SWP Assigmnment 3

Alexander Frewein (1430019)
Klaus Fabian Frühwirt (1131522)

Institute of Software Technology
alexander.frewein@student.tugraz.at
fabian.fruehwirth@student.tugraz.at

Beispiel 1

a)

IQ Definition:

$\pi(x) = if\ \pi(isQueEmpty?)\ then\ []$
$else(build\ dequeue(x), head(x))$

isQueEmpty?

$\pi(x) =$
$= ifeq?(\pi(x), [])$

Enqueue

$\pi(x) =$
$if(isQueEmpty?)\ then\ build(x, [])$
$elsebuild(Q, x)$
$pi(Q)\ \pi(x) = if(isQueEmpty?)\ then[]elseQ$

Head

$\pi(x) =$
$if(isQueEmpty?)\ then\ ERROR$
$else$
$\quad if\ isEmpty?(rest(x))\ then\ first(x)$
$\quad else\ head(\pi(x))$

Dequeue

$\pi(x) =$
$if(isQueEmpty?)\ then\ ERROR$
$else$
$\quad if\ !isEmpty?(rest(x))\ then\ build(first(x), dequeue(rest(x)))$
$\quad else\ [\ ]$

Beispiel 2

a)

Erste Iteration:

$$\omega(a) = 42 \tag{1}$$
$$I_{\mathcal{A}}(\omega, begin\, i := 0; while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{2}$$
$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega, I := 0), while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{3}$$

$$NE : \omega^1 \sim_i \omega,\ \omega^1(i) = I_{\mathcal{T}}(\omega, 0) = 0$$

$$= I_{\mathcal{A}}(\omega^1, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{4}$$

$$NR : I_{\mathcal{P}}(\omega^1, lt?(i, 0)) = lt?(I_{\mathcal{P}}(\omega^1, i), I_{\mathcal{P}}(\omega^1, 2)) = lt?(0, 2) = \top$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^1, begin\, i := 1; a := a + a\, end)\, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{5}$$
$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^1, i = i + 1)a := a + a)\, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{6}$$

$$NE : \omega^2 \sim_i w^1,\ \omega^2(i) = I_{\mathcal{T}}(\omega^1, plus(i, 1)) = plus(I_{\mathcal{T}}(\omega^1, i), I_{\mathcal{T}}(\omega^1, 1)) = plus(0, 1) = 1$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^2, a := a + a)\, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

$$NE : \omega^3 \sim_a \omega^2,\ \omega^3(a) = I_{\mathcal{T}}(\omega^2, plus(a, a)) = plus(I_{\mathcal{T}}(\omega^2, a), I_{\mathcal{T}}(\omega^2, a) = plus(42, 42) = 84$$

Zweite Iteration:

$$I_{\mathcal{A}}(\omega^3, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{9}$$

$$NR : I_{\mathcal{P}}(\omega^3, lt?(i, 0)) = lt?(I_{\mathcal{P}}(\omega^3, i), I_{\mathcal{P}}(\omega^3, 2)) = lt?(1, 2) = \top$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^3, begin\, i := 1; a := a + a\, end)\, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{10}$$
$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^3, i = i + 1)a := a + a)\, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{11}$$

$$NE : \omega^4 \sim_i w^3,\ \omega^4(i) = I_{\mathcal{T}}(\omega^3, plus(i, 1)) = plus(I_{\mathcal{T}}(\omega^3, i), I_{\mathcal{T}}(\omega^3, 1)) = plus(1, 1) = 2$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^4, a := a + a)\, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{12}$$

$$NE : \omega^5 \sim_a \omega^4,\ \omega^5(a) = I_{\mathcal{T}}(\omega^4, plus(a, a)) = plus(I_{\mathcal{T}}(\omega^5, a), I_{\mathcal{T}}(\omega^5, a) = plus(84, 84) = 168$$

$$= I_{\mathcal{A}}(\omega^5, while\, (i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{13}$$

$$NR : I_{\mathcal{P}}(\omega^5, lt?(i, 0)) = lt?(I_{\mathcal{P}}(\omega^5, i), I_{\mathcal{P}}(\omega^5, 2)) = lt?(2, 2) = \bot$$

$$= \omega^5 \tag{14}$$

b.)

Für diesen Beweis beginnen wir bei Zeile 10 der Auswertung aus *a.*) und substituieren $a := a + a$ mit α

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^2, \alpha)\, while\,(i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{15}$$

man beachte des Weiteren, dass hier bereits gilt $\omega^2(i) = 1$. Da α auf i weder zugreifen noch schreiben darf, muss für das Teilprogramm $while\,(i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}$ gelten, dass $\omega'(i) = 1$. Man werte nun besagte Teilfunktion unter dieser Annahme aus.

$$= I_{\mathcal{A}}(\omega',\ while\,(i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{16}$$

$$NR : I_{\mathcal{P}}(\omega', lt?(i, 0)) = lt?(I_{\mathcal{P}}(\omega', i), I_{\mathcal{P}}(\omega', 2)) = lt?(1, 2) = \top$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega', begin\, i := 1; \alpha\, end)\, while\,(i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{17}$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega', i = i + 1)\alpha)\, while\,(i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{18}$$

$$NE : \omega'' \sim_i \omega',\ \omega''(i) = I_{\mathcal{T}}(\omega', plus(i, 1)) = plus(I_{\mathcal{T}}(\omega', i), I_{\mathcal{T}}(\omega', 1)) = plus(1, 1) = 2$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega'', \alpha)\, while\,(i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{19}$$

Die obigen Schritte lassen sich nun ein weiters Mal wiederholen. Man betrachte wieder die Teilfunktion $while\,(i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}$

$$= I_{\mathcal{A}}(\omega'',\ while\,(i < 2)\, do\, Z_{4,5,6,7}) \tag{20}$$

$$NR : I_{\mathcal{P}}(\omega'', lt?(i, 0)) = lt?(I_{\mathcal{P}}(\omega'', i), I_{\mathcal{P}}(\omega'', 2)) = lt?(2, 2) = \bot$$

$$= \omega'' \tag{21}$$

Die Lösungen können nun rücksubstituiert werden.

$$= \omega'' \tag{22}$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega'', \alpha)\omega'') \tag{23}$$

$$= I_{\mathcal{A}} I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^2, \alpha)(\omega'', \alpha)\omega'') \tag{24}$$

ω'' enthält lediglich Information über i. Da kein weiterer Zugriff auf i mehr vorhanden ist, darf angenommen werden, dass $\omega^2(i) = \omega''(i) = 2$. Es gilt somit

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\omega^2, \alpha)\alpha) \tag{25}$$

Man betrachte nun die zweite gegebene Funktion und vereinfache soweit wie möglich.

$$= I_{\mathcal{A}}(\bar{\omega}, begin\, \alpha; \alpha\, end; i := 2) \tag{26}$$

$$NE : \bar{\omega}^1 \sim_i \bar{\omega}, \bar{\omega}^1 = bar\omega, i := 2 = \bar{\omega^1}(i) = 1$$

$$= I_{\mathcal{A}}(\bar{\omega}^1, begin\, \alpha; \alpha\, end) \tag{27}$$

$$= I_{\mathcal{A}}(I_{\mathcal{A}}(\bar{\omega}^1, \alpha)\alpha) \tag{28}$$

Es wurde gezeigt, dass sich die Interpretationsfunktionen beider Programme ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf dieselbe Funktion vereinfachen lassen. Des Weitern ist einfach zu erkennen, dass ω^2 und $\bar{\omega}^1$ ident sind. Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

Beispiel 3

a)

$\forall x\ eq?(timex(x, y), 0)$
$\rightarrow I_p(\omega, \underline{\forall x\ eq?(timex(x, y), 0}$
$\rightarrow \forall\omega, \omega' \sim x\ \omega' : I_p(\omega, \underline{\forall x\ eq?(times(x, y), 0)}$
$\rightarrow \forall\omega, \omega' \sim x\ \omega' : eq?(I_p(\omega, times(I_p(\omega', x), I_p(\omega', y))), I_p(\omega, 0))$
$\rightarrow \forall\omega, \omega' \sim x\ \omega' : eq?(\omega(\underline{times(\omega'(\underline{x}) * \omega(\underline{y}}))), \omega(\underline{0}))$

Wir vermuten, dass der semantische Status **gültig** ist. Um dies zu beweisen müssen wir eine Fallunterscheidung nach $\omega(y)$ machen.

$\omega(\underline{y}) = 0$
$eq?(times(\omega'(\underline{x}) * \omega(\underline{y})), 0)$
$eq?(0, 0)$
$\rightarrow TRUE$

$\omega(\underline{y}) = 1$
$eq?(times(\omega'(\underline{x}) * \omega(\underline{y})), 0)$
$eq?(1, 0)$
$\rightarrow FALSE$
Der Ausdruck ist **erfüllbar**.

b)

$\exists l\ eq?(first(l), l)\ \vee\ eq?(first(l), a)$
$\exists\omega', \omega \sim \underline{l}\ \omega' : I_p(\omega' eq?(first(l), l)\ \vee\ eq?(first(l), a))$
$\exists\omega', \omega \sim \underline{l}\ \omega' : (I_p\ \omega, eq?(first(l), l) \vee I_p(\omega, eq?(first(l), a))$
$\exists\omega', \omega \sim \underline{l}\ \omega' : (I_p\ \omega, eq?(I_p(\omega, first(I_p(\omega', l)), I_p(\omega, l)) \vee I_p(\omega, eq?(I_p(\omega, first(I_p(\omega', l)), I_p(\omega, a)))$
$\exists\omega', \omega \sim \underline{l}\ \omega' : (I_p\ \omega, eq?(\omega(\underline{first(I_p(\omega'(\underline{l})))}), \omega(\underline{l})) \vee I_p(\omega, eq?(\omega(\underline{first(I_p(\omega', (\underline{l}))}))), \omega(\underline{a})))$

Wir vermuten, dass der semantische Status **gültig** ist. Um dies zu beweisen müssen wir eine Fallunterscheidung nach $\omega(l)$ machen.

$\omega(\underline{l}) == nil$
$first([]) = []$
$eq?(first(I_p(\omega'(\underline{l}))), l) \rightarrow TRUE$

$\omega(\underline{l})! = nil$
$eq?(first(I_p(\omega'(\underline{l}))), a) \rightarrow TRUE$
Der Ausdruck ist **gültig**.

c)

$\forall x \forall y\ eq?(x,y) \rightarrow (ge?(x,y) \wedge\ ge?(y,x))$
$\rightarrow \forall \omega', \omega' \sim_{\underline{x,y}}\ \omega' : eq?(x,y) \rightarrow (ge?(x,y) \wedge\ ge?(y,x))$
$\rightarrow \forall \omega', \omega' \sim_{\underline{x,y}}\ \omega' : (I_p(\omega, eq?(x,y) \rightarrow I_p(\omega, ge?(x,y) \wedge\ ge?(y,x)))$
$\rightarrow \forall \omega', \omega' \sim_{\underline{x,y}}\ \omega' : (I_p(\omega, eq?(x,y) \rightarrow I_p(\omega, I_p(\omega, ge?(x,y) \wedge\ I_p(\omega, ge?(y,x))))$
$\rightarrow \forall \omega', \omega' \sim_{\underline{x,y}}\ \omega' : (I_p(\omega, eq?(I_p(\omega,x), I_p(\omega,y)) \rightarrow I_p(\omega, I_p(\omega, ge?(I_p(\omega,x), I_p(\omega,y) \wedge\ I_p(\omega, ge?(I_p(\omega,y), I_p(\omega,x))))$
$\rightarrow \forall \omega', \omega' \sim_{\underline{x,y}}\ \omega' : (I_p(\omega, eq?(\omega(\underline{x}), \omega(\underline{y})) \rightarrow I_p(\omega, I_p(\omega, ge?(\omega(\underline{x}), \omega(\underline{y}) \wedge\ I_p(\omega, ge?(\omega(\underline{y}), \omega(\underline{x}))))$

Wir vermuten, dass der semantische Status **gültig** ist. Um dies zu beweisen müssen wir eine Fallunterscheidung nach $\omega(x) \wedge \omega(y)$ machen.

$\omega(\underline{x}) == \omega(\underline{y})$
$eq?(\omega(\underline{x}), \omega(\underline{y})\ is\ TRUE$
$= TRUE$

$\omega(\underline{x})! = \omega(\underline{y})$
$eq?(\omega(\underline{x}), \omega(\underline{y})\ is\ FALSE$
$= TRUE$

Der Ausdruck ist **gültig**, da wenn x und y gleich sind der vordere Teil TRUE wird und das impliziert TRUE. Wenn x und y ungleich sind ist der vordere Teil FALSE und dies impliziert ebenfalls TRUE.