

## CHƯƠNG 3: CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

### BÀI 7: CĂN BẬC HAI VÀ CĂN THỨC BẬC HAI

#### 1. Căn bậc hai

##### a. Khái niệm căn bậc hai

Căn bậc hai của số thực  $a$  không âm là số thực  $x$  sao cho  $x^2 = a$ .

**Nhận xét:**

- Số âm không có căn bậc hai.
- Số 0 có đúng 1 căn bậc hai là chính nó, ta viết  $\sqrt{0} = 0$
- Mỗi số thực dương  $a (a \geq 0)$  có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau. Số dương kí hiệu là:  $\sqrt{a}$ ,

số âm kí hiệu là:  $-\sqrt{a}$ . Ta gọi  $\sqrt{a}$  là căn bậc hai số học của  $a$ .

##### b. Tính chất của căn bậc hai

Với mọi số  $a$ , ta có:  $\sqrt{a^2} = |a|$

#### 2. Căn thức bậc hai

##### a. Căn thức bậc hai

- Với  $A$  là một biểu thức đại số, người ta gọi  $\sqrt{A}$  là căn thức bậc hai của  $A$ , còn  $A$  được gọi là biểu thức lấy căn bậc hai hay biểu thức dưới dấu căn.

- $\sqrt{A}$  xác định khi  $A$  lấy giá trị không âm và thường viết là  $A \geq 0$ . Ta nói  $A \geq 0$  là điều kiện xác định (hay điều kiện có nghĩa) của  $\sqrt{A}$ .

##### b. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

- Với  $A \geq 0$ , ta có  $\sqrt{A} \geq 0$ ;  $(\sqrt{A})^2 = A$
- $\sqrt{A^2} = |A|$

## DẠNG 1: TÌM CĂN BẬC HAI

- Nếu  $a > 0$  thì các căn bậc hai của  $a$  là  $\pm\sqrt{a}$ .
- Với số  $a \geq 0$ , ta có  $\sqrt{a^2} = a$ ;  $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$

**Bài 1.** Tìm căn bậc hai của :

a) 169

b) 2,25

c) 0,64

d)  $\frac{36}{121}$

**Bài 2.** Tính

a)  $\sqrt{49}$

b)  $\sqrt{\frac{121}{169}}$

c)  $(-\sqrt{7})^2$

d)  $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

**Bài 3.** Tìm căn bậc hai của :

a) 64

b) 400

c) 0,49

d)  $\frac{25}{169}$

**Bài 4.** Tính

a)  $\sqrt{9}$

b)  $\sqrt{\frac{4}{49}}$

c)  $-\sqrt{(-8)^2}$

d)  $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

## DẠNG 2: SO SÁNH CĂN BẬC HAI

### Phương pháp

Với:  $a \geq 0, b \geq 0$  nếu  $a < b$  thì  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ .

**Bài 1.** So sánh các cặp số sau:

a)  $\sqrt{120}$  và  $\sqrt{97}$

b)  $\sqrt{81}$  và 19

**Bài 2.** So sánh các cặp số sau:

a)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  và  $\sqrt{\frac{3}{2}}$

b. 3 và  $\sqrt{8}$

### DẠNG 3: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

**Bài 1.** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a)  $\sqrt{2024-x}$  tại  $x = 2023$ ;  $x = 2015$ ;  $x = 1943$ .

b)  $\sqrt{x^2+5}$  tại  $x = -2$ ;  $x = 2$ ;  $x = \sqrt{11}$ .

c)  $\sqrt{x^2-x+4}$  tại  $x = -3$ ;  $x = 0$ ;  $x = 4$ .

**Bài 2.** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a)  $\sqrt{2x+1}$  tại  $x = 0$ ;  $x = 4$ ;  $x = 12$ .

b)  $\sqrt{13-x^2}$  tại  $x = -3$ ;  $x = -2$ ;  $x = 0$ .

c)  $\sqrt{2x^2+x+6}$  tại  $x = -3$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$ .

### DẠNG 4: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CĂN THỨC BẬC HAI CÓ NGHĨA

•  $\sqrt{A}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A \geq 0$

•  $\sqrt{A^2}$  có nghĩa  $\forall x \in \mathbb{R}$

•  $\frac{1}{\sqrt{A}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A > 0$

•  $\frac{1}{\sqrt{A^2}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A \neq 0$

•  $A^2 \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}$

•  $A^2 > 0 \quad \forall A \neq 0$

**Bài 1.** Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a)  $\sqrt{-2024x}$

b)  $\sqrt{3x-15}$

c)  $\sqrt{-2x-5}$

**Bài 2.** Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a)  $\sqrt{\frac{2025}{2x+3}}$

b)  $\sqrt{\frac{-1}{3x-1}}$

c)  $\sqrt{\frac{2-7x}{2024}}$

**Bài 3.** Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

a)  $\sqrt{\frac{2025}{x^2}}$

b)  $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$

**Bài 4.** Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a)  $\sqrt{-2021x}$

b)  $\sqrt{3-6x}$

c)  $\frac{2021}{3-\sqrt{x}}$

d)  $\frac{1}{\sqrt{4x-1}}$

**Bài 5.** Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a)  $\sqrt{\frac{1}{2}x^2+3}$

b)  $\frac{3}{\sqrt{-x^2-2021}}$

## DẠNG 5: CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

- Với mọi số  $a$ , ta có:  $\sqrt{a^2} = |a|$
- Với mỗi biểu thức  $A$ , ta có:  $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$

### Bài 1. Tính

a)  $\sqrt{2024^2}$       b)  $\sqrt{\frac{4}{49}}$       c)  $-\sqrt{(-8)^2}$       d)  $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

### Bài 2. Tính

a)  $\sqrt{121}$       b)  $\sqrt{\frac{121}{169}}$       c)  $(-\sqrt{2})^2$       d)  $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

### Bài 3. Tính

a)  $\sqrt{(\sqrt{24} - 5)^2}$       b)  $\sqrt{(4 - \sqrt{15})^2}$       c)  $\sqrt{(\sqrt{8} - 3)^2}$

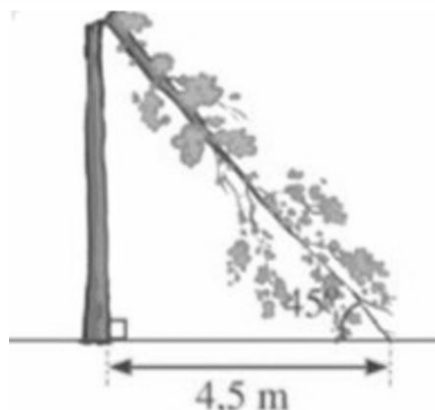
### Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sqrt{x^2} + x - 2024$  với  $x < 0$       b)  $\sqrt{4x^2} + 2025$  với  $x \geq 0$   
c)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$  với  $x < 1$       d)  $\sqrt{4x^2 + 4x + 1}$  với  $x \geq -\frac{1}{2}$

## DẠNG 6: ỨNG DỤNG

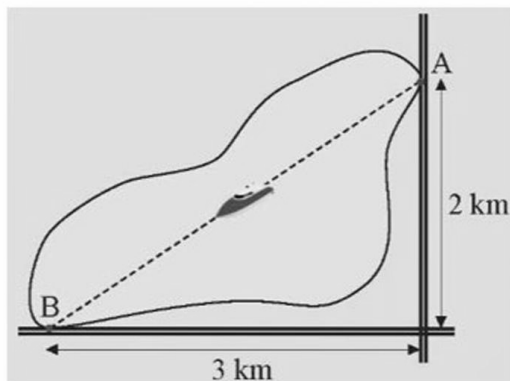
**Bài 1.** Đại Kim tự tháp Giza là Kim tự tháp Ai Cập lớn nhất và là lăng mộ của Vương triều thứ Tư của pharaoh Khufu. Nền kim tự tháp có dạng hình vuông với diện tích khoảng 53 052 m<sup>2</sup>. Hỏi độ dài cạnh của nền kim tự tháp đó là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

**Bài 2.** Giông bão thổi mạnh, một cây bị gãy gập xuống làm ngọn cây chạm đất và tạo với phương nằm ngang một góc 45° (minh họa ở hình vẽ). Người ta đo được khoảng cách từ chỗ ngọn cây chạm đất đến gốc cây là 4,5 m. Giả sử cây mọc vuông góc với mặt đất, hãy tính chiều cao của cây đó theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

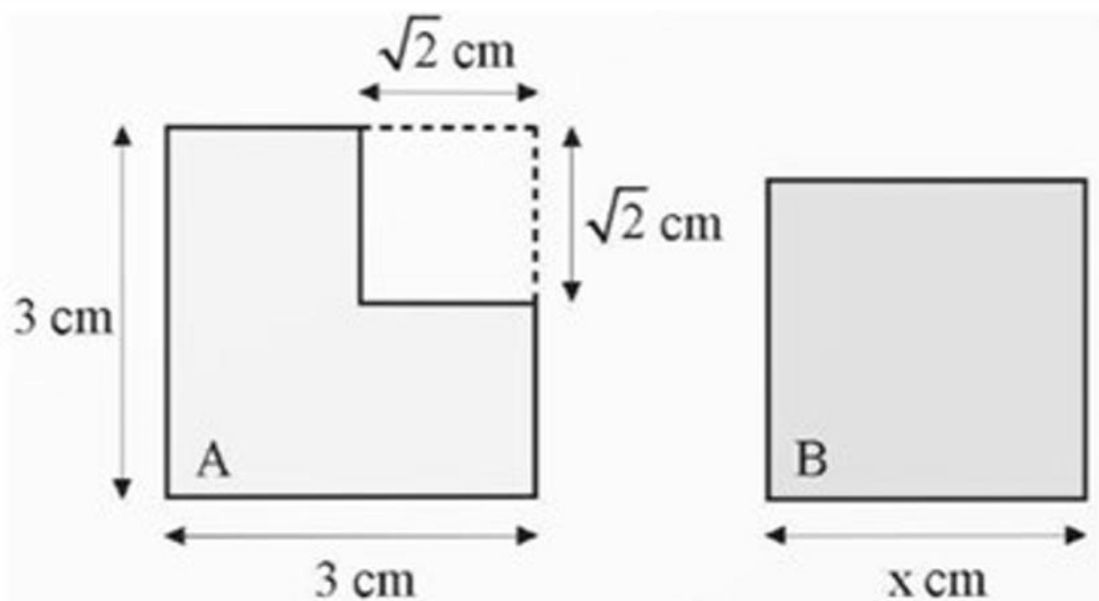


**Bài 3.** Trong Vật lí, quãng đường  $S$  (tính bằng mét) của một vật rơi tự do được cho bởi công thức  $S = 4,9t^2$ , trong đó  $t$  là thời gian rơi (tính bằng giây). Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật sẽ chạm đất nếu được thả rơi tự do từ độ cao 122,5 mét?

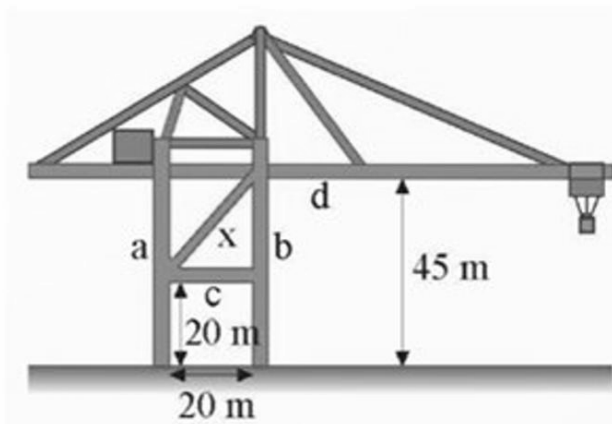
**Bài 4.** Hai bến thuyền A và B nằm sát con đường vuông góc với nhau cách chỗ giao nhau lần lượt là 2 km và 3 km (hình vẽ bên dưới). Một ca nô chạy thẳng từ A đến B. Quãng đường ca nô đi được dài bao nhiêu kilômét?



**Bài 5.** Biết rằng hình A và hình vuông B trong hình vẽ dưới có diện tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh  $x$  của hình vuông B.



**Bài 6.** Trên cần trục ở hình vẽ, hai trụ a và b đứng cách nhau 20 m, hai xà ngang c và d lần lượt có độ cao 20 m và 45 m so với mặt đất. Xà chéo x có độ dài bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



## CHƯƠNG 3: CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

### BÀI 8: KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA

#### 1. Khai căn bậc hai và phép nhân

Với các biểu thức  $A, B$  không âm, ta có:  $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$

**Chú ý:** Kết quả trên có thể mở rộng cho nhiều biểu thức không âm.

Với các biểu thức  $A, B, C$  không âm, ta có:  $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C}$

#### 2. Khai căn bậc hai và phép chia

Với biểu thức  $A$  không âm và biểu thức  $B$  dương, ta có:  $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$

### CHỦ ĐỀ 1: KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN

- Với hai số không âm  $a, b$ , ta có:  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- Với các biểu thức  $A, B$  không âm, ta có:  $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

### DẠNG 1: KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN KHÔNG CHỨA BIẾN

#### Bài 1. Tính

- a)  $\sqrt{25 \cdot 144}$                       b)  $\sqrt{52 \cdot 13}$                       c)  $\sqrt{45 \cdot 80}$                       d)  $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$

#### Bài 2. Tính

- a)  $\sqrt{55 \cdot 77 \cdot 35}$                       b)  $\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{125} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$                       c)  $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}$

#### Bài 3. Thực hiện phép tính

- a)  $\sqrt{5^2 - 4^2}$                       b)  $\sqrt{26^2 - 24^2}$                       c)  $\sqrt{85^2 - 84^2}$

#### Bài 4. Tính

- a)  $\left( \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{50}{3}} - \sqrt{24} \right) \cdot \sqrt{6}$                       b)  $\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}$
- c)  $\left( \sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{3} + 5\sqrt{\frac{4}{3}} \right) \cdot \sqrt{12}$                       d)  $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{8}$

#### Bài 5. Rút gọn

- a)  $A = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$                       b)  $B = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$
- c)  $C = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$                       d)  $D = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$

## DẠNG 2: KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP NHÂN CHỨA BIẾN

**Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = \sqrt{\frac{-2t}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3t}{8}} \quad (t \leq 0)$

b)  $B = \frac{\sqrt{28y^6}}{\sqrt{7y^4}} \quad (y < 0)$

**Bài 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \geq 1)$

b)  $B = \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} - x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x^4 + 4} + x^2}$

**Bài 3.** Rút gọn các biểu thức

a)  $A = \frac{u - v}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} - \frac{\sqrt{u^3} + \sqrt{v^3}}{u - v} \quad (u, v \geq 0; u \neq v)$

b)  $B = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 2}{x^2 - 2} \quad (x \neq \pm\sqrt{2})$

**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 0)$

b)  $B = \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{xy} + y} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x \neq y)$

c)  $C = \frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1} \quad (a \geq 0; a \neq \frac{1}{4})$

**Bài 5.** Rút gọn biểu thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

a)  $A = \sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}$

b)  $B = \frac{x - 1}{\sqrt{y} - 1} \cdot \sqrt{\frac{(y - 2\sqrt{y} + 1)^2}{(x - 1)^4}}$

## CHỦ ĐỀ 2: KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP CHIA

- Với  $a \geq 0, b > 0$ , ta có:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

- Với biểu thức  $A$  không âm và biểu thức  $B$  dương, ta có:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

### DẠNG 1: KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP CHIA KHÔNG CHỨA BIẾN

**Bài 1.** Tính

a)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

b)  $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$

c)  $\sqrt{\frac{25}{64}}$

d)  $\frac{\sqrt{230}}{\sqrt{2,3}}$

**Bài 2.** Tính

a)  $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$

b)  $\sqrt{36 - 12\sqrt{5}} : \sqrt{6}$

c)  $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$

d)  $\sqrt{3 - \sqrt{5}} : \sqrt{2}$

**Bài 3.** Tính

a)  $A = (\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15}$

b)  $B = (12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}$

**Bài 4.** Thực hiện phép tính

a)  $A = \sqrt{1,6} \cdot \sqrt{250} + \sqrt{19,6} : \sqrt{4,9}$

b)  $B = \sqrt{1\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{7} \cdot 5\frac{4}{9}}$

**Bài 5.** Thực hiện phép tính

a)  $A = (20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75}) : \sqrt{15}$

b)  $B = (\sqrt{325} - \sqrt{117} + 2\sqrt{208}) : \sqrt{13}$



## DẠNG 2: KHAI CĂN BẬC HAI VỚI PHÉP CHIA CHỨA BIẾN

### Bài 1. Rút gọn các biểu thức

a)  $P = xy^2 \sqrt{\frac{5}{x^2 y^4}}$  với  $x < 0; y \neq 0$

b)  $Q = \sqrt{\frac{36(a-4)^2}{144}}$  với  $a < 4$

**Bài 2.** Cho  $A = \sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Tính giá trị  $A$  tại  $a = 7,25; b = 3,25$

**Bài 3.** Cho  $A = \frac{x+3}{2-\sqrt{y}} \cdot \sqrt{\frac{y-4\sqrt{y}+4}{(z+3)^4}}$ .

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Tính giá trị  $A$ , biết  $x = 2$  và  $y = 16$

### Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = \frac{2u + \sqrt{uv} - 3v}{2u - 5\sqrt{uv} + 3v} (u \geq 0; v \geq 0; u \neq \frac{9}{4}v)$

b)  $B = \frac{x + \sqrt{5}}{x^2 + 2x\sqrt{5} + 5} (x \neq -\sqrt{5})$

c)  $C = 0,2x^3y^3 \sqrt{\frac{16}{x^4y^8}} (x \neq 0; y \neq 0)$

d)  $D = \frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$

### Bài 5. Rút gọn các biểu thức

a)  $H = (\sqrt{a^3b} + \sqrt{ab^3} - ab) : \sqrt{ab}$

b)  $E = \sqrt{\frac{9-6x+x^2}{(x-3)^2}}$  với  $x > 3$

c)  $F = (x-y) \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}}$  với  $x < y < 0$

d)  $T = \sqrt{\frac{(x-1)^4}{(2-x)^2}} + \frac{x^2-2}{x-2}$  với  $x < 2$

### CHỦ ĐỀ 3: ỨNG DỤNG

**Bài 1.** Khi một quả bóng rổ được thả xuống, nó sẽ nảy trở lại, nhưng do tiêu hao năng lượng nên nó không đạt được chiều cao như lúc bắt đầu. Hệ số phục hồi của quả bóng rổ được tính theo công thức  $C_R = \sqrt{\frac{h}{H}}$ , trong đó  $H$  là độ cao mà quả bóng được thả rơi và  $h$  là độ cao mà quả bóng bật lại. Một quả bóng rổ rơi từ độ cao 3,24 m và bật lại độ cao 2,25 m. Làm thế nào để viết hệ số phục hồi của quả bóng đó dưới dạng phân số?



**Bài 2.** Trong Vật lí, ta có định luật Joule – Lenz để tính nhiệt lượng toả ra ở dây dẫn khi có dòng điện chạy qua:  $Q = I^2 R t$ .

Trong đó:  $Q$  là nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn tính theo Jun (J);

$I$  là cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn tính theo Ampe (A);

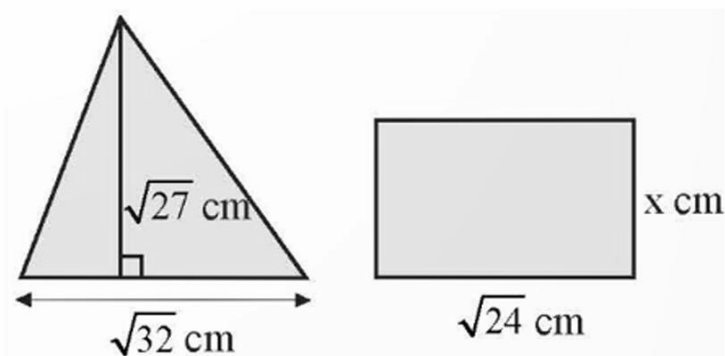
$R$  là điện trở dây dẫn tính theo Ohm ( $\Omega$ );

$t$  là thời gian dòng điện chạy qua dây dẫn tính theo giây.

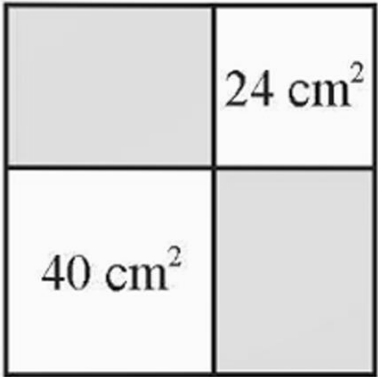
Áp dụng công thức trên để giải bài toán sau: Một bếp điện khi hoạt động bình thường có điện trở  $R = 80 \Omega$ . Tính cường độ dòng điện chạy trong dây dẫn, biết nhiệt lượng mà dây dẫn toả ra trong 1 giây là 500 J.

**Bài 3.** Tốc độ gần đúng của một ô tô ngay trước khi đạp phanh được tính theo công thức  $v = \sqrt{2\lambda g d}$ , trong đó  $v$  (m/s) là tốc độ của ô tô,  $d$  (m) là chiều dài của vết trượt tính từ thời điểm đạp phanh cho đến khi ô tô dừng lại trên đường,  $\lambda$  là hệ số cản lăn của mặt đường,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Nếu một chiếc ô tô để lại vết trượt dài khoảng 20 m trên đường nhựa thì tốc độ của ô tô trước khi đạp phanh là khoảng bao nhiêu mét trên giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)? Biết rằng hệ số cản lăn của đường nhựa là  $\lambda = 0,7$ .

**Bài 4:** Biết rằng hình tam giác và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều rộng  $x$  của hình chữ nhật.



Bài 5: Từ một tấm thép hình vuông, người thợ cắt ra hai mảnh hình chữ nhật có diện tích lần lượt là  $24\text{ cm}^2$  và  $40\text{ cm}^2$  như hình vẽ. Tính diện tích phần còn lại của tấm thép



## CHƯƠNG 3: CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

### BÀI 9: BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN VÀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

#### 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn bậc hai

- Cho hai số  $a, b$ , với  $b \geq 0$ . Khi đó:  $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$

Cụ thể, ta có:

$$+ \text{ Nếu } a \geq 0 \text{ thì } \sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$$

$$+ \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } \sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$$

- Với các biểu thức  $A, B$  mà  $B \geq 0$ , ta có:  $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$

#### 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai

- Với  $a \geq 0$  và  $b \geq 0$ , ta có:  $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$
- Với  $a < 0$  và  $b \geq 0$ , ta có:  $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$
- Với các biểu thức  $A \geq 0, B \geq 0$ , ta có:  $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$
- Với các biểu thức  $A < 0, B \geq 0$ , ta có:  $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$

#### 3. Trục căn thức ở mẫu

- Với các biểu thức  $A, B$  và  $B > 0$ , ta có:  $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} (B > 0)$
- Với các biểu thức  $A, B, C$  và  $A \geq 0, A \neq B^2$ , ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A} + B} = \frac{C(\sqrt{A} - B)}{A - B^2}$$

$$\frac{C}{\sqrt{A} - B} = \frac{C(\sqrt{A} + B)}{A - B^2}$$

- Với các biểu thức  $A, B, C$  và  $A \geq 0, B \geq 0; A \neq B$ , ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}$$

$$\frac{C}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}$$

**Chú ý:** Để trục căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau:  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

- $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$
- $(A - \sqrt{B})(A + \sqrt{B}) = A^2 - B$

# CHỦ ĐỀ 1: ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN THỨC BẬC HAI CĂN THỨC

## DẠNG 1: CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG KHÔNG CHỨA BIẾN

**Bài 1.** Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$

b)  $B = \left( \sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25} \right) : \sqrt{169}$

c)  $C = \left( \sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121} \right) \sqrt{81}$

d)  $D = 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2 - 3^2}$

**Bài 2.** Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $3\sqrt{5} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$

b)  $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$

c)  $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$

d)  $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$

**Bài 3.** Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$

b)  $B = \sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}$

c)  $C = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

d)  $D = \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}}$

**Bài 4.** Chứng minh rằng

a)  $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$

b)  $\sqrt{11+6\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 6$

**Bài 5.** Tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = 0,5\sqrt{0,04} + 5\sqrt{0,36}$

b)  $B = -4\sqrt{\frac{-25}{-16}} + 5\sqrt{-\frac{9}{25}}$

c)  $C = \frac{2}{3}\sqrt{81} - \frac{1}{2}\sqrt{16}$

d)  $D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{25}{16}}$

## **DẠNG 2: ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN THỨC BẬC HAI KHÔNG CHỨA BIẾN**

**Bài 1.** Viết gọn các biểu thức sau

a)  $\sqrt{25.90}$

b)  $\sqrt{96.125}$

c)  $\sqrt{75.54}$

d)  $\sqrt{245.35}$

**Bài 2.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a)  $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{245}$

b)  $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$

c)  $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

d)  $\sqrt{7-2\sqrt{10}} + \sqrt{2}$

**Bài 3.** Tính giá trị các biểu thức sau

a)  $A = \sqrt{125} + \sqrt{45} - \sqrt{405}$

b)  $B = \sqrt{50} - \sqrt{128} + \sqrt{162} - \sqrt{18}$

c)  $C = \sqrt{63} - \sqrt{252} - \sqrt{343} + \sqrt{175}$

**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = \sqrt{200} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$

b)  $B = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 5\sqrt{45} - 15\sqrt{\frac{1}{5}}$

**Bài 5.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

b)  $B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}}$

c)  $C = \sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$

d)  $D = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + \sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}$

**DẠNG 3: CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN THỨC BẬC HAI CĂN THỨC CHỨA BIẾN**

**Bài 1.** Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a)  $\sqrt{27x^2} \ (x \geq 0)$

b)  $\sqrt{8xy^2} \ (x \geq 0; y \leq 0)$

c)  $\sqrt{25x^3} \ (x > 0)$

d)  $\sqrt{48xy^4} \ (x \geq 0; y \in R)$

**Bài 2.** Đưa thừa số vào trong dấu căn

a)  $a\sqrt{13} \ (a \geq 0)$

b)  $a\sqrt{\frac{-15}{a}} \ (a < 0)$

c)  $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{12}{a}} \ (a > 0)$

d)  $a\sqrt{2} \ (a \leq 0)$

**Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $\sqrt{64a^2} + 2a \ (a \geq 0)$

b)  $5\sqrt{25a^2} - 25a \ (a < 0)$

c)  $\sqrt{16a^4} + 6a^2$

**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3$

b)  $B = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$

**Bài 5.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = 4\sqrt{x} - \frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} \ (0 \leq x; x \neq 9)$

b)  $B = \frac{\sqrt{9x^2 + 12x + 4}}{3x + 2} \left( x \neq \frac{-2}{3} \right)$

c)  $C = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} \ (x > 0)$

d)  $D = -\sqrt{36b} - \frac{1}{3}\sqrt{54b} + \frac{1}{5}\sqrt{150b} \ (b \geq 0)$

## CHỦ ĐỀ 2: TRỰC CĂN THỨC

$$\bullet \frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} (B > 0)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2} (A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2} (A \geq 0; A \neq B^2)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B} (A, B \geq 0; A \neq B)$$

$$\bullet \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B} (A, B \geq 0; A \neq B)$$

**Chú ý:** Để trực căn thức ở mẫu, bình thường ta nhân cả tử và mẫu của phân thức với lượng liên hợp của mẫu và cần các hằng đẳng thức sau:  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Các dạng liên hợp cơ bản thường gặp

$$\bullet (\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B}) = A-B$$

$$\bullet (A-\sqrt{B})(A+\sqrt{B}) = A^2 - B$$

### DẠNG 1: TRỰC CĂN THỨC BIỂU THỨC CHỨA SỐ THỰC

**Bài 1.** Khử căn thức ở mẫu số các phân số

a)  $\sqrt{\frac{7}{108}}$

b)  $\sqrt{\frac{5}{6}}$

c)  $\sqrt{\frac{10}{13}}$

d)  $\sqrt{\frac{4}{75}}$

e)  $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$

f)  $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{3}}$

**Bài 2.** Trực căn thức ở mẫu và rút gọn

a)  $\frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$

b)  $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$

**Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}$

b)  $B = \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$

c)  $C = \left( \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$

d)  $D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$



**Bài 4.** Trục căn thức ở mẫu rồi rút gọn

a)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

b)  $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

**Bài 5.** Trục căn thức và thực hiện phép tính

a)  $A = \left( \frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$

b)  $B = \left( 1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right) \left( \frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1 \right)$

## **DẠNG 2: TRỤC CĂN THỨC BIỂU THỨC CHỨA BIẾN**

**Bài 1.** Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

a)  $\sqrt{\frac{5x^3}{49y}} \quad (x \geq 0; y > 0)$

b)  $7xy\sqrt{\frac{-3}{xy}} \quad (x < 0; y > 0)$

**Bài 2.** Khử mẫu của mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai sau

a)  $\sqrt{\frac{5b}{49a^3}} \quad (a > 0, b \geq 0)$

b)  $\frac{-1}{4}ab\sqrt{\frac{16}{ab}} \quad (a < 0, b < 0)$

**Bài 3.** Chứng minh rằng

a)  $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \quad (a, b > 0)$

b)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a+b}{a-b} \quad (a, b \geq 0; a \neq b)$

c)  $\frac{(a\sqrt{b}+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \cdot \sqrt{\frac{ab+b^2-2\sqrt{ab^3}}{a(a+2\sqrt{b})+b}} = b \quad (a, b > 0)$

### CHỦ ĐỀ 3: RÚT GỌN BIỂU THỨC

#### DẠNG 1: RÚT GỌN BIỂU THỨC RỒI TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC

**Bài 1.** Cho biểu thức  $C = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2}$  với  $x \neq -2$

a) Rút gọn  $C$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $C$  khi  $x = 2\sqrt{6} + 3$ .

**Bài 2.** Cho biểu thức  $C = \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$  với  $a \geq 0, a \neq 16$

a) Rút gọn  $C$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $C$  khi  $a = 9 - 4\sqrt{5}$ .

**Bài 3.** Cho biểu thức  $M = \left( \frac{1}{a-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}-1} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$  với  $a \geq 0, a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức  $M$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $M$  khi  $a = 16$ .

**Bài 4.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{a-\sqrt{a}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{2}{a-1} \right)$  với  $0 < a \neq 1$

a) Rút gọn  $A$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $a = 4 + 2\sqrt{3}$ .

**Bài 5.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-x} \right)$  với  $x \geq 1; x \neq 2; x \neq 3$

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tính giá trị của  $P$  với  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .

## DẠNG 2: TÌM $x$ ĐỂ BIỂU THỨC RÚT GỌN LÀ SỐ NGUYÊN

**Bài toán:** Cho biểu thức  $A = \frac{a}{cx+d}$  hoặc  $A = \frac{a}{c\sqrt{x}+d}$ . Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$

### Phương pháp:

- Lập luận:  $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$  Mẫu thức là Ư(a)
- Liệt kê Ư(a)
- Mẫu thức bằng Ư(a) tìm ra  $x$

**Chú ý:** Giá trị  $x \in \mathbb{Z}$  tìm được phải thoả mãn điều kiện của biểu thức rút gọn mới nhận.

**Bài 1.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$  ( $x > 0, x \neq 4$ ).

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Tìm  $x$  sao cho  $A$  nhận giá trị là một số nguyên.

**Bài 2.** Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$  và  $B = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$  (với  $x \geq 0, x \neq 16$ ).

Hãy tìm các giá trị nguyên của  $x$  để giá trị của biểu thức  $M = B(A-1)$  là số nguyên.

**Bài 3.** Cho biểu thức  $A = \frac{15\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn  $A$

b) Tìm  $x$  nguyên để  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 4.** Cho biểu thức  $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$  với  $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

a) Rút gọn  $A$

b) Tìm  $x$  nguyên để  $A$  có giá trị nguyên.

**Bài 5.** Cho biểu thức  $Q = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$

a) Rút gọn  $A$

b) Tìm  $x$  nguyên để  $A$  có giá trị nguyên.

### DẠNG 3: TÌM GTLN – GTNN CỦA BIỂU THỨC RÚT GỌN

**Bài 1.** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$ , với  $x \geq 0, x \neq 9$ .

a) Rút gọn  $P$ .

b) Tìm giá trị lớn nhất của  $P$ .

**Bài 2.** Cho biểu thức:  $P = \frac{x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 12}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$  với  $x \geq 0, x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức  $P$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$

**Bài 3.** Cho biểu thức  $A = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$  với  $x > 0, y > 0$

a) Rút gọn  $A$ .

b) Biết  $x \cdot y = 16$ . Tìm các giá trị của  $x, y$  để  $A$  có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

**Bài 4.** Cho biểu thức  $P = \frac{3x + 6\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{1 - \sqrt{x}}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

a) Rút gọn  $A$ .

b) Tìm giá trị lớn nhất của  $P$  và giá trị  $x$  tương ứng.

**Bài 5.** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} + \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{xy}} + 1 \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} \right)$ .

a) Rút gọn biểu thức  $A$ .

b) Cho  $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

## CHỦ ĐỀ 4: ỨNG DỤNG

**Bài 1.** Áp suất  $P$  (lb/in<sup>2</sup>) cần thiết để ép nước qua một ống dài  $L$  (ft) và đường kính  $d$  (in) với tốc độ  $v$  (ft/s) được cho bởi công thức:  $P = 0,00161 \cdot \frac{v^2 L}{d}$

a) Hãy tính  $v$  theo  $P$ ,  $L$  và  $d$ .

b) Cho  $P = 198,5$ ;  $L = 11\,560$ ;  $d = 6$ . Hãy tính tốc độ  $v$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của feet trên giây).

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm};$$

$$1 \text{ ft (feet)} = 0,3048 \text{ m};$$

$$1 \text{ lb (pound)} = 0,45359237 \text{ kg};$$

$$1 \text{ lb/in}^2 = 6\,894,75729 \text{ Pa (Pascal)}.$$

**Bài 2.** Trong thuyết tương đối, khối lượng  $m$  (kg) của một vật khi chuyển động với vận tốc  $v$  (m/s) được

cho bởi công thức  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , trong đó  $m_0$  (kg) là khối lượng của vật khi đứng yên,  $c$  (m/s) là vận tốc

của ánh sáng trong chân không

a) Viết lại công thức tính khối lượng  $m$  dưới dạng không có căn thức ở mẫu.

b) Tính khối lượng  $m$  theo  $m_0$  (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba) khi vật chuyển động với vận tốc  $v = \frac{1}{10}c$ .

**Bài 3.** Khi bay vào không gian, trọng lượng  $P$  (N) của một phi hành gia ở vị trí cách mặt đất một độ cao

$h$  (m) được tính theo công thức:  $P = \frac{28014 \cdot 10^{12}}{(64 \cdot 10^5 + h)^2}$

a) Trọng lượng của phi hành gia là bao nhiêu Newton khi cách mặt đất 10 000 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Ở độ cao bao nhiêu mét thì trọng lượng của phi hành gia là 619 N (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

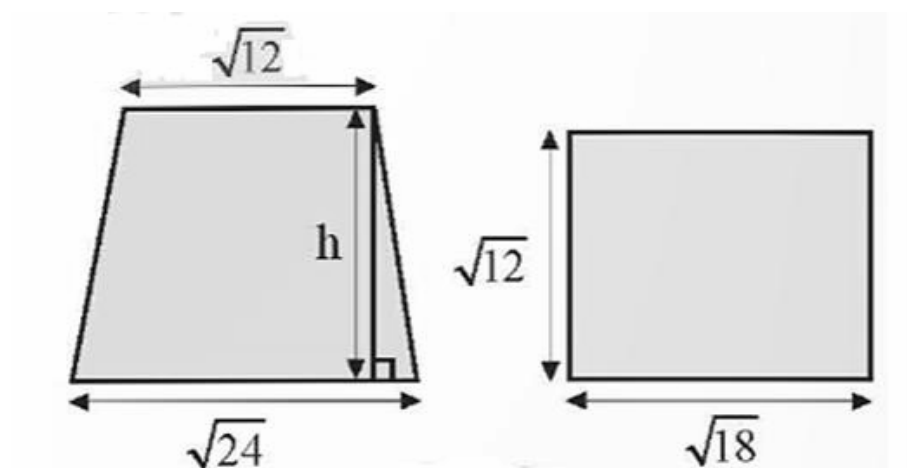
**Bài 4.** Ngày 28/9/2018, sau trận động đất 7,5 độ Richter, cơn sóng thần (tiếng Anh là Tsunami) cao hơn 6 m đã tràn vào đảo Sulawesi (Indonesia) và tàn phá thành phố Palu gây thiệt hại vô cùng to lớn. Tốc độ cơn sóng thần  $v$  (m/s) và chiều sâu đại dương  $d$  (m) của nơi bắt đầu sóng thần liên hệ bởi công thức  $v = \sqrt{dg}$ , trong đó  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

a) Hãy tính tốc độ cơn sóng thần xuất phát từ Thái Bình Dương, ở độ sâu trung bình 400 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét trên giây).

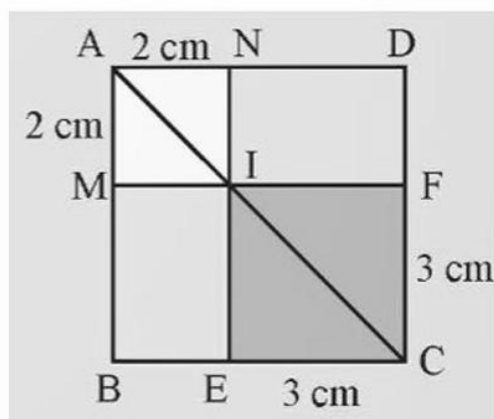
b) Theo tính toán của các nhà khoa học địa chất, tốc độ cơn sóng thần ngày 28/9/2018 là 800 km/h, hãy tính chiều sâu đại dương của nơi tâm chấn động đất gây ra sóng thần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

**Bài 5:**

Biết rằng hình thang và hình chữ nhật ở hình vẽ có diện tích bằng nhau. Tính chiều cao  $h$  của hình thang.

**Bài 6:**

Hình vuông ABCD được chia thành hai hình vuông và hai hình chữ nhật như hình vẽ.



- Tính độ dài đường chéo của hai hình vuông AMIN và CEIF.
- Tính độ dài đường chéo của hình vuông ABCD theo hai cách khác nhau.

## CHƯƠNG 3: CĂN BẬC HAI VÀ CĂN BẬC BA

### BÀI 10: CĂN BẬC BA VÀ CĂN THỨC BẬC BA

#### 1. Căn bậc ba của một số

Căn bậc ba của số thực  $a$  là số thực  $x$  thỏa mãn  $x^3 = a$ .

**Chú ý:**

- Mỗi số thực đều có đúng một căn bậc ba, kí hiệu là:  $\sqrt[3]{a}$ .
- Trong kí hiệu  $\sqrt[3]{a}$ , số 3 được gọi là chỉ số căn. Phép toán tìm căn bậc ba của một số gọi là phép khai căn bậc ba.

- $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$ .
- Nếu  $a < b$  thì  $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ .
- Nếu  $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$  thì  $a < b$ .

#### 2. Căn thức bậc ba

Với  $A$  là một biểu thức đại số, người ta gọi  $\sqrt[3]{A}$  là căn thức bậc ba của  $A$ , còn  $A$  được gọi là biểu thức lấy căn bậc ba hay biểu thức dưới dấu căn.

**Chú ý:**

- Điều kiện xác định cho căn thức bậc ba  $\sqrt[3]{A}$  chính là điều kiện xác định biểu thức  $A$ .
- $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$ .
- Các số, biến số được nối nhau bởi dấu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lũy thừa, khai căn bậc hai hoặc bậc ba làm thành một biểu thức đại số.

## DẠNG 1: TÌM CĂN BẬC BA

### Phương pháp

Căn bậc ba của số thực  $a$  là số thực  $x$  sao cho  $x^3 = a$ .

Căn bậc ba của số thực  $a$  được kí hiệu là:  $\sqrt[3]{a}$ .

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = a.$$

**Bài 1.** Tìm căn bậc ba của :

a) 216

b)  $-\frac{1}{1000}$

c)  $-0,0729$

d)  $\frac{27}{512}$

**Bài 2.** Tính

a)  $\sqrt{49}$

b)  $\sqrt{\frac{121}{169}}$

c)  $(-\sqrt{7})^2$

d)  $\sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2}$

**Bài 3.** Tính

a)  $\sqrt[3]{0,008}$

b)  $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}}$

c)  $-\sqrt[3]{2024^3}$

d)  $\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right)^3$

**Bài 4.** Tìm căn bậc ba của :

a)  $-64$

b)  $\frac{125}{8}$

c)  $0,512$

d)  $-\frac{1000}{216}$

**Bài 5.** Tính

a)  $\sqrt[3]{-0,027}$

b)  $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$

c)  $-\sqrt[3]{\frac{1}{512}}$

d)  $\left(-\sqrt[3]{\frac{2024}{2025}}\right)^3$

## DẠNG 2: SO SÁNH CĂN BẬC BA

### Phương pháp

- Nếu  $a < b$  thì  $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ .
- Nếu  $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$  thì  $a < b$ .



**Bài 1.** So sánh các cặp số sau:

a)  $\sqrt[3]{-2024}$  và  $\sqrt[3]{-2025}$

b. 8 và  $\sqrt[3]{511}$

**Bài 2.** So sánh các cặp số sau:

a)  $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$  và  $\sqrt[3]{\frac{1}{1001}}$

b.  $-7$  và  $\sqrt[3]{-342}$

**Bài 3.** So sánh cặp số sau

a)  $2\sqrt[3]{3}$  và  $\sqrt[3]{23}$

b) 15 và  $3\sqrt[3]{126}$

**Bài 4.** So sánh cặp số sau

a) 7 và  $2\sqrt[3]{43}$

b)  $5\sqrt[3]{6}$  và  $6\sqrt[3]{5}$

**Bài 5.** Hãy so sánh

a)  $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$  và  $B = 2\sqrt{5}$  hoặc  $B = 2\sqrt[3]{9}$

b)  $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$  và  $B = \sqrt{3}$  hoặc  $B = \frac{4}{\sqrt[3]{9}}$

### **DẠNG 3: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC TẠI GIÁ TRỊ CHO TRƯỚC**

**Bài 1.** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a)  $\sqrt[3]{2025-x}$  tại  $x = 2017$ ;  $x = 1998$ ;  $x = 1961$ .

b)  $\sqrt[3]{150-x^2}$  tại  $x = -5$ ;  $x = 5$ ;  $x = \sqrt{86}$ .

**Bài 2.** Tính giá trị của mỗi căn thức bậc hai sau :

a)  $\sqrt[3]{4x+7}$  tại  $x = -2$ ;  $x = 5$ ;  $x = \frac{203}{4}$ .

b)  $\sqrt[3]{x^2+9}$  tại  $x = -\sqrt{18}$ ;  $x = \sqrt{7}$ ;  $x = 5$ .

### **DẠNG 4: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ CĂN THỨC BẬC BA CÓ NGHĨA**

**Bài 1.** Tìm  $x$  để các căn thức sau có nghĩa

a)  $\sqrt[3]{x-2024}$

b)  $\sqrt[3]{\frac{2025-2024x}{2023}}$

c)  $\sqrt[3]{\frac{-2}{x-1}}$

**Bài 2.** Tìm  $x$  để các căn thức sau có nghĩa

a)  $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}}$

b)  $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2-4x+4}}$

c)  $\sqrt[3]{\frac{-5}{x^2+2x+3}}$

**Bài 3.** Tìm  $x$  để các căn thức sau có nghĩa

a)  $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{2}x}$

b)  $\sqrt[3]{\frac{2x-3}{5}}$

c)  $\sqrt[3]{\frac{-2024}{4x-3}}$

d)  $\sqrt[3]{\frac{-1}{2x^2+1}}$

e)  $\sqrt[3]{\frac{1}{4x^2+12x+9}}$

f)  $\sqrt[3]{\frac{3}{-x^2+x-4}}$

## **DẠNG 5: RÚT GỌN BIỂU THỨC CĂN BẬC BA KHÔNG CHỨA BIẾN**

**Bài 1.** Thực hiện các phép tính

a)  $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{\sqrt[3]{7,2}}{\sqrt[3]{0,9}}$

b)  $2\sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{192}$

c)  $\frac{\sqrt[3]{750}}{\sqrt[3]{250}} - \sqrt[3]{160} \cdot \sqrt[3]{1,2}$

d)  $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$

**Bài 2.** Thực hiện các phép tính

a)  $A = \frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$

b)  $B = (\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})$

c)  $C = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

**Bài 3.** Thực hiện các phép tính

a)  $\frac{\sqrt[3]{384}}{\sqrt[3]{3}} + 3\sqrt[3]{-54} + \sqrt[3]{432}$

b)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{512}} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{64} + \frac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}$

c)  $\sqrt[3]{-343} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24}$

d)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{512}} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{64} + \frac{5}{8}\sqrt[3]{-0,064}$

**Bài 4.** Thực hiện phép tính

a)  $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$

b)  $(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

c)  $(\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}) : 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

d)  $2\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{375}$

**Bài 5.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = \sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$

b)  $B = \sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$

## DẠNG 6: RÚT GỌN BIỂU THỨC CĂN BẬC BA CHỨA BIẾN

**Bài 1.** Rút gọn biểu thức

a)  $\sqrt[3]{64a^3}$

b)  $\sqrt[3]{-8a^3b^6}$

c)  $\sqrt[3]{\frac{343a^3b^6}{-216}}$

d)  $\sqrt[3]{-64a^9b^9}$

**Bài 2.** Rút gọn biểu thức

a)  $A = \sqrt[3]{125x^3 + 75x^2 + 15x + 1} - 5x$

b)  $B = \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1} \cdot \sqrt[3]{x\sqrt{x} - 1} - \sqrt[3]{1 - x^3}$

**Bài 3.** Làm phép tính

a)  $\sqrt[3]{343a^3}$

b)  $\sqrt[3]{-512a^3b^6}$

**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau

a)  $A = 3x - \sqrt[3]{27x^3 + 27x^2 + 9x + 1}$

b)  $B = \sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1} - \sqrt[3]{x^3}$

**Bài 5.** Rút gọn biểu thức

a)  $A = \sqrt[3]{(x-1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(1-2x)^3} + 3x$

b)  $B = 2\sqrt[3]{1-3x^2+3x-x^3} - x$

**Bài 6.** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

a)  $A = \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 3x + 3\sqrt{x} + 1} - (\sqrt{x} + 2)$

b)  $B = (\sqrt[3]{x} + 1)^3 - (\sqrt[3]{x} - 1)^3 + 6(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + 1)$

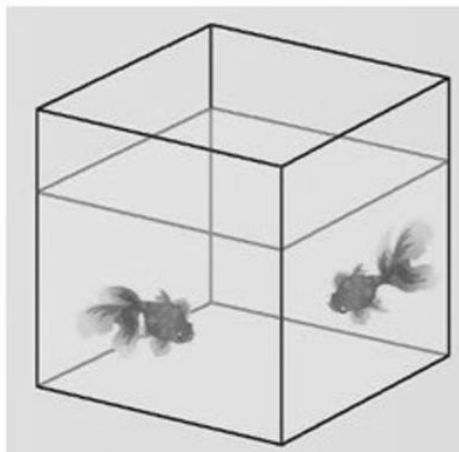
## DẠNG 6: ỨNG DỤNG

**Bài 1.** Thể tích của một khối bê tông có dạng hình lập phương là khoảng 220 348 cm<sup>3</sup>. Hỏi độ dài cạnh của khối bê tông đó là bao nhiêu centimet (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

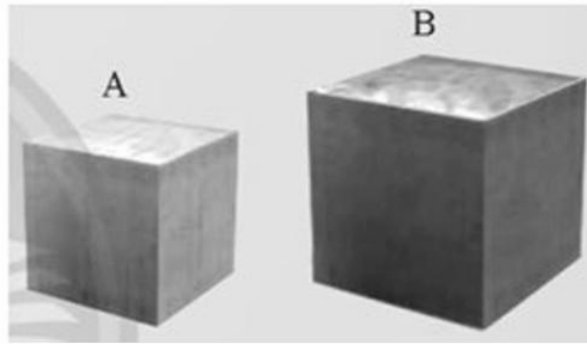
**Bài 2.** Có thể xếp 125 khối lập phương đơn vị (có cạnh bằng 1 cm) thành một khối lập phương lớn được không?

**Bài 3.** Một khối gỗ hình lập phương có thể tích 1 000 cm<sup>3</sup>. Chia khối gỗ này thành 8 khối gỗ hình lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Tính độ dài của mỗi khối gỗ hình lập phương nhỏ.

**Bài 4.** Một bể cá hình lập phương có sức chứa 1 000 dm<sup>3</sup>. Muốn tăng sức chứa của bể lên 10 lần (giữ nguyên hình dạng lập phương) thì phải tăng chiều dài của mỗi cạnh lên bao nhiêu lần?



**Bài 5.** Có hai khối bê tông hình lập phương A và B có thể tích lần lượt là  $8 \text{ dm}^3$  và  $15 \text{ dm}^3$  (Hình 1).



a) Tính độ dài cạnh của khối bê tông A.

b) Gọi  $x$  (dm) là độ dài cạnh của khối bê tông B. Thay  $\boxed{?}$  bằng số thích hợp để có đẳng thức:  $x^3 = \boxed{?}$