1. úloha

Definice 1.0 Nechť $H_1 : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ je Heavisideova funkce definovaná

$$H_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{iff} \quad x \in \left]-\infty, 0\right] \\ 1 & \text{iff} \quad x \in \left[0, \infty\right[\end{cases}.$$

Definice 1.1 Označme $\Theta_{a,b} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ přičemž

$$\Theta_{a,b}(x) = H_1(x-a) - H_1(x-b).$$

Alternativně budeme zapisovat pomocí intervalu $I \subset \mathbb{R}$

$$\Theta_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{iff} \quad x \in I \\ 0 & \text{iff} \quad x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases}.$$

Zadání 1.0 Nechť $s_1, s_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou zadané předpisy

$$\begin{aligned} s_1(t) &\coloneqq A\Theta_{-\frac{T_1}{4}, \frac{T_1}{4}}(t), \\ s_2(t) &\coloneqq A\Theta_{-\frac{T_1}{4}, \frac{T_1}{4}}(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right), \end{aligned}$$

pro $A \in \mathbb{C}$ a $T_1 \in \mathbb{R}^+$. Spočtěte $\mathcal{R}[s_1, s_2](\tau)$.
Řešení

$$\mathcal{R}[s_1, s_2](\tau) = \langle s_1(t+\tau), s_2(t) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t+\tau) s_2^*(t) \, \mathrm{d}t.$$

Nyní zkonstruujeme disjunktní dělení množiny $\mathbb{R}$

$$\mathfrak{D} = \{I_1, I_2, I_3, I_4\},$$

kde $I_1 = \left]-\infty, \frac{T_1}{2}\right]$, $I_2 = \left]-\frac{T_1}{2}, 0\right]$, $I_3 = \left]0, \frac{T_1}{2}\right]$ a $I_4 = \left]\frac{T_1}{2}, \infty\right[$. Autokorelační funkci můžeme rozepsat

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[s_1, s_2](\tau) &= \left(\sum_{I \in \mathfrak{D}} \Theta_I \int_I\right) s_1(t+\tau) s_2^*(t) \, \mathrm{d}t = \\ &= \Theta_{I_1} \cdot 0 + \Theta_{I_1} \int_{I_2} AA^* \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) \mathrm{d}t + \Theta_{I_3} \int_{I_3} AA^* \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) \mathrm{d}t + \Theta_{I_4} \cdot 0 = \\ &= \Theta_{I_2} \frac{|A|^2 T_1}{2\pi} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\right) + \Theta_{I_3} \frac{|A|^2 T_1}{2\pi} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\right) = \\ &= \Theta_{I_2 \cup I_3} \frac{|A|^2 T_1}{2\pi} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\right) = \\ &= \Theta_{\frac{-T_1}{2}, \frac{T_1}{2}} \frac{|A|^2 T_1}{\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{T_1}t\right). \end{aligned}$$

Zadání 1.1 Spočtěte energie s_1 a s_2 ze zadání 1.0 a také jejich vzájemnou energii.
Řešení

$$E[s_1] = \langle s_1, s_1 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t) s_1^*(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} |A|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{|A|^2 T_1}{2}.$$

$$E[s_2] = \langle s_2, s_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_2(t) s_2^*(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} |A|^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) \mathrm{d}t = \frac{|A|^2}{2} \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{T_1}t\right) \mathrm{d}t = \frac{|A|^2 T_1}{4}.$$

$$E[s_1, s_2] = \langle s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t) s_2^*(t) \, \mathrm{d}t = |A|^2 \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) \, \mathrm{d}t = \frac{|A|^2 T_1}{\pi}.$$

2. úloha