



QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 26: KHOẢNG CÁCH



- 1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẮNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẮNG
 - a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng: Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a, kí hiệu d(M,a) là khoảng cách giữa M và hình chiếu vuông góc H của M trên a.
 - b) Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng: Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P), kí hiệu d(M,(P)) là khoảng cách giữa M và hình chiếu vuông góc H của M trên (P).

Chú ý. d(M, a) = 0 khi và chỉ khi $M \in a$; d(M, (P)) = 0 khi và chỉ khi $M \in (P)$.

Nhận xét. Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

Chú ý. Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẮNG VÀ MẶT PHẮNG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẮNG SONG SONG

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a, kí hiệu d(a, (P)), là khoảng cách từ một điểm bất kỉ trên a đến (P).

Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) .

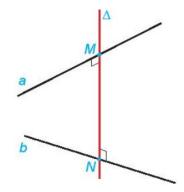
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q), kí hiệu d((P), (Q)), là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n, kí hiệu d(m, n), là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẮNG CHÉO NHAU

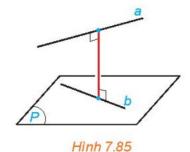
Đường thẳng \triangle cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

Nếu đường vuông góc chung \triangle cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b.



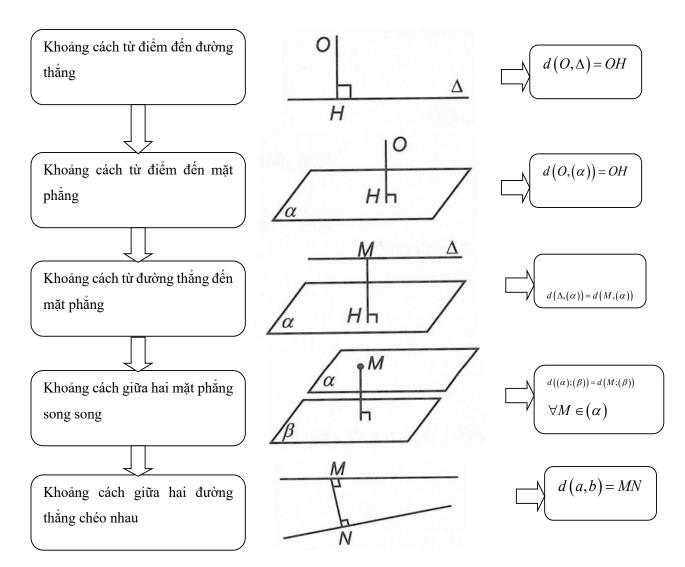
Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại (H.7.85).
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó (H.7.86).



Hinh 7.86

CHUYÊN ĐỀ VII – TOÁN – 11 – QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA





DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẮNG

PHƯƠNG PHÁP.

Bài toán: Xác định khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P).

Bước 1. Xác định hình chiếu H của O trên (α) .

- +) Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α) .
- +) Tìm giao tuyến (α) của (P) và (α) .
- +) Kẻ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó
- $d(O;(\alpha)) = OH.$

Bước 2. Tính OH.

Lưu ý: Tính chất của tứ diện vuông.

Giả sử OABC là tứ diện vuông tại O.

 $\left(\mathit{OA} \perp \mathit{OB}; \mathit{OB} \perp \mathit{OC}; \mathit{OC} \perp \mathit{OA}\right)$ và H
 là hình

chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó ta có
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$
.

Ví dụ. Khối chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a, SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Hướng dẫn giải

Ta có

$$AH \perp SB; AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

 $\Rightarrow AH = d(A.(SBC)).$

Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2 BÀI TẬP.

- **Câu 1:** Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác A'AC vuông cân tại A' và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $A'A = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ D' đến mặt phẳng A'ACC'
- **Câu 2:** Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC là tam giác đều cạnh bằng a, SA = 2a. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng
- **Câu 3:** Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, SA = 2a. Gọi M là trung điểm BC. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng

- **Câu 4:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^{\circ}$, BA = BC = a; AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và (SAD) bằng 30° . Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng
- **Câu 5:** Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, SA = 2a. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng
- **Câu 6:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành với $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) bằng
- Câu 7: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC là tam giác vuông tại B, BC = 2a. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng
- Câu 8: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng
- Câu 9: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a, SA = a. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAC) bằng
- **Câu 10:** Cho tứ diện đều ABCD, biết khoảng cách A đến mặt phẳng (BCD) bằng $a\sqrt{6}$. Diện tích tam giác ABC bằng
- **Câu 11:** Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng
- **Câu 12:** Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng
- **Câu 13:** Cho hình chóp S.ABCD có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng
- **Câu 14:** Cho hình chóp *S.ABCD* có SA vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*), ABCD là hình vuông tâm O có cạnh a. Biết góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABCD*) bằng 60°. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (*SBC*) bằng
- **Câu 15:** Cho hình chóp S.ABCD có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^{\circ}$, biết SC hợp với đáy một góc 45° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng
- **Câu 16:** Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA = a, ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD) bằng

- **Câu 17:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng
- **Câu 18:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABCD là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SB vuông góc mặt phẳng (ABC) và SB = 2a. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng
- **Câu 19:** Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông cân tại A với AB = AC = 3a. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho HC = 2HB. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng 2a. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (B'AC) bằng
- **Câu 20:** Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a, BC = 2a, BB' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACC'A') bằng
- **Câu 21:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh bằng $a,\widehat{BAD}=60^{\circ},SO\perp \left(ABCD\right),SO=a$. Khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

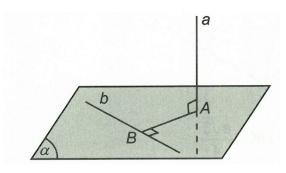
DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẮNG CHÉO NHAU

BÀI TOÁN 1. TÍNH KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẮNG CHÉO NHAU a VÀ b TRƯỜNG HỢP $a \perp b$



Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a tại A.

Dựng $AB \perp b$ tại b



AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



- Câu 22: Cho hình chóp *S.ABCD* đáy *ABCD* là hình vuông cạnh bằng a; cạnh bên SA vuông góc với đáy; SC hợp với đáy góc 45°. Tính khoảng cách giữa hai dường thẳng SC và *BD*.
- Câu 23: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy.

Tính theo a khoảng cách hai đường thẳng SA, BC.

BÀI TOÁN 2. TÍNH KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẮNG CHÉO NHAU A VÀ B KHÔNG VUÔNG GÓC

PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1.

Dựng mặt phẳng (α) chưa b và song song với a.

Chọn điểm M thích hợp trên a, dựng $MH \perp (\alpha)$ tại

Qua H, dựng đường thẳng a'/a, cắt b tại **B.**

Từ B dựng đường thẳng song song MH, cắt a tại A.

AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a tại M.

Dựng hình chiếu b' trên b lên (α) .

Dựng hình chiếu vuông góc H của M lên b'.

Từ H, dựng đượng thẳng song song với a, cắt b tại **B.**

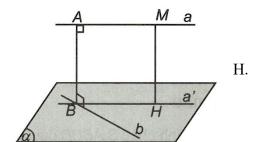
Qua B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại A.

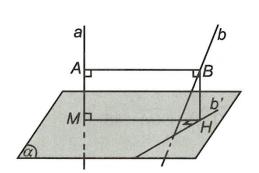
AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2

BÀI TẬP.

- **Câu 24:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và C**D.**
- Câu 25: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, BC = 2a, mặt bên ACC'A' là hình vuông. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, CC', A'B' và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MP và HN.
- **Câu 26:** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (*SBC*) vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng
- **Câu 27:** Cho hình chóp *S.ABCD* có cạnh đáy SA vuông góc với đáy, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa SB và mặt đáy bằng 60°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng
- **Câu 28:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại A,AB=a,CC'=2a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 bằng





- **Câu 29:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại A,AB=a,CC'=2a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC_1 bằng
- **Câu 30:** Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai dường thẳng *SA* và BC bằng
- **Câu 31:** Cho tứ diện OABC có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a,OB = a\sqrt{2},OC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng
- **Câu 32:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và $D, SA \perp (ABCD), AD = DC = SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng
- Câu 33: Cho hình chóp S.ABC có đáy tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa hai đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a bằng
- **Câu 34:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại $A,AB=a,BC=a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng
- **Câu 35:** Cho hình chóp S.ABCD có mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, ABCD là hình chữ nhật với AB = a, BC = 2a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng
- **Câu 36:** Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi tam O, cạnh a, góc $\widehat{BCD} = 60^{\circ}$, có SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SO = a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng
- Câu 37: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và A'B' bằng
- Câu 38: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AA' bằng