第三章 z 变换

本章的学习要求：

- 理解 z 变换的定义
- 清楚 z 变换与离散时间傅里叶变换之间的关系
- 掌握利用极-零点分布对系统频域特性进行分析的方法
- 应用系统函数（对应时域的系统单位采样响应）描述线性时不变系统

为什么要引入 z 变换?

- 对一些不满足绝对可加条件的常用信号，如$u(n)$和$nu(n)$等，其离散时间傅里叶变换不存在
- 用傅里叶变换分析系统响应时，系统初始状态在变换式中无法体现，只能求系统的零状态响应
- 傅立叶反变换的积分计算困难
- 将时域的差分方程变换成频域的代数方程求解

3.1 z变换的定义及收敛域

3.1.1 z变换的定义

- 一个序列$x(n)$的离散时间傅里叶变换定义为

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- 一个序列$x(n)$的z变换用下面的罗朗级数形式定义（z是一个连续复变量，它把序列$x(n)$变换为函数$X(z)$）。

$$\boxed{Z[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}}$$ （双边z变换）

$$\boxed{Z[x(n)] = X_{\mathrm{I}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}}$$ （单边z变换）

当$x(n)$=0，n<0时，双边z变换与单边z变换是等效的；除非特别说明，本课程讨论的z变换均指双边z变换。

3.1.2 z变换与离散时间傅里叶变换的关系

序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

将 z 写成极坐标变量形式，即 $z = re^{j\omega}$

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)r^{-n}]e^{-j\omega n}$$

比较

当 $r=1$ 时，上式就是 $x(n)$ 的离散傅里叶变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

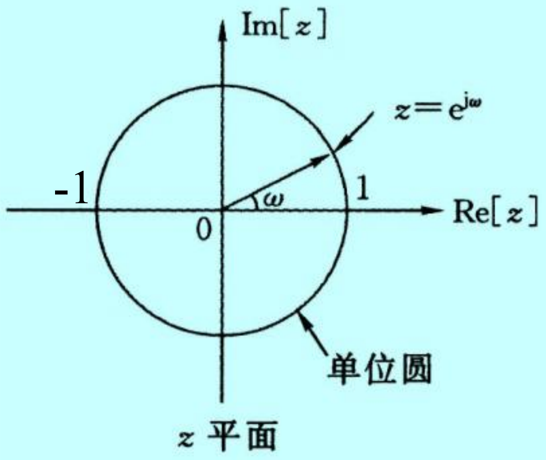
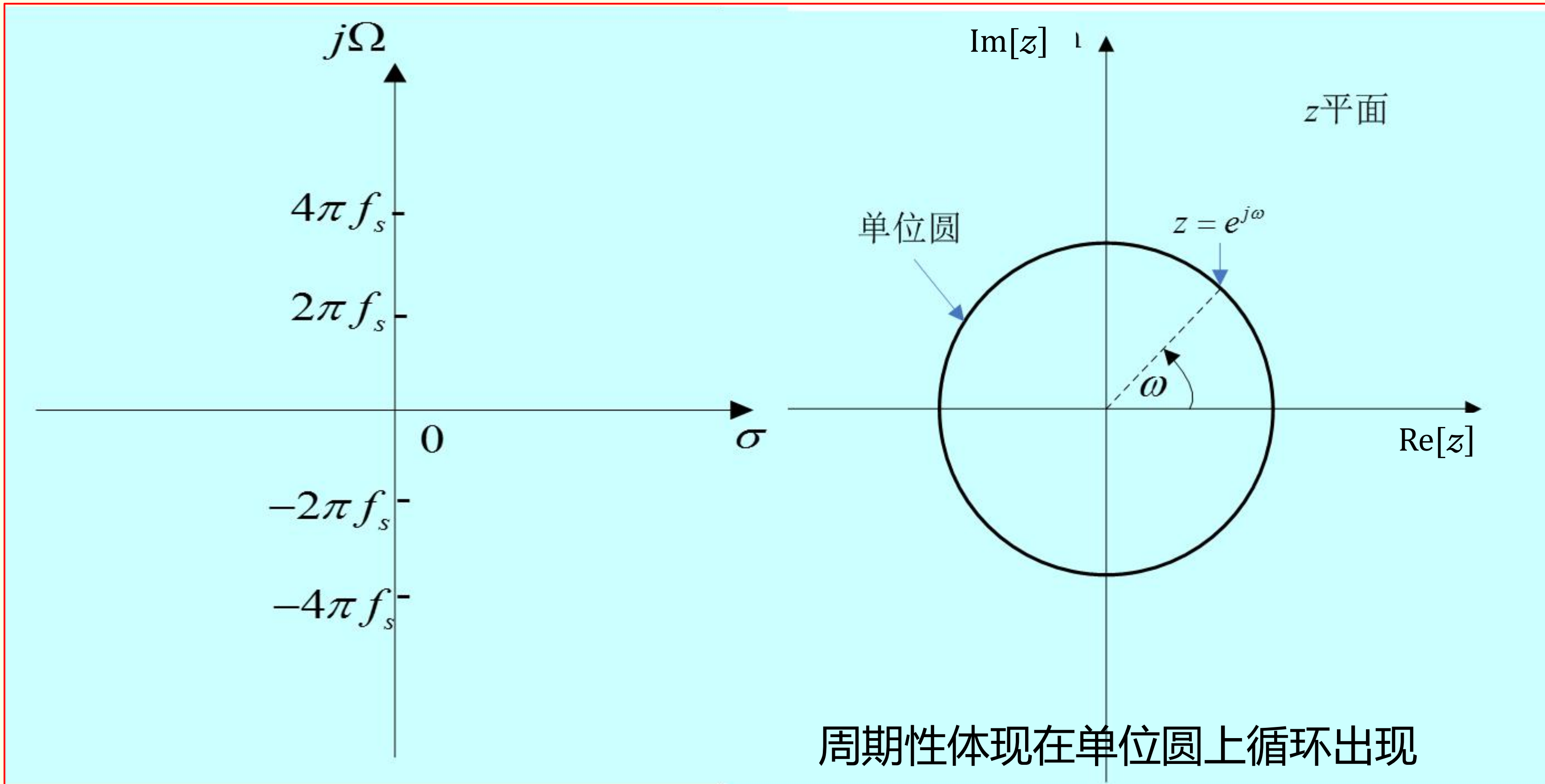


图 3.1 复数 z 平面的单位圆

数字频率 ω 表示 z 平面的幅角：z=1到 z = -1 对应 ω 从 0 到 π，得到 [0，π] 的离散时间傅里叶变换， ω 再从 π 到 2π，回到z=1，等效于[-π，0] 的离散时间傅里叶变换；于是得到 [-π，π]的离散时间傅里叶变换。

单位圆上（r =1）的z变换对应原序列$x(n)$的离散时间傅里叶变换



z 平面上 2π 弧度的改变相当于绕单位圆一次，重新回到原来的同一点上，傅里叶变换在频率上固有的周期性在这里形象地得到理解

3.1.3 z 变换的收敛域

z 变换的收敛域：对于任意给定序列$x(n)$，使其 z 变换的级数收敛的所有 z 值的集合。只有当级数收敛时，z 变换才有意义。

[例1] 求指数序列$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$的$z$变换。

解：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

[例2] 求指数序列$x(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$ 的z变换。

解：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)\right]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}z\right]^{-n}=-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}z}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}z}$$

$$=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}},\quad |z|<\frac{1}{2}$$

结论：不同的序列可能具有相同的 z 变换表达式，但收敛域不一样；所以只给出 z 变换的闭合表达式是不够的，必须同时给出收敛域范围，才能唯一确定一个序列（研究收敛域的重要性）

z 变换的收敛条件与收敛域

离散时间傅里叶变换的一致收敛要求序列是绝对可加的。由于$x(n)$的z变换是一个无穷级数，也存在收敛和发散的问题，仅当级数收敛时，才可将 $X(z)$ 表示成一个闭合形式。z变换的收敛条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty \qquad \text{(满足绝对可加条件)}$$

使上式成立的所有z值的集合称为 $X(z)$的收敛域，不同形式的序列，其收敛域不同。

如何确定任意序列$x(n)$的z变换收敛域

对于任意给定序列$x(n)$，使其z变换的收敛条件：指数加权后的序列绝对可加，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)r^{-n}|<\infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}|\leq\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)r^{-n}|$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}|x(n)|r^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|r^{-n}=\boxed{\sum_{m=1}^{\infty}|x(-m)|r^{m}+\sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|r^{-n}}<\infty$$

两个和式为有限值，则无穷级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|$ 也为有限值，即级数收敛。

$$\sum_{m=1}^{\infty}|x(-m)|\,r^{m}+\sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|\,r^{-n}<\infty$$

要使上式为有限值，给出三个正数：

(1) z变换负指数幂的收敛半径 R_{x-}

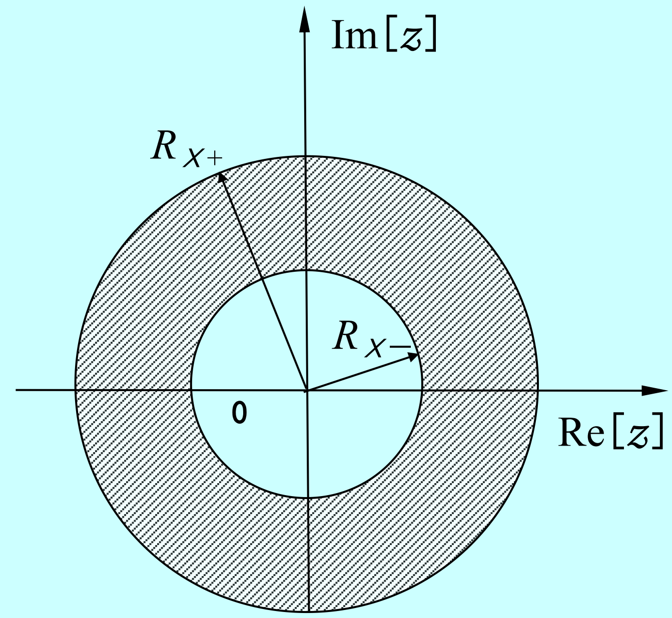
(2) z变换正指数幂的收敛半径 R_{x+}

(3) 一个有限值M

并在$n\geq 0$时，使$|x(n)|< MR_{x-}^{n}$，

在$n<0$时，使$|x(n)|< MR_{x+}^{n}$，即有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|\leq M|\sum_{m=1}^{\infty}R_{x+}^{-m}r^{m}+\sum_{n=0}^{\infty}R_{x-}^{n}r^{-n}|$$



双边序列的收敛域

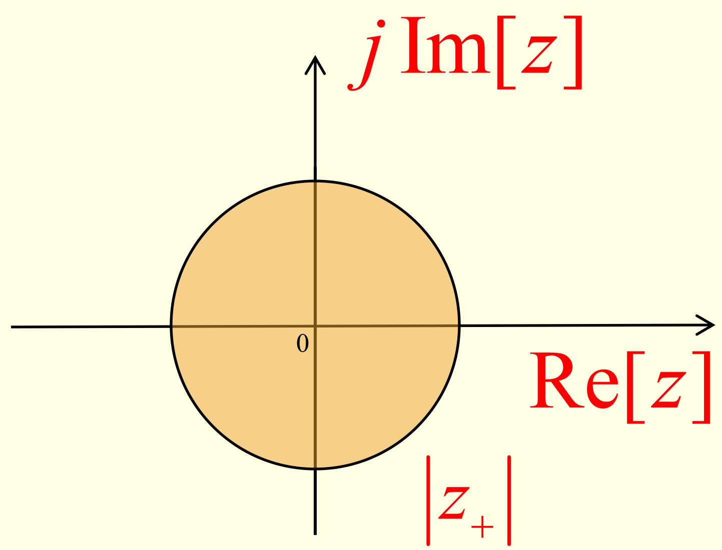
$R_{x-}<|z|<R_{x+}$

收敛域分别是以R_{x-} 和 R_{x+}为半径的两个圆组成的环状域，R_{x-}和 R_{x+}称收敛半径，R_{x+}可以大到无穷大， R_{x-}可以小到0。

预备知识

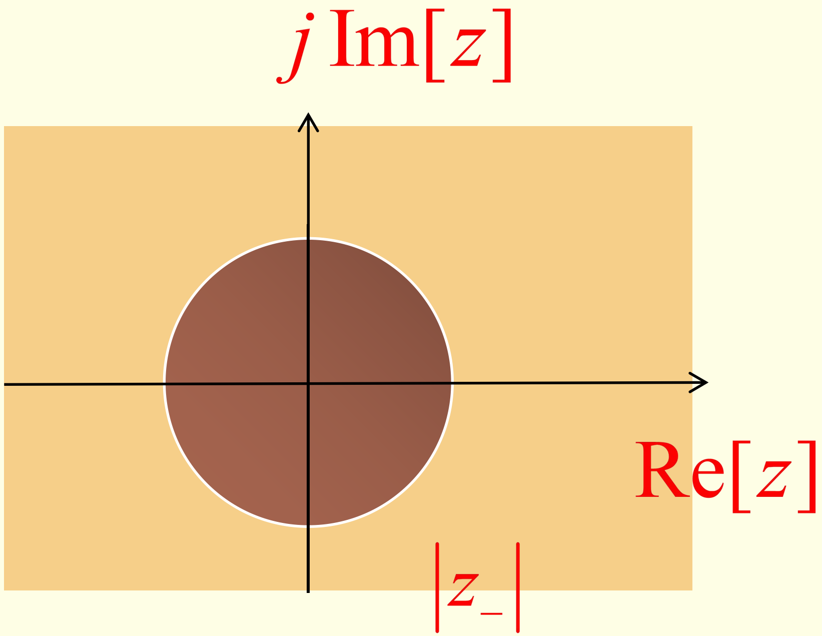
阿贝尔定理:

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{n}$ ，在 $z = z_{+} (\neq 0)$ 收敛，那么，满足 $0 \leqslant |z| < |z_{+}|$ 的z，级数必绝对收敛。$|z_{+}|$ 为最大收敛半径。



同样, 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$ ，满足 $|z_-| < |z| \le \infty$

的Z， 级数必绝对收敛。 |Z_|为最小收敛半径。

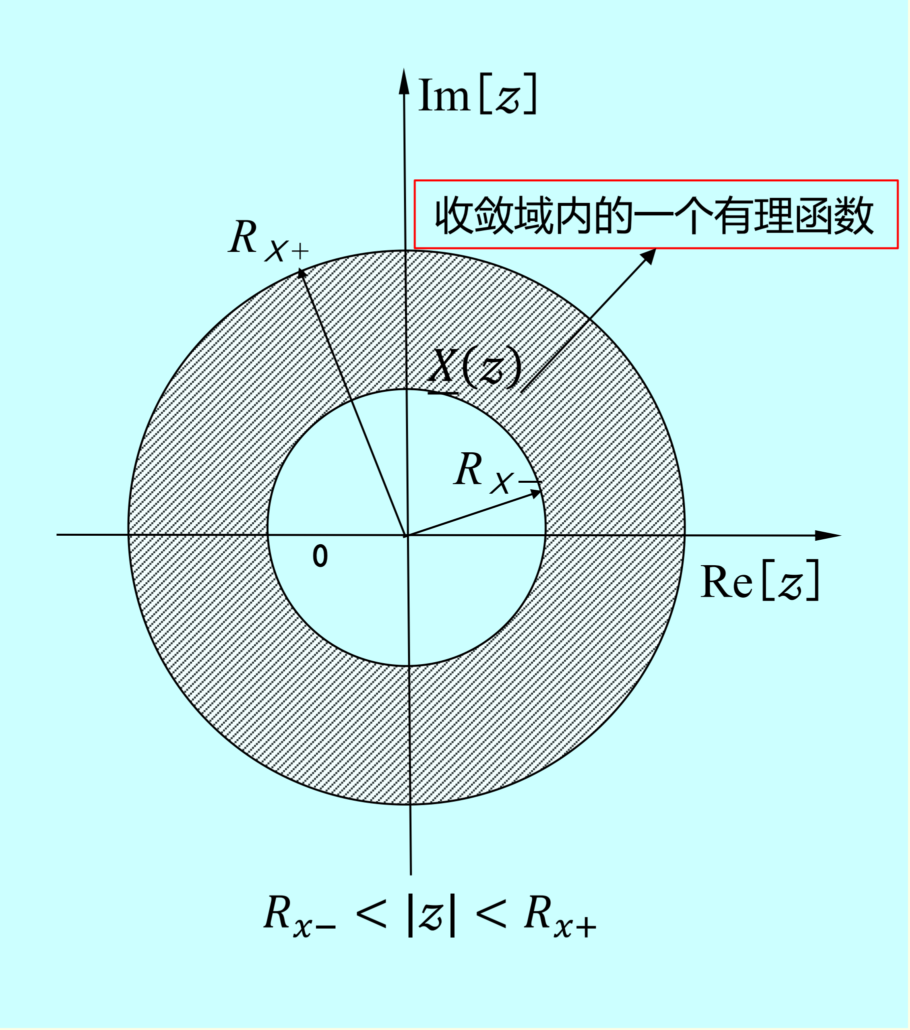


z 变换的零点与极点

若 z 变换的无穷项求和可表示为收敛域内的一个有理函数，其分子多项式与分母多项式的根分别是 $X(z)$ 的零点与极点

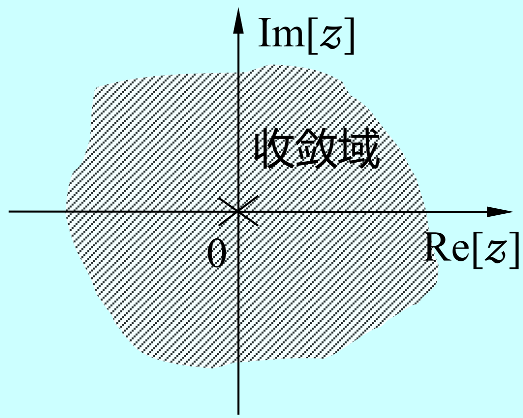
$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

收敛域中不能包含极点，极点使$X(z)$变为无穷大，收敛域以极点（用“×”表示）作为边界



■ 有限长序列

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & n_1<n<n_2\\ 0, & n\text{为其它值}\end{cases}$$



有限长序列的收敛域

$0<|z|<\infty$

其 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

$$0<|z|<\infty$$

因为 $x(n)$ 是有界序列，它是有限项求和，显然在 $0<|z|<\infty$ 上都满足收敛条件，收敛域至少是有限z平面 $(0，\infty)$，$z=0$ 处为极点; 在 $n_1\geq 0$ 或$n_2\leq 0$ 时，收敛域可能包含 $|z|=\infty$ 或 $|z|=0$，即

$$0<|z|\leq\infty,\quad n_1\geq 0\ \text{或}0\leq|z|<\infty,\quad n_2\leq 0$$

例　矩形序列是一个有限长序列，$x(n)=R_N(n)$，求其$X(z)$

解

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

收敛域：$0<|z|\le\infty$

从上式的分母可知在$z=1$处有一个极点，但是从分子式子看出$z=1$处有一个零点，零极点刚好对消。

■ 右边序列

当$n < n_1$时，$x(n)$ =0的序列，即

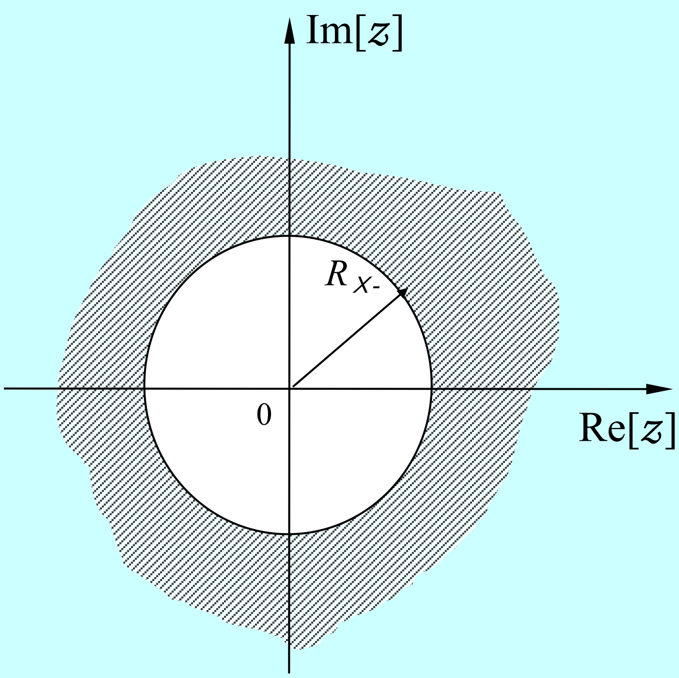
$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n \ge n_1 \\ 0, & n < n_1 \end{cases}$$

其z变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

有限长序列，其收敛域为有限z平面

z的负幂级数，其收敛域为$R_{x-}<|z|<\infty$



右边序列的收敛域

若R_{x-}是收敛域的最小半径，则右边序列z变换的收敛域

$$R_{x-} < |z| < \infty$$

对于所有右边序列，只要其样本有限，其z变换一定收敛 （讨论）

例 求右边序列$x(n)=a^n u(n)$的z变换及收敛域

解

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

$$=1+az^{-1}+(az^{-1})^2+\cdots+(az^{-1})^n\cdots$$

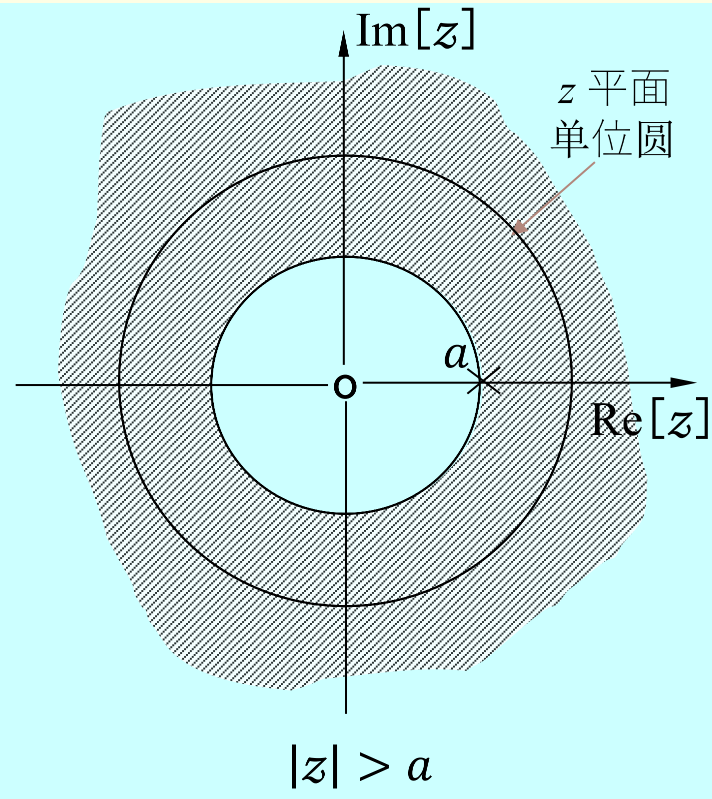
当$|z|>|a|$时，这是无穷递减数列

无穷递减数列求和公式

$$S=\frac{a_1}{1-q}\quad (a_1\text{是等比数列的首项})$$

$$q=az^{-1},\ S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

$z=0$处有一个零点(用“o”表示)，$z=a$为极点，在圆$|z|=|a|$外，$X(z)$为解析函数，故收敛。



收敛域一定在模最大的极点所在的圆外

■ 左边序列

当 $n > n_2$时，$x(n) = 0$ 的序列，即

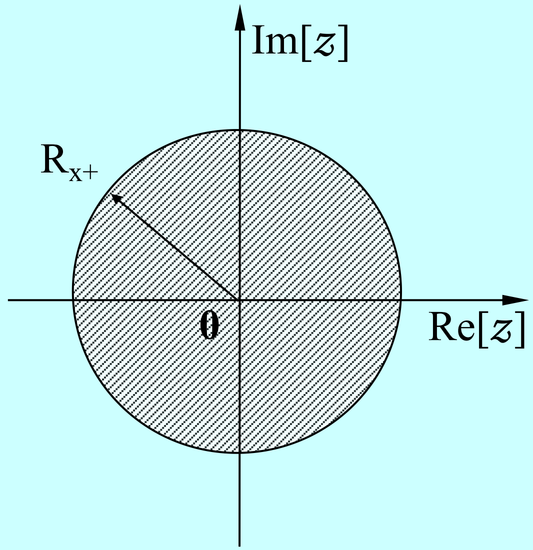
$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n \le n_2 \\ 0, & n > n_2 \end{cases}$$

其z变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} x(n)z^{-n} + \sum_{n=1}^{n_2} x(n)zz^{-n}$$

z 的正幂级数，其收敛域为 $0 <| z |< R_{x+}$

有限长序列，其收敛域为有限 z 平面



左边序列的收敛域

左边序列z 变换的收敛域: $0 < |z| < R_{x+}$

当$n_2 > 0$时，收敛域不包括 $z = 0$，即 $0 < |z| < R_{x+}$

当$n_2 \le 0$时，收敛域包括 $z= 0$，即 $|z| < R_{x+}$ (讨论)

■ 双边序列

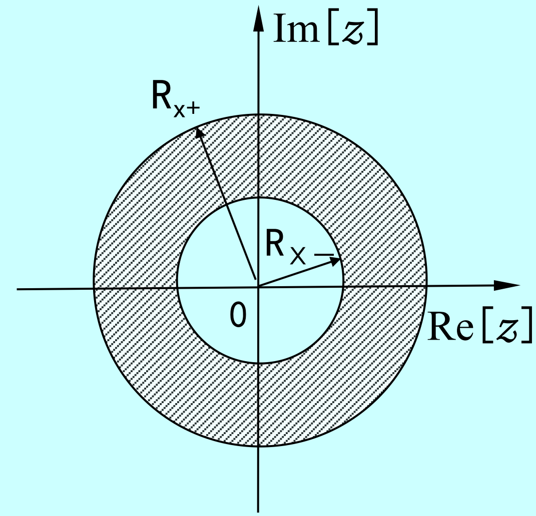
双边序列$x(n)$是从$-\infty$延伸到∞的序列，其z变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)zz^{-n}$$

左边序列，其收敛域为 $|z|<R_{x+}$

右边序列，其收敛域为 $|z|>R_{x-}$



若满足$R_{x-}<R_{x+}$，则双边序列的 z 变换的收敛域

$$R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

可以看做一个左边序列和一个右边序列之和，因此双边序列z变换的收敛域是这两个序列z变换的公共收敛区间。

例　求序列$x(n)=a^{|n|}$的z变换及收敛域，其中$|a|<1$。

解　$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

第一部分的收敛域为

$|az|<1$，即 $|z|<\dfrac{1}{|a|}$

第二部分的收敛域为

$|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$

已知$|a|<1$，所以

$$X(z)=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})},$$

收敛域为

$$|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

（举例）

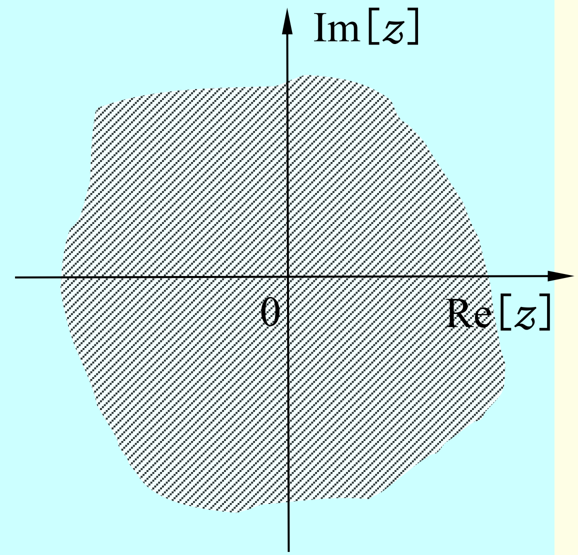
例 求序列$x(n)=\delta(n)$的 z 变换及收敛域。

解 这可看作 $n_1=n_2=0$ 时的有限长序列

$$Z[\delta(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)\,z^{-n}=z^0=1$$

其收敛域应包括 $|z|=0$，$|z|=\infty$，

即 $0\le|z|\le\infty$，充满整个 z 平面。



单位采样序列的收敛域

$0\le|z|\le\infty$

z 变换收敛域的特性

- 假设序列$x(n)$ 的 z 变换的代数表达式$X(z)$是有理函数，而序列$x(n)$ 除了可能在 $n=\infty$或 $n=-\infty$ 外，都有有限的幅度，则有

1. 收敛域是z 平面上以原点为中心的圆环（或圆盘），即$R_{x-} < |z| < R_{x+}$;
2. 当且仅当序列 $x(n)$ 的 z 变换的收敛域包含单位圆时，序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换才绝对收敛;
3. 收敛域内没有任何极点;
4. 收敛域必然是一个连通的区域。

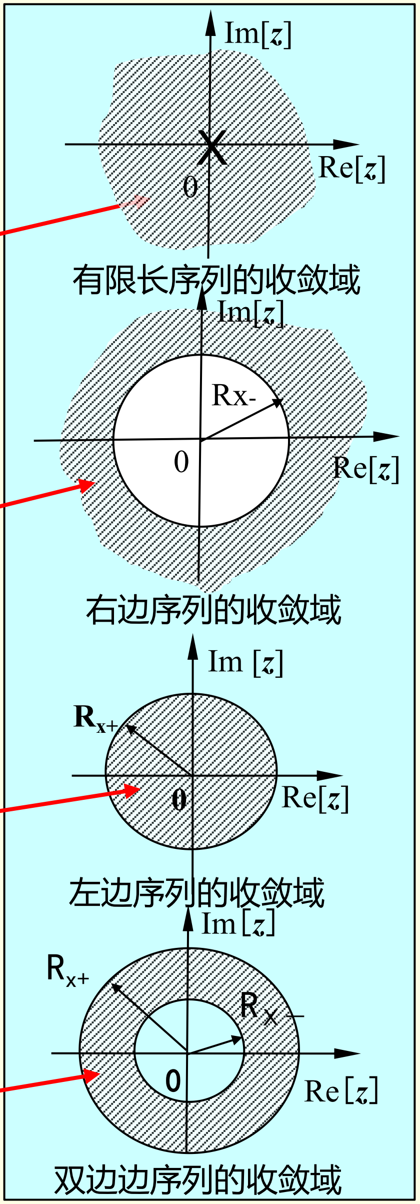
- 假设序列$x(n)$ 的z变换的代数表达式$X(z)$是有理函数，而序列$x(n)$ 除了可能在 $n=\infty$或 $n=-\infty$ 外，都有有限的幅度，则有

1、有限长序列$x(n)$ 的z变换的收敛域就是整个 z 平面，可能 $z=0$ 或 $z=\infty$除外

2、右边序列$x(n)$的收敛域是由$X(z)$的最外侧极点向外延伸至 $z=\infty$ （可能包含$z=\infty$）

3、左边序列$x(n)$的收敛域是由$X(z)$的最内侧非零极点向内延伸至 $z=0$ （可能包含$z=0$ ）

4、双边序列$x(n)$的收敛域是 z平面内的一个圆环，内外边界由其极点确定（ $R_{x-}<|z|<R_{x+}$ ）



3.2 z 反变换

- z变换的重要作用之一是分析离散时间线性系统的暂态响应。这种分析往往涉及求序列的z变换，然后将z变换的代数表达式经过某种运算处理后，再进行z反变换得到处理后的序列
- 已知序列$x(n)$的 z 变换及其收敛域，求序列$x(n)$称为 z 反变换，记作

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

求解 z反变换的三种基本方法：

围线积分法（留数定理方法）

部分分式展开法

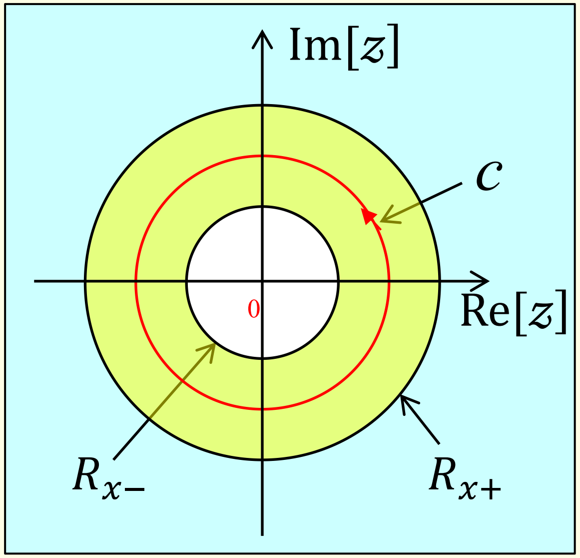
幂级数展开法

■ 围线积分法

柯西积分公式

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{k-1}dz=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

(c为逆时针绕原点一周的闭合曲线)



z变换的定义

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$
$$R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

两边乘以z^{k-1}，在收敛域内计算围线积分

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\,z^{k-1}\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{k-n-1}\mathrm{d}z$$

根据柯西积分公式，以及上式右边只有在$n=k$时不等于零，于是

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}dz=x(k)\quad \text{即}\quad x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

（讨论）

用留数定理求解围线积分法

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

围线积分是沿曲线c进行的，曲线c是收敛域 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$中一条逆时针的封闭曲线。

直接计算围线积分非常麻烦，一般用柯西留数定理求解，即

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z = \sum_i \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]\,|_{z=z_i}$$

Res$[X(z)z^{n-1}]|_{z=z_i}$表示$X(z)z^{n-1}$在围线 c 内极点z_i上的留数值（$\{z_i\}$是围线 c 内所有极点的集合）

通常，$X(z)z^{n-1}$是 z 的有理函数，$X(z)z^{n-1}$可以表示成

$$X(z)z^{n-1} = \frac{\Phi(z)}{(z-z_i)^s}$$

$X(z)z^{n-1}$表示式重写如下

$$\boxed{X(z)z^{n-1}=\frac{\Phi(z)}{(z-z_i)^s}}$$

若z_i是 s 阶极点， $\Phi(z)$在 $z=z_i$处没有极点， 则$X(z)z^{n-1}$在 $z=z_i$处的留数为

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]|_{z=z_i}=\frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{s-1}\Phi(z)}{\mathrm{d}z^{s-1}}\right]|_{z=z_i}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^{s-1}}{\mathrm{d}z^{s-1}}[(z-z_i)^s X(z)z^{n-1}]\,|_{z=z_i}$$

若 z_i为一阶极点时，即$s=1$，则上式直接写为

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_i}=[(z-z_i)X(z)z^{n-1}]|_{z=z_i}=\Phi(z)$$

■ 收敛域与围线内的极点

[例1] $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|>|a|$

$$x(n)=\frac{1}{j2\pi}\oint_c \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{j2\pi}\oint_c \frac{z^n}{z-a}\mathrm{d}z$$

$n\geq 0$时围线c内包含极点a；

$n<0$时在$z=0$处另有一个n阶极点；

$$x[n]=\begin{cases}\mathrm{Res}\left[\dfrac{z^n}{z-a},a\right], & n\geq 0\\ \mathrm{Res}\left[\dfrac{z^n}{z-a},a\right]+\mathrm{Res}\left[\dfrac{z^n}{z-a},0\right], & n<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}a^n, & n\geq 0\\ a^n-a^n=0, & n<0\end{cases}$$

[例2] $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|<|a|$

$$x(n)=\frac{1}{j2\pi}\oint_c \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{j2\pi}\oint_c \frac{z^n}{z-a}\mathrm{d}z$$

$n\geq 0$时围线c内不包含极点；

$n<0$时在$z=0$处有n阶极点；

$$x[n]=\begin{cases}0, & n\geq 0\\ -\mathrm{Res}\left[\dfrac{z^n}{z-a},0\right], & n<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & n\geq 0\\ -a^n, & n<0\end{cases}$$

可以看到收敛域不同，对应的序列不同。

例　已知 $X(z)=\dfrac{z^2}{\left(4-z\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$，$\dfrac{1}{4}<|z|<4$，求$X(z)$的反变换

解

$$X(z)\cdot z^{n-1}=\frac{z^{n+1}}{\left(4-z\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

(1) 当$n\geq-1$时, z^{n+1}不会在z=0 构成极点，所以这时围线c内只有一个一阶极点$z_i=\frac{1}{4}$, 因此

$$x(n)=\mathrm{Res}[z^{n+1}/(4-z)(z-\frac{1}{4})]_{z=\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{4-\frac{1}{4}}=\frac{1}{15}\cdot 4^{-n},\quad n\geq-1$$

(2) 当$n\le -2$时，$X(z)z^{n-1}$中的z^{n+1}在z=0构成n+1阶极点。

因此围线C内有极点：z=1/4(一阶)，z=0为(n+1) 阶极点；

而在围线C外仅有z=4 (一阶) 一个极点，因此

$$x(n) = -\operatorname{Res}[z^{n+1}/(4-z)(z-\frac{1}{4})]_{z=4}$$

$$= \frac{(4)^{n+1}}{4-\frac{1}{4}} = \frac{1}{15}\cdot 4^{n+2},\ \ n\le -2$$

进一步得到

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{15}4^{-n}, & n\ge -1 \\ \frac{1}{15}4^{n+2}, & n\le -2 \end{cases}$$

■ 当$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]|_{z=z_i} = \frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{s-1}\Phi(z)}{\mathrm{d}z^{s-1}}\right]|_{z=z_i}$ 有N阶极点，需要求导N-1次，比较麻烦，可以通过留数辅助定理来计算曲线c外面极点的留数之和。

设在z平面上有N个极点，围线c将它们分成两部分：N_1个c内极点z_{1k}和N_2个c外极点z_{2k}

$$N = N_1 + N_2$$

可用下式计算留数之和

$$\sum_{k=1}^{N_1}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]|_{z=z_{1k}} = -\sum_{k=1}^{N_2}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]|_{z=z_{2k}}$$

条件：$X(z)z^{n-1}$ 的分母的阶次比分子的阶次在二阶以上

■ 部分分式法

一个N阶的z函数可用N阶的降幂的分子分母的实系数多项式表示

$$X(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_i z^{-1}}{1+\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-1}},\qquad |z|>\max[|p_i|]$$

- 将$X(z)$分解为几个分式的和，使各分式具有 $\frac{a}{(z+A)^k}$ 或 $\frac{ax+b}{(x^2+Ax+B)^2}$ 部分分式形式，其中x^2+Ax+B是实数范围内的不可约多项式，而且k是正整数，这时称各分式为原分式的“部分分式”
- 然后求出各部分分式的z反变换（基本z变换对的公式可查表)，将各反变换相加，即得到$x(n)$

如果$X(z)$只有N个一阶极点，则$X(z)$可表示为

$$X(z)=A_0+\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i z}{z-p_i}$$

可进一步写成

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_0}{z}+\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{z-p_i}$$

A_0、A_i分别为$X(z)/z$在$z=0$、$z=p_i$处极点的留数，即

$$A_0=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z},0]=X(0)$$

$$A_i=\mathrm{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}=\left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}=(1-p_i z^{-1})X(z)\,|_{z=p_i}$$

常数A_0对应着$\delta(n)$序列，因此

$$\boxed{x(n)=A_0\delta(n)+\sum_{i=1}^{N}A_i\,p_i^n u(n)}$$

例 利用部分分式法，求$X(z)$的反变换

$$X(z)=1/[(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})],\ |z|>2$$

解
$$X(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}=\frac{z^2}{(z-2)(z-0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-2)(z-0.5)}=\frac{A_1}{z-2}+\frac{A_2}{z-0.5}$$

$$A_1=\left[(z-2)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2}=\frac{4}{3}\quad,\quad A_2=\left[(z-0.5)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.5}=-\frac{1}{3}$$

所以
$$X(z)=\frac{4}{3}\cdot\frac{z}{z-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-0.5}$$

又有 $|z|>2$

对$X(z)$右边等式分别进行z反变换（查表得）

$$\boxed{x(n)=\begin{cases}\frac{4}{3}\cdot 2^n-\frac{1}{3}\cdot(0.5)^n, & n\geq 0\\ 0 & ,n<0\end{cases}}$$

幂级数展开法

$x(n)$ 的z变换定义为z^{-1}的幂级数，即

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \cdots + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

因此，只要在给定的收敛域内将$X(z)$展成幂级数，则级数的系数就是序列$x(n)$。一般情况下，$X(z)$ 是一个有理分式，分子和分母都是 z 的多项式，则可直接用分子多项式除以分母多项式，得到幂级数展开式，从而求得 $x(n)$。

- 若$x(n)$ 是右边序列，则将$X(z)$展开为负幂级数，其分子分母按 z 的降幂（或z^{-1}的升幂）排列
- 若$x(n)$ 是左边序列，则将$X(z)$展开为正幂级数，其分子分母按z的升幂（或z^{-1}的降幂）排列
- **缺点**：不能直接求解双边序列 z 变换的反变换

例 $$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}，\quad |z|>|a|$$

解 根据收敛域，此序列是右边序列，分子和分母按照的z^{-1}升幂排列

$$\begin{array}{r l}
 & 1+az^{-1}+a^{-2}z^{-2}+a^{-3}z^{-3}\cdots \\
1-az^{-1} & \overline{)\,1} \\
 & \underline{1-az^{-1}} \\
 & az^{-1} \\
 & \underline{az^{-1}-a^{-2}z^{-2}} \\
 & a^{-2}z^{-2} \\
 & \underline{a^{-2}z^{-2}-a^{-3}z^{-3}} \\
 & a^{-3}z^{-3} \\
 & \vdots
\end{array}$$

因此得到 $$1+az^{-1}+a^{-2}z^{-2}+a^{-3}z^{-3}\cdots$$

根据z变换的定义，得到

$$x(n)=[1，\ a，\ a^{-2}，\ a^{-3}\cdots]=a^{n}u(n)$$

例　用求两种方法求 $X(z)=\dfrac{z-a}{1-az},\ |z|>\left|\dfrac{1}{a}\right|$ 的z反变换

解　1、部分分式法

$$X(z)=\frac{z-a}{1-az}=-\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$$

得到

$$x(n)=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}u(n)+\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$=\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u(n-1)-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}u(n)$$

2、长除法

由收敛域知$x(n)$是右边序列，所以$X(z)$按z的降幂排列

$$
\begin{array}{r l}
 & \frac{1}{a}+\frac{a^2-1}{a^2}z^{-1}+\frac{a^2-1}{a^3}z^{-2}+\cdots \\
1-az & \overline{\big)\, z-a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \underline{z-1/a} \\
 & (1-a^2)/a \\
 & \underline{(1-a^2)/a-[(1-a^2)/a^2]z^{-1}} \\
 & [(1-a^2)/a^2]z^{-1} \\
 & \underline{[(1-a^2)/a^2]z^{-1}-[(1-a^2)/a^3]z^{-2}} \\
 & [(1-a^2)/a^3]z^{-2} \\
 & \vdots
\end{array}
$$

由此得到

$$x(n)=\{-\frac{1}{a},\frac{a^2-1}{a^2},\frac{a^2-1}{a^3},\cdots\}=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} u(n-1)$$

3.3 z 变换的性质

■ 线性性质

z 变换是一种线性变换，满足比例性和可加性。若

$$Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Z[y(n)] = Y(z) \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$Z[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z) \qquad R_{-} < |z| < R_{+}$$

其中 $R_{-} = \max[R_{x-}, R_{y-}]$，$R_{+} = \min[R_{x+}, R_{y+}]$，即线性组合后的收敛域为各个序列 z 变换的公共收敛域，如果这些组合中某些零点和极点相互抵消，则收敛域可能扩大。

■ 序列的移位

若序列$x(n)$的 z变换为

$$Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则有

$$Z[x(n-n_0)] = z^{-n_0}X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

其中n_0为任意整数，n_0为正，则为延迟，n_0为负则为超前。

证明 $$Z[x(n-n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)z^{-n}$$

置换变量 $m = n - n_0$

$$Z[x(n-n_0)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-(m+n_0)}$$

$$= z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m}$$

注意 双边序列移位后其收敛域不会发生变化；但单边序列在z=0 或z=∞ 处收敛域可能有变化。
例如，$Z[\delta(n)]=1$，在z平面处处收敛，但是 $Z[\delta(n-1)]= z^{-1}$ 在z=0 处不收敛，而$Z[\delta(n+1)]$ 在z=∞ 处不收敛。

例　求序列$x(n)=u(n)-u(n-3)$的z变换

解

由于　$$Z[u(n)]=\frac{z}{z-1},|z|>1$$

$$Z[u(n-3)]=z^{-3}\frac{z}{z-1}=\frac{z^{-2}}{z-1},|z|>1$$

得到　$$Z[x(n)]=\frac{z}{z-1}-\frac{z^{-2}}{z-1}=\frac{z^2+z+1}{z^2},|z|>0$$

■ z 域微分（序列的线性加权）

若序列 $x(n)$ 的z变换为 $Z[x(n)] = X(z)$， $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则 $$Z[nx(n)] = -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}, \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

证明 由于z变换在其收敛域中处处解析

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{\mathrm{d}z^{-n}}{\mathrm{d}z} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n-1}$$

$$= z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = -z^{-1}\boxed{Z[nx(n)]}$$

所以 $$Z[nx(n)] = -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

通过递推可以证明 $$Z[n^{\mathrm{m}}x(n)] = (-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^m X(z)$$

式中 $$\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^m X(z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ldots(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z))\ldots]\right\}$$

■ 序列的指数加权（z域的尺度变换）

若 $Z[x(n)] = X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则 $$Z[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^n = X(a^{-1}z)$$

收敛域为 $R_{x-} < |a^{-1}z| < R_{x+}$ 或 $|a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$，

a 可以是复数。指数加权性质表明

- $X(z)$如果在$z=z_1$处为极点，则 $X(a^{-1}z)$ 将在 $a^{-1}z=z_1$，即$z=az_1$处为极点
- 如果 a 为正实数，则表示 z 平面缩小或扩大，零极点在 z=平面沿径向移动
- 若 a 为复数，则在 z 平面上，零极点既有幅度伸缩，又有角度旋转（因此该性质是一种 z 域尺度变换）

■ 初值定理

如果 $x(n)$ 是因果序列，则有

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

证明　因为 $x(n)$ 是因果序列，有

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

所以

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=x(0)$$

考虑每一项的极限，当$z=\infty$ 时，只有 $x(0)$ 不等于 0。

(推导初值为 $n=n_0$ 时的一般形式)

■ 终值定理

设$x(n)$是因果序列，其z变换的极点除可以有一个一阶极点在z=1上，其他极点均在单位圆内，则

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$$

证明 利用序列的线性和位移性质

$$Z[x(n)-x(n-1)] = X(z)-z^{-1}X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)-x(n-1)]z^{-n}$$

由于$x(n)$是因果序列，即$x(n)=0, n<0$，上式改写成

$$(1-z^{-1})X(z) = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}[x(n)-x(n-1)]z^{-n}\right]$$

（接下页）

因为$(z-1)X(z)$在单位圆上没有极点，上式两端取$z\to 1$极限

$$\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)=\lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}[x(n)\ -x(n-1)\ ]z^{-n}\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\lim_{z\to 1}\left[\sum_{n=0}^{N}[x(n)\ -x(n-1)\ ]z^{-n}\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}[x(n)\ -x(n-1)\right]$$

$$=\lim_{N\to\infty}[x(0)+x(1)+\ldots+x(n)-x(0)-x(1)-\ldots-x(N-1)$$

$$=\lim_{N\to\infty}X(N)$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}x(N)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$$

■ 序列卷积的z变换(卷积定理)

若 $Z[x(n)] = X(z),\ R_{x-} < |z| < R_{x+}$ $Z[h(n)] = H(z),\ R_{h-} < |z| < R_{h+}$

$y(n) = x(n) * h(n)$

则有 $Z[x(n) * h(n)] = X(z)H(z),\ \ \max[R_{x-}, R_{h-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{h+}]$

（注意收敛域的变化）

证明

$$Z[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n) * h(n)]z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cancel{x(m)[} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,h(n-m)]z^{-n}$$

(交换求和顺序) $$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-m)z^{-n}]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)z^{-l}]z^{-m} = [\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,z^{-m}]H(z)$$

$$= X(z)H(z),\quad \max[R_{x-}, R_{h-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{h+}]$$

例 已知$x(n)=a^n u(n), h(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$,

求$y(n)=x(n)*h(n), |b|<|a|$.

解 $X(z)=Z[x(n)]=\dfrac{z}{z-a}, |z|>|a|$;

$$H(z)=Z[h(n)]=\frac{z}{z-b}-az^{-1}\frac{z}{z-b}$$

$$=\frac{z}{z-b}-\frac{a}{z-b}=\frac{z-a}{z-b}, |z|>|b|;$$

因为 $Y(z)=X(z)H(z)=\dfrac{z}{z-a}\dfrac{z-a}{z-b}=\dfrac{z}{z-b}$

$X(z)$的极点与$H(z)$的零点相消，$Y(z)$

的收敛域扩大，为$|z|>|b|$.

所以 $y(n)=x(n)*h(n)=Z^{-1}[Y(z)]=b^n u(n)$

■ 复序列共轭的 z 变换

如果 $Z[x(n)] = X(z)\,,\ R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则 $Z[x^*(n)] = X^*(z^*)\ ,\ \ R_{x-} < |z| < R_{x+}\,;$

其中， $x^*(n)$为$x(n)$的共轭序列。

证明

$$Z[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^{-n}]^*$$

$$= [\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n}]^* = X^*(z^*)\ ,\ \ R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

■ 序列乘积的 z 变换(复卷积定理)

若 $$w(n) = x(n) \cdot y(n),$$

且 $$X(z) = Z[x(n)], \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = Z[y(n)],. \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则有 $$W(z) = Z[w(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_l} X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) v^{-1} dv,$$

$$R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$$

其中，c_l是在变量 v 平面上，$X\left(\frac{z}{v}\right)$和$Y(v)$公共收敛域内环原点的一条逆时针单封闭围线。

例 已知$x(n)=a^n u(n), h(n)=b^{n-1}u(n-1)$,

求$Y(z)=Z[x(n)h(n)]$.

解 因为$\because X(z)=Z[x(n)]=\frac{z}{z-a}, |z|>|a|$;

$$H(z)=Z[h(n)]=\frac{1}{z-b}, |z|>|b|;$$

所以$Y(z)=Z[x(n)h(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{v}{v-a}\frac{1}{\frac{z}{v}-b}v^{-1}dv$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{v}{(v-a)(z-bv)}dv, |z|>|ab|;$$

$X(v)$的收敛域为$|v|>|a|$，而$H(\frac{z}{v})$的收敛域

为$\left|\frac{z}{v}\right|>|b|$，即$|v|<\left|\frac{z}{b}\right|$;重叠部分为$|a|<|v|<\left|\frac{z}{b}\right|$;

因此围线c内只有一个极点$v=a$，用留数可得：

$$Y(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{v}{(v-a)(z-bv)}dv$$

$$=\mathrm{Re}\,s[\frac{v}{(v-a)(z-bv)}]_{v=a}=\left.\frac{v}{z-bv}\right|_{v=a}$$

$$=\frac{a}{z-ab},|z|>|ab|.$$

■ 帕塞瓦定理(Parseval)

如果 $X(z)=Z[x(n)]$，$R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$Y(z)=Z[y(n)], R_{y-}<|z|<R_{y+}$

则有 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c x(v)Y^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv$$

其中“*”表示复共轭，闭合积分围线c在公共收敛域$R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$内并包含原点。

当$y(n)=x(n)$时，上式可写成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega$$

即 $$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega}$$

几点说明：

1.当$h(n)$为实序列时，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c x(\upsilon)H(\frac{1}{\upsilon})\upsilon^{-1}d\upsilon。$$

2.当围线取单位圆$|v| = 1$时，$\because v = 1/v^* = e^{j\omega}$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega。$$

3.当$h(n) = x(n)$时，则$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(j\omega)|^2 d\omega$。

上式表明序列$x(n)$在时域中的能量可由频谱求得。这就是帕塞瓦定理。

z 变换与连续信号的拉普拉斯变换、傅立叶变换的关系

z 变换与拉普拉斯变换的关系

■ **z 平面与 s 平面**

设连续信号为$x(t)$，其采样信号为 $x_s(t)$，它们的拉普拉斯变换分别为

$$X(s) = \pounds\,[x(t)]$$

$$X_s(s) = \pounds\,[\,x_s(t)]$$

应用理想采样表达式 $x(t)|_{t=nT} = x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$

对上式取拉普拉斯变换，有

$$X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)\,e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\,e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

而采样序列$x(n)$的z变换为 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

比较

当 $z = e^{sT}$ 时，采样序列的z变换就等于采样信号的拉普拉斯变换，即

$$X(z)|_{z=e^{sT}} = X_s(s)$$

即由 s 平面到 z 平面的映射关系 $z = e^{sT},\ \ s = \frac{1}{T}\ln z$

将 s 平面用直角坐标表示为 $s=\sigma+j\Omega$

将 z 平面用极坐标表示为 $z=re^{j\omega}$

$$z=re^{j\omega}=e^{st}=e^{(\sigma+j\Omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\Omega T}$$

因此 $r=e^{\sigma T},\quad \omega=\Omega T$

- 结论:

r 与 σ 的关系 $r=e^{\sigma T}$

$\sigma=0$ (s平面的虚轴)对应于 $r=1$ (z平面的单位圆上);

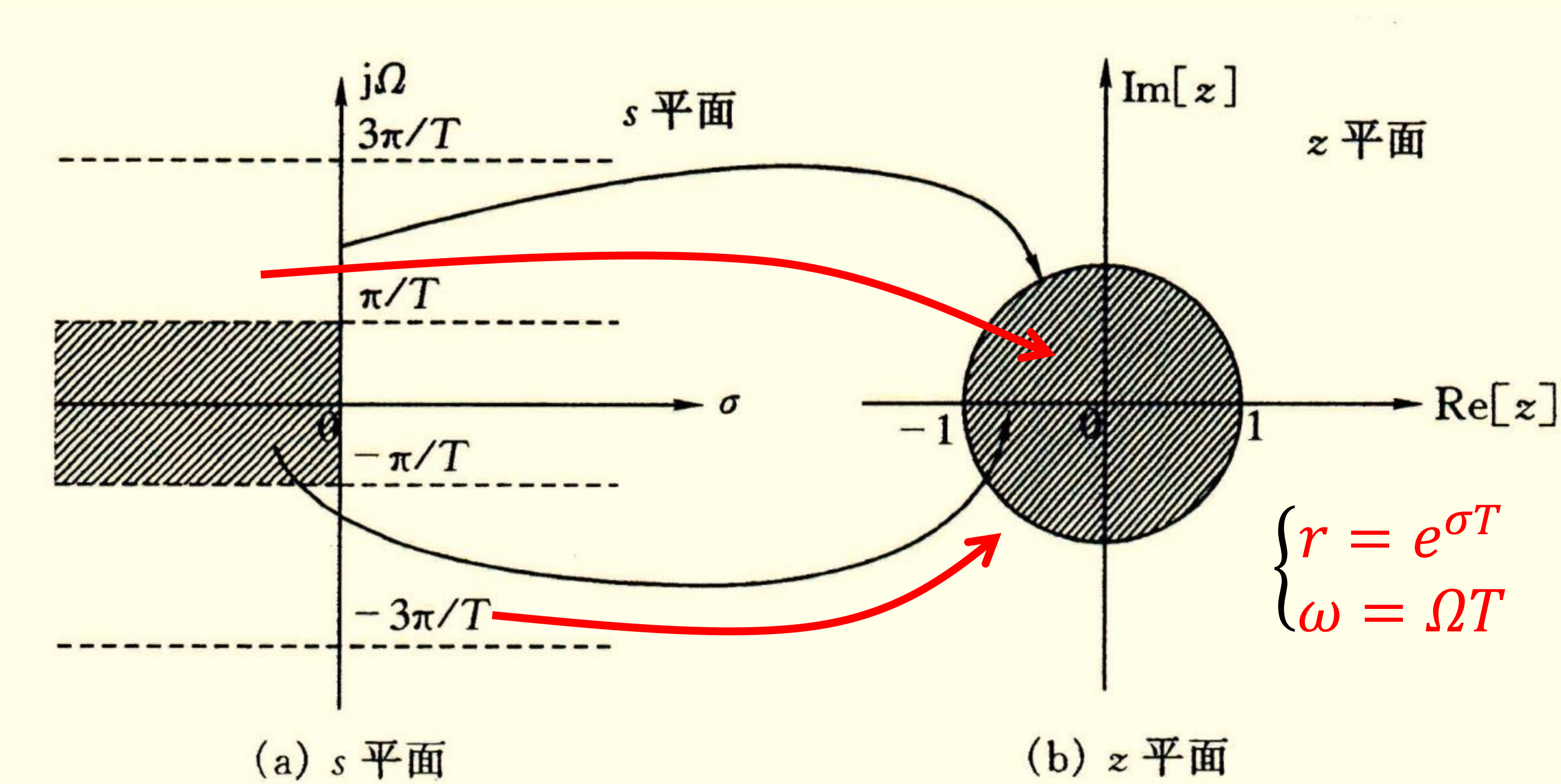
$\sigma<0$ (s平面的左半平面)对应于 $r<1$ (z平面的单位圆内部);

$\sigma>0$ (s平面的右半平面)对应于$r>1$(z平面的单位圆外部)。

ω 和 Ω 的关系 $\omega=\Omega T$

$\Omega=0$ (s平面实轴)对应于$\omega=0$(z平面正实轴);

$\Omega=\Omega_0$ (常数)(s平面平行于实轴的直线)对应于$\omega=\Omega_0 T$ (z平面始于原点，幅角为 $\omega=\Omega_0 T$ 的辐射线)。



$$\begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \omega = \Omega T \end{cases}$$

s-*z*映射图（z=e^{sT}，s 平面与 z 平面之间的映射关系）

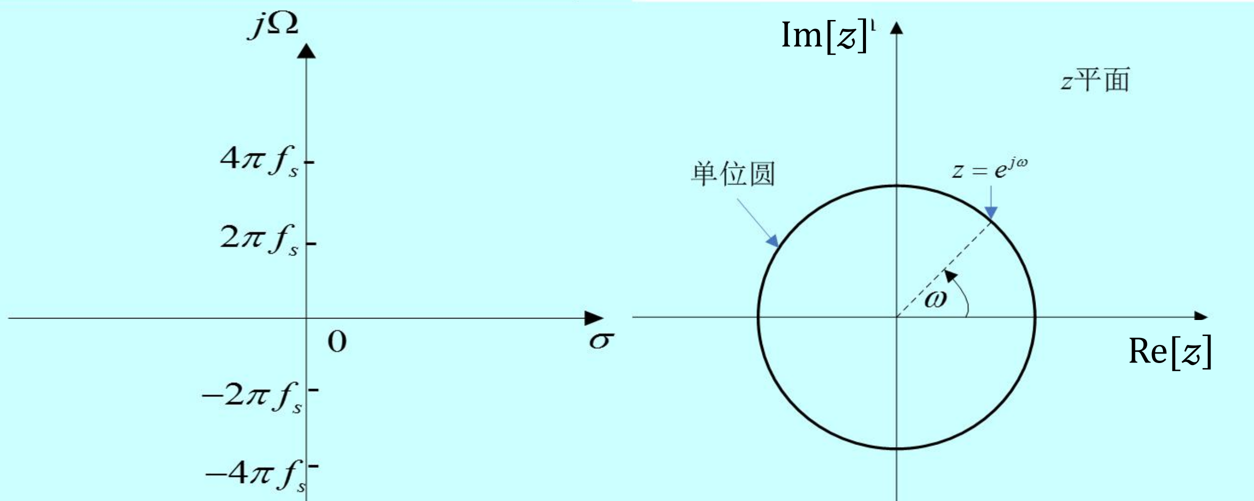
- s 平面与 z 平面的映射关系不是单值映射，Ω 每增加一个采样角频率 $\Omega_s = 2\pi/T$ ，则 ω 相应增加 一个2π，即重复旋转一周，z 平面重叠一次。

傅里叶变换 — 单位圆上的 z 变换，虚轴上的拉氏变换

令 $s = j\Omega, \sigma = 0$

则 $X(z)|_{z=e^{sT}} = X(z)|_{z=e^{j\Omega T}} = X\left(e^{j\Omega T}\right) = X_s(j\Omega)$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\Omega - j\Omega_s k\right),\ \Omega_s = 2\pi/T = 2\pi f_s$$



z 平面上 2π 弧度的改变相当于绕单位圆一次，重新回到原来的同一点上, 傅里叶变换在频率上固有的周期性在这里形象地得到理解

3.4 z 变换域中的离散时间系统描述

由线性常系数差分方程导出系统函数

线性时不变离散系统可以用它的单位采样响应$h(n)$来表示，即

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

对等式两边取 z 变换，得

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

则

$$\boxed{H(z) = Y(z)/X(z)}$$

将$H(z)$定义为线性时不变系统的系统函数，它是系统的单位采样响应$h(n)$的z变换，即

$$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}$$

考虑系统是一因果系统，则有

$$\boxed{H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, z^{-n}}$$

■ 回顾：系统的频率响应（第二章）

设系统的输入序列是频率为ω的复指数序列

$$x(n) = e^{j\omega n}, -\infty < n < \infty$$

线性时不变系统的单位采样响应为$h(n)$，利用卷积和，得到输出

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega(n-m)} = e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega})$$

其中

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m}$$

$H(e^{j\omega})$是 $h(n)$的离散时间傅立叶变换，定义为系统的频率响应，描述的是复指数序列经过线性移不变系统后，复振幅（包括幅度和相位）的变化。系统的频率响应正是系统函数$H(z)$在单位圆上的值，即

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

■ 系统函数和差分方程的关系

一个线性时不变系统可以用差分方程来描述，其一般形式为

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

若系统的初始状态为零，直接对上式取z变换（利用移位特性），得

$$\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k} X(z)$$

而系统函数进一步表示为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}$$

（讨论）

因果系统的单位采样响应为因果序列，其收敛域为

$$R_{x-} < |z| \le \infty$$

一个线性时不变系统稳定的充要条件是$h(n)$必须满足绝对可和条件，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

而z变换的收敛域由满足的那些z值确定，所以如果系统函数的收敛域包含单位圆 $|z|=1$，则系统是稳定的。

因此，一个因果稳定的线性时不变系统的系统函数$H(z)$必须在从单位圆到 ∞ 的整个z域内收敛，即

$$1 \le |z| \le \infty$$

也就是说系统函数的全部极点必须在单位圆内。

例 设一阶系统的差分方程为

$$y(n)=x(n)+by(n-1),\ \ |b|<1$$

b为实数,求系统的频率响应。

解 对系统的差分方程两边取 z变换

$$Y(z)=X(z)+bz^{-1}y(z)$$

$$Y(z)(1-bz^{-1})=X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-bz^{-1}},\ \ |z|>|b|$$

这是一因果系统，其单位采样响应为

$$h(n) = b^n u(n)$$

而频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= \frac{1}{1-be^{-j\omega}} = \frac{1}{1-b(\cos\omega - j\sin\omega)}$$

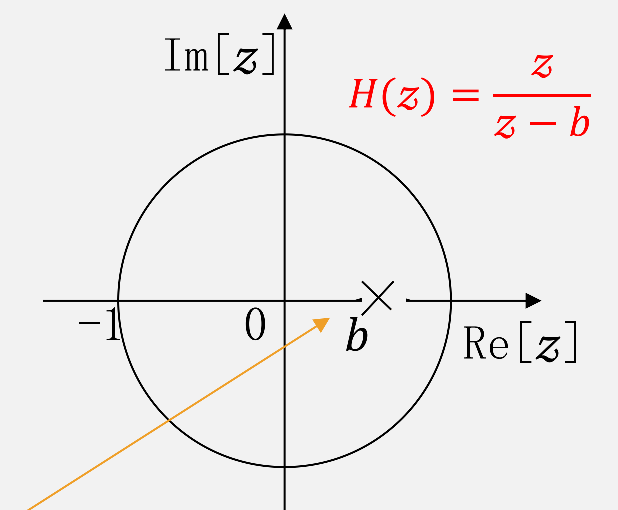
$$= 1/(1 - b\cos\omega + jb\sin\omega)$$

ω:	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\lvert H(e^{j\omega})\rvert$:	$\frac{1}{1-b}$	$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$	$\frac{1}{1+b}$	$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$	$\frac{1}{1-b}$
$\arg[H(e^{j\omega})]$:	0	$-\arctan(b)$	0	$\arctan(b)$	0

幅度响应：$H(e^{j\omega}) = (1 + b^2 - 2b\cos\omega)^{-\frac{1}{2}}$

相位响应：$\arg[H(e^{j\omega})] = -\arctan[\frac{b\sin\omega}{(1-b\cos\omega)}]$

系统的极点在单位圆内，因此系统稳定。



零极点分布情况

3.4.2 系统函数的频域分析

将系统函数$H(z)$两个多项式分别进行因式分解，得

$$H(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

- $z=c_k$是$H(z)$的零点，$z=d_k$是$H(z)$的极点，是由差分方程的系数a_k和b_k决定；除了比例常数A，系统函数完全由它的零点和极点来确定；极-零点分布可以确定系统的因果性和稳定性
- 要根据$H(z)$唯一确定$h(n)$，必须同时确定系统的收敛域, 例如对于稳定系统，其收敛域必须包含单位圆

用极-零点分布图表示系统函数的一个优点：提供了一种观察系统频率特性的几何方法。

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

将 $z=e^{j\omega}$代入上式描述的系统函数

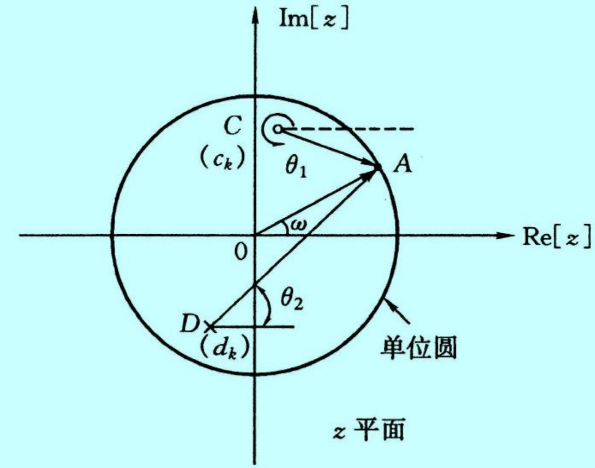
得到

$$H(e^{j\omega}) = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k e^{-j\omega})}$$

为了便于理解极-零点分布对系统频率特性的影响，先分析单个极-零点得情况，然后推广到多个极-零点得情况。取出上式单个极-零点的因式比，有

$$\frac{1-c_k z^{-1}}{1-d_k z^{-1}} = \frac{z-c_k}{z-d_k}$$

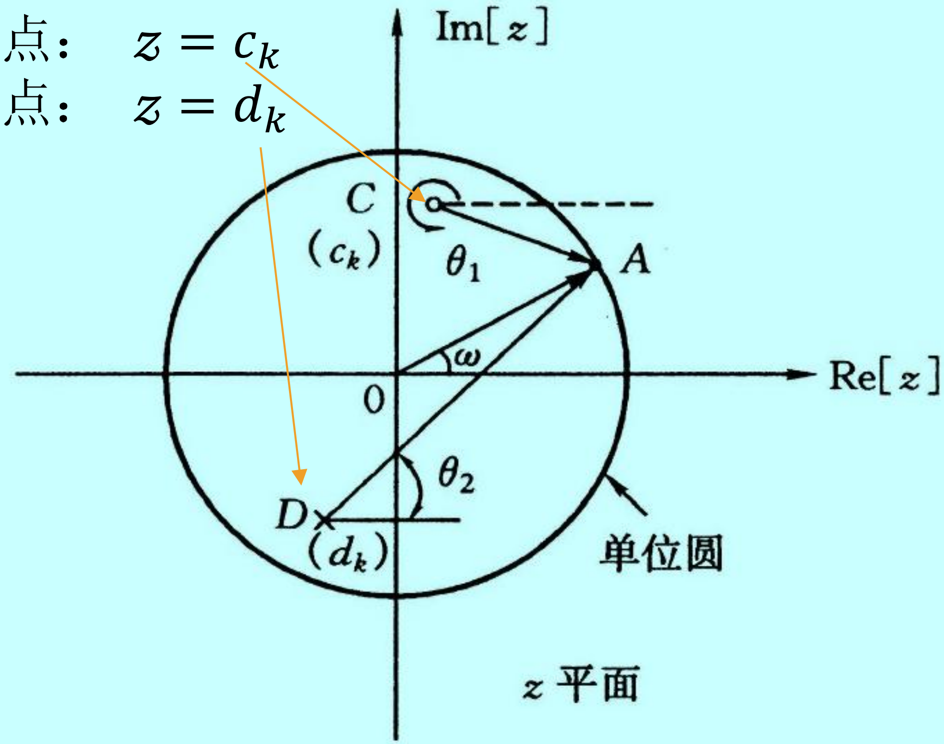
用这个因式比在z平面上的极-零点分布来解释系统的频率响应



一阶系统的频率响应与极-零点分布的几何关系

零点： $z = c_k$

极点： $z = d_k$



复数d_k和 c_k用几何矢量表示为

$d_k = \overrightarrow{OD}$

$c_k = \overrightarrow{OC}$

单位圆上的A点的几何矢量：$e^{j\omega} = \overrightarrow{OA}$，把极点和零点都向$A$点连上矢量，有以下关系：

$$e^{j\omega} - c_k = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA} \quad \text{（零矢量）}$$

$$e^{j\omega} - d_k = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DA} \quad \text{(极矢量）}$$

系统的频率响应为

$$\frac{(1 - c_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})} = \frac{(z - c_k)}{(z - d_k)} = \frac{\text{零矢量}}{\text{极矢量}}$$

上述用z平面上的极-零点分布来解释系统频率响应的几何方法，可以推广到多个因式的乘积，即多个极-零点对系统频率响应的影响。$M=N$时，$H(z)$的分子和分母的阶数相等，系统频率响应可表示为

$$\frac{H(e^{j\omega})}{A} = \frac{\text{各零矢量连乘积}}{\text{各极矢量连乘积}}$$

$M \neq N$时，系统函数可以写成如下形式

$$\frac{H(z)}{Az^{-(M-N)}} = \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

上式因子$z^{-(M-N)}$的出现仅仅表明在$z=0$处或者有（$M-N$）阶极点（$M>N$时），或具有（$N-M$）阶零点（$M<N$时）；这些极点和零点距单位圆的距离不变，不影响系统的幅频特性分布来解释系统频率响应$|H(e^{j\omega})|$。

因为此时上式因子$z^{-(M-N)}=e^{-j(M-N)\omega}$，其模位1，仅仅对相频$\arg[H(e^{j\omega})]$产生线性相移$-(M-N)\omega$，即仅仅在时域引入了$(M-N)$步延时（或超前）移位。

用零矢量和极矢量表示系统的相对频率响应$\dfrac{H(e^{j\omega})}{A}$的公式为

$$\boxed{\left|\frac{H(e^{j\omega})}{A}\right|=\frac{\text{各零矢量模连乘积}}{\text{各极矢量模连乘积}}}$$

$$\boxed{\arg[H(e^{j\omega})]=\text{各零矢量幅角之和}-\text{各极矢量幅角之和}-(M-N)\omega}$$

根据以上两式，可以通过几何方法分析系统的频率响应。

由于靠近单位圆的零点位置影响系统幅频响应的凹谷及其深度，而单位圆附近的极点影响着凸峰（谐振频率）的位置及其高度；利用这种几何直观的方法，适当地控制极-零点的分布，对于数字系统的设计十分重要。

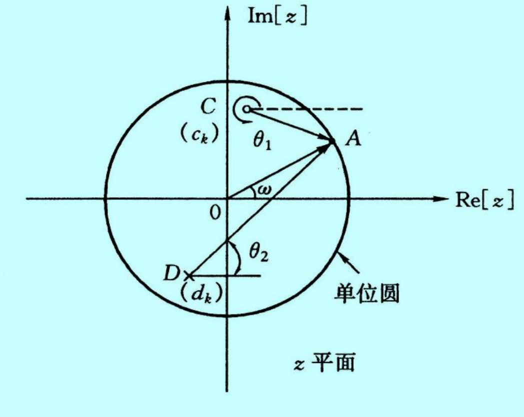
■ 理解z平面上的极-零点分布对系统频率响应的影响

$$\frac{H(z)}{Az^{-(M-N)}}=\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

(1) $z^{-(M-N)}$表示原点处零极点，它到单位圆的距离恒为1，故对幅度响应不起作用, 只是给出线性相移分量$-(M-N)\omega$；

(2) 单位圆附近的零点对幅度响应的谷点位置与深度有明显影响；当零点位于单位圆上时，谷点为零；零点可在单位圆外;

(3) 单位圆附近的极点对幅度响应的峰点位置和高度有明显影响；极点在圆外，系统不稳定。



一阶系统的频率响应与极-零点分布的几何关系

$$\frac{(1-c_kz^{-1})}{(1-d_kz^{-1})}=\frac{(z-c_k)}{(z-d_k)}$$

用这个因式比在z平面上的极-零点分布来解释系统的频率响应

3.5 单边z变换

单边 z 变换的定义

一个序列$x(n)$的单边z变换定义

$$Z[x(n)] = X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

显然，对于$x(n)=0$，$n<0$，单边z变换与双边z变换是等效的

分析非零初始条件下的系统响应：对于物理可实现的离散线性时不变系统，其输入和输出都是因果的，因此，可以利用单边 z 变换的移位性质来解决在非零初始条件下由线性常系数差分方程描述的系统响应的问题。

采用单边 z 变换的场合：从某个感兴趣的时刻开始，设定 $n=0$，研究 $n>0$ 时的系统响应，而不考虑在 $n<0$ 时系统如何受激励和响应，仅是由几个适当的初始条件值来体现系统在 $n<0$ 的行为对于 $n \geq 0$ 以后的反效作用。

单边 z 变换的性质

单边z变换的移位性质

考虑具有单边 z 变换的序列$x(n)$，令$y(n) = x(n-1)$，则

$$Z_{\mathrm{I}}[y(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} = x(-1) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n-1)\, z^{-n}$$

将 $m = n - 1$代入，得到

$$Y_{\mathrm{I}}(z) = x(-1) + \sum_{m=0}^{\infty} x(m)\, z^{-(m+1)}$$

$$Y_{\mathrm{I}}(z) = x(-1) + z^{-1}X_{\mathrm{I}}(z)$$

对于序列$y(n) = x(n-2)$，有

$$Y_{\mathrm{I}}(z) = \underline{x(-2) + x(-1)z^{-1} + z^{-2}X_{\mathrm{I}}(z)}$$

对于更一般的序列

$y(n) = x(n-n_0),\ n_0 > 0$ 向右移位可表示为

单边 z 变换的移位性质

$$Z_{\mathrm{I}}[y(n)] = Z_{\mathrm{I}}[x(n-n_0)] = z^{-n_0}[X_{\mathrm{I}}(z) + \sum_{l=-n_0}^{-1} x(l)\, z^{-l}]$$

$$= x(-n_0) + x(-n_0+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-n_0+1} + z^{-n_0}X_{\mathrm{I}}(z)$$

双边 z 变换的移位性质

$$Z[x(n-n_0)] = z^{-n_0}X(z)$$

比较

单边 z 变换引入了以$x(n)$为系数的n阶多项式，与初值相关，而双边 z 变换则要计算整个z域上的序列值

3.6 用单边 z 变换求解线性差分方程

- 讨论用单边 z 变换和移位性质求解具有非零初始条件的线性差分方程

1、将差分方程变换成以z为变量的代数方程（对于因果系统，给定初始条件时，需要用单边 z 变换求解）；

2、然后取单边 z 反变换得到系统的解。

例　考虑一阶差分方程描述的系统

$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$

求输入序列$x(n) = e^{j\omega n}u(n), n \geq 0,$ 初始条件$n = -1, y(-1) = k$时，系统的输出$y(n)$。

解　对差分方程两边取单边z变换，并利用线性移位性质，得到

$$Y_{\mathrm{I}}(z) = X_{\mathrm{I}}(z) + az^{-1}Y_{\mathrm{I}}(z) + ay(-1)$$

$$Y_{\mathrm{I}}(z) = \frac{X_{\mathrm{I}}(z) \ + ay(-1)}{1 - az^{-1}}$$

把系统的差分方程的单边z变换重写如下：

$$Y_{\mathrm{I}}(z)=\frac{X_{\mathrm{I}}(z)\ +ay(-1)}{1-az^{-1}}$$

输入序列$x(n)$的单边z变换为

$$X_{\mathrm{I}}(z)=\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}}$$

将该式代入上式，并考虑初始条件$y(-1)=k$

$$Y_{\mathrm{I}}(z)=\frac{ak}{1-az^{-1}}+\frac{1}{(1-az^{-1})(1-e^{j\omega}z^{-1})}$$

将上式右边的第二项展开部分分式，上式改写为

$$Y_{\mathrm{I}}(z)=\frac{ak}{1-az^{-1}}+\frac{a/(a-e^{j\omega})}{(1-az^{-1})}-\frac{e^{j\omega}/(a-e^{j\omega})}{(1-e^{j\omega}z^{-1})}$$

该式的每一项对应着一个右边指数序列，因此

$$y(n)=[ka^{n+1}+\frac{a^{n+1}}{(a-ae^{j\omega})}-\frac{e^{j\omega(n+1)}}{(a-e^{j\omega})}]u(n)$$

对初始状态的响应（零输入解） 对输入的暂态响应 对输入的稳态响应

■ 讨论用单边z变换求解高阶线性差分方程描述的因果系统

高阶线性差分方程的一般形式

$$x(n) \rightarrow \boxed{\text{离散线性时不变系统}} \rightarrow y(n)$$

$$\sum_{k=0}^{N} b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} a_k x(n-k)$$

对差分方程两边取单边z变换，并利用线性移位性质，**得到**

$$\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}[Y_{\mathrm{I}}(z) + \sum_{m=-k}^{-1} y(m)z^{-m}] = \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}[X_{\mathrm{I}}(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-m}]$$

经整理

得到

$$Y_{\mathrm{I}}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}[X_{\mathrm{I}}(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-m}]}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}} - \sum_{m=-k}^{-1} y(m)z^{-m}$$

系统函数定义

$$\frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}} = H(z)$$

代入

$$Y_{\mathrm{I}}(z) = H(z)[X_{\mathrm{I}}(z) + \sum_{m=-k}^{-1} x(m)z^{-m}] - \sum_{m=-k}^{-1} y(m)z^{-m}$$

若$x(n)$ =0，该方程的解称为零输入解

得到

$$Y_{\mathrm{I}}(z) = -\sum_{m=-k}^{-1} y(m)z^{-m}$$

对$Y_I(z)$进行单边 z 反变换求解，可以得到系统的零输入解（$x(n)$ =0时系统的响应）

如果输入$x(n)$是因果序列，且系统处于静止初始状态，即 $y(n)=0$，$-k\le n\le -1$，那么，系统的单边z变换表达式

$$Y_{\mathrm{I}}(z)=H(z)[X_{\mathrm{I}}(z)+\sum_{m=-k}^{-1}x(m)z^{-m}]-\sum_{m=-k}^{-1}y(m)z^{-m}$$

的右边第二项为零，同时考虑 $x(n)=0$，$-k\le n\le -1$，因此

$$Y_{\mathrm{I}}(z)=H(z)X_{\mathrm{I}}(z)$$

系统的输出序列为

$$y(n)=Z^{-1}[H(z)X_{\mathrm{I}}(z)]$$

这是单纯由输入序列引起的系统响应-称为系统的零状态响应（指初始状态为零时的响应）。因此，一个具有非零初始状态的线性常系数差分方程的解是由零输入响应和零状态响应组成，即

$$Y_{\mathrm{I}}(z)=H(z)[X_{\mathrm{I}}(z)+\sum_{m=-k}^{-1}x(m)z^{-m}]-\sum_{m=-k}^{-1}y(m)z^{-m}$$

（输入序列为因果序列时）零状态响应　　零输入响应

本章小结：

- z 变换的定义及收敛域
- z 反变换
- z 变换的性质
- z 变换域中离散时间系统的描述
- 单边 z 变换

线性时不变系统的输出响应的单边 z 变换$Y_I(z)$ 不仅与系统函数$H(z)$ 有关，而且与输入和输出的起始状态相关；只有在初值为零，且有因果性条件下，其单边 z 变换$Y_I(z)$具有双边 z 变换$Y(z)$相同的形式。