

# 《原子物理》第一至四章 部分作业及小测答案

罗钰涵

1. (1.5)

(1) 设有正电荷均匀分布在一半径为  $R$  的球形区域内, 电荷密度为  $\rho$ , 试证明电荷  $-e$  的电子在它内部可以做围绕球心的简谐运动。

(2) 若正电荷大小等于电子电荷,  $R = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 求作用力常数  $k$  和电子的振动频率。

**解答.** (1) 在距离球心  $r$  的位置上, 由高斯定理可知该点电场强度为

$$E(r) = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} r \quad (1)$$

受力为

$$F = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (2)$$

因此为简谐运动。

(2) 等效劲度系数

$$k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1 \times 1.6^2 \times 10^{-38}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-30}} = 2.302 \times 10^2 \text{ N/m} \quad (3)$$

振动频率

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{230.2}{9.1 \times 10^{-30}}} = 2.53 \times 10^{15} \text{ Hz} \quad (4)$$

**注意区分角频率和圆频率。**

2. (1.7) 加速器产生的能量为  $1.5 \text{ MeV}$  质子束垂直入射到厚为  $1 \mu\text{m}$  的金箔上。求:

(1) 散射角大于  $90^\circ$  的质子数占全部入射粒子数的百分比 (已知金的  $A = 197$ ,  $\rho = 1.932 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ );

(2) 散射到  $29^\circ \sim 31^\circ$ ,  $89^\circ \sim 91^\circ$  和  $149^\circ \sim 151^\circ$  间隔内质子数的比例;

(3) 设束流为  $10 \text{ nA}$ ,  $10$  分钟内散射到  $149^\circ \sim 151^\circ$  内的质子数;

**解答.** (1) 若单位时间内有  $n$  个  $\alpha$  粒子垂直入射到薄箔上, 则单位时间内在  $\theta$  方向且在  $d\Omega$  立体角内可以测到的  $\alpha$  粒子数为

$$dn = nNd \left( \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} \quad (5)$$

其中立体角  $d\Omega = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$ , 单位体积内的原子数  $N = \frac{\rho}{m} = \frac{\rho N_A}{A}$  (注意一种原子的摩尔质量的数值等于其原子量  $A$ , 单位为  $\text{g}$ )。则有

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dn}{n} &= \frac{\rho N_A d}{A} \left( \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4E} \right)^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1.932 \times 10^4 \times 6.02 \times 10^{23} \times 10^{-6}}{197 \times 10^{-3}} \left( 1.44 \times 10^{-9} \times \frac{79}{4 \times 1.5 \times 10^6} \right)^2 \times 4\pi = 2.67 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (6)$$

(2) 可以近似认为

$$\int_{29^\circ}^{31^\circ} \frac{dn}{n} : \int_{89^\circ}^{91^\circ} \frac{dn}{n} : \int_{149^\circ}^{151^\circ} \frac{dn}{n} = \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sin^3 \frac{\theta_1}{2}} : \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sin^3 \frac{\theta_2}{2}} : \frac{\cos \frac{\theta_3}{2}}{\sin^3 \frac{\theta_3}{2}} = 1 : 0.0359 : 0.00513 \quad (7)$$

也可以直接积分计算。

(3) 电流定义为  $I = \frac{q}{t}$ , 因此 10 分钟入射的质子数  $n = \frac{10 \times 10^{-9} \times 600}{1.6 \times 10^{-9}} = 3.75 \times 10^{13}$ 。代入公式可得散射到  $149^\circ \sim 151^\circ$  内的质子数为  $1.0 \times 10^8$ 。

3. (1.16) 设一  $\mu$  子代替氢原子中一个电子而形成中性氢  $\mu$  原子, 试求它的基态结合能和从  $n = 3$  态到  $n = 2$  态跃迁所发出的光子能量。如果是中性锂  $\mu$  原子, 它的化学性质最类似于哪种化学元素? 基态结合能呢?

解答. 类氢原子能量和半径

$$E_n = Z^2 \frac{\mu}{m_e} E_H, r_n = \frac{m_e}{\mu} \frac{r_H}{Z} \quad (8)$$

其中折合质量  $\mu = \frac{mM}{m+M}$ 。

对于中性氢  $\mu$  原子, 折合质量

$$\mu = \frac{105.658 \text{ MeV} \times 938.272 \text{ MeV}}{105.658 \text{ MeV} + 938.272 \text{ MeV}} = 94.964 \text{ MeV} \quad (9)$$

基态结合能

$$E_0 = \frac{94.964 \text{ MeV}}{0.511 \text{ MeV}} \times 13.6 \text{ eV} = 2.53 \text{ keV} \quad (10)$$

从  $n = 3$  态到  $n = 2$  态跃迁所发出的光子能量  $E = 351 \text{ eV}$ 。

对于中性锂  $\mu$  原子, 仍考虑使用氢原子模型, 折合质量

$$\mu = \frac{105.658 \text{ MeV} \times 6.941 \times 931.494 \text{ MeV}}{105.658 \text{ MeV} + 6.941 \times 931.494 \text{ MeV}} = 103.959 \text{ MeV} \quad (11)$$

基态轨道半径  $r_1 = 86.7 \text{ fm}$ , 非常接近原子核, 相当于屏蔽了一个原子核中的质子, 其结构就是奇特原子外围有两个电子环绕, 与 He 元素类似。

4. (第一章小测题填空 5) 电子与室温下的氢原子气体相碰撞, 要观测到  $H_\beta$  线, 那么电子的最小动能为\_\_\_\_\_ (以 eV 为单位)。

解答.  $H_\beta$  线:  $n = 4$  跃迁至  $n = 2$ 。因此要观测到  $H_\beta$  线, 应当有  $n = 4$  的氢原子, 因此电子的最小动能为  $13.6 \text{ eV}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 12.75 \text{ eV}$ 。部分同学理解成了  $H_\beta$  线的光子能量  $13.6 \text{ eV}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 2.55 \text{ eV}$ 。

5. (2.7) 试证明氢原子稳定轨道上正好能容纳下整数个电子的德布罗意波波长, 而且上述结果不但适用于圆轨道, 也适用于椭圆轨道。

解答. 对于圆轨道

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = 2\pi \frac{\frac{n\hbar}{mv}}{\frac{h}{mv}} = n \quad (12)$$

对于椭圆轨道, 轨道量子化条件为

$$\oint p_\theta d\theta = \oint mr^2 \dot{\theta} d\theta = n_\theta h \quad (13)$$

$$\oint p_r dr = \oint m \dot{r} dr = n_r h \quad (14)$$

则有

$$\oint p_\theta d\theta + \oint p_r dr = \oint mr^2 \dot{\theta} d\theta + \oint m \dot{r} dr = \oint \left( mr^2 \dot{\theta} \frac{d\theta}{dt} dt + m \dot{r} \frac{dr}{dt} dt \right) \quad (15)$$

$$= \oint m(r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) dt = \oint mv^2 dt \quad (16)$$

$$= \oint mv \frac{dl}{dt} dt = \oint mv dl = h \oint \frac{dl}{\lambda} = (n_\theta + n_r)h = nh \quad (17)$$

其中倒数第三个等号使用了德布罗意关系。因此对于椭圆轨道

$$\oint \frac{dl}{\lambda} = n \quad (18)$$

满足驻波条件。

## 6. (2.9)

**解答.** (2) 根据动量和位置的不确定关系, 近似认为  $r \cdot p \sim \hbar$ , 将  $p = \frac{\hbar}{r}$  代入哈密顿量的表达式, 能量最低时

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} - \frac{(\hbar c)^2}{\sqrt{(\hbar c)^2 + (\mu c^2 r)^2}} \right) = 0 \quad (19)$$

可以解出  $r$ , 再代入哈密顿量  $H$  的表达式即可。

(3) 进入表面后, 哈密顿量

$$H = \frac{p^2}{2m} - V_0 \quad (20)$$

当到达最深处时,  $p = \sqrt{2mV_0}$ , 由不确定关系, 贯穿深度  $r = \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}}$ 。

这里使用的不确定关系为  $\Delta r \cdot \Delta p \sim \hbar$ , 严格来讲应使用  $\frac{\hbar}{2}$ 。不过作为估算题, 只要建立的模型合理、计算过程无误、结果的数量级相近即可。

## 7. (2.11)

**解答.** 这里的狭缝应当如图所示

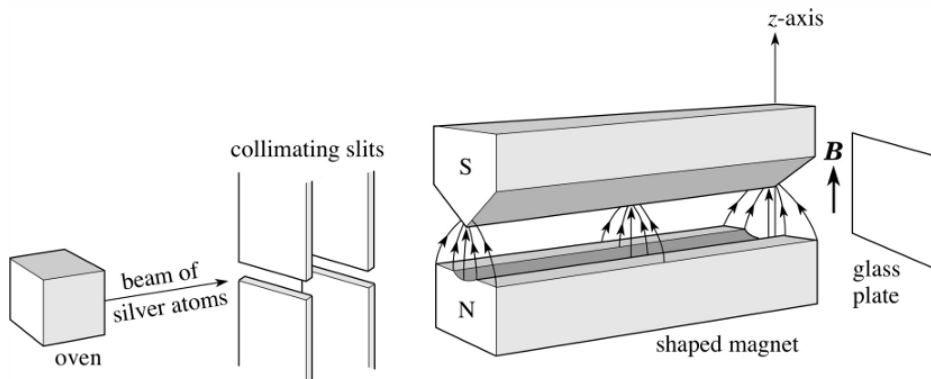


图 1: S-G 实验

电子经过第一个狭缝后, 由于其波动性, 会发生衍射。设狭缝宽度为  $d$ , 则极小值点

$$d \sin \theta = n\lambda \quad (21)$$

为了确定电子束方向, 第二个狭缝的宽度应当包括整个主极大, 假设狭缝之间的距离  $D = 1 \text{ m}$

$$\frac{d}{2} = D \tan \theta = D \sin \theta = D \frac{\lambda}{d} \quad (22)$$

因此狭缝宽度应当为

$$d = \sqrt{2D\lambda} = \sqrt{\frac{D\hbar}{\sqrt{2mE_k}}} \quad (23)$$

## 8. (2.15)

解答. 在  $x < 0$  的区域,

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \quad (24)$$

令  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  ( $k > 0$ ), 由于  $E > 0$ , 则方程的解为

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (25)$$

在  $x > 0$  的区域,

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x) \quad (26)$$

(1) 若  $E < V_0$ , 令  $\lambda^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$ ,  $\lambda$  为实数, 则方程的解为

$$\psi(x) = Ce^{i\lambda x} + De^{-i\lambda x} \quad (27)$$

当  $x \rightarrow \infty$  时, 波函数有界, 于是

$$\psi(x) = De^{-i\lambda x} \quad (28)$$

在  $x = 0$  处, 波函数和其导数有连续性, 因此

$$-\lambda(A + B) = -\lambda D \quad (29)$$

$$ik(A + B) = -\lambda D \quad (30)$$

因此

$$(ik + \lambda)A = (ik - \lambda)B \quad (31)$$

反射率和透射率

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = 1 \quad (32)$$

$$T = 1 - R = 0 \quad (33)$$

(2) 若  $E > V_0$ , 令  $q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$ ,  $q$  为实数, 则方程的解为

$$\psi(x) = Ce^{iqx} + De^{-iqx} \quad (34)$$

第一项表示透射波, 第二项表示反射波应当被舍去, 同样使用边界条件可以得到

$$R = \left( \frac{q - k}{q + k} \right)^2 \quad (35)$$

$$T = \frac{4qk}{(q + k)^2} \quad (36)$$

## 9. (第二章小测填空 2)

解答. 简并度: 对应于同一本征值的本征函数的数目 (在本课程范围内, 填同一能量对应的本征态的数目也可)

不考虑自旋时,  $n, l, m$  一定时, 不同量子态数目为 1;  $n, l$  一定时, 不同量子态数目为  $(2l + 1)$ ;  $n$  一定时, 不同量子态数目为  $n^2$ 。

考虑自旋时,  $n, l, m$  一定时, 不同量子态数目为 2;  $n, l$  一定时, 不同量子态数目为  $2(2l + 1)$ ;  $n$  一定时, 不同量子态数目为  $2n^2$ 。

## 10. (第二章小测填空 3)

解答.

$|\psi(x,t)|^2 dx$  的物理意义为: 在  $t$  时刻, 粒子在  $x \sim x + dx$  范围内的**概率**。

$|\psi(r,t)|^2$  的物理意义为: 在  $t$  时刻, 粒子在  $r$  处的**概率密度**。

注:  $\psi(x,t)$ ——概率幅。

## 11. (第二章小测填空 5)

解答. 算符  $\hat{F}$  的期望值为

$$\frac{\int \psi^* \hat{F} \psi d\tau}{\int \psi^* \psi d\tau} = \int \psi^* \hat{F} \psi d\tau \neq \int \hat{F} |\psi|^2 d\tau \quad (37)$$

不写归一化也算正确, 但务必记得对波函数要先归一化。

## 12. (3.1)

解答. 基态时  $n=0, l=0$ , 因此  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = 0$ , 轨道磁矩  $\mu_l = g_l \frac{\mu_B}{\hbar} L = 0$ 。

## 13. (3.3)

解答. (a) 向上偏转; (b) 向下偏转; (c) 分裂为两束; (d) 分裂为两束。

这里给出一个不严格的关于“极化”的图像, 可以看到, 当沿  $-y$  方向极化时, 磁矩仍然有  $+z$  和  $-z$  的分量, 只不过总体而言是被抵消掉了, 因此在  $z$  方向的梯度场中仍然会分裂。

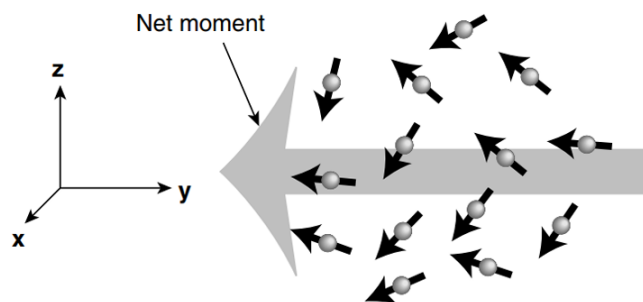


图 2: 沿  $-y$  方向极化的磁矩 (图片来源于网络)

## 14. (3.5)

解答. 自旋-轨道相互作用的修正项

$$\Delta E_{ls} = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} E_n \frac{n[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]}{2l(l+1)(l+1/2)} \quad (38)$$

由于  $n=2, l=1, s=\frac{1}{2}$ , 则  $j=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ , 代入得到  $\Delta E = 4.53 \times 10^{-5} \text{ eV}$ , 等效磁场  $B = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = 0.391 \text{ T}$ 。

## 15. (3.9)

解答.

(1)  $n = 2$  时,  $2^2S_{1/2}, 2^2P_{1/2}, 2^2P_{3/2}$ ;  $n = 1$  时,  $1^2S_{1/2}$ 。

(2)

(a)  $n = 1$  时, 要考虑兰姆移位, 相对论效应, 超精细结构;(b)  $n = 2, l = 0$  时, 要考虑兰姆移位, 相对论效应, 超精细结构;  $n = 2, l = 1$  时, 要考虑 (兰姆移位), 自旋-轨道耦合, 相对论效应, 超精细结构;(c) 相对论效应和自旋轨道耦合 ( $\sim \alpha^2 E_n$ )、兰姆移位、超精细结构。

## 16. (3.10)

解答. (1) 铯原子第二辅线系的第一条谱线是  $7s \rightarrow 6p$  的跃迁, 其双线结构是由于自旋-轨道相互作用造成的。对  $l = 0$  的  $7s$  态, 能级没有精细结构分裂; 而对  $l = 1$  的  $6p$  态,  $j = l \pm \frac{1}{2}$ , 分裂为两个精细结构能级  $6^2P_{1/2}, 6^2P_{3/2}$ 。

(2)

$$\Delta E = hc(\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1) = 0.0687 \text{ eV} \quad (39)$$

(3)

$$B = \frac{\Delta E}{g_s \mu_B} = 593 \text{ T} \quad (40)$$

## 17. (3.11) (2)

解答.

对于  $4S$  态:

$$E_{4s} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2 c^2 \frac{Z_{4s}^{*2}}{n^2} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2 c^2 \frac{1}{(n - \Delta_{4s})^2} = -4.32 \text{ eV} \quad (41)$$

解得  $Z_{4s}^* = 2.25, \Delta_{4s} = 2.22$ 。类似可得  $4P$  态  $Z_{4p}^* = 1.78, \Delta_{4p} = 1.75$ ,  $3D$  态  $Z_{3d}^* = 1.04, \Delta_{3d} = 0.12$ 。

## 18. (3.12)

解答.

$$\tilde{\nu}_\infty = \frac{R}{(3 - \Delta_{3s})^2} = \frac{1}{241.3 \text{ nm}} \quad (42)$$

$$\tilde{\nu}_1 = \frac{R}{(3 - \Delta_{3s})^2} - \frac{R}{(3 - \Delta_{3p})^2} = \frac{1}{589.3 \text{ nm}} \quad (43)$$

$$\tilde{\nu}_2 = \frac{R}{(3 - \Delta_{3p})^2} - \frac{R}{(3 - \Delta_{3d})^2} = \frac{1}{819.3 \text{ nm}} \quad (44)$$

$$\tilde{\nu}_3 = \frac{R}{(3 - \Delta_{3d})^2} - \frac{R}{(3 - \Delta_{4f})^2} = \frac{1}{1845.9 \text{ nm}} \quad (45)$$

解得  $\Delta_3 = 1.3729, \Delta_{3p} = 0.8827, \Delta_3 = 0.0096(5), \Delta_{4f} = 0.0016(8)$ 。

## 19. (3.13)

解答. 题目没有明确强度的定义, 以下两种方法都算正确。

解法一: 由于

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{-\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{hc}{kT}} \quad (46)$$

可以解得  $T = 2771 \text{ K}$ 。

解法二: 由于

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1}{N_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{g_1}{g_2} e^{-\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{hc}{kT}} \quad (47)$$

可以解得  $T = 2373 \text{ K}$ 。

## 20. (3.19)

解答. 朗德因子

$$g = \frac{h\mu}{\mu_B B} = 0.8 = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (48)$$

由于  $s = \frac{1}{2}$ , 则  $j = l + \frac{1}{2}, |l - \frac{1}{2}|$ , 分别代入求解可得  $l = 2, j = \frac{3}{2}$ , 即处在  $^2D_{3/2}$ 。

21. (补充题 1) 考虑精细结构, 试着画出锂原子从 3d 态返回到 2s 态时, 所有可能的能级跃迁, 有几种跃迁? 标明各能级的原子态符号。

解答.

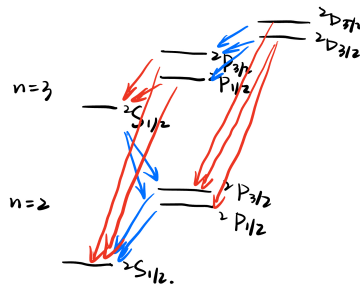


图 3: 补充题 1

22. (补充题 3) 试确定只有一个价电子的原子的朗德因子  $g$  的变化范围, 并写出  $g$  最小值和最大值对应原子态符号。

解答.

(1) 当  $l = 0, s = \frac{1}{2}$  时,  $j = \frac{1}{2}$ , 因此  $g = 2$ 。

(2) 当  $l > 0, s = \frac{1}{2}$  时,  $j = l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$ , 分两种情况讨论:

(a) 当  $j = l + \frac{1}{2}$  时,  $g = 1 + \frac{(l+\frac{1}{2})(l+\frac{3}{2}) + \frac{3}{4} - l(l+1)}{2(l+\frac{1}{2})(l+\frac{3}{2})} = 1 + \frac{1}{2l+1}$ ;

(b) 当  $j = l - \frac{1}{2}$  时,  $g = 1 + \frac{(l-\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2}) + \frac{3}{4} - l(l+1)}{2(l-\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2l+1}$ 。

因此  $g \in \{g | g = 1 \pm \frac{1}{2l+1}, l \in \mathbf{Z}\} \cup \{2\}$  (写成连续的区间也勉强算正确 (反正不是数学课, 不需要很严格))。

$g$  最大时原子态对应  $^2S_{1/2}$ , 最小时原子态对应  $^2P_{1/2}$ 。

23. (4.1) 假设 He 原子中两个电子的自旋不是  $1/2$  而是  $1$ ，试定性讨论 He 原子的基态。

解答. 由于自旋为  $1$  的粒子为玻色子，全同性原理要求总波函数为交换对称的。由于均处在基态，空间波函数一定交换对称，因此自旋波函数也要交换对称。

自旋角动量：由于  $S_1 = S_2 = 1$ ，因此总自旋角动量  $S = S_1 + S_2 = 2, 1, 0$ 。可以证明，总自旋角动量  $S$  为偶数时波函数是交换对称的，而总自旋角动量  $S$  为奇数时交换反对称。因此此时只存在  $S$  为偶数的态。

轨道角动量：由于  $L_1 = L_2 = 0$ ，因此总轨道角动量  $L = 0$ 。

因此，原子态为  $^5S_2$  或者  $^1S_0$ 。具体的修正需要计算得到，基态任写其中一个即可，或“声称”使用洪特定则，则基态为  $^5S_2$ 。

24. (4.2)

解答.  $\Delta E_1$  来源于不同轨道感受到的有效核电荷数  $Z_{nl}^*$  不同（教材第 154 页）。 $\Delta E_2$  为单重态于三重态之间的能量差，来源于交换效应（教材 151 页）。

25. (4.3)

解答. Ne:  $1s^2 2s^2 2p^6$ ; Mg:  $[\text{Ne}] 3s^2$ ; P:  $[\text{Ne}] 3s^2 3p^3$ ; Co:  $[\text{Ar}] 3d^7 4s^2$ ; Ge:  $[\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 4p^2$ 。

26. (4.6) 按 LS 耦合写出三个等效 p 电子组态可能的原子态，并计算其全部可能的状态数目。

解答.

电子组态表示为  $m_{l_1}^{m_{s_1}} m_{l_2}^{m_{s_2}} m_{l_3}^{m_{s_3}}$ ,  $m_s = +\frac{1}{2}$  记为  $+$ ,  $m_s = -\frac{1}{2}$  记为  $-$ ,  $M_L = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ,  $M_S = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ , 可能  $m_{l_1}^{m_{s_1}} m_{l_2}^{m_{s_2}} m_{l_3}^{m_{s_3}}$  值如下表所示

$M_L \quad M_S$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
<b>+3</b>	(1 <sup>+</sup> 1 <sup>+</sup> 1 <sup>+</sup> )	(1 <sup>+</sup> 1 <sup>+</sup> 1 <sup>-</sup> )	(1 <sup>+</sup> 1 <sup>-</sup> 1 <sup>-</sup> )	(1 <sup>-</sup> 1 <sup>-</sup> 1 <sup>-</sup> )
<b>+2</b>	(1 <sup>+</sup> 1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> )	(1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> 1 <sup>-</sup> )	(1 <sup>+</sup> 0 <sup>-</sup> 1 <sup>-</sup> )	(1 <sup>-</sup> 1 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> )
<b>+1</b>	(1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> ) (1 <sup>+</sup> 1 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> )	(1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> 0 <sup>-</sup> ) (1 <sup>+</sup> 1 <sup>-</sup> -1 <sup>+</sup> )	(1 <sup>-</sup> 0 <sup>+</sup> 0 <sup>-</sup> ) (1 <sup>+</sup> 1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> )	(1 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> ) (1 <sup>-</sup> 1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> )
<b>0</b>	(0 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> ) (1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> )	(1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> -1 <sup>-</sup> ) (1 <sup>-</sup> 0 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> ) (1 <sup>+</sup> 0 <sup>-</sup> -1 <sup>+</sup> )	(1 <sup>+</sup> 0 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> ) (1 <sup>-</sup> 0 <sup>+</sup> -1 <sup>-</sup> ) (1 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> -1 <sup>+</sup> )	(0 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> ) (1 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> )
<b>-1</b>	(-1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> ) (1 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> )	(-1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> 0 <sup>-</sup> ) (1 <sup>+</sup> -1 <sup>-</sup> -1 <sup>+</sup> )	(-1 <sup>-</sup> 0 <sup>+</sup> 0 <sup>-</sup> ) (-1 <sup>+</sup> 1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> )	(1 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> ) (1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> )
<b>-2</b>	(-1 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> )	(-1 <sup>+</sup> 0 <sup>+</sup> -1 <sup>-</sup> )	(-1 <sup>+</sup> 0 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> )	(-1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> 0 <sup>-</sup> )
<b>-3</b>	(-1 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> )	(-1 <sup>+</sup> -1 <sup>+</sup> -1 <sup>-</sup> )	(-1 <sup>+</sup> -1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> )	(-1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> -1 <sup>-</sup> )

图 4: Slater 图解法表格

27. (4.7) 已知某原子的一个能级为三重结构，且随能量的增加，两个能级间隔之比为 3: 5，试由朗德间隔定则确定这些能级的  $S, L$  和  $J$  值，并写出状态符号。



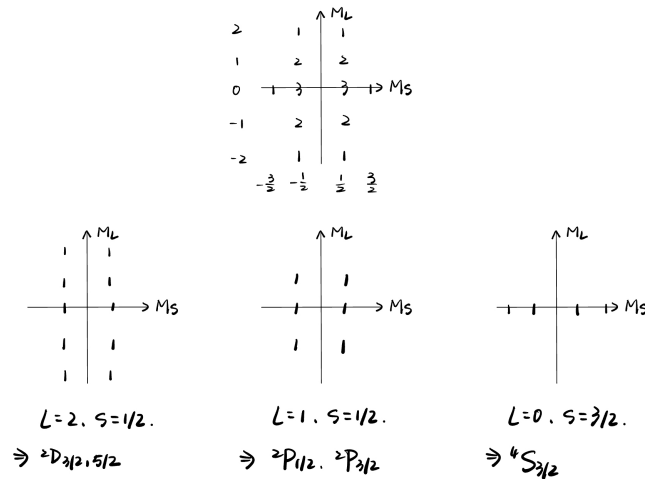


图 5: Slater 图解法

解答.

由朗德间隔定则  $(\Delta E_{J+1} - \Delta E_J) : (\Delta E_J - \Delta E_{J-1}) = (J+1) : J = 5 : 3$ , 可以得到  $J = 3/2$ 。

因此  $J_{\max} = 5/2 = L + S, J_{\min} = 1/2 = |L - S|$ 。

若

$$L + S = \frac{5}{2} \quad (49)$$

$$L - S = \frac{1}{2} \quad (50)$$

可以解得  $L = 3/2$  为非整数, 舍去。

若

$$L + S = \frac{5}{2} \quad (51)$$

$$S - L = \frac{1}{2} \quad (52)$$

可以解得  $L = 1, S = 3/2$ , 因此三重态的符号为  ${}^4P_{1/2}, {}^4P_{3/2}, {}^4P_{5/2}$ 。

**28.** (4.9) 已知铯原子 ( $Z = 45$ ) 的基态电子组态为  $[\text{Kr}]4d^8 5s^1$ 。

(1) 试按  $LS$  耦合确定其所有可能得原子态; (2) 由洪特定则确定其基态原子态。

**解答.** (1)  $4d^8$  与  $4d^2$  为互补态。对于  $4d^2$ , 两个电子  $L_1 = L_2 = 2$ , 则  $L = 4, 3, 2, 1, 0$ ; 而  $S_1 = S_2 = 1/2$ , 则  $S = 1, 0$ 。由于两个电子为同科电子, 需要满足  $L + S$  为偶数的条件。因此  $S = 0, L = 4, 2, 0$  或  $S = 1, L = 3, 1$ 。再与  $5s^1$  电子 ( $L_3 = 0, S_3 = 1/2$ ) 耦合:

1. 当  $4d^2$  状态为  $S = 0, L = 4, 2, 0$  时:

总状态为  $S = 1/2, L = 4, 2, 0$ , 对应原子态  ${}^2G_{9/2, 7/2}, {}^2D_{5/2, 3/2}, {}^2S_{1/2}$ 。

2. 当  $4d^2$  状态为  $S = 1, L = 3, 1$  时:

总状态为  $S = 3/2, 1/2, L = 3, 1$ , 对应原子态  ${}^2F_{7/2, 5/2}, {}^4F_{9/2, 7/2, 5/2, 3/2}, {}^2P_{3/2, 1/2}, {}^4P_{5/2, 3/2, 1/2}$ 。

(2) 基态为  ${}^4F_{9/2}$ 。

**29.** (4.10) 铅原子基态的两个价电子都在 6p 轨道。若其中一个价电子被激发到 7p 轨道, 则可以组成哪些原子态?

**解答.** 对于 6p 电子  $l_1 = 1, s_1 = 1/2, j_1 = 3/2, 1/2$ ; 对于 7p 电子  $l_1 = 1, s_1 = 1/2, j_1 = 3/2, 1/2$ 。

则  $jj$  耦合的态:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{1,0}, (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})_{2,1}, (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})_{2,1}, (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})_{3,2,1,0}$ 。

**30.** (4.11) 在 Stern-Gerlach 实验中, 原子态的氢从温度为 400 K 的炉中射出, 在屏上接收到两条氢束线, 其间距为 0.6 cm。若把氢原子换成氯原子, 其他条件不变, 那么在屏上可以接收到几条束线? 其相邻两束的间距是多少?

**解答.** 在梯度磁场中, 受力

$$F_z = -g_J M_J \mu_B \frac{\partial B}{\partial z} \quad (53)$$

粒子的速度

$$\frac{1}{2} M v_x^2 = \frac{3}{2} kT \quad (54)$$

粒子在  $z$  方向的偏移量

$$\Delta z_M = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{M} \left( \frac{l}{v_x} \right)^2 \propto F_z \propto g_J M_J \quad (55)$$

因此条纹间距

$$\delta z = \Delta z_{M+1} - \Delta z_M \propto g_J \quad (56)$$

基态氢原子  $L = 0, S = 1/2, J = 1/2$ , 因此朗德因子  $g_J = 2$ 。

基态氯原子电子组态为  $[\text{Ne}]3s^2 3p^5$ , 考虑互补态  $3p^1$ ,  $L = 1, S = 1/2$ , 则  $J = 1/2, 3/2$ 。由洪特定则可知, 大于半满支壳层时为倒转次序, 因此基态  $J = 3/2$ , 朗德因子  $g_J = 4/3$ 。

因此可以看到  $2J + 1 = 4$  条条纹, 且间距为  $0.6 \text{ cm} \times \frac{4/3}{2} = 0.4 \text{ cm}$ 。

**31.** (4.12) 在磁感应强度 2.0 T 的磁场中, 钙的  $^1D_2 \rightarrow ^1P_1$  的谱线分裂成相距  $2.8 \times 10^{10} \text{ Hz}$  的三个成分, 试计算电子的荷质比。

**解答.** 对于  $^1D_2$  和  $^1P_1$  态, 朗德因子  $g$  均为 1, 因此三分裂。则能量差  $\Delta E = \mu_B B = h \Delta \nu$ , 计算得到荷质比  $e/m = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ 。

**32.** (4.15) 已知镁原子 ( $Z = 12$ ) 是二价原子, 且符合  $LS$  耦合, 问: 由价电子组态  $3p4p$  直接跃迁到  $3s3p$  有多少种辐射跃迁? 用原子态符号表示这些可能的跃迁。

**解答.**

$3p4p$ :  $L = 2, 1, 0; S = 1, 0$ , 可能的原子态为  $^1S_0, ^3S_1, ^1P_1, ^3P_{2,1,0}, ^1D_2, ^3D_{3,2,1}$ 。

$3s3p$ :  $L = 1; S = 1, 0$ , 可能的原子态为  $^1P_1, ^3P_{2,1,0}$ 。

考虑电偶极跃迁选择定则  $\Delta S = 0; \Delta L = 0, \pm 1; \Delta J = 0, \pm 1 (J = 0 \rightarrow J = 0 \text{ 除外})$ , 共有 18 条谱线。

**33.** (4.17) 高能电子打在铯 ( $Z = 45$ ) 靶上, 产生 X 连续光谱的短波限  $\lambda_{\min} = 0.062 \text{ nm}$ , 试问此时能否观察到 K 线系标识谱线。

**解答.** 入射电子动能

$$T = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.062 \text{ nm}} = 20 \text{ keV} \quad (57)$$

而要观察到 K 线系标识谱线，高能电子必须使  $n = 1$  壳层出现空位，相应的能量是内层电子  $n = 1$  的电离能，为

$$E_K = hc \cdot R(Z - 1)^2 \left( \frac{1}{1^2} \right) = 26.34 \text{ keV} > T \quad (58)$$

因此不能观察到 K 线系标识谱线。

#### 34. (第四章小测选择 3)

**解答.** 根据拉波特定则，跃迁需要满足

$$\Delta \sum l_i = \pm 1 \quad (59)$$

而 4p4d 的角动量和为 3，4s4p 的角动量和为 1， $\Delta \sum l_i = 2$ ，因此无法产生跃迁，故产生 0 条谱线。