Теорема Рао-Крамера

 $\hat{ heta}$ для неизвестного параметра heta

Пусть

1.
$$M\hat{ heta} = \int \cdots \int \hat{ heta} \ L(ec{x_n}, heta) \ dx_1 \cdots \ dx_n = heta + \delta_{\hat{ heta}}(heta)$$

2. Условия регулярности $p_{\xi}(x,\theta)$

2.1. Область, где $p_{\xi}(x, heta)
eq 0$ не зависимо от heta

2.2. В 1. и
$$\int L(\vec{x_n},\theta)\,dx=1$$
 возможно $\frac{\partial}{\partial \theta}$ под $\int \frac{\partial L}{\partial \theta}(\vec{x},\theta))$ и $L(\vec{x},\theta)>0$

2.3. $I(ec{x_n}, heta)
eq 0$

Тогда \forall оценки $\hat{\theta}(\vec{x_n})$ параметра θ имеет место неравенство.

$$M(\hat{ heta}(ec{x_n}) - heta)^2 \geq rac{\left[1 + rac{\partial \delta_{\hat{ heta}}(heta)}{\partial heta}
ight]^2}{I(heta, ec{x_n})}$$

 Δ :

1. и 2. дифференцируемы по θ

$$\text{1.} \implies \int \hat{\theta} \frac{\partial L(\vec{x},\theta)}{\partial \theta} \, d\vec{x} = \int \left[\hat{\theta} \frac{\partial \ln L(\vec{x},\theta)}{\partial \theta} \right] \cdot L(\vec{x},\theta) \, d\vec{x} = M(\hat{\theta} \frac{\partial \ln L(\vec{x},\theta)}{\partial \theta}) = 1 + \frac{\partial \delta(\theta)}{\partial \theta}$$

$$\implies \int \left[\frac{\partial \ln L(\vec{x},\theta)}{\partial \theta} \right] L(\vec{x},\theta) \, d\vec{x} = M \left[\frac{\partial \ln L(\vec{x},\theta)}{\partial \theta} \right] = 0$$

1.-2. *θ*:

$$\int (\hat{ heta} - heta) rac{\partial \ln L(ec{x}, heta)}{\partial heta} L(ec{x}, heta) \, dec{x} = 1 + rac{\partial \delta_{\hat{ heta}}(heta)}{\partial heta} \ M \left[(\hat{ heta} - heta) rac{\partial \ln L(ec{x}, heta)}{\partial heta} - M(rac{\partial \ln L}{\partial heta}
ight] = 1 + rac{\partial \delta_{\hat{ heta}}(heta)}{\partial heta}$$

Неравенство Коши-Буняковского для математических ожиданий

$$egin{aligned} \left[M(\xi\cdot\eta)
ight]^2 &\leq M\xi^2\cdot M\eta^2 \ \left[1+rac{\partial\delta(heta)}{\partial heta}
ight]^2 &\leq M(\hat{ heta}- heta^2)Migg(rac{\partial\ln L}{\partial heta}-Mrac{\partial\ln L}{\partial heta}igg)^2 \ M(\hat{ heta}- heta)^2 &\geq rac{\left[1+rac{\partial\delta(heta)}{\partial heta}
ight]^2}{Migg[rac{\partial\ln L}{\partial heta}igg]^2} \end{aligned}$$

Показатель эффективности: $e(\hat{ heta}) = rac{D_{\min}}{D(\hat{ heta})}$

Если $e(\hat{ heta})=1$, то $\hat{ heta}$ - эффективная

Если $e(\hat{ heta}) o 1, \; n o \infty$, то $\hat{ heta}$ - ассимптотически эффективная

Все вышеперечисленные результаты справедливы для дискретного распределения:

1.
$$p_{\xi}(x, \theta) = P(\xi = x, \theta)$$

2.
$$\int \rightarrow \sum$$

Пример:

$$P(\xi=k) = rac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \; k=0,1$$

$$I(ec{x_n}, heta) = nI(x_1, heta) = n\int \left[rac{\partial \ln p_\xi(x, heta)}{\partial heta}
ight]^2 \cdot p_\xi(x, heta) \, dx$$

$$I(ec{x_n},\lambda = n\sum_{k=0}^\infty \left[rac{\partial \ln rac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\partial \lambda}
ight]^2 rac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = n\sum_{k=0}^\infty \left(rac{k}{\lambda} - 1
ight)^2 rac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = ne^{-\lambda} \left[e^{\lambda} + rac{1}{\lambda}e^{\lambda} - e^{\lambda}
ight] = rac{n}{\lambda} \implies \bar{x} = rac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \quad Dar{x} = rac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Dx_i = rac{D\xi}{n} = rac{\lambda}{n} \implies e(ar{x}) = 1$$

Теорема (Критерий эффективности несмещенной оценки)

Пусть выполняются условия теорема Рао-Крамера

 $\hat{ heta}(ec{x_n})$ - несмещенная оценка heta

Тогда

$$(\hat{ heta}(ec{x_n}) - ec{ ext{-}} \phi \phi$$
ективная) $\iff \left(rac{\partial \ln L(ec{x}, heta)}{\partial heta} = A(heta) \cdot (\hat{ heta} - heta)
ight)$

Метод статистического оценивания параметров

1. Максимального правдоподобия(ММП, МП)

$$L(ec{x_n}, heta)=p_\xi(x_1, heta)\cdot\ldots\cdot p_\xi(x_n, heta)$$
 $ec{x_n}=\{x_1,\ldots,x_n\}$ - выборка генеральной совокупности ξ с $p_\xi(x, heta)$

 $\hat{ heta}_{\min}(ec{x_n}) = rg\, \max L(ec{x_n}, heta)$

Если $\hat{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_p\}$ - вектор оценки неизвестных параметров, то ММП оценки могут быть получены из

$$rac{\partial \ln L(ec{x_n},ec{ heta})}{\partial heta_i} = 0, \ i = 1, \ldots, p$$

2. Метод моментов

 $ec{ heta}=\{ heta_1,\dots, heta_p\}$ вектор неизвестных параметров распределения случайной величины $\gamma,\,p_\gamma=(x,ec{ heta})$

 $\hat{ heta}_M M$ находится из следующей системы,

lecture3
$$\left\{egin{aligned} &
u_s(heta_1,\ldots, heta_p)=\hat{
u_s},\ s=1,\ldots,p \\ &
u_s(heta_1,\ldots heta_p)=M\xi^2=\int x^s p_\xi(x,ec{ heta})\,dx \\ &\hat{
u_s}=rac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^s \end{aligned}
ight.$$

- Байевское оценивание параметров Особенности:
 - 1. Интерпретация вероятности события, как степени нашего доверия событию
 - 2. Для принятия решения в качестве исходной информации используется одновременно инфеормация двух типов:
 - Априорная информация о явлении(параметре, эксперименте)
 - Информация из статистических данных $ec{x_n}$

$$p(heta)
ightarrow p(heta, ec{x_n}^{(1)})
ightarrow p(heta, ec{x_n}^{(2)})$$

Алгоритм байевского оценивания

1. Сбор априорных сведений о параметре $\theta \implies p(\theta)$ - априорное распределение В случае нехватки априорной информации

$$p(heta) = rac{1}{ heta_{ ext{max}} - heta_{ ext{min}}}, \; heta \in [heta_{ ext{min}}, \; heta_{ ext{max}}]$$

- 2. Сбор статистических данных $x_1, x_2, \dots, x_n \implies ec{x_n}$ выборка
- 3. Функция правдоподобия

$$L(ec{x_n} \mid heta) = p_{\xi}(x_1 \mid heta) \cdot \ldots \cdot p_{\xi}(x_n \mid heta)$$

 $p_{\xi}(x\mid heta)$ - функция плотности генеральной совокупности ξ в предположении, что значение параметра =0

4. Апостериорное распределение значений параметра heta

$$p(heta \mid ec{x}) = rac{p(heta) \cdot L(ec{x} \mid heta)}{p(ec{x_n})} = rac{p(heta) \ L(ec{x_n} \mid heta)}{\int L(ec{x}, heta) \ p(heta) \ d heta}$$