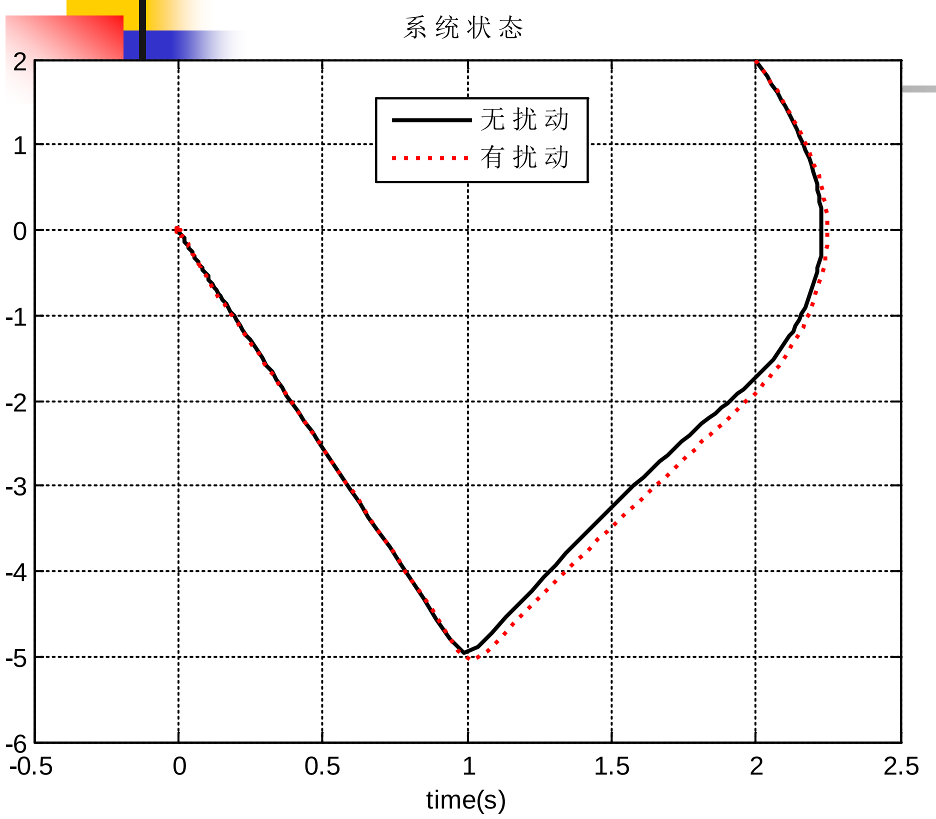
$$a_4 = \psi_b \|C\| \|(CB)^{-1}\|$$

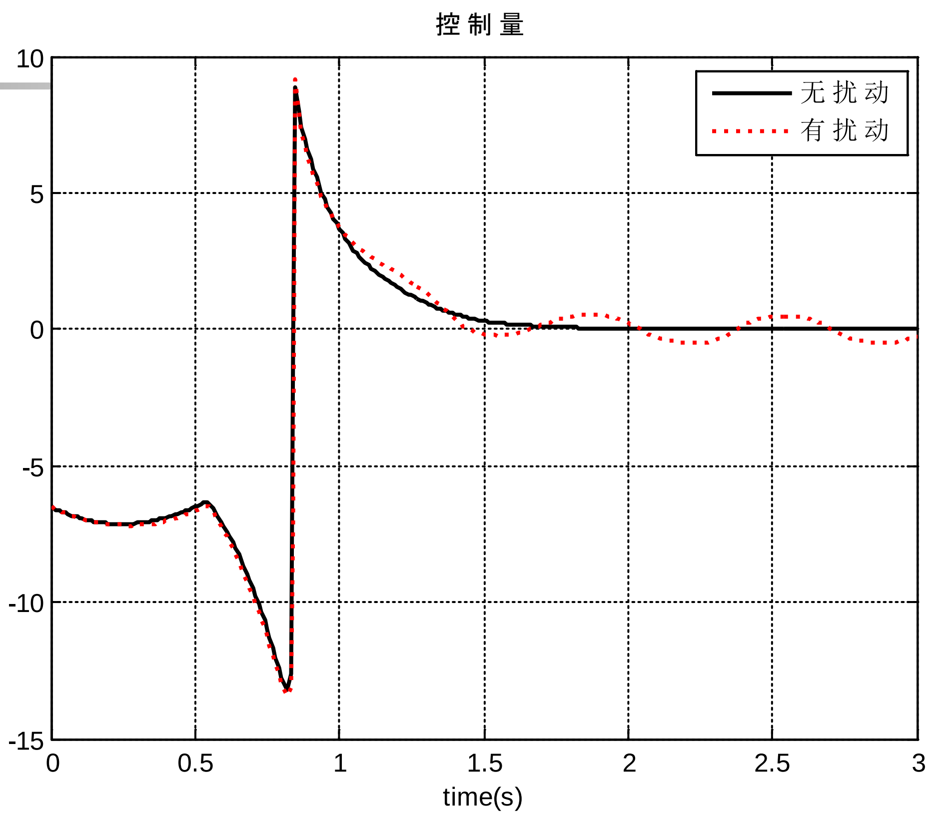
$$\operatorname{sgn}(s) \approx \frac{s}{|s| + \delta}$$

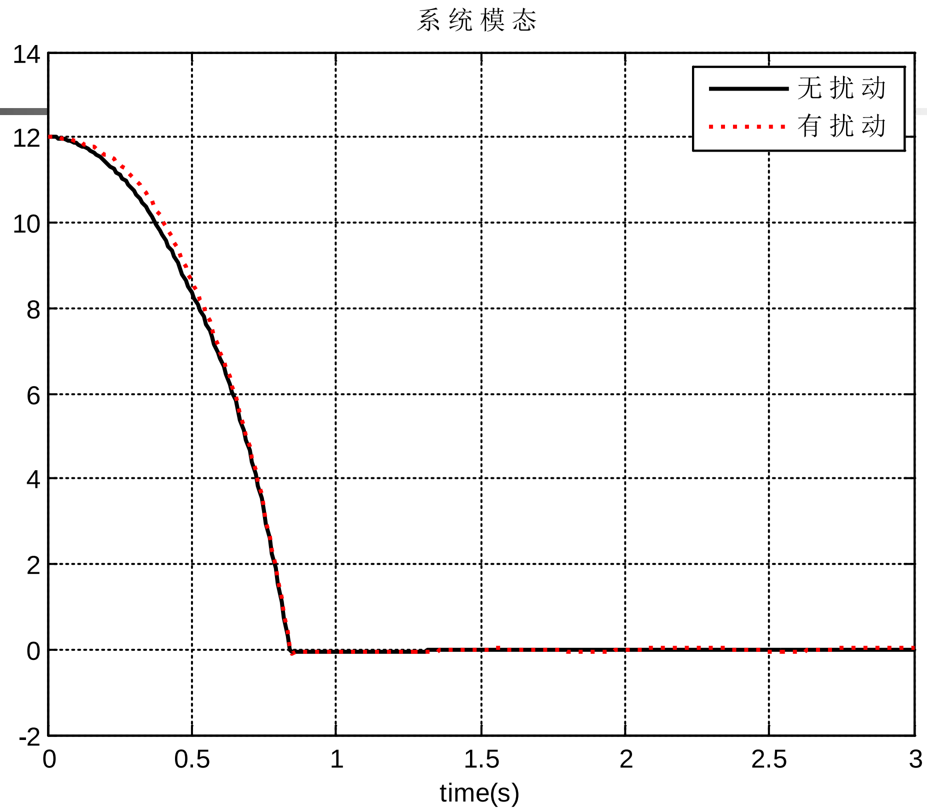


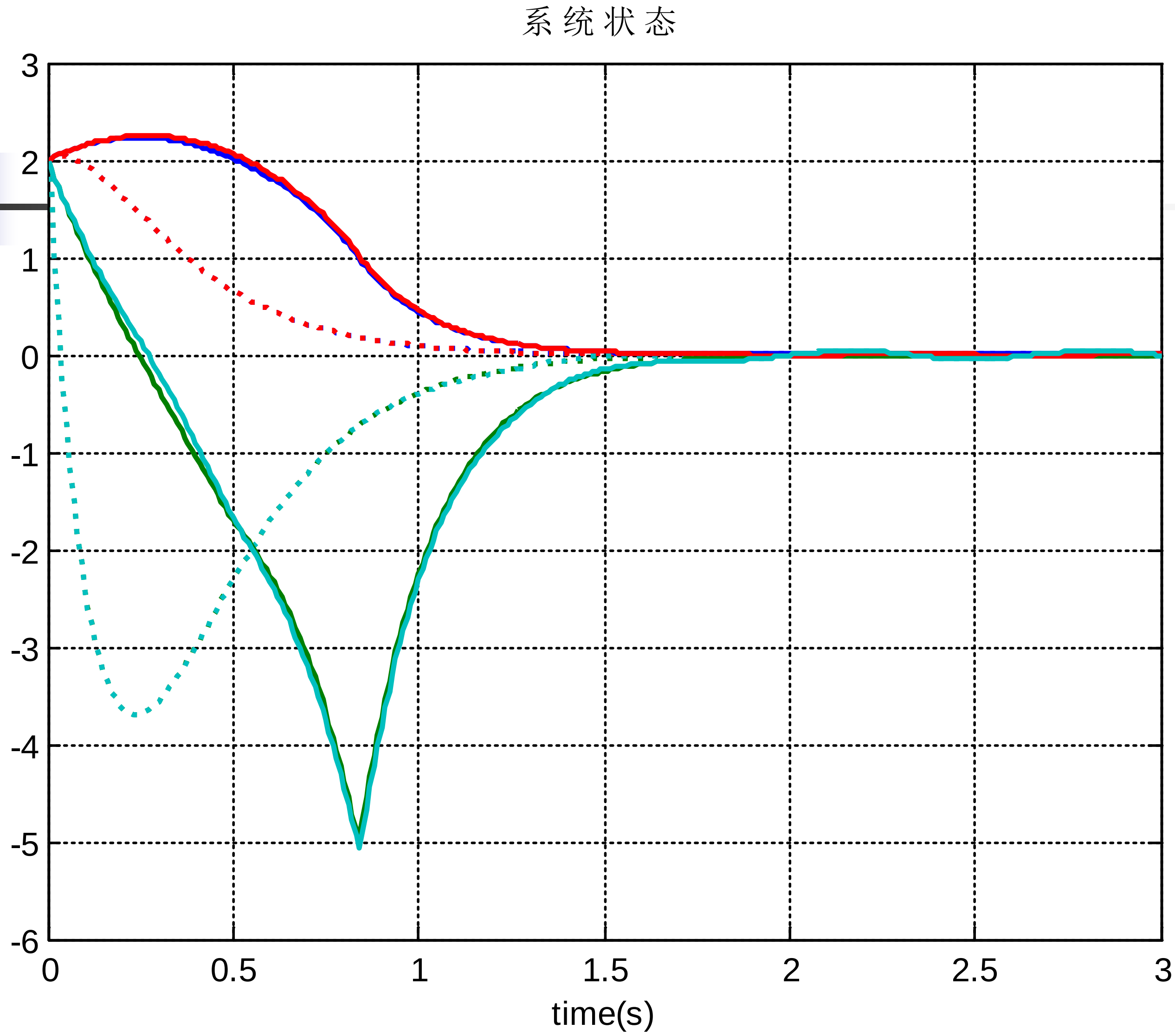
系统状态
无扰动
有扰动
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
time(s)
控制量
无扰动
有扰动
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
time(s)


系统模态
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
time(s)
无扰动
有扰动


系统状态
无扰动
有扰动
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
time(s)


控制量
无扰动
有扰动
10
5
0
-5
-10
-15
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
time(s)


系统模态
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
time(s)
无扰动
有扰动


系 统 状 态
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
time(s)