ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

TỐI ƯU HÓA

Optimization

CHUYÊN ĐỀ:

CÁC DẠNG BÀI TẬP TRONG TỐI ƯU HÓA

Mã lớp học phần: MAT2407

Sinh viên: Tạ Quang Tùng

Lớp: K66A2 Toán Tin

Hà Nội, 2024

Mục lục

1 Dạng 1: Đưa bài toán về dạng chính tắc và chuẩn tắc

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 \leq 1;\ -2 \leq x_2 \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ý tưởng: chuyển min –> max

1.1 Dạng chính tắc:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 - x_1 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 + s_1 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - s_2 = 2 \\ & x_2 + s_3 = 1 \\ & x_1 \leq 1;\ -2 \leq x_2 \end{aligned}$$

Đổi biến: $\begin{cases} x_1 = 1 - y_1 \\ x_2 = y_2 - 2 \\ x_3 = y_3^+ - y_3^- \textit{(biến tự do)} \end{cases}$

Sau khi đổi biến:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + y_2 - 3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 - s_1 = 2 \\ & y_1 + 2y_2 - 3y_3^+ + 3y_3^- = 7 \\ & 2y_1 + y_2 - y_3^+ + y_3^- + s_2 = 2 \\ & y_2 + s_3 = 3 \\ & y_1, y_2, y_3^+, y_3^-, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

–> Dạng chính tắc

1.2 Dạng chuẩn tắc:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 - x_1 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 \leq 1; -2 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Ý tưởng: tách đẳng thức thành các bất đẳng thức

Đổi biến: $\begin{cases} x_1 = 1 - z_1 \\ x_2 = z_2 - 2 \end{cases}$

Ta được:

$$\begin{aligned} \max \quad & z_1 + z_2 - 3 \\ \text{s.t.} \quad & -2z_1 - z_2 \leq 2 \\ & z_1 + 2z_2 - 3x_3 \leq 7 \\ & -z_1 - 2z_2 + 3x_3 \leq -7 \\ & 2z_1 + z_2 - x_3 \leq 2 \\ & z_2 \leq 3 \\ & z_1, z_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

–> Dạng chuẩn tắc

2 Dạng 2: Giải bài toán bằng thuật toán đơn hình

2.1 Công thức tổng quát:

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ x &\ge 0 \\ b &\ge 0 \end{aligned}$$

Chọn: $\begin{cases} \textit{Cột xoay max} \ge 0 \\ \textit{Hàng xoay min} \ge 0 \end{cases}$

2.2 Ví dụ:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \le 2 \\ & x_2 \le 5 \\ & x_3 \le 4 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 28 \\ & \forall x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

a) Bước 1: Thêm biến bù

$$\begin{cases} x_1 + t_1 = 2 \\ x_2 + t_2 = 5 \\ x_3 + t_3 = 4 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + t_4 = 28 \\ \forall x_1, x_2, x_3, t, t_1, t_2, t_3, t_4 \ge 0 \end{cases}$$

b) Bước 2: Thuật toán đơn hình

Lặp 1 đơn hình

t	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	VP	
0	1	0	0	1	0	0	0	2	
0	0	1	0	0	1	0	0	5	5
0	0	0	1	0	0	1	0	4	
0	6	2	3	0	0	0	1	28	14
- 1	1	3	3	0	0	0	0	0	

Lặp 2 đơn hình

t	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	VP	
0	1	0	0	1	0	0	0	2	
0	0	1	0	0	1	0	0	5	
0	0	0	1	0	0	1	0	4	4
0	6	0	3	0	-2	0	1	18	6
- 1	1	0	3	0	-3	0	0	-15	

Nghiệm cơ sở: x = (0, 5, 0, 2, 0, 4, 18)

Lặp 3 đơn hình

t	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	VP
0	1	0	0	1	1/3	1/2	-1/6	1
0	0	1	0	0	1	0	0	5
0	0	0	1	0	0	1	0	4
0	6	0	0	0	-2	-3	1	6
- 1	0	0	0	0	-8/3	-5/2	-1/6	-28

–> Vậy giá trị tối ưu là max = 28
–> Nghiệm tối ưu là x = (1, 5, 4)

3 Dạng 3: Bài toán tìm nghiệm cơ sở

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.1 Tìm nghiệm cơ sở:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$H_4 <=> H_4 - H_3$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$H_4 <=> (-1).H_4$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_6 = 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 1 \end{cases}$

=> Vậy nghiệm cơ sở với (x_1, x_2, x_3, x_4) là:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_4 \\ 1 - x_5 \\ 1 - x_6 \\ 1 - x_5 - x_6 + x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_5 + x_6 - x_7 \\ 1 - x_5 \\ 1 - x_6 \\ 1 - x_5 - x_6 + x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

3.2 Chọn cơ sở thỏa mãn biến ngoài cơ sở = 0:

Cho biến ngoài cơ sở = 0 => $x_5 = x_6 = x_7 = 0$
=> Nghiệm cơ sở thỏa mãn là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

3.3 Chọn cơ sở khác để cùng nghiệm cơ sở:

Ý tưởng: chọn 2 cơ sở (x_i, x_j, x_k, x_t) *và* $(x_i^+, x_j^+, x_k^+, x_t^+)$ *sao cho có cùng nghiệm cơ sở*

- Với $x_5 = x_6 = x_7 = 0$ thì có $(x_i, x_j, x_k, x_t) = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$
- Tìm nghiệm cơ sở ứng với cơ sở (x_2, x_3, x_4, x_7)
  $$\begin{cases} x_2 = 1 - x_5 \\ x_3 = 1 - x_6 \\ x_4 = 1 - x_1 \\ x_7 = x_4 + x_5 + x_6 - 1 = -x_1 + x_5 + x_6 \end{cases}$$
  => Nghiệm cơ sở ứng với (x_2, x_3, x_4, x_7) là:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 - x_5 \\ 1 - x_6 \\ 1 - x_1 \\ x_5 \\ x_6 \\ -x_1 + x_5 + x_6 \end{pmatrix}$$

=> Cơ sở tương ứng là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

4 Dạng 4: Thuật toán đơn hình hai pha dạng chuẩn tắc

4.1 Công thức tổng quát:

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ x &\ge 0 \\ b &\le 0 \end{aligned}$$

Nếu: $\begin{cases} b < 0 \text{ −> } \textit{Bài toán phụ} \\ b \ge 0 \text{ −> } \textit{giống D2} \end{cases}$

Ý tưởng: cột max, hàng min

4.2 Ví dụ:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 - 3x_2 \le -2 \\ -3x_1 + x_2 \le -2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Thiết lập bài toán phụ:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_0 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -x_0 + x_1 - 3x_2 \le -2 \\ -x_0 - 3x_1 + x_2 \le -2 \\ -x_0 + x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Thực hiện thuật toán đơn hình 2 pha:

Pha 1:

Lặp 1

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	VP	
$\underline{-1}$	1	-3	1	0	0	-2	-2
-1	-3	1	0	1	0	-2	2
-1	1	1	0	0	1	6	
0	3	2	0	0	0	0	
-1	0	0	0	0	0	0	

Nghiệm cơ sở: x = (0, 0, -2, -2, 6)

Lặp 2

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	VP	
1	-1	3	-1	0	0	2	2/3
0	-4	$\underline{4}$	-1	1	0	0	0
0	0	4	-1	0	1	8	2
0	3	2	0	0	0	0	
-1	-1	3	-1	0	0	2	

Nghiệm cơ sở: x = (0, 0, -2, -2, 6)

Lặp 3

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	VP	
1	$\underline{2}$	0	-1/4	-3/4	0	2	1
0	-4	4	-1	1	0	0	
0	4	0	0	-1	1	8	2
0	5	0	1/2	-1/2	0	0	
-1	2	0	-1/4	-3/4	0	2	

Nghiệm cơ sở: x = (0, 0, 0, 0, 8)

Lặp 4

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	VP
1	2	0	-1/4	-3/4	0	2
2	0	4	-3/2	-1/2	0	4
-2	0	0	1/2	1/2	1	4
-5/2	0	0	9/8	11/8	0	-5
-2	0	0	0	0	0	0

Lặp 5

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	VP	
1	2	0	-1/4	-3/4	0	2	⑥
2	0	4	-3/2	-1/2	0	4	
-2	0	0	1/2	1/2	1	4	
-5/2	0	0	9/8	11/8	0	-5	
-1	0	0	0	0	0	0	

Nghiệm cơ sở: x = (1, 1, 0, 0, 4)

Pha 2:

Lặp 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	VP	
2	0	-1/4	-3/4	0	2	
0	4	-3/2	-1/2	0	4	
0	0	1/2	$\underline{1/2}$	1	4	⑧
0	0	9/8	11/8	0	-5	

Lặp 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	VP
2	0	1/2	0	3/2	8
0	4	-1	0	1	8
0	0	1/2	1/2	1	4
0	0	-1/4	0	-11/4	-16

Nghiệm cơ sở: x = (4, 2, 0, 8, 0)

=> Vậy nghiệm tối ưu $(x_1, x_2) = (4, 2)$ với max $= 16$

5 Dạng 5: Thuật toán đơn hình hai pha dạng chính tắc

5.1 Công thức tổng quát:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ b &\leq 0 \end{aligned}$$

ý tưởng: cột min, hàng min Lưu ý: Chính tắc là đẳng thức, chuẩn tắc là bất đẳng thức

5.2 Ví dụ:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -4x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -13 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Bước 1: Đổi dấu sao cho b > 0

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Bước 2: Thiết lập bài toán phụ

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

c) Bước 3: Lập bảng đơn hình hai pha

Pha 1:

Lặp 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
4	1	-1	3	1	0	0	13	17
1	1	1	2	0	1	0	7	7
-2	<u>1</u>	3	1	0	0	1	1	1
2	2	-2	-3	0	0	0	0	
3	3	3	0	0	0	0	0	

Nghiệm cơ sở: x = (0, 0, 0, 0, 13, 7, 1)

Lặp 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
6	0	-4	2	1	0	-1	12	6
3	0	-2	1	0	1	-1	6	6
-2	1	3	<u>1</u>	0	0	1	1	1
6	0	-8	-5	0	0	-2	-2	
9	0	-6	3	0	0	-3	-3	

Nghiệm cơ sở: x = (0, 1, 0, 0, 13, 7, 1)

Lặp 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
10	-2	-10	0	1	0	-3	10	1
5	-1	-5	0	0	1	-2	5	1
-2	1	3	1	0	0	1	1	
-4	5	7	0	0	0	3	3	
15	-3	15	0	0	0	-6	-6	
$\uparrow$								

Nghiệm cơ sở: x = (0, 0, 0, 1, 10, 5, 0)

Lặp 4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	0	0	1	-2	1	0
5	-1	-5	0	0	1	-2	5
0	3/5	1	1	0	2/5	1/5	3
0	21/5	3	0	0	4/5	7/5	7
0	0	0	0	0	-3	0	-21

Pha 2:

Lặp 1

x_1	x_2	x_3	x_4	VP	
5	-1	-5	0	5	
0	3/5	1	1	3	5
0	21/5	3	0	7	

–> Tiếp tục thuật toán đơn hình :

Lặp 2

x_1	x_2	x_3	x_4	
5	0	-10/3	5/3	10
0	3/5	1	1	3
0	0	-4	-7	-14

=> Vậy max = 14 với nghiệm tối ưu là:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6 Dạng 6: Quy tắc Bland giải QHTT

Ý tưởng: cột xoay max, hàng xoay max

6.1 Mô tả bài toán:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

6.2 Thêm biến bù:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + t_1 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + t_2 = 0 \\ x_1 + t_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

6.3 Lập hệ phương trình:

$$
\textit{hpt:} \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 + t_1 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 + t_2 = 0 \\ x_1 + t_3 = 0 \\ -t + 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 = 0 \end{cases}
$$

6.4 Thực hiện thuật toán đơn hình:

Lặp 1

t	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	
0	$\underline{1/2}$	-11/2	-5/2	9	1	0	0	0
0	1/2	-3/2	-1/2	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1
-1	10	-57	-9	-24	0	0	0	0
	↑							

Nghiệm cơ sở: x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)

Lặp 2

t	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	
0	1	-11	-5	18	2	0	0	0
0	0	$\underline{4}$	2	-8	-1	1	0	0
0	0	11	5	-18	-2	0	1	1
-1	0	53	41	-204	-20	0	0	0
		$\uparrow$						

Nghiệm cơ sở: x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)

Lặp 3

t	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	
0	1	0	$\underline{1/2}$	-4	-3/4	11/4	0	0
0	0	4	2	-8	-1	1	0	0
0	0	0	-1/2	4	3/4	-11/4	1	1
-1	0	0	29/2	-98	-27/4	-53/4	0	0
			$\uparrow$					

Nghiệm cơ sở: x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)

Lặp 4

t	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	
0	2	0	1	-8	-3/2	11/2	0	0
0	-1	1	0	$\underline{2}$	1/2	-5/2	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1
-1	-29	0	0	18	15	-93	0	0
				$\uparrow$				

Lặp 5

t	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	
0	-2	4	1	0	1/2	-9/2	0	0
0	-1/2	1/2	0	1	$\underline{1/4}$	-5/4	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1
-1	-20	-9	0	0	21/2	-141/2	0	0
					$\uparrow$			

Lặp 6

t	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	
0	-1	3	1	-2	0	-2	0	0
0	-2	2	0	4	1	-5	0	0
0	$\underline{1}$	0	0	0	0	0	0	1
-1	1	-30	0	-42	0	-18	0	0
	↑							

Lặp 7

t	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2	t_3	
0	0	3	1	-2	0	-2	0	1
0	0	2	0	4	1	-5	0	2
0	1	0	0	0	0	0	0	1
-1	0	-30	0	-42	0	-18	0	-1

=> Vậy max = 1 với nghiệm tối ưu là x = (1, 0, 1, 0)

7 Dạng 7: Xây dựng bài toán đối ngẫu

7.1 Bài toán từ Min –> Max:

Ý tưởng: Dấu st giữ nguyên chiều, Dấu đk đổi chiều

$$\min \quad 3x_1 - 4x_2 + 3x_3$$
$$\text{st1.} \quad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 3 & (y_1 \leq 0) \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 3 & (y_2 \geq 0) \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 & (y_3 \textit{ tự do}) \\ x_2 \leq 0 & (y_4 \leq 0) \\ x_3, x_4 \geq 0 \qquad \textit{(đổi chiều st2)} \end{cases}$$

Chuyển về bài toán đối ngẫu:

$$\max \quad 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 0y_4$$
$$\text{st2.} \quad \begin{cases} 4y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 0y_4 = 3 \\ 4y_1 - 2y_2 - 2y_3 + y_4 \geq -4 \\ -3y_1 - 3y_2 + 3y_3 + 0y_4 \leq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 0y_4 \leq 0 \\ y_1 \leq 0; y_2 \geq 0; y_4 \leq 0 \end{cases}$$

7.2 Bài toán từ Max –> Min:

Ý tưởng: Dấu st đổi chiều, Dấu đk không đổi chiều

$$\max \quad 3x_1 + 3x_2 + 3x_3$$
$$\text{st2.} \quad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 & (y_1 \textit{tự do}) \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \geq -4 & (y_2 \leq 0) \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 3 & (y_3 \geq 0) \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0y_4 \leq 0 & (y_4 \geq 0) \\ x_1 \leq 0; x_2 \leq 0; x_4 \leq 0 \qquad \textit{(không đổi chiều st2)} \end{cases}$$

Chuyển về bài toán đối ngẫu:

$$\begin{array}{ll}
\min & 3y_1 - 4y_2 + 3y_3 \\
\text{st2.} & \begin{cases}
4y_1 + 4y_2 - 3y_3 + 2y_4 \leq 3 \\
4y_1 - 2y_2 - 3y_3 + 2y_4 \geq 3 \\
3y_1 - 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 = 3 \\
y_2 \leq 0 \\
y_3, y_4 \geq 0
\end{cases}
\end{array}$$

8 Dạng 8: Sử dụng nguyên lý độ lệch bù để kiểm tra nghiệm

8.1 Mô tả bài toán:

Kiểm tra các nghiệm sau có phải nghiệm tối ưu của LP không?

$$\begin{cases} x^1 = (0,0,0,0)^T \\ x^2 = (0,1,1,1)^T \\ x^3 = (0,1,0,2)^T \end{cases}$$

$$(P) \qquad \max \quad 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4$$
$$\text{st.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 3 & (y_1 \ge 0) \\ x_1 + x_2 + 2x_4 \le 3 & (y_2 \ge 0) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 7 & (y_3 \ge 0) \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \le 2 & (y_4 \ge 0) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Chuyển về bài toán đối ngẫu:

$$(D) \qquad \min \quad 3y_1 + 3y_2 + 7y_3 + 2y_4$$
$$\text{st.} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 \ge 4 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2 \\ y_1 + 3y_3 + y_4 \ge 2 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \ge 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

8.2 Kiểm tra nghiệm tối ưu:

a) $x^1 = (0,0,0,0)^T$*:*

B1: thay vào các ràng buộc của (P), ta có:

$$\begin{cases} 2*0+0+0+0 = 0 < 3 \quad -> y_1 = 0 \\ 0+0+2*0 = 0 < 3 \quad -> y_2 = 0 \\ 0+2*0+3*0+0 = 0 \quad -> y_3 = 0 \\ 2*0+0+0 = 0 \quad -> y_4 = 0 \end{cases} \quad => y^1 = (0,0,0,0)^T$$

B2: thay vào các ràng buộc của (D) có:

$$2*0+0+0+2*0 = 0 \ge 4 \textit{(sai)}$$

=> Vậy $x^1 = (0,0,0,0)^T$ không phải là nghiệm tối ưu

b) $x^2 = (0,1,1,1)^T$*:*
B1: thay vào ràng buộc của (P), ta có:

$$\begin{cases} 2*0+1+1+1=3=3 \\ 0+1+2*1=3=3 \\ 0+2*1+3*1+1=6<7 \quad ->y_3=0 \\ 2*0+1+1=2=2 \end{cases}$$

B2: Có $x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Theo định lý độ lệch bù: $\begin{cases} y_1+y_2+2y_3=2 \\ y_1+3y_3+y_4=2 \\ y_1+2y_2+y_3+y_4=4 \\ y_3=0 \end{cases}$

$$=> \begin{cases} y_1+y_2=2 \\ y_1+y_4=2 \\ y_1+2y_2+y_4=4 \\ y_3=0 \end{cases} => \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=1 \\ y_3=0 \\ y_4=1 \end{cases} => y^2=(1,1,0,1)$$

B3: Thay vào (D) có:

$$\begin{cases} 2*1+1+0+2*1=5\geq 4 \\ 1+1+2*0\geq 2 \\ 1+3*0+1\geq 2 \\ 1+2*1+0+1\geq 4 \end{cases}$$

=> Vậy $x^2 = (0,1,1,1)$ là nghiệm tối ưu

c) $x^3 = (0,1,0,2)^T$*:*
B1: thay x^3 vào các ràng buộc của (P), ta có:

$$\begin{cases} 2*0+1+1+1=3=3 \\ 0+1+2*2=5\leq 3 \quad \textit{(sai)} \end{cases}$$

=> Vậy $x^3 = (0,1,0,2)^T$ không phải là nghiệm tối ưu của LP

9 Dạng 9: Giải LP bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu

$$(Q) \qquad \min \quad 3x_1 + x_2 + 4x_3$$
$$\text{st.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \leq -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

9.1 Chuyển từ min –> max:

$$(P) \qquad \max \quad -3x_1 - x_2 - 4x_3$$
$$\text{st.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \leq -3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Chuyển về bài toán đối ngẫu:

$$(D) \qquad \min \quad 2y_1 + y_2 - 3y_3$$
$$\text{st.} \quad \begin{cases} y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -3 \\ y_1 + y_2 - y_3 \geq -1 \\ -y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

9.2 Bảng đơn hình sau khi thêm biến bù:

Ý tưởng: chọn hàng có $b < 0$ đầu tiên (ngược với đơn hình bình thường)
Lưu ý: chọn cột có hàng chia min

Lặp 1

0	1	1	-1	1	0	0	2	
0	-1	1	-2	0	1	0	1	
0	-2	<u>-1</u>	-1	0	0	0	0	←
-1	-3	-1	-4	0	0	0	0	
	3/2	1	4					

Lặp 2

0	-1	0	-2	1	0	1	1	←
0	-3	0	-3	0	1	1	-2	
0	2	1	1	0	0	-1	3	
-1	-1	0	-3	0	0	-1	3	
	1		3/2					

Dừng khi b > 0

Lặp 3

0	1	0	2	-1	0	-1	1
0	0	0	3	-3	1	-2	1
0	0	1	-3	2	0	1	1
-1	0	0	-1	-1	0	-2	4

=> Vậy giá trị tối ưu (P) có z = -4 –> (Q) min = 4
=> Nghiệm tối ưu là:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

;

10 Dạng 10: Kiểm tra hàm lồi

10.1 Điều kiện hàm lồi:

- Định nghĩa: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ với $\lambda \in [0, 1]$
- Định lý 1:
$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x)$$
- Định lý 2: (đạo hàm cấp $2 \geq 0$)
$$\nabla^2 f(x) \succeq 0$$

10.2 Đạo hàm của ma trận:

- $\nabla(x^T Bx) = (B + B^T)x = 2Bx$ (với B đối xứng)
- $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- $\nabla(c^T x) = 0$
- $(Ax)^T = x^T A^T$

10.3 Một số ví dụ:

VD1: $f(x) = a^x \qquad \forall x \in R, \alpha > 0$

- $f'(x) = a^x ln(a)$
- $f''(x) = a^x(ln(a))^2 \geq 0 \qquad \forall x \in R, \alpha > 0$

$=>$ $f(x) = a^x$ là hàm lồi (theo t/c 2)

VD2: $f(x) = a^T x + b \qquad \forall x \in R^n, a, b \in R^n$

- Chứng minh bằng định nghĩa:
$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$
$<=>$ $a^T\lambda x + a^T(1-\lambda)y + b \leq \lambda a^T x + \lambda b + (1-\lambda)a^T y + (1-\lambda)b$
$<=>$ $(a^T\lambda x - \lambda a^T x) + (a^T(1-\lambda)y - (1-\lambda)a^T y) \leq 0$
mà $\begin{cases} a^T\lambda x = \lambda a^T x \\ a^T(1-\lambda)y = (1-\lambda)a^T y \end{cases}$ $=> 0 + 0 \leq 0$ (luôn đúng)

$=>$ Vậy g(x) = $a^T x + b$ là hàm lồi với $\lambda \in [0, 1]$

VD3: $h(x) = ||y - Ax||^2$ *với* $x \in R^n, y \in R^m, A \in R^{m*n}$

- $h(x) = ||y - Ax||_2^2 = (y - Ax)^T(y - Ax) = (y^T - x^T A^T)(y - Ax)$
  $= y^T y - y^T Ax - x^T A^T y + x^T A^T Ax$
  $= y^T y - 2y^T Ax + x^T A^T Ax \qquad$ (do $y^T Ax = x^T A^T y$)

- Ta có: $\nabla^2 h(x) = \nabla^2(y^T y - 2y^T Ax + x^T A^T Ax) = \nabla^2(x^T A^T Ax)$
  $= A^T A + (A^T A)^T = 2A^T A \geq 0$ (cần chứng minh)

=> Vậy h(x) là hàm lồi

VD4: $k(x) = max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *với* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$

Gọi $\begin{cases} x_{m_1} = max\{x_1.x_2...., x_n\} \\ y_{m_2} = max\{y_1, y_2, ..., y_n\} \end{cases} \quad \forall m_1, m_2 \in [1, n]$

- Chứng minh theo định nghĩa:

$$k(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda k(X) + (1 - \lambda)k(y)$$

  $=> \lambda x + (1 - \lambda)y \leq \lambda x_{m_1} + (1 - \lambda)y_{m_2}$
  với VP $= (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2, ..., \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n)$

- Ta có $\begin{cases} \lambda x_i \leq \lambda x_{m_1} \\ (1 - \lambda)y_i \leq (1 - \lambda)y_{m_2} \end{cases} \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$
  $=> \lambda x_i + (1 - \lambda)y_i \leq \lambda x_{m_1} + (1 - \lambda)y_{m_2} \qquad \forall i \in [1, n]$
  $=> max\{\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i\} \leq \lambda x_{m_1} + (1 - \lambda)y_{m_2}$
  $=> k(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda k(x) + (1 - \lambda)k(y)$

=> Vậy k(x) là hàm lồi

VD5: $l(x) = min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *với* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$

Gọi $\begin{cases} x_{m_1} = min\{x_1.x_2...., x_n\} \\ y_{m_2} = min\{y_1, y_2, ..., y_n\} \end{cases} \quad \forall m_1, m_2 \in [1, n]$

- Giả sử l(x) là hàm lồi

$$l(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda l(X) + (1 - \lambda)l(y)$$

  $=> l(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda l(x) + (1 - \lambda)l(y)$
  với VP $= (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2, ..., \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n)$

- Ta có: $\begin{cases} \lambda x_i \geq \lambda x_{m_1} \\ (1 - \lambda)y_i \geq (1 - \lambda)y_{m_2} \end{cases} \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$
  $=> \lambda x_i + (1 - \lambda)y_i \geq \lambda x_{m_1} + (1 - \lambda)y_{m_2} \qquad$ (vô lý)

=> Vậy l(x) không là hàm lồi

VD6: Lấy một phản ví dụ về hàm lồi?

- Lấy $\begin{cases} x = (1,0)^T, y = (0,1)^T \\ \lambda = \frac{1}{2} \in [0,1] \end{cases}$ => $\begin{cases} l(x) = 0 \\ l(y) = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} \lambda l(x) = 0 \\ (1-\lambda) l(y) = 0 \end{cases}$
  => $\lambda l(x) + (1-\lambda) l(y) = 0 \qquad (1)$
- $\lambda x + (1-\lambda) y = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
  => $l(\lambda x + (1-\lambda) y) = \frac{1}{2} \qquad (2)$
- Từ (1) và (2) => $l(\lambda x + (1-\lambda) y) > l(x) + (1-\lambda) l(y)$

=> Vậy l(x) là hàm không lồi

11 Dạng 11: Tìm cực trị hàm số

11.1 Nhận biết cực trị:

- Cực trị địa phương:
$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$
trong đó: $\begin{cases} A = f''_{x,x} \\ B = f''_{x,y} = f''_{y,x} \\ C = f''_{y,y} \end{cases} \quad => \Delta = AC - B^2$

  TH1: Nếu A > 0, $\Delta > 0$ thì là cực tiểu
  TH2: Nếu A < 0. $\Delta > 0$ thì là cực đại
  TH3: $\Delta \leq 0$ (còn lại) thì không là cực trị

- Cực trị toàn cục là cực trị địa phương duy nhất

11.2 Ví dụ minh họa:

$$f(x, y) = x^4 + 2x^2 - 4xy + y^2$$

Bước 1: Tìm các điểm dừng:

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 + 4x - 4y = 0 \\ f'_y = -4x + 2y = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x^3 + x = y \\ 2x = y \end{cases} <=> \begin{cases} y = 2x \\ x^3 - x = 0 \end{cases}$$

$$<=> \begin{cases} y = 2x \\ x(x^2 - 1) = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} y = 2x \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

=> Các điểm dừng M(0, 0); N(1,2); P(1, -2)

Bước 2: Kiểm tra cực trị:

Ta có: $\begin{cases} f''_{x,x} = 12x^2 + 4 = A \\ f''_{x,y} = -4 = B \\ f''_{y,y} = 2 = C \end{cases}$

Tạo bảng:

Bảng cực trị

Điểm dừng	$A = 12x^2 + 4$	$B = -4$	$C = 2$	$\Delta = AC - B^2$	Kết luận
M(0,0)	4	-4	2	-8	Không là cực trị
N(1,2)	16	-4	2	16	Cực tiểu
P(1,-2)	16	-4	2	16	Cực tiểu

=> Vậy M(0,0) không là cực trị địa phương, N(1,2) và P(1,-2) là cực tiểu địa phương

12 Dạng 12: Giải bài toán tối ưu

Đề bài: *Cho* $A \in R^{m*n}$ *với* $m > n$ *và* $b \in R^m$*, rank(A) = n. Giải bài toán tối ưu:* $min||Ax - b||_2^2$ *với mọi x?*

- $minf(x) = min||Ax - b||_2^2 = min[(Ax - b)^T(Ax - b)]$
  $= min[(x^TA^T - b^T).(Ax - b)]$
  $= min(x^TA^TAx - x^TA^Tb - b^TAx + b^Tb)$
  $= min(x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb) \qquad (do\ x^TA^Tb = b^TAx)$

- Ta có: $\nabla f(x) = \nabla(x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb)$
  $= \nabla(x^TA^TAx - 2b^TAx) = 2A^TAx - 2b^TA = 0$
  $<=> 2A^TAx = 2b^TA$
  $<=> A^TAx = b^TA$
  $<=> (A^TA)^{-1}(A^TA)x = (A^TA)^{-1}b^TA$
  $=> x = (A^TA)^{-1}b^TA$

- Mà $\nabla^2 f(x) = 2A^TA > 0$

=> Vậy $min||Ax - b||_2^2$ xảy ra khi nghiệm tối ưu x = $(A^TA)^{-1}b^TA$ với giá trị tối ưu f(x) = $[(A^TA)^{-1}b^TA]^TA^TA[(A^TA)^{-1}b^TA]$

13 Dạng 13: Hàm lồi có cực trị

Xét hàm số Rosenbrock:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

13.1 Kiểm tra tính lồi của hàm số:

a) Cách 1: Chứng minh tổng quát

- $\frac{df}{dx_1} = 100 * 2 * (x_2 - x_1^2) * (-2x_1) - 2 * (1 - x_1)$
  $= 400x_1(x_1^2 - x_2) + 2(x_1 - 1)$
  $= 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2$
- $\frac{df}{fx_2} = 100 * 2(x_2 - x_1^2) = 200x_2 - 200x_1^2$
- $\frac{d^2f}{dx_1^2} = 1200x_1^2 - 400x_2 + 2$
- $\frac{d^2f}{dx_1dx_2} = -400x_1 = \frac{d^2f}{dx_2dx_1}$
- $\frac{d^2f}{dx_2^2} = 200$

Xét ma trận Hessian:

$$H = \begin{vmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{vmatrix}$$

Xét điều kiện: $\begin{cases} H_1 = 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 \\ H_2 = 240000x_1^2 - 80000x_2 + 400 - 160000x_1^2 \end{cases}$

$<=> \begin{cases} H_1 = 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 \\ H_2 = 80000x_1^2 - 80000x_2 + 400 \end{cases}$

=> Tồn tại $x_1, x_2 = x_1', x_2' \quad sao\ cho \quad H_1, H_2 < 0$
=> Ma trận Hessian không luôn xác định dương trên miền xác định của hàm số => Không là hàm lồi

b) Cách 2: Chỉ ra phản ví dụ

- Chọn (0, 0) và (1, 1) $\in R^n$ là tập lồi với $\lambda = \frac{1}{2} \in [0, 1]$
- Ta có $\frac{1}{2}f(0,0) + (1 - \frac{1}{2})f(1,1) = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 0 = \frac{1}{2}$
- Mà lại có $f(\frac{1}{2}(0,0) + (1 - \frac{1}{2})(1,1)) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{13}{2}$

=> $\frac{1}{2}f(0,0) + (1 - \frac{1}{2})f(1,1) < f(\frac{1}{2}(0,0) + (1 - \frac{1}{2})(1,1))$
=> Vậy hàm số không lồi

13.2 Tìm cực trị địa phương và toàn cục của hàm số:

Ta có: $\begin{cases} \frac{df}{dx_1} = 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 = -0 \\ \frac{df}{dx_2} = 200x_2 - 200x_1^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} 400x_1^3 - 400x_1^3 + 2x_1 - 2 = 0 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases}$

<=> $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ => Điểm dừng M(1, 1)

Ta thấy điểm dừng M(1, 1) có $\begin{cases} |H_1(1,1)| > 0 \\ |H_2(1,1)| > 0 \end{cases}$

=> Vậy M(1, 1) lầ cực tiểu địa phương

Ta thấy không có giá trị x_1, x_2 nào khác trường hợp yêu cầu
=> M(1, 1) cũng là cực tiểu toàn cục của $f(x_1, x_2)$

Tài liệu

[1] Pisces Kibo. *Bộ công thức Tony*, 2024.