

Secvențe logistice

Poenaru Iulian, Raț Ioan Paul, Pop Iulian *

Rezumat

Folosindu-ne de ecuația diferențială $p_n + 1 = kp_n(1 - p_n)$ calculăm termenii unei secvențe ca mai apoi să îi introducem într-un graf care la rândul său urmează a fi analizat. Lucrarea conține patru enunțuri și patru concluzii, respectiv răspunsuri.

1 Introducere

O secvență care apare în ecologie ca un model pentru creșterea populației este definită de ecuația diferențială $p_n + 1 = kp_n(1 - p_n)$ unde p_n măsoară mărimea populației n a unei singure specii, astfel $0 \leq p_n \leq 1$. Acestea fiind zise, un ecologist ar fi interesat să prezică mărimea populației în raport cu trecerea timpului, punându-și anumite întrebări: Se va stabili mărimea populației la o anumită limită? Se va modifica într-o manieră circulară? Sau va da dovadă de un comportament total aleatoriu? Pentru experiment și analiza datelor vom folosi un model discret, cu secvențe în loc de limite, deoarece este mai preferabil pentru modelarea populațiilor a căror natalitate și mortalitate variază în mod regulat.

Experimentul, respectiv conținutul lucrării, este împărțit în patru enunțuri ce vor fi prezentate și rezolvate conform cerinței. Fiecare enunț se bazează pe variația termenilor secvenței, variația ce o vom observa punând datele descoperite în grafuri și analizând aceste grafuri pentru a răspunde la întrebările primite în enunțuri.

2 Circumstanțe

Din punct de vedere tehnic, experimentul se folosește de un program executabil scris în limbajul de programare C++. Programul calculează termenii

*Universitatea de Vest din Timișoara, Facultatea de Matematică și Informatică, specializarea Informatică, E-mail: iulian.poenaru03@e-uv.ro, ioan.rat04@e-uv.ro, iulian.pop03@e-uv.ro

secvenței în funcție de anumite variabile (p_0 și k), termeni pe care îi scrie în fișiere CSV. Practic, pentru fiecare secvență în parte avem un fișier CSV care conține termenii secvenței. După ce secvențele au fost calculate și fișiere CSV au fost create le putem afișa sub forma unor grafuri în Latex folosindu-ne de librăria *pgfplots*.

Listing 1: Program C++

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<string.h>

int main(){

    int n=<NUMBER OF TERMS>;
    double p0[2]={ <TERM p0 OF EVERY SEQUENCE> };
    double k[2]={ <THE k OF EVERY SEQUENCE> };
    char out[256] = "<ABSOLUTE-PATH-TO-THE-FOLDER>\\terms";
    char outNr[100][2]={ <THE NUMBER OF THE DATA TERM ex: "1"> };

    int h=0;
    double p;
    double j = 0.5;
    int sizeOfp0 = sizeof(p0)/sizeof(double );
    int sizeOfk = sizeof(k)/sizeof(double);

    for(int x=0;x<sizeOfp0;x++){
        for(int y=0;y<sizeOfk;y++){
            p = p0[x];
            strcat(out,outNr[h]);
            strcat(out, ".csv");
            std::ofstream fout(out);
            fout<<"a,b\n";
            for(int i=1;i<=n;i++){
                p = k[y] * p * (1-p);
                fout<<p * 10000 <<" , "<<j<<"\n";
                j+=0.5;
            }
            strcpy(out, "<ABSOLUTE-PATH-TO-THE-FOLDER>\\terms");
            fout.close();h++;
        }
    }
}
```

Listing 2: Bloc cod Latex

```
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}
\addplot table [x=b, y=a, col sep=comma] {<FILE NAME>};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

3 Experiment

În această secțiune vom rezolva enunțurile specificate anterior:

Enunț 1 : Să se calculeze 20 sau 30 de termeni ai secvenței pentru $p_0 = \frac{1}{2}$ și pentru două valori ale lui k astfel încât $1 < k < 3$. Să se facă grafice cu fiecare secvență. Par secvențe a converge? Să se repete experimentul cu o valorare diferită a lui p_0 , $0 < p_0 < 1$. Depinde limita de alegerea lui p_0 ? Depinde de alegerea lui k ?

Pe baza graficelor prezentate mai jos putem spune că fiecare secvență în parte pare să convergă, atât pentru k diferit cât pentru p_0 diferit. În Figura 1 pare că graficul pornește de la o valoare mai mare și converge spre o valoare mai mică, în Figura 2 pare că graficul pornește aleatoriu ca mai apoi să convergă, iar în Figura 3, când ambele valori par a fi mijlocul intervalului de definire, graficul pare constant. Deasemenea, putem observa în primele trei figuri că, cu cât k este mai mare cu atât graficul vrea să urce mai sus, deci limita este influențată de k în cazul în care p_0 este $\frac{1}{2}$. În figurile 4,5 și 6 observăm că o dată cu creșterea lui p_0 de la 0.5 la 0.75 graful nu pare să mai coboare, ca mai apoi să convergă, ci pare să pornească de la o valoare mai mică și să urce. În cazul figurii 5 pare să urce, să aibă un comportament aleatoriu și mai apoi să devină constant.

Pentru a concluziona răspunsul, secvențele par să convergă în toate cazurile prezentate, alegerile valorilor pentru k , respectiv p_0 influențează orientarea grafului, iar dacă luăm valori ce reprezintă mijlocul intervalului atunci graful nu pare să crească sau să descrească, acesta fiind constant.

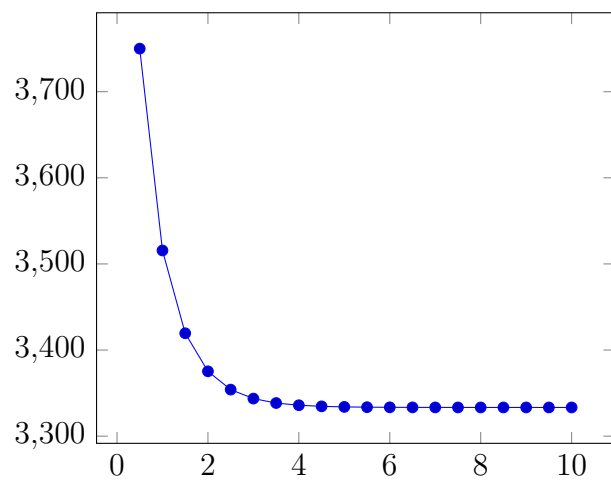


Figura 1: $p_0 = \frac{1}{2}$ și $k = 1.5$

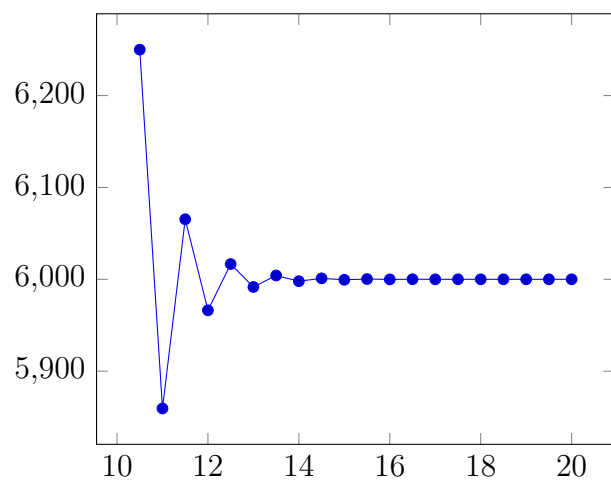


Figura 2: $p_0 = \frac{1}{2}$ și $k = 2.5$

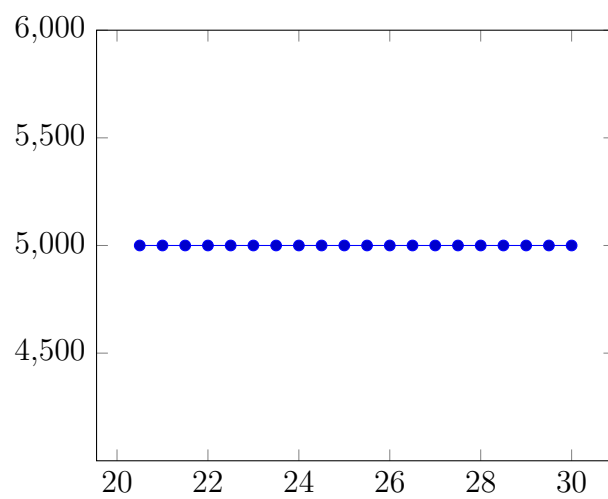


Figura 3: $p_0 = \frac{1}{2}$ și $k = 2$

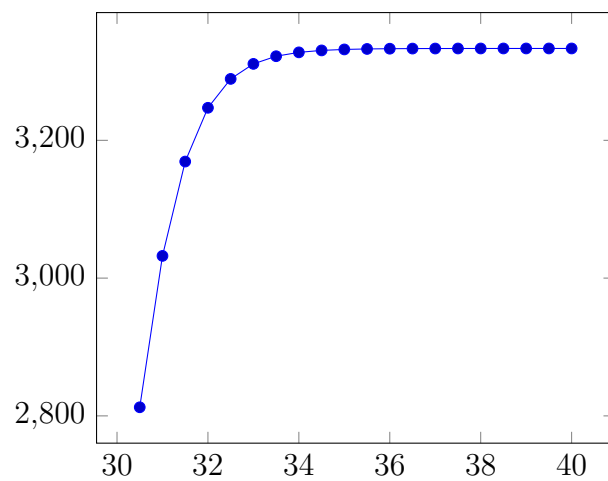


Figura 4: $p_0 = 0.75$ și $k = 1.5$

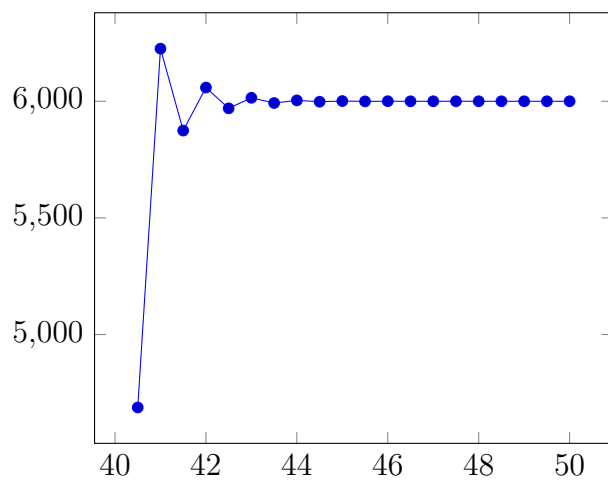


Figura 5: $p_0 = 0.75$ și $k = 2.5$

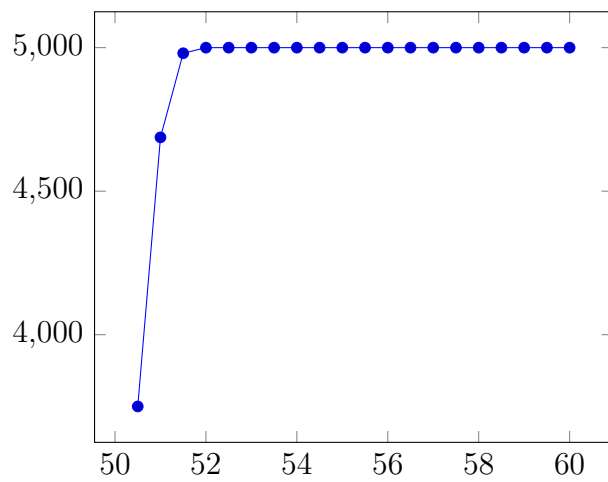


Figura 6: $p_0 = 0.75$ și $k = 2$

Enunț 2 : Să se calculeze termenii ai secvenței pentru $3 < k < 3.4$. Ce se poate observa referitor la comportamentul termenilor?

Comparativ cu enunțul anterior, unde secvențele părau a converge, aici putem observa o fluctuație a graficelor. Secvențele nu par să tindă spre o limită, avestea artând exact contrariul. Observăm totuși că secvențele nu prezintă un comportament aleatoriu, terminii fluctuând într-un anumit interval, exemplu Figura 7 în care termenii par să fluctueze în intervalul $[5000, 8000]$ (reprezentarea pe grafic).

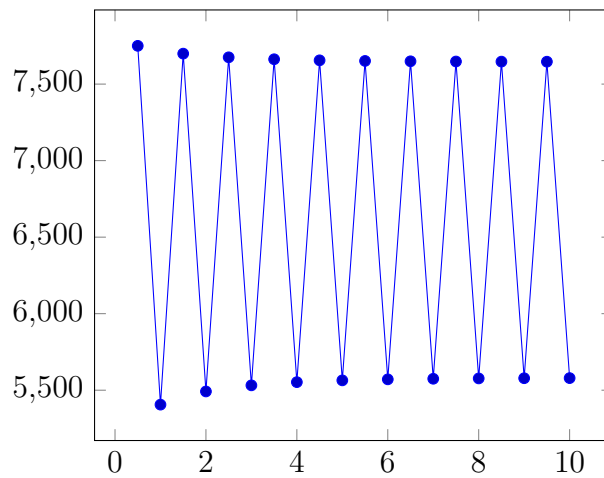


Figura 7: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.1$

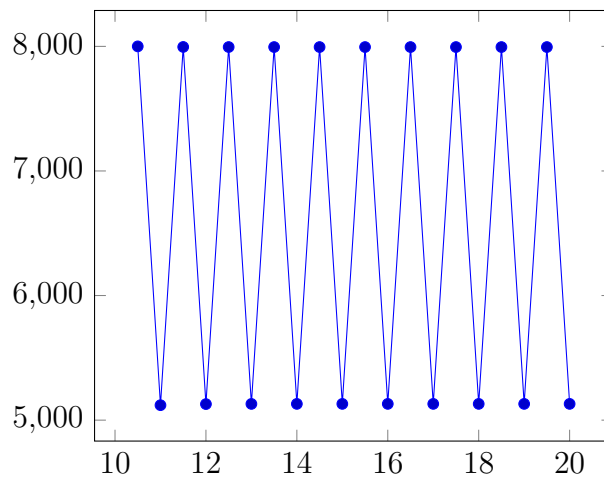


Figura 8: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.2$

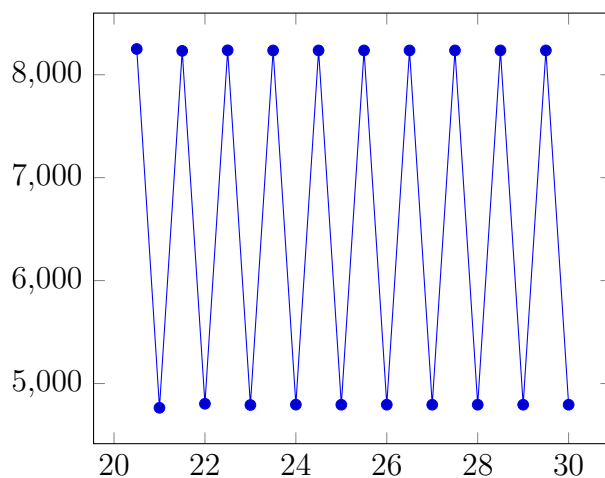


Figura 9: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.3$

Enunț 3 : Experimentați cu valori ale lui k între 3.4 și 3.5. Ce se întâmplă cu termenii?

Observăm că termenii (dimensiunea populației) se uniformizează spre o populație de mărime medie, pe măsură ce generațiile trec. Cu toate acestea, viteza de uniformizare și valoarea limită la care se stabilizează pot varia în funcție de valoarea lui " k ". Cu cât valoarea lui " k " este mai mare, cu atât procesul este accelerat și se apropie de uniformizare mai repede.

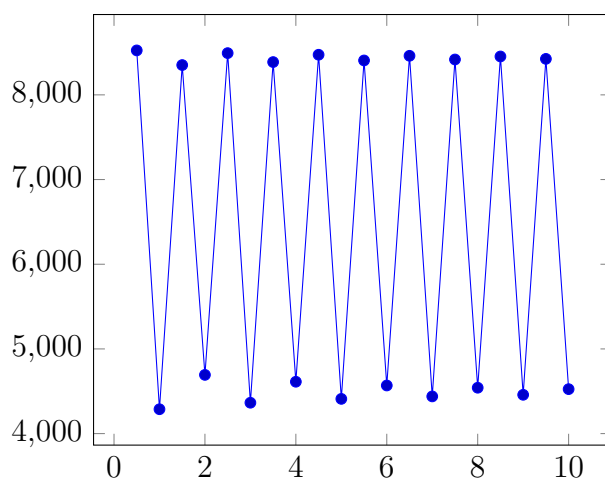


Figura 10: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.41$

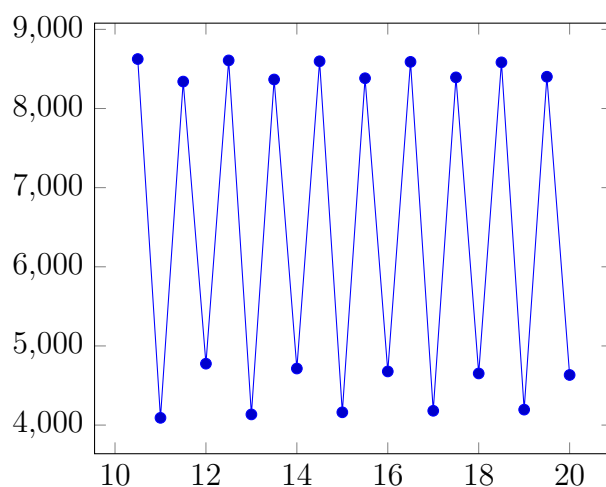


Figura 11: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.45$

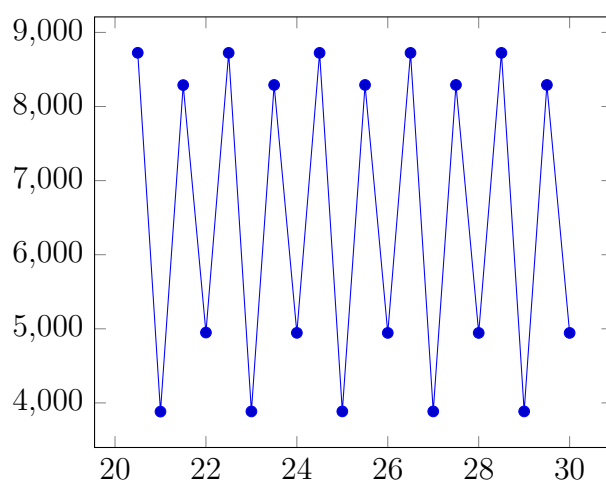


Figura 12: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.49$

Enunț 4 : Pentru valorile lui k între 3.6 și 4, calculați și reprezentați cel puțin 100 de termeni și comentați comportamentul secvenței. Ce se întâmplă dacă modificați p_0 cu 0.001? Acest tip de comportament este numită haotică și este expusă de populațiile de insecte în anumite condiții.

Pentru valori mici ale lui k , populația va crește treptat până la o valoare limită stabilă. Aceasta înseamnă că populația va atinge o valoare maximă și se va menține în jurul acestei valori.

Pe măsură ce valoarea lui k crește, populația poate prezenta oscilații ciclice

în jurul valorii limită sau poate avea o variație aleatoare. Aceasta depinde de condițiile inițiale și de sensibilitatea la condițiile inițiale a ecuației.

În cazul în care valorile lui k depășesc anumite limite critice, comportamentul populației poate deveni haotic, ceea ce înseamnă că devine extrem de sensibil la condițiile inițiale și prezintă fluctuații aparent imprevizibile.).

Dacă modificăm valoarea inițială p_0 cu o valoare mică, cum ar fi 0.001, comportamentul secvenței poate deveni haotic (spre exemplu Figura 16), în special în cazul valorilor mari ale lui k .

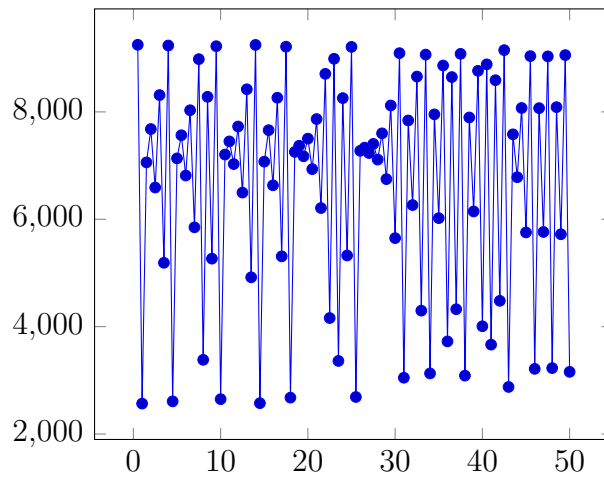


Figura 13: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.7$

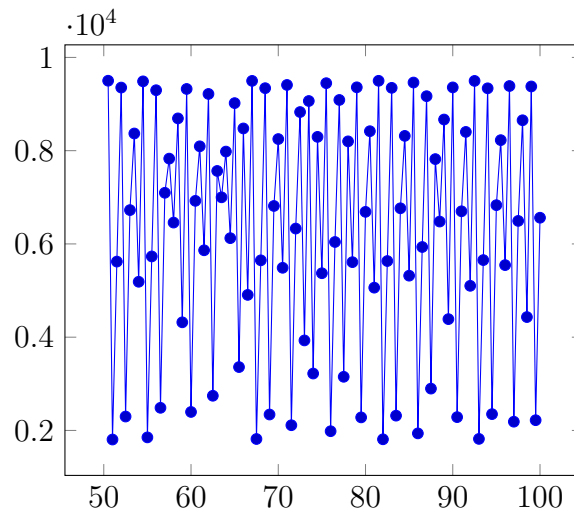


Figura 14: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.8$

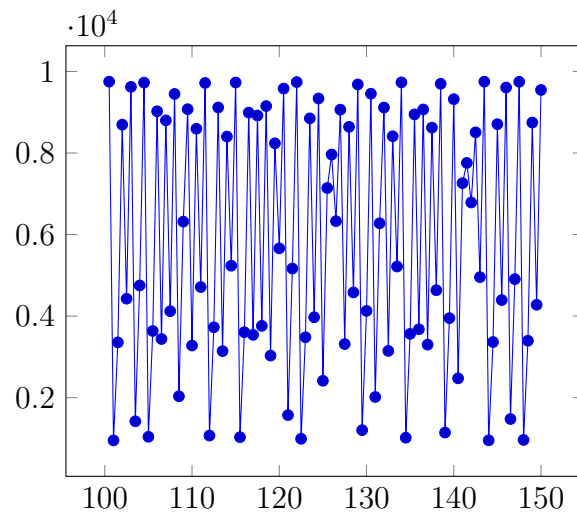


Figura 15: $p_0 = 0.5$ și $k = 3.9$

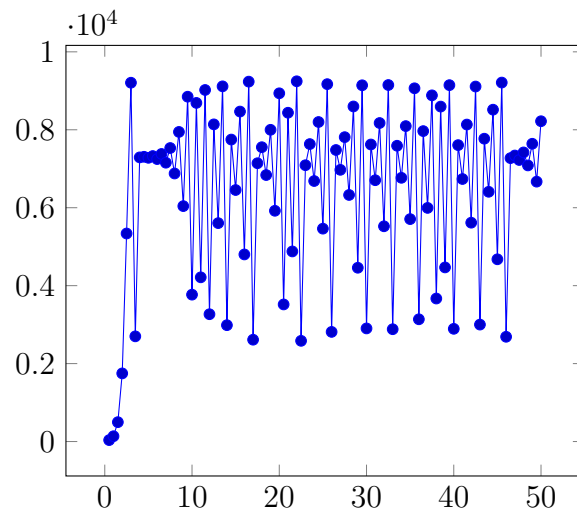


Figura 16: $p_0 = 0.001$ și $k = 3.7$

4 Concluzie

În concluzie, comportamentul secvenței în ecuația diferențelor logistică poate varia în funcție de valorile lui k și de condițiile inițiale. De la creștere stabilă la oscilații ciclice și comportament haotic, acest model poate reprezenta diferite tipuri de populații în funcție de parametrii specifici ai sistemului.

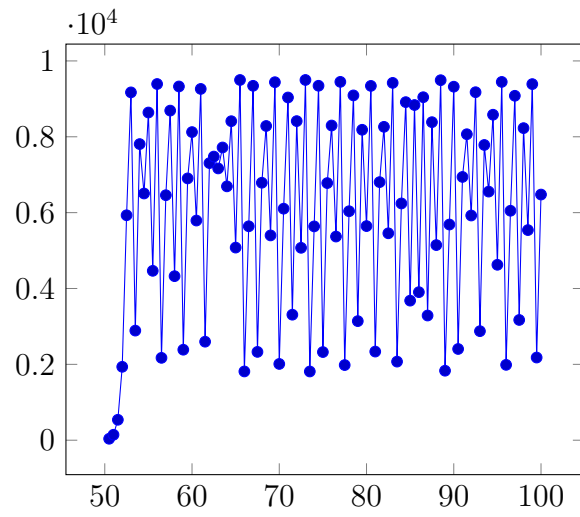


Figura 17: $p_0 = 0.001$ și $k = 3.8$

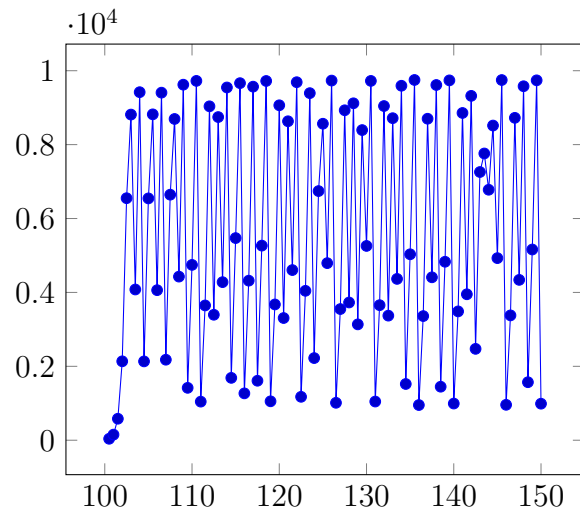


Figura 18: $p_0 = 0.001$ și $k = 3.9$