1. (2 pts each)

a)

let, Xi : the number of balls in ith bin

Xi ~ Poi(1) ($\because \mu = \frac{n}{n} = 1$)

Pr(Xi = 1) = $\frac{1^1 e^{-1}}{1!} = \frac{1}{e}$

Pr(Y1=1 $\cap$ Y2=1 $\cap$... $\cap$ Yn=1) = $(\frac{1}{e})^n$

Pr(all bin receives exactly one ball) $\leq e\sqrt{n}(\frac{1}{e})^n$

b)

Probability = $\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} ... \times \frac{1}{n} = \frac{n!}{n^n}$

c)

Let X ~ Poi(n), Pr(X=n) = $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$

$\frac{n!}{n^n} \times \frac{n^n e^{-n}}{n!} = (\frac{1}{e})^n$

2.

a)

Pr[X >= μ + a] = Pr[X-μ >=a]

E[X - μ] = E[X] - μ = 0

using the given fact,

Pr[X-μ >= a] <= σ^2 /(σ^2 +μ^2)

Pr[X <= μ - a] = Pr[μ - X >=a]

E[μ-X] = μ- E[X] = 0

using the given fact,

Pr[μ - X >= a] <= σ^2 /(σ^2 +μ^2)

b)

upper bound using the equation obtatined in a)

Pr[X >=120] = Pr[X-100 >=20] <= 400/(400+20^2) = $\frac{1}{2}$

Markov bound

Pr[X >=120] <= $\frac{E[X]}{120} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$

2. (2 pts each)
C)

주어진 식 $\Pr[X \geq i] \leq e^{(\lambda(e^t-1)-i*t)}$ 에서, 우측 지수함수는 단조 증가하므로 bound의 최소값은 미분값이 0이 되는 지점이 된다. bound에 대한 식을 t에 대해 미분하면,

$$\frac{d}{dt}(e^{(\lambda(e^t-1)-i*t)}) = e^{(\lambda(e^t-1)-i*t)} * \frac{d}{dt}(\lambda(e^t-1)-i*t)$$

$$= e^{(\lambda(e^t-1)-i*t)}(\lambda e^t - i)$$

주어진 식을 0으로 만드는 e^t의 값은 i/λ.

D) X ~ Poi(20)에서,

Markov Bound : $\Pr(X \geq 26) = \frac{10}{13}$

Chernoff Bound : $e^t = i/\lambda = 26/20 = 13/10$

$$e^{(\lambda(e^t-1)-i*t)} = e^{(20*(\frac{26}{20}-1)-26*\ln(\frac{13}{10}))}$$

$$= e^{(6-26*\ln(\frac{13}{10}))} = \frac{e^6}{(\frac{13}{10})^{26}} = e^6(\frac{10}{13})^{26}$$

3. (2 Pts each)

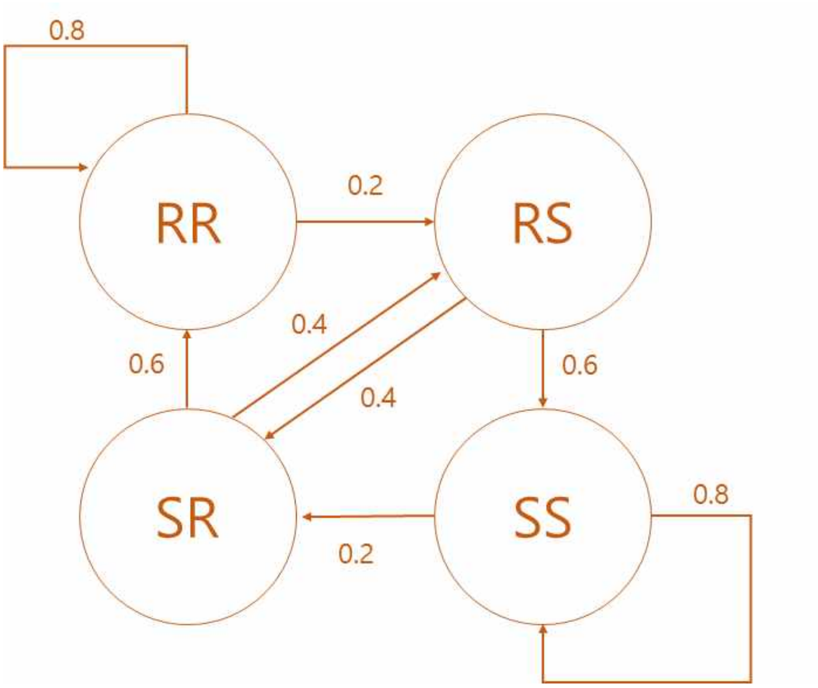
A)
4개의 State를 정의하여 주어진 상황을 M.C로 표현할 수 있다.
편의상 Not Rainy = Sunny 라고 하자.
1) RR : Rainy Yesterday- Rainy Today
2) RS : Rainy Yesterday- Sunny Today
3) SR : Sunny Yesterday- Rainy Today
4) SS : Sunny Yesterday – Sunny Today
위와 같이 State를 정의할 경우, 1)->1), 1)->2) 의 Transition이 가능하며 이는 각각 이틀 내내 비가 왔고 오늘도 비가 오는 경우/ 이틀 내내 비가 왔고 오늘은 맑은 경우로 나타낼 수 있다.
수식으로 나타내면,
$W_t = t\text{번째와 } t-1\text{번째 날씨} \in [R,S]^2$
일 때 $P(W_t = RR | W_{t-1}, W_{t-2}, W_{t-3}, \dots) = P(W_t = RR | W_{t-1})$
이므로 Memoryless property가 성립하며, 모든 경우를 4개 State 간의 Transition으로 나타낼 수 있다.

* State의 개수는 꼭 4개일 필요는 없으나, Memoryless Property는 현재의 상태가 바로 직전 상태에만 영향을 받는 성질이므로 해당 서술이 잘못된 경우 감점하였습니다.

B)
A)에서 정의한 State를 그대로 사용하자. 이 경우 Transition Matrix는 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccccc} & RR & RS & SR & SS \\ RR & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ RS & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ SR & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ SS & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{array}$$

C) Transition Diagram 은 다음과 같다.



RR, RS, SS, SR, RR 의 경로가 존재하므로 본 M.C 는 Irreducible. 하다.
Positive Recurrence를 증명하기에 앞서, 4개의 주어진 State들은 Communicating Class에 해당하므로, 한 개의 State에서만 증명하면 된다.
Positive Recurrent를 증명하기 위해, Finite Hitting Time이 보장됨을 보이자. RS에서 RS로 처음으로 돌아오는 경우를 모두 고려하면, RS->(SS->SS의 반복)->SR->(RR->RR의 반복)->RS 인 경우가 가능하며, SS와 RR을 지나지 않는 경우나 둘 중에 하나만 지나는 경우 등을 모두 고려할 수 있다.

Positive recurrence를 RR 상태에서 증명하도록 한다.
h(x)를 x 상태에서 **RR** 상태로 돌아가는 경로의 평균 길이라고 하면,
h(RR) = 0 , h(RS) =1+0.6*h(SS)+0.4*h(SR) 이다.
모든 경우에 대해 이를 표현하면
h(RR) = 0
h(RS) = 1 + 0.6*h(SS)+0.4*h(SR),
h(SR) = 1 + 0.4*h(RS)+0.6*0 = 1+0.4h(RS)
h(SS)=1+0.2*h(SR)+0.8*h(SS)
위 4개의 식을 풀면,
(h(RR),h(RS),h(SR),h(SS)) = (0, 25/3, 13/3, 28/3) 이 되어 유한함을 보일 수 있다.

(무한수열의 합으로 나타내었으나 수렴성을 보이지 못한 경우 0.5점 감점,
Diagram이 틀린 경우 0점)