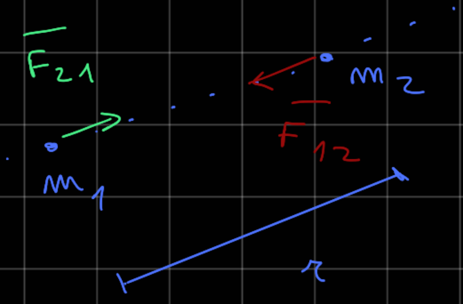
Ricordiamo che la forza di gravitazione vale per tutte le masse

Per le leggi della dinamica posso scrivere...




$$\begin{cases} m_1 \overline{a}_1 = \overline{F}_{21} \\ m_2 \overline{a}_2 = \overline{F}_{12} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{m_1 \overline{a}_1 + m_2 \overline{a}_2}_{} = \underbrace{\overline{F}_{21} + \overline{F}_{12}}_{\text{uguali in modulo ma opposte...}} = 0$$

Posso immaginare questi corpi che interagiscono come un unico SISTEMA

$$\rightarrow \quad m_1 \frac{d\overline{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\overline{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left( m \overline{v}_1 + m_2 \overline{v}_2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \overline{v}_1 + m_2 \overline{v}_2 = \text{COSTANTE}$$

Ma $m \cdot v = p$ (quantità di moto)...

$$\rightarrow \quad p_1 + p_2 = \text{COSTANTE}$$

Inoltre...

$$\overline{v}_1 = \frac{\text{COSTANTE} - m_2 \overline{v}_2}{m_1}$$

Notiamo che se $m_1 \to \infty$, $v_1 \to \infty$

Per questo è la Terra che gira intorno al sole e non il contrario! (Beccatevi questo, Tolemaici)

Ricordando che $\begin{cases} \bar{a}_1 = \dfrac{\bar{F}_{21}}{m_1} \\ \bar{a}_2 = \dfrac{\bar{F}_{12}}{m_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\bar{v}_1}{dt} = \dfrac{\bar{F}_{21}}{m_1} \\ \dfrac{d\bar{v}_2}{dt} = \dfrac{\bar{F}_{12}}{m_2} \end{cases}$

$$\to \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = \frac{\bar{F}_{21}}{m_1} - \frac{\bar{F}_{12}}{m_2} =$$

Poichè $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ ...

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\bar{F}_{21}$$

Posso interpretare $\bar{v}_1 - \bar{v}_2$ come una VELOCITÀ RELATIVA ("rispetto al corpo 1, con che velocità si avvicina il corpo 2?")

Definiamo, invece, MASSA RIDOTTA

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

Dunque l'equazione di prima diventa...

$$\boxed{\frac{d}{dt}\bar{v}_{rel} = \frac{1}{\mu}\bar{F}_{21}}$$

Ricordiamo che i due corpi potrebbero ruotare su sè stessi mentre avviene l'interazione. Questo aggiunge un grado di complessità

~~Notiamo che è come se avessimo un SISTEMA EQUIVALENTE dove:~~

- ~~la forza applicata è la stessa del sistema iniziale~~
- ~~i due corpi diventano un unico p.m. con massa~~ $= \frac{1}{\mu}$ ~~e velocità~~ $= \bar{v}_{rel}$

Se $m_1 \longrightarrow \infty$, $\frac{1}{\mu} \longrightarrow \frac{1}{m_2}$ (caso simile a quello del sistema Terra-Sole)

---

Applichiamo questo ragionamento nel calcolo del potenziale efficace:

In generale, la velocità di un pianeta in orbita è divisa in due componenti:

- Uno radiale, verso il centro di attrazione
- Uno tangenziale, tangente alla traiettoria

Quindi l'energia cinetica è data da...

$K = \frac{1}{2} m v^2$ dove $\bar{v} = v_r \hat{r} + \underline{v_\theta \hat{\theta}}$

Ricordiamo che $v_\theta = \omega r$

Mentre l'energia meccanica è data da...

$$E = \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \gamma \frac{Mm}{g}$$

Ma $m \omega r^2 = L$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m v_r^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{L^2}{m r^2} - \gamma \frac{Mm}{r}}$$

Questo è il POTENZIALE EFFICACE $U_{eff}$

~~Ma $m = \mu$. Questo perché stiamo in un caso come quello di prima, dove il secondo corpo è molto più grande del primo, tanto che $\mu$ lo possiamo approssimare a $m$~~

Nonostante questa approssimazione, il grafico resta lo stesso...