



Chương 01

Bài 4.

KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

A

Lý thuyết

1. Sơ đồ khảo sát hàm số



Định nghĩa:

- ①. Tìm tập xác định của hàm số.
- ②. Xét sự biến thiên của hàm số:
 - » Tìm y' , xét dấu y' , xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
 - » Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - » Lập bảng biến thiên của hàm số.
- ③. Vẽ đồ thị của hàm số:
 - » Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...
 - » Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
 - » Vẽ đồ thị hàm số.



Chú ý

- » Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số

✓ Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ($b^2 - 3ac > 0$)		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép ($b^2 - 3ac = 0$)		



<p>Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm $(b^2 - 3ac < 0)$</p>		
---	--	--



Chú ý

- » Trường hợp: $y' = 0$ vô nghiệm và có nghiệm kép, đồ thị hàm số sẽ ở dạng luôn đơn điệu nhưng trường hợp có nghiệm kép thì đồ thị hàm số có 1 đoạn hơi ngang ngang 1 chút (nhìn hình vẽ trên)

✓ Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$



Chú ý

- » ĐTHS có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- » Các điểm đặc biệt: Giao điểm với Ox : $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, Giao điểm với Oy : $B\left(0; \frac{b}{d}\right)$.
 Giao của hai đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là tâm đối xứng.

✓ Hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ ($a \neq 0$)

$y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép	$y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt



Chú ý

- » Ta luôn tách được $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{a}{d}x + f + \frac{m}{dx + e}$.
- » Khi đó đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -\frac{e}{d}$, Tiệm cận xiên $y = \frac{a}{d}x + f$.



Chú ý

- » Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.
- » Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$):
 - (a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
 - (b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.
- » Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$):
 - (a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
 - (b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Khảo sát hàm số bậc ba



Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

» **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

» **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn:

▪ Với $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$.

▪ Với $a < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

» Đạo hàm và cực trị: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó:

▪ Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.

▪ Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị, theo định lý Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

▪ Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

▪ Không có tiệm cận.

▪ Tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.



Ví dụ 1.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

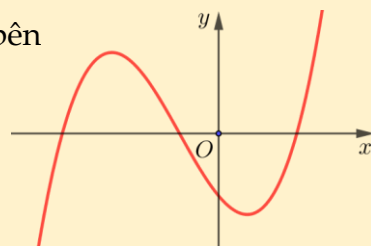
.....

.....



Ví dụ 1.2.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy xác định dấu của các hệ số a, b, c và d .



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 2. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất



Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

» **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

» **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn và đường tiệm cận

▪ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

▪ $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = +\infty$

$\Rightarrow x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{\left(cx + d\right)^2}$

▪ Nếu $ad - bc > 0$, $\forall x \in D$.

+ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

▪ Nếu $ad - bc < 0$, $\forall x \in D$.

+ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

▪ Đồ thị luôn nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận là tâm đối xứng. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$



Ví dụ 2.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$.

[illegible]



Dạng 3. Khảo sát hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất



Phương pháp

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$, $\left(ad \neq 0, x \neq -\frac{e}{d} \right)$, tử và mẫu không có nghiệm chung. Viết hàm số dưới dạng $y = ax + b + \frac{g}{dx + e}$ (bằng cách chia đa thức)

» **Bước 1:** Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{e}{d} \right\}$.

» **Bước 2:** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

» Giới hạn và đường tiệm cận

▪ $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{e}{d}\right)^{\pm}} y = \pm\infty \Rightarrow x = -\frac{e}{d}$ là tiệm cận đứng

▪ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (ax + b)] = 0 \Rightarrow y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên

» Đạo hàm $y' = \frac{a(dx + e)^2 - gd}{(dx + e)^2}$.

Dấu của đạo hàm là dấu của $g(x) = a(dx + e)^2 - gd$.

▪ Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép thì không có cực trị.

▪ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì có hai cực trị.

» Bảng biến thiên.

» Đồ thị hàm số:

▪ Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).

▪ Đồ thị hàm số nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

** Nhận xét:

» Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

» Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$.

» Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y = \frac{2ax + b}{d}$.

» Mọi tiếp tuyến tại điểm $M \in (C)$ cắt hai đường tiệm cận tại A, B thì M là trung điểm AB

» Diện tích tam giác IAB không đổi

» Mọi điểm $M \in (C)$ có tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là một hằng số

» Nếu từ một điểm E nằm trên một đường tiệm cận của (C) thì qua E kẻ duy nhất một tiếp tuyến với (C) .



Ví dụ 3.1.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2} \quad (H).$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}.$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 4. Nhận dạng hàm số khi biết đồ thị - bảng biến thiên



Phương pháp

** Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$		Bảng biến thiên	Đồ thị
» TH1: y' có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)	$a > 0$		
	$a < 0$		
» TH2: y' có 1 nghiệm x_0	$a > 0$		
	$a < 0$		
» TH3: y' vô nghiệm	$a > 0$		
	$a < 0$		



Phương pháp

*** Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$) có $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ và TĐĐ: $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$

	Bảng biến thiên	Đồ thị
» TH1 : $ad-bc > 0 \Leftrightarrow y' > 0 \quad \forall x \neq -\frac{d}{c}$		
» TH2 : $ad-bc < 0 \Leftrightarrow y' < 0 \quad \forall x \neq -\frac{d}{c}$		

*** Hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) có $y = Ax+B+\frac{C}{mx+n} \Rightarrow y' = A - \frac{C}{(mx+n)^2}$ và TĐĐ: $x = -\frac{n}{m}$ và TCX: $y = Ax+B$

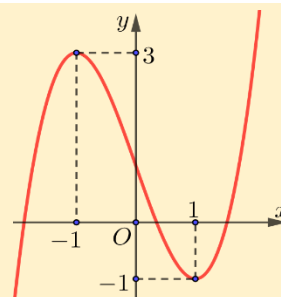
$x = -\frac{n}{m}$ và TCX: $y = Ax+B$

		Bảng biến thiên	Đồ thị
» TH1: y' có 2 nghiệm phân biệt	$A > 0$		
	$A < 0$		
» TH2: y' có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm	$A > 0$		
	$A < 0$		



Ví dụ 4.1.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Viết công thức của hàm số.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{2x+b}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Xác định a, b .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		-	-
y	-1	$+\infty$	-1

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

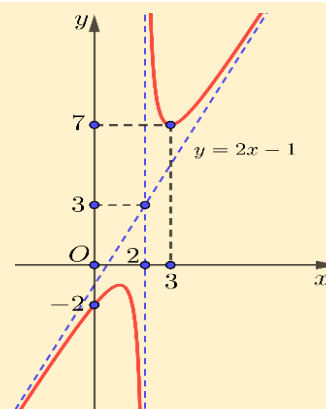
.....



Ví dụ 4.3.

Cho hàm số hữu tỉ $y = \frac{2x^2 + ax + b}{cx - 2}$ có đồ thị như hình bên.

Viết công thức của hàm số.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 5. Nhận dạng đồ thị - bảng biến thiên khi biết hàm số



Phương pháp

Vận dụng các kiến thức liên quan: Đơn điệu, Cực trị, Đường tiệm cận

- » **Bước 1:** Tập xác định.
- » **Bước 2:** Sự biến thiên
 - » Chiều biến thiên.
 - » Cực trị .
 - » Đường tiệm cận.
 - » Điểm đi qua.
- » **Bước 3:** Kết luận đồ thị



Ví dụ 5.1.

Xác định bảng biến thiên của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 9$.

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.2.

Xác định đồ thị của hàm số hữu tỉ $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$.

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 6. Xác định dấu – giá trị các hệ số



Phương pháp

▪ **Loại 1.** Hàm đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

» **Bước 1:** Nhìn vào nhánh ngoài cùng của đồ thị Xác định dấu của hệ số a .

» **Bước 2:** Điểm cắt trục tung: xác định dấu hệ số d .

» **Bước 3:** Nhìn vào hai điểm cực trị (nếu có):

» Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$.

▪ Nếu đồ thị hàm số không có điểm cực trị $\Rightarrow D' = b^2 - 3ac \leq 0$.

▪ Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị:

Các điểm cực trị x_1, x_2 của hàm số là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases} \text{ (Vi-ét).}$$

Dựa vào vị trí của x_1, x_2 để suy luận các phép tính $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$ mang dấu gì.

Nếu không cho tọa độ rõ ràng, ước lượng khoảng cách từ O tới các điểm x_1, x_2 .

» **Bước 4:** Xác định tọa độ các điểm đã cho.

» **Bước 5:** Dựa vào điểm uốn U

» Là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

» x_U là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

» Điểm U là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị.

*** **Nhận xét:** Bảng biến thiên mô phỏng đồ thị hàm số.

Cách đọc bảng biến thiên giống như cách đọc đồ thị.

▪ **Loại 2.** Hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ và $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$.

» **Bước 1:** Xác định các đường tiệm cận.

Dùng công thức tính nhanh định nghĩa) để tìm mối quan hệ giữa các hệ số.

Lưu ý: Giao điểm của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

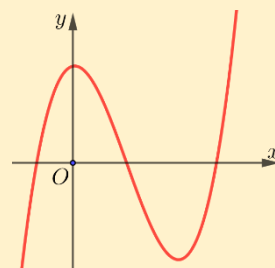
» **Bước 2:** Xác định các điểm thuộc đồ thị hàm số: giao với các trục tọa độ, cực trị.

» **Bước 3:** Từ hình dáng đồ thị (bảng biến thiên), xác định dấu của đạo hàm dựa vào các khoảng đồng biến/ngược biến. Từ đó xác định dấu của các hệ số.



Ví dụ 6.1.

Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong các hệ số a, b, c, d có bao nhiêu giá trị dương?





Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

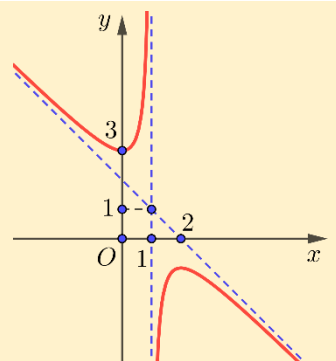
.....



Ví dụ 6.2.

Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên.

Tính $P = a + b + c$.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 7. Đọc đồ thị của đạo hàm



Phương pháp

Xác định tính đơn điệu, cực trị, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$, $g(x) = f(u(x))$, $g(x) = g(f(x))$ khi biết đồ thị (bảng biến thiên) của đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ hoặc $y = f'(u(x))$

» **Bước 1:** Tính $g'(x)$ (chú ý hàm hợp dạng $g(x) = f(u(x)) \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$)

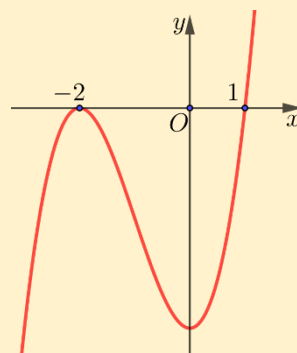
» **Bước 2:** Giải $g'(x) = 0$ ta được $x_1; x_2; \dots; x_i$ là các điểm mà tại đó $g'(x) = 0$ hoặc $g'(x)$ không xác định.

» **Bước 3:** Lập bảng xét dấu của $g'(x) \rightarrow$ lập được bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.
Dựa vào bảng biến thiên xét các tính chất đơn điệu, cực trị, min, max...



Ví dụ 7.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Lập bảng xét dấu của $y = f'(x)$?



» **Lời giải**

.....

.....

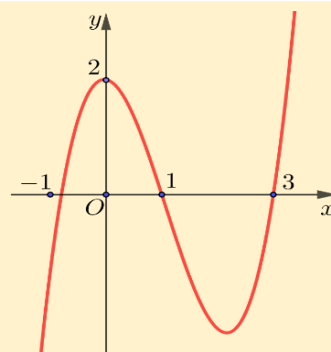
.....

.....



Ví dụ 7.2.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , $y = f'(x)$ có đồ thị trong hình dưới đây. Tìm điểm cực đại của hàm số đã cho.



» **Lời giải**

.....

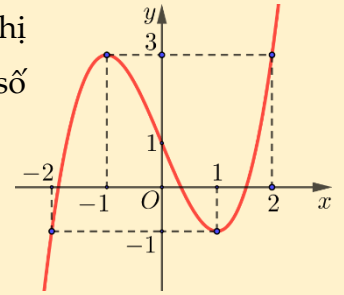
.....

.....

.....



Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x - 1) - 2x + 1$ trên $[0; 1]$

[illegible]



Dạng 8. Sự tương giao



Phương pháp

Các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là các đường (C_1) , (C_2) , khi đó:

- » Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của các đồ thị (C_1) , (C_2) .
- » Số giao điểm của các đường (C_1) , (C_2) chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.



Ví dụ 8.1.

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị của hàm số $y = 3x^3 - 9x + 3(m-1)$ giao với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 8.2.

Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m^2 + 1)x + m - 3$ và parabol $y = 2x^2 + x - m - 2$ có hai giao điểm phân biệt và tổng hoành độ hai giao điểm đó là 3?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 9. Bài toán thực tế liên môn đưa về khảo sát hàm số



Phương pháp

- » **Bước 1:** Xác định yếu tố chọn làm ẩn, chỉ ra điều kiện (nếu có)
- » **Bước 2:** Xây dựng phương trình hàm số từ các dữ kiện của bài toán.
- » **Bước 3:** Giải bài toán liên quan đến hàm số và kết luận.



Ví dụ 9.1.

Nhiệt độ T của một người trong cơn bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ ($0 \leq t \leq 11$), trong đó T là nhiệt độ ($^{\circ}F$ – Fahrenheit) theo thời gian t trong ngày. Biết rằng $^{\circ}C = \frac{^{\circ}F - 32}{1,8}$, độ chênh lệch (theo độ $^{\circ}C$) giữa nhiệt độ lớn nhất và nhiệt độ thấp nhất trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 9.2.

Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 9.3.

Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....