σ-алгебры–2. Измеримые функции

1. Доказать, что относительно тривиальной σ-алгебры, состоящей из пустого множества и всего пространства, измеримы лишь постоянные функции.

2. Пусть $\mathcal{A}$ – σ-алгебра и $\{f_n\}$ – последовательность измеримых относительно нее функций. Доказать, что множество тех точек x, для которых $\{f_n(x)\}$ имеет конечный предел, входит в $\mathcal{A}$.

3. Пусть $\{A_t\}$ – некоторый набор множеств и $\mathcal{A}$ – наименьшая содержащая его σ-алгебра. Доказать, что всякое множество из $\mathcal{A}$ входит в σ-алгебру, порожденную некоторым счетным поднабором из $\{A_t\}$.

4. Даны множество X и функция f на нем. Пусть $\mathcal{A}$ – наименьшая σ-алгебра, относительно которой f измерима.

a) Доказать, что $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра, порожденная множествами $f^{-1}(-\infty, c)$, где $c \in \mathbb{R}$.

b) Доказать, что для всякой функции g, измеримой относительно $\mathcal{A}$, найдется такая борелевская функция h на прямой, что $g = h(f)$.

5. Доказать, что бесконечная σ-алгебра не может быть счетной.

6. Доказать, что всякая σ-алгебра в $\mathbb{N}$ порождается конечным или счетным разбиением $\mathbb{N}$ на дизъюнктные части.