Интеграл Лебега

1. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $\mu(X) < \infty$, $A_1,\dots,A_n$ — измеримые подмножества X, причем каждая точка X принадлежит не менее чем k множествам из набора $A_1,\dots,A_n$. Докажите, что $k\mu(X) \leqslant \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

2. Пусть (X,μ) — пространство с конечной мерой. Докажите, что измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{K}$ интегрируема тогда и только тогда, когда $\sum_n \mu\{x \in X : |f(x)| \geqslant n\} < \infty$.

3. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ — интегрируемая по Лебегу функция, причем $\int_{[a,x]} f\, d\lambda = 0$ для любого $x \in [a,b]$ (где λ — мера Лебега). Докажите, что $f = 0$ п.в.

4. Приведите пример, показывающий, что теорема о монотонной сходимости неверна без предположения о монотонности, а теорема о мажорированной сходимости неверна без предположения о существовании интегрируемой мажоранты.

5. Приведите пример, показывающий, что лемма Фату неверна без предположения о неотрицательности функций.

6. На лекции лемма Фату была выведена из теоремы о монотонной сходимости, а теорема о мажорированной сходимости — из леммы Фату. Замкните это «кольцо» и покажите, что теорема о монотонной сходимости следует из теоремы о мажорированной сходимости.

7. Пусть $f_n \to f$ в $\mathscr{L}^1(X,\mu)$ (где (X,μ) — некоторое пространство с мерой).

   (a) Докажите, что существует такая функция $F \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, что для некоторой подпоследовательности (f_{n_k}) выполнено условие $|f_{n_k}| \leqslant F$ п.в. для всех k.

   (b) Всегда ли верно утверждение п. (a) для исходной последовательности (f_n)?

8. Пусть (f_n) — последовательность неотрицательных интегрируемых функций на пространстве с мерой (X,μ), сходящаяся п.в. к интегрируемой функции f, причем $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$. Докажите, что $f_n \to f$ в $\mathscr{L}^1(X,\mu)$.

9. Пусть $c\colon [0,1] \to [0,1]$ — канторова лестница. Вычислите интегралы: **(a)** $\int_0^1 c(x)\, dx$; **(b)** $\int_0^1 x\, d\mu_c(x)$, где μ_c — мера Лебега–Стилтьеса на $[0,1]$, порожденная функцией c.

10. Приведите пример ограниченной измеримой по Лебегу функции на $[0,1]$, не совпадающей почти всюду ни с какой функцией, интегрируемой по Риману.

11. Приведите пример непрерывной, но не интегрируемой по Лебегу функции на $[0,+\infty)$, для которой существует несобственный интеграл $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\, dx$.

12. Приведите пример последовательности ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к нулю в $\mathscr{L}^1[0,1]$, но не сходящейся ни в одной точке.

13. Постройте пример такой измеримой функции $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$, что интегралы
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy, \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx \tag{1}$$
существуют, но не равны друг другу. Какое условие теоремы Фубини при этом нарушается?

14. Постройте пример такой измеримой функции $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$, что один из интегралов (1) существует, а другой — нет. Какое условие теоремы Фубини при этом нарушается?