CHƯƠNG VII QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 26: KHOẢNG CÁCH

I. LÝ THUYẾT.

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng: Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a, kí hiệu $d\left(M,a\right)$ là khoảng cách giữa M và hình chiếu vuông góc H của M trên a.

b) Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng: Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng $\left(P\right)$, kí hiệu $d\left(M,\left(P\right)\right)$ là khoảng cách giữa M và hình chiếu vuông góc H của M trên $\left(P\right)$.

Chú ý. $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$; $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

Nhận xét. Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

Chú ý. Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a, kí hiệu $d(a, (P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P).

Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng $\left(\alpha\right)$.

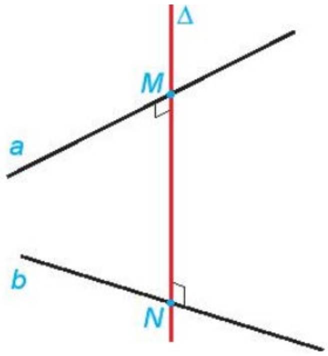
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q), kí hiệu $d((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n, kí hiệu $d(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

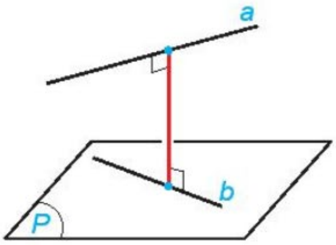
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau *a*, *b* và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của *a* và *b*.

Nếu đường vuông góc chung Δ cắt *a*, *b* tương ứng tại *M*, *N* thì độ dài đoạn thẳng *MN* được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau *a*, *b*.

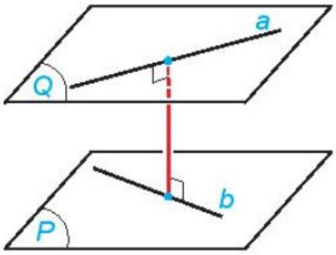


Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại (H.7.85).
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó (H.7.86).



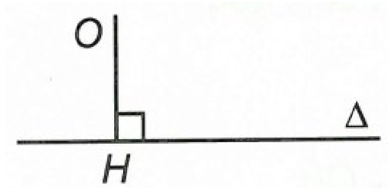
Hình 7.85



Hình 7.86

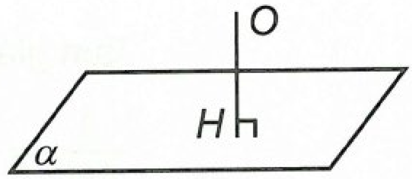
SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng



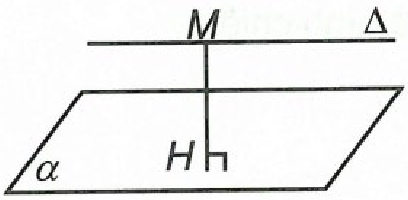
$d\left(O,\Delta\right)=OH$

Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng



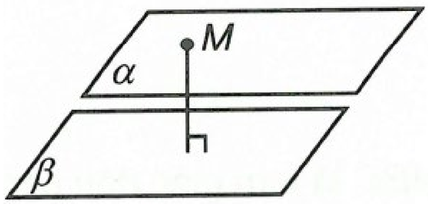
$d\left(O,\left(\alpha\right)\right)=OH$

Khoảng cách từ đường thẳng đến mặt phẳng



$d\left(\Delta,\left(\alpha\right)\right)=d\left(M,\left(\alpha\right)\right)$

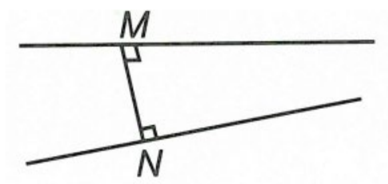
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song



$d\left(\left(\alpha\right);\left(\beta\right)\right)=d\left(M;\left(\beta\right)\right)$

$\forall M\in\left(\alpha\right)$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



$d\left(a,b\right)=MN$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Bài toán: Xác định khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P).

Bước 1. Xác định hình chiếu H của O trên (α).

+) Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α).

+) Tìm giao tuyến (α) của (P) và (α).

+) Kẻ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó $d(O;(\alpha)) = OH$.

Bước 2. Tính OH.

Lưu ý: Tính chất của tứ diện vuông.

Giả sử OABC là tứ diện vuông tại O.

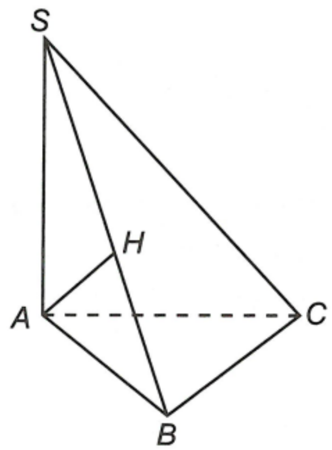
$(OA \perp OB; OB \perp OC; OC \perp OA)$ và H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Ví dụ. Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a, SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^O. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Hướng dẫn giải

Ta có



$AH \perp SB; AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH = d(A.(SBC))$.

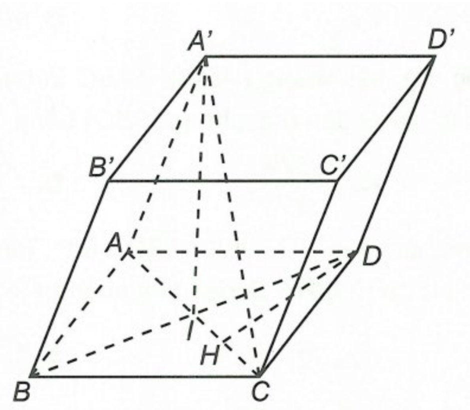
Tam giác SAB vuông tại A nên

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A’ và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $A'A = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ D’ đến mặt phẳng $(A'ACC')$

Lời giải



Trong $(A'AC)$, kẻ $A'I \perp AC$.

Vì $(A'AC) \perp (ABCD)$ và $(A'AC) \cap (ABCD) = AC$ nên $A'I \perp (ABCD)$.

Vì $DD' /\!/ AA'$ nên $DD' /\!/ (A'ACC') \Rightarrow d(D', (A'AC)) = d(D, (A'AC))$

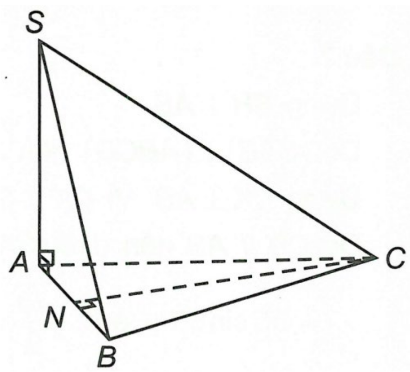
Kẻ $DH \perp AC$.

Ta có $AC = A'A\sqrt{2} = 2a \Rightarrow CD = a$.

Suy ra $d(D, (A'AC)) = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

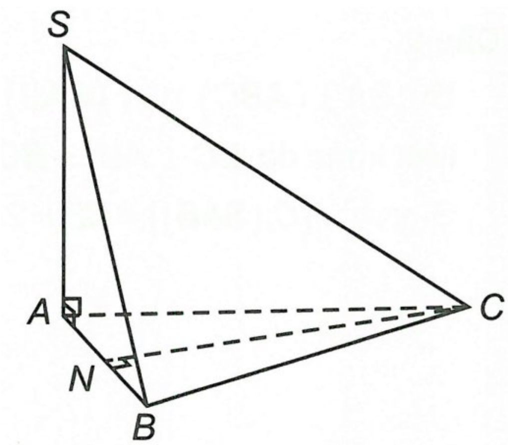
Dựng $CN \perp AB \Rightarrow CN \perp (SAB) \Rightarrow d(C; (SAB)) = CN$.

Do ΔABC đều cạnh a nên $CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(C; (SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm BC. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Dựng $CN \perp AB \Rightarrow CN \perp (SAB) \Rightarrow d(C;(SAB)) = CN$.

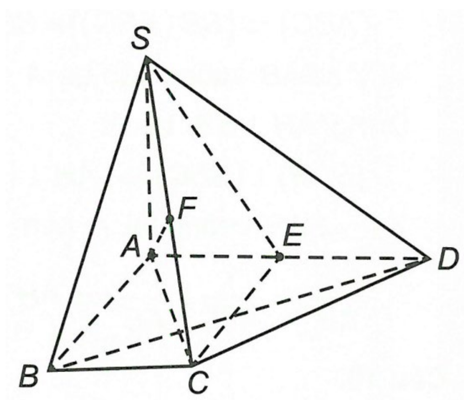
Do ΔABC đều cạnh bằng a nên $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do M là trung điểm BC nên

$d(M;(SAB)) = \frac{1}{2}d(C;(SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o, BA = BC = a; AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và (SAD) bằng 30^o. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

Lời giải



Gọi E là trung điểm A**D.**

Khi đó ABCE là hình vuông cạnh a. Suy ra $CE \perp AD$.

Lại có $CE \perp SA$.

Do đó $CE \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{CSE} = \widehat{(SC,(SAD))} = 30^o$.

Lại có: $SC.\sin 30^o = CE = a \Rightarrow SC = 2a$.

ΔABC vuông cân tại B nên $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

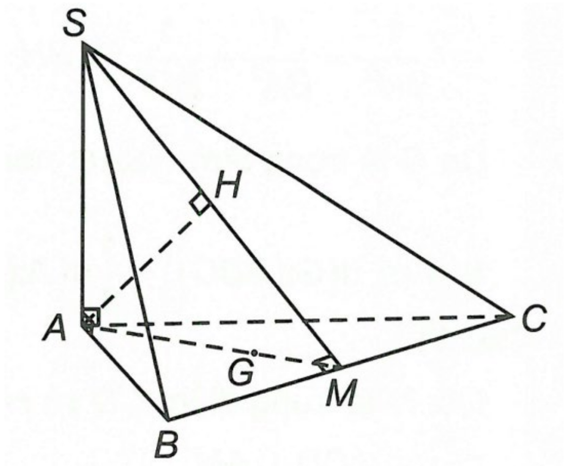
Do $CE = \frac{1}{2}AD$ nên ΔACD vuông tại $C \Rightarrow AC \perp CD.$

Dựng $AF \perp SC.$

Ta có: $d\left(A,\left(SCD\right)\right) = AF = \frac{SA.SC}{SC} = \frac{a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{2a} = a.$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A trêm SM.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAM\right) \Rightarrow \left(SBC\right) \perp \left(SAM\right).$

$\Rightarrow AH \perp \left(SBC\right) \Rightarrow d\left(A;\left(SBC\right)\right) = AH.$

Xét ΔSAM vuông tại A có

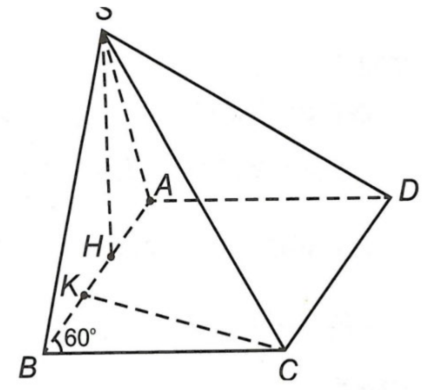
$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$

Do G là trọng tâm ΔABC nên $\frac{GM}{MA} = \frac{1}{3}.$

Suy ra $d\left(G;\left(SBC\right)\right) = \frac{1}{3}d\left(A;\left(SBC\right)\right) = \frac{\sqrt{57}a}{18}.$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $BC = a\sqrt{2}, \widehat{ABC} = 60^o$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ bằng

Lời giải



Dựng $SH \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

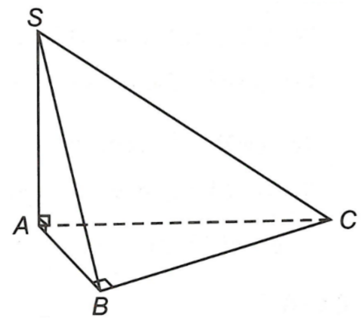
Dựng $CK \perp AB$. Vì $CK \perp SH$ nên $CK \perp (SAB)$.

Do $CD /\!/ AB$ nên $d\left(D,(SAB)\right) = d\left(C,(SAB)\right) = CK$

$= BC \sin 60^o = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $BC = 2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải



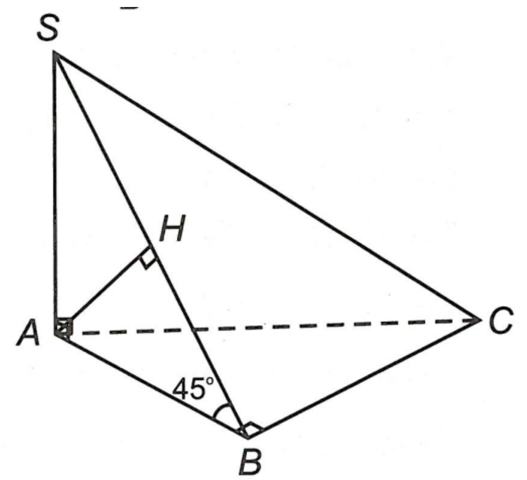
Do $SA \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

Mặt khác do $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra $d\left(C;(SAB)\right) = CB = 2a.$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = 2a$. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45^o. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên

$(ABC) \Rightarrow (SB;(ABC)) = \widehat{SBA} = 45^o$.

Vậy ΔSAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AB = a$.

Dựng $AH \perp SB$, ta có:

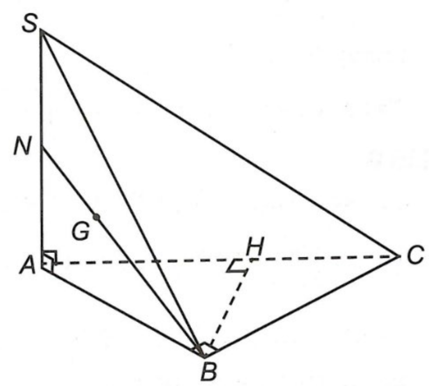
$(SAB) \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$.

Xét ΔSAB vuông tại A nên

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = 2a, SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SA**B.** Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAC) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABC)$ nên $(SAC)(ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC), dựng $BH \perp AC$.

Ta có $BH \perp (SAC)$. Suy ra $d(B;(SAC)) = BH$.

Xét ΔABC vuông tại B nên

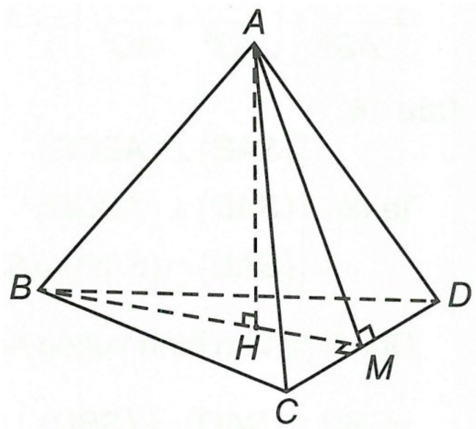
$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Do G là trọng tâm ΔSAB nên $\frac{NG}{NB}=\frac{1}{3}$.

Suy ra $d\left(G;(SBC)\right)=\frac{1}{3}d\left(A;(SBC)\right)=\frac{2\sqrt{5}a}{15}$.

Câu 10: Cho tứ diện đều ABCD, biết khoảng cách A đến mặt phẳng (BCD) bằng $a\sqrt{6}$. Diện tích tam giác ABC bằng

Lời giải



Gọi M là trung điểm CD và H là hình chiếu vuông góc của A trên BM.
Áp dụng kết quả **câu 11**, ta có
$d\left(A;(BCD)\right)=AH$ và H là trọng tâm ΔBCD.

Xét ΔABH vuông tại H: $AH^2=AB^2-BH^2$

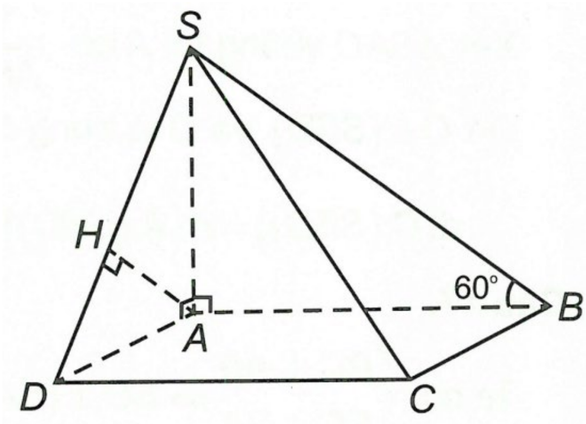
$\Leftrightarrow AH^2=AB^2-\left(\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}AB\right)^2$

$\Leftrightarrow 6a^2=\frac{2}{3}AB^2 \Rightarrow AB=3a.$

Vậy $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}(3a)^2}{4}=\frac{9\sqrt{3}a^2}{4}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^o. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA}$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$.

Xét ΔSAB vuông tại $A : SA = AB \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

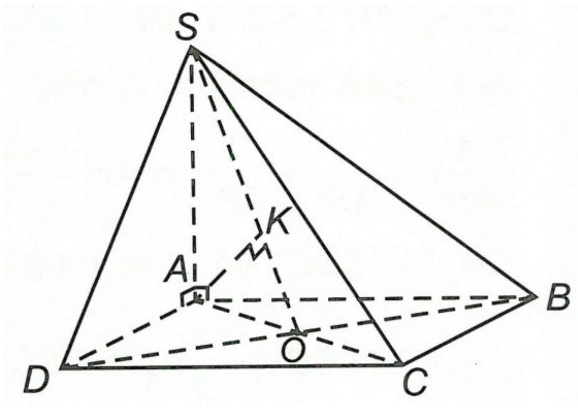
Dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A;(SCD)) = AH$.

Xét ΔSAD vuông tại $A : \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AH \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Do $AB /\!/ CD$ nên $d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow \begin{cases} BD \perp OA \\ BD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$.

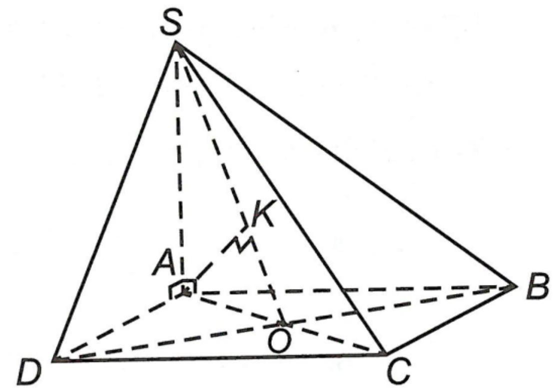
Dựng $AK \perp SO \Rightarrow AK \perp (SBD)$.

Suy ra $d(A;(SBD)) = AK$.

Xét ΔSAO vuông tại $A: \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow \begin{cases} BD \perp OA \\ BD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$.

Dựng $AK \perp SO \Rightarrow AK \perp (SBD)$.

Suy ra $d(A;(SBD)) = AK$.

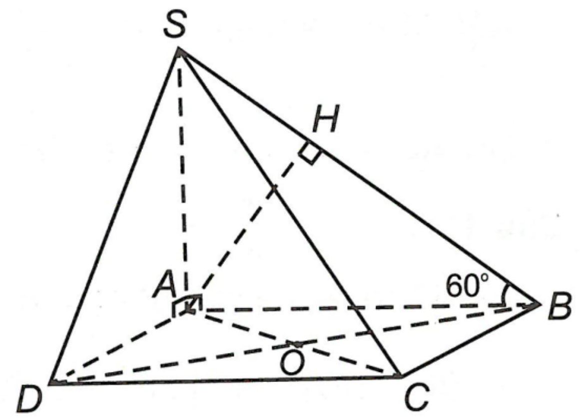
Xét ΔSAO vuông tại A có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Do $O \in (SBD)$ và O là trung điểm AC nên

$d(C;(SBD)) = d(A;(SBD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông tâm O có cạnh a. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^o. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Suy ra $((SBC);(ABCD)) = \widehat{SBA}.$

Xét ΔSAB vuông tại $A: SA = AB \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}.$

Vì $BC \perp (SAB)$ nên $(SAB) \perp (SBC).$

Dựng $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH.$

Xét ΔSAB vuông tại A nên

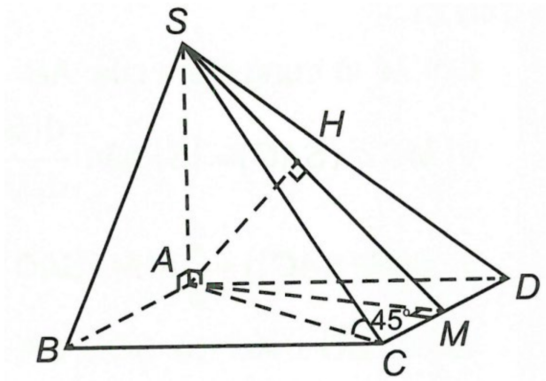
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Do $C \in (SBC)$ và O là trung điểm AC nên

$$d(O;(SBC)) = \frac{1}{2} d(A;(SBC)) = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^o$, biết SC hợp với đáy một góc 45^o. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$

Tam giác ABC cân tại B và $\widehat{BAC} = 60^o$.

Suy ra $\Delta ABC, \Delta ACD$ đều.

Vậy $\left(\widehat{SC;(ABCD)}\right) = \widehat{SCA} = 45^o \Rightarrow SA = AC = a$.

Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAM)$.

Dựng $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(A;(SCD)\right) = AH$.

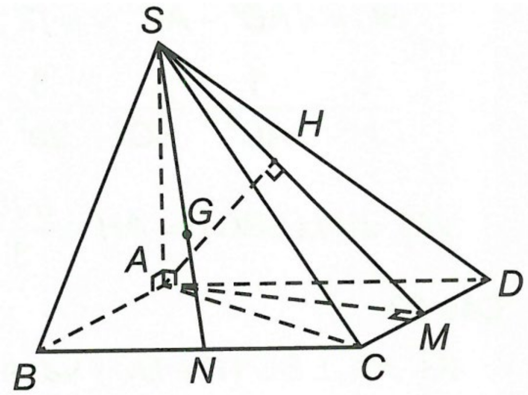
Xét ΔSAM vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Do $AB // (SCD)$ nên $d\left(B;(SCD)\right) = d\left(A;(SCD)\right) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD), SA = a, ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^o$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



ΔABC cân tại B và $\widehat{ABC} = 60^o \Rightarrow \Delta ABC, \Delta ACD$ đều.

Gọi M là trung điểm $CD \Rightarrow CD \perp AM$.

Mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAM)$.

Dựng $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(A;(SCD)\right) = AH$.

Xét ΔSAM vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Do $AB // (SCD) \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = d\left(A;(SCD)\right) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

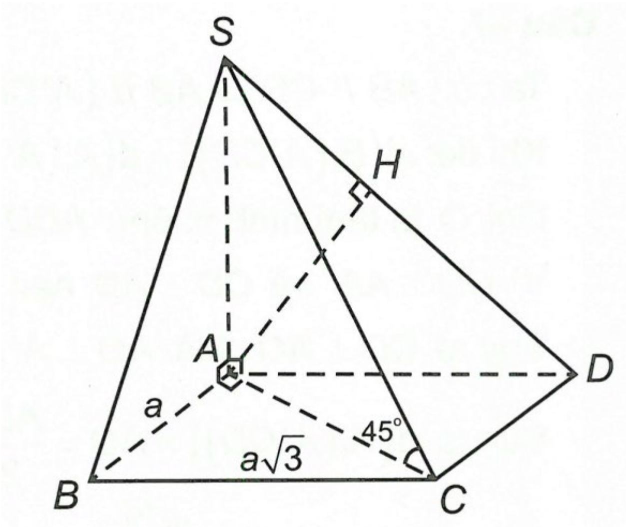
Gọi N là trung điểm BC nên $\frac{GS}{NS} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $d\left(G;(SCD)\right) = \frac{2}{3} d\left(N;(SCD)\right)$

$=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}d\left(B;\left(SCD\right)\right)=\frac{1}{3}d\left(A;\left(SCD\right)\right)=\frac{\sqrt{21}a}{21}.$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a,BC=a\sqrt{3},SA\perp\left(ABCD\right)$. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45^o. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng

Lời giải



Vì $SA\perp\left(ABCD\right)$ nên $\widehat{\left(SC;\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SCA}=45^o.$

Kẻ $AH\perp SD\left(H\in SD\right)\left(1\right).$

Ta có: $CD\perp AD$ và $CD\perp SA.$

Suy ra $CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow CD\perp AH\left(2\right).$

Từ (1) và (2) suy ra $AH\perp\left(SCD\right).$

Do đó $d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AH.$

Xét ΔABC vuông tại B có:

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a.$

Xét ΔSAC vuông tại A có:

$SA=AC.\tan 45^o=2a.$

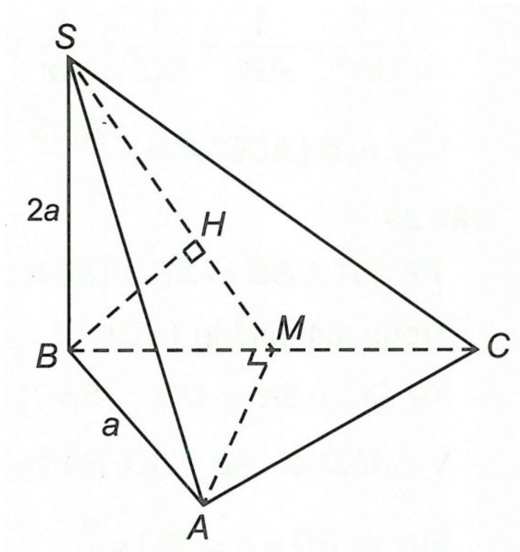
Xét ΔSAD vuông tại A có:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{7}{12a^2}\Leftrightarrow AH=\frac{2a\sqrt{21}}{7}.$

Vậy $d\left(B,\left(SCD\right)\right)=AH=\frac{2a\sqrt{21}}{7}.$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABCD là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SB vuông góc mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $SB=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(SAM\right)$ bằng

Lời giải



Ta có: $AM \perp BC$ (ΔABC đều); $AM \perp SB\left(do\ SB \perp (ABC)\right)$

Do đó $AM \perp (SBC)$.

Trong mặt phẳng (SBM), kẻ $BH \perp SM$.

Mà $BH \perp AM$ nên $BH \perp (SAM)$.

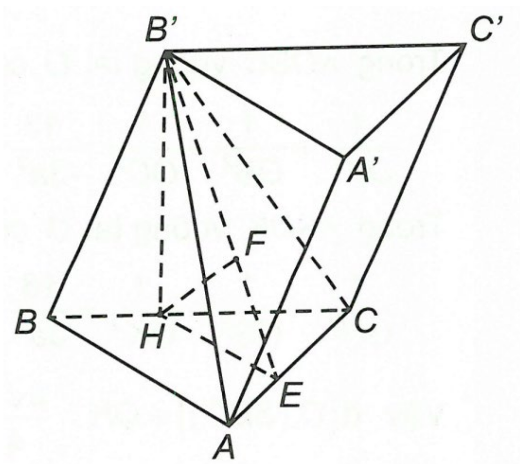
Suy ra $d\left(B,(SAM)\right) = BH$.

Xét ΔSBM vuông tại B có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{17}{4a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = AC = 3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho $HC = 2HB$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng 2a. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng

Lời giải



Ta có: $BC = 3a\sqrt{2} \Rightarrow HB = a\sqrt{2}.$

Lại có $B'H = \sqrt{BB'^2 - HB^2} = a\sqrt{2}.$

Dựng $HE \perp AC; HF \perp B'E.$

Suy ra $HF \perp (B'AC) \Rightarrow d\left(H,(B'AC)\right) = HF.$

Ta có $\frac{HE}{AB}=\frac{CH}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow HE=2a.$

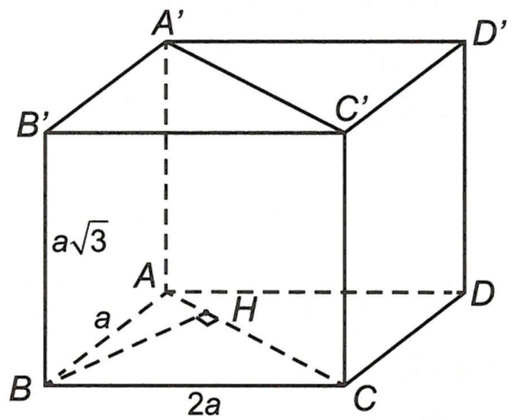
Suy ra $\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{HE^2}+\frac{1}{B'H^2}\Rightarrow HF=\frac{HE.B'H}{\sqrt{HE^2+B'H^2}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$

Mặt khác $\frac{d\left(B,\left(B'AC\right)\right)}{d\left(H,\left(B'AC\right)\right)}=\frac{BC}{HC}=\frac{3}{2}.$

Do đó $d\left(B,\left(B'AC\right)\right)=\frac{3}{2}.HF=a\sqrt{3}.$

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, BC=2a, BB'=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ bằng

Lời giải



Kẻ $BH\perp AC\left(H\in AC\right)$.

Lại có $BH\perp AA'\left(\text{do } AA'\perp\left(ABCD\right)\right)$.

Suy ra $BH\perp\left(ACC'A'\right)\Rightarrow d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right)=BH$.

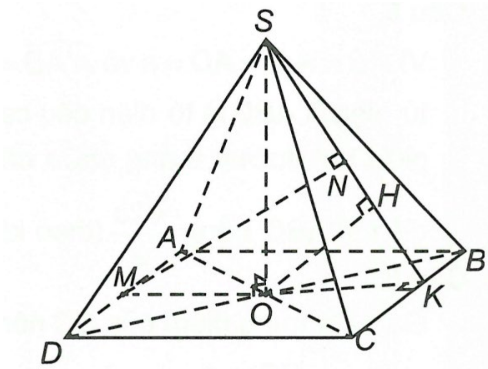
Xét ΔABC vuông tại B có:

$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{5}{4a^2}\Rightarrow BH=\frac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Vậy $d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh bằng $a, \widehat{BAD}=60^o, SO\perp\left(ABCD\right), SO=a$. Khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

Lời giải



Kẻ $OK \perp BC\left(K \in BC\right), OH \perp SK\left(H \in SK\right)$.

Ta có: $AD /\!/ BC \Rightarrow AD /\!/ \left(SBC\right)$.

Khi đó $d\left(AD,\left(SBC\right)\right) = d\left(M,\left(SBC\right)\right)$ (với M là giao điểm của AD và OK).

Kẻ $MN /\!/ OH\left(N \in SK\right)$.

Ta có $\left(SOK\right) \perp \left(SBC\right)$ theo giao tuyến SK nên $OH \perp \left(SBC\right)$.

Suy ra $MN \perp \left(SBC\right)$.

Suy ra $d\left(AD,\left(SBC\right)\right) = d\left(M,\left(SBC\right)\right) = MN = 2OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

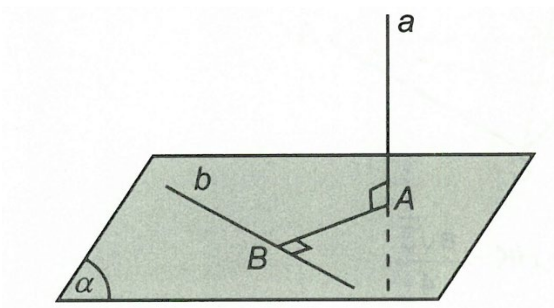
DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

BÀI TOÁN 1. TÍNH KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU a VÀ b TRƯỜNG HỢP $a \perp b$

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựng mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ chứa b và vuông góc với a tại **A.**

Dựng $AB \perp b$ tại b

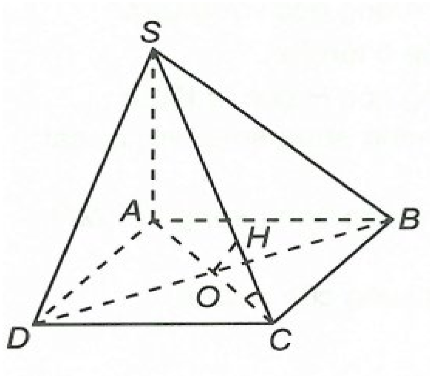


AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2 BÀI TẬP.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a; cạnh bên SA vuông góc với đáy; SC hợp với đáy góc 45^{o}. Tính khoảng cách giữa hai dường thẳng SC và BD.

Lời giải



Ta có: AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

Suy ra $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^o$.

Lại có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp SC.$

Gọi $\{O\} = AC \cap BD$. Dựng $OH \perp SC$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} OH \perp SC \\ OH \perp BD \end{cases}$. Suy ra OH la đoạn vuông góc chung của BD và SC.

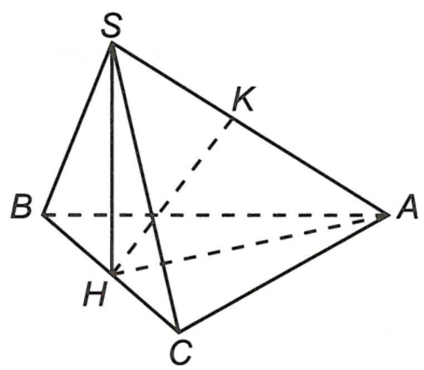
Suy ra $d(BD, SC) = OH$.

Xét tam giác OHC vuông tại H có: $OH = OC \sin 45^o = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy.

Tính theo a khoảng cách hai đường thẳng SA, BC.

Lời giải



Kẻ $AH \perp BC(1)$. Ta có $AH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $SA \perp (ABC), BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SHA)$.

Trong (SAH), kẻ $HK \perp SA\,(K \in SA)$. Suy ra HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

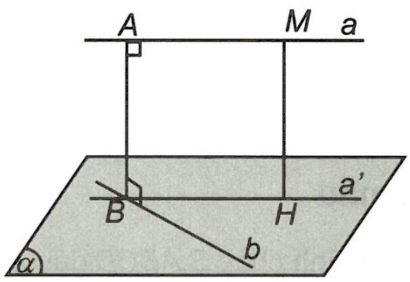
Xét tam giác SHA vuông tại H có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(SA,BC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

BÀI TOÁN 2. TÍNH KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU A VÀ B KHÔNG VUÔNG GÓC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1.



Dựng mặt phẳng (α) chưa b và song song với a.

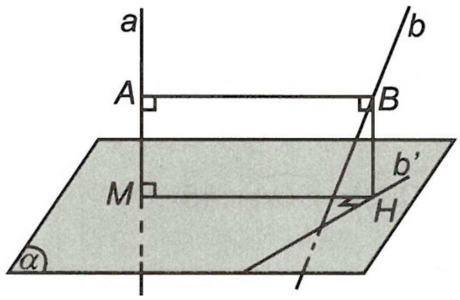
Chọn điểm M thích hợp trên a, dựng $MH \perp (\alpha)$ tại H.

Qua H, dựng đường thẳng $a'//a$, cắt b tại **B.**

Từ B dựng đường thẳng song song MH, cắt a tại **A.**

AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2.



Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a tại M.

Dựng hình chiếu b’ trên b lên (α).

Dựng hình chiếu vuông góc H của M lên b’.

Từ H, dựng đượng thẳng song song với a, cắt b tại **B.**

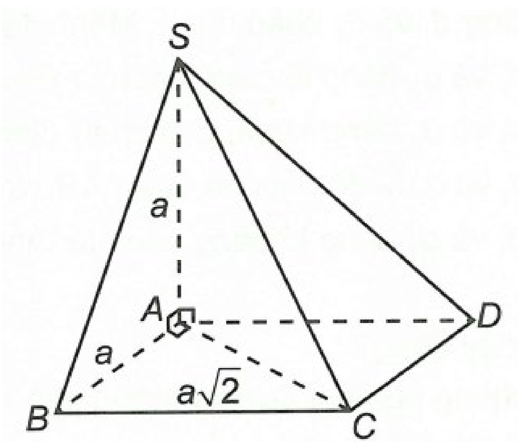
Qua B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại **A.**

AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2 BÀI TẬP.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Lời giải



Ví $CD /\!/ (SAB)$ nên $d(CD,SB) = d(CD,(SAB))$

$= d(D,(SAB))$.

Ta có: $AD \perp AB$ và $AD \perp SA$.

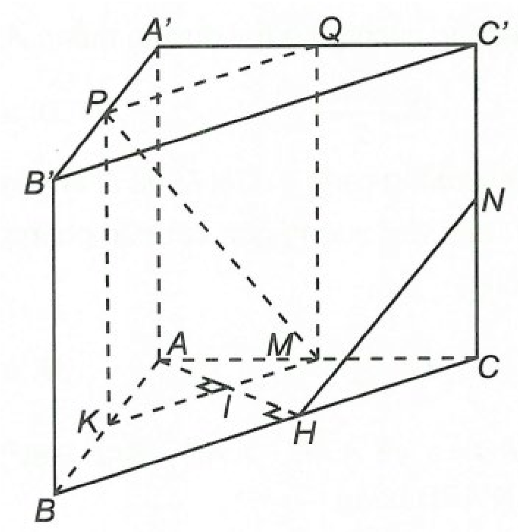
Suy ra $AD \perp (SAB)$.

Khi đó $d(D,(SAB)) = DA = a\sqrt{2}$.

Vậy $d(CD;SB) = a\sqrt{2}$.

Câu 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, BC = 2a$, mặt bên ACC'A' là hình vuông. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AC, CC', A'B'$ và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MP và HN.

Lời giải



Ta xét cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa MP và NH.

Xét tam giác ABC vuông ta A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2 - AB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Kẻ $MK/\!/BC\left(K\in AB\right), PQ/\!/B'C'\left(Q\in A'C'\right)$.

Ta có $PM\subset\left(MKPQ\right)$ và $HN\subset\left(BCC'B'\right)$.

Do $MK/\!/BC$ và $MQ/\!/CC'$ nên $\left(MKPQ\right)/\!/\left(BCC'B'\right)$.

Khi đó $d\left(MP,NH\right)=d\left(\left(MKPQ\right),\left(BCC'B'\right)\right)$.

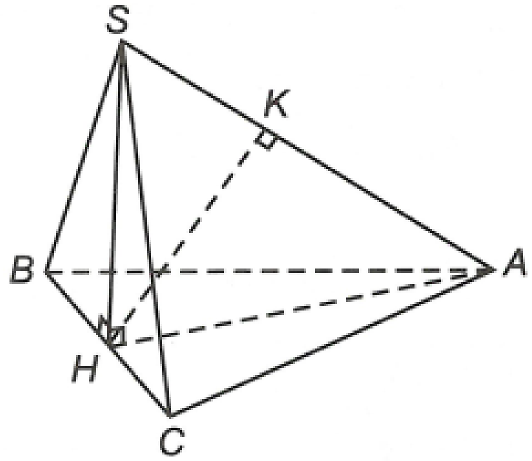
Do $\begin{cases}AH\perp BC\\ AH\perp CC'\left(CC'\perp\left(ABC\right),AH\subset\left(ABC\right)\right)\end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(BCC'B'\right)$.

Suy ra $AH\perp\left(KMQP\right)$ tại $\left\{I\right\}=AH\cap KM$.

Vậy $d\left(MP,NH\right)=d\left(\left(MPKQ\right),\left(BCC'B'\right)\right)=IH=\dfrac{AH}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng $\left(SBC\right)$ vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC nên

$AH=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a}{2}, SH\perp\left(ABC\right), SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên $SA\Rightarrow HK\perp SA$.

Ta có: $BC\perp\left(SAH\right)\Rightarrow BC\perp HK\Rightarrow d\left(SA;BC\right)=HK$.

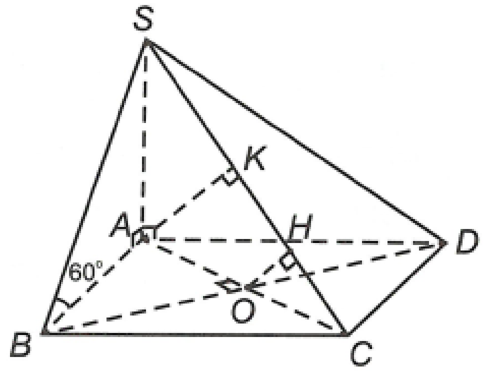
Xét tam giác SHA vuông tại H.

Ta có $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{16}{3a^2}\Rightarrow HK=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d\left(SA;BC\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy SA vuông góc với đáy, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa SB và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^o$.

Do tam giác SAC vuông tại A nên

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Gọi O là tâm hình vuông ABC**D.**

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC), dựng $OH \perp SC$.

Suy ra $d(BD;SC) = OH$.

Dựng $AK /\!/ OH \Rightarrow OH = \frac{1}{2}AK$.

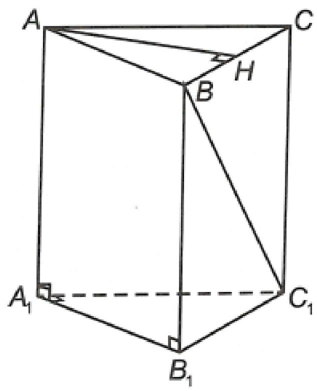
Xét tam giác SAC vuông tại A:

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{30}a}{5}$.

Vậy $d(BD;SC) = \frac{\sqrt{30}a}{10}$.

Câu 28: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = a, CC' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 bằng

Lời giải



Do $BB_1 /\!/ AA_1$ nên $AA_1 /\!/ \left(BCC_1B_1\right)$.

Suy ra $d\left(AA_1;BC_1\right)=d\left(AA_1;\left(BCCC_1\right)\right)=d\left(A;\left(BCCC_1\right)\right)$.

Do $\left(BCCC_1\right)\perp\left(ABC\right)$, dựng $AH\perp BC,\left(H\in BC\right)$.

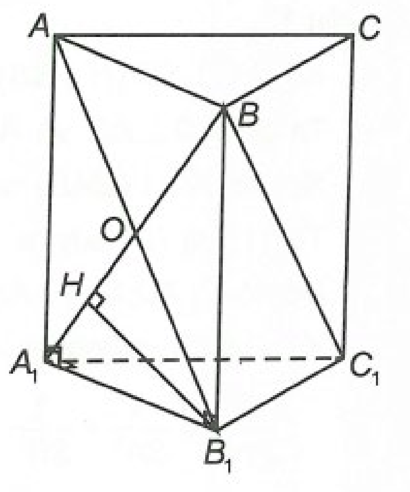
Suy ra $AH\perp\left(BCC_1B_1\right)$.

Xét tam giác ABC vuông tại $A: AH=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d\left(AA_1;BC_1\right)=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 29: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại $A, AB=a, CC'=2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC_1 bằng

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AB_1 và A_1B.

Do $AC /\!/ A_1C_1$ nên $AC /\!/ \left(BA_1C_1\right)$.

Suy ra $d\left(AC;BC_1\right)=d\left(AC;BA_1C_1\right)=d\left(A;\left(BA_1C_1\right)\right)=d\left(B_1;\left(BA_1C_1\right)\right)$

(do $O \in (BA_1C_1)$ và O là trung điểm AB_1).

Dựng $B_1H \perp A_1B(1)$.

Ta có: $\begin{cases} A_1C_1 \perp A_1B_1 \\ A_1C_1 \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow A_1C_1 \perp (ABB_1A_1)$

$\Rightarrow A_1C_1 \perp B_1H(2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $B_1H \perp (A_1BC_1) \Rightarrow d(B_1;(A_1BC_1)) = B_1H$.

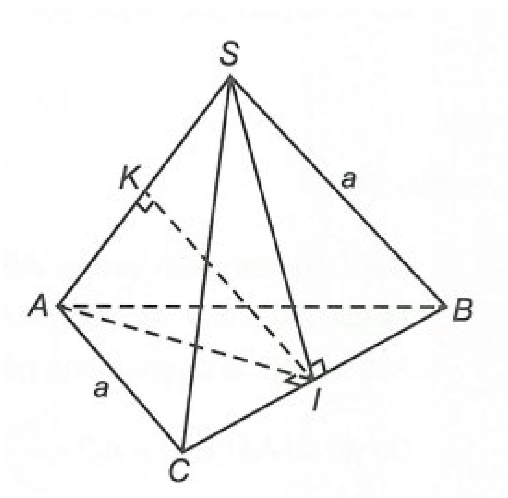
Xét tam giác A_1BB_1 vuông tại B_1 :

$$\frac{1}{B_1H^2} = \frac{1}{(A_1B_1)^2} + \frac{1}{(BB_1)^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow B_1H = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Vậy $d(BC_1;AC) = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 30: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

Lời giải



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và SA.

Ta có: $BC \perp SI$ (ΔSBC đều) và $BC \perp AI$ (ΔABC đều).

Do đó $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp IK.(1)$

Mặt khác $SI = IA \Rightarrow \Delta SAI$ cân tại I.

Có IK là đường trung tuyến nên $IK \perp AB.(2)$

Từ (1) và (2) suy ra IK là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Do đó $d(SA;BC) = IK$.

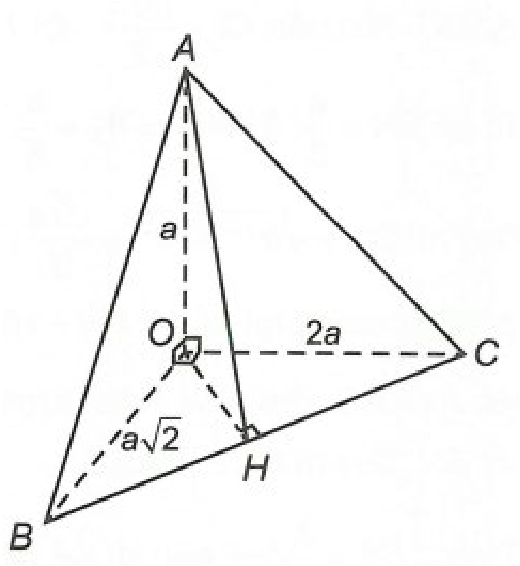
Xét ΔAKI vuông tại K có:

$$IK = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $d\left(SA;BC\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31: Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

Lời giải



Kẻ $OH \perp BC\left(H \in BC\right)(1)$.

Ta có: $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$.

Suy ra $OA \perp \left(OBC\right) \Rightarrow OA \perp OH\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra OH là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Do đó $d\left(OA;BC\right) = OH$.

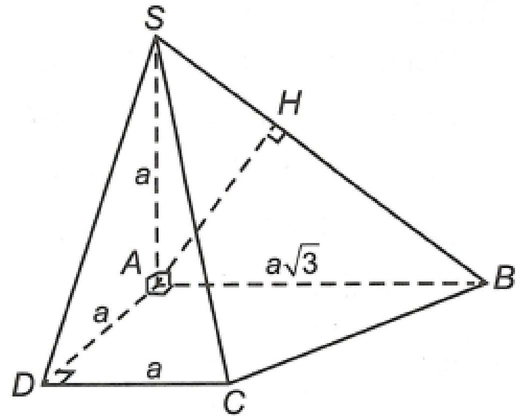
Xét ΔOBC vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d\left(OA;BC\right) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và $D, SA \perp \left(ABCD\right), AD = DC = SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng

Lời giải



Kẻ $AH \perp SB\left(H \in SB\right)(1)$.

Ta có: $AD \perp AB$ và $AD \perp SA\left(do\ SA \perp \left(ABCD\right)\right)$.

Suy ra $AD \perp \left(SAB\right) \Rightarrow AD \perp AH\left(2\right)$.

Từ (1) và (2) suy ra AH là đoạn vuông góc chung của AD và S**B.**

Do đó $d\left(AD;SB\right) = AH$.

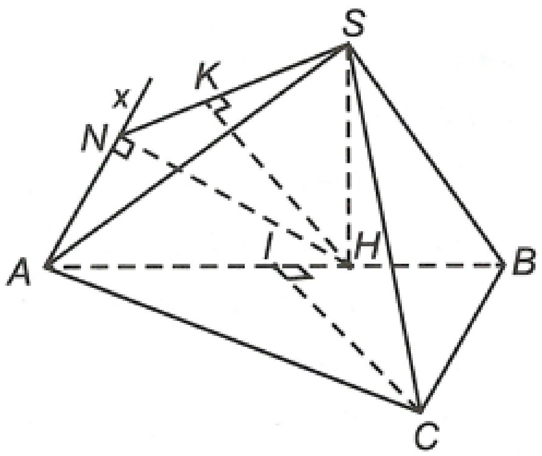
Xét ΔSAB vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d\left(AD;SB\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa hai đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a bằng

Lời giải



Ta có $\widehat{\left(SC,\left(ABC\right)\right)}=\widehat{\left(SC,HC\right)}=\widehat{SCH}=60^{o}$.

ΔABC đều nên $CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ với I là trung điểm A**B.**

Ta có $BH=\dfrac{a}{3};BI=\dfrac{a}{2}\Rightarrow IH=\dfrac{a}{6}$.

Suy ra $CH=\sqrt{IH^{2}+IC^{2}}=\dfrac{\sqrt{7}a}{3}$.

ΔSCH vuông tại H có $SH=HC.\tan 60^{o}=\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$.

Kẻ $Ax/\!/BC$. Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN. Suy ra $BC/\!/\left(SAN\right)$.

Ta có: $BA=\dfrac{3}{2}AH$ nên $d\left(SA,BC\right)=d\left(B,\left(SAN\right)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(H,\left(SAN\right)\right)$.

Ta cũng có $Ax\perp\left(SHN\right)$ nên $Ax\perp HK$. Do đó $HK\perp\left(SAN\right)$.

Suy ra $d\left(H,\left(SAN\right)\right)=HK$.

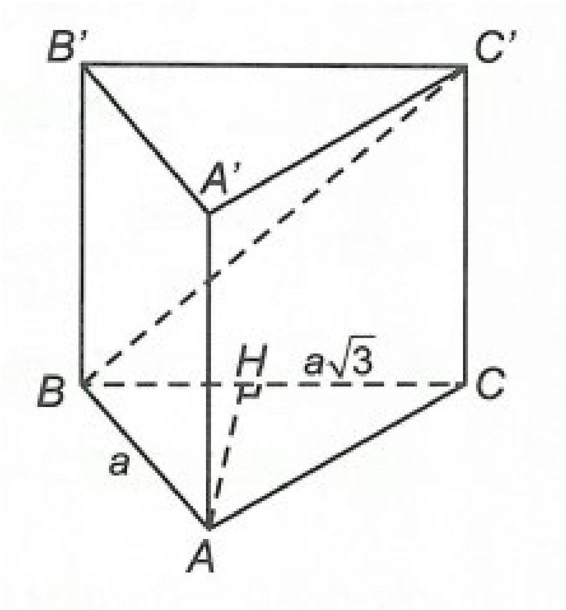
$AH=\dfrac{2a}{3},HN=AH\sin 60^{o}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$HK=\dfrac{SH.HN}{\sqrt{SH^{2}+HN^{2}}}=\dfrac{a\sqrt{42}}{12}$.

Vậy $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{3}{2}HK=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

Câu 34: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại $A,AB=a,BC=a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng

Lời giải



Vì $AA'/\!/ (BCC'B')$ nên

$d(AA';BC') = d(AA';(BCC'B')) = d(A;(BCC'B'))$.

Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$.

Mà $AH \perp BB' (\text{do } BB' \perp (ABC))$.

Suy ra $AH \perp (BCC'B')$.

Do đó $d(A;(BCC'B')) = AH$.

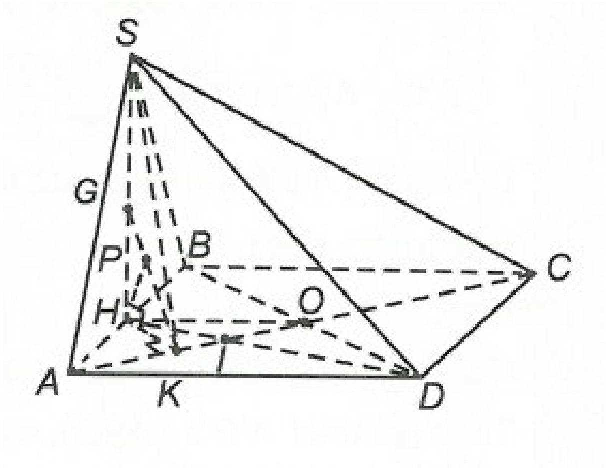
Xét ΔABC vuông tại A có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(AA';BC') = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

Lời giải



Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD, H là trung điểm A**B.**

Do $(SAB)\perp(ABCD)$ và $SH\perp AB$ nên $SH\perp(ABCD)$.

Gọi I là giao điểm của HD và $AC \Rightarrow ID = 2IH$.

Gọi G là trọng tâm ΔSAB.

Suy ra $IG /\!/ SD \Rightarrow SD /\!/ (AGC)$.

$\Rightarrow d(SD;AC) = d(SD;(AGC)) = d(D;(AGC)) = 2d(H;(AGC))$.

Dựng $HK\perp AC \Rightarrow AC\perp(GHK)$.

Dựng $HP\perp GK \Rightarrow HP\perp(GAC)$.

Suy ra $d(H;(GAC)) = HP$.

Ta có $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}; HO = \dfrac{BC}{2} = a; SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HG = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác GHK vuông tại H:

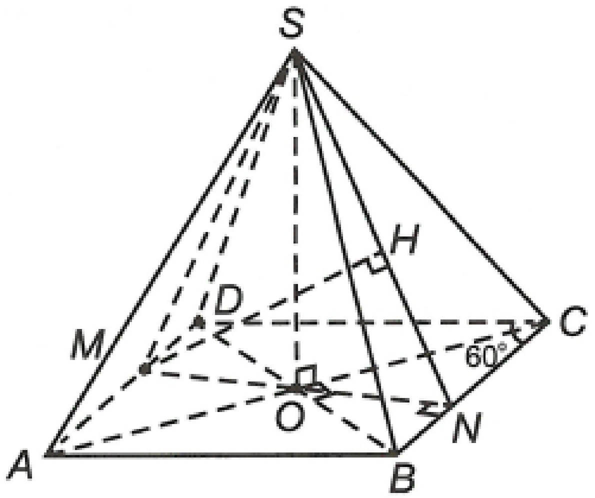
$$\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{17}{a^2}.$$

Suy ra $HP = \dfrac{\sqrt{17}a}{17}$.

Vậy $d(SD;AC) = \dfrac{\sqrt{17}a}{17}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABCD là hình thoi tam O, cạnh a, góc $\widehat{BCD} = 60^o$, có SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng

Lời giải



Ta có: $SB \subset (SBC)$ và $AD//(SBC)$.

Do đó $d(AD,SB) = d(AD,(SBC))$.

Qua O kẻ $MN \perp BC (M \in AD, N \in BC)$.

Ta có: $BC \perp MN$ và $BC \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$), suy ra $BC \perp (SMN)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SMN) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SN.

Kẻ $MH \perp SN (H \in SN) \Rightarrow MH \perp (SBC)$.

Khi đó ta có $d(AD,SB) = d(M,(SBC)) = MH$.

Ta có $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2}MN.SO = \frac{1}{2}MH.SN$

$$\Rightarrow MH = \frac{MN.SO}{SN} = \frac{MN.SO}{\sqrt{SO^2 + ON^2}}.$$

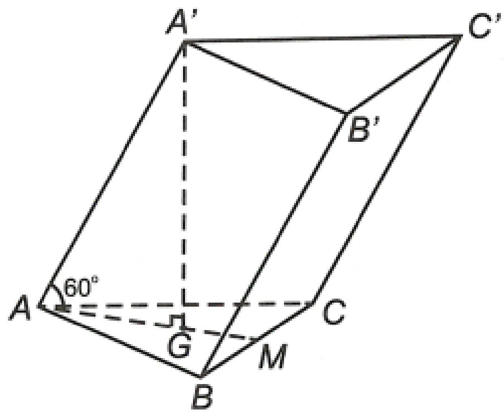
Do tam giác BCD có $CD = CB = a$ và $B\hat{C}D = 60^o$ suy ra tam giác ΔBCD đều

$$d(D,BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2} = MN.$$

Vậy $d(AD,SB) = d(M,(SBC)) = MH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$

Câu 37: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và $A'B'$ bằng

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, theo giả thiết

$A'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(AA';(ABC))} = \widehat{A'AG} = 60^o.$

Xét tam giác $A'AG$ vuông tại G:

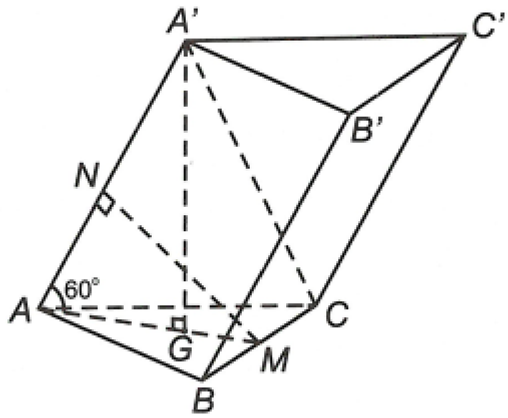
$A'G = AG.\tan\widehat{A'AG} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60^o = a.$

Do $BC /\!/ (A'B'C')$ nên $d(BC;A'B') = d(BC;(A'B'C')) = A'G = a.$

Vậy $d(BC;A'B') = a.$

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AA' bằng

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Theo giả thiết $A'G \perp (ABC)$, suy ra $\widehat{(AA';(ABC))} = \widehat{A'AG} = 60^o.$

Xét tam giác $A'AG$ vuông tại G:

$A'G = AG.\tan\widehat{A'AG} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60^o = a.$

Gọi M là trung điểm B**C.**

$$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(A'AM\right).$$

Dựng $MN \perp AA' \Rightarrow d\left(BC; AA'\right) = MN.$

Xét tam giác AMN vuông tại N:

$MN = AM.\sin\widehat{NAM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 60^o = \dfrac{3a}{4}$. Vậy $d\left(BC; AA'\right) = \dfrac{3a}{4}.$