Глава 1 Элементарное введение в вариационное исчисление

§1. Основные понятия.

Вариационное исчисление связано с поиском экстремума некоторого функционала (по сути является функцией от функции)

Пусть V - ЛНП (над полем $\mathbb{R}$) с нормой $||y||$:
1. $||y|| \geq 0$, причем $||y|| = 0 \iff y = \theta$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \implies ||\alpha y|| = |\alpha| \cdot ||y||$
3. $\forall z, y \in \mathbb{R} \implies ||z + y|| \leq ||z|| + ||y||$

Для пространства $C\left([a; b]\right)$: $||y|| = \max|y\left(x\right)|$, $x \in [a; b]$
Для пространства $C^1\left([a; b]\right)$: $||y|| = \max\left\{\max|y\left(x\right)|, \max|y\left(x\right)|\right\}$, $x \in [a; b]$ или
$||y|| = \max|y\left(x\right)| + \max|y'\left(x\right)|$, $x \in [a; b]$
Аналогично вводится норма $C^n\left([a; b]\right)$, где $n \geq 2$

Опр.1 Эпсилон окрестность точки y_0 - множество точек таких, что
$\left\{y\left(x\right) \in V \mid ||y\left(x\right) - y_0\left(x\right)|| < \epsilon\right\}$
Окрестность в C называется сильной окрестностью, в C^n ($\forall n \geq 1$) называется слабой окрестностью.

Замечание: В слабую окрестность попадают функции с близкими значениями и с близкими значениями производных. В сильную же - только с близкими значениями. То есть в слабой окрестности функций меньше.

Опр.2 Функционалом J называется закон(правило), по которому каждому элементу $y \in V$ (или $M \subset V$) ставится в соответствие действительное число(точка $\equiv$ кривой)
Обозначение: $J\left[y\right]$
Пример: $J\left[y\right] = \int_a^b y\left(x\right)dx$ на $C\left([a; b]\right)$, ...

Опр.3 Функционал называется линейным на M, если:
$\forall y_1\left(x\right), y_2\left(x\right) \in M$ и $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies J\left[\alpha_1 y_1\left(x\right) + \alpha_2 y_2\left(x\right)\right] = \alpha_1 J\left[y_1\right] + \alpha_2 J\left[y_2\right]$

Опр.4 Будем говорить, что $J\left[y\right]$ достигает локального максимума в точке y_0 (на кривой $y_0\left(x\right)$), если:
$\exists U_\epsilon\left(y_0\right) = \left\{y \in M \mid ||y - y_0|| < \epsilon\right\}$: $\forall y\left(x\right) \in U_\epsilon\left(y_0\right) \implies J\left[y_0\right] \geq J\left[y\right]$

Если $U_\epsilon\left(y_0\right)$ - сильная, то такой максимум называется сильным.
Если $U_\epsilon\left(y_0\right)$ - слабая, то такой максимум называется слабым.
Замечание: Каждый сильный максимум является слабым, но не наоборот.

Опр.5 Аналогичные выкладки справедливы для локального минимума.

<u>Опр.6</u> Точки локального $\max$ и $\min$ называется точками экстремума (экстремальными кривыми)

<u>Опр.7</u> Вариацией кривой $y\left(x\right)\in M$ называется произвольное приращение этой кривой.
Обозначение: $\delta y=\tilde{y}\left(x\right)-y\left(x\right)$, если $y\left(x\right)\in M\to\tilde{y}\left(x\right)\in M$

<u>Замечание:</u> Далее рассматриваем только допустимые вариации, т.е. такие, что:
$y\left(x\right)+\delta\left(y\right)\in M$, если $y\left(x\right)\in M$

<u>Опр.8</u> Пусть кривой $y_0\left(x\right)$ дали приращение δy. Тогда рассмотрим разность:
$J\left[y_0+\delta y\right]-J\left[y_0\right]=\Delta J\left[y_0\right]$
Если приращение функционала J\left[y\right] в точке y_0 можно представить в виде:
$\Delta J\left[y_0\right]=L\left[y_0,\delta y\right]+o\left(||\delta y||\right)$, где L - линейный оператор по 2-ому аргументу, тогда функционал J называется <u>дифференцируемым</u> по Фреше в точке y_0, а линейная часть приращения $L\left[y_0,\delta y\right]$ называется вариацией функционала J в точке y_0.
<u>Замечание:</u> Дифференцируем по Фреше $\equiv$ дифференцируем в широком смысле.
Обозначение: $\delta J\left[y_0\right]\equiv L\left[y_0,\delta y\right]$

<u>Опр.9</u> Если $\exists\frac{d}{d\alpha}\left(J\left[y_0+\alpha\delta y\right]\right)|_{\alpha=0}$, то $J\left[y\right]$ называется дифференцируемым по Гато в точке y_0, а значение этой производной называется вариацией по Гато.
<u>Замечание:</u> Диф. по Фреше $\implies$ диф. по Гато. В общем случае обратное неверно, но в дальнейшем для интегральных функицоналов эти понятия тождественны, поэтому для упрощения понимания, будем пользоваться определением по Гато.

<u>Т1</u> (Необходимое условие экстремума)
(Функционал $J\left[y\right]$ достигает экстремума во внтуренней точке y_0 множества M) $\implies$ ($\delta J\left[y_0\right]=0$)

Δ:

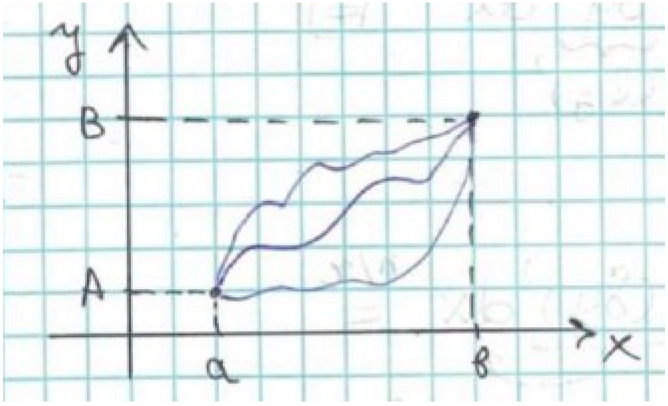
> Пусть для определенности достигается $\min$, тогда:
> $\exists U_\epsilon\left(y_0\right)$: $\forall y\left(x\right)\in U_\epsilon\left(y_0\right)\implies J\left[y\right]\geq J\left[y_0\right]$
> Пусть δy - произвольное приращение (допустимое). Возьмем $\alpha>0$: $|\alpha|<\frac{\epsilon}{||\delta y||}$
> Тогда: $J\left[y_0+\alpha\cdot\delta y\right]\geq J\left[y_0\right]$
>
> Рассмотрим $f\left(\alpha\right)=J\left[y_0+\alpha\cdot\delta y\right]$.Тогда
>
> $$\left(\forall\alpha\left(|\alpha|<\frac{\epsilon}{||\delta y||}\implies f\left(\alpha\right)\geq f\left(0\right)\right)\right)\implies\left(\min f\left(\alpha\right)=f\left(\alpha=0\right)\right)$$
>
> Знаем, что $J\left[y\right]$ дифференцируем в точке y_0, т.е.:
>
> $$\exists\frac{d}{d\alpha}\left(J\left[y_0+\alpha\cdot\delta y\right]|_{\alpha=0}\right)\implies\left(\exists f'\left(0\right)\right)$$
>
> Из курса математического анализа: $f'\left(0\right)=0$
> Но $\left(f'\left(0\right)=\delta J\left[y_0\right]\right)$. Тогда: $\delta J\left[y_0\right]=0$

> Аналогично доказывается для максимума.

□

<u>Замечание:</u> <u>Т1</u> является необходимым условием для слабого экстремума, а следовательно, и для сильного экстремума.

§2. Простейшая задача вариационного исчисления.



Рассмотрим $M = \left\{y \in C^1\left(\{a;b\}\right) : y\left(a\right) = A; y\left(b\right) = B\right\}$
Рассмотрим функционал (1) $J\left[y\right] = \int_a^b F\left(x, y, y'\right)dx$
$F(x, y, p$ - заданная функция, будем считать ее непрерывной.
Функционал $J\left[y\right]$ называется функционалом с закрепленными концами.
Задача нахождения экстремума функционала (1) на множестве M (гладкая кривая с закрепленными концами) называется простейшей задачей вариационного ичисления.
Что значит условие $\delta J\left[y\right] = 0$, для функционала (1) с закрепленными концами:
$y\left(a\right) = A$, $y\left(b\right) = B$
<u>Замечание:</u>
1. Все допустимые вариации удовлетворяют условию: $\delta y\left(a\right) = \delta y\left(b\right) = 0$
2. $(\delta y)' = (\tilde{y} - y)' = \tilde{y}' - y' = \delta y'$

Рассмотрим вариацию по Гато:
$\frac{d}{d\alpha}(J\left[y + \alpha \cdot \delta y\right]) = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b F\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'\right)dx\right) =$ (2)
Будем считать, что $F\left(x, y, p\right)$ непрерывна с частными производными до 2-ого порядка.
J - собственный интеграл, зависящий от параметра, тогда:
(2) $= \int_a^b \left(F'_y\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y\right)\delta y + F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'\right)\delta y'\right)dx$
Рассмотрим второй интеграл:
$\int_a^b F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y; + \alpha \cdot \delta y'\right)(\delta y)'\,dx = F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha\delta y'\right)\delta y\mid_a^b - \int_a^b \delta y \cdot \frac{d}{dx}\left(F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta\right.\right.$
Тогда (2) $= \int_a^b \left(F'_y\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'\right) - \frac{d}{dx}\left(F'_p\left(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'\right)\right)\right) \cdot \delta y\,dx$

Полагаем, что $\alpha = 0$. Тогда:
$\int_a^b \left(F'_y\left(x, y, y'\right) - \frac{d}{dx}\left(F'_p\left(x, y, y'\right)\right)\right)\delta y\,dx = 0$
Отсюда получаем следующее:
$F'_y\left(x, y, y'\right) - \frac{d}{dx}\left(F'_p\left(x, y, y'\right)\right) = 0$
Обоснуем этот переход ниже:

to be continued...