

# CHƯƠNG IV: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

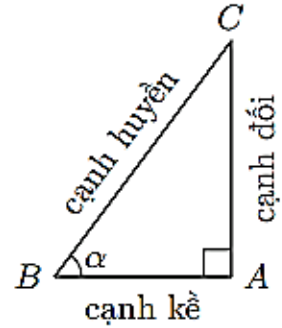
## BÀI 11: Tỷ số lượng giác của góc nhọn

### A. Kiến thức cần nhớ

#### 1. Khái niệm tỷ số lượng giác của góc nhọn

Cho góc nhọn  $\alpha$ . Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có góc nhọn  $B$  bằng  $\alpha$ . Ta có:

- + Tỷ số giữa cạnh đối và cạnh huyền gọi là sin của  $\alpha$ , kí hiệu  $\sin \alpha$
- + Tỷ số giữa cạnh kề và cạnh huyền gọi là cosin của  $\alpha$ , kí hiệu là  $\cos \alpha$
- + Tỷ số giữa cạnh đối và cạnh kề của góc  $\alpha$  gọi là tang của  $\alpha$ , kí hiệu  $\tan \alpha$ .
- + Tỷ số giữa cạnh kề và cạnh đối của góc  $\alpha$  gọi là cotang  $\alpha$ , kí hiệu  $\cot \alpha$ .



\* **Ta có:**

$$+ \sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$

$$+ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

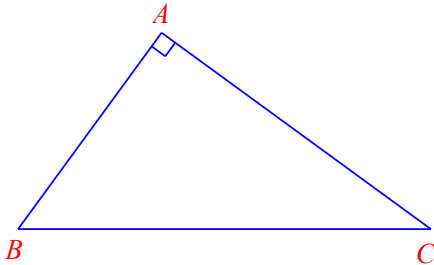
+  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  gọi là các tỷ số lượng giác của góc nhọn  $\alpha$

\* sin, cosin của góc nhọn luôn dương và bé hơn 1 vì trong tam giác vuông, cạnh huyền dài nhất

Ta có bảng các giá trị lượng giác đặc biệt:

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

\*) **Chú ý:** Cách tính chính xác cạnh đối và cạnh kề của góc cần viết tỷ số lượng giác

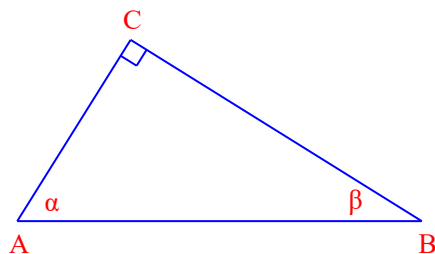
<p>Chứng minh:</p> <p>Viết tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác <math>\triangle ABC</math> vuông tại <math>A</math>.</p>	<p>Xét <math>\triangle ABC</math> vuông tại <math>A</math>, có:</p> $\sin B = \frac{AC}{BC} \qquad \sin C = \frac{AB}{BC}$ $\cos B = \frac{AB}{BC} \qquad \cos C = \frac{AC}{BC}$ $\tan B = \frac{AC}{AB} \qquad \tan C = \frac{AB}{AC}$ $\cot B = \frac{AB}{AC} \qquad \cot C = \frac{AC}{AB}$
	

## 2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

\* Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

\* Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc phụ nhau, khi đó:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \sin \beta = \cos \alpha, \tan \alpha = \cot \beta, \cot \alpha = \tan \beta$$



## 3. Sử dụng máy tính cầm tay tính tỉ số lượng giác của góc nhọn.

\* Để tìm góc  $\alpha$  khi biết  $\cot \alpha$ , ta có thể tìm góc  $(90^\circ - \alpha)$  vì  $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$  rồi suy ra  $\alpha$ .

## B. Các dạng toán

### Dạng 1: Sử dụng MTCT tính tỉ số lượng giác, tính góc

**Bài 1:** Sử dụng MTCT tính các tỉ số lượng giác và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba.

a)  $\sin 27^\circ$ ,  $\cos 32^\circ 15'$ ,  $\tan 52^\circ 12'$  và  $\cot 35^\circ 23'$

b)  $\sin 40^\circ 54'$ ,  $\cos 52^\circ 15'$ ,  $\tan 69^\circ 36'$  và  $\cot 25^\circ 18'$

**Bài 2:** Sử dụng MTCT, tìm các góc (làm tròn đến phút) biết:

a)  $\sin \alpha_1 = 0,3214$ ,  $\cos \alpha_2 = 0,4321$ ,  $\tan \alpha_3 = 1,2742$  và  $\cot \alpha_4 = 1,5384$

b)  $\sin \alpha_1 = 0,3782$ ,  $\cos \alpha_1 = 0,6251$ ,  $\tan \alpha_1 = 2,154$  và  $\cot \alpha_1 = 3,253$

**Bài 3:** Sử dụng máy tính cầm tay, tính tỉ số lượng giác của các góc sau:

a)  $26^\circ$

b)  $72^\circ$

c)  $81^\circ 27'$

**Bài 4:** Sử dụng máy tính cầm tay, tìm góc nhọn  $\alpha$  trong mỗi trường hợp sau đây

a)  $\cos \alpha = 0,6$

b)  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

**Bài 5:** Dùng MTCT, tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba)

a)  $\sin 40^\circ 12'$

b)  $\cos 52^\circ 54'$

c)  $\tan 63^\circ 36'$

d)  $\cot 25^\circ 18'$

## Dạng 2: Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn trong một tam giác vuông

### I. Cách giải:

- Xác định cạnh đối, cạnh kề, cạnh huyền

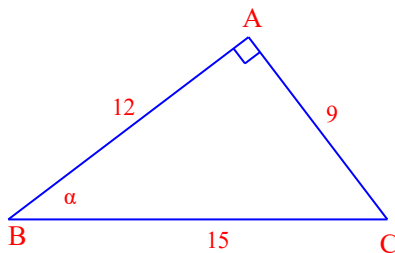
- Tính đoạn thẳng chưa biết (nhờ định lý Pitago hoặc hệ thức về cạnh, đường cao trong tam giác vuông)

Xác định cạnh đối, kề, huyền  $\longrightarrow$  Viết tỉ số lượng giác  $\longrightarrow$  Tính đoạn thẳng chưa biết.

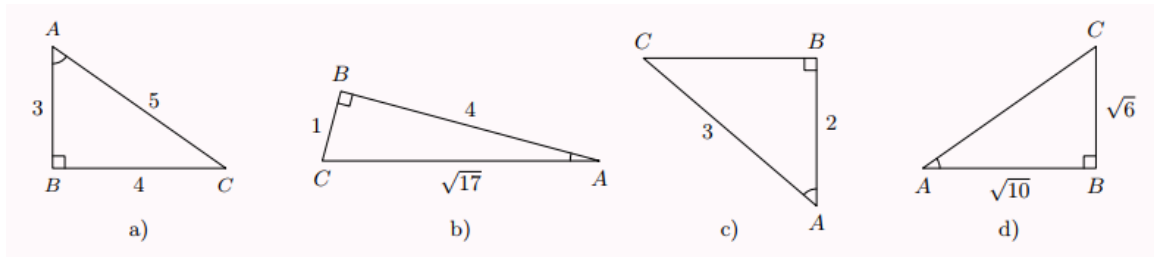
\*) Lưu ý: Nếu đề bài yêu cầu tính tỉ số lượng giác của hai góc nhọn trong cùng một tam giác vuông thì sử dụng tính chất tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

### II. Bài toán

**Bài 1:** Tính các tỉ số lượng giác của góc  $\alpha$ , trong tam giác  $ABC$  ở hình vẽ bên.



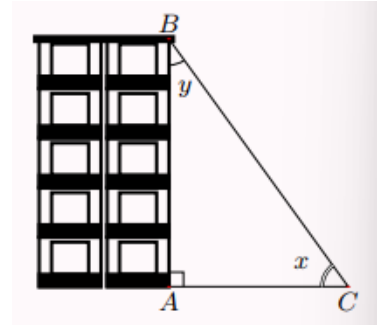
**Bài 2:** Tính các tỉ số lượng giác của góc nhọn  $A$  trong mỗi tam giác vuông  $ABC$  có  $B = 90^\circ$  ở hình sau.



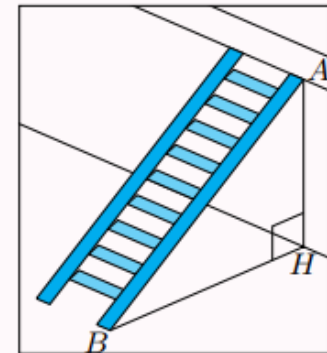
**Bài 3:** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB=1,5$ ,  $BC=3,5$ . Tính tỉ số lượng giác của góc  $C$  rồi suy ra các tỉ số lượng giác của góc  $B$

**Bài 4:** Hãy viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của góc nhỏ hơn  $40^\circ$ :  $\sin 40^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\sin 52^\circ 30'$ ,  $\tan 80^\circ$ ,  $\cot 82^\circ$ .

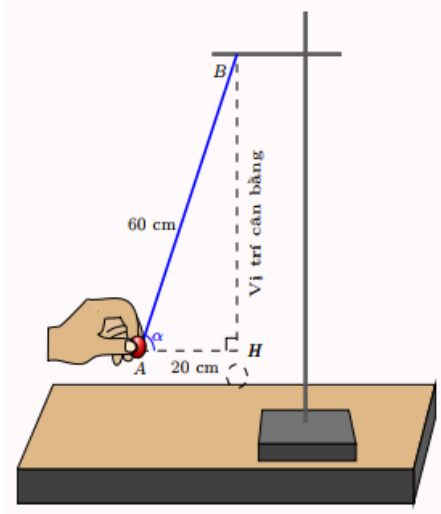
**Bài 5:** Tia nắng chiếu qua điểm  $B$  của tòa nhà tạo với mặt đất một góc  $x$  và tạo với cạnh  $AB$  của tòa nhà một góc  $y$  (hình vẽ). Cho biết  $\cos x \approx 0,78$  và  $\cot x \approx 1,25$ . Tính  $\sin y$  và  $\tan y$  (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



**Bài 6:** Hình bên mô tả một chiếc thang có chiều dài  $AB=4$  m được đặt dựa vào tường, khoảng cách từ chân thang đến chân tường là  $BH=1,5$  m. Tính góc tạo bởi cạnh  $AB$  và phần tường nằm ngang trên mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



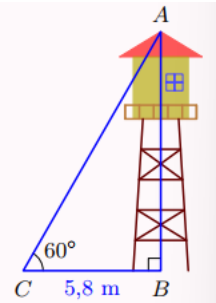
**Bài 7:** Treo quả cầu kim loại nhỏ vào giá thí nghiệm bằng sợi dây mảnh nhẹ không dẫn. Khi quả cầu đứng yên tại vị trí cân bằng, dây treo có phương thẳng đứng. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn nhỏ rồi buông ra thì quả cầu sẽ chuyển động qua lại quanh vị trí cân bằng. Khi kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng, giả sử tâm  $A$  của quả cầu cách  $B$  một khoảng  $AB=60$  cm và cách vị trí cân bằng một khoảng  $AH=20$  cm. Tính số đo góc  $\alpha$  tạo bởi sợi dây  $BA$  và vị trí cân bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ).



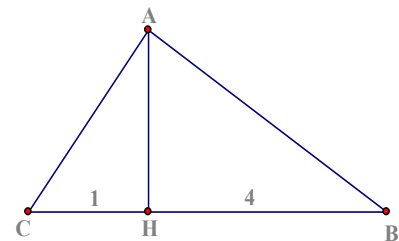
**Dạng 3: Tính các cạnh trong một tam giác vuông sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn.**

**Bài 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $C = 30^\circ$  và  $BC = a$ . Tính các cạnh  $AB$ ,  $AC$  theo  $a$

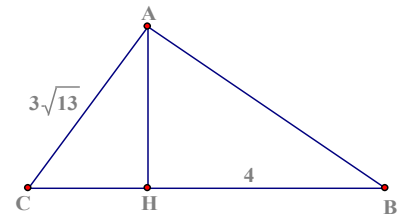
**Bài 2:** Tính chiều cao của tháp canh trong hình bên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



**Bài 3:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$  ( $H \in BC$ ) biết  $BH = 4\text{cm}$ ,  $CH = 1\text{cm}$ . Hãy tính các cạnh và các góc của tam giác vuông  $ABC$ .



**Bài 4:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$  ( $H \in BC$ ), biết  $BH = 4\text{cm}$ ,  $AC = 3\sqrt{13}\text{cm}$ . Hãy tính các cạnh và các góc của tam giác vuông  $ABC$ .



**Bài 5:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AB = 10\text{cm}$ ,  $AC = 15\text{cm}$

- Tính góc  $B$
- Phân giác trong của góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $I$ . Tính  $AI$
- Vẽ  $AH$  vuông góc với  $BI$  tại  $H$ . Tính  $AH$

**Bài 6:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AC = 15\text{cm}$ ,  $B = 50^\circ$ . Hãy tính độ dài

- $AB, AC$
- phân giác  $CD$

**Dạng 4: Dựng góc nhọn  $\alpha$  biết một tỉ số lượng giác của góc đó bằng  $\frac{m}{n}$**

**I. Phương pháp giải:**

Dựng một tam giác vuông có cạnh là  $m$  và  $n$  ( $m$  và  $n$  tương ứng là cạnh góc vuông và cạnh huyền nếu tỉ số lượng giác đã cho là sin hoặc cos;  $m$  và  $n$  là hai cạnh góc vuông nếu tỉ số lượng giác đã cho là tan hoặc cot) rồi vận dụng định nghĩa để nhận ra góc  $\alpha$ .

**II. Bài toán**

**Bài 1:** Dựng góc  $\alpha$ , biết  $\sin \alpha = 0,25$

**Bài 2:** Dựng góc  $\alpha$ , biết  $\cos \alpha = 0,75$

**Bài 3:** Dựng góc  $\alpha$ , biết  $\tan \alpha = 1,5$

**Bài 4:** Dựng góc  $\alpha$ , biết  $\cot \alpha = 2$

**Dạng 5: Tính giá trị của biểu thức lượng giác với các góc đặc biệt**

**I. Phương pháp giải**

+ Sử dụng bảng giá trị các tỉ số lượng giác của các góc  $30^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $60^\circ$

+ Sử dụng tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

**II. Bài toán**

**Bài 1:** Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a)  $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$

b)  $\tan 30^\circ \cdot \cot 30^\circ$

c)  $\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ}$

**Bài 2:** Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a)  $A = \frac{2\cos 45^\circ}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} \tan 30^\circ$

b)  $B = \frac{2\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} - \cot 45^\circ$

**Bài 3:** Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a)  $M = 4\cos^2 45^\circ + \sqrt{3} \cot 30^\circ - 16\cos^3 60^\circ$

b)  $N = \frac{2\sin 30^\circ - \sin 60^\circ}{\cos^2 30^\circ - \cos 60^\circ}$

**Bài 4:** Tính

a)  $\sin 61^\circ - \cos 29^\circ$

b)  $\cos 15^\circ - \sin 75^\circ$

c)  $\tan 28^\circ - \cot 62^\circ$

d)  $\cot 47^\circ - \tan 43^\circ$

**Bài 5:** Tính giá trị của biểu thức

a)  $P = \sin^2 30^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ$

b)  $\cos^2 25^\circ - \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ - \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ$

**Bài 6:** Tính giá trị của các biểu thức sau

a.  $A = 4 - \sin^2 45^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\cot^3 45^\circ$

b.  $\tan \alpha = \cot \alpha$

b.  $B = \tan 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cot 30^\circ$

c.  $C = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \dots + \cos^2 75^\circ$

d.  $D = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$

**Dạng 6: So sánh các tỉ số lượng giác mà không dùng máy tính hoặc bảng số****I. Phương pháp giải**

Dùng định lý tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau (nếu cần) và căn cứ vào những tính chất sau:

+ khi góc nhọn  $\alpha$  tăng từ  $0^\circ$  đến  $90^\circ$  thì”

$\sin \alpha$  tăng và  $\tan \alpha$  tăng

$\cos \alpha$  giảm và  $\cot \alpha$  giảm

+  $\sin \alpha < \tan \alpha$ ;  $\cos \alpha < \cot \alpha$

**II. Bài toán****Bài 1:** So sánh

a)  $\sin 25^\circ$  và  $\cos 65^\circ$

b)  $\cos 25^\circ$  và  $\sin 65^\circ$

c)  $\tan 25^\circ$  và  $\cot 65^\circ$

d)  $\cot 25^\circ$  và  $\tan 65^\circ$

**Bài 2:** So sánh

a) So sánh  $\sin 72^\circ$  và  $\cos 18^\circ$ ;  $\sin 18^\circ$  và  $\cos 72^\circ$ ;  $\tan 72^\circ$  và  $\cot 18^\circ$

b) Cho biết  $\sin 18^\circ \approx 0,31$ ;  $\tan 18^\circ \approx 0,32$ . Tính  $\cos 72^\circ$  và  $\cot 72^\circ$

**Bài 3:** So sánh hai tỉ số  $m$  và  $n$ , biết  $m = \frac{\sin 50^\circ}{\cos 65^\circ}$ ;  $n = \frac{\cot 70^\circ}{\tan 35^\circ}$

**Bài 4:** Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần

a)  $\sin 70^\circ, \cos 30^\circ, \cos 40^\circ, \sin 51^\circ$

b)  $\cos 34^\circ, \sin 57^\circ, \cot 32^\circ$

**Bài 5:** Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần

a)  $\cot 40^\circ, \sin 40^\circ, \cot 43^\circ, \tan 42^\circ$

b)  $\tan 52^\circ, \cot 63^\circ, \tan 72^\circ, \cot 31^\circ, \sin 27^\circ,$

**Bài 6:** Cho  $25^\circ < \alpha < 50^\circ$ , hãy sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự giảm dần: **HH9**



## Bài 12. MỘT SỐ HỆ THỨC GIỮA CẠNH, GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG VÀ ỨNG DỤNG

### A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

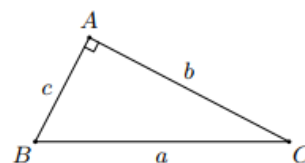
#### 1. Hệ thức giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với cosin góc kề.

+ Trong tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ta có

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$



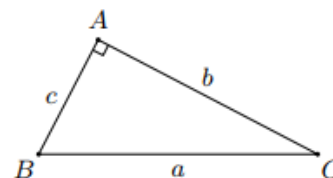
#### 2. Hệ thức giữa hai cạnh góc vuông

Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tan góc đối hoặc nhân với cot góc kề.

+ Trong tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ta có

$$b = c \cdot \tan B = a \cdot \cot C$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$$



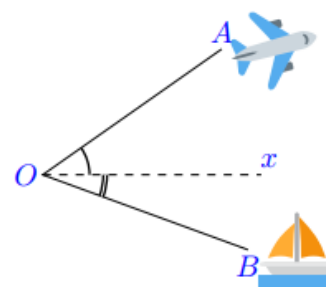
#### 3. Giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho biết trước hai cạnh ( hoặc một góc nhọn và một cạnh) thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và các góc còn lại của tam giác vuông đó. Bài toán này gọi là bài toán **Giải tam giác vuông**.

Trong đo đạc, khi người quan sát có hướng nhìn ngang theo tia  $Ox$  (hình bên)

+ Góc  $xOA$  gọi là góc nghiêng lên hay góc nâng

+ Góc  $xOB$  gọi là góc nghiêng xuống hay góc hạ.



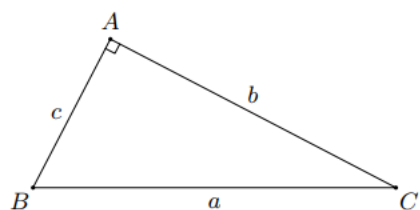
### B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

**Bài 1.** Giải tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = a$ ;  $AC = b$ ;  $AB = c$  trong các trường hợp sau:

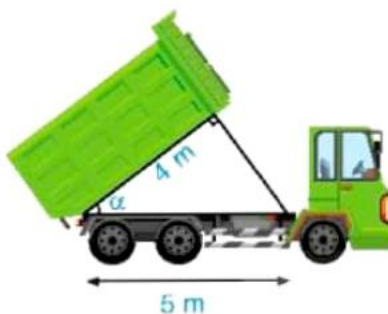
a)  $a = 21$ ;  $b = 18$

b)  $b = 10$ ;  $C = 30^\circ$

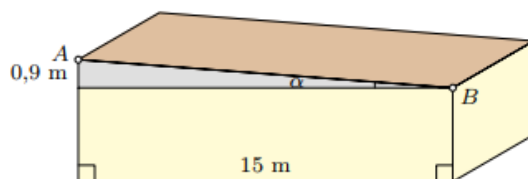
c)  $c = 5$ ;  $b = 3$



**Bài 2.** Tính góc nghiêng  $\alpha$  của thùng xe chở rác trong hình sau:

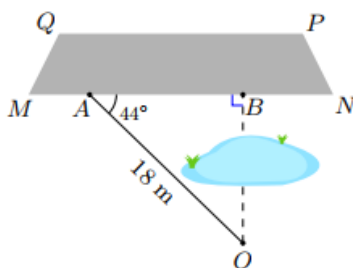


**Bài 3.** Tính góc nghiêng  $\alpha$  và chiều rộng  $AB$  của mái nhà kho trong hình sau:



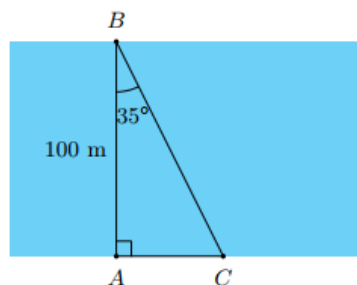
**Bài 4.**

Trong công việc, người ta cần ước lượng khoảng cách từ vị trí  $O$  đến khu đất có dạng hình thang  $MNPQ$  nhưng không thể đo được trực tiếp, khoảng cách đó được tính bằng khoảng cách từ  $O$  đến đường thẳng  $MN$ . Người ta chọn vị trí  $A$  ở đáy  $MN$  và đo được  $OA = 18$  m,  $\angle OAN = 44^\circ$ . Tính khoảng cách từ vị trí  $O$  đến khu đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

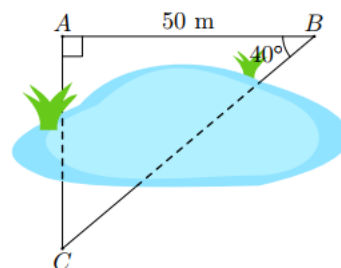


**Bài 5.**

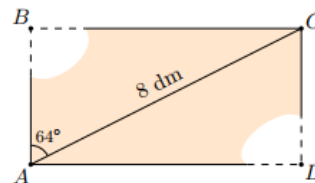
Hình bên minh họa một phần con sông có bề rộng  $AB = 100m$ . Một chiếc thuyền đi thẳng từ vị trí  $B$  bên này sông đến vị trí  $C$  bên kia bờ sông. Tính quãng đường  $BC$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét), biết  $\angle ABC = 35^\circ$ .

**Bài 6.**

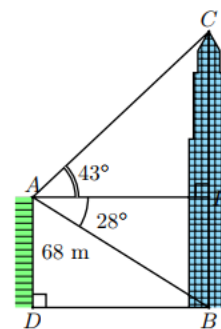
Hình bên mô tả ba vị trí  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác vuông và không đo được trực tiếp các khoảng cách từ  $C$  đến  $A$  và từ  $C$  đến  $B$ . Biết  $AB = 50m$ ;  $\angle ABC = 40^\circ$ . Tính các khoảng cách  $CA$  và  $CB$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét).

**Bài 7.**

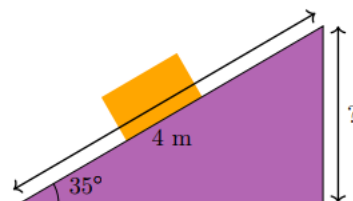
Một mảnh gỗ có dạng hình chữ nhật  $ABCD$  với đường chéo  $AC = 8dm$ . Do bảo quản không tốt nên mảnh gỗ bị hỏng phía hai đỉnh  $B$  và  $D$ . Biết  $\angle BAC = 64^\circ$ . Người ta cần biết độ dài  $AB$  và  $AD$  để khôi phục lại mảnh gỗ ban đầu. Độ dài  $AB, AD$  bằng bao nhiêu decimet (làm tròn đến hàng phần mười)

**Bài 8.**

Từ vị trí  $A$  ở phía trên một tòa nhà có chiều cao  $AD = 68m$ , bác Duy nhìn thấy vị trí  $C$  cao nhất của một tháp truyền hình, góc tạo bởi tia  $AC$  và tia  $AH$  theo phương nằm ngang là  $\angle CAH = 43^\circ$ . Bác Duy cũng nhìn thấy chân tháp tại vị trí  $B$  mà góc tạo bởi tia  $AB$  và tia  $AH$  là  $\angle BAH = 28^\circ$ , điểm  $H$  thuộc đoạn thẳng  $BC$ . Tính khoảng cách  $BD$  từ chân tháp đến chân tòa nhà và chiều cao  $BC$  của tháp truyền hình (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của mét).

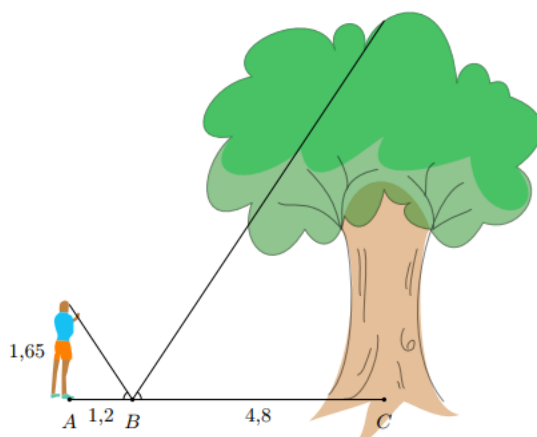
**Bài 9.**

Một người đẩy một vật lên hết một con dốc nghiêng một góc  $35^\circ$ . Tính độ cao của vật so với mặt đất biết độ dài con dốc là  $4m$ .

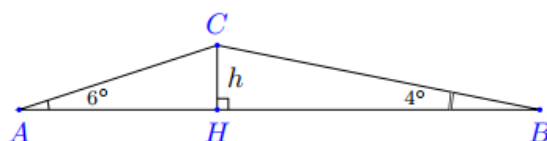


**Bài 10.** Một người đứng tại điểm  $A$ , cách gương phẳng đặt nằm trên mặt đất tại điểm  $B$  là  $1,2m$ , nhìn thấy hình phản chiếu qua gương  $B$  của ngọn cây (cây có gốc ở tại điểm  $C$

cách  $B$  là  $4,8m$ ,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ ). Biết khoảng cách từ mặt đất đến mắt người đó là  $1,65m$ . Tính chiều cao của cây.



**Bài 11.** Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm  $A$ ) đến trường (điểm  $B$ ). Khi đi từ  $A$  đến  $B$ , An phải đi lên đoạn dốc  $AC$  và xuống đoạn dốc  $CB$  (hình dưới). Biết  $AB = 762m$ ,  $A = 6^\circ$ ;  $B = 4^\circ$ .

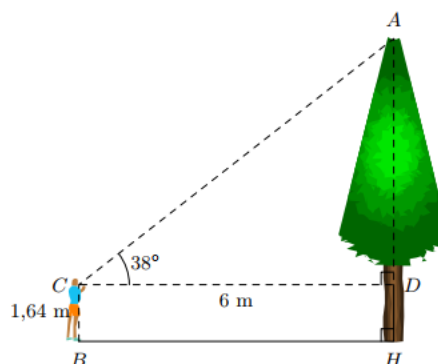


a) Tính chiều cao  $h$  của con dốc

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ khi lên dốc là  $4km/h$  và tốc độ khi xuống dốc là  $19km/h$ .

**Bài 12.**

Để ước lượng chiều cao của một cây trong sân trường, bạn Hoàng đứng ở sân trường theo phương thẳng đứng, mắt bạn Hoàng đặt tại vị trí  $C$  cách mặt đất một khoảng  $CB = DH = 1,64m$  và cách cây một khoảng  $CD = BH = 6m$ . Tính chiều cao  $AH$  của cây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của mét), biết góc nhìn  $ACD$  bằng  $38^\circ$  minh họa ở hình bên.



## ÔN TẬP GIỮA HỌC KÌ 1 TOÁN 9

**Bài 1.** Cho  $\triangle MNP$  vuông tại  $M$ .

a) Cho  $MN = 3\text{cm}$ ,  $MNP = 65^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $MP$ . (Làm tròn đến hàng phần mười)

b) Gọi  $E$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $PN$ . Chứng minh:  $MN^2 = NE \cdot NP$

c) Chứng minh rằng:  $\tan \frac{NME}{2} = \frac{NE}{NM + ME}$

**Bài 2.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $M$  là hình chiếu của  $H$  trên  $AB$ .

a) Cho  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$ ; tính  $BC$ ,  $AH$  và số đo góc  $B$  (làm tròn đến độ)

b) Chứng minh:  $AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C = BC$ ;

c) Gọi  $N$  là trung điểm  $BM$ , trên tia  $HC$  lấy  $K$  sao cho  $HK = BN$ ; lấy  $S$  đối xứng với  $K$  qua  $A$ . Chứng minh  $SN$  vuông góc với  $NK$

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ). Gọi  $O$  là trung điểm của cạnh  $BC$ , vẽ các đường thẳng  $a$  và  $b$ . Sao cho  $a \perp BC$  tại  $B$ ,  $b \perp BC$  tại  $C$ . Đường thẳng  $c \perp OA$  tại  $A$  cắt các đường thẳng  $a$  và  $b$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .

a) Chứng minh các điểm  $A, C, O, N$  cùng thuộc một đường tròn, chỉ rõ tâm  $K$  và bán kính của đường tròn này.

b) Gọi  $D$  là giao điểm của  $OM$  và  $AB$ ,  $E$  là giao điểm của  $ON$  và  $AC$ . Chứng minh tứ giác  $ADOE$  là hình chữ nhật và  $AM \cdot AN = \frac{BC^2}{4}$ .

c) Gọi  $F$  là giao điểm của  $AC$  với đường thẳng  $a$ ,  $I$  là giao điểm của  $OF$  với  $AB$  và  $H$  là giao điểm của  $OM$  với  $BN$ . Chứng minh  $IH \parallel a$ .

**Bài 4.** Cho tam giác  $MNP$  nhọn, đường cao  $MD$ . Kẻ  $DA$  vuông góc với  $MN$  Kẻ  $DB$  vuông góc với  $MP$  tại  $B$ .

a) Biết  $ND = 6\text{cm}$ ;  $MD = 8\text{cm}$ . Tính  $MN$ ;  $MA$ ;  $DA$  và số đo  $DMN$  (làm đến phút).

b) Chứng minh rằng:  $MA \cdot MN = MB \cdot MP$ .

c) Kẻ các đường cao  $NI$ ;  $PK$ . Chứng minh rằng:  $IK$  song song với  $AB$  và  $S_{NKIP} = S_{\triangle MNP} \cdot \sin^2 NMP$

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .

a) Cho biết  $AB = 6\text{cm}$ ;  $AC = 8\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BC$ ,  $HB$ ,  $AH$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Kẻ  $HE$  vuông góc với  $AB$  tại  $E$ ,  $HF$  vuông góc với  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh  $BH \cdot CH = EF^2$ .

c) Chứng minh  $BE = BC \cos^3 B$ .

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB > AC$ ) đường cao  $AH$ . Gọi  $AD$  là tia phân giác của  $HAB$  ( $D$  nằm giữa  $B$  và  $H$ ).

a) Tính các cạnh  $AH, AC$  biết  $HB = 6,4\text{ cm}; HC = 3,6\text{ cm}$

b) Chứng minh  $\triangle ADC$  cân tại  $C$  và  $\frac{DH}{BD} = \frac{AC}{BC}$

c) Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AB$  và  $AC$ . Chứng minh:  
 $S_{\triangle MS} = S_{\triangle Mac} \cdot 1 - \cos^2 B \cdot \sin^2 C$

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn. Kẻ các đường cao  $AF, BD, CE$  cắt nhau tại  $H$ .

Gọi hai điểm  $O, I$  thứ tự là trung điểm của  $BC, AH$ .

a) Chứng minh bốn điểm  $A; E; D; H$  cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh  $AEI = OCE$  và  $EI \perp EO$ .

c) Chứng minh  $\frac{1}{AH^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{ED^2}$ .

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ),

a) Biết  $AB = 6\text{ cm}, \hat{B} = 53^\circ$ . Giải tam giác vuông  $ABC$ . (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

b) Lấy điểm  $M$  bất kì trên cạnh  $BC$  ( $M$  khác  $B$  và  $C$ ). Kẻ  $BK \perp AM$  ( $K \in AM$ ) và kẻ  $CH$  vuông góc với đường thẳng  $AM$  ( $H \in AM$ ). Chứng minh  $\triangle ABK \sim \triangle CAH$  và  
 $BK = AH \cdot \cot ABC$

c) Chứng minh:  $\frac{MB}{MC} = \frac{AH \tan^2 ACB}{AK}$

**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

1) Giả sử  $AB = 4\text{ cm}$  và  $AC = 4\sqrt{3}\text{ cm}$ . Giải tam giác vuông  $ABC$ .

2) Kẻ đường cao  $AH$ . Chứng minh tam giác  $ABH$  đồng dạng với tam giác  $CBA$  và  
 $AH^2 = HB \cdot HC$ .

3) Gọi  $D$  và  $E$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AB$  và  $AC$ . Chứng minh  
 $HE^3 \cdot BD = HD^3 \cdot CE$ .

**Bài 10.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) đường cao  $AH$ .

a) Giả sử  $AB = 9\text{ cm}, AC = 12\text{ cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BC, BH$  và  $AH$ .

b) Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm  $H$  đến các đường thẳng  $AB$  và  $AC$ . Chứng minh  $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ .

c) Đường thẳng đi qua điểm  $A$  và song song với đường thẳng  $MN$  cắt đường thẳng đi qua điểm  $C$  và song song với đường  $AH$  tại điểm  $K$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AH$  và  $BK$ . Chứng minh rằng ba điểm  $M, I, N$  là ba điểm thẳng hàng.

**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .

a) Nếu  $\sin ACB = \frac{3}{5}$  và  $BC = 20cm$ . Hãy tính  $ACB; AB, AC$ . (Số đo góc làm tròn đến

độ)

b) Kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $B$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $D$ . Chứng minh rằng:  $AD \cdot AC = BH \cdot BC$ ;

c) Lấy  $K$  thuộc đoạn  $AC$ , kẻ  $KM$  vuông góc với  $HC$  tại  $M$ ,  $KN$  vuông góc với  $AH$  tại  $N$ . Chứng minh:  $HN \cdot NA + HM \cdot MC = KA \cdot KC$ .

**Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) có  $AK$  là đường cao.

a) Cho biết  $AB = 18cm; AC = 24cm$ . Tính độ dài các cạnh  $BC, AK, BK$  và số đo góc  $B$  (làm tròn đến độ).

b) Đường thẳng qua  $C$  và vuông góc với  $AC$  tại  $C$  cắt  $AK$  tại  $M$ . Chứng minh:  $AK \cdot AM = CK \cdot CB$ .

c) Tia phân giác của góc  $CAM$  cắt  $CK$  và  $CM$  lần lượt tại  $N$  và  $I$ . Chứng minh:  $AM = IM \cdot \tan CNI$ .

**Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ , phân giác  $AD$  của  $BAC$  ( $H, D$  thuộc  $BC$ ).

a) Cho  $AB = 9cm, AC = 12cm$ . Tính  $BC$  và số đo góc  $B$  (kết quả làm tròn đến phút).

b) Chứng minh  $\frac{AH}{BH} = \frac{AC}{BA}$  và  $DC \cdot BH = DB \cdot AH$ .

c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ . Chứng minh  $\sin AMH = 2 \cdot \sin \hat{C} \cdot \sin \hat{B}$ .

**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Kẻ  $AH \perp BC$  tại  $H, HM \perp AB$  tại  $M, HN \perp AC$  tại  $N$ . ( $H \in BC, M \in AB, N \in AC$ )

a) Biết  $AB = 6cm, AC = 8cm$ . Giải tam giác  $ABC$  (số đo góc làm tròn đến độ).

b) Chứng minh:  $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

c) Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh:  $\frac{S_{ARI}}{S_{AN}} = \frac{1}{2\sin^2 B} + \frac{1}{2\cos^2 HAC}$ .

**Bài 15.** Cho tam giác  $MHP$  vuông tại  $H$ , đường cao  $HF$   $F \in MP$ .

a) Chứng minh:  $\triangle MHF$  đồng dạng với  $\triangle MPH$ .

b) Từ  $M$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $MP$  và cắt tia  $PH$  tại  $N$ . Kẻ  $HE \perp MN$  tại

Chứng minh:  $ME \cdot MN = MH^2$  và  $\frac{ME}{MF} = \frac{MP}{MN}$

**Bài 16.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 5\text{cm}$ ,  $\angle ACB = 36^\circ$  và  $AH$  là đường cao ( $H \in BC$ )

a) Tính  $BC$  và  $AH$  (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

b) Trên cạnh  $AC$  lấy  $I$  sao cho  $AI > IC$  ( $I \neq C$ ). Kẻ  $ID$  vuông góc với  $BC$  tại  $D$ ,  $BE$  vuông góc với  $AD$  tại  $E$ ,  $CF$  góc với đường thẳng  $AD$  tại  $F$ . Chứng minh rằng

$$\tan \angle ACB = \frac{BE}{AF} \text{ và } \frac{BE}{CF} \cdot \frac{DA}{BI} = \tan \angle BAD \cdot \cos \angle DIC.$$

**Bài 17.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$

a) Giải tam giác  $ABC$

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ , vẽ  $AH \perp BC$ . Tính  $AH, AI$

c) Qua  $A$  kẻ đường thẳng  $xy$  vuông góc với  $AI$ . đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $B$  cắt  $xy$  tại điểm  $M$ , đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $C$  cắt  $xy$  tại điểm  $N$ . Chứng

minh:  $MB \cdot NC = \frac{OC^2}{4}$

d) Gọi  $K$  là trung điểm của  $AH$ . Chứng minh  $B, K, N$  thẳng hàng

**Bài 18. Nguyễn Trường Tộ GK1-2022**

Cho  $\triangle ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ), đường cao  $AH$ . Kẻ  $HM \perp AB, HN \perp AC$  ( $M \in AB, N \in AC$ ).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $HN, AH$  và  $CH$ , biết  $NA = 16\text{cm}, NC = 9\text{cm}$ .

Lưu ý: Các số liệu này chỉ được dùng cho câu a.

b) Chứng minh  $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ , từ đó chứng minh  $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ .

c) Chứng minh  $S_{\triangle AMN} = \sin^2 B \cdot \sin^2 C \cdot S_{\triangle ABC}$ .

**Bài 19. Ngọc Lâm GK1-2022.**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ , có độ dài cạnh  $AC$  và  $BC$  lần lượt là 15 và 20 cm. Vẽ đường cao  $CH$ , kẻ  $HE$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ ;  $HF$  vuông góc với  $BC$  tại  $F$ .

a, Tính số đo góc  $A$ , độ dài  $AB$  và  $EF$ ?

b, Chứng minh:  $AC \cdot EC = BC \cdot FC$



c, Chứng minh rằng:  $\frac{S_{CM}}{S_{CHF}} = \frac{1}{\sin^2 CAB} + \frac{1}{\cos^2 HCB}$

**Bài 20. Nguyễn Công Trứ GK1-2022.**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) đường cao  $AH$ .

a) Giả sử.  $AB = 5cm, AC = 12cm$ . Tính độ dài  $BC, AH$  và số đo  $ABC$

b) Kẻ  $HD$ .  $HE$  lần lượt vuông góc với  $AB, AC$ . Chứng minh rằng:  $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

c) Lấy điểm  $G$  nằm giữa  $E$  và  $C$ . Kẻ  $AK$  vuông góc với  $BG$  tại  $K$ .

Chứng minh rằng:  $\sin AGB \cdot \cos ABC = \frac{HK}{CG}$