Глава 1. Комплексные числа, последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость. Функции комплексного переменного. Кривые на комплексной плоскости.

§1. Комплексные числа и операции над ними.

Опр.1 Мн-во $\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$ и введем операции:
"+": $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$
"·": $(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2,a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)$

Это множество с таким образом введенными операциями сложения и умножения будем называть множеством комплексных чисел. (К. Ч.), $\mathbb{C}$

Алгебраическая форма записи К.Ч.
Рассмотрим числа вида: $(a_i,0)\forall a_i\in\mathbb{R}$
$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,0)$
$(a_1,0)\cdot(a_2,0)=(a_1\cdot a_2,0)$
Числа вида $(a,0)$ ведут себя как $\mathbb{R}$, $(a,0)=a=a\cdot(1,0)$; $(1,0)=1$
Рассмотрим $(0,b)=b\cdot(0,1)=(b,0)\cdot(0,1)=(0,b)$
$b\in\mathbb{R}$, $(0,1)=i\implies(0,1)\cdot(0,1)=i^2=-1$
$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a\cdot(1,0)+b\cdot i=a+bi$
$a=Rez,b=Imz$
$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$
$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$
$\forall z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$
$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(b\cdot i)^2=a^2+b^2=|z|^2$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}\geq0$

Деление:
$\forall z_1,z_2\in\mathbb{C},z_2\neq0\ \exists!z\in\mathbb{C}z_1=z_2\cdot z$
z - частное z_1 и z_2, $z=\frac{z_1}{z_2}$
$z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i\neq0\implies z_2\neq0+0i$, $z=x+yi=?$
$(a_1+b_1i)=(a_2+b_2i)(x+yi)$
$(a_2x-b_2y=a_1)\wedge(b_2x+a_2y=b_1)$ - СЛАУ
$\Delta=a_2^2+b_2^2=|z_2|^2\neq0\implies\exists!$ реш. СЛАУ
$\Delta_x=a_1a_2+b_1b_2$, $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$
$\Delta_y=a_2b_1-a_1b_2$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$

$$z=x+yi=\frac{1}{|z_2|^2}(a_1a_2+b_1b_2+(a_2b_1-a_1b_2)i)=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z_2}}{|z_2|^2}$$

Основные свойства операций сложения и умножения для комплексных чисел.

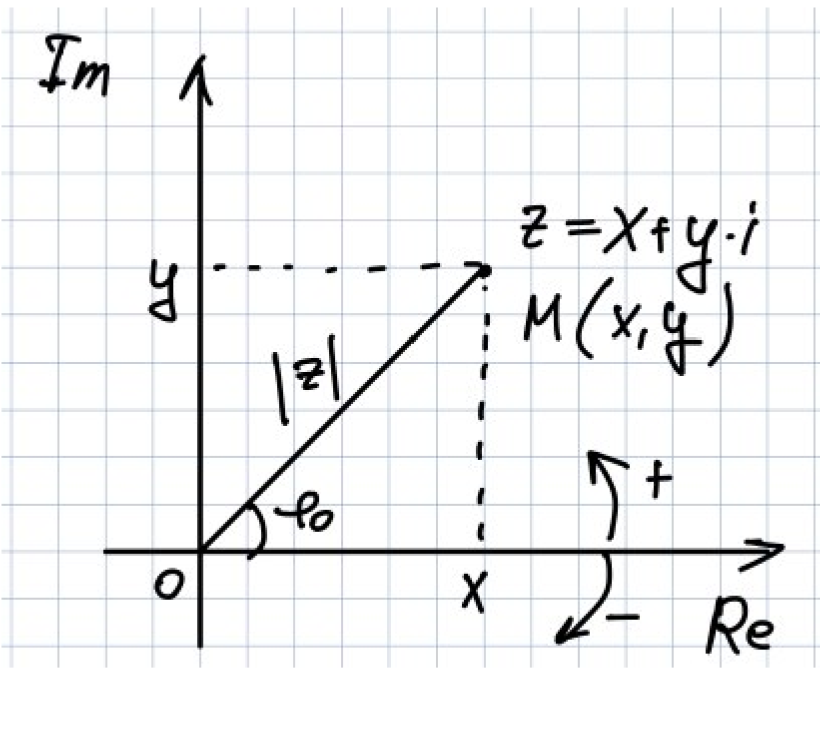
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

- **Сложение:**
  1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативность)
  2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативность)
  3. $\exists 0 \in \mathbb{C}\ \forall z \in \mathbb{C}\ z + 0 = z$
  4. $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists! z_1 \in \mathbb{C}\ z + z_1 = 0$, $z_1 = (-1) \cdot z$
- **Умножение:**
  5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
  6. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
  7. $\exists 1 \in \mathbb{C}\ \forall z \in \mathbb{C}\ 1 \cdot z = z$
  8. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0\ \exists z^{-1} \in \mathbb{C}$: $z \cdot z^{-1} = 1$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$
  9. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

Из выполнения 2-4 следует, что $\mathbb{C}$ - группа по сложению.
1 $\implies$ $\mathbb{C}$ - абелева группа
5-8 $\implies$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ - мультипликативная группа
1-9 - поле комплексных чисел

Геометрическая интерпретация и тригонометрическая форма записи комплексных чисел

$\mathbb{R}^2$: $(1, 0)$, $(0, 1)$ - стандартный базис



$|z| =$ расстояние от точки 0 до точки z на комплексной плоскости.
$\phi_0 \in (-\pi; \pi]$
$z \neq 0$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r \neq 0$
$z = r\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}i\right) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ - тригонометрическая форма записи комплексного числа
$\phi = \phi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
ϕ:$\cos\phi = \frac{x}{r} \wedge \sin\phi = \frac{y}{r}$, ϕ_0 - главное значение аргумента z, $\phi_0 = argz \in (-\pi; \pi]$
$Argz = \{\phi = \phi_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$
$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = r \cdot e^{i\phi}$ - экспоненциальная форма записи

<u>Свойства комплексных чисел, следующие из форм записи:</u>

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
   $(|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|) \iff (z_1 = \alpha \cdot z_2)$, $\alpha \geq 0$
   $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
   $|Rez| \leq |z| \leq |Rez| + |Imz|$
   $|Imz| \leq |z|$
2. $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi \implies arg\bar{z} = -argz$
3. $|e^{i\phi}| = |\cos\phi + i\sin\phi| = 1$
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
   $|z^n| = |z|^n$
5. $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2$
   $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2))$
   $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\phi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\phi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\phi_1+\phi_2)}$
   $z_1, z_2 \neq 0$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$
6. $z = r(cos\phi + i\sin\phi)$, $n \in \mathbb{N}$
   $z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$ - формула Муавра

Извлечение корня из комплексного числа

<u>Опр.2</u> Пусть $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, корнем n-ой степени из комплексного числа z называется всякое комплексное число b: $b^n = z$, т.е. $\sqrt[n]{z}$ - все решения этого уравнения

<u>Утв.</u> Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists$ ровно n различных корней n-ой степени из комплексного числа z. Все эти корни лежат на окружности с центром в точке O и радиусом $R = \sqrt[n]{|z|} > 0$ в вершинах правильного n-угольника $(n \geq 2)$

Δ:

> Рассмотрим $z = r(\cos\phi + isin\phi)$, $z \neq 0$
> $b \neq 0$, $b = |b|(\cos\psi + i\sin\psi)$
> $b^n = |b|^n \cdot (\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\phi + i\sin\phi) \iff (|b|^n = r \wedge \cos n\psi = \cos\phi \wedge \sin n\psi = \sin$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \ldots, n-1$$

□