ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

——————o0o——————

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mã lớp học phần: **MAT2314**

Sinh viên: **LƯU VĂN VIỆT**

Lớp: **A2K65 TOÁN - TIN**

Hà Nội, tháng 5 năm 2022

Mục lục

Chương 1

Phương trình vi phân cấp 1

I Phương trình tách biến

1 *Phương trình tách biến*

Dạng phương trình:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

Phương pháp:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$$

Ví dụ 1:

$$\begin{aligned} & x^2dx - ydy = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \int x^2dx - \int ydy = C \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C \end{aligned}$$

2 *Phương trình đưa về dạng tách biến.*

Dạng phương trình:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y_dy) = 0$$

Phương pháp: Chia cả hai vế cho $\dfrac{1}{f_2(x)g_1(y)}$ đưa phương trình đã cho về dạng tách biến.

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Ví dụ 2:

$$\begin{aligned}
& x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{y}{1+y^2}dy = C \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{ln(1+x^2)}{2} + \frac{ln(1+y^2)}{2} = lnC \\
\Leftrightarrow\quad & (1+x^2)(1+y^2) = C
\end{aligned}$$

3 *Phương trình khuyết.*

(a) Phương trình khuyết y.

Trường hợp 1: $y' = f(x)$

Phương pháp:

$$y = \int f(x)dx + C$$

Ví dụ 3:

$$\begin{aligned}
& y' = sinx \\
\Leftrightarrow\quad & y = \int sinxdx + C \\
\Leftrightarrow\quad & y = -cosx + C
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $x = f(y')$

Phương pháp:

$$Let\ y' = t \Rightarrow dy = tdx$$

$$x = f(y') = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt \Rightarrow dy = tf'(t)dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y = \int tf'(t)dt \end{cases}$$

Ví dụ 4:

$$x = 1 + y' + (y')^2$$

$$Let\ y' = t \Rightarrow dy = tdx$$

$$x = 1 + y' + (y')^2 = 1 + t + t^2 \Rightarrow dx = (1+2t)dt \Rightarrow dy = t(1+2t)dt$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t + t^2 \\ y = \displaystyle\int t(1+2t)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3} + C \end{cases}$$

Trường hợp 3: $x = f(t), \quad y' = g(t)$

Phương pháp:

$$x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt$$

$$y' = g(t) \Rightarrow dy = g(t)dx = g(t)f'(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y = \displaystyle\int g(t)f'(t)dt \end{cases}$$

Ví dụ 5:

$$x^2 + (y')^2 = 2$$

$$Let\ x = \sqrt{2}sint \Rightarrow dx = \sqrt{2}costdt$$

$$y' = \sqrt{2}cost \Rightarrow dy = \sqrt{2}costdx = 2cos^2tdt$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}cost \\ y = \displaystyle\int 2cos^2tdt = \frac{sin2t}{2} + t + C \end{cases}$$

(b) Phương trình khuyết x

Trường hợp 1: $y' = f(y)$

Phương pháp:

$$\begin{aligned} y' = f(y) \Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = f(y) \\ \Leftrightarrow \quad & dx = \frac{dy}{f(y)} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \int \frac{dy}{f(y)} + C \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $y = f(y')$

Phương pháp:

$$\begin{aligned}
&Let\ y' = t \Rightarrow dy = tdx\\
&\quad y = f(y') = f(t) \Rightarrow dy = f'(t)dt \Rightarrow dx = \frac{f'(t)}{t}dt\\
&\quad \Rightarrow \begin{cases} y = f(t) \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(t)}{t}dt \end{cases}
\end{aligned}$$

Trường hợp 3: $y = f(t), \quad y' = g(t)$

Phương pháp:

$$\begin{aligned}
&y = f(t) \Rightarrow dy = f'(t)dt\\
&y' = g(t) \Rightarrow dy = g(t)dx = f'(t)dt \Rightarrow dx = \frac{f'(t)}{g(t)}dt\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(t) \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(t)}{g(t)}dt \end{cases}
\end{aligned}$$

Ví dụ 6:

$$y^2 + (y')^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
&Let\ y = sint \Rightarrow dy = costdt\\
&\quad y' = cost \Rightarrow dy = costdx \Rightarrow dx = \frac{cost}{cost}dt = dt\\
&\quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + C \\ y = sint = sin(x + C) \end{cases}
\end{aligned}$$

4 Phương trình dạng $y' = f(ax + by + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

Phương pháp:

$$\begin{aligned}
&Let\ z = ax + by + c \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + by' = a + bf(z)\\
&\quad \Rightarrow \frac{dz}{a + bf(z)} = dx\\
&\quad \Leftrightarrow x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C
\end{aligned}$$

Ví dụ 7:

$$y' = e^{2x+y}$$

$$\begin{aligned}
&Let\ \ z = 2x + y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 + y' = 2 + e^z \\
&\quad \Rightarrow \frac{dz}{2+e^z} = dx \\
&\quad \Leftrightarrow x = \int \frac{dz}{2+e^z} + C = \frac{1}{2} ln \left| \frac{t}{t+2} \right| + \frac{1}{2} lnC \\
&\quad \Rightarrow y = ln\left(\frac{C}{2+e^{2x+y}}\right)
\end{aligned}$$

II Phương trình thuần nhất.

1 *Phương trình thuần nhất bậc k.*

Dạng phương trình:

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$ trong đó M và N là hai hàm thuần nhất cùng bậc.

Phương pháp:

$$Let\ \ y = xz \Rightarrow dy = xdz + zdx$$

Ví dụ 8:

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$$

$$\begin{aligned}
Let\ y = xz \Rightarrow \quad & dy = xdz + zdx \\
& (x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (1 + 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2})dx + (\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1)dy = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (1 + 2z - z^2)dx + (z^2 + 2z - 1)(xdz + zdx) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (z^3 + z^2 + z + 1)dx + x(z^2 + 2z - 1)dz = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{dx}{x} = \frac{1 - 2z - z^2}{z^3 + z^2 + z + 1}dz \\
\Leftrightarrow \quad & lnx = ln(z+1) - ln(z^2+1) + lnC \\
\Leftrightarrow \quad & x = C\frac{z+1}{z^2+1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 + y^2}{x+y} = C
\end{aligned}$$

2 *Phương trình dạng phân thức*

Dạng phương trình

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right), a, b, c, n, m, p \in \mathbb{R}$$

Phương pháp:

$$Xét\ D = \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}$$

(i) Nếu $D \neq 0$ thì phương trình $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ mx + ny + p = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (\alpha, \beta)$. Khi đó ta đặt:

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

Phương trình đã cho đưa về dạng:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{mu + nv}\right)$$

Ví dụ 9:

$$(x + 4y)dy = (2x + 3y - 5)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y - 5}{x + 4y}$$

$$Xét\ D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$Let \begin{cases} x = u + 4 \\ y = v - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

$$\begin{aligned}
& (u + 4v)dv = (2u + 3v)du \\
Let\ v = uz \Rightarrow \quad & dv = udz + zdu \\
& (u + 4v)dv = (2u + 3v)du \\
\Leftrightarrow \quad & (1 + 4\frac{v}{u})dv = (2 + 3\frac{v}{u})du \\
\Leftrightarrow \quad & (1 + 4z)(udz + zdu) = (2 + 3z)du \\
\Leftrightarrow \quad & u(1 + 4z)dz = (2 + 2z - 4z^2)du \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{du}{u} = \frac{1 + 4z}{2 + 2z - 4z^2}dz \\
\Leftrightarrow \quad & lnu = -\frac{1}{6}ln(2z + 1) - \frac{5}{6}ln(1 - z) + lnC \\
\Leftrightarrow \quad & u^6 = C(2z + 1)^{-1}(1 - z)^{-5} \\
\Leftrightarrow \quad & (2uz + u)(u - uz)^5 = (2y + x - 2)(x - y - 3) = C
\end{aligned}$$

(ii) Nếu $D \neq 0$ thì $\begin{cases} m = ka \\ n = kb \end{cases}$ Khi đó ta đặt: $z = ax + by \Rightarrow z' = a + by'$ Phương trình đã cho đưa về dạng:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{k(ax+by)+p}\right) = f\left(\frac{z+c}{kz+p}\right) = \frac{z'-a}{b}$$

Ví dụ 10:

$$(4x+2y-3)dy = (2x+y+1)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$$

$$Xét\ D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&Let\ z = 2x + y \Rightarrow z' = 2 + y' \\
&\quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3} = \frac{z+1}{2z-3} = z' - 2 \\
\Leftrightarrow &\quad z' = \frac{5z-5}{2z-3} \\
\Leftrightarrow &\quad \frac{2z-3}{5z-5}dz = dx \\
\Leftrightarrow &\quad x = \int \frac{2z-3}{5z-5}dz \\
\Leftrightarrow &\quad x = \frac{2}{5}z - \frac{1}{5}ln(z-1) + C \\
\Leftrightarrow &\quad x = \frac{2}{5}(2x+y) - \frac{1}{5}(2x+y-1) + C
\end{aligned}$$

III Phương trình tuyến tính cấp 1.

1 *Phương trình tuyến tính cấp 1.*

Dạng phương trình:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Phương pháp:

Ta xác định: $\mu(x) = exp(\int p(x)dx)$. Nhân cả hai vế của phương trình với $\mu(x)$, ta được:

$$\begin{aligned}
&y'\mu(x) + p(x)\mu(x)y = q(x)\mu(x) \\
\Leftrightarrow\quad &(y\mu(x))' = q(x)\mu(x) \\
\Leftrightarrow\quad &y\mu(x) = \int q(x)\mu(x)dx + C
\end{aligned}$$

Ví dụ 11:

$$\begin{aligned} & y' = 4\frac{y}{x} + x^5 e^x \\ \Leftrightarrow \quad & y' - 4\frac{y}{x} = x^5 e^x \end{aligned}$$

Ta xác định: $\mu(x) = exp\left(\int \frac{-4}{x}dx\right) = x^{-4} \Rightarrow$ nhân cả hai vế của phương trình với $\mu(x) = x^{-4}$, ta được:

$$\begin{aligned} & y'x^{-4} - \frac{4y}{x^5} = xe^x \\ \Leftrightarrow \quad & (yx^{-4})' = xe^x \\ \Leftrightarrow \quad & yx^{-4} = \int xe^x dx + C \\ \Leftrightarrow \quad & yx^{-4} = (x-1)e^x + C \\ \Leftrightarrow \quad & y = x^4(x-1)e^x + x^4 C \end{aligned}$$

2 *Phương trình Bernoulli.*

Dạng phương trình:

$$y' + f(x)y = y^\alpha g(x), \quad \alpha \neq 1$$

Phương pháp:

$$\begin{aligned} Let\ z = y^{1-\alpha} \Rightarrow \quad & z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' \\ \Leftrightarrow \quad & y' = \frac{y^\alpha z'}{1-\alpha} \\ \Rightarrow \quad & \frac{y^\alpha z'}{1-\alpha} + f(x)y = y^\alpha g(x) \\ \Leftrightarrow \quad & z' + (1-\alpha)f(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)g(x) \\ \Leftrightarrow \quad & z' + P(x)z = Q(x) \end{aligned}$$

Phương trình đã được đưa về dạng phương trình tuyến tính cấp 1.

Ví dụ 12:

$$
\begin{aligned}
& x^2y' + y^2 = xy \\
\Leftrightarrow \quad & y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x^2} \\
Let\ z = y^{-1} \Rightarrow \quad & z' = -y^{-2}y' \\
\Leftrightarrow \quad & y' = -y^2z' \\
\Rightarrow \quad & -y^2z' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & z' + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

Ta xác định: $\mu(x) = exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = x \Rightarrow$ nhân cả hai vế của phương trình với $\mu(x) = x$, ta được:

$$
\begin{aligned}
& z'x + z = \frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow \quad & (xz)' = \frac{1}{x} \\
\Leftrightarrow \quad & xz = lnx + C \\
\Leftrightarrow \quad & z = \frac{1}{y} = \frac{lnx + C}{x} \\
\Leftrightarrow \quad & y = \frac{x}{lnx + c}
\end{aligned}
$$

IV Phương trình vi phân toàn phần.

1 *Phương trình vi phân toàn phần.*

Dạng phương trình:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Trong đó: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Phương pháp:

Xét $F = \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C$$

$$\textbf{\textit{or:}} \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C$$

Ví dụ 13:

$$(3x^2 + 2xy)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

Ta có $F = \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2x = 0 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$\int_{x_0}^{x} (3x^2 + 2xy)dx + \int_{y_0}^{y} (x_0^2 + y^2)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^3 + x^2y)\Big|_{x_0}^{x} + (yx_0^2 + \frac{y^3}{3})\Big|_{y_0}^{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + x^2y + \frac{y^3}{3} = C$$

2 Thừa số tích phân.

Dạng phương trình:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Trong đó: $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Phương pháp:

Xét $F = \dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow$

Nếu $\dfrac{F}{N} = a(x)$ thì ta xác định $\mu(x) = exp(\int a(x)dx)$

Nếu $\dfrac{F}{-M} = b(y)$ thì ta xác định $\mu(y) = exp(\int b(y)dy)$

Khi đó, nhân cả hai vế của phương trình với $\mu(x)$ hoặc $\mu(y)$, ta đưa được phương trình về dạng phương trình vi phân toàn phần.

Ví dụ 14:

$$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$$

Ta có:

$$F = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -x^2 - 2xy + 3x^2 = 2x^2 - 2xy$$

$$\frac{F}{N} = \frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x}$$

Ta xác định: $\mu(x) = exp\left(\int -\frac{2}{x}dx\right) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ nhân cả 2 vế của phương trình với $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$, ta được:

$$(\frac{1}{x^2} - y)dx + (y - x)dy = 0$$

$\Rightarrow$ *Nghiệm tổng quát của phương trình là:*

$$\int_{x_0}^{x}(\frac{1}{x^2} - y)dx + \int_{y_0}^{y}(y - x_0)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\frac{-1}{x} - xy)\Big|_{x_0}^{x} + (\frac{y^2}{2} - x_0 y)\Big|_{y_0}^{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C$$

V Phương trình Lagrange.

Dạng phương trình:

$$y = \varphi(y')x + \psi(y')$$

Phương pháp:

$$\text{Let } y' = p \Rightarrow dy = pdx$$

$$y = \varphi(p)x + \psi(p)$$

$$\Rightarrow \quad dy = \varphi(p)dx + (\varphi'_x(p) + \psi'_x(p))dp = pdx$$

$$\Leftrightarrow \quad (\varphi(p) - p)dx + (\varphi'_x(p) + \psi'_x(p))dp = 0$$

$$\Rightarrow \quad x' + P(p)dx = Q(p)$$

Ví dụ 15:

$$y = 2xy' - (y')^2$$

$$\text{Let } y' = p \Rightarrow dy = pdx$$

$$y = 2xp - p^2$$

$$\Rightarrow \quad dy = 2pdx + (2x - 2p)dp = pdx$$

$$\Leftrightarrow \quad 2pdx + (2x - 2p)dp = 0$$

$$\Rightarrow \quad x' + \frac{2}{p}dx = 2$$

Ta xác định: $\mu(p) = exp\left(\int \frac{2dp}{p}\right) = p^2 \Rightarrow$ nhân cả hai vế của phương trình với $\mu(p) = p^2$, ta được:

$$
\begin{aligned}
& p^2x' + 2px = 2p^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (p^2x)' = 2p^2 \\
\Leftrightarrow \quad & p^2x = \frac{2}{3}p^3 + C \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{2}{3}p + Cp^{-2} \\
\Rightarrow \quad & y = \frac{p^2}{3} + \frac{2C}{p}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 16:

$$
\begin{aligned}
& y = xy' - (y')^2 \\
\text{Let } & y' = p \Rightarrow dy = pdx \\
& y = xp - p^2 \\
\Rightarrow \quad & dy = pdx + (x-2p)dp = pdx \\
\Leftrightarrow \quad & (x-2p)dp = 0 \\
\Rightarrow \quad & \left[\begin{array}{l} x - 2p = 0 \\ dp = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$$(i) \quad x - 2p = 0 \Rightarrow x = 2p \Rightarrow y = xp - p^2 = p^2$$

$$(ii) \quad dp = 0 \Rightarrow p = y' = C \Rightarrow y = Cx - C^2$$

Chương 2

Phương trình vi phân cấp 2

$$(H) \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

$$(NH) \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

$$(H_c) \quad y'' + py' + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$(NH_c) \quad y'' + py' + q = f(t) \quad p, q \in \mathbb{R}$$

I Các nguyên lý cơ bản

Nguyên lý cơ bản: Nếu $y_1(t), y_2(t)$ là nghiệm của (H) thì $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cũng là nghiệm của (H)

Nguyên lý Afin: Nếu $y(t)$ là nghiệm của (H) và $z(t)$ là nghiệm của (NH) thì $y(t) + z(t)$ là nghiệm của (NH)

Nguyên lý chồng chất nghiệm: Nếu

$y_1^*(t)$ là 1 nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

$y_2^*(t)$ là 1 nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t)$$

thì $y_1^*(t) + y_2^*(t)$ là 1 nghiệm riêng của phương trình:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t) + f_2(t)$$

II Định thức Wronskian, cấu trúc nghiệm của (H) và (NH)

1 *Định thức Wronskian*

Định nghĩa 1: Cho hệ 2 hàm số $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\}$. Khi đó định thức:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

được gọi là định thức Wronskian của hệ hàm $\mathcal{B}$

Định nghĩa 2: Hệ 2 hàm số $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\}$ được gọi là hệ nghiệm cơ bản của (H) nếu:

(i) $\mathcal{B}$ là nghiệm của (H)

(ii) $W(t) \neq 0$

Định lý 1:

Nếu hệ 2 hàm số $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\}$ phụ thuộc tuyến tính và có đạo hàm trong miền $\mathcal{D}$ thì định thức Wronskian $W(t) = 0, \forall t \in \mathcal{D}$.

Nếu hệ 2 hàm số $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\}$ độc lập tuyến tính và có đạo hàm trong miền $\mathcal{D}$ thì định thức Wronskian $\exists t_0 \in \mathcal{D}, W(t_0) \neq 0$.

Định lý W: Cho hệ $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\}$ là hai nghiệm của (H). Khi đó, nếu $\exists t_0 \in \mathcal{D}, W(t_0) \neq 0$ thì $W(t) \neq 0, \forall t \in \mathcal{D}$

2 *Cấu trúc nghiệm của* (H) *và* (NH)

Định lý H: Cho $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\}$ là 1 hệ nghiệm cơ bản của (H). Khi đó mọi nghiệm của (H) cho bởi:

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$$

Định lý NH: Nếu $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ là nghiệm tổng quát của (H) và $y^*(t)$ là một nghiệm riêng của (NH) thì khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi:

$$y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + y^*(t)$$

3 *Định lý Lagrange*

Định lý Lagrange: Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Cho hệ nghiệm $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\}$ của (H). Khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi

$$y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$$

trong đó:

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

4 *Công thức Abel*

Cho hệ nghiệm $\mathcal{B} = \{y_1(t), y_2(t)\}$ của (H). Khi đó 2 công thức sau đây:

$$W(t) = Ce^{-\int p(t)dt} = Ce^{-F(t)} \text{ với } F(t) = \int p(t)dt$$

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

tương đương với nhau và được gọi là các công thức Abel hay công thức Ostrogradski - Liouville.

III Phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng

Dạng phương trình:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f_1(x) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad y'' + Ay' + By = f(x)$$

Phương pháp:

Bước 1: Tìm hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất $\{y_1, y_2\}$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng y^*

Bước 3: Nghiệm tổng quát có dạng $y(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + y^*$

1 Tìm hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất

Xét phương trình:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

Khi đó đa thức sau được gọi là đa thức đặc trưng của phương trình trên:

$$P(\lambda) = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (2)$$

(i) Trường hợp 1: Nếu (2) có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2 thì

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

(ii) Trường hợp 2: Nếu (2) có nghiệm kép $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ thì

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad y_2 = xe^{\lambda x}$$

(iii) Trường hợp 3: Nếu (2) có 2 nghiệm phức phân biệt $\lambda = a \pm bi$ thì

$$y_1 = e^{ax}cosbx \quad y_2 = e^{ax}sinbx$$

2 Tìm nghiệm riêng $y*$

2.1. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Xét phương trình:

$$y'' + ay' + b = f(x)$$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng y^* có dạng

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

Thỏa mãn: $\begin{cases} C1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$

Với

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Ví dụ 17:

$$4y'' + 36y = \frac{1}{sin3x}$$

(i) Xét phương trình đặc trưng

$$4\lambda^2 + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 3i$$

$\Rightarrow$ Hệ nghiệm cơ bản

$$y_1 = cos3x, \quad y_2 = sin3x$$

(ii) Tìm $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)cos3x + C_2(x)sin3x$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} C_1'cos3x + C_2'sin3x = 0 \\ -3C_1'sin3x + 3C_2'cos3x = \dfrac{1}{4sin3x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} cos3x & sin3x \\ -3sin3x & 3cos3x \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & sin3x \\ \dfrac{1}{4sin3x} & 3cos3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} cos3x & 0 \\ -3sin3x & \dfrac{1}{4sin3x} \end{vmatrix} = \frac{cos3x}{4sin3x}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} C_1' = -\dfrac{1}{12} \\ C_2' = \dfrac{cos3x}{12sin3x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -\dfrac{x}{12} \\ C_2 = \dfrac{ln|sin3x|}{36} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y^* = -\frac{xcos3x}{12} + sin3x\frac{ln|sin3x|}{36}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát:

$$y = Acos3x + Bsin3x - \frac{xcos3x}{12} + sin3x\frac{ln|sin3x|}{36}$$

2.2. Phương pháp hệ số bất định

2.2.1. Nếu $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$

Trường hợp 1: α không là nghiệm của đa thức đặc trưng thì ta tìm $y*$ có dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}.P_n^*(x)$$

Trường hợp 2: α là nghiệm bội k của đa thức đặc trưng thì ta tìm $y*$ có dạng:

$$y^* = x^k e^{\alpha x}.P_n^*(x)$$

2.2.2. Nếu $f(x) = e^{\alpha x}.[P_n(x)cos\beta x + Q_n(x)sin\beta x]$

Trường hợp 1: $\alpha + i\beta$ không là nghiệm của đa thức đặc trưng thì ta tìm $y*$ có dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}.[P_n^*(x)cos\beta x + Q_n^*(x)sin\beta x]$$

Trường hợp 2: $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội k của đa thức đặc trưng thì ta tìm $y*$ có dạng:

$$y^* = x^k e^{\alpha x}.[P_n^*(x)cos\beta x + Q_n^*(x)sin\beta x]$$

2.2.3. Nếu $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Nếu y_1^* là nghiệm riêng của $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f_1(x)$

y_2^* là nghiệm riêng của $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f_2(x)$

$\Rightarrow$ $y^* = y_1^* + y_2^*$ là nghiệm riêng của $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f_1(x) + f_2(x)$

Ví dụ 18:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + 1)$$

(i) Xét phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

$\Rightarrow$ Hệ nghiệm cơ bản

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}$$

(ii) Tìm nghiệm riêng:

$$y^* = e^{3x}(ax^2 + bx + c)$$
$$(y^*)' = 3e^{3x}(ax^2 + bx + c) + e^{3x}(2ax + b)$$
$$(y*)'' = 9e^{3x}(ax^2 + bx + c) + 6e^{3x}(2ax + b) + 2ae^{3x}$$

$\Rightarrow \quad (y^*)'' - 3(y^*)' + 2y^* = 2e^{3x}(ax^2 + bx + c) + 3e^{3x}(2ax + b) + 2ae^{3x} = e^{3x}(x^2 + 1)$

$\Rightarrow \quad 2ax^2 + (6a + 2b)x + (2a + 3b + 2c) = x^2 + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a & = 1 \\ 6a + 2b & = 0 \\ 2a + 3b + 2c & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = \dfrac{1}{2} \\ b & = -\dfrac{3}{2} \\ c & = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad y^* = e^{3x}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{9}{4}\right)$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1e^x + C_2e^2x + e^{3x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}\right)$$

Ví dụ 19:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(x^2 - 2)$$

(i) Xét phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$$

$\Rightarrow$ Hệ nghiệm cơ bản

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}$$

(ii) Tìm nghiệm riêng:

$$y^* = xe^{2x}(ax^2 + bx + c) = e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx)$$
$$(y^*)' = 2e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx) + e^{2x}(3ax^2 + 2bx + c)$$
$$(y*)'' = 4e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx) + 4e^{2x}(3ax^2 + 2bx + c) + e^{2x}(6ax + 2b)$$

$\Rightarrow \quad (y^*)'' - 3(y^*)' + 2y^* = e^{2x}(3ax^2 + 2bx + c) + e^{2x}(6ax + b) = x^2 - 2$

$\Rightarrow \quad (3ax^2 + 2bx + c) + (6ax + b) = x^2 - 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a & = 1 \\ 6a + 2b & = 0 \\ 2b + c & = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = \dfrac{1}{3} \\ b & = -1 \\ c & = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad y^* = xe^{2x}\left(\dfrac{x^2}{3} - x\right)$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1e^x + C_2e^2x + xe^{2x}\left(\frac{x^2}{3} - x\right)$$

Chương 3

Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

$$(H) \quad y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0$$

$$(NH) \quad y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{(n-1)}(t)y' + a_n(t)y = f(t)$$

$$(H_c) \quad y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad a_i, \quad i = 1, 2, ..., n \in \mathbb{R}$$

$$(NH_c) \quad y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(t) \quad a_i, \quad i = 1, 2, ..., n \in \mathbb{R}$$

$$(E_c) \quad x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \quad a_i, \quad i = 1, 2, ..., n \in \mathbb{R}$$

$$(NE_c) \quad x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = f(t) \quad a_i, \quad i = 1, 2, ..., n \in \mathbb{R}$$

I Định thức Wronskian, cấu trúc nghiệm

1 *Định thức Wronskian*

Định nghĩa 1: Cho hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$. Khi đó định thức:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & ... & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & ... & y_n'(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & ... & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Wronskian của hệ hàm $\mathcal{B}$

Định nghĩa 2: Hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$ được gọi là hệ nghiệm cơ bản của (H) nếu:

(i) $\mathcal{B}$ là nghiệm của (H)

(ii) $W(t) \neq 0$

Định lý 1:

Nếu hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$ phụ thuộc tuyến tính và có đạo hàm trong miền $\mathcal{D}$ thì định thức Wronskian $W(t) = 0, \forall t \in \mathcal{D}$.

Nếu hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$ độc lập tuyến tính và có đạo hàm trong miền $\mathcal{D}$ thì định thức Wronskian $\exists t_0 \in \mathcal{D}, W(t_0) \neq 0$.

Định lý W: Cho hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$ là các nghiệm của (H). Khi đó, nếu $\exists t_0 \in \mathcal{D}, W(t_0) \neq 0$ thì $W(t) \neq 0, \forall t \in \mathcal{D}$

2 *Cấu trúc nghiệm của* (H) *và* (NH)

Định lý H: Cho hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$ là 1 hệ nghiệm cơ bản của (H). Khi đó mọi nghiệm của (H) cho bởi:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(t)$$

Định lý NH: Nếu $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k(t)$ là nghiệm tổng quát của (H) và $y^*(t)$ là một nghiệm riêng của (NH) thì khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(t) + y^*(t)$$

3 *Định lý Lagrange*

Định lý Lagrange: Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Cho hệ nghiệm cơ bản $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$ của (H). Khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t) y_k(t)$$

trong đó:

$$\begin{cases} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) + ... + C_n'(t)y_n(t) = 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) + ... + C_n'(t)y_n'(t) = 0 \\ ... \\ C_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)y_2^{(n-1)}(t) + ... + C_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

4 *Công thức Abel*

Cho hệ nghiệm $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$ của (H). Khi đó 2 công thức sau đây:

$$W(t) = Ce^{-\int a_1(t)dt} = Ce^{-F(t)} \text{ với } F(t) = \int a_1(t)dt$$

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}$$

tương đương với nhau và được gọi là các công thức Abel hay công thức Ostrogradski - Liouville.

II Phương trình vi phân cấp n với hệ số hằng

Dạng phương trình:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Phương pháp:

Bước 1: Tìm hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$

Bước 2: Tìm nghiệm riêng $y^*(x)$

Bước 3: Nghiệm tổng quát có dạng $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) + y^*(x)$

1 *Tìm hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất*

Xét phương trình:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$$

Khi đó đa thức sau được gọi là đa thức đặc trưng của phương trình trên:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$$

Giả sử phương trình $P(\lambda) = 0$ có n nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

(i) Trường hợp 1: Nếu λ_i là nghiệm thực đơn thì:

$$y_i = e^{\lambda_i x}$$

(ii) Trường hợp 2: Nếu λ_i là nghiệm thực bội k thì:

$$y_{i1} = e^{\lambda_i x} \quad y_{i2} = xe^{\lambda_i x} \quad ... \quad y_{ik} = x^{k-1}e^{\lambda_i x}$$

(iii) Trường hợp 3: Nếu $\lambda_i = a \pm bi$ là nghiệm phức đơn thì:

$$y_{i1} = e^{ax}cos(bx) \quad y_{i2} = e^{ax}sin(bx)$$

(iii) Trường hợp 4: Nếu $\lambda_i = a \pm bi$ là nghiệm phức bội k thì:

$$y_{i11} = e^{ax}cos(bx) \quad y_{i12} = e^{ax}sin(bx)$$

$$y_{i21} = xe^{ax}cos(bx) \quad y_{i22} = xe^{ax}sin(bx)$$

$$...$$

$$y_{ik1} = x^{k-1}e^{ax}cos(bx) \quad y_{ik2} = x^{k-1}e^{ax}sin(bx)$$

2 *Tìm nghiệm riêng* $y*$

2.1. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Xét phương trình:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = f(x)$$

$\Rightarrow$ Nghiệm riêng y^* có dạng

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x)$$

Thỏa mãn: $\begin{cases} C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) + ... + C_n'(t)y_n(t) = 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) + ... + C_n'(t)y_n'(t) = 0 \\ ... \\ C_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)y_2^{(n-1)}(t) + ... + C_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$

Với

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} y_1 & ... & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & ... & y_n \\ y_1' & ... & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & ... & y_{i-1}^{(n-1)} & f(x) & y_{i+1}^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

$$\Rightarrow C_i' = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

2.2. Phương pháp hệ số bất định

2.2.1. Nếu $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x)$

Trường hợp 1: α không là nghiệm của đa thức đặc trưng thì ta tìm $y*$ có dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}.P_n^*(x)$$

Trường hợp 2: α là nghiệm bội k của đa thức đặc trưng thì ta tìm $y*$ có dạng:

$$y^* = x^k e^{\alpha x}.P_n^*(x)$$

2.2.2. Nếu $f(x) = e^{\alpha x}.[P_n(x)cos\beta x + Q_n(x)sin\beta x]$

Trường hợp 1: $\alpha + i\beta$ không là nghiệm của đa thức đặc trưng thì ta tìm $y*$ có dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}.[P_n^*(x)cos\beta x + Q_n^*(x)sin\beta x]$$

Trường hợp 2: $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội k của đa thức đặc trưng thì ta tìm $y*$ có dạng:

$$y^* = x^k e^{\alpha x}.[P_n^*(x)cos\beta x + Q_n^*(x)sin\beta x]$$

Ví dụ 20:

$$y^{(4)} - 2y'' + y = (e^x + e^{2x})x^2$$

(i) Xét phương trình đặc trưng

$$\begin{aligned} &\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad &\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hệ nghiệm cơ bản

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x, \quad y_3 = e^{-x}, \quad y_4 = xe^{-x}$$

(ii) Tìm nghiệm riêng:

Nghiệm riêng y_1^* của phương trình: $y^{(4)} - 2y'' + y = x^2e^x$ có dạng

$$\begin{aligned} y_1^* &= e^x(ax^4 + bx^3 + cx^2) \\ (y_1^*)' &= e^x(ax^4 + bx^3 + cx^2) + e^x(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) \\ (y_1^*)'' &= e^x(ax^4 + bx^3 + cx^2) + 2e^x(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) + e^x(12ax^2 + 6bx + 2c) \\ (y_1^*)''' &= e^x(ax^4 + bx^3 + cx^2) + 3e^x(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) + 3e^x(12ax^2 + 6bx + 2c) + e^x(24ax + 6b) \\ (y_1^*)^{(4)} &= e^x(ax^4 + bx^3 + cx^2) + 4e^x(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) + 6e^x(12ax^2 + 6bx + 2c) + 4e^x(24ax + 6b) \\ &+ 24ae^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & (y_1^*)^{(4)} - 2(y_1^*)'' + y_1^* = 4e^x(12ax^2 + 6bx + 2c) + 4e^x(24ax + 6b) + 24ae^x = x^2e^x \\ \Rightarrow\quad & 48ax^2 + (96a + 24b)x + (24a + 24b + 8c) = x^2 \\ \Rightarrow\; & \begin{cases} 48a & = 1 \\ 96a + 24b & = 0 \\ 24a + 24b + 8c & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = \dfrac{1}{48} \\ b & = -\dfrac{1}{12} \\ c & = \dfrac{3}{16} \end{cases} \\ \Rightarrow\quad & y_1^* = \frac{x^4e^x}{48} - \frac{x^3e^x}{12} + \frac{3x^2e^x}{16} \end{aligned}$$

Nghiệm riêng y_2^* của phương trình: $y^{(4)} - 2y'' + y = x^2e^{2x}$ có dạng

$$\begin{aligned}
y_2^* &= e^{2x}(ax^2+bx+c)\\
(y_2^*)' &= 2e^{2x}(ax^2+bx+c) + e^{2x}(2ax+b)\\
(y_2^*)'' &= 4e^{2x}(ax^2+bx+c) + 4e^{2x}(2ax+b) + 2ae^{2x}\\
(y_2^*)''' &= 8e^{2x}(ax^2+bx+c) + 12e^{2x}(2ax+b) + 12ae^{2x}\\
(y_2^*)^{(4)} &= 16e^{2x}(ax^2+bx+c) + 32e^{2x}(2ax+b) + 48ae^{2x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (y_2^*)^{(4)} - 2(y_2^*)'' + y_2^* = 9e^{2x}(ax^2+bx+c) + 24e^{2x}(2ax+b) + 44ae^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 9ax^2 + (48a+9b)x + (44a+24b+9c) = x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9a & = 1\\ 48a+9b & = 0\\ 44a+24b+9c & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = \dfrac{1}{9}\\ b & = -\dfrac{16}{27}\\ c & = \dfrac{28}{27} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_2^* = \frac{x^2e^{2x}}{9} - \frac{16xe^{2x}}{27} + \frac{28e^{2x}}{27}$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + \frac{x^4e^x}{48} - \frac{x^3e^x}{12} + \frac{3x^2e^x}{16} + \frac{x^2e^{2x}}{9} - \frac{16xe^{2x}}{27} + \frac{28e^{2x}}{27}$$

Ví dụ 21:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = e^x sinx$$

(i) Xét phương trình đặc trưng

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i$$

$\Rightarrow$ Hệ nghiệm cơ bản

$$y_1 = cosx, \quad y_2 = xcosx, \quad y_3 = sinx, \quad y_4 = xsinx$$

(ii) Tìm nghiệm riêng:

Nghiệm riêng y^* của phương trình có dạng

$$\begin{aligned}
y^* &= e^x(acosx + bsinx) \\
(y_1^*)' &= e^x(acosx + bsinx) + e^x(-asinx + bcosx) \\
(y_1^*)'' &= 2e^x(-asinx + bcosx) \\
(y_1^*)''' &= 2e^x(-asinx + bcosx) + 2e^x(-acosx - bsinx) \\
(y_1^*)^{(4)} &= 4e^x(-acosx - bsinx)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad (y_1^*)^{(4)} + 2(y_1^*)'' + y_1^* = e^x cosx(-3a + 4b) + e^x sinx(-4a - 3b) = e^x sinx$

$\Rightarrow \quad cosx(-3a + 4b) + sinx(-4a - 3b) = sinx$

$\Rightarrow \begin{cases} -3a + 4b & = 0 \\ -4a - 3b & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = -\dfrac{4}{25} \\ b & = -\dfrac{3}{25} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad y^* = e^x \left(-\dfrac{4cosx}{25} - \dfrac{-3sinx}{25}\right)$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1 cosx + C_2 xcosx + C_3 sinx + C_4 xsinx + e^x \left(-\frac{4cosx}{25} - \frac{-3sinx}{25}\right)$$

III Phương trình vi phân Euler - Cauchy

Dạng phương trình:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} xy' + a_n y = f(t)$$

Phương pháp:

Đặt: $\quad x = e^t \quad (x > 0) \quad (x = -e^t$ nếu $x < 0)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad xy' &= y'_t \\
x^2 y'' &= y''_{tt} - y't \\
&... \\
x^n y^{(n)} &= D(D-1)(D-2)...(D-n+1)y, \quad \text{với } D = \frac{d}{dt}
\end{aligned}$$

Áp dụng: $x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y = (D^3 - 3D^2 + 2D)y = y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t$

Ví dụ 22:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad x > 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Let:} \quad & x = e^t \\
\Rightarrow \quad & xy' = y'_t \\
& x^2y'' = y''_{tt} - y'_t \\
\Rightarrow \quad & y''_{tt} - y'_t - 3y'_t + 4y = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & y''_{tt} - 4y'_t + 4y = 0 \\
\Rightarrow \quad & y = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} \\
\Leftrightarrow \quad & y = C_1x^2 + C_2x^2lnx
\end{aligned}$$

Ví dụ 23:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = lnx, \quad x > 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Let:} \quad & x = e^t \\
\Rightarrow \quad & xy' = y'_t \\
& x^2y'' = y''_{tt} - y'_t \\
\Rightarrow \quad & y''_{tt} - y'_t - 3y'_t + 4y = t \\
\Leftrightarrow \quad & y''_{tt} - 4y'_t + 4y = t \\
\Rightarrow \quad & y = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + \frac{t+1}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & y = C_1x^2 + C_2x^2lnx + \frac{lnx+1}{4}
\end{aligned}$$

Chương 4

Phép biến đổi Laplace

I Bảng biến đổi Laplace (Table of Laplace Transforms)

Định nghĩa: Cho hàm số $f(t)$ xác định trên $[0, +\infty)$. Biến đổi Laplace của $f(t)$ là hàm số $F(p)$ cho bởi tích phân sau:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Miền xác định của $F(p)$ là tập tất cả các giá trị của p mà tại đó tích phân trên hội tụ. Biến đổi Laplace của f được biểu diễn bởi $F(p)$ hoặc $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Bảng biến đổi Laplace

STT	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}$
4	$sin(at)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
5	$cos(at)$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
6	$tsin(at)$	$\frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}$
7	$tcos(at)$	$\frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$
8	$sin(at + b)$	$\frac{psin(b) + acos(b)}{p^2 + a^2}$
9	$cos(at + b)$	$\frac{pcos(b) - asin(b)}{p^2 + a^2}$

10	$e^{at}sin(bt)$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
11	$e^{at}cos(bt)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
12	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
13	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F(\frac{p}{c})$
14	e^{ct}	$\frac{1}{p-c}$
15	$e^{ct}f(t)$	$F(p-c)$
16	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
17	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$
18	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$
19	$af(t)+bg(t)$	$a\mathcal{L}(f(t))+b\mathcal{L}(g(t))$

II Một số ví dụ

Ví dụ 24:

$$
\begin{aligned}
& y'+y=e^{2t}, \quad y(0)=1 \\
\Rightarrow\ & pY(p)-1+Y(p)=\frac{1}{p-2} \\
\Leftrightarrow\ & Y(p)=\frac{p-1}{(p-2)(p+1)} \\
\Leftrightarrow\ & Y(p)=\frac{1}{3}\frac{1}{p-2}+\frac{2}{3}\frac{1}{p+1} \\
\Rightarrow\ & y(t)=\frac{e^{2t}}{3}+\frac{2e^{-t}}{3}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 25:

$$
\begin{aligned}
& y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \\
\Rightarrow \quad & p^2Y(p) - p - 2(pY(p) - 1) - 3Y(p) = \frac{3}{(p-2)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & Y(p)(p^2 - 2p - 3) = \frac{3}{(p-2)^2} + p - 2 \\
\Leftrightarrow \quad & Y(p) = \frac{p^3 - 6p^2 + 12p - 5}{(p-2)^2(p^2 - 2p - 3)} \\
\Leftrightarrow \quad & Y(p) = \frac{-2}{3(p-2)} + \frac{2}{3(p+1)} - \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{p-3} \\
\Rightarrow \quad & y(t) = \frac{-2e^{2t}}{3} + \frac{2e^{-t}}{3} - te^{2t} + e^{3t}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 26:

$$
\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x - 3y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} pX - 1 = X - 5Y \\ pY - 1 = X - 3Y \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (p-1)X + 5Y & = 1 \\ X - (p+3)Y & = -1 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X & = (p+3)Y - 1 = \dfrac{p-2}{p^2 + 2p + 2} \\ Y & = \dfrac{p}{p^2 + 2p + 2} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X & = \dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 1} - \dfrac{3}{(p+1)^2 + 1} \\ Y & = \dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 1} - \dfrac{1}{(p+1)^2 + 1} \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) & = e^{-t}cost - 3e^{-t}sint \\ y(t) & = e^{-t}cost + e^{-t}sint \end{cases}
$$

Chương 5

Hệ phương trình vi phân

I Hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$(H) \quad x' = A(t)x$$

$$(NH) \quad x' = A(t)x + f(t)$$

trong đó

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = (a_{ij}(t)) \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ ... \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Hệ (NH) có thể được viết như sau

$$\begin{cases} x_1' & = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' & = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ & .... \\ x_n' & = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Hệ $(H) := \{(NH), \quad f(t) = 0\}$

1 *Các tính chất cơ bản*

Tính chất 1: Hàm $x(t) = 0$ luôn là nghiệm của (H). Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường

Tính chất 2: Nếu $x(t), y(t)$ là nghiệm của (H) thì $\alpha x(t) + \beta y(t)$ cũng là nghiệm của (H), với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Tính chất 3: Nếu $x(t)$ là nghiệm của (H) và $y(t)$ là nghiệm của (NH) thì $x(t) + y(t)$ là nghiệm của (NH).

Tính chất 4: Nếu

$x_1^*(t)$ là 1 nghiệm riêng của phương trình

$$x' = A(t)x + f_1(t)$$

$x_2^*(t)$ là 1 nghiệm riêng của phương trình

$$x' = A(t)x + f_2(t)$$

thì $x_1^*(t) + x_2^*(t)$ là 1 nghiệm riêng của phương trình:

$$x' = A(t)xf_1(t) + f_2(t)$$

2 *Định thức Wronskian*

Định nghĩa 1: Cho hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ ... \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}$ là hệ n hàm vecto xác định trên khoảng (a, b). Khi đó định thức:

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & ... & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & ... & x_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & ... & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Wronskian của hệ hàm $\mathcal{B}$

Định nghĩa 2: Hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ được gọi là hệ nghiệm cơ bản của (H) nếu:

(i) $\mathcal{B}$ là nghiệm của (H)

(ii) $W(t) \neq 0$

Định lý 1:

Nếu hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ phụ thuộc tuyến tính và có đạo hàm trong miền $\mathcal{D}$ thì định thức Wronskian $W(t) = 0, \forall t \in \mathcal{D}$.

Nếu hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{y_k(t)\}_{k=1}^n$ độc lập tuyến tính và có đạo hàm trong miền $\mathcal{D}$ thì định thức Wronskian $\exists t_0 \in \mathcal{D}, W(t_0) \neq 0$.

Định lý W: Cho hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ là các nghiệm của (H). Khi đó, nếu $\exists t_0 \in \mathcal{D}, W(t_0) \neq 0$ thì $W(t) \neq 0, \forall t \in \mathcal{D}$

3 *Cấu trúc nghiệm của* (H) *và* (NH)

Định lý H: Cho hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ là 1 hệ nghiệm cơ bản của (H). Khi đó mọi nghiệm của (H) cho bởi:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t)$$

Định lý NH: Nếu $y(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k x_k(t)$ là nghiệm tổng quát của (H) và $x^*(t)$ là một nghiệm riêng của (NH) thì khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t) + x^*(t)$$

4 *Định lý Lagrange*

Định lý Lagrange: Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Cho hệ nghiệm cơ bản $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ của (H). Khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)x_k(t)$$

trong đó:

$$\begin{cases} C_1'(t)x_{11}(t) + C_2'(t)x_{12}(t) + ... + C_n'(t)x_{1n}(t) = f_1(t) \\ C_1'(t)x_{21}(t) + C_2'(t)x_{22}(t) + ... + C_n'(t)x_{2n}(t) = f_2(t) \\ ... \\ C_1'(t)x_{n1}(t) + C_2'(t)x_{n2}(t) + ... + C_n'(t)x_{nn}(t) = f_n(t) \end{cases}$$

5 *Công thức Abel*

Cho hệ nghiệm $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ của (H). Khi đó 2 công thức sau đây:

$$W(t) = Ce^{-\int \sum_{k=1}^n a_{kk}(t)dt} = Ce^{-F(t)} \text{ với } F(t) = \int \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)dt$$

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n a_{kk}(s)ds}$$

tương đương với nhau và được gọi là các công thức Abel hay công thức Ostrogradski - Liouville.

II Hệ nghiệm cơ bản, ma trận cơ bản, ma trận tiến hóa.

1 *Ma trận cơ bản, ma trận tiến hóa*

Định nghĩa 1: Ma trận $X(t)$ được gọi là ma trận cơ bản của (H) nếu:

$$X(t) = (x_1(t)|x_2(t)|...|x_n(t))$$

trong đó $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ là một hệ nghiệm cơ bản nào đó của (H). Quan hệ giữa ma trận cơ bản và định thức Wronskian:

$$detX(t) = W(t)$$

Định nghĩa 2: Ma trận tiến hóa $U(t,s)$ của (H) được xác định bởi:

$$U(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$$

trong đó $X(t)$ là ma trận cơ bản của (H).

Các tính chất:

Tính chất 1: $detX(t) = W(t) \neq 0 \Rightarrow \exists X^{-1}(t)$

Tính chất 2: Ma trận cơ bản chuẩn tắc $U(t)$ là ma trận cơ bản với $U(0) = E$

Tính chất 3: Mọi ma trận cơ bản đều thỏa mãn phương trình vi phân sinh ra nó. Cụ thể hơn, nếu $X(t)$ là ma trận cơ bản nếu và chỉ nếu:

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = D$$

Tính chất 4: Hai ma trận cơ bản bất kỳ sai khác nhau một hằng ma trận nhân, tức là với hai ma trận cơ bản tùy ý $X(t), Y(t)$, tồn tại ma trận K sao cho:

$$Y(t) = X(t)K$$

2 Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính:

Định lý H: Cho hệ các hàm số $\mathcal{B} = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ là 1 hệ nghiệm cơ bản của (H). Khi đó mọi nghiệm của (H) cho bởi:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t)$$

Gọi $X(t)$ là ma trận cơ bản của (H). Khi đó mọi nghiệm của (H) cho bởi:

$$x(t) = X(t)C, \quad C \in \mathbb{R}^n.$$

Gọi $U(t,s)$ là ma trận tiến hóa của (H). Khi đó mọi nghiệm của (H) cho bởi:

$$x(t) = U(t,s)x(s).$$

Định lý NH: Nếu $y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t)$ là nghiệm tổng quát của (H) và $x^*(t)$ là một nghiệm riêng của (NH) thì khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k(t) + x^*(t)$$

Gọi $X(t)$ là ma trận cơ bản của (H). Khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi:

$$x(t) = X(t)C + x^*(t), \quad C \in \mathbb{R}^n.$$

Gọi $U(t,s)$ là ma trận tiến hóa của (H). Khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi:

$$x(t) = U(t,s)x(s) + x^*(t) - U(t,s)x^*(s).$$

Định lý Lagrange: Gọi $X(t)$ là ma trận cơ bản của (H). Khi đó mọi nghiệm của (NH) cho bởi:

$$x(t) = X(t)C + X(t)\int X^{-1}(t)f(t)dt.$$

Ví dụ: 27: Tìm HNCB, MTCB, MTTH của hệ phương trình sau

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Bằng phương pháp thế, ta rút ra được phương trình:

$$\begin{aligned} & x'' - x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = C_1 e^t + C_2 e^t \\ \Rightarrow \quad & y = x' = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ \Rightarrow \quad & u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ta có HCNB là:

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad u_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ma trận cơ bản của hệ là:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow detX(t) = -2$$

$$\Rightarrow X^{-1}(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^t \\ -e^{-t} & e^t \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U(t,s) = X(t)X^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-s} & e^{-s} \\ e^s & -e^s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t-s} + e^{s-t} & e^{t-s} - e^{s-t} \\ e^{t-s} - e^{s-t} & e^{t-s} + e^{s-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ch(t-s) & sh(t-s) \\ sh(t-s) & ch(t-s) \end{pmatrix}$$

III Hệ phương trình vi phân với hệ số hằng

1 *Định lý cơ bản*

Cho hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng (H_c)

$$u' = Au$$

trong đó $A = n \times n$ là ma trận vuông cỡ n, $u(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Giả sử λ là giá trị riêng bội m của ma trận thực A. Gọi $v_1, v_2, ..., v_m$ là m nghiệm độc lập tuyến tính của

$$(A - \lambda E)^m v = 0$$

Đặt:

$$L(t) = E + t(A - \lambda E) + \frac{t^2(A-\lambda E)^2}{2!} + ... + \frac{t^{m-1}(A-\lambda E)^{m-1}}{(m-1)!}$$

Khi đó: $\begin{cases} u_k(t) = e^{\lambda t}L(t)v_k \\ k = 1, 2, ..., m \end{cases}$ là m nghiệm độc lập tuyến tính của $u' = Au$

Định lý cơ bản với trường hợp $n = 2$

$$u' = Au$$

trong đó $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp 2, $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Đa thức đặc trưng: $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$

Trường hợp 1: Nếu $P_A(\lambda)$ có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1, λ_2 tương ứng với 2 vecto riêng v_1, v_2 thì $\{e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2\}$ là 2 nghiệm độc lập tuyến tính của $u' = Au$

Trường hợp 2: Nếu $P_A(\lambda)$ có nghiệm phức $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$

Chọn $\lambda = \alpha + i\beta \Rightarrow \quad v = w_1 + iw_2$

Nghiệm phức:

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}v = e^{(\alpha+i\beta)t}(w_1 + iw_2) &= e^{\alpha t}(cos\beta t + isin\beta t)(w_1 + iw_2) \\ &= e^{\alpha t}(w_1 cos\beta t - w_2 sin\beta t) + ie^{\alpha t}(w_2 cos\beta t + w_1 sin\beta t) \end{aligned}$$

Khi đó: $\{e^{\alpha t}(w_1 cos\beta t - w_2 sin\beta t), e^{\alpha t}(w_2 cos\beta t + w_1 sin\beta t)\}$ là 2 nghiệm độc lập tuyến tính của $u' = Au$

Trường hợp 3: Nếu $P_A(\lambda)$ có nghiệm kép $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Gọi v_1, v_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của $(A - \lambda E)^2 = 0$

Đặt:

$$L(t) = E + t(A - \lambda E)$$

Khi đó: $\{e^{\lambda t}L(t)v_1, e^{\lambda t}L(t)v_2\}$ là 2 nghiệm độc lập tuyến tính của $u' = Au$

Ví dụ 28:

$$u' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} u, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Xét đa thức đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

Chọn $\lambda = -1+i \Rightarrow (A-\lambda E)v = \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = (2+i)\alpha_2$

Chọn $\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 2+i \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$

Nghiệm phức:

$$\begin{aligned} e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} &= e^{-t}(cost + isint)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= e^{-t}\left[cost\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - sint\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + ie^{-t}\left[cost\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + sint\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} cost \\ 2cost - sint \end{pmatrix} + ie^{-t}\begin{pmatrix} sint \\ cost + 2sint \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} cost \\ 2cost - sint \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} sint \\ cost + 2sint \end{pmatrix}$$

Theo giả thiết : $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C1 = 1 \\ C2 = -1 \end{cases}$

Vậy:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t}\begin{pmatrix} cost \\ 2cost - sint \end{pmatrix} - e^{-t}\begin{pmatrix} sint \\ cost + 2sint \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} cost - sint \\ cost - 3sint \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ví dụ 29:

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

Xét đa thức đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda E_n| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = (2-\lambda)(\lambda+1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

(i) Với $\lambda_1 = 2 \Rightarrow (A - 2E)v = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

Chọn $\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) Với $\lambda_2 = \lambda_3 = -1 \Rightarrow (A + E)^2 v = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Chọn $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Chọn $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 1) \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} L(t) = E + t(A + E) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+t & t & t \\ t & 1+t & t \\ t & t & 1+t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_2(t) = e^{-t}L(t)v_2 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_3(t) = e^{-t}L(t)v_3 = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1u_1(t) + C_2u_2(t) + C_3u_3(t) \\ &= C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{-t} \\ C_1e^{2t} + C_3e^{-t} \\ C_1e^{2t} - e^{-t}(C_2 + C_3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 *Ma trận mũ*

Định nghĩa 1: Cho A là ma trận thực cấp n. Khi đó:

$$e^A := E + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Như vậy, với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có:

$$e^{tA} := E + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + ... + \frac{t^nA^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!}$$

Định lý 1: Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

$$(H_c) \quad u' = Au$$

Khi đó:

$$u(t) = e^{tA}C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Vậy muốn tìm nghiệm của (H_c), ta tìm ma trận mũ e^{tA}

Thuật toán Fulmer tính ma trận mũ:

Bước 1: Tính đa thức đặc trưng $P(\lambda) = |A - \lambda E_n|$

Bước 2: Tính hệ hàm cơ bản $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\}$ tương ứng với $P(\lambda)$

(i) Nếu λ là nghiệm thực đơn thì hàm $e^{\lambda t}$ được gọi là hàm cơ sở.

(ii) Nếu λ là nghiệm thực bội m thì các hàm

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, ..., t^{m-1}e^{\lambda t}$$

được gọi là các hàm cơ sở.

(iii) Nếu $\lambda = a \pm bi$ là nghiệm phức đơn thì 2 hàm

$$e^{at}cos(bt), e^{at}sin(bt)$$

được gọi là 2 hàm cơ sở.

(iv) Nếu $\lambda = a \pm bi$ là nghiệm phức bội m thì các hàm

$$t^k e^{at}cos(bt), t^k e^{at}sin(bt)_{k=0}^{m-1}$$

được gọi là các hàm cơ sở.

Bước 3: Khi đó ta có:

$$e^{tA} = F_1\varphi_1(t) + F_2\varphi_2(t) + ... + F_n\varphi_n(t) \qquad (1)$$

trong đó $F_1, F_2, ..., F_n$ là các ma trận vuông cỡ n thích hợp.

Bước 4: Lấy đạo hàm n-1 lần hệ thức (1) rồi cho $t = 0$ để nhận được hệ phương trình ma trận cho $F_1, F_2, ..., F_n$

Bước 5: Giải hệ phương trình trên để có $F_1, F_2, ..., F_n$ sau đó thế vào (1) và thu được ma trận mũ e^{tA}.

Ví dụ 30: Tính e^{tA} với $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Xét đa thức đặc trưng:

$$P(\lambda) = |A - \lambda E_n| = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$$

$\Rightarrow$ Các giá trị riêng: $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$

$\Rightarrow$ Hệ hàm cơ bản: $\{e^{-3t}, e^{2t}\}$

Từ đó:

$$e^{tA} = F_1 e^{-3t} + F_2 e^{2t}$$

Đạo hàm 2 vế hệ thức trên, ta được: $\begin{cases} e^{tA} & = F_1 e^{-3t} + F_2 e^{2t} \\ Ae^{tA} & = -3F_1 e^{-3t} + 2F_2 e^{2t} \end{cases}$

Cho $t = 0$, ta nhận được: $\begin{cases} E & = F_1 + F_2 \\ A & = -3F_1 + 2F_2 \end{cases}$

Từ đó:

$$F_1 = \frac{1}{5}(2E - A) = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{5}(3E + A) = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy:

$$e^{tA} = \frac{e^{-3t}}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} + \frac{e^{2t}}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^{-3t} + 4e^{2t} & -e^{-3t} + e^{2t} \\ -4e^{-3t} + 4e^{2t} & 4e^{-3t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 31: Giải hệ sau:

$$u' = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} u$$

Đặt $A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow u = e^{tA}C$. Như vậy, ta xác định ma trận mũ e^{tA}

Xét đa thức đặc trưng:

$$P(\lambda) = |A - \lambda E_n| = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 10 & 5 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)^3$$

$$\Rightarrow \quad \text{Các giá trị riêng: } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{Hệ hàm cơ bản: } \{e^t, te^t, t^2e^t\}$$

Từ đó:

$$e^{tA} = F_1e^3 + F_2te^t + F_3t^2e^t$$

Đạo hàm 2 lần 2 vế hệ thức trên, ta được:

$$\begin{cases} e^{tA} & = F_1e^t + F_2te^t + F_3t^2e^t \\ Ae^{tA} & = F_1e^t + F_2(t+1)e^t + F_3(t^2+2t)e^t \\ A^2e^{tA} & = F_1e^t + F_2(t+2)e^t + F_3(t^2+4t+2)e^t \end{cases}$$

Cho $t = 0$, ta nhận được: $\begin{cases} E & = F_1 \\ A & = F_1 + F_2 \\ A^2 & = F_1 + 2F_2 + 2F_3 \end{cases}$

Từ đó:

$$F_1 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = A - E = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \frac{(A-E)^2}{2} = 0$$

Vậy:

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 1-5t & 10t & 5t \\ -2t & 1+4t & 2t \\ -t & 2t & 1+t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u = e^{tA}C = e^t \begin{pmatrix} 1-5t & 10t & 5t \\ -2t & 1+4t & 2t \\ -t & 2t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$