1.

A)

proof)

$$
\begin{aligned}
&Var[X1 + X2] \\
&= E[(X1 + X2)^2] - E[X1 + X2]^2 \\
&= (E[X1^2] - E[X1]^2) + (E[X2^2] - E[X2]^2) + 2(E[X1X2] - E[X1]E[X2]) \\
&= Var[X1] + Var[X2] \ (\because E[X1X2] = E[X1]E[X2])
\end{aligned}
$$

B)

proof)

$$
\begin{aligned}
&Var[X1 + X2] \\
&= Var[X1] + Var[X2] + 2(E[X1X2] - E[X1]E[X2]) \\
&= Var[X1] + Var[X2]
\end{aligned}
$$

$$\therefore E[X1X2] = E[X1]E[X2]$$

C)

proof)

$$
\begin{aligned}
&Var[X1 - X2] \\
&= E[X1^2 - 2X1X2 + X2^2] - (E[X1] - E[X2])^2 \\
&= Var[X1] + Var[X2] - 2(E[X1X2] - E[X1]E[X2])
\end{aligned}
$$

if X1 and X2 are independent, then E[X1X2] = E[X1]E[X2]

$$\therefore Var[X1 - X2] = Var[X1] + Var[X2]$$

D)

proof)

$$let\ X = \frac{X1 + X2 + \ldots + Xn}{n}$$

$$E[Xi] = \mu,\ Var[Xi] = \sigma^2$$

$$E[X] = \frac{E[X1] + E[X2] + \ldots E[Xn]}{n} = \mu$$

(Xi is independent)

$$Var[X]$$
$$= \sum Var[\frac{Xi}{n}]$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum Var[Xi]$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Pr(\left| \frac{X1 + X2 + ... + Xn}{n} - \mu \right| > \varepsilon)$$
$$= \Pr(|X - E[X]| > \varepsilon) \le \frac{Var[X]}{\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \Pr(|X - E[X]| > \varepsilon)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$$

2

a) (2 pts)

Let $X1$ = 1번 시행 시의 결과값

$E[X_1] = (1+6)/2 = 7/2$

$Var[X_1] = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 35/12$

100개의 Trial로 확장하면, 각 시행은 독립이므로

$E[X] = 7/2 * 100 = 350$

$Var[X] = 35/12 * 100 = 875/3$

B) (2 pts)

Markov's bound :

$P(X \ge 400) \le \frac{E[X]}{400} = 7/8$

C) (3 pts)

$E[X] = E[Y] \rightarrow E[X-Y] = 0$

$Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] = 1750/3$

$\Pr(|X-Y| \ge 100) = \Pr(|X-Y| - E[X-Y] \ge 100) \le (1750/3)/(100^2) = 7/120$

3.

A) (2 pts)
Bernouli : $E[Y] = n*1/2 = n/2$, $Var[Y] = n*1/2*1/2 = n/4$

B) (3 pts)

$\Pr(Y \geq \frac{3}{4}n) \leq \frac{1}{2}*\Pr(|Y - \frac{1}{2}n| \geq \frac{1}{4}n)$ (절대값)

$\leq \frac{1}{2}*\frac{\frac{1}{4}n}{(\frac{1}{4}n)^2} = \frac{2}{n}$ (Chebyshev's inequality)

* Strict한 Bound를 구하는 문제가 아니므로, 1/2을 곱하지 않은 4/n도 3점

C) (4 pts)
*Strict한 Bound를 구하는 문제이므로, 답안보다 Tight하지 않은 경우 0점

(강의자료에 있는 Poisson Trial에 대한 식에 단순 대입한 경우 $e^{-\frac{1}{24}n}$ 로 본 답안보다 Tight하지 않음:0점)

$\Pr(Y \geq \frac{3}{4}n) = \Pr(e^{tY} \geq e^{t*\frac{3}{4}n}) \leq \frac{E[e^{tY}]}{e^{t*\frac{3}{4}n}}$ ---(1)

모든 시행이 독립이므로,

$E[e^{tY}] = \prod_{i=1}^{n} E[e^{ty_i}] = (\frac{1}{2}*(e^t+1))^n$ --- (2)

(2)를 (1)에 대입하면,

$(\text{전체 식}) = (\frac{\frac{1}{2}*(e^t+1)}{e^{\frac{3}{4}t}})^n$

괄호 안의 식의 최소값은 산술기하평균에 대한 부등식이나 미분을 통해 구할 수 있으며,
미분할 경우 최소가 되는 $t = \ln 3$, $e^t = 3$ 에서 해당 식을 풀고 (1)에 대입하면

$\Pr(Y \geq \frac{3}{4}n) \leq (\frac{16}{27})^{\frac{1}{4}n}$