CHƯƠNG VII

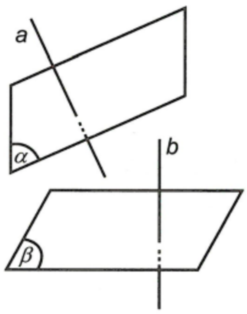
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 25: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. LÝ THUYẾT.

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$

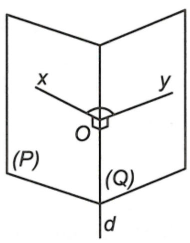
Hai mặt phẳng vuông góc: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\widehat{((P),(Q))}=90°$

Chú ý: $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$;

$(\alpha)\equiv(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$.

Cách xác định góc khác: Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



Bước 1. Tìm giao tuyến *d* của (*P*) và (*Q*).

Bước 2. Chọn điểm *O* trên *d*, từ đó:

+) Trong (*P*) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (*Q*) dựng $Oy \perp d$.

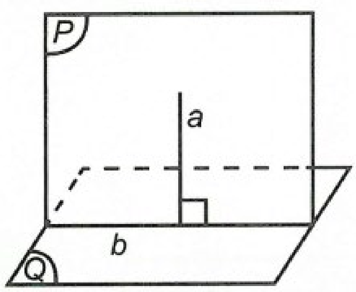
Khi đó: $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(Ox,Oy)}$.

Lưu ý: Việc xác định điểm *O* có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm *M* trên (*Q*) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu *H* của nó trên (*P*). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}$.

2. ĐIỀU KIỆN HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



3. TÍNH CHẤT HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

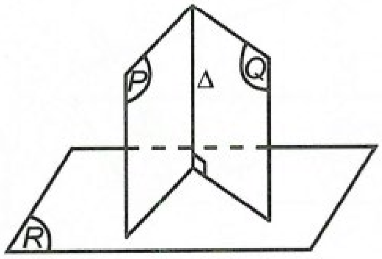
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ b = (P) \cap (Q) \\ a \perp b \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q).$$

Nhận xét: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong (P).

$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (Q) \\ A \in a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$$

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R).$$



4. GÓC NHỊ DIỆN

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P), (Q) tương ứng được gọi là cạnh và các mặt của góc nhị diện đó.

Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc (P), (Q) và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.

Chú ý

- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.
- Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N.
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

5. MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

a) Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.

- Các mặt bên là các hình chữ nhật.

- Các mặt bên vuông góc với hai đáy.

b) Hình lăng trụ đều

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

c) Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

d) Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật.

Đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ với a, b, c là 3 kích thước.

e) Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

6. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.

+) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

+) Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
+) Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

Hình chóp cụt đều

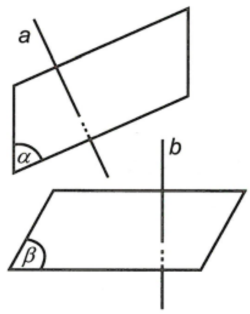
- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_3B_2$,..., $A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trong HĐ13 được gọi là một hình chóp cụt đều (nói đơn giản là hình chóp cụt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2...B_n$), kí hiệu là $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ được gọi là hai mặt đáy, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$,..., $A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các mặt bên của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n được gọi là các cạnh bên; các cạnh của mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cụt.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là chiều cao của hình chóp cụt.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG BẰNG CÁCH DÙNG ĐỊNH NGHĨA

1 PHƯƠNG PHÁP.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$

Chú ý: $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$;

$(\alpha)\equiv(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$.

2 BÀI TẬP.

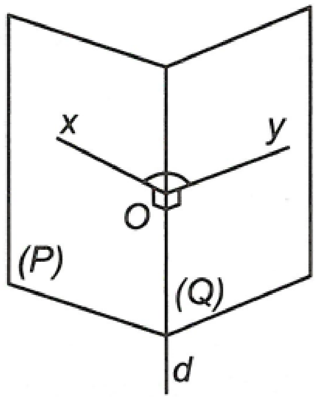
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG DỰA TRÊN GIAO TUYẾN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



Bước 1. Tìm giao tuyến *d* của (*P*) và (*Q*).

Bước 2. Chọn điểm *O* trên *d*, từ đó:

+) Trong (*P*) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (*Q*) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(Ox, Oy)}$.

Lưu ý: Việc xác định điểm *O* có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm *M* trên (*Q*) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu *H* của nó trên (*P*). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 3: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*SAD*) bằng

Câu 4: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O*, cạnh *a*. Đường thẳng *SO* vuông góc với mặt phẳng đáy (*ABCD*) và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABCD*) bằng

Câu 5: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác vuông tại $B, SA \perp (ABC), SA = \sqrt{3}cm, AB = 1cm$. Mặt bên (*SBC*) hợp với mặt đáy góc bằng

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng *ABC.A'B'C'* có đáy *ABC* là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng (*A'BC*) và (*ABC*). Khi đó, tính $\tan\varphi$.

Câu 7: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại $B, SA = a$ và $SA \perp (ABC), AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBC*).

Câu 8: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (*SBD*) và (*ABCD*). Biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$, tính góc giữa (*SAC*) và (*SBC*).

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Gọi φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD). Giá trị của cosφ bằng

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG BẰNG CÁCH DÙNG ĐINH LÝ HÌNH CHIẾU

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dùng định lý về diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) và S' là diện tích hình chiếu của H trên (P') và φ là góc giữa (P) và (P') thì $S' = S.\cos\varphi$ hay $\cos\varphi = \frac{S'}{S}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP VỀ GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

Câu 12: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

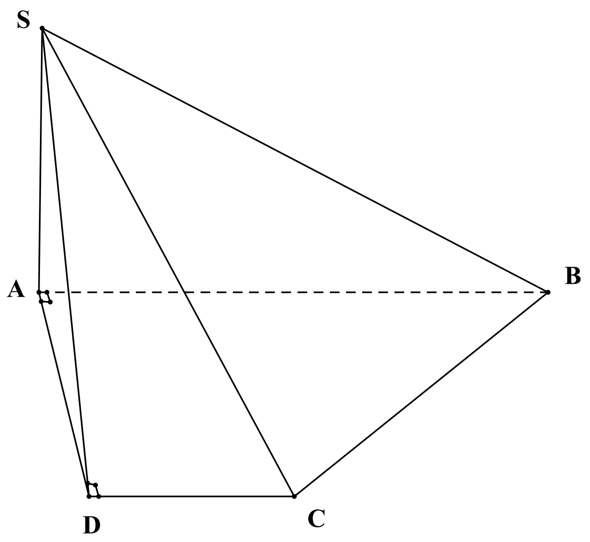
Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Câu 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

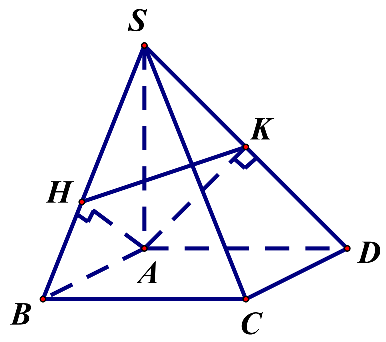
Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng:

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2AD = 2DC = a$ (Hình vẽ minh họa). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng



Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (hình bên). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng



Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD, tính góc giữa hai mặt phẳng (SBE) và $(ABCD)$.

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

Câu 22: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos\alpha$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB = a$, góc $\widehat{BAD} = 60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD), SA = x$. Tìm x để góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 90^0.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng 60^0, tam giác SBC đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Khi đó

Câu 25: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{6}$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và đáy của hình chóp. Tính $\tan\varphi$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA\perp(ABCD)$, $SA=x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc bằng $60°$.

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều, có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng
Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính *cosin* góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$
.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Cho biết $AB=2AD=2DC=2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC).

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $BC=\sqrt{2}\,a$ và ΔACD vuông cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD và I là trung điểm SC. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (AHI) và $(ABCD)$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SB và SD. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC=SB=a, SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Câu 33: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SB=a$, $SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SA=a$, $SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=BC=a$ và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

Câu 37: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB=AC=a$ và góc $\widehat{BAC}=120°$, cạnh bên $AA'=a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC = 2,\ AA' = \sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

DẠNG 4: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

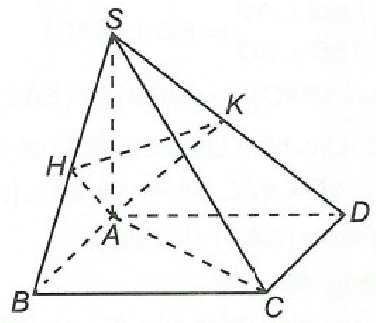
$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 90^0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Cách 2. Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AHK)$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} SA \perp CD\left(do\ SA \perp (ABCD)\right) \\ CD \perp AD \\ AD \cap SA = \{A\} \end{cases}$

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Tương tự ta chứng minh được $AH \perp SC$.

Do đó $SC \perp (AHK)$.

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (AHK)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng b. Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD. Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.

Câu 43: Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN)\perp(SBC)$.

Câu 44: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Câu 45: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d\perp(ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $(SAB)\perp(SAC)$.

DẠNG 5: DÙNG MỐI QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIẢI BÀI TOÁN THIẾT DIỆN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng a cắt hình chóp theo một thiết diện.

+) Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì? Tìm đường thẳng song song với (P).

+) Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:

Sử dụng tính chất về giao tuyến song song như sau

$$\begin{cases} a\subset(Q) \\ a//(P) \end{cases} \Rightarrow (P)\cap(Q)=m//a.$$

+ Kết luận hình dạng của thiết diện và tính các yêu cầu liên quan.

✓ Thiết diện là hình gì?

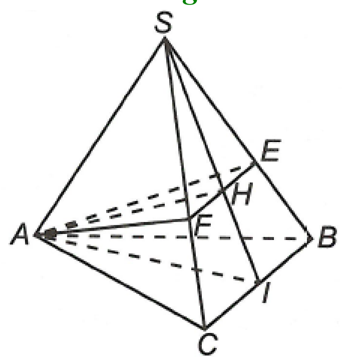
✓ Dựa vào các công thức tính diện tích để tính diện tích thiết diện.

✓ Áp dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất diện tích thiết diện.

Ví dụ: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB=a, SA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện.

Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải



Kẻ $AH\perp SI$. Suy ra $AH\subset(P)$.

Ta có $AI\perp BC, SI\perp BC \Rightarrow BC\perp AH$.

Mà $(P)\perp SI$ nên $(P)//BC$.

Lại có $(P)\cap(SBC)=d//BC\Rightarrow H\in d$.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d và SB, SC.

Suy ra thiết diện cần tìm là ΔAEF.

Ta có $SA=SB=SC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$SI=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$S_{\Delta SAI}=\dfrac{\sqrt{5}a^2}{8}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Ta có $\frac{EF}{BC}=\frac{SH}{SI}\Rightarrow EF=\frac{a}{2}$.

$\Rightarrow S_{AEF}=\frac{1}{2}AH.FE=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{10}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại $A, D;$ $AB=2a; SA=AD=DC=a;$ $SA\perp(ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua SD và $(\alpha)\perp(SAC)$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Câu 48: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh đáy của lăng trụ bằng a. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc $45°$ và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P, Q. Tính diện tích thiết diện.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi H là trung điểm của BC, O là trung điểm của AH và G là trọng tâm của tam giác ABC. Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO=2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH.

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BD'. Tính diện tích thiết diện.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=b$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sau cho $AM=x(0<x<a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích S của thiết diện theo a, b, x.

c) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.