高 2016 级高二上期周练（二）

一 选择题，共六题

1. 圆 $2x^2+2y^2-4ax+12ay+16a^2=0(a<0)$ 的周长等于 ( )

A. $2\sqrt{2}a$ B. $-2\sqrt{2}a$ C. $2a^2\pi$ D. $-2\sqrt{2}a\pi$

2. 已知直线 $ax+by+c=0(abc\neq 0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，则三条边长分别为 $|a|,|b|,|c|$ 的三角形是 ( )

A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不存在

3. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数. 若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leq f(x-2)\leq 1$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $[-2,2]$ B. $[-1,1]$ C. $[0,4]$ D. $[1,3]$

4. 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$, 则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最大值是 ( )

A. $\sqrt{5}+3$ B. $\sqrt{5}+14$ C. $-\sqrt{5}+3$ D. $-\sqrt{5}+14$

5. 已知集合 $M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2},y\neq 0\}, N=\{(x,y)|y=x+b\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$, 则实数 b 的取值范围是 ( )

A. $[-3\sqrt{2},3\sqrt{2}]$ B. $[-3,3]$ C. $(-3,3\sqrt{2}]$ D. $[-3\sqrt{2},3)$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x-1|, & x\in(-\infty,2)\\ \frac{1}{2}f(x-2), & x\in[2,+\infty)\end{cases}$, 则函数 $g(x)=xf(x)-1$ 的零点个数为 ( )

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

二 填空题，共三题

7. 已知 $P(3,0)$ 为圆 $C:x^2+y^2-8x-2y+12=0$ 内一点，则过 P 点的最短弦所在直线方程是_________, 过 P 点的最长弦所在直线方程是_________.

8. 经过 $A(6,5),B(0,1)$ 两点，且圆心在直线 $3x+10y+9=0$ 上的圆的方程是_________

9. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=|x+\frac{4}{x}-a|+a$, 在区间 $[1,4]$ 上的最大值是 5，则 a 的取值范围是_________.

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	B	D	A	C	C

7.$\underline{x+y-3=0}$,$\underline{x-y-3=0}$ 8.$\underline{(x-7)^2+(y+3)^2=65}$ 9.$\underline{(-\infty,\frac{9}{2}]}$

三 解答题, 共四题

10. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x(x\in\mathbf{R})$.

(1) 求 $f(\frac{2\pi}{3})$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

解:(1) 因为 $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=-\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$,

所以 $f(\frac{2\pi}{3})=-2\sin\frac{3\pi}{2}=2$;

(2) 由 (1) 得 $f(x)$ 的最小正周期为 π,

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$,

解得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi]\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

11. 已知点 $M(3,1)$,直线 $ax-y+4=0$ 及圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

(1) 求过 M 点的圆 C 的切线方程;

(2) 若直线 $ax-y+4=0$ 与圆 C 相切,求 a 的值;

(3) 若直线 $ax-y+4=0$ 与圆 C 相交于 A,B 两点,且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 求 a 的值;

解:(1)因为 $(3-1)^2+(1-2)^2>4$,

所以点 M 在圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 外,

当斜率不存在时,$x=3$ 满足与圆 C 相切,

当斜率存在时,设切线方程为 $y-1=k(x-3)$, 即 $kx-y-3k+1=0$,

由 $\frac{|k-2+1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, 得 $k=\frac{3}{4}$.

故所求的切线方程为 $x=3$ 或 $3x-4y-5=0$.

(2) 由直线 $ax-y+4=0$ 与圆 C 相切,

所以 $\frac{|a-2+4|}{\sqrt{1+a^2}}=2$, 解得 $a=0$ 或 $a=\frac{4}{3}$.

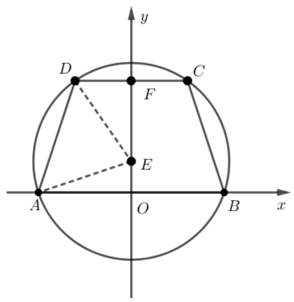
(3) 圆心到直线的距离 $d=\frac{|a+2|}{\sqrt{1+a^2}}$, 弦长 $L=2\sqrt{3}, r=2$,

由 $r^2=d^2+(\frac{L}{2})^2$, 得 $a=-\frac{3}{4}$.

12. 如图所示,等腰梯形 $ABCD$ 的底边 AB 在 x 轴上,顶点 A 与顶点 B 关于原点 O 对称,且底边 AB 和 CD 的长分别为 6 和 $2\sqrt{6}$, 高为 3.

(1) 求等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆 E 的方程;

(2) 若点 N 的坐标为 $(5,2)$,点 M 在圆 E 上运动, 求线段 MN 的中点 P 的轨迹方程.



解：(1) 连接 AE, DE, 设圆的半径为 r，设 CD 与 y 轴交于点 F，

$EF=\sqrt{r^2-6}, OE=\sqrt{r^2-9}, \sqrt{r^2-6}+\sqrt{r^2-9}=3,$

解得 $r=\sqrt{10}$, 所以 $OE=1$，

所以圆 E 的方程为 $x^2+(y-1)^2=10.$

(2) 设 $P(x,y), M(2x-5,2y-2)$, 因为点 M 在圆上运动，所以可把 M 代入圆的方程中，得:

$(2x-5)^2+(2y-3)^2=10$ 即 $x^2+y^2-5x-3y+6=0.$

故 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2-5x-3y+6=0.$

13. (选做题) 已知直线 $l_1: mx-y=0, l_2: x+my-m-2=0.$

(1) 求证：对任意的实数 m, l_1 和 l_2 的交点 M 总在一个定圆上；

(2) 若 l_1 与 (1) 中定圆的另一个交点为 P_1, l_2 与 (1) 中定圆的另一个交点为 P_2, 求当实数 m 取值变化，$\triangle MP_1P_2$ 的面积取最大值时，直线 l_1 的方程.

证明：(1) 由题意可得

$$\begin{cases} mx-y= & 0 \\ x+my-m-2= & 0 \end{cases}$$

消去 m 可得 $x^2+y^2-2x-y=0$. 方程表示一个以 $(1,\dfrac{1}{2})$ 为圆心，$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的圆，故得证.

(2) 由题可知，直线 l_1, l_2 分别恒过定点 $(0,0), (2,1)$, 并且两定点都在圆上，

故 $P_1(0,0), P_2(2,1)$

因为 P_1P_2 是圆 C 的直径，

当且仅当圆心 $C(1,\dfrac{1}{2})$ 到 l_1 的距离等于 C 到 l_2 的距离时，$\triangle MP_1P_2$ 的面积取最大值，所以

$$\frac{|m-\frac{1}{2}|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|\frac{1}{2}m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

解得:$m=3$ 或 $m=-\dfrac{1}{3}$,

所以直线 l_1 的方程为 $3x-y=0$ 或 $x+3y=0$.