CHƯƠNG VII

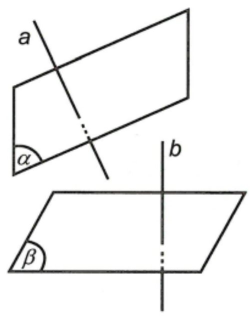
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 25: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I LÝ THUYẾT.

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



$$\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{matrix}\right\}\Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$

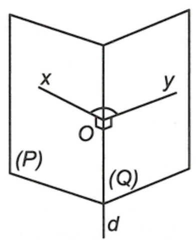
Hai mặt phẳng vuông góc: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right)=90°$

Chú ý: $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$;

$(\alpha)\equiv(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$.

Cách xác định góc khác: Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

+) Trong (*P*) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (*Q*) dựng $Oy \perp d$.

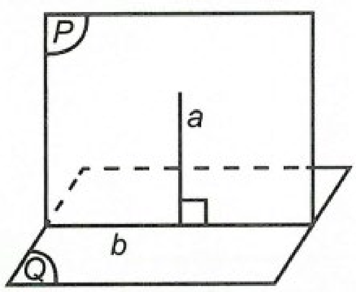
Khi đó: $\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)} = \widehat{(Ox, Oy)}$.

Lưu ý: Việc xác định điểm *O* có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm *M* trên (*Q*) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu *H* của nó trên (*P*). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)} = \widehat{MOH}$.

2. ĐIỀU KIỆN HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



3. TÍNH CHẤT HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

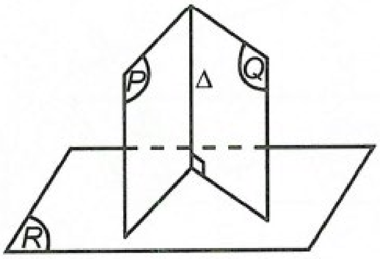
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ b = (P) \cap (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).$$

Nhận xét: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong (P).

$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (Q) \\ A \in a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$$

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R).$$



4. GÓC NHỊ DIỆN

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P), (Q) tương ứng được gọi là cạnh và các mặt của góc nhị diện đó.

Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc (P), (Q) và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.

Chú ý

- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.
- Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N.
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

5. MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

a) Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.

- Các mặt bên là các hình chữ nhật.

- Các mặt bên vuông góc với hai đáy.

b) Hình lăng trụ đều

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

c) Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

d) Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật.

Đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với a, b, c là 3 kích thước.

e) Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

6. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.

+) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

+) Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
+) Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

Hình chóp cụt đều

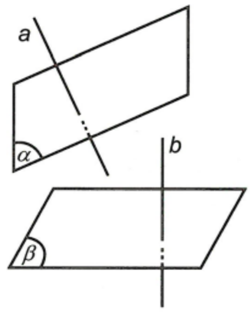
- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_3B_2$,..., $A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trong HĐ13 được gọi là một hình chóp cụt đều (nói đơn giản là hình chóp cụt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2...B_n$), kí hiệu là $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ được gọi là hai mặt đáy, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$,..., $A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các mặt bên của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n được gọi là các cạnh bên; các cạnh của mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cụt.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là chiều cao của hình chóp cụt.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG BẰNG CÁCH DÙNG ĐỊNH NGHĨA

1 PHƯƠNG PHÁP.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



$$\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$

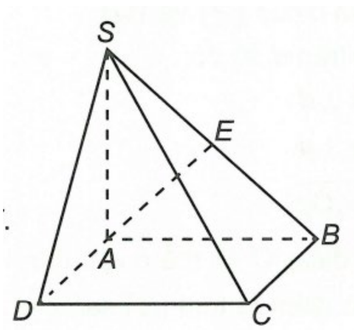
Chú ý: $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$;

$(\alpha)\equiv(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB\perp AD \\ AB\perp SA \end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)$.

Gọi E là hình chiếu của A lên SB, dễ thấy $AE\perp(SBC)$.

Vậy góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa AB và AE.

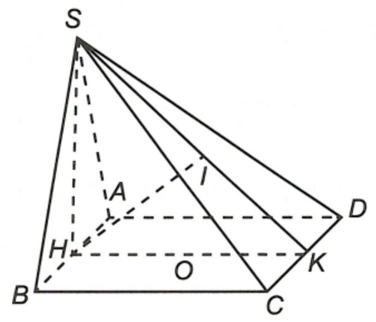
Ta có ΔSAB vuông cân tại A nên $\widehat{SBA} = 45^o$.

Suy ra $\widehat{BAE} = 45^o$ là góc giữa AB và AE.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng 45°.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

Lời giải



Gọi H, K là trung điểm của AB, CD.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp.

Ta có $HK \perp AB, HK \perp SH \Rightarrow HK \perp (SAB)$ (1)

Dựng $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là $(HK, HI) = \widehat{IHK}$.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; HK = a.$

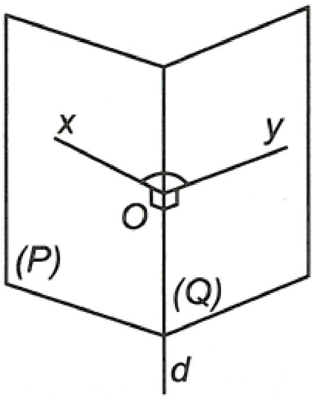
$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\cos\widehat{IHK} = \dfrac{HI}{HK} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}.$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG DỰA TRÊN GIAO TUYẾN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

+) Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

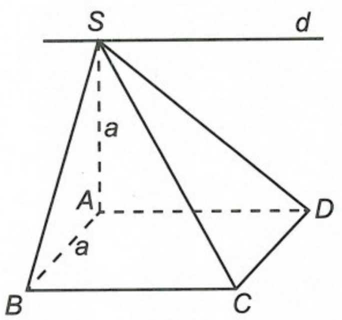
Khi đó: $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(Ox,Oy)}$.

Lưu ý: Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a,$ cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a.$ Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

Lời giải



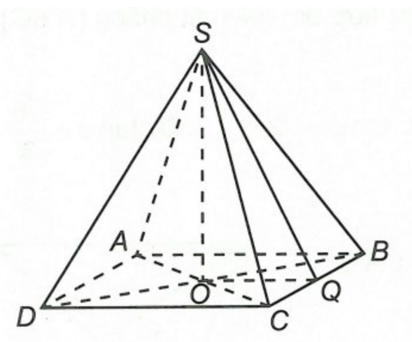
Mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAD) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng $d\,//\,BC\,//\,AD.$

Vì $SA \perp d, SB \perp d$ nên $\widehat{((SBC),(SAD))} = \widehat{(SA,SB)} = \widehat{ASB}.$

Vậy ΔASB vuông cân tại A nên $\widehat{ASB} = 45^o.$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và ($ABCD$) bằng

Lời giải



Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.

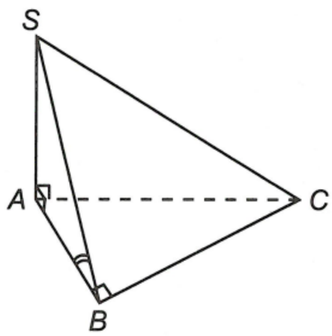
Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((SBC),(ABCD)\right)} = \widehat{(SQ,OQ)} = \widehat{SQO}.$

Tam giác vuông SOQ có $\tan\widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SQO} = 60^o.$

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy ($ABCD$) một góc 60°.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, SA \perp (ABC), SA = \sqrt{3}cm, AB = 1cm.$ Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC.$

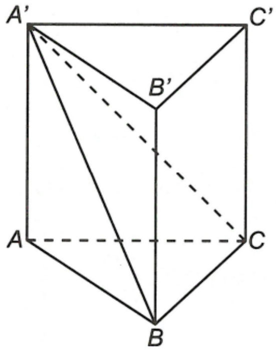
$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((SBC),(ABC)\right)} = \widehat{SBA}.$

$\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^o.$

Vậy góc giữa (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng 60^o.

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng ($A'BC$) và (ABC). Khi đó, tính $\tan\varphi$.

Lời giải



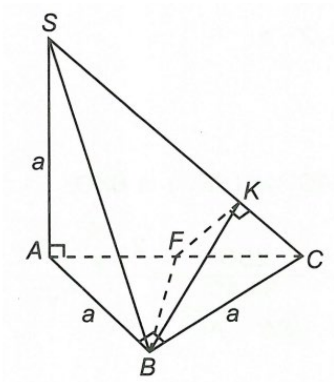
Ta có: $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(AA'B'B\right) \Rightarrow BC \perp A'B.$

Do $\begin{cases} \left(A'BC\right) \cap \left(ABC\right) = BC \\ A'B \subset \left(A'BC\right); A'B \perp BC \\ AB \subset \left(ABC\right); AB \perp BC \end{cases}$ nên $\widehat{A'BA} = \varphi$ là góc hợp bởi hai mặt phẳng ($A'BC$) và (ABC).

Xét $\Delta A'BC$ vuông tại A ta có $\tan\varphi = \dfrac{A'A}{BA} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, SA = a$ và $SA \perp \left(ABC\right), AB = BC = a.$ Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Lời giải



Ta có $\left(SAC\right) \cap \left(SBC\right) = SC.$

Gọi F là trung điểm AC thì $BF \perp \left(SAC\right).$

Dựng $BK \perp SC$ tại $K \Rightarrow SC \perp \left(BKF\right) \Rightarrow \widehat{\left(\left(SAC\right),\left(SBC\right)\right)} = \widehat{\left(KB, KF\right)} = \widehat{BKF}.$

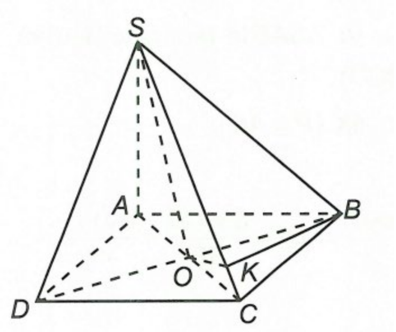
Dễ thấy $\Delta CFK \backsim \Delta CSA \Rightarrow \dfrac{FK}{FC} = \dfrac{SA}{SC} \Rightarrow FK = \dfrac{FC.SA}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}.$

ΔBFK vuông tại F có $\tan\widehat{BKF} = \dfrac{FB}{FK} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BKF} = 60^o.$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60°.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$, tính góc giữa (SAC) và (SBC).

Lời giải



Gọi O là tâm đáy và K là hình chiếu vuông góc của O trên SC.

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases}$ nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO.$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA} = \alpha$.

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{OA} = \sqrt{2} \Rightarrow SA = OA.\sqrt{2} = a.$

Do $\begin{cases} SC \perp BD \\ SC \perp OK \end{cases}$ nên $SC \perp BK$.

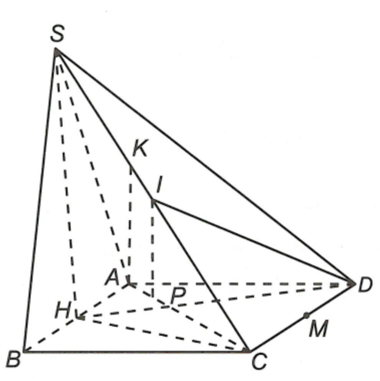
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là $\widehat{BKO}$.

Ta có $\tan\widehat{BKO} = \dfrac{BO}{OK} = \dfrac{BO}{\frac{1}{2}d(A,SC)} = \dfrac{2BO}{\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}} = \dfrac{2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2}}{1.\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$

Suy ra $\widehat{BKO} = 60^o$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Gọi φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD). Giá trị của cosφ bằng

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD. Vì ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $AK \perp SC\,(K \in SC), DI \perp SC\,(I \in SC), IP\,//\,AK\,(P \in AC)$.

Suy ra $\varphi = \widehat{(IP, ID)}$.

Ta có $HC = HD = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, SC = SD = a\sqrt{2}, SM = \dfrac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow DI = \dfrac{SM.CD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

$\Delta CSA = \Delta SCD \Rightarrow AK = DI = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

$CI = SK = \sqrt{CD^2 - DI^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

$\Delta CPI \backsim \Delta CAK \Rightarrow IP = \dfrac{CI}{CK}.AK = \dfrac{a\sqrt{14}}{12}, AP = \dfrac{KI}{CK}.AC = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Áp dụng định lí côsin, ta có

ΔAPD có $PD = \sqrt{AP^2 + AD^2 - 2AP.AD.\cos 45^o} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

ΔIPD có $\cos\widehat{PID} = \dfrac{IP^2 + ID^2 - DP^2}{2.IP.ID} = \dfrac{5}{7}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{5}{7}$.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG BẰNG CÁCH DÙNG ĐINH LÝ HÌNH CHIẾU

1 PHƯƠNG PHÁP.

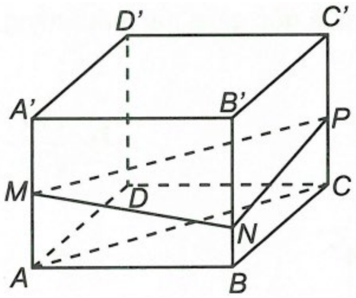
Dùng định lý về diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) và S' là diện tích hình chiếu của H trên (P') và φ là góc giữa (P) và (P') thì $S' = S.\cos\varphi$ hay $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi α là số đo góc của hai mặt phẳng (*MNP*) và (*ABCD*).

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác *MNP* lên (*ABCD*) là Δ*ABC*.

Áp dụng công thức hình chiếu về diện tích ta có

$$S'_{\Delta ABC} = S_{\Delta MNP}.\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.BC = a^2.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^o.$$

Vậy góc của hai mặt phẳng (*MNP*) và (*ABCD*) bằng 60°.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP VỀ GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

Lời giải

1.Dạng toán: Đây là dạng toán tìm góc giữa hai mặt phẳng

2. Phương pháp:

Sử dụng định lí:

Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó và cùng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

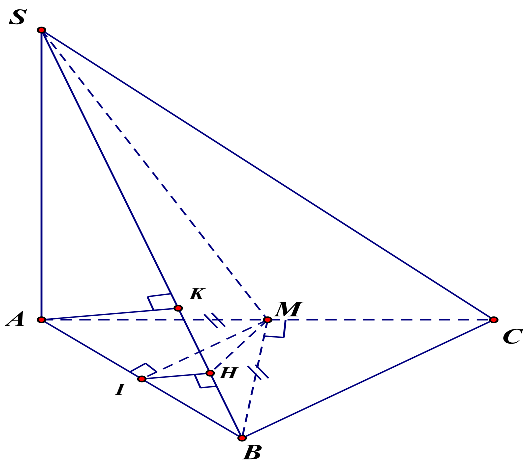
Hướng giải:

B1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

B2. Tìm hai đường thẳng lần lượt nàm trong hai mặt phẳng và cùng vuông với giao tuyến

B3. Tính góc giữa hai đường thẳng vừa xác định.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Ta có: $(SBM)\cap(SAB)=SB$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B, M là trung điểm AC nên $MB\perp AC$ và

$MA=MB=MC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB. Vì ΔMAB cân tại M nên $MI\perp AB$ (1)

Hơn nữa $MI\perp SA$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MI\perp SB$ $(*)$.

Kẻ $IH\perp SB$. Suy ra $MH\perp SB$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng IH và MH.

Ta có $MI=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Vì $MB\perp(SAC)$ nên ΔSMB vuông tại M và có

$$MB=\frac{a\sqrt{2}}{2};SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\sqrt{3a^2+\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{MB^2}=\frac{16}{7a^2}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Gọi K là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB

Ta có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow IH=\dfrac{AK}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác MIH ta có $\cos\widehat{MHI}=\dfrac{HI^2+HM^2-MI^2}{2HI.HM}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 12: Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Phân tích hướng giải

1. DẠNG TOÁN: Tính góc giữa hai mặt phẳng.

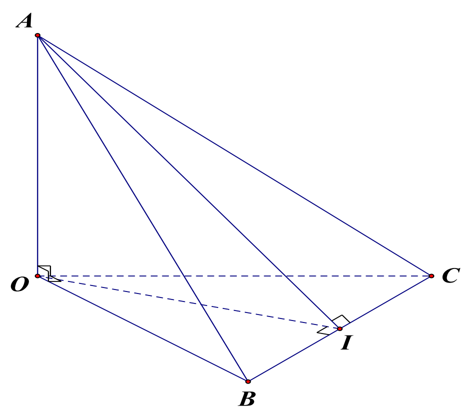
2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Do $OB = OC$ nên gọi I là trung điểm của BC. Khi đó, $((ABC),(OBC)) = \widehat{OIA}$

B2: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính số đo góc $\widehat{OIA}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$ mà $OA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC)\cap(ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow ((OBC),(ABC)) = (OI, AI) = \widehat{OIA}$.

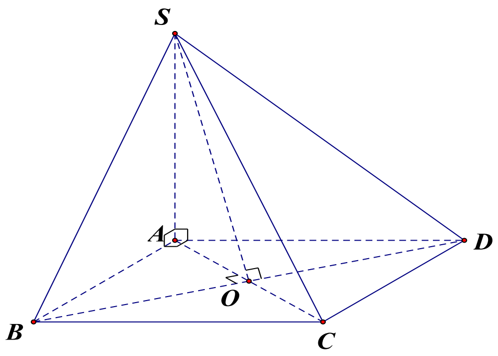
Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan\widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^0$.

Vậy $((ABC),(OBC)) = 30^0$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} (SBD)\cap(ABCD)=BD \\ SO\perp BD \\ AO\perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD),(ABCD))=(SO,AO)=\widehat{SOA}$.

Xét tam giác SAO vuông tại A, ta có:

$$\cos\widehat{SOA}=\frac{AO}{SO}=\frac{\frac{1}{2}AC}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OB=OC=a\sqrt{6},OA=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Phân tích hướng giải

1. DẠNG TOÁN: Tính góc giữa hai mặt phẳng.

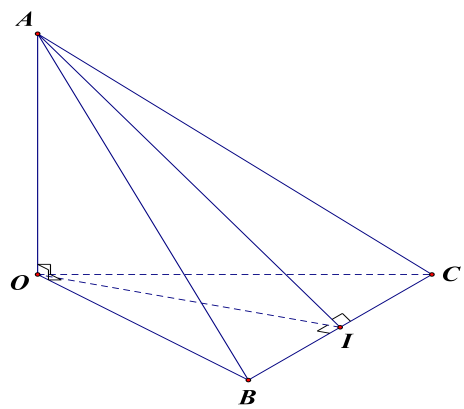
2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Do $OB=OC$ nên gọi I là trung điểm của BC. Khi đó, $((ABC),(OBC))=\widehat{OIA}$

B2: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính số đo góc $\widehat{OIA}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$ mà $OA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow ((OBC),(ABC)) = (OI, AI) = \widehat{OIA}$.

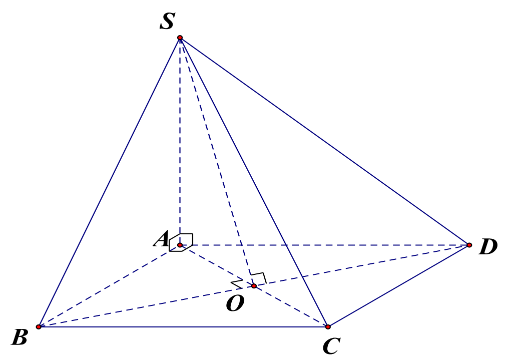
Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan\widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^0$.

Vậy $((ABC),(OBC)) = 30^0$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \perp BD \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = (SO, AO) = \widehat{SOA}$.

Xét tam giác SAO vuông tại A, ta có:

$$\cos\widehat{SOA} = \frac{AO}{SO} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng:

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm góc giữa hai mặt phẳng.

Phương pháp: Giả sử ta cần tìm góc giữa 2 mặt phẳng (α) và (β), ta tìm một mặt phẳng (P) đồng thời vuông góc với (α) và (β). Mà $(\alpha)\cap(P)=a;(\beta)\cap(P)=b$ suy ra góc giữa (α) và (β) bằng góc giữa đường thẳng a và b.

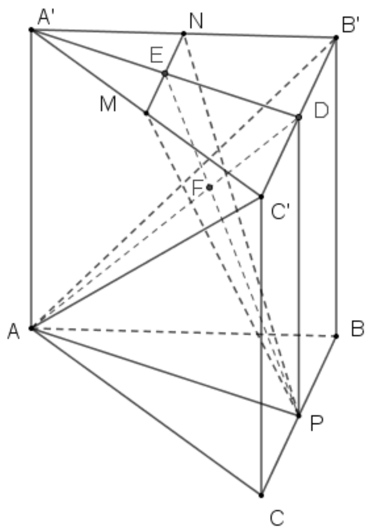
2. Hướng giải:

B1: Tìm mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP).

B2: Tìm $a=(P)\cap(AB'C');b=(P)\cap(MNP)$.

B3: Tính cô-sin góc giữa hai đường thẳng a và b.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Gọi P là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} MN \perp A'D \\ MN \perp PD \end{cases} \Rightarrow MN \perp (APDA') \Rightarrow (MNP) \perp (APDA')$.

$\begin{cases} B'C' \perp A'D \\ B'C' \perp PD \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (APDA') \Rightarrow (AB'C') \perp (APDA')$.

Mặt khác: $(MNP)\cap(APDA')=PE$ và $(AB'C')\cap(APDA')=AD$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng góc giữa hai đường thẳng PE và AD.

Gọi $E=MN\cap A'D$, $F=AD\cap PE$. Ta có $\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{EF}{FP}=\dfrac{ED}{AP}=\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $A'D=\sqrt{A'B'^2-B'D^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=3 \Rightarrow ED=\dfrac{3}{2}$.

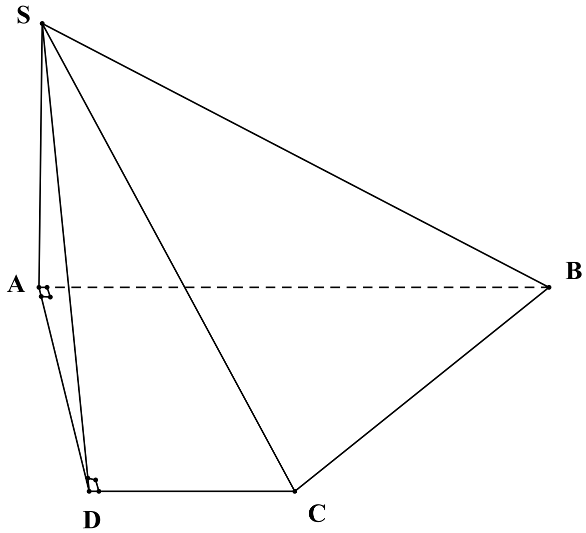
$AD=\sqrt{A'D^2+AA'^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13} \Rightarrow FD=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

$EP = \sqrt{ED^2 + PD^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow EF = \frac{5}{6}$.

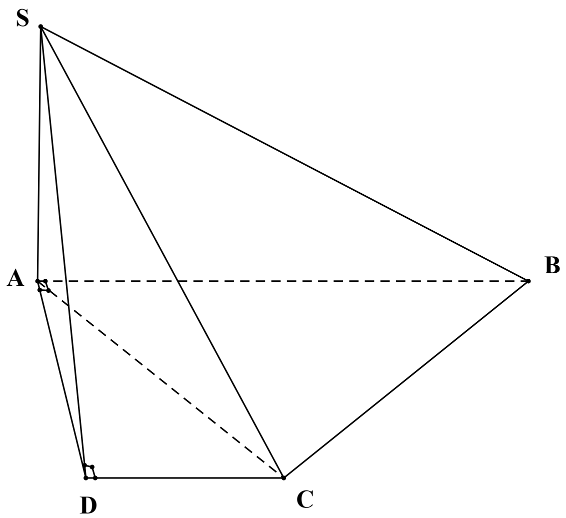
Trong tam giác EDF có $\cos\widehat{EFD} = \frac{EF^2 + FD^2 - ED^2}{2EF.FD} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2.\frac{5}{6}.\frac{\sqrt{13}}{3}} = -\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Do góc giữa hai mặt phẳng là góc nhỏ hơn hoặc bằng $90°$ nên Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2AD = 2DC = a$ (Hình vẽ minh họa). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng



Lời giải



Ta có: $(SBC)\cap(ABCD)=BC$.

Vì $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB=2AD=2DC=a\Rightarrow AC\perp BC$ (1).

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$ (2).

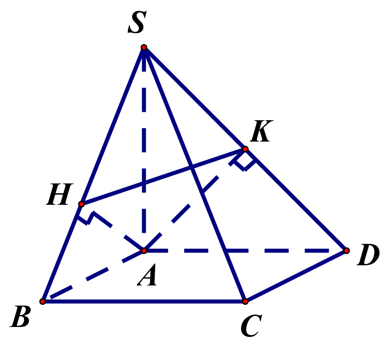
Từ (1) và (2) suy ra: $BC\perp SC$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCA}$.

Trong tam giác vuông DAC có $AD=DC=\frac{a}{2}\Rightarrow AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông ASC có $SA=AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{SCA}=45°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $45°$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$ (hình bên). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB,SD. Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng



Lời giải

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\\AB\cap SA=\{A\}\\AB,SA\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$. Suy ra $AH\perp BC$.

Lại có: $\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp SB\\BC\cap SB=\{B\}\\BC,SB\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SC$.

Chứng minh tương tự ta có $AK\perp(SCD)\Rightarrow AK\perp SC$.

Có $\begin{cases} AH \perp SC \\ AK \perp SC \\ AH \cap AK = \{A\} \\ AH, AK \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

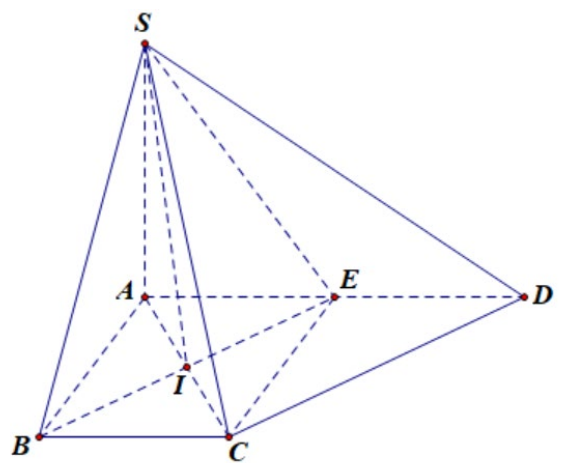
Do $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ SA \perp (ABCD) \end{cases}$ suy ra $\widehat{((AHK),(ABCD))} = \widehat{(SC,SA)} = \widehat{ASC}$.

Có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{ASC} = 45°$.

Vậy $\widehat{((AHK),(ABCD))} = 45°$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD, tính góc giữa hai mặt phẳng (SBE) và $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có $ABCE$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi $I = AC \cap BE$. Khi đó $\begin{cases} (SBE) \cap (ABCD) = BE \\ AI \perp BE \\ SI \perp BE \end{cases}$.

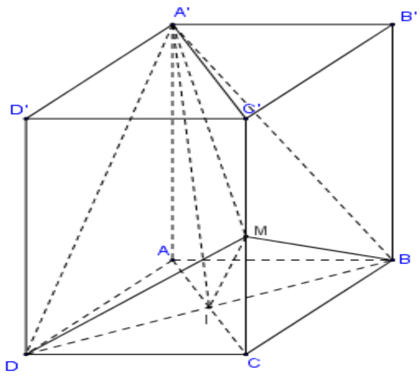
Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBE) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIA}$.

Lại có $AI = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI: $\tan\widehat{SIA} = \frac{SA}{IA} = \frac{a\sqrt{6}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60°$.

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

Lời giải



+) Gọi I là giao điểm của AC và BD.

+) Ta có góc $\widehat{\left(\left(A'BD\right),\left(MBD\right)\right)}=\widehat{\left(IA',IM\right)}$.

Để hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $\left(MBD\right)$ vuông góc với nhau thì $IA'\perp IM \Rightarrow \widehat{A'IM}=90°$.

+) Xét $\Delta A'IM$ có: $A'I^2=b^2+\dfrac{a^2}{2}$; $A'M^2=2a^2+\dfrac{b^2}{4}$; $IM^2=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{4}$.

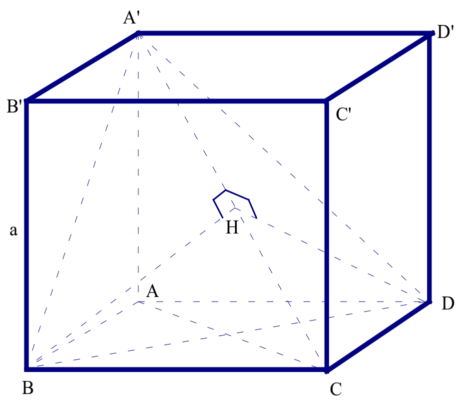
Ta có: $A'M^2=A'I^2+IM^2$

$\Leftrightarrow 2a^2+\dfrac{b^2}{4}=b^2+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{4} \Leftrightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=b$.

Vậy $\dfrac{a}{b}=1$.

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $\left(BA'C\right)$ và $\left(DA'C\right)$.

Lời giải



+ $\Delta BA'C$ vuông tại B (vì $BC\perp\left(ABB'A'\right)\Rightarrow BC\perp A'B$).

Kẻ $BH\perp A'C$ trong $\Delta BA'C$.

$BD\perp\left(AA'C\right)$ (vì $BD\perp AC, BD\perp AA'$)$\Rightarrow BD\perp A'C$.

Ta có $BH\perp A'C$; $BD\perp A'C\Rightarrow A'C\perp\left(BHD\right)\Rightarrow A'C\perp HD$.

+ $(BA'C)\cap(DA'C)=A'C$.

$A'C\perp(BHD)$

$(BHD)\cap(BA'C)=BH$

$(BHD)\cap(DA'C)=DH$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng góc giữa BH và DH.

+ $BH=DH\left(\Delta_v BA'C=\Delta_v DA'C\right)$.

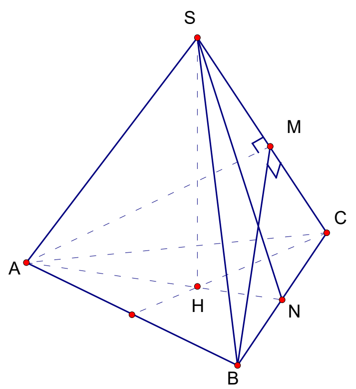
$\Delta_v BA'C:\ \dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{BA'^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow BH^2=\dfrac{2a^2}{3}=DH^2$.

$\Delta BHD:\cos\widehat{BHD}=\dfrac{BH^2+DH^2-BD^2}{2BH.DH}=\dfrac{\dfrac{2a^2}{3}+\dfrac{2a^2}{3}-\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\dfrac{2a^2}{3}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BHD}=120^0.$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng $180^0-120^0=60^0$.

Câu 22: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos\alpha$.

Lời giải



Gọi M,N là chân đường cao hạ từ các đỉnh B,S của tam giác SBC. H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $AB\perp(SHC)\Rightarrow AB\perp SC$

Mặt khác $SC\perp BM\Rightarrow SC\perp(ABM)\Rightarrow SC\perp AM$

Vậy $\begin{cases}(SAC)\cap(SBC)=SC\\AM\subset(SAC)\\BM\subset(SBC)\\SC\perp AM,SC\perp BM\end{cases}\Rightarrow\left((SAC);(SBC)\right)=(AM;BM)$.

Ta tính góc $\widehat{AMB}$. Xét tam giác AMB.

Tam giác SBC cân tại S nên N là trung điểm của BC.

+) $SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

+) $BM = \dfrac{SN.BC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{15}.a}{2.2a} = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$.

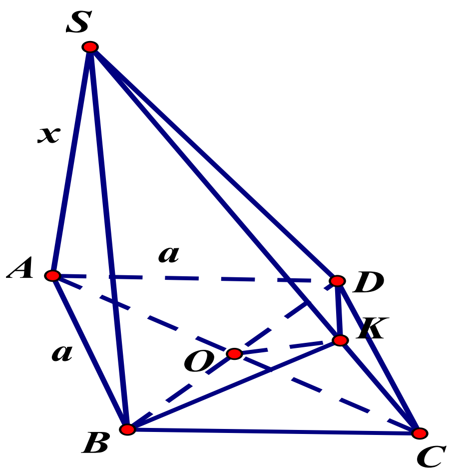
+) $AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = \sqrt{BC^2 - MC^2} = BM$.

Ta có $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2.MA.MB} = \dfrac{\dfrac{15a^2}{16} + \dfrac{15a^2}{16} - a^2}{2.\dfrac{15a^2}{16}} = \dfrac{7}{15} > 0$, suy ra góc $\widehat{AMB}$ nhọn.

Vậy $\alpha = \left((SAC);(SBC)\right) = (AM;BM) = \widehat{AMB} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{7}{15}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB = a$, góc $\widehat{BAD} = 60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = x$. Tìm x để góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 90^0.

Lời giải

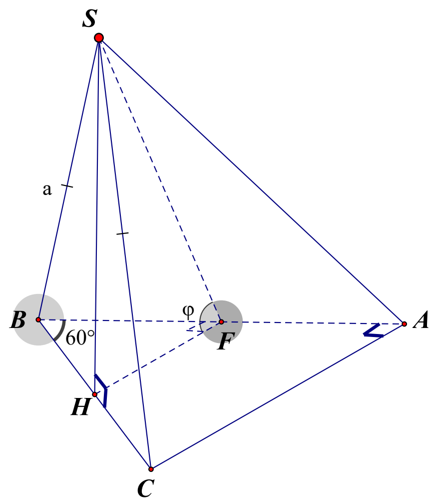


Ta có tam giác SBC và SCD bằng nhau (c-c-c) và chung cạnh SC. Kẻ $BK \perp SC, DK \perp SC$, khi đó góc giữa (ABC) và (SCD) là góc $\widehat{DKB}$. Nối OK, do $SC \perp (BDK) \Rightarrow SC \perp OK \Rightarrow$ tam giác OKC vuông tại K.

Khi $\widehat{DKB} = 90^0$, suy ra $OK = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a}{2}$. Ta có $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SC = \sqrt{x^2 + 3a^2}$ mà $\Delta SAC, \Delta OKC$ đồng dạng, suy ra $\dfrac{SA}{OK} = \dfrac{SC}{OC} \Rightarrow SA^2.OC^2 = SC^2.OK^2 \Rightarrow \dfrac{3a^2x^2}{4} = \left(x^2 + 3a^2\right)\dfrac{a^2}{4} \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng 60^0, tam giác SBC đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Khi đó

Lời giải



Tam giác SBC đều cạnh a, H là trung điểm của cạnh BC nên $SH \perp BC$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dựng $HF // AC \Rightarrow HF \perp AB$.

Xét tam giác vuông BHF có $\sin 60^0 = \dfrac{HF}{BH} \Rightarrow HF = BH.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

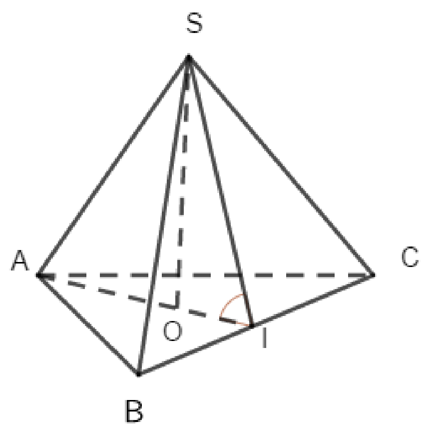
Ta có $\begin{cases} AB \perp HF \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHF)$ mà $SF \subset (SHF)$ nên $SF \perp AB$.

Khi đó $\widehat{((ABC),(SAB))} = \widehat{SFH} = \varphi$.

Trong tam giác vuông SHF có $\tan\varphi = \dfrac{SH}{HF} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{4}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{6}$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và đáy của hình chóp. Tính $\tan\varphi$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC và O là tâm đáy.

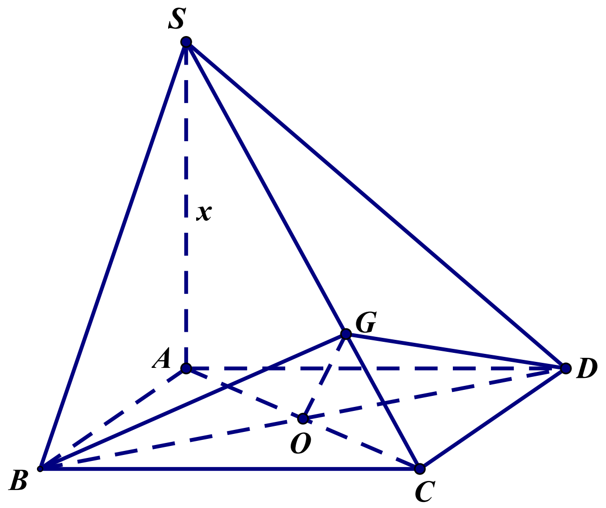
$\Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(ABC,SBC)} = \widehat{(AI,SI)} = \widehat{SIA} = \varphi$ (vì ΔSOI vuông tại O).

Vì đáy là tam giác đều cạnh a nên $OI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Do đó: $\tan\varphi = \frac{SO}{OI} = \frac{a\sqrt{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 6\sqrt{2}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc bằng $60°$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và $G = hc_{AC}^{O}$.

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$, mà $SC \perp OG$ suy ra $SC \perp (BGD)$.

Do đó $[(SBC),(SCD)] = (GB, GD) = 60° \Rightarrow \widehat{BGO} = 60° \vee \widehat{BGO} = 120°$

$\Delta SAC \sim \Delta OGC$ nên: $\frac{SA}{OG} = \frac{SC}{OC} \Rightarrow OG = \frac{x.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{x^2+2a^2}} = \frac{xa}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+2a^2}}$.

Xét tam giác BGO:

TH1:

$$\tan 60° = \frac{BO}{GO} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\sqrt{x^2+2a^2}}{xa} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{x^2+2a^2}}{xa} \Rightarrow \sqrt{3}x = \sqrt{x^2+2a^2} \Rightarrow x = a.$$

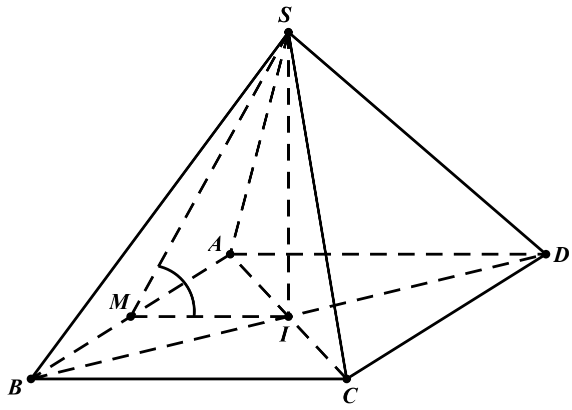
TH2:

$$\tan 30° = \frac{BO}{GO} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\sqrt{x^2+2a^2}}{xa} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{x^2+2a^2}}{xa} \Rightarrow \sqrt{3}x = 3\sqrt{x^2+2a^2}$$

$\Rightarrow 6x^2 + 18a^2 = 0 : vn$

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều, có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

Lời giải



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và I là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $SI \perp (ABCD)$ nên chiều cao của hình chóp là $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Vì IM là đường trung bình của tam giác ABD suy ra $IM // AD$. Mặt khác $AB \perp AD$ (do $ABCD$ là hình vuông). Do đó $IM \perp AB$.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên tam giác SAB cân tại $S \Rightarrow SM \perp AB$.

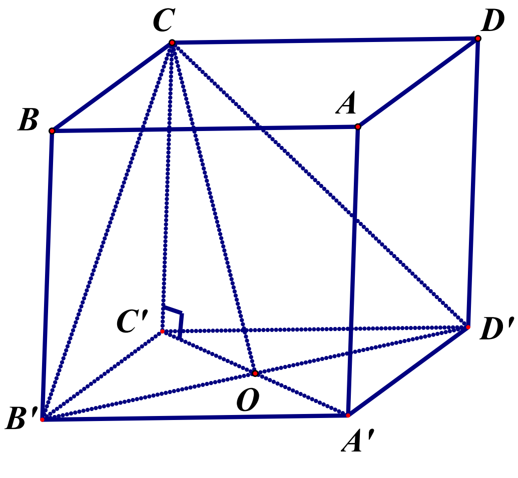
Ta có: $(SAB) \cap (ABCD) = AB$; $SM \subset (SAB)$; $SM \perp AB$; $IM \subset (ABCD)$; $IM \perp AB$ nên $\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SM, IM}\right) = \widehat{SMI}$.

Xét tam giác SMI vuông tại I, ta có: $\tan \widehat{SMI} = \frac{SI}{MI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{a} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{SMI} = 60°$.

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính *cosin* góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$.

Lời giải



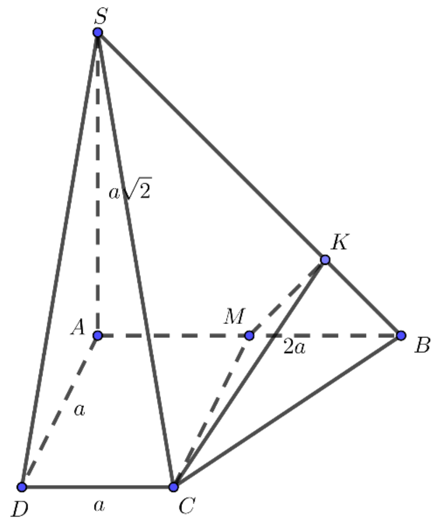
Do $(ABCD) // (A'B'C'D')$ nên góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(A'B'C'D')$.

Gọi $O = A'C' \cap B'D'$, ta dễ dàng chứng minh được $B'D' \perp (C'OC) \Rightarrow B'D' \perp CO$, nên góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(A'B'C'D')$ là góc giữa CO và $C'O$, là góc $\widehat{C'OC}$.

Đặt $CC' = 1$ thì ta có $C'O = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\Rightarrow CO = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\Rightarrow \cos\widehat{C'OC} = \dfrac{C'O}{CO} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Cho biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC).

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB khi đó $\left.\begin{array}{l} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CM \perp (SAB)$.

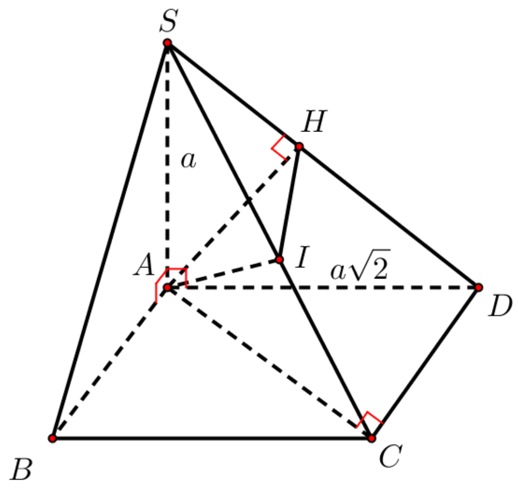
Từ M kẻ $MK \perp SB$ tại K, khi đó $CK \perp SB$ tại K nên góc giữa (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{CKM}$.

Ta có $CM = a$. $\Delta BKM \sim \Delta BAS$ nên $\dfrac{KM}{SA} = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow KM = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$\tan\widehat{CKM} = \dfrac{CM}{MK} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CKM} = 60°$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $BC = \sqrt{2}\,a$ và ΔACD vuông cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD và I là trung điểm SC. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (AHI) và $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có $CD = AC = SA = a \Rightarrow AI \perp SC$ (1)

Lại có $CD \perp SA$ và $CD \perp AC \Rightarrow CD \perp AI$ (2)

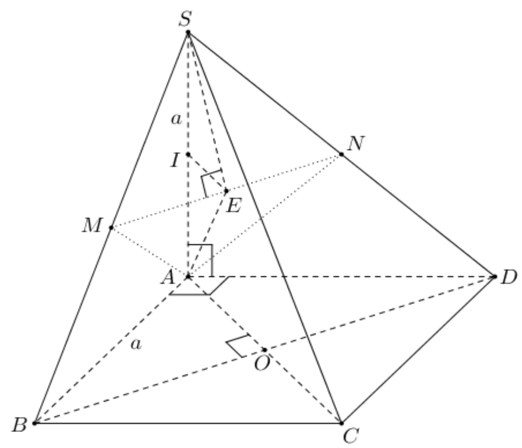
Từ (1) và $(2) \Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow AI \perp SD$

$$\begin{cases} SD \perp AI \\ SD \perp AH \end{cases} \Rightarrow SD \perp (AHI)$$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SD \perp (AHI) \end{cases} \Rightarrow \left((ABCD);(AHI)\right) = \left(SA;SD\right) = \widehat{ASD}$; $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = \sqrt{2}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng

Lời giải



Có: $SB = BD = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

$$AM = AN = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SM = SN \Rightarrow \Delta AMN \text{ đều.}$$

Gọi E là trung điểm $MN \Rightarrow AE \perp MN$ và $SE \perp MN$.

Có: $\begin{cases}(AMN)\cap(SBD)=MN\\ AE\perp MN\\ SE\perp MN\end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(AMN),(SBD)}\right)=\left(\widehat{AE,SE}\right)$.

Tính $\sin\widehat{SEA}$.

AE là đường cao tam giác đều $AMN \Rightarrow AE=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

SE là đường cao tam giác đều $SMN \Rightarrow SE=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$\Rightarrow \Delta SEA$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{SEA}=2\widehat{SEI}$.

Gọi I là trung điểm $SA \Rightarrow SI=\dfrac{a}{2} \Rightarrow EI=\sqrt{SE^2-SI^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔSEI vuông tại I, ta có: $\sin\widehat{SEI}=\dfrac{SI}{SE}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $\cos\widehat{SEI}=\dfrac{EI}{SE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{SEA}=2\sin\widehat{SEI}.\cos\widehat{SEI}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

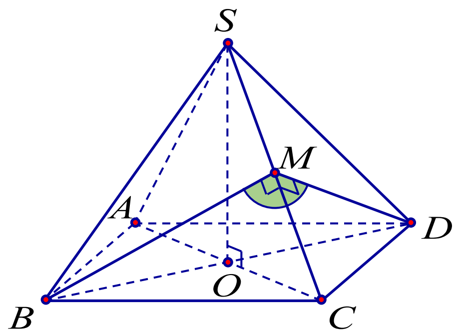
Vậy sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chú ý: $\widehat{SEA}$ là góc tù nên góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng $180^\circ-\widehat{SEA}$.

Ta vẫn có: $\sin\left(180^\circ-\widehat{SEA}\right)=\sin\widehat{SEA}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC=SB=a, SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải



Gọi M là trung điểm của SC, do tam giác SBC cân tại B nên ta có $SC\perp BM$ (1).

Theo giả thiết ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$. Do đó $SC \perp (BCM)$ suy ra $SC \perp DM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng BM và DM.

Ta có $\Delta SBO = \Delta CBO$ suy ra $SO = CO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

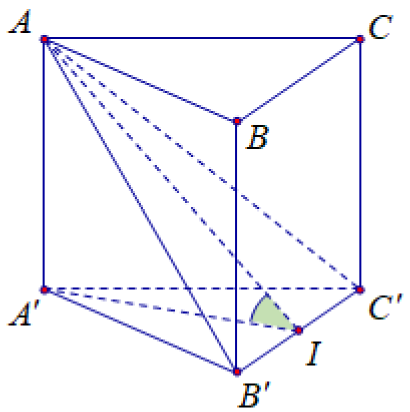
Do đó $OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó tam giác BMO vuông cân tại M hay góc $\widehat{BMO} = 45°$, suy ra $\widehat{BMD} = 90°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $90°$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'I \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AIA')$

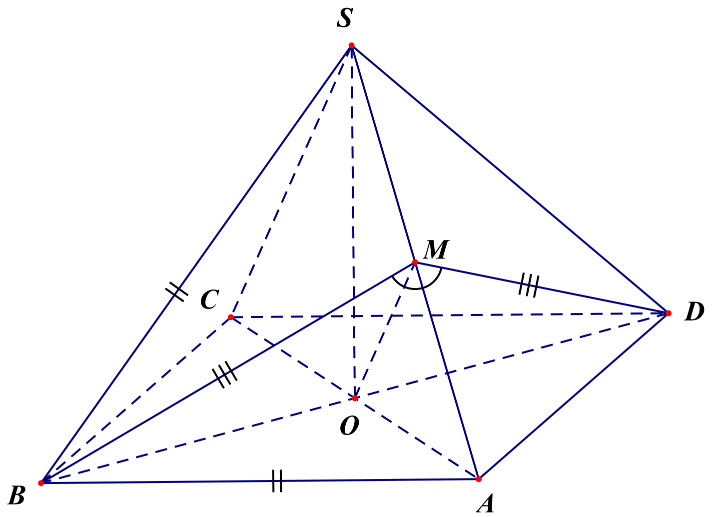
Khi đó: $\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan \widehat{AIA'} = \frac{AA'}{A'I} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIA'} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Lời giải



Gọi M là trung điểm của SA.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\ BM\perp SA; DM\perp SA\end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=(BM,DM)$.

Trong ΔSBO vuông tại O, có $OB=\sqrt{SB^2-SO^2}=\sqrt{a^2-\frac{6a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSAO vuông tại O, ta có $OA=SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SA=OA\sqrt{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

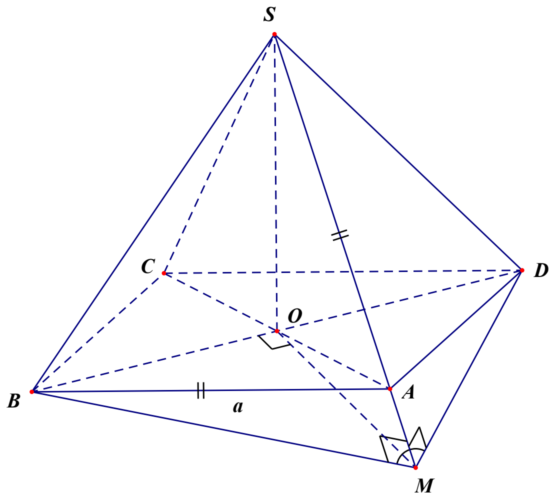
Mặt khác, có $DM=BM=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

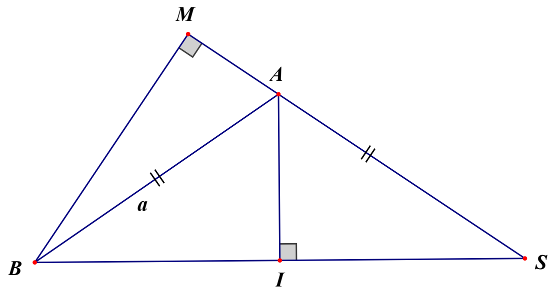
Xét tam giác vuông BOM vuông tại O, có $\sin\widehat{BMO}=\frac{OB}{BM}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{3}{a\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{BMO}=45°$.

Vậy góc $\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=90°$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SA = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Lời giải





Gọi M là hình chiếu của B lên SA.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\ BM\perp SA; DM\perp SA\end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=(BM,DM)$.

Trong ΔSAO vuông tại O, có $OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{a^2-\frac{6a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSOB vuông tạo O, ta có $OB=SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SB=OB\sqrt{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi I là trung điểm SB, suy ra $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

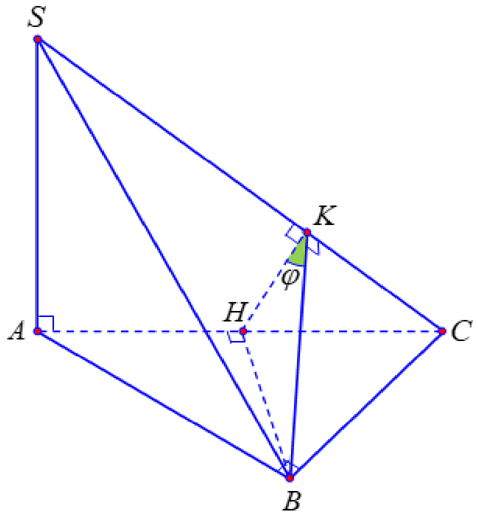
Mặt khác, ta có $\Delta SBM \backsim \Delta SAI$ nên $\frac{SB}{SA}=\frac{BM}{AI}\Rightarrow BM=\frac{SB.AI}{SA}=\frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Trong tam giác vuông OBM, có $\sin\widehat{BMO}=\frac{OB}{MB}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{3}{2a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \widehat{BMO}=60^\circ$.

Suy ra $\widehat{BMD}=120^\circ$. Vậy góc $\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=60^\circ$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=BC=a$ và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AC

Ta có $(SAC)\perp(ABC)$ (vì $SA\perp(ABC)$) và $BH\perp AC\Rightarrow BH\perp(SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $HK\perp SC$ thì $SC\perp(BHK)\Rightarrow SC\perp BK$.

$\Rightarrow\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right)=\widehat{SKH}=\varphi$.

Mặt khác

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB=BC=a$ nên $AC=a\sqrt{2}$ và $BH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

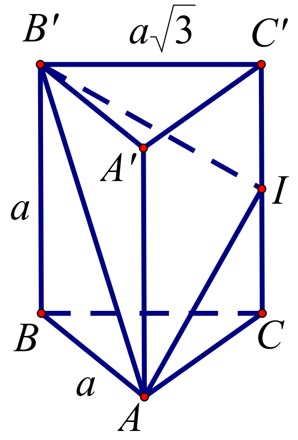
Hai tam giác CKH và CAS đồng dạng nên $HK=\dfrac{HC.SA}{SC}\Leftrightarrow HK=\dfrac{HC.SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác BHK vuông tại H có $\tan\varphi=\dfrac{BH}{BK}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=60^\circ$.

Vậy $\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right)=60^\circ$.

Câu 37: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB=AC=a$ và góc $\widehat{BAC}=120^\circ$, cạnh bên $AA'=a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

Lời giải



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông $B'AB$ có $AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông IAC có $IA = \sqrt{IC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác vuông $IB'C'$ có $B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Xét tam giác $IB'A$ có $B'A^2 + IA^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta IB'A$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{IB'A} = \frac{1}{2}AB'.AI = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}a.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

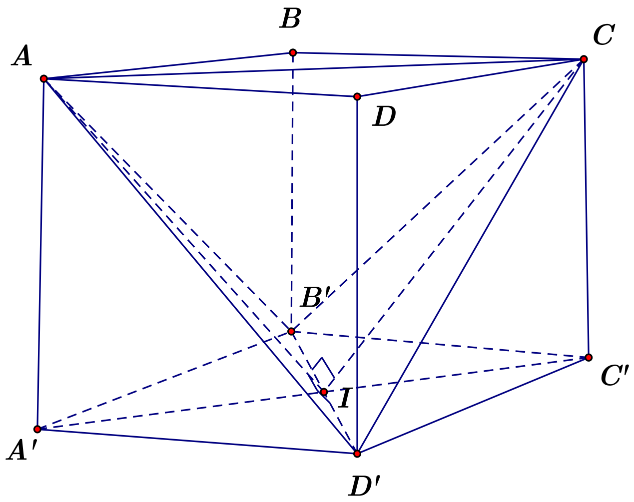
Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ là α.

Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta AB'I$ trên mặt phẳng (ABC).

Do đó $S_{ABC} = S_{IB'A}.\cos\alpha \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC = 2,\ AA' = \sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$.

Lời giải



Ta thấy : $(AB'D')\cap(CB'D')=B'D'$

Gọi I là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Khi đó ta suy ra: $AI\subset(AB'D')$, $AI\perp B'D'$, $CI\subset(CB'D')$, $CI\perp B'D'$.

Suy ra : $\left(\widehat{(AB'D'),(CB'D')}\right)=\widehat{(AI,CI)}$.

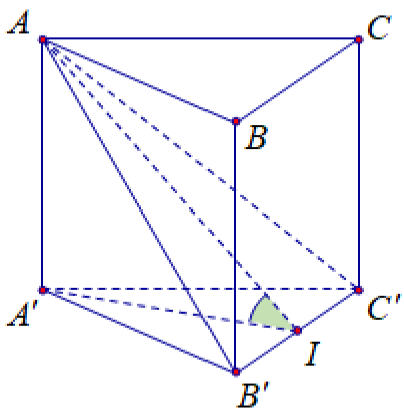
Xét tam giác AIC có: $AC=2$, $CI=AI=\sqrt{AA^2+A'I^2}=\sqrt{3+1}=2$.

Do đó tam giác AIC đều $\Rightarrow \widehat{AIC}=60^0$.

Suy ra: $\left(\widehat{(AB'D'),(CB'D')}\right)=60^0$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Ta có: $\begin{cases} B'C'\perp A'I \\ B'C'\perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C'\perp(AIA')$

Khi đó: $\begin{cases}(AB'C')\cap(A'B'C')=B'C'\\ AI\perp B'C'\\ A'I\perp B'C'\end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan\widehat{AIA'}=\dfrac{AA'}{A'I}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{AIA'}=\dfrac{\pi}{6}$.

DẠNG 4: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

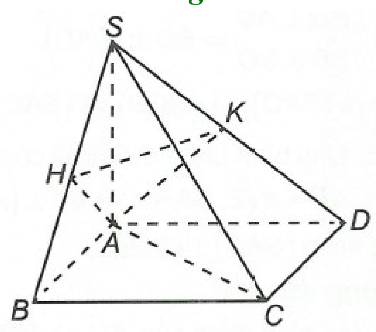
$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=90^0\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$.

Cách 2. Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases}a\subset(\alpha)\\ a\perp(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(SAC)\perp(AHK)$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases}SA\perp CD\left(do\ SA\perp(ABCD)\right)\\ CD\perp AD\\ AD\cap SA=\{A\}\end{cases}$

Suy ra $CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp AK$.

Mà $AK\perp SD$ nên $AK\perp(SCD)\Rightarrow AK\perp SC$.

Tương tự ta chứng minh được $AH\perp SC$.

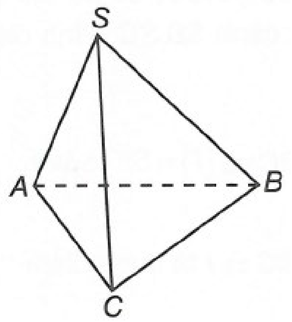
Do đó $SC\perp(AHK)$.

Mà $SC\subset(SAC)$ nên $(SAC)\perp(AHK)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng $(SBC)\perp(SAC)$.

Lời giải

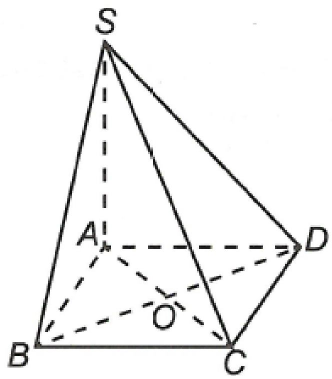


Ta có $\begin{cases}(SAC)\cap(ABC)=AC\\(SAC)\perp(ABC)\\BC\subset(ABC),BC\perp AC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)$

Mà $BC\subset(SBC)$ nên $(SBC)\perp SAC$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=a$, các cạnh còn lại bằng b. Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải



Gọi $\{O\}=AC\cap BD$. Vì $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b nên $ABCD$ là một hình thoi. Suy ra $AC\perp BD$ nên O là trung điểm của BD.

Mặt khác $SB=SD$ nên ΔSBD cân tại S.

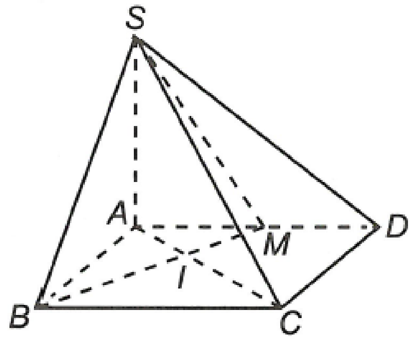
Do đó $SO\perp BD$.

Vậy $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SO\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

Suy ra $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a,AD=a\sqrt{2},SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD. Chứng minh $(SAC)\perp(SMB)$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC và MB.

Ta có $MA = MD$ và $AD // BC$ nên áp dụng định lý Talet, suy ra $AI = \frac{1}{2}IC$.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3a^2, AI^2 = \frac{1}{9}AC^2 = \frac{a^2}{3}$.

$MI^2 = \frac{1}{9}MB^2 = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2\right] = \frac{a^2}{6}$.

Từ đó suy ra $AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = MA^2$.

Vậy ΔAMI là tam giác vuông tại I. Suy ra $MB \perp AC$.(1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$. (2)

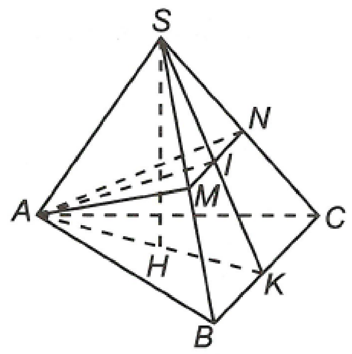
Từ (1), (2) suy ra $MB \perp (SAC)$.

Do $MB \subset (SMB)$ nên $(SMB) \perp (SAC)$.

> ***Chú ý:***
> *Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta có thể xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng* $90°$.
> $\widehat{((\alpha),(\beta))} = 90°$.
> $\Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Câu 43: Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$.

Lời giải



Gọi K là trung điểm của BC và $\{I\} = SK \cap MN$.

Từ giả thiết ta có

$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, MN // BC \Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN.

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AM = AN$ (hai trung tuyến tương ứng).

Suy ra ΔAMN cân tại $A \Rightarrow AI \perp MN$.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC)$.

Suy ra $AI \perp SK$ và ΔSAK cân tại A; $SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

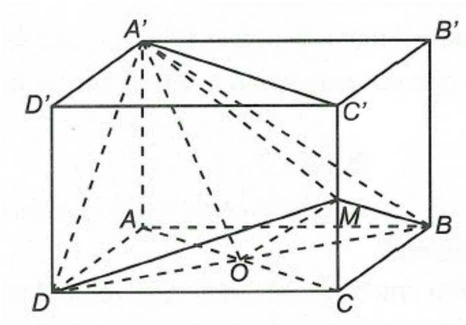
Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$.

Suy ra $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Câu 44: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD=(A'BD)\cap(MBD)$ mà $\begin{cases} AC\perp BD \\ AA'\perp BD \end{cases}$ nên $(ACC'A')\perp BD$.

Ta có $\begin{cases} (ACC'A')\perp BD \\ (ACC'A')\cap(A'BD)=OA' \\ (ACC'A')\cap(MBD)=OM \end{cases}$ nên góc giữa hai đường thẳng $OM,\ OA'$ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD).

Ta có $OM=\dfrac{AC'}{2}=\dfrac{\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$ và

$$OA'^2=AO^2+AA'^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+b^2=\frac{a^2}{2}+b^2.$$

$$MA'^2=A'C'^2+MC'^2=a^2+b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=a^2+\frac{5b^2}{4}.$$

Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau nên $\Delta OMA'$ vuông tại $O\Rightarrow OM^2+OA'^2=MA'^2$

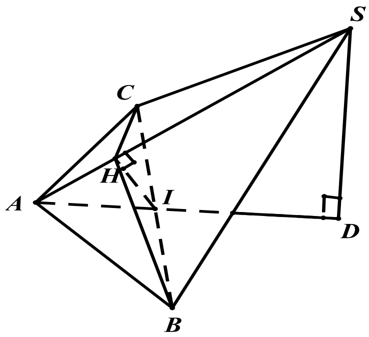
$$\Leftrightarrow \frac{2a^2+b^2}{4}+\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right)=\left(a^2+\frac{5b^2}{4}\right)\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow \frac{a}{b}=1.$$

Vậy $(A'BD)\perp(MBD)$ khi $\dfrac{a}{b}=1$.

Khi đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Câu 45: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d\perp(ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $(SAB)\perp(SAC)$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ và I cũng là trung điểm của AD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Dựng $IH \perp SA, H \in SA$, khi đó ta có $\begin{cases} SA \perp IH \\ SA \perp CB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (HCB)$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là $\widehat{BHC}$.

Ta có $\Delta AHI \sim \Delta ADS \Rightarrow \dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AI}{AD}$.

Mà $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ suy ra

$$IH = \frac{AI.SD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0.$$

DẠNG 5: DÙNG MỐI QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIẢI BÀI TOÁN THIẾT DIỆN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng a cắt hình chóp theo một thiết diện.

+) Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì? Tìm đường thẳng song song với (P).

+) Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:

Sử dụng tính chất về giao tuyến song song như sau

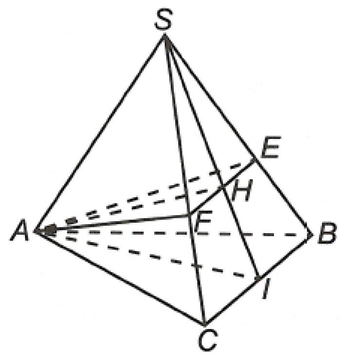
$\begin{cases} a \subset (Q) \\ a // (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m // a.$

Ví dụ: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện.

Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

+ Kết luận hình dạng của thiết diện và tính các yêu cầu liên quan.
✓ Thiết diện là hình gì?
✓ Dựa vào các công thức tính diện tích để tính diện tích thiết diện.
✓ Áp dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất diện tích thiết diện.



Kẻ $AH \perp SI$. Suy ra $AH \subset (P)$.

Ta có $AI \perp BC, SI \perp BC \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $(P) \perp SI$ nên $(P) // BC$.

Lại có $(P) \cap (SBC) = d // BC \Rightarrow H \in d$.

Gọi *E, F* lần lượt là giao điểm của *d* và *SB, SC.*

Suy ra thiết diện cần tìm là ΔAEF.

Ta có $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$SI = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$S_{\Delta SAI} = \dfrac{\sqrt{5}a^2}{8} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

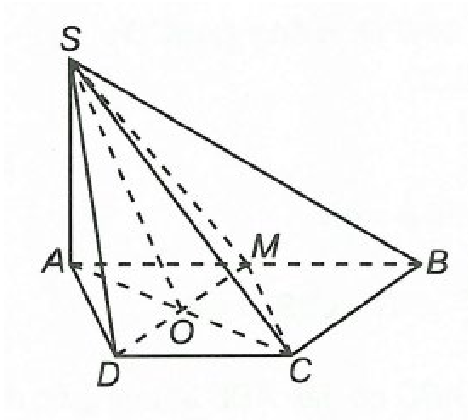
Ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{SH}{SI} \Rightarrow EF = \dfrac{a}{2}$.

$\Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{1}{2} AH.FE = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 46: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A, D;* $AB = 2a; SA = AD = DC = a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua *SD* và $(\alpha) \perp (SAC)$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB.

Tứ giác $ADCM$ là hình vuông $\Rightarrow DM \perp AC$.

Mà $DM \perp SA$ suy ra

$DM \perp (SAC) \Rightarrow (SDM) \perp (SAC) \Rightarrow (\alpha) = (SDM)$.

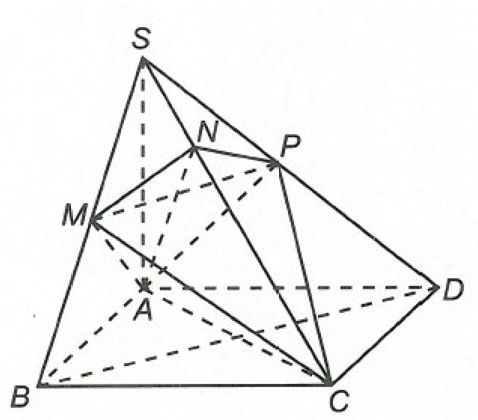
Suy ra thiết diện là ΔSDM.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, DM = a\sqrt{2}$.

Diện tích thiết diện là $S_{\Delta SDM} = \dfrac{SO.DM}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (P) với các đường thẳng SB, SC, SD.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Mà $BC \perp AB$.

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Mặt khác $SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AM$ nên $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB$.

Tương tự $AN \perp SC, AP \perp SD, MP // BD \Rightarrow MP \perp AN$.

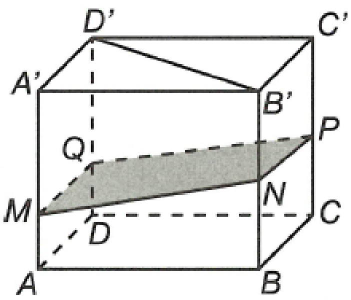
Ta có $\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{MP}{BD} = \frac{4}{5} \Rightarrow MP = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$.

ΔSAN vuông tại A nên $AN = \frac{AS.AC}{\sqrt{AS^2 + AC^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $S_{AMNP} = \frac{AN.MP}{2} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{15}$.

Câu 48: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh đáy của lăng trụ bằng a. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc $45°$ và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P, Q. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải



Gọi S là diện tích thiết diện $MNPQ$.

Ta có hình chiếu của $MNPQ$ xuống $(ABCD)$ chính là hình vuông $ABCD$.

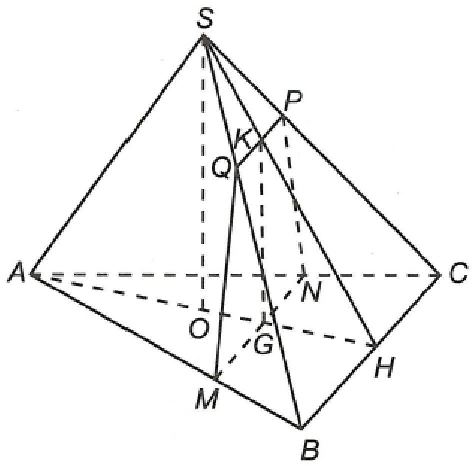
$S' = S_{ABCD} = a^2$.

Gọi $\varphi = \widehat{((\alpha),(ABCD))}$ thì $\varphi = 45°$.

Do $S' = S.\cos\varphi = S.\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2}S' = \sqrt{2}a^2$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi H là trung điểm của BC, O là trung điểm của AH và G là trọng tâm của tam giác ABC. Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO = 2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH.

Lời giải



Qua G dựng đường thẳng MN $(M \in AB, N \in AC)$ song song với BC thì $MN \perp AH \Rightarrow MN \subset (P)$.

Qua G dựng đường thẳng $GK(K \in SH)$ song song với SO thì $GK \perp AH$.

$\Rightarrow GK \subset (P)$

Qua K dựng đường thẳng PQ $(P \in SC, Q \in SB)$ song song với BC thì $PQ \perp AH \Rightarrow PQ \subset (P)$.

Suy ra thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có MN và PQ cùng song song BC suy ra G là trung điểm của MN và K là trung điểm của PQ. Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và $MN // BC \Rightarrow MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}a$.

Ta có $\frac{OH}{AH} = \frac{1}{2}, \frac{HG}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HG}{OH} = \frac{2}{3}$.

Vì $GK // SO$ nên $\frac{HG}{HO} = \frac{GK}{SO} = \frac{HK}{HS} = \frac{2}{3} \Rightarrow KG = \frac{4}{3}a$.

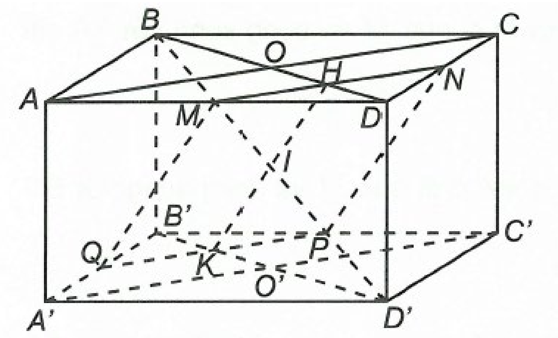
Mặt khác $PQ // BC, \frac{HK}{HS} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SK}{SH} = \frac{1}{3} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow PQ = \frac{1}{3}a$.

Vậy diện tích thiết diện cần tìm là

$$S = \frac{1}{2}.(PQ + MN).GK = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a\right).\frac{4}{3}a = \frac{2}{3}a^2.$$

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BD'. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải



Thiết diện là hình chữ nhật $MNPQ$.

Ta có $\Delta IBH \backsim \Delta DBD'$ suy ra $\dfrac{IB}{DB}=\dfrac{IH}{DD'}=\dfrac{BH}{BD'}$.

Suy ra $BH=\dfrac{IB.BD'}{DB}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$ và $IH=\dfrac{IB.DD'}{DB}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}a}{4}$.

Suy ra $\dfrac{DH}{DO}=\dfrac{BD-BH}{DO}=\dfrac{a\sqrt{2}-\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MN=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $NP=HK=2HI=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ}=MN.NP=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

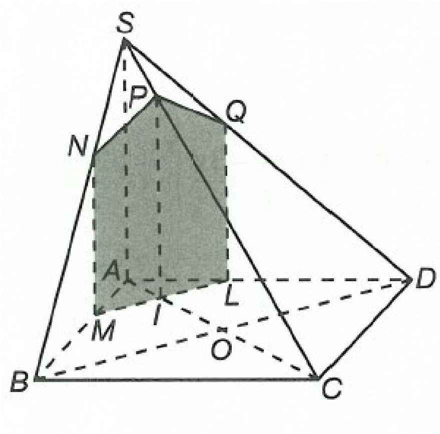
Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=b$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sau cho $AM=x\left(0<x<a\right)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích S của thiết diện theo a, b, x.

c) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α).

Ta có $\begin{cases} SA \perp AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // SA, (\alpha) // BD.$

+) $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = m$ với m đi qua M và song song với SA cắt cạnh SB tại N.

+) $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = n$ với n đi qua M và song song với BD cắt cạnh AD tại L và cắt đoạn AC tại I.

+) $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = p$ đi qua I và song song với SA cắt cạnh SC tại P.

+) $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = q$ đi qua L và song song với SA cắt cạnh SD tại Q.

Mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình chóp $S.ABCD$ theo năm đoạn giao tuyến MN, NP, PQ, QL, LM nên thiết diện là ngũ giác $MNPQL$.

b) Tính diện tích S của thiết diện theo a, b, x.

Chú ý tính chất đối xứng ta có $S_{MNPQL} = 2S_{MINP}$.

Trong đó tứ giác $MINP$ là hình thang vuông tại I và M, gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ ta có theo định lí Ta-lét, ta có $\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \dfrac{b(a-x)}{a}$;

$$\frac{MI}{BO} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow MI = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{IP}{SA} = \frac{CI}{CA} = \frac{CO+OI}{2OA} = \frac{1}{2} + \frac{OI}{2OA} = \frac{1}{2} + \frac{BM}{2BA} = \frac{1}{2} + \frac{a-x}{2a} = \frac{2a-x}{2a}.$$

Suy ra $IP = \dfrac{b\left(2a-x\right)}{2a}$. Ta có

$$S_{MNPQL} = \left(MN + IP\right)MI = \left[\frac{b\left(a-x\right)}{a} + \frac{b\left(2a-x\right)}{2a}\right]\frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}bx\left(4a-3x\right)}{4a}.$$

c) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$S = \frac{\sqrt{2}.bx\left(4a-3x\right)}{4a} = \frac{\sqrt{2}.b}{12a}.3x\left(4a-3x\right) \le \frac{\sqrt{2}.b}{12a}\left(\frac{3x+4a-3x}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}ab}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3x = 4a - 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{3}$.