36. 父：$\left(\left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| x_i \in R\right\}, \times\right)$，幺元为 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

子：$\left(\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in R\right\}, \times\right)$，幺元为 $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq e_1$

子：$\left(\left\{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \middle| x_i \in R\right\}, \times\right)$，幺元为 $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1$

综上，含幺半群的子半群可以是一个含幺半群，
但不一定是子含幺半群。

39. (1) $\forall x_1, x_2 \in G$.

$a * x_1 = b \wedge a * x_2 = b$

$\Rightarrow a * x_1 = a * x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ （消去律）

即若 x 存在，则唯一

又由 令 $x = a^{-1} * b$

由 $a, b \in G$ 则 $a^{-1}, b \in G$，则 $a^{-1} * b \in G$

则 $x \in G$

$a * x = a * (a^{-1} * b)$

$= (a * a^{-1}) * b$

$= e * b$

$= b$

所以 x 存在。综上 $\exists$ 唯一的 $x \in G$，使 $a * x = b$

(2) 令 $y = b * a^{-1}$

由 $a, b \in G$，则 $a^{-1} \in G$，则 $b * a^{-1} \in G$，即 $y \in G$

$$y * a = (b * a^{-1}) * a$$
$$= b * (a^{-1} * a)$$
$$= b * e$$
$$= b$$

即 $\exists y \in G$. $y * a = b$

$\forall y_1, y_2 \in G$, $\quad y_1 * a = b \wedge y_2 * a = b$

$\Rightarrow y_1 * a = y_2 * a$

$\Rightarrow y_1 = y_2$ （消去律）

综上，存在唯一的 $y \in G$，使 $y * a = b$.

40. (1) $a * b = a * c$

$\Rightarrow (\exists d \in S)(d * a = e) d * (a * b) = d * (a * c)$

$\Rightarrow (d * a) * b = (d * a) * c$ （结合律）

$\Rightarrow e * b = e * c$

$\Rightarrow b = c$ （e是左幺元）

(2) ① 证明e为*右幺元.

$$y * (x * e) = (y * x) * e$$
$$= e * e$$
$$= e$$

$y * (x * e) = e = y * x$

$\Rightarrow x * e = x$ （消去律）即 e为右幺元 即e为幺元

② 逆元. $\forall x\in S, \exists y\in S$. $y*x=e$

$y*(x*y)=(y*x)*y=e*y=y=y*e$

即 $y*(x*y)=y*e$

$\Rightarrow x*y=e$ （消去律）

且 $y*x=e$

所以 $x^{-1}=y$

$y^{-1}=x$

综上. $\langle S,*\rangle$ 是群

4). (1) 群中一阶元素只有幺元.

(2) 群中三阶及以上的元素为偶数个

证明: ① 三阶及以上元素的逆元不为自身。

反证法. 若 $a^{-1}=a$

则 $a^2=a*a=a^{-1}*a=e$

则 a 为二阶元素, 矛盾.

同理可得, 任一三阶及以上元素其逆元也是三阶及以上元素。

(3) 由 $|G|=2n$, 得群 G 中二阶元素的个数必为奇数个。