第十四周习题课

一、积分/反常积分计算

利用已知 $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$ ，计算以下 1-3 题：

1．计算 $J_n = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$ 。 【比较前面第 1 题】

解：首先 $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \overset{t=x^2}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

以下利用无穷积分的分部积分计算：

$$J_n = -\int_0^{+\infty} x^{2n-1} d(\frac{1}{2}e^{-x^2}) = -\frac{e^{-x^2}}{2} x^{2n-1} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (2n-1) e^{-x^2} x^{2n-2} dx$$

$$= (n-\frac{1}{2}) J_{n-1} = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) J_{n-2} = \cdots$$

$$= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) \cdots \frac{1}{2} J_0 = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} 。 \qquad \square$$

3． $\int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx$

解：再次利用瑕积分换元以及已知积分值：

$$\int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx \overset{t=-\ln x}{=} \int_{+\infty}^0 t^{-\frac{1}{2}} (-e^{-t}) dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi} 。 \qquad \square$$

6． $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$

解：试用无穷积分的分部积分计算：

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = -\int_0^{+\infty} x d(\frac{1}{1+e^{-x}}) = \frac{x}{1+e^{-x}} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} ,$$

注意右端 2 项都发散，分部积分公式失效。

考虑先用分部积分法求出不定积分（原函数），再用广义 N-L 公式：

$$\int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = -\int x d(\frac{1}{1+e^{-x}}) = \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{dx}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{x}{1+e^{-x}} - \int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(e^x+1) + C ,$$

注意 $\frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(e^x+1) = \frac{x}{1+e^{-x}} - x - \ln(1+e^{-x})$

$$= -\frac{e^{-x}x}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) \to 0 \quad (x \to +\infty)$$

由广义 N-L 公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x} dx}{(1+e^{-x})^2} = \left[-\frac{e^{-x}x}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) \right]_0^{+\infty} = \ln 2 。 \qquad \square$$

二、积分与几何

1. 设曲线 $y=f(x)$ 由 $x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du$ 及 $y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\cos 2u du$ 确定，求该曲线在 $t=\pi/2$ 的点处的法线方程（法线与切线互相垂直）。

解：计算 $x'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\sin\frac{u}{3}du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\sin\frac{u}{3}du+\sin\frac{t}{3}.$

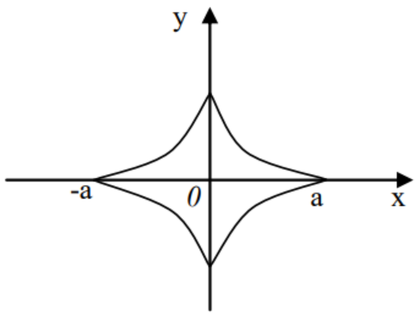
$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\cos 2u du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-u}\cos 2u du+\cos 2t.$$

由此 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/2}=\frac{y'(\pi/2)}{x'(\pi/2)}=\frac{\cos\pi}{\sin(\pi/6)}=\frac{-1}{1/2}=-2$，

即曲线在 $t=\pi/2$ 点处的切线斜率为 -2，而法线与切线垂直，其斜率应为 $\frac{1}{2}$，

所以法线方程为 $y-y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[x-x(\frac{\pi}{2})]$，

注意 $x(\frac{\pi}{2})=y(\frac{\pi}{2})=0$，故法线方程为 $y=\frac{x}{2}$。 □



3. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的弧长（$a>0$）。

解：将曲线写成参数形式:

$$x=a\cos^{3}t，\quad y=a\sin^{3}t，\quad 0\le t\le 2\pi，$$

则 $$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^{2}t\sin t，\quad \frac{dy}{dt}=3a\sin^{2}t\cos t，$$

$$dl=\sqrt{[\frac{dx}{dt}]^{2}+[\frac{dy}{dt}]^{2}}\,dt=3a\,|\sin t\cos t|\,dt，$$

积分并利用函数的周期性和对称性，

$$l=3a\int_{-\pi}^{\pi}|\sin t\cos t|\,dt=12a\int_{0}^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt=6a\int_{0}^{\pi/2}\sin 2t\,dt=6a。$$

三、线性常微分方程

2. 如果已知 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ 为 n 阶线性方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)，\quad x\in I$$

的 n+1 个线性无关解（参见书上习题 7.4），求这个方程的通解 $y(x)=$?

解：$z_i=y_i-y_{n+1}$，$i=1,2,\cdots,n$，都是齐次方程的解，

它们必线性无关，否则存在不全为零的 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}c_i z_i=\sum_{i=1}^{n}c_i(y_i-y_{n+1})=0，\text{也即}\sum_{i=1}^{n}c_i y_i-(\sum_{i=1}^{n}c_i)y_{n+1}=0，$$

这与题设 $y_1,y_2,\cdots,y_{n+1}$ 线性无关矛盾。

因此原方程通解可以写为

$$y=c_1z_1+c_2z_2+\cdots+c_nz_n+y_{n+1}，$$

也即

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n-(c_1+c_2+\cdots+c_n-1)y_{n+1}$$ □

1. 求方程 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=0$ 的通解。

解：这是二阶线性齐次方程，只需找到 2 个线性无关解，再线性组合即可。

首先容易观察得到 $y_1=x$ 是一个特解；

使用常数变异法，令 $y_2=u(x)y_1$，代入方程得

$$(xu''+2u')+\frac{x}{1-x}(xu'+u)-\frac{1}{1-x}(xu)=0，$$

整理得 $xu''+(2+\frac{x^2}{1-x})u'=0$（可降阶二阶方程），

解得 $u=\frac{e^x}{x}$，故 $y_2=e^x$，

所以原方程通解为 $y=C_1x+C_2e^x$。 □

2. 求 $x=x(t)$ 满足下列常系数线性齐次方程：

（1） $x'''-5x''+8x'-4x=0$

解：特征方程为 $\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$，

其根为 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$（二重）；

根据常系数方程解的结构，得到基本解组

$$x_1=e^t, x_2=e^{2t}, x_3=te^{2t},$$

通解 $x=C_1e^t+(C_2+C_3t)e^{2t}$。 □

（3）$x'''+x''-2x=0$

解：特征方程 $\lambda^3+\lambda^2-2=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+2)=0$

解得 $\lambda=1$ 以及 $\lambda=-1\pm i$，

基本解组为

$$x_1=e^t,\ x_{2,3}=e^{(-1\pm i)t}=e^{-t}(\cos t\pm i\sin t),$$

或组合为实数值基本解组

$$x_1=e^t,\ \bar{x}_2=e^{-t}\cos t,\ \bar{x}_3=e^{-t}\sin t,$$

通解 $x=C_1e^t+(C_2\cos t+C_3\sin t)e^{-t}$。 □

3．求解下列常系数线性非齐次方程：

（2）$y''+3y'+2y=3\sin x$

解：特征方程 $\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，

可见齐次方程的基本解组是

$$y_1=e^{-x},\ y_2=e^{-2x};$$

下面用待定系数法求非齐次方程的一个特解：

令 $\bar{y}=a\cos x+b\sin x$ 是原方程一个特解，a,b 待定，则

$$\bar{y}' = -a\sin x + b\cos x\text{，}\quad \bar{y}'' = -a\cos x - b\sin x\text{，}$$

代入方程得

$$(-a\cos x - b\sin x) + 3(-a\sin x + b\cos x) \\ + 2(a\cos x + b\sin x) = 3\sin x$$

整理得 $(a+3b)\cos x + (b-3a)\sin x = 3\sin x$，

也即 $a + 3b = 0, b - 3a = 3$，

解得 $a = -\dfrac{9}{10}, b = \dfrac{3}{10}$，所以 $\bar{y} = \dfrac{-9\cos x + 3\sin x}{10}$。

综上得到原方程通解 $y = \dfrac{3\sin x - 9\cos x}{10} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$。

（3）$x'' - 4x' + 4x = 1 + e^t + e^{2t}$

解：特征方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$，$\lambda_{1,2} = 2$

因此齐次方程基本解组是

$$x_1 = e^{2t},\ x_2 = te^{2t}\text{；}$$

以下将原方程分解为 3 个方程分别求特解：

对于 $x'' - 4x' + 4x = 1$，观察即得到 $x = \dfrac{1}{4}$，

对于 $x'' - 4x' + 4x = e^t$，考虑 $x = ae^t$，解得 $a = 1$，$x = e^t$，

对于 $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$，考虑 $x = bt^2 e^{2t}$，解得 $b = \dfrac{1}{2}$，$x = \dfrac{1}{2}t^2 e^{2t}$，

利用线性方程叠加原理，上面 3 个方程的解叠加得到原非齐次方程一个特解

$$\bar{x} = \frac{1}{4} + e^t + \frac{1}{2}t^2 e^{2t}\text{；}$$

综上得原方程通解

$$x = (C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2)e^{2t} + e^t + \frac{1}{4}\text{。} \qquad \square$$