复变函数

与积分变换

第一章 复数与复变函数

复数的产生最早可以追溯到十六世纪中期。但直到十八世纪末期，经过了卡尔丹、笛卡尔、欧拉以及高斯等许多人的长期努力，复数的地位才被确立下来。

复变函数理论产生于十八世纪，在十九世纪得到了全面发展。为复变函数理论的创建做了早期工作的是欧拉、达朗贝尔、拉普拉斯等。为这门学科的发展作了大量奠基工作的则是柯西、黎曼和维尔斯特拉斯等。

复变函数理论中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域的推广和发展 。

第一章 复数与复变函数

§1.1 复数(Complex Numbers)

一、复数及其运算

二、共轭复数

First to use complex numbers for this purpose was the Italian mathematician GIROLAMO CARDANO(1501–1576), who found the formula for solving cubic equations. The term “complex number” was introduced by CARL FRIEDRICH GAUSS

一、复数及其运算

1. 复数的基本概念

定义 (1) 设 x 和 y 是任意两个实数，

$$z = x + iy \text{ (或者 } z = x + yi\text{)}$$

的数称为复数。其中 i 称为虚数单位，即 $i = \sqrt{-1}$.

(2) x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，并分别表示为：

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(3) 当 $x = 0$ 时，$z = 0 + iy = iy$ 称为纯虚数；

当 $y = 0$ 时，$z = x + i0 = x$ 就是实数。

因此，实数可以看作是复数的特殊情形。

一、复数及其运算

1. 复数的基本概念

相等 设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

如果 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，则称 z_1 与 z_2 相等。

特别地，$z = x + iy = 0$ 当且仅当 $x = y = 0$.

注 复数与实数不同，两个复数(虚部不为零)不能比较大小，它们之间只有相等与不相等的关系。

一、复数及其运算

2. 复数的四则运算 (Addition, Multiplication, Subtraction, Division)

设 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数，

(1) 复数的加减法

加法 $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$;

减法 $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$.

(2) 复数的乘除法

乘法 $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

除法 如果存在复数 z，使得 $z_1 = z_2 \cdot z$，则 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

一、复数及其运算

2. 复数的四则运算

(3) 运算法则

交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

分配律 $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

二、共轭复数(Conjugate Complex Numbers)

1. 共轭复数的定义

定义 设 $z = x + iy$ 是一个复数，

称 $x - iy$ 为 z 的共轭复数，记作 $\overline{z}$。

注 共轭复数有许多用途。

比如 $$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

二、共轭复数

2. 共轭复数的性质

性质 (1) $\overline{\overline{z}} = z$;

(2) $\overline{z_1 \circ z_2} = \overline{z_1} \circ \overline{z_2}$,

其中，“ ”可以是 +，-，×，÷；

(3) $z \cdot \overline{z} = [\mathrm{Re}\, z]^2 + [\mathrm{Im}\, z]^2 = x^2 + y^2$;

(4) $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \mathrm{Re}\, z = x$,

$\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = \mathrm{Im}\, z = y$.

例　已知$z_1=5-5i$, $z_2=-3+4i$, 求$\dfrac{z_1}{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解　(1) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$

$$=\frac{-35-5i}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i.$$

(2) $$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

例 证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}$

$= z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}$

$= 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

§1.2 复数的表示

一、复数的几何表示

二、复数的三角表示和指数表示

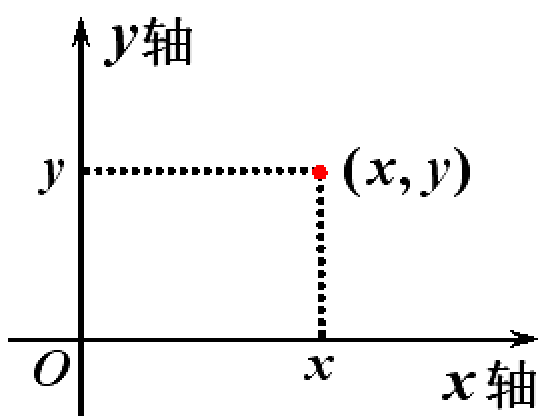
三、复数的乘幂与开方

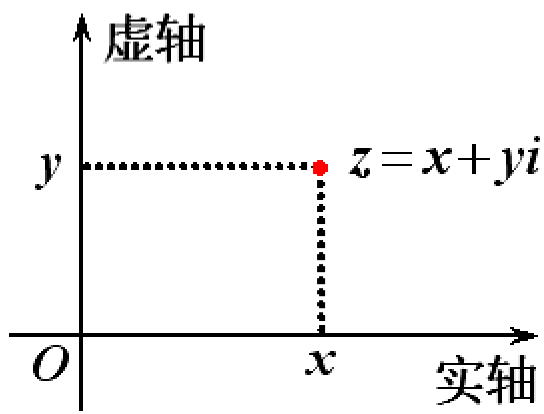
四、几个关系

一、复数的几何表示

1. 复平面

定义 在平面上建立一个直角坐标系，用坐标为 (x, y) 的点来表示复数 $z = x + iy$，从而将全体复数和平面上的全部点一一对应起来，这样表示复数 z 的平面称为复平面或者 z 平面。此时，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴。

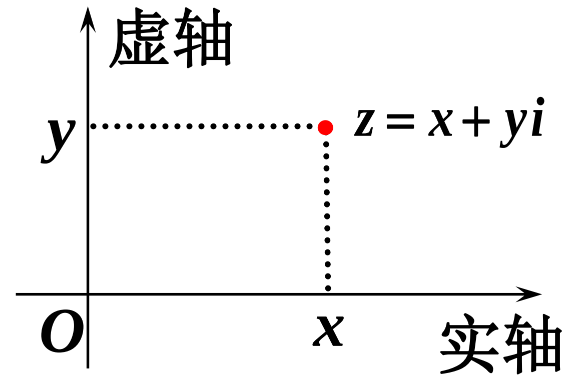




一、复数的几何表示

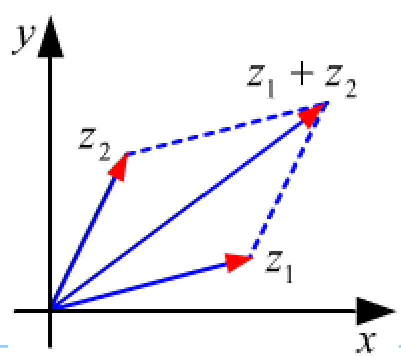
1. 复平面

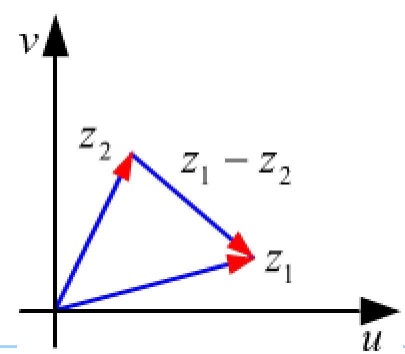
- 在复平面上，从原点到点 $z = x + iy$ 所引的向量与该复数 z 也构成一一对应关系(复数零对应零向量)。



- 引进复平面后，复数 z 与点 z 以及向量 z 视为同一个概念。

- 比如，复数的加减法等同于向量的平行四边形法则。

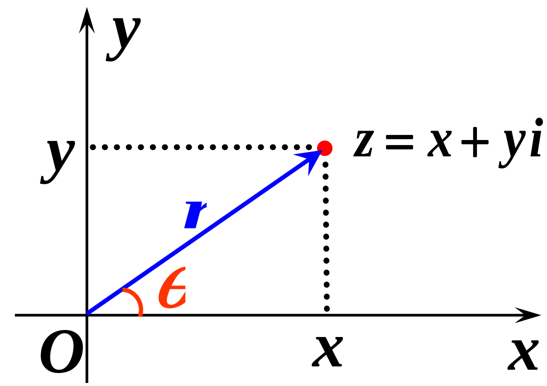




一、复数的几何表示

2. 复数的模与辐角 (Absolute Value or Modulus and Arguments)

- 将复数和向量对应之后，除了利用实部与虚部来给定一个复数以外，还可以借助向量的长度与方向来给定一个复数。



定义 设 z 是一个不为 0 的复数，

(1) 向量 z 的长度 r 称为复数 z 的模，记为 $|z|$.

(2) 向量 z 的“方向角” θ 称为复数 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}\, z$.

一、复数的几何表示

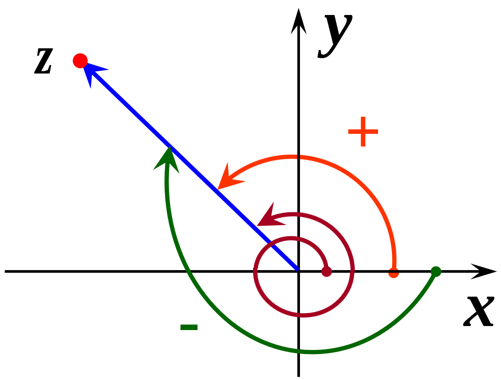
2. 复数的模与辐角

- 两点说明

(1) 辐角是多值的，相互之间可相差 $2k\pi$, 其中 k 为整数。

(2) 辐角的符号约定为：

逆时针取正号，顺时针取负号。



例如 对于复数 $z=-1+i$, 则有 $|z|=\sqrt{2}$,

$$\operatorname{Arg} z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots.$$

注 复数 0 的模为 0，辐角无意义。

一、复数的几何表示

2. 复数的模与辐角

主辐角 对于给定的复数 $z \neq 0$，设有 α 满足：

$$\alpha \in \operatorname{Arg} z \ \text{且}\ -\pi < \alpha \leq \pi,$$

则称 α 为复数 z 的主辐角，记作 $\arg z$.

- 由此就有如下关系：

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots.$$

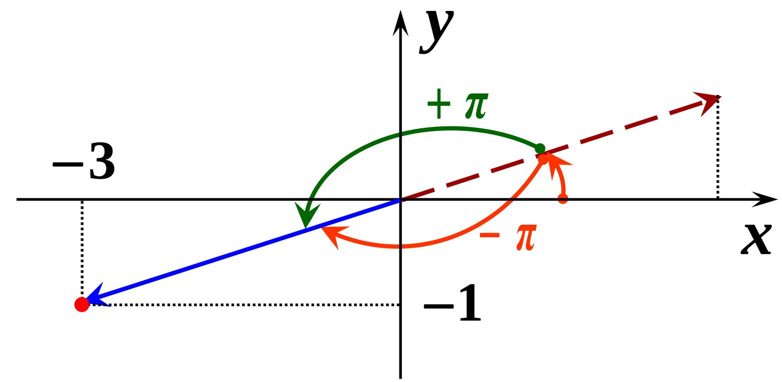
例 求复数 $z=\dfrac{2i}{1-i}+\dfrac{2(1-i)}{i}$ 的模与主辐角。

解 $z=\dfrac{2i}{1-i}+\dfrac{2(1-i)}{i}=-3-i.$

$$|z|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10},$$

$$\arg z=\arctan\left(\frac{-1}{-3}\right)-\pi$$

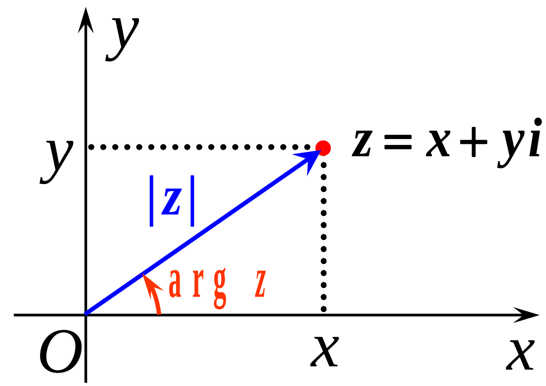
$$=\arctan\frac{1}{3}-\pi\ .$$



一、复数的几何表示

3. 相互转换关系

(1) 已知实部与虚部，求模与辐角。



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

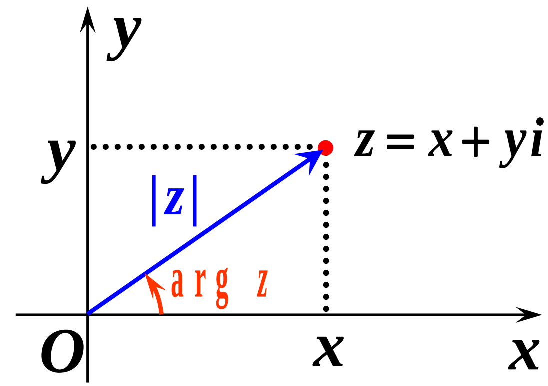
$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0,\ y \text{任意}, \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0,\ y \ge 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0, \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

一、复数的几何表示

3. 相互转换关系

(1) <u>已知实部与虚部，求模与辐角</u>。

(2) <u>已知模与辐角，求实部与虚部</u>。



$$x = |z|\cos(\arg z) = |z|\cos(\operatorname{Arg} z);$$

$$y = |z|\sin(\arg z) = |z|\sin(\operatorname{Arg} z).$$

- 由此引出复数的三角表示式。

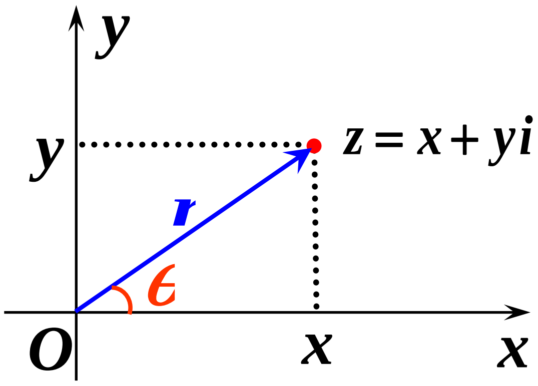
二、复数的三角表示和指数表示

1. 复数的三角表示

- 如图，由 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

  有 $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

  $= r(\cos\theta + i\sin\theta)$.



定义 设复数 $z \neq 0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角，称 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 为复数 z 的三角表示式。

二、复数的三角表示和指数表示

2. 复数的指数表示

(欧拉公式)

- 利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 得

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\mathrm{e}^{i\theta}.$$

定义 设复数 $z\neq 0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角，

称 $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$ 为复数 z 的指数表示式。

注 在复数的三角表示式与指数表示式中，辐角不是唯一的，但习惯上一般取为主辐角或辐角主值(principal value)。

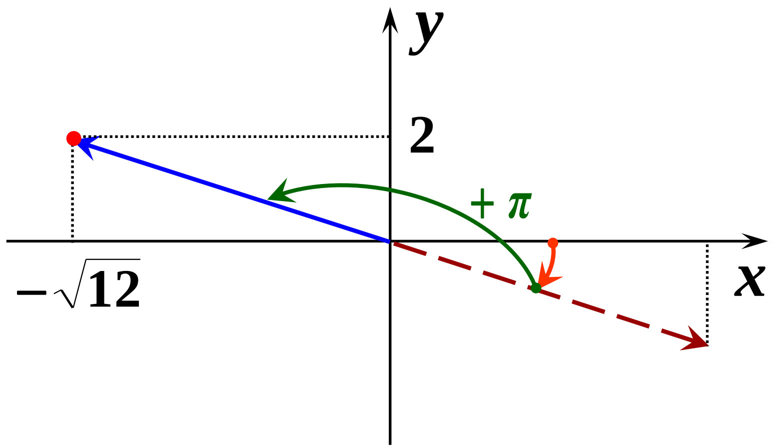
例 写出复数 $z=-\sqrt{12}+2i$ 的三角表示式与指数表示式。

解 $|z|=\sqrt{12+4}=4,$

$$\arg z=\arctan\left(\frac{2}{-\sqrt{12}}\right)+\pi$$

$$=-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi$$

$$=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$



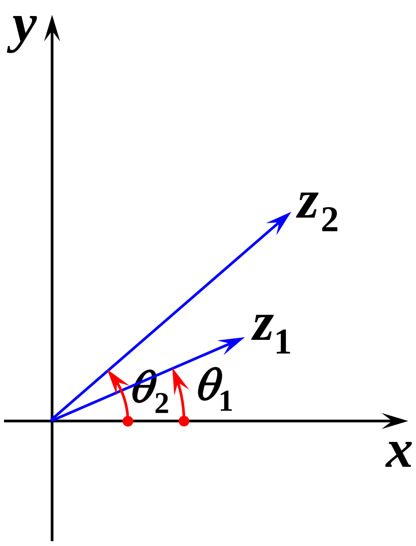
复数 z 的三角表示式为 $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$

复数 z 的指数表示式为 $z=4e^{\frac{5\pi}{6}i}.$

二、复数的三角表示和指数表示

3. 利用指数表示进行复数的乘除法运算

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$



乘法 $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

即 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$

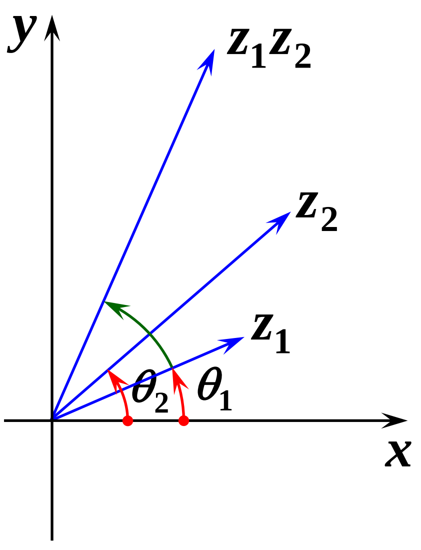
$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2.$$ (在几何意义下?)

- 两个复数乘积的 模等于它们的模的乘积；辐角等于它们辐角的和。

二、复数的三角表示和指数表示

3. 利用指数表示进行复数的乘除法运算

设 $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$,



除法 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}}{r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

即 $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2 .$$

- 两个复数的商的 模等于它们的模的商；辐角等于它们辐角的差。

例 计算 $\dfrac{i}{1-i}$.

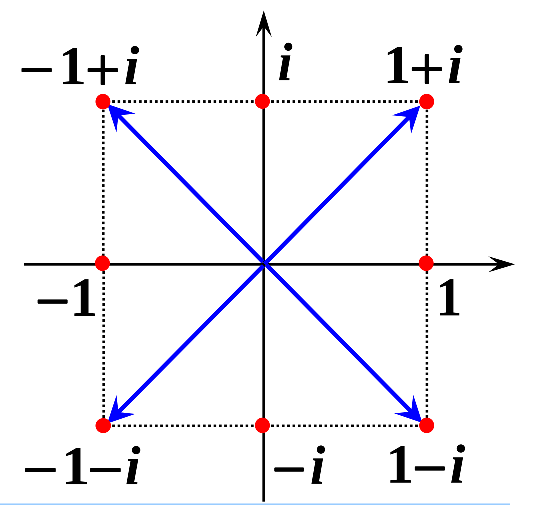
解 由 $i=e^{\frac{\pi}{2}i}$, $1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ 有

$$\frac{i}{1-i}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})i}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

附 <u>一些“简单”复数的指数形式</u>

$$e^{2\pi i}=1,\quad e^{2k\pi i}=1,\quad e^{\pi i}=-1,$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i,\quad \cdots\cdots.$$



例 计算 $(1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)$ 和 $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i}$.

解 由 $1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $-\sqrt{3}-i=2e^{-\frac{5\pi}{6}i}$ 有

$$(1+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}-i)=2e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot 2e^{-\frac{5\pi}{6}i}=4e^{(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6})i}$$

$$=4e^{-\frac{\pi}{2}i}=-4i.$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}-i}=\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{-\frac{5\pi}{6}i}}=e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6})i}=e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

$$=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

三、复数的乘幂与开方(Powers and Roots)

1. 复数的乘幂

定义 设 z 是给定的复数，n 为正整数，n 个 z 相乘的积称为复数 z 的乘方，记为 z^n，即 $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n\text{个}}$.

- 利用复数的指数表示式可以很快得到乘方法则。

法则 设 $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $z^n = (r\,\mathrm{e}^{i\theta})^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\theta}$.

三、复数的乘幂与开方

1. 复数的乘方

- 棣莫弗(De Moivre)公式

由 $z^n = (r\mathrm{e}^{i\theta})^n = r^n \mathrm{e}^{in\theta}$ 以及复数的三角表示式可得

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

在上式中令 $r = 1$，则得到棣莫弗(De Moivre)公式:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

- 进一步易得到正弦与余弦函数的 n 倍角公式。

比如 $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$

例 $$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=(e^{\frac{\pi}{3}i})^2=e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=(e^{\frac{\pi}{3}i})^3=e^{\pi i}=-1.$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=(e^{-\frac{\pi}{3}i})^3=e^{-\pi i}=-1.$$

此外，显然有 $(-1)^3=-1.$

- 由此引出方根的概念。

三、复数的乘幂与开方

2. 复数的开方

- 复数求方根是复数乘方的逆运算。

定义 设 z 是给定的复数，n 是正整数，求所有满足 $w^n = z$ 的复数 w，称为把复数 z 开 n 次方，或者称为求复数 z 的 n 次方根，记作 $w = \sqrt[n]{z}$ 或 $w = z^{1/n}$.

- 复数 z 的 n 次方根一般是多值的。

三、复数的乘幂与开方

2. 复数的开方

- 利用复数的指数表示式可以很快得到开方法则。

推导 设 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$，$w = \rho\mathrm{e}^{i\varphi}$， 由 $w^n = z$ 有 $\rho^n\mathrm{e}^{in\varphi} = r\mathrm{e}^{i\theta}$，

即 $\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，

得 $\rho^n = r$，$\Rightarrow$ $\rho = \sqrt[n]{r}$； —— 正实数的算术根。

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

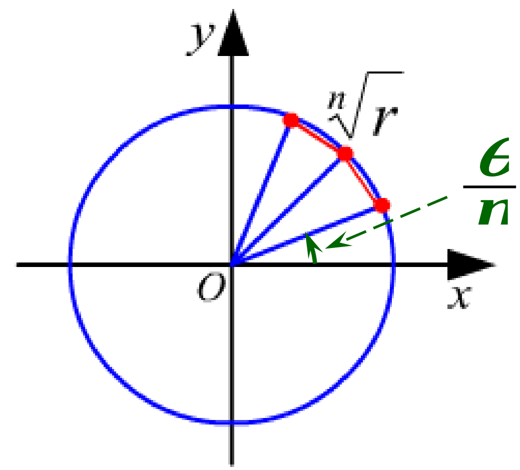
法则 设 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$，$(k = 0, 1, \cdots, n-1)$.

三、复数的乘幂与开方

2. 复数的开方

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\quad (k=0,1,\cdots,n-1).$$

描述 在复平面上，这 n 个根均匀地分布在一个以原点为中心、以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上。其中一个根的辐角是 (θ/n).



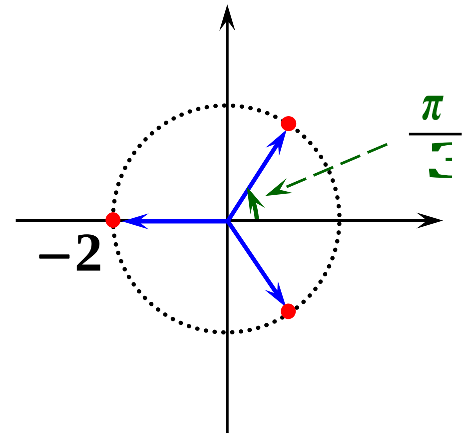
方法

- 直接利用公式求根；
- 先找到一个特定的根，再确定出其余的根。

例 求 $\sqrt[3]{-8}$.

解 $\sqrt[3]{-8} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3})}$, $(k=0,1,2)$.

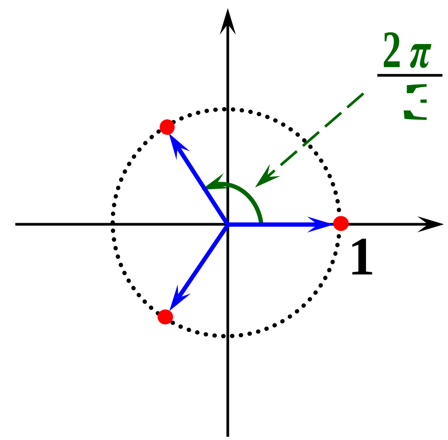
具体为: -2, $2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.



例 求解方程 $z^3-1=0$.

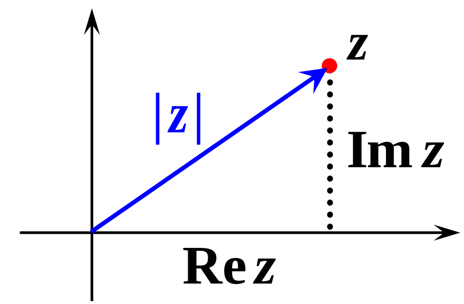
解 $z=\sqrt[3]{1}=1\cdot e^{i(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3})}$, $(k=0,1,2)$.

具体为: 1, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, $e^{-\frac{4\pi}{3}i}$.

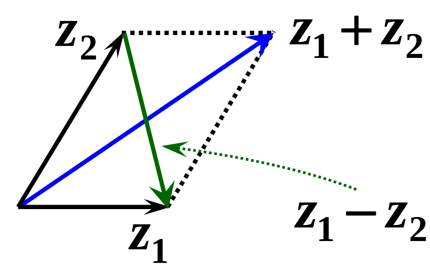


四、几个关系

(1) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \le |z|.$



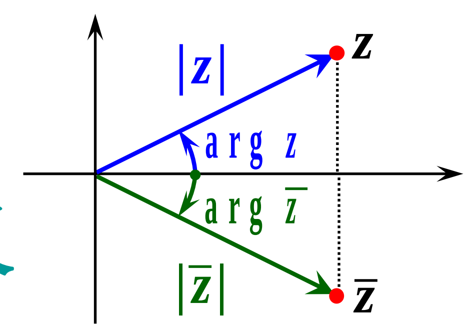
(2) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|.$



(3) $|z| = |\overline{z}|;$

$\arg z = -\arg \overline{z}, \ (\arg z \ne \pi);$

$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$

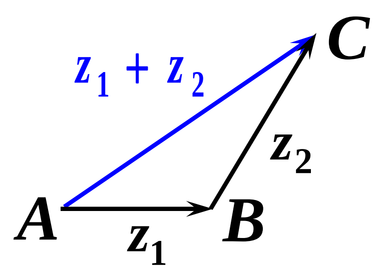


- 认真理解复数运算的几何含义

例 证明 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

证
$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\boxed{\overline{z_1}z_2}$$
$$\overline{z_1\overline{z_2}}$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$
$$\le|z_1|^2+|z_2|^2+2\,|\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})|$$
$$\le|z_1|^2+|z_2|^2+2\,|z_1|\cdot|z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2.$$

- 利用复数与向量的关系，可以证明一些几何问题。比如，上例证明的结论可描述为：



三角形的两边之和大于等于第三边。

Find a vector $\vec{\omega}$ that bisects the smaller of the two angles formed by $4\vec{i}+3\vec{j}$ and $5\vec{i}-12\vec{j}$

找一个复数z，其能够平分由复数$z_1=4+3i$和$z_2=5-12i$所夹的角（锐角）

§ 1.3 平面点集的一般概念

一、平面点集

二、区域

三、平面曲线

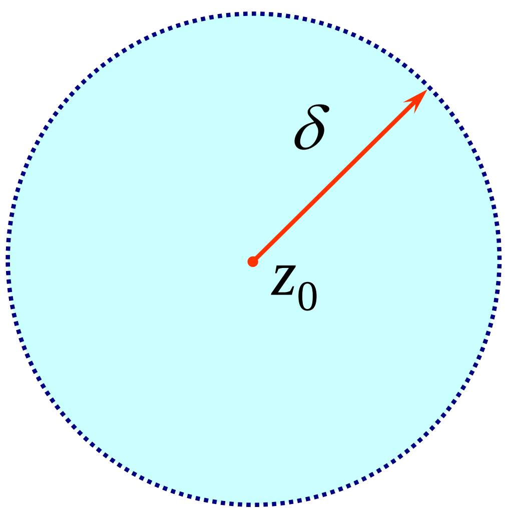
一、平面点集

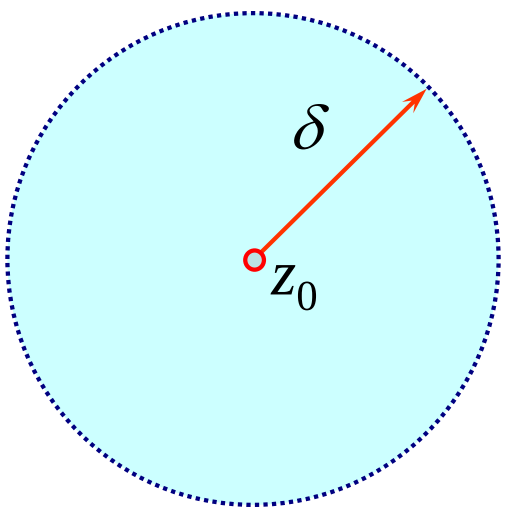
1. 邻域

定义 设 z_0 为复平面上的一点，$\delta > 0$,

(1) 称点集 $\{z : |z - z_0| < \delta\}$ 为 z_0 点的 δ 邻域；

(2) 称点集 $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 为 z_0 点的 δ 去心邻域。





一、平面点集

2. 内点、外点与边界点

考虑某平面点集 G 以及某一点 z_0,

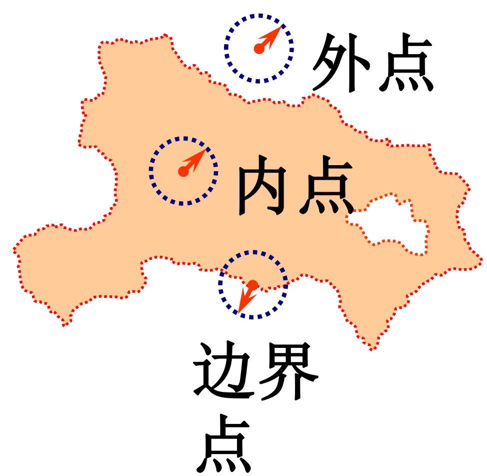
内点 (1) $z_0 \in G$; (2) $\exists \delta > 0, \forall z : |z - z_0| < \delta$, 有 $z \in G$.

外点 (1) $z_0 \notin G$; (2) $\exists \delta > 0, \forall z : |z - z_0| < \delta$, 有 $z \notin G$.

边界点 (1) z_0 不一定属于 G;

(2) $\forall \delta > 0$, 在 $|z - z_0| < \delta$ 中,

既有 $z \in G$, 又有 $z \notin G$.



边界 G 的边界点的全体称为 G 的边界。

一、平面点集

3. 开集与闭集

开集 如果G的每个点都是它的内点，则称G为开集。

闭集 如果G的边界点全部都属于G，则称G为闭集。

4. 有界集与无界集

定义 若存在$\delta > 0$，使得点集G包含在原点的δ邻域内，则G称为有界集，否则称为非有界集或无界集。

二、区域

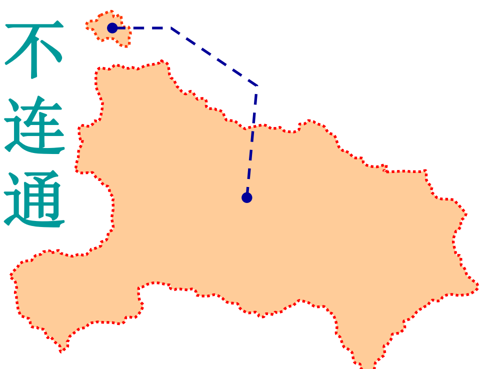
1. 区域与闭区域

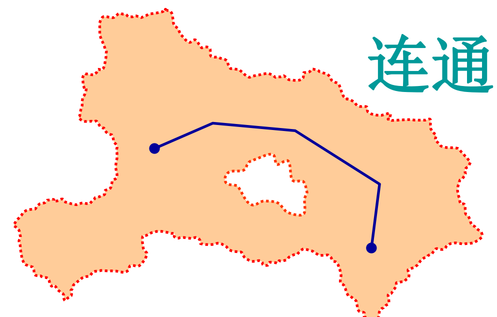
区域 平面点集 D 称为一个区域，如果它满足下列两个条件：

(1) D 是一个开集；

(2) D是连通的，即 D 中任何两点都可以用完全属于 D 的一条折线连接起来。

不连通





闭区域 区域 D 与它的边界一起构成闭区域或闭域，记作 $\overline{D}$。

二、区域

2. 有界区域与无界区域 (顾名思义)

3. 内区域与外区域

定义 一条"简单闭曲线(?)"把整个复平面分成两个区域,其中有界的一个称为该简单闭曲线的内部(内区域),另一个称为该简单闭曲线的外部(外区域)。

4. 单连通域与多连通域

定义 设 D 为区域,如果 D 内的任何一条简单闭曲线的内部仍属于 D,则 D 称为单连通域,否则称为多连通域。

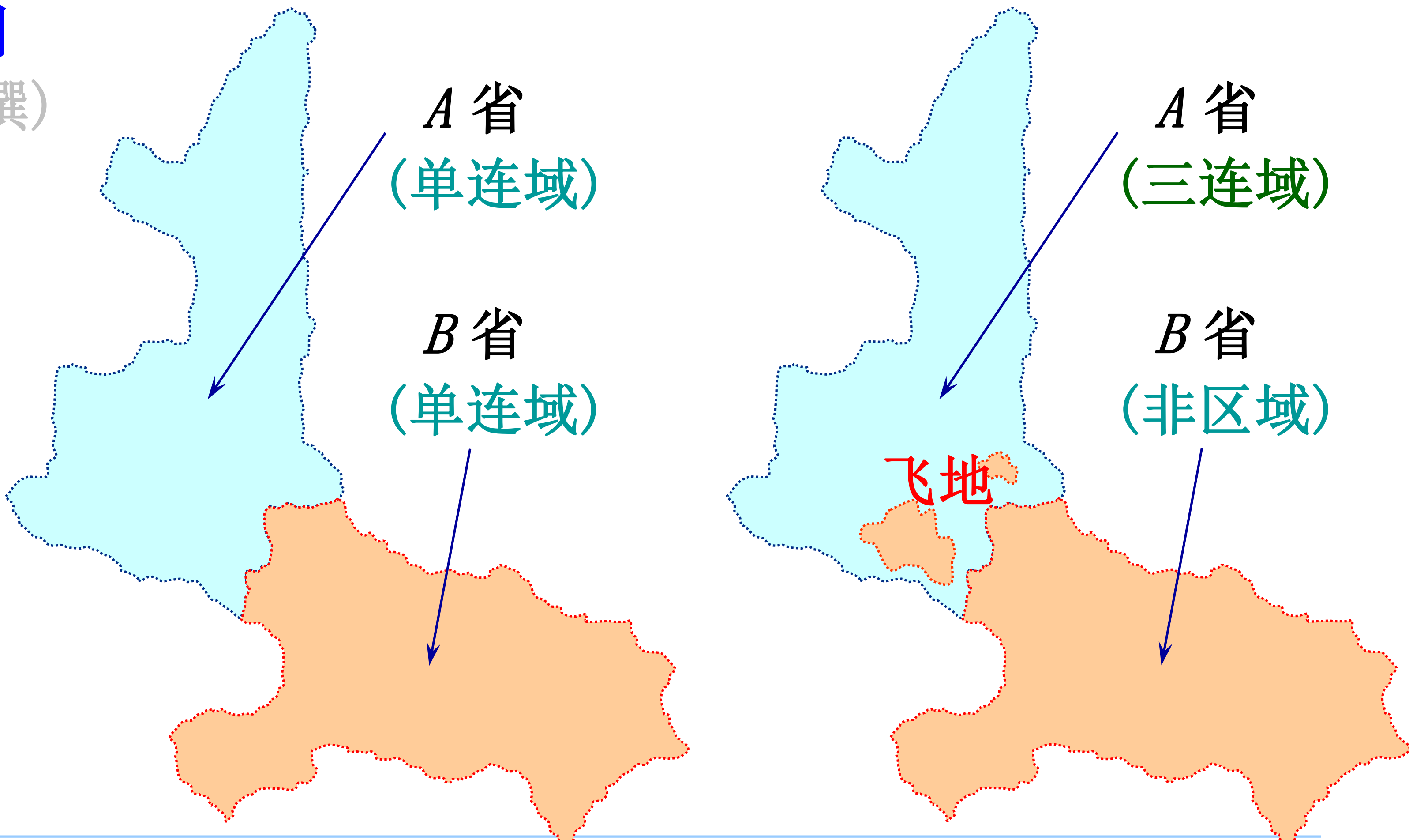
- 多连通域又可具体分为二连域、三连域、……。

二、区域

4. 单连通域与多连通域

举例

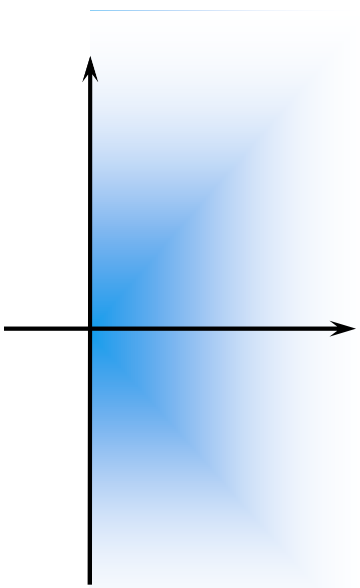
(杜撰)



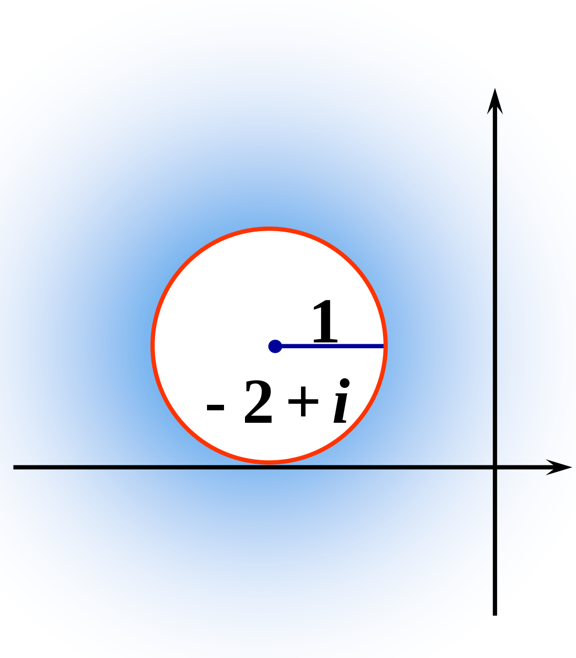
例 (1) $z+\bar{z}>0, \quad \Rightarrow \quad x>0;$

(2) $|z+2-i|\geq 1, \quad \Rightarrow \quad |z-(-2+i)|\geq 1;$

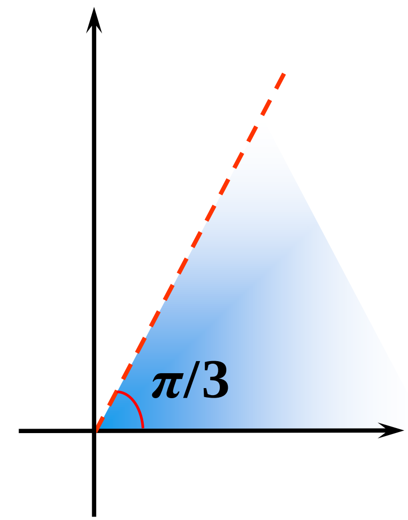
(3) $0<\arg z<\pi/3.$



区域



闭区域



(角形)区域

三、平面曲线

1. 方程式

- 在直角平面上 $f(x,y)=0.$ (比较熟悉)
- 在复平面上 $f(z)=0.$ (比较陌生)

- 如何相互转换?

(1) $f(x,y)=0 \xrightarrow[y=(z-\bar{z})/(2i)]{x=(z+\bar{z})/2} \tilde{f}(z)=0.$ (建立方程)

(2) $f(z)=0 \xrightarrow{z=x+iy} \tilde{f}(x,y)=0.$ (理解方程)

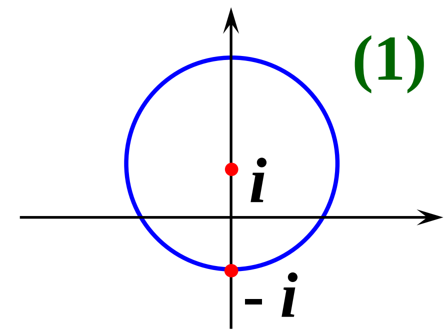
例 (1) $|z-i|=2, \Rightarrow x^2+(y-1)^2=4.$

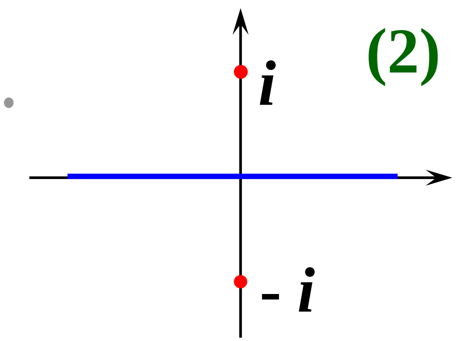
(2) $|z+i|=|z-i|, \Rightarrow y=0.$

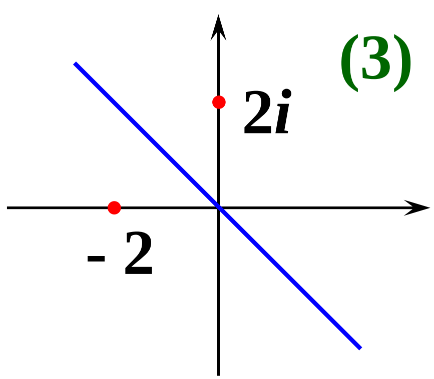
(3) $|z-2i|=|z+2|, \Rightarrow y=-x.$

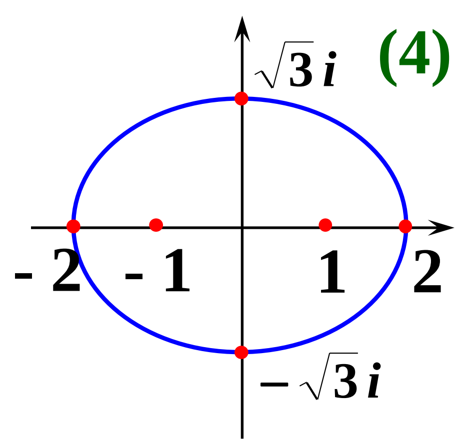
(4) $|z+1|+|z-1|=4, \Rightarrow \dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1.$

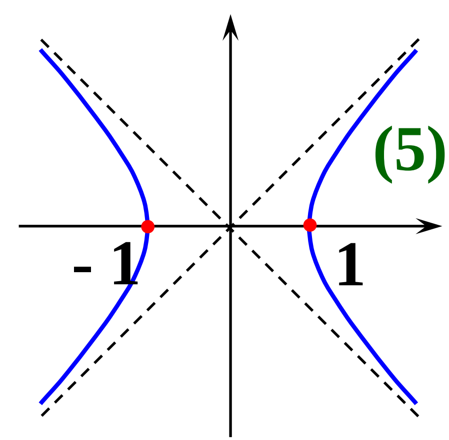
(5) $\mathrm{Re}(z^2)=1, \Rightarrow x^2-y^2=1.$











三、平面曲线

2. 参数式

- 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta).$

- 在复平面上 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t), \ (\alpha \le t \le \beta).$

例如 考察以原点为圆心、以 R 为半径的圆周的方程。

(1) 在直角平面上 $\begin{cases} x = x(\theta) = R\cos\theta, \\ y = y(\theta) = R\sin\theta, \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$

(2) 在复平面上 $z = z(\theta) = x(\theta) + i\,y(\theta) = R(\cos\theta + i\sin\theta),$

$$\Rightarrow \quad z = R\,\mathrm{e}^{i\theta}, \quad (0 \le \theta \le 2\pi).$$

三、平面曲线

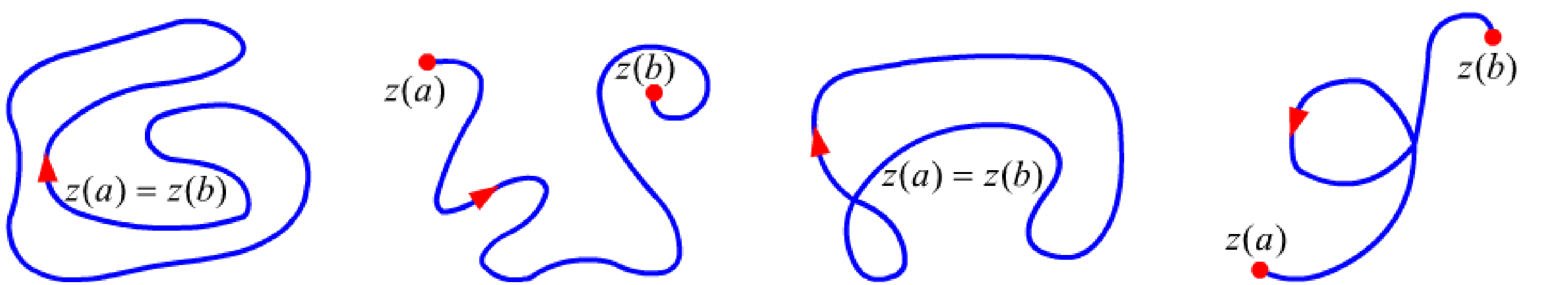
3. 曲线的分类

考虑曲线 $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$，$(\alpha \le t \le \beta)$.

简单曲线 $\forall t_1 \in (\alpha, \beta)$, $t_2 \in [\alpha, \beta]$, 当 $t_1 \ne t_2$ 时，$z(t_1) \ne z(t_2)$.

简单闭曲线 简单曲线且 $z(\alpha) = z(\beta)$.

光滑曲线 在区间$[\alpha, \beta]$上，$x'(t)$和$y'(t)$连续且$z'(t) \ne 0$.

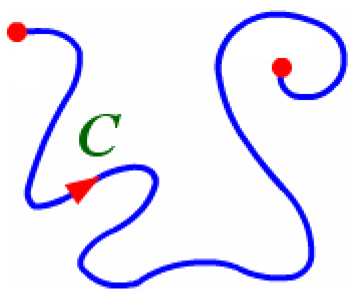


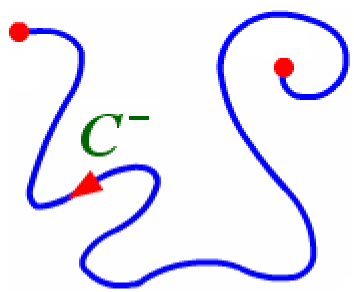
简单、闭　　简单、不闭　　不简单、闭　　不简单、不闭

三、平面曲线

4. 有向曲线

定义 设 C 为平面上一条给定的光滑(或分段光滑)曲线， 如果指定 C 的两个可能方向中的一个作为正向，则 C 为带有方向的曲线，称为有向曲线，仍记为 C。相应地，C^{-} 则代表与 C 的方向相反(即 C 的负方向)的曲线。



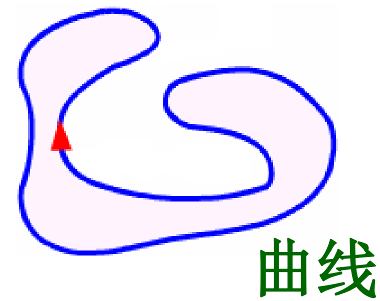


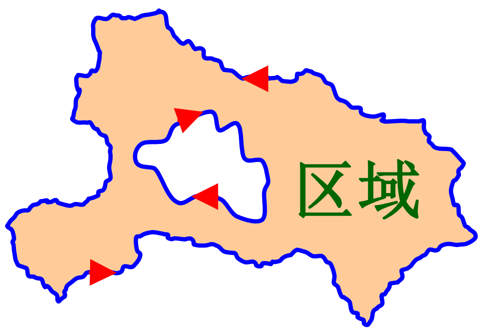
三、平面曲线

4. 有向曲线

- 简单闭曲线的正向一般约定为:

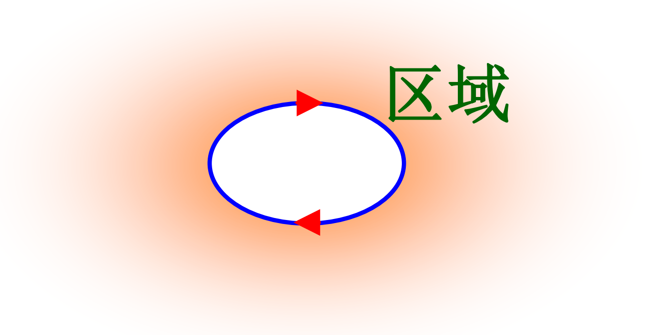
当曲线上的点 P 顺此方向沿曲线前进时，曲线所围成的有界区域始终位于 P 点的左边。





- 区域边界曲线的正向一般约定为:

当边界上的点 P 顺此方向沿边界前进时，所考察的区域始终位于 P 点的左边。注意区域可以是多连域。



§1.4　无穷大与无穷远点

一、无穷大

二、无穷远点

一、无穷大

定义 一个特殊的复数 ∞，称为无穷大，满足 $\infty=\dfrac{1}{0}$.

法则 (1) $z\pm\infty=\infty\pm z=\infty,\quad (z\neq\infty);$

(2) $z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty,\quad (z\neq 0);$

(3) $\dfrac{z}{\infty}=0,\ \dfrac{\infty}{z}=\infty,\quad (z\neq\infty).$

问题

- 实部虚部是多少? $\mathrm{Re}\,\infty,\ \mathrm{Im}\,\infty$ 无意义。
- 模与辐角是多少? $|\infty|=+\infty,\ \mathrm{Arg}\,\infty$ 无意义。
- 在复平面上对应到哪一点?

二、无穷远点

1. 无穷远点的概念

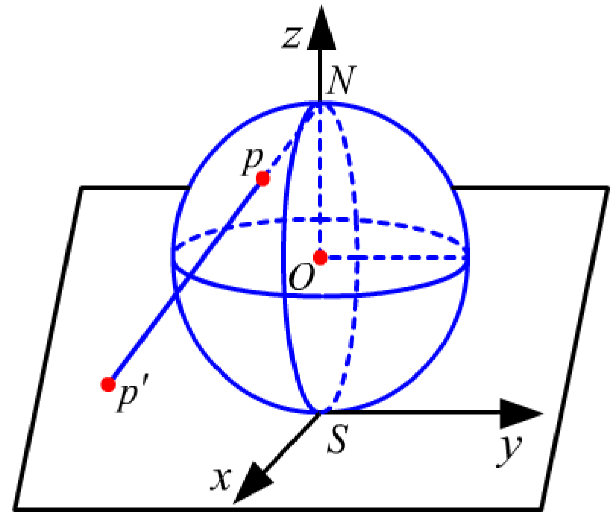
定义 (?) 在“复平面”上一个与复数 ∞ 对应的“理想”点，称为无穷远点。

- 事实上，在通常的复平面上并不存在这样的点，因此只能说它是一个“理想”点。

- 那么，这个“理想”点到底在哪里呢？下面就来看看黎曼(Riemnann)给出的解释。

二、无穷远点

2. 复球面



- 如图，某球面与复平面相切，其中，N 为北极，S 为南极。
- 对复平面上的任一点 p'，用直线将 p' 点与 N 点相连，与球面相交于 p 点。
- 球面上除 N 点外的所有点和复平面上的所有点一一对应，这样的球面称作复球面。
- 球面上的 N 点本身则对应到了"复平面"上的无穷远点。

注　显然，复数 ∞ 不能写成 $+\infty$ 或者 $-\infty$。

二、无穷远点

3. 扩充复平面

定义 (1) 包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面;

(2) 不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面,

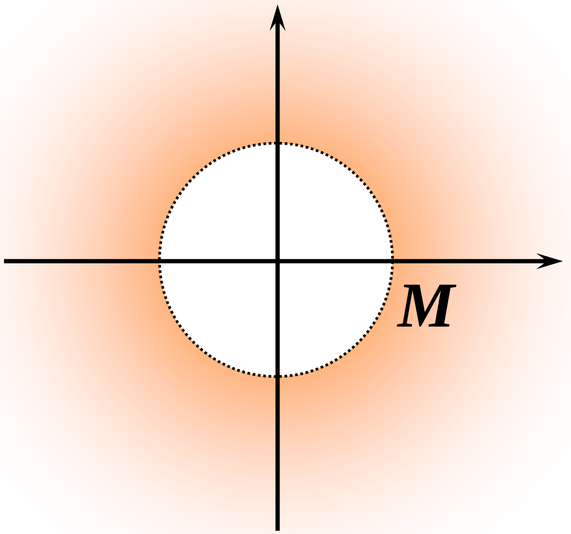
或者简称为复平面。

二、无穷远点

4. 无穷远点的邻域

定义 设实数 $M>0$,

(1) 包括无穷远点在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，称为无穷远点的邻域。



(2) 不包括无穷远点在内且满足 $|z|>M$ 的所有点的集合，称为无穷远点的去心邻域，也可记为 $M<|z|<+\infty$.

§ 1.5 复变函数

一、基本概念

二、图形表示

三、极限

四、连续

一、基本概念

定义 设 D 是复平面上的一个点集，对于 D 中任意的一点 z，按照一定法则，有确定的复数 w 与它对应，则称在 D 上定义一个复变函数，记作 $w = f(z)$.

- 单值函数 对每个 $z \in D$，有唯一的 w 与它对应；
  比如 $w = f(z) = z^2$.

- 多值函数 对每个 $z \in D$，有多个 w 与它对应；
  比如 $w = \sqrt[3]{z}$，$w = \operatorname{Arg} z$.

一般情形下，所讨论的“函数”都是指单值函数。

- 在以后的讨论中，D 常常是一个平面区域，称之为定义域。

一、基本概念

分析 设 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则 $w = f(z)$ 可以写成

$$w = u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

其中，$u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 为实值二元函数。

分开上式的实部与虚部得到 $\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases}$

- 一个复变函数对应于两个二元实变函数。

例 将复变函数 $w = z^2 + 1$ 化为一对实变函数。

解 记 $z = x + iy$, $w = u + iv$,

代入 $w = z^2 + 1$ 得

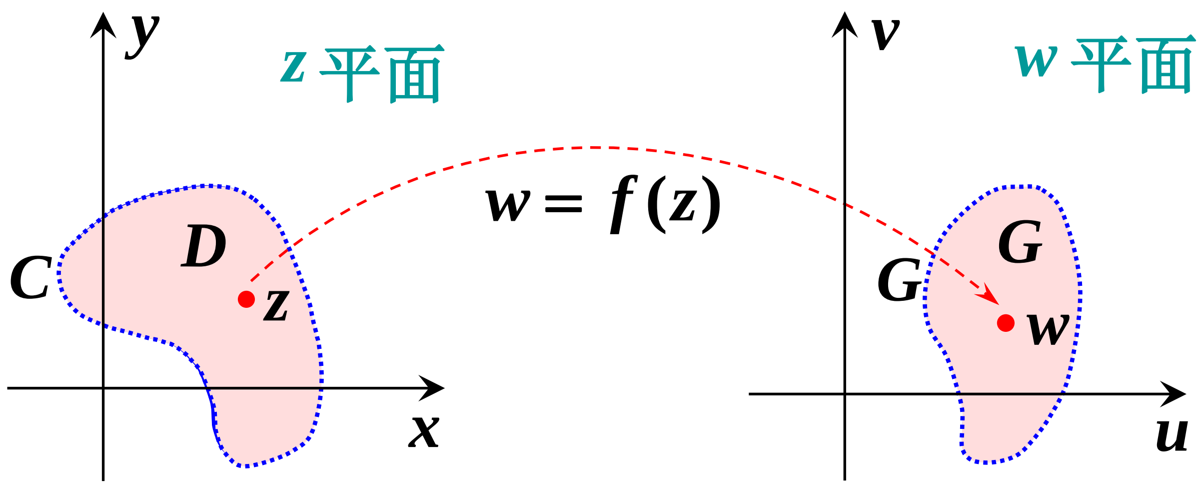
$$u + iv = (x + iy)^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy),$$

分开实部与虚部即得

$$u = x^2 - y^2 + 1,$$

$$v = 2xy.$$

二、图形表示



映射 复变函数 $w = f(z)$ 在几何上被看作是把 z 平面上的一个点集 S 变到 w 平面上的一个点集 S^* 的映射(或者变换)。其中，点集 S^* 称为像，点集 S 称为原像。

- 函数、映射以及变换可视为同一个概念。
  (分析) (几何) (代数)

二、图形表示

反函数与逆映射

设函数$w=f(z)$的定义域为z平面上的点集D，值域为w平面上的点集G，则G中的每个点w必将对应着D中的一个(或几个)点z， 按照函数的定义，在G上就确定了一个函数$z=\tilde{f}(w)$，它称为函数$w=f(z)$的反函数，也称为映射$w=f(z)$的逆映射。

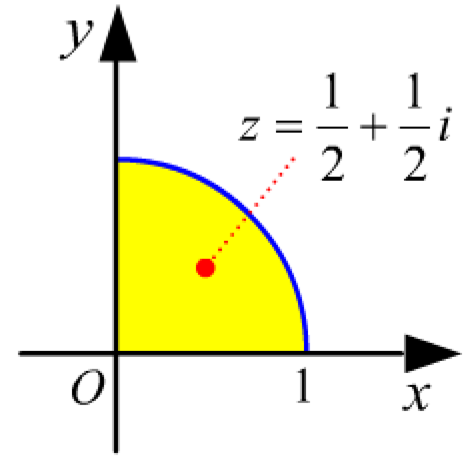
双方单值与一一映射

若映射$w=f(z)$与它的逆映射$z=\tilde{f}(w)$都是单值的，则称映射$w=f(z)$是双方单值的或者一一映射。

例 已知函数 $w=z^2$，求下列点集的像。

(1) 点 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$； (2) 区域 $D=\{z:\mathrm{Im}\,z>0,\mathrm{Re}\,z>0,|z|<1\}$.

解 (1) 点 $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 对应的像(点)为 $w=\frac{1}{2}i$.



(2) 区域 D 可改写为:

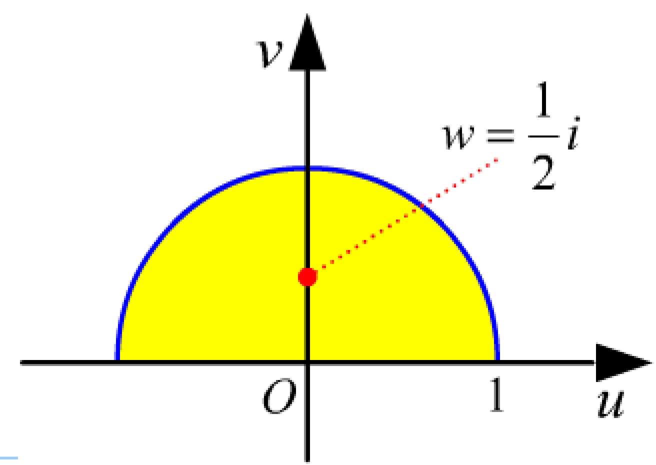
$$D=\{z:0<|z|<1,\ 0<\arg z<\pi/2\},$$

令 $z=r\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $w=z^2=r^2\mathrm{e}^{i2\theta}$,

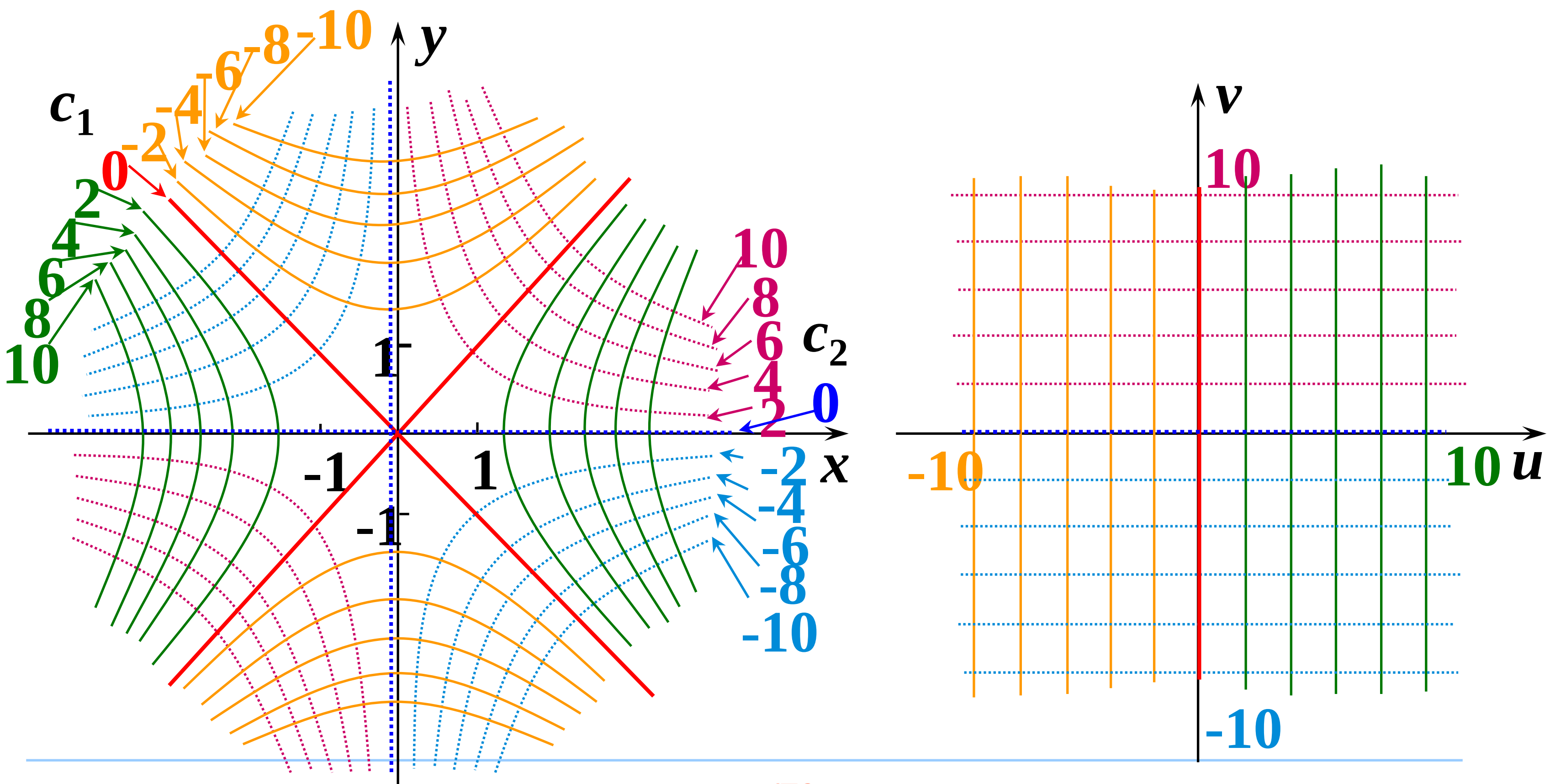
可得区域 D 的像(区域)G 满足

$$0<|w|<1,\ 0<\arg w<\pi,$$

即 $G=\{w:\mathrm{Im}\,w>0,|w|<1\}$.

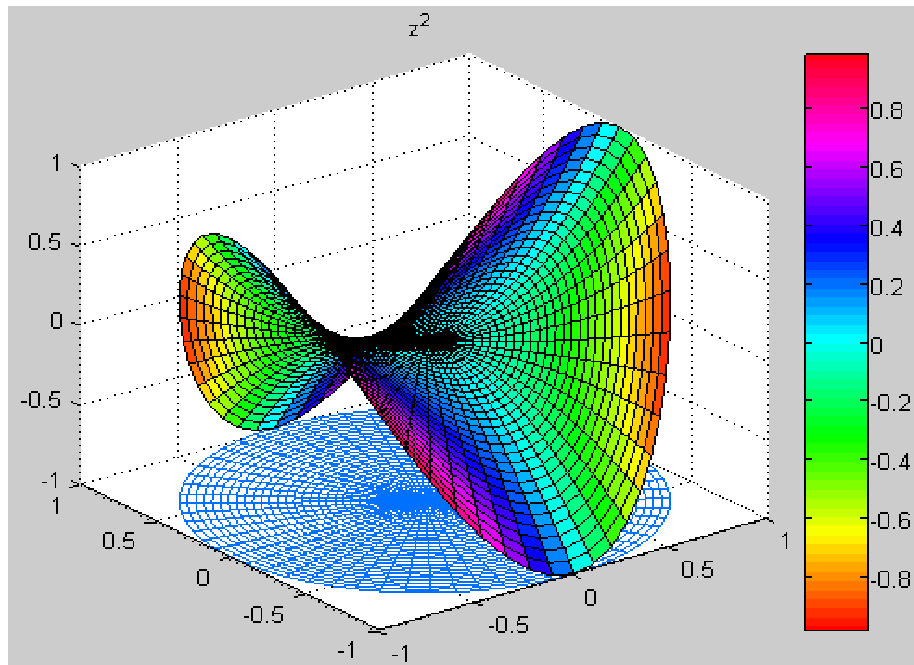


例 函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数 $u=x^2-y^2$, $v=2xy$, 因此，它把 z 平面上的两族双曲线 $x^2-y^2=c_1$, $2xy=c_2$, 分别映射成 w 平面上的两族平行直线 $u=c_1$, $v=c_2$.



绘出幂函数 $w = z^2$（$|z| \le 1$)的图形.

```
z=cplxgrid(30);
cplxmap(z,z.^2);
colorbar('vert');
title('z^2')
```



三、极限

定义 设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义，若存在复数 $A \neq \infty$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得

当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - A| < \varepsilon$，

则称 A 为函数 $w = f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记作

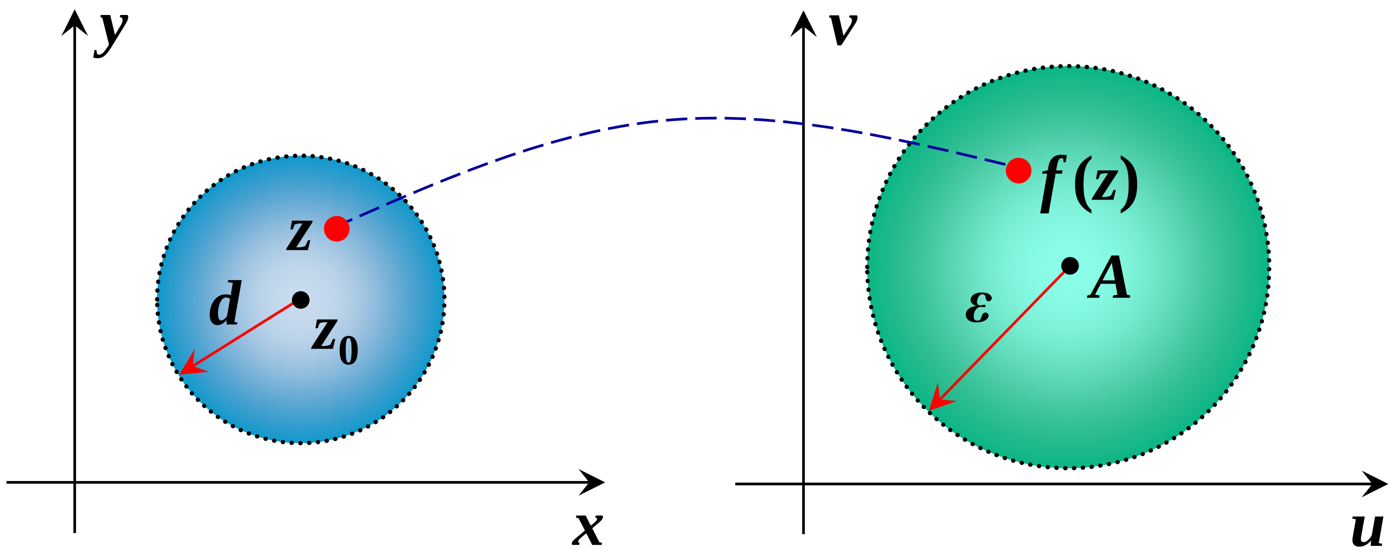
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \quad \text{或} \quad f(z) \to A \quad (z \to z_0).$$

注 (1) 函数 $f(z)$ 在 z_0 点可以无定义；

(2) z 趋向于 z_0 的方式是任意的。

三、极限

几何意义



- 当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小的 d 邻域时，

  它的像点 $f(z)$ 就落在 A 的预先给定的 ε 邻域内。

三、极限

性质 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$,

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B$,

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$, $(B\neq 0)$.

三、极限

定理 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=u_0+iv_0$, $z_0=x_0+iy_0$,

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

证明 必要性 "$\Rightarrow$" 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,

(跳过?)

当 $0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,

$$|f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow \quad |u-u_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

三、极限

定理 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ A=u_0+iv_0,\ z_0=x_0+iy_0,$

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$

证明 充分性 "$\Leftarrow$" 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0,$

则 $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,$ 当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，

$$|u-u_0|<\varepsilon,\ |v-v_0|<\varepsilon,$$

$$\Rightarrow\ |f(z)-A|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\sqrt{2}\,\varepsilon,$$

$$\Rightarrow\ \lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

三、极限

- 关于含∞ 的极限作如下规定：

(1) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = A$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$;

(3) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$.

- 所关心的两个问题：

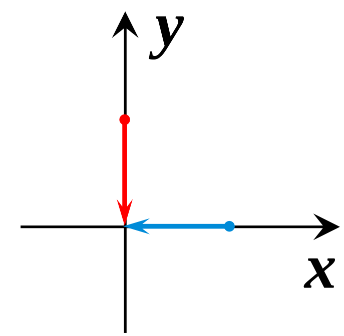
(1) 如何证明极限存在？放大技巧 $|f(z) - A| \le g(|z - z_0|)$

(2) 如何证明极限不存在？选择不同的路径进行攻击。

例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 的极限。

解 方法一

$$f(z)=\frac{\bar{z}^2}{|z|^2}=\frac{x^2-y^2-i\,2xy}{x^2+y^2},$$



$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

当 $y=0,\ x\to 0$ 时，$u(x,y)\to 1,$

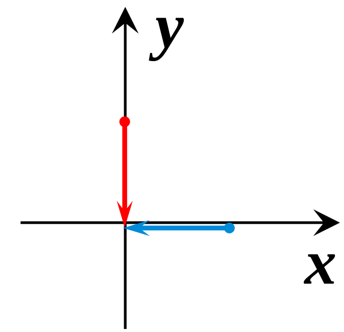
当 $x=0,\ y\to 0$ 时，$u(x,y)\to -1,$

因此极限不存在。

例 讨论函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在 $z\to 0$ 的极限。

解 方法二

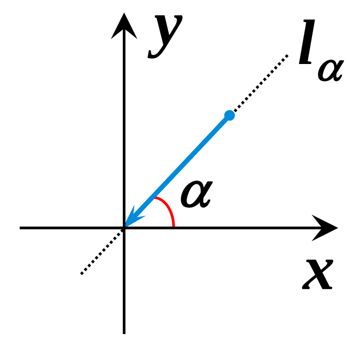
$$f(z)=\frac{x-iy}{x+iy},$$



当 $y=0,\ x\to 0$ 时，$f(z)\to 1$,

当 $x=0,\ y\to 0$ 时，$f(z)\to -1$,

因此极限不存在。



方法三

沿着射线 l_α： $z=r\,e^{i\alpha},\ r\to 0$,

$$\lim_{\substack{z\in l_\alpha\\ z\to 0}} f(z)=e^{i(-2\alpha)},$$ 与 α 有关，因此极限不存在。

四、连续

定义 若 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续。

若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续。

注 (1) 连续的三个要素：$f(z_0)$ 存在；$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在；相等。

(2) 连续的等价表示：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0 \Leftrightarrow \lim_{|\Delta z| \to 0} |\Delta w| = 0.$$

其中，$\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = f(z + z_0) - f(z_0)$.

通常说：当自变量充分靠近时，函数值充分靠近。

(3) 一旦知道函数连续，反过来可以用来求函数的极限。

四、连续

性质 (1) 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和、差、积、商(分母在 z_0 不为零)在 z_0 处连续。

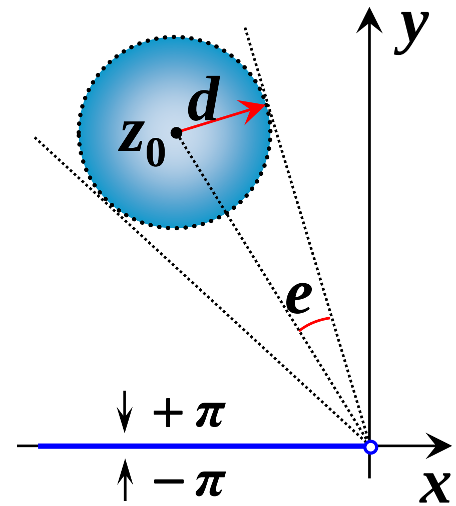
(2) 如果函数 $\xi = g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $w = f(\xi)$ 在 $\xi_0 = g(z_0)$ 连续，则函数 $w = f[g(\xi)]$ 在 z_0 处连续。

(由基本初等函数的连续性可得初等函数的连续性)

(3) 如果函数 $f(z)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，则

- $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上必有界；
- $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上必能取到最大值与最小值；
- $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上必一致连续。

例 证明 $f(z)=\arg z$ 在复平面上除去原点和负实轴的区域上连续。



证 (略)

例 讨论函数 $w=f(z)=|z|^2$ 的连续性。

解 $w=|z|^2=z\cdot\bar{z}$,

$$|\Delta w|=|(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\cdot\bar{z}|$$

$$=|\Delta z\cdot\bar{z}+\overline{\Delta z}\cdot z+\Delta z\cdot\overline{\Delta z}|$$

$$\leq 2|\Delta z|\cdot|z|+|\Delta z|^2\to 0,\ (\text{当 } \Delta z\to 0 \text{ 时})$$

故函数 $w=f(z)=|z|^2$ 处处连续。

四、连续

定理 函数 $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+i\,y_0$ 点连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续。

证明 (略)

例如 函数 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$ 在复平面内除原点外是处处连续的。

因为 $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外是处处连续的，

而 $v(x,y)=x^2-y^2$ 是处处连续的。

第一章作业：

第一次

1 3) 4)
2
7
8 4) 5)
11
14 2)　3)
17

第二次

21 2）4）6）8）10）
22 4）7）8）10）
23
26 3）4）
27
30
31
32