

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

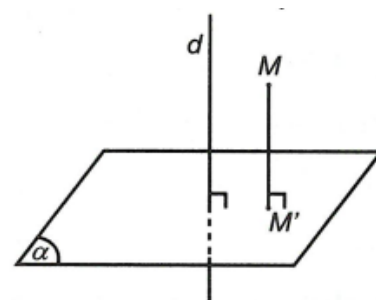
BÀI 24: PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG



LÝ THUYẾT.

1. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

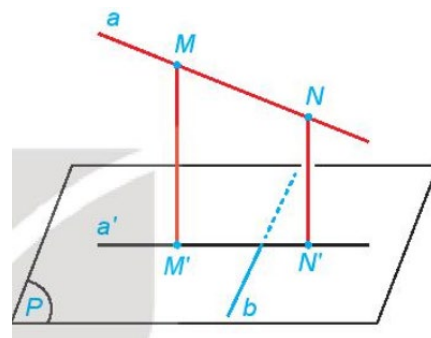
Phép chiếu song song theo phương Δ vuông góc với mặt phẳng (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) .



M' là hình chiếu của M lên (α) .

Định lí ba đường vuông góc

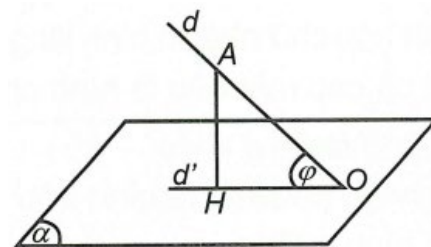
Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) .



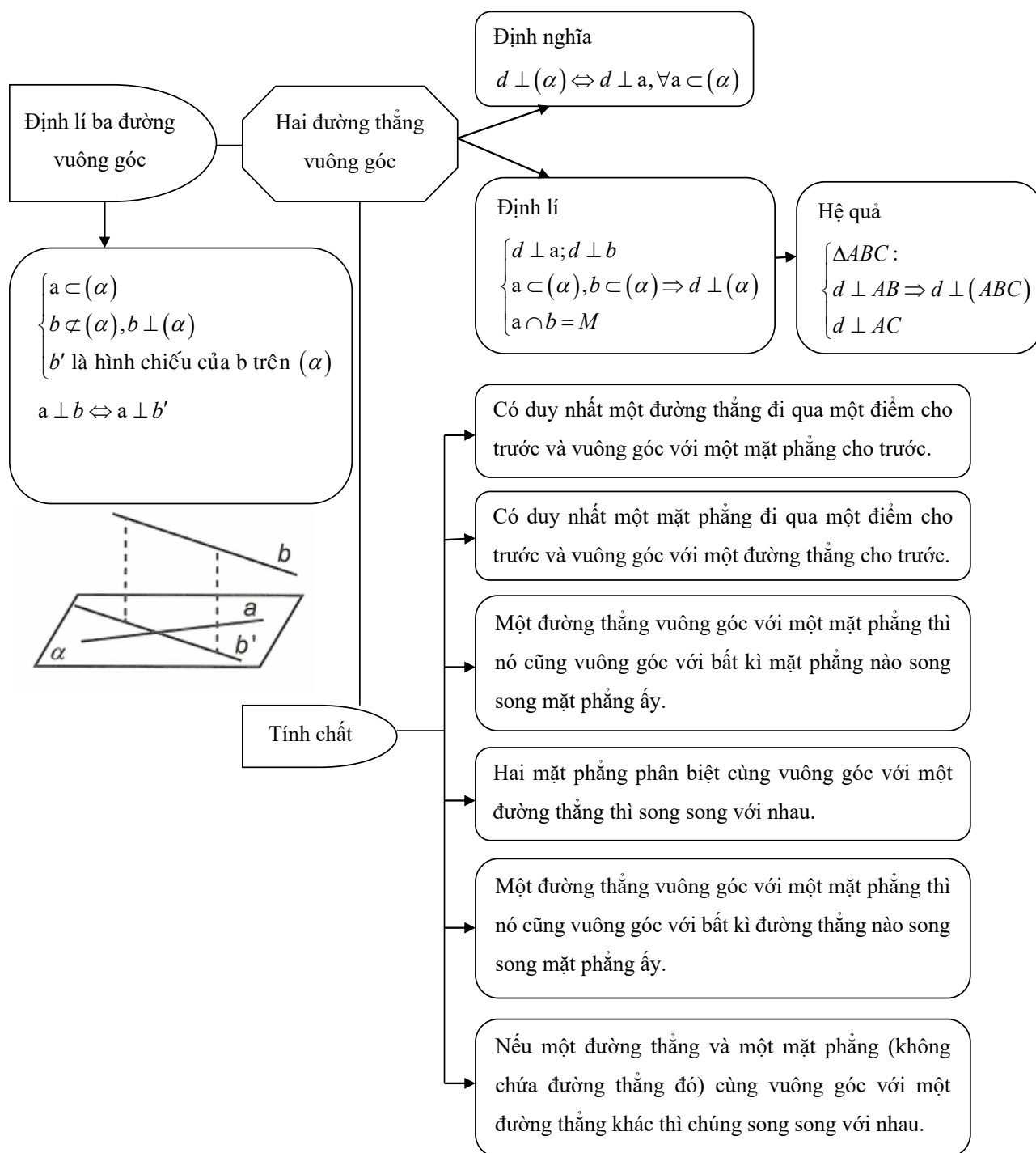
2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

- Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .
- Nếu a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a với hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .
- Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.



SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



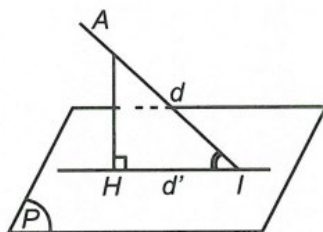
II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Trường hợp 1. $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d, (P))} = 90^\circ$.

Trường hợp 2. d không vuông góc với (P) . Khi đó ta làm như sau:



Bước 1. Tìm $d \cap (P) = \{I\}$.

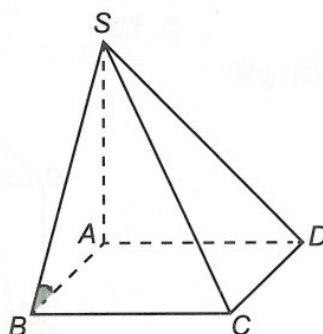
Bước 2. Trên d lấy điểm A khác I . Tìm hình chiếu H của A lên (P) . Thông thường ta chọn điểm A trên d thỏa mãn A thuộc đường thẳng Δ vuông góc với (P) . (Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (P)).

Bước 3. Suy ra $\widehat{(d, (P))} = \widehat{(AI, HI)} = \widehat{AIH}$.

Tính \widehat{AIH} (nếu đề bài yêu cầu tính góc).

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot \varphi$?

Lời giải



Ta có $SB \cap (ABCD) = \{B\}$.

Trên SB chọn điểm S . Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

Suy ra $\widehat{(SB, (ABCD))} = \widehat{(SB, BA)} = \widehat{SBA}$.

$$\text{Vậy } \cot \varphi = \frac{AB}{SA} = \frac{2a}{a} = 2.$$



BÀI TẬP.

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) .
- Câu 2:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng
- Câu 3:** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $AA' = a$. Góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- Câu 4:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $\triangle ABC$ đều cạnh a , $AA' = \sqrt{3}a$. Góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng
- Câu 5:** Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD = 4a$, $AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Số đo góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng
- Câu 6:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là
- Câu 7:** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng
- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a\sqrt{3}$, $AB = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B . Gọi M là trung điểm của SB . Góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) bằng
- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC . Tính cosin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC) .
- Câu 10:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và tam giác ABD đều. SO vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = 2a$. M là trung điểm của SD . Tang góc giữa CM và $(ABCD)$ là:
- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) . Giá trị $\cos \alpha$ bằng
- Câu 12:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tính tang của góc tạo bởi đường thẳng DM với mặt phẳng (SAB) .
- Câu 13:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đa giác đáy. Biết cạnh bên bằng $2a$ và $SO = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
- Câu 14:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) .
- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và α là góc giữa MN và (ABC) . Giá trị $\cos \alpha$ bằng

- Câu 16:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và $mp(SCD)$ bằng
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SA và (SBC) . Khi đó
- Câu 18:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B ; $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) có số đo bằng
- Câu 19:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) là
- Câu 20:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại C . Biết $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tính góc giữa SC và (SAB) .
- Câu 21:** Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc. Tang của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng
- Câu 22:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SB và $mp(SAC)$ bằng
- Câu 23:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BD .
- Câu 24:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Tính góc giữa SA và (ABC) .
- Câu 25:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2a$, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) .
- Câu 26:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° ?
- Câu 27:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .
- Câu 28:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các cạnh SB, SD . Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng
- Câu 29:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$ và $AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng
- Câu 30:** Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) bằng

- Câu 31:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng:
- Câu 32:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{ACB} = 135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB . Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.
- Câu 33:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SD . Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- Câu 34:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:
- Câu 35:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng
- Câu 36:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB . Tính tan góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.
- Câu 37:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có $AB = BC = a$, $AD = 2a$, có SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .
- Câu 38:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{ACB} = 135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB . Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$?
- Câu 39:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC) .

