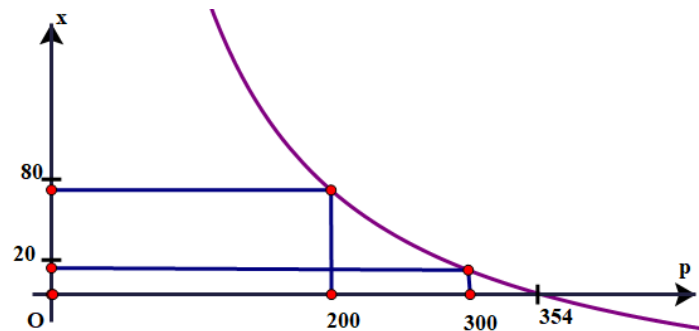


Đồ thị hàm số  $x = f(p) = \frac{354-p}{0,01p}$  đi qua các điểm (300; 18); (200; 77).

Đồ thị hàm số  $x = f(p) = \frac{354-p}{0,01p}$  với  $p \in (0; 354]$  là đường màu tím:



- Số lượng đơn vị sản phẩm bán sẽ giảm đi khi giá bán tăng, và sẽ không bán được sản phẩm nào nếu giá bán là 354 nghìn đồng

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn  $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p)$ : Vì  $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p) = +\infty$  nên giá bán càng thấp thì số lượng đơn vị sản phẩm sẽ bán được càng nhiều.

### C. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

**Câu 1:** Công suất  $P$  (đơn vị  $W$ ) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin  $12V$  được cho bởi công thức  $P = 12I - 0,5I^2$  với  $I$  (đơn vị  $A$ ) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

- A. 72.                      B. 12.                      C.  $-\frac{1}{192}$ .                      D.  $\frac{23}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số  $P = 12I - 0,5I^2$  với  $I \geq 0$ .

$$P' = 12 - I. \quad P' = 0 \Leftrightarrow I = 12.$$

Bảng biến thiên:

$I$	0	12	$+\infty$
$P$		72	

Công suất tối đa của mạch điện là  $72(W)$  đạt được khi cường độ dòng điện là  $12(A)$ .

**Câu 2:** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có  $n$  con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là  $P(n) = 480 - 20n(g)$ . Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- A. 14                      B. 13                      C. 12                      D. 11

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $F(n)$  là hàm cân nặng của  $n$  con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

$$\text{Ta có: } F(n) = (480 - 20n) \cdot n = 480n - 20n^2$$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của  $n$  con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Câu toán trở thành tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  sao cho  $F(x)$  đạt GTLN.

$$F'(n) = 480 - 40n$$

$$F'(n) = 0 \Leftrightarrow 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

**Câu 3:** Để giảm nhiệt độ trong phòng từ  $28^0C$ , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi  $T$  (đơn vị  $^0C$ ) là nhiệt độ phòng ở phút thứ  $t$  được cho bởi công thức  $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$  với  $t \in [1;10]$ . Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- A.**  $27,832^0C$ .      **B.**  $18,4^0C$ .      **C.**  $26,2^0C$ .      **D.**  $25,312^0C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét hàm số  $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$  với  $t \in [1;10]$ .

$$T' = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1;10].$$

Suy ra hàm số  $T$  nghịch biến trên đoạn  $[1;10]$ .

Nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được là  $T_{\min} = T(10) = 18,4^0C$ .

**Câu 4:** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

- A.** 2.250.000      **B.** 2.350.000      **C.** 2.450.000      **D.** 2.550.000

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $x$  là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, ( $x$ : đồng;  $x \geq 2000.000$  đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá  $x - 2.000.000$  đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá  $x$  đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi  $F(x)$  là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ( $F(x)$ : đồng).

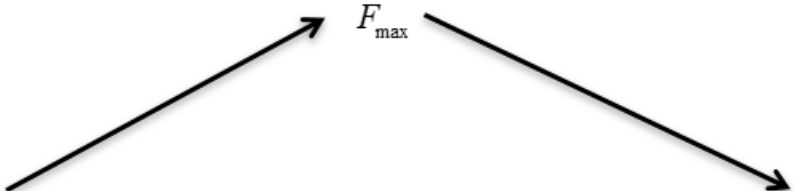
Ta có:  $F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$  (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Câu toán trở thành tìm GTLN của  $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ , ĐK:  $x \geq 2.000.000$

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Suy ra  $F(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = 2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm  $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ . Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng

biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho  $F(x)$  lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

**Câu 5:** Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ

B. 43.000đ

C. 42.000đ

D. 41.000đ

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng, (x: đồng;  $30.000 \leq x \leq 50.000$  đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 - x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$$(50000 - x) \cdot \frac{50}{5000} = \frac{1}{100}(50000 - x).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40 + \frac{1}{100}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$$

Gọi  $F(x)$  là hàm lợi nhuận thu được ( $F(x)$ : đồng).

Ta có:  $F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$

Câu toán trở thành tìm GTLN của

$$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000, \text{ Đk: } 30.000 \leq x \leq 50.000.$$

$$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000$$

Vì hàm  $F(x)$  liên tục trên  $30.000 \leq x \leq 50.000$  nên ta có:

$$F(30.000) = 0$$

$$F(42.000) = 1.440.000$$

$$F(50.000) = 800.000$$

Vậy với  $x = 42.000$  thì  $F(x)$  đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoàn Hùng là 42.000 đồng.

**Câu 6:** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức  $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$  trong đó  $x(\text{mg})$  và  $x > 0$  là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg

B. 30mg

C. 40mg

D. 20mg

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $G(x) = 0,25x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$

$$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2$$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(\text{loại}) \\ x = 20(\text{t/m}) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

X	0	20	$+\infty$
$G'(x)$		+	-
$G(x)$		100	

Dựa vào bảng biến thiên thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20mg

**Câu 7:** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ  $t$  là  $G(t) : 45t^2 - t^3$ , (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem  $G'(t)$  là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm  $t$  thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25

B. 30

C. 20

D. 15

## Lời giải

## Chọn D

Ta có:

$$G'(t) = 90t - 3t^2$$

$$G''(t) = 90 - 6t$$

$$G''(t) = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên:

T	0	15	$+\infty$
$G''(t)$		0	-
$G(t)$		675	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

- Câu 8:** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu  $h(m)$  của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t(h)$  trong ngày cho bởi công thức  $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$ . Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?
- A.**  $t = 10(h)$       **B.**  $t = 14(h)$       **C.**  $t = 15(h)$       **D.**  $t = 22(h)$

## Lời giải

## Chọn A

Ta có:

$$h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$

ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

$k$	1	2	3	4
$t$	4	10	16	22

Bảng biến thiên:

Ta suy ra được  $h$  đạt GTLN khi  $t = 10(h)$ **Lưu ý:** Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

$$\text{Vì } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\text{Vậy để } h \text{ lớn nhất thì } \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 12k, (k \in \mathbb{Z}_{(+)})$$

Vậy  $h$  đạt GTLN khi  $t = 10(h)$ 

- Câu 9:** Thể tích nước của một bể bơi sau  $t$  phút bơm tính theo công thức  $V(t) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)$   
 $(0 \leq t \leq 90)$

Tốc độ bơm nước tại thời điểm  $t$  được tính bởi  $v(t) = V'(t)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

- A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.
- B. Tốc độ bơm luôn giảm.
- C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
- D. Cả A, B, C đều sai.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Xét hàm } V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3 \quad (0 \leq t \leq 90)$$

$$V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0 \text{ khi } t = 0, t = 60$$

Dựa vào bảng biến thiên, Ta có hàm số  $V'$  đồng biến trên  $(0;60)$ , nghịch biến trên  $(60;90)$ .

**Câu 10:** Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được  $m$  hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là  $\left(30 - \frac{5m}{2}\right)^2$  đồng.

Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất?

- A. 30
- B. 40
- C. 50
- D. 60

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi  $x$  là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất,  $(0 < x \leq 60)$

Gọi  $F(x)$  là hàm lợi nhuận thu được ( $F(x)$ : đồng)

Số tiền thu được:

$$F(x) = \left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2 \cdot x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$$

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $F(x)$  đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120(\text{loại}) \\ x = 40(t/m) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

X	0	40	60	
F'(x)		+	0	-
F(x)			$F_{\max}$	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

**Câu 11:** Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là  $100m^2$ . Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là  $1(kg/m^2)$  tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi  $(200g/m^2)$  tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A.  $\frac{230}{3}kg$

B.  $70kg$

C.  $72kg$

D.  $69kg$

**Lời giải****Chọn A**

Số Kg tôm giống mà ông Thanh thả vụ vừa qua:  $100.1 = 100(kg)$ .

Gọi  $x$  ( $0 < x < 100$ ) là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.

Khối lượng trung bình  $1(kg / m^2)$  tôm giống thu hoạch được:  $2000 : 100 = 20(kg)$

Khi giảm  $0,2$  kg tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là  $2(kg / m^2)$

Gọi  $F(x)$  là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới ( $F(x) : kg$ )

Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có pt tổng quát là:

$$F(x) = (100 - x) \left( 20 + \frac{3}{8}x \right) = 2000 + \frac{35}{2}x - \frac{3}{8}x^2$$

Bài toán trở thành tìm  $x$  để  $F(x)$  lớn nhất.

Ta có:

$$F'(x) = \frac{25}{2} - \frac{3}{4}x$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{2} - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{70}{3}$$

Bảng biến thiên

X	0	$\frac{70}{3}$	100
$F'(x)$		+	0
$F(x)$			$F_{\max}$

Vậy vụ tới ông Thanh phải thả số kg tôm giống là:

$$100 - \frac{70}{3} = \frac{230}{3} \approx 76,67(kg)$$

**Nhận xét:**

Làm sao ta có thể tìm được hàm  $F(x)$  và tìm được hệ số  $\frac{3}{8}$

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là:  $100.20 = 2000(kg)$  tôm.

Nếu ta giảm số  $x(kg)$  tôm giống thì số tôm giống cần thả là  $100 - x$  và số kg tôm thu hoạch được là:  $(100 - x)(20 + mx)kg$

Theo giả thiết tôm giống giảm  $0,2(kg / m^2)$  thì  $100m^2$  giảm  $x = 20kg$ , sản lượng thu được là  $2200kg$ .

$$\text{Ta có: } (100 - 20)(20 + m20) = 2200 \Leftrightarrow m = \frac{3}{8}$$

**Câu 12:** Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2

phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn.

B. 50 ngàn.

C. 450 ngàn.

D. 80 ngàn.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $x$  (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra,  $x > 400$  (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng  $x - 400$ .

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là  $x$ :  $\frac{(x-400)+2}{20} = \frac{x-400}{10}$ .

Số phòng cho thuê với giá  $x$  là  $50 - \frac{x-400}{10} = 90 - \frac{x}{10}$ .

Tổng doanh thu trong ngày là:  $f(x) = x\left(90 - \frac{x}{10}\right) = -\frac{x^2}{10} + 90x$ .

$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90$ .  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450$ .

Bảng biến thiên:

$x$	400	450	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	<div style="text-align: center;"> <math>20250</math> </div>		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = 450$ .

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

**Câu 13:** Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29 triệu VNĐ

B. 27, 5 triệu VNĐ

C. 29, 5 triệu VNĐ

D. 27 triệu VNĐ

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $x$  (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe ( $0 \leq x \leq 4$ ).

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là:  $x \cdot 200 + 600$  (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là:  $(x \cdot 200 + 600)(4 - x)$



Xét hàm số  $f(x) = (x \cdot 200 + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$  ( $0 \leq x \leq 4$ ) đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi  $x = \frac{1}{2}$ .

**Câu 14:** Công ty dự lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

A. 1375000.                      B. 3781250.                      C. 2500000.                      D. 3000000.

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $x$  (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là  $2 - x$ .

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán  $x$  là:  $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$ .

Số người sẽ tham gia nếu bán giá  $x$  là:  $150 + (400 - 200x) = 550 - 220x$ .

Tổng doanh thu là:  $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$ .

$$f'(x) = -400x + 550. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}.$$

Bảng biến thiên

$x$	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{3025}{8}$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy  $f(x)$  đạt giá trị lớn nhất khi  $x = \frac{11}{8} = 1,375$ .

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

**Câu 15:** Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp đủ chứa được 10 lít nước. Hỏi bán kính đáy (đơn vị cm, làm tròn đến hàng phần chục) của chiếc xô bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất.

A. 14,7                      B. 15                      C. 15,2                      D. 14

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi  $x$  ( $x > 0$ ) là bán kính của chiếc xô. Khi đó  $V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}$ .

Để tiết kiệm nguyên vật liệu thì diện tích toàn phần của chiếc xô phải bé nhất.

Ta có:  $10l = 10dm^3 = 10000cm^3$ .

Diện tích toàn phần của chiếc xô là:

$$S(x) = \pi x^2 + 2\pi xh = \pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = \pi x^2 + 2 \frac{10000}{x} = \pi x^2 + \frac{20000}{x}$$

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{20000}{x^2} = \frac{2\pi x^3 - 20000}{x^2}.$$

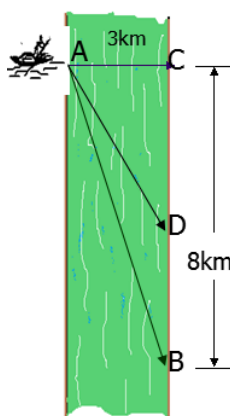
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\pi x^3 - 20000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{10000}{\pi} \Leftrightarrow x = 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

Bảng biến thiên:

$x$	0	$10 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$	$+\infty$
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$		2039,4	

Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là  $x = 10 \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 14,7(\text{cm})$ .

**Câu 16:** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí  $A$  tới điểm  $B$  về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng  $3\text{km}$  (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến  $C$  và sau đó chạy đến  $B$ , hay có thể chèo trực tiếp đến  $B$ , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm  $D$  giữa  $C$  và  $B$  và sau đó chạy đến  $B$ . Biết anh ấy có thể chèo thuyền  $6\text{km/h}$ , chạy  $8\text{km/h}$  và quãng đường  $BC = 8\text{km}$ . Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến  $B$ .



A.  $\frac{3}{2}$

B.  $\frac{9}{\sqrt{7}}$

C.  $\frac{\sqrt{73}}{6}$

D.  $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$

Lời giải

Chọn B

Đặt  $CD = x$ . Quãng đường chạy bộ  $DB = 8 - x$  và quãng đường chèo thuyền  $AD = \sqrt{9 + x^2}$ .

Khi đó, thời gian chèo thuyền là  $\frac{\sqrt{9 + x^2}}{6}$  và thời gian chạy bộ là  $\frac{8 - x}{8}$ .

Tổng thời gian mà người đàn ông cần có là:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}, \forall x \in [0; 8].$$

$$\text{Ta có: } T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}.$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow 16x^2 = 9(x^2 + 9) \Leftrightarrow 7x^2 = 81 \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

$$\text{Ta có: } T(0) = \frac{3}{2}; T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}; T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6}.$$

$$\text{Do đó: } \min_{[0;8]} T(x) = T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Vậy thời gian ngắn nhất mà người đàn ông cần dùng là  $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33(h)$  bằng cách chèo thuyền đến điểm  $D$  cách  $C$  một khoảng  $\frac{9}{\sqrt{7}}(km)$  rồi từ đó chạy bộ đến điểm  $B$ .

**Câu 17:** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 216 (m/s)      B. 30 (m/s)      C. 400 (m/s)      D. 54 (m/s)

**Lời giải**

**Chọn D**

Vận tốc tại thời điểm  $t$  là  $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$  với  $t \in [0; 10]$ .

Ta có :  $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$ .

Suy ra:  $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$ . Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s).

**Câu 18:** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 24(m/s).      B. 108(m/s).      C. 18(m/s).      D. 64(m/s).

## Lời giải

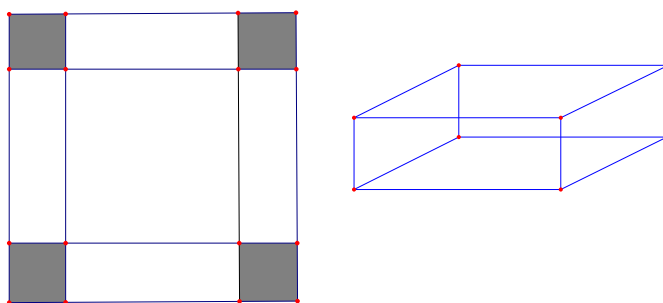
## Chọn A

Ta có  $v(t) = s'(t) = -\frac{3t^2}{2} + 12t$ ;

$$v'(t) = -3t + 12; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

$v(0) = 0; v(4) = 24; v(6) = 18$ . Suy ra vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong 6 giây đầu là  $24(m/s)$ .

**Câu 19:** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$  (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



**A.**  $x = 6$

**B.**  $x = 3$

**C.**  $x = 2$

**D.**  $x = 4$

## Lời giải

## Chọn C

Ta có :  $h = x$  (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là:  $12 - 2x$  (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp  $S = (12 - 2x)^2$  (cm<sup>2</sup>). Ta có:  $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$

Thể tích của hình hộp là:  $V = S.h = x.(12 - 2x)^2$

Xét hàm số:  $y = x.(12 - 2x)^2 \forall x \in (0; 6)$

Ta có :  $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$  ;

$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x).(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$  hoặc  $x = 6$  (loại).

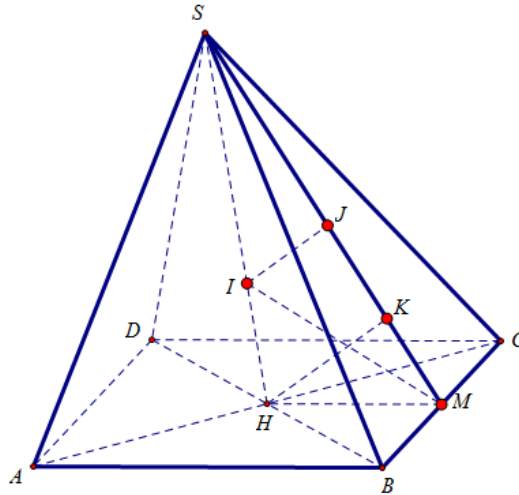
$x$	0		2		6	
$y'$		+	0	-		
$y$						

Suy ra với  $x = 2$  thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là  $y(2) = 128$ .

- Câu 20:** Một kiến trúc sư môn thiết kế một mô hình kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng  $6m$ . Để tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. Chiều cao của kim tự tháp đó là:
- A.  $12m$ .                      B.  $18m$ .                      C.  $36m$ .                      D.  $24m$ .

Lời giải

Chọn D



Giả sử kim tự tháp là hình chóp đều  $S.ABCD$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$

Kẻ phân giác trong góc  $\widehat{SMH}$  cắt  $SH$  tại  $I$ .  $I$  là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp đã cho

Từ  $I$  hạ  $IJ$  vuông góc  $(SBC)$ , Từ  $H$  hạ  $HK$  vuông góc  $(SBC)$ ,  $IJ=R=6$

$$\text{Theo Ta-lét. } \frac{SI}{SH} = \frac{IJ}{HK} \Leftrightarrow \frac{h-6}{h} = \frac{6}{HK} \Leftrightarrow HK = \frac{6h}{h-6}; SH = h; HM = \frac{a}{2}$$

$$HK = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} \Leftrightarrow \frac{6h}{h-6} = \frac{ah}{2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{144h^2}{h^2 - 12h} = \frac{144h}{h-12} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{144h}{h-12} \cdot h$$

Xét hàm

$$f(h) = \frac{h^2}{h-12} \Rightarrow f'(h) = \frac{h(h-24)}{(h-12)^2} \Rightarrow f'(h) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h=0 \\ h=24 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên có Thể tích  $V$  đạt GTNN khi  $h=24$ .

- Câu 21:** Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được  $16\pi(m^3)$  mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản xuất ít tốn vật liệu nhất?

- A.  $R = 2(m), h = 4(m)$     B.  $R = 4(m), h = 2(m)$   
 C.  $R = 3(m), h = 4(m)$     D.  $R = 4(m), h = 4(m)$

## Lời giải

## Chọn A

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{R^2}, (1)$$

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h + R), (2)$$


Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi R \left( \frac{16}{R^2} + R \right) = 2\pi \left( \frac{16}{R} + R^2 \right)$$

$$S'_{Tp} = 2\pi \left( -\frac{16}{R^2} + 2R \right) = \frac{4\pi}{R^2} (R^3 - 8)$$

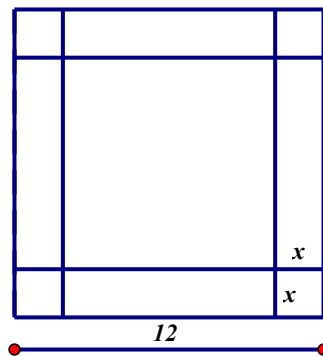
$$S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{R^2} (R^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0	2	$+\infty$
$S'(R)$	-	0	+
$S(R)$			

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì  $R = 2(\text{m})$  và chiều cao là  $h = 4(\text{m})$ .

**Câu 22:** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh  $x(\text{cm})$ , rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.



A.  $x = 6(\text{cm})$

B.  $x = 3(\text{cm})$

C.  $x = 2(\text{cm})$

D.  $x = 4(\text{cm})$

## Lời giải

## Chọn C

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gấp thành một cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là:  $12 - 2x$

Ta có:

$$V = S.h = (12 - 2x)^2 . x = 4x^3 - 48x^2 + 144x \text{ với } 0 < x \leq 6$$

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $V$  lớn nhất.

Ta có:

$$V' = 12x^2 - 96x + 144$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	6
V'(x)	+	0	-
V(x)		128	

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì  $x = 2$  cm

**Câu 23:** Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là  $384\text{cm}^2$ . Lề trên và dưới là  $3\text{cm}$ , lề trái và lề phải là  $2\text{cm}$ . Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài  $24\text{cm}$ , rộng  $17\text{cm}$

B. Dài  $30\text{cm}$ , rộng  $20\text{cm}$

C. Dài  $24\text{cm}$ , rộng  $18\text{cm}$

D. Dài  $24\text{cm}$ , rộng  $19\text{cm}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là  $x(\text{cm})$ , ( $x > 0$ )

Chiều rộng của trang chữ nhật là:  $\frac{384}{x}\text{cm}$

Chiều dài của trang giấy là  $x + 6(\text{cm})$

Chiều rộng của trang giấy là:  $\frac{384}{x} + 4(\text{cm})$

Diện tích trang giấy:  $S = (x + 6)\left(\frac{384}{x} + 4\right) = 408 + 4x + \frac{2304}{x}$

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $S$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có:  $S'(x) = 4 - \frac{2304}{x^2}$

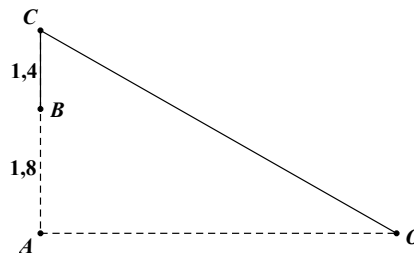
$S' = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{2304}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24(\text{t/m}) \\ x = -24(\text{loại}) \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	24	$+\infty$
S'(x)	-	0	+
S(x)		$S_{\min}$	

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là  $30\text{ cm}$ , chiều rộng là  $20\text{ cm}$ .

**Câu 24:** Một màn ảnh hình chữ nhật cao  $1,4$  mét và đặt ở độ cao  $1,8$  mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc  $\widehat{BOC}$  là góc nhọn.



A.  $AO = 2,4m$

B.  $AO = 2m$

C.  $AO = 2,6m$

D.  $AO = 3m$

Lời giải

Chọn A

Đặt độ dài cạnh  $AO = x (cm), (x > 0)$ 

Suy ra:

$$BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BOC} &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2.OB.OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} \\ &= \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} \end{aligned}$$

Vì góc  $\widehat{BOC}$  là góc nhọn nên Câu toán trở thành Câu toán tìm x để

$$F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

Đạt GTNN.

Đặt  $(3,24 + x^2) = t, (t > 3,24)$ .

$$\text{Suy ra } F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$$

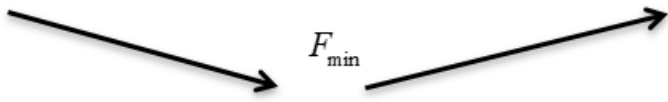
Ta tìm t để  $F(t)$  nhận giá trị nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} F'(t) &= \left( \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}} \right)' = \frac{1}{25} \left( \frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63) \left( \frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}} \right)}{t(t+7)} \right) \\ &= \frac{1}{25} \left( \frac{50(t^2 + 7t) - (25t + 63)(2t + 7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = \frac{1}{25} \left( \frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) \end{aligned}$$

$$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9$$

BBT



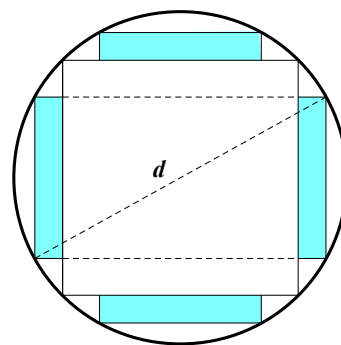
t	3,24	9	$+\infty$
$F'(t)$	-	0	+
$F(t)$			

Thay vào đặt ta có:  $(3,24 + x^2) = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x = 2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO = 2,4 m.

**Câu 25:** Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là  $d$ .

- A. Rộng  $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$ , dài  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- B. Rộng  $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{15}d$ , dài  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- C. Rộng  $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{14}d$ , dài  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$
- D. Rộng  $\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{13}d$ , dài  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{17}}{4}d$



**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là  $x, y$ . Đường kính của khúc gỗ là  $d$ , khi đó

tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là  $\frac{d}{\sqrt{2}}$  và  $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}, 0 < y < \frac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề Câu ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x + \frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}x}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là:

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}x} \quad \text{với } 0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}$$

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $S(x)$  đạt GTLN.

Ta có:

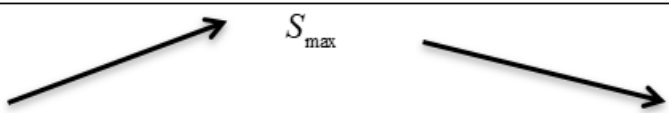
$$S'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}x} + \frac{x(-8x - 2\sqrt{2}d)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}x}}$$

$$= \frac{-16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x^2 - 6\sqrt{2}dx + d^2 = 0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$$

BBT

X	0	$\frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d$	$\frac{(2 - \sqrt{2})}{4}d$
S'(x)	+	0	-
S(x)			

Vậy miếng phụ có kích thước  $x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{16}d, y = \frac{\sqrt{7 - \sqrt{17}}}{4}d$

**Câu 26:** Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng  $576m^3$ . Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo  $m^2$  là 500.000 đồng/ $m^2$ . Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

- A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu  
 B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu  
 C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu  
 D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Lời giải

Chọn A

Gọi  $x, y, h$  lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, ( $x > 0, y > 0, h > 0, m$ )

Ta có:  $\frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x$

Thể tích hồ chứa nước  $V = xyh \Leftrightarrow h = \frac{V}{xy} = \frac{576}{x(2x)} = \frac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S(x) = 2xy + 2xh + 2yh = 2x(2x) + 2x\frac{288}{x^2} + 2(2x)\frac{288}{x^2} = 4x^2 + \frac{1728}{x}$$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $S(x)$  nhỏ nhất.

$$S(x) = 4x^2 + \frac{1728}{x}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{1728}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

BBT

X	0	6	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$			

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Diện tích cần xây:  $432m^2$

Chi phí ít nhất là:  $432 \times 500.000 = 216.000.000$

**Câu 27:** Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A.  $2R^2$ B.  $5R^2$ C.  $R^2$ D.  $3R^2$ 

Lời giải

Chọn C

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn ( $0 < x < R$ ).

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là  $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là:  $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Câu toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

$$S'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ (t/m)} \\ x = -\frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

BBT:

X	0	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	R
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là  $R^2$

**Câu 28:** Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là 60cm, thể tích là  $96.000cm^3$ , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m<sup>2</sup> và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m<sup>2</sup>. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng

B. 382.000 đồng

C. 83.200 đồng

D. 8.320.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Diện tích của đáy hộp là:  $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600 \text{ cm}^2 = 0,16 \text{ m}^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là  $x, (x > 0, m)$

Chiều rộng của hộp là  $\frac{0,16}{x}$

Gọi  $F(x)$  là hàm chi phí để làm bể cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x) = 0,16 \times 100.000 + 2.0,6x \cdot 70.000 + 2.0,6 \cdot \frac{0,16}{x} \cdot 70.000$$

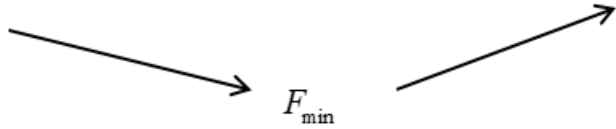
$$= 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x}$$

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $F(x)$  đạt GTNN.

$$F'(x) = 84.000 - \frac{13440}{x^2}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0	0,4	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$			

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

#### D. TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1:** Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là  $50 \text{ m}^2$ . Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ $\text{m}^2$  và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/ $\text{m}^2$  thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

**Lời giải**

**Trả lời: 512**

Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là  $50 \cdot 20 = 1000 (\text{con})$

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là:

$$1500 : 1000 = 1,5 (\text{kg}).$$

Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là:  $x (\text{con}), (x > 0)$

Theo đề Câu, giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm  $0,5 \text{ kg} / \text{con}$

Vậy giảm  $x$  con thì mỗi con tăng thêm  $0,0625x \text{ kg} / \text{con}$ .

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này:

$$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500.$$

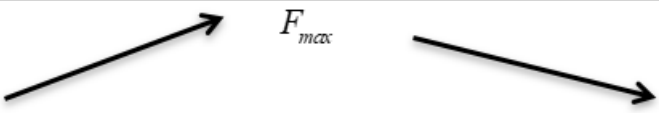
Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $F(x)$  đạt GTLN.

Ta có:

$$F'(x) = -0,125x + 61$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$$

BBT

X	0	488	1000
F'(x)	+	0	-
F(x)			

Vậy ông thanh phải trả số cá giống trong vụ này là:

$$1000 - 488 = 512 \text{ con}$$

**Câu 2:** Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

Lời giải

**Trả lời:**  $\frac{2}{27}$

Giả sử mỗi góc cắt đi một hình vuông  $x$  dm.

Khi đó chiều cao của hình hộp là  $x$  (dm),  $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

Và cạnh đáy của hộp là  $(1 - 2x)$  dm.

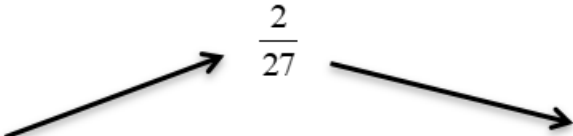
Vậy thể tích của hộp là:  $V = x(1 - 2x)^2 \text{ dm}^3$

Ta có:

$$V' = 1 - 8x + 12x^2$$

$$\text{Phương trình } V' = 0 \Leftrightarrow -8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

BBT

X	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
V'	+	0	-
V			

Vậy thể tích cần tìm là:  $\frac{2}{27} \text{ dm}^3$ .

**Câu 3:** Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km

B. 6,5km

C. 5km

D. 4km.

Lời giải

**Trả lời:** 6,5

Ta đặt:  $B'C = x \text{ (km)}, (0 \leq x \leq 9)$

Ta có:

$$BC = \sqrt{B'B^2 + B'C^2} = \sqrt{36 + x^2}, AC = 9 - x$$

Gọi  $F(x)$  là hàm chi phí xây dựng đường ống nước từ ACB

$$\text{Ta có: } F(x) = 130.000 \cdot \sqrt{36 + x^2} + 50.000(9 - x) \text{ (USD)}$$

Câu toán trở thành tìm  $x$  sao cho  $F(x)$  đạt GTNN.

$$F'(x) = \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}} x - 50.000.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}} x - 50.000 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

Vì  $F(x)$  là hàm liên tục trên đoạn  $[0; 9]$  nên ta có:

$$F(0) = 1.230.000, F(9) = 1.406.000, F\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000$$

Vậy chi phí nhỏ nhất khi C cách A khoảng bằng  $9\text{km} - 2,5\text{km} = 6,5\text{km}$ .

**Câu 4:** Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

**Lời giải**

**Trả lời:** 0,8

Giả sử tấm gỗ cắt có hình dạng tam giác vuông là ABC, BC là cạnh huyền. Vì cạnh AB, AC là như nhau nên ta có thể đặt  $AB = x, (0 < x < 0,6)$

Khi đó, cạnh huyền  $BC = 1,2 - x$  Cạnh góc vuông còn lại là:

$$AC = \sqrt{(1,2 - x)^2 - x^2} = \sqrt{1,44 - 2,4x}$$

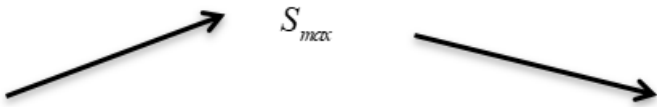
$$\text{Ta có diện tích tam giác ABC: } S(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{1,44 - 2,4x}$$

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $S(x)$  đạt GTLN.

$$S'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{1,44 - 2,4x} - \frac{1}{2} \frac{1,2x}{\sqrt{1,44 - 2,4x}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1,44 - 3,6x}{\sqrt{1,44 - 2,4x}} \right)$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,44 - 3,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0	0,4	0,6
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$			

**Câu 5:** Anh Tuấn muốn xây dựng một hồ ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được  $3200\text{cm}^3$ , tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hồ ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hồ ga để khi xây hồ tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

**Lời giải**

**Trả lời:** 160

Gọi  $x, y, h$  lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hồ ga, ( $x > 0, y > 0, h > 0, \text{cm}$ )

Ta có:  $\frac{h}{x} = 2 \Leftrightarrow h = 2x$

Thể tích hồ ga:  $V = xyh \Leftrightarrow y = \frac{V}{xh} = \frac{1600}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ ga là:

$$\begin{aligned} S(x) &= xy + 2xh + 2yh = x \cdot \frac{1600}{x^2} + 2x \cdot 2x + x \cdot \frac{1600}{x^2} \cdot 2x \\ &= \frac{1600}{x} + 4x^2 + \frac{6400}{x} = 4x^2 + \frac{8000}{x} \end{aligned}$$

Câu toán trở thành tìm  $x$  để  $S(x)$  nhỏ nhất.

$$S'(x) = 8x - \frac{8000}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - \frac{8000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

BBT

X	0	10	$+\infty$
$S'(x)$		0	
$S(x)$		$S_{\min}$	

Vậy chiều rộng của hồ ga là 10cm, chiều dài là 16cm.

Vậy diện tích đáy hồ ga nhỏ nhất là:  $S = 10 \cdot 16 = 160\text{cm}^2$ .

**Câu 6:**

Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.

**Lời giải**

**Trả lời:**  $\sqrt{41}$

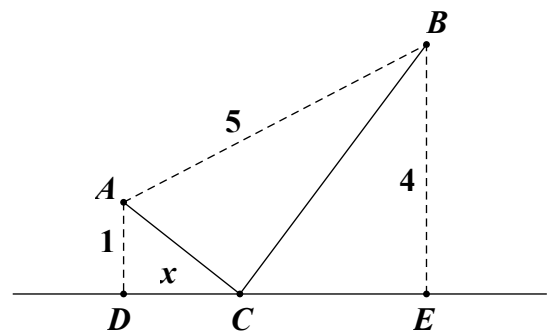
Đặt  $CD = x, x > 0$ . Ta tính được

$$DE = \sqrt{5^2 - (4-1)^2} = 4$$

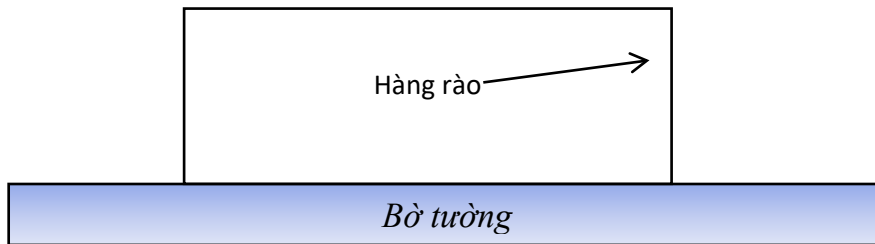
$$\text{Ta có } AC + BC = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(4-x)^2 + 16} = f(x)$$

$$\text{Khi đó: } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}}$$

Lời giải phương trình  $f'(x) = 0$ , ta thu được  $x = \frac{4}{5}$  và tìm được  $\min f(x) = \sqrt{14}$ ,



**Câu 7:** Bác nông dân muốn làm hàng rào trông ra hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:



**Lời giải**

**Trả lời: 5000**

Đề Câu cho ta dữ liệu về chu vi của hàng rào là  $200m$ . Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa  $x$  và  $r$ , đến đây ta có thể đưa về hàm số một biến theo  $x$  hoặc theo  $r$  như sau:

Ta có:

$$x + 2r = 200 \Leftrightarrow r = 100 - \frac{x}{2}. \text{ Từ đây ta có } r > 0 \Rightarrow x < 200.$$

$$\text{Diện tích đất rào được tính bởi: } f(x) = x \left( 100 - \frac{x}{2} \right) = -\frac{x^2}{2} + 100x$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = -\frac{x^2}{2} + 100x \text{ trên khoảng } (0; 200)$$

Đến đây áp dụng quy tắc tìm GTLN của hàm số trên đoạn, ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

Từ đó ta có  $f(100) = 5000$  là GTLN của diện tích đất rào được.

**Câu 8:** Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dài ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dây ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp ( như hình vẽ minh họa ). Hỏi dài ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

**Lời giải**

**Trả lời:  $1000\pi$**



Gọi  $x(cm)$ ;  $y(cm)$  lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ ( $x, y > 0; x < 30$ )

Dài dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm.

$$\text{Ta có: } (2x + y) \cdot 4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$$

$$\text{Thể tích khối hộp quà là: } V = \pi x^2 \cdot y = \pi x^2 (30 - 2x)$$

Thể tích  $V$  lớn nhất khi hàm số  $f(x) = x^2 (30 - 2x)$  với  $0 < x < 30$  đạt GTLN

$$f'(x) = -6x^2 + 60x, \text{ cho } f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Lập Bảng Biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là:

$$V = 1000\pi (cm^3).$$



**Câu 9:** Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

**Lời giải**

**Trả lời:** 0,68

$$\text{Ta có } S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi rl + 2\pi r^2 \quad (1)$$

$$V = \pi r^2 l = 2 \Rightarrow l = \frac{2}{\pi r^2} \text{ thay vào (1) ta được:}$$

$$S_{tp} = \frac{4}{r} + 2\pi r^2 = f(r)$$

$$f'(r) = -\frac{4}{r^2} + 4\pi r$$

$$f'(r) = 0 \text{ khi } r \text{ gần bằng } 0,68.$$

**Câu 10:** Do nhu cầu sử dụng người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh  $a$  và chiều cao  $h$ , có thể tích là  $1m^3$ . Với  $a$  như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

**Lời giải**

**Trả lời:** 1

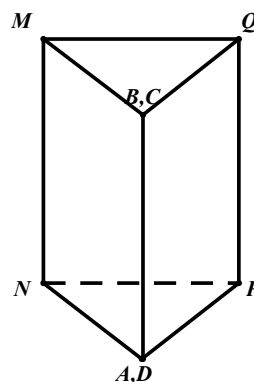
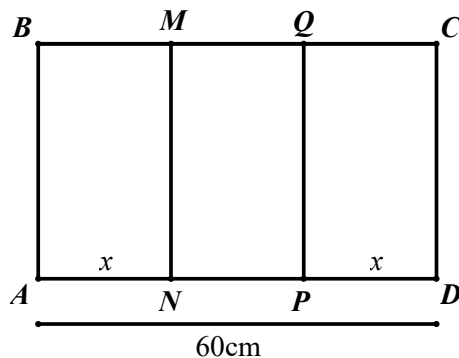
$$V = a^2 h = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{h}}$$

$$S = 4ah + 2a^2 = \frac{4}{a} + 2a^2 = f(a)$$

$$f'(a) = -\frac{4}{a^2} + 4a$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = 1$ .

**Câu 11:** Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có  $AD = 60cm$ . Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh  $MN$  và  $PQ$  vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm  $x$  để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



**A.**  $x = 20$

**B.**  $x = 30$

**C.**  $x = 45$

**D.**  $x = 40$

**Lời giải**

**Trả lời:20**

Gọi  $m_a$  là độ dài đường trung tuyến đối với cạnh NP

$$\text{Diện tích tam giác NAP} = S_{NAP}$$

$$\text{Ta có: } m_a = \sqrt{\frac{4x^2 - (60 - 2x)^2}{4}} = \sqrt{-900 + 60x}$$

$$V = h.m_A.NP$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{60x - 900}(60 - 2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{60(60 - 2x)}{2\sqrt{60x - 900}} - 2\sqrt{60x - 900}$$

$$f'(x) = 0, f(x) \rightarrow \max \text{ khi } x=20.$$