Recursion

06016415 Functional Programming

IT KMITL
พระจอมเกล้าลาดกระบัง

Outline

- The Need for Recursion
- Recursive Algorithm
  - Three Key Principles
- @tailrec : Tail Recursion
- Recursion on Functional List

Recursion

- **Loops** คือ การเขียน code ให้ทำซ้ำ ซึ่งไม่สอดคล้องกับแนวทางแบบ FP ที่เน้น Pure function

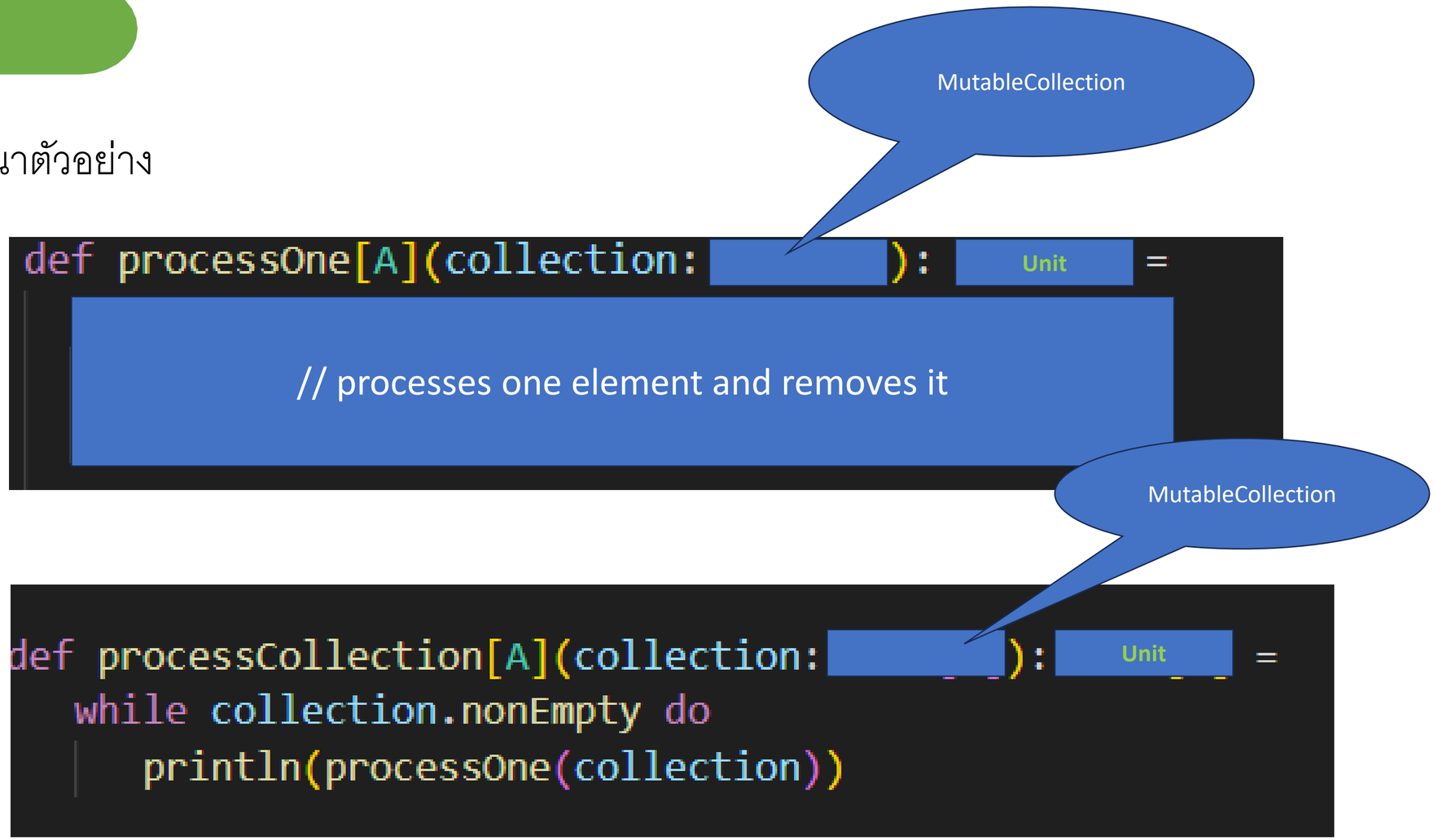
- ใน FP จึงมีกลไกแบบซ้อนกัน (nest expression) เพื่อทดแทน Loops คือ **Recursion**
- **Recursion** มีบทบาทสำคัญต่อ FP โดยทำให้สร้าง Pure function แต่ยังสามารถเขียน code ให้ทำซ้ำ โดยไม่ต้องมีตัวแปรสำหรับการทำซ้ำ (mutable loop counters)

- ดังนั้น การสร้าง Recursive Algorithm ให้ทำสามารถการเขียนโปรแกรมเรียกซ้ำโดยตรง ซึ่งใช้กับโครงสร้างแบบเรียกซ้ำ เช่น list tree เป็นต้น เมื่อเปรียบเทียบกับการเขียนโปรแกรมแบบทำซ้ำแบบเดิม (loop-based)

- Tail recursive functions จึงถูกนำมาใช้กับ FP เพื่อให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นด้วย

The Need for Recursion

- พิจารณาตัวอย่าง



```
def processOne[A](collection:          ): Unit =
    // processes one element and removes it
```

```
def processCollection2[A](collection: List[A]): Unit =
    var remaining = collection
    while remaining.nonEmpty do
        println(remaining)
        remaining = processOne(remaining)
```

```
def processOne[A](collection:          ): Unit =
    // processes one element and removes it
```

```
def processCollection3[A](collection: List[A]): Unit =
    println(collection)
    if collection.nonEmpty then processCollection3(processOne(collection))
```

Recursive Algorithm

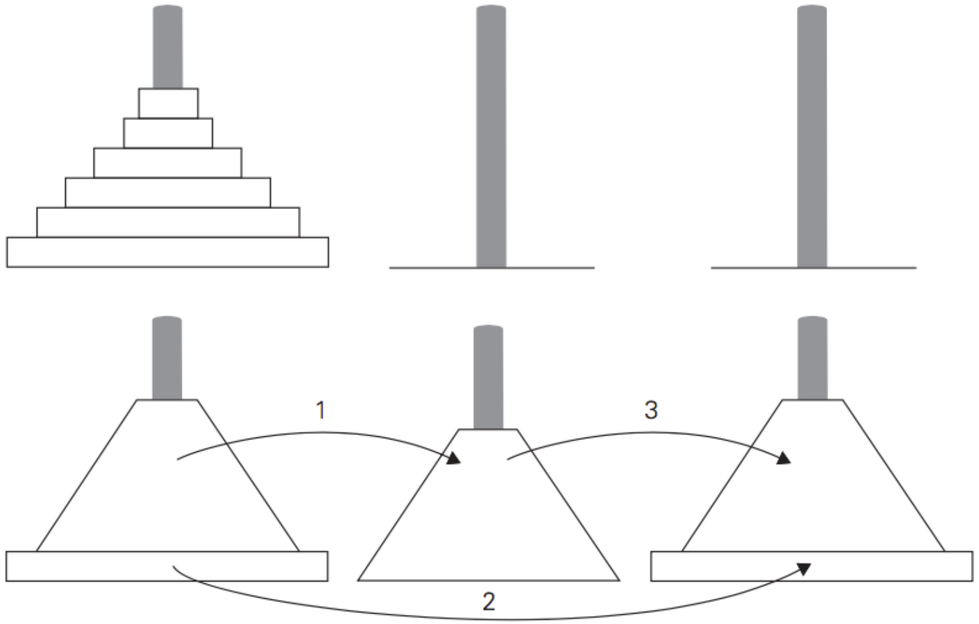
$$F(n) = \begin{cases} F(n-1) \cdot n & \text{for } n > 0 \\ 1 & \text{for } n = 0 \end{cases}$$

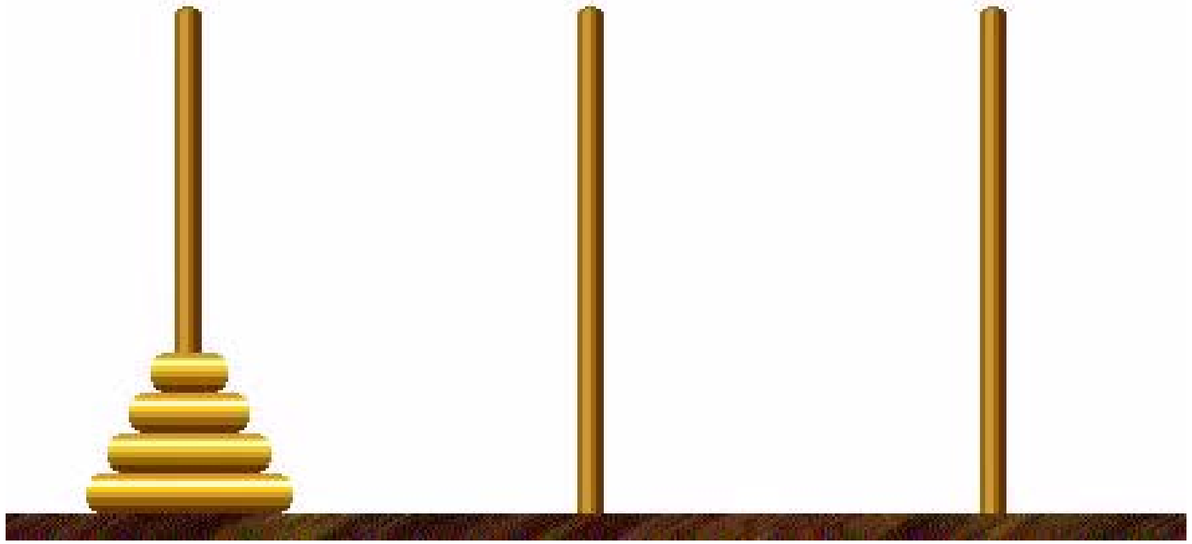
Algorithm Factorial(n)

1: Input: A non-negative integer n
2: Output: The value of $n!$
3:
4: **if** $n = 0$ **then**
5: return 1
6: **else**
7: return Factorial$(n-1) * n$

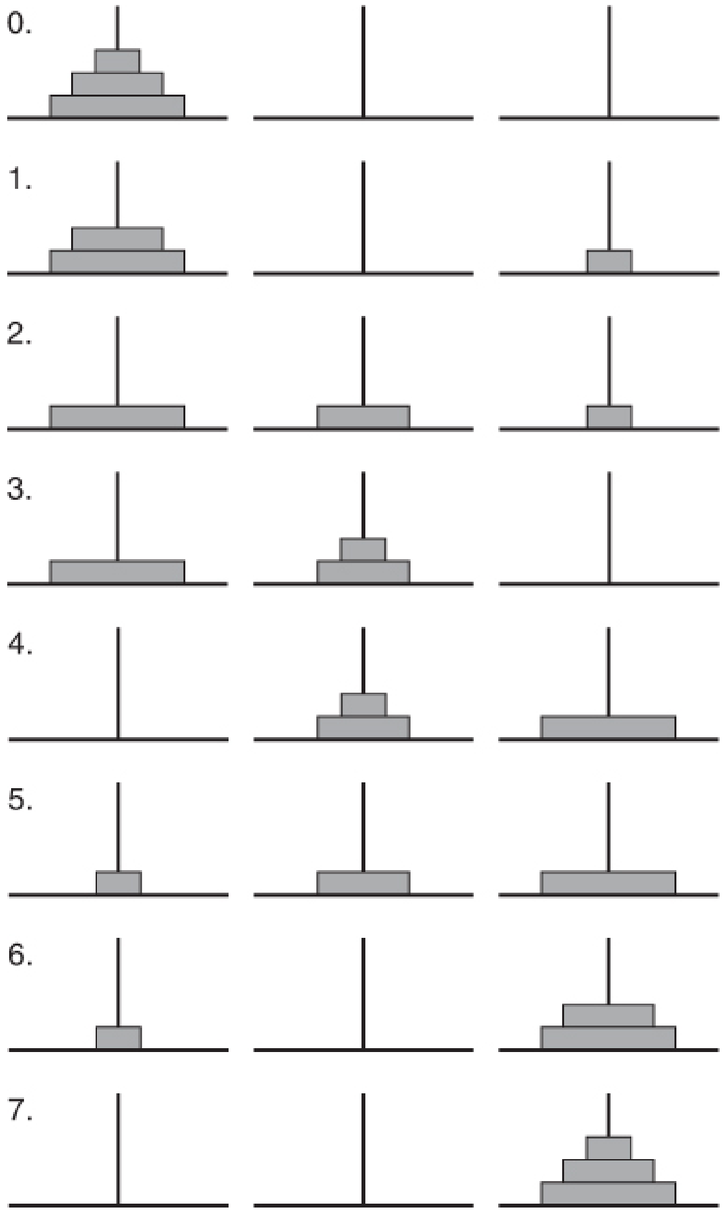
```
def factorial2(n: Int): Int =
  if n == 0 then 1 else n * factorial2(n - 1)
```

EX: Tower of Hanoi Puzzle





- Move all disks from left peg to right peg one-by-one
  - Middle peg used as auxiliary
  - Forbidden to place a larger disk on a smaller one.




```scala
def hanoi[A](n: Int, from: A, middle: A, to: A): Unit =
    if n > 0 then
        hanoi(n - 1, from, to, middle)
        println(s"$from -> $to")
        hanoi(n - 1, middle, from, to)
```

hanoi(3, 'L', 'M', 'R')

Key Principles of Recursive Algorithms

1. At least one branch of the computation should not be recursive.

2. All the subproblems solved recursively must be smaller than the original problem in some way.

3. Your focus as a programmer should be on using the solutions to the smaller problems, not on how these smaller problems are themselves solved by the recursive calls

All the subproblems must be smaller than the original

Algorithm MergeSort(A)

1: Input: An array of $A[l \dots r]$ of orderable elements
2: Output: Array $A[l \dots r]$ sorted in non-decreasing order
3:
4: **if** A has more than one element **then**
5: $m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$
6: MergeSort($A[l \dots m]$) ▷ Sort 1^{st}half of A
7: MergeSort($A[m + 1 \dots r]$) ▷ Sort 2^{nd}half of A
8: Merge(A, l, m, r) ▷ Merge two halves

```scala
// DON'T DO THIS!
def mergeSort1(list: List[Int]):List[Int] =
   if list.isEmpty then list
   else
      val (left, right) = list.splitAt(list.length / 2)  // split in the middle
      merge(mergeSort1(left), mergeSort1(right))
```

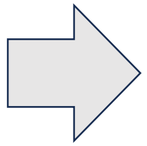
At least one branch should not be recursive

```
// DON'T DO THIS!
def last[A](list: List[A]): A = list match
   case Nil          => throw new Exception("last(empty)")
   case _ :: tail    => last(tail)
```

Tail Recursion

Tail Call คือรูปแบบของการเรียกฟังก์ชันซ้ำ (recursion) ที่การเรียกฟังก์ชันอยู่ในตำแหน่งสุดท้ายของฟังก์ชัน (tail position) ซึ่งช่วยให้คอมไพเลอร์สามารถเพิ่มประสิทธิภาพโดยใช้ Tail Call Optimization (TCO) ทำให้ไม่ต้องสร้าง stack frame ใหม่ในการเรียกซ้ำ แต่จะใช้ stack frame เดิมแทน

```scala
def factorial(n: Int, acc: Int = 1): Int =
  if (n <= 1) acc
  else factorial(n - 1, acc * n) // Tail Call
```



```scala
import scala.annotation.tailrec

@tailrec
def factorial(n: Int, acc: Int = 1): Int =
  if (n <= 1) acc
  else factorial(n - 1, acc * n)
```

Tail Recursion

หากฟังก์ชัน factorial ไม่มี tail call ที่ถูกต้อง คอมไพเลอร์จะแจ้ง error เช่น:

```scala
@tailrec
def factorial(n: Int): Int = {
  if (n <= 1) 1
  else n * factorial(n - 1) // ไม่ใช่ tail call เพราะมี *n หลังจาก recursive call
}
```

Tail Recursion

```
//pseudo code
function f(x,y,z) {
  <code>
  return g(t,u,v)
}
```

```scala
@tailrec def gcd(a: Int, b: Int): Int =
  if (b == 0) a else gcd(b, a % b)
```

```scala
import scala.util.control.TailCalls.*
def isEven(xs: Seq[Int]): TailRec[Boolean] =
  if xs.isEmpty then done(true) else tailcall(isOdd(xs.tail))

def isOdd(xs: Seq[Int]): TailRec[Boolean] =
  if xs.isEmpty then done(false) else tailcall(isEven(xs.tail))
```

Recursion on Functional List

```scala
// DON'T DO THIS!
def last[A](list: List[A]): A = list match
    case Nil          => throw new Exception("last(empty)")
    case _ :: tail    => last(tail)

@tailrec
def last2[A](list: List[A]): A = list match
    case Nil           => throw new Exception("last(empty)")
```

Check Tail is Empty or Not

```scala
//Recursion on Multiple/Nested Lists
def concat[A](list1: List[A], list2: List[A]): List[A] = list1 match
    case Nil             => list2
    case head1 :: tail1 => head1 :: concat(tail1, list2)

def append[A](list: List[A], value: A): List[A] = ???

def flatten[A](list: List[List[A]]): List[A] = list match
    case Nil           => Nil
    case head :: tail => ???
```

```scala
//Recursion on Sublists Other Than the Tail
// DON'T DO THIS!
def group1[A](list: List[A], k: Int): List[List[A]] =
  take(list, k) :: group1(drop(list, k), k)

def isEmpty[A](list: List[A]): Boolean = list match
  ???
    _

def group[A](list: List[A], k: Int): List[List[A]] =
  if isEmpty(list) then Nil
  else
    val (first, more) = splitAt(list, k)
    first :: ???
```

Summary

- Loops are a programming language mechanism that implements repetition.
- A strict functional programming style relies on composition of pure functions, making loops useless.
- Recursive functions are functions that trigger calls to themselves.
- Recursive functions fit algorithms that recursively decompose a given problem into smaller problems of the same type.
- A recursive algorithm combines a strategy for using solutions to smaller instances of the same problem with one or more trivial (non-recursive) cases.