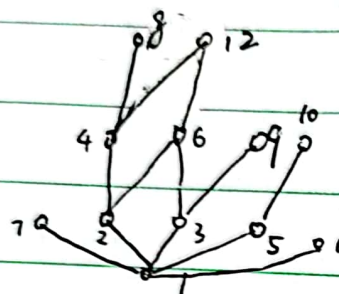


13)



$\{2, 3, 6\}$

最大元素

6

最小元素

6

极大元素

6

极小元素

2, 3

上确界

6

下确界

1

$\{2, 4, 6\}$

6

2

4, 6

2

12

2

$\{4, 8, 12\}$

4

8, 12

4

4

4

4

33. 设 R 是非空集合 X 上的半序关系, $A \subseteq X$,

证明 $R \cap (A \times A)$ 是 A 上的半序关系.

① 证明: $R \cap (A \times A)$ 是自反的.

$\forall x \in A$

有 $(x, x) \in R \wedge (x, x) \in A \times A$

$\Rightarrow (x, x) \in R \cap (A \times A)$

所以 $R \cap (A \times A)$ 是自反的

② 证明 $R \cap (A \times A)$ 是反对称的

反证法, 假设 $R \cap (A \times A)$ 不是反对称的.

即 $\exists x, y \in A, (x, y) \in (R \cap (A \times A)) \wedge (y, x) \in (R \cap (A \times A))$

$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$

$\Rightarrow R$ 是自反的.

与 R 是半序关系矛盾

所以 $R \cap (A \times A)$ 是反对称的.



No: _____

Date: _____

③ 证明 $R \cap (A \times A)$ 是传递的.

$$\forall x, y, z \in A$$

$$(x, y) \in (R \cap (A \times A)) \wedge (y, z) \in (R \cap (A \times A))$$

$$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in (A \times A) \wedge (y, z) \in R \wedge (y, z) \in (A \times A)$$

$$\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \wedge (x, y) \in (A \times A) \wedge (y, z) \in (A \times A)$$

$$\Rightarrow (x, z) \in R \wedge (x, z) \in A \times A \quad (R \text{ 是传递的})$$

$$\Rightarrow (x, z) \in (R \cap (A \times A))$$

所以 $R \cap (A \times A)$ 是传递的

综上 $R \cap (A \times A)$ 是 A 上的半序集



34. 证明: \leq_3 是 $A \times B$ 上的半序关系.

① 证明 \leq_3 是自反关系

$$\forall x \in A, y \in B$$

$$\text{有 } (x, x) \in \leq_1 \wedge (y, y) \in \leq_2$$

$$\Rightarrow ((x, y), (x, y)) \in \leq_3 \quad (\text{定义})$$

所以 \leq_3 是自反关系.

② 证明 \leq_3 是反对称关系.

反证法: 假设 \leq_3 不是反对称关系.

$$\text{即 } \exists x_1 \in A, y_1 \in B, x_2 \in A, y_2 \in B$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \leq_3 \wedge ((x_2, y_2), (x_1, y_1)) \in \leq_3$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) \in \leq_1 \wedge (y_2, x_2) \in \leq_1$$

$$\Rightarrow \leq_1 \text{ 是对称关系}$$

与 \leq_1 是半序关系矛盾

所以 \leq_3 是反对称关系.

③ 证明: \leq_3 是传递关系.

$$\forall (a, b) \in A \times B, (c, d) \in A \times B, (e, f) \in A \times B$$

$$\text{有 } ((a, b), (c, d)) \in \leq_3 \wedge ((c, d), (e, f)) \in \leq_3$$

$$\Rightarrow (a, c) \in \leq_1 \wedge (b, d) \in \leq_2 \wedge (c, e) \in \leq_1 \wedge (d, f) \in \leq_2$$

$$\Rightarrow (a, c) \in \leq_1 \wedge (c, e) \in \leq_1 \wedge (b, d) \in \leq_2 \wedge (d, f) \in \leq_2$$

$$\Rightarrow (a, e) \in \leq_1 \wedge (b, f) \in \leq_2 \quad (\leq_1, \leq_2 \text{ 是传递的})$$

$$\Rightarrow ((a, b), (e, f)) \in \leq_3 \quad \text{所以 } \leq_3 \text{ 是传递的}$$

综上 \leq_3 是 $A \times B$ 上的半序关系



36. 11) 无限集合: 实数上的比较关系 (\mathbb{R}, \leq)

有限集合: $X = \{1, 2, 3\}$ 的整除关系

12) 无限集合 $X = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \in (0, 1)\}$

有限集合 $X = \{1, 2, 5, 8\}$ 中的子集 $\{1, 2\}$

