

Домашняя работа 1

Пирожков Михаил Михайлович

2 ноября 2022 г.

1 Описание задачи

Будем реализовывать классическую задачу о рационе. Предположим, что мы хотим похудеть, а значит, нам нужно разработать распорядок питания и меню на день. Конечно, мы бы хотели употреблять как минимум 1500 ккал. Чтобы это сделать, составим питание на утро, день, вечер. В каждый из периодов у нас будет цель собрать необходимый набор блюд, чтобы при этом мы укладывались в норму по калориям и потратили наименьшее количество денег.

Разумно следить за количеством БЖУ утром, днем и вечером, так как нам бы хотелось прежде всего соблюдать соотношение БЖУ, нежели ориентироваться только на калории. Будем придерживаться правила 300/600/600 по калориям. Т.е 20% калорий будем употреблять утром, а по 40% оставим на обед и на вечер. В онлайн калькуляторе можно узнать суточную норму БЖУ по данным калориям. Предположим, для 1500 ккал у нас получилась суточная норма белка - 74 грамма, жиров - 60 граммов, углеводов - 164 грамма. Т.е утром мы употребим 15/12/33 граммов белка, жиров и углеводов соответственно. Аналогично для обеда и ужина - 30/24/66 граммов. Т.е для каждого из трех приемов пищи мы определились с тем, сколько хотим употреблять БЖУ.

2 Математическая модель

Продолжим решать нашу задачу. Давайте определим для каждого из приемов пищи по 3 блюда. Т.е в итоге у нас будет 9 блюд. У каждого блюда будет свое количество белков, жиров и углеводов. Тогда получится матрица из 3 строк и 9 столбцов, где по столбцам будут блюда, а по строчкам - характеристики этих блюд (белки, жиры, углеводы). Давайте перечислим все блюда, которые у нас будут, пусть это, например, маленькое меню в столовой.

- Завтрак

1. Бутерброд с сыром и маслом (1 шт.): 161/6/10/9.
Цена: 20 руб;
2. Каша овсянная вязкая (100 гр.): 84/3/1/15.
Цена: 30 руб;
3. Омлет (100 гр.): 184/9/15/2.
Цена: 50 руб;

- Обед

1. Котлеты из курицы (1 шт.): 222/18/10/14.
Цена: 80 руб;
2. Гречка (100 гр.): 92/3/1/20.
Цена: 25 руб;
3. Солянка домашняя (100 гр.): 64/4/4/4.
Цена: 30 руб;

- Ужин

1. Гречневые спагетти в тофу-соусе (1 шт.): 207/9/6/30.
Цена: 80 руб;
2. Салат крабовые палочки (100 гр.): 100/6/4/9.
Цена: 50 руб;
3. Овощное рагу с кабачками и помидорами (100 гр.): 73/1/6/5.
Цена: 70 руб.

Ясно, что для каждого из приемов пищи только три переменные будут ненулевые, поэтому давайте составлять ограничения и целевую функцию для каждого из приемов пищи по отдельности.

3 Завтрак

Замечание. Выше у нас было 9 переменных по порядку x_i , $i = 1, \dots, 9$. Поэтому каждая из подзадач будет иметь свою целевую функцию, где мы будем минимизировать цену, при **различных ограничениях**.

Для завтрака мы будем рассматривать целевую функцию вида:

$$\omega(\vec{x}) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3,$$

где коэффициенты перед переменными – суть цена наших блюд, а переменные – это количество блюда, здесь 100 гр. = 1 шт. Так как мы хотим, чтобы цена была минимальной, то получаем задачу на минимум:

$$\omega(\vec{x}) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3 \rightarrow \min_{\vec{x}}.$$

Теперь давайте запишем ограничения. Мы уже договорились, что будем следить за БЖУ, а так как на утро мы хотим **как минимум** упо-

треблять 15/12/33 белков, жиров и углеводов соответственно, то автоматически получаем сразу три условия:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 10 & 1 & 15 \\ 9 & 15 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ 33 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Мы хотим похудеть, а значит, нам явно нужно ограничение сверху на жиры, мы можем, например, потребовать, чтобы их было на завтрак уж точно меньше, чем требуется белков:

$$10x_1 + x_2 + 15x_3 \leq 15. \quad (2)$$

Также мы бы не хотели кушать в большом количестве одно блюдо, поэтому естественным было бы поставить ограничение сверху на количество каждой потребляемой еды, на завтрак будем есть не больше 3 порций:

$$x_i \leq 3, i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Наконец, потребуем, чтобы все переменные были неотрицательны:

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Далее таким же образом со своими ограничениями будем строить задачу о рационе на обед и ужин.

4 Обед

Здесь уже требуем, чтобы все переменные, кроме x_4, x_5, x_6 , были равны нулю. Так как мы не хотим брать блюда на обед, которые были на завтрак, ведь они уже будут как минимум холодные, а блюда на ужин еще не приготовили. Стало быть, задача иметь вид:

$$\omega(\vec{x}) = 80x_4 + 25x_5 + 30x_6 \rightarrow \min_{\vec{x}}.$$

Как и в (1) снова автоматически возникают ограничения на БЖУ. Отсюда получаем:

$$\begin{bmatrix} 18 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 4 \\ 14 & 20 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 66 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Мы хоть и худеем, но учимся в университете, поэтому после пар нам хотелось бы плотно и разнообразно поесть. Поэтому мы постараемся поесть каждое блюдо как минимум в одном количестве, отсюда:

$$x_i \geq 1, i = 4, 5, 6. \quad (6)$$

А также суммарное количество порций сделаем не меньше 5:

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 5. \quad (7)$$

Также врач нам запретил употреблять в обед слишком много белка, а именно, запретил употреблять больше, чем 125% от нормы. А так как норма для обеда – это 30, то получаем ограничение вида:

$$18x_4 + 3x_5 + 4x_6 \leq 30 \cdot 1.25 = 37.5. \quad (8)$$

5 Ужин

По тем же соображениям, что и для завтрака, и для обеда, получаем задачу вида:

$$\omega(\vec{x}) = 80x_7 + 50x_8 + 70x_9 \rightarrow \min_{\vec{x}}.$$

Как и в (1) снова автоматически возникают ограничения на БЖУ. Отсюда получаем:

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \\ 30 & 9 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 66 \end{bmatrix} \quad (9)$$

На ужин мы не будем употреблять слишком много пищи, так как нам нужно рано ложиться спать, поэтому поставим ограничение на суммарное количества порций равное 4:

$$x_7 + x_8 + x_9 = 4. \quad (10)$$

На ужине так же, как и на завтрак, потребуем ограничение на жиры:

$$6x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 30. \quad (11)$$

А также добавим неотрицательность переменных:

$$x_i \geq 0, i = 7, 8, 9. \quad (12)$$