CHƯƠNG VII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 25: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1: CÂU HỎI LÍ THUYẾT

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Qua M có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) mà (P) và (Q) song song với nhau nên cũng sẽ có vô số mặt phẳng vuông góc với cả (P) và (Q).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Theo nội dung định lí về hai mặt phẳng vuông góc ta **Chọn D**

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.

C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

Lời giải

Chọn A Đúng.

Chọn B Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố cắt nhau.

Chọn C Sai, vì mặt phẳng đó chưa chắc đã tồn tại.

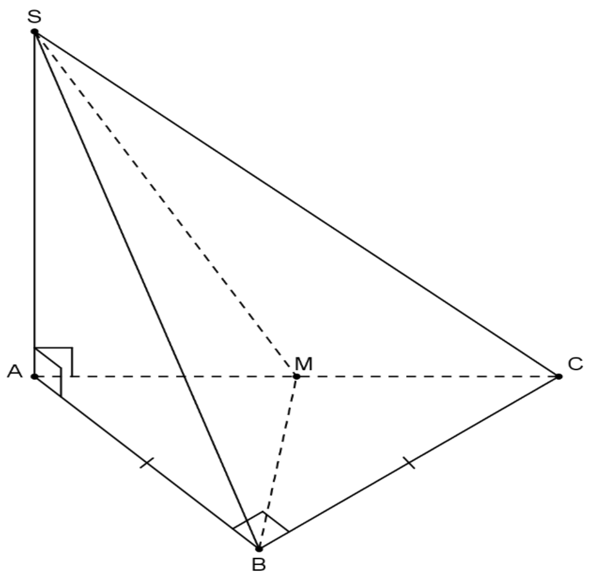
Chọn D Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố vuông gó **C.**

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA HAI MP, MP VÀ ĐT

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **SAI** ?

A. $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải



+ Ta có tam giác ABC vuông cân tại B, BM là trung tuyến nên cũng là đường cao

$\Rightarrow BM \perp AC$.

Lại có $BM \perp SA$

Suy ra $BM \perp (SAC) \Rightarrow BM \perp AC$.

Nên đáp A đúng.

+ Ta có: $\begin{cases} BM \perp (SAC) \\ BM \subset (SBM) \end{cases} \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$

Nên **Chọn B** đúng.

+ Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

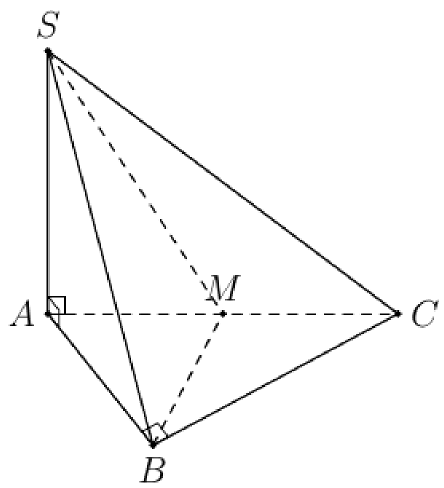
Nên **Chọn C** đúng.

Vậy **Chọn D**

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải



Xét phương án **A**: ΔABC cân tại B, M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$ nên phương án **A** đúng.

Xét phương án **B**: $\begin{cases} BM \perp SA \\ BM \perp AC \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$ nên phương án **B** đúng.

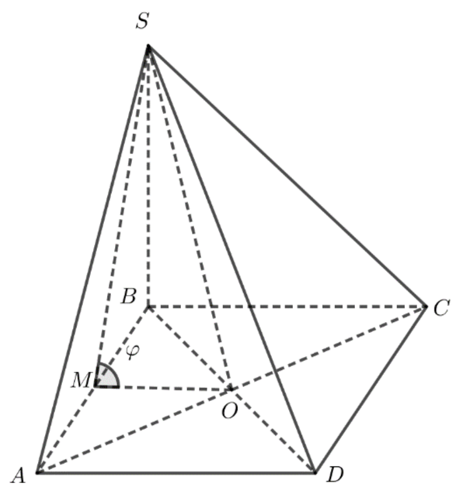
Xét phương án **C**: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ nên phương án **C** đúng.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ AC \perp SA \left(SA \perp (ABC)\right) \\ AB \perp SA \left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow \left((SAB),(SAC)\right) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ nên phương án **D** sai.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dướI đây

A. $(ABCD) \perp (SBD)$. **B.** $(SAB) \perp (ABCD)$. **C.** $(SAC) \perp (SBD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB. Suy ra

$\begin{cases} MO \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \widehat{SMO} = \varphi.$

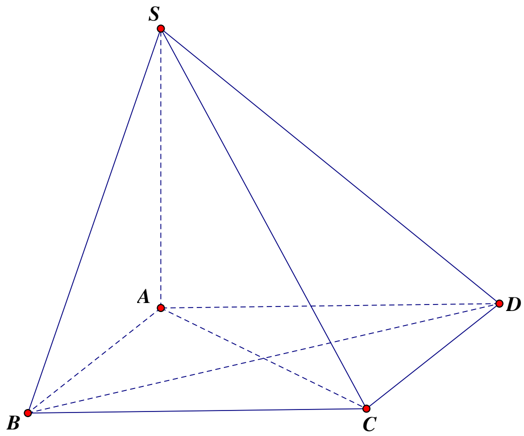
Tam giác SMO vuông tại O nên $\varphi \neq 90^\circ$.

Do đó $(ABCD)$ không vuông góc với mặt phẳng (SAB).

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây **SAI**?

A. $(SAB) \perp (ABCD)$ **B.** $(SAC) \perp (ABCD)$. **C.** $(SAC) \perp (SBD)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải



Ta có

$\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ SA \subset (SAB) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$. Suy ra A đúng.

$\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ SA \subset (SAC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$. Suy ra B đúng.

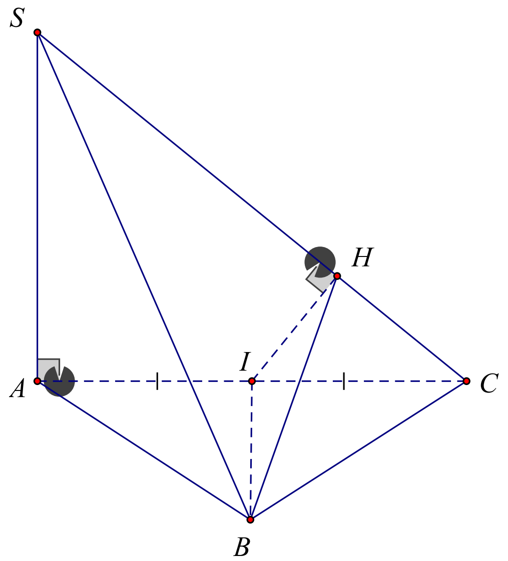
$\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \\ AC \cap SA = \{A\} \\ AC, SA \subset (SAC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BD \perp (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$. Suy ra C đúng.

$((SAB),(SAC)) = (AD, BD) = 45^\circ$. Suy ra D sai.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH) \perp (SBC)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SBC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC(\text{gt}) \\ BI \perp SA\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \supset SC \Rightarrow SC \perp BI \quad (1)$.

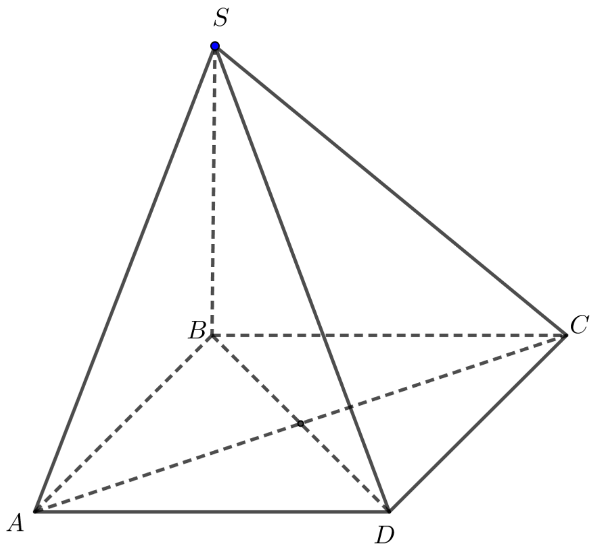
Theo giả thiết: $SC \perp IH \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BIH)$. Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BIH) \perp (SBC)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD)?

A. (SBC). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SAC).

Lời giải

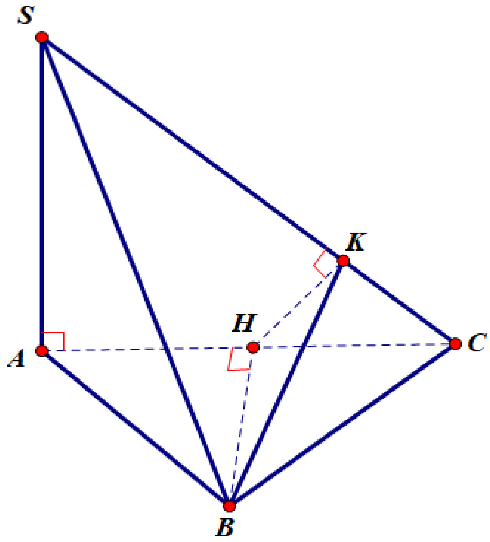


Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. $SA \perp (ABC)$, H là trung điểm AC, K là hình chiếu vuông góc của H lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SAC)\perp(SAB)$. **B.** $(BKH)\perp(ABC)$. **C.** $(BKH)\perp(SBC)$. **D.** $(SBC)\perp(SAC)$.

Lời giải



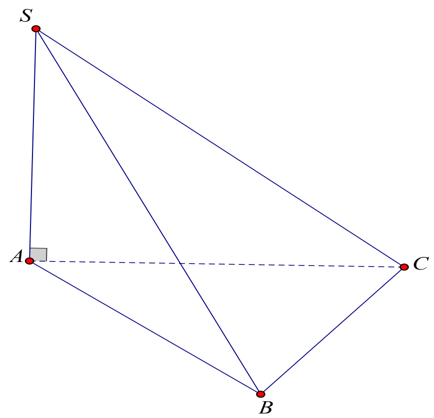
Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BH\\ \Delta ABC \text{ đều } \Rightarrow AC\perp BH\end{array}\right\}\Rightarrow HB\perp SC\\ HK\perp SC\end{array}\right\}\Rightarrow SC\perp(BKH)\Rightarrow(SBC)\perp(BKH)$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $(SBC)\perp(SAB)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(SAC)\perp(SBC)$. **D.** $(ABC)\perp(SBC)$.

Lời giải



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}SA\perp(ABC)\\ AC\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp SA.$$

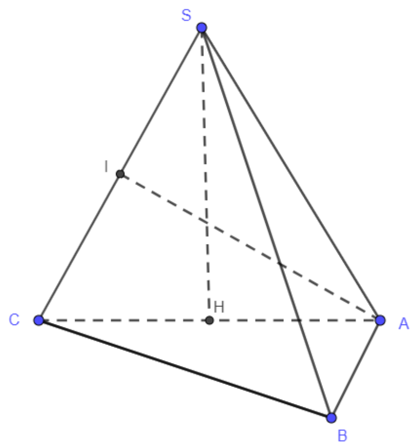
Mà $AC\perp AB$.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AC\perp(SAB)\\ AC\subset(SAC)\end{array}\right\}\Rightarrow(SAC)\perp(SAB).$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $AI\perp SC$. **B.** $(SBC)\perp(SAC)$. **C.** $AI\perp BC$. **D.** $(ABI)\perp(SBC)$.

Lời giải



Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI\perp SC$ (1).

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH\perp AC$.

Mà $(SAC)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH\perp(ABC)$ do đó $SH\perp BC$.

Mặt khác, do tam giác ABC vuông tại C nên $BC\perp AC$.

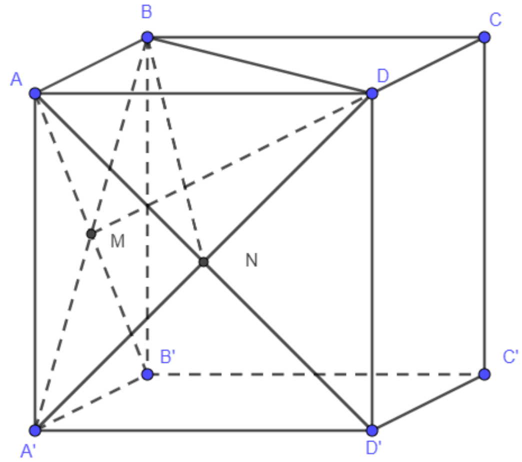
Từ đó suy ra $BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AI$ (2).

Từ $(1),(2)\Rightarrow AI\perp(SBC)\Rightarrow(ABI)\perp(SBC)$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(A'BD)$ không vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(AB'D)$. **B.** $(ACC'A')$. **C.** (ABD'). **D.** $(A'BC')$.

Lời giải

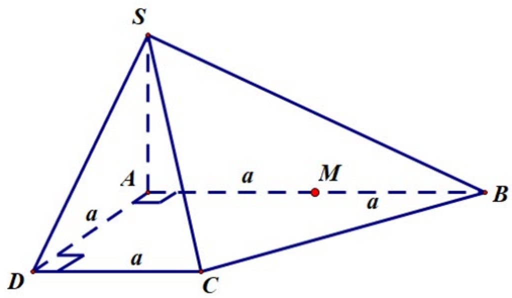


Gọi M,N lần lượt là tâm hình vuông $ABB'A', ADD'A'$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SBC)\perp(SAC)$. **B.** $(SAD)\perp(SAB)$. **C.** $(SCD)\perp(SAD)$. **D.** $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải



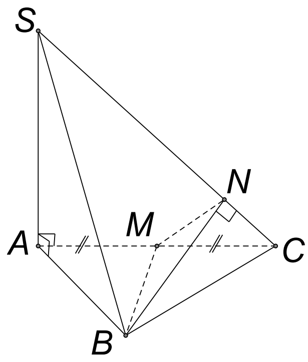
Gọi M là trung điểm AB. Ta có $CM = MA = MB = a$. Suy ra ΔACB vuông tại C.

$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC)\perp(SAC)$. Do đó phương án A đúng.

$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB)\perp(SAD)$. Do đó phương án B đúng.

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD)\perp(SAD)$. Do đó phương án C đúng.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ΔABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC, N là hình chiếu của B lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $(BMN)\perp(SBC)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(BMN)\perp(ABC)$. **D.** $(SAC)\perp(SBC)$.

Lời giải

Ta có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow BM\perp SA$

Mà $BM\perp AC$

$\Rightarrow BM\perp(SAC)\supset SC\Rightarrow SC\perp BM\ (1)$.

Theo giả thiết: $SC\perp BN\ (2)$.

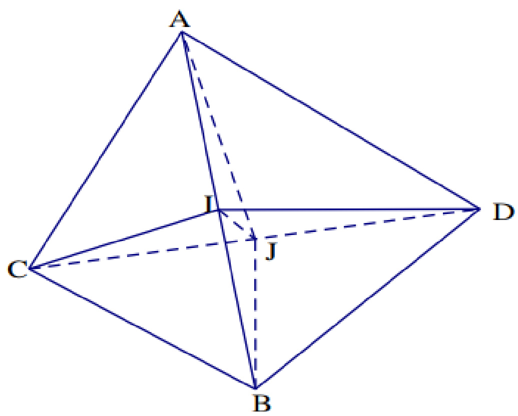
Từ (1) và (2) suy ra: $SC\perp(BMN)$.

Mà $SC\subset(SBC)$ nên $(BMN)\perp(SBC)$.

Câu 16: Cho tam giác ACD và tam giác BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau và $AC=AD=BC=BD=a;CD=2x$. Với giá trị nào của x thì $(ABC)\perp(ABD)$.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I,J lần lượt là trung điểm AB,CD.

Suy ra $CI\perp AB;DI\perp AB$ mà $(ABC)\cap(ABD)=AB$.

Do đó $(ABC)\perp(ABD)\Leftrightarrow\widehat{CID}=90^o\Leftrightarrow IJ=\frac{1}{2}CD$.

Ta có

$$\begin{cases}(ACD)\perp(BCD)\\ AJ\perp CD\end{cases}$$
$\Rightarrow AJ\perp(BCD)\Rightarrow AJ\perp JB$.

Mặt khác $JA=JB\left(\Delta ACD=\Delta BCD\right)$ nên tam giác JAB vuông cân tại J.

Do đó $IJ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}JA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{AC^2-JC^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2-x^2}$.

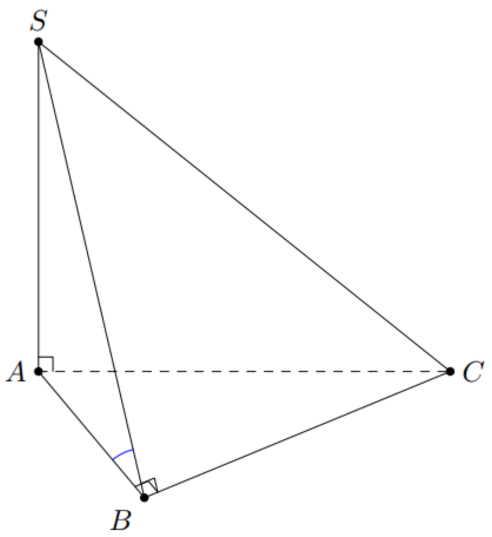
Vậy $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2-x^2}=x\Leftrightarrow a^2=3x^2\Leftrightarrow x=a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. $\widehat{SBC}$. **B.** $\widehat{SCA}$. **C.** $\widehat{SAB}$. **D.** $\widehat{SBA}$.

Lời giải

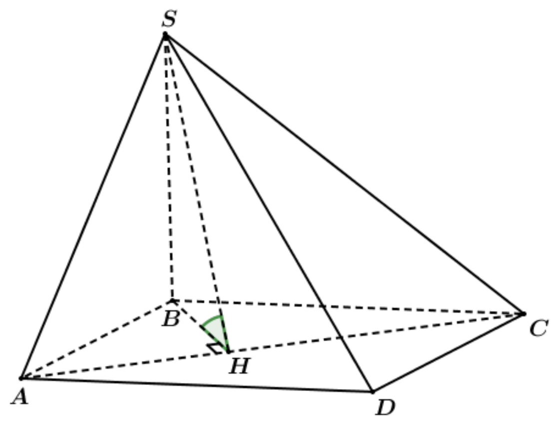


Có $\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)=\widehat{SBA}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SB=2a, AB=3a, BC=4a$ và góc α là góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng đáy. Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải



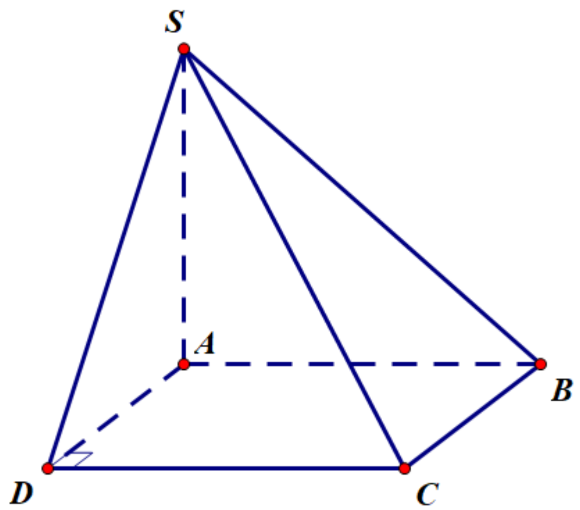
Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow \alpha = \widehat{SHB}$.

Ta có $HB = \dfrac{BA.BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \dfrac{3a.4a}{5a} = \dfrac{12a}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SB}{BH} = \dfrac{2a}{\frac{12a}{5}} = \dfrac{5}{6}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính $\cos\alpha$ với α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp CD$, cùng với $CD \perp AD$ ta được $CD \perp (SAD)$.

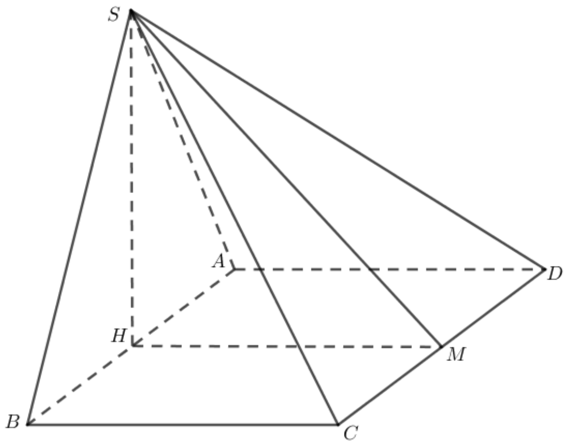
Xét hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ ta có $CD = (SCD) \cap (ABCD)$, đồng thời $CD \perp (SAD)$ do vậy góc tạo bởi hai mặt phẳng trên là $\alpha = \widehat{SDA}$. Độ dài $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{AD}{SD} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 20: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có: $SH \perp AB$, $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó: $AB \perp SH, MN$. Suy ra $AB \perp (SHM)$, mà $AB // CD$ nên $(SHM) \perp (SAB), (SCD)$.

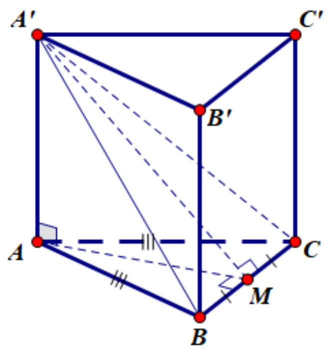
Vậy $\alpha = \widehat{MSH}$.

Xét tam giác SMH vuông tại H có: $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = a$. Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{HM}{HS} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, BC = 2a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

Có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp A'M$.

Do đó $\left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right) = \widehat{AMA'}$.

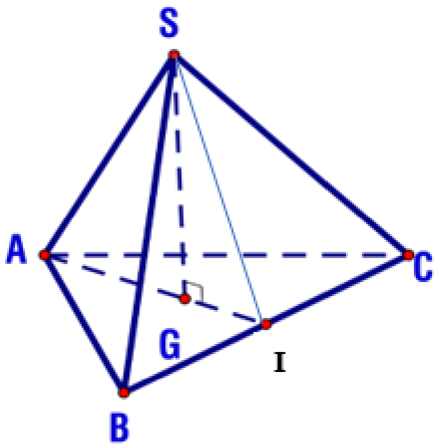
Lại có ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow AM = \dfrac{BC}{2} = a$.

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A có $\tan\widehat{AMA'} = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AMA'} = 60°$.

Câu 22: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Tính tan của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SG \perp (ABC)$.

Suy ra $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA, AG}\right) = \widehat{SAG} \Rightarrow \widehat{SAG} = 60°$.

Tam giác SAG vuông tại G có $\tan\widehat{SAG} = \dfrac{SA}{AG} \Rightarrow SG = AG.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$.

Gọi I là trung điểm của BC, suy ra $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \left(\widehat{SI, GI}\right) = \widehat{SIG}$.

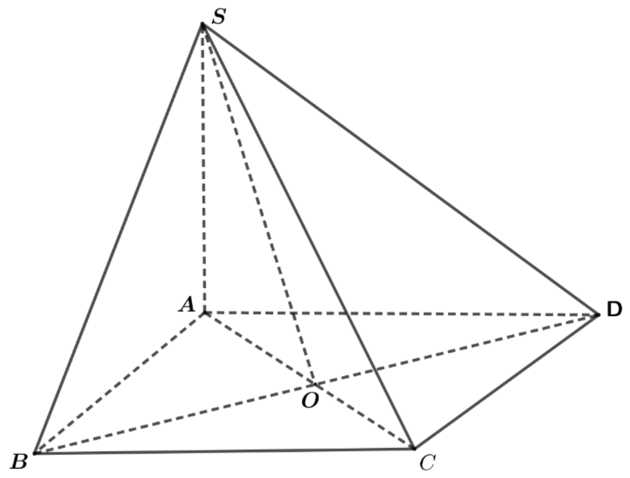
Tam giác SIG vuông tại G có $\tan\widehat{SIG} = \dfrac{SG}{IG} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $\tan\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = 2\sqrt{3}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng ?

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải



Gọi O là tâm của $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \end{cases}$

Suy ra $\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SO, AC}\right) = \widehat{SOA}$

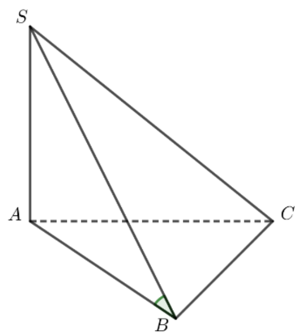
Tam giác SAO vuông tại A: $\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng $AC = a\sqrt{2}$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải



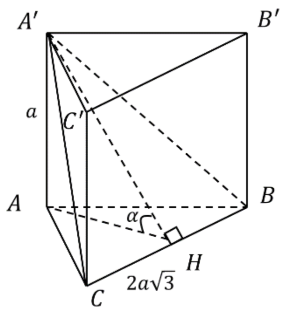
Tam giác ABC vuông cân tại B mà $AC = a\sqrt{2}$ nên $AB = AC = a$.

Ta có $(SBC)\cap(ABC)=BC$ và $BC\perp(SAB)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$. Trong tam giác vuông SBA có $\tan\widehat{SBA}=\frac{SA}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=30^0$.

Câu 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA'=a$, tam giác ABC vuông cân tại A, $BC=2a\sqrt{3}$. Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng:

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0 **D.** 90^0

Lời giải



Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Tam giác ABC cận tại A nên AH vuông góc với BC.

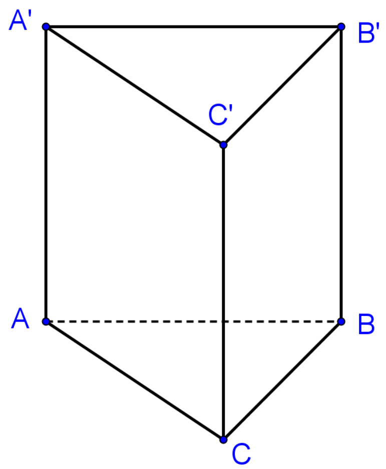
Ta có $\begin{cases}AH\perp BC\\AA'\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AH)\Rightarrow BC\perp A'H$.

Ta có lại có $\begin{cases}(ABC)\cap(A'BC)=BC\\AH\subset(ABC)\\AH\perp BC\\A'H\subset(A'BC)\\A'H\perp BC\end{cases}$, nên góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng góc $\widehat{A'HA}=\alpha$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại A có $\tan\alpha=\frac{AA'}{AH}=\frac{a}{\frac{1}{2}BC}=\frac{a}{\frac{1}{2}2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

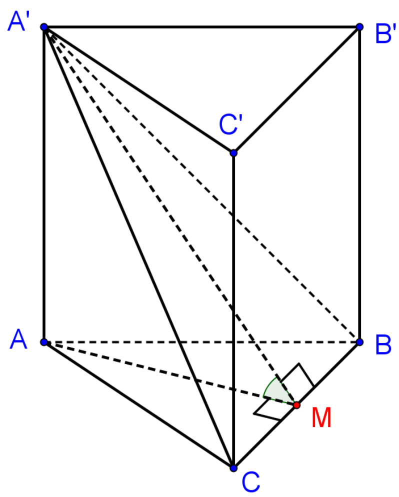
Suy ra góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^0.

Câu 26: Cho lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a, tan của góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



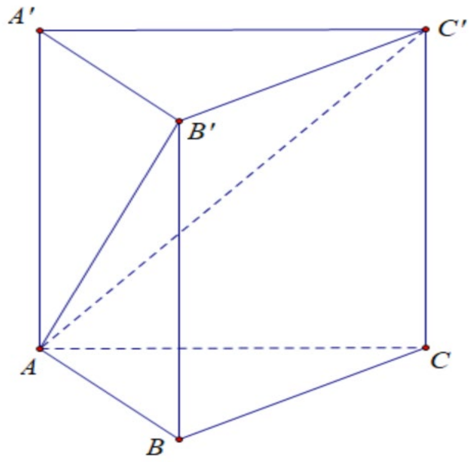
Gọi M là trung điểm của BC, khi đó $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $BC \perp AM$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (A'AM)$. Suy ra $BC \perp A'M$.

Vì $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $A'M \perp BC$, $AM \perp BC$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa $A'M$ và AM, nghĩa là là góc $A'MA$.

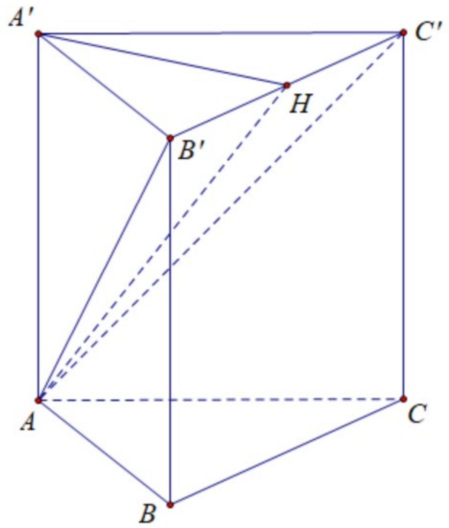
$\Delta A'AM$ vuông ở $A \Rightarrow \tan \widehat{A'MA} = \dfrac{A'A}{AM} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 27: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, chiều cao bằng a. Tính số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC)?



A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** $26^0 33'$.

Lời giải



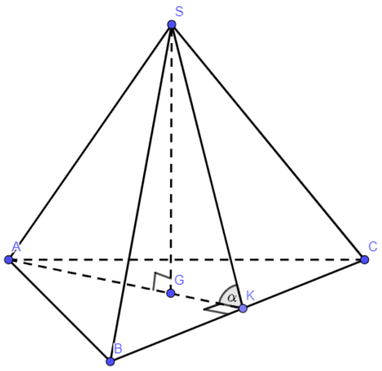
Gọi H là trung điểm của $B'C'$, do các tam giác $\Delta A'B'C'$, $\Delta AB'C'$ lần lượt cân đỉnh A' và A nên $AH \perp B'C'$, $A'H' \perp B'C'$ nên $\widehat{\left(\left(AB'C'\right),\left(ABC\right)\right)} = \widehat{\left(\left(AB'C'\right),\left(A'B'C'\right)\right)} = \widehat{\left(AH, A'H\right)} = \widehat{AHA'}$

Xét tam giác AHA' có $\widehat{A'} = 90^0, A'H = a\sqrt{3}$ và $\tan\widehat{AHA'} = \dfrac{AA'}{A'H} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AHA'} = 30^0$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều có thể tích bằng $a^3\sqrt{3}$, trọng tâm G của tam giác ABC là chân đường cao của hình chóp và $SG = 3a$. Gọi α là góc hợp bởi mặt bên (SBC) với mặt đáy. Tính $\cot\alpha$

A. $\cot\alpha = \dfrac{9}{2}$. **B.** $\cot\alpha = 3\sqrt{3}$. **C.** $\cot\alpha = \dfrac{2}{9}$. **D.** $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải



Ta có: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SG.S_{ABC}\Leftrightarrow a^3\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}.3a.\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow AB=2a$

Gọi K là giao điểm của AG và BC $\Rightarrow GK\perp BC$

Ta có: $\begin{cases}SG\perp BC\\GK\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SGK)\Rightarrow BC\perp SK$

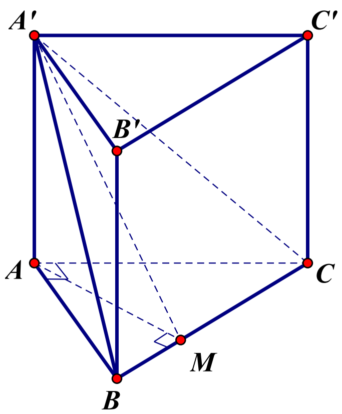
Từ và suy ra $\alpha=((SBC),(ABCD))=(GK,SK)=\widehat{SKG}$

Ta có: $\cot\alpha=\dfrac{GK}{SG}=\dfrac{\frac{AK}{3}}{3a}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{3a}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 29: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=a\sqrt{3}$. Ký hiệu φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$. Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\tan\varphi=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Kẻ $AM\perp BC$ tại M. Lại có $AA'\perp BC$. Suy ra $BC\perp(AMA')\Rightarrow BC\perp A'M$.

Suy ra $((A'BC),(BB'C'C))=(A'M,AM)=\widehat{A'MA}=\varphi$.

Xét ΔABC vuông tại A có AM là đường cao.

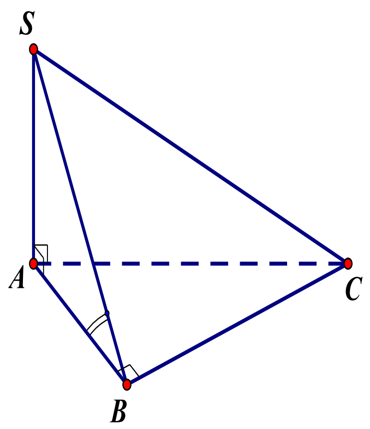
$$\Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{A'A}{AM} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} == \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Do $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SB \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $(SB, AB) = \widehat{SBA}$.

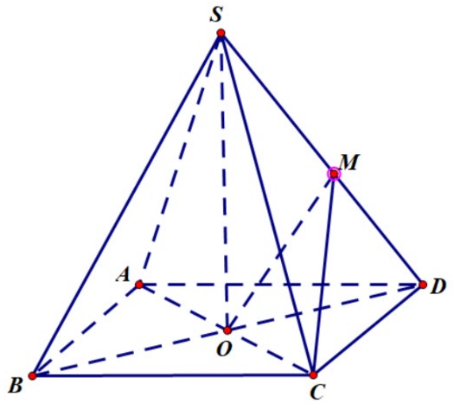
Ta có $\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 31: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{6}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a, BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD vuông tại S

Suy ra $SB \perp SD$ mà $OM \parallel SB$ nên $OM \perp SD$.

Ta có:

$$\begin{cases} (SBD) \cap (SCD) = SD \\ (SBD) \supset OM \perp SD \\ (SCD) \supset CM \perp SD \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBD)(SCD))} = \widehat{OMC}.$$

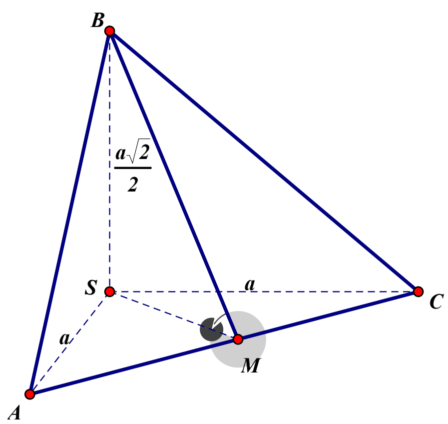
Lại có: $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

Xét tam giác vuông MOC, có $\tan \widehat{CMO} = \dfrac{OC}{OM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{2}{a} = \sqrt{2}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SC = a$, $SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải



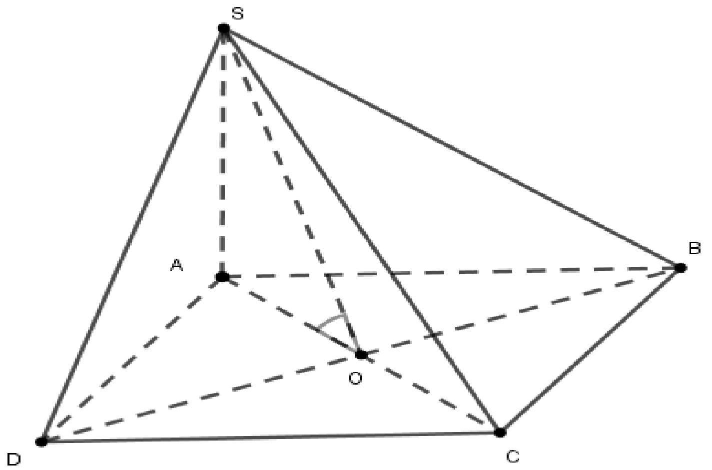
+ Gọi M là trung điểm AC nên $SM \perp AC; BM \perp AC$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng $\left(\widehat{SM;BM}\right)$ bằng $\widehat{SMB}$

+ Tính được $AC = a\sqrt{2}; SM = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra tam giác SBM vuông cân tại S nên góc $\widehat{SMB} = 45^0$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy $(ABCD)$ là

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $75°$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $(\text{SBD}) \cap (\text{ABCD}) = \text{BD}$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AO \perp BD$.

Lại có $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SO$. Do đó, ta có $((SBD);(ABCD)) = (SO; AO)$.

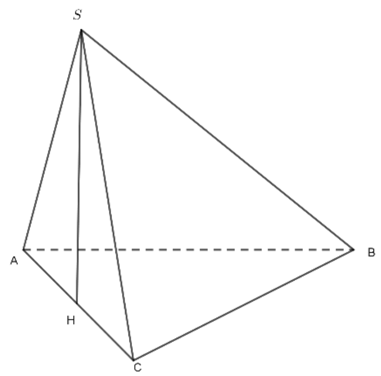
Vì ΔSAO có $\widehat{SAO} = 90°$ nên $\widehat{SOA}$ là góc nhọn và ta có $((SBD);(ABCD)) = \widehat{SOA}$.

Xét ΔSAO ta có $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 30°$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của A **C.**

Ta có: H là trung điểm AC thì $SH \perp AC$

Mà $\begin{cases}(SAC) \perp (ABC) \\ (SAC) \cap (ABC) = AC\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

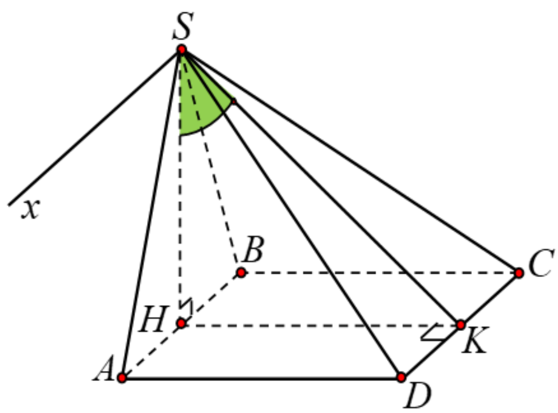
Ta có $\begin{cases}BC \perp AC \\ BC \perp SH\left(SH \perp (ABC) \supset BC\right)\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$

Lại có $\begin{cases}(SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SBC) \supset SC \perp BC \\ (ABC) \supset AC \perp BC\end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SCA} = 60^0$

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB

Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$

Mà $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Mặt khác $\begin{cases} AB \parallel CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \,//\, AB \,//\, CD$

Mà $\begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = Sx \\ (SAB) \supset SH \perp Sx \\ (SCD) \supset SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \widehat{HSK}$, với K là trung điểm CD.

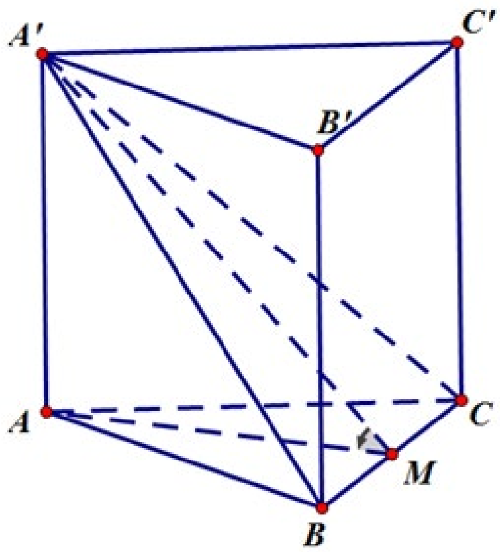
Xét tam giác HSK vuông tại H có: $\tan \widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \tan\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

Tam giác ABC đều nên ta có: $AM \perp BC$.

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp BC$.

Từ và ta suy ra $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp A'M$.

Ta lại có $(ABC) \cap (A'BC) = BC$.

$\Rightarrow \left(\widehat{(A'BC);(ABC)}\right) = \left(\widehat{AM;A'M}\right) = \widehat{A'MA} = \varphi$

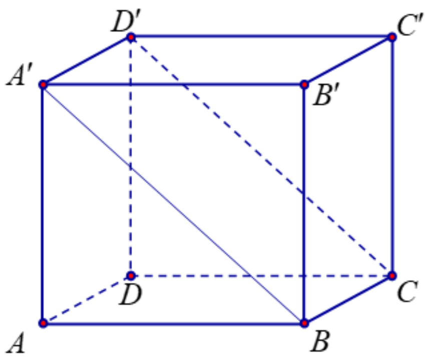
Ta có: $\tan\varphi = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\varphi = 30°$.

Câu 37: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = a$, $AC = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Ta có: $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ BA' \perp BC \\ (ABCD) \cap (A'D'CB) = BC \end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABA'}$.

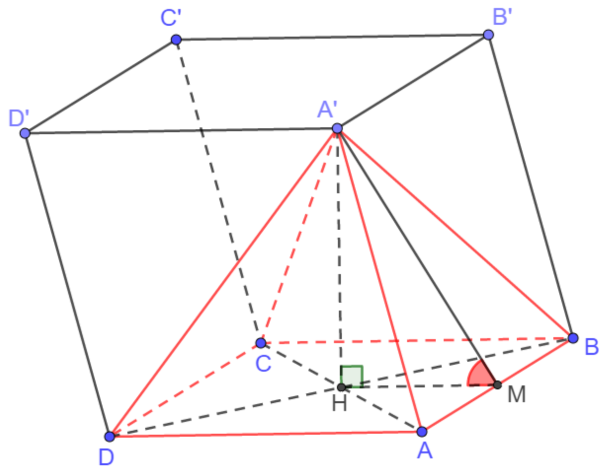
$\tan\widehat{A'BA} = \dfrac{A'A}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AC^2 - BC^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{A'BA} = 45°$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$.

Câu 38: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trùng với giao điểm H của hai đường chéo AC và BD, $A'H = a\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy của hình hộp bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB.

Ta có: $(ABB'A')\cap(ABCD)=AB$.

Mặt khác

$HM\perp AB$.

$A'M\perp AB$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy là góc $\widehat{A'MH}$.

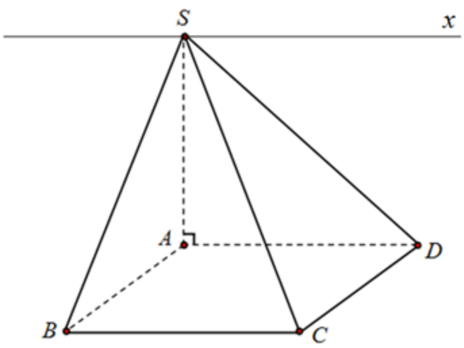
$$\tan\widehat{A'MH}=\frac{A'H}{HM}=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{A'MH}=60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng 60°.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°

Lời giải



Ta có: $(SBC)\cap(SAD)=Sx\,//\,BC\,//\,AD$

Ta dễ dàng chứng minh được $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB\Rightarrow Sx\perp SB$

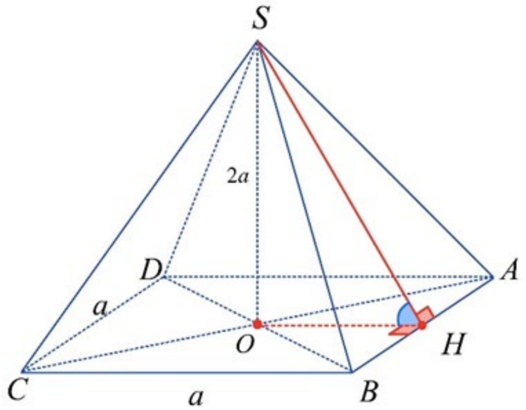
Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow SA \perp Sx$

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc $\widehat{BSA} = 45°$.

Câu 40: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha = \frac{1}{4}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = 4$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO$ là đường cao của hình chóp đều $S.ABCD \Rightarrow SO = 2a$

Ta có: $AB = (SAB) \cap (ABCD)$ (1)

Gọi H là trung điểm AB

Mà ΔSAB cân tại $S \Rightarrow$ SH là đường cao ΔSAB

$\Rightarrow SH \perp AB$ (2)

Lại có: OH là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow OH \perp AB$ (3)

Và $OH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

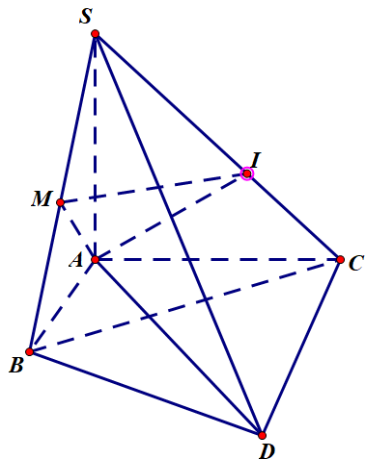
Từ $(1),(2),(3)$, suy ra $\alpha = \widehat{((SAB);(ABCD))} = \widehat{SHO}$

Xét ΔSOH vuông tại $O \Rightarrow \tan\alpha = \frac{SO}{OH} = \frac{2a}{\frac{a}{2}} = 4$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đáy ABC có $BC = a$ và $\widehat{BAC} = 150°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Gọi điểm $D \in (ABC)$ sao cho $DB \perp AB; DC \perp AC$

Ta chứng minh được $BD \perp (SAB) \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow SD \perp AM$

Tương tự: $SD \perp AN$

Vậy $SD \perp (AMN)$; mà $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là góc giữa SA và SD.

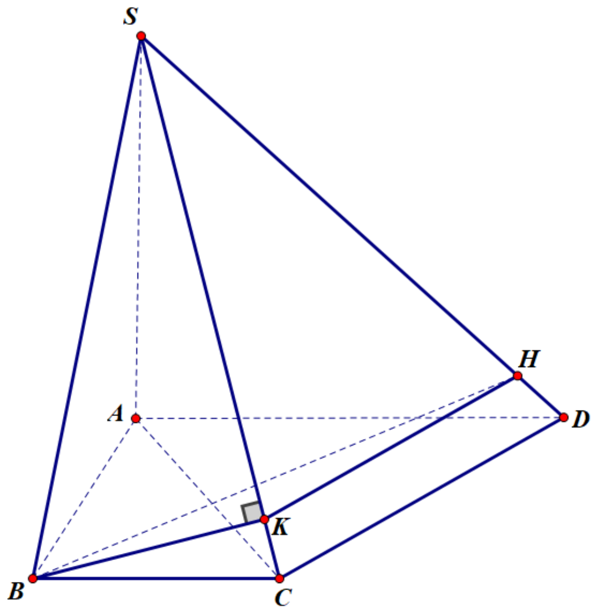
Xét tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp và có $AD = 2R = \dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2a$.

Xét tam giác vuông SAD, có $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 60°$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. 30^0. **B.** 150^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Ta có:

$SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{5};SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=a\sqrt{3};CD=\sqrt{CM^2+MD^2}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C do

$SC^2+CD^2=SD^2\Rightarrow SC\perp CD$

ΔSAB **có** $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{2}$

Ta có $\Delta SBC:SC^2=SB^2+BC^2\Rightarrow \Delta SBC$ vuông

Trong ΔSBC kẻ $BK\perp SC=K$

Ta có $CD\perp(SAC)$ suy ra $CD\perp SC$

Trong ΔSCD có $CD\perp SC$, từ K kẻ $KH//CD$

Góc giữa và là góc giữa BK và KH

Xét ΔSBC có $BK.SC=SB.BC\Rightarrow BK=\dfrac{a\sqrt{2}.a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Xét ΔSBK có $SK=\sqrt{SB^2-BK^2}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Trong ΔSCD có KH song song với CD nên theo định lý Talet

$\dfrac{SH}{SD}=\dfrac{SK}{SC}=\dfrac{KH}{CD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow KH=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3};SH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$

Xét ΔSBD theo định lý cosin trong tam giác: (ΔSBD có $SB=a\sqrt{2};SD=BD=a\sqrt{5}$)

$\cos BSD=\dfrac{SB^2+SD^2-BD^2}{2.SB.SD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ mà

$$\cos BSH = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{SB^2 + SH^2 - BH^2}{2.SB.SH} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{26}}{3}$$

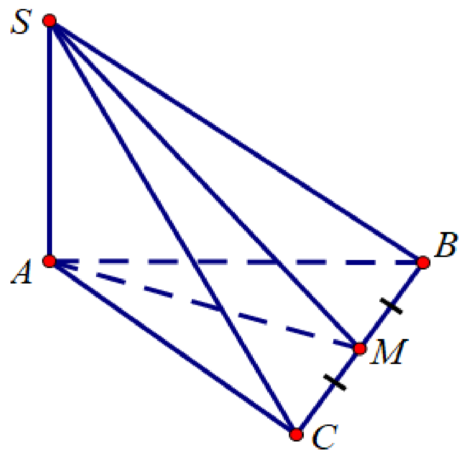
$$\cos BKH = \frac{KB^2 + KH^2 - BH^2}{2.KB.KH} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra góc BKH bằng 150^o do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 30^0.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, các mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, $SA = \frac{a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Do các mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy suy ra $SA \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do tam giác ABC đều, nên ta có $AM \perp BC$. Do đó $BC \perp (SAM)$ suy ra $BC \perp SM$.

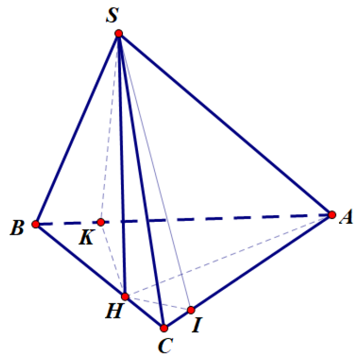
Từ đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SMA}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 30^0$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1. Mặt bên SBC là tam giác nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Các mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ lần lượt tạo với đáy các góc 60^o và 30^o. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC). Tính $\sin\varphi$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{61}}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{61}}{28}$. **D.** $\frac{\sqrt{235}}{28}$.

Lời giải



Kẻ $SH \perp BC, HK \perp AB, HI \perp AC$.

Ta có: $\widehat{SKH} = 60^o \Rightarrow HK = SH.\cot 60^o = \dfrac{SH}{\sqrt{3}}$

$\widehat{SIH} = 30^o \Rightarrow HI = SH.\cot 30^0 = SH.\sqrt{3}$

$\Rightarrow HI = 3HK \; hay \; CH = 3BH$

$\Rightarrow HK = BH\sin 60^o = \dfrac{1}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ và $SK = 2HK = \dfrac{\sqrt{3}}{4}; SH = HK\sqrt{3} = \dfrac{3}{8}$

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{8}.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{32}(dvtt)$

Xét $\Delta SHA: SH = \dfrac{3}{8}; HA = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$ nên $SA = \dfrac{\sqrt{61}}{8}$

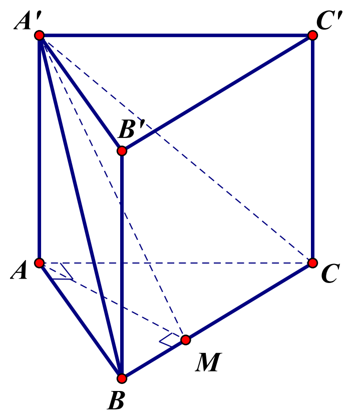
Mặt khác, $V_{SABC} = \dfrac{2S_{SAB}.S_{SAC}.\sin\varphi}{3SA}$ nên thay vào ta tính được

$$\sin\varphi = \dfrac{3.\dfrac{\sqrt{3}}{32}.\dfrac{\sqrt{61}}{8}}{2.\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{61}}{8}$$

Câu 45: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Ký hiệu φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$. Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Kẻ $AM \perp BC$ tại M. Lại có $AA' \perp BC$. Suy ra $BC \perp (AMA') \Rightarrow BC \perp A'M$.

Suy ra $((A'BC),(BB'C'C)) = (A'M, AM) = \widehat{A'MA} = \varphi$.

Xét ΔABC vuông tại A có AM là đường cao.

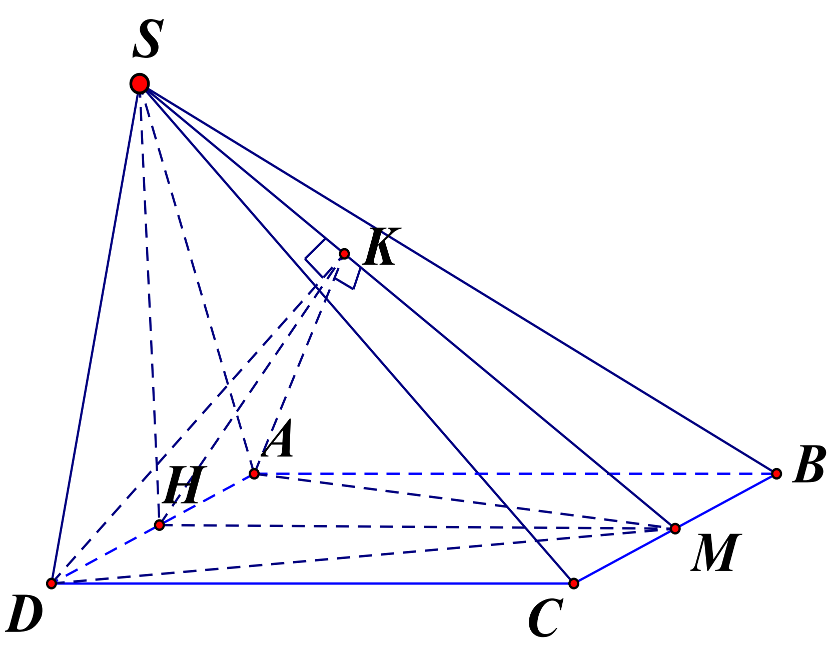
$\Rightarrow \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\tan\varphi = \dfrac{A'A}{AM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} == \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, tam giác SAD cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và có đường cao $SH = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC. Giá trị tang của góc giữa hai mặt phẳng (SDM) và (SAM) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{5}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{21}}{42}$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải



Ta có: Kẻ $DK \perp SM \Rightarrow AK \perp SM$.

Suy ra: $\widehat{\left((SDM);(SAM)\right)} = \widehat{(DK;AK)} = \widehat{DKA}$

Trong ΔSHM vuông tại H,

+ $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{3a^2 + 4a^2} = a\sqrt{7}$.

+ $HK.SM = SH.HM$

$$\Rightarrow HK = \frac{SH.HM}{SM} = \frac{a\sqrt{3}.2a}{a\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

+ ΔDAK cân tại K

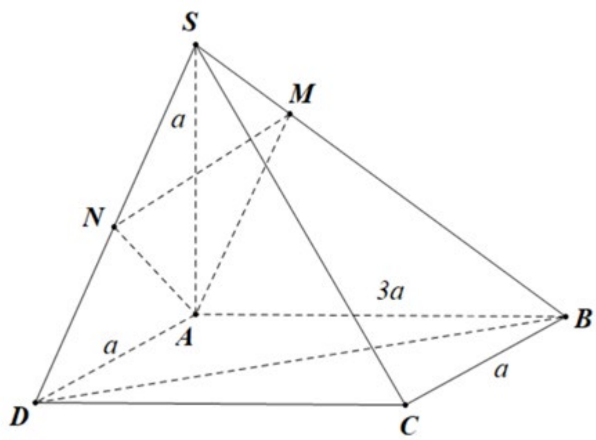
$$\tan\widehat{DKH} = \frac{DH}{HK} = a\frac{7}{2a\sqrt{21}}. = \frac{7\sqrt{21}}{42}.$$

Vậy $\tan\widehat{DKA} = \dfrac{2\tan\widehat{DKH}}{1-\left(\tan\widehat{DKH}\right)^2} = \dfrac{2.\dfrac{7\sqrt{21}}{42}}{1-\left(\dfrac{7\sqrt{21}}{42}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{21}}{5}$.

Câu 47: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $AB = 3a$, $AD = a$, $\widehat{BAD} = 120^0$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = \dfrac{1}{10}SB$, N là trung điểm của SD. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$

A. $\dfrac{\sqrt{165}}{55}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{715}}{55}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Lời giải



Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{10} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lại có: $SB.SM = a^2 = SA^2 \Rightarrow AM \perp SB$. Do $SA = AD = a \Rightarrow AN \perp SD$.

Mặt khác: Xét ΔABD có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.COS120^0 = 9a^2 + a^2 + 2.3a.a.\frac{1}{2} = 13a^2$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{13}$.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD có đường kính AK

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BK \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAB) \Rightarrow BK \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBK) \Rightarrow AM \perp SK$.

Lý luận tương tự: $AN \perp SK$. Suy ra $SK \perp (AMN)$.

Theo giả thiết: $SA \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{((AMN)(ABCD))} = \widehat{(SA;SK)} = \widehat{ASK}$.

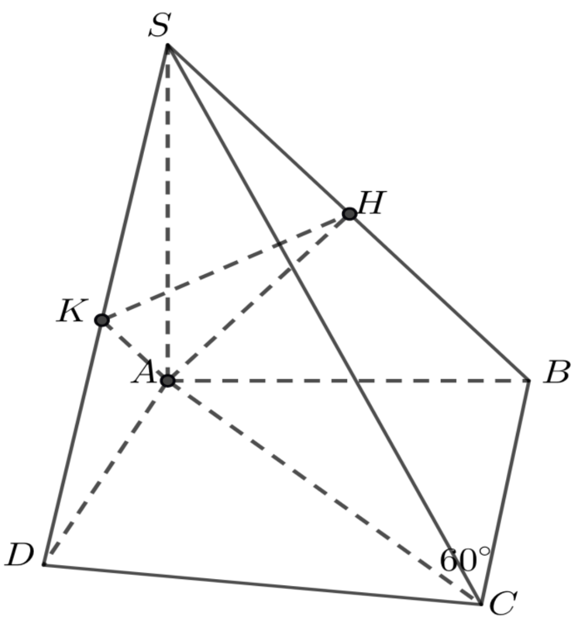
Áp dụng định lý sin vào $\Delta ABD \Rightarrow AK = 2R = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{a\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Xét ΔSAK có: $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{55}}{\sqrt{3}}$ và $\cos \widehat{ASK} = \frac{SA}{SK} = \frac{\sqrt{165}}{55}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = AB\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $AC, \widehat{ACB} = 60°$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD. Tính tan của góc hợp bởi mặt phẳng (AHK) và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Từ giả thiết: $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC nên tam giác ABC vuông tại B và tam giác ADC vuông tại D, do đó $AB \perp BC, AD \perp DC$.

Nhận thấy: $AH \perp SB$, mà $AH \perp BC$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Lại có: $AK \perp SD$, mà $AK \perp CD$

$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$

Từ $(1),(2)$ suy ra $SC \perp (AHK)$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD)$

Ta được góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SA, SC.

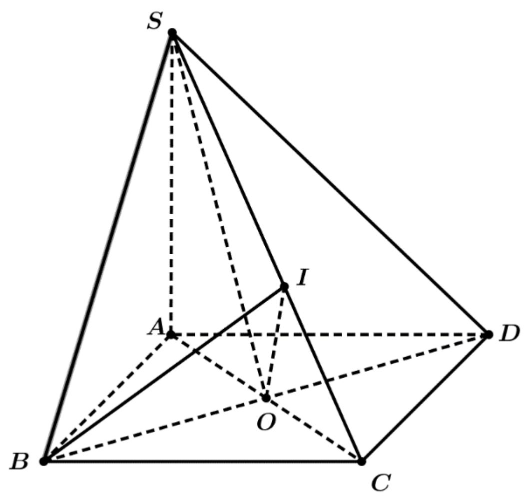
$\Rightarrow ((AHK),(ABCD)) = \widehat{ASC}$

Ta có: $\tan \widehat{ASC} = \frac{AC}{AS} = \frac{\frac{AB}{\sin 60°}}{AB\sqrt{3}} = \frac{\frac{\frac{AB}{\sqrt{3}}}{2}}{AB\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD

◎ Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$

◎ Do đó: $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ AC\perp BD, AC\subset(ABCD)\\ SO\perp BD, SO\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{AO,SO}\right)=\widehat{SOA}=\alpha$

◎ ΔSAO vuông tại A có: $\tan\alpha=\dfrac{SA}{AO}\Rightarrow SA=AO.\tan\alpha=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=a$

◎ Trong ΔSOC kẻ đường cao $OI,(I\in SC)$

◎ Ta có: $\begin{cases}SC\perp OI\\ SC\perp BD,(BD\perp(SAC))\end{cases}\Rightarrow SC\perp(BIO)\Rightarrow SC\perp BI$

◎ Do đó: $\begin{cases}(SAC)\cap(SBC)=SC\\ OI\perp SC, OI\subset(SAC)\\ BI\perp SC, BI\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SBC),(SAC)}\right)=\left(\widehat{OI,BI}\right)=\widehat{BIO}$

◎ $\Delta ICO\sim\Delta ACS(g-g)\Rightarrow\dfrac{IO}{AS}=\dfrac{CO}{CS}\Rightarrow IO=AS\cdot\dfrac{CO}{\sqrt{AC^2+AS^2}}=a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2.\sqrt{2a^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

◎ $\Delta BOI:\tan BIO=\dfrac{BO}{OI}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{BIO}=60^\circ$

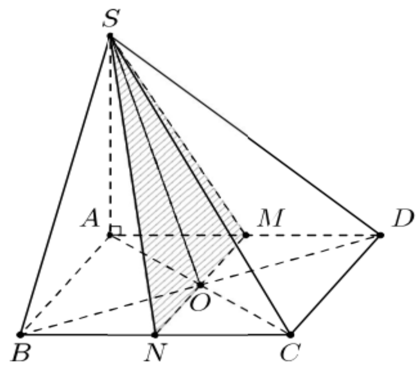
Vậy $\left(\widehat{(SBC),(SAC)}\right)=60^0$

DẠNG 3: DỰNG MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG CHO TRƯỚC. THIẾT DIỆN, DIỆN TÍCH THIẾT DIỆN

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB=a; AD=2a$. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S=\dfrac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

Lời giải



Gọi $M;N$ lần lượt là trung điểm $AD;BC$. Khi đó MN đi qua O và

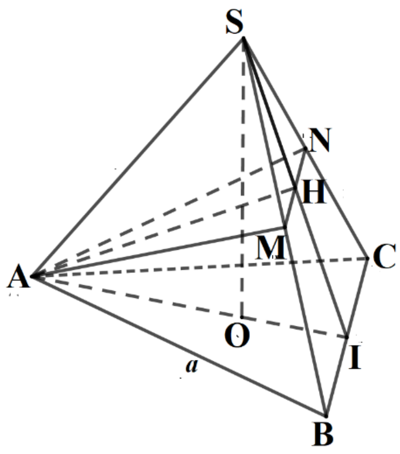
$\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN .Tam giác SMN vuông tại M nên $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2}SM.MN = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2}.AB = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 51: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải



Ta thấy do hình chóp $S.ABC$ đỉnh S là chóp tam giác đều nên $AB = BC = AC = a$.

$\Delta SAB = \Delta SAC(c.c.c) \Rightarrow AM = AN.$

Do đó tam giác AMN cân tại A. Gọi H là trung điểm của MN thì $AH \perp MN$ và I là trung điểm của BC.

$\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \\ Trong\,(AMN): AH \perp MN \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SH; AH \perp SI$ Xét tam giác SAI có đường AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác SAI cân tại A.

Tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA = SB.$

Xét tam giác SBI vuông tại I nên $SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $SH = \frac{1}{2}SI = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Xét tam giác ASH vuông tại H nên $AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $S_{AMN}=\frac{1}{2}.AH.MN=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.\frac{a}{2}=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.