3.1 Homogeneous Linear ODEs

1. $y_1=1,\ y_2=x,\ y_3=x^2,\ y_4=x^3$라 하자.
$y_1{}'=y_1{}''=y_1{}'''=y_1^{(4)}=0,$
$y_2{}'=1,\ y_2{}''=y_2{}'''=y_2^{(4)}=0,$
$y_3{}'=2x,\ y_3{}''=2,\ y_3{}'''=y_3^{(4)}=0,$
$y_4{}'=3x^2,\ y_4{}''=6x,\ y_4{}'''=6,\ y_4^{(4)}=0$
이므로 주어진 방정식의 해이다.
$W=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 0 & 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 0 & 2 & 6x\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=12$ 이므로 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$는 일차독립이다.

2. $y_1=e^x,\ y_2=e^{-x},\ y_3=e^{x/2}$라 하자.
$y_1{}'=y_1{}''=y_1{}'''=e^x,$
$y_2{}'=-e^{-x},\ y_2{}''=e^{-x},\ y_2{}'''=-e^{-x},$
$y_3{}'=\frac{1}{2}e^{x/2},\ y_3{}''=\frac{1}{4}e^{x/2},\ y_3{}'''=\frac{1}{8}e^{x/2}$
이므로 주어진 방정식의 해이다.
$$W=\begin{vmatrix}e^x & e^{-x} & e^{x/2}\\ e^x & -e^{-x} & \frac{1}{2}e^{x/2}\\ e^x & e^{-x} & \frac{1}{4}e^{x/2}\end{vmatrix}=e^{x/2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{2}e^{x/2}$$
이므로 $y_1,\ y_2,\ y_3$는 일차독립이다.

3. $y_1=\cos x,\ y_2=\sin x,\ y_3=x\cos x,\ y_4=x\sin x$이면
$y_1{}'=-\sin x,\ y_1{}''=-\cos x,\ y_1{}'''=\sin x,\ y_1^{(4)}=\cos x,$
$y_2{}'=\cos x,\ y_2{}''=-\sin x,\ y_2{}'''=-\cos x,\ y_2^{(4)}=\sin x,$
$y_3{}'=\cos x-x\sin x,\ y_3{}''=-2\sin x-x\cos x,$
$y_3{}'''=-3\cos x+x\sin x,\ y_3^{(4)}=4\sin x+x\cos x,$
$y_4{}'=\sin x+x\cos x,\ y_4{}''=2\cos x-x\sin x,$
$y_4{}'''=-3\sin x-x\cos x,\ y_4^{(4)}=-4\cos x+x\sin x$
이므로 주어진 방정식의 해이다.
$$W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ y_1{}' & y_2{}' & y_3{}' & y_4{}'\\ y_1{}'' & y_2{}'' & y_3{}'' & y_4{}''\\ y_1{}''' & y_2{}''' & y_3{}''' & y_4{}'''\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x & x\cos x & x\sin x\\ -\sin x & \cos x & \cos x-x\sin x & \sin x+x\cos x\\ 0 & 0 & -2\sin x & 2\cos x\\ 0 & 0 & -2\cos x & -2\sin x\end{vmatrix}=4$$
이므로 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$는 일차독립이다.

4. $y_1=e^{-4x},\ y_2=xe^{-4x},\ y_3=x^2e^{-4x}$라 하자.
$y_1{}'=-4e^{-4x},\ y_1{}''=16e^{-4x},\ y_1{}'''=-64e^{-4x},$
$y_2{}'=e^{-4x}-4xe^{-4x},\ y_2{}''=-8e^{-4x}+16xe^{-4x},$
$y_2{}'''=48e^{-4x}-64xe^{-4x},$
$y_3{}'=2xe^{-4x}-4x^2e^{-4x},$
$y_3{}''=2e^{-4x}-16xe^{-4x}+16x^2e^{-4x},$
$y_3{}'''=-24e^{-4x}+96xe^{-4x}-64x^2e^{-4x}$
이므로 주어진 방정식의 해이다.
$$W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3\\ y_1{}' & y_2{}' & y_3{}'\\ y_1{}'' & y_2{}'' & y_3{}''\end{vmatrix}$$
$$=e^{-12x}\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ -4 & 1-4x & 2x-4x^2\\ 16 & -8+16x & 2-16x+16x^2\end{vmatrix}=2e^{-12x}$$
이므로 $y_1,\ y_2,\ y_3$는 일차독립이다.

5. $y_1=1,\ y_2=e^{-2x}\cos x,\ y_3=e^{-2x}\sin x$라 하자.
$y_1{}'=y_1{}''=y_1{}'''=0,$
$y_2{}'=-2e^{-2x}\cos x-e^{-2x}\sin x,$
$y_2{}''=3e^{-2x}\cos x+4e^{-2x}\sin x,$
$y_2{}'''=-2e^{-2x}\cos x-11e^{-2x}\sin x,$
$y_3{}'=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x,$
$y_3{}''=3e^{-2x}\sin x-4e^{-2x}\cos x,$
$y_3{}'''=-2e^{-2x}\sin x+11e^{-2x}\cos x$
이므로 주어진 방정식의 해이다.
$$W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3\\ y_1{}' & y_2{}' & y_3{}'\\ y_1{}'' & y_2{}'' & y_3{}''\end{vmatrix}$$
$$=e^{-4x}\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -2\cos x-\sin x & -2\sin x+\cos x\\ 0 & 3\cos x+4\sin x & 3\sin x-4\cos x\end{vmatrix}=5e^{-4x}$$
이므로 $y_1,\ y_2,\ y_3$는 일차독립이다.

6. $y_1=1,\ y_2=x^2,\ y_3=x^4$라 하자.
$y_1{}'=y_1{}''=y_1{}'''=0,,\ y_2{}'=2x,\ y_2{}''=2,\ y_2{}'''=0,$
$y_3{}'=4x^3,\ y_3{}''=12x^2,\ y_3{}'''=24x$이므로 주어진 방정식의 해이다.
$W=\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^4\\ 0 & 2x & 4x^3\\ 0 & 2 & 12x^2\end{vmatrix}=16x^3$ 이므로 $y_1,\ y_2,\ y_3$는 일차독립이다.

7. 상수계수 미분방정식이라면 특성방정식이 모두 일차식과 이차식의 곱으로 인수분해 되므로 2차와 다를 것이 없다.(단, 5차 이상에서는 근의 공식이 존재하지 않는다.)

8. $0\cdot x^2+0\cdot\frac{1}{x^2}+4\cdot 0=0$이므로 일차종속이다.

9. $W=\begin{vmatrix}\tan x & \cot x & \pi/4\\ \sec^2 x & -\csc^2 x & 0\\ 2\sec^2 x\tan x & 2\csc^2 x\cot x & 0\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}\sec^3 x\csc^3 x$
이므로 일차독립이다.

10. $W=e^{6x}\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 2 & 1+2x & 2x+2x^2\\ 4 & 4+4x & 2+8x+4x^2\end{vmatrix}=2e^{6x}$
이므로 일차독립이다.

11. $W=e^{-3x}\begin{vmatrix}\cos x & \sin x & 1\\ -\cos x-\sin x & -\sin x+\cos x & -1\\ 2\sin x & -2\cos x & 1\end{vmatrix}=e^{-3x}$
이므로 일차독립이다.

12. $-\sin^2 x+\cos^2 x-\cos 2x=0$이므로 일차종속이다.

13. $W=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2\cos 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4\sin 2x \end{vmatrix}=3\sin 2x$

이므로 일차독립이다.

14. $2\pi \cdot \cos^2 x+2\pi \cdot \sin^2 x-1 \cdot 2\pi=0$ 이므로 일차종속이다.

15. $1 \cdot \cosh x+1 \cdot \sinh x-1 \cdot e^x=0$이므로 일차종속이다.

16. (a) (1) 일차종속이다.

$y_1 \equiv 0$라 하면, 상수 $k_1 \neq 0$와 모든 0인 상수 k_j에 의하여 식 (4)를 만족한다.

따라서 상수함수 0을 포함하는 집합은 일차종속이다. 예를 들어, $k \cdot 0+0 \cdot y_2=0$을 만족하는 0이 아닌 k가 존재한다.

(2) 일차독립이다.

만약 S가 구간 I에서 일차종속이라면, 식 (4)을 만족하는 상수 $k_j \neq 0$이 구간 I 위에 존재한다. 구간 J는 I의 부분구간이므로 J 위에서 같은 상수 k_j에 의하여 식 (4)을 만족한다. 즉 S가 구간 J에서 일차종속이 되고, 이는 가정에 모순이다.

따라서 S는 구간 I에서 일차독립이어야 한다.

(3) 일차독립일 수도 있다.

예를 들어, x^2과 $x|x|$는 양수 구간에서는 일차종속이지만, 실수 전체에서는 일차독립이다.

(4) 일차종속일 수도 있다.

위의 문제(문제20. (a)(3))의 예와 같은 예이다.

(5) 일차독립이다.

위의 문제(문제20. (a)(2))의 예와 같은 예이다.

(6) 일차종속이다.

가정에 의하여, S에 속하는 함수 $y_1,\cdots,y_p$에 대하여 모두 0이 아닌 상수 $k_1,\cdots,k_p$이 존재하여 $k_1y_1+\cdots+k_py_p=0$을 만족한다.

이 식에 $0 \cdot u_i$(함수 u_j는 T/S에 속한다)들을 더해도 합은 0이다.

따라서 T는 일차종속이다.

(b) 주어진 함수가 연속인 계수를 갖는 재차선형 미분방정식의 해라면 일차독립을 판별하기 위하여 Wronskia을 이용할 수 있다. 일차독립을 판별하기 위한 다른 방법으로는 함수들 사이의 관계(예를 들어, 삼각함수의 공식, $\ln x^2=2\ln x$ 등)를 이용하는 것 또는 비례항을 발견할 수 있는지 보기 위하여 주어진 함수의 값을 계산해 보는 것 등이 있다.

3.2 Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients

1. 특성방정식 $\lambda^3+9\lambda=0$을 풀면, $\lambda=0, \pm 3i$이므로 일반해는 $y=c_1+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x$이다.

2. $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$을 풀면, $\lambda=\pm i$(중근)이므로 일반해는 $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$이다.

3. $\lambda^4+16\lambda^2=0$을 풀면, $\lambda=0$(중근), $\pm 4i$이므로 일반해는 $y=c_1+c_2x+c_3\cos 4x+c_4\sin 4x$이다.

4. $\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$을 풀면, $\lambda=1$(중근), -1이므로 일반해는 $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-x}$이다.

5. $\lambda^4+10\lambda^2+9=0$을 풀면, $\lambda=\pm i$, $\pm 3i$이므로 일반해는 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos 3x+c_4\sin 3x$이다.

6. $\lambda^5+2\lambda^3+\lambda=0$을 풀면, $\lambda=0$, $\pm i$(중근)이므로 일반해는 $y=c_1+(c_2+c_3x)\cos x+(c_4+c_5x)\sin x$이다.

7. 특성방정식 $\lambda^3+3\lambda^2+4.81\lambda=0$을 풀면, $\lambda=0$, $-1.5\pm 1.6i$이므로

일반해는 $y=c_1+e^{-1.5x}(c_2\cos 1.6x+c_3\sin 1.6x)$이다.

초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=6$,

$y'(0)=-1.5c_2+1.6c_3=-3.15$,

$y''(0)=2.25c_2-4.8c_3-2.56c_2=-12.195$이므로

$c_1=1.5$, $c_2=4.5$, $c_3=2.25$이다. 따라서 특수해는

$y=1.5+e^{-1.5x}(4.5\cos 1.6x+2.25\sin 1.6x)$이다.

8. 특성방정식 $\lambda^3+7.5\lambda^2+14.25\lambda-9.125=0$을 풀면, $\lambda=0.5$, $-4\pm 1.5i$이므로 일반해는

$y=c_1e^{0.5x}+e^{-4x}(c_2\cos 1.5x+c_3\sin 1.5x)$이다.

초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=10.05$,

$y'(0)=1.5c_1-4c_2+1.5c_3=-54.975$,

$y''(0)=0.25c_1+16c_2-12c_3-2.25c_2=257.5125$이므로

$c_1=0.05$, $c_2=10$, $c_3=-10$이다. 따라서 특수해는

$y=0.05e^{0.5x}+e^{-4x}(10\cos 1.5x-10\sin 1.5x)$이다.

9. 특성방정식 $4\lambda^3+8\lambda^2+41\lambda+37=0$을 풀면, $\lambda=-1$, $-0.5\pm 3i$이므로 일반해는

$y=c_1e^{-x}+e^{-0.5x}(c_2\cos 3x+c_3\sin 3x)$이다.

초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2=9$,

$y'(0)=-c_1-0.5c_2+3c_3=-6.5$,

$y''(0)=c_1+0.25c_2-3c_3-9c_2=-39.75$이므로

$c_1=4$, $c_2=5$, $c_3=0$이다. 따라서 특수해는

$y=4e^{-x}+5e^{-0.5x}\cos 3x$이다.

10. $\lambda^4+4=0$을 풀면, $\lambda=1\pm i, -1\pm i$이므로 일반해는

$y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+e^{-x}(c_3\cos x+c_4\sin x)$이다.

초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_3=\frac{1}{2}$,

$y'(0)=c_1+c_2-c_3+c_4=-\frac{3}{2}$, $y''(0)=2c_2-2c_4=\frac{5}{2}$,

$y'''(0)=2(c_2-c_1)+2(c_4+c_3)=-\frac{7}{2}$이므로

$c_1=\frac{5}{16}$, $c_2=-\frac{3}{16}$, $c_3=\frac{3}{16}$, $c_4=-\frac{23}{16}$이다.

따라서 특수해는

$$y=e^{x}\left(\frac{5}{16}\cos x-\frac{3}{16}\sin x\right)+e^{-x}\left(\frac{3}{16}\cos x-\frac{23}{16}\sin x\right)$$

이다.

11. $\lambda^4-9\lambda^2-400=0$을 풀면, $\lambda=\pm5, \pm4i$이므로
일반해는 $y=c_1e^{5x}+c_2e^{-5x}+c_3\cos4x+c_4\sin4x$이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2+c_3=0$,
$y'(0)=5c_1-5c_2+4c_4=0$,
$y''(0)=25c_1+25c_2-16c_3=41$,
$y'''(0)=125c_1-125c_2-64c_4=0$이므로
$c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{1}{2}$, $c_3=-1$, $c_4=0$이고
특수해는 $y=\frac{1}{2}e^{5x}+\frac{1}{2}e^{-5x}-\cos4x$이다.

12. $\lambda^5-5\lambda^3+4\lambda=0$을 풀면, $\lambda=0$, ±1, ±2이므로
일반해는 $y=c_1+c_2e^{-2x}+c_3e^{-x}+c_4e^{x}+c_5e^{2x}$이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=3$,
$y'(0)=-2c_2-c_3+c_4+2c_5=-5$,
$y''(0)=4c_2+c_3+c_4+4c_5=11$,
$y'''(0)=-8c_2-c_3+c_4+8c_5=-23$,
$y^{(4)}(0)=16c_2+c_3+c_4+16c_5=47$이므로
$c_1=1$, $c_2=3$, $c_3=-1$, $c_4=0$, $c_5=0$이고
특수해는 $y=1+3e^{-2x}-e^{-x}$이다.

13. $\lambda^4+0.35\lambda^3+3.85\lambda^2+1.4\lambda-0.6=0$을 풀면,
$\lambda=0.25, -0.6, \pm2i$이므로 일반해는
$y=c_1e^{-0.6x}+c_2e^{0.25x}+c_3\cos2x+c_4\sin2x$이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2+c_3=7.4125$,
$y'(0)=-0.6c_1+0.25c_2+2c_4=0.51$,
$y''(0)=0.36c_1+0.0625c_2-4c_3=0.849$,
$y'''(0)=-0.216c_1+0.015625c_2-8c_4=-2.3831$이므로
$c_1=\frac{159357}{74120}=2.15$, $c_2=\frac{718252}{138125}=5.20$,
$c_3=\frac{255941579}{4095130000}=0.06$, $c_4=\frac{1023758513}{4095130000}=0.25$이고
특수해는
$y=2.15e^{-0.6x}+5.20e^{0.25x}+0.06\cos2x+0.25\sin2x$이다.

14. (a) 상수계수를 갖는 선형미분방정식의 해가 $e^{\lambda_1 x}$이라는 것을 안다면 특성방정식을 $\lambda-\lambda_1$으로 나눈다.

(b) y_1이 주어진 방정식의 해이므로
$y_1'''+p_2y_1''+p_1y_1'+p_0y_1=0$이다. $y_2=uy_1$이라 하면 $y_2'=u'y_1+uy_1'$, $y_2''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$,
$y_2'''=u'''y_1+3u''y_1'+3u'y_1''+uy_1'''$이다.
주어진 방정식에 대입하면

$$u(y_1'''+p_2y_1''+p_1y_1'+p_0y_1)+u'(3y_1''+2p_2y_1'+p_1y_1)+u''(3y_1'+p_2y_1)+u'''y_1=0$$

이다. 즉

$$u'(3y_1''+2p_2y_1'+p_1y_1)+u''(3y_1'+p_2y_1)+u'''y_1=0$$

이다. 따라서
$z(3y_1''+2p_2y_1'+p_1y_1)+z'(3y_1'+p_2y_1)+z''y_1=0$인
z에 대해 $u=\int z(x)dx$이고 $y_2=uy_1$으로서
새로운 해 y_2를 구할 수 있다.

(c) 주어진 방정식을 표준형으로 정리하면

$$y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6-x^2}{x^2}y'-\frac{6-x^2}{x^3}y=0$$ 이므로

$p_2(x)=-\frac{3}{x}$, $p_1(x)=\frac{6-x^2}{x^2}$, $p_0(x)=-\frac{6-x^2}{x^3}$이고

$y_1=x$이므로 $xz''+(3-3)z'+\left(-\frac{6}{x}+\frac{6-x^2}{x}\right)z=0$,

$z''-z=0$이다. 특성방정식이 $\lambda^2-1=0$이므로
$\lambda=\pm1$이고 $z=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$이다. 따라서

$$u=\int z dx=\int\left(c_1e^{x}+c_2e^{-x}\right)dx=c_1e^{x}-c_2e^{-x}+c_3$$

이고, $y_2=x\left(c_1e^{x}-c_2e^{-x}+c_3\right)$이다.

3.3 Nonhomogeneous Linear ODEs

1. $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$을 풀면, $\lambda=1$(삼중근)이므로
$y_h=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^{x}$이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=Ax^3e^{x}+Bx+C$라 하면
$A=\frac{1}{6}$, $B=1$, $C=4$이다.
따라서 $y_p=\frac{1}{6}x^3e^{x}+x+4$이고
일반해는 $y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^{x}+\frac{1}{6}x^3e^{x}+x+4$이다.

2. $\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=0$을 풀면, $\lambda=1$, -1, -2이므로
$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}$이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$라 하면 $A=2$, $B=-3$, $C=15$, $D=-8$이다. 따라서
$y_p=2x^3-3x^2+15x-8$이고 일반해는
$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-2x}+2x^3-3x^2+15x-8$이다.

3. $\lambda^4+5\lambda^2+4=0$을 풀면, $\lambda=\pm i$, $\pm2i$이므로
$y_h=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos2x+c_4\sin2x$이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=A\cosh2x+B\sinh2x$라 하자. $A=0$, $B=\frac{7}{80}$이므로 $y_p=\frac{7}{80}\sinh2x$이고
일반해는

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos2x+c_4\sin2x+\frac{7}{80}\sinh2x$$

이다.

4. $\lambda^3+3\lambda^2-5\lambda-39=0$을 풀면, $\lambda=3, -3\pm2i$이므로
$y_h=c_1e^{3x}+e^{-3x}\left(c_2\cos2x+c_3\sin2x\right)$이다.

미정계수법에 의하여 $y_p = A\cos x + B\sin x$ 라 하면 $A=7,\ B=1$ 이다. 따라서 $y_p = 7\cos x + \sin x$ 이고 일반해는

$y = c_1 e^{3x} + e^{-3x}(c_2\cos 2x + c_3\sin 2x) + 7\cos x + \sin x$

이다.

5. $m(m-1)(m-2) + 2m(m-1) - m + 1 = 0$ 을 풀면, $m=1$(중근), -1이므로 $y_h = (c_1 + c_2\ln x)x + c_3 x^{-1}$ 이다. 매개변수변환법에 의하여,

$$W = \begin{vmatrix} x & x\ln x & x^{-1} \\ 1 & \ln x + 1 & -x^{-2} \\ 0 & x^{-1} & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 4x^{-2},$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\ln x & x^{-1} \\ 0 & \ln x + 1 & -x^{-2} \\ 1 & x^{-1} & 2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{-1}\ln x - x^{-1},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^{-1} \\ 1 & 0 & -x^{-2} \\ 0 & 1 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 2x^{-1},\quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x\ln x & 0 \\ 1 & \ln x + 1 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 1 \end{vmatrix} = x$$

이므로

$$y_p = x\int \frac{x^{-5}(-2x^{-1}\ln x - x^{-1})}{4x^{-2}}dx + x\ln x\int \frac{2x^{-6}}{4x^{-2}}dx + x^{-1}\int \frac{x^{-4}}{4x^{-2}}dx = -\frac{1}{9}x^{-2}$$

이다. 따라서 일반해는

$y = (c_1 + c_2\ln x)x + c_3 x^{-1} - \frac{1}{9}x^{-2}$ 이다.

6. 특성방정식 $\lambda^3 + 4\lambda = 0$ 을 풀면, $\lambda = 0, \pm 2i$ 이므로 $y_h = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p = A\cos x + B\sin x$ 라 하면 $A = -\frac{1}{3},\ B = 0$ 이다. 따라서 $y_p = -\frac{1}{3}\cos x$ 이고
일반해는 $y = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x$ 이다.

7. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ 을 풀면, $\lambda = 1$(삼중근)이므로 $y_h = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p = A\cos x + B\sin x$ 라 하면 $A = B = 1$ 이다. 따라서 $y_p = \cos x + \sin x$ 이고
일반해는 $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x + \cos x + \sin x$ 이다.

8. $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$ 을 풀면, $\lambda = \pm 1,\ \pm 2$ 이므로 $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + c_4 e^{2x}$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p = Ae^{-3x}$ 라 하자.
$A = \frac{1}{4}$ 이므로 $y_p = \frac{1}{4}e^{-3x}$ 이고 일반해는

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + c_4 e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \frac{1}{4} = 1$,

$y'(0) = -2c_1 - c_2 + c_3 + 2c_4 - \frac{3}{4} = 0$,

$y''(0) = 4c_1 + c_2 + c_3 + 4c_4 + \frac{9}{4} = 0$,

$y'''(0) = -8c_1 - c_2 + c_3 + 8c_4 - \frac{27}{4} = 0$ 이므로

$c_1 = -\frac{5}{6},\ c_2 = \frac{4}{3},\ c_3 = \frac{1}{12},\ c_4 = \frac{1}{6}$ 이고 특수해는

$y = -\frac{5}{6}e^{-2x} + \frac{4}{3}e^{-x} + \frac{1}{12}e^x + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$ 이다.

9. $\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0$ 을 풀면, $\lambda = \pm i,\ \pm 2i$ 이므로 $y_h = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3\cos x + c_4\sin x$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p = A\cos 4x + B\sin 4x$ 라 하자.
$A = 0,\ B = \frac{1}{2}$ 이므로 $y_p = \frac{1}{2}\sin 4x$ 이고 일반해는

$y = c_1\cos x + c_2\sin 2x + c_3\cos x + c_4\sin x + \frac{1}{2}\sin 4x$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + c_3 = 1$,
$y'(0) = 2c_2 + c_4 + 2 = 2,\ y''(0) = -4c_1 - c_3 = -1$,
$y'''(0) = -8c_2 - c_4 - 32 = -32$ 이므로 $c_1 = 0,\ c_2 = 0$,
$c_3 = 1,\ c_4 = 0$ 이고 특수해는 $y = \cos x + \frac{1}{2}\sin 4x$ 이다.

10. $m(m-1)(m-2) + m - 1 = 0$ 을 풀면, $m = 1$(삼중근) 이므로 $y_h = [c_1 + c_2\ln x + c_3(\ln x)^2]x$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p = Ax^2 + Bx + C$라 하자.
$A = 1,\ C = 0$ 이므로 $y_p = x^2$ 이고 일반해는
$y = [c_1 + c_2\ln x + c_3(\ln x)^2]x + x^2$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(1) = c_1 + 1 = 1$,
$y'(1) = c_2 + c_1 + 2 = 3,\ y''(1) = 2c_3 + c_2 + 2 = 14$ 이므로
$c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = \frac{11}{2}$ 이고 특수해는

$y = \left[\ln x + \frac{11}{2}(\ln x)^2\right]x + x^2$ 이다.

12. $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$ 을 풀면, $\lambda = 3,\ 2,\ -3$ 이므로 $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p = Axe^{2x}$ 라 하자.
$A = -\frac{1}{5}$ 이므로 $y_p = -\frac{1}{5}xe^{2x}$ 이고 일반해는

$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x} - \frac{1}{5}xe^{2x}$ 이다.

초기조건에 의하여 $y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 4.5$,

$y'(0) = 3c_1 + 2c_2 - 3c_3 - \frac{1}{5} = 8.8$,

$y''(0) = 9c_1 + 4c_2 + 9c_3 - \frac{4}{5} = 17.2$ 이므로 $c_1 = 0$,

$c_2 = 4.5,\ c_3 = 0$ 이고

특수해는 $y = 4.5e^{2x} - 0.2xe^{2x}$ 이다.

13. $\lambda^3 - 4\lambda = 0$ 을 풀면, $\lambda = 0,\ \pm 2$ 이므로 $y_h = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p = A\cos x + B\sin x$ 라 하자.
$A = 1,\ B = -2$ 이므로 $y_p = \cos x - 2\sin x$ 이고

일반해는 $y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}+\cos x-2\sin x$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2+c_3+1=3$,
$y'(0)=2c_2-2c_3-2=-2$,
$y''(0)=4c_2+4c_3-1=-1$ 이므로 $c_1=2,\ c_2=0,\ c_3=0$
이고 특수해는 $y=2+\cos x-2\sin x$ 이다.

14. 방정식 $y'''-3y''+3y'-y=x^{1/2}e^x$ 에 대한 특성방정식은 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ 이다. 이를 풀면, $\lambda=1$ (삼중근)이므로 $y_h=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x$ 이다.
미정계수법을 적용하자.
$y_p=x^{1/2}(A+Bx+Cx^2+Dx^3)e^x$ 라 하면
$A=0,\ B=0,\ C=0,\ D=\dfrac{8}{105}$ 이다.
따라서 $y_p=\dfrac{8}{105}x^{7/2}e^x$ 이다.
방정식 $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=x^3\ln x$ 에서
$m(m-1)(m-2)+m(m-1)-2m+2=0$ 을 얻는다.
이를 풀면 $m=1,\ 2,\ -1$ 이므로
$y_h=c_1x^{-1}+c_2x+c_3x^2$ 이다.
매개변수변환법을 적용하면

$$W=\begin{vmatrix} x^{-1} & x & x^2 \\ -x^{-2} & 1 & 2x \\ 2x^{-3} & 0 & 2 \end{vmatrix}=6x^{-1},\quad W_1=\begin{vmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=x^2,$$

$$W_2=\begin{vmatrix} x^{-1} & 0 & x^2 \\ -x^{-2} & 0 & 2x \\ 2x^{-3} & 1 & 2 \end{vmatrix}=-3,\quad W_3=\begin{vmatrix} x^{-1} & x & 0 \\ -x^{-2} & 1 & 0 \\ 2x^{-3} & 0 & 1 \end{vmatrix}=2x^{-1}$$

이므로

$$y_p=x^{-1}\int\frac{x^2\ln x}{6x^{-1}}dx+x\int\frac{-3\ln x}{6x^{-1}}dx+x^2\int\frac{2x^{-1}\ln x}{6x^{-1}}dx=\frac{1}{8}x^3\ln x-\frac{7}{32}x^3$$

이다.

Chapter 3 Review Questions and Problems

1. 중첩의 원리란 제차 선형미분방정식에 대해 해의 일차결합이 다시 해가 되는 성질을 의미한다. 즉, 해들의 합과 상수 곱도 다시 해가 되는 성질이다.
2. 제차 선형미분방정식에서 일반해를 구하는 중첩의 원리, 비제차 미분방정식의 특수해를 구하는 미정계수법과 매개변수변환법
3. 대응하는 제차방정식의 일반해를 y_h 라 하고 주어진 비제차방정식의 특수해를 y_p 라 하면 비제차방정식의 일반해는 y_h 와 y_p 의 합으로 표현된다. y_p 를 결정하는 실제적인 문제는 매개변수변환법과 미정계수법에 의해 풀 수 있다.
4. 초기값 문제는 n계 선형미분방정식과 주어진 $x_0, K_0, \cdots, K_{n-1}$ 을 가진 n개의 초기조건 $y(x_0)=K_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=K_{n-1}$ 으로 구성된다.
5. Wronskian은 n개의 함수들의 $n-1$계 도함수까지의 함수들로 만들어진 $n\times n$ 행렬의 행렬식을 의미한다. 일차독립성을 증명하는데 유용하며 제차 미분방정식의 기저로부터 일반해를 구하는 매개변수변환법에 응용된다.
6. $\lambda^4-3\lambda^2-4=0$ 을 풀면, $\lambda=\pm2,\ \pm i$ 이므로
일반해는 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos x+c_4\sin x$ 이다.
7. $\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda=0$ 을 풀면, $\lambda=0,\ 1\pm2i$ 이므로
일반해는 $y=c_1+e^x(c_2\cos2x+c_3\sin2x)$ 이다.
8. $\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+4=0$ 을 풀면, $\lambda=4,\ 1,\ -1$ 이므로
$y_h=c_1e^{4x}+c_2e^x+c_3e^{-x}$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=Ae^{2x}$ 라 하자.
$A=-5$ 이므로 $y_p=-5e^{2x}$ 이고 일반해는
$y=c_1e^{4x}+c_2e^x+c_3e^{-x}-5e^{2x}$ 이다.
9. $\lambda^4-81=0$ 을 풀면, $\lambda=\pm3,\ \pm3i$ 이므로
$y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3\cos3x+c_4\sin3x$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=A\cosh x+B\sinh x$ 라 하자. $A=0,\ B=0.4$ 이므로 $y_p=0.4\sinh x$ 이고
일반해는
$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+c_3\cos3x+c_4\sin3x+0.4\sinh x$ 이다.
10. $m(m-1)+3m-2=0$ 을 풀면, $m=-1\pm\sqrt{3}$ 이므로
일반해는 $y=c_1x^{-1+\sqrt{3}}+c_2x^{-1-\sqrt{3}}$ 이다.
11. $\lambda^3+4.5\lambda^2+6.75\lambda+3.375=0$ 을 풀면,
$\lambda=-1.5$ (삼중근)이므로 일반해는
$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-1.5x}$ 이다.
12. $\lambda^3-\lambda=0$ 을 풀면, $\lambda=0,\ \pm1$ 이므로
$y_h=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x$ 이다. 미정계수법에 의하여
$y_p=A\cosh0.8x+B\sinh0.8x$ 라 하자. $A=-\dfrac{125}{36}$,
$B=0$ 이므로 $y_p=-\dfrac{125}{36}\cosh0.8x$ 이고 일반해는
$y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x-\dfrac{125}{36}\cosh0.8x$ 이다.
13. $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ 을 풀면, $\lambda=1$ (삼중근)이므로
$y_h=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x$ 이다. 미정계수법에 의하여
$y_p=Ax^2+Bx+C$ 라 하자. $A=-2,\ B=-12,$
$C=-24$ 이므로 $y_p=-2x^2-12x-24$ 이고
일반해는 $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x-2x^2-12x-24$ 이다.
14. $\lambda^4-13\lambda^2+36=0$ 을 풀면, $\lambda=\pm2,\ \pm3$ 이므로
$y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}$ 이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=Ae^x$ 라 하자.
$A=0.5$ 이므로 $y_p=0.5e^x$ 이고 일반해는
$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}+0.5e^x$ 이다.

15. $8m(m-1)(m-2)+10m(m-1)+m-1=0$을 풀면,
$m=1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$이므로 $y_h=c_1x^{1/4}+c_2x^{1/2}+c_3x$이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=A$라 하자.
$A=-5$이므로 $y_p=-5$이고 일반해는
$y=c_1x^{1/4}+c_2x^{1/2}+c_3x-5$이다.

16. $3\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+4=0$을 풀면, $\lambda=1$(중근), $-\frac{4}{3}$
이므로 일반해는 $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-4x/3}$이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_3=0$,
$y'(0)=c_2+c_1-\frac{4}{3}=0$, $y''(0)=2c_2+c_1+\frac{16}{9}=1$이므로
$c_1=\frac{31}{9}$, $c_2=-\frac{19}{9}$, $c_3=-\frac{39}{9}$이고 특수해는
$y=\left(\frac{31}{9}-\frac{19}{9}x\right)e^x-\frac{39}{9}e^{-4x/3}$이다.

17. $\lambda^3+5\lambda^2+24\lambda+20=0$을 풀면, $\lambda=-1,\ -2\pm4i$
이므로 $y_h=c_1e^{-x}+e^{-2x}(c_2\cos 4x+c_3\sin 4x)$이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=Ax+B$라 하자. $A=\frac{1}{20}$,
$B=-\frac{3}{50}$이므로 $y_p=\frac{1}{20}x-\frac{3}{50}$이고 일반해는
$y=c_1e^{-x}+e^{-2x}(c_2\cos 4x+c_3\sin 4x)+\frac{1}{20}x-\frac{3}{50}$이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2-\frac{3}{50}=1.94$,
$y'(0)=-c_1-2c_2+2c_3+\frac{1}{20}=-3.95$,
$y''(0)=c_1-12c_2-16c_3=-24$이므로 $c_1=0, c_2=2$,
$c_3=0$이고 $y=2e^{-2x}\cos 4x+\frac{1}{20}x-\frac{3}{50}$이다.

18. $\lambda^4-26\lambda^2+25=0$을 풀면, $\lambda=\pm5,\ \pm1$이므로
$y_h=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{5x}+c_4e^{-5x}$이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=A(x+1)^2+B(x+1)+C$
라 하자. $A=2,\ B=0,\ C=\frac{104}{25}$이므로
$y_p=2(x+1)^2+\frac{104}{25}$이고 일반해는
$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{5x}+c_4e^{-5x}+2(x+1)^2+\frac{104}{25}$
이다. 초기조건에 의하여
$y(0)=c_1+c_2+c_3+c_4+2+\frac{104}{25}=12.16$,
$y'(0)=c_1-c_2+5c_3-5c_4+4=-6$,
$y''(0)=c_1+c_2+25c_3-25c_4+4=34$,
$y'''(0)=c_1-c_2+125c_3-125c_4=-130$이므로
$c_1=0, c_2=5, c_3=0, c_4=1$이고
$y=5e^{-x}+e^{-5x}+2(x+1)^2+\frac{104}{25}$이다.

19. $\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$을 풀면, $\lambda=-1,\ -2,\ -3$
이므로 $y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{-3x}$이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=Ae^{-4x}$라 하자.
$A=-\frac{1}{3}$이므로 $y_p=-\frac{1}{3}e^{-4x}$이고 일반해는
$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{-3x}-\frac{1}{3}e^{-4x}$ 이다.
초기조건에 의하여 $y(0)=c_1+c_2+c_3-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$,
$y'(0)=-c_1-2c_2-3c_3+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$,
$y''(0)=c_1+4c_2+9c_3-\frac{16}{3}=-\frac{16}{3}$이므로
$c_1=c_2=c_3=0$이고 특수해는 $y=-\frac{1}{3}e^{-4x}$이다.

20. $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$을 풀면, $\lambda=-1$(삼중근)이므로
$y_h=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}$이다.
미정계수법에 의하여 $y_p=A\cos x+B\sin x$라 하면
$A=B=-2$이다. 따라서 $y_p=-2\cos x-2\sin x$이고
일반해는 $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}-2\cos x-2\sin x$
이다. 초기조건에 의하여 $y(0)=c_1-2=-1$,
$y'(0)=c_2-c_1-2=-3$, $y''(0)=2c_3-2c_2+c_1+2=5$
이므로 $c_1=1,\ c_2=0,\ c_3=1$이고 특수해는
$y=(1+x^2)e^{-x}-2\cos x-2\sin x$이다.