第十二周习题课内容

积分计算，积分估值与积分应用

课本中部分题目提示

8．设 $a,b>0$，$f\in C[-a,b]$．又设 $f>0$ 且 $\int_{-a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x=0$．求证：

$$\int_{-a}^{b} x^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant ab\int_{-a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

练习题 7.1 第 8 题（积分值估计）

思路：只须证 $\int_{-a}^{b}(ab-x^2)f(x)dx\geq 0$，为此分析：当 $-a\leq x\leq b$ 时

$$ab-x^2=(b-x)(x+a)+(b-a)x\geq(b-a)x$$

再利用 $\int_{-a}^{b}xf(x)dx=0$ 即可。

6．求证：

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\pi,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

提示：将被积函数表示为余弦之和．

练习题 7.2 第 6 题（积分等式）

思路：利用归纳递推：$n=0$ 等式显然成立，考虑 $n=k+1$ 的情况，为此注意

$$\sin(k+1+\frac{1}{2})x=\sin(k+\frac{1}{2})x\cdot\cos x+\cos(k+\frac{1}{2})x\cdot\sin x$$

$$=\sin(k+\frac{1}{2})x\cdot(1-2\sin^2\frac{x}{2})+\cos(k+\frac{1}{2})x\cdot 2\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$$

以下利用归纳假设，并把剩余各项合并得到积分为零。

问题 7.3：第 3 题（积分值估计）

已知 $f \in C[a,b]$ 且单调增，求证 $\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

思路 1：注意要证不等式事实上对于所有 $b>a$ 都成立，可以考虑上限 b 为变量：

令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$， $a \le x \le b$，则

$$F'(x)=xf(x)-[\frac{a+x}{2}f(x)+\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt]=\frac{x-a}{2}f(x)+\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt,$$

利用 f 单调性……导出 $F'(x)\ge 0$，从而 $F(b)\ge F(0)=0$。

思路 2：考虑要证不等式左右二积分相减：

$$\int_a^b xf(x)dx-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx=\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-\frac{a+b}{2})f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)dx,$$

注意 $x-\frac{a+b}{2}$ 在两个区间上都不变号，两个积分可以分别应用中值定理，最终导出相减结果大于等于 0 ……

二、积分估值（课本上第 7.4 节练习及问题）

1. 设 $f \in C[-1,1]$ 且可导，$M=\sup\limits_{[-1,1]}|f'|$。已知有 $a\in(0,1)$ 使得 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$，

求证：$\left|\int_{-1}^1 f(x)dx\right|\le M(1-a^2)$。

证明：由已知 $\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^{-a}f(x)dx+\int_a^1 f(x)dx$，且 $\exists c\in[-a,a]$，使得 $f(c)=0$。

当 $a\le x\le 1$ 时，$\pm f(x)=\pm f'(\xi)(x-c)\le M(x-c)$，

$$\int_a^1 |f(x)|dx \le M\int_a^1 (x-c)dx=M[\frac{1-a^2}{2}-c(1-a)];$$

当 $-1\le x\le -a$ 时，$\pm f(x)=\pm f'(\eta)(x-c)\le M(c-x)$，

$$\int_{-1}^{-a}|f(x)|dx \le M\int_{-1}^{-a}(c-x)dx = M[c(1-a)+\frac{1-a^2}{2}]。$$

综上

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)dx\right| \le \left|\int_{-1}^{-a}f(x)dx\right| + \left|\int_{a}^{1}f(x)dx\right|$$

$$\le \int_{-1}^{-a}|f(x)|dx + \int_{a}^{1}|f(x)|dx \le M(1-a^2)。 \qquad \square$$

2. 设 $f\in C^2[0,1]$，且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0$， $f'(1)=1$，求证 $\int_0^1[f''(x)]^2dx\ge 4$。

证明：参考课本中提示，记 $p(x)=x^3-x^2$，考虑

$$0\le\int_0^1[f''(x)-p''(x)]^2dx$$

$$=\int_0^1[f''(x)]^2dx+\int_0^1[p''(x)]^2dx-2\int_0^1 f''(x)p''(x)dx, \qquad (*)$$

其中 $\int_0^1[p''(x)]^2dx=\int_0^1(6x-2)^2dx=4$，

$$\int_0^1 f''(x)p''(x)dx = f'(x)p''(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)p'''(x)dx$$

$$=f'(1)p''(1)-f'(0)p''(0)-6\int_0^1 f'(x)dx$$

$$=p''(1)-6[f(1)-f(0)]=4,$$

代入（*）式得 $\int_0^1[f''(x)]^2dx\ge 4$。 $\square$

注：此外等号成立时必有 $f''(x)\equiv p''(x)=6x-2$，

结合已知条件可导出 $f(x)=x^3-x^2\equiv p(x)$。

三、积分的应用

1. 直径 1 米高 2 米的圆柱桶盛满水，桶底有一个直径 1 厘米的小孔向外流水，流速为 $v = 0.6\sqrt{2gh}$，h 为瞬时水深，g 为重力加速度。求桶中水流完需要多少时间。

解：记圆桶直径 $R = 1$（米），小孔直径 $r = 0.01$（米），小孔流速 $v = 0.6\sqrt{2gh}$（米/秒），设 dt 时段水深的变化为 dh，

根据水量守恒：流出的水量=桶中水量的减少，可列出

$$\pi r^2 v dt = -\pi R^2 dh，因而 \ \frac{dt}{dh} = -\frac{R^2}{r^2 v} = -\frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{2gh}}$$（负号表示水深减小）

利用不定积分得到 $t = -\int \frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{2gh}} dh = -\frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{g}}\sqrt{h} + C$

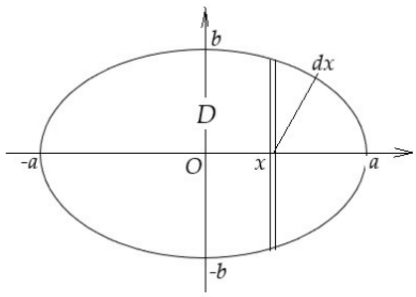
注意初始 $t = 0$ 时水深 $h = 2$，由此得到 $C = \frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{g}}\sqrt{2}$，所以

$$t = \frac{R^2}{0.6r^2\sqrt{g}}(\sqrt{2} - \sqrt{h}),\quad 0 \le h \le 2,$$

令 $h = 0$ 得到水流光需要的时间：

$$T = \frac{R^2\sqrt{H}}{0.6r^2\sqrt{g}} = \frac{10^4\sqrt{2}}{0.6\sqrt{g}} \approx \frac{1.414\times 10^4}{3.131\times 0.6} \approx 7527$$（秒，合 2 小时 5 分 27 秒）。

2. 令 D：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ 表示 xy 平面上的椭圆区域，计算 D 分别饶 x 轴和 y 轴旋转一周生成的空间旋转体区域的体积 V_x 与 V_y。



解：以绕 x 轴旋转为例，用微元法推导：

任取 $x \in [-a, a]$ 处微元 dx，

在区域 D 中截下一个窄条区域

绕 x 轴旋转一周形成一个空间薄圆盘，

半径为 $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$，厚度 dx，体积 $dV_x = \pi y^2 dx = \pi(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2 dx$，

关于 $x \in [-a, a]$ 叠加求和得到

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2 dx = \pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi ab^2;$$

同理可得（或利用变量 x 与 y 的对称性）$V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$。

3. 设半径为 R 的圆柱形管道中水流速度分布为 $v(r)=k(R^2-r^2)$，$0\le r\le R$，

计算该管道的平均流速 $\bar{v}$。

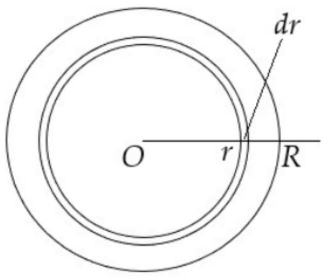
解：按照流速分布，管道中心流速 $v(0)=kR^2$，管道壁上流速 $v(R)=0$，流速不一致。

根据平均流速定义，整个管道中流速都是 $\bar{v}$ 得到的等效流量应该与上面管道流量相等。

在平均流速下，单位时间内圆柱形管道流量 $V=\bar{v}\cdot\pi R^2$，

在题设流速分布下单位时间内整个管道流量 $V=\int_0^R v(r)2\pi r dr$，【注】

所以 $\bar{v}=\dfrac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi\, rv(r)dr=\dfrac{2k}{R^2}\int_0^R r(R^2-r^2)dr=\dfrac{1}{2}kR^2$。



【注】：用微元法推导：任取 $r\in[0,R]$ 处微元 dr，

绕管轴一周形成薄圆环，其截面积 $dA=2\pi r dr$，

单位时间内流量 $dV=v(r)dA=v(r)2\pi r dr$，

关于 $r\in[0,R]$ 求和，得到整个管道流量

$$V=\int_0^R v(r)2\pi r dr$$ 。