Теор. задачи по 3D

Пищенко Маргарита

Март 2021

1.

1. Переносим центр координат в $A(a,b)$.(вспоминаем про подобные матрицы)
2. Поворачиваем на угол ϕ.

Матрица поворота имеет вид: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$

3.

1. Переносим центр координат в $A(a,b,)$.
2. Поворачиваем на угол ϕ относительно одной из осей.(по часовой берем положительный угол, иначе отрицательный)
3. Поворачиваем на угол ψ относительно другой оси.
4. Вектор (l,m,n) в результате должен стать сонаправлен с 3-ей координатной осью.
5. Поворачиваем на угол θ из условия.

$$1)\ T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \end{bmatrix}, T_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$$

2)-3)
а) Если совмещаем с OZ: $-\phi$ для OX, ψ для OY.
б) Если совмещаем с OY: ϕ для OX, $-\psi$ для OZ.
в) Если совмещаем с OX: $-\phi$ для OY, ψ для OZ.

Рассмотрим случай a):
$sin\phi = \frac{m}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, $cos\phi = \frac{n}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$
$sin\psi = l$, $cos\psi = \sqrt{(m^2+n^2)}$
Эти значения надо будет подставить в матрицы элементарных вращений R_{OX}, R_{OY}.

$$R_{OX}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ cos\alpha & sin\alpha & 0 & 0 \\ -sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{OY}(\alpha) = \begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & -sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin\alpha & 0 & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) $R_{OZ}(\theta) = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Итоговая матрица поворота имеет вид: $M = T_A^{-1} * R_{OX}(\phi) * R_{OY}(-\psi) * R_{OZ}(\theta) * R_{OY}(\psi) * R_{OX}(-\phi) * T_A$

8.

$$R_{OX}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ cos\alpha & sin\alpha & 0 & 0 \\ -sin\alpha & cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{OY}(\alpha) = \begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & -sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin\alpha & 0 & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha = \pi/2$

$$R_{OX}(\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{OY}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A(a, b, c) -> A'(-c , a, -b)
$cos(\beta) = (A, A')/||A||^2 = (-a * c + b * a - c * b)/(a^2 + b^2 + c^2)$
$\beta = arccos(\frac{-ac+ba-cb}{a^2+b^2+c^2})$