高数下期末复习

（2021-2022第二学期）

数学与统计学院　吴慧卓

第六章　多元函数积分学及其应用

题型一　计算（二重积分，三重积分，一型线面积分、二型线面积分）

题型二　交换积分次序

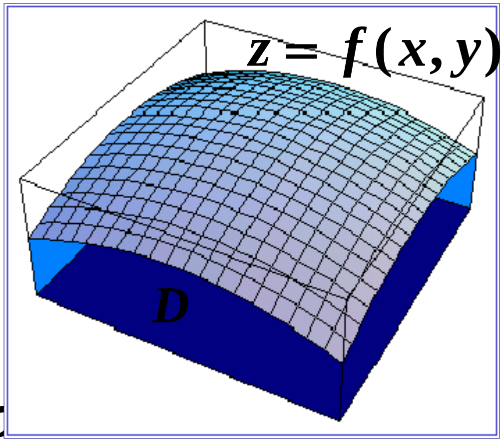
题型三　利用奇偶性、对称性化简数量值函数积分的计算

题型四　五大公式

题型五　应用（求几何量、物理量、变力沿曲线做功、通量）

一、二重积分的概念与性质

1. 定义： $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$



2. 几何意义, 物理意义

3. 性质：

1）比较定理：若 $f(x,y)\le g(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

2）估值定理：若 $f(x,y)$ 在 D上连续, 则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma.$$

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

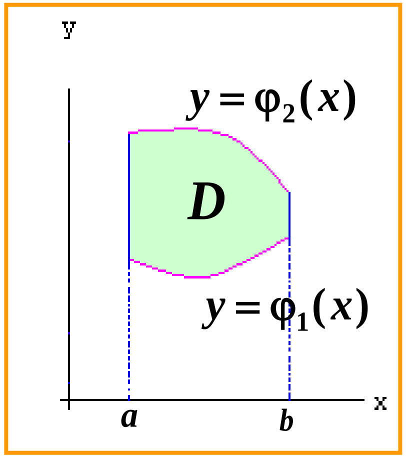
3）中值定理：若 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则

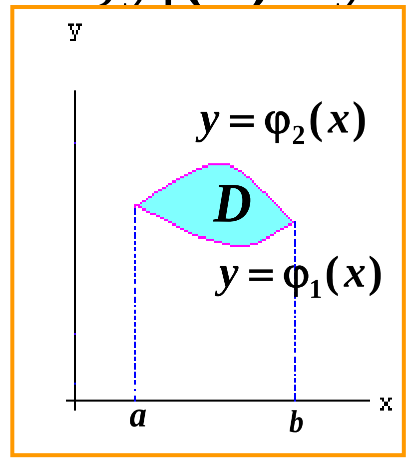
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

二、二重积分的计算：核心是化累次积分（即两个定积分）

1）直角坐标系

（1） X 型区域： $(\sigma)=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$





$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

（2） Y 型区域： $(\sigma)=\{(x,y)\,|\,x_1(y)\le x\le x_2(y), c\le y\le d\}$

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

2）极坐标：

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta\quad (0\le\rho<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi)$$

$$f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$$

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{(\sigma)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

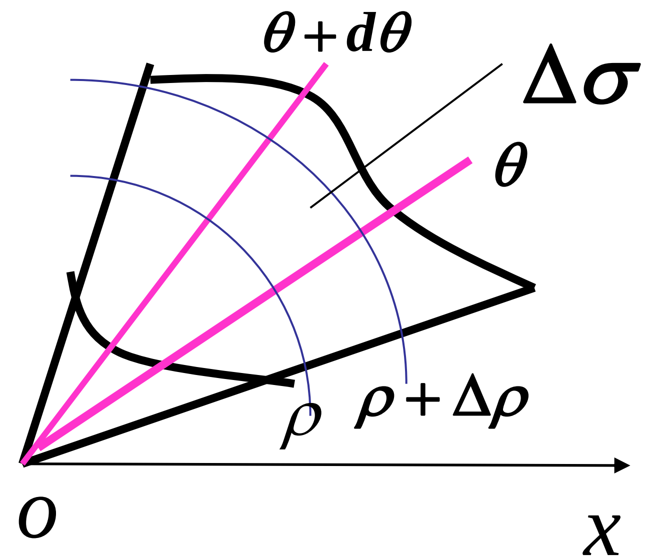
i）适合用极坐标计算的被积函数：

$$f(\sqrt{x^2+y^2}),\ f(\frac{y}{x}),\ f(\frac{x}{y});$$

ii）适合用极坐标的积分域：

$$x^2+y^2\le R^2 \qquad r^2\le x^2+y^2\le R^2$$

$$x^2+y^2\le 2ax \qquad x^2+y^2\le 2ay$$



3） 利用积分域的对称性和被积函数的奇偶性.

①若积分域 D 关于 y 轴对称，则:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_{x\geq 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma; & f(-x,y)=f(x,y)\\ 0; & f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$$

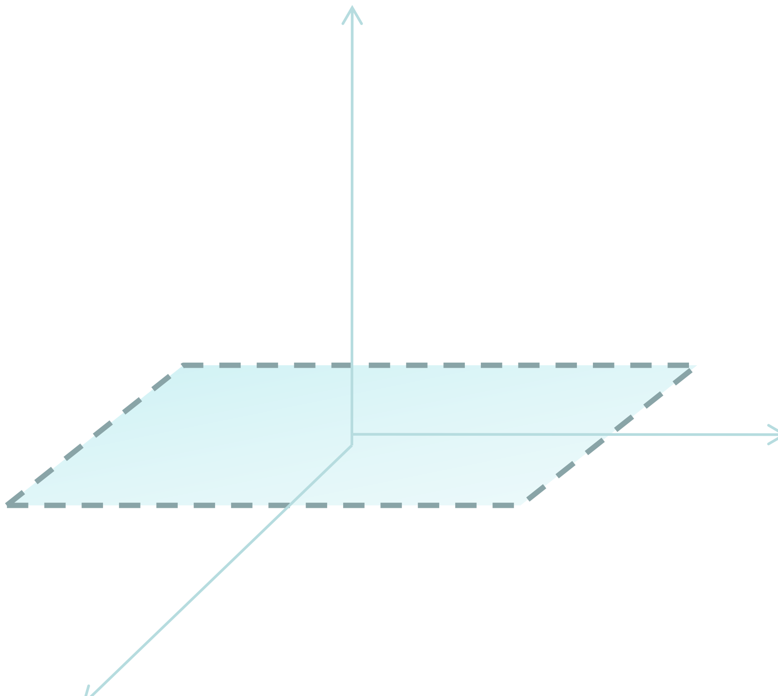
② 若积分域关于 x 轴对称，则

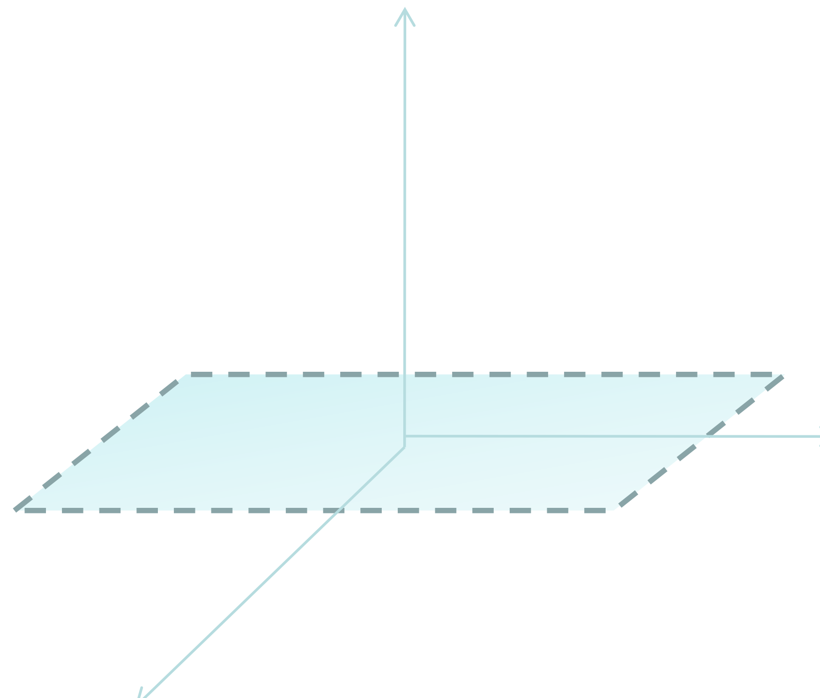
$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_{y\geq 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,-y)=f(x,y)\\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

③若积分域 (V) 关于 xoy 坐标面对称

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\begin{cases}2\iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)\mathrm{d}V & f(x,y,-z)=f(x,y,z).\\ 0 & f(x,y,-z)=-f(x,y,z).\end{cases}$$

② 若积分域关于 x 轴对称，即左右对称



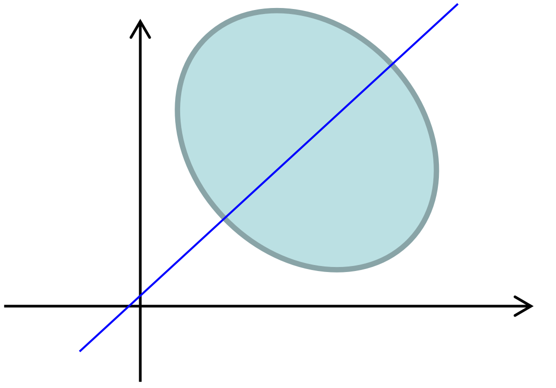


$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_{y\geq 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

4）利用变量的对称性： 若 D 关于 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma.$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(3x^2+4y^2\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_{y^2+x^2\le 1}\left(3y^2+4x^2\right)\mathrm{d}\sigma.$$



三、三重积分的计算

1. 先单后重（切条法）

2. 先重后单（切片法）

3. 球坐标（楔形块法）

四、积分的应用

多元积分应用一览表

几何形(体) \ 所求量	平面域	空间体	曲线段	曲面片
几何度量	面积：$S=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma$	体积：$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$	弧长 $L=\int_{C}\mathrm{d}s$	面积 $S=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$
质量	$m=\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$	$m=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$	$m=\int_{C}f(x,y,z)\mathrm{d}s$	$m=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$
质心	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_{D}x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$	$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}$	$\bar{x}=\dfrac{\int_{C}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_{C}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}$	$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}$
转动惯量	$I_x=\iint\limits_{D}y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$	$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$	$I_x=\int_{C}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$	$I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$

【例1】（2017年数2）　积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\tan x}{x} \mathrm{d}x =$

【例2】计算 $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}\sigma \quad D: y=\sqrt[4]{x}, y=0, x=1$

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 dy \int_{y^4}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dx$$

$$= 2\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{x}\Big|_{y^4}^1 dy = 2\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} (1-y^2) dy$$

$$= 2\left[\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} y^2 dy\right] \quad = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} y^2 dy = \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} y d\frac{y^2}{2} = -\int_0^1 y d e^{-\frac{y^2}{2}} \quad = -\left[y e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right]$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}} + \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

【例3】（1991年数2, 2） 设D是 xOy 平面上以(1,1),(-1,1)和(-1,-1）为顶点的三角形区域，D_1是D 在第一象限的部分，则

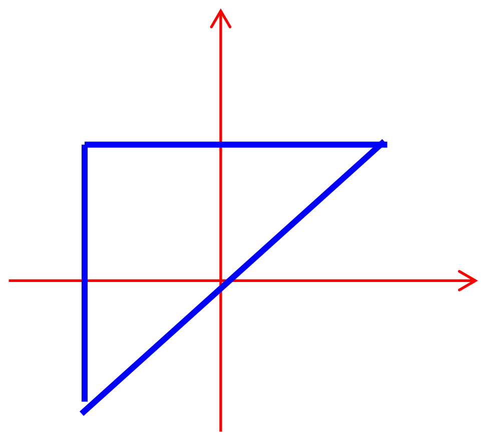
$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ 【 C 】

（A） $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

（B） $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

（C） $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

（D） 0.

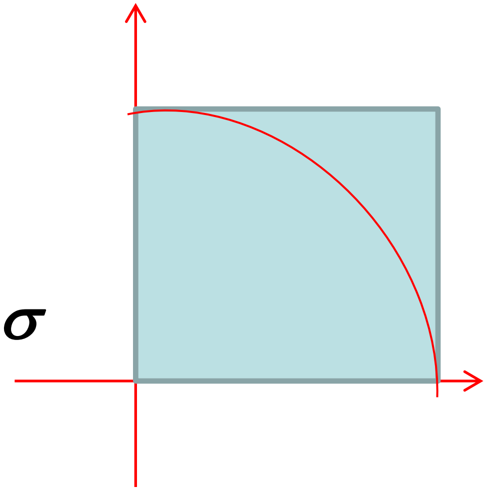


【例4】(2005年数2, 3) 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$,

其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

$$\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}d\sigma-\iint\limits_{D_2}d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)d\sigma$$



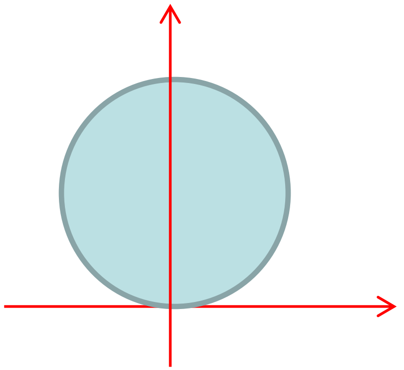
$$=\iint\limits_{D_1}d\sigma-\iint\limits_{D_{\text{正}}\text{-}D_1}d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_{\text{正}}\text{-}D_1}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}d\sigma-\iint\limits_{D_{\text{正}}}d\sigma-2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_{\text{正}}}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=2\frac{1}{4}\pi-1\text{-}2\iint\limits_{D_1}x^2d\sigma+\iint\limits_{D_{\text{正}}}(x^2+y^2)d\sigma=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$

【例5】（2017年数2） 已知平面域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2y\right\}$，

计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x+1)^2\,dxdy$



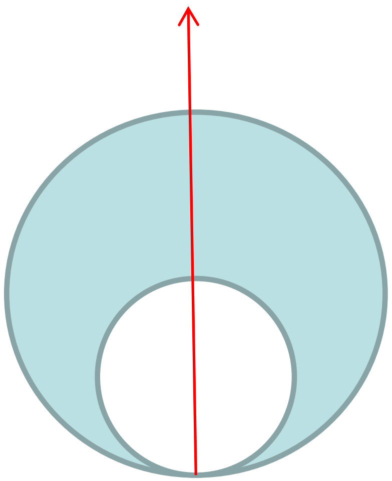
$$I=\iint\limits_D x^2dxdy+2\iint\limits_D xdxdy+\iint\limits_D dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\cos^2\theta\rho d\rho+\pi$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta+\pi=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)d\theta+\pi=\frac{5}{4}\pi$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{5}{6}\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\\[2ex] \dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{6}{7}\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3}, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

【例6】计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} z dV, \Omega: x^2+y^2+z^2 \geq z, x^2+y^2+z^2 \leq 2z$



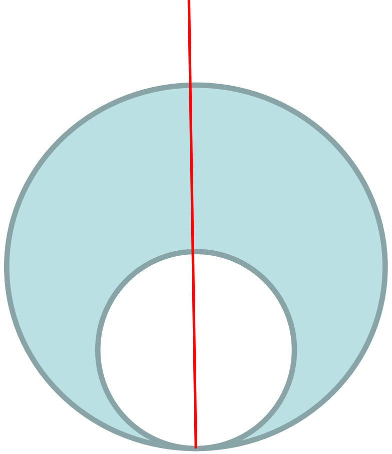
$$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leq 2z$$

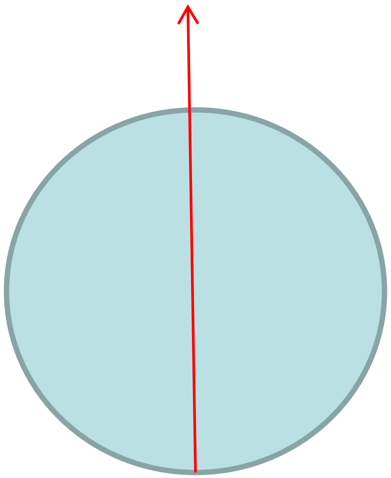
$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\varphi$$

$$r = 2\cos\varphi$$

$$I=\iiint_{\Omega} z dV = \iiint_{\Omega_2} z dV - \iiint_{\Omega_1} z dV$$

$$\Omega_2 : x^2+y^2+z^2 \le 2z$$





【例7】计算 $\iiint\limits_{\Omega}(mx+ly+nz)^2\mathrm{d}V, \Omega: x^2+y^2+z^2 \le a^2$.

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}V$$

五、线面积分的计算与应用

1. 第一型曲线积分与第一型曲面积分

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

注意：（1）积分和式中的子弧段长始终是正的，即曲线积分值与积分路径的方向无关. 要求积分的下限要小于上限.

(2) $f(x,y,z)$ 中的x,y,z是限制在曲线C上的.

若 (s) 的方程为： $z=z(x,y),\quad (x,y)\in(\sigma).$

$$\boxed{\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{(\sigma)} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}$$

2. 第二型曲线积分与第二型曲面积分

$$\int_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

注: α 对应起点
β 对应终点

$$= \int_\alpha^\beta \{P(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t) + R(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)\}\mathrm{d}t$$

联系 $$\int_C \vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_C\left(\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{e}_\tau\right)\mathrm{d}s$$

$$\boxed{\iint_{(S)} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}} = \iint_{(S)} P(x,y,z)\mathrm{d}y\Lambda dz + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\Lambda dx + R(x,y,z)\mathrm{d}x\Lambda dy$$

一投二代三定号

联系 $$\iint_S \vec{A}(x,y,z)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_S\left[\vec{A}(x,y,z)\cdot\vec{e}_n\right]\mathrm{d}S$$

3. 五个公式 $\vec{A}\in C^{(1)}((\sigma))$

(1) Green公式

$$\boxed{\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\oint\limits_{(+C)}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

(2) Stokes公式

$$\boxed{\oint\limits_{(C)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}=\iint\limits_{(S)}(\nabla\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iint\limits_{(S)}(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n\,\mathrm{d}S}$$

(3) Gauss公式

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)}\nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V=\oiint\limits_{(S)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}.}$$

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint\limits_{(S)}P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}$$

(4)闭路变形定理 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$\boxed{\oint\limits_{C}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint\limits_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y}$$

(C与Γ同向)

(5)闭曲面变形定理

定理 设空间有界闭区域 (V) 由分片光滑的闭曲面 (S)和(S') 所围，

$\vec{A}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^{(1)}((V))$, $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0,}$

$$\oiint_{S} P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\oiint_{S'} P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

其中,(S)和(S')同向.

3. 三个概念

$$(1)\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}s}=\lim_{(\Delta S)\to M}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{(\Delta S)\to M}\frac{1}{\Delta S}\oint_{(\Delta C)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=[(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{e}_n]_M$$

$$(2)\mathrm{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}$$

$$(3)\,\mathrm{div}\,\vec{A}(M)=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oiint_{(\Delta S)}\vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$=\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

三个特殊结论：可当已知结论用

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A})=0$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=\vec{0}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\Delta u \qquad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

4. 一个定理 设 (G) 是**一维单连域**，$\vec{A}=(P,Q,R)\in C^{(1)}((G))$,则下列四个命题等价：

1. $\vec{A}$ 是一无旋场，即在 (G) 内恒有

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y};$$

2. 沿 (G) 内任一简单的闭曲线 (C) 均有环量

$$\oint_{(C)}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\oint_{(C)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0;$$

3. $\vec{A}$ 是一保守场，即在 (G) 内线积分 $\int_{(A)}^{(B)}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}$ 与路径无关；

4. $\vec{A}$ 是一有势场，即在 (G) 内 $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ 为某一函数的全微分.

5. 三个重要的场

(1) 无旋场　　$rot\vec{A}=\vec{0}$　　或$\vec{A}=\nabla u$

(2) 无源场　　$div\vec{A}=0$　　即$\nabla\cdot\vec{A}=0$

(3) 调和场　　$\Delta u=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$

6. 三个物理量

(1) 功　　$\vec{F}=(P,Q,R)$　　$W=\int_{(C)}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_{(C)}Pdx+Qdy+Rdz$

(2) 流量　　$\vec{v}=(P,Q,R)$　　$I=\oint_{(C)}\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}=\int_{(C)}Pdx+Qdy+Rdz$

(3) 通量　　$Q=\iint_{(S)}\vec{v}\cdot\overrightarrow{dS}=\iint_{(S)}Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$

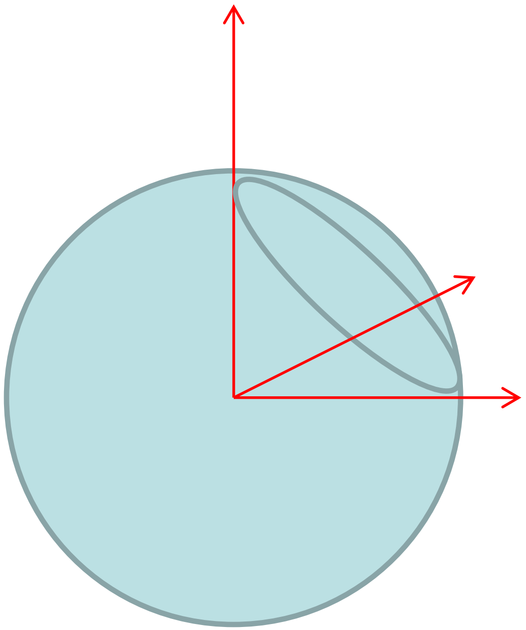
【例8】 设空间曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=\frac{3}{2}R \end{cases}$，其中$R>0$,求$\oint\limits_C yds$.

$$\oint\limits_C yds=\frac{1}{3}\oint\limits_C (x+y+z)ds=\frac{1}{3}\frac{3}{2}R\oint\limits_C ds$$

$$d=\frac{\frac{3}{2}R}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\frac{1}{2}R$$

$$\oint\limits_C yds=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi r=\frac{\pi}{2}R^2$$



【例9】 设薄片形物体S是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$所截下的有限部分，其上任一点的密度为$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记锥面与柱面的交线为C，

(1) 求C在xoy平面上的投影曲线的方程；

（2）求S的质量.

$$(1)\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$(2)\, m=\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS=\iint_S \sqrt{2x^2+2y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$=2\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2 d\rho=\frac{64}{9}$$

【例10】 计算$\int_L \left[e^x \sin y - b\left(x+y\right)\right]dx + \left(e^x \cos y - ax\right)dy, a>0, b>0$

其中$L:\left(0,0\right)$沿$y=\sqrt{2ax-x^2}$到$A(2a,0)$的曲线段.

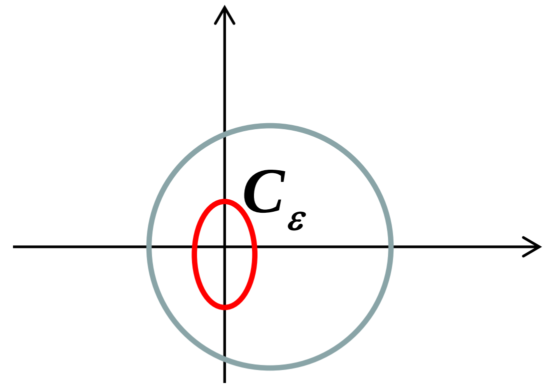
令$P=e^x \sin y - b\left(x+y\right), Q = e^x \cos y - ax$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - b \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y - a$$

$$I = \int_L + \int_{AO} - \int_{AO} = -\left(b-a\right)\iint_D d\sigma - \int_{2a}^{0} -bx dx$$

$$= \frac{\pi}{2} a^2 \left(a-b\right) - 2a^2 b$$

【例11】 计算$\oint\limits_{C}\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, C是以$(1,0)$为中心，半径为R的圆周，$R>1$, 逆时针.



（C_ε为逆时针方向）

令$P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$

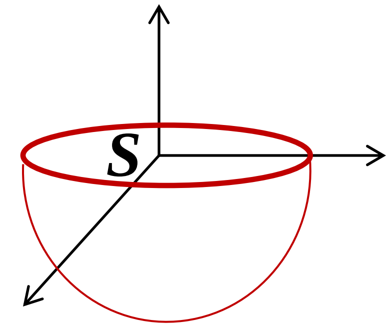
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-4x^2+y^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-4x^2+y^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}$$

$$I=\oint\limits_{C_\varepsilon}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_{C_\varepsilon}xdy-ydx$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}2\iint_D d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}2\pi\frac{\varepsilon}{2}\varepsilon=\pi$$

【例12】 计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$,其中Σ为下半球面

$x^2+y^2+z^2=a^2$.



$$I=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+(a+z)^2dxdy \;=\frac{1}{a}\left[\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{S}-\iint\limits_{S}\;\right]$$

（S为上侧）

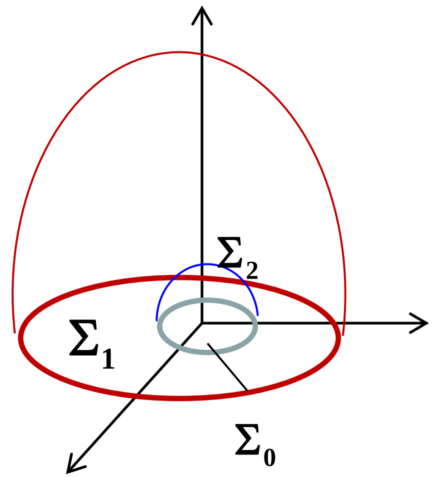
$$=\frac{1}{a}\left[\iiint\limits_{V}\left[a+2(a+z)\right]dV-\iint\limits_{S}axdydz+(a+z)^2dxdy\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[3a\iiint\limits_{V}dV+2\iiint\limits_{V}zdV-a^2\iint\limits_{D}dxdy\right]=\frac{1}{a}\left[3a\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi a^3+2\int_{-a}^{0}zdz\iint\limits_{\sigma_z}d\sigma-a^2\pi a^2\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[2\pi a^4+2\int_{-a}^{0}z\pi\left(a^2-z^2\right)dz-\pi a^4\right]=-\frac{\pi a^3}{2}$$

【例13】 计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$,其中Σ为

$$1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\quad (z\ge 0)\text{上侧}$$



$$I=\iint\limits_{\Sigma}+\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}\quad (\Sigma_1\text{和}\Sigma_2\text{均为下侧})$$

$$=\iiint\limits_{V}\mathrm{div}\vec{A}dV-0-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{\Sigma_2}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

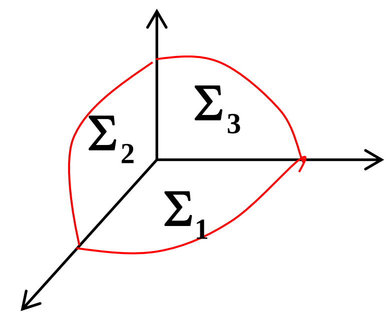
$$=0-\frac{1}{\varepsilon^3}\left[\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}\right]=-\frac{1}{\varepsilon^3}\left[-\iiint\limits_{V}3dV-0\right]\quad (\Sigma_0\text{为上侧})$$

$$=\frac{3}{\varepsilon^3}\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\quad=2\pi$$

【例14】设Σ为曲面$4x^2+y^2+z^2=1(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$的上侧，$L$为Σ的边界曲线，其正向与Σ的法向量符合右手法则，计算曲线积分

$$I=\int_L (yz^2-\cos z)dx+2xz^2dy+(2xyz+x\sin z)dz$$

解法一



$$I=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz^2-\cos z & 2xz^2 & 2xyz+x\sin z \end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} -2xzdydz+z^2dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} -2xzdydz+\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3} z^2dxdy=0+0=0$$

解法二 $I=\iint\limits_{\Sigma} -2xzdydz+z^{2}dxdy$

$$\because \left(dydz,dzdx,dxdy\right)=e_{n}dS \parallel (-f_{x},-f_{y},1)$$

$$\therefore \frac{dydz}{-f_{x}}=\frac{dxdy}{1} \Rightarrow dydz=-f_{x}dxdy$$

$$4x^{2}+y^{2}+z^{2}=1 \Rightarrow f_{x}=\frac{-4x}{\sqrt{1-4x^{2}-y^{2}}}$$

$$dydz=\frac{4x}{\sqrt{1-4x^{2}-y^{2}}}dxdy$$

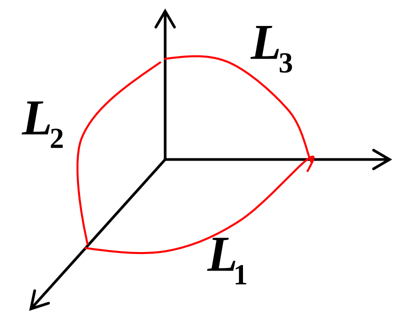
$$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma}(-2xz\frac{4x}{\sqrt{1-4x^{2}-y^{2}}}+z^{2})dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(-2x\sqrt{1-4x^{2}-y^{2}}\frac{4x}{\sqrt{1-4x^{2}-y^{2}}}+1-4x^{2}-y^{2})dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}(1-12x^{2}-y^{2})dxdy=0$$ （提示：广义极坐标变换）

解法三

$$I=\int_L (yz^2-\cos z)dx+2xz^2dy+(2xyz+x\sin z)dz$$



$$L_1: 4x^2+y^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z=0.$$

$$I_1=\int_{L_1}(-1)dx \;=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-1\right)dx=-\frac{1}{2}$$

$$L_2: 4x^2+z^2=1, x\ge 0, y=0, z\ge 0.$$

$$I_2=\int_{L_2}(-\cos z)dx+x\sin z dz \;=-x\cos z\Big|_{(0,1)}^{(\frac{1}{2},0)}=-\frac{1}{2}$$

$$L_3:\; y^2+z^2=1, x=0, y\ge 0, z\ge 0.$$

$$I_3=0$$

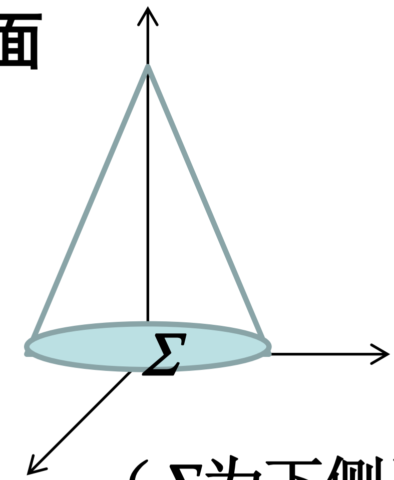
【例15】向量场$\vec{u}=(x^2y, ye^z, x\ln\left(1+z^2\right))$在点$P\left(1,1,0\right)$处的散度为 ______

【例16】 设数量场$u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则$div(gradu)=$ ______

【例17】 设向量场$\vec{F}=xy\vec{i}-yz\vec{j}+xz\vec{k}$,求$\mathrm{div}[\mathrm{rot}\vec{F}]\Big|_{(1,0,1)}$

【例18】设向量场$\vec{F}=\left(x-z,x^{3}+yz,-3xy^{2}\right)$,求其旋度场穿过曲面$S$指定一侧的通量. (S)是位于$xoy$平面之上的 曲面

$(S): z=2-\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 的上侧.



（Σ为下侧）

方法一 $rot\vec{F}=\left(-6xy-y,3y^{2}-1,3x^{2}\right)$

$$I=\iint\limits_{S}+\iint\limits_{\Sigma}-\iint\limits_{\Sigma}=\iiint\limits_{V}div\left(rot\vec{F}\right)dV-\iint\limits_{\Sigma}rot\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$=0-\iint\limits_{\Sigma}\left(-6xy-y\right)dydz+\left(3y^{2}-1\right)dzdx+3x^{2}dxdy$$

$$=-\iint\limits_{\Sigma}3xy^{2}dxdy=3\iint\limits_{D}x^{2}dxdy=\frac{3}{2}\iint\limits_{\Sigma}\left(x^{2}+y^{2}\right)dxdy$$

$$=\frac{3}{2}\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{0}^{2}\rho^{2}\rho d\rho$$

$$=12\pi$$

【例20】 设$f(x,y)$在$D: x^2+y^2\le 1$上有二阶连续的导数，且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$,证明：

$$I=\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\frac{\pi}{2e}$$

$$I=\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\int_0^1\rho d\rho\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta f_x+\rho\sin\theta f_y\right)d\theta$$

考虑积分$I'=\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta f_x+\rho\sin\theta f_y\right)d\theta$

令$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, C: x^2+y^2=\rho^2$

$$I'=\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta f_x d\theta+\rho\sin\theta f_y d\theta\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(f_x d\rho\sin\theta-f_y d\rho\cos\theta\right)$$

$$=\oint_C f_x dy-f_y dx=\iint_{D_C}\left(f_{xx}+f_{yy}\right)dxdy=\iint_{D_C}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\rho}e^{-r^2}rdr=\int_0^1\pi\left(1-e^{-r^2}\right)rdr=\frac{\pi}{2e}$$

六、综合问题

【例19】设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)=$【 B 】.

$(\mathrm{A})\,2f(2)$　　$(\mathrm{B})\,f(2)$　　$(\mathrm{C})\,-f(2)$　　$(\mathrm{D})\,0$

$$F(t)=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t (x-1)f(x)dx$$

$$F'(t)=(t-1)f(t)$$

【例21】在变力$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上第一卦限点$M(\xi,\eta,\zeta)$,问当$\xi,\eta,\zeta$取何值时，力$\vec{F}$所作的功最大？并求$W$的最大值.

解法一　令$x=\xi t, y=\eta t, z=\zeta t$

$$W=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2 dt=\xi\eta\zeta$$

$$L=\xi\eta\zeta+\lambda\left(1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}\right)$$

$$L_\xi=L_\eta=L_\zeta=0 \Rightarrow \frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}$$

$$L_\lambda=1-\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

$\Rightarrow \frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}=\frac{1}{3}$时，$W$最大

W最大$=\frac{\sqrt{3}abc}{4}$

【例21】在变力$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上第一卦限点$M(\xi,\eta,\zeta)$,问当$\xi,\eta,\zeta$取何值时，力$\vec{F}$所作的功最大？并求$W$的最大值.

解法二 $W = xyz\Big|_{(0,0,0)}^{(\xi,\eta,\zeta)} = \xi\eta\zeta$

W的最大值等价于$\dfrac{\xi^2}{a^2}\dfrac{\eta^2}{b^2}\dfrac{\zeta^2}{c^2}$的最大值

利用均值不等式即可求解