§3. Автономные системы

Рассмотрим следующую систему, в которой $\vec{f} \in C(G)$ (G - область) явно не зависит от t
$(1.1)\ \dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$
$(2.1)\ \dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y})$

Опр.1 Системы вида (1.1) бдуем называть автономными системами.
Отметим, что любую неавтономную систему (2.1) можно свести к автономной.
Покажем это:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ \dot{y_n} = f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Полагаем, что $t = y_{n+1}$. Тогда:

$$(3) \begin{cases} \dot{y_1} = f_1(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n) = g(y_1, \ldots, y_{n+1}) \\ \ldots \\ \dot{y_n} = f_n(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n) = g_n(y_1, \ldots, y_{n+1}) \\ \dot{y_{n+1}} = 1 \end{cases}$$

Таким образом, неавтономная система (2.1) сведена к автономной (1.1)
Справедливо и обратное:

$$(1.2) \begin{cases} \dot{y_1} = f_1(y_1, \ldots, y_n) \\ \dot{y_n} = f_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Допустим, что в точке $(y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ) \in G$ выполнено: $f_n(\vec{y}^\circ) \neq 0$
Тогда:

$$\exists\ U_\delta(\vec{y}^\circ) = \{\vec{y} \mid ||\vec{y} - \vec{y}^\circ|| < \delta\} :\ f_n(\vec{y}) \neq 0$$

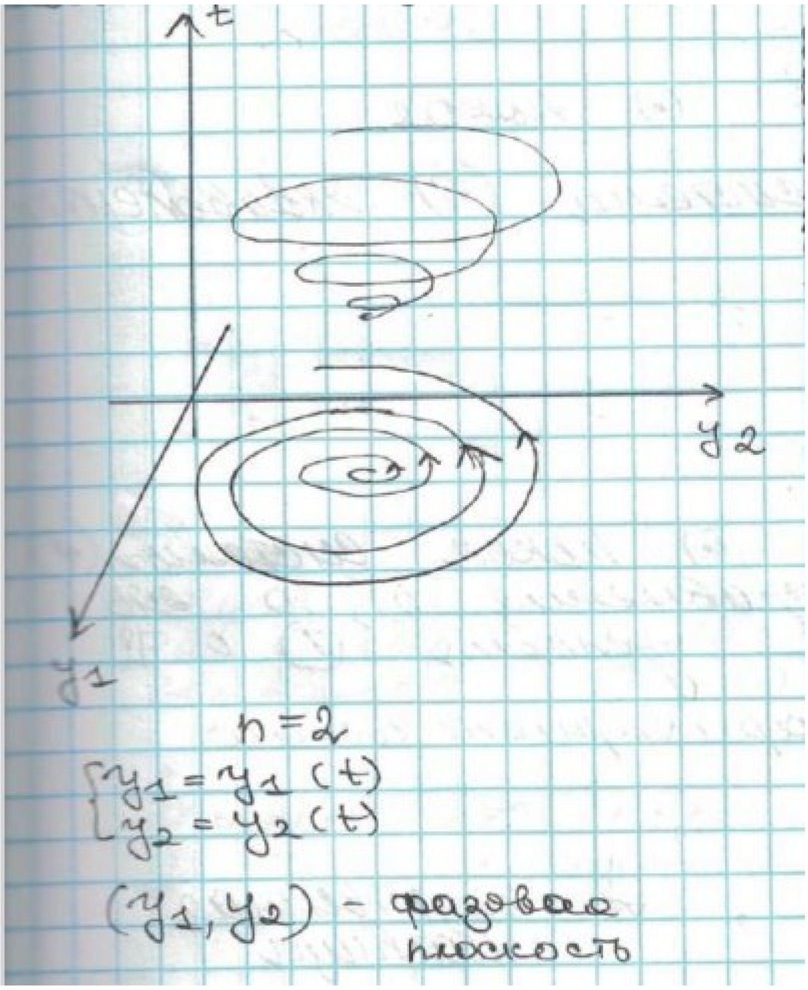
Получим:

$$(2.2) \begin{cases} \frac{dy_1}{dy_n} = \frac{\dot{y_1}}{\dot{y_n}} = \frac{f_1(\vec{y})}{f_n(\vec{y})} \equiv F_1(y_1, \ldots, y_n) = \phi_1(y_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) \\ \ldots \\ \frac{dy_{n-1}}{dy_n} = \frac{\dot{y_{n-1}}}{\dot{y_n}} = \frac{f_{n-1}(\vec{y})}{f_n(\vec{y})} \equiv F_{n-1}(y_1, \ldots, y_n) = \phi_{n-1}(y_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Таким образом, автономная система (1.2) сведена к неавтономной системе (2.2), которая является таковой в некоторой $U_\delta(\vec{y}^\circ)$

Далее напомним, что всякое решение (1.1) в пространстве переменных $(t, \vec{y})$ задает интегральную кривую

Опр.2 Подпространство переменных $(\vec{y})$ называется фазовым пространством, а проекция интегральной кривой на фазовое пространство называется фазовой траекторией.



Замечание: Направление движения на фазовой траектории с возрастанием t указывается стрелкой

Опр.3 Совокупность фазовых траекторий, дающая представление об общем поведении решения, называется фазовым портретом.

Опр.4 Точка $\vec{y} = \vec{a}$ называется точкой покоя (положением равновесия) системы (1.1), если: $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$

$$(\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}) \iff \left(\begin{cases} f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(a_1, \ldots, a_n) = 0 \end{cases}\right)$$

Замечание: Путем параллельного переноса $\vec{y} = \vec{\tilde{y}} + \vec{a}$ можно добиться, чтобы точка покоя была $\vec{\tilde{y}} = \vec{0}$

Далее будем считать, что система (1.1) обладает нулевой точкой покоя: $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$

Теперь рассмотрим линейную автономную систему второго порядка:

$$(4)\ \begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

обладающую нулевой точкой покоя.

При $a_{11}x + a_{12}y \neq 0$ система (4) эквивалентна уравнению:

$$(5)\ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$$

Заметим, что нулевая точка покоя системы (4) является особой точкой уравнения (5), то есть в ней нарушаются условия теоремы о $\exists$!

Пусть λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

A - вещественная матрица

Рассмотрим все возможные случаи:

I. Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}:\ \lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда:

$\lambda_1 \sim \vec{h_1}$, $\lambda_2 \sim \vec{h_2}$ (собственные векторы)

Перейдём в базим $\{\vec{h_1}, \vec{h_2}\}$

Пусть $T = (\vec{h_1}, \vec{h_2})$ - матрица перехода, и

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \vec{z}$$

Тогда:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$(\dot{\vec{y}} = T\dot{\vec{z}} = A\vec{y} = AT\vec{z}) \implies (\dot{\vec{z}} = T^{-1}AT\vec{z}) \implies (\dot{\vec{z}} = \Lambda\vec{z}) \iff \left(\begin{cases} \dot{z_1} = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z_2} = \lambda_2 z_2 \end{cases}\right) \iff \left((6)\ \begin{cases} z_1 = \\ z_2 = \end{cases}\right.$$

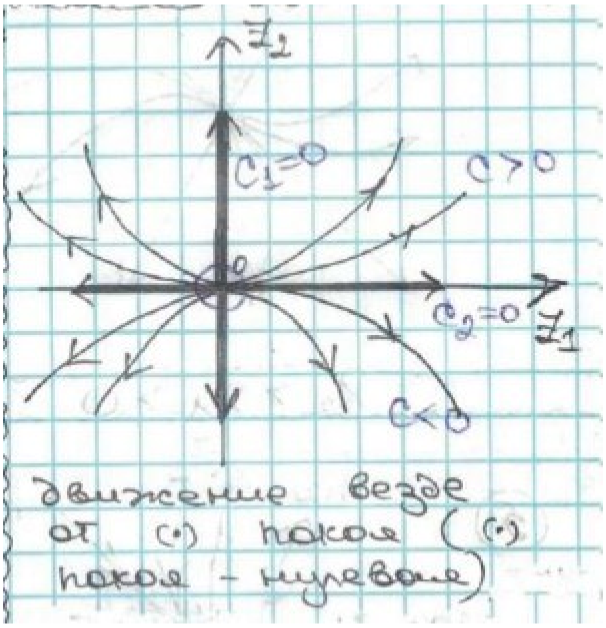
1.0 Рассмотрим $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

Исключим t из (6):

$$z_2 = c|z_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$$

1.1 Рассмотрим $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Тогда:

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \alpha > 1\right) \implies (z_2 = c|z_1|^{\alpha})$$

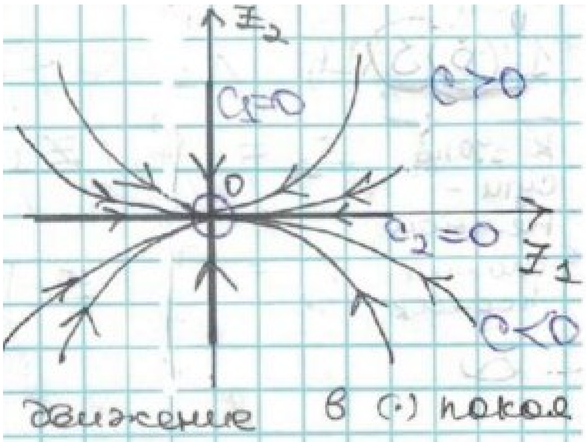


Здесь мы получаем неустйчивый узел, так как все движение от точки покоя
Заметим, что параболы в точке покоя касаются решения $z_2 = 0$ $(c_2 = 0)$

1.2 Рассмотрим $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: ситуация, аналогичная 1.1

$$(\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1) \implies (\textit{экспоненты в } (6) \textit{ затухают})$$

Здесь мы получаем устойчивый узел (причем он устойчив ассимтотически).

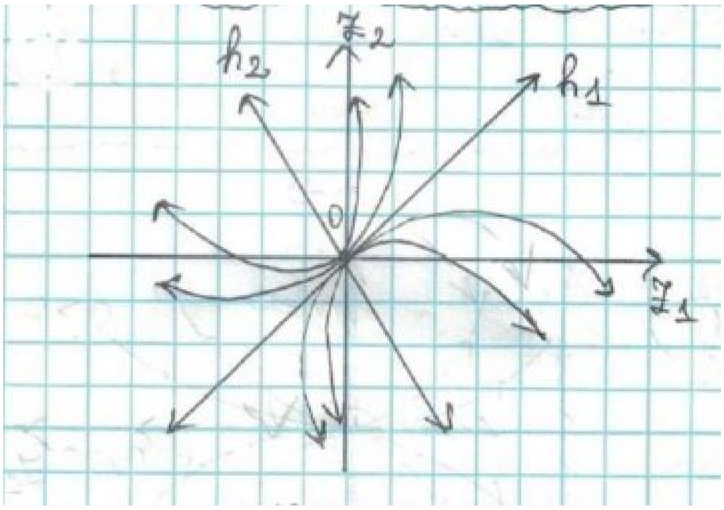


2.0 Вернемся к исходным переменным:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\vec{z} = (\vec{h_1}, \vec{h_2}) \cdot \left(c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = c_1 \vec{h_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{h_2} e^{\lambda_2 t}$$

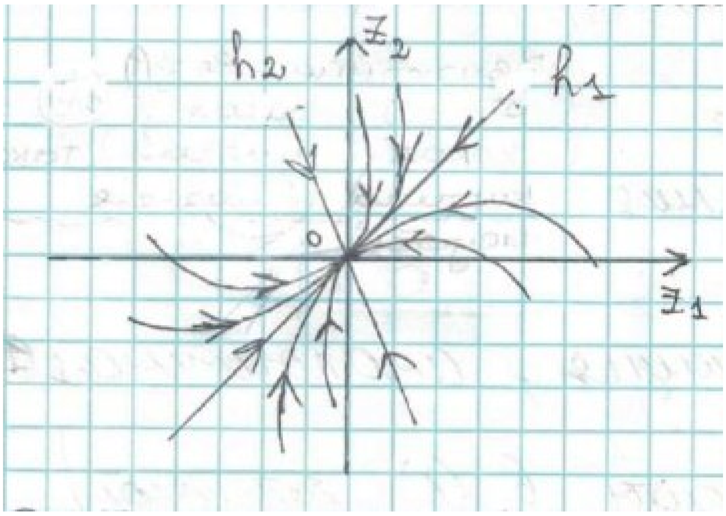
Поскольку в общем случае: $\vec{h_1} \not\perp \vec{h_2}$, преобразование является косоугольным(не ортогональным). Это похоже на то, как, есои бы мы вытягивали квадратный платок по диагонали и получили бы из квадрата ромб.

2.1 Пусть $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$



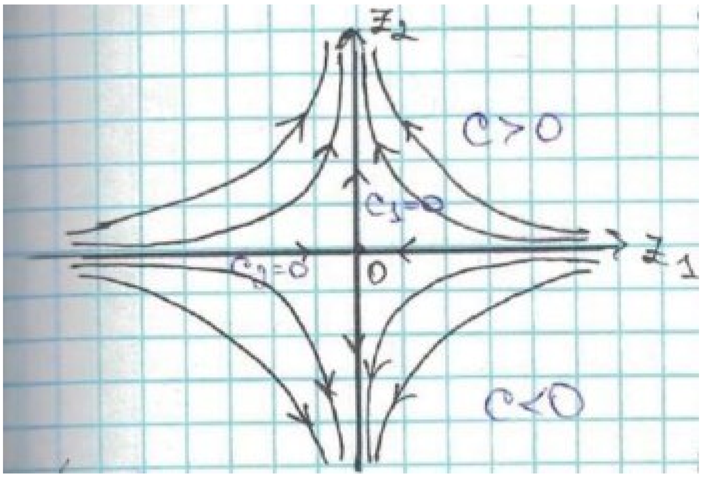
Параболические траекории в точке покоя касаются прямолинейной траектории с направляющим вектором $\vec{h_1}$(отвечающим по модулю меньшему собственному значению)
Здесь: асимптотически неустойчивый узел.

2.2 Пусть $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



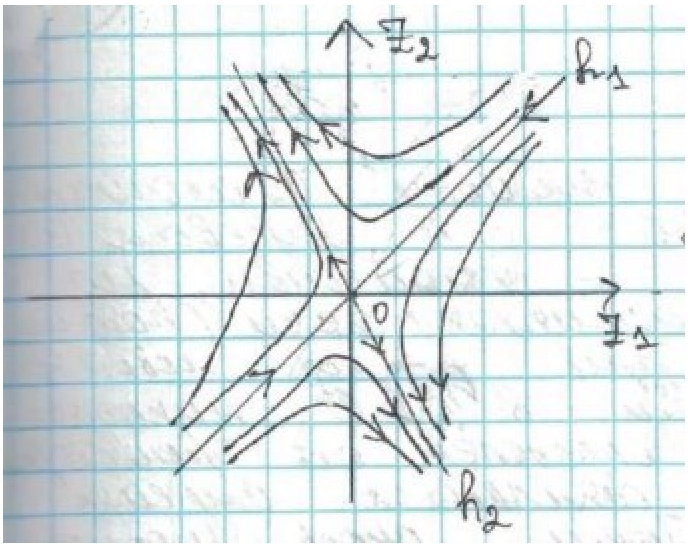
Здесь траектории подчинаются тому же правилу, что и в 2.1, причем это асимптотически устойчивый узел.

1.3 Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Тогда:
$z_2 = c|z_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, где $\lambda_2/\lambda_1 = \alpha < 0$
$z_2 = c|z_1|^{\alpha}$ - гиперболы



"Поигравшись" со значением параметра t, получаем картину слева.
Здесь точка покоя - седло (то есть какие-то кривый идут в точку покоя, а какие-то нет)

2.3 Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.



Здесь направляющие вектора $\vec{h_1}$ и $\vec{h_2}$ является асимптотами гиперболических траекторий. Аналогично точка покоя - седло.

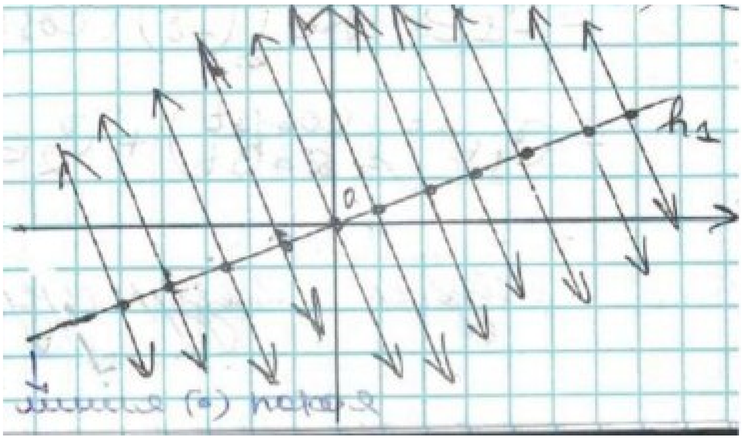
3.1 Пусть $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$. Тогда:

$$(*)\ (\det A = 0) \implies (\textit{строки } A \textit{ пропорциональны}) \implies \left(\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} = k\right) \implies (y = kx +$$

$$(**)\ (\det A = 0) \implies \left(\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}\right) \implies (\textit{система имеет нетривиальные решения})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \cdot \vec{h_1},\ \vec{h_1} \sim \lambda_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \cdot \vec{h_1} + c_2\vec{h_2}e^{\lambda_2 t}$$

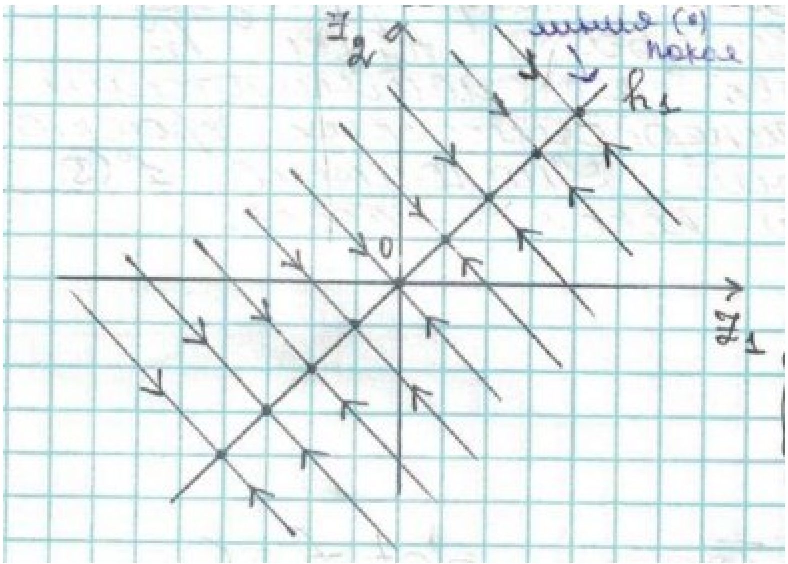


$$\begin{cases} x = c_1 h_{11} + c_2 h_{12} e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1 h_{21} + c_2 h_{22} e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$$\frac{x - c_1 h_{11}}{\cancel{c_2} h_{12}} = \frac{y - c_1 h_{21}}{\cancel{c_2} h_{22}}$$

Здесь все точки покоя(в том числе нулевая) неустйчивы.

3.2 Пусть $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 < 0$



Здесь выкладки аналогичны 3.1, но тут нулевая точка покоя - устойчива, но не асимптотически (потому что при $t \to +\infty$ мы попадем в точку 0, находясь на определенной траектории а в остльных случаях мы будем сколь угодно близко).

II. Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
$\vec{h_{1,2}} = \vec{u} \pm i\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\, Re((\vec{u} + i\vec{v})e^{(\alpha+i\beta)t}) + c_2\, Im((\vec{u} + i\vec{v})e^{(\alpha+i\beta)t})$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = c_1\, Re\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)e^{(\alpha+i\beta)t}\right) + c_2\, Im\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)e^{(\alpha+i\beta)t}\right) =$$

$$= c_1 e^{\alpha t}\, Re\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}(\cos\beta t + i\sin\beta t)\right) + c_2\, Im\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)e^{(\alpha+i\beta t)}\right) =$$

$$= c_1 e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ \sin\beta t \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ -\cos\beta t \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t \\ c_1\sin\beta t - c_2\cos\beta t \end{pmatrix} (=)$$

Введем следующую замену: $\rho = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

В таком случае:

$$\begin{cases} \cos\phi = \dfrac{c_1}{\rho} \\ \sin\phi = \dfrac{c_2}{\rho} \end{cases}$$

$$(=)\ \rho e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t - \phi) \\ \sin(\beta t - \phi) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} z_1 = \rho e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t - \phi) \\ z_2 = \rho e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t - \phi) \end{cases}$$

Значит, возможны следующие случаи:

$(\alpha = 0) \implies (\textit{траекториями являются окружности}) \implies (\textit{точка покоя является их центром})$

$(\alpha \neq 0) \implies (\textit{траекториями являются логарифмические спирали}) \implies (\textit{точки покоя устойчивы л}$

To be continued...