<u>T2</u> (Критерий Коши сходимости последовательности к.ч.)

$$(\{z_n\} сходится) \iff (\{z_n\} - фундаментальная)$$

Δ:

> $\max(|x_{n+p} - x_n|, |y_{n+p} - y_n|) \leq |z_{n+p} - z_n| \leq |x_{n+p} - x_n| + |y_{n+p} - y_n|$

$\square$

Ряды комплексных чисел

Рассмотрим $\{w_n\} \subset \mathbb{C} \longrightarrow w_1 + \ldots + w_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$ (1)
$\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = w_1 + \ldots + 2_n$, $\{S_n\}$
Если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$, то ряд (1) называется сходящимся, а S называется суммой.
Если сходится ряд $|w_1| + |w_2| + \ldots + |w_n| + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$, то ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

<u>T3</u> (Критерий Коши для числовых рядов)
((1) - сходится) $\iff$ $(\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, p \in \mathbb{N})$
$\sum_{k=n+1}^{n+p} = S_{n+p} - S_n$

Если к критерию Коши "добавим" неравенство $\triangle \implies$ Если (1) сходится абсолютно $\implies (1)$ сходится

<u>Следствие</u> из критерия Коши (необходимое условие)
Если (1) сходится, то $w_n \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$

Δ:

> Критерий Коши $p = 1$ $|w_{n+1}| < \epsilon$

$\square$

<u>Свойства</u>:
1. Пусть (1) с $w_n = u_n + iv_n$
((1) сходится к $S = S_1 + iS_2$) $\iff$ $(\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2)$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = S'$, $\sum_{k=1}^{\infty} S''$. Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda w_k + \mu z_k) = \lambda S' + \mu S''$

Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция. Сфера Римана.

<u>Опр.5</u> $\{z_n\} \in \mathbb{C}$ называется сходящейся к ∞, если $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, т.е.

$$\forall E > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n in \mathbb{N} (n \geq N \implies |z_n| > E)$$

$$z_n \longrightarrow \infty, n \longrightarrow \infty; \lim_{n\to\infty} z_n = \infty$$

$!\{z_n\}$ является неограниченной, если $\forall C > 0 \exists n(C) \in \mathbb{N} \mid z_{n(C)} > C$
$\{z_n\}$ не является ограниченной $\implies \exists\{z_{n_k}\} : z_{n_k} \longrightarrow \infty, k \longrightarrow \infty$

Опр.6 Расширенной комплексной плоскостью назовем комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с добавлением к ней идеальным элементом ∞
Обозначение: $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$\forall \epsilon > 0$
$\dot{U}_\epsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \epsilon\}$ - проколотая окрестность ∞
$U_\epsilon(\infty) = \dot{U}_\epsilon(\infty) \cup \{\infty\}$ - окрестность ∞

Опр.7
$\{z_n\} \subset \bar{\mathbb{C}}$ называется сходящейся к $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$, если $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}(n \geq N \implies z_n \in U_\epsilon(z_0))$
$\forall\{z_n\} \subset \bar{\mathbb{C}} \exists\{z_{n_k}\}$ сходится к $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$

Стереографическая проекция. Сфера Римана.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ - ЕП сферу $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta$
$\vec{q} = \{x, y, -1\}$ - направляющий вектор $\overrightarrow{NM}$
здесь могла бы быть ваша ре... картинка
Плоскость $\zeta = 0$ отождествляем с $\mathbb{C}$
$\xi = x \cdot t \wedge \eta = y \cdot t \wedge \zeta = 1 - t \mid$
$M-?, M \in S \implies (x^2 + y^2)t^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 - t \iff t((x^2 + y^2 + 1)t - 1) = 0$

$$t = 0 \vee t = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{|z|^2 + 1} \longrightarrow M : \begin{cases} \xi = \frac{x}{1+|z|^2} \\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2} \\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \end{cases}$$

$$t = 1 - \zeta \longrightarrow z?x = \frac{\xi}{1 - \zeta}; y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

Отображение $S \setminus \{N\} \longrightarrow z = x + iy$ называется стереографической проекцией. Это взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение $S \setminus \{N\}$ на $\mathbb{C}$. Поставим соответствие:
$N \leftrightarrow \infty$ и получим S на $\bar{\mathbb{C}}$
Такая модель называется сферой Римана.

§4. Функции комплексной переменной. Предел. Непрерывность.

Пусть $E \subset \bar{\mathbb{C}}$, $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$. $f(z) \longrightarrow w_0$, $z \longrightarrow z_0$, $z \in E$
$z_0, w_0 \in \mathbb{C}$, z - предельная точка E. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 f(\dot{U}_\delta(z_0) \cap E) \subset U_\epsilon(w_0)$

Пусть $v \subset E$ $f(v) = \{w \in \bar{\mathbb{C}} \mid \exists z \in V f(z) = w\}$ - образ множества V при отображении f.

Пусть, например, $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 - предельная точка E, $w_0 = \infty$
$f(E) \subset \mathbb{C}$

$f(z) \longrightarrow \infty$, $E \ni z \longrightarrow z_0 \iff \forall E > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in E\ (0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > E)$

Остальные частные случаи аналогично.

Рассмотрим далее основной случай: $E \in \mathbb{C}, f(E) \subset \mathbb{C}$ - конечные значения, т.к. $\in \mathbb{C}$ (не $\in \bar{\mathbb{C}}$)

$\forall z = x + iy \in E \longrightarrow f(z) \in \mathbb{C}$
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$; $u = Ref(z)$; $v = Imf(z)$;
$\forall (x, y) \in E \longrightarrow (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$

<u>Утв.1</u>
Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, z_0 - предельная точка E
$z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$

$$(f(z) \longrightarrow w_0, E \ni z \longrightarrow z_0) \iff (\exists \lim_{E \ni (x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u \wedge \exists \lim_{E \ni (x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0)$$

Δ:

> $(f(z) \longrightarrow w_0, E \ni z \longrightarrow z_0) \iff (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in E(0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \epsilon))$
> $(1) \max(|u(x, y) - x_0|, |v(x, y) - v_0|) \leq |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0|$
> $\implies$ Из (1) и определения $\implies \forall (x, y) \in E$: $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$
> $|u(x, y) - u_0| < \epsilon \wedge |v(x, y) - v_0| < \epsilon$
> $\Longleftarrow$ по $\frac{\epsilon}{2}$ $\exists \delta_1 > 0\ |u(x, y) - u_0| < \epsilon/2\ \forall (x, y) \in E \cap \dot{U}_{\delta_1}(x_0, y_0)$
> $\exists \delta_2 > 0\ |v(x, y) - v_0| < \epsilon/2\ \forall (x, y) \in E \cap \dot{U}_{\delta_2}(x_0, y_0)$
> Рассмотрим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$\square$

Арифметические свойства пределов:
(Борисыч устно проговорил, так что не совсем точно)
$\lim(f + g) = \lim f + \lim g$
$\lim cf = c \lim f$
$\lim f \cdot g = \lim f \cdot \lim g$
$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$, $g \neq 0$

Непрерывность функции комплексных переменных

<u>Опр.2</u>
Пусть $E \subset \mathbb{C}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in E$
Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 по множеству E, если
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 \forall z \in E\ (|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon)$
а) Если точка z_0 - это изолированная точка E, то $f(z)$ непрерывна в точке z_0.
б) Если точка z_0 - предельная точка E, то непрерывность означает, что
$\exists \lim_{E \ni z \to 0} f(z) = f(z_0)$

$f \in C(E)$ - множество непрерывных функций на E

$C(E; \mathbb{C})$

Свойства непрерывных функций:

Пусть $f_1, f_2 \in C(E)$. Тогда:

1. $f_1 \pm f_2 \in C(E)$
2. $f_1 \cdot f_2 \in C(E)$
3. $\forall z \in E f(z) = 0$, то $\frac{f_1}{f_2} in C(E)$

<u>Утв.2</u>

Пусть $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, $u(x, y) = Ref(z)$, $v(x, y) = Imf(z)$.

Тогда $(f \in C(E)) \iff (u \in C(E) \wedge v \in C(E))$