1.3 逻辑代数基础

1.3.1逻辑代数常用概念及逻辑运算

布尔代数，逻辑代数(逻辑变量，逻辑常量，逻辑运算)，逻辑状态，逻辑电平，逻辑约定，逻辑电路，逻辑函数及其表达形式；

逻辑代数的基本运算与复合运算

1.3.2逻辑代数的定律、定理及规则

1.3.3逻辑函数的表示

逻辑函数的基本表达式；

逻辑函数的标准形式（最小项，最大项及其关系）；

卡诺图

1.3.4逻辑函数的化简（最简与或式、最简或与式、与非与非式）

代数法（二次对偶法和二次求反法，替代尾因子法）；

卡诺图法（利用无关项化简、禁止逻辑法）

- **代数：** 是一个集合，在这个集合上定义了一种或几种运算，这个集合关于这些运算是封闭的。即，代数系统中任意两个元素运算的结果仍然是其中的元素。
- **布尔代数 *Boolean algebra*：** 用一种数学运算的代数系统描述人的逻辑思维规律和推理过程。例如：

元素：0、1；

逻辑变量：简单逻辑命题，成立变量取值为1，反之为0

运算：与、或、非 。对应“既A且B”、“A或者B”、“A的否定”3种逻辑推断形式。

逻辑变量通过3种运算产生复杂逻辑函数，对应简单命题借助3种基本逻辑推断形式构成复杂命题的过程。

布尔代数对上述3种运算封闭。这样就将复杂的逻辑推理过程抽象为逻辑代数的运算，使逻辑命题的判断乃至逻辑电路的设计等推理问题，可以用逻辑代数这个系统完整的数学工具来解决。

- **逻辑代数 *Switching algebra*：** 将布尔代数的一些基本前提和定理应用于继电器的分析与描述，称为二值布尔代数，或开关代数。继电器是当时最常用的数字逻辑元件，继电器的接触状态（打开或闭合）用 0 或 1表示。

  ✓ 逻辑代数是二值逻辑运算中的基本数学工具

  ✓ 逻辑代数广泛应用于数字系统的分析和设计

在现代逻辑分析技术中，逻辑值对应于各种广泛的物理条件：电压的高或低、灯光的明或暗、电容器的充电或放电、熔丝的断开或接通，等等。

不同的计算机逻辑和存储技术中表示位值的物理状态

阅读

	表示位值的状态	
技术	0	1
气动逻辑	低压流动	高压流动
继电器逻辑	电路断开	电路闭合
CMOS逻辑	0~1.5V	3.5~5.0V
TTL逻辑	0~0.8V	2.0~5.0V
光纤	暗	亮
动态存储	电容放电	电容充电
非易失的可擦存储器	电子捕获	电子释放
双极只读存储器	熔丝烧断	熔丝完好
磁泡存储器	无磁泡	有磁泡
磁带存储器	磁通朝“北”	磁通朝“南”
聚合体存储器	分子处于状态A	分子处于状态B
只读压缩盘	无凹陷	凹陷
可重写压缩盘	晶态染色	非晶态染色

1.3.1 逻辑代数常用概念及逻辑运算

1. 逻辑代数中的常用概念

1) 逻辑状态 *Logic State*：

事物的某些特性表现为两种**互不相容**的状态，即

①某一时刻必出现且仅出现一种状态

②一种状态是另一种状态的反状态

则用符号0、1分别表示这两种状态，称逻辑状态

即：**0状态(*0 —state*)**和**1状态(*1 —state*)**

一般，0状态——逻辑条件的假或无效，

1状态——逻辑条件的真或有效。

(两种状态无大小之分)

2) 逻辑变量 Logic Value：

用于表示事物的逻辑状态随逻辑条件的变化而变化的量，取值：0 或1 。

逻辑常量 Logic Constant：

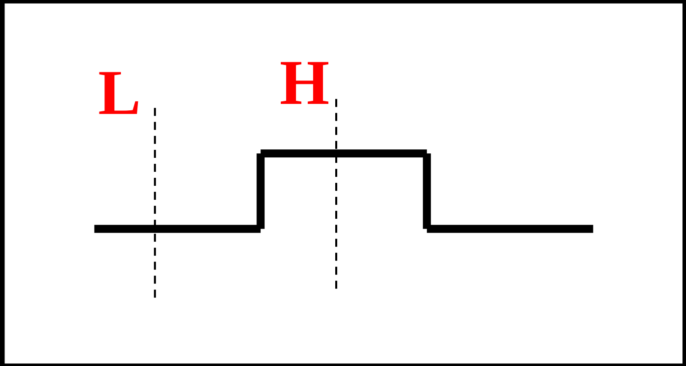
逻辑状态保持不变，取值“0”或“1”。

3) 逻辑电平 Logic Voltage：

- 在二值逻辑电路(开关电路)中，将物理器件的物理量离散为两种电平：高电平(用H表示)、低电平(用L表示)
- 抽象化的高、低电平忽略其物理量值的实际含义，实际上它们是代表着一定范围的物理量。参见下页。
- 在高、低电平之间有一逻辑不确定区，称为“噪音区”。若电平稳定于噪音区称为逻辑模糊，这在逻辑电路中不允许。

表1.5不同工艺器件定义的逻辑电平

工艺	逻辑电平（电源电压为5V）	
	L	H
TTL	0 ～ 0.40V	3.0 ～ 5.0V
CMOS	0 ～ 0.80V	2.0 ～ 5.0V



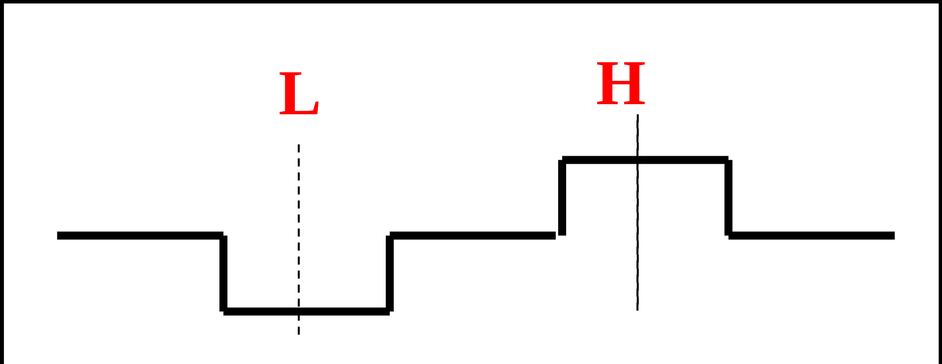
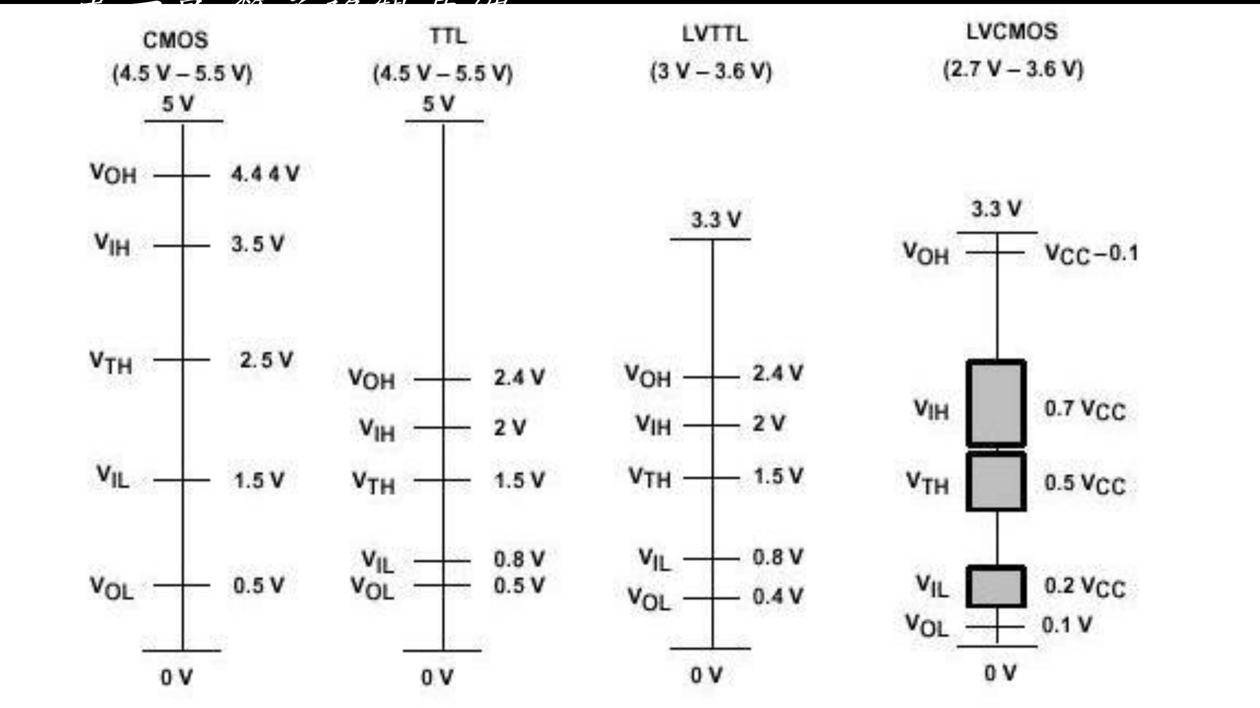


图. 脉冲的逻辑电平表示



对于一般的逻辑电平，以上参数的关系如下：

VOH > VIH > VT > VIL > VOL。

阅读

1：**输入高电平（VIH）**：保证逻辑门的输入为高电平时所允许的最小输入高电平，当输入电平高于VIH时，则认为输入电平为高电平。

2：**输入低电平（VIL）**：保证逻辑门的输入为低电平时所允许的最大输入低电平，当输入电平低于VIL时，则认为输入电平为低电平。

3：**输出高电平（VOH）**：保证逻辑门的输出为高电平时的输出电平的最小值，逻辑门的输出为高电平时的电平值都必须大于此VOH。

4：**输出低电平（VOL）**：保证逻辑门的输出为低电平时的输出电平的最大值，逻辑门的输出为低电平时的电平值都必须小于此VOL。

5：阈值电平(VT): 数字电路芯片都存在一个阈值电平，就是电路刚刚勉强能翻转动作时的电平。它是一个界于VIL、VIH之间的电压值，对于CMOS电路的阈值电平，基本上是二分之一的电源电压值，但要保证稳定的输出，则必须要求输入高电平> VIH，输入低电平<VIL，而如果输入电平在阈值上下，也就是VIL～VIH这个区域，电路的输出会处于不稳定状态。

4) 逻辑约定：

规定 逻辑电平（表示物理器件的物理量）

与 逻辑状态（表示物理器件的功能）

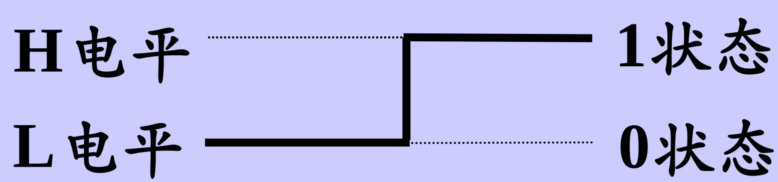
之间的 关系，即逻辑规定（约定）。

这一规定过程称为逻辑化过程。

逻辑规定有两种：正逻辑规定（约定）

和 负逻辑规定（约定），如下：

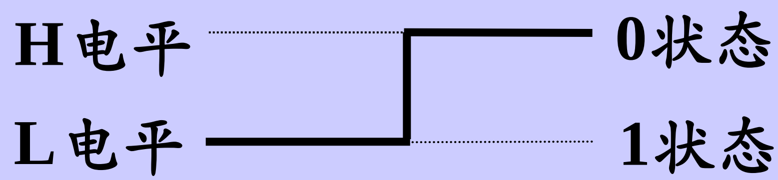
逻辑电平	逻辑状态
L	0
H	1



(a)正逻辑规定（约定）

注：本书均采用正逻辑约定。

逻辑电平	逻辑状态
L	1
H	0



(b)负逻辑规定（约定）

确定了逻辑规定（约定）后，各种物理量都转化为逻辑状态含义，因而可用逻辑变量表示，进而就可用各种数学或逻辑方法对电子电路进行分析和表达。一旦完成了逻辑化工作，不再考虑逻辑电路输入输出端的实际电平值，而是假设电路直接按照逻辑信号的0和1进行操作。

5) 逻辑电路 *Logic Circuit*：

由实现逻辑变量之间逻辑关系的物理器件所构成的电路称为逻辑电路，即二值逻辑电路。

6) 逻辑代数 *Logic Algebra*：

- 用代数形式表现逻辑变量之间的因果关系，
- 用代数运算对这些逻辑变量进行逻辑推理。

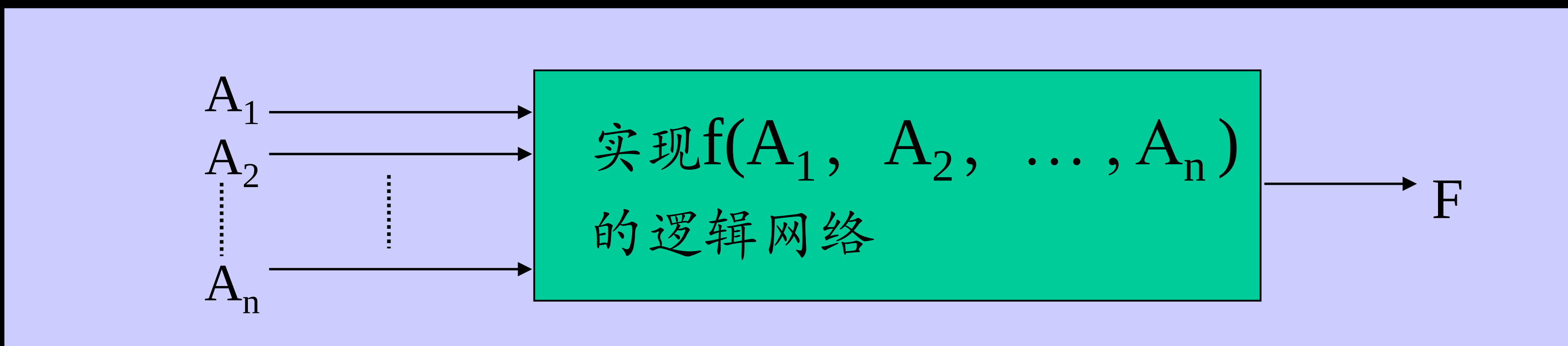
因此，逻辑代数是一个集合：逻辑变量集、常量0和1、“与”、“或”和“非”三种逻辑运算。

运算顺序是：“非”最高，“与”次之，“或”最低。

7)逻辑函数 *Logic Function*：

输入逻辑变量 A_1，A_2，… , A_n；输出逻辑变量F;

记为：$F = f(A_1，A_2，\dots , A_n)$，关系如下图所示:



$$F = f\,(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

输入变量（自变量）取值0、1;

输出变量（逻辑函数值）取值0、1.

8) 逻辑函数的表示法 *Representation*： 主要有四种

(1) 真值表（穷举法） *Truth Table*

(2) 逻辑表达式 *Algebraic Forms of Switching Functions*

(3) 卡诺图 *Karnaugh MAP* （文氏图 *Venn Diagrams*）

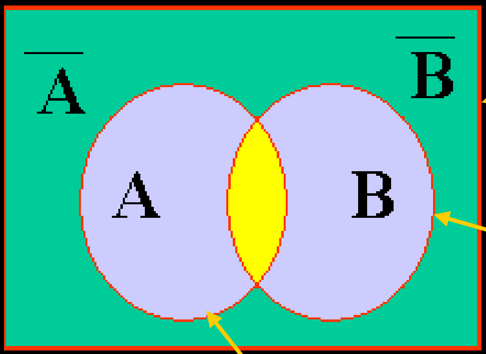
(4) 时间图 （信号波形图） *Timing*

真值表例

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表达式例： $F = A \cdot B$

Venn图



全集为1

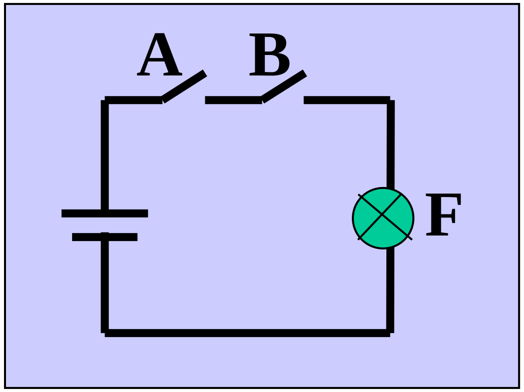
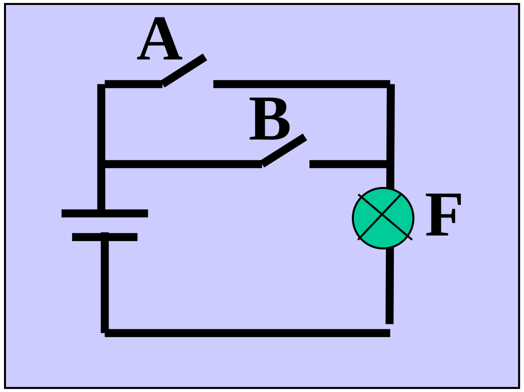
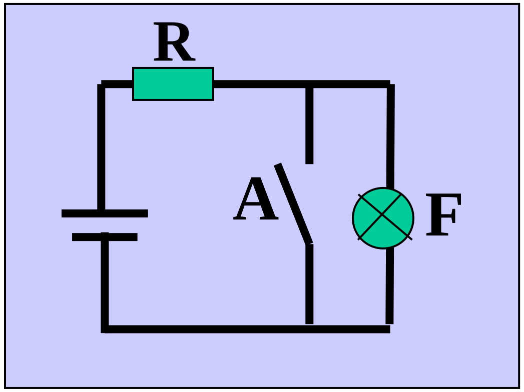
又引入变量B，将已有区域再分别一分为二

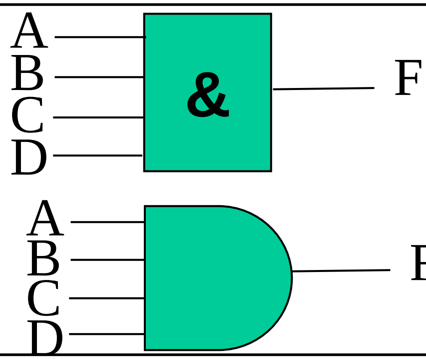
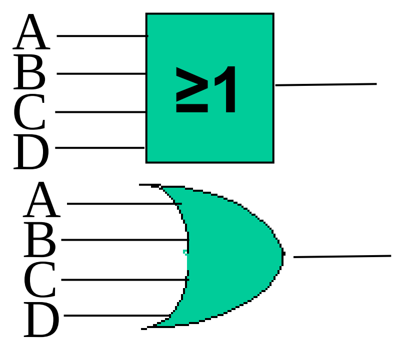
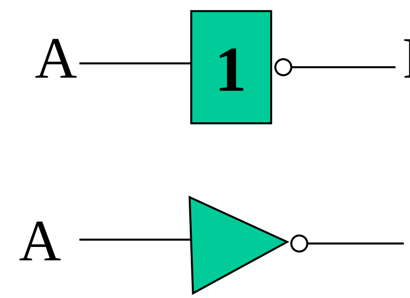
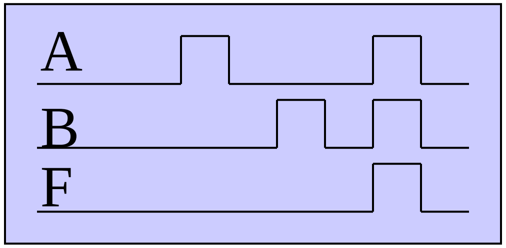
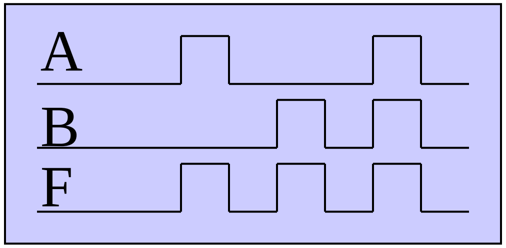
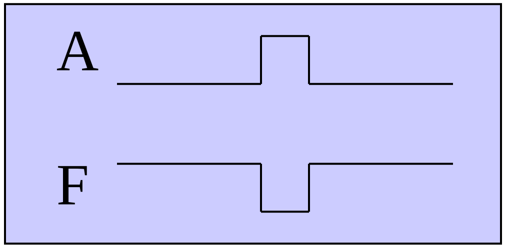
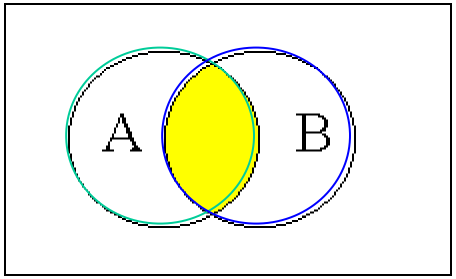
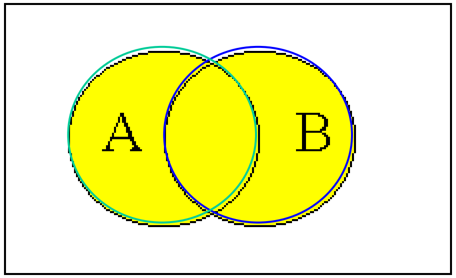
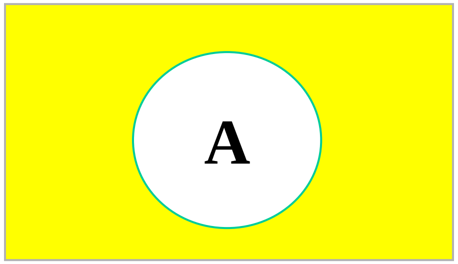
引入变量A，将区域一分为二

阅读 2. 逻辑代数的运算 1）逻辑代数的基本运算

	二值逻辑
$Y = A \cdot B$	•只有决定结果的两个条件A和B同时具备，即同时有效：A=1，B=1，则结果会发生，即结果有效：Y=1。 •若两者中只有一个有效：A=1,B=0或A=0,B=1，则结果不会发生，即无效：Y=0。 •若两者均无效：A=0,B=0，则结果不发生：Y=0。
$Y = A + B$	•决定结果的两个条件A和B只要有一个具备，结果即有效： •A=1,B=1则Y=1 •A=1,B=0则Y=1 •A=0,B=1则Y=1 •A=0,B=0则Y=0
$Y = \overline{A}$	决定Y的只有一个条件A •A=0则Y=1 •A=1则Y=0

2. 逻辑代数的运算　1）逻辑代数的基本运算

<table>
<tr><td></td><td>“与” 运算(逻辑乘)
Logic Multiplication</td><td>“或” 运算(逻辑加)
Logic Addition</td><td>“非” 运算(逻辑非)
Logic Negation</td></tr>
<tr><td>运算结果</td><td>逻辑积
Logic Product</td><td>逻辑和
Logic Sum</td><td>求补
Complement</td></tr>
<tr><td>示意电路</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>真值表</td><td><table><tr><th>A B</th><th>F</th></tr><tr><td>0 0</td><td>0</td></tr><tr><td>0 1</td><td>0</td></tr><tr><td>1 0</td><td>0</td></tr><tr><td>1 1</td><td>1</td></tr></table></td><td><table><tr><th>A B</th><th>F</th></tr><tr><td>0 0</td><td>0</td></tr><tr><td>0 1</td><td>1</td></tr><tr><td>1 0</td><td>1</td></tr><tr><td>1 1</td><td>1</td></tr></table></td><td><table><tr><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

	"与" 运算(逻辑乘) *Logic Multiplication*	"或" 运算(逻辑加) *Logic Addition*	"非" 运算(逻辑非) *Logic Negation*
代数式	$F = A \times B = A \cdot B$	$F = A + B$	$F = \overline{A}$
逻辑符号			
波形图			
文氏图 (F为阴影)			

2）逻辑代数的复合运算

- 与、或、非三种基本逻辑运算组合起来可以实现任何逻辑函数
- 与门、或门、非门三种基本逻辑运算(门)组合起来可以实现任何逻辑功能的逻辑电路，称此三门构成了一个逻辑完备组
- 若实现一个较复杂的逻辑功能，尤其在大规模集成电路快速发展的今天，必须增加门电路的功能，以简化电路。

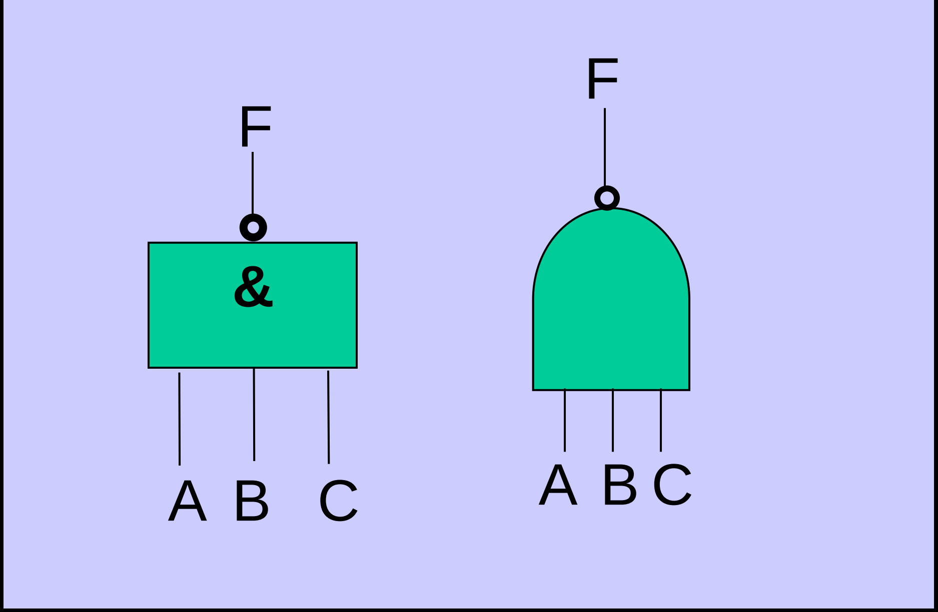
（与非门，或非门，与或非门，异或门，同或门）

①与非逻辑　逻辑表达式为：$F = \overline{A \cdot B \cdot C}$

与非逻辑真值表

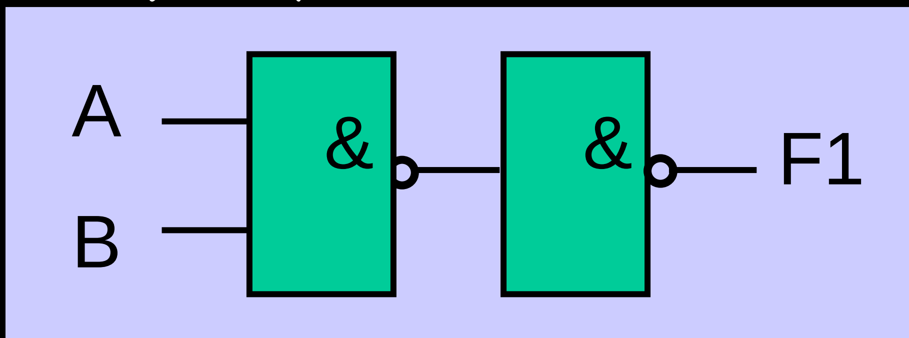
A B C	F
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

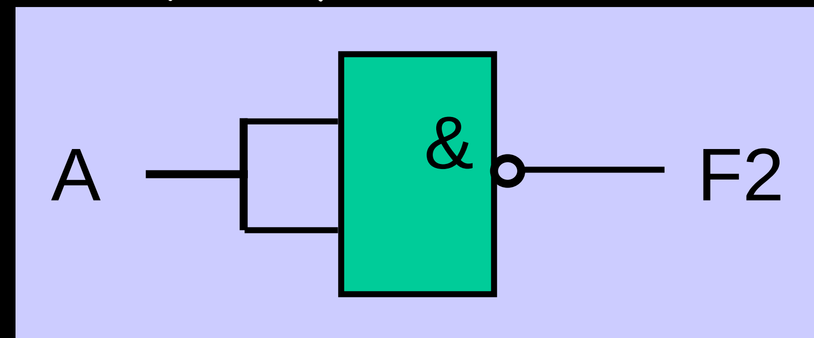
与非门的逻辑符号



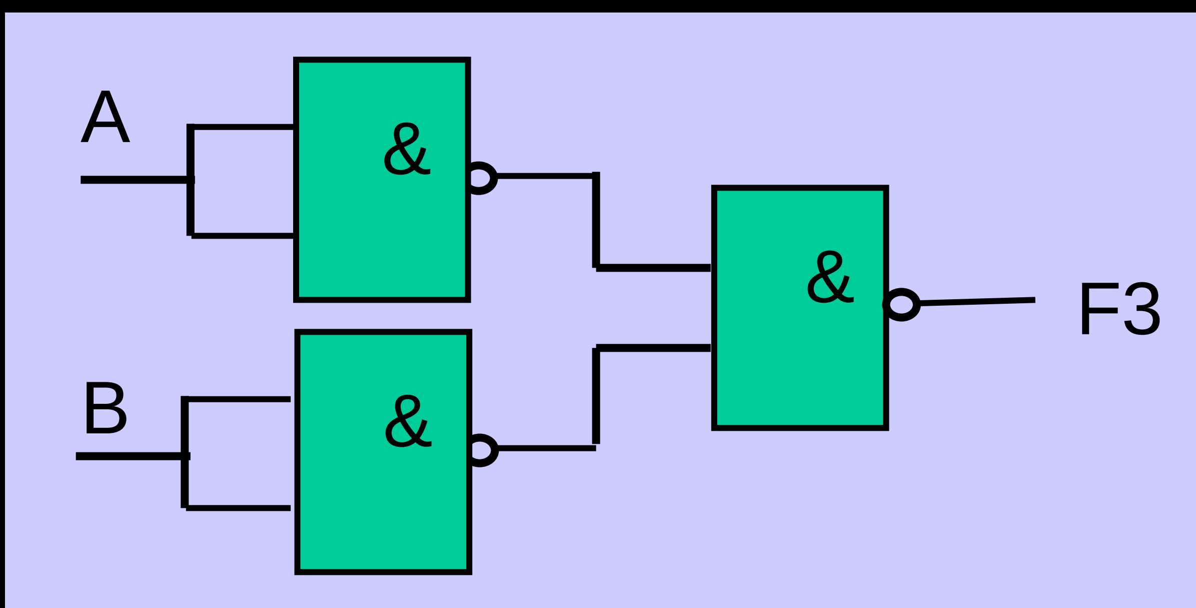
可以用与非门实现三种基本运算:

- 与运算 $F1=\overline{\overline{A\cdot B}}=A\cdot B$
- 非运算 $F2=\overline{A\cdot A}=\overline{A}$





- 或运算 $F3=\overline{\overline{A\cdot A}\cdot\overline{B\cdot B}}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=A+B$



与非门可以等效的实现任何逻辑功能。

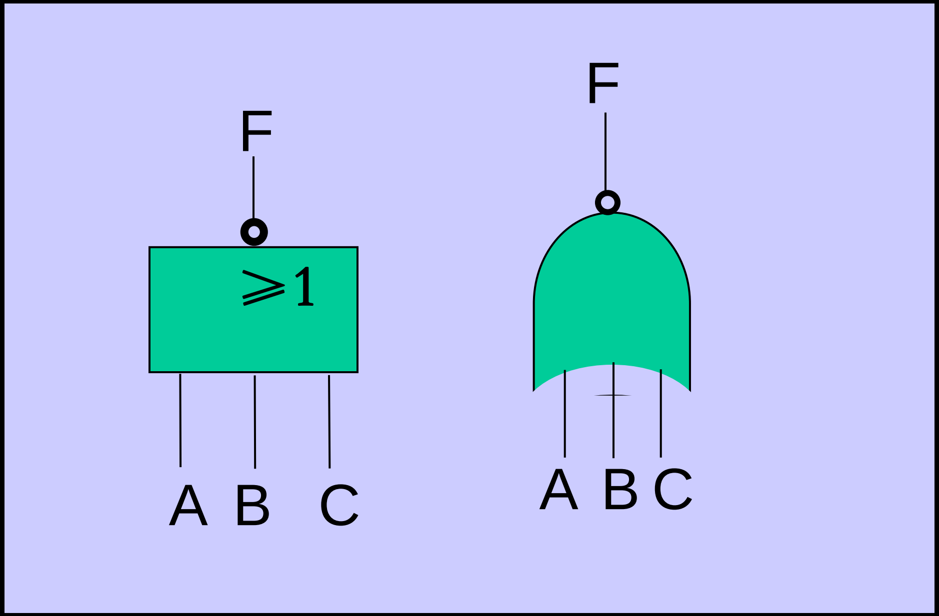
②或非逻辑(NOR)

逻辑表达式为：$F = \overline{A + B + C}$

或非逻辑真值表

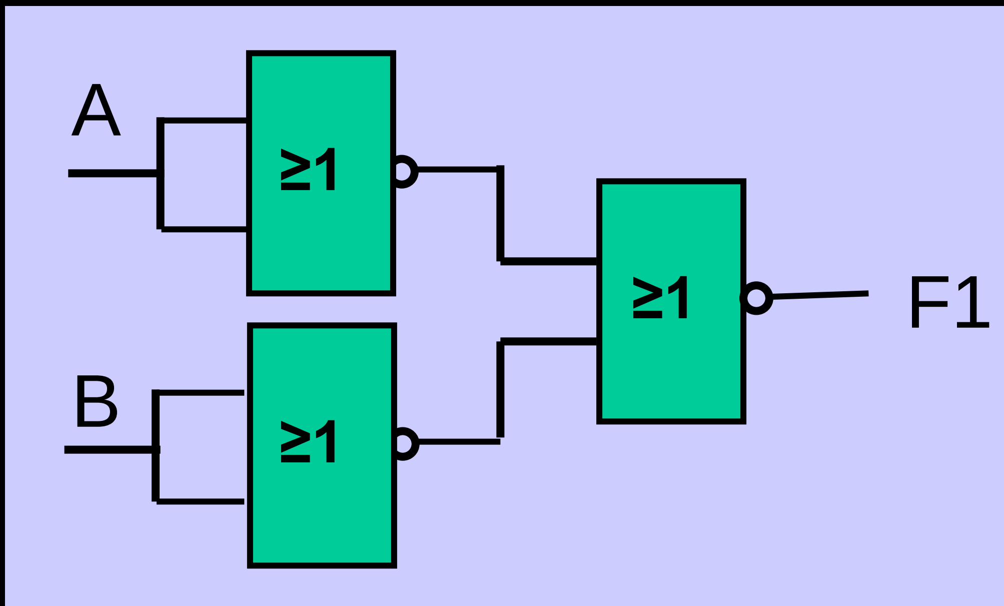
A B C	F
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	0

或非门的逻辑符号

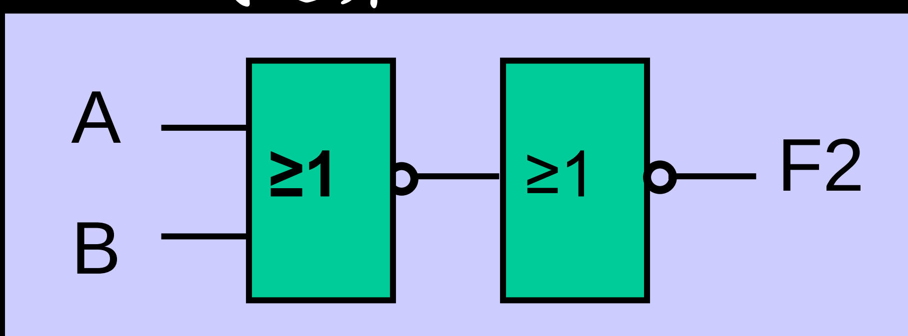


可以用或非门实现三种基本运算:

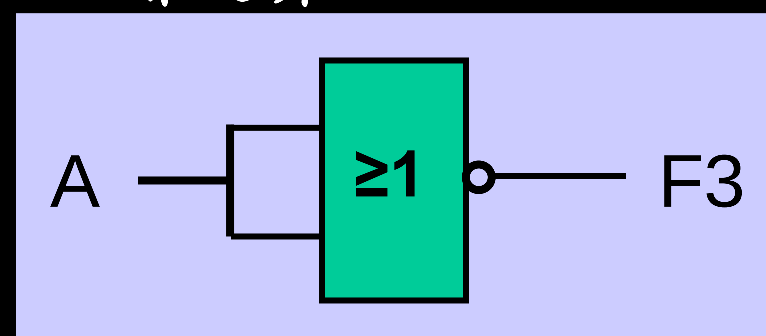
- 与运算$F1=\overline{\overline{A+A}+\overline{B+B}}=\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A\cdot B$



- 或运算 $F2=\overline{\overline{A+B}}$



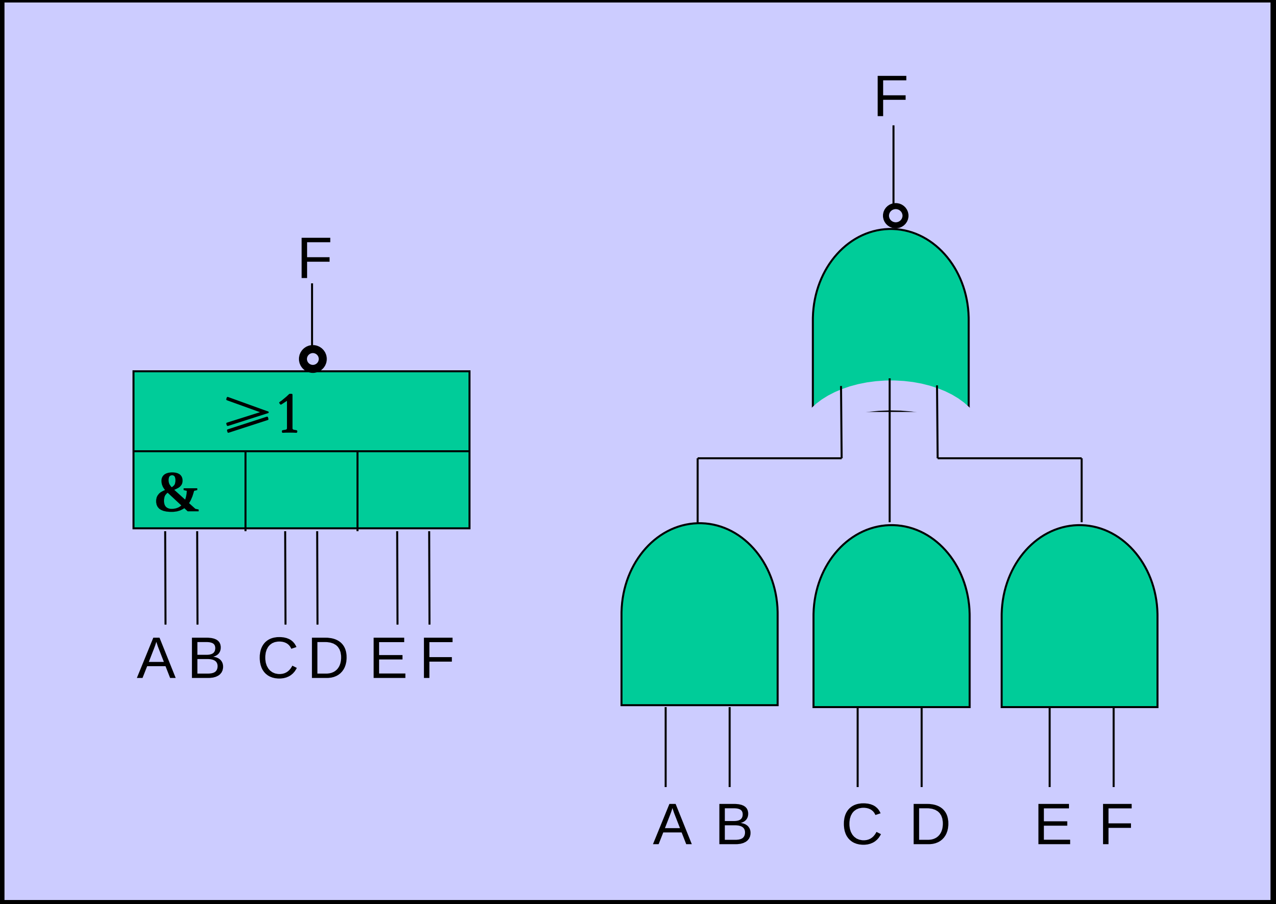
- 非运算$F3=\overline{A+A}=\overline{A}$



③与或非逻辑(AOI)

逻辑表达式为：$F = \overline{AB + CD + EF}$

与或非门的逻辑符号

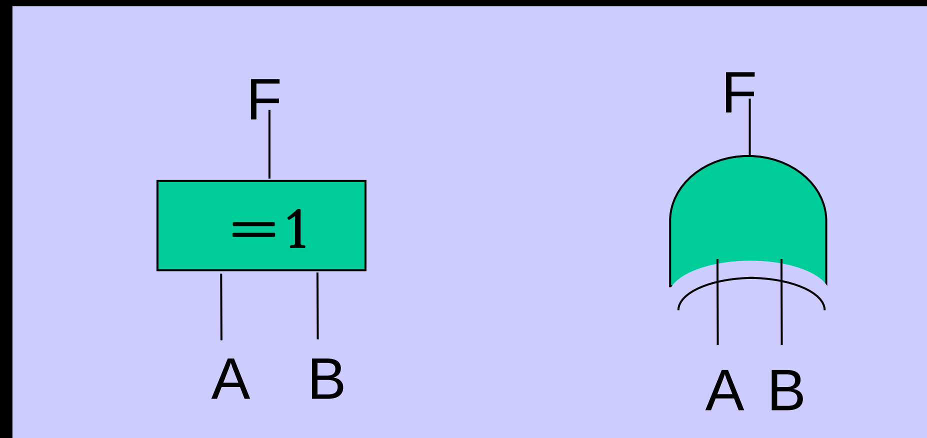


④异或逻辑，$F = A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$

异或逻辑真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

异或门的逻辑符号

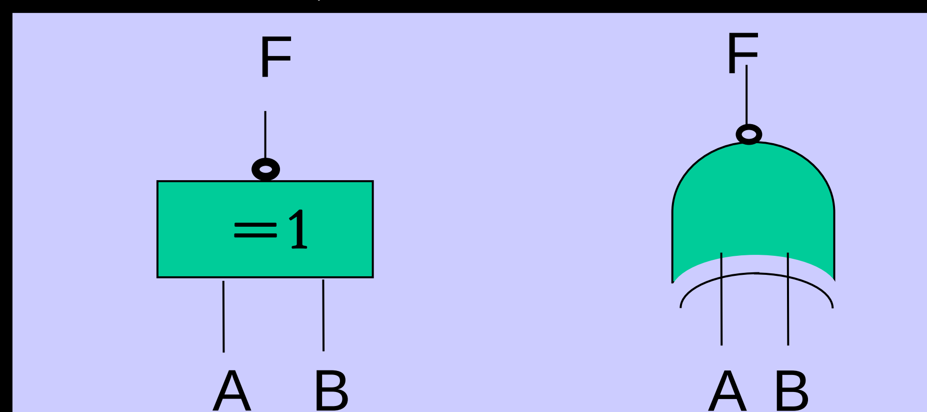


⑤同或逻辑，$F = A \odot B = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$

异或逻辑真值表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

异或门的逻辑符号



1.3.2 逻辑代数的定律、定理及规则

基本运算

$\overline{1} = 0$ $\qquad$ $\overline{0} = 1$

$1 \cdot 1 = 1$ $\qquad$ $0 + 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $1 + 0 = 0 + 1 = 1$

$0 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $1 + 1 = 1\ (\neq 10)$

1. 逻辑代数的基本公理（定律） *Basic Postulates*

公理是基本的假定，是客观存在，无需证明。可以用真值表验证等式成立。当然等式两边还具有相同的卡诺图，但表达式具有多样性。

运算的优先顺序：括号，非，与，或。

- **0—1 律** $A+0=A$ $A\cdot 1=A$

  $A+1=1$ $A\cdot 0=0$

交换律 $A+B=B+A$ $A\cdot B=B\cdot A$

分配律 $A+B\cdot C=(A+B)(A+C)$ 或对与的分配

$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ 与对或的分配

结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$

$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C0$

上述三条基本公理可以用真值表证明

互补律 Complement $A+\overline{A}=1$ $A\cdot\overline{A}=0$

练习

- 可以把互补律看作如下命题：

  若 $X=A$，$Y=\overline{A}$，则有 $X+Y=1$ $X\cdot Y=0$

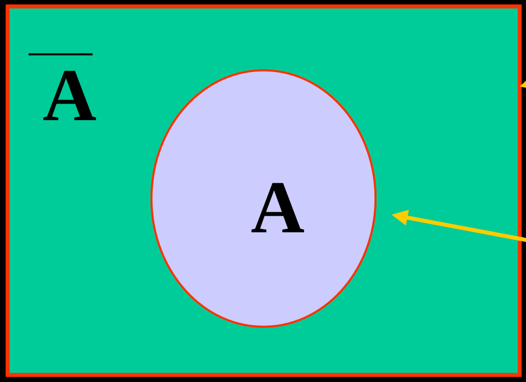
- 可以证明，其逆命题也成立：穷举法

  若 $X+Y=1$ $X\cdot Y=0$，则有 $X=A$，$Y=\overline{A}$。

重叠律 Idempotency $A+A=A$ $A\cdot A=A$

对合律 involution $\overline{\overline{A}}=A$

上述三条基本公理可以用Venn图验证。如下所示：



Venn图

全集 = 1

引入变量A，将全集分为两个互不相容的部分：A 区域和 $\overline{A}$ 区域

练习例：证明 分配律 A＋B • C = (A＋B)•(A＋C) 成立。

用真值表证明，如下：

A B C	B • C	A+BC	A+B	A+C	(A+B) •(A+C)
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0
0 1 0	0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

由此证明 A+B•C = (A+B)(A+C) 成立。

可以用同样的方法证明 A • (B+C) ＝ A • B+ A • C 成立。

➢ 异或运算和同或运算的基本代数性质

0—1律 (a) $A \oplus 0 = A$ $A \oplus 1 = \overline{A}$

(b) $A \odot 0 = \overline{A}$ $A \odot 1 = A$

交换律 (a) $A \oplus B = B \oplus A$

(b) $A \odot B = B \odot A$

分配律 (a) $A(B \oplus C) = AB \oplus AC$

(b) $A + (B \odot C) = (A + B) \odot (A + C)$

结合律 (a) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

(b) $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

调换律(a)若$A \oplus B = C$ 则 $A \oplus C = B$， $C \oplus B = A$

(b) 若$A \odot B = C$ 则 $A \odot C = B$， $C \odot B = A$

2. 逻辑代数的基本定理

①吸收定理

$$A + AB = A \qquad A\cdot(A+B) = A$$

$$A + \overline{A}\cdot B = A + B \qquad A\cdot(\overline{A}+B) = A\cdot B$$

$$A\cdot B + A\cdot\overline{B} = A \qquad (A+B)(A+\overline{B}) = A$$

例：证明 $A + \overline{A}\cdot B = A + B$，可以用公理来证明。

右边 $= A + 1\cdot B$ （0—1律）

$= A + (A+\overline{A})\cdot B$ （互补律）

$= A + AB + \overline{A}B$ （分配律）

$= A + \overline{A}B$ （吸收定理）

$=$ 左边　　证明成立

②反演定理(摩根定理)

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B} \qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

练习 *证明 $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ 成立，可以用函数的互补性来证明

设：$X=AB \qquad Y=\overline{A}+\overline{B}$

$\because \quad X+Y=AB+\overline{A}+\overline{B}$

$=\overline{A}+B+\overline{B}$ （吸收律）

$=\overline{A}+1$ （互补律）

$=1$ （0—1律）

又$\because \quad X\cdot Y=AB(\overline{A}+\overline{B})$

$=AB\cdot\overline{A}+AB\cdot\overline{B}$ (分配律)

$=0\cdot B+0\cdot A$ (互补律)

$=0+0$ (0—1律)

$=0$ (基本运算)

$\therefore$ X 与 Y 互补，$X=\overline{Y}$，$Y=\overline{X}$。证明摩根定理成立。

N变量的摩根定理：（此定理证明见代入规则。）

阅读

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1} \bullet \overline{A_2} \bullet \ldots \bullet \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}$$

或运算结果的非，相当于各变量非的与运算。

与运算结果的非，相当于各变量非的或运算。

摩根定理证明了变量进行“与”和“或”运算时的互补效应。

摩根定理的作用：进行逻辑函数化简和逻辑变换。

摩根定理的应用：

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \overline{\overline{A_1} \bullet \overline{A_2} \bullet \ldots \bullet \overline{A_n}}$$

$$A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_n = \overline{\overline{A_1} + \overline{A_2} + \ldots + \overline{A_n}}$$

③包含律 *Consensus* (也称多余项定理)

$$A B+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C$$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)$$

练习　例：证明 $A B+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C$

左边 $= A B+\overline{A}C+BC \bullet 1$ （0—1律）

$= A B+\overline{A}C+BC(A+\overline{A})$ （互补律）

$= AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$ （分配律）

$= AB+ABC+\overline{A}C+\overline{A}CB$ （交换律）

$= AB+\overline{A}C$ （吸收律）

= 右边　证明成立

3. 逻辑代数基本规则 *Basic Formulas*

➢ 逻辑相等：

若对两个逻辑表达式，其逻辑变量的各种相同取值组合对应的表达式值都相同，则称这两个逻辑表达式相等。 f (A,B,C) = g (A,B,C)

A B C	f (A,B,C) = A+B • C	g (A,B,C) = (A+B) • (A+C)
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	1	1
1 0 0	1	1
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	1	1

① 代入规则：

已知 $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

有任意函数 h，令： $x_i = h$

则 $f(x_1, x_2, \ldots, h, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, h, \ldots, x_n)$

依然成立。

证明： ∵ x_i 取值只有 0 或 1，使等式成立

又∵ 逻辑函数 h 取值仅有 0 或 1

∴ 代入规则成立。

用代入规则证明N变量的摩根定理，如下：见下一页练习

练习 证明N变量的摩根定理：

$$\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n}$$

$\because \quad \overline{A_1 + X} = \overline{A_1} \cdot \overline{X}$ (摩根定理)

令 $X = A_2 + Y$ 代入

则 $\overline{A_1 + A_2 + Y} = \overline{A_1} \cdot \overline{(A_2 + Y)}$

$= \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{Y}$ (摩根定理)

令 $Y = A_3 + Z$ 代入

则 $\overline{A_1 + A_2 + A_3 + Z} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{(A_3 + Z)}$

$= \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{Z}$ (摩根定理)

依次类推，则推出 N 变量的摩根定理。

②反演规则(香农定理)

- N变量的摩根定理:

$$\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}$$

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_n}$$

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \overline{\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}}$$

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = \overline{\overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_n}}$$

摩根定理给出了求反函数（互补函数）的方法，但并未能对互补函数之间的关系作出完善的说明。对此，香农定理作了推广。

- 反演规则(香农定理) *Shannon's expansion theorem*

已知原函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 1, +, \cdot)$

则反函数 $\overline{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 1, +, \cdot)$

$$= f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, 1, 0, \cdot, +)$$

这是摩根（反演）定理和代入规则的推广使用。

是对互补函数的完善说明。注意：保持原有的运算次序。

例1： $F = A \bullet [\overline{B} + (C\overline{D} + \overline{E}) \bullet G]$

则反函数 $\overline{F} = \overline{A} + B \bullet [(\overline{C} + D) \bullet E + \overline{G}]$

注意运算的先后顺序保持不变，必要时要加括号以保证运算顺序不变。

如应用反演律及代入规则解上例，可得：

$$\overline{F} = \overline{A \cdot [\overline{B} + (C\overline{D} + \overline{E}) \cdot G]} \qquad (f = \overline{X \cdot Y}$$

$$= \overline{A} + \overline{\overline{B} + (C\overline{D} + \overline{E}) \cdot G} \qquad = \overline{X} + \overline{Y})$$

$$= \overline{A} + B \cdot \overline{(C\overline{D} + \overline{E}) \cdot G}$$

$$= \overline{A} + B \cdot [\overline{(C\overline{D} + \overline{E})} + \overline{G}]$$

$$= \overline{A} + B \cdot [\overline{C\overline{D}} \cdot E + \overline{G}]$$

$$= \overline{A} + B \cdot [(\overline{C} + D) \cdot E + \overline{G}]$$

例2：$F = A + \overline{B + \overline{C} + \overline{D + \overline{E}}}$

$$\overline{F} = \overline{A} \cdot \overline{\overline{B} \cdot C \cdot \overline{\overline{D} \cdot E}}$$

③对偶规则

对偶式的定义：

已知原函数（原式） $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 1, +, \cdot)$

则对偶函数（对偶式） $f'(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 1, +, \cdot)$

$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1, 0, \cdot, +)$

（若有非号，则“非”号不变）

~~**对偶规则：**~~

1. $(f')' = f$

2. 若 $f_1 = f_2$，则 $f_1' = f_2'$ （减少记忆公式的数目）

3. 若 $f' = f$，则称 f 为自对偶函数。

比如 $f = A$，$f = \overline{A}$ 等。

例如前述的各种所有公理和由其导出的定理（a），其对偶式（b）都成立:

0—1 律

(a) $A + 0 = A$ (b) $A \cdot 1 = A$

(a) $A + 1 = 1$ (b) $A \cdot 0 = 0$

分配律 (a) $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

(b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

……

反演律 (摩根定理)

(a) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ (b) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

……

异或运算与同或运算的关系

- $\overline{A\oplus B} = A\odot B$ $\overline{A\odot B} = A\oplus B$
- $(A\oplus B)' = A\odot B$ $(A\odot B)' = A\oplus B$
- $A\oplus B\oplus C = A\odot B\odot C$

练习例： 证明 $\overline{A\oplus B} = \overline{\overline{A}B + A\overline{B}}$

$$= \overline{\overline{A}B}\;\overline{A\overline{B}}$$

$$= (A+\overline{B})(\overline{A}+B)$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

$$= A\odot B$$

证明 $(A\oplus B)' = (\overline{A}B + A\overline{B})'$

$$= (\overline{A}+B)(A+\overline{B})$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

$$= A\odot B$$

证明 $A \oplus B \oplus C = \overline{A}(B \oplus C) + A(\overline{B \oplus C})$

$$= \overline{A}(B \oplus C) + A(B \odot C)$$

$$= \overline{A}(\overline{B}C + B\overline{C}) + A(\overline{B}\,\overline{C} + BC)$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

由真值表可知，任意个变量的异或运算，只要输入为1的个数是奇数时，输出必为1，即为奇校验逻辑。

练习

$$A \odot B \odot C = \overline{A}(\overline{B \odot C}) + A(B \odot C)$$

$$= \overline{A}(B \oplus C) + A(B \odot C)$$

$$= \overline{A}(\overline{B}C + B\overline{C}) + A(\overline{B}\,\overline{C} + BC)$$

$$= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

所以：

$$= A \oplus B \oplus C$$

当变量为2时，同或运算与异或运算之间具有互补关系；

当变量为3时，同或运算与异或运算之间具有相等关系。

由代入规则可以证明：

当变量为偶数时，同或运算与异或运算之间具有互补关系；
当变量为奇数时，同或运算与异或运算之间具有相等关系。
即：

$$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \dots \oplus A_n = \overline{A_1 \odot A_2 \odot A_3 \odot \dots \odot A_n}$$

n 为偶数

$$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \dots \oplus A_n = A_1 \odot A_2 \odot A_3 \odot \dots \odot A_n$$

n 为奇数

1.3.3. 逻辑函数表示

一个逻辑命题的三种表示法：真值表
表达式
卡诺图

三者之间的关系：

①真值表是逻辑函数最基本的表达方式，具有唯一性；

②由真值表可以导出逻辑表达式和卡诺图；

③由真值表导出逻辑表达式的两种标准形式：

最小项之和 *The canonical SOP(the Sum Of Products)*

最大项之积 *The canonical POS(Product Of Sums)*

1. 逻辑函数的真值表

真值表是由输入变量所有可能的取值组合及其对应的逻辑函数值所构成的表格。

A B C	f (A,B,C) = A+B • C	g (A,B,C) = (A+B) • (A+C)
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	1	1
1 0 0	1	1
1 0 1	1	1
1 1 0	1	1
1 1 1	1	1

2. 逻辑函数的逻辑表达式

1） 基本表达式

依照逻辑运算的规则，一个逻辑可以用多种形式的逻辑函数来描述，而这些逻辑函数的真值表都是相同的。如：

以函数中所含的变量乘积项的特点以及乘积项之间的逻辑关系来分类:

$$F = A \oplus B$$

$$= \overline{A}B + A\overline{B} \qquad \text{与或式 } SOP$$

$$= (A+B)(\overline{A}+\overline{B}) \qquad \text{或与式 } POS$$

$$= \overline{\overline{\overline{A}B}\;\overline{A\overline{B}}} \qquad \text{与非式}$$

$$= \overline{\overline{(A+B)}+\overline{(\overline{A}+\overline{B})}} \qquad \text{或非式}$$

$$= \overline{\overline{A}\,\overline{B}+AB} \qquad \text{与或非式}$$

$$= \ldots\ldots$$

其中：与或式及或与式是逻辑函数的基本表达式。

2）逻辑函数的标准形式

逻辑函数有多种表达形式，对应不同的电路结构。

由真值表可以导出逻辑表达式的两种标准形式:

最小项之和 *The canonical SOP(Sum Of Products)*

最大项之积 *The canonical POS(Product Of Sums)*

阅读 ➢ 逻辑代数表达式—与或式的常用概念：

与项：一个或一个以上的因子（变量）用与运算符号连接起来的 式子。如，$A\bar{B}$，AC等。

标准与项（**最小项**）：包含所讨论问题中的每一个变量，该变量在最小项中不是原变量就是反变量。如4变量函数中，$A\bar{B}C\bar{D}$，$A\bar{B}CD$。

与或式（**SOP**）：一个或一个以上的与项用或运算符号连接起来的式子。如，$A\bar{B}+\bar{A}B$，$A\bar{B}C+\bar{A}D+C$。

标准和（**标准与或式，最小项标准式**）：仅是一个与或表达式，该式中所有的与项都是标准与项（最小项）。

最简与或式：具有最少与项的与或式。如：

$$\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+ABC=\bar{A}B+A\bar{B}+ABC$$

$$=\bar{A}B+A\bar{B}+AC$$

练习

$$=\bar{A}B+A\bar{B}+BC$$

阅读 ➢ 逻辑代数表达式－或与式的常用概念：

或项：一个或一个以上的因子用或运算符号连接起来的式子。如，$A+\overline{B}$，$A+C+D$等。

标准或项（最大项）：包含所讨论问题中的每一个变量，该变量在最大项中不是原变量就是反变量。如对4变量函数中，$A+\overline{B}+C+\overline{D}$，$A+\overline{B}+C+D$。

或与式（POS）：一个或一个以上的或项用或运算符号连接起来的式子。如，$(A+B)(A+C)$，$(A+\overline{B}+C+\overline{D})(A+\overline{C})$。

标准与（标准或与式，最大项标准式）：仅是一个或与表达式，该式中所有的或项都是标准或项（最大项）。

最简或与式：具有最少或项的或与式。如：

$$(A+\overline{B}+C)(A+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(A+C+D)$$

$$=(A+\overline{C})(A+D)(\overline{B}+C)$$

练习

① 最小项 minterm

设有 n 个变量，它们组成的与项中每个变量或以原变量或以反变量形式出现一次，且仅出现一次，此与项称之为 n 个变量的最小项。对于 n 个变量就可构成 2^n 个最小项，分别记为 m_i；

其中下标值 i：当各最小项变量按一定顺序排好后，用 1 代替其中的原变量，0 代替其中的反变量，便得一个二进制数，该二进制数的等值十进制即为 i 的值。

例如：3 变量的 8 个最小项可以表示为：

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} = m_0 \quad \bar{A}\bar{B}C = m_1 \quad \bar{A}B\bar{C} = m_2 \quad \bar{A}BC = m_3$$

$$A\bar{B}\bar{C} = m_4 \quad A\bar{B}C = m_5 \quad AB\bar{C} = m_6 \quad ABC = m_7$$

为区别不同 n 值的相同 m_i，可记为：m_i^n

②最大项 *maxterm*

设有 n 个逻辑变量，它们组成的或项中，每个变量或以原变量形式或以反变量形式出现一次，且仅出现一次，此或项称为 n 变量的最大项。对于 n 个变量可以构成2^n个最大项，分别记为 M_i；

其中下标值 i 的取值规则与最小项中 i 的取值规则相反，即将各变量按一定次序排好后，用 0 代替其中的原变量，用 1 代替其中的反变量，得到一个二进制数，该二进制数的等值十进制即为 i 的值。

例如，三变量的最大项记为：

$$A+B+C=M_0 \quad A+B+\overline{C}=M_1 \quad A+\overline{B}+C=M_2$$

$$A+\overline{B}+\overline{C}=M_3 \quad \overline{A}+B+C=M_4 \quad \overline{A}+B+\overline{C}=M_5$$

$$\overline{A}+\overline{B}+C=M_6 \quad \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=M_7$$

为区别不同 n 值的相同 M_i，可记为：M_i^n

③ 最小项与最大项的性质

最小项真值表

A B C	m_0 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_1 $\bar{A}\bar{B}C$	m_2 $\bar{A}B\bar{C}$	m_3 $\bar{A}BC$	m_4 $A\bar{B}\bar{C}$	m_5 $A\bar{B}C$	m_6 $AB\bar{C}$	m_7 ABC
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

最小项和最大项都可以看做n个逻辑自变量的最简单的函数。

(1) 对于任意最小项，只有一组变量组合取值可使其值为1。

(2) n变量的所有最小项之和必为1，记为：$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$

(3) 任意两个最小项之积必为0，即：$m_i \cdot m_j = 0 (i \neq j)$

(4) 同变量数下标相同的最小项和最大项互为反函数

即：$m_i = \overline{M_i}$ ，$M_i = \overline{m_i}$ ，则：$m_i \cdot M_i = 0$ 且 $m_i + M_i = 1$

最大项真值表

ABC	M_0 $A+B+C$	M_1 $A+B+\overline{C}$	M_2 $A+\overline{B}+C$	M_3 $A+\overline{B}+\overline{C}$	M_4 $\overline{A}+B+C$	M_5 $\overline{A}+B+\overline{C}$	M_6 $\overline{A}+\overline{B}+C$	M_7 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1
1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0

最小项和最大项都可以看做n个逻辑自变量的最简单的函数。

(1) 对于任意最大项，只有一组变量组合取值可使其值为0。

(2) n变量的所有最大项之积必为0，记为：$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$

(3) 任意两个最大项之和必为1，即：$M_i + M_j = 1 (i \neq j)$

(4) 同变量数下标相同的最小项和最大项互为反函数

即：$m_i = \overline{M_i}$ ，$M_i = \overline{m_i}$ ，则：$m_i \cdot M_i = 0$ 且 $m_i + M_i = 1$

④函数的最小项标准式

逻辑函数被表达成一系列乘积项之和，则称之为积之和表达式(SOP)，或称为与或表达式。

如果构成函数的积之和表达式中每一个乘积项(与项)均为最小项时，则这种表达式称之为最小项标准式(*The canonical SOP*)，且这种表示是唯一的。

如：$F(A,B,C) = AC + \overline{A}B + BC$

$$= \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$

$$= m_2 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$= \sum m^3(2,3,5,7)$$

➢ 写出逻辑函数的最小项标准式的方法：

＊ 如果给定的函数为一般的与或表达式，可以反复应用公式：$X=X(Y+\overline{Y})$ 代入缺少某变量(Y)的与项中，形成最小项之和的形式。

例： $F = AC + A\overline{B} + BC$

$$= AC(\overline{B}+B) + A\overline{B}(\overline{C}+C) + (\overline{A}+A)BC$$

$$= A\overline{B}C + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

$$= A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$

$$= \sum m^3(3,4,5,7)$$

* 如果**给定函数用真值表表示**，显然**真值表每一行**变量的组合**对应一个最小项**。如果对应该行的**函数值为 1**，则函数的最小项表达式中**应包含**该行对应的最小项；如果该行的**函数值为 0**，则函数的最小项表达式中**不包含**对应该行的最小项。

例：某一个三变量函数 F(A，B，C)，它的真值表及其最小项及最大项的对应关系如下表。

表： F(A,B,C)的真值表及其最小项、最大项

行号	A B C	F(A，B，C)	最小项及代号	最大项及代号
0	000	F(0,0,0)=1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$	$A+B+C = M_0$
1	001	F(0,0,1)=0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$	$A+B+\overline{C} = M_1$
2	010	F(0,1,0)=0	$\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$	$A+\overline{B}+C = M_2$
3	011	F(0,1,1)=1	$\overline{A}\,B\,C = m_3$	$A+\overline{B}+\overline{C} = M_3$
4	100	F(1,0,0)=1	$A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$	$\overline{A}+B+C = M_4$
5	101	F(1,0,1)=0	$A\,\overline{B}\,C = m_5$	$\overline{A}+B+\overline{C} = M_5$
6	110	F(1,1,0)=1	$A\,B\,\overline{C} = m_6$	$\overline{A}+\overline{B}+C = M_6$
7	111	F(1,1,1)=1	$A\,B\,C = m_7$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} = M_7$

$F(A,B,C) = m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = \sum m^3(0,3,4,6,7)$

$\overline{F}(A,B,C) = m_1 + m_2 + m_5 = \sum m^3(1,2,5)$

行号	ABC	F（A,B,C）	m_0 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_1 $\bar{A}\bar{B}C$	m_2 $\bar{A}B\bar{C}$	m_3 $\bar{A}BC$	m_4 $A\bar{B}\bar{C}$	m_5 $A\bar{B}C$	m_6 $AB\bar{C}$	m_7 ABC
0	000	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	001	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	010	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	011	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	100	1	0	0	0	0	1	0	0	0
5	101	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	110	1	0	0	0	0	0	0	1	0
7	111	1	0	0	0	0	0	0	0	1

$$F(A,B,C) = m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = \sum m^3(0,3,4,6,7)$$

$$\overline{F}(A,B,C) = m_1 + m_2 + m_5 = \sum m^3(1,2,5)$$

阅读

行号	A B C	F(A，B，C)	最小项及代号	最大项及代号
0	000	F(0,0,0)=1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$	$A+B+C = M_0$
1	001	F(0,0,1)=0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$	$A+B+\overline{C} = M_1$
2	010	F(0,1,0)=0	$\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$	$A+\overline{B}+C = M_2$
3	011	F(0,1,1)=1	$\overline{A}\,B\,C = m_3$	$A+\overline{B}+\overline{C} = M_3$
4	100	F(1,0,0)=1	$A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$	$\overline{A}+B+C = M_4$
5	101	F(1,0,1)=0	$A\,\overline{B}\,C = m_5$	$\overline{A}+B+\overline{C} = M_5$
6	110	F(1,1,0)=1	$A\,B\,\overline{C} = m_6$	$\overline{A}+\overline{B}+C = M_6$
7	111	F(1,1,1)=1	$A\,B\,C = m_7$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} = M_7$

从真值表的角度看，其含义为：

F＝1，当且仅当A=0，B=0，C=0 或 A=0，B=1，C=1 或A=1，B=0，C=0 或 A=1，B=1，C=0 或 A=1，B=1，C=1。相当于

F＝1，当且仅当$\overline{A}$=1，$\overline{B}$=1，$\overline{C}$=1 或 $\overline{A}$=1，B=1，C=1 或A=1，$\overline{B}$=1，$\overline{C}$=1 或 A=1，B=1，$\overline{C}$=1 或 A=1，B=1，C=1。因此

F＝1，当且仅当$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$＝1 或 $\overline{A}\,B\,C$＝1 或 $A\,\overline{B}\,\overline{C}$＝1 或 $A\,B\,\overline{C}$＝1 或$A\,B\,C$＝1。

得到F的标准与或表达式：

$$F(A,B,C) = m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = \sum m^3(\,0,3,4,6,7\,)$$

* 如果给定函数用卡诺图表示，则卡诺图上的每一块区域对应一个最小项。如果对应该区域的函数值为 1 ，则函数的最小项表达式中应包含该区域对应的最小项；如果该区域的函数值为 0，则函数的最小项表达式中不包含对应该区域的最小项。

➢ 最小项与原函数、反函数的关系

对于 n 个变量的函数 F，它共有2^n个最小项，这些最小项不是包含在原函数 F 的最小项表达式中，就是包含在反函数 $\overline{F}$ 的最小项表达式中。用逻辑代数可以证明：

$$F(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)+\overline{F}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i=1$$

例如前例的函数 F：

$$F(A,B,C)=m_0+m_3+m_4+m_6+m_7=\sum m^3(0,3,4,6,7)$$

$$\overline{F}(A,B,C)=m_1+m_2+m_5=\sum m^3(1,2,5)$$

⑤函数的最大项标准式

逻辑函数被表达成一系列**和项之积**，则称为**和之积表达式(POS)**，或称为**或与表达式**。

如果构成函数的或与表达式中的**每一个和项**均为**最大项**，则这种表达式称为**最大项标准式(*The Canonical POS*)**，且这种表示是**唯一**的。

如：$F(A,B,C) = (A + C)(\overline{A} + B)$　　（吸收定理）

$$= (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

$$= M_0 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_5$$

$$= \prod M^3(0,2,4,5)$$

➢ 写出逻辑函数的最大项标准式的方法：

* 如果给定的函数是一般的或与表达式，可以反复应用公式：$X = X + Y\cdot\overline{Y} = (X+Y)(X+\overline{Y})$ 代入缺少某变量(Y)的和项中以形成最大项之积的形式。

如：$F(A,B,C) = (A + C)(\overline{A} + B)$ （吸收定理）

$$= (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

$$= M_0 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_5$$

$$= \prod M^3(0,2,4,5)$$

* 如果给定函数用真值表表示，显然真值表每一行变量的组合对应一个最大项。如果对应该行的函数值为 0，则函数的最大项表达式中应包含该行对应的最大项；如果该行的函数值为 1，则函数的最大项表达式中不包含对应该行的最大项。

行号	A B C	F(A，B，C)	最小项及代号	最大项及代号
0	000	F(0,0,0)=1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$	$A+B+C = M_0$
1	001	F(0,0,1)=0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$	$A+B+\overline{C} = M_1$
2	010	F(0,1,0)=0	$\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$	$A+\overline{B}+C = M_2$
3	011	F(0,1,1)=1	$\overline{A}\,B\,C = m_3$	$A+\overline{B}+\overline{C} = M_3$
4	100	F(1,0,0)=1	$A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$	$\overline{A}+B+C = M_4$
5	101	F(1,0,1)=0	$A\,\overline{B}\,C = m_5$	$\overline{A}+B+\overline{C} = M_5$
6	110	F(1,1,0)=1	$A\,B\,\overline{C} = m_6$	$\overline{A}+\overline{B}+C = M_6$
7	111	F(1,1,1)=1	$A\,B\,C = m_7$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} = M_7$

$$F(A,B,C) = M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 = \prod M^3(1,2,5)$$

$$\overline{F}(A,B,C) = M_0 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_7 = \prod M^3(0,3,4,6,7)$$

行号	ABC	F（A,B,C）	M_0 $A+B+C$	M_1 $A+B+\overline{C}$	M_2 $A+\overline{B}+C$	M_3 $A+\overline{B}+\overline{C}$	M_4 $\overline{A}+B+C$	M_5 $\overline{A}+B+\overline{C}$	M_6 $\overline{A}+\overline{B}+C$	M_7 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
0	000	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	001	0	1	0	1	1	1	1	1	1
2	010	0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	011	1	1	1	1	0	1	1	1	1
4	100	1	1	1	1	1	0	1	1	1
5	101	0	1	1	1	1	1	0	1	1
6	110	1	1	1	1	1	1	1	0	1
7	111	1	1	1	1	1	1	1	1	0

$$F(A,B,C) = M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 = \prod M^3(1,2,5)$$

$$\overline{F}(A,B,C) = M_0 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_7 = \prod M^3(0,3,4,6,7)$$

阅读

行号	A B C	F(A，B，C)	最小项及代号	最大项及代号
0	000	F(0,0,0)=1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$	$A+B+C = M_0$
1	001	F(0,0,1)=0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$	$A+B+\overline{C} = M_1$
2	010	F(0,1,0)=0	$\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$	$A+\overline{B}+C = M_2$
3	011	F(0,1,1)=1	$\overline{A}\,B\,C = m_3$	$A+\overline{B}+\overline{C} = M_3$
4	100	F(1,0,0)=1	$A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$	$\overline{A}+B+C = M_4$
5	101	F(1,0,1)=0	$A\,\overline{B}\,C = m_5$	$\overline{A}+B+\overline{C} = M_5$
6	110	F(1,1,0)=1	$A\,B\,\overline{C} = m_6$	$\overline{A}+\overline{B}+C = M_6$
7	111	F(1,1,1)=1	$A\,B\,C = m_7$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} = M_7$

从真值表的角度看，其含义为：

F＝0，当且仅当A=0，B=0，C=1 或A=0，B=1，C=0 或 A=1，B=0，C=1 。

相当于

F＝0，当且仅当A=0，B=0，$\overline{C}$=0 或 A=0，$\overline{B}$=0，C=0 或$\overline{A}$=0，B=0，$\overline{C}$=0 。

因此

F＝0，当且仅当$A+B+\overline{C}=0$ 或 $A+\overline{B}+C=0$ 或 $\overline{A}+B+\overline{C}=0$ 。

F＝1，当且仅当$A+B+\overline{C}=1$ 且 $A+\overline{B}+C=1$ 且 $\overline{A}+B+\overline{C}=1$ 。

得到 F 的标准或与表达式：

$$F(A,B,C) = M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 = \prod M^3(1,2,5)$$

从最小项和最大项的关系看:

$$F(A,B,C) = m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = \sum m^3(0,3,4,6,7)$$

$$\overline{F}(A,B,C) = \overline{m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7}$$

$$= M_0 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_7 = \prod M^3(0,3,4,6,7)$$

$$\overline{F}(A,B,C) = m_1 + m_2 + m_5 = \sum m^3(1,2,5)$$

$$F(A,B,C) = \overline{m_1 + m_2 + m_5}$$

$$= M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 = \prod M^3(1,2,5)$$

* 如果给定函数用卡诺图表示，则函数最大项表达式可以通 过卡诺图得到。

➢ 最大项与原函数、反函数的关系

对于 n 个变量的函数 F，它共有2^n个最大项，这些最大项不是包含在原函数 F 的最大项表达式中，就是包含在反函数 $\overline{F}$ 的最大项表达式中。用逻辑代数可以证明：

$$F(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\cdot\overline{F}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=\prod_{i=0}^{2^n-1}M_i=0$$

如前例的逻辑函数 F ：

$$F(A,B,C)=M_1\cdot M_2\cdot M_5=\prod M^3(1,2,5)$$

$$\overline{F}(A,B,C)=M_0\cdot M_3\cdot M_4\cdot M_6\cdot M_7=\prod M^3(0,3,4,6,7)$$

⑥同一函数的最小项标准式与其最大项标准式的关系：

同一逻辑函数的一种标准式变换成另一种标准式时，互换$\sum m^n$和$\prod M^n$的符号，并在符号后列出原式中缺少的那些数字。且这两种标准式都是唯一的。

例： $F=\sum m^3(0,2,3)=\prod M^3(1,4,5,6,7)$

证明： $F=\sum m^3(0,2,3)$

则 $\overline{F}=\sum m^3(1,4,5,6,7)$

$$=m_1+m_4+m_5+m_6+m_7$$

$$F=\overline{\overline{F}}=\overline{m_1+m_4+m_5+m_6+m_7}$$

$$=\overline{m_1}\cdot\overline{m_4}\cdot\overline{m_5}\cdot\overline{m_6}\cdot\overline{m_7}$$

$$=M_1\cdot M_4\cdot M_5\cdot M_6\cdot M_7$$

$$=\prod M^3(1,4,5,6,7)$$

回到刚才的例子：

阅读

行号	A B C	F(A，B，C)	最小项及代号	最大项及代号
0	000	F(0,0,0)=1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$	$A+B+C = M_0$
1	001	F(0,0,1)=0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$	$A+B+\overline{C} = M_1$
2	010	F(0,1,0)=0	$\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$	$A+\overline{B}+C = M_2$
3	011	F(0,1,1)=1	$\overline{A}\,B\,C = m_3$	$A+\overline{B}+\overline{C} = M_3$
4	100	F(1,0,0)=1	$A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$	$\overline{A}+B+C = M_4$
5	101	F(1,0,1)=0	$A\,\overline{B}\,C = m_5$	$\overline{A}+B+\overline{C} = M_5$
6	110	F(1,1,0)=1	$A\,B\,\overline{C} = m_6$	$\overline{A}+\overline{B}+C = M_6$
7	111	F(1,1,1)=1	$A\,B\,C = m_7$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} = M_7$

$$\begin{cases} F(A,B,C) = m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = \sum m^3(\,0,3,4,6,7\,) \\ F(A,B,C) = M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 = \prod M^3(\,1,2,5\,) \end{cases}$$

阅读 **回到刚才的例子：**

A B C	F(A，B，C)	$\overline{F}$	最小项及代号	最大项及代号
000	F(0,0,0)=1	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$	$A+B+C = M_0$
001	F(0,0,1)=0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$	$A+B+\overline{C} = M_1$
010	F(0,1,0)=0	1	$\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$	$A+\overline{B}+C = M_2$
011	F(0,1,1)=1	0	$\overline{A}\,B\,C = m_3$	$A+\overline{B}+\overline{C} = M_3$
100	F(1,0,0)=1	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$	$\overline{A}+B+C = M_4$
101	F(1,0,1)=0	1	$A\,\overline{B}\,C = m_5$	$\overline{A}+B+\overline{C} = M_5$
110	F(1,1,0)=1	0	$A\,B\,\overline{C} = m_6$	$\overline{A}+\overline{B}+C = M_6$
111	F(1,1,1)=1	0	$A\,B\,C = m_7$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C} = M_7$

$$F(A,B,C) = m_0 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 = \sum m^3(0,3,4,6,7)$$

$$\overline{F}(A,B,C) = \sum m^3(1,2,5) = \prod M^3(0,3,4,6,7)$$

$$F(A,B,C) = \overline{\overline{F}} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_5 = \prod M^3(1,2,5)$$

阅读

⑦逻辑函数表示法及其之间的关系：

一个逻辑命题的三种表示法：真值表
表达式
卡诺图

关系：

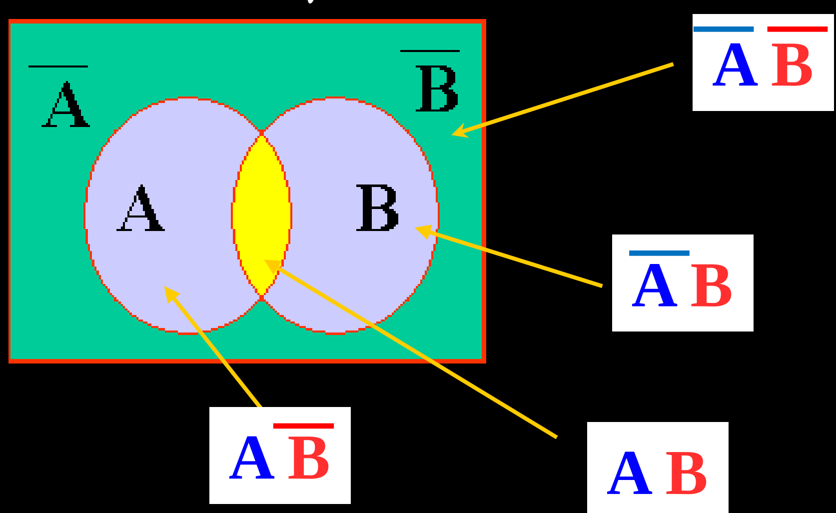
①真值表是逻辑函数最基本的表达方式，具有唯一性；

②由真值表可以导出逻辑表达式、两种标准形式和卡诺图。

3 卡诺图

卡诺图和文氏图(*Venn MAP*)一样，是逻辑函数**真值表的一种图形表示**，但在变量个数超过3个以上时，文氏图就不便表示了。而卡诺图原则上不受变量个数的限制。利用卡诺图可以有规律地化简逻辑函数表达式，并能直观地写出逻辑函数的最简式。

Venn图



二变量的卡诺图

0 $\overline{A}\,\overline{B}$	2 $A\overline{B}$
1 $\overline{A}B$	3 AB

① 卡诺图的构成：卡诺图是一种平面方格阵列图

下面给出了二、三、四、五、六变量的卡诺图。

单变量的卡诺图

0	1
0 $\overline{A}$	1 A

引入变量A，将区域分为两块

二变量的卡诺图

	0	1
0	0 $\overline{A}\,\overline{B}$	2 $A\overline{B}$
1	1 $\overline{A}B$	3 AB

再引入变量B，将区域分为四块

三变量的卡诺图

A

	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

C

B

再引入变量C，将区域分为八块，分别对应着

8 个最小项：

$m_0=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，$m_1=\bar{A}\bar{B}C$，$m_2=\bar{A}B\bar{C}$，$m_3=\bar{A}BC$，

$m_4=A\bar{B}\bar{C}$，$m_5=A\bar{B}C$，$m_6=AB\bar{C}$，$m_7=ABC$。

四变量的卡诺图

A

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

D

C

B

四变量(A、B、C、D)的卡诺图，分别对应着**16个最小项**：

$m_0 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, $m_1 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ $m_2 = \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$ $m_3 = \bar{A}\bar{B}CD$,

$m_4 = \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ $m_5 = \bar{A}B\bar{C}D$, $m_6 = \bar{A}BC\bar{D}$, $m_7 = \bar{A}BCD$,

$m_8 = A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, $m_9 = A\bar{B}\bar{C}D$, $m_{10} = A\bar{B}C\bar{D}$, $m_{11} = A\bar{B}CD$,

$m_{12} = AB\bar{C}\bar{D}$, $m_{13} = AB\bar{C}D$, $m_{14} = ABC\bar{D}$, $m_{15} = ABCD$

五变量的卡诺图：有32个最小项

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A B C D

- 当变量数超过四之后，为保证各相邻行（列）之间只有一个变量发生变化，可以采用“复制”的方法将n-1个变量的卡诺图扩展为n个变量的卡诺图。

DE \ ABC	000	001	011	010	100	101	111	110
00	0	4*	12	8	16	20*	28	24
01	1	5	13	9	17	21	29	25
11	3	7	15	11#	19	23	31	27#
10	2	6	14	10	18	22	30	26

A B B B D E

六变量的卡诺图:有64个最小项

ABCDEF

BCD / AEF			C		B		C	
	000	001	011	010	100	101	111	110
000	0	4	12	8	16	20	28	24
001	1	5	13*	9	17	21	29*	25
011	3	7	15	11	19	23	31	27
010	2	6	14	10	18	22	30	26
100	32	36	44	40	48	52	60	56
101	33	37	45*	41	49	53	61#	57
111	35	39	47	43	51	55	63	59
110	34	38	46	42	50	54	62	58

②卡诺图的构成特点：

(1) n 变量卡诺图有2^n个小方格(或称为单元)，它对应每个最小项。一个逻辑函数可以图示于卡诺图上。

例：$F = m_1 + m_2 + m_5 + m_7$，其真值表和卡诺图标注如下：

行号	ABC	F	m_i
0	0 0 0	0	m_0
1	0 0 1	1	m_1
2	0 1 0	1	m_2
3	0 1 1	0	m_3
4	1 0 0	0	m_4
5	1 0 1	1	m_5
6	1 1 0	0	m_6
7	1 1 1	1	m_7

C \ AB	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	2 1	6	4
1	1 1	3	7 1	5 1

卡诺图的构成特点：

(2) 整个卡诺图总是被每个变量逐次地分成两半：原变量，反变量各占一半。任一变量的原变量和反变量所占的区域又被其他变量分成两半。

A

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

D

C

B

卡诺图的行和列坐标按照变量组合的二进制格雷码顺序标注，其变量顺序遵从真值表中变量从左至右的顺序。而小方格左上角标注可用十进制数表示，该数对应最小项。

(3)在行和列上相邻的小方格，其名称仅有一个变量状态不同。思考：Gray码（模16、模10）在卡诺图上的表示。

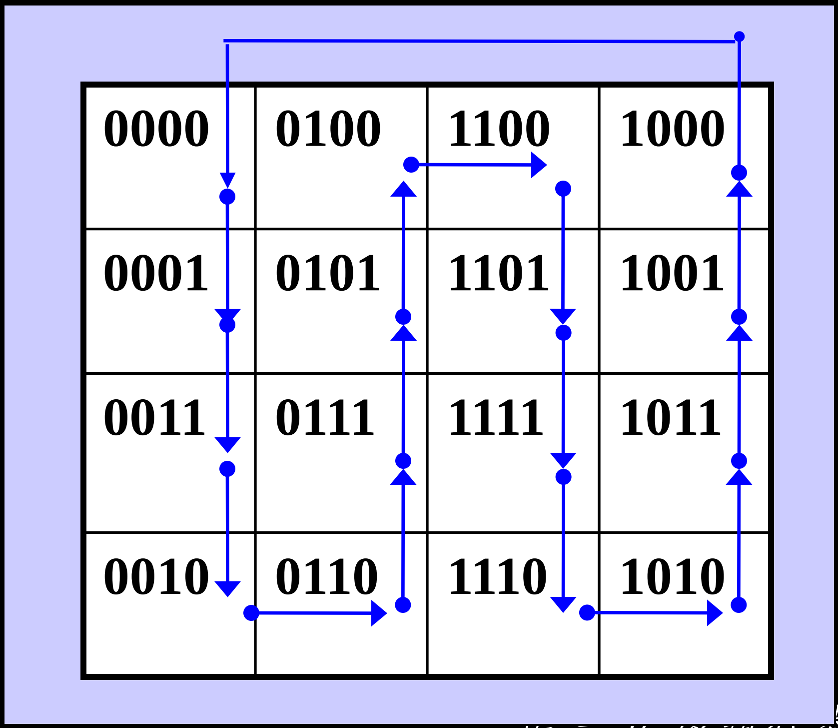
➢ 在卡诺图上的Gray码与Hamilton回路的关系

阅读

- **每一种**循环Gray码对应着**一条Hamilton回路**
- **n 位**二进制Gray码的编码可以在 **n 变量**的卡诺图上表示出来
- **模L**的循环Gray码在卡诺图上对应着的是那条**路径长度为L** 的Hamilton回路。

例1. 典型Gray码及其

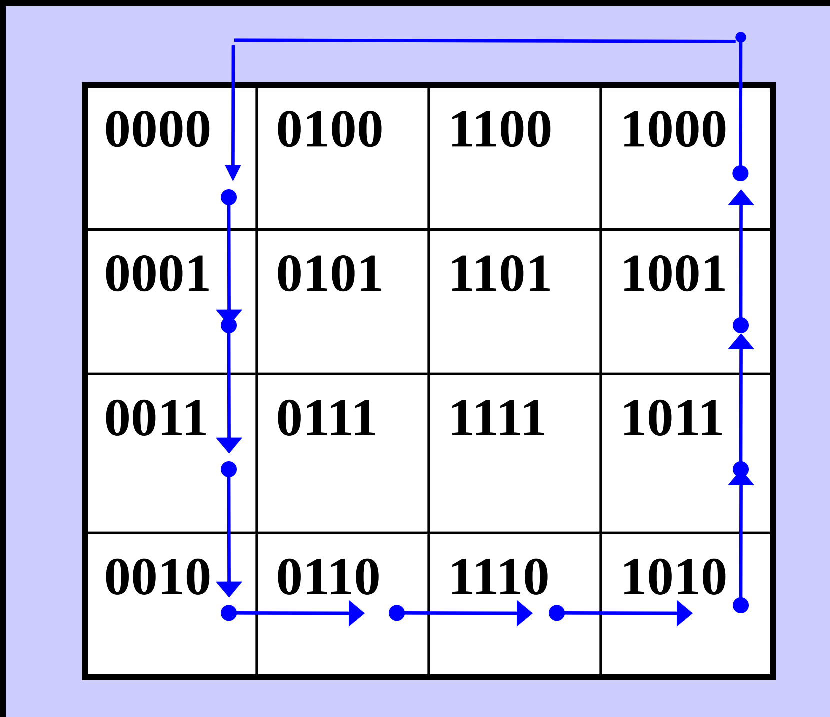
Hamilton回路

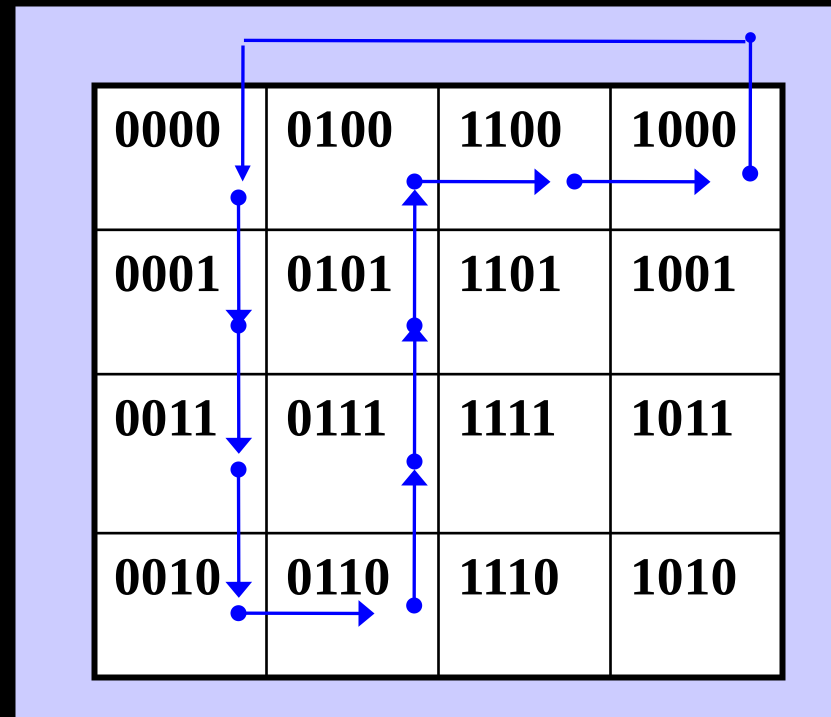


阅读例2. 另一个模16的Gray码编码及其Hamilton回路

0000	0100	1100	1000
0001	0101	1101	1001
0011	0111	1111	1011
0010	0110	1110	1010

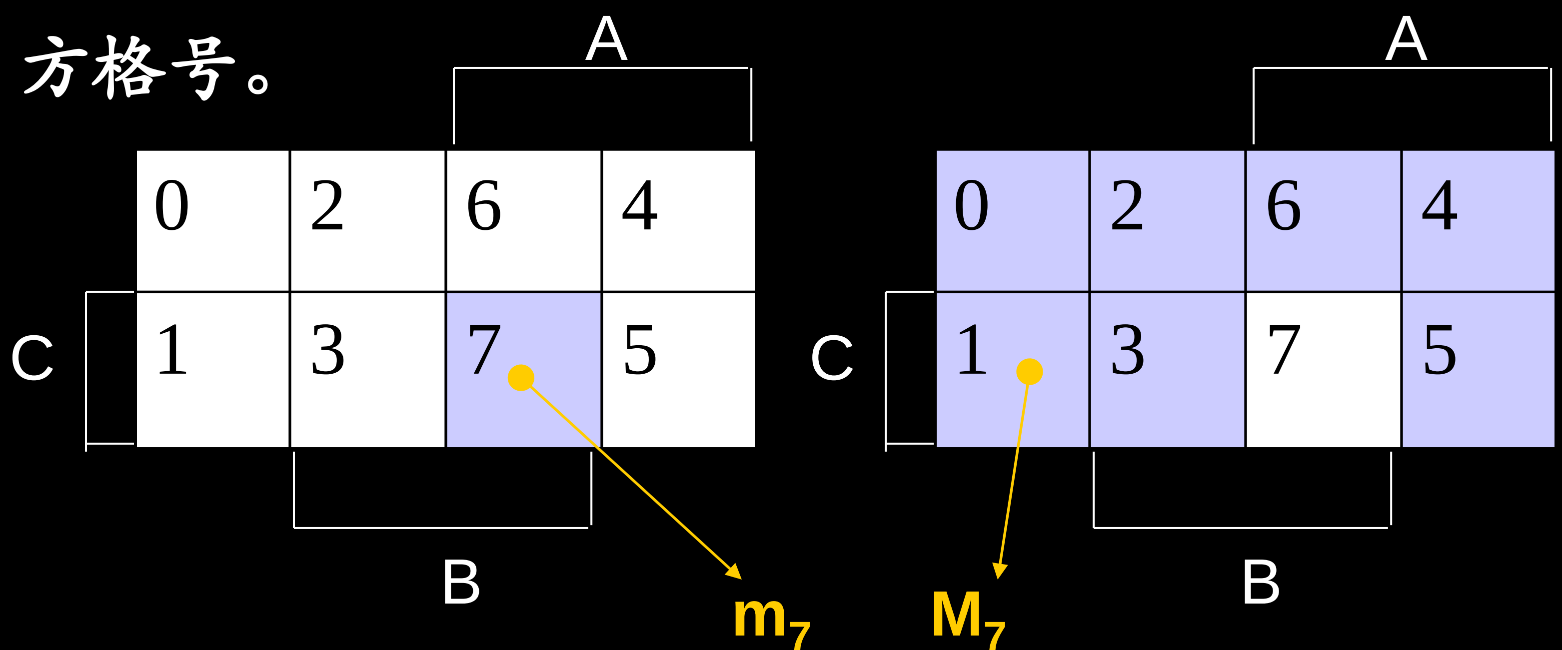
阅读 例3. 两个模10的Gray码编码及其Hamilton回路





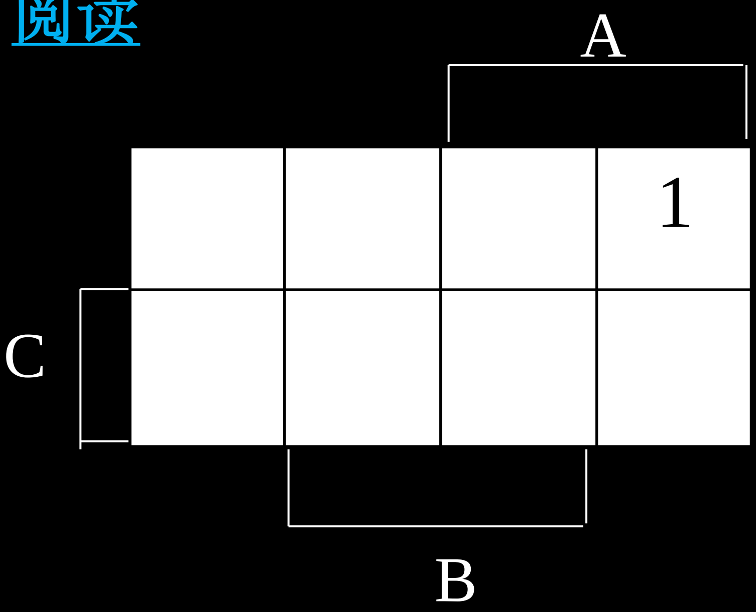
卡诺图的构成特点：

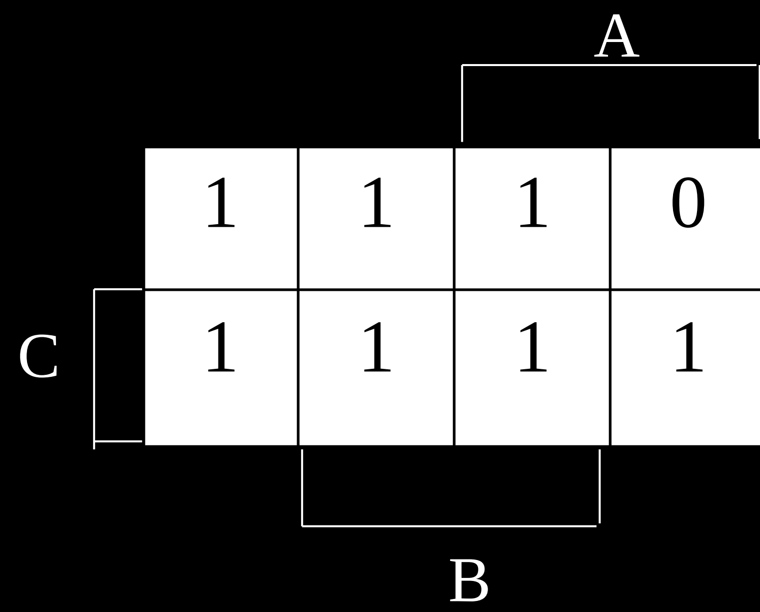
(4) 除掉某个小方格(即最小项)以外的整个卡诺图区域对应一个最大项，最大项下标值就是应被除去的小方格号。



上述卡诺图构成的特点及最小项与最大项在卡诺图上的表示，可以进一步说明逻辑运算的几何含义：

阅读





$F_1 = m_4 = A\overline{B}\,\overline{C}$

仅小格4上为1，由“1”格合成的面积最小，称为“最小项”。

$F_2 = M_4 = \overline{A} + B + C = \overline{m_4} = \sum m(0,1,2,3,5,6,7)$

除小格4上为0外，其他所有小格都是1，由“1”格合成的面积最大，称为“最大项”。

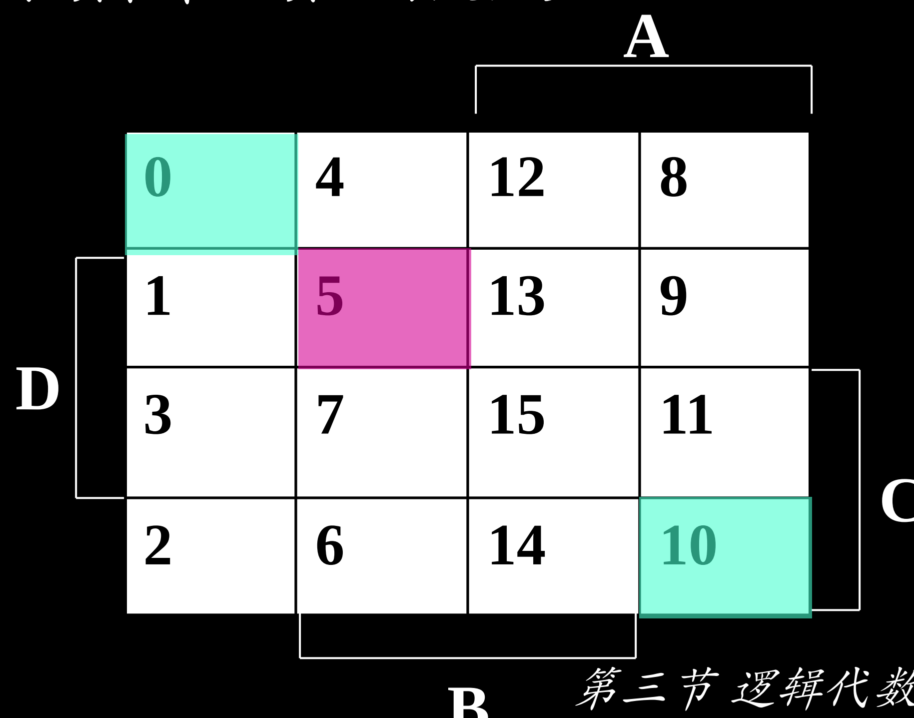
上述卡诺图构成的特点及最小项与最大项在卡诺图上的表示，可以进一步说明逻辑运算的几何含义：

③逻辑函数的逻辑运算在卡诺图上的几何含义:

- 两个函数相“**与**”，表示两个函数在卡诺图上所占两个区域的**公共区域**;
- 两个逻辑函数相“**或**”，表示两个函数所**覆盖的全部区域**;
- 一个逻辑函数的“**非**”，就是求该函数**覆盖之外的区域**。

思考题：用卡诺图解释最小项和最大项的性质(教材P25)

- n变量所有最小项之和必为1;
- n变量所有最大项之积必为0;
- 任意两个最小项之积必为0;
- 任意两个最大项之和必为1;
- 同变量数下标相同的最小项和最大项互为反函数。



④ 逻辑函数在卡诺图上的表示

- 把给定的逻辑函数化为**最小项标准式**
- 按变量数画出相应**卡诺图**
- 在最小项标准式中出现的最小项对应的小方格内**标以“1”**
- 所有标有“1”的小方格的**合成区域**就表示该函数。

例1：$F_1 = A\overline{C} + ABC + \overline{B}C$

将函数化为标准式，即：

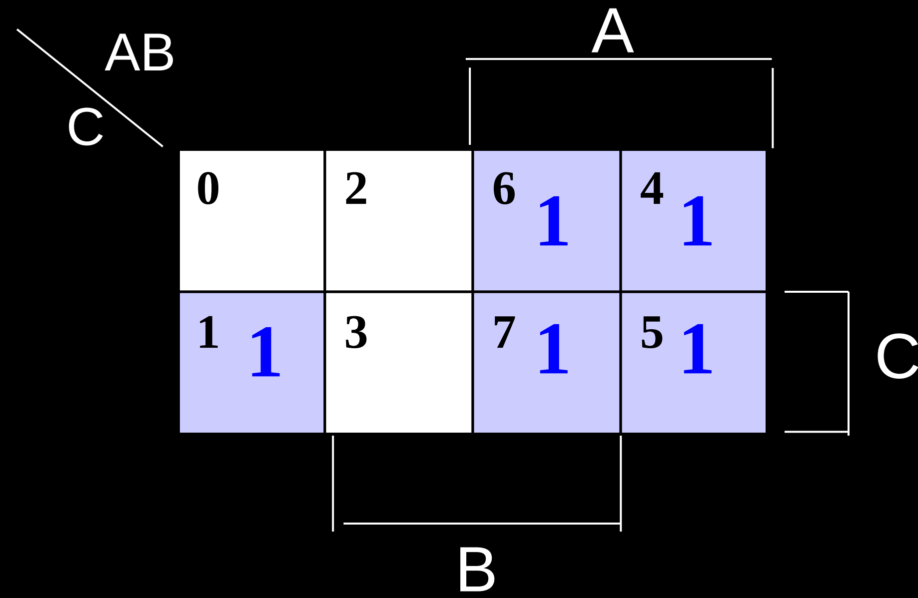
$$F_1 = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

$$= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

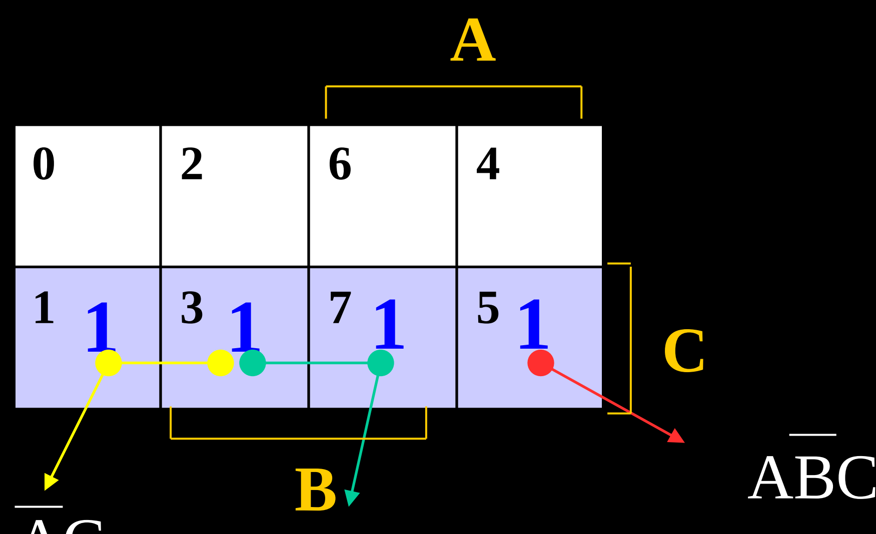
$$= \sum m^3 (1,4,5,6,7)$$

F_1的卡诺图见下页。

$F_1=\sum m^3\,(1,4,5,6,7)$
的卡诺图表示



例2：给出的是一般与或式 $F_2 = A\overline{B}C + \overline{A}C + BC$
直接按与、或的几何含义将函数标注到卡诺图上。



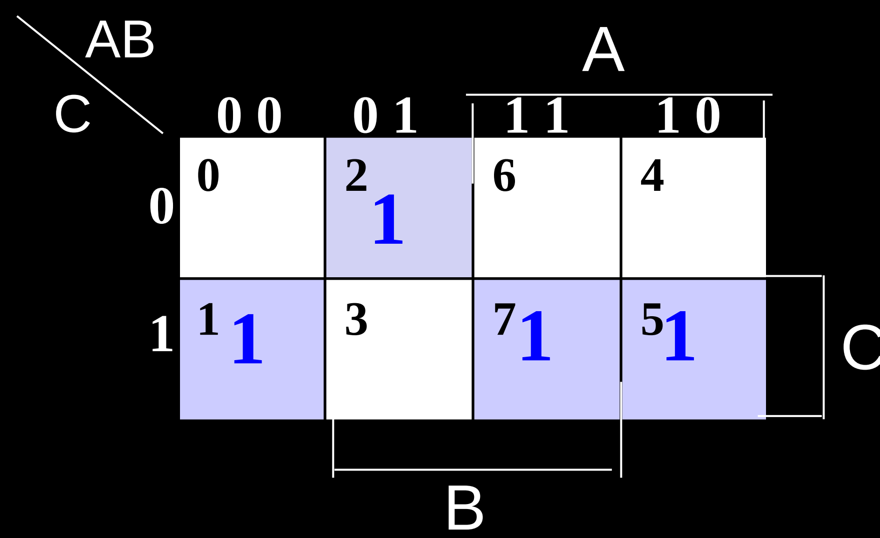
例3：直接给出真值表，则$F_3 = m_1 + m_2 + m_5 + m_7$

行号	ABC	F	m_i
0	0 0 0	0	m_0
1	0 0 1	1	m_1
2	0 1 0	1	m_2
3	0 1 1	0	m_3
4	1 0 0	0	m_4
5	1 0 1	1	m_5
6	1 1 0	0	m_6
7	1 1 1	1	m_7

ABC在001、010、101、111中的任一取值，使对应m_i=1，（i=1、2、5、7），而使其他m_j=0，从而有F=1+0+0+0=1。

ABC的其他4个取值使对应m_i=1，而使其他m_j=0，从而使F=0+0+0+0=0。

因此$F = m_1 + m_2 + m_5 + m_7$



F_3

例4：函数是或与表达式 $F_4 = (A + \overline{B})(\overline{C} + B)(\overline{A} + B)$ 标注在卡诺图内。

先求出反函数的与或式，直接按与、或的共同区域将函数标注到卡诺图上，此时小方格应标注“0”，其余的标“1”，则标“1”小方格的集合就是原函数。

AB \ C			A	A
	0 1	2 0	6 1	4 0
C	1 0	3 0	7 1	5 0
		B	B	

则 $\overline{F_4} = \overline{A}B + C\overline{B} + A\overline{B}$

反函数在卡诺图上标0。

思考：1.上例直接用或与式几何含义标注在卡诺图上。

2.特殊函数(如同或和异或运算)在图上的表示。

同或运算和异或运算在卡诺图上的表示

阅读

异或运算

$A \oplus B$

$0 \oplus 0 = 0$

	1
1	

$A \oplus B \oplus C$

$0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

	1		1
1		1	

$A \oplus B \oplus C \oplus D$

$0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

	1		1
1		1	
	1		1
1		1	

同或运算

$A \odot B$

$1 \odot 1 = 1$

1	
	1

$A \odot B \odot C$

$1 \odot 1 \odot 1 = 1$

	1		1
1		1	

$A \odot B \odot C \odot D$

$1 \odot 1 \odot 1 \odot 1 = 1$

1		1	
	1		1
1		1	
	1		1

1.3.4 逻辑函数的化简

一个逻辑函数对应着一个实现其逻辑功能的逻辑电路，当使该函数最简意味着使这个电路也最简。

- **最简逻辑电路：**

  门数最少；门的输入端最少；门的级数最少。

- **最简与或式：**

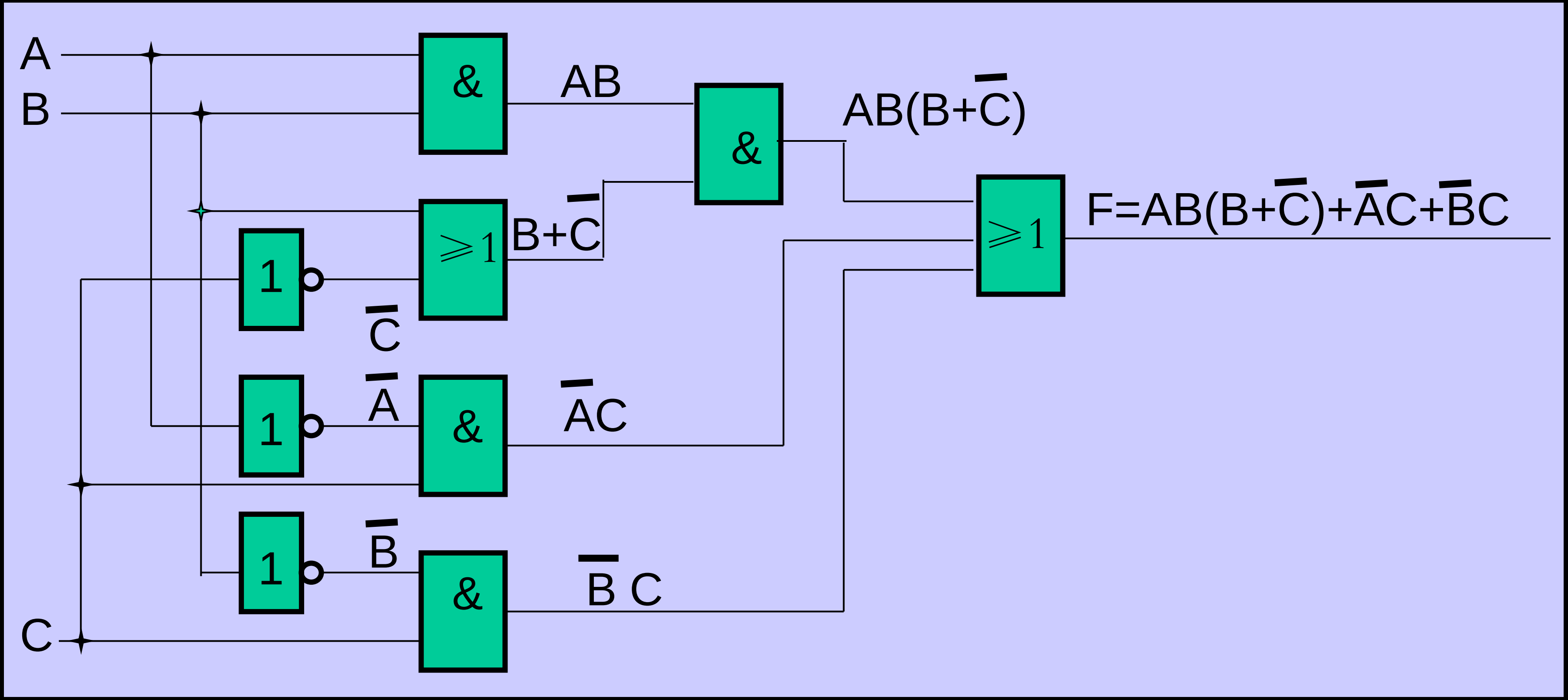
  与项的数目最少；每个与项的变量个数最少。

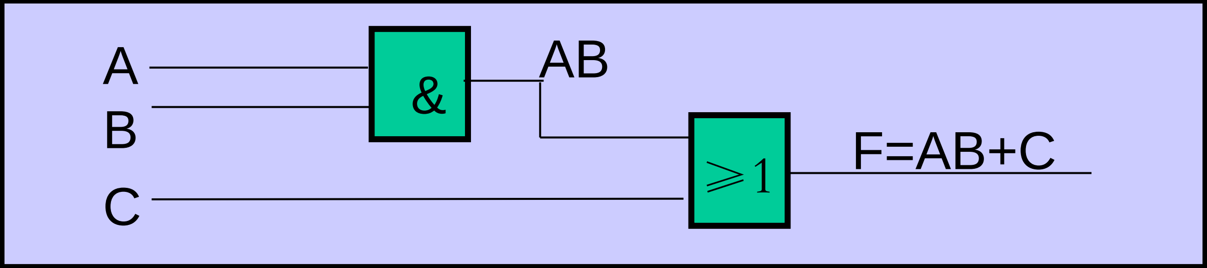
- **最简或与式：**

  或项的数目最少；每个或项的变量个数最少。

例： $F = AB(B+\overline{C}) + \overline{A}C + \overline{B}C = AB + C$

对应两种逻辑电路图，如下





1. 代数化简法：

代数法化简就是运用代入规则、吸收定理及多余项定理，把某一个子函数看成一个变量，进而应用公式简化，在这一过程中经常需要变换子函数的形式，以便能够应用公式进行简化，最终将函数化简为最简与或式 (*minimizing SOP*) ，常用的方法为常规法。

1) 化简为与或式　(1)没有无关项的化简

与或式化简常用的公式主要有四个：

$$A+\overline{A}=1 \qquad A+\overline{A}\cdot B=A+B$$

$$AB+A\overline{B}=A \qquad AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

练习 ➢ 吸收法

① 利用公式：$A+AB=A$ 消去多余变量。例：

$$F = AB+AB\cdot(C+D)\cdot E$$

$$= AB$$

② 利用公式：$A+\overline{A}B=A+B$ 消去反变量。例：

$$F = AB+\overline{A}C+\overline{B}C$$

$$= AB+(\overline{A}+\overline{B})C$$

$$= AB+\overline{AB}\,C$$

$$= AB+C$$

练习 ➢ 合并项法

利用公式： $AB + A\overline{B} = A$ ，两项合并为一项且消去一个变量。例：

$$F = \sum m^4(5,7,13,15)$$

$$= \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + AB\overline{C}D + ABCD$$

$$= \overline{A}BD + ABD$$

$$= BD$$

练习 ➢ 消去法

利用公式： $AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$ 消去多余项。

例： $F = AC + ADE + \overline{C}D$

$$= AC + \overline{C}D + AD + ADE$$

$$= AC + \overline{C}D$$

➢ 配项法

练习

当无法发现直接应用公式时，可先增加一些与项，再利用增加项消除多余项，即“先繁后简”。

① 利用公式：$1 = A + \overline{A}$ 增加项数。例：

$$F = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C(A+\overline{A}) + \overline{A}B(C+\overline{C})$$

$$= A\overline{B} + B\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC$$

$$= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C$$

思考：分析对前两项增加与项，得到的结果（$F = \overline{A}B + \overline{B}C + A\overline{C}$）与上式等价。

练习 ② 利用公式： $AB+\overline{A}C = AB+\overline{A}C+BC$ 增加项数。

例：

$$F = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$

$$= \boxed{A\overline{B}} + B\overline{C} + \boxed{\overline{B}C} + \overline{A}B + \boxed{\overline{A}C}$$

$$= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C$$

练习➤ 综合法

在一个函数的化简中同时用几种方法。例：

$$F = AB + A\bar{C} + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F + G)$$

$$= A(B + \bar{C}) + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F + G)$$

$$= A \cdot \overline{\bar{B}C} + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F + G)$$

$$= A + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B + ADE(F + G)$$

$$= A + \bar{B}C + \bar{C}B + \bar{B}D + \bar{D}B$$

$$= A + \bar{B}C + \bar{C}B + \cancel{\bar{B}D} + \bar{D}B + \bar{C}D$$

$$= A + \bar{B}C + \cancel{\bar{C}B} + \bar{D}B + \bar{C}D$$

$$= A + \bar{B}C + \bar{D}B + \bar{C}D$$

(2)含有无关项的化简

例如：一位BCD码输入的求偶电路。

分析：① 当输入为偶数时，输出 F 为1，否则输出 F 为0。

② 假设其输入为 $A_8 A_4 A_2 A_1$，在正常情况下，输出表达式可以写为：$F(A_8 A_4 A_2 A_1) = \sum m(0,2,4,6,8)$

③ 函数的最简与或式 $F = \overline{A_8}\,\overline{A_1} + \overline{A_4}\,\overline{A_2}\,\overline{A_1}$

由于最小项 $m_{10} \sim m_{15}$ 永远也不会出现，用"d"表示输入组合的无关项（约束项），这些最小项既可表示1也可表示0：

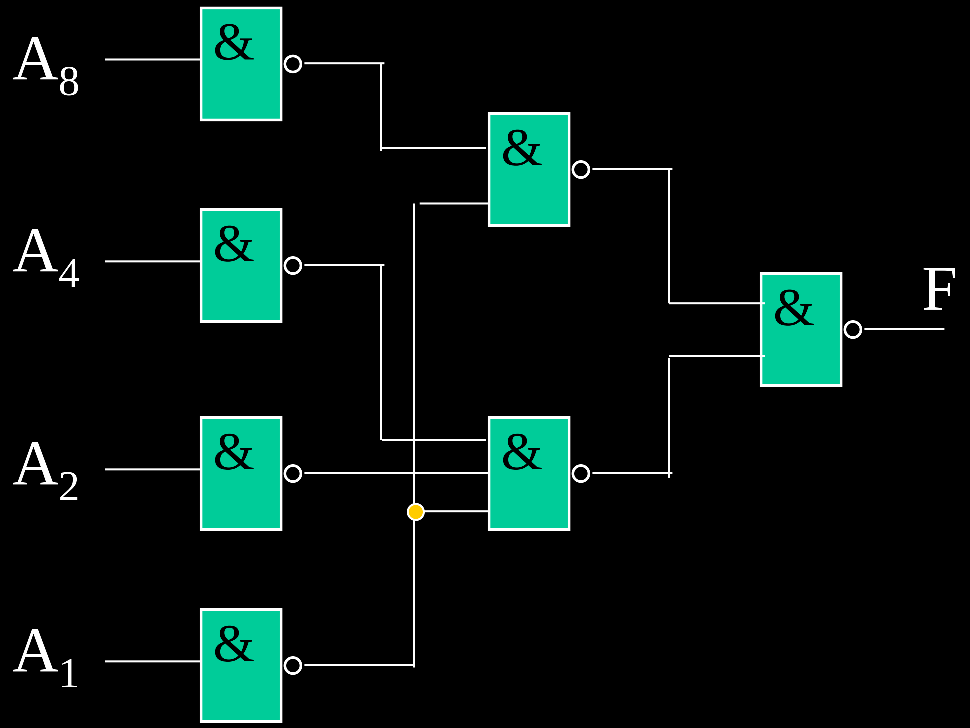
$$F(A_8 A_4 A_2 A_1) = \sum m(0,2,4,6,8) + \sum d(10,11,12,13,14,15)$$

则最简与或式 $F = \overline{A_1}$。

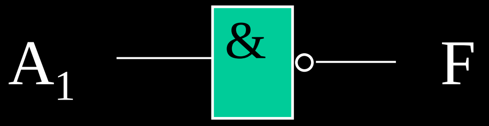
阅读

无关最小项的未使用和使用的电路比较:

$$F = \overline{A_8}\,\overline{A_1} + \overline{A_4}\,\overline{A_2}\,\overline{A_1}$$



$$F = \overline{A_1}$$



例：一个BCD码输入质数检测器。

阅读

假设输入为$N_3 N_2 N_1 N_0$，输出表达式可以写为：

$F = \sum m^4 (2,3,5,7) + \sum d^4 (10,11,12,13,14,15)$

这里d(…)项列出的即为无关项。

由于最小项m_{10}～m_{15}永远也不会出现，用“d”表示输入组合的无关项（约束项)，这些最小项既可表示1也可表示0：

$$F(N_3, N_2, N_1, N_0) = \sum m^4 (2,3,5,7) + \sum d^4 (10,11,12,13,14,15)$$

BCD码质数检测器的最简与或式 $F = \overline{N_2}N_1 + N_2N_0$

无关项(*don't care terms*) 也称任意项、约束项，构成的函数为不完全给定函数(*Incompletely Specified functions*)

定义：当函数输出与某些输入组合无关时，这些输入的组合称为无关项。

产生原因：

①这些输入组合在正常操作中不会出现（即输入具有约束条件）— 约束项；

②即使这些输入可能出现（即输入不具有约束条件），但实际上输出与它们无关 — 任意项。

作用：当输入出现这些无关组合 **d** 时，**d** 可以随意加入或不加入其对应的函数 F 中（既可使 F 为 1，也可使F 为 0），并不影响 F 原有的逻辑功能，但为函数 F 的化简提供了帮助。

例如：电动机的正转、反转和停转电路。

① 用三个逻辑变量A、B、C分别表示一台电动机的正转、反转和停止。A=1表示正转，B=1表示反转，C=1表示停止。

②因此表示正转、反转和停止的的逻辑函数为

$F_1=A\overline{B}\,\overline{C}$（正转） $F_2=\overline{A}B\overline{C}$（反转） $F_3=\overline{A}\,\overline{B}C$（停止）

表示正常工作的函数为 $F(ABC) = \sum m(1,2,4)+ \sum d(0,3,5,6,7)$(约束项)

③若电路设计成当ABC三个控制变量出现两个以上同时为1或全部为0时电路能自动切断供电电源，那么这时F_1、F_2和F_3是等于1还是等于0已无关紧要，电动机肯定会受到保护而停止运行。

表示正常工作的函数为

$F_1=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$

$F_2=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$

$F_3=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$ (任意项)

切断电源信号$G(A,B,C)=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$

练习

例1：用二进制数表示的十进制数码

最小项m_i	8421码	2421码	余3码
m_0	0000 0	0000 0	d
m_1	0001 1	0001 1	d
m_2	0010 2	0010 2	d
m_3	0011 3	0011 3	0011 0
m_4	0100 4	0100 4	0100 1
m_5	0101 5	d	0101 2
m_6	0110 6	d	0110 3
m_7	0111 7	d	0111 4
m_8	1000 8	d	1000 5
m_9	1001 9	d	1001 6
m_{10}	d	d	1010 7
m_{11}	d	1011 5	1011 8
m_{12}	d	1100 6	1100 9
m_{13}	d	1101 7	d
m_{14}	d	1110 8	d
m_{15}	d	1111 9	d

思考题：请列出一个十进制Gray码和步进码及其无关项。

2) 化简为或与式

* 常规法化简方式类似于与或式的化简，化简中常用的公式主要有：

$$(A+B)(A+\overline{B})=A$$

$$A(A+B)=A$$

$$A(\overline{A}+B)=AB$$

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$$

例： $F=A(A+B)(\overline{A}+D)(\overline{B}+D)(A+C+E+H)$

$$=A(\overline{A}+D)(\overline{B}+D)$$

$$=AD(\overline{B}+D)$$

$$=AD$$

＊ 利用最简与或式得到最简或与式

① 二次求反法

利用反演规则，先求出F的反函数 $\overline{F}$，再将反函数 $\overline{F}$ 化简为**最简与或式**，最后再求一次反 $\overline{\overline{F}} = F$，则得到F 最简或与式。例：

$$F = AB + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + B\overline{D}$$

$$\overline{F} = (\overline{A} + \overline{B})(A + B)(A + C)(\overline{B} + D)$$

$$= (\overline{A}B + A\overline{B})(A + C)(\overline{B} + D)$$

$$= (A\overline{B} + \overline{A}BC + A\overline{B}C)(\overline{B} + D)$$

$$= (A\overline{B} + \overline{A}BC)(\overline{B} + D)$$

$$= A\overline{B} + \overline{A}BCD$$

则 $F = \overline{\overline{F}} = (\overline{A} + B)(A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$

② 二次对偶法

利用对偶规则，先求出F的对偶式F’，再将对偶式F’化简为最简与或式，最后再求一次对偶(F’)’ = F，则得到 F 最简或与式。例：

$$F = (A + B)(A + \overline{B})(B + C)(\overline{C} + D)(B + D)$$

$$F' = AB + A\overline{B} + BC + \overline{C}D + BD$$

$$= A + BC + \overline{C}D + BD$$

$$= A + BC + \overline{C}D$$

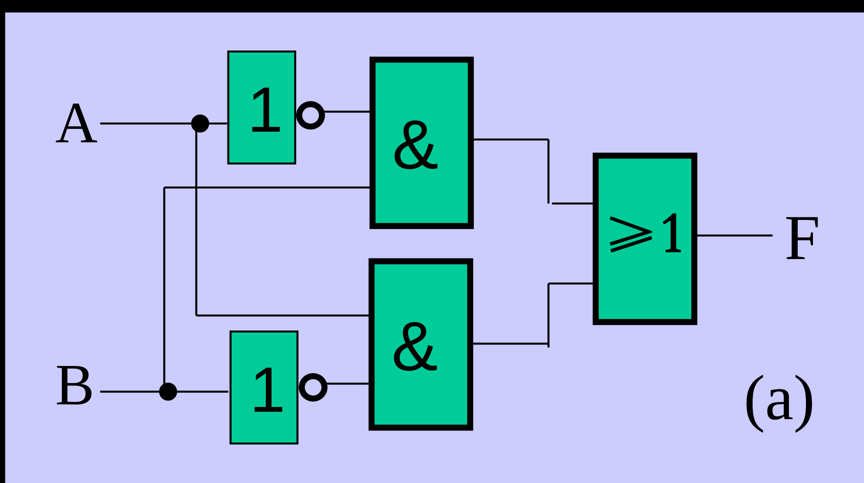
则 $F = (F')' = A(B + C)(\overline{C} + D)$

3)化简为与非式

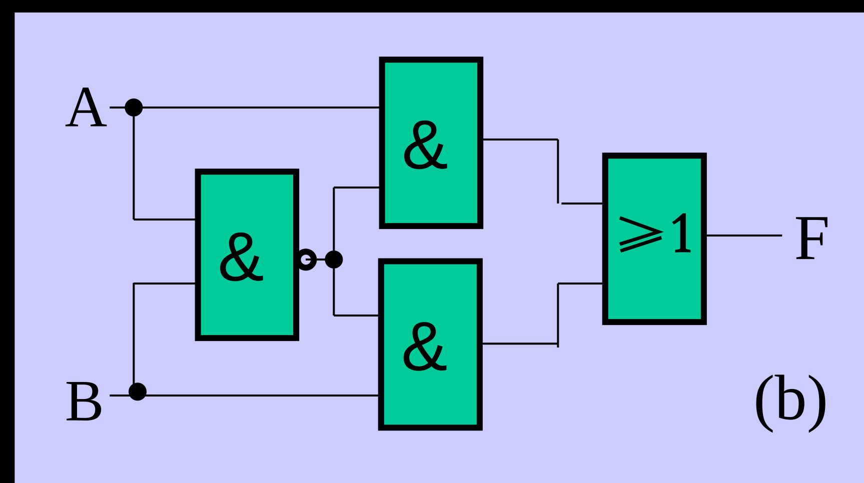
当反变量较多时，如果每个反变量都加个**非门**太不经济，考虑能否共享非门，即寻找**把多个单输入非门合并成一个多输入与非门**的方法可以减少非门的个数。

例： $F = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B = A\,\overline{AB} + B\,\overline{AB}$

下图是两式对应的电路，后者可减少一个非门。



(a) F= A⊕B 不共享非门



(b) F= A⊕B 共享非门

- 对于与或式，共享的门是与非门。
- 化简的出发点是函数已经为最简与或式；
- 化简的主要方法是替代尾因子法

定义：每个与项中原变量部分称为头因子，反变量部分称为尾因子。

特点：把头因子中的任何变量放入任一个尾因子中，该与项不变，即头因子是不变的，尾因子是可变的 。

例1：用摩根定律证明: $F = AB\overline{C}\,\overline{DE} = AB\,\overline{AC}\,\overline{DE} = AB\,\overline{BC}\,\overline{DE}$

$= AB\,\overline{ABC}\,\overline{DE} = AB\,\overline{ABC}\,\overline{ADE} = AB\,\overline{ABC}\,\overline{ABDE}$

例2 化简步骤为：

① 把最简式中具有相同头因子的与项合并成一个与项。

$$F = A\overline{B}\,\overline{C} + BC\overline{D} + A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}CD + \overline{A}BC + \overline{A}CD$$

$$= A(\overline{B}\,\overline{C} + \overline{C}\,\overline{D}) + BC(\overline{A} + \overline{D}) + CD(\overline{A} + \overline{B})$$

$$= A\overline{C}\,\overline{BD} + BC\,\overline{AD} + CD\,\overline{AB}$$

② 列出最简与或式中所有与项的头因子、尾因子及替代尾因子。

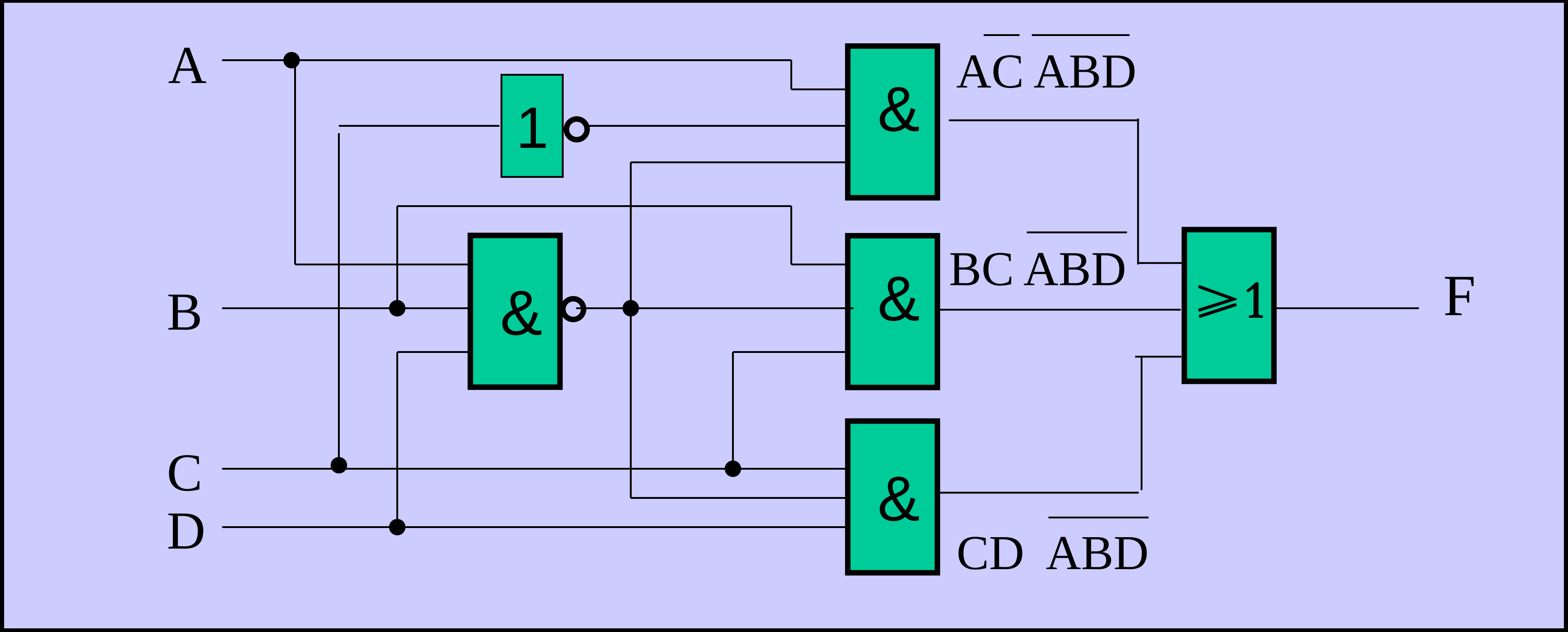
与项	头因子	尾因子	替代尾因子
$A\overline{C}\,\overline{BD}$	A	$\overline{C}$	$\overline{C}$，$\overline{AC}$
		$\overline{BD}$	$\overline{BD}$，$\overline{ABD}$
$BC\,\overline{AD}$	BC	$\overline{AD}$	$\overline{AD}$，$\overline{ABD}$，$\overline{ACD}$，$\overline{ABCD}$
$CD\,\overline{AB}$	CD	$\overline{AB}$	$\overline{AB}$，$\overline{ABC}$，$\overline{ABD}$，$\overline{ABCD}$

③选择共享的替代尾因子，选择的原则如下：

- 替代尾因子共享数尽可能多。
- 在共享数相等时选择最简单的一个。

因此：$F = A\overline{C}\,\overline{ABD} + BC\,\overline{ABD} + CD\,\overline{ABD}$

该电路图如下。



阅读练习

➢ 输入无反变量的或与式函数的化简

根据对偶规则：

F —— 给出**或与式**函数

F'—— 得到**与或式**函数，寻求**共享的与非项**

F = (F') '——得到或与式原函数，含有**共享的或非项**。

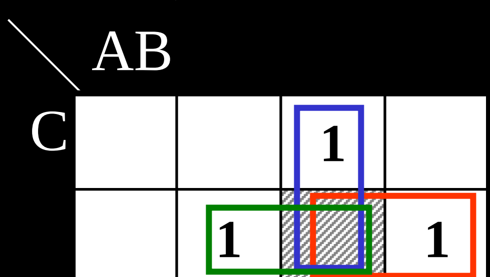
例 $F = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$

$$F' = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$$

$$= AB\,\overline{ABC} + BC\,\overline{ABC} + AC\,\overline{ABC}$$

$F = (F')'$

$$= (A+B+\overline{A+B+C})\,(A+C+\overline{A+B+C})\,(B+C+\overline{A+B+C})$$



电路由**五个或非门**实现。

2. 用卡诺图化简逻辑函数的基本原理

➢ "相邻"的判断

(1) 相邻最小项：任意两个最小项中只有一个变量不同（同一变量名但一个为原变量，另一个为反变量），其余变量完全相同，在图上反映的是两个相邻的小方格。

(2) 卡诺图相邻小方格：是指只隔一条边界的两个小方格。

在 n 变量的卡诺图上，每个小方格具有n个相邻的小方格，它们是：

- 具有共同边界的小方格(几何相邻)
- 同一幅卡诺图中分别处于行(或列)两端的小方格(相对相邻)
- 在相邻两幅卡诺图中，处于相同位置的两个小方格(相重相邻)

n 变量卡诺图的每一个小方格都有 n 个相邻块，

以m_0为例说明如下：

0	1

n=1

0	2
1	3

n=2

0	2	6	4
1	3	7	5

n=3

0	4	12	8
1	5	13	9
3	7	15	11
2	6	14	10

n=4

0	4	12	8	16	20	28	24
1	5	13	9	17	21	29	25
3	7	15	11	19	23	31	27
2	6	14	10	18	22	30	26

n=5

以m_0为例说明如下：

AEF \ BCD	000	001	011	010	100	101	111	110
000	0	4	12	8	16	20	28	24
001	1	5	13	9	17	21	29	25
011	3	7	15	11	19	23	31	27
010	2	6	14	10	18	22	30	26
100	32	36	44	40	48	52	60	56
101	33	37	45	41	49	53	61	57
111	35	39	47	43	51	55	63	59
110	34	38	46	42	50	54	62	58

$n=6$

在真值表上，不易直观地理解最小项的相邻关系，而在卡诺图上则相邻关系一目了然。

➢ 画卡诺圈的规则

- 寻找相邻块的目的是为了在图上进行函数化简。
- 任何2^i个（$i \le n$）标1的相邻小方格均可画在一个卡诺圈内；这里的i称为维数。
- 任何2^i个标1的非相邻的小方格不能画入一个卡诺圈内，它们至少画在两个圈内。
- 标1/标0的相邻同维块可画在一个卡诺圈内；
- 标1/标0的非相邻同维块不能画入一个卡诺圈内，它们至少画在两个圈内。

维块：一个与项，由2^i个（$i \le n$）标1的小方格组成。有0维块、1维块、…等。

例：五变量的卡诺图

ABC

DE

0 1	4	12 1	8 1
1	5	13 1	9 1
3	7 1	15	11
2 1	6	14	10 1

16 1	20	28	24
17	21	29 1	25 1
19	23	31	27
18	22 1	30 1	26

① 0维块：$m_7=\overline{A}\,\overline{B}CDE$，是五变量的与项。

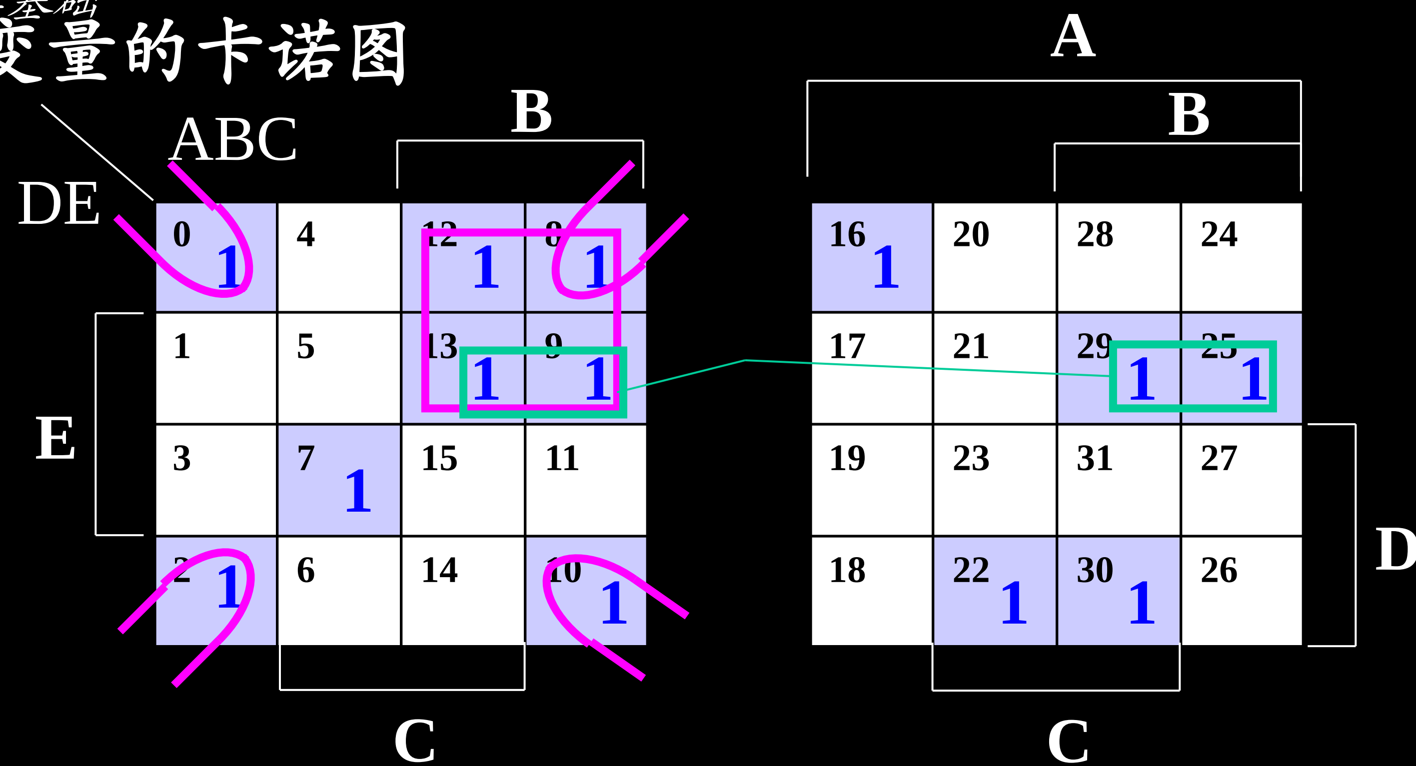
② 1维块：由两个相邻的 0 维块构成的一个卡诺圈，

$$m_0+m_{16}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}=\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$$

$$m_{22}+m_{30}=A\overline{B}CD\overline{E}+ABCD\overline{E}=ACD\overline{E}$$

是四变量的与项。

例：五变量的卡诺图



③2维块：由四个相邻的0维块构成的一个卡诺圈，

$m_8+m_9+m_{12}+m_{13}=\bar{A}\,B\,\bar{D}$

$m_0+m_2+m_8+m_{10}=\bar{A}\,\bar{C}\,\bar{E}$

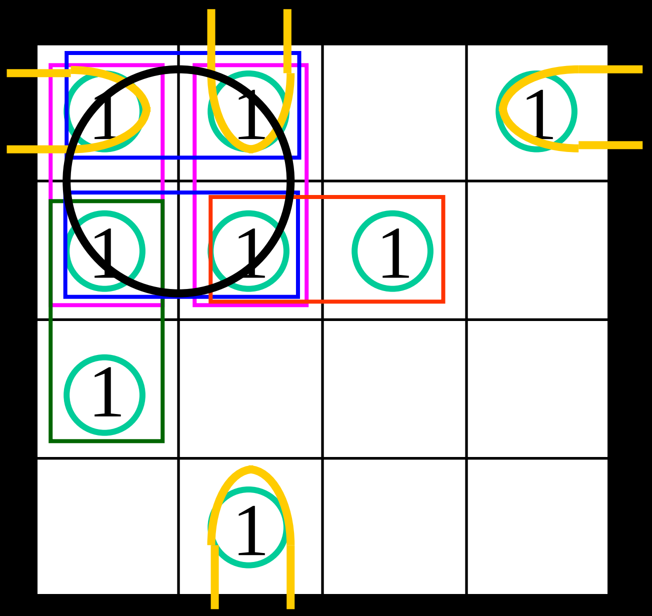
$m_9+m_{13}+m_{25}+m_{29}=B\,\bar{D}\,E$ 是三变量的与项。

对 n 变量而言，2^i个$(i\le n)$标1的相邻小方格所构成的一个卡诺圈表示一个(n-i)变量的与项，即：使 2^i 个相邻的最小项被化简为一个(n-i)变量的与项。

➢ 用卡诺圈化简是有其特点和规律的。

①蕴涵项 (*Implicant*):

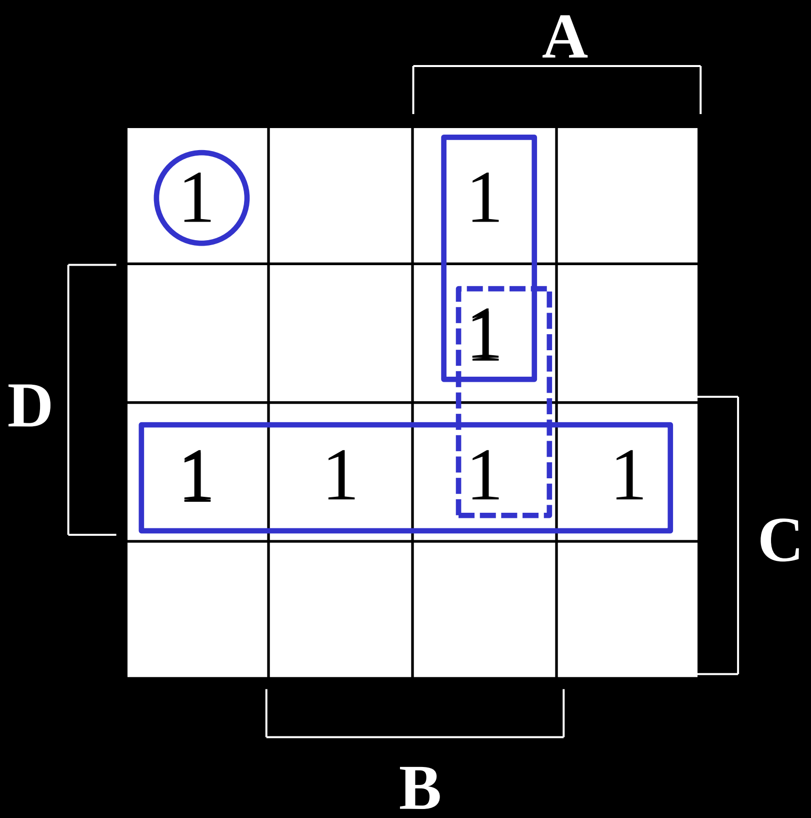
- 在函数的与或表达式中，每一个与项称为该函数的蕴涵项，它对应着卡诺图中的一个卡诺圈。
  - 卡诺圈越大，它所包含的相邻标1小方格越多，则对应此蕴涵项的变量数就越少。
  - 卡诺圈既包含某变量的原变量区域，又包括它的反变量区域，则这个变量就不出现在此圈所对应的蕴涵项中。
- 最小项都是蕴涵项。
- 逻辑函数F的任何与或式一定是若干蕴涵项的或。应选择足够多的蕴涵项，使得F中的每个1至少被包含在其中一个蕴涵项中。这样的与或式称为F的一个覆盖。



②质蕴涵 (*Prime implicant*):

若蕴涵项不是其他蕴涵项的子集，则称为质蕴涵，又称为素项，在卡诺图中称为极大圈。

也就是说，质蕴涵项是不完全包含在任何其他蕴涵项中的蕴涵项。



F 的蕴涵项有：

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$、$AB\overline{C}$、$ABD$、$CD$、$\overline{A}CD$、$ACD$、$BCD$、$\overline{B}CD$及 m_3、m_7、m_{11}、m_{12}、m_{13}、m_{15}。

F 的质蕴涵项是：

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$、$AB\overline{C}$、$ABD$和$CD$

③实质最小项：

只被一个质蕴涵所覆盖的最小项称为实质最小项。

④必要质蕴涵(*Essential prime implicant*)：必要极大圈

包含实质最小项的质蕴涵即为必要质蕴涵；

是至少有一个1不包含在任何其他质蕴涵项中的一个质蕴涵项。

如果要圈出一个函数的全部质蕴涵项，必要质蕴涵至少圈了一个不被其他质蕴涵项圈了的1.

1		1	
		1	
1	1	1	1

F 的必要质蕴涵项是：

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$、$AB\overline{C}$、$CD$

⑤卡诺图上的最小覆盖：

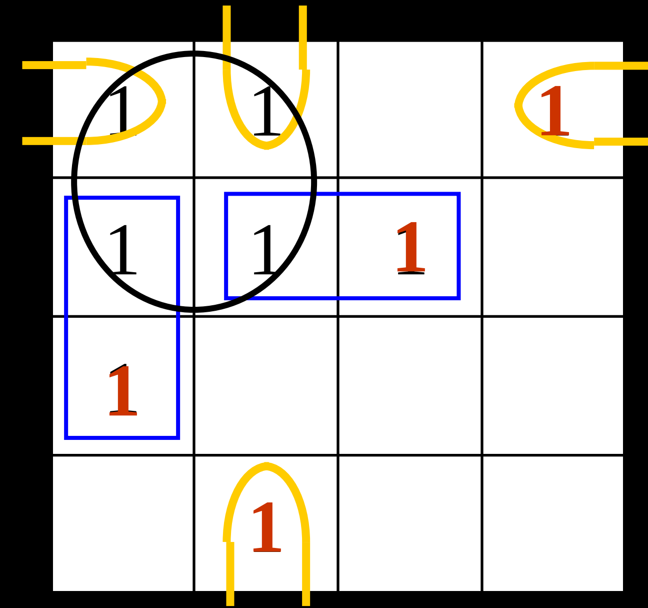
用卡诺圈化简是有其特点和规律的：

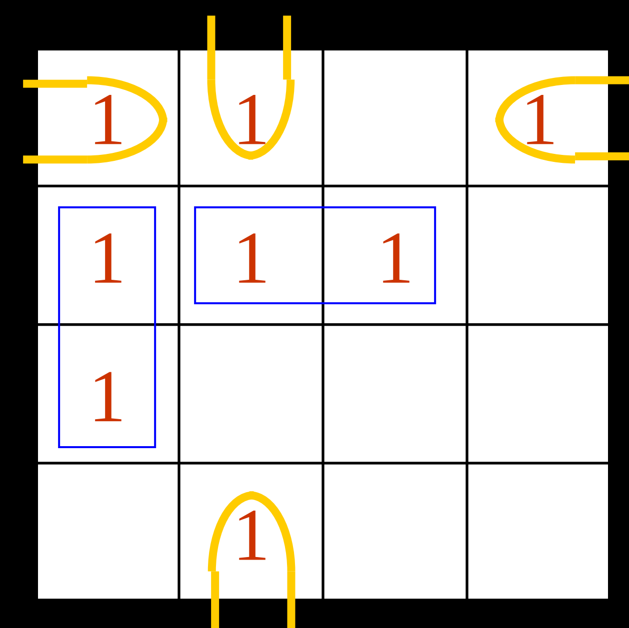
挑选数目最少的质蕴涵（极大圈），它们覆盖了图上全部标1的小方格，这就是最小覆盖。

最小覆盖所对应的逻辑表达式就是最简的表达式。

如图：函数的最简的表达式

$$F(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}D + B\bar{C}D + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{D}$$





➢ 用卡诺图法化简逻辑函数的基本步骤

(1) 将逻辑函数表示在卡诺图上;

(2) 根据实质最小项确定所有的必要极大圈（必要质蕴涵项）;

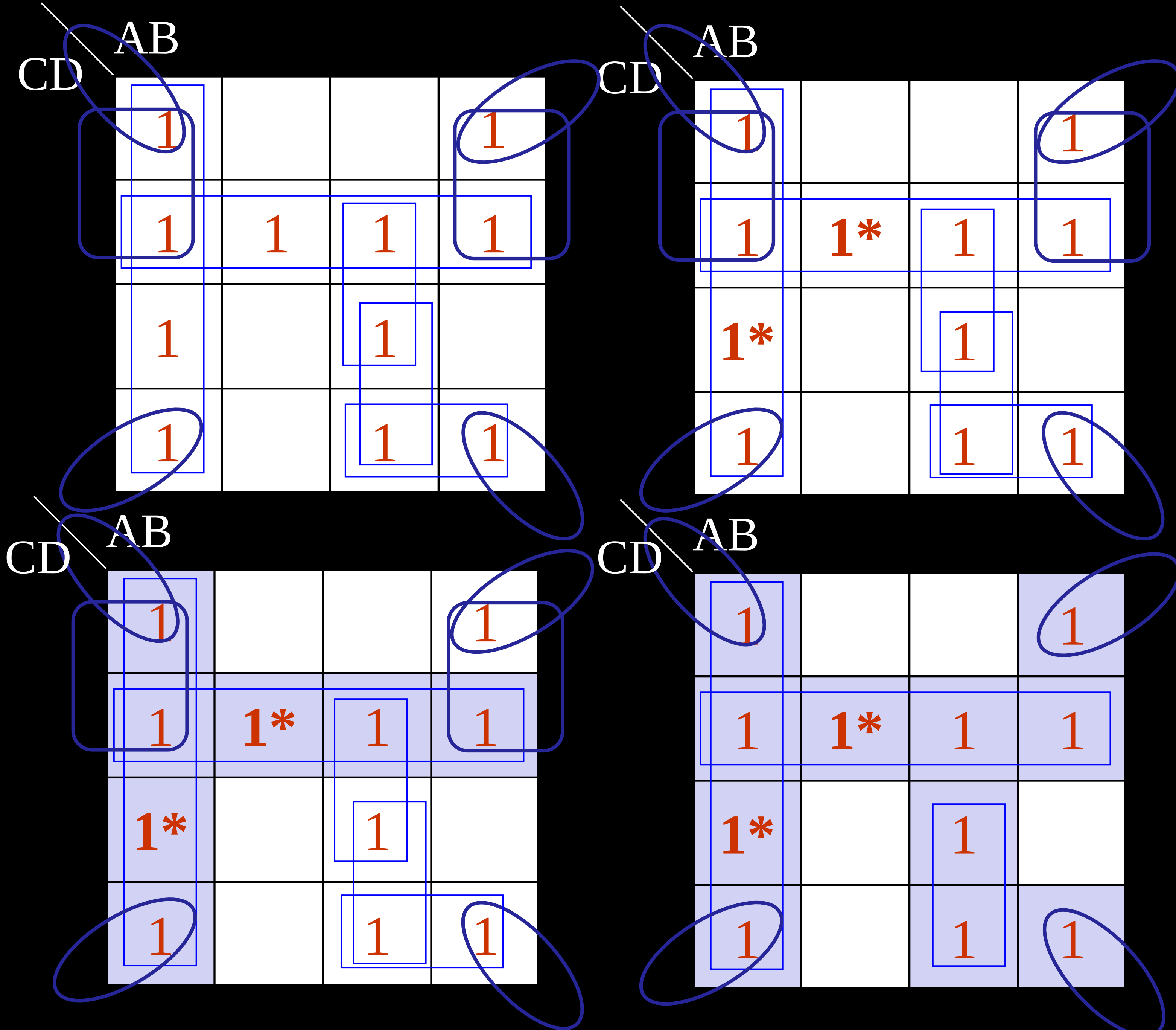
- 用* 标出实质最小项。

(3) 如果所选出的所有必要极大圈已覆盖卡诺图上全部标1小方块, 那么这些必要极大圈的集合就是卡诺图上的最小覆盖;

(4) 如果还有标1的小方格未被上述的必要极大圈覆盖，那么再加上选择最少的极大圈覆盖剩余的标1小方格，即获得最小覆盖;

- 选择一个质蕴涵项（极大圈）覆盖尽量多的未覆盖的1;
- 避免剩下孤立未覆盖的1。

(5) 写出最小覆盖所对应的逻辑表达式，即最简与或式。


AB
CD
AB
CD
AB
CD
AB
CD

1) 用卡诺图求最简与或表达式

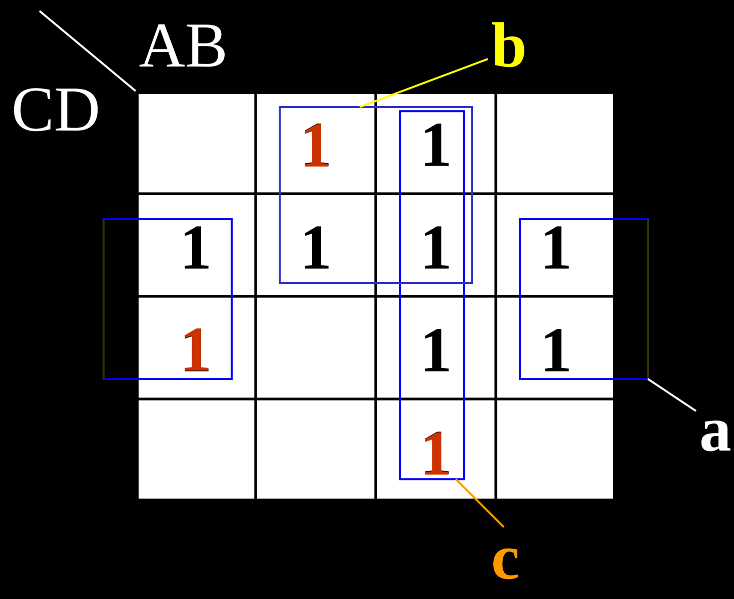
例1 化简 $F_1=\Sigma m^4(1,3,4,5,9,11,12,13,14,15)$

第一步：将函数F_1表示在卡诺图中；

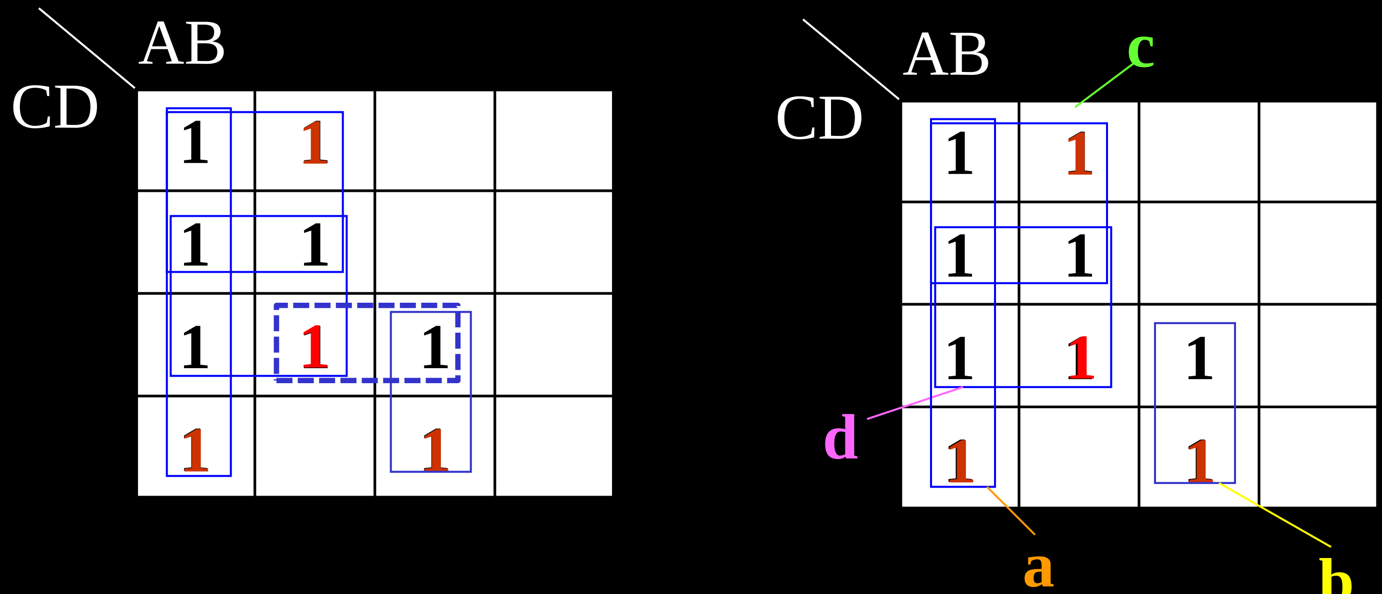
第二步：选择出必要极大圈，它们是a、b、c，确定所包含的实质最小项分别是m_3、m_4、m_{14}；

第三步：确定a,b,c这三个必要极大圈已覆盖全部标1小方格；

第四步：写出函数最简表达式 $F_1= a+b+c = \overline{B}D + B\overline{C} + AB$



例2 化简$F_2=\Sigma m^4(0,1,2,3,4,5,7,14,15)$

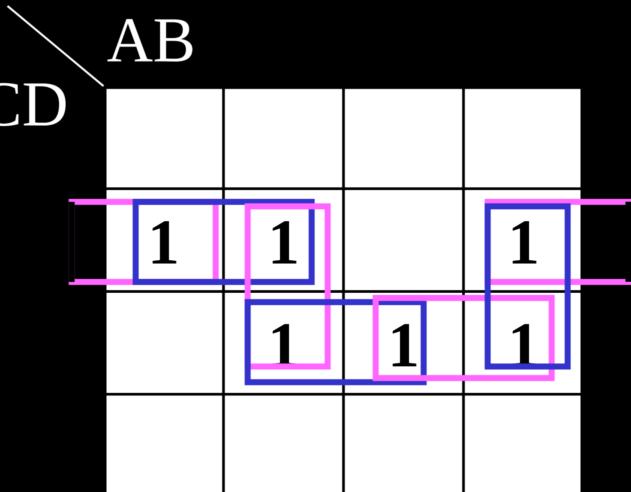


m_7不是实质最小项，因此首先选择三个必要极大圈a、b、c后，剩下一个孤立的1是m_7。对其选用最大的极大圈d覆盖，从而得到最小覆盖。

函数最简表达式

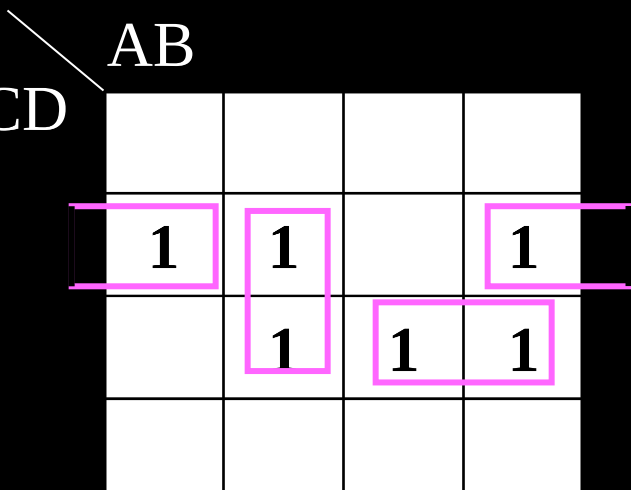
$$F_2= a + c + d + b = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}D + ABC$$

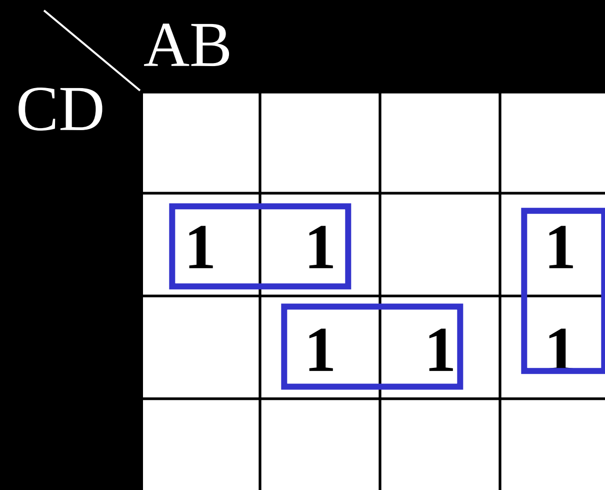
例3 化简$F_3=\Sigma m^4(1,5,7,9,11,15)$



函数F_3没有实质最小项，可选择一个最大的极大圈作为必要极大圈，以打破循环链。

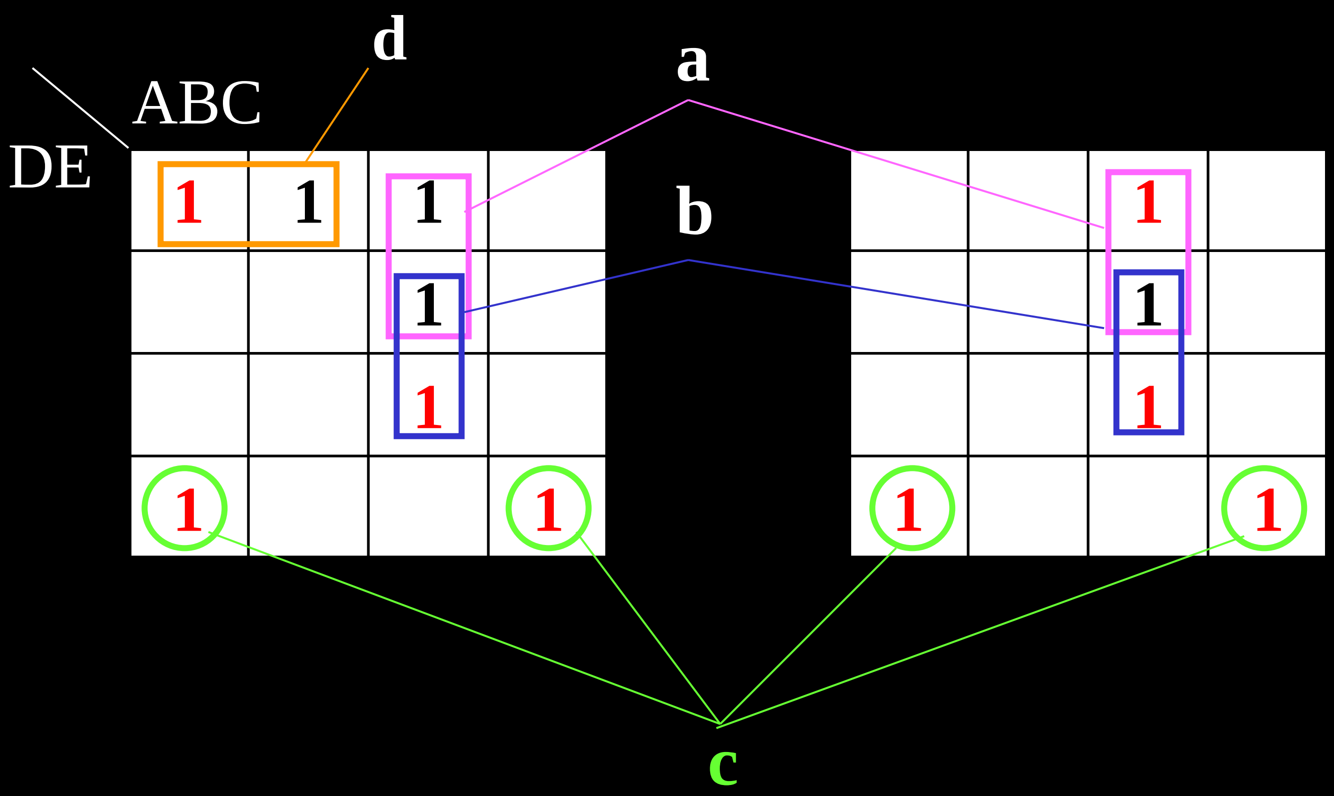
函数F_3有两种表达式，如图①和②所示。





① $F_3 = \overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}BD + ACD$　　② $F_3 = \overline{A}\,\overline{C}D + BCD + A\overline{B}D$

例4 化简$F_4=\Sigma m^5(0,2,4,10,12,13,15,18,26,28,29,31)$



函数的最简与或式 $F_4 = a + b + c + d$

$= BC\bar{D} + BCE + \bar{C}D\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E}$

2) 用卡诺图求最简或与式

- 从代数法或与式的化简中已得知，如果求出反函数的最简与或式，则按反演规则可得到原函数的最简或与式。
- 原函数在卡诺图上标0小方格的集合正好是反函数在卡诺图上的表示，故：

(1)按原函数在卡诺图中标0小方格的相邻情况，即可求出反函数的最简与或式；

(2)将反函数求反，则得到原函数的最简或与式。

例1 化简$F_1=\Sigma m^4(0,8,9,10,11,12,13,14,15)$得到原函数的最简或与式

第一步：将F_1表示在卡诺图上，即标1小方格;

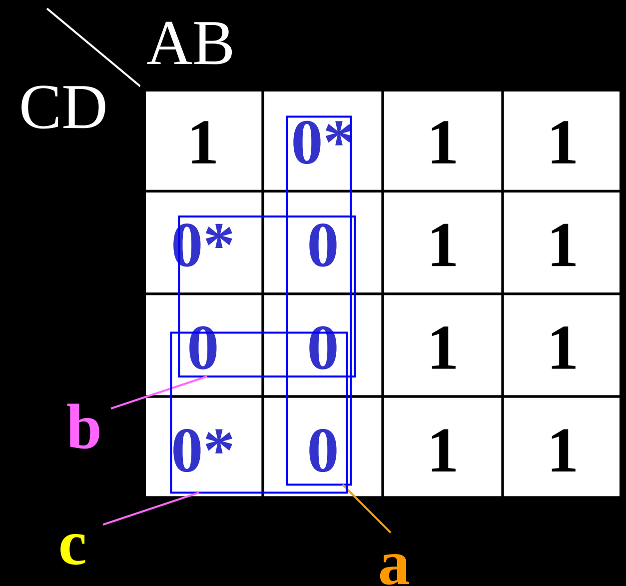
第二步：将未填1的小方格均填上0;

第三步：对所有标0小方格选出必要极大圈;

第四步：对所有标0小方格选择最小覆盖，即得到反函数的最简与或式$\overline{F_1}= a + b + c = \overline{A}B + \overline{A}D + \overline{A}C$

第五步：对反函数求反，即得到原函数的最简或与式。

$$F_1= (A+\overline{B})(A+\overline{D})(A+\overline{C})$$



3）利用卡诺图求与非式---禁止逻辑法

- 任何函数利用不属于它的最小项之非乘之，其逻辑功能不变。即：$F = F \bullet \overline{m_i}$ （m_i不在F中）

  $\because$ 不属于F的最小项m_i均为0

  $\therefore \overline{m_i} = 1$ 故上式成立。

进一步推广 $F = F \bullet (\overline{m_i + m_j})$ （m_i、m_j均不在F中）

- 任何函数如用属于它的最小项之和的非乘之，则相当于从该函数中扣去了这几个最小项，称禁止逻辑。

例：$F = m_1 + m_3 + m_5 + m_7$

$$G = F \bullet (\overline{m_5 + m_7})$$

$$= (m_1 + m_3 + m_5 + m_7) \bullet (\overline{m_5 + m_7})$$

$$= (m_1 + m_3 + m_5 + m_7) \bullet \overline{m_5}\,\overline{m_7}$$

$$= m_1 + m_3$$

禁止逻辑（又称阻塞逻辑），上式中 m_5+m_7 称为禁止项，G 是 F 被 $\overline{m_5+m_7}$ 禁止后的函数。

禁止逻辑的几何意义：

$$F = m_1 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$G = F \bullet (\overline{m_5 + m_7})$$

$$= m_1 + m_3$$

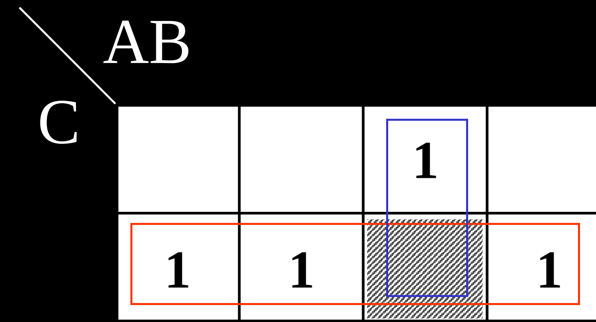
1	1		

禁止逻辑法化简函数的步骤：

① 把函数中各与项或部分与项共享的标 0 单元画入极大圈；

② 把这些 0 单元作为禁止项，从极大圈禁止掉，原函数保持不变。

例 $F_1 = m_1 + m_3 + m_5 + m_6$



第一步：找出共享的 0 单元m_7

作为禁止项；

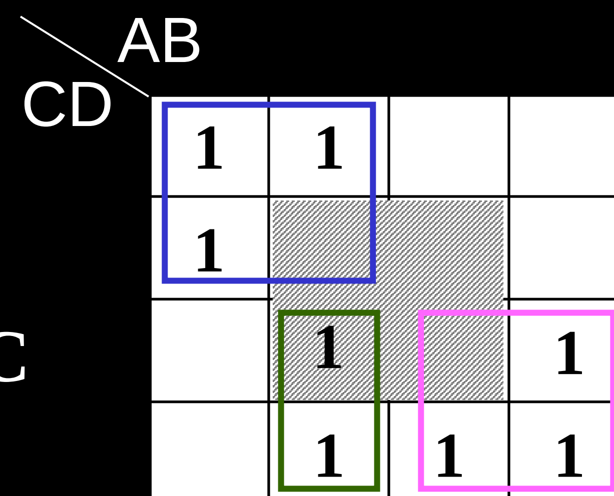
第二步：画出相应的极大圈；

第三步：函数的与或式 $F_1 = C\,\overline{ABC} + AB\,\overline{ABC}$

练习 例 $F_2 = A\bar{B}C + BC\bar{D} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}\bar{D}$

从卡诺图可知，是最简与或式，

电路实现需要10个与非门。



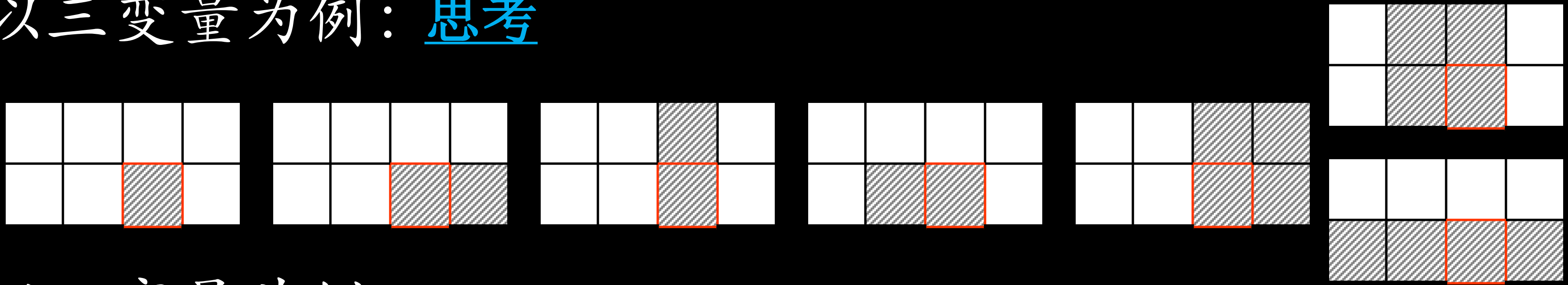
如图找出禁止项，画出极大圈，

则 $F_2 = \bar{A}\bar{C}\,\overline{BD} + AC\,\overline{BD} + \bar{A}BC$

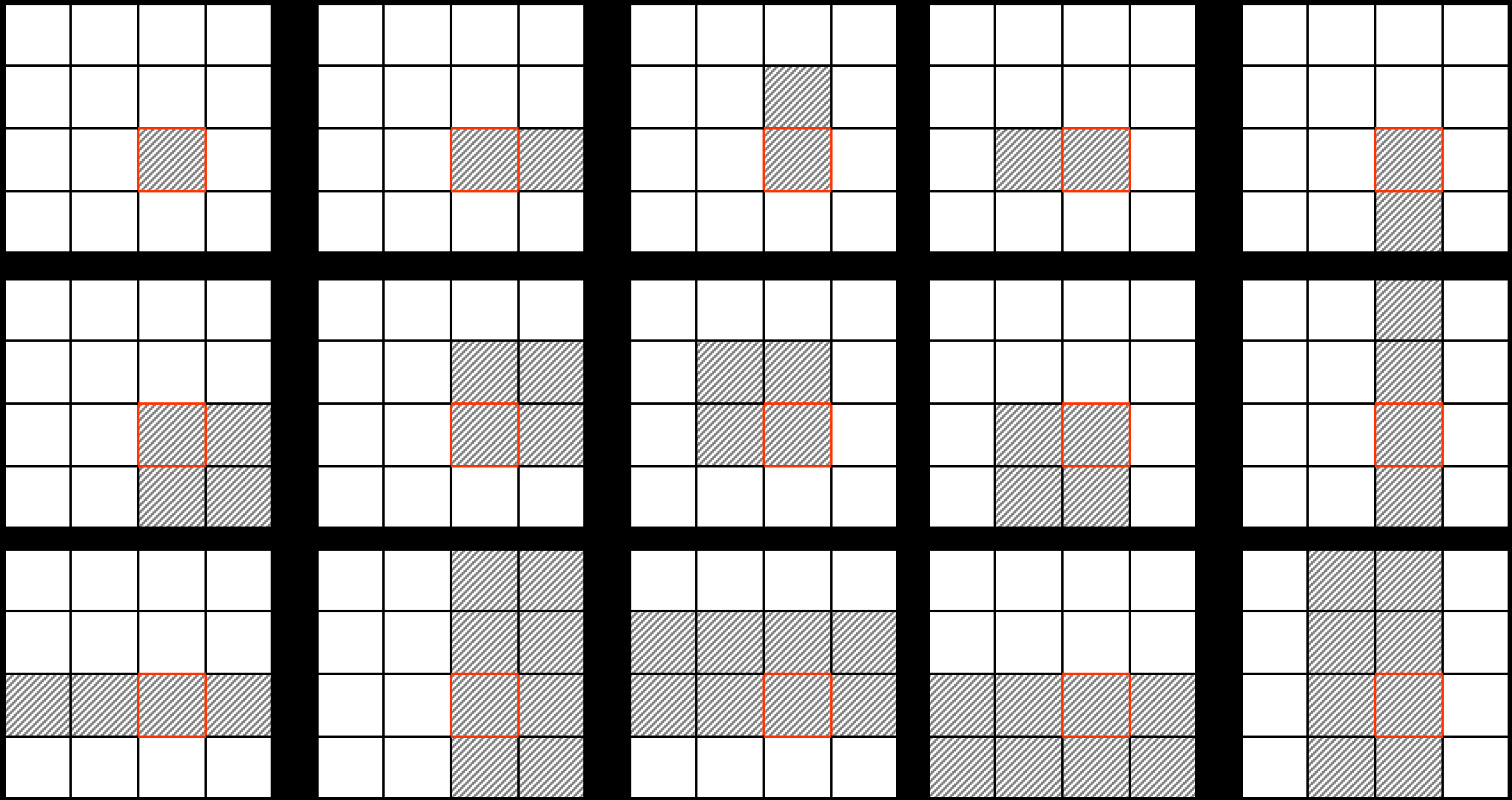
电路实现需要7个与非门。

思考：禁止项的特点是什么？如何寻找。

以三变量为例：思考



以四变量为例：



又例 $F_1 = \bar{A}B + \bar{B}C + \bar{C}A \quad = A\,\overline{ABC} + B\,\overline{ABC} + C\,\overline{ABC}$

阅读练习

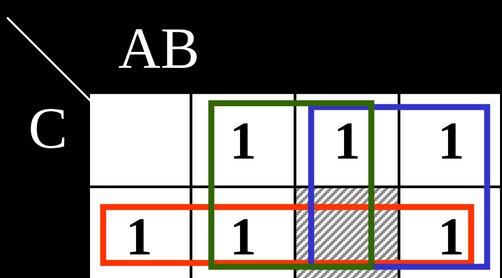
例 $F_2 = \bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} \quad = \bar{A}B\,\overline{BC} + C\,\overline{BC}$

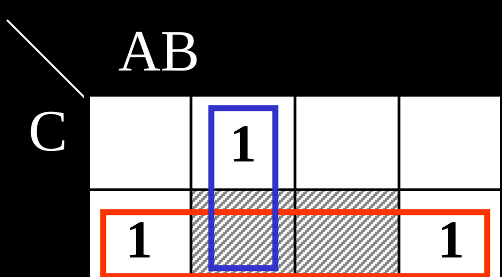
例 $F_3 = A\bar{B}\bar{C} + BC\bar{D} + A\bar{C}\bar{D} + \bar{B}CD$

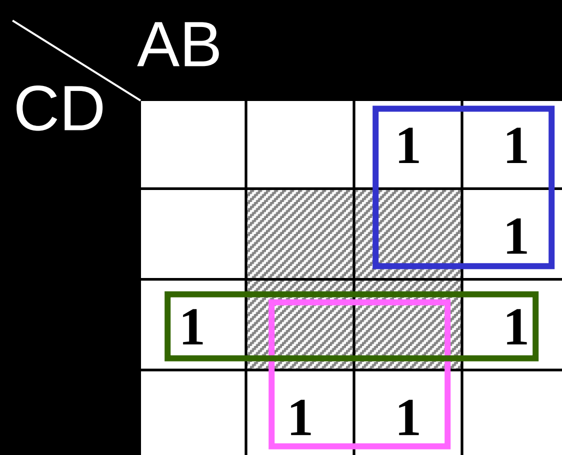
$= A\bar{C}\,\overline{BD} + CD\,\overline{BD} + BC\,\overline{BD}$

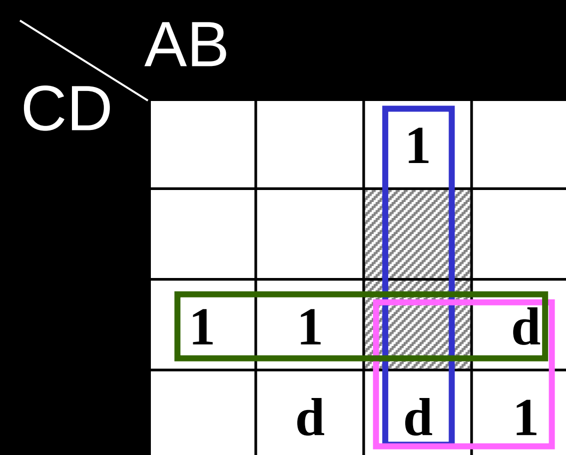
例 $F_4 = m_3 + m_7 + m_{10} + m_{12} + d_6 + d_{11} + d_{14}$

$= AB\,\overline{ABD} + AC\,\overline{ABD} + CD\,\overline{ABD}$









阅读练习

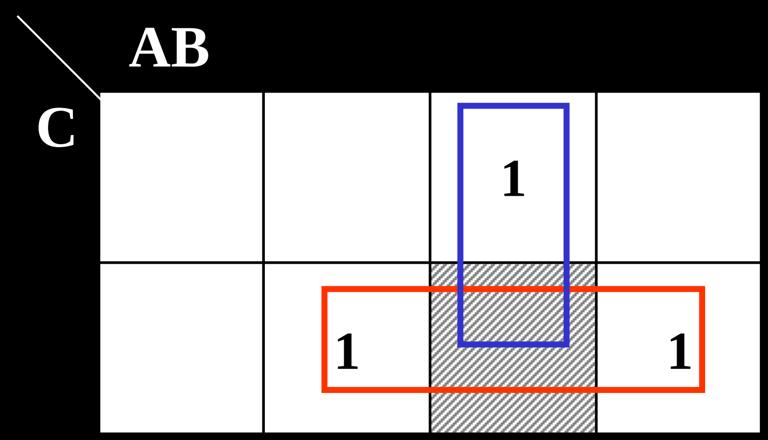
4）利用卡诺图求或非式

求$F = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$的最简或非式

$$F' = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$$
$$= AB\overline{ABC} + AC\overline{ABC} + BC\overline{ABC}$$

$$F = (F')' = (A+B+\overline{A+B+C})(A+C+\overline{A+B+C})(B+C+\overline{A+B+C})$$

$$= \overline{\overline{(A+B+\overline{A+B+C})}+\overline{(A+C+\overline{A+B+C})}+\overline{(B+C+\overline{A+B+C})}}$$



F'

5)利用无关项输入简化函数表达式

例如：一位BCD码输入的求偶电路。

分析：① 当输入为偶数时，输出 F 为1，否则输出 F 为0。

② 假设其输入为 $A_8A_4A_2A_1$ ，在正常情况下，输出表达式可以写为： $F(A_8A_4A_2A_1)=\sum m(0,2,4,6,8)$

③ 函数的最简与或式 $F=\overline{A}_8\overline{A}_1+\overline{A}_4\overline{A}_2\overline{A}_1$

A_2A_1 \ A_8A_4

1	1	d	1
		d	
		d	d
1	1	d	d

由于最小项 m_{10}～m_{15} 永远也不会出现，用“d”表示输入组合的无关项（约束项），填入卡诺图，表示此类小方格既可表示1也可表示0。则最简与或式 $F=\overline{A}_1$ 。

例2：一个BCD码输入质数检测器。

假设输入为$N_3N_2N_1N_0$，输出表达式可以写为：

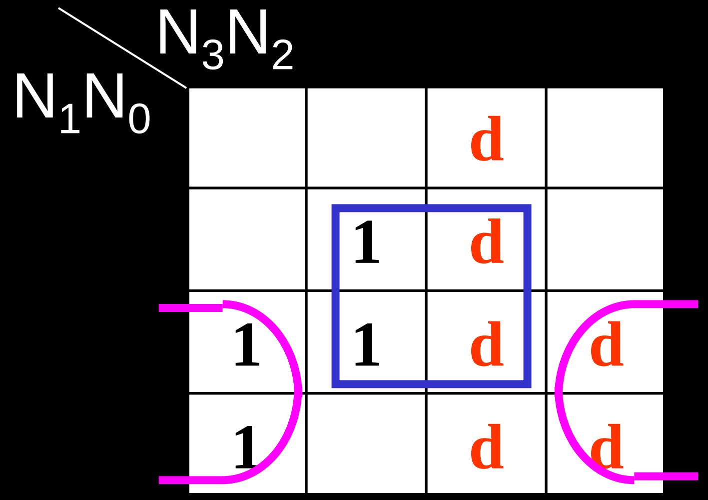
$F = \sum m^4(2,3,5,7) + \sum d^4(10,11,12,13,14,15)$

这里d(…)项列出的即为无关项。

第一步：给出函数的初始卡诺图；

第二步：按前述的方法找出必要质蕴涵，区别是：

- 画覆盖标1小方格的极大圈时，应把相邻的“d”包含在内(相当于使d = 1)，使画出的极大圈尽可能地大，可减少该质蕴涵的变量数；
- 不圈任何仅包含d的圈；
- 不圈任何标0的小方格；



BCD码质数检测器的最简与或式 $F=\overline{N_2}N_1+N_2N_0$

例3：对无关项的不同处理方法得到等价的不同化简结果。

CD \ AB				
	d	1	1	
	d		1	1
	d	1		1
	d			

CD \ AB				
	d	1	1	
	d		1	1
	d	1*		1*
	d			

CD \ AB				
	d	1	1	
	d		1	1
	d	1*		1*
	d			

CD \ AB				
	1	1	1	
	1		1	1
	1	1*		1*
	d			

CD \ AB				
		1	1	
	1		1	1
	1	1*		1*
	d			

CD \ AB				
		1	1	
	1		1	1
	1	1*		1*
	d			

$$F_1=\bar{B}D+\bar{A}CD+\bar{A}\bar{C}\bar{D}+AB\bar{D}$$

$$F_2=\bar{B}D+\bar{A}CD+B\bar{C}\bar{D}+AB\bar{D}$$

$$F_3=\bar{B}D+\bar{A}CD+B\bar{C}\bar{D}+A\bar{C}D$$

例4： $F = \Sigma m^4(4,5,13,15) + d^4(2,3,7,9,14)$

练习

最简与或式

$F = BD + \overline{A}B\overline{C}$

AB / CD

	1		
	1	1	d
d	d	1	
d		d	

例5：一个2421码输入四舍五入判别电路。

$F = \sum m^4(11,12,13,14,15)$
$+\sum d^4(5,6,7,8,9,10)$

最简与或式 $F = A$

AB / CD

		1	d
	d	1	d
	d	1	1
	d	1	d

例6：一个余 3 码输入偶数判别电路。

练习

$$F = \sum m^4 (3,5,7,9,11) + \sum d^4 (0,1,2,13,14,15)$$

N_1N_0 \ N_3N_2				
	d			
	d	1	d	1
	1	1	d	1
	d		d	

最简与或式 $F = D$

问题：有一个十进制Gray码如下表所示，试设计该码的质数检测器。

十进制数	Gray码	十进制数	Gray码
0	0000	5	0111
1	0100	6	0110
2	0101	7	0010
3	1101	8	0011
4	1111	9	0001

6） 多输出函数的化简 (Multiple-output minimization)

阅读

问题： 当逻辑电路是多输出函数时，若使每一个输出函数是最简的，而整个电路未必是最简的。

解决途径： 尽可能使多输出函数共享一些中间变量。

多输出函数的卡诺图化简法

①将函数一一填入卡诺图；

②全部函数相互分别作与运算，以找出它们之间较多可被共享的与项；

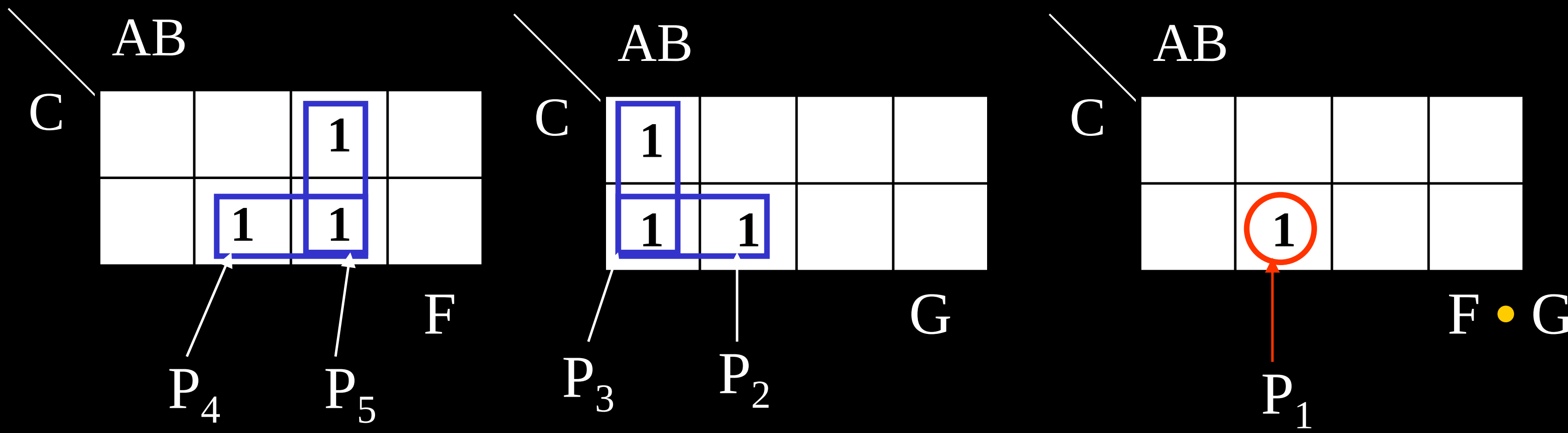
③根据前面的分析结果选择全部函数的质蕴涵；

④写出各函数的与或表达式，所有与项均为质蕴涵；

目标： 实现电路整体最简。(而非各单一函数的最简)

例 $F(A,B,C) = \sum m\,(3,6,7)$

阅读 $G(A,B,C) = \sum m\,(0,1,3)$



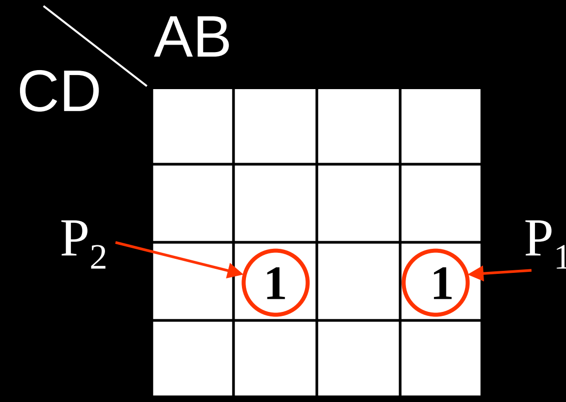
$$F = P_1 + P_5 = \overline{A}BC + AB$$

$$G = P_1 + P_3 = \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}$$

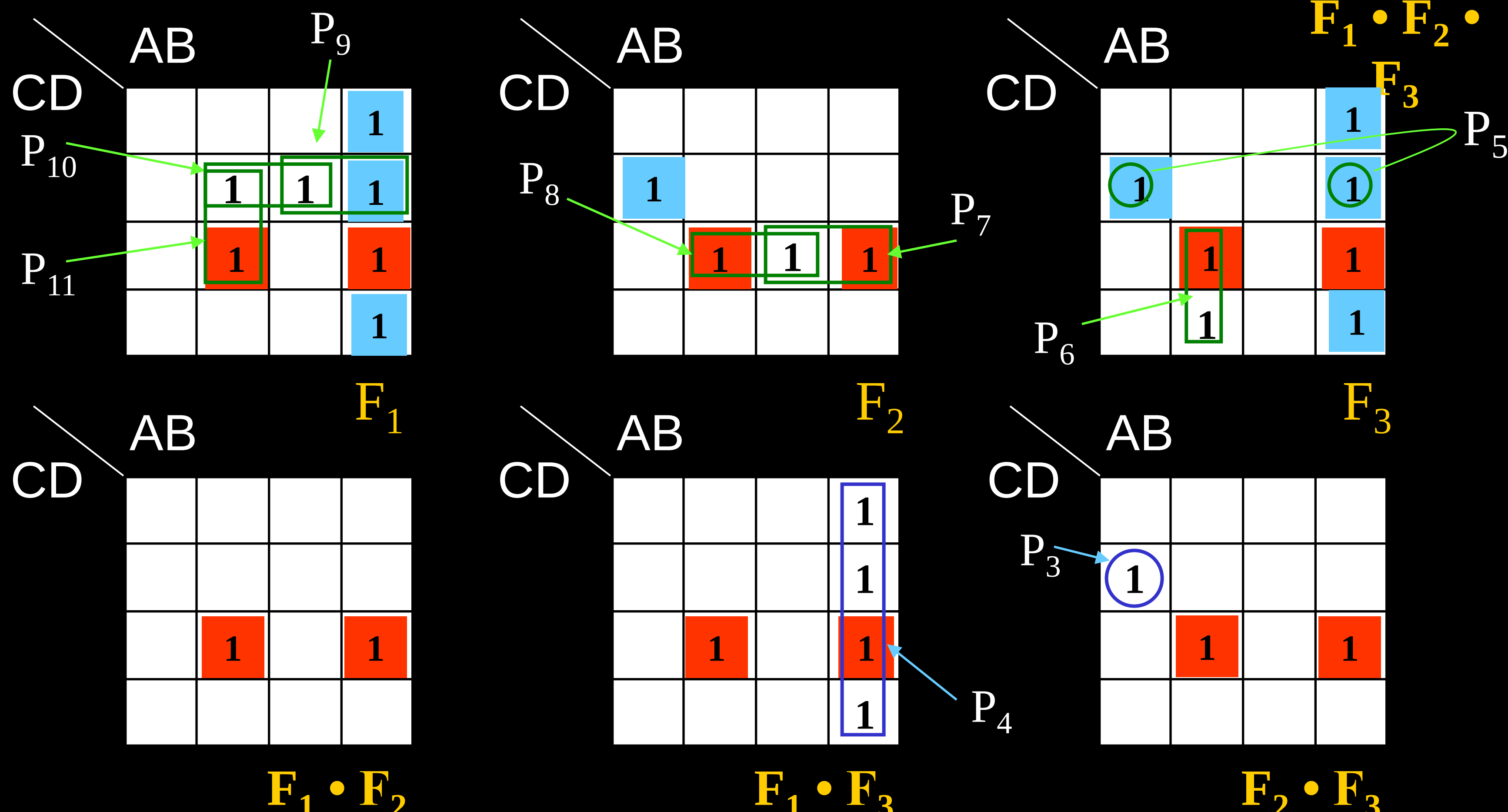
例 $F_1 = \sum m^4(5,7,8,9,10,11,13)$

阅读 $F_2 = \sum m^4(1,7,11,15)$

$F_3 = \sum m^4(1,6,7,8,9,10,11)$



$F_1 \bullet F_2 \bullet F_3$



$F_1 = P_1+P_2+P_4+P_{10} = P_2+P_4+P_{10}$ $\because$ P_4包含P_1

$F_2 = P_1+P_2+P_3+P_7 = P_2+P_3+P_7$ $\because$ P_7包含P_1

$F_3 = P_1+P_2+P_3+P_4+P_6 = P_3+P_4+P_6$

$\because$ P_4包含P_1　　P_6包含P_2

阅读