秋季学期微积分期中考试

机考模拟

第一版

微分方程

◈ 常系数线性微分方程：齐次、非齐次

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x),$$

◈ Euler方程

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x).$$

微分方程：常系数线性微分方程

（1）常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0.$$

先求特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的根 λ 及重次 k．然后由表 8.1 可得到基本解组

表 8.1

特征根情况	基本解组中相关的解
单实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$	$e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\cdots,e^{\lambda_n x}$
k 重实根 λ	$e^{\lambda x},xe^{\lambda x},\cdots,x^{k-1}e^{\lambda x}$ （共 k 个）
k 重共轭复根 $\lambda=\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$ （共 $2k$ 个）

基本解组的线性组合就是通解.

（2）常系数非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x),$$

它的通解等于对应的齐次线性微分方程的通解加上它自己的一个特解.

$f(x)$的形式	$y^*(x)$的形式
$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$	$y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x)$， 其中 $k=\begin{cases}0 & \lambda\text{不是特征方程的根}\\ 1 & \lambda\text{是特征方程的单根}\\ 2 & \lambda\text{是特征方程的重根}\end{cases}$
$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$	$y^*=x^k e^{\lambda x}\left[Q_m(x)\cos\omega x+R_m(x)\sin\omega x\right]$ 其中 $m=\max\{l,n\}$ $k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是特征根}\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是特征根}\end{cases}$

其中 $P_m(x)$，$Q_m(x)$，$R_m(x)$ 表示 x 的 m 次多项式.

微分方程：Euler方程

5. Euler 方程

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x).$$

（a_{n-i} 为常数）作自变量变换，令 $x=e^t$，若用“D”表示 $\dfrac{d}{dt}$，则 $x^iy^{(i)}=D(D-1)\cdots(D-i+1)y$. 很容易将 Euler 方程化为常系数线性微分方程.

微分方程部分

1．方程$\frac{dy}{x^2}+3(3-y)dx=0$的通解为（ ）

（A） $y=3+Ce^{x^3}$，C为任意常数

（B） $y=3+Ce^{x^2}$ ，C为任意常数

（C） $y=3+Ce^{x^4}$ ，C为任意常数

（D） $y=3+Ce^{x}$，C为任意常数

答案：(A)

2．函数$y=0$是方程$y'=y^2$的（　　）

（A）通解　　（B）特解　　（C）奇解　　（D）不是解

答案：C

3．方程$\frac{dy}{x^2}+3(3-y)dx=0$的通解为（　　）

（A）Ce^{x^3}　　（B）$3+Ce^{x^3}$　　（C）$3+e^{x^3}$　　（D）$3+Ce^{x^2}$

答案：B

4．下列函数中，哪个是微分方程$dy-2xdx=0$的解（　　）

（A） $y=2x$　　（B） $y=x^2$　　（C） $y=-2x$　　（D） $y=-x$

答案：B

5．微分方程$y'=3y^{\frac{2}{3}}$的一个特解是（　　）

（A） $y=x^3+1$　　（B） $y=(x+2)^3$　　（C） $y=(x+C)^2$　　（D）
$y=C(1+x)^2$

答案：B

6． $y'=y$满足$y|_{x=0}=2$的特解是（　　）

（A） $y=e^x+1$　　（B） $y=2e^x$　　（C） $y=2e^{\frac{x}{2}}$　　（D） $y=3e^x$

答案：B

7. 微分方程 $y'-y=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解为（　　）

（A）e^x　　（B）e^x-1　　（C）e^x+1　　（D）$2-e^x$

答案：A

8. 下列微分方程中，可分离变量的是（　　）

（A）$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=e$　　（B）$\frac{dy}{dx}=k(x-a)(b-y)$　（k,a,b 是常数）

（C）$\frac{dy}{dx}-\sin y=x$　　（D）$y'+xy=y^2\cdot e^x$

答案：B

9. 方程 $y'-2y=0$ 的通解是（　　）

（A）$y=\sin x$　　（B）$y=4e^{2x}$　　（C）$y=Ce^{2x}$　　（D）$y=e^x$

答案：C

10. 微分方程 $\frac{dx}{y}+\frac{dy}{x}=0$ 满足 $y|_{x=3}=4$ 的特解是（　　）

（A）$x^2+y^2=25$　　（B）$3x+4y=C$　　（C）$x^2+y^2=C$　　（D）$x^2-y^2=7$

答案：A

11. 微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=0$ 的通解是 $y=$（　　）

（A）$\frac{C}{x}$　　（B）Cx　　（C）$\frac{1}{x}+C$　　（D）$x+C$

答案：B

12. 微分方程 $y'+y=0$ 的解为（　　）

（A）e^x　　（B）e^{-x}　　（C）e^x+e^{-x}　　（D）$-e^x$

答案：B

13. 下列函数中，为微分方程 $xdx+ydy=0$ 的通解是（　　）

（A）$x+y=C$　　（B）$x^2+y^2=C$　　（C）$Cx+y=0$　　（D）$Cx^2+y=0$

答案：B

14. 微分方程 $2ydy-dx=0$ 的通解为（　　）

（A） $y^2-x=C$ （B） $y-\sqrt{x}=C$ （C） $y=x+C$ （D） $y=-x+C$

答案：A

15．微分方程 $\cos ydy=\sin xdx$ 的通解是（ ）

（A） $\sin x+\cos y=C$ （B） $\cos y-\sin x=C$

（C） $\cos x-\sin y=C$ （D） $\cos x+\sin y=C$

答案：D

16． $y''=e^{-x}$ 的通解为 $y=$（ ）

（A） $-e^{-x}$ （B） e^{-x} （C） $e^{-x}+C_1x+C_2$ （D） $-e^{-x}+C_1x+C_2$

答案：（C）

17． $y''=\sin x$ 的通解为 $y=$（ ）

（A） $-\sin x+C_1x+C_2$ （B） $-\sin x+C_1+C_2$

（C） $\sin x+C_1x+C_2$ （D） $\sin x+C_1+C_2$

答案：A

18．方程 $(1-x^2)y-xy'=0$ 的通解是（ ）

（A） $y=C\sqrt{1-x^2}$ （B） $y=\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}$ （C） $y=-\frac{1}{2}x^3+Cx$ （D） $y=Cxe^{-\frac{1}{2}x^2}$

答案：D

19．微分方程 $y\cdot\ln xdx=x\cdot\ln ydy$ 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解是（ ）

（A） $\ln^2 x=\ln^2 y$ （B） $\ln^2 x+\ln^2 y=1$

（C） $\ln^2 x+\ln^2 y=0$ （D） $\ln^2 x=\ln^2 y+1$

答案：A

20．微分方程 $(1+x^2)dy+(1+y^2)dx=0$ 的通解是（ ）

（A） $\arctan x+\arctan y=C$ （B） $\tan x+\tan y=C$

（C） $\ln x+\ln y=C$ （D） $\cot x+\cot y=C$

21．微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{dx}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解为（ ）

（A）$\sin\frac{y}{x}=Cx$　（B）$\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{Cx}$　（C）$\sin\frac{x}{y}=Cx$　（D）$\sin\frac{x}{y}=\frac{1}{Cx}$

答案：A

21．方程$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^3\ (x\neq 0)$的通解为（　）

（A）$y=\frac{1}{3}x^4+C(x\neq 0)$，$C$为任意常数

（B）$y=\frac{1}{3}x^3+Cx(x\neq 0)$，$C$为任意常数

（C）$y=\frac{1}{3}x^4+Cx(x\neq 0)$，$C$为任意常数

（D）$y=\frac{1}{3}x^2+Cx(x\neq 0)$，$C$为任意常数

答案：（C）

22．方程$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^3\ (x\neq 0)$的通解为（　　）

（A）Cx^4　（B）$\frac{1}{x}(C+\frac{1}{5}x^5)$　（C）$\frac{1}{3}x^4+Cx$　（D）$x(1+Cx^3)$

23．$\begin{cases} xy'+y=3 \\ y|_{x=1}=0 \end{cases}$的解是（　　）

（A）$y=3(1-\frac{1}{x})$　（B）$y=3(1-x)$　（C）$y=1-\frac{1}{x}$　（D）$y=1-x$

答案：A

24．微分方程$y'-y=1$的通解是（　　）

（A）$y=Ce^x$　（B）$y=Ce^x+1$　（C）$y=Ce^x-1$　（D）$y=(C+1)e^x$

答案：C

25．方程$xy'+y=3$的通解是（　　）

（A）$y=\frac{C}{x}+3$　（B）$y=\frac{3}{x}+C$　（C）$y=-\frac{C}{x}-3$　（D）

$y=\dfrac{C}{x}-3$

答案：A

26. 微分方程 $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解为（　　）

（A）$\arctan x+C$　（B）$\dfrac{1}{x}(\arctan x+C)$　（C）$\dfrac{1}{x}\arctan x+C$　（D）$\arctan x+\dfrac{C}{x}$

答案：B

27. 方程 $y^{(5)}-\dfrac{1}{x}y^{(4)}=0$ 的通解为（ ）

（A）$y=\dfrac{1}{60}C_1x^5+\dfrac{1}{6}C^2x^3+\dfrac{1}{2}C_3x^2+C_4x+C_5$，$C_i$ 为任意常数 $(i=1,2,\cdots,5)$

（B）$y=\dfrac{1}{120}C_1x^5+\dfrac{1}{3}C^2x^3+\dfrac{1}{2}C_3x^2+C_4x+C_5$，$C_i$ 为任意常数 $(i=1,2,\cdots,5)$

（C）$y=\dfrac{1}{120}C_1x^5+\dfrac{1}{6}C^2x^3+\dfrac{1}{4}C_3x^2+C_4x+C_5$，$C_i$ 为任意常数 $(i=1,2,\cdots,5)$

（D）$y=\dfrac{1}{120}C_1x^5+\dfrac{1}{6}C^2x^3+\dfrac{1}{2}C_3x^2+C_4x+C_5$，$C_i$ 为任意常数 $(i=1,2,\cdots,5)$

答案：（D）

28. 初值问题 $yy''-y'^2=y^2\ln y$, $y>0$, $y|_{x=0}=e$, $y'|_{x=0}=e$ 的解为（ ）

（A）$y=e^x$　（B）$y=e^{x^2}$　（C）$y=e^{e^x}$　（D）$y=e^{x^x}$

答案：（C）

29. 方程 $y^{(5)}-\dfrac{1}{x}y^{(4)}=0$ 的通解为（　　）

（A）$C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$　（B）$C_1x^5+C_2x^4+C_3x^2+C_4x+C_5$

(C) $C_1x^5+C_2x^4+C_3x^3+C_4x+C_5$ (D) $C_1x^5+C_2x^4+C_3x^3+C_4x^2+C_5x$

答案：A

30. 初值问题 $yy''-y'^2=y^2\ln y,\ y>0,\ y|_{x=0}=e,\ y'|_{x=0}=e$ 的解为（ ）

（A）e^{x+1} （B）e^{e^x} （C）e^x （D）$\dfrac{e^{x+1}+e^{e^x}}{2}$

答案：B

31. 方程 $\dfrac{d^4x}{dt^4}-x=0$ 的通解为（ ）

（A）$C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$ （B）$C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{-t}+C_4te^{-t}$

（C）$C_1\cos t+C_2\sin t+C_3t\cos t+C_4t\sin t$ （D）$C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^t\cos t+C_4e^t\sin t$

答案：（A）

32. 在下列函数中，能够是微分方程 $y''+y=0$ 的解的函数是（ ）

（A）$y=1$ （B）$y=x$ （C）$y=\sin x$ （D）$y=e^x$

答案：C

33. 下列函数中，哪个函数是微分方程 $s''(t)=-g$ 的解（ ）

（A）$s=-gt$ （B）$s=-gt^2$ （C）$s=-\dfrac{1}{2}gt^2$ （D）$s=\dfrac{1}{2}gt^2$

答案：C

34. 微分方程 $y''=\sin(-x)$ 的通解是（ ）

（A）$y=\sin(-x)$ （B）$y=-\sin(-x)$

（C）$y=-\sin(-x)+C_1x+C_2$ （D）$y=\sin(-x)+C_1x+C_2$

答案：C

35. 初值问题 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+x=2e^t, x(0)=1, x'(0)=1$ 的解为（ ）

(A) $(1+t)e^t$ （B）$(1+t^2)e^t$ （C）$(1+t^2)e^{-t}$ （D）$(t+t^2)e^t$

答案：（B）

36．方程 $y''+8y'+25y=2\cos x$ 的通解为（ ）

（A）$e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\frac{3}{40}\cos x+\frac{1}{40}\sin x$，$C_1,C_2$ 为任意常数

（B）$e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\frac{3}{40}\cos x+\frac{1}{40}\sin x$，$C_1,C_2$ 为任意常数

（C）$e^{-4x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{3}{40}\cos x+\frac{1}{40}\sin x$，$C_1,C_2$ 为任意常数

（D）$e^{-4x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\frac{3}{40}\cos x+\frac{1}{40}\sin x$，$C_1,C_2$ 为任意常数

答案：（D）

37．已知二阶常系数非齐次线性微分方程有两个特解 $y_1=\cos 2x-\frac{1}{4}x\sin 2x$，$y_2=\sin 2x-\frac{1}{4}x\sin 2x$，此微分方程为（ ）

（A）$y''+4y=\sin 2x$　　（B）$y''+4=\cos 2x$

（C）$y''+4y=\cos 2x$　　（D）$y''+2y=\cos 2x$

答案：（C）

38．设 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解，则 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$（ ）

（A）12　　（B）4　　（C）11　　（D）14

答案：（D）

39．微分方程 $y^{(4)}-y=e^x+3\sin x$ 的特解可设为（ ）

（A）$Ae^x+B\cos x+C\sin x$　　（B）$Axe^x+B\cos x+C\sin x$

（C）$x(Ae^x+B\cos x+C\sin x)$　　（D）$Ae^x+B\sin x$

答案：C

40．如果二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=e^{-x}\cos x$ 有一个特解 $y^*=e^{-x}(x\cos x+x\sin x)$，则（　　）

（A）$a=-1,b=1$　　（B）$a=1,b=-1$　　（C）$a=2,b=1$　　（D）$a=2,b=2$

答案：（D）

41．设 $y_1=x, y_2=x+e^{2x}, y_3=x+xe^{2x}$ 是二阶线性常系数非齐次方程 $y''+ay'+by=f(x)$ 的特解，则（ ）

（A）$a=4$，$b=4$ （B）$a=-4$，$b=-4$ （C）$a=4$，$b=-4$ （D）$a=-4$，$b=4$

答案：（D）

42．设 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是二阶线性常系数非齐次方程 $y''+ay'+by=f(x)$ 的特解，则（ ）

（A）$a=-1$，$b=-2$ （B）$a=1$，$b=-2$

（C）$a=-1$，$b=2$ （D）$a=2$，$b=-1$

答案：（A）

43．设二阶线性常系数方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解为 $y^*=e^{2x}+(1+x)e^x$，则（ ）

（A）$a=3$，$b=2$，$c=-1$

（B）$a=-3$，$b=-2$，$c=-1$

（C）$a=-3$，$b=2$，$c=-1$

（D）$a=-3$，$b=2$，$c=1$

答案：（C）

44．已知某二阶非齐次线性微分方程的三个解分别为 $y_1=e^x, y_2=xe^x, y_3=x^2e^x$，则不能构成它的通解为（ ）

（A）$C_1(xe^x-e^x)+C_2(x^2e^x-e^x)+e^x$ （B）$C_1(x^2e^x-xe^x)+C_2(e^x-xe^x)+xe^x$

（C）$C_1xe^x+C_2e^x+(1-C_1-C_2)x^2e^x$ （D）$C_1e^x+C_2xe^x+x^2e^x$

答案：D

45．设 $y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+e^{3x}$（$C_1, C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性非齐次微分方程的通解，则该方程为（ ）

（A）$y''-4y'+5y=2e^{3x}$ （B）$y''-y'+2y=e^{2x}$

（C）$y''-2y'+y=e^{3x}$ （D）$y''-4y'+5y=e^{3x}$

答案：A

46．已知某二阶非齐次线性微分方程的三个解分别为 $y_1=e^x, y_2=xe^x, y_3=x^2e^x$，则它的通解为（ ）

（A）$C_1e^x+C_2xe^x+x^2e^x$ （B）

$(C_1+C_2+1)e^x-C_2xe^x-C_1x^2e^x$

(C) $(C_1+C_2)e^x+(C_2-C_1)xe^x+(C_2+1)x^2e^x$ (D) $C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$

答案：B

47．微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为（　）

(A) $y^*=ax^2+bx+C+x(A\sin x+B\cos x)$ (B) $y^*=x(ax^2+bx+C+A\sin x+B\cos x)$

(C) $y^*=ax^2+bx+C+A\sin x$ (D) $y^*=ax^2+bx+C+A\sin x+B\cos x$

48．方程 $y''-2y'+3y=e^x\sin\sqrt{2}x$ 的特解形式为（　）

(A) $e^x(A\cos\sqrt{2}x+B\sin\sqrt{2}x)$ (B) $xe^x(A\cos\sqrt{2}x+B\sin\sqrt{2}x)$

（C）$Ae^x\sin\sqrt{2}x$ （D）$Ae^x\cos\sqrt{2}x$

答案：B

49．方程 $y''-2y+4y=e^{2x}\sin\sqrt{3}x$ 的特解形式为（　）

(A) $e^{2x}(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x)$ (B) $xe^{2x}(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x)$

（C）$Ae^{2x}\sin\sqrt{3}x$ （D）$Ae^{2x}\cos\sqrt{3}x$

答案：A

50．方程 $y''+a^2y=\sin x$ $(a>1)$ 的特解可设为（　）

（A）$x(A\cos x+B\sin x)$ （B）$A\cos x+B\sin x$

（C）$A\cos ax+B\sin ax$ （D）$e^{ax}(A\cos x+B\sin x)$

51．设二阶常系数线性方程 $y''+ay'+by=Ce^x$ 的一个特解为 $y^*=e^{2x}+(1+x)e^x$，则此方程的特征根为（ ）

（A）1和−2 （B）−1和2 （C）1和2 （D）−1和−2

答案：（D）

52．若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-3f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$（　）

（A）$C_1e^{-3x}+C_2e^x$ （B）e^{-3x} （C）e^x （D）$2e^x$

答案：C

53. 设 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$；$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次常系数微分方程的三个解，则该微分方程为（　　）

（A）$y'' - y' - 2y = xe^x$　　（B）$y'' - y' - 2y = e^x$

（C）$y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$　　（D）$y'' - y' - 2y = xe^{2x}$

答案：C

54．已知二阶常系数非齐次线性微分方程有两个特解 $y_1 = \cos 2x - \frac{1}{4}x\sin 2x$，$y_2 = \sin 2x - \frac{1}{4}x\sin 2x$，此微分方程是（　　）

（A）$y'' + 4y = \sin 2x$　　（B）$y'' + 2y = \cos 2x$

（C）$y'' + 4y = \sin 2x + \cos 2x$　　（D）$y'' + 4y = \cos 2x$

答案：D

55．微分方程 $y'' + y = \sin x$ 的一个特解具有形式（　　）

（A）$y^* = a\sin x$　　（B）$y^* = a\cos x$

（C）$y^* = x(a\sin x + b\cos x)$　　（D）$y^* = a\cos x + b\sin x$

答案：C

56. 微分方程 $y'' - y' = e^x + 1$ 的一个特解应具有形式（a, b 为常数）（　　）

（A）$ae^x + b$　　（B）$axe^x + b$　　（C）$ae^x + bx$　　（D）$axe^x + bx$

答案：D

57．方程 $\frac{d^4x}{dt^4} - x = 0$ 的通解为（ ）

（A）$C_1e^{it} + C_2e^{-it} + C_3\cos t + C_4\sin t, C_i$ 为任意常数

（B）$C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3i\cos t + C_4i\sin t, C_i$ 为任意常数

（C）$C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, C_i$ 为任意常数

（D）$C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3\cos t + C_4\sin t, C_i$ 为任意常数

答案：（C）

58．方程 $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ 的通解为（ ）

（A）$(C_1+C_2t)\cos t+(C_3+C_4)t\sin t$，$C_i$为任意常数

（B）$(C_1+C_2t)\cos t+(C_3+C_4)t^2\sin t$，$C_i$为任意常数

（C）$(C_1+C_2t^2)\cos t+(C_3+C_4)t\sin t$，$C_i$为任意常数

（D）$(C_1t+C_2t^2)\cos t+(C_3+C_4)t\sin$，$C_i$为任意常数

答案：（A）

59．方程$y''-3y'+2y=0$的通解为（ ）

（A）$C_1+C_2e^{2x}$，C_1,C_2为任意常数

（B）$C_1e^{x}+C_2e^{2x}$，C_1,C_2为任意常数

（C）$C_1e^{ix}+C_2e^{2x}$，C_1,C_2为任意常数

（D）$C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$，C_1,C_2为任意常数

答案：（B）

60．方程$y^{(3)}+y''-y'-y=0$的通解为（ ）

（A）$C_1e^{x}+(C_2+C_3x)e^{-ix}$，$C_i$为任意常数

（B）$C_1e^{ix}+(C_2+C_3x)e^{-x}$，$C_i$为任意常数

（C）$C_1e^{x}+(C_2+C_3x)e^{-2x}$，$C_i$为任意常数

（D）$C_1e^{x}+(C_2+C_3x)e^{-x}$，$C_i$为任意常数

答案：（D）

61．已知$\sin^2 x,\cos^2 x$是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的解，C_1,C_2为任意常数，则不能构成该方程通解的是（　　）

（A）$C_1\sin^2 x+C_2\cos^2 x$　　（B）$C_1+C_2\cos 2x$

（C）$C_1\sin^2 2x+C_2\tan^2 x$　　（D）$C_1+C_2\cos^2 x$

答案：C

62．设$y=1,y=e^x,y=2e^x,y=e^x+\frac{1}{\pi}$都是某二阶常系数线性微分方程的解，则此二阶常系数线性微分方程对应的特征根为（ ）

（A）0和0　（B）0和1　（C）1和1　（D）-1和1

答案：（B）

63．设微分方程有通解$y=(C_1+C_2x+x^{-1})e^{-x}$，则此微分方程对应的特征根为（ ）

（A）1和-1　（B）0和-1　（C）-1和-1　（D）1和1

答案：（C）

64. 具有特解$y_1=e^{-x}$，$y_2=2xe^{-x}$，$y_3=3e^x$的三阶常系数齐次线性微分方程是（　）

（A）$y'''-y''-y'+y=0$　　（B）$y'''+y''-y'-y=0$

（C）$y'''-6y''+11y'-6y=0$　　（D）$y'''-2y''-y'+2y=0$

答案：B

65. 具有特解$y_1=e^{-x}$，$y_2=3xe^{-x}$，$y_3=4e^{2x}$的三阶常系数和齐次线性方程是（　）

（A）$y'''-3y'-2y=0$　　（B）$y'''+3y'+2y=0$

（C）$y'''-y'+y=0$　　（D）$y'''-y''+y'-y=0$

答案：A

66. 已知xe^x与$e^x\cos x$是n阶常系数齐次线性微分方程的两个解，则最小的正整数$n=$（ ）

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

答案：（D）

67. 已知e^{2x}与$e^x\sin x$是n阶常系数齐次线性微分方程的两个解，则最小的正整数$n=$（ ）

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

答案：C

68. 已知e^x与$xe^x\cos x$是n阶常系数齐次线性微分方程的两个解，则最小的正整数$n=$（ ）

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5

答案：D

69. 设常系数方程$y''+ay'+by=0$的两个线性无关的解为$y_1=e^{-x}\cos x$，$y_2=e^{-x}\sin x$，则（ ）

（A）$a=2$，$b=2$　（B）$a=2$，$b=-2$（C）$a=-2$，$b=2$　（D）$a=-2$，$b=-2$

答案：A

70．设常系数方程 $y''+ay'+by=0$ 的两个线性无关的解为 $y_1=e^{-x}$，$y_2=xe^{-x}$，则（ ）

（A）$a=2$，$b=-1$　（B）$a=-2$，$b=1$

（C）$a=2$，$b=1$　（D）$a=-2$，$b=-1$

答案：(C)

71．设常系数方程 $y''+ay'+by=0$ 的两个线性无关的解为 $y_1=\cos x$，$y_2=\sin x$，则（ ）

（A）$a=0$，$b=1$（B）$a=1$，$b=1$（C）$a=0$，$b=0$（D）$a=1$，$b=0$

答案：A

72．方程 $y^{(3)}+y''-y'-y=0$ 的特征根为（ ）

（A）1，-1，-1　（B）1，1，-1（C）1，-1，1（D）-1，-1，-1

答案：A

73．具有特解 $y_1=e^{-2x}$，$y_2=e^{3x}$ 的二阶常系数齐次微分方程的特征方程是（　）

（A）$\lambda^2+\lambda-6=0$　　（B）$\lambda^2-\lambda-6=0$

（C）$\lambda^2-2\lambda+3=0$　　（D）$\lambda^2-5\lambda-6=0$

答案：B

74．具有特解 $y_1=e^{-x}$，$y_2=xe^{-x}$，$y_3=e^{-2x}$ 的三阶常系数齐次微分方程的特征根是（ ）

（A）1，-1，-2（B）-1，-1，-2（C）-1，-1，2（D）1，1，-2

答案：B

75．具有特解 $y_1=e^x\cos x$，$y_2=e^x\sin x$ 的二阶常系数齐次微分方程的特征方程是（　）

（A）$\lambda^2-2\lambda+1=0$　　（B）$\lambda^2+2\lambda+1=0$

（C）$\lambda^2+1=0$　　（D）$\lambda^2-2\lambda+2=0$

答案：D

76．设 $y(x)$ 是 $y''+y=0$ 的解且 $x\to 0$ 时是 x 的等价无穷小，则 $y(x)=$（　）

（A）$C_1+C_2e^{-x}$（B）$C_1\cos x+C_2\sin x$ （C）$C_2\sin x$ （D）$\sin x$

答案：D

77．$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$是方程$y''-y=0$的（ ），其中C_1，C_2为任意常数.

（A）通解 （B）特解 （C）方程所有的解 （D）上述都不对

答案：A

78．下列微分方程中，（ ）是二阶常系数齐次线性微分方程.

（A）$y''-2y=0$ （B）$y''-xy'+3y^2=0$ （C）$5y''-4x=0$

（D）$y''-2y'+1=0$

答案：A

79．微分方程$y''-4y'+4y=0$的两个线性无关的解是（ ）

（A）$e^{2x},2e^{2x}$ （B）e^{-2x},xe^{-2x} （C）e^{2x},xe^{2x} （D）$e^{-2x},4e^{-2x}$

答案：C

80．下列函数中，是微分方程$y''-7y'+12y=0$的解的函数为（ ）

（A）$y=x^3$ （B）$y=x^2$ （C）$y=e^{3x}$ （D）$y=e^{2x}$

答案：C

81．函数$y=\cos x$是下列哪个微分方程的解（ ）

（A）$y'+y=0$ （B）$y'+2y=0$ （C）$y''+y=0$ （D）

$y''+y=\cos x$

答案：

82．若用代换$y=z^m$可将微分方程$y'=ax^\alpha+by^\beta$ $(\alpha\beta\neq 0)$化为一阶齐次

方程$\dfrac{dz}{dx}=f(\dfrac{z}{x})$，则$\alpha,\beta$应满足的条件是（ ）

（A）$\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}=1$ （B）$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$ （C）$\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=1$ （D）

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-1$

83．欧拉方程$x^2y''-xy'=x^3$的通解为（ ）

（A）$\dfrac{4}{3}x^3+(C_1+C_2x)$ （B）$\dfrac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$

（C）$\frac{2}{3}x^3+(C_1+C_2\ln x)x$　　　　（D）$x^3+C_1+C_2x^2$

答案：C

84．欧拉方程 $x^2y''-xy'+y=x\ln x$ 的通解为（　　）

（A）$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{x^3}{6}e^x$　　　　（B）

$y=(C_1+C_2x)e^x+x^2e^x$

（C）$(C_1+C_2\ln x)x+\frac{1}{6}x\ln^3 x$　　　　（D）

$y=(C_1+C_2\ln x)x+x^2\ln x$

答案：C

85．设 y_1,y_2 是方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 的两个特解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是该方程通解的充要条件为（　　）

（A）$y_1y_2'-y_2y_1'=0$　　　　（B）$y_1y_2'-y_2y_1'\neq 0$

（C）$y_1y_2'+y_2y_1'=0$　　　　（D）$y_1y_2'+y_2y_1'\neq 0$

答案（B）

86．设 $y_1=3+x^2$，$y_2=3+x^2+e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的两个特解且相应的齐次方程有一个解为 $y_3=x$，则不构成该方程的通解为

（　　）

（A）$C_1x+C_2e^{-x}+3+x^2$　　　　（B）$C_1x+C_2e^{-x}+3+x^2+e^{-x}$

（C）$C_1(3+x^2)+C_2(3+x^2+e^{-x})+x$　　　　（D）$C_1x+C_2(e^{-x}-x)+3+x^2$

答案：C

87．微分方程 $xyy''+x(y')^3-y^4y'=0$ 的阶数是（　　）

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）2

答案：D

88．微分方程 $y'''-x^2y''-x^5=1$ 的通解中应含的独立常数个数为（　　）

（A）3　　（B）5　　（C）4　　（D）2

答案：A

89．过点 $(1,3)$ 且切线斜率为 $2x$ 的曲线方程 $y=y(x)$ 应满足的关系是（　　）

（A）$y'=2x$　　（B）$y''=2x$　　（C）$y'=2x,\ y(1)=3$　　（D）$y''=2x,\ y(1)=3$

答案：C

90．已知微分方程 $y'+P(x)y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的一个特解为 $y^*=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$，则此微分方程的通解是（　　）

（A）$\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$　　（B）$\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{2}{11}(x+1)^{\frac{7}{2}}$

（C）$C(x+1)^2+\frac{2}{11}(x+1)^{\frac{7}{2}}$　　（D）$C(x+1)^2+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$

答案：D

多元函数的概念

1. 多元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$. 它是从点集 D 到 z 轴的映射.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$. 要求点 (x,y) 在 $f(x,y)$ 的定义域 D 内以任何方式和途径趋于点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 都无限趋于常数 A.

3. 连续 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 等价于全增量 $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ 趋于零.

4. 偏导数

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.f'(x,y_0)\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

几何意义是曲线 $z=f(x,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线对 x 轴的斜率，物理意义是在 (x_0,y_0) 处 z 随 x 变化的变化率.

5. 全微分 是全增量 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 的线性主部，$dz=A\Delta x+B\Delta y$. 几何上表示曲面 $z=(x,y)$ 的切平面的竖坐标的增量.

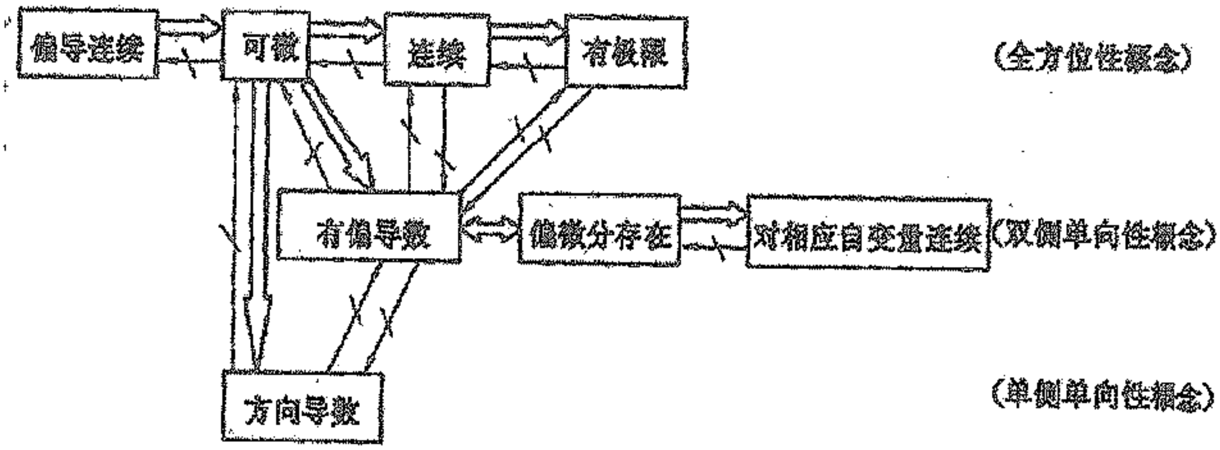
6. 方程导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{p_0}=\lim\limits_{p\to p_0}\dfrac{f(p)-f(p_0)}{|pp_0|}$，点 p 在 p_0 发出的射线 l 上，它表示函数沿 l 方向的变化率.

梯度 $\nabla z=\mathrm{grad}z$ 是个向量，它指向函数 z 在点 p 处变化最快的方向，大小恰好是这个最大的变化率.

多元函数基本理论和方法：

1. 有界增长区域上连续函数必有界，且有最大值和最小值，必能取到介于最大值与最小值之间的任何值。

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处，有如下关系



3. 函数 $u=u(x,y,z)$ 可微条件下，

(1) 梯度 $\mathrm{grad}\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x}i+\dfrac{\partial u}{\partial y}j+\dfrac{\partial u}{\partial z}k$，$\mathrm{grad}\,u\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$ 垂直于等值面 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$，是等值面的法向量。

(2) 方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\mathrm{grad}u\cdot l^0=\mathrm{Prj}_l\nabla u$．其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 l 方向的方向余弦。

(3) 全微分 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{grad}u\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{pmatrix}$.

4. 混合偏导数连续条件下，与求导次序无关，如 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

5. 复合函数 $z=z(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$ 的链导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\partial(z)}{\partial(x,y)}\right)=\left(\frac{\partial(z)}{\partial(u,v)}\right)\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right).$$

这里 $z(u,v)$ 可微，而 $u(x,y),v(x,y)$ 偏导数存在。

6. 隐函数 $F(x,y,z)=0$ 求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},$$

其中 $F'_z(x,y,z)\neq 0$.

隐函数方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定的隐函数求导法则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F'_x & F'_v\\G'_x & G'_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\G'_u & G'_v\end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

其中 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$.

多元函数微分学的应用

1. 空间曲线的切线和法平面

i）设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\quad t\in\Gamma.\\z=z(t)\end{cases}$$

切线三导，
法线三偏

对于 t_0 对应得 Γ 上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，则曲线 Γ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的切线与法平面方程为

切线：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$；

法平面：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$.

ii）设空间曲线 Γ 的交面式方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{隐函数存在定理}} y=y(x),\quad z=z(x),$$

即化为参数为 $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$，

由 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 可求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

2．曲面的切平面与法线

i）设曲面 S 的方程为 $F(x,y,z)=0$，则曲面 S 上点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面和法线方程.

切平面：$\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big|_P(x-x_0)+\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big|_P(y-y_0)+\dfrac{\partial F}{\partial z}\Big|_P(z-z_0)=0$.

法线：$\dfrac{x-x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big|_P}=\dfrac{y-y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big|_P}=\dfrac{z-z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}\Big|_P}$

ii）设曲面 S 的方程 $z=f(x,y)$，即 $F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$，已为 i）

3．多元函数的极值问题

(1) 无条件极值

1) 极值存在的必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分（或存在偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$），且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则在该点的偏导数必为零，即 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，此时的点 (x_0,y_0) 称为驻点.

2) 极值存在的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内连续且有一阶、二阶连续偏导数，又

$$f_x'(x_0,y_0)=0，\ f_y'(x_0,y_0)=0，$$

记　$A=f_{xx}''(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}''(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}''(x_0,y_0)$.

则 i) 判别式 $\Delta=B^2-AC<0$ 时，在点 (x_0,y_0) 处取极值，且当 $A<0$ 时取极大值，$A>0$ 时取极小值.

ii) 判别式 $\Delta=B^2-AC>0$ 时，无极值.

iii) 判式 $\Delta=B^2-AC=0$ 时，特定.

二元极值，

时二判

(2) 条件极值(拉格朗日乘数法)

问题：求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值.

第一步，构造拉氏函数

$$\underset{\text{拉氏函数}}{F(x,y)}=\underset{\text{目标函数}}{f(x,y)}+\lambda\underset{\text{条件函数}}{\varphi(x,y)}$$

第二步，解联立方程组

令 $F_x'=0$，$F_y'=0$，$F_\lambda'=0$

解出：(x,y)

多元函数微分学

1. 已知函数 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，则 $f(x-y,xy)=$______.

A. $\frac{(x+y)^2(1-xy)}{xy}$ B. $\frac{(x-y)^2(1-xy)}{1+xy}$

C. $\frac{(x-y)^2(1+xy)}{1+xy}$ D. $\frac{(x-y)^2(1+xy)}{1-xy}$

答案：B

2. 已知函数 $f(x+y,x-y)=x^3+y^3$，则 $f(x,y)=$______.

A. $\frac{1}{4}x(x^2+3y^2)$ B. $y(x^2-2y^2)$ C. $\frac{1}{2}(x^2+y)$ D. $xy(2x^2+y^2)$

答案：A

3、 已知函数 $f(x+y,x-y)=xy+x^2$，则 $f(x,y)=$__________.

A. $\dfrac{y^2+x^2y}{4}$　B. $\dfrac{x+xy^2}{2}$　C. $xy(x^2+xy^2)$　D. $\dfrac{x^2+xy}{2}$

答案：D

4. 设函数 $f(x-y,x+y)=xy$，求 $f(x,y)$______

A. $\dfrac{y^2-x^2}{4}$　B. $\dfrac{y^2+x^2}{2}$　C. $\dfrac{y^2-2x^2}{y}$　D. $\dfrac{xy^2+y}{x-y}$

答案：A

5. 函数 $z=\ln(x\ln y)$ 的定义域为____________________.

A. $\{x>0, y>1$ 或 $x<0,\ 0<y<1\}$　B. $\{x>0, y>0\}$

C. $\{x>0, y>1\}$　D. $\{x<0,\ 0<y<1\}$

答案：A

6. 函数 $z=\sin x^2-|y|\cos x$__________.

A. 只是 x 的偶函数　B. 只是 y 的偶函数

C. 既是 x 的偶函数，又是 y 的偶函数　D. 以上都不对

答案：C

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=$__________

A. 2　B. -1　C. 1　D. 0

答案：C

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin xy}{x}=$__________

A. 1　B. 2　C. 0　D. $\dfrac{1}{2}$

答案：B

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$______

A. 0 B. -1 C. 1 D. 2

答案：D

10. 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}}(1+\dfrac{1}{xy})^{\frac{x^2}{x+y}}$ (其中 $a\neq 0$) $=$______.

A. e B. e^{2a} C. ae D. $e^{\frac{1}{a}}$

答案：D

11. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)}[1+\sin(xy)]^{\frac{y}{x}}=$______.

A. e^{π} B. 0 C. e D. e^{π^2}

答案：D

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$______.

A. 2 B. $-\dfrac{1}{4}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. -2

答案：B

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\infty)} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=$______

A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

答案：B

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2y^2}=$______.

A. 不存在 B. 1 C. 0 D. 2

答案：C

15. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}=$______.

A. 1 B. 0 C. -1 D. 不存在

答案：B

16. 函数 $f(x,y)=\dfrac{y^2+x^2}{xy}$ 的所有不连续点______

A. 点 $(0,0)$ B. $x=0$ 且 $y\neq 0$ C. $y=0$ 且 $x\neq 0$ D. $x=0$ 或 $y=0$

答案：D

17. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处______.

A. 连续 B. 极限不存在 C. 极限存在但不连续 D. 极限存在且等于 $\dfrac{1}{2}$

答案：B

18. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处______.

A. 极限存在但不连续 B. 极限不存在 C. 偏导数不存在 D. 可微

答案：B

答案：A

19. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 及 $f_y'(x_0,y_0)$ 连续，是函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 可微的______条件.

A. 充分 B. 必要 C. 充分且必要 D. 既不充分，也不必要

答案：A

20. 已知 X={偏导数存在的二元函数类}，Y={偏导数存在且连续的二元函数类},Z={可微二元函数类},则（ ）

(A) $X\supset Y\supset Z$ (B) $Y\supset X\supset Z$

(C) $X\supset Z\supset Y$ (D) $Z\supset Y\supset X$

答案：C

21. 考虑二元函数的下面四条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；(2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分；(4) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 存在；

则下列四个选项中正确的是_____.

A. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$ B. $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$ C. $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$ D. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$

答案：D

22. 函数 $z=\arcsin(y\sqrt{x})$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

A. $\dfrac{y}{2\sqrt{x(1-xy^2)}}$ B. $\dfrac{y}{2\sqrt{x(1+x^2y)}}$ C. $\dfrac{x}{2\sqrt{y(1-x^2y^2)}}$ D. $\dfrac{2y}{\sqrt{x(1+xy^2)}}$

答案：A

23. 函数 $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$ 对 x 的一阶偏导数为________.

A. $-\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{x}{2y}$ B. $\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$ C. $\dfrac{2}{y}\sec\dfrac{x}{2y}$ D. $-\dfrac{x}{2y}\csc\dfrac{2x}{y}$

答案：B

24. 设 $u=x^{\frac{y}{z}}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 为________.

A. $\dfrac{y}{zx^2}x^{\frac{z}{y}}\ln x$ B. $-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$ C. $\dfrac{y}{xz^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$ D. $-\dfrac{y}{z}x^{\frac{z}{y}}\ln x$

答案：B

25. 设函数 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f_x'(x,1)=$________.

A. -1 B. 2 C. 1 D. -2

答案：C

26. 设$z=x^2+y^2+(x-1)\tan^3\sqrt{\frac{y}{x}}$，求$z_x'(1,0)=$________.

A. -2 B. 3 C. -1 D. 2

答案：D

27. 设 $f(x,y)=xy+(x-1)y^3\arctan\sqrt{\frac{\cos(x-y)}{\ln(3+x^2y)}}$，则 $f_y'(1,0)$ =________.

A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 1 D. -1

答案：C

28. 设函数 $z=\cos^2(x-\frac{t}{2})$，求$2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=$________.

A. 1 B. 0 C. -1 D. 2

答案：B

29. 设函数$z=e^{x-2y}$，而$x=\sin t$，$y=t^3$，求$\frac{dz}{dt}=$________.

A. $e^{\cos t-2t^3}(\cos t-2t^3)$ B. $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$

C. $e^{\sin t}(\cos t-3t^2)$ D. $e^{\cos t+t}(\sin t+6t^2)$

答案：B

30. 设函数$z=xe^y$，而$y=y(x)$是x的可微函数，求$\frac{dz}{dx}=$________.

A. $xy'(x)e^y$ B. e^y C. $[1+xy'(x)]e^y$ D. $xy'(x)+e^y$

答案：C

31. 设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{(2,\frac{1}{\pi})}=$________.

A. $\frac{\pi^2}{e^2}$ B. π^2 C. $e^2\pi$ D. $\frac{e^2}{\pi}$

答案：A

32. 设 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，求 $z_{xx}=$________.

A. 0　B. $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$　C. $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$　D. $\dfrac{-2y}{(1+y^2)^2}$

答案：C

33. 设函数 $z=(1+x)^{xy}$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

A. $(1+x)^{xy}y\ln(1+x)$　　B. $(1+x)^{xy}x\ln(1+x)$

C. $(1+x)^{xy}[x\ln(1+x)+\dfrac{y}{1+x}]$　　D. $(1+x)^{xy}[y\ln(1+x)+\dfrac{xy}{1+x}]$

答案：D

34. 设函数 $f(x,y,z)=z\ln(x^2+y^2)+x^3y$，则 $f''_{xy}(1,-1,0)$ =________.

A. 1　B. -2　C. 3　D. -1

答案：C

35. 设 $z=\tan\dfrac{x}{y}$,而 $x=u+v$, $y=u-v$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=$________.

A. $\dfrac{-u}{u^2+v^2}$　B. $-\dfrac{v}{u^2+v^2}$　C. $\dfrac{-2u}{u^2+v^2}$　D. $\dfrac{2v}{u^2+v^2}$

答案：B

36. 设 $z=\dfrac{u}{v}$，而 $u=e^x$，$v=\ln x$，则 $\dfrac{dz}{dx}=$________.

A. $\dfrac{e^x}{\ln^2 x}(\ln x+\dfrac{1}{x})$　B. $\dfrac{e^x}{\ln^2 x}(\ln x-\dfrac{1}{x})$　C. $\dfrac{1+\ln x}{xe^x}$　D. $\dfrac{1-\ln x}{xe^x}$

答案：B

37. 函数 $z=xf(xy^2,x-2y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

A. $2yf_1'-xf_2'$　B. $2xyf_1'-xf_2'$　C. $2xyf_1'-2f_2'$

D. $2x^2yf_1'-2xf_2'$

答案：D

38. 求函数 $z=f(xy^2,x^2y)$ 的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$__________.

A. $2yf_2'+y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+4x^2y^2f_{22}''$

B. $2yf_1'+4xyf_{11}''+y^3f_{12}''+xy^2f_{22}''$

C. $yf_2'+xf_{11}''+4x^2f_{12}''+2x^2y^2f_{22}''$

D. $f_2'+xy^2f_{11}''+y^3f_{12}''+x^3y^2f_{22}''$

答案：A

39. 设 $z=x^3f(xy,\dfrac{y}{x})$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

A. $2x^2f_1'+xyf_2'+x^3yf_{11}''+yf_{22}''$　B. $3x^2f_1'+x^2f_2'+xy^3f_{11}''+xyf_{22}''$

C. $4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$　D. $2x^2f_1'+xf_2'+y^3f_{11}''-xyf_{22}''$

答案：C

40. 设 $z=e^{-x}-f(x-2y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

A. $e^{-x+2y}+2(x-2y)$　B. $-4e^{-x}-2(x-4y)$

C. $-4e^{-x+2y}+4(x+2y)$　D. $-2e^{-x+2y}-4(x-2y)$

答案：D

41. 设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$

=________.

A. $\frac{\partial f_1'}{\partial z}+yz\frac{\partial f_2'}{\partial z}$ B. $\frac{\partial f_1'}{\partial z}+yf_2'+yz\frac{\partial f_2'}{\partial z}$ C. $\frac{\partial f_1'}{\partial z}+yf_2'$ D. $f_1'+yf_2'$

答案：B

42. 设函数 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$ 可微，则 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

A. $\frac{z}{x^2y}$ B. $\frac{x^2z}{y}$ C. $\frac{yz}{x^2}$ D. $\frac{z}{y^2}$

答案：D

43. 设 $z=f(x-y,y-x)$，且 f 为可微函数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

A. 0 B. $-2f_2'$ C. $2f_1'$ D. $2f_1'-2f_2'$

答案：A

44. 设 $F(u,v)$ 具有连续的偏导数，由方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 z 是 x,y 的隐函数，且 $aF_u+bF_v\neq 0$，求 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}$

=________.

A. 1 B. c C. $-b$ D. ab

答案：B

45、设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

A. $\frac{xy}{\sqrt{xyz}-xz}$ B. $\frac{xy+\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xz}$ C. $\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$ D. $\frac{xy-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}+xz}$

答案：C

46. 已知 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，其中 z 是 x,y 的函数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

A. $\dfrac{x+y}{yz}$ B. $\dfrac{x^2}{z(x+y)}$ C. $\dfrac{y^2}{xy+z}$ D. $\dfrac{z^2}{y(x+z)}$

答案：D

47. 设函数 $F(u,v)$ 可微，而函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$ 确定，则

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

A. $-\dfrac{F_1'+F_2'(-\dfrac{z}{x^2})}{F_1'\dfrac{1}{y}+F_2'\dfrac{1}{x}}$ B. $-\dfrac{F_1'+F_2'(-\dfrac{z}{y^2})}{F_1'\dfrac{1}{x}+F_2'\dfrac{1}{y}}$

C. $\dfrac{F_1'+F_2'(-\dfrac{z}{x^2})}{F_1'\dfrac{1}{x}+F_2'\dfrac{1}{y}}$ D. $\dfrac{F_1'+F_2'(-\dfrac{z}{y^2})}{F_1'\dfrac{1}{y}+F_2'\dfrac{1}{x}}$

答案：A

48. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-mz=\varphi(y-nz)$ 确定，其中 $\varphi(u)$ 可微，

则 $m\dfrac{\partial z}{\partial x}+n\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

A. $m+n$ B. 0 C. 1 D. 2

答案：C

49. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\dfrac{y}{x}$，其中 $F(u)$ 可导，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________.

A. $y+F(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}$ B. $y+F(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}F'(\dfrac{y}{x})$

C. $y+F(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}F_x'(\dfrac{y}{x})$ D. $y+F(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}F_y'(\dfrac{y}{x})$

答案：B

50. 设函数 $z=e^{x-2y}$，而函数 $y=y(x)$ 由方程 $x+y\ln y=2xy$ 确定，求

$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}=$______.

A. e^2　B. $-e^{-2}$　C. 1　D. $-2e^2$

答案：B

51. 已知$\frac{x}{z}=\varphi(\frac{y}{z})$，其中$\varphi$为可微函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}=$______。

A. $\frac{z^2\varphi'(\frac{y}{z})-z}{x+y}$　B. $\frac{y}{z+x\varphi'(\frac{y}{z})}$　C. $\frac{z}{x-y\varphi'(\frac{y}{z})}$　D. $\frac{z\varphi'(\frac{y}{z})}{x+y}$

答案：C

52. 已知$e^{-xy}-2z+e^z=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}=$______。

A. $\frac{ye^{-xy}}{e^z-2}$　B. $-\frac{ye^{-xy}}{e^z+2}$　C. $\frac{e^{-xy}}{2-e^z}$　D. $\frac{e^{-xy}}{e^z+2}$

答案：A

53. 设z是由$x^2+y^2-z^2-xy=0$确定x,y的函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}=$______

A. $\frac{x+2y}{z}$　B. $\frac{2x-y}{2z}$　C. $\frac{2x-y}{z}$　D. $\frac{x+2y}{2z}$

答案：B

54. 设z是方程　$x+y-z=e^z$　所确定的x,y的函数，则　$\frac{\partial z}{\partial x}=$

______。

A. $1-e^z$　B. $\frac{1}{1+e^z}$　C. $1+e^z$　D. $\frac{1}{1+e^{-z}}$

答案：B

55. 若z是　x,y的函数，并由　$x^2+y^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$确定，求$\frac{\partial z}{\partial x}$

=______。

A. $\dfrac{2x}{f'(\frac{z}{y})-2z}$ B. $\dfrac{x}{f'(\frac{z}{y})+2z}$ C. $\dfrac{f'(\frac{z}{y})-2z}{2}$ D. $\dfrac{f'(\frac{z}{y})+2z}{x}$

答案：A

56. 若 z 是 x,y 的函数，并由 $x^2+z^2=yf(\frac{z}{y})$ 确定，其中 f 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ =________.

A. $\dfrac{f(\frac{z}{y})-\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})}{yf'(\frac{z}{y})}$ B. $\dfrac{2yf(\frac{z}{y})+\frac{y}{z}f'(\frac{z}{y})}{2yzf'(\frac{z}{y})}$

C. $\dfrac{yf(\frac{z}{y})-zf'(\frac{z}{y})}{2yz-yf'(\frac{z}{y})}$ D. $\dfrac{zf(\frac{z}{y})+yf'(\frac{z}{y})}{2z-\frac{y}{z}f'(\frac{z}{y})}$

答案：C

57. 求由方程组 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+2y^2+3z^2=20, \end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\frac{dz}{dx}$ =________.

A. $\dfrac{x}{3z+1}$ B. $\dfrac{3z}{2y(3z-1)}$ C. $\dfrac{x}{2z-1}$ D. $\dfrac{2x+1}{z}$

答案：A

58. 设 $\begin{cases} x=-u^2+v+z, \\ y=u+vz, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial v}{\partial x}$=________.

A. $\dfrac{1}{1+2uz}$ B. $\dfrac{1}{1-2uz}$ C. $\dfrac{z}{1-2uz}$ D. $\dfrac{z}{1+2uz}$

答案：A

59. 函数 $u=z\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 的全微分 $du=$________.

A. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy+\ln\sqrt{x^2+y^2}dz$

B. $\frac{x}{x^2+y^2}dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy+zdz$

C. $\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}dy+zdz$

D. $\frac{xz}{x^2+y^2}dx+\frac{yz}{x^2+y^2}dy+\ln\sqrt{x^2+y^2}dz$

答案：D

60. 函数 $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的全微分________

A. $-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(xdx-ydy)$　　B. $\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy)$

C. $-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy)$　　D. $\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}(ydx-xdy)$

答案：C

61. 二元函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(1,-1)$ 处的全微分 $dz\big|_{(1,-1)}$ =________.

A. $dx-\frac{1}{2}dy$　B. $\frac{2}{3}dx+\frac{1}{3}dy$　C. $\frac{1}{3}dx+\frac{1}{3}dy$　D. $\frac{2}{3}dx-\frac{2}{3}dy$.

答案：D

62. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=\ln z$ 确定，则 $dz=$________.

A. $\frac{xz}{1+2z^2}dx+\frac{yz}{1-2z^2}dy$　　B. $\frac{x}{1-2z^2}dx+\frac{y}{1+2z^2}dy$

C. $\dfrac{yz}{1+2z^2}dx+\dfrac{xz}{1+2z^2}dy$　　D. $\dfrac{2xz}{1-2z^2}dx+\dfrac{2yz}{1-2z^2}dy$

答案：D

63. 设函数$u=(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$，求函数在点$(e,1,1)$处的全微分______.

A. $edx+dy+dz$　　B. $dx-edy-edz$

C. $dx+edy-dz$　　D. $dx+edy$

答案：B

64. 求曲线$x=t$，$y=-2t^2$，$z=t^3$在点$M(1,-2,1)$处的切线方程______.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{3}$　　B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$;

C. $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$　　D. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{2}$

答案：A

65. 曲线$x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{1+t}{t}$，$z=t^2$在对应于$t=1$的点处的切线方程______.

A. $\dfrac{x-1/2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$　　B. $\dfrac{x-1/2}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$

C. $\dfrac{x-1/2}{-1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{8}$　　D. $\dfrac{x-1/2}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{8}$

答案：D

66. 曲线$\begin{cases}x=t\\y=-2t^2\\z=t^3\end{cases}$在$t=1$的切线方程是______.

A. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{4}$　　B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{3}$

C. $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$　　D. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{1}$

答案：B

67. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面方程________.

A. $4x+2y-z-6=0$　　B. $x-2y+z-2=0$

C. $4x-2y+z-3=0$　　D. $x+2y-z-3=0$

答案：A

68. 求椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,-1,1)$ 处的切平面方程________，

法线方程________.

A. $3x+2y+z-6=0$　　B. $2x-3y+z-6=0$

C. $2x+3y+z-2=0$　　D. $2x-y-z-3=0$

答案：B

69. 曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线有________条.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案：B

70. 求曲线 $\Gamma: x=\int_0^t e^u\cos u\,du$，$y=2\sin t+\cos t$，$z=1+e^{3t}$ 在 $t=0$ 处的法平面方程________.

A. $x-2y+z-5=0$　　B. $x-2y+3z-1=0$

C. $x+2y+3z-8=0$　　D. $2x-y-3z-4=0$

答案：C

71. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3$，

$f_y(0,0)=-1$，

则有________.

A. $dz\big|_{(0,0)}=3dx-dy$

B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$

C. 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$

D. 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$

答案：C

72. 梯度与方向导数的关系为：梯度的方向是方向导数取得 ______ 的方向，梯度的模是方向导数的最大值

A. 极大值　　B. 最小值　　C. 最大值　　D. 极小值

答案：C

73. 函数 $z=\ln(e^x+e^y)$ 在原点O处沿 $\vec{l}=\overrightarrow{OP}$（其中 P 点的坐标是 $(3,-4)$）方向上的方向导数 $\dfrac{\partial z}{\partial l}=$ ________.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. -2　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $-\dfrac{1}{10}$

答案：D

74. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数________.

A. 1　B. 3　C. 2　D. 5

答案：D

75. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处，沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数______.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　D. $\sqrt{3}$

答案：B

76. 设函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $gradf(4,3)=$________.

A. $\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$ B. $\frac{1}{5}\vec{i}+\vec{j}$ C. $\vec{i}+\frac{2}{5}\vec{j}$ D. $\vec{i}+2\vec{j}$

答案：A

77. 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y$ 在点 $(1,1,2)$ 处的梯度

__________.

A. $\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ B. $5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ C. $\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ D. $5\vec{i}+2\vec{j}+12\vec{k}$

答案：D

78. 若 $f(x,y)=2x^2+xy^2+ax+2y$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，则 $a=$

__________.

A. 1 B. -3 C. -5 D. 2

答案：C

79. 函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极大值__________.

A. 4 B. 8 C. 5 D. 3

答案：B

80. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1,$$

则下列四个选择中正确的是__________.

A. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

B. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

D. 根据所给条件无法判定点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

答案：B

81. 点$(0,0)$是函数$z=xy$的______.

A. 驻点　B. 极小值点　C. 极大值点　D. 不可微点

答案：A

82. 函数$z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$在点$P(1,1)$处______.

A. 有偏导数且取极小值　B. 有偏导数但不取极值

C. 无偏导数且取极小值　D. 无偏导数也不取极值

答案：C

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{2}$　C. 1　D. $\frac{1}{3}$

答案：A

83. 在斜边长为l的直角三角形中，求面积最大的三角形的面积________.

A. $\frac{l^2}{2}$　B. $\frac{l^2}{4}$　C. $\frac{l^2}{3}$　D. $\frac{l^2}{6}$

答案：B

黎曼积分：性质

2. 度量性　$\int_{\Omega} 1 \mathrm{d}\Omega = \Omega$（度量）.

3. 线性性　$\int_{\Omega} [af(p) + bg(p)] \mathrm{d}\Omega = a\int_{\Omega} f(p)\mathrm{d}\Omega + b\int_{\Omega} g(p)\mathrm{d}\Omega$.

4. 积分域可加性

$$\int_{\Omega} f(p)\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_1} f(p)\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_2} f(p)\mathrm{d}\Omega \quad (\Omega = \Omega_1 + \Omega_2).$$

5. 比较性

（1）当 $f(p) \le g(p)$ 时，$\int_{\Omega} f(p)\mathrm{d}\Omega \le \int_{\Omega} g(p)\mathrm{d}\Omega$.

（2）$\left|\int_{\Omega} f(p)\mathrm{d}\Omega\right| \le \int_{\Omega} |f(p)|\mathrm{d}\Omega$.

6. 估值性　当 $m \le f(p) \le M$ 时，$m\Omega \le \int_{\Omega} f(p)\mathrm{d}\Omega \le M\Omega$.

7. 积分中值定理　若 $f(p) \in C(\Omega)$，则 $\exists p^* \in \Omega$，使

$$\int_{\Omega} f(p)\mathrm{d}\Omega = f(p^*)\Omega.$$

8. 对称性　当 Ω 关于 $x=0$ 对称时，

（1）$f(-x,y,z) = f(x,y,z)$，则 $\int_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}\Omega = 2\int_{\Omega^+} f(x,y,z)\mathrm{d}\Omega$. 其中 Ω^+ 是 Ω 内 $x \ge 0$ 的部分.

（2）$f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$，则 $\int_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}\Omega = 0$.

黎曼积分：二重积分计算

（1）在直角坐标系下. 用平行于坐标轴的直线网分割 σ，面积微元 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

对 $x-$ 型积分域 $\sigma: a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)$，见图 10.1，有二重积分计算公式

$$\iint_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

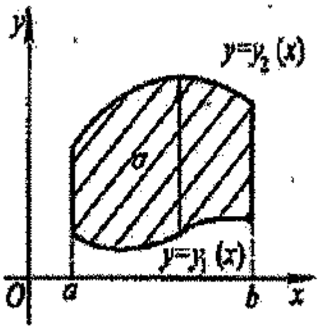
对 $y-$ 型积分域 $\sigma: c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)$，见图 10.2，有二重积分计算公式

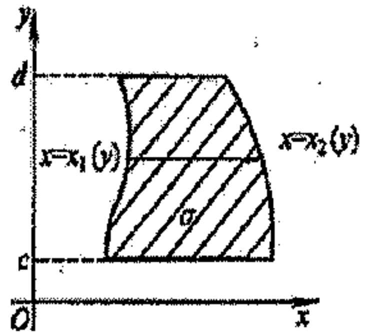
$$\iint_{\sigma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

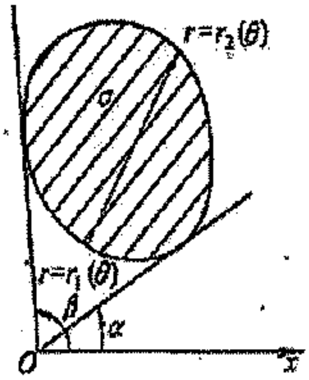
（2）在极坐标系下. 用 $r=$ 常数，$\theta=$ 常数网分割 σ，面积微元 $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

当积分域 $\sigma: \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$，见图 10.3，则有二重积分计算公式

$$\iint_{\sigma} f(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta) r\mathrm{d}r.$$







（3）累次积分换序问题. 直角坐标系下累次积分与极坐标系下累次积分转换问题，关键是借助重积分转换.

黎曼积分：三重积分计算

（1）在直角坐标系下. 用平行坐标面的三组平面分割V，体积微元$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

投影法. 当积分域$V:(x,y)\in\sigma_{xy},z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$，见图 10.4，则有三重积分计算公式

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\sigma_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

截面法. 当积分域$V:a\le x\le b,(y,z)\in\sigma_x$（截面），见图 10.5，则有三重积分计算公式

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}x\iint_{\sigma_x}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

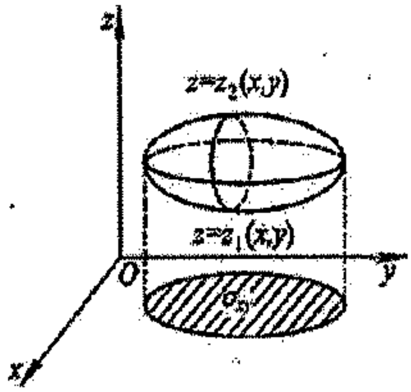


图 10.4

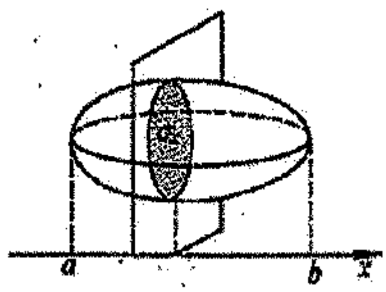


图 10.5

（2）在柱（面）坐标系下. 用三组坐标面分割V，体积微元$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

当积分域$V:\alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta)$，见图 10.6，则有三重积分计算公式

$$\iiint_V f(r,\theta,z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\mathrm{d}z.$$

【注】 柱坐标相当于在一个直角坐标面上取极坐标，再加另一个直角坐标. 柱坐标系下的三重积分也可化为其它次序的累次积分.

（3）在球（面）坐标系下. 用三组坐标面分割V，体积微元$\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

当积分域$V:\alpha \le \theta \le \beta, \varphi_1(\theta) \le \varphi \le \varphi_2(\theta), \rho_1(\theta,\varphi) \le \rho \le \rho_2(\theta,\varphi)$，见图 10.7，则有三重积分公式

$$\iiint_V f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 \mathrm{d}\rho.$$

【注】 柱坐标相当于在直角坐标面上取个极角θ，加上θ半平面上的极坐标(ρ,φ)，所以球坐标相当于两个极坐标.

黎曼积分：曲线、曲面积计算

3. 对弧长的曲线积分（第一型曲线积分）的计算

设曲线l的方程：$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta$．则弧长微元$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$，并有第一型曲线积分计算公式

$$\int_l f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

4. 对面积的曲面积分（第一型曲面积分）的计算

设曲面S的方程：$z = z(x,y), (x,y) \in \sigma_{xy}$. 则曲面面积微元$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma$，

并有第一型曲面积分计算公式

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\sigma_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma.$$

黎曼积分：应用

1. 曲面$S: z = z(x,y), (x,y) \in \sigma_{xy}$的面积

$$S = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

2. 曲顶为$z = z(x,y), (x,y) \in \sigma_{xy}$的柱体体积

$$V = \iiint_V \mathrm{d}V = \iint_{\sigma_{xy}} z(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

3. 质量密度为$\mu(p)$的几何形体Ω的总质量

$$m = \int_\Omega \mu(p)\mathrm{d}\Omega.$$

4. 质量密度为$\mu(p)$的几何形体Ω的质心的横坐标

$$\bar{x} = \frac{\int_\Omega \mu(p)x\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mu(p)\mathrm{d}\Omega}.$$

5. 质量密度为$\mu(p)$的几何形体Ω对x轴的转动惯量

$$I_x = \int_\Omega \mu(p)(y^2+z^2)\mathrm{d}\Omega.$$

重积分

1. $\iint\limits_S f(x^2+y^2+z^2)dS$，曲面$S$是球面$x^2+y^2+z^2=4$，$f(4)=3$，则

$\iint\limits_S f(x^2+y^2+z^2)dS =$__________.

（A）6π （B）12π （C）24π （D）48π

答案：D

解

$$\iint\limits_S f(x^2+y^2+z^2)dS = \iint\limits_S f(R^2)dS = f(R^2)\iint\limits_S dS = 4\pi R^2 f(R^2) = 48\pi.$$

2. 设函数$f(x,y,z)$连续，$f(0,0,0)\neq 0$，v_t是以原点为球心，t为半径

的球形域，求 $t \to 0$ 时，第一型曲面积分 $\iint_{s_t} f(x,y,z)dS$，s_t 是 v_t 的表面，是 t 的________阶无穷小.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

答案：B

解：$$\lim_{t\to0}\frac{\iint_{s_t} f(x,y,z)dS}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{f(\xi_t,\eta_t,\varphi_t)4\pi t^2}{t^2}=f(0,0,0)4\pi\neq0$$

3．设函数 $f(x,y,z)$ 连续，$f(0,0,0)\neq0$，v_t 是以原点为球心，t 为半径的球形域求 $t \to 0$ 时，第一型曲线积分 $\int_{c_t} f(x,y,z)dS$，c_t 是曲面 s_t 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，是 t 的________阶无穷小.

（A）1　（B）2　（C）3　（C）4

答案：B

解：$$\lim_{t\to0}\frac{\int_{c_t} f(x,y,z)ds}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(\xi_t,\eta_t,\varphi_t)2\pi t}{t}=f(0,0,0)2\pi\neq0$$

4．设函数 $f(x,y,z)$ 连续，$f(0,0,0)\neq0$，v_t 是以原点为球心，t 为半径的球形区域，则当 $t\to0$ 时，三重积分 $\iiint\limits_{v_t} f(x,y,z)dv$ 是关于 t 的________阶无穷小.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

答案：C

解：$\iiint\limits_{v_t} f(x,y,z)dv=f(\xi_t,\eta_t,\varphi_t)v_t=f(\xi_t,\eta_t,\varphi_t)\dfrac{4}{3}\pi t^3$，$(\xi_t,\eta_t,\varphi_t)\in v_t$

$$\lim_{t\to0}\frac{\iiint\limits_{v_t} f(x,y,z)dx}{t^3}=\lim_{t\to0}f(\xi_t,\eta_t,\varphi_t)\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi f(0,0,0)\neq0.$$

故此积分是 t 的三阶无穷小.

5．设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 xoy 面的有界闭域 D 上非负、连续，则黎曼积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，D 为底，D 的边界线为准线，母线平行于 z 轴的柱面为侧面的曲顶柱体的________.

（A）侧面积　（B）体积　（C）表面积　（D）质量

答案：B

6. 已知平板 D 的质量密度 $\rho=\rho(p)$，则黎曼积分 $\iint\limits_D \rho(p)d\alpha$ 表示平板 D 的________.

（A）面积　（B）体积　（C）质量　（D）厚度

答案：质量

7. $\int_l (x^2+y^2)ds=$________，曲线 l 是下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

（A）π^2　（B）π　（C）2π　（D）3π

答案：B

解：$x^2+y^2=1$，$\int_l (x^2+y^2)ds=\int_l ds=\pi$

8. 由二重积分的几何意义 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(\sqrt{1-x^2-y^2}+1)dxdy=$________.

（A）$\frac{\pi}{3}+\pi$　（B）$\frac{2}{3}\pi+\pi$　（C）$\frac{2}{3}\pi+\pi^2$　（D）$\frac{\pi}{3}+\pi^2$

答案：B

9. 设 $D:x^2+y^2\le a^2(a>0)$，当 $a=$________时，$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\pi$.

（A）1　（B）$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$　（C）$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$　（D）$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

答案：B

10. 设有界闭域 D_1 与 D_2 关于 oy 轴对称且 $D_1\cap D_2=\phi$，$f(x,y)$ 是定义在 $D_1\cup D_2$ 上的连续函数，则二重积分 $\iint\limits_D f(x^2,y)dxdy=$________.

（A）$2\iint\limits_{D_1} f(x^2,y)dxdy$　（B）$4\iint\limits_{D_2} f(x^2,y)dxdy$

（C）$4\iint\limits_{D_1} f(x^2,y)dxdy$　（D）$\frac{1}{2}\iint\limits_{D_2} f(x^2,y)dxdy$

答案：A

11．若区域 D 为 $|x|\le 1,\ |y|\le 1$，则 $\iint\limits_D xe^{\cos(xy)}\sin(xy)dxdy=$

____

（A）e　　（B）e^{-1}　　（C）0　　（D）π

答案：C

12．设 D 是 xoy 平面上以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)d\sigma=$ ____________

$x\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y d\sigma$.

答案：2

解：$A(-1,1)$，$B(-1,-1,)$，$O(0,0)$，$C(1,1)$，$\Delta ABO+\Delta ACO=D$，

$$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)d\sigma=\iint\limits_{\Delta ABO}(xy+\cos x\sin y)d\sigma+\iint\limits_{\Delta ACO}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$$

$$=O+\iint\limits_{\Delta ACO}xyd\sigma+\iint\limits_{\Delta ACO}\cos x\sin yd\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin yd\sigma$$

13．$\iint\limits_S (xe^2+x^2\sin y)ds=$ ____________，曲面 $S:x^2+y^2+z^2=1,z\ge 0$；

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

答案：A

14．计算 $I=\iint\limits_D\left[x^2y+\sin(xy^2)+\frac{1}{\pi}\sqrt{x^2+y^2}\right]d\sigma=$ ________，其中 $D:x^2+y^2\le 1$.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

答案：A

15．$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(3y-2x)d\sigma=$ ____________.

（A）0　（B）1　（C）3　（D）4

答案：A

16．设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D: y^2 \le -x,\ y \ge x^2$ 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 可化累次积分为（　　）

（A）$\int_{-1}^{0}dx\int_{\sqrt{-x}}^{x^2}f(x,y)dy$　　（B）$\int_{-1}^{0}dx\int_{-\sqrt{x}}^{x^2}f(x,y)dy$

（C）$\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{-y^2}f(x,y)dx$　　（D）$\int_{0}^{1}dy\int_{\sqrt{y}}^{y^2}f(x,y)dx$

17. 将 $I=\iint\limits_D xd\sigma$ 化成累次积分________，D 由 $xy=1$ 及直线 $x+y=\dfrac{5}{2}$ 围成.

（A）$\int_{\frac{1}{2}}^{2}dy\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}xdx$　　（B）$\int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}xdy$

（C）$\int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{\frac{5}{2}-x}^{\frac{1}{x}}xdy$　　（D）$\int_{\frac{1}{2}}^{2}dy\int_{\frac{5}{2}-x}^{\frac{1}{x}}xdx$

答案：B

18．设 D 是由直线 $y=2,\ y=x,\ y=2x$ 所围成的闭区域，同二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化为二次积分，正确的是________.

（A）$\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2x}f(x,y)dy$　　（B）$\int_{1}^{2}dx\int_{x}^{2x}f(x,y)dy$

（C）$\int_{0}^{2}dy\int_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)dx$　　（D）$\int_{0}^{2}dy\int_{2x}^{x}f(x,y)dx$

答案：C

19．将二重积分 $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$ 化成极坐标系下的累次积分为________，其中 $D: a^2 \le x^2+y^2 \le 1,\ x\ge 0, y\ge 0,\ a>0$.

（A）$\int_{0}^{\pi}\theta d\theta\int_{a}^{1}rdr$　（B）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\theta d\theta\int_{a}^{1}rdr$　（C）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\theta d\theta\int_{a}^{1}dr$　（D）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a}^{1}rdr$

答案：B

20、若区域 D 为 $(x-1)^2+y^2\le 1$，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 化成累次积分为（　　）

（A）$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$　　（B）$\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$

（D）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$　　（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$

答案：（C）

21．若区域 D 为 $x^2+y^2\le 2x$，则二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ 化成累次积分为（　）

（A）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(\cos\theta-\sin\theta)\sqrt{2r\cos\theta}\,rdr$　　（B）$\int_0^{\pi}(\cos\theta+\sin)d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3dr$

（C）$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3dr$　　（D）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin)d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3dr$

答案：D

22．将 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ 化成累次积分（极坐标系下）的形式为________，其中 D：$0\le x\le a$，$0\le y\le a$.

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}r^2dr$　　（B）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{a}{\cos\theta}}^{0}r^2dr$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}rdr$　　（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}r^2dr$

答案：D

23．将二重积分 $\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}dxdy$ 化为极坐标系下的累次积分（　　），其中 D：$1\le x^2+y^2\le 4$，$y\ge 0,y\le x$.

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta d\theta\int_1^2 rdr$　（B）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 dr$　（C）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2 rdr$　（D）

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 rdr$

答案：D

24．设 $f(x,y)$ 为连续函数，交换二次积分 $\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x,y)$ 的积分顺序

（A） $\int_0^1 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy$ （B） $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$

（C） $\int_0^1 dx\int_{2x}^{x} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_2^x f(x,y)dy$ （D） $\int_0^1 dx\int_{2x}^{x} f(x,y)dy$

答案：（A）

25．设 $f(x,y)$ 为连续函数，交换二次积分 $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$ 的积分次序

（　　）

（A） $\int_0^4 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x,y)dx$ （B） $\int_0^2 dy\int_y^{\frac{1}{2}y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x,y)dx$

（C） $\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x,y)dx$ （D） $\int_2^4 dy\int_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x,y)dx$

答案：（C）

26．改变积分次序 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=$____________.

（A） $\int_0^{\sqrt{y}} \frac{y}{\sqrt{1+y^3}}dy\int_0^1 xdx$ （B） $\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}}dy\int_0^{\sqrt{y}} xdx$

（C） $\int_0^2 xdy\int_0^{\sqrt{y}} \frac{y}{\sqrt{1+y^3}}dx$ （D） $\int_{\sqrt{y}}^0 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}}dy\int_0^1 xdx$

答案：B

27．将 $\int_0^a dx\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy$ 化为化为极坐标形式的二次积分为________________.

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2dr$ （B）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sec\theta}rdr$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sec\theta}r^2dr$ （D）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2dr$

答案：C

28．估计积分值 $\iiint\limits_v (x^2+y^2+z^2)dv$，$v$ 为球域 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，

__________ $\le\iiint\limits_v (x^2+y^2+z^2)dv\le$ __________.

（A）1，$\frac{4}{3}\pi R^5$ （B）0，$\frac{4}{3}\pi R^3$ （C）0，$\frac{4}{3}\pi R^5$ （D）0，$\frac{2}{3}\pi R^5$

答案：C

解：$0\le\iiint\limits_v (x^2+y^2+z^2)dv\le R^2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^5$

29．比较下列积分值的大小：

$$I_1=\iint\limits_D \ln^3(x+y)dxdy,\quad I_2=\iint\limits_D (x+y)^3dxdy,\quad I_3=\iint\limits_D [\sin(x+y)]^3dxdy$$

其中 D 由 $x=0,y=0,x+y=\frac{1}{2}$，$x+y=1$ 围成，则（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$ （B）$I_3<I_2<I_1$ （C）$I_1<I_3<I_2$ （D）$I_3<I_1<I_2$

答案：C

30．比较下列积分值的大小

$J_i=\iint\limits_{D_i} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，$i=1,2,3$，其中 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$，

$D_2=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2R^2\}$，$D_3=\{(x,y)||x|\le R,\ |y|\le R\}$，则（　　）

（A）$J_1<J_2<J_3$ （B）$J_2<J_3<J_1$ （C）$J_1<J_3<J_2$ （D）

$J_3 < J_2 < J_1$

答案：C

31．计算$\iint_D x dx dy =$ ________，其中$D: x^2+(y-1)^2 \geq 1,\ x^2+(y-2)^2 \leq 4,\ y \leq 2,\ x \geq 0$.

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

答案：B

32：计算$I=\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\, d\sigma =$ ________，$D: x^2+y^2 \leq a^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$.

（A）$\frac{1}{3}a^3$ （B）$\frac{2}{3}a^3$ （C）a^3 （D）$\frac{4}{3}a^3$

答案：B

33．$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma =$ ________，其中D为圆$x^2+y^2=4$所围成的平面区域.

（A）π （B）2π （C）3π （D）4π

答案：B

34. $I=\frac{1}{\pi}\iint_D (x^2+y^2)\, d\sigma =$ ________，其中D是$x^2+y^2=1$围成的区域.

（A）1 （B）$\frac{2}{3}$ （C）$\frac{1}{3}$ （D）0

答案：B

35. 计算$I=\iint_D (x^2+y^2)\, d\sigma =$ ________，其中D是$(x+1)^2+y^2=1$围成的平面区域.

（A）$-\frac{32}{9}$ （B）$\frac{32}{9}$ （C）$\frac{32}{3}$ （D）$-\frac{32}{3}$

答案：B

36　.　$I=\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy=$ ________

$D:1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

（A）$\frac{1}{16}\pi^2$　（B）$\frac{3}{16}\pi^2$　（C）$\frac{5}{16}\pi^2$　（D）$\frac{7}{16}\pi^2$

答案：B

16. $I=\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=$ ________，$D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

（A）$-\pi^2$　（B）$-2\pi^2$　（C）$-3\pi^2$　（D）$-6\pi^2$

答案：D

37.计算二重积分$\iint\limits_D r^2drd\theta=$ ________，其中

$D:a\cos\theta\le r\le a,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ (a>0)$.

（A）$\frac{2}{9}a^3-\frac{1}{6}\pi a^3$　（B）$\frac{1}{6}\pi a^3-\frac{2}{9}a$　（C）$\frac{1}{6}\pi a^3-\frac{2}{9}a^3$

（D）$\frac{2}{9}a-\frac{1}{6}\pi a$.

答案：C

38. 利用极坐标计算二次积分$\int_{-2}^{2}dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy=$ ________.

（A）$\frac{4}{3}\pi$　（B）$\frac{8}{3}\pi$　（C）$\frac{2}{3}\pi$　（D）$\frac{1}{3}\pi$

答案：B

39.　利用极坐标计算二重积分$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy=$ ________，其中

$D:1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0, y\le x$.

（A）$\frac{3}{32}\pi^2$　（B）$\frac{3}{64}\pi^2$　（C）$\frac{3}{16}\pi^2$　（D）$\frac{3}{8}\pi^2$

答案：B

40．计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=$ ________，其中 D 是由直线 $y=x$, $y=x+a$, $y=a$ 及 $y=3a\,(a>0)$ 所围成的区域.

（A）$14a^4$　（B）$12a^4$　（C）$4a^4$　（D）$7a^4$

答案：A

41．计算二次积分 $\int_0^3 dx\int_0^{3-x}(2x+y)dy=$ ____________.

（A）27　（B）$\frac{27}{2}$　（C）$\frac{27}{4}$　（D）54

答案：B

42．计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy=$ ____________，其中 D 是由 $y=x, xy=1, x=3$ 所围成的区域.

（A）$20-\frac{1}{2}\ln 3$　（B）$10-\ln 3$　（C）$10-\frac{1}{2}\ln 3$　（D）$10-2\ln 3$

答案：C

43．计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)dxdy=$ ____________，其中 D 是由 $y=2, y=x, y=2x$ 所围成的区域.

（A）$\frac{13}{3}$　（B）$\frac{13}{2}$　（C）$\frac{13}{4}$　（D）$\frac{13}{6}$

答案：D

44．计算二重积分 $\iint\limits_D (x-1)dxdy=$ ____________，其中 D 是由曲线 $x=1+\sqrt{y}$，$y=1-x$ 及 $y=1$ 所围成的区域.

（A）$\frac{1}{12}$　（B）$\frac{1}{6}$　（C）$\frac{1}{48}$　（D）$\frac{1}{24}$

答案：D

45．计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{1+x^4}dxdy=$ ____________，其中 D 是由 $y=x, y=0$ 及 $x=1$ 所围成的区域.

（A）$\frac{\pi}{8}$　（B）$\frac{\pi}{4}$　（C）$\frac{\pi}{6}$　（D）$\frac{\pi}{2}$

答案：A.

46、计算二重积分 $\iint\limits_{D} x dxdy=$ ____________，其中 $D: x^2+y^2\le 2$ 及 $x\ge y^2$.

（A）$\dfrac{11}{15}$ （B）$\dfrac{44}{15}$ （C）$\dfrac{22}{15}$ （D）$\dfrac{33}{15}$

答案：C

47．计算 $\iint\limits_{D} e^{x^2}dxdy=$ __________，其中 D 是第一象限中由 $y=x$ 和 $y=x^3$ 所围成的区域。

（A）$\dfrac{1}{2}e-1$ （B）$e-1$ （C）$1-e$ （D）$1-\dfrac{1}{2}e$

答案：A

48．计算二重积分 $I=\iint\limits_{D} x dxdy=$ ____________，其中 D 是第一象限中由 $y=x$ 和 $y=x^3$ 围成.

（A）$\dfrac{1}{15}$ （B）$\dfrac{2}{15}$ （C）$\dfrac{4}{15}$ （D）$\dfrac{6}{15}$

答案：B

49．计算二重积分 $\iint\limits_{D} xy dxdy=$ ____________，其中 D 是由曲线 $y=x^2$，直线 $y=0$，$x=2$ 所围成的区域.

（A）$\dfrac{16}{3}$ （B）$\dfrac{8}{3}$ （C）$\dfrac{32}{3}$ （D）$\dfrac{4}{3}$

答案：A

50．二重积分 $\iint\limits_{D} xy dxdy$，其中 $D: 0\le y\le x^2, 0\le x\le 1$ 的值为（ ）

（A）$\dfrac{1}{6}$ （B）$\dfrac{1}{12}$ （C）$\dfrac{1}{2}$ （D）$\dfrac{1}{4}$

答案：B

51．$I\doteq\iint\limits_{D}\ln(1+xh2+y^2)dv=$ ____________，其中 $D: x^2+y^2\le 1$

（A）$\pi(\ln 2-1)$ （B）$\pi(2\ln 2-2)$ （C）$\pi(2\ln 2-1)$（D）$2\pi(2\ln 2-1)$

答案：C

23．$I=\iint\limits_{D} dxdy=$____________ $D:0\le x\le a,\ \ 0\le y\le a$．

（A）a^2 （B）$2a^2$ （C）$3a^2$ （D）$4a^2$

答案：A

52．$I=\iint\limits_{D}\frac{1}{x}d\sigma=$____________，$D$ 由 $xy=1$ 及直线 $x+y=\frac{5}{2}$ 围成.

（A）$5\ln2-2$ （B）$5\ln2-3$ （C）$4\ln2-3$ （D）$5\ln2-1$

答案：B

28．计算 $I=\iint\limits_{D} x|y|dxdy=$____________，$D$ 由 $y=x$，$y=-x$ 及 $x=1$ 围成.

（A）$\frac{1}{4}$ （B）$\frac{1}{3}$ （C）$\frac{1}{2}$ （D）1

答案：A

53．$I=\iint\limits_{D} x|y|dxdy=$____________，$D$ 由 $y=x, y=-x$ 及 $x=2$ 围成.

答案：4

54．$I=\iint\limits_{D} x|y|dxdy=$____________，$D:y\le x,\ x\le2,\ y\ge-\sqrt{8-x^2}$

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

答案：D

55．$I=\iint\limits_{D} xydxdy=$____________，$D$ 由 $y=x$，$y=-x$ 及 $x=4$ 围成.

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

答案：A

56．$I=\iint\limits_{D}(|x|+|y|)dxdy=$____________，$D:x^2+y^2\le1$．

（A）$\frac{1}{3}$ （B）$\frac{2}{3}$ （C）$\frac{4}{3}$ （D）$\frac{8}{3}$

答案：D

57．$\iint\limits_{D}(x^3+3x^2y+y^3)d\sigma=$____________，其中 $D:0\le x\le1,\ 0\le y\le1$．

（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

答案：A

58. $I=\int_0^1 dy\int_y^1 e^{\frac{y}{x}}dx=$ ______

（A）$\frac{e-1}{2}$ （B）$\frac{e-1}{4}$ （C）$\frac{e-1}{8}$ （D）$\frac{e-1}{16}$

答案：A

59. 计算积分 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy=$ ______.

（A）$\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ （B）$\sqrt{2}-1$ （C）$\frac{1}{3}(1-\sqrt{2})$ （D）$\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$

答案：（A）

60. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^2 d\sigma=$ ______.

（A）$\frac{\pi a^4}{4}$ （B）$\frac{\pi a^4}{3}$ （C）$\frac{\pi a^4}{2}$ （D）πa^4

答案：A

机考模拟100练

(1) 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续是函数 $z=f(x,y)$ 在该点处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 都存在的

(A) 必要但非充分条件. (B) 充分但非必要条件.

(C) 充要条件. (D) 既非充分条件也非必要条件.

【分析】 由多元函数的连续、偏导数存在和可微之间的关系知，多元函数的连续既非两个偏导数存在的必要条件，也非充分条件.

例如 $f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 点连续，但 $(0,0)$ 点两个偏导数 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 都不存在. 而

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点的两个偏导数 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 都存在(可用定义验证)，但在 $(0,0)$ 点不连续，事实上极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\text{ 不存在.}$$

故应选(D).

(2) 设 $f'_x(x_0,y_0)=a$, $f'_y(x_0,y_0)=b$, 则下列结论正确的是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 存在，但 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不连续.

(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

(C) $dz\Big|_{(x_0,y_0)}=adx+bdy$.

(D) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 都存在且相等.

【分析】 由于 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，则 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续，从而有

$$\lim_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$$

同理由 $f'_y(x_0,y_0)=b$ 可知

$$\lim_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 存在且相等，故应选(D).

【评注】 由 $f'_x(x_0,y_0)=a$, $f'_y(x_0,y_0)=b$ 可知 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可导，但由此不能推得 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 存在，也不能推得 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，也不能推得 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微. 故(A)、(B)、(C) 都不正确.

(3) 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 都存在，则

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在。

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0)$.

(D) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微。

【分析】 由于偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，则由 $f_x(x_0,y_0)$ 存在可知，一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续，从而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0) = f(x_0,y_0)$，同理 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0)$. 故应选(C).

(4) 二元函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

(A) 连续、偏导数存在.　　(B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在.　　(D) 不连续、偏导数不存在.

【分析】 由于 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$

与 k 取值有关，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续，而

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

同理 $f_y(0,0)=0$

故应选(C).

(5) 设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

(A) 两个偏导数都不存在.　　(B) 两个偏导数都存在但不可微.

(C) 偏导数连续.　　(D) 可微但偏导数不连续.

【分析】 $f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{0-0}{\Delta x} = 0$

由对称性知， $f'_y(0,0)=0$

而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$= \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在

事实上 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}} \dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微. 应选(B).

【评注】 本题中的函数给出了一个偏导数存在但不可微的例子.

(6) 已知 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^4}$,则

(A) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 都存在. (B) $f_x(0,0)$ 存在但 $f_y(0,0)$ 不存在.

(C) $f_x(0,0)$ 不存在但 $f_y(0,0)$ 存在. (D) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 都不存在.

【分析】 由于 $f(x,0)=\sin\sqrt{x^2}=\sin|x|$ 在 $x=0$ 处不可导,则 $f_x(0,0)$ 不存在.事实上

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin|x|-0}{x}=\begin{cases}1, & x\to 0^+\\ -1, & x\to 0^-\end{cases}$$

而 $f(0,y)=\sin\sqrt{y^4}=\sin y^2$ 在 $y=0$ 处可导,则 $f_y(0,0)$ 存在,故应选(C).

(7) 函数 $f(x,y)$ 在(0,0)点可微的充分条件是

(A) $\lim\limits_{x\to 0}f_x(x,0)=f_x(0,0)$ 且 $\lim\limits_{y\to 0}f_y(0,y)=f_y(0,0)$.

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ 都存在.

(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=f_x(0,0)$ 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=f_y(0,0)$.

【分析】 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=f_x(0,0)$ 和 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=f_y(0,0)$ 可知 $f(x,y)$ 的两个一阶偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在(0,0)点连续,则 $f(x,y)$ 在(0,0)点可微,故应选(D).

(8) 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$,则 $f(x,y)$ 在点(0,0)处

(A) 不连续. (B) 连续但两个偏导数不存在.

(C) 两个偏导数存在但不可微. (D) 可微.

【分析】 由

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

知

$$f(x,y)-f(0,0)+2x-y=o(\rho)\quad(\text{当}(x,y)\to(0,0)\text{时})$$

即

$$f(x,y)-f(0,0)=-2x+y+o(\rho)$$

由微分的定义可知 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微,故应选(D).

(9) 设 $z=f(x,y)$ 在点(0,0)处连续,且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=-1$,则下列结论不正确的是

(A) $f'_x(0,0)$ 不存在. (B) $f'_y(0,0)$ 不存在.

(C) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取极小值.　　　　(D) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处不可微.

【分析】 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=-1$,及 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x|+|y|=0$

知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$,又 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,则 $f(0,0)=0$.

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=-1$ 及极限的保号性知,在 $(0,0)$ 点的某去心邻域内

$$\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}<0,$$

从而有 $f(x,y)<0$,又 $f(0,0)=0$,由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取极大值. 故(C)是不正确的,应选(C).

事实上,由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=-1$ 知,

$$f(0,0)=0,\text{且}\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{|x|}=-1,$$

$$\text{而}\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}$$
$$=\begin{cases}-1, & (x\to0^+)\\ 1, & (x\to0^-)\end{cases}$$

则 $f'_x(0,0)$ 不存在,同理 $f'_y(0,0)$ 不存在,因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微,故(A)、(B)、(D)是正确的.

(10) 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$,则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

(A) 不连续.　　　　(B) 连续但两个偏导数不存在.

(C) 两个偏导数存在但不可微.　　　　(D) 可微.

【分析 1】 直接法.

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$,且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}=0$ 知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)+2x-y]=0$$

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$,$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续,又

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)+2x}{\sqrt{x^2}}=1$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)+2x}{|x|}=1$

从而有 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}+2=1$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{-x}-2=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=-3$$

则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$不存在，即$f_x(0,0)$不存在，同理可得$f_y(0,0)$不存在，故应选(B)。

【分析2】 排除法.

令$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-2x+y$

显然$f(x,y)$满足原题设的条件，且$f(x,y)$在$(0,0)$点连续，而

$$f(x,0)=\sqrt{x^2}-2x=|x|-2x$$

在$x=0$处不可导($|x|$在$x=0$处不可导，$2x$在$x=0$处可导)

则$f_x(0,0)$不存在，同理$f_y(0,0)$不存在，从而(A)、(C)、(D)均不正确，故应选(B)。

(11) 设$z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则该函数在$(0,0)$点

(A) 不连续. (B) 连续但偏导数不存在.

(C) 连续且偏导数存在但不可微. (D) 可微.

【分析】 由于$0\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|\to0$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

则$z(x,y)$在点$(0,0)$处连续，(A)不正确.

$$z_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{z(\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$z_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{z(0,\Delta y)-z(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

所以，$z(x,y)$在点$(0,0)$处偏导数存在，(B)不正确.

又$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-z_x(0,0)\Delta x-z_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$$

由于$\lim\limits_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ \Delta y=\Delta x}}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{(\Delta x)^3}{2\sqrt{2}\,|\Delta x|^3}$不存在，则

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$不存在，

则$z(x,y)$在$(0,0)$点不可微，故应选(C).

【评注】 用定义判定$z(x,y)$在点(x_0,y_0)是否可微分以下两步进行：

(1) 用定义判断$z_x(x_0,y_0)$，$z_y(x_0,y_0)$是否都存在，如果都存在则进行下一步，否则，$z(x,y)$在(x_0,y_0)处不可微.

(2) 考查极限$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-[z_x(x_0,y_0)\Delta x+z_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}$是否为零. 如果此极限为零，则函数$z(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微，否则不可微.

(12) 如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

【分析 1】 由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续可知，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则必有 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\infty$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，或 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，即

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\rho)$$

由微分的定义知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

【分析 2】 排除法：取 $f(x,y)=|x|+|y|$，显然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，但 $f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 处不可微. 这是由于 $f(x,0)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，则 $f'_x(0,0)$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微，排除(A).

取 $f(x,y)\equiv 1$，显然 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\infty$ 不存在，则排除(C)和(D)，故应选(B).

(13) 设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$.　　(B) $x_1>x_2,y_1>y_2$.

(C) $x_1<x_2,y_1<y_2$.　　(D) $x_1<x_2,y_1>y_2$.

【分析】 由于偏导数本质上就是一元函数的导数，则由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 可知，$f(x,y)$ 关于变量 x 是单调增加的，而关于变量 y 是单调减的. 因此，当 $x_1<x_2,y_1>y_2$ 时

$$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1),f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$$

从而有

$$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$$

故应选(D).

(14) 已知 $f_x(x_0,y_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0-h,y_0)}{h}=$

(A) $f_x(x_0,y_0)$.　　(B) 0.

(C) $2f_x(x_0,y_0)$.　　(D) $\dfrac{1}{2}f_x(x_0,y_0)$.

【分析】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0-h,y_0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}-\frac{f(x_0-h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right]$$

$$=f_x(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)$$
$$=2f_x(x_0,y_0)$$

故应选(C).

(15) 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，Δz 是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量，则在点 (x_0,y_0) 处

(A) $\Delta z=\mathrm{d}z$. (B) $\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$.

(C) $\Delta z=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$. (D) $\Delta z=\mathrm{d}z+o(\rho)$.

【分析】 由于 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则

$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)=\mathrm{d}z+o(\rho)$

故应选(D).

(16) 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处

(A) 不连续. (B) 偏导数存在.

(C) 可微. (D) 沿任一方向方向导数存在.

【分析 1】 直接法.

设 l 方向的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t^2\cos^2\alpha+t^2\cos^2\beta}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t}=1$$

故应选(D).

【分析 2】 排除法.

显然 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$

则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，排除(A).

又 $f(x,0)=\sqrt{x^2}=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，则 $f_x(0,0)$ 不存在，同理 $f_y(0,0)$ 不存在，排除(B)和(C)，故应选(D).

【评注】 本例告诉我们，即使 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个一阶偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 都不存在，但 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任意方向的方向导数均可存在.

(17) 已知 $f_x(0,0)=2,f_y(0,0)=3$，则

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(B) $\left.\mathrm{d}f(x,y)\right|_{(0,0)}=2\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y$.

(C) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)} = 2\cos\alpha + 3\cos\beta$,其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 l 的方向余弦.

(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴负方向的方向导数为 -2.

【分析】 设 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 x 轴负方向的方向余弦,则 $\cos\alpha=-1,\cos\beta=0$,由方向导数定义知,$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处沿 x 轴负方向的方向导数为

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta)-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t,0)-f(0,0)}{t}\\ &= -\lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t,0)-f(0,0)}{-t}\\ &= -f_x(0,0) = -2\end{aligned}$$

故应选(D).

【评注】 原题设条件可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点两个一阶偏导数存在,此时函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不一定连续,不一定可微,沿任一方向 l 的方向导数不一定存在,故排除(A)、(B)、(C).

(18) 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}>1,\dfrac{\partial f}{\partial y}<-1,f(0,0)=0$,则下列结论正确的是

(A) $f(1,1)>1$. (B) $f(-1,1)>-2$.

(C) $f(-1,-1)<0$. (D) $f(1,-1)>2$.

【分析1】

$$\begin{aligned}f(1,-1) &= f(1,-1)-f(0,0)\\ &= [f(1,-1)-f(0,-1)]+[f(0,-1)-f(0,0)]\\ &= f_x(\xi,-1)+f_y(0,\eta)(-1)\\ &> 1+(-1)\cdot(-1)=2\end{aligned}$$

故应选(D).

【分析2】排除法,

令 $f(x,y)=1.1x-1.1y$

显然 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1.1>1,\dfrac{\partial f}{\partial y}=-1.1<-1,f(0,0)=0$,但

$f(1,1)=1.1-1.1=0$,则(A)不正确.

$$f(-1,1)=-1.1-1.1=-2.2<-2.$$

则(B)不正确,

$$f(-1,-1)=-1.1+1.1=0$$

则(C)不正确,故应选(D).

(19) 已知 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任何方向的方向导数都存在,则

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. (B) $f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$ 都存在.

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微. (D) 以上三个选项都不对.

【分析】 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点沿任何方向的方向导数都存在,但该函数在 $(0,0)$ 点不连续.

事实上 $$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos^2\alpha\cos\beta}{t^2\cos^4\alpha+\cos^2\beta}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\beta}, & 当\cos\beta\neq 0时,\\ 0, & 当\cos\beta=0时\end{cases}$$

但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在(参考 112 题),从而 $f(x,y)$ 在(0,0)点不连续,从而也不可微.排除(A)和(C).

令 $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,在 130 题中已验证该函数在点(0,0)处沿任何的方向导数都存在,但 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 都不存在.

(20) 已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某邻域内有定义,且 $f_x(0,0)=2,f_y(0,0)=1$,则

(A) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $\{2,1,1\}$.

(B) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $\{1,0,2\}$.

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $\{2,0,1\}$.

(D) $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

【分析】 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x\\y=0\\z=f(x,0)\end{cases}$,则该曲线在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $\{1,0,f_x(0,0)\}=\{1,0,2\}$.

故应选(B).

(21) 设函数 $f(x,y)$ 可微,且 $f(0,0)=0,f(2,1)>3,f'_y(x,y)<0$,则至少存在一点 (x_0,y_0) 使

(A) $f_x(x_0,y_0)<1$.　　(B) $f_x(x_0,y_0)<-3$.

(C) $f_x(x_0,y_0)=\dfrac{3}{2}$.　　(D) $f_x(x_0,y_0)>\dfrac{3}{2}$.

【分析】 $$\begin{aligned}f(2,1)&=f(2,1)-f(0,0)\\&=[f(2,1)-f(2,0)]+[f(2,0)-f(0,0)]\\&=f_y(2,\xi)+2f_x(\eta,0)\end{aligned}$$

又 $f(2,1)>3$

则 $f_y(2,\xi)+2f_x(\eta,0)>3$,

又 $f_y(2,\xi)<0$,则 $2f_x(\eta,0)>3$,

即 $f_x(\eta,0)>\dfrac{3}{2}$,

故应选(D).

(22) 已知方程 $f(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$,其 $f(u,v)$ 可微,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

=

(A) z. (B) $-z$. (C) y. (D) $-y$.

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\frac{y}{x^2}f_1-\frac{z}{x^2}f_2}{\frac{1}{x}f_2}=\frac{\frac{y}{x}f_1+\frac{z}{x}f_2}{f_2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{1}{x}f_1}{\frac{1}{x}f_2}=-\frac{f_1}{f_2}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yf_1+zf_2-yf_1}{f_2}=z.$$

(23) 设 $z=f(xy,x^2+y^2)$，其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

(A) $f_1+xyf_{11}+4xyf_{22}$. (B) $f_1+xyf_{11}+2(x^2+y^2)f_{12}+4xyf_{22}$.

(C) $xyf_{11}+2(x^2+y^2)f_{12}+4xyf_{22}$. (D) $xyf_{11}+4xyf_{22}$.

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1+2xf_2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_1+xyf_{11}+2y^2f_{12}+2x^2f_{21}+4xyf_{22}\\&=f_1+xyf_{11}+2(x^2+y^2)f_{12}+4xyf_{22}\end{aligned}$$

故应选(B).

(24) 已知函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$，$f_x(1,y)=y+1$，$f(1,y)=y+2$，则 $f(x,y)=$

(A) $x^2+(y-1)x+2$. (B) $x^2+(y+1)x+2$.

(C) $x^2+(y-1)x-2$. (D) $x^2+x(y+1)-2$.

【分析 1】 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\int 2\mathrm{d}x=2x+\varphi(y)$$

由 $f_x(1,y)=y+1$ 知 $y+1=2+\varphi(y)$

$$\varphi(y)=y-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+(y-1)$$

$$z=\int[2x+(y-1)]\mathrm{d}x=x^2+(y-1)x+\psi(y)$$

由 $f(1,y)=y+2$ 知 $y+2=1+(y-1)+\psi(y)$

$$\psi(y)=2$$

$z=x^2+(y-1)x+2$.

【分析 2】 显然四个选项中的函数都满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$，而只有(A)选项中的函数满足$f(1,y)=y+2$，故应选(A).

【评注】 对本题显然第二种方法较为方便.

(25) 已知$\mathrm{d}f(x,y)=(2y^2+2xy+3x^2)\mathrm{d}x+(4xy+x^2)\mathrm{d}y$，则$f(x,y)=$

(A)$2xy^2+x^2y$. (B)$2xy^2+x^2y+x^3$.
(C)$2xy^2+x^2y+x^3+C$. (D)$3xy^2+x^2y+x^3+C$.

【分析 1】 由题设知

$\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2+2xy+3x^2,\frac{\partial f}{\partial y}=4xy+x^2$

由$\frac{\partial f}{\partial x}=2y^2+2xy+3x^2$知

$f(x,y)=\int(2y^2+2xy+3x^2)\mathrm{d}x=2xy^2+x^2y+x^3+\varphi(y)$

由$\frac{\partial f}{\partial y}=4xy+x^2$知，$4xy+x^2=4xy+x^2+\varphi'(y),\varphi'(y)=0,\varphi(y)=C$

则$f(x,y)=2xy^2+x^2y+x^3+C$.

【分析 2】
$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x,y)&=(2y^2+2xy+3x^2)\mathrm{d}x+(4xy+x^2)\mathrm{d}y\\&=(2y^2\mathrm{d}x+4xy\mathrm{d}y)+(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)+3x^2\mathrm{d}x\\&=\mathrm{d}(2xy^2)+\mathrm{d}(x^2y)+\mathrm{d}x^3\end{aligned}$$

则$f(x,y)=2xy^2+x^2y+x^3+C$.

【评注】 方法一是利用偏积分，方法二是利用凑微分. 这两种方法是已知某个函数的全微分或两个一阶偏导数求原函数的两种常用方法.

(26) 已知$\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某二元函数$u(x,y)$的全微分，则$a$等于

(A)0. (B)2. (C)1. (D)-1.

【分析】 由题设知

$$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{x+ay}{(x+y)^2}\mathrm{d}x+\frac{y}{(x+y)^2}\mathrm{d}y$$

则 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x+ay}{(x+y)^2},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{(x+y)^2}$

以上两式分别对y,x求偏导得

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{a(x+y)^2-2(x+y)(x+ay)}{(x+y)^4}=\frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{-2(x+y)y}{(x+y)^4}=\frac{-2y}{(x+y)^3}$

由于$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$在$x+y\neq 0$处连续，则$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

即$(a-2)x-ay\equiv-2y$，从而$a=2$，故应选(B).

(27) 已知 $du(x,y)=(axy^3+\cos(x+2y))dx+(3x^2y^2+b\cos(x+2y))dy$，则

(A) $a=2,b=-2$. (B) $a=3,b=2$.

(C) $a=2,b=2$. (D) $a=-2,b=2$.

【分析】 由 $du(x,y)=(axy^3+\cos(x+2y))dx+(3x^2y^2+b\cos(x+2y))dy$ 知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=axy^3+\cos(x+2y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2+b\cos(x+2y)$$

以上两式分别对 y,x 求偏导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=3axy^2-2\sin(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=6xy^2-b\sin(x+2y)$$

由于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 连续，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

即 $3axy^2-2\sin(x+2y)\equiv 6xy^2-b\sin(x+2y)$，

则 $a=2,b=2$，故应选(C).

【评注】 事实上关于此类问题有一个一般结论. 即若 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在单连通域 D 上有连续一阶偏导数，则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在 D 上是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上恒成立. 本题直接利用该结论更方便.

(28) 函数 $u=x^2y^3z^4$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿从点 A 到点 $B(2,3,4)$ 的方向的方向导数等于

(A) 20. (B) -20. (C) $\frac{20}{\sqrt{14}}$. (D) $-\frac{20}{\sqrt{14}}$.

【分析】 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=3,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=4$

$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$

$\overrightarrow{AB}$ 向量的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{6}{\sqrt{14}}+\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{20}{\sqrt{14}}$$

故应选(C).

【评注】 选(A)是一种典型的错误，应特别注意.

(29) 函数 $f(x,y,z)=x^2y^3+3y^2z^3$ 在点(0,1,1)处方向导数的最大值为

(A) $\sqrt{107}$. (B) $\sqrt{117}$. (C) 117. (D) 107.

【分析】 函数 $f(x,y,z)=x^2y^3+3y^2z^3$ 在点(0,1,1)处方向导数的最大值等于 $f(x,y,z)$ 在点(0,1,1)处梯度向量的模.

$\mathrm{grad}f(0,1,1)=(0,6,9)$

$\|g\|=\sqrt{117}$

故应选(B).

(30) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点(1,0)处的梯度向量为

(A) $-i$.　　(B) i.　　(C) $-j$.　　(D) j.

【分析】 $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+(\dfrac{y}{x})^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\dfrac{1}{x}}{1+(\dfrac{y}{x})^2}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

则 $\operatorname{grad}f\Big|_{(1,0)}=j$

故应选(D).

【评注】 本题可做的更简单,由于

$$f_x(1,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)\Big|_{x=0}=0$$

$$f_y(1,0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y)\Big|_{y=0}=\frac{1}{1+y^2}\Big|_{y=0}=1$$

则 $\operatorname{grad}f\Big|_{(1,0)}=j$.

(31) 设可微函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的梯度向量为 g, $l=(0,2,2)$ 为一常向量,且 $g\cdot l=1$,则函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处沿 l 方向的方向导数等于

(A) $2\sqrt{2}$.　　(B) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.　　(C) $-2\sqrt{2}$.　　(D) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

【分析】 设 l 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}&=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+\\&\quad f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma\\&=\frac{g\cdot l}{\|l\|}=\frac{1}{\sqrt{0^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

故应选(B).

(32) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$ 则点 P 的坐标是

(A) $(1,-1,2)$.　　(B) $(-1,1,2)$.

(C) $(1,1,2)$.　　(D) $(-1,-1,2)$.

【分析】 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法线向量为 $(2x_0,2y_0,1)$,由题设知

$$\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{1}{1}$$

则 $x_0=y_0=1$,代入 $z=4-x^2-y^2$ 得 $z_0=2$.

故应选(C).

(33) 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

(A) 只有一条.　(B) 只有两条.　(C) 至少有三条.　(D) 不存在.

【分析】 曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 在点 $t=t_0$ 处的切向量为

$$\tau=(1,-2t_0,3t_0^2).$$

平面 $x+2y+z=4$ 的法线向量为

$$n=(1,2,1).$$

由题设知 $n\perp\tau$，即

$$1-4t_0+3t_0^2=0$$

则 $t_0=1$ 或 $t_0=\frac{1}{3}$.

故应选(B).

(34) 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的切线方程为

(A) $\frac{x-1}{2}=y+1=z$.　(B) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$.

(C) $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$.　(D) $x-1=y+1=-\frac{z}{2}$.

【分析】 曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的法线向量为 $n_1=(2,-2,0)$

平面 $x+y+z=0$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的法线向量为 $n_2=(1,1,1)$

则曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的切向量为

$$\tau=n_1\times n_2=(-2,-2,4)$$

则所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$$

故应选(D).

(35) 函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在点 $(1,-1,1)$ 处沿曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 在该点指向 x 轴负向一侧的切线方向的方向导数等于

(A) -12.　(B) 12.　(C) $-\frac{12}{\sqrt{14}}$.　(D) $\frac{12}{\sqrt{14}}$.

【分析】 曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 在点 $(1,-1,1)$ 处切线向量为

$$\tau=(1,-2,3)$$

而指向 x 轴负向一侧的切向量为

$$(-1,2,-3)$$

则所求的方向导数为

$$2\times\frac{-1}{\sqrt{14}}+(-2)\times\frac{2}{\sqrt{14}}+2\times\frac{-3}{\sqrt{14}}=-\frac{12}{\sqrt{14}}$$

故应选(C).

(35) 设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$.

【分析】 设 $F(x,y,z) = xy - z\ln y + e^{xz} - 1$

则 $F_x = y + ze^{xz}$，$F_y = x - \dfrac{z}{y}$，$F_z = -\ln y + xe^{xz}$

$F_x(0,1,1) = 2 \neq 0$，$F_y(0,1,1) = -1 \neq 0$，$F_z(0,1,1) = 0$

由隐函数存在定理知，方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$ 在 $(0,1,1)$ 点的一个邻域内可确定两个具有连续一阶偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$，故应选(D).

(37) 曲面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 4$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和为

(A)48.　　(B)64.　　(C)36.　　(D)16.

【分析】 设 $F(x,y,z) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - 4$，则

$$F_x = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, F_y = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, F_z = \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}$$

该曲面在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面方程为

$$x^{-\frac{1}{3}}(X-x) + y^{-\frac{1}{3}}(Y-y) + z^{-\frac{1}{3}}(Z-z) = 0$$

令 $Y = Z = 0$ 得 $X = 4x^{\frac{1}{3}}$，令 $X = Z = 0$ 得 $Y = 4y^{\frac{1}{3}}$，令 $X = Y = 0$ 得 $Z = 4z^{\frac{1}{3}}$

$X^2 + Y^2 + Z^2 = 16(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}) = 64$

故应选(B).

(38) 下列命题正确的是

(A) 若 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极值点，则 (x_0,y_0) 必为 $f(x,y)$ 的驻点.

(B) 若 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的驻点，则 (x_0,y_0) 必为 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 若 (x_0,y_0) 为有界闭区域 D 上连续的函数 $f(x,y)$ 在 D 内部唯一的极值点，且 $f(x,y)$ 在该点取极大值，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得它在 D 上的最大值.

(D) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则 $f(x,y_0)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值，$f(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值.

【分析】 由 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值及极值的定义可知，$f(x,y_0)$ 在 $x = x_0$ 取极小值，$f(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值，故应选(D).

【评注】 极值点不一定是驻点，因为在该点处偏导数不一定存在，例如 $f(x,y) = |x| + |y|$ 显然在 $(0,0)$ 点取极小值，但 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 都不存在，则排除(A)；驻点不一定是极值点，排除(B)；(C) 选项的结论对一元函数是成立的，但对二元函数不成立.

(39) 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极大值，则下列结论正确的是

(A) $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) $f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)-(f''_{xy}(x_0,y_0))^2>0$，且 $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$.

(C) $-f(x_0,y)$ 在 y_0 处取极小值.

(D) $|f(x,y)|$ 在 (x_0,y_0) 处取极大值.

【分析】 由于 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极大值，则 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处取极大值，则在 $y=y_0$ 的某邻域内

$$f(x_0,y)\leqslant f(x_0,y_0),$$

从而有

$$-f(x_0,y)\geqslant -f(x_0,y_0)$$

即 $-f(x_0,y)$ 在 y_0 处取极小值，故应选(C).

【评注】 本题没假设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处两个一阶偏导数存在，则(A)不正确. 但应注意，本题即使假设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，(B)选项也不正确，因为(B)是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极大值的充分条件，但非必要条件. 如 $f(x,y)=-(x^4+y^4)$ 在 $(0,0)$ 处取极大值，但 $f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0)-(f''_{xy}(0,0))^2=0$，$f''_{xx}(0,0)=0$.

(40) 设 $F(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F'_x(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)>0$. 若一元函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的在点 (x_0,y_0) 附近的隐函数，则 x_0 是函数 $y=y(x)$ 的极小值点的一个充分条件是

(A) $F''_{xx}(x_0,y_0)>0$.　　(B) $F''_{xx}(x_0,y_0)<0$.

(C) $F''_{yy}(x_0,y_0)>0$.　　(D) $F''_{yy}(x_0,y_0)<0$.

【分析】 $y'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

又 $F'_x(x_0,y_0)=0$，则 $y'(x_0)=0$

$$y''(x)=-\frac{[F''_{xx}+F''_{xy}y']F'_y-[F''_{yx}+F''_{yy}y']F'_x}{(F'_y)^2}$$

$$y''(x_0)=-\frac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$$

若 $F''_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 $y''(x_0)>0$，x_0 是 $y=y(x)$ 的极小值点，故应选(B).

(41) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2$，则

(A) $f_x(0,0)$ 不存在.　　(B) $f_x(0,0)$ 存在但不为零.

(C) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极大值.　　(D) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极小值.

【分析1】 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2$，及 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性知 $f(0,0)=0$，

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2<0$，及极限的保号性知存在 $(0,0)$ 点的某个去心邻域，在此去心邻域内

$$\frac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}<0$$

而 $1-\cos\sqrt{x^2+y^2}>0$，则 $f(x,y)<0$，又 $f(0,0)=0$，由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 取极大值，故应选(C).

【分析 2】 由于当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

取 $f(x,y)=-(x^2+y^2)$，显然满足题设条件，但 $f_x(0,0)=0$，且由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 取极大值，则排除(A)、(B)、(D)，故应选(C).

【评注】 分析 1 是利用极限的保号性和极值的定义，分析 2 是利用排除法，这是解决此类问题常用的两种方法.

(42) 设 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上有连续二阶偏导数，在 D 内 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则函数 $u(x,y)$

(A) 最大值点和最小值点必定都在 D 的内部.

(B) 最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上.

(C) 最大值点在 D 的内部，最小值点在 D 的边界上.

(D) 最大值点在 D 的边界上，最小值点在 D 的内部.

【分析】 由于在 D 内 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则在 D 内

$$AC-B^2=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2<0$$

则 D 内每一点都不是 $u(x,y)$ 的极值点，则函数 $u(x,y)$ 的最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上，故应选(B).

(43) 函数 $f(x,y)=kx^2+y^3-3y$ 在点 $(0,1)$ 处

(A) 取极大值. (B) 取极小值.

(C) 不取得极值. (D) 是否取得极值与 k 取值有关.

【分析】 $f_x=2kx$，$f_y=3y^2-3$，显然
$f_x(0,1)=0$，$f_y(0,1)=0$
$f_{xx}(0,1)=2k$，$f_{yy}(0,1)=6$，$f_{xy}(0,1)=0$
$AC-B^2=12k$
则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处是否取得极值与 k 的取值有关.

(44) 函数 $f(x,y)=1+x+y$ 在区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值与最小值之积为

(A) -1. (B) 1. (C) $1+\sqrt{2}$. (D) $1-\sqrt{2}$.

【分析】 显然 $f(x,y)=1+x+y$ 在区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内无驻点，令

$$F(x,y,\lambda)=1+x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

令$\begin{cases}F_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0\end{cases}$ 得 $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$ 为最大值，$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$ 为最小值，$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$

故应选(A)。

(45) 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上到平面 $x + 2y + z = 10$ 距离最大的点为

(A) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$。　　(B) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$。

(C) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$。　　(D) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$。

【分析】 由几何意义可知球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上到平面 $x + 2y + z = 10$ 距离最大的点处的切平面与平面 $x + 2y + z = 10$ 平行，且在第七卦限。

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在点 (x,y,z) 处的法向量为

$$n_1 = (x,y,z)$$

平面 $x + 2y + z = 10$ 的法向量为

$$n_2 = (1,2,1)$$

则 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1} = \lambda$

即 $x = \lambda, y = 2\lambda, z = \lambda$，将其代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 得

$$6\lambda^2 = 1, \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

由于所求点在第七卦限，则所求点为 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$。

故应选(B)。

【评注】 本题也可先求出曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 (x,y,z) 到平面 $x + 2y + z = 10$ 的距离，然后用拉格朗日乘法求解。

(46) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy + \cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$ 等于

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}\sigma$。　　(B) $2\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma$。

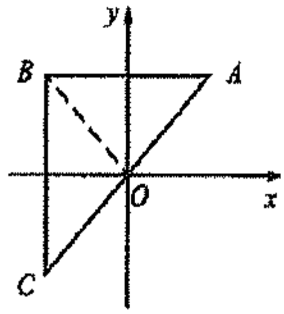
(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy + \cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$。　　(D) 0。

【分析】 连接 OB 将原积分域分为两部分，

ΔCBO，记为 D_2，ΔBOA，记为 D_3.

由于 D_2 关于 x 轴对称，而 $xy+\cos x\sin y$ 是 y 的奇函数，则

$$\iint\limits_{D_2}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma=0$$



而 D_3 关于 y 轴对称，xy 是 x 的奇函数，$\cos x\sin y$ 是 x 的偶函数，则

$$\iint\limits_{D_3}xy\mathrm{d}\sigma=0,\iint\limits_{D_3}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma.$$

故应选(A).

(47) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可写成

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2f(x,y)\mathrm{d}y$.

【分析】 原积分域应为由 $x^2+y^2\leqslant 2y$ 与 $x\geqslant 0$ 所确定的右半圆，故应选(C).

(48) 累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 可写成

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_y^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【分析】 原积分域为直线 $y=x$，$x+y=2$，与 y 轴围成的三角形区域，故应选(C).

(49) 交换积分次序 $\int_1^e\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 为

(A) $\int_0^e\mathrm{d}y\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_{e^y}^e\mathrm{d}y\int_0^1f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^{\ln x}\mathrm{d}y\int_1^ef(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{e^y}^ef(x,y)\mathrm{d}x$.

【分析】 交换积分次序得

$$\int_1^e\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{e^y}^ef(x,y)\mathrm{d}x.$$ 【答案】 D

(50) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$，$(a>0)$ 则积分域为

(A) $x^2+y^2\leqslant a^2$.　　(B) $x^2+y^2\leqslant a^2\quad(x\geqslant 0)$.

(C) $x^2+y^2\leqslant ax$.　　(D) $x^2+y^2\leqslant ax\quad(y\geqslant 0)$.

【分析】 由 $r = a\cos\theta$ 知 $r^2 = ar\cos\theta$，即

$$x^2 + y^2 = ax \quad (a > 0)$$

故应选(C)。

(51) 设 $f(x,y)$ 在 $D: x^2 + y^2 \leqslant a^2$ 上连续，则 $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{1}{a^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

(A) 不一定存在。 (B) 存在且等于 $f(0,0)$。

(C) 存在且等于 $\pi f(0,0)$。 (D) 存在且等于 $\dfrac{1}{\pi}f(0,0)$。

【分析】 由积分中值定理知

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \pi a^2 f(\xi,\eta),(\xi,\eta) \in D$$

$$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{a \to 0}\pi f(\xi,\eta) = \pi f(0,0).$$ 【答案】 C

(52) 设 $g(x)$ 是可微函数 $y = f(x)$ 的反函数，且 $f(1) = 0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1008$，则 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t$ 的值为

(A)0。 (B)2017。 (C)2016。 (D)2100。

【分析】 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1\left[\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$ （利用分部积分法）

$$\begin{aligned}
&= x\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t\Big|_0^1 - \int_0^1 xg[f(x)]f'(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 - \int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^2\mathrm{d}f(x) \\
&= -x^2 f(x)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 2016.
\end{aligned}$$ 【答案】 C

(53) 设 $g(x)$ 有连续的导数，$g(0) = 0$，$g'(0) = a \neq 0$，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，则 $\lim\limits_{r \to 0^+} \dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{g(r^2)}$

(A) $\dfrac{f(0,0)}{a}$。 (B) $\dfrac{f(0,0)}{2a}$。

(C) $\dfrac{\pi}{a}f(0,0)$。 (D) $\dfrac{\pi}{2a}f(0,0)$。

【分析】 由积分中值定理知

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi r^2 f(\xi,\eta)$$

其中(ξ,η)为圆域$x^2+y^2\leqslant r^2$上的一个点，则

$$\lim_{r\to 0^+} f(\xi,\eta) = f(0,0)$$

而$\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{r^2}{g(r^2)} = \lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{2r}{2rg'(r^2)} = \dfrac{1}{a}$

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{g(r^2)} = \frac{\pi}{a}f(0,0).$$ 【答案】 C

(54) 已知$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\int_0^t \mathrm{d}x\int_t^x \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{t^\alpha} = \beta\neq 0$，则

(A)$\alpha=1,\beta=\dfrac{1}{2}$.　　(B)$\alpha=2,\beta=\dfrac{1}{2}$.

(C)$\alpha=2,\beta=-\dfrac{1}{2}$.　　(D)$\alpha=3,\beta=-\dfrac{1}{2}$.

【分析】 交换累次积分次序得

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t \mathrm{d}x\int_t^x \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{t^\alpha} = \lim_{t\to 0^+}\frac{-\int_0^t \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x}{t^\alpha}$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y}{t^\alpha}$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{t\mathrm{e}^{-t^2}}{\alpha t^{\alpha-1}}\quad(\text{洛必达法则})$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{\alpha t^{\alpha-1}} = \beta\neq 0$$

由$\alpha=2,\beta=-\dfrac{1}{2}$，故应选(C).

(55) 设$I_1=\iint\limits_D \dfrac{x+y}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由不等式$(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$所确定，则

(A)$I_2<I_3<I_1$.　　(B)$I_1<I_2<I_3$.

(C)$I_3<I_1<I_2$.　　(D)$I_3<I_2<I_1$.

【分析】 同一积分域上二重积分大小的比较，只要比较被积函数的大小，而被积函数为同一函数$\dfrac{x+y}{4}$的不同方幂，关键是要确定在D上$\dfrac{x+y}{4}$是大于1还是小于1.

由于直线$\dfrac{x+y}{4}=1$（即$x+y=4$）与圆$(x-1)^2+(y-1)^2=2$在点$(2,2)$处相切，则在区域D:$(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$上，$\dfrac{x+y}{4}\leqslant 1$，从而有

$$\frac{x+y}{4}\leqslant\sqrt{\frac{x+y}{4}}\leqslant\sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$$

则　$I_1<I_2<I_3$。

故应选(B).

(56)　设平面域 D 由 $x+y=\frac{1}{2}$，$x+y=1$ 及两条坐标轴围成，$I_1=\iint\limits_D\ln(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D\sin(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 则

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_3<I_1<I_2$.

(C) $I_1<I_3<I_2$.　　(D) $I_3<I_2<I_1$.

【分析】　显然在 D 上 $0<x+y\leqslant1$，则

$$\ln(x+y)^3\leqslant0,0<\sin(x+y)^3<(x+y)^3$$

从而有

$$\iint\limits_D\ln(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D\sin(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故应选(C).

【评注】　本题用到一个常用的不等式，即

$$\sin x<x<\tan x,\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

(57)　设 D 为单位圆域 $x^2+y^2\leqslant1$，$I_1=\iint\limits_D(x^3+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D(x^4+y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D(2x^6+y^5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_3<I_1<I_2$.

(C) $I_3<I_2<I_1$.　　(D) $I_1<I_3<I_2$.

【分析】　由于积分域 D 关于两个坐标轴都对称，而 x^3 是 x 的奇函数，y^3 是 y 的奇函数，则

$$I_1=\iint\limits_D(x^3+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\iint\limits_D y^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$I_3=2\iint\limits_D x^6\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(x^6+y^6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\text{（这里利用了变量的对称性）}$$

由于在 D 内 $|x|\leqslant1$，$|y|\leqslant1$，则

$$x^6+y^6\leqslant x^4+y^4$$

则　$0<\iint\limits_D(x^6+y^6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D(x^4+y^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

从而有　$I_1<I_3<I_2$，故应选(D).

(58) 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_{D}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0,y=x^2$，$x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于

(A) xy.　　(B) $2xy$.　　(C) $xy+\frac{1}{8}$.　　(D) $xy+1$.

【分析】 等式 $f(x,y)=xy+\iint\limits_{D}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 两端积分得

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\cdot\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}xy\mathrm{d}y=\frac{1}{12}$$

$$\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

则 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{8}$

$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.　　　　【答案】 C

(59) 设有空间区域 $\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0$；及 $\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0$，$y\geqslant 0,z\geqslant 0$，则

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$.　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$.　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$.

【分析】 由于 Ω_1 关于 xOz 面和 yOz 面都对称，而 $f(x,y,z)=z$ 既是 y 的偶函数，也是 x 的偶函数，则

$$\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$$

故应选(C).

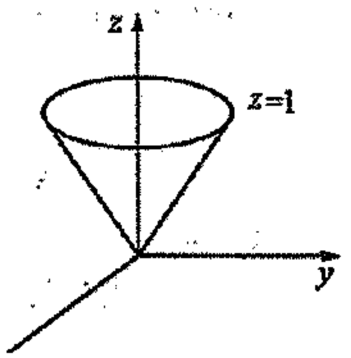
(60) 设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 所围成的区域，$f(x,y,z)$ 连续，则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 等于

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

(B) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

(C) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

(D) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.



【分析】 Ω是由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$围成的锥体(如图所示),则在直角坐标下化为累次积分为

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

【答案】 C

(61) 设Ω是由曲面$z=x^2+y^2$,$y=x$,$y=0$,$z=1$在第一卦限所围成的区域,$f(x,y,z)$在Ω上连续,则$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$等于

(A)$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.　　(B)$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

(C)$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\int_0^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.　　(D)$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

【分析】 Ω在xOy面上的投影是由$x^2+y^2=1$,$y=0$,$y=x$在第一象限围成的$\frac{1}{8}$圆域,则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

故应选(D).

(62) 设$f(x)$有连续的导数,$f(0)=0$,区域Ω由柱面$x^2+y^2=t^2(t>0)$和两面$z=0$,$z=1$所围成,则$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$等于

(A)$\pi f'(0)$.　　(B)$\pi f(0)$.

(C)$\frac{\pi}{2}f(0)$.　　(D)$\frac{\pi}{2}f'(0)$.

【分析】

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}v}{t^4}=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\int_0^1\mathrm{d}z}{t^4}$$

$$=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{t^4}$$

$$=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{f(t^2)t}{4t^3}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t^2)}{t^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{f'(t^2)\cdot2t}{2t}=\frac{\pi}{2}f'(0).$$

故应选(D).

(63) 设$S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant0)$,$S_1$为$S$在第一卦限中的部分,则

(A)$\iint\limits_{S}x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$.　　(B)$\iint\limits_{S}y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}y\mathrm{d}S$.

(C)$\iint\limits_{S}z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}z\mathrm{d}S$.　　(D)$\iint\limits_{S}xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}xyz\mathrm{d}S$.

【分析】 由于S关于yOz面和xOz面都对称，而$f(x,y,z)=z$关于x和y都是偶函数，则

$$\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} z\,\mathrm{d}S.$$

故应选(C).

(64) 下列结论

(1) $\displaystyle\oint\limits_{x^2+y^2=a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}s = a^2\oint\limits_{x^2+y^2=a^2}\mathrm{d}s = 2\pi a^3$

(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = a^2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}\sigma = \pi a^4$

(3) $\displaystyle\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = a^2\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2}\mathrm{d}S = 4\pi a^4$

(4) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v = a^2\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}\mathrm{d}v = \frac{4}{3}\pi a^5$

中正确的条数为

(A)1条.　　(B)2条.　　(C)3条.　　(D)4条.

【分析】 (1)和(3)是正确的，(2)和(4)是错误的.

(1)和(3)分别是第一类线(面)积分，积分是沿曲线(面)积，被积函数可用曲线(面)方程代入.

但(2)和(4)分别是二重积分和三重积分，积分分别是在圆域$x^2+y^2\leqslant a^2$和球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$上积，被积分函数不能用积分域的边界曲线$x^2+y^2=a^2$和边界曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$代入.

【答案】 B

(65) 设$C_k(k=1,2,3)$分别为曲线$x^2+y^2=1,\frac{x^2}{2}+y^2=1,x^2+y^2=2$，其方向逆时针方向，$I_k=\oint_{C_k}(3yx^2+y^3)\mathrm{d}x+(3x+y)\mathrm{d}y,(k=1,2,3)$. 则

(A)$I_1<I_2<I_3$.　　(B)$I_1<I_3<I_2$.

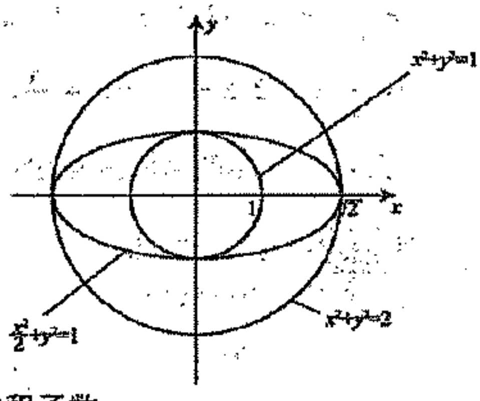
(C)$I_3<I_2<I_1$.　　(D)$I_2<I_1<I_3$.

【分析】 由格林公式得

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(3-3x^2-3y^2)\mathrm{d}\sigma = 3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$I_2=3\iint\limits_{\frac{x^2}{2}+y^2\leqslant 1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$I_3=3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$$



注意到在圆$x^2+y^2\leqslant 1$之外，以上三个二重积分的被积函数$(1-x^2-y^2)$为负，由上图可知

$$I_3<I_2<I_1$$

故应选(C).

(66) 设曲线 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其周长为 l，则 $\oint_L (bx+ay)^2\,ds$ 等于

(A) $(a+b)l$.　　(B) $(a^2+b^2)l$.　　(C) a^2b^2l.　　(D) abl.

【分析】 $\oint_L (bx+ay)^2\,ds$

$$=\oint_L (b^2x^2+2abxy+a^2y^2)\,ds$$

$$=\oint_L (b^2x^2+a^2y^2)\,ds=a^2b^2\oint_L\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)ds$$

$$=a^2b^2\oint_L ds=a^2b^2l.$$

故应选(C)。

(67) 设 L 是以 $A(1,0),B(0,1),C(-1,0),D(0,-1)$ 为顶点的正方形边界，则 $\oint_L \frac{x+y+1}{|x|+|y|}\,ds$ 等于

(A) $4\sqrt{2}$.　　(B) 0.　　(C) $2\sqrt{2}$.　　(D) 4.

【分析】 曲线 L 的方程为 $|x|+|y|=1$，该曲线关于 y 轴和 x 轴都对称，$\frac{x}{|x|+|y|}$，$\frac{y}{|x|+|y|}$ 分别关于 x 和 y 是奇函数，则

$$\oint_L \frac{x}{|x|+|y|}\,ds=\oint_L \frac{y}{|x|+|y|}\,ds=0$$

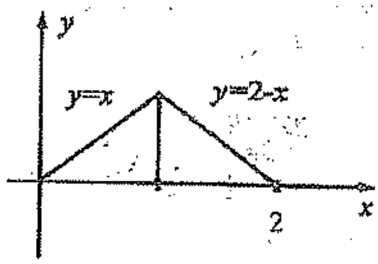
$$\oint_L \frac{x+y+1}{|x|+|y|}\,ds=\oint_L \frac{ds}{|x|+|y|}=\oint_L ds=4\sqrt{2}.$$

故应选(A).

(68) 设 L 为折线 $y=1-|1-x|$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$ 的一段，则线积分 $\int_L (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$ 等于

(A) $\frac{1}{3}$.　　(B) $\frac{5}{3}$.　　(C) $\frac{3}{2}$.　　(D) $\frac{4}{3}$.

【分析】 积分曲线如图所示



$$\int_L (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$$

$$=\int_0^1 2x^2\,dx+\int_1^2\{[x^2+(2-x)^2]-[x^2-(2-x)^2]\}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}+\int_1^2 2(2-x)^2\,dx=\frac{4}{3}.$$

【答案】 D

【评注】 本题也可补线用格林公式.

(69) 方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为

(A) $y=axe^{2x}$.　　(B) $y=(ax+b)e^{2x}$.

(C) $y=x(ax+b)e^{2x}$.　　(D) $y=x^2(ax+b)e^{2x}$.

【答案】 C

【分析】 方程 $y''-2y'=0$ 的特征方程为 $r^2-2r=0$，$r_1=0$，$r_2=2$，则非齐次方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为 $y=x(ax+b)e^{2x}$.

(70) 方程 $y''-3y'+2y=e^x+1+e^x\cos 2x$ 的特解形式为

(A) $y=axe^x+b+Ae^x\cos 2x$.

(B) $y=ae^x+b+e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

(C) $y=axe^x+b+xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

(D) $y=axe^x+b+e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

【分析】 方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $r^2-3r+2=0$

特征根为 $r_1=1, r_2=2$

则方程 $y''-3y'+2y=e^x+1+e^x\cos 2x$ 的待定特解为

$$y=axe^x+b+e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

故应选(D).

(71) 方程 $y'''+2y''=x^2+xe^{-2x}$ 的特解形式为

(A) $y=ax^2+bx+c+x(dx+e)e^{-2x}$.

(B) $y=x^2(ax^2+bx+c)+x^2e^{-2x}$.

(C) $y=(ax^2+bx+c)+(dx+e)e^{-2x}$.

(D) $y=x^2(ax^2+bx+c)+x(dx+e)e^{-2x}$.

【分析】 方程 $y'''+2y''=0$ 的特征方程为

$r^3+2r^2=0$

$r_1=r_2=0, r_3=-2$

则方程 $y'''+2y''=x^2+xe^{-2x}$ 的特解形式为 $y=x^2(ax^2+bx+c)+x(dx+e)e^{-2x}$ 故应选(D).

(72) 已知 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同的特解，则该方程的通解为

(A) $y=Cy_1(x)$.　　(B) $y=Cy_2(x)$.

(C) $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.　　(D) $y=C(y_1(x)-y_2(x))$.

【答案】 D

【分析】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同的特解，则 $y_1(x)-y_2(x)$ 为该方程的一个非零解，则 $y=C(y_1(x)-y_2(x))$ 为该方程的通解.

【评注】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都可能是原方程的零解，则(A) 和(B) 都不正确.

(73) 已知 $y_1=x$，$y_2=x^2$，$y_3=e^x$ 为方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个特解，则该方程的通解是

(A) $y=C_1x+C_2x^2+e^x$.

(B) $y=C_1x^2+C_2e^x+x$.

(C) $y=C_1(x-x^2)+C_2(x-e^x)+x$.

(D) $y=C_1(x-x^2)+C_2(x^2-e^x)$.

【分析】 方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 是一个二阶线性非齐次方程，则 $(x-x^2)$ 和 $(x-e^x)$ 为其对应的齐次方程两个线性无关的特解，则原方程通解为

$$y=C_1(x-x^2)+C_2(x-e^x)+x$$

故应选(C).

(74) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则 $f(x)$ 等于

(A) $e^x\ln 2$.　　(B) $e^{2x}\ln 2$.

(C) $e^x+\ln 2$.　　(D) $e^{2x}+\ln 2$.

【答案】 B

【分析】 等式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$ 两端对 x 求导得 $f'(x)=2f(x)$ 则 $\frac{df}{f}=2dx$，$\ln f=2x+C_1$，$f(x)=Ce^{2x}$ 由题设知 $f(0)=\ln 2$，则 $C=\ln 2$，$f(x)=e^{2x}\ln 2$.

(75) 设曲线积分 $\int_L [f(x)-e^x]\sin y dx-f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于

(A) $\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$.　　(B) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

(C) $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+1$.　　(D) $1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

【答案】 B

【分析】 由于线积分 $\int_L [f(x)-e^x]\sin y dx-f(x)\cos y dy$ 与路径无关，则

$$[f(x)-e^x]\cos y=-f'(x)\cos y$$

即 $f'(x)+f(x)=e^x$

$$f(x)=e^{-\int dx}\left(\int e^x e^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)$$

由 $f(0)=0$ 知，$C=-\frac{1}{2}$

$$f(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

(76) 设 $y=y(x)$ 是方程 $2xydx+(x^2-1)dy=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的解，则 $\int_0^{\frac{1}{2}} y(x)dx=$

(A) $-\ln 3$.　　(B) $\ln 3$.　　(C) $-\frac{1}{2}\ln 3$.　　(D) $\frac{1}{2}\ln 3$.

【分析】 由原方程 $2xydx+(x^2-1)dy=0$ 得

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x}{1-x^2}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2x}{1-x^2}dx$$

$$\ln|y| = -\ln|1-x^2| + \ln C_1$$
$$y(1-x^2) = C$$

由 $y(0)=1$ 知，$C=1$

$$y = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}} y(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3$$

故应选(D).

(77) 设 $y=\frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\varphi(\frac{x}{y})$ 的解，则 $\varphi(\frac{x}{y})$ 的表达式为

(A) $-\frac{y^2}{x^2}$.　　(B) $\frac{y^2}{x^2}$.　　(C) $-\frac{x^2}{y^2}$.　　(D) $\frac{x^2}{y^2}$.

【分析】 将 $y=\frac{x}{\ln x}$ 代入方程 $y'=\frac{y}{x}+\varphi(\frac{x}{y})$ 得

$$\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}=\frac{1}{\ln x}+\varphi(\ln x)$$
$$\varphi(\ln x) = -\frac{1}{\ln^2 x}$$

则
$$\varphi(\frac{x}{y}) = -\frac{y^2}{x^2}$$

故应选(A).

(78) 在下列方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

【分析】 由通解 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ 的形式可知所求方程的特征方程为

$$(r-1)(r^2+4)=0$$

即　$r^3-r^2+4r-4=0$

则对应的方程为
$$y'''-y''+4y'-4y=0$$

故应选(D).

(79) 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是

(A) $y'''-y''-y'+y=0$.　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$.

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$.　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

【分析】 由 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 是所求方程的三个特解知，$r=-1,-1,1$ 为所求三阶常系数线性齐次微分方程的特征方程的三个根，则其特征方程为

$$(r-1)(r+1)^2=0$$

即　$r^3+r^2-r-1=0$

对应的微分方程为 $$y''' + y'' - y' - y = 0$$
故应选(B).

(80) 若 $y = xe^x + x$ 是微分方程 $y'' - 2y' + ay = bx + c$ 的解则

(A)$a = 1, b = 1, c = 1$. (B)$a = 1, b = 1, c = -2$.

(C)$a = -3, b = -3, c = 0$. (D)$a = -3, b = 1, c = 1$.

【分析】 由于 $y = xe^x + x$ 是方程 $y'' - 2y' + ay = bx + c$ 的解，则 xe^x 是对应的齐次方程的解，其特征方程有二重根 $r_1 = r_2 = 1$，则 $a = 1$；x 为非齐次的解，将 $y = x$ 代入方程

$$y'' - 2y' + y = bx + c$$

知 $b = 1, c = -2$

故应选(B).

(81) 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}f(x) + 1$，则 $f(x)$ 等于

(A)$1 + Cxe^{x^2}$. (B)$2 + Cx\sin x$. (C)$2 + Cx$. (D)$2 + x$.

【分析】 令 $xt = u$，则 $\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t = \frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$.

$$\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{2}f(x) + 1$$

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}xf(x) + x$$

两端对 x 求导得

$$f(x) = \frac{1}{2}xf'(x) + \frac{1}{2}f(x) + 1$$

解方程得 $y = 2 + Cx$，故选(C).

(82) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解，则当 $x \to 0$ 时，函数 $\frac{\ln(1 + x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A) 不存在. (B) 等于 1. (C) 等于 2. (D) 等于 3.

【分析】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x^2)}{y(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)} \quad (\ln(1 + x^2) \sim x^2)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{y''(0)}$$

在方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 中令 $x = 0$ 得 $y''(0) + py'(0) + qy(0) = 1$

即 $y''(0) = 1, \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x^2)}{y(x)} = 2$. 【答案】 C

(83) 已知方程 $y'' + qy = 0$ 存在当 $x \to +\infty$ 时趋于零的非零解，则

(A)$q > 0$. (B)$q \geqslant 0$. (C)$q < 0$. (D)$q \leqslant 0$.

【分析】 原方程的特征方程为 $r^2+q=0$.

1) 当 $q<0$ 时，$r_{1,2}=\pm\sqrt{-q}$，通解为 $y=C_1e^{\sqrt{-q}x}+C_2e^{-\sqrt{-q}x}$，

当 $C_1=0, C_2\neq 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}y=C_2\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\sqrt{-q}x}=0$.

2) 当 $q=0$，$r_1=r_2=0$，原方程通解为 $y=C_1x+C_2$.

3) 当 $q>0$ 时，$r_{1,2}=\pm\sqrt{-q}\mathrm{i}$，原方程通解为 $y=C_1\cos\sqrt{q}x+C_2\sin\sqrt{q}x$.

显然，只有 $q<0$ 时，原方程存在当 $x\to+\infty$ 时趋于零的非零解，故应选(C).

(84) 已知微分方程 $y''+by'+y=0$ 的每个解都在区间 $(0,+\infty)$ 上有界，则实数 b 的取值范围是

(A) $[0,+\infty)$. (B) $(-\infty,0]$.

(C) $(-\infty,4]$. (D) $(-\infty,+\infty)$.

【分析】 方程 $y''+by'+y=0$ 的特征方程为

$$r^2+br+1=0$$

特征根为 $r_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$.

1) $b^2<4$ 时，原方程通解为 $y=e^{-\frac{b}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{4-b^2}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{4-b^2}}{2}x\right)$.

2) 当 $b^2=4$ 时，原方程通解为 $y=e^{-\frac{b}{2}x}(C_1+C_2x)$.

3) 当 $b^2>4$ 时，原方程通解为 $y=C_1e^{(\frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2})x}+C_2e^{(\frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2})x}$.

由以上解的形式可知当 $b\geqslant 0$ 时，每个解都在 $(0,+\infty)$ 上有界，故应选(A).

(85) 若级数 $2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数 $y(x)$ 是微分方程 $y''-y=-1$ 的解，则 $y(x)$ 等于

(A) $2\mathrm{ch}x$. (B) $1+\mathrm{sh}x$. (C) $\mathrm{ch}x+1$. (D) $1+\cos x$.

【分析】 方程 $y''-y=0$ 的特征方程为 $r^2-1=0$，$r_{1,2}=\pm 1$

齐次方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

非齐次特解 $y=1$

非齐次通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+1$

由于 $y(x)=2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，则 $y(0)=2, y'(0)=0$

则 $\begin{cases}C_1+C_2+1=2\\C_1-C_2=0\end{cases}$

则 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+1=\mathrm{ch}x+1$$

故应选(C).

（86） 可导函数 $f(x)$，对任意的 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f'(0)=1$，则 $f(x)$ 等于

(A) $x+\cos x$. (B) $\operatorname{sh}x$. (C) e^x. (D) $1-e^{-x}$.

【分析】 等式 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 两端对 y 求导得

$$f'(x+y)=f(x)f'(y)$$

令 $y=0$ 得，$f'(x)=f(x)$

由此可得 $f(x)=Ce^x$

由 $f'(0)=1$ 知，$C=1$，即 $f(x)=e^x$. 【答案】 C

（87） 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数，$f(0)=0$，$du(x,y)=f(x)ydx+[\sin x-f(x)]dy$，则 $f(x)$ 等于

(A) $\cos x+\sin x-1$. (B) $\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$.

(C) $\cos x-\sin x+xe^x$. (D) $\cos x-\sin x+xe^{-x}$.

【分析】 由 $du(x,y)=f(x)ydx+[\sin x-f(x)]dy$ 知

$f(x)=\cos x-f'(x)$

即 $f'(x)+f(x)=\cos x$

$$f(x)=e^{-\int dx}\left(\int\cos x\, e^{\int dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-x}\left(\int e^x\cos x dx+C\right)=\frac{e^{-x}}{2}(e^x\cos x+e^x\sin x+C)$$

由 $f(0)=0$ 知，$C=-1$，$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$

故应选(B).

（88） 已知线积分 $\int_L yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 有连续一阶导数，$f(0)=1$，则 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 等于

(A) $3e+1$. (B) $3e+5$. (C) $3e+2$. (D) $3e-5$.

【分析】 由于线积分 $\int_L yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy$ 与路径无关，则

$$f(x)=f'(x)-2x$$

即 $f'(x)-f(x)=2x$

$$f(x)=e^{\int dx}\left[\int 2xe^{-\int dx}dx+C\right]=e^x\left[\int 2xe^{-x}dx+C\right]$$

$$=e^x[-2e^{-x}-2xe^{-x}+C]$$

由 $f(0)=1$ 知，$C=3$

$f(x)=3e^x-2x-2$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}yf(x)dx+[f(x)-x^2]dy=\int_0^1[f(1)-1]dy=f(1)-1=3e-5$$ 【答案】 C

(89) 方程 $x^2y''+2xy'-2y=0$ 的通解为

(A) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.　　(B) $y=(C_1+C_2x)e^x$.

(C) $y=C_1x+C_2x^2$.　　(D) $y=\dfrac{C_1}{x^2}+C_2x$.

【分析】 这是一个欧拉方程，令 $x=e^t$，$D=\dfrac{d}{dt}$ 原方程化为

$$D(D-1)y+2Dy-2y=0$$

即 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-2y=0$

特征方程为 $r^2+r-2=0$，$r_1=-2$，$r_2=1$

通解 $y=C_1e^{-2t}+C_2e^t$

即 $y=\dfrac{C_1}{x^2}+C_2x$.　　【答案】 D

(90) 设曲线 $y=y(x)$ 满足 $xdy+(x-2y)dx=0$，且 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转的旋转体体积最小，则 $y(x)=$

(A) $x-\dfrac{1}{4}x^2$.　　(B) $x+\dfrac{5}{4}x^2$.

(C) $x-\dfrac{5}{4}x^2$.　　(D) $x+\dfrac{1}{4}x^2$.

【分析】 原方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=-1$，其通解为

$$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int -e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x+Cx^2$$

曲线 $y=x+Cx^2$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围区域绕 x 轴旋转一周的旋转体体积为

$$V(C)=\pi\int_0^1(x+Cx^2)^2dx=\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{C}{2}+\frac{C^2}{5}\right)$$

令 $V'(C)=\pi\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2C}{5}\right)=0$，得 $C=-\dfrac{5}{4}$，$V''(C)=\dfrac{2}{5}\pi>0$

$C=-\dfrac{5}{4}$ 是唯一的极值点，且为极小值点，则为最小值点，$y=x-\dfrac{5}{4}x^2$.　【答案】 C

(91) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=0$ 的解为________.

【答案】 $y=x(1-e^x)+2$

【分析】 由 $y=(C_1+C_2x)e^x$ 是方程 $y''+ay'+by=0$ 通解知，$r=1$ 是齐次方程特征方程二重根，则特征方程为

$$(r-1)^2=0$$

即　$r^2-2r+1=0$

则 $a=-2,b=1$

非齐次方程 $y''-2y'+y=x$ 有特解

$$y=x+2$$

非齐次通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$

由 $y(0)=2,y'(0)=0$ 知

$$\begin{cases}C_1+2=2\\C_1+C_2+1=0\end{cases}$$

$$C_1=0,C_2=-1$$

$$y=-xe^x+x+2=x(1-e^x)+2。$$

(92) 方程 $y'''-y'=0$ 满足条件 $y\Big|_{x=0}=3,y'\Big|_{x=0}=-1,y''\Big|_{x=0}=1$ 的特解为________。

【答案】 $y=2+e^{-x}$

【分析】 方程 $y'''-y'=0$ 的特征方程为

$$r^3-r=0$$

即 $r(r^2-1)=0$， $r_1=0,r_2=1,r_3=-1$

则原方程通解为 $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}$

由初始条件得

$$\begin{cases}3=C_1+C_2+C_3\\-1=C_2-C_3\\1=C_2+C_3\end{cases}$$

解得 $C_2=0,C_3=1,C_1=2$

(93) 方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为________。

【答案】 $y=e^{-x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$

【分析】 方程 $y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为

$$r^2+2r+5=0$$

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm2i$$

则原方程的通解 $y=e^{-x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$。

(94) 方程 $y''+\frac{2}{1-y}y'^2=0$ 的通解为________。

【答案】 $-\frac{1}{y-1}=C_1x+C_2$

【分析】 在方程 $y''+\frac{2}{1-y}y'^2=0$ 中令 $y'=P$，则 $y''=\frac{dP}{dy}P$

$$P\frac{dP}{dy}+\frac{2}{1-y}P^2=0$$

$$\frac{dP}{P}=\frac{2}{y-1}dy$$

$$\ln|P|=\ln(y-1)^2+\ln C_1$$

$$P=C_1(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=C_1(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{(y-1)^2}=C_1dx$$

$$-\frac{1}{y-1}=C_1x+C_2.$$

(95) 方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^4}$ 的通解为________.

【答案】 $x=y\left(\frac{1}{3}y^3+C\right)$

【分析】 将方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^4}$ 变形得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^4}{y}$$

即 $\frac{dx}{dy}-x\cdot\frac{1}{y}=y^3.$

这是一个线性方程，由线性方程通解公式得

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y^3\cdot e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)=y\left(\int y^2dy+C\right)=y\left(\frac{1}{3}y^3+C\right).$$

(96) 方程 $xy'+2y=\sin x$ 满足条件 $y\Big|_{x=\pi}=\frac{1}{\pi}$ 的特解为________.

【分析】 由 $xy'+2y=\sin x$ 知

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{\sin x}{x}$$

由通解公式知，

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x^2}\left(\int x\sin x dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x+C)$$

由 $y|_{x=\pi}=\frac{1}{\pi}$ 知 $C=0$.

(97) 方程$(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$满足条件$y(1)=0$的特解为________.

【答案】 $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$

【分析】 由$(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$知

$$\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

令$\frac{y}{x}=u$，则$y=xu$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

则 $(u+\sqrt{1+u^2})-u-x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln x+\ln C$$

$$u+\sqrt{1+u^2}=Cx$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=Cx\text{，即 }y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$$

由$y|_{x=1}=0$知$C=1$

则 $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2$， $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$.

(98) 方程$xy'-x\sin\frac{y}{x}-y=0$的通解为________。

【答案】 $\tan\frac{y}{2x}=Cx$

【分析】 由$xy'-x\sin\frac{y}{x}-y=0$知

$$y'-\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}=0$$

令$\frac{y}{x}=u$，则$y=xu$，$y'=u+xu'$

$$u+xu'-\sin u-u=0$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sin u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \frac{\mathrm{d}u}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\tan\frac{u}{2}}{\tan\frac{u}{2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right|=\ln|x|+\ln C,\quad \tan\frac{u}{2}=Cx,\quad \tan\frac{y}{2x}=Cx.$$

(99) 方程$(1+x)\mathrm{d}y+(1-2\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}x=0$ 的通解为________.

【答案】 $(1+x)(\mathrm{e}^{y}-2)=C$

【分析】 由$(1+x)\mathrm{d}y+(1-2\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}x=0$ 知

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-2\mathrm{e}^{-y}}=\frac{-1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^{y}-2}=\frac{-1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$\ln|\mathrm{e}^{y}-2|=-\ln|1+x|+\ln C$$

$$(1+x)(\mathrm{e}^{y}-2)=C.$$

(100) 方程 $y'=1+x+y^2+xy^2$ 的通解为________.

【答案】 $y=\tan\left[\frac{1}{2}(1+x)^2+C\right]$

【分析】 由 $y'=1+x+y^2+xy^2$ 知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x)(1+y^2)$$

则 $$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1+x)\mathrm{d}x$$

$$\arctan y=\frac{1}{2}(1+x)^2+C$$

$$y=\tan\left[\frac{1}{2}(1+x)^2+C\right].$$