第五章 快速傅里叶变换FFT

郑南宁 教 授

本章主要内容

- FFT算法的基本原理
- 基2FFT算法的理论推导
- 按时间抽取的FFT算法
- 按频率抽取的FFT算法
- IDFT的快速运算方法
- 利用FFT计算线性卷积和线性相关

5.1 FFT算法的基本原理

■ 矩阵方程 - DFT的计算量分析

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_0(n)W_N^{nk}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

上式表示N个方程的计算。为方便起见， 下面用 $\boldsymbol{W^{nk}}$替代W_N^{nk}
若N=4， 上式可展开为N个方程求解形式

$$\begin{aligned}
X(0)&=x_0(0)W^0+x_0(1)W^0+x_0(2)W^0+x_0(3)W^0\\
X(1)&=x_0(0)W^0+x_0(1)W^1+x_0(2)W^2+x_0(3)W^3\\
X(2)&=x_0(0)W^0+x_0(1)W^2+x_0(2)W^4+x_0(3)W^6\\
X(3)&=x_0(0)W^0+x_0(1)W^3+x_0(2)W^6+x_0(3)W^9
\end{aligned}$$

式中 $W=e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$。上面 N个方程求解形式可进一步表示成矩阵运算形式

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0&W^0&W^0&W^0\\W^0&W^1&W^2&W^3\\W^0&W^2&W^4&W^6\\W^0&W^3&W^6&W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0(0)\\x_0(1)\\x_0(2)\\x_0(3)\end{bmatrix} \qquad (1-\boldsymbol{a})$$

把式$(1-\boldsymbol{a})$重写如下

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \qquad (1-\boldsymbol{a})$$

或更紧凑地表示成

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k}) = W_N^{nk} \boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{n})$$

考察式$(\mathbf{1}-\boldsymbol{a})$，可以看到，由于$\boldsymbol{W}$是复数，$\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{n})$也可能是复数，因此

1、每计算一个$X(k)$，需要 N 次复数乘法，N-1 次复数加法
2、完成整个DFT运算，就需要 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次复数加法
3、每个复数乘法包含4次实数乘法和2次实数加法，每个复数加法包含2次实数加法

例如： 当N=8时， 复乘次数=64，复加次数=56
当N=1024时，复乘次数$(1024)^2$=1048576
复加次数 $1024 \times (1024-1)$ =1047552

DFT的复数相乘与复数相加的运算复杂度都为$O(N^2)$，计算量大，难以做到实时处理

■ 直观上讨论如何减少计算DFT所需的乘法和加法次数

把矩阵$(1-a)$ 重写如下

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix}$$

$(1-a)$ 改写为

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (\mathbf{1}-\boldsymbol{b})$$

直观推导（第一步）：

利用关系 $W^{nk} = W^{((nk))_N}$

因此，如 $N = 4, n = 2, k = 3$ 时，则 $W^6 = W^2$

这是因为

$$W^{nk} = W^6 = e^{\left(-j\frac{2\pi}{4}\right)(6)} = e^{-j3\pi}$$

$$= W^{((nk))_N} = W^2 = e^{\left(-j\frac{2\pi}{4}\right)(2)} = e^{-j\pi}$$

直观推导（第二步）

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{1-c})$$

将式$(1-c)$中的矩阵$[\boldsymbol{W}^{nk}]$分解因子成如下形式

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \qquad (1-\boldsymbol{d})$$

比较式$(1-d)$与式$(1-\mathrm{c})$，可以看到，式$(1-d)$两个方阵相乘得到式$(1-c)$的方阵，但其中第一行和第二行相互交换了。注意，考虑这里的行交换，需要改写式$(1-d)$的列矢量$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k})$，改写后的矢量用 $\overrightarrow{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k})}$表示：

$$\overrightarrow{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k})} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} \qquad (1-\boldsymbol{e})$$

式$(1-\mathrm{c})$矩阵因子分解是FFT算法之所以有效的关键（注意其变换结果$\overrightarrow{X(k)}$是乱序的）

重写式（$1-d$）

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \qquad (1-d)$$

承认上式的正确性（尽管结果是乱序的），就可以进一步讨论计算上述这个方程乘法次数

首先设（先给出上式等号最右边两个矩阵相乘-中间计算步骤）

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \qquad (1-f)$$

即，列矢量$\boldsymbol{x_1(n)}$等于式$(1-d)$右边两个矩阵的乘积，元素$x_1(0)$的计算要用一次复数乘法和一次复数加法来确定，即

$$\boxed{x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2)} \qquad (1-g)$$

为了推得普遍的结果，这里W^0不化为1

$\boldsymbol{x_1}(1)$的计算也是用一次复数乘法和一次复数加法来确定，但计算$x_1(2)$只要一次复数加法，这是因为，$W^0=-W^2$，**因此**

$$\boxed{x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) = x_0(0) - W^0 x_0(2)} \qquad (1-h)$$

上式中的复数乘法$W^0 x_0(2)$已在式（$1-g$）计算$x_1(0)$时计算过了

同理，计算$x_1(3)$ 也只要一次复数加法，不需要乘法。这样中间矢量 $\boldsymbol{x_1(n)}$ 只需要四次复数加法，不需作乘法。

下面继续完成式$(1-d)$的计算（计算列矢量$x_2(0)$）

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (1-d)$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad (1-i)$$

$x_2(0)$项可用一次复数乘法和一次复数加法来确定，即

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) \quad (1-j)$$

$x_2(1)$的计算，只要一次复数加法，因为，$W^0=-W^2$。同样，$x_2(2)$只要一次复数乘法和一次复数加法，而$x_2(3)$的计算只要一次复数加法。

因此，用式（$1-d$）计算$\overrightarrow{\boldsymbol{X(k)}}$，总共需4次复数乘法和8次复数加法，而直接计算DFT需要16次复数乘法和12次复数加法

在前面计算式(1 $-d$)时，矩阵分解因子过程中，由于把零引入了被分解的矩阵，从而减少了乘法次数

- 对于$N=2^M$ 的FFT算法，简单地讲，就是将$N \times N$的矩阵分解为M 个矩阵分解因子(每一个矩阵都具有复数加法和复数加法次数最少的特性)
- 引伸上例的结果，可以看到，N=2^M 的FFT算法只需要$N \cdot M/2$次复数乘法和 $N \cdot M$次复数加法，而直 接计算DFT需要N^2次复数乘法和N(N − 1)次复数加法

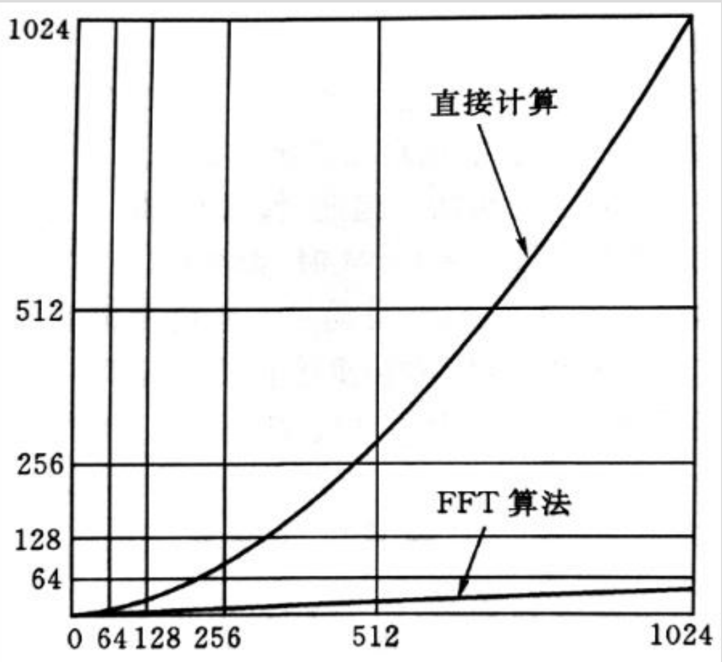
若只考虑乘法次数，直接计算DFT与FFT的计算时间之比的近似关系

$$\frac{N^2}{N \cdot M/2} = \frac{2N}{M}$$

对于N=1024=2^{10},可以使计算量减少到约200比1

计算复杂度从 $O(N^2)$ 下降为 $O(N\log(N))$

- **FFT算法的基本原理：**将大 N点数 的DFT分解为若干小点数的DFT的组合，使整个DFT的计算过程变成一系列迭代运算过程



N点DFT和FFT所需乘法次数的比较

在前面计算式(1−d)时,矩阵分解因子过程中引进了一个差异，在计算式(1−d)时，得到的是$\overrightarrow{X(k)}$，而不是$X(k)$, 即

$$\overrightarrow{X(k)}=\begin{bmatrix}X(0)\\X(2)\\X(1)\\X(3)\end{bmatrix}\ \text{代替了}\ X(k)=\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}\qquad(1-k)$$

这种重新排列是矩阵分解过程固有的。可直接对$\overrightarrow{X(k)}$重新排序得到$X(k)$

对结果重新排序

用相应的二进制数代替自变量k，重写$X(k)$

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(2)\\X(1)\\X(3)\end{bmatrix}\ \text{变成}\ \begin{bmatrix}X(00)\\X(10)\\X(01)\\X(11)\end{bmatrix}$$

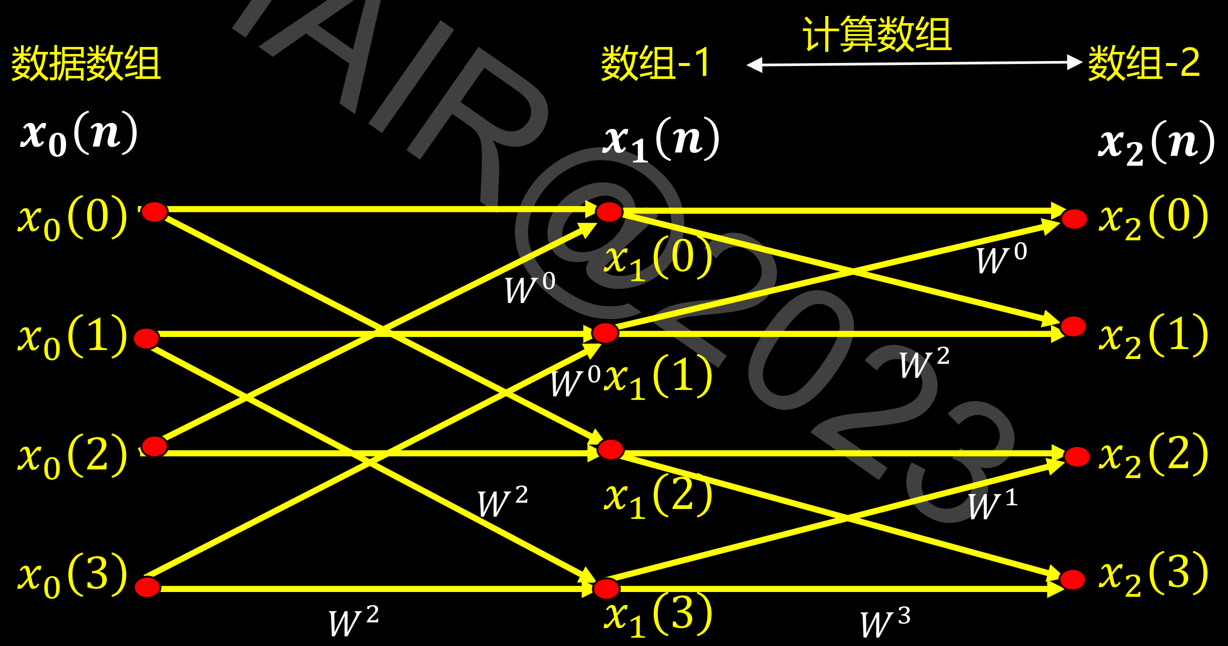
将上面矩阵的二进制数位序反转

$$\overrightarrow{X(k)}=\begin{bmatrix}X(00)\\X(10)\\X(01)\\X(11)\end{bmatrix}\ \text{反转}\ \begin{bmatrix}X(00)\\X(01)\\X(10)\\X(11)\end{bmatrix}=X(k)$$

以上讨论了N=4的 FFT算法，对于$N>4$的FFT算法按式(1−d)的方式描述矩阵因子分解过程比较麻烦，后面将用图解的方式讨论式(1−d)的计算过程, 用这种形式导出计算机的流程图

■ 信号流程图（计算式(1−d)的信号流程图）

左边第一列是数据矢量或数组$\boldsymbol{x_0(n)}$，第二列结点是式（1−f）所计算的矢量$\boldsymbol{x_1(n)}$，第三列结点对应于$\boldsymbol{x_2(n)} = \overline{\boldsymbol{X(k)}}$ (式(1-i))。如果$N = 2^M$，则有M个计算数组



信号流程：线条表示传输路径，进入每一个结点的两条线表示来自前一列的两个结点的传输或量值，这个量值乘以系数W^p，然后把相乘的结果输入到这一列的结点；当没有这个系数，表示W^p=1，两条传输路径进到一个结点的结果要相加

■ 减少DFT计算量的依据

DFT的公式

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

改进DFT计算效率的多数方法利用了W_N^{nk}的周期性和对称性，即

W_N^{nk}的周期性 $$W_N^{nk}=W_N^{(n+N)k}=W_N^{n(k+N)}$$

W_N^{nk}的共轭对称性 $$W_N^{-nk}=(W_N^{nk})^*=W_N^{k(N-n)}$$

且由于$W_N^{N/2}=e^{-j\pi}=-1$，有

$$W_N^{(k+N/2)}=-W_N^k$$

同时利用W_N^{nk}的周期性和对称性可以大大减少DFT的计算量

举例 对实数序列$x(n)$，利用权重的对称性，则可将其DFT公式中含有 n 和 N-n 的项组合在一起

$$x(n)W_N^{nk}+x(N-n)W_N^{(N-n)k}$$

$$=x(n)W_N^{nk}+x(N-n)\left(W_N^{nk}\right)^*$$

$$=[x(n)+x(N-n)]\mathrm{Re}\left(W_N^{nk}\right)+j[x(n)-x(N-n)]\mathrm{Im}\left(W_N^{nk}\right)$$

原式需**4**次实数乘法

变形以后需**2**次实数乘法

对其它项也做类似的组合处理，计算DFT的乘法次数就减少一半

■ 基2FFT算法的理论推导（N=4时的理论证明）

(1) 记号的定义

考虑DFT变换式（$N=2^M$）

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x_0(n)W_N^{nk}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \qquad (2-a)$$

将整数 n 和 k 用二进制数表示；假设$N=4$，那么 M=2，n 和 k 的二进制数表示为

$$n=0,1,2,3 \quad 对应 \quad n=(n_1,n_0)=00,01,10,11$$

$$k=0,1,2,3 \quad 对应 \quad k=(k_1,k_0)=00,01,10,11$$

把 k 和 n 写成如下紧凑形式：

$$\boxed{n=2n_1+n_0, \quad k=2k_1+k_0} \qquad (2-b)$$

这里n_0,n_1,k_0和k_1只能取值0和1。上式是把相应的十进制数写成二进制数的一种方法

当$N=4$时，可把式$(2-a)$改写为（为方便起见，用W^{nk}替代W_N^{nk}）

$$X(k_1,k_0)=\sum_{n_0=0}^{1}\sum_{n_1=0}^{1}x_0(n_1,n_0)W^{(2k_1+k_0)(2n_1+n_0)} \qquad (2-c)$$

注意，为了计算二进制表示的n的所有位，公式$(2-a)$中单个求和号现在必须用M个求和号来代替

（2）W^p的因子分解

现在研究W^p这一项。由于$W^{a+b}=W^a\cdot W^b$，所以

$$\begin{aligned}W^{(2k_1+k_0)(2n_1+n_0)}&=W^{(2k_1+k_0)2n_1}\cdot W^{n_0(2k_1+k_0)}\\&=[W^{4k_1n_1}]W^{2k_0n_1}W^{n_0(2k_1+k_0)}=W^{2k_0n_1}W^{(2k_1+k_0)n_0}\end{aligned} \qquad (2-d)$$

注意，方括号中的项等于1，因为

$$W^{4k_1n_1}=[W^4]^{k_1n_1}=\left[e^{-j2\pi 4/4}\right]^{k_1n_1}=[1]^{k_1n_1}=1 \qquad (2-e)$$

这样，式$(2-c)$就可以写成下面的形式

$$X(k_1,k_0)=\sum_{n_0=0}^{1}\left[\sum_{n_1=0}^{1}x_0(n_1,n_0)W^{2n_1k_0}\right]W^{n_0(2k_1+k_0)} \tag{2-f}$$

上式代表了FFT算法的基础。为了说明这一点，下面分别研究上式中各个求和式

首先讨论上式方括号内的求和式

$$x_1(k_0,n_0)=\sum_{n_1=0}^{1}x_0(n_1,n_0)W^{2n_1k_0} \tag{2-g}$$

将上式展开，有

$$\begin{cases}x_1(0,0)=x_0(0,0)+x_0(1,0)W^0\\ x_1(0,1)=x_0(0,1)+x_0(1,1)W^0\\ x_1(1,0)=x_0(0,0)+x_0(1,0)W^2\\ x_1(1,1)=x_0(0,1)+x_0(1,1)W^2\end{cases} \tag{2-h}$$

把式$(2\!-\!h)$重写

$$\begin{cases} x_1(0,0) = x_0(0,0) + x_0(1,0)W^0 \\ x_1(0,1) = x_0(0,1) + x_0(1,1)W^0 \\ x_1(1,0) = x_0(0,0) + x_0(1,0)W^2 \\ x_1(1,1) = x_0(0,1) + x_0(1,1)W^2 \end{cases} \quad (2\!-\!h)$$

如果把式$(2\!-\!h)$表示成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{bmatrix} \quad (2\!-\!i)$$

注意，上式正好是5.1节导出的矩阵方程式$(1\!-\!f)$（见第7页PPT）

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (1\!-\!f)$$

但式$(2\!-\!i)$中的n是用二进制表示的

因此，式$(2-f)$方括号

$$X(k_1,k_0)=\sum_{n_0=0}^{1}\left[\sum_{n_1=0}^{1}x_0(n_1,n_0)W^{2k_0n_1}\right]W^{(2k_1+k_0)n_0} \qquad (2-f)$$

里边的求和式代表5.1节直观推导DFT计算次数时的式$(1-d)$的第一个矩阵因子

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(2)\\X(1)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & W^0 & 0 & 0\\1 & W^2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & W^1\\0 & 0 & 1 & W^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & W^0 & 0\\0 & 1 & 0 & W^0\\1 & 0 & W^2 & 0\\0 & 1 & 0 & W^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0(0)\\x_0(1)\\x_0(2)\\x_0(3)\end{bmatrix} \qquad (1-d)$$

同样，如果把式(2−f)

$$X(k_1,k_0)=\sum_{n_0=0}^{1}\left[\sum_{n_1=0}^{1}x_0(n_1,n_0)W^{2n_1k_0}\right]W^{n_0(2k_1+k_0)} \qquad (2-f)$$

的外层的求和写成

$$x_2(k_0,k_1)=\sum_{n_0=0}^{1}x_1(k_0,n_0)W^{(2k_1+k_0)n_0} \qquad (2-j)$$

进一步写成矩阵形式，得到

$$\begin{bmatrix}x_2(0,0)\\x_2(0,1)\\x_2(1,0)\\x_2(1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&W^0&0&0\\1&W^2&0&0\\0&0&1&W^1\\0&0&1&W^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0,0)\\x_1(0,1)\\x_1(1,0)\\x_1(1,1)\end{bmatrix} \qquad (2-\boldsymbol{k})$$

这就是矩阵方程(1−f)。所以式(2−f)外层的求和定义了前面5.1节直观推导DFT计算次数时的式(1−d)的第二个矩阵因子

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(2)\\X(1)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&W^0&0&0\\1&W^2&0&0\\0&0&1&W^1\\0&0&1&W^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&W^0&0\\0&1&0&W^0\\1&0&W^2&0\\0&1&0&W^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0(0)\\x_0(1)\\x_0(2)\\x_0(3)\end{bmatrix} \qquad (1-d)$$

从公式$(2-f)$和$(2-j)$，有

$$X(k_1,k_0)=\sum_{n_0=0}^{1}\left[\sum_{n_1=0}^{1}x_0(n_1,n_0)W^{2n_1k_0}\right]W^{n_0(2k_1+k_0)} \qquad (2-f)$$

$$x_2(k_0,k_1)=\sum_{n_0=0}^{1}x_1(k_0,n_0)W^{(2k_1+k_0)n_0} \qquad (2-j)$$

于是

$$\boxed{X(k_1,k_0)=x_2(k_0,k_1)} \qquad (2-l)$$

也就是说，由外层求和得到的最后结果$x_2(k_0,k_1)$与我们所要求的$X(k_1,k_0)$，它们的位序是倒序的

如果把公式$(2-g)$、$(2-j)$和$(2-l)$相联立，即

$$\begin{cases} x_1(k_0,n_0)=\sum_{n_1=0}^{1}x_0(n_1,n_0)W^{2n_1k_0} \\ x_2(k_0,k_1)=\sum_{n_0=0}^{1}x_1(k_0,n_0)W^{n_0(2k_1+k_0)} \\ X(k_1,k_0)=x_2(k_0,k_1) \end{cases} \qquad (2-m)$$

上面方程组$(2-m)$便是库利-图基最初为$N=4$列出的FFT算法。在这一组方程中，第二个方程是由第一个方程计算的，所以称它们是递归的

5.2 按时间抽取的FFT算法

■ 算法原理（基2-FFT）

先将$x(n)$按 n 的奇偶分为两组，设 $N=2^M$，不足时补零，n 用变量 $2r$ 表示，即

n 为偶数：$x(2r) = x_1(r), \quad r = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$

n 为奇数：$x(2r+1) = x_2(r), \quad r = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$

因此有

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$$= \underset{(n为偶数)}{\sum_{n=0}^{N-1}} x(n)W_N^{nk} + \underset{(n为奇数)}{\sum_{n=0}^{N-1}} x(n)W_N^{nk}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)(W_N^2)^{rk}$$

由于$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j2\pi/(\frac{N}{2})} = W_{N/2}$，上式可表示为：

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

式中　$k = 0, \cdots, \frac{N}{2} - 1$

其中

$$\begin{cases} X_1(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \mathrm{DFT}\left(x_1(r)\right) \\ X_2(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} = \mathrm{DFT}\left(x_2(r)\right) \end{cases}$$

- **结论**

  1、$X_1(k)$，$X_2(k)$均为$N/2$点的DFT

  2、$X(k)=X_1(k)+ W_N^k X_2(k)$只能确定出$X(k)$的$k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$的值，即$X(k)$前一半的结果

■ X(k)后一半的计算

根据W_N^{nk}的周期性有 $W_{N/2}^{r(k+N/2)}=W_{N/2}^{rk}$，所以有：

$$X_1(\frac{N}{2}+k)=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(r)W_{\frac{N}{2}}^{r(\frac{N}{2}+k)}=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(r)W_{\frac{N}{2}}^{rk}=X_1(k)$$

同理有 $X_2\left(\frac{N}{2}+k\right)=X_2(k)$ $k=0,\cdots,\frac{N}{2}-1$

这就是说，$X_1(k)$、$X_2(k)$的后一半，分别等于其前一半的值

又由于 $W_N^{(N/2+k)}=W_N^{N/2}W_N^k=-W_N^k$，且$X_1(k)$, $X_2(k)$以$N/2$为周期，故有：

$$X(k+\frac{N}{2})=X_1(k+\frac{N}{2})+W_N^{k+\frac{N}{2}}X_2(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^kX_2(k)\ ,\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

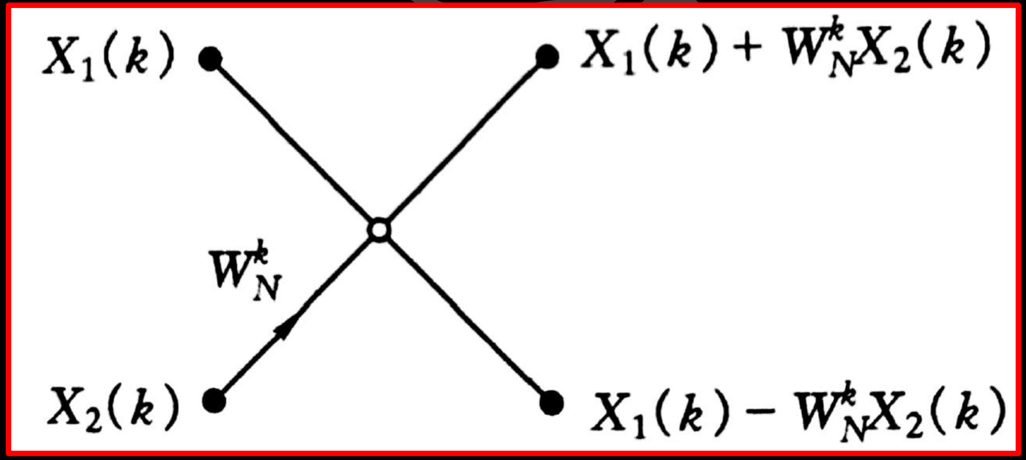
可见，$X(k)$的后一半，也完全由$X_1(k)$、$X_2(k)$ 所确定。所以，N点的DFT可由两个$N/2$点的DFT来计算

■ 蝶形运算

由$X_1(k)$、$X_2(k)$来表示$X(k)$的运算如下

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X\left(k+\dfrac{N}{2}\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{cases} \qquad \left(k = 0, 1, \cdots, \tfrac{N}{2}-1\right)$$

实现上式运算的流图称作蝶形运算



■ 举例

N=8 序列的DFT，可以分解为两个N/2=4点的DFT，具体方法如下：

1、n 为偶数时的序列 $x_1(n)$ 为

$$x_1(0)=x(0),\ x_1(1)=x(2),\ x_1(2)=x(4),x_1(3)=x(6)$$

进行 $N/2$=4 点的DFT得 $X_1(k)$

$$X_1(k)=\sum_{r=0}^{3}x_1(r)W_4^{rk}=\sum_{r=0}^{3}x(2r)W_4^{rk},\ k=0,1,2,3$$

2、n 为奇数时的序列 $x_2(n)$ 为

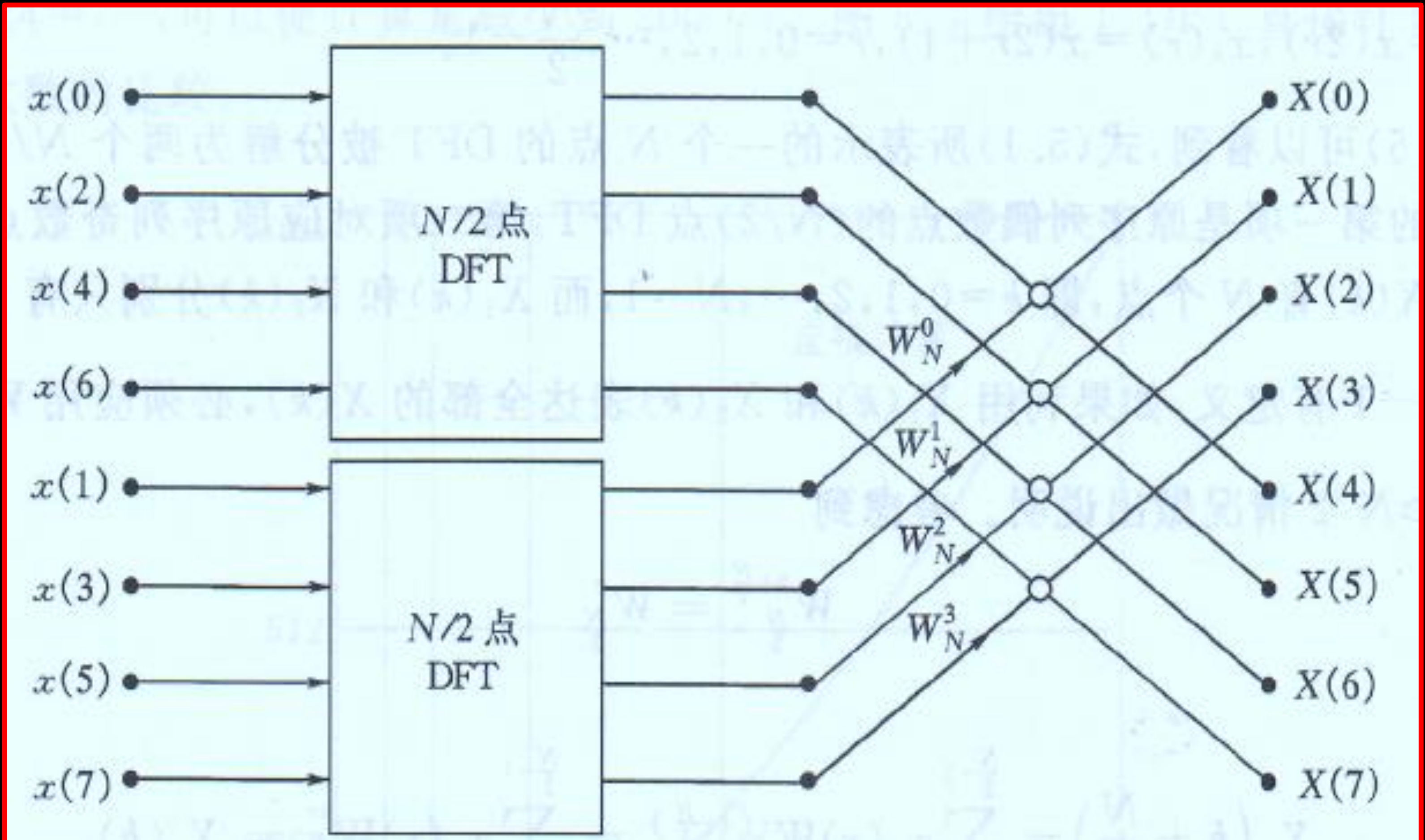
$$x_1(0)=x(1),\ x_1(1)=x(3),\ x_1(2)=x(5),x_1(3)=x(7)$$

进行$N/2$=4点的DFT得 $X_2(k)$

$$X_2(k)=\sum_{r=0}^{3}x_2(r)W_4^{rk}=\sum_{r=0}^{3}x(2r+1)W_4^{rk},\ k=0,1,2,3$$

根据蝶形运算，即可由4点$X_1(k)$和4点$X_2(k)$来计算全部N=8 点 $X(k)$

3、对$X_1(k)$和$X_2(k)$进行蝶形运算，前半部为$X(0)$到$X(3)$，后半部分为$X(4)$到$X(7)$，整个过程如下图所示：



■ 迭代奇偶分组

按照奇偶分组的基本思想，不妨对每个$N/2$的序列进一步奇偶分组，从而进一步减少运算量。假设序列总长$N=2^L$,就可以这样分解L层。当不满足时，可以补零操作

1、对前面的偶序列$x_1(r),\ r=0,\cdots,\frac{N}{2}-1$进一步奇偶数分解，即

$$x_1(2l)=x_3(l),\quad l=0,\cdots,\frac{N}{4}-1$$

$$x_1(2l+1)=x_4(l),\quad l=0,\cdots,\frac{N}{4}-1$$

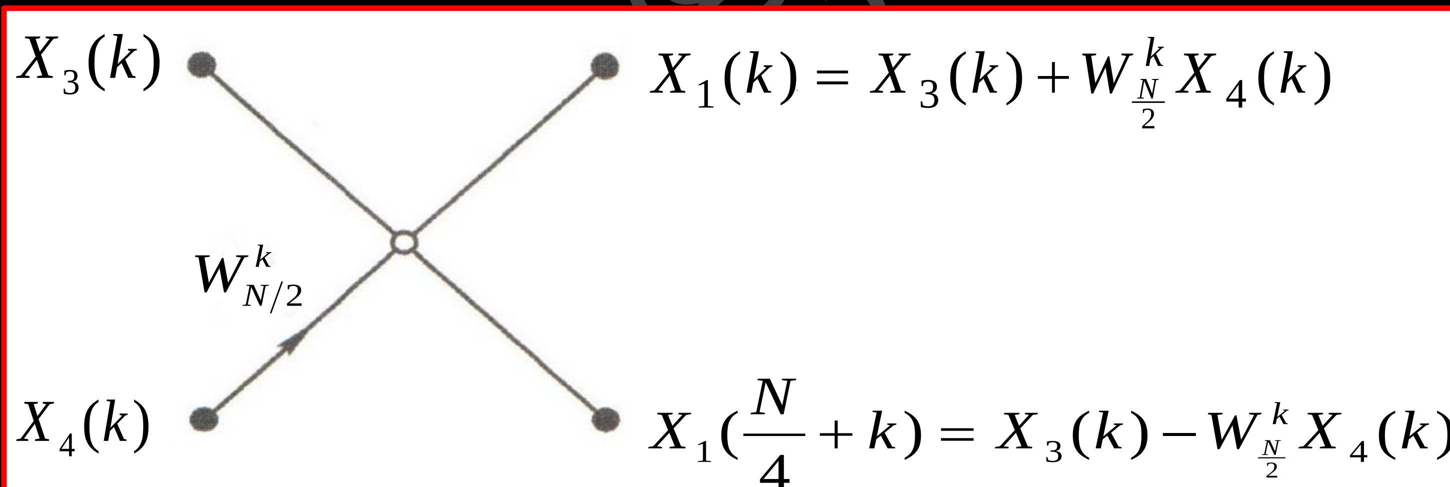
分别进行$N/4$点的DFT，得到：

$$\begin{cases} X_3(k)=\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1}x_3(l)W_{N/4}^{lk},\quad k=0,\cdots,\frac{N}{4}-1 & \text{(偶数序列中再取偶)} \\ X_4(k)=\sum_{l=0}^{\frac{N}{4}-1}x_4(l)W_{N/4}^{lk},\quad k=0,\cdots,\frac{N}{4}-1 & \text{(偶数序列中再取奇)} \end{cases}$$

利用蝶形运算，可用$N/4$点的$X_3(k)$和$X_4(k)$计算$N/2$点的$X_1(k)$，即

$$\begin{cases} X_1(k) = X_3(k) + W_{\frac{N}{2}}^{k} X_4(k) \\ X_1\left(\frac{N}{4}+k\right) = X_3(k) - W_{\frac{N}{2}}^{k} X_4(k) \end{cases} \qquad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1$$

其蝶形运算流程图如下



2、同样对前面的奇序列 $x_2(r)$，$r=0,\cdots,\frac{N}{2}-1$进一步奇偶数分解为$N/4$的序列

$x_5(l)$ 和 $x_6(l)$，并分别进行 $N/4$ 点的DFT如下

$$\begin{cases} X_5(k)=\sum_{l=0}^{N/4-1} x_2(2l)W_{N/4}^{lk}=\sum_{l=0}^{N/4-1} x_5(l)W_{N/4}^{lk} & \text{(奇数序列中再取偶序号子序列)} \\ X_6(k)=\sum_{l=0}^{N/4-1} x_2(2l+1)W_{N/4}^{lk}=\sum_{l=0}^{N/4-1} x_6(l)W_{N/4}^{lk} & \text{(奇数序列中再取奇序号子序列)} \end{cases}$$

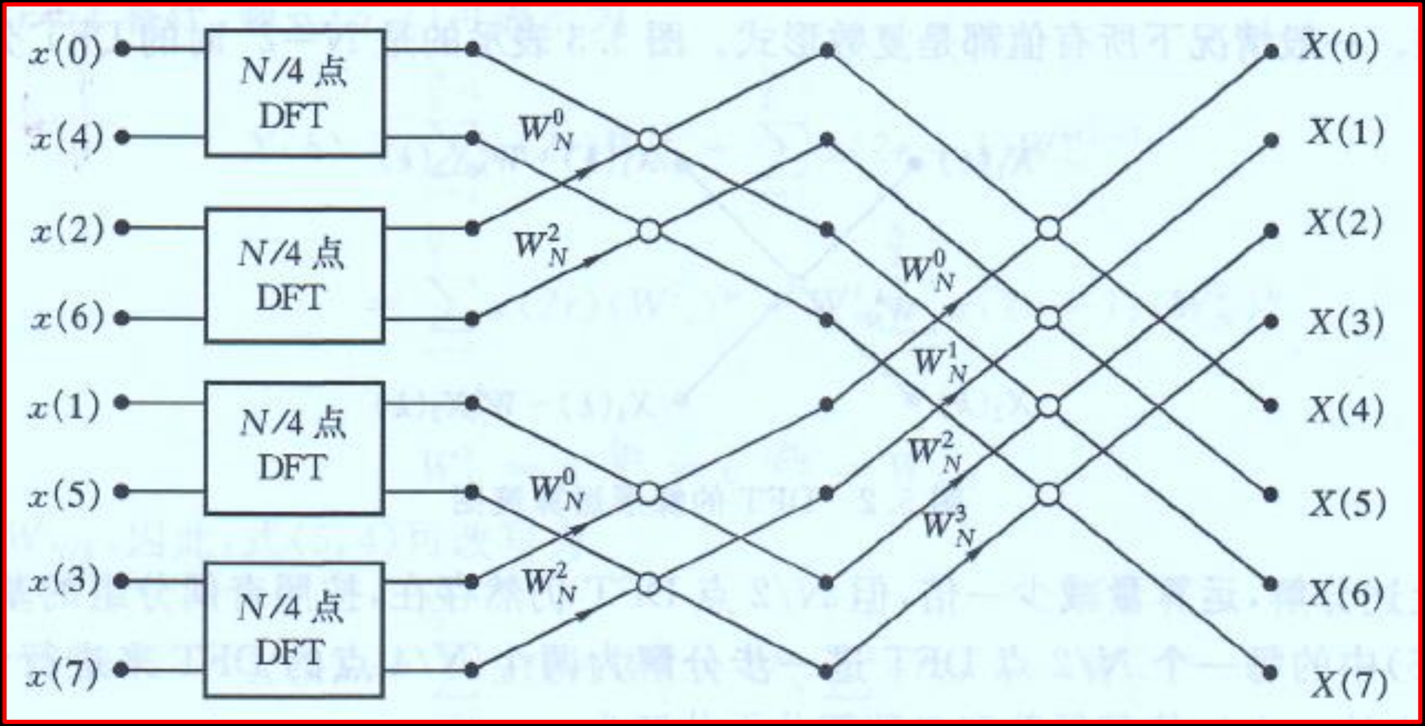
由$X_5(k)$、$X_6(k)$进行蝶形运算计算$N/2$点的$X_2(k)$，得到

$$\begin{cases} X_2(k)=X_5(k)+W_{N/2}^{k}X_6(k)\ ;k=0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \\ X_2(\frac{N}{4}+k)=X_5(k)-W_{N/2}^{k}X_6(k)\ ;k=0,1,\cdots,\frac{N}{4}-1 \end{cases}$$

所以，N点的DFT分解为四个$N/4$点的DFT来计算

3、两级蝶形计算流程图如下

（为减少参数个数，设 $W_{N/2}^{0}=W_{N}^{0}, W_{N/2}^{1}=W_{N}^{2}$）



经过上述两级蝶形运算，用四个$N/4$点DFT计算N点序列的DFT，其运算量可再减少约一半，即为**N点DFT计算量的1/4**

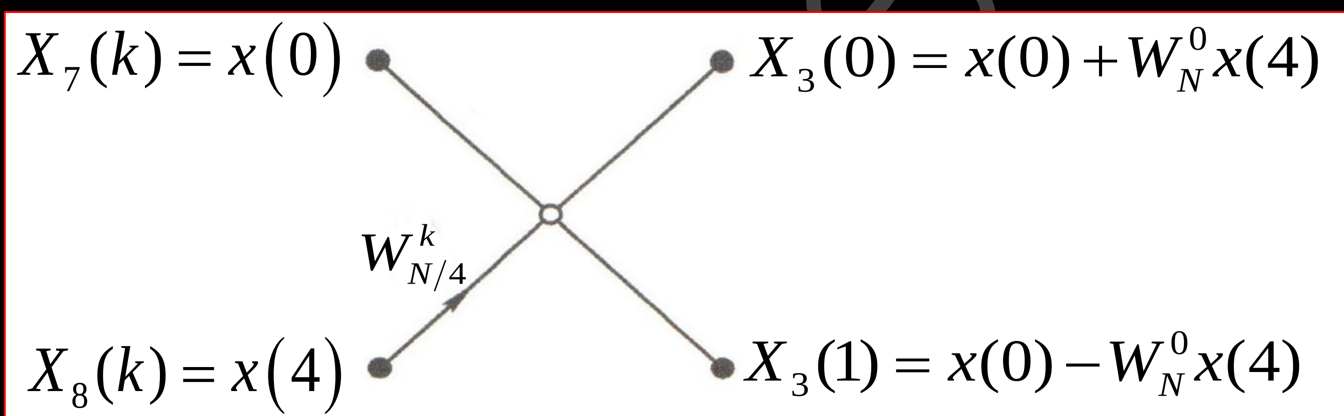
4、最后一级——2点DFT的蝶形运算

对于$N=2^3=8$时DFT，经过2级迭代，即为$N/4$点即为两点DFT。

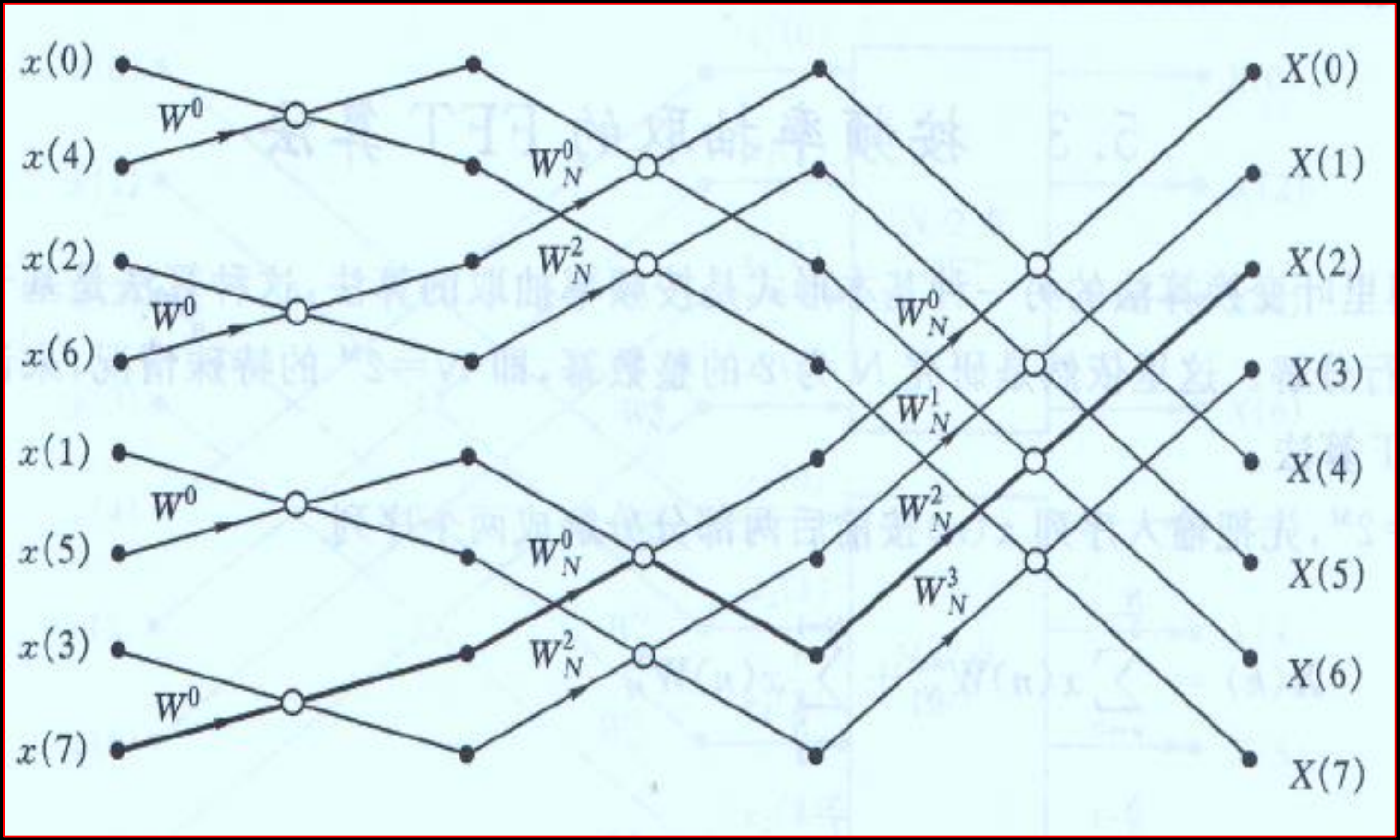
以 $X_3(k)=\sum_{l=0}^{1} x_3(l)W_2^{lk}$，$k=0,1$ 为例，即

$$\begin{cases} X_3(0)=x_7(0)+W_{N/4}^{0}x_8(0)=x(0)+W_N^0 x(4) \\ X_3(1)=x_7(0)-W_{N/4}^{0}x_8(0)=x(0)-W_N^0 x(4) \end{cases}$$

2点DFT仍可以用蝶形运算分解为单点DFT，进一步减少运算量，即



5、最终，得到 N=2^M=8 点DFT分解为 M=3 级迭代的蝶形运算流程图如下：

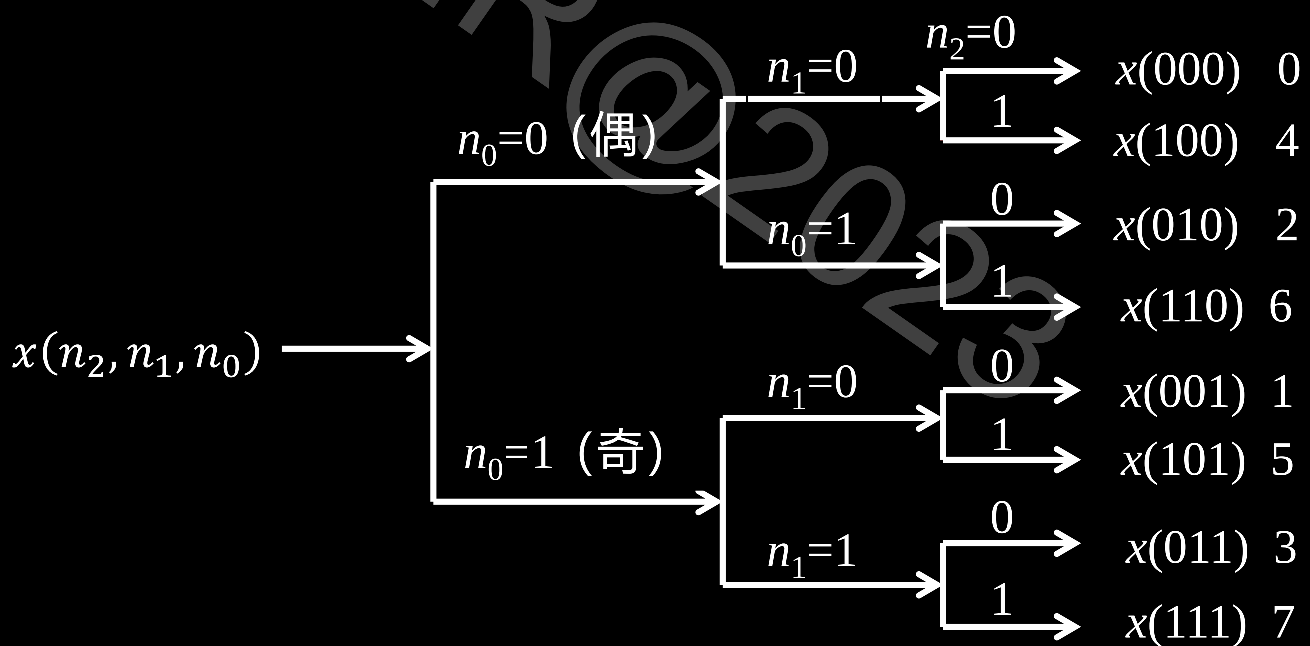


■ 倒位序的实现

由上图可知，按时域抽取FFT的输出$X(k)$按自然顺序排列在存储单元，而输入是按以下顺序排列在存储单元：

$$x(0),x(4),x(2),x(6)；\ x(1),x(5),x(3),x(7)$$

这种顺序称作**倒位序**，它是由奇偶分组造成的：



■ 码位倒置与自然序号的关系

对 $N=8=2^3$ 的输入序列，序号二进制为$(n_2, n_1, n_0)_2$，其倒位序二进制为$(n_0, n_1, n_2)_2$

码位倒置与自然序号的关系

自然顺序	二进制$n_2n_1n_0$	倒位序二进制$n_0n_1n_2$	倒位顺序
0	0 0 0	0 0 0	0
1	0 0 1	1 0 0	4
2	0 1 0	0 1 0	2
3	0 1 1	1 1 0	6
4	1 0 0	0 0 1	1
5	1 0 1	1 0 1	5
6	1 1 0	0 1 1	3
7	1 1 1	1 1 1	7

5.3 按频率抽取的FFT算法

■ 算法原理（基2FFT）

1、把 $N=2^M$ 的输入序列$x(n)$按前后两部分分解为2个$N/2$长的短序列， $x(n)$的DFT可以计算为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{nk}}_{\text{前后分组}}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n+\frac{N}{2})W_N^{(n+N/2)k}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+x(n+\frac{N}{2})W_N^{(N/2)k}\right]W_N^{nk}$$

由于 $W_N^{\frac{N}{2}k} = \left(W_N^{\frac{N}{2}}\right)^k = (-1)^k$

因此 $X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n) + (-1)^k x(n+\frac{N}{2})\right]W_N^{nk}$，$k = 0,1,\ldots,N-1$

2、将N点DFT输出序列 $X(k)$ 按 k 的奇偶分组分为两个$N/2$点DFT

当k为偶数，即 k=2r 时，有 $(-1)^k = 1$

当k为奇数，即 k=2r+1 时，有 $(-1)^k = -1$

这样，$X(k)$ 可分为两部分：

k 为偶数时

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+x(n+\frac{N}{2})\right]W_N^{2nr}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)+x(n+\frac{N}{2})\right]W_{N/2}^{nr}, \qquad 0\le r\le\frac{N}{2}-1$$

k 为奇数时

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right]W_N^{n(2r+1)}$$

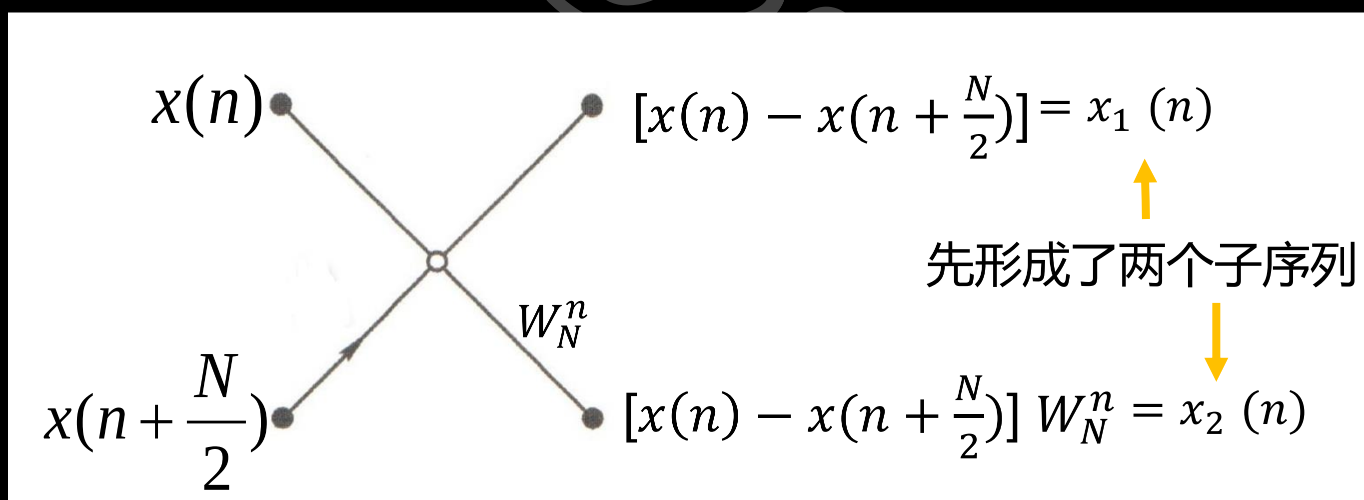
$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left\{\left[x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right]W_N^{n}\right\}W_{N/2}^{nr}, \quad 0\le r\le\frac{N}{2}-1$$

上面两式均满足$N/2$点**DFT**的定义式

3、蝶形运算

$$\begin{cases} X(2r)=\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\underline{\left[x(n)+x(n+\frac{N}{2})\right]}W_{\frac{N}{2}}^{nr} & \to x_1(n) \\ X(2r+1)=\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left\{\underline{\left[x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right]}W_N^n\right\}W_{\frac{N}{2}}^{nr} & \to x_2(n) \end{cases} \qquad 0 \le n \le \frac{N}{2}-1$$

对$x(n)$和$x(n+\frac{N}{2})$进行如下蝶形运算



4、N=8时的计算流程图（先形成子序列，得到两个4点的DFT运算）

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+x(n+\frac{N}{2})\right]W_{\frac{N}{2}}^{nr}$$

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left\{\left[x(n)-x(n+\frac{N}{2})\right]W_N^n\right\}W_{\frac{N}{2}}^{nr}$$

$$x_1(n)=x(n)+x(n+\frac{N}{2})$$

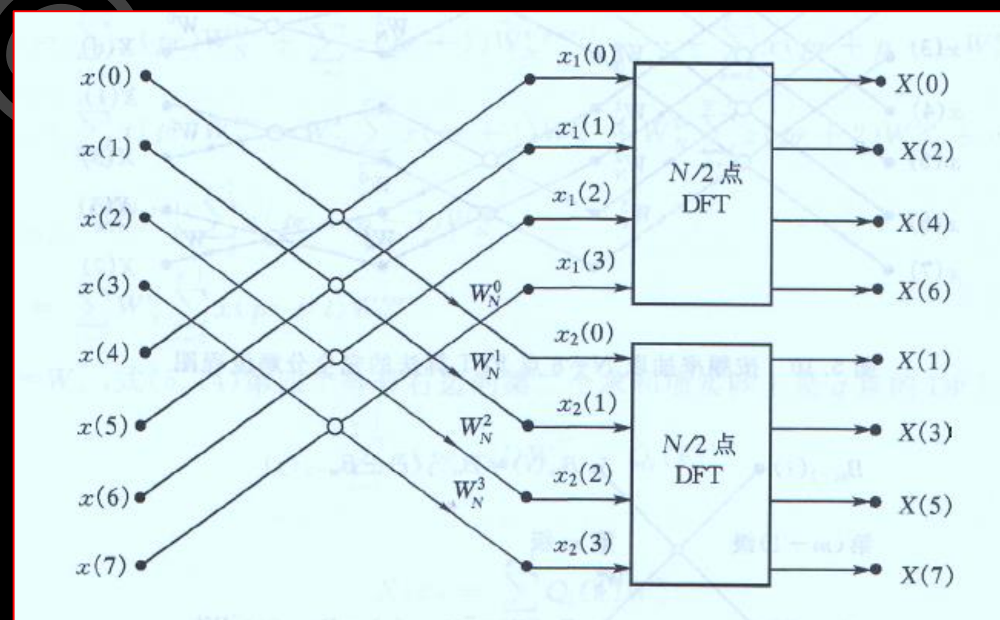
$$x_2(n)=\left[x(n)-x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right]W_N^n$$

子序列 $0\le n\le\frac{N}{2}-1$

因为 $W_N^2=W_{\frac{N}{2}}$ ，于是，由上面两组公式得到两个$\frac{N}{2}$点的DFT运算，即

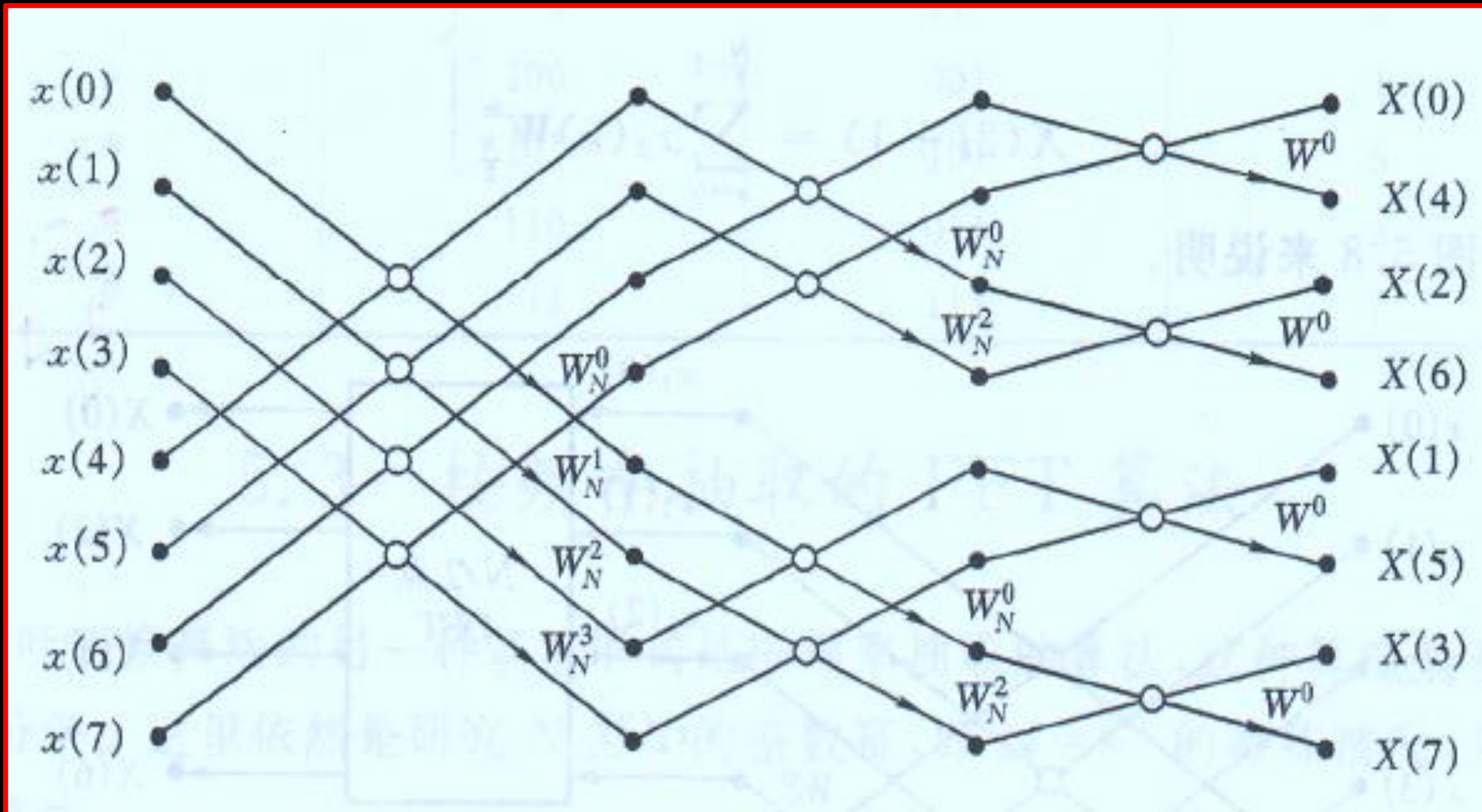
$$X(2r)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(n)\,W_{\frac{N}{2}}^{rn}$$

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_2(n)W_{\frac{N}{2}}^{rn}$$



5、按照时域抽取FFT的思路，再将$N/2$点DFT按k的奇偶进一步分解为两个$N/4$点的DFT，如此迭代进行下去，直至分解为单点DFT

得到 N=8 时按频域抽取FFT的完整计算流程图：



■ 权函数W_N^p的确定

设迭代蝶形运算的次数为 M $(1 \le l \le M)$次，计算序列的长度为$N= 2^M$，l 表示计算阵列的第 l 列

权函数W_N^p的计算主要是确定 p 值，p 值计算的一种方法如下：

1、把 p 值表示成 M 位的二进制数$(p)_2$，其中 M 应满足：$M=\log_2 N$，N 为处理点数；

2、将$(p)_2$右移 $(M-l)$ 位，并把左边的空位补零，结果依然为M 位

3、将移位补零的 M 位二进制数进行比特倒置

4、倒置后的二进制数转换成十进制数即得到 p 值

❑ 一节点的权函数是W_N^p，其对偶节点的权函数必然为$W_N^{p+N/2}$，而且$W_N^p = -W_N^{p+N/2}$，所以对偶节点可按下式计算

$$\begin{cases} x_l(k) = x_{l-1}(k) + W_N^p x_{l-1}(k + N/2^l) \\ x_l(k + N/2^l) = x_{l-1}(k) - W_N^{p+N/2} x_{l-1}(k + N/2^l) \end{cases}$$

■ 两种FFT的主要异同

1、**不同点**

倒位序不同：按时域抽取FFT的输入为倒位序，输出为自然顺序；按频域抽取FFT的输入为自然顺序，输出为倒位序。

蝶形运算形式不同

2、**相同点**

运算量相同，均为$(N/2)\text{Log}_2 N$次复乘，$N\log_2 N$次复加；

两种FFT形式上具有左右（输入、输出）对称性

5.4 IDFT的快速运算方法

■ 算法原理

$$X(k)=\mathrm{DFT}\left[x(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$
$$x(n)=\mathrm{IDFT}\left[X(k)\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$$

比较两式可知，只要**DFT**的每个系数W_N^{nk}换成W_N^{-nk}，最后再乘以常数**1/*N***就可以得到**IDFT**的快速算法——**IFFT**

可以将常数**1/*N***分配到每一级蝶形运算中， **1/*N*=(1/2)*^{L}***，即每级蝶形运算均乘以**1/2**

■ 不改FFT程序直接实现IFFT

由于 $[W_N^{-nk}]^* = W_N^{nk}, [A \cdot B]^* = A^* \cdot B^*$

对IDFT取共轭，得到

$$x^*(n) = [\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}]^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{nk}$$

因此有

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{nk}\right]^* = \frac{1}{N}\left\{\mathrm{DFT}\left[X^*(k)\right]\right\}^*}$$

算法步骤：

1、先对***X*(*k*)**取共轭，即将***X*(*k*)**的虚部乘 **-1**

2、直接利用**FFT**程序计算其**DFT**

3、对计算结果再取一次共轭

4、最后再乘以常数**1/*N***，即得***x*(*n*)**

从而，**FFT**、**IFFT**可共用同一个子程序

5.5 实数序列的FFT算法

通常考虑时间的实函数，而频率函数通常是复的，因此要设计一个即能减少计算DFT，又能计算IDFT的程序，就要假设一个复序列$x(n)$的FFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}[x_r(n)+jx_i(n)]e^{-j2\pi nk/N}$$

因为，根据复数共轭的反变换公式可以得到：

$$x(n)=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathrm{Re}\big(X(k)\big)+j\mathrm{Im}(X(k))\right]^{*}e^{-j2\pi nk/N}\right]^{*}$$

由于上面两式中，包含着共同的因子$e^{-j2\pi nk/N}$，因此，用同一个程序就可以计算DFT和它的反变换。

- 利用复时间函数的虚部，使实函数的FFT计算有更高的效率

■ 同时计算两个实序列的FFT

我们希望用下列复序列的形式：

$$\boxed{v(n) = x(n) + jy(n)}$$

同时计算两个实序列$x(n)$和$y(n)$的DFT 。也就是说，$v(n)$是由两个实函数组成，其中一个实函数作为虚部

按DFT的线性性质，$v(n)$的DFT由下式给出

$$\begin{aligned}
V(k) &= X(k) + jY(k) \\
&= \left[X_{\mathrm{R}}(k) + jX_{\mathrm{I}}(k)\right] + j\left[Y_{\mathrm{R}}(k) + jY_{\mathrm{I}}(k)\right] \\
&= \left[X_{\mathrm{R}}(k) - Y_{\mathrm{I}}(k)\right] + j\left[X_{\mathrm{I}}(k) + Y_{\mathrm{R}}(k)\right] \\
&= V_{\mathrm{R}}(k) + jV_{\mathrm{I}}(k)
\end{aligned}$$

重写如下

$$V_{\mathrm{R}}(k)=\left[X_{\mathrm{R}}(k)-Y_{\mathrm{I}}(k)\right],\quad V_{\mathrm{I}}(k)=\left[X_{\mathrm{I}}(k)+Y_{\mathrm{R}}(k)\right]$$

由上式可以看到，求得的$V(k)$的实部和虚部既含有的$X(k)$成分，也有$Y(k)$的成分，可以把$V_{\mathrm{R}}(k)$和$V_{\mathrm{I}}(k)$分解成奇偶序列，即：

$$V(k)=\left\{\left[\underbrace{\frac{V_{\mathrm{R}}(k)+V_{\mathrm{R}}(N-k)}{2}}_{\text{偶序列}}\right]+\left[\underbrace{\frac{V_{\mathrm{R}}(k)-V_{\mathrm{R}}(N-k)}{2}}_{\text{奇序列}}\right]\right\}$$
$$+j\left\{\left[\underbrace{\frac{V_{\mathrm{I}}(k)+V_{\mathrm{I}}(N-k)}{2}}_{\text{偶序列}}\right]+\left[\underbrace{\frac{V_{\mathrm{I}}(k)-V_{\mathrm{I}}(N-k)}{2}}_{\text{奇序列}}\right]\right\}$$

根据DFT性质

若$w(n)$是实序列，则 $W(k)=\underbrace{W_{\mathrm{R}}(k)}_{\text{偶序列}}+j\underbrace{W_{\mathrm{I}}(k)}_{\text{奇序列}}$

若$w(n)$是纯虚序列，则 $W(k)=\underbrace{W_{\mathrm{R}}(k)}_{\text{奇序列}}+j\underbrace{W_{\mathrm{I}}(k)}_{\text{偶序列}}$

由上述的性质可以得出两个序列$X(k)$和$Y(k)$如下

$$X(k)=\left[\frac{V_{\mathrm{R}}(k)+V_{\mathrm{R}}(N-k)}{2}\right]+j\left[\frac{V_{\mathrm{I}}(k)-V_{\mathrm{I}}(N-k)}{2}\right]$$

$$jY(k)=\left[\frac{V_{\mathrm{R}}(k)-V_{\mathrm{R}}(N-k)}{2}\right]+j\left[\frac{V_{\mathrm{I}}(k)+V_{\mathrm{I}}(N-k)}{2}\right] \qquad (\mathrm{A})$$

或者

$$Y(k)=\left[\frac{V_{\mathrm{I}}(k)+V_{\mathrm{I}}(N-k)}{2}\right]-j\left[\frac{V_{\mathrm{R}}(k)-V_{\mathrm{R}}(N-k)}{2}\right] \qquad (\mathrm{B})$$

做一次N点复序列的DFT，就能同时把两个N点实序列的DFT求出来，因为求得$V(k)=V_{\mathrm{R}}(k)+jV_{\mathrm{I}}(k)$后，按式(A)、(B)即可组合出$X(k)$和$Y(k)$，显然使运算效率提高一倍

同时计算两个实序列的FFT的步骤

1. 函数$x(n)$和$y(n)$是实序列，$n = 0,1,\cdots,N-1$。

2. 构成复序列： $v(n) = x(n) + jy(n),\quad n = 0,1,\cdots,N-1$

3. 计算

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j2\pi nk/N} = V_R(k) + jV_I(k),\quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

式中$V_R(k)$和$jV_I(k)$分别为$V(k)$的实部和虚部

4. 计算

$$\boxed{\begin{cases} X(k) = \frac{1}{2}\left[V_R(k) + V_R(N-k)\right] + j\frac{1}{2}\left[V_I(k) - V_I(N-k)\right] \\ Y(k) = \frac{1}{2}\left[V_I(k) + V_I(N-k)\right] - j\frac{1}{2}\left[V_R(k) - V_R(N-k)\right] \end{cases}} \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

这里$X(k)$和$Y(k)$分别为$x(n)$和$y(n)$的DFT

■ 用N点变换计算$2N$点实序列的FFT

考虑一个用$2N$个样本点描述的序列$x(n)$，其$2N$点的DFT变换为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}x(n)W_{2N}^{kn}\,,\quad k=0,1,2,\ldots,2N-1$$

我们希望用N点的DFT来计算序列$x(n)$的DFT

也就是说，我们希望把$2N$点的序列$x(n)$分解为两个N点的序列。但是，序列$x(n)$不能简单地分成两半，而要按 n 的奇偶分为两组，即

$$\begin{cases}x(2r)=u(r)\\x(2r+1)=v(r)\end{cases},\quad r=0,1,2,\ldots,N-1$$

式中序列$u(r)$等于 $x(r)$的偶数号样本点，而$v(r)$等于奇数号样本点（注意，此处的$u(r)$和$v(r)$并不是由$x(n)$分解所得到的偶函数和奇函数）

这样就可以把长度为$2N$的实序列$x(n)$分解为两个N点实序列（奇偶两组）计算：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/2N}=\sum_{r=0}^{N-1}x(2r)e^{-j2\pi k(2r)/2N}+\sum_{r=0}^{N-1}x(2r+1)e^{-j2\pi k(2r+1)/2N}$$

$$=\sum_{r=0}^{N-1}x(2r)e^{-j2\pi k(r)/N}+e^{-j\pi k/N}\sum_{r=0}^{N-1}x(2r+1)e^{-j2\pi k(r)/N}$$

$$=\sum_{r=0}^{N-1}u(r)e^{-j2\pi k(r)/N}+e^{-j\pi k/N}\sum_{r=0}^{N-1}v(r)e^{-j2\pi k(r)/N}$$

$$=U(k)+e^{-j\pi k/N}V(k)\quad,\quad k=0,1,2,\ldots,2N-1$$

其中$U(k)$、$V(k)$是两个长度为N的实序列$u(r)$、$v(r)$的DFT，可以通过前面讨论的“同时计算两个实序列的FFT的方法”实现

虽然上式中的k是从0到$2N-1$，但由于$U(k+N)=U(k)$、$V(k+N)=V(k)$，只需计算$0\le n\le N-1$的$U(k)$和$V(k)$，又由于$N\le k\le 2N-1$时，有$e^{-j\pi k/N}=-e^{-j\pi(k+N)/N}$，所以当$N\le k\le 2N-1$时，令$k=N+l$，则

$$\boxed{\begin{aligned}X(k)&=X(N+l)=U(l)+e^{-j\pi(l+N)/N}V(l)\\&=U(l)-e^{-j\pi k/N}V(l),\quad l=0,1,2,\ldots,N-1\end{aligned}}$$

5.6 利用FFT计算线性卷积和线性相关

■ 利用FFT计算线性卷积

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x(m)h(n-m)}$$

其中，$x(n)$长度为L，$h(n)$长度为M， $L \geq M$

步骤：

1、分别对$x(n)$、$h(n)$补零点至长度至少为N=M+L-1点

2、用FFT求 $H(k)$=FFT[$h(n)$]

3、用FFT求 $X(k)$=FFT[$x(n)$]

4、求 $Y(k)$=$X(k)H(k)$

5、用IFFT求 $y(n)$=IFFT[$Y(k)$]

■ 利用FFT计算线性相关

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n+m)y^*(n)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)y^*(n-m)$$
$$=x(m)*y^*(-m)$$ **(把线性相关转换到卷积表示)**

其中，$x(n)$长度为L，$y(n)$长度为M， $L\geq M$

步骤：

1、将$x(n)$、$y(n)$补零点至长度至少为N=M+L-1点

2、用FFT求 $X(k)$=FFT[$x(n)$]

3、用FFT求 $Y(k)$=FFT[$y(n)$]

4、求 $R_{xy}(k)=X(k)H(k)^*$

5、用IFFT求 $r_{xy}(n)$=IFFT[$R_{xy}(k)$]

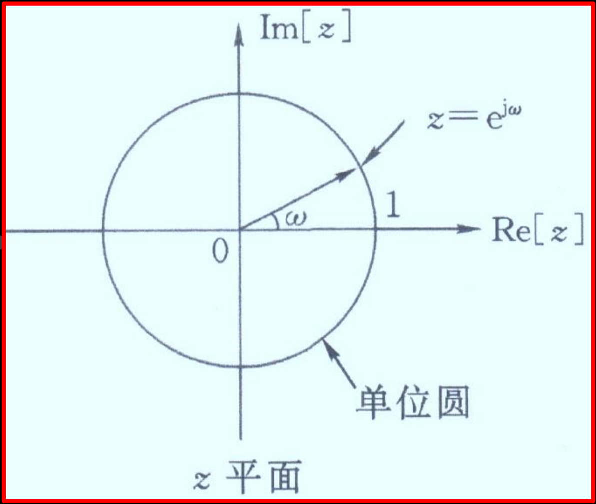
5.7 Chirp-z变换（ZCT）

■ 回顾：DFT与标准z变换的关系

z变换
$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

DFT
$$X(k) = X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}=W_N^{-k}} = X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

- ✓ 在z变换中，$z = re^{j\omega}$，取单位圆 r=1，对单位圆进行等间隔采样 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$，并取结果的主值区间 k=[0, N-1]，得$z = e^{j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^{-k}$，即得DFT



- ✓ 在实际中，有时对一个时间序列的某个频率分段感兴趣，可以使这个分段的采样频率与其它分段不一样

■ Chirp-z变换（ZCT）的定义

z变换

$$Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

在z变换中，使z沿一段螺线作等角采样，即采样点：

$$z_k = AW^{-k}, \qquad k = 0, \cdots, M-1$$

其中 $A = A_0 e^{-j\theta_0}$，$W = W_0 e^{-j\phi_0}$

参数含义：

A_0——起始采样点的矢量半径

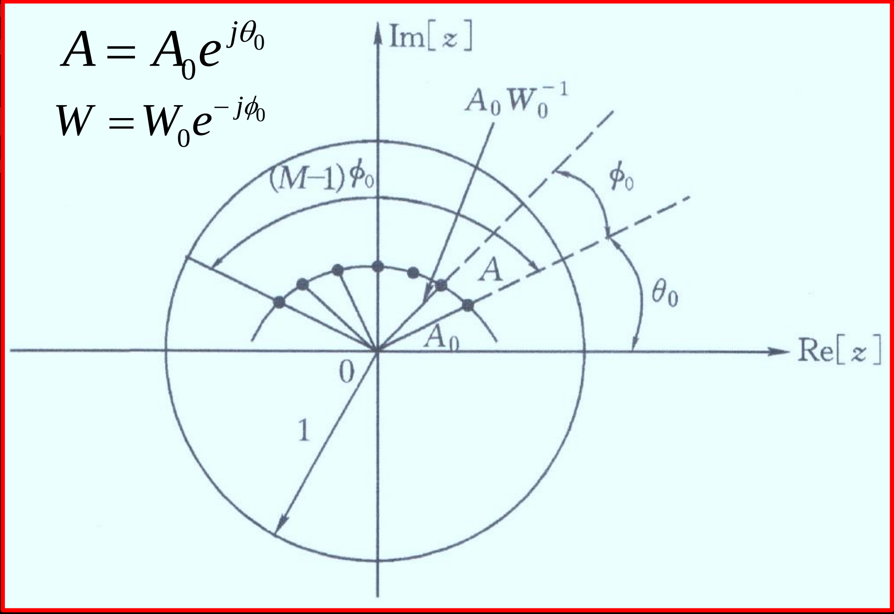
θ_0——起始采样点的相角

ϕ_0——两相邻采样点间的角度差

W_0——螺线的伸展率

$W_0 > 1$时，螺线内缩

$W_0 < 1$时，螺线外伸



对Chirp-z变换 $z_k = AW^{-k}$， $k = 0, \cdots, M-1$，可以看出当取$A = 1$，$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$时，有$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$，$k = 0, \cdots, M-1$， Chirp-$z$变换即退化成为DFT

■ **ZCT的优势**

1、可以只计算单位圆上感兴趣的一小段频谱的采样，而非整个单位圆，这特别适用于高分辨率窄带信号

2、可以计算远离单位圆的任意点处的频谱，特别适用于语音及雷达信号

■ CZT的快速算法

CZT的表达式

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z_k^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk},\quad k=0,\cdots,M-1$$

代入

Bluestein等式

$$kn=\frac{1}{2}\left[n^2+k^2-(k-n)^2\right]$$

得到

$$X(z_k)=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}\right]W^{-\frac{(k-n)^2}{2}}$$

令

$$g(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}$$

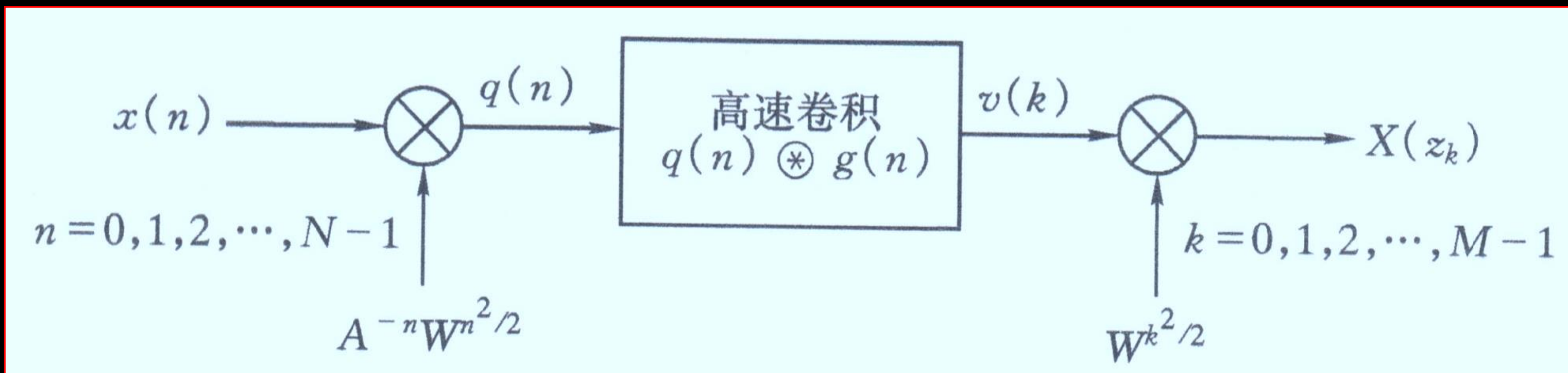
$$h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}}$$

得到

$$X(z_k)=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}g(n)h(k-n)=W^{\frac{k^2}{2}}[g(k)*h(k)]$$

用FFT求解线性卷积即可实现CZT的快速计算

■ 基于卷积计算的CZT变换的运算过程



卷积的长度$L \geq N+M-1$，若取$L=N+M-1$，则有

$$q(n)=\begin{cases} x(n)A^{-n}W^{n^2/2}, & n=0,1,2,\dots,N-1 \\ 0, & n=N,N+1,\dots,L-1 \end{cases}$$

$$g(n)=\begin{cases} W^{-n^2/2}, & 0 \leq n \leq M-1 \\ W^{-(L-n)^2/2}, & L-N+1 \leq n < L \\ \text{任意值} & \text{其他}n \end{cases}$$

本章小结

- FFT算法的基本原理
- 基2 FFT算法的理论推导
- 按时间抽取的FFT算法
- 按频率抽取的FFT算法
- IDFT的快速运算方法
- FFT在线性卷积、相关中的应用