

Глава 1 Элементарное введение в вариационное исчисление

§1. Основные понятия.

Вариационное исчисление связано с поиском экстремума некоторого функционала (по сути является функцией от функции)

Пусть V - ЛНП (над полем \mathbb{R}) с нормой $\|y\|$:

1. $\|y\| \geq 0$, причем $\|y\| = 0 \iff y = \theta$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \|\alpha y\| = |\alpha| \cdot \|y\|$
3. $\forall z, y \in \mathbb{R} \implies \|z + y\| \leq \|z\| + \|y\|$

Для пространства $C([a; b])$: $\|y\| = \max |y(x)|, x \in [a; b]$

Для пространства $C^1([a; b])$: $\|y\| = \max \{ \max |y(x)|, \max |y'(x)| \}, x \in [a; b]$ или $\|y\| = \max |y(x)| + \max |y'(x)|, x \in [a; b]$

Аналогично вводится норма $C^n([a; b])$, где $n \geq 2$

Опр.1 Эпсилон окрестность точки y_0 - множество точек таких, что

$$\{y(x) \in V \mid \|y(x) - y_0(x)\| < \epsilon\}$$

Окрестность в C называется сильной окрестностью, в C^n ($\forall n \geq 1$) называется слабой окрестностью.

Замечание: В слабую окрестность попадают функции с близкими значениями и с близкими значениями производных. В сильную же - только с близкими значениями. То есть в слабой окрестности функций меньше.

Опр.2 Функционалом J называется закон(правило), по которому каждому элементу $y \in V$ (или $M \subset V$) ставится в соответствие действительное число(точка \equiv кривой)

Обозначение: $J[y]$

Пример: $J[y] = \int_a^b y(x) dx$ на $C([a; b])$, ...

Опр.3 Функционал называется линейным на M , если:

$$\forall y_1(x), y_2(x) \in M \text{ и } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies J[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)] = \alpha_1 J[y_1] + \alpha_2 J[y_2]$$

Опр.4 Будем говорить, что $J[y]$ достигает локального максимума в точке y_0 (на кривой $y_0(x)$), если:

$$\exists U_\epsilon(y_0) = \{y \in M \mid \|y - y_0\| < \epsilon\}: \forall y(x) \in U_\epsilon(y_0) \implies J[y_0] \geq J[y]$$

Если $U_\epsilon(y_0)$ - сильная, то такой максимум называется сильным.

Если $U_\epsilon(y_0)$ - слабая, то такой максимум называется слабым.

Замечание: Каждый сильный максимум является слабым, но не наоборот.

Опр.5 Аналогичные выкладки справедливы для локального минимума.

Опр.6 Точки локального \max и \min называется точками экстремума (экстремальными кривыми)

Опр.7 Вариацией кривой $y(x) \in M$ называется произвольное приращение этой кривой.

Обозначение: $\delta y = \tilde{y}(x) - y(x)$, если $y(x) \in M \rightarrow \tilde{y}(x) \in M$

Замечание: Далее рассматриваем только допустимые вариации, т.е. такие, что:

$y(x) + \delta(y) \in M$, если $y(x) \in M$

Опр.8 Пусть кривой $y_0(x)$ дали приращение δy . Тогда рассмотрим разность:

$$J[y_0 + \delta y] - J[y_0] = \Delta J[y_0]$$

Если приращение функционала $J[y]$ в точке y_0 можно представить в виде:

$\Delta J[y_0] = L[y_0, \delta y] + o(|\delta y|)$, где L - линейный оператор по 2-ому аргументу, тогда функционал J называется дифференцируемым по Фреше в точке y_0 , а линейная часть приращения $L[y_0, \delta y]$ называется вариацией функционала J в точке y_0 .

Замечание: Дифференцируем по Фреше \equiv дифференцируем в широком смысле.

Обозначение: $\delta J[y_0] \equiv L[y_0, \delta y]$

Опр.9 Если $\exists \frac{d}{d\alpha}(J[y_0 + \alpha \delta y])|_{\alpha=0}$, то $J[y]$ называется дифференцируемым по Гато в точке y_0 , а значение этой производной называется вариацией по Гато.

Замечание: Диф. по Фреше \implies диф. по Гато. В общем случае обратное неверно, но в дальнейшем для интегральных функционалов эти понятия тождественны, поэтому для упрощения понимания, будем пользоваться определением по Гато.

Т1 (Необходимое условие экстремума)

(Функционал $J[y]$ достигает экстремума во внутренней точке y_0 множества M) \implies ($\delta J[y_0] = 0$)

Δ : Пусть для определенности достигается \min , тогда:

$$\exists U_\epsilon(y_0): \forall y(x) \in U_\epsilon(y_0) \implies J[y] \geq J[y_0]$$

Пусть δy - произвольное приращение (допустимое). Возьмем $\alpha > 0$: $|\alpha| < \frac{\epsilon}{\|\delta y\|}$

Тогда: $J[y_0 + \alpha \cdot \delta y] \geq J[y_0]$

Рассмотрим $f(\alpha) = J[y_0 + \alpha \cdot \delta y]$. Тогда

$$\left(\forall \alpha \left(|\alpha| < \frac{\epsilon}{\|\delta y\|} \implies f(\alpha) \geq f(0) \right) \right) \implies (\min f(\alpha) = f(\alpha = 0))$$

Знаем, что $J[y]$ дифференцируем в точке y_0 , т.е.:

$$\exists \frac{d}{d\alpha}(J[y_0 + \alpha \cdot \delta y])|_{\alpha=0} \implies (\exists f'(0))$$

Из курса математического анализа: $f'(0) = 0$

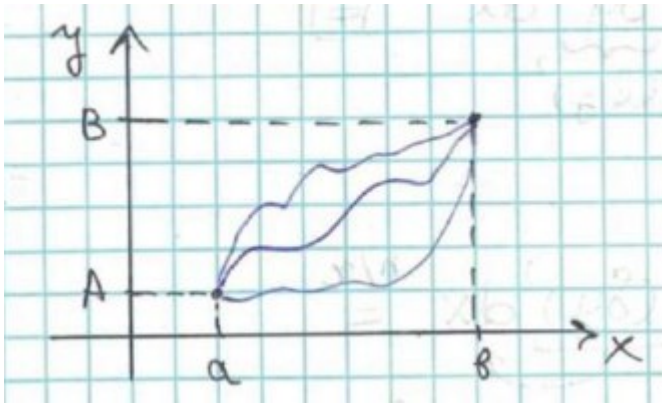
Но $(f'(0) = \delta J[y_0])$. Тогда: $\delta J[y_0] = 0$

Аналогично доказывается для максимума.

□

Замечание: T_1 является необходимым условием для слабого экстремума, а следовательно, и для сильного экстремума.

§2. Простейшая задача вариационного исчисления.



Рассмотрим $M = \{y \in C^1(\{a; b\}) : y(a) = A; y(b) = B\}$

Рассмотрим функционал (1) $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$

$F(x, y, p)$ - заданная функция, будем считать ее непрерывной.

Функционал $J[y]$ называется функционалом с закрепленными концами.

Задача нахождения экстремума функционала (1) на множестве M (гладкая кривая с закрепленными концами) называется простейшей задачей вариационного исчисления.

Что значит условие $\delta J[y] = 0$, для функционала (1) с закрепленными концами:

$$y(a) = A, y(b) = B$$

Замечание:

1. Все допустимые вариации удовлетворяют условию: $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$

$$2. (\delta y)' = (\tilde{y} - y)' = \tilde{y}' - y' = \delta y'$$

Рассмотрим вариацию по Гато:

$$\frac{d}{d\alpha} (J[y + \alpha \cdot \delta y]) = \frac{d}{d\alpha} \left(\int_a^b F(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') dx \right) = (2)$$

Будем считать, что $F(x, y, p)$ непрерывна с частными производными до 2-ого порядка.

J - собственный интеграл, зависящий от параметра, тогда:

$$(2) = \int_a^b (F'_y(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') \delta y + F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') \delta y') dx$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int_a^b F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') (\delta y)' dx = F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \delta y \cdot \frac{d}{dx} (F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y')) dx$$

$$\text{Тогда } (2) = \int_a^b (F'_y(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') - \frac{d}{dx} (F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'))) \cdot \delta y dx$$

Полагаем, что $\alpha = 0$. Тогда:

$$\int_a^b (F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} (F'_p(x, y, y'))) \delta y dx = 0$$

Отсюда получаем следующее:

$$F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} (F'_p(x, y, y')) = 0$$

Обоснуем этот переход ниже:

to be continued...