

АНАЛИЗ, 2 КУРС  
**Индивидуальное домашнее задание**

Каждый студент выбирает задачи с номерами  $n_1, n_2, n_3, n_4$  из четырёх блоков. Эти номера находятся следующим образом. Положим  $A, B, C$  равными числу букв в фамилии, имени и отчестве студента соответственно. Далее, пусть

$a$  равно номеру первой буквы фамилии в русском алфавите (*не включающем* букву ё!),

$b$  равно номеру первой буквы имени в русском алфавите,

$c$  равно номеру второй(!) буквы отчества в русском алфавите.

Тогда номер задачи  $n_k$  в  $k$ -том блоке,  $k = 1..4$ , вычисляется по формуле

$$n_k = 1 + ((A \cdot c \cdot 2^k + B \cdot a + C \cdot b) \pmod{m_k}),$$

где  $m_k$  — число задач в каждом блоке, т.е.  $m_1 = 21, m_2 = 21, m_3 = 17, m_4 = 19$ .

**Задача 1.** Посчитать следующие интегралы:

1.  $\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} xy dy$
2.  $\iint_{|x|+|y|\leq 1} x^3 y^5 dx dy$
3.  $\iint_{|x|+|y|\leq 1} x^2 dx dy$
4.  $\iint_{0\leq x, y\leq 2} ([x] + [y]) dx dy$ , где  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ .
5.  $\iint_{x^2+y^2\leq 9} \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4) dx dy$
6.  $\iint_D \sqrt{|x-y|^2} dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2\}$
7.  $\iint_D [\sqrt{x^2 + y^2}] dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : x + y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$
8.  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy$
9.  $\iint_D xy dx dy$ , где  $D$  — область, ограниченная осями координат и кривой  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
10.  $\iint_D [x^2 + y^2] dx dy$ , где  $D$  — как в пункте 11, а  $[x]$  означает целую часть  $x$ .
11.  $\iint_D |xy| dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : x \in [-1, 1], |y| \leq x^2\}$ .
12.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , где  $D$  — параллелограмм со сторонами  $y = x, y = x + a, y = a$  и  $y = 3a$ .
13.  $\iint_{x, y \in [0, \pi]} \sin^2(x + y) \sin^2(3x + 2y) dx dy$
14.  $\iint_D xy^2 dx dy$ , где область  $D$  ограничена параболой  $y^2 = 2px$  и прямой  $x = p/2$ , а  $p > 0$ .
15.  $\iint_D x^2 y^4 dx dy$ , где  $D$  — как в предыдущем пункте.
16.  $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} (x + y + z) dz$

17.  $\int_1^2 dy \int_y^2 dx \int_0^{\frac{1}{xy}} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)}$
18.  $\int_{-1}^0 dy \int_y^0 dz \int_0^{zy} y^2 \cos(x) dx$
19.  $\int_0^4 dz \int_{-z}^z dx \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2 xy^2 dy$
20.  $\int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \int_0^{3-y-z} \frac{1}{(x+y+z)^2} dx$
21.  $\iiint_V xy^2z^3 dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $z = xy$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$

**Задача 2.** Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

1.  $\int_0^4 dx \int_{x/2+1}^{7-x} f(x, y) dy$
2.  $\int_0^6 dx \int_{x^2/6-1}^{x-1} f(x, y) dy$
3.  $\int_0^2 dy \int_{4-2y^2}^{4-y^2} f(x, y) dx$
4.  $\int_0^1 dx \int_{x^4}^{x^2} f(x, y) dy$
5.  $\int_0^1 dy \int_0^{y(2-y)} f(x, y) dx$
6.  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}-1}^{\cos(\pi y/2)} f(x, y) dx$
7.  $\int_0^2 dx \int_0^{(x-1)^2} f(x, y) dy$
8.  $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy$
9.  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{3\sqrt{x}} f(x, y) dy$
10.  $\int_{-7}^1 dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x, y) dx$
11.  $\int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$
12.  $\int_0^1 dy \int_{y^2/9}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{y^2/9}^1 f(x, y) dx$
13.  $\int_3^7 dy \int_{9/y}^3 f(x, y) dx + \int_7^9 dy \int_{9/y}^{10-y} f(x, y) dx$
14.  $\int_0^2 dx \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x, y) dy$
15.  $\int_{\pi/4}^{5\pi/4} dx \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} f(x, y) dy$
16.  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$

17.  $\int_0^\pi dx \int_0^{\sin(x)} f(x, y) dy$
18.  $\int_0^3 dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx$
19.  $\int_{-6}^2 dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y) dy$
20.  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$
21.  $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$

**Задача 3.** Посчитать следующие интегралы, используя удобную замену координат:

1.  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \cos(x^2 + y^2) dx dy$ , где  $a > 0$
2.  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy$ , где  $a > 0$
3.  $\iint_{x^2+y^2 \leq ax} \frac{x^2}{x^2+y^2} dx dy$ , где  $a > 0$
4.  $\iint_{x^2+y^2 \leq ay} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$
5.  $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} y^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx dy$
6.  $\iint_{x^2+y^2 \leq ax} \frac{x dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$
7.  $\iint_D (x^2 + 1) y^2 dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{y}, x \leq y \leq 3x\}$
8.  $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 3x^2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}$
9.  $\iint_D xy(x + y) dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : -1 \leq x - y \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}$
10.  $\iint_D x^2 dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : x^3 \leq y \leq 2x^3, x \leq 2y \leq 6x\}$
11.  $\iint_D xy(x + y) dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : x - 1 \leq y \leq x + 1, -x - 1 \leq y \leq -x + 1\}$
12.  $\iint_D xy dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : ax^3 \leq y \leq bx^3, px \leq y^2 \leq qx\}$  и  $a < b, 0 \leq p < q$
13.  $\iint_D xy dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : ax^2 \leq y^3 \leq bx^2, \alpha x \leq y \leq \beta x\}$
14.  $\iint_D \frac{x^2 \sin(xy)}{y} dx dy$ , где  $D = \{(x, y) : ay \leq x^2 \leq by, \alpha px \leq y^2 \leq \beta qx\}$
15.  $\iint_{xy \geq 0} e^{-x^2 - y^2} dx dy$
16.  $\iint_{x, y \in [0, \pi]} |\cos(x + y)| dx dy$

$$17. \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-xy-y^2} dx dy$$

**Задача 4.** Вычислить площади областей, ограниченных следующими кривыми:

1.  $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$
2.  $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$
3.  $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$
4.  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = \frac{xy}{c^2}$
5.  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = x^2 + y^2$
6.  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = \frac{x^2}{c^2}$
7.  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^3 = \frac{x^4y}{c^5}$
8.  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^3 = \frac{x^4}{h^4} + \frac{y^4}{k^4}$
9.  $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2y}{c^3}$
10.  $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$
11.  $\frac{x^6}{a^6} + \frac{y^6}{b^6} = \frac{x^4}{h^4} + \frac{y^4}{k^4}$
12.  $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$  и  $y = 0$
13.  $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^3 = \frac{x^2}{h^2}$
14.  $(\frac{x}{a})^{1/4} + (\frac{y}{b})^{1/4} = 1, x = 0, y = 0.$
15.  $(\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} = 1, (\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} = 4, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$
16.  $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^5 = \frac{x^2y^2}{c^4}$
17.  $y = ax^p, y = bx^p, y = cx^q, y = dx^q$ , где  $0 < p < q, 0 < a < b, 0 < c < d$  (имеется в виду криволинейный четырехугольник).
18.  $xy = p, xy = q, y^2 = ax, y^2 = bx, 0 < p < q, 0 < a < b.$
19.  $y^2 = 2p(x - p/2), y^2 = 2q(x - q/2), y^2 = 2r(x - r/2)$ , где  $0 < p < q, x > 0, y > 0.$