1. 다음의 명제가 참인지 거짓인지 각각 T(True) / F(False) / D(I don't know) 로 답하여라. (각각 맞으면 3점, D는 1점, 틀리거나 기호를 알아볼 수 없는 경우는 0점)

a) $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(B|A) = P(B)$

T

b) 사건 A와 사건 B가 독립이 아니고 사건 B와 사건 C가 독립이 아니면 사건 A와 사건 C도 독립이 아니다.

F

c) 어떤 학기에 두 개의 이산 수학 강좌가 열렸는데, 두 강의 모두에서 남학생의 수가 여학생의 수보다 압도적으로 많은 상황이 발생하였다. 그렇다면 두 강좌를 통합하여도 남학생의 수가 여학생의 수보다 압도적으로 많은 상황이 발생한다고 할 수 있다. (단, 수강생 중 남학생 수가 여학생 수의 5배 이상일 때 '남학생의 수가 여학생의 수보다 압도적으로 많다'라고 하며, 두 강좌를 동시에 신청하는 것은 불가능하다)

T

d) 어느 대학 컴퓨터공학부에 5개의 동아리가 있으며, 각 동아리는 신입생들을 대상으로 동아리 회원을 모집하여 일부 학생들을 신규 회원으로 선정하였다. 그런데, 이때 5개 동아리 모두에서 여학생이 동아리에 지원한 경우의 합격률이 남학생보다 높았다고 한다. 그렇다면 학과의 모든 동아리를 통틀어 여학생의 합격률이 남학생의 합격률보다 높았다고 할 수 있다.

T

2. 다음 물음에 대해 답하여라.

a) 1 이상 500 이하의 자연수 중 2, 3, 5, 7의 배수가 아닌 것의 개수를 구하여라. (4점)

115개

b) 자연수 x_1, x_2, x_3 에 대하여, 다음 방정식의 해의 개수를 구하여라. (4점)

$x_1 + x_2 + x_3 = 14,\ x_1 \le 3,\ x_2 < 5,\ x_3 < 10$

6개

c) 원소의 수가 4개인 순열의 원소들을 임의로 재배치하였을 때, derangement가 생성될 확률을 구하여라. (A derangement is a permutation of objects that leaves no object in its original position.) (5점)

$\frac{3}{8}$

3. 아래에 정의하는 relation R에 대하여 각각 equivalence relation인지 판단하고, 만일 equivalence relation인 경우에는 equivalent class들을 구하여라.

a) Let R be the relation on the set of integers such that xRy if and only if $x \equiv y \ (mod\ 4)$. (4점)

맞다. i) reflexive $x-x=4\cdot 0$이므로 $x \equiv x \pmod 4$이다. 즉 xRx이다

ii) symmetric $x-y=4k$라 하면, $y-x=-4k$이므로 xRy일때 yRx이다.

iii) transitive $x-y=4k$이고 $y-z=4m$이라 하면 $x-z=4(k+m)$이므로 xRy이고 yRz일때 xRz이다.

equivalent class ; $[0]=\{\dots,-4,0,4,\dots\}$, $[1]=\{\dots,-3,1,5,\dots\}$, $[2]=\{\dots,-2,2,6,\dots\}$, $[3]=\{\dots,-1,3,7,\dots\}$

b) Let R be the relation on the set of integers such that xRy if and only if $xy > 0$. (4점)

아니다. reflexive하지 않다. 왜냐하면 $x=0$에 대해 $0\cdot 0>0$이 아니기 때문에 $0 \not R 0$이므로 equivalence relation에 해당하지 않는다.

4. Ultimatum game은 두 명의 참가자 A와 B에 의해 진행되는 게임이다. A와 B는 총 5만 원의 상금을 나누어 갖게 되며 나누어 갖는 규칙은 다음과 같다. 먼저 A가 상금 5만 원을 어떻게 나누어 가질지를 정해서 B에게 제안한다. 이어서 B는 A의 제안을 승낙하거나 거절할 수 있다. B가 승낙을 하면 A와 B는 A가 제안한 대로 상금을 나누어 갖게 되지만, 거절하면 A와 B는 둘 다 상금을 받지 못하게 된다.

a) 본인이 B로 참가하여 게임을 한 번 수행한다고 할 때, 어떤 선택을 해야 이익을 최대화할 수 있는가? (3점)

승낙할경우 $x \geq 0$만원을 얻으나 거절할경우 0원을 얻으므로 승낙 하는것이 이익을 최대화 한다.

b) 마찬가지로 B로 참가하는데, 이번에는 이 게임을 5번 반복해서 수행하며, 상대방인 A는 다음과 같은 전략을 취한다고 한다. 게임을 시작 후 맨 처음에는 2만 원을 나누어 줄 것을 제안하고, 그다음부터는 이전 제안을 B가 승낙하면 제안하는 금액을 1만 원 줄이고 거절을 하면 제안하는 금액을 2만 원 늘리되, 1만 원보다 작거나 4만 원보다 큰 금액을 제안하지는 않는다. (3만 원을 제안했을 때 거절하면, 다음번에는 5만 원이 아니라 4만 원을 제안한다) 이때 5회의 제안에 대해 각각 어떤 선택을 해야 이익을 최대화할 수 있는가? 또한, 그때 얻을 수 있는 상금은 총 얼마인가? (7점)

차례 거절, 승낙(4), 승낙(3), 거절, 승낙(4). 총 11만원을 얻는다.

c) 이번에는 A로 참가하여 한 번의 게임을 수행하며, 상대방인 B는 20명의 후보자 중 임의로 선발된다고 한다. 단, 20명의 후보자가 제안에 승낙하는 기준 금액은 선발 직후 공개되었으며, 아래의 표에 20명 각자의 승낙 기준 금액이 한 칸에 한 명 씩 대응되도록 열거되어 있다. 이때 A는 얼마를 준다고 제안해야 최대의 이익을 기대할 수 있는가? 또한, 그때 이익의 기대 값(expected value)은 얼마인가? (7점)

승낙기준	명수
1	5
2	7
3	5
4	2
5	1

A가 i를 불렀을때 $E(X=i) = i \times \frac{y_{5-i}}{20}$로 정의된다 ($y_j$는 j에 동의하는 사람수) 구해보면 이익기대값

단위: 만원

1	1	4	3	1
2	2	3	2	2
3	1	3	5	4
2	2	3	2	1

2를 준다고 제안할때 $E(X)=\frac{9}{5}$만원으로 최대이다.

5. 당신과 몇몇 동기들은, 격자무늬를 사랑하는 친구의 집에 초대받아 광란의 파티를 벌였다. 친구의 집에 들어가 보니, 아니나 다를까, 방 안에는 N*M의 직사각형 꼴로 1x1 타일들이 깔려있었다. 그런데, 광란의 파티를 하다 그만,

본인을 포함한 몇 명의 친구가 크게 넘어지는 바람에 몇 개의 타일을 깨뜨리고 말았다. 손님인 당신, 별수 없이 깨진 타일을 복원해주고자 인터넷으로 타일 가격을 알아보았더니, 타일 하나도 엄청나게 비싼데, 심지어 1x2 꼴로만 양산되다 보니 1x2 모양의 타일을 1x1타일 2개로 바꾸는 데에는 1x2타일 100개에 해당하는 금액을 지불해야 한다고 한다. 이 아찔한 순간에 당신은 이산수학 수업시간에 배운 지식을 최대한 동원하여, 1x2 타일을 최대한 사용하도록, 그래서 최대한 많은 돈을 아껴보도록 하고자 한다. (물론, 1x2 타일은 둘 중 한 칸이라도 타일이 존재하는 곳에는 놓을 수 없으며, 문제의 편의를 위해 깨진 1x1 타일들은 이미 깔끔하게 제거된 상태라고 가정하자) **이때, 당신이라면 어떤 방법을 이용하여 최대로 사용 가능한 1x2 타일의 수를 계산하겠는가? 간단히 그 아이디어를 서술하시오.** (Hint: 타일의 배치는, 각 타일을 정점으로 고려하고 각 타일과 인접한 타일들을 간선으로 이어주면, 그래프의 형태로 변환할 수 있다.) (10점)

채워야 하는 부분을 격자의 형태로 놓고, 그 위치는 $P_{i,j}$로 놓자.
그리고 이들을 vertex로 한 그래프를 생각하자. 그리고 $P_{i,j}$에 대해
인접한 깨진타일들을 잇지고 있는다. 이때 $G(V,E)$는 각 degree가
최대 4인 undirected graph가 된다. 그런데 이 그래프는 $V_1 = \{P_{i,j} \mid i+j$가 홀수$\}$
와 $V_2 = \{P_{i,j} \mid i+j$가 짝수$\}$인 두 개의 set으로 partition되는 bipartite graph이다.
왜냐하면 $P_{i,j}$는 $P_{i-1,j}, P_{i,j-1}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}$에만 잇지가 생겨날 수 있는데,
이들은 모두 $P_{i,j}$와 다른 집합에 속해있기 때문이다. (체스판의 partition)
여기서 bipartite matching을 생각해보자. 이는 V_1과 V_2를 최대 하나의 간선으로
만 있는 것으로, 정확히 여기에 1x2 타일을 배치하는 것과 대응시킬 수 있다. (사용할 수 있는 타일 수 = 매칭 크기)
따라서 최대한 많은 1x2 타일을 쓰기 위해서는 위의 구성된 그래프 G에서
Maximum bipartite matching을 구하는 문제로 생각할 수 있다.
이를 구하는 것은 교재에 나온 theorem에 따르면 $|V_1| - \max_{S \subseteq V_1} def(S)$로 구한다.
($def(S) = |S| - |N(S)|$, $N(S)$는 S의 원소에 인접한 모든 원소들의 집합)

proof) ① 최대매칭의 크기 상한이 $|V_1| - \max_{S \subseteq V_1} def(S)$임은 자명하고, 이를 구성할 수 있음을 보인다.
② $\max_{S \subseteq V_1} def(S) = d$로 놓고, V_2에 d개의 원소를 추가해 V_1의 모든 원소에 잇는다.
새롭게 구성된 그래프 G'에 대해 V_1의 모든 subset S에서 $|S| \le |N_{G'}(S)|$임을 귀류법으로 보인다.
어떤 S에서 $|S| > |N_{G'}(S)|$라 할 때, $|N_{G'}(S)| = |N_G(S)| + d \ge |N_G(S)| + |S| - |N_G(S)|$
이므로 $|S| > |N_{G'}(S)| = |S|$가 되어 모순이다. 따라서 위 명제가 성립하고,
Hall's theorem에 따라 G'에서 완전매칭이 가능하다. 여기서 d의 매칭을 제외하면 G의 매칭을 얻는다

Scanned by CamScanner