

# 1. úloha

**Definice 1.0** Charakteristickou funkci  $\chi_A$  množiny  $A$  zavedeme

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{iff } x \in A \\ 0 & \text{iff } x \in A^c \end{cases}.$$

**Zadání 1.0** Necht  $s_1, s_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  jsou zadané předpisy

$$\begin{aligned} s_1(t) &:= A\chi_I(t), \\ s_2(t) &:= A\chi_I(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right), \end{aligned}$$

pro  $I = \left[-\frac{T_1}{4}, \frac{T_1}{4}\right]$ ,  $A \in \mathbb{C}$  a  $T_1 \in \mathbb{R}^+$ . Spočtěte  $\mathcal{R}[s_1, s_2](\tau)$ .

**Řešení**

$$\mathcal{R}[s_1, s_2](\tau) = \langle s_1(t+\tau), s_2(t) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t+\tau) s_2^*(t) dt.$$

Nyní zkonstruujeme disjunktní dělení množiny  $\mathbb{R}$

$$\mathfrak{D} = \{I_1, I_2, I_3, I_4\},$$

kde  $I_1 = ]-\infty, \frac{T_1}{2}]$ ,  $I_2 = ]-\frac{T_1}{2}, 0]$ ,  $I_3 = ]0, \frac{T_1}{2}]$  a  $I_4 = ]\frac{T_1}{2}, \infty[$ . Autokorelační funkci můžeme rozepsat

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[s_1, s_2](\tau) &= \left( \sum_{I \in \mathfrak{D}} \chi_I(\tau) \int_I s_1(t+\tau) s_2^*(t) dt = \right. \\ &= \chi_{I_1}(\tau) \cdot 0 + \chi_{I_2}(\tau) \int_{I_2} AA^* \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) dt + \chi_{I_3}(\tau) \int_{I_3} AA^* \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) dt + \chi_{I_4}(\tau) \cdot 0 = \\ &= \chi_{I_2}(\tau) \frac{|A|^2 T_1}{\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{T_1}\tau\right) + \chi_{I_3}(\tau) \frac{|A|^2 T_1}{\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{T_1}\tau\right) = \\ &= \chi_{\left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right]}(\tau) \frac{|A|^2 T_1}{\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{T_1}\tau\right). \end{aligned}$$

**Zadání 1.1** Spočtěte energie  $s_1$  a  $s_2$  ze zadání 1.0 a také jejich vzájemnou energii.

**Řešení**

$$E[s_1] = \langle s_1, s_1 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t) s_1^*(t) dt = \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} |A|^2 dt = \frac{|A|^2 T_1}{2}.$$

$$E[s_2] = \langle s_2, s_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_2(t) s_2^*(t) dt = \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} |A|^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) dt = \frac{|A|^2}{2} \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{T_1}t\right) dt = \frac{|A|^2 T_1}{4}.$$

$$E[s_1, s_2] = \langle s_1, s_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t) s_2^*(t) dt = |A|^2 \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) dt = \frac{|A|^2 T_1}{\pi}.$$

## 2. úloha

**Věta 2.0** Mějme periodickou funkci  $f$  se základní periodou  $T_0$  s předpisem

$$f(t) = \sum_{\substack{n \in A \\ t \in M}} K_n \chi_{M_n}(t),$$

kde  $K_n \in \mathbb{R}$ ,  $M_n \subset \mathbb{R} \forall n \in A \subset \mathbb{Z}$  a  $M = \bigcup_{n \in A} M_n$ . Navíc každá  $M_n$  je souvislá, tedy je intervalem  $[a_n, b_n)$ . Potom Fourierovy koeficienty funkce  $f$  budou

$$c_m = \frac{1}{T_0} \sum_{n \in A} 2K_n \nu_n e^{-i\omega_0 m \xi_n} \text{sinc}(\omega_0 m \nu_n),$$

kde  $T_0 = \sup_{n \in A} (b_n) - \inf_{n \in A} (a_n)$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\nu_n := \frac{b_n - a_n}{2} \quad \text{a} \quad \xi_n := \frac{a_n + b_n}{2}.$$

**Důkaz** Koeficienty určíme z

$$c_m = \langle f, e^{i\omega_0 m} \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{T_0} \int_M f(t) e^{-i\omega_0 m t} dt = \frac{1}{T_0} \int_M \sum_{\substack{n \in A \\ t \in M}} K_n \chi_{M_n}(t) e^{-i\omega_0 m t} dt,$$

zaměníme pořadí integrace a sumace (odvoláváme se na Fubiniho větu)

$$c_m = \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{n \in A \\ t \in M}} \int_{M_n} K_n e^{-i\omega_0 m t} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{n \in A \\ t \in M}} \frac{K_n (e^{-im\omega_0 b_n} - e^{-im\omega_0 a_n})}{-im\omega_0}.$$

Dále zavedeme pomocné  $\nu_n$  a  $\xi_n$  a upravíme

$$c_m = \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{n \in A \\ t \in M}} \frac{K_n (e^{-im\omega_0(\xi_n - \nu_n)} - e^{-im\omega_0(\nu_n + \xi_n)})}{im\omega_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{n \in A} 2K_n \nu_n e^{-i\omega_0 m \xi_n} \text{sinc}(\omega_0 m \nu_n).$$

□

**Zadání 2.0** Více informací k zadání je v úkolu.

- (i) Určete základní periody signálů  $s_3$  a  $s_4$ .
- (ii) Určete předpisy pro signály  $s_3$  a  $s_4$  na jedné jejich (vhodně zvolené) základní periodě.
- (iii) Určete koeficienty Fourierovy řady  $c_{4,n}$  signálu  $s_4$  a koeficienty Fourierovy řady  $r_{4,n}$  korelační funkce  $\mathcal{R}[s_4](\tau)$ .
- (iv) Určete stejnosměrné složky  $\text{DC}[s_3]$ ,  $\text{DC}[s_4]$  signálů  $s_3$ , resp.  $s_4$ .
- (v) Ověřte Parsevalovu větu pro signál  $s_3$ , tj. určete výkon  $P[s_3]$  v čase a pak z koeficientů  $c_{3,n}$  – měli byste dostat stejnou hodnotu.
- (vi) Určete výkon  $P[s_4]$  a kolik procent výkonu je nesen harmonickou složkou s indexem  $n = 1$  obecně a pro  $\beta = \frac{1}{4}$ .

## Řešení

(i) Základní perioda  $s_3$  a  $s_4$  je  $T_2$ .

(ii)

$$s_3(t) = A\chi_{[0,T_3]}(t) - A\chi_{[T_3,T_2]}(t), \forall t \in [0, T_2]$$

a

$$s_4(t) = \frac{2A}{T_2}, \forall t \in \left[-\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2}\right]$$

(iii) K řešení využijeme věty 2.0, přičemž jednotlivé koeficienty jsou

$$T_0 = T_2, K_1 = A, K_2 = -A, \nu_1 = \frac{T_3}{2}, \nu_2 = \frac{T_2 - T_3}{2}, \xi_1 = \frac{T_3}{2}, \xi_2 = \frac{T_3 + T_2}{2}, \text{ a } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_2},$$

potom

$$\begin{aligned} c_{4,n} &= \frac{AT_3}{T_2} e^{-\frac{i\pi n T_3}{T_2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n T_3}{T_2}\right) - A \frac{T_2 - T_3}{T_2} e^{-\frac{i\pi n (T_2 + T_3)}{T_2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n (T_2 - T_3)}{T_2}\right) = \\ &= A\beta e^{-i\pi n \beta} \operatorname{sinc}(\pi n \beta) - A(1 - \beta) e^{-i\pi n (1 + \beta)} \operatorname{sinc}(\pi n (1 - \beta)) = \\ &= \frac{iA}{\pi n} (e^{-2i\pi n \beta} - 1) \end{aligned}$$

Dále určíme Fourierovy koeficienty autokorelační funkce

$$\begin{aligned} r_{4,n} &= \frac{1}{T_2} \int_0^{T_3} |A|^2 \left(1 - 4\frac{\tau}{T_2}\right) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{T_2} \int_{T_3}^{T_2 - T_3} |A|^2 (1 - 4\beta) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau + \frac{1}{T_2} \int_{T_2 - T_3}^{T_2} |A|^2 \left(-3 + 4\frac{\tau}{T_2}\right) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau \end{aligned}$$

Nyní manipulací s integračními mezemi převedeme na

$$r_{4,n} = \frac{1}{T_2} \int_{-T_3}^{T_3} |A|^2 \left(1 - 4\frac{|\tau|}{T_2}\right) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau + \frac{1}{T_2} \int_{T_3}^{T_2 - T_3} |A|^2 (1 - 4\beta) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau,$$

komplexní exponenciálu přepíšeme do trigonometrického tvaru

$$r_{4,n} = \frac{1}{T_2} \int_{-T_3}^{T_3} |A|^2 \left(1 - 4\frac{|\tau|}{T_2}\right) (\cos(\omega_0 n \tau) + i \sin(\omega_0 n \tau)) d\tau + \frac{1}{T_2} \int_{T_3}^{T_2 - T_3} |A|^2 (1 - 4\beta) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau$$

a využijeme poznatků o integraci přes sudé/liché funkce na symetrickém intervalu, získáme tak

$$r_{4,n} = \frac{2}{T_2} \int_0^{T_3} |A|^2 \left(1 - 4\frac{\tau}{T_2}\right) \cos(\omega_0 n \tau) d\tau + \frac{1}{T_2} \int_{T_3}^{T_2 - T_3} |A|^2 (1 - 4\beta) e^{-i\omega_0 n \tau} d\tau.$$

První integrál je roven

$$\begin{aligned} &\frac{|A|^2}{\pi^2 n^2 T_2} \left( \pi n (T_2 - 4T_3) \sin\left(\frac{2\pi n T_3}{T_2}\right) - 2T_2 \cos\left(\frac{2\pi n T_3}{T_2}\right) + 2T_2 \right) = \\ &= 2|A|^2 \left( \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi n T_3}{T_2}\right)}{\pi^2 n^2} + \frac{T_3 (T_2 - 4T_3) \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi n T_3}{T_2}\right)}{T_2^2} \right) = \\ &= 2|A|^2 (2\beta^2 \operatorname{sinc}^2(\pi n \beta) + \beta(1 - 4\beta) \operatorname{sinc}(2\pi n \beta)) \end{aligned}$$

a druhý integrál je roven, za použití věty 2.0 ( $T_0 = T_2$ ,  $K_1 = |A|^2(1 - 4\beta)$ ,  $\nu_1 = \frac{T_2 - 2T_3}{2}$ ,  $\xi_1 = \frac{T_2}{2}$  a  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_2}$ )

$$\frac{|A|^2}{T_2} (1 - 4\beta) e^{-i\pi n (T_2 - 2T_3)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n (T_2 - 2T_3)}{T_2}\right) = |A|^2 (1 - 4\beta) e^{-i\pi n} (1 - 2\beta) \operatorname{sinc}(\pi n (1 - 2\beta)).$$

Celkově tedy dostáváme

$$\begin{aligned} r_{4,n} &= 2|A|^2 (2\beta^2 \text{sinc}^2(\pi n \beta) + \beta(1 - 4\beta) \text{sinc}(2\pi n \beta)) + |A|^2 (1 - 4\beta) e^{-i\pi n} (1 - 2\beta) \text{sinc}(\pi n (1 - 2\beta)) = \\ &= -\frac{A^2 (1 - e^{-2i\pi \beta n})^2}{\pi^2 n^2}, \end{aligned}$$

což je totéž co  $|c_{4,n}|^2$ .

(iv) Konstantní komponenty signálu  $s_3$  je 0, jelikož je lichý.  $\text{DC}[s_4]$  určíme následovně

$$\text{DC}[s_4] = \langle s_3 \rangle = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} s_3(t) dt = \frac{1}{T_2} \left( A \int_0^{T_3} dt - A \int_{T_3}^{T_2} dt \right) = A(2\beta - 1).$$

(v) Máme ověřit, že

$$\|s_3\|_{L^2}^2 = \|\{c_{3,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2.$$

Na levé straně máme

$$\|s_3\|_{L^2}^2 = \frac{1}{T_2} \int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \frac{4|A|^2}{T_2^2} t^2 dt = \frac{|A|^2}{3}$$

a na pravé

$$\|\{c_{3,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_{3,n}|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{iA(-1)^n}{n\pi} \right|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A|^2}{n^2 \pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{|A|^2}{3}.$$

(vi) Nejprve určíme

$$\text{P}[s_4] = \langle |s_4|^2 \rangle = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} |s_4|^2 dt = \frac{1}{T_2} \left( |A|^2 \int_0^{T_3} dt + |A|^2 \int_{T_3}^{T_2} dt \right) = |A|^2,$$

dále určíme výkon harmonické složky pro  $n = 1$ , tedy

$$|c_{4,1}|^2 = \left| \frac{iA(e^{-2i\pi\beta} - 1)}{\pi} \right|^2 = \frac{4|A|^2 \sin^2(\pi\beta)}{\pi^2} = 4|A|^2 \beta^2 \text{sinc}^2(\pi\beta),$$

a poměr výkonu

$$\eta = \frac{|c_{4,1}|^2}{\text{P}[s_4]} = 4\beta^2 \text{sinc}^2(\pi\beta).$$

Pro  $\beta = \frac{1}{4}$  je  $\eta = \frac{2}{\pi}$ .