CHƯƠNG VII QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

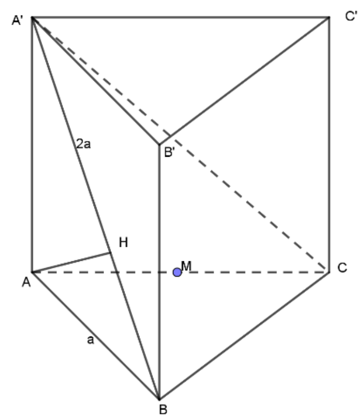
BÀI 26: KHOẢNG CÁCH

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 67: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a, AC = a\sqrt{3}, A'B = 2a$. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



$+ \ d(M,(A'BC)) = \frac{1}{2}d(A,(A'BC))$.

Kẻ $AH \perp A'B$ (1).

Ta có: $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp BC$.

Mà $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'ABB')$.

Có:

$$\left.\begin{matrix} BC \perp (A'ABB') \\ AH \subset (A'ABB') \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp BC \ (2).$$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH$.

Ta có: $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

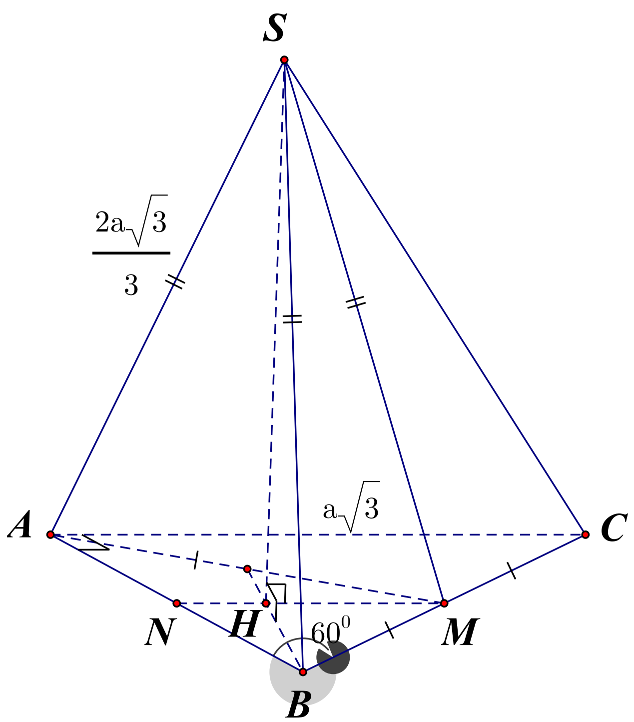
$$S_{\Delta A'AB} = \frac{1}{2}AH.A'B = \frac{1}{2}AA'.AB \Rightarrow AH = \frac{AA'.AB}{A'B} = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$d(M,(A'BC)) = \frac{1}{2}d(A,(A'BC)) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 60^0$. Gọi M là trung điểm của BC. Biết $SA = SB = SM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh S đến (ABC)

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải



Vì ΔABC vuông tại A, M là trung điểm của BC và $\widehat{ABC} = 60^0$ suy ra ΔABM đều.

$SA = SB = SM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Suy ra, hình chóp $S.ABM$ đều.

Xét ΔABC: $\sin 60^0 = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow AM = AB = BM = a$.

Gọi H là trọng tâm ΔABC nên H là chân đường cao kẻ từ S xuống (ABC).

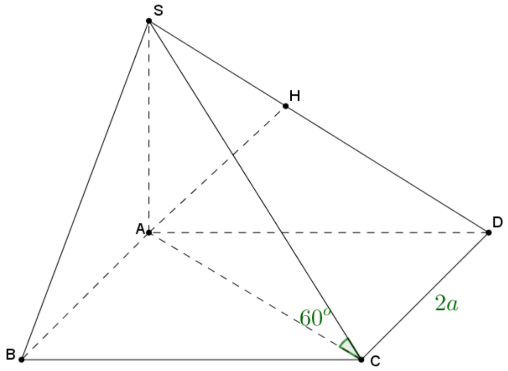
ΔABC đều cạnh a nên $MH = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔSHM vuông tại H: $d\left(S,(ABC)\right) = SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$.

Câu 69: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có $SA\perp(ABCD)$ nên $\left(\widehat{SC,(BCD)}\right)=\left(\widehat{SC,AC}\right)=\widehat{SCA}=60°$.

Khi đó $AC=2a\sqrt{2}\Rightarrow SA=AC.\tan 60°=2a\sqrt{6}$.

Mà $AB//CD\Rightarrow AB//(SCD)\Rightarrow d(B,(SCD))=d(A,(SCD))$.

Kẻ $AH\perp SD\Rightarrow AH\perp(SCD)$

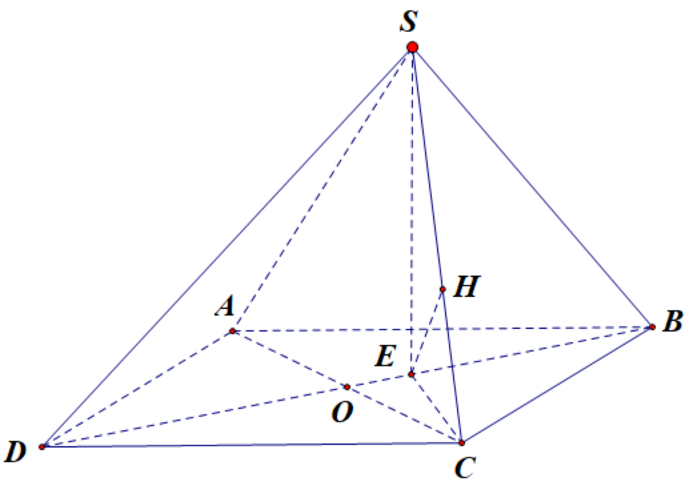
Khi đó $d(B,(SCD))=d(A,(SCD))=AH=\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}$

$\Rightarrow d(B,(SCD))=\frac{2a\sqrt{2}.2a}{\sqrt{(2a\sqrt{2})^2+(2a)^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 70: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a

A. a. **B.** $\frac{2a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và E là trọng tâm của tam giác ABC.

$$\begin{cases} SD \cap (ABCD) = D \\ SE \perp (ABCD) \text{ tại E} \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SD,ED}\right) = \widehat{SDE} = 30^\circ$$

Do tam giác ABC đều nên $\begin{cases} BD = 2BO = a\sqrt{3} \Rightarrow DE = \dfrac{2}{3}BD = a\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ CE = \dfrac{2}{3}BO = a\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Khi đó $\tan\widehat{SDO} = \dfrac{SE}{DE} \Rightarrow SE = \dfrac{2a}{3}$

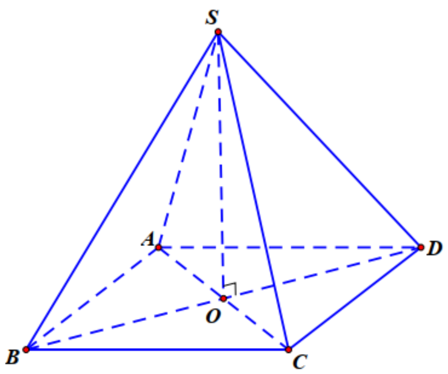
Vì tam giác ABC đều nên $CE \perp AB \Rightarrow CE \perp CD$ mà $CD \perp SE$ nên $CD \perp (SEC)$

Kẻ $EH \perp SC\,(H \in SC)$ khi đó $EH \perp (SCD)$ tại H nên $d\left(E,(SCD)\right) = EH$

$$\frac{1}{EH^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{EC^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Rightarrow EH = a\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

Do $BE \cap (SCD) = D$ nên $\dfrac{d\left(B,(SCD)\right)}{d\left(E,(SCD)\right)} = \dfrac{BD}{ED} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d\left(B,(SCD)\right) = \dfrac{3}{2}d\left(E,(SCD)\right) = a\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 71: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Gọi $O = AC \cap DB$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông.

Ta có: $\dfrac{d\left(A,(SCD)\right)}{d\left(O,(SCD)\right)} = \dfrac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d\left(A,(SCD)\right) = 2d\left(O,(SCD)\right)$.

Tam giác ΔACD vuông tại D có: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OD = OC = a\sqrt{2}$.

Tam giác ΔSCO vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = a\sqrt{7}$.

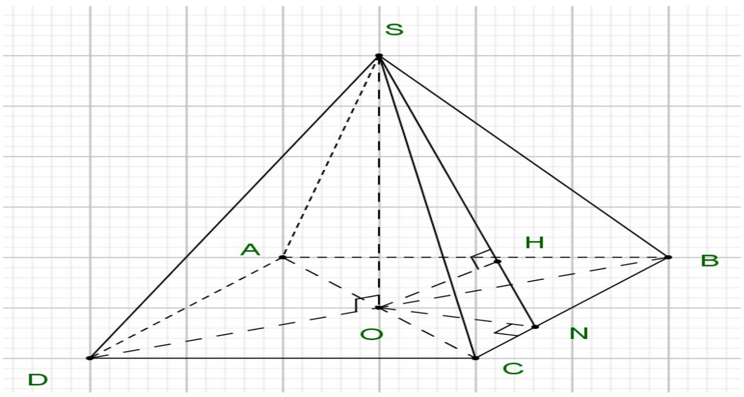
Do SO, OC, OD đôi một vuông góc nên gọi $h = d\left(O,(SCD)\right)$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{8}{7a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 72: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $S.ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$, đường thẳng SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Lời giải



Gọi N, H lần lượt là hình chiếu của O lên BC, SN.

Ta có $AC = 2OC \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(O,(SBC)\right) = 2OH$ (1).

Vì $\begin{cases} OH \perp SN \\ OH \perp BC, \left(BC \perp ON, BC \perp SO, \left(SO \perp (ABCD)\right), BC \subset (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$

Do góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác BAD đều $OB = \frac{a}{2}, OA = \frac{a\sqrt{3}}{2} = OC$.

Tam giác OBC vuông tại O nên ta có $\frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{16}{3a^2}$.

Tam giác SON vuông tại O nên ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{19}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{57}}{19} (2).$$

Từ và $\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = \frac{2\sqrt{57}}{19}$.

Câu 73: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A,B. $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{2}$, $AB=BC=a, AD=2a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

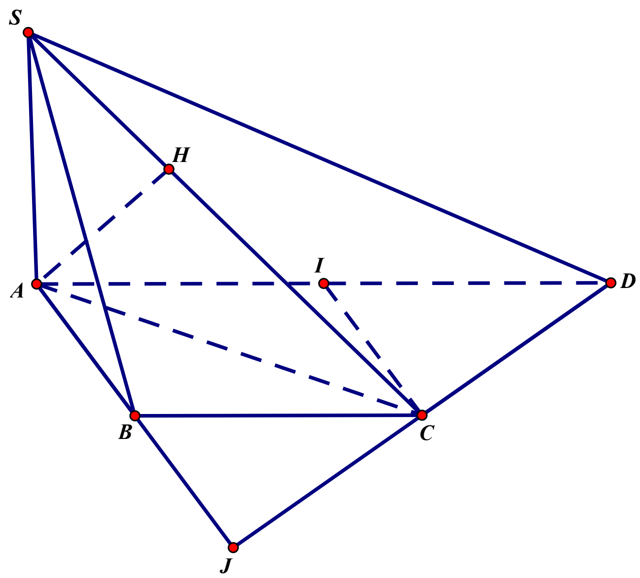
A. $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a}{2}$.

C. $d\left(B,(SCD)\right)=a$.

D. $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



+ Gọi J là giao điểm của AB với CD; I là trung điểm của AD; H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Ta có: $ABCI$ là hình vuông cạnh a.

+ Ta có: $\dfrac{d\left(B,(SCD)\right)}{d\left(A,(SCD)\right)}=\dfrac{BJ}{AJ}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{AH}{2}$.

Mà $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow AH=a$

+ Vậy $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a}{2}$.

Câu 74: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

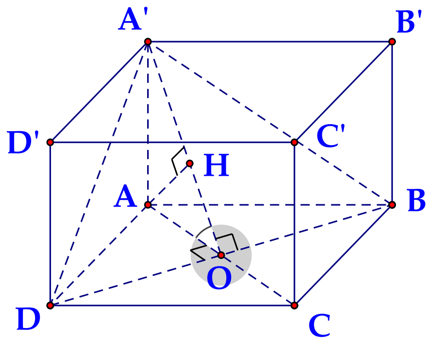
A. $\dfrac{2a\sqrt{13}}{13}$.

B. $\dfrac{a}{4}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{14}}{7}$.

D. $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AOA') \Rightarrow A'O \perp BD$.

Khi đó $((A'BD),(ABCD)) = (A'O, AO) = \widehat{A'OA} = 30°$.

Vẽ $AH \perp A'O$ tại H.

Ta có $BD \perp (AOA') \Rightarrow (A'BD) \perp (AOA')$.

Khi đó $\begin{cases} (AOA') \perp (A'BD) \\ (AOA') \cap (A'BD) = A'O \\ \text{Trong } (AOA'): AH \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A,(A'BD)) = AH$.

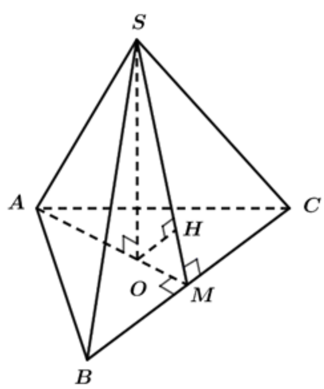
$AC = BD = 2a \Rightarrow AO = a$, $AH = AO.\sin\widehat{AOA'} = a.\sin 30° = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $d(A,(A'BD)) = \dfrac{a}{2}$.

Câu 75: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và $SA = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}a$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, O là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$

Ta có $\begin{cases} OM \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SOM) \perp BC$

Trong (SOM) kẻ $OH \perp SM\,(H \in SM)$ mà $OH \perp BC$ do $BC \perp (SOM)$

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.

Ta có $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a; OM = \frac{1}{2}AO = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông SAO

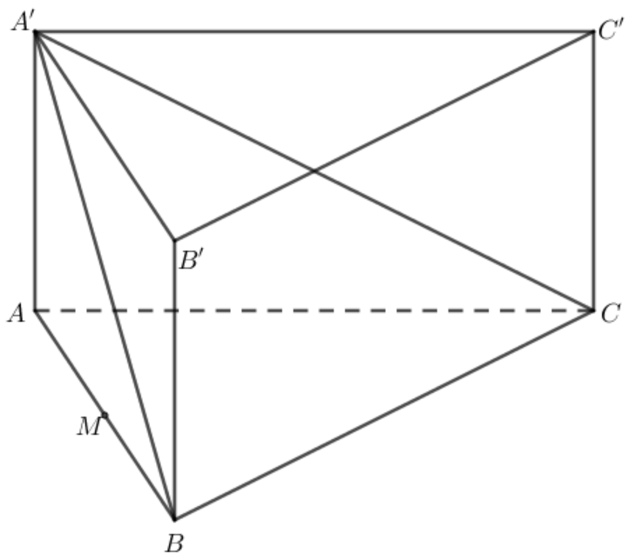
$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = a$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOM có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a.\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}a$$

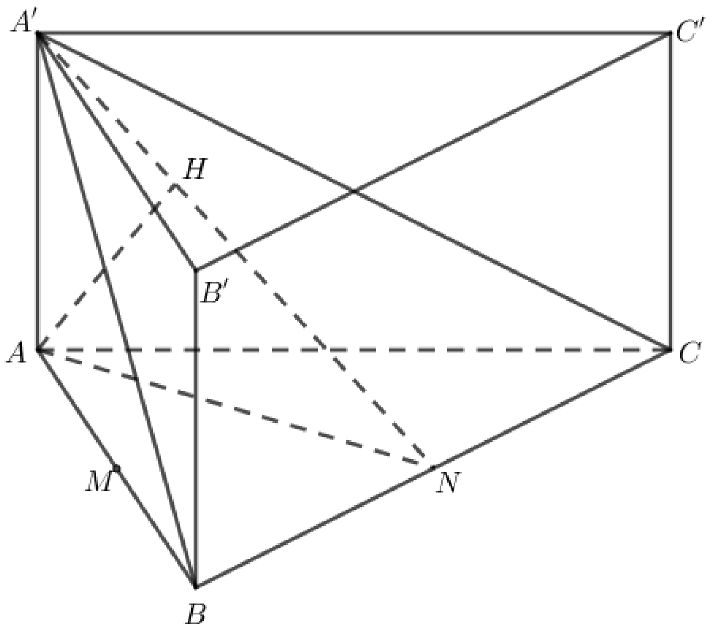
Ta có $\frac{d(A,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{AM}{OM} = 3 \Rightarrow d(A,(SBC)) = 3.d(O,(SBC)) = 3.OH = \frac{3\sqrt{13}}{13}a.$

Câu 76: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^o. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$?



A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của BC.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $BC \perp AN, AA'$ và $AN = 2a\sqrt{3}$. Suy ra $BC \perp (A'AN)$. Từ đó ta có: $\left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right) = \widehat{A'NA} = 30^o$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'N$, do $BC \perp (A'AN)$ nên: $AH \perp AN, BC \Rightarrow AH \perp (A'BC)$ $\Rightarrow d\left(A,(A'BC)\right) = AH$.

Xét tam giác AHN vuông tại H có: $AH = AN \sin \widehat{ANA'} = a\sqrt{3}$. Suy ra $d\left(A,(A'BC)\right) = a\sqrt{3}$.

Mặt khác, M là trung điểm của cạnh AB nên $d\left(M,(A'BC)\right) = \dfrac{1}{2} d\left(A,(A'BC)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 77: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a,\ AC = a,\ \widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^0$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

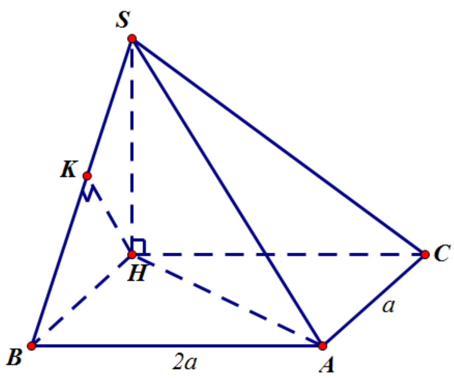
Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

$\begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HB$ mà $AB \perp AC$ nên suy ra $HB // AC\ (1)$

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp SC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHC) \Rightarrow AC \perp HC$ mà $AC \perp AB$ nên suy ra $HC // AB(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $ABHC$ là hình bình hành mà $\widehat{A} = 90^0$ nên $ABHC$ là hình chữ nhật.

và $(SA,(ABC)) = \widehat{SAH} = 45^0$, $SH = AH = a\sqrt{5}$.



$HC // (SAB) \Rightarrow d_{(C;(SAB))} = d_{(H;(SAB))}$

Gọi K là hình chiếu của H lên SB. Kẻ $HK \perp SB$

Mà $AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HK$

Suy ra $HK \perp (SAB)$.

$d_{(C;(SAB))} = d_{(H;(SAB))} = HK$.

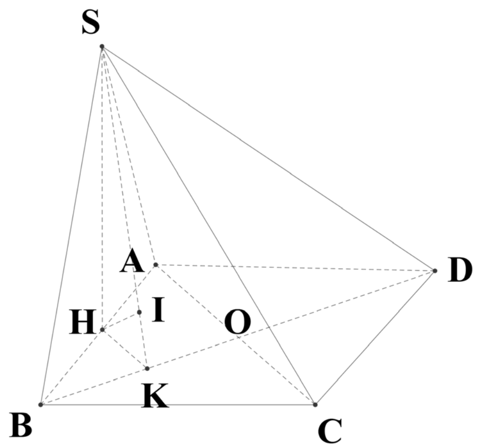
ΔSHB vuông tại H. Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HB^2} = \dfrac{1}{5a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{6}{5a^2}$.

Vậy $HK = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$..

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AC \perp BD$. Kẻ $HK \perp BD$ tại K (K là trung điểm BO).

Kẻ $HI \perp SH$ tại I. Khi đó: $d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD)) = 2HI$.

Xét tam giác SHK, có: $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK=\dfrac{1}{2}AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

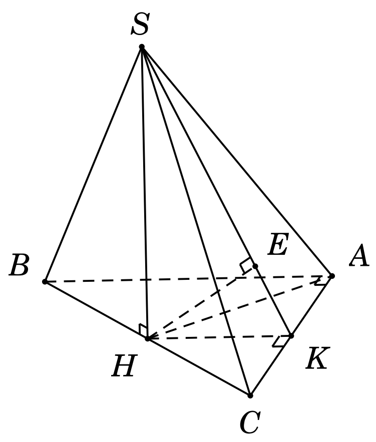
Khi đó: $\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{28}{3a^2}\Rightarrow HI=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Suy ra: $d\left(A,\left(SBD\right)\right)=2HI=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$

A. $d=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH\perp BC$.

Mà $\left(SAB\right)\perp\left(ABC\right)$ theo giao tuyến BC.

Do đó $SH\perp\left(ABC\right)\Rightarrow SH\perp AC$

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK\perp AC$.

Ta được $\left(SHK\right)\perp AC\Rightarrow\left(SHK\right)\perp\left(SAC\right)$ theo giao tuyến SK

Trong $\left(SHK\right)$: kẻ $HE\perp SK$ $\left(E\in SK\right)$.

Suy ra $HE\perp\left(SAC\right)\Rightarrow d\left(H;\left(SAC\right)\right)=HE$.

Ta có $HK=\dfrac{a}{2}$, $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2a\Rightarrow SH=\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHK vuông tại H, $\Rightarrow SH\perp\left(ABC\right)$ là đường cao nên

$$\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{13}{3a^2}.$$

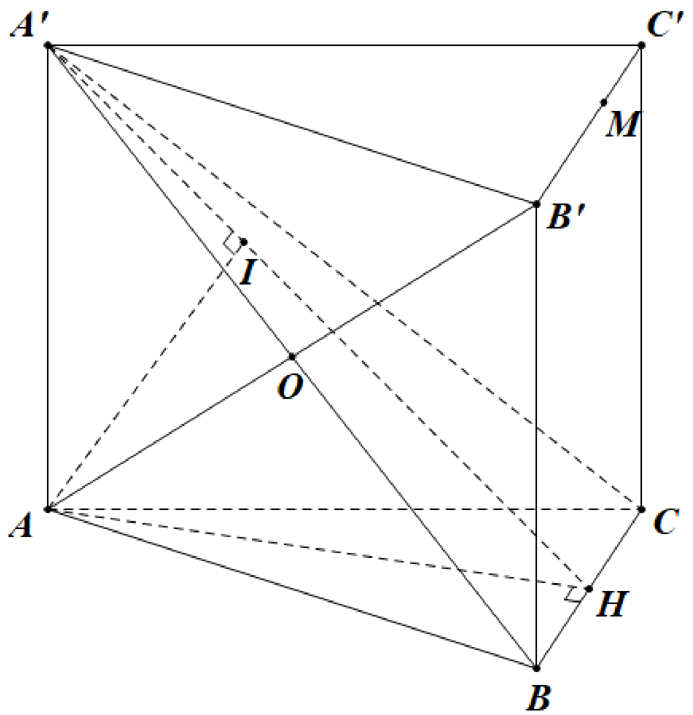
Ta được $HE=\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Khi đó $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=2d\left(H,\left(SAC\right)\right)=2HE=2.\frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 80: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ tạo với đáy một góc $45°$, M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng các từ điểm M đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác đều.

Ta có $B'C' \parallel \left(A'BC\right)$ nên $\mathrm{d}\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\mathrm{d}\left(B',\left(A'BC\right)\right)$.

Mà $AB'\cap\left(A'BC\right)=O$ với O là trung điểm AB' nên $\mathrm{d}\left(B',\left(A'BC\right)\right)=\mathrm{d}\left(A,\left(A'BC\right)\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, I là hình chiếu của A lên $A'H$, ta chứng minh được $AI\perp\left(A'BC\right)$, suy ra $\mathrm{d}\left(A,\left(A'BC\right)\right)=AI$.

Mà $\left(\widehat{\left(A'BC\right),\left(ABC\right)}\right)=\widehat{A'HA}=45°$ nên tam giác $A'AH$ vuông cân tại A, do đó

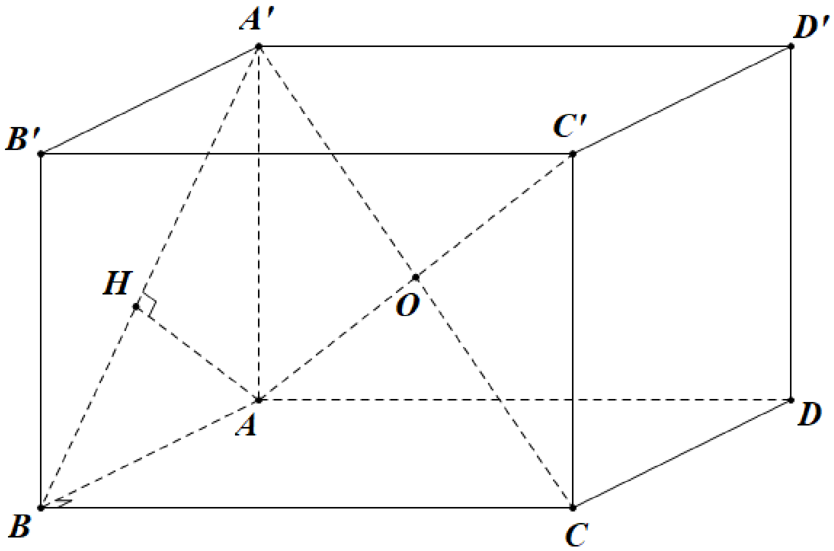
$$A'H=AH\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Mặt khác, AI là đường cao của tam giác $A'AH$ nên $AI = \dfrac{A'H}{2} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 81: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D = 3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh $2a$, suy ra $BD = 2a\sqrt{2}$.

Mà $B'D = 3a \Rightarrow B'B = \sqrt{B'D^2 - BD^2} = \sqrt{9a^2 - 8a^2} = a$.

Ta có $AC' \cap (A'BC) = O$.

Suy ra $\mathrm{d}(C',(A'BC)) = \mathrm{d}(A,(A'BC))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $A'B$, ta chứng minh được $AH \perp (A'BC)$.

Suy ra $AH = \mathrm{d}(A,(A'BC))$.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A và có AH là đường cao nên

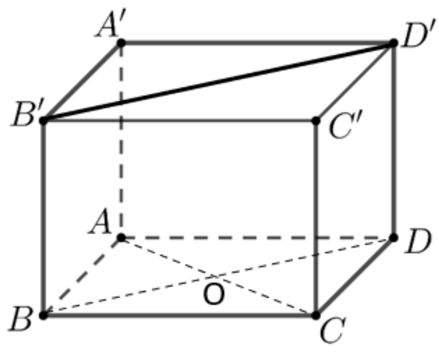
$$AH = \frac{AA' \cdot AB}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

DẠNG 4: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Câu 82: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Tính khoảng cách giữa AA' và BD'

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

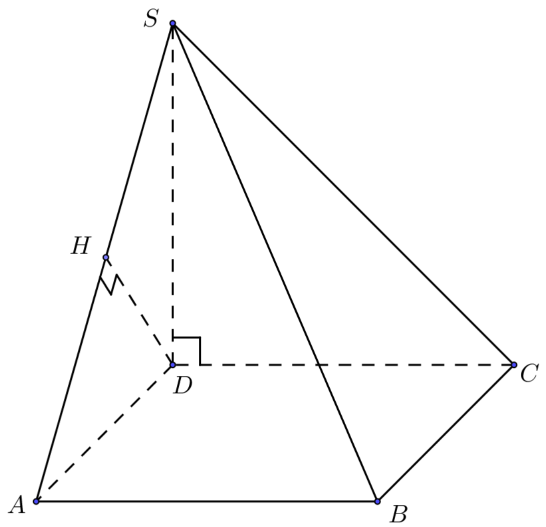
Ta có $AO \perp (BDD'B')$ tại O.

$\Rightarrow d\left(AA',BD'\right) = d\left(AA',\left(BDD'B'\right)\right) = d\left(A,\left(BDD'B'\right)\right) = AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 83: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD = \sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $2a$. **D.** a.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp AD \\ SD \cap AD = D \text{ trong } (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SAD)$

Vẽ $DH \perp SA$ tại H trong mặt phẳng (SAD)

Ta có $\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp SA \\ AB \cap SA = A \text{ trong } (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow DH \perp (SAB)$

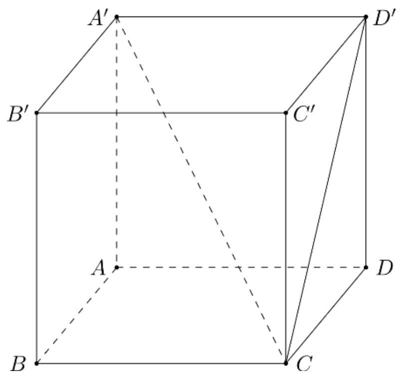
Vì $CD \parallel (SAB)$ nên $d(SB;CD) = d((SAB);CD) = d((SAB);D) = DH$.

$\triangle SAD$ vuông tại D với đường cao DH có $DH = \dfrac{SD.DA}{\sqrt{SD^2 + DA^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}a^2}{3a} = a\sqrt{2}$

Câu 84: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C = 3$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD' bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $AB \parallel CD$.

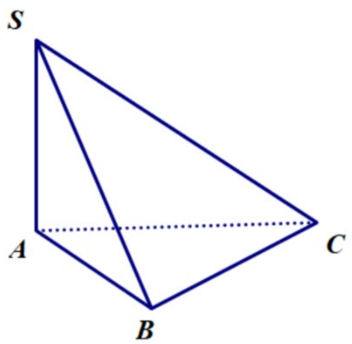
Mà $CD \subset (CC'D'D)$ suy ra $AB \parallel (CC'D'D)$

Suy ra $\mathrm{d}(AB;CD') = \mathrm{d}(AB;(CC'D'D)) = \mathrm{d}(A;(CC'D'D)) = AD$.

Theo đề $A'C = AD\sqrt{3} = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$.

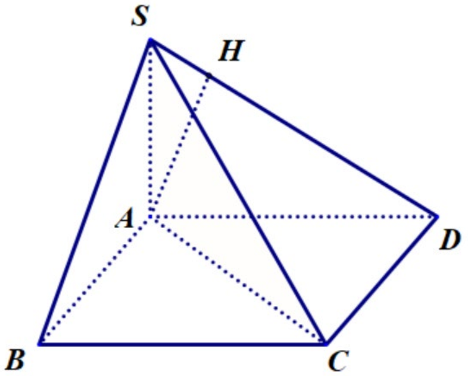
Vậy $\mathrm{d}(AB;CD') = \sqrt{3}$.

Câu 85: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật. Ta có $AB // CD$ nên $AB // (SCD)$.

Khi đó $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Trong (SCD), dựng $AH \perp SD$ ($H \in SD$).

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.

Có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Do đó $d(A, (SCD)) = AH$.

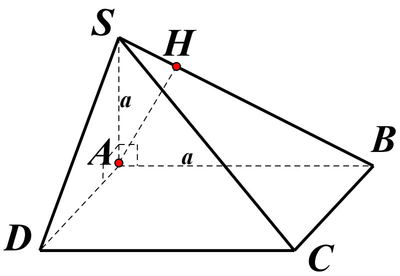
Ta có $AD = BC = a\sqrt{2}$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a$. Vậy $d(AB, SC) = AH = a$.

Câu 86: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Ta có $AD // BC \Rightarrow AD // mp(SBC)$

Kẻ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp mp(SBC)$ hay $AH = d(A; mp(SBC))$.

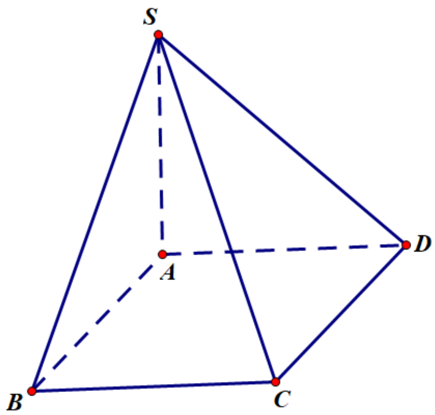
Suy ra $d(AD; SC) = d(AD; mp(SBC)) = d(A; mp(SBC)) = AH$.

Trong tam giác SAB, $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 87: Cho hình chóp $S.ABCD$, có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AC=a\sqrt{5}$ và $AD=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải



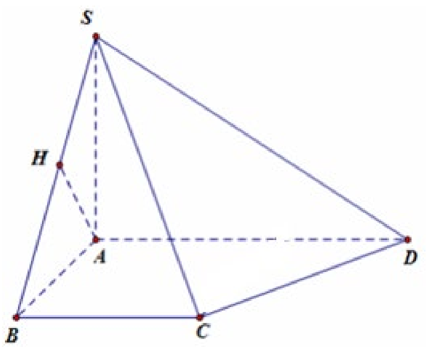
$BA=\sqrt{AC^2-AD^2}=a\sqrt{3}$

Vì $BC\parallel AD$ suy ra $d(BC;SD)=d(\text{BC};(SAD))=d(B;(SAD))=BA=a\sqrt{3}$

Câu 88: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB=a$, $SA=a\sqrt{2}$. Biết $SA\perp(ABCD)$, khoảng cách giữa AD và SC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Do $AD//BC\Rightarrow d(AD,SC)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))$.

Kẻ $AH\perp SB$. Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.

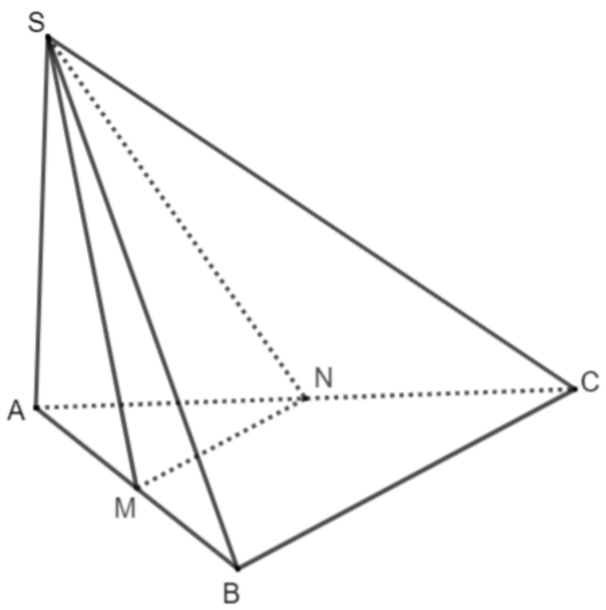
Mà $AH\perp SB\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH=d(A,(SBC))$.

Ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow d\left(AD,SC\right)=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 89: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AB=6a, AC=4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

A. $\frac{7a}{6}$. **B.** $\frac{6a}{7}$. **C.** $\frac{12a}{\sqrt{13}}$. **D.** $2a$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AC, ta có: $MN//BC$ nên ta được $BC//\left(SMN\right)$.

Do đó $d\left(BC,SM\right)=d\left(BC,\left(SMN\right)\right)=d\left(B,\left(SMN\right)\right)=d\left(A,\left(SMN\right)\right)=h$.

Tứ diện $A.SMN$ vuông tại A nên ta có:

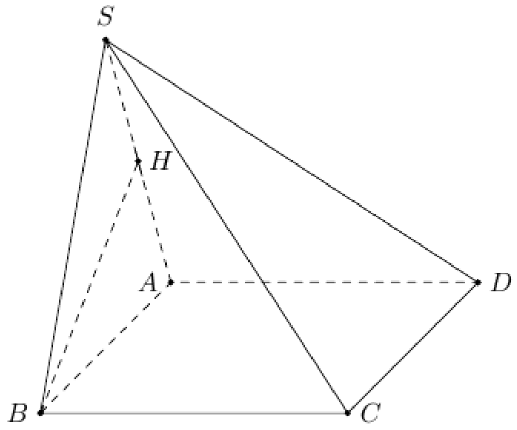
$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{49}{36a^2}\Rightarrow h=\frac{6a}{7}.$$

Vậy $d\left(BC,SM\right)=\frac{6a}{7}$.

Câu 90: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=2a, BC=a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC//AD \\ AD \subset (SAD) \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC//(SAD)$, do đó $d(BC,SD) = d(BC,(SAD)) = d(B,(SAD))$.

Tam giác SAB đều, gọi H là trung điểm SA thì $BH \perp SA$.

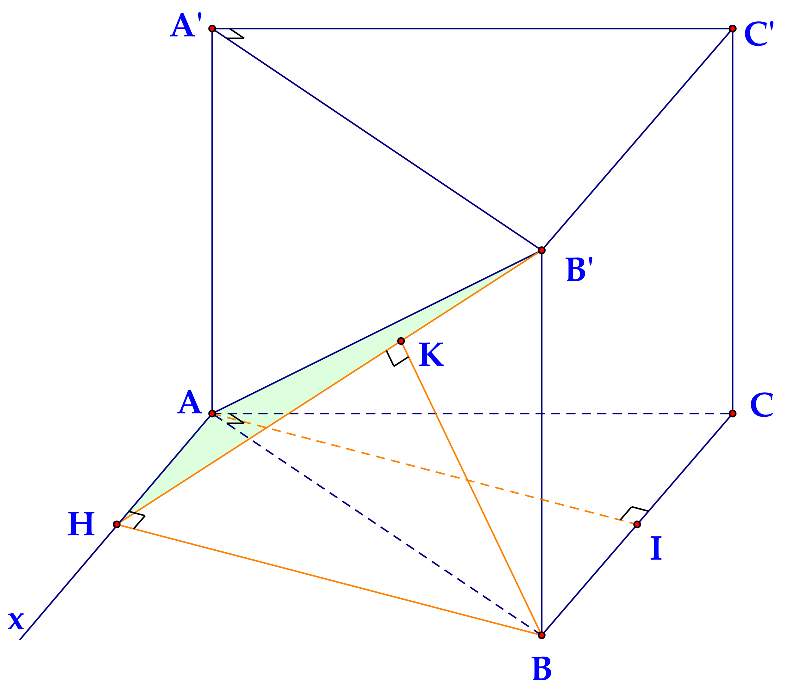
Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$.

Từ và suy ra $BH \perp (SAD)$, do đó $d(B,(SAD)) = BH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 91: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = AC = b$ và có cạnh bên bằng b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC bằng

A. $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. **B.** b. **C.** $\dfrac{b\sqrt{3}}{3}$. **D.** $b\sqrt{3}$.

Lời giải



Kẻ $Ax \,//\, BC \Rightarrow BC \,//\, \left(B';Ax\right)$ suy ra $d\left(BC, AB'\right) = d\left(B,\left(B;Ax\right)\right)$.

Kẻ $BH \perp Ax$ tại H và $BK \perp AB'$ tại K.

Ta có $\begin{cases} AH \perp BH \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(BHB'\right)$ nên $AH \perp BK$.

Từ đó suy ra $BK \perp \left(AHB'\right)$ hay $d\left(B;\left(AHB'\right)\right) = BK$.

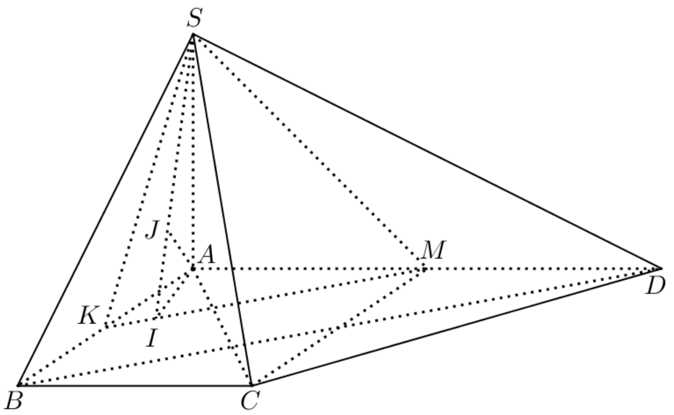
Dễ dàng thấy $BH = AI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ suy ra $BK = \dfrac{BH.B'B}{\sqrt{BH^2 + B'B^2}} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d\left(AB';BC\right) = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Câu 92: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a$; $AD = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SCA}=45^0\Rightarrow SA=AC=a\sqrt{2}$

Gọi K là trung điểm của AB, khi đó AB song song với $\left(SMK\right)$.

Do đó $d\left(BD,SM\right)=d\left(BD,\left(SMK\right)\right)=d\left(B,\left(SMK\right)\right)=d\left(A,\left(SMK\right)\right)$.

Gọi I,J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MK và SI.

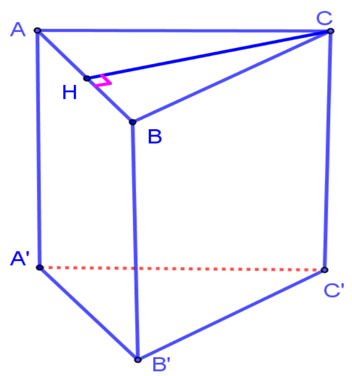
Khi đó $MK\perp AI, MK\perp SA\Rightarrow MK\perp AJ$. Do $AJ\perp MK$ và $AJ\perp SI$ nên $AJ\perp\left(SMK\right)$ hay $d\left(A,\left(AMK\right)\right)=AJ$.

Ta có $\frac{1}{AJ^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{11}{2a^2}\Rightarrow AJ=\frac{a\sqrt{22}}{11}$

Câu 93: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa AB và CC'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow CH\perp AB$.

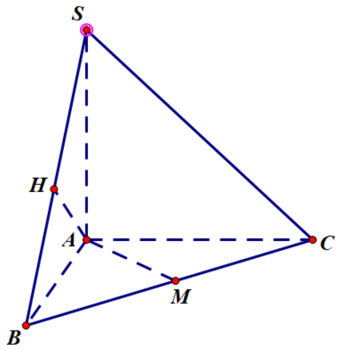
Mặt khác $CC'\perp CH$

Từ và suy ra $d\left(AB;CC'\right)=CH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 94: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) thỏa mãn $AB=a, AC=2a, \widehat{BAC}=120°$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Gọi M là trung điểm của BC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}=7a^2 \Rightarrow BM^2=\frac{7a^2}{4}$

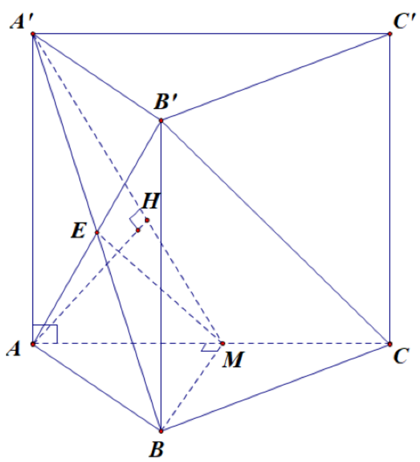
$AM^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$; $AB^2+AM^2=BM^2 \Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại A

Ta có $\begin{cases} AM\perp AB \\ AM\perp SA \\ SA\cap AB \end{cases} \Rightarrow AM\perp(SAB)$. Trong mp$(SAB)$, kẻ $AH\perp SB$, vậy AH là đoạn vuông góc chung của AM và SB. Do $\triangle SAB$ vuông cân đỉnh S nên $AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 95: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh $BA'=a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải



$AA'=a\sqrt{2}$

Gọi M là trung điểm AC, $E=AB'\cap A'B\Rightarrow E$ là trung điểm của AB'

Khi đó $B'C//ME\Rightarrow B'C//(A'BM)$

$\Rightarrow d(B'C,A'B)=d(B'C,(A'BM))=d(C,(A'BM))=d(A,(A'BM))$

Trong mặt phẳng $(A'AM)$:kẻ $AH\perp A'M$

Do ΔABC đều $\Rightarrow BM\perp AC$

$ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng $\Rightarrow AA'\perp(ABC)\Rightarrow AA'\perp BM$

Nên $BM\perp(A'AM)\Rightarrow BM\perp AH$

Từ và $\Rightarrow AH\perp(A'BM)\Rightarrow d(A,(A'BM))=AH$

Trong tam giác $A'AM$ vuông tại A, AH là đường cao:

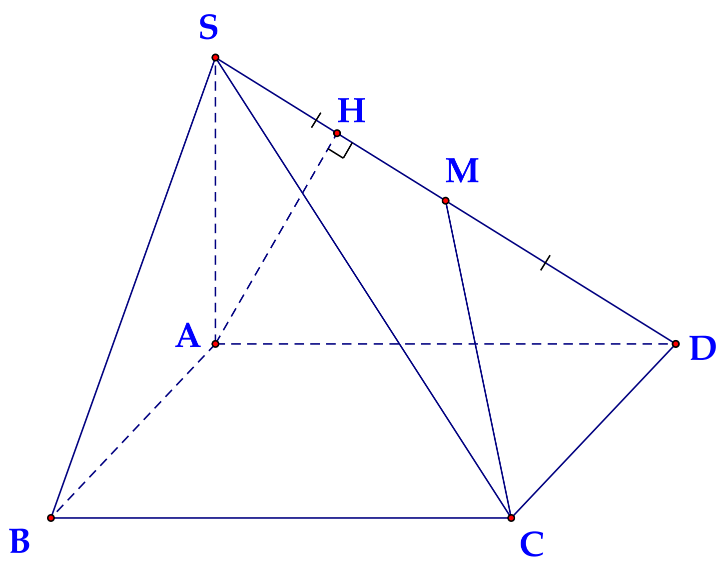
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{9}{2a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Từ,, $\Rightarrow d(A'B,B'C)=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 96: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Ta có $AB//CD$ nên $AB//(SCD)$.

Khi đó $d\left(AB,CM\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)$.

Ta có $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow\left(SCD\right)\perp\left(SAD\right)$.

Trong mặt phẳng $\left(SAD\right)$ vẽ $AH\perp SD$ tại H.

Khi đó $\begin{cases} \left(SAD\right)\perp\left(SCD\right) \\ \left(SAD\right)\cap\left(SCD\right)=SD \\ \text{Trong}\left(SAD\right): AH\perp SD \end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(A;\left(SCD\right)\right)=AH$.

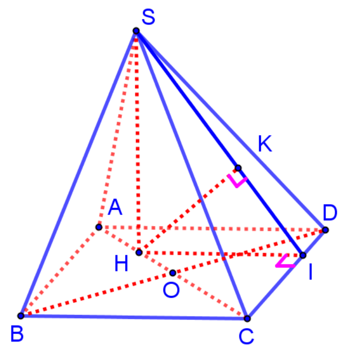
Ta có $AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(AB,CM\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 97: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là trung điểm H của đoạn AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d=4a$. **B.** $d=2a$. **C.** $d=\dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **D.** $d=\dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải



Gọi I là hình chiếu của H trên $CD\Rightarrow HI\perp CD$. Gọi K là hình chiếu của H trên $SI\Rightarrow HK\perp SI$.

Ta có $\begin{cases} CD\perp HI \\ CD\perp SH\ \left(SH\perp\left(ABCD\right)\right) \end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SHI\right)\Rightarrow CD\perp HK$.

Ta có $\begin{cases} HK\perp CD \\ HK\perp SI \end{cases}\Rightarrow HK\perp\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(H;\left(SCD\right)\right)=HK$.

Ta có $HI=\dfrac{3}{4}AD=3a$; $AC=4\sqrt{2}a\Rightarrow AH=\sqrt{2}a$.

Xét ΔSHA có $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a\sqrt{3}$.

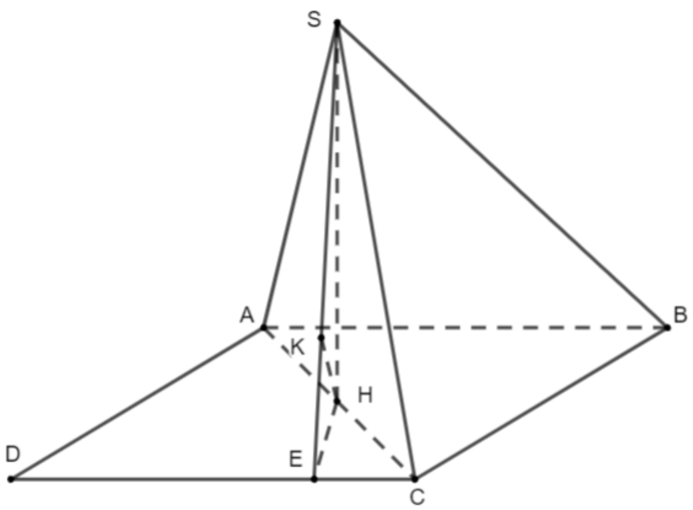
Xét ΔSHI có $HK=\dfrac{HI.SH}{\sqrt{SH^2+HI^2}}=\dfrac{3}{2}a$.

Ta có $AB//(SCD) \Rightarrow d(AB;(SCD)) = d(A;(SCD)) = \frac{4}{3}d(H;(SCD)) = \frac{4}{3}HK = 2a$.

Câu 98: Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa SC và AB.

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $d = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \frac{2a\sqrt{30}}{5}$.

Lời giải



Do $(SAC) \perp (ABCD), SH \perp AC$ thì $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $CD // AB, (CD = AB)$, ta có $d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(H, (SCD))$.

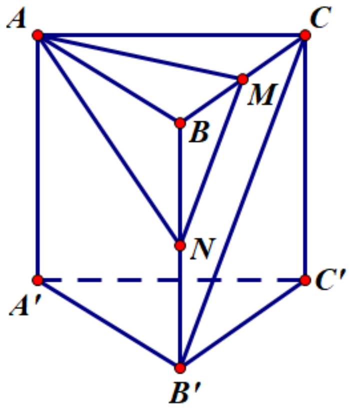
Kẻ $HE \perp DC$, mà $SH \perp DC \Rightarrow DC \perp (SHE)$, kẻ $HK \perp SE, HK \perp DC (DC \perp (SHE))$ suy ra $HK \perp (SCD)$ hay $d(H, (SCD)) = HK$.

Ta có tam giác SAC vuông cân tại S nên $SH = \frac{1}{2}AC = a$, $HE = HC.\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $HK = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a$ suy ra $d(SC, AB) = \frac{2\sqrt{21}}{7}a$.

Câu 99: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a, AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm BB'.

Ta có $MN // B'C$.

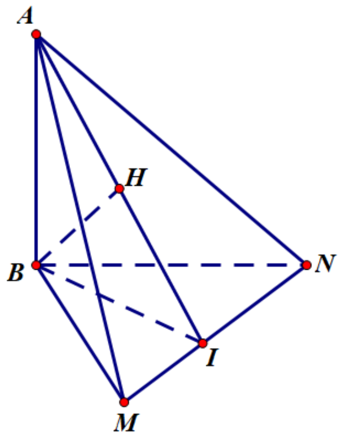
Mà $MN \subset (AMN) \Rightarrow B'C // (AMN)$.

$\Rightarrow d(B'C, AM) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Lại do M là trung điểm của BC nên $d(C, (AMN)) = d(B, (AMN))$.

Trong mặt phẳng (BMN), dựng $BI \perp MN, I \in MN$.

Trong mặt phẳng (ABI), dựng $BH \perp AI, H \in AI$.



Ta có $AB \perp BM$, $AB \perp BN$

$\Rightarrow AB \perp (BMN)$.

$\Rightarrow AB \perp MN$, mà $MN \perp BI$ $\Rightarrow MN \perp (ABI)$.

$\Rightarrow MN \perp BH$, mà $BH \perp AI$ $\Rightarrow BH \perp (AMN)$.

$\Rightarrow d(B, (AMN)) = BH$.

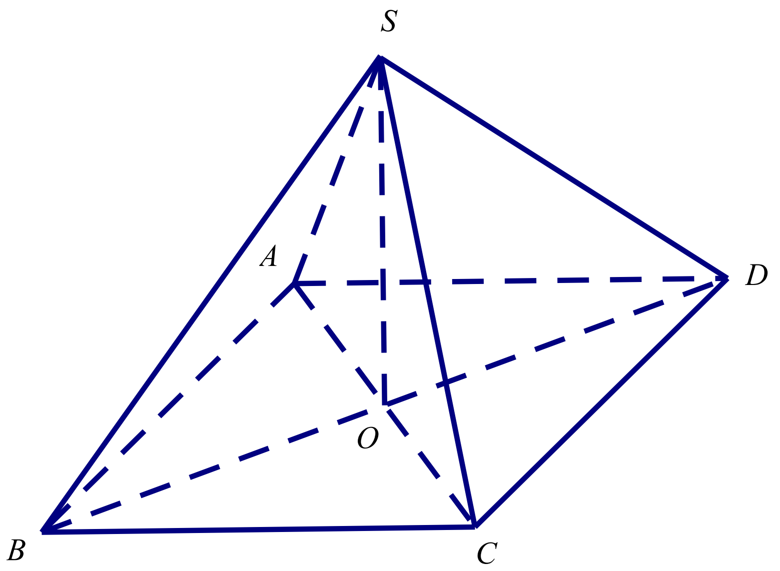
Ta có $AB = a, BM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác BMN vuông tại B, đường cao BI nên $BI = \sqrt{\dfrac{BM^2.BN^2}{BM^2 + BN^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Tam giác ABI vuông tại B, đường cao BH nên $BH = \sqrt{\dfrac{AB^2.BI^2}{AB^2 + BI^2}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $d\left(AM, B'C\right) = d\left(B, \left(AMN\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

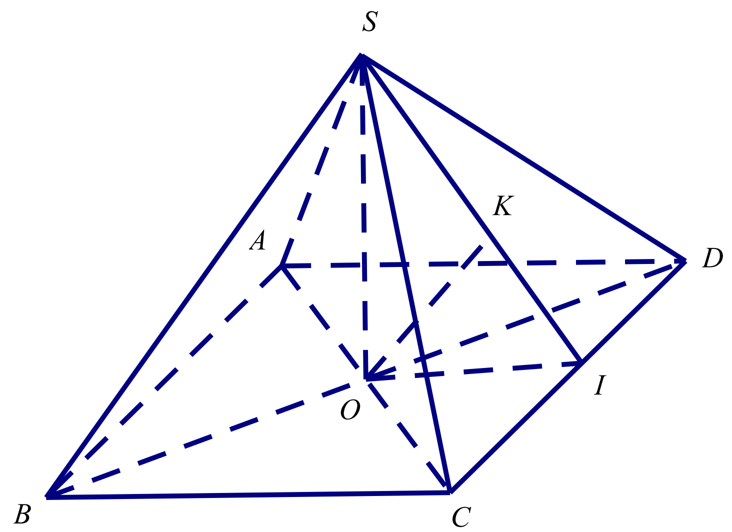
Câu 100: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SO = a$.



Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải



Ta có: $AB // CD$. Khi đó: $d(SC, AB) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$.

Gọi I là trung điểm của CD. Ta có: $OI \perp CD$.

Theo bài ra, $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp CD$.

Do đó, $CD \perp (SOI)$.

Trong tam giác SOI kẻ $OK \perp SI$ $(K \in SI)$. Khi đó: $OK \perp (SCD)$ $\Rightarrow OK = d(O, (SCD))$.

Xét tam giác SOI vuông tại O có: $SO = a$; $OI = \frac{a}{2}$

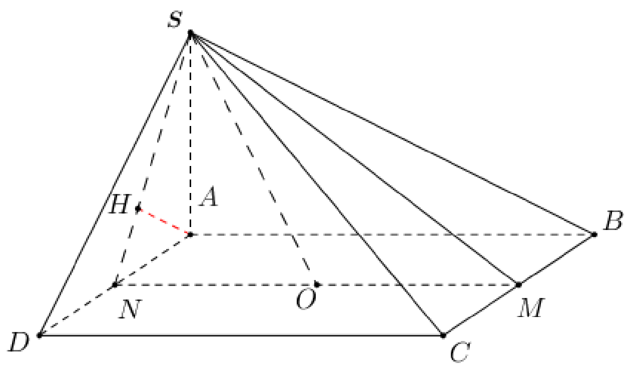
$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OK^2 = \frac{a^2}{5} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy: $d(SC, AB) = 2d(O, (SCD)) = 2OK = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 101: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD. Dựng $AH \perp SN$

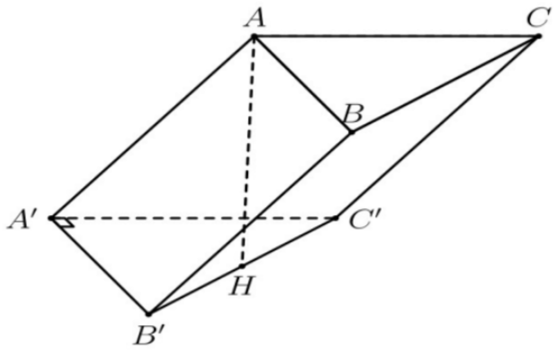
Khi đó $d(AB; SO) = d(AB, (SMN)) = d(A, (SMN)) = AH$

Do tam giác SBD có $\widehat{SBD} = 60°$ và $SB = SD$ nên SBD là tam giác đều

Suy ra $SD = BD = a\sqrt{2}$, do đó $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a$.

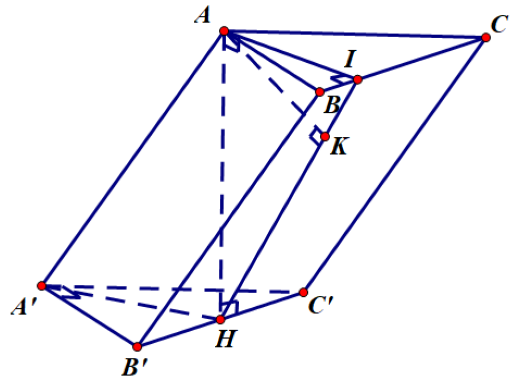
Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{5} = d(AB, SO)$.

Câu 102: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}, AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của đoạn $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng



A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải



Kẻ $AI \perp BC, AK \perp HI$.

Do $AH \perp (A'B'C') \Rightarrow AH \perp B'C' \Rightarrow AH \perp BC$ mà $AI \perp BC$ nên $BC \perp (AHI) \Rightarrow BC \perp AK$.

Vì $AK \perp BC, AK \perp HI \Rightarrow AK \perp (BB'C'C)$.

Vì $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C) \Rightarrow d(AA', BC') = d(AA', (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C)) = AK$.

Xét tam giác ABC có đường cao AI nên

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3}a}{2}\ ;\ BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$$

Xét tam giác $A'B'C'$ có đường trung tuyến AH nên $A'H = \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}BC = a$.

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H nên

$$AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$$

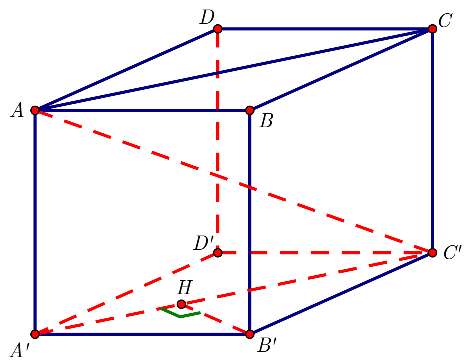
Xét tam giác AHI vuông tại A có đường cao AK

nên $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AH^2}+\dfrac{1}{AI^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{4}{3a^2}=\dfrac{5}{3a^2}\Rightarrow AK=\dfrac{\sqrt{15}a}{5}\Rightarrow d\left(AA',BC'\right)=\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$.

Câu 103: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Ta có: $A'C'=\sqrt{\left(A'B'\right)^2+\left(B'C'\right)^2}=2a$.

Kẻ $B'H\perp A'C'$.

Ta có : $\begin{cases}B'H\perp A'C'\\ B'H\perp AA'\end{cases}\Rightarrow B'H\perp(ACC'A')$.

Vì $BB'//\left(ACC'A'\right)$ nên $d\left(BB',AC'\right)=d\left(BB',\left(ACC'A'\right)\right)=d\left(B',\left(ACC'A'\right)\right)=B'H$.

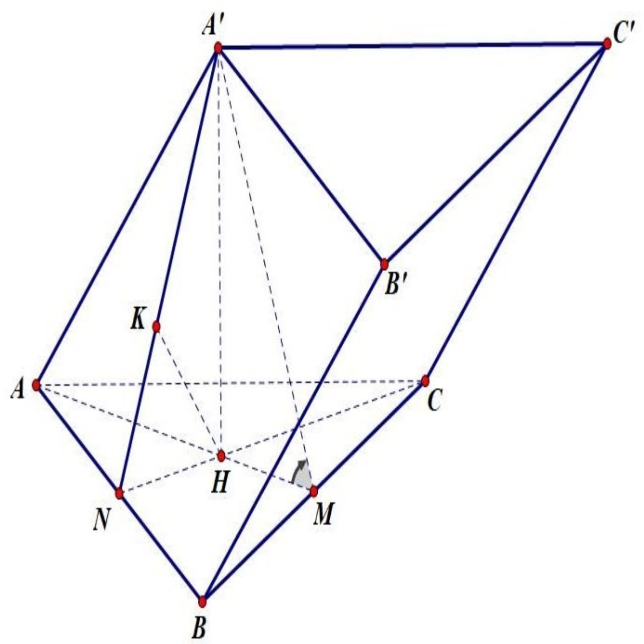
Xét tam giác $A'B'C'$. Ta được: $B'H=\dfrac{A'B'.B'C'}{B'C'}=\dfrac{a.a\sqrt{3}}{2a}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(BB',AC'\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 104: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 60^o. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

A. $\dfrac{a}{4}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{16}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC). Vì ΔABC đều nên H là trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AC.

Do $A'A // B'B \Rightarrow BB' // (A'AC)$

$\Rightarrow d(A'C, B'B) = d(B'B, (A'AC)) = d(B, (A'AC)) = 3d(H, (A'AC))$

Gọi K là hình chiếu của H trên $A'N$.

Ta có $\begin{cases} HK \perp A'N \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (A'AC)$

$\Rightarrow d(H, (A'AC)) = HK$

Ta có:

$((A'BC);(ABC)) = \widehat{A'MH} = 60^0$,

$NH = HM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A'H = HM.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{A'H^2} \Leftrightarrow HK^2 = \frac{HN^2.A'H^2}{HN^2 + A'H^2} = \frac{a^2}{16}$.

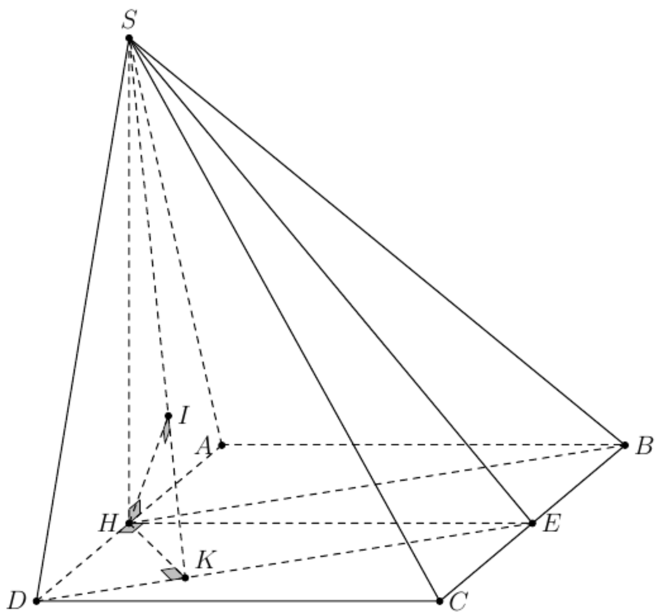
$\Rightarrow HK = \frac{a}{4}$.

$\Rightarrow d(A'C, B'B) = 3d(H, (A'AC)) = 3HK = \frac{3a}{4}$.

Câu 105: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là $45°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a.

A. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Lời giải



Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SBH} = 45°$.

Suy ra ΔSBH vuông cân tại $H \Rightarrow SH = BH = \sqrt{HA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi E là trung điểm CB. Ta có $BH // DE \Rightarrow \mathrm{d}(BH, SD) = \mathrm{d}(BH, (SDE)) = \mathrm{d}(H, (SDE))$.

Kẻ $HK \perp DE$, $HI \perp SK$.

Ta có $DE \perp (SHK) \Rightarrow DE \perp HI$. Suy ra $HI \perp (SDE)$.

Vậy $\mathrm{d}(BH, SD) = \mathrm{d}(H, (SDE)) = HI$.

Trong ΔDHE vuông tại H ta có $HK.DE = DH.HE \Leftrightarrow HK = \frac{DH.HE}{DE} = \frac{a.a}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong ΔSHK vuông tại H ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow HI = \frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SD, BH) = \frac{a}{\sqrt{3}}$.