CHƯƠNG **VII**

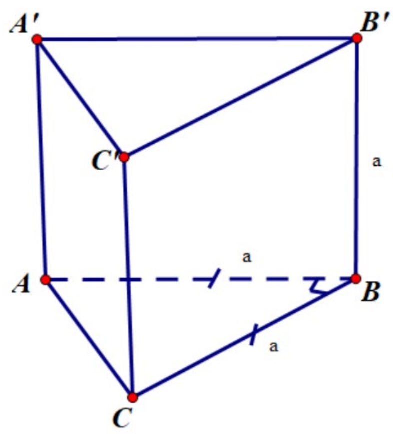
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 27: THỂ TÍCH

DẠNG 4: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG – ĐỀU

Câu 48: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BA=BC=a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

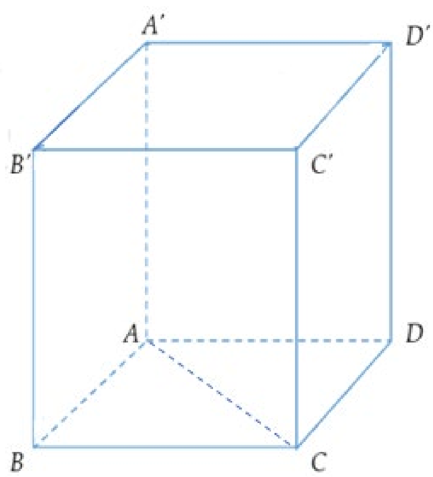
Lời giải



$$V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.BB' =\frac{1}{2}BA.BC.BB' =\frac{1}{2}.a.a.a=\frac{a^3}{2}.$$

Câu 49: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3$, $AC=5$, $AA'=8$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

Lời giải

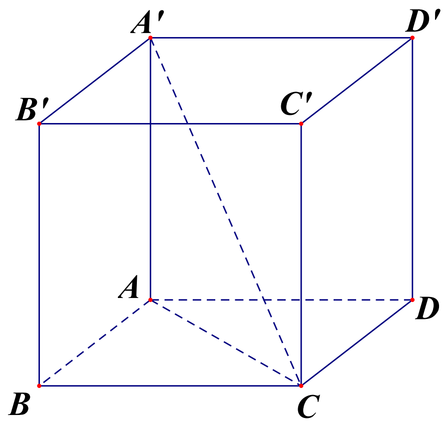


Ta có: $AD = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 4$.

Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là: $V = AB.AD.AA' = 3.4.8 = 96$.

Câu 50: Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đoạn $A'C = a$. Thể tích khối đó là

Lời giải



Ta có: $A'C^2 = AA'^2 + AC^2 = AA'^2 + AB^2 + BC^2 = 3AB^2$.

Suy ra: $AB = \dfrac{A'C}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Do đó: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 51: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

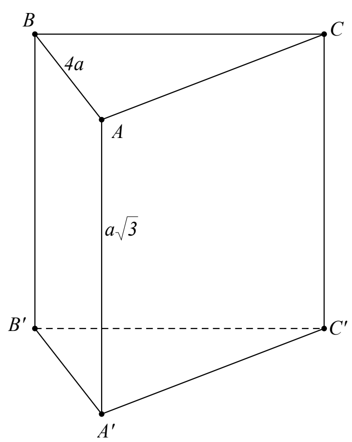
Lời giải

Ta có ΔABC vuông tại B nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.BC = \dfrac{1}{2}.a.2a = a^2$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = a^2.a = a^3$.

Câu 52: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 4a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

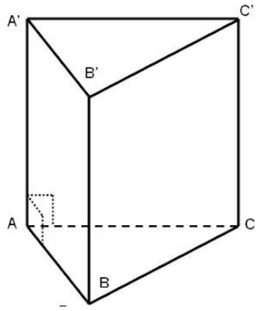
Lời giải



Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{1}{2}AB^2.AA' = 8a^3\sqrt{3}.$

Câu 53: Thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = a\sqrt{3}$ bằng

Lời giải



Đáy là tam giác đều cạnh a, suy ra diện tích đáy $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

$ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đứng nên có chiều cao $h = AA' = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 54: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

Lời giải

Theo tính chất lăng trụ tam giác đều, đáy là tam giác đều ABC và cạnh bên vuông góc với đáy.

Do đó áp dụng công thức $V = S_{\Delta ABC}.h = (2a)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}.$

Câu 55: Cho khối lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải

Ta có: $V = B.h = a^2.2a = 2a^3$.

Câu 56: Cho hình lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng

Lời giải

Lăng trụ đã cho là lăng trụ tứ giác đều nên đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

$\Rightarrow$ Diện tích đáy của hình lăng trụ là $B = \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V = B.h = 2a^2.a\sqrt{5} = 2a^3\sqrt{5}.$

Câu 57: Cho lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải

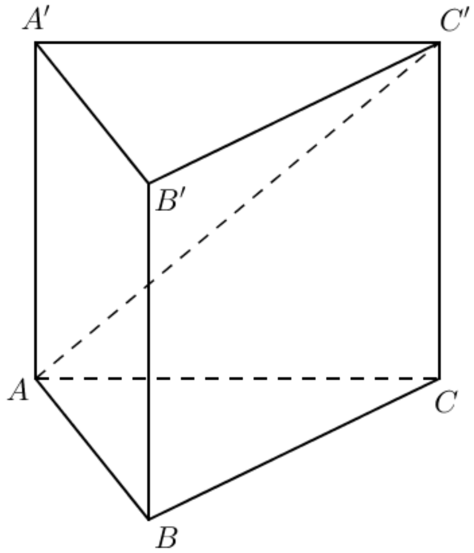
Diện tích đáy của hình lăng trụ là: $B=(3a)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của hình lăng trụ là: $h=3a$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V=B.h=\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}.3a=\frac{27a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 58: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $C'A=a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C}=45°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải



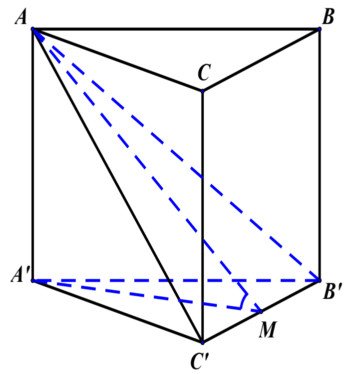
Trong $\Delta ACC'$ có $AC=AC'.\sin\widehat{AC'C}=a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a$; $CC'=AC'.\cos\widehat{AC'C}=a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a$.

Trong ΔBAC có $AC^2=BA^2+BC^2 \Leftrightarrow AC^2=2BA^2 \Rightarrow BA=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=CC'.S_{\Delta ABC}=CC'.\frac{1}{2}.BA^2=a.\frac{1}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{4}$.

Câu 59: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy bằng 45^o. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



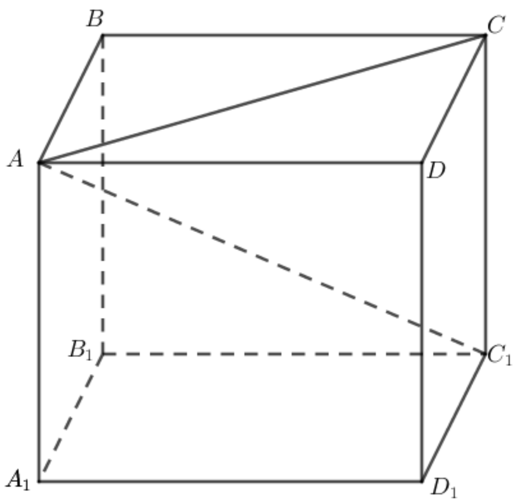
Xét $(AB'C')$ và $(A'B'C')$: Gọi M là trung điểm của $B'C'$, vì tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'M \perp B'C'$, mặt khác lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp B'C'$. Do đó $(AA'M) \perp B'C'$. Vậy $\widehat{((AB'C'),(A'B'C'))} = \widehat{AMA'} = 45^o$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại A' và có $\widehat{AMA'} = 45^o$ nên vuông cân tại A' do đó $AA' = A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $S_{A'B'C'} = \dfrac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{A'B'C'} = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$.

Câu 60: Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120^o$, đường thẳng AC_1 tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^o. Tính thể tích khối hộp đã cho

Lời giải



Ta có $CC_1 \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{AC_1,(ABCD)}\right) = \widehat{C_1AC} = 60^o$;

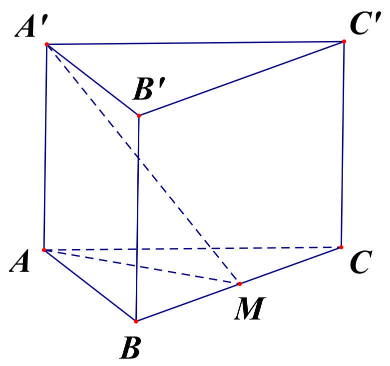
$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.cos\,\widehat{ABC} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông ACC_1, có: $CC_1 = AC.\tan\widehat{C_1AC} = 3a$.

Vậy $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}.CC_1 = BA.BC.\sin 120^o.CC_1 = \dfrac{3a^3.\sqrt{3}}{2}$.

Câu 61: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, $A'M = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải

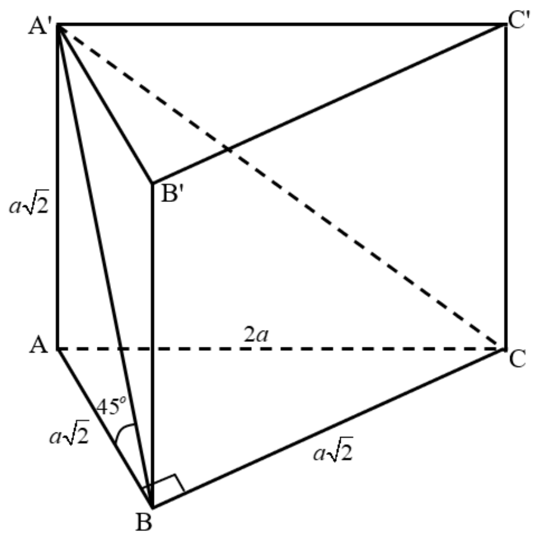


$$AA' = \sqrt{A'M^2 - AM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{8}.$$

Câu 62: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$, biết rằng $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 45^o. Thể tích lăng trụ là:

Lời giải



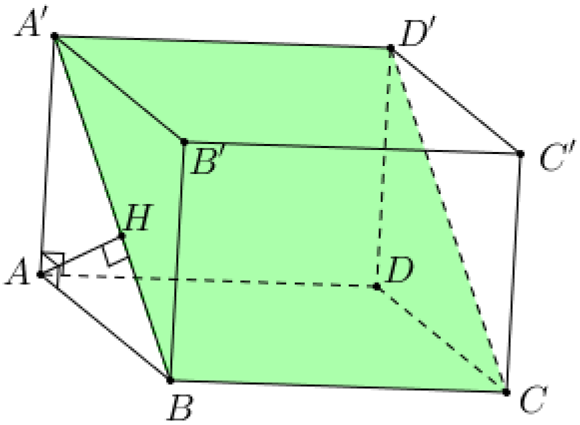
Do tam giác ABC vuông cân tại B, độ dài cạnh huyền $AC = 2a$ nên ta có : $BA = BC = a\sqrt{2}$

Góc tạo bởi mặt phẳng $(A'BC)$ và đáy (ABC) là góc $\widehat{A'BA} = 45^o$ do đó: $AA' = AB = a\sqrt{2}$

Vậy thể tích lăng trụ là: $V = B.h = \dfrac{a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}.$

Câu 63: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $A'BCD'$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a.

Lời giải



Ta có: $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow (A'BCD') \perp (AA'B'B)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'B$, suy ra $\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ AH \perp A'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (A'BCD')$.

Như vậy AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BCD')$ $\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác $AA'B$, ta có $\dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{4}{3a^2} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{3a^2}$ do vậy $AA' = a\sqrt{3}$

Khi đó thể tích hình hộp là: $V = S_{ABCD}.AA' = a^2.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Câu 64: Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = 2a, AB = a.$ Mặt bên $BB'C'C$ là hình vuông. Khi đó thể tích lăng trụ là

Lời giải

Áp dụng định lý Pitago ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

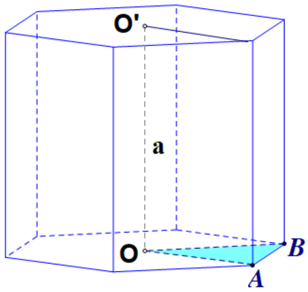
Vì $BB'C'C$ là hình vuông nên $BB' = BC = 2a$.

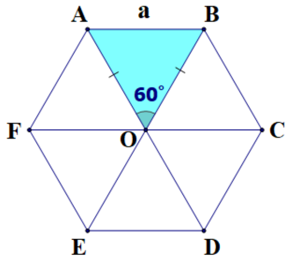
Vậy thể tích lăng trụ là $V = S_{ABC}.BB' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}2a = a^3\sqrt{3}$.

Câu 65: Thể tích của khối lăng trụ lục giác đều có tất cả các cạnh bằng a

Lời giải

Thể tích của khối lăng trụ là $V = B.h$ $V = B.h$



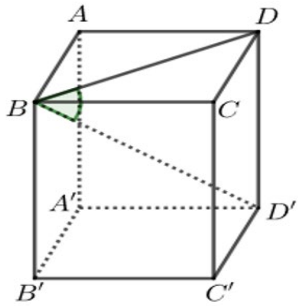


Với $h = a$, $B = 6\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2.a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 66: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$. Cho biết góc giữa đường chéo BD' và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối hộp đã cho là

Lời giải



Ta có : ΔABD đều cạnh $a \Rightarrow BD = a$

Ta có: $D'D \perp (ABCD) \Rightarrow BD$ là hình chiếu của BD' lên mặt phẳng $(ABCD)$.

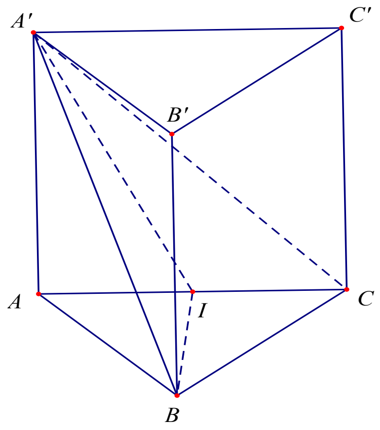
Do đó: $\widehat{(BD',(ABCD))} = \widehat{(BD',BD)} = \widehat{D'BD} = 60°$.

Ta có: $\Delta D'BD$ vuông tại $D \Rightarrow DD' = BD.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = DD'.S_{ABCD} = DD'.2S_{ABD} = a\sqrt{3}.2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 67: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C)$ bằng 30^0. Thể tích khối lăng trụ bằng

Lời giải



Gọi I là trung điểm của cạnh AC. Khi đó, $BI \perp AC$.

Lại có, $\begin{cases} (AA'C'C) \perp (ABC) \text{ (tính chất hình lăng trụ đều)} \\ (AA'C'C) \cap (ABC) = AC \\ BI \subset (ABC) \end{cases}$

nên $BI \perp (AA'C'C) \Rightarrow BI \perp (AA'C)$. Do đó, góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C)$ chính là góc $\widehat{BA'I} = 30^0$.

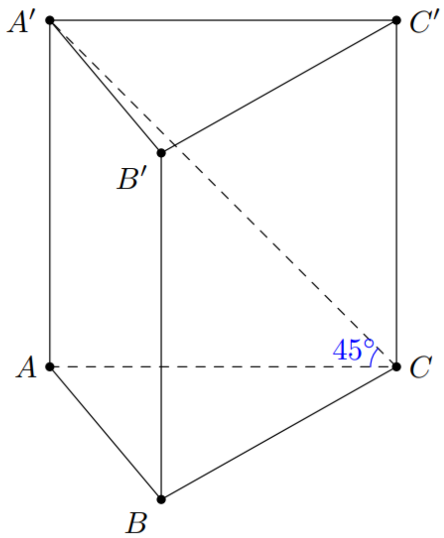
Xét tam giác $A'BI$ vuông tại I, ta có: $\sin \widehat{BA'I} = \dfrac{BI}{A'B} \Rightarrow A'B = \dfrac{BI}{\sin \widehat{BA'I}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sin 30^0} = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}.$

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 68: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải

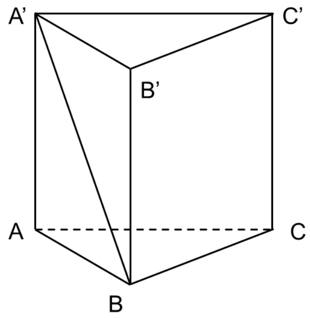


Ta có $\widehat{\left(A'C,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{A'CA} = 45^\circ$ nên $\triangle AA'C$ vuông cân tại A suy ra $AA' = AC = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = Sh = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 69: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Đường thẳng $A'B$ tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

Lời giải



Đáy tam giác đều nên $S_{ABC} = \dfrac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

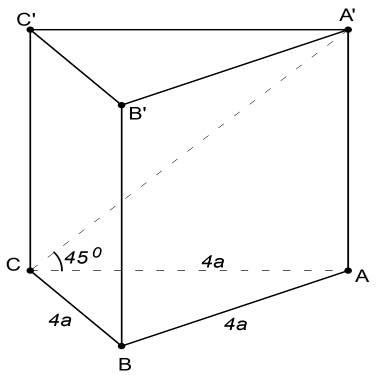
$$\begin{rcases} A'B \cap (ABC) = \{B\} \\ AA' \perp (ABC) \end{rcases} \Rightarrow \left(A'B,(ABC)\right) = \widehat{A'BA}$$

Khi đó: $\tan 60^\circ = \dfrac{AA'}{AB} \Rightarrow AA' = AB.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = a^2\sqrt{3}.2a\sqrt{3} = 6a^3$.

Câu 70: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.

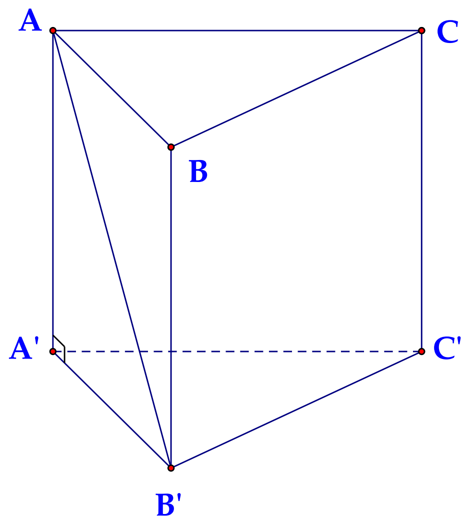
Ta có:

$A'A \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{A'C,(ABC)}\right) = \widehat{A'CA} = 45^\circ \Rightarrow \Delta A'AC$ vuông cân tại $A \Rightarrow A'A = AC = 4a$.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=4a^2\sqrt{3}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=4a.4a^2\sqrt{3}=16a^3\sqrt{3}.$$

Câu 71: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB=a$, $AB'=a\sqrt{7}$. Thể tích V của khối lăng trụ là

Lời giải



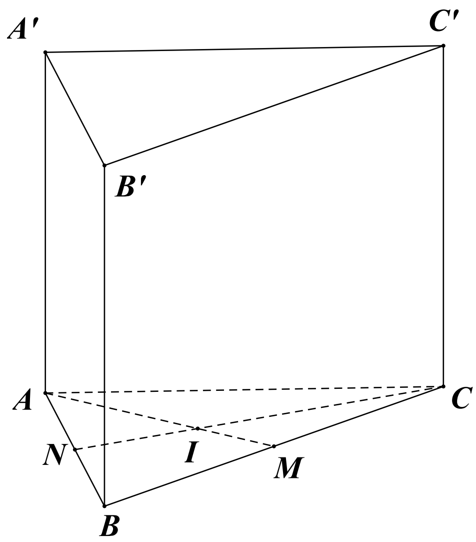
Ta có $AA'=\sqrt{(AB')^2-(A'B')^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{7}\right)^2-a^2}=a\sqrt{6}$.

Diện tích đáy ABC là $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{6}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 72: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$. Đáy ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R=a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, N là trung điểm của AB và $I = AM \cap CN$. Đặt $AB = x$.

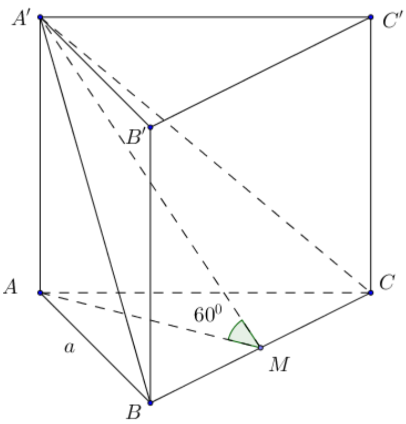
Đáy ABC là tam giác đều và nội tiếp đường tròn bán kính $R = a$ nên $AI = a$, suy ra $AM = \frac{3}{2}AI = \frac{3}{2}a.$

Khi đó, $AM^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{1}{2}AM.BC.AA' = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}a.\sqrt{3}a.2a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3.$

Câu 73: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, ta có $AM \perp BC$

Mặt khác $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp BC$

Suy ra $A'M \perp BC$, góc giữa hai hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 60°$

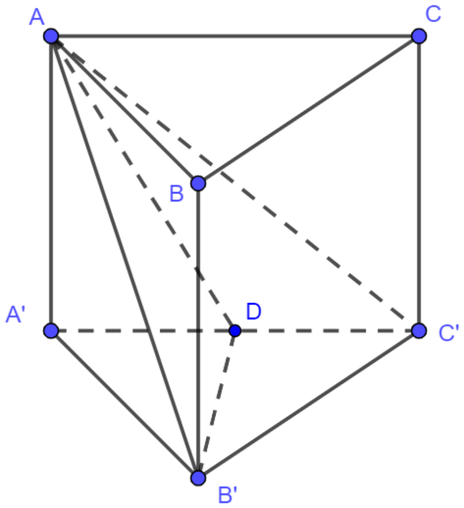
Tam giác ABC đều cạnh a, ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $A'AM$ vuông tại A, ta có $AA' = AM.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 74: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$.

Lời giải



Gọi D là trung điểm $A'C'$ thì ta có: $B'D \perp (ACC')$. Khi đó: $S_{ADC'} = S_{AB'C'}.\cos 60°$.

Đặt $AA' = x$ $(x > 0)$. Do các tam giác $A'B'C'$ và $AA'B'$ vuông nên:

$A'C' = a\sqrt{2};\ AB' = \sqrt{a^2 + x^2}$

Do $B'C' \perp (ABB'A')$ nên: $S_{AB'C'} = \frac{1}{2}AB'.B'C' = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + x^2}$

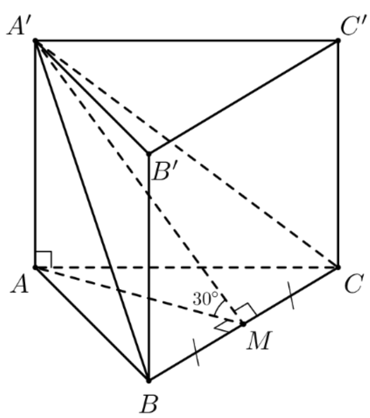
Do $AA' \perp DC$ nên: $S_{ADC'} = \frac{1}{2}AA'.DC' = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.x$

Nên: $\frac{a\sqrt{2}}{4}x = \frac{a\sqrt{a^2 + x^2}}{4} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a$.

Vậy $V_{B'.ACC'A'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.a^2.a = \frac{a^3}{3}$.

Câu 75: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ đều và có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



+ Đặt $BC = x \Rightarrow S_{\triangle A'BC} = x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2$.

+ Gọi M là trung điểm của BC suy ra $BC \perp A'M$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} BC \perp A'M \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM.$$

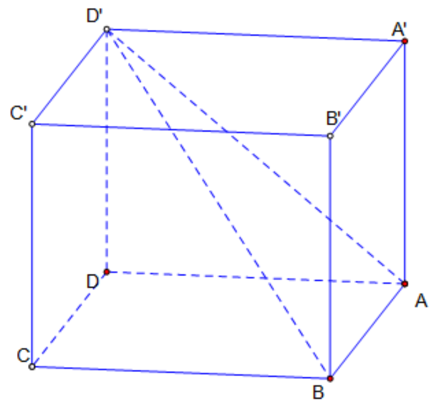
+ Vậy $\left((A'BC);(ABC)\right) = (A'M;AM) = \widehat{A'MA} = 30^\circ \Rightarrow AA' = A'M.\sin 30^\circ = \sqrt{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

+ Áp dụng CT: $S' = S.\cos\varphi \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC}.\cos 30^o = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra thể tích của lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 76: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa mặt phẳng $(D'AB)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là 30^0. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

Lời giải



Ta có $AB \perp (ADD'A') \Rightarrow AB \perp D'A$

Lại có $AB \perp AD$

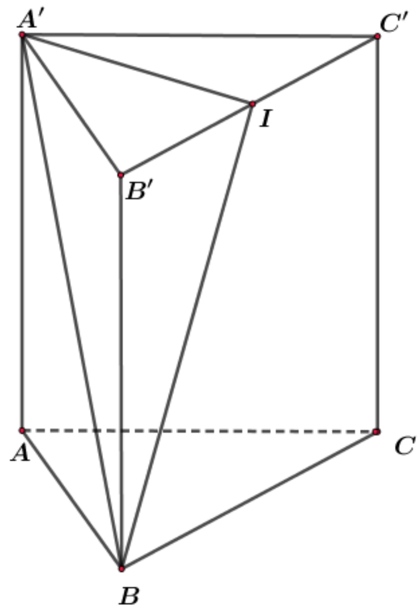
Suy ra $\widehat{\left((D'AB);(ABCD)\right)} = \widehat{(D'A, AD)} = \widehat{D'AD} = 30^0$.

Xét $\Delta D'DA$ vuông tại D; $AD = a$; $\widehat{D'AD} = 30^0 \Rightarrow DD' = \tan 30^0.AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = DD'.S_{ABCD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 77: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'I \perp B'C'$. Khi đó

$$\begin{cases} A'I \perp B'C' \\ A'I \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'I \perp (BB'C'C)$$

$$\Rightarrow (A'B,(BB'C'C)) = (A'B, BI) = \widehat{A'BI} = 30°$$

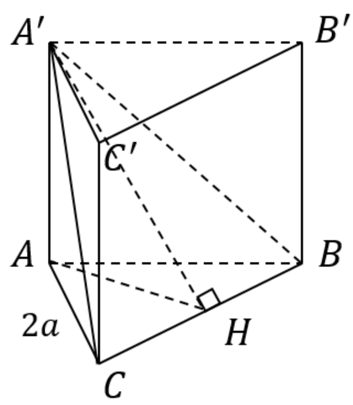
Đặt $h = BB'$

Ta có $\tan 30° = \dfrac{A'I}{BI} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2.\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow h = a\sqrt{2}$

Suy ra thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 78: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $S_{ABC}.AA'$.

Vì tam giác ABC đều nên có diện tích bằng $\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm cạnh BC. Tam giác $A'BC$ cân tại A' nên $S_{A'BC}=\frac{1}{2}.BC.A'H=2a^2\sqrt{3}$.

Với $BC=2a\Rightarrow A'H=\frac{2a^2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}.2a}=2a\sqrt{3}$.

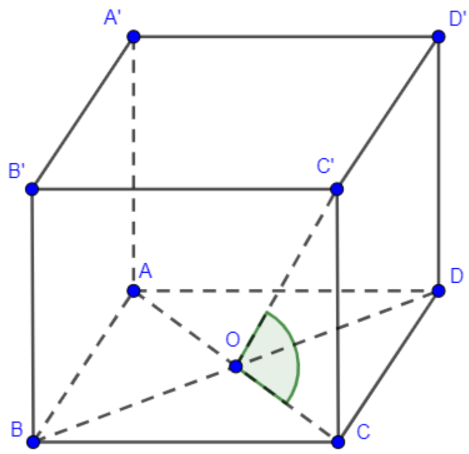
Xét tam giác $A'AH$ vuông tại A có cạnh $AH=\frac{(2a)\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$ và $A'H=2a\sqrt{3}$, suy ra

$AA'=\sqrt{A'H^2-AH^2}=\sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}=3a.$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng: $a^2\sqrt{3}.3a=3a^3\sqrt{3}$

Câu 79: Cho khối hộp hình chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy hình vuông, $AC=2\sqrt{3}a$, $\left((C'BD),(ABCD)\right)=60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

Lời giải



Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow OC=\frac{AC}{2}=a\sqrt{3}$, $AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}=a\sqrt{6}$

Ta có: $\begin{cases} BD=(C'BD)\cap(ABCD) \\ BD\perp(ACC'A') \\ OC'=(ACC'A')\cap(ABCD) \\ OC=(ACC'A')\cap(C'BD) \end{cases}$

$\Rightarrow\left((C'BD),(ABCD)\right)=(OC',OC)=\widehat{COC'}=60°\left(\widehat{COC'}<90°\right).$

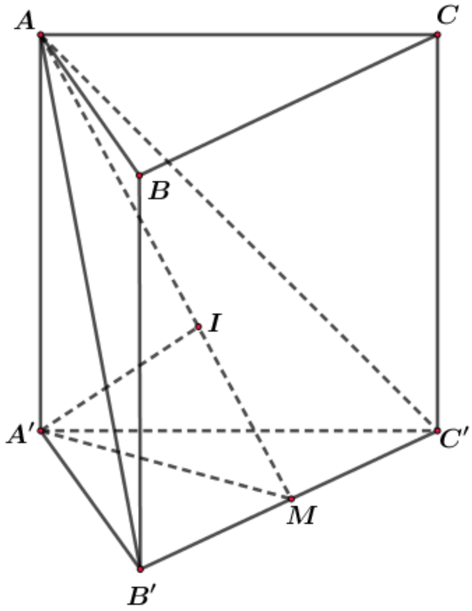
Xét tam giác COC' vuông tại C:

Ta có: $\tan\widehat{COC'} = \dfrac{CC'}{OC} \Leftrightarrow CC' = OC\tan\widehat{COC'} = a\sqrt{3}\tan 60° = 3a$

Ta có: $V_{ABCDA'B'C'D'} = S_{ABCD}CC' = \left(a\sqrt{6}\right)^2 3a = 18a^3$.

Câu 80: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng a. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và I là hình chiếu của A' lên AM. Khi đó ta có

$\begin{cases} B'C' \perp A'M \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'MA) \Rightarrow B'C' \perp A'I$

Mà $AM \perp A'I$ (2)

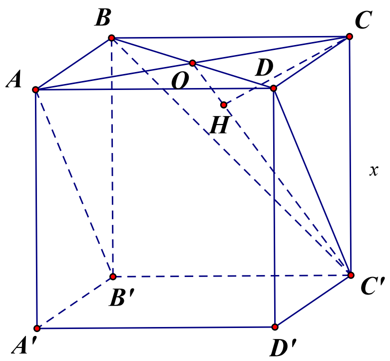
Từ và suy ra $A'I \perp (AB'C') \Rightarrow d\left(A', (AB'C')\right) = A'I = a$.

Xét tam giác vuông $AA'M$: $\dfrac{1}{A'I^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{A'M^2} \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 81: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BD bằng $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

Lời giải



Gọi O là giao điểm của BD và AC.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC' \\ AC \cap CC' = C \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(ACC'A'\right)$.

Trong $\left(ACC'A'\right)$: Từ C hạ $CH \perp C'O$ tại H

Khi đó ta có: $\begin{cases} CH \perp BD \\ CH \perp C'O \\ C'O \cap BD = O \end{cases} \Rightarrow CH \perp \left(BDC'\right)$

Ta lại có: $AB' // DC' \subset \left(BDC'\right)$ và $AB' \not\subset \left(BDC'\right) \Rightarrow AB' // \left(BDC'\right)$

$\Rightarrow d\left(AB';BD\right) = d\left(AB';\left(BDC'\right)\right) = d\left(A;\left(BDC'\right)\right) = d\left(C,\left(BDC'\right)\right) = CH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Đặt cạnh hình lập phương là $x \Rightarrow \begin{cases} CC' = x \\ CO = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

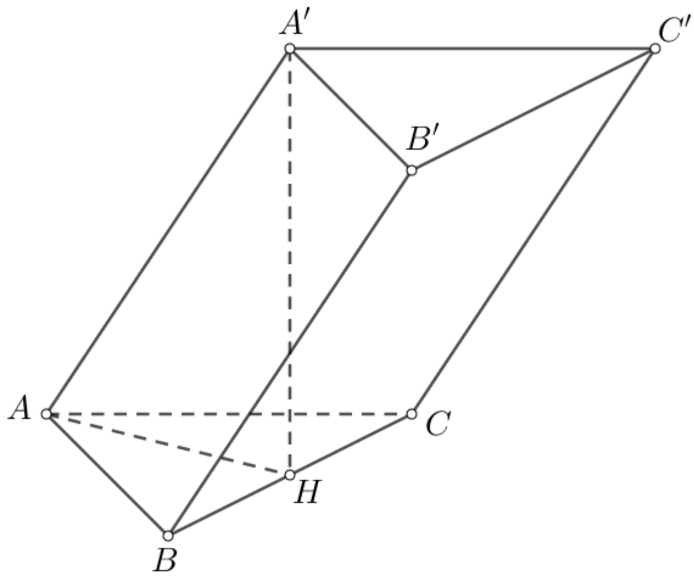
Khi đó $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{CO^2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4a^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{3}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x = 2a$.

Do đó thể tích của khối lập phương là $(2a)^3 = 8a^3$.

DẠNG 5: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 82: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC.

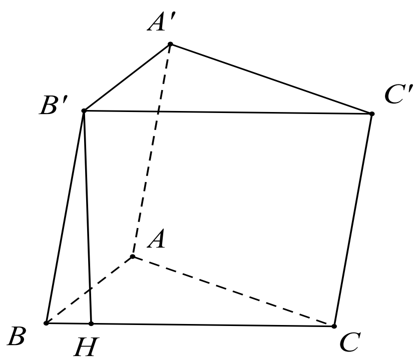
Khi đó $\widehat{\left(AA',(ABC)\right)}=\widehat{\left(AA',BH\right)}=\widehat{A'AH}=30^\circ$.

Suy ra $A'H=AH.\tan 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{2}$.

Vậy $V=\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 83: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng 4 a. Mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC}=30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ bằng

Lời giải



Ta có $\left(BCC'B'\right)\perp\left(ABC\right)$.

Hạ $B'H\perp BC\Rightarrow B'H\perp\left(ABC\right)$ và $\widehat{B'BH}=\widehat{B'BC}=30°$.

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $h=B'H=BB'.\sin 30°=2a$.

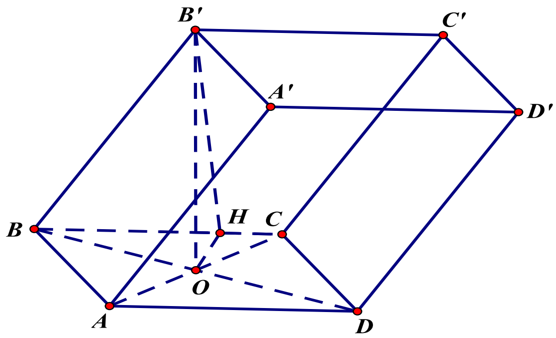
Do đáy là tam giác đều cạnh $a\Rightarrow$ Diện tích đáy là $S_{đáy}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

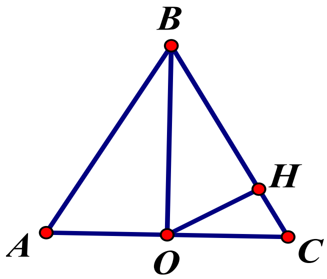
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{LT}=S_{đáy}.h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là $V=\frac{1}{3}V_{LT}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 84: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$, góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải





$ABCD$ là hình thoi nên $AB=BC$. Lại có $\widehat{ABC}=60°$ nên ΔABC là tam giác đều cạnh a.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD}=2.S_{ABC}=2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $OH\perp BC\Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy khi đó là $\widehat{B'HO}=60°$.

Ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{16}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

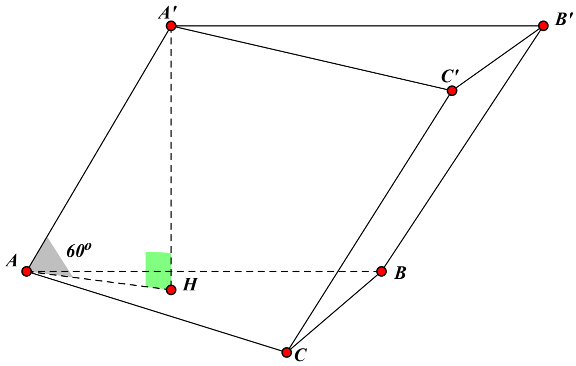
Theo giả thiết, $B'O$ là đường cao lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

$B'O=OH.\tan\widehat{B'HO}=\frac{a\sqrt{3}}{4}\tan 60°=\frac{3a}{4}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.B'O=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{4}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 85: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



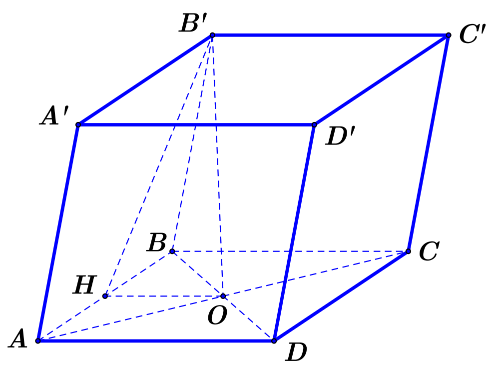
Kẻ $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (A'A,(ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°$.

Xét $\Delta AHA'$: $\sin 60° = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA'.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 86: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của B' lên $mp(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD, biết góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $OH \perp AB$.

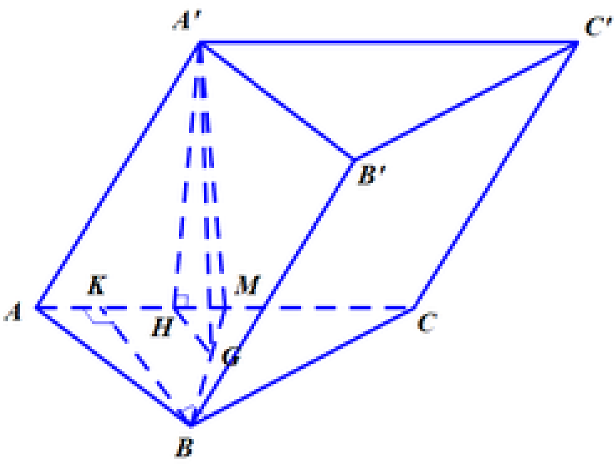
Theo giả thiết suy ra $\widehat{B'HO} = 60°$.

Ta có $B'O = OH.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Câu 87: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a, AC = 5a$, hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC. Biết mặt bên $ACC'A'$ hợp với mặt đáy $A'B'C'$ một góc 60^0, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

Lời giải



$\left(\left(ACC'A'\right),\left(A'B'C'\right)\right)=\left(\left(ACC'A'\right),\left(ABC\right)\right)$

Kẻ $GH\perp AC$, $A'G\perp AC\Rightarrow AC\perp\left(A'GH\right)\Rightarrow AC\perp A'H$

Ta có: $\begin{cases}\left(ACC'A'\right)\cap\left(ABC\right)=AC\\ AC\perp A'H\\ AC\perp GH\end{cases}\Rightarrow\left(\left(ACC'A'\right),\left(ABC\right)\right)=\widehat{\left(A'H,GH\right)}=\widehat{A'HG}=60^0$.

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{25a^2-9a^2}=4a$.

Kẻ $BK\perp AC\Rightarrow\dfrac{1}{BK^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{9a^2}+\dfrac{1}{16a^2}=\dfrac{25}{144a^2}\Leftrightarrow BK=\dfrac{12a}{5}$.

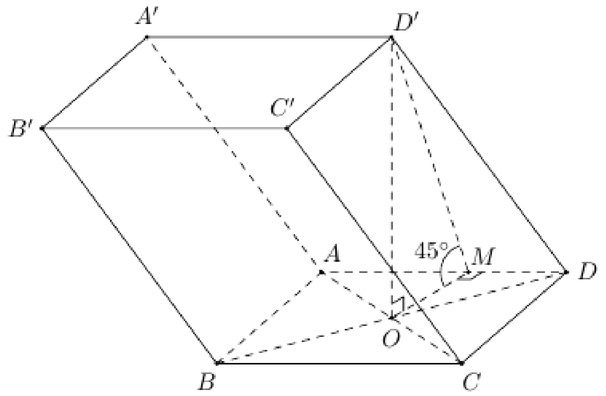
Có $BK//GH\Rightarrow\dfrac{GH}{BK}=\dfrac{MG}{MB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow GH=\dfrac{1}{3}BK=\dfrac{1}{3}.\dfrac{12a}{5}=\dfrac{4a}{5}$.

Tam giác $A'HG$ vuông tại G có: $\tan\widehat{A'HG}=\dfrac{A'G}{GH}\Rightarrow A'G=\dfrac{4a}{5}\tan 60^0=\dfrac{4a\sqrt{3}}{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=A'G.S_{ABC}=\dfrac{1}{2}3a.4a.\dfrac{4a\sqrt{3}}{5}=\dfrac{24a^3\sqrt{3}}{5}$.

Câu 88: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120°$. Hình chiếu vuông góc của D' lên $\left(ABCD\right)$ trùng với giao điểm của AC và BD, góc giữa hai mặt phẳng $\left(ADD'A'\right)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$ bằng $45°$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $D'O \perp (ABCD)$ và $(ADD'A') \cap (ABCD) = AD$. Dựng $OM \perp AD$ tại M. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là $\widehat{D'MO}$.

Vì $(A'B'C'D')$ song song với $(ABCD)$ nên $\widehat{D'MO} = 45°$.

Do $\widehat{ABC} = 120°$ nên $\widehat{BAC} = 60°$ và do đó tam giác ABD đều.

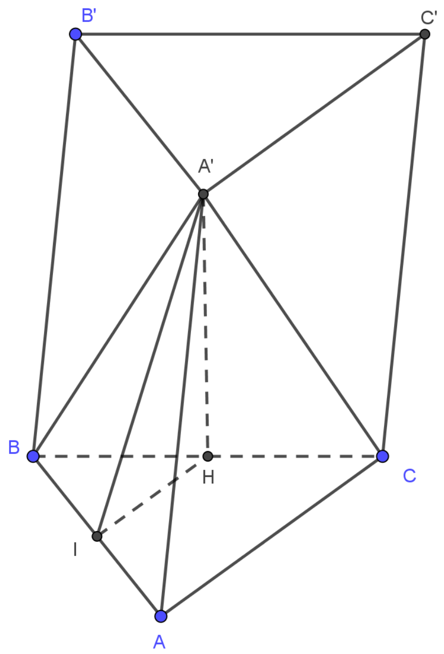
Ta tính được $OM = OD.\sin 60° = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $OD' = OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = a.a.\sin 120° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối hộp đã cho là $V = S_{ABCD}.OD' = \dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 89: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác đáy ABC vuông đỉnh A, $AB = a, AC = \sqrt{3}a$, $A'A = A'B = A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt đáy (ABC) một góc $60°$. Tính thể tích V của lăng trụ đã cho.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC.

Xét ba tam giác $A'HB, A'HA, A'HC$ có: $A'H$ chung, $A'A = A'B = A'C$ và $HA = HB = HC$

$\Rightarrow \Delta A'HA = \Delta A'HB = \Delta A'HC$ mà $\Delta A'HB$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{A'HA} = \widehat{A'HB} = \widehat{A'HC} = 90°$

$\Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Tam giác $A'AB$ cân tại A' có: I là trung điểm của AB nên $A'I \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} A'I \perp AB \\ A'H \perp AB \left(\text{do } A'H \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HI) \Rightarrow HI \perp AB$.

Do đó, $\left((ABB'A'),(ABC)\right) = \widehat{A'IH} = 60°$.

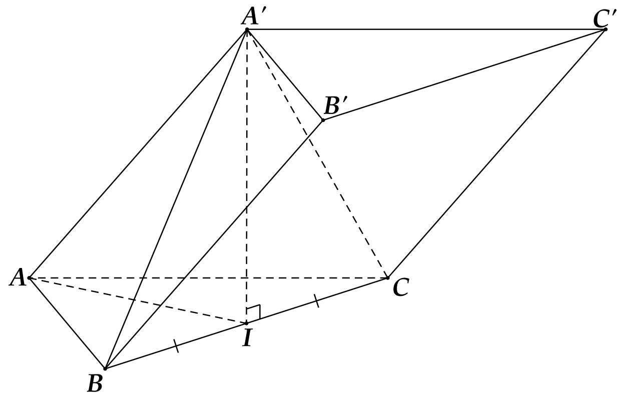
Tam giác ABC có: H, I lần lượt là trung điểm của BC, AB nên $HI = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $A'HI$ vuông tại H có: $\tan\widehat{A'IH} = \dfrac{A'H}{IH} \Rightarrow \tan 60° = \dfrac{A'H}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.

Thể tích lăng trụ là: $V = \dfrac{1}{3}.A'H.S_{ABC} = \dfrac{1}{6}.A'H.AB.AC = \dfrac{1}{6}.\dfrac{3a}{2}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 90: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, BC = 2a$, biết hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Khi đó thể tích của hình trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC, theo giả thiết ta có $AI\perp(ABC)$.

Hình chiếu của AA' lên mặt phẳng đáy (ABC) là AI.

Suy ra $(AA';(ABC))=(AA';AI)=\widehat{A'AI}=60^\circ$.

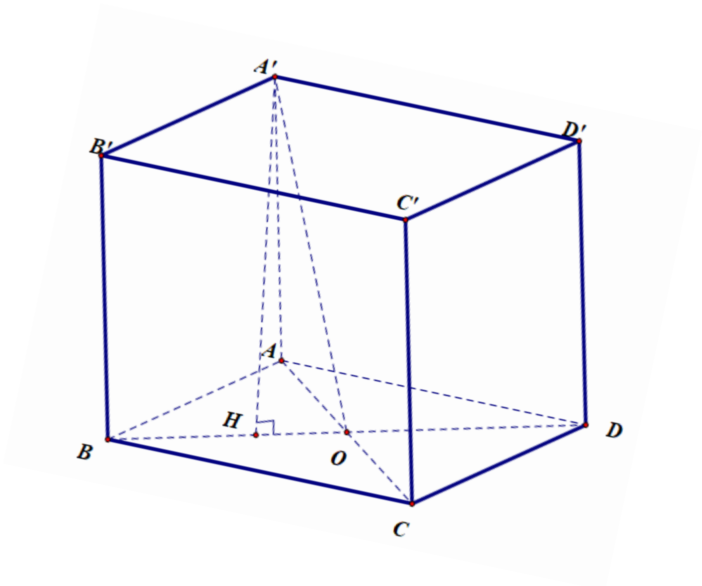
Ta có $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a\sqrt{3}$; Do đó $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác, $AI=\frac{1}{2}BC=a$ nên $A'I=AI.\tan\widehat{A'AI}=a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.A'I=\frac{3a^3}{2}$.

Câu 91: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD}=120^0$. Biết $A'A=A'B=A'C$ và góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

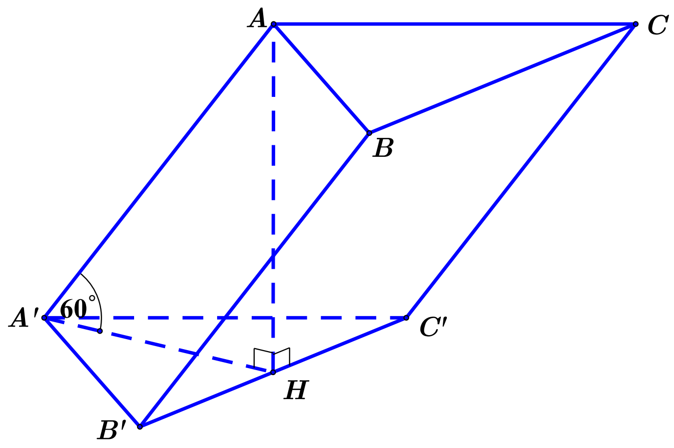
Lời giải



Từ giả thiết suy ra $A'.ABC$ là chóp đều nên nếu H là trọng tâm ΔABC, O là tâm hình thoi $ABCD$ thì $A'H\perp(ABC)$ và $\widehat{A'OB}=60^0$. Ta có $OH=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow A'H=a$. Vậy $V=2a^3\sqrt{3}$.

Câu 92: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của $B'C'$. Biết rằng góc giữa AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Vì hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của $B'C'$ nên $AH \perp (A'B'C')$. Khi đó, góc giữa AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ là $\widehat{AA'H} = 60°$.

Vì $\Delta A'B'C'$ là tam giác đều cạnh a và H là trung điểm của $B'C'$ nên độ dài đường cao $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét trong tam giác AHA' vuông tại H có $\tan\widehat{AA'H} = \dfrac{AH}{A'H}$ nên

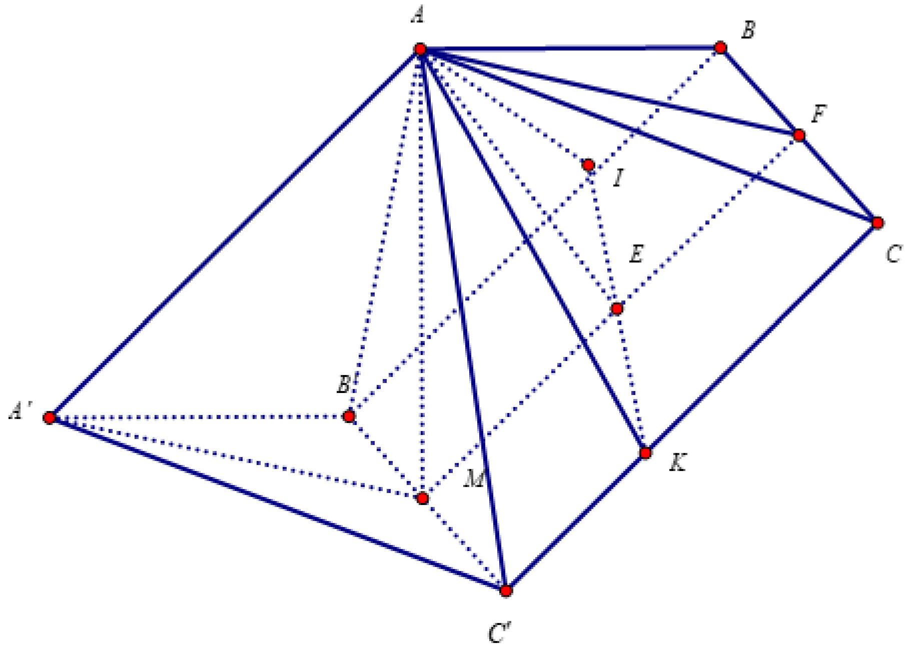
$AH = A'H.\tan\widehat{AA'H} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60° = \dfrac{3}{2}a$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = AH.S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{3}{2}a.\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Câu 93: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

Lời giải



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$.

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2 $\Rightarrow AI = 1,\ AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của $BC \Rightarrow AF = A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Ta có $\left.\begin{matrix} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC//BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow IK^2 = AI^2 + AK^2 \Rightarrow \Delta AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF//BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó $((ABC),(AIK)) = (EF; AM) = \widehat{AME} = \widehat{FAE}$

Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30°$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là ΔAIK nên ta có: $S_{AIK} = S_{ABC}\cos\widehat{EAF} \Rightarrow 1 = S_{ABC}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}$.

Xét ΔAMF vuông tại A: $\tan\widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$