Глава 1. Комплексные числа, последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость. Функции комплексного переменного. Кривые на комплексной плоскости.

§1. Комплексные числа и операции над ними.

Опр.1 Мн-во $\{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ и введем операции:

"+": $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

"·": $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2,a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)$

Это множество с таким образом введенными операциями сложения и умножения будем называть множеством комплексных чисел. (К. Ч.), $\mathbb{C}$

Алгебраическая форма записи К.Ч.

Рассмотрим числа вида: $(a_i,0)\forall a_i \in \mathbb{R}$

$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0)$

$(a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1\cdot a_2,0)$

Числа вида $(a,0)$ ведут себя как $\mathbb{R}$, $(a,0)=a=a\cdot(1,0)$; $(1,0)=1$

Рассмотрим $(0,b)=b\cdot(0,1)=(b,0)\cdot(0,1)=(0,b)$

$b \in \mathbb{R}$, $(0,1)=i \implies (0,1)\cdot(0,1)=i^2=-1$

$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a\cdot(1,0)+b\cdot i=a+bi$

$a=Rez,b=Imz$

$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

$\forall z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$

$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(b\cdot i)^2=a^2+b^2=|z|^2$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}\geq 0$

Деление:

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0 \ \exists! z \in \mathbb{C} z_1 = z_2 \cdot z$

z - частное z_1 и z_2, $z = \frac{z_1}{z_2}$

$z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \neq 0 \implies z_2 \neq 0 + 0i$, $z = x + yi = ?$

$(a_1 + b_1 i) = (a_2 + b_2 i)\,(x + yi)$

$(a_2 x - b_2 y = a_1) \wedge (b_2 x + a_2 y = b_1)$ - СЛАУ

$\Delta = a_2^2 + b_2^2 = |z_2|^2 \neq 0 \implies \exists!$ реш. СЛАУ

$\Delta_x = a_1 a_2 + b_1 b_2$, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$

$\Delta_y = a_2 b_1 - a_1 b_2$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

$$z = x + yi = \frac{1}{|z_2|^2}(a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{|z_2|^2}$$

Основные свойства операций сложения и умножения для комплексных чисел.

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

- **Сложение:**
  1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность)
  2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность)
  3. $\exists 0 \in \mathbb{C} \ \forall z \in \mathbb{C} \ z + 0 = z$
  4. $\forall z \in \mathbb{C} \ \exists! z_1 \in \mathbb{C} \ z + z_1 = 0$, $z_1 = (-1) \cdot z$
- **Умножение:**
  5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
  6. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
  7. $\exists 1 \in \mathbb{C} \ \forall z \in \mathbb{C} \ 1 \cdot z = z$
  8. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 \ \exists z^{-1} \in \mathbb{C}$: $z \cdot z^{-1} = 1$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$
  9. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

Из выполнения 2-4 следует, что $\mathbb{C}$ - группа по сложению.

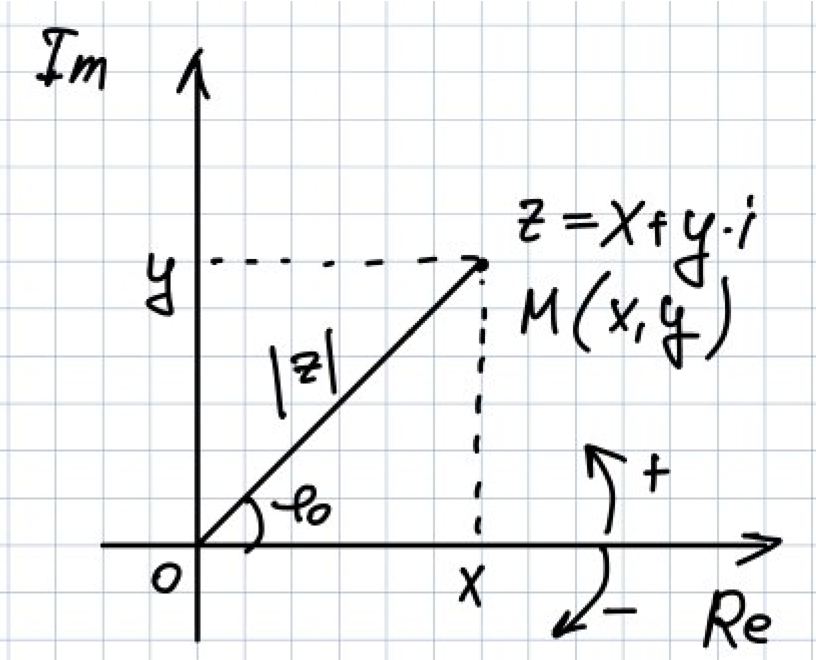
1 $\implies$ $\mathbb{C}$ - абелева группа

5-8 $\implies$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ - мультипликативная группа

1-9 - поле комплексных чисел

Геометрическая интерпретация и тригонометрическая форма записи комплексных чисел

$\mathbb{R}^2$: $(1,0)$, $(0,1)$ - стандартный базис



$|z| =$ расстояние от точки 0 до точки z на комплексной плоскости.

$\phi_0 \in (-\pi; \pi]$

$z \neq 0$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \neq 0$

$z = r\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}i\right) = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)$ - тригонометрическая форма записи комплексного числа

$\phi = \phi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

ϕ:$\cos\phi = \frac{x}{r} \wedge \sin\phi = \frac{y}{r}$, ϕ_0 - главное значение аргумента z, $\phi_0 = argz \in (-\pi; \pi]$

$Argz = \{\phi = \phi_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

$z = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) = r \cdot e^{i\phi}$ - экспоненциальная форма записи

<u>Свойства комплексных чисел, следующие из форм записи:</u>

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

   $(|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|) \iff (z_1 = \alpha \cdot z_2)$, $\alpha \geq 0$

   $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

   $|Rez| \leq |z| \leq |Rez| + |Imz|$

   $|Imz| \leq |z|$
2. $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi \implies arg\bar{z} = -argz$

3. $|e^{i\phi}| = |\cos\phi + i\sin\phi| = 1$
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

   $|z^n| = |z|^n$
5. $z_1 = r_1\left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2$

   $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos\left(\phi_1 + \phi_2\right) + i\sin\left(\phi_1 + \phi_2\right)\right)$

   $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\phi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\phi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$

   $z_1, z_2 \neq 0$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right) + i\sin\left(\phi_1 + \phi_2\right)\right)$
6. $z = r\left(cos\phi + i\sin\phi\right)$, $n \in \mathbb{N}$

   $z^n = r^n\left(\cos n\phi + i\sin n\phi\right)$ - формула Муавра

Извлечение корня из комплексного числа

Опр.2 Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, корнем n-ой степени из комплексного числа z называется всякое комплексное число b: $b^n = z$, т.е. $\sqrt[n]{z}$ - все решения этого уравнения

Утв. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists$ ровно n различных корней n-ой степени из комплексного числа z. Все эти корни лежат на окружности с центром в точке O и радиусом $R = \sqrt[n]{|z|} > 0$ в вершинах правильного n-угольника $(n \geq 2)$

Δ:

> Рассмотрим $z = r(\cos\phi + isin\phi)$, $z \neq 0$
>
> $b \neq 0$, $b = |b|\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$
>
> $b^n = |b|^n \cdot \left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right) = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) \iff \left(|b|^n = r \land \cos n\psi = \cos\phi \land \sin n\psi = \sin\right.$
>
> $$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$\square$