ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

GIẢI TÍCH HÀM ỨNG DỤNG

Applied Functional Analysis

CHUYÊN ĐỀ:

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP CÁC DẠNG BÀI TẬP

Mã lớp học phần: MAT3409

Sinh viên: Tạ Quang Tùng

Lớp: K66A2 Toán Tin

Hà Nội, 2024

Mục lục

1 Đề cương ôn tập giữa kỳ

1.1 Dạng 1: Tìm song ánh từ A vào B

1. Tìm song ánh φ: [0, 1] vào (0, 1)

Bài làm

Đặt A = [0, 1] và B = (0, 1)
–> $A_1 = \{a_1, a_2, ...\} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$
–> $B_1 = \{b_1, b_2, ...\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$

Ta lập ánh xạ:

$$\begin{array}{rcll} \varphi: & A & \rightarrow & B \\ & a_i & \rightarrow & \varphi(a_i) = b_i \\ & \text{a} & \rightarrow & \varphi(a) = a \text{ nếu a} \notin A_1 \end{array}$$

=> Ta thu được ánh xạ φ là một song ánh từ A → B

2. Tìm song ánh φ: R vào V (vô tỷ)

Bài làm

Đặt A = R = $(-\infty, +\infty)$ và B = V

$$\varphi(x) = \begin{cases} q + ne \text{ nếu } x = q + (n-1)e \\ x \text{ nếu trái lại} \end{cases} \quad \forall q \in Q, n \in N^*$$

=> $\exists \varphi^{-1} : V \rightarrow R$

1.2 Dạng 2: Chứng minh tập hữu hạn đếm được

3. Cho f: R → R là hàm số đơn điệu tăng trên R. Biết G(f) là tập điểm gián đoạn của f. CMR: G(f) là tập hữu hạn hoặc đếm được?

Bài làm

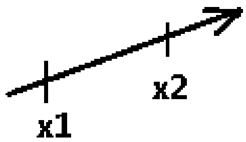
Lấy $x_0 \in G(f)$ => $\begin{cases} L = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \\ R = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \end{cases}$ *với* $L < R$

Do f đơn điệu tăng và f gián đoạn tại x_0

$$\begin{cases} \textit{Lấy } r \in Q \cap (L, R) \\ \varphi: \ \text{G(f)} \ \to \ \text{Q} \\ \quad \text{x} \ \to \ \varphi(x) = \text{r} \end{cases} \quad => \text{Toàn ánh}$$

Ta cần CMR φ là 1 đơn ánh

lấy $x_1, x_2 \in G(f)$ sao cho $x_1 < x_2$:



$$=> \left| \begin{array}{l} L_1 = \lim\limits_{x \to x_1^-} ; R_1 = \lim\limits_{x \to x_1^+} \\ L_2 = \lim\limits_{x \to x_2^-} ; R_2 = \lim\limits_{x \to x_2^+} \end{array} \right. \text{Do f đơn điệu tăng nên } R_1 < L_2$$

$=> (L_1, R_1) \cap (L_2, R_2) = \varnothing$ mà $\begin{cases} r_1 \in (L_1, R_1) \\ r_2 \in (L_2, R_2) \end{cases}$ $=> r_1 \neq r_2$

=> φ là đơn ánh

=> $\exists$ một đơn ánh từ G(f) $\to$ Q đếm được

=> Kết luận: G(f) là đếm được

> 4. Gọi $P_n = \{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n\}$ với các $a_i \in Q$ $(i = \overline{0, \infty})$ là đa thức bậc n hệ số hữu tỷ.
> CMR: P_n là tập đếm được?

Bài làm

Lập ánh xạ φ: $\left| \begin{array}{lll} P_n & \to & Q^n \\ \text{P} & \to & \varphi(P) = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \end{array} \right.$

Ta cần CMR: φ là đơn ánh:

+) Lấy $P_1(x); P_2(x) \in P_n$ sao cho $P_1(x) \neq P_2(x)$

$$=> \begin{cases} P_1(x) = a_{10}x^n + a_{11}x^{n-1} + a_{12}x^{n-2}... + a_{1n-1}x + a_n \\ P_2(x) = a_{20}x^n + a_{21}x^{n-1} + a_{22}x^{n-2}... + a_{2n-1}x + a_n \end{cases}$$

=> Tồn tại 1 đơn ánh từ $P_n(x) \to Q^n$ đếm được => đpcm

5. CMR: tập các số 8 rời nhau trong mặt phẳng là tập hữu hạn hoặc đếm được?

Bài làm

+) Đặt E là tập các số 8 rời nhau trong mặt phẳng
Lấy $x_0 \in E; x_0$ được cấu tạo từ 2 vòng giao nhau tại duy nhất một điểm.
Trong 2 vòng tròn của x_0 ta chọn 2 điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ từ mỗi vòng và lập ánh xạ:

$$\begin{array}{llll} \varphi: & \text{E} & \to & R^4 \\ & \text{x} & \to & \varphi(x) = (x_1, y_1, x_2, y_2) \end{array}$$

Ta CMR: φ là đơn ánh
thật vậy, lấy $x_1, x_2 \in E$ với $x_1 \neq x_2$
Do các số 8 rời nhau trong mặt phẳng nên các số 8 giao với nhau nhiều nhất là một vòng tròn => $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$
=> $\exists$ đơn ánh từ $E \to R^4$ đếm được => E đếm được

1.3 Dạng 3: Không gian Metric

1. Cho $X = C_{[a,b]}\ \forall\ f, g \in X$. Đặt d(f, g) = $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.
CMR: (X, d) là không gian Metric?

Bài làm

+) d(f, g) = $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx \geq 0\ \forall\ f, g \in X$
(f, g là các hàm liên tục)
d(f, g) = 0 <=> $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = 0$ => |f - g| = 0 <=> f = g
+) $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = d(f, g) = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx = 0$
+) d(f, g) = $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = \int_a^b |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|dx$
$\displaystyle\leq \int_a^b (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|)dx$
$\displaystyle\leq \int_a^b |f(x) - h(x)|dx + \int_a^b |h(x) - g(x)|dx \leq d(f, h) + d(h, g)$

2. Cho X = $\{x \mid x = (x_1, x_2, ..., x_n);\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$ với $x, y \in X$.

Đặt d(x, y) = $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$. CMR: (X, d) là không gian Metric?

Bài làm

+) $d(x,y) \geq 0$ => hiển nhiên $\left(vì \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} \geq 0\right)$

d(x, y) = 0 <=> $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2 = 0$ <=> $x_n - y_n = 0$ <=> $x_n = y_n$

+) d(x, y) = $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - x_n)^2} = d(y, x)$

+) $d(x,y) \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2} \leq d(x,z) + d(z,y)$

3. CMR phần trong của một tập là một tập mở?

Bài làm

+) Nếu A mở thì mọi $x_0 \in A, \exists B(x_0, r) \subset A$
=> $x_0 \in intA$ => $A \subset intA$
mà $intA \subset A$ => A = intA

+) Nếu $A \subset B; x_0 \in intA$ => $\exists B(x_0, r) \subset A \subset B$
=> $x_0 \in intB$ => $intA \subset intB$
Với A là một tập bất kỳ, giả sử $x_0 \in intA$ => $\exists B(x_0, r) \subset A$
Do $B(x_0, r)$ là tập mở => dựa trên 2 tính chất chứng minh trên:

$$intB(x_0, r) = B(x_0, r) \subset intA$$

=> intA là tập mở

4. Cho $X = C_{[a,b]}$; $d(f,g) = \max\limits_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$. Gọi $f_1(x), f_2(x) \in X$ thỏa mãn: $f_1(x) < f_2(x) \forall x \in [a,b]$.
CMR: tập G $= \{f \in X | f_1(x) < f(x) < f_2(x)\}$ $\forall$ $x \in [a,b]$ là tập mở?

Bài làm

Lấy $f_0(x) \in G$
+) Đặt $F_1(x) = f_2(x) - f_0(x) => F_1(x) > 0$ liên tục trên [a, b]
$=> \exists \alpha = \min\limits_{[a,b]} F_1(x) > 0$
+) Đặt $F_2(x) = f_0(x) - f_1(x) => F_2(x) > 0$ liên tục trên [a, b]
$=> \exists \beta = \min\limits_{[a,b]} F_2(x) > 0$
+) Đặt r = $\min\{\alpha, \beta\}$ => CMR: $B(f_0(x), r) \subset G$
Với f(x) bất kỳ thuộc $B(f_0(x), r)$, ta có:

$$|f(x) - g(x)| < r \xrightarrow{\forall x \in [a,b]} f_0(x) - r < f(x) < f_0(x) + r$$

Do r = $\min\{\alpha, \beta\}$ $=> \begin{cases} f_0(x) - f_1(x) > r \\ f_2(x) - f_0(x) > r \end{cases}$
$=> \begin{cases} f_1(x) = f_0(x) - [f_0(x) - f_1(x)] < f_0(x) - r \\ f_2(x) = f_0(x) - [f_2(x) - f_0(x)] > f_0(x) + r \end{cases}$
$=> f_1(x) < f(x) < f_2(x) => f_2(x) \in G$
=> Vậy $B(f_0(x), r) \subset G$

5. Cho X là không gian Metric khả ly, $A \in X$. Điểm $x_0 \in A$ là điểm cô lập nếu $\exists \delta > 0$ sao cho $B(x_0, \delta) \cap A = \{x_0\}$.
CMR: tập các điểm cô lập của A là không quá đếm được?
(ký hiệu $C_{[A]}$)

Bài làm

Giả sử $x_0 \in C_{[A]} => \exists B(x_0, r_{x_0}) \cap A = \{x_0\}$
Do X là khả ly => $\exists D \subset X$ không quá đếm được sao cho $\overline{\mathrm{D}} = X$
$=> \exists \{x_n\} \subset D; x_n \to x_0 => \overline{\mathrm{x_0}} \in D \cap B(x_0, \frac{r_{x_0}}{2})$
Đặt $\overline{\mathrm{x_0}} = \varphi(x_0)$ thì ta có ánh xạ $\varphi : C(A) \to D$.

Ta cần chứng minh: φ là đơn ánh

- Lấy $x_1, x_2 \in C(A)$ sao cho $x_1 \neq x_2$, ta có: $\exists \begin{cases} B(x_1, r_{x_1}) \cap A = \{x_1\} \\ B(x_2, r_{x_2}) \cap A = \{x_2\} \end{cases}$

- Giả sử $r_{x_1} \leq r_{x_2} => \begin{cases} \varphi(x_1) = \overline{\mathrm{x}_1} \in B(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}) \\ \varphi(x_2) = \overline{\mathrm{x}_2} \in B(x_2, \frac{r_{x_2}}{2}) \end{cases}$

- Giả sử $\overline{\mathrm{x}_1} = \overline{\mathrm{x}_2}$, ta có:

  $r_2 \leq d(x_1, x_2) \leq d(x_1, \overline{\mathrm{x}_2}) + d(\overline{\mathrm{x}_2}, x_2) = d(x_1, \overline{\mathrm{x}_1}) + d(\overline{\mathrm{x}_2}, x_2) = VP$

  $=> VP < \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2} \leq \frac{r_2}{2} + \frac{r_2}{2} = r_2$ (vô lý)

$=> x_1 \neq x_2 => \varphi$ là đơn ánh => đpcm

6. Cho X là không gian đầy đủ, ánh xạ f: X $\rightarrow$ X thỏa mãn $\exists$ nghiệm sao cho $\forall x, y \in X$, ta có:

$$d(f^{n_0}(x), f^{(n_0)}(y)) \leq \alpha d(x, y) \ \forall \ 0 \leq \alpha < 1$$

CMR: $\exists x^* = f(x^*)$ và $x^* = \lim\limits_{k \to +\infty} f^{(k)}(x_0)$?

Bài làm

Xét ánh xạ:

$$\begin{array}{llll} \varphi: & \mathrm{X} & \rightarrow & \mathrm{X} \\ & \mathrm{x} & \rightarrow & \varphi(x) = f^{(n_0)}(x) \end{array}$$

Theo giả thiết: $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(f^{(n_0)}(x), f^{(n_0)}(y)) \leq \alpha d(x, y)$ là ánh xạ co $\forall \ 0 \leq \alpha \leq 1$
mà X là 1 tập đầy đủ => Theo định lý Banach, ta có:

+) Tồn tại duy nhất $x^* \in X; f(x^*) = x^*$:

$$\begin{aligned} f^{(n_0)}(x^*) = x^* \quad & <=> \quad (f^{(n_0)}(x^*)) = f(x^*) \\ & <=> \quad f^{(n_0)}(f(x^*)) = f(x^*) \\ & <=> \quad \varphi(f(x^*)) = f(x^*) \end{aligned}$$

$=> f(x^*)$ là điểm bất động của φ
$=> \varphi(x^*) = x^* => x^*$ là điểm bất động của f

+) Ta dễ dàng CMR: nếu x^* là điểm bất động của f $=> x^*$ cũng là điểm bất động của $\varphi => x^*$ là duy nhất

7. Cho X là không gian Metric Compact. Ánh xạ f: $X \to X$ là 1 phép đẳng cự thỏa mãn:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

CMR: f là 1 song ánh?

Bài làm

Ta chứng minh f là toàn ánh bằng phản chứng

+) Giả sử $f(X) \subseteq X => \exists x_0 \in X \setminus f(x)$

Do f(X) là tập đóng nên X $\setminus f(X)$ là tập mở $=> \exists B(x_0, r) \subset X \setminus f(X)$

$$\text{Gọi} \begin{cases} x_1 = f(x_0) \in f(X) \\ x_2 = f(x_1) \in f(X) \\ ... \\ x_n = f(x_{n-1}) \in f(x) \end{cases} \quad => \{x_n\} \subset f(X)$$

+) Do f(X) là tập Compact => $\exists$ dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ là dãy cơ bản

$=> \forall \epsilon = r > 0, \exists n_0 \in N^*, \forall n_k > n_0$ ta có:

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < r$$

Với S = $n_{k+1} - n_k > 1$, ta có:

$$d(x_0, x_S) = d(f(x_0), f(x_S)) = d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < r$$

$=> x_S \in B(x_0, r)$ => Vô lý => Phản chứng sai

=> f(X) = X => f là toàn ánh => f là song ánh

8. Cho X là không gian Metric, K và F là 2 con của X thỏa mãn:

$$\begin{cases} K \to \textit{tập Compact} \\ F \textit{ đóng và } K \cap F = \varnothing \end{cases} \quad => CMR: d(K, F) > 0?$$

Bài làm

+) Phản chứng: giả sử d(K, F) = 0 => $\inf\limits_{x \in K; y \in F} d(x, y) = 0$

$=> \exists \{x_n\} \subset K; \{y_n\} \subset F$ sao cho $d(x_n, y_n) \to 0$

Do K là tập Compact nên $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \to y_0 \in K$

+) Ta có: $0 < d(y_k, y_0) \leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_0) \to 0$

$=> y_{n_k} \to y_0$ mà F đóng nên $y_0 \in F$
$=> K \cap F = \{y_0\} \neq \varnothing$ (vô lý)
=> Giả thiết phản chứng sai => d(F, K) > 0

9. Cho X là tập Compact, ánh xạ f: $X \to X$ thỏa mãn điều kiện:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)\ \forall x \neq y$$

CMR: $\exists! x^* = f(x^*)$?

Bài làm

Xét ánh xạ:

$$\begin{array}{llll} \varphi: & \mathrm{X} & \to & \mathrm{R} \\ & \mathrm{x} & \to & \varphi(x) = d(f(x), x) \end{array}$$

Ta CMR: φ là ánh xạ liên tục
+) Giả sử $\{x_n\} \subset X$; $x_n \to x_0 => d(x_n, x_0) \to 0$
mà $0 < d(f(x), f(x_0)) < d(x, x_0) => d(f(x), f(x_0)) \to 0$

+) Ta có:

$$\begin{aligned} 0 < d(\varphi(x_n), \varphi(x_0)) &= |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| \\ &= |d(f(x_n), x_n) - d(f(x_0), x_0)| \\ &\leq |d(f(x_n), f(x_0)) + d(x_n, x_0)| \end{aligned}$$

$=> d(\varphi(x_n), \varphi(x_0)) \to 0$
$=> \varphi(x_n) \to \varphi(x_0) => \varphi$ là ánh xạ liên tục

+) Do X là tập Compact và φ là ánh xạ liên tục
$=> \exists x_* \in X$ sao cho $\varphi(x_*) = \min\limits_{x \in X} \varphi(x)$

Ta CMR: $x_* = f(x_*)$ bằng phản chứng
+) Giả sử $x_* \neq f(x_*)$, khi đó:

$$\varphi(f(x_*)) = d(f(f(x_*)); f(x_*)) < d(f(x_*), x_*) = \varphi(x_*)$$

=> Vô lý => Giả thiết phản chứng sai
$=> x_* = f(x_*) => x_*$ là điểm bất động của f

+) Giả sử: $\exists x^* = f(x^*); x^* \neq x_*$
$=> d(x^*, x_*) = d(f(x^*), f(x_*)) < d(x^*, x_*)$ (vô lý)
$=> x^*$ là duy nhất

10. Cho X là không gian Metric đầy đủ, ánh xạ f: $X \to X$ thỏa mãn điều kiện:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \ \forall x \neq y$$

Có tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* = f(x^*)$ hay không?

Bài làm

Xét ánh xạ:

$$\begin{array}{llll} \text{f:} & X & \to & X \\ & x & \to & f(x) = x + \frac{1}{x} \end{array} \quad \text{với } x \in X = [1, +\infty)$$

Khi đó, có $X \in R$ và X đóng => X đầy đủ
Hơn nữa:

$$d(f(x), f(y)) = |x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}| = |\frac{(x-y)(xy-1)}{xy}|$$

Nếu $\exists x^* \in X$ sao cho $x^* = f(x^*) \leq |x - y| = d(x, y)$
=> $x^* + \frac{1}{x^*} = x^* <=> \frac{1}{x^*} = 0$ (vô lý)
=> Không tồn tại $x^* \in X$ sao cho $x^* = f(x^*)$

2 Đề cương ôn tập cuối kỳ

2.1 Tập mở trong không gian Metric. CMR: Họ các tập mở là 1 Topo trong không gian Metric?

2.1.1 Hình cầu mở:

Cho X là không gian Metric; hình cầu mở tâm x_0, bán kính r được xác định:

$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$$

2.1.2 Điểm trong:

$x_0 \in A \subset X$ là điểm trong của A nếu $\exists B(x_0, r) \subset A$

2.1.3 Tập mở:

$A \subset X$ là tập mở nếu mọi $x_0 \in A$ sao cho $\exists B(x_0, r) \subset A$

- Định lý: Cho X là không gian Metric, τ là tập tất cả tập mở X thì
  $$\begin{cases} \varnothing, X \subset X \\ Nếu\ G_\alpha \in \tau => \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha \in \tau \\ Nếu\ G_i \in \tau => \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in \tau \end{cases}$$
  => Họ các tập mở là 1 Topo trong không gian Metric

- Chứng minh:
  (1) $\rightarrow$ định nghĩa

  (2) $\rightarrow$ giả sử $G_\alpha \in \tau$, Đặt G = $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$

  Lấy $x_0 \in G <=> x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha \in \tau$

  $=> \exists \alpha_0 \in X$ sao cho $x_0 \in G_{\alpha_0} => \forall x_0 \in G; \exists B(x_0, r) \subset G$

  (3) $\rightarrow$ giả sử $G_i \in \tau$, Đặt G = $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$

  Lấy $x_0 \in G => x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i => x_0 \in G_i => \exists B(x_0, r) \subset G_i$

  Gọi $r_0 = min r_i => B(x_0, r_0) \in G$

2.2 Bao đóng của một tập. CMR: bao đóng là tập đóng nhỏ nhất chứa tập đã cho?

2.2.1 Điểm dính:

X là không gian Metric, $A \in X$. $x_0 \in X$ là điểm dính nếu $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \xrightarrow{n \to \infty} x_0$

2.2.2 Bao đóng:

Bao đóng là tập hợp các điểm dính của A (ký hiệu $\overline{\mathrm{A}}$)

- Định lý: Cho X là không gian Metric, với $A \subset X$ thì $\overline{\mathrm{A}}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa A
- Chứng minh: $\overline{(\overline{\mathrm{A}})} = \overline{\mathrm{A}} => \begin{cases} \overline{\mathrm{A}} \subset \overline{(\overline{\mathrm{A}})} \; \textit{(luôn đúng)} \\ \overline{(\overline{\mathrm{A}})} \subset \overline{\mathrm{A}} \end{cases}$

  +) Lấy $x_0 \in \overline{(\overline{\mathrm{A}})} \to x_0$ là điểm dính $\overline{\mathrm{A}} => \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\mathrm{A}} \xrightarrow{n \to \infty} x_0$

  Vì $\{\overline{\mathrm{x_n}}\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{\mathrm{A}} => \begin{cases} \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \\ d(x_n, \overline{\mathrm{x_n}}) < \frac{1}{n} \end{cases}$

  +) Theo nguyên lý kẹp:

$$0 \leq d(x_n, x_0) \leq d(x_n, \overline{\mathrm{x_n}}) + d(\overline{\mathrm{x_n}}, x_0) \longrightarrow 0$$

  $=> x_n \to x_0 => x_0 \in \overline{\mathrm{A}} => \overline{(\overline{\mathrm{A}})} \subset \overline{\mathrm{A}}$

  +) Giả sử F đóng $\supset A => \overline{\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{F}} = F =>$ đpcm

2.3 Không gian khả ly. CMR: $C_{[a,b]}$ là không gia Metric khả ly?

2.3.1 Không gian Metric khả ly X:

Nếu $\exists D \subset X$ *sao cho* $=>$ $\begin{cases} D \textit{ không quá đếm được} \\ \overline{\mathrm{D}} = X \end{cases}$

2.3.2 Định lý:

X = $C_{[a,b]}$ và d(f, g) = $\max\limits_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$ $\forall f, g \in X$. Khi đó (X, d) là không gian khả ly.

Chứng minh

- Gọi P là tập đa thức hữu tỷ (không quá đếm được) với $f(x) \in X$ liên tục trên [a, b]. Theo Weierstrass:

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

$$=> |P_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall x \in [a, b]$$

- Chọn $P'_n(x)$ sao cho $|P'_n(x) - P_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall x \in [a, b]$
  $=> |P'_n(x) - f(x)| \leq |P'_n(x) - P_n(x)| + |P_n(x) - f(x)| < \epsilon$
  $\Leftrightarrow \max\limits_{[a,b]} |P'_n(x) - f(x)| < \epsilon$
  $=> d(P'_n(x), f(x)) < \epsilon =>$ f(x) là điểm dính P $=> X \subset \overline{\mathrm{P}}$
  (P không quá đếm được trong X) => đpcm

2.4 Nguyên lý điểm bất động của Banach?

2.4.1 Ánh xạ co:

Cho X là không gian Metric; $f : X \to X$ co. Nếu $\exists \alpha \in [0, 1)$ sao cho $\forall x, y \in X$ có: $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$

2.4.2 Điểm bất động:

Điểm bất độngx^* của f nếu $f(x^*) = x^*$

2.4.3 Nguyên lý điểm bất động của Banach

Cho X là không gian Metric đầy đủ, f: $X \to X$ co.
=> $\exists!\ x^* \in X$ sao cho $x^* = f(x^*)$

Chứng minh

- Lấy $x_0 \in X$ sao cho $x_i = f(x_i)$ => Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$
- $\forall n \in N^*$:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) = VP$$

$$=> VP = \alpha d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) = ... \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$$

  => $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$

- $\forall m > n$:

$$\begin{aligned} 0 < d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

  => $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy cơ bản

- Do X đầy đủ => $\exists x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$ => x^* là điểm bất động của f giả sử $y^* = f(y^*)$ *và* $x^* \neq y^*$ thì:

$$0 < d(x^*, y^*) \leq \alpha d(f(x^*,), f(y^*)) = \alpha d(x^*, y^*)$$

  => Vô lý do $\alpha < 1$ => x^* là duy nhất

2.5 Định nghĩa chuẩn, Không gian tuyến tính định chuẩn, Không gian Banach?

2.5.1 Chuẩn:

X là không gian tuyến tính trên K $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\begin{array}{lccc} ||...||: & X & \to & R \\ & x & \to & ||x|| \in R \end{array}$$

$$\text{thỏa mãn} \begin{cases} ||x|| \geq 0 \ \forall x \in X \Leftrightarrow ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta \\ ||\lambda x|| = |\lambda|.||x|| & \forall \lambda \in K, \forall x \in X \\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| & \forall x, y \in X \end{cases}$$

VD1: $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \forall X = R^n; \ x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

2.5.2 Không gian tuyến tính định chuẩn:

Không gian tuyến tính X cùng với 1 chuẩn ||...|| ký hiệu (X, ||...||)

VD2: $X = R^n$ cùng với chuẩn VD1

2.5.3 Không gian Banach:

Không gian Banach là không gian tuyến tính định chuẩn X đầy đủ.

VD3: $X = R^n$

2.6 Ánh xạ tuyến tính liên tục. CMR: định lý ánh xạ liên tục là ánh xạ tuyến tính?

2.6.1 Định nghĩa:

Cho X, Y là 2 không gian tuyến tính định chuẩn trên K. Ánh xạ:

$$\begin{array}{rccc} \text{A:} & \text{X} & \rightarrow & \text{Y} \\ & \text{x} & \rightarrow & Ax = y \in Y \end{array}$$

A liên tục tại x_0 nếu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \rightarrow x_0$ thì $Ax_n \rightarrow Ax_0$

2.6.2 Định lý:

Ánh xạ A: $X \rightarrow Y$ là ánh xạ tuyến tính. Có các mệnh đề sau tương đương:

$$=> \begin{cases} (1)\ A\ liên\ tục\ trên\ X \\ (2)\ A\ liên\ tục\ tại\ x_0 \in X \\ (3)\ A\ liên\ tục\ tại\ x = \theta \\ (4)\ \exists M > 0\ sao\ cho\ ||Ax|| \leq M||x|| \quad \forall x \in X \end{cases}$$

Chứng minh

- (1) $\rightarrow$ (2) hiển nhiên
- (2) $\rightarrow$ (3): giả sử A liên tục tại $x_0 \in X$
  Ta có $\forall x_n \rightarrow \theta x_n => Ax_n \rightarrow A\theta x_n => A\theta_x = \theta_y$
  $$=> \text{Ta có:} \quad \begin{array}{ccc} x_n + x_0 & \rightarrow & x_0 \\ A(x_n + x_0) & \rightarrow & Ax_0 \\ Ax_n + Ax_0 & \rightarrow & Ax_0 \\ Ax_n & \rightarrow & \theta_y \end{array}$$
- (3) $\rightarrow$ (4): giả sử A liên tục tại $x = \theta$
  Giả sử: $\forall M > 0, \exists x_M \in X$ sao cho $||Ax|| > M|x_M|$
  Khi đó, $\forall n \in N^*, \exists x_n \in X$ sao cho $||Ax_n|| > n||x_n||$ (*)
  Ta thấy $x_n \neq 0, \forall n \in N^* \Longrightarrow ||x_n|| \neq 0\ \forall n \in N^*$
  Chia hai vế $||x_n|| \longrightarrow ||A(\frac{x_n}{n||x_n||})|| > 1$ với $y_n = \frac{x_n}{n||x_n||}$
  $=> y_n \rightarrow 0$ do $||y_n - \theta|| = ||y_n|| = \frac{1}{n} \rightarrow \theta$
  $=> ||Ay_n|| \rightarrow 0 =>$ Vô lý
- (4) $\rightarrow$ (1): giả sử (4) đúng
  Có $x_0 \in X \Longrightarrow \forall \{x_n\}$ *mà* $x_n \rightarrow x_0$ có:
  $$||Ax_n - Ax_0|| = ||A(x_n - x_0)|| \leq M||x_n - x_0||$$

do $||x_n - x_0|| \to 0$ (Nguyên lý kẹp)
=> $||Ax_n|| \to ||Ax_0||$ => A liên tục tại x_0 => đpcm

2.7 Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Schwartz?

2.7.1 Song tuyến tính:

Cho X là không gian tuyến tính trên K:

$$\begin{aligned} \varphi:\ & \text{X x X} && \to && \text{K} \\ & \text{(x, y)} && \to && \varphi(x,y) \in K \end{aligned}$$

là dạng song tuyến tính xác định dương nếu:

$$=> \begin{cases} \varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z) & \forall x,y,z \in X \\ \varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y) & \forall x \in X, \lambda \in K \\ \varphi(y,x) = \overline{\varphi(\text{x, y})} & \forall x,y \in X \\ \varphi(x,x) \geq 0 & \forall x \in X \end{cases}$$

2.7.2 Bất đẳng thức Schwartz:

Nếu (x, y) là dạng song tuyến tính, đối xứng xác định dương trên X thì $\forall x, y \in X$ ta có bđt Schwartz:

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

Chứng minh

- Nếu (x, y) = 0 => bđt đúng
- Nếu $(x,y) \neq 0$, ta có:

$$(x+\lambda y; x+\lambda y) \geq 0 \ \forall \lambda \in K$$

$$\Leftrightarrow (x,x) + \lambda(y,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda\overline{\lambda}(y,y) \geq 0$$

Chọn $\lambda = (x,y)t \quad \forall t \in R$
$=> (x,x) + t(x,y)(y,x) + t\overline{(\text{x, y})}(x,y) + t^2(x,y)\overline{(\text{x, y})}(y,y) \geq 0$
$\Leftrightarrow t^2|(x,y)|^2(y,y) + 2t|(x,y)|^2 + (x,x) \geq 0$

Do $(x,x) \neq 0 \Rightarrow |(x,y)| > 0 \Rightarrow (y,y) > 0$
Xét $\Delta' \to$ đpcm

$$|(x,y)|^4 \leq |(x,y)|^2(y,y)(x,x)$$
$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

2.8 Định nghĩa phần bù trực giao. Phát biểu định lý về khai triển trực giao?

2.8.1 Phần bù trực giao:

Cho $M \subset X$, gọi $M^{\perp} = \{x \in X | x \perp M\}$. Nếu M là không gian con đóng của X thì $M^{\perp}$ là phần bù trực giao của M.

2.8.2 Định lý khai triển trực giao:

Cho X là không gian Hilbert và M là không gian con đóng của X. Khi đó, $\forall x \in X$ ta có x = y + z. Trong đó $y \in M, z \in M^{\perp}$ và biểu diễn duy nhất: $X = M \oplus M^{\perp}$

2.8.3 Định nghĩa không gian vuông góc trong Hilbert:

Cho $x, y \in X$, ta có $x \perp y$ nếu (x, y) = 0. Có $M, N \subset X$, nói $M \perp N$ nếu $m \in M, n \in N$ thì $m \perp n$.

2.9 Định lý Riesz về dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính trong Hilbert?

Cho X là không gian Hilbert, X^* là tập tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên X. Nếu $f \in X^*$ thì:

$$\exists ! x_0 \in X \text{ } sao \text{ } cho \text{ } f(x) = (x, x_0) \text{ } \forall x \in X$$

Tài liệu

[1] Pisces Kibo. *Bộ công thức Tony*, 2024.