СБЕР УНИВЕРСИТЕТ

Школа Data analyst

Занятие 13

Статистический анализ

Тема 3

Disclaimer

Все формулировки далее нестрогие, за более строгими определениями обращайтесь к специализированной литературе

A/B тестирование

План занятия

- АБ тестирование
  - Общие слова
  - Статистические критерии

Общие слова

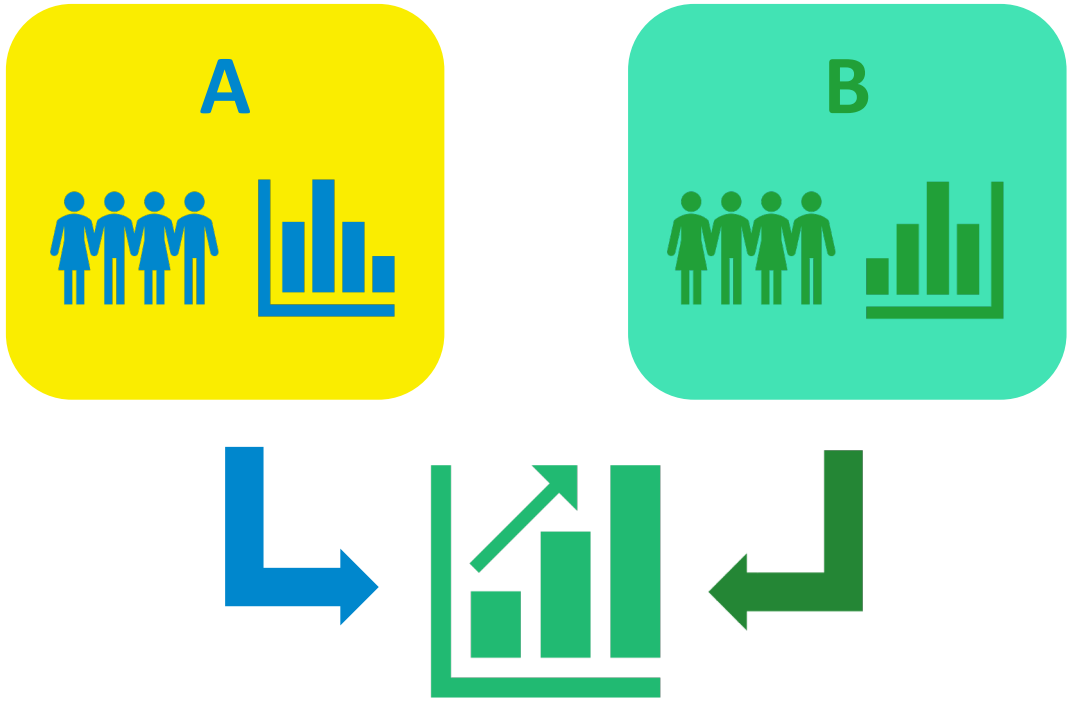
Что такое A/B тест?

Бизнес и процессы нуждаются в постоянном улучшении/изменении.
Откуда идеи ? – рынок, поведение пользователей, потребности, видение...

Как проверить идею?
Как выбрать успешные идеи достоверно и с минимальными затратами?

- Здравый смысл?
- Опросы?
- Фокус-группы?
- Экспертиза?
- Интуиция?
- Оккультные практики?

Что такое A/B тест?



Тестируется:

- Внешний вид (вкус, запах, тембр, пр.)
- Алгоритмы и их влияние
- Новая функциональность
- Пользовательский опыт
- …
- Ухудшения

Что такое A/B тест?

Планирование:

- описание теста
- группировка участников теста
- продолжительность
- пр.

Проверка гипотез

Метрики

Прежде чем начать тестирование, необходимо определиться с бизнес показателями по которым мы будем ориентироваться при принятии решений.

Что должно значимо улучшиться?

Например, “количество заказов”, “количество денег”, “количество клиентов” и т.д., и т.п..

Есть ли какие-то проблемы с такими метриками?
Как их корректно рассчитать?

Метрики

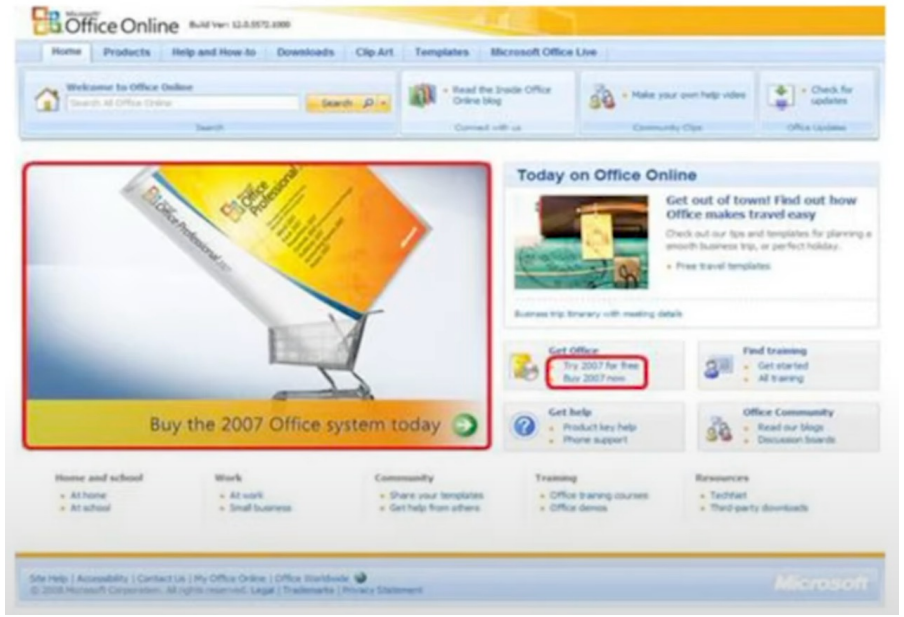
Proxy – метрики:
достаточно чувствительны и хорошо согласуются с бизнес показателями

Пример: *число уникальных пользователей или репостов в социальных сетях на сайте яхт-клуба*

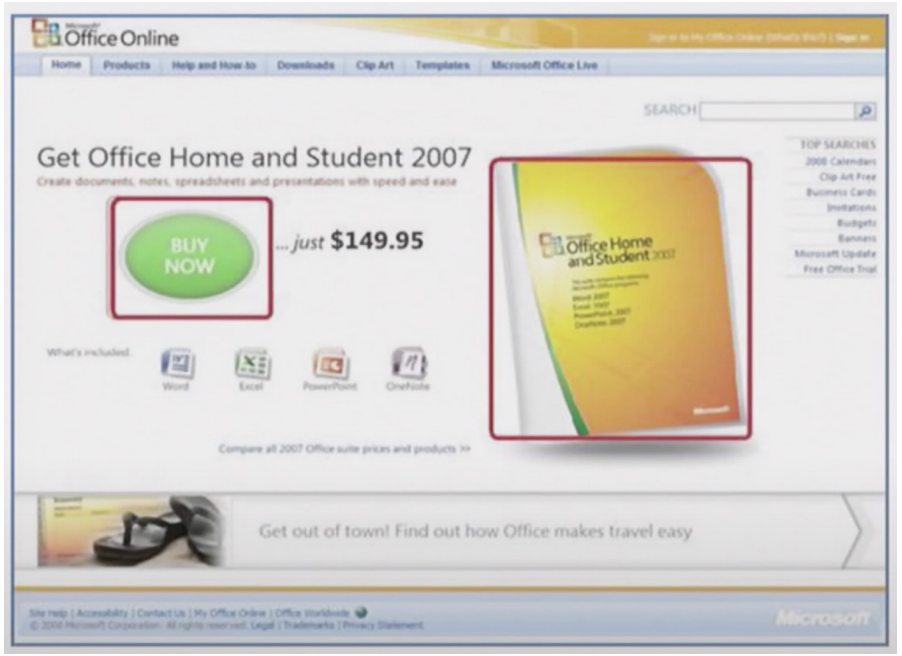
Виды метрик:
- Предварительные метрики (*до эксперимента*)
- Экспериментальные
- Бизнес-метрики

СБЕР

Метрики



vs



Объясняет ли фича конверсию?

Тестирование на исторических данных

Пример: Есть сайт пиццерии, на сайте есть регистрация, пользователи идентифицируются достаточно точно. Имеется также довольно внушительная история заказов пользователей, а также существующий алгоритм выдачи предложений по “сопутствующим товарам”, исходя из того, что заказывает пользователь. Допустим мы думаем над внедрением нового алгоритма. Какие показатели стоит измерить на исторических данных?

Дизайн эксперимента

- Как правильно выбрать пользователей?
  - Стратификация – снижаем дисперсию
  - Рандомизация – обеспечиваем репрезентативность
- Какие получены артефакты?
- А что если мы хотим провести несколько экспериментов одновременно?
  - Как оценить ошибку теста?

Дизайн эксперимента

- Как правильно выбрать пользователей?
  - Стратификация
  - Рандомизация
- А что если мы хотим провести несколько экспериментов одновременно?
  - Обычно лучше разбить на непересекающиеся группы
  - Не проводить взаимоисключающие эксперименты
  - В связных экспериментах продумывать последовательность вариантов
  - Подождать завершения другого эксперимента
  - Хорошо подумать над влиянием фичей друг на друга, оценить связанность метрик и запустить эксперимент на свой страх и риск
  - Скоринг

Дизайн эксперимента

- Скоринг
  - ROI
  - Видение продукта
  - Запросы обратной связи (исторические данные)
  - Гигиена (фича у всех есть но нам не нужна)
  - Wow-фактор
  - Сложность внедрения и поддержки

Устойчивость

- Видеть значимые изменения где они есть
- Не видеть значимых изменений где их нет

Устойчивость

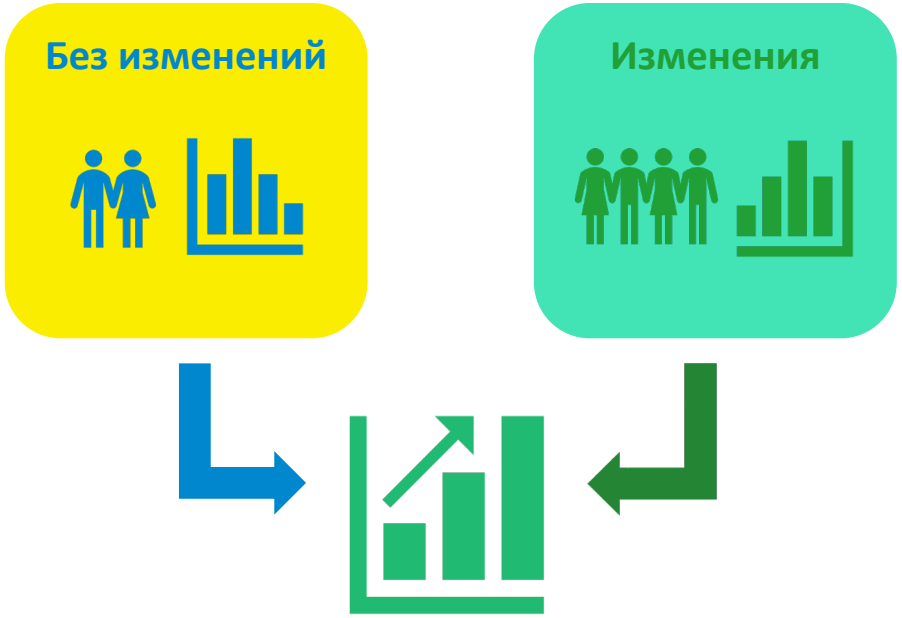
UC Berkeley case	Мужчины			Женщины		
Факультет	**Поступало**	**Поступило**	**%**	**Поступало**	**Поступило**	**%**
A	825	512	62, 1	108	89	82,4
B	560	353	63	25	17	68
C	325	120	36,9	593	202	34
D	417	138	33,1	375	131	34,9
E	191	53	27,8	393	94	23,9
F	272	16	5,9	341	24	7
Итого	**2590**	**1192**	**46**	**1835**	**557**	**30,4**

Устойчивость

		Пятница	Суббота	Всего
A	**Пользователи**	990 000	500 000	1 490 000
	Конверсии	20 000	5 000	25 000
	%	2.02	1.00	1. 68
B	**Пользователи**	10 000	500 000	510 000
	Конверсии	230	6 000	6 230
	%	2.30	1.20	1.22

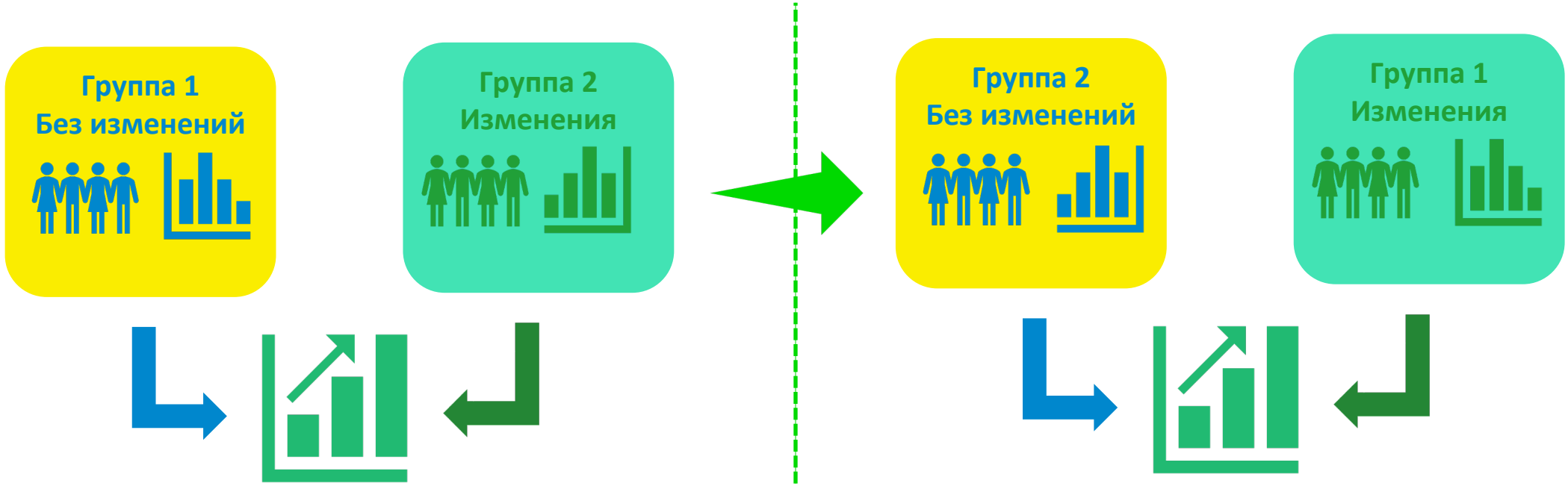
Устойчивость

Обратный эксперимент: часть пользователей не видит изменений



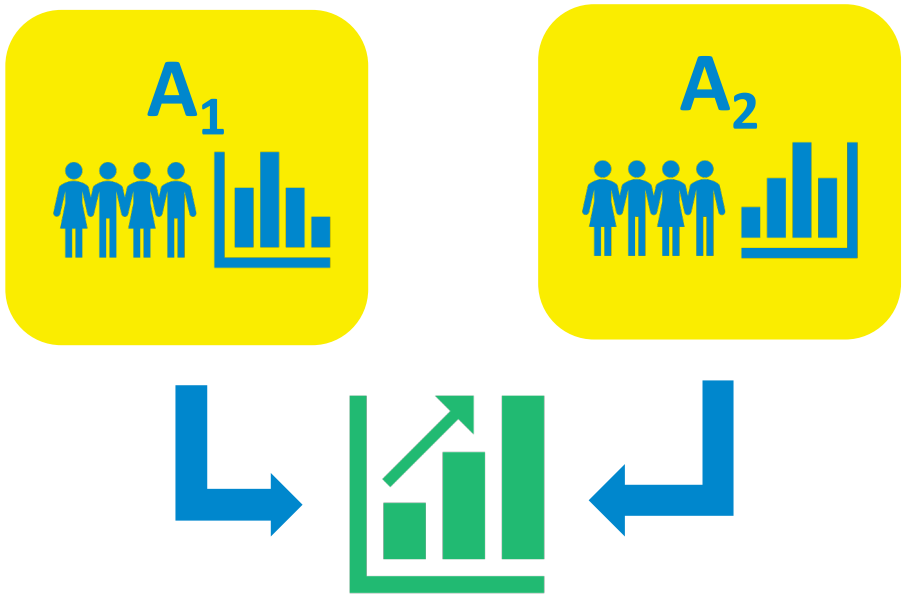
Устойчивость

Перекрестный эксперимент: группы пользователей чередуются



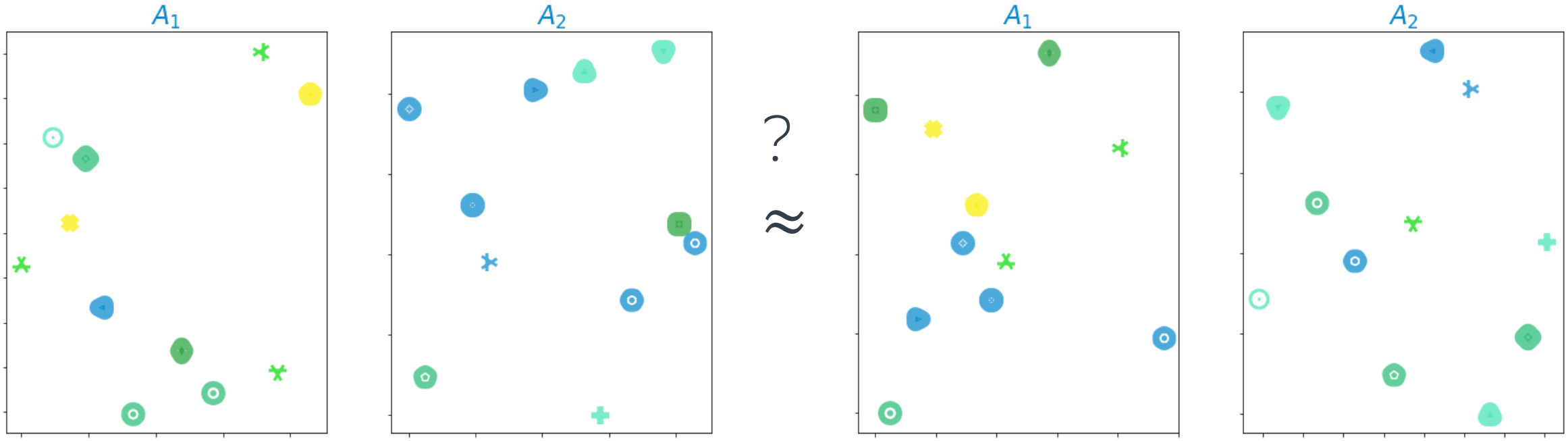
Устойчивость

AA-тест: AB-тест, но разным группам демонстрируется одно и то же решение



Устойчивость

AA-тест: использование ЦПТ (пост-стратификация)



Устойчивость

AAB-тест: совмещенный AA и AB-тесты

Проведение эксперимента

- Сбор метрик и артефактов в соответствии с дизайном эксперимента

Анализ

- Анализ собранных данных
- Подготовка статистических выводов с использованием релевантных методов анализа
- Принятие решения о завершении или продолжении теста

Статистические критерии

Объём выборки

- Минимальный размер эффекта **mde**
- Допустимые вероятности ошибок 1-ого и 2-ого рода
- Статистические инструменты
- Продолжительность теста

Число участников/событий ➔ On-line калькуляторы, например:
https://raschitat-online.ru/raschet-doveritelnogo-intervala/ *+ формулы*
https://socioline.ru/rv.php
https://fdfgroup.ru/poleznaya-informatsiya/stati/vyborka-tipy-vyborok-raschet-oshibki-vyborki/

Ошибки 1-ого и 2-ого рода

		Верная гипотеза	
		H_0	H_1
Ответ теста	H_0	H_0 принята	H_0 неверно принята (ошибка 2-ого рода, β): вероятность получить имеющиеся данные довольно высока при истинности H_0
	H_1	H_0 неверно отвергнута (ошибка 1-ого рода, α): вероятность получить имеющиеся данные при истинности H_0 слишком мала	H_0 отвергнута

Ошибки 1-ого и 2-ого рода

Ошибка 1-ого рода критичнее

Вероятность ошибки первого рода $\boldsymbol{P(H_0\ \text{отв.}\ |H_0\ \text{вер.})}$ жестко ограничивается

$$P(H_0\ \text{отвергнута}\ |H_0\ \text{верна}) = P(p \leq \alpha|H_0) \leq \alpha$$

Вероятность ошибки второго рода $\boldsymbol{P(H_0\ \text{принимаем}\ |H_1\ \text{вер.})}$ мягко минимизируется

$$pow = P(H_0\ \text{отвергнута}\ |H_1\ \text{верна}) = 1 - P(H_0\ \text{принимаем}\ |H_1\ \text{верна})$$

p-value

Достигаемый уровень значимости — это вероятность при справедливости нулевой гипотезы получить такое же значение статистики, как в эксперименте, или ещё более экстремальное

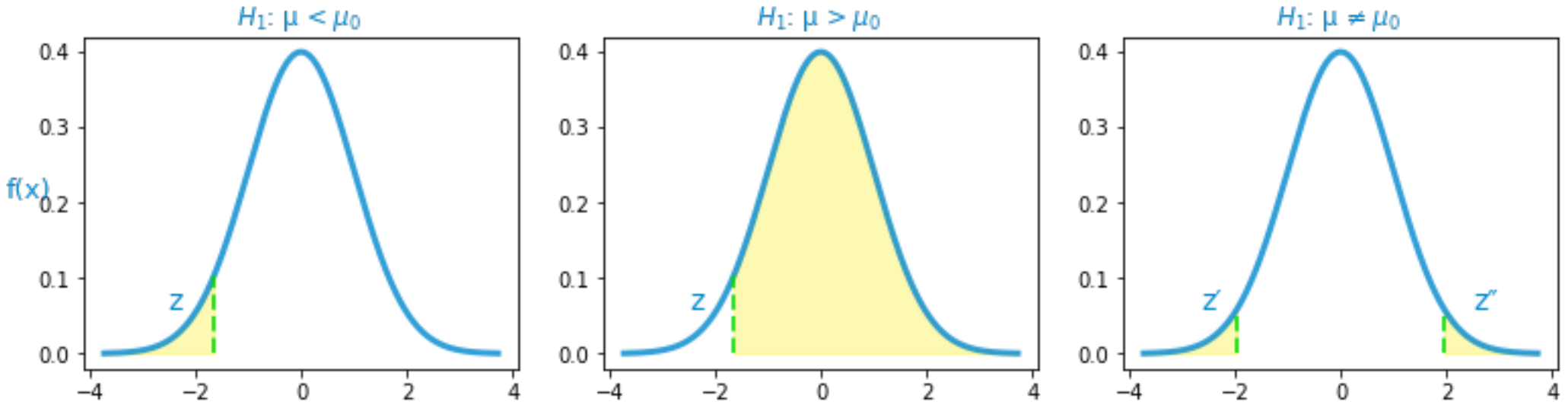
Чем ниже p тем сильнее данные свидетельствуют против H_0 в пользу H_1

$$T(X) = t$$

$$p = \mathbb{P}(T \geq t | H_0)$$

p-value

$$p = F_{N(0,1)}(z) \qquad p = 1 - F_{N(0,1)}(z) \qquad p = 2 * (1 - F_{N(0,1)}(|z|))$$



Размер эффекта

p-value?

Какова вероятность верного предсказания?
Насколько различаются суммы в чек
и т.д.

Важно:

Выборка данных формируется случайно

Оценка размера эффекта по выборке это случайная величина

p показывает вероятность случайного получения такой оценки

p-value зависит от размера эффекта и размера выборки

На малых выборках эффект менее заметен, H_0 не отвергается

Еще раз про объём выборки

- Минимальный размер эффекта mde = p*эффект
- Допустимые вероятности ошибок 1-ого и 2-ого рода $\alpha = 0.05$
- Статистические инструменты
- Продолжительность теста

Конверсия 10%, нужно найти объем выборки N для фиксации эффекта 7%:

$$N = \frac{p(1-p)*z^2}{mde^2} = \frac{0.1(1-0.1)*1.96^2}{(0.1*0.07)^2} = 7056$$

Вопросы по α (или p-value)

Определяет ли α вероятность справедливости нулевой гипотезы H_0?

p-value – это такое значение статистики при справедливой H_0 с вероятностью α?

Отсутствуют ли различия между группами при $p\text{-}value > 0.05$?

Имеет ли результат практическое значение?

Распределения, производные от нормального

$X_1, X_2 \dots X_k \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim \chi_k^2$$

$X_1 \sim N(0,1)$

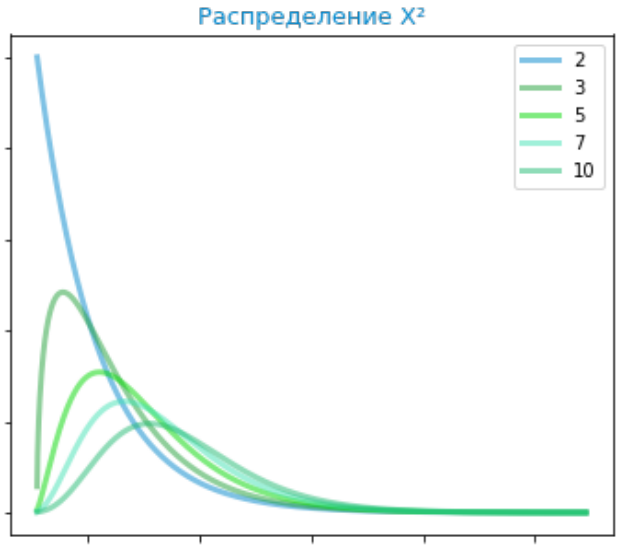
$X_2 \sim \chi_k^2$

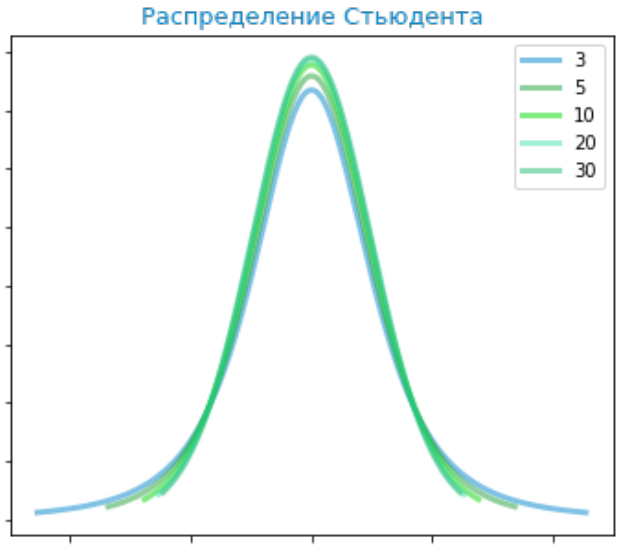
$$X = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/k}} \sim St(k)$$

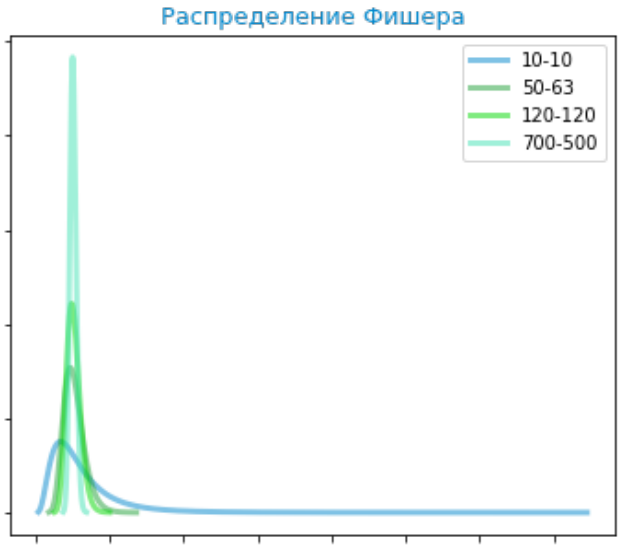
$X_1 \sim \chi_{k_1}^2$

$X_2 \sim \chi_{k_2}^2$

$$X = \frac{X_1/k_1}{X_2/k_2} \sim F(k_1, k_2)$$







Распределения, производные от нормального

$$X_1, X_2 \dots X_n \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow X^n = (X_1, X_2 \dots X_n)$$

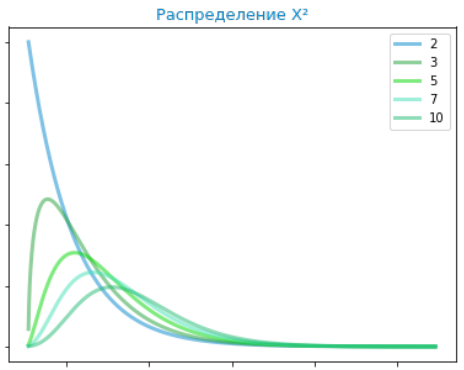
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

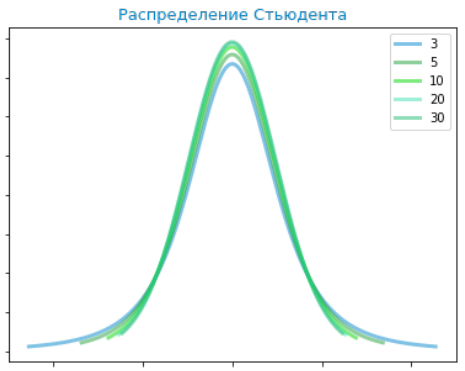
$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 \Rightarrow \boldsymbol{\chi^2_{n-1}}$$

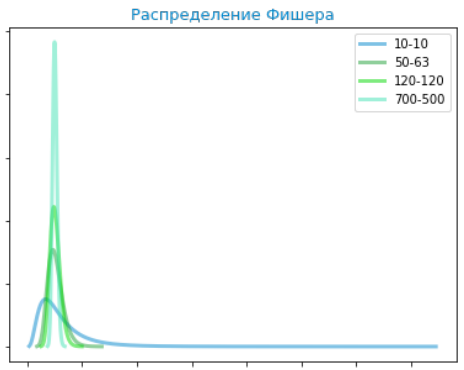
$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \sim St(n-1)$$

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \rightarrow X_1^{n_1}$$
$$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \rightarrow X_1^{n_2}$$

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$







Статистические критерии

Для среднего:

- Данные распределены нормально? Известна дисперсия → z-критерий
- Дисперсия неизвестна → t-критерий (при большом количестве данных можно использовать квантили нормального распределения)

Для частоты:

- Критерий согласия Пирсона (Хи-квадрат)

Для дисперсии:

- Среднее известно → критерий Хи-квадрат
- Неизвестно → критерий Фишера (z-критерий)

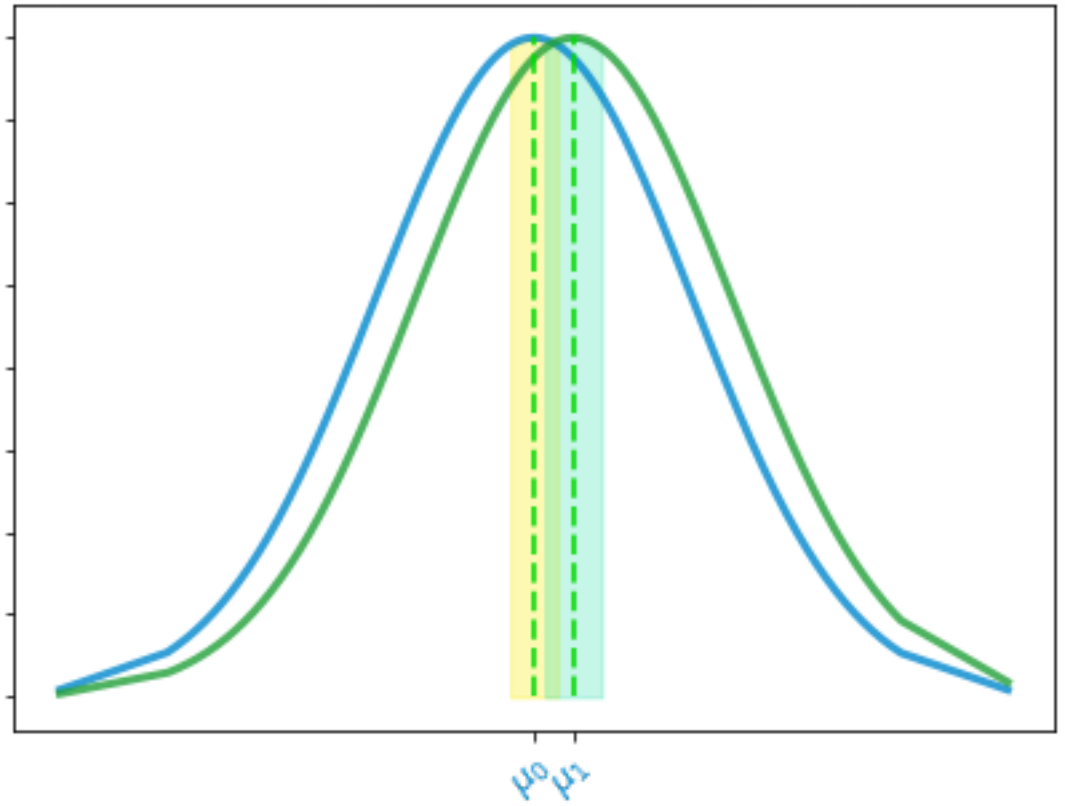
Статистические критерии

Одновыборочный критерий Стьюдента

Сравнение непрерывных величин

Среднее/Медиана/Мода, $\boldsymbol{\sigma^2 - \text{известна}}$

Выборка:	$\boldsymbol{X^n} = (X_1, \dots, X_n)$, $X \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2})$
Нулевая гипотеза:	H_0: $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$
Альтернатива:	H_1: $\boldsymbol{\mu}$ <≠> $\boldsymbol{\mu_0}$
Статистика:	$Z(X^n) = \dfrac{X_i - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
Нулевое распределение:	$Z(X^n) = N(0,1)$



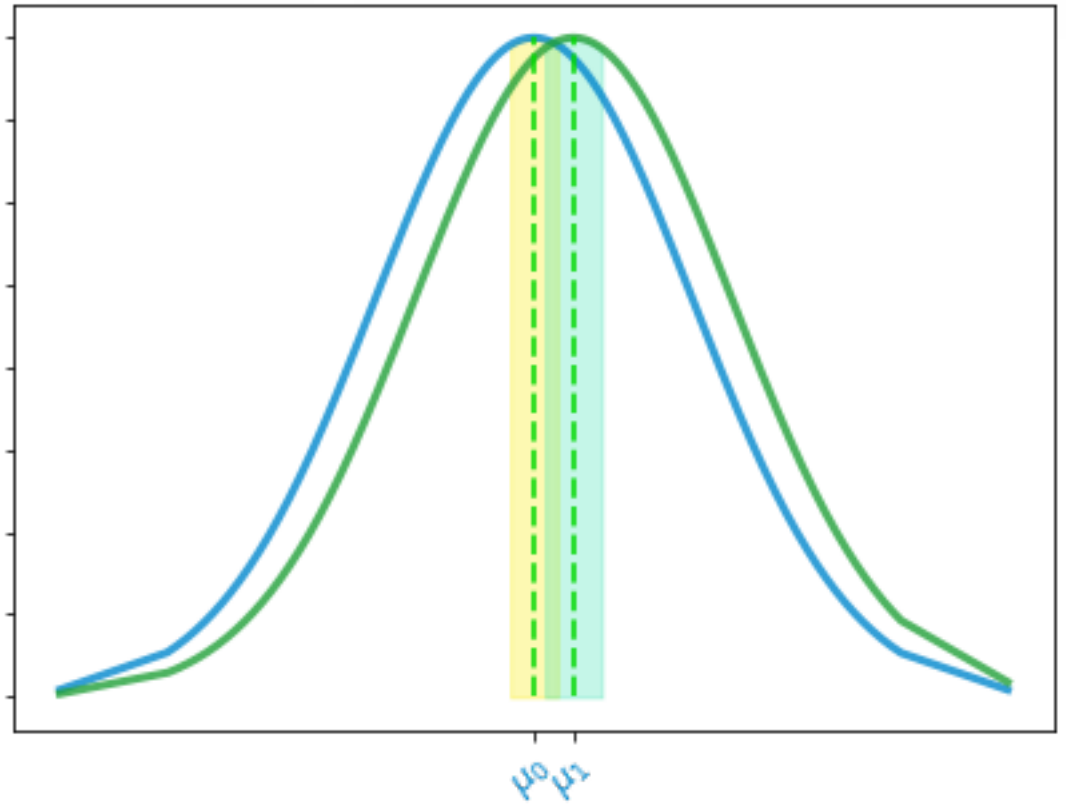
Статистические критерии

Одновыборочный критерий Стьюдента

Сравнение непрерывных величин

Среднее/Медиана/Мода, $\boldsymbol{\sigma^2 - \text{неизвестна}}$

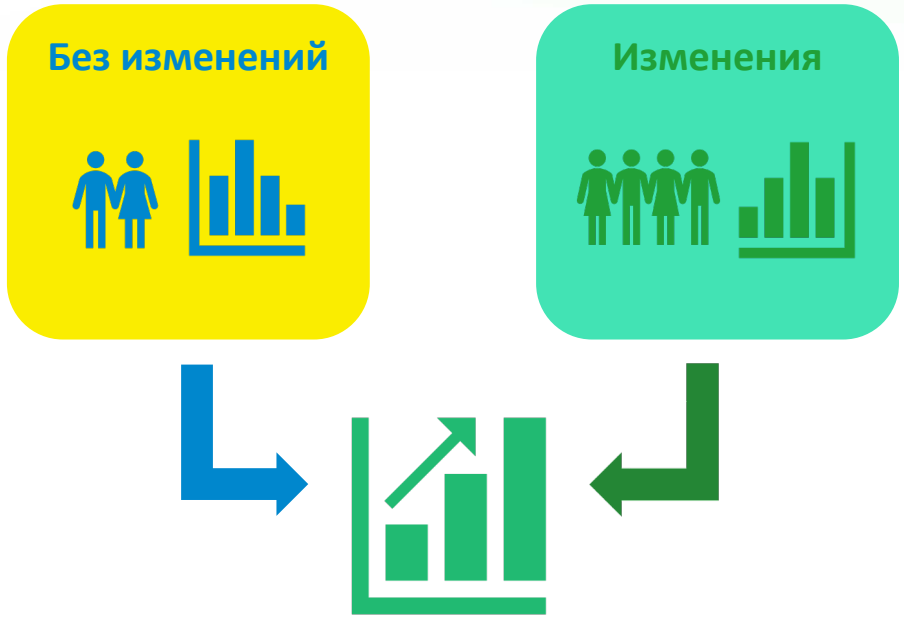
Выборка:	$\boldsymbol{X^n} = (X_1, \dots, X_n)$, $X \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2})$
Нулевая гипотеза:	H_0: $\boldsymbol{\mu = \mu_0}$
Альтернатива:	H_1: $\boldsymbol{\mu}$ <≠> $\boldsymbol{\mu_0}$
Статистика:	$T(X^n) = \frac{X_i - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$
Нулевое распределение:	$T(X^n) \sim St(n-1)$



Статистические критерии

Двухвыборочный критерий Стьюдента
Независимые выборки, Z - критерий

Выборки:	$\boldsymbol{X}_1^{n_1} = (X_{1\,1}, \dots, X_{1\,n1})$, $\boldsymbol{X}_2^{n_2} = (X_{2\,1}, \dots, X_{2\,n2})$ $X_1 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\sigma_1}^2), X_2 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu_2}, \boldsymbol{\sigma_2}^2)$
Нулевая гипотеза:	$H_0: \boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$
Альтернатива:	$H_1: \boldsymbol{\mu_1} <\neq> \boldsymbol{\mu_2}$
Статистика:	$Z\left(\boldsymbol{X}_1^{n_1}, \boldsymbol{X}_2^{n_2}\right) = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{\sigma_1}^2}{n_1} + \dfrac{\boldsymbol{\sigma_2}^2}{n_2}}}$
Нулевое распределение:	$Z\left(\boldsymbol{X}_1^{n_1}, \boldsymbol{X}_2^{n_2}\right) = N(0,1)$

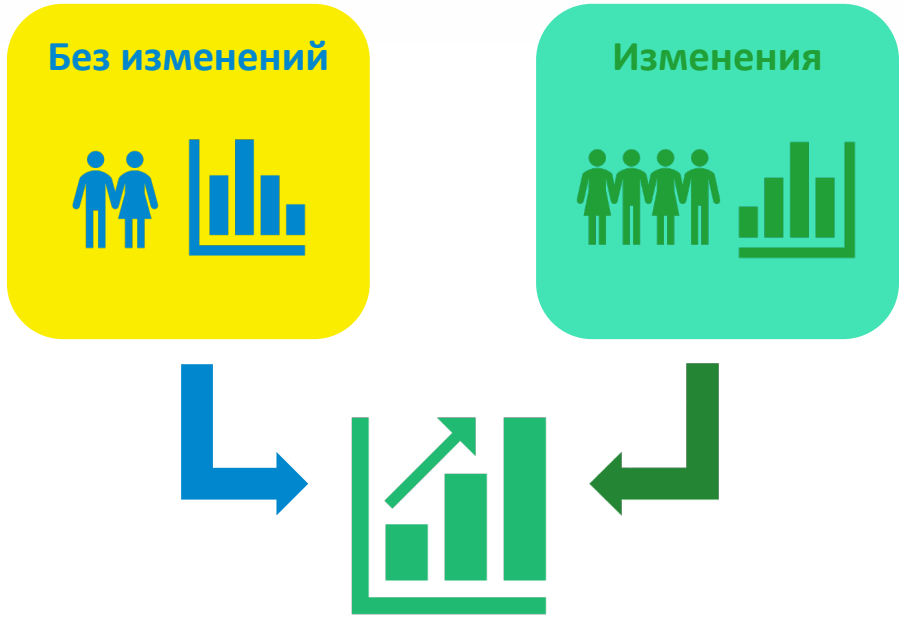


$\boldsymbol{\sigma_1 < \sigma_2}$
$\boldsymbol{n_1 < n_2}$

Статистические критерии

Двухвыборочный критерий Стьюдента
Независимые выборки, Т - критерий

Выборки:	$\boldsymbol{X}_1^{n_1} = (X_{1\,1}, \dots, X_{1\,n1})$, $\boldsymbol{X}_2^{n_2} = (X_{2\,1}, \dots, X_{2\,n2})$
	$X_1 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\sigma_1}^2), X_2 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu_2}, \boldsymbol{\sigma_2}^2)$
Нулевая гипотеза:	$H_0: \boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$
Альтернатива:	$H_1: \boldsymbol{\mu_1} <\neq> \boldsymbol{\mu_2}$
Статистика:	$\mathrm{T}\left(\boldsymbol{X}_1^{n_1}, \boldsymbol{X}_2^{n_2}\right) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{n_1} + \frac{S_2^{\,2}}{n_2}}}$
Нулевое распределение:	$T\left(\boldsymbol{X}_1^{n_1}, \boldsymbol{X}_2^{n_2}\right) \approx \sim St(v)$



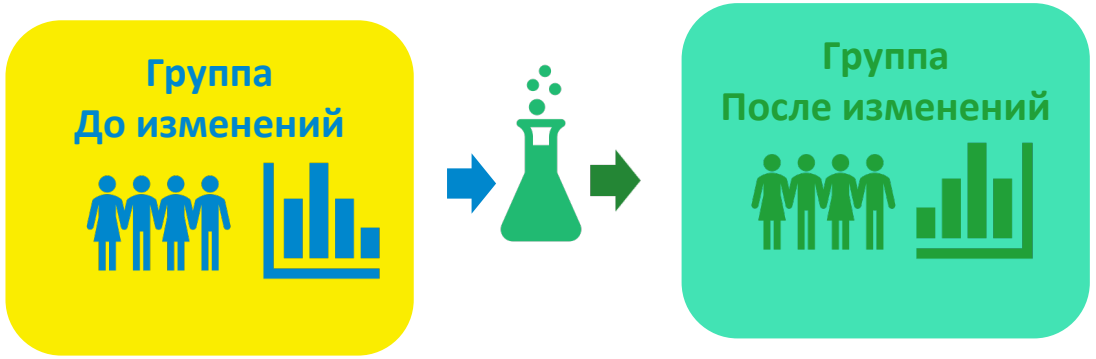
$\boldsymbol{S_1} < S_2$

$\boldsymbol{n_1 < n_2}$

Статистические критерии

Двухвыборочный критерий Стьюдента
Связанные выборки, T - критерий

Выборки:	$\boldsymbol{X}_1^n = (X_{1\,1}, \dots, X_{1\,n})$, $\boldsymbol{X}_2^n = (X_{2\,1}, \dots, X_{2\,n})$
Нулевая гипотеза:	$X_1 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\sigma_1^2}), X_2 \sim \boldsymbol{\mathcal{N}}(\boldsymbol{\mu_2}, \boldsymbol{\sigma_2^2})$ $H_0: \boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\mu_2}$
Альтернатива:	$H_1: \boldsymbol{\mu_1} <\neq> \boldsymbol{\mu_2}$
Статистика:	$T\left(\boldsymbol{X}_1^n, \boldsymbol{X}_2^n\right) = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S/\sqrt{n}}$
Нулевое распределение:	$T\left(\boldsymbol{X}_1^n, \boldsymbol{X}_2^n\right) \sim St(n-1)$



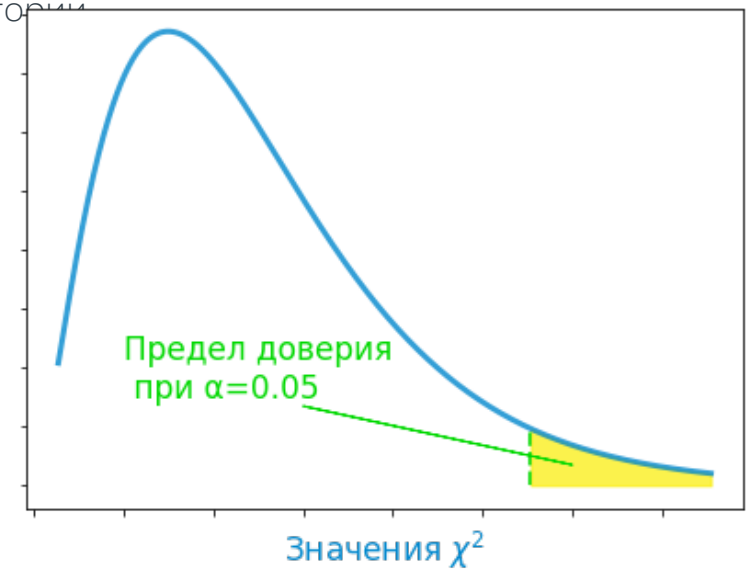
$^* S = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n}(D_i - \bar{D})^2}{n-1}}$, $D_i = X_{1i} - X_{2i}$

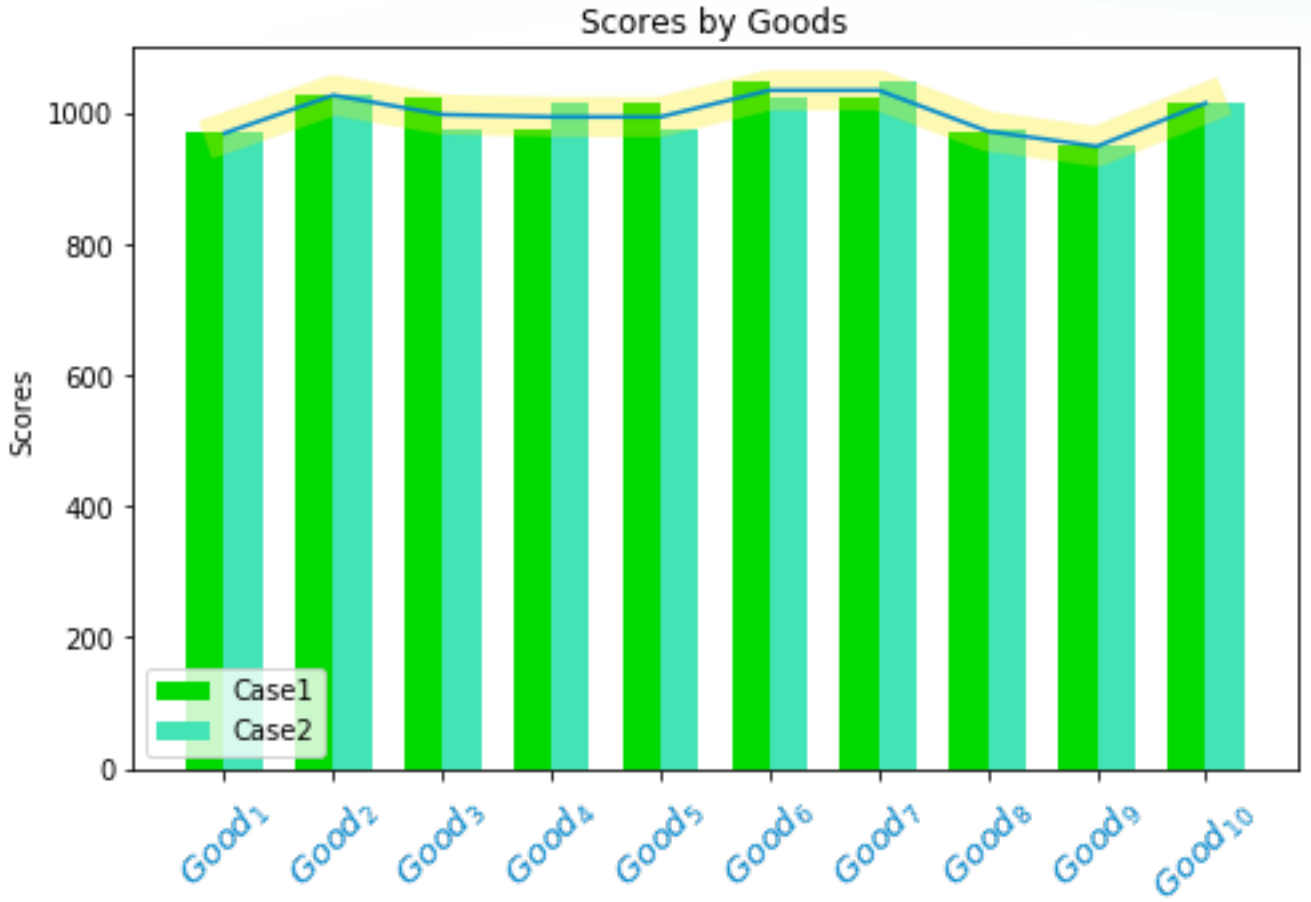
Статистические критерии

Сравнение дискретных величин

Критерий согласия Пирсона χ^2

Работает при большом количестве значений в каждой категории

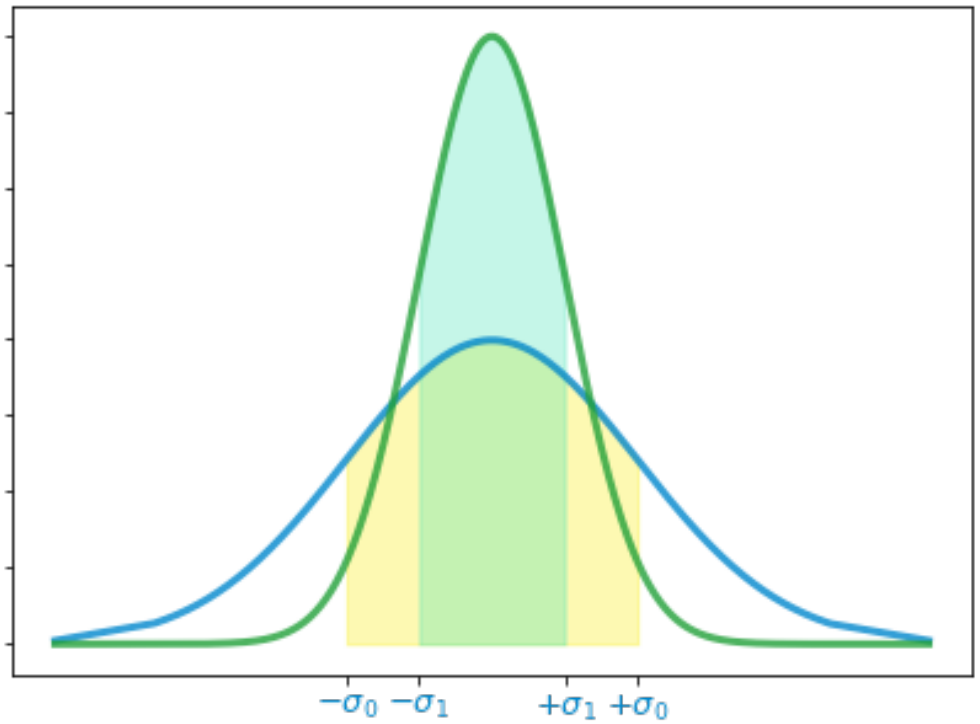


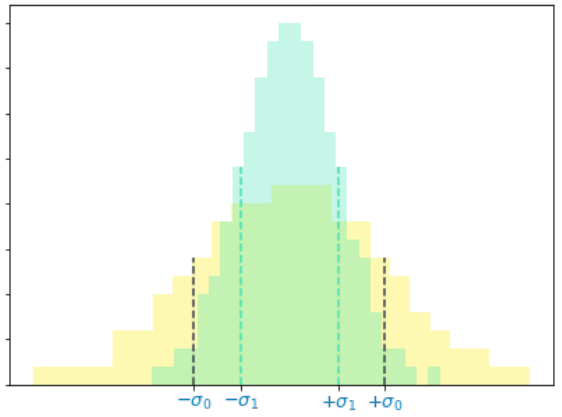


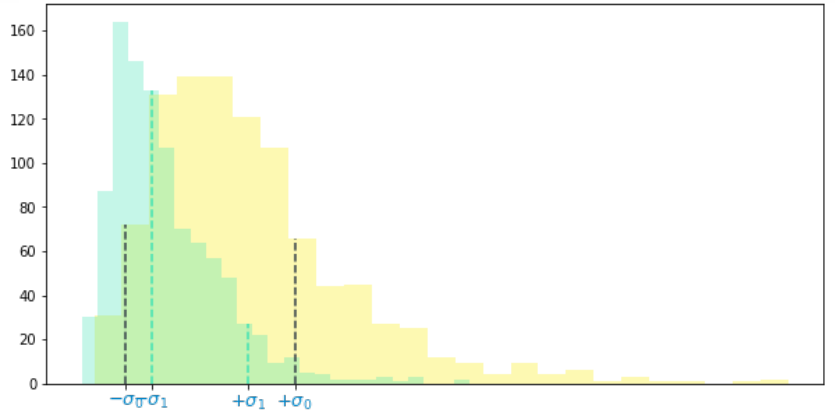
Статистические критерии

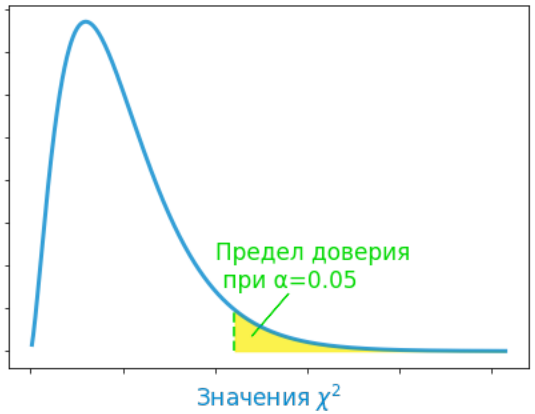
Сравнение непрерывных величин

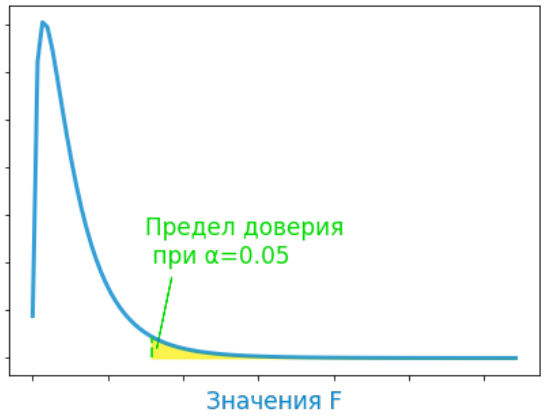
Дисперсия/Разброс











Как не обмануть себя

- Не верить
  - Ждать
  - Проводить обратный эксперимент
  - Не делать АБ тест без предварительного АА теста
  - Использовать статистику!
    - Определиться с размером ожидаемого эффекта
    - Допустимые вероятности ошибок 1-ого и 2-ого рода
    - Грамотно выбирать статистические критерии
- Не забывать правило Паретто

Механизм проверки гипотез

Гипотеза - данные - вывод

Прежде чем что-то сравнивать выдвигают конструктивную гипотезу, которую хочется проверить.

Например,

- препараты X и Y по-разному влияют на кровяное давление больных
- продолжительность лекции влияет на успеваемость студента
- постановка вопроса влияет на ответ респондента

На полученных данных мы пытаемся делать выводы об истинности или ложности выдвигаемой гипотезы

Гипотеза - данные - вывод

Нужно помнить, что проверка статистической гипотезы имеет вероятностный характер.

Точно также, мы не можем быть уверены на все 100, что параметр, оцениваемый по конечной выборке совпадает с реальным значением параметра в генеральной совокупности (вспоминаем доверительные интервалы).

Гипотеза

Статистическая гипотеза — предположение о виде распределения и свойствах случайной величины, которое можно подтвердить или опровергнуть применением статистических методов к данным выборки.

Гипотеза

Пусть в эксперименте наблюдается случайная величина X, распределение которой P полностью или частично неизвестно. Любое утверждение относительно P называют статистической гипотезой. Гипотезы бывают простые и сложные.

- Если гипотеза однозначно определяет P, т.е H: $\{P = P_0\}$, где P_0 это какой-то конкретный закон (например, нормальное распределение с параметрами 0 и 1), то гипотеза **простая**.
- Если же гипотеза утверждает, что P относится к семейству распределений, то гипотеза **сложная** (например, гипотеза о том, что данные распределены нормально, без фиксации параметров).

Общий фреймворк проверки гипотез: шаг 1

Формулировка основной гипотезы H_0 и конкурирующей гипотезы H_1.

Общий фреймворк проверки гипотез: шаг 2

Задание уровня значимости α (или p-value), на котором в дальнейшем и будет сделан вывод о справедливости гипотезы. Он равен вероятности допустить *ошибку первого рода* H_0.

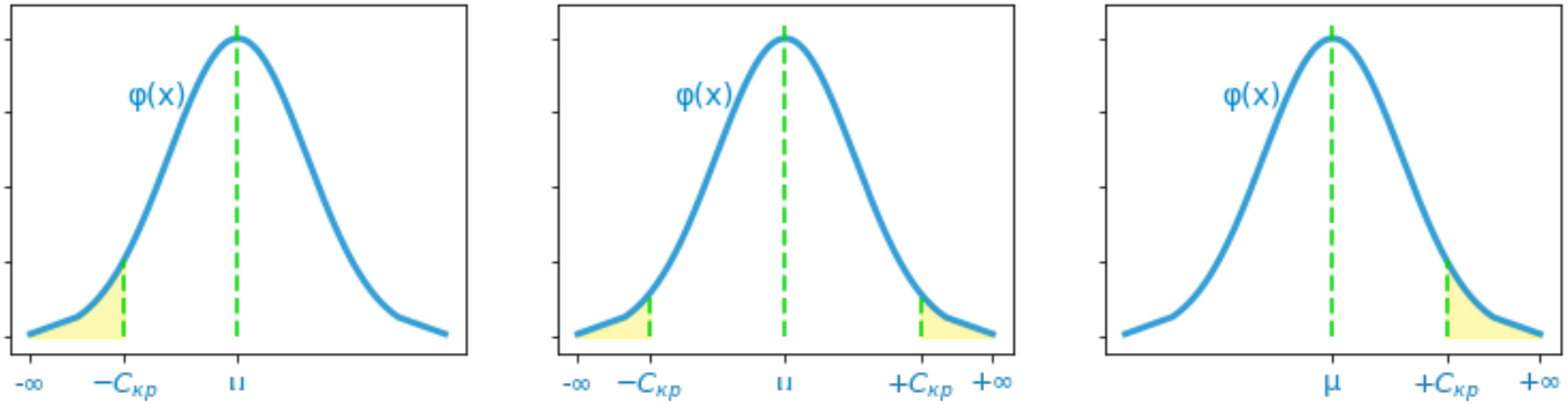
Общий фреймворк проверки гипотез: шаг 3

Расчёт статистики φ критерия такой, что:

- её величина зависит от исходной выборки $\boldsymbol{X^n} = (X_1, \ldots, Xn)$ $\boldsymbol{\varphi} = \varphi(X_1, \ldots, Xn)$
- по её значению можно делать выводы об истинности гипотезы H_0
- статистика $\boldsymbol{\varphi}$, как функция случайной величины $\boldsymbol{X}$, также является случайной величиной и подчиняется какому-то закону распределения

Общий фреймворк проверки гипотез: шаг 4

Построение критической области. Из области значений φ выделяется подмножество C таких значений, по которым можно судить о существенных расхождениях с предположением. Его размер выбирается таким образом, чтобы выполнялось равенство $P(\varphi \in C) = \alpha$. Это множество C и называется критической областью.



Общий фреймворк проверки гипотез: шаг 5

Вывод об истинности гипотезы. Наблюдаемые значения выборки подставляются в статистику φ и по попаданию (или непопаданию) в критическую область C выносится решение об отвержении (или принятии) выдвинутой гипотезы H_0.

Итого

Выборка:	$\boldsymbol{X^n} = (X_1, \dots, X_n)$, $X \sim \boldsymbol{P}$
Нулевая гипотеза:	H_0: $\boldsymbol{P} \in \omega$
Альтернатива:	H_1: $\boldsymbol{P} \notin \omega$
Статистика:	$T(X_n)$, $T(X_n) \sim F(x)$ при H_0 $T(X_n) \nsim F(x)$ при H_1

Формализация конструктивной гипотезы

Пример с препаратами.

H_0: Реальная разность между средними значениями давлений в двух группах равна 0 ($\mu_0 - \mu_1 = 0$)

H_1: Реальная разность между средними значениями давлений в двух группах не равна 0 ($\mu_0 - \mu_1 \neq 0$)

Рассмотрим следующую задачу

В десятизначной записи числа Пи среди 10000 первых десятичных знаков после запятой цифры 0, 1,..., 9 встречаются соответственно **h**=(968, 1026, 1021, 972, 1014, 1046, 1021, 970, 948, 1014) раз. Можно ли при уровне значимости 0.05 (величина ошибки 1-го рода) считать эти цифры случайными?

СБЕР

Практика? Практика!

p-value

Про p-value habr: *Если я живу в мире, где время доставки пиццы составляет 30 минут или меньше (нулевая гипотеза верна), насколько неожиданными являются мои доказательства в реальной жизни?*

p-value отвечает на этот вопрос числом — вероятностью.

$$T(X) = t$$

$$p = \mathbb{P}(T \geq t | H_0)$$

СБЕР

Практика? Практика!

Размер эффекта

Размер эффекта — степень отклонения данных от нулевой гипотезы.

Примеры:

- Вероятность верного предсказания
- Вероятность выздоровления пациента
- Увеличение среднего чека

Ошибки 1/2-ого рода и размер эффекта

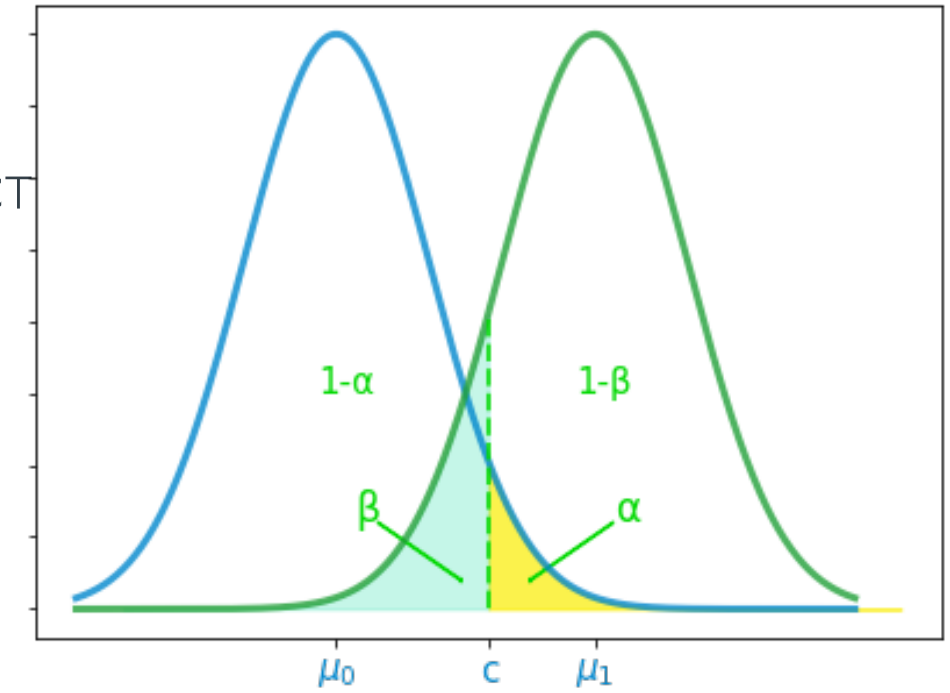
$\mu_1 - \mu_0$ размер эффекта

α ошибка первого рода (или уровень значимост

β ошибка второго рода

1 - **β** мощность критерия

c порог принятия решения



Ошибки 1/2-ого рода и размер эффекта

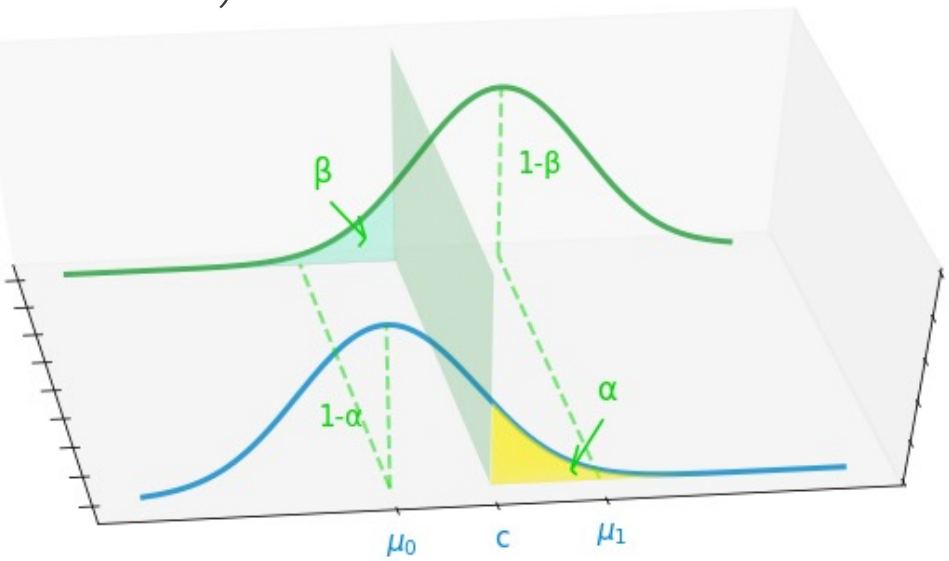
$\mu_1 - \mu_0$ размер эффекта

α ошибка первого рода (или уровень значимости)

β ошибка второго рода

1 - **β** мощность критерия

c порог принятия решения



СБЕР

Практика? Практика!

Резюме

Обсудили что такое АБ тестирование, и общие принципы при его проведении
Обсудили работу статистических критериев — механизма при принятии решения

Обратная связь

?

СБЕР

Спасибо за внимание!