§5. Кривые и области на комплексной плоскости

п.1 Непрерывные кривые и области на комплексной плоскости

Опр.1 Пусть $z(t) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, функция $zinC[a, b]$. Отображение $z(t)$ непрерывная кривая, параметрическая переменная $t \in [a, b]$. Точка $z(a), z(b)$ - начало и конец кривой. Если $z(a) = z(b)$, то кривая называется замкнутой (контур).
$\gamma : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b] \iff z = z(t) \equiv x(t) + iy(t), t \in [a, b]$. ($\gamma \subset \mathbb{C}$ непрерывная кривая $\mathbb{C}$)

Опр.2 Кривая γ называется простой, если $\forall t_1, t_2 \in [a, b](t_1 \neq t_2 \implies z(t_1) \neq z(t_2))$
Замкнутая кривая γ(контур) называется простой замкнутой кривой, если
$\forall t_1, t_2 \in (a, b)(t_1 \neq t_2 \implies z(t_1) \neq z(t_2))$

Опр.3 Кривая γ: $z = z(t), t \in [a, b]$ является объединением кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ($\gamma = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k$), если $\exists$ разбиение $\tau = \{a = t_0 < t_1 <\ldots < t_n = b\}$ отрезок $[a, b]$:
$\forall k = \overline{1, n} \gamma_k : z = z(t), t \in [t_{k-1}, t_k]$.
Представление $\gamma = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k$ - разбиение кривой γ
! $\gamma^- : z = z(-t + a + b), t \in [a, b]$ - противоположно ориентированная кривая $z(b)$ - начало, $z(a)$ - конец.

Лемма 1 (О разбиении кривой)
Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ - непрерывная кривая: $\gamma \subset U_{j\in J} V_j$, где V_j - открытое, J - множество индексов. Тогда $\exists$ разбиение кривой γ
$\gamma = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k \ \forall k = \overline{1, n} \ \exists j_k \subset J \ \gamma_k \subset V_jk$.

Δ:

> По условию γ: $z = z(t), t \in [a, b]; z(t) = z(t) + i \cdot y(t)$ - параметризация γ
> $\gamma \subset \bigcup_{j\in J} V_j \implies \forall t \in [a, b] \exists j(t) \in J : z(t) \in V_{j(t)}$.
> В силу непрерывности $z(t) \exists U(t) \subset \mathbb{R} : z(U(t) \cap [a, b]) \subset V_{j(t)}. T.к. \$[a, b] \subset \bigcup_{t\in[a,b]} U(t)$
> $z(t) \exists U(t) \subset \mathbb{R} : z(U(t) \cap [a, b]) \subset V_{j(t)}$/
> то по Лемме о числе Лебега $\exists d > 0 : \forall [t', t''] \subset [a, b]$
> $(t'' - t' < d \implies [t', t''] \subset U(t_0)) \implies z([t', t'']) \subset V_{j(t_0)}$.
> Пусть разбиение $\tau = \{a = t_0 < t_1 <\ldots < t_n = b\}, diam \tau < d$.
> Рассмотрим дуги $\gamma_k : z = z(t), t \in [t_{k-1}, t_k]; \forall k = \overline{1, n} \exists j_k \in J : z([t_{k-1}, t_k]) \subset V_{j_k}$, поэтому
> $\gamma = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j_k}, \gamma_k \subset V_{j_k}$

□

Опр.4 $D \subset \mathbb{C}$ называется линейно-связным, если $\forall z_0, z_1 \in D \exists$ непрерывная кривая $\gamma \subset D$ с началом в точка z_0 и концом в точке z_1.

Открытое линейно-связное множество $D \subset \mathbb{C}$ называется областью.

Лемма 2
Пусть $D \subset \mathbb{C}, D$ область. Тогда $\forall z_0, z_1 \in D$ $z_0 \neq z_1 \exists$ ломаная с конечным числом вершин (звеньев) целиком лежат в D, с началом в z_0 и концом в z_1.

Δ:

> Пусть $z_0, z_1 \in D$ $z_0 \neq z_1$ D - линейное связное $\implies \exists \gamma : z = z(t) \in D, t \in [a, b]$,
> $z(a) = z_0$, $z(b) = z_1$
> Т.к. D - открытое, то $\forall c \in [a, b]$ $z(c) \in D$ вместе с некоторой окрестностью (кругом) V_C
> . По Л.1 о разбиении кривой, т.к. $\gamma \subset \bigcup_{c \in [a,b]} V_C$,
> $\exists$ разбиение $\tau = \{a = t_0 <\ldots< t_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ и набор кругов $V_{C_1}, \ldots, V_{C_n}$
> $\forall k = \overline{1, n}$
> $z([t_{k-1}, t_k]) \subset V_{C_k} \implies \mathbb{C} \supset [z(t_{k-1}), z(t_k)] \subset V_{C_k} \subset D \implies$ ломаная с вершинами $z(t_0), z(t_1), \ldots, z(t_n)$ лежит в D, является искомой.

□

Опр.5 Кривая γ: $z(t) = x(t) + iy(t)$ называется гладкой, если $x(t), y(t) \in C^1[a, b]$ и $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$. Кусочно-гладкая кривая может быть разбита на конечное число гладких кусков.

Глава 2. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Голоморфная функция. Геометрический смысл производной.

§1. Определение производной и дифференциала функции комплексного переменного. Свойства операции дифференцирования.

Опр.1 Пусть $f : U(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}, \forall z \in U(z_0)$ $\Delta f = f(z) - f(z_0)$, $\Delta z = z - z_0$.
Если $\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \in \mathbb{C}$, то он называется комплексной производной функции f в точке z_0, обозначается $f'(z_0)$
f называется дифференцируемой в точке z_0 ($\mathbb{C}$ - дифференцируемой), если
$\exists C \in \mathbb{C} \forall z \in U(z_0)$
$\Delta f(z_0; \Delta z) \equiv f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = C \cdot \Delta z + o(|\Delta z|)$. (1)
$\iff \frac{\Delta d}{\Delta z} = C + o(1) \implies C = f'(z_0)$
$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$

Пример: Пусть $nin\mathbb{N}, z \in \mathbb{C}, f(z) = z^n$. Тогда
$f'(z) = (z^n)' = \lim_{t \to z} \frac{t^n - z^n}{t - z} = \lim_{t \to z} (t^{n-1} + z \cdot t^{n-2} + \ldots + z^{n-1}) = n \cdot z^{n-1}$

Свойства дифференцируемых функций:

1. Пусть f и g определены в $U(x)$ и дифференцируемы в точке z. Тогда $\exists(f(z)+g(z))' = f'(z)+g'(z)$, $\exists(f(z)\cdot g(z))' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$ и если $g \neq 0$ в $U(z)$, то $\exists(f(z)g(z))' = \frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}$
2. Дифференцируемость сложной фнкции (суперпозиции)

Пусть f дифференцируема в точке z, а g дифференцируема в точке $f(z)$. Тогда $(g \circ f)'(z) \equiv (g(f(t)))' = g'(f(z)) \cdot f'(z)$

3. Дифференцируемость обратной функции

Пусть $f : U(z_0) \longrightarrow f(U)$ f - взаимно однозначно и взаимно непрерывно, т.е. $f \in C(U), f^{-1} \in C(V), V = f(U)$ $w_0 = f(z_0) \in V$ - окружность w_0.
$f^{-1} \equiv g : V \longrightarrow U$ $\forall w \in V \longrightarrow z = g(w) : z \in U \wedge f(z) = w$. Если функция f дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то функция g дифференцируема в точке w_0 и $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$, $z_0 = g(w_0)$

Δ:

> $\forall w \in V \setminus \{w_0\}$ рассмотрим $z = g(w) \implies z \in U \setminus \{z_0\}$
> $\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}$. Т.к. $w = f(z)$ взаимно однозначное $U \leftrightarrow V$ и вызаимно непрерывное, то $(w \to w_0) \iff (z \to z_0)$
>
> $$\implies g'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

□

Условия Коши-Римана

Пусть f определена в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, $u(x,y) = Ref(z)$, $v(x,y) = Imf(z)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta u = u(x,y) - u(x_0,y_0)$, $\Delta v = v(x,y) - v(x_0,y_0)$
u, v - дифференцируемы в точке (x_0,y_0) по определению означает $\exists A_i, B_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$
$\Delta u = A_1\Delta x + B_1\Delta y + \alpha_1 \wedge \Delta v = A_2\Delta x + B_2\Delta y + \alpha_2$, где $\alpha_j = o_j(\rho)$, т.е. $\lim_{\rho\to 0} \frac{\alpha_j}{\rho} = 0$, $j = 1,2 \implies A_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, B_1 = \frac{\partial u}{\partial y}, A_2 = \frac{\partial v}{\partial x}, B_2 = \frac{\partial v}{\partial y}$ в точке $(x_0,y_0) \leftrightarrow z_0$.

! $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \equiv |\Delta z|$! $o(\rho) = o(|\Delta z|)$.

<u>T1</u>

Пусть f определена в $U(z_0)$.
(f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z_0) $\iff$ ((u, v дифференцируемы в точке (x_0,y_0) как функции 2-ух переменных) $\wedge$ ($\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ в точке (x_0,y_0))

Δ:

> $\implies$ пусть $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, т.е. $\exists c \in \mathbb{C} : \Delta f = c \cdot \Delta z + o(|\Delta z|)$
> $\Delta f \equiv \Delta u + i\Delta v$, $\Delta z \equiv \Delta x + i\Delta y$, $c = c_1 + ic_2$, $o(|\Delta z|) = o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|)$.
> Тогда $\Delta f = \Delta u + i\Delta v = (c_1 + ic_2)(\Delta x + i\Delta y) + o_1(|\Delta z|) + io_2(|\Delta z|) \implies$
> (2) $\Delta u = c_1 \cdot \Delta x - c_2 \cdot \Delta y + o_1(|\Delta z|) + i \cdot o_2(|\Delta z|) \wedge$

> $\wedge\ \Delta v = c_2 \cdot \Delta x + c_1 \cdot \Delta y + o_2(|\Delta z|)$
> $!\ i = 1, 2\ \frac{o_i(|\Delta z|)}{|\Delta z|} \to 0, \Delta z \to 0 \iff$
> $\iff \frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|} \to 0, \Delta z \to 0$

To be continued...