Chương 01

Bài 4. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. Lý thuyết

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Định nghĩa:

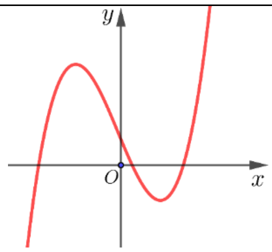
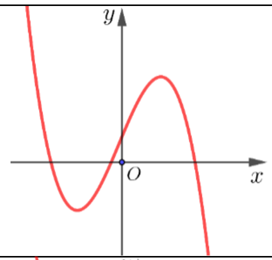
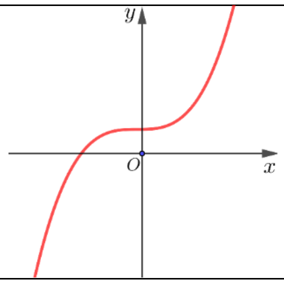
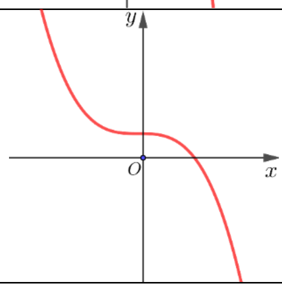
1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Xét sự biến thiên của hàm số:
   » Tìm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
   » Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
   » Lập bảng biến thiên của hàm số.
3. Vẽ đồ thị của hàm số:
   » Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...
   » Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
   » Vẽ đồ thị hàm số.

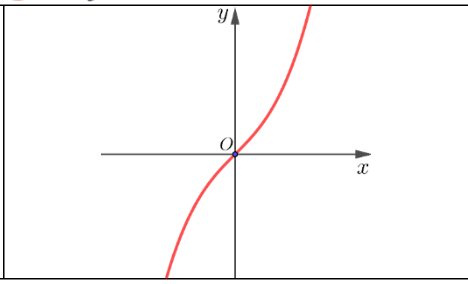
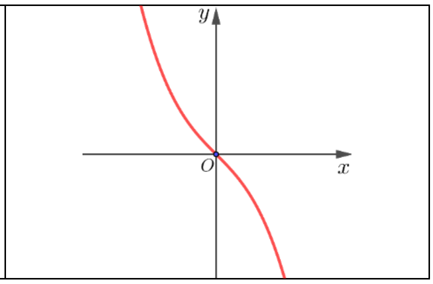
Chú ý

» Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số

✓ Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

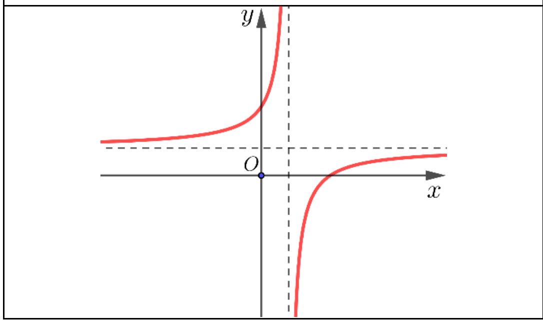
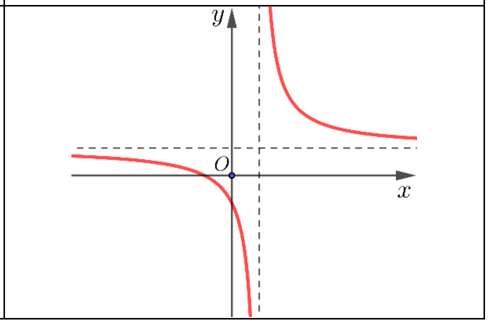
Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $(b^2 - 3ac > 0)$		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép $(b^2 - 3ac = 0)$		

Phương trình $y'=0$ vô nghiệm $\left(b^2-3ac<0\right)$		

Chú ý

» *Trường hợp: $y'=0$ vô nghiệm và có nghiệm kép, đồ thị hàm số sẽ ở dạng luôn đơn điệu nhưng trường hợp có nghiệm kép thì đồ thị hàm số có 1 đoạn hơi ngang ngang 1 chút (nhìn hình vẽ trên)*

✓ Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$

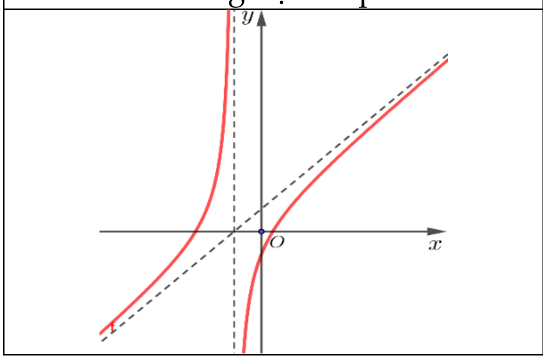
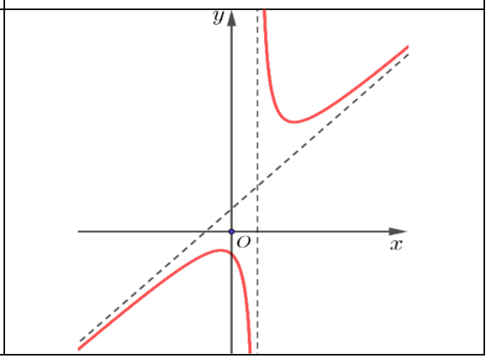
$D=ad-bc>0$	$D=ad-bc<0$
	

Chú ý

» ĐTHS có tiệm cận đứng , tiệm cận ngang .

» *Các điểm đặc biệt:* Giao điểm với , Giao điểm với .
Giao của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng.

✓ Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\left(a\neq 0\right)$

$y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép	$y'=0$ có hai nghiệm phân biệ
	

Chú ý

» Ta luôn tách được .

» Khi đó đồ thị hàm số có tiện cận đứng , Tiệm cận xiên .

Chú ý

» Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

» Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$:

(a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;

(b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

» Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n} (a \neq 0, m \neq 0)$:

(a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;

(b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Khảo sát hàm số bậc ba

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

» ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn:

- Với $a > 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$.
- Với $a < 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.

» Đạo hàm và cực trị: $y^{'} = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó:

- Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta^{'}_{y'} > 0$.
- Gọi $A(x_1; y_1)$;$B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị, theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$
- Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta^{'}_{y'} \leq 0$

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Không có tiệm cận.
- Tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y^{'\frac{-b}{3a}}$.

Ví dụ 1.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

» Tập xác định: $D =$ ¡ .

» Sự biến thiên:

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3 + 3x^2 - 4\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3 + 3x^2 - 4\right) = +\infty$.

» Bảng biến thiên:

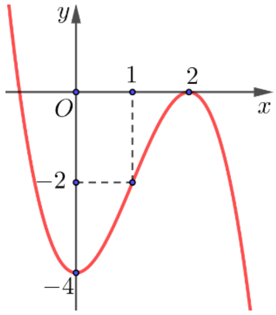
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu $y_{CT}=-4$ tại $x_{CT}=0$

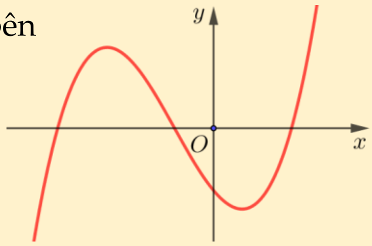
Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CĐ}=0$ tại $x_{CĐ}=2$

» Đồ thị đi qua điểm $A(-1;0), B(3;-4)$ và có tâm đối xứng là $I(1;-2)$.



Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy xác định dấu của các hệ số a, b, c và d.



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$; đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;d)\Rightarrow d<0$.

Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 dựa vào hình vẽ ta thấy $x_1<0$, $x_2>0$.

Mặt khác: $y'=3ax^2+2bx+c \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0 \\ x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0 \xrightarrow{a>0} c<0 \end{cases}$.

Vậy $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$.

Dạng 2. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

» ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn và đường tiệm cận

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = +\infty$

$\Rightarrow x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» Đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- Nếu $ad - bc > 0, \forall x \in D$.

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

- Nếu $ad - bc < 0, \forall x \in D$.

+ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Đồ thị luôn nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận là tâm đối xứng. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$

Ví dụ 2.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

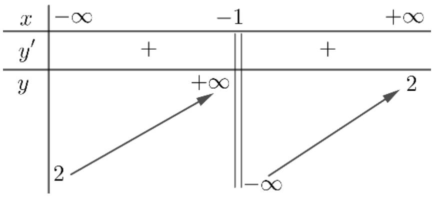
» Tập xác định: $D =$ ¡ $\setminus\{-1\}$.

» Sự biến thiên: Ta có $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0\ \forall x \in D$.

» Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = 2$.

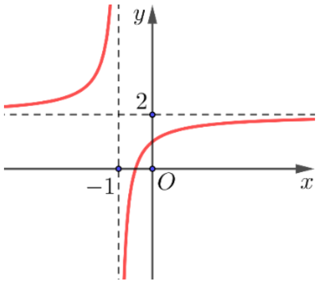
$\lim\limits_{x\to-1^+} y = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} y = \lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = +\infty$

» Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1);(-1;+\infty)$.

» Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1;2)$.



Ví dụ 2.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x}{x+1}$.

Lời giải

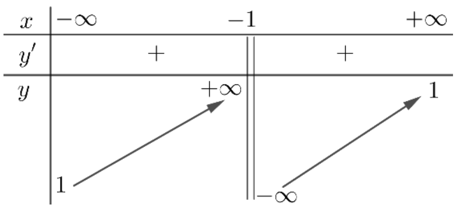
» Tập xác định: $D=¡\ \backslash\{-5\}$.

» Sự biến thiên: Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in D$.

» Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=1$.

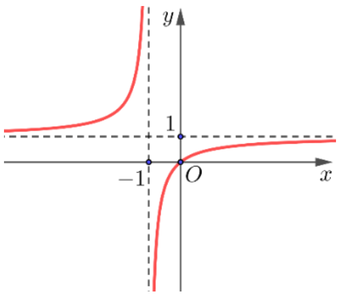
$\lim\limits_{x\to-1^+}y=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-}y=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=+\infty$

» Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

» Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1;2)$.



Dạng 3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất

Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e},\left(ad\neq 0,x\neq -\frac{e}{d}\right)$, *tử và mẫu không có nghiệm chung*. Viết hàm số dưới dạng $y=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{dx+e}$ (bằng cách chia đa thức)

» ***Bước 1:*** Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{e}{d}\right\}$.

» ***Bước 2:*** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn và đường tiệm cận

- $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{e}{d}\right)^{\pm}} y=\pm\infty\Rightarrow x=-\frac{e}{d}$ là tiệm cận đứng
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y-(\alpha x+\beta)]=0\Rightarrow y=\alpha x+\beta$ là đường tiệm cận xiên

» Đạo hàm $y'=\frac{\alpha(dx+e)^2-\gamma d}{(dx+e)^2}$.

Dấu của đạo hàm là dấu của $g(x)=\alpha(dx+e)^2-\gamma d$.

- Phương trình $y'=0$ vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép thì không có cực trị.
- Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thì có hai cực trị.

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

- Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

⁂ **Nhận xét:**

» Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

» Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$.

» Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y=\frac{2ax+b}{d}$.

» Mọi tiếp tuyến tại điểm $M\in(C)$ cắt hai đường tiệm cận tại A,B thì M là trung điểm AB

» Diện tích tam giác IAB không đổi

» Mọi điểm $M\in(C)$ có tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là một hằng số

» Nếu từ một điểm E nằm trên một đường tiệm cận của (C) thì qua E kẻ duy nhất một tiếp tuyến với (C).

Ví dụ 3.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x^2+5x+4}{x+2}$ (H).

Lời giải

Ta có $y = \dfrac{2x^2+5x+4}{x+2} = 2x+1+\dfrac{2}{x+2}$.

» Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

» Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to -2^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -2^-} y = -\infty$ nên $x=-2$ là đường tiệm đường cận đứng.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left[y-(2x+1)\right] = 0$ nên $y = 2x+1$ là đường tiệm cận xiên.

» Sự biến thiên: Ta có: $y' = 2 - \dfrac{2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2+8x+6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số nghich biến trên khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

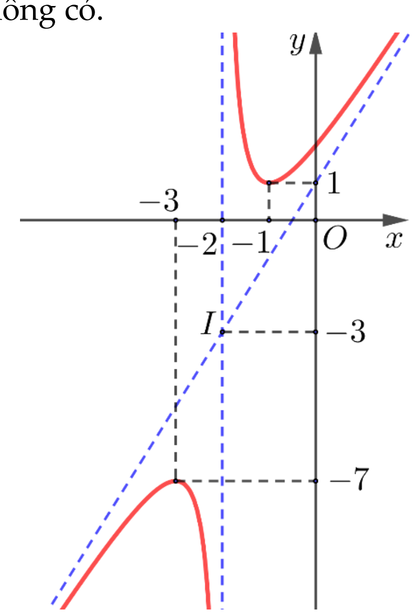
» Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

» Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $A(0;2)$.

Giao điểm với trục hoành: không có.



Ví dụ 3.2.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2+x-2}{x+1}$.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}=x-\dfrac{2}{x+1}$.

» Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

» Sự biến thiên: Ta có: $y'=1+\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq -1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

» Giới hạn và đường tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to -1^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} y=-\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm đường cận đứng.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left[y-x\right]=0$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[y-x\right]=0$ nên $y=x$ là đường tiệm cận xiên

» Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

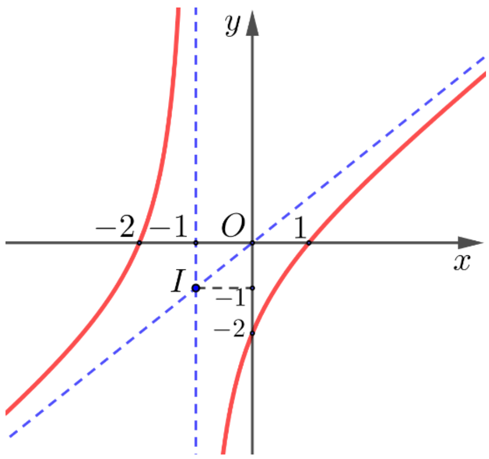
» Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $(0;-2)$.

Giao điểm với trục hoành là các điểm $(-2;0)$ và $(1;0)$.

Nhận giao điểm $I(-1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

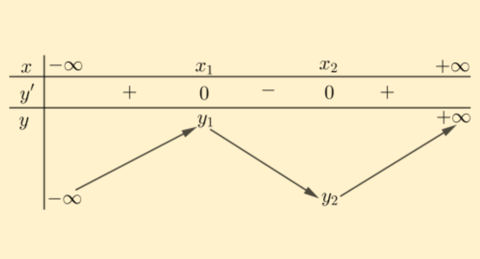
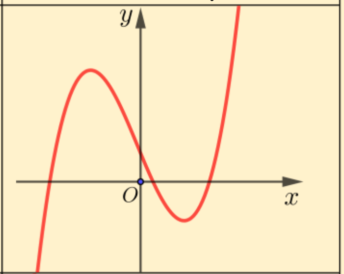
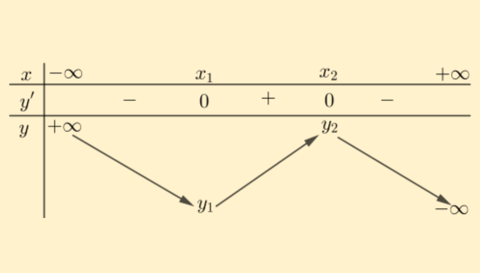
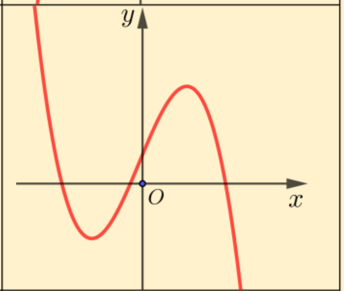
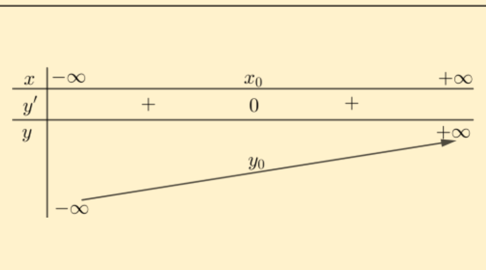
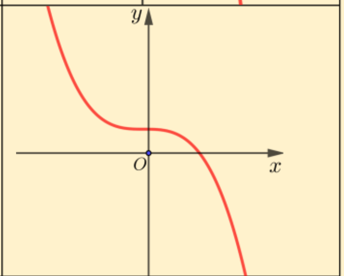
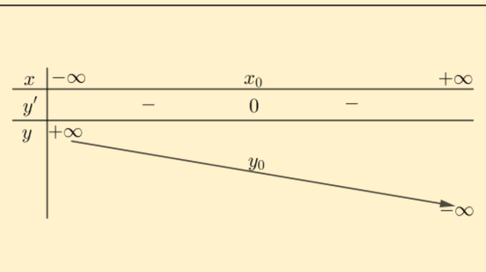
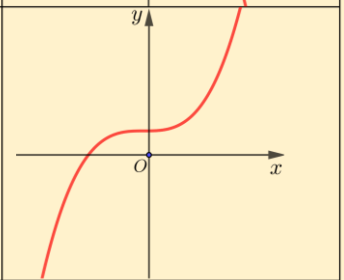
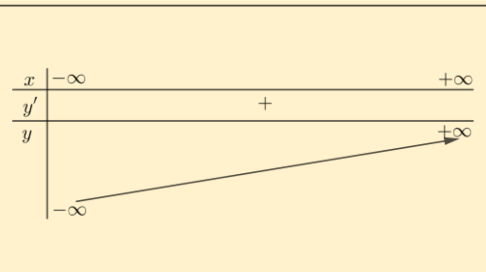
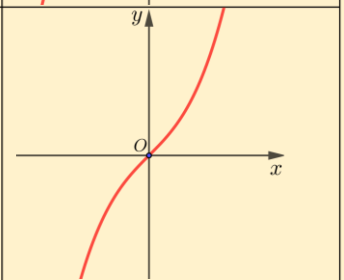
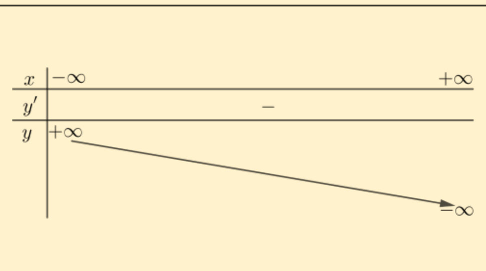
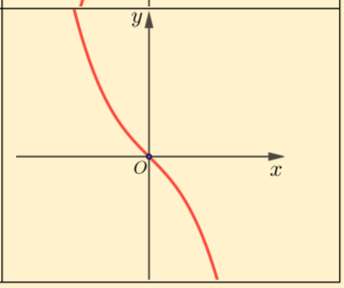
Nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Dạng 4. Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên

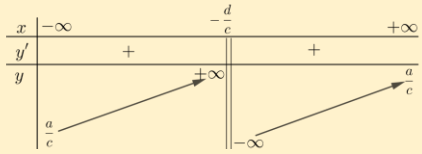
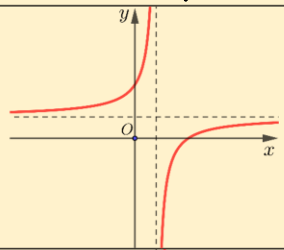
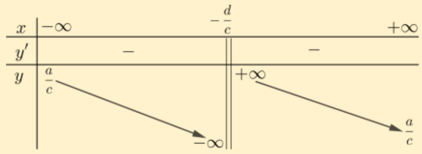
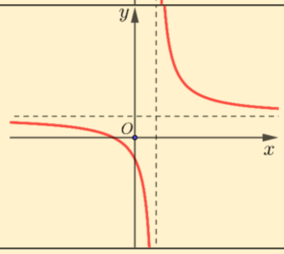
Phương pháp

⁂ Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

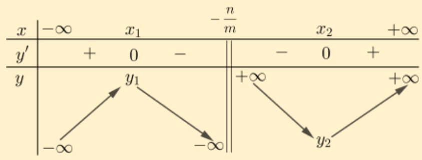
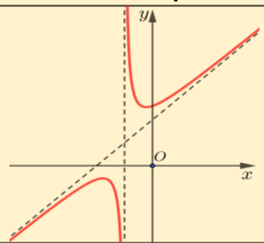
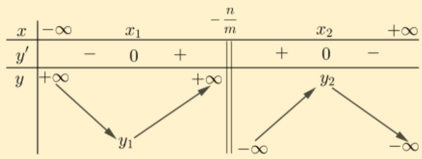
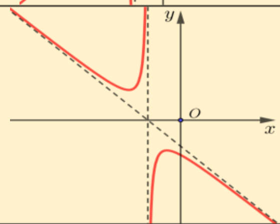
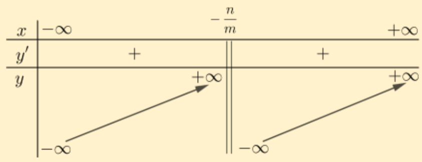
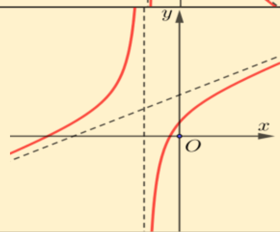
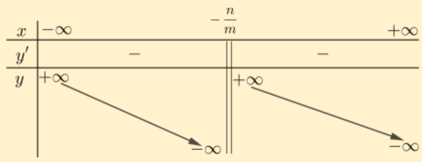
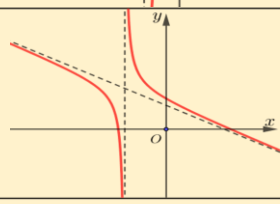
<table>
<tr><th colspan="2">Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$</th><th>Bảng biến thiên</th><th>Đồ thị</th></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH1: y' có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$</td><td>$a > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH2: y' có 1 nghiệm x_0</td><td>$a > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH3: y' vô nghiệm</td><td>$a > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Phương pháp

⁂ Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}\,(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$ có $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ và TCĐ: $x=-\frac{d}{c}$ và TCN: $y=\frac{a}{c}$

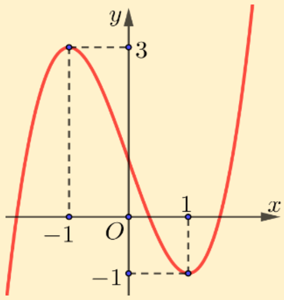
<table>
<tr><th></th><th>Bảng biến thiên</th><th>Đồ thị</th></tr>
<tr><td>» TH1 : $ad-bc>0\Leftrightarrow y'>0\,\forall x\neq-\frac{d}{c}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>» TH2 : $ad-bc<0\Leftrightarrow y'<0\,\forall x\neq-\frac{d}{c}$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

⁂ Hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}\,(a\neq 0, m\neq 0)$ có $y=Ax+B+\frac{C}{mx+n}\Rightarrow y'=A-\frac{C}{(mx+n)^2}$ và TCĐ: $x=-\frac{n}{m}$ và TCX: $y=Ax+B$

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Bảng biến thiên</th><th>Đồ thị</th></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH1:
y' có 2 nghiệm phân biệt</td><td>$A>0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$A<0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">» TH2:
y' có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm</td><td>$A>0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$A<0$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Ví dụ 4.1.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

» Ta thấy đồ thị có hai cực trị, nên hàm số của đồ thị đã cho có dạng: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

» Mà đồ thị giao với trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $d = 1$.

» Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$ nên

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

» Theo Viet thì $1.(-1) = \dfrac{c}{3a} \Leftrightarrow c = -3a$

Suy ra hàm số có dạng $y = ax^3 - 3ax + 1$

» Mặt khác đồ thị đi qua điểm $(1;-1)$ nên

$y(1) = -1 \Leftrightarrow a - 3a + 1 = -1 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow c = -3$

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x + 1$.

Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{2x+b}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Xác định a, b.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Lời giải

» Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = -1$ nên $x = -1$ là nghiệm của $2x + b = 0$

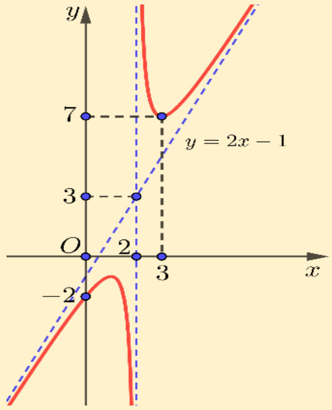
Suy ra $2(-1) + b = 0 \Leftrightarrow b = 2$

» Mặt khác đồ thị có đường tiệm cận ngang $y = -1$ nên $\dfrac{a}{2} = -1 \Leftrightarrow a = -2$

Vậy hàm số đã cho có $a = -2,\ b = 2$.

Ví dụ 4.3.

Cho hàm số hữu tỉ $y=\frac{2x^2+ax+b}{cx-2}$ có đồ thị như hình bên.
Viết công thức của hàm số.



Lời giải

» Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x=2$ nên $x=2$ là nghiệm của $cx-2=0$

$\Leftrightarrow c.2-2=0\Leftrightarrow c=1$

Suy ra hàm số có dạng $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{x-2}$

» Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;-1)$ và $(3;7)$ nên

$$\begin{cases}y(1)=-1\\ y(3)=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2+a+b}{1-2}=-1\\ \dfrac{18+3a+b}{3-2}=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-1\\ 3a+b=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=4\end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y=\dfrac{2x^2-5x+4}{x-2}$.

Dạng 5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số

Phương pháp

Vận dụng các kiến thức liên quan: Đơn điệu, Cực trị, Đường tiệm cận

» *Bước 1:* Tập xác định.

» *Bước 2:* Sự biến thiên

» Chiều biến thiên.

» Cực trị .

» Đường tiệm cận.

» Điểm đi qua.

» *Bước 3:* Kết luận đồ thị

Ví dụ 5.1.

Xác định bảng biến thiên của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 9$.

Lời giải

» Tập xác định $D = ¡$

» Sự biến thiên: $y' = -3x^2 - 6x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

» Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = -4$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$ và $y_{CT} = -36$

» Các giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

» Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-36	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

Ví dụ 5.2.

Xác định đồ thị của hàm số hữu tỉ $y = \frac{x^2+3}{x+1}$.

Lời giải

» Tập xác định: $D = ¡ \setminus \{-1\}$

» Sự biến thiên:

Ta có $y = \dfrac{x^2+3}{x+1} = x - 1 + \dfrac{4}{x+1}$

Đạo hàm $y' = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-3;-1)$ và $(-1;1)$.

» Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $y_{CĐ} = -6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = 2$

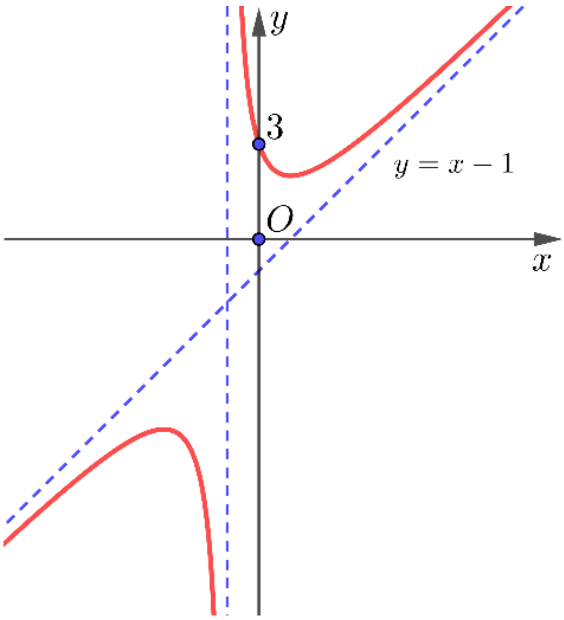
» Các giới hạn:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(x-1)\right] = 0; \lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(x-1)\right] = 0 \Rightarrow$ đồ thị có đường tiệm cận xiên là $y = x-1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y = -\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$

» Đồ thị:



Dạng 6. Xác định dấu – giá trị các hệ số

Phương pháp

- **Loại 1.** Hàm đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

  » *Bước 1:* Nhìn vào nhánh ngoài cùng của đồ thị Xác định dấu của hệ số a.

  » *Bước 2:* Điểm cắt trục tung: xác định dấu hệ số d.

  » *Bước 3:* Nhìn vào hai điểm cực trị (nếu có):

  » Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

  - Nếu đồ thị hàm số không có điểm cực trị $\Rightarrow \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0$.
  - Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị:

  Các điểm cực trị x_1, x_2 của hàm số là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

  Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$ (Vi-ét).

  Dựa vào vị trí của x_1, x_2 để suy luận các phép tính $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ mang dấu gì.

  Nếu không cho tọa độ rõ ràng, ước lượng khoảng cách từ O tới các điểm x_1, x_2.

  » *Bước 4:* Xác định tọa độ các điểm đã cho.

  » *Bước 5:* Dựa vào điểm uốn U

  » Là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

  » x_U là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

  » Điểm U là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị.

⁂ **Nhận xét:** Bảng biến thiên mô phỏng đồ thị hàm số.

Cách đọc bảng biến thiên giống như cách đọc đồ thị.

- **Loại 2.** Hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ và $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$.

  » *Bước 1:* Xác định các đường tiệm cận.

  Dùng công thức tính nhanh định nghĩa) để tìm mối quan hệ giữa các hệ số.

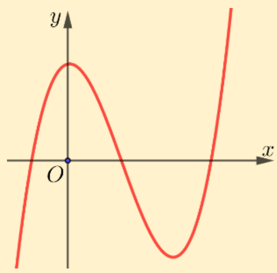
  Lưu ý: Giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

  » *Bước 2:* Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số: giao với các trục tọa độ, cực trị.

  » *Bước 3:* Từ hình dáng đồ thị (bảng biến thiên), xác định dấu của đạo hàm dựa vào các khoảng đồng biến/nghịch biến. Từ đó xác định dấu của các hệ số.

Ví dụ 6.1.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu giá trị dương?



Lời giải

» Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

» Đồ thị có nhánh cuối cùng đi lên nên $a > 0$

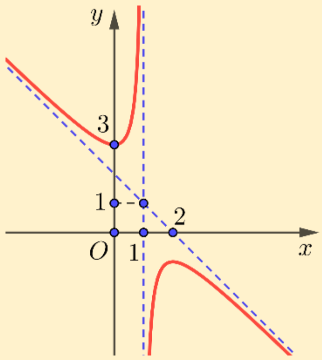
» Đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ lớn hơn 0 nên $d > 0$

» Từ đồ thị ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị bằng 0 nên $c = 0$ và một điểm cực trị dương nên $-\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$

Vậy trong các hệ số a, b, c, d có 2 giá trị dương là a và d.

Ví dụ 6.2.

Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên.
Tính$P = a + b + c$.



Lời giải

Ta có $y = ax + 2 + \dfrac{b}{x+c}$

» Nên đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = ax + 2$, mà như hình vẽ đường tiệm cận xiên đi qua điểm $(1;1)$ suy ra $1 = a.1 + 2 \Leftrightarrow a = -1$

» Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$

Khi đó hàm số đã cho có dạng $y = -x + 2 + \dfrac{b}{x-1}$

» Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;3)$ nên $-0 + 2 + \dfrac{b}{0-1} = 3 \Leftrightarrow 2 - b = 3 \Leftrightarrow b = -1$

Vậy $P = a + b + c = -1 + (-1) + (-1) = -3$.

Dạng 7. Đọc đồ thị của đạo hàm

Phương pháp

Xác định tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$, $g(x) = f\left(u(x)\right)$, $g(x) = g\left(f(x)\right)$ khi biết đồ thị (bảng biến thiên) của đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ hoặc $y = f'\left(u(x)\right)$

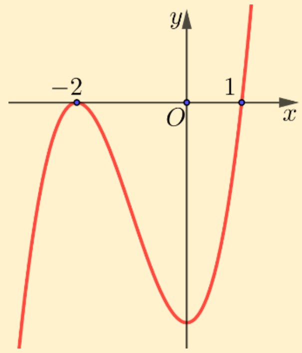
» ***Bước 1:*** Tính $g'(x)$ (chú ý hàm hợp dạng $g(x) = f\left(u(x)\right) \Rightarrow g'(x) = u'(x)\cdot f'\left(u(x)\right)$)

» ***Bước 2:*** Giải $g'(x) = 0$ ta được $x_1; x_2 \ldots; x_i$ là các điểm mà tại đó $g'(x) = 0$ hoặc $g'(x)$không xác định.

» ***Bước 3:*** Lập bảng xét dấu của $g'(x)$ →lập được bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$. Dựa vào bảng biến thiên xét các tính chất đơn điệu, cực trị, min, max…

Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y = f'(x)$có đồ thị trong hình dưới đây. Lập bảng xét dấu của $y = f'(x)$?



Lời giải

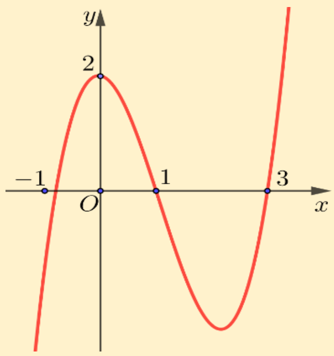
» Từ đồ thị của $y = f'\left(x\right)$ ta có, $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

» Bảng xét dấu của $y = f'\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $y = f'(x)$có đồ thị trong hình dưới đây. Tìm điểm cực đại của hàm số đã cho.



Lời giải

Từ đồ thị của $f'(x)$ ta có, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=1 \quad (x_1<0) \\ x=3 \end{array}\right.$

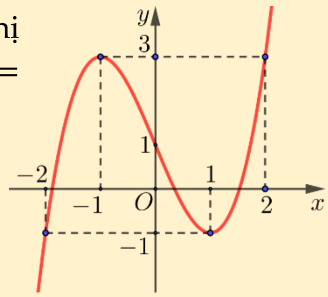
Bảng biến thiên của $y=f(x)$:

x	$-\infty$		x_1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	f_{CD}	$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x-1)-2x+1$ trên $[0;1]$



Lời giải

Ta có $g'(x)=2f'(2x-1)-2$

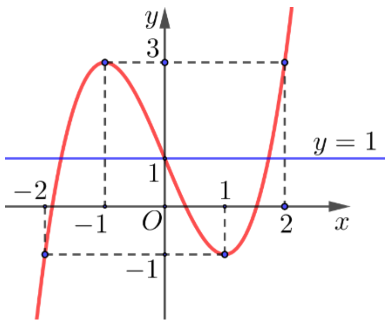
Cho $g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2f'(2x-1)-2\ge 0 \Leftrightarrow f'(2x-1)\ge 1$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy trên $[0;1]$:

» Đường thẳng $y=1$ cắt $y=f'(x)$ tại $x=0$.

» $y=f'(x)$ nằm phía trên $y=1$ khi $x<0$

» $y=f'(x)$ nằm phía dưới $y=1$ khi $x>0$



Do đó $f'(2x-1)\ge 1 \Leftrightarrow 2x-1\le 0 \Leftrightarrow x\le \dfrac{1}{2}$

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	

Từ BBT giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x)$ trên đoạn $[0;1]$ là $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Dạng 8. Sự tương giao

Phương pháp

Các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là các đường $(C_1), (C_2)$, khi đó:

» Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của các đồ thị $(C_1), (C_2)$.

» Số giao điểm của các đường $(C_1), (C_2)$chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ví dụ 8.1.

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị của hàm số $y = 3x^3 - 9x + 3(m-1)$ giao với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

» Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=3x^3-9x+3(m-1)$ với trục hoành là: $3x^3-9x+3(m-1)=0 \Leftrightarrow -x^3+3x=m-1 \quad (1)$

» Xét hàm số $f(x)=-x^3+3x$ (C) có $f'(x)=-3x^2+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

» Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $f(x)=-x^3+3x$ (C) giao $y=m-1$ tại hai điểm phân biệt. Do đó $m=3$ hoặc $m=-1$.

Vậy chỉ có một giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 8.2.

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m^2+1)x + m - 3$ và parabol $y = 2x^2 + x - m - 2$ có hai giao điểm phân biệt và tổng hoành độ hai giao điểm đó là 3?

Lời giải

» Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là:

$$x^3-3x^2+(2m^2+1)x+m-3=2x^2+x-m-2 \Leftrightarrow x^3-5x^2+2m^2x+2m-1=0 \quad (1)$$

Ycbt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ (trong đó có một nghiệm đơn và một nghiệm kép). Không mất tính tổng quát giả sử nghiệm kép là x_1.

» Theo Vi - et: $x_1+x_2=5$.

» Theo đề bài: $x_1+x_2=3$. Do đó $x_1=2, x_2=1$. PT (1) nhận $x_1=2, x_2=1$ làm nghiệm nên $\left\{\begin{array}{l} 8-20+4m^2+2m-1=0 \\ 1-5+2m^2+2m-1=0 \end{array}\right.$ (vô nghiệm). Không tồn tại giá trị m thỏa mãn.

Dạng 9. Bài toán thực tế liên môn đưa về khảo sát hàm số

Phương pháp

» *Bước 1:* Xác định yếu tố chọn làm ẩn, chỉ ra điều kiện (nếu có)
» *Bước 2:* Xây dựng phương trình hàm số từ các dữ kiện của bài toán.
» *Bước 3:* Giải bài toán liên quan đến hàm số và kết luận.

Ví dụ 9.1.

Nhiệt độ T của một người trong cơn bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6 (0 \le t \le 11)$, trong đó T là nhiệt độ $(oF - Fahrenheit)$ theo thời gian t trong ngày. Biết rằng $oC = \frac{oF-32}{1{,}8}$, độ chênh lệch (theo độ oC) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải

» Xét hàm số: $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$ với $t \in [0;\, 11]$

$\Rightarrow T'(t) = -0{,}2t + 1{,}2;\;\; T'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$

» Đồng thời ta có: $\begin{cases} T(0) = 98{,}6^oF = 37^0C \\ T(6) = 102{,}2^oF = 39^0C \\ T(11) = 99{,}7^oF = 37{,}6^0C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{t\in[0;12]} T(t) = T(6) = 39^0C \\ \min\limits_{t\in[0;12]} T(t) = T(0) = 37^0C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta t = 2^0C$

» Vậy độ chênh lệch (theo độ ^oC) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là 2^0C.

Ví dụ 9.2.

Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

» Theo giả thiết chiều dài đoạn dây thứ nhất chính là chu vi của hình vuông và bằng $4a$

» Ta có chiều dài đoạn dây thứ hai là $60 - 4a$ và cũng chính là chu vi của đường tròn bán kính r $\Rightarrow 2pr = 60 - 4a \Rightarrow r = \dfrac{30-2a}{p} > 0 \Rightarrow a < 15$

» Do đó tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là

$$S_{vuong} + S_{tron} = a^2 + p\frac{(30-2a)^2}{p^2} = a^2 + \frac{(30-2a)^2}{p}$$

» Đặt $S(a) = a^2 + \dfrac{(30-2a)^2}{p}$ với $0 < a < 15$

» Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $S(a)$ với $0<a<15$

» Khi đó ta có: $S'(a)=2a+\dfrac{-4(30-2a)}{p}=\dfrac{2}{p}\left[(p+4)a-60\right]$, $S'(a)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{60}{p+4}<15$

» Lập bảng biến thiên:

a	0		$\frac{60}{p+4}$		15
$S'(a)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$S(a)$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$	‖

» Dựa vào bảng biến ta có: $\min\limits_{a\in\left(0;\frac{L}{4}\right)} S(a)=S\left(\dfrac{60}{p+4}\right)$ và khi đó bán kính của đường tròn sẽ là

$r=\dfrac{30}{p+4}=\dfrac{a}{2}$. Do đó lập tỉ số ta sẽ có $\dfrac{a}{r}=2$.

Ví dụ 9.3.

Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

» Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

» Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000-100x$ chiếc.

» Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng).

» Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12+x$ (nghìn đồng).

» Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x)=(3000-100x)(12+x) \text{ (nghìn đồng).}$$

» Xét hàm số $f(x)=(3000-100x)(12+x)$ trên $(0;+\infty)$.

» Ta có: $f(x)=-100x^2+1800x+36000=-100(x-9)^2+44100\le 44100$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=9$.

» Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.