1 Formulación de la función objetivo

La función objetivo de este problema es:

$$J(u) = \lambda_P \max_{t\in[0,T]} I(t) - \lambda_V \int_0^T u(t)S(t)\,dt$$

el cual tiene una forma parecida a la del problema de Bolza con tiempo $t_0 = 0$, $t_f = T$ fijos:

$$J_B(u) = g(e[x]) + \int_0^T l(x(t), u(t))\,dt$$

por lo tanto definiremos a:

$$\lambda_P \max_{t\in[0,T]} I(t) = g(T, I) = g(e[x])$$
$$\lambda_V u(t)S(t) = l(S, u) = l(x(t), u(t))$$

ahora bien, esta definición trae ciertos problemas naturalmente, ya que no es directa la evaluación del tiempo T en la variable I, sino que es a través del intervalo donde se saca el máximo de I.

Para arreglar esto, se considero el desarrollo presentado en (agregar referencia), de esta forma planteamos el siguiente sistema (equivalente):

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) - u(t)S(t) \\ V'(t) = u(t)S(t) - \beta(1-\phi)V(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) + \beta(1-\phi)V(t)I(t) - \gamma I \\ R'(t) = \gamma I(t) \\ Z'(t) = (1-w)\max\{g(S,V,I), 0\} \end{cases}$$

donde definimos a $g(S, V, I) := \beta S(t)I(t) + \beta(1-\phi)V(t)I(t) - \gamma I$, y a w como otro control del sistema (un control auxiliar), además de imponer la restricción:

$$Z(t) - I(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$$

Con esto, como se mostró en (referencia) se tendrá que:

$$\inf_{w\in U} z(T) = \max_{t\in[0,T]} I(t)$$

Ahora bien, podemos usar la aproximación:

$$\max\{g, 0\} \approx \frac{\log(e^{100g} + 1)}{100}$$

para hacer poder aproximar el comportamiento de Z (ya que no conviene que aparezca la función máximo en la dinámica).

Con esto, nos bastara con considerar $Z(T)$ en vez de $\max_{T\in[0,t]} I(T)$ para nuestra función valor, ya que así, dado que Z es una variable para el nuevo sistema, se tendrá la forma del *Problema de Bolza* visto en el curso.

Con esto tenemos que el funcional objetivo con el que trabajaremos es:

$$J(u,v) = \lambda_P z(T) + \lambda_V \int_0^T u(t)S(t)dt$$

sujeto a la dinámica del problema:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) - u(t)S(t) \\ V'(t) = u(t)S(t) - \beta(1-\phi)V(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) + \beta(1-\phi)V(t)I(t) - \gamma I \\ R'(t) = \gamma I(t) \\ Z'(t) = \frac{1-w}{100} \log\left[\exp\left(100(\beta S(t)I(t) + \beta(1-\phi)V(t)I(t) - \gamma I(t)\right) + 1\right] \end{cases}$$

con la restricción:

$$Z(t) - I(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

2 Ecuaciones de Pontryagin

Notaremos a $x(t) = (S(t), I(t), R(t), V(t), Z(t))$, considerando esto, identifiquemos a las funciones que componen al Hamiltoniano considerando lo mostrado en la sección anterior:

$$l(x(t), u(t), w(t)) = \lambda_V u(t)S(t)$$

$$f(x(t), u(t), w(t)) = \begin{pmatrix} -\beta S(t)I(t) - u(t)S(t) \\ u(t)S(t) - \beta(1-\phi)V(t)I(t) \\ \beta S(t)I(t) + \beta(1-\phi)V(t)I(t) - \gamma I \\ \gamma I(t) \\ \frac{1-w}{100} \log\left[\exp\left(100(\beta S(t)I(t) + \beta(1-\phi)V(t)I(t) - \gamma I(t)\right) + 1\right] \end{pmatrix}$$

Ahora bien, dado que tenemos una restricción de desigualdad, debemos considerar esto dentro del sistema, por lo tanto, dado que nuestro problema tiene la siguiente restricción de desigualdad:

$$I(t) - Z(t) \leq 0$$

se tiene que el Hamiltoniano extendido este caso, como se muestra en [**?**] corresponderá a:

$$H(t, x, p_0, p, u, w) = p_0 l(x(t), u(t), w(t)) + p(t)^T f(x(t), u(t), w(t)) + \mu(t)(I(t) - Z(t))$$

donde se cumple la condición sobre μ:

$$\begin{aligned} \mu(t) > 0, &\quad \text{si } I(t) = Z(t) \\ \mu(t) = 0, &\quad \text{si } I(t) - Z(t) < 0 \end{aligned}$$

por lo tanto el Hamiltoniano $H(t, x, p_0, p, u, w)$ nos queda como:

$$\mu(t)(I(t) - Z(t)) + p_0\left(\lambda_V u(t)S(t)\right) + \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \\ p_5(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\beta S(t)I(t) - u(t)S(t) \\ u(t)S(t) - \beta(1-\phi)V(t)I(t) \\ \beta S(t)I(t) + \beta(1-\phi)V(t)I(t) - \gamma I \\ \gamma I(t) \\ \frac{1-w}{100} \log\left[\exp\left(100(\beta S(t)I(t) + \beta(1-\phi)V(t)I(t) - \gamma I(t)\right) + 1\right] \end{pmatrix}$$

donde tenemos que al desarrollar $H(t,x,u,p,w)$ es igual a:

$$\mu(t)(I(t)-Z(t))+p_0\lambda_V u(t)S(t)+p_1(t)\big(-\beta S(t)I(t)-u(t)S(t)\big)+p_2(t)\big(u(t)S(t)-\beta(1-\phi)V(t)I(t)\big)$$
$$+\,p_3(t)\big(\beta S(t)I(t)+\beta(1-\phi)V(t)I(t)-\gamma I\big)+p_4(t)\big(\gamma I(t)\big)$$
$$+\,p_5(t)\left(\frac{1-w}{100}\log\left[\exp\left(100(\beta S(t)I(t)+\beta(1-\phi)V(t)I(t)-\gamma I(t))\right)+1\right]\right)$$

Ahora bien, recordemos que por Pontryagin se tiene que:

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(t,x,u,p,w)$$

por lo tanto tendremos que:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial}{\partial S}H(t,x,p_0,p,u,w)\\
&= -p_0\lambda_V u(t) + p_1(t)(\beta I(t)+u(t)) - p_2(t)u(t) - p_3(t)\beta I(t)\\
&- p_5(t)\cdot(1-w)\cdot\frac{\beta\cdot I(t)\cdot\exp\left(100\cdot(\beta S(t)I(t)+\beta(1-\phi)V(t)I(t)-\gamma I(t))\right)}{\exp\left(100\cdot(\beta S(t)I(t)+\beta(1-\phi)V(t)I(t)-\gamma I(t))\right)+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial}{\partial V}H(t,x,p_0,p,u,w)\\
&= p_2(t)\beta(1-\phi)I(t) - p_3(t)\beta(1-\phi)I(t)\\
&- p_5(t)\cdot(1-w)\cdot\frac{\beta(1-\phi)\cdot I(t)\cdot\exp\left(100\cdot(\beta S(t)I(t)+\beta(1-\phi)V(t)I(t)-\gamma I(t))\right)}{\exp\left(100\cdot(\beta S(t)I(t)+\beta(1-\phi)V(t)I(t)-\gamma I(t))\right)+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_3(t) &= -\frac{\partial}{\partial I}H(t,x,p_0,p,u,w)\\
&= -\mu(t) + p_1(t)\beta S(t) + p_2(t)\beta(1-\phi)V(t) - p_3(t)(\beta S(t)+\beta(1-\phi)V(t)-\gamma) - p_4(t)\gamma\\
&- p_5(t)\cdot(1-w)\cdot\frac{(\beta S(t)+\beta(1-\phi)V(t)-\gamma)\cdot\exp\left(100\cdot(\beta S(t)I(t)+\beta(1-\phi)V(t)I(t)-\gamma I(t))\right)}{\exp\left(100\cdot(\beta S(t)I(t)+\beta(1-\phi)V(t)I(t)-\gamma I(t))\right)+1}\\
\dot{p}_4(t) &= -\frac{\partial}{\partial R}H(t,x,p_0,p,u,w) = 0
\end{aligned}$$

$$\dot{p}_5(t) = -\frac{\partial}{\partial Z}H(t,x,p_0,p,u,w) = \mu(t)$$

Ahora bien, al imponer la condición de dinamización para el control óptimo, se tendrá que la condición de minimización del control óptimo es:

$$u^*(t) = \begin{cases} U^*_{max};\,\lambda_V - p_1(t) + p_2(t) < 0\\ 0;\, \textit{si no se cumple}\end{cases}$$

3 Hamilton-Jacobi-Bellman

Considerando $l(X,t,\mu,\omega)$ igual al punto de Pontryagin y $f(X,\mu,\omega)$, podemos escribir HJB. Considerando $\overline{V}(x,t)$ la función valor:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \min_{u,\omega} \Bigg\{ - \lambda_V u S + \frac{\partial \overline{V}}{\partial S}(-\beta S I - u S)$$

$$+ \frac{\partial \overline{V}}{\partial V}(u S - \beta(1-\phi) V I)$$

$$+ \frac{\partial \overline{V}}{\partial I}(\beta S I + \beta(1-\phi) V I - \gamma I)$$

$$+ \frac{\partial \overline{V}}{\partial R}(\gamma I)$$

$$+ \frac{\partial \overline{V}}{\partial Z}\frac{(1-\omega)}{100} \log\left(exp\left((\beta S I + \beta(1-\phi) V I - \gamma I) + 1 \right) \right) \Bigg\}$$

$$= 0.$$

Con $V(x,T) = \lambda_p Z(T)$.
Como son dos controles, vamos a minimizar con respecto a u y después con respecto a ω.
Con u, se utilizará KKT. Con las restricciones $-u \leq 0$ y $u - U_{\max} \leq 0$, luego el problema queda:

$$\alpha + \lambda_1(-u) + \lambda_2(u - U_{\max}).$$

Entonces:

$$S(-\lambda_V - \frac{\partial \overline{V}}{\partial V} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial S}) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Si utilizamos los casos considerando $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$:

- Si $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, se tiene $u = 0, u = U_{\max}$, lo que es una contradicción.

- Si $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, obtenemos un problema irrestricto:

$$\lambda_V = \frac{\partial \overline{V}}{\partial V} - \frac{\partial \overline{V}}{\partial S}.$$

- Si $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$, obtenemos $u = 0$:

$$\lambda_V < \frac{\partial \overline{V}}{\partial V} - \frac{\partial \overline{V}}{\partial S}.$$

- Si $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, obtenemos $u = U_{\max}$:

$$\lambda_V > \frac{\partial \overline{V}}{\partial V} - \frac{\partial \overline{V}}{\partial S}.$$

Por lo que μ^* está dado por:

$$u^* = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda V < \frac{\partial \overline{V}}{\partial V} - \frac{\partial \overline{V}}{\partial S}, \\ U_{\max}, & \text{si } \lambda_V > \frac{\partial \overline{V}}{\partial V} - \frac{\partial \overline{V}}{\partial S}. \end{cases}$$

Para v y utilizando nuevamente KKT nos queda lo siguiente:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} e^{0.234log(e^{360(I(t)-Z(t))}+1)} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Por lo que ν^* está dado por:

$$v^* = \begin{cases} 0, & \text{si } -\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} e^{0.234log(e^{360(I(t)-Z(t))}+1)} > 0, \\ 1, & \text{si } \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} e^{0.234log(e^{360(I(t)-Z(t))}+1)} > 0. \end{cases}$$

References

[1] Martcheva, M. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer, 2015.

[2] Saldaña, F., Velasco-Hernández, J.X. *Modeling the COVID-19 pandemic: a primer and overview of mathematical epidemiology*. SeMA, 2022.

[3] Brault, A., et al. *Direct impact of covid-19 vaccination in chile: Averted cases, hospitalizations, icu admissions, and deaths*. BMC Infect. Dis. 2024.

[4] Molina, E., Rapaport, A., Ramírez, H. *Equivalent Formulations of Optimal Control Problems with Maximum Cost and Applications*. J Optim Theory Appl, 2022.