期中考试模拟题（五）答案 2020.5

一、1、$\frac{2}{3}$　　2、$f_Y(y)=\frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$　　3、$\Phi(\sqrt{2})-\frac{1}{2}$　　4、4.2　　5、$1-\frac{1}{4n}$

二、1、C　　2、A　　3、B　　4、A　　5、D

三、记 A_1 表示强有力推荐，A_2 表示一般推荐，A_3 表示较弱推荐，B 表示找到新工作，则

$P(A_1)=0.7, P(A_2)=0.2, P(A_3)=0.1, P(B|A_1)=0.8, P(B|A_2)=0.4, P(B|A_3)=0.1$.

（1）$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.8\times0.7+0.4\times0.2+0.1\times0.1=0.65$

（2）$P(A_1|\bar{B})=\frac{P(A_1)P(\bar{B}|A_1)}{P(\bar{B})}=\frac{0.7\times0.2}{0.35}=0.4$

四、解：（1）$P(X=r)=cr, r=1,2,3,4,5,\quad \sum_{r=1}^{5}cr=1,\quad \therefore c=\frac{1}{15}$ ，

X 的分布律 $P(X=r)=\frac{1}{15}r, r=1,2,3,4,5,$

（2）$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)=\frac{3}{5}$

（3）$Y\sim b(6,\frac{3}{5}), E(Y)=6\cdot\frac{3}{5}=\frac{18}{5}, D(Y)=\frac{36}{25}$

（4）第二个拾蛋人仅当鸟窝中最初有 5 个蛋时他才拾取一只蛋，故他在一个鸟窝中拾到一只蛋的概率 $p=P(X>4)=P(X=5)=\frac{1}{3}$ ，则 $Z\sim b(6,\frac{1}{3})$.

五、解：（1）当 $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_0^{\infty}xe^{-x(y+1)}dy=e^{-x}$ ，$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & other\end{cases}$

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_0^{\infty}xe^{-x(y+1)}dx=\frac{1}{(y+1)^2}$. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{(y+1)^2} & y>0\\ 0 & other\end{cases}$

（2）在 $x>0$，$y>0$，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不相互独立.

（3）当 $x>0$ 时，$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{xe^{-x(y+1)}}{e^{-x}} & y>0\\ 0 & other\end{cases}=\begin{cases}xe^{-xy} & y>0\\ 0 & other\end{cases}$

当 $y>0$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{xe^{-x(y+1)}}{1/(y+1)^2} & x>0\\ 0 & other\end{cases}=\begin{cases}x(y+1)^2e^{-x(y+1)} & x>0\\ 0 & other\end{cases}$,

（4）$P\left\{Y\le 2\middle|X\le 1\right\}=\dfrac{P\{X\le 1,Y\le 2\}}{P\{X\le 1\}}=\dfrac{\int_0^1 dx\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x(y+1)}dy}{\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}dx}=\dfrac{2+\mathrm{e}^{-3}-3\mathrm{e}^{-1}}{3(1-\mathrm{e}^{-1})}$

$P\left\{Y\le 2\middle|X=1\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y|1)dx=\int_0^2\mathrm{e}^{-y}dy=1-\mathrm{e}^{-2}$

六、（1）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2 f_Y(z-x)dx\overset{t=z-x}{=}\dfrac{1}{2}\int_{z-2}^{z}f_Y(t)dt$

$$=\begin{cases}0 & z<0\\ \dfrac{1}{2}\int_0^z 3e^{-3t}dt & 0\le z<2\\ \dfrac{1}{2}\int_{z-2}^{z}3e^{-3t}dt & z\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0 & z<0\\ \dfrac{1}{2}(1-e^{-3z}) & 0\le z<2\\ \dfrac{1}{2}(e^{-3(z-2)}-e^{-3z}) & z\ge 2\end{cases}$$

（2）$P\left\{X+Y\le 1\right\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f_X(x)f_Y(y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3y}dy=\dfrac{1}{6}(2+\mathrm{e}^{-3})$

七、设 $r.v.X$ 表示任一时刻正在工作的机器总台数，$X_i=\begin{cases}1 & 第i台工作\\ 0 & 第i台不工作\end{cases},i=1,\dots 200,$

$X=\sum_{i=1}^{200}X_i\sim B(200,0.8),E(X)=160,D(X)=32,$

$$P(144\le X\le 172)\approx\Phi(\frac{172-160}{\sqrt{32}})-\Phi(\frac{144-160}{\sqrt{32}})$$

$$=\Phi(\frac{3}{2}\sqrt{2})-\Phi(-2\sqrt{2})=\Phi(\frac{3}{2}\sqrt{2})+\Phi(2\sqrt{2})-1$$