

## Seminar 2

*Cristian Rusu*

### 1 Scopul seminarului

În acest seminar vom rezolva probleme cu valori și vectori proprii:

- exemple de calcul pentru cazurile  $2 \times 2$  și  $3 \times 3$ ;
- rezolvarea sistemelor Markov;
- rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale și recurențe.

### 2 Exerciții

1. Calculați valorile și vectorii proprii pentru următoarele matrice:

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Vi se dă o matrice  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Calculați valorile și vectorii proprii pentru:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A}^n$  pentru  $n > 1$  natural,  $\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2$ , și  $\mathbf{A}^2 + \mathbf{I}_2$ . Verificați că determinantul este produsul valorilor proprii și urma este suma valorilor proprii.

3. Aveți o matrice  $2 \times 2$  reală  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Găsiți  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$ .

4. Se dau  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  doi vectori ortogonali ( $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u} = 0$ ). Calculați  $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$  și valorile lor proprii. Calculați  $\mathbf{A}^2$  și valorile lor proprii.

5. Se dă matricea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 1-c \\ 0.6 & c \end{bmatrix}$ . Calculați valorile/vectori proprii în funcție de  $c$ . Găsiți  $c$  pentru care matricea  $\mathbf{A}$  are un singur vector propriu. Pentru  $c = 0.2$  calculați  $\mathbf{A}^n$  și  $\mathbf{A}^\infty$ .

6. Există o boală care se transmite între două populații A și B. Probabilitatea de transmisie este  $m$  de la A la B și  $f$  de la B la A. Calculați  $R_0$ , valoarea proprie cea mai mare a matricei de tranziție.

7. Avem o particulă care se poate afla în starea A sau B. Dacă este în starea A, particula rămâne în starea A cu probabilitate de 60% și trece în starea B cu probabilitatea de 40%. Dacă este în starea B, particula rămâne în starea B cu probabilitate de 80% și trece în starea A cu probabilitatea de 20%. Dacă particula începe în starea A unde se stabilizează?

8. Rezolvați sistemul de ecuații diferențiale folosind valori/vectori proprii:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 5y, \quad \text{pornind de la } x = 13 \text{ și } y = 22 \text{ când } t = 0. \quad (1)$$

9. Rezolvați sistemul de recurențe:

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n - 1, \quad y_{n+1} = -x_n + 2y_n + 2, \quad \text{dacă } x_0 = 1 \text{ și } y_0 = -1. \quad (2)$$