Chương 01

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

- Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* (**GTLN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \le M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$.
- Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* (**GTNN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \ge M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D: f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Chú ý

» Quy ước rằng khi nói GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không xét "trên tập D") thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của $y = f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

» Để tìm GTLN hay GTNN của hàm số trên tập D, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

2. Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn

Cách tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$:

- *Bước 1:* Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho $f'(x) = 0$.
- *Bước 2:* Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(b)$.
- *Bước 3:* Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.
  Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

Phương pháp

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$:

» *Bước 1:* Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x) = 0$.

» *Bước 2:* Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(b)$

» *Bước 3:* Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.

Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Ví dụ 1.1.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\ (n) \\ x = -1 (n) \end{array}\right.$

Ta có: $f(-2) = -1;\ f(-1) = 3;\ f(1) = -1;\ f(2) = 3$

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 3$ khi $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ và $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = -1$ khi $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ví dụ 1.2.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

Lời giải

Điều kiện: $1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + x.\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\ (n) \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (n) \end{array}\right.$

Ta có: $f(-1) = 0;\ f\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{-1}{2};\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2};\ f(1) = 0$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = \dfrac{1}{2}$ khi $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = \dfrac{-1}{2}$ khi $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 2. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Phương pháp

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

» ***Bước 1:*** Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = f(x)$.
- $f(x)$ không liên tục trên $(a;b)$ ⇒Không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ ⇒ Bước tiếp theo

» ***Bước 2:*** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

» ***Bước 3:*** Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho
- $f'(x) = 0$, hoặc
- $f'(x)$ không xác định.

» ***Bước 4:*** Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ cho trước.

» ***Bước 5:*** Xác định điểm "cao nhất" và điểm "thấp nhất" của đồ thị hàm số trên $(a;b)$.

» ***Bước 6:*** Kết luận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$.

⁂ ***Nhận xét:***

✓ Nếu đề bài không cho sẵn $(a;b)$ thì thường sẽ lấy luôn tập xác định làm khoảng phải xét.

✓ Đây là phương pháp tổng quát, tùy vào bài toán sẽ giản lược bớt 1 vài bước.

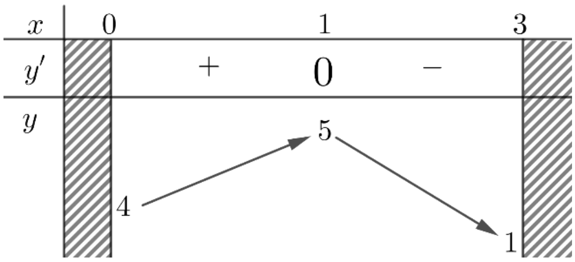
Ví dụ 2.2.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x + 4$ trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải

Hàm số liên tục trên ¡ nên hàm số liên tục trên $(0;3)$.

Ta có: $y' = -2x + 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1\ (n)$



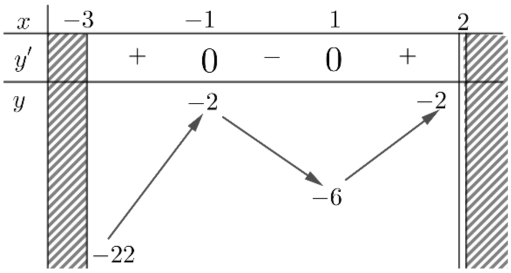
Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{(0;3)} y = 5$ tại $x = 1$.

Ví dụ 2.2.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 4$ trên $-3;2)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (n) \\ x=-1(n) \end{array}\right.$



Vậy $\max\limits_{[-3;2)} f(x)=-2$ khi $x=-1$ và $\min\limits_{[-3;2)} f(x)=-22$ khi $x=-3$.

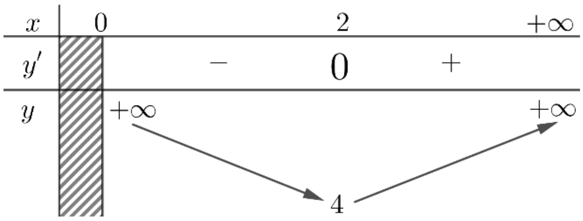
Ví dụ 2.3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0$.

Ta có: $y' = 1-\dfrac{4}{x^2} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \in (0;+\infty) \\ x=-2 \notin (0;+\infty) \end{array}\right.$.



Vậy: $\min\limits_{(0;+\infty)} y = y(2) = 4$.

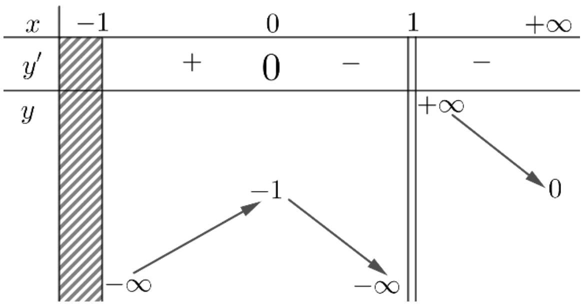
Ví dụ 2.3.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ trên $(-1;-\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=0\ (n)$.



Vậy hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Dạng 3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

Sử dụng bất đẳng thức thường gặp:

Bất đẳng thức Cô-si:

- Với hai số thực không âm: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b$.
- Với ba số thực không âm: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c$.
- Với n thực không âm: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.
  Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Bất đẳng thức Bunhiacopxki

- Dạng cơ bản: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- Dạng tổng quát:
  Với hai bộ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ta có:
  $$(a_1^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$
  Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Sử dụng "Tập giá trị" của hàm số lượng giác:

- Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác: $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$

Ví dụ 3.1.

Giả sử M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = 2 + 3\sin x$. Tính $M + m$.

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in$ ¡ nên $-3 \leq 3\sin x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 2 + 3\sin x \leq 5$.

$M = 5$, đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + k2p$ $(k \in$ ¢$)$.

$m = -1$, đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-p}{2} + k2p$ $(k \in$ ¢$)$.

Suy ra $M + m = 4$.

Ví dụ 3.2.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{386x}{x^2+2x+5}$ với $x > 0$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $x + \frac{5}{x} \geq 2\sqrt{5} \Rightarrow x + \frac{5}{x} + 2 \geq 2\sqrt{5} + 2$

$$\Rightarrow \frac{386}{x+\frac{5}{x}+2} \le \frac{386}{2\sqrt{5}+2} \Rightarrow f\left(x\right)=\frac{386x}{x^2+2x+5} \le \frac{386}{2\sqrt{5}+2}$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{5}{x} \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ (vì $x>0$)

Dạng 4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

❖ **Bài toán bất phương trình**

» *Bước 1:* Chuyển bất phương trình đã cho về dạng $f(x) - g(x) \geq 0$ và tìm điều kiện tồn tại của bất phương trình

» *Bước 2:* Đặt hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x)$,
Xét tính đơn điệu của $y = h(x)$ trên điều kiện xác định.

» *Bước 3:* Từ đó kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

❖ **Bài toán bất phương trình chứa tham số**

Ta đưa bất phương trình đề bài cho về một trong các dạng sau

» $m \geq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$ thì $m \geq \max\limits_D f(x)$

» $m \leq f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x \in D$ thì $m \leq \min\limits_D f(x)$

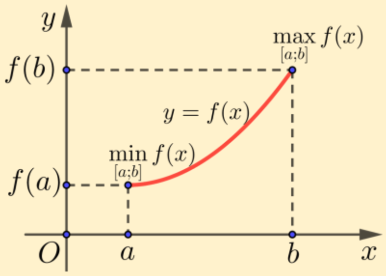
» $m \geq f(x)$ có nghiệm $x \in D$ thì $m \geq \min\limits_D f(x)$

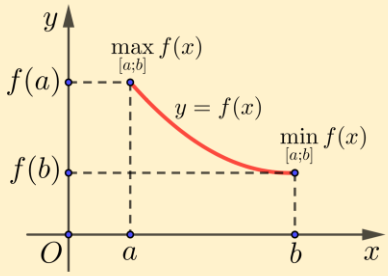
» $m \geq f(x)$ có nghiệm $x \in D$ thì $m \geq \min\limits_D f(x)$

⁂ ***Nhận xét:*** Nếu $y = f(x)$:

✓ *đồng biến* trên $[a;b]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b) \end{cases}$.

✓ *nghịch biến* trên $[a;b]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a) \end{cases}$





Ví dụ 4.1.

Tìm m bất để phương trình $x^3 - 3x - m > 0$ có nghiệm $x \in [0;2]$?

Lời giải

$x^3 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x > m\left(1\right)$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = x^3 - 3x$ trên $\left[0;2\right]$ có $f'\left(x\right) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in \left[0;2\right] \\ x = -1 \notin \left[0;2\right] \end{array}\right.$

Ta có $f\left(0\right) = 0$; $f\left(1\right) = -2$; $f\left(2\right) = 2$.

Suy ra $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right) = f\left(2\right) = 2$.

Để bất phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm $x \in \left[0;2\right]$ thì $m \leq \max\limits_{[0;2]} f\left(x\right) = 2$

Ví dụ 4.2.

Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4$

Lời giải

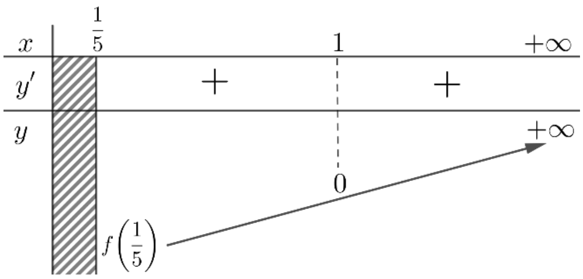
Điều kiện: $x\ge \frac{1}{5}$.

$\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4\Leftrightarrow \sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}-4\ge 0$.

Xét hàm số: $y=f\left(x\right)=\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}-4$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(x\right)=\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}>0,\forall x>\frac{1}{5}$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.



Mặt khác: $f\left(1\right)=0$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f\left(x\right)\ge f\left(1\right)=0$.

Vậy nghiệm bất phương trình là : $x\ge 1$.

Ví dụ 4.3.

Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$

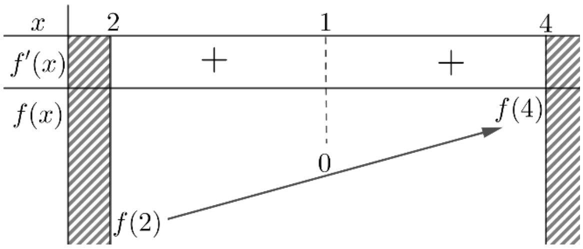
Lời giải

Điều kiện: $-2\le x\le 4$.

Xét $f\left(x\right)=\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}-2\sqrt{3}$ trên $\left[-2;4\right]$.

Có $f'\left(x\right)=\frac{3\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}>0,\forall x\in\left(-2;4\right)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\left[-2;4\right]$

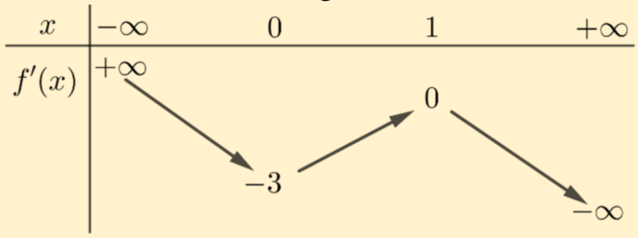


Mặt khác: $f\left(1\right)=0$. Khi đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f\left(x\right)\ge f\left(1\right)=2\sqrt{3}\Leftrightarrow x\ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $\left[1;4\right]$.

Ví dụ 4.4.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Biết bất phương trình $f(x) > log\, x - m$ nghiệm đúng $\forall x \in (1;6) \Leftrightarrow m \geq log\, a - f(a)$. Tính $a - b$.

Lời giải

Ta có: $f(x) > \log x - m, \forall x \in (1;6) \Leftrightarrow m > \log x - f(x)$, $\forall x \in (1;6)$.

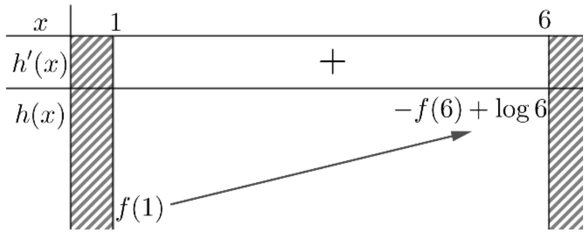
Xét hàm số: $h(x) = \log x - f(x)$ trên khoảng $(1;6)$.

Có $h'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10} - f'(x)$.

Từ bảng biến thiên suy ra: $f'(x) < 0, \forall x \in (1;6)$ và $\dfrac{1}{x\ln 10} > 0, \forall x \in (1;6)$

$\Rightarrow h'(x) > 0$, $\forall x \in (1;6)$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$:



Từ bảng biến thiên suy ra để bất phương trình: $m > \log x - f(x)$, $\forall x \in (1;6)$.

$\Leftrightarrow m \geq \log 6 - f(6)$.

Suy ra $a = 6; b = 6$. Nên $a - b = 0$.

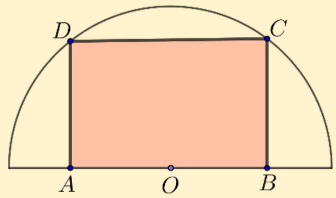
Dạng 5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

» *Bước 1:* Gọi ẩn và xác định điều kiện cho ẩn.
» *Bước 2:* Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
» *Bước 3:* Xét hàm số biểu thị đại lượng mà đề bài yêu cầu. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên điều kiện của ẩn.
» *Bước 4:* Kết luận.

Ví dụ 5.1.

Tính diện tích lớn nhất S_{max} của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

» Cách 1.

Gọi chiều dài $AD = 2x\left(0 < x < 6\right) \Rightarrow AB = \sqrt{36 - x^2}$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = 2x\sqrt{36 - x^2}$.

Xét $f\left(x\right) = x\sqrt{36 - x^2}$ trên $\left(0;6\right)$, ta có $f'\left(x\right) = \sqrt{36 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$.

x	0		$3\sqrt{2}$		6
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	36	$\searrow$	0 ||

Vậy giá tri lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $36\,\text{cm}^2$.

» Cách 2.

Đặt $AB = CD = 2x\left(0 < x < 6\right)$. Khi đó $AD = \sqrt{DO^2 - AO^2} = \sqrt{36 - x^2}$.

Suy ra $S_{ABCD} = 2x\sqrt{36 - x^2} \le 2 \cdot \dfrac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 36$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{36 - x^2}$ hay $x = 3\sqrt{2}$.

Vậy giá tri lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $36\,\text{cm}^2$.

Ví dụ 5.2.

Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Lời giải

Theo giả thiết :

- Thời gian làm việc của máy A là x ngày.
- Thời gian làm việc của máy B là y ngày.

Nên ta có $x+y=10 \Leftrightarrow y=10-x \qquad (*)$.

Và $0<y\le 6 \Rightarrow 4\le x<10$.

Số tiền lãi $f(x)=x^3+2x+326(10-x)-27(10-x)^3$ (thay $(*)$ vào).

$\Leftrightarrow f(x)=28x^3-810x^2+7776x-23740$ với $x\in[4;10)$.

Ta có $f'(x)=84x^2-1620x+7776$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 84x^2-1620x+7776=0 \Leftrightarrow x=9 \vee x=\dfrac{72}{7}(l)$.

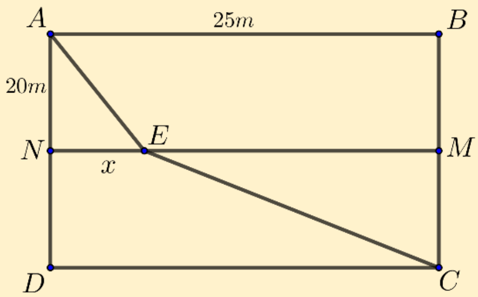
Bảng biến thiên.

x	4		9		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f(4)$	↗	$f(9)$	↘	$f(10)$

Từ BBT ta có $x=9$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.3.

Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=25m$, chiều rộng $AD=20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M,N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm



được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30m$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

Lời giải

» Cách 1.

Do cần thời gian xây là ngắn nhất nên con đường làm trên mỗi miền phải là những đường thẳng.

Gọi AE và EC lần lượt là đoạn đường cần làm. Với $NE=x(\text{m})$ (với $0\le x\le 25$).

$\Rightarrow EM=25-x(\text{m})$.

Ta được $\begin{cases} AE=\sqrt{AN^2+EN^2}=\sqrt{100+x^2} \\ EC=\sqrt{MC^2+EM^2}=\sqrt{100+(25-x)^2} \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Thời gian để làm đoạn đường từ A đến C là:

$$t(x)=\frac{AE}{15}+\frac{EC}{30}=\frac{\sqrt{100+x^2}}{15}+\frac{\sqrt{(25-x)^2+100}}{30}\ (\text{h}) \ (\text{Với } 0\le x\le 25)$$

$\Rightarrow t'(x)=\dfrac{x}{15\sqrt{100+x^2}}-\dfrac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}$.

Xét $t'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{15\sqrt{100+x^2}}-\dfrac{25-x}{30.\sqrt{(25-x)^2+100}}=0$

$\Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2+100}=(25-x)\sqrt{100+x^2}$

$\Leftrightarrow 4x^2\left((25-x)^2+100\right)=(25-x)^2\left(100+x^2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2(25-x)^2+400x^2-100(25-x)^2-(25-x)^2x^2=0$.

$\Leftrightarrow 4(25-x)^2\left(x^2-25\right)+x^2\left(20^2-(25-x)^2\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(4(25-x)^2(x+5)+x^2(45-x)\right)=0 \Leftrightarrow x=5$

Ta được $\begin{cases} t(0)=\dfrac{4+\sqrt{29}}{6} \\ t(5)=\dfrac{2\sqrt{5}}{3} \\ t(25)=\dfrac{1+\sqrt{29}}{3} \end{cases}$.

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.

» Cách 2.

Xét $t(x)=\dfrac{\sqrt{10^2+x^2}}{15}+\dfrac{\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}=\dfrac{\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}}{30}$ (Với $0\le x\le 25$).

Lại có $\sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\ge\sqrt{(45-x)^2+(2x+10)^2}$ $\left(\text{do } \left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\right)$.

$\Leftrightarrow \sqrt{20^2+(2x)^2}+\sqrt{(25-x)^2+10^2}\ge\sqrt{5(x-5)^2+2000}$.

Do đó $t(x)\ge\dfrac{\sqrt{5(x-5)^2+2000}}{30}\ge\dfrac{\sqrt{2000}}{30}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Vậy $t(x)_{\min}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$ khi và chỉ khi $x=5\ (\text{m})$.

Vậy thời gian ngắn nhất làm được con đường đi từ A đến C là $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}(\text{h})$.