

## Seminar 1 - bis

*Cristian Rusu*

### 1 Scopul seminarului

În acest seminar vom rezolva probleme de tipul celei mai mici pătrate:

- exemple de calcul pentru cazurile  $2 \times 2$  și  $3 \times 2$ ;
- rezolvarea sistemelor;
- rezolvarea sistemelor regularizate.

### 2 Exerciții

1. Potrivii dreptele  $y_i = ax_i$  și  $y_i = ax_i + b$  în sensul celor mai mici pătrate pentru perechile de puncte din setul de date  $\{(x_i, y_i)\}$ :

$$\{(0, 1), (1, 2), (2, 2)\}. \quad (1)$$

Determinați  $a$  și  $(a, b)$  și suma pătratelor reziduurilor pentru:

$$\underset{a}{\text{minimizează}} \sum_{i=1}^3 (y_i - ax_i)^2. \quad (2)$$

$$\underset{a,b}{\text{minimizează}} \sum_{i=1}^3 (y_i - (ax_i + b))^2. \quad (3)$$

2. Se dau matricea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  și vectorul  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (de discutat puțin de ce se schimbă notația).

- (a) Aplicați Gram-Schmidt pentru a scrie  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ , cu  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  având coloane ortonormate. Folosiți  $\mathbf{QR}$  pentru a obține soluția de cele mai mici pătrate  $\mathbf{x}^*$ .
- (b) Calculați factorizarea QR cu reflector Householder  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ , cu  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  având coloane ortonormate. Folosiți  $\mathbf{QR}$  pentru a obține soluția de cele mai mici pătrate  $\mathbf{x}^*$ .

3. Se dau matricea  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  și vectorul  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (de discutat puțin de ce se schimbă notația).

- (a) Aplicați Gram-Schmidt pentru a scrie  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ , cu  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  având coloane ortonormate. Folosiți  $\mathbf{QR}$  pentru a obține soluția de cele mai mici pătrate  $\mathbf{x}^*$ .
- (b) Calculați factorizarea QR cu reflector Householder  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ , cu  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  având coloane ortonormate. Folosiți  $\mathbf{QR}$  pentru a obține soluția de cele mai mici pătrate  $\mathbf{x}^*$ .

4. Cu aceleași  $\mathbf{A}$  și  $\mathbf{b}$  din Problema 2, calculați soluția ridge se notează

$$\mathbf{x}_\lambda = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad (4)$$

Găsiți  $\mathbf{x}_\lambda$ , ca formulă, comparați cu soluția clasică la problema celor mai mici pătrate (soluția ne-regularizată).

5. Luând în considerare modelul regresiei liniare simple unde  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$  cu  $\varepsilon \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , calculați regresia liniară pentru modelele de la punctul 1. Dar pentru

$$\{(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11)\}. \quad (5)$$