



2019 版

南 卷 汇

大一上高数期末试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

2018年高等数学（上）期末试题.....	1
2018年高等数学（上）期末答案.....	5
2017 年高等数学（上）期末试题	8
2017年高等数学（上）期末答案.....	10
2016 年高等数学（上）期末试题	14
2016 年高等数学（上）期末答案.....	18
2015 年高等数学（上）期末试题.....	21
2015 年高等数学（上）期末答案	26
2014 年高等数学（上）期末试题	30
2014年高等数学（上）期末答案.....	32

2018 年高数 (上) 期末

一、单项选择题(每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + 2}{x^2 + 2} = 1$ (其中 a, b 为常数), 则 ()

(A) $a = 0, b \in \mathbb{R}$

(B) $a = 0, b = 1$

(C) $a \in \mathbb{R}, b = 1$

(D) $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

2. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上皆可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有 ()

(A) $f(-x) > g(-x)$

(B) $f'(x) < g'(x)$

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$

3. 若函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $(x-2)e^x$, 则 $f'(x+1) =$ ()

(A) xe^x ;

(B) xe^{x+1} ;

(C) $(x+1)e^{x+1}$;

(D) $(x+1)e^x$

4. 下列广义积分中, 发散的是 ()

(A) $\int_0^1 \ln x dx$;

(B) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$;

(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$;

(D) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x \cos x}$

5. 设 $f(t) = \begin{cases} \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处 ()

(A) 不连续;

(B) 连续但不可导;

(C) 可导且 $F'(x) \neq 0$

(D) 可导且 $F'(0) = 0$

二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 已知函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t} \end{cases}$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $t = 2$ 处的

切线方程为_____

2. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则定积分 $\int_0^{2018} (x - [x]) dx$ 的值是_____ 3. 已

知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的 3 个解，

则该方程的通解是 $y =$ _____

4. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + 3 \sin \frac{3}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n}) =$ _____

5. 设 $f(x) = (x-1) \ln(2-x)$ ($x < 2$)，则 $f(x)$ 的最大值点是 $x =$ _____

三、计算积分（每小题 5 分，共 15 分）

1. 计算积分 $\int \frac{1}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x} dx$.

2. 计算积分 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

四、解答题（本题 8 分）

求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(x-3)y^4 = 0$ 的通解.

五、解答题（本题 10 分）

求微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \vec{x}$ 的通解.

六、应用题（本题 10 分）

求曲线 $y = 3(1 - x^2)$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转一周所得的旋转体的

七、解答题（本题 9 分）

对 t 取不同的值，讨论函数 $f(x) = \frac{1+2x}{2+x^2}$ 在区间 $[t, +\infty)$ 上是否有最大值或者最小值？若存在最大值或最小值，则求出相应的最大值和最大值点，或者最小值和最小值点。

八、证明题（本题 9 分）

设 $f'(x)$ 是连续函数， $F(x) = \int_0^x f(t) f'(2a-t) dt$ ，证明：

$$F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a)$$

九、证明题（本题 9 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数，且 $f(0) = f(1) = 0$ ，求证：

$$(1) \forall t \in R, \int_0^1 xf(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - t) f'(x) dx ;$$

$$(2) \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx ,$$

等号当且仅当 $f(x) = A(x^3 - x)$ 时成立, 其中 A 为常数.

答案

一、 单选

1.B 2.C 3.C 3.C 4.D 5.D

二、 填空

$$1. y - \frac{4}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{2}{5}\right)$$

$$2. 1009$$

$$3. y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - x e^{2x}$$

$$4. \sin 1 - \cos 1$$

$$5. x = 1$$

三、

$$1. \text{原式} = \int \frac{1}{\tan^2 x + 9} d(\tan x) = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{\tan x}{3}\right) + C$$

2.

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{x} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = -4\sqrt{x} \ln(x+1) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{4\sqrt{x}}{x+1} dx = 8 - 2\pi - 4\ln 2$$

3. 原式=

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{x} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = -4\sqrt{x} \ln(x+1) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{4\sqrt{x}}{x+1} dx = 8 - 2\pi - 4\ln 2$$

四、

$$y' + \frac{1}{3} = -(x-3)y^4 \quad (y^{-3})' - y^{-3} = x-3$$

$$y^{-3} = e^{\int dx} \left(\int (x-3) e^{-\int dx} dx + C \right) = C e^x - (x+2)$$

五、

$$|\lambda I - A| = \lambda^2(\lambda - 1) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 x = 0 \quad \bar{r}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{r}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (I - A)x = 0$$

$$\bar{r}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \bar{r}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \bar{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解有：

$$C_1 \begin{pmatrix} -1+2t \\ 3+6t \\ 4t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1-t \\ -3t \\ 1-2t \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

六、

$$\text{原式} = 18\pi - \int_{-1}^1 \pi [3 - 3(1-x^2)]^2 dx = 18\pi - 9\pi \int_{-1}^1 x^4 dx = 18\pi - \frac{18}{5}\pi$$

七、

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(1-x)}{(2+x^2)^2}$$

驻点 $x_1 = -2 \quad x_2 = 1$

(1) 当 $t \leq -2$ 时 $m(t) = f(-2) = -\frac{1}{2} \quad m(t) = f(1) = 1$

(2) 当 $-2 \leq t \leq -\frac{1}{2}$ $m(t) = f(t) \quad m(t) = f(1) = 1$

(3) 当 $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ 无 $m(t) \quad m(t) = f(1) = 1$

(4) 当 $t > 1$ 无 $m(t) \quad m(t) = f(t)$

八、

$$\int_a^{2a} f(2a-t) f'(t) dt = -f(t) f(2a-t) \Big|_a^{2a} + \int_a^{2a} f(2a-t) f'(t) dt = f^2(a) - f(0) f(2a) + \int_a^{2a} f(2a-t) f'(t) dt$$

$$\int_a^{2a} f(2a-t) f'(t) dt = -\int_a^0 f(u) f'(2a-u) du = \int_0^a f(u) f'(2a-u) du \quad \text{其中 } u = 2a-t$$

九、

$$(1) \quad \forall x \in R \quad \forall x \in R \int_0^1 xf(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) d(x^2 - t) = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - t) f'(x) dx$$

$$(2) \quad \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{4} \int_0^1 (t - x^2)^2 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

$$\text{由于 } \int_0^1 (t - x^2)^2 dx = t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{5} = \left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{45} \geq \frac{4}{45}$$

$$\therefore \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

高等数学 I/II (A) 卷 2017 年 01 月 06 日

一、计算下列各题 (每题 6 分, 共 60 分) .

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x) = \frac{x(x+1)}{|x|(x^2-1)}$, 试讨论函数 $f(x)$ 的间断点及类型.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求导函数 $f'(x)$.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 所确定, 求 dy .

5. 求不定积分 $\int \sqrt{e^x + 1} dx$.

6. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-t} \cos t dt$, 试求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值点.

7. 求由曲线 $x^2 + (y-5)^2 = 16$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.

8. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin \frac{\pi}{2^n} (a > 0)$ 的敛散性 .

9. 将函数 $f(x) = x$ 在 $[0, \pi]$ 上展成余弦级数.

10. 求微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 的通解.

二、(8 分) 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足

$$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2, \text{ 求 } f(x) \text{ 的表示式.}$$

三、(8 分) 函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的某邻域 $U(a)$ 内有定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k} = l \quad (l > 0, k \text{ 为正整数}), \text{ 试讨论函数 } f(x) \text{ 在点 } x = a$$

处是否取得极值.

四、(9 分) (学习工科分析基础的同学做 2 小题, 其余同学做 1

小题)。

1、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n n!} x^n$ 的收敛域及和函数 $S(x)$ 。

2、判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2}$ 的一致收敛性。

五、(9 分) 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=4t-t^2 \end{cases} (t \geq 0)$,

(1) 讨论曲线 L 的凹凸性;

(2) 过点 $(-1,0)$ 引曲线 L 的切线, 求切点坐标 (x_0, y_0) , 并求切线的方程;

(3) 求此切线与曲线 L (对应于 $x < x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积 S 。

六、(6 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上满足: $|f''(x)| \leq M$, 且在 $(0,1)$ 内 $f(x)$ 取得最大值, 试证: $|f'(0)| + |f'(1)| \leq M$ 。

高等数学 I/II (A) 卷 2017 年 01 月 06 日 答案

一、1、解:

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{2}$$

2、解:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x+1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}, f(x) \text{ 在 } x=-1, x=0, x=1 \text{ 处无定义,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{2}, \text{ 故 } x=-1 \text{ 为第一类 (可去型) 间断点;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \text{ 故 } x=1 \text{ 为第二类 (无穷型) 间断点;}$$

$$f(0^-) \neq f(0^+), \text{ 故 } x=0 \text{ 为第一类 (跳跃型) 间断点.}$$

3、解:

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f'(x) = 1; \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x;$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0, f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1, f(0^-) \neq f(0^+),$$

$$f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处不连续, 因此在 } x=0 \text{ 处不可导.}$$

$$\text{故 } f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \ln 2 \cdot 2^x, & x > 0 \end{cases}.$$

4、解:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$y' = \frac{y-x}{y+x}, dy = \frac{y-x}{y+x} dx.$$

5、解:

$$\text{令 } t = \sqrt{e^x + 1}, \text{ 则 } x = \ln(t^2 - 1), dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt,$$

$$\int \sqrt{e^x + 1} dx = \int t \cdot \frac{2t}{t^2 - 1} dt = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| + C$$

6、解:

$f'(x) = e^{-x} \cos x, x \in [0, \pi]$, 令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

又当 $x \in [0, \pi)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $x = \frac{\pi}{2}$ 是极大值点, 也是最大值点.

7、解:

由 $x^2 + (y-5)^2 = 16$ 解得 $y = 5 + \sqrt{16-x^2}$, 及 $y = 5 - \sqrt{16-x^2}$.

所求旋转体的体积:

$$V = \pi \int_{-4}^4 (5 + \sqrt{16-x^2})^2 dx - \pi \int_{-4}^4 (5 - \sqrt{16-x^2})^2 dx = 20\pi \int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} dx = 20\pi \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 160\pi^2$$

8、解:

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^n \sin \frac{\pi}{2^n}}{a^n \frac{\pi}{2^n}} = 1,$$

等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n$, 当 $\left|\frac{2}{a}\right| < 1$, 即 $0 < x < 2$ 时收敛; 当 $\left|\frac{2}{a}\right| > 1$, 即 $a \geq 2$ 时发散.

用正项级数的比较审敛法知:

原级数当 $0 < x < 2$ 时收敛; 当 $a \geq 2$ 时发散.

9、解:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n=1, 3, 5, \Lambda \\ 0, & n=2, 4, 6, \Lambda \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

10、解:

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = p, \text{ 则 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

$$\text{原方程化为 } \frac{dp}{dx} = 1 + p^2, \int \frac{dp}{1+p^2} = \int dx,$$

$$\arctan p = x + C_1, \frac{dy}{dx} = p = \tan(x + C_1),$$

$$\text{通解为: } y = \int \tan(x + C_1) dx,$$

$$\text{即: } y = -\ln |\cos(x + C_1)| + C_2.$$

二、解:

易得 $f(0) = 0$.

$$f(x) = x^2 \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x t^2 f'(t) dt + x^2 = x^2 \cdot f(t) \Big|_{t=0}^{t=x} - t^2 f(t) \Big|_0^x + 2 \int_0^x t f(t) dt + x^2$$

得 $f(x) = 2 \int_0^x t f(t) dt + x^2$, 求导得: $f'(x) - 2xf(x) = 2x$,

$$\text{通解: } f(x) = e^{\int 2x dx} \left[\int 2xe^{-\int 2x dx} dx + C \right] = e^{x^2} \left[\int 2xe^{-x^2} dx + C \right] = e^{x^2} \left[-e^{-x^2} + C \right] = -1 + Ce^{x^2},$$

由 $f(0) = 0$ 得 $C = 1$, 故所求函数表达式为 $f(x) = e^{x^2} - 1$.

三、解:

由条件 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k} = l > 0$, 根据极限的保号性定理,

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k} > 0, x \in U(a),$$

当 k 为偶数时, 由 $(x-a)^k > 0$ 知,

$$f(x) - f(a) > 0, \text{ 即 } f(x) > f(a), x \in U(a),$$

即当 k 为偶数时, $f(x)$ 在点 $x = a$ 处取得最小值.

当 k 为奇数时, 当 $x < 0$ 时 $(x-a)^k < 0$,

$$f(x) - f(a) < 0, \text{ 即 } f(x) < f(a).$$

当 $x > a$ 时, $(x-a)^k > 0$, $f(x) - f(a) > 0$, 即 $f(x) > f(a)$,

故当 k 为奇数时, $f(a)$ 不是极值.

四、解:

$$1、\text{收敛半径: } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{3^n \cdot n!} \cdot \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^2 + 1} = +\infty, \text{收敛域为 } (-\infty, +\infty),$$

$$\text{和函数: } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{3^n \cdot n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n \cdot (n-1)!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{3}\right)^n = S_1(x) + e^{\frac{x}{3}},$$

$$\text{其中 } S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n \cdot (n-1)!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n \cdot (n-1)!} x^{n-1} = x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot (n-1)!} x^n \right]' = x \left(\frac{x}{3} e^{\frac{x}{3}} \right)' = \frac{x}{3} (e^{\frac{x}{3}} \cdot \frac{3+x}{3}),$$

$$\text{故 } S(x) = e^{\frac{x}{3}} \left[\frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} + 1 \right], x \in (-\infty, +\infty).$$

$$2、\forall x \in (-\infty, +\infty), \left| \frac{\cos nx}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{1+n^2}, \text{ 而 } p\text{级数: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛 } (p > \frac{3}{2} > 1),$$

根据 Weierstrass 判别准则, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

五、解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{y_t}{x_t} = \frac{2}{t} - 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{2}{t}-1)'_t}{x_t} = \frac{-1}{t^3},$$

当 $t > 0$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 故曲线 L 是凸的.

(2) 曲线 L 的直角坐标方程为 $y = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$.

当 $x_0=1$ 时, L 在对应点处切线方程为: $x=1$, 不合题意.

可设 L 在点 (x_0, y_0) 处切线方程为 $y - y_0 = (\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1)(x - x_0)$,

将 $x = -1, y = 0$ 代入上式得 $-y_0 = (\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1)(-1 - x_0)$,

$$(x_0 - 1) + \sqrt{x_0 - 1} - 2 = 0,$$

$$\text{即 } (\sqrt{x_0 - 1} - 2)(\sqrt{x_0 - 1} - 1) = 0,$$

解得 $x_0 = 2, y_0 = 3$, 所求切点为 $(2, 3)$, 切线方程为: $y = x + 1$.

(3) 令 $y = 0$ 得 L 与 x 轴交点: $(1, 0), (17, 0)$. 所求面积:

$$S = \int_{-1}^2 (x+1)dx - \int_1^2 [4\sqrt{x-1} - (x-1)]dx = \frac{7}{3}.$$

六、解:

证: 因可导函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内取得最大值, 由费马定理, 在最大值点 $a \in (0, 1)$ 处, $f'(a) = 0$.

对 $f'(x)$ 在 $[0, a], [a, 1]$ 上使用拉格朗日中值定理, 存在

$\xi_1 \in (0, a), \xi_2 \in (a, 1)$, 使得

$$f'(a) - f'(0) = f''(\xi_1)a, f'(1) - f'(a) = f''(\xi_2)(1-a),$$

$$\text{故 } |f'(0)| + |f'(1)| = |f'(a) - f'(0)| + |f'(1) - f'(a)| = |f''(\xi_1)|a + |f''(\xi_2)|(1-a) \leq Ma + M(1-a) = M.$$

2016 年高数 (上) 期末

一、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=$ _____.
2. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x \ln x$, 则 $f'(x)=$ _____.
3. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^4} = 2$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极_____值.
4. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin x}{1+x^4} + \cos^3 x) dx =$ _____.
5. 微分方程 $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$ 的通解为_____.
6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -\pi \leq x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(-\pi) =$ _____.

二、单项选择题 (每小题 3 分, 共 12 分)

1. 下列结果中不成立的是 ()
 A. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$
2. 设 $y = f(x)$ 满足 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 ()
 A. $0 < dy < \Delta y$ B. $0 < \Delta y < dy$ C. $\Delta y < dy < 0$ D. $dy < \Delta y < 0$
3. 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是 ()
 A. $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$ **B. $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$**
 C. $\int_0^x f(t^2)dt$ D. $\int_0^x f^2(t)dt$
4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 ($b_n \neq 0$), 则下列级数中一定发散的是 ()

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

二、基本计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3 \end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定，求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

4. 计算反常积分 $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$.

5. 求函数 $f(x) = \frac{x \ln|x|}{|x-1|}$ 的间断点，并说明间断点的类型.

6. 将函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 在 $x_0 = 2$ 处展开为幂级数, 并指出收敛区间.

四、综合题 (每小题 8 分, 共 24 分)

1. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt = -\frac{x^2}{2} + e^{-x} - 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 的和函数, 并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)2^n}{n!}$ 的和.

3. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $xf'(x) = f(x) + 3x^2$, 求 $f(x)$, 使由曲线

$y = f(x)$ 与 $x=0, x=1, y=0$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.

五、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有单调减少的导函数 $f'(x)$, $f(0)=0$, 证明: 对于

满足不等式 $0 < a < b < a+b < c$ 的 a, b , 有 $f(a) + f(b) \geq f(a+b)$.

下列两题中：学习“高等数学基础”（即校内高数 II 层次）的学生要求只做 2 题，学习“I 工科数学分析基础”（即校内高数 I 层次）的学生要求只做 3 题。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域 $N(0, r)$ 内具有二阶连续导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

3. 证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

2016 高数上期末答案

一、填空题

1. 0 2. $\frac{1}{x}$ 3. 小 4. $\frac{4}{3}$ 5. $(1+y^2) = C(1-x^2)$

二、选择题

1. A 2. A 3. B

三、基本计算题

$$1. \text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln(x+e^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^x}{x+e^x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1+e^x}} = e$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1-3t^2}{-2t} \quad \text{又 } \ddot{y} = -6t, \ddot{x} = -2$$

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\dot{x}^3} = -\frac{1+3t^2}{1+4t^3}$$

$$3. y' = e^y - x e^y \cdot y' \Rightarrow y' = -\frac{e^y}{x e^y + 1}$$

当 $x=0, y=1$ 代入上式得 $y' = -e$

\therefore 切线方程为 $y = 1 - ex$

$$4. I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx \xrightarrow{x=\sec^2 t} \int \frac{1}{\sec^2 t \cdot \tan t} d \sec^2 t = \int 2dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \Big|_2^b = \frac{\pi}{2}$$

5. 易知

$x=0, x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} \xrightarrow{t=x-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(t+1) \ln(t+1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(t+1)}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{1-x} \xrightarrow{\text{同理得}} -1$$

$\therefore x=1$ 是跳跃间断点

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) [\text{同上}] = 0$$

所以 $x=0$ 是可去间断点

四、综合题

$$1. \int_0^\pi f(t-x) dt \xRightarrow{u=t-x} \int_{-x}^0 f(u) du$$

对两边求导得有 $f(x) = x - e^x$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$$

$$\therefore y = x$$

3.

$$\text{由 } xf'(x) = f(x) + 3x^2 \text{ 得 } \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 3x$$

$$y = 3x^2 + Cx$$

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \int_0^1 \pi (3x^2 + Cx)^2 dx$$

$$= \pi \left(\frac{9}{5} + \frac{3}{2}C + \frac{C^2}{3} \right)$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{9}{5} + \frac{3}{2}C + \frac{C^2}{3}$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}C = 0 \Rightarrow C = -\frac{9}{4}$$

$$\text{此时 } g''(x) = \frac{2}{3} > 0$$

$$\therefore y = 3x^2 - \frac{9}{4}x \text{ 时, } V \text{ 最小}$$

五、证明题

要证 $f(a) + f(b) \geq f(a+b)$, 只要证

$$f(a+b) - f(a) \geq f(b) - f(0)$$

$$\text{又 } f(a+b) - f(a) = bf'(\varphi_1) \quad (\varphi_1 \in (a, a+b))$$

$$f(b) - f(0) = bf'(\varphi_2) \quad (\varphi_2 \in (0, b))$$

$$\because \varphi_1 > \varphi_2$$

$$\therefore f'(\varphi_1) \leq f'(\varphi_2)$$

$$\text{故 } f(a+b) - f(a) \leq f(b) - f(0)$$

得证

南洋学院学生会

2015 年高数 (上) 期末

一、填空题 (每小题 3 分 , 共 5 小题 , 满分 15 分)

1. 计算 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\ln \frac{2-x}{2+x} + \cos^2 x) dx =$ _____.

2. 设函数 $y = x2^x$ 在 $x = x_0$ 点处取得极小值, 则 $x_0 =$ _____.

3. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}} \right] =$ _____.

4. 设函数 $y = y(x)$ 满足方程 $\int_0^x xy dx = x^2 + y$, 则 $y(x) =$ _____.

5. 设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有连续的二阶导数, $\varphi(0) = b$, $a > 0$ 且 $\varphi(x)$

在 $x = a$ 处取得极大值 $\varphi(a) = 0$, 则积分 $\int_0^a x \varphi''(x) dx =$ _____.

二、单项选择题 (每小题 3 分 , 共 5 小题 , 满分 15 分)

1. 设函数 $f(x)$ 连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

(A) 当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 为周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 为单调递增函数时, $F(x)$ 必为单调递增函数.

2. 曲线 $y = (x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$ 的拐点是

(A) (1,0)

(B) (2,0)

(C) (3,0)

(D) (4,0)

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数, 且 $f(0) = 0$, 令 $M = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$, 则必有

(A) $M \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq 3M$

(B) $\frac{M}{2} \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq M$

(C) $\int_0^1 |f(x)| dx \leq \frac{M}{2}$

(D) $\int_0^1 |f(x)| dx \geq 3M$



4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，下列函数中以 T 为周期的函数是

(A) $\int_0^x f(t)dt$

(B) $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt$

(C) $\int_{-x}^0 f(t)dt$

(D) $\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt$

5. 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t)dt$ ，则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A) 0

(B) 2

(C) 1

(D) 4

三、简答题 (每小题 7 分，共 14 分)

1. 求曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(e^{-x} + 1)$ 的渐近线.

2. 求解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$.

四、 (9 分) 设函数 $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$, 试求

- (1) $F(x)$ 的极值;
- (2) 曲线 $y = F(x)$ 的拐点的横坐标;
- (3) 计算 $\int_{-2}^3 y = F'(x) dx$.

五、 (8 分) 过曲线 $y = \sqrt[3]{x} (x \geq 0)$ 上点 A 作切线, 使该切线与曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 及 x 轴所围平面图形 D 的面积 $S = 3/4$.

- (1) 求点 A 的坐标;
- (2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

六、(7 分) 设 a, b 均为常数且 $a > -2, a \neq 0$, 问 a, b 为何值时, 有

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1 \right] dx = \int_0^1 \ln(1 - x^2) dx$$

七、(8 分) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n, (x > 0)$ 的敛散性

八、(8 分) 将 $f(x) = \frac{2}{\pi}|x|$ 在 $|x| \leq \pi$ 上展开为 Fourier 级数.

九、(8分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n$ 的收敛域及和函数.

十、(8分) (学习《工科数学分析基础》者做(1), 其余的做(2))

(1) 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$, 在区间 $[\delta, +\infty)$ ($\delta > 0$) 一致收敛. 但在 $(0, +\infty)$ 内不一致收敛.

(2) 将函数 $f(x) = \frac{x+4}{2x^2-5x-3}$ 在 $x_0 = 1$ 处展开为幂级数.

2015 年高数（上）期末答案

一、填空题（每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分）

1. $\frac{\pi}{2}$

2. $-\frac{1}{\ln 2}$

3. $\frac{2}{3}$

4. $2 - 2e^{\frac{1}{2}x^2}$

5. b

二、选择题(每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分) ABCBC

三、简答题

1. (8 分) 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(e^{-x} + 1) \right] = \infty$ 可得 $x=0$ 为垂直渐近线 - 2 分

$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{x} \right] = 0$, $b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(e^{-x} + 1) \right] = 0$ --4 分

故 $y=0$ 为水平渐近线 --5 分

$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{x} \right] = -1$,

$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(e^{-x} + 1) + x \right] = 0$ --7 分

故 $y=-x$ 为一般渐近线 - 8 分

2. (8 分) 设 $y'=u$, 则 $y''=u \frac{du}{dy}$ --2 分

则原式化为 $u \frac{du}{dy} = e^{2y}$ --4 分

积分有 $y'^2 = e^{2y} + c_1$ --6 分

由初始条件 $c_1 = 0$, 故 $y' = e^y$, $\therefore e^{-y} dy = dx$, 从而 $e^{-y} = c_2 - x$, 再由初始条件

$c_2 = 1$, \therefore 初值问题的解为 $y = -\ln(1-x)$ --8 分

四、 (10 分) 解: (1) $F'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}$,

$F''(x) = 2(1-4x^4)e^{-x^4}$ 令 $F'(x) = 0$, 得驻点 $x = 0$, 又 $F''(0) = 2 > 0$, 故 $x = 0$ 是

$F(x)$ 的极小值点, 其极小值为 $F(0) = 0$ --4 分

(2) 令 $f''(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 又

当 $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $F''(x) < 0$, 当 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $F''(x) > 0$; 当

$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty$ 时, $F''(x) < 0$. 所以曲线 $y = F(x)$ 的拐点有两个, 其横坐标分别为

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. --7 分

(3) $\int_{-2}^3 x^2 F(x) dx = 2 \int_{-2}^3 x^3 e^{-x^4} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^4} \Big|_{-2}^3 = \frac{1}{2} (e^{-16} - e^{-81})$ --10 分

五、 (10 分) (1) 设 A 点的坐标为 $(t, \sqrt[3]{t})$, 则切线方程为 $y - \sqrt[3]{t} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x - t)$,

即 $y = \frac{x}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{t}$ --3 分

命: $y = 0$, 得此切线与 x 轴的交点横坐标 $x_0 = -2t$, 从而图形 D 的面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2\sqrt[3]{t}}{3} + \int_0^1 \left(\frac{x}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x} \right) dx = \frac{2t \cdot \sqrt[3]{t}}{3} + \frac{x^2}{6\sqrt[3]{t^2}} \Big|_0^5 + \frac{2}{3}\sqrt[3]{t}x \Big|_0^t - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^t = \frac{3t \cdot \sqrt[3]{t}}{4} = \frac{3}{4}$$



$\Rightarrow t=1$. 即 A 点的坐标为 $(1,1)$ -- (6 分)

(2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2 + \pi \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{3}(x+2) \right]^2 - (\sqrt[3]{x})^2 \right\} dx = \frac{8}{27}\pi + \pi \left[\frac{1}{27}(x+2)^3 - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} \right] \Big|_0^1 = \pi - \frac{3}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi$$

--10 分

六、 (7 分) $\int_0^1 \ln(1-x^2) dx = \int_0^1 \ln(1+x) dx + \int_0^1 \ln(1-x) dx$ --3 分

$$= (1+x) \ln(1+x) \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 - (1-x) \ln(1-x) \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 = 2(\ln 2) - 1$$

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1 \right] dx = \int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2-b+a}{2x+a} \right) dx$$

--6 分

$$= \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{(2x+a)^{1-\frac{1}{2}(b-a)}} \Big|_1^B$$

因为极限存在, 故必有 $b-a=0$, 即 $b=a$, 所以有

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1 \right] dx = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2+a} = \ln \frac{2+a}{2}$$

由题意得 $2(\ln 2 - 1) = \ln \frac{2+a}{2}$,

即 $b=a=8e^{-2}-2$ --7 分

七、 (9 分) $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left(\frac{x}{n+1} \right)^{n+1}}{n \left(\frac{x}{n} \right)^n} = \frac{x}{e}$ --4 分

当 $x < e$ 时收敛, --5 分 $x > e$ 时发散, --6 分

当 $x = e$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \geq 1$, $a_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 发散, --9 分

八、 (9 分) $f(x)$ 为偶数, $bn=0$ --2 分 $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = 2$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nxdx = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi x \cos nxdx = \frac{4[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi^2} \quad \text{--6 分}$$

$$= \begin{cases} 0, n=2k \\ \frac{-8}{\pi^2 (2k-1)^2}, n=2k-1 \end{cases} \quad \text{--7 分}$$

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x, \quad \text{--9 分}$$

九、 (10 分) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, 收敛域为 $x \in (-1, 1)$ --2 分

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad \text{--4 分} \quad \int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{--6 分}$$

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad \text{--8 分} \quad T(x) = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n = \frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x) \quad \text{--10 分}$$

十、 (9 分) $f(x) = \frac{x+4}{(2x+1)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{2x+1}$ --3 分

$$= \frac{1}{-2+(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)+3} = \frac{1}{-2} \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{2(x-1)}{3}} \quad \text{--6 分}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2(x-1)}{3} \right]^n \quad \text{--8 分}$$

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^{n+1}} (x-1)^n, \quad |x-1| < \frac{3}{2} \quad \text{--9 分}$$

2014 年高数(上) 期末

一、计算下列各题(每题 6 分, 共 60 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$

2. 已知 $\int_1^{\cos x} f(t) dt = \cos 2x$, 其中 $f(t)$ 连续, 求 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ 。

3. $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} (|x| < 1)$, 求 dy 。

4. 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ 。

5. 求定积分 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ 。

6. 求微分方程 $(1+y) dx + (x+y^2+y^3) dy = 0$ 的通解。

7. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda - e)^2 \lambda^n n!}{n^n} (\lambda \geq 0)$ 的敛散性。

8. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 2 \end{cases}$, 将 $f(x)$ 展为以 4 为周期的 Fourier 级数。

9. 将函数 $f(x) = \ln(4x-5)$ 展为 $x-2$ 的幂数。

10. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$ 。

二、(9 分) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 确定函数 $f(x) = \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点及类型。

三、(9 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\sin \frac{1}{x}\right) \cdot \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性。

四、(8 分) (学习工科分析基础的同学做 2 小题, 其余同学做 1 小题)

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n+1)3^n}$ 的收敛域及和函数。

南洋出品, 必属精品



2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上的一致收敛性，并讨论是否可以逐项求导。

五、(8分) 设曲线 l_1 的方程为 $y = a \ln x$ (其中常数 $a > 0$)，曲线 l_1 的一条切线 l_2 过原点。

1. 求曲线 l_1 ，切线 l_2 以及 x 轴围成的平面图形的面积。

2. 求此平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积。

六、(6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续，在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) \neq 0$ 。

1. 证明：对 $\forall x \in (0, l)$ ，至少 $\exists \theta \in (0, 1)$ ，使

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)];$$

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$ 。

14 年高数上期末答案

一、1、原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1 - \cos x + x \sin x}$ (3 分) = $\frac{4}{3}$ (6 分)

2、求导 $f(\cos x)(-\sin x) = -2 \sin 2x$, (4 分) 求 $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$ 。(6 分)

3、 $dy = [\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}) - \frac{1}{1-x^2} - \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x] dx = -\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x dx$ (6 分)

4、 $\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{x}{2}} \frac{1}{t-1} \frac{2}{t} dt$ (3 分) = $2 \int_{\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}}^{\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}} dt$ (5 分) =

$2 \ln |\frac{t-1}{t}| + C = 2 \ln \frac{\sqrt{e^x}-1}{\sqrt{e^x}} + C$ (6 分)

5、 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \sin t \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt$ (3 分) = $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2} + \sqrt{2}$ 。(6 分)

6、 $\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y} = -y^2$, (2 分) $\frac{dx}{x} = \frac{-1}{1+y} dy$, $\ln |x| = -\ln |1+y| + C$, $x = \frac{C}{1+y}$ (6 分)

7、 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda - e)^2 \lambda^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(\lambda - e)^2 \lambda^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \lambda}{(n+1)^n} = \frac{\lambda}{e}$, (4 分)

$\lambda = e$ 原级数收敛, 所以 $\lambda \leq e$ 收敛, $\lambda > e$ 发散 (6 分)

8、 $a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1$, (1 分) $a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx$ (2 分) = $\frac{2((-1)^n - 1)}{(n\pi)^2}$ (3 分)

$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx$ (4 分) = $-\frac{2(-1)^n}{n\pi}$ (5 分)

$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2(-1)^n}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2}$, $f(\pm 2) = 1$ 。(6 分)

9、 $f(x) = \ln(4(x-2)+3) = \ln 3 + \ln(1 + \frac{4}{3}(x-2))$ (3 分) = $\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\frac{4}{3}(x-2))^n$ (5 分) $|x-2| < \frac{3}{4}$ (6 分)

10、 $\int_1^{+\infty} -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \ln x d(\frac{1}{x^2})$ (2 分) = $-\frac{1}{2} [\frac{\ln x}{x^2} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx]$ (5 分) = $-\frac{1}{4x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}$ (6 分)

二、间断点为 $x = \pm 1, 0, \pm \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2-1)} = \frac{\pi}{2}$, $x = \pm 1$ 为可去间断点; (3 分)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2-1)} = -\pi$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2-1)} = -\pi$, $x = 0$ 为跳跃间断点; (6 分)

$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{1}{2}} \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2-1)} = \infty$, $x = \pm \frac{1}{2}$ 为无穷间断点。(9 分)

三、 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin \frac{1}{x}) \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x} = 0$, (3 分)

$$\begin{cases} (-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}) \cdot \int_0^x \sin t^2 dt + (\sin \frac{1}{x}) \sin x^2, x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = (-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}) \cdot \int_0^x \sin t^2 dt + (\sin \frac{1}{x}) \sin x^2 = 0 = f'(0), \text{ 故 } f'(x) \text{ 连续.}$$

四、 $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+3)3^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1)3^n}{(-1)^{n-1} x^{2n}}| = \frac{x^2}{3} < 1$, 收敛区域为 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, (3 分)

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n+1)3^n}, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)3^n}, [S(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{3^n} = \frac{x^2}{3+x^2} \quad (5 \text{ 分})$$

$$S(x) - S(0) = \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{3} + x^2} dx = x - \sqrt{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n+1)3^n} = 1 - \frac{1}{x} \sqrt{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \quad (8 \text{ 分})$$

2、 $|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}, \sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 所以原式一致收敛; (6 分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \cos(n+\frac{1}{2})x - \frac{4x^2}{3(n^4+x^4)^{\frac{4}{3}}} \sin(n+\frac{1}{2})x] \text{ 在 } x=2k\pi \text{ 发散,}$$

所以原式不可以逐项求导。(8 分)

五、1. 因为过原点, 所以切线方程为 $y = \frac{a}{x_0} x$, 切点为 (e, a) , (2 分)

$$S = \frac{1}{2} ae - \int_{\frac{a}{e}}^e a \ln x dx = \frac{1}{2} a(e-2); \quad (4 \text{ 分})$$

2、 $V = 2\pi \int_1^e xa \ln x dx - 2\pi \int_0^e x(\frac{a}{e} x) dx \quad (6 \text{ 分}) = \frac{\pi}{6} ae^2 - \frac{1}{2} \pi a \quad (8 \text{ 分})$

六、1. 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt,$

$$F(x) - F(0) = xF'(\theta x) = x[f(\theta x) - f(-\theta x)] \quad (2 \text{ 分})$$

2. $\frac{x[f(\theta x) - f(-\theta x)]}{2x^2\theta} = \frac{\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt}{2x^2} \quad (4 \text{ 分})$ 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = \frac{1}{2}$ 。(6 分)

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin \frac{1}{x}) \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x} = 0,$$



更多精彩，尽在南洋书院学生会微信公众号的南卷汇专栏，欢迎通过公众号提供题目或反馈错题信息，南卷汇需要您的支持。