

1.1. Порождается ли борелевская σ -алгебра на \mathbb{R}^2 всевозможными (а) конечными множествами; (б) замкнутыми правильными треугольниками, одна из сторон которых параллельна оси абсцисс?

1.2. Пусть X — множество, \mathcal{F} — некоторое семейство его подмножеств, $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{F}$. Положим $\mathcal{A}_0 = \{\bigcap_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}\}$ и $\mathcal{A}_1 = \{\bigcup_{i=1}^n B_i : B_i \in \mathcal{A}_0, n \in \mathbb{N}\}$. Наконец, пусть $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus B_i) : A_i, B_i \in \mathcal{A}_1, n \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что \mathcal{A}_1 замкнуто относительно конечных пересечений, и что \mathcal{A} — алгебра, порожденная \mathcal{F} .

1.3. Пусть \mathcal{P} — полуалгебра подмножеств \mathbb{Q} , состоящая из множеств вида $I \cap \mathbb{Q}$, где $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток (т.е. отрезок, интервал, полуинтервал, луч или вся прямая). Определим меру μ на \mathcal{P} , полагая $\mu(I \cap \mathbb{Q}) = \text{длина } I$, и продолжим μ на алгебру, порожденную \mathcal{P} . Опишите внешнюю меру μ^* на $2^{\mathbb{Q}}$ и соответствующую σ -алгебру измеримых множеств.

1.4. Докажите, что каждое множество положительной меры Лебега в \mathbb{R}^n содержит компакт положительной меры, не имеющий внутренних точек.

1.5. Приведите пример такой измеримой по Лебегу функции $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что множество $f([0, 1])$ неизмеримо.