Chương 02

Bài 6. VECTO & CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

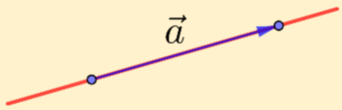
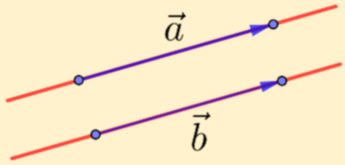
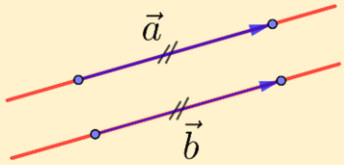
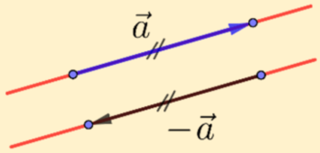
A Lý thuyết

1. Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau; vectơ-không.

Định nghĩa:

» ***Vectơ trong không gian*** là một đoạn thẳng có hướng.

» ***Độ dài của vectơ*** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $|\vec{a}|$.

» ***Giá*** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.	
» Hai vectơ ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.	
» Hai vectơ ***bằng nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.	
» Hai vectơ ***đối nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.	

» ***Vectơ - không*** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Chú ý

» Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.

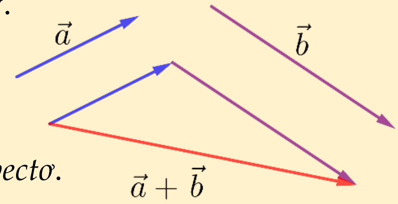
» Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Định nghĩa tổng hai vectơ:

Trong không gian, cho hai vecto $\vec{a},\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

- Vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.Vecto $\overrightarrow{AC}$ là *tổng của hai vecto* $\vec{a},\vec{b}$.
- Ký hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$.
- Phép lấy tổng của hai vecto còn được gọi là *phép cộng vectơ*.



Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

» Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

» Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

» Với mọi vecto $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$.

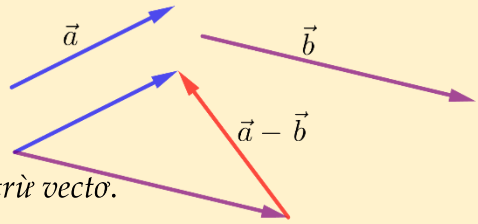
Chú ý

» Từ tính chất kết hợp, ta xác định được tổng ba vecto $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$.

Định nghĩa hiệu hai vectơ:

Trong không gian, cho hai vecto $\vec{a},\vec{b}$.

- Hiệu của hai vecto $\vec{a};\vec{b}$ là vecto $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.
- Kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vecto còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

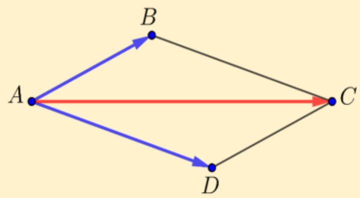


Các quy tắc

✓ ***Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:***

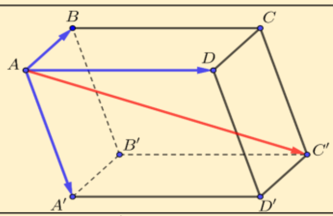
» Với ba điểm A,B,C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

» Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



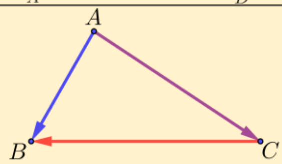
✓ ***Quy tắc hình hộp:***

» Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



✓ ***Quy tắc hiệu:***

» Với ba điểm A,B,C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.



3. Tích của một số với một vectơ

Định nghĩa:

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ.
- Ký hiệu là $k\vec{a}$.
- Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là *phép nhân một số với một vectơ*.
  - » Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,
  - » Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$
  - » Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
  Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
- Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.

Tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số
- Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Chú ý

» Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

» $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2; \vec{u}^2 \geq 0, \vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

» Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

» Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

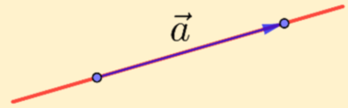
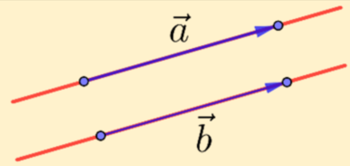
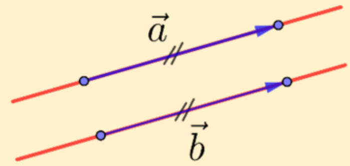
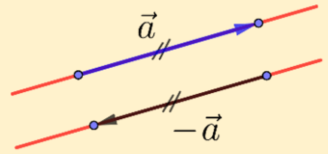
B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Sử dụng các định nghĩa

Phương pháp

» ***Vectơ trong không gian*** là một đoạn thẳng có hướng.

» ***Độ dài của vectơ*** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $|\vec{a}|$.

» ***Giá*** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.	
» Hai vectơ ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.	
» Hai vectơ ***bằng nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.	
» Hai vectơ ***đối nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.	

» ***Vectơ - không*** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Ví dụ 1.1.

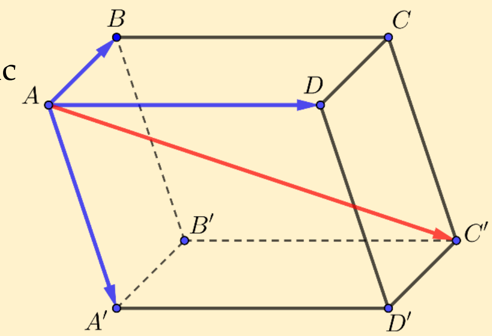
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp. Hãy chỉ ra những vectơ:

(1) Cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(2) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(3) Ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.



Lời giải

....

....

....

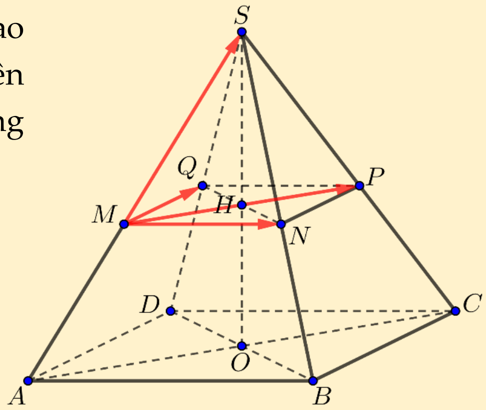
....

....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a và đường cao h. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và O, H lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, MNPQ$.

Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MS}$ theo a và h.



Lời giải

....
....
....
....
....

Dạng 2. Tổng và hiệu của hai vectơ

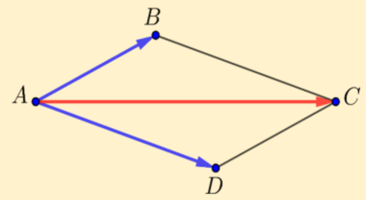
Phương pháp

⁂ Các quy tắc:

✓ ***Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:***

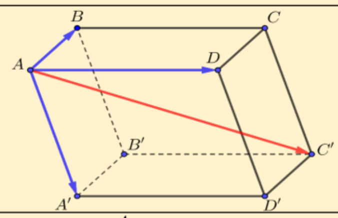
» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

» Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



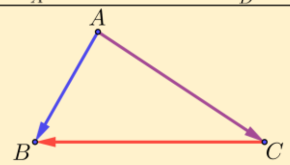
✓ ***Quy tắc hình hộp:***

» Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



✓ ***Quy tắc hiệu:***

» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tìm độ dài của các vectơ sau:

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$; (2) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Lời giải

....

....

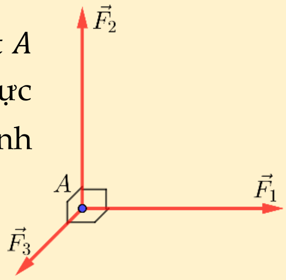
....

....

....

Ví dụ 2.4.

Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt là $10N, 8N$ và $5N$. Xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

....

....

....

....

....

Dạng 3. Tích của một số với một vectơ

Phương pháp

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ. Ký hiệu là $k\vec{a}$. Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

  » Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, » Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

⁂ Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta luôn có

(1) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (2) $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ (3) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$

(4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (5) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

(6) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

(7) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$..

⁂ **Hệ quả:**

(1) I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, với mọi điểm O.

(2) G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, với mọi điểm O.

Ví dụ 3.1.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm đoạn thẳng AG. Chứng minh rằng:

(1) $3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;

(2) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC, điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$

(1) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.;

(2) Tìm x và y sao cho $MN//BD'$, khi đó tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

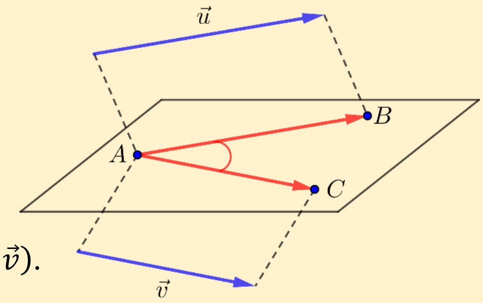
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Tích vô hướng và góc của hai vectơ

Phương pháp

⁂ Góc giữa hai vectơ:



Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì,

  Gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

  Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.

⁂ Tích vô hướng hai vectơ:

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số. Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

  Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

⁂ Chú ý:

(1) $0° \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180°$

(2) Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.

(3) Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$.

(4) Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$.

(5) $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2; \vec{u}^2 \geq 0, \vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Ví dụ 4.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các góc:

(1) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$ (2) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right)$

(3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'})$ (4) $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C'B'}\right)$

Lời giải

Ví dụ 4.2.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của AB. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ

(1) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.3.

Cho tứ diện$ABCD$có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $IJ \perp AB$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....