Опр.1
Всякое решение КЗЭ называется экстремалью.

Замечание:
Условие не является достаточным, следовательно, не всякая экстремаль реализует экстремум, но если достигается на функции класса $C^2([a;b])$, то функция обязательно является экстремалью.

Вид уравнения Эйлера:

$$F'_y - F - xp'' - F''_{yp} \cdot y' - F''_{pp} y'' = 0,$$

то есть это ОДУ второго порядка, общее решение которого обычно содержит две произвольных постоянных.
Значение этих постоянных пытаются найти из краевых условий.
Вообще говоря, КЗЭ не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно не обязательно единственное.

Примеры:

№1
$J[y] = \int_0^\pi y^2\, dx;\, y(0) = y(\pi) = 0$
Уравнение Эйлера: $2y = 0 \implies y \equiv 0$
Это удовлетворяет краевым условиям $\implies y \equiv 0$ - экстремаль.

№2
$J[y] = \int_0^\pi y^2\, dx;\, y(0) = 0,\, y(\pi) = 1$
Решение уравнения Эйлера $y \equiv 0$ не удовлетворяет краевым условям $\implies$ экстремалей нет.

№3
$J[y] = \int_0^\pi (y^2 - (y')^2)\, dx;\, y(0) = y(\pi) = 0$
$2y + 2\frac{d}{dx}(y') = 0 \implies y'' + y = 0$
$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
$y(0) = C_1 = 0,\, y(\pi) = -C_1 = 0 \implies \exists$ бесконечно много экстремалей $y = C \sin x,\, C \in \mathbb{R}$

§3. Простейшие случаи интегрирования уравнения Эйлера.

1. $F = F(x, y)$ (не зависит от y')
   В этом случае уравнение Эйлера не является дифференциальным уравнением, это просто конечное уравнение.
   Как правило, в этом случае КЗЭ решений не имеет, так как общее решение не содержит элементов произвола(констант).

2. $F = F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'$
   (линейная зависимость от y')
   В таком случае получаем:
   $F'_y = M'_y + N'_y y'$
   $F'_p = N(x, y)$
   $\frac{d}{dx}\left(F'_p\right) = N'_x + N'_y \cdot y'$
   Уравнение Эйлера принимает вид:
   $M'_y + N'_y \cdot y' - N'_x - N'_y \cdot y' = 0$
   Откуда следует: $M'_y - N'_x = 0$
   Это тоже является конечным уравнением, общее решение которого не содержит элементов произвола.
   Как правило, в этом случае КЗЭ также не имеет решений.
   Однако возможна следующая ситуация: M, N: $M'_y \equiv N'_x$
   Тогда: $F dx = M(x, y)dx + N(x, y)dy = d\Phi(x, y)$
   Тогда: $J[y] = \int_a^b d\Phi(x, y)\, dx = \Phi(b, B) - \Phi(a, A)$
   Получим, что $J[y]$ не зависит от формы пути, то есть вариационное уравнение теряет смысл.
3. $F = F(y')$ (зависит только от y')
   Уравнение Эйлера принимает вид:
   $\frac{d}{dx}\left(F'_p(p) = 0\right)$, то есть $F''_{pp}(p) \cdot y'' = 0$
   $F''_{pp}(p) = 0 \vee y'' = 0$
   То есть экстремалями являются прямые.
   На самом деле, $\exists!$ прямая, соединяющая (a, A) и (b, B), и ее каноническое уравнение это:

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - A}{B - A}$$

   <u>Пример:</u>
   $J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ - длина дуги, соединяющая (a, A) и (b, B)
   Здесь экстремум достигается на прямой, соединяющей эти точки.
4. $F = F(x, y')$ (не зависит явно от y)
   Уравнение Эйлера принимает вид:
   $-\frac{d}{dx}\left(F'_p\right) = 0 \implies$ имеет первый интеграл $F'_p = C_1$
   Получили ОДУ первого порядка.
5. $F = F(y, y')$ (не зависит явно от x)
   Уравнение Эйлера принимает вид:
   $F'_y - \frac{d}{dx}\left(F'_p\right) = 0 \mid \cdot y'$
   $F'_y \cdot y' - y' \frac{d}{dx}\left(F'_p\right) = 0$
   $F'_y \cdot y' + F'_p \cdot y'' - (F'_p \cdot y'' + y' \frac{d}{dx}\left(F'_p\right)) = 0$
   или $\frac{d}{dx}(F(y, y')) - \frac{d}{dx}\left(y' \cdot F'_p\right) = 0$
   $\frac{d}{dx}\left(F - y' F'_p\right) = 0 \implies$ имеет первый интеграл:
   $F - y' F'_p = C_1$
   Получили ОДУ первого порядка.

§4. Некоторые обобщения простейшей задачи вариационного исчисления.

1. Рассмотрим функционал (1) $J[y]=\int_a^b F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})\,dx$
   и (2) $M=\{y(x0\in C^n([a;b])\mid y(a)=A_0$, $y'(a)=A_1$, ..., $a^{(n-1)}=A_{n-1}$, $y(b)=B_0$, $y'(b)=B_1$, ..., $y^{(n-1)}(b)=B_{n-1}\}$

Задача: отыскать экстремум функционала (1) на множестве M (2). $F(x,y,p_1,\ldots,p_n)$ задана и имеет непрерывные частные производные до $(n+1)$ порядка.

Решение: аналогичным способом с использованием обощения основной леммы ВИ получаем следующий результат:

Т1 (Необходимое условие экстремума функционала (1) на (2))
Пусть выполнены следующие условия:
1. $y(x)\in C^{2n}([a;b])$;
2. $y(x)$ реализует экстремум функционала (1) при краевых условиях (2);
3. $F(x,y,p_1,\ldots,p_n$ непрерывна с частными производными до $(n+1)$ порядка.
Тогда: $y(x)$ - является решением краевой задачи Эйлера-Пуассона(КЗЭП):

$$\begin{cases} F'_y-\frac{d}{dx}(F_{p_1})+\frac{d}{dx^2}\left(F'_{p_2}\right)-\ldots+(-1)^n\frac{d}{dx^n}\left(F'_{p_n}\right)=0\\ y(a)=A_0,\ldots,y^{(n-1)}(a)=A_{n-1}\\ y(b)=B_0,\ldots,y^{(n-1)}(b)=B_{n-1}\end{cases}$$

Замечание: Аналогичным образом ищутся (через краевые условия) $2n$ штук постоянных.

Δ:

> (б/д)

□

2. Рассмотрим функционал (3) $J[y_1,\ldots,y_m]=\int_a^b F(x,y_1,\ldots,y_m,y_1',\ldots,y_m')\,dx$
   и (4) $M=\{(y_1(x),\ldots,y_m(x)\mid y_1(x),\ldots,y_m(x)\in C^1([a;b])$,
   $y_1(a)=A_1,\ldots,y_m(a)=A_m,y_1(b)=B_1,\ldots,y_m(b)=B_m\}$
   Кратко: $J[\vec{y}]=\int_a^b F(y,\vec{y},\vec{y}')\,dx$ и $\vec{y}(a)=\vec{A}\wedge\vec{y}(b)=\vec{B}$

Задача:
Отыскать экстремум функционала (3) на множестве M (4). $F(x,\vec{y},\vec{y}')$ задана и имеет непрерывные частные производные до $(n+1)$ порядка.

Решение:
Аналогичным способом с использованием обобщения основной леммы ВИ получаем следующий результат:

<u>T2</u> (Необходимое условие экстремума функционала (3) (4))

Пусть выполнены следующие условия:

1. $y_1(x), \ldots, y_m(x) \in C^2([a;b])$;
2. Набор $(y_1(x), \ldots, y_m(x))$ реализует экстремум функционала (3) при краевых условиях (4);
3. $F(x, y_1, \ldots, y_m, p_1, \ldots, p_m)$ - непрерывна с частными производными до второго порядка

Тогда набор функций $(y_1(x), \ldots, y_m(x))$ является решением системы уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \frac{d}{dx}\left(F'_{p_1}\right) = 0 \\ \ldots \\ F'_{y_m} - \frac{d}{dx}\left(F'_{p_m}\right) = 0 \\ \\ y_1(a) = A_1, \ldots, y_m(a) = A_m \\ y_1(b) = B_1, \ldots, y_m(b) = B_m \end{cases}$$

Δ:

> (б/д)

□

<u>Замечание:</u> Также выделяют уравнения Эйлера-Остроградского, их особенность состоит в том, что функционал J зависит от двух переменных:

$J[z(x,y)] = \iint_D F(x, y, z, z'_x, z'_y)\,dx\,dy$

А уравнение Эйлера-Остроградского примет вид:

$F_z - \frac{\partial}{\partial x}(F_p) - \frac{\partial}{\partial y}(F_q) = 0$, где $p = \frac{\partial z}{\partial x} \wedge q = \frac{\partial z}{\partial y}$

Однако в нашем курсе мы их рассматривать не будем.