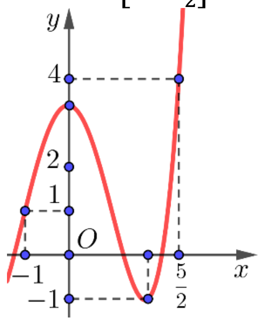
Chương 01

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là

A. $M = 4, m = 1$. **B.** $M = 4, m = -1$. **C.** $M = \frac{7}{2}, m = -1$. **D.** $M = \frac{7}{2}, m = 1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M = 4, m = -1$.

» Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		3		5		7		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[3; 7]$. Ta có giá trị của $M + 2m$ là

A. $M + 2m = 1$. **B.** $M + 2m = 7$. **C.** $M + 2m = 3$. **D.** $M + 2m = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M = \max\limits_{[3;7]} f(x) = 5$ và $m = \min\limits_{[3;7]} f(x) = 1$ nên $M + 2m = 7$.

» Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?

x	-3		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	3	↘	0	↗	2	↘	1

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

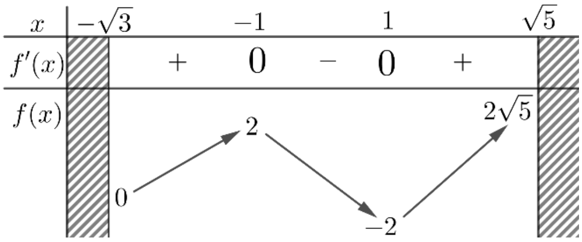
Lời giải

Chọn A

Ta có $M = \underset{[-1;2]}{Max} f(x) = f(-1) = 3$ và $m = \underset{[-1;2]}{Min} f(x) = f(0) = 0$.

Vậy $M + m = 3$.

» Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\underset{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}{\min} y = 0$. **B.** $\underset{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}{\max} y = 2$. **C.** $\underset{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}{\max} y = 2\sqrt{5}$. **D.** $\underset{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}{\min} y = 1$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào BBT có $\underset{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}{\min} y = -2$, $\underset{[-\sqrt{3};\sqrt{5}]}{\max} y = 2\sqrt{5}$

» Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $M = 5$. **B.** $M = -5$. **C.** $M = \frac{1}{3}$. **D.** $M = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

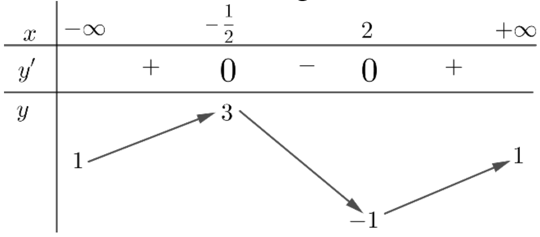
Hàm số đã cho xác định trên $[0; 2]$.

Ta có: $y' = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0; 2]$.

$y(0) = \frac{1}{3}, y(2) = -5$

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $M = \frac{1}{3}$.

» Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

A. $\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = -\frac{1}{2}$. **B.** $\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = -1$. **C.** $\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = 1$. **D.** $\underset{\mathbb{R}}{\text{Max}}\, y = 3$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = -\frac{1}{2}$.

» Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số$y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $-4; -2)$.

A. $\underset{[-4;2)}{\min} y = 4$. **B.** $\underset{[-4;2)}{\min} y = 7$. **C.** $\underset{[-4;2)}{\min} y = 5$. **D.** $\underset{[-4;2)}{\min} y = \frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -1 + \frac{1}{(x+2)^2}$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

x	-4		-3		-2
y'	‖	$-$	0	$+$	‖
y	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[-4;2)} y = 7$.

» Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$ bằng

A. 11. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -12x^3 + 12x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

» Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ **B.** $\max\limits_{-1;1} f(x) = f(0)$

C. $\min\limits_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ **D.** $\min\limits_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

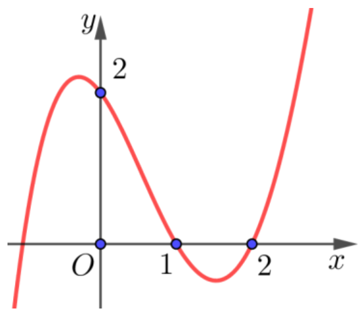
Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị và điểm đó là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$hay $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

» Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$liên tục trên $\mathbb{R}$và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$khi và chỉ khi



A. $m > f(0)$. **B.** $m \geq f(2) - 4$. **C.** $m \geq f(0)$. **D.** $m > f(2) - 4$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) < 2x + m \Leftrightarrow m > f(x) - 2x \Leftrightarrow m \geq \max_{(0;2)}[f(x) - 2x]$$

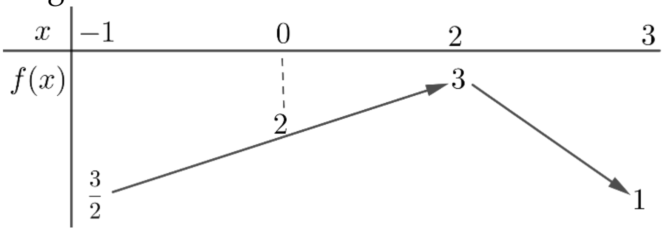
Ta tìm $\max_{[0;2]}[f(x) - 2x]$. Đặt $g(x) = f(x) - 2x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2$

Thấy rằng $\forall x \in [0;2], f'(x) - 2 < 0$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} g(x) = g(0) = f(0)$$

Vậy $m \geq f(0)$

» Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \geq m(x^3 - 3x^2 + 5)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;3]$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** Vô số **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Gọi $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ trên đoạn $[-1;3]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$g(-1) = 1; g(0) = 5; g(2) = 1; g(3) = 5 \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq 5, \forall x \in [-1;3]$$

$$f(x) \geq m(x^3 - 3x^2 + 5), \forall x \in [-1;3] \Leftrightarrow m \leq \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in [-1;3] \Leftrightarrow m \leq \min_{[-1;3]} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Vì hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$

Suy ra tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ trên đoạn $[-1;3]$

Suy ra $m \in -\infty; \min_{[-1;3]} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$ Số phần tử của tập hợp S là vô số

» Câu 12. Tìm mđể bất phương trình $x + \frac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.

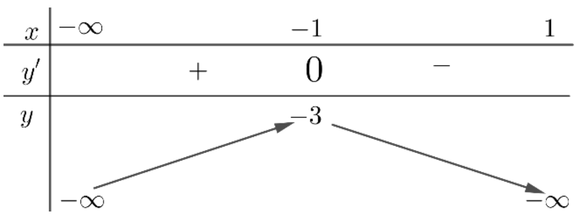
A. $m \leq 5$. **B.** $m \leq -3$. **C.** $m \leq 1$. **D.** $m \leq -1$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = x + \frac{4}{x-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3(l) \\ x = -1(tm) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Vậy $m \leq -3$

» Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Kí hiệu $M = \max_{x \in [0;2]} f(x)$, $m = \min_{x \in [0;2]} f(x)$. Khi đó $M + m$bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{-2}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Suy ra $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$là hàm số liên tục và đồng biến trên $[0;2]$.

Vậy$M=\max\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(2)=\frac{1}{3}$,$m=\mathop{min}\limits_{x\in[0;2]} f(x)=f(0)=-1\Rightarrow M+m=\frac{1}{3}-1=\frac{-2}{3}$.

» Câu 14. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt được tại x_0. Giá trị x_0 bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

$y^{'}=6x^2+6x-12$.

$y^{'}=0\Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$.

Khi đó: $y(-1)=15$; $y(1)=-5$; $y(2)=6$.

Vậy $\min\limits_{[-1;2]} y=y(1)\Rightarrow x_0=1$

» Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$ **B.** $\max\limits_{-1;1} f(x)=f(0)$

C. $\mathop{min}\limits_{(-\infty;-1)} f(x)=f(-1)$ **D.** $\mathop{min}\limits_{(-1;+\infty)} f(x)=f(0)$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số có duy nhất một điểm cực trị và điểm đó là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy trong khoảng $(0;+\infty)$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ hay $\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)$.

» Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ và có bảng biến thiên trên $-5;7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5		1		7	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$		6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9	

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\mathop{min}\limits_{-5;7)} f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $-5;7)$.

B. $\mathop{max}\limits_{-5;7)} f(x)=6$ và $\mathop{min}\limits_{-5;7)} f(x)=2$.

C. $\mathop{max}\limits_{-5;7)} f(x)=9$ và $\mathop{min}\limits_{-5;7)} f(x)=2$.

D. $\mathop{max}\limits_{-5;7)} f(x)=9$ và $\mathop{min}\limits_{-5;7)} f(x)=6$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, ta nhận thấy:

● Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2, đạt tại $x=1\in -5;7)$.

● Ta có $\left\{\begin{array}{l} f(x)\le 9,\forall x\in -5;7) \\ \mathop{lim}\limits_{x\to 7^-} f(x)=9 \end{array}\right.$. Mà $7\notin -5;7)$ nên không tồn tại $x_0\in -5;7)$ sao cho $f(x_0)=9$. Do đó hàm số không đạt GTLN trên $-5;7)$.

Vậy $\underset{-5;7)}{min}f(x)=2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $-5;7)$.

» Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{t^2+t+4}{t+1}$ trên đoạn $[0;10]$

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\frac{t^2+t+4}{t+1}=t+\frac{4}{t+1}, 0\le t\le 10$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$P=\left(t+1+\frac{4}{t+1}\right)-1\ge 2\sqrt{(t+1).\frac{4}{t+1}}-1\Leftrightarrow P\ge 3$.

Dấu " = " xảy ra khi $t=1$.

» Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x+4m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3;4]$.

A. $\frac{-51}{4}\le m\le\frac{19}{4}$. **B.** $\frac{-51}{4}<m<\frac{19}{4}$. **C.** $-51<m<19$. **D.** $-51\le m\le 19$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^3-3x+4m-1=0\Leftrightarrow -x^3+3x+1=4m$.

Đặt $f(x)=-x^3+3x+1$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[-3;4]$.

$f'(x)=-3x^2+3, f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

$f(-3)=19, f(4)=-51, f(-1)=-1, f(1)=3$.

Suy ra $\underset{[-3;4]}{Max}f(x)=19$ khi $x=-3$.

$\underset{[-3;4]}{Min}f(x)=-51$ khi $x=4$.

Để phương trình $x^3-3x+4m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3;4]$ thì

$$-51\le 4m\le 19\Leftrightarrow\frac{-51}{4}\le m\le\frac{19}{4}$$

» Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2\cos x-\frac{4}{3}\cos^3x$ trên $[0;\pi]$.

A. $\underset{[0;\pi]}{\max}y=\frac{2}{3}$. **B.** $\underset{[0;\pi]}{\max}y=\frac{10}{3}$. **C.** $\underset{[0;\pi]}{\max}y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\underset{[0;\pi]}{\max}y=0$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $t=\cos x\Rightarrow t\in[-1;1]\Rightarrow y=2t-\frac{4}{3}t^3$.

$y'=2-4t^2 y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]\\x=\frac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]\end{array}\right.$.

Tính: $y(-1)=\frac{-2}{3}, y\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-2\sqrt{2}}{3}, y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}, y(1)=\frac{2}{3}$.

Vậy: $\underset{[0;\pi]}{\max}y=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

» Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{x^2+3x+3}{x+1}\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;1]$.

A. $m\ge\frac{7}{2}$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\le\frac{7}{2}$. **D.** $m\ge 3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$.

Bất phương trình $\frac{x^2+3x+3}{x+1}\ge m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[0;1]$ khi và chỉ khi $m\le \min\limits_{[0;1]} f(x)$.

Ta có $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\ge 0$ với mọi $x\in[0;1]\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;1]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x)=f(0)=3$.

Vậy $m\le 3$.

» Câu 21. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0{,}035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.?

A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=15$. **D.** $x=7$.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x\in[0;15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

Có $G'(x)=0{,}035[2x(15-x)-x^2]=0{,}105x(10-x)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=10\end{array}\right.$.

$G(0)=0$; $G(10)=\frac{35}{2}$; $G(15)=0$.

Bảng biến thiên:

x	0		10		15
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$	0	↗	$\frac{35}{2}$	↘	0

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x=10$ miligam

» Câu 22. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t)=\frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau thời gian t sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

A. Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. **B.** Sau 0,5 giờ.

C. Sau 2 giờ. **D.** Sau 1 giờ.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm $P(t)=\frac{t+1}{t^2+t+4}, t>0$ ta có $P'(t)=\frac{-t^2-2t+3}{(t^2+t+4)^2}=\frac{(t-1)(-t-3)}{(t^2+t+4)^2}$.

$P'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-3\\t=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$P'(t)$		$+$	0	$-$	
$P(t)$		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có sau $1(h)$ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

» Câu 23. Cho hàm số $y=\frac{\sin x+m}{\sin x+2}$. Tìm tổng các giá trị của m để hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng -1.

A. -4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

- Nếu $m = 2 \Rightarrow y = 1$ không thỏa mãn
- Nếu $m \neq 2$. Đặt $t = \sin x, (t \in [-1;1])$ hàm số trở thành $y = \frac{t+m}{t+2} \Rightarrow y' = \frac{2-m}{(t-2)^2}$

» Với $m < 2$:$y' = \frac{2-m}{(t-2)^2} > 0, \forall t \in [-1;1]$ khi đó hàm số liên tục và đồng biến trên $[-1;1]$ nên giá trị lớn nhất là $y(1) = \frac{1+m}{3}$.

Theo đề $\frac{1+m}{3} = -1 \Leftrightarrow m = -2$ (nhận).

» VVới $m > 2$:$y' = \frac{2-m}{(t-2)^2} < 0, \forall t \in [-1;1]$ khi đó hàm số liên tục và nghịch biến trên $[-1;1]$

nên giá trị lớn nhất là.$y(-1) = \frac{-1+m}{1}$, theo giả thuyết $-1 + m = -1 \Leftrightarrow m = 0$ (loại).

Vậy tổng các giá trị của m bằng -2.

» Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + 2020$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = m-1 \\ x_2 = m+1 \end{array}\right.$.

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $x_1 \le 0 < x_2$ hoặc $0 < x_1 < x_2$.

TH1: $x_1 \le 0 < x_2 \Leftrightarrow m - 1 \le 0 < m + 1 \Leftrightarrow -1 < m \le 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$.

BBT của hàm số:

x	0		$m+1$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

TH2: $0 < x_1 < x_2$.

BBT của hàm số

x	0		$m-1$		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 1 > 0 \\ y(m+1) \le y(0) \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+1)^3 - 3m(m+1)^2 + 3(m^2-1)(m+1) + 2020 \le 2020 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+1)^2(m-2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \le 2$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Vậy $m \in \{0;1;2\}$.

» Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m > 4$ **B.** $3 < m \le 4$ **C.** $m < -1$ **D.** $1 \le m < 3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$

» TH1: $-1-m>0 \Leftrightarrow m<-1$

suy ra y đồng biến trên $[2;4]$

suy ra $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)

» TH2: $-1-m<0 \Leftrightarrow m>-1$

suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$

suy ra $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ suy ra $m>4$.

» Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 \le m < 3$ **B.** $m > 6$ **C.** $m < 1$ **D.** $3 < m \le 6$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

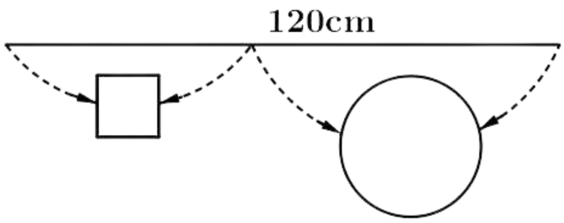
Với $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \in [0;1]$ thì $\min\limits_{[0;1]} y \ne 3$.

Suy ra $m \ne 1$. Khi đó $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

» TH1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

» TH2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min\limits_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

» Câu 27. Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn **(tham khảo hình bên dưới)**.



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là **(làm tròn đến hàng đơn vị)**?

A. 504. **B.** 462. **C.** 426. **D.** 498.

Lời giải

Chọn A

Gọi độ dài là của đoạn dây thứ hai là $x$cm.

Khi đó, độ dài của đoạn dây thứ nhất là $(120-x)$cm $(0<x<120)$.

Khi đó cạnh hình vuông là $\frac{120-x}{4} \Rightarrow$ diện tích của hình vuông bằng $\left(\frac{120-x}{4}\right)^2$

Bán kính hình tròn là $\frac{x}{2\pi} \Rightarrow$ diện tích của hình tròn bằng $\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S(x) = \left(\frac{120-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - 15x + 900, \ (0<x<120).$$

Ta có $S(x)$là một hàm số bậc hai, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{120\pi}{4+\pi} \in (0;120)$.

Vậy $\min S(x) = S\left(\frac{120\pi}{4+\pi}\right) \approx 504cm^2$.

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 28. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$		
(b)	$m \le M$		
(c)	Với mọi $x\in[a;b]$ ta có $f(x)\ge m$		
(d)	Với mọi $x\in[a;b]$ ta có $f(x)<M$		

Lời giải

(a) $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

m là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[a;b]$ được ký hiệu là $m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $m\le M$.

m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[a;b]$ thì $m\le M$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Với mọi $x\in[a;b]$ ta có $f(x)\ge m$.

m là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[a;b]$, ta có $f(x)\ge m, \forall x\in[a;b]$.

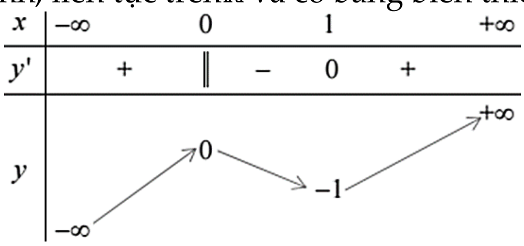
» Chọn ĐÚNG.

(d) Với mọi $x\in[a;b]$ ta có $f(x)<M$.

Ta có $M=\max\limits_{[a;b]} f(x) \Rightarrow \exists x_0\in[a;b]: f(x_0)=M$.

» Chọn SAI.

» Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.		
(b)	Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.		
(c)	Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.		
(d)	Hàm số có đúng một cực trị.		

Lời giải

(a) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Vì hàm số có giá trị cực tiểu $y=-1$ khi $x=0$.

» Chọn SAI.

(b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

» **Chọn** SAI.

(c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

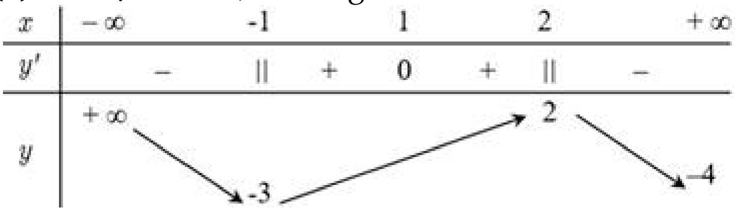
» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Hàm số có đúng một cực trị.

Hàm số có 2 điểm cực trị.

» **Chọn** SAI.

» Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:



Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
(b)	Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.		
(c)	Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.		
(d)	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (2; +\infty)$.		

Lời giải

(a) Hàm số có hai điểm cực trị.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số có điểm cực trị $x = -1; x = 2$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số không tồn tại GTLN; GTNN.

» **Chọn** SAI.

(c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 2$

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (2; +\infty)$.

Dựa vào BBT ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1), (2; +\infty)$

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 31. Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên $\left(a;b\right)$ lần lượt là m và M. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$m < M$		
(b)	$f\left(a\right) = m$		
(c)	Với mọi $x \in \left(a;b\right)$ ta có $f\left(x\right) > m$		
(d)	Với mọi $x \in \left(a;b\right)$ ta có $m \le f\left(x\right) < M$		

Lời giải

(a) $m < M$.

Với $f(x)=0$ thì $m=\min\limits_{(0;1)} f(x)=0$ và $M=\max\limits_{(0;1)} f(x)=0$ thì $m=M$.

» Chọn SAI.

(b) $f(a)=m$.

Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $(a;b)$ không tính đến $f(a)$.

» Chọn SAI.

(c) *Với mọi $x\in(a;b)$ ta có $f(x)>m$.*

Ta có $m=\min\limits_{(a;b)} f(x)\Rightarrow \exists x_0\in(a;b): f(x_0)=m$.

» Chọn SAI.

(d) *Với mọi $x\in(a;b)$ ta có $m\le f(x)<M$.*

Ta có $\begin{cases} m=\min\limits_{(a;b)} f(x) \\ M=\max\limits_{(a;b)} f(x)\end{cases} \Rightarrow \forall x\in(a;b): m\le f(x)\le M$.

» Chọn SAI.

» Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên ¡ . Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên ¡ . Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm.		
(b)	Phương trình $f(x)=C$ vô nghiệm với $m\le C\le M$.		
(c)	Bất phương trình $f(x)>M$ vô nghiệm.		
(d)	Bất phương trình $f(x)>m$ có tập nghiệm là ¡ .		

Lời giải

(a) *Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm.*

Ta có $m=\min\limits_{¡} f(x)\Rightarrow \exists x_0\in$ ¡ $: f(x_0)=m$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Phương trình $f(x)=C$ vô nghiệm với $m\le C\le M$.*

Với $f(x)$ liên tục trên ¡ và $m\le C\le M$ thì phương trình $f(x)=C$ luôn có nghiệm.

» Chọn SAI.

(c) *Bất phương trình $f(x)>M$ vô nghiệm.*

Ta có $M=\max\limits_{¡} f(x)\Rightarrow f(x)\le M,\forall x\in$ ¡ . Do đó $f(x)>M$ vô nghiệm.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Bất phương trình $f(x)>m$ có tập nghiệm là ¡*

$m=\min\limits_{(a;b)} f(x)\Rightarrow \exists x_0\in(a;b): f(x_0)=m$. Đó đó tập nghiệm của $f(x)>m$ khác ¡ .

» Chọn SAI.

» Câu 33. Cho hàm số $y=x^3-3x+2$. Xét tính đúng sai của mệnh đề sau.

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**

(a)	$\min\limits_{[0;1]} y = 0$		
(b)	$\min\limits_{[0;2]} y = y(0)$		
(c)	$\min\limits_{[-1;0]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 4$		
(d)	$\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]} \frac{1}{y} = \frac{8}{25}$		

Lời giải

(a) $\min\limits_{[0;1]} y = 0$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$f(0) = 2; f(1) = 0$. Vậy $\min\limits_{[0;1]} y = 0$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\min\limits_{[0;2]} y = y(0)$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$f(0) = 2; f(1) = 0; f(2) = 4$. Vậy $\min\limits_{[0;2]} y = f(1)$.

» Chọn SAI.

(c) $\min\limits_{[-1;0]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 4$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

$f(0) = 2; f(1) = 0; f(-1) = 4$. Suy ra $\min\limits_{[-1;0]} y = 2; \max\limits_{[0;1]} y = 2$. Vậy $\min\limits_{[-1;0]} y + \max\limits_{[0;1]} y = 4$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]} \frac{1}{y} = \frac{8}{25}$.

Ta có $g(x) = \frac{1}{y} = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}$; $g'(x) = \frac{3x^2 - 3}{\left(x^3 - 3x + 2\right)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Và $g(-1) = \frac{1}{4}$; $g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{25}$; $g(0) = \frac{1}{2}$. Vậy $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};0\right]} \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.

» Chọn SAI.

» Câu 34. Cho hàm số $y = 2\sin x - 1$. Khi đó

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
(a)	$\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$		
(b)	$\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$		
(c)	$\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$		
(d)	$\min\limits_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$		

Lời giải

(a) $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$.

Ta có $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-3 \le 2\sin x - 1 \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $-3 \leq 2\sin x - 1 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -3$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) $\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ta có $0 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in [0;\pi]$ nên $-1 \leq 2\sin x - 1 \leq 1, \forall x \in [0;\pi]$. Do đó $\max\limits_{[0;\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

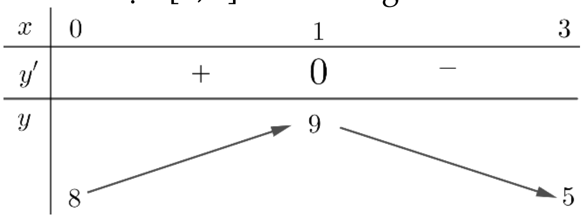
» **Chọn** ĐÚNG.

(d) $\min\limits_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$.

Ta có $0 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in [0;\pi]$ nên $-1 \leq 2\sin x - 1 \leq 1, \forall x \in [0;\pi]$. Do đó $\min\limits_{[0;\pi]} y = y(0) = -1$.

» **Chọn** ĐÚNG.

» Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và có bảng biến thiên như sau



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Có 7 số nguyên m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.		
(b)	Giá trị m lớn nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 7.		
(c)	Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 3.		
(d)	Tổng các giá trị của m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 45.		

Lời giải

Theo đề ta có $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2) \Leftrightarrow m = \frac{f(x)}{x^4 - 2x^2 + 2}$ có nghiệm thuộc đoạn$[0;3]$(*).

Đặt $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $g(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.

$$g'(x) = 4x^3 - 4x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;3] \\ x = 1 \in [0;3] \end{array}\right., g(0) = 2; g(1) = 1; g(3) = 65$$

Nên $\min\limits_{[0;3]} g(x) = g(1) = 1; \max\limits_{[0;3]} g(x) = g(3) = 65$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(1) = 9; \min\limits_{[0;3]} f(x) = f(3) = 5$.

Do đó $\min\limits_{[0;3]} h(x) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{1}{13}; \max\limits_{[0;3]} h(x) = \frac{f(1)}{g(1)} = 9$.

Vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{13} \leq m \leq 9 \Rightarrow m \in \{1, \ldots, 9\}$.

(a) *Có 7 số nguyên m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.*

Có 9 số nguyên m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$.

» **Chọn** SAI.

(b) *Giá trị m lớn nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;3]$ là 7.*

Giá trị m lớn nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là 9.

» Chọn SAI.

(c) *Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là 3.*

Giá trị m nhỏ nhất để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là 1.

» Chọn SAI.

(d) *Tổng các giá trị của m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là 45.*

Tổng các giá trị của m để phương trình $f(x) = m(x^4 - 2x^2 + 2)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 3]$ là 45.

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là 1.		
(b)	Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $(0; \pi)$.		
(c)	Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.		
(d)	Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.		

Lời giải

$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \left(x \in (0; \pi)\right)$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $\min\limits_{(0;\pi)} y = 1$ và $\max\limits_{(0;\pi)} y$ không tồn tại.

(a) *Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là 1.*

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $(0; \pi)$.*

» Chọn ĐÚNG.

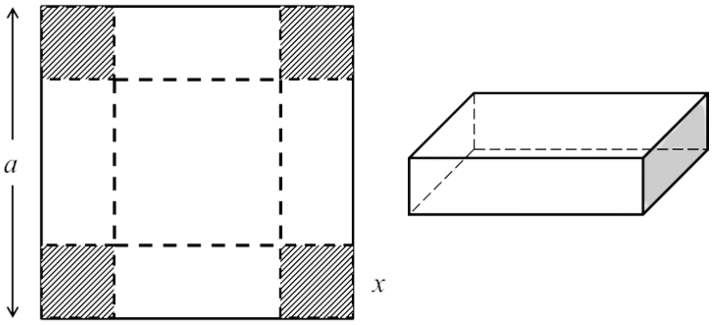
(c) *Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.*

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.*

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 37. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a. Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Ta có $0 < x < \frac{a}{2}$.		
(b)	Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.		
(c)	Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{9}$.		
(d)	Cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng $\frac{a}{6}$.		

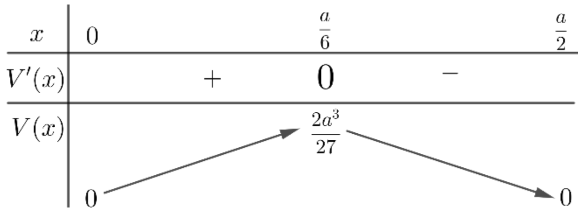
Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

$V'(x) = (a-2x)^2 + x.2(a-2x).(-2) = (a-2x)(a-6x)$; $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$ $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Bảng biến thiên



Vậy trong khoảng $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ ta có $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$.

(a) *Ta có* $0 < x < \frac{a}{2}$.

Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Thể tích của khối hộp là:* $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng* $\frac{2a^3}{9}$.

Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

» Chọn SAI.

(d) *Cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất bằng* $\frac{a}{6}$

Trong khoảng $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ ta có $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$.

» **Chọn** ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» **Câu 38.** Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bao nhiêu?

Lời giải

✓***Trả lời: 0***

$$y = x^3 + 3x^2 + 1$$
$$y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{array}\right.$$
$$y(-1) = 3; y(0) = 1; y(2) = 21$$

Vậy GTNN trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số bằng 1 tại $x = 0$.

» **Câu 39.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng

Lời giải

✓***Trả lời: 5***

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 5.

» **Câu 40.** Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng

Lời giải

✓***Trả lời: 1***

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = -\cos 2x$

Mà $-1 \le cos\,2x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -cos\,2x \le 1 \Rightarrow max\,y = 1$.

» **Câu 41.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có nghiệm $x \in [0;2]$?

Lời giải

✓***Trả lời: 5***

Ta có: $x^3 - 3x - m = 0 \Rightarrow m = x^3 - 3x$

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x, \forall x \in [0;2]$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$.

$f(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [-1;2] \\ x = -1 \notin [-1;2] \end{array}\right.$.

$$f(0) = 0; f(1) = -2; f(2) = 2$$

$\underset{[-1;2]}{min} f(x) = -2$, $\underset{[-1;2]}{max} f(x) = 2$.

Để phương trình có nghiệm thì $m \in [-2;2]$.

» Câu 42. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.

Lời giải

✓Trả lời: 2

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y'=\frac{1-(-m^2+m)}{(x+1)^2}=\frac{m^2-m+1}{(x+1)^2}>0;\forall x\in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0$.

$\Leftrightarrow y(0)=-2\Leftrightarrow -m^2+m=-2\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=2\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m.

» Câu 43. Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^4-2mx^2+1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]}f(x)=f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]}f(x)$ bằng

Lời giải

✓Trả lời: 4

Ta có: $f'(x)=4(m-1)x^3-4mx=4x[(m-1)x^2-m]$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2=\frac{m}{m-1}\end{array}\right.$ (vì $m=1$ không thỏa yêu cầu bài toán).

Vì $\min\limits_{[0;3]}f(x)=f(2)\Rightarrow x=2$ là nghiệm của $f'(x)=0$.

$\Rightarrow \frac{m}{m-1}=4\Rightarrow m=4m-4\Rightarrow m=\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{8}{3}x^2+1$.

$f(0)=1, f(3)=\frac{81}{3}-\frac{72}{3}+\frac{3}{3}=\frac{12}{3}=4$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]}f(x)=4$.

» Câu 44. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{2x-2}$ trên khoảng $(0;1)$. (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)

Lời giải

✓Trả lời: 5,5

Hàm số xác định và liên tục trên $(0;1)$ và có $f'(x)=-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{2(x-1)^2}$.

Giải phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-8x^2+16x-8=0\Leftrightarrow (x-2)(x^2-6x+4)=0$

$\Rightarrow x=3-\sqrt{5}$ (do $x\in(0;1)$).

Bảng biến thiên

x	0		$3-\sqrt{5}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{11+5\sqrt{5}}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;1)}f(x)=\frac{11+5\sqrt{5}}{4}\approx 5,5$.

» Câu 45. Tìm giá trị lớn nhất hàm số $y=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+2}}$.

Lời giải

✓Trả lời: 3

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+2} - (x+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{2-4x}{\sqrt{x^2+2}(x^2+2)}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 3$.

» **Câu 46.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3; 4]$?

Lời giải

✓*Trả lời: 17*

Ta có $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 1 = 4m$.

Đặt $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[-3; 4]$.

$f'(x) = -3x^2 + 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$f(-3) = 19, f(4) = -51, f(-1) = -1, f(1) = 3$.

Suy ra $\max\limits_{[-3;4]} f(x) = 19$ khi $x = -3$.

$\min\limits_{[-3;4]} f(x) = -51$ khi $x = 4$.

Để phương trình $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong$[-3; 4]$ thì

$\min\limits_{[-3;4]} f(x) \leq 4m \leq \max\limits_{[-3;4]} f(x) \Leftrightarrow \frac{-51}{4} \leq m \leq \frac{19}{4}$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-12; -11; \dots; 4\}$.

Vậy có 17 giá trị nguyên của tham số m.

» **Câu 47.** Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để bất phương trình $\frac{x^2+3x+3}{x+1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.

Lời giải

✓*Trả lời: 3*

Đặt $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$.

Bất phương trình $\frac{x^2+3x+3}{x+1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$ khi và chỉ khi $m \leq \min\limits_{[0;1]} f(x)$.

Ta có $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \geq 0$ với mọi $x \in [0; 1] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; 1]$.

$\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} f(x) = f(0) = 3$.

Suy ra $m \leq 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của tham số m bằng 3.

» **Câu 48.** Tìm giá trị của tham số thực mđể giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$trên đoạn $[0; 4]$bằng 3.

Lời giải

✔*Trả lời: 7*

Ta có: $y' = \frac{2-m}{(x+1)^2}$.

+ Xét $m = 2$.

⇒Hàm số trở thành: $y = 2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

⇒ $m = 2$ (loại)

+ Xét $m > 2$.

⇒ $y' = \frac{2-m}{(x+1)^2} < 0\ (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y = y(4) = \frac{8+m}{5} \Rightarrow \frac{8+m}{5} = 3 \Leftrightarrow m = 7$ (thoả mãn).

+ Xét $m < 2$.

⇒ $y' = \frac{2-m}{(x+1)^2} > 0\ (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min\limits_{[0;4]} y = y(0) = m \Rightarrow m = 3$ (loại).

Vậy $m = 7$.

» Câu 49. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

Lời giải

✔*Trả lời: 4*

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$,

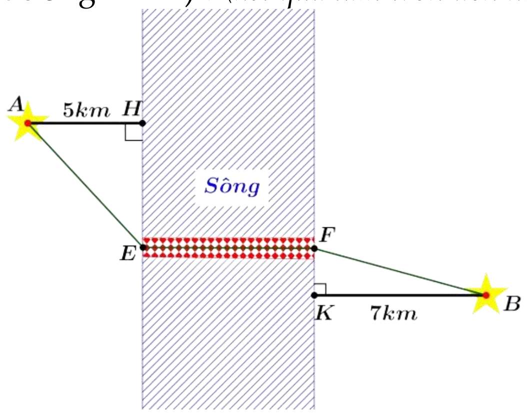
Ta có $y' = -3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} y'(-1) = m - 2 \\ y'(0) = m \\ y'(1) = m - 4 \end{cases}$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

» Câu 50. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $5km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $7km$ (hình vẽ), biết $HE + KF = 24km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$) ? *(kết quả làm tròn đến km)*



Lời giải

✔*Trả lời: 16*

Đặt $HE = x$ và $FK = y$, với $x, y > 0$

Ta có: $HE + KF = 24 \Rightarrow x + y = 24$

$$\begin{cases} AE = \sqrt{25 + x^2} \\ BF = \sqrt{49 + y^2} = \sqrt{49 + (24 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận định AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất (vì EF không đổi).

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(24 - x)^2 + 49}$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \frac{x-24}{\sqrt{x^2-48x+625}}, \forall x \in (0; 24).$

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

Bảng biến thiên

x	0		10		24
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$12\sqrt{5}$		

Vậy GTNN của $f(x)$ bằng $7\sqrt{5}$ tại $x = 10 \Rightarrow BF = 7\sqrt{5} \approx 16$km.

--------------------Hết--------------------