CHƯƠNG VII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 27: THỂ TÍCH

I. LÝ THUYẾT.

Thể tích là một trong những khái niệm toán học xuất hiện thường xuyên trong cuộc sống, đo sự chiếm chỗ của vật thể trong không gian. Bài học này đưa ra công thức thể tích của các hình khối ứng với các hình mà ta đã học.

Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cụt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S$.
- Thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích đáy lớn S, diện tích đáy bé S' và chiều cao h là $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(S+S'+\sqrt{S\cdot S'}\right)$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là $V=h\cdot S$.

Nhận xét

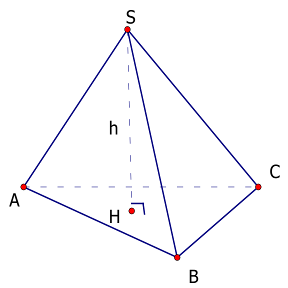
- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

CHÚ Ý:

1. Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước a,b,c: $\boxed{V=a.b.c}$

2. Thể tích khối lập phương có kích thước a: $\boxed{V=a^3}$

3. Thể tích khối chóp

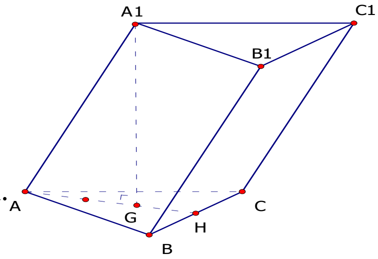


\+ Thể tích khối chóp $\boxed{V=\frac{1}{3}.S.h}$

Trong đó: S là diện tích đa giác đáy.

h: là chiều cao của khối chóp.

4. Thể tích khối lăng trụ



Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V = S.h}$

S là diện tích đa giác đáy.

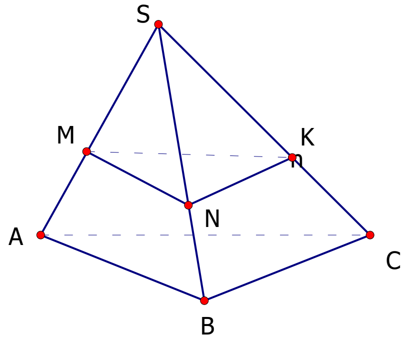
h: là chiều cao của khối lăng trụ.

Lưu ý: Lăng trụ đứng có chiều cao là độ dài cạnh bên.

5. Tỉ số thể tích.

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm M, N, K khác với S, khi đó ta có:

$$\frac{V_{S.MNK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SK}{SC}.$$

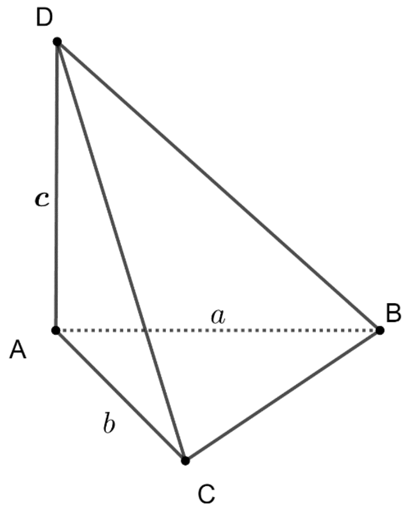


+ Các công thức tính nhanh (nếu có), có chứng minh các công thức tính nhanh (nếu có thể).

CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT SỬ DỤNG ĐỂ LÀM BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÔNG THỨC 1: Với tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a, AC = b, AD = c$, ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc$.

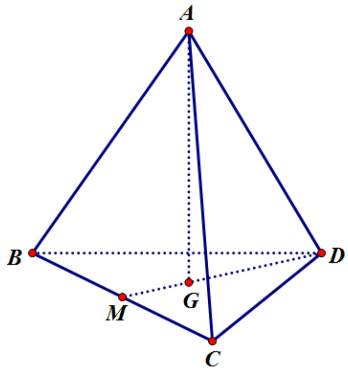
Chứng minh



Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}AD.\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{6}abc$.

CÔNG THỨC 2: Thể tích khối tứ diện đều cạnh a: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Chứng minh



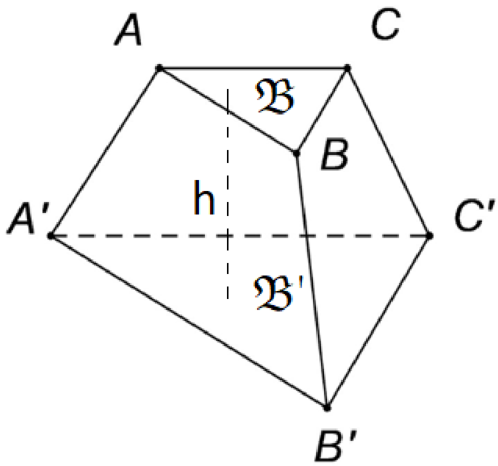
Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.

Ta có $DG=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, suy ra $AG=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích tam giác BCD: $S_{BCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

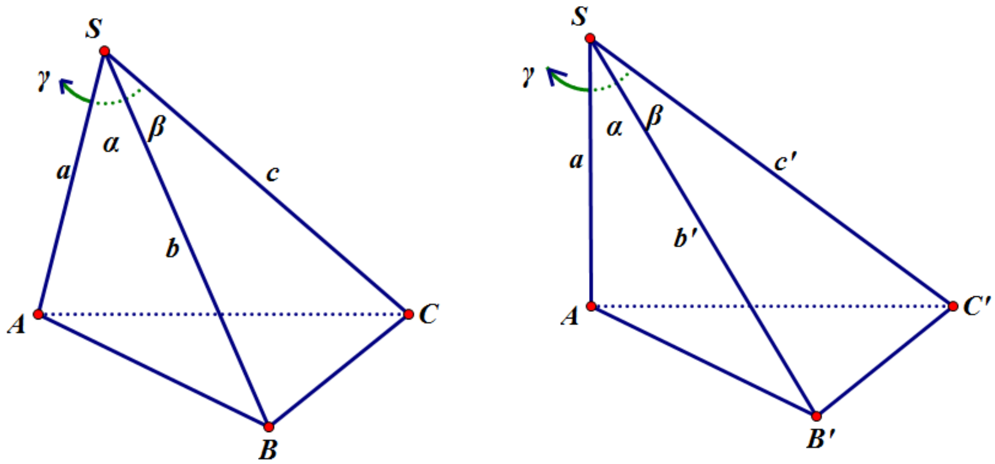
Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là: $V=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

CÔNG THỨC 3: Thể tích của khối chóp cụt $V=\frac{1}{3}h\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right)$ với h là khoảng cách giữa hai đáy, B,B' là diện tích của hai đáy



CÔNG THỨC 4: Thể tích khối tứ diện biết các góc α,β,γ và các cạnh a,b,c tại cùng một đỉnh: $V=\frac{abc}{6}.\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$

Chứng minh



Xét tứ diện $S.ABC$ có các góc α,β,γ và các cạnh a,b,c tại đỉnh S như hình vẽ trên.

Dựng mặt phẳng qua A, vuông góc với SA, cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại B',C'.

Ta có $SB'=\dfrac{SA}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{\cos\alpha};SC'=\dfrac{SA}{\cos\beta}=\dfrac{a}{\cos\beta}$ và $AB'=a\tan\alpha, AC'=a\tan\beta$.

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{bc}{a^2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Áp dụng định lí cosin trong $\Delta SB'C'$, có

$$2AB'AC'.\cos\widehat{B'AC'}=AB'^2+AC'^2-B'C'^2$$

$$=a^2\tan^2\alpha+a^2\tan^2\beta-a^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\right)=a^2\left(\frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha.\cos\beta}-2\right)$$

$$\Rightarrow AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}=a.\frac{\cos\gamma-\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}.$$

Ta có $\left(AB'.AC'.\sin\widehat{B'AC'}\right)^2=\left(AB'.AC'\right)^2-\left(AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}\right)^2$

$$=a^4\tan^2\alpha\tan^2\beta-a^4.\frac{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=a^4\frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\beta\right)-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

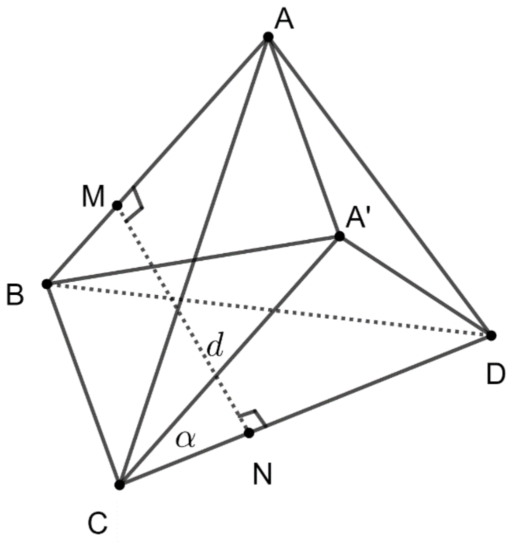
$$=a^4.\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\Rightarrow S_{AB'C'}=\frac{AB'.AC'.\sin\widehat{B'AC'}}{2}=\frac{a^2\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Suy ra $V_{S.ABC}=\dfrac{bc}{a^2\cos\alpha\cos\beta}V_{S.AB'C'}=\dfrac{abc}{6}.\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$.

CÔNG THỨC 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a; CD = b; d\left(AB, CD\right) = d; \left(AB; CD\right) = \alpha$. Khi đó $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abd\sin\alpha$

Chứng minh



Trong mặt phẳng $\left(ABC\right)$ vẽ hình bình hành $CBAA'$.

Ta có $AA' \parallel BC$ nên $V_{ABCD} = V_{A'BCD}$.

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD với $M \in AB, N \in CD$.

Vì $BM \parallel CA'$ nên $V_{BA'CD} = V_{MA'CD}$. Ta có $MN \perp AB$ nên $MN \perp CA'$.

Ngoài ra $MN \perp CD$ nên $MN \perp \left(CDA'\right)$.

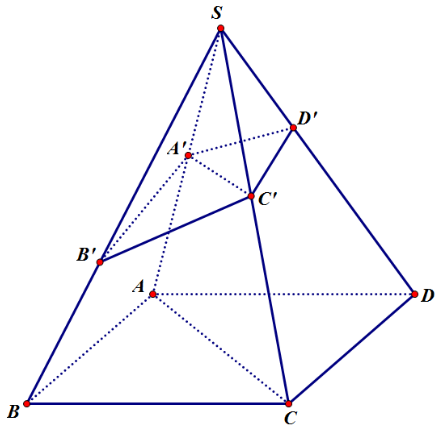
Ta có $\left(AB, CD\right) = \left(A'C, CD\right) = \alpha$.

Do đó $V_{MACD} = \dfrac{1}{3}S_{ACD} \cdot MN = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}CA' \cdot CD \cdot \sin\alpha \cdot MN = \dfrac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\alpha$.

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB \cdot CD.d.\sin\alpha$.

CÔNG THỨC 6: Tỉ số thể tích hai hình chóp có đáy hình bình hành. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành; và hình chóp tứ giác $S.A'B'C'D'$ có A', B', C', D' lần lượt nằm trên các cạnh SA, SB, SC, SD; khi đó: $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}\left(\dfrac{SB'}{SB} + \dfrac{SD'}{SD}\right)$.

Chứng minh

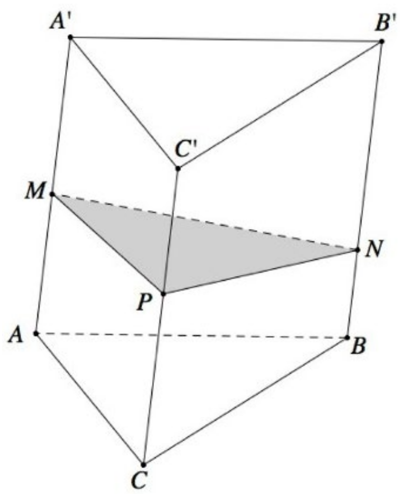


Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.A'C'D'}}{2V_{S.ACD}}+\frac{V_{S.A'C'B'}}{2V_{S.ACB}}=\frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD}+\frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}$

$=\frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right).$

CÔNG THỨC 7: Mặt phẳng (α) cắt các cạnh của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ lần lượt tại M,N,P sao cho $\frac{AM}{AA'}=x,\frac{BN}{BB'}=y,\frac{CP}{CC'}=z$. Khi đó $V_{ABC.MNP}=\frac{x+y+z}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Chứng minh



Ta có $V_{ABCMNP}=V_{NACB}+V_{NACPM}$.

$V_{NACB}=\frac{BN}{BB'}\cdot V_{B'ACB}=\frac{BN}{BB'}\cdot\frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}\quad(1).$

$$\frac{V_{NACPM}}{V_{B'ACC'A'}}=\frac{S_{ACPM}}{S_{ACC'A'}}=\frac{(CP+AM)\cdot\frac{1}{2}}{AA'}=\frac{1}{2}\left(\frac{CP}{CC'}+\frac{AM}{AA'}\right)$$

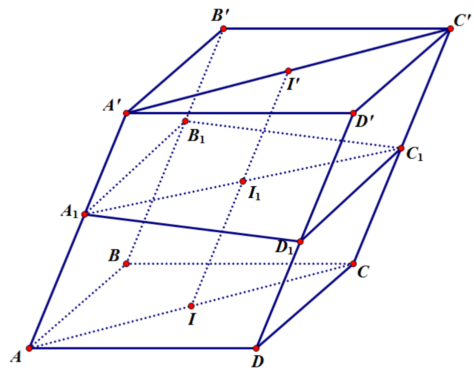
$$\Rightarrow V_{NACPM}=\frac{1}{2}\left(\frac{CP}{CC'}+\frac{AM}{AA'}\right)\cdot\frac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}\quad(2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $V_{ABCMNP} = V_{NACB} + V_{NACPM} = \frac{1}{3}\left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{AM}{AA'}\right) \cdot V_{ABCA'B'C'}$.

CÔNG THỨC 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, lấy A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt trên các cạnh AA', BB', CC', DD' sao cho bốn điểm ấy đồng phẳng. Ta có tỉ số thể tích hai khối đa diện:

$$\frac{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}\right)$$

Chứng minh



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm $AC, A'C'$. Ta chứng minh được ba mặt phẳng $(ACC'A'), (BDD'B'), (A_1B_1C_1D_1)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến đồng quy tại I_1.

Ta có $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$, suy ra $A_1B_1 \parallel C_1D_1$. Tương tự, ta cũng được $A_1D_1 \parallel B_1C_1$.

Suy ra $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành, ta có I_1 là trung điểm A_1C_1.

Ta có II_1 là đường trung bình trong các hình thang AA_1C_1C và BB_1D_1D, suy ra $2II_1 = AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

Suy ra: $\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'} = \frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}$.

Áp dụng công thức tỉ số thể tích trong khối lăng trụ tam giác, ta có:

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} + V_{ACD.A_1C_1D_1}$$

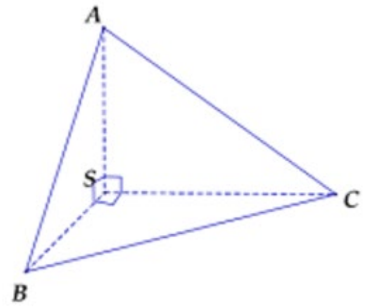
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'}\right) \cdot \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'} + \frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{DD_1}{DD'} + \frac{CC_1}{CC'}\right) \cdot \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'}\right) . V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}\left(\frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}\right) . V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

CÔNG THỨC 9: Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$.

Chứng minh



Đặt $SA = a,\ SB = b,\ SC = c$.

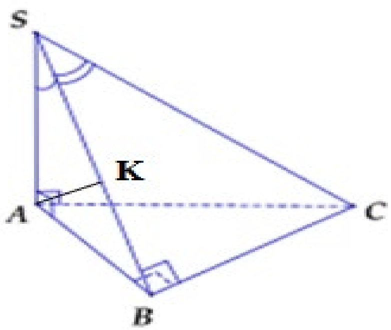
Suy ra $S_1 = \dfrac{1}{2}ab; S_2 = \dfrac{1}{2}bc; S_3 = \dfrac{1}{2}ca$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{\sqrt{a^2b^2c^2}}{6} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}ab\right)\left(\frac{1}{2}bc\right)\left(\frac{1}{2}ca\right)}}{3} = \frac{\sqrt{2.S_1.S_2.S_3}}{3}.$$

CÔNG THỨC 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \beta; \widehat{ASB} = \alpha$.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$

Chứng minh



$SA = SB.\cos\alpha$.

(SAB) và (SBC) vuông góc với nhau.

Nên BC vuông góc (SAB).

Tam giác SBC vuông tại B nên $BC = SB.\tan\beta \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}.SB.BC = \dfrac{1}{2}.SB^2.\tan\beta$

Kẻ AK vuông góc SB. Lúc này AK sẽ là khoảng cách từ A đến SBC. Do AK vuông góc BC và SB.

Ta có $AK = SA.sin\alpha = SB.sin\alpha.cos\alpha$.

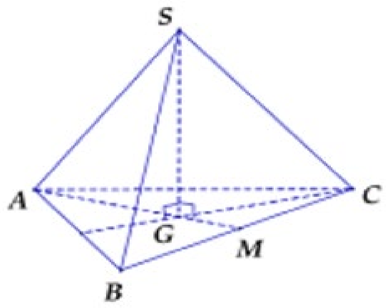
$$AK = \frac{SB\sin 2\alpha}{2}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}.$$

CÔNG THỨC 11: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b.

Khi đó: $V_{SABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$.

Chứng minh



$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

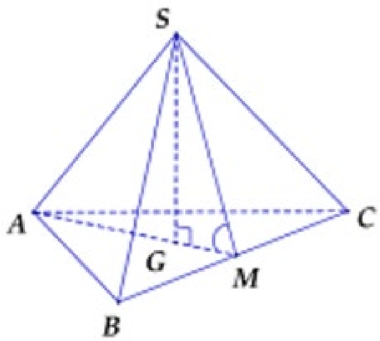
$$SG = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}.$$

CÔNG THỨC 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\tan\alpha}{24}$.

Chứng minh



$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

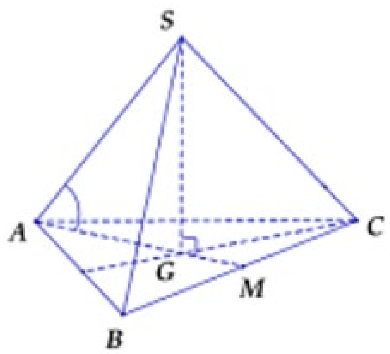
$SG = \frac{\sqrt{3}}{6}a\tan\alpha$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\frac{\sqrt{3}}{6}atan\alpha = \frac{a^3tan\alpha}{24}$.

CÔNG THỨC 13: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.cos^2\beta}{4}$.

Chứng minh



$SG = b\sin\beta$.

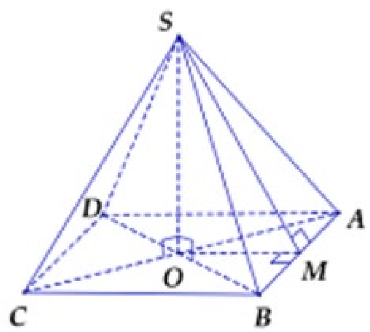
$AM = \frac{3}{2}AG = \frac{3}{2}.b.cos\beta \Rightarrow BC = \sqrt{3}.b.cos\beta$.

$S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2\cos^2\beta \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.cos^2\beta}{4}$.

CÔNG THỨC 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = b$.

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$.

Chứng minh



$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{2}}$.

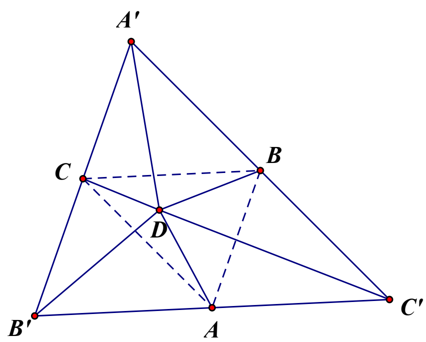
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.a^2.\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$.

CÔNG THỨC 15: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$ (tứ diện gần đều).

Khi đó: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$.

Chứng minh

Cách 1:



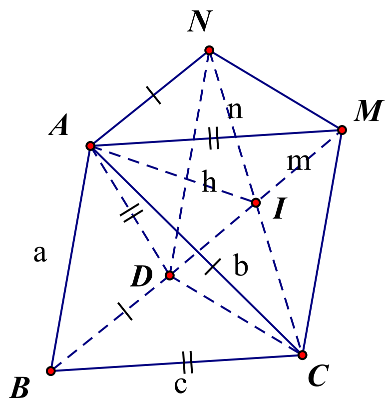
Dựng tứ diện $D.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C', C'A', A'B'$. Khi đó tứ diện $D.A'B'C$ có các cạnh DA', DB', DC' đôi một vuông góc.

Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{4}V_{DA'B'C'} = \dfrac{1}{24}DA'.DB'.DC'$.

Ta có $\begin{cases} DA'^2 + DC'^2 = 4b^2 \\ DA'^2 + DB'^2 = 4a^2 \\ DB'^2 + DC'^2 = 4c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DA'^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \\ DB'^2 = 2(a^2 - b^2 + c^2) \\ DC'^2 = 2(-a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$.

Khi đó: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{24}DA'.DB'.DC' = \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$.

Cách 2*:* Dựng lăng trụ $AMNBCD$ như hình bên.



Từ giả thiết ta có: $MNDC$ là hình thoi; các tam giác CAN , DAM là các tam giác cân, suy ra: $AI \perp NC, AI \perp DM \Rightarrow AI \perp (CDMN)$.

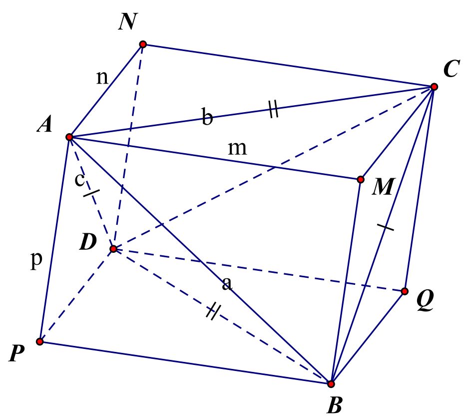
Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{2}V_{A.MNDC} = \frac{1}{2}.4V_{A.IMN} = 2V_{A.IMN} = \frac{1}{3}IA.IM.IN = \frac{1}{3}h.m.n$.

Từ $\begin{cases} h^2 + m^2 = c^2 \\ h^2 + n^2 = b^2 \\ m^2 + n^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ n^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ h^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \end{cases}$.

Suy ra:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Cách 3: Dựng hình hộp chữ nhật $AMCN.PBQD$ như hình bên.



Gọi các kích thước của hình hộp là $m,\ n,\ p$.

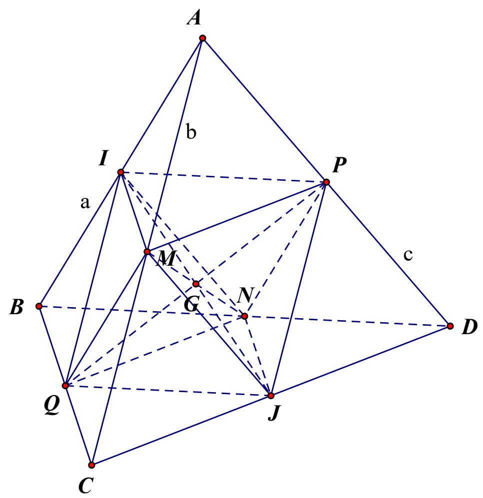
Ta có: $V_{PADB} = V_{MABC} = V_{QBCD} = V_{NACD} = \frac{1}{6}V_{AMCN.PBQD}$. Suy ra:

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{AMCN.PBQD}=\frac{1}{3}m.n.p$.

Ta có: $\begin{cases} m^2+n^2=b^2 \\ m^2+p^2=a^2 \\ p^2+n^2=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ n^2=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2} \\ p^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2} \end{cases}$.

$V_{ABCD}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

Cách 4:



Gọi I, J, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, AC, BD, AD, BC.

Ta thấy tứ giác $MINJ$ là hình thoi. Ta chứng minh được PQ vuông góc với AD và BC nên PQ vuông góc với $mp(IMJN)$.

Gọi G là giao điểm của các đường IJ, MN, PQ. Ta có

$V_{PMINJQ}=2V_{P.MINJ}=2.\frac{1}{3}PG.\frac{1}{2}IJ.MN=\frac{1}{6}PQ.IJ.MN$.

Vì $V_{AIMP}=V_{BINQ}=V_{CQMJ}=V_{DPNJ}=\frac{1}{8}V_{ABCD}$ nên

$V_{PIMJNQ}=V_{ABCD}-(V_{AIMP}+V_{BINQ}+V_{CQMJ}+V_{DPNJ})=\frac{1}{2}V_{ABCD}$.

Suy ra $V_{ABCD}=2V_{PIMJN}=\frac{1}{3}PQ.IJ.MN$.

Ta tính được:

$$IJ^2 = IC^2 - CJ^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} - \frac{\mathrm{CD}^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Tương tự:

$$PQ^2 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}; \; MN^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}$$

Từ đó:

$$V_{ABC\mathrm{D}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Kiến thức cần nhớ:

1) Công thức tính: $V=\frac{1}{3}B.h$ (B : diện tích đáy và h là chiều cao của khối chóp).

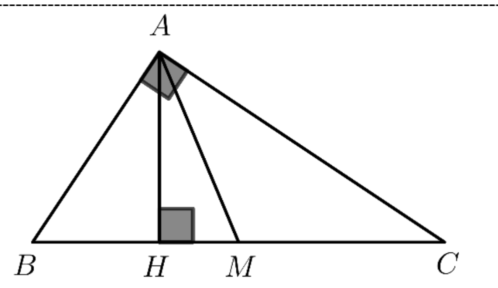
2) Chiều cao của khối chóp thường tính bằng độ dài cạnh vuông góc với đáy

Loại 1: Tính bằng công thức

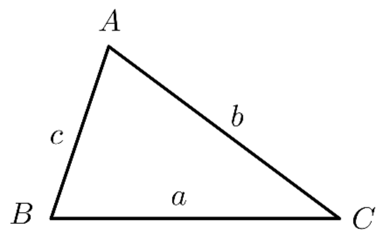
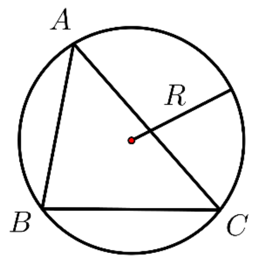
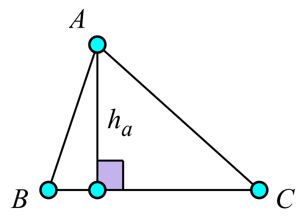
Phương pháp giải (kiến thức cần nhớ):

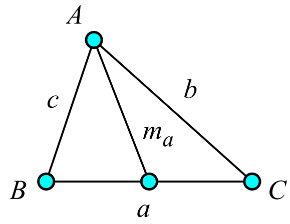
Ở loại toán này trình bày cách tính thể tích khối chóp có một cạnh vuông góc với đáy bằng sử dụng đơn thuần công thức $V=\frac{1}{3}B.h$, trong đó B : diện tích đáy và h là chiều cao của khối chóp. Ta cần nhớ một số kiến thức cơ bản sau:

1. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông

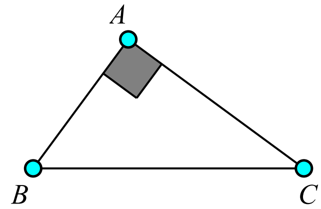
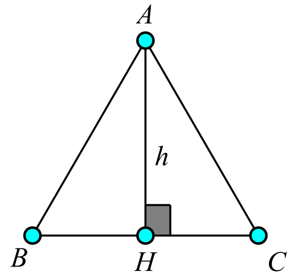
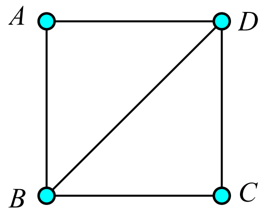
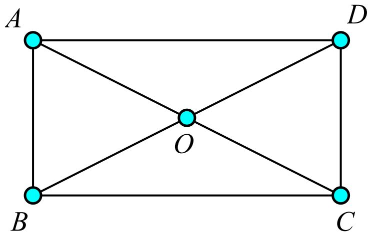
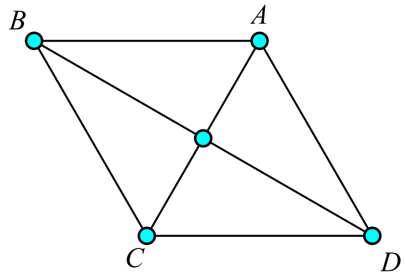
● $BC^2=AB^2+AC^2$ ● $AH.BC=AB.AC$ ● $AB^2=BH.BC$, $AC^2=CH.CB$ ● $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$, $AH^2=BH.CH$	

2. Các hệ thức trong tam giác thường

✓ Định lý hàm cosin: • $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ • $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ • $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$	
✓ Định lý hàm sin: • $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)	
✓ Công thức tính diện tích tam giác: • $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$ • $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$	

• $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}$, $S_{\Delta ABC}=pr$ • $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	Trong đó: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, r bán kính đường tròn nội tiếp
✓ Công thức tính độ dài đường trung tuyến: • $m_a^2=\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, $m_b^2=\dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$ • $m_c^2=\dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$	

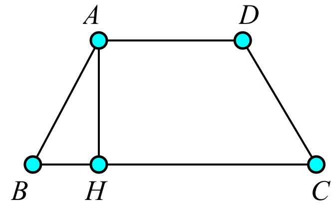
3. Diện tích đa giác:

✓ Tam giác vuông • Diện tích: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC$	
✓ Diện tích tam giác đều • Diện tích: $S=\dfrac{AB^2.\sqrt{3}}{4}$. • Đường cao: $h=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$.	
✓ Hình vuông: • Diện tích: $S=AB^2$ • Đường chéo: $AC=BD=AB\sqrt{2}$	
✓ Hình chữ nhật: • Diện tích: $S=AB.AD$ • Đường chéo: $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}$	
✓ Hình thoi: • Diện tích: $S=\dfrac{1}{2}AC.BD$ • Đặt biệt: 1 trong các góc trong của hình thoi bằng 60°, khi đó hình thoi được tạo bởi 2 tam giác đều.	

✓ Hình thang:

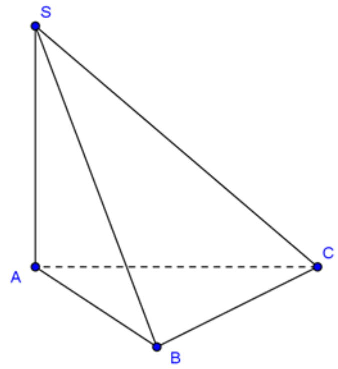
• Diện tích: $S = \dfrac{(AD + BC)AH}{2}$

• Đặc biệt: Hình thang vuông, hình thang cân



Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



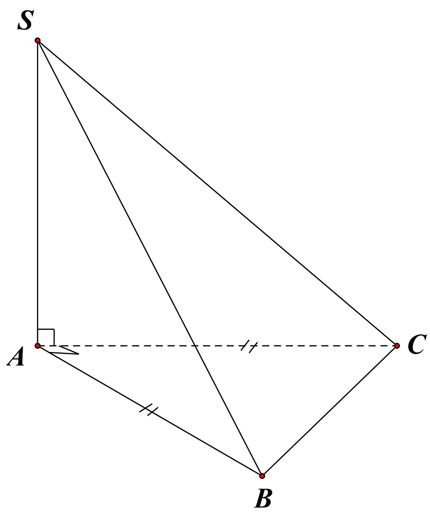
Đường cao: $SA = 2a$.

Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC}{2} = a^2$.

$\Rightarrow$ Thể tích: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, ΔABC vuông cân tại A, $SA = BC = a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$

Lời giải.



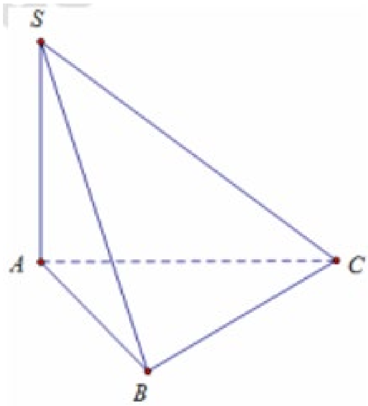
.

Ta có $AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{12}$.

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB = a\sqrt{5}$.

Lời giải

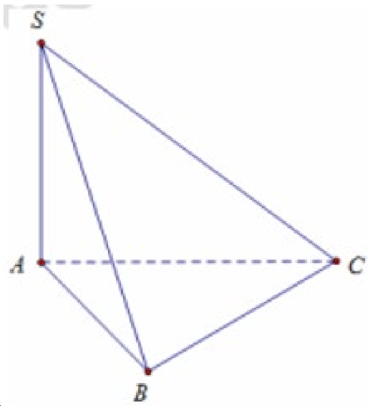


Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a; BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \frac{AB.BC}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc đáy và $SA = 2\sqrt{3}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

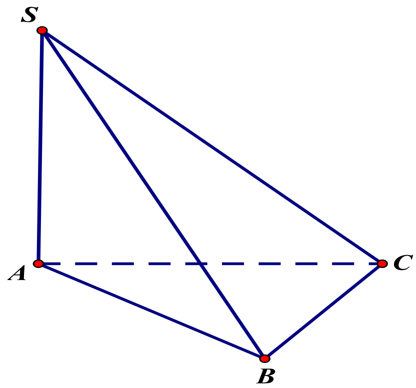
Lời giải



Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $h = SA = 2\sqrt{3}a \Rightarrow V = \frac{a^3}{2}$.

Câu 5: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

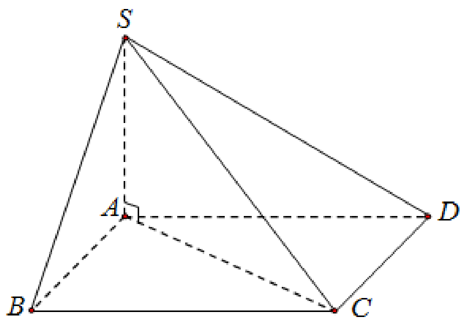


Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt).

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 6: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải

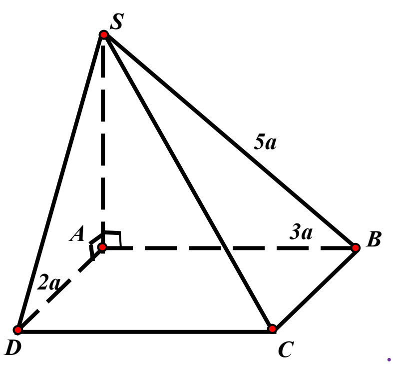


Ta có $ABCD$ là hình vuông có $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $AB = a$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $AB = 3a$, $AD = 2a$, $SB = 5a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Lời giải



Ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}$.

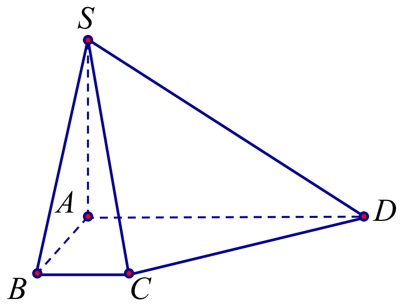
Xét tam giác vuông SAB có: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=4a$.

Và $S_{ABCD}=AB.AD=6a^2$.

Nên $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.4a.6a^2=8a^3$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB=a$, $AD=3a$, $BC=a$. Biết $SA=a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

Lời giải



Ta có $V_{S.BCD}=\frac{1}{3}SA.S_{BCD}$.

Lại có $S_{BCD}=S_{ABCD}-S_{ABD}=\frac{1}{2}AB.(AD+BC)-\frac{1}{2}AB.AD=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{1}{2}a^2$.

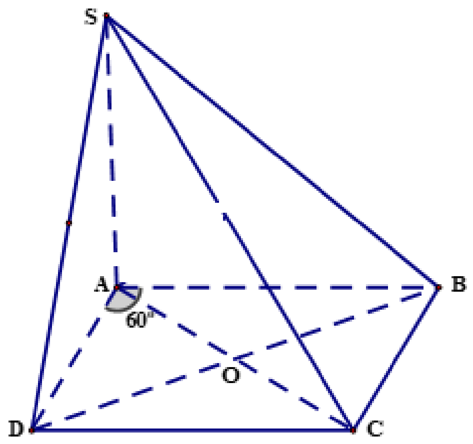
Mà $SA=a\sqrt{3}\Rightarrow V_{S.BCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét: Nếu đề bài bỏ giả thiết $AD=3a$ thì sẽ giải như sau:

Ta có $V_{S.BCD}=\frac{1}{3}SA.S_{BCD}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}d(D,BC).BC=\frac{1}{6}SA.AB.BC=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD}=60°$, $SA\perp(ABCD)$, $SA=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



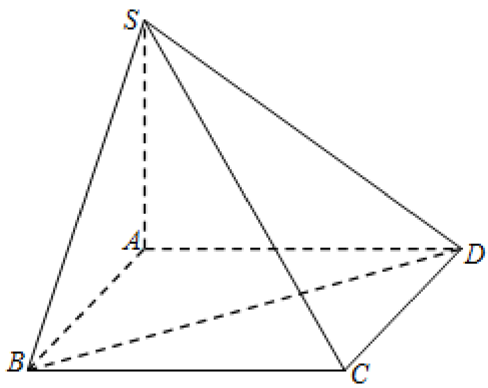
Tam giác ABD đều, có cạnh bằng a.

Suy ra $S_{ABCD}=2S_{ABD}=2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBD là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải



Đặt $AB=x$, ΔABD vuông cân tại $A\Rightarrow BD=x\sqrt{2}.$

Do ΔSBD là tam giác đều $\Rightarrow SB=SD=BD=x\sqrt{2}.$

Lại có ΔSAB vuông tại A

$\Rightarrow SA^2+AB^2=SB^2\Leftrightarrow\left(a\sqrt{2}\right)^2+x^2=\left(x\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2=2a^2\Rightarrow x=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\left(a\sqrt{2}\right)^2=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}.$

LOẠI 2: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY KHI BIẾT GÓC GIỮA ĐƯỜNG VÀ MẶT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

Cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

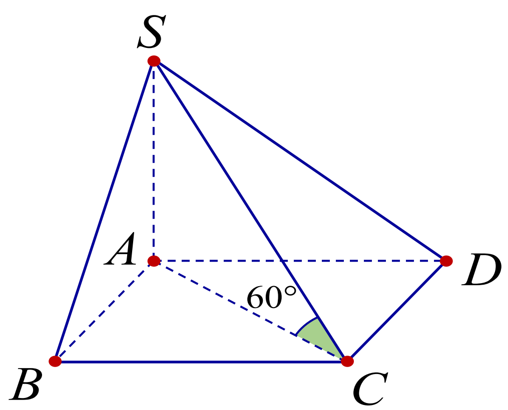
- Nếu $d \perp (P)$ thì $\widehat{(d,(P))} = 90°$.

- Nếu d không vuông góc với (P) thì $\widehat{(d,(P))} = \widehat{(d,d')}$ với d' là hình chiếu của d trên (P)

Chú ý: $0° \le \widehat{(d,(P))} \le 90°$.

Câu 11: Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.

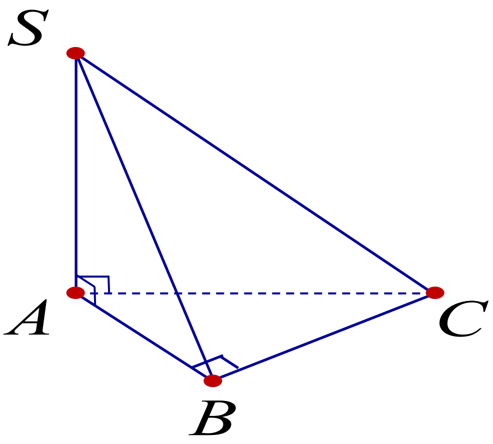
$ABCD$ là hình vuông nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}$.

$SA = AC.\tan 60° = 2a\sqrt{6}$

Thể tích khối chóp $SABCD$ là: $V = \frac{1}{3}.4a^2.2a\sqrt{6} = \frac{8}{3}a^3\sqrt{6}$.

Câu 12: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$ biết SA vuông góc với đáy (ABC) và SC hợp với (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ SB là hình chiếu của SC trên (SAB)

$\Rightarrow$ $\widehat{BSC} = 30°$

ABC là tam giác vuông cân nên $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vì $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

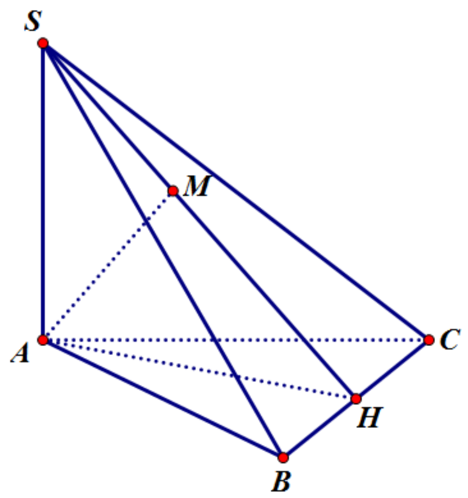
Xét ΔSBC vuông tại B, $SB = \dfrac{BC}{\tan 30°} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét ΔSAB vuông tại A, $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{12}$.

Câu 13: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và SA hợp với (SBC) một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC, dựng $AM \perp SH$

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AH$

$\Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$.

$\Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow SM$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow \widehat{ASH} = 45°$.

$\Rightarrow \Delta SAH$ là tam giác vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{8}$.

LOẠI 3: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY KHI BIẾT GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

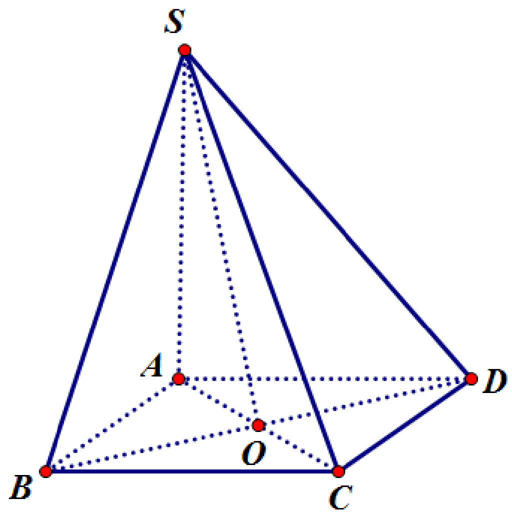
- Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Từ một điểm I bất kì trên d ta dựng đường thẳng a trong (P) vuông góc với d và dựng đường thẳng b trong (Q) vuông góc với d. Khi đó góc giữa (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

- Diện tích hình chiếu của đa giác: $S' = S.\cos\alpha$

(với S là diện tích đa giác nằm trong (P) và S' là diện tích hình chiếu vuông góc của đa giác đó trên (Q), α là góc giữa (P) và (Q))

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow \begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SO \end{cases}$.

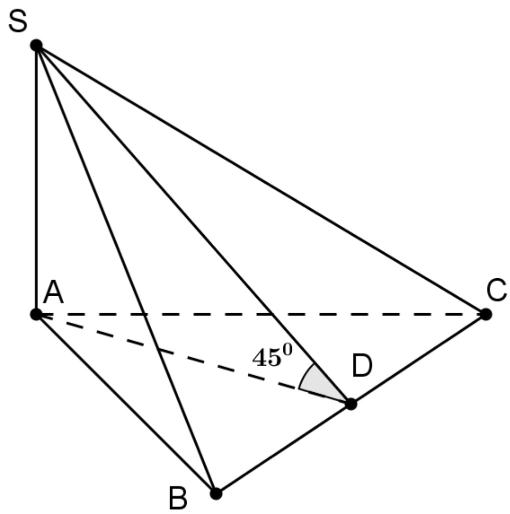
Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$ hay $\widehat{SOA} = 30^0$.

Xét tam giác vuông SAO, cạnh $SA = AO.\tan\widehat{SOA} = \frac{1}{2}AC.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{6}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC. Khi đó $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases}$.

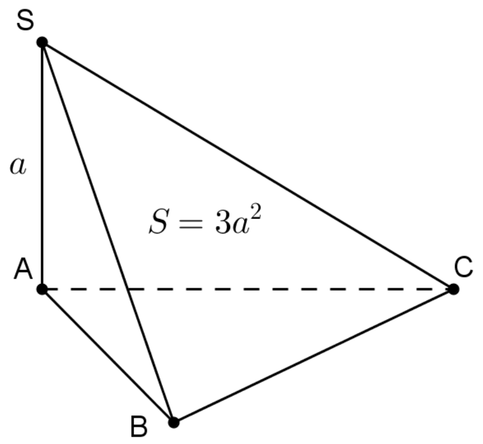
Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SDA}$ hay $\widehat{SDA}=45^0$.

Tam giác SAD là tam giác vuông cân tại A nên $SA=AD=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (tam giác ABC vuông cân tại A).

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{2}$ nên $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 16: Cho khối chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA=a$ và diện tích tam giác SBC bằng $3a^2$.

Lời giải



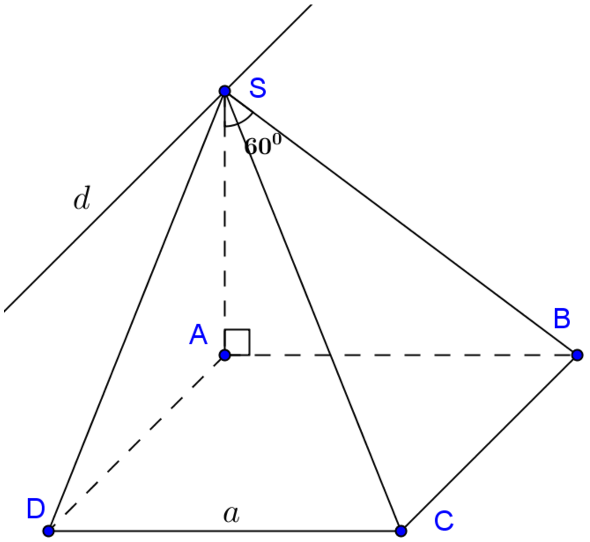
Do $SA\perp(ABC)$ nên ΔABC là hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta SBC}.\cos 60^0=3a^2.\cos 60^0=\frac{3a^2}{2}$.

Do đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{3a^2}{2}=\frac{a^3}{2}$.

Câu 17: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.

Qua S kẻ đường thẳng d song song với AD. Khi đó d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Mặt khác $d \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} d \perp SA \\ d \perp SB \end{cases}$ nên góc $\widehat{ASB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) hay $\widehat{ASB} = 60°$.

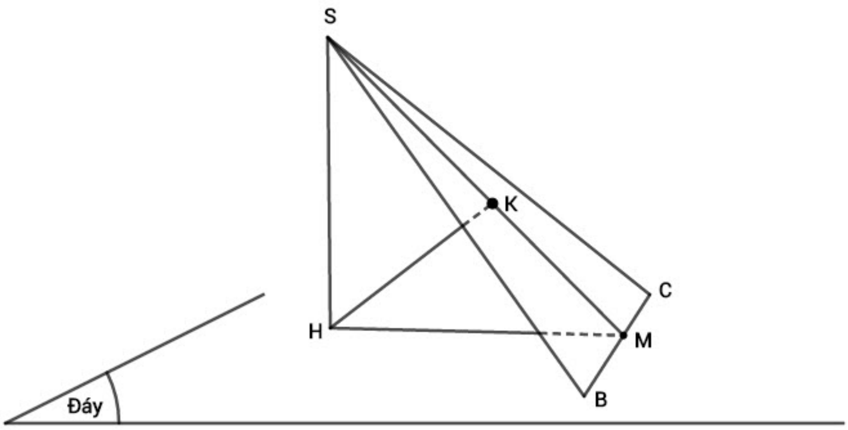
Xét tam giác vuông SAB, cạnh $SA = \dfrac{AB}{\tan \widehat{ASB}} = \dfrac{a}{\tan 60^0} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

LOẠI 4. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY KHI BIẾT KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

1) Cần nhớ kiến thức cơ bản về xác định khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.



Xét tam giác SHM vuông tại H, HM vuông góc với BC và HK là đường cao

 Tính khoảng cách từ chân đường cao H đến mặt bên (SBC) ta sử dụng công thức

$$HK = \frac{HM.SH}{\sqrt{HM^2 + SH^2}}$$

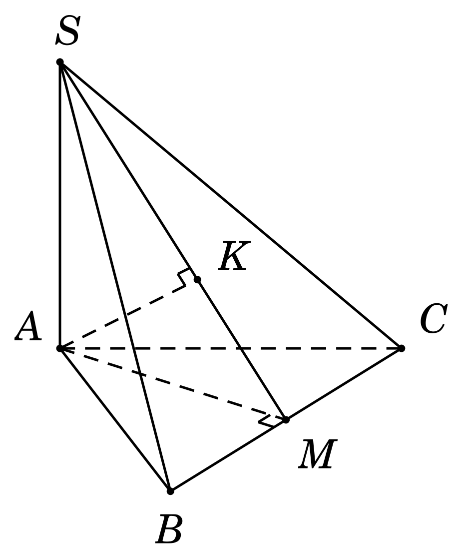
 Tính độ dài cạnh SH ta sử dụng công thức

$$SH = \frac{HM.HK}{\sqrt{HM^2 - HK^2}}$$

2) Trong trường hợp bài toán cho khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đáy đến mặt bên, ta phải dùng tỷ lệ để đưa về khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính $V_{S.ABC}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK.$ (2)

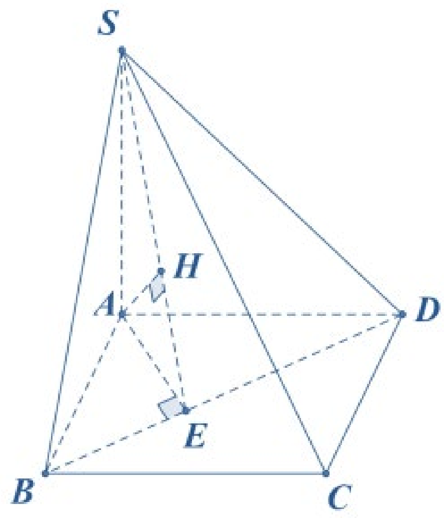
Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $d\left[A,(SBC)\right] = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Trong ΔSAM, có $SA = \frac{AK.AM}{\sqrt{AM^2 - AK^2}} = a\sqrt{3}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp BD, (E \in BD)$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp SE, (H \in SE)$ (1)

Vì $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AE \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A,(SBD)) = AH$.

Xét ΔABD vuông tại A có đường cao AE, ta có:

$$AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

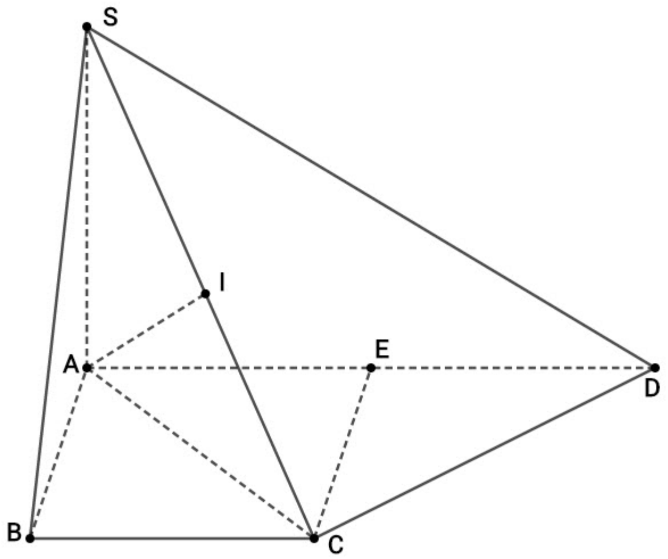
Xét ΔSAE vuông tại A có đường cao AH, ta có:

$$SA = \frac{AH.AE}{\sqrt{AE^2 - AH^2}} = \frac{\frac{2a}{3}.\frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{4a^2}{5} - \frac{4a^2}{9}}} = a$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}AB.AD.SA = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD, khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

Lời giải



Ta có diện tích hình thang $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(AD+BC\right)AB=\frac{1}{2}\left(2a\sqrt{3}+a\sqrt{3}\right).a\sqrt{3}=\frac{9a^2}{2}$.

Ta có $d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2d\left(E,\left(SCD\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dễ thấy AC vuông góc CD do vậy kẻ AI vuông góc với SC thì $AI=d\left(A,\left(SCD\right)\right)$.

Xét tam giác vuông SAC có AI là đường cao, khi đó

$$SA=\frac{AC.AI}{\sqrt{AC^2-AI^2}}=\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{6}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{9a^2}{2}.\frac{a\sqrt{42}}{7}=\frac{3a^3\sqrt{42}}{14}$.

DẠNG 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH LÀ CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRÊN MẶT ĐÁY (KHÔNG TRÙNG VỚI CÁC ĐỈNH CỦA ĐA GIÁC ĐÁY)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CƠ BẢN)

+ Tóm tắt ngắn gọn kiến thức cơ bản cần nắm.

Công thức tính thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}.B.h$. (Trong đó: B là diện tích đáy, h là chiều cao)

- Để tính thể tích của khối chóp, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định đường cao. Tính đường cao.

Bước 2: Nhận dạng đáy. Tính diện tích của đáy.

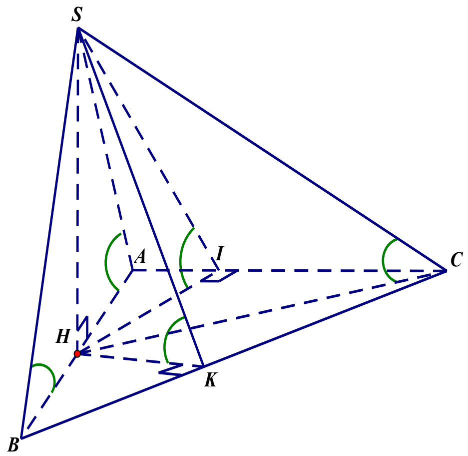
Bước 3: Tính thể tích theo công thức.

Chú ý:

1. Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

2. Nếu $(SAB)\perp(ABC)$ **thì đường cao** SH **của tam giác** SAB chính là đường cao của khối chóp $S.ABC$

3. Góc giữa cạnh bên và đáy



$\widehat{\left(SA,(ABC)\right)}=\widehat{SAH}$, $\widehat{\left(SB,(ABC)\right)}=\widehat{SBH}$, $\widehat{\left(SC,(ABC)\right)}=\widehat{SCH}$.

Tóm lại, $\widehat{\left(SM,(ABC)\right)}=\widehat{SMH}$, $\forall M\in(ABC)$.

4. Góc giữa mặt bên và đáy:

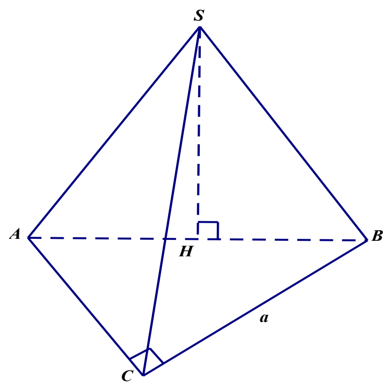
$\widehat{\left((SBC),(ABC)\right)}=\widehat{SKH}$, $\widehat{\left((SAC),(ABC)\right)}=\widehat{SIH}$.

Chú ý: $HK=AA'.\dfrac{BH}{AB}$, $HI=BB'.\dfrac{AH}{AB}$ (với AA', BB' là các đường cao của tam giác ABC)

TRƯỜNG HỢP 1: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM TRÊN CẠNH CỦA ĐA GIÁC ĐÁY (MỘT MẶT BÊN CỦA HÌNH CHÓP VUÔNG GÓC VỚI MẶT ĐÁY).

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp.

Lời giải

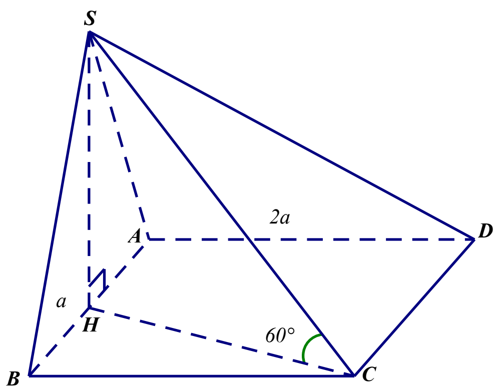


ΔSAB đều cạnh a $\Rightarrow$ đường cao $SH=\frac{\sqrt{3}a}{2}$; $(SAB)\perp(ABC)$ nên SH cũng là đường cao của hình chóp $S.ABC$. ΔABC vuông cân tại C nên $AC=BC=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{a^2}{4}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}a^3}{24}.$$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



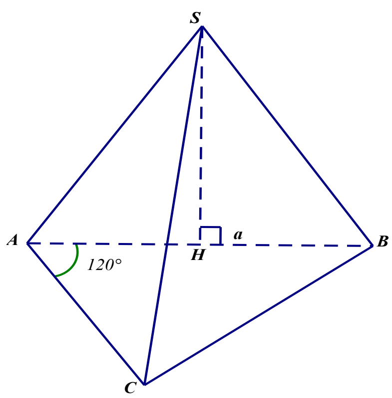
ΔSAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB.

$CH=\sqrt{BC^2+BH^2}=\frac{\sqrt{17}a}{2}$. Do $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\widehat{SCH}=60°$ nên $SH=CH.\tan 60°=\frac{\sqrt{51}a}{2}$.

$$S_{ABCD}=AB.CD=2a^2\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{51}a^3}{3}.$$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân đỉnh A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

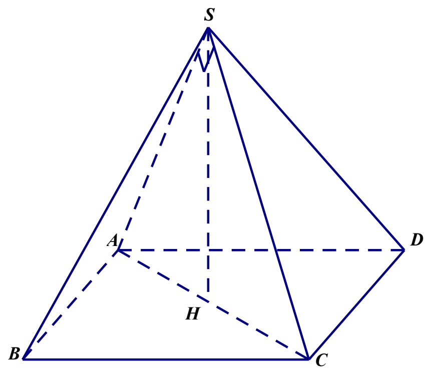


Gọi H là trung điểm của AB, ΔSAB đều cạnh a và vuông góc với đáy nên đường cao của hình chóp là $SH=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}a^2\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{a^3}{8}.$$

Câu 24: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Do $(SAC)\perp(ABCD)$ nên đường cao SH của tam giác SAC là đường cao của khối chóp $S.ABCD$

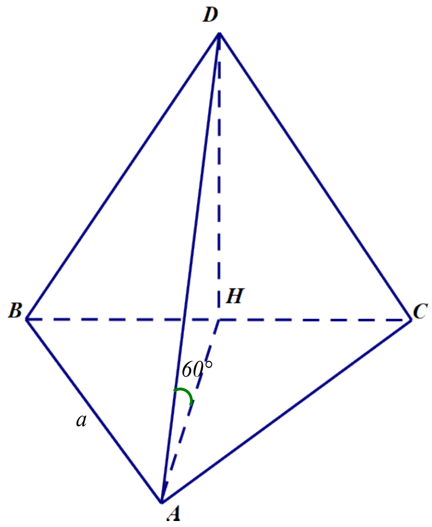
Tam giác SAC vuông tại S và $\widehat{(SA,(ABCD))}=\widehat{SAH}=60^\circ\Rightarrow SA=AC.\cos60^\circ=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$

$$\Rightarrow SH=SA.\sin60^\circ=\frac{\sqrt{6}a}{4}$$

$$S_{ABCD}=a^2\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{6}a^3}{12}.$$

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác BCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết AD hợp với (ABC) một góc 60°. Tính thể tích của khối tứ diện đã cho.

Lời giải



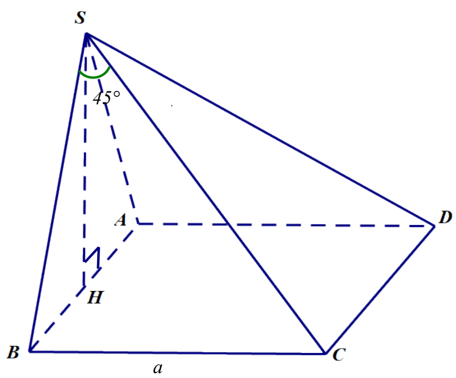
Do ΔBCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) nên hình chiếu vuông góc của D trên (ABC) là trung điểm H của $BC \Rightarrow DH \perp (ABC)$

$$\widehat{(AD,(ABC))} = \widehat{DAH} = 60° \Rightarrow DH = AH.\tan 60° = \frac{3a}{2}.$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow V = \frac{1}{3}DH.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Câu 26: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. SC tạo với (SAB) một góc $45°$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

Lời giải



Do ΔSAB cân tại S và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên hình chiếu

vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$BC \perp AB, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{BSC} = 45° \Rightarrow SB = BC = a$$

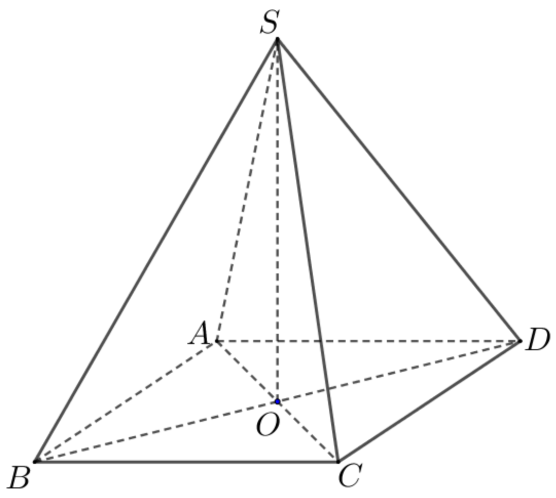
$$\Rightarrow \Delta SAB \text{ đều cạnh } a \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

$S_{ABCD}=a^2 \Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

TRƯỜNG HỢP 2: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM Ở MIỀN TRONG CỦA ĐA GIÁC ĐÁY

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{3}a$ tâm O, SO vuông góc với $(ABCD)$, $SO=a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

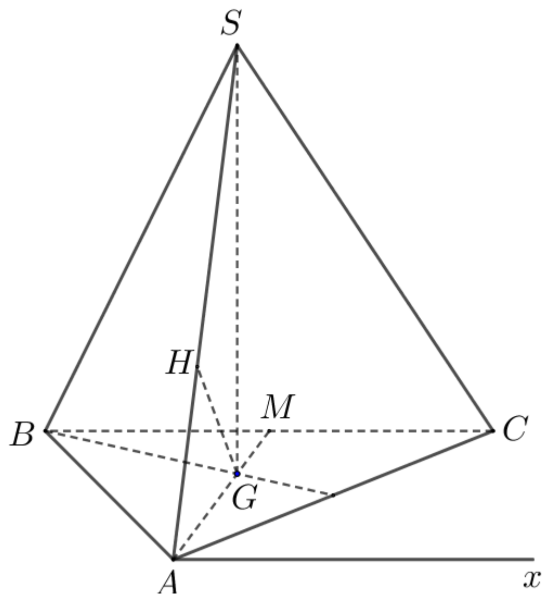


Diện tích mặt đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD}=3a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a.3a^2=a^3$.

Câu 28: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$, khoảng cách giữa SA và BC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra G là chân đường cao kẻ từ S xuống mặt đáy

$\Rightarrow SG \perp (ABC)$

Kẻ $Ax//BC \Rightarrow BC//(SA, Ax)$

Nên $d(SA,BC) = d(BC,(SA,Ax)) = d(M,(SA,Ax)) = \frac{3}{2}d(G,(SA,Ax))$ vì $MA = \frac{3}{2}GA$.

Kẻ $GH \perp SA$.

Ta có $\begin{cases} Ax \perp GA \\ Ax \perp SG \end{cases} \Rightarrow Ax \perp (SAG) \Rightarrow Ax \perp GH$.

Khi đó $\begin{cases} GH \perp Ax \\ GH \perp SA \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SA, Ax) \Rightarrow d(G,(SA,Ax)) = GH$.

Do đó $d(SA,BC) = \frac{3}{2}GH \Rightarrow GH = a$.

Ta lại có $AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

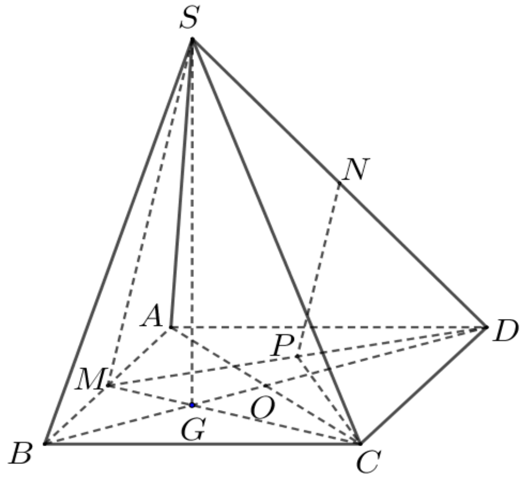
Nên $\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{AG^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SG^2} = \frac{1}{GH^2} - \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow SG = 2a$.

Mà $S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SG = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SD. Biết cosin góc giữa hai đường thẳng CN và SM bằng $\frac{2\sqrt{26}}{13}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ΔABC ta có $SG \perp (ABCD)$.

Đặt $SG = h$. Gọi P là trung điểm của DM .

$$NP // SM \Rightarrow \left(\widehat{SM, CN}\right) = \left(\widehat{NP, NC}\right) \Rightarrow \cos\widehat{CNP} = \pm\frac{2\sqrt{26}}{13}.$$

Vì đây là hình thoi và $\widehat{ABC} = 60°$ nên $\Delta ABC, \Delta ADC$ là các tam giác đều cạnh a .

Khi đó:

$$\widehat{MCD} = 90^0 \Rightarrow CP = \frac{DM}{2} = \frac{\sqrt{CM^2 + CD^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2}}{2} = \frac{\sqrt{7}a}{4}.$$

$$NP = \frac{SM}{2} = \frac{\sqrt{SG^2 + GM^2}}{2} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}}{2}.$$

$$CN = \sqrt{\frac{2\left(CS^2 + CD^2\right) - SD^2}{4}} = \sqrt{\frac{2\left(CG^2 + SG^2 + CD^2\right) - \left(SG^2 + GD^2\right)}{4}}.$$

$$= \sqrt{\frac{2\left(\frac{a^2}{3} + h^2 + a^2\right) - \left(h^2 + \frac{4}{3}a^2\right)}{4}} = \sqrt{\frac{3h^2 + 4a^2}{12}}.$$

Ta có: $\cos\widehat{CNP} = \dfrac{NP^2 + CN^2 - CP^2}{2NP.CN} = \dfrac{\frac{1}{4}\left(h^2 + \frac{a^2}{12}\right) + \frac{3h^2 + 4a^2}{12} - \frac{7a^2}{16}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}.\sqrt{\frac{3h^2 + 4a^2}{12}}}$

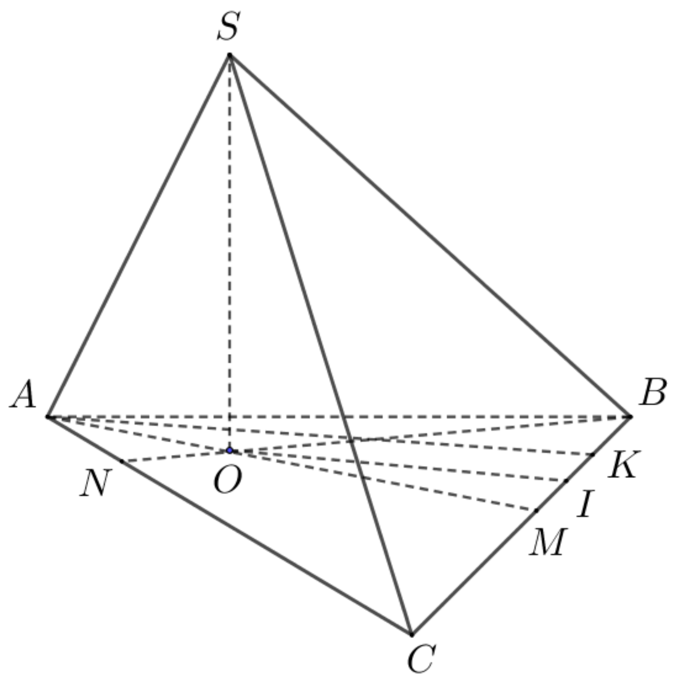
$$= \frac{6h^2 - a^2}{\sqrt{12h^2 + a^2}.\sqrt{3h^2 + 4a^2}}.$$

Do đó: $\dfrac{6h^2 - a^2}{\sqrt{12h^2 + a^2}\sqrt{3h^2 + 4a^2}} = \pm\dfrac{2\sqrt{26}}{13} \Leftrightarrow h = \sqrt{\dfrac{19}{6}}a$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.h=\frac{1}{3}.2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right).\sqrt{\frac{19}{6}}a=\frac{\sqrt{38}a^3}{12}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi O là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC).

Đặt $d(O,BC)=a$, $d(O,AC)=b$, $d(O,AB)=c$, $SO=h$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OAC}+S_{\Delta OAB}\Rightarrow a+b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}(1)$ (vì ΔABC đều cạnh bằng 1).

Mặt khác $\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\frac{OM}{AM}=\frac{OI}{AK}=\frac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SBC))=\frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\frac{2}{a^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{a^2}\Rightarrow a=h$.

Tương tự $\frac{d(O,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\frac{d(O,AC)}{d(B,AC)}=\frac{2b}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SAC))=\frac{2b}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{15}}{10}=\frac{b}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\frac{5}{b^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{b^2}\Rightarrow b=2h$.

Tương tự $\dfrac{d(O,(SAB))}{d(C,(SAB))}=\dfrac{d(O,AB)}{d(C,AB)}=\dfrac{2c}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SAC))=\dfrac{2c}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{30}}{20}=\dfrac{c}{\sqrt{10}}$.

Suy ra $\dfrac{10}{c^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{c^2}\Rightarrow c=3h$.

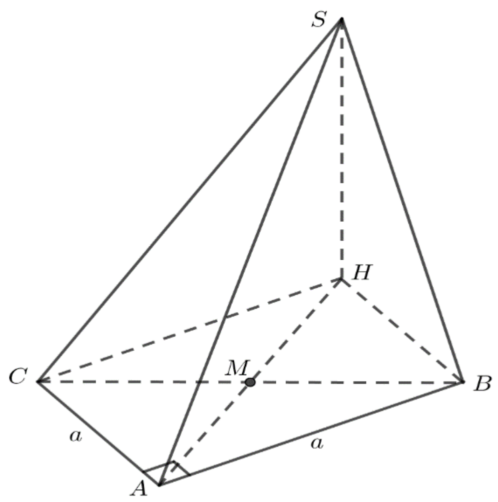
$(1)\Rightarrow h+2h+3h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{48}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{1}{48}$.

TRƯỜNG HỢP 3: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM Ở MIỀN NGOÀI CỦA ĐA GIÁC ĐÁY

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, biết $AB=AC=a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H đối xứng với A qua BC. Góc giữa SA và đáy bằng 45°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Lời giải



Vì H đối xứng với A qua BC và ΔABC vuông cân tại A nên $ABHC$ là hình vuông.

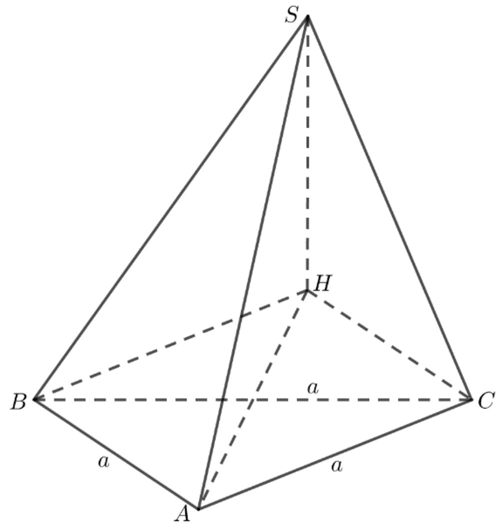
Do $SH\perp(ABC)$ nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SAH}=45^{o}$.

Suy ra $SH=AH=a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H đối xứng với A qua BC. Biết $SA=2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Lời giải



Vì H đối xứng với A qua BC và ΔABC đều nên $AH = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do $SH \perp (ABC)$ nên tam giác SAH vuông tại H, do đó $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

DẠNG 3: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP ĐỀU

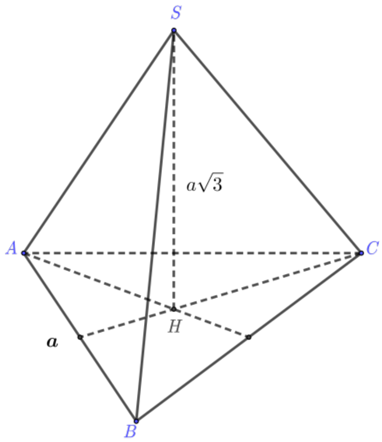
PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ)

1) Hình chóp đều: Là hình chóp có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
2) Tính chất: Trong hình chóp đều ta có:
- Chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
- Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

3) Tứ diện đều: Hình hình chóp có bốn mặt là tam giác đều.
Đường cao là đường kẻ từ đỉnh qua tâm của đáy.

Câu 33: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao của hình chóp bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



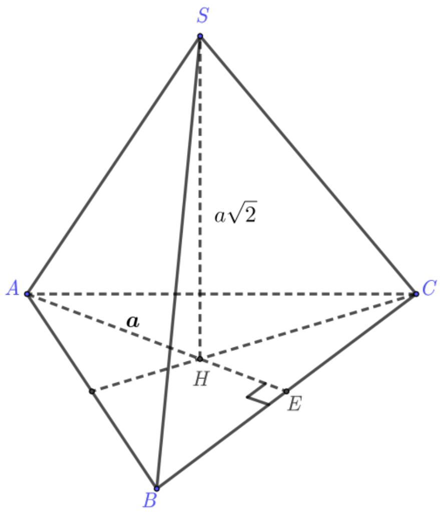
Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC. Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 34: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC, $AH = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó $AE \perp BC$ tại E.

Do H là trọng tâm của tam giác đều ABC nên $AE = \frac{3}{2}AH = \frac{3a}{2}$.

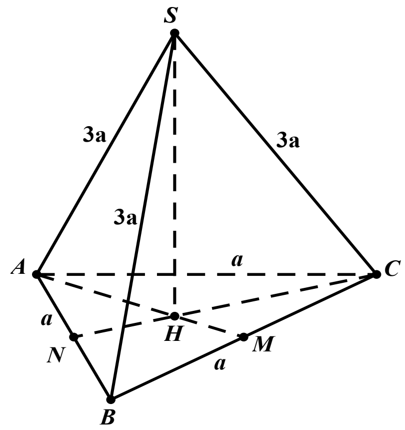
Xét tam giác ABE vuông tại E: $AB = \frac{AE}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}.BC.AE=\frac{1}{2}.a\sqrt{3}.\frac{3}{2}a=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.AH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 35: Thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $3a$.

Lời giải



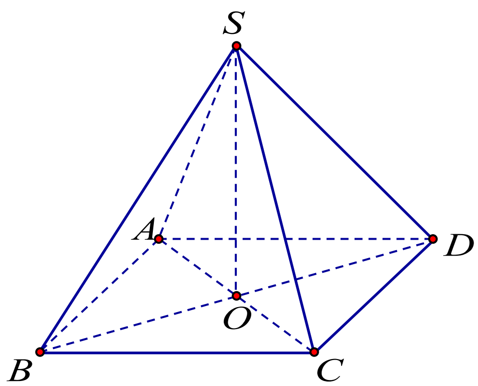
Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow SH\perp(ABC)$. Khi đó $V=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}$ (do khối chóp $S.ABC$ đều).

Ta có $AH=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$; $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

Suy ra $V=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{26}}{\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{26}}{12}$ (đvtt).

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 20, cạnh bên bằng 30. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

Lời giải



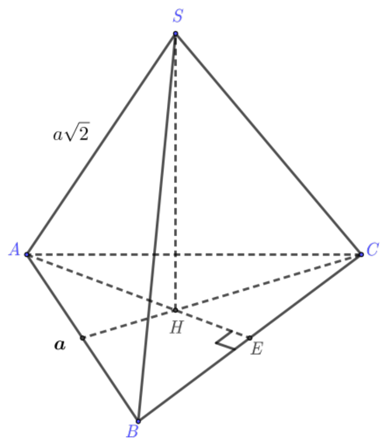
Trong mặt phẳng $ABCD$, gọi $O=AC\cap BD$, do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$. Đáy là hình vuông cạnh 20 $\Rightarrow AO=\frac{AC}{2}=10\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAO có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 10\sqrt{7}$.

Thể tích V của khối chóp trên là $V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}10\sqrt{7}.400 = \frac{4000\sqrt{7}}{3}$.

Câu 37: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC (1) và H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H. Do (1) nên $AE \perp BC$ tại E.

Xét tam giác ABE vuông tại E:

$AE = AB.\sin\widehat{ABE} = a.\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

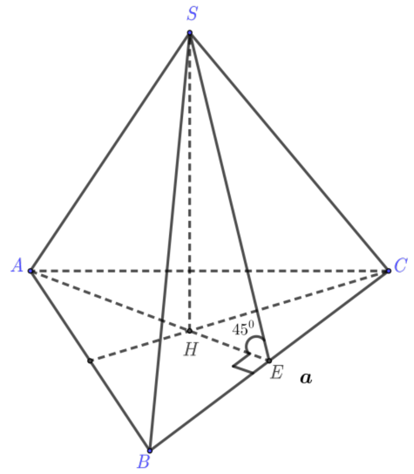
Xét tam giác SAH vuông tại H: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{12}$.

Câu 38: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC và H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H và $AE \perp BC$ tại E.

Ta có $SE \perp BC$ tại E (do tam giác SBC cân tại S).

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SE \perp BC,\ SE \subset (SBC) \\ AE \perp BC,\ AE \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = (SE, AE) = \widehat{SEA} = 45^\circ$.

Xét tam giác ABE vuông tại E: $AE = AB.\sin\widehat{ABE} = a.\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE = \dfrac{1}{3}.AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

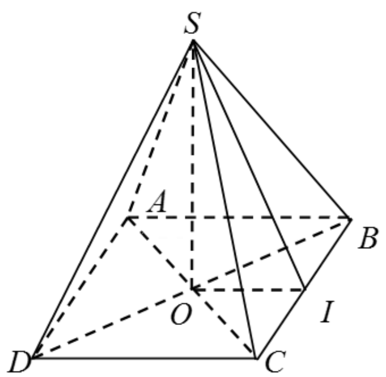
Xét tam giác SHE vuông tại H: $SH = HE.\tan\widehat{SEA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 45^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{24}$.

Câu 39: Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng chứa đa giác đáy bằng 60°?

Lời giải



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông, gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì ta có SO là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a.a = a^2$.

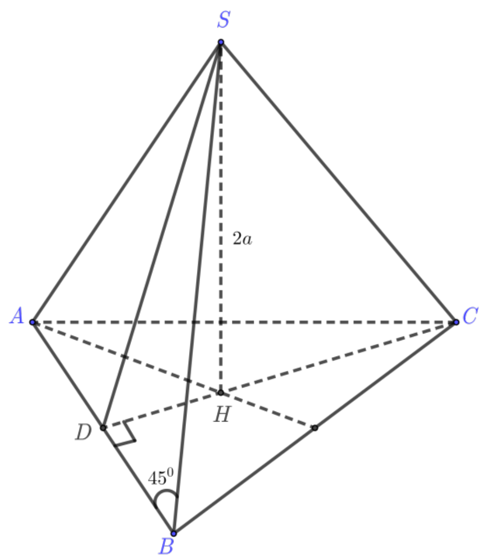
Gọi I là trung điểm của BC thì ta có $OI \perp BC$ và $SI \perp BC$ nên góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIO} = 60°$.

Từ đó: $SO = OI.\tan\widehat{SIO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 40: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có chiều cao bằng $2a$, $\widehat{SBA} = 45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm cạnh AB. Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H. Tam giác ABC đều nên $CD \perp AB$ tại D, tam giác SAB cân tại S nên $SD \perp AB$ tại D.

Xét tam giác SBD vuông tại D: $SD = BD.\tan\widehat{SBD} = BD.\tan 45^\circ = BD$.

Xét tam giác CDB vuông tại D:

$CD = BD.\tan\widehat{CBD} = BD.\tan 60^\circ = BD\sqrt{3} \Rightarrow DH = \dfrac{1}{3}CD = \dfrac{BD\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SDH vuông tại H:

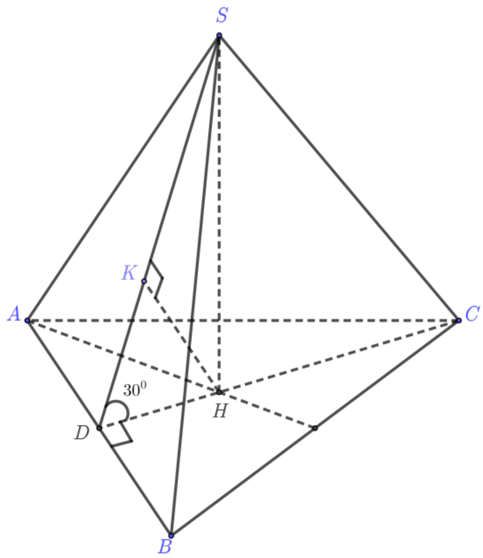
$SH^2 + DH^2 = SD^2 \Leftrightarrow 4a^2 + \dfrac{BD^2}{3} = BD^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{6} \Rightarrow AB = 2BD = 2a\sqrt{6}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC}=\frac{1}{2}.2a\sqrt{6}.2a\sqrt{6}.\sin 60^\circ=6\sqrt{3}a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.2a.6\sqrt{3}a^2=4\sqrt{3}a^3$.

Câu 41: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy bằng 30°. Khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt phẳng (SAB) bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm của cạnh AB. Khi đó $SH\perp(ABC)$ tại H. Do tam giác ABC đều nên $CD\perp AB$ tại D, tam giác SAB cân tại S nên $SD\perp AB$ tại D. Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\SD\perp AB,SD\subset(SAB)\\CD\perp AB,CD\subset(ABC)\end{cases}\Rightarrow((SAB),(ABC))=(SD,CD)=\widehat{SDC}=30^\circ$.

Trong tam giác SDH, dựng $HK\perp SD$ tại K.

Ta có $\begin{cases}AB\perp SD\\AB\perp DC\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SCD)$ mà $HK\subset(SCD)$ nên $HK\perp AB$.

Ta có $\begin{cases}HK\perp SD,\ HK\perp AB\\SD\cap AB=D\\SD,AB\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow HK\perp(SAB)$ tại K $\Rightarrow d(H,(SAB))=HK=a$.

Xét tam giác DHK vuông tại K: $DH=\frac{HK}{\sin\widehat{SDC}}=\frac{HK}{\sin 30^\circ}=2a\Rightarrow DC=3DH=6a$.

Xét tam giác BCD vuông tại D: $BC=\frac{DC}{\sin\widehat{ABC}}=\frac{6a}{\sin 60^\circ}=4a\sqrt{3}$.

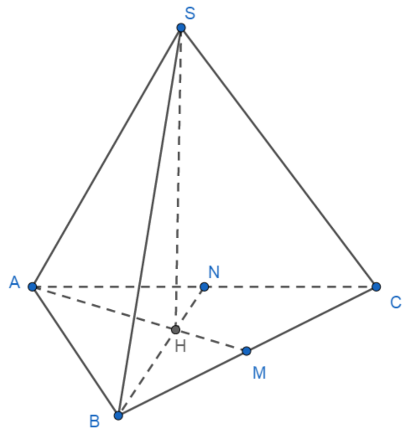
Xét tam giác SDH vuông tại H : $SH = DH.\tan\widehat{SDC} = 2a.\tan 30^\circ = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}.4a\sqrt{3}.4a\sqrt{3}.\sin 60^\circ = 12a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.12a^2\sqrt{3} = 8a^3$.

Câu 42: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài đường cao bằng a, diện tích mặt bên bằng $\dfrac{a^2\sqrt{39}}{12}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng.

Lời giải



Gọi H là tâm của tam giác đều ABC.

Khi đó $SH \perp (ABC)$, $SH = a$.

Đặt $BC = x$ .Khi đó $HM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{6}$

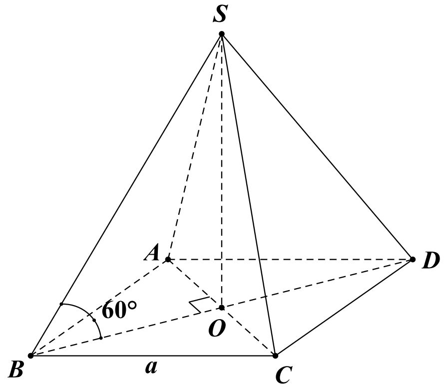
Xét ΔSHM vuông tại H. Có $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2}$.

$$S_{\Delta SBC} = \frac{a^2\sqrt{39}}{12} = \frac{1}{2}BC.SM = \frac{1}{2}.x.\sqrt{a^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2} \Rightarrow x = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 43: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



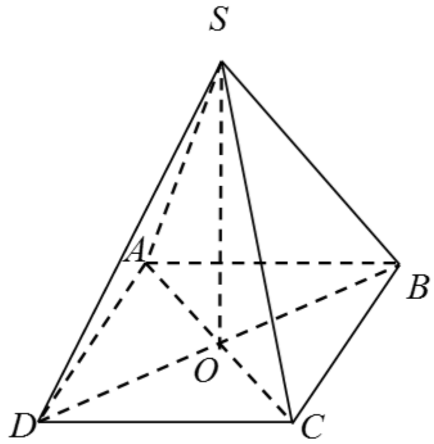
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ và $\widehat{SBO} = 60°$.

Đường cao $SO = OB.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 44: Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60^0?

Lời giải



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông, gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì ta có SO là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$

Vì $\widehat{BSC} = 60^0$ nên tam giác SBC đều $SB = a$ vậy cạnh bên của hình chóp là a

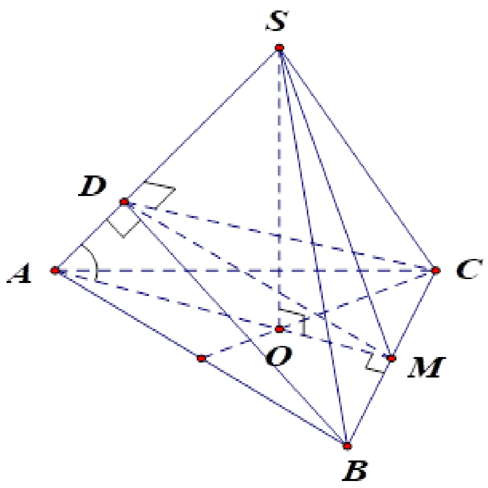
Ta có: $BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD là tam giác vuông cân đỉnh S.

Đường cao $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 45: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh AB bằng a. Các cạnh bên SA, SB, SC cùng tạo với mặt đáy một góc 60°. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCD$?

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm BC.

Vì $S.ABC$ là chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

Kẻ $BD \perp SA$ tại D. Ta có $\begin{cases} BC \perp SM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAM\right) \Rightarrow BC \perp SA$.

+) $\begin{cases} SA \perp BD \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BCD)$.

+) Trong ΔSAO: $\tan \widehat{SAO} = \tan 60^\circ = \dfrac{SO}{AO} \Rightarrow SO = AO \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$

+) Trong ΔSAO: $\cos \widehat{SAO} = \cos 60^\circ = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

+) Trong ΔSAC: $\cos \widehat{ASC} = \dfrac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA \cdot SC} = \dfrac{5}{8}$.

+) Trong ΔSDC: $SD = SC \cdot \cos \widehat{ASC} = \dfrac{5a}{4\sqrt{3}}$.

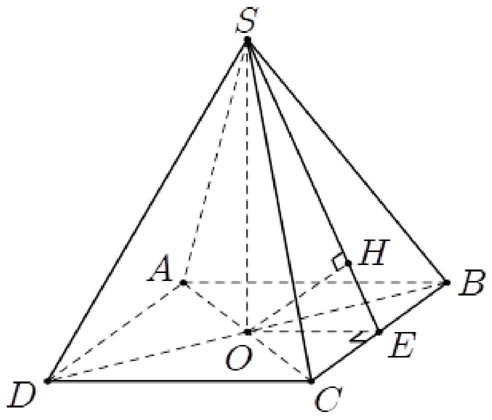
+) $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3} a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

+) $\dfrac{V_{S.BCD}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SD}{SA} = \dfrac{\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}}{\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow V_{S,BCD} = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{96}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.BCD$ là $\frac{5a^2\sqrt{3}}{96}$.

Câu 46: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAC đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $\frac{d(G,(SBC))}{d(O,(SBC))}=\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}$. Suy ra $d(O,(SBC))=\frac{3}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{9}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Gọi E là trung điểm của cạnh BC $\Rightarrow OE\perp BC$.

Kẻ $OH\perp SE,(H\in SE)(1)$.

$$\left.\begin{matrix}BC\perp OE\\ BC\perp SO\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(SOE)\Rightarrow BC\perp OH(2).$$

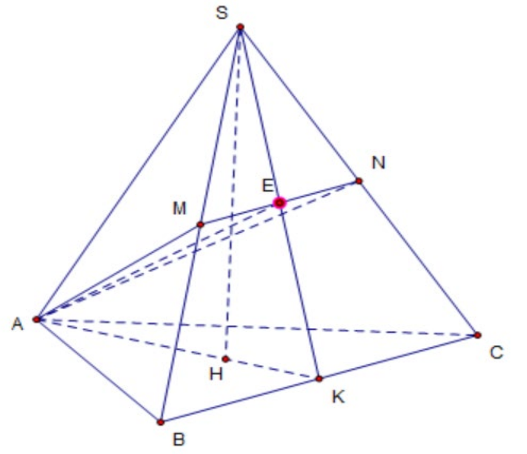
Từ (1) và (2) suy ra $OH\perp(SBC)\Rightarrow OH=d(O,(SBC))=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OE^2}\Rightarrow\frac{1}{SO^2}=\frac{1}{OH^2}-\frac{1}{OE^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 47: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Biết $(AMN)\perp(SBC)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm MN, K là trung điểm BC, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: S,E,K thẳng hàng và A,H,K thẳng hàng.

Ta có: $\Delta SAB=\Delta SAC \Rightarrow AM=AN \Rightarrow$ tam giác AMN cân tại $A \Rightarrow AE\perp MN$

Ta có: $\begin{cases}(AMN)\perp(SBC)\\(AMN)\cap(SBC)=MN\\AE\perp MN\\AE\subset(AMN)\end{cases}\Rightarrow AE\perp(SBC)$

$\Rightarrow AE\perp SK$

Ta có: $\dfrac{SE}{SK}=\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow E$ là trung điểm $SK \Rightarrow$ tam giác SAK cân tại A

$\Rightarrow AS=AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{3a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Suy ra: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$.