XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第五章 线性空间与欧氏空间

第二节：欧氏空间的基本概念

董荣
数学与统计学院

作业：

习题5.2

(A) 3， 5， 7(2)， 8， 12， 14， 17

(B) 1

第二节：欧氏空间

1. 内积及其基本性质

2. 范数和夹角

3. 标准正交基及其基本性质

4. Gram-Schmidt正交化方法

定义5.2.1（内积和欧氏空间） 设V是一个实线性空间，如果对于V中任意两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$都指定了一个实数与之对应，这个实数记为$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$，并且满足以下条件

$$\left.\begin{array}{l}
(1)\ \text{对称性：}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle \\
(2)\ \text{可加性：}\langle\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle \\
(3)\ \text{齐次性：}\langle k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle \\
(4)\ \text{非负性：}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\geq 0\text{，而且}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}
\end{array}\right\}\text{内积公理}$$

其中，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$是$V$中任意向量，$k$是任意实数，则称实数$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$为$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的内积，称定义了内积的实线性空间$V$为实内积空间或欧几里得空间，简称为欧氏空间。

内积公理
$$\begin{cases} (1)\ \text{对称性：} \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \\ (2)\ \text{可加性：} \langle \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma} \rangle + \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \rangle \\ (3)\ \text{齐次性：} \langle k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = k\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle \\ (4)\ \text{非负性：} \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \geq 0\text{，而且} \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \end{cases}$$

例1： 在线性空间$\boldsymbol{R}^n$中,对于向量

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{a}_2, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{a}_n]^{\mathrm{T}} \ , \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{b}_2, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{b}_n]^{\mathrm{T}}$$

如果规定

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$$

验证它是$\boldsymbol{R}^n$的一个内积. $\boldsymbol{R}^n$按此内积,便构成一个欧氏空间.

$\boldsymbol{R}^n$的标准内积

证明思路：

$$(1)\ \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha} = \left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}\right)^T = \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$$

余下3条利用转置和平方和的性质可验证成立

内积公理 $\begin{cases} (1)\ 对称性：\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle \\ (2)\ 可加性：\langle \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle + \langle \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle \\ (3)\ 齐次性：\langle k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = k\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle \\ (4)\ 非负性：\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle \geq 0，而且\langle \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \end{cases}$

例2：在线性空间$R^{n\times n}$中,对于矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}$

如果规定 $\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{R}^{n\times n}$的标准内积

则可验证它满足内积公理,$R^{n\times n}$按此内积构成一个欧氏空间.

例3： $C[a,b]$**按照**

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall f(x),g(x)\in C[a,b]$$

构成欧氏空间. $\longrightarrow$ $C[a,b]$的标准内积

注：1. 同一线性空间中，可以定义不同的内积，从而构成不同的欧氏空间。

例：在线性空间$\boldsymbol{R}^n$中，对于向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_n)^T,\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)^T$，可以定义如下内积

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=w_1a_1b_1+w_2a_2b_2+\cdots+w_na_nb_n$$

其中$w_1,\cdots,w_n$是n个正常数.

例：在线性空间$C[a,b]$中，对于$f_1,f_2\in C[a,b]$，可以定义如下内积

$$\langle f_1,f_2\rangle=\int_a^b f_1(x)f_2(x)p(x)dx$$

其中$p(x)>0$是大于零的连续函数

注：2. 讲欧氏空间，一定是指欧氏空间V连同定义在V上的某个内积。

内积公理
$$\begin{cases}(1)\ \text{对称性：}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\rangle\\(2)\ \text{可加性：}\langle\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle+\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle\\(3)\ \text{齐次性：}\langle k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\\(4)\ \text{非负性：}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle\geq 0\text{，而且}\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\end{cases}$$

由性质（1）（2）（3）我们可以知道下面的性质：

$$\langle k\boldsymbol{\alpha}+\ell\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle+\ell\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle$$
$$\langle\boldsymbol{\gamma},k\boldsymbol{\alpha}+\ell\boldsymbol{\beta}\rangle=k\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}\rangle+\ell\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}\rangle$$

若$\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j$是欧氏空间$V$中的任意向量，$k_i,\ell_j$是任意实数$(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$，则有

$$\left\langle\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\sum_{j=1}^{n}\ell_j\boldsymbol{\beta}_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_i\ell_j\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j\rangle$$
$$=\begin{bmatrix}k_1&\cdots&k_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\\vdots&&\vdots\\c_{m1}&\cdots&c_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ell_1\\\vdots\\\ell_n\end{bmatrix}$$

其中的实数$c_{ij}=\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j\rangle(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$.

定理5.2.1 (柯西－施瓦茨不等式) 设V是一个欧氏空间.则$\forall \alpha,\beta \in V$,成立

$$\left|\langle \alpha,\beta \rangle\right| \le \sqrt{\langle \alpha,\alpha \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle}$$

其中等号成立的充要条件是α与β线性相关

证: 如果α,β线性无关,则$\forall t \in R$,有 : $t\alpha+\beta \ne 0$. 由内积公理(4),有

$$\langle t\alpha+\beta, t\alpha+\beta \rangle > 0$$

即 $$\langle \alpha,\alpha \rangle t^2 + 2\langle \alpha,\beta \rangle t + \langle \beta,\beta \rangle > 0$$

故有 $$\Delta = 4\langle \alpha,\beta \rangle^2 - 4\langle \alpha,\alpha \rangle\langle \beta,\beta \rangle < 0$$

即 $$\left|\langle \alpha,\beta \rangle\right| < \sqrt{\langle \alpha,\alpha \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle}$$

若α,β线性相关,不妨设有$\alpha = k\beta$(k为实常数),则有

$$\left|\langle \alpha,\beta \rangle\right| = \left|\langle k\beta,\beta \rangle\right| = \left|k\langle \beta,\beta \rangle\right| = \sqrt{k^2\langle \beta,\beta \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle} = \sqrt{\langle k\beta,k\beta \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle \alpha,\alpha \rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta \rangle}$$

定理5.2.1(柯西－施瓦茨不等式) 设V是一个欧氏空间.则$\forall \alpha,\beta \in V$,成立

$$\left|\langle \alpha,\beta\rangle\right| \le \sqrt{\langle \alpha,\alpha\rangle}\sqrt{\langle \beta,\beta\rangle}$$

其中等号成立的充要条件是α与β线性相关

•对于R^n来说,设$\alpha=[a_1,\cdots,\ a_n]^T,\beta=[b_1,\cdots,b_n]^T$

柯西不等式就是

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$$

•对于$C[a,b]$来说,柯西不等式就是

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

第二节：欧氏空间

1. 内积及其基本性质
2. 范数和夹角
3. 标准正交基及其基本性质
4. Gram-Schmidt正交化方法

在几何空间中，向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^T$的长度为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle}$$

定义5.2.2（向量的范数）在欧氏空间V中，称非负实数$\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle}$为向量的范数（或长度），记为$\|\boldsymbol{\alpha}\|$，即

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle}$$

注：按范数的定义，Cauchy-Schwarz不等式可写为

$$|\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle|\le\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$$

范数的基本性质：

$$(1)\ \|\alpha\|\ge 0,\text{且}\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$$

$$(2)\ \|k\alpha\|=|k|\|\alpha\|\qquad(k\in R)$$

$$(3)\ \|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$$

范数的基本性质：(1) $\|\alpha\|\geq 0$, 且 $\|\alpha\|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$;　(2) $\|k\alpha\|=|k|\|\alpha\|$　$(k\in R)$

(3) $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

证:（3）$\|\alpha+\beta\|^2=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle=\langle\alpha,\alpha\rangle+2\langle\alpha,\beta\rangle+\langle\beta,\beta\rangle$

$$\leq\|\alpha\|^2+2|\langle\alpha,\beta\rangle|+\|\beta\|^2$$

$$\leq\|\alpha\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|+\|\beta\|^2=(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2$$ 两边开方，得性质（3）

零向量：范数为零的向量

单位向量：范数为1的向量

非零向量单位化：$\alpha\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 为单位向量

例：$\alpha=(1,2,2)^T$, 单位化得 : $\alpha^0=\dfrac{1}{3}(1,2,2)^T=(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})^T$

在几何空间中，向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的内积定义为$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|\,cos\varphi$
两向量的夹角φ为

$$\varphi=\arccos\frac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}\quad(0\le\varphi\le\pi)$$

上述定义能否直接推广到一般的欧氏空间中？

Cauchy-Schwarz不等式
$|\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle|\le\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$

$$\Rightarrow\quad\left|\frac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}\right|\le 1$$

定义5.2.3（非零向量的夹角）在欧氏空间中，规定两个**非零向量**$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的夹角$\varphi$为

$$\varphi = arccos\frac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}\quad(0\le\varphi\le\pi)$$

- 若$\alpha\neq 0,\beta\neq 0,\langle\alpha,\beta\rangle=0$,则$\phi=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$.即$\alpha\perp\beta$
- 若$\langle\alpha,\beta\rangle=0$,则称**$\alpha$与$\beta$正交**(或垂直),记为$\alpha\perp\beta$
- 由于$\langle 0,\beta\rangle=\langle 0\alpha,\beta\rangle=0\langle\alpha,\beta\rangle=0$，故零向量与任何向量正交.
- 当$\alpha\perp\beta$,则$\|\alpha+\beta\|^2=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$ 勾股定理
- m个向量两两正交, 则$\|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m\|^2=\|\alpha_1\|^2+\|\alpha_2\|^2+\cdots+\|\alpha_m\|^2$

定义5.2.4（距离） $\forall \alpha,\beta \in V$，称$\|\alpha-\beta\|$为$\alpha$与$\beta$的距离，记为$d(\alpha,\beta)$，即

$$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$$

距离的基本性质:

(1)对称性：$d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$

(2)非负性：$d(\alpha,\beta)\geq 0$，且$d(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$

(3)三角不等式：$d(\alpha,\beta)\leq d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$

证:（3） $d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|=\|(\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta)\|$

$$\leq\|\alpha-\gamma\|+\|\gamma-\beta\|=d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$$

第二节：欧氏空间

1. 内积及其基本性质
2. 范数和夹角
3. 标准正交基及其基本性质
4. Gram-Schmidt正交化方法

定义5.2.5（正交向量组与正交单位向量组）

对于欧氏空间V的一个向量组，如果其中**不含零向量**，且其中的向量**两两正交**，则称它为一个正交向量组。

如果一个正交向量组中的每个向量都是**单位向量**，则称它为一个正交单位向量组（或**标准正交向量组**，或正交规范向量组）。

例：

$$\text{在}R^3\text{中}\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\text{是一个正交向量组}$$

定理5.2.2　正交向量组必是线性无关向量组

证:　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是一正交向量组,即

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0\qquad(\forall i,j\in\{1,2,\cdots,m\},且i\neq j)$$

设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

用α_1与上式两端作内积:

$$\langle\alpha_1,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\rangle=\langle\alpha_1,0\rangle=0$$

$$\Rightarrow k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle+\cdots+k_m\langle\alpha_1,\alpha_m\rangle=0$$

$$\Rightarrow k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle=0\qquad\Rightarrow k_1\|\alpha_1\|^2=0\Rightarrow k_1=0$$

同理有$k_2=\cdots=k_m=0$　　故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

定义5.2.6（正交基与标准正交基）在n维欧氏空间V中，由n个向量组成的正交向量组称为V的正交基，由n个向量组成的正交单位向量组称为V的标准正交基（或规范正交基）.

定理5.2.3 设$\boldsymbol{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha_n}$是$n$维欧氏空间$V$的一个标准正交基，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$是$V$中任意的向量，设

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha_n},\qquad \boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha_n}$$

则

(1) $x_i=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha_i}\rangle(i=1,\cdots,n)$，即$\boldsymbol{\alpha}=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha_1}\rangle\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha_n}\rangle\boldsymbol{\alpha_n}$

(2) $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$

(3) $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$

(4) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$

证:（1）$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha_i}\rangle=\langle x_1\boldsymbol{\alpha_1}+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_i}\rangle=x_1\langle\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_i}\rangle+\cdots+x_n\langle\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\alpha_i}\rangle=x_i\langle\boldsymbol{\alpha_i},\boldsymbol{\alpha_i}\rangle=x_i$

（2）$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha_i},\sum_{j=1}^{n}y_j\boldsymbol{\alpha_j}\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j\langle\boldsymbol{\alpha_i},\boldsymbol{\alpha_j}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\langle\boldsymbol{\alpha_i},\boldsymbol{\alpha_i}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

定理5.2.3说明任何一个n维欧氏空间V与$\boldsymbol{R}^n$同构

定理5.2.3 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$n$维欧氏空间$V$的一个标准正交基，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$是$V$中任意的向量，

设$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$, 则

(1) $x_i=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_i\rangle(i=1,\cdots,n)$，即$\boldsymbol{\alpha}=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1\rangle\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_n\rangle\boldsymbol{\alpha}_n$

(2) $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$

(3) $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$

(4) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$

例: 在R^3中,求$\alpha=(1,2,3)^T$在标准正交基$\alpha_1=(1,0,0)^T,\alpha_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T,\alpha_3=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$下的坐标.

解: 由于$\langle\alpha_1,\alpha\rangle=1,\langle\alpha_2,\alpha\rangle=\frac{5}{\sqrt{2}},\langle\alpha_3,\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

故α在该基下的坐标为$(1,\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$,即

$$\alpha=\alpha_1+\frac{5}{\sqrt{2}}\alpha_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3$$

第二节：欧氏空间

1. 内积及其基本性质
2. 范数和夹角
3. 标准正交基及其基本性质
4. Gram-Schmidt正交化方法

定理5.2.4：设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$n$维欧氏空间$V$的一个基，若令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1}\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_{n-1}\rangle}\boldsymbol{\beta}_{n-1},$$

则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是一组正交基。

若再令$\boldsymbol{e}_i=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_i}{||\boldsymbol{\beta}_i||},i=1,2,\cdots,n$

就得到了V的标准正交基$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$.

Gram-Schmidt (格拉姆-施密特) 正交化方法

注：该方法也适应于把欧式空间任一个线性无关的向量组变为正交单位向量组.

证：数学归纳法

当$n=2$时,

$$<\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2>=<\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2>-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}<\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1>$$

$$=<\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2>-<\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1>=\mathbf{0},$$

假设$n=m$时, $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$两两正交，看$n=m+1$，令$\boldsymbol{l}=\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{m}$,

$$<\boldsymbol{\beta}_{m+1},\boldsymbol{\beta}_l>=<\boldsymbol{\alpha}_{m+1}-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\beta}_m\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\beta}_m\rangle}\boldsymbol{\beta}_m,\ \boldsymbol{\beta}_l>$$

$$=<\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\beta}_l>-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\beta}_l\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_l,\boldsymbol{\beta}_l\rangle}<\boldsymbol{\beta}_l,,\boldsymbol{\beta}_l>=\mathbf{0},$$

则$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m+1}$两两正交。综上，$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是正交向量组。

又由于正交向量组线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是一组正交基。

例：用Gram-Schmidt正交化方法把向量组$\alpha_1=[1,0,1,0]^T$，$\alpha_2=[0,1,2,2]^T,\alpha_3=[-1,0,0,3]$化成正交单位向量组.

解：可以验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

先正交化

令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,1,0]^T,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1=[-1,1,1,2]^T,$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2=\left[\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},1\right]^T$$

再单位化

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{||\boldsymbol{\beta}_1||}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^T,\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{||\boldsymbol{\beta}_2||}=\left[-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}}\right]^T$$

$$\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{||\boldsymbol{\beta}_3||}=\left[\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{2}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{2}{\sqrt{10}}\right]^T$$ 为所求正交单位向量组