Chương 01

Bài 4. KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CƠ BẢN

C Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0; 2)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

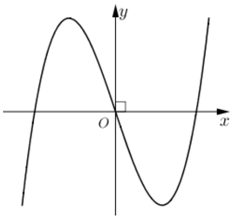
Ta có: $y' = -3x^2 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên $(0; 2)$.

Vậy hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

» Câu 2. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



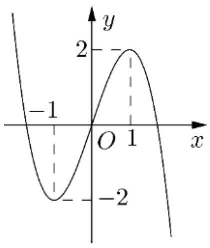
A. $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

» Câu 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



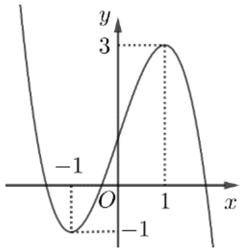
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là 3.

» Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=1$ là



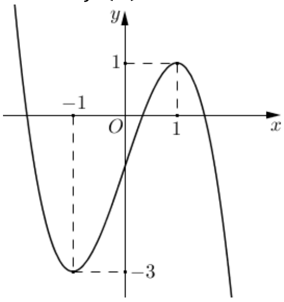
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=1$ có 3 nghiệm.

» Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

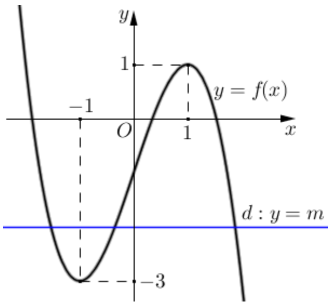


A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $d: y=m$.



Dựa vào hình vẽ, ta có:

Phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt, tức là $-3<m<1$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0\}$.

» Câu 6. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. $y=-1$ **B.** $y=4$ **C.** $y=1$ **D.** $y=0$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-3\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y(1)=0 \\ x=-1\Rightarrow y(-1)=4 \end{array}\right.$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}(x^3-3x+2)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=+\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4

» Câu 7. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y=-\frac{1}{5}$ **B.** $y=5$ **C.** $y=1$ **D.** $y=0$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+1}{x-1}\right)=5\Rightarrow y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Câu 8. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\frac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ (m,n là các số thực) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung là tiệm cận đứng. Tính tổng $m+n$.

A. 0 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Theo công thức tìm nhanh tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ta có

Đồ thị hàm số nhận $x=-\frac{d}{c}=-m-3=0$ làm TCĐ$\Rightarrow m=-3$

Đồ thị hàm số nhận$y=\frac{a}{c}=n-3=0$ làm TCN$\Rightarrow n=3$.

Vậy $m+n=0$.

» Câu 9. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2x-3}{2x-2}$ là

A. $x=1$ **B.** $x=\frac{1}{2}$

C. $x=2$ **D.** Không có tiệm cận đứng

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2x-2=0 <=> x=1$

Thay $x=1$ lên tử => $1^2+2.1-3=0$. Vậy $x=1$ không là TCĐ =>Không có TCĐ

» Câu 10. Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ hàm số: $y=-x^3+2x^2-1$, cho $x=0\to y=-1$.

Vậy đồ thị hàm số$y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

» Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$x^3+3x^2=3x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

» Câu 12. Biết rằng đường thẳng $y=4x+5$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+2x+1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=10$. **B.** $y_0=13$. **C.** $y_0=11$. **D.** $y_0=12$.

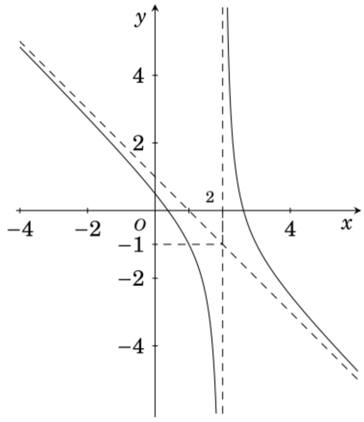
Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3+2x+1=4x+5 \Leftrightarrow x^3-2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

Với $x=2 \Rightarrow y=13$. Vậy $y_0=13$

» Câu 13. Cho hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ có đồ thị như hình bên dưới



Xét các mệnh đề sau:

a). Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

b). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

c). Điểm $I(1;2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

d). Hệ số a và m trái dấu.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta thấy $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Suy ra tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\backslash\{2\}$ nên mệnh đề a) sai.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Suy ra mệnh đề b) đúng.

Dựa vào đồ thị, ta thấy điểm $(2;-1)$ là tâm đối xứng của đồ thị suy ra mệnh đề c) sai.

Dựa vào đồ thị, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên hệ số a và m trái dấu.

Suy ra mệnh đề d) đúng.

» Câu 14. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

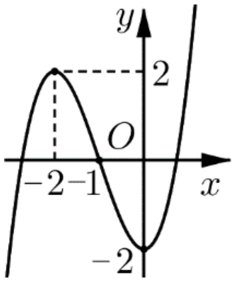
Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3+x^2=x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của 2 đồ thị là 3.

» **Câu 15.** Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$. **B.** $y = x^3 + 3x^2 - 2$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số là hàm bậc ba và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$ suy ra loại A, C.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-1; 0)$ nên chọn đáp án B.

» **Câu 16.** Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

A. $x_I = 2$. **B.** $x_I = 1$. **C.** $x_I = -5$. **D.** $x_I = -\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$\frac{2x+4}{x-1} = x + 1 (x \neq 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0$ (*)

Khi đó $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 1$.

Chú ý: có thể giải (*), tìm được $x_M = 1 + \sqrt{6}, x_N = 1 - \sqrt{6} \Rightarrow x_I = 1$

» **Câu 17.** Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$x - 1 = \frac{-x+5}{x-2}$ (1)

Với $x \neq 2$, phương trình (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = -x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = -x + 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Đặt $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Khi đó $x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2$.

» **Câu 18.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; +\infty)$. **B.** $(-2; 2)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(-\infty; -2)$.

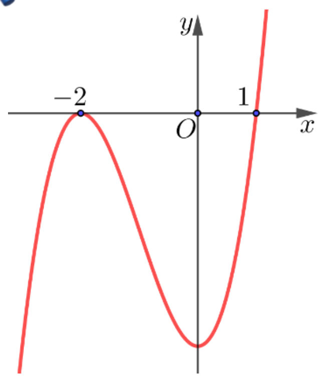
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta thấy, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Do đó, trong các khoảng đã cho, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

» **Câu 19.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<1$ và $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>1$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

» Câu 20. Trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hàm số nào có bảng biến thiên sau?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ -2

A. $y=\frac{x-1}{x-1}$. **B.** $y=\frac{-2x}{x-1}$. **C.** $y=\frac{-2+x}{x+1}$. **D.** $y=\frac{1-2x}{x+1}$.

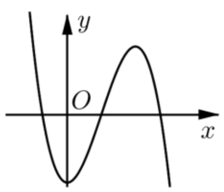
Lời giải

Chọn D

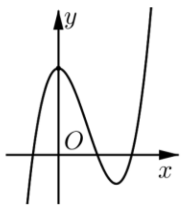
Dựa vào BBT, ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-2$ nên $y=-2$ là TCN của đồ thị hàm số suy ra loại A, C.

Dựa vào BBT, ta có $\lim\limits_{x\to-1^+} y=+\infty$ nên $x=-1$ là TCĐ của đồ thị hàm số nên ta chọn D.

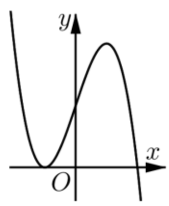
» Câu 21. Hình nào dưới đây là dạng đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2-2$?



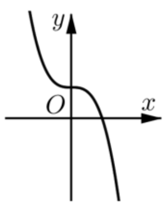
(I)



(II)



(III)



(IV)

A. (I). **B.** (III). **C.** (IV). **D.** (II).

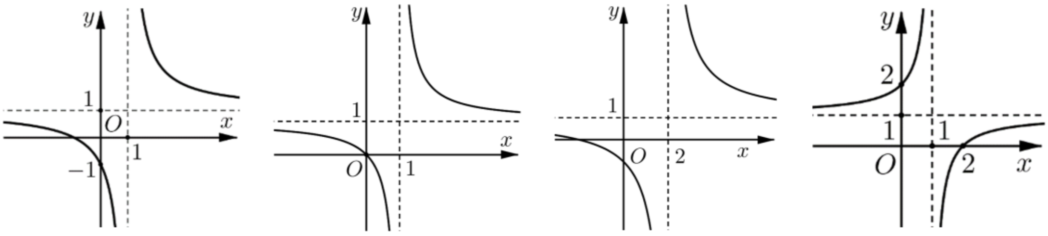
Lời giải

Chọn A

Vì hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ có $a=-1<0$ nên nhánh cuối đồ thị đi xuống, suy ra loại (II).

Đồ thị $y=-x^3+3x^2-2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên chọn (I).

» Câu 22. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\frac{x-2}{x-1}$?



(I) (II) (III) (IV)

A. (I). **B.** (III). **C.** (IV). **D.** (II).

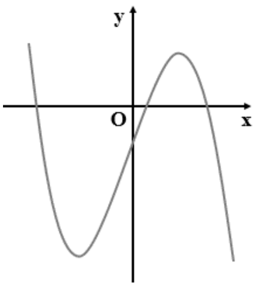
Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ có TCĐ là đường thẳng $x = 1$. Suy ra loại (III).

Vì $y' = \frac{1}{(x-1)} > 0, \forall x \neq 1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Vậy chọn (IV).

» Câu 23. Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d (a; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, d > 0$. **C.** $a > 0, d < 0$. **D.** $a < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a < 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x = 0$là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$.

» Câu 24. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

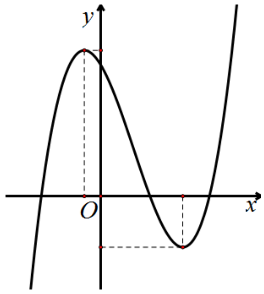
Chọn A

Từ bảng biến thiên, ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 0 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy trong các số a, b, c, d có 2 số dương.

» Câu 25. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d?



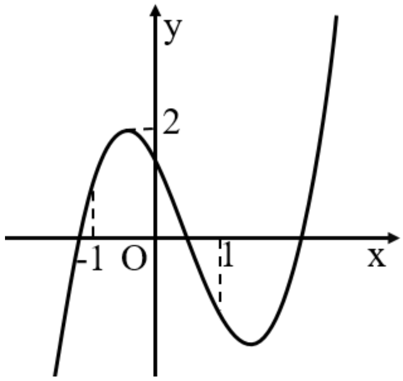
A. $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$ **B.** $a > 0, c > 0 > b, d < 0$
C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0.$ **D.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d > 0$, đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $x_1.x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$. Vậy đáp án D

» Câu 26. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0.$ **B.** $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0.$
C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0.$ **D.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$

Lời giải

Chọn D

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.
+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.
+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a.c < 0$, nên suy ra $c < 0$.
+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.
Mà $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.
Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

» Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m<0$. **B.** $m>0$. **C.** $0<m<\frac{27}{4}$. **D.** $m>\frac{27}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Qua bảng biến thiên ta thấy, đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt khi $m>\frac{27}{4}$.

» Câu 28. Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B. Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)

A. 1. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox tại điểm $A(1;0)$.

Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Oy tại điểm $B(0;-1)$.

Tam giác OAB vuông tại O nên $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.|1|.|-1|=\frac{1}{2}$.

» Câu 29. Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ có tiệm cận xiên là

A. $y=x$. **B.** $y=-x$. **C.** $y=x+1$. **D.** $y=-x+1$.

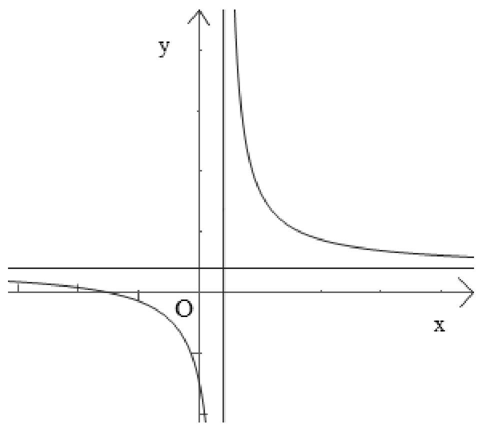
Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$.

Do đó, đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

» Câu 30. Cho hàm số $y=\frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d<0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a>1, b>0, c<1$. **B.** $a>1, b<0, c>1$. **C.** $a<1, b>0, c<1$. **D.** $a>1, b>0, c>1$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-\frac{d}{c-1}$.

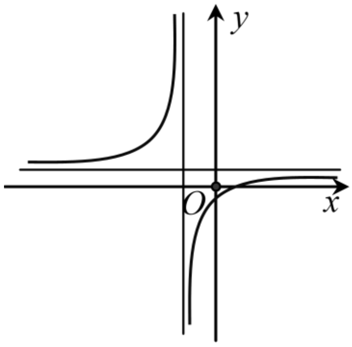
Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y=\frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x=-\frac{d}{c-1}>0$ mà $d<0\Rightarrow c-1>0\Rightarrow c>1$.

$y=\frac{a-1}{c-1}>0\Rightarrow a-1>0\Rightarrow a>1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{b}{d}<0\Rightarrow b>0$.

» Câu 31. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét từ đồ thị:

+ Giao với trục hoành tại $x_o = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow a$ và b trái dấu (1).

+ Giao với trục tung tại $y_o = \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b$ và d trái dấu (2).

+ Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow d$ và c cùng dấu (3).

Từ (1) và (2) suy ra: a và d cùng dấu hay $ad > 0$.

Từ (2) và (3) suy ra: b và c trái dấu hay $bc < 0$.

» Câu 32. Tính tổng các hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{4-x}$ và $y = 6 - x$.

A. 12. **B.** 27. **C.** -12. **D.** -27.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm :

$$6 - x = \frac{2x-3}{4-x} \Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 = 0, x \neq 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 9 \end{array}\right.$$

Vậy tổng các hoành độ giao điểm bằng 12

» Câu 33. Một học sinh được giao thiết kế một cái hộp thỏa mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng 12cm; tổng của chiều rộng và chiều cao là 24cm. Giáo viên yêu cầu học sinh ấy phải thiết kế sao cho thể tích cái hộp lớn nhất, giá trị thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 600. **B.** $843\sqrt{3}$. **C.** $384\sqrt{3}$. **D.** $348\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

+ Gọi chiều rộng là x, $0 < x < 12$.

+ Thể tích hình hộp là: $V = x(12-x)(24-x) = x^3 - 36x^2 + 288x$

+ Xét hàm số $f(x) = x^3 - 36x^2 + 288x$ trên $(0;12)$ta có:

$f'(x) = 3x^2 - 72x + 288; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 + 4\sqrt{2} \notin (0;12) \\ x = 12 - 4\sqrt{3} \in (0;12) \end{array}\right.$

+ Lập bảng biến thiên ta tìm được: $\underset{(0;12)}{max} f(x) = f\left(12 - 4\sqrt{3}\right) = 384\sqrt{3} \Rightarrow V\sqrt{3}_{max}$

» Câu 34. Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^{3t}$. Trong đó c

là hằng số cho trước; E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng

A. $9km/h.$ **B.** $8km/h.$ **C.** $10km/h.$ **D.** $12km/h.$

Lời giải

Chọn A

+ Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là $v-6$ km/h ($v>6$)

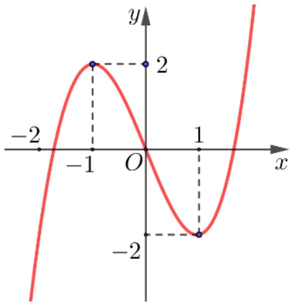
+ Năng lượng cá tiêu hao cả quá trình tìm về nguồn là: $E(v)=cv^3t=cv^3.\frac{400}{v-6}$.

+ Ta có: $E'(v)=c.400.\frac{2v^3-18v^2}{(v-6)^2}=0 \Leftrightarrow v=9(km/h)$

+ Từ đó tìm được $MinE(v)=E(9)=97200c$

B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai

» Câu 35. Cho đồ thị hàm số bậc ba như hình bên dưới. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?



	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;\ 2)$		
(b)	Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.		
(c)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$		
(d)	Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O		

Lời giải

(a) *Điểm cực đại của đồ thị hàm số là* $(-1;\ 2)$

Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;\ 2)$

Dễ thấy $x_{CD}=-1$, $y_{CD}=2$ nên điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1;\ 2)$

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.*

Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Quan sát đồ thị thì cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

» Chọn SAI.

(c) *Hàm số đồng biến trên khoảng* $(1;+\infty)$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Quan sát đồ thị hàm số thì $x\in(1;+\infty)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ* O

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua gốc toạ độ O

Nếu hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đối xứng qua gốc toạ $O \Leftrightarrow O$ trung điểm hai điểm cực đó $\Rightarrow x_O=\frac{-1+1}{2}=0$ và $y_O=\frac{-2+2}{2}=0$

» **Chọn** ĐÚNG.

» **Câu 36.** Cho hàm số $y=\frac{-x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C)

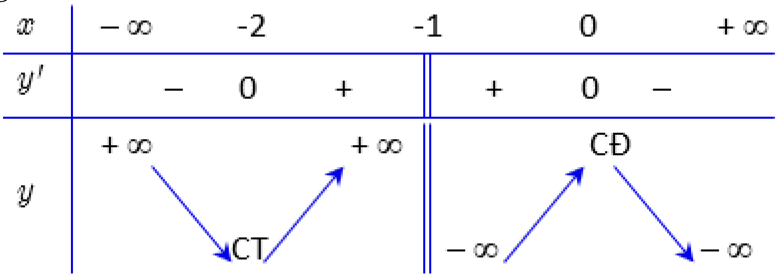
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1);(-1;0)$.		
(b)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
(c)	Đồ thị (C) không cắt trục Ox.		
(d)	Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1;2)$		

Lời giải

Ta có $y=\frac{-x^2+x+1}{x+1}=-x+2-\frac{1}{x+1}$

$$y'=\frac{-x-2x}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$$

Khi đó ta có bảng biến thiên:



(a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1);(-1;0)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Hàm số có hai điểm cực trị.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Đồ thị (C) *không cắt trục* Ox.

Mặt khác, $y=0\Leftrightarrow -x^2+x+1=0(*)$

Vậy phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Hay (C) luôn cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

» **Chọn** SAI.

(d) Đồ thị (C) *có tiệm cận xiên đi qua điểm* $A(1;2)$

Tiệm cận xiên của đồ thị là $y=-x+2$

Thay $A(1;2)$ *vào tiệm cận xiên thấy:* $-1+2=1$ không thỏa nên tiệm cận xiên không đi qua điểm A

» **Chọn** SAI.

» **Câu 37.** Cho hàm số $y=\frac{-x^2-3x+4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y=-x-6$.		
(b)	Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;-9)$ làm tâm đối xứng.		
(c)	Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.		
(d)	Đồ thị không cắt trục Ox.		

Lời giải

Ta có $y=-x-6-\frac{14}{x-3}$

(a) Đồ thị (C) *có tiệm cận xiên là* $y=-x-6$.

Khi đó tiệm cận xiên là $y=-x-6$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3;-9)$ làm tâm đối xứng.

Tiệm cận đứng là $x = 3$.

Suy ra, giao điểm 2 tiệm cận là $I(3;-9)$ là tâm đối xứng.

» **Chọn** ĐÚNG.

(c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

Mặt khác, $y' = \frac{-x+6x+5}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0$ (*)

Phương trình (*)luôn có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2$.

Nên (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy.

» **Chọn** ĐÚNG.

(d) Đồ thị không cắt trục Ox.

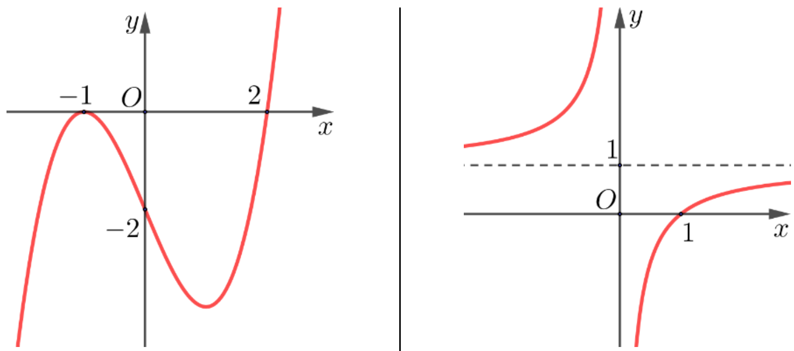
Hơn nữa, $y = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0$.

Phương trình luôn có 2 nghiệm (vì $(-1).4 < 0$)

Suy ra (C) cắt Ox tại hai điểm phân biệt.

» **Chọn** SAI.

» Câu 38. Cho ba dạng đồ thị hàm số. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ?



Hình 1 Hình 2

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hình 3

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hình 1 là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số $a > 0$ và $d = -2$		
(b)	Hình 2 là đồ thị hàm số có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thoả $a = c$, với $a \neq 0,\ c \neq 0$		
(c)	Hình 3 là đồ thị hàm số có dạng $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a \neq 0,\ m \neq 0$ và có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2;3)$		
(d)	Hình 3 có $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho		

Lời giải

(a) Hình 1 là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hệ số $a > 0$ và $d = -2$

Do nhánh bên phải cuối đi lên nên hệ số $a > 0$, đồ thị hàm số trên cắt trục Oy tại $y = -2 \Rightarrow d = -2$

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Hình 2 là đồ thị hàm số có dạng* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ *thoả* $a = c$, *với* $a \neq 0,\ c \neq 0$

Đồ thị hàm số đã cho có đường tiệm cận ngang $y = 1$ nên $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} = 1 \Leftrightarrow a = c$

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Hình 3 là đồ thị hàm số có dạng* $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ *với* $a \neq 0,\ m \neq 0$ *và có điểm cực đại của đồ thị hàm số là* $(2; 3)$

Dễ thấy bảng biến thiên của Hình 3 là dạng đồ thị hàm số$y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ với $a \neq 0,\ m \neq 0$ và có điểm đại của đồ thị hàm số là $(2; 3)$

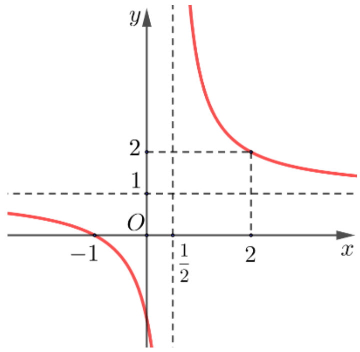
» Chọn ĐÚNG

(d) *Hình 3 có* $y = 1$ *là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho*

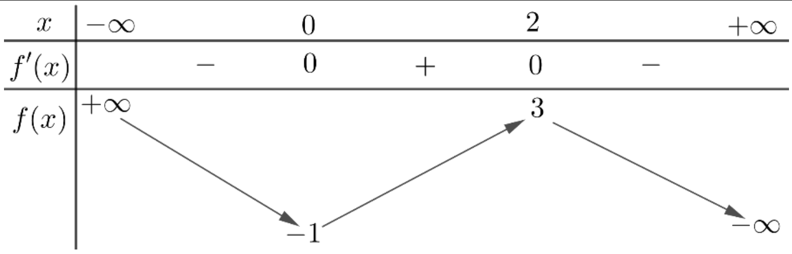
Hình 3 có $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho

» Chọn SAI

» Câu 39. Cho hai đồ thị hàm số hình 1 là: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ và hình 2 là: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Hình 1



Hình 2

Xét tính đúng/sai các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn: $a + 2d = 0$		
(b)	Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $3b - 4c - 2d = 0$		
(c)	Hình 2 có đồ thị hàm số có dạng là: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$		
(d)	Hình 2 là đồ thị hàm số có tổng các hệ số $a + b + c + d < 0$		

Lời giải

(a) *Đồ thị hàm số* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ *thoả mãn:* $a + 2d = 0$

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có TCN: $y = 1 = \frac{a}{c}$ và TCĐ: $x = \frac{1}{2} = -\frac{d}{c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = c \\ c = -2d \end{cases} \Rightarrow a + 2d = 0$$

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ thoả mãn $3b-4c-2d=0$*

Đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ qua điểm $(2;2)$ nên $\frac{2a+b}{2c+d}=2\Leftrightarrow 2a+b=4c+2d$

Đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ qua điểm $(-1;0)$ nên $\frac{-a+b}{-c+d}=0\Leftrightarrow b=a$

Từ đó suy ra $2b+b=4c+2d\Leftrightarrow 3b-4c-2d=0$

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Hình 2 có đồ thị hàm số có dạng là: $y=-x^3+3x^2-1$*

Độ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị $(0;-1);(2;3)$

Suy ra ta có: $\begin{cases}(0;-1)\in y\\ y'(0)=0\\ y'(2)=0\\ (2;3)\in y\end{cases}$, với $y'=3ax^2+2bx+c$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}d=-1\\ c=0\\ 8a+4b+2c+d=3\\ 12a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=-1\\ c=0\\ a=-1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow y=-x^3+3x^2-1$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Hình 2 là đồ thị hàm số có tổng các hệ số $a+b+c+d<0$*

Ta có đồ thị hàm số bậc 3 là $y=-x^3+3x^2-1$ có các hệ số $\begin{cases}d=-1\\ c=0\\ a=-1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d>0$

» Chọn SAI.

» Câu 40. Cho hàm số $y=x-\frac{1}{x+1}$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$		
(b)	Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x-1$		
(c)	Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau		
(d)	Để đường thẳng $y=k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA\perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2-k-1=0$		

Lời giải

(a) *Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$*

$$y=x-\frac{1}{x+1}$$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$y'=1+\frac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$: hàm số luôn luôn đồng biến, không có cực đại, cực tiểu

$\lim\limits_{x\to-1^{\mp}}y=\pm\infty$: $x=-1$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=x$: $y=x$ là tiệm cận xiên

» Chọn SAI.

(b) *Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=2x-1$*

$$M(0;-1),y_0'=2$$

Phương trình tiếp tuyến (T) tại M: $y=2(x-0)-1\Leftrightarrow y=2x-1$

» Chọn ĐÚNG.

(c) *Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau*

Tiếp tuyến (T_1) của (C) tại $P(x_1, y_1)$ có hệ số góc

$$k_1 = y'_{x_1} = 1 + \frac{1}{(x_1+1)^2} > 0$$

Tiếp tuyến (T_2) của (C) tại $Q(x_2, y_2)$ có hệ số góc

$$k_2 = y'_{x_2} = 1 + \frac{1}{(x_2+1)^2} > 0$$

Do $y'_{x_1} > 0, y'_{x_2} > 0$ nên không thể có 2 tiếp tuyến của (C) vuông góc nhau

» Chọn SAI.

(d) *Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ khi đó k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$*

$$y = x - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x-1}{x+1}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = k$:

$$\frac{x^2+x-1}{x+1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 - (k-1)x - (k+1) = 0 (*) \end{cases}$$

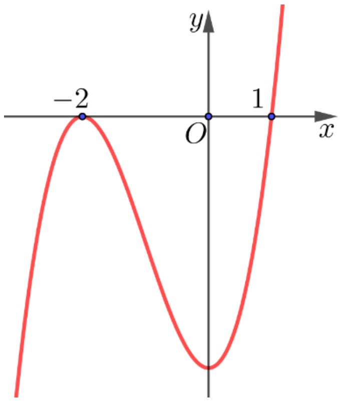
Do vị trí của (C) trên hệ tọa độ Oxy, có thể kết luận $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_A, x_B \neq -1$ và $\begin{cases} x_A + x_B = k-1 \\ x_A \cdot x_B = -(k+1) \end{cases}$; $A(x_A; k), B(x_B; k)$

$$\overrightarrow{OA} = (x_A, k), \overrightarrow{OB} = (x_B, k)$$

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + k^2 = 0 \Leftrightarrow -k - 1 + k^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ và các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.		
(b)	Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.		
(c)	Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.		
(d)	Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.		

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.

Có $g'(x) = (x^2-3)'.f'(x^2-3) = 2x.f'(x^2-3)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2-3) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1. \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

Ta lại có $x > 1$ thì $f'(x) > 0$. Do đó $x^2 > 4$ thì $f^{'}(x^2 - 3) > 0$.
$x < 1$ thì $f'(x) < 0$. Do đó $x^2 < 4$ thì $f^{'}(x^2 - 3) < 0$.
Từ đó ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

(a) *Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.*

Đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới Ox trên khoảng $(-\infty; 1)$. Do đó hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

» **Chọn** ĐÚNG.

(b) *Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.*

» **Chọn** ĐÚNG.

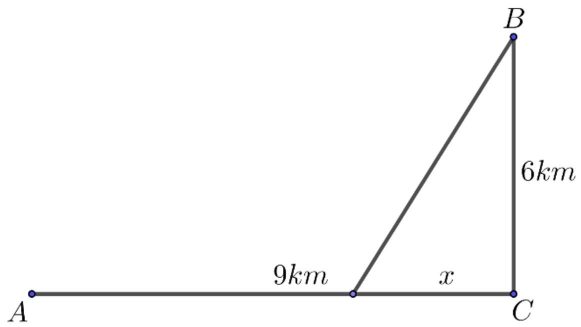
(c) *Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.*

» **Chọn** SAI.

(d) *Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.*

» **Chọn** SAI.

» Câu 42. Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo (như hình vẽ).



Giá để xây đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi km và 130000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$km, $AC = 9$km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1230000 USD.		
(b)	Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1400000 USD.		
(c)	Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1200000 USD.		
(d)	Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là 1170000 USD.		

Lời giải

(a) *Nếu công ty lắp đường ống theo đường ACB thì chi phí hết số tiền 1230000 USD.*

Chi phí để lắp đoạn ống AC là: 450000 USD.

Chi phí lắp đoạn ống BC là: 780000 USD.

Tổng chi phí là : 1230000 USD.

» Chọn ĐÚNG.

(b) *Nếu công ty lắp đường ống thẳng theo đường trên biển từ A đến B thì chi phí hết số tiền nhỏ hơn 1400000 USD.*

Độ dài đoạn $AB = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117}km$.

Chi phí làm đoạn ống AB sấp xỉ bằng 1406165 USD.

» Chọn SAI.

(c) *Nếu công ty lắp đường ống theo đường gấp khúc AMB thì khi M là trung điểm của AC chi phí hết số tiền 1200000 USD.*

Khi M là trung điểm của AC lắp ông theo đường gấp khúc AMB thì đoạn ống $MB = \sqrt{MC^2 + BC^2} = \sqrt{56,25} = 7,5km$

Chi phí lắp đoạn ống AM là: $4,5.50000 = 225000$ USD.

Chi phí lắp đoạn ống MB là: $7,5.130000 = 975000$ USD.

Tổng chi phí làm đường ống là 1200000 USD.

» Chọn ĐÚNG.

(d) *Chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là* 1170000 *USD.*

Đặt $CM = x$ (km), với $0 \le x \le 9$.

Ta có: tổng chi phí để xây dựng đường ống dẫn theo đường gấp khúc AMB là:

$T = 50000.(9 - x) + 130000.\sqrt{x^2 + 36}$USD.

Xét hàm số $f(x) = 50000.(9 - x) + 130000.\sqrt{x^2 + 36}$ trên đoạn $[0; 9]$, ta có :

$f'(x) = -5000 + \frac{13000x}{\sqrt{x^2+36}} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

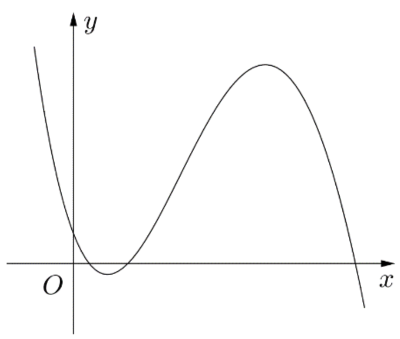
Lại có : $f(0) = 1230000$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = 1170000$, $f(9) \approx 1406165$.

Vậy T_{min} USD.

» Chọn ĐÚNG.

C. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 43. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

Lời giải

✓Trả lời: 2

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nên theo định lý Viet:

+) Tổng hai nghiệm $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

+) Tích hai nghiệm $x_1x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d.

» Câu 44. Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

✓Trả lời: 25

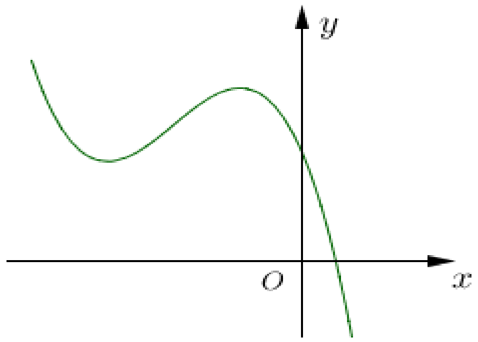
Ta có $y = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$.

Theo đề, ta có hệ phương trình $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(-2) = 0 \\ y'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1^3 + a.1^2 + b.1 + c \\ 0 = (-2)^3 + a.(-2)^2 + b.(-2) + c \\ 0 = 3.(-2)^2 + 2a.(-2) + b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 8 \\ -4a + b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$.

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 0^2 + (-4)^2 = 25$.

» Câu 45. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như sau:



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

Lời giải

✓Trả lời: 1

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$.

$\lim_{x\to+\infty} y < 0 \Rightarrow a < 0$.

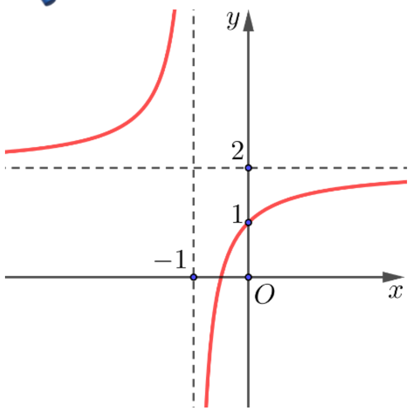
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về bên trái trục tung nên phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < 0$.

Khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 \\ x_1.x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \end{cases}$. Từ đó suy ra $b < 0$ và $c < 0$.

Vậy trong các số a, b, c, d chỉ có $d > 0$.

» Câu 46. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ $(ad - b \neq 0)$ có đồ thị như hình dưới đây



Gọi điểm $M(a;b), a<0$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là nhỏ nhất khi đó $a+b$ bằng

Lời giải

✓Trả lời: 1

Ta có: Tiệm cận đứng $x=-\frac{d}{1}=-1 \Rightarrow d=1$.

Tiệm cận ngang $y=\frac{a}{1}=2 \Rightarrow a=2$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;1) \Rightarrow \frac{b}{d}=1 \Rightarrow b=d=1$.

Suy ra $f(x)=\frac{ax+b}{x+d}=\frac{2x+1}{x+1}$.

Gọi điểm $M\left(m;\frac{2m+1}{m+1}\right)$ thuộc đồ thị $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$.

Khoảng cách từ điểm $M\left(m;\frac{2m+1}{m+1}\right)$ đến tiệm cận đứng $x=-1$ là: $|m+1|$.

Khoảng cách từ điểm $M\left(m;\frac{2m+1}{m+1}\right)$ đến tiệm cận ngang $y=2$ là: $\frac{1}{|m+1|}$.

Ta có tổng $T=|m+1|+\frac{1}{|m+1|}\geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |m+1|=\frac{1}{|m+1|} \Leftrightarrow |m+1|^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \Rightarrow M(0;1) \\ m=-2 \Rightarrow M(-2;3)\end{array}\right.$.

Vì M có hoành độ âm nên $M(-2;3)$ là điểm cần tìm.

Khi đó $a=-2; b=3 \Rightarrow a+b=-2+3=1$.

» Câu 47. Cho hàm số $y=\frac{mx^2-mx+1}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2-mx+1}{x-1}$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

Lời giải

✓Trả lời: 3

$y=\frac{mx^2-mx+1}{x-1}$ (1)

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$y=mx+\frac{1}{x-1} \Rightarrow y'=m-\frac{1}{(x-1)^2}, (x\neq 1)$.

Để hàm số (1) có hai điểm cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow m(x-1)^2=1$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow m>0$.

Khi $m>0$ thì đồ thị hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị nằm trên đường thẳng $d: y=2mx-m$.

Khi $m>0$ gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là A, B.

Suy ra $A(x_1; 2mx_1-m), B(x_2; 2mx_2-m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $m(x-1)^2=1 \Leftrightarrow mx^2-2mx+m-1=0$ (2).

Ta có: $y_A . y_B = (2mx_1 - m)(2mx_2 - m) = m^2(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = m^2(4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1)$

Áp dụng định lý Viet ta có: $x_1x_2 = \frac{m-1}{m}; x_1 + x_2 = 2$

Suy ra $y_A . y_B = m^2\left(\frac{4m-4}{m} - 4 + 1\right) = m(m-4)$.

Để A, B nằm khác phía so với trục hoành thì $y_A . y_B < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$.

» Câu 48. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2c+1$	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm $S = a + b + c + d$.

Lời giải

✓Trả lời: -2

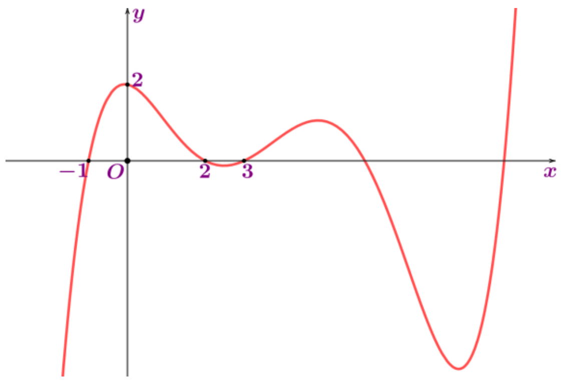
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f(-2) = -2c + 1 \\ f(1) = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a - 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = -2c + 1 \\ a + b + c + d = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -12 \\ d = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow S = 2 + 3 - 12 + 5 = -2$.

» Câu 49. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tổng các nghiệm S của phương trình $f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 = (x^2 - 2)^3 - 3(x-1)^2$ là

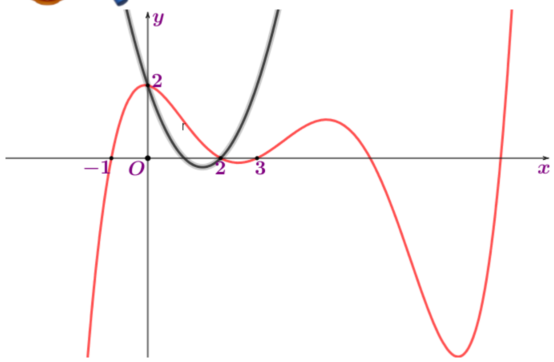
Lời giải

✓Trả lời: 1

Ta có $f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 = (x^2 - 2)^3 - 3(x-1)^2$

$\Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = (x^3 - 3x)^2 - 3(x^3 - 3x) + 2$.

Đặt $t = x^3 - 3x$ được phương trình $f(t) = t^2 - 3t + 2$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và $y = t^2 - 3t + 2$.



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình có nghiệm $t = 0, t = 2$.

Với $t = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Với $t = 2 \Rightarrow x^3 - 3x = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy $S = 0 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2 - 1 = 1$.

» Câu 50. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức :

$$C(x) = 0{,}0001x^2 - 0{,}2x + 10000,$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10.000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30.000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Lời giải

✓Trả lời: 22000

Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0{,}4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho $x$cuốn tạp chí là:

$T(x) = C(x) + 0{,}4x = 0{,}0001x^2 + 0{,}2x + 10000$, với $x > 0$.

Ta có $f(x) = M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0{,}0001x + 0{,}2 + \frac{10000}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 0{,}0001x + 0{,}2 + \frac{10000}{x}$, với $0 < x \leq 30000$.

$$f'(x) = 0{,}0001 - \frac{10000}{x^2} = \frac{0{,}0001x^2 - 10000}{x^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000 (\text{do } x > 0).$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

x	0		10000		30000
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(10000)$	↗	$f(30000)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10000$.

Vậy số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10000$ (cuốn).

Chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là:$M(10000) = 2{,}2$ (vạn đồng) $= 22000$ (đồng)

» Câu 51. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \le x \le 18$).
Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Hãy tính lợi nhuận tối đa đó.

Lời giải

✓Trả lời: 1200

Khi bán x mét vải lụa:

- Số tiền thu được là: $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).
- Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).

Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1; 18]$.

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240; L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -8$ (loại).
- Trên khoảng $(1; 10), L'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.
- Trên khoảng $(1; 10), L'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x = 10$ và $L_{CĐ} = L(10) = 1200$.

+ Bảng biến thiên:

x	1		10		18
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$			1 200		
	−258	↗		↘	−1 040

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy khi $x = 10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200 . Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

--------------------Hết--------------------