Теор. задачи по 3D

Пищенко Маргарита

Март 2021

8. Пусть первый поворот совершается вокруг оси x на угол $\pi/2$, а второй - вокруг оси y на тот же угол. Найдите результирующий поворот.

Теорема об операторе вращения (1-ый пункт). *Если Q и R - нескалярные кватернионы, причём $Q = |Q|(cos\theta/2 + \xi sin\theta/2)$, то:*
$R' = Q^\circ R^\circ Q^{-1}$ является кватернионом, векторная часть которого $r = vect(R')$ получается вращением $r = vect(R)$ по конусу вокруг оси $vect(Q)$, причем конец вектора r описывает дугу с центром на оси , соответствующую углу θ

1) По условию $OX = i$, $\theta = \pi/2$, $Q = |i| * (cos\pi/4 + i * sin\pi/4) = (cos\pi/4 + i * sin\pi/4)$. Q нормированный кватернион, поэтому $Q^{-1} = \overline{Q} = \lambda_0 - \lambda = |Q|(\lambda_0/|Q| - \lambda/|Q|) = (cos\pi/4 - isin\pi/4) => R_1 = (cos\pi/4 + isin\pi/4)R(cos\pi/4 - isin\pi/4)$

2) Аналогично для $Q = OY = j => R_2 = (cos\pi/4 + jsin\pi/4)R_1(cos\pi/4 - jsin\pi/4)$

3) Учтем, что $j * i = -k$:
$R_2 = (cos\pi/4 + jsin\pi/4)(cos\pi/4 + isin\pi/4)R(cos\pi/4 - isin\pi/4)(cos\pi/4 - jsin\pi/4) =$
$(\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2)R(\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2) =$
$(1/2 + 1/2i + 1/2j + 1/2ji)R(1/2 + 1/2i - 1/2j - 1/2ji) =$
$(1/2 + 1/2i + 1/2j + 1/2ji)R(1/2 + 1/2i - 1/2j - 1/2ji) =$
$(1/2 + 1/2i + 1/2j - 1/2k)R(1/2 + 1/2i - 1/2j + 1/2k)$

$\Lambda = 1/2 + 1/2i + 1/2j - 1/2k$, $|\Lambda| = 1$, $sin(\phi) = 1/2$, $cos(\phi) = 1/2 => \phi = \pi/3 =>$ по теореме поворачиваем на угол $2\phi = 2\pi/3$.
Ответ: $R_2 = (1/2 + 1/2i + 1/2j - 1/2k)R(1/2 + 1/2i - 1/2j + 1/2k)$, ось вращения $i + j - k$(1, 1, -1), угол $2\pi/3$.