概率论与数理统计答案

强基数学 001 王瑞恒

金禾 2101 许祺

电气 2105 周洋

彭康学导团

April 16, 2023

Contents

1 第一章

✍ 题目 1

(1) 假设 ω_1, ω_2 分别表示取到白球、黑球，则 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

(2) 接 (1)，此时 $\Omega = \{(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2)\}$

(3) 黑球只有两个，故 $\Omega = \{0, 1, 2\}$

(4) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(5) 至少要生产 10 件，所以 $\Omega = \{n : n \geq 10, n \in \mathbb{N}\}$

(6) 此处为方便我们记 1 为合格，0 为不合格。

那么 $\Omega = \{00, 100, 0100, 0101, 0110, 1100, 10100, 0111, 1011, 1101, 1110, 1111\}$

(7) 以靶心为直角坐标原点，则 $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

✍ 题目 2

提要：交事件直接写在一起，并事件用 $\cup$ 来进行连接.

这一类的题目属于事件的联系问题，考试常常考察对文字说明的转化以及关系的化简。此题就是对于文字转化为数学表达式，需要着重注意。

(1):$A\overline{BC}$，注意这里的横杠就直接连起来写就可以

(2):$A\overline{BC} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{AB}C$　题目中的恰有一个存在三种情况，所以这样这么写。

(3):$A \cup B \cup C = \overline{ABC}$　与下面的第五问是对立的情况。

(4):$\overline{AB \cup BC \cup AC} = \overline{ABC} \cup (A\overline{BC} \cup B\overline{AC} \cup C\overline{AB})$　其实直接说明和用对立事件说明也差不多。注意怎么表达：至少发生两个事件。

(5):$\overline{ABC}$

(6):$\overline{A}(B\cup C)$，对于题干这种双要求，就是写成交事件的意思，分别表达然后写在一起即可。

总结：学会如何表达“至少”这个关系。

✍ **题目 3**

(1) 爱好数学的班干部男生

(2) 爱好数学的非班干部女生

(3) 非班干部的女生

(4) 不爱好数学的非班干部男生

方法：就是对于第二题的反向。

✍ **题目 4** (1) $[1,4]$ (2) $(2,3]$ (3) $[0,1)\cup(3,5]$ (4) $[1,2]$

✍ **题目 5**

(1) 由于 $AB\cup(A-B)=A$，所以 $AB\cup(A-B)\cup\overline{A}=A\cup\overline{A}=\Omega$

(2) 可得 $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B-AB$，则 $(A\cup B)\overline{(A-B)\cup(B-A)}=AB$，故原式等价于 $AB-B=\emptyset$

✍ **题目 6** 由题意，总共有 $|\Omega|=6^2=36$ 种情况。

至少一次点 6 且两次和为偶数的情况有 $A=\{(2,6),(4,6),(6,6),(6,4),(6,2)\}$，因而 $|A|=5$，则 $P=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=\dfrac{5}{36}$

✍ **题目 7** 1000 个正方体中，两面涂红的即 12 条棱中，每条棱上除去对角块的，有 $(10-2)\times 12=96$ 块，故 $P=\dfrac{96}{1000}=0.096$

✍ **题目 8** 方法一：

若较短线段长度大于 $\dfrac{L}{3}$，则画图可知 C 在 AB 的三等分点分成的三段线段中，中间的

一段上。所以 $P = \dfrac{1}{3}$

方法二:

设 $AC = x, BC = L - x$，则表达为 $P\{\min x, L - x > \frac{L}{3}\}$

$$
\begin{aligned}
P\{\min\{x, L-x\} > \frac{L}{3}\} =& P\{x > \frac{L}{3}, L - x > \frac{L}{3}\} \\
=& p\{\frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3}\} \\
=& \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

✍ **题目 9** 方法一:

我们假设 x 是甲船到达的时刻,y 是乙船到达的时刻,那么得到事件域是 $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 24, 0 \leqslant y$ 是一个正方形，面积为 $S(\Omega) = 576$。如果一艘船要停靠要等待一段时间，那么满足 $-2 \leqslant (y - x) \leqslant 1$ (或者是 $-1 \leqslant (y - x) \leqslant 2$)。这样事件域相当于该正方形中，由 $y = x - 2$ 和 $y = x + 1$ 两条直线中间夹的部分 (也可以是 $y = x + 2$ 和 $y = x - 1$)，画图可以求得该部分面积为 $S(A) = 24^2 - \dfrac{1}{2}(22^2 + 23^2) = \dfrac{139}{2}$(正方形减去上面两个三角形)。因此 $P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)} = \dfrac{139}{1152}$

方法二:

✍ **题目 10** (1):$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.8$。(2):$A \subset B, P(A \cup B) = P(B) = 0.3$。(3):$P(AB) = P(A) = 0.2$。(4):$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$, 所以$P(\overline{A}B) = 0.1$。(5):$P(A - B) = P(\emptyset) = 0$

✍ **题目 11**

(1): 因为 $ABC \subset AC, P(AC) = 0$，由概率非负性有 $P(ABC) = 0$。

(2): 至少一个发生即 $A \cup B \cup C$。由加法公式 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \dfrac{1}{2}$

(3): 三者都不发生即 $\overline{A \cup B \cup C}$，由规范性有 $P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = \dfrac{1}{2}$

✍ **题目 12** 我们由 $P(A) + P(B) = P(AB) + P(A \cup B)$ ，并且 $\max\{P(A), P(B)\} \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1$ 和 $0 \leqslant P(AB) \leqslant \min\{P(A), P(B)\}$ 得到

(1): 当 $A \cup B = \Omega$ 时 $P(AB)$ 最小，最小概率是 0.3。

(2): 当 $A \subset B$ 时 $P(AB)$ 最大，最大概率是 0.6。

(3): 类似上面，$P(A \cup B)$ 最大是 1, 最小是 0.7。

✍ **题目 13** 由数学归纳法，$n=1,2$ 时由加法公式显然成立。假设对 $n=k$ 时成立，那么 $n=k+1$ 时有 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{k+1})=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)+P(A_{k+1})-P(A_1A_{k+1}\cup A_2A_{k+1}\cup\cdots\cup A_kA_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant k}P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})+\cdots+(-1)^{k+1}P(A_1A_2\cdots A_k)+P(A_{k+1})-\sum_{i=1}^{k}P(A_iA_{k+1})+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}P(A_iA_jA_{k+1})-\cdots+(-1)^kP(A_1A_2\cdots A_kA_{k+1})$。合并在一起，就是 $\sum_{i=1}^{k+1}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant k+1}P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})+\cdots+(-1)^{k+2}P(A_1A_2\cdots A_kA_{k+1})$。因而得证。这里我们可以把 $(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)A_{k+1}$ 写成 $A_1A_{k+1}\cup A_2A_{k+1}\cup\cdots\cup A_kA_{k+1}$。

✍ **题目 14** 无放回：$P(A)=\dfrac{A_4^2}{A_{10}^2}=\dfrac{2}{15},P(B)=\dfrac{A_4^1A_6^1}{A_{10}^2}=\dfrac{4}{15},P(C)=\dfrac{A_4^1A_6^1A_2^2}{A_{10}^2}=\dfrac{8}{15},P(D)=\dfrac{A_6^1A_4^1+A_4^1A_3^1}{A_{10}^2}=\dfrac{2}{5}$。

有放回：$P(A)=0.4^2=0.16,P(B)=0.4\times0.6=0.24,P(C)=2\times0.4\times0.6=0.48,P(D)=0.4$。

✍ **题目 15**

(1): 先锁定 5，前面 4 个取两个，$P(A)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{20}$

(2): 锁定 5，后面 5 个取两个，$P(B)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$

(3): 最大号码至少为 3,可能为 3、4。前面 1,2 或 1,2,3 中取两个,$P(C)=\dfrac{C_2^2+C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$

(4): 最大号码只可能大于、等于、小于 5，由 (1)(3) 有 $P(D)=1-P(A)-P(C)=\dfrac{11}{12}$

✍ **题目 16** 超几何分布，$P=\dfrac{C_5^3C_{95}^7}{C_{100}^{10}}$。

✍ **题目 17** 同样超几何分布，$P=\dfrac{C_{80}^7C_{15}^2C_5^1}{C_{100}^{10}}$。

✍ **题目 18**

(1): 8 个白球取 2 个或 5 个黑球取 2 个，$P(A)=\dfrac{C_8^2+C_5^2}{C_{13}^2}=\dfrac{19}{39}$

(2): 考虑其对立 (都是黑球)，$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{C_5^2}{C_{13}^2}=\dfrac{34}{39}$

(3): 考虑其对立 (都是白球，$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{C_8^2}{C_{13}^2}=\dfrac{25}{39}$

✍ **题目 19**

(1): 任选一种花色，该花色的 13 张里取 4 张，$P(A)=\dfrac{4\times C_{13}^4}{C_{52}^4}\approx0.0106$

(2): 每种花色的 13 张里各取一张，$P(B)=\dfrac{13^4}{C_{52}^4}\approx 0.1055$

(3): 与 (2) 互为对立事件，因为至少两种花色相同也就是除去了花色都不同的情况。$P(C)=1-P(B)\approx 0.8945$

(4): 考虑其对立事件 (没有 A, 在余下 48 张里取), $P(D)=1-P(\overline{D})=1-\dfrac{C_{48}^4}{C_{52}^4}\approx 0.2813$

说明，对于扑克（去掉大小王）来讲，一共有 4 种花色，每个花色有 13 张数字（字母）相同的牌。

✍ **题目 20** 考虑其对立事件，即四个人出生月互不相同，$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{12\times 11\times 10\times 9}{12^4}=\dfrac{41}{96}$

✍ **题目 21** 注意，最大个数为 1，2，3 是描述了所有可能的情况。所以我们可以先求其中简单的，然后把比较难处理的用 1 减去即可。

最大个数为 1，则 4 个盒子里有三个各含一个球，存在 $4\times 3\times 2$ 种可能，所以有 $P(A)=\dfrac{4\times 3\times 2}{4^3}=\dfrac{3}{8}$。

最大个数为 3，则三个球全在一个盒子里，显然四个盒子四个情况，故：$P(C)=\dfrac{4}{4^3}=\dfrac{1}{16}$

最大个数为 2，所以 $P(B)=1-P(A)-P(C)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$。

当然，也可以这么想：

最大个数为 2，则 4 个盒子里有两个盒子有球，一个装 1 个球，另一个装 2 个球。$P(B)=\dfrac{C_3^2(4\times 3)}{4^3}=\dfrac{9}{16}$(先把 3 个求分堆成 1 个、2 个的两堆, 然后分别放在盒子里), 注意要先分球，不能忘了第一步。

✍ **题目 22** 10 个数有序取出 4 个共有 A_{10}^4 种选法, 对于 4 位偶数, 首先考虑个位, 有 5 种, 选法, 余下三位在剩下 9 个数中有序选 3 个, 故累计有 $5\times A_9^3$ 种。但是我们要注意到首位

不可以是 0, 所以减去首位是 0 的情况, 即先锁定首位是 0, 然后余下四个偶数选一个放在个位, 最后从剩下 8 个数有序选 2 个, 即 $4\times A_8^2$。所以得到 $P=\dfrac{5\times A_9^3-4\times A_8^2}{A_{10}^4}=\dfrac{41}{90}$

✍ **题目 23** 15 双 30 只鞋子取 10 双，总共有 C_{30}^{10} 种取法

(1): 如果是恰好两双配对

1. 首先选出配对的 2 双有 C_{15}^2 种选法
2. 剩下 6 只一定属于 13 双不同种鞋子，于是在剩下 13 双鞋子中取 6 双。
3. 每双中各取一个，可能是左脚或者右脚。

所以有 $C_{15}^2\times C_{13}^6\times 2^6$ 种选法，所以概率为 $P=\dfrac{C_{15}^2\times C_{13}^6\times 2^6}{C_{30}^{10}}=0.3838$

(2): 考虑其对立事件，即至多一双配对。可得:

1. 只有一双配对有 $15\times C_{14}^8\times 2^8$ 种情况。
2. 两两不配对则有 $C_{15}^{10}\times 2^{10}$ 种。

所以得到至少两双配对的概率为 $P=1-\dfrac{15\times C_{14}^8\times 2^8+C_{15}^{10}\times 2^{10}}{C_{30}^{10}}=0.5138$

✍ **题目 24**

$$\begin{aligned}P\{\overline{B}|A\cup B\}=&\frac{P(A\overline{B})}{P(A\cup B)}\\=&\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}\\=&\frac{0.7-0.2}{0,9}\\=&\frac{5}{9}\end{aligned}$$

✍ **题目 25** 首先得到 $P(AB)=P(B|A)P(A)=\dfrac{1}{12}$，然后 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{1}{6}$，故得到 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{3}$。

✍ **题目 26** 我们由条件概率公式 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 得到:

(1) 即由于概率的非负性，$P(AB)\geqslant 0, P(B)>0$ 则 $P(A|B)\geqslant 0$，(2) 即注意到 $\Omega B=B, \emptyset B=\emptyset$ 就有 $P(\Omega|B)=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1, P(\emptyset|B)=\dfrac{P(\emptyset)}{P(B)}=0$，(3) 即 $A_1A_2=\emptyset.B(A_1A_2)=\emptyset$，于是 $P((A_1\cup A_2)B)=P(A_1B)+P(A_2B)$，(4) 即同理 $P(A_1B)\leqslant P(A_2B), P((A_2-A_1)B)=P(A_2B)-P(A_1B)$，(5) 即利用 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$，(6) 即加法公式 $P(A_1B)+P(A_2B)=P((A_1\cup A_2)B)-P(A_1A_2B)$。

✍ **题目 27** 可以用缩小基本事件空间法，即 $P=\frac{7}{100}\times\frac{6}{99}\times\frac{93}{98}=0.00402$

✍ **题目 28** 相当于前 $n-1$ 次全部取中白 (黑) 球，最后一次取中黑 (白) 球，所以 $P=2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{2}{n(n+1)}$。开始的那个 2 是指白黑可以互换。

✍ **题目 29** 由条件概率公式有 $P=\frac{4}{20}\times 0.9+\frac{8}{20}\times 0.7+\frac{7}{20}\times 0.5+\frac{1}{20}\times 0.2=0.645$

✍ **题目 30** 记事件 A 为: 由乙车间生产; 事件 B 为: 是次品。则 $P(B)=0.25\times 0.05+0.35\times 0.04+0.4\times 0.02=0.0345$，$P(AB)=0.35\times 0.04=0.014$，故 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{28}{69}$

✍ **题目 31** 记事件 B 为: 是好评, 所以是好评的概率为 $P(B)=\frac{4}{9}\times 0.8+\frac{3}{9}\times 0.6+\frac{2}{9}\times 0.7=\frac{32}{45}$。再记事件 A 为: 是 B 运营商, 可得 $P(AB)=\frac{3}{9}\times 0.6$, 所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{9}{32}$

需要改变!!!

✍ **题目 32** 同样记事件 B 为: 发生故障，则 $P(B)=C_3^1\times 0.2\times 0.8^2\times 0.25+C_3^2\times 0.2^2\times 0.8\times 0.6+0.2^3\times 0.95=0.1612$。记事件 A 为: 有 2 个元件损坏，则 $P(AB)=C_3^1\times 0.2^2\times 0.8\times 0.6=0.0576$，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0.35732$

✍ **题目 33** 注意到 $P((A\cup B)C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)=P(C)(P(A)+P(B)-P(AB))=P(C)P(A\cup B)$, 并且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(AB)P(C), P((A-B)C)=P((A-AB)C)=P(AC-ABC)=P(A-AB)P(C)$ 就得到 $A\cup B.AB, A-B$ 与 C 也独立。

✍ **题目 34** $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$, 整理得到 $P(AB)-P(AB)P(B)=P(A)P(B)-P(AB)P(B)$，因此 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以 A 与 B 相互独立。

✍ **题目 35** 因为只有 1 号卡片上红白黑三色都有，所以 $P(ABC)=\frac{1}{8}$。另外得到 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，所以 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。但是 $P(AB)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=P(A)P(B)$，所以不两两独立。

✍ **题目 36** 只证明 (1): 我们有 $P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C), P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,则 $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=(1-P(A))P(B)=P(\overline{A})P(B), P(\overline{A}C)=P(C)-P(AC)=(1-P(A))P(C)=P(\overline{A})P(C), P(\overline{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=(1-P(A))P(BC)=P(\overline{A})P(BC)=P(\overline{A})P(B)P(C)$，所以得到 $\overline{A}, B, C$ 相互独立。

对于 $\overline{A},\overline{B},C$ 和 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 相互独立性则同理。

✍ **题目 37** 令 $P(A)=\frac{4}{5}, P(B)=\frac{2}{3}, P(C)=\frac{3}{4}$，所以 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+$

$P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)=\frac{59}{60}$

✍ **题目 38** 对系统 1，我们看作上下两块，每一块是 n 个元件串联，然后两块并联。那么每一块 n 个元件必须全部正常工作，这一块才算正常，因而每一块正常工作的概率是 p^n，上下两块只要一块是正常的整个系统就是正常的，所以 $P_1=p^n+p^n-p^{2n}=p^n(2-p^n)$

对系统 2，我们只取其中一块，然后看做 n 块，每一块是两个元件并联，然后 n 块串联。每一块正常的概率是 $p+p-p^2=p(2-p)$。n 块必须全部正常，整个电路才正常，所以 $P_2=(p(2-p))^n=p^n(2-p)^n$

另外我们由数学归纳法可以得到 $n>1,(2-p)^n>2-p^n$，所以系统 2 更可靠。

✍ **题目 39** 由题得到 $P(A-B)=P(B-A)=\frac{1}{4}$，又因为 $P(A)=P(AB)+P(A-B),P(B)=P(AB)+P(B-A)$，另外由于相互独立，$P(AB)=P(A)P(B)=(P(AB)+P(A-B))(P(AB)+P(B-A))=P(AB)^2+\frac{1}{2}P(AB)+\frac{1}{16}$，即 $P(AB)^2-\frac{1}{2}P(AB)+\frac{1}{16}=0$，解得 $P(AB)=\frac{1}{4}$。所以 $P(A)=P(AB)+P(A-B)=\frac{1}{2},P(B)=P(AB)+P(B-A)=\frac{1}{2}$

2 第二章

✍ **题目 1**

(1): 我们得到 X 的分布律是

X	-1	1	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

于是得到 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0\,(x<-1)\\ \frac{1}{3}\,(-1\leqslant x<1)\\ \frac{5}{6}\,(1\leqslant x<3)\\ 1\,(x\geqslant 3)\end{cases}$

(2): 利用分布函数我们可以得到:

$P(X\leqslant 0)=F(0)-F(-\infty)=\frac{1}{3}$

$P(-1<X\leqslant 2)=P(X\leqslant 2)-P(X\leqslant -1)=F(2)-F(-1)=\frac{1}{2}$

$P(-1\leqslant X\leqslant 2)=P(X\leqslant 2)-P(X<-1)=F(2)-F(-1^-)=\frac{5}{6}$

✍ **题目 2** 由题因为与面积成正比，可得 $P(X)=k\pi X^2$。注意到必须有 $P(R)=1$，所以解得 $k=\dfrac{1}{\pi R^2}$。于是我们就可得出分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0\,(x<0)\\ \dfrac{x^2}{R^2}\,(0\leqslant x<1)\\ 1\,(x\geqslant 1)\end{cases}$

✍ **题目 3**

(1): 因为 $\lim_{x\to+\infty}F_1(x)+F_2(x)=2\neq 1$，所以不满足规范性，故 $F_1(x)+F_2(x)$ 不是分布函数

(2): 单调性因为 $a_1,a_2>0$,故易证;右连续性显然,因为两个分布函数都右连续;而且此时满足了规范性 $\lim_{x\to+\infty}a_1F_1(x)+a_2F_2(x)=a_1+a_2=1$, 以及 $\lim_{x\to-\infty}a_1F_1(x)+a_2F_2(x)=0$，所以此时 $a_1F_1(x)+a_2F_2(x)$ 是分布函数。

(3): 同理，注意到分布函数的非负性，我们同样容易验证单调性、右连续性以及规范性，此时即 $\lim_{x\to-\infty}F_1(x)F_2(x)=0,\lim_{x\to+\infty}F_1(x)F_2(x)=1$，所以 $F_1(x)F_2(x)$ 是分布函数。

✍ **题目 4**

(1): 利用分布函数的规范性，我们得到 $\lim_{x\to-\infty}F(x)=A-\dfrac{\pi}{2}B=0,\lim_{x\to+\infty}F(x)=A+\dfrac{\pi}{2}B=1$，于是解得 $A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{1}{\pi}$。

(2): 因此 $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$，故 $P(-1<x\leqslant 1)=F(1)-F(-1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{\pi}{4}-(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}$

✍ **题目 5**

(1): 由规范性 $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{a}{k!}=a\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots\right)=1$，因此得到 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(2): 同样由规范性 $\sum_{k=1}^{N}\dfrac{a}{k(k+1)}=a\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{N}-\dfrac{1}{N+1}\right)=a\dfrac{N}{N+1}=1$，得到 $a=\dfrac{N+1}{N}$

✍ **题目 6** 由题可得: $P(X=-1)=F(-1)-F(-1^-)=0.125,P(X=0)=F(0)-F(0^-)=0.625-0.125=0.5,P(X=0.5)=F(0.5)-F(0.5^-)=0.875-0.625=0.25,P(X=1)=F(1)-F(1^-)=1-0.875=0.125$。因此分布律为

X	-1	0	0.5	1
P	0.125	0.5	0.25	0.125

X	0	1	2
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

✍ **题目 7** 没有取中次品的概率是 $\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，只取一次次品的概率是 $\dfrac{2}{10}\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{8}{45}$，取 2 次次品的概率是 $\dfrac{2}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{45}$，所以分布律是

所以得到的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0\,(x<0)\\ \frac{4}{5}\,(0\leqslant x<1)\\ \frac{44}{45}\,(1\leqslant x<2)\\ 1\,(x\geqslant 2)\end{cases}$

✍ **题目 8**

(1): 没有放回时符合超几何分布。$P(X=0)=\dfrac{C_{12}^5}{C_{15}^5}=\dfrac{24}{91}$，$P(X=1)=\dfrac{C_{12}^4C_3^1}{C_{15}^5}=\dfrac{45}{91}$，$P(X=2)=\dfrac{C_{12}^3C_3^2}{C_{15}^5}=\dfrac{20}{91}$，$P(X=3)=\dfrac{C_{12}^2C_3^3}{C_{15}^5}=\dfrac{2}{91}$。故分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{24}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{2}{91}$

(2): 有放回时符合二项分布 $B\left(5,\dfrac{1}{5}\right)$，每次取中白球的概率为 $\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$。$P(X=0)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^5=\dfrac{1024}{3125}$，$P(X=1)=C_5^1\times\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^4=\dfrac{256}{625}$，$P(X=2)=C_5^2\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{128}{625}$，$P(X=3)=C_5^3\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{32}{625}$，$P(X=4)=C_5^4\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^4\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{625}$，$P(X=5)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^5=\dfrac{1}{3125}$ 故分布律为

✍ **题目 9**

(1): A 在 5 次中至少三次发生，则 $P=C_5^3\times0.3^3\times0.7^2+C_5^4\times0.3^4\times0.7+C_5^5\times0.3^5=0.16308$

(2): 同理，但是此次考虑对立事件 (易于计算)。$P=1-0.7^7-C_7^1\times0.3\times0.7^6-C_7^2\times0.3^2\times0.7^5=0.35293$

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1024}{3125}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{1}{3125}$

✍ **题目 10**

(1): 记 X 为射击的总次数，$X=k$ 即前面 $k-1$ 次全不中，最后一次中，因此 $P(X=k)=0.2^{k-1}\times 0.8(k\in\mathbb{N}_+)$。

(2): 前面 $k-1$ 次里有 $r-1$ 次中，最后一次中，因此 $P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}0.8^{r-1}\times 0.2^{k-r}\times 0.8=C_{k-1}^{r-1}0.2^{k-r}\times 0.8^r(k\in\mathbb{N}_+,k\geqslant r)$。

✍ **题目 11**

(1): 设呼唤次数为 X，$X\sim\mathrm{Poi}(4)$，则查表得到 $P\left(X=6\right)=\dfrac{4^6\mathrm{e}^{-4}}{6!}=0.104196$

(2): 查表得到 $P\left(5\leqslant X\leqslant 10\right)=\sum_{k=5}^{10}\dfrac{4^k\mathrm{e}^{-4}}{k!}=0.368323$

✍ **题目 12** 由题可得，我们可以将该二项分布近似看做泊松分布，其中 $\lambda\approx np=2.5$，也即 $X\sim\mathrm{Poi}(2.5)$，则查表得到 $P(X\leqslant 5)=0.957979$

✍ **题目 13**

(1): 通过作商法得到 $\dfrac{P\left(X=k\right)}{P\left(X=k-1\right)}=\dfrac{C_n^kp^k\left(1-p\right)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}\left(1-p\right)^{n-k+1}}=\dfrac{p}{1-p}\times\dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}\times\dfrac{\left(k-1\right)!\left(n-k+1\right)!}{n!}=\dfrac{\left(n-k+1\right)p}{k\left(1-p\right)}=1+\dfrac{\left(n+1\right)p-k}{k\left(1-p\right)}$，于是我们注意到 $k<(n+1)p$ 时，$P(X=k)$ 关于 k 单调递增，$k>(n+1)p$ 时，则单调递减。所以，如果 $(n+1)p$ 是正整数，那么 $k=(n+1)p,(n+1)p-1$ 都可以使 $P(X=k)$ 取最大值；如果 $(n+1)p$ 不是正整数，那么令 $k_0=[(n+1)p]$，则 $k_0<(n+1)p<k_0+1$，于是 $P(X=k_0-1)<P(X=k_0)>P(X=k_0+1)$，所以此时 $k=[(n+1)p]$ 使 $P(X=k)$ 取最大值。

(2): 当 $P(X=k)=P(X=n-k)$ 时，有 $p^k(1-p)^{n-k}=p^{n-k}(1-p)^k$，由于 k 的任意性，我们令 $k=0$，则 $p^n=(1-p)^n$，对正整数 n 只有 $p=1-p$，所以 $p=\dfrac{1}{2}$。

✍ **题目 14**

(1): 同样作商法有 $\dfrac{P\left(X=k\right)}{P\left(X=k-1\right)}=\dfrac{\lambda}{k}$，同理分析可得到：如果 λ 是正整数，那么 $k=\lambda,k=\lambda-1$ 都可以使 $P(X=k)$ 取最大值，如果 λ 不是正整数，那么 $k=[\lambda]$ 时 $P(X=k)$ 取最大值。

(2): 在 11 题中 $\lambda=4$，所以 $\lambda=3$或4 时，$P(X=k)$ 最大，所以最可能呼唤 3 次或 4 次。

✍ **题目 15**

(1): 若总共投了奇数次，$X=2N-1$，那么最后一次是甲投中，$P(X=2N=1)=0.3^{N-1}\times 0.2^{N-1}\times 0.7$ 若总共投了偶数次，$X=2N$，那么最后一次是乙投中，则 $PX=2N=0.3^{N-1}\times 0.2^{N-1}\times 0.3\times 0.8$

于是分布律为 $P\left(X=k\right)=\begin{cases} 0.7\times 0.06^{N-1}\left(k=2N-1\right) \\ 0.24\times 0.06^{N-1}\left(k=2N\right) \end{cases}$，这里 $N\in\mathbb{N}_+$。

(2): 可以将甲乙都没中看做整体一次，都没中的概率是 $0.2\times 0.3=0.06$。，那么如果甲投了 k 次，则在甲乙整体都没投中 $k-1$ 次, 而然后有 2 种可能：甲中，或者甲不中，乙中。所以 $P(X=k)=0.06^{k-1}\times(0.7+0.3\times 0.8)=0.94\times 0.06^{k-1}$

(3): 同样，如果乙投了 k 次，那么甲乙整体首先没有中 $k-1$ 次，然后有 2 种可能：甲不中，乙中；或者甲不中，乙不中，再甲中。所以 $P(X=k)=0.06^{k-1}\times(0.3\times 0.8+0.3\times 0.2\times 0.7)=0.282\times 0.06^{k-1}$

✍ **题目 16** 由规范性，可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}\mathrm{d}x=2A\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=2A=1$，于是解得 $A=\dfrac{1}{2}$。且 $P(-1<X<2)=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\int_0^1 e^-x\mathrm{d}x+\int_0^2 e^-x\mathrm{d}x\right)=0.7484$。且得到 X 的分布函数为 $F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases} \dfrac{e^x}{2}\,(x<0) \\ 1-\dfrac{e^{-x}}{2}\,(x\geqslant 0) \end{cases}$

✍ **题目 17** 由规范性可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=A\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=A\arcsin x\mid_{-1}^{1}=\pi A=1$，于是 $A=\dfrac{1}{\pi}$，$P(-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\arcsin x\mid_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，此时 X 的分布函数为

$$F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases} 0\,(x<-1) \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\mathrm{arc}\sin x\,(-1\leqslant x<1) \\ 1\,(x\geqslant 1) \end{cases}$$

✍ **题目 18**

(1): 第四题中分布函数为 $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x(x\in\mathbb{R})$，故其密度函数为 $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}(x\in\mathbb{R})$

(2): 密度函数为 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\,(1<x<\mathrm{e})\\ 0\,(x<1,x\geqslant \mathrm{e})\end{cases}$

✍ **题目 19** 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数为 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，则 $F(x)+F(2\mu-x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{2\mu-x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t\right)$。利用变量替换，令右边的 $t=2\mu-u$，则得到 $\int_{-\infty}^{2\mu-x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{2\mu-x}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(2\mu-u\right)=-\int_{+\infty}^{x}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u=\int_{x}^{+\infty}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}u=\int_{x}^{+\infty}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$。

这样就得到 $F(x)+F(2\mu-x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t+\int_{x}^{+\infty}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t\right)=1$。所以 $F(x)+F(2\mu-x)=1$。令 $x=\mu$ 则得到 $F(\mu)=0.5$。换成标准正态分布 $N(0,1)$ 之后也就是 $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$，$\Phi(0)=0.5$。

✍ **题目 20** 我们需要转换为标准正态分布 $Y=\dfrac{X+2}{3}$，然后查表。

(1): $P(X>-1)=P\left(\dfrac{X+2}{3}>\dfrac{1}{3}\right)=P(Y>1)=1-\Phi\left(\dfrac{1}{3}\right)\approx 0.3707$

(2): $P(-5\leqslant X\leqslant 3)=P\left(-1\leqslant Y\leqslant\dfrac{5}{3}\right)=\Phi\left(\dfrac{5}{3}\right)-\Phi(-1)\approx 0.7938$

(3): $P(0<X<5)=P\left(\dfrac{2}{3}<Y<\dfrac{7}{3}\right)=\Phi\left(\dfrac{7}{3}\right)-\Phi\left(\dfrac{2}{3}\right)\approx 0.2415$

(4): $P(|X|>1)=1-P(-1\leqslant X\leqslant 1)=1-P\left(\dfrac{1}{3}\leqslant Y\leqslant 1\right)=1-\left(\Phi(1)-\Phi\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)\approx 0.7880$

(5): $P(|X+2|<4)=P(-6<X<2)=P\left(-\dfrac{4}{3}<Y<\dfrac{4}{3}\right)=\Phi\left(\dfrac{4}{3}\right)-\Phi\left(-\dfrac{4}{3}\right)=2\Phi\left(\dfrac{4}{3}\right)-1\approx 0.8164$

(6): $P(|X-a|<a)=P(0<X<2a)=P\left(\dfrac{2}{3}<Y<\dfrac{2+2a}{3}\right)=\Phi\left(\dfrac{2+2a}{3}\right)-\Phi\left(\dfrac{2}{3}\right)=0.01$，由于 $\Phi\left(\dfrac{2}{3}\right)\approx 0.7486$，又查表得到 $\Phi\left(0.7\right)-\Phi\left(\dfrac{2}{3}\right)$ 最接近 0.01，因而我们取 0.7 处的结果，即得到 $\dfrac{2+2a}{3}=0.7$，解得 $a=0.05$。

✍ **题目 21** $X\sim U[0,5]$，则我们得到 $F_X(x)=\dfrac{1}{5}x(0\leqslant x\leqslant 5)$。若二次方程 $t^2+2(X-3)t+X^2=0$ 有实根，则 $\Delta\geqslant 0$，即 $(X-3)^2-X^2\geqslant 0$，得 $X\leqslant\dfrac{3}{2}$。所以 $P\left(X\leqslant\dfrac{3}{2}\right)=F\left(\dfrac{3}{2}\right)=0.3$。

✍ **题目 22** $X \sim \mathrm{Exp}(0.001)$，则 $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-0.001x}(x \geqslant 0)$。则一个元件在 1000h 到 1500h 之间损坏的概率就是 $P(1000 \leqslant X \leqslant 1500) = F(1500) - F(1000) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1.5}$。三个元件的寿命都要在 1000h 到 1500h 之间，故这台机器寿命 1000h 到 1500h 之间的概率就是 $(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1.5})^3 = \mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^{-4.5}$。

✍ **题目 23** 我们首先求出 $P\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$，又得到 Y 是一个二项分布，即 $Y \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$，于是其分布律为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

且得到 $P(Y = 2) = \frac{9}{64}$

✍ **题目 24** 我们只要把 X 的值代入到 $Y = f(X)$ 中，并且合并同类项，将同 Y 值部分的概率累加，就得到

Y_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Y_2	1	3	5
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

Y_3	1	0	-3	-8
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{30}$

Y_4	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{30}$

✍ **题目 25** 不妨假设 X 为正面朝上的次数，则 $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$。由题则反面向上有 $5 - X$ 次，于是我们相当于求 $Y = X(5 - X)$ 的分布律。我们得到 X 的分布律是

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

从而对应的 Y 的分布律为

Y	0	4	6
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{8}$

✍ **题目 26** $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$，则 $f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,(x \geqslant 0) \\ 0\,(x<0) \end{cases}$。我们利用公式“如果 $Y=g(X)$，那么其密度函数是 $f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y)\right|(y \in g(\mathbb{R})) \\ 0\,(\text{其他}) \end{cases}$”就有：

(1): $g(y)=y^3, g^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}, \left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y)\right| = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2}$，且 $g^{-1}(y) \geqslant 0$ 时 $y \geqslant 0$。于是得到 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{3(\sqrt[3]{y})^2}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt[3]{y}}\,(y \geqslant 0) \\ 0\,(y<0) \end{cases}$

(2): $g(y)=e^{-\lambda y}, g^{-1}(y) = -\dfrac{\ln y}{\lambda}, \left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y)\right| = \dfrac{1}{\lambda y}$。当 $g^{-1}(y) \geqslant 0$ 时有 $0<y\leqslant 1$。所以得到 $f_Y(y) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{\lambda\frac{\ln y}{\lambda}}\dfrac{1}{\lambda y}\,(0<y\leqslant 1) \\ 0\,(\text{其它}) \end{cases} = \begin{cases} 1\,(0<y\leqslant 1) \\ 0\,(\text{其它}) \end{cases}$

✍ **题目 27** $X \sim U\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right) \\ 0\,(\text{其它}) \end{cases}$ 则我们同样用上面的公式得到

(1): $g(y)=\tan y, g^{-1}(y)=\arctan y, \left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y)\right| = \dfrac{1}{1+y^2}$，并且 $g^{-1}\left(\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$，于是得到 $f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}(y \in \mathbb{R})$

(2): $g(y)=\cos y, g^{-1}(y)=\arccos y, \left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，从而我们得到 $P(Y \leqslant y) = P(\cos X \leqslant y) = \begin{cases} 0\,(y<0) \\ P\left(\operatorname{arc}\cos y \leqslant X \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right) + P\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant X \leqslant -\operatorname{arc}\cos y\right)(0 \leqslant y < 1) \\ 1\,(y \geqslant 1) \end{cases} = \begin{cases} 0\,(y<0) \\ 2\int_{\operatorname{arc}\cos y}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\pi}\mathrm{d}x\,(0\leqslant y<1) \\ 1\,(y\geqslant 1) \end{cases}$，然后对 y 求导就有 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,(0<y<1) \\ 0\,(\text{其它}) \end{cases}$

✍ **题目 28** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $(X-\mu) \sim N(0, \sigma^2)$。利用概率密度公式可得 $P(|X-\mu| \leqslant y) = P(\mu-y \leqslant X \leqslant \mu+y) = \begin{cases} \int_{\mu-y}^{\mu+y} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x(y>0) \\ 0\,(y \leqslant 0) \end{cases} = \begin{cases} \int_{-y}^{y} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x(y>0) \\ 0\,(y\leqslant 0) \end{cases}$。

之后再对 y 求导就得到其密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,(y>0)\\ 0\,(y\leqslant 0)\end{cases}$

✍ **题目 29** 我们考虑其极坐标，即 (R,θ)，则得到 $\theta\sim U[-\pi,\pi]$，于是其密度函数为 $f_\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)\\ 0\,(\text{其它})\end{cases}$

(1): 我们注意到横坐标的分布与纵坐标的分布是一致的，因为横坐标 $X=R\cos\theta$ 关于 θ 是偶函数，故我们求横坐标的分布，也就等于纵坐标 $Y=R\sin\theta$ 的分布。因为 $P(X\leqslant x)=P(R\cos\theta\leqslant x)=P\left(-\pi\leqslant\theta\leqslant-\arccos\dfrac{x}{R}\right)+P\left(\arccos\dfrac{x}{R}\leqslant\theta\leqslant\pi\right)=1-\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{x}{R}(-R\leqslant x\leqslant R)$。

求导得到 X 密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}\,(-R<x<R)\\ 0\,(\text{其它})\end{cases}$。从而 Y 的密度函数也为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2-y^2}}\,(-R<y<R)\\ 0\,(\text{其它})\end{cases}$。

(2): 注意到该点与 $(R,0)$ 所连的弦的长度是 $L=2R\cos\dfrac{\theta}{2}$，其中 $0\leqslant L\leqslant 2R$，于是类似上一问我们得到 $P(L\leqslant l)=P\left(2R\cos\dfrac{\theta}{2}\leqslant l\right)=1-\dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{l}{2R}$，然后求导得到密度函数为 $f_L(l)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{4R^2-l^2}}\,(0<l<2R)\\ 0\,(\text{其它})\end{cases}$

✍ **题目 30** $X\sim U[0,2]$，$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\,(0\leqslant x\leqslant 2)\\ 0\,(\text{其它})\end{cases}$。则得到 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=\begin{cases}0\,(y<0)\\ P(X\leqslant y)\,(0\leqslant y<1)\\ 1\,(y\geqslant 1)\end{cases}=\begin{cases}0\,(y<0)\\ \dfrac{x}{2}\,(0\leqslant y<1)\\ 1\,(y\geqslant 1)\end{cases}$

✍ **题目 31** $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda), f_X(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,(x\geqslant 0)\\ 0\,(x<0)\end{cases}$。可知 Y 是一个正整数离散型随机变量，$P(Y=n)=P([X]=n-1)=P(n-1\leqslant X<n)=\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\lambda(n-1)}-\mathrm{e}^{-\lambda n}=(1-\mathrm{e}^{-\lambda})(\mathrm{e}^{-\lambda})^{n-1}$。这是一个几何分布，其参数为 $1-\mathrm{e}^{-\lambda}$，即 $Y\sim\mathrm{Geo}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})$。

3　第三章

✍ **题目 1**　我们取两点 $(-1,-1)$ 和 $(1,1)$，则由题因为 $F(1,1)-F(1,-1)-F(1,-1)+F(-1,-1)=1-1-1+0=-1<0$，故该函数不满足性质 (4)，所以不是分布函数。

✍ **题目 2**　(1):$F(a,+\infty)$ ，(2):$1-F(+\infty,b)$，(3):$1-F(a,+\infty)-F(+\infty,b)+F(a,b)$，(4)$F(b,c)-F(a,c)$

✍ **题目 3**

(1): $F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$,$F(-\infty,y)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)=0$,$F(x,-\infty)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0$,于是解得 $A=\frac{1}{\pi^2},B=\frac{\pi}{2},C=\frac{\pi}{2}$

(2): $P(0<X\leqslant 2,0<Y\leqslant 3)=F(2,3)-F(2,0)-F(3,0)+F(0,0)=\frac{9}{16}-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(3): $P(X>2,Y>3)=1-F(+\infty,3)-F(2,+\infty)+F(2,3)=1-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}=\frac{1}{16}$

(4): $F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)$，$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$

✍ **题目 4**

(1): 如果是无放回摸球，先考虑 X，如果 $X=1$，第一次是 1，$P(X=1)=\frac{1}{3}$，此时第二次 Y 必然是 2。故 $P(X=1,Y=1)=0,P(X=1,Y=2)=\frac{1}{3}$。如果 $X=2$，$P(X=2)=\frac{2}{3}$，第二次 Y 可能是 1 也可能是 2，故 $P(X=2,Y=1)=P(X=2,Y=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$。则分布律是：

$Y \backslash X$	1	2
1	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

并且得到分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}1\,(x,y\geqslant 2)\\ \frac{1}{3}\,(x\geqslant 2,1\leqslant y<2\text{ or }y\geqslant 2,1\leqslant x<2)\\ 0\,(\text{others})\end{cases}$

(2): 有放回则第一次与第二次相互独立，不管哪一次取到 1 的概率都是 $\frac{1}{3}$，取到 2 的概率都是 $\frac{2}{3}$。这样分布律就是：

$Y \backslash X$	1	2
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

其分布函数为 $F(x,y) = \begin{cases} 0\,(x<1 \text{ or } y<1) \\ \frac{1}{9}\,(1 \leqslant x<2, 1 \leqslant y<2) \\ \frac{1}{3}\,(x \geqslant 2, 1 \leqslant y<2 \text{ or } y \geqslant 2, 1 \leqslant x<2) \\ 1\,(x,y \geqslant 2) \end{cases}$

✍ **题目 5** $X \in \{0,1,2,3\}, Y \in \{1,3\}$。我们可以得到 $P(X=0)=P(X=3)=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=P(X=2)=\frac{3}{8}$。另外如果 $X=1$ 或 $X=2$ 必然有 $Y=1$，如果 $X=0$ 或 $X=3$ 必然有 $Y=3$，综合之后我们得到分布律与边缘分布律为：

$Y \backslash X$	0	1	2	3	P_Y
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$
P_X	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

✍ **题目 6** 3 题中的分布函数为 $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$，于是对 x,y 各求偏导就得到密度函数 $f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}(x,y \in \mathbb{R})$。然后对 x 和 y 积分得到边缘密度函数为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi(4+x^2)}$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{3}{\pi(9+y^2)}$

✍ **题目 7**

(1): 由规范性有 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{1}{12}A=1$，所以 $A=12$。

(2): 则分布函数为 $F(x,y)=12\int_0^x\int_0^y \mathrm{e}^{-3u-4v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y})\,(x,y>0) \\ 0\,(\text{others})\end{cases}$

(3): 则边缘密度函数为 $f_X(x) = 12\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}y = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x}\,(x>0) \\ 0\,(x\leqslant 0) \end{cases}$，$f_Y(y) = 12\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}x = \begin{cases} 4\mathrm{e}^{-4y}\,(y>0) \\ 0\,(y\leqslant 0) \end{cases}$

✍ 题目 8

(1): 可以得到由 $y=x, x=1, y=3$ 围成的三角形面积是 $S = 2\times 2\times \dfrac{1}{2} = 2$，所以得到概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,(1\leqslant x\leqslant y\leqslant 3) \\ 0\,(\text{others}) \end{cases}$

(2): 也即相当于三角形区域中在直线 $y=x+1$ 下面的部分面积，可得该部分面积为 $2-1\times 1\times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$，于是 $P(Y-X\leqslant 1) = \dfrac{3}{4}$

(3): 注意积分范围是 $1\leqslant x\leqslant y, x\leqslant y\leqslant 3$，所以边缘分布函数为 $f_X(x) = \int_x^3 \dfrac{1}{2}\mathrm{d}y = \begin{cases} \dfrac{3-x}{2}\,(1\leqslant x\leqslant 3) \\ 0\,(\text{others}) \end{cases}$，$f_Y(y) = \int_1^y \dfrac{1}{2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{y-1}{2}\,(1\leqslant y\leqslant 3) \\ 0\,(\text{others}) \end{cases}$

✍ 题目 9

(1): 我们令 $U=X-1$，$V=Y-2$，则 $P(2X\leqslant Y) = P\left(2(X-1)\leqslant Y-2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{2x}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{2u}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{4\pi}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2+(v-2u)^2}{4\pi}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}$

(2): $P\left((x,y)\in G\right) = \iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{x=1+r\cos\theta,y=2+r\sin\theta} \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{4\pi}}\int_0^{2\pi} \dfrac{1}{4\pi^2} r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\pi}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = -\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\pi}}\Big|_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{4\pi}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} - \mathrm{e}^{-1}$

✍ 题目 10

(1): 可得到 x 的整体范围应该是 $-1\leqslant x\leqslant 1$，于是结合规范性，确定积分上下限，得到 $\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 Cx^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \dfrac{C}{2}\int_{-1}^1 (x^2-x^6)\mathrm{d}x = \dfrac{C}{2}\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{7}\right) = 1$，解得 $C = \dfrac{21}{4}$

(2): 可得积分区域 $\{-1\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant 1\}$ 关于 y 轴对称，故考虑 $x>0$ 部分：$P(|X|\leqslant Y) = 2\int_0^1\int_x^1 \dfrac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \dfrac{7}{10}$

(3): 对给定的 y，可得 $x^2 \leqslant y \leqslant 1$，所以 $f_X(x) = \dfrac{21}{4}\int_{x^2}^{1} Cx^2y\mathrm{d}y = \dfrac{21}{8}(x^2 - x^6)(-1 \leqslant x \leqslant 1)$。对给定的 x，可得 $-\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$，于是 $f_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \dfrac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x = \dfrac{7}{2}y^2\sqrt{y}(0 \leqslant y \leqslant 1)$

✍ **题目 11** 利用 $P(X=a|Y=b) = \dfrac{P(X=a, Y=b)}{P(Y=b)}$，这相当于针对每一个 Y，其中每个概率除以对应边缘概率，所以条件分布律是

$X\|Y=1$	0	1	2	3
P	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$X\|Y=3$	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

✍ **题目 12**

(1): 利用 $\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = f_{Y|X}(y|x)$，$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_{X|Y}(x|y)$ 便得到若 $1 < y \leqslant 3, f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y-1}\,(1 \leqslant x \leqslant y) \\ 0\,(\text{others}) \end{cases}$；若 $1 \leqslant x < 3, f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3-x}\,(x \leqslant y \leqslant 3) \\ 0\,(\text{others}) \end{cases}$

(2): 同样，条件密度是 $0 < y \leqslant 1, f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2y\sqrt{y}}\,(|x| \leqslant \sqrt{y}) \\ 0\,(\text{others}) \end{cases}$，$-1 < x < 1, f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{1-x^4}\,(x^2 \leqslant y \leqslant 1) \\ 0\,(\text{others}) \end{cases}$

✍ **题目 13** 由于出生 n 个孩子的概率是 $P(X=n) = \dfrac{\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}$，在这 n 个中利用二项分布得到 n 个孩子中出现 k 个男孩的概率为 $P(X=n, Y=k) = P(X=n)C_n^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\lambda}$，

(1): 分布律是 $P(X=n, Y=k) = \dfrac{1}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\lambda}(n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, k \leqslant n)$

(2): 注意到 $n \geqslant k$，可得到 Y 的边缘分布律是 $P(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X=n, Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \dfrac{1}{k!\,(n-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\lambda} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^k \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty} \dfrac{1}{(n-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{n-k} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^k \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}}\mathrm{e}^{-\lambda} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^k \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}(k \in \mathbb{N})$

(3): 所以得到条件分布为 $P(X=n|Y=k)=\dfrac{P(X=n,Y=k)}{P(Y=k)}=\dfrac{1}{(n-k)!}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{n-k}e^{-\frac{\lambda}{2}}(n\geqslant k,n\in\mathbb{N})$

✍ **题目 14**

(1): $f_X(x)=\begin{cases}1\,(0\leqslant x\leqslant 1)\\0\,(\text{others})\end{cases}$，又知 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-xy}\,(y>0)\\0\,(y\leqslant 0)\end{cases}$，所以联合分布密度为 $f(x,y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-xy}\,(y>0,0\leqslant x\leqslant 1)\\0\,(\text{others})\end{cases}$

(2): $f_Y(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{(1+xy)\,\mathrm{e}^{-xy}}{y^2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\dfrac{1-(1+y)\mathrm{e}^{-y}}{y^2}(y>0)$，即 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1-(1+y)\,\mathrm{e}^{-y}}{y^2}\,(y>0)\\0\,(y\leqslant 0)\end{cases}$

(3): 所以条件概率密度为 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{xy^2\mathrm{e}^{(1-x)y}}{\mathrm{e}^y-y-1}\,(0\leqslant x\leqslant 1,y>0)\\0\,(\text{others})\end{cases}$

✍ **题目 15**

(1): 同样,对 X 是离散分布,所以对 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=P(X=1)\,f_{Y|X=1}(y)+P(X=2)\,f_{Y|X=2}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-y}+\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-2y}\,(y>0)\\0\,(\text{others})\end{cases}$

(2): 可得联合分布为 $P(X=1,Y=y)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-y},P(X=2,Y=y)=\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-2y}$，所以条件分布为 $P(X=1|Y=y)=\dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{-y}+4\mathrm{e}^{-2y}},\ P(X=2|Y=y)=\dfrac{4\mathrm{e}^{-2y}}{\mathrm{e}^{-y}+4\mathrm{e}^{-2y}}$

✍ **题目 16** 我们将联合分布与边缘分布同时写出，可得到

Y \ X	-1	0	1	P_Y
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	a	b	$\frac{1}{3}+a+b$
P_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+a$	$\frac{1}{18}+b$	1

首先我们由 P_Y 可以得到 $a+b=\dfrac{1}{3}$，若要使 X,Y 相互独立，应有 $P(X=a,Y=b)=P_X(X=a)=P_Y(Y=b)$，我们取 $P(X=0,Y=1)=P_X(X=0)P_Y(Y=1)$，也即 $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{9}+a\right)=\dfrac{1}{9}$，所以解得 $a=\dfrac{2}{9}$，于是 $b=\dfrac{1}{9}$。

✍ **题目 17** 因为 X,Y 相互独立，所以只要由 $P(X=a,Y=b)=P_X(X=a)P_Y(Y=b)$，就得到分布律是

$Y \backslash X$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
6	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$

✍ **题目 18**

(1): $f_X(x)=\int_0^2\left(x^2+\dfrac{xy}{3}\right)\mathrm{d}y=2x^2+\dfrac{2}{3}x$ $f_Y(y)=\int_0^1\left(x^2+\dfrac{xy}{3}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y$，则 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故不相互独立。

(2): $f_X(x)=\int_0^1 6x^2y\mathrm{d}y=3x^2$，$f_Y(y)=\int_0^1 6x^2y\mathrm{d}x=2y$，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故相互独立。

(3): $f_X(x)=\int_{-x}^{x}\dfrac{3}{2}x\mathrm{d}y=3x^2$，$f_Y(y)=\int_0^1\dfrac{3}{2}x\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故不相互独立。

(4): $f_X(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}$，$f_Y(y)=\int_0^2\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{e}^{-y}$，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故相互独立。

✍ **题目 19**

(1): $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=A\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{4+y^2}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{9+z^2}\mathrm{d}z=A\arctan x\mid_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{y}{2}\mid_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{z}{3}\mid_{-\infty}^{+\infty}=\dfrac{\pi^3 A}{6}=1$，所以 $A=\dfrac{6}{\pi^3}$

(2): $f_X(x)=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{6}{\pi^3(1+x^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(4+y^2)}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(9+z^2)}\mathrm{d}z=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，
$f_Y(y)=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\dfrac{6}{\pi^3(4+y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(9+z^2)}\mathrm{d}z=\dfrac{2}{\pi(4+y^2)}$，
$f_Z(z)=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{6}{\pi^3(9+z^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(4+y^2)}\mathrm{d}y=\dfrac{3}{\pi(9+z^2)}$，
于是得到 $f(x,y,z)=f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$，故相互独立。

✍ **题目 20** 我们注意到 $\int_{-1}^{1} xyz\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} xyz\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1} xyz\mathrm{d}z=0$，所以可得 $f_{XY}(x,y)=\dfrac{1}{8}\int_{-1}^{1}(1-xyz)\mathrm{d}z=\dfrac{1}{4}, f_{XZ}(x,z)=\dfrac{1}{8}\int_{-1}^{1}(1-xyz)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{4}, f_{YZ}(y,z)=\dfrac{1}{8}\int_{-1}^{1}(1-xyz)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$,以及 $f_X(x)=\int_{-1}^{1} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}, f_Y(y)=\int_{-1}^{1} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}, f_Z(z)=\int_{-1}^{1} f_{XZ}(x,z)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$。这样就有 $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y), f_{XZ}(x,z)=f_X(x)f_Z(z), f_{YZ}(y,z)=f_Y(y)f_Z(z)$，所以 X,Y,Z 两两独立。但是 $f(x,y,z)\neq f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$，所以 X,Y,Z 不相互独立。$(x,y,z\in[-1,1])$

✍ **题目 21** 对于两点分布较易，故我们只要一一列举即可。

$X+Y$	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$2X$	0	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

XY	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

X^2	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

显然 $X+Y$ 的分布律与 $2X$ 的分布律不同，XY 与 X^2 的分布律不同。这是因为 X 不可能与其本身相互独立。

✍ **题目 22** $f_X(x)=\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}(x>0), f_Y(y)=\lambda_2\mathrm{e}^{=\lambda_2 y}(y>0)$，由卷积公式 $f_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(t-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^t \lambda_1\lambda_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{d}x\,(t>0)\\ 0\,(t\leqslant 0)\end{cases}$,而 $\int_0^t \lambda_1\lambda_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\mathrm{d}x=\begin{cases}\lambda_1^2 t\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\,(\lambda_1=\lambda_2)\\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)(\lambda_1\neq\lambda_2)\end{cases}$。所以 $\lambda_1=\lambda_2, f_{X+Y}(t)=\begin{cases}{\lambda_1}^2 t\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\,(t>0)\\ 0\,(t\leqslant 0)\end{cases}$，而 $\lambda_1\neq\lambda_2, f_{X+Y}(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)(t>0)\\ 0\,(t\leqslant 0)\end{cases}$

✍ **题目 23** 相当于: X,Y,Z 独立且与 X 同分布，求 $X+Y$ 和 $X+Y+Z$ 的密度函数。由卷积公式类似上面有 $f_{X+Y}(t)=\begin{cases}\int_0^t x\mathrm{e}^{-x}(t-x)\,\mathrm{e}^{-(t-x)}\mathrm{d}x\,(t>0)\\ 0\,(t\leqslant 0)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{t^3\mathrm{e}^{-t}}{6}\,(t>0)\\ 0\,(t\leqslant 0)\end{cases}$。将 $X+Y$ 看做新的分布函数，再次与原来 X 的分布函数作卷积就得到 $X+Y+Z$ 的密度函数是 $f_{X+Y+Z}(t)=\begin{cases}\int_0^t \dfrac{x^3\mathrm{e}^{-x}}{6}(t-x)\,\mathrm{e}^{-(t-x)}\mathrm{d}x\,(t>0)\\ 0\,(t\leqslant 0)\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{t^5\mathrm{e}^{-t}}{120}\,(t>0)\\ 0\,(t\leqslant 0)\end{cases}$，也

即两周和三周需求量的概率密度。

✍ 题目 24

(1): 令 $x-y=t$，则 $y=x-t$。由独立性可得 (X,Y) 的联合分布是正方形 $[0,a]^2$ 上的均匀分布。我们可以结合图像，通过求直线 $y=x-t$ 扫过正方形 $[0,a]^2$ 的面积来判断。

当 $t<-a$ 时，扫过的面积是 0，因而 $P(X-Y\leqslant t)=0(t<-a)$。

当 $-a\leqslant t<0$ 时，可得直线 $y=x-t$ 扫过的区域是一个三角形，其边长为 $a+t$，所以 $P(X-Y\leqslant t)=\dfrac{(a+t)^2}{2a^2}(-a\leqslant t<0)$，分母上的 a^2 是正方形的面积。

当 $0\leqslant t<a$ 时，扫过的区域是一个正方形去掉一个三角形，去掉的三角形的边长为 $\dfrac{(a-t)^2}{2}$，所以 $P(X-Y\leqslant t)=1-\dfrac{(a-t)^2}{2a^2}(0\leqslant t<a)$

当 $t\geqslant a$ 时则扫过了整个正方形，所以 $P(X-Y\leqslant t)=1(t\geqslant a)$

于是得到了分布函数为 $F_{X-Y}(t)=\begin{cases}0\,(t<-a)\\ \dfrac{(a+t)^2}{2a^2}\,(-a\leqslant t<0)\\ 1-\dfrac{(a-t)^2}{2a^2}\,(0\leqslant t<a)\\ 1\,(t\geqslant a)\end{cases}$，接着对 t 求导就

得到密度函数为 $f_{X-Y}(t)=\begin{cases}\dfrac{a-|t|}{a^2}\,(-a\leqslant t\leqslant a)\\ 0\,(\text{others})\end{cases}$

(2): 我们注意到 $f_{X-Y}(t)$ 是偶函数，由此不难得到 $|X-Y|$ 的密度函数为 $f_{|X-Y|}(t)=\begin{cases}\dfrac{2(a-t)}{a^2}\,(0\leqslant t\leqslant a)\\ 0\,(\text{others})\end{cases}$，相当于只要把正的部分变成 2 倍即可。

✍ 题目 25

我们令 $U=X+Y,V=Y$,反解出 $X=U-V,Y=V$,$J=\dfrac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$，$|\det J|=1$，于是得到 $f_{U,V}(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1+uv-v^2}{4}\,(|u|\leqslant 2,|v|\leqslant 1)\\ 0\,(\text{others})\end{cases}$。若给定 U，即 u 确定，那么有 $-1\leqslant(u-v)\leqslant 1$，$-1\leqslant v\leqslant 1$，综合得到 $-1\leqslant v\leqslant 1+u(u\leqslant 0)$，$-1+u\leqslant v\leqslant 1(u>0)$。于是得到 $X+Y$ 的密度函数即 U 的边缘密度函数

为 $f_U(u) = \begin{cases} \int_{-1}^{1+u} \dfrac{1+uv-v^2}{4} \mathrm{d}v \, (-2 \leqslant u \leqslant 0) \\ \int_{-1+u}^{1} \dfrac{1+uv-v^2}{4} \mathrm{d}v \, (0 \leqslant u \leqslant 2) \\ 0 \, (\text{others}) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + \dfrac{u^3}{24} (-2 \leqslant u \leqslant 0) \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{u^3}{24} (0 \leqslant u \leqslant 2) \\ 0 \, (\text{others}) \end{cases}$，也即 $f_{X+Y}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{24} |u|^3 \, (|u| \leqslant 2) \\ 0 \, (|u| > 2) \end{cases}$。

✍ **题目 26** 我们可以通过直线 $y = \dfrac{1}{z}x$ 即过原点的直线，当 $z > 0$ 时顺时针旋转为 z 增大的过程，求出转过矩形区域 $[0, a] \times [0, b]$ 的面积。

当 $z < 0$ 时，直线斜率为负，扫过的面积为 0，故 $P(Z \leqslant z) = 0 (z < 0)$。

当 $z = \dfrac{a}{b}$ 时为一分界点，直线经过该矩形在第一象限的顶点。

可得当 $0 \leqslant z < \dfrac{a}{b}$ 时，扫过的区域是 Y 轴、$y = b$、$y = \dfrac{1}{z}x$ 围成的三角形面积，$y = \dfrac{1}{z}x$ 与 $y = b$ 交点是 (bz, b)，所以得到 $P(Z \leqslant z) = \dfrac{b^2 z}{2ab} = \dfrac{bz}{2a} \left(0 \leqslant z < \dfrac{a}{b}\right)$

当 $z \geqslant \dfrac{a}{b}$ 时，扫过的面积为上面的梯形，相当于整个矩形面积减去下面由 X 轴、$x = a$、$y = \dfrac{1}{z}x$ 围成的三角形面积，此时 $y = \dfrac{1}{z}x$ 与 $x = a$ 交点是 $\left(a, \dfrac{a}{z}\right)$，所以可得 $P\left(Z \geqslant \dfrac{a}{b}\right) = 1 - \dfrac{a^2}{2abz} = 1 - \dfrac{a}{2bz} \left(z \geqslant \dfrac{a}{b}\right)$。

于是得到分布函数 $F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = \begin{cases} 0 \, (z < 0) \\ \dfrac{bz}{2a} \left(0 \leqslant z < \dfrac{a}{b}\right) \\ 1 - \dfrac{a}{2bz} \left(z \geqslant \dfrac{a}{b}\right) \end{cases}$，求导得到密度函数是 $f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{b}{2a} \left(0 \leqslant z \leqslant \dfrac{a}{b}\right) \\ \dfrac{a}{2bz^2} \left(z > \dfrac{a}{b}\right) \\ 0 \, (z < 0) \end{cases}$

(也可以是利用变量替换：$0 \leqslant z < \dfrac{a}{b}, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) \mathrm{d}y = \int_0^b y \dfrac{1}{ab} \mathrm{d}y = \dfrac{b}{2a}$；$z \geqslant \dfrac{a}{b}, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{a}{z}} y \dfrac{1}{ab} \mathrm{d}y = \dfrac{a}{2bz^2}$)

✍ **题目 27**

(1): 由于 $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}, \theta = \arctan \dfrac{Y}{X}$，于是得到 $X = \rho \cos\theta, Y = \rho \sin\theta$，得到 $\left| \det \dfrac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho \cos\theta \end{bmatrix} \right| = \rho$。由于 $X, Y \sim N(0, \sigma^2)$，即 $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$，又知 X, Y 相互独立，所以联合密度为 $f(x, y) =$

$\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$，于是带入 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 并乘以 Jacobi 矩阵行列式便得到 $f(\rho,\theta)=\dfrac{\rho}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$，其中 $\rho>0, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

(2): 可得到 $f_\rho(\rho)=\int_0^{2\pi}f(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta=\dfrac{\rho}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$，$f_\theta(\theta)=\int_0^{+\infty}f(\rho,\theta)\mathrm{d}\rho=\dfrac{1}{2\pi}$，于是 $f(\rho,\theta)=f_\rho(\rho)f_\theta(\theta)$，所以 ρ,θ 相互独立。

✍ **题目 28**

(1): $X\sim U[0,5], f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(0\leqslant x\leqslant 5)\\ 0\,(\text{others})\end{cases}$；$Y\sim \mathrm{Exp}(5), f_Y(y)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5y}(y>0)\\ 0\,(y\leqslant 0)\end{cases}$。由于 X,Y 相互独立，故我们利用卷积公式，当 $t\leqslant 0$ 时 $f_{X+Y}(t)=0$；当 $0<t<5$ 有 $f_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(t-x)\mathrm{d}x=\int_0^t\dfrac{1}{5}5\mathrm{e}^{-5(t-x)}\mathrm{d}x=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-5t}}{5}$，$f_{X+Y}(t)=\int_0^5\dfrac{1}{5}5\mathrm{e}^{-5(t-x)}\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{25-5t}-\mathrm{e}^{-5t}}{5}=\dfrac{(\mathrm{e}^{25}-1)}{5}\mathrm{e}^{-5t}$，因此 $X+Y$ 的密度函数为 $f_{X+Y}(t)=\begin{cases}0\,(t\leqslant 0)\\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{-5t}}{5}(0<t<5)\\ \dfrac{(\mathrm{e}^{25}-1)}{5}\mathrm{e}^{-5t}(t\geqslant 5)\end{cases}$

(2): $P(Z=1)=P(X\leqslant Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^5\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\dfrac{1}{5}5\mathrm{e}^{-5y}\mathrm{d}y=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-25}}{25}$，则 $P(X=0)=1-P(X=1)=\dfrac{24+\mathrm{e}^{-25}}{25}$，所以 Z 的分布律是

Z	0	1
P	$\frac{24+\mathrm{e}^{-25}}{25}$	$\frac{1-\mathrm{e}^{-25}}{25}$

✍ **题目 29** X,Y 相互独立，分布函数都是 $F(x)=\begin{cases}0\,(x<a)\\ \dfrac{x-a}{b-a}(a\leqslant x<b)\\ 1\,(x\geqslant b)\end{cases}$

(1): Z_1 的分布函数是 $F_{Z_1}(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0\,(z<a)\\ \left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^2(a\leqslant z<b)\\ 1\,(z\geqslant b)\end{cases}$，于是求导得到密度函数是 $f_{Z_1}(z)=\begin{cases}\dfrac{2(z-a)}{(b-a)^2}(a<z<b)\\ 0\end{cases}$

(2): Z_2 的分布函数是 $F_{Z_2}(z)=1-[(1-F_X(z))(1-F_Y(z))]=\begin{cases}0\,(z<a)\\ 1-\left(\dfrac{b-z}{b-a}\right)^2(a\leqslant z<b)\\ 1\,(z\geqslant b)\end{cases}$，

求导得到密度函数是 $f_{Z_2}(z)=\begin{cases}\dfrac{2(b-z)}{(b-a)^2}(a<z<b)\\ 0\,(\text{others})\end{cases}$

(3): 当 Z_1 的值给定为 z 时，因为必然有 $Z_2\leqslant Z_1$，由于 Z_2 必然是 X,Y 的其中一个，而 X,Y 本身服从均匀分布，所以得到在 Z_1 给定的条件下 Z_2 的条件分布是 $[a,z]$ 上的均匀分布。所以得到 $Z_2|Z_1$ 的条件密度函数为 $f_{Z_2|Z_1}(z_2|z)=\dfrac{1}{z-a}$，所以与 Z_1 的边缘密度函数 $\dfrac{2(z-a)}{(b-a)^2}$ 相乘就得到 Z_1,Z_2 的联合分布是 $f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2)=\begin{cases}\dfrac{2}{(b-a)^2}(a\leqslant z_2\leqslant z_1\leqslant b)\\ 0\,(\text{others})\end{cases}$

(4): 可以考虑直线 $Z_2=Z_1-R$，由于 (Z_1,Z_2) 的联合分布是均匀分布，区域为由 $y=x$、$y=a$、$x=b$ 围成的三角形。当 $r<0$ 时 $P(R\leqslant r)=0$，$r\geqslant b-a$ 时 $P(R\leqslant r)=1$，而当 $0\leqslant r<b-a$ 时则扫过的面积是该三角形去掉下面的一小块三角形，所以得到此时 $P(R\leqslant r)=1-\dfrac{(b-a-r)^2}{(b-a)^2}$，于是得到 R 的分布函数是 $F_R(r)=\begin{cases}0\,(r<0)\\ 1-\dfrac{(b-a-r)^2}{(b-a)^2}(0\leqslant r<b-a)\\ 1\,(r\geqslant b-a)\end{cases}$，求导得到密度函数为 $f_R(r)=\begin{cases}\dfrac{2(b-a-r)}{(b-a)^2}(0<r<b-a)\\ 0\,(\text{others})\end{cases}$

✍ **题目 30** 因为 $P\left(x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)=P\left(y\leqslant\dfrac{1}{2}\right)=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\dfrac{1+xy}{4}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\dfrac{1+xy}{4}\mathrm{d}y=\dfrac{3}{4}$，但是 $P\left(x\leqslant\dfrac{1}{2},y\leqslant\dfrac{1}{2}\right)=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\dfrac{1+xy}{4}\mathrm{d}y=\dfrac{153}{256}\neq P\left(x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)P\left(y\leqslant\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{16}$，所以 X,Y 不相互独立。

我们令 $U=X^2,V=Y^2$，则 $F_U(u)=P(X^2\leqslant u)=P(-\sqrt{u}\leqslant X\leqslant\sqrt{u})=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\dfrac{1+xy}{4}\mathrm{d}x=\sqrt{u}$,同理 $F_V(v)=\sqrt{v}$,又 $F_{U,V}(u,v)=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}}\dfrac{1+xy}{4}\mathrm{d}y=\sqrt{uv}=F_U(u)F_V(v)$，所以 U,V 即 X^2,Y^2 相互独立。

✍ **题目 31** 离散的情况我们只需一一列举并合并同类项。我们可以写出联合分布律，并且保证其中 X 值从左到右递增，Y 值从上到下递增 (或者互换：Y 值从左到右递增，X 值从上到下递增)。

(1): $X+Y$ 的取值集合为 $\{0,1,2,3,4,5\}$，我们可以斜着遍历，一条斜线上的点 $X+Y$ 和相等。从而可得分布律是

Z	0	1	2	3	4	5
P	0	0.06	0.19	0.35	0.28	0.12

(2): 取定 (X,Y) 点于 (U,U),则该点以左的点和该点以上的点 (含该点) 都满足 $\max\{X,Y\}=U$。遍历 U，并合并同类项有

U	0	1	2	3
P	0	0.15	0.46	0.39

(3): 取定 (X,Y) 点于 (V,V),则该点以右的点和该点以下的点 (含该点) 都满足 $\min\{X,Y\}=V$。遍历 V，并合并同类项有

V	0	1	2
P	0.28	0.47	0.25

(也可以一一列举，所有情况如下：)

(X,Y)	$X+Y$	$\max\{X,Y\}$	$\min\{X,Y\}$
$(0,0)$	0	0	0
$(0,1)$	1	1	0
$(0,2)$	2	2	0
$(0,3)$	3	3	0
$(1,0)$	1	1	0
$(1,1)$	2	1	1
$(1,2)$	3	2	1
$(1,3)$	4	3	1
$(2,0)$	2	2	0
$(2,1)$	3	2	1
$(2,2)$	4	2	2
$(2,3)$	5	3	2

✍ **题目 32** 如果 $Z=0$，由 X,Y 非负性一定是 $X=Y=0$，可得 $P(X=0|Z=0)=1$

如果 $Z>0$(且 Z 是整数)，因为 X,Y 相互独立，故 $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)=\dfrac{\lambda_1^i\lambda_2^j}{i!j!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$，因而 $P(X=i,X+Y=n)=P(X=i)P(Y=n-i)=\dfrac{\lambda_1^i\lambda_2^{n-i}}{i!(n-1)!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$。另外，结合 Poisoon 分布的可加性我们得到 $Z\sim\mathrm{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)$，于是得到 $P(X+Y=n)=\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$，所以得到 $P\left(X=i\left|X+Y=n\right.\right)=\dfrac{P\left(X=i,X+Y=n\right)}{P\left(X+Y=n\right)}=\dfrac{n!}{i!\left(n-i\right)!}\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^i\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-i}=C_n^i\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^i\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-i}$，这是一个二项分布 $B\left(n,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$。

✍ **题目 33** $X,Y\sim\mathrm{Geo}(p)$ 且相互独立，于是 $P(X=n)=P(Y=n)=p(1-p)^{n-1}$。

(1): $P(Z=n)=P(X+Y=n)=\sum_{k=1}^{n-1}P(X=k)P(Y=n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}p(1-p)^{k-1}\times p(1-p)^{n-k-1}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$，其中 $Z\in\mathbb{N},Z\geqslant 2$

(2): $P(X=k,X+Y=n)=P(X=k)P(Y=n-k)p(1-p)^{k-1}\times p(1-p)^{n-k-1}=p^2(1-p)^{n-2}$，所以 $P(X=k|Z=n)=\dfrac{P(X=k,Z=n)}{P(Z=n)}=\dfrac{1}{n-1}$

(3): 如果 $W=n$，那么 X,Y 中有一个取 n，另一个取到的不超过 n，因此 $P(W=n)=P(X=n)\sum_{k=1}^{n}P(Y=k)+P(Y=n)\sum_{k=1}^{n}P(X=k)=2p(1-p)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}p(1-p)^{k-1}-P(X=n)P(Y=n)=2p(1-p)^{n-1}[1-(1-p)^n]-p^2(1-p)^{2n-2}=p(1-p)^{n-1}[2-2(1-p)^n-p(1-p)^{n-1}]=p(1-p)^{n-1}[2-(1-p)^n-(1-p)(1-p)^{n-1}-p(1-p)^{n-1}]=p(1-p)^{n-1}[2-(1-p)^n-(1-p)^{n-1}]$。即 $P(W=n)=p(1-p)^{n-1}[2-(1-p)^n-(1-p)^{n-1}]$。注意中间有一个减去 $P(X=n)P(Y=n)$ 是因为两个求和中这一项算了两次，故要减掉一次，另外最后一个是把 $2(1-p)^n$ 拆成两个，其中一个又拆成 $(1-p)(1-p)^{n-1}$，以便与后面 $p(1-p)^{n-1}$ 结合。

(4): 如果 $V=n$，同理可得 X,Y 中有一个取 n 而另一个不低于 n，所以 $P(V=n)=P(X=n)\sum_{k=n}^{\infty}P(Y=k)+P(Y=n)\sum_{k=n}^{\infty}P(X=k)-P(X=n)P(Y=n)=2p(1-p)^{n-1}\sum_{k=n}^{\infty}p(1-p)^{k-1}-p^2(1-p)^{2n-2}=2p(1-p)^{2n-2}-p^2(1-p)^{2n-2}=p(2-p)(1-p)^{2n-2}$，即 $P(V=n)=p(2-p)(1-p)^{2n-2}$

✍ **题目 34** 可得 X 的分布函数是 $F_X\left(x\right)=\begin{cases}0\left(x\leqslant 0\right)\\1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(x\geqslant 0\right)\end{cases}$，$Y$ 服从参数为 0.4 的两点分布。

当 $z<0$ 时，显然 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=0$，因为 X,Y 在有概率时都不可能取负值。

当 $0\leqslant z<1$ 时，必然有 $Y=0$，又因为 X,Y 相互独立，可以得到 $P(Z\leqslant z)=P(X\leqslant z)P(Y=0)=0.6F_X(z)=0.6(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z})$

当 $z\geqslant 1$ 时，则 $P(Z\leqslant z)=P(X\leqslant z)P(Y=0)+P(X\leqslant z-1)P(Y=1)=0.6F_X(z)+0.4F_X(z-1)=1-0.6\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z}-0.4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-1)}$

综上，Z 的分布函数是 $F_Z(z)=\begin{cases}0\,(z<0)\\0.6\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z}\right)(0\leqslant z<1)\\1-0.6\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z}-0,4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-1)}\,(z\geqslant 1)\end{cases}$.

✍ **题目 35** 设面积为 S，我们考虑反比例函数 $Y=\dfrac{S}{X}$ 仅在第一象限的部分，于是在这条反比例函数曲线上的点坐标 (X,Y) 满足 $XY=S$，也即对应的矩形面积是 S。所以我们可以通过 $y=\dfrac{s}{x}$ 中针对 s 的变化求出其概率分布及密度。可以得出：矩形 $[0,2]\times[0,1]$ 与该反比例函数曲线围成的下面 (靠 x,y 轴部分) 区域内的点 (x,y) 满足 $xy\leqslant s$。

当 $s\leqslant 0$ 时，显然有 $P(S\leqslant s)=0$。

当 $0<s<2$ 时，$y=\dfrac{s}{x}$ 交 $y=1$ 于 $(s,1)$，交 $x=2$ 于 $\left(2,\dfrac{s}{2}\right)$，所以可得对应区域面积是 $s\times 1+\int_s^2\dfrac{s}{x}\mathrm{d}x=s+s\ln x\mid_s^2=s+s\ln 2-s\ln s=s\,(1+\ln 2-\ln s)$ (一块矩形加一块曲边梯形)，又因为 (X,Y) 在矩形 $[0,2]\times[0,1]$ 上服从均匀分布，该矩形面积是 2，所以此时 $P(S\leqslant s)=\dfrac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)$。

当 $s\geqslant 2$ 时则 $P(S\leqslant s)=1$，因为 (X,Y) 点对应矩形的最大面积是 2。

所以可得到 S 的分布函数是 $F_S(s)=\begin{cases}0\,(s\leqslant 0)\\\dfrac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)\,(0<s<2)\\1\,(s\geqslant 2)\end{cases}$，对 s 求导得到密度函数是 $f_S(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln s)\,(0<s<2)\\0\,(\text{others})\end{cases}$

或者是由 $F_S(s)=\iint_{xy\leqslant s}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ \ (x,y)\in G\\0\ \ (x,y)\notin G\end{cases}$，而 $0<s<2$ 时则有 $F(s)=\iint_{xy\leqslant s}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\iint_{xy>s}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\dfrac{1}{2}\int_s^2\mathrm{d}x\int_{\frac{s}{x}}^1\mathrm{d}y=\dfrac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)$ 得到。

4 第四章

✍ **题目 1** 对于超几何分布：$X \sim H(N, n_1, N)$, 存在固定公式：

$$E(X) = n\frac{N_1}{N}, D(X) = \frac{nN_1(N-N_1)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

因此代入 $N_1 = 3, n = 5, N = N_1 + 15$，得到

$$E(X) = 3 \times \frac{5}{15} = 1 \quad D(X) = \frac{4}{7}$$

注意, 要明确 $X \sim H(N, n_1, N)$ 的意思，此题问的是“次品数”, 因此 $N_1 = 3$，而不是 12

✍ **题目 2** 由 $X \sim Ge(p)$，有 $P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$，则

$$\begin{aligned} E(X) =& \sum_{k=1}^{+\infty} kp\left(1-p\right)^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}\right)\Bigg|_{x=1-p} = p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\right)'\Bigg|_{x=1-p} \\ =& p \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=1-p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

由 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$，我们先计算 $E(X^2)$：

$$\begin{aligned} E(X^2) =& \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p\left(1-p\right)^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}\right)\Bigg|_{x=1-p} = p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k\right)'\Bigg|_{x=1-p} \\ =& p\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'\Bigg|_{x=1-p} = \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

则

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

✍ **题目 3** 显然，依据 $X \sim Exp(\lambda)$，有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\left[xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

✍ **题目 4** 由连续型随机变量数学期望的定义，有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}xe^{-|x|}\mathrm{d}x = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}x^2 e^{-|x|}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}\mathrm{d}x = \Gamma(3) = 2$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2$$

✍ **题目 5**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} -x\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 0 + \sqrt{2\pi}\sigma \times \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = 2\sigma^2$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

✍ **题目 6** 由题，有

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{3a^3}{x^4} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}$$

则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}a$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{x^2}\mathrm{d}x = 3a^2$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{4}a^2$$

✍ **题目 7**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\ln(x^2+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

由于 $\lim_{x\to\infty}\ln(x^2+1) = \infty$，故 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 不绝对收敛，即 $E(X)$ 不存在。

✍ **题目 8** 由题，有

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & else \end{cases}$$

则

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sin x\mathrm{d}x = 0$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{2}$$

✍ **题目 9**

(1): 由正态分布性质知 $E(X)=\mu$，则 $Y=|X-\mu|$。

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\mu}(\mu-x)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+\int_{\mu}^{+\infty}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\frac{x-\mu}{\sigma}=t}\int_{-\infty}^{0}\frac{-t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma\mathrm{d}t\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\end{aligned}$$

(2):

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{\mu^2-2\mu x}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=1$$

✍ **题目 10** 由题意，即求 $E(\frac{1}{2}mX^2)=\frac{1}{2}mE(X^2)$。

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{4x^4}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{\frac{x}{a}=t}\int_0^{+\infty}\frac{4a^2}{\sqrt{\pi}}t^4e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{4a^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}a^2$$

$$E(\frac{1}{2}mX^2)=\frac{3}{4}ma^2$$

✍ **题目 11** 设净利润为 Y 元，则

$$P\{Y=-200\}=P\{X\leq 1\}=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=1-e^{-\frac{1}{4}}$$

$$P\{Y=100\}=1-P\{Y=-200\}=e^{-\frac{1}{4}}$$

$$E(Y)=-200(1-e^{-\frac{1}{4}})+100e^{-\frac{1}{4}}=300e^{-\frac{1}{4}}-200$$

✍ **题目 12**

(1):

$$E(X)=0.1-a+c=0$$

$$E(Y)=a+3b+3c+0.6=2$$

$$a+b+c+0.4=1$$

联立上式，得 $a=0.2,\ b=0.3,\ c=0.1.$

(2): $Z=(X-Y)^2$ 的分布律为

Z	0	1	4	9	16
P	0.1	0.2	0.3	0.4	0

故 $E(Z)=5$。

(3): $Z=X^2Y$ 的分布律为

Z	0	1	2	3
P	0.4	0.3	0.2	0.1

故 $E(Z)=1$。

✍ **题目 13**

$$E(X)=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^2\frac{1}{3}x(x+y)\mathrm{d}x=\frac{11}{9}$$

$$E(Y)=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^2\frac{1}{3}y(x+y)\mathrm{d}x=\frac{5}{9}$$

$$E(XY)=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^2\frac{1}{3}xy(x+y)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^2\frac{1}{3}(x^2+y^2)(x+y)\mathrm{d}x=\frac{13}{6}$$

✍ **题目 14** 设 A,B 坐标分别为 X,Y。由题意，$X,Y\sim U[0,a]$，则 AB 可表示为 $|X-Y|$。

$$E(|X-Y|)=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\frac{|x-y|}{a^2}\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\frac{x-y}{a^2}\mathrm{d}y+\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^a\frac{y-x}{a^2}\mathrm{d}y=\frac{a}{3}$$

$$E(|X-Y|^2)=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\frac{(x-y)^2}{a^2}\mathrm{d}y=\frac{a^2}{6}$$

$$D(|X-Y|)=E(|X-Y|^2)-[E(|X-Y|)]^2=\frac{a^2}{18}$$

✍ **题目 15** 设点 A 坐标为 (X,Y)，则 (X,Y) 服从 $X^2+Y^2\le R^2$ 上的均匀分布

$$E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_S\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho}{\pi R^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{2}{3}R$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_S(x^2+y^2)f(x,y)\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^2}{\pi R^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{R^2}{2}$$

$$D(\sqrt{X^2+Y^2})=E(X^2+Y^2)-[E(\sqrt{X^2+Y^2})]^2=\frac{R^2}{18}$$

✍ **题目 16** 设随机变量 $X_i = \begin{cases} 0, & \text{不配对}, \\ 1, & \text{配对}, \end{cases}$ $X = \sum_{i=1}^n X_i$，则 $E(X_i) = \frac{1}{n}$，$E(X) = E(\sum_{i=1}^n X_i) = 1$。

✍ **题目 17** 由题意，$X \sim U[0,2]$, $Y \sim Exp(2)$，

则 $E(X) = 1, D(X) = \frac{1}{3}, E(Y) = \frac{1}{2}, D(Y) = \frac{1}{4}$。

(1):

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{3}{2},$$

$$E(X^2 - 2Y + 1) = E(X^2) - 2E(Y) + 1 = [E(X)]^2 + D(X) - 2E(Y) + 1 = \frac{4}{3}.$$

(2): 由 X 与 Y 独立，$E(XY) + E(X)E(Y) = \frac{1}{2}$.

✍ **题目 18** 见第 1 至 6 题。

✍ **题目 19** 见第 8 题。

✍ **题目 20** 见第 14 题。

✍ **题目 21** 见第 15 题。

✍ **题目 22**

$$E(X) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} x \mathrm{d}y = \frac{2}{3},\ E(X^2) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} x^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{2},$$

$$E(Y) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} y \mathrm{d}y = 0,\ E(Y^2) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} y^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{6}.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{18},\ D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{6}.$$

✍ **题目 23**

$$\begin{aligned} D(XY) &= E(X^2Y^2) - [E(XY)]^2 = E(X^2)E(Y^2) - [E(X)]^2[E(Y)]^2 \\ &= \{D(X) + [E(X)]^2\}\{D(Y) + [E(Y)]^2\} - [E(X)]^2[E(Y)]^2 \\ &= D(X)D(Y) + [E(X)]^2 D(Y) + D(X)[E(Y)]^2. \end{aligned}$$

故 $D(XY) \geq D(X)D(Y)$。

✍ **题目 24**

$$\begin{aligned} E(X-Y)^2 = E(X^2 - 2XY + Y^2) &= E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2) \\ &= D(X) + [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) + D(Y) + [E(Y)]^2 \\ &= 2\sigma^2. \end{aligned}$$

✍ **题目 25** 由题易得，$E(X) = 0.4$, $E(Y) = 0$。XY 的分布律为

XY	-2	-1	0	1	2
P	0	0.2	0.6	0.2	0

故 $E(XY)=0$。

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$$

$$E(X^2)=0.4,\ E(Y^2)=2,\ D(X)=0.56,\ D(Y)=2,$$

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0.$$

✍ **题目 26**

$$E(X)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 x(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{5}{12},\ E(Y)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{5}{12},$$

$$E(X^2)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 x^2(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{4},\ E(Y^2)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y^2(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

$$E(XY)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 xy(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}.$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{144},\ D(X)=D(Y)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{11}{144}.$$

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{11},$$

$$D(2X-Y+1)=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)=\frac{59}{144}.$$

✍ **题目 27** 采用循环证法，证明顺序为 $(1)\to(2)\to(3)\to(4)\to(1)$。

$(1)\to(2)$：X 与 Y 不相关 $\Rightarrow \rho(X,Y)=0\Rightarrow Cov(X,Y)=0$

$(2)\to(3)$：$Cov(X,Y)=0\Rightarrow E(XY)-E(X)E(Y)=0$

$(3)\to(4)$：$E(XY)=E(X)E(Y)\Rightarrow Cov(X,Y)=0\Rightarrow$

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)$

$(4)\to(1)$：$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\Rightarrow X$ 与 Y 不相关

✍ **题目 28**

$$\begin{aligned}Cov(Y_1,Y_2)&=Cov(X_1-X_2,X_1X_2)=E[(X_1-X_2)X_1X_2]-E(X_1-X_2)E(X_1X_2)\\&=E(X_1^2X_2)-E(X_1X_2^2)\end{aligned}$$

由于 X_1,X_2 相互独立,方差存在,故 X_1^2 与 X_2,X_1 与 X_2^2 也相互独立,故 $Cov(Y_1,Y_2)=0$,即 Y_1 与 Y_2 不相关。

✍ **题目 29**

(1):

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X)+E(Y)+E(Z)=1,\\ D(W) &= D(X+Y)+D(Z)+2Cov(X+Y,Z)\\ &= D(X+Y)+D(Z)+2[Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)]. \end{aligned}$$

由 $\rho(X,Y)=0$，得 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)=2$。

由 $\rho(X,Z)=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{1}{2},\rho(Y,Z)=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=-\frac{1}{2}$，

得 $D(Z)=1,Cov(X,Z)=\frac{1}{2},Cov(Y,Z)=-\frac{1}{2}$，则 $D(W)=3$。

(2):

$$Cov(2X+Y,3Z+X)=6Cov(X,Z)+2D(X)+3Cov(Y,Z)+Cov(X,Y)=\frac{7}{2}.$$

✍ **题目 30** XY 的分布律为

XY	-1	0	1
P	0	1	0

$E(XY)=0,E(X)=E(Y)=0$。则 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，故 X,Y 不相关。又 $P\{X=-1,Y=-1\}=0\neq P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}=\frac{1}{16}$，故 X,Y 不相互独立。

✍ **题目 31** $E(X)=\frac{2}{3}$, $E(Y)=0$, $E(XY)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-x}^{x} xy\mathrm{d}y=0$, $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$ 故 X,Y 不相关。

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & else,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases} 1-y, & 0\le y\le 1,\\ 1+y, & -1\le y<0,\\ 0, & else.\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X,Y 不相互独立。

✍ **题目 32**

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1,\ Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-1,$$

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-1}{\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow D(Y)=4.$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)=7.$$

✍ **题目 33**

$$D(X)=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\leq i\leq j\leq n}Cov(X_i,X_j),$$

$$E(X_i^2)=\frac{1}{n},D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{n-1}{n^2},$$

$$Cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2},$$

$$D(X)=n\cdot D(X_i)+\mathrm{C}_n^2\cdot Cov(X_i,X_j)=1.$$

✍ **题目 34**

(1): 由结论可知，X 与 Y 相互独立 $\Rightarrow$ X 与 Y 不相关。

X 与 Y 不相关 $\Rightarrow Cov(X,Y)=0\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$，又 $E(X)=p_1,E(Y)=p_2$，则 $E(XY)=p_1p_2,P\{XY=1\}=p_1p_2$，则有

$Y \backslash X$	0	1
0	$(1-p_1)(1-p_2)$	$p_1(1-p_2)$
1	$p_2(1-p_1)$	p_1p_2

易得 $P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\},\cdots$，故 X 与 Y 相互独立。

(2): 令 $X=a_1+(a_2-a_1)Z,Y=b_1+(b_2-b_1)W$，则 $Z\sim B(1,p_1),W\sim B(1,p_2)$，由 (1) 中结论知，$X$ 与 Y 相互独立等价于 X 与 Y 不相关。