1.1. Порождается ли борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^2$ всевозможными **(a)** конечными множествами; **(b)** замкнутыми правильными треугольниками, одна из сторон которых параллельна оси абсцисс?

1.2. Пусть X — множество, $\mathscr{F}$ — некоторое семейство его подмножеств, $X \in \mathscr{F}$. Положим $\mathscr{A}_0 = \left\{\bigcap_{i=1}^n A_i \,:\, A_i \in \mathscr{F},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ и $\mathscr{A}_1 = \left\{\bigcup_{i=1}^n B_i \,:\, B_i \in \mathscr{A}_0,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Наконец, пусть $\mathscr{A} = \left\{\bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus B_i) : A_i, B_i \in \mathscr{A}_1,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Докажите, что $\mathscr{A}_1$ замкнуто относительно конечных пересечений, и что $\mathscr{A}$ — алгебра, порожденная $\mathscr{F}$.

1.3. Пусть $\mathscr{P}$ — полуалгебра подмножеств $\mathbb{Q}$, состоящая из множеств вида $I \cap \mathbb{Q}$, где $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток (т.е. отрезок, интервал, полуинтервал, луч или вся прямая). Определим меру μ на $\mathscr{P}$, полагая $\mu(I \cap \mathbb{Q}) =$ длина I, и продолжим μ на алгебру, порожденную $\mathscr{P}$. Опишите внешнюю меру μ^* на $2^{\mathbb{Q}}$ и соответствующую σ-алгебру измеримых множеств.

1.4. Докажите, что каждое множество положительной меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ содержит компакт положительной меры, не имеющий внутренних точек.

1.5. Приведите пример такой измеримой по Лебегу функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, что множество $f([0,1])$ неизмеримо.