BỘ ĐỀ TRỌNG TÂM ÔN LUYỆN ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC HSA

PHẦN: TOÁN HỌC – PHÂN TÍCH SỐ LIỆU

BIÊN SOẠN: ĐỘI NGŨ HSA EDUCATION

ĐỀ SỐ: 08

BẢNG ĐÁP ÁN									
HSA 01	B	**HSA 11**	B	**HSA 21**	C	**HSA 31**	C	**HSA 41**	0,63
HSA 02	D	**HSA 12**	D	**HSA 22**	D	**HSA 32**	D	**HSA 42**	0,4
HSA 03	A	**HSA 13**	A	**HSA 23**	A	**HSA 33**	D	**HSA 43**	7,56
HSA 04	B	**HSA 14**	D	**HSA 24**	C	**HSA 34**	D	**HSA 44**	0,25
HSA 05	C	**HSA 15**	C	**HSA 25**	C	**HSA 35**	B	**HSA 45**	0,87
HSA 06	A	**HSA 16**	D	**HSA 26**	B	**HSA 36**	4,12	**HSA 46**	21
HSA 07	C	**HSA 17**	D	**HSA 27**	D	**HSA 37**	3,18	**HSA 47**	55
HSA 08	A	**HSA 18**	C	**HSA 28**	A	**HSA 38**	73	**HSA 48**	13
HSA 09	A	**HSA 19**	D	**HSA 29**	B	**HSA 39**	0,17	**HSA 49**	46
HSA 10	B	**HSA 20**	D	**HSA 30**	C	**HSA 40**	14,8	**HSA 50**	785

HSA 01: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là $11 rad/s$ (Hình sau). Ban đầu van nằm ở vị trí A, biết bán kính $OA = 35cm$. Tính khoảng cách từ van đến mặt đất khi xe đạp di chuyển được 2 phút. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

A. $17,7cm$

B. $17,3cm$

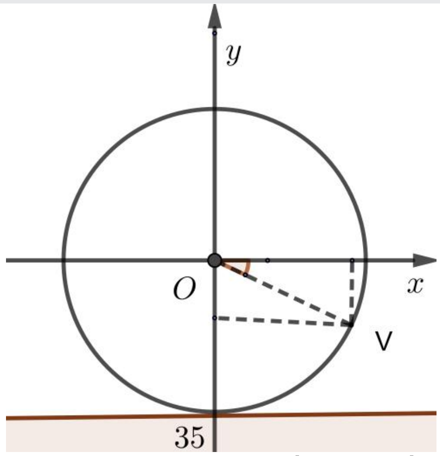
C. $30,2cm$

D. $4,8cm$

Đáp án: B

Lí giải

Đặt hệ trục tọa độ như hình:



Khi xe đạp di chuyển được 2 phút, van V quay theo chiều kim đồng hồ tức là quay theo chiều âm nên van V đã quay được một góc lượng giác $\alpha = -11.60.2\,rad = -1320\,rad$.

Khi đó điểm V biểu diễn cho góc lượng giác: $V(35.cos\alpha; 35.sin\alpha) \approx V(30,2; -17,7)$

Vậy van V cách mặt đất khoảng : $35 - |-17,7| = 17,3cm$.

HSA 02: Tìm giá trị nguyên của k để bất phương trình $x^2 - 2(4k-1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

A. $k = 4$
B. $k = 2$
C. $k = 1$
D. $k = 3$
Đáp án: D
Lí giải
Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì:

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (4k-1)^2 - 15k^2 + 2k + 7 < 0 \Leftrightarrow 2 < k < 4$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 3$.

HSA 03: Bác An mua một chiếc xe ô tô theo hình thức trả góp (lãi suất 0%) như sau: Tháng thứ nhất (sau khi mua xe một tháng) bác An trả 2 (triệu đồng). Các tháng tiếp theo, mỗi tháng bác An trả nhiều hơn tháng trước đó 0,5 (triệu đồng). Biết rằng bác An trả hết nợ sau 44 tháng. Hỏi giá chiếc xe bác An đã mua là bao nhiêu (*tính theo đơn vị triệu đồng*)?

A. 561
B. 550
C. 565
D. 600
Đáp án: A
Lí giải
Gọi $u_1, u_2, ..., u_{44}$ lần lượt là số tiền tháng thứ nhất, tháng thứ hai,…, tháng thứ 44 bác An phải trả cho cửa hàng bán xe, thì dãy trên là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 2$, công sai $d = 0,5$.

Tổng số tiền bác An phải trả là: $S_{44}=u_1+u_2+...+u_{44}=\frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]=\frac{44}{2}\left(4+43\times 0,5\right)=561$.

Vậy giá chiếc xe bác An đã mua là 561 triệu.

HSA 04: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $(x-1)(x-3)(x-m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng?

A. 4
B. 3
C. 2
D. 1

Đáp án: B

Lí giải

Ta có: $(x-1)(x-3)(x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\\x=m\end{array}\right.$.

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì: $\mathrm{m}\notin\{1;3\}$.

Trường hợp 1: $\mathrm{m}<1<3$.

Để 3 số $\mathrm{m};1;3$ lập thành cấp số nhân tăng thì: $\mathrm{m}.3=1^2\Leftrightarrow\mathrm{m}=\frac{1}{3}$. Cấp số nhân tăng đó là: $\frac{1}{3};1;3$

Trường hợp 2: $1<\mathrm{m}<3$.

Để 3 số $1;\mathrm{m};3$ lập thành cấp số nhân tăng thì: $1.3=\mathrm{m}^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{m}=\sqrt{3}\\\mathrm{m}=-\sqrt{3}\end{array}\right.$

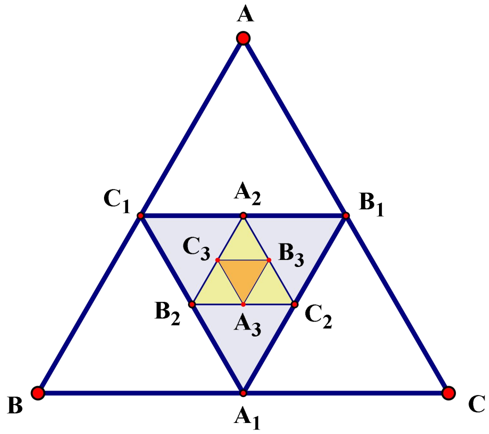
Đối chiếu điều kiện $1<\mathrm{m}<3$ ta chọn $\mathrm{m}=\sqrt{3}$. Cấp số nhân tăng đó là: $1;\sqrt{3};3$

Trường hợp 3: $1<3<\mathrm{m}$.

Để 3 số $1;3;\mathrm{m}$ lập thành cấp số nhân tăng thì: $1.\mathrm{m}=3^2\Leftrightarrow\mathrm{m}=9$. Cấp số nhân tăng đó là: $1;3;9$

Vậy $\mathrm{m}\in\left\{\frac{1}{3};\sqrt{3};9\right\}$ thì phương trình $(x-1)(x-3)(x-m)=0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân tăng.

HSA 05: Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 1. Nối các trung điểm A_1,B_1,C_1 của các cạnh BC,CA,AB ta được tam giác đều $A_1B_1C_1$. Tiếp tục nối các trung điểm A_2,B_2,C_2 của các cạnh B_1C_1,C_1A_1,A_1B_1 ta được tam giác đều $A_2B_2C_2$, thực hiện quá trình này đến vô hạn. Tính tổng các độ dài $l=AA_1+A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n+...$



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
B. 1
C. $\sqrt{3}$
D. 2
Đáp án: C
Lí giải
Đặt $u_1 = AA_1, u_2 = A_1A_2, u_3 = A_2A_3, \ldots, u_n = A_{n-1}A_n$, ta có:

$u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, u_2 = \dfrac{1}{2}u_1, u_3 = \dfrac{1}{2}u_2, \ldots, u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1}, \ldots \Rightarrow \{u_n\}$ là một CSN lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow l = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{u_1}{1-q} = \sqrt{3}$.

HSA 06: Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + x + 1$ là
A. $y' = 4x^3 - 6x^2 + 1$
B. $y' = 4x^3 - 6x^2 + x$
C. $y' = 4x^3 - 3x^2 + x$
D. $y' = 4x^3 - 3x^2 + 1$
Đáp án: A
Lí giải
Ta có $y' = \left(x^4 - 3x^2 + x + 1\right)' = 4x^3 - 6x^2 + 1$

HSA 07: Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $9^x - 2(m+1)3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.
A. $m > -\dfrac{3}{2}$
B. $m < -\dfrac{3}{2}$

C. $m \le -\dfrac{3}{2}$

D. $m \ge -\dfrac{3}{2}$

Đáp án: C

Lí giải

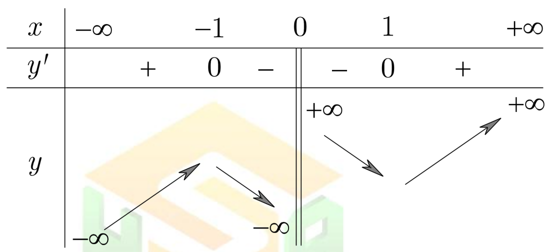
Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3-2m) > 0 \Leftrightarrow t - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow t > 3 + 2m \;\; (1)$ (Do $t > 0$).

Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì (1) phải nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty)$.

Điều này tương đương với $3 + 2m \le 0 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{3}{2}$. Vậy giá trị cần tìm của m là $m \le -\dfrac{3}{2}$.

HSA 08: Cho hàm số $AE \perp SD$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(-1;\, 0)$.

B. $(-1;\, 1)$.

C. $(-\infty;\, -1)$.

D. $8a + d$.

Đáp án: A

Lí giải

Trong khoảng $(-1;\, 0)$ đạo hàm $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;\, 0)$.

HSA 09: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$. Tính giá trị của $S = x_0 + 4y_0$.

A. $S = 8$

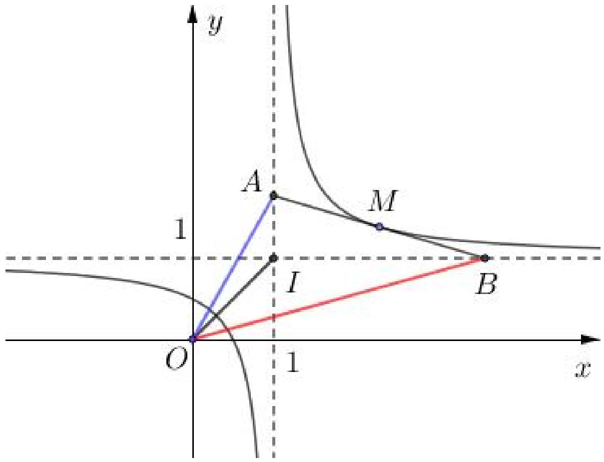
B. $S = \dfrac{17}{4}$

C. $S = \dfrac{23}{4}$

D. $S = 2$

Đáp án: A

Lí giải



Ta có $y'=\dfrac{-2}{(2x-2)^2}$, TCĐ: $x=1\ (d_1)$, TCN: $y=1\ (d_2)$, $I(1;1)$.

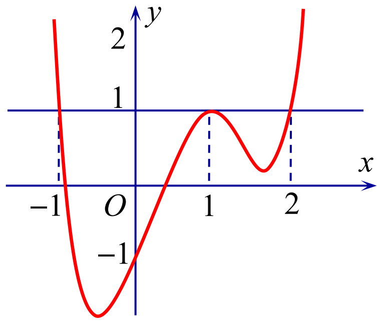
Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng $y=\dfrac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}$

$A=\Delta\cap d_1\Rightarrow A\left(1;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$, $B=\Delta\cap d_2\Rightarrow B(2x_0-1;1)$. $\overrightarrow{IB}=(2x_0-2;0)$, $\overrightarrow{IA}=\left(0;\dfrac{1}{x_0-1}\right)$.

$S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.1.IB=8.\dfrac{1}{2}.1.IA\Leftrightarrow IB=8IA\Leftrightarrow |2x_0-2|=8\left|\dfrac{1}{x_0-1}\right|\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4\Leftrightarrow x_0=3$

$\Rightarrow y_0=\dfrac{5}{4}\Rightarrow S=x_0+4y_0=3+4.\dfrac{5}{4}=8$.

HSA 10: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-1)<g(1)<g(2)$

B. $g(2)<g(1)<g(-1)$

C. $g(2)<g(-1)<g(1)$

D. $g(1)<g(-1)<g(2)$

Đáp án: B

Lí giải

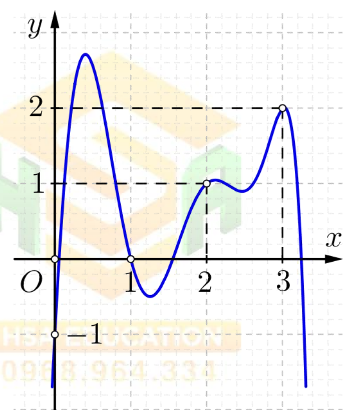
Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$, $\Rightarrow g'(x)=f'(x)-1$, $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

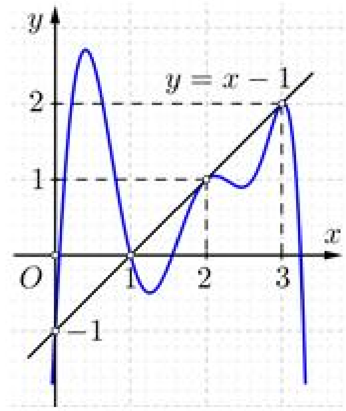
x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'		+	0	−	0	-	0	+	
g	$-\infty$	↗	$g(-1)$	↘	$g(1)$	↘	$g(2)$	↗	$+\infty$

Vậy $g(2)<g(1)<g(-1)$.

HSA 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\left|2f(x)-(x-1)^2\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3
B. 5
C. 6
D. 7
Đáp án: B
Lí giải



Xét hàm số $h(x) = 2f(x) - (x-1)^2$, ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2(x-1)$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$.

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$				$y = 0$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm $y = h(x)$ có 2 điểm cực trị. Đồ thị hàm số $g(x) = |h(x)|$ nhận có tối đa 5 điểm cực trị.

HSA 12: Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = x^2 - 4x + 3$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. $f(0)$

B. $f(1)$

C. $f(2)$

D. $f(3)$

Đáp án: D

Lí giải

Ta có $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$. Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Lại có $g'(x)=2xf'(x^2+1), g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=1 \\ x^2+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[0;2] \\ x=\sqrt{2}\in[0;2] \\ x=-\sqrt{2}\notin[0;2] \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(x^2+1)$ trên đoạn $[0;2]$:

$g'(1)=2.1.f'(1+1)=2f'(2)<0$

x	0		$\sqrt{2}$		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g(0)$	$\searrow$	$g(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$g(2)$

Vậy $\min\limits_{[0;2]} g(x)=g(\sqrt{2})=f(3)$ đạt được khi $x=\sqrt{2}$.

HSA 13: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\angle AOB=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$.
B. 8.
C. $\dfrac{1}{8}$.
D. 16.

Đáp án: A

Lí giải

$y'=\dfrac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-(m+m^2)}{(x-1)^2}$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=1+m+m^2>0 \\ -1-m-m^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y_A=2x+m$.

Gọi $x_A; x_B$ là hoành độ của A, B khi đó $x_A; x_B$ là nghiệm của $x^2-2x-(m+m^2)$.

Theo định lí Viet ta có $x_A+x_B=2$; $x_A.x_B=-m^2-m$.

$y_A=2x_A+m$; $y_B=2x_B+m$.

$\angle AOB=90^\circ \Rightarrow x_A.x_B+y_A.y_B=0 \Leftrightarrow x_Ax_B+4x_Ax_B+2m(x_A+x_B)+m^2=0$

$\Leftrightarrow 5\left(-m^2-m\right)+4m+m^2=0 \Leftrightarrow -4m^2-m=0 \Leftrightarrow m=0; m=-\frac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$.

HSA 14: Nếu $\int f(x)\,dx=\frac{1}{x}+\ln x+C$ thì $f(x)$ là

A. $f(x)=\sqrt{x}+\ln x+C$

B. $f(x)=-\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\ln x+C$

C. $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\ln x+C$

D. $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

Đáp án: D

Lí giải

Ta có $\left(\frac{1}{x}+\ln x+C\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$, suy ra $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$ là hàm số cần tìm.

HSA 15: Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+2}{x-2}(C)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) là

A. $y=x-2$

B. $y=x-1$

C. $y=x$

D. $y=x+2$

Đáp án: C

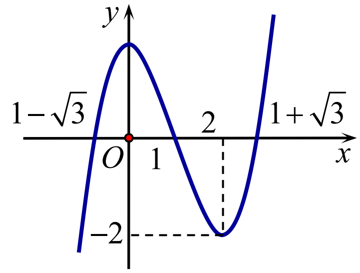
Lí giải

Ta có: $y=\frac{x^2-2x+2}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}+\frac{2}{x-2}=x+\frac{2}{x-2}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-2}=0$ nên $y=x$ là tiệm cận xiên.

HSA 16: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hỏi phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 5
B. 9
C. 6
D. 7
Đáp án: D
Lí giải

Xét phương trình $\left(x^3-3x^2+2\right)^3-3\left(x^3-3x^2+2\right)^2+2=0 \quad (1)$

Đặt $t=x^3-3x^2+2$ (*) thì (1) trở thành $t^3-3t^2+2=0 \quad (2)$

Theo đồ thị ta có (2) có ba nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=1-\sqrt{3} \\ t=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số ta có

+ $t=1\in(-2;2)$ (*) có ba nghiệm phân biệt

+ $t=1-\sqrt{3}\in(-2;2)$ nên (*) có ba nghiệm phân biệt (khác ba nghiệm khi $t=1$)

+ $t=1+\sqrt{3}>2$ nên (*) có đúng một nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt

HSA 17: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\ln(x+1)$, trục hoành và đường thẳng $x=\mathrm{e}-1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $\mathrm{e}-2$
B. 2π
C. $\pi\mathrm{e}$
D. $\pi(\mathrm{e}-2)$

Đáp án: D
Lí giải

Thể tích khối tròn xoay (H) là: $V=\pi\int\limits_0^{\mathrm{e}-1}\ln^2(x+1)\mathrm{d}x=\pi\int\limits_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=\ln^2 x \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x \\ v=x \end{cases}$

Ta có $V=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}}-2\int\limits_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x\right)$. Đặt $\begin{cases} u'=\ln x \\ \mathrm{d}v'=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u'=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v'=x \end{cases}$

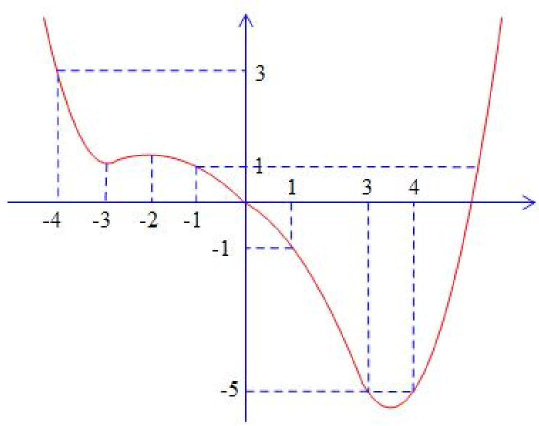
Suy ra $V=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}}-2x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}+2\int\limits_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\right)=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}}-2x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}+2x\Big|_1^{\mathrm{e}}\right)=\pi(\mathrm{e}-2)$.

HSA 18: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(3-x\right)$. Điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x\right)$ là

A. $x=1$
B. $x=2$
C. $x=3$
D. $x=0$
Đáp án: C
Lí giải
Ta có $f'\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=3$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Điểm cực đại của hàm số là $x=3$.
HSA 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)=m-3$ có nghiệm.



A. 10
B. 11
C. 12
D. 13
Đáp án: D
Lí giải
Đặt

$3-4\sqrt{6x-9x^2}=t \Leftrightarrow 6x-9x^2=\dfrac{(t-3)^2}{16}\,(t\le 3)$

$\Leftrightarrow 1-(3x-1)^2=\dfrac{(t-3)^2}{16}\ (1)$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{(t-3)^2}{16}\le 1 \Leftrightarrow -1\le t\le 7$. Kết hợp điều kiện $\Rightarrow -1\le t\le 3$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $2f(t)=m-3 \Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m-3}{2}$ có nghiệm trên đoạn $[-1;3]$. Từ đồ thị suy ra $-5\le \dfrac{m-3}{2}\le 1 \Leftrightarrow -7\le m\le 5$.

Vậy có 13 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

HSA 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$, $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x$

A. $I=8$.
B. $I=16$.
C. $I=\dfrac{3}{2}$.
D. $I=4$.

Đáp án: D

Lí giải

Đặt $t=2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=-1\Rightarrow t=-3 \\ x=1\Rightarrow t=1 \end{cases}$

Ta có: $I=\dfrac{1}{2}\int_{-3}^{1} f(|t|)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(\int_{-3}^{0} f(-t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)(1)$

+) $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$.

+) Tính $\int_{-3}^{0} f(-t)\mathrm{d}t$. Đặt $z=-t\Rightarrow \mathrm{d}z=-\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{-3}^{0} f(-t)\mathrm{d}t=-\int_{-3}^{0} f(z)\mathrm{d}z=\int_0^3 f(z)\mathrm{d}z=6$.

Thay vào (1) ta được $I=4$.

HSA 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+4=0$ có bán kính R là.

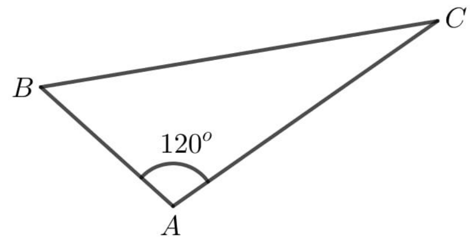
A. $R=3\sqrt{2}$
B. $R=2\sqrt{15}$
C. $R=\sqrt{10}$
D. $R=\sqrt{52}$

Đáp án: C

Lí giải

Ta có: $a=-2, b=1, c=-3, d=4 \Rightarrow R=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2-4}=\sqrt{10}$.

HSA 22 Hai tàu cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 120° (Hình vẽ). Tàu thứ nhất đi với tốc độ 20 hải lí một giờ và tàu thứ hai đi với tốc độ 15 hải lí một giờ. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai tàu là 61 hải lí?



A. $2,5$ giờ

B. 3 giờ

C. $1,5$ giờ

D. 2 giờ

Đáp án: D

Lí giải

Giả sử sau x (giờ) $(x>0)$ tàu thứ nhất ở vị trí B, tàu thứ hai ở vị trí C và khoảng cách $BC=61$ (hải lí).
Ta có: $AB=20x$ (hải lí); $AC=15x$ (hải lí).

Áp dụng định lí côsin, ta có: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}$

$\Leftrightarrow 61^2=(20x)^2+(15x)^2-2\cdot 20x\cdot 15x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow 925x^2=3721\Rightarrow x\approx 2$.

Vậy sau 2 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là 61 hải lí.

HSA 23: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$ bằng

A. $\frac{937}{12}$

B. $\frac{343}{12}$

C. $\frac{793}{4}$

D. $\frac{397}{4}$

Đáp án: A

Lí giải

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$ là

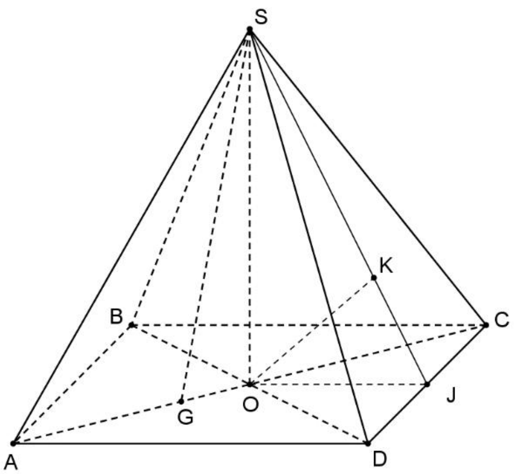
$-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow x\left(x^2-x-12\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-x-12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$ bằng $\int\limits_{-3}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\text{dx}=\int\limits_{-3}^{0}\left|x^3-x^2-12x\right|\text{dx}+\int\limits_{0}^{4}\left|x^3-x^2-12x\right|\text{dx}=\dfrac{937}{12}.$

HSA 24: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $SA=2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Gọi α là góc hợp bởi đường thẳng SG và mặt phẳng (SCD). Biết $\sin\alpha=\dfrac{a\sqrt{105}}{b}$, với $a,b\in\mathbb{Z}, b>0, \dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $T=a-2b+1$.

A. $T=58$
B. $T=62$
C. $T=-58$
D. $T=32$
Đáp án: C
Lí giải



Ta có: $\sin\alpha=\dfrac{d\left(G,(SCD)\right)}{SG}$

Gọi $O=AC\cap BD$. Gọi J là trung điểm CD và K là hình chiếu của O lên SJ

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình vuông.

Ta có:

$\begin{cases} CD \perp OJ \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOJ) \Rightarrow (SCD) \perp (SOJ)$.

Do $OK \perp SJ \Rightarrow OK \perp (SCD) \Rightarrow d(O,(SCD)) = OK$.

Mặt khác: $\dfrac{d(G,(SCD))}{d(O,(SCD))} = \dfrac{GC}{OC} = \dfrac{4}{3}$

Có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$; $OJ = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a}{2}$.

$SJ = \sqrt{SO^2 + OJ^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$, $OK = \dfrac{SO.OJ}{SJ} = \dfrac{a\sqrt{210}}{30}$.

Mà $\dfrac{d(G,(SCD))}{d(O,(SCD))} = \dfrac{GC}{OC} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow d(G,(SCD)) = \dfrac{4}{3}d(O,(SCD)) = \dfrac{2a\sqrt{210}}{45}$.

$SG = \sqrt{SO^2 + OG^2} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{3}$.

$\sin\alpha = \dfrac{d(G,(SCD))}{SG} = \dfrac{\sqrt{105}}{30}$.

HSA 25: Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Người ta cưa viên đá đó theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

A. $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$.

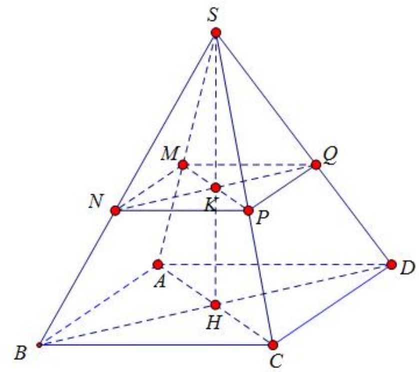
B. $\dfrac{a^2}{\sqrt{3}}$.

C. $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

D. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}a^2$.

Đáp án: C

Lí giải



Ta có $SH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $MN = x, (0 < x < a)$ ta có $\frac{SK}{SH} = \frac{SN}{SB} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow SK = \frac{MN}{AB}.SH = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

$V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3}x^2.\frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{x^3\sqrt{2}}{6}$.

Theo giả thiết $V_{S.ABCD} = 2V_{S.MNPQ} \Leftrightarrow \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{2x^3\sqrt{2}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy diện tích thiết diện $S = x^2 = \frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

HSA 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC = a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC, biết góc giữa SD và đáy bằng 60^0.

A. $\frac{a\sqrt{906}}{29}$.

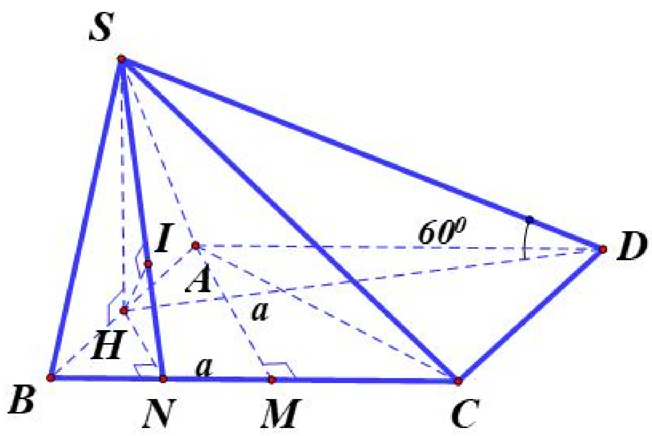
B. $\frac{a\sqrt{609}}{29}$.

C. $\frac{a\sqrt{609}}{19}$.

D. $\frac{a\sqrt{600}}{29}$.

Đáp án: B

Lí giải



Gọi H là trung điểm của AB.

Vì $(SAB)\perp(ABCD)$ và tam giác SAB cân tại S

$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

$\Rightarrow \left(\widehat{SD,(ABCD)}\right)=\widehat{SDH}=60^0$.

Ta có: $d(AD,SC)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))=2d(H,(SBC))$.

Kẻ $HN\perp BC, HI\perp SN$. Ta có: $\begin{cases} BC\perp HN \\ BC\perp SH \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHN)\Rightarrow BC\perp HI\ \Rightarrow HI\perp(SBC)$.

$\Rightarrow d(H,(SBC))=HI$.

Vì $AC=a$ nên tam giác ABC đều $\Rightarrow \widehat{ABC}=60^0\Rightarrow \widehat{BAD}=120^0$

$$DH=\sqrt{AH^2+AD^2-2AH.AD.\cos 120^0}=\frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\Rightarrow SH=AH.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{7}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{21}}{2}.$$

Gọi M là trung điểm BC, $HN=\dfrac{AM}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\Rightarrow d(H,(SBC))=HI=\frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2+HN^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{21}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{21}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{609}}{58}$$

Vậy $d(AD,SC)=\dfrac{a\sqrt{609}}{29}$.

HSA 27: Biết $\int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+3x+2}dx = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a , b , c là các số hữu tỉ, tính giá trị của $S = 2a + b^2 + c^2$.

A. $S = -9$

B. $S = 164$

C. $S = 436$

D. $S = 515$

Đáp án: D

Lí giải

Ta có $\int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \left(x - 3 + \frac{10x+6}{x^2+3x+2}\right)dx = \int_0^1 \left(x - 3 + \frac{10x+6}{x^2+3x+2}\right)dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{14}{x+2} - \frac{4}{x+1}\right)dx = -\frac{5}{2} + \left(14\ln|x+2| - 4\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = -\frac{5}{2} + 14\ln 3 - 18\ln 2$.

$\Rightarrow a = -\frac{5}{2}$, $b = -18$; $c = 14$. Vậy $S = 2a + b^2 + c^2 = 515$.

HSA 28: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây *không đúng*?

A. $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$

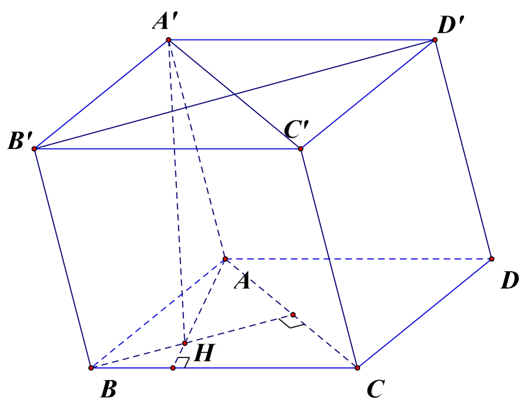
B. $(AA'H) \perp (A'B'C')$

C. $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

D. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$

Đáp án: A

Lí giải



Phương án **A** sai vì

$BC \perp AH, BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (A'AH)$

Mà $BC \subset (BB'C'C)$ nên $(A'AH) \perp (BB'C'C)$

Vì $(A'AH)$ không trùng $(AA'B'B)$ nên $(AA'B'B)$ không vuông góc với $(BB'C'C)$

Phương án **B** đúng vì $AA' \perp (A'B'C')$

Phương án **C** đúng vì $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp BB'$

Phương án **D** đúng.

HSA 29: Phương trình chính tắc của parabol (P) biết một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1 là

A. $y^2 = 32x$

B. $y^2 = 16x$

C. $y^2 = 24x$

D. $y^2 = 12x$

Đáp án: B

Lí giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px$.

Vì một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung này bằng 1 nên điểm $A(1;4) \in (P) \Rightarrow 16 = 2.p.1 \Rightarrow p = 8$.

$\Rightarrow (P): y^2 = 16x$.

HSA 30: Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$

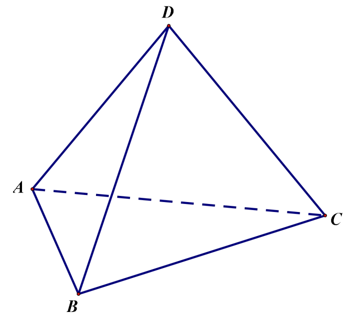
B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$

Đáp án: C

Lí giải



Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.

HSA 31: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(P): z-1=0$ và $(Q): x+y+z-3=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P), cắt đường thẳng $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ. Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$

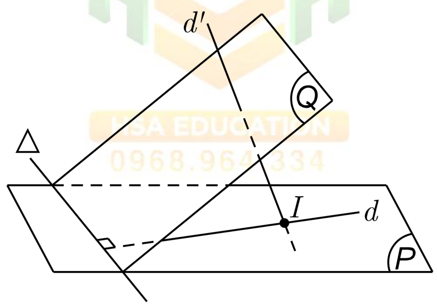
B. $\begin{cases} x=3-t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases}$

Đáp án: C

Lí giải



Đặt $\vec{n}_P=(0;0;1)$ và $\vec{n}_Q=(1;1;1)$ lần lượt là véctơ pháp tuyến của (P) và (Q).

Do $\Delta=(P)\cap(Q)$ nên Δ có một véctơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-1;1;0)$.

Đường thẳng d nằm trong (P) và $d\perp\Delta$ nên d có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_P,\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(-1;-1;0)$

Gọi $d':\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ và $A=d'\cap d \Rightarrow A=d'\cap(P)$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} z-1=0 \\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=0 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow A(3;0;1)$.

Do đó phương trình đường thẳng $d:\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$.

HSA 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-1=0$. Gọi d là đường thẳng nằm trên (α) đồng thời cắt đường thẳng Δ và trục Oz. Một véctơ chỉ phương của d là:

A. $\vec{u}(1;2;-3)$

B. $\vec{u}(1;-2;1)$

C. $\vec{u}(2;-1;-1)$

D. $\vec{u}(1;1;-2)$

Đáp án: D

Lí giải

+ Gọi $A=d\cap\Delta \Rightarrow A\in\Delta \Rightarrow A(2+t;2+t;1+2t)$.

Vì $A\in d\subset(\alpha)\Rightarrow A\in(\alpha)\Rightarrow 2+t+2+t+1+2t-1=0 \Leftrightarrow t=-1\Rightarrow A(1;1;-1)$.

+ Gọi $B=d\cap Oz \Rightarrow B(0;0;b)$.

Vì $B\in d\subset(\alpha)\Rightarrow B\in(\alpha)\Rightarrow b-1=0\Leftrightarrow b=1\Rightarrow B(0;0;1)$.

Khi đó một VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1;1;-2)$.

HSA 33: Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8m$, chiều cao $12,5m$. Diện tích của cổng là:

A. $100\left(\mathrm{m}^2\right)$

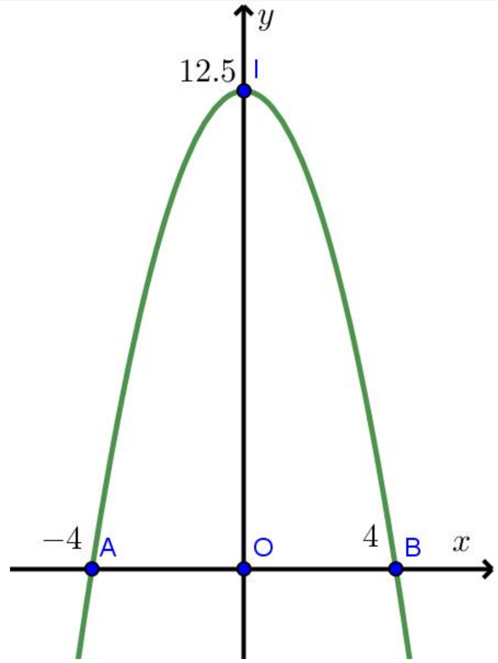
B. $200\left(\mathrm{m}^2\right)$

C. $\dfrac{100}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$

D. $\dfrac{200}{3}\left(\mathrm{m}^2\right)$

Đáp án: D

Lí giải



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ mà trục đối xứng của Parabol trùng với trục tung, trục hoành trùng với đường tiếp đất của cổng.

Khi đó Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + c$.

Vì (P) đi qua đỉnh $I(0;12,5)$ nên ta có $c = 12,5$.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm $A(-4;0)$ và $B(4;0)$ nên ta có $0 = 16a + c \Rightarrow a = \frac{-c}{16} = -\frac{25}{32}$. Do đó

$(P): y = -\frac{25}{32}x^2 + 12,5$.

Diện tích của cổng là: $S = \int_{-4}^{4}\left(-\frac{25}{32}x^2 + 12,5\right)dx = \frac{200}{3}\left(m^2\right)$.

HSA 34: Trong không gian với hệ toa độ $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $x + 3y - 1 = 0$.

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - t \\ z = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = t \\ y = -1+3t \\ z = 3 \end{cases}$

Đáp án: D

Lí giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;3;0)$.

Đường thẳng đi qua $A(0;-1;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có vectơ chỉ phương là $\vec{n} = (1;3;0)$.

Phương trình đường thẳng là: $\begin{cases} x = t \\ y = -1+3t \\ z = 3 \end{cases}$.

HSA 35: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;3)$, $N(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-14=0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P), các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Δ. Biết rằng khi $MH = NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của d là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 13-2t \\ z = -4+t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 13-2t \\ z = -4+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 13+2t \\ z = -4+t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = t \\ y = 13-2t \\ z = -4-t \end{cases}$

Đáp án: B

Lí giải

Đường thẳng d cần tìm là giao của (P) với (Q) là mặt phẳng trung trực của MN.

Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow I(2;3;4)$, $\overrightarrow{MN}(2;2;2)$.

PTTQ của (Q) là $x-2+y-3+z-4=0$ hay $(Q): x+y+z-9=0$ Phương trình đường thẳng d cần tìm là giao của (P) và (Q) PTTS của d là $\begin{cases} x+y+z-9=0 \\ x+2y+3z-14=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = t \\ y = 13-2t \\ z = -4+t \end{cases}$.

HSA 36: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Phương trình mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng d. Tính bán kính mặt cầu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 4,12

Lí giải

+ Gọi I là tâm của mặt cầu (S). Vì $I\in d$ nên $I(1+2t;t;-2t)$, $t\in\mathbb{R}$.

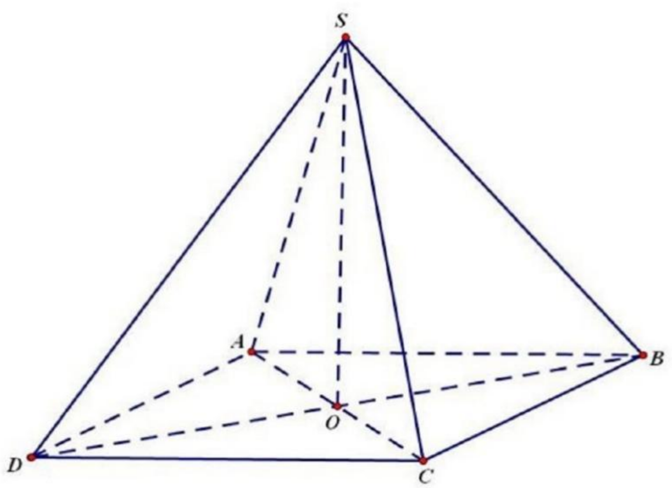
+ Do mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA=IB=r$ $\Rightarrow IA^2=IB^2\Rightarrow t=-1$

$\Rightarrow I(-1;-1;2)$ $\Rightarrow r=IA=\sqrt{17}\approx 4{,}12$.

HSA 37: Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng 3. Góc giữa (SCD) và mặt đáy bằng $45°$. Tính diện tích tam giác SAB (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 3,18

Lí giải



Gọi O là tâm đáy.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow\begin{cases} SO\perp(ABCD) \\ \left(\widehat{(SDC),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right)\end{cases}$

$\Rightarrow \Delta OAB$ là hình chiếu của ΔSAB lên $(ABCD)$ và $\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right)=45°$.

$\Rightarrow S_{\Delta SAB}=\dfrac{S_{\Delta OAB}}{\cos 45°}=\dfrac{\dfrac{3^2}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\approx 3{,}18$.

HSA 38: Thống kê số bao xi măng được bán ra tại một cửa hàng vật liệu xây dựng trong 24 tháng cho kết quả như sau:

72	89	88	73	63	265	69	65

94	80	81	98	66	71	84	73
93	59	60	61	83	72	85	66

Tìm số trung vị của của cửa hàng vật liệu xây dựng.

Đáp án: 73

Lí giải

Sắp xếp lại mẫu dữ liệu theo thứ tự tăng dần ta được:

59	60	61	63	65	66	66	69
71	72	72	73	73	80	81	83
84	85	88	89	93	94	98	265

Số trung vị là: 73 .

HSA 39: Chia ngẫu nhiên 20 chiếc kẹo giống nhau thành 4 phần quà (phần nào cũng có kẹo). Tính xác suất để mỗi phần đều có ít nhất 3 chiếc kẹo (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,17

Lí giải

Đặt 20 chiếc kẹo thành thành ngang, khi đó có 19 khoảng trống giữa các chiếc kẹo. Khi đó để chia 20 chiếc kẹo thành 4 phần quà thì ta đặt bất kì 3 vạch vào trong các khoảng trống đó.

Khi đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{19}^3$

Để chia thành 4 phần quà mà mỗi phần có ít nhất 3 chiếc kẹo ta làm như sau:

+ Chia mỗi phần là 2 viên kẹo.

+ Còn lại 12 viên kẹo. Khi đó bài toán trở thành: Có bao nhiêu cách chia 12 viên kẹo thành 4 phần quà sao cho mỗi phần có ít nhất 1 viên kẹo. Để làm bài toán này ta cũng xếp 12 viên kẹo thành hàng ngang, khi đó có 11 khoảng trống. Vậy có C_{11}^3 cách chia.

Khi đó xác suất để chia 20 viên kẹo thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\dfrac{C_{11}^3}{C_{19}^3} = \dfrac{55}{323} \approx 0,17$.

HSA 40: Bảng sau cho biết thời gian chạy cự li 100m của các bạn trong lớp (đơn vị giây):

Thời gian	12	13	14	15	16	17
Số bạn	4	6	10	6	8	8

Hãy tính thời gian chạy trung bình cự li $100\,m$ của các bạn trong lớp (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 14,8

Lí giải

Số bạn trong lớp là: $n = 4 + 6 + 10 + 6 + 8 + 8 = 42$ (bạn).

Thời gian chạy trung bình cự li $100\,m$ của các bạn trong lớp là:

$\overline{x} = \dfrac{12.5 + 13.6 + 14.10 + 15.6 + 16.7 + 17.8}{42} \approx 14,8$

HSA 41: Một hộp chứa 7 quả cầu xanh, 5 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 3 quả. Xác suất để 3 quả được chọn có ít nhất 2 quả xanh (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,63

Lí giải

Chọn ngẫu nhiên 3 quả trong 12 quả có $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$.

Chọn 3 quả trong đó có ít nhất 2 quả xanh là: $n(A) = C_7^3 + C_7^2 C_5^1 = 140$.

Xác suất để 3 quả được chọn có ít nhất 2 quả xanh là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{140}{220} \approx 0,63$.

HSA 42: Cho hai biến cố A và B, với $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,3$. Tính $P(\overline{A} \cap B)$.

Đáp án: 0,4

Lí giải

Ta có: $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \mid B).P(B)$.

Mà $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{0,3}{0,7} = \dfrac{4}{7}$

Do đó $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \mid B).P(B) = \dfrac{4}{7}.0,7 = 0,4$

HSA 43: Hiền sử dụng vòng đeo tay thông minh để ghi lại số bước chân đi mỗi ngày trong một tháng. Kết

quả được ghi lại ở bảng sau:

Số bước (đơn vị: nghìn)	[3; 5)	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)
Số ngày của Hiền	6	7	6	6	5

Tính phương sai bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 7,56

Lí giải

Cỡ mẫu là $n = 6 + 7 + 6 + 6 + 5 = 30$

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$\overline{x} = \dfrac{6.4 + 7.6 + 6.8 + 6.10 + 5.12}{30} = 7,8$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$S^2=\frac{1}{30}\left(6.4^2+7.6^2+6.8^2+6.10^2+5.12^2\right)-(7,8)^2=7,56$$

HSA 44: Cho hai biến cố A và B với $P(A)=0,85$, $P(B)=0,7$, $P\left(A\overline{B}\right)=0,58$. Tính $P\left(\overline{A}B\right)$.

Đáp án: 0,25

Lí giải

Ta có: $P\left(A\cap\overline{B}\right)+P(A\cap B)=P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)-P\left(A\cap\overline{B}\right)=0,8-0,55=0,25$

HSA 45: Có hai hộp đựng phiếu thi, mỗi phiếu ghi một câu hỏi. Hộp thứ nhất có 15 phiếu và hộp thứ hai có 9 phiếu. Bạn Bình đi thi chỉ thuộc 10 câu ở hộp thứ nhất và 8 câu ở hộp thứ hai. Thầy giáo rút ngẫu nhiên ra 1 phiếu từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó cho ban Bình rút ngẫu nhiên ra 1 phiếu từ hộp thứ hai. Tính xác suất để bạn Bình trả lời được câu hỏi trong phiếu ?

Đáp án: 0,87

Lí giải

Gọi E_1 là biến cố thầy giáo rút 1 câu thuộc từ hộp 1 bỏ vào hộp 2.

Khi đó hộp 2 có10 câu trong đó 9 câu thuộc và 1 câu không thuộc.

Gọi E_2 là biến cố thầy giáo rút 1 câu không thuộc từ hộp 1 bỏ vào hộp 2.

Khi đó hộp 2 có 10 câu trong đó có 8 câu thuộc và 2 câu không thuộc.

E_1, E_2 tạo thành một nhóm biến cố đầy đủ.

Gọi B là biến cố bạn Bình rút được một câu thuộc bài

Khi đó $B=(E_1\cap B)\cup(E_2\cap B)$

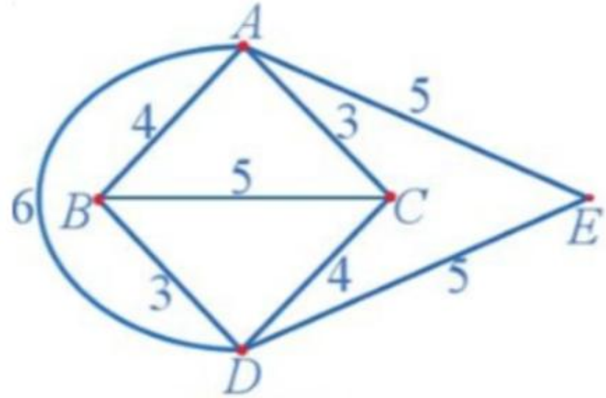
$\Rightarrow P(B)=P(E_1)P(B\mid E_1)+P(E_2)P(B\mid E_2)$

$$P(E_1)=\frac{C_{10}^1}{C_{15}^1}=\frac{2}{3},\ P(E_2)=\frac{C_5^1}{C_{15}^1}=\frac{1}{3}.$$

$$P(B\mid E_1)=\frac{C_9^1}{C_{10}^1}=\frac{9}{10},\ P(B\mid E_2)=\frac{C_8^1}{C_{10}^1}=\frac{4}{5}.$$

$$P(B)=\frac{2}{3}.\frac{9}{10}+\frac{1}{3}.\frac{4}{5}=\frac{13}{15}$$

HSA 46: Một người giao hàng xuất phát từ bưu cục phải đi qua một số con đường để phát hàng rồi quay về lại điểm xuất phát, hỏi người đó phải đi như thế nào để đường đi là ngắn nhất. Ở đây các điểm cần phát hàng nằm dọc theo các con đường cần phải đi qua. Giải bài toán người giao hàng đối với đồ thị có trọng số như hình sau.



Đáp án: 21

Lí giải

Dễ thấy đồ thị trên có chu trình Hamilton.

Ta thấy chu trình xuất phát từ đỉnh A là AEDBCA thỏa mãn đề bài với tổng quãng đường nhỏ nhất là AE + ED + DB + BC + CA = 5 + 5 + 3 + 5 + 3 = 21 (km).

Các chu trình xuất phát từ đỉnh B, C, D, E có 1 đỉnh được đi qua hai lần nên không thỏa mãn quy tắc của thuật toán láng giềng gần nhất nên loại.

HSA 47: Lan ngồi làm bài văn cô giáo cho về nhà. Khi Lan làm xong bài thì thấy vừa lúc hai kim đồng hồ đã đổi chỗ cho nhau. Hỏi Lan làm bài văn hết bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). *?*

Đáp án: 55

Lí giải

Từ khi Lan bắt đầu làm bài cho đến khi hai kim đổi chỗ cho nhau thì kim phút đã đi được một quãng đường từ vị trí của kim phút đến vị trí của kim giờ còn kim giờ thì đi được một quãng đường từ vị trí của kim giờ đến vị trí của kim phút. Như vậy tổng quãng đường hai kim đã đi đúng bằng một vòng đồng hồ.

Mỗi giờ kim phút đi được 1 vòng đồng hồ còn kim giờ chỉ đi được 1/12 vòng đồng hồ nên tổng vận tốc của hai kim là:

$$1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12} \text{ (vòng đồng hồ/giờ).}$$

Thời gian Lan làm xong bài văn là:

$$1:\frac{13}{12}=\frac{12}{13} \text{ (giờ)} \approx 55 \text{ (phút)}$$

Sử dụng dữ kiện sau để trả lời câu hỏi trong các câu từ **HAS 48** đến **HAS 50**.

Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng gam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t)=13e^{-0,015t}$.

HSA 48: Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t=0$.

Đáp án: 13

Lí giải

Tại thời điểm $t=0$, ta có: $m(0)=13e^{0}=13$ (gam)

HSA 49: Sau thời gian bao lâu thì lượng chất phóng xạ giảm còn một nửa (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đáp án: 46

Lí giải

Lượng chất phóng xạ giảm còn một nửa: $6,5=13e^{-0,015t}\Rightarrow e^{-0,015t}=\frac{1}{2}\Rightarrow -0,015t=\ln\frac{1}{2}\Rightarrow t\approx 46$.

HSA 50: Sau thời gian bao lâu thì lượng chất phóng xạ giảm còn dưới 10^{-4} (gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đáp án: 785

Lí giải

Ta có: $13e^{-0,015t}<10^{-4}\Rightarrow e^{-0,015t}<\frac{1}{130000}\Rightarrow -0,015t<\ln\frac{1}{130000}\Rightarrow t>785$.

Vậy sau 785 ngày thì lượng chất phóng xạ giảm còn dưới 10^{-4} (gam).