

# Calcul numeric

## Procesare de semnal de grafuri

Paul Irofti  
Andrei Pătrașcu  
Cristian Rusu

Departmentul de Informatică  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Universitatea din București  
Email: `prenume.nume@fmi.unibuc.ro`



- ▶ Ce am făcut data trecută: descompunerea valorilor proprii (în special cazul simetric)
- ▶ Motivație pentru procesarea semnalelor pe grafuri
- ▶ Definiții
- ▶ Algoritmi
- ▶ Exemple
- ▶ Aplicații



# Descompunerea valorilor proprii (cazul general)

Pentru  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Dacă avem  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$  pentru  $i = 1, \dots, n$  atunci avem defapt

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

adică

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{D} \text{ sau } \mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}. \quad (2)$$



# Descompunerea valorilor proprii (cazul simetric)

Pentru  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  și  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .

Dacă avem  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$  pentru  $i = 1, \dots, n$  atunci avem defapt

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

adică

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{D} \text{ sau } \mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T. \quad (4)$$

(adică,  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ )



# Motivația: procesarea semnalelor pe grafuri

Foarte multe situații se modelează matematic sub formă de grafuri

- ▶ page rank
- ▶ interacțiunile pe rețelele sociale
- ▶ rețele de drumuri
- ▶ rețele electrice
- ▶ sisteme complexe în fizică/chimie
- ▶ structuri moleculare
- ▶ procesare de imagini
- ▶ rețele neuronale convoluționale (pe grafuri)



# Definiții: grafuri

ce este un graf?

- ▶ un set de vârfuri  $\mathcal{V} \in \{1, \dots, n\}$  pentru un graf cu  $N$  vârfuri
- ▶ un set de muchii între vârfurile grafului  $\mathcal{M} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
- ▶ avem graful  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{M})$

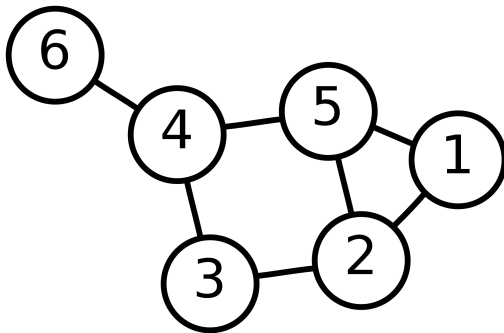


Figura: Graf neorientat, neponderat (sursa: wikipedia)



# Definiții: grafuri

ce este un graf?

- ▶ un set de vârfuri  $\mathcal{V} \in \{1, \dots, n\}$  pentru un graf cu  $N$  vârfuri
- ▶ un set de muchii între vârfurile grafului  $\mathcal{M} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$
- ▶ avem graful  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{M})$

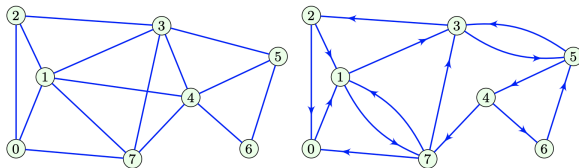


Figura: Graf neorientat vs. orientat (sursa: Springer-Nature)



# Definiții: grafuri

ce este un graf?

- ▶ un set de vârfuri  $\mathcal{V} \in \{1, \dots, n\}$  pentru un graf cu  $N$  vârfuri
- ▶ un set de muchii între vârfurile grafului  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$   
 $m : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
- ▶ avem graful  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{M})$

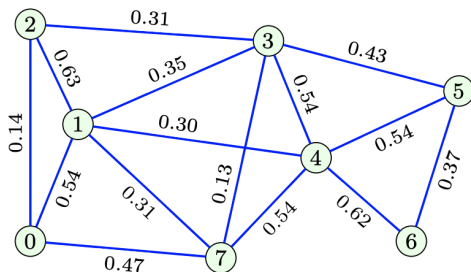


Figura: Graf ponderat (sursa: Springer-Nature)





# Definiții: grafuri

ce este un graf?

- ▶ până acum ați văzut multe grafuri în care nodurile reprezintă o conexiune abstractă
- ▶ până acum muchiile și valorile lor erau importante (de exemplu: algoritmi drum de cost minim etc.)
- ▶ în acest curs, în fiecare nod avem o valoare (nu doar index-ul nodului):
  - ▶ temperatura dintr-un oraș
  - ▶ nivelul apei dintr-o rețea de apă
  - ▶ numărul de persoane dintr-o comunitate
  - ▶ traficul cumulat într-un nod
  - ▶ etc.



# Definiții: grafuri

până acum aveți situația aceasta:

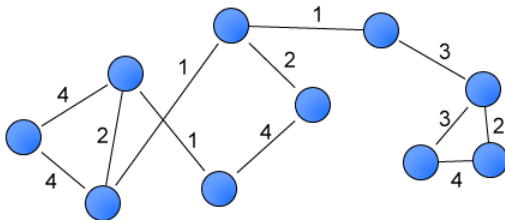


Figura: Graf neorientat, ponderat (sursa: wikipedia)



# Definiții: grafuri

astăzi avem un semnal pe graf (în nodurile lui) astfel:

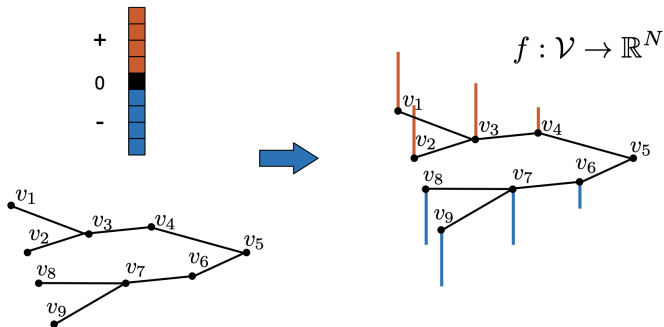


Figura: Graf neorientat, ponderat, dar cu semnal (sursa: MIT)



# Definiții: exemplu

o rețea de senzori

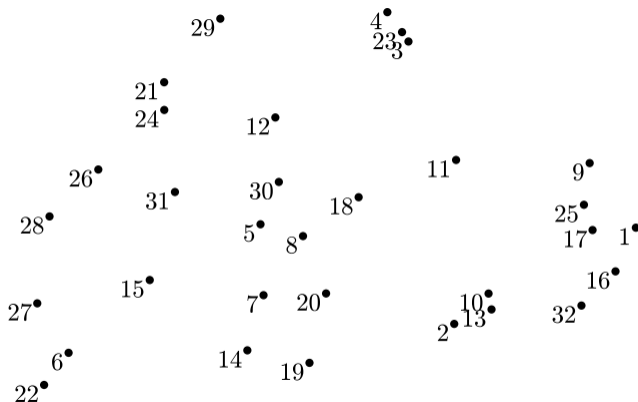


Figura: Senzori amplasați în spațiu (sursa: Springer-Nature)



# Definiții: exemplu

o rețea de senzori și vecinii unui senzor

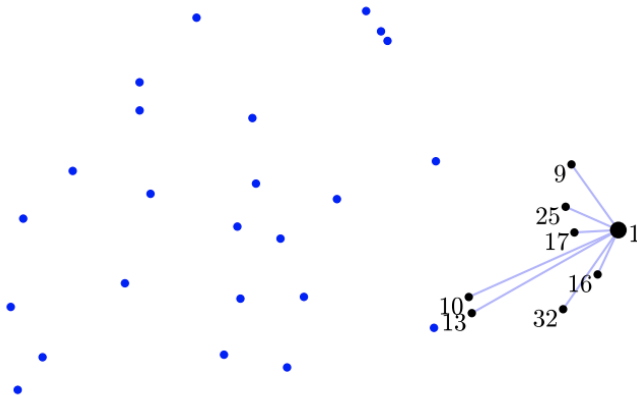
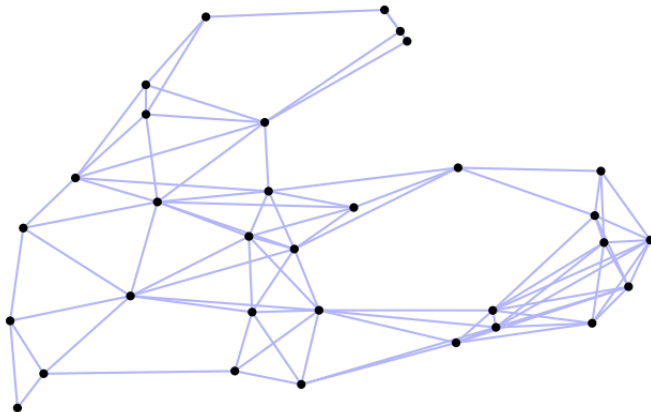


Figura: Comunicarea între senzori (sursa: Springer-Nature)



# Definiții: exemplu

o rețea de senzori și comunicarea dintre ei



**Figura:** Structura de graf a senzorilor (sursa: Springer-Nature)



# Definiții: exemplu

o rețea de senzori

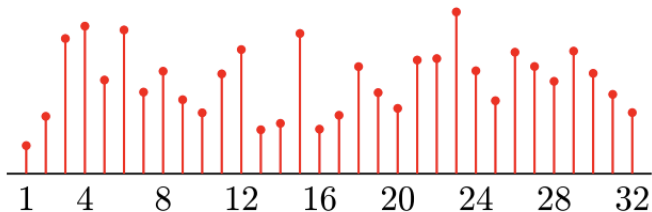


Figura: Măsurători de la senzori (sursa: Springer-Nature)



# Definiții: exemplu

o rețea de senzori: viziunea de ansamblu (graf + măsurători)

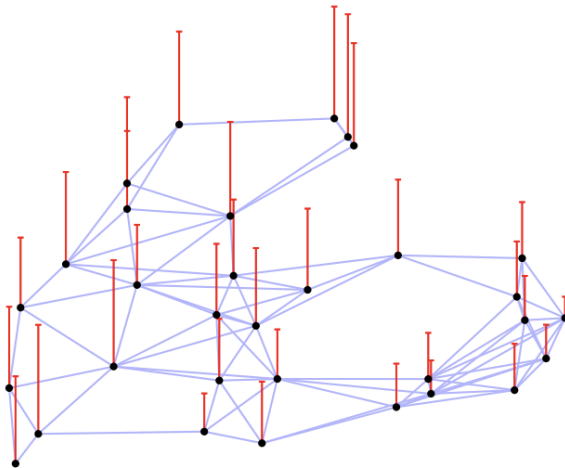


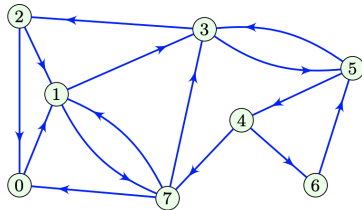
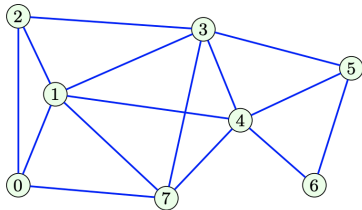
Figura: Măsurători de la senzori (sursa: Springer-Nature)





# Definiții: grafuri

care este legătura cu matricele? matricele de adiacență **A**!



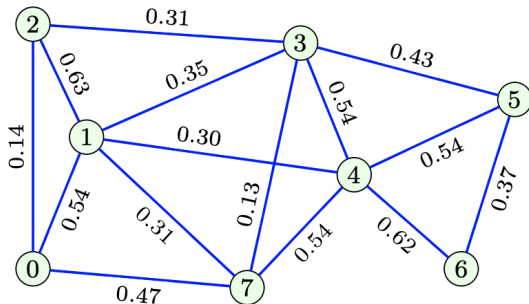
$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Definiții: grafuri

care este legătura cu matricele? matricele de adiacență **A**!

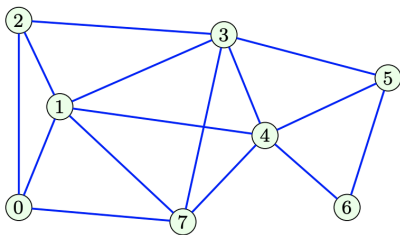


$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0.54 & 0.14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.47 \\ 0.54 & 0 & 0.63 & 0.35 & 0.30 & 0 & 0 & 0.31 \\ 0.14 & 0.63 & 0 & 0.31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0.31 & 0 & 0.54 & 0.43 & 0 & 0.13 \\ 0 & 0.30 & 0 & 0.54 & 0 & 0.54 & 0.62 & 0.54 \\ 0 & 0 & 0 & 0.43 & 0.54 & 0 & 0.37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.62 & 0.37 & 0 & 0 \\ 0.47 & 0.31 & 0 & 0.13 & 0.54 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Definiții: grafuri

de ce este importantă matricea de adiacență?  
ea (și puterile ei) oferă informații despre drumurile din graf



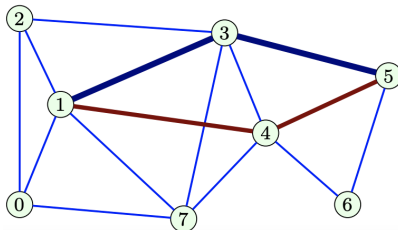
$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$



# Definiții: grafuri

de ce este importantă matricea de adiacență?  
ea (și puterile ei) oferă informații despre drumurile din graf

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 5 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$



# Definiții: grafuri

- ▶ deci,  $\mathbf{B}_K = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^K$  ne dă toate posibilitățile de a ajunge de la un nod la altul în maxim  $K$  pași prin graf
- ▶ această valoare este un indicator pentru cât de strânsă este legătura între oricare două noduri din graf
- ▶ deci, va fi important să adunăm puteri ale matricei de adiacență
- ▶ dar cum apar în această poveste valorile/vectorii proprii ale matricei  $\mathbf{A}$ ?
  - ▶ un răspuns este evident
  - ▶ un răspuns este mai puțin evident



# Definiții: grafuri

- ▶ deci,  $\mathbf{B}_K = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^K$  ne dă toate posibilitățile de a ajunge de la un nod la altul în maxim  $K$  pași prin graf
- ▶ această valoare este un indicator pentru cât de strânsă este legătura între oricare două noduri din graf
- ▶ deci, va fi important să adunăm puteri ale matricei de adiacență
- ▶ dar cum apar în această poveste valorile/vectorii proprii ale matricei  $\mathbf{A}$ ?
  - ▶ un răspuns este evident:  $\mathbf{A}^c = \mathbf{U}\mathbf{D}^c\mathbf{U}^{-1}$  și apoi  $\mathbf{B}_K = \mathbf{U}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^2 + \dots + \mathbf{D}^K)\mathbf{U}^{-1}$
  - ▶ un răspuns este mai puțin evident



# Definiții: grafuri

- ▶ dar cum apar în această poveste valorile/vectorii proprii ale matricei **A**?
  - ▶ un răspuns este mai puțin evident
  - ▶ haideți să mai vedem o dată un exemplu de mai sus în care am numerotat nodurile
  - ▶ orice facem, trebuie să fie invariant la ordonarea nodurilor
  - ▶ adică, un graf care are matricea de adiacență **A** este echivalent cu un alt graf care are matricea de adiacență **PAP<sup>T</sup>** unde **P** este o matrice de permutare

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Definiții: grafuri

- ▶ dar cum apar în această poveste valorile/vectorii proprii ale matricei **A**?
  - ▶ un răspuns este mai puțin evident
  - ▶ haideți să mai vedem o dată un exemplu de mai sus în care am numerotat nodurile
  - ▶ orice facem, trebuie să fie invariant la ordonarea nodurilor
  - ▶ adică, un graf care are matricea de adiacență **A** este echivalent cu un alt graf care are matricea de adiacență **PAP<sup>T</sup>** unde **P** este o matrice de permutare
  - ▶ avem **A = UDU<sup>-1</sup>** și atunci avem

$$\begin{aligned}\mathbf{PAP}^T &= \mathbf{PUDU}^{-1}\mathbf{P}^T \\ &= (\mathbf{PU})\mathbf{D}(\mathbf{PU})^{-1} \\ &= \mathbf{U}_{\text{new}}\mathbf{D}\mathbf{U}_{\text{new}}^{-1}\end{aligned}$$

- ▶ adică, dacă permutăm nodurile doar permutăm defapt vectorii proprii ai matricei de adiacență





## Definiții: grafuri

pentru noi, va fi foarte important Laplacianul grafului  $\mathbf{L} = \mathbf{G} - \mathbf{A}$   
(matricea de grad minus matricea de adiacență)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$



# Definiții: grafuri

proprietăți ale Laplacianului

- ▶ are dimensiune  $n \times n$
- ▶ o valoare proprie este 0
- ▶ vectorul propriu pentru valoarea proprie 0 este  $\mathbf{1}_{n \times 1}$
- ▶ este pozitiv definită (toate valorile proprii sunt pozitive)
  - ▶ se poate aplica factorizarea Cholesky
  - ▶ o matrice pozitiv definită are un radical (o operație folositoare în multe situații)
- ▶ vom folosi această matrice pentru a defini frecvența pe grafuri



# Definiții: aplicație

- ▶ noțiunea de frecvență pentru semnale obișnuite



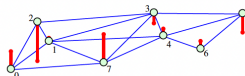
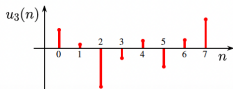
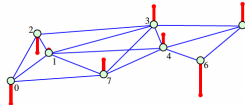
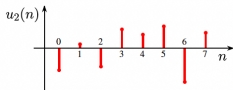
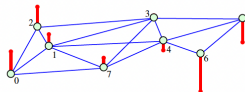
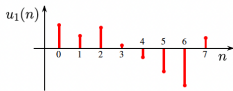
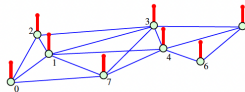
Figura: Descompunerea în frecvență (sursa:<http://www.physik.uni-kl.de>)

- ▶ în cazul nostru:
  - ▶ care sunt semnalele de baza pe grafuri? vectorii proprii ai lui  $\mathbf{L}$ !
  - ▶ cât de mult contează fiecare bază? valorile proprii ale lui  $\mathbf{L}$ !
  - ▶  $\mathbf{U}$  din  $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$  se numește **transformata Fourier pe graf**



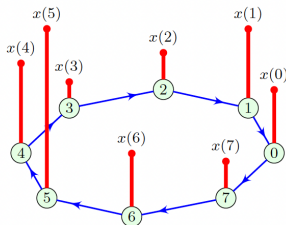
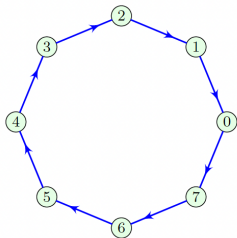
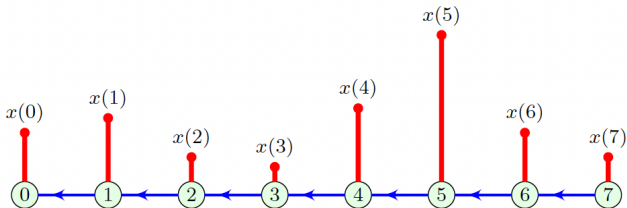
# Definiții: aplicație

pentru graful precedent, frecvențele și bazele (primele 4) sunt



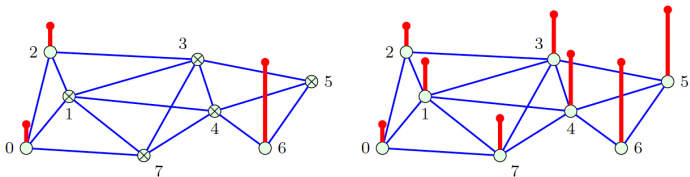
# Definiții: aplicație

de ce se numește **U** transformata Fourier pe graf? când graful este circular în timp atunci **U** este chiar **F** (matricea Fourier)!!!



# Definiții: aplicație

o aplicație: dintr-un graf, ni se dau doar câteva valori din noduri  
iar pe restul trebuie noi să le estimăm



$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(0) & u_1(0) \\ u_0(2) & u_1(2) \\ u_0(6) & u_1(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{X}$$



- ▶ acest domeniu este proaspăt, se face în continuare multă cercetare
- ▶ multe principii din timp (serii de timp) sunt extinse la nivel de grafuri
- ▶ teorie și aplicații peste ce ați învățat voi la cursuri de structuri de date și algoritmi
- ▶ la laborator veți face aplicații
- ▶ notițele de curs sunt bazate pe două surse majore:
  - ▶ Ljubisa Stankovic, Milos Dakovic, and Ervin Sejdic, Introduction to Graph Signal Processing, Springer-Nature, 2019
  - ▶ Xiaowen Dong, Graph signal processing: Concepts, tools and applications in neuroscience, 2019

