

АНАЛИЗ, 2 КУРС
Вопросы к экзамену 27.12.2016

1. Общая схема построения интеграла Лебега (только определения): интеграл простой неотрицательной функции, интеграл произвольной измеримой неотрицательной функции, понятие интегрируемой функции, интеграл интегрируемой функции. Свойства интеграла для простых неотрицательных функций.
2. Общая схема построения интеграла Лебега (только определения): интеграл простой неотрицательной функции, интеграл произвольной измеримой неотрицательной функции, понятие интегрируемой функции, интеграл интегрируемой функции. Теорема о монотонной сходимости и лемма Фату для измеримых неотрицательных функций. Свойства интеграла (в т.ч. аддитивность) на классе измеримых неотрицательных функций.
3. Общая схема построения интеграла Лебега (только определения): интеграл простой неотрицательной функции, интеграл произвольной измеримой неотрицательной функции, понятие интегрируемой функции, интеграл интегрируемой функции. Векторное пространство интегрируемых функций, линейность интеграла, его непрерывность относительно \mathcal{L}^1 -полунормы. Модуль интеграла и интеграл модуля.
4. Свойства интеграла, связанные с множествами меры 0.
5. Теорема о монотонной сходимости для интегрируемых функций. Теорема Лебега о мажорированной сходимости.
6. Умножение меры на функцию и интеграл по полученной мере. Образ меры при измеримом отображении и интеграл по полученной мере. Связь операций умножения меры на функцию и образа меры.
7. Образ меры Лебега в \mathbb{R}^n при C^1 -диффеоморфизме. Замена переменной для интеграла Лебега в \mathbb{R}^n .
8. Монотонные классы множества. Лемма о монотонном классе.
9. Произведения мер. Принцип Кавальери.
10. Теорема Фубини–Тонелли. Следствие: интеграл неотрицательной функции как площадь под графиком.
11. Неполнота произведения пространств с мерой. Теорема Фубини–Тонелли и принцип Кавальери для полных мер.
12. Интеграл Римана в \mathbb{R}^n . Связь интегралов Римана и Лебега. Критерий Лебега интегрируемости по Риману.
13. Интеграл Лебега и несобственный интеграл. Непрерывность и дифференцируемость интеграла Лебега по параметру.
14. Сходимость измеримых функций по мере. Неравенство Чебышёва. Сходимость в среднем влечет сходимость по мере. Последовательности, фундаментальные по мере. Теорема Рисса о связи сходимостей по мере и почти всюду.

15. Теорема Егорова. Следствие: для конечных мер сходимость почти всюду влечет сходимость по мере.
16. Пространства $L^p(X, \mu)$. Их полнота.
17. Плотные подпространства в $L^p(X, \mu)$.
18. Комплексные меры. Вариация комплексной меры. Ограниченность вариации σ -аддитивной комплексной меры на σ -алгебре. Положительная и отрицательная вариации действительной меры.
19. Взаимно сингулярные меры. Абсолютная непрерывность мер. Примеры. Произведение меры на интегрируемую функцию. Критерий абсолютной непрерывности. Следствие: абсолютная непрерывность интеграла.
20. Теорема Лебега–Радона–Никодима.
21. Полярное разложение комплексных мер. Формула вариации для произведения меры на функцию. Разложения Жордана и Хана действительных мер.