Chương 01

Bài 1. ĐƠN ĐIỆU & CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. Lý thuyết

1. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

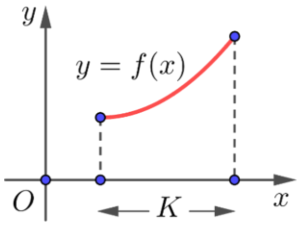
Định nghĩa:

Kí hiệu K là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.
Hàm số $y = f(x)$

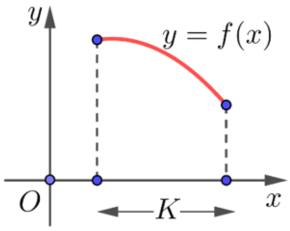
- Gọi là *đồng biến* trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Gọi là *nghịch biến* trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Chú ý

» Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị *đi lên* từ trái sang phải (*Hình 1a*).
» Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị *đi xuống* từ trái sang phải (*Hình 1b*).



Hình 1a



Hình 1b

2. Tính đơn điệu của hàm số

Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý

» Định lí vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trong K.
» Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng K.

3. Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty, b$ có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực đại*** tại x_0.
- $\exists h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực tiểu*** tại x_0.

Chú ý

» Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực đại* của *hàm số* $f(x)$.
Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là $f_{CĐ}$ hay $y_{CĐ}$.
Điểm $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ được gọi là *điểm cực đại* của *đồ thị hàm số.*

» Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là *điểm cực tiểu* của *hàm số* $f(x)$.
Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT}.
Điểm $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ được gọi là *điểm cực tiểu* của *đồ thị hàm số.*

» Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.
Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (cực trị) của hàm số.

4. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lý:

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

» Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$ Cực tiểu	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$ Cực đại	$\searrow$	

Chú ý

» Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

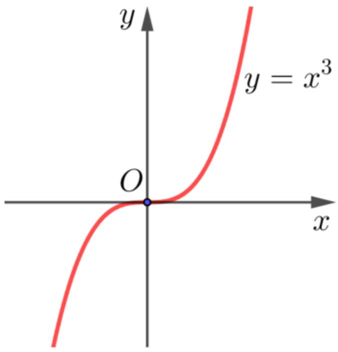
(1) Tìm tập xác định của hàm số.

(2) Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

(3) Lập bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

» Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi một công thức

Phương pháp

» *Bước 1:* Tìm tập xác định D của hàm số.
» *Bước 2:* Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
» *Bước 3:* Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ theo thứ tự tăng dần.
Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
» *Bước 4:* Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 1.1.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.2.

Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.3.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 1.4.

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = log_3(x^2 - 2x)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 2. Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi đồ thị - bảng biến thiên

Phương pháp

» Với đồ thị hàm số, quan sát: hướng lên – xuống của *đường cong* (chiều từ trái sang phải).
» Với bảng biến thiên, quan sát: hướng lên – xuống của *mũi tên* (chiều từ trái sang phải).
» Với bảng xét dấu, quan sát: dấu âm - dương của $f'(x)$.

Ví dụ 2.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

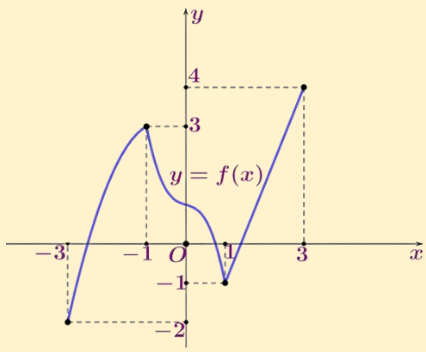
Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$.



Lời giải

....
....
....
....
....

Dạng 3. Xác định cực trị của hàm số cho bởi công thức

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Tìm tập xác định D của hàm số.

» ***Bước 2:*** Tính đạo hàm $f'(x)$ của các hàm số. Tìm các điểm $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\} \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại.

» ***Bước 3:*** Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ theo thứ tự tăng dần.
Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

» ***Bước 4:*** Kết luận hàm số đạt cực trị tại $x = ?, y = ?$ (nếu có).

Ví dụ 3.1.

Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.2.

Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.3.

Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x+2}{3x-1}$

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 3.4.

Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2-4x+4}{1-x}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.5.

Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2^{x^2-5x}$

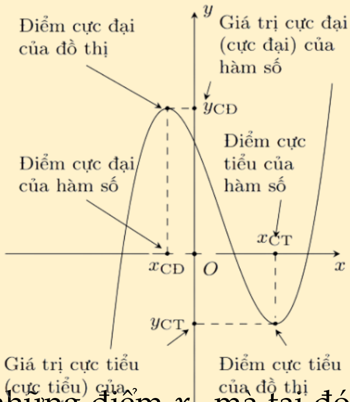
Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 4. Xác định cực trị của hàm số cho bởi bảng biến thiên – đồ thị

Phương pháp

Nhận xét:



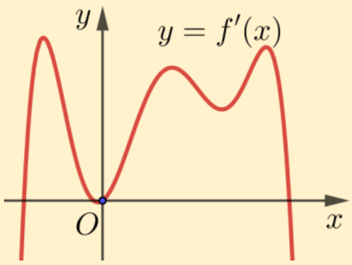
» Hàm số $f(x)$

có cực trị	y' đổi dấu
không cực trị	y' không đổi dấu
chỉ có 1 cực trị	y' đổi dấu 1 lần
có 2 cực trị	y' đổi dấu 2 lần
có 3 cực trị	y' đổi dấu 3 lần

» Đối với một hàm số bất kì, hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm x_0 mà tại đó đạo hàm triệt tiêu $f'(x_0) = 0$ hoặc đạo hàm không xác định tại đó.

Ví dụ 4.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ bao nhiêu có điểm cực tiểu và điểm cực đại?

Lời giải

Ví dụ 4.3.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hãy thiết lập công thức hàm số $y = f(x)$ đã cho?

Lời giải

Dạng 5. Toán thực tế áp dụng tính đơn điệu của hàm số

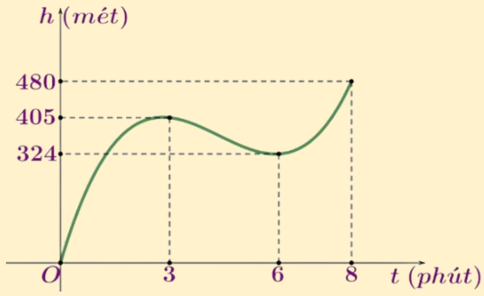
Phương pháp

» Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị *tốc độ tức thời* của chuyển động tại t_0.

» Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là *gia tốc tức thời* tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Ví dụ 5.1.

Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$.
Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn như hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.2.

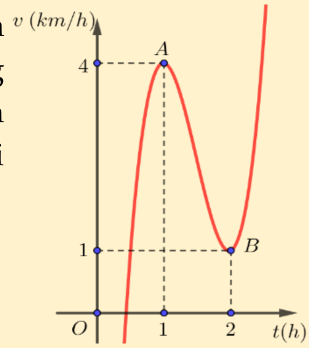
Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$. Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Một vật chuyển động với vận tốc v(km/h) phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1h$ vật có vận tốc $v_1 = 4$km/h và tại thời điểm $t_2 = 2h$ vật có vận tốc $v_2 = 1$km/h. Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3h$.



Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 6. Bài toán liên quan tính đơn điệu có chứa tham số

Phương pháp

(1) Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định

» *Bước 1:* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

» *Bước 2:* Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y ***đồng biến*** trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

Để y ***nghịch biến*** trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

(2) Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

» *Bước 1:* Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ Tính $y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$

» *Bước 2:* Điều kiện để hàm đơn điệu:

Để y ***đồng biến*** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$

Để y ***nghịch biến*** trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - bc < 0$.

Ví dụ 6.1.

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m+2)x - 2$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 6.2.

Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x-1}$. Xác định điều kiện của tham số m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

Dạng 7. Bài toán hàm hợp

Phương pháp

Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $y = f\big(u(x)\big)$ từ bảng biến thiên/đồ thị của $f'(x)$

» ***Bước 1:*** Tính $y' = u'.f'(u) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u' = 0 \\ f'(u) = 0 (*) \end{array}\right.$

» ***Bước 2:*** Để giải $(*)$ ta tìm $f'(x) = 0$ (đồ thị cắt trục hoành).

Giả sử $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{array}\right. \longrightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = a \\ \vdots \\ u = b \end{array}\right. \rightarrow$ nghiệm của $(*)$.

» ***Bước 3:*** Lập bảng xét dấu của $y' = u'.f'(u) \Rightarrow$ khoảng đơn điệu cần tìm.

» **Lưu ý:** Bài toán tìm cực trị của hàm số $y = f\big(u(x)\big)$ ta làm tương tự

Ví dụ 7.1.

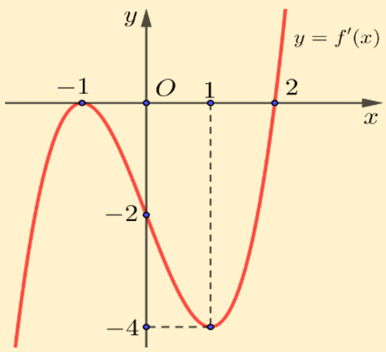
Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(1 - 2x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Lời giải

Ví dụ 7.2.

Cho hàm số$y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xác định các khoảng nghịch biến của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$.



Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 7.4.

Cho hàm số $y = f(x)$có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f^{'}(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....