第二章 矩阵

第三节：逆矩阵与分块矩阵

董荣
数学与统计学院

作业：

习题2.3

(A) 1，2，5

第三节：逆矩阵与分块矩阵

1.逆矩阵的应用

2.分块矩阵的概念

3.分块矩阵的运算法则

4.分块对角矩阵的性质

利用逆矩阵证明Cramer法则：

Cramer法则 对于n个未知数n个方程的线性方程组$Ax=b$，如果它的系数行列式$D=|A|\neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中D_j是将D的第j列元素依次用右端的常 数项替换所得到的n阶行列式.

证 若$|A|\neq 0$，则A可逆. $Ax=b\Rightarrow x=A^{-1}b$

这就是说$A^{-1}b$是方程组的一个解.

如果$x=c$是方程组的一个解，那么 $Ac=b\Longrightarrow A^{-1}(Ac)=A^{-1}b.$

即 $c=A^{-1}b.$

这就是说解$x=A^{-1}b$是唯一的.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}A^*b = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{1}{D}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj})$$

又 $D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}$

故 $x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1,2,\cdots,n.$

利用逆矩阵求解线性方程组、矩阵方程

例：利用逆矩阵来求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解 利用逆矩阵来求解线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这里$\det(\boldsymbol{A}) = 1 \neq 0$，故$\boldsymbol{A}$可逆，于是，我们有

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

例： 解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$， $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

例： 设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&1&4\end{pmatrix}$，且满足 $AX=A+2X$，求X.

解 移项，$(A-2I)X=A$

$$A-2I=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\1&1&2\end{pmatrix},\quad |A-2I|=-2\neq 0,\quad A-2I\text{可逆},$$

$$X=(A-2I)^{-1}A,\ (A-2I)^{-1}=\frac{1}{|A-2I|}(A-2I)^*=\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&2&0\\2&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$X=\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&2&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\1&1&0\\1&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&-1&0\\-2&1&2\end{pmatrix}.$$

当A,B为可逆矩阵时，矩阵方程（其中X为未知矩阵）

$$AX=C,\qquad XB=D,\qquad AXB=F$$

的解分别为 $X=A^{-1}C,\ X=DB^{-1},\ X=A^{-1}FB^{-1}$

例：设方阵A、B均可逆，$k\neq 0$，试证明

$$\boxed{AA^* = A^*A = |A|E}$$

(1) A^*可逆,且$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \dfrac{A}{|A|}$ $\Leftarrow$ $\dfrac{A}{|A|}A^* = A^*\dfrac{A}{|A|} = E, A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$

$(A^{-1})^* = A\dfrac{1}{|A|}$

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$ $\Leftarrow$ $(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A|\dfrac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}A^*$

(3) $|A^*| = |A|^{n-1}$ $\Leftarrow$ 推论1

(4) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ $\Leftarrow$ $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\dfrac{A}{|A|}$

(5) $(AB)^* = B^*A^*$

$\Leftarrow$ $(AB)^* = |A||B|(B^{-1}A^{-1}) = |B|B^{-1}|A|A^{-1} = B^*A^*$

第三节：逆矩阵与分块矩阵

1.逆矩阵的应用

2.分块矩阵的概念

3.分块矩阵的运算法则

4.分块对角矩阵的性质

子矩阵

把矩阵的若干行和若干列相交处的元素按原来的相对次序所构成的矩阵，称为原矩阵的**子矩阵**。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$的子矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \end{bmatrix}$$

子矩阵

把矩阵的若干行和若干列相交处的元素按原来的相对次序所构成的矩阵，称为原矩阵的**子矩阵**。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 8 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 9 & 5 & 2\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$的一些子矩阵：

$$\begin{bmatrix}1 & 8\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-1 & 8 & 3\\ 4 & 5 & 7\end{bmatrix}$$

子矩阵

把矩阵的若干行和若干列相交处的元素按原来的相对次序所构成的矩阵，称为原矩阵的**子矩阵**。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

A的子矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

前主子矩阵

方阵$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, 它的左上角的各阶方阵

$$[a_{11}] \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots$$

称为方阵$\boldsymbol{A}$的**前主子矩阵**.

分块矩阵

用一些横线和纵线将矩阵分划成若干个矩形的**子块**（都是子矩阵），以这些子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&2&5\\0&1&0&3&-2\\0&0&1&-1&6\\\hline 0&0&0&4&0\\0&0&0&0&5\end{array}\right]$$

分块矩阵

用一些横线和纵线将矩阵分划成若干个矩形的**子块**（都是子矩阵），以这些子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**.

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{I}_3 \\ A = \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O}_{2\times 3} \quad \boldsymbol{A}_{22} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{O}_{2\times 3} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

按列分块

$$A = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5]$$

分块对角矩阵(准对角方阵)

主对角线上各子块都为**方阵**，其他部分子块为零，称这样的**方阵**为**分块对角矩阵**或**准对角方阵**.

例：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&-2&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&O&O\\O&\boldsymbol{A}_2&O\\O&O&\boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}$$

第三节：逆矩阵与分块矩阵

1.逆矩阵的应用

2.分块矩阵的概念

3.分块矩阵的运算法则

4.分块对角矩阵的性质

分块矩阵的加法及数与分块矩阵的乘法：

对同型矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$作同样的划分，得分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{bmatrix}$$

按照矩阵的加法及数与矩阵的乘法的定义，有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}+\boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}+\boldsymbol{B}_{st}\end{bmatrix},\quad k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}\quad (k\text{为常数})$$

分块矩阵的转置：

$$A^T=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}$$

先大转置，再小转置

例如：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\quad A^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}$$

分块矩阵的乘法：

设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rt} \end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{A}_{i1}, \boldsymbol{A}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{A}_{ir}$的列数分别等于$\boldsymbol{B}_{1j}, \boldsymbol{B}_{2j}, \cdots, \boldsymbol{B}_{rj}$的行数

$(i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t)$，则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{st} \end{bmatrix}$$

顺序不可以换

其中$\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ir}\boldsymbol{B}_{rj}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$

$(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t)$

对于矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,

(1)将$\boldsymbol{B}$**按列分块**，有$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{B}_n]$,其中$\boldsymbol{B}_j=\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix}_{s\times 1}$,$j=1,2,\cdots,n$

则有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}_1 \quad \boldsymbol{B}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{B}_n]=[\boldsymbol{AB}_1 \quad \boldsymbol{AB}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{AB}_n]$

(2)将$\boldsymbol{A}$**按行分块**，有$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}$,其中$\boldsymbol{A}_i=[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{is}]_{1\times s}$,$i=1,2,\cdots,m$

则有$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$

例：设$\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,3)$均为3维列向量，方阵$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，

$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]$, 已知$\det(\boldsymbol{A})=a$，求$\det(\boldsymbol{B})$.

解 由矩阵的乘法可得

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}_1+\mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix},$$

则$\boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right]$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{3}\end{bmatrix}=\boldsymbol{AP}$$

$$\det(\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{P})=12a$$

第三节：逆矩阵与分块矩阵

1.逆矩阵的应用

2.分块矩阵的概念

3.分块矩阵的运算法则

4.分块对角矩阵的性质

分块对角矩阵的乘积

设有两个分块对角矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix}$$

其中A_i, B_i为同阶方阵，$i=1,2,\ldots,m$，则有

$$AB=\begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_mB_m \end{bmatrix} \qquad A^n=\begin{bmatrix} A_1^n & & & \\ & A_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^n \end{bmatrix}$$

例：求$\boldsymbol{A}^2$，其中矩阵$\boldsymbol{A}$为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&-2&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&0&8\end{bmatrix}$$

解 将$\boldsymbol{A}$分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&-2&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&O&O\\O&\boldsymbol{A}_2&O\\O&O&\boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^2&O&O\\O&\boldsymbol{A}_2^2&O\\O&O&\boldsymbol{A}_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-5&-6&0\\0&0&21&-14&0\\0&0&0&0&64\end{bmatrix}$$

例：设$\boldsymbol{A}_{n\times n},\boldsymbol{B}_{m\times m}$均为方阵，$\boldsymbol{C}$为任意的$n\times m$矩阵，问分块上三角形矩阵$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$何时可逆？当可逆时，求其逆矩阵。

解 由于$\det(\boldsymbol{D})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$，所以，矩阵$\boldsymbol{D}$可逆$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均可逆

设矩阵$\boldsymbol{D}$的逆为$\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{bmatrix}$，其中$\boldsymbol{X}_{11}$是$n$阶方阵，$\boldsymbol{X}_{22}$是$m$阶方阵

根据逆矩阵的定义，有$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$

即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{I}_n$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{12}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{I}_m$

从而 $\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$， $\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I}_m=\boldsymbol{B}^{-1}$，

$\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{X}_{12}=-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$，

所以$\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$.

当$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$时,$\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$

分块对角矩阵的行列式与逆矩阵

设$\boldsymbol{A}$为分块对角矩阵（未写出的子块都是零子块）

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m\end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}_1)\det(\boldsymbol{A}_2)\cdots\det(\boldsymbol{A}_m)$$

若$\det(\boldsymbol{A}_i)\neq 0$，$i=1,2,\cdots,m$，则 $\boldsymbol{A}$可逆，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1{}^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2{}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m{}^{-1}\end{bmatrix}$$

$A_i\ (i=1,2,\cdots s)$均为可逆方阵.

$$A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_s & & \end{pmatrix},\quad \text{则}\ A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_s^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix};$$

例：设 $A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix},\quad |A_1|=1\neq 0, |A_2|=3\neq 0,$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix},$$

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix},$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&1/3&2/3\\0&0&-1/3&1/3\end{pmatrix}$$

例: 设 $A=\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \hline a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$, 其中$a_i \neq 0$, 求 A^{-1}.

解 $A=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=a_n^{-1}$,

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

例：设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，求 $|A^8|, A^4.$

解 令 $A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，

$$A^8=\begin{pmatrix} A_1^8 & O \\ O & A_2^8 \end{pmatrix}，所以 |A^8|=|A_1^8||A_2^8|=|A_1|^8|A_2|^8=(-25)^8\cdot 4^8=10^{16}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^4=\begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix}, \quad A_1^2=\begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}, \Rightarrow A_1^4=\begin{pmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 5^4 \end{pmatrix}, \\ A_2=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^4=2^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^4 & 0 \\ 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}, \end{array}\right\} \quad A^4=\begin{pmatrix} 5^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix},$$