概率论1-4章

知识梳理及练习题

2023 年 6 月 4 日

钱院学辅

西安交通大学

Xi'an Jiaotong University

作品信息

- ➤ **标题**：概率论1-4章知识梳理及练习题
- ➤ **作者**：钱院学辅概率论编写小组
- ➤ **出品时间**：2023 年 6 月 4 日
- ➤ **总页数**：28

概率论复习建议

By 智电钱 001 王艺斐

概率论复习，总体来讲，需要首先做到清楚理解概念，然后通过做题提高熟练度（例题，习题，辅导书，往年题等等……概率论的试题资源相对挺丰富的）。下面，我将分章节给出一些具体的复习建议。

第一章是随机事件与概率的基本知识。

前面的古典概型和几何概型虽然问题灵活多变，但一般不是考察的重点，建议在高中的基础上，结合见到的题目，掌握一些基本问题模型即可。

后面概率的公理化定义部分，需要习惯用字母代表事件，在此基础上掌握概率的运算，特别是各条概率的变形公式。这一部分，要搞清楚并利用好事件互斥和相互独立（与两两独立区分）的概念，以及掌握全概率公式和贝叶斯公式（最好能根据基本的原理推导出来）。

第二章介绍随机变量及分布函数，是后面章节的基础，非常重要。

首先，要理解随机变量分布函数的概念和其性质，知道常见的概率分布，还要掌握分布律（离散型）或概率密度（连续型）和分布函数的关系。离散随机变量一般考察的还是基本概率计算问题，但可能和常见分布相结合。而连续型随机变量则常考概率密度和分布函数之间转化（因此有必要复习简单的微积分知识）以及正态分布的标准化及其性质。

接下来是随机变量的函数及其概率分布部分。这里，建议首先正确理解随机变量的函数概率分布的意义（其实就是理解概率分布的意义），如对于连续型随机变量 X 及 Y=g(X)，概率分布函数$F_y(y)=P(g(X)\le y)$。然后再理解记忆概率密度的反函数公式。实际上后者只在特定情况可以用，理解前者后则可以应对各种情况。这一部分的题目比较灵活多变，建议好好琢磨课本的习题，基本每一道都代表了不同的模型。

第三章把第二章知识推广到随机向量。

首先，要知道分布函数与边缘分布函数的概念，并掌握多维下分布律或概率密度的概念。掌握概念后，套用到题目中就能比较容易地完成各种计算。（当然，也需要复习基础的二重积分知识。）

然后，在多维情况下，出现了条件概率分布与随机变量相互独立性的问题。同样，清楚理解概念之后就是简单的计算问题了。

接下来，关于随机向量的函数的问题比较复杂。离散的一般直接计算即可，不过有时累加会用到无穷级数，需要稍稍注意。连续部分建议做“三手准备”，一是类似于一维部分，利用概率分布的基本定义计算。二是掌握雅可比行列式的变换法。三是记好 X+Y 的概率分布计算等已有结论。这部分题目花样繁多，难度较大，建议仔细品味每一道相应的课后习题。（书中还有一些小的结论，如相互独立的正态随机变量的线性组合的结论，也要注意。）

第四章讲述了期望和方差。

这部分相对简单，记住这些数字特征的计算式和性质，以及常见分布的结果即可。关于方差的计算，还要注意它和平方的期望以及期望的平方的关系。（需要反推平方的期望时，也要能反应过来。）此外，马尔可夫不等式也有可能考察，不要漏掉。

希望以上的总结对同学们备考期中考试以及后半学期的学习能有所帮助。祝各位在这门课上取得好的成绩！

第一章. 随机事件与概率

By 智电钱 2101 曲圣
2023 年 3 月

1. 随机事件

本节类似于高中的集合，所不同的是，需要结合韦恩图理解事件的互斥和对立，以及差。

然而在大题中，不可以直接画韦恩图得出一些复杂的关系式，必须熟悉事件的字母表示法中的一些公式，重点是：

对偶律：$\overline{A \cup B} = \bar{A}\,\bar{B} \qquad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

差事件：$\mathrm{A\bar{B} = A - B = A - AB}$

而对于复杂的关系式化简，例如课本例 1.2 以及习题 1 的 5，个人认为仅作了解即可。

2. 概率的定义

古典概型和几何概型高中已学过，题里如果有也不会太难。概率的三种定义方法书上写的太抽象，不必细究。书上所给出的性质中，容斥原理最为重要：

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B) = \mathrm{P(A) + P(B) - P(AB)}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

但概率的单调性往往被忽视：

若 $\mathrm{A \subset B}$，则 $\mathrm{P(B) \geq P(A)}$，

此外，还有一个重要结论：

若 $\mathrm{A \subset B}$，则 $\mathrm{P(AB) = P(A)}$ ，$\mathrm{P(B - A) = P(B) - P(A)}$

3. 条件概率

先谈谈贝叶斯公式。在过去的学习生活中，我们大部分遇到的问题都是正向概率：从一些已知信息出发，去推测未知信息，例如已知一个箱子里面正品次品的个数，去算取到正品的概率。

然而在 18 世纪，贝叶斯在一篇文章中，写出了他对逆概率的理解：我们不知道箱子里的情况，然而可以通过不断抽样观察，去推断正品次品的比例，每抽样一次，你就得修改你推断的比例。

从此例中得到结论：信息的价值在于能消除接收者关于某种事件发生的不确定性，概率具有主观性，事件概率依赖于已知事实。通俗的说，额外得到的信息可以改变概率。

贝叶斯在写文章的时候也许并没有深刻理解内涵，但后来的实践表明了贝叶斯公式的重要性。在席卷概率论学界后，贝叶斯公式在如今蓬勃发展的机器学习中也起到重要作用。

本节的重点在于全概率公式和贝叶斯公式，划分互斥完备事件组是首要前提，建议结合例子，理解如何设事件。之后的步骤就是套路化了。

除此之外，还需要条件概率的公式的变形用：

我们早就知道，

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

但容易忽视的是，

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

此式即为条件概率的 2 阶乘法公式。

推广到 3 阶，我们有：

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3|A_1A_2)P(A_1A_2) = P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

此式要会推导，不能死记硬背。不是因为考试会考推导过程，而是因为理解了推导的思路，就能更好的理解条件概率。

4. 事件的相互独立性

不要只记公式 $P(AB) = P(A)P(B)$ ！！！

老师上课大概率强调了事件独立互斥的公式。

独立：$P(AB) = P(A)P(B)$

互斥：$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

那么大家有没有思考过，这两个式子背后的数学内涵是什么？此外，事件的独立和互斥可能同时发生吗？

AB 相互独立，即 B 对 A 的发生无影响，换成数学语言，$P(A|B) = P(A)$

AB 互斥（在考题中也可能表述为不相容），即 AB 不能同时发生，$P(AB) = 0$

除非 AB 中有一个概率为 0，否则事件的独立和互斥不能同时发生。

独立性的概念在后几章中也会用到，并且公式的形式完全一样：

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
$$P(X \le x_i, Y \le y_j) = P(X \le x_i)P(Y \le y_j)$$
$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$
$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$
$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

学数学的人往往会把相近的事物归为一类,进行理解和记忆，从而用统一的思想看问题。这种统一性也许就是数学的形式之美吧。

第二章.随机变量及其概念分布

By 智能钱 2101 舒家楠
2023 年 3 月

本节的内容与后面的相比要简单一些，但是确是学习后面几章知识的基础，十分的重要，复习时建议深入理解其意义，对后面章节的学习会有帮助。

总体而言，本章内容分为两大部分。首先随机变量与分布函数。要理解随机变量和随机变量分布函数的概念及性质。记住常见的概率分布（或分布律），这在后面的章节也一直会用上（离散型：单点分布，0-1 分布/二项分布 B，泊松分布 P，几何分布 Ge；连续型：正态分布 N（这个还要掌握标准化方法），均匀分布 U，指数分布 Exp）。还要掌握分布律（离散型）或概率密度（连续型）和分布函数的关系。

然后是随机变量的函数及其概率分布。这里，重要的是正确理解随机变量的函数概率分布的意义（其实就是理解概率分布的意义），如对于连续型随机变量 X 及 Y=g(X)，概率分布函数 f_y (y)=P{g(X)≤y}。课本上的反函数公式就是由此推出，解题时这种类型的题目通常会有对应的两种解法，如果能够了解原理解题便能更加得心应手。

就期中考试而言，本章的要求并不高，结合往年 5 年期中试卷（16-20），期中考试时单独考察本章内容的大致为选填 1~2 题，大题 1~2 题，题型比较固定，针对相关题目进行练习便能较好掌握，下根据知识点进行整理相应考点。

1. 随机变量及分布函数

常考大题，题型通常为：

（1）求给出随机变量的分布函数（或密度）中的系数，方法是利用分布函数（或密度）的相关性质

分布函数的常用性质：

$$
\begin{aligned}
&0 \le F(x) \le 1;\\
&F(x_1) \le F(x_2),(x_1 \le x_2);\\
&\lim_{x\to-\infty} F(x)=0;\ \lim_{x\to+\infty} F(x)=1;\\
&F(x+0)=F(x),\text{即}F(x)\text{右连续。}
\end{aligned}
$$

概率密度的常用性质：

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x) \ge 0;\\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)=1;
\end{aligned}
$$

（2）利用分布函数或概率密度求某一区间概率：一般为分布函数相减或该区间概率密度积分。

（3）用分布函数求概率密度，用概率密度求分布函数：方法即为分布求导或概率密度积分，注意相应的区间，有时需写成分段函数。

2. 常见的随机变量及其分布

在小题中常考察各种常见的随机变量分布，因此要牢记各种常见的随机变量及其分布。除此之外题目也常常喜欢考察相关的一些性质，例如：
离散型随机变量的分布律性质

$$(1)\,p_k \ge 0\,(k=1,2,\ldots);(2)\sum_{k=1} p_k = 1$$

（常考的是后者，可验证是否为某随机变量的分布律）
以及上面提到的概率密度的常用性质：

$$(1)\,\varphi(x)\ge 0;(2)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)=1;$$

标准正态分布的分布函数的性质（有考察过利用性质解题）：

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x),\Phi(0)=0.5$$

还有指数分布和几何分布的无记忆性等，这些性质值得留意，可能作为小题的考察方向。

3. 随机变量函数及其概率分布

常考大题，并且常常考连续型随机变量的函数的概率分布，同常有两种常用解法。

第一种是套用 Y=g（X）的概率密度公式直接求概率密度，需要注意的点：反函数有时不止一个，当原函数不是单调函数时，反函数不唯一，以下面一道例题为例

已知随机变量$\Theta \sim U$（0，2π）

即$\varphi_\theta(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & \theta\in(0,2\pi)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,求随机变量函数$X=\cos\Theta$的概率密度

解：$x=\cos\theta$在（0，2π）上不单调，其反函数分别为

$\theta_1=\arccos x$，$\theta_1\in(0,\pi)$,

$\theta_2=2\pi-\arccos x$，$\theta_2\in(\pi,2\pi)$

$\theta_1'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$x\in(-1,1)$，$\theta_1\in(0,\pi)$,

$\theta_2'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$x\in(-1,1)$，$\theta_2\in(\pi,2\pi)$

$\therefore x\in(-1,1)$时$\varphi_x(x)=\varphi_\theta(\arccos x)\left|-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|+\varphi_\theta(-\arccos x)\left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|$

带入解得$\varphi_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x\in(-1,1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

还有一种解法是从随机变量函数的意义出发，先求出分布函数，后求导得到概率密度。以一道期中考原题为例：

设随机变量 X~U（-2,1），随机变量 Y=X^2，求 Y 的概率密度。

$$F(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}dx=\begin{cases}0,y<0\\ \frac{2}{3}\sqrt{y},0\le y<1\\ \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{y}\right),1\le y<4\\ 1,y\ge 4\end{cases}$$

所以求得概率密度为$f(x)=\begin{cases}0 \quad y\le 0\ 或 y\ge 4\\ \frac{1}{3\sqrt{y}}\ \ 0<y<1\\ \frac{1}{6\sqrt{y}}\ \ 1\le y<4\end{cases}$

这类题型是本章期中考试的考察重点，考题比较灵活，理解掌握这两种解法可以对解题带来很大帮助。

第三章. 随机向量及其概率分布

By 自动化钱 2101 王子奇
2023 年 3 月

首先，要知道分布函数与边缘分布函数的概念，并掌握多维下分布律或概率密度的概念。掌握概念后，套用到题目中就能比较容易地完成各种计算。（当然，也需要复习基础的二重积分知识。）

然后，在多维情况下，出现了条件概率分布与随机变量相互独立性的问题。同样，清楚理解概念之后就是简单的计算问题了。

接下来，关于随机向量的函数的问题比较复杂。离散的一般直接计算即可，不过有时累加会用到无穷级数，需要稍稍注意。连续部分建议做“三手准备”，一是类似于一维部分，利用概率分布的基本定义计算。二是掌握雅可比行列式的变换法。三是记好 $X+Y$、$\dfrac{X}{Y}$、$\max\{X,Y\}$、$\min\{X,Y\}$的概率分布计算等已有结论。这部分题目花样繁多，难度较大，建议仔细品味每一道相应的课后习题。（书中还有一些小的结论，如泊松分布、正态分布的可加性等。）

第四章. 随机变量的数字特征

By 自动化钱 2101 袁晨翔
2023 年 3 月

第四章知识点：

随机变量的数字特征：

①数学期望 $\begin{cases}\text{离散型随机变量} \cdots (1) \\ \text{连续型随机变量} \cdots (2)\end{cases}$

(1) $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$

一些常见的分布的数学期望及其推导：

1. $\boxed{(0,1)\text{分布}.\ X\sim B(1,p)\quad E(X)=p\cdot 1=p}$

2. $\boxed{\text{二项分布}\ X\sim B(n,p)\quad E(X)=np}$

$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \Rightarrow E(X)=\sum_{i=1}^{n} P\{X=k\}\cdot k$

$=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=np$

3. $\boxed{\text{泊松分布}\ X\sim P(\lambda).\quad E(X)=\lambda}$

$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2\cdots n.$

则 $\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$

4. 几何分布 $X\sim Ge(p)$ $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$

则 $E(X)=\frac{1}{p}$ $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$

等比等差数列

$=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}$

5. 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $E(X)=\mu$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d$

$=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{x-\mu}{\sigma^2}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}-\frac{\mu}{\sigma^2}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

令 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$, $dt=\frac{1}{\sigma}dx$ 则原式 $=\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-\frac{t}{\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}-\frac{\mu}{\sigma}e$ σdt

$=\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}-te^{-\frac{t^2}{2}}-\frac{\mu}{\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$=\frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{\mu}{\sigma}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

令 $\frac{t^2}{2}=m$ $t=\sqrt{2m}$ $dt=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{m}}dm=\frac{\sqrt{2}}{2}m^{-\frac{1}{2}}$

原式 $=\frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-m}\cdot m^{-\frac{1}{2}}dm=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2})=\mu$

均匀分布 $X\sim U(a,b)$. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$E(X)=\frac{a+b}{2}$. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx$

$=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$

指数分布 $X\sim Exp(\lambda)$ $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x<0\end{cases}$

$E(X)=\frac{1}{\lambda}$ $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx$

令 $t=\lambda x$ $dx=\frac{1}{\lambda}dt$ 则原式 $=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=\frac{1}{\lambda}\Gamma(2)=\frac{1}{\lambda}\Gamma(1)$

$=\frac{1}{\lambda}$

②方差. 方差的计算公式 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$

$=E\{X^2+E(X)^2-2XE(X)\}=E(X^2)+E(X)^2-2E(X)E(X)$

$=E(X^2)-E(X)^2$

标准差 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

各种常见分布的方差：

1. (0,1)分布. $X\sim B(1,p)$. $D(X)=p(1-p)$
2. 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$ $D(X)=\lambda$
3. 二项分布 $X\sim B(n,p)$ $D(X)=np(1-p)$
4. 几何分布. $X\sim Ge(p)$ $D(X)=\frac{1-p}{p^2}$
5. 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $D(X)=\sigma^2$
6. 均匀分布 $X\sim U(a,b)$ $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
7. 指数分布 $X\sim E(\lambda)$ $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

③协方差与相关系数

定义：X与Y的协方差, 记作 $Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}\cdots$

根据上式 $Cov(X,X)=E\{[X-E(X)]^2\}=D$

简化公式可知 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E$

若 $\begin{cases}D(X)>0 \\ D(Y)>0\end{cases}$ 则称 $\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho(X,Y)$ 为X,Y的

相关系数.

性质：

①数学期望

1. $E(C)=C$
2. $E(CX)=CE(X)$
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
4. 若X与Y相互独立 则
   $E(XY)=E(X)E(Y)$

②方差

1. $D(a)=0$
2. $D(aX)=a^2D(X)$
3. 若X与Y相互独立 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$
4. $D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=E(X)\}=1$
   翻译成人话：直线且水平直线没波动.

③协方差

1. $Cov(a,X)=0$
2. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ (可交换)
3. $Cov(aX,bY)=ab\,Cov(X,Y)$. (线性)
4. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$ (分配率)
5. 若X与Y相互独立 $Cov(X,Y)=0$
6. $E(X^2)$ $E(Y^2)$ 均存在, 则 $[E(XY)]^2\le E(X^2)E(Y^2)$
   特别的, 有 $[Cov(X,Y)]^2\le D(X)D(Y)$

④相关系数

(1) 若X, Y相互独立. $\rho(X,Y)=0$. 由5可知
(2) $|\rho(X,Y)|\le 1$
(3) $|\rho(X,Y)|=1$ 的充要条件是. 存在常数 a, b 使
    $P\{Y=a+bX\}=1$
(4) 若 $\rho(X,Y)=0$ 则称X与Y不相关、

独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\rho(X,Y)=0$ $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 不相关

数学期望：

第一章.随机事件与概率

1. 已知 $P(\bar{A} \cup B) = \frac{11}{12}$ ① $P(\bar{A}\,\bar{B}) + P(\overline{AB}) = 7(P(A) + P(B))$ ② $P((A \cup \bar{B})|B) = 1$ ③ 成立，试求 $P(A \cup B)$的值

2. 箱子 1 中有 12 件正品，2 件次品，箱子 2 中有 9 件正品，1 件次品，现在从箱子 1 中任选 2 件放入箱子 2 中，此时从箱子 2 中任取一件，求取到次品的概率

3. 已知在 5 次独立重复实验中，A 事件至少发生一次的概率为 0.92224 ，求三次独立重复实验中事件 A 恰好发生 2 次的概率

4. 箱子里有 15 件正品和 5 件次品，现不放回的任意抽取 3 次，每次取 1 个，求以下三个概率：（1）第 1，2 次取到正品的条件下，第 3 次取到次品（2）第 3 次才取到次品（3）第 3 次取到次品

5. 箱子里有 4 件次品，6 件正品，从中任取两件，已知其中有一件是次品，求另外一件也是次品的概率

6. 若 $0 < P(B) < 1$,求证: AB 相互独立等价于 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$

7. 甲乙两人都在 8-12 点之间到车站，车站在 9，10，11，12 点各有一班车。在 7 点钟，甲乙独立的想好到车站的时间，并打电话告诉对方。（1）若甲乙都是见车就乘，求二人同坐一班车的概率（2）二人希望一起坐车走，因此甲乙都是最多等一班车，在这种情况下，求二人同坐一班车的概率

8. 事件 AB 相互独立，$P(\bar{A}\,\bar{B}) = \frac{1}{9}$,$P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$,求$P(B|A)$

第一章.答案

1. 已知 $P(\bar{A}\cup B)=\frac{11}{12}$ ① $P(\bar{A}\,\bar{B})+P(\overline{AB})=7(P(A)+P(B))$ ② $P((A\cup\bar{B})|B)=1$ ③ 成立，试求 $P(A\cup B)$的值

思路：选取 P(A)，P(B)，P(AB)为未知量，联立包含三者的三个方程，并求解，此下给出三个式子的具体处理方案：
① $P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(B\bar{A})=1-P(A)+P(B)-(P(B)-P(AB))=1-P(A)+P(AB)$
② $7(P(A)+P(B))=P(\bar{A}\,\bar{B})+P(\overline{AB})=1-P(A\cup B)+1-P(AB)=2-(P(A)+P(B)-P(AB))-P(AB)=2-P(A)-P(B)$
③$P((A\cup\bar{B})|B)=P(A|B)+P(\bar{B}|B)-P(A\bar{B}|B)=P(A|B)+0-0$

解得 $P(A)=\frac{1}{6}$ $P(B)=\frac{1}{12}$ $P(AB)=\frac{1}{12}$

故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$$

2. 箱子 1 中有 12 件正品，2 件次品，箱子 2 中有 9 件正品，1 件次品，现在从箱子 1 中任选 2 件放入箱子 2 中，此时从箱子 2 中任取一件，求取到次品的概率

思路：设事件，建立互斥完备事件组，之后利用条件概率易解
从箱子 1 中任选 2 件放入箱子 2 中，设B_1：两件都是次品，B_2：1 件是次品，B_3：没有次品
此时从箱子 2 中任取一件，设 A：取到次品

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=$$
$$=\frac{C_2^2}{C_{14}^2}\frac{C_3^1}{C_{12}^1}+\frac{C_2^1C_{12}^1}{C_{14}^2}\frac{C_2^1}{C_{12}^1}+\frac{C_{12}^2}{C_{14}^2}\frac{C_1^1}{C_{12}^1}=\frac{3}{28}$$

3. 已知在 5 次独立重复实验中，A 事件至少发生一次的概率为 0.92224 ，求三次独立重复实验中事件 A 恰好发生 2 次的概率

设每次实验事件 A 发生的概率为P_1，事件 A 一次都不发生的概率为：$(1-P_1)^5=1-0.9224=0.0776=0.6^5$,则$P_1=0.4$ ，A 发生 2 次的概率为$C_3^2 0.4^2 0.6^1$ = 0.288

4. 箱子里有 15 件正品和 5 件次品，现不放回的任意抽取 3 次，每次取 1 个，求以下三个概率：（1）第 1，2 次取到正品的条件下，第 3 次取到次品（2）第 3 次才取到次品（3）第 3 次取到次品

设事件A_i：第 i 次取得次品

（1）求条件概率$P(A|B)$时，除了利用定义公式$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$之外，还可以直接考虑 B 事件发生后整个系统的状态，之后直接计算。例如在本题中，取完第 1，2 次后，还剩 18 件，其中有 5 件次品，因此直接可得，$P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{5}{18}$

（2）利用条件概率的三阶乘法公式（见课本），有：

$P(A_3\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{5}{18}\,\frac{15}{20}\,\frac{14}{19} = \frac{35}{228}$

（3）前两次的所有结果$\{A_1, A_2\}\{\overline{A_1}, A_2\}\{A_1, \overline{A_2}\}\{\overline{A_1}, \overline{A_2}\}$构成了一个互斥完备事件组，

$$P(A_3) = P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) + P(A_3|A_1A_2)P(A_1A_2) + P(A_3|\overline{A_1}A_2)P(\overline{A_1}A_2) + P(A_3|A_1\overline{A_2})P(A_3|A_1\overline{A_2}) = \frac{57}{228} = \frac{1}{4}$$

值得注意的是，在求 $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$和 $P(A_1A_2)$时，因为两次结果相同，所以可以直接认为分别取两次等价于一次取 2 个，因此 $P(A_1A_2) = \frac{C_5^2}{C_{20}^2}$ $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}$ 但是在 $P(\overline{A_1}A_2)$时，两次结果不同，因此不可以认为是$\frac{C_{15}^1 C_5^1}{C_{20}^2}$，必须用 $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})$加以计算

5. 箱子里有 4 件次品，6 件正品，从中任取两件，已知其中有一件是次品，求另外一件也是次品的概率

设事件 A：至少有一件是次品，B：两件都是次品

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15}$$

显然有 $B \subset A$，因此根据概率的单调性可得：

$$P(AB) = P(B)$$

因此

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{5}$$

6. 若 $0 < P(B) < 1$,求证: AB 相互独立等价于 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$

若 AB 相互独立，则 A，$\overline{B}$相互独立，则

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)P(\overline{B})}{P(\overline{B})} = P(A)$$

因此

$$P(A|B) = P(A|\overline{B})$$

反之，若 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$，则

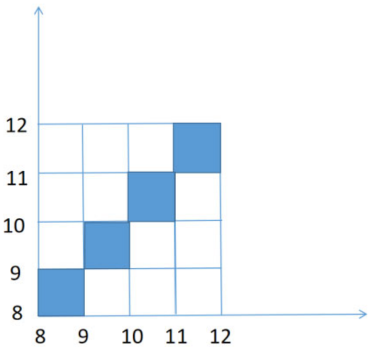
$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

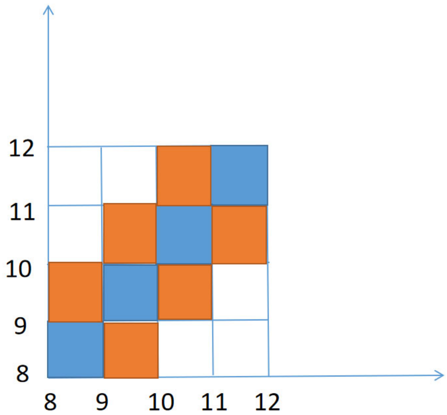
十字相乘得

$$P(AB) - P(AB)P(B) = P(A)P(B) - P(AB)P(B)$$
$$P(AB) = P(A)P(B)$$

故 AB 独立

7. 甲乙两人都在 8-12 点之间到车站，车站在 9，10，11，12 点各有一班车。在 7 点钟，甲乙独立的想好到车站的时间，并打电话告诉对方。（1）若甲乙都是见车就乘，求二人同坐一班车的概率（2）二人希望一起坐车走，因此甲乙都是最多等一班车，在这种情况下，求二人同坐一班车的概率





（1）设甲到达的时刻为 x，乙到达的时刻为 y，当(x,y)落入蓝色方块内满足条件，$\mathrm{P}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

（2）除了蓝色方块，橘色方块也满足条件。$\mathrm{P}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$

8. 事件 AB 相互独立，$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{B}})=\frac{1}{9}$,$\mathrm{P}(\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}})=\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B})$,求$P(B|A)$

$$\frac{1}{9}=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{AB}})=1-\mathrm{P}(\mathrm{AB})$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}})=\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B})\Longrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{AB})=\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{AB})\Longrightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{AB})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

解得 $\mathrm{P}(\mathrm{AB})=\frac{8}{9}$ $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 故 $P(B|A)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

第二章.随机变量及其概率分布

1. 设随机变量$\xi \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$,则随$\sigma$的增加，概率$P\{|\xi-\mu|<2\sigma\}$( )。

A.单调增加 B.单调减小 C.保持不变 D.增减不定

2.设随机变量X~f(x),满足f(x)=f(-x),F(x)是x的分布函数，则对任意实数有( )。

A.$F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$

B.$F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

C.F(-a)=F(a)

D.F(-a)=2F(a)

3.设随机变量ξ的分布律$P\left(\xi=k\right)=\frac{a2^k}{k!},\left(k=0,1,2,3,...\right)$，试求a的值。

4.设$F_1\left(x\right)$和$F_2\left(x\right)$分别是随机变量ξ_1与ξ_2的分布函数，为了使$F\left(x\right)=aF_1\left(x\right)+bF_2\left(x\right)$为某一随机变量的分布函数，在下列组值中应该取( )。

$A.a=\frac{3}{5},b=\frac{2}{5}$

$B.a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$

$C.a=\frac{3}{5},b=\frac{3}{2}$

$D.a=-\frac{3}{2},b=\frac{3}{2}$

5.设$x \sim N(3,4), P\{x>C\}=P\{x\le C\}$,则求C的值。

6.设X为某人的寿命且X~Exp(λ),λ为常数，则已知其寿命超过90岁的条件下，问他（至少）能活到100岁的概率为?

7.在平面直角坐标系xOy内，在X>0的区域内的单位圆上随机取一点，设该点横坐标为X，求X的分布密度$\varphi_x\left(x\right)$。

8.设随机变量X的概率密度为

$$f\left(x\right)=\begin{cases}kx^b, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases},\left(k,b>0\right)，且P\{X>0.5\}=0.75,求k, b的值。$$

第二章.答案

1. 设随机变量$\xi \sim N\left(\mu,\sigma^{2}\right)$,则随$\sigma$的增加，概率$P\{|\xi-\mu|<2\sigma\}$( )。

A.单调增加 B.单调减小 C.保持不变 D.增减不定

答案 C

$P\{|\xi-\mu|<2\sigma\}=P\{\frac{|\xi-\mu|}{\sigma}<2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$

是常数，与σ无关

2.设随机变量X~f(x),满足f(x)=f(-x),F(x)是x的分布函数，则对任意实数有( )。

A.$F(-a)=1-\int_{0}^{a} f(x)dx$

B.$F(-a)=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a} f(x)dx$

C.F(-a)=F(a)

D.F(-a)=2F(a)

答案 B

$\because f(x)=f(-x)$

$\therefore \int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} f(x)dx=0.5$

$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{-a} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{-a} f(-x)dx$

$=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{a} f(-x)d(-x)$

$=0.5-\int_{0}^{a} f(x)dx$

3.设随机变量ξ的分布律$P(\xi=k)=\frac{a2^{k}}{k!},(k=0,1,2,3,\ldots)$，试求a的值。

答案

$\because \sum_{k=0}^{+\infty} P(\xi=k)=a\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{k}}{k!}=ae^{2}=1 \therefore a=e^{-2}$

4.设$F_1(x)$和$F_2(x)$分别是随机变量ξ_1与ξ_2的分布函数，为了使$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$为某一随机变量的分布函数，在下列组值中应该取( )。

$A.a=\frac{3}{5},b=\frac{2}{5}$

$B.a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$

$C.a=\frac{3}{5},b=\frac{3}{2}$

$D.a=-\frac{3}{2},b=\frac{3}{2}$

答案 A

由概率分布函数性质，$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$,可得a+b=1，故选A

5.设$x\sim N(3,4), P\{x>C\}=P\{x\le C\}$,则求C的值。

$P\{x>C\}=P\{x\le C\}=0.5$，由Φ（0）$=0.5$得$\frac{C-3}{2}=0$,即$C=3$

6.设X为某人的寿命且X~Exp(λ),λ为常数，则已知其寿命超过90岁的条件下，问他（至少）能活到100岁的概率为？

由指数分布的无记忆性 P{X>100|X>90}=$e^{-10\lambda}$

7.在平面直角坐标系xOy内，在x>0的区域内的单位圆上随机取一点，设该点横坐标为X，求X的分布密度$\varphi_x(x)$。

答案：设随机变量Θ为圆上点到原点的连线与x轴夹角，在x>0的平面上，可得$\Theta \sim U$（$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$）

即$\varphi_\theta(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ 0, & 其他\end{cases}$,问题转换为了求随机变量函数$X=\cos\Theta$的概率密度

$x=\cos\theta$在（$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$）上不单调，其反函数分别为

$\theta_1=\arccos x$，$\theta_1>0$,

$\theta_2=-\arccos x$，$\theta_2<0$,

$\theta_1'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$x\in$（0，1），$\theta_1\in$（$0,\frac{\pi}{2}$）

$\theta_2'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$x\in$（0，1），$\theta_2\in$（$-\frac{\pi}{2},0$）

$\therefore x\in$（0，1）时$\varphi_x(x)=\varphi_\theta(\arccos x)\left|-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|+\varphi_\theta(-\arccos x)\left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|$

带入解得$\varphi_x(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x\in(0，1)\\ 0, & 其他\end{cases}$

8.设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}kx^b, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases},(k,b>0)，且P\{X>0.5\}=0.75,求k, b的值。$$

答案：k=2,b=1

$\because P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^{1}kx^b dx=0.75,而又有\int_0^1 kx^b dx=1$

$\therefore k=b+1;(\frac{1}{2})^{b+1}=0.25$

解得b=1, k=2

第三章.随机向量及其概率分布

一、小题

1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X \sim B(3,\frac{1}{2})$，$Y \sim Ge(\frac{1}{2})$，则 $P\{XY=4\}=$______

2. 随机变量 X 与 Y 满足 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{5}e^{2x-3y}, & \ln 2 \le x \le \ln 3, y \ge 0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求 $f_{X|Y}(x,y)=$______

3. 随机变量 X 与 Y 满足 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-2y}), & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 $P\{X>2,Y>1\}=$______

4. 已知 $X \sim U(-2,3)$，对 Y 有 $P\{Y=0\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y=1\}=\frac{1}{3}$，$P\{Y=2\}=\frac{1}{6}$，X 与 Y 相互独立，则 $Z=X+Y$ 的概率密度是 $f_Z(z)=$______

二、大题

1. 设 (X,Y) 的分布律为

X	Y		
	-1	0	1
-1	0	0.1	0.2
0	0.2	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0

（1）求 $Z=X+Y$ 的分布律。

（2）设 $Z=z$ 时，$W \sim P(z+2)$,则 W 的分布律是？

2. 设$X\sim U(0,2)$，$Y\sim Exp(2)$，X与Y互相独立，求$Z=X-Y$的概率密度。

3. 联合概率密度$f(x,y)=\begin{cases} axy^2, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求：

（1）求常数a；

（2）分别求出X,Y的边缘概率密度；

（3）X与Y是否互相独立？为什么？

（4）求$P\left\{\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}$。

4. 已知$f(x,y)=\begin{cases} 2x^2+y^2, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

（1）求$P\left\{X>\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2}\right\}$；

（2）求$Z=\frac{X}{Y}$的概率密度；

（3）求$P\{Y\le X\le 2Y\}$。

第三章. 答案

一、

1. $\dfrac{15}{128}$

$$P\{XY=4\}=P\{X=1\}P\{Y=4\}+P\{X=2\}P\{Y=2\}$$

$$=C_3^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}+C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{15}{128}$$

2. $\begin{cases}\dfrac{5}{2}e^{-2x}, & \ln 2\le x\le \ln 3, y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{6}{5}e^{2x-3y}dx, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}=\begin{cases}3e^{-3y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{5}{2}e^{-2x}, & \ln 2\le x\le \ln 3, y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

3. e^{-4}

$$P\{X>2,Y>1\}=1-F(2,+\infty)-F(+\infty,1)+F(2,1)$$

$$=1-(1-e^{-2})-(1-e^{-2})+(1-e^{-2})^2=e^{-4}$$

4. $\begin{cases}0, & z<-2\\ \dfrac{1}{10}, & -2\le z<-1\\ \dfrac{1}{6}, & -1\le z<0\\ \dfrac{1}{5}, & 0\le z\le 3\\ \dfrac{1}{10}, & 3<z\le 4\\ \dfrac{1}{30}, & 4<z\le 5\\ 0, & z>5\end{cases}$

对于离散型和连续型结合的问题，要进行分类讨论。

$-2 \le z < -1$时，$f_Z(z) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$；

$-1 \le z < 0$时，$f_Z(z) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$；

$0 \le z \le 3$时，$f_Z(z) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$；

$3 < z \le 4$时，$f_Z(z) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$；

$4 < z \le 5$时，$f_Z(z) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$；

其他情况为 0.

二、

1.（1）Z 可能取值为-1, 0, 1.

$$P\{Z=-1\} = P\{X=-1, Y=0\} + P\{X=0, Y=-1\}$$

$$= 0.1 + 0.2 = 0.3$$

$$P\{Z=0\} = P\{X=-1, Y=1\} + P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=-1\}$$

$$= 0.2 + 0.2 + 0.1 = 0.5$$

$$P\{Z=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\}$$

$$= 0.1 + 0.1 = 0.2$$

则 Z 的分布律为

Z	-1	0	1
P	0.3	0.5	0.2

（2）当$k = 0,1,2,\ldots$时，

$$P\{W=k\} = 0.3\frac{1^k e^{-1}}{k!} + 0.5\frac{2^k e^{-2}}{k!} + 0.2\frac{3^k e^{-3}}{k!}$$

$$=\frac{3e^{-1}+5\times 2^k e^{-2}+2\times 3^k e^{-3}}{10\times k!}$$

2. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 0\le x\le 2\\ 0, \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

则 $f_{-Y}(y)=\begin{cases}2e^{2y}, & y\le 0\\ 0, & y>0\end{cases}$

由卷积公式，

$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{-Y}(y)f_X(z-y)dy=\int_{-\infty}^{0}2e^{2y}f_X(z-y)dy$，令 $x=z-y$，得：

$$f_z(z)=\int_z^{+\infty}2e^{2z-2x}f_X(x)dx=\begin{cases}\int_0^2 e^{2z-2x}dx, & z\le 0\\ \int_z^2 e^{2z-2x}dx, & 0<z<2\\ 0, & z\ge 2\end{cases}=\begin{cases}\frac{e^{2z}-e^{2z-4}}{2}, & z\le 0\\ \frac{1-e^{2z-4}}{2}, & 0<z<2\\ 0, & z\ge 2\end{cases}$$

3.（1）$1=\int_0^1\int_0^1 axy^2dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 axy^2dx=\int_0^1\frac{1}{2}ax^2y^2\Big|_0^1dy=\int_0^1\frac{1}{2}ay^2dy$

$=\frac{1}{6}ay^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}a$

$\Rightarrow a=6$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 6xy^2dx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3y^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（3）$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=f(x,y)$

则 X 与 Y 互相独立

（4）由 X 与 Y 互相独立，$f_{X|Y}(x,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)$

$$P\left\{\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}f_X(x)dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}2xdx=\frac{1}{3}$$

4.（1） $P\left\{X>\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}2x^2y+\frac{1}{3}y^3\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}dx$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2+\frac{7}{24}dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{24}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{7}{16}$$

（2） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(zy,y)|y|dy=\begin{cases}\int_0^1(2z^2y^2+y^2)ydy, & 0<z<1\\ \int_0^{\frac{1}{z}}(2z^2y^2+y^2)ydy, & z\geq 1\\ 0, & z\leq 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{2z^2+1}{4}, & 0<z<1\\ \frac{2z^2+1}{4z^4}, & z\geq 1\\ 0, & z\leq 0\end{cases}$$

（3） $P\{Y\leq X\leq 2Y\}=P\{1\leq Z\leq 2\}=\int_1^2 f_Z(z)dz$

$$=\int_1^2\frac{2z^2+1}{4z^4}dz=\int_1^2\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4z^4}dz=-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^3}\Big|_1^2=\frac{31}{96}$$

第四章.随机变量的数字特征

设随机变量$Y \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，且关于x的一元二次方程$x^2+x+Y=0$有实根的概率为$\frac{1}{2}$，则

$\mu=(\ )$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. 1

设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则$E(XY^2)=$________.

设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则当$k=$__________时，

$$P(k<X<2k)=\frac{1}{4}.$$

24. 随机变量ξ的分布列为

$$P\{\xi=k\}=\frac{1}{k!}e^{-1},k=0,1,2,\cdots.$$

则$E(\xi)=(\qquad)$.

A 1 B $\frac{1}{2}$ C e D 不存在

假定国际市场每年对我国某种出口商品的需求量 X(单位：吨)是服从$[2000,4000]$上的均匀分布，设每售出一吨这种商品可为国家挣得外汇 3 万元，但假如销售不出而积于仓库，则每吨需浪费保养费 1 万元，求应组织多少货源，才能使国家的收益最大.

对于两个随机变量 X 与 Y，若 $E(X^2)$ 和 $E(Y^2)$ 均存在，证明：

$$[E(XY)]^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 中任意两个相关系数都是 ρ，试证

$$\rho \geqslant -\frac{1}{n-1}$$

第四章.答案

由题意可知，关于x的一元二次方程

$x^2+x+Y=0$有实根，

则$\Delta=1-4Y\geqslant 0$，即$Y\leq\frac{1}{4}$，

故$P(Y\leq\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$，

$\because$随机变量$Y\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，$P(Y\leq\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$，

$\therefore\mu=\frac{1}{4}$.

故选：B.

解析

根据已知条件，结合二次函数的判别式，求出

$Y\leq\frac{1}{4}$，再结合正态分布的对称性，即可求解.

答 应填 $\mu(\sigma^2+\mu^2)$.

解 因为(X,Y)服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，所以 X 与 Y 相互独立，则 X 与 Y^2 相互独立. 又

$$EX=EY=\mu, E(Y^2)=DY+(EY)^2=\sigma^2+\mu^2,$$

所以

$$E(XY^2)=EX\cdot E(Y^2)=\mu(\sigma^2+\mu^2).$$

答案：$\frac{\ln 2}{\lambda}$

解析：由题 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$P(k<X<2k)=\int_k^{2k}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda k}-e^{-2k\lambda}=\frac{1}{4}$$

设 $e^{-\lambda k}=y.\quad y>0$

则 $y-y^2=\frac{1}{4}$ 得 $y=\frac{1}{2}$

$\therefore e^{-k\lambda}=\frac{1}{2}\quad -k\lambda=-\ln 2$

$k=\frac{\ln 2}{\lambda}$

知识点：指数分布

解 设组织的货源量为 k 吨，记 Y="出口该商品所获得的收益"(单位：万元)，则

$$Y=g(X)=\begin{cases}3k, & X\geqslant k,\\ 3X-(k-X), & X<k.\end{cases}$$

而随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\,000}, & 2\,000\leqslant x\leqslant 4\,000,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

所以
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\,000}\int_{2\,000}^{4\,000}g(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\,000}\int_{2\,000}^{k}(4x-k)\mathrm{d}x+\frac{1}{2\,000}\int_{k}^{4\,000}3k\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{1\,000}(-k^2+7\,000k-4\times10^6),$$

可得当 $k=3\,500$ 时达到最大值，因此组织 3 500 吨此种商品是最好的决策.

证 令 $g(t)=E[(X+tY)^2]$，$t\in\mathbf{R}$，显然

$$g(t)=E[(X+tY)^2]=E(X^2)+2tE(XY)+t^2E(Y^2)\geqslant 0,$$

若 $E(Y^2)\neq 0$，则其判别式 $\Delta\leqslant 0$，而 $\Delta=4[E(XY)]^2-4E(X^2)E(Y^2)\leqslant 0$，因此 $[E(XY)]^2\leqslant$

可以推出 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E\xi_i)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i[1+\rho(n-1)]$，故 $1+\rho(n-1)\geqslant 0$，即 $\rho\geqslant -\dfrac{1}{n-1}$。