§2. Множества на комплексной плоскости. Последовательности и ряды комплексных чисел.

$\mathbb{C}$ как множество упорядоченных пар совпадает с $\mathbb{R}^2$

Точки $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
$z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$
$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = dist(z_1, z_2)$
$U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$ - дельта-окрестность
$\delta > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$
$\mathring{U}_\delta(z_0) = U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$ - проколотая дельта-окрестность

Опр.1 Точка $z_0 \in E \subset \mathbb{C}$ называется внутренней точкой множества E, если
$\exists \delta > 0\ U_\delta(z_0) \subset E$
Множество E называется открытым, если все его точки - внутренние.
Окрестностью точки z_0 $U(z_0)$ называется любое открытое множество, содержащее точку z_0
Окрестностью множества $E \subset \mathbb{C}$ называется любое открытое множество, содержащее E.

Лемма 1 (О числе Лебега). Пусть $m \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{R}^m$, K - ограничено и замкнутое в $\mathbb{R}^m$:
$K \subset \bigcup V_j$, где $j \in J$, V_j - открытое множество $\mathbb{R}^m$, J - множество индексов
Тогда $\exists d > 0$: $\forall Q \subset K\ (diamQ < d \implies \exists j_0 \in J\ Q \subset V_{j_0})$
d - число Лебега.

Δ:

> Предположим противное $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists Q_n \subset K\ diamQ_n < \frac{1}{n}$, а Q_n не содержится целиком ни в одном V_j $(Q_n \neq \emptyset)$
> Рассмотрим точку $M_n \in Q_n \to \{M_n\} \subset K$ - ограниченное и замкнутое.
> $\implies \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - огр. $\implies \exists \{M_{n_k}\}\ \exists M_0 \in \mathbb{R}^m\ M_{n_k} \to M_0 \in K$, $k \to \infty$
> $\implies \exists j_0 \in J\, (M_0 \in V_{j_0} \implies \exists \delta > 0 U_\delta(M_0) \subset V_{j_0})$
> $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N\ (diamQ_{n_k} < \frac{\delta}{2} \land \rho(M_0, M_{n_k}) < \frac{\delta}{2})$
>
> Рассмотрим $\forall M \in Q_{n_k}$ справедливо
> $\rho(M, M_0) \leq \rho(M, M_{n_k}) + \rho(M_{n_k}, M_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$
>
> Т.е. $Q_{n_k} \subset U_\delta(M_0) \subset V_{j_0}$
> Противоречие.

$\square$

Лемма 2 (Гейне-Бореля)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$, K - ограниченное, замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$ и $K \subset \bigcup V_j$, где V_j - открытое множество в $\mathbb{R}^m$

Тогда $\exists \{j_1, \ldots, j_n\} \subset J$ $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}$

Δ:

> Пусть $d > 0$ из Леммы 1. K - ограниченное множество.
> Π - куб в $\mathbb{R}^m$ со сторонами, параллельными осям координат и равными a.
> $\frac{a}{N} \leq \frac{d}{2\sqrt{m}}$, $n = N^m$ частичных кубиков.
> $\bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k = \Pi$, $diam \Pi_k \leq \frac{d}{2}$; $K \subset \Pi$, $Q_k = K \cap \Pi_k \implies K = \bigcup_{k=1}^{N} Q_k$
> $\forall k = 1, \ldots, n \ \left(diam Q_k \leq diam \Pi_k \leq \frac{d}{2} < d\right)$
> $\forall k = 1, \ldots, n \ \exists V_{j_k} \supset Q_k \implies K = \bigcup_{k=1}^{n} Q_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}$

□

Опр.2

Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$, $\{V_j\}_{j \in J}$ - система открытых множеств в $\mathbb{R}^m$ называется (открытым) покрытием множества K, если $K \subset \bigcup V_j$

Компактом K в $\mathbb{R}^m$ называется множество, из любого покрытия которого открытыми множествами V_j можно выбрать (извлечь) конечное подпокрытие, т.е. $\exists \{j_1, \ldots, j_n\} \subset J$ $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}$

Т1 (Критерий компактности в $\mathbb{R}^m$)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ $(K$ - компакт в $\mathbb{R}^m) \iff (K$ - ограниченно и замкнуто в $\mathbb{R}^m)$

Δ:

> $\Longleftarrow$ смотри Лемму Гейне-Бореля
> $\implies \forall M \in K \ U_\delta(M)$, где $\delta = 1$, $U_1(M)$
> $K \subset \bigcup_{M \in K} U_1(M) \implies \exists \{M_1, \ldots, M_n\} \subset K$:
> $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_1(M_k)$ - ограниченное множество, как объединение конечного числа ограниченных множеств
> Докажем замкнутость $K = \bar{K} \iff (\mathbb{R}^m \setminus K$ - открыто)
> $\forall M_0 \in (\mathbb{R}^m \setminus K) \ \exists U(M_0) \subset (\mathbb{R}^m \setminus K) \ (U(M_0) \cap K \neq \emptyset)$
> $\forall M \in K$ рассмотрим $V_M = \left\{P \in \mathbb{R}^m \mid \rho(P, M) < \frac{1}{2}\rho(M, M_0)\right\}$ - открытое множество
> $K \subset \bigcup_{M \in K} V_M \implies \exists M_1, \ldots, M_n \in K$: $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{M_k} = W$
> точка $M_0 \in \overline{V_{M_k}} \implies (\mathbb{R}^m \setminus W)$ - открытое, как дополнение к замкнутому
> $\implies \exists U_\delta(M_0) \subset (\mathbb{R}^m \setminus W) \ U_\delta(M_0) \cap K \neq \emptyset$

□

Последовательности и ряды комплексных чисел. Расширенная комплексная плоскость.

$\forall n \in \mathbb{N} \to z_n \in \mathbb{C}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}$

$z_n = x_n + iy_n$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$

<u>Опр.3</u>

Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Говорят, что $\{z_n\}$ стремится к z_0 при $n \to \infty$, если

$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \implies |z_n - z_0| < \epsilon)$

$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$; $z_n \to z_0$, $n \to \infty$

$M_0\,(x_0, y_0)$, $M_n\,(x_n, y_n)$, $\rho\,(M_n, M_0) = |z_n - z_0|$

$(z_n \to z_0,\, n \to \infty) \iff (\rho(M_n, M_0) \to 0,\, n \to \infty) \iff (x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0,\, n \to \infty)$

$\max(|x_n - x_0|, |y_n - y_0|) \leq |z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$

Арифметические свойства.

$z_n \to z_0$, $w_n \to w_0$, $n \to \infty$

1. $\exists \lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z_0 + w_0$; $\forall \alpha \in \mathbb{C}\ \exists \lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot z_n)$
2. $\exists \lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0$
3. Если $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ w_n \neq 0$, то $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}$

<u>Опр.4</u>

$\{z_n\}$ называется ограниченной, если $\exists c > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ |z_n| \leq c$

<u>Т2</u> (Больцано-Вейерштрасса)

Если последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ ограничена, то из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

<u>Опр.5</u>

$\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ называется фундаментальной, если $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, p \in \mathbb{N}$

$(n \geq N \implies |z_{n+p} - z_n| < \epsilon)$