CHƯƠNG IV

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 10: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

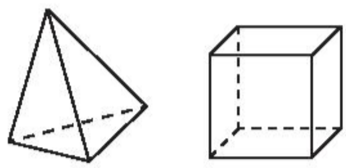
I LÝ THUYẾT.

1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

– Điểm A thuộc mặt phẳng (P), kí hiệu $A \in (P)$.
– Điểm B không thuộc mặt phẳng (P), kí hiệu $B \notin (P)$.
Nếu $A \in (P)$ ta còn nói A nằm trên (P), hoặc (P) chứa A, hoặc (P) đi qua A.

Chú ý. Để nghiên cứu hình học không gian, ta thường vẽ các hình đó lên bảng hoặc lên giấy. Hình vẽ đó được gọi là hình biểu diễn của một hình không gian. Hình biểu diễn của một hình không gian cần tuân thủ những quy tắc sau:

– Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
– Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
– Hình biểu diễn giữ nguyên quan hệ liên thuộc giữa điểm và đường thẳng.
– Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn để biểu diễn cho đường bị che khuất.



Hình 4.3. Hình biểu diễn của hình chóp tam giác đều và hình lập phương

Các quy tắc khác sẽ được học ở phần sau.

2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN.

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
Tính chất 3: Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
Tính chất 4: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

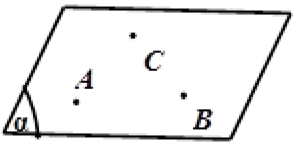
3. CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:
- Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.

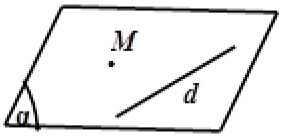
- Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Các kí hiệu:

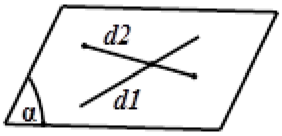
- (ABC) là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A,B,C
- (M,d) là kí hiệu mặt phẳng đi qua d và điểm $M \notin d$
- (d_1,d_2) là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1,d_2



(h1)



(h2)



(h3)

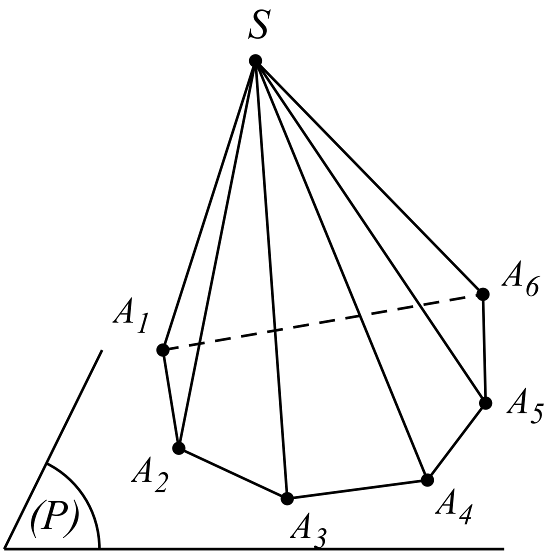
4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN.

3.1. Hình chóp.

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α).

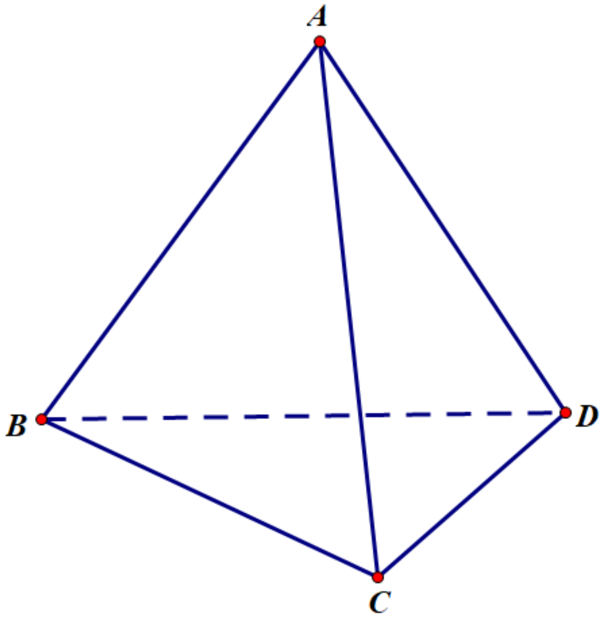
Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy, các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên…



3.2. Hình Tứ diện

Cho bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và (BCD) được gọi là tứ diện $ABCD$.

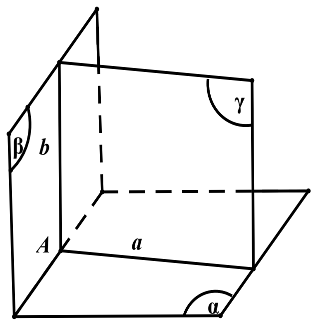


II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.



u ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường được tìm như sau:

ı hai đường thẳng a,b lần lượt thuộc (α) và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $M = a \cap b$ là điểm chung của (α) và (β)

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (SAC) và (SBD). b) (SAC) và (MBD).

c) (MBC) và (SAD). d) (SAB) và (SCD).

Lời giải.

a) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

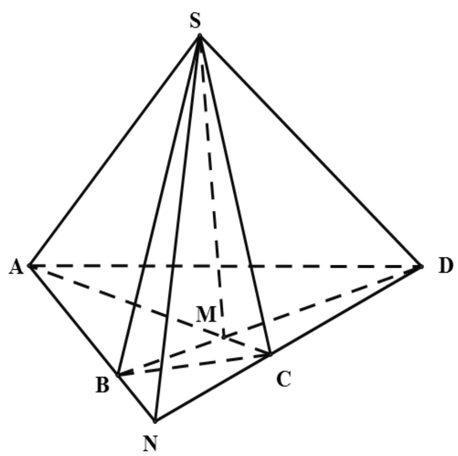
c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = N$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD).

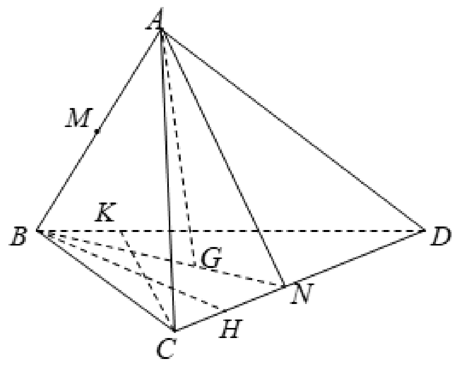
Lời giải.



Ta có $(SAC) \cap (SBD) = SM$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Lời giải.

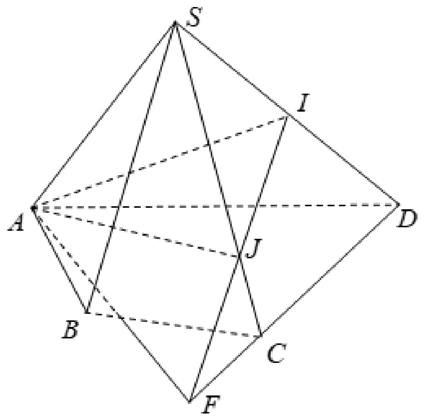


A là điểm chung thứ nhất của (ACD) và (GAB)

G là trọng tâm tam giác BCD, N là trung điểm CD nên $N \in BG$ nên N là điểm chung thứ hai của (ACD) và (GAB). Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là AN.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trung điểm của SD, J là điểm trên SC và không trùng trung điểm SC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AIJ).

Lời giải.



A là điểm chung thứ nhất của $(ABCD)$ và (AIJ)

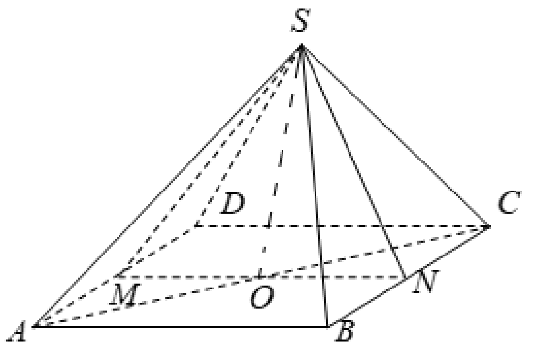
IJ và CD cắt nhau tại F, còn IJ không cắt BC, AD, AB nên F là điểm chung thứ hai của $(ABCD)$ và (AIJ). Vậy giao tuyến của $(ABCD)$ và (AIJ) là AF.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

Lời giải.

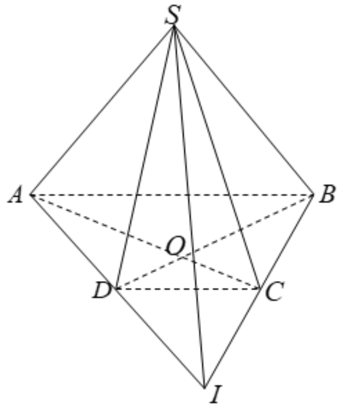
S là điểm chung thứ nhất của (SMN) và (SAC).

O là giao điểm của AC và MN nên $O \in AC, O \in MN$ do đó O là điểm chung thứ hai của (SMN) và (SAC). Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là SO.



3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$ và $AB \cap CD = I$.



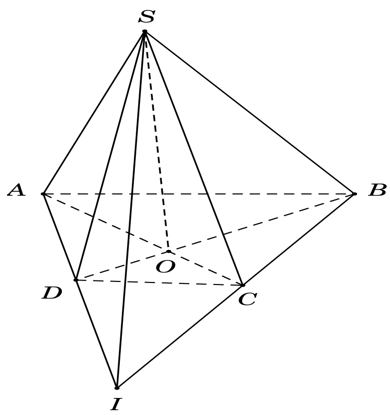
Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng:

A. SI **B.** SA. **C.** MN. **D.** SM.

Lời giải.

Ta có $(SAB) \cap (SCD) = SI$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB \,//\, CD)$.



Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Lời giải.

- Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên: $(SAB),(SBC),(SCD),(SAD)$. Do đó A đúng.

- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\begin{cases} O\in AC\subset(SAC)\Rightarrow O\in(SAC) \\ O\in BD\subset(SBD)\Rightarrow O\in(SBD) \end{cases}\Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\longrightarrow(SAC)\cap(SBD)=SO$. Do đó B đúng.

- Tương tự, ta có $(SAD)\cap(SBC)=SI$. Do đó C đúng.

- $(SAB)\cap(SAD)=SA$ mà SA không phải là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó D sai.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

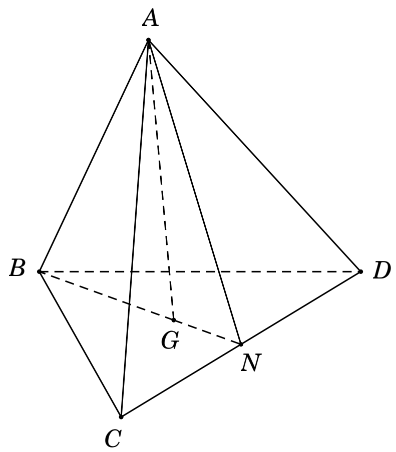
A. AM (M là trung điểm của AB).

B. AN (N là trung điểm của CD).

C. AH (H là hình chiếu của B trên CD).

D. AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Lời giải.



- A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

- Ta có $BG\cap CD=N\longrightarrow\begin{cases} N\in BG\subset(ABG)\Rightarrow N\in(ABG) \\ N\in CD\subset(ACD)\Rightarrow N\in(ACD) \end{cases}\Rightarrow N$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Vậy $(ABG)\cap(ACD)=AN$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA và SB. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $IJCD$ là hình thang.

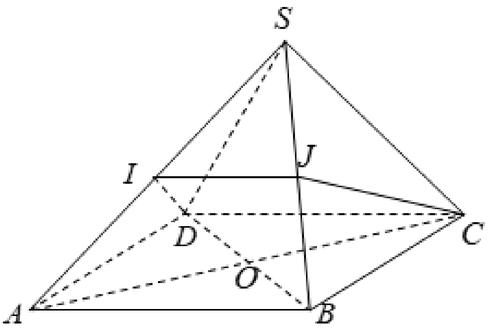
B. $(SAB)\cap(IBC)=IB$.

C. $(SBD)\cap(JCD)=JD$.

D. $(IAC)\cap(JBD)=AO$, O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Lời giải.

Ta có $(IAC)\equiv(SAC)$ và $(JBD)\equiv(SBD)$. Mà $(SAC)\cap(SBD)=SO$ trong đó O là tâm hình bình hành $ABCD$.

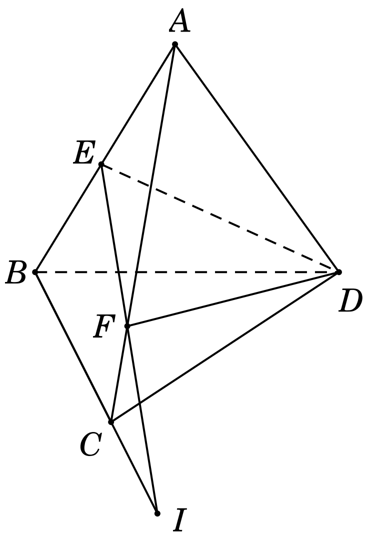


Câu 10: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Khi EF và BC cắt nhau tại I, thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

A. (BCD) và (DEF). **B.** (BCD) và (ABC).

C. (BCD) và (AEF). **D.** (BCD) và (ABD).

Lời giải.



Điểm I là giao điểm của EF và BC mà $\begin{cases} EF\subset(DEF) \\ EF\subset(ABC) \\ EF\subset(AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I=(BCD)\cap(DEF) \\ I=(BCD)\cap(ABC) \\ I=(BCD)\cap(AEF) \end{cases}.$

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:

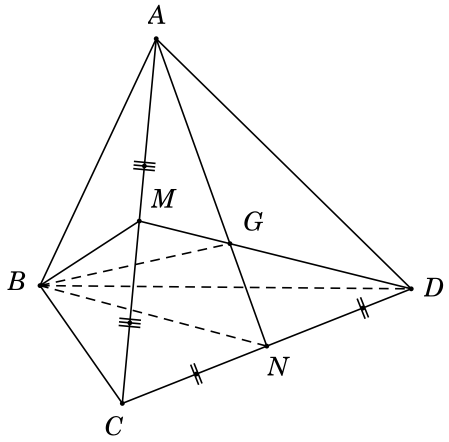
A. đường thẳng MN.

B. đường thẳng AM.

C. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).

D. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).

Lời giải.



- B là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

- Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD nên suy ra AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD. Gọi $G = AN \cap DM$

$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

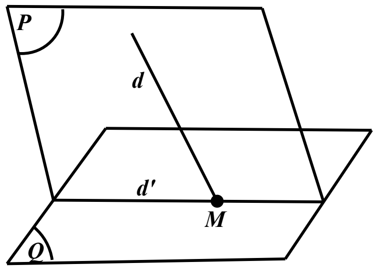
DẠNG 2: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta cần lưu ý một số trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu trong (P) có sẵn một đường thẳng d' cắt d tại M, khi đó

$$\begin{cases} M \in d \\ M \in d' \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow M = d \cap (P)$$



Trường hợp 2. Nếu trong (P) chưa có sẵn d' cắt d thì ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d

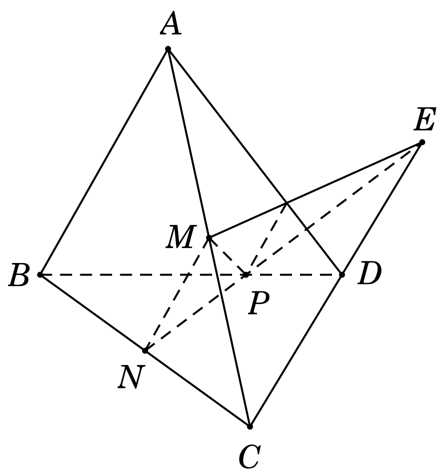
Bước 2: Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$

Bước 3: Trong (Q) gọi $M = d \cap \Delta$ thì M chính là giao điểm của $d \cap (P)$.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 12: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

Lời giải.



Cách 1. Xét mặt phẳng BCD chứa CD.

Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại E.

Điểm $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$. Vậy $CD \cap (MNP)$ tại E.

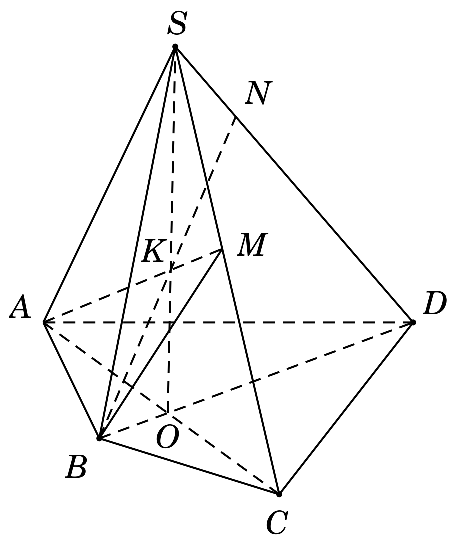
Cách 2. Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng.

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP)$ suy ra $CD \cap (MNP) = E$.

Vậy giao điểm của CD và $mp\left(MNP\right)$ là giao điểm E của NP và CD.

Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng $\left(ABM\right)$.

Lời giải.



● Chọn mặt phẳng phụ $\left(SBD\right)$ chứa SD.

● Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SBD\right)$ và $\left(ABM\right)$.

Ta có B là điểm chung thứ nhất của $\left(SBD\right)$ và $\left(ABM\right)$.

Trong mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng $\left(SAC\right)$, gọi $K = AM \cap SO$.

Khi đó $\left(SBD\right) \cap \left(ABM\right) = BK$.

Trong $\left(SBD\right)$ lấy $N = BK \cap SD$ thì $N = SD \cap \left(ABM\right)$.

Câu 14: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng $\left(MCD\right)$.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng $\left(SBD\right)$.

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

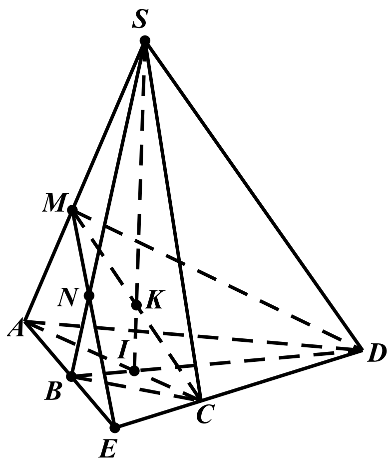
Trong (SAB) gọi.

Ta có $N \in EM \subset (MCD) \Rightarrow N \in (MCD)$ và $N \in SB$ nên $N = SB \cap (MCD)$.

b) Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $K = MC \cap SI$.

Ta có $K \in SI \subset (SBD)$ và $K \in MC$ nên $K = MC \cap (SBD)$.



Câu 15: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC, N là trên cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

Lời giải.

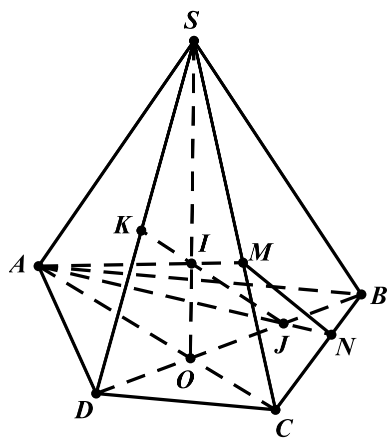
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AM$ và $K = IJ \cap SD$.

Ta có $I \in AM \subset (AMN), J \in AN \subset (AMN)$ $\Rightarrow IJ \subset (AMN)$.

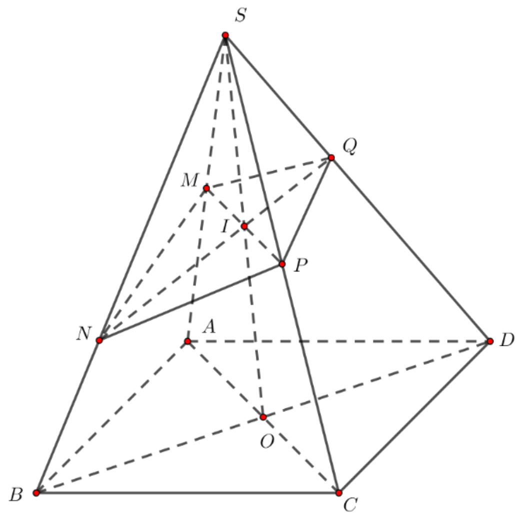
Do đó $K \in IJ \subset (AMN) \Rightarrow K \in (AMN)$.

Vậy $K = SD \cap (AMN)$



Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SC. Điểm N thuộc cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Gọi Q là giao điểm của cạnh SD và mặt phẳng (MNP). Tính tỷ số $\frac{SQ}{SD}$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của MP và SO thì Q là giao điểm của NI với SD. I là trung điểm của SO.

Đặt $\dfrac{SD}{SQ} = x$. Do $2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ nên $4\overrightarrow{SI} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{SN} + x\overrightarrow{SQ} \Rightarrow x = 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Vậy $\dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{2}{5}$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

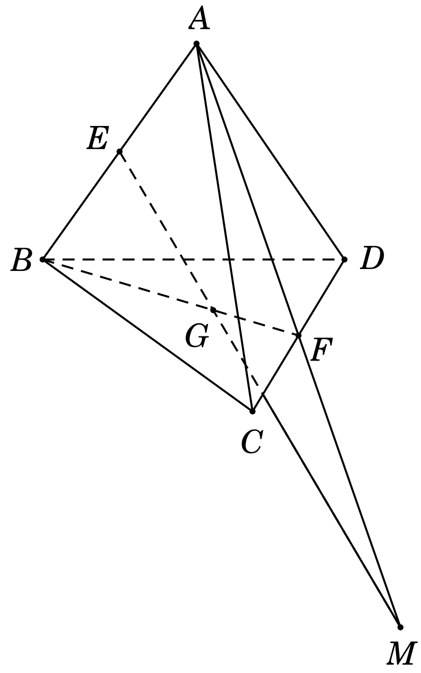
A. điểm F.

B. giao điểm của đường thẳng EG và AF.

C. giao điểm của đường thẳng EG và AC.

D. giao điểm của đường thẳng EG và CD.

Lời giải.



Vì G là trọng tâm tam giác $BCD,$ F là trung điểm của $CD \Rightarrow$ $G \in (ABF)$.

Ta có E là trung điểm của $AB \Rightarrow$ $E \in (ABF)$.

Gọi M là giao điểm của EG và AF mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.

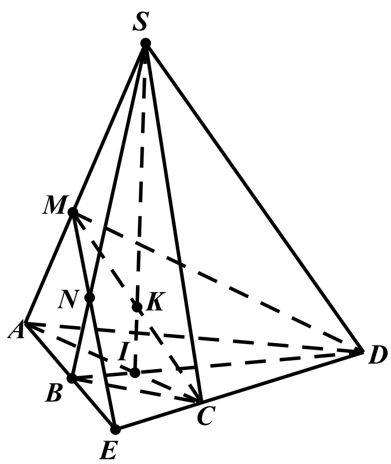
Vậy giao điểm của EG và mp (ACD) là giao điểm $M = EG \cap AF$.

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA. Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

A. Điểm H, trong đó $E = AB \cap CD$, $H = SA \cap EM$
B. Điểm N, trong đó $E = AB \cap CD$, $N = SB \cap EM$
C. Điểm F, trong đó $E = AB \cap CD$, $F = SC \cap EM$
D. Điểm T, trong đó $E = AB \cap CD$, $T = SD \cap EM$

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$
.
Trong (SAB) gọi.
Ta có $N \in EM \subset (MCD) \Rightarrow N \in (MCD)$ và
$N \in SB$ nên $N = SB \cap (MCD)$.



Câu 19: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA. Tìm giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SBD).

A. Điểm H, trong đó $I = AC \cap BD$, $H = MA \cap SI$

B. Điểm F, trong đó $I = AC \cap BD$, $F = MD \cap SI$

C. Điểm K, trong đó $I = AC \cap BD$, $K = MC \cap SI$

D. Điểm V, trong đó $I = AC \cap BD$, $V = MB \cap SI$

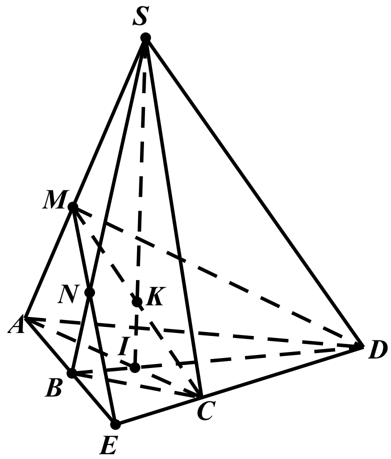
Lời giải.

Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $K = MC \cap SI$.

Ta có $K \in SI \subset (SBD)$ và $K \in MC$ nên

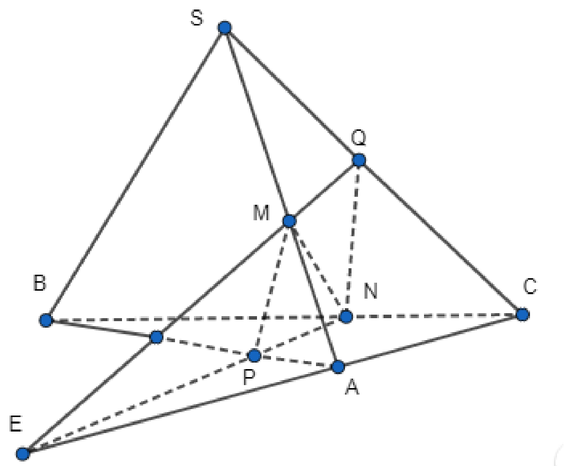
$K = MC \cap (SBD)$.



Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{SQ}{SC}$.

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC). Gọi $E = AC \cap PN$.

Khi đó $Q = SC \cap EM$.

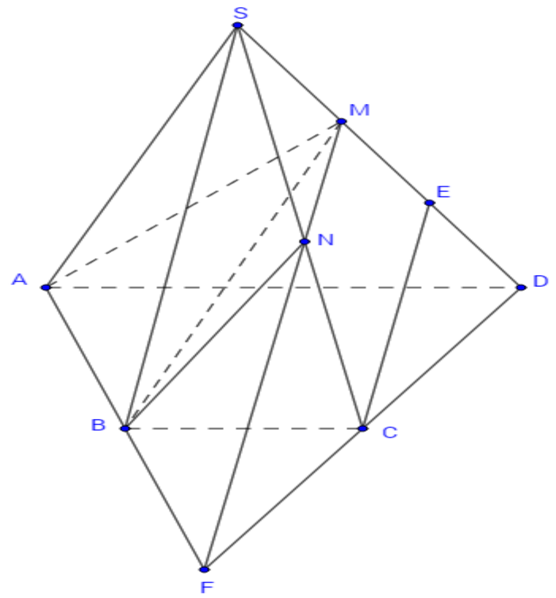
Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác ABC ta có $\frac{AP}{PB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CE}{EA}=1 \Rightarrow \frac{CE}{EA}=2.$

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SAC ta có $\frac{AM}{MS}.\frac{BQ}{QC}.\frac{CE}{EA}=1 \Rightarrow \frac{CE}{EA}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SQ}{SC}=\frac{1}{3}.$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với $AD // BC$ và $AD=2BC$. Gọi M là điểm trên cạnh SD thỏa mãn $SM=\frac{1}{3}SD$. Mặt phẳng (ABM) cắt cạnh bên SC tại điểm N. Tính tỉ số $\frac{SN}{SC}$.

A. $\frac{SN}{SC}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{SN}{SC}=\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{SN}{SC}=\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}$.

Lời giải



Gọi F là giao điểm của AB và CD. Nối F với M, FM cắt SC tại điểm N. Khi đó N là giao điểm của (ABM) và SC.

Theo giả thiết, ta chứng minh được C là trung điểm DF.

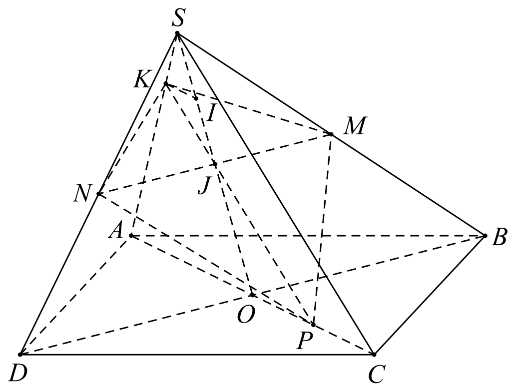
Trong mặt phẳng (SCD) kẻ CE song song NM (E thuộc SD). Do C là trung điểm DF nên suy ra E là trung điểm MD. Khi đó, ta có $SM=ME=ED$ và M là trung điểm SE.

Do $MN // CE$ và M là trung điểm SE nên MN là đường trung bình của tam giác SCE. Từ đó suy ra N là trung điểm SC và $\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC. Gọi giao điểm của (MNP) với SA là K. Tỉ số $\frac{KS}{KA}$ là:

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải



Gọi $J = SO \cap MN$, $K = SA \cap PJ$ thì $K = SA \cap (MNP)$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD nên J là trung điểm của SO.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SAO với cát tuyến là KP, ta có:

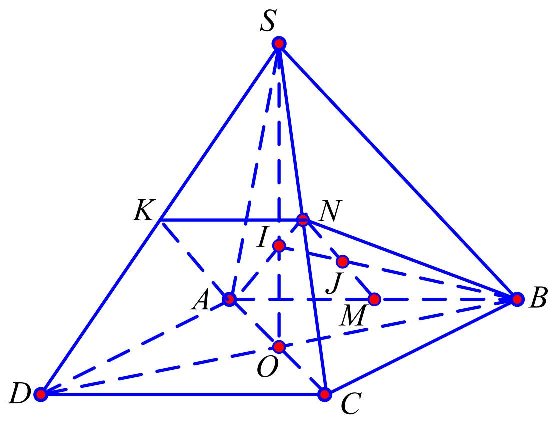
$$\frac{SK}{KA}.\frac{AP}{PO}.\frac{OJ}{JS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SK}{KA}.3.1 = 1 \Leftrightarrow \frac{KS}{KA} = \frac{1}{3}.$$

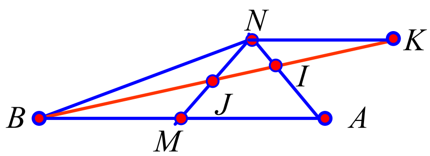
Vậy $\frac{KS}{KA} = \frac{1}{3}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. M, N là lượt là trung điểm của AB và SC. I là giao điểm của AN và (SBD). J là giao điểm của MN với (SBD). Khi đó tỉ số $\frac{IB}{IJ}$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải





Gọi O là trung điểm của AC nên $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng (SAC): $AN \cap SO = I$ nên I là giao điểm của AN và (SBD). Trong (ABN) ta có $MN \cap BI = J$ nên J là giao điểm của MN với (SBD). Gọi K là trung điểm của SD. Suy ra $NK // DC // AB$ và $BI \cap SD = K$ hay B, I, J, K thẳng hàng. Khi đó $NK // BM$ và $NK = MA = BM$ và tứ giác $AKMN$ là hình bình hành. Xét hai tam giác đồng dạng ΔKJN và ΔBJM có $\frac{NK}{BM} = \frac{MJ}{NJ} = \frac{BJ}{JK} = 1$ suy ra J là trung điểm của MN và J là trung điểm của BK hay $BJ = JK$. Trong tam giác ΔSAC có I là trọng tâm của tam giác nên $\frac{NI}{IA}=\frac{1}{2}$. Do $AK//MN$ nên $\frac{IJ}{IK}=\frac{NI}{IA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{IJ}{JK}=\frac{1}{3}=\frac{IJ}{BJ}\Rightarrow\frac{IJ}{BI}=\frac{1}{4}$ hay $\frac{IB}{IJ}=4$.

DẠNG 3: BÀI TOÁN THIẾT DIỆN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để xác định thiết diện của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt bởi mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện là đa giác có đỉnh là các giao điểm của (α) với hình chóp

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 24: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB).

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

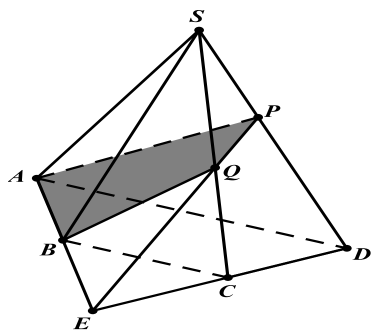
Lời giải.

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E=AB\cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q=SC\cap EP$.

Ta có $E\in AB$ nên $EP\subset(ABP)\Rightarrow Q\in(ABP)$, do đó $Q=SC\cap(ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.



b)Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F,G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H=SA\cap FP$

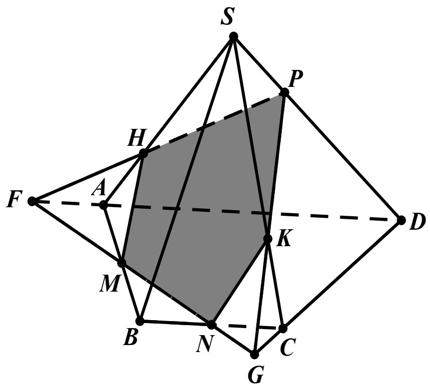
Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K=SC\cap PG$.

Ta có $F\in MN\Rightarrow F\in(MNP)$,

$\Rightarrow FP\subset(MNP)\Rightarrow H\in(MNP)$

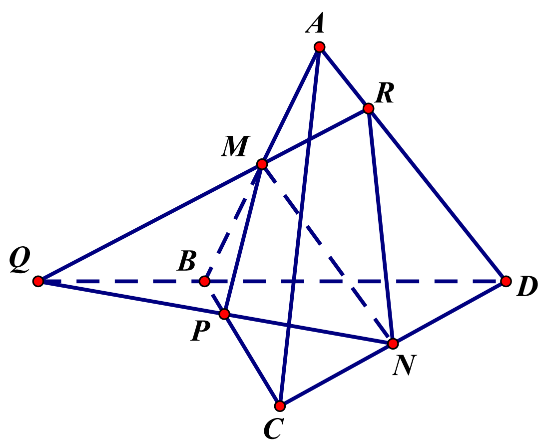
Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.



Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và P là một điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm của BC). Tìm thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải

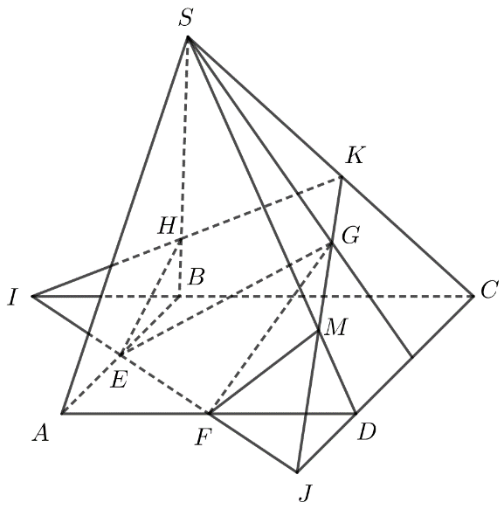


Gọi $Q = NP \cap BD$. Gọi $R = QM \cap AD$. Suy ra: $Q \in (MNP)$ và $R \in (MNP)$.

Vậy thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MRNP$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$, G là điểm nằm trong tam giác SCD. E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG).

Lời giải.



Trong mặt phẳng $(ABCD): EF \cap BC = I;\ EF \cap CD = J$

Trong mặt phẳng $(SCD): GJ \cap SC = K;\ GJ \cap SD = M$

Trong mặt phẳng $(SBC): KI \cap SB = H$

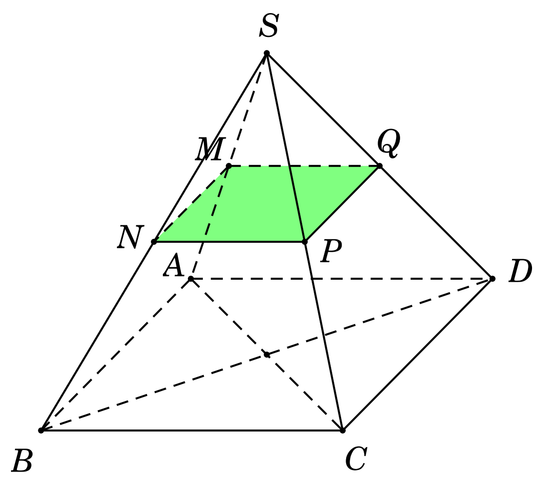
Ta có: $(GEF) \cap (ABCD) = EF$, $(GEF) \cap (SAD) = FM$, $(GEF) \cap (SCD) = MK$

$(GEF) \cap (SBC) = KH$, $(GEF) \cap (SAB) = HE$

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) là ngũ giác $EFMKH$.

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a $(a > 0)$. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải.



Gọi Q là trung điểm của SD.

Tam giác SAD có M, Q lần lượt là trung điểm của SA, SD suy ra $MQ // AD$.

Tam giác SBC có N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC suy ra $NP // BC$.

Mặt khác $AD // BC$ suy ra $MQ // NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Khi đó M, N, P, Q đồng phẳng $\Rightarrow (MNP)$ cắt SD tại Q và $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với $mp\,(MNP)$.

Vậy diện tích hình vuông $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \dfrac{S_{ABCD}}{4} = \dfrac{a^2}{4}$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

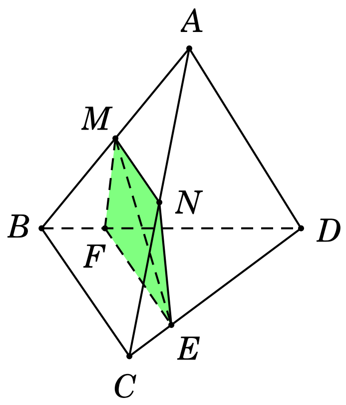
A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Lời giải.



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN // BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF // BC$.

Do đó $MN // EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là trung điểm của SA, F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh BC, $CD\,(CF < FB, GC < GD)$. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Lời giải

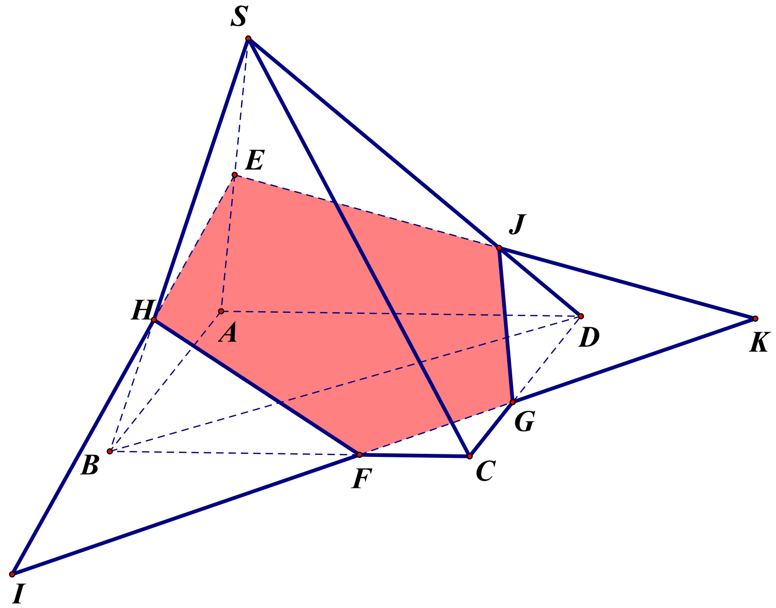
Trong $(ABCD)$, gọi $I = FG \cap AB; K = FG \cap AD$

Trong (SAB), gọi $H = IE \cap SB$.

Trong (SAD), gọi $J = EK \cap SD$.

$(EFG) \cap (ABCD) = FG$, $(EFG) \cap (SCD) = JG$, $(EFG) \cap (SAD) = JE$, $(EFG) \cap (SAB) = HE$, $(EFG) \cap (SBC) = HF$.

Do đó thiết diện là ngũ giác $EJGFH$.



Câu 30: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là hình gì?

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Lời giải

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$

.

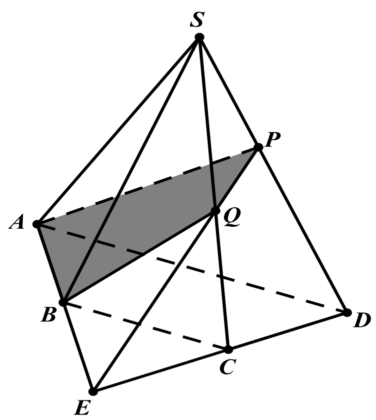
Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q = SC \cap EP$.

Ta có $E \in AB$ nên

$EP \subset (ABP) \Rightarrow Q \in (ABP)$, do đó

$Q = SC \cap (ABP)$.

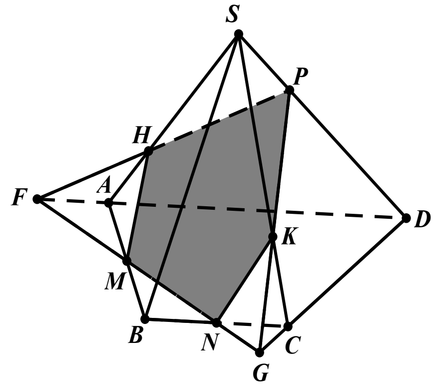
Thiết diện là tứ giác $ABQP$.



Câu 31: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F,G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA \cap FP$

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC \cap PG$.

Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in (MNP)$,

$\Rightarrow FP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

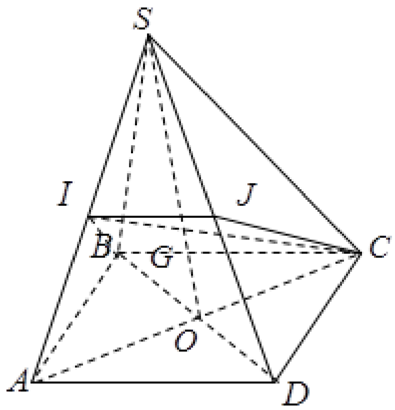
Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

A. Tam giác IBC. **B.** Hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB). **D.** Tứ giác $IBCD$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là giao điểm của CI và SO.

Khi đó G là trọng tâm tam giác SAC. Suy ra G là trọng tâm tam giác SBD.

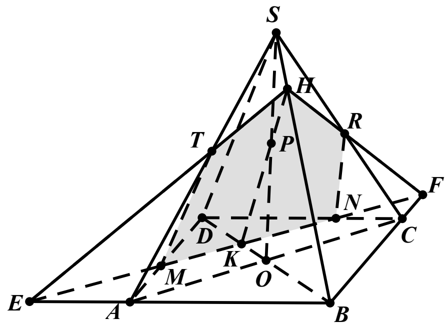
Gọi $J = BG \cap SD$. Khi đó J là trung điểm SD.

Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi (IBC) là hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi M,N,P là ba điểm trên các cạnh AD,CD,SO. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E, K, F lần lượt là giao điểm của MN với DA, DB, DC.

Trong mặt phẳng (SDB) gọi $H = KP \cap SB$

Trong mặt phẳng (SAB) gọi $T = EH \cap SA$

Trong mặt phẳng (SBC) gọi $R = FH \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} E \in MN \\ H \in KP \end{cases} \Rightarrow EH \subset (MNP)$,

$\begin{cases} T \in SA \\ T \in EH \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow T = SA \cap (MNP)$.

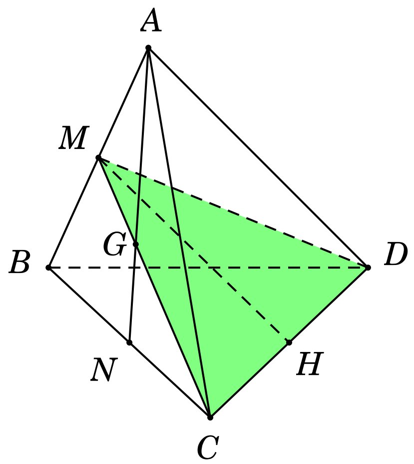
Lí luận tương tự ta có $R = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNRHT$.

Câu 34: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = G$.

Dễ thấy mặt phẳng (GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm M.

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện $ABCD$.

Tam giác ABD đều, có M là trung điểm AB suy ra $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều, có M là trung điểm AB suy ra $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.MH.CD$

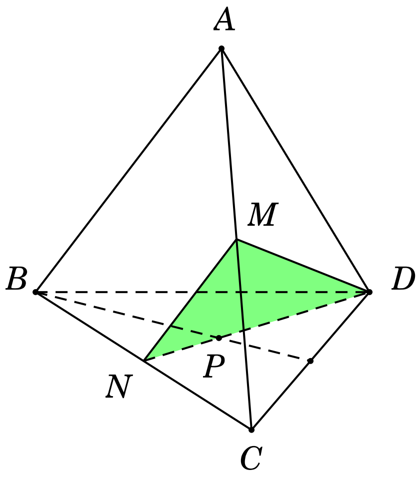
Với $MH = \sqrt{MC^2 - HC^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

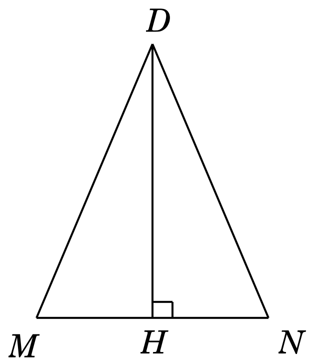
Vậy $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 35: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.





Trong tam giác BCD có: P là trọng tâm, N là trung điểm BC. Suy ra N, P, D thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác MND.

Xét tam giác MND, ta có $MN = \frac{AB}{2} = a$; $DM = DN = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó tam giác MND cân tại D.

Gọi H là trung điểm MN suy ra $DH \perp MN$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta MND} = \frac{1}{2}MN.DH = \frac{1}{2}MN.\sqrt{DM^2 - MH^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

DẠNG 4: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG – BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Để chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyên của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.
- Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng thuộc đường đường thẳng còn lại.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 36: Cho tứ diện $SABC$. Trên SA,SB và SC lấy các điểm D,E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh rằng ba điểm I,J,K thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có

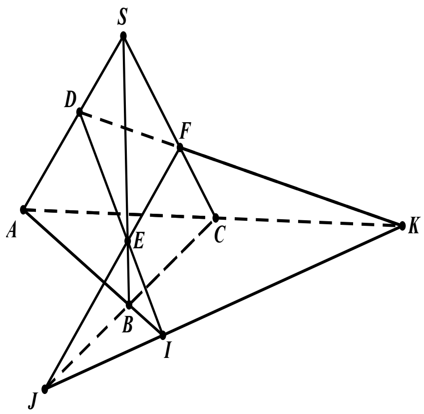
$I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).Tương tự

$J = EF \cap BC$

$\Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$ (2) $K = DF \cap AC$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$ (3) Từ, và ta có I,J,K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.



Câu 37: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA,SB,SC,SD tưng ứng tại các điểm M,N,P,Q. Chứng minh rằng:Các đường thẳng MP,NQ,SO đồng qui.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I = MP \cap NQ$.

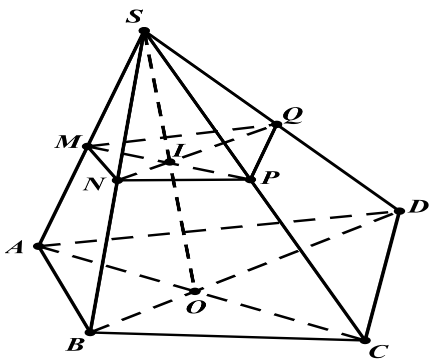
Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

Dễ thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases}$

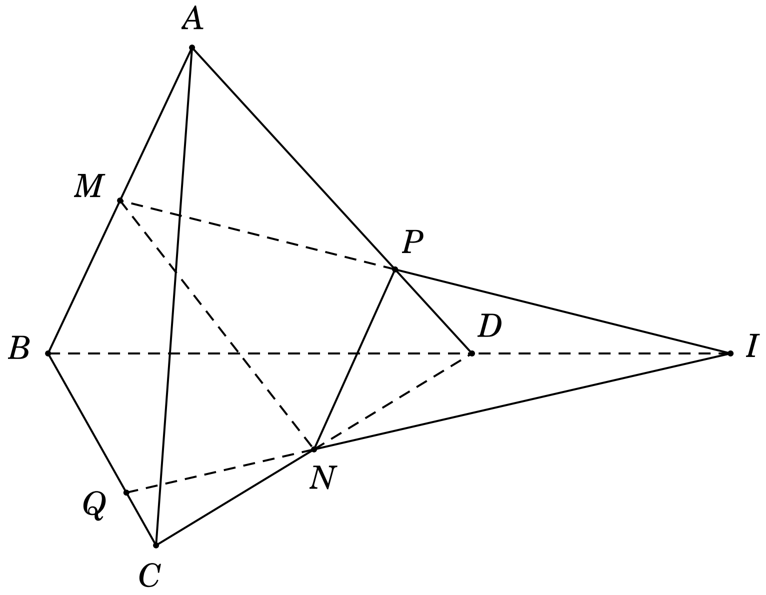
$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO$

Vậy MP,NQ,SO đồng qui tại I.



Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Chứng minh ba điểm I, B, D thẳng hàng.

Lời giải.



Ta có $(ABD)\cap(BCD)=BD$.

Lại có $\begin{cases} I\in MP\subset(ABD) \\ I\in NQ\subset(BCD) \end{cases} \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

$\Rightarrow I\in BD \Rightarrow I,\ B,\ D$ thẳng hàng.

Câu 39: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tưng ứng tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh rằng các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.

Lời giải.

Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I=MP\cap NQ$.

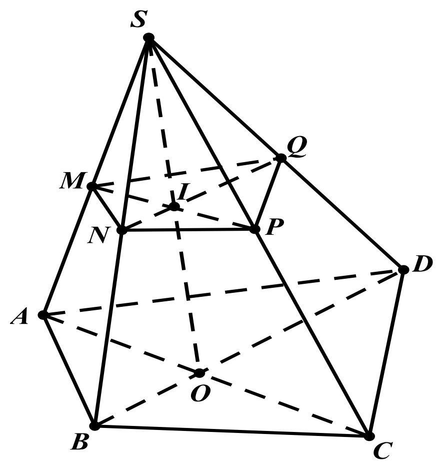
Ta sẽ chứng minh $I\in SO$.

Dễ thấy $SO=(SAC)\cap(SBD)$.

$\begin{cases} I\in MP\subset(SAC) \\ I\in NQ\subset(SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} I\in(SAC) \\ I\in(SBD) \end{cases} \Rightarrow I\in SO$

Vậy MP, NQ, SO đồng qui tại I.



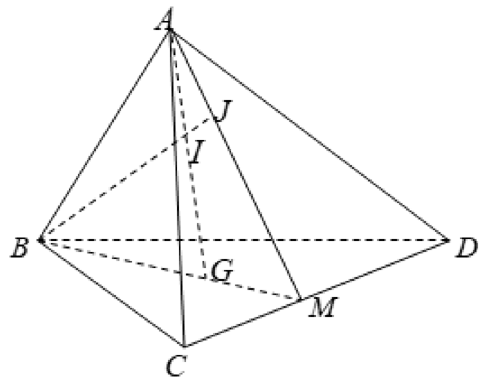
3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM=(ACD)\cap(ABG)$. **B.** A, J, M thẳng hàng.

C. J là trung điểm AM. **D.** $DJ=(ACD)\cap(BDJ)$.

Lời giải.



Ta có $A\in(ACD)\cap(ABG)$, $\begin{cases} M\in BG \\ M\in CD \end{cases}\Rightarrow M\in(ACD)\cap(ABG)$ nên $AM=(ACD)\cap(ABG)$.

Nên $AM=(ACD)\cap(ABG)$ vậy A đúng.

A, J, M cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt $(ACD),(ABG)$ nên A, J, M thẳng hàng, vậy B đúng.

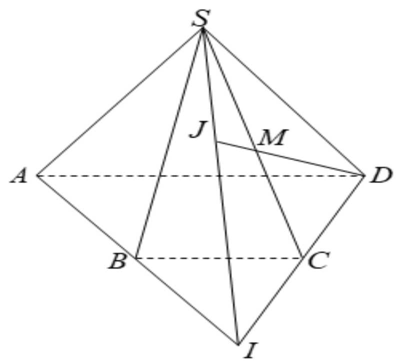
Vì I là điểm tùy ý trên AG nên J không phải lúc nào cũng là trung điểm của AM.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $AD//BC$. Gọi I là giao điểm của AB và DC, M là trung điểm SC. DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. S, I, J thẳng hàng. **B.** $DM\subset mp(SCI)$.

C. $JM\subset mp(SAB)$. **D.** $SI=(SAB)\cap(SCD)$.

Lời giải.



□ S, I, J thẳng hàng vì ba điểm cùng thuộc hai mp (SAB) và (SCD) nên A đúng.

□ $M\in SC\Rightarrow M\in(SCI)$ nên $DM\subset mp(SCI)$ vậy B đúng.

□ $M\notin(SAB)$ nên $JM\not\subset mp(SAB)$ vậy C sai.

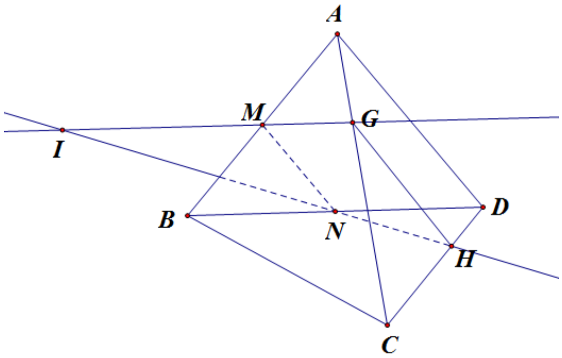
□ Hiển nhiên D đúng theo giải thích **A.**

Câu 42: Cho hình tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BD. Các điểm G, H lần lượt trên cạnh AC, CD sao cho NH cắt MG tại I. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. A, C, I thẳng hàng **B.** B, C, I thẳng hàng.

C. N, G, H thẳng hàng. **D.** B, G, H thẳng hàng.

Lời giải



Do NH cắt MG tại I nên bốn điểm M,N,H,G cùng thuộc mặt phẳng (α). Xét ba mặt phẳng (ABC), (BCD), (α) phân biệt, đồng thời $\begin{cases}(\alpha)\cap(ABC)=MG\\(\alpha)\cap(BCD)=NH\\(ABC)\cap(BCD)=BC\end{cases}$ mà $MG\cap NH=I$

Suy ra MG, NH, BC đồng quy tại I nên B, C, I thẳng hàng.

Câu 43: Cho tứ diện $SABC$. Trên SA,SB và SC lấy các điểm D,E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K.Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Ba điểm B,J,K thẳng hàng **B.** Ba điểm I,J,K thẳng hàng

C. Ba điểm I,J,K không thẳng hàng **D.** Ba điểm I,J,C thẳng hàng

Lời giải

Ta có

$I=DE\cap AB, DE\subset(DEF)\Rightarrow I\in(DEF)$;

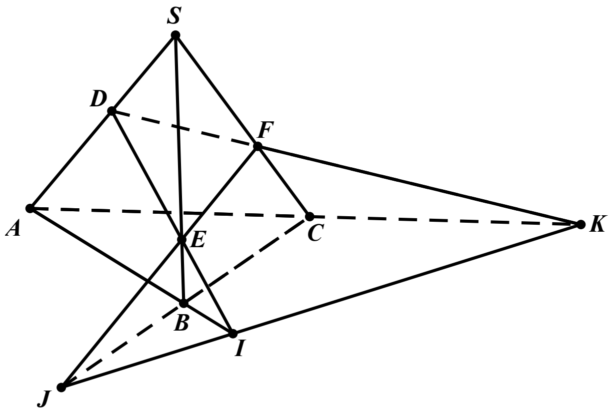
$AB\subset(ABC)\Rightarrow I\in(ABC)$ (1).Tương tự

$J=EF\cap BC$

$\Rightarrow\begin{cases}J\in EF\in(DEF)\\J\in BC\subset(ABC)\end{cases}$ (2) $K=DF\cap AC$

$\Rightarrow\begin{cases}K\in DF\subset(DEF)\\K\in AC\subset(ABC)\end{cases}$ (3) Từ, và ta có

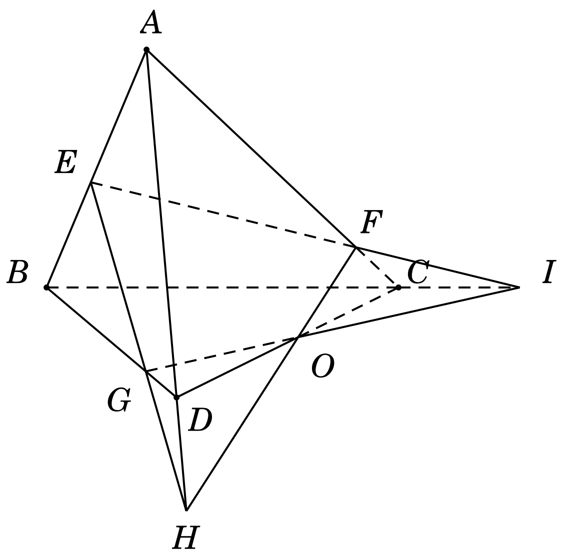
I,J,K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.



Câu 44: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

A. CD, EF, EG. **B.** CD, IG, HF. **C.** AB, IG, HF. **D.** AC, IG, BD.

Lời giải.



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng $d_1,\ d_2,\ d_3$ đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β); đồng thời d_3 là giao tuyến (α) và (β).

Gọi $O = HF \cap IG$. Ta có

- $O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$ suy ra $O \in (ACD)$.
- $O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$.

Do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mà $(ACD) \cap (BCD) = CD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in CD$.

Vậy ba đường thẳng $CD,\ IG,\ HF$ đồng quy.