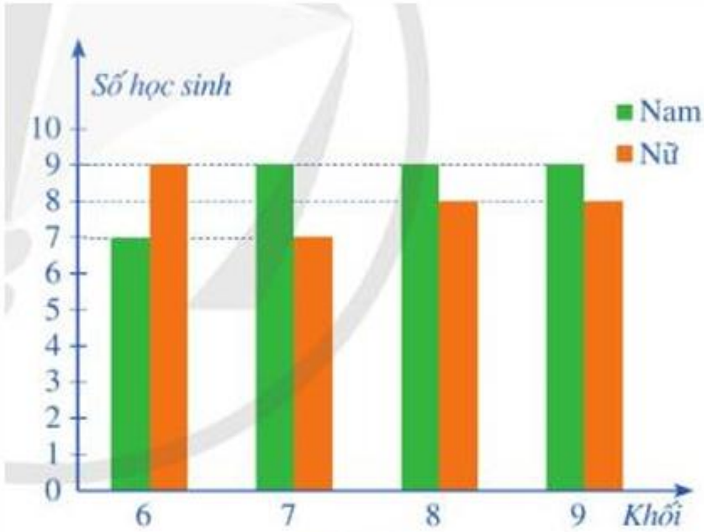
HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I: (1,5 điểm) Đề.

1) Biểu đồ cột kép ở Hình 30 biểu diễn số lượng học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của một trường trung học cơ sơ.



Hình 30

Chọn ngẫu nhiên một học sinh tham gia giải thi đấu thể thao của trường đó. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: "Học sinh được chọn là nam";

B: "Học sinh được chọn thuộc khối 6";

C: "Học sinh được là nữ và không thuộc khối 9".

2) Một hộp đựng 5 tấm thẻ ghi các số $1;2;3;4;5$ Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

a) Phép thử và kết quả của phép thử là gì?

b) Mô tả không gian mẫu của phép thử. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

1. Nhìn vào biểu đồ ta thấy:

- Lớp 6 có tất cả: 7 nam $+$ 9 nữ $= 16$ học sinh
- Lớp 7 có tất cả: 9 nam $+$ 7 nữ $= 16$ học sinh
- Lớp 8 có tất cả: 9 nam $+$ 8 nữ $= 17$ học sinh
- Lớp 9 có tất cả: 9 nam $+$ 8 nữ $= 17$ học sinh

Như vậy, không gian mẫu trong bài này có tất cả $16+16+17+17=66$ học sinh.

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $7+9+9+9=34$ học sinh

Xác suất để biến cố A xảy ra là: $P(A)=\frac{34}{66}=\frac{17}{33}$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố B là: 16 học sinh

Xác suất để biến cố B xảy ra là: $P(B)=\frac{16}{66}=\frac{8}{33}$

- Số kết quả thuận lợi cho biến cố C là: $9+7+8=24$ học sinh

Xác suất để biến cố C xảy ra là: $P(C)=\frac{24}{66}=\frac{12}{33}$.

2. a) Phép thử: Rút ngẫu nhiên lần lượt hai tấm thẻ từ hộp, tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Kết quả của phép thử:

- Lần rút thứ nhất: 5 kết quả có thể xảy ra $(1;2;3;4;5)$

- Lần rút thứ hai: 4 kết quả có thể xảy ra (vì sau lần rút thứ nhất, chit còn lại 4 thẻ trong hộp).

b)Mô tả không gian mẫu của phép thử:

Liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Sử dụng cặp số (x, y) để mô tả kết quả với:

- x là số trên thẻ rút ra lần thứ nhất.

- y là số trên thẻ rút ra lần thứ hai.

Lần 2 / Lần 1	1	2	3	4	5
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$

Vì tấm thẻ rút ra lần đầu không trả lại vào hộp.

Không gian mẫu:

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(2;1);(2;3);(2;4);(2;5);(3;1);(3;2);(3;4);(3;5);(4;1);(4;2);\\(4;3);(4;5);(5;1);(5;2);(5;3);(5;4)\end{Bmatrix}$$

Vậy không gian mẫu có 20 phần tử.

Câu II: (1,5 điểm) Cho hai biểu thức

$$A=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \text{ và } B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\frac{x-3\sqrt{x}+5}{x-5\sqrt{x}+6} \text{ với } x\geq 0;\ x\neq 4;\ \neq x\neq 9$$

1 Tính giá trị của A khi $x=25$.

2) Rút gọn B.

3) Cho $P=A:B$. Tìm x để $2P=2\sqrt{x}-9$.

Lời giải

1) Tính giá trị của A khi $x=25$

Biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$

Điều kiện: $x\geq 0$

Với $x=25$ thỏa mãn điều kiện

Thay $x=25$ vào biểu thức A ta có: $A=\dfrac{\sqrt{25}+3}{\sqrt{25}+1}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$

Vậy với $x=25$ thì $A=\dfrac{4}{3}$

2) Rút gọn B

Điều kiện xác định: $x\geq 0;\ x\neq 4;\ \neq x\neq 9$

Ta có: $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}-\dfrac{x-3\sqrt{x}+5}{x-5\sqrt{x}+6}$

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}-\frac{x-3\sqrt{x}+5}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$B=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)+\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(x-3\sqrt{x}+5\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$B=\frac{x-3\sqrt{x}+x-4-x+3\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$B=\frac{x-9}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$B=\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$

3) Cho $P=A:B$. Tìm x để $2P=2\sqrt{x}-9$

Điều kiện xác định: $x\geq 0;\ x\neq 4;\ \neq x\neq 9$

Ta có: $P=A:B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}:\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

Để $2P=2\sqrt{x}-9$

$\dfrac{2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}+1}=2\sqrt{x}-9$

$2\sqrt{x}-4=\left(2\sqrt{x}-9\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$

$2\sqrt{x}-4=2x+2\sqrt{x}-9\sqrt{x}-9$

$2x-9\sqrt{x}+5=0$

$\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-5\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}2\sqrt{x}+1=0 \text{ (PTVN)}\\ \sqrt{x}-5=0\end{array}\right.$

$\sqrt{x}-5=0$

$x=25$ (TM)

Vậy để $2P=2\sqrt{x}-9$ thì $x=25$.

Câu III: (2,5 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Tháng thứ nhất hai đội sản xuất được 1100 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, đội I làm vượt mức 15% và đội II làm vượt mức 20% so với tháng thứ nhất, vì vậy cả hai đội đã làm được 1295 sản phẩm. Hỏi trong tháng thứ nhất mỗi đội làm được bao nhiêu sản phẩm ?

2)
Một cơ sở sản xuất lập kế hoạch làm 180 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất mỗi ngày tăng 3 sản phẩm, vì thế không những hoàn thành sớm một ngày, mà còn vượt mức 18 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

3) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2-4x-7=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2$

Lời giải

1. Gọi số sản phẩm tháng thứ nhất đội I làm được là x (sản phẩm) $\left(x\in\mathbb{N}^*, x<1100\right)$

Số sản phẩm tháng thứ nhất đội II làm được là y (sản phẩm) $\left(y\in\mathbb{N}^*, y<1100\right)$

Vì tháng thứ nhất hai đội sản xuất được 1100 sản phẩm nên ta có phương trình

$x+y=1100 \quad (1)$

Số sản phẩm tháng thứ hai đội I làm được là $x+15\%x=1,15x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm tháng thứ hai đội II làm được là $y+20\%y=1,2y$ (sản phẩm)

Theo bài ra ta có phương trình $1,15x+1,2y=1295\quad(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1100\\1,15x+1,2y=1295\end{cases}$

$\begin{cases}1,15x+1,15y=1265\\1,15x+1,2y=1295\end{cases}$ $\begin{cases}0,05y=30\\x+y=1100\end{cases}$ $\begin{cases}y=600\\x+y=1100\end{cases}$

$\begin{cases}y=600\\x+600=1100\end{cases}$ $\begin{cases}y=600\\x=500\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Vậy tháng thứ nhất đội I làm được là 500 (sản phẩm), đội II làm được là 600 (sản

2. Gọi số sản phẩm theo kế hoạch cơ sở cần sản xuất trong một ngày là: x (sản phẩm, $x>0$)
Số sản phẩm thực tế cơ sở cần sản xuất trong một ngày là: $x+3$ (sản phẩm, $x>0$)
Sản phẩm cơ sở cần hoàn thành theo kế hoạch là: 180 (sản phẩm)
Thực tế cơ sở sản xuất vượt mức 18 sản phẩm theo kế hoạch
Số sản phẩm thực tế là: 198 (sản phẩm)

Thời gian theo kế hoạch cơ sở hoàn thành công việc là: $\dfrac{180}{x}$ (ngày)

Thời gian thực tế cơ sở hoàn thành công việc là: $\dfrac{198}{x+3}$ (ngày)

Theo bài ra ta có phương trình:

$\dfrac{180}{x}-\dfrac{198}{x+3}=1$

$180(x+3)-198x=x(x+3)$

$180x+540-198x=x^2+3x$

$x^2+21x-540=0$

$\left[\begin{array}{l}x=15\quad(\text{TM})\\x=-36\quad(\text{KTM})\end{array}\right.$

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày cơ sở cần phải làm 15 (sản phẩm)

3) $x^2-4x-7=0$

Phương trình có $ac=-7<0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2

Áp dụng hệ thức Vi et ta có : $x_1+x_2=4;x_1x_2=-7$.

Khi đó ta có : $T=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}-2=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}-2=\dfrac{4^2-2.(-7)}{-7}-2=\dfrac{-44}{7}$

Vậy $T=-\dfrac{44}{7}$

IV: (4,0 điểm)

1) Người ta thả một cục đá vào cốc thuỷ tinh hình trụ có chứa nước, đá chìm một phần xuống nước trong cốc. Hãy tính thể tích phần đá chìm trong nước của cục đá đó, biết diện tích đáy của cốc nước hình trụ là $16,5\,cm^2$ và nước dâng lên thêm $80\,mm$.

2) Cho (O) đường kính AB. Kẻ đường kính CD vuông góc với AB. Lấy M thuộc cung nhỏ BC, AM cắt CD tại E. Qua D kẻ tiếp tuyến với (O) cắt đường thẳng BM tại N. Gọi P là hình chiếu vuông góc của B lên DN

a) Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $EN // CB$.

c) Chứng minh $AM.BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.

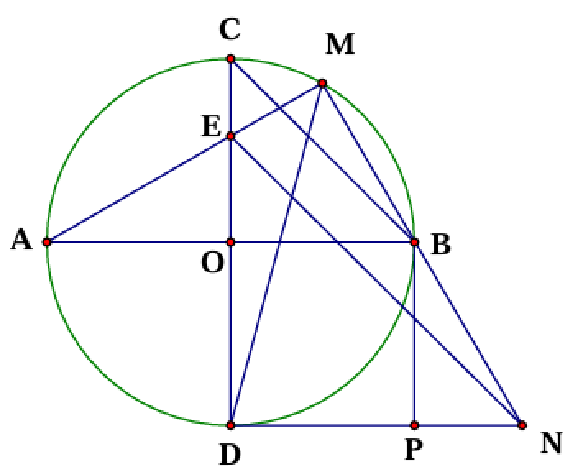
Lời giải

1.Đổi $80\,mm = 8\,cm$

Phần thể tích nước dâng lên chính là thể tích của phần đá chìm trong nước của cục đá đó.

Nên thể tích phần đá chìm trong nước của cục đá đó là: $16,5.8 = 132\,cm^3$

1) Chứng minh các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.



Xét tứ giác $MNDE$:

Có $DN \perp CD$ (vì DN là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow CDN = 90^0$

$\Rightarrow EDN = 90°$

ΔEDN vuông tại D

Suy ra 3 điểm E, D, N thuộc đường tròn đường kính EN (1)

Ta có $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow EMN = 90^0$

$\Rightarrow \Delta EMN$ vuông tại M

Suy ra 3 điểm E, M, N thuộc đường tròn đường kính $EN\ (2)$

Từ (1) và (2) Suy ra các điểm M, N, D, E cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $EN // CB$.

Xét (O) có $CDM = CBM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM)

$\Rightarrow EDM = CBM$

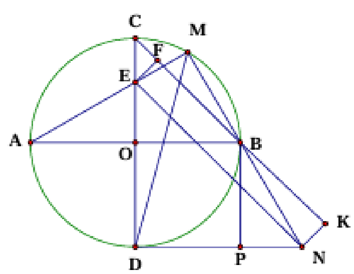
Vì tứ giác $MNDE$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow EDM = ENM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EM)

Suy ra $CBM = ENM\left(= EDM\right)$ mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow EN // CB$.

3) Chứng minh $AM.BN = 2R^2$ và tìm vị trí điểm M trên cung nhỏ BC để diện tích tam giác BNC đạt giá trị lớn nhất.



Xét ΔAMB và ΔBPN :

Có $BP \perp DN \Rightarrow BPN = 90^0 \Rightarrow AMB = BPN = 90^0$ (1)

Có $DN \perp CD$ (DN kẻ tiếp tuyến với (O)

$\Rightarrow BA // DN$

$\Rightarrow ABM = DNB$ (hai góc đồng vị) (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Delta AMB \backsim \Delta BPN$ (g - g)

Xét tứ giác $OBPD$ có :

$DOB = BPD = ODP = 90^0$

$OD = OB = R$

$\Rightarrow OBPD$ là hình vuông (DHNB) nên $OD = OB = BP = R$

Có $\Delta AMB \backsim \Delta BPN$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{AM}{BP} = \dfrac{AB}{BN}$

$\Rightarrow AM.BN = BP.AB = R.2R = 2R^2$

* Kẻ $EF \perp BC, NK \perp BC$

$S_{NBC} = \frac{1}{2} NK.BC$. Do BC không đổi nên S_{NBC} max khi và chỉ khi NK max.

Do $EF \perp BC, NK \perp BC \Rightarrow EF // NK$.

Có tứ giác $EFKN$ là hình bình hành (DHNB)

Có $EF \perp BC \Rightarrow EFK = 90^0$ nên tứ giác $EFKN$ là hình chữ nhật (DHNB)

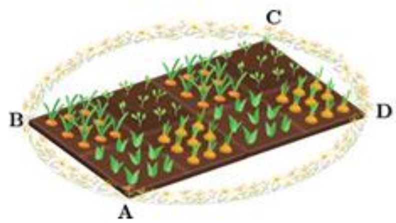
$\Rightarrow EF = NK$.

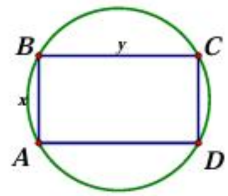
Ta có NK max khi EF max

khi $E \equiv O$ khi $M \equiv B$

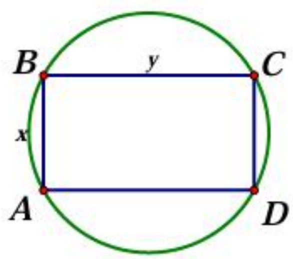
V: (0,5 điểm)

Người ta muốn làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $640m^2$, để tạo thêm cảnh quan xung quanh đẹp hơn, người ta mở rộng thêm bốn phần diện tích để trồng hoa, tạo thành một đường tròn đi như hình vẽ, biết tâm hình tròn trùng với giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật. Khi đó chọn kích thước cạnh $ABCD$ như thế nào để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất?





Lời giải



Độ dài đường kính của đường tròn là đường chéo của hình chữ nhật $ABCD$,

Vậy biểu thức xác định đường kính của đường tròn là $\sqrt{x^2 + y^2}$

Vậy bán kính của đường tròn là $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$

Diện tích đường tròn là $S = \pi . \frac{x^2 + y^2}{4}$

Diện tích của hình chữ nhật là $S_{hcn} = xy = 640 \left(m^2 \right)$

Diện tích phần đất trồng hoa là

$$S' = S - S_{hcn} = \pi . \frac{x^2 + y^2}{4} - xy$$

Có $\left(x - y \right)^2 \geq 0$ với mọi $x; y$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4} \geq \frac{xy}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi\left(x^2 + y^2\right)}{4} \geq \frac{\pi xy}{2} \Rightarrow \frac{\pi\left(x^2 + y^2\right)}{4} - xy \geq \frac{\pi xy}{2} - xy$$

Vậy $S' \geq \frac{\pi xy}{2} - xy \Rightarrow S \geq 320\pi - 640$

Vậy để diện tích của bốn phần đất trồng hoa nhỏ nhất thì $x = y$

Khi đó $x = y = 8\sqrt{10}\ \ (m)$