

### 3. Эффективность

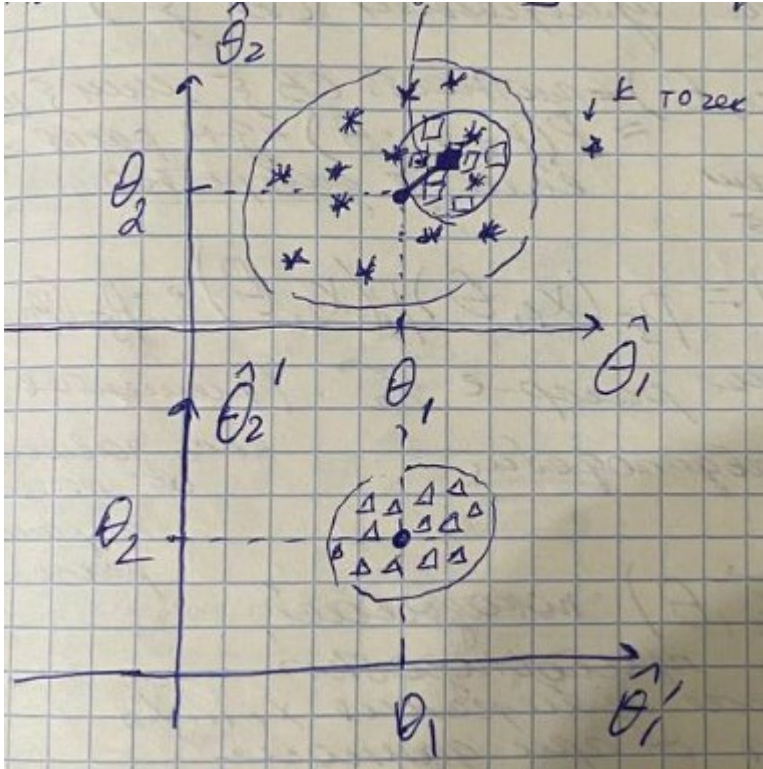
$\xi$  - случайная величина, измеряем  $n$  раз.

$$\vec{x}_n^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\} \Rightarrow (\hat{\theta}_1^{(1)}, \hat{\theta}_2^{(1)})$$

$$\vec{x}_n^{(2)} = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\} \Rightarrow (\hat{\theta}_1^{(2)}, \hat{\theta}_2^{(2)})$$

...

$$\vec{x}_n^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\} \Rightarrow (\hat{\theta}_1^{(k)}, \hat{\theta}_2^{(k)})$$



$\square$  - значения оценок

$\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*$  - смещенные оценки параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$

$\hat{\theta}_1', \hat{\theta}_2'$  - другие точные оценки значений тех же параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$

$\theta_1, \theta_2$  - точные значения

Опр. Оценка  $\hat{\theta}(\vec{x}_n)$  называется эффективной, если среди прочих оценок этого параметра она обладает наименьшей мерой разброса вокруг истинного значения параметра.

Мера разброса:  $M(\hat{\theta}(\vec{x}_n) - \theta)^2$

Если  $\hat{\theta}(\vec{x}_n)$  - несмещенная  $\Rightarrow M(\hat{\theta}(\vec{x}_n) - M(\hat{\theta}(\vec{x}_n)))^2 = D\hat{\theta}(\vec{x}_n)$

### Функция правдоподобия (ФП)

$\vec{x}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  выборка из генеральной совокупности  $\xi$  (выборка измерений СВ  $\xi$ )

Пусть  $p_\xi(x, \theta)$  - плотность СВ  $\xi$ , если  $\xi$  непрерывна, и  $= P(\xi = x; \theta)$  - закон распределения  $\xi$ , если  $\xi$  дискретно.

$\theta$  - неизвестный параметр распределения СВ  $\xi$

$$L(\vec{x}_n, \theta) = p_\xi(x_1, \theta) p_\xi(x_2, \theta) \dots p_\xi(x_n, \theta)$$

Совместное распределение  $\vec{x}_n$  (элементов выборки, которая зависит от неизвестного параметра  $\theta$  распределения СВ  $\xi$ )

ФП  $L(\vec{x}_n, \theta)$  показывает, насколько правдоподобны полученные измерения  $x_1, \dots, x_n$  случайной величины  $\xi$  при данном значении параметра  $\theta$ .

$L(\vec{x}_n, \theta) = f(\vec{x}_n)$  - ситуация нелуовой информации в  $\vec{x}_n$  по  $\theta$ .

## Информация Фишера

Опр. Кол-во информации Фишера содержащейся в наблюдениях  $\vec{x}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  определяется следующим образом.

$$I(\theta, \vec{x}_n) = M \left[ \frac{\partial \ln L(\vec{x}_n, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 = \int_{x_1} \dots \int_{x_n} \left[ \frac{\partial \ln L(\vec{x}_n, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \cdot L(\vec{x}_n, \theta) dx_1 \dots dx_n$$

1.  $I(\theta, \vec{x}_n) = n \cdot \int_{x_1} \left[ \frac{\partial \ln p_\xi(x, \theta)}{\partial \theta} \right]^2 p_\xi(x, \theta) dx$  - т.к.  $x_1, \dots, x_n$  одинаково распределены и взаимно независимы

Пример 1:

$\vec{x}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ , где  $x_i \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$I(a, \vec{x}_n) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln p_\xi(x, a, \sigma^2)}{\partial a} p_\xi(x, a, \sigma^2) dx = (1)$$

$$p_\xi(x, a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial \ln p_\xi(x, a, \sigma^2)}{\partial a} = \frac{x - a}{\sigma^2}$$

$$(1) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(x-a)^2}{\sigma^4} dx = \left( \frac{x-a}{\sigma} = y \right) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy = \frac{n}{\sigma^2}$$

## Неравенство Рао-Крамера-Фреше

Ищем нижнюю границу  $M(\hat{\theta}(\vec{x}_n) - \theta)^2$ ,  $\theta$  - неизвестный параметр распределения  $\xi$

Теорема (неравенство Р-К-Ф)

Рассмотрим класс всевозможных оценок  $\hat{\theta}(\vec{x}_n)$  параметра  $\theta$ , от которого зависит плотность вероятности  $p_\xi(x, \theta)$

Пусть

$$1. M\hat{\theta} = \int \dots \int \hat{\theta}(\vec{x}_n) L(\vec{x}_n, \theta) dx_1 \dots dx_n = \theta + \delta_{\hat{\theta}}(\theta)$$

$\delta_{\hat{\theta}}(\theta)$  - смещение,  $= 0$ , если  $\hat{\theta}$  - несмещенная

2. Плотность  $p_\xi(x, \theta)$  удовлетворяет следующим условиям регулярности в смысле ее зависимости от  $\theta$ .

2.1. Область всевозможных значений  $\xi$  ( $p_\xi(x, \theta) \neq 0$ ) не зависит от  $\theta$ .

2.2. В 1. и в  $\int \dots \int L(\vec{x}_n, \theta) dx_1 \dots dx_n = 1$  допустимо дифференцирование под интегралом и  $\exists \frac{\partial L(\vec{x}_n, \theta)}{\partial \theta}$ ,  $L(\vec{x}, \theta) > 0$

2.3.  $I(\vec{x}_n, \theta) \neq 0$

Тогда  $\forall$  оценки  $\hat{\theta}(\vec{x}_n)$  параметра  $\theta$  имеет место неравенство.

$$M(\hat{\theta}(\vec{x}_n) - \theta) \geq \left[ \frac{\partial M\hat{\theta}}{\partial \theta} \right]^2 / M \left[ \frac{\partial \ln L(\vec{x}_n, \theta)}{\partial \theta} \right]^2$$

или

$$M(\hat{\theta}(\vec{x}_n) - \theta)^2 \geq \frac{\left[ 1 + \frac{\partial \delta_{\hat{\theta}}(\theta)}{\partial \theta} \right]^2}{I(\theta, \vec{x}_n)} (*)$$

Если  $\hat{\theta}(\vec{x}_n)$  - несмещенная  $\implies D\hat{\theta}(\vec{x}_n) \geq \frac{1}{I(\theta, \vec{x}_n)} = D_{\min} (**)$

( $\hat{\theta}(\vec{x}_n)$  - эффективная)  $\iff$  (в неравенстве (\*) (или (\*\*)) достигается равенство)

Мера эффективности несмещенной оценки

$$e(\hat{\theta}) = \frac{D_{\min}}{D(\hat{\theta}(\vec{x}_n))} = \frac{1}{I(\vec{x}_n, \theta)} \cdot \frac{1}{D(\hat{\theta}(\vec{x}_n))}$$

Если  $e(\hat{\theta}) = 1 \implies \hat{\theta}$  - эффективная

Пример 2 (продолжение примера 1)

$\vec{x}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $x_i \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Нашли ранее:  $I(a; \vec{x}_n) = \frac{n}{\sigma^2}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad M\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Mx_i = M\xi = a \implies \bar{x} - \text{несмещенная}$$

$$D\bar{x} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Dx_i = \frac{nD\xi}{n^2} = \frac{D\xi}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$e(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{n}{\sigma^2} = 1 \implies \bar{x} - \text{эффективная оценка}$$