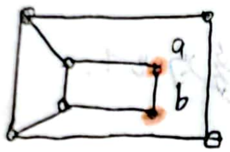
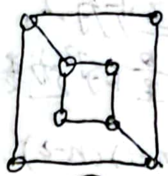
4. 图(a).



图一

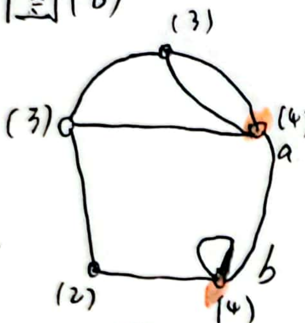


图二

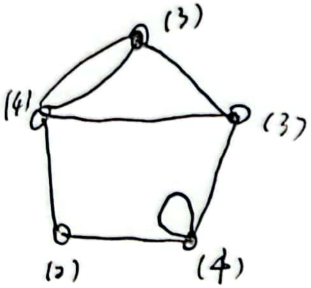
图一中存在如图所示的 a, b两点，a, b均度数为2

且 a, b相邻，但在图二中不存在这样的两点。

图(b)



图一

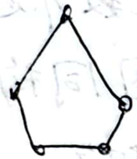


图二

图一中存在 a, b两点，a, b均度数为4，

且 a, b相邻，但图二中不存在这样的两点。

5. (1)



补图

自补图

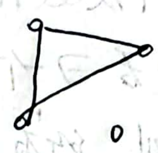
(2) 无3个结点的自补图。

若有，则其中一个图的边数为 $\frac{3\times2}{2\times2}=1.5$，矛盾

有4个结点的自补图

若有，则其中一个图的边数为 $\frac{4\times3}{2\times2}=3$

① 若有2个连通支



补图

不是自补图

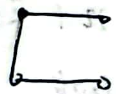
② 若只有1个连通支

a)

补图

不是自补图

b)



补图

是自补图 ✓

(5)

证明:

由自补图定义,则原图与补图同构.

则原图边数与补图边数必相等.

又由完全图边数 = 原图边数 + 补图边数.

则完全图边数必为偶数.

6. 构建图: 每个人为一个结点. 若两人为朋友,则在这两个点之间连接一条边.

将命题转化为: 在有2个或2个以上点的无向图中.

总存在两个度数相同的点。

证明: ① 若 ∃ 一个点的度数为 0,

则 ∀ 点的度数 $\leq n-2$. (n为总点数)

由抽屉原理. n个点的度数在 0 到 $n-2$ 之间.

必存在两个度数相等的点.

② 若 ∀点的度数不为0

则 n个点的度数在 1 到 $n-1$ 之间. 由抽屉原理.

必存在两个度数相等的点。

∴ 综上,原命题即证.

10. 假设 G 不是连通图.

设 G 的连通分支为 i.

则 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_i$

$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_i$

$$m = \frac{1}{2}\left((n_1-1)n_1 + (n_2-1)n_2 + \cdots + (n_i-1)n_i\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\left((n_1-1)(n-1) + (n_2-1)(n-1) + \cdots + (n_i-1)(n-1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(n-i)$$

$$\le \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

与 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 矛盾

$\therefore G$ 是连通图.

14. 强连通支:

$G_1 = (\{v_1, v_2, v_3, v_9, v_{10}\}, \{(v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_9), (v_9,v_{10}), (v_{10},v_1)\})$

$G_2 = (\{v_4\}, \phi)$;

$G_3 = (\{v_8\}, \phi)$;

$G_4 = (\{v_7\}, \phi)$;

$G_5 = (\{v_5\}, \{(v_5,v_5)\})$;

$G_6 = (\{v_6\}, \phi)$;

单向连通支: $G_1 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{(v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_4)\})$;

$G_2 = (\{v_7, v_8, v_4\}, \{(v_7,v_8), (v_8,v_4)\})$;

$G_3 = (\{v_5\}, \{(v_5,v_5)\})$;

$G_4 = (\{v_6\}, \phi)$;

弱连通支: $G_1 = (\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_7, v_9, v_{10}\}, \{(v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_4,$
$(v_8,v_7), (v_2,v_9), (v_3,v_9$

$G_2 = (\{v_5\}, \{(v_5,v_5)\})$, $G_3 = (\{v_6\}, \phi)$;

20.

证明：设 $v_1, v_2 \cdots v_{2k}$ 为 2k个奇结点

在 v_i 和 v_{i+k} 之间连一条新边 e_i $(i=1,\cdots,k)$

则在图中，每个结点的度均为偶数.

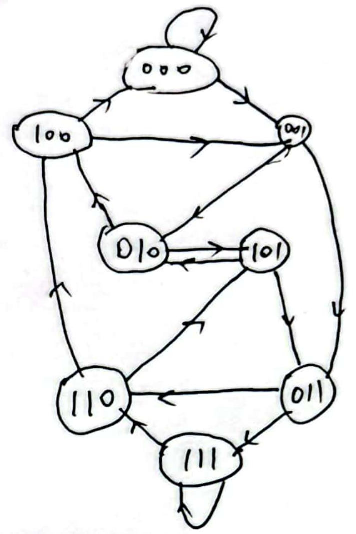
必存在欧拉图.

此时，去除 e_i $(i=1,\cdots,k)$

则为k条简单路 $C_1, C_2, C_3 \cdots C_k$.

且 $E(G)=E(C_1)\cup E(C_2) \cdots \cup E(C_k)$

21.



0000
0001
0011
0111
1111
1110
1100
1001
0010
0101
0110
1101
1010
0100
1000

∴ 序列：00001111010 1101