Chương 01

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

- Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* (**GTLN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \le M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max\limits_{D} f(x)$.
- Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* (**GTNN**) của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \ge M; \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$, ta kí hiệu $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min\limits_{D} f(x)$.

Chú ý

» Quy ước rằng khi nói GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không xét "trên tập D") thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của $y = f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

» Để tìm GTLN hay GTNN của hàm số trên tập D, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

2. Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn

Cách tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trên đoạn.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$:

- *Bước 1:* Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho $f'(x) = 0$.
- *Bước 2:* Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(b)$.
- *Bước 3:* Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.
  Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên đoạn

Phương pháp

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$:

» *Bước 1:* Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho $f'(x) = 0$.

» *Bước 2:* Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(b)$

» *Bước 3:* Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị ở Bước 2.
Khi đó $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

Ví dụ 1.1.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của hàm số trên khoảng

Phương pháp

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

» ***Bước 1:*** Tìm điều kiện xác định của hàm số $y=f(x)$.

- $f(x)$ không liên tục trên $(a;b)$ ⇒Không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ ⇒ Bước tiếp theo

» ***Bước 2:*** Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.

» ***Bước 3:*** Tìm các điểm $x_1;x_2;\ldots;x_n$ thuộc $(a;b)$ sao cho

- $f'(x)=0$, hoặc
- $f'(x)$ không xác định.

» ***Bước 4:*** Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(a;b)$ cho trước.

» ***Bước 5:*** Xác định điểm "cao nhất" và điểm "thấp nhất" của đồ thị hàm số trên $(a;b)$.

» ***Bước 6:*** Kết luận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$.

⁂ ***Nhận xét:***

✓ Nếu đề bài không cho sẵn $(a;b)$ thì thường sẽ lấy luôn tập xác định làm khoảng phải xét.

✓ Đây là phương pháp tổng quát, tùy vào bài toán sẽ giản lược bớt 1 vài bước.

Ví dụ 2.2.

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^2+2x+4$ trên khoảng $(0;3)$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 2.2.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x)=x^3-3x-4$ trên $-3;2)$.

Lời giải

....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.3.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ trên $(-1; -\infty)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Dạng 3. Sử dụng cách đánh giá để tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

⁂ ***Sử dụng bất đẳng thức thường gặp:***

❖ **Bất đẳng thức Cô-si:**

- Với hai số thực không âm: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra ⇔ $a = b$.
- Với ba số thực không âm: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu bằng xảy ra ⇔ $a = b = c$.
- Với n thực không âm: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.
  Dấu bằng xảy ra ⇔ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

❖ **Bất đẳng thức Bunhiacopxki**

- Dạng cơ bản: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$. Dấu "=" xảy ra ⇔ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
- Dạng tổng quát:
  Với hai bộ số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ta có:
  $$(a_1^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$
  Dấu "=" xảy ra ⇔ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

⁂ ***Sử dụng "Tập giá trị" của hàm số lượng giác:***

- Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác: $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$

Ví dụ 3.1.

Giả sử M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = 2 + 3\sin x$. Tính $M + m$.

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{386x}{x^2+2x+5}$ với $x > 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Dạng 4. Ứng dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

❖ **Bài toán bất phương trình**

» *Bước 1:* Chuyển bất phương trình đã cho về dạng $f(x)-g(x)\ge 0$ và tìm điều kiện tồn tại của bất phương trình

» *Bước 2:* Đặt hàm số $y=h(x)=f(x)-g(x)$,
Xét tính đơn điệu của $y=h(x)$ trên điều kiện xác định.

» *Bước 3:* Từ đó kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

❖ **Bài toán bất phương trình chứa tham số**

Ta đưa bất phương trình đề bài cho về một trong các dạng sau

» $m\ge f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in D$ thì $m\ge \max\limits_{D} f(x)$

» $m\le f(x)$ nghiệm đúng với mọi $x\in D$ thì $m\le \min\limits_{D} f(x)$

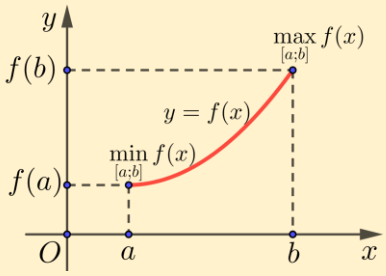
» $m\ge f(x)$ có nghiệm $x\in D$ thì $m\ge \min\limits_{D} f(x)$

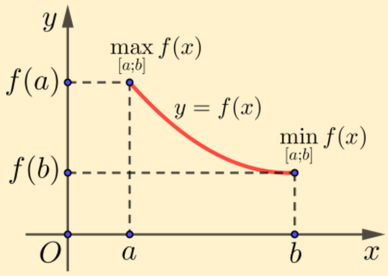
» $m\ge f(x)$ có nghiệm $x\in D$ thì $m\ge \min\limits_{D} f(x)$

⁂ ***Nhận xét:*** Nếu $y=f(x)$:

✓ *đồng biến* trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\end{cases}$.

✓ *nghịch biến* trên $[a;b]$ thì $\begin{cases}\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)\\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)\end{cases}$





Ví dụ 4.1.

Tìm m bất để phương trình $x^3-3x-m>0$ có nghiệm $x\in[0;2]$?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Giải bất phương trình: $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.3.

Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\ge 2\sqrt{3}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.4.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Biết bất phương trình $f(x) > log\, x - m$ nghiệm đúng $\forall x \in (1; 6) \Leftrightarrow m \geq log\, a - f(a)$. Tính $a - b$.

Lời giải

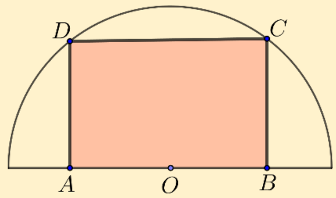
Dạng 5. Bài toán thực tế áp dụng giá trị lớn nhất – nhỏ nhất

Phương pháp

» *Bước 1:* Gọi ẩn và xác định điều kiện cho ẩn.
» *Bước 2:* Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
» *Bước 3:* Xét hàm số biểu thị đại lượng mà đề bài yêu cầu. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đó trên điều kiện của ẩn.
» *Bước 4:* Kết luận.

Ví dụ 5.1.

Tính diện tích lớn nhất S_{max} của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



Lời giải

Ví dụ 5.2.

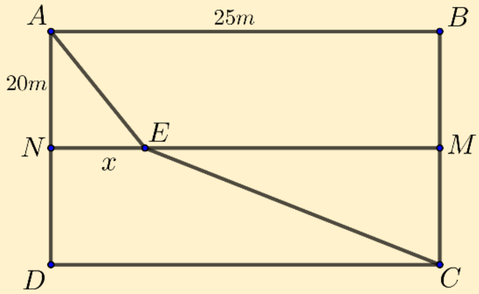
Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B. Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^3 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^3$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.3.

Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25m$, chiều rộng $AD = 20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ A đến C qua vạch chắn MN, biết khi làm đường trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm



được 15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30m$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ A đến C.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....