

杂题选讲

XJTU

Information and Computational Science

mg

xjtumg.me

xjtumg1007@gmail.com

- 给定一个 $n*m$ 的矩形，初始时所有元素都为0
- 给定 q 个操作
- 将第 x 行所有元素异或1
- 将第 y 列所有元素异或1
- 输出一个矩形区域内1的个数
- $n, m, q \leq 1e6$

- 两个树状数组维护行列
- 因为始终是对整行整列操作，故矩形区域内1的位置仍然是“矩形”
- 利用树状数组求出矩形区域内被操作奇数次的有多少行多少列即可
- $O(q \log nm)$

- Codeforces 176E Archaeology
- 给定一棵 n 个点的树(带边权)，每个点都是黑色或者白色，最初所有点都是白色，要求支持两种操作
- 把一个点反色
- 用最少的边把所有的黑点都连通起来的树的边权和
- $n, Q \leq 1e5$

- 设树上有k个黑点，按dfs序排序，不妨设为 v_1, v_2, \dots, v_k
- 边权和= $\frac{1}{2} * (\text{path}(v_1, v_2) + \text{path}(v_2, v_3) + \dots + \text{path}(v_{k-1}, v_k) + \text{path}(v_k, v_1))$
- set维护即可
- $O(Q \log n)$

- POJ 2187 Beauty Contest

- 求平面最远点对

- $1 \leq n \leq 5 * 1e4$

- 凸包 + 旋转卡壳
- Graham扫描法
- 如何求平面最近点对？

- Codeforces 39E What Has Dirichlet Got to Do with That?
- 给定 a, b, n ，两人轮流博弈操作，每次可以选择 $a++$ 或者 $b++$ ，如果某人操作完之后 $a^b \geq n$ 那么此人输了
- 问先手必胜、必败还是必和
- $1 \leq a \leq 1e4, 1 \leq b \leq 30, n \leq 1e9$

- 若 a, b 均大于1, $a^b < n$ 的二元组不多
- DP, 用map记忆化即可
- 若 $a = 1$ 可能出现平局, 即当 $2^b \geq n$ 时
- 若 $b = 1$ 时, a 可能会很大导致TLE
- 注意到当 $a^2 \geq n$ 时, 可以直接通过 $n - a$ 的奇偶性判断必胜必败
- 仍用map记忆化即可

- Codeforces 17C Balance

- 给定一个长度为 n 的只含字母'a', 'b', 'c'的串，可以进行两种操作
- 选择相邻2个字符，把第二个字符替换成第一个
- 选择相邻2个字符，把第一个字符替换成第二个
- 问这个串进行任意多次变换后，能得到多少不同的串且满足三个字母出现次数两两差的绝对值不超过1

- $n \leq 150$

- 考虑所有可以被得到串的性质：
- 一段连续相同的字母必定对应原串中的某个字符
- 原串的某个字符必定对应可以得到的串中一段连续相同的字母
- 原串中两个字符的位置关系在新串中依然一致

- DP

- $f[l][a][b][c] \Rightarrow f[\text{next}[l][a]][a + 1][b][c]$

- $f[l][a][b][c] \Rightarrow f[\text{next}[l][b]][a][b + 1][c]$

- $f[l][a][b][c] \Rightarrow f[\text{next}[l][c]][a][b][c + 1]$

- $f[l][a][b][c] \Rightarrow \text{ans} \ (a + b + c == n \ \&\& \text{两两差的绝对值不大于1})$

- $O(N^4)$

- Codeforces 19E Fiary
- 给定 n 个点 m 条边的无向图，可以任意删除一条边，要求删边后的图是二分图
- 求可以删哪些边
- $n, m \leq 1e4$

- 暴力枚举 + 卡常数

- $O(m * (n + m))$

- 更好的方案？

- 一个图是二分图的充要条件是这个图中没有奇环 (如何证明?)
- 建立DFS树，非树边一定为返祖边
- 如果不存在奇环，则删任一条边均可以

- 如果有奇环，考虑一条返祖边构成的环
- 如果这个环是奇环则必须从这个环上删除一条边
- 如果有两个以上奇环，则必须删除树边(why?)
- 且树边必须满足：
 - 同时属于所有奇环
 - 不属于任何偶环

- DFS可以轻松统计每条树边属于多少奇环与偶环

- $O(n + m)$

- Codeforces 28D Do not fear, DravDe is kind
- 给定长度为 n 的四元组序列 (v_i, c_i, l_i, r_i)
- 要求选出一个子序列，满足
- 子序列中所有的四元组 $c_i + l_i + r_i$ 均相等
- 第一个元素的 $l_i = 0$, 最后一个元素的 $r_i = 0$
- 第 i 个元素的 l_i 等于前 $i - 1$ 个元素的 c_i 之和
- 最大化 v_i 的和
- $n \leq 1e5$

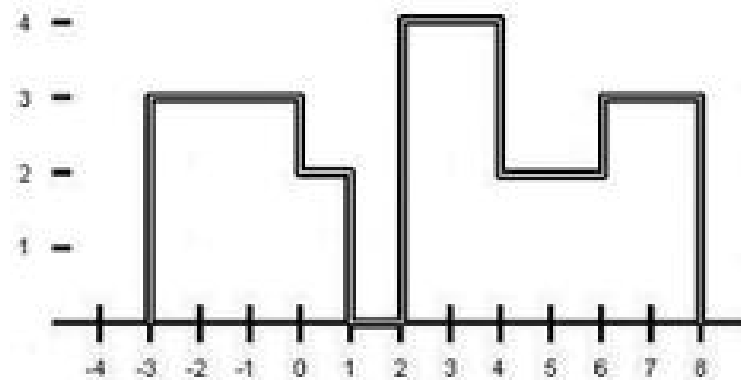
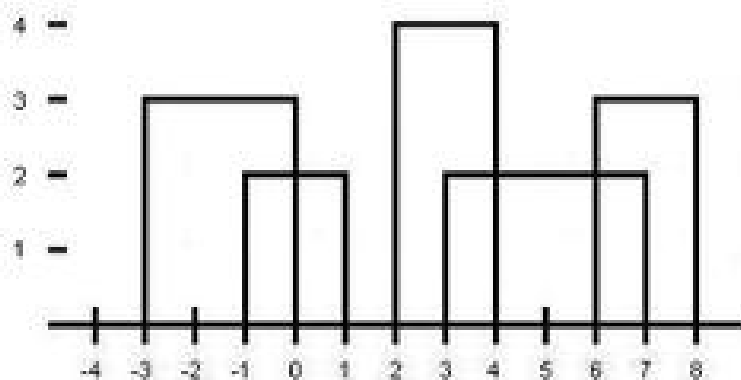
- 按照 $c_i + l_i + r_i$ 归类
- $dp[i] = \max\{dp[j] \mid j < i \ \& \ l_i = l_j + c_i\} + v_i$
- 利用map维护
- $O(N \log N)$

- Codeforces 40E Number Table
- 给定 $n*m$ 矩阵，每个元素只能是1或-1，已经有严格小于 $\max(n, m)$ 个元素被确定了
- 问最少有多少种方案填充剩下的元素，使得满足任意一行或一列里所有元素的乘积都是-1
- $n, m \leq 1000$

- 注意因为最多只填了 $\max(n, m) - 1$ 个格子
- 一定存在空行或空列
- 假设为空行，则不管其他格子如何填，最后填这一行总可以使得每列的乘积为1，且方案唯一
- 只需要关心对于某一行，有多少种方案使得这一行的乘积为-1
- 二维 \rightarrow 一维
- $O(n * m)$

- Codeforces 35E Parade
- 给定 n 个底边均在 x 轴上的矩形，输出矩形覆盖后的所有转折点
- $1 \leq n \leq 1e5, 1 \leq h_i \leq 1e9, -1e9 \leq l_i < r_i \leq 1e9$

- 离散化 + 扫描线 + 线段树
- 维护最大值即可，最大值发生改变即为转折点



- multiset可以解决问题

```
int n; scanf("%d", &n);
for(int i = 0; i < n; i++) {
    int y, l, r; scanf("%d%d%d", &y, &l, &r);
    event.push_back(make_pair(l, y));
    event.push_back(make_pair(r, -y));
}

sort(event.begin(), event.end());

S.insert(0);
int hmax = 0;
for(int i = 0, j; i < n * 2; i = j) {
    for(j = i; j < n * 2 && event[i].first == event[j].first; j++) {
        if(event[j].second > 0) S.insert(event[j].second);
        else S.erase(S.lower_bound(-event[j].second));
    }
    if((*S.rbegin()) != hmax) {
        ans.push_back(make_pair(event[i].first, hmax));
        ans.push_back(make_pair(event[i].first, hmax = (*S.rbegin())));
    }
}
```


- 对于给定的 x, p , 求一个可行的正整数 n 满足同余方程

$$n^{2^n} \equiv x \pmod{p}$$

- 30%: $p \leq 1000$
- 100%: $p \leq 1e9 + 7$
- p 为质数