2018 ～2019 学年第 一 学期

《 微积分（一）》课程考试试卷(A 卷) 解答

一. 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设 $0<a_n<1$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$，则以下数列中无界的是【 C 】

A. $\{a_n^2\}$. B. $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$. C. $\left\{\tan\dfrac{\pi a_n}{2}\right\}$. D. $\{\ln a_n\}$.

2. 已知 $f(2)=3, f'(2)=5$，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(2+h)-9}{h}=$【 A 】

A. 30. B. 10. C. 6 D. 0.

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，则以下说法中错误的是【 B 】

A. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有界. B. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上有连续的导数.

C. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上连续. D. $f(x)$ 必在 $[a,b]$ 上可积.

4. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 一共有【 D 】条渐近线.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导并且 $f''(x)<0$，则以下不等式中一定成立的是【 B 】

A. $f(1)+f(3)>2f(2)$. B. $f(1)+f(3)<2f(2)$.

C. $f(1)+f(2)>2f(3)$. D. $f(1)+f(2)<2f(3)$.

6. 微分方程 $y'-\dfrac{y}{2x}=0$ 满足初值条件 $y(1)=2$ 的特解为【 A 】.

A. $2\sqrt{x}$ B. $1+\sqrt{x}$ C. $1+x$ D. $\sqrt{x+3}$

二. 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}(1^3+2^3+\cdots+n^3)=$_______.

解：原式等于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\dfrac{1}{4}$ 或 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$.

8. 设函数 $y=x^2-x$. 在点 $x=2$，当 $\Delta x=0.01$ 时的微分 $\mathrm{d}y=$_________.

解：$\mathrm{d}y=y'(2)\Delta x=0.03$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\sqrt{3+t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=$______.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x\sqrt{3+\sin^4 x}}{2x}=\sqrt{3}$.

10. 曲线 $y=1-x^4$ 与 x 轴所围成区域的面积为________.

解：$S=\int_{-1}^{1}(1-x^4)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{5}$.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 已知当 $x\to 0$, $\mathrm{e}^{3x}-ax^2-(1+bx)\cos x$ 是与 x^3 同阶的无穷小. 求常数 a,b 的值.

解：代入 $\mathrm{e}^{3x}=1+3x+\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{9}{2}x^3+o(x^3), \cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^3)$, (3 分)

得到

$$\mathrm{e}^{3x}-ax^2-(1+bx)\cos x=(3-b)x+(5-a)x^2+\frac{9+b}{2}x^3+o(x^3)\sim cx^3 .$$

必然有 $a=5,b=3$. (7 分)

12. 求 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

解：$f'(x)=3x^2-6x-9$. (2 分)

令 $f'(x)=0$. 得到驻点 $x=-1,3$. (4 分)

直接计算得 $f(-2)=3, f(2)=-17, f(-1)=10$.

故 $\max=10, \min=-17$. (7 分)

13. 求不定积分 $I=\int\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

解：作代换 $u=\mathrm{e}^x$, (2 分)

得到 $I=\int\dfrac{u^4}{u^2+1}\mathrm{d}u=\int(u^2-1+\dfrac{1}{u^2+1})\mathrm{d}u$

$=\dfrac{u^3}{3}-u+\arctan u+C=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3}-\mathrm{e}^x+\arctan\mathrm{e}^x+C$. (7 分)

注：作代换 $x=\ln t$ 亦可，解法类似.

14. 求定积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解：$I=\left[x\tan x\right]_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\left[\ln\cos x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.$

注. 答案写 $\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2},\frac{\pi}{4}+\ln\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ 都算对.

15. 判定反常积分 $\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 的敛散性，若收敛求其值.

解法一：利用三角代换 $x=\tan t$ 得到 (2 分)

$$\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t=\ln\frac{1-\cos t}{\sin t}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=+\infty\ .$$

原反常积分发散. (7 分)

解法二：利用倒代换 $x=1/t$ 得到

$$\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t=\ln(t+\sqrt{t^2+1})\Big|_1^{+\infty}=+\infty\ .$$

原反常积分发散.

解法三：利用代换 $t=\sqrt{x^2+1}$ 得到

$$\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_1^{\sqrt{2}}=+\infty\ .$$

原反常积分发散.

解法四：

$\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\geq\frac{1}{2x}$，积分 $\int_0^1\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散,根据比较判别法，积分 $\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 发散.

解法五:

$\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\sim\frac{1}{x},x\to 0$，因积分 $\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散，根据比较判别法，积分 $\int_0^1\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$ 发散.

16. 求微分方程 $y''=\frac{\sin y}{\cos^3 y}$ 满足初值条件 $y(2)=0,y'(2)=1$ 的特解。

解：令 $y'=p(y)$，原方程化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{\sin y}{\cos^3 y}. \qquad (2 分)$$

分离变量以后积分得

$$\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2\cos^2 y}+C_1. \qquad (4 分)$$

代入初始条件得 $C_1=0$. 注意到当 $y=0, p=1$ 故 $p=\dfrac{1}{\cos y}$,亦即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos y}.$$

再次分离变量积分得到 $x=\sin y+C_2$,代入初始条件得 $C_2=2$.

所求解为 $x=\sin y+2$ 或 $y=\arcsin(x-2)$. (7 分)

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$, 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性. 证明你的结论.

解：当 $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$. (2 分)

又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$. (4 分)

又有 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

从而成立 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$. 所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续. (7 分)

18. 求曲线 $y=\sqrt{x}-\dfrac{x\sqrt{x}}{3}$ 对应于 $1\le x\le 4$ 弧段的长度.

解：
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}. \qquad (2 分)$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})\mathrm{d}x . \qquad (4 分)$$

故曲线长度为 $s=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{10}{3}$. (7 分)

五. 综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设 n 为自然数. 求方程 $(x+1)^{2n}=x^{2n}+1$ 所有的实根. 证明你的结论.

解：显然方程有一实根 $x=0$ （2 分）

设 $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-1$. 若方程有两个或以上的实根，则根据罗尔定理，存在 c 使得 $f'(c)=0$. 但是

$$f'(x)=2n(x+1)^{2n-1}-2nx^{2n-1}.$$

方程 $f'(x)=0$ 无实数解. 因此原方程只有唯一实根 $x=0$.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数.证明:

$$f(x)\le\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\ ,x\in[a,b].$$

证: 根据积分中值定理,$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. (2 分)

则 $\left|f(x)\right|=\left|f(\xi)+\displaystyle\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\le\left|f(\xi)\right|+\left|\displaystyle\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|$

$\le\dfrac{1}{b-a}\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\displaystyle\int_a^b\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$. (5 分)