[4190.101] Discrete Mathematics Midterm Exam 1 (2016 Spring)

Dept. of Computer Science and Engineering, Seoul National University

100

Your Name: [redacted] **Student ID:** [redacted]

1. [4 points] Let p be the proposition "I will do every exercise in this book" and q be the proposition "I will get an "A" in this course." Express each of these as a combination of p and q.

   p will

   a) (1 point) I will get an "A" in this course only if I do every exercise in this book.

   b) (1 point) I will get an "A" in this course and I will do every exercise in this book.

   c) (1 point) Either I will not get an "A" in this course or I will not do every exercise in this book.

   d) (1 point) For me to get an "A" in this course it is necessary and sufficient that I do every exercise in this book.

   a) $q \rightarrow p$ **b)** $q \land p$

   c) $\neg q \lor \neg p$ **d)** $q \Leftrightarrow p$

2. [6 points] Let P(m, n) be the statement "m divides n" where the domain for both variables consists of all positive integers. (By "m divides n" we mean that n = k*m for some integer k.) Determine the truth values of each of these statements.

   a) (1 point) P(4, 5)
   b) (1 point) P(2, 4)
   c) (1 point) $\forall m \, \forall n \, P(m, n)$
   d) (1 point) P(2, 4)
   e) (1 point) $\exists n \, \forall m \, P(m, n)$
   f) (1 point) $\forall n \, P(1, n)$

   a) F **b)** T **c)** F

   d) T **e)** F **f)** T

3. [10 points] With given symbols in below, show that following statements are consistent or not: "If Miranda does not take a course in discrete mathematics, then she will not graduate." "If Miranda does not graduate, then she is not qualified for the job." "If Miranda reads this book, then she is qualified for the job." "Miranda does not take a course in discrete mathematics but she reads this book."

[Symbols]
t: Miranda takes a course in discrete mathematics.
g: Miranda graduates (from her university).
q: Miranda is qualified for the job.
r: Miranda reads this book.

+4

1. $\neg t \to \neg g$ 2. $\neg g \to \neg q$ 3. $r \to q$ 4. $\neg t \land r$ ∴ premises

5. 4의 simplification에 따라 $\neg t$이고, 1과의 modus ponens에 따라 $\neg g$이다. 이것과 2와 modus ponens에 따라 $\neg q$이다.

6. 4의 simplification에 따라 r이고, 3과의 modus ponens에 따라 q이다.

5와 6을 conjunction하면 $\neg q \land q$가 되어야 하는데, 이는 모순이다.

따라서 해당 statements는 consistent 하지 않다. +4

4. [10 points] Show that $(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \to (q \lor r)$ is a tautology.

명제 p, q, r에 대한 truth table을 그린다.

(0=false 1=true)

p	q	r	$p \lor q$	$\neg p \lor r$	$(p \lor q) \land (\neg p \lor r)$	$q \lor r$	$(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \to q \lor r$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

p, q, r의 모든 진리값에 대해 해당 식이 성립하므로, 이는 tautology이다.

5. [10 points] Prove that if x is irrational and $x \geq 0$, then $\sqrt{x}$ is irrational.

귀류법을 사용한다. x가 irrational하고 $x \geq 0$일 때,
$\sqrt{x}$가 rational하다고 해보자. 그런데 어떤 rational number x에
대해 x^2은 rational하다. rational number에서 곱셈은 닫힌연산이기
때문이다. 따라서 $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$도 rational해야 한다.
하지만 이는 조건과 모순된다. 따라서 x가 irrational하고 $x \geq 0$이라면
$\sqrt{x}$는 irrational하다. Good!

true!

$3^6 < 6!$

6. [10 points] Prove that $3^n < n!$ if n is an integer greater than 6.

수학적 귀납법을 사용한다.

1. 초기상태; 가장 작은 n의 값은 7이다.

$$3^7 = 2187 < 7! = 5040 \text{ 이다.}$$

2. $7 \leq n$에서, $3^n < n!$ 이라면, $3^{n+1} < (n+1)!$ 임을 보인다.

$3^n < n!$ 이면 $3 \times 3^n < 3 \times n!$ 이고,
$< (n+1) \times n!$ 이다. ($7 \leq n$이므로)

따라서 $3^{n+1} < (n+1)!$ 임을 보일수 있다.

1, 2에 따라, 6보다 큰 정수 n에 대해서, $3^n < n!$ 이 성립한다.

7. [10 points] We define the Ulam numbers by setting $U_1 = 1$ and $U_2 = 2$. Furthermore, after determining whether the integers less than n are Ulam numbers, we set n equal to the next Ulam number if it can be written uniquely as the sum of two different Ulam numbers. Note that $U_3 = 3$, $U_4 = 4$, $U_5 = 6$, and $U_6 = 8$.

1 2 3 4 6 8 11 13 16

a) (4 points) Find the 9th Ulam number, U_9

b) (6 points) Prove that there are infinitely many Ulam numbers. (Hint, use contradiction)

a) U_9 = 16

b) Ulam number가 finite하다고 가정하고, n개의 원소를 갖는다 해보자, 이를 오름차순으로 나열하면 $U_1, U_2 \cdots U_{n-1}, U_n$이 된다. 그런데, $U_{n-1} + U_n$을 생각해보자. 이는 finite한 Ulam number중 가장 큰 수 두개를 더한것이기 때문에, 다른 Ulam number의 pair sum으로 만들수 없는 값이다. 따라서 이는 unique하고, $U_{n-1} + U_n$도 Ulam number가 될 수 있다. 이는 finite한 Ulam number의 set에는 포함되지 않았으므로 ($U_n < U_{n-1} + U_n$) 이는 모순이다. 따라서 Ulam number은 Infinitely many 하다.

8. [10 points] Can you conclude that A = B if A and B are two sets that have the same power set? Explain why.

대우를 증명한다. 증명할 명제는 $A \neq B$일 때, A와 B의 power set이 다르다는 것이다. $A \neq B$이므로, 공집합이 아닌 집합이 A, B중 하나는 존재하고, 일반성을 잃지 않고 이를 A로 둘 수 있다. 그럴 때 $A \neq B$이므로, $\exists x (x \in A \wedge x \notin B)$가 성립하는 원소 x가 존재한다. 그러면 A의 power set을 P(A)라 두면, $\{x\} \in P(A)$ 이어야 하고, $\{x\} \notin P(B)$ 이어야 한다. 따라서 최소 한개의 원소가 차이나므로, $P(A) \neq P(B)$ 임을 알 수 있다. $A \neq B \rightarrow P(A) \neq P(B)$를 보였으므로, $P(A) = P(B) \rightarrow A = B$ 을 증명한 것이다.

$(A \cap \bar{C}) \cap$

9. [10 points] Let A, B, and C be sets. Show that (A − B) − C = (A − C) − (B − C).

$lhs = (A-B)-C = (A\cap\bar{B})\cap\bar{C} = A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ ∴ by definition of difference

$rhs = (A-C)-(B-C) = (A\cap\bar{C})\cap\overline{(B\cap\bar{C})}$ ∴ by definition of difference

$= (A\cap\bar{C})\cap(\bar{B}\cup C)$ ∴ by de Morgan's law

$= ((A\cap\bar{C})\cap\bar{B})\cup((A\cap\bar{C})\cap C)$ ∴ by distributive law

$= (A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{C}\cap C)$ ∴ by commutative law, associative law

$= (A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup\varnothing$ ∴ by negation law, domination law

$= (A\cap\bar{B}\cap\bar{C})$ ∴ by identity law

좌변과 우변이 같으므로, $(A-B)-C = (A-C)-(B-C)$이다.

10. [4 points] Suppose that A is the set of sophomores at your school and B is the set of students in discrete mathematics at your school. Express each of these sets in terms of A and B.

a) (1 point) the set of sophomores taking discrete mathematics in your school

b) (1 point) the set of sophomores at your school who are not taking discrete mathematics

c) (1 point) the set of students at your school who either are sophomores or are taking discrete mathematics

d) (1 point) the set of students at your school who either are not sophomores or are not taking discrete mathematics

a) $A\cap B$ **b)** $A\cap\bar{B}$

c) $A\cup B$ **d)** $\bar{A}\cup\bar{B}$

$(4k+1)^2$ ~~16n^2~~ 4
$(4k+3)^2$ $16k^2+8k+1$ $= 4k^2+2k+1$
$16k^2+24k+9$.

11. [10 points] Prove that if n is an odd integer, then $\lceil n^2/4 \rceil = (n^2 + 3)/4$

$\lceil n^2/4 \rceil$의 계산을 위해 두가지 케이스로 분리한다. 정수 k에 대해,

i) $n = 4k+1$일 경우, $n^2 = 16k^2+8k+1$이고,

$\lceil n^2/4 \rceil = \lceil 4k^2+2k+1/4 \rceil = 4k^2+2k+1$이다.

이는 $(n^2+3)/4 = (16k^2+8k+4)/4 = 4k^2+2k+1$과 같다.

ii) $n = 4k+3$일 경우, $n^2 = 16k^2+24k+9$이고,

$\lceil n^2/4 \rceil = \lceil 4k^2+6k+2+1/4 \rceil = 4k^2+6k+3$이다.

이는 $(n^2+3)/4 = (16k^2+24k+12)/4 = 4k^2+6k+3$과 같다.

Odd Integer이기 때문에 $n = 4k$, $n = 4k+2$인 경우는 고려하지 않아도 된다.

따라서 이는 모든 경우에 해당하고, 그에 대해 $\lceil n^2/4 \rceil = (n^2+3)/4$가 성립한다.

12. [6 points] Find the symmetric difference of {1, 3, 5} and {1, 2, 3}

symmetric difference의 정의에 따라,

$(\{1,3,5\} - \{1,2,3\}) \cup (\{1,2,3\} - \{1,3,5\})$를 계산한다

$= \{5\} \cup \{2\} = \underline{\{2,5\}}$