

CHƯƠNG

VII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 27: THỂ TÍCH

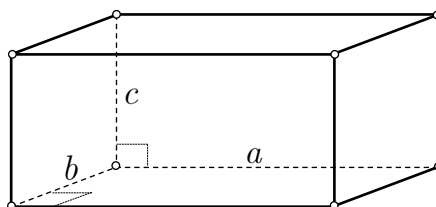
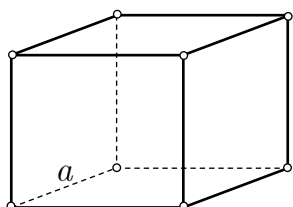


HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

Thể tích khối lăng trụ $V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot \text{chiều cao}$

- Thể tích khối lập phương $V = a^3$ • Thể tích khối hộp chữ nhật $V = abc$

**Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:**

• **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

• **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Câu 1: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ

- A.** $V = 3a^3\sqrt{2}$ **B.** $V = a^3\sqrt{2}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$

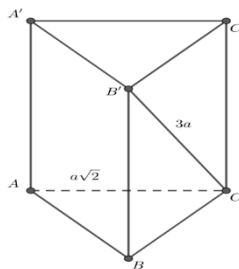
Lời giải

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{6} = 3a^3\sqrt{2}$

Câu 2: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'C = 3a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

- A.** $V = 2a^3$. **B.** $V = \sqrt{2}a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Lời giải



Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BC = AC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a$.

$\triangle BB'C$ vuông tại $B \Rightarrow BB' = \sqrt{(B'C)^2 - BC^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot BB' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

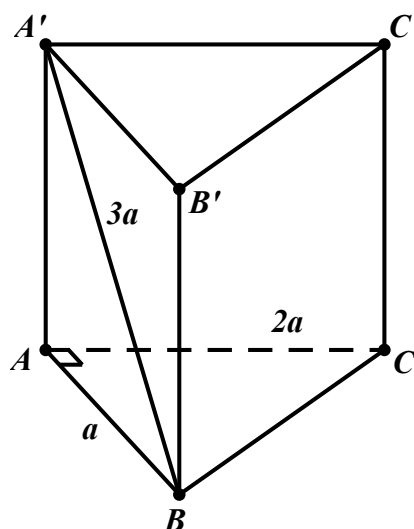
A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{5}a^3}{3}$.

C. $\sqrt{5}a^3$.

D. $2\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

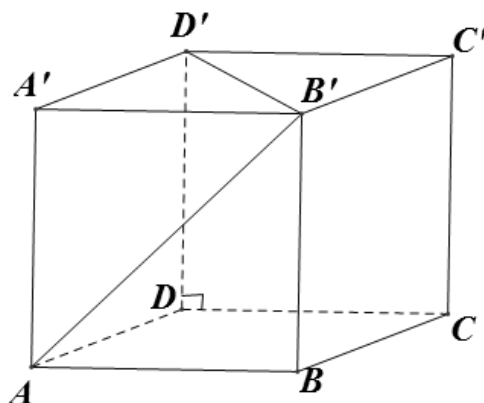


+ Diện tích đáy là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$.

+ Tam giác ABA' vuông tại A nên có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

+ Thể tích cần tính là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = a^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$ (tham khảo hình vẽ). Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



- A.** $V = a^3\sqrt{2}$. **B.** $V = 2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{10}$. **D.** $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}.$$

Trong tam giác ABB' , $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$.

Vậy $V = BB' \cdot S_{ABCD} = 2a \cdot a^2\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 5: Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

- A.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Đáy hình lăng trụ là tam giác đều cạnh bằng 3 nên $S = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

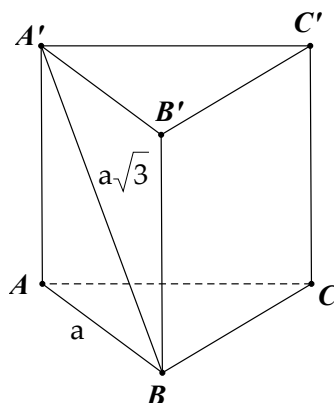
Chiều cao của hình lăng trụ bằng $h = 3$

Thể tích $V = S \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{2}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải



Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

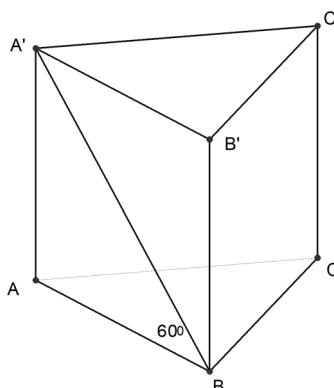
A. $\frac{3a^3}{2}$.

B. $\frac{a^3}{4}$.

C. $\frac{3a^3}{4}$.

D. $\frac{3a^3}{8}$.

Lời giải



Đáy là tam giác đều cạnh a , có diện tích: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì $AA' \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'BA} = (A'B, (ABC)) = 60^\circ$, suy ra: $AA' = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}.$$

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thang vuông tại A và D , có $AB = 2CD$, $AD = CD = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

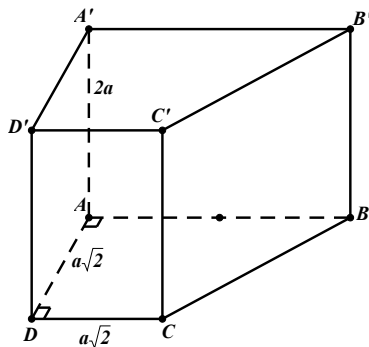
A. $12a^3$.

B. $6a^3$.

C. $2a^3$.

D. $4a^3$.

Lời giải



Diện tích hình thang $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(2CD + CD) \cdot AD}{2} = \frac{3CD \cdot AD}{2} = \frac{3 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2} = 3a^2.$$

Thể tích khối lăng trụ đã cho: $V = S_{ABCD} \cdot AA' = 3a^2 \cdot 2a = 6a^3$.

Câu 9: Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết $AA' = 2a$; $AB = 3a$; $AC = 4a$ và $AB \perp AC$.

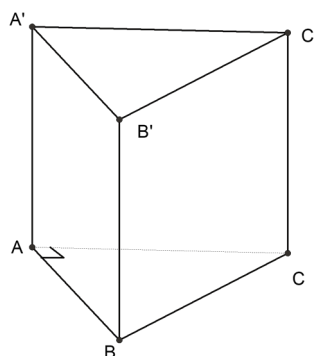
A. $12a^3$.

B. $4a^3$.

C. $24a^3$.

D. $8a^3$.

Lời giải



Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} 3a \cdot 4a = 6a^2$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = 12a^3$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, biết $AA' = 4a$, $AC = 2a$, $BD = a$.

Thể tích V của khối lăng trụ là

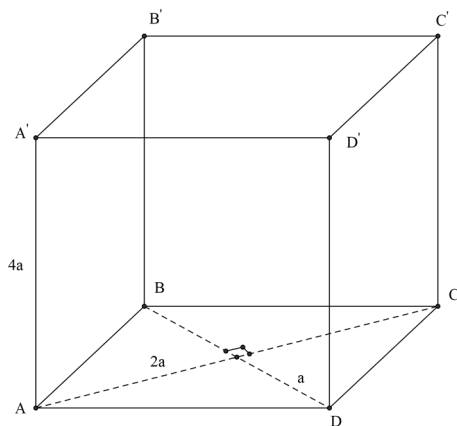
A. $V = 8a^3$.

B. $V = 2a^3$.

C. $V = \frac{8}{3}a^3$.

D. $V = 4a^3$.

Lời giải



Thể tích V của khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a \cdot 4a = 4a^3$.

Câu 11: Cho hình hộp đứng có một mặt là hình vuông cạnh a và một mặt có diện tích là $3a^2$. Thể tích khối hộp là

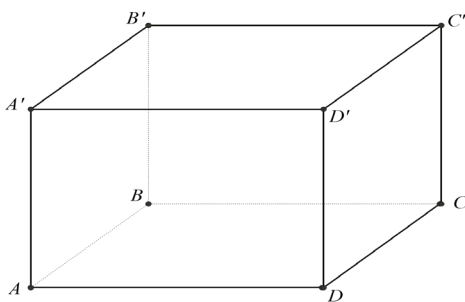
A. a^3 .

B. $3a^3$.

C. $2a^3$.

D. $4a^3$.

Lời giải



Giả sử mặt $ABB'A'$ là hình vuông cạnh bằng a , mặt $ABCD$ có diện tích bằng $3a^2$.

Do đó chiều cao $h = AA' = a$, diện tích đáy là $S = S_{ABCD} = 3a^2$.

Suy ra thể tích của khối hộp đó là $V = 3a^2 \cdot a = 3a^3$.

Câu 12: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AB = a$; $BC = 2a$; $AC' = a\sqrt{21}$. Tính thể tích V của khối hộp đó?

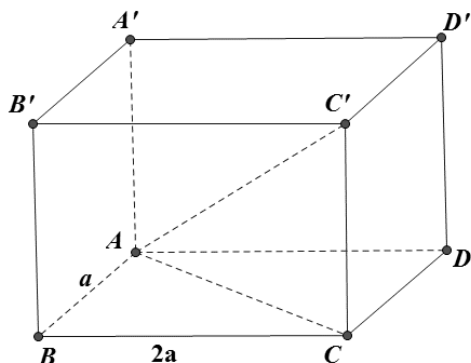
A. $4a^3$.

B. $16a^3$.

C. $\frac{8}{3}a^3$.

D. $8a^3$.

Lời giải



Xét tam giác vuông ABC , ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

Xét tam giác vuông ACC' , ta có: $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 4a$.

Vậy thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V = a.2a.4a = 8a^3$.

Câu 13: Hình lập phương có độ dài đường chéo bằng 6 thì có thể tích là

- A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $54\sqrt{2}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Gọi cạnh của hình lập phương là $a (a > 0)$.

\Rightarrow đường chéo của hình lập phương là $a\sqrt{3}$.

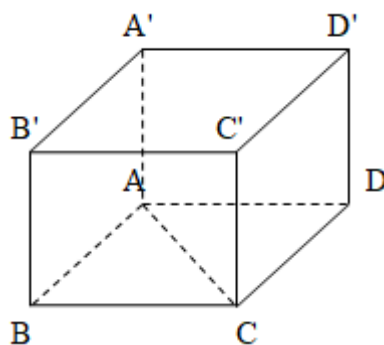
Theo bài ra ta có: $a\sqrt{3} = 6 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối lập phương là: $V = (2\sqrt{3})^3 = 24\sqrt{3}$.

Câu 14: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a, AB = 3a, AC = 5a$. Thể tích của khối hộp đã cho là

- A.** $5a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $12a^3$. **D.** $15a^3$.

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , ta có: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4a$.

$$S_{ABCD} = AB.BC = 3a.4a = 12a^2$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' = 12a^2.a = 12a^3.$$

Câu 15: Cho hình hộp đứng có cạnh bên độ dài $3a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc 60° . Khi đó thể tích khối hộp là

- A.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

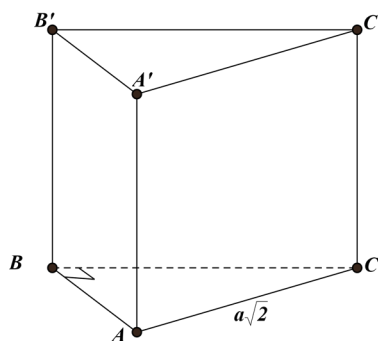
Lời giải

Ta có chiều cao $h = 3a$.

Hình thoi cạnh a và có một góc 60° có diện tích $S = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối hộp là $V = S.h = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ



A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3}{6}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Trong $\triangle ABC$: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = (a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow AB = BC = a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot BB' = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot BB' = \frac{a^3}{2}$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh $AC' = 2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

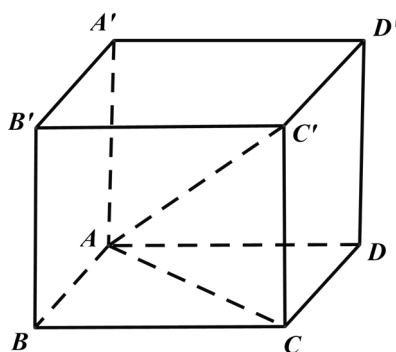
A. $4a^3$.

B. $3a^3$.

C. $2a^3$.

D. a^3 .

Lời giải



Ta có: $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2 \Rightarrow AA'^2 = 4a^2 \Rightarrow AA' = 2a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a = 4a^3.$$

Câu 18: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a$ và mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

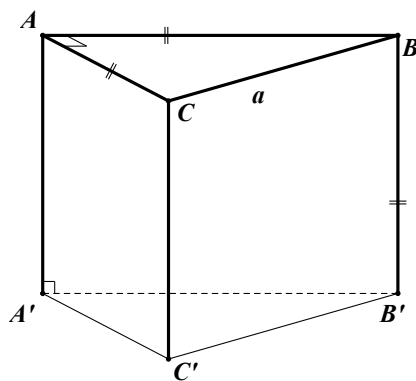
A. $\frac{\sqrt{2}}{8}a^3$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$.

C. $\frac{1}{4}a^3$.

D. $\frac{1}{12}a^3$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{4}$.

Mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông $\Rightarrow AA' = AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 19: Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a . Thể tích khối lăng trụ đó bằng

- A.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

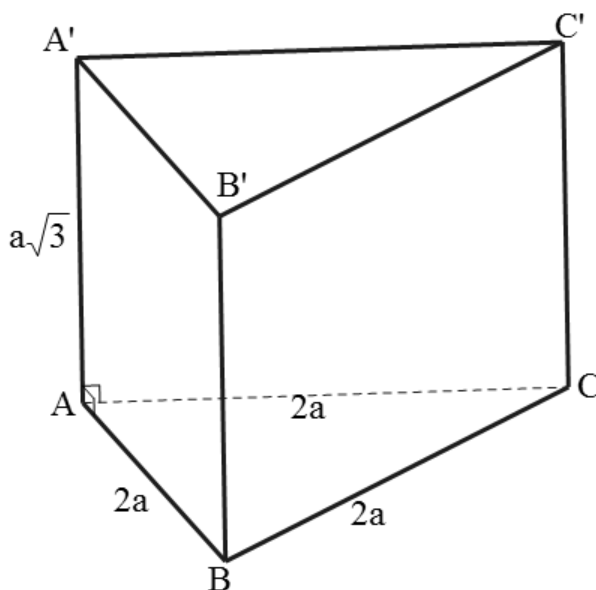
Lời giải

Diện tích đáy $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, chiều cao $h = a$. Khi đó $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A.** $3a^3$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** a^3 .

Lời giải



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = 3a^3$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

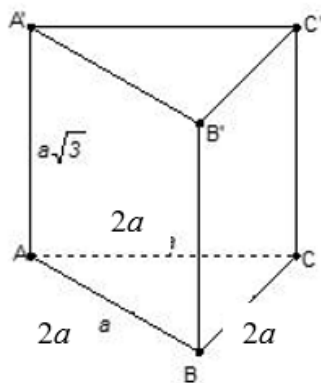
A. $3a^3$.

B. a^3 .

C. $\frac{3a^3}{4}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



Lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $\triangle ABC$ là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

• $AA' \perp (ABC) \Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ là: $h = AA' = a\sqrt{3}$.

• $\triangle ABC$ là tam giác đều có $AB = 2a \Rightarrow \triangle ABC$ diện tích là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}.$$

\Rightarrow Thể tích khối lăng trụ là: $V_{S.ABC} = h.S_{\triangle ABC} = a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3} = 3a^3$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ bằng

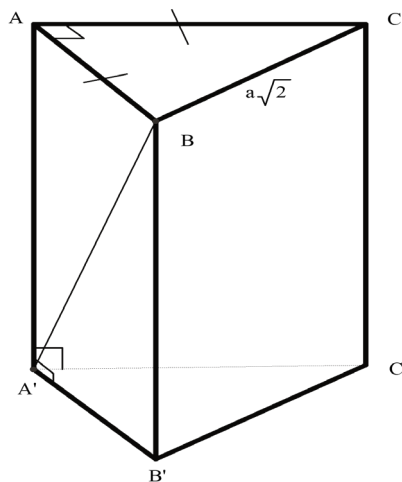
A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\frac{3a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải



ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.a = \frac{1}{2}a^2$.

$A'B$ tạo với đáy một góc bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{BA'B'} = 60^\circ$.

$\Delta_{\perp} BA'B'$: $\tan \widehat{BA'B'} = \frac{BB'}{A'B'} = \sqrt{3} \Rightarrow BB' = \sqrt{3}A'B' = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A . Cho $AC = AB = 2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

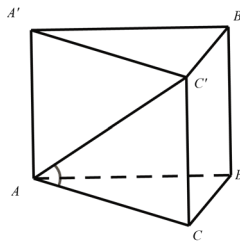
A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 2a^2$.

Hình chiếu vuông góc của AC' lên (ABC) là AC .

\Rightarrow Góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và AC hay $\widehat{C'AC}$

Theo bài ra có $\widehat{C'AC} = 30^\circ$.

Xét tam giác $C'CA$ vuông tại C có $CC' = AC.\tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{ABC} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.2a^2 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

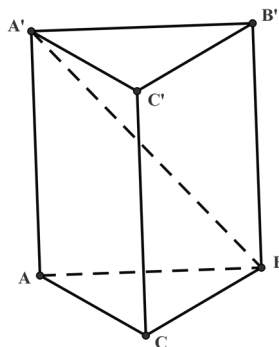
A. $2a^3$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải



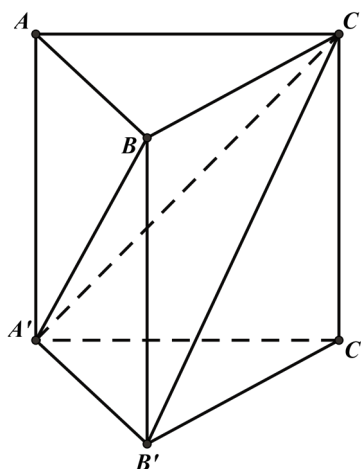
Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{A'BA} = 60^\circ \Rightarrow A'A = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\text{Có } S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'A = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ACB} = 30^\circ$, biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A.** $V = a^3\sqrt{6}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



* Ta có: $CC' \parallel AA' \Rightarrow CC' \parallel (AA'B'B)$

Mà $A'B \subset (AA'B'B)$, nên

$$d(CC'; A'B) = d(CC'; (AA'B'B)) = C'A' = a\sqrt{3}$$

* Ta có: $AC = A'C' = a\sqrt{3}; AB = A'B' = a$;

$$\text{Diện tích đáy là } B = dt(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

* Dễ thấy $A'B' \perp (ACC'A')$

Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\widehat{B'CA'} = \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{A'B'}{B'C} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow B'C = 2a\sqrt{5}$$

$$CC' = \sqrt{B'C^2 - B'C'^2} = \sqrt{20a^2 - 4a^2} = 4a$$

* Thể tích lăng trụ là $V = B.h$ với $h = CC' \Rightarrow V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot 4a = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

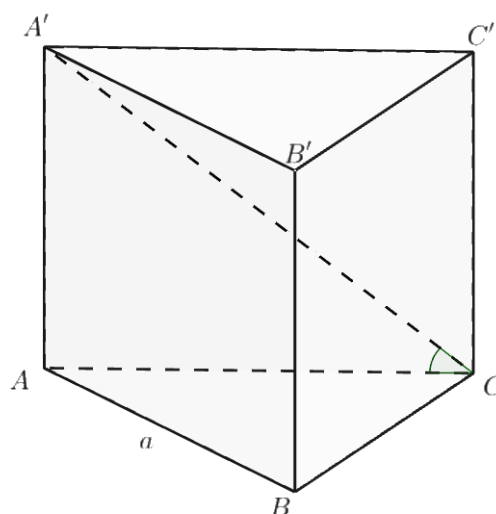
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Có: $\widehat{(A'C, (ABC))} = \widehat{A'CA} = 45^\circ$.

Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{A'CA} = \frac{AA'}{AC} \Rightarrow AA' = a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

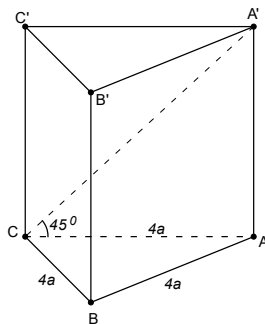
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $16a^3\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.
Ta có:

$$A'A \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{A'C, (ABC)}) = \widehat{A'CA} = 45^\circ \Rightarrow \Delta A'AC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow A'A = AC = 4a.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(4a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4a^2 \sqrt{3} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = 4a.4a^2 \sqrt{3} = 16a^3 \sqrt{3}.$$

Câu 28: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° , tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

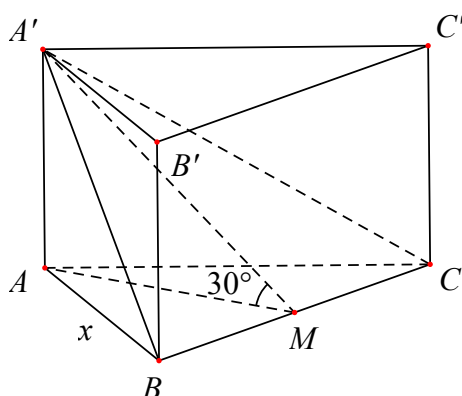
A. $8\sqrt{3}$.

B. 8.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{2}$.

Lời giải



Đặt $AB = x, (x > 0)$, gọi M là trung điểm BC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (A'BC) = (ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow (\widehat{(A'BC), (ABC)}) = \widehat{A'MA} = 30^\circ.$$

$$\text{Xét } \Delta A'MA, \text{ có } A'M = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = x.$$

$$S_{A'BC} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} A'M \cdot BC = 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Suy ra } A'A = AM \cdot \tan 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2; S_{ABC} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{ABC} = 2.4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Câu 29: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

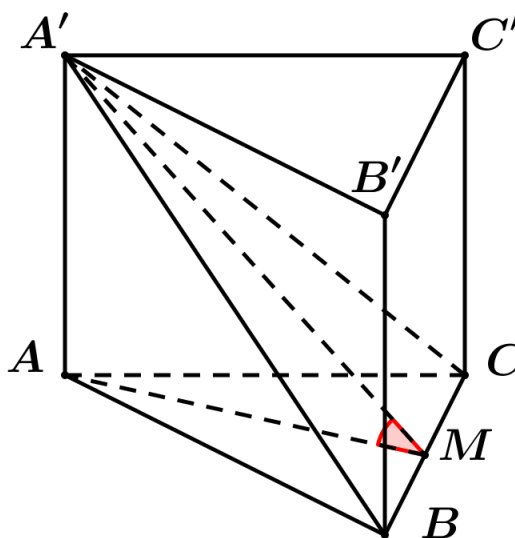
A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

C. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Lời giải



Vì đáy ABC là tam giác đều có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ cạnh đáy bằng a .

Gọi M trung điểm BC , ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$

Từ đó ta có $\widehat{((A'BC), (ABC))} = \widehat{(A'M, AM)} = \widehat{A'MA} = 60^\circ$.

Xét $\Delta A'MA$ ta có $AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$

Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 30: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và AB' vuông góc với BC' . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

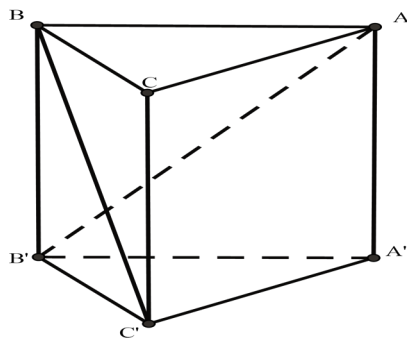
A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

C. $V = a^3\sqrt{6}$.

D. $V = \frac{7a^3}{8}$.

Lời giải



Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{BB'}$, theo giả thiết $AB' \perp BC'$ nên

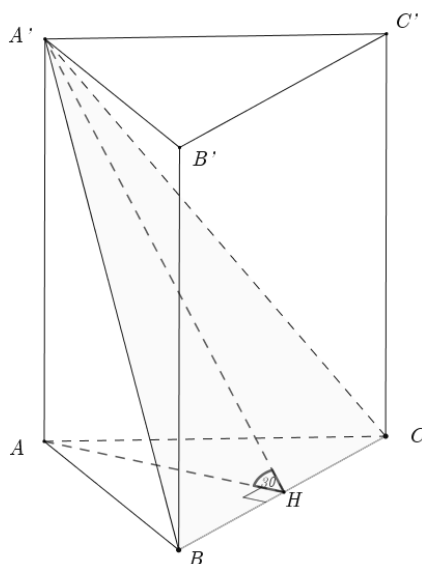
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= 0 \Leftrightarrow (\vec{z} - \vec{x})(\vec{y} + \vec{z}) = 0 \Leftrightarrow \vec{z} \cdot \vec{y} + |\vec{z}|^2 - \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{z} = 0 \Leftrightarrow |\vec{z}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{y} \\ &\Leftrightarrow |\vec{z}|^2 = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} \Rightarrow |\vec{z}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin 60^\circ.BB' = \frac{\sqrt{6}a^3}{8}$$

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $(A'BC)$ hợp với mặt đáy ABC một góc 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{8}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Suy ra $AH \perp BC$.

$$A'H \perp BC.$$

Mà $(ABC) \cap (A'BC) = BC$

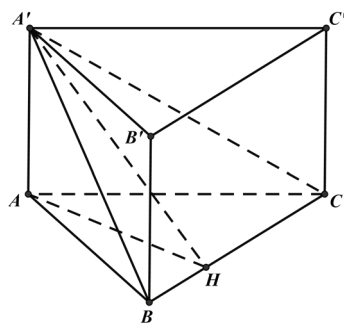
\Rightarrow Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng góc $(AH; A'H) = \widehat{AHA'} = 30^\circ$.

Ta có: ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'A = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'A \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

- Câu 32:** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30° . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải



* Xác định góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy:

Trong mặt phẳng (ABC) , dựng $AH \perp BC$ với H nằm trên cạnh BC . Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $A'H \perp BC$. Vậy $\widehat{((A'BC); (ABC))} = \widehat{A'HA} = 30^\circ$

* Xét tam giác ABC có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích B của tam giác ABC là: $B = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

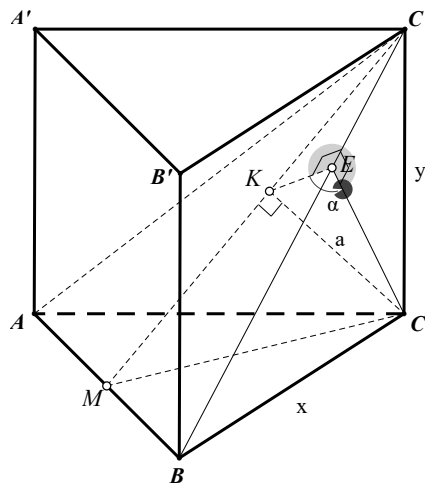
* Xét tam giác $A'HA$ vuông tại A , ta có: $A'A = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$. Thể tích khối lăng trụ

$ABC.A'B'C'$ bằng $V = B \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

- Câu 33:** Cho hình lăng trụ đứng, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a\sqrt{2}$, góc giữa mp $(AB'C')$ và mp (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ bằng

- A. $3a^3$. B. $3\sqrt{3}a^3$. C. a^3 . D. $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC

$$\text{Do } \begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCC') \Rightarrow (ABC') \perp (MCC').$$

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp (ABC')$, do đó $CK = d(C; (ABC')) = a$.

$$\text{Đặt } BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0), \text{ ta được: } CM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{CM^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \quad (1).$$

$$\text{Kẻ } CE \perp BC' \text{ tại } E, \text{ ta được } \widehat{KEC} = \alpha, EC = \frac{KC}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{12}}} = a\sqrt{\frac{12}{11}}.$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{CE^2} = \frac{11}{12a^2} \quad (2).$$

$$\text{Giải (1), (2) ta được } x = 2a, y = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V = y \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{2}$$

Câu 35: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'B = a\sqrt{6}$, đường thẳng $A'B$ vuông góc với đường thẳng $B'C$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a .

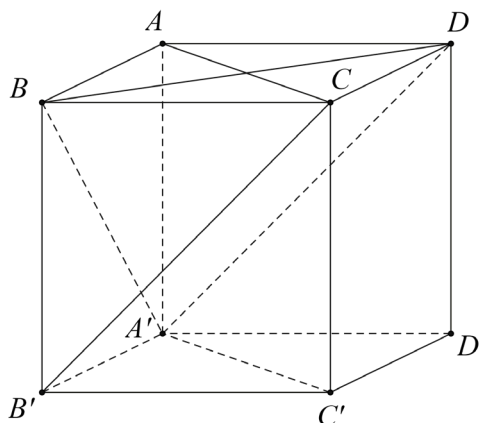
A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

B. $a^3\sqrt{6}$.

C. $\frac{3a^3}{4}$.

D. $\frac{9a^3}{4}$.

Lời giải



Dựng hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi đó tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Đặt $AB = x \Rightarrow AD = x$

Tam giác ABD có góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$ áp dụng định lý côsin ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 120^\circ = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos 120^\circ = 3x^2$$

Ta có: $A'B = a\sqrt{6} \Rightarrow A'D = a\sqrt{6}$

Ta có: $A'D \parallel B'C \Rightarrow A'B \perp A'D \Rightarrow \Delta A'BD$ vuông tại A'

$$\Rightarrow BD^2 = A'B^2 + A'D^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 12a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Rightarrow x = 2a$$

Chiều cao hình trụ $AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2 \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}.$$

Câu 36: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

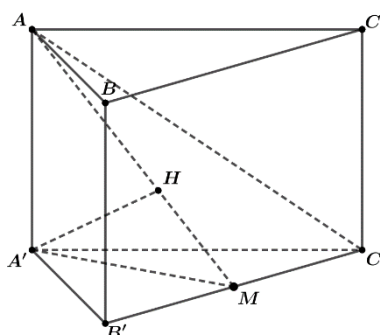
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{3a^3}{2}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $\begin{cases} AA' \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M) \Rightarrow (AB'C') \perp (AA'M)$ theo giao tuyến AM .

Kẻ $A'H \perp AM$ trong mặt phẳng $(AA'M)$, suy ra $\Rightarrow A'H \perp (AB'C')$.

Vậy khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ là $A'H = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Ta có $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{A'H^2} - \frac{1}{A'M^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow A'A = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{AB'C'} = 2a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ.

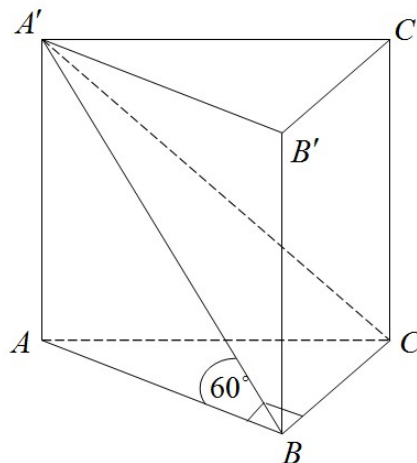
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2}{2}.$$

Góc giữa $(A'BC)$ và đáy là góc $\widehat{A'BA} = 60^\circ$.

$$A'A = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot A'A = \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 38: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° , cạnh $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

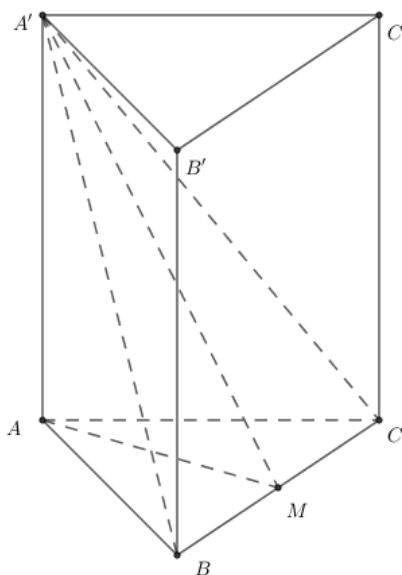
A. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

B. $V = \frac{3}{4}a^3$.

C. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

D. $V = \sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC suy ra $AM \perp BC$ (1)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$ (2)

Mặt khác $(ABC) \cap (A'BC) = BC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{(\overline{ABC}); (\overline{A'BC})} = \widehat{A'MA} = 60^\circ$.

Vì tam giác ABC đều nên $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 39: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng:

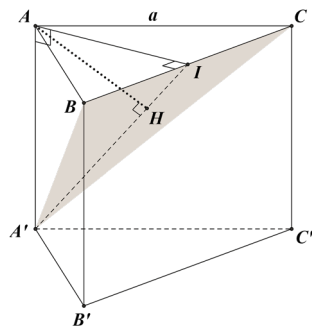
A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{12}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'I$. Khi đó ta có:

$$d(A, (A'BC)) = AH = \frac{a}{2}.$$

Trong tam giác vuông $AA'I$ ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{4}{3a^2} = \frac{8}{3a^2}$$

Suy ra: $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$

Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$

Câu 40: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

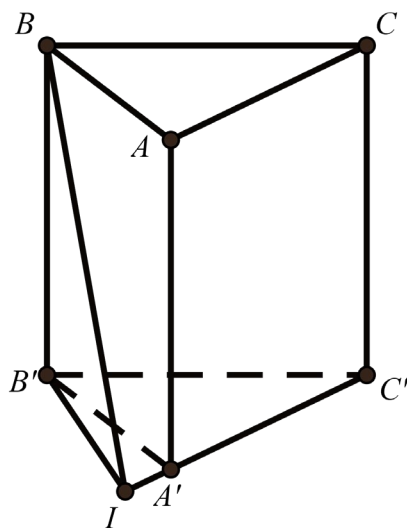
A. $V = \frac{3a^3}{8}.$

B. $V = \frac{9a^3}{8}.$

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$

D. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}.$

Lời giải



Hạ $B'I \perp A'C'$. Khi đó ta có $\left(\widehat{(A'BC'),(ABC)}\right) = \widehat{B'IB} = 60^\circ$

Vì $\widehat{B'A'C'} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{B'A'I} = 60^\circ$. Do đó $\sin 60^\circ = \frac{B'I}{B'A} \Leftrightarrow B'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan \widehat{B'IB} = \frac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow \tan 60^\circ = \frac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow BB' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

Mặt khác $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 41: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

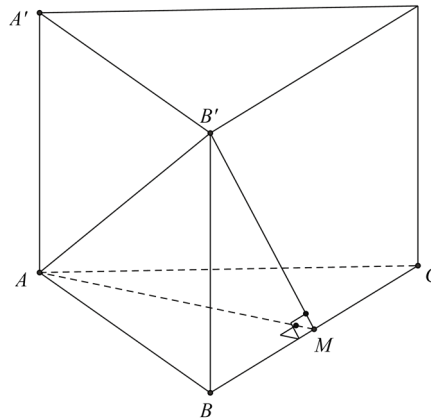
A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên ta có $AM \perp (BCC'B') \Rightarrow \left(\widehat{AB',(BCC'B')}\right) = \widehat{AB'M} = 30^\circ$.

Xét tam giác vuông $AB'M$ ta có $\tan 30^\circ = \frac{AM}{AB'} \Leftrightarrow AB' = \frac{AM}{\tan 30^\circ} \Leftrightarrow AB' = \frac{3a}{2}$.

Xét tam giác vuông $B'BM$ ta có $BB' = \sqrt{B'M^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \cdot BB' = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

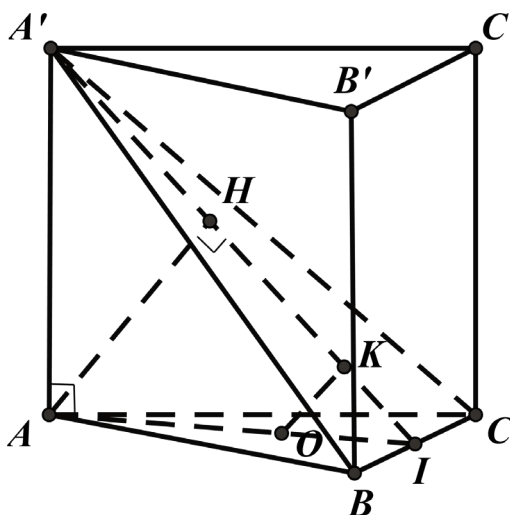
Lời giải

Diện tích đáy là $B = S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao là $h = d((ABC);(A'B'C')) = AA'$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC , H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$ ta có

$$AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A; (A'BC)) = AH$$



$$\frac{d(O; (A'BC))}{d(A; (A'BC))} = \frac{IO}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(O; (A'BC)) = \frac{d(A; (A'BC))}{3} = \frac{AH}{3} = \frac{a}{6} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$$

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$$

DẠNG 2. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a , các cạnh bên tạo với đáy góc 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

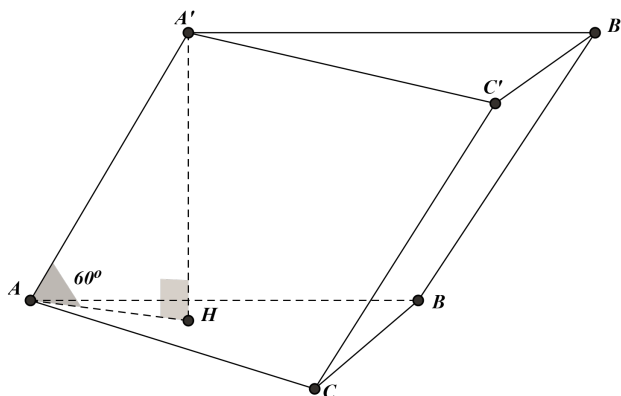
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

B. $\frac{3a^3}{8}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

D. $\frac{a^3}{8}$

Lời giải



Kẻ $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (A'A, (ABC)) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$.

$$\text{Xét } \triangle AHA' : \sin 60^\circ = \frac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ } ABC.A'B'C' : V = S_{\triangle ABC} \cdot A'H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}.$$

Câu 44: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , biết $A'A = A'B = A'C = a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

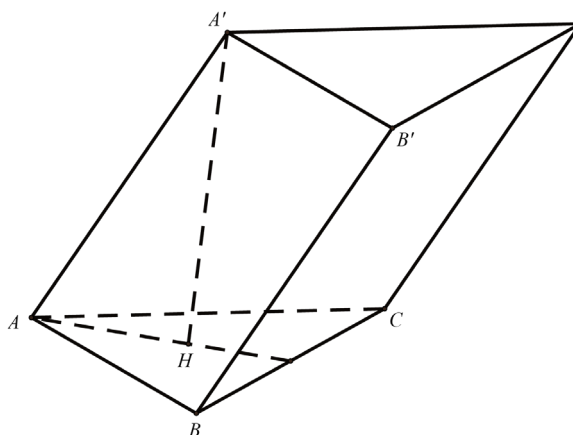
A. $\frac{3a^3}{4}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC . Theo giả thiết ta có ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $A'A = A'B = A'C = a$ nên $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ hay $A'H$ là đường cao của khối chóp $A'.ABC$.

$$\text{Xét tam giác vuông } A'HA \text{ ta có } A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AC = 2\sqrt{2}$, biết góc giữa AC' và (ABC) bằng 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

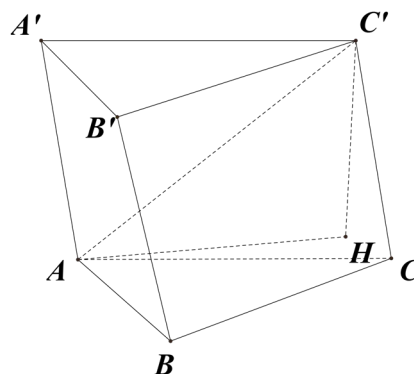
A. $V = \frac{8}{3}$

B. $V = \frac{16}{3}$

C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

D. $8\sqrt{3}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC) , khi đó $C'H$ là đường cao

$$\Rightarrow \widehat{AC', (ABC)} = \widehat{C'AH} = 60^\circ$$

Xét tam giác vuông $AC'H$ ta có $C'H = C'A \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$

$$\text{Khi đó } V_{ABC.A'B'C'} = S_d \cdot C'H = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Câu 46: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° . Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC . Tính thể tích khối lăng trụ

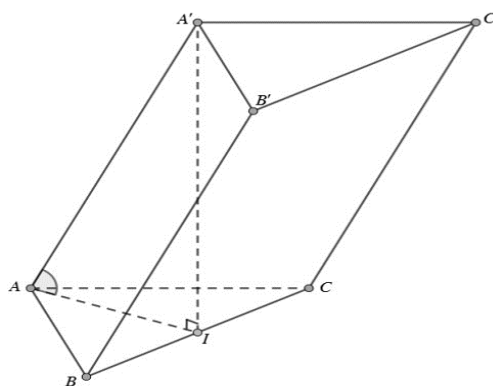
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{a^3\sqrt{13}}{12}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Lời giải



Ta có $A'I \perp (ABC) \Rightarrow AI$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC)

$$\text{Nên } \left(\widehat{AA', (ABC)} \right) = \left(\widehat{AA', AI} \right) = \widehat{A'AI} = 30^\circ$$

Ta có $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'I = AI \tan 30^\circ = \frac{a}{2}, S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 47: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là:

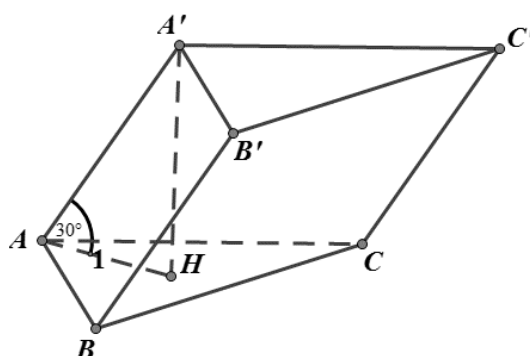
A. $\frac{9}{4}$

B. $\frac{27}{4}$

C. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt đáy. Suy ra góc $\widehat{A'AH} = 30^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{A'H}{A'A} \Rightarrow A'H = A'A \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = 3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{4}$.

Câu 48: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

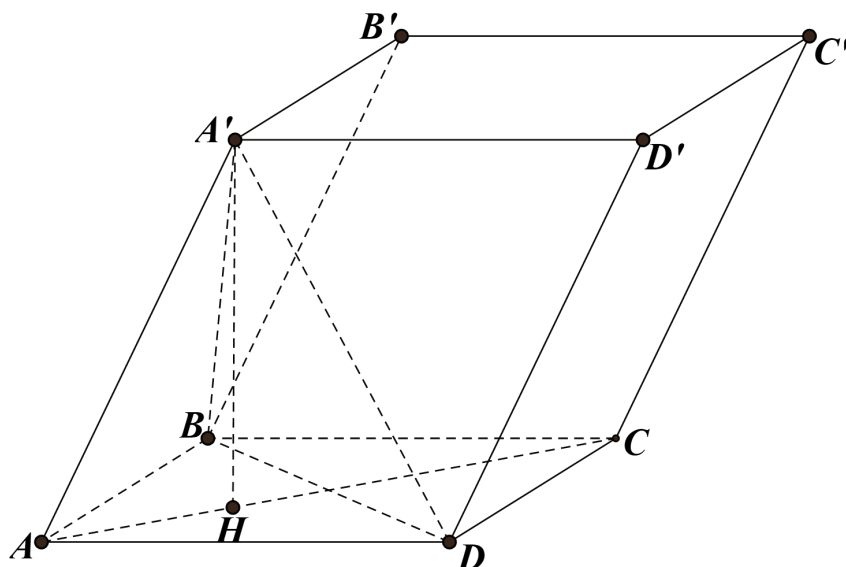
A. $4\sqrt{2}a^3$.

B. $2\sqrt{2}a^3$.

C. $8a^3$.

D. $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải



Từ giả thuyết ta có các tam giác $\triangle ABD$, $\triangle A'D$ và $\triangle A'B$ là các tam giác đều.

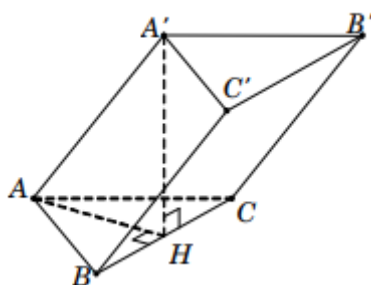
$\Rightarrow A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu H của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD .

$$\Rightarrow AH = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

$$\text{Thể tích của khối hộp } ABCD.A'B'C'D' : V = A'H \cdot S_{ABCD} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a \cdot 2 \cdot \frac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{2}a^3.$$

Câu 49: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Góc tạo bởi cạnh bên $A'A$ với đáy bằng 45° (hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



A. $V = \frac{\sqrt{6}}{24}.$

B. $V = 1.$

C. $V = \frac{\sqrt{6}}{8}.$

D. $V = 3.$

Lời giải

$$\text{Thể tích của khối lăng trụ } ABC.A'B'C' : V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H$$

Ta có

$$S_{ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} AH = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \tan 45^\circ = \frac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = AH = \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

Câu 50: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Biết AA' hợp với đáy (ABC) một góc 60° , thể tích khối lăng trụ là

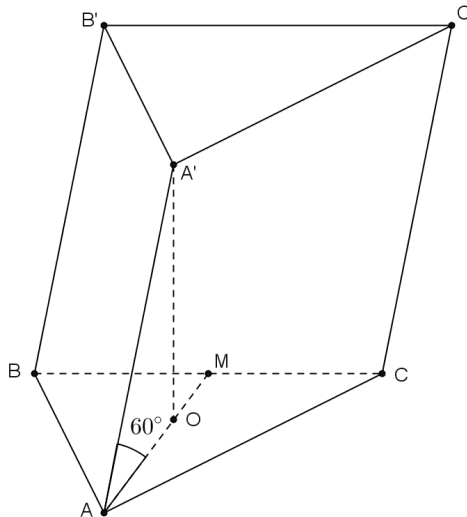
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm cạnh BC . Khi đó $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AO = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $A'O \perp (ABC)$ tại điểm O nên AO là hình chiếu vuông góc của AA' xuống (ABC) . Suy ra góc giữa đường thẳng AA' và (ABC) là góc $\widehat{A'AO}$, suy ra $\widehat{A'AO} = 60^\circ$.

Xét $\Delta A'AO$ vuông tại O ta có $A'O = AO \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = A'O \cdot S_{\Delta ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 51: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là:

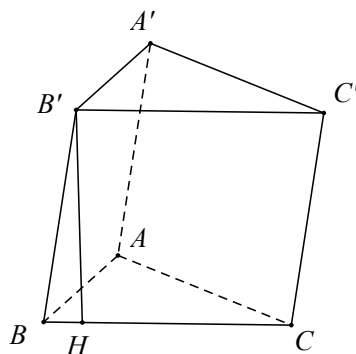
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Ta có $(BCC'B') \perp (ABC)$ (gt).

Hạ $B'H \perp BC \Rightarrow B'H \perp (ABC)$ và $\widehat{B'BH} = \widehat{B'BC} = 30^\circ$

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $h = B'H = BB' \cdot \sin 30^\circ = 2a$.

Diện tích đáy là $S_{\text{đáy}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối lăng trụ là: $V_{LT} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là: $V = \frac{1}{3} V_{LT} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Câu 52: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

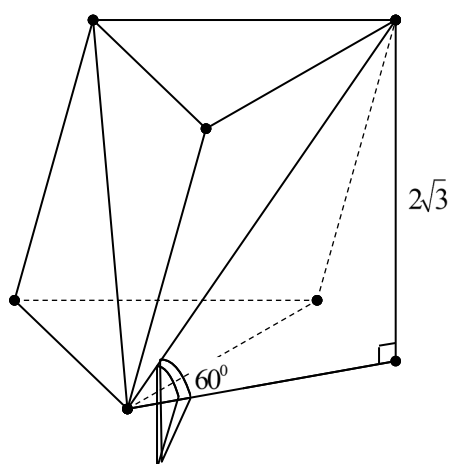
A. $V = \frac{8}{3}$

B. $V = \frac{16}{3}$

C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

D. $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Phân tích: Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$.

Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$. Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'AH} = 60^\circ$.

Ta có: $\sin 60^\circ = \frac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}; S_{\Delta ABC} = 4; V_{ABC.A'B'C'} = C'H.S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$.

$$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} C'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}; V_{ABB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 53: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $8a$ và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng $2a$ và $4a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

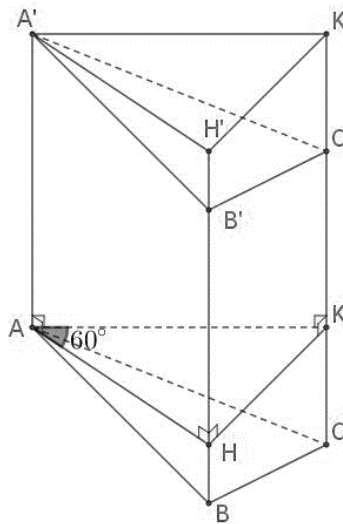
A. $\frac{16}{3}\sqrt{3}a^3$.

B. $8\sqrt{3}a^3$.

C. $24\sqrt{3}a^3$.

D. $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC' .

Ta có $HA \perp BB', KA \perp CC' \Rightarrow A'A \perp (AHK)$ do đó $\angle AHK = 60^\circ$.

Khi đó $HK^2 = AK^2 + AH^2 - 2AK.AH.\cos 60^\circ = 12a^2 \Rightarrow AK^2 = HK^2 + AH^2$. Suy ra tam giác AHK vuông tại H .

Gọi H', K' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên BB', CC' . Ta có $V_{A.BCKH} = V_{A.B'C'K'H'}$

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = V_{AHK.A'H'K'} = AA'.S_{\Delta AHK} = 16\sqrt{3}a^3$.

Câu 54: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

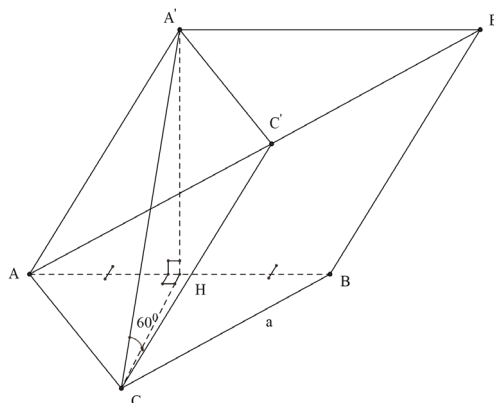
A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) .

Ta có: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC) .

$$\Rightarrow \widehat{(A'C, (ABC))} = \widehat{(A'C, HC)} = \widehat{A'CH} = 60^\circ.$$

$$CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } A'HC, \text{ ta có: } A'H = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}, S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy thể tích của khối lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là: } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Câu 55: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên (ABB_1A_1) bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

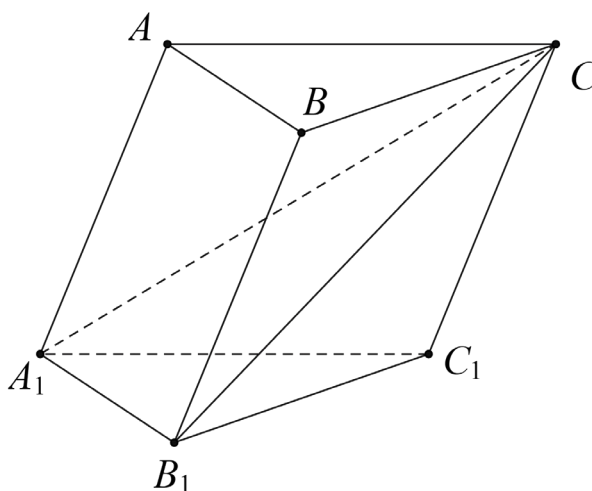
A. 12.

B. 18.

C. 24.

D. 9.

Lời giải



$$\text{Ta có: } V_{C.ABB_1A_1} = \frac{1}{3} d(C, (ABB_1A_1)) \cdot S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 = 8 \text{ (đvtt)}$$

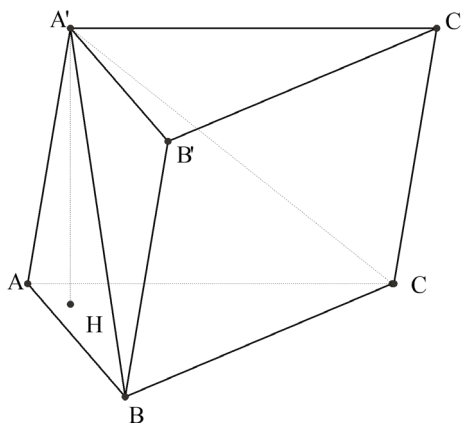
$$V_{C.ABB_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - V_{C.C_1B_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - \frac{1}{3} V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{2}{3} V_{ABC.A_1B_1C_1}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3}{2} \cdot V_{C.ABB_1A_1} = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12 \text{ (đvtt)}$$

Câu 56: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 6. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mp (ABC) suy ra $A'H$ là chiều cao của lăng trụ.

Xét khối chóp $A.A'BC$ có diện tích đáy $B = S_{A'BC} = 1$, chiều cao $h = d(A, (A'BC)) = 2$ suy ra thể

tích của khối chóp $A.A'BC$ là $V_{A.A'BC} = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} V_{A.A'BC} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'H = \frac{2}{3} \\ V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H \end{cases} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

*** Cách khác.**

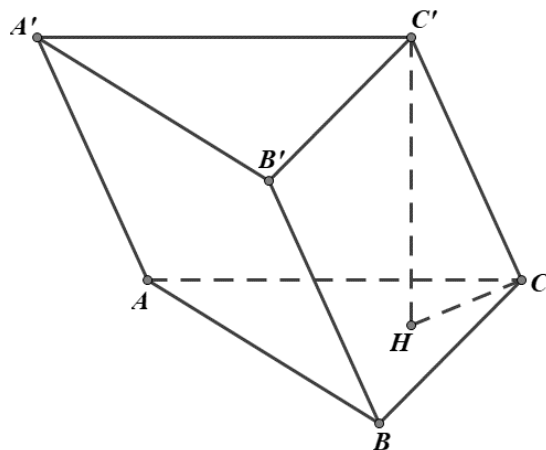
Ta thấy lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối chóp có thể tích bằng nhau là $A'.ABC$, $A'.BCB'$, $A'.B'C'C$.

Mà $V_{A'.ABC} = V_{A.A'BC} = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}$ suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$.

Câu 57: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

- A. $\frac{27}{4}$. B. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' xuống $mp(ABC)$, khi đó góc hợp bởi CC' và $mp(ABC)$ là $\widehat{C'CH}$. Theo đề bài: $\widehat{C'CH} = 60^\circ \Rightarrow C'H = C'C \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

Lại có $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3 nên $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot C'H = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Câu 58: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , đường cao BH . Biết $A'H \perp (ABC)$ và $AB = 1, AC = 2, AA' = \sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

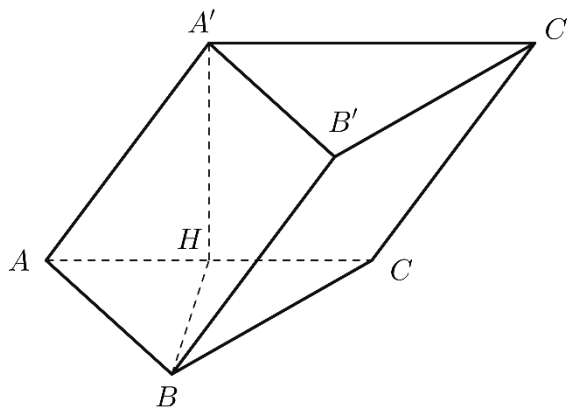
A. $\frac{\sqrt{21}}{12}$.

B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{21}}{4}$.

D. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1; AC = 2$ nên $BC = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$.

Độ dài của đường cao BH : $BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $AH = \frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3} = \frac{1}{2}$.

Khi đó độ dài đường cao $A'H$ của hình lăng trụ bằng: $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng: $V = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot A'H = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{4}$.

Câu 59: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu của A' xuống (ABC) là trung điểm BC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

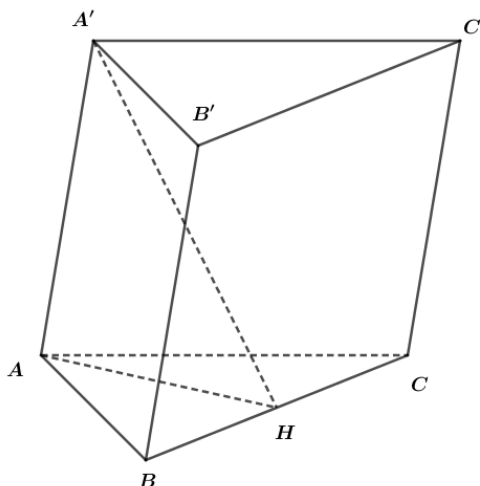
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{a^3}{8}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC suy ra $A'H \perp (ABC)$

Ta có $(A'A, (ABC)) = (A'A, AH) = \widehat{A'AH} = 30^\circ$

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $A'H = AH \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 60: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng 60° . Thể tích lăng trụ bằng:

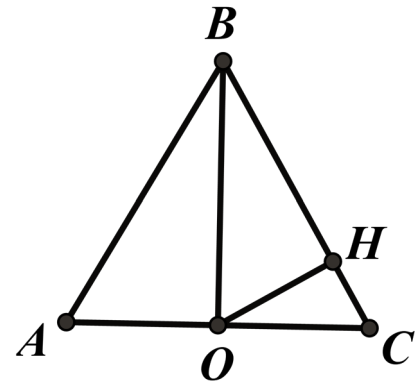
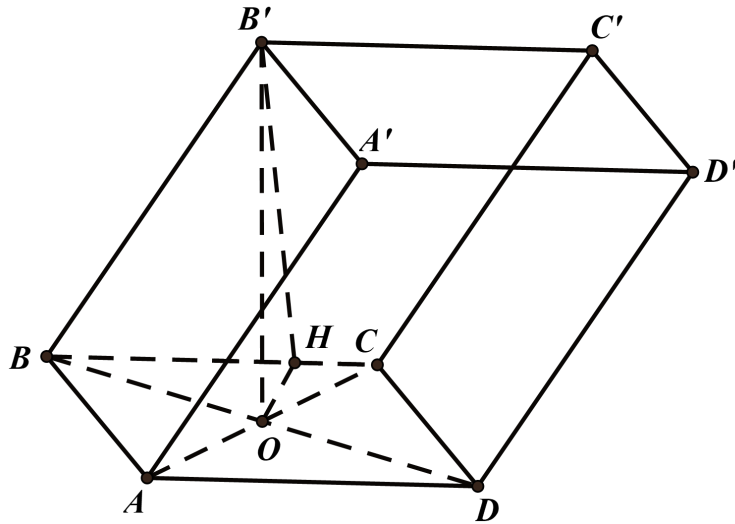
A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

D. $\frac{3a^3}{4}$

Lời giải



$ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC$. Lại có $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ là tam giác đều. $OH \perp BC$. Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy khi đó là $\widehat{B'HO} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Theo giả thiết, $B'O$ là đường cao lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

$$B'O = OH \cdot \tan \widehat{B'HO} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}.$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{\text{day}} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$

Câu 61: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng

AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đã cho.

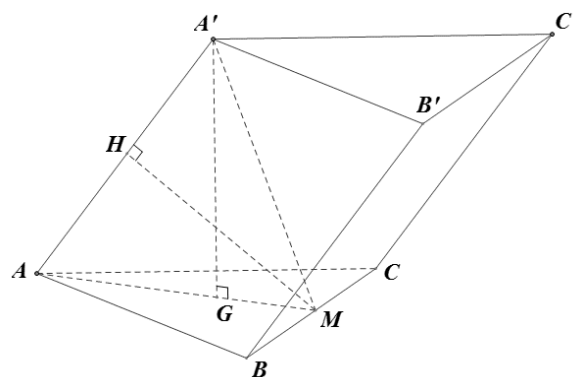
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải



$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp AA'$$

Kẻ $MH \perp AA'$ tại H , suy ra MH là đoạn vuông góc chung của giữa hai đường thẳng AA' và BC

$$\text{Tam giác } MHA \text{ vuông tại } H \text{ có } AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \frac{3}{4}a$$

$$\text{Tam giác } A'GA \text{ đồng dạng tam giác } MHA \text{ nên } \frac{A'G}{MH} = \frac{GA}{HA} \Rightarrow A'G = \frac{MH \cdot GA}{HA} = \frac{a}{3}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ là } V = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$$

Câu 62: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

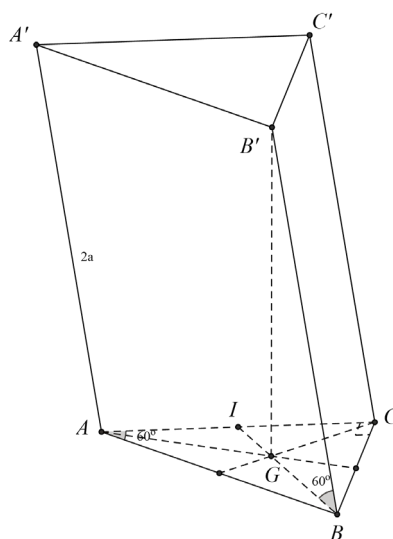
A. $\frac{9a^3}{208}$.

B. $\frac{3a^3}{26}$.

C. $\frac{9a^3}{26}$.

D. $\frac{27a^3}{208}$.

Lời giải



Ta có

$$B'G = BB' \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$BG = BB' \cos 60^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a \Rightarrow BI = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Đặt } AC = 2x \ (x > 0) \Rightarrow CI = x; BC = AC \cdot \tan 60^\circ = 2x\sqrt{3}.$$

Khi đó

$$x^2 + (2x\sqrt{3})^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{3a\sqrt{13}}{26} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3a\sqrt{13}}{26} \cdot 2 \cdot \frac{3a\sqrt{13}}{26} \cdot \sqrt{3} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{26}.$$

Vậy $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a^2\sqrt{3}}{26} \cdot a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{26}$

Câu 63: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng vào trọng tâm G của tam giác ABC . Biết tam giác $A'BB'$ có diện tích bằng $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

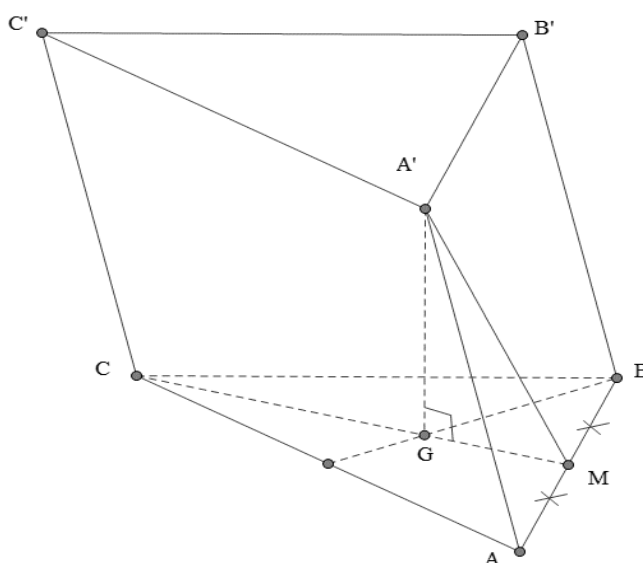
A. $\frac{6a^3\sqrt{2}}{7}$

B. $\frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$

C. $\frac{3a^3\sqrt{5}}{8}$

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Lời giải



+ Ta có $\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp A'M \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'CM) \Rightarrow AB \perp A'M$

$$\text{Nên } S_{\Delta A'B} = \frac{1}{2} A'M \cdot AB = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow A'M = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$$

Do $\triangle ABC$ đều cạnh bằng a nên $GM = \frac{1}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

+ Trong $\Delta A'GM$ vuông tại G ta có $A'G = \sqrt{A'M^2 - GM^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$

$$\text{Vây } V_{ABC.A'B'C'} = A'G.\text{dt}(\Delta ABC) = \frac{a\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$$

Câu 64: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA' = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

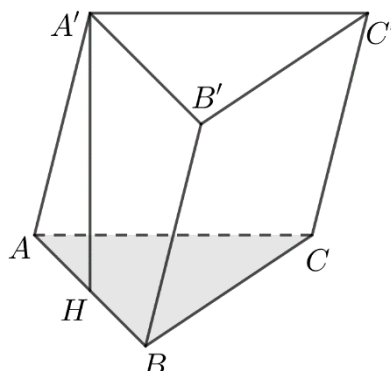
A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

C. $V = 2a^2\sqrt{2}$.

D. $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại B cạnh $AC = 2a$ nên suy ra $AB = a\sqrt{2}$, có diện tích đáy

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} (a\sqrt{2})^2 = a^2.$$

H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) nên $A'H$ là chiều cao của khối lăng trụ. Thể tích là $V = A'H \cdot S_{\triangle ABC}$.

$$H \text{ là trung điểm của cạnh } AB \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } V = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 65: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC . Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

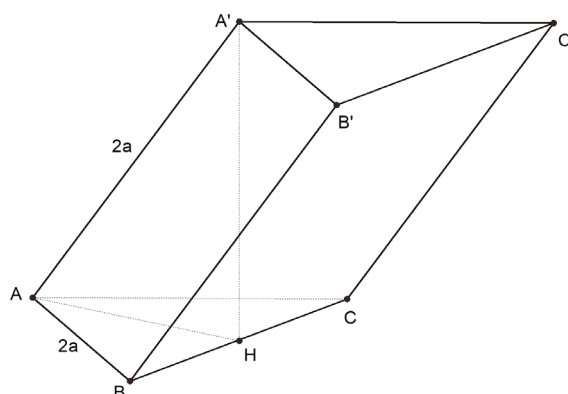
A. $a^3\sqrt{3}$.

B. $2a^3\sqrt{3}$.

C. $3a^3\sqrt{2}$.

D. $2a^3\sqrt{6}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) , suy ra H là trung điểm của BC .

Tam giác ABC đều cạnh $2a$, suy ra $AH = a\sqrt{3}$.

Đường cao hình lăng trụ: $h = A'H = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Vậy thể tích lăng trụ: $V = S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{2} AH \cdot BC \cdot A'H = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot a = a^3\sqrt{3}$.

Câu 66: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a .

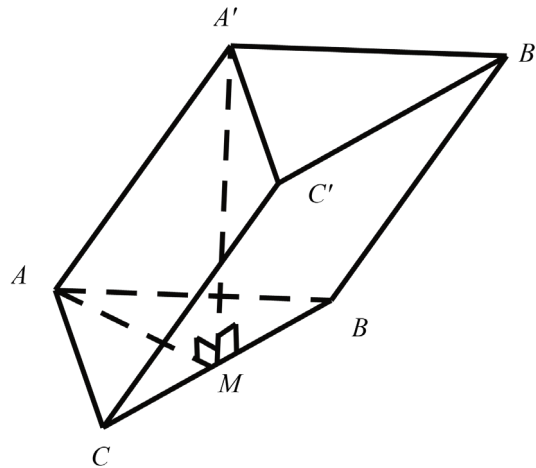
A. $V = a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

B. $V = \frac{2a^3}{3}$.

C. $V = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.

D. $V = a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC .

Theo bài ra ABC là tam giác đều cạnh a nên: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của cạnh BC nên có: $A'M \perp (ABC)$; $A'M \perp BC$.

Xét tam giác $A'MA$ vuông tại M : $A'M = \sqrt{AA'^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = A'M \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.

Câu 67: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A , $AB = a$, $AA' = 2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

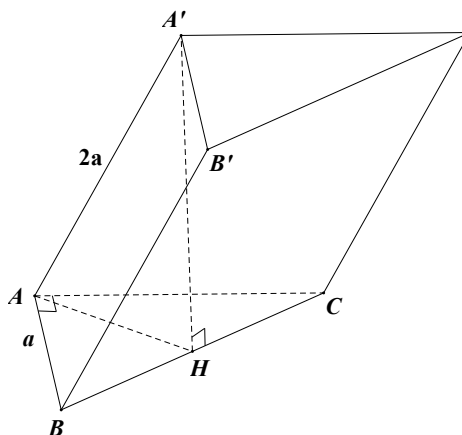
A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{14}}{4}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{7}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC = a\sqrt{2}; AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AH$$

Trong tam giác $AA'H$ vuông tại H ta có: $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{2a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{14}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a\frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^3\sqrt{14}}{4}.$$

Câu 68: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , độ dài cạnh bên bằng $\frac{2a}{3}$, hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

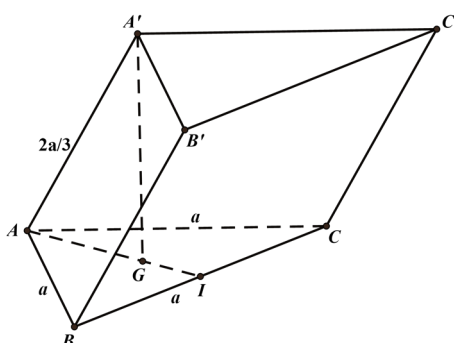
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải



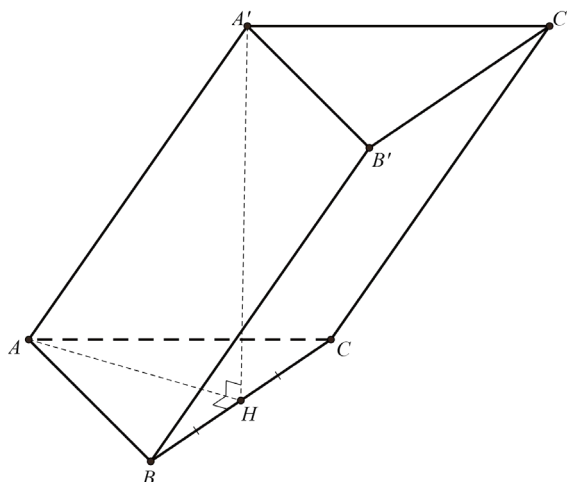
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Ta có:

$$AG = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}; A'G^2 = A'A^2 - AG^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow A'G = \frac{a}{3}.$$

$$V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

- Câu 69:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là
- A.** $\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3 \cdot \sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^3 \cdot \sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC , vì tam giác ABC đều nên ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Theo đề: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AH$. Trong tam giác vuông $A'AH$ có

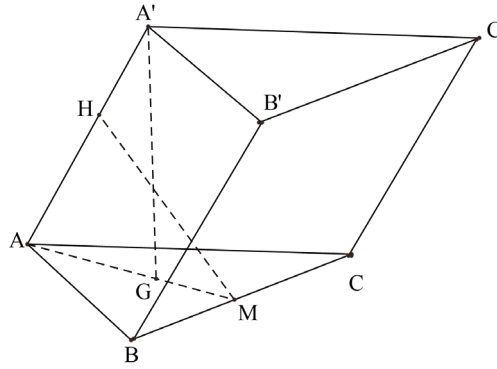
$$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = B.h = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3 \cdot \sqrt{2}}{8}.$$

- Câu 70:** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa BC và AA' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $B'.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3 \sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC , $MH \perp AA'$ tại H .

Ta có $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp HM$. Do đó $HM = d(AA', BC)$.

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AG = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \widehat{HAM} = \frac{HM}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAM} = 30^\circ.$$

$$A'G = AG \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{3}, S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{B'.ABC} = \frac{1}{3} A'G \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}.$$

Câu 71: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ACBD$ là hình thoi cạnh a , biết $A'.ABC$ là hình chóp đều và $A'D$ hợp với mặt đáy một góc 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là :

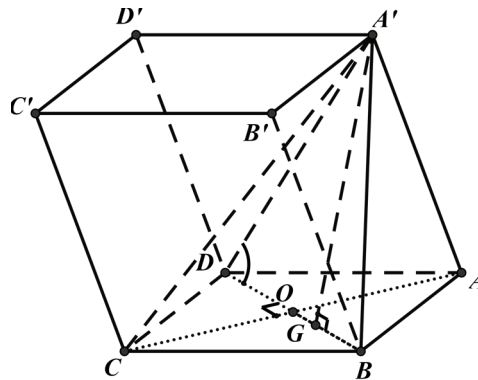
A. a^3 .

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

C. $a^3\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{(A'D, (ABCD))} = \widehat{A'DG} = 45^\circ$.

Ta giác ABC đều cạnh a nên $BG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $DB = a\sqrt{3}$, $DG = 2BG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác $A'DG$ vuông cân tại G nên $A'G = DG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AG = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = a^3.$$

Câu 72: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

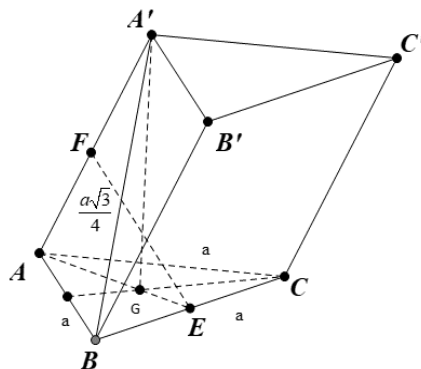
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Vì $A'G \perp (ABC)$ và tam giác ABC đều nên $A'ABC$ là hình chóp đều. Kẻ $EF \perp AA'$ và $BC \perp (AA'E)$ nên $d(AA', BC) = EF = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Đặt $A'G = h$

Ta có $A'A = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$.

Tam giác $A'AG$ đồng dạng với tam giác EAF nên

$$\frac{A'A}{EA} = \frac{AG}{FA} = \frac{A'G}{FE} \Rightarrow A'G \cdot EA = A'A \cdot FE \Leftrightarrow h \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{a}{3}.$$

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AG \cdot S_{ABC} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 73: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

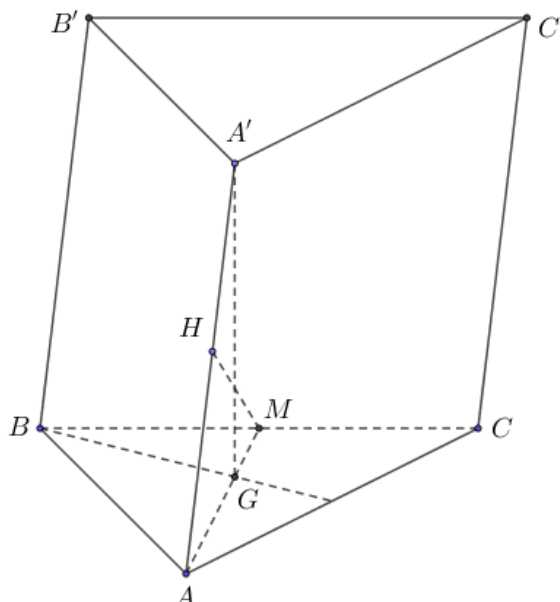
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC . Vẽ $MH \perp AA'$ ($H \in BC$).

Ta có $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AG) \Rightarrow BC \perp MH \Rightarrow d(AA', BC) = MH$.

$$AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}.$$

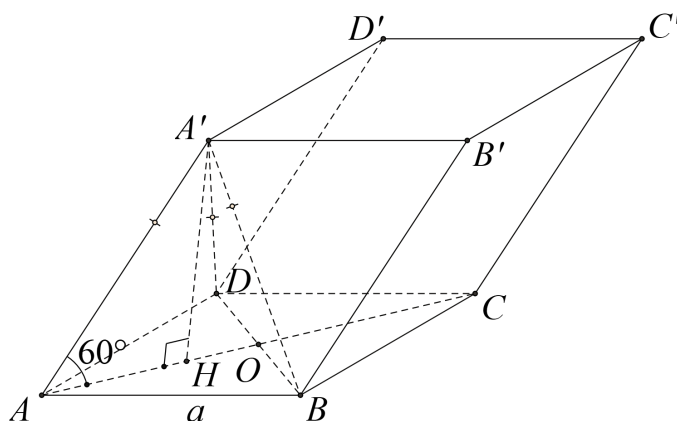
$$\text{Ta có } \frac{MH}{AH} = \frac{A'G}{AG} = \tan \widehat{GAH} \Rightarrow A'G = \frac{MH \cdot AG}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{3a}{4}} = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot A'G = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$

Câu 74: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , tâm O và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng 60° . Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D . Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có tam giác ABD cân tại A và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ABD là tam giác đều.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD . Vì A' cách đều A, B, D nên $A'H$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD . Do đó $A'H \perp (ABD)$.

Suy ra góc giữa $A'A$ và đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Ta có $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

Ngoài ra $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 75: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

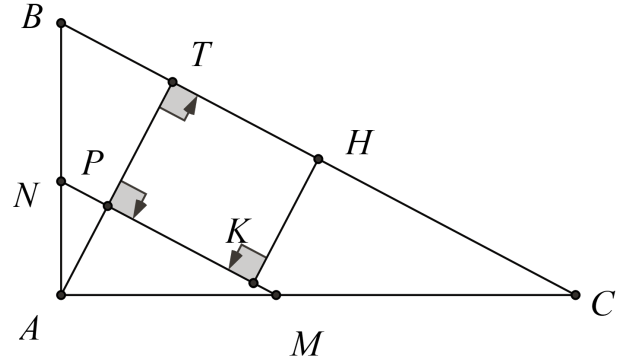
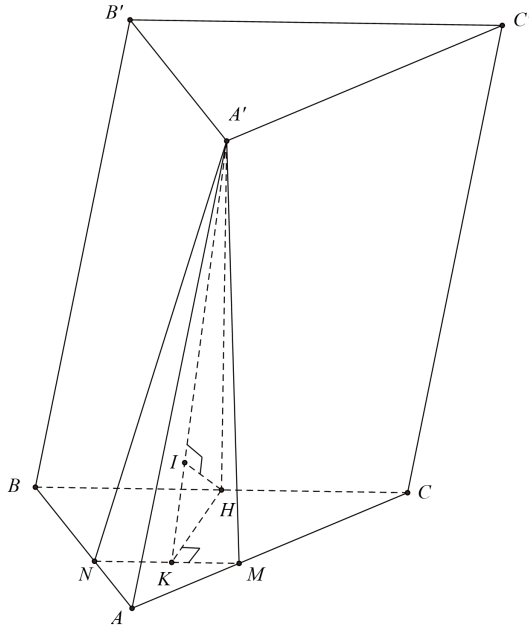
A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $V = a^3$.

C. $V = \frac{3a^3}{2}$.

D. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Kẻ $MN \parallel BC$, $N \in AB$. $HK \perp MN$, $HI \perp A'K$.

$$d(A'M; BC) = d(BC; (A'MN)) = d(H; (A'MN)) = HI \Rightarrow HI = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Kẻ } AT \parallel HK, AT \cap MN = P \Rightarrow HK = PT = \frac{2}{3} AT$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AT^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{2}{3} AT = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Tam giác } A'HK \text{ vuông tại } H \Rightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{HI^2} - \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow A'H = a.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: } V = A'H.S_{ABC} = a.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$