BÀI 5: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG

Giả sử y là một hàm số của x và ta viết $y=f(x)$. Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2, thì sự thay đổi của x là $\Delta x=x_2-x_1$ và sự thay đổi tương ứng của y là $\Delta y=f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)$.

Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi trung bình của y đối với x trên đoạn $\left[x_1;x_2\right]$.

Giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x_2\to x_1}\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của y đối với x tại điểm $x=x_1$.

Như vậy, đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y=f(x)$ đối với x tại điêm $x=a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s=s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v=s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật: $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

-Nếu $C=C\left(t\right)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.

- Nếu $P=P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.

- Nếu $C=C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.

- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87 , bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

Ví dụ 1. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất $2\,\text{m}$ với vận tốc ban đầu $24,5\,\text{m}/\text{s}$ là $h(t)=2+24,5t-4,9t^2$ (theo Vật lí đọi cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v=h'(t)=24,5-9,8t(\text{m}/\text{s})$.

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2)=24,5-9,8\cdot 2=4,9(\text{m}/\text{s})$.

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a=-4,9<0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t=-\frac{b}{2a}=\frac{24,5}{2\cdot 4,9}=2,5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5)=32,625(m)$.

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h=2+24,5t-4,9t^2=0$, hay $t\approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đât là $v(5,08)=24,5-9,8\cdot 5,08=-25,284(\mathrm{m/s})$.

Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Ví dụ 2. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t)=\frac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

Ta có: $P'(t)=\frac{0,75ae^{-0,75t}}{\left(b+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}, t\geq 0$.

Theo đề bài, ta có: $P(0)=20$ và $P'(0)=12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{a}{b+1}=20\\ \frac{0,75a}{(b+1)^2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=20(b+1)\\ \frac{15}{b+1}=12.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a=25$ và $b=\frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t)=\frac{18,75\mathrm{e}^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0,75t}\right)^2}>0, \forall t\geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim\limits_{t\to+\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{25}{\frac{1}{4}+\mathrm{e}^{-0.75t}}=100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Ví dụ 3. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x)=30000+300x-2,5x^2+0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x)=300-5x+0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200)=300-5\cdot 200+0,375\cdot 200^2=14300$.

Chi phí biên tại $x=200$ là 14300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo

(đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là $C(201)-C(200)=1004372,625-990000=14372,625$ (nghìn đồng)

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

Ví dụ 4. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x)=\dfrac{300x}{100-x}$ (triêu dông), $0\le x<100$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

Xét hàm số $y=C(x)=\dfrac{300x}{100-x}, 0\le x<100$.

Ta có:

- $y'=\dfrac{30000}{(100-x)^2}>0$, với mọi $x\in[0;100)$.

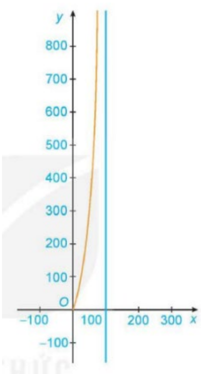
Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0;100)$.

- $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x)=\lim\limits_{x\to 100^-}\dfrac{300x}{100-x}=+\infty$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=100$.

Bảng biến thiên:

x	0		100
$C'(x)$		$+$	
$C(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số như Hình 1.34 .



Hình 1.34

a) Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

b) Vì $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x)=+\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x=100$) nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa)

2. MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HOÁ ĐƠN GIẢN

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

Bước 1. Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

Bước 2. Chọn một đại lượng thich hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q=Q(x)$.

Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q=Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

Ví dụ 5. Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Đổi 1 lít $=1000\,\text{cm}^3$.

Gọi $r(\text{cm})$ là bán kính đáy của hình trụ, $h(\text{cm})$ là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S=2\pi r^2+2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là $1000\,\text{cm}^3$ nên ta có: $1000=V=\pi r^2h$, hay $h=\dfrac{1000}{\pi r^2}$.

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S=2\pi r^2+\dfrac{2000}{r}, r>0$.

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có

$S'=4\pi r-\dfrac{2000}{r^2}=\dfrac{4\pi r^3-2000}{r^2}; S'=0 \Leftrightarrow \pi r^3=500 \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$.

Bảng biến thiên:

r	0		$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó: $h=\dfrac{1000}{\pi r^2}=\dfrac{1000}{\pi\sqrt[3]{\dfrac{250000}{\pi^2}}}=\dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}$.

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r=\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\approx 5,42(\text{cm})$ và chiều cao

$h=\dfrac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}\approx 10,84(\text{cm})$

Chú ý. Từ lời giải Ví dụ 5 ta thấy: Nếu hình trụ có thể tích V không đổi thì diện tích bề mặt của hình trụ nhỏ nhất khi chiều cao bằng đường kính đáy.

Ví dụ 6. Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Lời giải

Gọi p (nghìn đồng) là giá của mỗi vé; x là số khán giả mua vé. Ta cần xác định hàm cầu $p=p(x)$.
Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p=p(x)$ là hàm số bậc nhất.

Giá vé $p_1=100$ ứng với $x_1=27000$ và giá vé $p_2=90$ ứng với $x_2=27000+3000=30000$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p=ax+b$ đi qua hai điểm $(27000;100)$ và $(30000;90)$ là
$p-100=\dfrac{100-90}{27000-30000}(x-27000)$, hay $p-100=-\dfrac{1}{300}(x-27000)$, tức là $x=-300p+57000$.

Hàm doanh thu từ tiền bán vé là

$R(p)=px=p(-300p+57000)=-300p^2+57000p$. Ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $R'(p)=-600p+57000; R'(p)=0\Leftrightarrow p=95$.

Bảng biến thiên:

p	0		95		$+\infty$
$R'(p)$		$+$	0	$-$	
$R(p)$	0	$\nearrow$	$2\ 707\ 500$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy với giá vé là 95 nghìn đồng một vé thì doanh thu bán vé là lớn nhất.

Ví dụ 7. Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là

$P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x), x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

a) Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hằng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?

b) Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng hay không?

Lời giải

Xét hàm số $y = P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000, x \geq 0$.

Ta có:

- $y' = P'(x) = -0,9x^2 + 72x + 1800; y' = 0 \Leftrightarrow x = 100$ (vì $x \geq 0$). $P'(x) > 0$ với mọi $x \in [0;100), P'(x) < 0$ với mọi $x \in (100;+\infty)$.

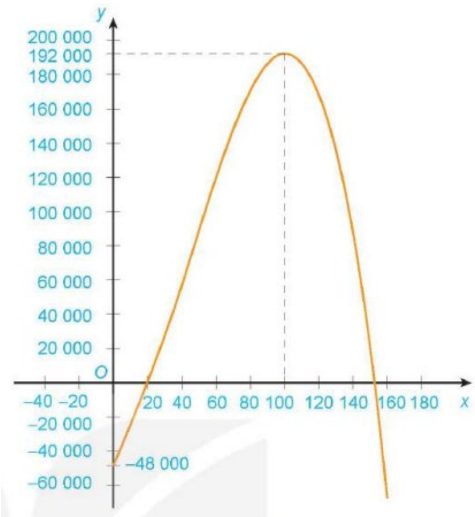
Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0;100)$ và nghịch biến trên khoảng $(100;+\infty)$. Tại $x = 100$, hàm số đạt cực đại và $y_{CD} = y(100) = 192000$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên:

x	0		100		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	
$P(x)$	$-48\,000$	$\nearrow$	$192\,000$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số như Hình 1.36 (ở đây ta lấy một đơn vị trên trục hoành bằng 1000 đơn vị trên trục tung).



Hình 1.36

Từ đồ thị đã vẽ suy ra:

a) Đồ thị xuất phát từ điểm $(0;-48000)$, ở phía dưới trục hoành (tức là công ty đang bị lỗm), và giao với trục hoành tại điểm đầu tiên có hoành độ $x = 20$. Do đó, hằng tháng công ty cần sản xuất ít nhất 20 chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn.

b) Từ đồ thị ta thấy khi sản xuất hơn 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng thì càng sản xuất nhiều lợi nhuận càng giảm. Do đó, công ty không nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng.

Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể thu được là $y_{CĐ} = y(100) = 192000$ (nghìn đồng), tức là 192 triệu đồng, đạt được khi sản xuất đúng 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1.26. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt

(đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \ge 0$.

a) Tìm các hàm vận tốc và gia tốc.

b) Khi nào thì hạt chuyển động lên trên và khi nào thì hạt chuyển động xuống dưới?

c) Tìm quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \le t \le 3$.

d) Khi nào hạt tăng tốc? Khi nào hạt giảm tốc?

Lời giải

a) Hàm vận tốc là: $v(t) = y' = 3t^2 - 12, t \ge 0$. Hàm gia tốc là: $a(t) = v'(t) = y'' = 6t, t \ge 0$

b) Hạt chuyển động lên trên khi $v(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow t > 2$ (do $t \ge 0$)

Hạt chuyển động xuống dưới khi $v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow 0 \le t < 2$ (do $t \ge 0$)

c) Ta có: $y(3) - y(0) = 3^3 - 12.3 + 3 - 3 = -9$

Vậy quãng đường vật đi được trong thời gian $0 \le t \le 3$ là $9\,\text{m}$.

d) Hạt tăng tốc khi $v(t)$ tăng hay $v'(t) > 0$. Do đó, $6t > 0 \Leftrightarrow t > 0$

Hạt giảm tốc khi $v(t)$ giảm hay $v'(t) < 0 \Leftrightarrow 6t < 0 \Leftrightarrow t < 0$ (không thỏa mãn do $t \ge 0$)

1.27. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hoá nào đó là:

$C(x) = 23000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3$.a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(100)$ và giải thich ý nghĩa của nó.

c) So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = \dfrac{21}{4000}x^2 - x + 50$

b) $C'(100) = \dfrac{21}{4000} \cdot 100^2 - 100 + 50 = 2,5$ (trăm nghìn đồng).

Chi phí biên tại $x = 100$ là 250000 đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm 1 đơn vị hàng hóa tiếp theo (đơn vị hàng hóa thứ 101) là khoảng 250000 đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hóa thứ 101 là:

$C(101) - C(100) = 24752,52675 - 24750 = \ 2,52675$ (trăm nghìn đồng).

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(100)$ đã tính ở câu b.

1.28. Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghin đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x là số lần tăng giá $(0 < x < 100)$.

Mỗi lần tăng giá thì số căn hộ cho thuê là 100 - x (căn).

Số tiền thuê căn hộ sau mỗi lần tăng là: $8000000 + 100000x$

Khi đó tổng số tiền cho thuê căn hộ 1 tháng là:

$y = (8000000 + 100000x)(100 - x) = 800000000 - 8000000x + 10000000x - 100000x^2$

$= 800000000 + 2000000x - 100000x^2$

Bài toán trở thành tìm x để y lớn nhất. Ta có $y' = -200000x + 2000000; y' = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		10		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	810000000	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy doanh thu lớn nhất khi người quản lí đặt giá thuê căn hộ là

$8000000 + 100000.10 = 9000000$ (đồng).

Sử dụng kiến thức về cách giải bài toán tối ưu hóa đơn giản để tìm doanh thu lớn nhất:

Bước 1: Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

Bước 2: Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.

Bước 3: Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

1.29. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hoá được cho bởi công thức $p = \dfrac{354}{1 + 0,01x}, x \geq 0,$ trong đó p là giá bán (nghin đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tìm công thức tính x như là hàm số của p. Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghin đồng.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $x = x(p)$. Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

- Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p \to 0^+} x(p)$.

Lời giải

a) Ta có $p = \dfrac{354}{1+0,01x} \Leftrightarrow (1+0,01x)p = 354 \Leftrightarrow 0,01x = \dfrac{354}{p} - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{35400}{p} - 100$

Vì $x \ge 0$ nên $x = \dfrac{35400}{p} - 100 \ge 0 \Leftrightarrow 0 < p \le 354$

Tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = (0;354]$.

Số sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng là $x = \dfrac{35400}{240} - 100 = 47,5$

b) $x = \dfrac{35400}{p} - 100$

1. Tập xác định của hàm số là $\mathrm{D} = (0;354]$.

2. Sự biến thiên

+) Có $x' = -\dfrac{35400}{p^2} < 0, \forall p \in D$

+) Hàm số luôn nghịch biến với mọi $p \in (0;354)$.

+) Hàm số không có cực trị.

+) Tiệm cận

$$\lim_{p \to 0^+} x = \lim_{p \to 0^+} \left(\frac{35400}{p} - 100 \right) = +\infty$$

Do đó $\mathrm{p} = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+) Bảng biến thiên

p	0		354
x'		–	
x	$+\infty$	$\searrow$	0

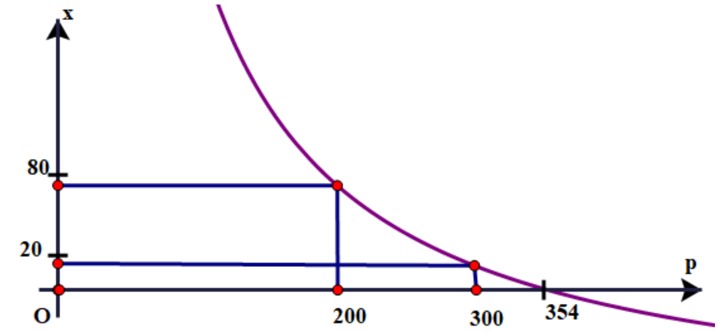
3. Đồ thị:

Ta có: $f(p) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{354-p}{0,01p} = 0 \Leftrightarrow p = 354$

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \dfrac{354-p}{0,01p}$ cắt trục hoành tại điểm $(354;0)$.

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \dfrac{354 - p}{0,01p}$ đi qua các điểm (300; 18); (200; 77).

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \dfrac{354 - p}{0,01p}$ với $p \in (0;354]$ là đường màu tím:



- Số lượng đơn vị sản phẩm bán sẽ giảm đi khi giá bán tăng, và sẽ không bán được sản phẩm nào nếu giá bán là 354 nghìn đồng

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p \to 0^+} x(p)$: Vì $\lim\limits_{p \to 0^+} x(p) = +\infty$ nên giá bán càng thấp thì số lượng đơn vị sản phẩm sẽ bán được càng nhiều.

C. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

A. 72. **B.** 12. **C.** $-\dfrac{1}{192}$. **D.** $\dfrac{23}{2}$.

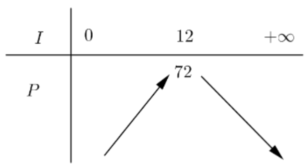
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$.

$P' = 12 - I$. $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:



Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.

Câu 2: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 11

Lời giải

Chọn C