

# Глава 1 Элементарное введение в вариационное исчисление

## §1. Основные понятия.

Вариационное исчисление связано с поиском экстремума некоторого функционала (по сути является функцией от функции)

Пусть  $V$  - ЛНП (над полем  $\mathbb{R}$ ) с нормой  $\|y\|$ :

1.  $\|y\| \geq 0$ , причем  $\|y\| = 0 \iff y = \theta$
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \|\alpha y\| = |\alpha| \cdot \|y\|$
3.  $\forall z, y \in \mathbb{R} \implies \|z + y\| \leq \|z\| + \|y\|$

Для пространства  $C([a; b])$ :  $\|y\| = \max |y(x)|, x \in [a; b]$

Для пространства  $C^1([a; b])$ :  $\|y\| = \max \{ \max |y(x)|, \max |y'(x)| \}, x \in [a; b]$  или  $\|y\| = \max |y(x)| + \max |y'(x)|, x \in [a; b]$

Аналогично вводится норма  $C^n([a; b])$ , где  $n \geq 2$

Опр.1 Эпсилон окрестность точки  $y_0$  - множество точек таких, что

$$\{y(x) \in V \mid \|y(x) - y_0(x)\| < \epsilon\}$$

Окрестность в  $C$  называется сильной окрестностью, в  $C^n$  ( $\forall n \geq 1$ ) называется слабой окрестностью.

Замечание: В слабую окрестность попадают функции с близкими значениями и с близкими значениями производных. В сильную же - только с близкими значениями. То есть в слабой окрестности функций меньше.

Опр.2 Функционалом  $J$  называется закон(правило), по которому каждому элементу  $y \in V$  (или  $M \subset V$ ) ставится в соответствие действительное число(точка  $\equiv$  кривой)

Обозначение:  $J[y]$

Пример:  $J[y] = \int_a^b y(x) dx$  на  $C([a; b])$ , ...

Опр.3 Функционал называется линейным на  $M$ , если:

$$\forall y_1(x), y_2(x) \in M \text{ и } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \implies J[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)] = \alpha_1 J[y_1] + \alpha_2 J[y_2]$$

Опр.4 Будем говорить, что  $J[y]$  достигает локального максимума в точке  $y_0$  (на кривой  $y_0(x)$ ), если:

$$\exists U_\epsilon(y_0) = \{y \in M \mid \|y - y_0\| < \epsilon\}: \forall y(x) \in U_\epsilon(y_0) \implies J[y_0] \geq J[y]$$

Если  $U_\epsilon(y_0)$  - сильная, то такой максимум называется сильным.

Если  $U_\epsilon(y_0)$  - слабая, то такой максимум называется слабым.

Замечание: Каждый сильный максимум является слабым, но не наоборот.

Опр.5 Аналогичные выкладки справедливы для локального минимума.

Опр.6 Точки локального  $\max$  и  $\min$  называется точками экстремума (экстремальными кривыми)

Опр.7 Вариацией кривой  $y(x) \in M$  называется произвольное приращение этой кривой.

Обозначение:  $\delta y = \tilde{y}(x) - y(x)$ , если  $y(x) \in M \rightarrow \tilde{y}(x) \in M$

Замечание: Далее рассматриваем только допустимые вариации, т.е. такие, что:

$y(x) + \delta(y) \in M$ , если  $y(x) \in M$

Опр.8 Пусть кривой  $y_0(x)$  дали приращение  $\delta y$ . Тогда рассмотрим разность:

$$J[y_0 + \delta y] - J[y_0] = \Delta J[y_0]$$

Если приращение функционала  $J[y]$  в точке  $y_0$  можно представить в виде:

$\Delta J[y_0] = L[y_0, \delta y] + o(|\delta y|)$ , где  $L$  - линейный оператор по 2-ому аргументу, тогда функционал  $J$  называется дифференцируемым по Фреше в точке  $y_0$ , а линейная часть приращения  $L[y_0, \delta y]$  называется вариацией функционала  $J$  в точке  $y_0$ .

Замечание: Дифференцируем по Фреше  $\equiv$  дифференцируем в широком смысле.

Обозначение:  $\delta J[y_0] \equiv L[y_0, \delta y]$

Опр.9 Если  $\exists \frac{d}{d\alpha}(J[y_0 + \alpha\delta y])|_{\alpha=0}$ , то  $J[y]$  называется дифференцируемым по Гато в точке  $y_0$ , а значение этой производной называется вариацией по Гато.

Замечание: Диф. по Фреше  $\implies$  диф. по Гато. В общем случае обратное неверно, но в дальнейшем для интегральных функционалов эти понятия тождественны, поэтому для упрощения понимания, будем пользоваться определением по Гато.

Т1 (Необходимое условие экстремума)

(Функционал  $J[y]$  достигает экстремума во внутренней точке  $y_0$  множества  $M$ )  $\implies$  ( $\delta J[y_0] = 0$ )

$\Delta$ : Пусть для определенности достигается  $\min$ , тогда:

$$\exists U_\epsilon(y_0): \forall y(x) \in U_\epsilon(y_0) \implies J[y] \geq J[y_0]$$

Пусть  $\delta y$  - произвольное приращение (допустимое). Возьмем  $\alpha > 0$ :  $|\alpha| < \frac{\epsilon}{\|\delta y\|}$

Тогда:  $J[y_0 + \alpha \cdot \delta y] \geq J[y_0]$

Рассмотрим  $f(\alpha) = J[y_0 + \alpha \cdot \delta y]$ . Тогда

$$\left( \forall \alpha \left( |\alpha| < \frac{\epsilon}{\|\delta y\|} \implies f(\alpha) \geq f(0) \right) \right) \implies (\min f(\alpha) = f(\alpha = 0))$$

Знаем, что  $J[y]$  дифференцируем в точке  $y_0$ , т.е.:

$$\exists \frac{d}{d\alpha}(J[y_0 + \alpha \cdot \delta y])|_{\alpha=0} \implies (\exists f'(0))$$

Из курса математического анализа:  $f'(0) = 0$

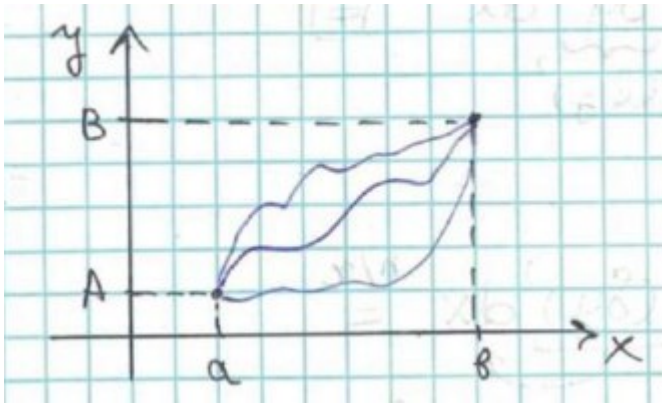
Но  $(f'(0) = \delta J[y_0])$ . Тогда:  $\delta J[y_0] = 0$

Аналогично доказывается для максимума.

□

Замечание:  $T_1$  является необходимым условием для слабого экстремума, а следовательно, и для сильного экстремума.

## §2. Простейшая задача вариационного исчисления.



Рассмотрим  $M = \{y \in C^1(\{a; b\}) : y(a) = A; y(b) = B\}$

Рассмотрим функционал (1)  $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$

$F(x, y, p)$  - заданная функция, будем считать ее непрерывной.

Функционал  $J[y]$  называется функционалом с закрепленными концами.

Задача нахождения экстремума функционала (1) на множестве  $M$  (гладкая кривая с закрепленными концами) называется простейшей задачей вариационного исчисления.

Что значит условие  $\delta J[y] = 0$ , для функционала (1) с закрепленными концами:

$$y(a) = A, y(b) = B$$

Замечание:

1. Все допустимые вариации удовлетворяют условию:  $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$

$$2. (\delta y)' = (\tilde{y} - y)' = \tilde{y}' - y' = \delta y'$$

Рассмотрим вариацию по Гато:

$$\frac{d}{d\alpha} (J[y + \alpha \cdot \delta y]) = \frac{d}{d\alpha} \left( \int_a^b F(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') dx \right) = (2)$$

Будем считать, что  $F(x, y, p)$  непрерывна с частными производными до 2-ого порядка.

$J$  - собственный интеграл, зависящий от параметра, тогда:

$$(2) = \int_a^b (F'_y(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') \delta y + F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') \delta y') dx$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$\int_a^b F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') (\delta y)' dx = F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \delta y \cdot \frac{d}{dx} (F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y')) dx$$

$$\text{Тогда } (2) = \int_a^b (F'_y(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y') - \frac{d}{dx} (F'_p(x, y + \alpha \cdot \delta y, y' + \alpha \cdot \delta y'))) \cdot \delta y dx$$

Полагаем, что  $\alpha = 0$ . Тогда:

$$\int_a^b (F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} (F'_p(x, y, y'))) \delta y dx = 0$$

Отсюда получаем следующее:

$$F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} (F'_p(x, y, y')) = 0$$

Обоснуем этот переход ниже:

**to be continued...**