§5. Вариационные задачи с подвижными границами

Рассмотрим гладкую кривую, по которой "бегает" один из концов исследуемой кривой (другой конец закреплен)
Исследуем следующий функционал:
$(1)\ J[y] = \int_a^{x_2} F(x, y, y')\, dx \longrightarrow extr?$
Функции $F(x, y, y')$ и $\phi(x_2)$ заданы.
(2):

$$\begin{cases} y(a) = A \\ y(x_2) = \phi(x_2) \\ y \in C^1([a;b]) \\ x_2 \in [a;b] \end{cases}$$

<u>T1</u> (Необходимое условие экстремума функционала с подвижной правой границей)
Пусть выполнены следующие условия:
1. $y(x) \in C^2([a;b])$
2. $y(x)$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (1) при условии (2);
3. $F(x, y, p)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
4. $\phi(x) \in C^1([a;b])$.

Тогда $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_p = 0$ с дополнительными условиями (2), а на правом конце выполняется условие трансверсальности (УТ).

$$(F - (y' - \phi'(x))F'_p)\ |_{x=x_2} = 0$$

Δ:

> (б/д)

□

<u>Замечание:</u> УТ накладывает ограничения на угол пересечения экстремали и кривой $y = \phi(x)$.

Аналогично можно рассмотреть задачу с фиксированным правым концом и с "бегающим" левым:
Здесь получаем:
$(3)\ J[y] = \int_{x_1}^{b} F(x, y, y')\, dx \longrightarrow extr?$
(4):

$$\begin{cases} y(x_1) = \phi(x_1) \\ y(b) = B \\ y \in C^1([a;b]) \\ x_1 \in [a;b] \end{cases}$$

Т2 (Необходимое условие экстремума функционала с подвижной левой границей)
Пусть выполнены условия:
1. $y(x) \in C^2([a;b])$;
2. $y(x)$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (3) при условиях (4);
3. $F(x, y, p)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
4. $\psi(x) \in C^1([a;b])$.
Тогда $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_p = 0$ с дополнительными условиями (4), а на левом конце выполняется условие трансверсальности:

$$(F - (y' - \psi'(x))F'_p) \mid_{x=x_1} = 0$$

Δ:

> (б/д)

□

Также можем рассмотреть задачу о функционале с двумя подвижными концами:
(5) $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \longrightarrow extr?$
(6):

$$\begin{cases} y(x_1) = \psi(x_1) \\ y(x_2) = \phi(x_2) \\ y \in C^1([a;b]) \\ x_1, x_2 \in [a;b] \end{cases}$$

Т3 (Необходимое условие экстремума функционала с двумя подвижными границами)
Пусть выполнены следующие условия:
1. $y(x) \in C^2([a;b])$;
2. $y(x)$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (5) при условиях (6);
3. $F(x, y, p)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
4. $\psi(x)$, $\phi(x) \in C^1([a;b])$;
Тогда: $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера: $F'_y - \frac{d}{dx}F'_p = 0$ с дополнительными условиями (2), а на левом конце выполняется условие трансверсальности:

$$(F - (y; -\phi'(x))F'_p) \mid_{x=x_2} = 0$$

$$(F - (y; -\psi'(x))F'_p) \mid_{x=x_1} = 0$$

Δ:

> (б/д)

□

Пример: (Найти $min\rho(y = x^2, y = x - 5)$)
$\rho = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$

$y(x_1) = x_1^2$

$y(x_2) = x_2 - 5$

из §3. знаем, что для $F = F(p)$ экстремалями будут являться прямые линии:

$y = C_1x + C_2 \implies y' = C_1$

Находим C_1, C_2 из граничных условий и условий трансверсальности:

ГУ:

$$\begin{cases} C_1x_1 + C_2 = x_1^2 \\ C_1x_2 + C_2 = x_2 - 5 \end{cases}$$

УТ:

$$\begin{cases} \sqrt{1 + C_1^2} - (C_1 - 2x_1) \cdot \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0 \\ \sqrt{1 + C_1^2} - (C_1 - 1) \cdot \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0 \end{cases}$$

Домножив оба равенства на $\sqrt{1 + C_1^2}$, получим:

$$\begin{cases} 1 + C_1^2 - C_1^2 + 2x_1C_1 = 0 \\ 1 + C_1^2 - C_1^2 + C_1 = 0 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} C_1 = -1 \\ x_1 = 1/2 \end{cases}$$

Теперь воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{cases} -1/2 + C_2 = 1/4 \implies C_2 = 3/4, \\ -x_2 + C_2 = x_2 - 5 \implies 2x_2 = C_2 + 5 \implies x_2 = 23/8. \end{cases}$$

Получили следующую экстремаль:

$y = 3/4 - x$ (по физическому смыслу реализует минимум)

$$\rho_{\min} = J[\frac{3}{4} - x] = \int_{1/2}^{23/8} \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx = \sqrt{2}(\frac{23}{8} - \frac{1}{2}) = \frac{19\sqrt{2}}{8}$$

§6. Условный экстремум.

Рассмотрим функционал от двух кривых:

(1) $J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z')\, dx \longrightarrow extr?$

(2): Считаем, что $y(x), z(x) \in C^1([a; b])$, а функция $F(x, y, z, p, q)$ задана.

$$\begin{cases} y(a) = A_1 \\ y(b) = B_1 \\ z(a) = A_2 \\ z(b) = B_2 \end{cases}$$

$(+)$ Дополнительное условие:

(A) либо $\Phi(x, y, z, y', z') = 0$ (неголономная связь)
(B) либо $\Phi(x, y, z) = 0$ (голономная связь)

Замечание: Голономная связь накладывает ограничения на геометрические параметры системы, неголономная же также ограничивает и кинематические свойства системы (x, y, z - координаты, y', z' - скорости).

T1 (Необходимые условия экстремума функционала с неголономной связью)
Пусть выполнены следующие условия:
1. Функции $y(x)$, $z(x) \in C^2([a;b])$;
2. Пара $(y(x)$, $z(x))$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (1) при условии (2) и со связью (A);
3. $F(x, y, z, p, q)$, $\Phi(x, y, z, y', z')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
4. $\Phi'_p \neq 0 \vee \Phi'_q \neq 0$.
Тогда $\exists$ непрерывно-дифференцируемая функция $\lambda(x)$: пара $(y(x)$, $z(x))$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера для функционала:
$\widetilde{J}[y, z] = \int_a^b (F(x, y, z, y', z') + \lambda(x) \cdot \Phi(x, y, z, y', z'))\, dx$, то есть:

$$\begin{cases} F'_y + \lambda \Phi'_y - \frac{d}{dx}(F'_p + \lambda \Phi'_p) = 0 \\ F'_z + \lambda \Phi'_z - \frac{d}{dx}(F'_q + \lambda \Phi'_q) = 0 \end{cases}$$

с дополнительными условиями:

$$\begin{cases} y(a) = A_1 \\ y(b) = B_1 \\ z(a) = A_2 \\ z(b) = B_2 \\ \Phi(x, y, z, y', z') = 0 \end{cases}$$

Δ:

> (б/д)

□

Замечание: Все рассматриваемые условия - необходимые, достаточные условия вытекают либо из физического смысла, либо из геометрического смысла задачи.

В случае голономной связи, во-первых $\Phi'_p \equiv 0$ и $\Phi'_q \equiv 0$ (не выполнены условия прошлой T); во-вторых, краевые условия является зависимым, так как:
$\Phi(a, A_1, A_2) = 0$, $\Phi(b, B_1, B_2) = 0$
В связи с этим имеем следующую теорему:

T2 (Необходимые условия экстремума функционала с голономной связью)
Пусть выполнены следующие условия:
1. $y(x), z(x) \in C^2([a;b])$;
2. Пара $(y(x)$, $z(x))$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (1) при

условии (2) и со связью (В);
3. $F(x,y,z,p,q)$ непрерывна с частными производными до второго порядка включительно;
4. $\Phi(x,y,z)$ непрерывна с частными производными первого порядка;
5. $\Phi'_y \neq 0 \vee \Phi'_z \neq 0$.
Тогда $\exists$ непрерывная функция $\lambda(x)$: пара $(y(x),\, z(x))$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера для функционала:
$\hat{J}[y,z] = \int_a^b (F(x,y,z,y',z') + \lambda(x)\Phi(x,y,z))\,dx$, то есть:

$$\begin{cases} F'_y + \lambda\Phi'_y - \frac{d}{dx}F'_p = 0 \\ F'_z + \lambda\Phi'_z - \frac{d}{dx}F'_q = 0 \end{cases}$$

с дополнительными условиями:

$$\begin{cases} y(a) = A_1 \\ y(b) = B_1 \\ \Phi(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

причем автоматически:

$$\begin{cases} z(a) = A_2 \\ z(b) = B_2, \end{cases}$$

где $A_2,\, B_2$ удовлетворяют условиям: $\Phi(a,A_1,A_2) = 0$, $\Phi(b,B_1,B_2) = 0$

Δ:

> (б/д)

□

<u>Пример:</u> (Нахождение геодезических линий)
$\Phi(x,y,z) = 0$
Тогда нужно найти:
$\min J[y,z] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\,dx$
$y(a) = A_1,\, y(b) = B_1$
$z(a) = A_2,\, z(b) = B_2$
$\Phi(x,z,z) = 0$
$\Phi(a,A_1,A_2) = 0$
$\Phi(b,B_1,B_2) = 0$

При этом, мы считаем, что линия минимальной длины может быть параметризована:
$x \in [a;b]$

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

<u>Пример:</u> (Изопараметрическая задача)
$J_1[y,z] = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \longrightarrow extr?$

$y(a) = A_1$, $y(b) = B_1$

С дополнительными условиями:

$J_2[y] = \int_a^b G(x, y, y')\,dx = l = const$

$J_2 = \int_a^b \sqrt{q + (y')^2}\,dx = l$

Рассмотрим $z(x) = \int_a^x G(x, y, y')\,dx$

Тогда: $z(a) = 0$, $z(b) = l$, $z'(x) = G(x, y, y')$

Рассмотрим задачу поиска экстремума:

$J[y, z] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$

$y(a) = A_1$, $y(b) = B_1$, $z(a) = 0$, $z(b) = l$

Из того, что связь неголономная:

$z'(x) - G(x, y, y') = 0$

Применим <u>T</u> о неголономной связи:

$\widetilde{J}[y, z] = \int_a^b (F(x, y, y') + \lambda(x)(z'(x) - G(x, y, y')))\,dx \implies$

$$\begin{cases} F'_y + \frac{d}{dx}(\lambda G'_p) = 0 \\ -\frac{d}{dx}\lambda(x) = 0 \implies \lambda = const \end{cases}$$

Хорошим примером изопериметрической задачи является задача Дидоны:

$\max J[y] = \int_{-a}^a y\,dx$

$y(a) = y(-a) = A$

$J_2[y] = \int_{-a}^a \sqrt{q + (y')^2}\,dx = 2l > 2a$

$z(x) = \int_{-a}^x \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \implies z(-a) = 0$, $z(a) = 2l$

$z'(x) = \sqrt{1 + (y')^2} \implies z' - \sqrt{1 + (y')^2} = 0$ - неголономная связь

To be continued...