1. úloha

Definice 1.0 Charakteristickou funkci χ_A množiny A zavedeme

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{iff} \quad x \in A \\ 0 & \text{iff} \quad x \in A^{\mathsf{c}} \end{cases}.$$

Zadání 1.0 Nechť $s_1, s_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou zadané předpisy

$$\begin{aligned} s_1(t) &\coloneqq A\chi_I(t), \\ s_2(t) &\coloneqq A\chi_I(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right), \end{aligned}$$

pro $I = \left[-\frac{T_1}{4}, \frac{T_1}{4}\right]$, $A \in \mathbb{C}$ a $T_1 \in \mathbb{R}^+$. Spočtěte $\mathcal{R}[s_1, s_2](\tau)$.

Řešení

$$\mathcal{R}[s_1, s_2](\tau) = \langle s_1(t+\tau), s_2(t)\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t+\tau)s_2^*(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nyní zkonstruujeme disjunktní dělení množiny $\mathbb{R}$

$$\mathfrak{D} = \{I_1, I_2, I_3, I_4\},$$

kde $I_1 = \left]-\infty, \frac{T_1}{2}\right]$, $I_2 = \left]-\frac{T_1}{2}, 0\right]$, $I_3 = \left]0, \frac{T_1}{2}\right]$ a $I_4 = \left]\frac{T_1}{2}, \infty\right[$. Autokorelační funkci můžeme rozepsat

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[s_1, s_2](\tau) &= \left(\sum_{I \in \mathfrak{D}} \chi_I(\tau) \int_I\right) s_1(t+\tau)s_2^*(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \chi_{I_1}(\tau)\cdot 0 + \chi_{I_2}(\tau)\int_{I_2} AA^*\cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\mathrm{d}t + \chi_{I_3}(\tau)\int_{I_3} AA^*\cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\mathrm{d}t + \chi_{I_4}(\tau)\cdot 0 = \\ &= \chi_{I_2}(\tau)\frac{|A|^2T_1}{\pi}\cos^2\left(\frac{\pi}{T_1}\tau\right) + \chi_{I_3}(\tau)\frac{|A|^2T_1}{\pi}\cos^2\left(\frac{\pi}{T_1}\tau\right) = \\ &= \chi_{\left[\frac{-T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right]}(\tau)\frac{|A|^2T_1}{\pi}\cos^2\left(\frac{\pi}{T_1}\tau\right). \end{aligned}$$

Zadání 1.1 Spočtěte energie s_1 a s_2 ze zadání 1.0 a také jejich vzájemnou energii.

Řešení

$$E[s_1] = \langle s_1, s_1\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t)s_1^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} |A|^2\,\mathrm{d}t = \frac{|A|^2T_1}{2}.$$

$$E[s_2] = \langle s_2, s_2\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_2(t)s_2^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} |A|^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\mathrm{d}t = \frac{|A|^2}{2}\int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{T_1}t\right)\mathrm{d}t = \frac{|A|^2T_1}{4}.$$

$$E[s_1, s_2] = \langle s_1, s_2\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} s_1(t)s_2^*(t)\,\mathrm{d}t = |A|^2\int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\mathrm{d}t = \frac{|A|^2T_1}{\pi}.$$

2. úloha

Věta 2.0 Mějme periodickou funkci f se základní periodou T_0 s předpisem

$$f(t) = \sum_{\substack{n\in A\\ t\in M}} K_n \chi_{M_n}(t),$$

kde $K_n \in \mathbb{R}$, $M_n \subset \mathbb{R}\,\forall n \in A \subset \mathbb{Z}$ a $M = \bigcup_{n\in A} M_n$. Navíc každá M_n je souvislá, tedy je intervalem $[a_n, b_n)$. Potom Fourierovy koeficienty funkce f budou

$$c_m = \frac{1}{T_0} \sum_{n\in A} 2K_n \nu_n e^{-i\omega_0 m \xi_n} \operatorname{sinc}(\omega_0 m \nu_n),$$

kde $T_0 = \sup_{n\in A}(b_n) - \inf_{n\in A}(a_n)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\nu_n := \frac{b_n - a_n}{2} \quad \text{a} \quad \xi_n := \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Důkaz Koeficienty určíme z

$$c_m = \langle f, e^{i\omega_0 m}\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{T_0}\int_M f(t) e^{-i\omega_0 m t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_M \sum_{\substack{n\in A\\ t\in M}} K_n \chi_{M_n}(t) e^{-i\omega_0 m t}\,\mathrm{d}t,$$

zaměníme pořadí integrace a sumace (odvoláváme se na Fubiniho větu)

$$c_m = \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{n\in A\\ t\in M}} \int_{M_n} K_n e^{-i\omega_0 m t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{n\in A\\ t\in M}} \frac{K_n \left(e^{-im\omega_0 b_n} - e^{-im\omega_0 a_n}\right)}{-im\omega_0}.$$

Dále zavedeme pomocné ν_n a ξ_n a upravíme

$$c_m = \frac{1}{T_0} \sum_{\substack{n\in A\\ t\in M}} \frac{K_n \left(e^{-im\omega_0(\xi_n - \nu_n)} - e^{-im\omega_0(\nu_n + \xi_n)}\right)}{im\omega_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{n\in A} 2K_n \nu_n e^{-i\omega_0 m \xi_n} \operatorname{sinc}(\omega_0 m \nu_n).$$

□

Zadání 2.0 Více informací k zadání je v úkolu.

(i) Určete základní periody signálů s_3 a s_4.

(ii) Určete předpisy pro signály s_3 a s_4 na jedné jejich (vhodně zvolené) základní periodě.

(iii) Určete koeficienty Fourierovy řady $c_{4,n}$ signálu s_4 a koeficienty Fourierovy řady $r_{4,n}$ korelační funkce $\mathcal{R}[s_4](\tau)$.

(iv) Určete stejnosměrné složky DC $[s_3]$, DC $[s_4]$ signálů s_3, resp. s_4

(v) Ověřte Parsevalovu větu pro signál s_3, tj. určete výkon $P[s_3]$ v čase a pak z koeficientů $c_{3,n}$ – měli byste dostat stejnou hodnotu.

(vi) Určete výkon $P[s_4]$ a kolik procent výkonu je neseno harmonickou složkou s indexem $n = 1$ obecně a pro $\beta = \frac{1}{4}$.

Řešení

(i) Základní perioda s_3 a s_4 je T_2.

(ii)
$$s_3(t) = A\chi_{[0,T_3]}(t) - A\chi_{[T_3,T_2]}(t),\ \forall t \in [0, T_2]$$
a
$$s_4(t) = \frac{2A}{T_2},\ \forall t \in \left[-\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2}\right]$$

(iii) K řešení využijeme věty 2.0, přičemž jednotlivé koeficienty jsou
$$T_0 = T_2,\ K_1 = A,\ K_2 = -A,\ \nu_1 = \frac{T_3}{2},\ \nu_2 = \frac{T_2 - T_3}{2},\ \xi_1 = \frac{T_3}{2},\ \xi_2 = \frac{T_3 + T_2}{2},\ \text{a}\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_2},$$
potom
$$\begin{aligned} c_{4,n} &= \frac{AT_3}{T_2} e^{-\frac{i\pi n T_3}{T_2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n T_3}{T_2}\right) - A\frac{T_2 - T_3}{T_2} e^{-\frac{i\pi n(T_2+T_3)}{T_2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n\left(T_2 - T_3\right)}{T_2}\right) = \\ &= A\beta e^{-i\pi n\beta} \operatorname{sinc}\left(\pi n\beta\right) - A\left(1-\beta\right) e^{-i\pi n(1+\beta)} \operatorname{sinc}\left(\pi n\left(1-\beta\right)\right) = \\ &= \frac{iA}{\pi n}\left(e^{-2i\pi\beta n} - 1\right) \end{aligned}$$
Dále určíme Fourierovy koeficienty autokorelační funkce
$$\begin{aligned} r_{4,n} = &\frac{1}{T_2}\int_0^{T_3} |A|^2 \left(1 - 4\frac{\tau}{T_2}\right) e^{-i\omega_0 n\tau}\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \frac{1}{T_2}\int_{T_3}^{T_2-T_3} |A|^2\left(1-4\beta\right) e^{-i\omega_0 n\tau}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{T_2}\int_{T_2-T_3}^{T_2} |A|^2\left(-3 + 4\frac{\tau}{T_2}\right) e^{-i\omega_0 n\tau}\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$
Nyní manipulací s integračními mezemi převedeme na
$$r_{4,n} = \frac{1}{T_2}\int_{-T_3}^{T_3} |A|^2\left(1 - 4\frac{|\tau|}{T_2}\right) e^{-i\omega_0 n\tau}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{T_2}\int_{T_3}^{T_2-T_3} |A|^2\left(1-4\beta\right) e^{-i\omega_0 n\tau}\,\mathrm{d}\tau,$$
koplexní exponenciálu přepíšeme do trigonometrickéhi tvaru
$$r_{4,n} = \frac{1}{T_2}\int_{-T_3}^{T_3} |A|^2\left(1 - 4\frac{|\tau|}{T_2}\right)\left(\cos(\omega_0 n\tau) + i\sin(\omega_0 n\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{T_2}\int_{T_3}^{T_2-T_3} |A|^2\left(1-4\beta\right) e^{-i\omega_0 n\tau}\,\mathrm{d}\tau$$
a využijeme poznatků o integraci přes sudé/liché funkce na symetrickém intervalu, získáme tak
$$r_{4,n} = \frac{2}{T_2}\int_0^{T_3} |A|^2\left(1 - 4\frac{\tau}{T_2}\right)\cos(\omega_0 n\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{T_2}\int_{T_3}^{T_2-T_3} |A|^2\left(1-4\beta\right) e^{-i\omega_0 n\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$
První integrál je roven
$$\begin{aligned} &\frac{|A|^2}{\pi^2 n^2 T_2}\left(\pi n\left(T_2 - 4T_3\right)\sin\left(\frac{2\pi n T_3}{T_2}\right) - 2T_2\cos\left(\frac{2\pi n T_3}{T_2}\right) + 2T_2\right) = \\ &= 2|A|^2\left(\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi n T_3}{T_2}\right)}{\pi^2 n^2} + \frac{T_3\left(T_2 - 4T_3\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi n T_3}{T_2}\right)}{T_2^2}\right) = \\ &= 2|A|^2\left(2\beta^2\operatorname{sinc}^2(\pi n\beta) + \beta(1-4\beta)\operatorname{sinc}(2\pi n\beta)\right) \end{aligned}$$
a druhý integrál je roven, za použití věty 2.0 ($T_0 = T_2$, $K_1 = |A|^2(1-4\beta)$, $\nu_1 = \frac{T_2 - 2T_3}{2}$, $\xi_1 = \frac{T_2}{2}$ a $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_2}$)
$$\frac{|A|^2}{T_2}(1-4\beta)e^{-i\pi n}\left(T_2 - 2T_3\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n\left(T_2 - 2T_3\right)}{T_2}\right) = |A|^2(1-4\beta)e^{-i\pi n}\left(1-2\beta\right)\operatorname{sinc}\left(\pi n\left(1-2\beta\right)\right).$$

Celkově tedy dostáváme

$$r_{4,n} = 2|A|^2 \left(2\beta^2 \mathrm{sinc}^2(\pi n\beta) + \beta(1-4\beta)\mathrm{sinc}(2\pi n\beta)\right) + |A|^2(1-4\beta)e^{-i\pi n}\left(1-2\beta\right)\mathrm{sinc}\left(\pi n\left(1-2\beta\right)\right) =$$
$$= -\frac{A^2\left(1-e^{-2i\pi\beta n}\right)^2}{\pi^2 n^2},$$

což je totéž co $|c_{4,n}|^2$.

(iv) Konstantní komponenty signálu s_3 je 0, jelikož je lichý. DC $[s_4]$ určíme následovně

$$\mathrm{DC}\left[s_4\right] = \langle s_3\rangle = \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} s_3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_2}\left(A\int_0^{T_3}\mathrm{d}t - A\int_{T_3}^{T_2}\mathrm{d}t\right) = A(2\beta-1).$$

(v) Máme ověřit, že

$$\|s_3\|_{L^2}^2 = \|\{c_{3,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2.$$

Na levé straně máme

$$\|s_3\|_{L^2}^2 = \frac{1}{T_2}\int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \frac{4|A|^2}{T_2^2}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{|A|^2}{3}$$

a na pravé

$$\|\{c_{3,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_{3,n}|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left|\frac{iA(-1)^n}{n\pi}\right|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|A|^2}{n^2\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{|A|^2}{3}.$$

(vi) Nejprve určíme

$$\mathrm{P}\left[s_4\right] = \langle |s_4|^2\rangle = \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}|s_4|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T_2}\left(|A|^2\int_0^{T_3}\mathrm{d}t + |A|^2\int_{T_3}^{T_2}\mathrm{d}t\right) = |A|^2,$$

dále určíme výkon harmonické složky pro $n=1$, tedy

$$|c_{4,1}|^2 = \left|\frac{iA\left(e^{-2i\pi\beta-1}\right)}{\pi}\right|^2 = \frac{4|A|^2\sin^2(\pi\beta)}{\pi^2} = 4|A|^2\beta^2\mathrm{sinc}^2(\pi\beta),$$

a poměr výkonu

$$\eta = \frac{|c_{4,1}|^2}{\mathrm{P}\left[s_4\right]} = 4\beta^2\mathrm{sinc}^2(\pi\beta).$$

Pro $\beta = \frac{1}{4}$ je $\eta = \frac{2}{\pi}$