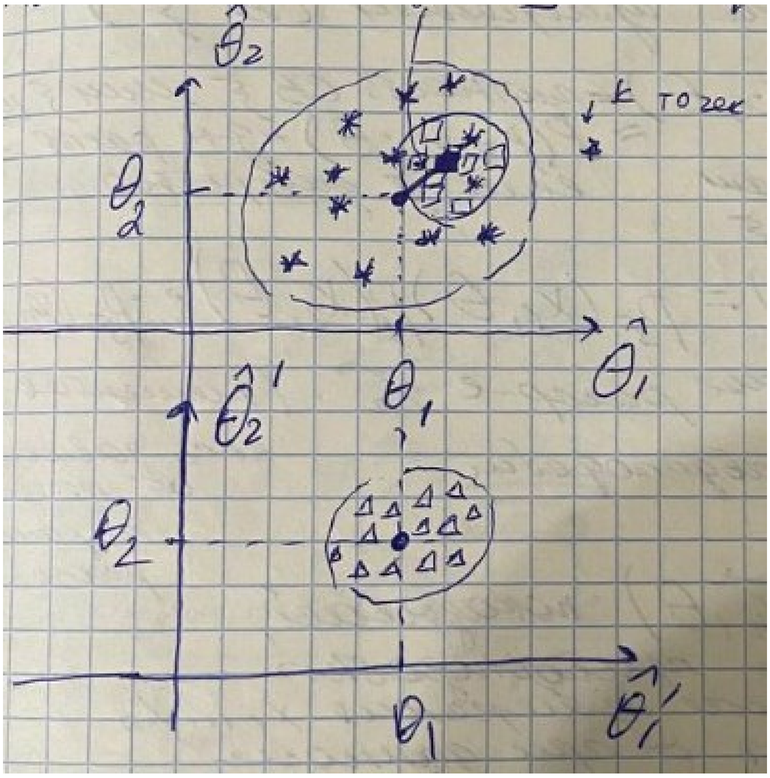
3. Эффективность

ξ - случайная величина, измеряем n раз.
$\vec{x_n}^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\} \implies (\hat{\theta_1}^{(1)}, \hat{\theta_2}^{(1)})$
$\vec{x_n}^{(2)} = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\} \implies (\hat{\theta_1}^{(2)}, \hat{\theta_2}^{(2)})$
...
$\vec{x_n}^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\} \implies (\hat{\theta_1}^{(k)}, \hat{\theta_2}^{(k)})$



□ - значения оценок
$\hat{\theta_1}^*$, $\hat{\theta_2}^*$ - смещенные оценки параметров θ_1 и θ_2
$\hat{\theta_1}', \hat{\theta_2}'$ - другие точные оценки значений тех же параметров θ_1 и θ_2
θ_1, θ_2 - точные значения

Опр. Оценка $\hat{\theta}(\vec{x_n})$ называется эффективной, если среди прочих оценок этого параметраона обладает наименьшей мерой разброса вокруг истинного значения параметра.
Мера разброса: $M(\hat{\theta}(\vec{x_n}) - \theta)^2$
Если $\hat{\theta}(\vec{x_n})$ - несмещенная $\implies M(\hat{\theta}(\vec{x_n}) - M(\hat{\theta}(\vec{x_n})))^2 = D\hat{\theta}(\vec{x_n})$

Функция правдоподобия (ФП)

$\vec{x_n} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ выборка из генеральной совокупности ξ (выборка измерений СВ ξ)

Пусть $p_\xi(x, \theta)$ - плотность СВ ξ, если ξ непрерывна, и $= P(\xi = x; \theta)$ - закон распределения ξ, если ξ дискретно.

θ - неизвестный параметр распределения СВ ξ

$$L(\vec{x_n}, \theta) = p_\xi(x_1, \theta) p_\xi(x_2, \theta) \cdot \ldots \cdot p_\xi(x_n, \theta)$$

Совместное распределение $\vec{x_n}$ (элементов выборки, которая зависит от неизвестного параметра θ распределения СВ ξ)

ФП $L(\vec{x_n}, \theta)$ показывает, насколько правдоподобны полученные измерения $x_1, \ldots, x_n$ случайной величины ξ при данном значении параметра θ.
$L(\vec{x_n}, \theta) = f(\vec{x_n})$ - ситуация нелувой информации в $\vec{x_n}$ по θ.

Информация Фишера

Опр. Кол-во информации Фишера содержащейся в наблюдениях $\vec{x_n} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ определяется следующим образом.

$$I(\theta, \vec{x_n}) = M\left[\frac{\partial \ln L(\vec{x_n}, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 = \int_{x_1} \cdots \int_{x_n} \left[\frac{\partial \ln L(\vec{x_n}, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 \cdot L(\vec{x_n}, \theta)\, dx_1 \ldots dx_n$$

1. $I(\theta, \vec{x_n}) = n \cdot \int_{x_1} \left[\frac{\partial \ln p_\xi(x, \theta)}{\partial \theta}\right]^2 p_\xi(x_1, \theta)\, dx_1$ - т.к. $x_1, \ldots, x_n$ одинаково распределены и взаимно независимы

Пример 1:
$\vec{x_n} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $x_i \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$I(a, \vec{x_n}) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln p_\xi(x, a, \sigma^2)}{\partial a} p_\xi(x, a, \sigma^2)\, dx = (1)$$

$$p_\xi(x, a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial \ln p_\xi(x, a, \sigma^2)}{\partial a} = \frac{x-a}{\sigma^2}$$

$$(1) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(x-a)^2}{\sigma^4}\, dx = \left(\frac{x-a}{\sigma} = y\right) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2/2}\, dy = \frac{n}{\sigma^2}$$

Неравенство Рао-Крамера-Фреше

Ищем нижнюю границу $M(\hat{\theta}(\vec{x_n}) - \theta)^2$, θ - неизвестный параметр распределения ξ

Теорема (неравенство Р-К-Ф)
Рассмотрим класс всевозможных оценок $\hat{\theta}(\vec{x_n})$ параметра θ, от которого зависит плотность вероятности $p_\xi(x, \theta)$
Пусть
1. $M\hat{\theta} = \int \cdots \int \hat{\theta}(\vec{x_n}) L(\vec{x_n}, \theta)\, dx_1 \cdots dx_n = \theta + \delta_{\hat{\theta}}(\theta)$
$\delta_{\hat{\theta}}(\theta)$ - смещение, $= 0$, если $\hat{\theta}$ - несмешенная
2. Плотность $p_\xi(x, \theta)$ удовлетворяет следующим условиям регулярности в смысле ее зависимости от θ.

2.1. Область всевозможных значений ξ ($p_\xi(x,\theta) \neq 0$) не щависит от θ.
2.2. В 1. и в $\int \cdots \int L(\vec{x_n},\theta)\, dx_1 \cdots dx_n = 1$ допустимо дифференцирование под интегралом и $\exists \frac{\partial L(\vec{x_n},\theta)}{\partial \theta}$, $L(\vec{x},\theta) > 0$
2.3. $I(\vec{x_n},\theta) \neq 0$
Тогда $\forall$ оценки $\hat{\theta}(\vec{x_n})$ параметра θ имеет место неравенство.

$$M(\hat{\theta}(\vec{x_n}) - \theta) \geq \left[\frac{\partial M\hat{\theta}}{\partial \theta}\right]^2 / M\left[\frac{\partial ln L(\vec{x_n},\theta)}{\partial \theta}\right]^2$$

или

$$M(\hat{\theta}(\vec{x_n}) - \theta)^2 \geq \frac{\left[1 + \frac{\partial \delta_{\hat{\theta}}(\theta)}{\partial \theta}\right]^2}{I(\theta,\vec{x_n})}\ (*)$$

Если $\hat{\theta}(\vec{x_n})$ - несмещенная $\implies D\hat{\theta}(\vec{x_n}) \geq \frac{1}{I(\theta,\vec{x_n})} = D_{\min}\ (**)$
($\hat{\theta}(\vec{x_n})$ - эффективная) $\iff$ (в неравенстве $(*)$ (или $(**)$) достигается равенство)

Мера эффективности несмещенной оценки

$$e(\hat{\theta}) = \frac{D_{\min}}{D(\hat{\theta}(\vec{x_n}))} = \frac{1}{I(\vec{x_n}.\theta)} \cdot \frac{1}{D(\hat{\theta}(\vec{x_n}))}$$

Если $e(\hat{\theta}) = 1 \implies \hat{\theta}$ - эффективная

<u>Пример 2</u> (продолжение примера 1)
$\vec{x_n} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$
Нашли ранее: $I(a;\vec{x_n}) = \frac{n}{\sigma^2}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ \ M\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i = M\xi = a \implies \bar{x} - \text{несмещенная}$$

$$D\bar{x} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Dx_i = \frac{nD\xi}{n^2} = \frac{D\xi}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$e(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{n}{\sigma^2} = 1 \implies \bar{x} - \text{эффективная оценка}$$