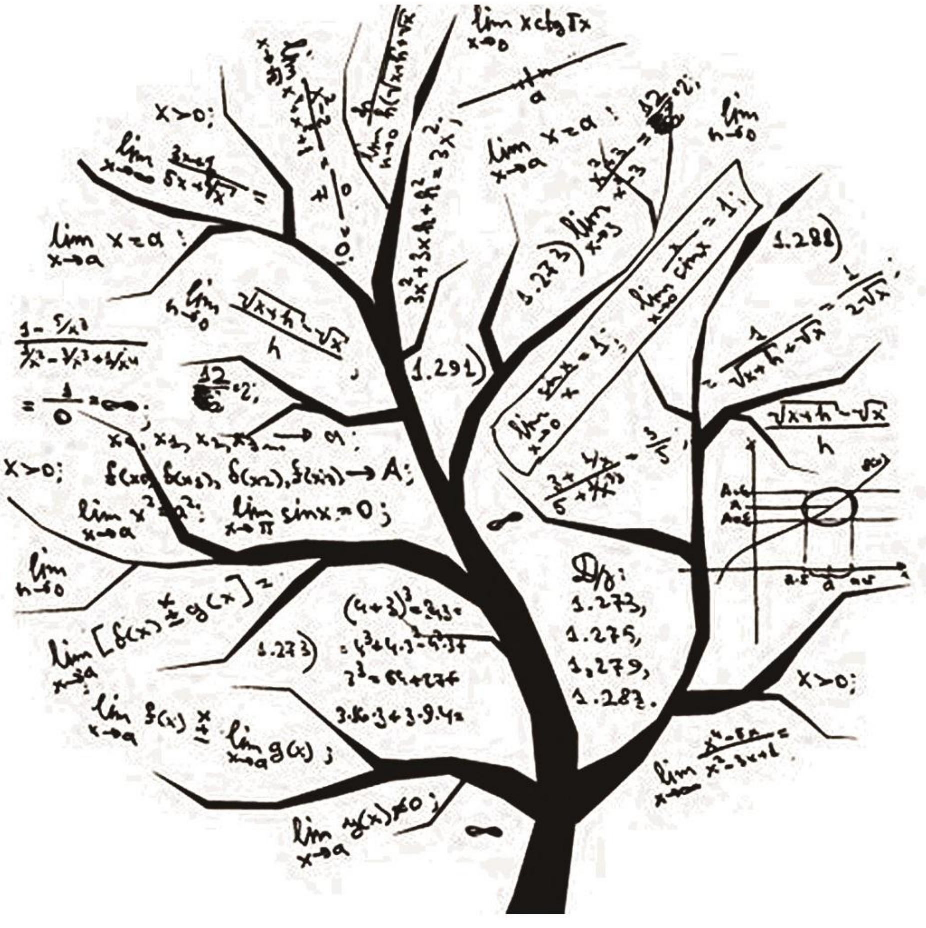
工科数学分析基础

课后题解析

意见征集稿



编者：学辅志愿者

仲英书院朋辈辅导

《工科数学分析基础》课后题解析（意见征集稿）

编辑：工商 61 樊昕怡，机械 72 梁伊哲

编写（按章节顺序排名）：电气 712 王云，宗濂 71 王逸阳，新能源 71 曹瑞曦，能动 D71 张翼霄，能动 B71 杨松，自动化 75 熊宇恒，自动化 74 朱雨航

封面制作：医电 51 李雅敏

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者对本资料做出的贡献，使本资料的编写工作能按时完成。由于编者们的能力与精力限制，难免有错误之处。如同学们在本资料中发现错误，请联系仲英学辅：XJTUzyxuefu@163.com，我们将在修订时予以更正。

从第 3 周开始，每晚 19:30-21:30，学辅志愿者在东 21 舍 118 学辅办公室值班，当面为学弟学妹们答疑，欢迎同学们前来。

同时，我们也有线上答疑平台——学粉群 4.0：646636875。以及微信公众号:chungying-xuefu。期中、期末考试前，我们会发放考前小助手并举办考前讲座。学辅还有转专业交流会，英语考试讲座等活动，消息会在学粉群和公众号上公布。

仲英学业辅导中心

2018 年 9 月 20 日

学辅公众号

chungying-xuefu

学粉群 4.0

646636875

工科数学分析基础章末习题解析

第一章

1.

(1) $\forall \ \varepsilon > 0$，有无穷多个$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的(B)

（A）充分条件，但非必要条件 （B）必要条件，但非充分条件

（C）充要条件 （D）既非充分条件，也非必要条件

解析：

根据数列收敛的条件：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N_+$，当$n>N$时，$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$。易得该条件是数列收敛的必要条件，但是无穷多个与$\exists N \in N_+$，当$n>N$时，$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$并不等价，所以不是充分条件。

(2)设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足$a_n \le b_n \le c_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$，则数列$\{b_n\}$的极限（D）

（A）存在且为零 （B）存在但不一定为零

（C）一定不存在 （D）不一定存在

解析：

根据夹逼性，只有当c_n与a_n均收敛时，b_n才收敛于零。

(3)设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是（D）.

（A）若x_n发散，则y_n必发散 （B）若x_n无界，则y_n必无界

（C）若x_n有界，则y_n必为无穷小 （D）若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小

解析：

（A）（B）选项考虑y_n为零的情况即可，（C）考虑x_n为零的情况即可，

（D）：$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n \times \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = 0 \times 0 = 0$

(4)设有数列 $\{x_n\}$与 $\{y_n\}$，以下结论正确的是（D）

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则必有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$或$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$，则必有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$或$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$

（C）若$\{x_n y_n\}$有界，则必有$\{x_n\}$与 $\{y_n\}$都有界

（D）若$\{x_n y_n\}$无界，则必有$\{x_n\}$无界或$\{y_n\}$无界

解析：

（A）只有$x_n y_n$收敛不能说明两个数列收敛。比如，$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别是$\{0,1,0,1,0,1\ldots\}$与$\{1,0,1,0,1,0\ldots\}$

（B）两个数列可能是无界的，但是并不一定趋于无限大，比如，$\{x_n\}$与$\{y_n\}$分别是$\{1,1,1,2,1,3\ldots1,n,1,n+1\ldots\}$与$\{1,1,2,1,3,1\ldots n,1,n+1,1\ldots\}$

（C）其中一个是全为零的常数列，另外一个即便是无界数列也是成立的。

（D）反证法：假定两个数列都是有界的，乘积一定是有界的。

(5)当$x\to0$时，变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是（D）.

（A）无穷小量

（B）无穷大量

（C）有界的但不是无穷小量

（D）无界的但不是无穷大量

解析：

$x\to0$时$\frac{1}{x^2}\to\infty$，$\sin\frac{1}{x}$有界，并且不收敛于0，所以变量是无界的，但是无界与无穷大量不是等同的。无穷大量的定义：$\forall M>0$，$\exists N\in N_+$，当n>N时，$|x_n|\geq M$，x_n是无穷大量。本题中，无论找哪一个N，都可以找到数字，使得$\sin\frac{1}{x}=0$，所以只是无界，但不是无穷大量。

(6)设$f(x)$，$\varphi(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$上有定义，$f(x)$为连续函数，且$f(x)\neq0$，$\varphi(x)$有间断点，则（D）.

（A）$\varphi[f(x)]$必有间断点

（B）$[\varphi(x)]^2$必有间断点

（C）$f[\varphi(x)]$必有间断点

（D）$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点

解析：

（A）选项，假如$\varphi(x)$的间断点是0，由于$f(x)\neq0$，所以复合函数也没有间断点。

（B）选项，$\varphi(x)$与$[\varphi(x)]^2$的连续性没有必然的联系，$\varphi(x)$连续可以推出$[\varphi(x)]^2$连续，但$\varphi(x)$不连续推不出$[\varphi(x)]^2$不连续。

（C）选项，$\varphi(x)$的间断点是跳跃间断点，但是左右极限的值代入$f(x)$之后相等，就没有间

断点。比如$f(x)=1$，$\varphi(x)=[x]$，尽管$\varphi(x)$有间断点，但是带入之后全部都是1，仍然是连续的。

（D）选项，不妨假设$\varphi(x)$的间断点是0，

如果是$\varphi(x)$在0处无定义，复合函数仍然无定义，仍为间断点，

如果是左右极限的问题，

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to0+}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to0+}f(x)}$，$\lim\limits_{x\to0-}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to0-}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to0-}f(x)}$，

由于$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，

但是$\lim\limits_{x\to0+}\varphi(x)$，$\lim\limits_{x\to0-}\varphi(x)$，$\varphi(0)$至少有两个不相等，所以必为间断点。

（7）$x=0$是函数$f(x)=\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}$的（B）

（A）跳跃间断点

（B）可去间断点

（C）无穷间断点

（D）振荡间断点

解析：

$\lim\limits_{x\to0+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=0$，$\lim\limits_{x\to0-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=\frac{2+0}{1+0}=2$，$\lim\limits_{x\to0+}\frac{\sin x}{|x|}=1$，$\lim\limits_{x\to0-}\frac{\sin x}{|x|}=-1$，

所以，$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=1$，但是$f(x)$在零处无定义，所以是可去间断点。

（8）设函数$f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,\ +\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数a，b满足（D）

（A）$a<0$，$b<0$　　（B）$a>0$，$b>0$

（C）$a\le0$，$b>0$　　（D）$a\ge0$，$b<0$

解析：

因为$e^{bx}>0$，要使得函数在R上连续，则$a\ge0$。又因为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$，

所以$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+e^{bx}\right)=\infty$，所以$b<0$

（9）已知函数$f(x)=\frac{(x^2+a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}}+b}$在$(-\infty，+\infty)$上有一个可去间断点和一个跳跃间断点，则（C）

（A）$a=1，b=-1$　　　　（B）$a=0，b=1$

（C）$a\neq 0，b=-e$　　　　（D）$a=e，b=-1$

解析：

很明显$x=0$是一个间断点，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\frac{-a^2}{+\infty}=0$，$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\frac{-a^2}{b}$

又因为分子是连续函数，要使得$f(x)$有两个间断点，则$b<0$，且当$x=1$时，分母为零

即$b+e=0$，$b=-e$

此时，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+a^2)(x-1)}{e\left(\frac{1}{x}-1\right)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x^2+a^2)}{e}=-\frac{a^2+1}{e}$

是可去间断点，所以$x=0$是跳跃间断点，所以$a\neq 0$

综上，$a\neq 0$，$b=-e$

2. 已知$f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，试求$\varphi(x)$及其定义域。

解：$f(\varphi(x))=\sin\varphi(x)=1-x^2$，$\therefore \varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$

定义域：$|1-x^2|\leq 1$，解得：$x\in\left[-\sqrt{2}，\sqrt{2}\right]$

3. 求下列极限：

常见的等价无穷小：

$x\to 0$时：

$$\ln(1+x)\sim x$$
$$e^x-1\sim x$$
$$(1+x)^a-1\sim ax$$
$$\sin x\sim x\sim\tan x$$
$$\arctan x\sim x$$
$$a^x-1\sim x\ln a$$

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

解：$\because \frac{p}{n^2+n+n}\leq\frac{p}{n^2+n+p}\leq\frac{p}{n^2+n+1}(1\leq p\leq n)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n+n} \leq$ 原式 $\leq \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n+1}$

又$\because$左式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$

右式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore$由夹逼准则知原式$=\frac{1}{2}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{\frac{1}{n+1}}\left(e^{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{\frac{1}{n+1}}\frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}{\frac{1}{n(n+1)}}\frac{1}{n(n+1)}=1$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sin^2 x}$

注：在求极限过程中，极限不为零的部分，如果与其他部分是乘或者除的关系，可以先代换，降低难度。

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4}\frac{\sin\frac{s}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}$

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$

解：原式$=\frac{(x-1)+(x^2-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)]$$

$$=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)^x-1}{x^2}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left((1+2\sin x)^{\frac{1}{2\sin x}}\right)^{2x\sin x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x\sin x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{x^2}=2$

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}(a>0)$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\left(\left(\frac{a+x}{a}\right)^x-1\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x}{x^2}\left(\left(\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right)^{\frac{x^2}{a}}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x}{x^2}\left(e^{\frac{x^2}{a}}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x}{x^2}\frac{x^2}{a}=\frac{1}{a}$

4. 试确定常数a与n的一组值，使得当$x\to 0$时，$e^{2x^2}-\ln\left[e\left(1+x^2\right)\right]$与$ax^n$为等价无穷小。

解：由题意，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-\ln\left[e\left(1+x^2\right)\right]}{ax^n}=1$，

$\because\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-\ln\left[e\left(1+x^2\right)\right]}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1-\ln\left(1+x^2\right)}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{ax^n}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{ax^n}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{ax^{n-2}}=1$$

解得：$a=1$，$n=2$

5. 设$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，试确定$f(x)$的间断点，并指出其类型.

解：$f(x)=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin s}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\left(1+\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)\right)}=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x\left(\frac{\sin t}{\sin x}-1\right)}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$

所有使得$\sin x=0$的点，即$x=k\pi(k\epsilon Z)$都是函数的间断点。下面讨论类型：

$\because\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e^1=e$

$\therefore x=0$是可去间断点。

当$k\neq 0$时，

$\because\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$

$\therefore x=k\pi(k\neq 0)$是无穷间断点。

6. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$在$\left(-\infty,\ +\infty\right)$内连续，试确定常数a和b.

解：分情况讨论：

$\langle 1\rangle x=0$，$f(x)=0$

$\langle 2\rangle x=1$，$f(x)=\frac{1+a+b}{2}$

<3>$x=-1$，$f(x)=\frac{-1+a-b}{2}$

<4>$|x|>1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$

<5>$|x|<1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$

$\because f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内连续，$\therefore\frac{1+a+b}{2}=a+b=1$，$\frac{-1+a-b}{2}=a-b=-1$

解得：$a=0$，$b=1$

7. 某人为了孩子的教育，打算在银行存入笔资金，希望这笔资金10年后价值为12000元。

（1）如果银行以年利率9%、每年支付复利四次的方式付息，问此人一开始应该在银行存多少钱？

解：$x\left(1+\frac{9}{4}\%\right)^{40}=12000$，解得：$x\approx 4927.75$

（2）如果复利是连续的，此人一开始应该在银行存多少元？

解：$x\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{n}\%\right)^{10n}=12000.\ \because\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{100n}\right)^{10n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{9}{100n}\right)^{\frac{100n}{9}}\right)^{\frac{9}{10}}=e^{\frac{9}{10}}$

代入解得：$x\approx 4878.84$

8. 设有方程$x^n+nx-1=0$，其中n为正整数。证明此方程存在唯一正实根x_n，并证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明：令$f(x)=x^n+nx-1$，则$f'(x)=nx^{n-1}+n=n(x^{n-1}+1)$

显然，当$x>0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调递增。

$\because f(0)=-1<0$，$f(1)=n>0$。$\therefore f(x)$存在唯一正零点，且该零点在$(0,\ 1)$上

$\because {x_n}^n+nx_n-1=0$，$\therefore 0\le x_n=\frac{1-{x_n}^n}{n}\le\frac{1}{n}$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，$\therefore$由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

9. 设$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，试证明存在$\xi\in(-\infty,\ +\infty)$，使得

$$f(\xi)+\xi=0$$

证明：反证法：

假设不存在这样的ξ使得$f(\xi)+\xi=0$。令$\varphi(x)=f(x)+x$，由连续函数的运算法则可知，$\varphi(x)$也是连续函数。又$\varphi(x)$没有零点，∴$\varphi(x)$恒大于零或者恒小于零。不妨设$\varphi(x)>0$，有$f(x)+x>0$，当$x<0$时，$\frac{f(x)}{x}<-1$，由极限保序性知，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\leq-1<0$，与$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$相矛盾。故假设错误，原结论正确。

第二章

1.选择题

(1) (D) 根据连续的定义可知函数连续

根据导数的定义分别计算左右导数，均为 0

故 f(x)可导

(2) (A) F(0)=f(0)

由题$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x-0}=f'(0)+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)|\sin x|}{x}$

又$\lim\limits_{x\to0}\frac{|\sin x|}{x}$不存在（左右极限不等）故$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

f(x)可导 必然连续 故 f(x)=0

(3) (C) (4) (B) 解析见书后答案

(5) (C) 由题 f(x)单调递增，故选 C

(A)选项反例为 $f(x)=x^3$ 在 x=0 处的导数

(6)(D) (7)(B) (8)(C) 解析见书后答案

2.对于任意的 x_0

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0)f(\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f(x_0)\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x_0)f'(0)=f(x_0)$$

由于 x_0的任意性，f’(x)=f(x)

3. $\varphi(x)=\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{f(x+t)}{f(x)}\right]^{\frac{x}{\sin t}}$

$$\ln\varphi(x)=\lim_{t\to0}\frac{x}{\sin t}\ln\frac{f(x+t)}{f(x)}=\lim_{t\to0}\frac{x}{t}\frac{f(x+t)-f(x)}{f(x)}=\frac{x}{f(x)}\lim_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=\frac{xf'(x)}{f(x)}$$

对$\ln\varphi(x)=\frac{xf'(x)}{f(x)}$两边求导

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+x\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$$

$$\varphi'(x)=\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+x\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}\right]\varphi(x)=\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+x\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}\right]e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$$

4. 化简可得 $y=\frac{3+\cos 4x}{4}$

$y^{(n)}=-4^{n-1}\sin(4x+(n-1)\frac{\pi}{2})$

5. $y=f(x+y)$

$y'=f'(x+y)(1+y')$

$y''=f''(x+y)(1+y')^2+f'(x+y)y''$

化简 $y''=\frac{f''(x+y)(1+y')^2}{1-f'(x+y)}=\frac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^3}$

6. $f'(x)=6x-3Ax^{-4}$

$f''(x)=6+12Ax^{-5}$

当 $x>0$ 时 f’’(x)>0 f’(x)单调递增

当 $0<x<\sqrt[5]{\frac{A}{2}}$时 f’(x)<0 f(x)单调递减

当 $x>\sqrt[5]{\frac{A}{2}}$时 f’(x)>0 f(x)单调递增

f(x)在 $x=\sqrt[5]{\frac{A}{2}}$处取到最小值

$f(\sqrt[5]{\frac{A}{2}})\geqslant 20$

解得 A⩾64

7. $\dot{x}=3t^2+3$ $\ddot{x}=6t$

$\dot{y}=3t^2-3$ $\ddot{y}=6t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$$

当 t⩽0 时 y’’⩽0 凹函数区间

此时 x⩽1

8. 设 $f(x)=2^x-x^2-1$

显然 f(0)=f(1)=0

又 f(2)=-1 f(5)=6

显然 f(x)在定义域上连续

故 f(x)在[2, 5]上存在零点

f(x)在 R 上至少存在 3 零点

又 f’(x)=2^xln2-2x

f’’(x)=$2^x\ln^2 2-2$
f’’(x)单调递增 至多有 1 零点
故 f’(x)至多有 2 零点
f(x)至多有 3 零点
综上，f(x)有且只有 3 零点

9. 设 f(x)=xe^{-x}
f’(x)=$(1-x)e^{-x}$
当 x≤1 时，f’(x)≥0 f(x)单调递增
当 x≥1 时，f’(x)≤0 f(x)单调递减

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ f(1)=$\frac{1}{e}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

故当 $a>\frac{1}{e}$ 时 原方程没有实根 b

故当 $a=\frac{1}{e}$ 时 原方程有 1 实根

故当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时 原方程有 2 实根

故当 a<0 时 原方程有 1 实根

10. (1)构造 $f(x)=\ln x+\frac{2}{x+1}-1x$

$$f'(x)=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$$

f(x)单调递增
当 x≥1 时 f(x)≥f(1)=0
即(x+1)lnx≥x-1
故$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$
当 x<1 时 f(x)f(1)=0
即(x+1)lnx<x-1
故$(x^2-1)\ln x>(x-1)^2$
综上$(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$

(2) 构造 $f(x)=\frac{1}{2}\ln x+\frac{2}{x+1}-1$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{2x(x+1)^2}\geq 0$$

f(x)单调递增
当 x>1 时 f(x)>f(1)=0

即$\frac{1}{2}\ln x>\frac{x-1}{x+1}$

令 $x=\frac{b}{a}$ 则 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{a+b}$

11. 由题$\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$

$$\lim_{x\to0}\theta=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\frac{e^x-x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

12. (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\times\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)-x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)-x^2}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}-\cos x}{\frac{x}{x+1}+\ln(1+x)-2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^3x}{(x+1)\ln(1+x)-2x^2-x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{3\cos^2x\sin x}{\ln(1+x)-4x}=\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin^3x}{\ln(1+x)-4x}$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-3\sin^2x\cos x}{\frac{1}{x+1}-4}=-\frac{1}{2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2)}{x^2(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{2x^2}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{2x^2\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{4x^2}=-\frac{1}{4}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6x-\sin6x}{x^3}=36$

13. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$$

$$e^x-\sin x-1=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$a=\frac{1}{2}\quad n=2$

14. e^x在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导

故存在$\xi\in(a,b)$ 使得$e^{\xi}=\frac{e^b-e^a}{b-a}$

$e^xf(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导

故存在$\eta\in(a,b)$ 使得$e^{\eta}(f(\eta)+f'(\eta))=\frac{e^b-e^a}{b-a}$

故存在$\eta\in(a,b)$ 使得$e^{\eta-\xi}(f(\eta)+f'(\eta))=1$

15. 设 $f(x_0)=\min\limits_{0\le x\le1}f(x)=-1$

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$ 其中 $0<\xi<1$

$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2=f(x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2$

$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2=f(x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2$

$f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}\quad f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$

当 $0<x_0<\frac{1}{2}$ 时 $f''(\xi_1)>8$

当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=8$

当 $\frac{1}{2}<x_0<1$ 时 $f''(\xi_2)>8$

综上 $\max\limits_{0\le x\le 1} f''(x)\ge 8$

16. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上最大值为 M，最小值为 m
若 $M<1$，则 $f(0)+2f(1)+3f(2)<6$ 不成立 故 $M\geqslant 1$
同理可证 $m\leqslant 1$
由于 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 内连续
由介值定理可知，在 $[0,2]$ 内必然存在 x_0
使得 $f(x_0)=1$
由于 $f(x)$ 在 $[x_0,3]$ 上连续，在 $(x_0,3)$ 上可导
$f(x_0)=f(3)=1$
故必然存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$

17. 假设在区间 I_1 上 $f(x)>0$，在区间 I_2 上 $f(x)<0$，在区间 I_3 上 $f(x)=0$，
在区间 I_1 上 $-f(x)\leqslant f'(x)\leqslant f(x)$
构造 $g(x)=e^x f(x)$
$g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))\geqslant 0$
故 $g(x)$ 单调递增
$g(x)\geqslant g(0)=0$
故 $f(x)\geqslant 0$
构造 $h(x)=\frac{f(x)}{e^x}$

$h'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}\leqslant 0$
故 $h(x)$ 单调递减
$h(x)\leqslant h(0)=0$
故 $f(x)\leqslant 0$
综上，在该区间中 $f(x)$ 恒等于 0
同理可证在其他区间中 $f(x)$ 恒等于 0
故 $f(x)$ 恒等于 0

第三章

1、选择题
（1）选 D
解析：对于 A，可以利用逆否命题，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不存在原函数. 假设 $f(x)=\frac{1}{x}$，则命题错误；

对于 B 和 C，B 若正确则 C 正确，因此排除 B 和 C；

对于D,这是定义,因此选D.

（2）选D

解析：这是可积的必要条件.

（3）选A

解析：对于A,F（x）= $\int f(x)dx+c$, F(−x)=$\int f(-x)d(-x)+c$= $\int f(x)dx+c$ = F(x) ,故正确;

对于B,F(−x)=$\int f(-x)d(-x)+c$=$-\int f(x)dx+c\neq$F(x) ;

对于C,可以假设 f(x)=sin(x)²,则 F(x)$=\frac{x}{2}-\frac{\sin x\cos x}{2}+c$.显然F(x)不是周期函数;

对于D,可以假设 f(x)=x−1,则 F(x)$=\frac{x^2}{2}-x+c$,求导可得F(x)在(0,1)不是增函数.

（4）选D

解析：A和B不需要进行代换,直接就能求出结果;

对于C,也不需要代换,$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$=$\int\frac{\csc^2 xdx}{\csc^2 x+1}$=$\int\frac{-d\cot x}{2+\cot^2 x}$=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$arctan$(\frac{\cot x}{\sqrt{2}})$+c;

对于D,代换方法正确,步骤如下：$\int_1^4\frac{dt^2}{1+t}$=$\int_1^2\frac{2tdt}{1+t}$=$2\int_1^2 1-\frac{1}{1+t}\,dt$=2(1−ln$\frac{3}{2}$).

2、解析：x>0时,$\int_0^x\sqrt[3]{1+t^3}dt\neq0$,因此函数在(0,+∞)连续;

x<0时,$\frac{1}{x}\neq0$,因此函数在（−∞,0）连续;

x=0时,$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin2(e^x-1)}{\int_0^x\sqrt{1+t^3}dt}$=$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2e^x}{\sqrt{1+x^3}}$(洛必达)=2; $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\int_0^x\cos^2 tdt$=$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos^2x}{1}$(洛必达)=1,因为左右极限不相等,所以函数在0点不连续.

3、解析：因为g(x)为f(x)反函数,所以原式两端求导后可得$f(x)'g(f(x))=\sqrt{x}$,即 $xf(x)'=\sqrt{x}$,解得 f(x)=$\sqrt{x}$+C;再根据题干条件,可得C=−1;即 f(x)=$\sqrt{x}$−1.

4、(1)原式=$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{n}{n+k}$=$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$=$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$=ln2;

(2)利用夹逼法.原式=$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{2^{\frac{k}{n}}}{1+\frac{1}{nk}}\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n2^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 2^xdx=\frac{1}{\ln2}$;原式⩾ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{n\times2^{\frac{k}{n}}}{1+n}$=$\int_0^1 2^xdx$=$\frac{1}{\ln2}$;因此原式=$\frac{1}{\ln2}$;

(3)原式=$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{i^p}{n^p}$=$\int_0^1 x^pdx$=$\frac{1}{p+1}$;

(4)利用积分中值定理.原式=$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}1-\frac{1}{1+x^n}dx$=$\frac{1}{2}-\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+x^n}dx$=$\frac{1}{2}(1-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\varepsilon^n})$=0.

5、(1)原式$=\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\sqrt{1}+x^2d\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x+c$.

(2)原式=

$-\int \arctan e^x de^{-x}=-[e^{-x}\arctan e^x-\int e^{-x}d\arctan e^x]=-e^{-x}\arctan e^x+\int\frac{1}{1+e^{2x}}dx=-e^{-x}\arctan e^x+x-\frac{1}{2}\int\frac{de^{2x}}{1+e^{2x}}=-e^{-x}\arctan e^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+c.$

(3) 原式$=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x dx=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\arctan x d\arctan x=\int\arctan x d(-\frac{1}{x})-\frac{1}{2}(\arctan x)^2=\int\frac{1}{x}d\arctan x-\frac{1}{x}\arctan x-\frac{1}{2}(\arctan x)^2=\int\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{x}\arctan x-\frac{1}{2}(\arctan x)^2=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{x}\arctan x-\frac{1}{2}(\arctan x)^2.$

(4) 原式$=\int\frac{1+\cos2\sqrt{x}}{2}dx=$(此时令$\sqrt{x}=t$)$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\int t\cos t dt=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}(t\sin t+\cos t)+c=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\cos2\sqrt{x}.$

(5) 原式$=x\cos\ln x-\int xd\cos\ln x=x\cos\ln x+\int x\sin\ln x dx=x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln x dx$

因此$\int\cos\ln x dx=\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+c.$

(6) 原式$=\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+c.$

(7) 原式$=\int\frac{dx}{2\sqrt{2}(\cos\frac{x}{2})^2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\int\frac{\csc\frac{x}{2}}{2}dx)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sec x+\ln(\sec x+\tan x))+c.$

（这里与答案不同，是因为在一开始就将$\sqrt{1+\cos x}$展开了。）

(8) 原式$=\int_0^{\pi}\frac{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}=$(令$t=\frac{x}{2}$)$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}d(t+\frac{\pi}{4})=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{2}\cos2t}{\sqrt{2}\cos t}dt=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos t-\sec t dt=4-\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$

(9) 原式$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-(\sin x)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sec x)^2-\sec x\tan x dx=(\tan x-\sec x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2.$

(10) 原式=(令$x=a\cos t$)$\int_0^a\frac{da\cos t}{a\sin t+a\cos t}=-\int_{\pi}^{0}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\int_{\pi}^{0}\frac{(\cos t-\sin t)-\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int_{\pi}^{0}\frac{d(\sin t+\cos t)-(\sin t+\cos t)dt+\sin t dt}{\sin t+\cos t}$

注意到此时出现原式，因此$2I=\ln(\sin t+\cos t)-t|_{\pi}^{0}$.解得$I=\frac{\pi}{4}$.

(11) 原式=(令$\sqrt{e^t-1}=k$，则$t=\ln(k^2+1)$)$\int_{\sqrt{e^{\alpha}-1}}^{\sqrt{3}}\frac{d\ln(1+k^2)}{k}=\int_{\sqrt{e^{\alpha}-1}}^{\sqrt{3}}\frac{2dk}{k^2+1}=2\arctan k|_{\sqrt{e^{\alpha}-1}}^{\sqrt{3}}$.

由题干条件得$2\left(\frac{\pi}{3}-\arctan\sqrt{e^{\alpha}-1}\right)=\frac{\pi}{6}$,解得$\alpha=\ln2$.

(12) 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x\sqrt{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}d\sin x=\frac{4}{3}$.

(13) 原式$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=[1-\ln(1+e^x)]|_{-1}^{0}+\ln(1+x)|_0^1=\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)+1.$

(14) 原式=[令$\sqrt{e^x-1}=t$，则

$x=\ln(t^2+1)]\int\frac{1}{t}\frac{2t}{1+t^2}dt=2\arctan t+c=2\arctan\sqrt{e^x-1}+c.$

(15) 原式$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\ln x dx+\int_1^e \ln x\,dx=-x\ln x|_{\frac{1}{x}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\frac{1}{x}dx+x\ln x|_1^e-\int_1^e x\frac{1}{x}dx=2-\frac{2}{e}.$

(16) 原式 $=x\ln^3 x|_1^e-\int_1^e 3\ln^2 x dx=e-3(x\ln^2 x|_1^e-\int_1^e 2\ln x dx)=e-3e+6(x\ln x|_1^e-\int_1^e dx)=6-2e.$

(17) 原式 $=4n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sec x)^4}{(\tan x)^4+1}dx=4n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sec x)^2 d\tan x}{1+(\tan x)^4}=4n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(\tan x)^2+1]d\tan x}{1+(\tan x)^4}=$ (令 $\tan x=t$) $4n\int_0^{\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}dt=4n\int_0^{\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+t^2}dt=4n\int_0^{\infty}\frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2}=$ (令 $k=t-\frac{1}{t}$) $2n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\frac{k}{\sqrt{2}}}{(\frac{k}{\sqrt{2}})^2+1}=2n\sqrt{2}\pi.$

(18) 原式$=\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx=\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx=$(再次分部积分)$\cdots=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m(m+1)\cdots(m+n-k-j)}\int_0^1 x^{m-k}(1-x)^{n-j}dx=\frac{(n-1)!m!}{(m+n-1)!}.$

(19) 原式 =(令 $\sqrt{1+\sqrt{x}}=t$, 则 $x=(t^2-1)^{\frac{2}{3}}$) $\int\frac{(t^2-1)^{\frac{1}{3}}}{t}d(t^2-1)^{\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}\int dt=\frac{4}{3}t+c=\frac{4}{3}\sqrt{1+\sqrt{x}}+c.$ (此处书上答案错误，没有负号。)

(20) 原式 $=\int \operatorname{arccot}x\,d(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4)=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4)\operatorname{arccot}x-\int-\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4}{1+x^2}dx=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4)\operatorname{arccot}x+\int\frac{x^2}{4}dx+\frac{1}{4}\int 1-\frac{1}{1+x^2}dx=(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4)\operatorname{arccot}x+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}x+c.$

(21) 设原式为 I, 则 $I=\int-\frac{x}{(\cos x)^5}d\cos x=-\frac{x}{(\cos x)^4}+\int\cos x d\frac{x}{(\cos x)^5}=-\frac{x}{(\cos x)^4}+\int(\sec x)^4 dx+\int\frac{5x\sin x}{(\cos x)^5}dx=-\frac{x}{(\cos x)^4}+\int((\tan x)^2+1)d\tan x+5I.$

所以 $-4I=-\frac{x}{(\cos x)^4}+\int((\tan x)^2+1)d\tan x$, 解得 $I=-\frac{x}{4(\cos x)^4}-\frac{1}{12}(\tan x)^3-\frac{1}{4}\tan x+c.$

(22) 原式 =(令 $\sqrt{x}=t$) $\int\frac{2(t^2+1)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int\frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$ =(令 $t=\sin k$) $2\arcsin t+\int\frac{2(\sin k)^2}{\cos k}d\sin k=2\arcsin t+\int 2(\sin k)^2 dk=2\arcsin t+k-\frac{\sin 2k}{2}+c=3\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+c.$

6、证明: $\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)]d(x+\varphi);$

令 $t=x+\varphi$, 则原式$=\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin t]dt;$

因周期函数任何一个周期内积分都相等,

$\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin t]dt=\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin t]dt=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin x]dx=$

$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right]dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right]dx;$

对于前者,令 u=π−x,

则 $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right]dx=-\int_{\frac{5\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin u\right]du=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} f\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin u\right]du=$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sqrt{a^2+b^2}\sin x\right]dx;$

此题得证.

7、证明:原式=$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{n-2}(\sec x^2-1)dx=$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{n-2}d\tan x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{n-2}dx=$

$\frac{(\tan x)^{n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}}{n-1}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{n-2}dx;$

即 $f(n)+f(n-2)=\frac{1}{n-1}$.

此题得证.

8、证明:令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt-x\int_0^1 f(t)dt,$

求导得$\dot{F}(x)=f(x)-\int_0^1 f(t)dt,$

再次求导$\ddot{F}(x)=\dot{f}(x)<0,$

由积分中值定理得$\int_0^1 f(t)dt=f(\varepsilon)(0<\varepsilon<1)$, 又由 f(x) 递减得 $f(1)<f(\varepsilon)<f(0)$.

因此 F(x) 先增后减, 而 F(0)=F(1)=0, 可得 $F(x)\geq 0$.

9、解析:$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt=$

$\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x-\frac{\ln t}{1+\frac{1}{t}}d(\frac{1}{t})=\int_1^x(\frac{\ln t}{1+t}+\frac{\ln t}{t+t^2})dt=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\frac{(\ln t)^2}{2}\Big|_1^x=\frac{1}{2}(\ln t)^2.$

10、解析:构造函数 $g(x)=\dot{f}(x)\sin x-f(x)\cos x.$

则$\int_0^\pi\left[f(x)+\ddot{f}(x)\right]\sin x dx=\left(\dot{f}(x)\sin x-f(x)\cos x\right)\Big|_0^\pi=-f(\pi)\cos\pi+f(0)\cos 0.$

即 $2+f(0)=5\Rightarrow f(0)=3.$

11、解析:分两种情况,①x−y>0;②x−y<0;

因此原式=$\int_{-1}^y(y-x)e^x dx+\int_y^1(x-y)e^x dx=2e^y-y\left(e+\frac{1}{e}\right)-\frac{2}{e}$.(注意这里 x 是变量, 求解积分时可以将 y 看成常数。)

12、解析:左边= $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x+c}{x-c}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+c}{x-c}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2c}{x^2-c^2}}{\frac{1}{-x^2}}}$ (洛必达) $= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2cx^2}{x^2-c^2}} = e^{2c}$;

右边= $\lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^c xe^{2x}dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_b^c = \frac{1}{2}ce^{2c}-\frac{1}{4}e^{2c}$;

因两边相等,可解得 $c = \frac{5}{2}$.

13、解析:此题分两类情况，$\alpha\to-\infty$和$\alpha\to+\infty$.

①$\alpha\to-\infty$,则只需考虑 $x\geq 0$ 时所围成图形的面积.即$S_1 = \int_0^1 \lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{x}{1+x^2-e^{\alpha x}}-\frac{x}{2}dx = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$.

②$\alpha\to+\infty$,同样只需考虑 $x\geq 0$ 时所围成图形的面积.即$S_2 = \int_0^1\frac{x}{2}-\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{x}{1+x^2-e^{\alpha x}}dx = \int_0^1\frac{x}{2}dx = \frac{1}{4}$.

因此,$S = S_1+S_2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

14、解析:V= $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^{2\pi b}\pi y^2dx = \lim\limits_{b\to\infty}(\int_0^{\pi}\pi e^{-2x}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}\pi e^{-2x}\sin x dx+\cdots+\int_{(2b-1)\pi}^{2\pi b}\pi e^{-2x}\sin x dx\ ) = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{\pi}{5}\left(1+e^{-2\pi}+e^{-4\pi}+e^{-6\pi}+\cdots+e^{-(4b-4)\pi}+e^{-(4b-2)\pi}\right) = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{\pi}{5}\frac{1-e^{b(-2\pi)}}{1-e^{-2\pi}} = \frac{\pi}{5}\frac{1}{1-e^{-2\pi}}$.

15、解析:假设 $p(x_0,1-x_0^2)$,则切线斜率为$-2x_0$;

可得直线方程为 $y=-2x_0x+x_0^2+1$,计算出与 x, y 轴交点分别为$\left(\frac{1}{x}x_0+\frac{1}{2x_0},0\right),\left(0,1+x_0^2\right)$.

面积S=$\frac{1}{4}\left(1+x_0^2\right)\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{4}\left(x_0^3+3x_0+\frac{1}{x_0}\right)$,求导得$\dot{S} = \frac{1}{4}(3x_0^2+2-\frac{1}{x_0^2})$;$\dot{S}=0 \Rightarrow x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$;即当$x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$时,面积 S 有极小值.

16、证明:令 $F(x) = xf(x)$,则 $F(1) = f(1)$.

而 $2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx = \varepsilon f(\varepsilon)(0<\varepsilon<\frac{1}{2})$(积分中值定理);

即 $F(\varepsilon) = f(1) = F(1)$;

根据Rolle定理，可得存在一点θ，使得$\dot{F}(\theta)=0$,即$\theta\dot{f}(\theta)+f(\theta)=0$.

17、解析:设所需时间为 t.

(1)液面下降速度 $v = \frac{c\sqrt{2gh}\pi(0.005)^2}{\pi(0.5)^2} = 1\times10^{-4}\times c\times\sqrt{2gh}$;(0.005和0.5分别为小孔半径

和容器半径)

$\mathbf{dh = vdt \Rightarrow dh = 10^{-4} \times c \times \sqrt{2gh}dt}$;

移项、两边积分$\int \frac{1}{\sqrt{2gh}}dh = -\int c \times 10^{-4}dt \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = -C \times 10^{-4}t + C_0$;

带入 h=2, t=0 得$\sqrt{\frac{4}{g}} = C_0$;

因此$\sqrt{\frac{2h}{g}} = -C \times 10^{-4}t + \sqrt{\frac{4}{g}}$;

带入 h=0, 得 $t = \frac{2\times 10^4}{c\times\sqrt{g}}$.

(2)$\Delta V = \pi r^2 \Delta h$;$\Delta V = c\sqrt{2gh}S_{底}\Delta t$;$\frac{\Delta h}{\Delta t} = v$;

联立三式，可得$\pi r^2 v = c\sqrt{2gh}S_{底}$;

解得 h=$\frac{\pi^2 v^2}{{S_{底}}^2 2gc^2}r^4$;即 $y(x) = C_0 x^4$, 其中$C_0 = \frac{\pi^2 v^2}{{S_{底}}^2 2gc^2}$.

18、解析:设曲线方程为 f(x);

可由题意列出方程$\int_0^x f(x)dx - \frac{1}{2}x[f(x)+1] = x^3$;

化简得$\dot{f}(x) - \frac{1}{x}f(x) = -6x - \frac{1}{x}$;

解得 $f(x) = -6x^2 + Cx + 1$;

因为曲线过(1,0),(0,1),解出 C=5;

即 $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$.

19、解析:设切点为x_0;

可以求出切线与 X 轴交点为$(x_0 - \frac{y(x_0)}{\dot{y}(x_0)}, 0)$,则三角形底边长 $d = \frac{y(x_0)}{\dot{y}(x_0)}$,面积$S_1 = \frac{y(x_0)^2}{2\dot{y}(x0)}$;

$S_2 = \int_0^{x_0} y(x)dx$;

由题干条件得$\frac{y(x_0)^2}{2\dot{y}(x0)} = 1 + \int_0^{x_0} y(x)dx$;

解得 y(x)=$C_1 e^{C_1 x}$;将 y(0)=1 带入，得到$C_1 = 1$,即 $y(x) = e^x$.

By:新能源 71 曹瑞曦

第四章

1.选择题

(1)解析:

A.不一定，如a_n=$(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

B.不一定，如a_n=$(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

C. 不一定，如$a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$

D. 由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，知$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$也收敛，故两级数的和也收敛。

(2)解析：

A. 两级数均收敛时结论成立，不收敛时不能比较大小。

B. 两级数均为正项级数时结论才成立。

C. 两级数均为正项级数时结论才成立。

D. 由夹逼准则(4.1 课后题 B 组)知结论成立。

(3)解析：

A. 不能判断。

B. 只对正项级数成立。

C. 不一定，如$a_n=b_n=\frac{1}{n}$。

D. 反证法，假设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，矛盾，故至少有一个收敛

(4)解析：

由基本不等式，$\frac{|a_n|}{\sqrt{(n^2+\lambda)}}\le\frac{{a_n}^2+\frac{1}{n^2+\lambda}}{2}<\frac{{a_n}^2+\frac{1}{n^2}}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由第一比较准则知原级数绝对收敛。

(5)解析：

A. 不一定，如$a_n=\frac{1}{2n}$

B. 不一定，但逆命题成立，即原级数收敛，对此级数的项任意加括号后所得的级数仍然收敛。

C. 反证法，若$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$均绝对收敛，与条件矛盾，故至少有一个发散。

D. 不一定，但逆命题成立，由基本不等式可得。

(6)解析：

因为 f(x)在[0,1]上连续，由积分中值定理，$|a_n|=\sqrt{n}\,|f(\xi)|\,(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{|f(\xi)|}{\sqrt{n(n+1)}}$，$\xi\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$，$|a_n|$与$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$同阶，由第二比较准则知原级数绝对收敛。

(7)解析：

由已知，$|(-1)^n{a_n}^2|={a_n}^2<\frac{1}{n^2}$，由第一比较准则知 D 项绝对收敛即肯定收敛。

(8)解析：

由$u_n\neq0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，知$u_n>0$，且$u_n\sim n$(等价无穷大)，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$发散，由交错级数的莱布尼兹条件知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$条件收敛。

(9)解析：

因为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在 x=2 处条件收敛，故 x=2 为收敛区间端点处，令 t=x−1，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$收敛区间为(−1,1)，收敛半径为 1，则原级数收敛区间为(0,2)，故在 x=−2 处原

级数发散。

(10)解析:

因为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在 x=-2 处条件收敛,易得收敛区间为(a-1, a+1),故 a-1=-2 或 a+1=-2,

又 a=-3 时，在 x=-2 处发散，不符题意，则 a=-1，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+a)^n}{2^n}$=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$，易得收敛区间

为(-1, 3)，故在 x=$\ln\frac{1}{2}$处绝对收敛。

(11)解析:

由题意，是对 f(x) 作 (0, 1) 上的偶延拓，周期为 2，故由狄利克雷条件，

$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}$

2. 略

3. 略

4.

(1)解：因为 $\frac{\sqrt{n}}{\int_0^n\sqrt[4]{(1+x^4)}dx}<\frac{\sqrt{n}}{\int_0^n xdx}=\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$，由第一比较准则知原级数收敛。

(2)解：因为$\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}<\frac{n^3\left[\sqrt{2}+1\right]^n}{3^n}$，由检根法，$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{n}}\frac{\sqrt{2}+1}{3}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{3\ln n}{n}}\frac{\sqrt{2}+1}{3}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1$，由第一比较准则知，原级数收敛。

(3)解：因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$，由第二比较准则知原级数对应的正项级数发散；当 $n\geq 4$ 时，

$\frac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}=\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{(n+1)\sqrt{n}}=0$，由莱布尼兹条件知原级数条件收敛。

5.

解：因为 a-b/2+a/3-b/4+a/5-b/6+$\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(a-b)\frac{1}{2n-1}+b\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$，且$a^2+b^2\neq 0$，

当 a=b 时，有 b≠0，此时条件收敛；

当 a≠b 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(a-b)\frac{1}{2n-1}$发散，此时发散。

6.

解：由基本不等式，$|a_nb_n|\leq\frac{{a_n}^2+{b_n}^2}{2}$，故当$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$与$\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$均收敛时，由第一比较准则知原级数绝对收敛。

7.

解：因为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，且正项数列$\{a_n\}$单调减少，由莱布尼兹条件的逆否命题知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$，对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$，由检根法知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)=\frac{1}{1+A}<1$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$收敛。

8.

解：因为$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$收敛，$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_1$，所以部分和极限 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，故$\{a_n\}$有界，即$|a_n|\leq M$，所以$|a_nb_n|\leq M|b_n|$，又$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，由第一比较准则知$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛。

9.

解：因为 $|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=|f'(\xi_n)||u_n-u_{n-1}|\le h|u_n-u_{n-1}|\le\cdots\le h^n|u_1-u_0|$，且 u_1，$u_0\in[a,b]$，$h<1$，故等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}h^n|u_1-u_0|$ 绝对收敛，由第一比较准则知 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛。

10.

解：令 $t=nx$，则 $a_n=\int_0^1 f(nx)dx=\frac{\int_0^n f(t)dt}{n}$,

由柯西施瓦兹不等式，$a_n{}^2=\frac{1}{n^2}\left(\int_0^n f(t)dt\right)^2\le\frac{1}{n^2}\int_0^n 1^2\,dt\cdot\int_0^n f^2(t)dt\le\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}f^2(t)dt$,

则 $\frac{a_n{}^2}{n^\alpha}\le\frac{1}{n^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}f^2(t)dt$，由于 $\alpha>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ 收敛，$\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛，由第一比较准则知原级数收敛。

11.

解：由于收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{(n+1)^p}{n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}2e^{p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=2$，故收敛区间为 $(-2,2)$。

又 $x=-2$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$，由莱布尼兹条件，$p>0$ 时条件收敛，$p\le 0$ 时发散；

$x=2$ 时，原级数即为 p 级数，$p>1$ 时收敛，$p\le1$ 时发散。

综上所述，$p\le 0$ 时收敛域为 $-2<x<2$，$0<p\le 1$ 时收敛域为 $-2\le x<2$，$p>1$ 时收敛域为 $-2\le x\le 2$。

12.

解：因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}(x\ne 1)$,

由常用幂级数展开式 $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$，以 x^2 代替 x，代入 $m=-1$,

得 $f'(t)=\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$,

故 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，其中 $-1\le x<1$

13.

解：因为 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$,

由常用幂级数展开式 $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$，以 x^2 代替 x，代入 $m=-\frac{1}{2}$,

得 $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}$,

故 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，其中 $-1\le x\le 1$

14.

解：由常用幂级数展开式 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，得 $f(x)=x^2\ln(1-2x)=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^n}{n}x^n$,

由于$\left(x^i\right)^{(n)}=0(i=1,2,\cdots)$，$(x^n)^{(n)}=n!$， 当 $x=0$ 时，$\left(x^i\right)^{(n)}(i=n+1,n+2\cdots)=0$，

故$f^{(n)}(0)=\frac{-2^{n-2}}{n-2}n!$

15.

解：由已知，考虑到先求幂级数的和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)x^n$，然后即为求 $S(\frac{1}{2})$ 的值。

$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2x^{n-1}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^n\right)'=x\left(x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}\right)'$

令 $I=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}$，则 $I=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)'=x(\frac{1}{1+x})'=-\frac{x}{(1+x)^2}$，

故$S_1(x)=x\left(x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}\right)'=x(-\frac{x}{(1+x)^2})'=\frac{x(x-1)}{(x+1)^3}$

$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^n=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)'=x(\frac{1}{1+x})'=-\frac{x}{(1+x)^2}$

$S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$

所以 $S\left(\frac{1}{2}\right)=S_1(\frac{1}{2})+S_2\left(\frac{1}{2}\right)+S_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{22}{27}$

16.

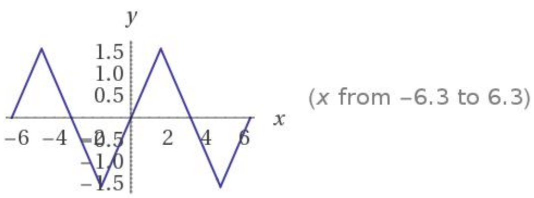
解：考虑到$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots$①

$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\cdots$②

则$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{①+②}{2}=\frac{(e^x+e^{-x})}{2}=\text{ch }x$

17.

解：作出 $f(x)=\arcsin(\sin x)$的图像如下：



$f(x)$是以 $T=2\pi$为周期的奇函数，

故 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\sin x)\,dx=0$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\sin x)\cos(nx)dx=0$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\arcsin(\sin x)\sin(nx)dx=\frac{4}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$，$b_k=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}$

故 $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x$，其中$-\infty<x<+\infty$

18.

解：首先作变换 $x=t+\frac{0+2\pi}{2}=t+\pi$，则$F(t)=f(x)=f(t+\pi)=(t+\pi)^2$

故 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)^2dt=\frac{8}{3}\pi^2$， $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)^2\cos ntdt=\frac{4}{n^2}\cos n\pi$， $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)^2\sin ntdt=\frac{-4\pi}{n}\cos n\pi$

故 $F(t)=f(x)=f(t+\pi)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2}\cos n\pi\cos nt+\frac{-4\pi}{n}\cos n\pi\sin nt)$，得 $f(t)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2}\cos nt-\frac{4\pi}{n}\sin nt)$

即 $f(x)=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx)$，$x\in(0,2\pi)$

由狄利克雷条件，

令 $x=0$，$f(0)=\frac{0+(2\pi)^2}{2}=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

令 $x=\pi$，$f(\pi)=\pi^2=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}$，得$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{24}$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

19.

证明：

左边：

对 $f(x)=k$（常数）作 $(0,\pi)$ 上的奇延拓，将 $f(x)$ 展开为正弦级数。$a_0=0$，$a_n=0$，$b_n=\frac{1}{\pi}(\int_0^{\pi}k\sin nxdx+\int_{-\pi}^{0}-k\sin nxdx)=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$，故 $f(x)=k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4k\sin(2n-1)x}{(2n-1)\pi}$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}=\frac{\pi}{4}$，$x\in(0,\pi)$

右边：

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2}$，故 $S(x)=\arctan x$，所以 $S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$

故对$\forall x\in(0,\pi)$，有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$，得证。

By：能动 D71 张翼霄

第五章

由于编者发现 5.3B 组的最后一题也没有答案，而且题干本身存在错误，经过请教老师给出正确的题目和解析：

5.3 B

7. 设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续二阶偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u=x^2+y^2$$

试求函数 u 的表达式.

解析：

令 $\sqrt{x^2+y^2}=t$，则 $u=u(t)$，根据复合函数求导的链式法则可将题干中的等式化简为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u^{'}(t)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[u^{'}(t)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]-\frac{1}{x}\cdot u^{'}(t)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+u(t)=x^2+y^2$$

进一步化简可得到：

$$u^{''}(t)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\left[u^{'}(t)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\right]+u^{''}(t)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$+\left[u^{'}(t)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\right]-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\cdot u^{'}(t)+u(t)=x^2+y^2$$

整理得：$u^{''}(t)+u^{'}(t)=t^2$，问题转化为求这个微分方程的解，先求齐次方程的通解再设特解，进而得到最终的解：

$u(t)=C_1\cdot\sin\sqrt{x^2+y^2}+C_2\cdot\cos\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-2$（其中 C_1、C_2 为任意常数）.

工科数学分析基础章检测解析（难题详解）

第五章：多元函数微分学及其应用

1. 选择题

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（C）.

（A）连续，偏导数存在　　（B）连续，偏导数不存在

（C）不连续，偏导数存在　　（D）偏导数存在且可微

解析：

先验证连续性：对于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$，取任意一条过原点的直线 $y=k\cdot x$ 带入原极限可知，该极限的值与 k 的取值有关（该极限不确定），故该极限不存在，原函数在点 $(0,0)$ 处不连续；

对于偏导数的存在性，由于：$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$；$\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0+\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

所以偏导数存在且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$；

对于可微性，需要验证 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x^{'}(0,0)\cdot\Delta x-f_y^{'}(0,0)\cdot\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 是否为 0，带入可知，此极限不存在，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.　　C 选项正确

注：补充一个小结论，对于极限：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^a\cdot y^b}{(x^2+y^2)^c}$，当 $a+b>2c$ 时，原极限为 0；当 $a+b\le 2c$

时，原极限不存在.

(2)函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在$(0,0)$处（B）.

（A）连续但偏导不存在　　（B）偏导存在但不可微

（C）可微　　（D）可偏导且偏导数连续

解析：

对于连续性，显然该函数在$(0,0)$处连续；

对于偏导的存在性，同样由于$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$；$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0+\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=0$ 可知 $f(x,y)$ 对于 x 和 y 在$(0,0)$处的偏导均存在；

对于可微性，需要验证$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$是否为0，带入可知，此极限不存在，故 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处不可微；

对于偏导数的连续性，当$\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$时，绝对值符号可以直接去掉，此时$f_x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$，现只需验证此极限是否为 0，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$显然不存在，故偏导不连续（对于 x 和 y 范围的不同选取，验证方法相同）.　　B选项正确

(3)二元函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$存在是 $f(x,y)$在该点连续的（D）.

（A）充分条件而非必要条件　　（B）必要条件而非充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分条件也非必要条件

(4)考虑二元函数的下面4条性质：

①$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；　　②$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续；

③$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微；　　④$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在.

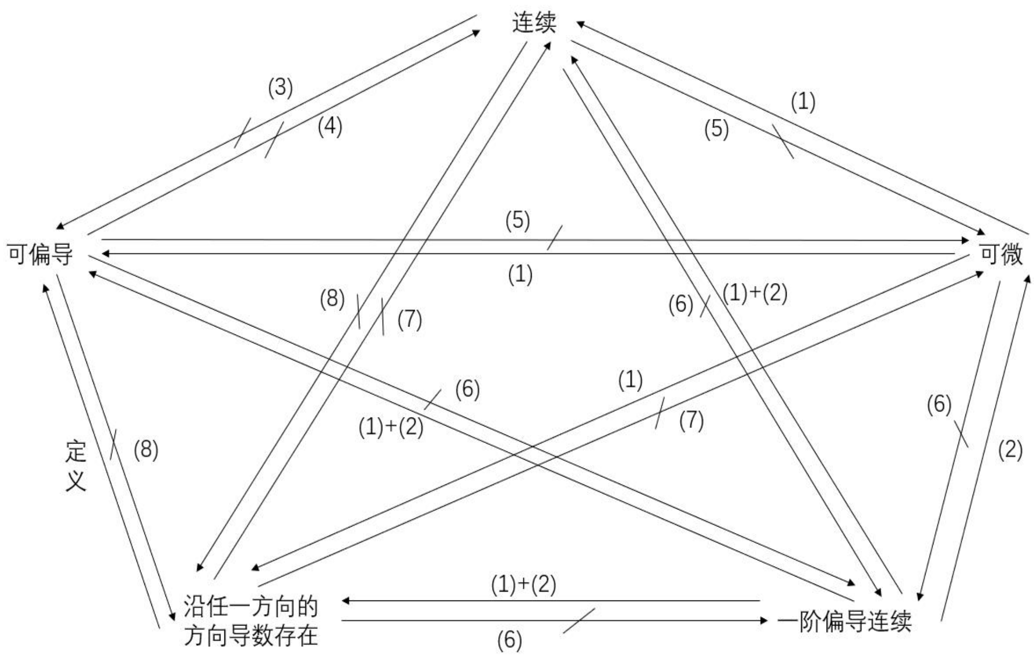
若用“P⇒Q”表示可由性质P推出性质Q，则有（A）.

（A）②⇒③⇒①　　（B）③⇒②⇒①

（C）③⇒④⇒①　　（D）③⇒①⇒④

解析：

对于(3)和(4)两题，只需将下面这张图理解并记忆清楚即可解决这一类概念问题：



（1）定理 3.1：可微必连续；

（2）定理 3.2：一阶偏导连续必可微；

（3）$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$处连续.但$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$均不存在；

（4）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，　$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ 但 f 在$(0,0)$处不连续；

（5）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，f 在$(0,0)$处连续，可偏导，且$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但不可微；

（6）$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，f 在$(0,0)$处连续，可偏导，可微，但$f_x(x,y)$与$f_y(x,y)$在$(0,0)$处间断；

（7）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在$(0,0)$处沿任何方向的方向导数存在，但 f 在$(0,0)$处不连续，不可微；

（8）$f(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$在$(0,0)$连续，但仅沿 x,y 轴正、负向的方向导数存在.

(5)设函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$的邻域内有定义，且$f_x(0,0)=1$，$f_y(0,0)=2$，则（D）.

（A）$f(0,y)$在 $y=0$ 处不连续

（B）$df(x,y)|_{(0,\ 0)}=dx+2dy$

（C）$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,\ 0)}=\cos\alpha+2\cos\beta$，其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$为$\vec{l}$的方向余弦

（D）$f(x,y)$在点$(0,0)$处沿 x 轴负方向的方向导数为-1

解析：

（A） 根据题目所给条件无法判断

（B） 可偏导未必可微，故错误

（C） 函数未必沿任一方向的方向导数均存在，例如：$f(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$在$(0,0)$连续，但仅沿 x,y 轴正、负向的方向导数存在

（D） 根据方向导数的定义式可知 D 选项正确

(6)设函数$z=f(x,y)$在点$(0,0)$的邻域内有定义，且$f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$，则（C）.

（A）$dz|_{(0,\ 0)}=3dx+dy$

（B）曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$(3,1,1)$

（C）曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$，在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$(1,0,3)$

（D）曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$，在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$(3,0,1)$

解析：

（A） 与上一题类似，此函数未必可微

（B） 求法向量需要将方程移项，法向量应为$(3,1,-1)$

对于（C）（D）将曲线写为参数方程为$\begin{cases}x=x\\ y=0\\ z=f(x,y)\end{cases}$，故切向量为$(1,0,3)$，C 选项正确.

(7)已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（A）

（A）点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点

（B）点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

（C）点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点

（D）根据所给条件无法判断点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

解析：

根据极限的定义，可得$f(x,y)=(x^2+y^2)^2+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，于是可以在$(0,0)$的充分小的邻域内取$(x_0,x_0)$和$(\frac{x_0}{2},-\frac{x_0}{2})$，$f(x_0,x_0)>0$，$f\left(\frac{x_0}{2},-\frac{x_0}{2}\right)<0$. 所以点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点，A 选项正确.

(8)设函数$u(x,y)=\varphi(x+\varphi y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$, 其中函数$\varphi$具有二阶导数，$\psi$具有一阶导数，则必有（B）

（A）$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$ （B）$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$

（C）$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$ （D）$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$

解析：

根据题目所给函数可以得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$$

通过比较可知，B 选项正确

（个人认为此题略有超纲，含参函数求导在下一章的第四节才正式介绍）

(9) 若 $f(x,y)$和$\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi_y(x,y)\neq 0$，已知(x_0,y_0)是 $f(x,y)$在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（D）

（A）若$f_x(x_0,y_0)=0$，则$f_y(x_0,y_0)=0$　　（B）若$f_x(x_0,y_0)=0$，则$f_y(x_0,y_0)\neq 0$

（C）若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y(x_0,y_0)=0$　　（D）若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y(x_0,y_0)\neq 0$

解析：

根据 Lagrange 乘数法判断即可

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$，则$(x_0,y_0)$满足：

$F_x(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)+\lambda\cdot\varphi_x(x_0,y_0)=0$，①

$F_y(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)+\lambda\cdot\varphi_y(x_0,y_0)=0$，②

若$f_x(x_0,y_0)=0$，则①式中$\lambda=0$ 或$\varphi_x(x_0,y_0)\neq 0$，而当$\lambda=0$ 时，由②式可得$f_y(x_0,y_0)=0$；

当$\lambda\neq 0$ 时，由②式及$\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$ 可知$f_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以排除 A、B 选项；

若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则由①式$\lambda\neq 0$，再由②式及$\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$，$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，即$f_x(x_0,y_0)\neq 0$ 时，$f_y(x_0,y_0)\neq 0$，D 选项正确.

(10) 函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$在点$(0,1)$处的梯度等于（A）

（A）i　　（B）$-i$　　（C）j　　（D）$-j$

解析：

简单的求梯度问题，求偏导带入点$(0,1)$即可.　　A 选项正确

2. 填空题

(1) 设 $f(u,v)$为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}\cdot f_1+y^x\cdot\ln y\cdot f_2$

解析：

简单的求偏导问题，注意复合函数链式求导法则即可

(2) 设 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_2+x\cdot f_{12}+x\cdot y\cdot f_{22}$

解析：

简单的求偏导问题，注意复合函数链式求导法则即可

(3) 设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,1/\pi)}=\left(\frac{\pi}{e}\right)^2$

解析：

先对 x 求偏导，再对 y 求偏导，最后带入点$(2,1/\pi)$即可

(4) 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，f，φ具有二阶连续导数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yf''+\varphi'+y\varphi''$

解析：

简单的求偏导问题，注意复合函数链式求导法则即可

(5) 设函数 $f(u,v)$可微，$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定，则 $dz|_{(0,1)}=-dx+2dy$.

解析：

对于此类问题，方程两边取全微分之后整理代入$(0,1)$更容易

全微分得到的等式为 $z\cdot dx+(x+1)dz-2y\cdot dy=2x\cdot f(x-z,y)dx+x^2[f_1(dx-dz)+f_2\cdot dy]$

之后代入$(0,1)$整理即可得到最后结果.

(6) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$处的梯度$=\frac{1}{9}(2,4,-4)$

解析：

简单的求梯度问题，求偏导带入点 $M(1,2,-2)$即可.

(7) 曲面 $z=x^2+y^2$与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程是 $2x+4y-z=5$

解析：

先设出切点(x_0,y_0,z_0)，进而可列出方程$\begin{cases}2x_0=2\\2y_0=4\\-1=-1\end{cases}$，可以解得切点为$(1,2,5)$，写出平面的点法式方程即可.

(8) 曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点$(1,-2,2)$处的法线方程为 $x-1=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$

解析：

简单的求曲面的法线问题，运算细心即可.

(9) 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点$(1,2,0)$处的切平面方程为 $2x+y-4=0$

解析：

简单的求曲面的切平面问题，运算细心即可.

(10) 在曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=t^3$的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线的个数为 2.

解析：

求出梯度即为切线的方向向量，切线的方向向量与平面的法向量点乘为 0 即可，注意验证所求的直线是否在平面上，如果是的话需要舍去.（本题不存在这个问题，但是以往的考试题目中有这个问题）

3. 设 $u=z^{y^x}$，求所有的一阶偏导数

解析：

求关于某个变量的一阶偏导数，只需将其他两个变量看作常数，再根据复合函数链式求导法则求导即可：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^x\cdot z^{y^x}\cdot\ln y\cdot\ln z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot y^{x-1}\cdot z^{y^x}\cdot\ln z;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y^x\cdot z^{y^x-1}.$$

4. 设 $f(x,y)=x^3\cos(1-y)+(y-1)\sin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 求$f_x(x,1)$，$f_x(1,1)$，$f_y(1,1)$.

解析：

求关于某一变量的偏导数，可以直接将题目所给的另一变量已知的常数带入，方便求解，若有两个变量，则会加大运算量，给求解造成困难

$$f_x(x,1)=3x^2;$$
$$f_x(1,1)=3;$$
$$f_y(1,1)=\sin 1.$$

5. 设函数 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求$\frac{dy}{dx}|_{x=0}$，$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

解析：

同样注意求导时可直接将常数带入，根据复合函数链式法则求解：

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0}=f_1(1,1);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=f_{11}(1,1)+f_1(1,1)-f_2(1,1).$$

6. 已知 $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，试讨论 $f(x,y)$在点$(0,0)$处是否可微.

解析：

由题意得 $f(0,0)=0$（极限存在的条件）且$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$（特殊点处的偏导用定义求得）

而要验证是否可微，需要判断$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$是否为 0

设$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A$.

若 $A=0$，则$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，可微；

若 $A\neq 0$, 则 $f(x,y)=A(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$ 同样成立.

综上所述，$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$ 成立，所以 $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

7. 求函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$的极值点及相应的极值.

解析：

此题为无约束极值点的判断问题

$$f_x=-(1+e^y)\sin x=0$$
$$f_y=e^y\cdot\cos x-e^y-y\cdot e^y=0$$

由以上两式可得驻点为：$(2k\pi,0)$和$((2k+1)\pi,-2)$，$k\in Z$

则根据判断极值点的 Hesse 矩阵可得：极大值点为$(2k\pi,0)$，$k\in Z$，极大值为 2；无极小值点和极小值.

8. 设函数 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，令 $g(x,y)=f\left(xy,\frac{1}{2}(x^2-\right.$

$y^2)$)，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解析：

由题中所给表达式可知：

$$\frac{\partial g}{\partial x}=f_1\cdot y+f_2\cdot x \qquad ①$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=(f_{11}\cdot y+f_{12}\cdot x)y+(f_{21}\cdot y+f_{22}\cdot x)x+f_2 \qquad ②$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=f_1\cdot x-f_2\cdot y \qquad ③$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(f_{11}\cdot x-f_{12}\cdot y)x-[(f_{21}\cdot x-f_{22}\cdot y)y+f_2] \qquad ④$$

将上面的②和④相加，并由题目可知$f_{12}=f_{21}$

所以$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{11}+f_{22})=x^2+y^2$

9. 设 $z=z(x,y)$具有二阶连续偏导数，且在变换 $u=x-2y$，$v=x+ay$ 下可将方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a.

解析：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot(-2)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot a$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot a+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot a$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot a\right]+a\left[\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot a\right]$$

$$=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

将以上各式代入方程可得：

$$6\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

所以：

$$\begin{cases}6-2-4=0\\12+a-2+4a=1\\6+a-a^2=0\end{cases}\Rightarrow a=3.$$

10. 函数 $z=z(x,y)$是由方程$x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$所确定的函数，其中φ具有二阶导数，且$\varphi'\neq-1$.

（1）求 dz;　　　　（2）记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$.

解析：

（1）对于给定的方程两边取全微分可得 $2xdx+2ydy-dz=\varphi'(dx+dy+dz)$

整理可得 $dz=\frac{2x-\varphi'}{\varphi'+1}dx+\frac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}dy$.

（2）根据题干中所给的等式可知 $u(x,y)=\frac{2}{\varphi'+1}$

则$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2}{(1+\varphi')^2}\cdot\varphi''\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}$.

11. 设$\varphi(u)$可导且$\varphi(0)=1$，二元函数 $z=\varphi(x+y)e^{xy}$满足$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$，求$\varphi(u)$.

解析：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot e^{xy}+\varphi\cdot y\cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\cdot e^{xy}+\varphi\cdot x\cdot e^{xy}$$

所以：

$$\varphi'+\varphi\cdot y+\varphi'+\varphi\cdot x=0$$

整理得到含有初始条件的微分方程：

$$2\frac{d\varphi}{\varphi}=-(x+y)d(x+y)$$

$$\varphi(0)=1$$

解得：

$$\varphi=e^{-\frac{u^2}{4}}$$

12. 已知函数 $f(x,y)$满足$\frac{\partial f}{\partial x}=f(x,y)$，$\frac{\partial f}{\partial y}=e^x\cos y$，$f(0,0)=0$，求 $f(x,y)$.

解析：

因为$\frac{\partial f}{\partial y}=e^x\cos y$，方程两边对 y 偏积分可得：$f(x,y)=e^x\sin y+\varphi(x)$，此方程两边对 x 求导并结合$\frac{\partial f}{\partial x}=f(x,y)$可得$e^x\sin y+\varphi'(x)=f(x,y)$，可知$\varphi(x)=\varphi'(x)$，又根据 $f(0,0)=0$ 可知$\varphi(0)=0$ 且$\varphi'(0)=0$，故 $f(x,y)=e^x\sin y$.

13. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$的极值点和极值.

解析：

常规的无约束极值问题，取全微分求驻点判断 Hesse 矩阵的正负定即可

极小值 $z(9,3)=3$，极大值 $z(-9,-3)=-3$.

14. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

解析：

目标函数为 $u=z$，只需求该函数在题干中约束条件下的最值即可，构造 Lagrange 函数如下：

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$$

之后便是常规的有约束条件下的极值问题

可得最远点为：$(-5,5,5)$；最近点为：$(1,1,1)$

15. 设函数 $f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$满足等式$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

（1）验证$f''(u)+\frac{1}{u}f'(u)=0$；　（2）若 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，求函数 $f(u)$的表达式.

解析：

（1）　令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

将以上两式相加可得$f''(u)+\frac{1}{u}f'(u)=0$，得证.

（2）只需解有初值条件的微分方程即可：$f(u)=\ln u$（具体方法见上册书第四章）

16. 求曲面$2^{x/z}+2^{y/z}=8$ 在点 $P(2,2,1)$处的切平面方程和法线方程.

解析：

常规的求切平面和法线方程的问题，求导时注意链式法则即可，这里只给出答案：

切平面为：$x+y-4z=0$

法线为：$x-2=y-2=\frac{1-z}{4}$

17. 已知函数 $f(x,y)$满足$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x+y$，且 $f(x,0)=x^2$，$f(0,y)=y$，求 $f(x,y)$.

解析：

由于$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x+y$

所以$\frac{\partial f}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$

又 $f(x,0)=x^2\Rightarrow f'_x(x,0)=2x$,

所以$\varphi(x)=2x$

同样采用偏积分法可得 $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x^2+\psi(y)$

又 $f(0,y)=y\Rightarrow\psi(y)=y$

所以可得 $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x^2+y$.

18. 已知两平面曲线 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$，又(α,β)和(ξ,η)分别为两曲线上的点，试证：如果这两点是两曲线上相距最近或最远的点，则下列关系式成立

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x(\alpha,\beta)}{f_y(\alpha,\beta)}=\frac{g_x(\xi,\eta)}{g_y(\xi,\eta)}.$$

解析：

$C_1:f(x,y)=0$，$C_2:g(x,y)=0$

设 P、Q 是两曲线上相距最近或最远的点，且 PQ 为两曲线上相距最短距离

则 PQ 位于C_1的法线和C_2的法线上

故 PQ 位于曲线C_1和C_2的公共法线上

C_1在 P 处的法线向量的斜率为$\frac{f_y(\alpha,\beta)}{f_x(\alpha,\beta)}$

C_2在 Q 处的法线向量的斜率为$\frac{g_y(\xi,\eta)}{g_x(\xi,\eta)}$

又因为直线 PQ 的斜率为$\frac{\beta-\eta}{\alpha-\xi}$

所以根据 Lagrange 中值定理，有$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{f_x(\alpha,\beta)}{f_y(\alpha,\beta)}=\frac{g_x(\xi,\eta)}{g_y(\xi,\eta)}$成立，得证.

19. 已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 C: $x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$在曲线 C 上的最大方向导数.

解析：

由题意得$\overrightarrow{\mathbf{grad}}=(1+y,1+x)$

故$\left\|\nabla\overrightarrow{\mathbf{grad}}\right\|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$

将上式平方可得$\left\|\nabla\overrightarrow{\mathbf{grad}}\right\|^2=(1+y)^2+(1+x)^2$，其约束条件为$x^2+y^2+xy=3$

之后便是简单的有约束条件下的极值问题，Lagrange 乘数法即可

最大方向导数为 3.

编者为大一学生，如果有错误或者不足之处请看到的学弟学妹纠正。

By：能动 B71 杨松

第六章

1. 选择题

（1）答案选（A）

解析：在原积分区域(D)内添加辅助线 y=-x，设(D)被直线 y=-x，x 轴和 y 轴划分为(D_1)、(D_2)、(D_3)、(D_4)，(D_1)和(D_2)关于 y 轴对称，(D_3)和(D_4)关于 x 轴对称，被积函数 xy + cosxsiny 中 xy 对于 x 和 y 都是奇函数，故$\iint_{(D)} xy\,dxdy=0$，而 cosxsiny 对于 y 是奇函数，对于 x 是偶函数，故 $\iint_{(D)}\cos x\sin y\,dxdy=\iint_{(D_1)+(D_2)}\cos x\sin y\,dxdy+\iint_{(D_3)+(D_4)}\cos x\sin y\,dxdy=2\iint_{(D_1)}\cos x\sin y\,dxdy$。综上$\iint_{(D)}(xy+\cos x\sin y)\,dxdy=2\iint_{(D_1)}\cos x\sin y\,dxdy$。

（2）答案选（B）

解析：交换积分次序，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t f(x)dx\int_1^x dy$，则 $F'(t)=f(t)\int_1^t dy$，所以 $F'(2)=f(2)$。

（3）答案选（D）

解析：设$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$的积分区域为$(D_1)$，$\int_0^1 dy\int_y^1 f(y)f(x)dx$的积分区域为$(D_2)$，则$(D_1)$和$(D_2)$关于直线 y=x 对称，且 $f(x)f(y)=f(y)f(x)$，故$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(y)f(x)dx$，$\iint_{(D_1)+(D_2)} f(x)f(y)\,dxdy=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=A^2$，即

$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = \frac{A^2}{2}$。

（4）答案选（C）

解析：空间区域(Ω_1)是以原点为球心，R 为半径的上半球，关于平面 x0z，y0z 对称，空间区域(Ω_2)是以原点为球心，R 为半径的球位于第一卦限部分，故当被积函数对于 x 或 y 是奇函数时，在空间区域(Ω_1)上的三重积分等于 0，当被积函数对于 x 和 y 都是偶函数时，在空间区域(Ω_1)上的三重积分等于 4 倍的在空间区域(Ω_2)上的三重积分，故$\iiint_{(\Omega_1)} zdV = 4\iiint_{(\Omega_2)} zdV$。

（5）答案选（A）

解析：空间区域$(\Omega\ )$是以点$(-1,1,0)$为球心，$\sqrt{2}$为半径的球，由空间区域$(\Omega\ )$关于平面 x=-1，平面 y=1 和平面 x0y 对称可得，$\iiint_{(\Omega)}(x+y+z)dV = \iiint_{(\Omega)}(x+1)dV + \iiint_{(\Omega)}(y-1)dV + \iiint_{(\Omega)}(x+1)dV = 0$

（6）答案选（C）

解析：与（4）分析类似，曲面(S)是以原点为球心，a 为半径的上半球面，关于平面 x0z，y0z 对称。故当被积函数对于 x 或 y 是奇函数时，在曲面(S)上的第一型面积分等于 0，当被积函数对于 x 和 y 都是偶函数时，在曲面(S)上的第一型面积分等于 4 倍的在曲面(S_1)上的第一型面积分，故$\iint_{(s)} zdS = 4\iint_{(s_1)} zdS$。

2. $\frac{4}{\pi^3}(\pi+2)$

解析：交换积分次序，原式 $=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx = -\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}dy = \frac{4}{\pi^3}(\pi+2)$

3. $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

解析：交换积分次序，原式 $=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}dy = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

4. $4-\frac{\pi}{2}$

解析：积分区域(D)关于直线 y=1 对称，故$\iint_{(D)}(y-1)dxdy = 0$，即$\iint_{(D)} ydxdy = \iint_{(D)} dxdy$，而$\iint_{(D)} dxdy$的几何意义是积分区域(D)的面积，故$\iint_{(D)} ydxdy = 4-\frac{\pi}{2}$。

5. $e-1$

解析：设直线 y=x 将积分区域(D)划分为(D_1)和(D_2)，在(D_1)中 $\max\{x^2,y^2\} = y^2$，在(D_2)中 $\max\{x^2,y^2\} = x^2$，则 $\iint_{(D)} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy = \iint_{(D_1)} e^{y^2}dxdy + \iint_{(D_2)} e^{x^2}dxdy = 2\iint_{(D_1)} e^{y^2}dxdy = 2\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx = e-1$

6. （$\frac{a}{4},\frac{a}{4}$）

解析：设平面薄板区域为(D)，则

$$\bar{x}=\frac{\iint_{(D)}xdxdy}{\iint_{(D)}dxdy}=\frac{\int_0^{\frac{a}{2}}xdx\int_x^{\sqrt{ax-x^2}}dy+\int_0^{\frac{a}{2}}xdy\int_{\sqrt{ay-y^2}}^{y}dx}{\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_x^{\sqrt{ax-x^2}}dy+\int_0^{\frac{a}{2}}dy\int_{\sqrt{ay-y^2}}^{y}dx}=\frac{a}{4}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_{(D)}ydxdy}{\iint_{(D)}dxdy}=\frac{\int_0^{\frac{a}{2}}ydx\int_x^{\sqrt{ax-x^2}}dy+\int_0^{\frac{a}{2}}ydy\int_{\sqrt{ay-y^2}}^{y}dx}{\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_x^{\sqrt{ax-x^2}}dy+\int_0^{\frac{a}{2}}dy\int_{\sqrt{ay-y^2}}^{y}dx}=\frac{a}{4}$$

即平面薄板的形心坐标为（$\frac{a}{4},\frac{a}{4}$）

（另法：因为平面薄板质量分布均匀，又平面薄板区域关于直线 $y=x$ 和直线 $y=-x+\frac{a}{2}$对称，

故形心坐标为两直线交点（$\frac{a}{4},\frac{a}{4}$））。

7. $\frac{\pi}{4}$

解析：$V=\iiint_{(V)}dV=\iint_{(\sigma)}(1-4x^2-y^2)d\sigma=\int_0^1\frac{1}{2}\rho d\rho\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)d\varphi=\frac{\pi}{4}$

这里无论是用三重积分还是二重积分表示立体的体积最终的表达式都是一样的，但是在计算二重积分时，笔者认为运用广义极坐标变换(高数二 P120)更为简便。

8. 解析：被积函数 $f(\sqrt{x^2+y^2})$对于 x 和 y 都是偶函数，积分区域(D)关于 x 轴和 y 轴对称，故$\iint_{(D)}f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=4\iint_{(D_1)}f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中$(D_1)$为(D)在第一象限部分，因此有

$$\iint_{(D)}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=4\iint_{(D_1)}\rho f(\rho)d\rho d\varphi$$
$$=4\left[\int_0^1\rho f(\rho)d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi+\int_1^{\sqrt{2}}\rho f(\rho)\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi-\int_1^{\sqrt{2}}\rho f(\rho)d\rho\int_0^{\arccos\frac{1}{\rho}}d\varphi\right]$$
$$=\pi\int_0^1\rho f(\rho)d\rho+\int_1^{\sqrt{2}}(\pi-4\arccos\frac{1}{\rho})\rho f(\rho)\,d\rho$$

由上式及积分形式的不变性可知，原等式成立。

9. $\frac{7}{6}\pi a^4$

解析：$\iiint_{(\Omega)}zdV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho d\rho\int_\rho^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}}zdz=\frac{7}{6}\pi a^4$

10. 2π

解析：设(Ω)位于平面 x0y 的上半部分为(Ω_1)，则有

$$\iiint_{(\Omega)}e^{|z|}dV=2\iiint_{(\Omega_1)}e^zdV=2\int_0^1e^zdz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\rho d\rho=2\pi$$

11. 解析：（1）$F(t)=\frac{\iiint_{(\Omega_{(t)})}f(x^2+y^2+z^2)dV}{\iint_{(D(t))}f(x^2+y^2)\,d\sigma}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^t r^2f(r^2)dr}{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^t\rho f(\rho^2)\,d\rho}=\frac{2\int_0^t r^2f(r^2)dr}{\int_0^t rf(r^2)\,dr}$

$$F'(t)=\frac{2t^2f(t^2)\int_0^t rf(r^2)dr-2tf(t^2)\int_0^t r^2f(r^2)dr}{[\int_0^t rf(r^2)\,dr]^2}=\frac{2tf(t^2)\int_0^t (t-r)rf(r^2)dr}{[\int_0^t rf(r^2)\,dr]^2}$$

由 $r\in(0,t)$及函数 f（x）连续且恒大于 0 可得，$F'(t)$在$(0,+\infty)$内恒大于 0，即 $F(t)$在区间$(0,+\infty)$内严格单调增加

（2）$G(t)=\frac{\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2)dx}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^t rf(r^2)dr}{2\int_0^t f(r^2)dr}=\frac{\pi\int_0^t rf(r^2)dr}{\int_0^t f(r^2)\,dr}$

$$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)=2\cdot\frac{\int_0^t r^2f(r^2)dr\int_0^t f(r^2)dr-\int_0^t rf(r^2)dr\int_0^t rf(r^2)dr}{\int_0^t rf(r^2)dr\int_0^t f(r^2)dr}$$

设$\varphi(t)=\int_0^t r^2f(r^2)dr\int_0^t f(r^2)dr-\int_0^t rf(r^2)dr\int_0^t rf(r^2)dr$，则

$$\varphi'(t)=f(t^2)\int_0^t (t-r)^2f(r^2)\,dr>0(\text{当 } t>0 \text{ 时})，\varphi(0)=0$$

所以，当 t ＞ 0 时，$\varphi(t)>0$，即 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$。

12. 形心$(0,0,2)$，$I=\frac{64}{3}\pi$

解析：区域(V)是以(0,0,2)为球心，2 为半径的球，故区域(V)的形心坐标为(0,0,2)。因为区域(V)关于平面 x0z，平面 y0z 和平面 z=2 对称，所以

$$I=\iiint_{(V)}(x+y+z)dV=\iiint_{(V)}zdV=\iiint_{(V)}2dV=\frac{64}{3}\pi$$

13. $\frac{\pi h(b^5-a^5)}{10(b-a)}$

解析：$\iiint_{(\Omega)}(x^2+y^2)dV=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{(a-b)z+bh}{h}}\rho^3d\rho=\frac{\pi h(b^5-a^5)}{10(b-a)}$

14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho$

解析：空间区域(Ω)为顶点为原点，开口向上的圆锥和以原点为球心，1 为半径的上半球的公共部分在第一卦限中平面 $y=x$ 和平面 $y=\sqrt{3}x$ 所夹部分，题目难点主要在θ和φ的取值范围，$dV=\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$以及函数 f（y，z）中 $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$,$z=\rho\cos\theta$的替换。

15. 12a

解析：(L)关于 x 轴和 y 轴对称，故$\oint_{(L)}(2xy+3x^2+4y^2)ds=\oint_{(L)}12ds=12a$

16. $\frac{32}{9}\sqrt{2}$

解析：$\iint_{(\Sigma)}zdS=\sqrt{2}\iint_{(\sigma)}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^2d\rho=\frac{32}{9}\sqrt{2}$

17. 100

解析：雪堆侧面积 $S=\iint_{(\Sigma)}dS=\frac{1}{h(t)}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\rho\sqrt{16\rho^2+[h(t)]^2}d\rho=\frac{13\pi}{12}[h(t)]^2$，雪堆的

体积 $V=\iint_{(\sigma)}zd\sigma=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\rho(h(t)-\frac{2\rho^2}{h(t)})d\rho=\frac{\pi}{4}[h(t)]^3$。

体积减少的速率(这里取正)$dV=\frac{39\pi}{40}[h(t)]^2dt$，故有$\frac{3\pi}{4}[h(t)]^2h'(t)=-\frac{39\pi}{40}[h(t)]^2$，解得

$h'(t)=-\frac{13}{10}$，即 $h(t)=h-\frac{13}{10}t$，当 h=130cm 时，t=100h。

18. $2(\pi-1)$

解析：力 F 的单位方向向量$\overrightarrow{e_\tau}=(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$，力 F 的大小$|\vec{F}|=\sqrt{x^2+y^2}$，变力 F 对质点 P 做的功为 $W=\int_{(L)}-ydx+xdy$，设(L_1)为由点 B 到点 A 的有向线段，则由 Green 公式，$\oint_{(L)+(L_1)}-ydx+xdy=2\pi$，$W=2\pi-\int_{(L_1)}-ydx+xdy=2(\pi-1)$ （注：$\oint_{(L_1)}-ydx+xdy$建议用参数方程计算）

19. 当 L 不包围点 O 时，I=0；当 L 包围点 O 时，I=π。

解析：当 L 不包围点 O 时，由 Green 公式，可得 $I=\iint_{(\sigma)}0\,d\sigma=0$

当L包围点O时，设(L_1)为曲线$4x^2+y^2=r^2$的反向，则由Green公式，可得$\oint_{(L)+(L_1)}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$，$I=-\oint_{(L_1)}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=-\frac{1}{r^2}\oint_{(L_1)}xdy-ydx=\frac{1}{r^2}\iint_{(\sigma)}2\,d\sigma=\pi$

（注：椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的面积为$\pi ab$）

20. $\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$

解析：设(L_1)为点 O 到点 A 的有向线段，则由 Green 公式，可得

$$\oint_{(L)+(L_1)}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy=\iint_{(\sigma)}(b-a)d\sigma=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)$$

$$I=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)-\int_{(L_1)}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+\int_0^{2a}bxdx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$$

21. $-6\pi^2$

解析：设$(\overline{AB})$为点 B 到点 A 的有向线段，则由 Green 公式，可得

$$\oint_{(\widehat{AMB})+(\overline{AB})}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy=\iint_{(\sigma)}\pi d\sigma=2\pi$$

$$I=2\pi-\int_{(\overline{AB})}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy$$

$$=2\pi+\int_\pi^{3\pi}[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x-\pi(\frac{x}{\pi}+1)+\frac{1}{\pi}\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x-1]dx$$

$=-6\pi^2$ （注：使用分部积分计算$\int_\pi^{3\pi}[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x+\frac{1}{\pi}\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x]dx=0$）

22. $\frac{1}{2}\pi aR^2$

解析：设(L_1)为点 B 到点 A 的有向线段，则由 Green 公式，可得

$$\oint_{(L)+(L_1)}\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+(ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}))dy=\iint_{(\sigma)}ad\sigma=\frac{1}{2}\pi aR^2$$

$$\oint_{(L)}\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+\left(ax+2y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi aR^2-\oint_{(L_1)}\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+(ax+2y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}))dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi aR^2+\int_{-R}^{R}2y\ln a\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\pi aR^2$$

23. $\pi+1$

解析：$P(x,y)=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}$，$Q(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，即该线积分与路径无关，故选取点 A 到点 B 的有向直线段进行计算。

$$\int_{(L)}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy=\int_1^2(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x})dx=\pi+1$$

24. 2，$-\frac{1}{2}$

解析：$P(x,y)=xy^{\lambda}$，$Q(x,y)=x^{\lambda}y$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\lambda xy^{\lambda-1}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}=\lambda x^{\lambda-1}y$，解得$\lambda=2$

$$\int_{(1,1)}^{(0,2)}xy^2dx+x^2ydy=\int_1^0xdx+\int_1^2 0dx=-\frac{1}{2}$$

25. $a=2$，$u=\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}+C$

解析:因为$\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$是$u(x,y)$的全微分,故$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{a(x+y)^2-2(x+y)(x+ay)}{(x+y)^4}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2y}{(x+y)^3}$,解得$a=2$。由$\frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$是$u(x,y)$的全微分，可得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x+2y}{(x+y)^2}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{(x+y)^2}\end{cases}\qquad \text{解得 } u=\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}+C$$

26. x^2+2y-1

解析：由积分与路径无关得 $P(x,y)=2xy$，$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，设 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$，则

$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy\Rightarrow\int_{(1,t)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=0$，

$\int_1^t2txdx+\int_t^1(t^2+\varphi(y))dy=t^2-t+\int_t^1\varphi(y)dy=0$，等式两边对 t 求导得

$\varphi(t)=2t-1$，即$\varphi(y)=2y-1$，$Q(x,y)=x^2+2y-1$。

27. (1)解析：$I=\int_{(L)}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$,

$P(x,y)=\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]$，$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$，$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)+xy f'(xy)-\frac{1}{y^2}$，$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，故曲线积分 I 与路径无关。

(2) $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$

解析：$I=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_a^c bf(bx)dx+\int_b^d cf(cy)dy=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$

28. $-\frac{128}{15}\pi$

解析：曲面(S)的方程为$x^2+y^2=1+z^2(1\le z\le 2)$，不难看出这是锥面的部分。

曲面(S)正侧单位法向量$\overrightarrow{e_n}=(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$，单位时间内流向(S)正侧的流量$\iint_{(s)}\vec{v}d\vec{S}=\iint_{(s)}xz^2dy\wedge dz+\sin x dx\wedge dy=-\iiint_{(V)}z^2dV-\iint_{(S_1)}xz^2dy\wedge dz+\sin x dx\wedge dy-\iint_{(S_2)}xz^2dy\wedge dz+\sin x dx\wedge dy$（Gauss 公式），其中$(S_1)$为$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=1\end{cases}$上侧，$(S_2)$为$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ z=2\end{cases}$下侧，(V)为$(S_1)$、$(S_2)$、(S)所围空间区域，$\iint_{(s)}\vec{v}d\vec{S}=\int_1^2 z^2dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{1+z^2}}\rho d\rho=-\frac{128}{15}\pi$。

29. $-\pi$

解析：$I=\iint_{(\Sigma)}2x^3dy\wedge dz+2y^3dz\wedge dx+3(z^2-1)dx\wedge dy$

$=6\iiint_{(V)}(x^2+y^2+z)dV-\iint_{(\Sigma_1)}2x^3dy\wedge dz+2y^3dz\wedge dx+3(z^2-1)dx\wedge dy$

其中(Σ_1)为$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$下侧，(V)为$(\Sigma)$，$(\Sigma_1)$所围空间区域。

$I=\int_0^1dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{1-z}}\rho(\rho^2+z)d\rho-\iint_{(\sigma)}3d\sigma=2\pi-3\pi=-\pi$。

30. -24

解析：$I=\oint_{(L)}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$

$=-\iint_{(s)}(2y+4z)dy\wedge dz+(2z+6x)dz\wedge dx+(2x+2y)dx\wedge dy$

$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{(s)}(8x+4y+6z)dS$

$=-\iint_{(\sigma)}(12+2x-2y)dxdy$

$=-24$

第七章

1. 选择题

（1）设函数$y_1(x)$，$y_2(x)$是微分方程$y'+p(x)y=0$的两个不同的特解，则该微分方程的通

解为( )。

(A) $y = C_1y_1 + C_2y_2$ (B) $y = y_1 + Cy_2$

(C) $y = y_1 + C(y_1 + y_2)$ (D) $y = C(y_1 - y_2)$

解：D

该微分方程的通解应该为 $y = C_0f(x)$，其中C_0的取值范围为$(-\infty, +\infty)$。可以设两个不同的特解$y_1(x) = B_1f(x)$，$y_2(x) = B_2f(x)$。下面来看四个选项：

A: $y = C_1y_1 + C_2y_2$其中出现了两个任意常数，但是作为一阶的微分方程只能有一个任意常数。因此一定不正确。

B: $y = y_1 + Cy_2 = (B_1 + CB_2)f(x)$。只需要看$B_1 + CB_2$的取值范围能否取到$(-\infty, +\infty)$即可。显然当$B_2 = 0$时是不满足的。

C: $y = y_1 + C(y_1 + y_2) = (B_1 + C(B_1 + B_2))f(x)$。当$B_1 = -B_2$时不满足。

D: $y = C(y_1 - y_2) = C(B_1 - B_2)f(x)$。由于题中已知这两个特解不相同，故$B_1 - B_2 \neq 0$，故取值范围永远满足$(-\infty, +\infty)$，为正确答案。

（2）设y_1，y_2是二阶常系数线性齐次方程$y'' + py' + qy = 0$的两个特解，C_1，C_2是两个任意常数，则下列命题中正确的是( )。

(A) $C_1y_1 + C_2y_2$一定是微分方程的通解 (B) $C_1y_1 + C_2y_2$不可能是微分方程的通解

(C) $C_1y_1 + C_2y_2$是微分方程的解 (D) $C_1y_1 + C_2y_2$不是微分方程的解

解：C

唯一可以确定的是$C_1y_1 + C_2y_2$是微分方程的解，无法确定通解是什么样子的，因此 A 与 B 不确定的，D 一定是错误的。

（3）设函数 $y = f(x)$是微分方程$y'' - 2y' + 4y = 0$的一个解。若 $f(x_0) > 0$，$f'(x_0) = 0$，则函数 $f(x)$在点x_0( )。

(A) 取到极大值 (B) 取到极小值

(C) 某个邻域内单调增加 (D) 某个邻域内单调减少

解：A

由于 $y = f(x)$为一个二阶微分方程的解，因此 $f(x)$是二阶可导的。将$x = x_0$带入方程中，有$f(x_0)'' - 2f(x_0)' + 4f(x_0) = 0$，而$f'(x_0) = 0$，则得到$f(x_0)'' = -4f(x_0) < 0$，故$x = x_0$为极大值点。

（4）设二阶线性常系数齐次微分方程$y'' + by' + y = 0$的每一个解 $y(x)$都在区间$(0, +\infty)$上有界，则实数 b 的取值范围是( )。

(A) $b \geq 0$ (B) $b \leq 0$

(C) $b \leq 4$ (D) $b \geq 4$

解：A

对应的特征根方程为$\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$，解得$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$，若$b^2 - 4 \geq 0$，对应实根；若$b^2 - 4 < 0$，对应虚根。下面进行分类讨论：当 $b > 2$ 或 $b < -2$ 时，对应的为实根且不为

重根时，则其解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$，解在$(0,+\infty)$上有界意味着$\lambda_1$与$\lambda_2$均小于 0，故只有当 $b>2$ 时满足题意。当$-2<b<2$ 时解为 $y=e^{\frac{-b}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}x)$，当$\frac{-b}{2}\le 0$ 时则有界，即 $0\le b<2$。当 $b=2$ 或 $b=-2$ 时，$y=(C_1x+C_2)e^{\frac{-b}{2}x}$，显然 $b=2$ 满足而 $b=-2$ 不满足。综上，$b\ge 0$。

（5）设$y_1=e^x$，$y_2=x$ 是三阶常系数线性齐次微分方程$y'''+ay''+by'+cy=0$ 的两个特解，则 a,b,c 的值为( )。

(A) $a=1,b=-1,c=0$ (B) $a=1,b=1,c=0$

(C) $a=-1,b=0,c=0$ (D) $a=1,b=0,c=0$

解：C

$y_1=e^x$对应的是存在一个特征根为 1；$y_2=x$ 实际为$y_2=xe^{0x}$，表明含有特征根为 0，且至少为二重根。可以将特征根方程写成如下形式 $A\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-0)^2=0$。拆开为原特征根方程的形式 $A\cdot(\lambda^3-\lambda^2)=0$。可知对应 $A=1$，$a=-1,b=0,c=0$。

2. 求解下列微分方程:

（1） $\begin{cases} y''+2x(y')^2=0, \\ y(0)=1,y'(0)=0; \end{cases}$

解：设 $p=y'$，则原式改为$\frac{dp}{dx}+2xp^2=0$。下面分类讨论：若 $p\neq 0$，则为变量可分离的微分方程，解得 $p=\frac{1}{x^2+C_1}$；或 $p=0$。由题中所给已知条件可知，$p(0)=0$，故 $p=0$，即$\frac{dy}{dx}=0$，解得 $y=C_2$，带入 $y(0)=1$，则 $y(x)=1$。

（2） $y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$;

解：对应的线性方程的特征根方程为$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$，得到$\lambda=-1$ 为三重特征根。而注意到 e 上的指数的系数恰为-1。特解形式为$y^*=x^3(Ax+B)e^{-x}$。带入原方程求出 $A=\frac{1}{24}$，$B=-\frac{5}{6}$。故通解为 $y=(C_1x^2+C_2x+C_3)e^{-x}+x^3(\frac{1}{24}x-\frac{5}{6})e^{-x}$

（3） $y''+y=x+\cos x$;

解：原方程并不会直接解，但注意到，原方程可以化为$(y-x)''+(y-x)=\cos x$。令 $y-x=p$，则方程转化为$p''+p=\cos x=e^0\cos 1x$。对应线性齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，$0+i$ 恰是特征根，因此特解形式为$p^*=x(A\cos x+B\sin x)$。带入方程中解得 $A=0,B=\frac{1}{2}$。则通解为 $p=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$。因此 $y=p+x=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x+x$。

（4） $y''+\mu y=0$（μ为常数）。

解：本题需要分类讨论。当$\mu>0$ 时，对应的特征方程为$\lambda^2-\mu=0$，解为$\lambda=\pm\sqrt{\mu}$，则得到的通解为 $y=C_1e^{\sqrt{\mu}x}+C_2e^{-\sqrt{\mu}x}$；当$\mu=0$ 时，$\lambda=0$ 为二重根，则 $y=C_1x+C_2$；当$\mu<0$ 时，解为$\lambda=\pm i\sqrt{-\mu}$，通解为 $y=C_1\cos\sqrt{-\mu}x+C_2\sin\sqrt{-\mu}x$。

3. 求以$y_1=e^{-x}$,$y_2=2xe^{-x}$,$y_3=3e^x$为特解的三阶常系数线性齐次微分方程。

解：显然，这三个解是线性无关的。其中含有e^{-x}有两项且一个与常数相乘，一个含有x的一次项。因此可以推测出来通解形式为$y=(C_1x+C_2)e^{-x}+C_3e^x$。对应的特征方程中$-1$为二重根，还有一个根为1。特征方程应该为$A(\lambda+1)^2\cdot(\lambda-1)=0$，其中A为不为零的任意常数，拆开为$A(\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1)=0$。因此微分方程为$A\left(y'''+y''-y'-y\right)=0$（A为任意非零常数）。

4. 已知函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

求$f'(x)$，并证明$e^{-x}\le f(x)\le 1\ \ (x\ge 0)$。

解：其中存在一个变上限的积分，方程中如果存在这个，首先考虑的是能否求一次导将积分消去。但是若对方程求导的话，$f'(x)$是否可导是不确定的。我们先证明$f'(x)$是可导的。即将方程移项，得到了$f'(x)=-\ f(x)+\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt$，显然 $f(x)$与$\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt$都可导，因此$f'(x)$也可导。于是，先将方程两边同乘 $x+1$，之后左右同时求导。得到$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$，求解此微分方程可以得到$f'(x)=\frac{C_1}{(x+1)e^x}$，带入题中所给条件 $f(0)=1$ 与原式中，可知$f'(0)=-1$, 故可得$C_1=-1$，则$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)e^x}$。

下面证明不等式。先证明不等式右边。由于 $f(x)$不容易积分得到，因此我们不考虑求出 $f(x)$。$f(0)=1$，$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)e^x}$在 $x\ge 0$ 时恒小于 0，因此 $f(x)$单减，故 $f(x)\le f(0)=0$，得证。下面证明左侧，即证 $F(x)=f(x)-e^{-x}\ge 0$ 在 $x\ge 0$ 时恒成立。由于 $F(0)=f(0)-e^0=0$，只需证明 $F'(x)\ge 0$ 即可。可求得$F'(x)=f'(x)+e^{-x}=\frac{x}{(x+1)e^x}$。显然，当 $x\ge 0$ 时，$F'(x)\ge 0$，得证。

5. 设 $a>0$,函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续有界，证明微分方程$y'+ay=f(x)$的解在$[0,+\infty)$上有界。

解：先求出对应齐次方程的通解，为$y=Ce^{-ax}$，利用常数变异法，因此此方程的解形式为$y=h(x)e^{-ax}$，带入方程中得到$h'(x)=f(x)e^{ax}$, 则$h(x)=\int f(x)e^{ax}dx$。因此函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续有界，因此存在常数M使得$|f(x)|<M$。故$|h(x)|=\left|\int f(x)e^{ax}dx\right|\le\int|f(x)|e^{ax}dx=\int\frac{|f(x)|}{a}de^{ax}\le\int\frac{M}{a}de^{ax}=\frac{M}{a}e^{ax}+C$。因此$|y|=|h(x)e^{-ax}|\le|h(x)|e^{-ax}\le\left(\frac{M}{a}e^{ax}+C\right)\cdot e^{-ax}=\frac{M}{a}+Ce^{-ax}$。由于$a>0$，故在$[0,+\infty)$上$|Ce^{-ax}|<|C|$，因此此微分方程的解是有界的。

6. 液体从容器底部小孔流出的速度为 $c\sqrt{2gh}$，其中 c 为常数，g 是重力加速度，h 是小孔到液面的距离。

(1) 若容器为铅直放置的圆柱形桶，底面直径为 1m，高为 2m，底部有一直径为 1cm 圆柱，圆桶内盛满液体，求液体流尽所需要的时间；

(2) 若容器为一旋转面，为使液面下降是匀速的，该容器应具有什么形状？

解：(1) 液体体积为 $V=S_{底}h,\frac{dV}{dt}=-c\sqrt{2gh}\cdot S_{孔}$。则对前一个求导得到$\frac{dV}{dt}=S_{底}\cdot\frac{dh}{dt}$。因此得到微分方程 $c\sqrt{2gh}\cdot S_{孔}=S_{底}\cdot\frac{dh}{dt}$,解得 $t=\frac{-2S_{底}\sqrt{h}}{c\sqrt{2g}\cdot S_{孔}}+C_0$。带入初始条件 $t=0,h=2m$，得到$C_0=\frac{20000}{c\sqrt{g}}$。带入 $h=0$，得到液体流尽时 $t=\frac{20000}{c\sqrt{g}}$。

(2) 设容器为曲线 $x=x(y)$旋转而成。则高为 h 时的体积为 $V(h)=\int_0^h\pi\cdot x(y)^2dy$。若液面下降速度为$\frac{dh}{dt}=v$（为常量）。可以列出方程$\frac{dV}{dt}=c\sqrt{2gh}\cdot S_{底}$，其中$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi\cdot x(h)^2\cdot v$。故得到方程 $c\sqrt{2gh}\cdot S_{底}=\pi\cdot x(h)^2\cdot v$。解得 $x(h)=\sqrt{\frac{c\sqrt{2gh}\cdot S_{底}}{\pi v}}$，化简得到曲线为 $y=(\frac{\pi v}{cS_{底}})^2\cdot\frac{x^4}{2g}$。

7. 在 xOy 平面第一象限的一条曲线，经过 A(0, 1) , B(1, 0) 两点。对曲线上任意一点 $P(x_0,y_0)$，弦$\overline{AP}$总位于弧$\overset{\frown}{AP}$下方，且弦$\overline{AP}$与弧$\overset{\frown}{AP}$围成的图形的面积为$x_0{}^3$，求该曲线的方程。

解：弦$\overline{AP}$的直线方程为 $y=\frac{y(x_0)-1}{x_0}\cdot x+1$，设曲线方程为 $y=y(x)$，则围成图形面积为 $S(x_0)=\int_0^{x_0}\left(y(x)-\frac{y(x_0)-1}{x_0}\cdot x-1\right)dx$。此式可积分为 $S(x_0)=\int_0^{x_0}y(x)dx-\frac{x_0(y(x_0)+1)}{2}$。已知 $S(x_0)=x_0{}^3$，故得到等式$\int_0^{x_0}y(x)dx-\frac{x_0(y(x_0)+1)}{2}=x_0{}^3$，将此式两端对$x_0$求导，得到 $y(x_0)-\frac{(y(x_0)+1)+y'(x_0)\cdot x_0}{2}=3x_0{}^2$，化简得到当 $x\neq 0$ 时$\frac{dy}{dx_0}-\frac{1}{x_0}\cdot y=-6x_0-\frac{1}{x_0}$，这是一个一阶非齐次线性微分方程，利用常数变异法或者直接带入公式即可解出 $y=-6x^2+Cx+1$，代入初始条件过点 A(0, 1) 与 B(1, 0) 可知 $y=-6x^2+5x+1$。

8. 设函数 $y(x)(x\geq 0)$二阶可导，且$y'(x)>0,y(0)=1$。过曲线 $y=y(x)$上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线。上述两直线与 x 轴所围的三角形的面积记为S_1，区间$[0,x]$上以 $y=y(x)$为曲边的曲边梯形的面积为S_2，并设$2S_1-S_2$恒为 1，求此曲线的方程。

解：首先将S_1与S_2具体表示出来，就可以列出方程。由于$y'(x)>0$，故$S_1=\frac{y(x)^2}{2y'(x)}$，而 $S_2=\int_0^x y(x)dx$。可列出方程$\frac{y(x)^2}{y'(x)}-\int_0^x y(x)dx=1$。由于 $y(x)$二阶可导，故对方程两端求导。化简后得到$(y')^2=y''y$, 设 $p=y'$, 则$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dx}\cdot p$, 利用此变换可以解得 $p=C_1y$。在原方程$\frac{y(x)^2}{y'(x)}-\int_0^x y(x)dx=1$ 带入 $x=0$, 并根据题中所给条件 $y(0)=1$, 可以得到 $p=y$, 即方程$\frac{dy}{dx}=y$，解得 $y=C_2e^x$，带入 $y(0)=1$，得到 $y(x)=e^x$。

学辅中心微信公众号

学粉群 4.0

仲英书院学业辅导中心出品