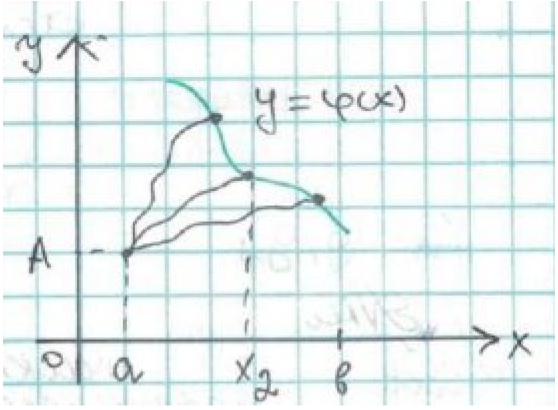
§5. Вариационные задачи с подвижными границами

Рассмотрим гладкую кривую, по которой "бегает" один из концов исследуемой кривой (другой конец закреплен)



Исследуем следующий функционал:
(1) $J[y] = \int_a^{x_2} F(x, y, y')\, dx \longrightarrow extr?$
Функции $F(x, y, y')$ и $\phi(x_2)$ заданы.
(2):

$$\begin{cases} y(a) = A \\ y(x_2) = \phi(x_2) \\ y \in C^1([a; b]) \\ x_2 \in [a; b] \end{cases}$$

Т1 (Необходимое условие экстремума функционала с подвижной правой границей)
Пусть выполнены следующие условия:
1. $y(x) \in C^2([a; b])$
2. $y(x)$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (1) при условии (2);
3. $F(x, y, p)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
4. $\phi(x) \in C^1([a; b])$.
Тогда $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_p = 0$ с дополнительными условиями (2), а на правом конце выполняется условие трансверсальности (УТ).

$$(F - (y' - \phi'(x)) F'_p) \mid_{x = x_2} = 0$$

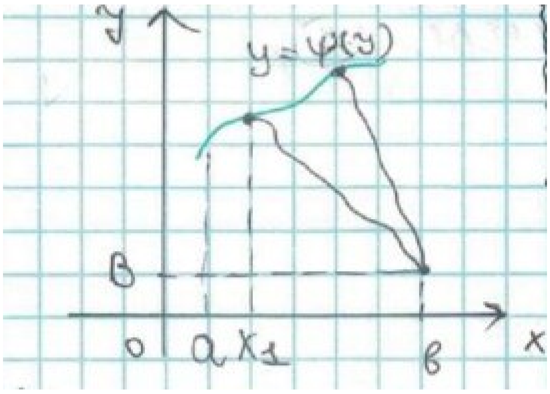
Δ:

> (б/д)

$\square$

Замечание: УТ накладывает ограничения на угол пересечения экстремали и кривой $y = \phi(x)$.

Аналогично можно рассмотреть задачу с фиксированным правым концом и с "бегающим" левым:



Здесь получаем:

(3) $J[y] = \int_{x_1}^{b} F(x, y, y')\, dx \longrightarrow extr?$

(4):

$$\begin{cases} y(x_1) = \phi(x_1) \\ y(b) = B \\ y \in C^1([a;b]) \\ x_1 \in [a;b] \end{cases}$$

<u>T2</u> (Необходимое условие экстремума функционала с подвижной левой границей)

Пусть выполнены условия:

1. $y(x) \in C^2([a;b])$;
2. $y(x)$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (3) при условиях (4);
3. $F(x, y, p)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
4. $\psi(x) \in C^1([a;b])$.

Тогда $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_p = 0$ с дополнительными условиями (4), а на левом конце выполняется условие трансверсальности:

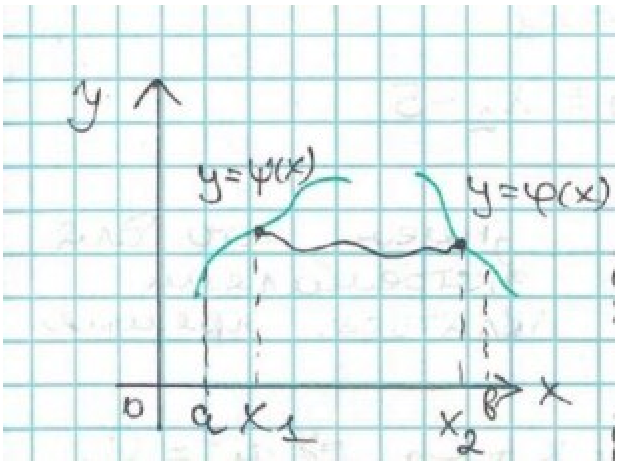
$$(F - (y' - \psi'(x))F'_p) \mid_{x=x_1} = 0$$

Δ:

> (б/д)

□

Также можем рассмотреть задачу о функционале с двумя подвижными концами:



(5) $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \longrightarrow extr?$

(6):

$$\begin{cases} y(x_1) = \psi(x_1) \\ y(x_2) = \phi(x_2) \\ y \in C^1([a; b]) \\ x_1, x_2 \in [a; b] \end{cases}$$

<u>Т3</u> (Необходимое условие экстремума функционала с двумя подвижными границами)

Пусть выполнены следующие условия:

1. $y(x) \in C^2([a; b])$;
2. $y(x)$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (5) при условиях (6);
3. $F(x, y, p)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
4. $\psi(x)$, $\phi(x) \in C^1([a; b])$;

Тогда: $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера: $F'_y - \frac{d}{dx} F'_p = 0$ с дополнительными условиями (6), а на обоих концах выполняется условие трансверсальности:

$$(F - (y' - \phi'(x))F'_p) \mid_{x=x_2} = 0$$

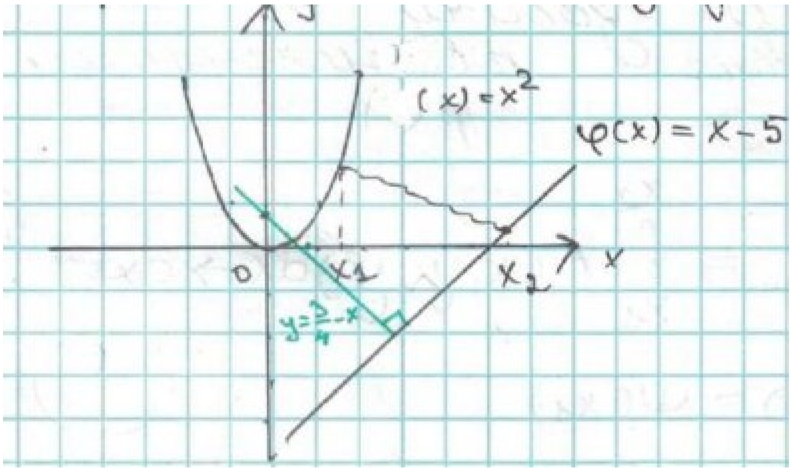
$$(F - (y' - \psi'(x))F'_p) \mid_{x=x_1} = 0$$

Δ:

> (б/д)

□

Пример: (Найти $min\rho(y = x^2, y = x - 5)$)



$\rho = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$

$y(x_1) = x_1^2$

$y(x_2) = x_2 - 5$

из §3. знаем, что для $F = F(p)$ экстремалями будут являться прямые линии:

$y = C_1 x + C_2 \implies y' = C_1$

Находим C_1, C_2 из граничных условий и условий трансверсальности:

ГУ:

$$\begin{cases} C_1 x_1 + C_2 = x_1^2 \\ C_1 x_2 + C_2 = x_2 - 5 \end{cases}$$

УТ:

$$\begin{cases} \sqrt{1 + C_1^2} - (C_1 - 2x_1) \cdot \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0 \\ \sqrt{1 + C_1^2} - (C_1 - 1) \cdot \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0 \end{cases}$$

Домножив оба равенства на $\sqrt{1 + C_1^2}$, получим:

$$\begin{cases} 1 + C_1^2 - C_1^2 + 2x_1 C_1 = 0 \\ 1 + C_1^2 - C_1^2 + C_1 = 0 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} C_1 = -1 \\ x_1 = 1/2 \end{cases}$$

Теперь воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{cases} -1/2 + C_2 = 1/4 \implies C_2 = 3/4, \\ -x_2 + C_2 = x_2 - 5 \implies 2x_2 = C_2 + 5 \implies x_2 = 23/8. \end{cases}$$

Получили следующую экстремаль:

$y = 3/4 - x$ (по физическому смыслу реализует минимум)

$$\rho_{\min} = J[\frac{3}{4} - x] = \int_{1/2}^{23/8} \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx = \sqrt{2}(\frac{23}{8} - \frac{1}{2}) = \frac{19\sqrt{2}}{8}$$

§6. Условный экстремум.

Рассмотрим функционал от двух кривых:

(1) $J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z')\, dx \longrightarrow extr?$

(2): Считаем, что $y(x), z(x) \in C^1([a; b])$, а функция $F(x, y, z, p, q)$ задана.

$$\begin{cases} y(a) = A_1 \\ y(b) = B_1 \\ z(a) = A_2 \\ z(b) = B_2 \end{cases}$$

$(+)$ Дополнительное условие:

(A) либо $\Phi(x, y, z, y', z') = 0$ (неголономная связь)

(B) либо $\Phi(x, y, z) = 0$ (голономная связь)

Замечание: Голономная связь накладывает ограничения на геометрические параметры системы, неголономная же также ограничивает и кинематические свойства системы (x, y, z - координаты, y', z' - скорости).

Т1 (Необходимые условия экстремума функционала с неголономной связью)

Пусть выполнены следующие условия:

1. Функции $y(x)$, $z(x) \in C^2([a; b])$;
2. Пара $(y(x)$, $z(x))$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (1) при условии (2) и со связью (A);
3. $F(x, y, z, p, q)$, $\Phi(x, y, z, y', z')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
4. $\Phi'_p \neq 0 \vee \Phi'_q \neq 0$.

Тогда $\exists$ непрерывно-дифференцируемая функция $\lambda(x)$: пара $(y(x)$, $z(x))$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера для функционала:

$\widetilde{J}[y, z] = \int_a^b (F(x, y, z, y', z') + \lambda(x) \cdot \Phi(x, y, z, y', z'))\, dx$, то есть:

$$\begin{cases} F'_y + \lambda\Phi'_y - \frac{d}{dx}(F'_p + \lambda\Phi'_p) = 0 \\ F'_z + \lambda\Phi'_z - \frac{d}{dx}(F'_q + \lambda\Phi'_q) = 0 \end{cases}$$

с дополнительными условиями:

$$\begin{cases} y(a) = A_1 \\ y(b) = B_1 \\ z(a) = A_2 \\ z(b) = B_2 \\ \Phi(x, y, z, y', z') = 0 \end{cases}$$

Δ:

> (б/д)

□

<u>Замечание:</u> Все рассматриваемые условия - необходимые, достаточные условия вытекают либо из физического смысла, либо из геометрического смысла задачи.

В случае голономной связи, во-первых $\Phi'_p \equiv 0$ и $\Phi'_q \equiv 0$ (не выполнены условия прошлой <u>Т</u>); во-вторых, краевые условия является зависимым, так как:
$\Phi(a, A_1, A_2) = 0$, $\Phi(b, B_1, B_2) = 0$
В связи с этим имеем следующую теорему:

<u>Т2</u> (Необходимые условия экстремума функционала с голономной связью)
Пусть выполнены следующие условия:
1. $y(x), z(x) \in C^2([a; b])$;
2. Пара $(y(x),\, z(x))$ реализует слабый или сильный экстремум функционала (1) при условии (2) и со связью (В);
3. $F(x, y, z, p, q)$ непрерывна с частными производными до второго порядка включительно;
4. $\Phi(x, y, z)$ непрерывна с частными производными первого порядка;
5. $\Phi'_y \neq 0 \vee \Phi'_z \neq 0$.
Тогда $\exists$ непрерывная функция $\lambda(x)$: пара $(y(x),\, z(x))$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера для функционала:
$\hat{J}[y, z] = \int_a^b (F(x, y, z, y', z') + \lambda(x)\Phi(x, y, z))\, dx$, то есть:

$$\begin{cases} F'_y + \lambda\Phi'_y - \frac{d}{dx}F'_p = 0 \\ F'_z + \lambda\Phi'_z - \frac{d}{dx}F'_q = 0 \end{cases}$$

с дополнительными условиями:

$$\begin{cases} y(a) = A_1 \\ y(b) = B_1 \\ \Phi(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

причем автоматически:

$$\begin{cases} z(a) = A_2 \\ z(b) = B_2, \end{cases}$$

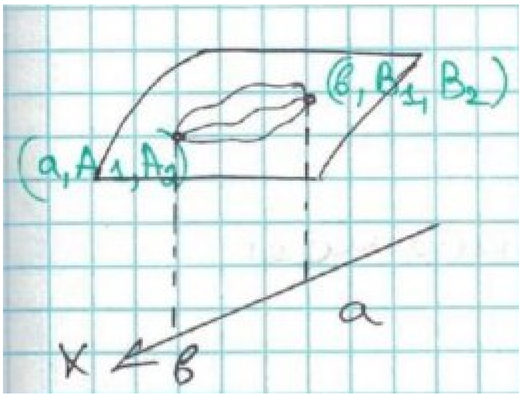
где A_2, B_2 удовлетворяют условиям: $\Phi(a, A_1, A_2) = 0$, $\Phi(b, B_1, B_2) = 0$

Δ:

> (б/д)

□

<u>Пример:</u> (Нахождение геодезических линий)
$\Phi(x, y, z) = 0$
Тогда нужно найти:



$\min J[y,z] = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$
$y(a) = A_1,\, y(b) = B_1$
$z(a) = A_2,\, z(b) = B_2$
$\Phi(x,y,z) = 0$
$\Phi(a,A_1,A_2) = 0$
$\Phi(b,B_1,B_2) = 0$

При этом, мы считаем, что линия минимальной длины может быть параметризована:
$x \in [a;b]$

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

<u>Пример:</u> (Изопараметрическая задача)
$J_1[y,z] = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \longrightarrow extr?$
$y(a) = A_1,\, y(b) = B_1$

С дополнительными условиями:
$J_2[y] = \int_a^b G(x,y,y')\,dx = l = const$
$J_2 = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = l$

Рассмотрим $z(x) = \int_a^x G(x,y,y')\,dx$
Тогда: $z(a) = 0,\, z(b) = l,\, z'(x) = G(x,y,y')$

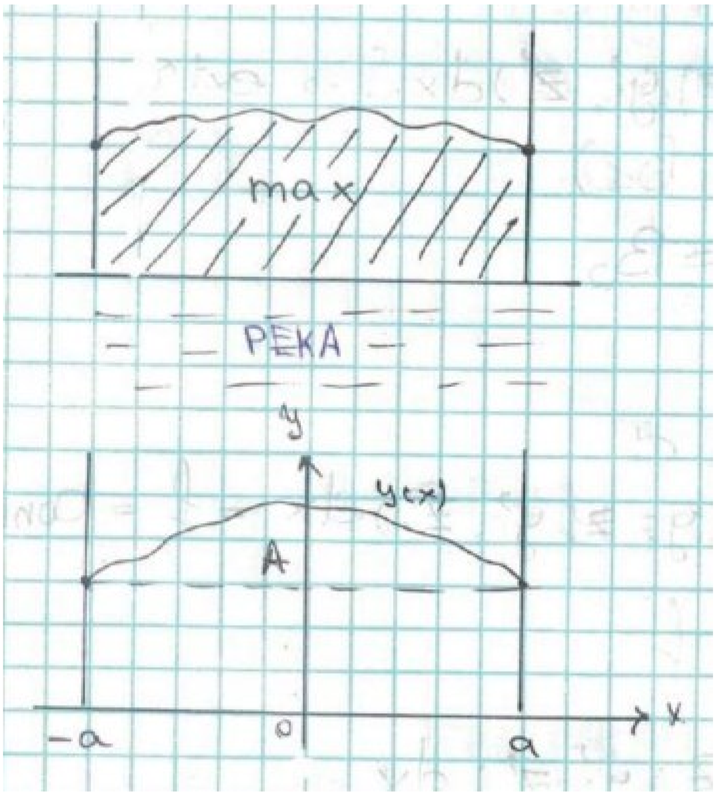
Рассмотрим задачу поиска экстремума:
$J[y,z] = \int_a^b F(x,y,y')\,dx$
$y(a) = A_1,\, y(b) = B_1,\, z(a) = 0,\, z(b) = l$

Из того, что связь неголономная:
$z'(x) - G(x,y,y') = 0$

Применим <u>T</u> о неголономной связи:
$\widetilde{J}[y,z] = \int_a^b (F(x,y,y') + \lambda(x)(z'(x) - G(x,y,y')))\,dx \implies$

$$\begin{cases} F'_y + \frac{d}{dx}(\lambda G'_p) = 0 \\ -\frac{d}{dx}\lambda(x) = 0 \implies \lambda = const \end{cases}$$

Хорошим примером изопериметрической задачи является задача Дидоны:



$\max J[y] = \int_{-a}^{a} y\,dx$
$y(a) = y(-a) = A$
$J_2[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{q + (y')^2}\,dx = 2l > 2a$
$z(x) = \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \implies z(-a) = 0$, $z(a) = 2l$
$z'(x) = \sqrt{1 + (y')^2} \implies z' - \sqrt{1 + (y')^2} = 0$ - неголономная связь

То есть мы имеем задачу:
Задача: Найти экстремум функционала $J[y, z] = \int_{-a}^{a} y\,dx$, при условиях закрепления:
(*):

$$\begin{cases} y(-a) = y(a) = A \\ z(-a) = 0 \\ z(a) = 2l, \end{cases}$$

и неголонмной связью $z' - \sqrt{1 + (y')^2} = 0$

Решение: Тогда, согласно вышеизложенной теории, $y(x)$, $z(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера для функционала:

$$\widetilde{J}[y, z] = \int_{-a}^{a} (y + \lambda(x)(z' - \sqrt{1 + (y')^2}))\,dx$$

с краевым условием (*).

Систему уравнений Эйлера принимает вид:

$$\begin{cases} 1 + \frac{d}{dx}(\lambda(x) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}) = 0 \\ 0 - \frac{d}{dx}\lambda(x) = 0 \end{cases}$$

Знаем, что в изопериметрической задаче $\lambda(x) = const$ (см. пример), обозначим $\lambda(x) = \lambda$:

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = -1 \implies \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c_1 - x$$

$$x = c_1 - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Введём параметр:

$y' \equiv p$

$x = c_1 - \frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}$ (дифференцируем, умножим на p)

$dy = pdx = p\lambda(\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}})(1+p^2)^{-1}dp = \frac{\lambda pdp}{(1+p^2)^{3/2}} \implies dy = \frac{\lambda pdp}{(1+p^2)^{3/2}}$ | интегрируем

$y = \int \frac{\lambda pdp}{(1+p^2)^{3/2}}\,dx = \frac{\lambda}{\sqrt{1+p^2}} + c_2$

Значит:

$x = c_1 - \frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}$, $y = c_2 + \frac{\lambda}{\sqrt{1+p^2}}$

Исключим p:

$(c_1 - x)^2 + (y - c_2)^2 = \frac{\lambda^2 p^2}{1+p^2} + \frac{\lambda^2}{1+p^2} = \lambda^2$

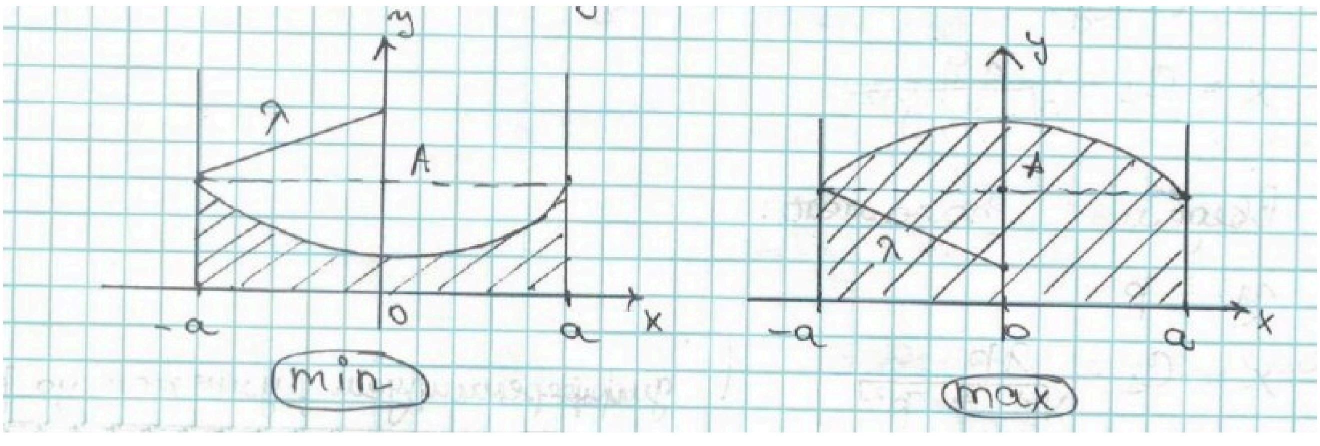
$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2 \implies$ экстремалями являются окружности

Для нахождения констант подставим краевые условия:

$$\begin{cases}(a+c_1)^2 + (A-c_2)^2 = \lambda^2\\(a-c_1)^2 + (A-c_2)^2 = \lambda^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}c_1 = 0\\c_2 = A \pm \sqrt{\lambda^2 - a^2}\end{cases}$$

В итоге получаем:



Исследуем случай максимума и найдем λ:

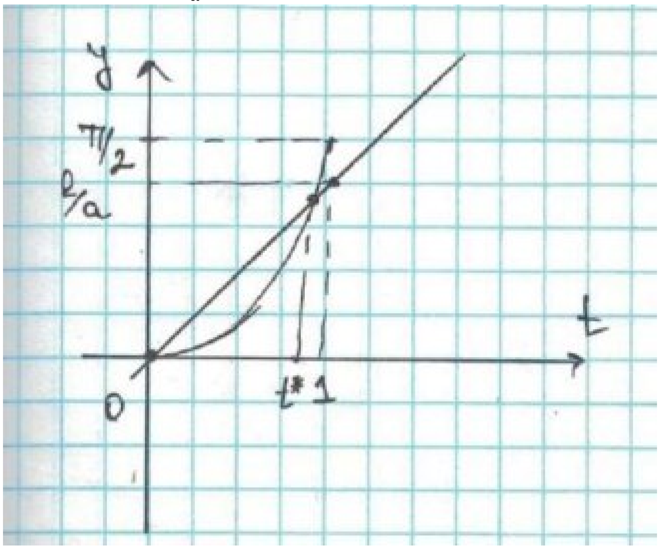
$y = c_2 + \sqrt{\lambda^2 - x^2} = A - \sqrt{\lambda^2 - a^2} + \sqrt{\lambda^2 - x^2}$

$2l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{\lambda^2 - x^2}}\,dx = \lambda \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = \lambda arcsin\frac{x}{\lambda}\ |_{-a}^{a} = 2\lambda arcsin\frac{a}{\lambda}$

Значит, λ - корень трансцендентного уравнения:

$arcsin\frac{a}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{l}{a}, \frac{a}{\lambda} = t$

$arcsint = t \cdot \frac{l}{a} \implies out$* - решения



Условие существования решения:

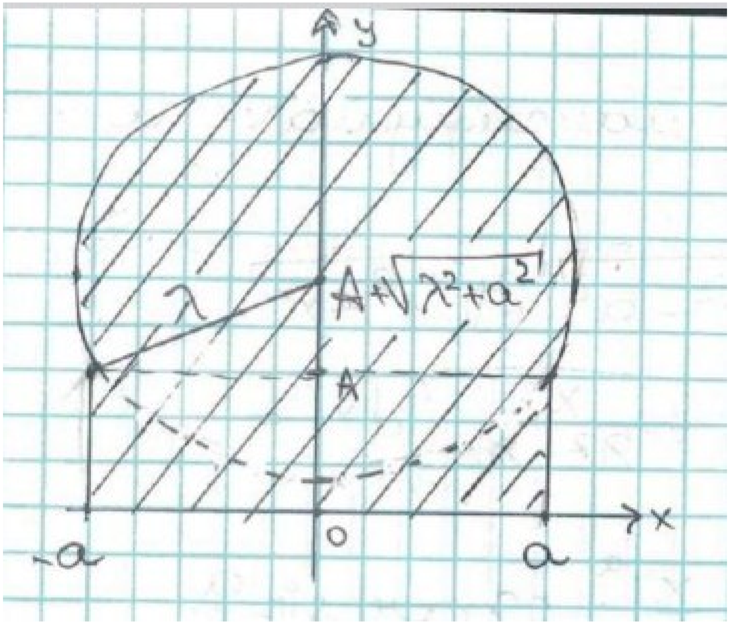
$\frac{l}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ (иначе прямая не пересечет график $arcsin$)

Таким образом, при $a < l < \frac{\pi a}{2}$ имеем экстремаль:

$y = A - \sqrt{(\frac{a}{t*})^2 - a^2} + \sqrt{(\frac{a}{t*})^2 - x^2},$

где t* - ненулевое решение уравнения: $arcsint = \frac{l}{a}t$

Следует отметить, что при $l > \frac{\pi a}{2}$ экстремалями все равно будут окружности (но тогда у нас нет однозначности в задаче)



продолжение читайте в источнике...