高斯分布讲义

Hairong气

高斯分布也被称为正态*分布*或*钟形曲线分布*，因为它的钟形密度曲线。有一种说法是，在图像处理和计算机视觉领域，你可以用高斯分布来回答所有的问题。高斯分布也是模式识别领域中最常用的分布模型。那么我们来仔细看看。

1 定义

*d*维高斯概率分布的公式为

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp(-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}{2}) \tag{1}$$

其中x是每个维度变量的d元素列向量，μ是均值向量，由

$$\mu = E[\mathbf{x}] = \int \mathbf{x}p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

和Σis d ×d协方差矩阵，计算由

$$\Sigma = E[(\mathbf{x}-\mu)(\mathbf{x}-\mu^{\mathrm{T}}] = \int (\mathbf{x}-\mu)(\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

，形式如下。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & \cdots & \sigma_{dd} \end{bmatrix} \tag{2}$$

协方差矩阵总是对称且半正定的，其中*半正定*意味着对于所有非零的$x \in R^d$，$x^T\Sigma x \geqslant 0$。我们通常只处理*正定*的协方差矩阵，其中对于所有非零$x \in R^d$，$x^T\Sigma x > 0$，这样行列式$|\Sigma|$将严格为正。对角线元素σ_{ii}是各自x_i的方差，即σ_i^2，非对角线元素σ_{ij}是x_i和x_j的协方差。如果每一维上的变量都是统计独立的，那么$\sigma_{ij} = 0$，我们就会得到一个对角协方差矩阵，

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

如果每个维度上的协方差相同，那么我们就会有一个标识矩阵乘以一个标量，

$$\sigma^2 I \tag{4}$$

由Eq. 4，得到Σbecomes的行列式

$$|\Sigma| = \sigma^{2d} \tag{5}$$

和Σbecomes的逆矩阵

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma^2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

对于二维高斯分布，其中$d = 2$, $x = x_1x_2^T$，$|\Sigma| = \Sigma^4$，公式变为

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}) \tag{7}$$

我们通常将Eq. 1的高斯分布表示为$p(x) \sim N(\mu, \Sigma)$。

2 白化变换

任意高斯分布的线性变换将得到另一个高斯分布。特别地，如果A是一个d × k矩阵，并且$y = A^Tx$，那么p(y)N($A^T\mu$，$A^T\Sigma A$)。在k = 1的特殊情况下，A变成了A

列向量a，那么这个变换实际上就是把x投影到a方向的直线上。

如果$A = \Phi\Lambda^{-1/2}$其中Φis列向量为Σ的标准正交特征向量的矩阵，以及对应特征值的Λthe对角矩阵，那么变换后的分布有协方差矩阵等于识别矩阵。在信号处理中，我们把这个过程称为白化变换，对应的变换矩阵称为白化矩阵，A_w。

参见下图，摘自杜达 & 哈特的《模式分类》一书:

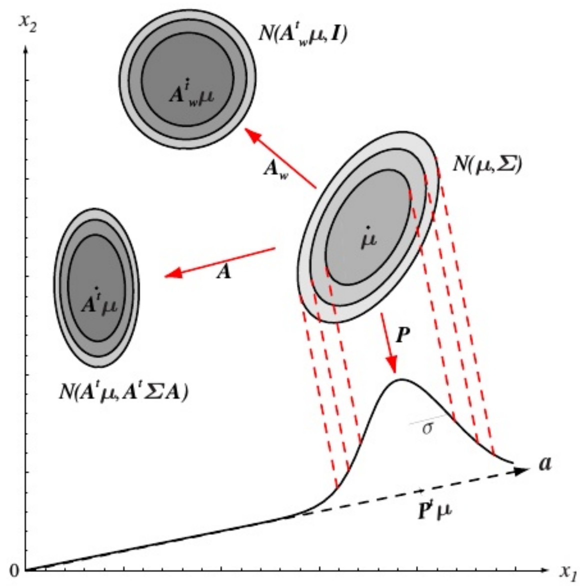

图2.8。线性变换在特征空间上的作用将把任意的正态分布转换成另一个正态分布。一个变换**A**，将源分布转化为分布N(**A**^{t}⊠，**A**^{t}⊠A)。另一个线性变换——将**P**投影到由向量**a定义的直线上，导致**N(μ，σ^2)沿着这条直线测量。虽然变换在不同的空间中产生分布，但我们将它们叠加在原始的x_1x_2-space上。一个白化变换$\mathbf{A}_w$会导致一个圆对称的高斯，如图所示。摘自:Richard O.杜达，Pe-ter E.哈特，David G. Stork，模式分类。版权所有c 2001约翰威利父子公司。

3 高斯分布的68-95-99.7规则

任何概率分布函数(PDF)从$-\infty$到$+\infty$的积分总是1。高斯遵循同样的规则，即，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1 \tag{8}$$

其中g(x)是一维高斯。另一种解释是，pdf曲线下覆盖的面积为1。

68-95-99.7规则规定，以$x \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]$为边界的pdf曲线下覆盖的区域占整个区域的68%(或1);对于$x \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$，面积比例为95%;而对于$x \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$，面积比例为99.7%。也就是说，对于均值为零的情况，

$$\begin{array}{l} \int_{-\sigma}^{\sigma} g(x) = 0.68 \\ \int_{-2\sigma}^{2\sigma} g(x) = 0.95 \\ \int_{-3\sigma}^{3\sigma} g(x) = 0.997 \end{array} \tag{9}$$

请看下图的说明。

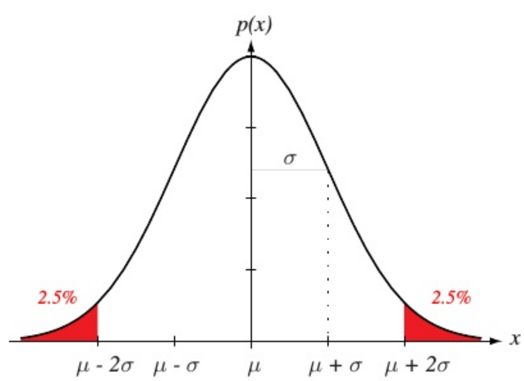

图2.7。单变量正态分布在|x−μ|≤2σ范围内，其面积约为95%√，如图所示。分布的峰值有值p(μ) = 1/ 2πσ。摘自:理查德O.杜达，彼得E.哈特，大卫G.斯托克，模式分类。版权所有c 2001约翰威利父子公司。

4 高斯模糊核

由于高斯的低通特性，由于高斯的傅里叶变换仍然是高斯的，因此在空间域或频域构造加权平均滤波器就成为一种自然的选择。我们可以基于Eq. 7创建一个高斯平均掩模，其中(x, y)取自掩模的相应坐标。假设掩模的中心坐标为(0,0)，则可以通过构建一个3 ×3的掩模

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\begin{bmatrix} \exp(-\frac{2}{2\sigma^2}) & \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}) & \exp(-\frac{2}{2\sigma^2}) \\ \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}) & 1 & \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}) \\ \exp(-\frac{2}{2\sigma^2}) & \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}) & \exp(-\frac{2}{2\sigma^2}) \end{bmatrix} \tag{10}$$

基于下面的坐标模式

$$\begin{bmatrix} (-1,-1) & (-1,0) & (-1,1) \\ (0,-1) & (0,0) & (0,1) \\ (1,-1) & (1,0) & (1,1) \end{bmatrix}$$

根据Eq. 10，一个典型的3 ×3高斯掩模

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

是由σ= 0.85生成的，这大约是高斯pdf下面覆盖的整个区域的70%。

现在，假设你想生成一个5 ×5高斯掩码，它会保留95%的内容，σ是多少?根据68-95-99.7规则，为了保持95%的内容低于高斯，x应该在[-2 σ，2σ]的范围内，对于5 ×5核，x在-2和2之间，因此，-2 σ= -2，得到σ= 1。有了这个σ值，您应该能够生成一个5 ×5高斯掩码。