线性代数与解析几何期末复习二

第六、七章

1. 基本内容小结

2. 典型例题讲解

数学与统计学院

第六章　矩阵的特征值与特征向量

基本内容：

一、特征值与特征向量的定义和性质

二、相似矩阵与矩阵的相似对角化

三、实对称矩阵的对角化

一、特征值与特征向量的定义

$$Ax = \lambda x = \lambda I x$$

$\Leftrightarrow$ 非零向量 x 满足 $(\lambda I - A)\,x = 0$（零向量）

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数行列式 $|\lambda I - A| = 0$

特征方程

特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

- 特征方程 $|\lambda I - A| = 0$
- 特征多项式 $|\lambda I - A|$

二、特征值与特征向量的性质

设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\Lambda\ ,\lambda_n$ ，则

性质

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\Lambda\ +\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\Lambda\ +a_{nn}$

(2) $\lambda_1\lambda_2\Lambda\ \lambda_n=|A|$

设 λ 是方阵 A 的特征值，对应的一个特征向量为 x

性质

(1) $k\lambda$ 是 kA 的特征值，对应的特征向量仍为 x.

(2) λ^m 是 A^m 的特征值,对应的特征向量仍为 x, m 为正整数

(3) $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+L\ +a_m\lambda^m$

是 $\boxed{f(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2+L\ +a_mA^m}$ 的特征值.

当 A 可逆时，$\dfrac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，$\dfrac{|A|}{\lambda}$ 是 A^* 的特征值，

对应的特征向量仍为 x,且 $\lambda\neq O$

性质6.1.4 不同特征值所对应的特征向量线性无关.

推广：不同特征值对应的各自线性无关的特征向量并在一块，所得的向量组仍然线性无关。

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

λ_1 —— $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1r_1}$ 线性无关

λ_2 —— $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2r_2}$ 线性无关

$\vdots$

λ_m —— $x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mr_m}$ 线性无关

则 $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1r_1}; x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2r_2}; \cdots; x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mr_m}$ 线性无关

性质6.1.5

方阵A的任何特征值的几何重数不大于代数重数

三、矩阵相似的定义及性质

设A，B都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$

则称 A相似于B，或矩阵A与B相似. $\boxed{\text{记作}: A \sim B}$

如果A与对角矩阵相似，则称A是可对角化的.

相似矩阵的性质

(1) 相似关系具有反身性，对称性，传递性;

(2) A与B相似, 则$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(B)$;

(3) A与B相似, 则 $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$;

从而A与B有相同的特征值;

(4) A与B相似, 则 $|A| = |B|$;

(5) A与B相似, 则 $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$;

(6) A与B相似, 则 $\varphi(A)$ 与 $\varphi(B)$ 相似;

其中 $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

(7) A与B相似, 且A可逆, 则 A^{-1}与 B^{-1}相似.

四、矩阵的对角化

n阶矩阵A可对角化(与对角阵相似) $\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \Leftrightarrow AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

注意：这时P和对角阵是如何构成的？

n阶矩阵A可对角化 $\Longleftrightarrow$ 是A的每个特征值的代数重数等于它的几何重数.

五、实对称矩阵的对角化

实对称矩阵的特征值都是实数.

实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交.

对于任一n阶实对称矩阵A, 必存在n阶正交矩阵P, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的全部特征值.

(2) P的列向量组为A的n个标准正交的特征向量.

推论 设λ是实对称矩阵的特征值, 则:

λ的几何重数与其代数重数必相等.

例1

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&a&1\\1&b&2\end{pmatrix},$$

(1)若A的特征值为4,1,1,求a,b;

(2)若A的特征值为4,2,求a,b;

(3)若$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是$A$的一个特征向量,求$a,b$及$\alpha$所对应的特征值.

解

(1) $a+2+2=4+1+1$

$|A|=4*1*1$

$\Longrightarrow \begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}.$

(2) $|4I-A|=0$

$|2I-A|=0$

$\Longrightarrow \begin{cases}a=3\\b=0\end{cases}.$

(3) $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&a&1\\1&b&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}\lambda=4\\a=2\\b=1\end{cases}$

例2 设$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，有3个特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=3$;

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+8\boldsymbol{E}$，求$\det(\boldsymbol{B})$

解 设$f(x)=x^2-4x+8$,则$\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$的3个特征值为:

$$f(\lambda_1)=8,\ f(\lambda_2)=8,\ f(\lambda_3)=5$$

$$\therefore\quad \det(\boldsymbol{B})=8\times8\times5=320.$$

***B*的三个特征值的乘积=*B*的行列式**

例3 已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$；

$f(x)=x^3-x+2$，求$f(A)$.

∵ A的3个特征值为-1, 0, 1. A为三阶方阵

∴ A有3个单特征. 故可对角化.

存在方阵P. P可逆且使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}$

$\therefore A=P\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}$

$f(A)=A^3-A+2E$

$A^3=P\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}^3P^{-1}$

即 $A^3=P\begin{bmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}=A$

$\therefore f(A)=A^3-A+2E=A-A+2E=2E.$

例4 设矩阵$A_{n\times n}$满足$A^2=A$(称A为**幂等矩阵**),

证明:A必相似于对角矩阵.

解: 设矩阵$A_{n\times n}$的特征值为λ, 特征向量为x,则$Ax=\lambda x$

即$(A^2-A)x=(\lambda^2-\lambda)x.$

由$A^2=A \Rightarrow A^2-A=0$

故有: $\lambda^2-\lambda=0$ 得$\lambda=0$或$\lambda=1$.

若0不是A的特征值 则$|0I-A|\neq 0$, 即$|-A|\neq 0$, $\therefore |A|\neq 0$, A可逆

$A^2=A$两边左乘A^{-1},可得$A=I$,故A可对角化.

若1不是A的特征值 则$|1\cdot I-A|\neq 0$, $\therefore I-A$可逆

$A^2=A$即$(I-A)A=O$,两边左乘$(I-A)^{-1}$,

可得$A=O$,故A可对角化.

若0和1都是A的特征值

由$(I-A)x=0$知, 属于λ=1的线性无关特征向量有$n-r(I-A)$个.

由$(0\cdot I-A)x=0$知, 属于λ=0的线性无关特征向量有$n-r(A)$个.

A的线性无关特征向量有$n-r(I-A)+n-r(A)=2n-\left[r(I-A)+r(A)\right]$个

由于 $A^2=A \Rightarrow A(A-I)=0 \Rightarrow r(A)+r(A-I)\le n$

又 $r(A)+r(A-I)=r(A)+r(I-A)\ge r(A+(I-A))=r(I)=n$

所以 $r(A)+r(A-I)=n.$

A的线性无关特征向量有$2n-n=n$个,

A可对角化.

推广：设A为n阶方阵，且$A^2=aA$，$a\neq 0$.则A可对角化.

例5

设矩阵A与B相似,即存在可逆阵P,使得$P^{-1}AP=B$,且向量x是A的属于特征值λ_0的特征向量,求矩阵B的属于特征值λ_0的特征向量.

习题6.2,A 3

解 由已知, $Ax=\lambda_0 x\ (x\neq 0)$. 由$P^{-1}AP=B$得$A=PBP^{-1}$.

$$PBP^{-1}x=\lambda_0 x \quad \Rightarrow B(P^{-1}x)=\lambda_0(P^{-1}x)$$

注意到$P^{-1}x\neq 0$,

所以$P^{-1}x$是矩阵B的属于特征值λ_0的特征向量.

例6 已知3阶矩阵A和3维列向量x,使得向量组x, Ax, A^2x线性无关，且满足$A^3x = 3Ax - 2A^2x$.

设矩阵$P = \begin{pmatrix} x & Ax & A^2x \end{pmatrix}$

(1)求3阶矩阵B,使得$A = PBP^{-1}$;

(2)计算行列式$|A + I|$.

解:(1)要求3阶矩阵B,使得$A = PBP^{-1}$，即$AP = PB$

$$A(x \quad Ax \quad A^2x) = (Ax \quad A^2x \quad A^3x)$$

$$= (Ax \quad A^2x \quad 3Ax - 2A^2x)$$

$$= (x \quad Ax \quad A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)由$A = PBP^{-1} \Rightarrow |A + I| = |PBP^{-1} + I|$

$$= |P(B + I)P^{-1}| = |B + I| = 2$$

例7

A为5阶矩阵，且$r(A-I)=2, r(A-2I)=3$.求$\left|A\right|=?$

例8 设A为n阶矩阵,且A的各行元素之和为零.

证明: $A_{i1} = A_{i2} = \cdots = A_{in}$.($A_{ij}$为$A$的代数余子式).

解 由已知得$A(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}} = 0 \cdot (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}$

矩阵A有特征值0, 对应的特征向量为$(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}$.

齐次线性方程组$Ax = 0$有非零解$(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}$.

$$|A| = 0, AA^* = |A| I = 0$$

A^*的每一列都是齐次线性方程组$Ax = 0$的解.

若$r(A) = n - 1$,则$Ax = 0$的基础解系含有一个解向量$\xi = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}$.

A^*的每一列α_i都可由$\xi = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^{\mathrm{T}}$线性表示, 即$\alpha_i = k_i \xi$.

所以得$A_{i1} = A_{i2} = \cdots = A_{in}$.($A_{ij}$为$A$的代数余子式).

若$r(A) < n - 1$,则$A^* = 0$. 得$A_{i1} = A_{i2} = \cdots = A_{in}$.

例9

设λ_1,λ_2为n阶实对称矩阵A的两个不同特征值，x_1是对应于λ_1的一个单位特征向量.

则矩阵$B=A-\lambda_1 x_1 x_1^T$有两个特征值0，λ_2.

解：设$Ax_1=\lambda_1 x_1, Ax_2=\lambda_2 x_2$.

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, x_1^{\mathrm{T}} x_1 = 1, x_1^{\mathrm{T}} x_2 = 0.$$

$$Bx_1=\left(A-\lambda_1 x_1 x_1^T\right)x_1 = Ax_1-\lambda_1 x_1 x_1^T x_1=\lambda_1 x_1-\lambda_1 x_1=0\cdot x_1=0$$

矩阵B有特征值0,对应的特征向量为x_1.

$$Bx_2=\left(A-\lambda_1 x_1 x_1^T\right)x_2= Ax_2-\lambda_1 x_1 x_1^T x_2=\lambda_2 x_2-\lambda_1 x_1\cdot 0=\lambda_2 x_2$$

矩阵B有特征值λ_2,对应的特征向量为x_2.

例10

设A为n阶方阵$(n \geq 2)$，且$r(A)=1.$

证明：(1)存在n维非零列向量α，β，使得$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$;

(2)存在常数k,满足$A^2=kA$;

(3)求A的所有特征值;

(4)A能否对角化？请说明理由.

第七章　二次曲面与实二次型

基本内容:

一、曲面与空间曲线

二、实二次型的标准化

三、正定二次型与正定矩阵

一、曲面与空间曲线

曲面方程的定义：

如果曲面S 与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系：

（1） 曲面S上任一点的坐标都满足方程；

（2）满足方程的 x, y, z 所对应的点在曲面 S 上；

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面S的方程，而曲面S就叫做方程的图形.

研究空间曲面有两个基本问题：

（1）已知曲面作为点或线的运动轨迹时，求曲面方程.

（讨论柱面、锥面、旋转曲面）

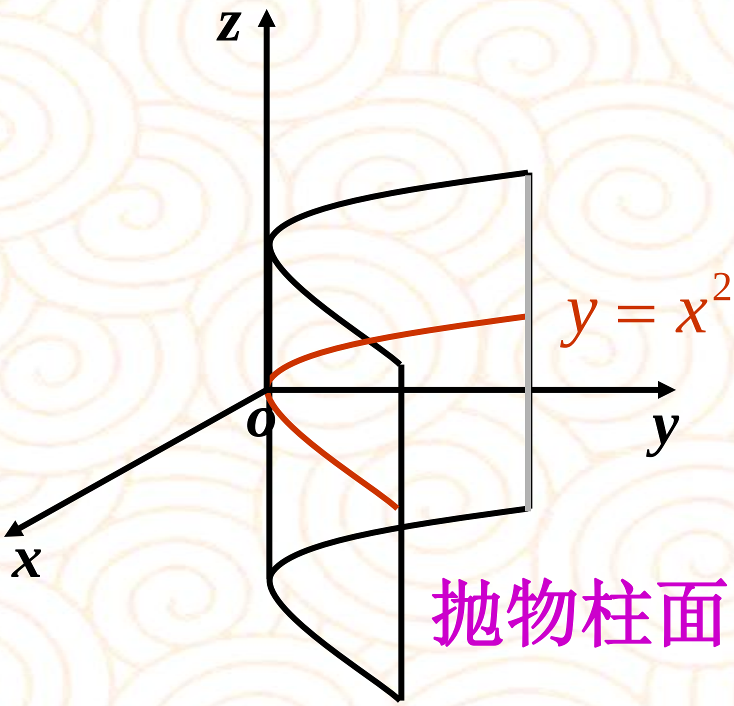
（2）已知曲面方程时，研究曲面的形状.

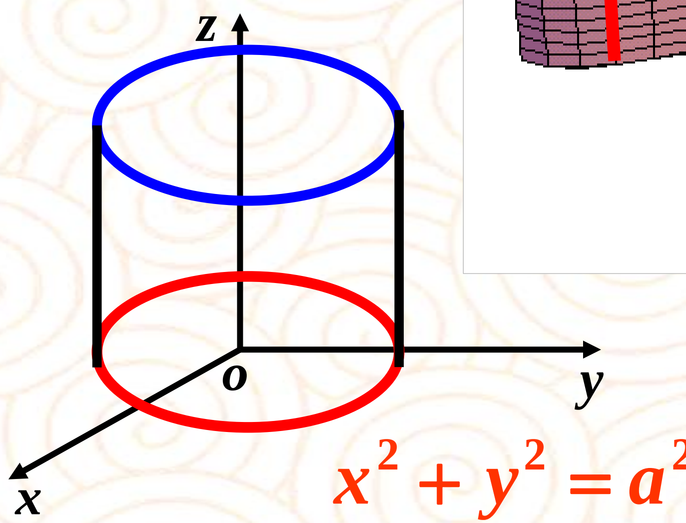
（讨论二次曲面，用截痕法）

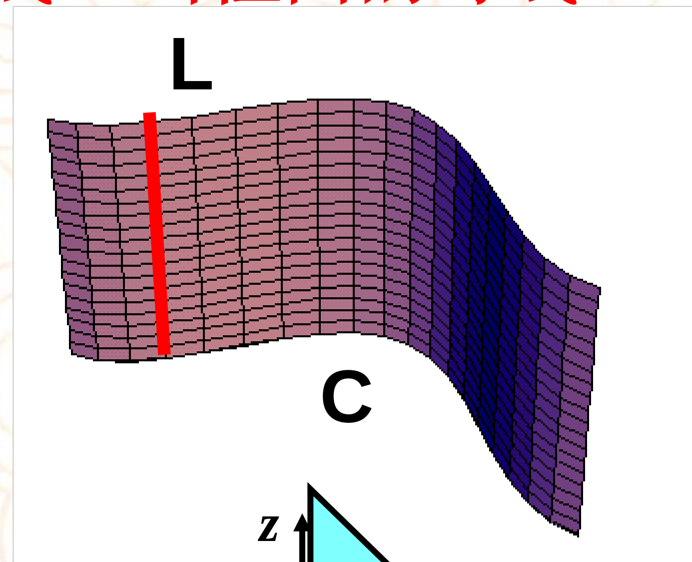
1、柱面

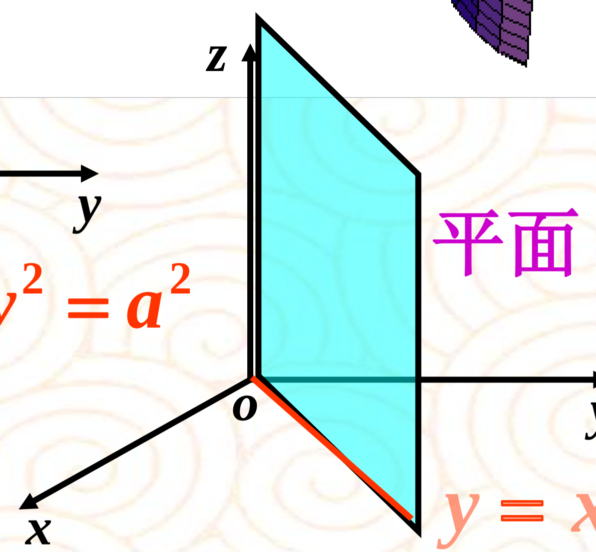
定义 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.

这条定曲线C叫柱面的准线，动直线L 叫柱面的母线.



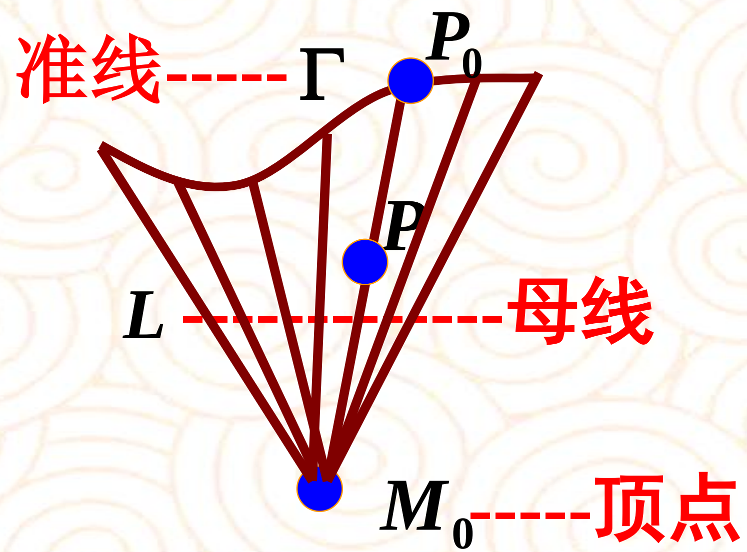






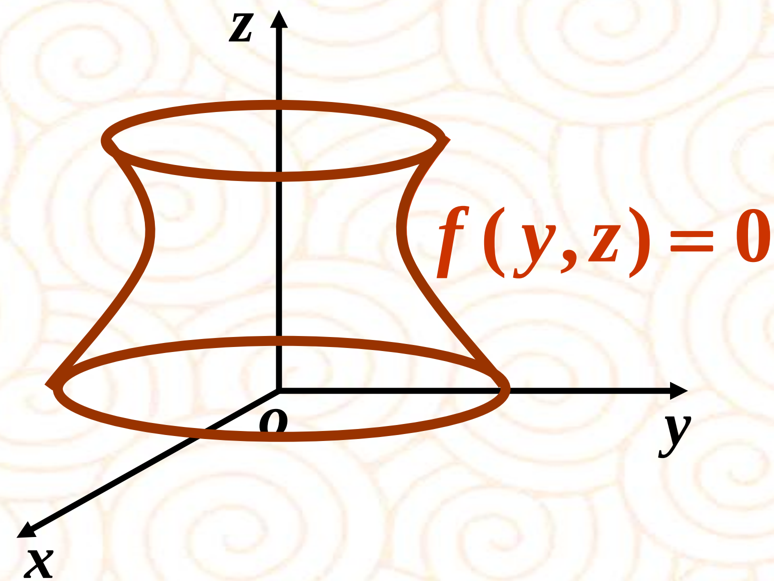
2、锥面

定义 设动直线L沿定曲线Γ移动，移动时L始终通过定点 M_0. 这条由动直线L移动所形成的曲面称为锥面.



3、旋转面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.



这条定直线叫旋转曲面的**轴**.

二、五种典型的二次曲面

二次曲面的定义：

三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面.

相应地平面被称为**一次曲面**.

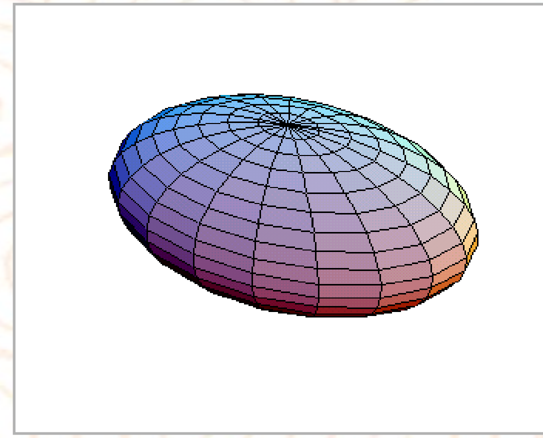
讨论二次曲面性状的**截痕法**：

用坐标面和平行于坐标面的平面去截曲面，考察其截痕（即交线）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的性状.

常见的几种特殊的二次曲面.

（1）椭球面

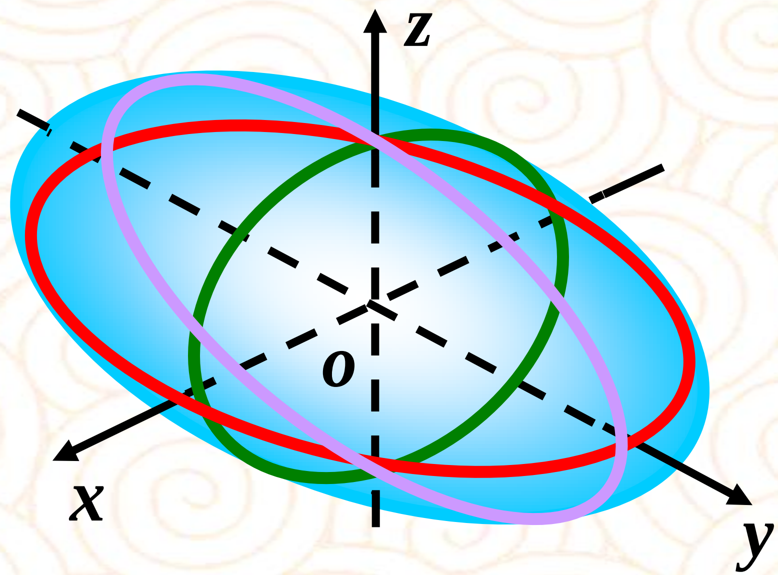
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



椭球面与三个坐标面的交线：

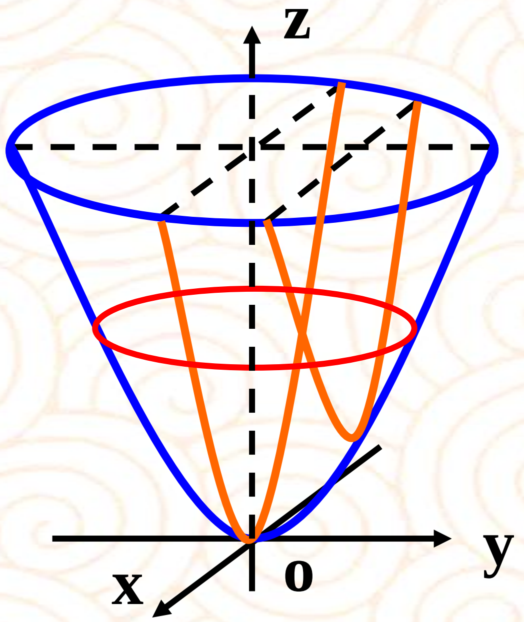
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\\ x=0\end{cases}$$



（2） 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ (p>0,\ q>0)$$



1）曲面在 xoy 平面上方，经过坐标原点 $O(0,0,0)$ ----顶点.

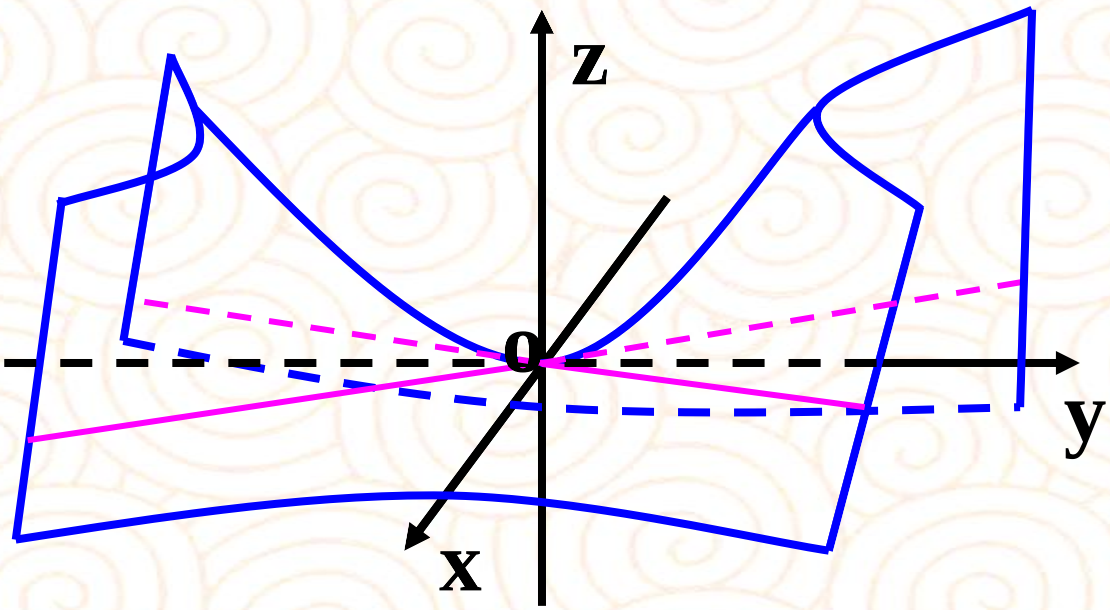
2）与平面 $z=z_1\ (z_1>0)$ 的交线为椭圆.

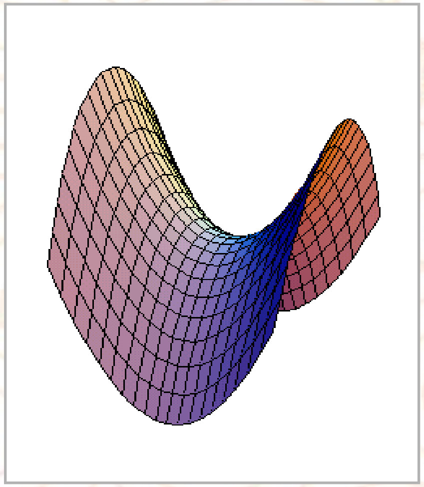
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_1}+\dfrac{y^2}{2qz_1}=1\\ z=z_1\end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上.

（3）双曲抛物面（马鞍面）

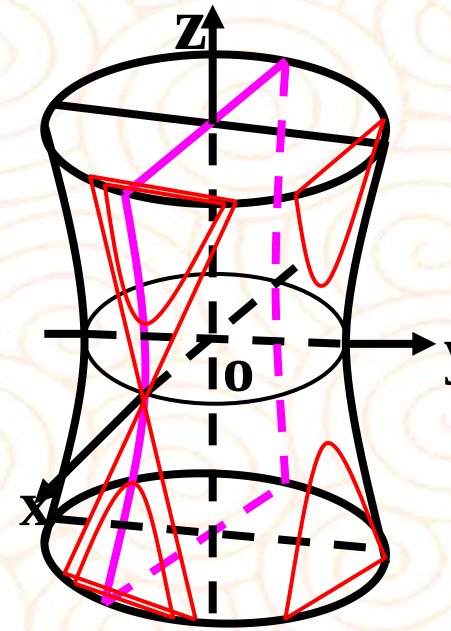
$$-\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad (p>0,\ q>0)$$





（4）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



与平面 $z=z_1$ 的交线为椭圆.

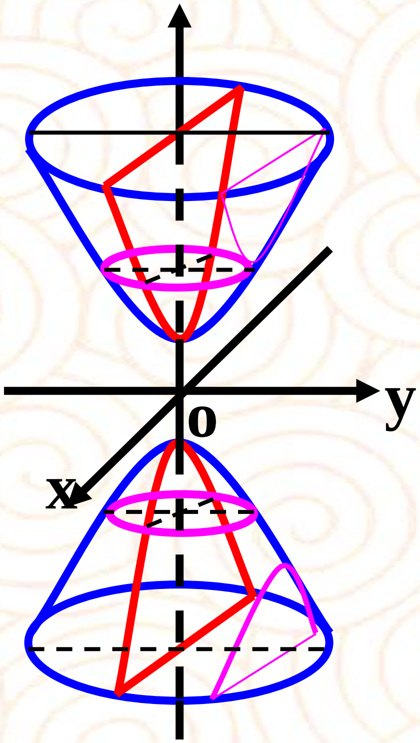
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z_1^2}{c^2}\\ z=z_1\end{cases}$$

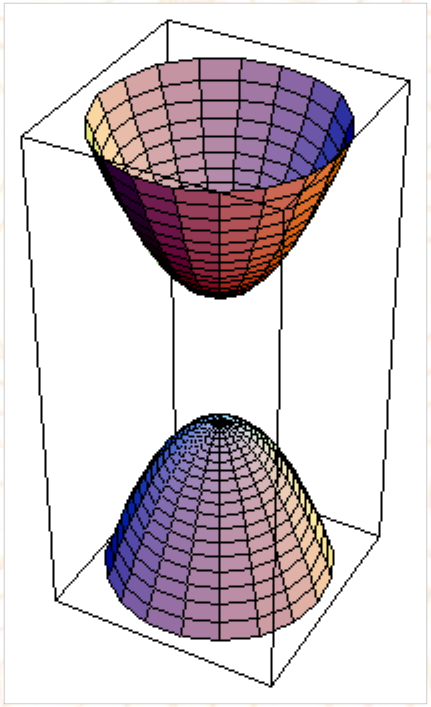
当 z_1 变动时，这种椭圆的**中心**都在 z 轴上.

与坐标面 $xoy(z=0)$ 的交线为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$

（5）双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$





一、二次型及其基本概念

定义

含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \quad (1)$$

称为二次型.

或记为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$

注

①当系数与向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为实数时，称为实二次型;

②当系数与向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 为复数时，称为复二次型.

定义 只含有平方项的二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

称为二次型的**标准形**.

定义 特别地，称

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2\cdots-x_{p+q}^2(p+q\le n)$$

为二次型的**规范形**.

二次型的矩阵表示

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$=x^TAx,\text{其中}x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

称实对称矩阵A为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵，并称矩阵A的秩为二次型 $f(x)$ 的秩

由此可知，实二次型的标准型对应的矩阵为实对称矩阵

定义 设 A, B为 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆阵 P，使得 $\boldsymbol{P^T AP = B}$，则称 A合同于 B, 记为 $\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{B}$.

性质 ①反身性

②对称性

③传递性

④合同矩阵具有相同的秩.

⑤与对称矩阵合同的矩阵也是对称矩阵.

二、化二次型为标准形

对于二次型，我们讨论的主要问题是：寻求可逆的线性变换，将二次型化为标准形.

设 $$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \mathrm{L} + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \mathrm{L} + c_{2n}y_n, \\ \quad \mathrm{L\ L\ L\ L\ L\ L\ L\ L\ L\ L} \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \mathrm{L} + c_{nn}y_n \end{cases} \qquad (2)$$

记 $C = \left(c_{ij}\right)$, 若|C| ≠0，则④称为可逆线性变换.
若C为正交矩阵，则④称为正交线性变换.

记作 $x = Cy$

将其代入 $f = x^T Ax$ 有

$$f = x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T\left(C^T AC\right)y.$$

注：二次型经过可逆线性变换仍为二次型.

由于对任意的实对称矩阵A，总有正交矩阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda$，即$P^{T}AP=\Lambda$.把此结论应用于二次型，有

定理7.2.1对于实二型次$f(x)=x^{T}Ax$（其中A为n阶实对称矩阵），总存在正交变换$x=Py$(P为正交矩阵），使得用它可将f化成标准型

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\Lambda+\lambda_n y_n^2,$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n$是$f$的矩阵$A=(a_{ij})$的特征值.

在此提出问题：正交变换化二次型为标准形与用配方法化二次型为标准形异同点是什么？

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

1\. 将二次型写成矩阵形式$f = x^T Ax$，求出A;

2. 求出A的所有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \Lambda, \lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量$\xi_1, \xi_2, \Lambda, \xi_n$;

4. 将特征向量$\xi_1, \xi_2, \Lambda, \xi_n$正交化，单位化，得$\eta_1, \eta_2, \Lambda, \eta_n$，记$C = (\eta_1, \eta_2, \Lambda, \eta_n)$;

5. 作正交变换$x = Cy$，则得f的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \Lambda + \lambda_n y_n^2.$$

三、惯性定理

定理 7.2.3 设二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的秩为 r，则不论用怎样的可逆线性变换把 f 化成标准形，标准形中系数为正的项的个数 p（从而系数为负的项的个数 $r-p$）由 f 本身唯一确定，并不依赖于所用的线性变换.

p——————正惯性指数；　$r-p$——————负惯性指数

二次型的规范形是唯一的

等价的二次型有相同的规范型

四、正定二次型

定义（正定二次型与正定矩阵）

设$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$是一个$n$元实二次型($A$为$n$阶实对称矩阵),如果$\forall x=(x_1,\cdots x_n)^T\in R^n$,

且$x\neq 0$(即$x_1,\cdots,x_n$不全为零),恒有$f(x)=x^TAx>0$则称二次型f为正定二次型,并称实对称矩阵A为正定矩阵.

定理7. 2. 4　二次型经可逆线性变换，其正定性不变

定理7. 2.4亦表明A与C^TAC有相同的正定性.即合同的矩阵有相同的正定性.

定理7.2.6 实对称矩阵**A**为正定矩阵的充要条件是**A**的所有特征值都大于零

推论7.2.1 **n**元二次型 f 为正定二次型的充要条件是 f 的正惯性指数为**n.**

推论7.2.2 如果 **A**为正定矩阵,则**det(A)>0.**

定理7.2.7 实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是存在可逆矩阵M,使得 $A = M^T M$

即**A**与单位矩阵**I**合同

定理7.2.8 实对称矩阵为正定矩阵的充要条件是$A=(a_{ij})_{m\times n}$的各阶顺序主子式都大于零,即

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \Lambda\quad ,\quad \Delta_n = |A| > 0$$

其它类型的二次型

定义7.2.4 一个n阶实对称矩阵A和二次型$x^T Ax$称为

半正定的， 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0,$都有$x^T Ax \geq 0,$

且存在$x_0 \neq 0,$使得$x_0{}^T Ax_0 = 0;$

负定的， 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0,$都有$x^T Ax < 0;$

半负定的， 如果对$\forall x \in R^n, x \neq 0,$都有$x^T Ax \leq 0,$

且存在$x_0 \neq 0,$使得$x_0{}^T Ax_0 = 0;$

不定的， 如果$x^T Ax$既能取到正值，又能取到负值.

A是负定的 $\Longleftrightarrow$ **－A是正定的**

实对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是：

（1）奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正；

（2）A的所有特征值为负.

例1

求准线为$\begin{cases} xy = 4 \\ z = 0 \end{cases}$,母线平行于向量$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$的柱面方程.

例2 已知圆锥面的顶点为（1,2,3），轴垂直于平面$2x+2y-z+1=0$,母线与轴的夹角为 30^0 ，试求锥面的方程

例3 若n阶矩阵A是正定矩阵且是正交矩阵，则二次型$x^T Ax$经正交变换$x = Py$化成的标准形为__________.

解 若A是正交矩阵，则A的特征值的模是1.

若A又是正定矩阵，则A是实对称矩阵，特征值都是1.

所以二次型$x^T Ax$经正交变换$x = Py$化成的标准形为

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

例4 A_n为正定矩阵，B_n为反对称矩阵. 证明：$A - B^2$为正定矩阵

例5 设A, B均为n阶实对称矩阵，且A的特征值全大于a，B的特征值全大于b，其中a, b均为实数.

证明：矩阵$A+B$的特征值全大于$a+b$.

（同阶正定矩阵之和为正定矩阵）

例6 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 与 $D=\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 是否相似？

习题7.2 A 4

是否合同？

解 由 $|A-\lambda I|=0$，得 A 的三个特征值 $\lambda_1=3, \lambda_2=\lambda_3=0.$

所以 A 与 B 相似. 由于 A 是实对称矩阵, 所以 A 与 B 也合同.

A 与 D 不相似, 因为它们的特征值不同. B 与 D 不相似.

令 $C=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$， 则 $C^TBC=D$, B 与 D 合同.

利用合同的传递性, A 与 D 合同.

相似：$P^{-1}AP=D$　　**合同**：$C^TAC=D$

例7 设$f = x^T Ax$为n元实二次型，存在n维实列向量x_1, x_2，使$x_1^T Ax_1>0$；$x_2^T Ax_2<0$. 证明：存在n维实列向量$x_0 \neq 0$，使$x_0^T Ax_0 = 0$.

证明： 由题设条件知：$f = x^T Ax$为不定二次型.

因此f的正惯性指数$p > 0$；且f的负惯性指数$q > 0$.

于是存在可逆线性变换$x = Cy$，

可将f化成规范形$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2$

令n维向量$y_0 = \left(0, \cdots, 0, 1, 1, 0, \cdots, 0\right)^{\mathrm{T}}$ 则$x_0 = Cy_0 \neq 0$

且使$f(x_0) = x_0^T Ax_0 = 0$.

例8 设A, B都为实对称矩阵，且有相同的特征向量.

求证：AB也为对称矩阵.

（实对称矩阵一定能对角化；两个对角矩阵可交换）

例9　证明：A为n阶正定矩阵$\Leftrightarrow$存在n维线性无关的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$满足$A=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_n\alpha_n^T$.

证明：A为n阶正定矩阵$\Leftrightarrow$存在n阶可逆矩阵M,满足$A=MM^T$

$M=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\Rightarrow A=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\alpha_n\alpha_n^T$.

例10　设n阶矩阵A满足$A^2=I$.证明：$5I-A$可逆.

证明：n阶矩阵A满足$A^2=I\Rightarrow A$的特征值只能是±1.

例11　设实对称矩阵A满足$A^3+A^2+A=3I$.求矩阵A.

（实对称矩阵的特征值为实数）

例12

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是n阶正定矩阵，A_{n-1}表示A左上角的$n-1$阶主子矩阵，

证明:$(1)\det(A)\le a_{nn}\cdot\det(A_{n-1})$;$(2)\det(A)\le a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$.

证明： (1)将矩阵A分块$A=\begin{bmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^{\mathrm T} & a_{nn}\end{bmatrix}$,给等式两端左乘$\begin{bmatrix}I_{n-1} & 0\\ -\alpha^{\mathrm T}A_{n-1}^{-1} & 1\end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix}I_{n-1} & 0\\ -\alpha^{\mathrm T}A_{n-1}^{-1} & 1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}I_{n-1} & 0\\ -\alpha^{\mathrm T}A_{n-1}^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^{\mathrm T} & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ 0 & a_{nn}-\alpha^{\mathrm T}A_{n-1}^{-1}\alpha\end{bmatrix}$$

$$|A|=\left|\begin{bmatrix}I_{n-1} & 0\\ -\alpha^{\mathrm T}A_{n-1}^{-1} & 1\end{bmatrix}A\right|=\begin{vmatrix}I_{n-1} & 0\\ -\alpha^{\mathrm T}A_{n-1}^{-1} & 1\end{vmatrix}|A|=\begin{vmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ 0 & a_{nn}-\alpha^{\mathrm T}A_{n-1}^{-1}\alpha\end{vmatrix}=(a_{nn}-\alpha^{\mathrm T}A_{n-1}^{-1}\alpha)|A_{n-1}|$$

所以得:$|A|\le a_{nn}|A_{n-1}|$

（2）由$|A|\le a_{nn}|A_{n-1}|$，类推得$|A_{n-1}|\le a_{(n-1)(n-1)}|A_{n-2}|$

以次类推得$\det(A)\le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

例13

设A为n阶实对称矩阵，记实数集合$f(x)=\left\{x^{\mathrm{T}}Ax \,\middle|\, x\in R^n, \|x\|=1\right\}$,

证明：$f(x)$的值域为闭区间$\left[\lambda_1，\lambda_2\right]$，其中$\lambda_1$，$\lambda_2$分别是$A$的最小和最大特征值.