第三次习题课题目

习题 1. 对正整数 n, 记 n 阶实方阵的全体为 $\mathbb{M}_n$。验证 $\mathbb{M}_n$ 配上矩阵加法和矩阵与实数的数乘，构成了一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

参考解答： 先按照书上的命题 1.1.5 验证该运算满足线性运算的八条法则，然后按照定义 1.1.4 验证 $\mathbb{M}_n$ 关于加法和数乘封闭。

命题 1.1.5 向量加法和数乘满足如下八条运算法则:

1. 加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;
2. 加法交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;
3. 零向量：存在 m 维零向量 $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, 满足 $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$;
4. 负向量：对任意 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, 记 $-\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_m \end{bmatrix}$, 它满足 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$, 称它为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量;
5. 单位数：$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;
6. 数乘结合律：$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$;
7. 数乘关于数的分配律：$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$;
8. 数乘关于向量的分配律：$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

习题 2. 练习 2.1.20:

设 $\mathbb{R}^m$ 中子空间 $\mathscr{M}=\operatorname{span}(a_1,\cdots,a_s),\mathscr{N}=\operatorname{span}(b_1,\cdots,b_t)$, 证明:

$$\mathscr{M}+\mathscr{N}=\operatorname{span}(a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_t)$$

参考解答： 证明两边互相包含即可。

习题 3. 练习 2.1.21：

1. 给定 $m\times n, m\times s$ 矩阵 A,B, 证明, $\mathscr{R}(A)+\mathscr{R}(B)=\mathscr{R}(C)$, 其中 $C=[A \quad B]$.

参考解答:

$$R(C)=Cx=\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=Ax_1+Bx_2=R(A)+R(B)$$

2. 给定 $m\times n, l\times n$ 矩阵 A,B, 证朋, $\mathscr{N}(A)\cap\mathscr{N}(B)=\mathscr{N}(D)$, 其中 $D=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$.

参考解答:

$$\begin{aligned} N(D)=\{x\mid Dx=0\}=\left\{x\mid \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}x=0\right\}&=\{x\mid Ax=Bx=0\} \\ &=\{x\mid Ax=0\}\cap\{x\mid Bx=0\}=N(A)\cap N(B). \end{aligned}$$

习题 4. 给定 $V,W\subset\mathbb{R}^n$。若 $\dim V+\dim W>n$, 则存在 $x\neq 0$ 且 $x\in V\cap W$。

参考解答: 取 V 的一组基 $v_1,\dots,v_p$ 和 W 的一组基 $w_1,\dots,w_q$, 考察方程 $k_1v_1+\cdots+k_pv_p+k_{p+1}w_1+\cdots+k_{p+q}w_q=0$ 。由于 $\dim\mathbb{R}^n=n$ 而 $p+q>n$, 因此上述方程一定有非零解。容易验证 $u=k_1v_1+\cdots+k_pv_p=-k_{p+1}w_1-\cdots-k_{p+q}w_q$ 满足条件。

习题 5. 练习 2.2.16：(Steinitz 替换定理)

设 $S:a_1,\cdots,a_r$ 线性无关, 可被 $T:b_1,\cdots,b_t$ 线性表示, 求证:

1. $r\leqslant t$.

参考解答: 反证, 假设 $t>r$. 设 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix}A$. 由 A 的行数大于列数, 存在 $x\neq 0$ 使得 $Ax=0$. 我们有 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix}x=\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_t \end{bmatrix}Ax=0$, 与 $a_1,\cdots,a_r$ 线性无关矛盾.

2. 可以选择 T 中的 r 个向量换成 S： 得到的新的向量组与 T 线性等价.

参考解答: 将 $a_1,\cdots,a_r$ 扩充为 $a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_t$ 的一个极大线性无关组. 若其中向量不足 t 个, 任取 $b_1,\cdots,b_t$ 中的一些向量补足至 t 个.

习题 6. 练习 2.2.12：

求下列子空间的基和维数.

1. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x-y=0$ 与平面 $x+y-2z=0$ 的交集.

参考解答： 解线性方程组得一组基 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 维数为 1.

2. 空间 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 都垂直的向量组成的子空间.

参考解答： 本问为上一问的同义转述.

3. 齐次线性方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x=0$ 的解集.

参考解答： 解线性方程组得一组基 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 维数为 1.

习题 7. 练习 2.1.24：

以下哪些向量组是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的零空间的基?

参考解答： 该矩阵零空间的基需要满足 3 个条件：线性无关、维数为 2、是原方程组的解。

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

不是一组基

2 . $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

是一组基

3. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

是一组基

4. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

不是一组基

5. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

不是一组基

习题 8. 练习 2.2.14:

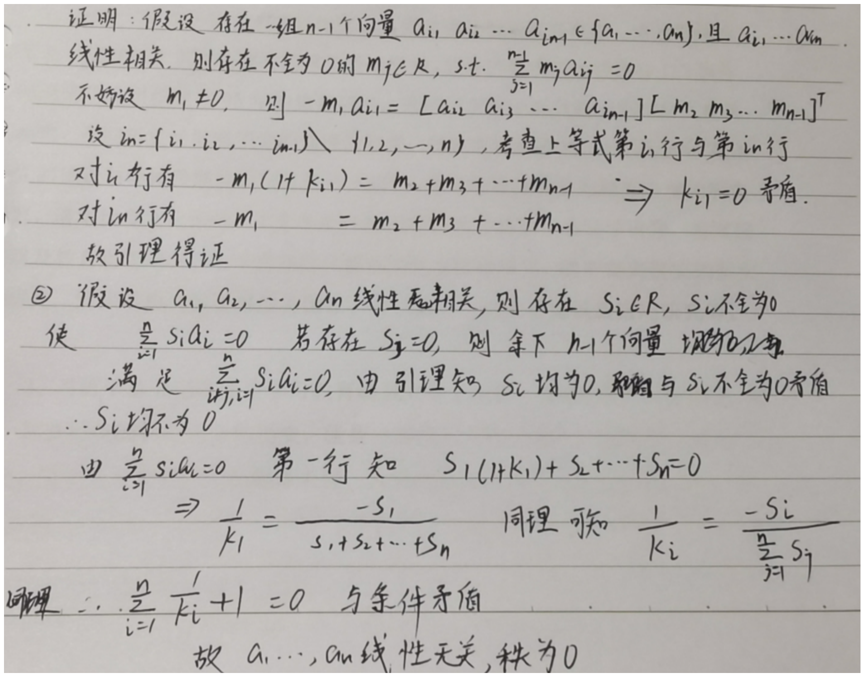
任取非零常数 $k_1 : \cdots, k_n$ 满足 $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} + 1 \neq 0$, 求如下向量组的秩:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1+k_1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+k_2 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \cdots, a_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1+k_n \end{bmatrix}$$

参考解答:

由练习1.6.8, 方阵 $\begin{bmatrix} 1+k_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+k_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+k_n \end{bmatrix}$ 可逆, 故向量组的秩为n.

刘亚希、金洪民两位同学提供了新的解题思路，欢迎同学们在习题课上提出自己的解答。



证明：假设存在一组 $n-1$ 个向量 $a_{i1}, a_{i2} \cdots a_{in-1} \in \{a_1, \cdots, a_n\}$，且 $a_{i1} \cdots a_{in}$ 线性相关. 则存在不全为 0 的 $m_j \in R$, s.t. $\sum_{j=1}^{n-1} m_j a_{ij} = 0$

不妨设 $m_1 \neq 0$，则 $-m_1 a_{i1} = [a_{i2}\ a_{i3}\ \cdots\ a_{in-1}][m_2\ m_3 \cdots m_{n-1}]^T$

设 $i_n = \{i_1, i_2, \cdots i_{n-1}\} \setminus \{1, 2, \cdots, n\}$，考查上等式第 i_1 行与第 i_n 行

对 i_1 行有 $-m_1(1+k_{i1}) = m_2 + m_3 + \cdots + m_{n-1}$ $\Rightarrow k_{i1} = 0$ 矛盾.

对 i_n 行有 $-m_1 = m_2 + m_3 + \cdots + m_{n-1}$

故引理得证

② 假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性~~无~~相关，则存在 $S_i \in R$, S_i 不全为 0

使 $\sum_{i=1}^{n} S_i a_i = 0$ 若存在 $S_j = 0$，则余下 $n-1$ 个向量 ~~[illegible]~~

满足 $\sum_{i \neq j, i=1}^{n} S_i a_i = 0$，由引理知 S_i 均为 0，~~[illegible]~~ 与 S_i 不全为 0 矛盾

$\therefore S_i$ 均不为 0

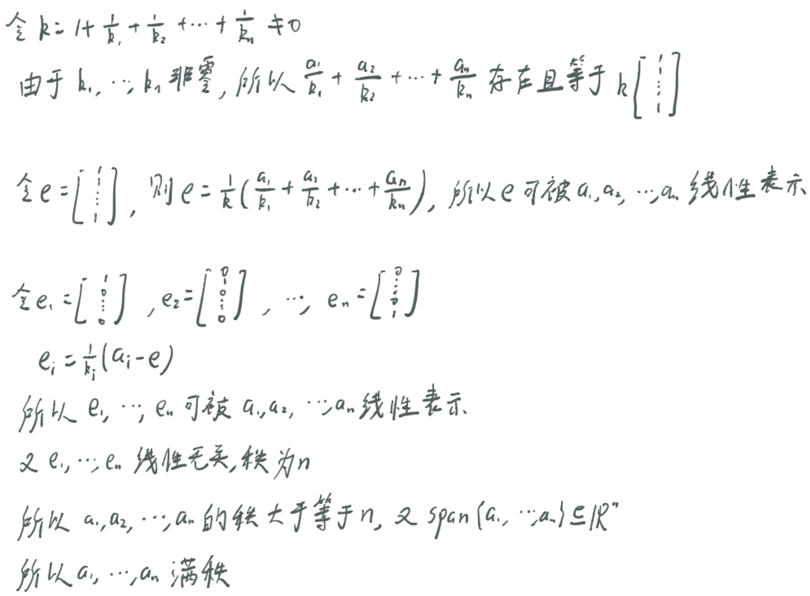
由 $\sum_{i=1}^{n} S_i a_i = 0$ 第一行知 $S_1(1+k_1) + S_2 + \cdots + S_n = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{k_1} = \frac{-S_1}{S_1 + S_2 + \cdots + S_n} \quad \text{同理可知} \quad \frac{1}{k_i} = \frac{-S_i}{\sum_{j=1}^{n} S_j}$$

~~同理~~ $\therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} + 1 = 0$ 与条件矛盾

故 $a_1, \cdots, a_n$ 线性无关，秩为 0

图 1: 刘亚希同学提供的解答



令 $k = 1 + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \neq 0$

由于 $k_1, \cdots, k_n$ 非零，所以 $\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} + \cdots + \frac{a_n}{k_n}$ 存在且等于 $k\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

令 $e = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$，则 $e = \frac{1}{k}\left(\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} + \cdots + \frac{a_n}{k_n}\right)$，所以 e 可被 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性表示

令 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\cdots$, $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$e_i = \frac{1}{k_i}(a_i - e)$

所以 $e_1, \cdots, e_n$ 可被 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性表示

又 $e_1, \cdots, e_n$ 线性无关，秩为 n

所以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的秩大于等于 n，又 $\mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$

所以 $a_1, \cdots, a_n$ 满秩

图 2: 金洪民同学提供的解答

习题 9. 练习 2.1.6：

判断下列 A,B 是否具有相同的列空间、零空间。证明或举出反例.

1. A 为任意矩阵, B 分别为 $2A,\begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix},\begin{bmatrix} A & AC \end{bmatrix},\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix},\begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix},PA,AQ,$ 其中 P,Q 可逆.

参考解答： $2A$: 相同, 相同.

$[A \quad A]$: 相同, 不同.

$[A \quad AC]$: 相同, 不同.

$\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$: 不同, 相同.

$\begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix}$: 不同, 相同.

$\begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$: 不同, 不同.

PA : 不同, 相同.

AQ : 相同, 不同.

2. A 为 n 阶方阵, B 分别为 $A+I_n,A^2,A^\top$.

参考解答： $A+I_n$: 不同, 不同.

A^2 : 不同, 不同.

A^T : 不同, 不同. 反例自举.

习题 10. 对于下列 $\mathbb{M}_n$ 的各子集，分别判断它们是否构成一个线性子空间。

1. $\{A \in \mathbb{M}_n : A = -A^T\}$.
2. $\{A \in \mathbb{M}_n : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, 其中 $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ 称为 A 的迹。
3. $\{A \in \mathbb{M}_n : A$ 与 B 可交换$\}$，其中 B 是给定的一个 n 阶方阵。
4. $\{A \in \mathbb{M}_n : Ax = b$ 有解$\}$，其中 b 是给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量。
5. $\{A \in \mathbb{M}_n : b \in N(A)$ 且 $b \in N(A^T)\}$, 其中 b 是给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量。

参考解答： (1) 按照定义 1.1.4 验证即可，是；

(2) 是；

(3) 是；

(4) 当 b 为零向量时，答案为是，否则为否;

(5) 是。

习题 11. 练习 2.1.19：(子空间的和)

设 M,N 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，定义集合:

$$M+N := \{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n} \mid m \in M, \boldsymbol{n} \in N\}$$

证明，

1. 集合 $M+N$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 称为子空间 M 与 N 的和.

参考解答： 验证 $0 \in M+N$ 以及 $M+N$ 对加法和数乘封闭（按照定义 1.1.4 验证）.

2. 交集 $M \cap N$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间：称为子空间 M 与 N 的交.

参考解答： 验证 $0 \in M \cap N$ 以及 $M \cap N$ 对加法和数乘封闭（按照定义 1.1.4 验证）.

3. 集合的交与并满足 $(S_1 \cup S_2) \cap S_3 = (S_1 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_3)$. 证明或举出反例：子空间的交与和满足 $(M+N) \cap W = (M \cap W) + (N \cap W)$.

参考解答： 验证两边相等即可。

$(M+N) \cap W = (M \cap W) + (N \cap W)$ 不正确.

反例: 对线性无关的两向量 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

令 $M = \operatorname{span}(e_1) = \{k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R}\}, N = \operatorname{span}(e_2) = \{k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R}\}$,

令 $W = \operatorname{span}(e_1+e_2) = \{k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R}\}$.

所以 $(M+N) = \mathbb{R}^2, (M+N) \cap W = W = \{k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R}\}$

而 $M \cap W = \mathbf{0}, N \cap W = \mathbf{0}, M \cap W + N \cap W = \mathbf{0}$.

4. 集合的交与并满足 $(S_1 \cap S_2) \cup S_3 = (S_1 \cup S_3) \cap (S_2 \cup S_3)$. 证明或举出反例：子空间的交与和满足 $(M \cap N) + W = (M+W) \cap (N+W)$

参考解答： 验证两边相等即可。

$(M \cap N) + W = (M+W) \cap (N+W)$ 不正确.

反例: 对线性无关的两向量 e_1, e_2, 令 $M = \operatorname{span}(e_1), N = \operatorname{span}(e_2), W = \operatorname{span}(e_1 + e_2)$.
则 $(M \cap N) + W = \mathbf{0} + W \neq \operatorname{span}(e_1, e_2) = \operatorname{span}(e_1, e_2) + \operatorname{span}(e_1, e_2) = (M + W) \cap (N + W)$