Теорема Рао-Крамера

$\hat{\theta}$ для неизвестного параметра θ

Пусть
1. $M\hat{\theta} = \int \cdots \int \hat{\theta}\, L(\vec{x_n}, \theta)\, dx_1 \cdots dx_n = \theta + \delta_{\hat{\theta}}(\theta)$
2. Условия регулярности $p_\xi(x, \theta)$
2.1. Область, где $p_\xi(x, \theta) \neq 0$ не зависимо от θ
2.2. В 1. и $\int L(\vec{x_n}, \theta)\, dx = 1$ возможно $\frac{\partial}{\partial \theta}$ под $\int$
$\exists \frac{\partial L}{\partial \theta}(\vec{x}, \theta))$ и $L(\vec{x}, \theta) > 0$
2.3. $I(\vec{x_n}, \theta) \neq 0$

Тогда $\forall$ оценки $\hat{\theta}(\vec{x_n})$ параметра θ имеет место неравенство.

$$M(\hat{\theta}(\vec{x_n}) - \theta)^2 \geq \frac{\left[1 + \frac{\partial \delta_{\hat{\theta}}(\theta)}{\partial \theta}\right]^2}{I(\theta, \vec{x_n})}$$

Δ:

> 1. и 2. дифференцируемы по θ
>
> 1. $$\implies \int \hat{\theta} \frac{\partial L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta}\, d\vec{x} = \int \left[\hat{\theta} \frac{\partial \ln L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta}\right] \cdot L(\vec{x}, \theta)\, d\vec{x} = M(\hat{\theta} \frac{\partial \ln L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta}) = 1 + \frac{\partial \delta(\theta)}{\partial \theta}$$
> 2. $$\implies \int \left[\frac{\partial \ln L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta}\right] L(\vec{x}, \theta)\, d\vec{x} = M\left[\frac{\partial \ln L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta}\right] = 0$$
>
> 1.-2. θ:
>
> $$\int (\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial \ln L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta} L(\vec{x}, \theta)\, d\vec{x} = 1 + \frac{\partial \delta_{\hat{\theta}}(\theta)}{\partial \theta}$$
>
> $$M\left[(\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial \ln L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta} - M(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right] = 1 + \frac{\partial \delta_{\hat{\theta}}(\theta)}{\partial \theta}$$
>
> Неравенство Коши-Буняковского для математических ожиданий
>
> $$[M(\xi \cdot \eta)]^2 \leq M\xi^2 \cdot M\eta^2$$
>
> $$\left[1 + \frac{\partial \delta(\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \leq M(\hat{\theta} - \theta^2) M \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} - M \frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2$$
>
> $$M(\hat{\theta} - \theta)^2 \geq \frac{\left[1 + \frac{\partial \delta(\theta)}{\partial \theta}\right]^2}{M\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right]^2}$$

□

Показатель эффективности: $e(\hat{\theta}) = \frac{D_{\min}}{D(\hat{\theta})}$
Если $e(\hat{\theta}) = 1$, то $\hat{\theta}$ - эффективная
Если $e(\hat{\theta}) \to 1,\ n \to \infty$, то $\hat{\theta}$ - ассимптотически эффективная

Все вышеперечисленные результаты справедливы для дискретного распределения:
1. $p_\xi(x,\theta) = P(\xi = x, \theta)$
2. $\int \to \sum$

<u>Пример:</u>

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1$$

$$I(\vec{x_n}, \theta) = nI(x_1, \theta) = n \int \left[\frac{\partial \ln p_\xi(x,\theta)}{\partial \theta}\right]^2 \cdot p_\xi(x,\theta)\, dx$$

$$I(\vec{x_n}, \lambda = n \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\partial \lambda}\right]^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{\lambda} - 1\right)^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = ne^{-\lambda} \left[e^\lambda + \frac{1}{\lambda} e^\lambda - e^\lambda\right] = \frac{n}{\lambda} \implies$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad D\bar{x} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Dx_i = \frac{D\xi}{n} = \frac{\lambda}{n} \implies e(\bar{x}) = 1$$

<u>Теорема</u> (Критерий эффективности несмещенной оценки)
Пусть выполняются условия теорема Рао-Крамера
$\hat{\theta}(\vec{x_n})$ - несмещенная оценка θ
Тогда

$$(\hat{\theta}(\vec{x_n}) - \textit{эффективная}) \iff \left(\frac{\partial \ln L(\vec{x}, \theta)}{\partial \theta} = A(\theta) \cdot (\hat{\theta} - \theta)\right)$$

Метод статистического оценивания параметров

1. Максимального правдоподобия(ММП, МП)
   $L(\vec{x_n}, \theta) = p_\xi(x_1, \theta) \cdot \ldots \cdot p_\xi(x_n, \theta)$
   $\vec{x_n} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ - выборка генеральной совокупности ξ с $p_\xi(x,\theta)$
   $\hat{\theta}_{\min}(\vec{x_n}) = \arg\max L(\vec{x_n}, \theta)$
   Если $\hat{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_p\}$ - вектор оценки неизвестных параметров, то ММП оценки могут быть получены из

$$\frac{\partial \ln L(\vec{x_n}, \vec{\theta})}{\partial \theta_i} = 0,\ i = 1, \ldots, p$$

2. Метод моментов
   $\vec{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_p\}$ вектор неизвестных параметров распределения случайной величины γ, $p_\gamma = (x, \vec{\theta})$
   $\hat{\theta}_M M$ находится из следующей системы,

$$\begin{cases} \nu_s(\theta_1, \ldots, \theta_p) = \hat{\nu_s},\ s = 1, \ldots, p \\ \nu_s(\theta_1, \ldots \theta_p) = M\xi^2 = \int x^s p_\xi(x, \vec{\theta})\, dx \\ \hat{\nu}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^s \end{cases}$$

3. Байевское оценивание параметров
   Особенности:

   1. Интерпретация вероятности события, как степени нашего доверия событию
   2. Для принятия решения в качестве исходной информации используется одновременно инфеормация двух типов:
      - Априорная информация о явлении(параметре, эксперименте)
      - Информация из статистических данных $\vec{x_n}$
      $p(\theta) \to p(\theta, \vec{x_n}^{(1)}) \to p(\theta, \vec{x_n}^{(2)})$

   Алгоритм байевского оценивания
   1. Сбор априорных сведений о параметре $\theta \implies p(\theta)$ - априорное распределение
      В случае нехватки априорной информации

$$p(\theta) = \frac{1}{\theta_{\max} - \theta_{\min}},\ \theta \in [\theta_{\min},\ \theta_{\max}]$$

   2. Сбор статистических данных $x_1, x_2, \ldots, x_n \implies \vec{x_n}$ - выборка
   3. Функция правдоподобия

$$L(\vec{x_n} \mid \theta) = p_\xi(x_1 \mid \theta) \cdot \ldots \cdot p_\xi(x_n \mid \theta)$$

      $p_\xi(x \mid \theta)$ - функция плотности генеральной совокупности ξ в предположении, что значение параметра $= 0$
   4. Апостериорное распределение значений параметра θ

$$p(\theta \mid \vec{x}) = \frac{p(\theta) \cdot L(\vec{x} \mid \theta)}{p(\vec{x_n})} = \frac{p(\theta)\ L(\vec{x_n} \mid \theta)}{\int L(\vec{x}, \theta)\ p(\theta)\, d\theta}$$