

Procesarea semnalelor

Transformata Fourier.

Paul Irofti

Universitatea din Bucureşti

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad (1)$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi(f_0 + k f_s)n t_s) \quad (2)$$

unde

- ▶ f_0 – frecvență (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- ▶ n – eșantionul, indexul în sirul de timpi $0, 1, 2, \dots$
- ▶ t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- ▶ nt_s – orizontul de timp (s)
- ▶ $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- ▶ $2\pi f_0 n t$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- ▶ f_s – frecvență de eșantionare (Hz)
- ▶ $f_0 + k f_s$ – frecvență de aliere, $\forall k \in \mathbb{N}$

Cum trecem în frecvență și înapoi în timp?

Transformata Fourier și Transformata Fourier Inversă ne ajută să trecem din domeniul timpului în domeniul frecvenței și vice-versa.

Transformata Fourier Continuă (TF)

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal continuu:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} \quad (3)$$

transformă semnalul continuu din domeniul timpului $x(t)$ în semnalul continuu $X(f)$ din domeniul frecvenței.

Aici e este numărul lui Euler, baza logaritmului natural, și j reprezintă numărul complex $j = \sqrt{-1}$.

Relația lui Euler

Definiție

Relația lui Euler

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad (4)$$

pune în legătură numerele complexe, funcțiile trigonometrice și funcțiile exponențiale.

Pentru un număr complex $z \in \mathbb{C}$:

$$z = a + jb = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = re^{j\varphi} \quad (5)$$

unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ este magnitudinea și $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$

Pentru Transformata Fourier Continuă:

$$e^{-j\alpha} = \cos(-\alpha) + j \sin(-\alpha) = \cos \alpha - j \sin \alpha \quad (6)$$

Radiani

Definiție

Radianii descriu unghiul unui arc de cerc drept raportul dintre lungimea arcului împărțită la rază.

Exemplu

$$1 \text{ rad} = 180^\circ / \pi$$

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Frecvența unghiulară și frecvența de eşantionare

Definiție

Frecvența unghiulară este frecvența exprimată în radiani pe secundă:

$$\Omega = \frac{\omega}{T} = \frac{[rad]}{[s]} = \omega f \quad (7)$$

Definiție

Frecvența de eşantionare în radiani este:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s \quad (8)$$

Discretizare

Dacă un semnal este periodic, iar eșantioanele $x[n]$ se repetă o dată la fiecare N măsurători atunci discretizarea timp-frecvență devine:

- ▶ discretizarea timpului $t \rightarrow nt_s$ și
- ▶ frecvența $f \rightarrow \frac{1}{N}$
- ▶ frecvența unghiulară $\Omega \rightarrow \frac{\omega}{N}$
- ▶ frecvența unghiulară de eșantionare $\Omega \rightarrow \frac{2\pi}{N}$
- ▶ $e^{-j\Omega t} = e^{-j2\pi ft} \rightarrow e^{-j2\pi f_s nt_s} = e^{-j\frac{2\pi}{N} nt_s}$

Transformata Fourier Discretizată în Timp (DTFT)

Definiție

Transformata Fourier Continuă a unui semnal discretizat în timp:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} = \quad (9)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j\Omega nt_s} \quad (10)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega nt_s} \quad (11)$$

numită în literatură Discrete-Time Fourier Transform (DTFT).

Transformata Fourier Discretizată în Timp (DFS)

Fie un sir $x[n]$ cu perioadă N a.i. $x[n] = x[n + kN]$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$.

Definiție

Transformata Fourier a semnalului $x[n]$ cu perioadă N este:

$$X(m) = \sum_n x(n)e^{-j2\pi mn/N} \quad (12)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_m X(m)e^{j2\pi mn/N} \quad (13)$$

numită în literatură Discrete Fourier Sequence (DFS).

Remarcă

Dacă semnalul este periodic, observăm că informația se repetă o dată la N eșantioane a.i. putem limita capetele sumei la intervalul $0 \dots N - 1$.

Transformata Fourier Discretă (DFT)

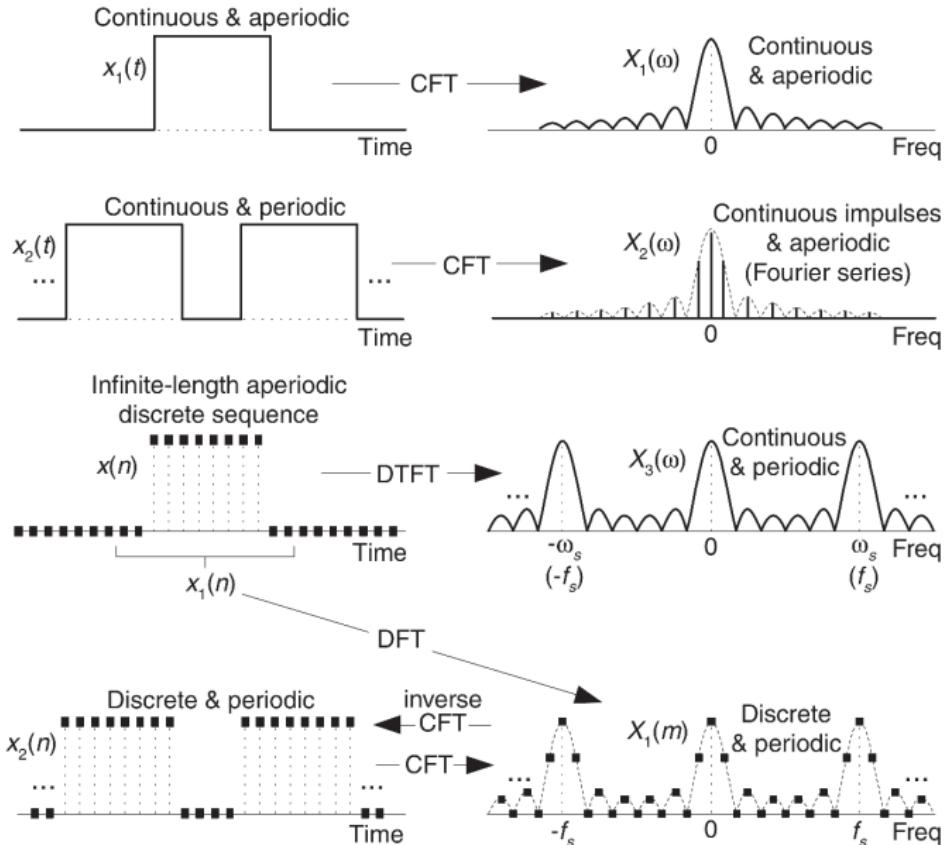
Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned} \tag{14}$$

- ▶ $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \dots$)
- ▶ m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \dots, N - 1$)
- ▶ $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \dots$)
- ▶ n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ($n = 0, 1, \dots, N - 1$)
- ▶ N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

CFT, DTFT, DFT



Exemplu DFT $N = 4$

Pentru $N = 4$ eșantioane, vom avea $n, m = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$X(m) = \sum_{n=0}^3 x(n) [\cos(2\pi mn/4) - j \sin(2\pi mn/4)] \quad (15)$$

Pentru $m = 0$:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) \left[\cos(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n} / 4) - j \sin(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n} / 4) \right] \\ &\quad + x(1) [\cos(2\pi 0 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 1/4)] \\ &\quad + x(2) [\cos(2\pi 0 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 2/4)] \\ &\quad + x(3) [\cos(2\pi 0 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 0 \cdot 3/4)] \end{aligned}$$

Exemplu DFT $N = 4$

$$\begin{aligned} X(1) &= x(0) \left[\cos(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n} / 4) - j \sin(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n} / 4) \right] \\ &\quad + x(1) \left[\cos(2\pi 1 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 1/4) \right] \\ &\quad + x(2) \left[\cos(2\pi 1 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 2/4) \right] \\ &\quad + x(3) \left[\cos(2\pi 1 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 1 \cdot 3/4) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(2) &= x(0) \left[\cos(2\pi 2 \cdot 0/4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 0/4) \right] \\ &\quad + x(1) \left[\cos(2\pi 2 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 1/4) \right] \\ &\quad + x(2) \left[\cos(2\pi 2 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 2/4) \right] \\ &\quad + x(3) \left[\cos(2\pi 2 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 2 \cdot 3/4) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(3) &= x(0) \left[\cos(2\pi 3 \cdot 0/4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 0/4) \right] \\ &\quad + x(1) \left[\cos(2\pi 3 \cdot 1/4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 1/4) \right] \\ &\quad + x(2) \left[\cos(2\pi 3 \cdot 2/4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 2/4) \right] \\ &\quad + x(3) \left[\cos(2\pi 3 \cdot 3/4) - j \sin(2\pi 3 \cdot 3/4) \right] \end{aligned}$$

Transformata Fourier inversă

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned}$$

Definiție

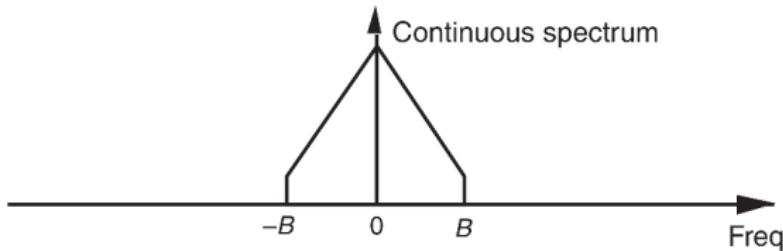
Transformata Fourier inversă a unui semnal discret (IDFT):

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi mn/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) [\cos(2\pi mn/N) + j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned} \tag{16}$$

Recapitulare: Semnale trece-jos (lowpass)

Definiție

Un semnal trece-jos este un semnal limitat în bandă și centrat în jurul frecvenței zero.



Sursă: (Lyons 2004)

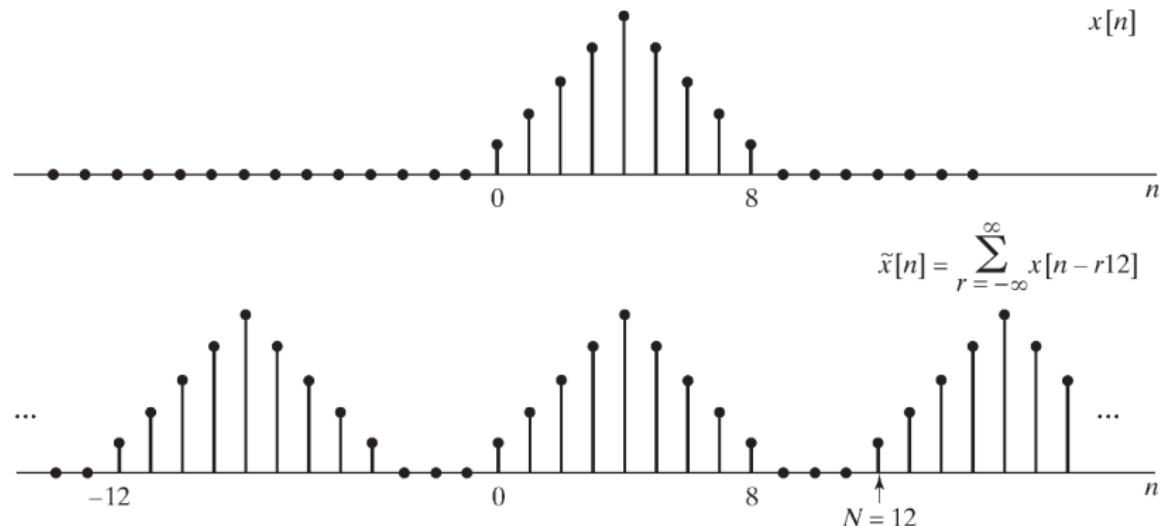
Remarcă

Din considerente didactice, aici am analizat spectrul continuu obținut din Transformata Fourier Continuă. În practică folosim Transformata Fourier Discretă.

Extinderea unui semnal discret

Dacă avem de a face cu un semnal discret aperiodic, îl putem extinde la un semnal periodic pentru a aplica DFT.

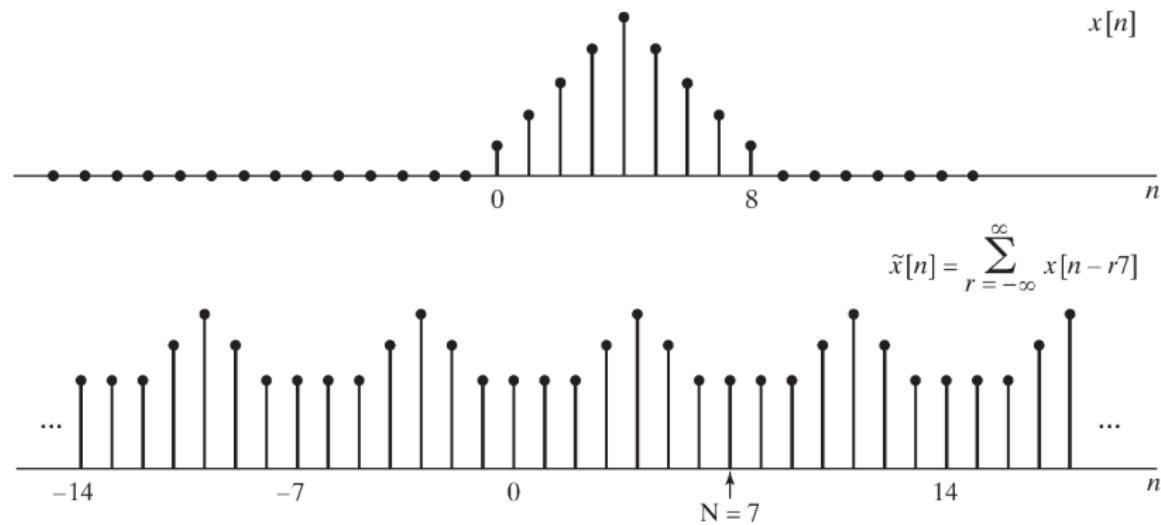
Exemplu eșantionare a transformatei Fourier cu $N = 12$:



Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Extinderea unui semnal discret

Atenție la fenomenul de aliere când extindem (exemplu $N = 7$).



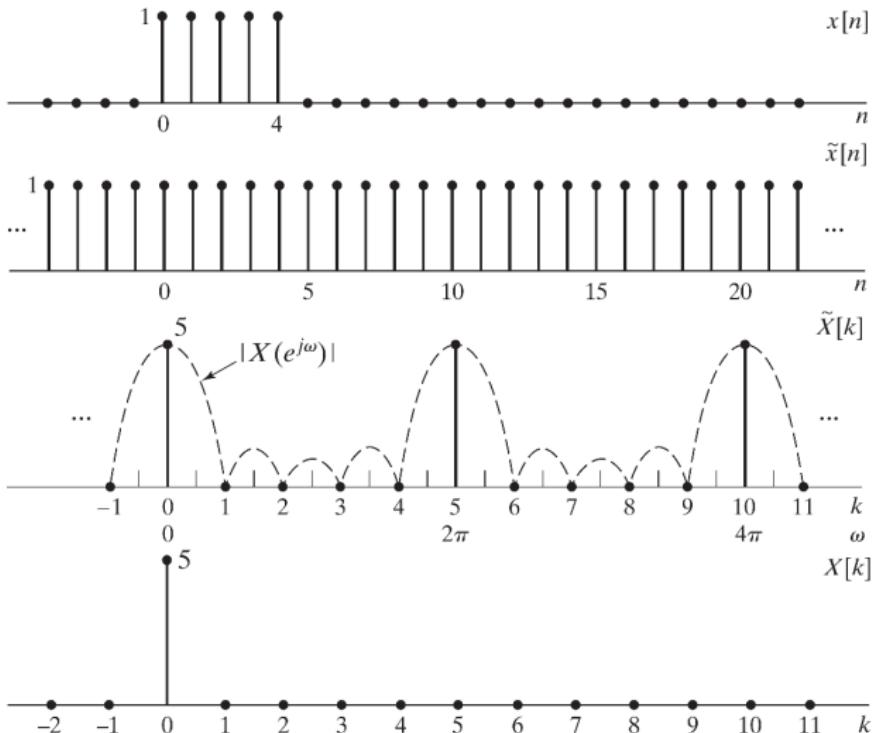
Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Remarcă

Problema alierii este aceeași în frecvență ca și în timp. Metoda de discretizare și eșantionare fiind aceeași. Doar domeniul se schimbă.

Exemplu: treaptă

Atenție la efectele secundare extinderii unui semnal aperiodic.



Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Frecvențe importante

Frecvența fundamentală este

$$f = \frac{f_s}{N} \quad (17)$$

Frecvențele analizate sunt:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} \quad (18)$$

Componenta $m = 0$ este numită componenta curent continuu (*Direct Current (DC)*)

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(0) - j\sin(0)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \quad (19)$$

Magnitudinea și puterea componentelor (*power spectrum (PS)*):

$$X(m) = X_{\text{real}}(m) + jX_{\text{imag}}(m) \quad (20)$$

$$X_{\text{mag}} = |X(m)| \qquad \qquad X_{\text{PS}}(m) = X_{\text{mag}}(m)^2 \quad (21)$$

Exemplu: Frecvențe importante

Pentru un semnal continuu eșantionat cu 500 eșantioane pe secundă asupra căruia se aplică DFT în 16 puncte avem:

$$f = \frac{f_s}{N} = \frac{500}{16} = 31,25\text{Hz}$$

Frecvențele analizate sunt:

$$X(0) = 0 \cdot 31.25 = 0\text{Hz} \quad (\text{prima componentă în frecvență})$$

$$X(1) = 1 \cdot 31.25 = 31,25\text{Hz} \quad (\text{a doua componentă în frecvență})$$

$$X(2) = 2 \cdot 31.25 = 62,5\text{Hz} \quad (\text{a treia componentă în frecvență})$$

$$X(3) = 3 \cdot 31.25 = 93,75\text{Hz} \quad (\text{a patra componentă în frecvență})$$

⋮

$$X(15) = 15 \cdot 31.25 = 468,75\text{Hz} \quad (\text{componenta 16 în frecvență})$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} =$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \dots, 7kHz\} \quad (22)$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \dots, 7kHz\} \quad (22)$$

Transformata Fourier devine:

$$X(m) = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi mn/8) + j \sin(2\pi mn/8)]$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi n/8) + j \sin(2\pi n/8)]$$

⋮

Exemplu: Calcul DFT

Fie cele 8 eșantioane în timp:

$$x[0] = 0,3535,$$

$$x[1] = 0,3535$$

$$x[2] = 0,6464,$$

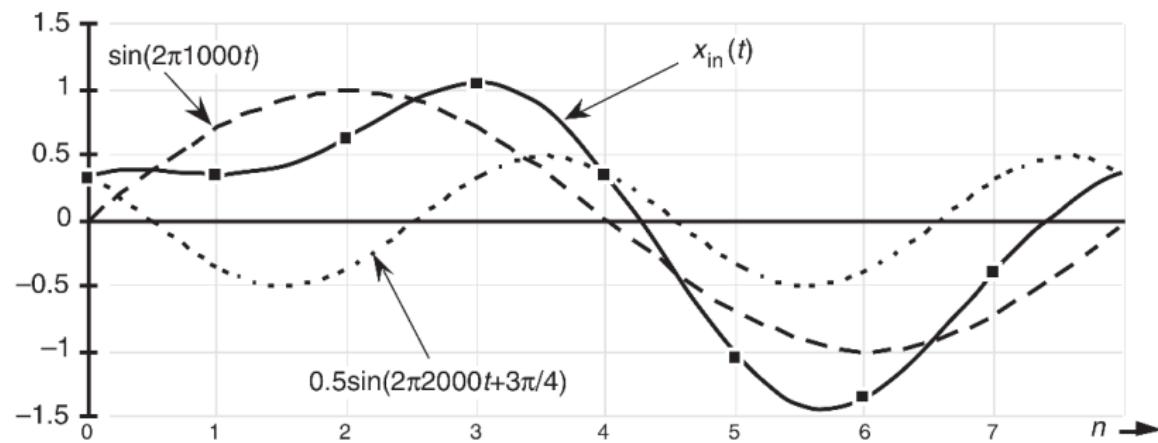
$$x[3] = 1,0607$$

$$x[4] = 0,3535,$$

$$x[5] = -1,0607$$

$$x[6] = -1,3535,$$

$$x[7] = -0,3535$$



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: Calcul DFT

$$\begin{aligned} X(1) &= \sum_{n=0}^7 x(n) [\cos(2\pi n/8) + j \sin(2\pi n/8)] = \\ &= x(0) \cos(0) - jx(0) \sin(0) + \\ &\quad + x(1) \cos(\pi/4) - jx(1) \sin(\pi/4) + \\ &\quad + x(2) \cos(\pi/2) - jx(2) \sin(\pi/2) + \\ &\quad + x(3) \cos(3\pi/4) - jx(3) \sin(3\pi/4) + \\ &\quad + x(4) \cos(\pi) - jx(4) \sin(\pi) + \\ &\quad + x(5) \cos(5\pi/4) - jx(5) \sin(5\pi/4) + \\ &\quad + x(6) \cos(3\pi/2) - jx(6) \sin(3\pi/2) + \\ &\quad + x(7) \cos(7\pi/4) - jx(7) \sin(7\pi/4) = \\ &= \dots = 0, 0 - j4, 0 \end{aligned}$$

Exemplu: Calcul DFT

Aplicăm formula pentru calculul celorlalte componente:

$$X(1) = 0, 0 - j4, 0$$

$$X(2) = 1, 414 + j1, 414$$

$$X(3) = 0, 0 + j0, 0$$

$$X(4) = 0, 0 + j0, 0$$

$$X(5) = 0, 0 + j0, 0$$

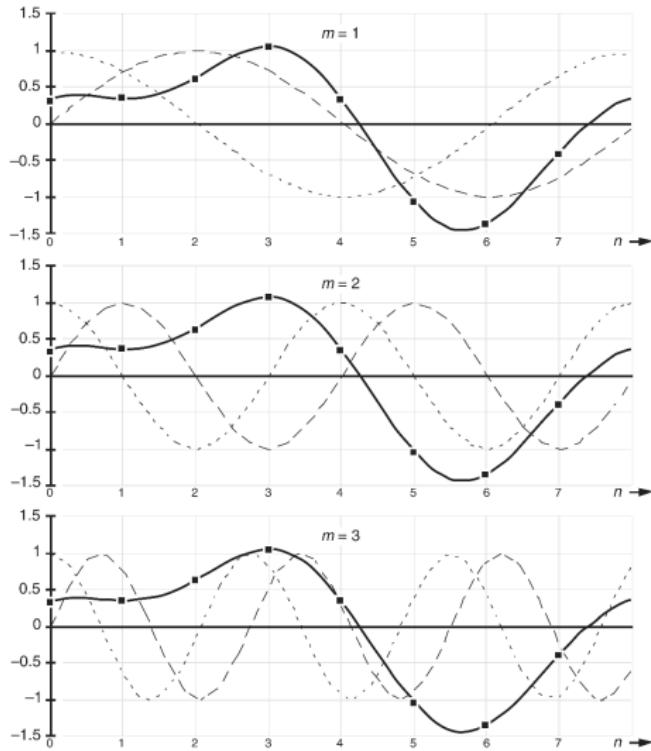
$$X(6) = 1, 414 - j1, 414$$

$$X(7) = 0, 0 + j4, 0$$

Cât este $X(0)$?

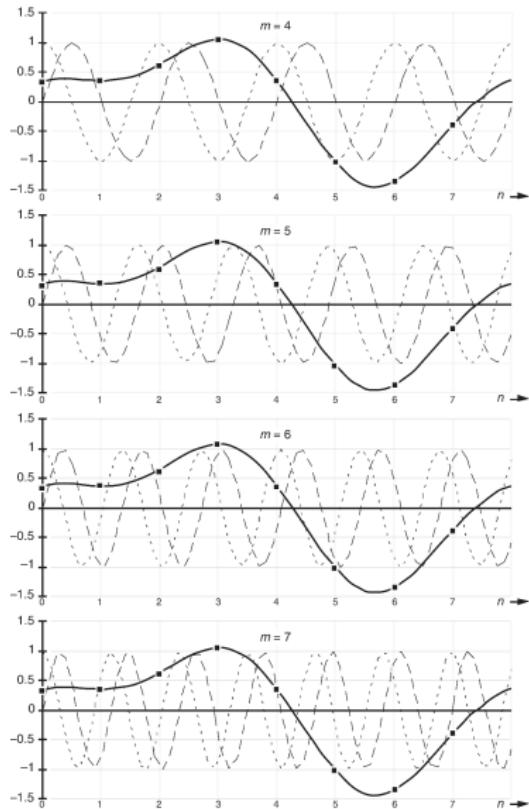
Exemplu: Componentele DFT

Cum arată componentele cos și sin în funcție de m ?



Sursă: (Lyons 2004)

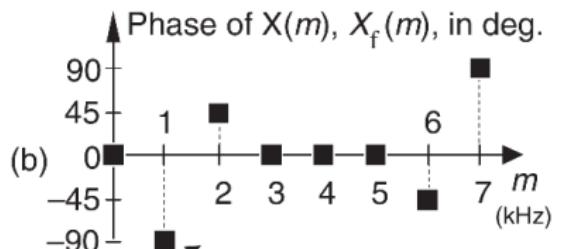
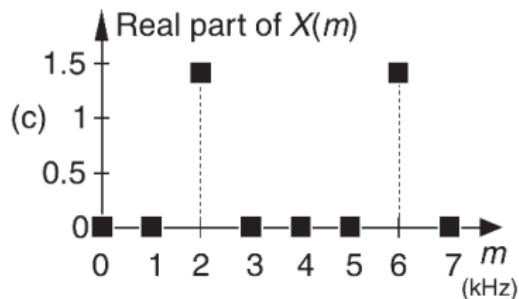
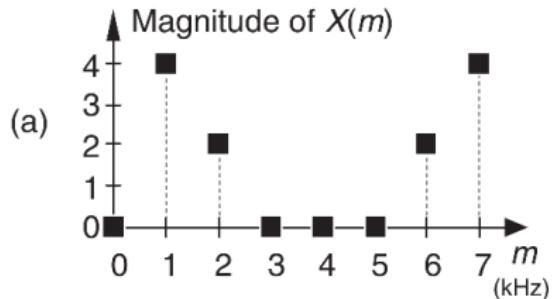
Exemplu: Componentele DFT



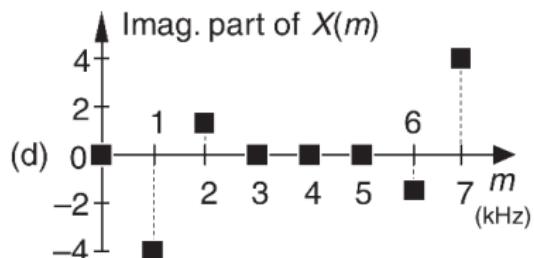
Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: Rezultate DFT

Simetrie și anti-simetrie în componentele spectrale:



Indicates that the 1 kHz input tone was a cosine wave having an initial phase of -90° .



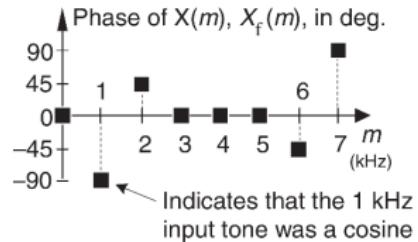
Faza

Recapitulare:

$$z = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = r e^{j\varphi}$$

$$\bar{z} = r [\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)] = r e^{-j\varphi}$$

unde r este magnitudinea iar φ este faza.



Faza

Recapitulare:

$$z = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = re^{j\varphi}$$

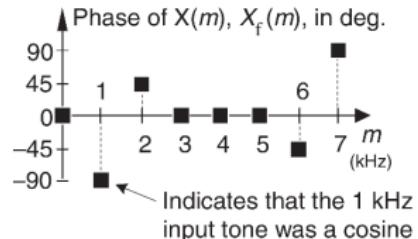
$$\bar{z} = r [\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)] = re^{-j\varphi}$$

unde r este magnitudinea iar φ este faza.

Atunci pentru DFT

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N}$$

avem faza $\varphi = 2\pi nm/N$.



Faza

Recapitulare:

$$z = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = re^{j\varphi}$$

$$\bar{z} = r [\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)] = re^{-j\varphi}$$

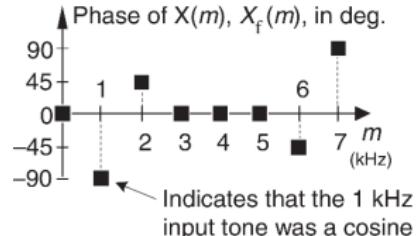
unde r este magnitudinea iar φ este faza.

Atunci pentru DFT

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N}$$

avem faza $\varphi = 2\pi nm/N$.

Cum ajungem de la fază la figura în grade de mai sus?

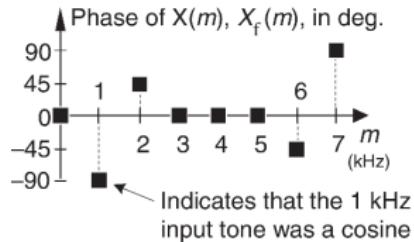


Faza

Recapitulare:

$$z = r [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] = re^{j\varphi}$$

$$\bar{z} = r [\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)] = re^{-j\varphi}$$



unde r este magnitudinea iar φ este faza.

Atunci pentru DFT

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N}$$

avem faza $\varphi = 2\pi nm/N$.

Cum ajungem de la fază la figura în grade de mai sus?

$$2\pi rad = 360; \quad 2\pi mn/N = x; \quad x = 360mn/N$$

Simetrie

Pentru semnale $x(n)$ reale, DFT este simetrică în jurul $N/2$.

$$X(m) = |X(m)|e^{j\varphi} = |X(N-m)|e^{-j\varphi} = \overline{X}(N-m) \quad (23)$$

Putem arăta ușor această proprietate folosind forma exponentială:

$$\begin{aligned} X(N-m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n(N-m)/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \underbrace{e^{-j2\pi nN/N}}_{\cos(2\pi n) - j \sin(2\pi n)} e^{j2\pi nm/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j2\pi nm/N} = \overline{X}(m) \end{aligned}$$

Liniaritate

Fie $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, atunci DFT este suma DFT-urilor pe componente:

$$X(m) = X_1(m) + X_2(m) \quad (24)$$

Putem demonstra din nou ușor folosind forma exponentiațială:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{[x_1(n) + x_2(n)]}_{x(n)} e^{-j2\pi nm/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi nm/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j2\pi nm/N} \\ &= X_1(m) + X_2(m) \end{aligned}$$

Magnitudine

De ce nu corespunde amplitudinea în timp cu cea în frecvență?

Magnitudine

De ce nu corespunde amplitudinea în timp cu cea în frecvență?

Dacă avem o sinusoidă cu

- ▶ frecvența $f < f_s/2$
 - ▶ amplitudinea A_0
 - ▶ cu număr întreg de perioade de-alungul celor N eșantioane
- atunci amplitudinea în frecvență este:

$$M_r = A_0 N / 2 \quad (25)$$

dacă semnalul este complex:

$$M_c = A_0 N \quad (26)$$

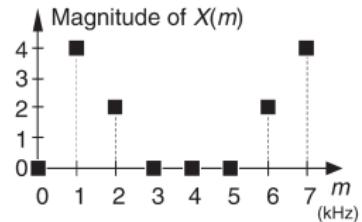
Din această cauză întâlnim în practică DFT scalat cu $\frac{1}{N}$ sau $\frac{1}{\sqrt{N}}$:

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N} \quad (27)$$

Explicația când ajungem la ferestre și convoluție: $x[n] = x(nt_s)w[n]$

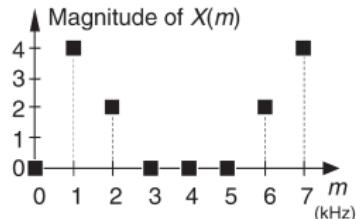
Axa frecvenței

Care este frecvența cu cea mai mare magnitudine $|X(m)|$ în Hz din figură? (în figură pe axa frecvenței avem valorile lui m)



Axa frecvenței

Care este frecvența cu cea mai mare magnitudine $|X(m)|$ în Hz din figură? (în figură pe axa frecvenței avem valorile lui m)



Răspuns: Depinde de rata de eşantionare f_s . În figură ne interesează $m = 1$ pentru care aplicăm (22) cu $f_s = 8000\text{Hz}$:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = f_a(1) = \frac{1 \cdot 8000}{8} = 1000\text{Hz} \quad (28)$$

Pentru frecvența de eşantionare $f_s = 75\text{Hz}$ obținem altă frecvență:

$$f_a(1) = \frac{1 \cdot 75}{8} = 9,375\text{Hz} \quad (29)$$

pentru că rezoluția (spațiul între eşantioanele frecvenței) este f_s/N .

Shifting

Teorema

O deplasare k în timp a semnalului periodic $x(n)$ rezultă într-o deplasare constantă a fazei în domeniul frecvenței cu $2\pi km/N$ radiani (sau $360km/N$ grade).

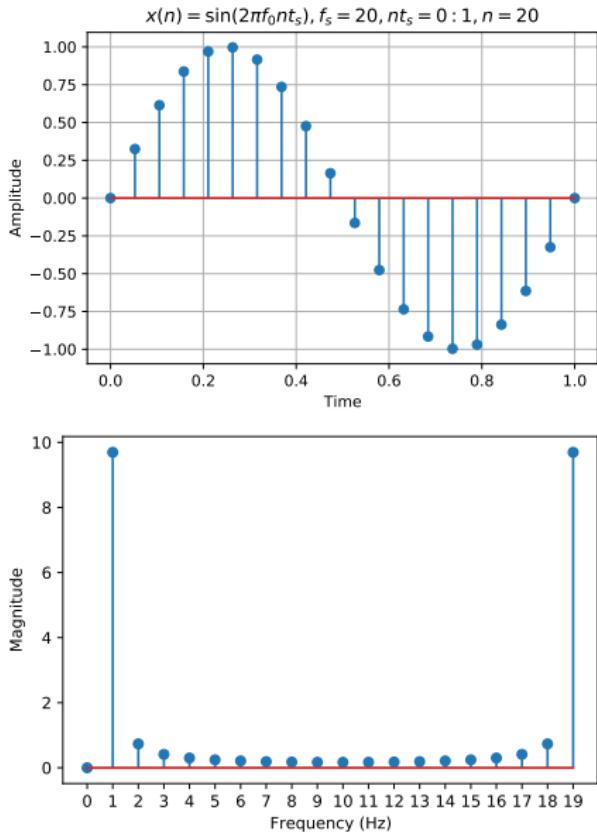
$$X_{shifted}(m) = e^{j2\pi km/N} X(m) \quad (30)$$

În exemplul nostru, o întârziere cu $k = 3$ rezultă într-o multiplicare cu $e^{j2\pi 3 \cdot m/8}$ iar pentru $m = 1$ avem:

$$X_{shifted}(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} X(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} 4e^{-j\pi/2} = 4e^{j\pi/4}$$

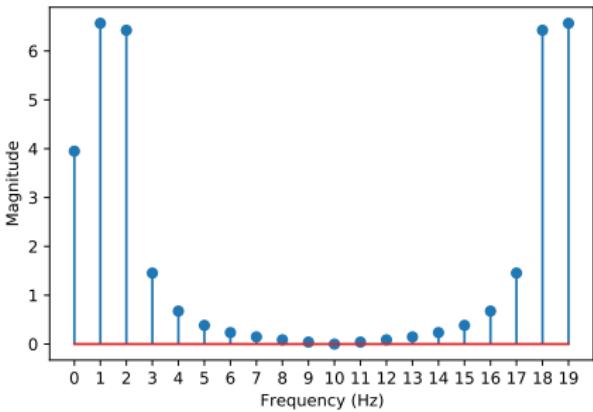
DFT în practică

Transformata DFT
pentru sinusoida noastră
din primul curs. Ce se
întâmplă în punctul 19?
Dar în punctele 2 și 3?



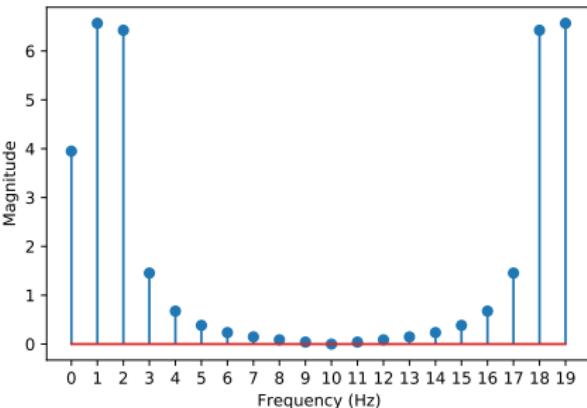
DFT în practică

Ce semnal reprezintă această spectrogramă?

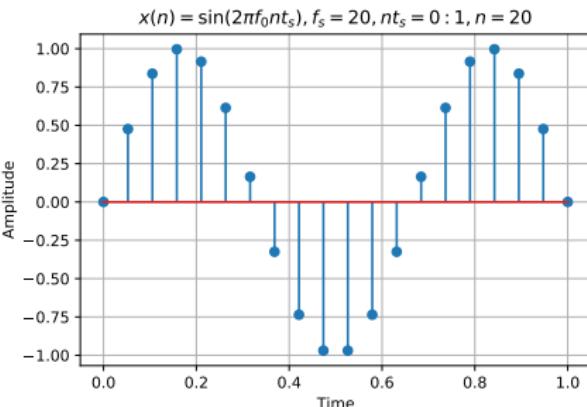


DFT în practică

Ce semnal reprezintă această spectrogramă?



Tot o sinusoidă!
Frecvența diferă:
 $f_0 = 1,5\text{Hz}$.



Leakage

În practică DFT produce rezultate în domeniul frecvenței ce pot induce în eroare datorită frecvențelor de analiză:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N}, \quad m = \{0, 1, 2, \dots, N - 1\} \quad (31)$$

DFT reflectă realitatea doar când energia semnalului dat coincide cu frecvențele de analiză din (31).

Remarcă

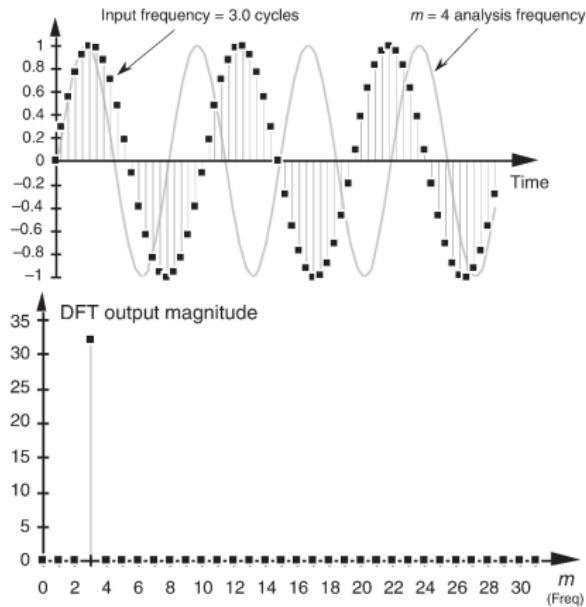
Dacă semnalul dat conține o componentă în frecvență intermedie sau unele componente din外 de analiză (31), atunci aceasta va apărea parțial în toate cele N componente: leakage.

Definiție

Componentele în frecvență se numesc output bins sau simplu bins.

Exemplu fără leak

Fie un semnal sinusoidal eșantionat în $N = 64$ de puncte cu 3 perioade complete în orizontul de timp analizat.

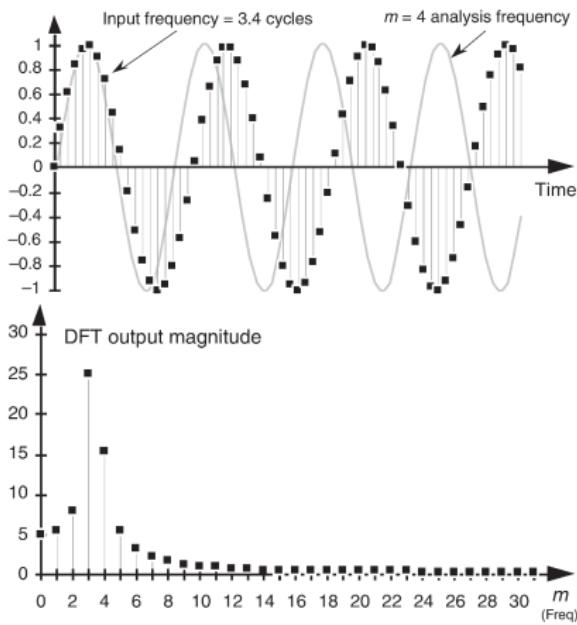


Sursă: (Lyons 2004)

Observăm că toate frecvențele în afară de bin-ul $m = 3$ sunt nule.

Exemplu leak

Fie un semnal sinusoidal eșantionat în $N = 64$ de puncte cu 3,4 perioade complete în orizontul de timp analizat.



Sursă: (Lyons 2004)

Observăm că apare fenomenul de leak în celelalte bin-uri.

Apariția unui leak

Remarcă

Fenomenul de leak apare când semnalul nu are un număr întreg de perioade în orizontul de timp eșantionat.

Teoremă

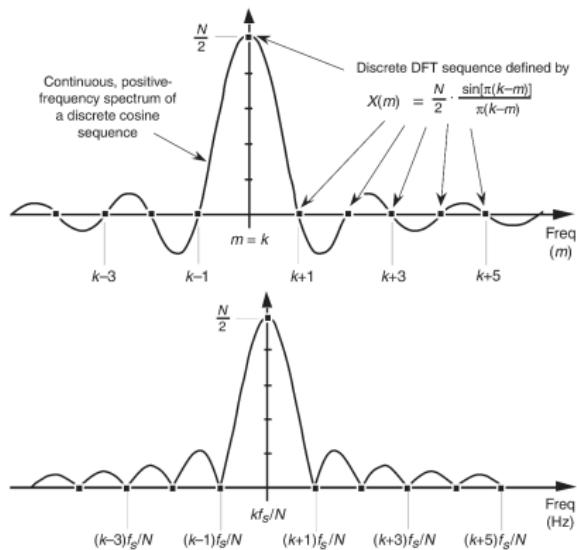
Pentru un semnal sinusoidal având $k \in \mathbb{R}$ perioade în orizontul de timp de N eșantioane, putem aproxima amplitudinea unui bin DFT în funcție de m cu ajutorul funcției sinc:

$$X(m) = \frac{A_0 N}{2} \frac{\sin[\pi(k - m)]}{\pi(k - m)} \quad (32)$$

Demonstrație: DFT implică de fapt aplicarea unei ferestre rectangulare asupra semnalului în timp. Vezi prima remarcă și demonstrația primei propoziții de la ferestre.

Functia sinc. Lobi.

N eșantioane DFT ce conțin k perioade a unei sinusoide: sus avem amplitudinea în funcție de bin-ul m , jos magnitudinea în frecvență.

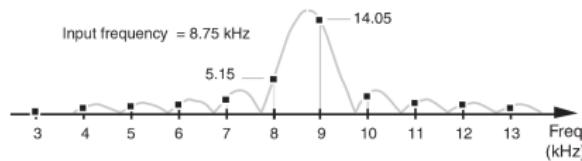
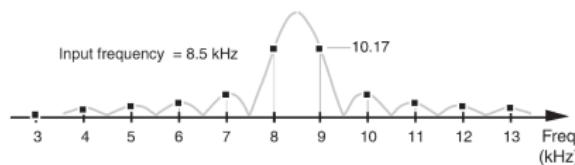
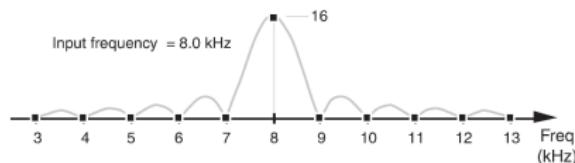


Sursă: (Lyons 2004)

Figură compusă din lobul principal și loburi secundare mai mici.

Eșantionarea sinc

Fie o sinusoidă de 8kHz eșantionată la 32kHz . În figură avem DFT-ul în $N = 32$ puncte (bin-uri distanțate la $f_s/N = 1\text{kHz}$).

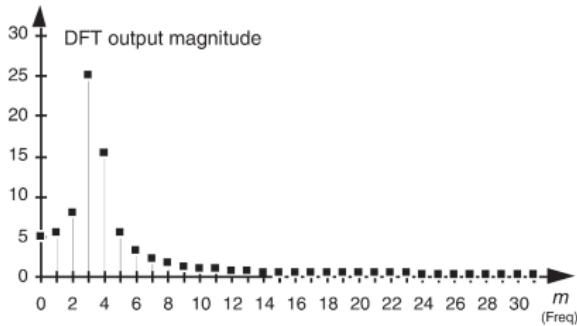


Sursă: (Lyons 2004)

Leak când frecvența sinusoidei nu este centrată în lobul principal.

Asimetrie

De ce este DFT asimetrică în exemplul de mai devreme? (ex. $m = 4$)

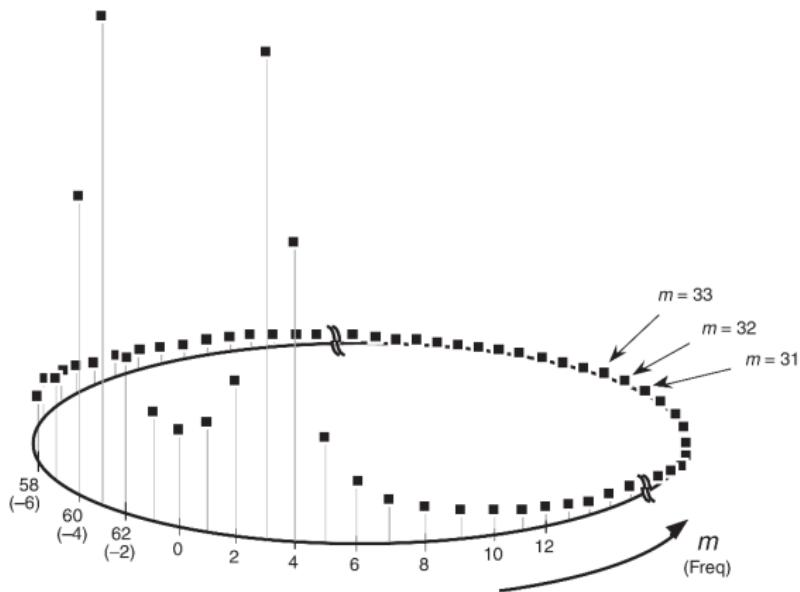


Sursă: (Lyons 2004)

Am arătat că DFT este simetrică și se repetă o dată la N puncte.
În cazul semnalelor reale chiar $N/2$!

Înfășurare

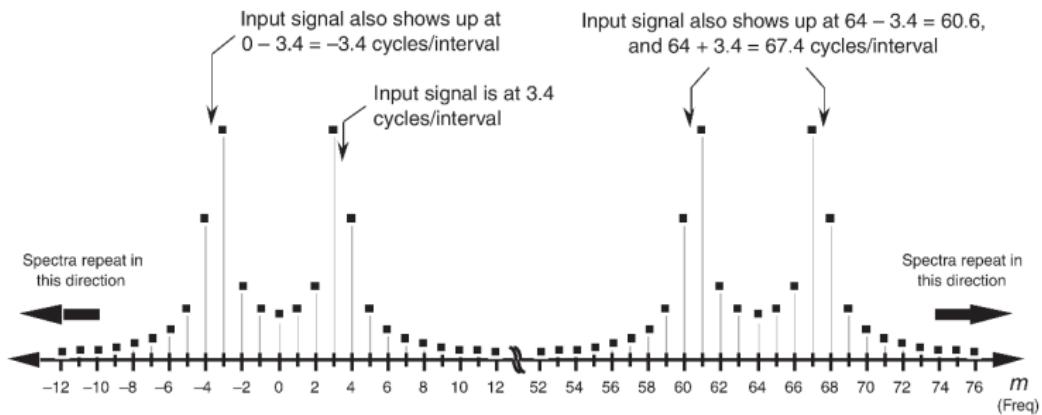
DFT se repetă din N în N puncte creând un cerc de-alungul căruia eșantioanele DFT se înfășoară.



Sursă: (Lyons 2004)

Înfășurare linarizată

Expus liniar, discul pentru un semnal cu $k = 3, 4$ perioade în fereastra de $N = 64$ eșantioane devine:

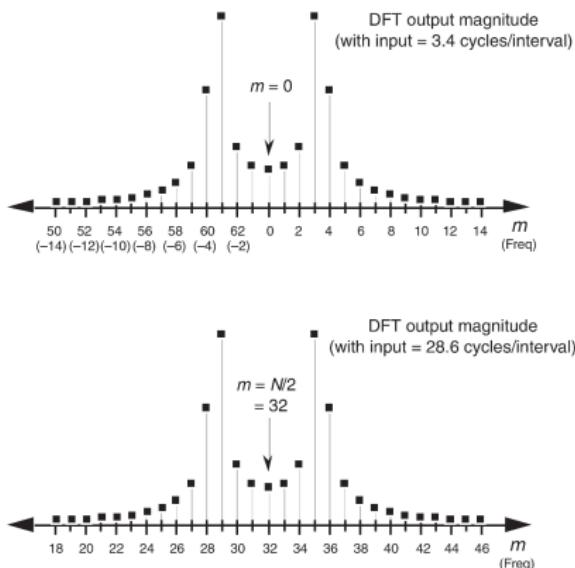


Sursă: (Lyons 2004)

Ce se întâmplă cu semnalele reale?

Înfășurare semnale reale

Semnalele reale se repetă la $N/2$ a.î. $|X(m)| = |X(N - m)|$ cf. (23)
Magnitudinea DFT pentru $k = 32 - 3,4$ și $k = 3,4$ este similară.

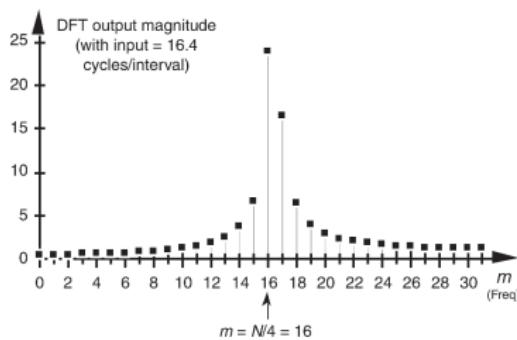
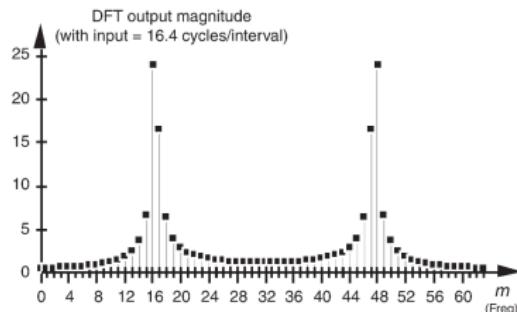


Sursă: (Lyons 2004)

Pentru semnale reale avem înfășurare și în jurul $m = N/2$.

Înfășurare semnale reale

Alt exemplu pentru $k = 16, 4$ și $N = 64$.



Sursă: (Lyons 2004)

Leak minim la $N/4$ ce crește când ne îndepărțăm de lobul principal.

Ferestre

Definiție

Ferestrele sunt folosite pentru a atenua amplitudinea semnalului la începutul și la capătul orizontului de eşantionare astfel încât să reducă fenomenul de leak.

Remarcă

De fiecare dată când aplicăm DFT folosim o fereastră dreptunghiulară în care înmulțim fiecare eşantion cu o secvență, sau fereastră, de eşantioane de valoare unu.



În afara ferestrei secvența este nulă.

Propoziție

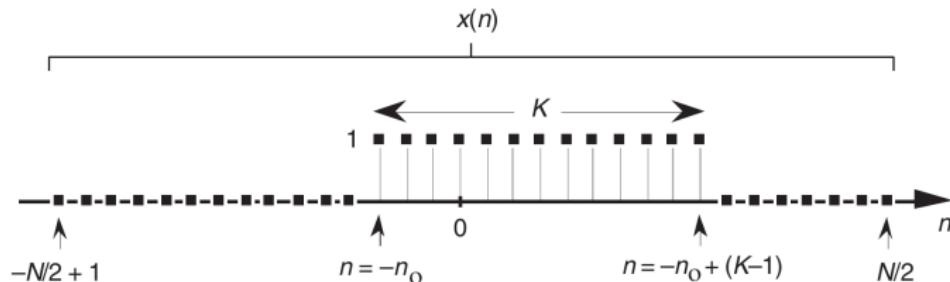
DFT a ferestrei dreptunghiulare este funcția sinc.

Demonstrație DFT treaptă-sinc

Propoziție

DFT a ferestrei dreptunghiulare este funcția sinc.

Demonstrație:



$$X(m) = \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} x(n) e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=-n_0}^{-n_0+(K-1)} x(n) e^{-j2\pi nm/N}$$

Demonstrație DFT treaptă-sinc

Notăm $q = 2\pi m/N$, atunci:

$$\begin{aligned} X(q) &= \sum_{n=-n_0}^{-n_0+(K-1)} x(n)e^{-jqn} = \\ &= e^{-jq(-n_0)} + e^{-jq(-n_0+1)} + e^{-jq(-n_0+2)} + \dots + e^{-jq(-n_0+(K+1))} = \\ &= e^{-jq(-n_0)}e^{-j0q} + e^{-jq(-n_0)}e^{-j1q} + e^{-jq(-n_0)}e^{-j2q} + \dots + \\ &\quad + e^{-jq(-n_0)}e^{-j(K-1)q} = e^{jqn_0} \left[e^{-j0q} + \dots + e^{-j(K-1)q} \right] = \\ &= e^{jqn_0} \sum_{p=0}^{K-1} e^{-jpq} = e^{jqn_0} \frac{1 - e^{-jqK}}{1 - e^{-jq}} \\ &= e^{jqn_0} \frac{e^{-jqK/2}(e^{jqK/2} - e^{-jqK/2})}{e^{-jq/2}(e^{jq/2} - e^{-jq/2})} = \\ &= e^{jqn_0} e^{-jq(K-1)/2} \frac{e^{jqK/2} - e^{-jqK/2}}{e^{jq/2} - e^{-jq/2}} \end{aligned}$$

Demonstrație DFT treaptă-sinc

Folosind $\sin(\phi) = (e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j$, avem:

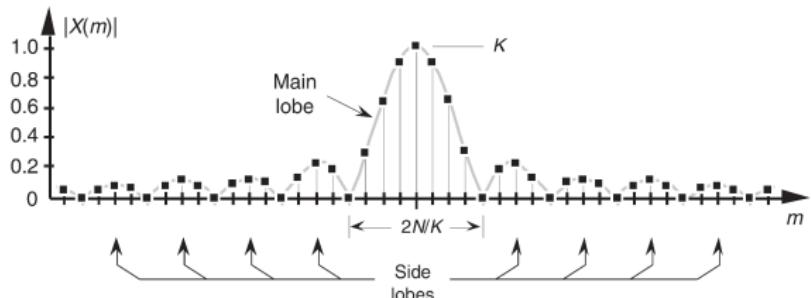
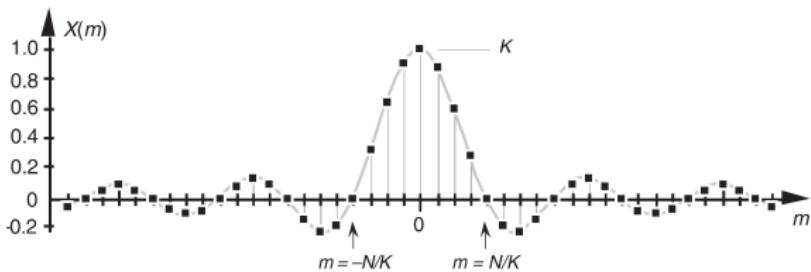
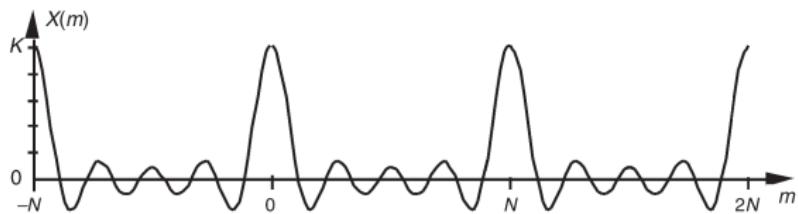
$$\begin{aligned} X(q) &= e^{jq(n_0-(K-1)/2)} \frac{e^{jqK/2} - e^{-jqK/2}}{e^{jq/2} - e^{-jq/2}} \\ &= e^{jq(n_0-(K-1))/2} \frac{2j \sin(qK/2)}{2j \sin(q/2)} \end{aligned}$$

Renunțând la notația $q = 2\pi m/N$, obținem:

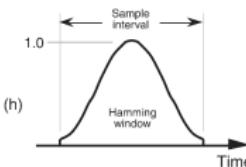
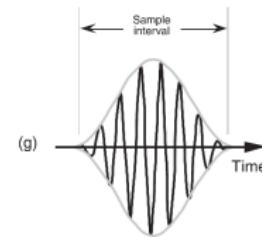
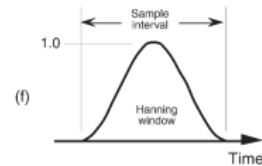
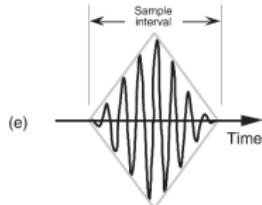
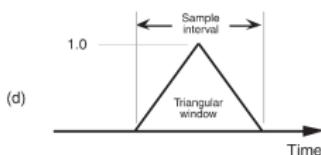
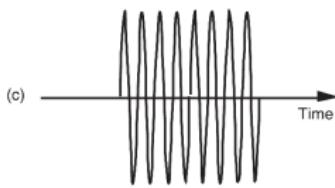
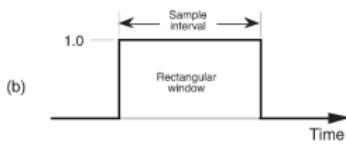
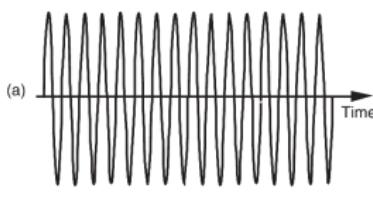
$$\begin{aligned} X(m) &= e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)} \frac{\sin(2\pi mK/2N)}{\sin(2\pi m/2N)} \\ &= e^{j(2\pi m/N)(n_0-(K-1)/2)} \frac{\sin(\pi mK/N)}{\sin(\pi m/N)} \end{aligned}$$

Aceasta funcție se numește aliased sinc sau kernel Dirichlet ■

Aliased sinc (Lyons 2004)



Exemple de ferestre (Lyons 2004)



Aplicarea unei ferestre

Înainte de a aplica DFT, eşantioanele semnalului $x(n)$ sunt înmulţit cu coeficienţii corespunzători din fereastra $w(n)$:

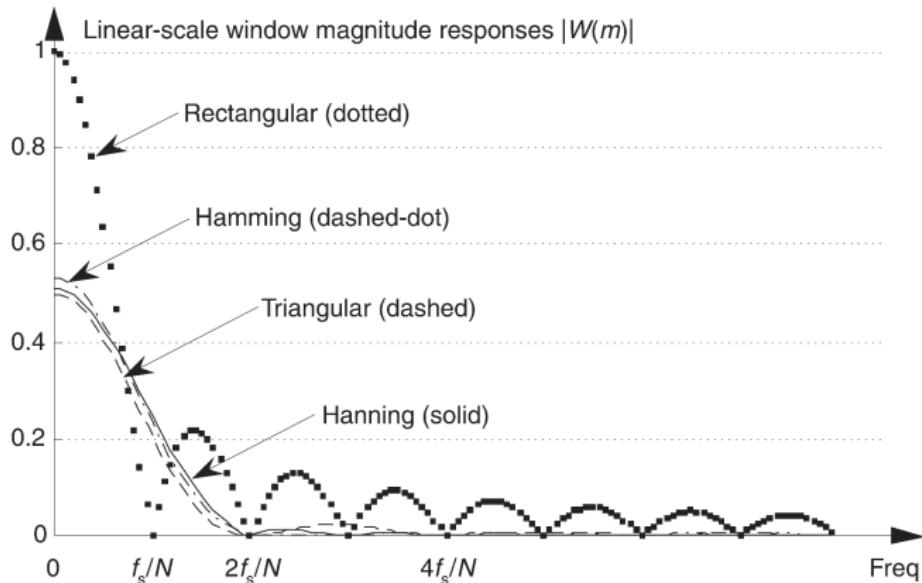
$$X_w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad (33)$$

unde $w(n)$ este o fereastră:

Dreptunghilară	$w(n) = 1$
Trianghiulară	$w(n) = \begin{cases} \frac{n}{N/2}, & n = 2k \\ 2 - \frac{n}{N/2}, & n = 2k + 1 \end{cases}$
Hanning	$w(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$

Magnitudinea răspunsului în frecvență

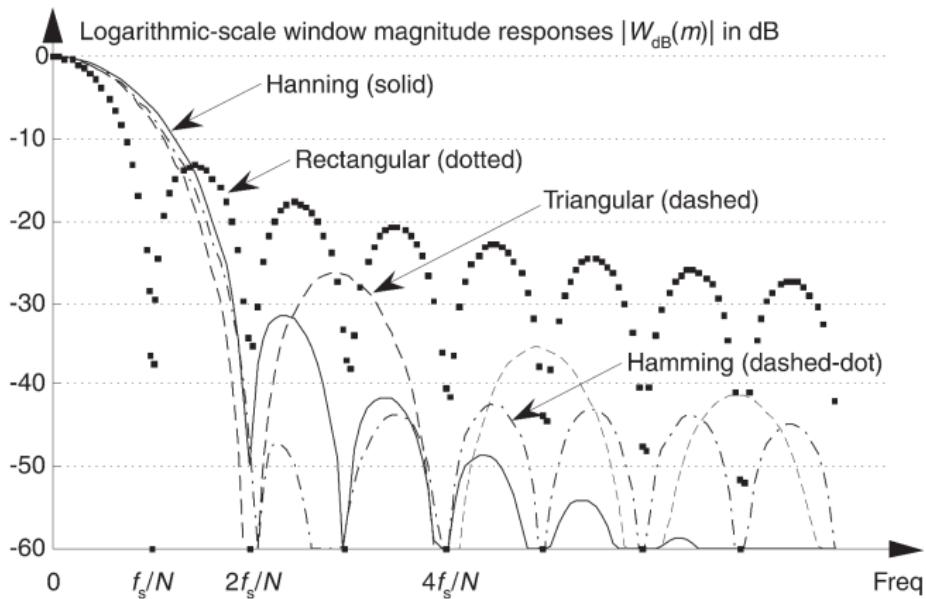
Ferestrele alternative reduc lobii secundari (vs. dreptunghiular).



Observăm că lobul principal scade în magnitudine: **processing gain** sau **loss** al ferestrei.

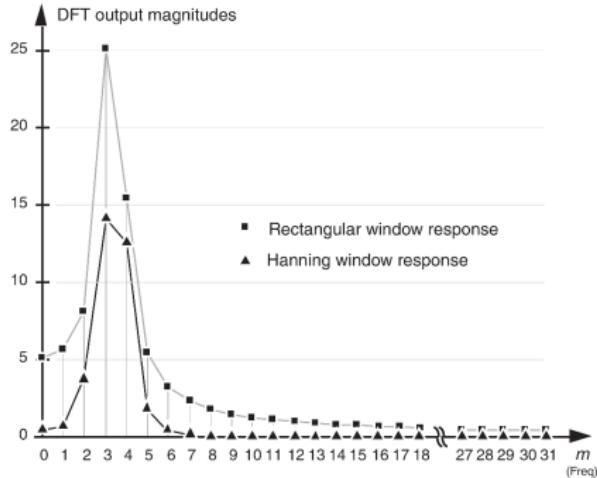
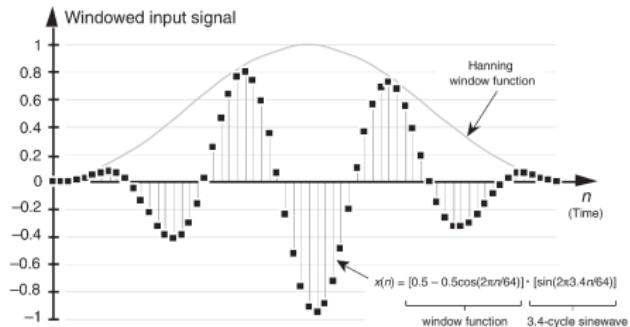
Magnitudinea(dB) răspunsului în frecvență

$$|W_{dB}(m)| = 20 \log_{10} \left(\frac{|W(m)|}{|W(0)|} \right) \quad (34)$$

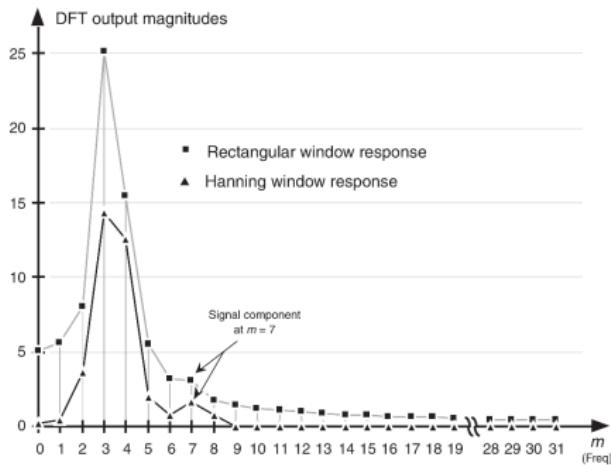
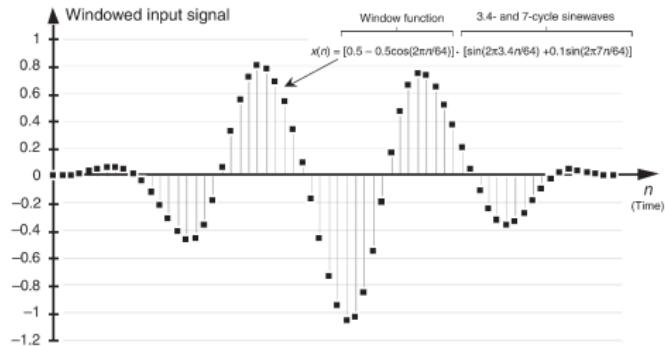


Obs: Scad lobii secundari, dar scade și rezoluția frecvenței.

Exemplu: Hanning pentru $k = 3, 4$



Exemplu: Hanning pentru detecție semnal de nivel scăzut



Alegerea ferestrei

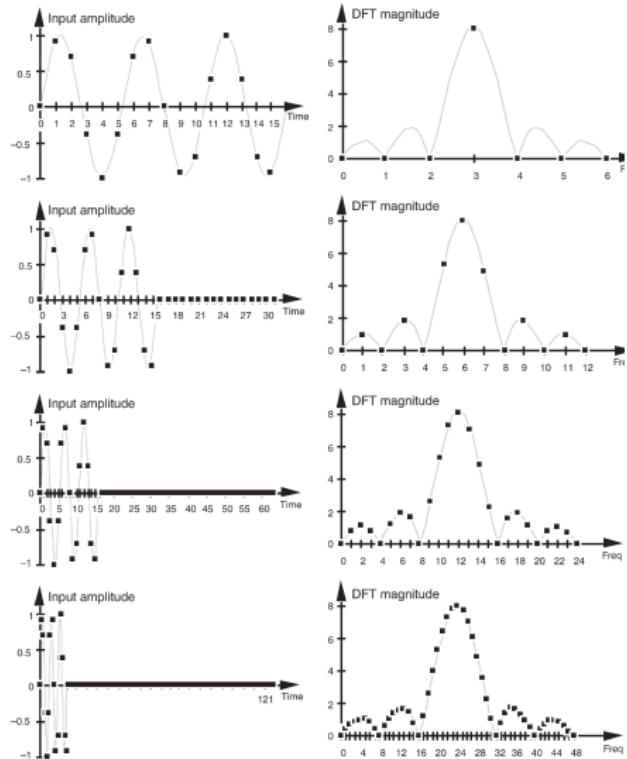
Alegerea ferestrei potrivite este un compromis între:

- ▶ lățirea lobului principal
- ▶ nivelele primelor loburi secundare (ex. Hanning vs. Hamming)
- ▶ viteza de descreștere a loburilor secundare

Dimensiunea și forma ferestrei afectează direct rezoluția și sensibilitatea semnalului.

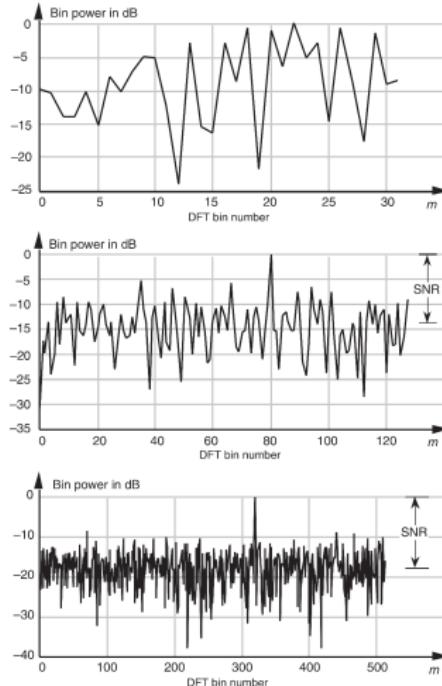
Rezoluție. Zero padding.

Creștem artificial rezoluția DFT prin adăugarea de eșantioane nule.



Gain, SNR

Creștem puterea semnalului (sau gain) prin creșterea lui N .



$$\text{SNR}_N = \text{SNR}_{N'} + 10 \log_{10} \left(\frac{N}{N'} \right) \quad (36)$$