2.1. Для $a \in \mathbb{R}$ положим $\lceil a \rceil = \min([a, +\infty) \cap \mathbb{Z})$ и определим функцию $F\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ формулой $F(x) = x - \lceil 1/x \rceil$. Вычислите $\int_{[1/\sqrt{15}, 2]} x \, d\mu_F(x)$, где μ_F — мера Лебега–Стилтьеса, построенная по F (см. задачи 2.6 и 3.4 из списков к семинарам).

2.2. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $f\colon X \to \mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) — интегрируемая функция. Докажите, что $\mu\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\} = o(1/t)$ при $t \to +\infty$.

2.3. Приведите пример последовательности (f_n) неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0, 1]$, поточечно сходящейся к нулю, интегралы которых стремятся к нулю, но для которых функция $\sup_n f_n$ не интегрируема.

2.4. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой, и пусть функция $f\colon X \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ такова, что для каждого $t \in [0, 1]$ функция $x \mapsto f(x, t)$ интегрируема на X, и для каждого $x \in X$ функция $t \mapsto f(x, t)$ непрерывна на $[0, 1]$. Докажите, что функция $t \mapsto \int_X f(x, t) \, d\mu(x)$ — борелевская.

2.5. Пусть (a_n) — последовательность положительных чисел, причем $\sum_n a_n \ln n < +\infty$. Докажите, что для любой последовательности (x_n) в $\mathbb{R}$ ряд $\sum_n \dfrac{a_n}{|x - x_n|}$ сходится для почти всех $x \in \mathbb{R}$. (*Указание:* рассмотрите множества вида $[-c, c] \setminus \bigcup_n (x_n - \varepsilon/n^2, x_n + \varepsilon/n^2)$.)