期中考试模拟题（十一）答案 2023.4

一、1. D　2.A　3. D　4. B　5. C　6. C　7. D　8. C　9. B　10. D

二、1、0.9　2、$C_4^2 p^3(1-p)^2$　3、e^{-5}　4、$N(1,9)$　5、$\frac{2}{3}$

三、A 表示“仪器出现故障”，B_i 表示“有 i 个元件出现故障”，i=1,2,3.

（1）$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$，　$P(B_1)=3\times0.2\times0.8^2=0.384$，

$P(B_2)=3\times0.2^2\times0.8=0.096$，$P(B_3)=0.2^3=0.008.$

$P(A)=0.384\times0.3+0.096\times0.6+0.008\times0.95=0.1804$

（2）$P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{0.096\times0.6}{0.1804}=0.3193$

四、（1）$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$，$\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\pi=1$，　$A=\frac{1}{\pi}$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{2}+\frac{\arcsin(x)}{\pi}, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge1\end{cases}$

（3）$Y=\arcsin X$ 的概率密度

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-(\sin y)^2}}\bullet|\sin(y)'|, & \arcsin(-1)<y<\arcsin(1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

五、$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其　他}\end{cases}$，当 $X=x\,(0<x\le1)$ 时，Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & 0<x<1,x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\frac{1}{1-x}dx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^{\frac{z}{2}}\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-\frac{z}{2})=\ln 2-\ln(2-z), & 0<z<1\\ \int_{z-1}^{\frac{z}{2}}\frac{1}{1-x}dx=\ln(2-z)-\ln(1-\frac{z}{2})=\ln 2, & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（3）$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}\frac{1}{1-x}dy=1-\ln 2$.

六、 $F(y)=\begin{cases}1-e^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

(1) $P\{X_1=0\}=P\{Y\le 1\}=F(1)=1-e^{-1}$, $P\{X_1=1\}=P\{Y>1\}=1\text{-}P\{Y\le 1\}=e^{-1}$.

$P\{X_2=0\}=P\{Y\le 2\}=F(2)=1-e^{-2}$, $P\{X_2=1\}=P\{Y>2\}=1-F(2)=e^{-2}$.

（2）$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=F(1)=1-e^{-1}$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=P\{\Phi\}=0$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=F(2)-F(1)=e^{-1}-e^{-2}$

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=1-F(2)=e^{-2}$

（3）$P\{X_1=0,X_2=0\}\ne P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}$，所以 X，Y 不独立.

（4）$P\{X_1=0|\ X_2=0\}=\dfrac{P\{X_1=0,X_2=0\}}{P\{X_2=0\}}=\dfrac{1-e^{-1}}{1-e^{-2}}$,

$P\{X_1=1|\ X_2=0\}=\dfrac{P\{X_1=1,X_2=0\}}{P\{X_2=0\}}=\dfrac{e^{-1}-e^{-2}}{1-e^{-2}}$

七、（1）$P\{X>\frac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$，$Y$ 服从二项分布 $B(4,\frac{1}{2})$.

（2）$EY^2=DY+(EY)^2=npq+(np)^2=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+(4\times\frac{1}{2})^2=5$.