CHƯƠNG VII

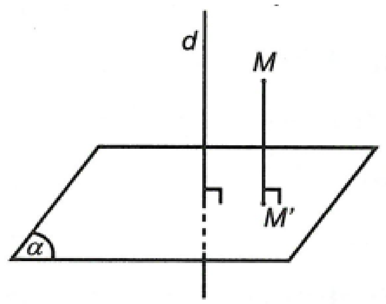
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 24: PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. LÝ THUYẾT.

1. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

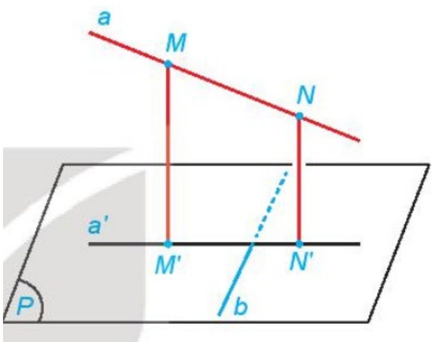
Phép chiếu song song theo phương Δ vuông góc với mặt phẳng (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).



M' là hình chiếu của M lên (α).

Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).



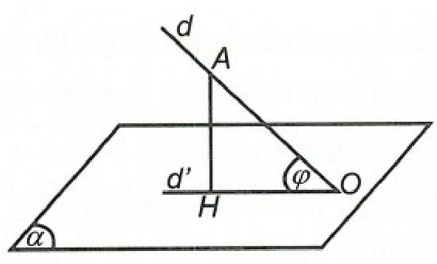
2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P).

• Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng $90°$.

• Nếu a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a với hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a vả mặt phẳng (P).

• Nếu α là góc giữa đường thẳng a vả mặt phẳng (P) thì $0° \le \alpha \le 90°$.



SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa

$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp \text{a}, \forall \text{a} \subset (\alpha)$

Định lí

$\begin{cases} d \perp \text{a}; d \perp b \\ \text{a} \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \Rightarrow d \perp (\alpha) \\ \text{a} \cap b = M \end{cases}$

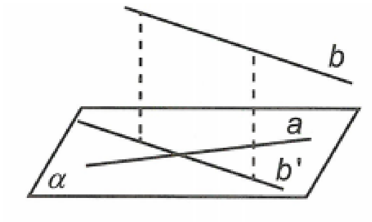
Hệ quả

$\begin{cases} \Delta ABC: \\ d \perp AB \Rightarrow d \perp (ABC) \\ d \perp AC \end{cases}$

Định lí ba đường vuông góc

$\begin{cases} \text{a} \subset (\alpha) \\ b \not\subset (\alpha), b \perp (\alpha) \\ b' \text{ là hình chiếu của b trên } (\alpha) \end{cases}$

$\text{a} \perp b \Leftrightarrow \text{a} \perp b'$



Tính chất

- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song mặt phẳng ấy.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song mặt phẳng ấy.
- Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

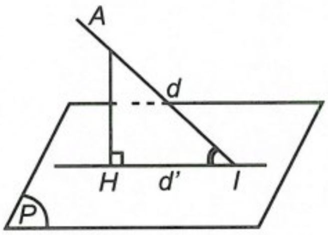
II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Trường hợp 1. $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d,(P))} = 90^o$.

Trường hợp 2. d không vuông góc với (P). Khi đó ta làm như sau:



Bước 1. Tìm $d \cap (P) = \{I\}$.

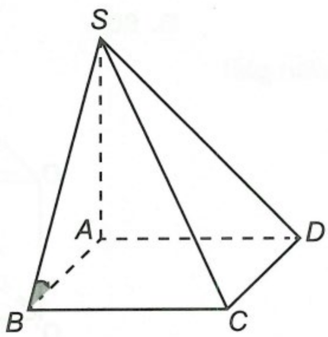
Bước 2. Trên d lấy điểm A khác I. Tìm hình chiếu H của A lên (P). Thông thường ta chọn điểm A trên d thỏa mãn A thuộc đường thẳng Δ vuông góc với (P). (Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (P)).

Bước 3. Suy ra $\widehat{(d,(P))} = \widehat{(AI,\mathrm{HI})} = \widehat{AIH}$.

Tính $\widehat{AIH}$ (nếu đề bài yêu cầu tính góc).

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng ($ABCD$). Xác định cotφ?.

Lời giải



Ta có $SB \cap (ABCD) = \{B\}$.

Trên SB chọn điểm S. Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên ($ABCD$).

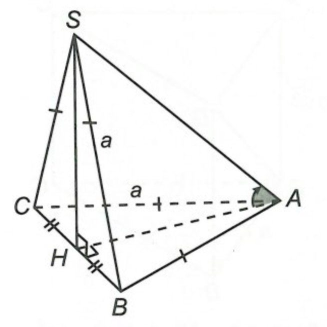
Suy ra $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{(SB,BA)} = \widehat{SBA}$.

Vậy $\cot\varphi = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{2a}{a} = 2$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC).

Lời giải



Ta có $SH \perp (ABC)$.

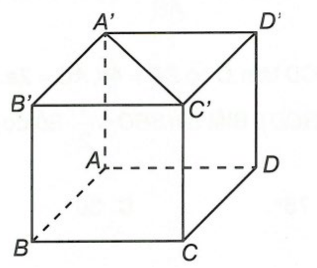
$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = \alpha$

ΔABC và ΔSBC là hai tam giác đều cạnh a nên $AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra ΔSHA vuông cân tại $H \Rightarrow \alpha = 45^o$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

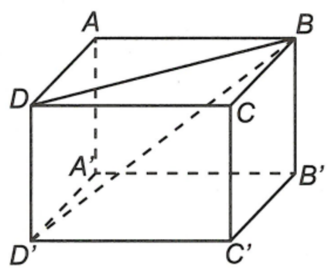
Lời giải



Dễ dàng thấy góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{A'C'B'} = 45^o$.

Câu 3: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, \widehat{ABC} = 60^o$ và $AA' = a$. Góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Lời giải

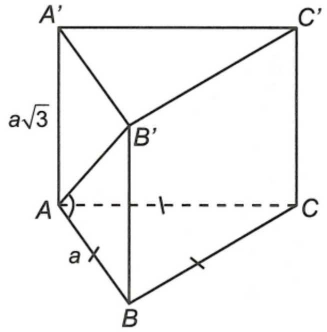


Do $DD' \perp (ABCD)$ nên góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{D'BD}$.

$\tan\widehat{D'BD}=\dfrac{DD'}{BD}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{D'BD}=30^{o}.$

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC đều cạnh $a, AA'=\sqrt{3}a$. Góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng

Lời giải



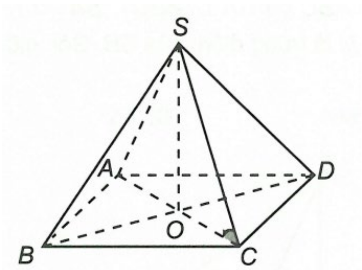
$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC).

Suy ra góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng $\widehat{B'AB}$.

$\Delta B'AB$ vuông tại B nên $\tan\widehat{B'AB}=\dfrac{BB'}{AB}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{B'AB}=60^{o}.$

Câu 5: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD=4a, AC=2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO\perp(ABCD)$. Biết $\tan\widehat{SBO}=\dfrac{1}{2}$. Số đo góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

Lời giải



Góc giữa SC và (ABCD) là góc $\widehat{SCO}$.

$BD=4a\Rightarrow BO=2a;$

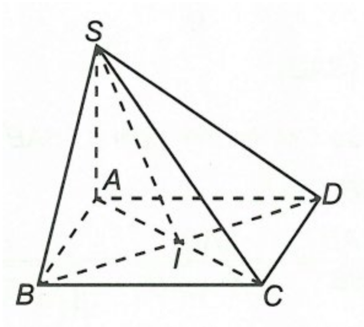
$SO=BO.\tan\widehat{SBO}=2a.\dfrac{1}{2}=a;$

$AC=2a\Rightarrow OC=a.$

Vậy $\widehat{SCO}=45^{o}.$

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là

Lời giải



Gọi I là tâm của hình vuông của $ABCD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Mặt khác vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.

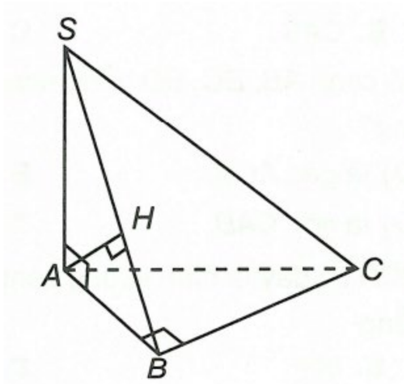
Suy ra $BD \perp (SAC)$ do đó góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là góc $\widehat{BSI}$.

Ta có $SB = a\sqrt{2}; BI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \sin \widehat{BSI} = \dfrac{BI}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSI} = 30^o$.

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại $B, AC = 2a, BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$ (1).

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa SA và SH bằng $\widehat{ASH}$.

Ta có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

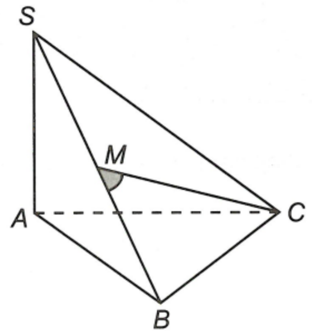
Trong ΔSAB ta có $\sin \widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{ASB} = \widehat{ASH} = 30^o$.

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 30°.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = 2a\sqrt{3}, AB = 2a,$ tam giác ABC vuông cân tại ***B*.** Gọi M là trung điểm của ***SB*.** Góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Do đó BM là hình chiếu của CM lên mặt phẳng (SAB).

Suy ra $\widehat{(CM,(SAB))} = \widehat{CMB}.$

Ta có: $\tan \widehat{CMB} = \dfrac{BC}{MB} = \dfrac{2AB}{SB} = \dfrac{2AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2.2a}{\sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2}} = 1.$

Suy ra $\widehat{CMB} = 45^o.$

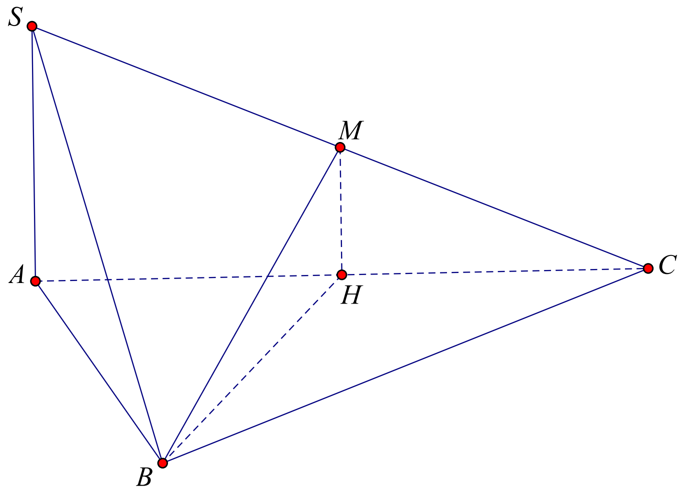
Vậy $\widehat{(CM,(SAB))} = 45^o.$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Goi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tính cosin của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
2. Hướng giải: Xác định góc theo định nghĩa và tính cosin của góc theo hệ thức lượng trong tam giác.
B1: Xác định hình chiếu của đường thẳng BM trên mặt phẳng (ABC); Từ đó xác định góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC).

B2: Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính cosin của góc nói trên.
Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Gọi H là trung điểm cạnh AC.

Ta có MH là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow MH//SA$ và $MH = \frac{1}{2}SA = a$.

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow MH \perp (ABC) \Rightarrow BH$ là hình chiếu của BM trên mặt phẳng (ABC).

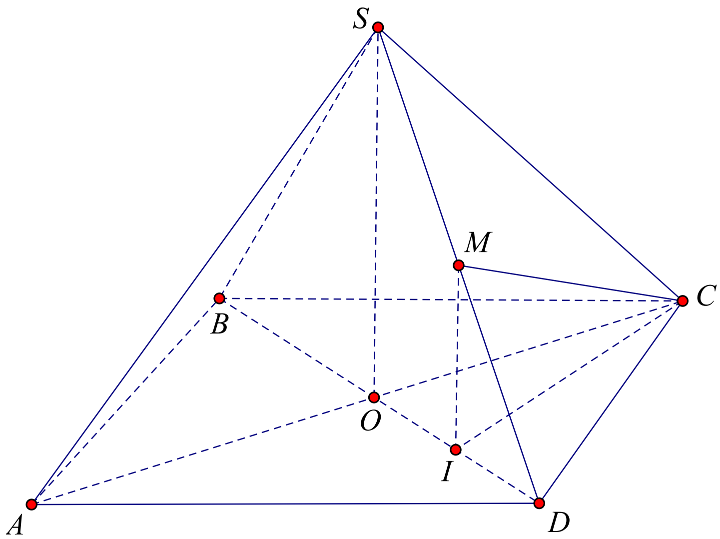
Suy ra góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC) là góc giữa hai đường thẳng BM và BH và bằng góc $\widehat{MBH}$. Vậy $\alpha = \widehat{MBH}$.

Ta có $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{MH^2 + BH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $\cos\alpha = \frac{BH}{BM} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và tam giác ABD đều. SO vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = 2a$. M là trung điểm của SD. Tang góc giữa CM và $(ABCD)$ là:

Lời giải



Gọi I là trung điểm $OD \Rightarrow MI$ là đường trung bình tam giác $SOD \Rightarrow MI = \frac{SO}{2} = \frac{2a}{2} = a$ và $MI \,//\, SO \Rightarrow MI \perp (ABCD)$.

IC là hình chiếu của MC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Góc giữa MC với $(ABCD)$ là $\widehat{MCI}$.

Tam giác ABD đều $\Rightarrow BD = a \Rightarrow OI = \frac{1}{4}BD = \frac{a}{4}$.

$OC = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác OCI vuông tại O:

$$CI = \sqrt{CO^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Xét tam giác CMI vuông tại I:

$$\tan\widehat{MCI} = \frac{MI}{CI} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{1}}{4}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

Lời giải

1. Dạng toán: Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

2. Hướng giải:

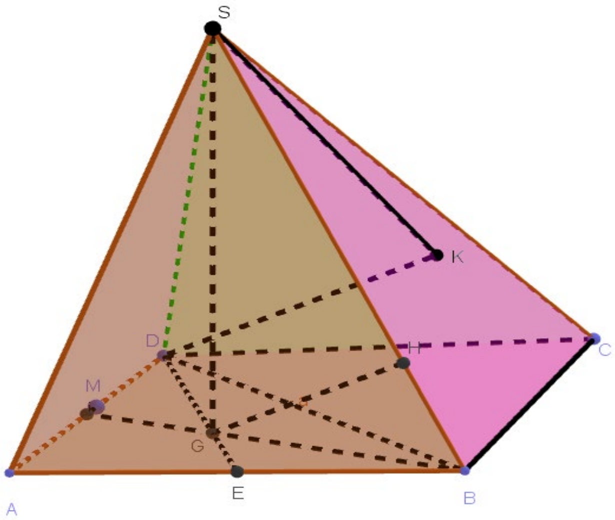
B1: Gọi G là trọng tâm của ΔABD, tính $d(G;(SBC)) = GH$.

B2: Tính $d(M;(SBC)) = \frac{3}{2}.d(G;(SBC)) = \frac{3}{2}GH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

B3: Vì $MD // (SBC) \Rightarrow d(M;(SBC)) = d(D;(SBC)) = DK = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

Gọi K là hình chiếu của D lên (SBC). Khi đó góc giữa SD và mặt phẳng (SBC) là $\widehat{DSK}$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Dễ thấy hình chóp $S.ABD$ đều. Gọi G là trọng tâm của ΔABD. Khi đó $SG\perp(ABCD)$.

Do ΔABD đều nên $\begin{cases}GB\perp AD\\AD//BC\end{cases}\Rightarrow GB\perp BC\Rightarrow BC\perp(SBG)$. Kẻ $GH\perp SB$, $(H\in SB)$.

Khi đó: $GH\perp(SBC)\Rightarrow d\left(G;(SBC)\right)=GH$.

Ta có: $GB=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SG=\sqrt{SB^2-BG^2}=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Xét ΔSGB vuông tại G: $GH.SB=SG.GB\Rightarrow GH=\frac{a\sqrt{15}}{9}$.

Mà $d\left(M;(SBC)\right)=\frac{3}{2}.d\left(G;(SBC)\right)=\frac{3}{2}GH=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Gọi K là hình chiếu của D lên (SBC). Khi đó góc giữa SD và mặt phẳng (SBC) là $\widehat{DSK}$.

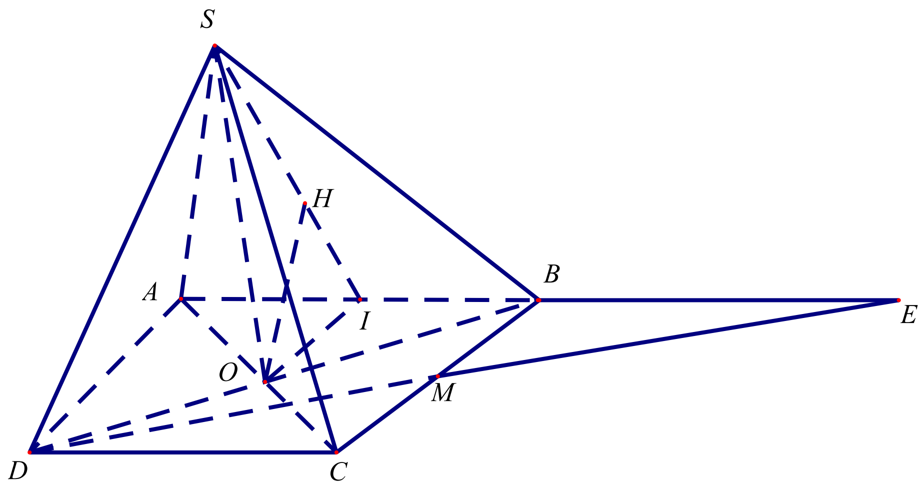
Vì $MD//(SBC)\Rightarrow d\left(M;(SBC)\right)=d\left(D;(SBC)\right)=DK=\frac{a\sqrt{15}}{6}$

Xét ΔDSK vuông tại K thì: $\sin\alpha=\sin\widehat{DSK}=\frac{DK}{SD}=\frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\longrightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}$

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=AB=a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tang của góc tạo bởi đường thẳng DM với mặt phẳng (SAB).

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow O$ là trung điểm của AC và BD.

Do hình chóp $S.ABCD$ đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a \Rightarrow AC = BD = a\sqrt{2}$.

$SA = AB = a \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $S \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ DM cắt AB tại $E \Rightarrow DM \cap (SAB) = \{E\}$.

Gọi góc tạo bởi DM và (SAB) là $\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{d(D;(SAB))}{DE}$.

Ta có $DM = \sqrt{MC^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow DE = 2DM = a\sqrt{5}$.

Kẻ $OI \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOI)$

Kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

$\dfrac{d(D;(SAB))}{d(O;(SAB))} = \dfrac{DB}{OB} = 2 \Rightarrow d(D;(SAB)) = 2d(O;(SAB)) = 2OH$.

Xét ΔSOI vuông tại O, OH là đường cao, ta có:

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{6}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

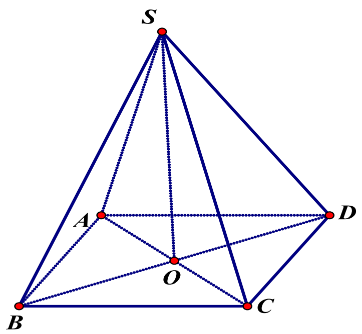
Do đó: $\sin\alpha = \dfrac{d(D;(SAB))}{DE} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{195}}{15}$ vì $\alpha \in [0°;90°]$.

Vậy $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đa giác đáy. Biết cạnh bên bằng $2a$ và $SO = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

Lời giải



Theo tính chất hình chóp tứ giác đều nên O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Cạnh bên SC có hình chiếu trên $(ABCD)$ là OC.

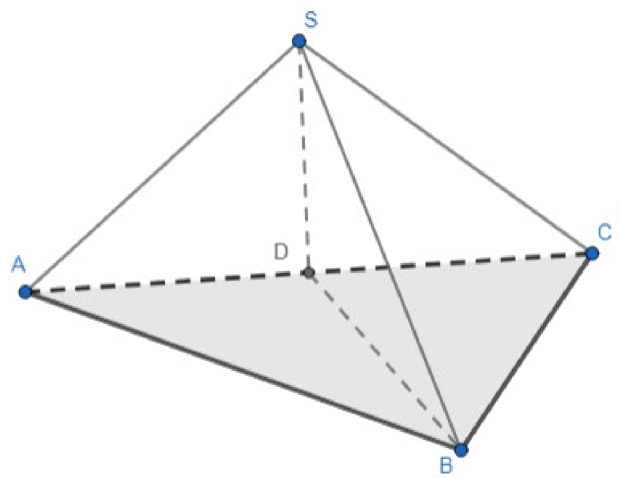
Do đó $\widehat{\left(SC,(ABCD)\right)} = \widehat{\left(SC;OC\right)}$.

Vì ΔSOC vuông tại O nên $\widehat{\left(SC;OC\right)} = \widehat{SCO}$.

$\sin\widehat{SCO} = \dfrac{SO}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SCO} = 60^\circ$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

Lời giải



+) Vì $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = 90°$, $\widehat{BSC} = 60°$ nên ΔSBC đều và ΔSBA vuông cân tại S. Giả sử $SA = a$ ta có: $SA = SB = SC = BC = a$ và $AB = a\sqrt{2}$.

+) Xét ΔSAC cân tại S ta có: $AC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos 120°} = a\sqrt{3}$.

+) Xét ΔABC có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3a^2$, do đó ΔABC vuông tại B.

+) Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), vì $SA = SB = SC$ nên $DA = DB = DC$, do đó D là trung điểm của AC và $SD = \sqrt{SC^2 - DC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$.

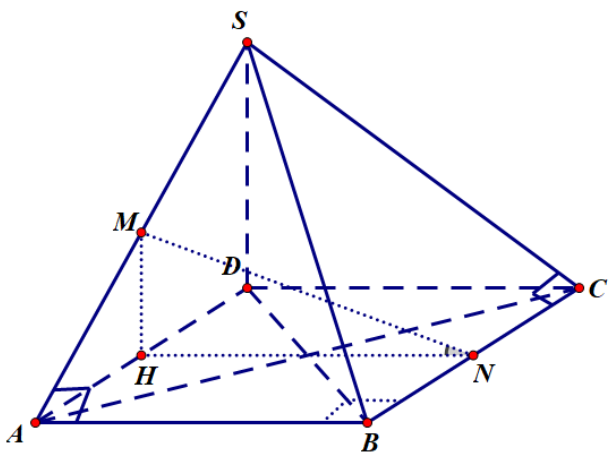
+) Ta có $\widehat{\left(SB,(ABC)\right)} = \widehat{(SB, DB)} = \widehat{SBD}$.

+) Xét ΔSBD, vuông tại D; $\sin\widehat{SBD} = \frac{SD}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBD} = 30°$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $30°$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và α là góc giữa MN và (ABC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

Lời giải



Vẽ $SD \perp (ABC)$

Khi đó ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp AD$

$\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD$

Suy ra $ABCD$ là hình vuông

Gọi H là trung điểm của AD khi đó $MH \parallel SD \Rightarrow MH \perp (ABC)$

$\Rightarrow \alpha = \widehat{MNH}$ (α là góc giữa MN và (ABC)).

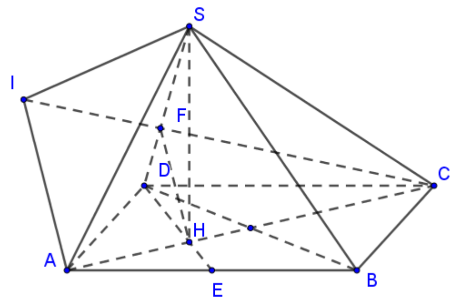
$SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{2}$.

$MH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $HN = a$, $MN = \sqrt{MH^2 + HN^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\cos\alpha = \frac{HN}{MN} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và mp(SCD) bằng

Lời giải



Do $ABCD$ là hình thoi và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ABD là tam giác đều cạnh a

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD. Ta có $DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vì $SA = SB = SD = a$ nên $SH \perp (ABCD)$. $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của H lên SD khi đó ta có $HF \perp$ mp(SCD). Tính được $FH = \frac{SH.DH}{SD} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

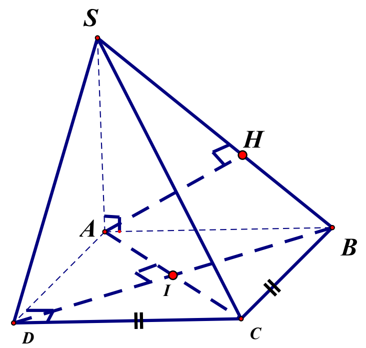
Gọi I là hình chiếu của A lên (SCD) khi đó FH song song với AI. Ta có $\frac{FH}{AI} = \frac{CH}{CA} = \frac{2}{3}$

Nên $AI = \frac{3}{2}HF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Góc giữa đường thẳng SA và mp(SCD) là góc $\widehat{ASI}$. $\sin\widehat{ASI} = \frac{AI}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ASI} = 45^\circ$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SA và (SBC). Khi đó

Lời giải

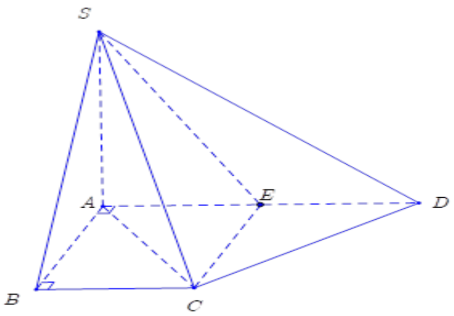


Kẻ $AH \perp SB$, chứng minh được $AH \perp (SBC)$, Khi đógóc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay $\widehat{ASB}$ và ta có $SB = a\sqrt{5}$.

$\cos\alpha = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{2a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) có số đo bằng

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AD, ta có $\begin{cases} AE // BC \\ AE = AC = AB = a \end{cases}$ suy ra tứ giác $ABCE$ là hình thoi, mà $\widehat{A} = 90^o$ nên tứ giác $ABCE$ là hình vuông.

* Ta có $\begin{cases} CE \perp AD \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAD)$ nên SE là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAD).

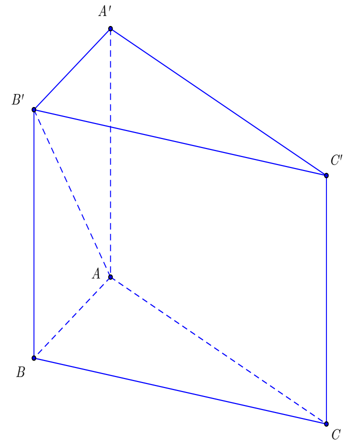
* $\left(\widehat{SC,(SAD)}\right) = \left(\widehat{SC,SE}\right) = \widehat{CSE}$.

*Tính được $CE = AB = a; AC = a\sqrt{2}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$.

Do đó $\sin\widehat{CSE} = \dfrac{CE}{SC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{CSE} = 30^o$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) là

Lời giải



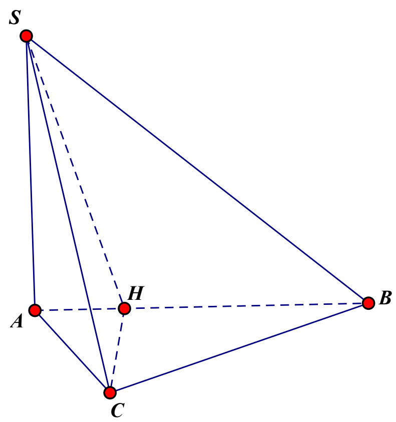
*Vì $BB' \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC).

*Ta có $\left(\widehat{AB',(ABC)}\right) = (AB', AB) = \widehat{B'AB}$.

* Tam giác ABB' vuông tại B nên $\tan\widehat{BAB'} = \dfrac{BB'}{AB} = \dfrac{AA'}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BAB'} = 60^0$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại C. Biết $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 30^0$. Tính góc giữa SC và (SAB).

Lời giải



Kẻ $CH \perp AB$, theo giả thiết thì $CH \perp SA$ nên $CH \perp (SAB)$.

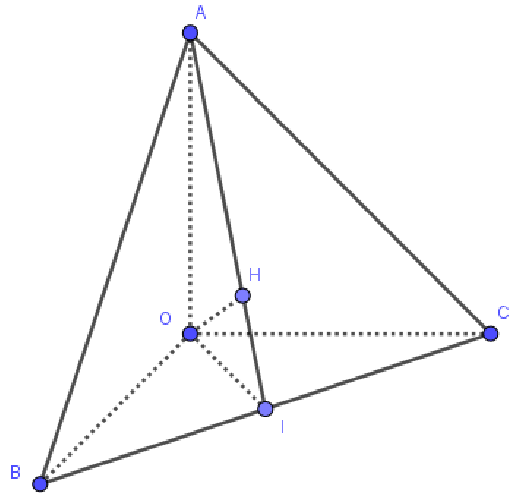
Vậy thì $\left(\widehat{SC;(SAB)}\right) = \widehat{CSH}$ và chú ý tam giác SHC vuông tại H. Ta có $\sin\widehat{CSH} = \dfrac{HC}{SC}$.

Tính toán $AC = AB.\sin 30^0 = a$; $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$; $HC = AC.\sin\widehat{CAH} = a.\sin 60^0$ $= \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy nên $\sin\widehat{CSH} = \dfrac{1}{2}$ tức là $\sin\widehat{CSH} = 30^0$.

Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc. Tang của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow OI \perp BC$, kẻ $OH \perp AI$ ($H \in AI$) $\Rightarrow OH \perp (ABC)$.

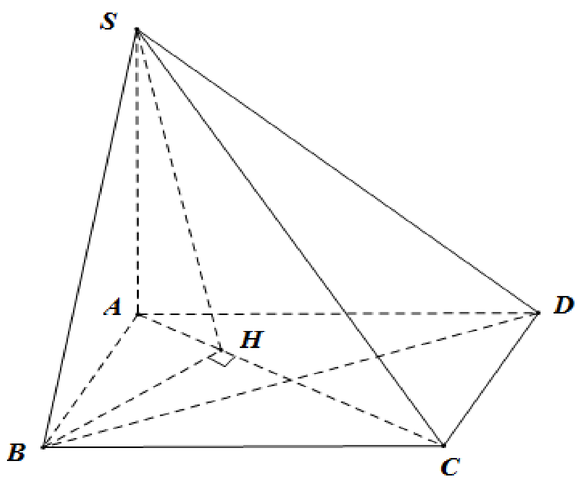
Ta được góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng OA, AH và bằng $\widehat{OAH} = \widehat{OAI}$.

Giả sử $OA = OB = OC = a$, ta có $OI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác OAI vuông tại O có $\tan\widehat{OAI} = \frac{OI}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SB và $mp(SAC)$ bằng

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC$, mà $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

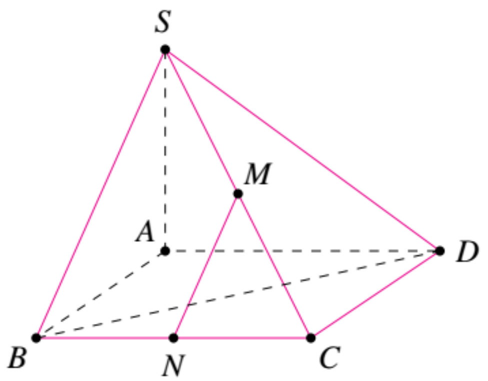
Suy ra góc giữa SB và (SAC) là góc giữa SB và SH bằng $\widehat{BSH}$.

Ta có $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+a^2}=a\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{BA^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do ΔSBH vuông tại H nên $\sin\widehat{BSH}=\dfrac{BH}{SB}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BSH}=30^\circ$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SC,BC. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BD.

Lời giải



Vì M, N là trung điểm của BC, SC nên $MN\,//\,SB$.

Suy ra $\widehat{(MN,BD)}=\widehat{(SB,BD)}$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác SAB và tam giác SAD ta có

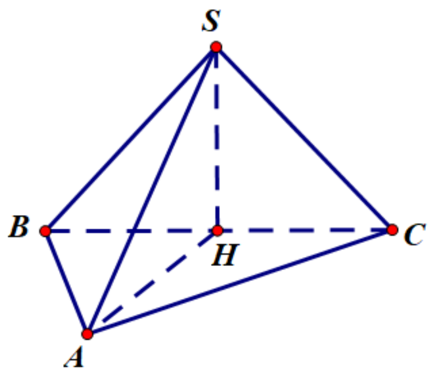
$SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$,

$SD=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

$ABCD$ là hình vuông nên $BD=a\sqrt{2}$. Vậy tam giác SBD là tam giác đều do đó $\widehat{(SB,BD)}=60^\circ\Rightarrow\widehat{(MN,BD)}=60^\circ$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB=a$, đáy ABC là tam giác vuông tai A có $BC=a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính góc giữa SA và (ABC).

Lời giải



H là hình chiếu của S lên (ABC), suy ra AH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABC)}\right)=\left(\widehat{SA,AH}\right)=\widehat{SAH}$,

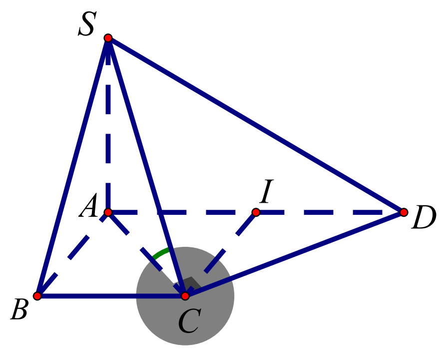
Xét tam giác SHB vuông tại H, ta có $SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, có $AH=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác SAH vuông tại H, có $\tan\widehat{SAH}=\dfrac{SH}{AH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}:\dfrac{a}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SAH}=60°$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2a$, $AB=BC=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải



$SC\cap(ABCD)=C$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $A\Rightarrow$ hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AC\Rightarrow\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SC,AC}\right)=\widehat{SCA}=60°$.

Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA=AC.\tan 60°=a\sqrt{2}.\sqrt{3}=a\sqrt{6}$ và

$SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2\sqrt{2}a$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\sqrt{6a^2+4a^2}=a\sqrt{10}$.

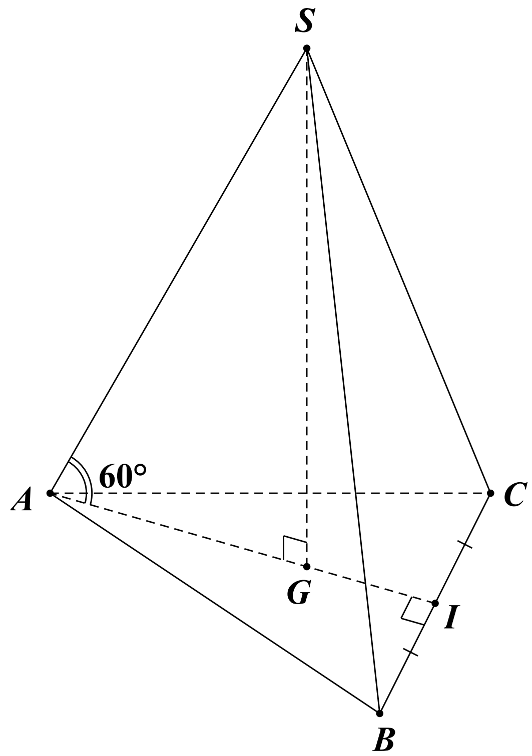
Gọi I là trung điểm của AD.Ta có $AI=\dfrac{1}{2}AD=a\Rightarrow AI=BC$. Lại có $AI\,//\,BC$ nên $ABCI$ là hình bình hành. Do đó $CI=AB=a=\dfrac{1}{2}AD\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại $C\Rightarrow CD\perp AC$ mà $CD\perp SA$ nên $CD\perp(SAC)$.

Ta có $SD\cap(SAC)=S$ và hình chiếu của D trên mặt phẳng (SAC) là $C\Rightarrow$ hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAC) là $SC\Rightarrow\left(\widehat{SD,(SAC)}\right)=\left(\widehat{SD,SC}\right)=\widehat{DSC}$.

Xét tam giác SCD vuông tại C có $\cos\widehat{DSC}=\dfrac{SC}{SD}=\dfrac{2\sqrt{2}a}{a\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\widehat{DSC}\approx 26°33'$.

Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$?

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC

Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ GA = GB = GC \end{cases}$

Suy ra SG là trục của (ABC)

Suy ra $SG \perp (ABC)$

Ta có: A là hình chiếu vuông góc của A lên (ABC) và G là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC)

Suy ra $(SA;(ABC)) = (SA;AG) = \widehat{SAG} = 60°$

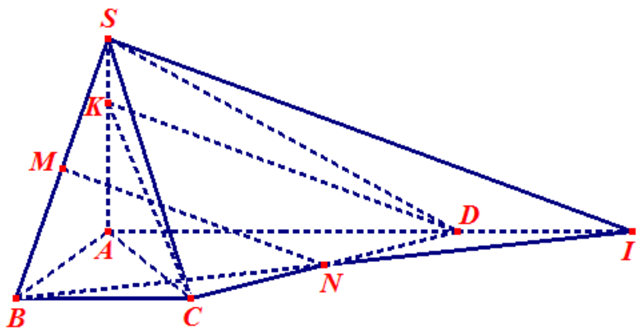
Ta có: $AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G, ta có:

$SG = \tan 60°.AG = \sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = a$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

Lời giải



Gọi $I = BN \cap AD$. Dễ thấy N là trung điểm của BI, do đó $MN // SI$. Kẻ đường thẳng qua D và song song với SI cắt SA tại $K \Rightarrow DK // SI \Rightarrow (MN,(SAC)) = (DK,(SAC))$

Dễ thấy CK là hình chiếu của DK trên $(SAC) \Rightarrow (DK,(SAC)) = \widehat{DKC}$.

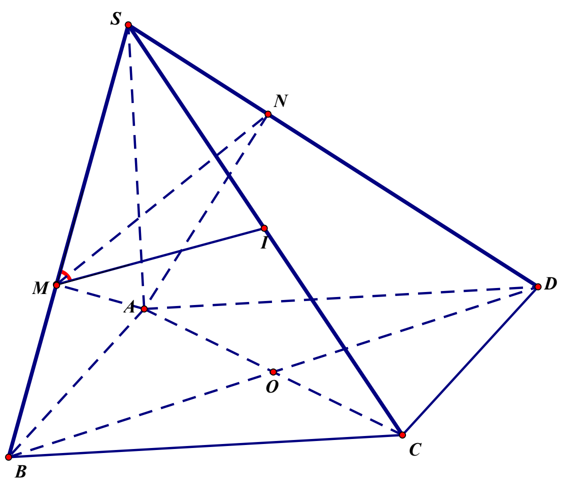
Ta có $KA = \frac{2}{3}SA = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + 2a^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}a$, $KD = \sqrt{KA^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + 4a^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3}a$

$\Rightarrow \cos\widehat{DKC} = \frac{KC}{KD} = \frac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các cạnh SB, SD. Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

Lời giải



Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SC

Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

$AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

Tương tự: $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$

Vậy $SC \perp (AMN)$ tại I.

Ta có MI là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (AMN)

Suy ra góc giữa SB và (AMN) là góc $\widehat{SMI}$

Ta có $\sin\widehat{SMI} = \dfrac{SI}{SM}$

Ta có $SM.SB = SA^2 \Rightarrow SM = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

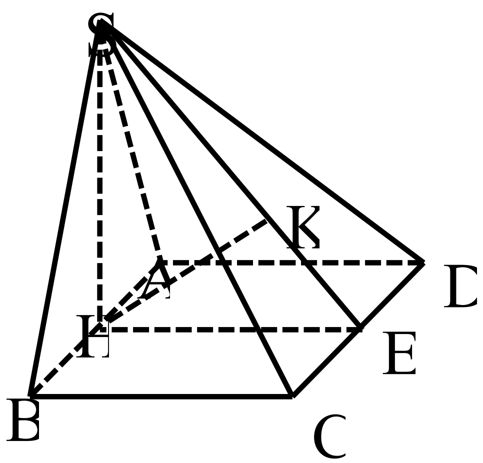
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$

$SI.SC = SA^2 \Rightarrow SI = a$

Vậy $\sin\widehat{SMI} = \dfrac{SI}{SM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SMI} = 60^\circ$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$ và $AD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



Gọi H, E lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Do SAB là tam giác đều có trung tuyến SH và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

Có $\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow (SCD) \perp (SHE)$.

Kẻ $HK \perp SE$ mà $(SCD) \cap (SHE) = SE$ và $(SCD) \perp (SHE)$ nên $HK \perp (SCD)$

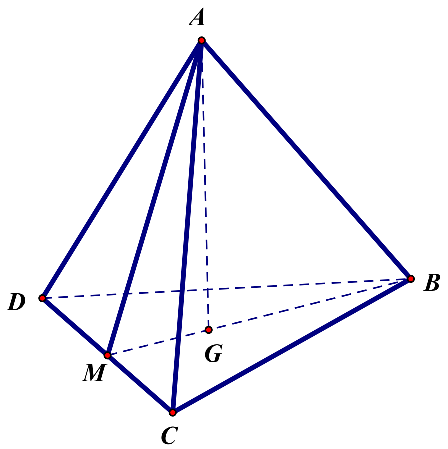
Có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HE^2}+\frac{1}{SH^2}=\frac{2}{3a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do $AB//CD\Rightarrow AB//(SCD)\Rightarrow d(AB,(SCD))=d(B,(SCD))=d(H,(SCD))=HK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Có $SB\cap(SCD)=S$ nên $\sin(SB,(SCD))=\frac{d(B,(SCD))}{SB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(SB,(SCD))=45^0$.

Câu 30: Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) bằng

Lời giải



Đặt $AB=a\,(a>0)$.

Gọi M là trung điểm DC, G là trọng tâm tam giác BCD.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AG\perp(BCD)$.

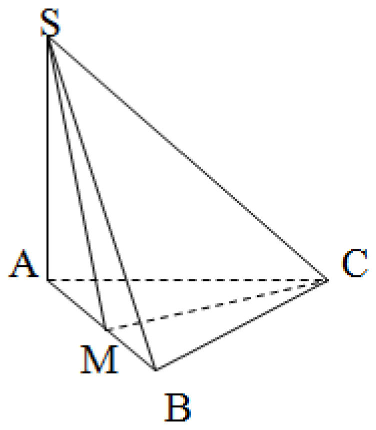
Khi đó $\widehat{(AB;(BCD))}=\widehat{(AB;BG)}=\widehat{ABG}$.

Ta có $BG=\frac{2}{3}BM=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\cos\widehat{ABG}=\frac{BG}{BA}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA\perp(ABC)$, $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng:

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB. Khi đó $CM=\sqrt{AC^2-AM^2}=a\sqrt{3}$, $SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=a\sqrt{3}$.

Ta có: $\begin{cases} CM\perp AB \\ CM\perp SA \end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAB)$

$\Rightarrow M$ là hình chiếu của C trên mặt phẳng (SAB)

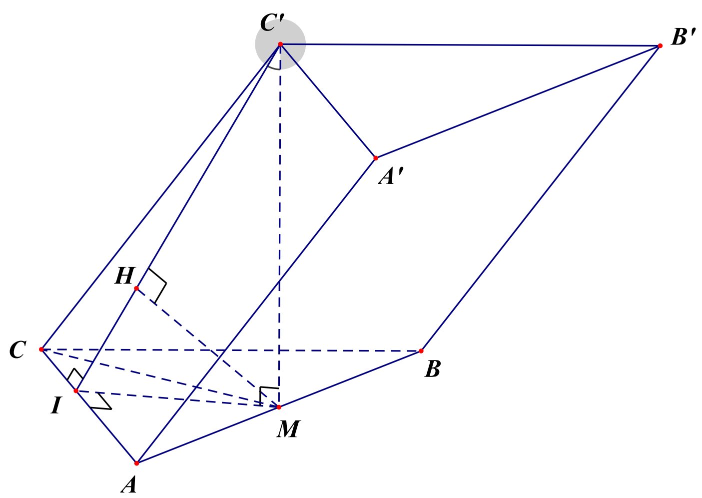
$\Rightarrow SM$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow$ $\widehat{(SC,(SAB))}=\widehat{(SC,SM)}$.

Vì $CM\perp(SAB)$ nên $CM\perp SM$, mà $CM=SM=a\sqrt{3}$, do đó tam giác SMC vuông cân tại M. Vậy $\widehat{(SC,(SAB))}=\widehat{(SC,SM)}=\widehat{CSM}=45^\circ$.

Câu 32: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC=a\sqrt{2}$, $BC=a$, $\widehat{ACB}=135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB. Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải



Dựng $MI\perp AC$ ($I\in AC$) và $MH\perp C'I$ ($H\in C'I$).

Ta có: $\begin{cases} AC \perp IM \\ AC \perp C'M \end{cases} \Rightarrow AC \perp (C'MI)$ mà $HM \subset (C'MI) \Rightarrow MH \perp AC$

Từ và $\Rightarrow MH \perp (ACC'A')$. Do đó góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc $\widehat{HC'M} = \alpha$.

Mặt khác, ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA.CB.\sin 135° = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow S_{\Delta AMC} = \frac{a^2}{4}$.

Lại có $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}.MI.AC \Rightarrow MI = \frac{2S_{\Delta AMC}}{AC} = \frac{a^2}{2AC} = \frac{a^2}{2a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + CB^2 - 2AC.CB.\cos 135°} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + a^2 - 2a\sqrt{2}.a.\cos 135°} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

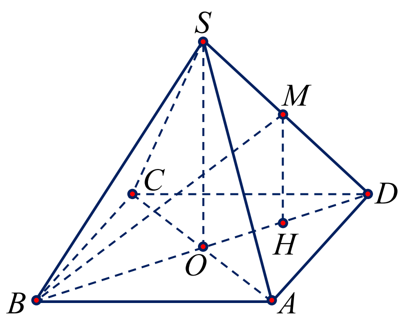
$AI = \sqrt{AM^2 - IM^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CI = AC - AI = a\sqrt{2} - \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$C'I = \sqrt{C'C^2 - CI^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{16} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\sin\alpha = \frac{IM}{C'I} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SD. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$ và $O = AC \cap BD$.

Ta có MH song song với SO và $MH = \frac{1}{2}SO$.

BM có hình chiếu vuông góc trên $(ABCD)$ là BH

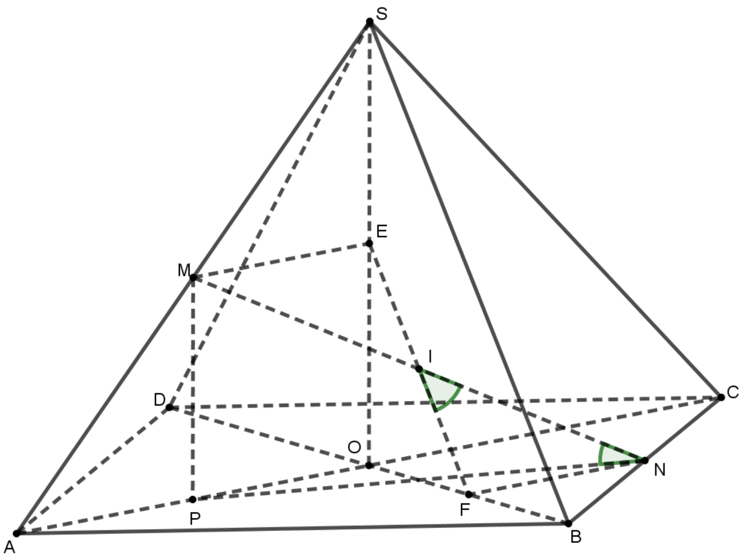
Do đó góc giữa BM và $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $BH=\frac{3}{4}BD=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Trong tam giác MBH vuông tại H nên có: $\tan\widehat{MBH}=\frac{MH}{BH}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm SO, OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD).

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $\widehat{MNP}=60^\circ$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$$NP^2=CP^2+CN^2-2CP.CN.\cos 45^\circ=\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{a^2}{4}-2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra: $NP=\frac{a\sqrt{10}}{4}$, $MP=NP.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{30}}{4}$; $SO=2MP=\frac{a\sqrt{30}}{2}$.

$SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=2a\sqrt{2}\Rightarrow EF=a\sqrt{2}$.

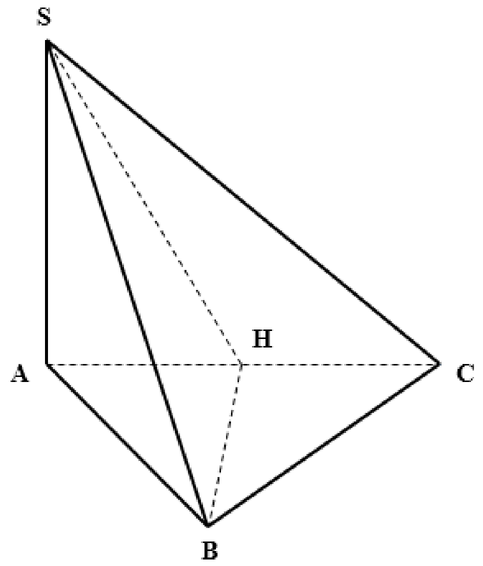
Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành.

Gọi I là giao điểm của MN và EF, khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{NIF}$.

$$\cos\widehat{NIF}=\frac{IK}{IN}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{4}{a\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH \perp AC$

Mà $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\widehat{BSH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H, $BH = AB.\sin 60^\circ = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$AH = AB.\cos 60^\circ = 2a.\dfrac{1}{2} = a$.

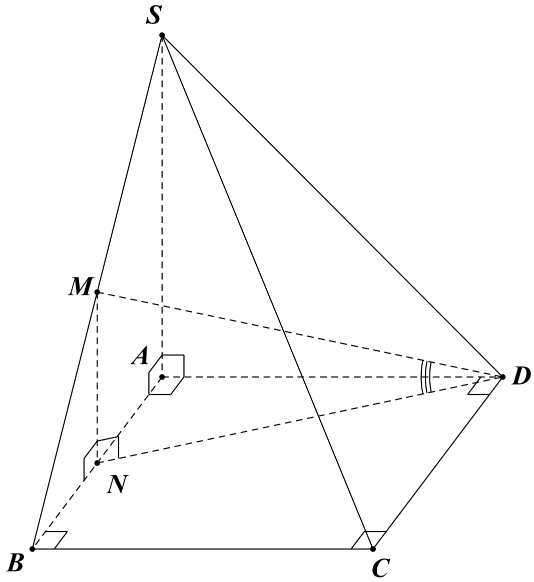
Xét tam giác SAH vuông tại S, $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có $SH = HB = a\sqrt{3}$ suy ra tam giác SBH vuông tại H.

Vậy $\widehat{BSH} = 45^\circ$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB. Tính tan góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm AB.

Ta có: MN là đường trung bình của ΔSAB nên $MN // SA$ và $MN = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có: $SA \perp (ABCD)$.

Do đó $MN \perp (ABCD)$ (1).

Suy ra $MN \perp DN$.

Ta có: N là hình chiếu vuông góc của M lên $(ABCD)$ và D là hình chiếu vuông góc của D lên $(ABCD)$.

Suy ra $(DM;(ABCD)) = (DM;ND) = \widehat{MDN}$ ($\widehat{MDN}$ nhọn vì ΔMND vuông tại N).

Ta có: $DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét ΔMND vuông tại N, có:

$\tan MDN = \frac{MN}{DN} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $\tan(DM;(ABCD)) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có $AB = BC = a$, $AD = 2a$, có SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

Lời giải

+) Xác định giao điểm của MN và (SAC):

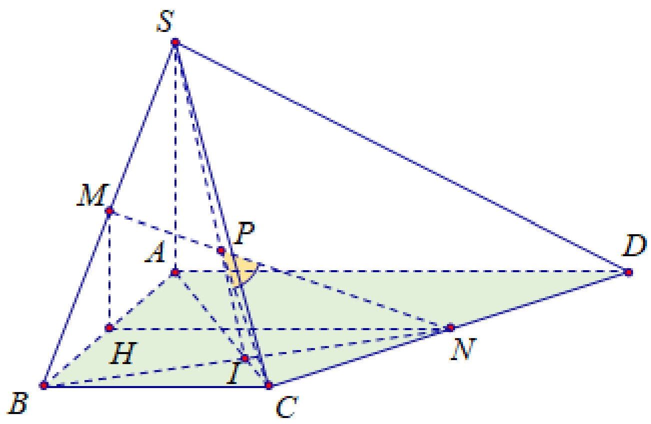
+) Chọn mp chứa MN là mp(SBN)

+) Giao tuyến $(SBN)\cap(SAC)=SI$ Trong (SBN) gọi $SI\cap MN=P$, suy ra $P=MN\cap(SAC)$.

+) Xác định góc $\widehat{(MN,(SAC))}$:

+) Ta có $AC^2=AB^2+BC^2=2a^2$; $CD^2=CK^2+KD^2=2a^2$; $AD^2=(2a)^2=4a^2$
$\Rightarrow AC^2+CD^2=AD^2 \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD\perp AC$ mà $CD\perp SA$ nên $CD\perp(SAC)$

+) Góc $\widehat{(MN,(SAC))}=\widehat{(MN,PC)}=\widehat{NPC}$



+) Tính góc $\widehat{NPC}$:

+) Ta có $NC=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+) Ta có I là trung điểm BN và M là trung điểm SB suy ra P là trọng tâm $\Delta SBN \Rightarrow PN=\dfrac{2}{3}MN$

+) Gọi H trung điểm AB suy ra $MH//SA$ do đó ΔMNH vuông tại H. $\Rightarrow MN=\sqrt{MH^2+HN^2}$
$=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a+2a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ do đó $PN=\dfrac{2}{3}MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.

Từ đó suy ra $PC=\sqrt{PN^2-NC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{10}}{3}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{22}}{6}$

+) Cosin của góc $\widehat{NPC}$: $\cos\widehat{NPC}=\dfrac{PC}{PN}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{22}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{10}}{3}}=\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC=a\sqrt{2}$, $BC=a$, $\widehat{ACB}=135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB. Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$?

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

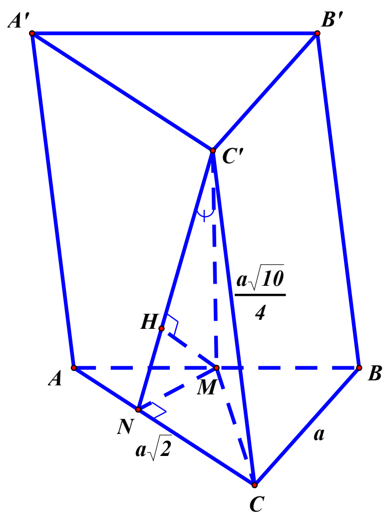
2. Hướng giải: Vẽ hình, chú ý đường cao của lăng trụ là $C'M$.

B1: Xác định góc giữa $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$. Ta tìm hình chiếu vuông góc của $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$. Từ M kẻ đường vuông góc với AC, ta xác định được góc.

B2: Đưa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng về tính góc trong tam giác vuông.

B3: Dựa vào giả thiết tính độ dài 2 cạnh của tam giác vuông. Từ đó suy ra số đo góc của tam giác vuông.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Từ M kẻ $MN\perp AC\Rightarrow AC\perp(MNC')\Rightarrow NC'\perp AC$

Kẻ $MH\perp NC'\Rightarrow MH\perp(ACC'A')\Rightarrow$ hình chiếu của MC' lên $(ACC'A')$ là $HC'\Rightarrow\widehat{MC'H}$ là góc giữa MC' và $(ACC'A')$.

Xét ΔABC có $AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\widehat{ACB}=2a^2+a^2-2.a\sqrt{2}.a.\cos135^\circ=5a^2$

$\Rightarrow AB=a\sqrt{5}$.

Ta lại có: $\dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}}\Rightarrow\sin\widehat{BAC}=\dfrac{BC.\sin\widehat{ACB}}{AB}=\dfrac{a.\sin135^\circ}{a\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2.\sqrt{5}}$.

Xét ΔMAN có $\sin\widehat{BAC}=\dfrac{MN}{AM}\Rightarrow MN=AM.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

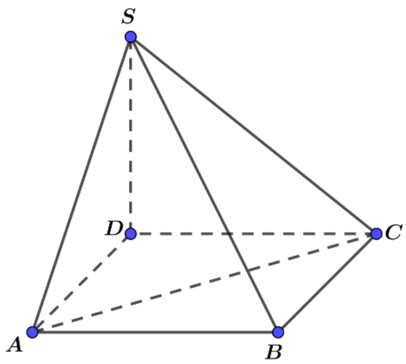
Xét ΔMAN có $MC^2 = \dfrac{AC^2 + BC^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{2a^2 + a^2}{2} - \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$.

Xét ΔMNC vuông ở N có: $NC^2 = MC^2 - MN^2 = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{a^2}{8}$.

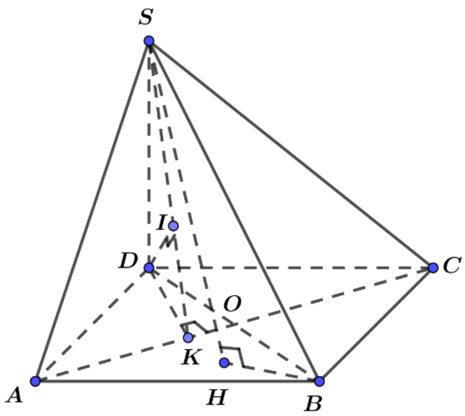
Xét $\Delta NCC'$ vuông ở N có: $NC'^2 = CC'^2 - NC^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow NC' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Xét $\Delta MNC'$ vuông ở M có $\sin\widehat{NC'M} = \dfrac{MN}{NC'} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NC'M} = 30°$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bính hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120^0$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC).



Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAC) khi đó $\left(\widehat{SB,(SAC)}\right) = \widehat{BSH}$

Nên $\sin\left(\widehat{SB,(SAC)}\right) = \sin\widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{d(B,(SAC))}{SB}$ (*)

Lại có $\dfrac{d(B,(SAC))}{d(A,(SAC))} = \dfrac{BO}{DO} = 1 \Rightarrow \sin\widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{d(A,(SAC))}{SB}$

Kẻ $DK \perp AC, DI \perp SK \Rightarrow d(A,(SAC)) = DI$

Trong $\Delta ADC: AC=\sqrt{DA^2+DC^2-2DA.DC.\cos\widehat{ADC}}=a\sqrt{7}.$

$S_{\Delta DAC}=\frac{1}{2}DA.DC.\sin\widehat{ADC}=\frac{\sqrt{3}a}{2}; DK=\frac{2S_{\Delta DAC}}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a.$

Xét tam giác vuông SDK có đường cao DI suy ra $DI=\sqrt{\frac{SD^2.DK^2}{SD^2+DK^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$

Trong $\Delta ABD: BD=\sqrt{DA^2+AB^2-2DA.AB.\cos\widehat{DAB}}=a\sqrt{3}.$

$SB=\sqrt{SD^2+DB^2}=a\sqrt{6}.$

Thay vào (*) ta được $\sin\widehat{BSH}=\frac{AI}{SB}=\frac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{a\sqrt{6}}=\frac{1}{4}.$