

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“Калининградский государственный технический университет”  
(ФГБОУ ВО “КГТУ”)

Кафедра систем управления и вычислительной техники

Курсовая работа по дисциплине: Дискретная математика  
Вариант №70

Работу проверил:

доцент, профессор,  
к.т.н. Иванов В. Е.  
с оценкой: \_\_\_\_\_  
подпись: \_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Работу выполнил:

студент группы 18-ВТ  
Подковыров Д.Р.  
подпись: \_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Калининград  
2020г.

## Содержание

Расчетно-графическая работа № 1.....	3
Расчетно-графическая работа № 2.....	22
Расчетно-графическая работа № 3.....	30
Расчетно-графическая работа № 4.....	52
Расчетно-графическая работа № 5.....	62
Расчетно-графическая работа № 6.....	76
Расчетно-графическая работа № 7.....	88
Список используемой литературы.....	99

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“Калининградский государственный технический университет”  
(ФГБОУ ВО “КГТУ”)

Кафедра систем управления и вычислительной техники

Дисциплина: Дискретная математика

**Расчетно-графическая работа № 1**  
«Расчет числовых характеристик графов»  
Вариант №70

Работу проверил:

доцент, профессор,  
к.т.н. Иванов В. Е.

с оценкой: \_\_\_\_\_

подпись: \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Работу выполнил:

студент группы 18 -ВТ  
Подковыров Д.Р.

подпись: \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Калининград  
2020г.

## Содержание

<b>1. Задание на расчетно-графическую работу №1 .....</b>	<b>3</b>
<b>1.1. Расчет числовых характеристик графов.....</b>	<b>3</b>
<b>1.2. Расчет количества вершин <math>n(G)</math> графа <math>G</math> .....</b>	<b>4</b>
<b>1.3. Расчет количества ребер <math>m(G)</math> графа <math>G</math>.....</b>	<b>4</b>
<b>1.4. Расчет степеней вершин <math>\delta_i</math> графа <math>G</math>.....</b>	<b>4</b>
<b>1.5. Расчет числа компонент связности <math>\alpha(G)</math>.....</b>	<b>4</b>
<b>1.6. Расчет хроматического числа <math>\chi(G)</math> графа <math>G</math> .....</b>	<b>9</b>
<b>1.7. Расчет внешней устойчивости <math>\psi(G)</math> графа <math>G</math>.....</b>	<b>16</b>
<b>1.8. Расчет числа внутренней устойчивости <math>\varphi(G)</math> графа <math>G</math>.....</b>	<b>18</b>

## 1. Задание на расчетно-графическую работу №1

Найти основные числа графа  $G$  по данным, приведенным в таблице 1 для модели графа, представленной на рисунке 1: число вершин, число ребер, степени всех вершин, число компонент связности, цикломатическое число, хроматическое число, плотность и неплотность графа, числа внешней и внутренней устойчивости.

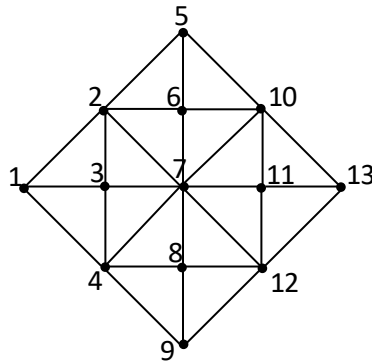


Рисунок 1.1 – модель графа  $G$

Таблица 1.1 — Данные для формирования графа  $G$

Номер варианта	Удалить в модели графа вершины $\{i\}$	Удалить в модели графа ребра $\{(i,j)\}$
16	$\{10,13\}$	$\{(1,2),(2,3),(2,7),(6,7),(7,8),(7,12)\}$

### 1.1. Расчет числовых характеристик графов

Пусть задан граф  $G$  (рисунок 1.2).

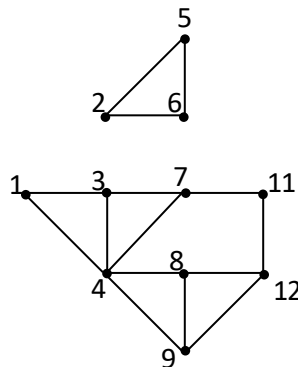


Рисунок 1.2 – граф  $G$

### 1.2. Расчет количества вершин $n(G)$ графа $G$

Расчет выполняется методом визуального анализа графа  $G$ . В итоге расчета имеем:

$$n(G)=11$$

### 1.3. Расчет количества ребер $m(G)$ графа $G$

Расчет выполняется методом визуального анализа графа  $G$ . В итоге расчета имеем:

$$m(G)=15$$

### 1.4. Расчет степеней вершин $\delta_i$ графа $G$

Расчет выполняется методом визуального анализа графа  $G$  с целью определения количества ребер, инцидентных вершине  $x_i$ . Результаты расчета сведены в таблицу 1.2.

Таблица 1.2 — Результаты расчета степеней вершин графа  $G$

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
$\delta_i$	2	2	3	5	2	2	3	3	3	2	3

### 1.5. Расчет числа компонент связности $\alpha(G)$

Для расчета числа компонент связности графа  $G$  вычисляют матрицу достижимости  $\|Q^p\|$  и определяют полные подграфы графа. Для построения матрицы достижимости удобно воспользоваться матрицей смежности графа  $G$ :

$$\|Q^p\| = \|1\| \cup \|H(x_i)\| \cup \|H^2(x_i)\| \cup \dots \cup \|H^p(x_i)\|,$$

где  $\|1\|$  — единичная матрица (рисунок 1.3),

$\|H(x_i)\|$  — матрица смежности графа  $G$ ,

$\|H^p(x_i)\|$  — матрица смежности графа  $G$ , возведенная в  $p$ -ую степень.

### 2.5 Расчет цикломатического числа $\lambda(G)$ графа $G$

Рассчитаем цикломатическое число графа  $G$ , т.е. наименьшее число ребер, удаление которых приведет к графу без циклов и петель.

Расчет выполним по формуле:  $\lambda(G) = m(G) - n(G) + \alpha(G) = 15 - 11 + 2 = 6$

В качестве примера удалим на графе  $G$  шесть ребер:  $(2,6)$ ,  $(3,4)$ ,  $(4,7)$ ,  $(4,8)$ ,  $(8,9)$ ,  $(8,12)$ . Получим граф на рисунке 1.1(1).

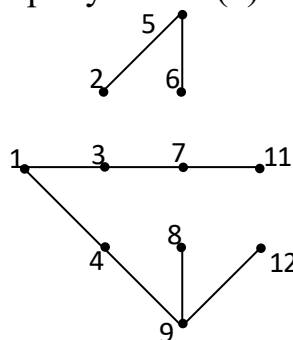


Рисунок 1.1(1) — граф без циклов и петель

<b>1</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Рисунок 1.3 — Единичная матрица для графа  $G$ 

Построим матрицу смежности графа  $G$  (рисунок 1.4).

<b>Н</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
5	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
9	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
12	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Рисунок 1.4 — Матрица смежности  $//H//$  графа  $G$ 

Получим матрицу достижимости  $//Q//$  графа  $G$  (рисунок 1.5).

<b>Q</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
5	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
8	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
9	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
12	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Рисунок 1.5 — Матрица достижимости  $//Q//$  графа  $G$

Возведем матрицу смежности  $||H||$  в квадрат, т.е. умножим ее саму на себя. Получим  $||H^2||$  (рисунок 1.6).

$H^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0
4	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
5	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
7	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
8	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
9	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
11	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
12	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1

Рисунок 1.6 — Матрица  $||H^2||$  графа  $G$

Возведем матрицу смежности  $||H||$  в третью степень (рисунок 1.7).

$H^3$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
4	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
5	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
7	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
8	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
9	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
11	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
12	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1

Рисунок 1.7 — Матрица  $||H^3||$  графа  $G$



Возведем матрицу смежности  $\|H\|$  в четвертую степень (рисунок 1.8).

$H^4$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
4	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
5	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
7	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
8	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
9	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
11	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
12	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1

Рисунок 1.8 — Матрица  $\|H^4\|$  графа G

Возведем матрицу смежности  $\|H\|$  в пятую степень (рисунок 1.9).

$H^5$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
4	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
5	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
7	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
8	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
9	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
11	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
12	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1

Рисунок 1.9 — Матрица  $\|H^5\|$  графа G

Анализ матриц  $\|H^4\|$  и  $\|H^5\|$  показывает, что никаких изменений в  $\|H^5\|$  по сравнению с  $\|H^4\|$  нет. Значит процесс вычислений завершен.

Матрица достижимости  $\|Q^5\|$  (рисунок 1.10) рассчитывается следующим образом:

$$\|Q^5\| = \|1\| \cup \|H\| \cup \|H^2\| \cup \|H^3\| \cup \|H^4\|$$

$Q^5$	2	5	6	1	3	4	7	8	9	11	12
2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
9	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
11	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
12	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Рисунок 1.10— Матрица  $\|Q^5\|$  графа  $G$

Поскольку матрица  $\|Q^5\|$  содержит два блока: один —  $3 \times 3$  элемента, другой —  $8 \times 8$  элементов, то граф  $G$  содержит два связанных подграфа:

$$G_1 = \langle X_1, H_1 \rangle, G_2 = \langle X_2, H_2 \rangle,$$

где  $X_1 = \{x_2, x_5, x_6\}$ ,  $X_2 = \{x_1, x_3, x_4, x_7, x_8, x_9, x_{11}, x_{12}\}$ .

Таким образом, для исходного графа  $G = \langle X, H \rangle$  число компонент связности равно  $\alpha(G) = 2$ .

### 1.6. Расчет хроматического числа $\gamma(G)$ графа $G$

Рассчитаем хроматическое число графа  $G$ , т.е. наименьшее число красок, при применении которых для раскраски вершин графа две любые смежные вершины графа  $G$  не будут окрашены в один цвет. Для расчета хроматического числа будем использовать два способа: 1) раскраска вручную с применением оценочных соотношений; 2) раскраска с применением алгоритма.

Для раскраски вручную воспользуемся двумя оценочными соотношениями. Одно из них задает левую границу для  $\gamma(G)$ , *min* возможное значение  $\gamma(G)$ , т.е.  $\gamma_{min}(G)$ :

- 1) полный  $n$ -вершинный граф имеет  $\gamma_{min}(G)=n$ ;
- 2) пустой граф имеет  $\gamma_{min}(G)=1$ ;
- 3) граф с циклом (т.е. хотя бы одним) четной длины имеет  $\gamma_{min}(G)=2$ ;
- 4) граф с циклом нечетной длины имеет  $\gamma_{min}(G)=3$ ;
- 5) граф-дерево имеет  $\gamma_{min}(G)=2$ .

Другое оценочное соотношение задает правую границу для  $\gamma(G)$ , *max* необходимое значение  $\gamma(G)$ , т.е.  $\gamma_{max}(G)$ :

$$\gamma_{max}(G) \leq \max_i \{\delta_i + 1\} = 5 + 1 = 6$$

Начинаем проверку с вычисления  $\gamma_{\min}(G)$ . Поскольку в графе  $G$  есть цикл нечетной длины, пробуем раскрасить граф тремя красками (рисунок 1.12).

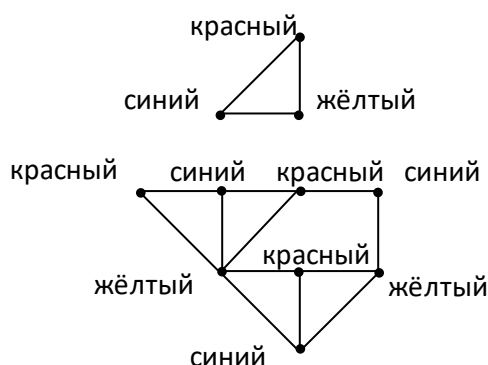


Рисунок 1.12 — Раскраска графа  $G$  синей, желтой и красной красками

Вывод: трех красок, т.е.  $\gamma_{\min}(G) = 3$  оказалось достаточно:

$$\gamma(G) = \gamma_{\min}(G) = 3 \leq 6.$$

Для раскраски графа вторым способом используем следующий алгоритм:

1. Вычислить степени вершин. Положить  $k=1$ .
2. Просмотреть вершины в порядке невозрастания степеней и окрасить первую неокрашенную вершину в цвет №  $k$ .
3. Просмотреть вершины в порядке невозрастания степеней и окрасить в цвет №  $k$  все вершины, которые не смежны вершинам, уже окрашенным в цвет №  $k$ .
4. Если все вершины окрашены, то  $k$  — искомое хроматическое число. Иначе  $k = k + 1$  и переход к пункту 2.

Вычислим степени всех вершин (на рис. 1.13 степени вершин указаны рядом с вершинами).

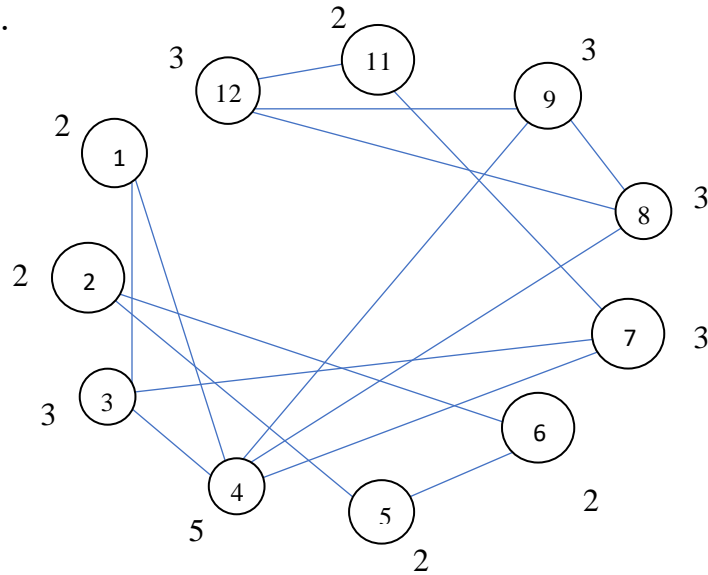


Рисунок 1.13 — Граф  $G$ , для которого рассчитаны степени

Просмотрим вершины графа в порядке невозрастания значений их степеней и окрасим в цвет №1 все неокрашенные вершины, которые не смежны уже окрашенным в этот цвет вершинам (рис. 1.14).

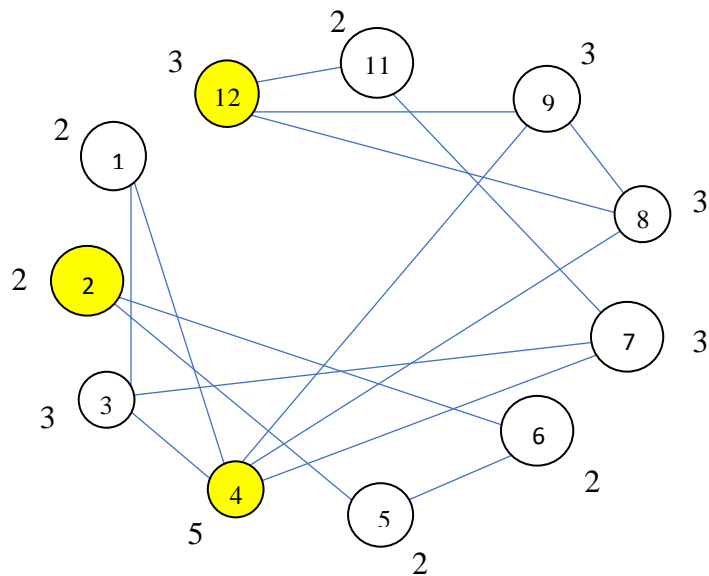


Рисунок 1.14 — Граф  $G$  после первого шага



Рассчитаем плотность графа  $G$ , т.е. наибольшее число вершин подграфа графа  $G$ , между всеми вершинами которого задано отношение смежности.

Получим матрицы смежности  $//H//$  и достижимости  $//Q//$  графа  $G$  (рисунок 1.17)

<b>H</b>	1	3	4	7	8	9	11	12
1	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1	1	0	0
7	0	1	1	0	0	0	1	0
8	0	0	1	0	0	1	0	1
9	0	0	1	0	1	0	0	1
11	0	0	0	1	0	0	0	1
12	0	0	0	0	1	1	1	0

<b>Q</b>	1	3	4	7	8	9	11	12
1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0	0	1	0
8	0	0	1	0	1	1	0	1
9	0	0	1	0	1	1	0	1
11	0	0	0	1	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1	1	1	1

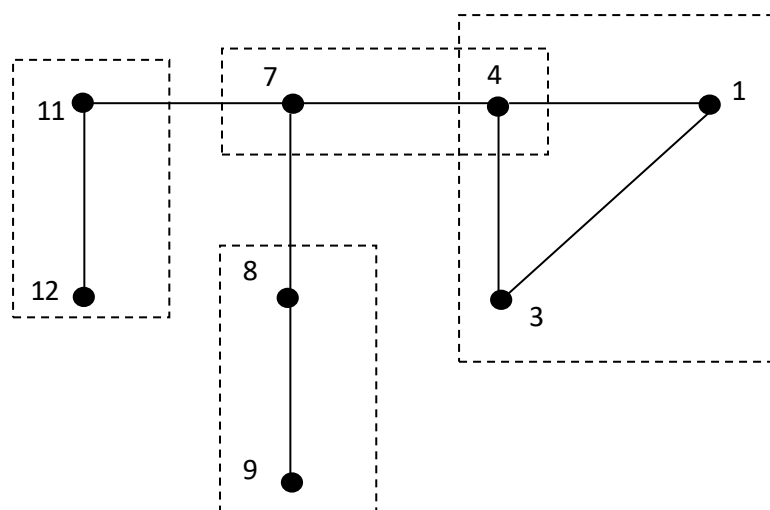
Рисунок 1.17 — Матрицы  $//H//$  и  $//Q//$  графа

В матрице  $//Q//$  сформируем блоки, используя метод визуального анализа и перестановок строк (т.е. строки меняются местами) и перестановок столбцов (т.е. столбцы меняются местами). В итоге получим матрицу  $//Q//$  на рисунке 1.18.

<b>Q</b>	1	3	4	7	8	9	11	12
1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0	0	1	0
8	0	0	1	0	1	1	0	1
9	0	0	1	0	1	1	0	1
11	0	0	0	1	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1	1	1	1

Рисунок 1.18 — Матрица  $//Q//$  с четырьмя выделенными блоками

Анализ матрицы  $//Q//$  на рисунке 1.18 показывает, что поскольку число блоков равно четырем, то имеем четыре полных подграфа  $G$ . (1— ый блок:  $3 \times 3$ , 2— ой блок:  $2 \times 2$ , 3— ий блок:  $2 \times 2$ , 4— ый блок:  $2 \times 2$ ). Иными словами,  $|X'_1|=3$ ,  $|X'_2|=2$ ,  $|X'_3|=2$ ,  $|X'_4|=2$  (рисунок 1.19).



Обозначения: пунктиром выделены полные подграфы графа  $G$ .

Рисунок 1.19 — Три подграфа графа  $G$ .

Таким образом, имеем:

$$\rho(G) = \max_i \{ |X_i^c| \} = 3$$

## 2.8 Расчет неплотности $\epsilon(G)$ графа $G$

Рассмотрим плотность графа  $G$ , т.е. наибольшее число вершин пустого подграфа графа  $G$  между всеми вершинами которого нет отношений смежности.

Построим обратный граф  $\neg G$  для графа  $G$ . Для этого получим матрицу  $\|H\|$  и обратную ей матрицу  $\|\neg H\|$  (рисунок 1.20).

<b>H</b>	1	3	4	7	8	9	11	12
1	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1	1	0	0
7	0	1	1	0	0	0	1	0
8	0	0	1	0	0	1	0	1
9	0	0	1	0	1	0	0	1
11	0	0	0	1	0	0	0	1
12	0	0	0	0	1	1	1	0

<b><math>\neg H</math></b>	1	3	4	7	8	9	11	12
1	1	0	0	1	1	1	1	1
3	0	1	0	0	1	1	1	1
4	0	0	1	0	0	0	1	1
7	1	0	0	1	1	1	0	1
8	1	1	0	1	1	0	1	0
9	1	1	0	1	0	1	1	0
11	1	1	1	0	1	1	1	0
12	1	1	1	1	0	0	0	1

Рисунок 1.20 — Матрицы смежности графа  $G$  и графа  $\neg G$



Строим матрицу достижимости графа  $\neg G$  и выполняем операцию перестановки строк и столбцов. Результаты показаны на рисунке 1.21.

$\neg Q^p$	1	3	4	7	8	9	11	12
1	1	0	0	1	1	1	1	1
3	0	1	0	0	1	1	1	1
4	0	0	1	0	0	0	1	1
7	1	0	0	1	1	1	0	1
8	1	1	0	1	1	0	1	0
9	1	1	0	1	0	1	1	0
11	1	1	1	0	1	1	1	0
12	1	1	1	1	0	0	0	1

$\neg Q^p$	1	11	9	8	7	3	12	4
1	1	1	1	1	1	1	1	0
11	1	1	1	1	1	0	1	0
9	1	1	1	0	0	1	0	0
8	1	1	0	1	1	0	0	0
7	1	0	0	1	1	1	1	0
3	1	1	1	0	1	1	1	0
12	1	0	0	0	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	0	1	1

Рисунок 1.21 — Матрицы достижимости  $\neg Q^p$  графа  $\neg G$

Анализ матрицы  $\neg Q^p$  с блочной структурой на рисунке 1.21 показывает, что поскольку число блоков четыре, то имеем четыре пустых подграфов графа  $G$  с двумя вершинами в двух подграфах и тремя вершинами в двух (рисунок 1.22).

$$|X'_1|=3, |X'_2|=2, |X'_3|=3, |X'_4|=2.$$

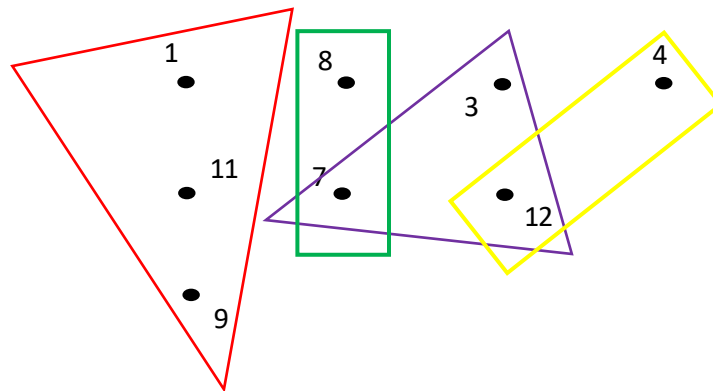


Рисунок 1.22 — четыре пустых подграфа графа  $G$

Таким образом, имеем:

$$\varepsilon(G) = \rho(-G) = \max_i \{|X'_i|\} = 3.$$

### 1.7. Расчет внешней устойчивости $\psi(G)$ графа $G$

Рассчитаем внешнюю устойчивость графа  $G$ , т.е. наименьшее число вершин графа  $G$  смежных со всеми остальными вершинами графа.

Составим таблицу 1.3 отображений для графа  $G$  и дополним ее столбцом несмежных вершин.

$x_i$	$H_i$	$\neg H_i$
1	3,4	7,8,9,11,12
3	1,4,7	8,9,11,12
4	1,3,7,8,9	11,12
7	3,4,11	1,8,9,12
8	4,9,12	1,3,7,11
9	4,8,12	1,3,7,11
11	7,12	1,3,4,8,9
12	8,9,11	1,3,4,7

Таблица 1.3 — Таблица отображений графа  $G$

Анализ таблицы 1.3 показывает, что в столбце  $\neg H_i$  есть несмежные вершины. В этом случае необходимо построить еще одну таблицу — таблицу 4 следующим образом:

Таблица 1.4 строится на базе строк таблицы 1.3, в которых нет знака  $\emptyset$  в столбце  $\neg H_i$ . В нашем случае таких строк восемь. В строках первого столбца таблицы 1.4 пары вершин, образованные полным перебором вершин из первого и второго столбцов таблицы 1.3. В строках второго и третьего столбцов таблицы 1.4 указываются смежные и несмежные вершины, соответственно, для  $\{x_i, x_j\}$ , перечисляемых в строках первого столбца таблицы 1.4.

Имеем таблицу 1.4:

$\{x_i, x_j\}$	$H(x_i, x_j)$	$\neg H(x_i, x_j)$
$x_1, x_3$	$x_4, x_7$	$x_8, x_9, x_{11}, x_{12}$
$x_1, x_4$	$x_3, x_7, x_8, x_9$	$x_{11}, x_{12}$
$x_3, x_4$	$x_1, x_7, x_8, x_9$	$x_{11}, x_{13}$
$x_3, x_7$	$x_1, x_4, x_{11}$	$x_8, x_9, x_{12}$
$x_4, x_7$	$x_1, x_3, x_8, x_9, x_{11}$	$x_{12}$
$x_4, x_8$	$x_1, x_3, x_7, x_9, x_{12}$	$x_{11}$
$x_4, x_9$	$x_1, x_3, x_7, x_8, x_{12}$	$x_{11}$
$x_8, x_9$	$x_4, x_{12}$	$x_1, x_3, x_7, x_{11}$
$x_8, x_{12}$	$x_4, x_9, x_{11}$	$x_1, x_3, x_7$
$x_7, x_{11}$	$x_3, x_4, x_{12}$	$x_1, x_8, x_9$
$x_{11}, x_{12}$	$x_7, x_8, x_9$	$x_1, x_3, x_4$
$x_9, x_{12}$	$x_4, x_8, x_{11}$	$x_1, x_3, x_7$

Таблица 1.4 — Таблица отображений и несмежных вершин для двухэлементных подмножеств

Перейдем к формированию новой таблицы отображений и несмежных вершин для трехэлементных подмножеств  $\{x_i, x_j, x_k\}$ , т.е.  $H(x_i, x_j, x_k)$  и  $\neg H(x_i, x_j, x_k)$

$\{x_i, x_j, x_k\}$	$H(x_i, x_j, x_k)$	$\neg H(x_i, x_j, x_k)$
$x_4, x_8, x_{12}$	$x_1, x_3, x_7, x_9, x_{11}$	$\emptyset$
$x_4, x_9, x_{12}$	$x_1, x_3, x_7, x_8, x_{11}$	$\emptyset$
$x_7, x_4, x_8$	$x_1, x_3, x_9, x_{11}, x_{12}$	$\emptyset$
...	...	...

Таблица 1.5 — Таблица отображений и несмежных вершин для трехэлементных подмножеств

В нескольких строках стоят знаки  $\emptyset$ , значит, расчеты закончены.

По итогам анализа таблицы 1.5 можно сформировать множество  $T$  потенциальных ядер графа  $G$ , т.е.

$$T = \{ \{ x_4, x_8, x_{12} \}, \{ x_4, x_9, x_{12} \}, \{ x_7, x_4, x_8 \} \},$$

где  $T_1 = \{ x_4, x_8, x_{12} \}$ ,  $T_2 = \{ x_4, x_9, x_{12} \}$ ,  $T_3 = \{ x_7, x_4, x_8 \}$ .

Тогда  $\psi(G) = \min_i \{ / T_i / \} = \min_i \{ / T_i / \} / i=1;3 = 3$ .

### 1. Расчет числа внутренней устойчивости $\varphi(G)$ графа $G$

Анализ таблицы 1.3 показывает, что в столбце  $\neg H_i$  есть несмежные вершины. В этом случае построим таблицу 1.6 двухэлементных множеств из несмежных вершин, найдем им образ  $H_{x_i, x_j}$

и  $\neg H_{x_i, x_j}$ .

$\{x_i, x_j\}$	$H_{x_i, x_j}$	$\neg H_{x_i, x_j}$
1,7	3,4,11	8,9,12
1,8	3,4,9,12	7,11
1,9	3,4,8,12	7,11
1,11	3,4,7,12	8,9
1,12	3,4,8,9,11	7
3,8	1,4,7,9,12	11
3,9	1,4,7,8,12	11
3,11	1,4,7,12	8,9
3,12	1,4,7,8,9,11	$\emptyset$
4,11	1,3,7,8,9,12	$\emptyset$
4,12	1,3,7,8,9,11	$\emptyset$
7,8	3,4,9,11,12	1
7,9	3,4,8,11,12	1
7,11	3,4,12	1,8,9
7,12	3,4,8,9,11	1
8,11	3,4,7,9,12	1

Таблица 1.6 — Таблица образов  $H_{x_i, x_j}$  и  $\neg H_{x_i, x_j}$

Поскольку не во всех строках столбца  $\neg H_{x_i, x_j}$  таблицы 1.6 указаны знаки  $\emptyset$ , сформируем таблицу 1.7 трехэлементных множеств  $\{x_i, x_j, x_k\}$  и найдем им образ  $H_{x_i, x_j, x_k}$  и  $\neg H_{x_i, x_j, x_k}$ .

$\{x_i, x_j, x_k\}$	$H_{x_i, x_j, x_k}$	$\neg H_{x_i, x_j, x_k}$
3,8,12	1,4,7,9,11	$\emptyset$
3,8,11	1,4,7,9,12	$\emptyset$
3,9,12	1,4,7,8,11	$\emptyset$
3,9,11	1,4,7,8,12	$\emptyset$
1,7,8	3,4,9,11,12	$\emptyset$
1,7,9	3,4,8,11,12	$\emptyset$
4,9,11	1,3,7,9,12	$\emptyset$
4,9,12	1,3,4,8,11	$\emptyset$

Таблица 1.7 — Таблица образов  $H_{x_i, x_j, x_k}$  и  $\neg H_{x_i, x_j, x_k}$ .

Поскольку во всех строках таблицы 1.7 указаны знаки  $\emptyset$ , процесс вычислений закончен и можно перейти к анализу таблиц 1.6 и 1.7.

По итогам анализа можно сформировать множество  $S$  ядер графа  $G$ , т.е.

$$S = \{ \{x_3, x_{12}\}, \{x_4, x_{12}\}, \{x_4, x_{11}\}, \{x_3, x_8, x_{12}\}, \{x_3, x_8, x_{11}\}, \{x_3, x_9, x_{12}\}, \\ \{x_3, x_9, x_{11}\}, \{x_1, x_7, x_8\}, \{x_1, x_7, x_9\}, \{x_4, x_9, x_{11}\}, \{x_4, x_9, x_{12}\} \},$$

$$\text{где } S_1 = \{x_3, x_{12}\}, S_2 = \{x_4, x_{12}\}, S_3 = \{x_4, x_{11}\}, S_4 = \{x_3, x_8, x_{12}\}, S_5 = \{x_3, x_8, x_{11}\}, \\ S_6 = \{x_3, x_9, x_{12}\}, S_7 = \{x_3, x_9, x_{11}\}, S_8 = \{x_1, x_7, x_8\}, S_9 = \{x_1, x_7, x_9\}, S_{10} = \{x_4, x_9, x_{11}\}, \\ S_{11} = \{x_4, x_9, x_{12}\}$$

$$\text{Тогда } \varphi(G) = \max_i \{|S_i|\} = \max_i \{|S_i|/|\cup_{i=1,10} S_i|\} = 3.$$

На этом расчеты числовых характеристик графа  $G$  закончены.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Калининградский государственный технический университет»  
(ФГБОУ ВО «КГТУ»)

Кафедра систем управления и вычислительной техники

Дисциплина: Дискретная математика

**Расчетно-графическая работа № 2**

«Нахождение кратчайшего остова неориентированного графа по алгоритму  
Дейкстры»  
Вариант №70

Работу проверил:

доцент, профессор,  
к.т.н. Иванов В. Е.  
с оценкой: \_\_\_\_\_  
подпись: \_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Работу выполнил:

студент группы 18-ВТ  
Подковыров Д.Р.  
подпись: \_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Калининград  
2020г

## Содержание

<b>2</b>	<b>Задание на расчетно-графическую работу №2.....</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>Расчет по алгоритму Дейкстра .....</b>	<b>3</b>
<b>2.1.1</b>	<b>Построение таблицы обозначений .....</b>	<b>4</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Шаг «0» расчетов .....</b>	<b>4</b>
<b>2.1.3</b>	<b>Шаг «1» расчетов .....</b>	<b>5</b>
<b>2.1.4</b>	<b>Шаги «2 — 8» расчетов.....</b>	<b>6</b>
<b>2.1.5</b>	<b>Выводы .....</b>	<b>8</b>
<b>2.2</b>	<b>Заключение.....</b>	<b>8</b>

## 2. Задание на расчетно-графическую работу №2

Найти кратчайший остов неориентированного графа  $G$  по алгоритму Дейкстры. Протяженность (вес) ребер приведены в таблице 2.1, где  $\infty$  — означает отсутствие ребра  $(x_i, x_j)$ , а «1» — его наличие. Начальной вершиной является  $x_3$ .

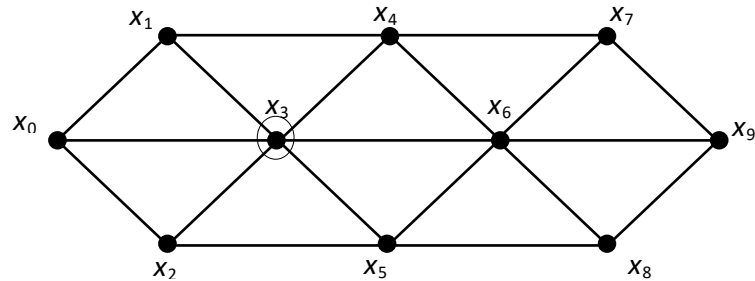


Рисунок 2.1 – неориентированный граф  $G$

Таблица 2.1 — Данные для формирования графа  $G$

Старший разряд номера варианта	Индексы вершин, инцидентных ребру									
	0,1	0,2	0,3	1,3	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	3,6
	Вес ребра (условных единиц)									
1	7	9	12	6	4	6	7	10	7	11
6	1	1	1	1	$\infty$	1	1	1	1	1
Младший разряд номера варианта	Индексы вершин, инцидентных ребру									
	4,6	4,7	5,6	5,8	6,7	6,8	6,9	7,9	8,9	
	Вес ребра (условных единиц)									
6	2	6	4	9	8	5	4	3	9	
6	1	1	1	1	1	1	1	1	$\infty$	

### 2.1. Расчет по алгоритму Дейкстры

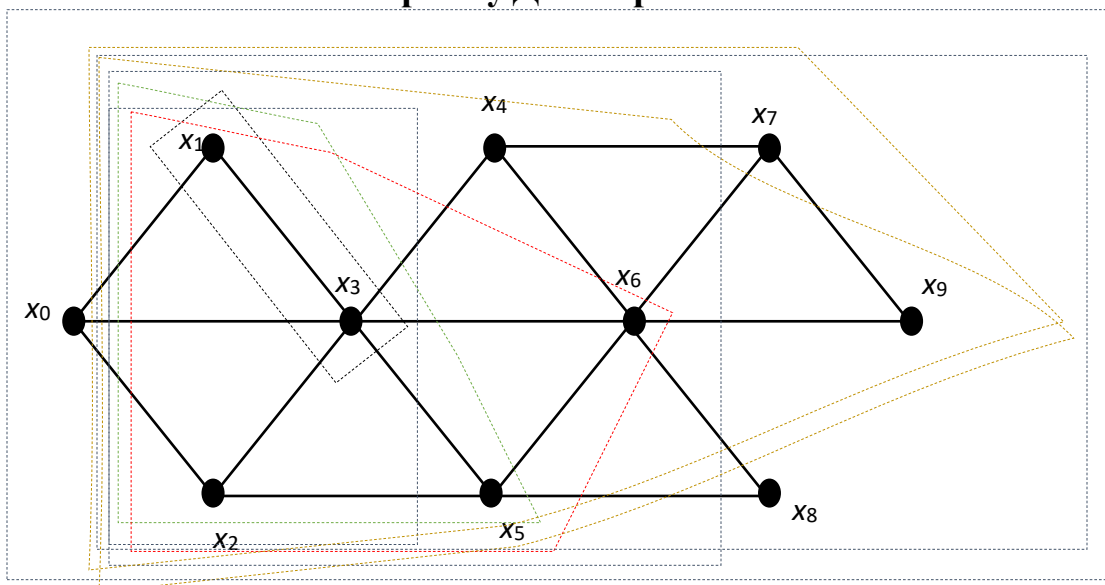


Рисунок 2.2 – исходный граф  $G$



### 2.1.1 Построение таблицы обозначений

Таблица 2.2— Обозначения

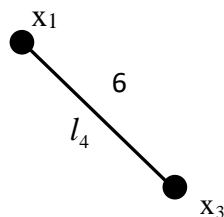
Дуги графа $G$ $(x_i, x_j)$	Обозначения дуг $e_i$	Веса дуг графа $l_i$	Обозначения весов $l_i$ дуг графа
$(x_0, x_1)$	$e_1$	7	$l_1$
$(x_0, x_2)$	$e_2$	9	$l_2$
$(x_0, x_3)$	$e_3$	12	$l_3$
$(x_1, x_3)$	$e_4$	6	$l_4$
$(x_2, x_3)$	$e_5$	6	$l_5$
$(x_2, x_5)$	$e_6$	7	$l_6$
$(x_3, x_4)$	$e_7$	10	$l_7$
$(x_3, x_5)$	$e_8$	7	$l_8$
$(x_3, x_6)$	$e_9$	11	$l_9$
$(x_4, x_6)$	$e_{10}$	2	$l_{10}$
$(x_4, x_7)$	$e_{11}$	6	$l_{11}$
$(x_5, x_6)$	$e_{12}$	4	$l_{12}$
$(x_5, x_8)$	$e_{13}$	9	$l_{13}$
$(x_6, x_7)$	$e_{14}$	8	$l_{14}$
$(x_6, x_8)$	$e_{15}$	5	$l_{15}$
$(x_6, x_9)$	$e_{16}$	4	$l_{16}$
$(x_7, x_9)$	$e_{17}$	3	$l_{17}$

### 2.1.2 Шаг «0» расчетов

Поскольку в качестве исходной выбрана вершина  $x_3$ , проанализируем множество смежных с ней вершин:

$$\begin{array}{cccccc} 12 & 6 & 6 & 10 & 7 & 11 \\ \{(x_0, x_3), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6)\} \end{array}$$

Так как ребра взвешены весами, выберем ребро с минимальным значением веса  $l_i$ . В итоге получим подграф кратчайшего остова:

Рисунок 2.3 — Подграф № 1 кратчайшего остова графа  $G$

Обведем пунктиром подграф № 1 графа  $G$  на рисунке 2.2. В матрице шагов  $\|p\|$  поставим единицы в нулевой строке в столбцах, обозначенных, как  $x_1$  и  $x_3$ . В таблице 2.4 размера кратчайшего остова графа  $G$  поставим единицу в нулевой строке, в столбце, обозначенном весом  $l_4$  ребра  $e_4$ . В столбце  $\sum l_i$  той же нулевой строки укажем  $0+l_4 = 0+6 = 6$ .

### 2.1.3 Шаг «1» расчетов

Зададим в правой части таблицы 2.3 множество ребер инцидентных вершинам подграфа № 1 графа  $G$  на рисунке 2.3. Таковых будет шесть. Выберем из них ребро с минимальным значением веса –  $(x_1, x_3)$ , что покажем, заключив его в прямоугольник в таблице 2.3.

Таблица 2.3 — Результаты выбора подграфов графа

Шаг $p$	Вершины графа $G$										Множество ребер графа $G$ , инцидентных вершинам вычисленного подграфа минимального остова графа $G$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	$\begin{matrix} 7 & 12 & 6 & 7 & 11 & 10 \\ \{(x_0, x_1), (x_0, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_3, x_4)\} \end{matrix}$
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	$\begin{matrix} 7 & 9 & 12 & 10 & 7 & 11 \\ \{(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6)\} \end{matrix}$
2	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	$\begin{matrix} 7 & 9 & 12 & 7 & 10 & 11 & 4 & 9 \\ \{(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_5, x_6), (x_5, x_8)\} \end{matrix}$
3	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	$\begin{matrix} 7 & 9 & 12 & 7 & 10 & 11 & 2 & 8 & 4 & 5 & 9 \\ \{(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_4, x_6), (x_6, x_7), (x_6, x_8), (x_5, x_8)\} \end{matrix}$
4	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	$\begin{matrix} 7 & 9 & 12 & 7 & 10 & 11 & 6 & 8 & 4 & 5 & 9 \\ \{(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_4, x_7), (x_6, x_7), (x_6, x_8), (x_5, x_8)\} \end{matrix}$
5	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	$\begin{matrix} 7 & 9 & 12 & 7 & 10 & 11 & 6 & 8 & 3 & 5 & 9 \\ \{(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_4, x_7), (x_6, x_7), (x_7, x_9), (x_6, x_8), (x_5, x_8)\} \end{matrix}$
6	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	$\begin{matrix} 7 & 9 & 12 & 7 & 10 & 11 & 6 & 8 & 5 & 9 \\ \{(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_4, x_7), (x_6, x_7), (x_6, x_8), (x_5, x_8)\} \end{matrix}$
7	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\begin{matrix} 7 & 9 & 12 & 7 & 10 & 11 & 6 & 8 & 9 \\ \{(x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_4, x_7), (x_6, x_7), (x_5, x_8)\} \end{matrix}$
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Таблица 2.4 — Размер кратчайшего остова графа  $G$

Шаг $p$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	$l_6$	$l_7$	$l_8$	$l_9$	$l_{10}$	$l_{11}$	$l_{12}$	$l_{13}$	$l_{14}$	$l_{15}$	$l_{16}$	$l_{17}$	$\sum l_i$
0	7	9	12	6	6	7	10	7	11	2	6	4	9	8	4	3	9	6
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
2	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19
3	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	23
4	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	25
5	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	29
6	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	32

7	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	37
8	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	44
Суммарная длина ребер минимального остова графа $G$ :																		44

Добавим к подграфу на рисунке 2.3 ребро  $(x_2, x_3)$  и получим подграф № 2.

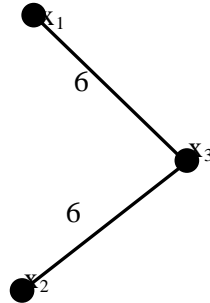
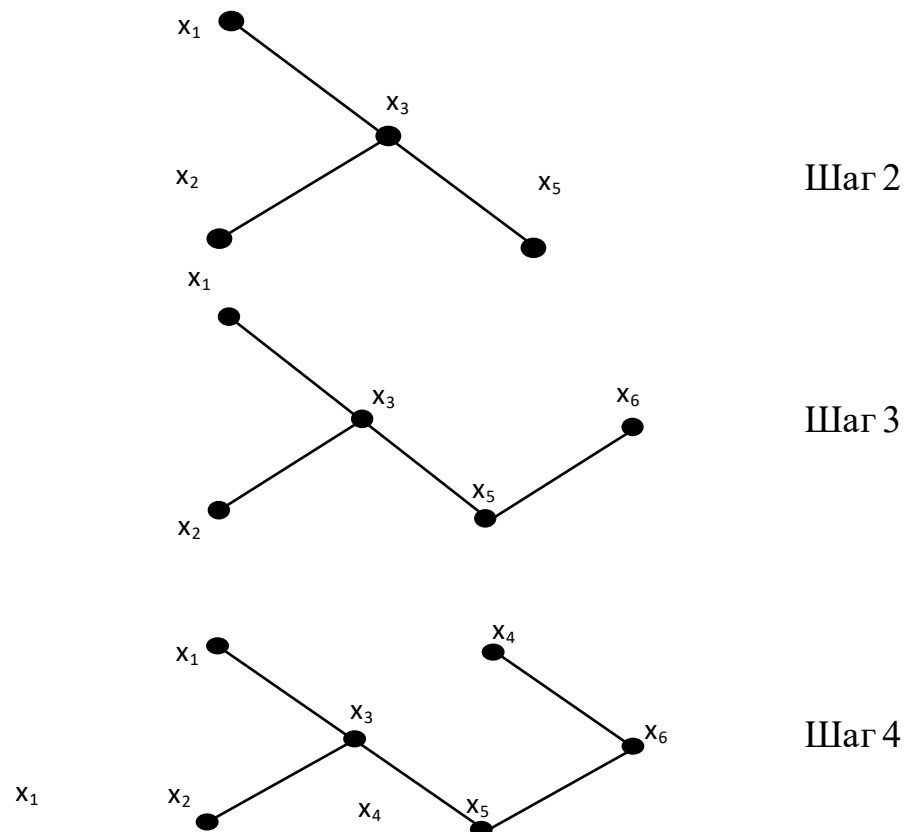


Рисунок 2.4 — Подграф № 2 кратчайшего остова графа  $G$

Обведем пунктиром подграф № 2 графа  $G$  на рисунке 2.2. Заполним первые строки матрицы  $\|p\|$  в таблице 2.4.

#### 2.1.4 Шаги «2 — 8» расчетов

Результаты расчетов на шагах 2 — 8 сведены в таблицы 2.3, 2.4. На рисунке 2.5 показано изменение по шагам подграфов минимального остова графа  $G$ .



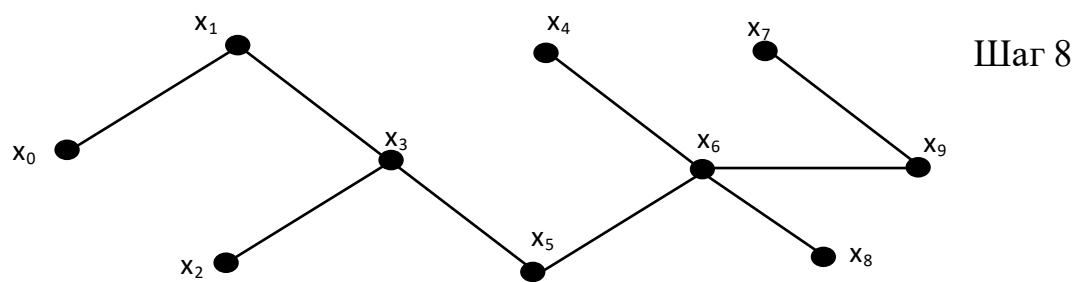
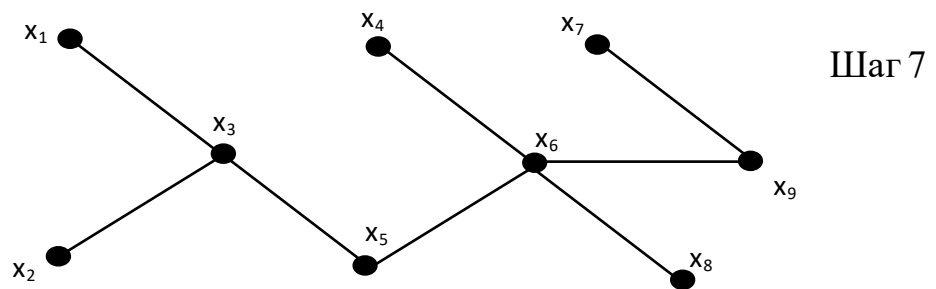
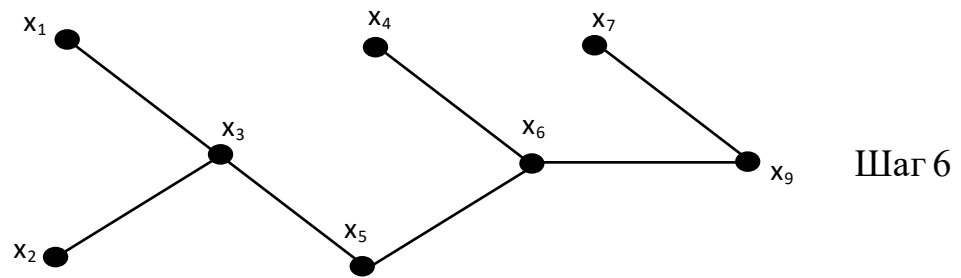
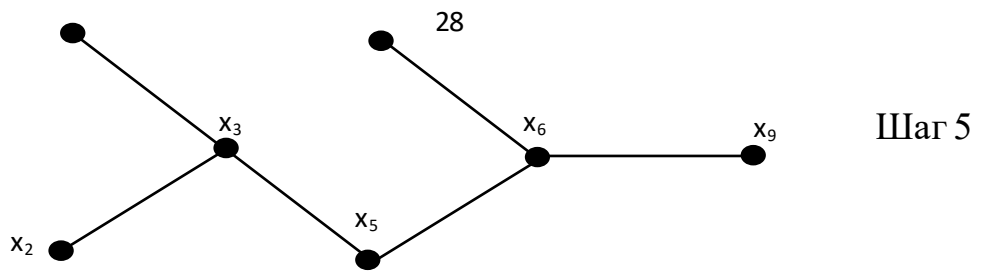


Рисунок 2.5 – Изменение по шагам подграфов минимального остова графа  $G$

### **2.1.5 Выводы**

В результате расчетов по алгоритму Дейкстра сформирован минимальный остов графа  $G$  с суммарной длиной дуг 44.

### **2.2 Заключение**

В расчетно-графической работе №2 мы построили остов минимального веса. Умение формировать минимальный остов графа играет большую роль в создании вычислительных сетей, в организации грузоперевозок или ремонтных работ на транспортной сети.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Калининградский государственный технический университет»  
(ФГБОУ ВО «КГТУ»)

Кафедра систем управления и вычислительной техники

Дисциплина: Дискретная математика

**Расчетно-графическая работа № 3**

«Поиск кратчайших путей на неориентированном графе по алгоритму  
Флойда»

Вариант №70

Работу проверил:

доцент, профессор,  
к.т.н. Иванов В. Е.  
с оценкой: \_\_\_\_\_  
подпись: \_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Работу выполнил:

студент группы 18-ВТ  
Подковыров Д.Р.  
подпись: \_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Калининград  
2020г.

## Содержание

<b>3. Задание на расчетно-графическую работу № 3 .....</b>	<b>3</b>
<b>3.1.1. Шаг 0 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>5</b>
<b>3.3.2. Шаг 1 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>5</b>
<b>3.3.3. Шаг 2 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>7</b>
<b>3.3.4. Шаг 3 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>9</b>
<b>3.3.5. Шаг 4 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>11</b>
<b>3.3.6. Шаг 5 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>13</b>
<b>3.3.7. Шаг 6 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>15</b>
<b>3.3.8. Шаг 7 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>17</b>
<b>3.3.9. Шаг 8 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>19</b>
<b>3.3.10. Шаг 9 расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>21</b>
<b>3.2. Проверка результатов расчетов по алгоритму Флойда .....</b>	<b>22</b>
<b>3.3. Вывод.....</b>	<b>22</b>

### 3. Задание на расчетно-графическую работу № 3

Найти кратчайшие пути на неориентированном графе  $G$  (рисунок 3.1) по алгоритму Флойда.

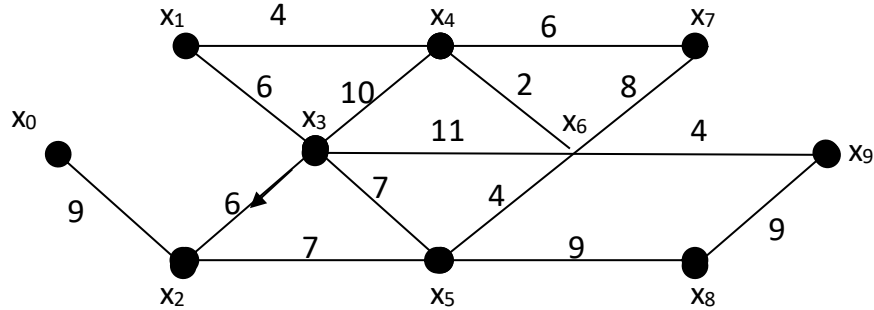


Рисунок 3.1 — Граф  $G$

Старший разряд номера варианта	Индексы вершин, инцидентных ребру									
	0,1	0,2	0,3	1,3	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	3,6
	Вес ребра (условных единиц)									
	7	9	12	6	4	6	7	10	7	11
2	$\infty$	1	$\infty$	1	1	1	1	1	1	1
Младший разряд номера варианта	Индексы вершин, инцидентных ребру									
	4,6	4,7	5,6	5,8	6,7	6,8	6,9	7,9	8,9	
	Вес ребра (условных единиц)									
	2	6	4	9	8	5	4	3	9	
6	1	1	1	1	1	$\infty$	1	$\infty$	1	

Построение матрицы путей и матрицы переходов графа  $G$

Алгоритма Флойда использует две матрицы размера  $n \times n$ , где  $n$  — число вершин графа:  $\|l(n,n)\|$  — матрицу кратчайших путей и  $\|\mu(n,n)\|$  — матрицу кратчайших переходов. На рисунке 3.2 изображены обе эти матрицы для графа  $G$ .



а)

б)

$l^0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	$\infty$	0	$\infty$	6	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	$\infty$	6	6	0	10	7	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	$\infty$	4	$\infty$	10	0	$\infty$	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	$\infty$	$\infty$	7	7	$\infty$	0	4	$\infty$	9	$\infty$
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

$\mu^0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_1$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_2$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_3$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_4$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_5$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_6$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_7$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_8$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_9$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$

Рисунок 3.2 — Матрицы кратчайших путей а) и кратчайших переходов б) графа  $G$

### 3.1.1. Шаг 0 расчетов по алгоритму Флойда

Принимаем  $p=0$ . Принимаем в матрице  $l^0$  вершину  $x_0$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рисунок 3.2).

$l^0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	$\infty$	0	$\infty$	6	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	$\infty$	6	6	0	10	7	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	$\infty$	4	$\infty$	10	0	$\infty$	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	$\infty$	$\infty$	7	7	$\infty$	0	4	$\infty$	9	$\infty$
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

↑  
Базовый столбец

Базовая строка

Рисунок 3.2 — Матрица путей  $l^0$  на нулевом шаге расчетов

На данном шаге изменений нет. Матрица кратчайших переходов также остаётся неизменной.

### 3.3.2. Шаг 1 расчетов по алгоритму Флойда

$l^1$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	$\infty$	0	$\infty$	6	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	$\infty$	6	6	0	10	7	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	$\infty$	4	$\infty$	10	0	$\infty$	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	$\infty$	$\infty$	7	7	$\infty$	0	4	$\infty$	9	$\infty$
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

↑  
Базовый столбец

← Базовая строка

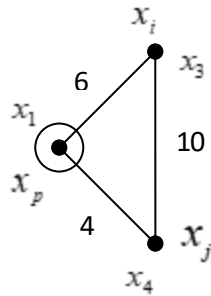
Рисунок 3.3 — Матрица путей  $l^1$  на нулевом шаге расчетов

Вычеркиваем в матрице  $l^1$  строки столбцы, базовые элементы которых имеют значения  $\infty$  (они на рис. 3.3 показаны более темной штриховкой), так как  $(l_{i,p} + \infty)$  и  $(\infty + l_{p,j})$  всегда больше конечного значения  $l_{i,j}$ . В итоге получаем матрицу  $\|l_0^1\|$ , изображенную на рис. 3.4

$l_0^1$	$x_1$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	0	6	4
$x_3$	6	0	10
$x_4$	4	10	0

Рисунок 3.4 — Матрица  $\|l^1\|$  после вычеркивания строк и столбцов, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$

Изобразим на рис. 3.5 граф  $G_0^1$  по матрице  $\|l_0^1\|$ .



Обозначения: в окружность заключена базовая вершина  $x_1$ ; каждая вершина идентифицирована дважды: переменной  $x$  с индексом — цифрой и переменной  $x$  с индексом — буквой

Рисунок 3.5 — Граф  $G_0^1$

Выполним расчеты, для чего будем проверять справедливость соотношения:

$$(l_{i,p}^p + l_{p,j}^p) < l_{i,j}^p.$$

Для графа  $G_0^1$  на рис. 3.5 это означает, что проверяется справедливость соотношения:

$$(l_{1,3}^p + l_{3,4}^p) < l_{1,4}^p,$$

или иными словами: сравнивается суммарная длина пути из первой вершины  $x_1$  до базовой  $x_3$ , т.е.  $l_{1,3}^p$  и из нулевой вершины  $x_3$  до вершины  $x_4$ , т.е.  $l_{3,4}^p$  с длиной пути из первой вершины в третью «напрямую», т.е.  $l_{1,4}^p$  (см. рис. 3.5).

Итак, проверяем справедливость соотношения:

$$(6+4) < 10?$$

Ответ — **Нет**.

На данном шаге изменений нет. Матрица кратчайших переходов также остаётся неизменной.

### 3.3.3. Шаг 2 расчетов по алгоритму Флойда

Принимаем  $p=2$ . Принимаем в матрице  $\|l^2\|$  вершину  $x_2$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рис. 3.6).

$l^2$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	$\infty$	0	$\infty$	6	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	$\infty$	6	6	0	10	7	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	$\infty$	4	$\infty$	10	0	$\infty$	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	$\infty$	$\infty$	7	7	$\infty$	0	4	$\infty$	9	$\infty$
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

↑  
Базовый столбец

← Базовая строка

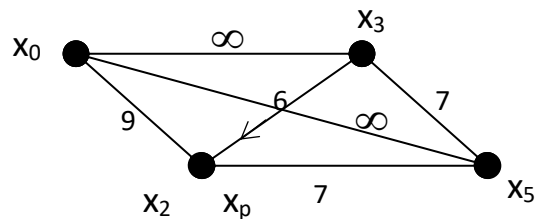
Рисунок 3.6 — Матрица путей  $l^2$  на втором шаге расчетов

Вычеркиваем в матрице  $\|l^2\|$  строки и столбцы, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$ . В итоге получаем матрицу  $\|l_0^2\|$ , изображенную на рис. 3.7.

$l_0^2$	$x_0$	$x_2$	$x_3$	$x_5$
$x_0$	0	9	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	0	$\infty$	7
$x_3$	$\infty$	6	0	7
$x_5$	$\infty$	7	7	0

Рисунок 3.7 — Матрица  $\|l^2\|$  после вычеркивания строк и столбцов, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$

Изобразим на рис. 3.8 граф  $G_0^2$  по матрице  $\|l_0^2\|$ .

Рисунок 3.8 — Граф  $G_0^2$ 

Выполним необходимые расчеты:

1)  $l_{3,2} + l_{2,0} < l_{0,3}$ ? Т.е.  $9 + 6 < \infty$ ? **Да.**

Тогда:  $l_{0,3} = 15; l_{3,0} = 15; \mu_{0,3} = x_p = x_2; \mu_{3,0} = x_2$ .

2)  $l_{3,2} + l_{2,5} < l_{3,5}$ ? Т.е.  $6 + 7 < 7$ ? **Нет.**

Тогда:  $l_{3,5} = 7; l_{5,3} = 7; \mu_{3,5} = x_{i,j} = x_5$ ;

3)  $l_{0,2} + l_{2,5} < l_{0,5}$ ? Т.е.  $9 + 7 < \infty$ ? **Да.**

Тогда:  $l_{0,5} = 16; l_{5,0} = 16; \mu_{0,5} = x_p = x_2; \mu_{5,0} = x_2$ .

Вносим изменения в матрицу  $\|l^2\|$  и  $\|\mu^2\|$  (рис. 3.9).

$l^2$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	$\infty$	9	15	$\infty$	16	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	$\infty$	0	$\infty$	6	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	$\infty$	4	$\infty$	10	0	$\infty$	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	16	$\infty$	7	7	$\infty$	0	4	$\infty$	9	$\infty$
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

$\mu^2$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_2$	$x_4$	$x_2$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_1$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_2$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_4$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_5$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_6$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_7$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_8$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_9$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$

Рисунок 3.9 — Матрицы путей и переходов графа  $G$  перед началом шага  $p=3$ 

### 3.3.4. Шаг 3 расчетов по алгоритму Флойда

$l^3$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	$\infty$	9	15	$\infty$	16	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	$\infty$	0	$\infty$	6	4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	$\infty$	4	$\infty$	10	0	$\infty$	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	16	$\infty$	7	7	$\infty$	0	4	$\infty$	9	$\infty$
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

Рисунок 3.10 — Матрица путей  $l^3$  на третьем шаге расчетов

Принимаем  $p=3$ . Принимаем в матрице  $l^3$  вершину  $x_3$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рис. 3.10).

Вычеркиваем в матрице  $l^3$  строки и столбцы, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$ . В итоге получаем матрицу  $l_0^3$ , изображенную на рис. 3.11.

$l_0^3$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_0$	0	$\infty$	9	15	$\infty$	16	$\infty$
$x_1$	$\infty$	0	$\infty$	6	4	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11
$x_4$	$\infty$	4	$\infty$	10	0	$\infty$	2
$x_5$	16	$\infty$	7	7	$\infty$	0	4
$x_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	11	2	4	0

Рисунок 3.11 — Матрица  $\|l_0^3\|$  после вычеркивания строк и столбцов, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$

Выполним необходимые расчеты:

- 1)  $l_{0,3} + l_{3,1} < l_{0,1}$ ,  $15 + 6 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,1} = l_{1,0} = 21$ ;  $\mu_{0,1} = \mu_{1,0} = x_3$ .
- 2)  $l_{0,3} + l_{3,2} < l_{0,2}$ ,  $15 + 6 < 9$  ? **Нет.**
- 3)  $l_{0,3} + l_{3,3} < l_{0,3}$ ,  $15 + 0 < 15$  ? **Нет.**
- 4)  $l_{0,3} + l_{3,4} < l_{0,4}$ ,  $15 + 10 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,4} = l_{4,0} = 25$ ;  $\mu_{0,4} = \mu_{4,0} = x_3$ .
- 5)  $l_{0,3} + l_{3,5} < l_{0,5}$ ,  $15 + 7 < 16$  ? **Нет.**
- 6)  $l_{0,3} + l_{3,6} < l_{0,6}$ ,  $15 + 11 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,6} = l_{6,0} = 26$ ;  $\mu_{0,6} = \mu_{6,0} = x_3$ .
- 7)  $l_{1,3} + l_{3,2} < l_{1,2}$ ,  $6 + 6 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,2} = l_{2,1} = 12$ ;  $\mu_{1,2} = \mu_{2,1} = x_3$ .
- 8)  $l_{1,3} + l_{3,4} < l_{1,4}$ ,  $6 + 10 < 4$  ? **Нет.**
- 9)  $l_{1,3} + l_{3,5} < l_{1,5}$ ,  $6 + 7 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,5} = l_{5,1} = 13$ ;  $\mu_{1,5} = \mu_{5,1} = x_3$ .
- 11)  $l_{1,3} + l_{3,6} < l_{1,6}$ ,  $6 + 11 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,6} = l_{6,1} = 17$ ;  $\mu_{1,6} = \mu_{6,1} = x_3$ .
- 13)  $l_{2,3} + l_{3,4} < l_{2,4}$ ,  $\infty + 10 < \infty$  ? **Нет.**
- 14)  $l_{2,3} + l_{3,5} < l_{2,5}$ ,  $\infty + 7 < \infty$  ? **Нет.**
- 15)  $l_{2,3} + l_{3,6} < l_{2,6}$ ,  $\infty + 11 < \infty$  ? **Нет.**
- 16)  $l_{3,3} + l_{3,4} < l_{3,4}$ ,  $0 + 10 < 10$  ? **Нет.**
- 17)  $l_{3,3} + l_{3,5} < l_{3,5}$ ,  $0 + 7 < 7$  ? **Нет.**
- 18)  $l_{3,3} + l_{3,6} < l_{3,6}$ ,  $0 + 11 < 11$  ? **Нет.**
- 19)  $l_{4,3} + l_{3,5} < l_{4,5}$ ,  $10 + 7 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{4,5} = l_{5,4} = 17$ ;  $\mu_{4,5} = \mu_{5,4} = x_3$ .
- 20)  $l_{4,3} + l_{3,6} < l_{4,6}$ ,  $10 + 11 < 2$  ? **Нет.**
- 21)  $l_{5,3} + l_{3,6} < l_{5,6}$ ,  $7 + 11 < 18$  ? **Нет.**

Вносим изменения в матрицы  $\|l^3\|$  и  $\|\mu^3\|$  (рис. 3.12).

$l^3$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	25	16	26	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	21	0	12	6	4	13	17	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	12	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	25	4	$\infty$	10	0	17	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	16	13	7	7	17	0	4	$\infty$	9	$\infty$
$x_6$	26	17	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0	$\infty$	$\infty$

$\mu^3$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_3$	$x_3$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_2$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_4$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_3$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_5$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_3$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_6$	$x_3$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_7$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_8$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_9$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$

x8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
x9	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

Рисунок 3.12 — Матрицы путей и переходов графа  $G$  перед началом шага  $p=4$ 

### 3.3.5. Шаг 4 расчетов по алгоритму Флойда

Принимаем  $p=4$ . Принимаем в матрице  $\|l^4\|$  вершину  $x_4$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рис. 3.13).

$l^4$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	25	16	26	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_1$	21	0	12	6	4	13	17	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	12	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_4$	25	4	$\infty$	10	0	17	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	16	13	7	7	17	0	4	$\infty$	9	$\infty$
$x_6$	26	17	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

Рисунок 3.13 — Матрица путей  $l^4$  на четвертом шаге расчетов

Вычеркиваем в матрице  $\|l^4\|$  строки и столбцы, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$ . В итоге получаем матрицу  $\|l_0^4\|$ , изображенную на рис. 3.14.

$l_0^4$	$x_0$	$x_1$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	0	21	15	25	16	26	$\infty$
$x_1$	21	0	6	4	13	17	$\infty$
$x_3$	15	6	0	10	7	11	$\infty$
$x_4$	25	4	10	0	17	2	6
$x_5$	16	13	7	17	0	4	$\infty$
$x_6$	26	17	11	2	4	0	8
$x_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	6	$\infty$	8	0

Рисунок 3.14 — Матрица  $\|l_0^4\|$  после вычеркивания строк и столбцов, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$



Выполним необходимые расчеты:

- 1)  $l_{0,4} + l_{4,1} < l_{0,1}$ ,  $25 + 4 < 21$  ? **Нет.**
- 3)  $l_{0,4} + l_{4,3} < l_{0,3}$ ,  $25 + 10 < 15$  ? **Нет.**
- 5)  $l_{0,4} + l_{4,5} < l_{0,5}$ ,  $25 + 17 < 16$  ? **Нет.**
- 6)  $l_{0,4} + l_{4,6} < l_{0,6}$ ,  $25 + 2 < 26$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{0,4} + l_{4,7} < l_{0,7}$ ,  $25 + 6 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,7} = l_{7,0} = 31$ ;  $\mu_{0,7} = \mu_{7,0} = x_4$ .
- 9)  $l_{1,4} + l_{4,3} < l_{1,3}$ ,  $4 + 10 < 6$  ? **Нет.**
- 10)  $l_{1,4} + l_{4,4} < l_{1,4}$ ,  $4 + 0 < 4$  ? **Нет.**
- 11)  $l_{1,4} + l_{4,5} < l_{1,5}$ ,  $4 + 17 < 13$  ? **Нет.**
- 12)  $l_{1,4} + l_{4,6} < l_{1,6}$ ,  $4 + 2 < 17$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,6} = l_{6,1} = 6$ ;  $\mu_{1,6} = \mu_{6,1} = x_4$ .
- 13)  $l_{1,4} + l_{4,7} < l_{1,7}$ ,  $4 + 6 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,7} = l_{7,1} = 10$ ;  $\mu_{1,7} = \mu_{7,1} = x_4$ .
- 20)  $l_{3,4} + l_{4,5} < l_{3,5}$ ,  $10 + 17 < 7$  ? **Нет.**
- 21)  $l_{3,4} + l_{4,6} < l_{3,6}$ ,  $10 + 2 < 11$  ? **Нет.**
- 22)  $l_{3,4} + l_{4,7} < l_{3,7}$ ,  $10 + 6 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{3,7} = l_{7,3} = 16$ ;  $\mu_{3,7} = \mu_{7,3} = x_4$ .
- 26)  $l_{5,4} + l_{4,6} < l_{5,6}$ ,  $17 + 2 < 4$  ? **Нет.**
- 27)  $l_{5,4} + l_{4,7} < l_{5,7}$ ,  $17 + 6 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{5,7} = l_{7,5} = 23$ ;  $\mu_{5,7} = \mu_{7,5} = x_4$ .
- 28)  $l_{6,4} + l_{4,7} < l_{6,7}$ ,  $2 + 6 < 8$  ? **Нет.**

Вносим изменения в матрицы  $\|l^4\|$  и  $\|\mu^4\|$  (рис. 3.15).

$l^4$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	25	16	26	31	$\infty$	$\infty$
$x_1$	21	0	12	6	4	13	6	10	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	12	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	$\infty$	$\infty$
$x_4$	25	4	$\infty$	10	0	17	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	16	13	7	7	17	0	4	23	9	$\infty$
$x_6$	26	6	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	31	10	$\infty$	16	6	23	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

$\mu^4$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_3$	$x_4$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_2$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_4$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_3$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_5$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_3$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_7$	$x_4$	$x_4$	$x_2$	$x_4$	$x_4$	$x_4$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_8$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_9$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$

Рисунок 3.15 — Матрицы путей и переходов графа  $G$  перед началом шага  $p=5$

### 3.3.6. Шаг 5 расчетов по алгоритму Флойда

Принимаем  $p=5$ . Принимаем в матрице  $\|l^5\|$  вершину  $x_5$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рис. 3.16).

$l^5$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	25	16	26	31	$\infty$	$\infty$
$x_1$	21	0	12	6	4	13	6	10	$\infty$	$\infty$
$x_2$	9	12	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	$\infty$	$\infty$
$x_4$	25	4	$\infty$	10	0	17	2	6	$\infty$	$\infty$
$x_5$	16	13	7	7	17	0	4	23	9	$\infty$
$x_6$	26	6	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$	4
$x_7$	31	10	$\infty$	16	6	23	8	0	$\infty$	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

Рисунок

$l^5$  на пятом шаге расчетов

3.16 — Матрица путей

Вычеркиваем в матрице  $\|l^5\|$  строки и столбцы, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$ . В итоге получаем матрицу  $\|l_0^5\|$ , изображенную на рис. 3.17.

$l_0^5$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
$x_0$	0	21	9	15	25	16	26	31	$\infty$
$x_1$	21	0	12	6	4	13	6	10	$\infty$
$x_2$	9	12	0	$\infty$	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	$\infty$
$x_4$	25	4	$\infty$	10	0	17	2	6	$\infty$
$x_5$	16	13	7	7	17	0	4	23	9
$x_6$	26	6	$\infty$	11	2	4	0	8	$\infty$
$x_7$	31	10	$\infty$	16	6	23	8	0	$\infty$
$x_8$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	0

Рисунок 3.17 — Матрица  $\|l_0^5\|$  после вычеркивания строк и столбцов, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$

Выполним необходимые расчеты:

$$1) l_{0,5} + l_{5,1} < l_{0,1}, \quad 16 + 13 < 21 ? \text{ Нет.}$$

$$2) l_{0,5} + l_{5,2} < l_{0,2}, \quad 16 + 7 < 9 ? \text{ Нет.}$$

- 3)  $l_{0,5} + l_{5,3} < l_{0,3}$  ,  $16 + 7 < 15$  ? **Нет.**
- 4)  $l_{0,5} + l_{5,4} < l_{0,4}$  ,  $16 + 17 < 25$  ? **Нет.**
- 5)  $l_{0,5} + l_{5,6} < l_{0,6}$  ,  $16 + 4 < 26$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,6} = l_{6,0} = 20$ ;  $\mu_{0,6} = \mu_{6,0} = x_5$  .
- 6)  $l_{0,5} + l_{5,7} < l_{0,7}$  ,  $16 + 23 < 31$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{0,5} + l_{5,8} < l_{0,8}$  ,  $16 + 9 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,8} = l_{8,0} = 25$ ;  $\mu_{0,8} = \mu_{8,0} = x_5$  .
- 8)  $l_{1,5} + l_{5,2} < l_{1,2}$  ,  $13 + 7 < 12$  ? **Нет.**
- 9)  $l_{1,5} + l_{5,3} < l_{1,3}$  ,  $13 + 7 < 6$  ? **Нет.**
- 10)  $l_{1,5} + l_{5,4} < l_{1,4}$  ,  $13 + 17 < 4$  ? **Нет.**
- 11)  $l_{1,5} + l_{5,5} < l_{1,5}$  ,  $13 + 0 < 13$  ? **Нет.**
- 12)  $l_{1,5} + l_{5,6} < l_{1,6}$  ,  $13 + 4 < 6$  ? **Нет.**
- 13)  $l_{1,5} + l_{5,7} < l_{1,7}$  ,  $13 + 23 < 10$  ? **Нет.**
- 14)  $l_{1,5} + l_{5,8} < l_{1,8}$  ,  $13 + 9 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,8} = l_{8,1} = 22$ ;  $\mu_{1,8} = \mu_{8,1} = x_5$  .
- 15)  $l_{2,5} + l_{5,3} < l_{2,3}$  ,  $7 + 7 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{2,3} = 14$ ;  $\mu_{2,3} = x_5$  .
- 16)  $l_{2,5} + l_{5,4} < l_{2,4}$  ,  $7 + 17 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{2,4} = l_{4,2} = 24$ ;  $\mu_{2,4} = \mu_{4,2} = x_5$  .
- 17)  $l_{2,5} + l_{5,6} < l_{2,6}$  ,  $7 + 4 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{2,6} = l_{6,2} = 11$ ;  $\mu_{2,6} = \mu_{6,2} = x_5$  .
- 18)  $l_{2,5} + l_{5,7} < l_{2,7}$  ,  $7 + 23 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{2,7} = l_{7,2} = 30$ ;  $\mu_{2,7} = \mu_{7,2} = x_5$  .
- 19)  $l_{2,5} + l_{5,8} < l_{2,8}$  ,  $7 + 9 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{2,8} = l_{8,2} = 16$ ;  $\mu_{2,8} = \mu_{8,2} = x_5$  .
- 20)  $l_{3,5} + l_{5,4} < l_{3,4}$  ,  $7 + 17 < 10$  ? **Нет.**
- 21)  $l_{3,5} + l_{5,6} < l_{3,6}$  ,  $7 + 4 < 11$  ? **Нет.**
- 22)  $l_{3,5} + l_{5,7} < l_{3,7}$  ,  $7 + 23 < 16$  ? **Нет.**
- 23)  $l_{3,5} + l_{5,8} < l_{3,8}$  ,  $7 + 9 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{3,8} = l_{8,3} = 16$ ;  $\mu_{3,8} = \mu_{8,3} = x_5$  .
- 24)  $l_{4,5} + l_{5,6} < l_{4,6}$  ,  $17 + 4 < 2$  ? **Нет.**
- 25)  $l_{4,5} + l_{5,7} < l_{4,7}$  ,  $17 + 23 < 6$  ? **Нет.**
- 26)  $l_{4,5} + l_{5,8} < l_{4,8}$  ,  $17 + 9 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{4,8} = l_{8,4} = 26$ ;  $\mu_{4,8} = \mu_{8,4} = x_5$  .
- 27)  $l_{6,5} + l_{5,7} < l_{6,7}$  ,  $4 + 23 < 8$  ? **Нет.**
- 28)  $l_{6,5} + l_{5,8} < l_{6,8}$  ,  $4 + 9 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{6,8} = l_{8,6} = 13$ ;  $\mu_{6,8} = \mu_{8,6} = x_5$  .
- 29)  $l_{7,5} + l_{5,8} < l_{7,8}$  ,  $23 + 9 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{7,8} = l_{8,7} = 32$ ;  $\mu_{7,8} = \mu_{8,7} = x_5$  .

Вносим изменения в матрицы  $\|l^5\|$  и  $\|\mu^5\|$  (рис. 3.18).

$l^5$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	25	16	20	31	25	$\infty$
$x_1$	21	0	12	6	4	13	6	10	22	$\infty$
$x_2$	9	12	0	14	24	7	11	30	16	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	$\infty$
$x_4$	25	4	24	10	0	17	2	6	26	$\infty$
$x_5$	16	13	7	7	17	0	4	23	9	$\infty$
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	31	10	30	16	6	23	8	0	32	$\infty$
$x_8$	25	22	16	16	26	9	13	32	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

$\mu^5$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_5$	$x_4$	$x_5$	$x_9$
$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_3$	$x_4$	$x_4$	$x_5$	$x_9$
$x_2$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_9$
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_5$	$x_9$
$x_4$	$x_3$	$x_1$	$x_5$	$x_3$	$x_4$	$x_3$	$x_6$	$x_7$	$x_5$	$x_9$
$x_5$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$x_3$	$x_3$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_6$	$x_5$	$x_4$	$x_5$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_5$	$x_9$
$x_7$	$x_4$	$x_4$	$x_5$	$x_4$	$x_4$	$x_4$	$x_6$	$x_7$	$x_5$	$x_9$
$x_8$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_5$	$x_9$
$x_9$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$

Рисунок 3.18 — Матрицы путей и переходов графа  $G$  перед началом шага  $p=6$ 

### 3.3.7. Шаг 6 расчетов по алгоритму Флойда

Принимаем  $p=6$ . Принимаем в матрице  $\|l^6\|$  вершину  $x_6$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рис. 3.19).

$l^6$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	25	16	20	31	25	$\infty$
$x_1$	21	0	12	6	4	13	6	10	22	$\infty$
$x_2$	9	12	0	14	24	7	11	30	16	$\infty$
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	$\infty$
$x_4$	25	4	24	10	0	17	2	6	26	$\infty$
$x_5$	16	13	7	7	17	0	4	23	9	$\infty$
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	31	10	30	16	6	23	8	0	32	$\infty$
$x_8$	25	22	16	16	26	9	13	32	0	9
$x_9$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	$\infty$	9	0

Рисунок 3.19 — Матрица путей  $l^6$  на шестом шаге расчетов

Поскольку ни один элемент базовой строки и базового столбца не равен  $\infty$ , то в дальнейших расчетах используем  $\|l^6\|$ .

Выполним необходимые расчеты:

- 1)  $l_{0,6} + l_{6,1} < l_{0,1}$ ,  $20 + 6 < 21$  ? **Нет.**
- 2)  $l_{0,6} + l_{6,2} < l_{0,2}$ ,  $20 + 11 < 9$  ? **Нет.**
- 3)  $l_{0,6} + l_{6,3} < l_{0,3}$ ,  $20 + 11 < 15$  ? **Нет.**
- 4)  $l_{0,6} + l_{6,4} < l_{0,4}$ ,  $20 + 2 < 25$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,4} = l_{4,0} = 22$ ;  $\mu_{0,4} = \mu_{4,0} = x_6$ .
- 5)  $l_{0,6} + l_{6,5} < l_{0,5}$ ,  $20 + 4 < 16$  ? **Нет.**

- 6)  $l_{0,6} + l_{6,7} < l_{0,7}$  ,  $20 + 8 < 31$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,7} = l_{7,0} = 28$ ;  $\mu_{0,7} = \mu_{7,0} = x_6$  .
- 7)  $l_{0,6} + l_{6,8} < l_{0,8}$  ,  $20 + 13 < 25$  ? **Нет.**
- 6)  $l_{0,6} + l_{6,9} < l_{0,9}$  ,  $20 + 4 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{0,9} = l_{9,0} = 24$ ;  $\mu_{0,9} = \mu_{9,0} = x_6$  .
- 8)  $l_{1,6} + l_{6,2} < l_{1,2}$  ,  $6 + 11 < 12$  ? **Нет.**
- 9)  $l_{1,6} + l_{6,3} < l_{1,3}$  ,  $6 + 11 < 6$  ? **Нет.**
- 10)  $l_{1,6} + l_{6,4} < l_{1,4}$  ,  $6 + 2 < 4$  ? **Нет.**
- 11)  $l_{1,6} + l_{6,5} < l_{1,5}$  ,  $6 + 4 < 13$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,5} = l_{5,1} = 10$ ;  $\mu_{1,5} = \mu_{5,1} = x_6$  .
- 12)  $l_{1,6} + l_{6,7} < l_{1,7}$  ,  $6 + 8 < 10$  ? **Нет.**
- 13)  $l_{1,6} + l_{6,8} < l_{1,8}$  ,  $6 + 13 < 22$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,8} = l_{8,1} = 19$ ;  $\mu_{1,8} = \mu_{8,1} = x_6$  .
- 6)  $l_{1,6} + l_{6,9} < l_{1,9}$  ,  $6 + 4 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{1,9} = l_{9,1} = 10$ ;  $\mu_{1,9} = \mu_{9,1} = x_6$  .
- 14)  $l_{2,6} + l_{6,3} < l_{2,3}$  ,  $11 + 11 < 14$  ? **Нет.**
- 15)  $l_{2,6} + l_{6,4} < l_{2,4}$  ,  $11 + 2 < 24$  ? **Да.** Тогда:  $l_{2,4} = l_{4,2} = 13$ ;  $\mu_{2,4} = \mu_{4,2} = x_6$  .
- 16)  $l_{2,6} + l_{6,5} < l_{2,5}$  ,  $11 + 4 < 7$  ? **Нет.**
- 17)  $l_{2,6} + l_{6,7} < l_{2,7}$  ,  $11 + 8 < 30$  ? **Да.** Тогда:  $l_{2,7} = l_{7,2} = 19$ ;  $\mu_{2,7} = \mu_{7,2} = x_6$  .
- 18)  $l_{2,6} + l_{6,8} < l_{2,8}$  ,  $11 + 13 < 16$  ? **Нет.**
- 6)  $l_{2,6} + l_{6,9} < l_{2,9}$  ,  $11 + 4 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{2,9} = l_{9,2} = 15$ ;  $\mu_{2,9} = \mu_{9,2} = x_6$  .
- 19)  $l_{3,6} + l_{6,4} < l_{3,4}$  ,  $11 + 2 < 10$  ? **Нет.**
- 20)  $l_{3,6} + l_{6,5} < l_{3,5}$  ,  $11 + 4 < 7$  ? **Нет.**
- 21)  $l_{3,6} + l_{6,7} < l_{3,7}$  ,  $11 + 8 < 16$  ? **Нет.**
- 22)  $l_{3,6} + l_{6,8} < l_{3,8}$  ,  $11 + 13 < 16$  ? **Нет.**
- 6)  $l_{3,6} + l_{6,9} < l_{3,9}$  ,  $11 + 4 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{3,9} = l_{9,3} = 15$ ;  $\mu_{3,9} = \mu_{9,3} = x_6$  .
- 23)  $l_{4,6} + l_{6,5} < l_{4,5}$  ,  $2 + 4 < 17$  ? **Да.** Тогда:  $l_{4,5} = l_{5,4} = 6$ ;  $\mu_{4,5} = \mu_{5,4} = x_6$  .
- 23)  $l_{4,6} + l_{6,7} < l_{4,7}$  ,  $2 + 8 < 6$  ? **Нет.**
- 24)  $l_{4,6} + l_{6,8} < l_{4,8}$  ,  $2 + 13 < 26$  ? **Да.** Тогда:  $l_{4,8} = l_{8,4} = 25$ ;  $\mu_{4,8} = \mu_{8,4} = x_6$  .
- 6)  $l_{4,6} + l_{6,9} < l_{4,9}$  ,  $2 + 4 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{4,9} = l_{9,4} = 6$ ;  $\mu_{4,9} = \mu_{9,4} = x_6$  .
- 25)  $l_{5,6} + l_{6,7} < l_{5,7}$  ,  $4 + 8 < 23$  ? **Да.** Тогда:  $l_{5,7} = l_{7,5} = 12$ ;  $\mu_{5,7} = \mu_{7,5} = x_6$  .
- 26)  $l_{5,6} + l_{6,8} < l_{5,8}$  ,  $4 + 13 < 9$  ? **Нет.**
- 6)  $l_{5,6} + l_{6,9} < l_{5,9}$  ,  $4 + 4 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{5,9} = l_{9,5} = 8$ ;  $\mu_{5,9} = \mu_{9,5} = x_6$  .
- 27)  $l_{7,6} + l_{6,8} < l_{7,8}$  ,  $8 + 13 < 32$  ? **Да.** Тогда:  $l_{7,8} = l_{8,7} = 21$ ;  $\mu_{7,8} = \mu_{8,7} = x_6$  .
- 6)  $l_{7,6} + l_{6,9} < l_{7,9}$  ,  $8 + 4 < \infty$  ? **Да.** Тогда:  $l_{7,9} = l_{9,7} = 12$ ;  $\mu_{7,9} = \mu_{9,7} = x_6$  .
- 6)  $l_{8,6} + l_{6,9} < l_{8,9}$  ,  $13 + 4 < 9$  ? **Нет.**

Вносим изменения в матрицы  $\|l^6\|$  и  $\|\mu^6\|$  (рис. 3.21).

$l^6$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	22	16	20	28	25	24
$x_1$	21	0	12	6	4	10	6	10	19	10
$x_2$	9	12	0	14	13	7	11	19	16	15
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	15
$x_4$	22	4	13	10	0	6	2	6	25	6
$x_5$	16	10	7	7	6	0	4	12	9	8
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	28	10	19	16	6	12	8	0	21	12
$x_8$	25	19	16	16	25	9	13	21	0	9
$x_9$	24	10	15	15	6	8	4	12	9	0

$\mu^6$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_6$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_4$	$x_4$	$x_6$	$x_6$
$x_2$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_4$	$x_6$	$x_1$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_6$	$x_7$	$x_6$	$x_6$
$x_5$	$x_2$	$x_6$	$x_2$	$x_3$	$x_6$	$x_5$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_6$
$x_6$	$x_5$	$x_4$	$x_5$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_7$	$x_6$	$x_4$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_4$	$x_7$	$x_6$	$x_6$
$x_8$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_9$
$x_9$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_9$

Рисунок 3.21 — Матрицы путей и переходов графа  $G$  перед началом шага  $p=7$ 

### 3.3.8. Шаг 7 расчетов по алгоритму Флойда

Принимаем  $p=7$ . Принимаем в матрице  $\|l^7\|$  вершину  $x_7$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рис. 3.22).

$l^7$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	22	16	20	28	25	24
$x_1$	21	0	12	6	4	10	6	10	19	10
$x_2$	9	12	0	14	13	7	11	19	16	15
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	15
$x_4$	22	4	13	10	0	6	2	6	25	6
$x_5$	16	10	7	7	6	0	4	12	9	8
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	28	10	19	16	6	12	8	0	21	12
$x_8$	25	19	16	16	25	9	13	21	0	9
$x_9$	24	10	15	15	6	8	4	12	9	0

Рисунок 3.22 — Матрица путей  $l^7$  на седьмом шаге расчетов

Вычеркиваем в матрице  $\|l^7\|$  строки и столбцы, базовые элементы которых имеют значение  $\infty$ .

Поскольку ни один элемент базовой строки и базового столбца не равен  $\infty$ , то в дальнейших расчетах используем  $\|l^7\|$ .

Выполним необходимые расчеты:

- 1)  $l_{0,7} + l_{7,1} < l_{0,1}$  ,  $28 + 10 < 21$  ? **Нет.**
- 2)  $l_{0,7} + l_{7,2} < l_{0,2}$  ,  $28 + 19 < 9$  ? **Нет.**
- 3)  $l_{0,7} + l_{7,3} < l_{0,3}$  ,  $28 + 16 < 15$  ? **Нет.**
- 4)  $l_{0,7} + l_{7,4} < l_{0,4}$  ,  $28 + 6 < 22$  ? **Нет.**
- 5)  $l_{0,7} + l_{7,5} < l_{0,5}$  ,  $28 + 12 < 16$  ? **Нет.**
- 6)  $l_{0,7} + l_{7,6} < l_{0,6}$  ,  $28 + 8 < 20$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{0,7} + l_{7,8} < l_{0,8}$  ,  $28 + 21 < 25$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{0,7} + l_{7,9} < l_{0,9}$  ,  $28 + 12 < 24$  ? **Нет.**
- 8)  $l_{1,7} + l_{7,2} < l_{1,2}$  ,  $10 + 19 < 12$  ? **Нет.**
- 9)  $l_{1,7} + l_{7,3} < l_{1,3}$  ,  $10 + 16 < 6$  ? **Нет.**
- 10)  $l_{1,7} + l_{7,4} < l_{1,4}$  ,  $10 + 6 < 4$  ? **Нет.**
- 11)  $l_{1,7} + l_{7,5} < l_{1,5}$  ,  $10 + 12 < 10$  ? **Нет.**
- 12)  $l_{1,7} + l_{7,6} < l_{1,6}$  ,  $10 + 8 < 6$  ? **Нет.**
- 13)  $l_{1,7} + l_{7,8} < l_{1,8}$  ,  $10 + 21 < 19$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{1,7} + l_{7,9} < l_{1,9}$  ,  $10 + 12 < 10$  ? **Нет.**
- 14)  $l_{2,7} + l_{7,3} < l_{2,3}$  ,  $19 + 16 < 14$  ? **Нет.**
- 15)  $l_{2,7} + l_{7,4} < l_{2,4}$  ,  $19 + 6 < 13$  ? **Нет.**
- 16)  $l_{2,7} + l_{7,5} < l_{2,5}$  ,  $19 + 12 < 7$  ? **Нет.**
- 17)  $l_{2,7} + l_{7,6} < l_{2,6}$  ,  $19 + 8 < 11$  ? **Нет.**
- 18)  $l_{2,7} + l_{7,8} < l_{2,8}$  ,  $19 + 21 < 16$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{2,7} + l_{7,9} < l_{2,9}$  ,  $19 + 12 < 15$  ? **Нет.**
- 19)  $l_{3,7} + l_{7,4} < l_{3,4}$  ,  $16 + 6 < 10$  ? **Нет.**
- 20)  $l_{3,7} + l_{7,5} < l_{3,5}$  ,  $16 + 12 < 7$  ? **Нет.**
- 21)  $l_{3,7} + l_{7,6} < l_{3,6}$  ,  $16 + 8 < 11$  ? **Нет.**
- 22)  $l_{3,7} + l_{7,8} < l_{3,8}$  ,  $16 + 21 < 16$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{3,7} + l_{7,9} < l_{3,9}$  ,  $16 + 12 < 15$  ? **Нет.**
- 23)  $l_{4,7} + l_{7,5} < l_{4,5}$  ,  $6 + 12 < 6$  ? **Нет.**
- 24)  $l_{4,7} + l_{7,6} < l_{4,6}$  ,  $6 + 8 < 2$  ? **Нет.**
- 25)  $l_{4,7} + l_{7,8} < l_{4,8}$  ,  $6 + 21 < 25$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{4,7} + l_{7,9} < l_{4,9}$  ,  $6 + 12 < 6$  ? **Нет.**
- 25)  $l_{5,7} + l_{7,6} < l_{5,6}$  ,  $12 + 8 < 4$  ? **Нет.**
- 26)  $l_{5,7} + l_{7,8} < l_{5,8}$  ,  $12 + 21 < 9$  ? **Нет.**
- 7)  $l_{5,7} + l_{7,9} < l_{5,9}$  ,  $12 + 12 < 8$  ? **Нет.**

28)  $l_{6,7} + l_{7,8} < l_{6,8}$  ,  $8 + 21 < 13$  ? **Нет.**

7)  $l_{6,7} + l_{7,9} < l_{6,9}$  ,  $8 + 12 < 4$  ? **Нет.**

7)  $l_{8,7} + l_{7,9} < l_{8,9}$  ,  $21 + 12 < 9$  ? **Нет.**

По результатам расчетов никакие изменения в матрицы  $\|l^7\|$  и  $\mu^7$  не вносятся.

$l^7$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	22	16	20	28	25	24
$x_1$	21	0	12	6	4	10	6	10	19	10
$x_2$	9	12	0	14	13	7	11	19	16	15
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	15
$x_4$	22	4	13	10	0	6	2	6	25	6
$x_5$	16	10	7	7	6	0	4	12	9	8
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	28	10	19	16	6	12	8	0	21	12
$x_8$	25	19	16	16	25	9	13	21	0	9
$x_9$	24	10	15	15	6	8	4	12	9	0

$\mu^7$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_6$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_4$	$x_4$	$x_6$	$x_6$
$x_2$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_4$	$x_6$	$x_1$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_6$	$x_7$	$x_6$	$x_6$
$x_5$	$x_2$	$x_6$	$x_2$	$x_3$	$x_6$	$x_5$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_6$
$x_6$	$x_5$	$x_4$	$x_5$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_7$	$x_6$	$x_4$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_4$	$x_7$	$x_6$	$x_6$
$x_8$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_9$
$x_9$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_9$

Рисунок 3.23 — Матрицы путей и переходов графа  $G$  перед началом шага  $p=8$

### 3.3.9. Шаг 8 расчетов по алгоритму Флойда

Принимаем  $p=8$ . Принимаем в матрице  $\|l^8\|$  вершину  $x_8$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рис. 3.24).

$l^8$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	22	16	20	28	25	24
$x_1$	21	0	12	6	4	10	6	10	19	10
$x_2$	9	12	0	14	13	7	11	19	16	15
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	15
$x_4$	22	4	13	10	0	6	2	6	25	6
$x_5$	16	10	7	7	6	0	4	12	9	8
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	28	10	19	16	6	12	8	0	21	12
$x_8$	25	19	16	16	25	9	13	21	0	9
$x_9$	24	10	15	15	6	8	4	12	9	0

Рисунок 3.24 — Матрица путей  $l^8$  на восьмом шаге расчетов



Поскольку ни один элемент базовой строки и базового столбца не равен  $\infty$ , то в дальнейших расчетах используем  $\|l^8\|$ .

По результатам расчетов никакие изменения в матрицы  $\|l^8\|$  и  $\mu^8$  не вносятся.

$l^8$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	22	16	20	28	25	24
$x_1$	21	0	12	6	4	10	6	10	19	10
$x_2$	9	12	0	14	13	7	11	19	16	15
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	15
$x_4$	22	4	13	10	0	6	2	6	25	6
$x_5$	16	10	7	7	6	0	4	12	9	8
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	28	10	19	16	6	12	8	0	21	12
$x_8$	25	19	16	16	25	9	13	21	0	9
$x_9$	24	10	15	15	6	8	4	12	9	0

$\mu^8$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_6$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_4$	$x_4$	$x_6$	$x_6$
$x_2$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_4$	$x_6$	$x_1$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_6$	$x_7$	$x_6$	$x_6$
$x_5$	$x_2$	$x_6$	$x_2$	$x_3$	$x_6$	$x_5$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_6$
$x_6$	$x_5$	$x_4$	$x_5$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_7$	$x_6$	$x_4$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_4$	$x_7$	$x_6$	$x_6$
$x_8$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_9$
$x_9$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_9$

Рисунок 3.25 — Матрицы путей и переходов графа  $G$  перед началом шага  $p=9$

### 3.3.10. Шаг 9 расчетов по алгоритму Флойда

Принимаем  $p=9$ . Принимаем в матрице  $\|l^9\|$  вершину  $x_9$  за базовую и выделяем базовую строку и базовый столбец (рис. 3.26).

$l^9$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	22	16	20	28	25	24
$x_1$	21	0	12	6	4	10	6	10	19	10
$x_2$	9	12	0	14	13	7	11	19	16	15
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	15
$x_4$	22	4	13	10	0	6	2	6	25	6
$x_5$	16	10	7	7	6	0	4	12	9	8
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	28	10	19	16	6	12	8	0	21	12
$x_8$	25	19	16	16	25	9	13	21	0	9
$x_9$	24	10	15	15	6	8	4	12	9	0

Рисунок 3.26 — Матрица путей  $l^9$  на девятом шаге расчетов

Поскольку ни один элемент базовой строки и базового столбца не равен  $\infty$ , то в дальнейших расчетах используем  $\|l^9\|$ .

По результатам расчетов никакие изменения в матрицы  $\|l^9\|$  и  $\mu^9$  не вносятся.

$l^9$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	0	21	9	15	22	16	20	28	25	24
$x_1$	21	0	12	6	4	10	6	10	19	10
$x_2$	9	12	0	14	13	7	11	19	16	15
$x_3$	15	6	6	0	10	7	11	16	16	15
$x_4$	22	4	13	10	0	6	2	6	25	6
$x_5$	16	10	7	7	6	0	4	12	9	8
$x_6$	20	6	11	11	2	4	0	8	13	4
$x_7$	28	10	19	16	6	12	8	0	21	12
$x_8$	25	19	16	16	25	9	13	21	0	9
$x_9$	24	10	15	15	6	8	4	12	9	0

$\mu^9$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$
$x_0$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_6$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	$x_3$	$x_1$	$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_4$	$x_4$	$x_6$	$x_6$
$x_2$	$x_0$	$x_3$	$x_2$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_4$	$x_6$	$x_1$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_6$	$x_7$	$x_6$	$x_6$
$x_5$	$x_2$	$x_6$	$x_2$	$x_3$	$x_6$	$x_5$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_6$
$x_6$	$x_5$	$x_4$	$x_5$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_4$	$x_8$	$x_9$
$x_7$	$x_6$	$x_4$	$x_6$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_4$	$x_7$	$x_6$	$x_6$
$x_8$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_5$	$x_6$	$x_5$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_9$
$x_9$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_9$

Рисунок 3.27 — Матрицы путей и переходов графа  $G$

Вычисления по алгоритму Флойда завершены.

### 3.2. Проверка результатов расчетов по алгоритму Флойда

Таким образом, в результате расчетов получены матрицы кратчайших путей и кратчайших переходов графа  $G$ .

По матрицам  $\|l_9\|$  и  $\|\mu_9\|$  можно найти длину кратчайшего пути и соответствующий этому пути переход.

Пусть нас интересует длина кратчайшего пути между вершинами  $x_0$  и  $x_9$ . Обратимся к матрице  $\|l_9\|$ . На пересечении строки  $x_0$  и столбца  $x_9$  находим, что длина кратчайшего пути равна 24-м единицам.

Для поиска соответствующего перехода будем сочетать анализ матрицы  $\|\mu_9\|$  с визуальным анализом графа. По матрице  $\|\mu_9\|$  определяем, что кратчайший путь из  $x_0$  в  $x_9$  лежит через вершину  $x_6$ . Из вершины  $x_2$  в вершину  $x_6$  через вершину  $x_5$ . Таким образом, кратчайший переход между вершинами  $x_0$  и  $x_9$  опирается на вершины  $(x_0, x_2, x_5, x_6)$ .

### 3.3. Вывод

В расчетно-графической работе № 3 мы нашли кратчайшие пути по алгоритму Флойда.

Алгоритм Флойда — Уоршелла используется очень широко, начиная от поиска транзитивного замыкания графа, заканчивая генетикой и управлением проектами. Но активнее всего при построении транспортных и других сетей.

Скажем если вы возьмете карту города — её транспортная система это граф, соответственно присвоив каждому ребру некую стоимость, рассчитанную скажем из пропускной способности и других важных параметров — вы сможете подвести попутчика по самому короткому/быстрому/дешевому пути.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“Калининградский государственный технический университет”  
(ФГБОУ ВО “КГТУ”)

Кафедра систем управления и вычислительной техники

Дисциплина: Дискретная математика

**Расчетно-графическая работа № 4**

«Расчет максимального потока в сети с ограниченной пропускной способностью  
по алгоритму Форда-Фалкерсона»

Вариант №70

Работу проверил:

доцент, профессор,

к.т.н. Иванов В. Е.

с оценкой: \_\_\_\_\_

подпись: \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Работу выполнил:

студент группы 18-ВТ

Подковыров Д.Р.

подпись: \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Калининград

2020г.

## Содержание

<b>4. Задание.....</b>	<b>3</b>
<b>4.1. Обозначения.....</b>	<b>4</b>
<b>4.2. Выполнению расчетов по алгоритму Форда - Фалкерсона .....</b>	<b>4</b>
<b>4.2.1. Итерация 1 расчетов по алгоритму Форда-Фалкерсона .....</b>	<b>5</b>
<b>4.2.2. Итерации 2—6 расчетов по алгоритму Форда-Фалкерсона.....</b>	<b>7</b>
<b>4.3. Заключение.....</b>	<b>10</b>

#### 4. Задание

«Найти распределение максимального потока в сети (рис. 4.1) по алгоритму Форда-Фалкерсона. Пропускная способность дуг приведена в таблице 4.1, где  $\infty$  — означает отсутствие ребра  $(x_i, x_j)$ , а «1» — его наличие, которое необходимо умножить на величину пропускной способности  $C_{ij}$ .

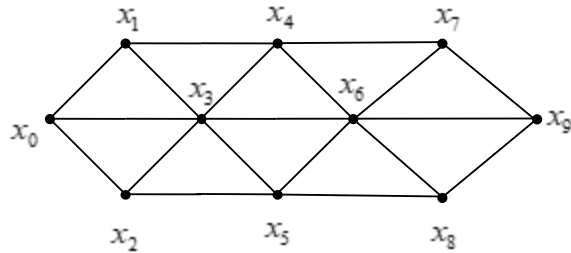


Рисунок 4.1 — Граф—сеть G

Таблица 4.1 — Варианты заданий

Старший разряд номера варианта	Индексы вершин, инцидентных ребру									
	0,1	0,2	0,3	1,3	1,4	2,3	2,5	3,4	3,5	3,6
	Вес ребра (условных единиц)									
	7	9	12	6	4	6	7	10	7	11
1	1	$\infty$	1	1	1	1	$\infty$	1	1	1

Таблица 4.1 — (продолжение)

Младший разряд номера варианта	Индексы вершин, инцидентных ребру									
	4,6	4,7	5,6	5,8	6,7	6,8	6,9	7,9	8,9	
	Вес ребра (условных единиц)									
	2	6	4	9	8	5	4	3	9	
5	1	1	1	1	$\infty$	1	1	1	1	

#### 4.1. Обозначения

При выполнении расчетно-графической работы применяются следующие обозначения:

$\varphi_{ij}$ — объем информации, энергии вещества, передаваемой от одного узла сети к другому,

$C_{ij}$ — наибольший поток, который может пропустить дуга,

$x_0$  — вершина-исток,

$\varphi_0 = \sum \varphi_{0i}$ — величина потока-источка, где  $\varphi_{0i}$  — величина потока по каждой  $i$ -ой дуге, исходящей из  $x_0$ ,

$x_k$ —вершина-сток,

$\varphi_k = \sum \varphi_{i_k}$  — величина потока вершины-стока, где  $\varphi_{i_k}$  величина потока по каждой  $i$ -ой дуге, входящей в  $x$ .

#### 4.2. Выполнению расчетов по алгоритму Форда - Фалкерсона

Рассмотрим граф  $G$ , изображенный на рис. 4.1.

Каждая дуга графа—сети  $G$  взвешена парой  $(\varphi_{ij}, c_{ij})$ . Так, например, дуга  $(x_2, x_3)$  имеет вес  $(0;6)$ , означающий, что текущая величина потока по дуге  $\varphi_{23}=0$ , а наибольший поток, который может пропустить дуга равен шести единицам, т.е.  $c_{23}=6$ .

На входе величина потока равна нулю, т.е.  $\varphi_0$ .

### 4.2.1. Итерация 1 расчетов по алгоритму Форда-Фалкерсона

Присвоим всем вершинам графа индексы  $0, 1, 2, \dots, k$ , где  $0$  — индекс вершины истока графа,  $k$  — индекс вершины — стока графа (рис. 4.1). Присвоим начальной вершине метку «0» (табл. 4.1). Все непомеченные вершины  $x_i$ , в которые идут ненасыщенные дуги из помеченной вершины  $x_0/s=0$ , пометим «+S» что свидетельствует о возможности увеличения потока из вершины  $x_0$  по дуге  $(x_0, x_i)$ . Результаты сведены в табл. 4.1, итерация 1. В табл. 4.2 сведены приращения потоков по дугам  $(x_i, x_j)$ . В табл. 4.3 зеленым цветом выделены насыщенные дуги.

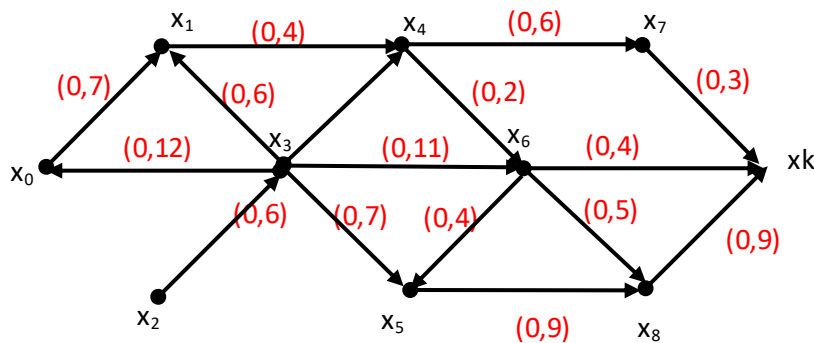


Рисунок 4.2 – Исходный граф - сети G

$x_i$	Итерация $p_i = i$						
	1	2	3	4	5	6	7
$x_0$	0	0	0	0	0	0	0
$x_1$	+0,+3	+0,+3	+0,+3	+0,+3	+0,+3	+0,+3	+0,+3
$x_2$	0	0	0	0	0	0	0
$x_3$	+2	+2	+2	+2	+2	+2	-
$x_4$	+1,+3	+1,+3	+1,+3	+1,+3	+3	+3	+3
$x_5$	+3,+6	+3,+6	+3,+6	+3,+6	+3,+6	+3,+6	+3,+6
$x_6$	+3,+4	+3,+4	+3	+3	+3	+3	+3
$x_7$	+4	+4	+4	+4	+4	+4	+4
$x_8$	+5,+6	+5,+6	+5,+6	+5,+6	+5,+6	+5,+6	+5,+6



$xk$	+6,+7,+8	+6,+7,+8	+6,+7,+8	+6,+7,+8	+6,+7,+8	+6,+7,+8	+6,+7,+8
------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Таблица 4.2 — Разметка дуг графа-сети  $G$  по итерациям

$x_i$	$c_{ij}$	Итерация $p_i = i$					
		1	2	3	4	5	6
$(x_0, x_1)$	7	0	0	0	0	0	0
$(x_1, x_4)$	4	1	2	3	4	4	4
$(x_2, x_3)$	6	1	2	3	4	5	5
$(x_3, x_0)$	12	0	0	0	0	0	0
$(x_3, x_1)$	6	1	2	3	4	4	4
$(x_3, x_4)$	10	0	0	0	0	0	0
$(x_3, x_5)$	7	0	0	0	0	0	0
$(x_3, x_6)$	11	0	0	0	0	1	2
$(x_4, x_6)$	2	1	2	2	2	2	2
$(x_4, x_7)$	6	0	0	1	2	2	2
$(x_5, x_8)$	9	1	2	2	2	2	2
$(x_6, x_5)$	4	1	2	2	2	2	2
$(x_6, x_8)$	5	0	0	0	0	0	0
$(x_6, x_k)$	4	0	0	0	0	1	2
$(x_7, x_k)$	3	0	0	1	2	2	2
$(x_8, x_k)$	9	1	2	2	2	2	2

Таблица 4.3 — Величина потока через дугу и насыщенные дуги графа-сети  $G$ 

В результате выполнения первой итерации возможны переходы:

$$\begin{aligned}
 V_1 = & \{ (x_2, x_3, x_0, x_1, x_4, x_7, x_k), (x_2, x_3, x_0, x_1, x_4, x_6, x_k), (x_2, x_3, x_0, x_1, x_4, x_6, x_5, x_8, x_k), \\
 & (x_2, x_3, x_0, x_1, x_4, x_6, x_8, x_k), (x_2, x_3, x_0, x_1, x_4, x_6, x_k), (x_2, x_3, x_1, x_4, x_7, x_k), \\
 & (x_2, x_3, x_1, x_4, x_6, x_k), (x_2, x_3, x_1, x_4, x_6, x_5, x_8, x_k), (x_2, x_3, x_1, x_4, x_6, x_8, x_k), (x_2, x_3, x_1, x_4, x_6, x_k), \\
 & (x_2, x_3, x_4, x_7, x_k), (x_2, x_3, x_4, x_6, x_k), (x_2, x_3, x_4, x_6, x_5, x_8, x_k), (x_2, x_3, x_4, x_6, x_8, x_k), (x_2, x_3, x_4, x_6, x_k), \\
 & (x_2, x_3, x_6, x_k), (x_2, x_3, x_6, x_5, x_8, x_k), (x_2, x_3, x_6, x_8, x_k), (x_2, x_3, x_5, x_8, x_k) \},
 \end{aligned}$$

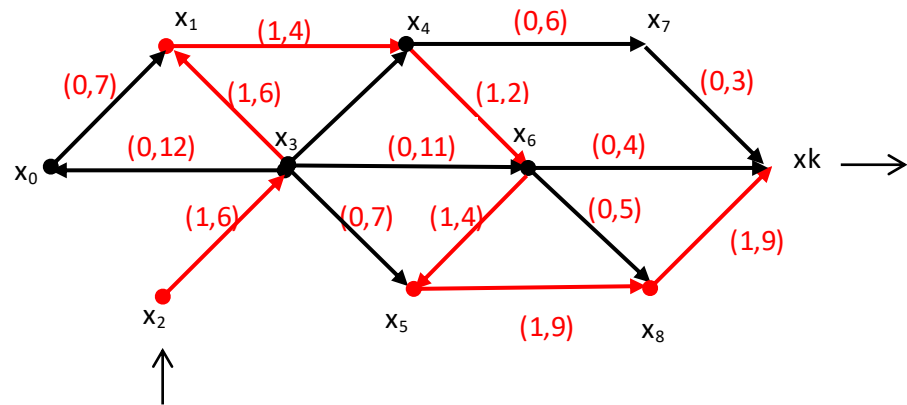
Ниже обозначения для элементов множества  $V_i$  вводятся в порядке следования в списке.

Пусть выбран  $V_1 = (x_2, x_3, x_1, x_4, x_6, x_5, x_8, x_k)$ , приращение потока на  $\Delta\varphi = 1$  проходит по маршруту  $\mu = ((x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_4), (x_4, x_6), (x_6, x_5), (x_5, x_8), (x_8, x_k))$ . Он выделен на рисунке как итерация 1.

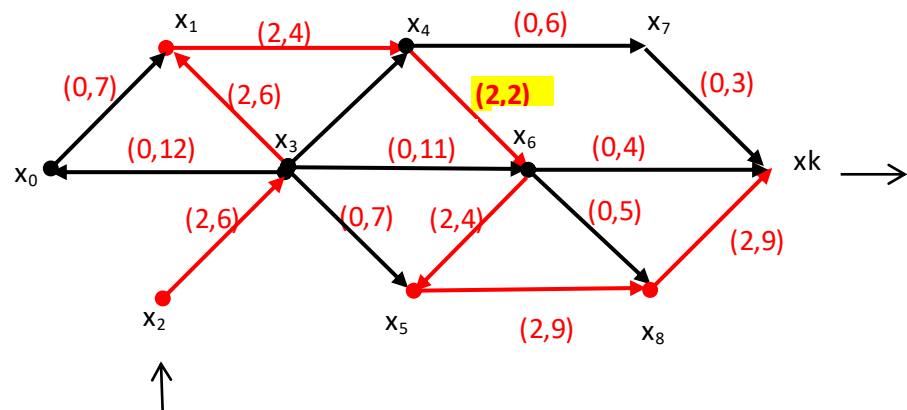
Изменим величину потока на выходе графа-сети  $G$ , т.е.  $\varphi_l = 1$ . Снимем прежнюю разметку вершин графа-сети  $G$  и выполним её заново.

#### 4.2.2. Итерации 2—6 расчетов по алгоритму Форда-Фалкерсона

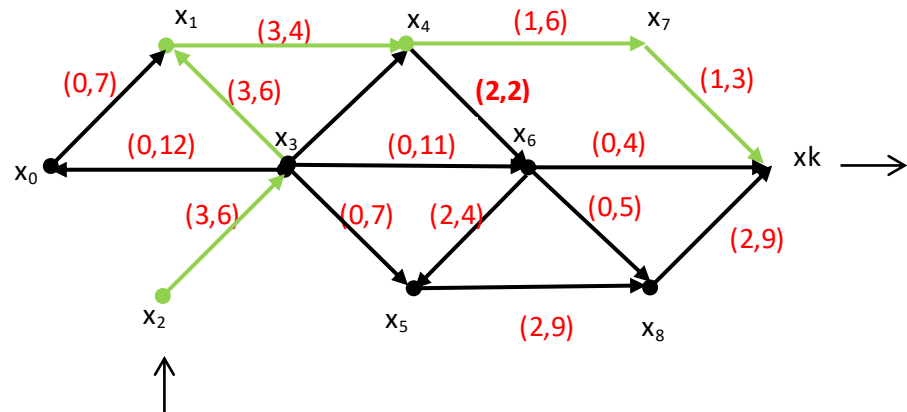
Итерация 1



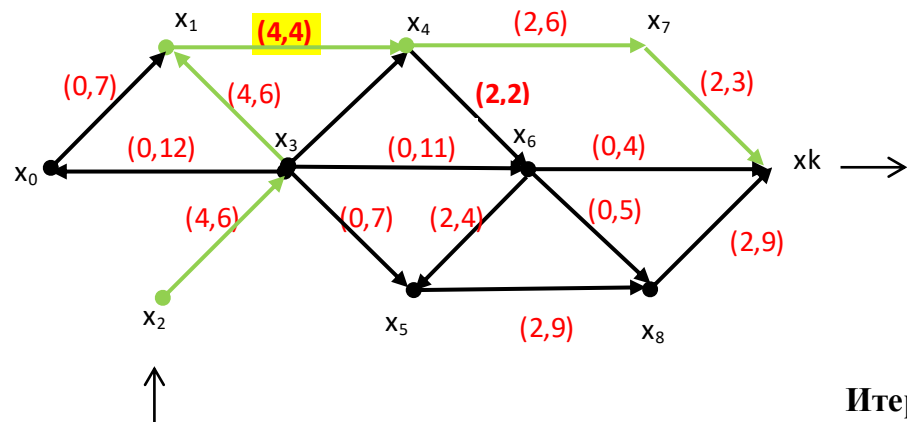
Итерация 2



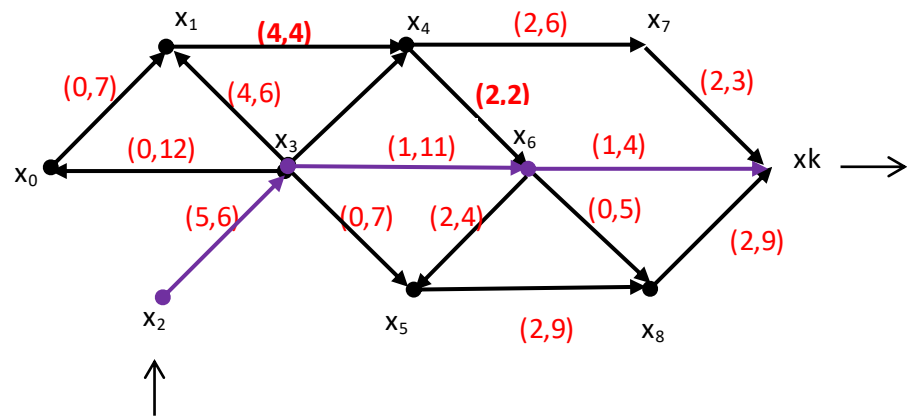
## Итерация 3



## Итерация 4



## Итерация 5



## Итерация 6

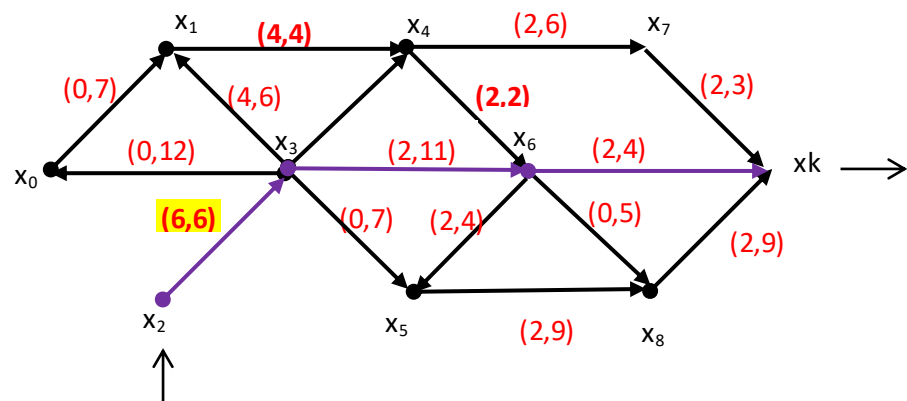
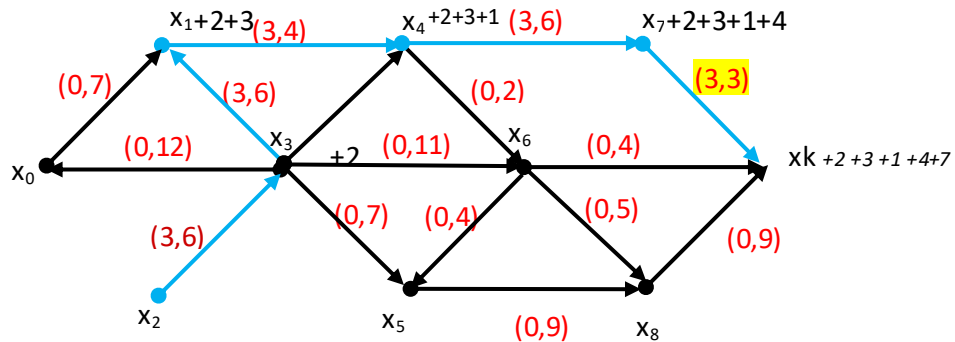


Рис. 4.3— Преобразование графа—сети  $G$  по итерациям алгоритма Форда-Фалкерсона

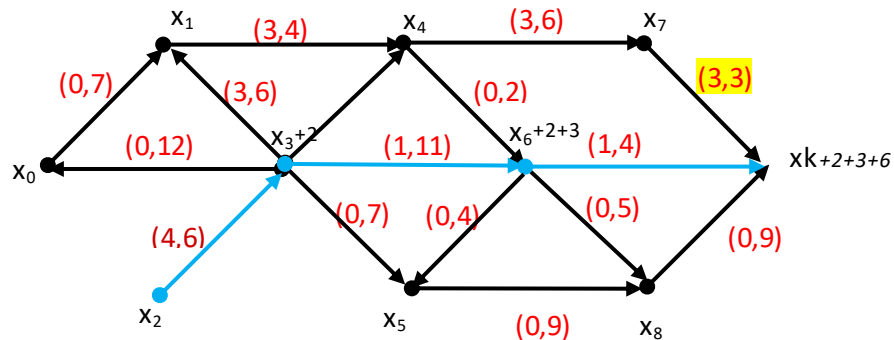
В результате насыщения дуг возможных переходов больше не осталось. Итерационный процесс завершён.

Расчеты в соответствии с алгоритмом Форда-Фалкерсона завершены. Таким образом, максимальный поток, который может пропустить граф-сеть  $G$ , изображенный на рисунке итерация-6, равен шести единицам.

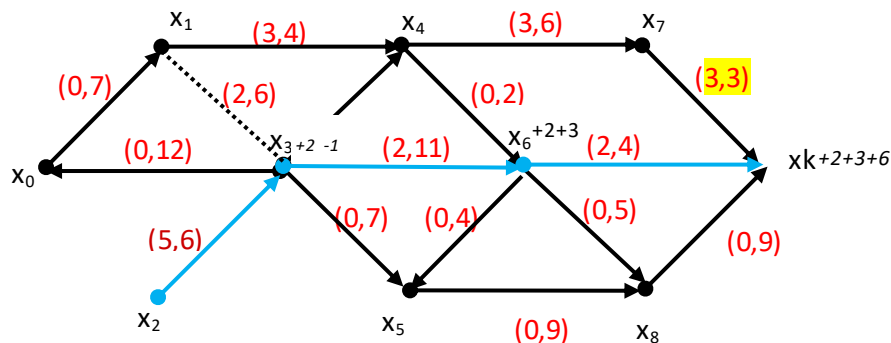
Итерация 1-3:



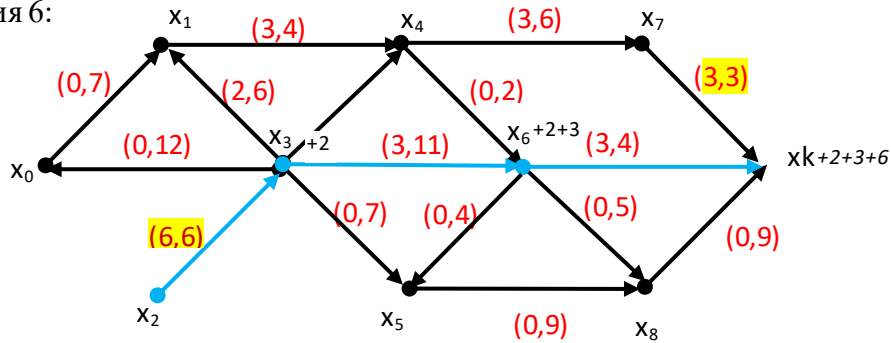
Итерация 4:



Итерация 5:



Итерация 6:



В результате насыщения дуг возможных переходов больше не осталось. Итерационный процесс завершён.

Расчеты в соответствии с алгоритмом Форда-Фалкерсона завершены. Таким образом, максимальный поток, который может пропустить граф-сеть  $G$ , изображенный на рисунке итерация-6, равен шести единицам.

#### 4.3. Заключение

Задача о максимальном потоке в сети изучается уже более 60 лет. Интерес к ней подогревается огромной практической значимостью этой проблемы. Методы решения задачи применяются на транспортных, коммуникационных, электрических сетях, при моделировании различных процессов физики и химии, в некоторых операциях над матрицами, для решения родственных задач теории графов.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Калининградский государственный технический университет»  
(ФГБОУ ВО «КГТУ»)

Кафедра систем управления и вычислительной техники

Дисциплина: Дискретная математика

**Расчетно-графическая работа № 5**

«Расчеты по алгоритмам управления проектом»

Вариант №70

Работу проверил:

доцент, профессор,

к.т.н. Иванов В. Е.

с оценкой: \_\_\_\_\_

подпись: \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Работу выполнил:

студент группы 18-ВТ

Подковыров Д.Р.

подпись: \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Калининград  
2020г.

## Содержание

<b>5. Задание на расчетно-графическую работу № 5.....</b>	<b>3</b>
<b>5.2. Обозначения и краткие теоретические сведения .....</b>	<b>3</b>
<b>5.3. Расчеты по алгоритмам управления проектом .....</b>	<b>6</b>
<b>5.4. Рассчитаем ранние моменты наступления событий .....</b>	<b>6</b>
<b>5.5. Рассчитаем поздние моменты наступления событий.....</b>	<b>8</b>
<b>5.6. Рассчитаем резерв времени событий .....</b>	<b>10</b>
<b>5.7. Расчет фиктивных работ.....</b>	<b>11</b>
<b>5.8. Рассчитаем полный резерв времени на работы и определим критический путь.....</b>	<b>11</b>
<b>5.9. Рассчитаем свободный, независимый и гарантированный резервы времени.....</b>	<b>12</b>
<b>5.10. Анализ полученных результатов .....</b>	<b>13</b>
<b>5.11. Заключение.....</b>	<b>14</b>

## 5. Задание на расчетно-графическую работу № 5

Найти критический путь по алгоритмам управления проектом (СПУ), полный, свободный, независимый и гарантированный резервы времени.

Продолжительности работ на рисунке 5.1 приведены в условных единицах.

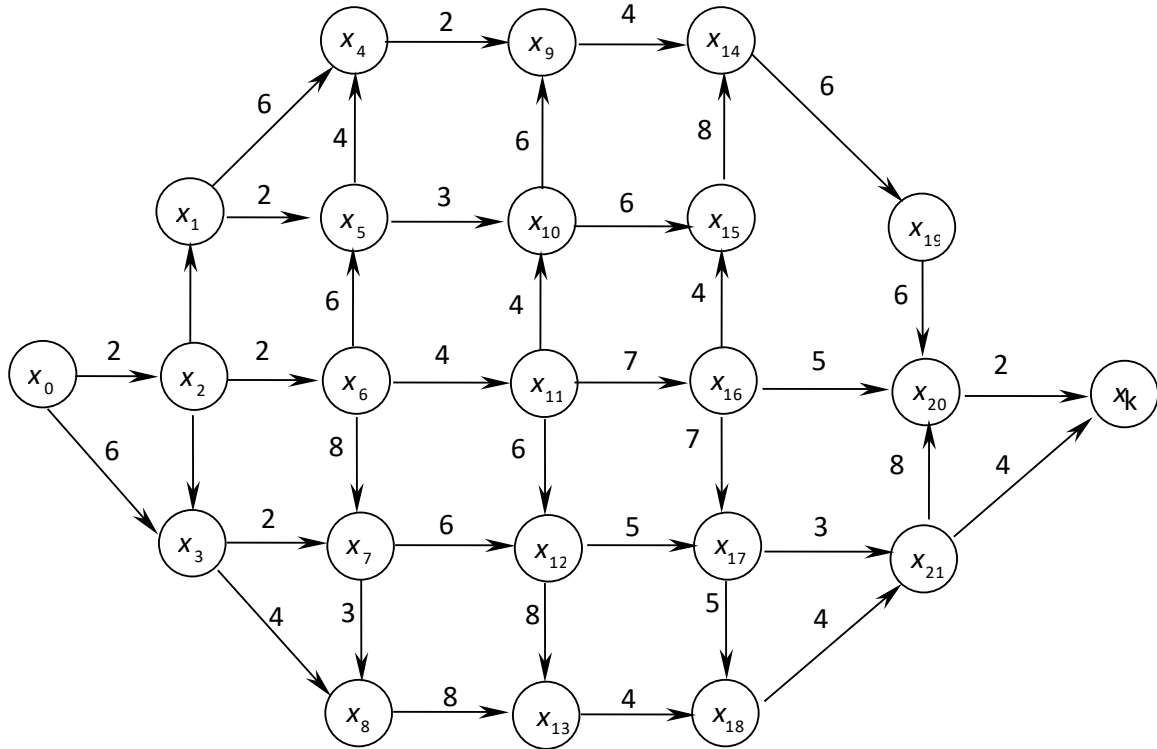


Рисунок 5.1 — Сетевая модель проекта

### 5.2. Обозначения и краткие теоретические сведения

Введем следующие обозначения:  $x_0$  — событие «Начало проекта»,

$x_k$  — событие «Окончание проекта»,

$x_i$  — промежуточные события проекта, фиксирующие начало и окончание работы,

$\tau_{ij}$  — работа,

$t_p(x_i)$  — ранний момент наступления события,

$t_n(x_i)$  — поздний момент наступления события.



Ниже, на рисунке 5.2, дана схема идентификации вершин графа — сети.

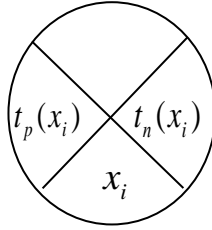


Рисунок 5.2— Идентификация вершин графа—сети

Введем дополнительные обозначения:

$t_p(x_j) = \max_i \{ (t_p(x_i) + \tau_{ij}) \}$  — формула для расчета раннего момента наступления события,

$t_n(x_j) = \min_i \{ (t_n(x_i) - \tau_{ji}) \}$  — формула для расчета позднего момента наступления события.

$t_o(x_i) = t_n(x_i) - t_p(x_i)$  — резерв времени события  $x_i$ , т.е. максимальное время, на которое можно задержать наступление события  $x_i$  без задержки сроков завершения проекта.

Пример расчета ранних и поздних моментов наступления событий приведен на рисунках 5.3 и 5.4 соответственно.

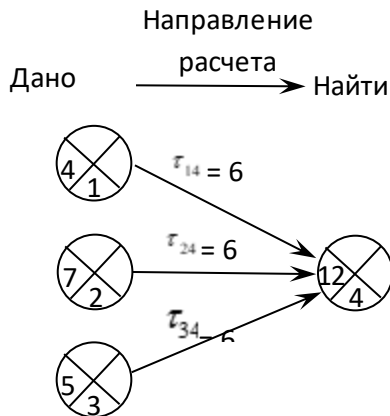


Рисунок 5.3 — Расчет раннего момента наступления события

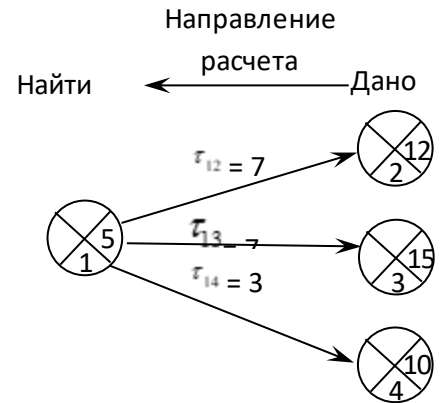


Рисунок 5.4 — Расчет позднего момента наступления события

Таким образом, полная схема идентификации вершин графа—сети показана на рисунке 5.5.

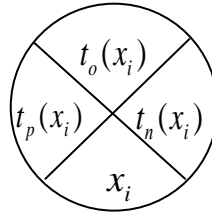


Рисунок 5.5 — Схема идентификации  
вершин графа—сети

Равенство  $t_n(x_i) = t_p(x_i)$  позднего и раннего сроков наступления события  $x_i$  обозначает ситуацию недопустимости задержки наступления события  $x_i$ .

Введем следующие обозначения:

$\tau_{ij}^o = t_n(x_i) - t_p(x_i) - \tau_{ij}$  — полный резерв времени работы  $ij$ .

Если  $\tau_{ij}^o = 0$ , то работа  $ij$  лежит на критическом пути (рисунок 5.6).

Ниже приведены расчеты, поясняющие рисунок 5.6. Поскольку  $\tau_{12}^o = 4 - 2 - 2 = 0$ ,  $\tau_{13}^o = 8 - 2 - 4 = 20$ ,  $\tau_{23}^o = 8 - 4 - 4 = 0$ , то работы 12 и 23 лежат на критическом пути.

Введем следующие обозначения:

$\tau_{ij}^{o(своб)} = t_p(x_j) - t_p(x_i) - \tau_{ji}$  — свободный резерв времени работы  $ij$ ,

$\tau_{ij}^{o(незав)} = t_p(x_j) - t_n(x_i) - \tau_{ji}$  — независимый резерв времени работы  $ij$ ,

$\tau_{ij}^{o(гарант)} = t_n(x_j) - t_n(x_i) - \tau_{ji}$  — гарантированный резерв времени работы  $ij$ .

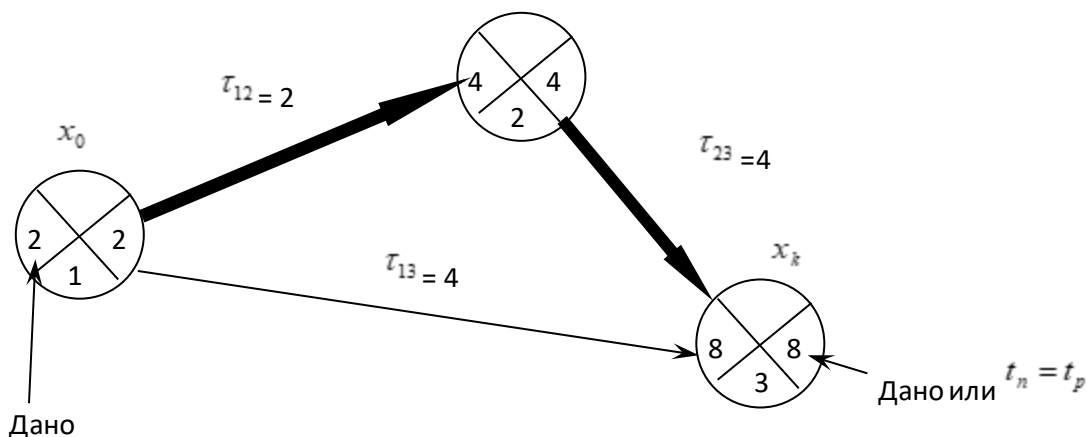


Рисунок 5.6 — К понятию критического пути

Обозначения:  $\Rightarrow$  — критический путь, т.е. последовательность событий, имеющих полный резерв времени нулевым.

### 5.3. Расчеты по алгоритмам управления проектом

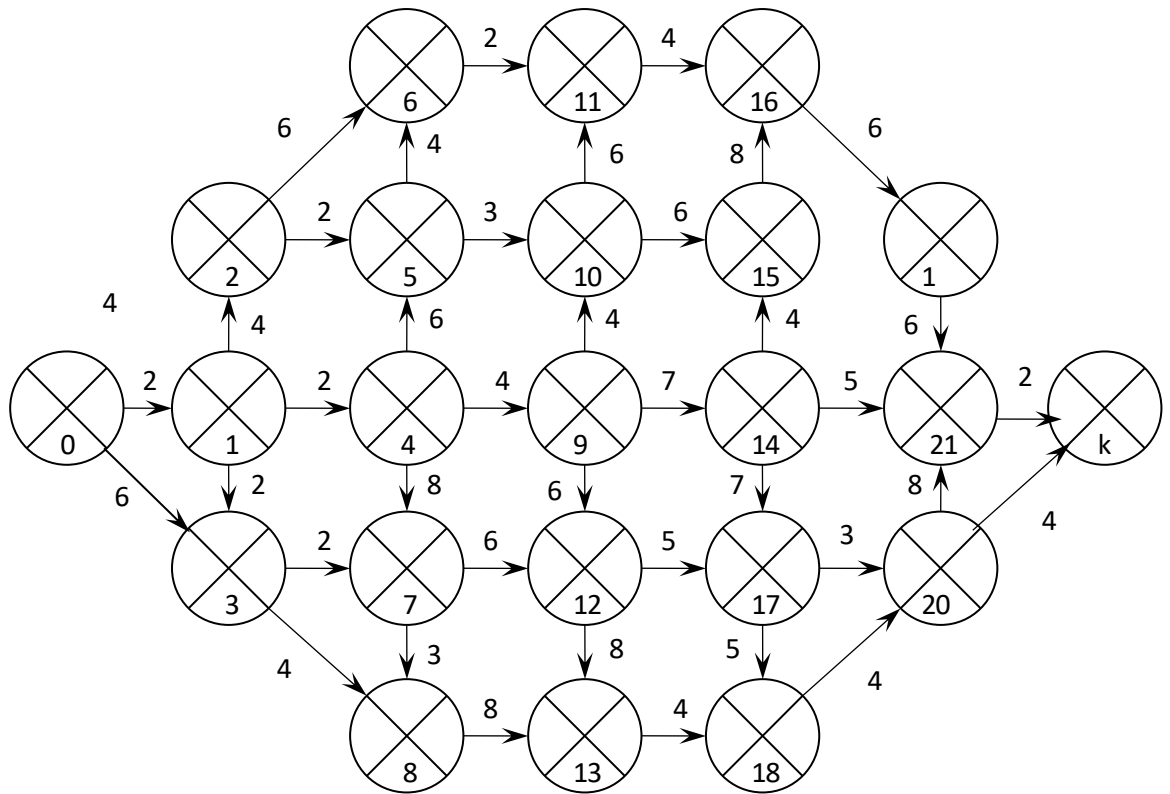


Рис. 5.7 Граф сеть с правильной адресацией вершин

### 5.4. Рассчитаем ранние моменты наступления событий

Расчет ранних моментов наступления событий для графа-сети приведен в таблице 9.2. При выполнении расчетов принято, что вершина  $x_0$  имеет

$$t_p(x_0) = t_n(x_0) = 0.$$

Таблица 5.1 — Результаты расчета ранних моментов наступления событий

i	j	$t_p(x_j) = t_p(x_i) + \tau_{ij}$	$t_p(x_j) = \max_i \{ (t_p(x_i) + \tau_{ij}) \}$
0	1	$t_p(1) = t_p(0) + \tau_{01} = 2$	$t_p(1) = 2$
	2	$0 + 6 = 6$	
1	2	$2 + 2 = 4$	$t_p(2) = 6$
	3	$2 + 4 = 6$	
	4	$2 + 2 = 4$	
2	7	$6 + 2 = 8$	$t_p(3) = 6$
	8	$6 + 4 = 10$	

3	5	$6+2=8$	$t_p(4) = 4$
	6	$6+6=12$	
4	5	$4+6=10$	$t_p(5) = 10$
	7	$4+8=12$	
	9	$4+4=8$	
5	6	$10+4=14$	$t_p(6) = 14$
	10	$10+3=13$	
6	11	$14+2=16$	$t_p(7) = 12$
7	8	$12+3=15$	$t_p(8) = 15$
	12	$12+6=18$	
8	13	$15+8=23$	$t_p(9) = 11$
9	10	$8+4=12$	$t_p(10) = 16$
	12	$8+6=14$	
	14	$8+7=15$	
10	11	$13+6=19$	$t_p(11) = 19$
	15	$13+6=19$	
11	16	$19+4=23$	$t_p(12) = 18$
12	13	$18+8=26$	$t_p(13) = 26$
	17	$18+5=23$	
13	18	$26+4=30$	$t_p(14) = 15$
14	15	$15+4=19$	$t_p(15) = 19$
	17	$15+7=22$	
	21	$15+5=20$	
15	16	$19+8=27$	$t_p(16) = 27$
16	19	$27+6=33$	$t_p(17) = 23$
17	18	$23+5=28$	$t_p(18) = 30$
	20	$23+4=27$	
18	20	$30+4=34$	$t_p(19) = 33$
19	21	$33+6=39$	$t_p(20) = 34$
20	21	$34+8=42$	$t_p(21) = 42$
	κ	$34+4=38$	
21	κ	$42+2=44$	$t_p(κ) = 44$

Результаты расчета отражены на рисунке 5.8.

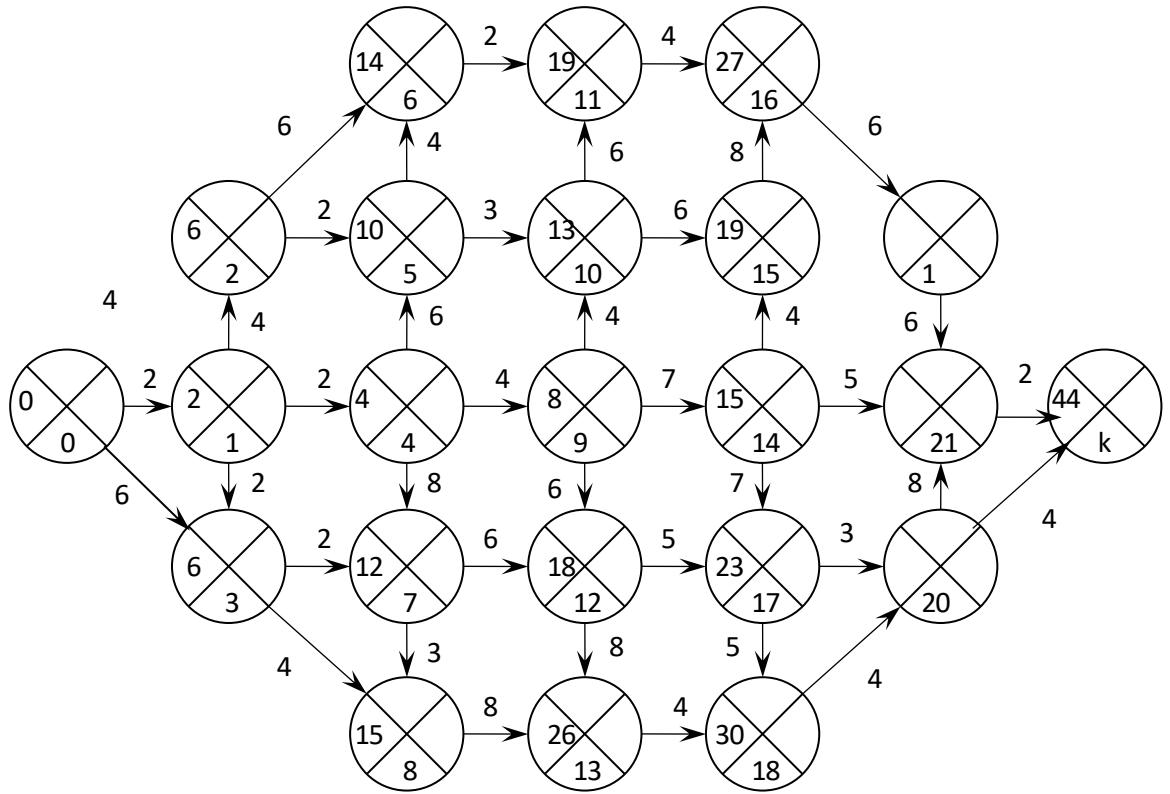


Рисунок 5.8 — Граф-сеть с ранними моментами наступления событий

### 5.5. Рассчитаем поздние моменты наступления событий

Расчет поздних моментов наступления событий для графа — сети приведен в таблице 5.2. При выполнении расчетов принято, что вершина  $x_k$  имеет

$$t_n(x_k) = t_p(x_k) = 44.$$

Таблица 5.2 — Результаты расчета поздних моментов наступления событий

i	j	$t_n(x_j) = t_n(x_i) - \tau_{ji}$	$t_n(x_j) = \min_i \{t_n(x_i) - \tau_{ji}\}$
k	21	$t_n(21) = t_n(k) - \tau_{21,k} = 42$	$t_n(21) = 42$
	20	$44 - 4 = 40$	
21	20	$42 - 8 = 34$	$t_n(20) = 34$
	19	$42 - 6 = 36$	
	14	$42 - 5 = 37$	
20	18	$34 - 4 = 30$	$t_n(19) = 36$
	17	$34 - 3 = 31$	
19	16	$36 - 6 = 30$	$t_n(18) = 30$
18	17	$30 - 5 = 25$	$t_n(17) = 25$
	13	$30 - 4 = 26$	
17	14	$25 - 7 = 18$	$t_n(16) = 30$
	12	$25 - 5 = 20$	

16	15	$30-8=28$	$t_n(15) = 22$
	11	$30-4=26$	
15	14	$22-4=18$	$t_n(14) = 18$
	10	$22-6=16$	
14	9	$18-7=11$	$t_n(13) = 26$
13	12	$26-8=18$	$t_n(12) = 18$
	8	$26-8=18$	
12	9	$18-6=12$	$t_n(11) = 26$
	7	$18-6=12$	
11	10	$26-6=20$	$t_n(10) = 16$
	6	$26-2=24$	
10	9	$16-4=12$	$t_n(9) = 11$
	5	$16-3=13$	
9	4	$11-4=7$	$t_n(8) = 18$
8	7	$18-3=15$	$t_n(7) = 12$
	2	$18-4=14$	
7	4	$12-8=4$	$t_n(6) = 24$
	2	$12-2=10$	
6	5	$24-4=20$	$t_n(5) = 13$
	3	$24-6=18$	
5	4	$13-6=7$	$t_n(4) = 4$
	3	$13-2=11$	
4	1	$4-2=2$	$t_n(3) = 11$
3	1	$11-4=7$	$t_n(2) = 10$
2	1	$10-2=8$	$t_n(1) = 2$
	0	$10-6=4$	
1	0	$2-2=0$	$t_n(0) = 0$

Результаты расчета отражены на графе – сети (рис. 5.9).

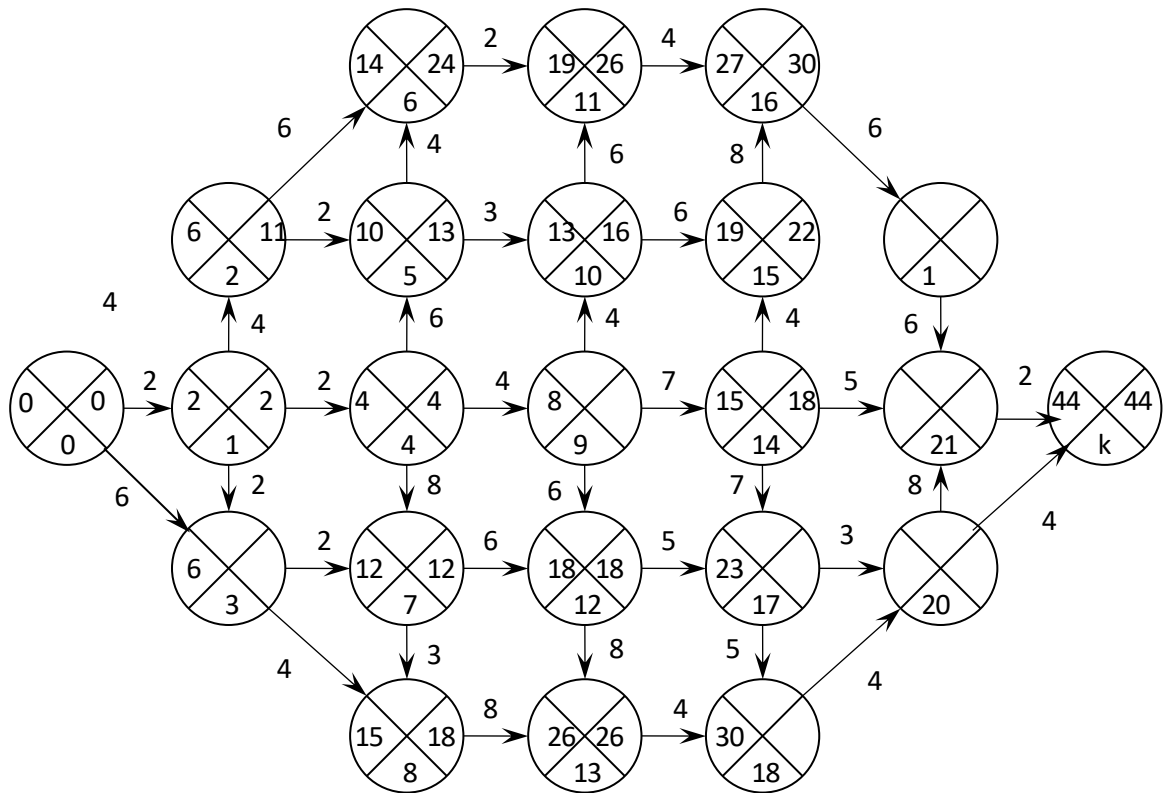


Рисунок 5.9

### 5.6. Рассчитаем резерв времени событий

Результаты расчетов сведены в таблицу 5.3.

Таблица 5.3 — Результаты расчета резерва времени событий

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t_o(x_i)$	0	0	4	5	0	3	10	0	3	3	3	7
p	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	k	
$t_o(x_i)$	0	0	3	3	3	2	0	3	0	0	0	

Результаты расчета отражены на графе – сети (рис. 5.10).

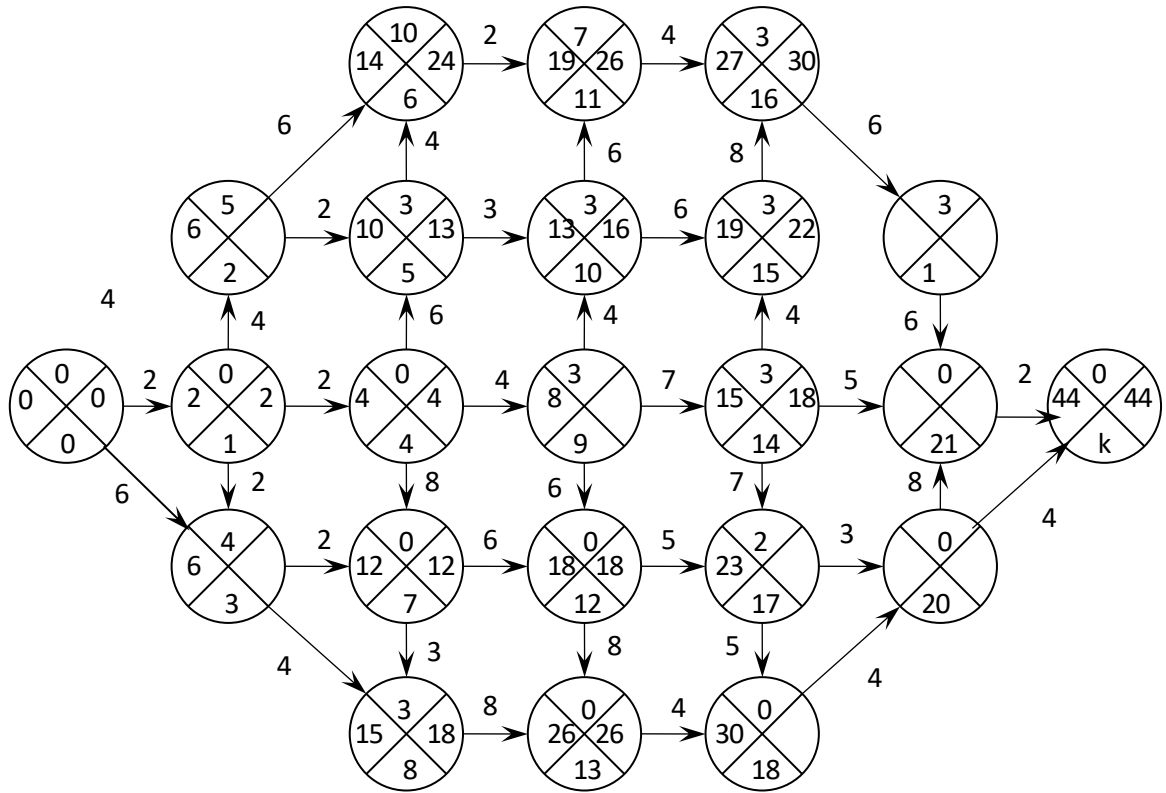


Рисунок 5.10

### 5.7. Расчет фиктивных работ

Для этого проведем анализ вершин графа-сети с целью проверки выполнения соотношения:  $t_p(x_i) = t_p(x_j) = t_n(x_i) = t_n(x_j)$ . Таких вершин нет.

### 5.8. Рассчитаем полный резерв времени на работы и определим критический путь

Результаты расчетов отражены в таблице 5.4.

$p$	$ij$	$\tau_{ij}^o$	$p$	$ij$	$\tau_{ij}^o$	$p$	$ij$	$\tau_{ij}^o$	$p$	$ij$	$\tau_{ij}^o$
1	(0,1)	0	13	(5,6)	0	25	(12,13)	0	37	(20,21)	0
2	(0,3)	0	14	(5,10)	0	26	(12,17)	0	38	(20,k)	6
3	(1,2)	0	15	(6,11)	3	27	(13,18)	0	39	(21,k)	0
4	(1,3)	2	16	(7,8)	0	28	(14,15)	0			
5	(1,4)	0	17	(7,12)	0	29	(14,17)	0			
6	(2,5)	2	18	(8,13)	3	30	(14,21)	22			
7	(2,6)	2	19	(9,10)	1	31	(15,16)	0			
8	(3,7)	4	20	(9,12)	4	32	(16,19)	0			
9	(3,8)	5	21	(9,14)	0	33	(17,18)	2			
10	(4,5)	0	22	(10,11)	0	34	(17,20)	8			
11	(4,7)	0	23	(10,15)	0	35	(18,20)	0			
12	(4,9)	0	24	(11,16)	4	36	(19,21)	3			

Таблица 5.4



Анализ таблицы 5.4 показывает, что на критическом пути лежат работы: 01, 14, 47, 7 12, 12 13, 13 18, 18 20, 20 21, 21 к. Критический путь показан на рисунке 5.11.

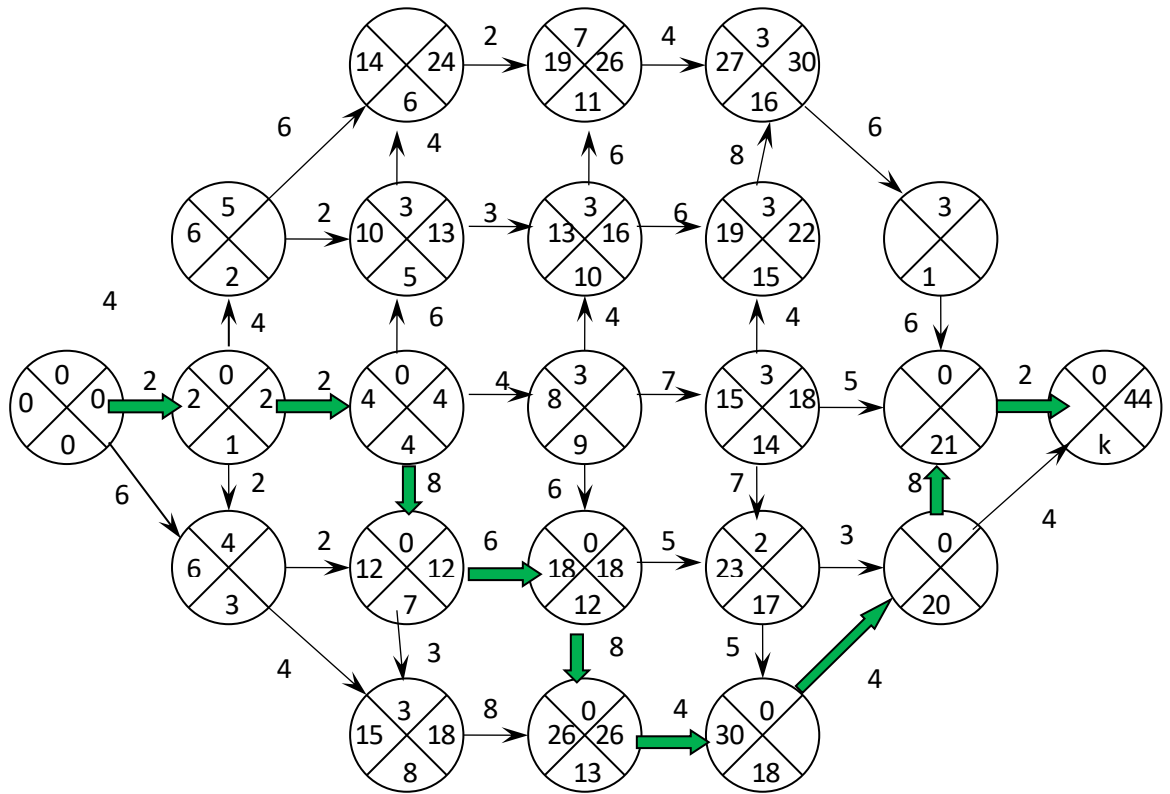


Рисунок 5.11

## 5.9. Рассчитаем свободный, независимый и гарантированный резервы времени

Результаты расчетов сведены в таблицу 5.5.

Таблица 5.5 — Результаты расчета резервов времени

$ij$	$\tau_{ij}^{0(своб)}$	$\tau_{ij}^{0(незавид)}$	$\tau_{ij}^{0(гарант)}$
(0,1)	0	0	0
(0,3)	0	0	4
(1,2)	0	0	5
(1,3)	2	2	6
(1,4)	0	0	0
(2,5)	2	0	0
(2,6)	2	0	7
(3,7)	4	0	0
(3,8)	5	1	4
(4,5)	0	0	3
(4,7)	0	0	0

(4,9)	0	0	3
(5,6)	0	0	9
(5,10)	0	0	0
(6,11)	3	0	0
(7,8)	0	0	3
(7,12)	0	0	0
(8,13)	3	0	0
(9,10)	1	0	1
(9,12)	4	1	1
(9,14)	0	0	1
(10,11)	0	0	4
(10,15)	0	0	0
(11,16)	4	0	0
(12,13)	0	0	0
(12,17)	0	0	2
(13,18)	0	0	0
(14,15)	0	0	0
(14,17)	0	0	0
(14,21)	22	19	19
(15,16)	0	0	0
(16,19)	0	0	0
(17,18)	2	0	0
(17,20)	8	6	6
(18,20)	0	0	0
(19,21)	3	0	0
(20,21)	0	0	0
(20,k)	6	6	6
(21,k)	0	0	0

На этом расчеты по алгоритмам управления проектом закончены.

## 5.10. Анализ полученных результатов

- 1) Особого внимания со стороны руководителя проекта требуют события:  $x_0, x_1, x_4, x_7, x_{12}, x_{13}, x_{18}, x_{20}, x_{21}, x_k$  — они имеют нулевой резерв времени.
- 2) Работы, которые лимитируют продолжительность всего проекта, находятся на критическом пути и имеют полный резерв времени равный нулю: 0,1; 1,4; 4,7; 7,12; 12,13; 13,18; 18,20; 20,21; 21,k.
- 3) Работы, имеющие полный, свободный, независимый и гарантированный резерв времени позволяют уменьшить затраты ресурсов и продлить время на эти работы (но не более имеющихся резервов): 1,3; 3,8; 9,12; 14,21; 17,20; 20,k.
- 4) Работы, которые имеют нулевой свободный резерв времени, определяют необходимость контроля за  $t_p(x_i)$ , предшествующих данной работе и влияющих на начало последующих работ. Это, например, работы: 1,2; 4,7.
- 5) Работы, имеющие нулевой независимый резерв времени, определяют необходимость контроля за  $t_n(x_i)$ , предшествующих данной работе и влияющих на развитие последующих работ, что является удобным показателем свободы планирования. Это, например, работы: 0,1; 4,5; 6,11; 9,14.

- б) Работы, имеющие гарантированный резерв времени равный нулю, не влияют на исполнение всего проекта, но позволяют гарантированно отслеживать исполнение отдельных работ. Это, например, работы: 0,1; 3,7; 4,7; 8,13.

### **5.11. Заключение**

Управление проектом позволит:

- 1) предвидеть возможные задержки каждой работы проекта в целом
- 2) устанавливать последовательность и сроки использования ограниченных ресурсов
- 3) анализировать компромиссные решения по затратам и срокам исполнения

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Калининградский государственный технический университет»  
(ФГБОУ ВО «КГТУ»)

Кафедра систем управления и вычислительной техники

Дисциплина: Дискретная математика

**Расчетно-графическая работа № 6**

«Логическое проектирование схемы, реализующей минимальную булеву  
функцию»

Вариант №70

Работу проверил:

доцент, профессор,

к.т.н. Иванов В. Е.

с оценкой: \_\_\_\_\_

подпись: \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Работу выполнил:

студент группы 18-ВТ

Подковыров Д.Р.

подпись: \_\_\_\_\_

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Калининград  
2020г.

## Содержание

<b>6. Задание на расчетно-графическую работу № 6.....</b>	<b>3</b>
<b>6.1. Выполнения расчетов по конструированию схемы для минимизированной булевой функции.....</b>	<b>3</b>
<b>6.2. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма функции, заданной таблицей истинности .....</b>	<b>4</b>
<b>6.3. Совершенная конъюнктивная нормальная форма функции, заданной таблицей истинности .....</b>	<b>4</b>
<b>6.4. Минимизация булевой функции методом Квайна.....</b>	<b>5</b>
<b>6.5. Минимизация булевой функции методом карт Карно.....</b>	<b>7</b>
<b>6.6. Сравнение результатов минимизации булевой функции методами Квайна и карт Карно.....</b>	<b>8</b>
<b>6.7. Разработка схемы, реализующей минимальную булеву функцию, используя элементы на два входа и один выход.....</b>	<b>8</b>
<b>6.8. Проверка правильности работы схемы устройства .....</b>	<b>10</b>
<b>6.9. Выводы .....</b>	<b>12</b>

## 6. Задание на расчетно-графическую работу № 6

По таблице истинности для булевой функции четырех переменных (табл. 6.1) написать ее совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ), совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ). Минимизировать булеву функцию методом Квайна и методом карт Карно. Сравнить результаты минимизации. Разработать схему, реализующую минимальную булеву функцию, используя элементы на два входа и один выход. Задавая значения на входе схемы, получить значения на выходе и сверить их с таблицей истинности функции.

### 6.1. Выполнения расчетов по конструированию схемы для минимизированной булевой функции

Пусть функция четырех переменных задана своей таблицей истинности (табл. 6.1).

Аргумент				Функция
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Таблица 6.1 — Таблица истинности булевой функции четырех переменных

## 6.2. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма функции, заданной таблицей истинности

Для выполнения этого пункта задания по таблице истинности булевой функции определяем строки, в которых функция принимает значение «1». Таких строк семь. Значит, СДНФ будет иметь семь элементарных конъюнкций. Определим их:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$$

## 6.3. Совершенная конъюнктивная нормальная форма функции, заданной таблицей истинности

Для выполнения этого пункта задания по таблице истинности булевой функции определяем строки в которых функция принимает значение «0». Таких строк девять. Значит СКНФ будет иметь девять элементарных дизъюнкций. Определим их:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \\ & \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \\ & \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \end{aligned}$$

#### 6.4. Минимизация булевой функции методом Квайна

Расчеты в соответствии с методом Квайна идут в два этапа. На первом этапе итерационно выполняются все возможные операции обобщенного склеивания и операции поглощения по соотношениям из табл. 6.2.

	Склеивание	Поглощение
Для ДНФ	$x \wedge F \vee \bar{x} \wedge F = x \wedge F \vee \bar{x} \wedge F \vee F$	$F_1 \vee F_1 \wedge F_2 = F_1$
Для КНФ	$(x \vee F) \wedge (\bar{x} \vee F) = (x \vee F) \wedge (\bar{x} \vee F) \wedge F$	$F_1 \wedge (F_1 \vee F_2) = F_1$

Таблица 6.2 — Эквивалентные соотношения для склеивания и поглощения

Порядок следования операций:

Склеивание  $\rightarrow$  Поглощение  $\rightarrow$  Склеивание  $\rightarrow$  Поглощение...

При выполнении последовательности операций первого этапа проверяется возможность выполнения операции склеивания. Если на очередной итерации выполнить склеивание нельзя, то значит получена тупиковая ДНФ или КНФ и вычисления первого этапа завершены.

1	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	1,2	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	3,4- 5,6	$x_1 \cdot \bar{x}_2$
2	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	3,4	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	3,5- 4,6	$x_1 \cdot \bar{x}_2$
3	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	3,5	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4$	1,2	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
4	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	3,7	$x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	3,7	$x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$
5	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	4,6	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_4$		
6	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	5,6	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$		
7	$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$				

Таблица 6.3 — Этап склеивания



Поскольку  $x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2$  имеем:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Приступим к обработке информации, содержащейся в табл. 6.4. Для этого, прежде всего, необходимо установить отношение включения простых импликант в элементарные конъюнкции СДНФ. Далее необходимо определить, какие из простых импликант являются ядерными для минимальной ДНФ. Для них в соответствующем столбце находится единственная единица. Эта единица заключена в квадратные скобки.

3. Простые импликанты из тупиковой СДНФ	4. Элементарные конъюнкции из СДНФ						
	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4$
<b>5.</b> $x_1 \cdot \bar{x}_2$	6.	7.	8. 1	9. [1]	10.[1]	11.[1]	12.
<b>13.</b> $x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$	14.	15.	16.1	17.	18.	19.	20.[1]
$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	21.[1]	22.[1]	23.	24.	25.	26.	27.

Таблица 6.4 — Простые импликанты

Таким образом установлено, что ядерные импликанты —  $x_1 \cdot \bar{x}_2$  и  $x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$  и  $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ . Они покрывают все элементарные конъюнкции СДНФ.

Отсюда следует, имеем 1 вариант минимальной ДНФ:

$$f_{\min}^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (1)$$

## 6.5. Минимизация булевой функции методом карт Карно

Минимизируем по методу карт Карно СДНФ. Для этого построим специальную таблицу. Поскольку функция — функция четырех переменных, то размерность таблицы — 4 x 4 квадрата. Эти квадраты имеют специальную численную нумерацию.

		$x_1$			
$x_2$		1100 <b>1</b>	1110	0110 <b>1</b>	0100
		1101	1111	0111 <b>1</b>	0101
		1001 <b>1</b>	1011 <b>1</b>	0011	0001
		1000 <b>1</b>	1010 <b>1</b>	0010	0000
				$x_3$	
				$x_4$	

Рисунок 6.5 — Таблица с информацией о СДНФ булевой функции

Проанализирует таблицу на рисунке 6.1:

- 1) восьми смежных элементов нет;
- 2) четыре смежных элемента есть. Запишем покрывающую их сокращенную конъюнкцию

$$x_1 \cdot \bar{x}_2$$

- 3) Двух смежных элемента есть. Запишем покрывающую их сокращенную конъюнкцию.

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

По результатам анализа таблицы имеем вариант минимальной ДНФ:

$$f_{\min}^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (2)$$

### 6.6. Сравнение результатов минимизации булевой функции методами Квайна и карт Карно

Сравнительный анализ (1) и (2) показывает, что результаты совпадают.

### 6.7. Разработка схемы, реализующей минимальную булеву функцию, используя элементы на два входа и один выход

Выполним проектирование схемы устройства, реализующего минимальную ДНФ (2). Выберем для этого один из вариантов. Пусть это будет следующая функция:

$$f_{\min}^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (3)$$

Ниже, на рис. 6. 7 представлена схема устройства, реализующего минимальную ДНФ (3).

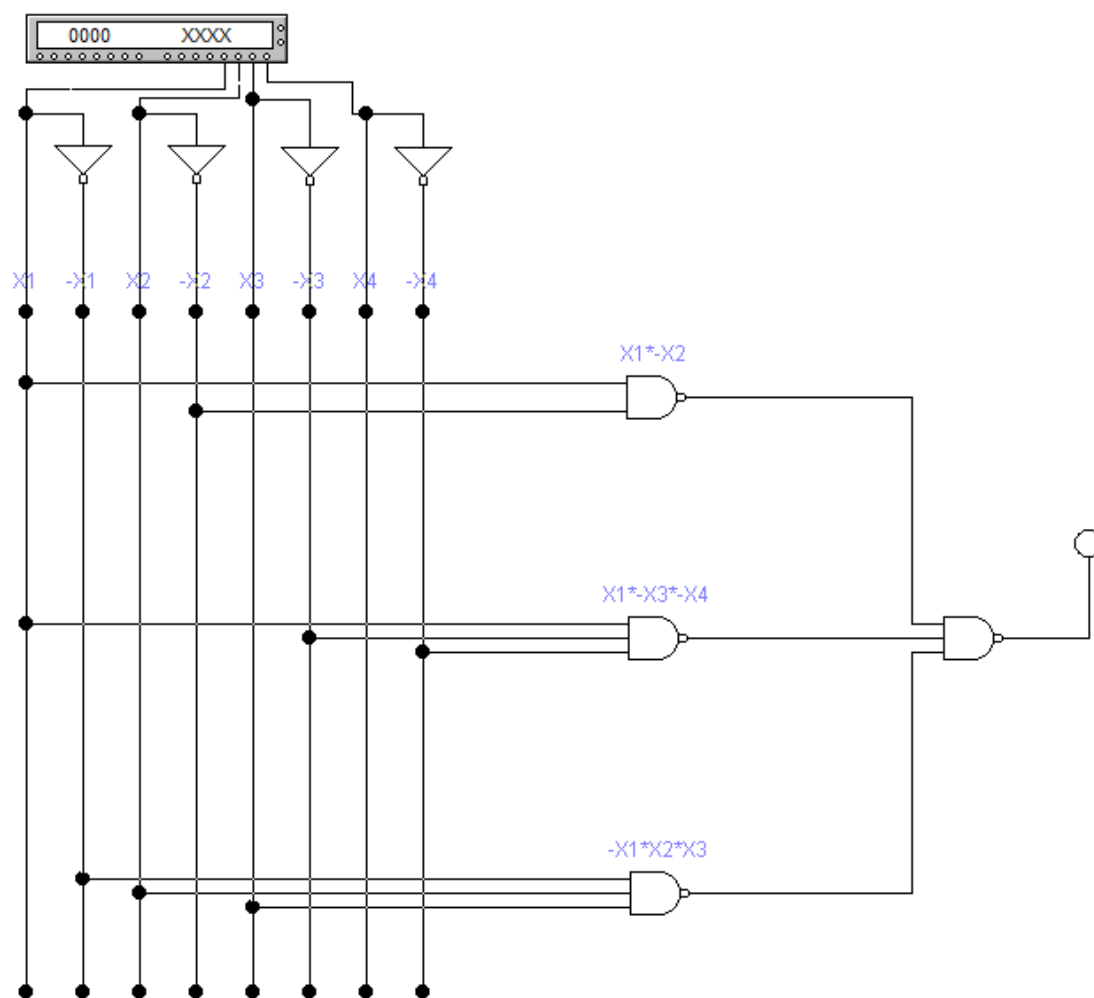
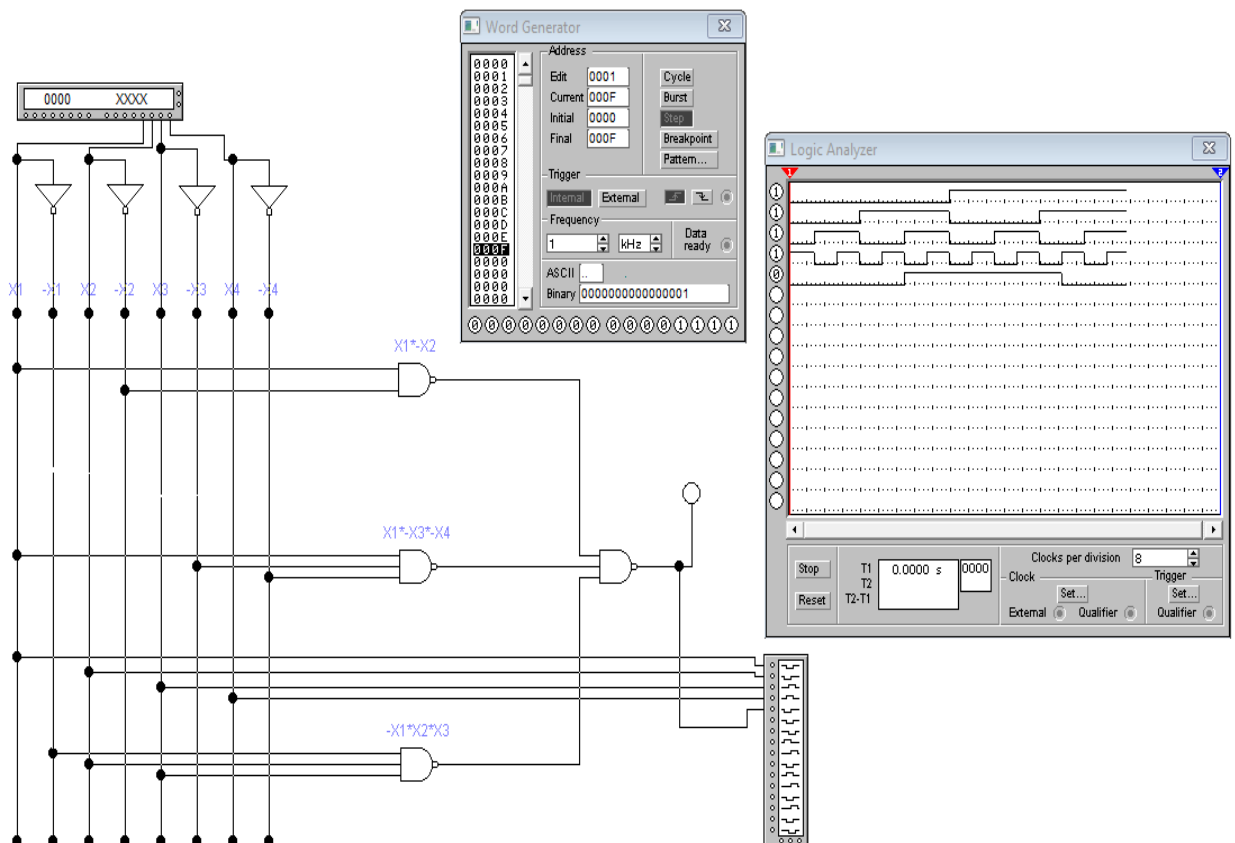


Рисунок 6.6— Схема устройства, выполняющего минимизированную булеву функцию

## 6.8. Проверка правильности работы схемы устройства

С целью проверки правильности работы схемы устройства будем задавать значения векторов-аргументов из таблицы истинности булевой функции (табл. 6.1) на входе схемы (рис. 6.6) и контролировать соответствующие входам выходные значения. Если значения на выходе будут совпадать с таблицей истинности, значит, схема спроектирована правильно.



Аргумент				Функция
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Анализ работы схемы показывает, что спроектированное устройство функционирует правильно.

На этом расчеты закончены.

## 6.9. Выводы

В результате использования методов минимизации логических выражений, было получено устройство, преобразующее входные сигналы в выходные по заданным правилам т.е комбинационная схема, вариации которых лежат в основе всех ЭВМ.

Проектирование комбинационных схем сводится к ряду задач булевой алгебры (алгебры логики). Одной из основополагающих задач – является задача минимизации логических функций. Решение задач минимизации во многом упрощает конструкцию схемы, позволяет сократить количество используемых логических элементов. Чем меньше в схеме задействовано логических элементов, тем больше её надёжность.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«Калининградский государственный технический университет»  
(ФГБОУ ВО «КГТУ»)

Кафедра систем управления и вычислительной техники

Дисциплина: Дискретная математика

**Расчетно-графическая работа № 7**

«Нахождение всех гамильтоновых циклов на ориентированном графе»  
Вариант №70

Работу проверил:

доцент, профессор,  
к.т.н. Иванов В. Е.  
с оценкой: \_\_\_\_\_  
подпись: \_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Работу выполнил:

студент группы 18 -ВТ  
Подковыров Д.Р.  
подпись: \_\_\_\_\_  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020г.

Калининград  
2020г.



## Содержание

<b>7. Задание на расчетно-графическую работу № 7 .....</b>	<b>3</b>
<b>7.1. Краткие теоретические сведения .....</b>	<b>3</b>
<b>7.2. Выполнения расчетов по поиску всех гамильтоновых циклов на ориентированном графе.....</b>	<b>4</b>
<b>7.3. Обработка результатов вычисления матриц .....</b>	<b>10</b>
<b>7.4. Выводы .....</b>	<b>11</b>

## 7. Задание на расчетно-графическую работу № 7

Задан ориентированный граф на пяти вершинах. Построить его модифицированную матрицу смежности. Определить является ли граф гамильтоновым. Используя алгебраический метод, найти все гамильтоновы циклы на графе.

### 7.1. Краткие теоретические сведения

Простой цикл проходящий через все вершины графа называется гамильтоновым. Простая цепь, проходящая через все вершины графа, называется гамильтоновой. Задача нахождения гамильтоновых циклов актуальна в связи практической значимостью задачи о коммивояжере, в которой из множества гамильтоновых циклов на графе определяется кратчайший.

Существует только достаточные условия существования гамильтоновых циклов на графе. Приведем несколько таких признаков.

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, будем называть гамильтоновым.

**Теорема Дирака.** Граф гамильтонов, если степень любой его вершины удовлетворяет неравенству  $\delta(x_i) \geq n/2 \mid i \in \{1, \dots, n\}$ , где  $n$  — число вершин графа.

**Теорема Оре.** Граф гамильтонов, если степень любых двух его несмежных вершин  $x_i$  и  $x_j$  удовлетворяет неравенству  $\delta(x_i) + \delta(x_j) \geq n \mid i \neq j$ .

Для нахождения всех гамильтоновых циклов на гамильтоновом графе будем использовать алгебраический подход. Его суть состоит в следующем

Пусть граф  $G$  задан своей булевой матрицей смежности  $H$ . Заменяем малоинформативные единицы в этой матрице на имена соответствующих вершин. Возведение в степень такой модифицированной матрицы даст уже больше информации о маршрутах. Введем, таким образом, модифицированную матрицу  $B$  следующим правилом: элемент  $b_{ij}$  матрицы  $B$

равен  $b_{ij} = x_j$ , если существует путь из вершины  $x_i$  в вершину  $x_j$ . Далее последовательно находим матрицы  $P'_{k+1} = B \cdot P_k$ ;  $P_1 = H$ ;  $P_k = \Phi(P'_k)$ , где под произведением вершин понимается некоммутативная бинарная операция, заданная на множестве слов. Слово — это упорядоченная последовательность вершин (букв). Произведение слова  $x_1 x_2 \dots x_n$  и слова  $y_1 y_2 \dots y_m$  есть слово  $x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$ . Оператор  $\Phi$ , действующий на элементы  $p_{ij}$  матрицы, вычеркивает (обнуляет) те элементы, в которых содержатся вершины  $x_i$  или  $x_j$ . Такие элементы указывают на контуры, замыкающиеся на  $x_i$  или  $x_j$ . Для упрощения расчетов можно обнулять главную диагональ матрицы  $P_k$ , кроме последней  $P_n$ , т.к. ее диагональ и содержит все искомые гамильтоновы циклы, без начальной и конечной вершины, которые необходимо добавить.

## 7.2. Выполнения расчетов по поиску всех гамильтоновых циклов на ориентированном графе

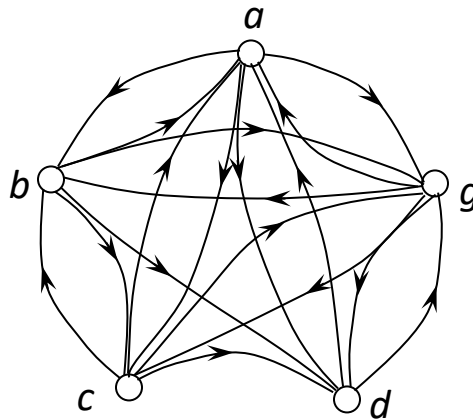


Рис. 7.1 — Исходный граф  $G$

Первая цифра номера зачетной книжки	Последняя цифра номера зачетной книжки
	2
1	db dc

Таблица 7.1 — Данные по варианту

Определяем гамильтонов или негамильтонов граф  $G$ . Для этого рассчитываем степени его вершин и используем теорему Дирака. Результаты расчетов сведены в табл. 7.2.

Характеристика графа $G$	Вершины графа $G$				
	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$\delta_i^+$	4	4	4	2	4
$\delta_i^-$	4	3	3	4	4
$\delta_i^+ + \delta_i^-$	8	7	7	6	8
$\delta(x_i) \geq n/2$ ?	да	да	да	да	да
$\delta(x_i) \geq 2,5$ ?					

Таблица 7.2 – Определение наличия гамильтоновых циклов на графе  $G$

Анализ данных из табл. 7.2 позволяет сделать вывод, что граф гамильтонов.

Находим все гамильтоновы циклы на графе  $G$ . Матрица  $H$  графа  $G$  показана на рис. 7.2. На рис. 7.3 показана модифицированная матрица смежности  $B$  графа  $G$ .

$H$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	0	1	1	1	1
$b$	1	0	1	1	1
$c$	1	1	0	1	1
$d$	1	0	0	0	1
$g$	1	1	1	1	0

Рисунок 7.2 — Матрица  $H$   
смежности графа  $G$

$B$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	0	$b$	$c$	$d$	$g$
$b$	0	$b$	$c$	$d$	$g$
$c$	$a$	$b$	0	$d$	$g$
$d$	$a$	0	0	0	$g$
$g$	$a$	$b$	$c$	$d$	0

Рисунок 7.3 — Модифицированная матрица  $B$   
смежности графа  $G$

Умножаем матрицу  $B$  на матрицу  $H = P_1$ . Получаем матрицу  $P_2'$  (рис. 7.4).

$P_2$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	$b+c+d+g$	$c+g$	$b+g$	$b+c+g$	$b+c+d$
$b$	$c+d+g$	$a+c+g$	$a+g$	$a+c+g$	$a+c+d$
$c$	$b+d+g$	$a+g$	$a+b+g$	$a+b+g$	$a+b+d$
$d$	$g$	$a+g$	$a+g$	$a+g$	$a$
$g$	$b+c+d$	$a+c$	$a+b$	$a+b+c$	$a+b+c+d$

Рисунок 7.4 — Матрица  $P_2'$

Применяем к матрице  $P_2'$  оператор  $\Phi$ . Получаем матрицу  $P_2$  (рис. 7.5).

$P_2$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	$0$	$c+g$	$b+g$	$b+c+g$	$b+c+d$
$b$	$c+d+g$	$0$	$a+g$	$a+c+g$	$a+c+d$
$c$	$b+d+g$	$a+g$	$0$	$a+b+g$	$a+b+d$
$d$	$g$	$a+g$	$a+g$	$0$	$a$
$g$	$b+c+d$	$a+c$	$a+b$	$a+b+c$	$0$

Рисунок 7.5 — Матрица  $P_2$ 

Умножаем матрицу  $B$  на матрицу  $P_2$ , получаем матрицу  $P_3'$  (рис. 7.6).

$P_3$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	$bc+bd+bg+cb+c++cg+dg+gb+gc++gd$	$ca+cg+da++dg+ga+gc$	$ba+bg+da++dg+ga+gb$	$ba+bc+bg+ca+cb++cg+ga+gb+gc$	$ba+bc+bd+ca++cb+cd+da$
$b$	$cb+cd+cg+dg++gb+gc+gd$	$ac+ag+ca+cg++da+dg+ga+g$ $c$	$ab+ag+da++dg+ga+gb$	$ab+ac+ag+ca+cb++cg+ga+gb+gc$	$ab+ac+ad+ca++cb+cd+da$
$c$	$bc+bd+bg+dg++gb+gc+gd$	$ac+ag+da++dg+ga+gc$	$ab+ag+ba+bg$ $+da+dg+ga+g$ $b$	$ab+ac+ag+ba+b++bg+ga+gb+gc$	$ab+ac+ad+ba++bc+bd+da$
$d$	$gb+gc+gd$	$ac+ag+ga+gc$	$ab+ag+ga+gb$	$ab+ac+ag++ga+gb+gc$	$ab+ac+ad$
$g$	$bc+bd+bg+cb++cd+cg+dg$	$ac+ag+ca++cg+da+dg$	$ab+ag+ba++bg+da+dg$	$ab+ac+ag+ba+b++bg+ca+cb+cg$	$ab+ac+ad+ba+b++bd+ca+cb+cd+da$

Рисунок 7.6 — Матрица  $P_3$ 

Применяем к матрице  $P_3'$  оператор  $\Phi$ . Получаем матрицу  $P_3$  (рис. 7.7).

$P_3$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	$0$	$ca+cg+da++dg+ga+gc$	$ba+bg+da++dg+ga+gb$	$ba+bc+bg+ca+cb++cg+ga+gb+gc$	$ba+bc+bd+ca++cb+cd+da$
$b$	$cb+cd+cg+dg++gb+gc+gd$	$0$	$ab+ag+da++dg+ga+gb$	$ab+ac+ag+ca+cb++cg+ga+gb+gc$	$ab+ac+ad+ca++cb+cd+da$
$c$	$bc+bd+bg+dg++gb+gc+gd$	$ac+ag+da++dg+ga+gc$	$0$	$ab+ac+ag+ba+b++bg+ga+gb+gc$	$ab+ac+ad+ba++bc+bd+da$
$d$	$gb+gc+gd$	$ac+ag+ga+gc$	$ab+ag+ga+gb$	$0$	$ab+ac+ad$
$g$	$bc+bd+bg+cb++cd+cg+dg$	$ac+ag+ca++cg+da+dg$	$ab+ag+ba++bg+da+dg$	$ab+ac+ag+ba+b++bg+ca+cb+cg$	$0$

Рисунок 7.7 — Матрица  $P_3$

Умножаем матрицу  $B$  на матрицу  $P_3$ , получаем матрицу  $P_4'$  (рис. 7.8).

$P_4$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	$bcd+bcg+bdg+bgc$ $+bgd+cbd+cbg+cdg$ $+cgb+cgd+dgb+dgc$ $+gbc+gbd+gcb+gcd$	$cag+cda+cdg+$ $+cga+dac+dag+$ $+dga+dgc+gab+$ $+gba+gda$	$bag+bda+$ $+bdg+bga+$ $+dab+dag+$ $+dga+dgb$	$bac+bag+bca+bcg+bga+$ $+bgc+cab+cba+cbg+$ $+cga+cgb+gab+gac+$ $+gba+gbc+gca+gcb$	$bac+bad+bca+$ $+bcd+bda+cab+$ $+cad+cba+cbd+$ $+cda+dab+dac$
$b$	$cbd+cbg+cdg+$ $+cgb+cgd+dgb+$ $+dgc+gbc+gbd+$ $+gcb+gcd$	$acg+adg+agc+$ $+cag+cda+cdg+cga$ $+dac+dag+dga+dgc$ $+gac+gca+gda$	$abg+adg+agb+$ $+dab+dag+dga+$ $+dgb+gab+gba+$ $+gda$	$abc+abg+acb+acg+agb+$ $+agc+cab+cag+cba+cbg$ $+cga+cgb+gab+gac+$ $+gba+gbc+gca+gcb$	$abc+abd+acb+$ $+acd+cab+cad+$ $+cba+cbd+cda+$ $+dab+dac$
$c$	$bcd+bcg+bdg+$ $+bgc+bgd+dgb+$ $+dgc+gbc+gbd+$ $+gcb+gcd$	$acg+adg+agc+$ $+dac+dag+dga+$ $+dgc+gac+$ $+gca+gda$	$abg+adg+agb+$ $+bag+bda+bdg+bga$ $+dab+dag+dga+dgb$ $+gab+gba+gda$	$abc+abg+acb+acg+agb+$ $+agc+bac+bag+bca+bcg$ $+bga+bgc+gab+gac+gba$ $+gbc+gca+gcb$	$abc+abd+acb+acd$ $+bac+bad+bca+$ $+bcd+bda+$ $+dab+dac$
$d$	$gbc+gbd+gcb+gcd$	$acg+adg+agc+$ $+gac+gca+gda$	$abg+adg+agb+$ $+gab+gba+gda$	$abc+abg+acb+acg+$ $+agb+agc+gab+gac+$ $+gba+gbc+gca+gcb$	$abc+abd+acb+acd$
$g$	$bcd+bcg+bdg+$ $+bgc+bgd+cbd+$ $+cbg+cdg+cgb+$ $+cgd+dgb+dgc$	$acg+adg+agc+$ $+agc+cag+cda+$ $+cdg+cga+dac+$ $+dag+dga+dgc$	$abg+adg+agb+bag+$ $+bda+bdg+bga+dab$ $+dag+dga+dgb$	$abc+abg+acb+acg+agb+$ $+agc+bac+bag+bca+bcg$ $+bga+bgc+cab+cag+cba$ $+cbg+cga+cgb$	$abc+abd+acd+acd$ $+bac+bad+bca+$ $+bcd+bda+cab+$ $+cad+cba+$ $+cbd+cda$

Рисунок 7.8 — Матрица  $P_4$

Применяем к матрице  $P_4'$  оператор  $\Phi$ . Получаем матрицу  $P_4$  (рис. 7.9).

$P_4$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	0	$cag+cda+cdg+$ $+cga+dac+dag+$ $+dga+dgc+gab+$ $+gba+gda$	$bag+bda+$ $+bdg+bga+$ $+dab+dag+$ $+dga+dgb$	$bac+bag+bca+bcg+bga+$ $+bgc+cab+cba+cbg+$ $+cga+cgb+gab+gac+$ $+gba+gbc+gca+gcb$	$bac+bad+bca+$ $+bcd+bda+cab+$ $+cad+cba+cbd+$ $+cda+dab+dac$
$b$	$cbd+cbg+cdg+$ $+cgb+cgd+dgb+$ $+dgc+gbc+gbd+$ $+gcb+gcd$	0	$abg+adg+agb+$ $+dab+dag+dga+$ $+dgb+gab+gba+$ $+gda$	$abc+abg+acb+acg+agb+$ $+agc+cab+cag+cba+cbg+$ $+cga+cgb+gab+gac+$ $+gba+gbc+gca+gcb$	$abc+abd+acb+$ $+acd+cab+cad+$ $+cba+cbd+cda+$ $+dab+dac$
$c$	$bcd+bcg+bdg+$ $+bgc+bgd+dgb+$ $+dgc+gbc+gbd+$ $+gcb+gcd$	$acg+adg+agc+$ $+dac+dag+dga+$ $+dgc+gac+$ $+gca+gda$	0	$abc+abg+acb+acg+agb+$ $+agc+bac+bag+bca+bcg+$ $+bga+bgc+gab+gac+gba+$ $+gbc+gca+gcb$	$abc+abd+acb+acd$ $+bac+bad+bca+$ $+bcd+bda+$ $+dab+dac$
$d$	$gbc+gbd+gcb+gcd$	$acg+adg+agc+$ $+gac+gca+gda$	$abg+adg+agb+$ $+gab+gba+gda$	0	$abc+abd+acb+acd$
$g$	$bcd+bcg+bdg+$ $+bgc+bgd+cbd+$ $+cbg+cdg+cgb+$ $+cgd+dgb+dgc$	$acg+adg+agc+$ $+agc+cag+cda+$ $+cdg+cga+dac+$ $+dag+dga+dgc$	$abg+adg+agb+ba$ $g+$ $+bda+bdg+bga+d$ $ab+$ $+dag+dga+dgb$	$abc+abg+acb+acg+agb+$ $+agc+bac+bag+bca+bcg+$ $+bga+bgc+cab+cag+cba+$ $+cbg+cga+cgb$	0

Рисунок 7.9 — Матрица  $P_4$

Умножаем матрицу  $B$  на матрицу  $P_4$ , получаем матрицу  $P_5'$  (рис. 7.10).

$P_5$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	$bcdg+bcgd+bdgc+$ $+bgcd+cbdg+cbgd+$ $+cdgb+cgbd+dgbc+$ $+dgcg+gbcd+gcbd$	$cadg+cdag+cdga+$ $+cgda+dacg+dagc+$ $+dgac+dgca+gcda+$ $+gdac$	$badg+bdag+bdga+$ $+bgda+dabg+dagb+$ $+dgab+dgba+gbda+$ $+gdab$	$bacg+bagc+bcag+$ $+bcga+bgac+bgca+$ $+cabg+cagb+cbag+$ $+cbga+cgab+cgba+$ $+gabc+gacb+gbac+$ $+gbca+gcab+gcba$	$bacd+bcad+bcda+$ $+bdac+cabd+cbad+$ $+cbda+cdab+dabc+$ $+dacb$
$b$	$cbdg+cbgd+cdgb+$ $+cgbd+dgbc+dgcg+$ $+gbcd+gcbd$	$acdg+adgc+cadg+$ $+cdag+cdga+cgda+$ $+dacg+dagc+dgac+$ $+dgca+gcda+gdac$	$abdg+adgb+dabg+$ $+dagb+dgab+dgba+$ $+gbda+gdab$	$abcg+abgc+achg+$ $+acgb+agbc+agcb+$ $+cabg+cagb+cbag+$ $+cbga+cgab+cgba+$ $+gabc+gacb+gbac+$ $+gbca+gcab+gcba$	$abcd+acbd+cabd+$ $+cbad+cbda+cdab+$ $+dabc+dacb$
$c$	$bcdg+bcgd+bdgc+$ $+bgcd+dgbc+dgcg+$ $+gbcd+gcbd$	$acdg+adgc+dacg+$ $+dagc+dgac+dgca+$ $+gcda+gdac$	$abdg+adgb+badg+$ $+bdag+bdga+bgda+$ $+dagb+dagb+dgab+$ $+dgba+gbda+gdab$	$abcg+abgc+achg+$ $+acgb+agbc+agcb+$ $+bacg+bagc+bcag+$ $+bcga+bgac+bgca+$ $+gabc+gacb+gbac+$ $+gbca+gcab+gcba$	$abcd+acbd+bacd+$ $+bcad+bcda+bdac+$ $+dabc+dacb$
$d$	$gbcd+gcbd$	$acdg+adgc+gcda+$ $+gdac$	$abdg+adgb+gbda+$ $+gdab$	$abcg+abgc+achg+$ $+acgb+agbc+agcb+$ $+gabc+gacb+gbac+$ $+gbca+gcab+gcba$	$abcd+acbd$
$g$	$bcdg+bcgd+bdgc+$ $+bgcd+$ $cbdg+cbgd+$ $+cdgb+cgbd+dgbc+$ $+dcbg$	$acdg+adgc+cadg+$ $+cdag+cdga+cgda+$ $+dacg+dagc+dgac+$ $+dgca$	$abdg+adgb+badg+$ $+bdag+bdga+bgda+$ $+dagb+dagb+dgab+$ $+dgba$	$abcg+abgc+achg+$ $+acgb+agbc+agcb+$ $+bacg+bagc+bcag+$ $+bcga+bgac+bgca+$ $+cabg+cagb+cbag+$ $+cbga+cgab+cgba$	$abcd+acbd+bacd+$ $+bcad+bcda+bdac+$ $+cabd+cbad+cbda+$ $+cdab+dabc+dacb$

Рисунок 7.10 — Матрица  $P_5$

Применяем к матрице  $P_5'$  оператор  $\Phi$ . Получаем матрицу  $P_5$  (рис. 7.11).

$P_5$	$a$	$b$	$c$	$d$	$g$
$a$	$bcdg+bcgd+bdgc+$ $+bgcd+cbdg+cbgd+$ $+cdgb+cgbd+dgbc+$ $+dgcg+gbcd+gcbd$	$0$	$0$	$0$	$0$
$b$	$0$	$acdg+adgc+cadg+$ $+cdag+cdga+cgda+$ $+dacg+dagc+dgac+$ $+dgca+gcda+gdac$	$0$	$0$	$0$
$c$	$0$	$0$	$abdg+adgb+badg+$ $+bdag+bdga+bgda+$ $+dagb+dagb+dgab+$ $+dgba+gbda+gdab$	$0$	$0$
$d$	$0$	$0$	$0$	$abcg+abgc+achg+$ $+acgb+agbc+agcb+$ $+gabc+gacb+gbac+$ $+gbca+gcab+gcba$	$0$
$g$	$0$	$0$	$0$	$0$	$abcd+acbd+bacd+$ $+bcad+bcda+bdac+$ $+cabd+cbad+cbda+$ $+cdab+dabc+dacb$

Рисунок 7.11 — Матрица  $P_5$



### 7.3. Обработка результатов вычисления матриц

Матрица  $P_5$  получается диагональной, следовательно, процесс вычисления матриц завершен. К полученным слагаемым добавим в начале по вершине  $x_i$ :

$abcdg+abcgd+abdgc+abgcd+acbdg+acbgd+acdgb+acgbd+adgbc+adgcb+agbcd+agcbd;$   
 $bacdg+badgc+bcadg+bcdag+bcdga+bcgda+bdacg+bdagc+bdgac+bdgca+bgcda+bgdac;$   
 $cabdg+cadgb+cbadg+cbdag+cbdga+cbgda+cdabg+cdagb+cdgab+cdgba+cgbda+cgdab;$   
 $dabgc+dabgc+dacbg+dacgb+dagbc+dagcb+dgabc+dgacb+dgbac+dgbc+dgcb+dgcb+dgcb;$   
 $gabcd+gacbd+gbacd+gbcad+gbcda+gbdac+gcabd+gcbad+gcbda+gcdab+gdabc+gdacb.$

Выполним круговую перестановку в каждом слагаемом полученных элементов матрицы  $P_5$  с добавленными в начале вершинами  $x_i$  (кроме первой строки) по следующему правилу: «Фиксируем в слагаемом положение вершины  $a$ . Она должна стоять крайней слева. Берем в слагаемом первую слева вершину от  $a$  и переносим ее на место после последней вершины в слагаемом. Если вершина  $a$  все еще не крайняя слева, то берем в слагаемом первую вершину слева от  $a$  и переносим ее на место после последней вершины в слагаемом и т.д. до тех пор, пока вершина  $a$  не станет крайней слева в слагаемом». Получаем список:

$abcdg+abcgd+abdgc+abgcd+acbdg+acbgd+acdgb+acgbd+adgbc+adgcb+agbcd+agcbd;$   
 $acdgb+adgcb+adgbc+agbcd+abcdg+abcgd+acgbd+agcbd+acbdg+abdgc+abgcd+abgcd;$   
 $abdgc+adgbc+adgcb+agcbd+acbdg+acbgd+abgcd+agbcd+abcdg+acdgb+acgbd+abgcd;$   
 $abcgd+abgcd+acbgd+acgbd+agbcd+agbcd+abcdg+acbdg+acdgb+adgbc+abdgc+adgcb;$   
 $abcdg+acbdg+acdgb+adgbc+agbcd+acgbd+abdgc+adgcb+agcbd+abgcd+abcgd+abgcd.$

Удаляем из этого списка одинаковые слагаемые и получаем список гамильтоновых циклов графа  $G$ :

$abcdg;abcgd;abdgc;abgcd;acbdg;acbgd;acdgb;acgbd;adgbc;adgcb;agbcd;agcbd.$

На этом расчеты закончены.

#### 7.4. Выводы

- 1) установлено, что исходный ориентированный граф  $G$  на пяти вершинах является гамильтоновым;
- 2) построена модифицированная матрица смежности графа  $G$ ;
- 3) при помощи алгебраического метода найдены все гамильтоновы циклы графа  $G$ .
- 4) Нахождение всех гамильтоновых циклов применяется в решении задачи о коммивояжере.

### Список используемой литературы

1. Колесников А.В. Дискретная математика / Практикум для студентов специальностей 230102.65 – «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и 230101.65 - «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» (учебное пособие).— Калининград: Издательство ФГОУ ВПО «КГТУ», 2006.-116 с.
2. Колесников А.В. Дискретная математика / Индивидуальные задания и методические указания к курсовой работе для студентов специальностей 230102.65 – «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и 230101.65 - «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети».— Калининград: Издательство ФГОУ ВПО «КГТУ», 2008 (электронная версия).
3. Пономарев. В.Ф. Основы дискретной математики: Учебное пособие. – Калининград: КГТУ, 1997, 165 с.