Câu I: (1,5 điểm) Tỉ lệ học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường được cho trong bảng sau:

Cầu thủ	Tuấn	Trường	An	Linh
Tỉ lệ học sinh bình chọn	30%	25%	10%	35%

Biết rằng có 500 học sinh tham gia bình chọn.

1) Hãy lập bảng tần số học sinh bình chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường.

2) Hãy tính xác suất cầu thủ được chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường có tên bắt đầu bởi chữ cái “T”.

Giải

1) Số học sinh bình chọn cho Tuấn là $\dfrac{500\cdot 30\%}{100\%}=150$ (học sinh)

Số học sinh bình chọn cho Trường là $\dfrac{500\cdot 25\%}{100\%}=125$ (học sinh)

Số học sinh bình chọn cho An là $\dfrac{500\cdot 10\%}{100\%}=50$ (học sinh)

Số học sinh bình chọn cho Linh là $\dfrac{500\cdot 35\%}{100\%}=175$ (học sinh)

Ta có bảng tần số

Cầu thủ	Tuấn	Trường	An	Linh
Số học sinh bình chọn	150	125	50	175

2) Tổng số học sinh bình chọn cho Tuấn và Trường là $150+125=275$

Xác suất cầu thủ được chọn cho danh hiệu cầu thủ xuất sắc nhất trong giải bóng đá của trường có tên bắt đầu bởi chữ cái “T” là $\dfrac{275}{500}=0,55$.

Vậy xác suất tìm được là $0,55$

Câu II: (1,5 điểm) Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x-5}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{2x+2\sqrt{x}}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0, x\neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=36$

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P=AB$ có giá trị nguyên.

Giải

1) Thay $x=36$ (tmđk) vào A ta được $A=\frac{36-5}{\sqrt{36}}=\frac{31}{6}$

Vậy $A=\frac{31}{6}$ khi $x=36$

2) $B=\frac{2x+2\sqrt{x}}{x-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0, x\neq 1$.

$$B=\frac{2x+2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$B=\frac{x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $x>0, x\neq 1$

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P=AB$ có giá trị nguyên

$P=\frac{x-5}{\sqrt{x}-1}$

$P=\frac{x-5}{\sqrt{x}-1}=0 \Rightarrow x=5(tm)$

$P \neq 0, x \in Z, \sqrt{x} \in I \Rightarrow P \notin Z$

$P=\sqrt{x}+1-\frac{4}{\sqrt{x}-1} \neq 0, x \in Z, \sqrt{x} \in Z \Rightarrow \sqrt{x}-1 \in U(4)$

$x \in \{4;9;25\}$ (tmđk)

Vậy $x \in \{4;5;9;25\}$

Câu III: (2,5 điểm)

1) Hai dung dịch có khối lượng tổng cộng là 220 gam. Lượng muối trong dung dịch X là 5 gam, lượng muối trong dung dịch Y là $4,8$ gam. Biết nồng độ muối trong dung dịch X nhiêu
hơn nồng độ muối trong dung dịch Y là 1% . Tính khối lượng mỗi dung dịch nói trên?

2) Hai đội công nhân cùng làm một công việc trong 24 ngày thì xong. Nếu đội A làm trong 10 ngày và đội B làm trong 12 ngày thì được $\frac{9}{20}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong công việc đó trong bao lâu.

3) Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x-m-3=0$. Tìm m để biểu thức $A=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

1) Gọi khối lượng dung dịch X và Y lần lượt là x, y (g) điều kiện $x>0, y>0$

Nồng độ muối trong dung dịch X là $\frac{5}{x}\cdot 100\%$

Nồng độ muối trong dung dịch Y là $\frac{4,8}{x}\cdot 100\%$

Khối lượng hai dung dịch là 220 gam nên $x+y=220$ (g) (1)

Nồng độ muối trong dung dịch X nhiêu hơn nồng độ muối trong dung dịch Y là 1% nên

$\frac{5}{x}.100\%-\frac{4,8}{y}.100\%=1\%$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} x+y=220 \\ \frac{5}{x}.100\%-\frac{4,8}{y}.100\%=1\% \end{cases}$

Suy ra $x=100, y=120$

Vậy khối lượng dung dịch X và Y lần lượt là $100(\text{g}), 120(\text{g})$

2) Gọi thời gian làm riêng hoàn thành công việc của đội A là x (ngày), $\left(x>0\right)$;

Thời gian làm riêng hoàn thành công việc của đội B là y (ngày), $(y>0)$.

Ta có mỗi ngày đội A làm được $\frac{1}{x}$ công việc; mỗi ngày đội B làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Vì hai đội công nhân cùng làm một công việc trong 24 ngày thì xong nên mỗi ngày hai đội làm được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}$ (công việc).

Vì đội A làm trong 10 ngày và đội B làm trong 12 ngày thì được $\frac{9}{20}$ công việc nên ta có phương trình: $\frac{1}{x}.10+\frac{1}{y}.12=\frac{9}{20}$.

Vậy ta có hệ: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}\\ \frac{10}{x}+\frac{12}{y}=\frac{9}{20}\end{cases}$. Giải hệ ta được $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{40}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{60}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=40\\ y=60\end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy đội A làm riêng hoàn thành công việc trong 40 ngày, đội B làm riêng hoàn thành công việc trong 60 ngày.

3) Xét phương trình: $x^2-2(m-1)x-m-3=0$ (1).

(1) có $\Delta'=\left[-(m-1)\right]^2-1.(-m-3)=m^2-2m+1+m+3=m^2-m+4=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$ với mọi mVậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\ x_1x_2=-m-3\end{cases}$.

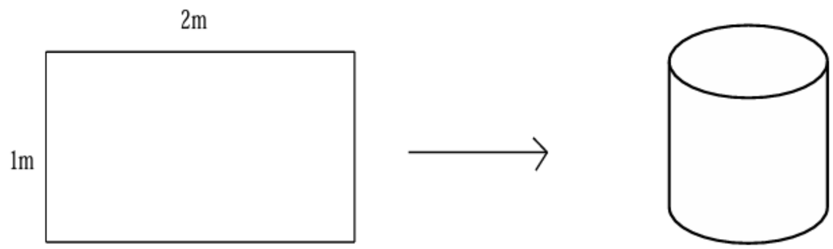
$\Rightarrow A=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left[2(m-1)\right]^2-2(-m-3)=4m^2-8m+4+2m+6=4m^2-6m+10$

$=\left(2m-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+10=\left(2m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{31}{4}\ge\frac{31}{4}$ với mọi m.

Vậy $\min A=\frac{31}{4}$ khi $m=\frac{3}{4}$.

Câu IV: (4,0 điểm)

1) Mặt xung quanh của một thùng chứa nước hình trụ có chiều cao $1m$ được gõ từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $1m \times 2m$ (như hình vẽ).



a) Hỏi thùng nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước?

(*Bỏ qua bề dày của thùng nước và lấy $\pi = 3,14$ làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai*).

b) Một em bé đánh rơi quả bóng bưởi xuống thùng tôn. Bên cạnh có một vòi nước cung cấp nước. Em bé cần lấy ít nhất bao nhiêu nước từ vòi để lấy được bóng bưởi một cách an toàn?

Giải

a) Thùng nước là một hình trụ có chiều cao $h = 1m$, Chu vi đáy là $C = 2m$

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ

Ta có : $C = 2\pi R \Leftrightarrow R = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{2}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}$ (m)

Thể tích của hình trụ là : $V = \pi R^2 h = \pi . \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^2 .1 = \pi . \dfrac{1}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi} = \dfrac{1}{3,14} \approx 0,32m^3$

Vậy thùng đựng được $0,32m^3$ nước.

b) Để lấy bóng, em bé chỉ cần đổ đầy nước vào thùng tôn. Em bé cần lấy ít nhất $0,32m^3$ nước.

Thì bóng nổi trên mặt thùng tôn khi đó sẽ an toàn.

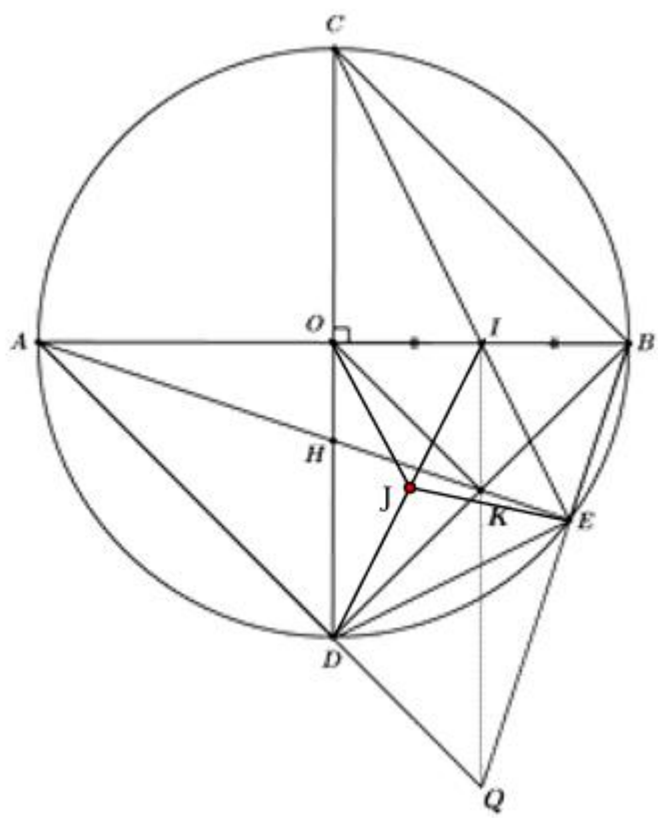
2) Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc tại O. Gọi I là trung điểm của OB. Tia CI cắt đường tròn (O) tại E. Gọi H là giao điểm của AE và CD.

a) Chứng minh bốn điểm O, I, E, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh: $AH.AE = 2R^2$ và $OA = 3 \cdot OH$.

c) Gọi K là hình chiếu của O trên BD, Q là giao điểm của AD và BE.

Chứng minh: Q, K, I thẳng hàng.



a) Gọi J là trung điểm của ID

+) $AB \perp CD$ tại O, mà $I \in OB$

Suy ra $IOD = 90^0 \Rightarrow \Delta IOD$ vuông tại O,

từ đó suy ra $JO = JI = JD (1)$

+) Chứng minh: $IED = 90^0 \Rightarrow \Delta IED$ vuông tại E,

từ đó suy ra $JI = JE = JD$ (2)

+) Từ (1) và (2) suy ra O, I, E, D cùng thuộc một đường tròn

b) +) Chứng minh: $\Delta AHO \# \Delta ABE$ (g.g)

+) Suy ra: $AH \cdot AE = AO \cdot AB = R \cdot 2R = 2R^2$

+) Suy ra: $\dfrac{OA}{OH} = \dfrac{AE}{BE}$

+) Mà EI là tia phân giác của góc AEB nên suy ra:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AI}{IB} = \frac{\frac{3}{2}R}{\frac{1}{2}R} = 3$$

+) Suy ra: $\dfrac{OA}{OH} = 3$, do đó $OA = 3.OH$

c) +) Chứng minh được: $OD = 3.OH$ suy ra $HD = \dfrac{2}{3}OD$

+) Suy ra: H là trọng tâm ΔABD

+) Chứng minh K là trung điểm của BD

Suy ra: A, H, K, E thẳng hàng

+) Suy ra: K là trực tâm của ΔABQ

+) Suy ra: KQ vuông góc AB

+) Chứng minh được: KI vuông góc AB

+) Suy ra: Q, K, I thẳng hàng

(0,5 điểm)

Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích $500\,\text{cm}^3$, chiều cao của hộp là 2 cm. Tìm kích thước đáy của hộp sao cho sử dụng ít vật liệu nhất.

Giải

Gọi chiều rộng của đáy hộp là x ($x > 0$, cm).

Ta có chiều dài của hộp là $\dfrac{500}{2x}$ (cm)

Ta có diện tích toàn phần của chiếc hộp là

$$S = 2x \cdot \frac{500}{2x} + 2\left(x + \frac{500}{2x}\right) \cdot 2 = 500 + 2x + \frac{250}{x} \ (\text{cm}^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương $2x$ và $\dfrac{250}{x}$, ta có

$$2x + \frac{250}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{250}{x}} = 20\sqrt{5}$$

Từ đó $S \geq 500 + 20\sqrt{5}$ (cm^2)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x = \dfrac{250}{x}$ hay $x^2 = \dfrac{250}{2} = 125$

Suy ra $x = 5\sqrt{5}$ cm, từ đó $\dfrac{250}{5\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}$ cm.

Vậy chiều rộng của hộp là $5\sqrt{5}$ cm, chiều dài là $10\sqrt{5}$ cm.

Xét hai số thực dương a, b ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Thật vậy, vì a, b là các số thực dương nên

Từ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, suy ra $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Hay $\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy với hai số thực dương a, b bất kỳ ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $a = b$