Chương 02

Bài 6. VECTO & CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

A. Lý thuyết

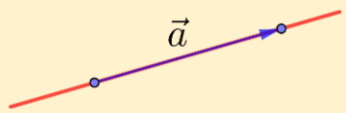
1. Khái niệm vectơ trong không gian; hai vectơ cùng phương, cùng hướng, bằng nhau; vectơ-không.

Định nghĩa:

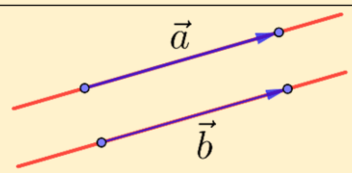
» *Vectơ trong không gian* là một đoạn thẳng có hướng.

» *Độ dài của vectơ* là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $|\vec{a}|$.

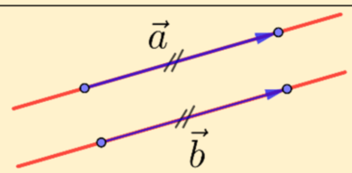
» *Giá* của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.



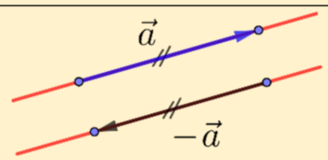
» Hai vectơ *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



» Hai vectơ *bằng nhau* nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.



» Hai vectơ *đối nhau* nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.



» *Vectơ - không* có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Chú ý

» Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.

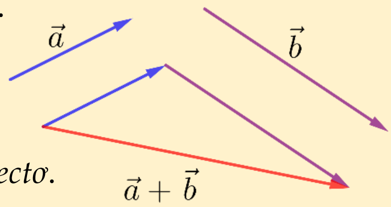
» Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Định nghĩa tổng hai vectơ:

Trong không gian, cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý.

- Vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.Vecto $\overrightarrow{AC}$ là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a}, \vec{b}$.
- Ký hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
- Phép lấy tổng của hai vecto còn được gọi là *phép cộng vectơ*.



Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

» Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

» Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

» Với mọi vecto $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$.

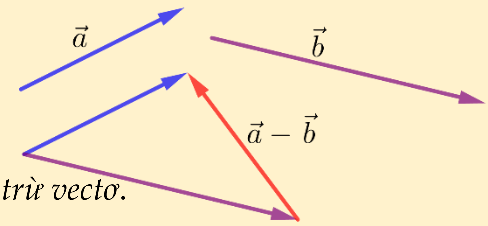
Chú ý

» Từ tính chất kết hợp, ta xác định được tổng ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Định nghĩa hiệu hai vectơ:

Trong không gian, cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$.

- Hiệu của hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ là vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$.
- Kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.
- Phép lấy hiệu của hai vecto còn được gọi là *phép trừ vectơ*.

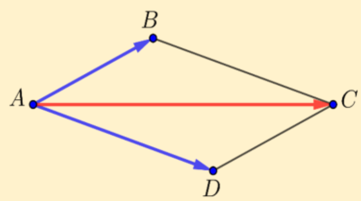


Các quy tắc

✓ ***Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:***

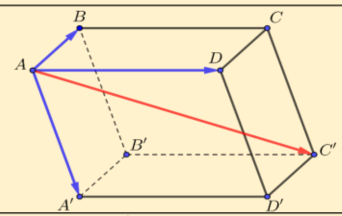
» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

» Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



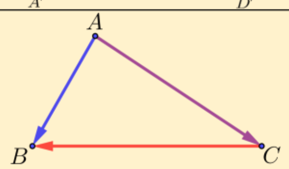
✓ ***Quy tắc hình hộp:***

» Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



✓ ***Quy tắc hiệu:***

» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



3. Tích của một số với một vectơ

Định nghĩa:

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ.
- Ký hiệu là $k\vec{a}$.
- Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là *phép nhân một số với một vectơ*.

  » Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$,

  » Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

  » Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

  Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
- Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.

Tích vô hướng hai vectơ

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số
- Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Chú ý

» Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

» $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2; \vec{u}^2 \geq 0, \vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

» Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

» Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

B Các dạng bài tập

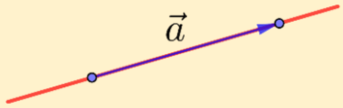
Dạng 1. Sử dụng các định nghĩa

Phương pháp

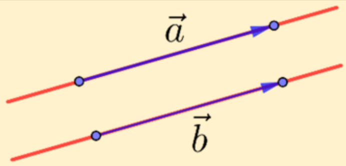
» ***Vectơ trong không gian*** là một đoạn thẳng có hướng.

» ***Độ dài của vectơ*** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Kí hiệu: $|\vec{a}|$.

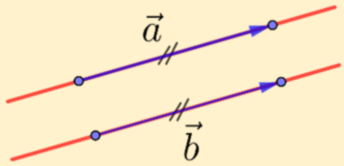
» ***Giá*** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.



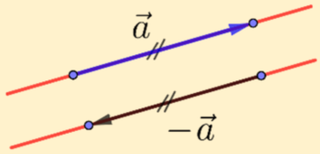
» Hai vectơ ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.



» Hai vectơ ***bằng nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.



» Hai vectơ ***đối nhau*** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.



» ***Vectơ - không*** có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

Quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Ví dụ 1.1.

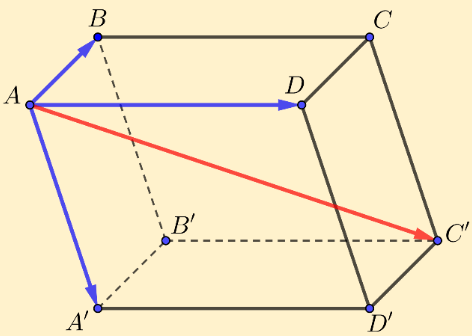
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp. Hãy chỉ ra những vectơ:

(1) Cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(2) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;

(3) Ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.



Lời giải

(1) Cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$;

Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{D'C'}$.

(2) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;

Các vectơ bằng với $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{D'C'}$.

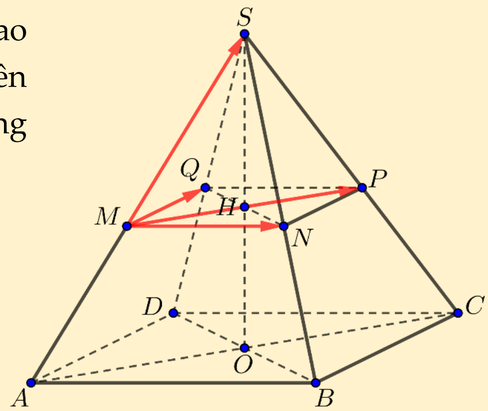
(3) Ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.

Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{AA'}$ là: $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{D'D}$.

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a và đường cao h. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và O, H lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, MNPQ$.

Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MS}$ theo a và h.



Lời giải

Ta có

$\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$;

$\left|\overrightarrow{MP}\right| = MP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = AO$.

Tính $SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MS}\right| = MS = \frac{SA}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}$.

Dạng 2. Tổng và hiệu của hai vectơ

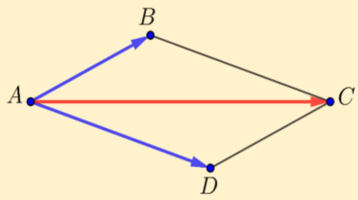
Phương pháp

⁂ Các quy tắc:

✓ ***Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành:***

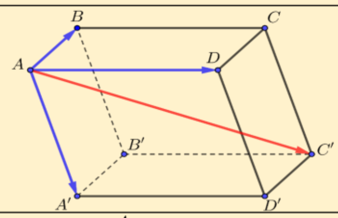
» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm phép cộng).

» Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).



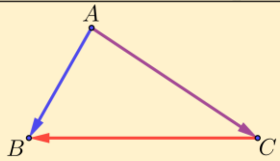
✓ ***Quy tắc hình hộp:***

» Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.



✓ ***Quy tắc hiệu:***

» Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tìm độ dài của các vectơ sau:

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$; (2) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}$

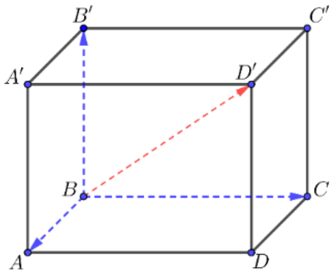
Lời giải

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$;

$$\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'} \Rightarrow |\vec{a}| = \left|\overrightarrow{BD'}\right| = BD' = 2\sqrt{3}.$$

(2) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}$

$$\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C} \Rightarrow |\vec{b}| = \left|\overrightarrow{C'C}\right| = C'C = 2.$$



Ví dụ 2.2.

Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

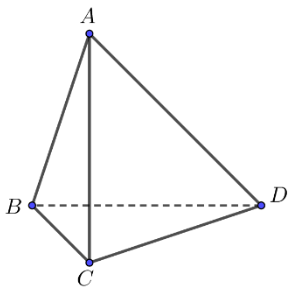
Ta có:

$VT = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = VP$

(Đpcm).



Ví dụ 2.3.

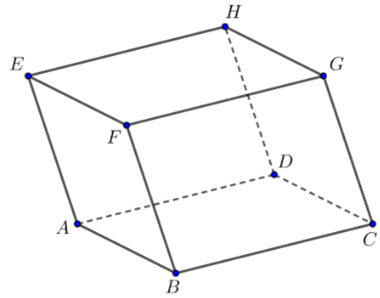
Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Lời giải

heo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}(1)$.

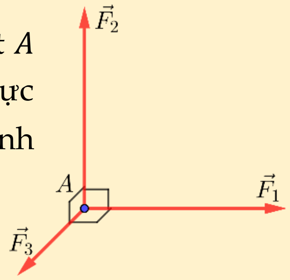
Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GA}(2)$.

$\xrightarrow{(1)\&(2)}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ (đpcm).

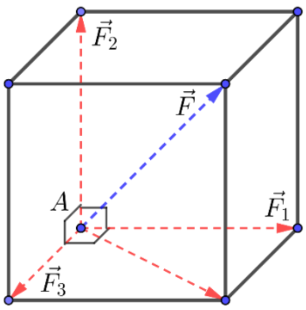


Ví dụ 2.4.

Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt là $10N, 8N$ và $5N$. Xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải



Tổng hợp lực của 3 lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ là lực $\vec{F}$ được dựng theo qui tắc hình hộp chữ nhật.

Vậy cường độ tổng hợp lực là $|\vec{F}|=\sqrt{10^2+8^2+5^2}=3\sqrt{21}N\approx 14N$.

Dạng 3. Tích của một số với một vectơ

Phương pháp

Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

- Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ. Ký hiệu là $k\vec{a}$. Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

  » Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, » Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

⁂ Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta luôn có

(1) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (2) $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ (3) $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$

(4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (5) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

(6) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

(7) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$..

⁂ **Hệ quả:**

(1) I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, với mọi điểm O.

(2) G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, với mọi điểm O.

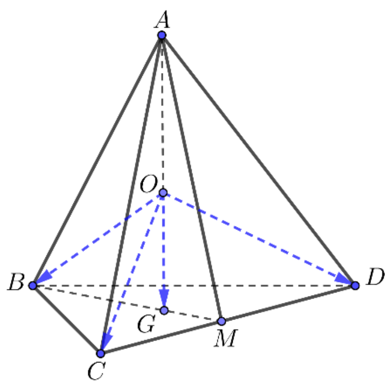
Ví dụ 3.1.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm đoạn thẳng AG. Chứng minh rằng:

(1) $3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;

(2) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Lời giải



(1) $3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$;

Vì G là trọng tâm của ΔBCD nên $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Vì O là trung điểm đoạn thẳng AG nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} = \vec{0}$.

Do đó: $3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$.

(2) $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Theo quy tắc ba điểm, ta có:

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$
$$= 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$$
$$= 6\overrightarrow{MO} + 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 6\overrightarrow{MO}$$

Ngoài ra, có thể giải cách khác:

Do G là trọng tâm $\triangle BCD$ nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$.

Do đó: $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MG} = 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG}) = 3.2\overrightarrow{MO} = 6\overrightarrow{MO}$.

Ví dụ 3.2.

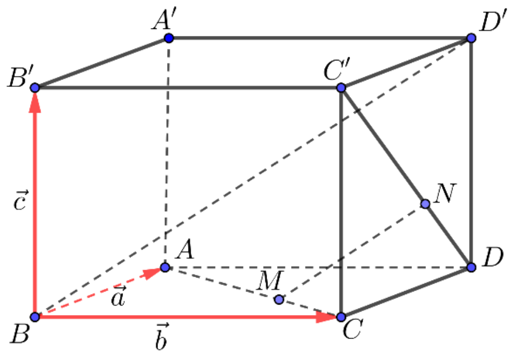
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử điểm M thuộc AC, điểm N thuộc DC' và $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$

(1) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.;

(2) Tìm x và y sao cho $MN//BD'$, khi đó tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

Lời giải

(1) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BD'}, \overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.;



Ta có: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BB'} = \vec{c}$.

Khi đó, theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$.

Từ $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC'}$, ta có $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = y\left(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BD}\right)$, suy ra:

$\overrightarrow{BN} - \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = y\left(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}\right)$.

$\overrightarrow{BN} = (1-y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c}$.

Từ $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = x\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{BM} - \vec{a} = x\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (1-x)\vec{a} + x\vec{b}$.

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = (1-y)\vec{a} + \vec{b} + y\vec{c} - (1-x)\vec{a} - x\vec{b} = (x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c}$.

(2) Tìm x và y sao cho $MN//BD'$, khi đó tính tỉ số $\frac{MN}{BD'}$.

Điều kiện để $MN//BD'$ là $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$ hay

$$(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = k\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$(x-y)\vec{a} + (1-x)\vec{b} + y\vec{c} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}(*)$$

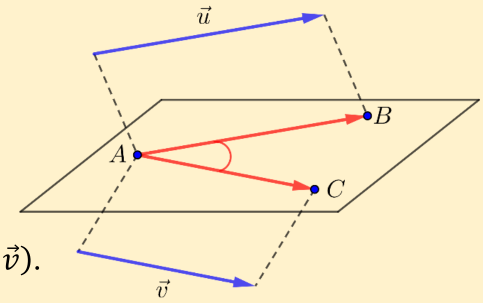
Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không cùng phương nên từ (*) suy ra: $\begin{cases} k = x - y \\ k = 1 - x \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \\ k = y \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; k) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Vậy M và N được xác định bởi bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}$ và $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD'}$.

Lúc này $\frac{MN}{BD'} = |k| = \frac{1}{3}$.

Dạng 4. Tích vô hướng và góc của hai vectơ

Phương pháp



⁂ **Góc giữa hai vectơ:**

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Lấy một điểm A bất kì,

  Gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

  Ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.

⁂ **Tích vô hướng hai vectơ:**

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$.

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số. Kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

  Được xác định bởi công thức: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

⁂ **Chú ý:**

(1) $0° \le (\vec{u}, \vec{v}) \le 180°$

(2) Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.

(3) Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0°$.

(4) Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược hướng thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180°$.

(5) $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2; \vec{u}^2 \ge 0, \vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Ví dụ 4.1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các góc:

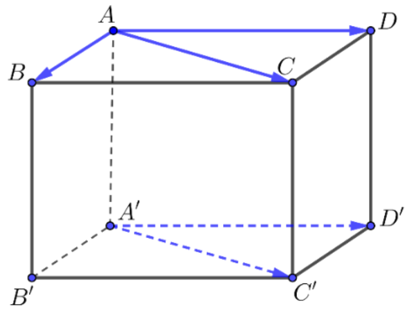
(1) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$

(2) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$

(3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'})$

(4) $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C'B'})$

Lời giải



(1) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{BAD} = 90°$.

(2) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$

Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45°$.

(3) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'})$

Ta có $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{D'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = 0°$.

(4) $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C'B'})$

Ta có $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$, suy ra $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C'B'}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}) = 180°$ (do $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ đối nhau nên ngược hướng).

Ví dụ 4.2.

Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của AB. Hãy tính góc giữa các cặp vecto

(1) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải

(1) $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{BC}$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{AC}\right) = \widehat{CBA'}$

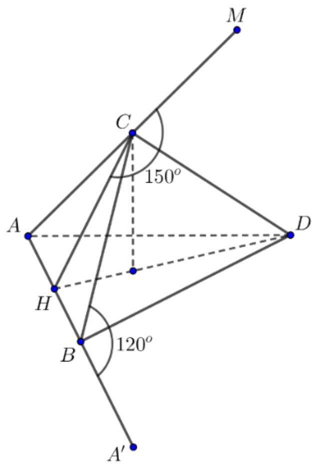
Ta có ΔABC đều $\Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A'BC} = 120^\circ \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = 120^\circ$.

(2) $\overrightarrow{CH}$ *và* $\overrightarrow{AC}$.

Gọi M là điểm đối xứng với C qua A

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CH}\right) = \left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CH}\right) = \widehat{MCH}$

Ta có ΔABC đều $\Rightarrow \widehat{ACH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MCH} = 150^\circ \Rightarrow \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CH}\right) = 150^\circ$.



Ví dụ 4.3.

Cho tứ diện$ABCD$có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $IJ \perp AB$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 0$.

I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

J là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$

Ta lại có:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ}$$

Suy ra $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ hay $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$

Do đó, $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$ hay $IJ \perp AB$.