Chương 01

Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

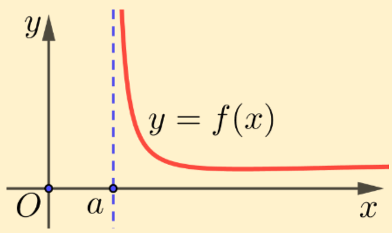
A. Lý thuyết

1. Tiệm cận đứng

Định nghĩa:

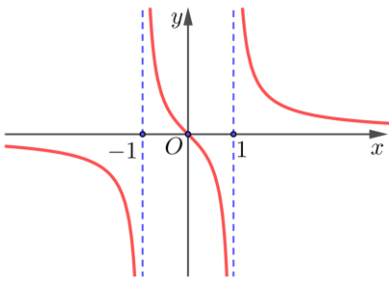
Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đúng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



Chú ý

» Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = -1$

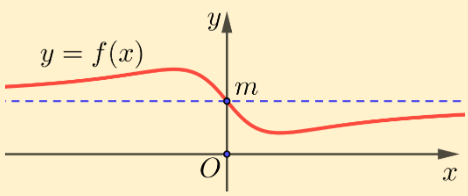


2. Tiệm cận ngang

Định nghĩa:

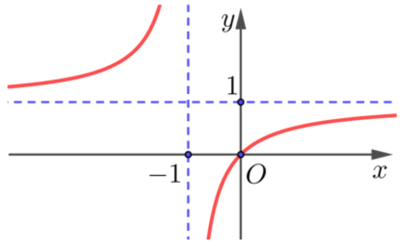
Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m$ hoặc
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m$



Chú ý

» Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=-1$



3. Tiệm cận xiên

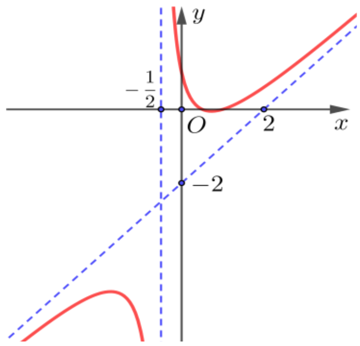
Định nghĩa:

Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ hoặc • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

Chú ý

» Đồ thị hàm số $f(x)=x-2+\dfrac{3}{2x+1}$ cùng tiệm cận đứng $x=-\dfrac{1}{2}$ và tiệm cận xiên $y=x-2$



B Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Tìm Tập xác định của hàm số. Giả Sử $D=(-\infty;+\infty)\setminus\{x_0\}$.

» ***Bước 2:*** Quan sát Bảng biến thiên hoặc đồ thị, tìm giới hạn

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} y=y_0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=y_0\end{array}\right.\Rightarrow y=y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^-} y=-\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} y=-\infty\end{array}\right.\Rightarrow x=x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» $\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-(ax+b)\right]=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-(ax+b)\right]=0\end{array}\right.$ thì $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

⁂ ***Chú ý:***

» $\lim\limits_{x\to+\infty} y=y_1;\lim\limits_{x\to-\infty} y=y_2\Rightarrow y=y_1;y=y_2$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» Tập xác định không có chứa $+\infty;-\infty$ thì đồ thị hàm số không có đường tiện cận ngang.

» Hàm số xác định trên ¡ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Ví dụ 1.1.

Cho hàm số $y=f(x)$ có báng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ 2	↘	-3	↗	3

Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Tập xác định: $D=$ ¡ $\setminus\{0\}$.

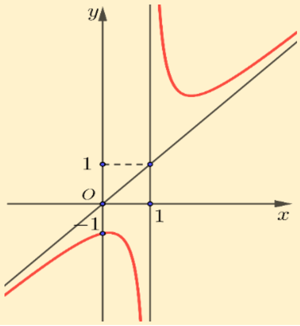
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=3$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=1;y=3$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to0^-} y=-\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=0$.

Vậy tổng số đường tiệm cận của hàm số bằng 3.

Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.



Lời giải

Tập xác định: $D =$ ¡ $\setminus\{1\}$.

» $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đường thẳng (d) đi qua $O(0;0)$ và $A(1;1)$ nên suy ra phương trình đường thẳng $(d): y = x$.

» $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-(x-y)\right]=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x-y)\right]=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên $y = x$.

Ví dụ 1.3.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên ¡ $\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	5 $\searrow$		3	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$ -2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy:

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=5$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $y=5$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=-5$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $y=-5$ làm tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $x=1$ làm tiệm cận đứng.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là 3.

Dạng 2. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị

Phương pháp

Để tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$

» ***Bước 1:*** Tìm Tập xác định của hàm số.

» ***Bước 2:*** Tìm ***tiệm cận ngang*** của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

» ***Bước 3:*** Tìm ***tiệm cận đứng*** của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có): $\lim\limits_{x\to k^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to k^-} f(x)$

» ***Bước 4:*** Tìm ***tiệm cận xiên*** (*dành cho hàm số có dạng phân thức có bậc tử số lớn hơn bậc mẫu số 1 bậc*) bằng một trong hai cách sau:

» *Cách 1:* Nếu biểu diễn $f(x)=ax+b+g(x)$ thì tính $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)\end{cases}$

» *Cách 2:* Xác định đường tiệm cận xiên $y=ax+b$ bằng cách xác định hệ số a,b:

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ hoặc } a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ với } a\neq 0.$$

Khi đó tương ứng ta có $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)$ hoặc $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)$

⁂ ***Chú ý:***

» Đồ thị hàm số chỉ có thể có một trong hai loại tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên.

» Nếu hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực thì không có tiệm cận đứng.

» Hàm số hằng $y=b$ có đồ thị nhận $y=b$ là tiệm cận ngang, hàm số bậc nhất $y=ax+b$ có đồ thị nhận chính nó $y=ax+b$ là tiệm cận xiên.

Ví dụ 2.1.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

» $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2\to y=2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

» $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-2x-1}{x-1}=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2x-1}{x-1}=-\infty\to x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ví dụ 2.2.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

» $\lim\limits_{x\to 0^-} y=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+1}{x}=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+1}{x}=+\infty \to x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

» $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0\to y=x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ví dụ 2.3.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=-\infty$; hoặc

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=+\infty$;

suy ra $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có:

$\lim\limits_{x\to -1^-} y=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=-\infty$; hoặc

$\lim\limits_{x\to -1^+} y=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3-x^2+1}{(x-1)(x+1)}=+\infty$;

Suy ra $x=-1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=-\infty$.

Nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-x^2+1}{x(x^2-1)}=1$ và

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^2+x+1}{x^2-1}=-1$;

Vậy $y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Dạng 3. Đường tiệm cận liên quan góc – khoảng cách – diện tích

Phương pháp

» *Bước 1:* Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

» *Bước 2:* Dựa vào các giả thiết: khoảng cách, góc, diện tích,...để tính toán hoặc thiết lập phương trình, hệ phương trình để tìm ẩn cần tìm.

Ví dụ 3.1.

Tìm các giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2024?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ lần lượt là $y=\dfrac{a}{c}$ và $x=\dfrac{-d}{c}$

Do đó tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4mx+3m}{x-2}$ là $y=4m; x=2$

Hai đường tiệm cân tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2024

$\Leftrightarrow |4m|.2=2024 \Leftrightarrow m=\pm 253$.

Ví dụ 3.2.

Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-x}{x-1}$ có đồ thị (C).

(1) Tính khoảng cách từ $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

(2) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) cắt hai trục tọa độ lần lượt tại hai điểm A,B. Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Lời giải

(1) Tính khoảng cách từ $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C).

Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng: $x-1=0\ (d_1)$.

Khoảng cách từ điểm $M(2;1)$ đến đường tiệm cận đứng $d_1: x-1=0$ của đồ thị hàm số (C) là 1.

(2) Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Ta có $y=\dfrac{2x^2-x}{x-1}=2x+1+\dfrac{1}{x-1}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ nên đồ thị hàm số (C) có tiệm cận xiên là $y=2x+1\ (d_2)$.

Tiệm cận xiên cắt Ox tại $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$, cắt trục Oy tại $B(0;1)$ nên

$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\left|-\frac{1}{2}\right|.|1|=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 3.3.

Cho hàm số $y=\frac{4x+4}{3-x}$ có đồ thị là (C). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C).

Lời giải

$M\in(C)$ suy ra $M\left(m;\frac{4m+4}{3-m}\right)\in(C)$ và $m\neq 3$.

Đồ thị của hàm số $y=\frac{4x+4}{3-x}$ có tiệm cận đứng là $D_1: x-3=0$ và tiệm cận ngang là $D_2: y+4=0$.

Khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng là $d(M;D_1)=|m-3|$.

Khoảng cách từ M đến đường tiệm cận ngang là $d(M;D_2)=\left|\frac{4m+4}{3-m}+4\right|=\left|\frac{16}{3-m}\right|$

Do đó tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) là $d=d(M;D_1)+d(M;D_2)=|3-m|+\left|\frac{16}{3-m}\right|;\forall m\neq 3$.

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có $|3-m|+\left|\frac{16}{3-m}\right|\geq 2\sqrt{|3-m|\left|\frac{16}{3-m}\right|}=8;\forall m\neq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|3-m|=\left|\frac{16}{3-m}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-3=4\\m-3=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7\\m=-1\end{array}\right.$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) bằng là 8 khi $M(7;-8)$, $M_1(-1;0)$.

Dạng 4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

Phương pháp

» ***Bước 1:*** Biểu diễn các đại lượng với nhau thông qua hàm số.
» ***Bước 2:*** Tìm tiệm của hàm số vừa tìm được.
» ***Bước 3:*** Nêu ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận

Ví dụ 4.1.

Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x)=\frac{300x}{100-x}\ \text{(triệu đồng)},\ 0\le x<100.$$

Hãy cho biết:

(1) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

(2) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

Tập xác định: $D=[0;100)$.

Xét hàm số $y=C(x)=\dfrac{300x}{100-x}, 0\le x<100$.

Ta có: $y'=\dfrac{30000}{(100-x)^2}>0$, với mọi $x\in[0;100)$.

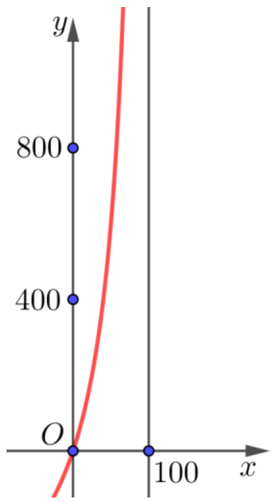
Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0;100)$.

$\lim\limits_{x\to100^-}C(x)=\lim\limits_{x\to100^-}\dfrac{300x}{100-x}=+\infty$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=100$.

Bảng biến thiên:

x	0		$+\infty$
$C'(x)$		$+$	
$C(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số:



(1) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

(2) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Vì $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$)

Nên nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).

Ví dụ 4.2.

Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức

$$S(x) = 200\left(5 - \frac{9}{2+x}\right), \text{ trong đó } x \ge 1.$$

(1) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

(2) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

(1) Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} 200\left(5 - \frac{9}{2+x}\right) = 1000$

Vậy đường thẳng $y = 1000$ là đường tiệm cận nganh của đồ thị hàm số đã cho.

(2) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Khi x đủ lớn thì số lượng sản phẩm bán được của công ty sẽ tiến gần đến 1000.

Ví dụ 4.3.

Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

(1) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200+t}$.

(2) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

(3) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Lời giải

(1) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200+t}$.

Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $25\,.30t = 750t(gam)$.

Thể tích của lượng nước trong bể là $5000 + 25t$ (lít).

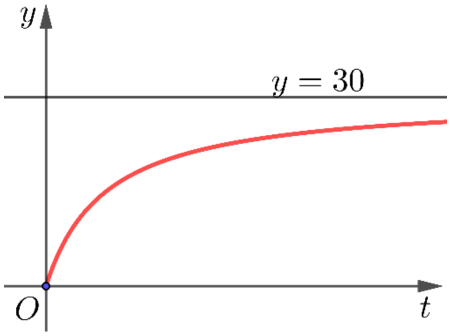
Vậy nồng độ muối sau t phút là $f\left(t\right)=\dfrac{750t}{5000+25t}=\dfrac{30t}{200+t}\left(gam/lit\right)$.

(2) Xem $y=f\left(t\right)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

Ta có:

$$\lim_{t\to+\infty} f\left(t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{30}{200+t}=\lim_{t\to+\infty}\left(30-\frac{6000}{200+t}\right)=30.$$

Vậy đường thẳng $y=30$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f\left(t\right)$.



(3) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Ta có đồ thị hàm số $y=f\left(t\right)$ nhận đường thẳng $y=30$ làm tiệm cận ngang, tức là khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít). Lúc đó, nồng độ muối trong bể sẽ gần như bằng nồng độ muối trong nước muối được bơm vào bể.