第五章 留数及其应用

§5.1 孤立奇点

一、引入

二、零点

三、孤立奇点

四、孤立奇点的分类

五、如何进行孤立奇点的分类

六、如何判断极点的阶数

一、引入

- 本章重点解决闭路积分问题. 如图, 考虑积分 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$.

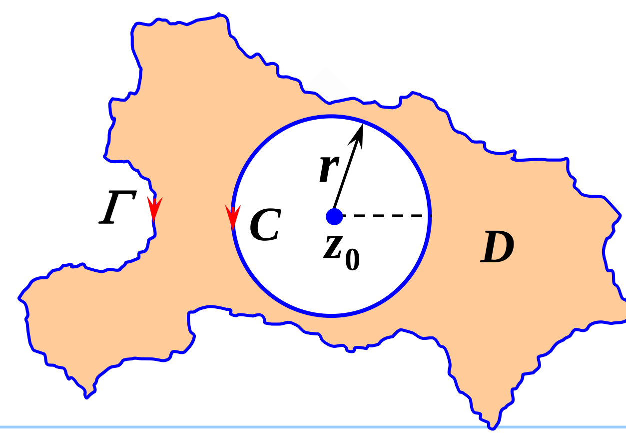
(1) 若 $f(z)$ 在 Γ 上连续, 在 D 上解析，则 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(2) 若 $f(z)$ 在 D 上有唯一的奇点 z_0, 则 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C} f(z)\mathrm{d}z$.

此时, 将函数 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内进行洛朗展开.

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 \cdots,$$

由 $\oint_{C} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1, \\ 0, & n \neq 1, \end{cases}$



则积分 $\oint_{\Gamma} f(z)\,dz$ “容易？” 得到。

二、零点

1. 零点的定义

定义 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析,

(1) 若 $f(z_0)=0$,则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的**零点**;

(2) 若 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$,

则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 **m 阶零点**.

例如, $z=0$ 是函数 $f(z)=z(z-1)^3$ 的一阶零点,

$z=1$ 是函数 $f(z)=z(z-1)^3$ 的三阶零点.

注意: 对于不恒为零的解析函数, 其零点是孤立的.

即在零点的一个小邻域内, 函数无其它零点.

2. 零点阶数的判定

- 充要条件（如何判断零点的阶数？）

定理 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点的充要条件是

$$f^{(n)}(z_0)=0 \ \ (n=0,1,2,\cdots,m-1), \quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

证 (必要性)　如果 z_0 为 $f(z)$的 m阶零点

由定义: $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $\varphi(z_0)\neq 0$,

设 $\varphi(z)$在z_0的泰勒展开式为:

$$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots,$$

其中 $c_0=\varphi(z_0)\neq 0$,

从而$f(z)$在z_0的泰勒展开式为

$$f(z)=c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+c_2(z-z_0)^{m+2}+\cdots$$

展开式的前m项系数都为零,由泰勒级数的系数

公式知: $f^{(n)}(z_0)=0,(n=0,1,2,\cdots m-1);$

并且 $\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!}=c_0\neq 0.$

充分性证明略.

例1. 求下列函数的零点及阶数

$$(1)\ f(z)=z^3-1;\quad (2)\ f(z)=\frac{(2z+3)^3}{1+e^z}$$

解： $(1)\ f(z)=z^3-1=(z-1)(z^2+z+1),$

故 $z=1$ 为 $f(z)$ 的一阶零点。

$$(2)\ f(z)=\frac{(2z+3)^3}{1+e^z}=[z-(-\frac{3}{2})]^3\frac{8}{1+e^z}$$

故 $z=-\dfrac{3}{2}$ 为 $f(z)$ 的三阶零点。

例2. 判断0是$f(z)=z-\sin z$的几阶零点

解：方法一 $f(0)=0,\quad f'(0)=1-\cos z\big|_{z=0}=0,$

$$f''(0)=\sin z\big|_{z=0}=0,\quad f'''(0)=\cos z\big|_{z=0}=1\neq 0,$$

$z=0$ 是 $f(z)$的三阶零点。

方法二 $f(z)=z-(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots)$

$$=z^3(\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}z^2+\cdots)$$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的三阶零点。

例2. 求下列函数的零点及阶数

(1) $f(z)=1-\cos z$;　(2) $f(z)=e^z-z-1$.

解：(1) $f(z)=1-\cos z$

$$=1-(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots)=z^2(1-\frac{1}{4!}z^2+\cdots)$$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶零点。

(2) $f(z)=e^z-z-1=(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots)-z-1$

$$=z^2(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2\cdots)$$

$z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶零点。

三、孤立奇点

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的奇点，且存在 $\delta > 0$，使得 $f(z)$ 在去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 孤立奇点.

例如，$z = 0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

$z = -1$ 是函数 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点.

注意：孤立奇点一定是奇点，

但奇点不一定是孤立奇点.

例3 指出函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin\frac{1}{z}}$ 在点 $z=0$ 的奇点特性.

(1) 令 $\sin\frac{1}{z}=0$, $\Rightarrow \frac{1}{z}=k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\cdots$,

$\Rightarrow z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ 为孤立奇点;

(2) $z=0$ 也是奇点，但不是孤立奇点。

因为在 $z=0$ 的不论怎样小的去心邻域内，总有 $f(z)$的奇点存在，所以 $z=0$不是孤立奇点.

四、孤立奇点的分类

根据函数在其孤立奇点的去心邻域的洛朗级数对奇点分类

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内展开为洛朗级数：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，

(1) 若 $\forall n<0$，有 $a_n=0$，（ 即不含负幂项 ）

则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内

展开为洛朗级数：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$,

(2) 若 $\exists N<0$, 有 $a_N \neq 0$,

且 $\forall n<N$, 有 $a_n=0$, （ 即含有限个负幂次项 ）

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 N 阶极点;

特别地， 当 $N=1$ 时， 称 z_0 为 $f(z)$ 的简单极点.

(3) 若 $\forall N<0$, $\exists n<N$, 有 $a_n \neq 0$, (即含无限个负幂次项)

则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

定义 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内展开为洛朗级数：$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$,

小结
$$f(z)=\underbrace{\cdots\ \cdots}_{\text{本性奇点}}+\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{N\text{ 阶极点}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}_{\text{可去奇点}},$$

(1) <u>可去奇点</u> 不含负幂次项;

(2) <u>N 阶极点</u> 含有限多的负幂次项, 且最高负幂次为N ;

(3) <u>本性奇点</u> 含有无穷多的负幂次项。

五、如何进行孤立奇点的分类

$$f(z)=\underbrace{\cdots\ \cdots}_{\text{本性奇点}}+\underbrace{\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{N\text{阶极点}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}_{\text{可去奇点}},$$

方法 (1) **可去奇点** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$ **(常数)**;

(2) **极点** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$; **(该条件只能判断是极点)**

N 阶极点 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^N}[a_{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)+\cdots]$;

(3) **本性奇点** $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为 ∞.

注 在求 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 时，可使用**洛必达法则**.

第五章 留数及其应用

例4 判断函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的奇点的类型

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点，由 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$，

可知，$z=0$是 $f(z)$ 的可去奇点。

注 将$f(z)$在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$$

$$=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots,\ (0<|z|<+\infty).$$ **(不含负幂次项)**

如果约定 $f(z)$在 $z=0$点的值为 1，则$f(z)$在$z=0$点就解析了，因此称 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点。

第五章 留数及其应用

例5 判断函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 的奇点的类型

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点，考察极限 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}}=0$,

可知, $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在且不为 ∞.

因此，$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。

注 将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

(含无穷多个负幂次项)

例6 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ 的奇点的类型

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点，由 $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{e^z}{(z-1)^2}=\infty$，

可知，$z=1$ 是 $f(z)$ 的极点。

注 将 $f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{e\cdot e^{z-1}}{(z-1)^2}=\frac{e}{(z-1)^2}\left(1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{e}{(z-1)^2}+\frac{e}{z-1}+\frac{e}{2!}+\frac{e}{3!}(z-1)+\cdots,\ (0<|z|<+\infty).$$

(含有限个负幂次项, 且最高负幂次为 2)

- 可见，$z=1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

第五章 留数及其应用

第五章 留数及其应用

例7 判断函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ 的奇点的类型

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点， 由 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{z^3}=\infty$，

可知， $z=0$ 是 $f(z)$ 的极点。

注 将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!\,z}+\frac{1}{4!}z-\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

含有限个负幂次项
且最高负幂次为 3

- 可见， $z=0$ 为 $f(z)$ 的三阶极点。

问题 是否还有其它办法来判断极点的阶数呢？

六、如何判断极点的阶数

1.若 $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^N}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点的邻域内解析，

且 $\varphi(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 $f(z)$ 的 N 阶极点。

事实上，z_0为 $f(z)$ 的N 阶极点的充要条件(即定义)为:

$$f(z)=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\cdots\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^N}[a_{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)+\cdots]=\frac{1}{(z-z_0)^N}\varphi(z),$$

其中，$\varphi(z)$在 z_0 点的邻域内解析，且 $\varphi(z_0)=a_{-N}\neq 0$.

2. 若 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, 且 z_0为 $\varphi(z)$的**m**阶零点, 为 $\psi(z)$的**n**阶零点，即 $f(z)=\dfrac{(z-z_0)^m\varphi_1(z)}{(z-z_0)^n\psi_1(z)}=\dfrac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^n}Q(z)$,

则 (1) 当 $m\geq n$ 时，z_0为 $f(z)$ 的可去奇点。

(2) 当 $m<n$ 时, z_0为 $f(z)$ 的$(n-m)$ 阶极点。

特别地，若 $f(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$

则 $\psi(z)$ 的n阶零点就是 $f(z)$的n阶极点.

例8 判断函数 $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点的类型.

解 由于$f(z)=\dfrac{(z+1)(z-1)}{(z+1)(z-1)^2}$,

故 $z=-1$是 $f(z)$ 的可去奇点， $z=1$是 $f(z)$ 的一阶极点.

例9 判断函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$ 的奇点的类型.

解 由于 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)^2(z+i)^2}$,

故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点， $z=\pm i$ 是 $f(z)$的二阶极点.

第五章 留数及其应用

例10 判断函数 $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$ 的奇点的类型.

解 令 $z_k=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$

由于 z_k 是 $\cos z$ 的一阶零点，故 z_k 是 $f(z)$ 的一阶极点.

例11 判断函数 $f(z)=\dfrac{\cos z}{\sin^2 z}$ 的奇点的类型。

解 令 $z_k=k\pi,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,$

由于 z_k 是 $\sin^2 z$ 的二阶零点，但不是 $\cos z$ 的零点，

故 z_k 是 $f(z)$ 的二阶极点。

例12 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z-(1+z)}{z^4}$ 的奇点的类型.

解 由于 $z=0$ 是 z^4 的四阶零点,

且是 $e^z-(1+z)$ 的二阶零点，故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点.

注 直接利用洛朗级数来判断奇点类型的方法最好也能够掌握

将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\left[\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{5!}z^5+\cdots\right)-(1+z)\right]$$

$$=\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}z\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

- 因此， $z=0$ 为 $f(z)$ 的二阶极点.

例13 判断函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z-\sin z}$ 的奇点的类型.

解 由于 $z=0$ 是 $z-\sin z$ 的三阶零点，

且是 e^z-1 的一阶零点，故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点.

例14 判断函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(e^{z^2}-1)}$ 的奇点的类型.

解 由于 $z=0$ 是 $z(e^{z^2}-1)$ 的三阶零点，

且是 $\sin z$ 的一阶零点，故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点.

- 什么情况下会出现本性奇点呢 ？

第五章 留数及其应用

附：不恒为零的解析函数的零点是孤立的

设 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$

由 $\varphi(z)$ 在 z_0 处解析，有 $\varphi(z)$ 在 z_0 处连续，

令 $\varepsilon=\dfrac{|\varphi(z_0)|}{2}$，则必存在 $\delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

有 $|\varphi(z)-\varphi(z_0)|<\varepsilon=\dfrac{|\varphi(z_0)|}{2}$， $\Rightarrow$ $|\varphi(z)|\geq\dfrac{|\varphi(z_0)|}{2}\neq 0$，

又当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，$(z-z_0)^m\neq 0$，

故 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ 在 z_0 的去心邻域内不为零，

即得不恒为零的解析函数的零点是孤立的。