Глава 1 Элементарное введение в вариационное исчисление

§1. Основные понятия.

Вариационное исчисление связано с поиском экстремума некоторого функционала (по сути является функцией от функции)

Пусть V - ЛНП (над полем $\mathbb{R}$) с нормой $||y||$:
1. $||y|| \geq 0$, причем $||y|| = 0 \iff y = \theta$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \implies ||\alpha y|| = |\alpha| \cdot ||y||$
3. $\forall z, y \in \mathbb{R} \implies ||z + y|| \leq ||z|| + ||y||$

Для пространства $C\left([a; b]\right)$: $||y|| = \max |y\left(x\right)|$, $x \in [a; b]$
Для пространства $C^1\left([a; b]\right)$: $||y|| = \max\left\{\max|y\left(x\right)|, \max|y\left(x\right)|\right\}$, $x \in [a; b]$ или
$||y|| = \max|y\left(x\right)| + \max|y'\left(x\right)|$, $x \in [a; b]$
Аналогично вводится норма $C^n\left([a; b]\right)$, где $n \geq 2$

<u>Опр.1</u> Эпсилон окрестность точки y_0 - множество точек таких, что
$\left\{y\left(x\right) \in V \mid ||y\left(x\right) - y_0\left(x\right)|| < \epsilon\right\}$
Окрестность в C называется сильной окрестностью, в C^n $(\forall n \geq 1)$ называется слабой окрестностью.

<u>Замечание:</u> В слабую окрестность попадают функции с близкими значениями и с близкими значениями производных. В сильную же - только с близкими значениями. То есть в слабой окрестности функций меньше.

<u>Опр.2</u> Функционалом J называется закон(правило), по которому каждому элементу $y \in V$ (или $M \subset V$) ставится в соответствие действительное число(точка $\equiv$ кривой)
Обозначение: $J\left[y\right]$
Пример: $J\left[y\right] = \int_a^b y\left(x\right)dx$ на $C\left([a; b]\right)$, ...

<u>Опр.3</u> Функционал называется линейным на M, если:
$\forall y_1\left(x\right), y_2\left(x\right) \in M$ и $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies J\left[\alpha_1 y_1\left(x\right) + \alpha_2 y_2\left(x\right)\right] = \alpha_1 J\left[y_1\right] + \alpha_2 J\left[y_2\right]$

<u>Опр.4</u> Будем говорить, что $J\left[y\right]$ достигает локального максимума в точке y_0 (на кривой $y_0\left(x\right)$), если:
$\exists U_\epsilon\left(y_0\right) = \left\{y \in M \mid ||y - y_0|| < \epsilon\right\}$: $\forall y\left(x\right) \in U_\epsilon\left(y_0\right) \implies J\left[y_0\right] \geq J\left[y\right]$

Если $U_\epsilon\left(y_0\right)$ - сильная, то такой максимум называется сильным.
Если $U_\epsilon\left(y_0\right)$ - слабая, то такой максимум называется слабым.
<u>Замечание:</u> Каждый сильный максимум является слабым, но не наоборот.

<u>Опр.5</u> Аналогичные выкладки справедливы для локального минимума.

Опр.6 Точки локального $\max$ и $\min$ называется точками экстремума (экстремальными кривыми)

Опр.7 Вариацией кривой $y(x) \in M$ называется произвольное приращение этой кривой. Обозначение: $\delta y = \tilde{y}(x) - y(x)$, если $y(x) \in M \to \tilde{y}(x) \in M$

Замечание: Далее рассматриваем только допустимые вариации, т.е. такие, что: $y(x) + \delta(y) \in M$, если $y(x) \in M$

Опр.8 Пусть кривой $y_0(x)$ дали приращение δy. Тогда рассмотрим разность:
$J[y_0 + \delta y] - J[y_0] = \Delta J[y_0]$
Если приращение функционала J\left[y\right] в точке y_0 можно представить в виде:
$\Delta J[y_0] = L[y_0, \delta y] + o(||\delta y||)$, где L - линейный оператор по 2-ому аргументу, тогда функционал J называется дифференцируемым по Фреше в точке y_0, а линейная часть приращения $L[y_0, \delta y]$ называется вариацией функционала J в точке y_0.
Замечание: Дифференцируем по Фреше $\equiv$ дифференцируем в широком смысле.
Обозначение: $\delta J[y_0] \equiv L[y_0, \delta y]$

Опр.9 Если $\exists \frac{d}{d\alpha}(J[y_0 + \alpha \delta y]) |_{\alpha=0}$, то $J[y]$ называется дифференцируемым по Гато в точке y_0, а значение этой производной называется вариацией по Гато.
Замечание: Диф. по Фреше $\implies$ диф. по Гато. В общем случае обратное неверно, но в дальнейшем для интегральных функицоналов эти понятия тождественны, поэтому для упрощения понимания, будем пользоваться определением по Гато.

T1 (Необходимое условие экстремума)
(Функционал $J[y]$ достигает экстремума во внтуренней точке y_0 множества M) $\implies$ ($\delta J[y_0] = 0$)

Δ:

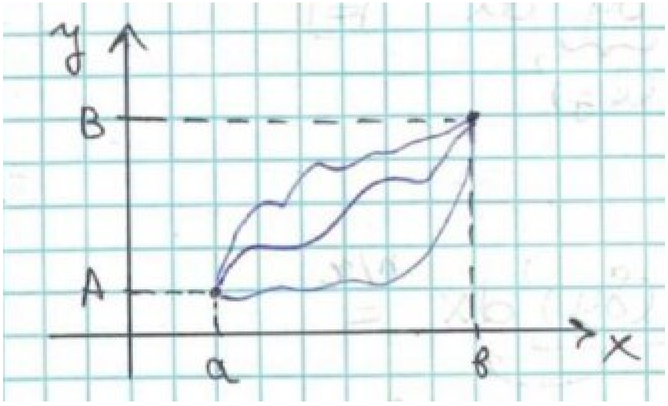
> Пусть для определенности достигается $\min$, тогда:
> $\exists U_\epsilon(y_0)$: $\forall y(x) \in U_\epsilon(y_0) \implies J[y] \geq J[y_0]$
> Пусть δy - произвольное приращение (допустимое). Возьмем $\alpha > 0$: $|\alpha| < \frac{\epsilon}{||\delta y||}$
> Тогда: $J[y_0 + \alpha \cdot \delta y] \geq J[y_0]$
>
> Рассмотрим $f(\alpha) = J[y_0 + \alpha \cdot \delta y]$.Тогда
>
> $$\left(\forall \alpha \left(|\alpha| < \frac{\epsilon}{||\delta y||} \implies f(\alpha) \geq f(0)\right)\right) \implies (\min f(\alpha) = f(\alpha = 0))$$
>
> Знаем, что $J[y]$ дифференцируем в точке y_0, т.е.:
>
> $$\exists \frac{d}{d\alpha}(J[y_0 + \alpha \cdot \delta y] |_{\alpha=0}) \implies (\exists f'(0))$$
>
> Из курса математического анализа: $f'(0) = 0$
> Но $(f'(0) = \delta J[y_0])$. Тогда: $\delta J[y_0] = 0$

> Аналогично доказывается для максимума.

□

<u>Замечание:</u> <u>Т1</u> является необходимым условием для слабого экстремума, а следовательно, и для сильного экстремума.

§2. Простейшая задача вариационного исчисления.



Рассмотрим $M = \left\{y \in C^1\left(\{a; b\}\right) : y\left(a\right) = A; y\left(b\right) = B\right\}$
Рассмотрим функционал (1) $J\left[y\right] = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx$
$F(x, y, p$ - заданная функция, будем считать ее непрерывной.
Функционал $J\left[y\right]$ называется функционалом с закрепленными концами.
Задача нахождения экстремума функционала (1) на множестве M (гладкая кривая с закрепленными концами) называется простейшей задачей вариационного ичисления.
Что значит условие $\delta J\left[y\right] = 0$, для функционала (1) с закрепленными концами:
$y\left(a\right) = A$, $y\left(b\right) = B$
<u>Замечание:</u>
1. Все допустимые вариации удовлетворяют условию: $\delta y\left(a\right) = \delta y\left(b\right) = 0$
2. $(\delta y)' = (\tilde{y} - y)' = \tilde{y}' - y' = \delta y'$

Рассмотрим вариацию по Гато:
$\frac{d}{d\alpha}(J\left[y + \alpha \cdot \delta y\right]) = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b F\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'\right) dx\right) = (2)$
Будем считать, что $F\left(x, y, p\right)$ непрерывна с частными производными до 2-ого порядка.
J - собственный интеграл, зависящий от параметра, тогда:
$(2) = \int_a^b \left(F'_y\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y\right)\delta y + F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'\right)\delta y'\right) dx$
Рассмотрим второй интеграл:
$\int_a^b F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y; + \alpha \cdot \delta y'\right)(\delta y)' \, dx = F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \delta y'\right)\delta y \mid_a^b - \int_a^b \delta y \cdot \frac{d}{dx}\left(F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta\right.\right.$
Тогда (2) $= \int_a^b \left(F'_y\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'\right) - \frac{d}{dx}\left(F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'\right)\right)\right) \cdot \delta y \, dx$

Полагаем, что $\alpha = 0$. Тогда:
$\int_a^b \left(F'_y\left(x, y, y'\right) - \frac{d}{dx}\left(F'_p\left(x, y, y'\right)\right)\right)\delta y \, dx = 0$
Отсюда получаем следующее:
$F'_y\left(x, y, y'\right) - \frac{d}{dx}\left(F'_p\left(x, y, y'\right)\right) = 0$ (3)
Обоснуем этот переход ниже:

<u>Лемма:</u> (Основная лемма вариационного исчисления)
Пусть $\phi(x) \in C([a;b])$ и $\forall h(x) \in C^1([a;b])$ $h(a) = h(b) = 0$ выполняется:

$$\int_a^b \phi(x) h(x)\, dx = 0,$$

тогда: $\phi(x) \equiv 0$ на $[a;b]$.

Δ:

> Предположим противное: $\phi(x) \neq 0$, для определенности(без ограничения общности(БОО)) будем считать, что $\phi(x_0) > 0$.
> В силу непрерывности:
> $\exists U_\epsilon(x_0) \subset [a;b]$ $\phi(x) \geq \frac{1}{2}\phi(x_0)$
> В таком случае рассмотрим следующую функцию:
> $h(x) > 0$, $x \in U_\epsilon(x_0)$; $h(x) \equiv 0$, $x \notin U_\epsilon(x_0)$
> Тогда:
> $\int_a^b \phi(x) h(x)\, dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \phi(x) h(x)\, dx \geq \frac{\phi(x_0)}{2} \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} h(x)\, dx > 0 \implies$ противоречие
> Таким образом, $\phi(x) \equiv 0$

$\square$

Обоснование перехода в (3):

Возьмём $\phi(x) = F'_y - \frac{d}{dx}\left(F'_p\right) = F'_y - (F''_{xp} + F''_{yp} \cdot y' + F''_{pp} y'')$
$\phi(x)$ - непрерывная функция на $[a;b]$, так как $y(x) \in C^2([a;b])$.
В качестве $h(x) = \delta y \in C^1([a;b])$, тогда по основной лемме ВИ из (3) следует, что:
$\phi(x) \equiv 0$, то есть:
$F'_y - \frac{d}{dx}\left(F'_p\right) = 0$ (4)
Это уравнение называется уравнением Эйлера.
Таким образом, имеет место теорема:

<u>Т1</u> (Необходимое условие экстремума функционала с закрепленными концами)
Пусть имеем (1) и (2) и выполнены следующие условия:
1. $y(x) \in C^2([a;b])$;
2. $y(x)$ реализует экстремум функционала (1)
3. $F(x, y, p)$ - непрерывна со своими частными производными до второго порядка включительно.

Тогда $y(x)$ - является решением краевой задачи Эйлера(КЗЭ):

$$\begin{cases} F'_y - \frac{d}{dx}\left(F'_y\right) = 0 \\ y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases}$$

Δ:

> (б/д)

☐