BÀI 02 CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN CÔNG THỨC BAYES

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0<P(B)<1$. Khi đó công thức:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

gọi là công thức xác suất toàn phần.

Chú ý 1: Công thức xác suất từng phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

2 Công thức Bayes

Giả sử A và B là hai biến có ngẫu nhiên thỏa mãn $P(A)>0$ và $0<P(B)<1$. Khi đó công thức:

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

gọi là công thức Bayes.

Chú ý:

- Công thức Bayes vẫn đúng với biến cố B bất kì.
- Với $P(A)>0$, công thức $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$ cũng được gọi là công thức Bayes.

Các công thức cần nhớ:

⊕ $P(A)+P(\overline{A})=1$ ⊕ $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$

⊕ $P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(A)$ ⊕ $P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(B)$

Chú ý 2: Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm nhiều giai đoạn có sự liên đới nhau trong quá trình xảy ra.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Công thức xác suất toàn phần

Phương pháp:

Công thức xác suất toàn phần: Cho hai biến cố A và B với $0<P(B)<1$. Khi đó:

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid \overline{B})$$

Chú ý: Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với biến cố B bất kì.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ.

Lời giải

Gọi A là biến cố " lấy được một viên bi màu xanh ở hộp thứ nhất " và B là biến cố " lấy được hai viên bi màu đỏ ở hộp thứ hai"

Khi đó ta có $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B\mid A)=\frac{C_7^2}{C_{11}^2}=\frac{21}{55}$.

Suy ra $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2}{3}$; $P(B\mid \overline{A})=\frac{C_8^2}{C_{11}^2}=\frac{28}{55}$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{1}{3}.\frac{21}{55}+\frac{2}{3}.\frac{28}{55}=\frac{7}{15}.$$

Bài tập 2: Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường. Tính xác suất học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật.

Lời giải

Gọi A là biến cố " học sinh được chọn là học sinh nữ " và B là biến cố " Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ nghệ thuật"

Khi đó ta có $P(A)=0{,}52$, $P(B\mid A)=0{,}18$, $P(B\mid \overline{A})=0{,}15$

Suy ra $P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}48$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=0{,}52.0{,}18+0{,}48.0{,}15=0{,}1656.$$

Bài tập 3: Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5%; trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Chọn ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Tính xác suất người được chọn mắc bệnh A.

Lời giải

Gọi X là biến cố "Người dân được tiêm phòng bệnh A"

Y là biến cố "Người dân mắc bệnh A". Ta có $P(X)=0,65; P(\overline{X})=0,35$.

Tỉ lệ mắc bệnh khi tiêm phòng là: $P(Y\mid X)=0,05$.

Tỉ lệ mắc bệnh khi chưa tiêm phòng là $P(Y\mid \overline{X})=0,17$.

a) Xác suất người này mắc bệnh A là:

$$P(Y)=P(X).P(Y\mid X)+P(\overline{X}).P(Y\mid \overline{X})=0,65.0,05+0,35.0,17=0,092$$

Bài tập 4: Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại luôn tự nhận mình nói thật nhưng xác suất để mỗi chú này nói thật là $0,5$. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật". Tính xác suất của các biến cố A và B.

Lời giải

a) Ta có, trong 7 chú lùn thì có 4 chú lùn luôn nói thật, nên $P(A)=\frac{4}{7}\Rightarrow P(\bar{A})=\frac{3}{7}$

Vì 4 chú lùn luôn nói thật nên $P(B\mid A)=1$.

3 chú lùn còn lại nói thật với xác suất là $0,5$ nên ta có: $P(B\mid \overline{A})=0,5$.

Do đó $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A}).P(B\mid \bar{A})=\frac{4}{7}.1+\frac{3}{7}.0,5=\frac{11}{14}$.

Bài tập 5: Tan giờ học buổi chiều một sinh viên có 60% về nhà ngay, nhưng do giờ cao điểm nên có 30% ngày (số ngày về nhà ngay) bị tắc đường nên bị về nhà muộn. Còn 20% số ngày sinh viên đó vào quán Internet để chơi game, những ngày này xác suất về muộn là 80%. Còn lại những ngày khác sinh viên đó đi chơi với bạn bè và những ngày này có xác suất về muộn là 90%. Xác suất sinh viên đó về muộn là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi biến cố A:"sinh viên đó đi học về muộn".

Biến cố B_1:"sinh viên đó tan học về nhà ngay".

Biến cố B_2:"sinh viên đó tan học đi chơi game".

Biến cố B_3:"sinh viên đó tan học đi chơi với bạn bè".

Ta có: $P(B_1)=0,6; P(A\mid B_1)=0,3$; $P(B_2)=0,2; P(A\mid B_2)=0,8$; $P(B_3)=0,2; P(A\mid B_3)=0,9$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(A)=P(B_1).P(A\mid B_1)+P(B_2).P(A\mid B_2)+P(B_3).P(A\mid B_3)$

$=0,6.0,3+0,2.0,8+0,2.0,9=0,52$.

Bài tập 6: Có hai cái hộp. Hộp thứ nhất có 4 bi trắng và 5 bi đen. Hộp thứ hai có 5 bi trắng và 4 bi đen. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi sau đó chọn ngẫu nhiên 1 viên bi ở hộp thứ hai. Khi đó xác suất để lấy được bi trắng là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi biến cố B_k:"lấy ra được k viên bi trắng từ hộp thứ nhất" trong đó $k=0,1,2,3$.

Biến cố A:"lấy được viên bi trắng từ hộp thứ hai". Khi đó:

Xác suất lấy ra được 0 viên bi trắng từ hộp thứ nhất là $P\left(B_0\right)=\dfrac{C_5^3}{C_9^3}=\dfrac{5}{42}$.

Xác suất lấy ra được 1 viên bi trắng từ hộp thứ nhất là $P\left(B_1\right)=\dfrac{C_4^1C_5^2}{C_9^3}=\dfrac{10}{21}$.

Xác suất lấy ra được 2 viên bi trắng từ hộp thứ nhất là $P\left(B_2\right)=\dfrac{C_4^2C_5^1}{C_9^3}=\dfrac{5}{14}$.

Xác suất lấy ra được 3 viên bi trắng từ hộp thứ nhất là $P\left(B_2\right)=\dfrac{C_4^3}{C_9^3}=\dfrac{1}{21}$.

Xác suất lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ hai với điều kiện lấy được 0 bi trắng từ hộp thứ nhất là

$$P\left(A\,|\,B_0\right)=\frac{5}{12}.$$

Xác suất lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ hai với điều kiện lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ nhất là

$$P\left(A\,|\,B_1\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Xác suất lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ hai với điều kiện lấy được 2 bi trắng từ hộp thứ nhất là

$$P\left(A\,|\,B_2\right)=\frac{7}{12}.$$

Xác suất lấy được 1 bi trắng từ hộp thứ hai với điều kiện lấy được 3 bi trắng từ hộp thứ nhất là

$$P\left(A\,|\,B_3\right)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A)=P\left(B_0\right).P\left(A\,|\,B_0\right)+P\left(B_1\right).P\left(A\,|\,B_1\right)+P\left(B_2\right).P\left(A\,|\,B_2\right)+P\left(B_3\right).P\left(A\,|\,B_3\right)=\frac{19}{36}.$$

Vậy xác suất để lấy được bi trắng từ hộp thứ hai theo đề bài trên là $\dfrac{19}{36}$.

Bài tập 7: Một chiếc hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Tính xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số.

Lời giải

Gọi A là biến cố "viên bi được lấy ra có đánh số"; B là biến cố "viên bi được lấy ra có màu đỏ", suy ra $\overline{B}$ là biến cố "viên bi được lấy ra có màu vàng".

Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số là $P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A\,|\,\overline{B}\right)$.

Ta có $P(B)=\dfrac{50}{80}=\dfrac{5}{8}$, $P\left(\overline{B}\right)=\dfrac{30}{80}=\dfrac{3}{8}$, $P(A\,|\,B)=60\%=\dfrac{3}{5}$, $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=50\%=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid\overline{B})=\frac{5}{8}.\frac{3}{5}+\frac{3}{8}.\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$.

Bài tập 8: Một công ty một ngày sản xuất được 850 sản phẩm trong đó có 50 sản phẩm không đạt chất lượng. Lần lượt lấy ra ngẫu nhiên không hoàn lại 2 sản phẩm để kiểm tra. Xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng là

Lời giải

Gọi A_1, A_2 lần lượt là các biến cố sản phẩm thứ nhất, sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng.

Nếu sản phẩm thứ nhất không đạt chất lượng thì còn 49 sản phẩm không đạt chất lượng trong tổng số 849 sản phẩm nên $P(A_2\mid A_1)=\frac{49}{849}$.

Ta có $P(A_1)=\frac{50}{850}, P(\overline{A_1})=\frac{800}{850}$ và $P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{50}{849}$

Xác suất để sản phẩm thứ hai không đạt chất lượng là

$$P(A_2)=P(A_1).P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1}).P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{50}{850}.\frac{49}{849}+\frac{800}{850}.\frac{50}{849}=\frac{1}{17}.$$

Bài tập 9: Trong trò chơi hái hoa có thưởng của lớp 10A, cô giáo treo 10 bông hoa trên cành cây, trong đó có 5 bông hoa chứa phiếu có thưởng. Bạn Việt hái một bông hoa đầu tiên sau đó bạn Nam hái bông hoa thứ hai. Tính xác suất bạn Nam hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Bông hoa bạn Nam hái được chứa phiếu có thưởng", B là biến cố "Bông hoa bạn Việt hái được chứa phiếu có thưởng".

Ta có $P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}; P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{1}{2}, P(A\mid B)=\frac{4}{9}; P(A\mid\overline{B})=\frac{5}{9}$.

Xác suất bạn Nam hái được bông hoa chứa phiếu có thưởng là

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid\overline{B})=\frac{1}{2}.\frac{4}{9}+\frac{1}{2}.\frac{5}{9}=\frac{1}{2}.$$

Bài tập 10: Vào mỗi buổi sáng ở tuyến phố X, xác suất xảy ra tắc đường khi trời mưa và không mưa lần lượt là $0,6$ và $0,3$. Xác suất có mưa vào một buổi sáng là $0,1$. Tính xác suất để sáng đó tuyến phố H bị tắc đường.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Tuyến phố X bị tắc đường" và B là biến cố "Buổi sáng đó có mưa"

Theo đề ta có: $P(B)=0,1; P(A\mid B)=0,6$; $P(A\mid\overline{B})=0,3$ suy ra $P(\overline{B})=1-P(B)=0,9$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid\overline{B})=0,1.0,6+0,9.0,3=0,33.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho 2 biến cố A và B. Tìm $P(A)$ biết $P(A|B)=0,8$; $P(A|\overline{B})=0,3$; $P(B)=0,4$.

A. $0,1$. **B.** $0,5$. **C.** $0,04$. **D.** $0,55$.

Lời giải

Ta có $P(B)=0,4 \Rightarrow P(\overline{B})=1-0,4=0,6$.

Theo công thức xác suất toàn phần:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B}) \Leftrightarrow P(A)=0,4.0,8+0,6.0,3=0,5.$$

Câu 2: Cho hai biến cố A và B biết $P(A|B)=0,08$; $P(\overline{A}|\overline{B})=0,63$; $P(B)=0,03$. Khi đó xác suất xảy ra biến cố A là bao nhiêu?

A. $0,112$. **B.** $0,5231$. **C.** $0,3613$. **D.** $0,063$.

Lời giải

Ta có: $P(B)=0,03 \Rightarrow P(\overline{B})=1-0,03=0,97$.

$P(\overline{A}|\overline{B})=0,63 \Rightarrow P(A|\overline{B})=1-0,63=0,37$.

Theo công thức xác suất toàn phần:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B}) \Leftrightarrow P(A)=0,03.0,08+0,97.0,37=0,3613.$$

Câu 3: Cho hai biến cố A và B với . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$. **B.** $P(A)=P(A)P(A|B)+P(\overline{A})P(A|\overline{B})$.

C. $P(A)=P(B)P(A|\overline{B})+P(\overline{B})P(A|B)$. **D.** $P(A)=P(B)P(A|B)-P(\overline{B})P(A|\overline{B})$.

Lời giải

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có: $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$.

Câu 4: Cho hai biến cố A và B. Biết $P(B)=0,01$; $P(A|B)=0,7$; $P(A|\overline{B})=0,09$. Khi đó $P(A)$ bằng

A. $0,0079$. **B.** $0,0961$. **C.** $0,0916$. **D.** $0,0970$.

Lời giải

Ta có: $P(B)=0,01 \Rightarrow P(\overline{B})=1-0,01=0,99$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0,01.0,7+0,99.0,09=0,0961.$$

Câu 5: Cho hai biến cố A và B với $P(B)=0,8$, $P(A|B)=0,7$, $P\left(A|\overline{B}\right)=0,45$. Tính $P(A)$.

A. $0,25$. **B.** $0,65$. **C.** $0,55$. **D.** $0,5$.

Lời giải

Ta có: $P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-0,8=0,2$.

Công thức xác suất toàn phần:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)=0,8.0,7+0,2.0,45=0,65.$$

Câu 6: Cho A, B là hai biến cố. Biết $P(B)=0,2$. Nếu B không xảy ra thì thỉ lệ A xảy ra là 2%. Nếu B xảy ra thì tỉ lệ A xảy ra 4%. Xác suất của biến cố A là bao nhiêu?

A. $0,018$. **B.** $0,036$. **C.** $0,028$. **D.** $0,024$.

Lời giải

Ta có: $P(B)=0,2\Rightarrow P\left(\overline{B}\right)=0,8$.

Vì B xảy ra thì tỉ lệ A sảy ra 4% nên $P(A|B)=0,04$.

Tương tự ta cũng có $P\left(A|\overline{B}\right)=0,02$. Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)=0,2.0,04+0,8.0,02=0,024.$$

Câu 7: Cho hai biến cố A,B thỏa mãn $P\left(\overline{B}\right)=0,2;P(A|B)=0,5;P\left(A|\overline{B}\right)=0,3$. Khi đó, $P(A)$ bằng

A. $0,46$. **B.** $0,34$. **C.** $0,15$. **D.** $0,31$.

Lời giải

Ta có: $P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=0,8$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)=0,8.0,5+0,2.0,3=0,46.$$

Câu 8: Cho hai biến cố A,B thỏa mãn $P(A)=0,4;P(A|B)=0,5;P\left(A|\overline{B}\right)=0,1$. Khi đó, $P(B)$ bằng

A. $0,9$. **B.** $0,25$. **C.** $0,2$. **D.** $0,75$.

Lời giải

Đặt $P(B)=x$ suy ra $P\left(\overline{B}\right)=1-x$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)\Leftrightarrow 0,4=0,5x+0,1(1-x)\Leftrightarrow 0,3=0,4x\Leftrightarrow x=0,75$$

Vậy $P(B)=0,75$.

Câu 9: Cho hai biến cố A,B với $P(B)=0,6$, $P(A|B)=0,7$ và $P\left(A|\overline{B}\right)=0,4$. Khi đó, $P(A)$ bằng

A. $0,7$. **B.** $0,4$. **C.** $0,58$. **D.** $0,52$.

Lời giải

Ta có: $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,6=0,4$.

Theo công thức xác suất toàn phần:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,6.0,7+0,4.0,4=0,58.$$

Câu 10: Hai máy tự động sản xuất cùng một loại chi tiết, trong đó máy I sản xuất 35%, máy II sản xuất 65% tổng sản lượng. Tỉ lệ phế phẩm của các máy lần lượt là $0,3\%$ và $0,7\%$. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kho. Tính xác suất để chọn được phế phẩm?

A. $0,0056$. **B.** $0,0065$. **C.** $0,065$. **D.** $0,056$.

Lời giải

Gọi A_1 là biến cố "Sản phẩm được chọn do máy I sản xuất"

A_2 là biến cố "Sản phẩm được chọn do máy II sản xuất"

B là biến cố "Sản phẩm được chọn là phế phẩm"

Ta có $P(A_1)=0,35$, $P(A_2)=0,65$, $P(B|A_1)=0,003$, $P(B|A_2)=0,007$

$$P(B)=P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)=0,0056$$

Câu 11: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các loại xạ thủ loại I là 0,9 và loại II là 0,7. Chọn ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Tìm xác suất để viên đạn đó trúng đích.

A. $0,74$. **B.** $0,86$. **C.** $0,56$. **D.** $0,68$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Viên đạn trúng đích"; B là biến cố "Chọn xạ thủ loại I bắn".

$P(B)=\frac{2}{10}=0,2$; $P(A|B)=0,9$; $P(\overline{B})=1-0,2=0,8$; $P(A|\overline{B})=0,7$

Theo công thức xác suất thành phần ta có

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0,2.0,9+0,8.0,7=0,74.$$

Câu 12: Hộp thứ nhất có 4 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai. Xác suất để lấy ra hai viên bi đỏ ở hộp thứ hai là

A. $\frac{126}{275}$. **B.** $\frac{105}{275}$. **C.** $\frac{110}{275}$. **D.** $\frac{140}{275}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Lấy được 1 viên bi màu xanh ở hộp thứ nhất" và B là biến cố "Lấy được 2 viên bi màu đỏ ở hộp thứ hai".

Khi đó ta có $P(A)=\frac{2}{5}$; $P(B\mid A)=\frac{C_7^2}{C_{11}^2}=\frac{21}{55}$ (vì hộp thứ hai có 4 bi xanh và 7 bi đỏ).

Suy ra $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{3}{5}$; $P(B\mid \overline{A})=\frac{C_8^2}{C_{11}^2}=\frac{28}{55}$ (vì hộp thứ hai có 3 bi xanh và 8 bi đỏ).

Áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})=\frac{2}{5}.\frac{21}{55}+\frac{3}{5}.\frac{28}{55}=\frac{126}{275}.$$

Câu 13: Một công ty may có hai chi nhánh cùng sản xuất một loại áo, trong đó có 56% áo ở chi nhánh I và 44% áo ở chi nhánh II. Tại chi nhánh I có 75% áo chất lượng cao và tại chi nhánh II có 68% áo chất lượng cao (kích thước và hình dáng bề ngoài của các áo là như nhau). Chọn ngẫu nhiên 1 áo. Xác suất chọn được áo chất lượng cao là (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. $0,72$. **B.** $0,35$. **C.** $0,82$. **D.** $0,55$.

Lời giải

Gọi A là biến cố áo được chọn là áo chất lượng cao. B là biến cố áo được chọn ở chi nhánh I và $\overline{B}$ là biến cố áo được chọn ở chi nhánh II.

Từ giải thiết ta có $P(B)=0,56$, $P(A|B)=0,75$, $P(\overline{B})=0,44$, $P(A|\overline{B})=0,68$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,56.0,75+0,44.0,68=0,7192\approx 0,72.$$

Vậy xác suất chọn được áo chất lượng cao là $0,72$.

Câu 14: Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh tại trường X. Nhóm này có 70% học sinh là nam. Kết quả khảo sát cho thấy có 30% học sinh nam và 15% học sinh nữ biết chơi ít nhất một nhạc cụ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm này. Tính xác suất để chọn được học sinh biết chơi ít nhất một nhạc cụ.

A. $0,45$. **B.** $0,35$. **C.** $0,255$. **D.** $0,128$.

Lời giải

Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm.

Gọi A là biến cố "Chọn được một học sinh biết chơi ít nhất một nhạc cụ" và $B,\overline{B}$ lần lượt là các biến cố "Chọn được một học sinh nam" và "Chọn được một học sinh nữ".

Theo đề bài: $P(B)=70\%=0,7;P(\overline{B})=1-0,7=0,3$

$$P(A\mid B)=30\%=0,3;\ P(A\mid \overline{B})=15\%=0,15.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid \overline{B})=0,7.0,3+0,3.0,15=0,255.$$

Vậy xác suất để chọn được một học sinh biết chơi nhạc cụ là $0,255$.

Câu 15: Một trạm chỉ phát hai tín hiệu A và B với xác suất tương ứng 0,85 và 0,15 do có nhiễu trên đường truyền nên $\frac{1}{7}$ tín hiệu A bị méo và thu được như tín hiệu B; còn $\frac{1}{8}$ tín hiệu B bị méo thành và thu được như A. Xác suất thu được tín hiệu A là

A. $\frac{963}{1120}$. **B.** $\frac{283}{1120}$. **C.** $\frac{837}{1120}$. **D.** $\frac{157}{1120}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Phát tín hiệu A"
Gọi B là biến cố "Phát tín hiệu A"
Gọi T_A là biến cố "Phát được tín hiệu A"
Gọi T_B là biến cố "Phát được tín hiệu B"

Với $P(T_A)=P(A).P(T_A\mid A)+P(B).P(T_A\mid B)$

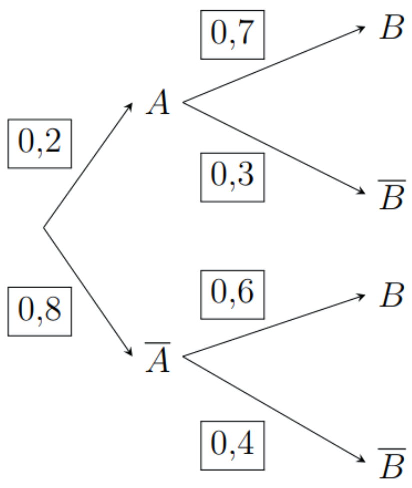
Ta có: $P(A)=0{,}85$

$P(T_B\mid A)=\frac{1}{7}\Rightarrow P(T_A\mid A)=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$; $P(B)=0{,}15; P(T_A\mid B)=\frac{1}{8}$

Do đó $P(T_A)=P(A).P(T_A\mid A)+P(B).P(T_A\mid B)=0{,}85.\frac{6}{7}+0{,}15.\frac{1}{8}=\frac{837}{1120}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $P(B)=P(A).P(B|\ A)+P(\overline{A}).P(B|\ \overline{A})$

b) $P(B|\ A)=0{,}6$.

c) $P(B)=0{,}62$.

d) $P(\overline{B})=0{,}4$.

Lời giải

a) Đúng: Công thức xác xuất toàn phần $P(B)=P(A).P(B|\ A)+P(\overline{A}).P(B|\ \overline{A})$.

b) Sai: Dựa vào sơ đồ cây ta có $P(B|\ A)=0,7$.

c) Đúng: Xác suất của biến cố B là $P(B)=0,2.0,7+0,8.0,6=0,62$.

d) Sai: Ta có $P(\overline{B})=1-P(B)=0,38$.

Câu 2: Cho A và B là hai biến cố của cùng phép thử, biết rằng $P(B)=0,3$; $P(A|B)=0,01$ và $P(A|\overline{B})=0,02$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $P(\overline{B})=0,07$.

b) Công thức xác suất đầy đủ là $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$.

c) Công thức xác suất đầy đủ là $P(A)=P(\overline{B})P(A|B)+P(B)P(A|\overline{B})$.

d) $P(A)=0,017$.

Lời giải

a) Sai: $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,3=0,7$.

b) Đúng: Theo công thức được nêu trong sách giáo khoa.

c) Sai: Công thức $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$

d) Đúng: $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0,3\cdot 0,01+0,7\cdot 0,02=0,017$.

Câu 3: Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình: hạt trơn và hạt nhăn, có hai gene ứng với hai kiểu hình này là gene trội B và gene lặn b. Khi cho lai hai cây đậu Hà Lan, cây con lấy ngẫu nhiên một cách độc lập một gene từ cây bố và một gene từ cây mẹ để hình thành một cặp gene. Giả sử cây bố và cây mẹ được chọn ngẫu nhiên từ một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb là $0,5$.

b) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb là $0,5$.

c) Xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố là $0,6$.

d) Xác suất để cây con có kiểu gene bb là $0,49$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Cây bố có kiểu gene bb"; M là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây bố";

N là biến cố: "Cây con lấy gene b từ cây mẹ"; E là biến cố: "Cây con có kiểu gene bb".

Theo giả thiết M và N độc lập nên $P(E)=P(M).P(N)$.

Ta áp dụng công thức xác suất toàn phần $P(M)=P(A).P(M\mid A)+P(\overline{A}).P(M\mid\overline{A})$.

Ta có $P(A)=0,4; P(\overline{A})=0,6$.

a) Sai: $P(M \mid A)$ là xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene bb. Do đó $P(M \mid A)=1$.

b) Đúng: $P(M \mid \overline{A})$ là xác suất để cây con lấy gene b từ cây bố với điều kiện cây bố có kiểu gene Bb. Do đó $P(M \mid \overline{A})=\frac{1}{2}$.

c) Sai: Thay vào $(*)$ ta được: $P(M)=0,4.1+0,6.\,0,5=0,4+0,3=0,7$.

d) Đúng: Tương tự tính được $P(N)=0,7$. Vậy $P(E)=P(M).P(N)=0,7.0,7=0,49$.

Từ kết quả trên suy ra trong một quần thể các cây đậu Hà Lan, ở đó tỉ lệ cây bố và cây mẹ mang kiểu gene bb, Bb tương ứng là 40% và 60%, thì tỉ lệ cây con có kiểu gene bb là khoảng 49%

Câu 4: Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi vàng, 3 viên bi xanh. Hộp thứ hai chứa 4 viên bi vàng, 5 viên bị xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lấy ra 2 viên bi bất kỳ từ hộp thứ hai. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất để lấy được bi xanh từ hộp thứ nhất là $\frac{3}{8}$.

b) Xác suất để lấy được bi vàng từ hộp thứ nhất là $\frac{5}{7}$.

c) Biết rằng lấy được bi màu xanh từ hộp thứ nhất. Xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu từ hộp thứ hai là $\frac{9}{13}$.

d) Xác suất để lấy được 2 bi vàng từ hộp thứ hai là $\frac{5}{32}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố lấy được bi xanh từ hộp thứ nhất

a) Đúng: Ta có: $P(A)=\frac{3}{8}$.

b) Sai: Ta có $\overline{A}$ là biến cố lấy được bi vàng từ hộp thứ nhất, ta có: $P(\overline{A})=\frac{5}{8}$.

c) Đúng: Gọi B_1 là biến cố lấy được 2 bi khác màu từ hộp thứ hai.

Ta có: $P(B_1 \mid A)=\frac{C_4^1.C_6^1+C_4^1.C_3^1+C_3^1.C_6^1}{C_{13}^2}=\frac{9}{13}$.

d) Sai: Gọi B_2 là biến cố lấy được 2 bi vàng từ hộp thứ hai.

Ta có: $P(B_2)=P(A).P(B_2 \mid A)+P(\overline{A}).P(B_2 \mid \overline{A})=\frac{3}{8}\cdot\frac{C_4^2}{C_{13}^2}+\frac{5}{8}\cdot\frac{C_5^2}{C_{13}^2}=\frac{17}{156}$.

Câu 5: Điểm kiểm tra cuối kì môn Toán của một học sinh phụ thuộc vào việc học sinh đó có chăm chỉ làm bài tập về nhà hay không. Nếu bạn An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì là $0,9$. Còn nếu bạn An không chăm chỉ làm bài tập về nhà thì xác suất đạt điểm không tốt kiểm tra cuối kì là $0,85$. Xác suất An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán là $0,75$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất An được điểm không tốt kiểm tra cuối kì là $0,1$.

b) Nếu An không chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất An được điểm tốt kiểm tra cuối kì là $0,2$.

c) Xác suất để An đạt điểm không tốt kiểm tra cuối kì là $0,35$.

d) Xác suất để An đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì là $0,7125$.

Lời giải

Gọi A là biến cố ‘An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán” và B là biến cố ‘An đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì”. Ta có: $P(A)=0,75$, $P(\overline{A})=1-0,75=0,25$.

a) Đúng: Vì theo giả thiết, nếu bạn An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì là $0,9$. Vậy, nếu An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất An được điểm không tốt kiểm tra cuối kì là $P(\overline{B}\mid A)=1-0,9=0,1$.

b) Sai: Vì theo giả thiết, nếu bạn An không chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất đạt điểm không tốt kiểm tra cuối kì là $0,85$. Vậy, nếu An không chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất An được điểm tốt kiểm tra cuối kì là $P(B\mid\overline{A})=1-0,85=0,15$.

c) Sai: Theo công thức tính xác suất toàn phần, xác suất để An đạt điểm không tốt kiểm tra cuối kì là

$$P(\overline{B})=P(A).P(\overline{B}\mid A)+P(\overline{A}).P(\overline{B}\mid\overline{A})=0,75.0,1+0,25.0,85=0,2875.$$

d) Đúng: Theo công thức tính xác suất toàn phần, xác suất để An đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì là

$$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid\overline{A})=0,75.0,9+0,25.0,15=0,7125.$$

Hoặc $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0,2875=0,7125$.

Câu 6: Có hai chiếc hộp. Hộp thứ nhất có 5 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 6 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai. Gọi A là biến cố “Lấy được 1 viên bi màu xanh ở hộp thứ nhất” và B là biến cố “Lấy được 2 viên bi màu đỏ ở hộp thứ hai”. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $P(\overline{A})=\dfrac{5}{12}$.

b) $P(B\mid A)=\dfrac{1}{15}$.

c) $P(B\mid\overline{A})=\dfrac{12}{35}$.

d) $P(B)=\dfrac{14}{45}$.

Lời giải

Đáp án: a) S b) S c) Đ d) Đ

a) Sai: Ta có: $P(A)=\dfrac{5}{12}\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=\dfrac{7}{12}$.

b) Sai: Nếu A xảy ra thì khi đó hộp hai chứa 7 bi xanh và 8 bi đỏ.

Chọn hai bi bất kì tự hộp hai có C_{15}^{2} cách. Chọn hai bi đỏ từ hộp hai có C_{8}^{2} cách.

Suy ra: $P(B\,|\,A)=\dfrac{C_8^2}{C_{15}^2}=\dfrac{4}{15}$.

c) Đúng: Nếu A không xảy ra thì khi đó hộp hai chứa 6 bi xanh và 9 bi đỏ.

Chọn hai bi bất kì tự hộp hai có C_{15}^{2} cách. Chọn hai bi đỏ từ hộp hai có C_{9}^{2} cách.

Suy ra: $P(B\,|\,\overline{A})=\dfrac{C_9^2}{C_{15}^2}=\dfrac{12}{35}$.

d) Đúng: Áp dụng công thức xác suất toàn phần:

$$P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P(\overline{A}).P(B|\ \overline{A})=\frac{5}{12}.\frac{4}{15}+\frac{7}{12}.\frac{12}{35}=\frac{14}{45}.$$

Câu 7: Bạn Ngọc phải thực hiện hai thí nghiệm liên tiếp. Thí nghiệm thứ nhất có xác suất thành công là $0,8$. Nếu thí nghiệm thứ nhất thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai là $0,9$. Nếu thí nghiệm thứ nhất không thành công thì xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai chỉ là $0,5$. Xét các biến cố sau:

Gọi A là biến cố "Thí nghiệm thứ nhất thành công".
Gọi B là biến cố "Thí nghiệm thứ hai thành công".
Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $P(B\,|\,A)=0,9$.

b) $P(\overline{B}|A)=0,5$.

c) $P(AB)=0,72$.

d) $P(\overline{A}\overline{B})=0,1$.

Lời giải

a) Đúng: $P(B\,|\,A)$ là xác suất thí nghiệm thứ 2 thành công nếu thí nghiệm thứ nhất thành công do đó $P(B\,|\,A)=0,9$.

b) Sai: $P(\overline{B}|A)=1-P(B\,|\,A)=1-0,9=0,1$.

c) Đúng: $P(AB)=P(A).P(B\,|\,A)=0,8.0,9=0,72$.

d) Đúng: $\overline{A}\overline{B}$ là biến cố "Cả hai thí nghiệm đều không thành công".

Theo giả thiết, $P(\overline{A})=1-0,8=0,2$ và $P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=1-P(B\,|\,\overline{A})=1-0,5=0,5$.

Vậy xác suất để cả hai thí nghiệm không thành công là

$$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=0,2\cdot 0,5=0,1.$$

Câu 8: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ loại I là 0,9 và loại II là 0,7. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Chọn ngẫu nhiên 1 xạ thủ bắn và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Gọi A là biến cố "Viên đạn trúng đích". B là biến cố " Xạ thủ loại I bắn". C là biến cố " Xạ thủ loại II bắn". Khi đó ta có xác suất để viên đạn trúng đích được tính theo công thức công thức:

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(C).P\left(A\mid\overline{C}\right)$$

b) Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ bắn và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Xác suất để viên đạn đó trúng đích là 0.74.

c) Chọn ngẫu nhiên ra hai xạ thủ và cả hai xạ thủ đều bắn một viên đạn. Gọi E là biến cố " Cả hai viên đạn đều bắn trúng đích" E_i là biến cố chọn được i xạ thủ loại I. Khi đó ta có công thức tính xác xuất để cả hai xạ thủ đều bắn trúng là

$$P(E)=P(E_o).P(E\mid E_o)+P(E_1).P\left(E\mid\overline{E_1}\right)+P(E_2).P\left(E\mid\overline{E_2}\right).$$

d) Chọn ngẫu nhiên hai xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn. Xác suất để cả hai viên đạn đó trúng đích là 0.596

Lời giải

a) Sai: B và C tạo thành họ đầy đủ các biến cố nên $P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(C).P(A\mid C)$

b) Đúng: Gọi A là biến cố "Viên đạn trúng đích".

B là biến cố " Xạ thủ loại I bắn"; C là biến cố " Xạ thủ loại II bắn".

Ta có: $P(B)=\dfrac{2}{10}=0,2;\quad P(A\mid B)=0.9;\quad P(C)=\dfrac{8}{10}=0,8;\quad P(A\mid C)=0.7$

B và C tạo thành họ đầy đủ các biến cố nên $P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(C).P(A\mid C)$

$=0.2.0.9+0.8.0.7=0.74$

c) Sai: E_i tạo thành họ đầy đủ các biến cố nên

$$P(E)=P(E_o).P(E\mid E_o)+P(E_1).P(E\mid E_1)+P(E_2).P(E\mid E_2)$$

d) Sai: Gọi E là biến cố " Cả hai viên đạn đều bắn trúng đích" E_i là biến cố "chọn được i xạ thủ loại I"

Ta có: $P(E_0)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45};P(E\mid E_o)=0,7.0,7=0,49$

$P(E_1)=\dfrac{C_2^1C_8^1}{C_{10}^2}=\dfrac{16}{45};P(E\mid E_1)=0,9.0,7=0,63$; $P(E_2)=\dfrac{C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{45};P(E\mid E_2)=0,9.0,9=0,81$

Vì E_o,E_1,E_2 tạo thành họ đầy đủ các biến cố nên ta có Xác suất để cả hai viên đạn đó trúng đích là:

$P(E)=P(E_o).P(E\mid E_o)+P(E_1).P(E\mid E_1)+P(E_2).P(E\mid E_2)$

$=\dfrac{28}{45}.0,49+\dfrac{16}{45}.0.63+\dfrac{1}{45}.0,81=0,5469$.

Câu 9: Hai đội bóng thực hiện các lượt sút luân lưu, trong mỗi lượt sút luân lưu. Trong loạt sút thứ nhất, đội bóng thứ nhất thực hiện trước với xác suất thành công là 0,8, đội bóng thứ hai thực hiện sau. Nếu cầu thủ của đội bóng thứ nhất thực hiện thành công quả đá đầu tiên thì cầu thủ của đội bóng thứ hai có xác suất thực hiện thành công là 0,7; nếu đội bóng thứ nhất thực hiện không thành công thì xác suất để đội bóng thứ hai thực hiện thành công là 0,9. Xét các biến cố sau:

Gọi A là biến cố "Cầu thủ của đội bóng thứ nhất thành công".
Gọi B là biến cố "Cầu thủ của đội bóng thứ hai thành công".
Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) $P(B\mid A)=0,9$.
b) $P(\overline{B}|A)=0,3$.
c) $P(AB)=0,56$.
d) $P(\overline{B})=0,16$.

Lời giải

a) Sai: $P(B\mid A)$ là xác suất cầu thủ của đội bóng thứ thành công nếu cầu thủ của đội bóng thứ thứ nhất thành công do đó $P(B\mid A)=0,7$.

b) Đúng: $P(\overline{B}|A)=1-P(B\mid A)=1-0,7=0,3$.

c) Đúng: $P(AB)=P(A).P(B\mid A)=0,8.0,7=0,56$.

d) Đúng: B là biến cố "Cầu thủ của đội bóng thứ hai thực hiện thành công".
$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=0,8.0,7+0,2.0,9=0,84 \Rightarrow P(\overline{B})=1-P(B)=0,16.$

Câu 10: Một cửa hàng chỉ bán hai loại điện thoại là Samsung và Iphone. Tỷ lệ khách hàng mua điện thoại Samsung là 75%. Trong số các khách hàng mua điện thoại Samsung thì có 60% mua kèm ốp điện thoại. Tỷ lệ khách hàng mua điện thoại Iphone kèm ốp điện thoại trong số những khách hàng mua điện thoại Iphone là 30%. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
a) Xác suất một khách hàng mua điện thoại Samsung là $0,75$.

b) Xác suất để một khách hàng mua điện thoại Iphone là $0,15$.

c) Xác suất để một khách hàng mua ốp điện thoại biết rằng khách hàng đó đã mua điện thoại Samsung là $0,6$, xác suất để một khách hàng mua ốp điện thoại biết rằng khách hàng đó đã mua Iphone là $0,3$.

d) Xác suất một khách hàng mua điện thoại kèm ốp là $0,525$.

Lời giải

Gọi A là biến cố một khách hàng mua điện thoại kèm ốp, B là biến cố một khách hàng mua điện thoại Samsung

a) Đúng: $P(B)=75\%=0,75$.

b) Sai: Xác suất để một khách hàng mua điện thoại Iphone là $P(\overline{B})=1-0,75=0,25$.

c) Đúng: $P(A|B)=60\%=0,6; P(A|\overline{B})=30\%=0,3$.

d) Đúng: $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0,75\cdot 0,6+0,25\cdot 0,3=0,525$.

Câu 11: Trong năm học vừa qua, ở trường đại học X, tỉ lệ sinh viên thi trượt môn Toán là 30%, thi trượt môn Tâm lý là 22%. Trong số các sinh viên trượt môn Toán có 40% sinh viên trượt môn Tâm lý. Gặp ngẫu nhiên một sinh viên trường X. Sử dụng sơ đồ hình cây để tính xác suất. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất gặp sinh viên trượt cả hai môn Toán và Tâm lý là $0,066$.

b) Xác suất gặp sinh viên đậu cả hai môn Toán và Tâm lý là $0,6$.

c) Xác suất gặp sinh viên đậu môn Toán biết rằng sinh viên này trượt môn Tâm lý là $0,18$.

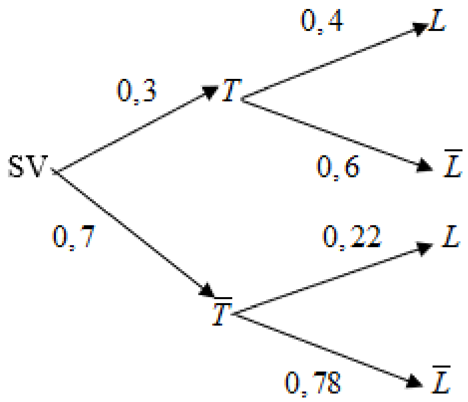
d) Xác suất gặp sinh viên đậu môn Tâm lý là $0,726$.

Lời giải

Giả sử T là biến cố " Gặp sinh viên thi trượt môn Toán", có $P(T)=0,3$.

L là biến cố "Gặp sinh viên thi trượt môn Tâm lý", có $P(L)=0,22$. Khi đó $P(L|T)=0,4$.

Sơ đồ hình cây:



a) Sai. Vì xác suất gặp sinh viên thi trượt cả môn Toán và Tâm Lý là:

$$P(TL)=P(T)P(L|T)=0,3.0,4=0,12.$$

b) Đúng. Xác suất gặp sinh viên đậu cả môn Toán và Tâm lý là

$$P(\overline{TL})=1-P(T\cup L)=1-P(T)-P(L)+P(TL)=1-0,3-0,22+0,12=0,6.$$

c) Sai. Xác suất gặp sinh viên đậu môn Toán, biết rằng sinh viên này trượt môn Tâm lý là

$$P(\overline{T}|L)=\frac{P(\overline{T}L)}{P(L)}=\frac{P(L)-P(TL)}{P(L)}=\frac{0,22-0,12}{0,22}=0,45.$$

d) Đúng. Theo công thức tính xác suất toàn phần, xác suất gặp sinh viên đậu môn Tâm lý là

$$P(\overline{L})=P(T).P(\overline{L}|T)+P(\overline{T}).P(\overline{L}|\overline{T})=0,3.0,6+0,7.0,78=0,726.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một hộp chứa 10 viên bi, trong đó có 6 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Hai bạn An và Bình lần lượt lấy ra một viên bi từ hộp một cách ngẫu nhiên, bi được lấy ra không bỏ lại hộp. Tính xác suất bạn Bình lấy được một viên bi xanh (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Xét hai biến cố A: " Bạn Bình lấy được một viên bi xanh";

B: " Bạn An lấy được một viên bi xanh".

Khi đó, ta có $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}, P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{3}{5}, P(A\mid B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}, P(A\mid\overline{B})=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

Áp dụng công thức toàn phần, ta có

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid\overline{B})=\frac{2}{5}.\frac{1}{3}+\frac{3}{5}.\frac{2}{3}=\frac{8}{15}\approx 0,53.$$

Câu 2: Số khán giả đến xem buổi biểu diễn âm nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,85; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,45. Dự báo thời tiết cho thấy nếu xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,6. Tính xác suất để nhà tổ chức sự kiện bán hết vé.

Lời giải

Xét hai biến cố *A*: " Nhà tổ chức sự kiện bán hết vé";

B: "Trời mưa vào buổi biểu diễn".

Khi đó, ta có $P(B)=0,6; P(\overline{B})=1-P(B)=0,4;\ P(A\mid B)=0,45; P(A\mid\overline{B})=0,85$.

Áp dụng công thức toàn phần, ta có

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid\overline{B})=0,6.0,45+0,4.0,85=0,61.$$

Câu 3: Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong đó nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu?*(làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm)*

Lời giải

Xét các biến cố:

A: " Chọn được người không bị tiểu đường"

B: " Chọn được người cao tuổi là nam"

$\overline{B}$: " Chọn được người cao tuổi là nữ "

Từ giải thuyết ta có $P(B)=\frac{260}{500}=0,52$; $P(A\mid B)=1-0,4=0,6$;

$P(\overline{B})=\frac{240}{500}=0,48$; $P(A\mid\overline{B})=1-0,55=0,45$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A)=P(B).P(A\mid B)+P(\overline{B}).P(A\mid\overline{B})=0,52.0,6+0,48.0,45=0,528\approx 0,53.$$

Câu 4: Có hai hộp đựng bi. Hộp thứ nhất có 2 viên bi màu xanh, 5 viên bi màu đỏ, hộp thứ hai có 3 viên bi màu xanh, 2 viên bi màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên một hộp, từ đó lấy ngẫu nhiên ra một viên bi. Tính xác suất lấy được viên bi màu đỏ.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Lấy được viên bi màu đỏ"

Gọi H_i là biến cố: "Lấy được hộp thứ $i\,(i=1;2)$ "

Nhận xét: $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$ nên $P(A\,|\,H_1)=\frac{5}{7};P(A\,|\,H_2)=\frac{2}{5}$

Áp dụng xác suất toàn phần ta có xác suất lấy được viên bi màu đỏ là

$$P(A)=P(H_1).P(A\,|\,H_1)+P(H_2).P(A\,|\,H_2)=\frac{1}{2}.\frac{5}{7}+\frac{1}{2}.\frac{2}{5}=\frac{39}{70}\simeq 0,56.$$

Câu 5: Một hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 90% số viên bi màu đỏ được đánh số và 50% số viên bi màu vàng được đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Tính xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số (kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi A là biến cố: " Viên bi được lấy ra có đánh số"

Gọi B là biến cố: " Viên bi được lấy ra có màu đỏ", suy ra $\overline{B}$ là biến cố: " Viên bi được lấy ra có màu vàng".

Khi đó, ta có: $P(B)=\frac{50}{80}=\frac{5}{8}$; $P(\overline{B})=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}$; $P(A\,|\,B)=90\%=\frac{9}{10}$; $P(A\,|\,\overline{B})=50\%=\frac{1}{2}$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=\frac{5}{8}.\frac{9}{10}+\frac{3}{8}.\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Câu 6: Một lô linh kiện có chứa 40% linh kiện do nhà máy I sản xuất và 60% linh kiện do nhà máy II sản xuất. Biết tỉ lệ phế phẩm của nhà máy I, II lần lượt là 3%, 4%. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó. Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt (kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi A là biến cố: " linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt"

Gọi B là biến cố: " linh kiện được lấy ra do nhà máy I sản xuất ", suy ra $\overline{B}$ là biến cố: " linh kiện được lấy ra do nhà máy II sản xuất".

Khi đó, ta có: $P(B)=40\%=\frac{2}{5}$; $P(\overline{B})=60\%=\frac{3}{5}$;

$$P(A\,|\,B)=100\%-3\%=97\%=\frac{97}{100};\ P(A\,|\,\overline{B})=100\%-4\%=96\%=\frac{96}{100}=\frac{24}{25}.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=\frac{2}{5}.\frac{97}{100}+\frac{3}{5}.\frac{24}{25}=\frac{241}{250}\approx 0,96.$$

Câu 7: Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Xét các biến cố:

A: "Chọn được người không bị bệnh tiểu đường";

B: "Chọn được người cao tuổi là nam";

$\overline{B}$: "Chọn được người cao tuổi là nữ".

Từ giả thiết, ta có: $P(B)=\dfrac{260}{500}=0,52$; $P(A|\,B)=1-0,4=0,6$;

$P(\overline{B})=\dfrac{240}{500}=0,48$; $P(A|\,\overline{B})=1-0,55=0,45$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(A)=P(B).\mathrm{P}(A|\,B)+P(\overline{B}).P(A|\,\overline{B})=0,52.0,6+0,48.0,45=0,528\approx 0,53$.

Vậy xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là $0,53$.

Câu 8: Có hai hộp bóng bàn, các quả bóng bàn có kích thước và hình dạng như nhau. Hộp thứ nhất có 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng. Hộp thứ hai có 6 quả bóng bàn màu trắng và 4 quả bóng bàn màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai rồi lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng bàn ở hộp thứ hai ra. Tính xác suất để lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai.

Lời giải

Vì hộp thứ nhất có 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng nên khi lấy 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất thì có hai khả năng: khả năng thứ nhất là lấy được 3 quả bóng bàn màu trắng và 1 quả bóng bàn màu vàng; khả năng thứ hai là lấy được 2 quả bóng bàn màu trắng và 2 quả bóng bàn màu vàng.

Xét các biến cố:

A: "Lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai";

B: "Lấy được 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất, trong đó có 1 quả bóng bàn màu vàng";

$\overline{B}$: "Lấy được 4 quả bóng bàn ở hộp thứ nhất, trong đó có 2 quả bóng bàn màu vàng".

Trường hợp 1: Số cách lấy 4 quả bóng bàn từ hộp thứ nhất là C_5^4, có 1 cách lấy 3 quả bóng bàn màu trắng và 2 cách lấy 1 quả bóng bàn màu vàng, suy ra $P(B)=\dfrac{1.2}{C_5^4}=\dfrac{2}{5}$.

Vi khi đó hộp thứ hai có 9 quả bóng bàn màu trắng và 5 quả bóng bàn màu vàng nên $P(A|\,B)=\dfrac{5}{14}$.

Trường hợp 2: Số cách lấy 4 quả bóng bàn từ hộp thứ nhất là C_5^4, có C_3^2 cách lấy 2 quả bóng bàn màu trắng và 1 cách lấy 2 quả bóng bàn màu vàng, suy ra $P(\overline{B})=\frac{C_3^2.1}{C_5^4}=\frac{3}{5}$.

Vì khi đó hộp thứ hai có 8 quả bóng bàn màu trắng và 6 quả bóng bàn màu vàng nên

$$P(A|\overline{B})=\frac{6}{14}.$$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{14}+\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{14}=0,4$.

Vậy xác suất để lấy được quả bóng bàn màu vàng từ hộp thứ hai là $0,4$.

Câu 9: Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Hãy tính tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng.

Lời giải

Gọi A là biến cố "bóng đạt chuẩn sau khi qua kiểm tra chất lượng"

B là biến cố "sản phẩm đạt tiêu chuẩn".

Theo bài ra ta có: $P(B)=0,8$; $P(\overline{B})=1-0,8=0,2$

Do tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 nên $P(A|B)=0,9$.

Tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95 nên $P(A|\overline{B})=1-0,95=0,05$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,8.0,9+0,2.0,05=0,73.$$

Câu 10: Một đội tuyển thi bắn súng có 10 xạ thủ, bao gồm 4 xạ thủ hạng I và 6 xạ thủ hạng II. Xác suất bắn trúng mục tiêu của xạ thủ hạng I và hạng II lần lượt là $0,75$ và $0,6$. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ đó chỉ bắn một viên đạn. Gọi A là biến cố "Chọn được xạ thủ hạng I" và B là biến cố "Viên đạn trúng mục tiêu". Sử dụng sơ đồ hình cây (tham khảo hình vẽ), tính xác suất để viên đạn đó trúng mục tiêu.

Lời giải

Ta có $P(A)=\frac{4}{10}=0,4$; $P(\overline{A})=\frac{6}{10}=0,6$; $P(B|A)=0,75$; $P(B|\overline{A})=0,6$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,4.0,75+0,6.0,6=0,66$.

Vậy xác suất để viên đạn trúng mục tiêu là $0,66$.

Câu 11: Một cái hộp có chứa 40 quả cầu màu đỏ và 60 quả cầu màu vàng; các quả cầu có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi thống kê người ta thấy số lượng các quả cầu được cho trong bảng sau:

Màu	Có đánh số	Không
Đỏ	20	20
Vàng	36	24

Người ta lấy ngẫu nhiên một quả cầu trong hộp, xét hai biến cố sau:
A: "Quả cầu lấy ra có đánh số".
B: "Quả cầu lấy ra có màu đỏ"
Sử dụng công thức xác suất toàn phần tính xác suất để quả cầu lấy ra được đánh số.

Lời giải

Ta có: $P(B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$; $P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$; $P(A\,|\,B)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$; $P(A\,|\,\overline{B})=\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$.
Theo công thức tính xác suất toàn phần ta có xác suất để lấy ra được viên bi được đánh số là

$$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=\frac{2}{5}.\frac{1}{2}+\frac{3}{5}.\frac{3}{5}=\frac{14}{25}=0,56.$$

Câu 12: Tỉ lệ bị bệnh cúm tại một địa phương bằng $0,25$. Khi thực hiện xét nghiệm chẩn đoán, nếu người có bệnh cúm thì khả năng phản ứng dương tính là 96%, nếu người không bị bệnh cúm thì khả năng phản ứng dương tính 8%. Chọn ngẫu nhiên 1 người tại địa phương đó. Xác suất người được chọn có phản ứng dương tính là bao nhiêu?

Lời giải

Xét các biến cố A: "Chọn được người bi bệnh cúm";

B: "Chọn được người có phản ứng dương tính".

Khi đó $P(A)=0,25$; $P(\overline{A})=0,75$; $P(B\,|\,A)=0,96$; $P(B\,|\,\overline{A})=0,08$.

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất của biến cố B là:

$$P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A})=0,25.0,96+0,75.0,08=0,3.$$

Câu 13: Giả sử tỉ lệ người dân của một tỉnh nghiện thuốc lá là 25%; tỉ lệ người mắc bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 72%, tỉ lệ người không mắc bệnh phổi trong số người không nghiện thuốc lá là 86%. Ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh đó, tính xác suất người đó mắc bệnh phổi?

Lời giải

Gọi A là biến cố "người đó nghiện thuốc lá", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "người đó không nghiện thuốc lá".
Gọi B là biến cố "người đó mắc bệnh phổi".
Nếu người ta gặp mắc bệnh phổi thì người đó có thể nghiện thuốc lá hoặc không nghiện thuốc lá.
Với $P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A})$.

Ta có: $P(A)=0,25$; $P(B\,|\,A)=0,72$; $P(\overline{A})=0,75$; $P(B\,|\,\overline{A})=0,14$

Vậy $P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A})=0,25.0,72+0,75.0,14=0,285$

Do đó, xác suất để người dân của tỉnh đó mắc bệnh phổi là $0,285$.

Câu 14: Thống kê hồ sơ 250 học sinh khối 10 trong đó có 150 học sinh nữ và 100 học sinh nam. Sau khi thống kê, kết quả có 60% học sinh nữ là đoàn viên, 50% học sinh nam là đoàn viên; những học sinh còn lại không là đoàn viên. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong 250 học sinh khối 10. Tính xác suất để học sinh được chọn là đoàn viên.

Lời giải

Số học sinh nữ là đoàn viên là $60\%.150=90$ (học sinh).

Số học sinh nam là đoàn viên là $50\%.100=50$ (học sinh).

Xét biến cố: A là biến cố "Chọn được học sinh là đoàn viên".

B là biến cố " Chọn được học sinh nam". Khi đó:

$P\left(B\right)=\frac{100}{250}=\frac{2}{5}$; $P\left(\overline{B}\right)=1-P\left(B\right)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

$P\left(A\,|\,B\right)=\frac{50}{100}=0,5$; $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=\frac{90}{150}=0,6$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P\left(A\right)=P\left(B\right).P\left(A\,|\,B\right)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=\frac{2}{5}.0,5+\frac{3}{5}.0,6=0,56.$$

Câu 15: Có 1 kho bia kém chất lượng chứa các thùng giống nhau (24 lon/thùng) gồm 3 loại: loại I để lẫn mỗi thùng 3 lon quá hạn sử dụng, loại II để lẫn mỗi thùng 2 lon quá hạn và loại III để lẫn mỗi thùng có 4 lon quá hạn. Biết số lượng thùng loại I gấp 2 lần số lượng thùng loại II và số thùng loại II gấp 3 lần thùng loại III. Chọn ngẫu nhiên 1 thùng từ trong kho, từ đó chọn ngẫu nhiên 10 lon. Tính xác suất để lấy được 2 lon quá hạn sử dụng (làm tròn đến kết quả phần chục).

Lời giải

Gọi A_i là biến cố chọn được thùng loại i. ($i=I,II,III$)

B là biến cố chọn được 10 sản phẩm trong đó có 2 lon quá hạn từ thùng được chọn ra.

Gọi số thùng loại III là x thùng ($x>0$).

Do đó số thùng loại I và loại II lần lượt là $6x$; $3x$.

Từ đó, ta có $P\left(A_1\right)=\frac{6}{10}; P\left(A_2\right)=\frac{3}{10}; P\left(A_3\right)=\frac{1}{10}$

Xác suất để chọn được 2 lon quá hạn là:

$P\left(B\right)=P\left(A_1\right).P\left(B\,|\,A_1\right)+P\left(A_2\right).P\left(B\,|\,A_2\right)+P\left(A_3\right).P\left(B\,|\,A_3\right)$

$=\frac{6}{10}.\frac{C_3^2C_{21}^8}{C_{24}^{10}}+\frac{3}{10}.\frac{C_4^2C_{20}^8}{C_{24}^{10}}+\frac{1}{10}.\frac{C_2^2C_{22}^8}{C_{24}^{10}}\approx 0,3$

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Công thức Bayes

Phương pháp: Giả sử A và B là hai biến có ngẫu nhiên thỏa mãn $P(A)>0$ và $0<P(B)<1$. Khi đó công thức:

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

gọi là công thức Bayes.

Chú ý 1:

- Công thức Bayes vẫn đúng với biến cố B bất kì.
- Với $P(A)>0$, công thức $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$ cũng được gọi là công thức Bayes.

Các công thức cần nhớ:

⊕ $P(A)+P(\overline{A})=1$ ⊕ $P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$

⊕ $P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(A)$ ⊕ $P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(B)$

Chú ý 2: Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm nhiều giai đoạn có sự liên đới nhau trong quá trình xảy ra.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Hộp thứ nhất có 3 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ hai. Biết rằng 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ, tính xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ.

Lời giải

Gọi A là biến cố " lấy được một viên bi màu xanh ở hộp thứ nhất " và B là biến cố " lấy được hai viên bi màu đỏ ở hộp thứ hai"

Khi đó ta có $P(A)=\dfrac{1}{3}$ thì $P(B|A)=\dfrac{C_7^2}{C_{11}^2}=\dfrac{21}{55}$.

Suy ra $P(\overline{A})=1-P(A)=\dfrac{2}{3}$ thì $P(B|\overline{A})=\dfrac{C_8^2}{C_{11}^2}=\dfrac{28}{55}$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}.\frac{21}{55}+\frac{2}{3}.\frac{28}{55}=\frac{7}{15}.$$

Xác suất viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ bằng

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}.\frac{28}{55}}{\frac{7}{15}}=\frac{8}{11}.$$

Bài tập 2: Trong một trường học, tỉ lệ học sinh nữ là 52%. Tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam tham gia câu lạc bộ nghệ thuật lần lượt là 18% và 15%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường. Biết rằng học sinh được chọn có tham gia câu lạc bộ nghệ thuật. Tính xác suất học sinh đó là nam.

Lời giải

Gọi A là biến cố " học sinh được chọn là học sinh nữ " và B là biến cố " Học sinh được chọn tham gia câu lạc bộ nghệ thuật"

Khi đó ta có $P(A)=0,52$, $P(B|A)=0,18$, $P(B|\overline{A})=0,15$

Suy ra $P(\overline{A})=1-P(A)=0,48$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có
$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0,52.0,18+0,48.0,15=0,1656$.

Xác suất học sinh đó là nam bằng: $P(\overline{A}|B)=\dfrac{P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}{P(B)}=\dfrac{0,48.0,15}{0,1656}=\dfrac{10}{23}$.

Bài tập 3: Tỉ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỉ lệ mắc bệnh A là 5%; trong số những người chưa tiêm, tỉ lệ mắc bệnh A là 17%. Chọn ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Biết rằng người đó mắc bệnh A. Tính xác suất người đó không tiêm vắc xin phòng bệnh A.

Lời giải

Gọi X là biến cố "Người dân được tiêm phòng bệnh A"

Y là biến cố "Người dân mắc bệnh A". Ta có: $P(X)=0,65;\ P(\overline{X})=0,35$.

Tỉ lệ mắc bệnh khi tiêm phòng là: $P(Y|X)=0,05$.

Tỉ lệ mắc bệnh khi chưa tiêm phòng là $P(Y|\overline{X})=0,17$.

Xác suất người này mắc bệnh A là:

$P(Y)=P(X).P(Y|X)+P(\overline{X}).P(Y|\overline{X})=0,65.0,05+0,35.0,17=0,092$

Xác suất để người bệnh không tiêm phòng là:

$$P(\overline{X}|Y)=\dfrac{P(\overline{X}).P(Y|\overline{X})}{P(Y)}=\dfrac{0,35.0,17}{0,092}=\dfrac{119}{184}.$$

Bài tập 4: Ở một khu rừng nọ có 7 chú lùn, trong đó có 4 chú luôn nói thật, 3 chú còn lại luôn tự nhận mình nói thật nhưng xác suất để mỗi chú này nói thật là $0,5$. Bạn Tuyết gặp ngẫu nhiên một chú lùn. Gọi A là biến cố "Chú lùn đó luôn nói thật" và B là biến cố "Chú lùn đó tự nhận mình luôn nói thật". Biết rằng chú lùn mà bạn Tuyết gặp tự nhận mình là người luôn nói thật. Tính xác suất để chú lùn đó luôn nói thật.

Lời giải

Ta có trong 7 chú lùn thì có 4 chú lùn luôn nói thật, nên $P(A)=\dfrac{4}{7}\Rightarrow P(\overline{A})=\dfrac{3}{7}$

Vì 4 chú lùn luôn nói thật nên $P\left(B\mid A\right)=1$.

3 chú lùn còn lại nói thật với xác suất là $0,5$ nên ta có: $P\left(B\mid\overline{A}\right)=0,5$.

Do đó $P\left(B\right)=P\left(A\right)P\left(B\mid A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B\mid\overline{A}\right)=\frac{4}{7}.1+\frac{3}{7}.0,5=\frac{11}{14}$.

Xác suất để chú lùn đó luôn nói thật là: $P\left(A\mid B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B\mid A\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{4}{7}.1}{\frac{11}{14}}=\frac{8}{11}$.

Bài tập 5: Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất $0,95$ và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất $0,01$. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Thư được chọn là thư rác"; B là biến cố: "Thư được chọn là bị chặn".

Ta có $P\left(A\right)=3\%=0,03$;

$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=1-0,03=0,97$; $P\left(B\mid A\right)=0,95$; $P\left(B\mid\overline{A}\right)=0,01$.

Công thức Bayes, ta có:

$$P\left(A\mid B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B\mid A\right)}{P\left(A\right).P\left(B\mid A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B\mid\overline{A}\right)}=\frac{0,03.0,95}{0,03.0,95+0,97.0,01}\approx 0,746.$$

Bài tập 6: Một thống kê cho thấy tỉ lệ dân số mắc bệnh hiểm nghèo Y là $0,5\%$. Biết rằng, có một loại xét nghiệm mà nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 94% xét nghiệm cho kết quả dương tính; nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 97% xét nghiệm cho kết quả âm tính. Hỏi khi một người xét nghiệm cho kết quả dương tính thì xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét hai biến cố A: "Người được chọn ra bị mắc bệnh hiểm nghèo Y",

B: "Người được chọn ra có xét nghiệm cho kết quả dương tính"

Do tỉ lệ người mắc bệnh hiểm nghèo Y là $0,5\%=0,005$ nên trước khi tiến hành xét nghiệm, xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người là $P\left(A\right)=0,005$.

Khi đó: $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=1-0,005=0,995$.

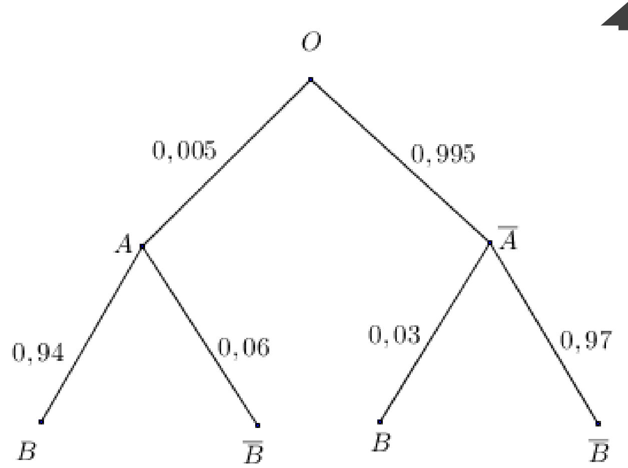
Nếu mắc bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 94% xét nghiệm cho kết quả dương tính

Khi đó: $P\left(B\mid A\right)=94\%=0,94$.

Nếu không bị bệnh hiểm nghèo Y thì với xác suất 97% xét nghiệm cho kết quả âm tính

Khi đó: $P\left(\overline{B}\mid\overline{A}\right)=97\%=0,97$

Ta có sơ đồ hình cây như sau



Ta thấy xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người khi xét nghiệm cho kết quả dương tính là $P(A|B)$. Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\frac{0,005.0,94}{0,005.0,94+0,995.0,03}\approx 13,6\%.$$

Vậy xác suất mắc bệnh hiểm nghèo Y của một người khi xét nghiệm cho kết quả dương tính là $13,6\%$.

Bài tập 7: Một loại linh kiện do hai nhà máy số I và số II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I và II lần lượt là 4% và 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó. Giả sử linh kiện được lấy ra là linh kiện phế phẩm. Xác suất linh kiện đó do nhà máy nào sản xuất là cao hơn?

Lời giải

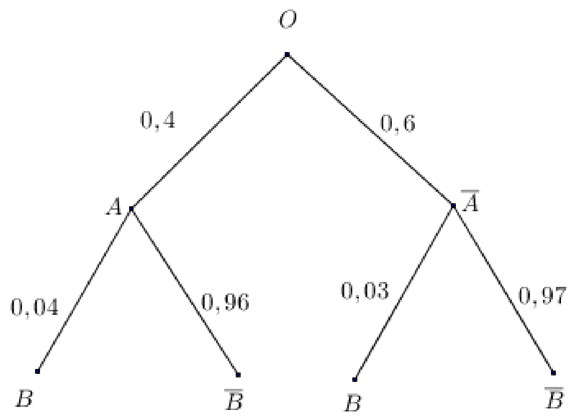
Xét hai biến cố sau: A: ‘‘Linh kiện lấy ra do nhà máy I sản xuất”,
B: ‘‘Linh kiện lấy ra là phế phẩm”

Trong lô linh kiện có tổng cộng $80+120=200$ linh kiện nên $P(A)=\frac{80}{200}=0,4$; $P(\overline{A})=0,6$.

Vì tỉ lệ phế phẩm của các nhà máy I và II lần lượt là 4% và 3% nên $P(B|A)=4\%=0,04$

Khi đó: $P(B|\overline{A})=3\%=0,03$.

Ta có sơ đồ cây:



Khi linh kiện lấy ra là phế phẩm thì xác suất linh kiện đó do nhà máy I sản xuất là $P(A|B)$ và xác suất linh kiện đó do nhà máy II sản xuất là $P(\overline{A}|B)$.

Áp dụng công thức Bayes, ta có:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\frac{0,4.0,04}{0,4.0,04+0,6.0,03}\approx 47\%.$$

Suy ra $P\left(\overline{A}\mid B\right)=1-P\left(A\mid B\right)\approx 53\%$.

Vậy xác suất linh kiện đó do nhà máy II sản xuất là cao hơn.

Bài tập 8: Một nhà máy sản xuất điện thoại có hai dây chuyền sản xuất I và II. Sản phẩm điện thoại di động được sản xuất của dây chuyền I chiếm 70% còn điện thoại di động được sản xuất dây chuyền II chiếm 30% tổng sản phẩm của công ty. Tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của dây chuyền I chiếm 2% còn của dây chuyền II chiếm 3% tổng sản phẩm công ty. Giả sử một chiếc điện thoại di động ngẫu nhiên được kiểm tra và phát hiện bị lỗi. Tính xác suất chiếc điện thoại này được sản xuất bởi dây chuyền I.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Sản phẩm bị lỗi" .

B là biến cố: "Điện thoại được chọn do dây chuyền I sản xuất".

Suy ra $\overline{B}$ là biến cố: "Điện thoại được chọn do dây chuyền II sản xuất".

Ta có $P\left(B\right)=0,7$ và $P\left(\overline{B}\right)=1-0,7=0,3$; $P\left(A\mid B\right)=0,02$ và $P\left(A\mid \overline{B}\right)=0,03$.

Khi đó xác suất để điện thoại được chọn ra bị lỗi là:

$$P\left(A\right)=P\left(B\right).P\left(A\mid B\right)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A\mid \overline{B}\right)=0,7.0,02+0,3.0,03=0,023.$$

Do điện thoại lấy ra bị lỗi nên xác suất điện thoại đó do dây chuyền I sản xuất là:

$$P\left(B\mid A\right)=\frac{P\left(B\right).P\left(A\mid B\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,7.0,02}{0,023}=\frac{14}{23}.$$

Vậy xác suất một chiếc điện thoại bị lỗi được sản xuất bởi dây chuyền I là khoảng $60,87\%$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hai biến cố A,B thỏa mãn $P(A)=0,4$, $P(B)=0,3$, $P(A|B)=0,25$. Khi đó, $P(B|A)$ bằng

A. $0,1875$. **B.** $0,48$. **C.** $0,333$. **D.** $0,95$.

Lời giải

Theo công thức Bayes, ta có: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0,3.0,25}{0,4}=0,1875$.

Câu 2: Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thỏa mãn $P(A)>0$ và $0<P(B)<1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P(B|A)=\dfrac{P(B)+P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$. **B.** $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)-P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$.

C. $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|\overline{B})+P(\overline{B})P(A|B)}$. **D.** $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$.

Lời giải

Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thỏa mãn $P(A)>0$ và $0<P(B)<1$, khi đó ta có công thức Bayes $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$ hay $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$.

Câu 3: Cho hai biến cố A và B, với $P(A)=0,2$, $P(B)=0,26$, $P(B|A)=0,7$. Tính $P(A|B)$.

A. $\dfrac{7}{13}$. **B.** $\dfrac{6}{13}$. **C.** $\dfrac{4}{13}$. **D.** $\dfrac{9}{13}$.

Lời giải

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,2.0,7}{0,26}=\dfrac{7}{13}$.

Câu 4: Cho hai biến cố A và B, với $P(B)=0,8$, $P(A|B)=0,7$, $P(A|\overline{B})=0,45$. Tính $P(B|A)$.

A. $0,25$. **B.** $\dfrac{56}{65}$. **C.** $0,65$. **D.** $0,5$.

Lời giải

Ta có: $P(\overline{B})=1-0,8=0,2$. Công thức Bayes: $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$

$\Rightarrow P(B|A)=\dfrac{0,8.0,7}{0,8.0,7+0,2.0,45}=\dfrac{56}{65}$.

Câu 5: Cho hai biến cố A và B, với $P(A)=0,2$, $P(B|A)=0,7$, $P\left(B|\overline{A}\right)=0,15$. Tính $P(A|B)$.

A. $\frac{7}{13}$. **B.** $\frac{6}{13}$. **C.** $\frac{4}{13}$. **D.** $\frac{9}{13}$.

Lời giải

Ta có: $P(A)=0,2 \Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=0,8$, $P(B|A)=0,7$, $P\left(B|\overline{A}\right)=0,15$.

$P(B)=P(A).P(B|A)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B|\overline{A}\right) \Rightarrow P(B)=0,2.0,7+0,8.0,15=0,26$.

Theo công thức Bayes: $P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B)=\frac{0,2.0,7}{0,26}=\frac{7}{13}$.

Câu 6: Người ta điều tra thấy ở một địa phương nọ có 3% tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe. Người ta nhận thấy khi tài xế lái xe gây ra tai nạn thì có 21% là do tài xế sử dụng điện thoại. Hỏi việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên bao nhiêu lần?

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Ta gọi A là biến cố "Tài xế sử dụng điện thoại di động khi lái xe", B là biến cố "Tài xế lái xe gây tai nạn".

Khi đó $P(A)=3\%=0,03, P(A|B)=21\%=0,21.$

Theo công thức Bayes: $P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{P(B|A)}{P(B)}=\frac{P(A|B)}{P(A)}=\frac{0,21}{0,03}=7.$

Vậy việc sử dụng điện thoại di động khi lái xe làm tăng xác suất gây tai nạn lên 7 lần.

Câu 7: Cho hai biến cố A và B sao cho $P(A)=0,6$; $P(B)=0,4$; $P(A|B)=0,3$. Khi đó $P(B|A)$ bằng?

A. $0,2$. **B.** $0,3$. **C.** $0,4$. **D.** $0,6$.

Lời giải

Áp dụng công thức Bayes, ta có: $P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{0,4.0,3}{0,6}=0,2$.

Câu 8: Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thỏa mãn $P(A)>0$ và $0<P(B)<1$. Khẳng định nào dưới đây **sai?**

A. $P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(A)P(B|A)}$. **B.** $P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P\left(\overline{B}\right)P\left(A|\overline{B}\right)}$.

C. $P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$. **D.** $P(A)=P(B)P(A|B)+P\left(\overline{B}\right)P\left(A|\overline{B}\right)$.

Lời giải

Giả sử A và B là hai biến cố ngẫu nhiên thỏa mãn $P(A)>0$ và $0<P(B)<1$. Khi đó, công thức Bayes:

$P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$ hay còn có thể viết dưới dạng:

$P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$.

Câu 9: Cho hai biến cố A và B. Biết rằng $P(B)=0,8$; $P(A|B)=0,7$ và $P(A|\overline{B})=0,45$. Khi đó giá trị của $P(B|A)$ bằng

A. $0,25$. **B.** $0,65$. **<u>C</u>.** $\dfrac{56}{65}$. **D.** $0,5$.

Lời giải

Ta có $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,8=0,2$ nên:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,8.0,7+0,2.0,45=0,65.$$

Do đó theo công thức Bayes ta có $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0,8.0,7}{0,65}=\dfrac{56}{65}$.

Câu 10: Giả sử tỉ lệ người dân của tỉnh X nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Khi ta gặp ngẫu nhiên một người dân của tỉnh X, xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là

<u>A</u>. $\dfrac{7}{13}$. **B.** $\dfrac{6}{13}$. **C.** $\dfrac{4}{13}$. **D.** $\dfrac{9}{13}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "người đó nghiện thuốc lá"; $\overline{A}$ là biến cố "người đó không nghiện thuốc lá"; B là biến cố "người đó bị bệnh phổi". Để người mà ta gặp bị bệnh phổi thì người đó nghiện thuốc lá hoặc không nghiện thuốc lá.

Ta có $P(A)=0,2$; $P(B|A)=0,7$; $P(\overline{A})=0,8$; $P(B|\overline{A})=0,15$.

$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,2.0,7+0,8.0,15=0,26$.

Xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là $P(A|B)$.

Theo công thức Bayes ta có $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,2.0,7}{0,26}=\dfrac{7}{13}$.

Câu 11: Hai máy tự động sản xuất cùng một loại chi tiết, trong đó máy I sản xuất 35%, máy II sản xuất 65% tổng sản lượng. Tỉ lệ phế phẩm của các máy lần lượt là $0,3\%$ và $0,7\%$. Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kho. Tính xác suất để chọn được phế phẩm do máy I sản xuất?

A. $0,0056$. **<u>B</u>.** $0,1875$. **C.** $0,1785$. **D.** $0,1587$.

Lời giải

Gọi A_1 là biến cố "Sản phẩm được chọn do máy I sản xuất"

A_2 là biến cố "Sản phẩm được chọn do máy II sản xuất"

B là biến cố "Sản phẩm được chọn là phế phẩm"

Suy ra $A_1 | B$ là biến cố "chọn được phế phẩm do máy I sản xuất"

Ta có $P(A_1)=0,35$, $P(A_2)=0,65$, $P(B|A_1)=0,003$, $P(B|A_2)=0,007$

$P(B)=P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)=0,0056$

Theo công thức Bayes có: $P(A_1|B)=\dfrac{P(B|A_1).P(A_1)}{P(B)}=0,1875$.

Câu 12: Một căn bệnh X có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh X, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 99 trong 100 trường hợp. Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính (bị bệnh), xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?

A. $0,4$. **B.** $0,35$. **<u>C</u>.** $0,5$. **D.** $0,65$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "người đó mắc bệnh", B là biến cố "kết quả kiểm tra người đó là dương tính (bị bệnh)"

Theo công thức Bayes ta có $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}$.

Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra là $P(A)=1\%=0,01$. Do đó xác suất để người đó không mắc bệnh khi chưa kiểm tra là $P(\overline{A})=1-0,01=0,99$.

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là $P(B|A)=99\%=0,99$. Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là $P(B|\overline{A})=1-0,99=0,01$.

Xác suất để người đó thực sự bị bệnh là

$$P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\dfrac{0,01.0,99}{0,01.0,99+0,99.0,01}=0,5.$$

Câu 13: Cho hai biến cố A,B thỏa mãn $P(A)=0,3; P(B)=0,2$ và $P(A|B)=0,15$. Khi đó, $P(B|A)$ bằng

<u>A</u>. $0,1$. **B.** $0,4$. **C.** $0,225$. **D.** $0,009$.

Lời giải

Theo công thức Bayes, ta có: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0,2.0,15}{0,3}=0,1$.

Câu 14: Một bệnh viện sử dụng một xét nghiệm để phát hiện một loại bệnh với độ chính xác là 95% (nghĩa là 95% bệnh nhân mắc bệnh sẽ có kết quả dương tính). Xét nghiệm này cũng có tỷ lệ dương tính giả là 2% (nghĩa là 2% bệnh nhân không mắc bệnh cũng có kết quả dương tính). Biết rằng 1% dân số thực sự mắc bệnh này. Nếu một người nhận kết quả xét nghiệm dương tính, xác suất thực sự người đó mắc bệnh là bao nhiêu?

<u>A</u>. Khoảng 32%. **B.** Khoảng 47%. **C.** Khoảng 83%. **D.** Khoảng 95%.

Lời giải

Để giải câu hỏi này, chúng ta sẽ sử dụng công thức Bayes.

Gọi B là biến cố người mắc bệnh, có $P(B)=1\%=0,01$.

$\overline{B}$ là biến cố người không mắc bệnh, có $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,01=0,99$.

Gọi D là biến cố người đó được xét nghiệm có kết quả dương tính. Khi đó

Xác suất xét nghiệm dương tính nếu mắc bệnh là $P(D\,|\,B)=95\%=0,95$.

Xác suất xét nghiệm dương tính nếu không mắc bệnh là $P(D\,|\,\overline{B})=2\%=0,02$.

Dùng công thức Bayes để tính xác suất mắc bệnh khi có kết quả xét nghiệm dương tính:

$$P(B\,|\,D)=\frac{P(B).P(D\,|\,B)}{P(D)}$$

$P(D)=P(B).P(D\,|\,B)+P(\overline{B}).P(D\,|\,\overline{B})=0,95.0,01+0,02.0,99=0,0293$.

Suy ra: $P(B\,|\,D)=\dfrac{0,95.0,01}{0,0293}\approx 0,3242$.

Vậy xác suất người đó thực sự mắc bệnh là khoảng 32%.

Câu 15: Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất $0,95$ và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất $0,01$. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn. Tính xác suất để đó là thư rác (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. $0,095$. **B.** $0,746$. **C.** $0,476$. **D.** $0,003$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Thư được chọn là thư rác"

B là biến cố: "Thư được chọn là bị chặn".

Ta có $P(A)=3\%=0,03$;

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,03=0,97$; $P(B\,|\,A)=0,95$; $P(B\,|\,\overline{A})=0,01$.

Công thức Bayes, ta có

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A).P(B\,|\,A)}{P(A).P(B\,|\,A)+P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A})}=\frac{0,03.0,95}{0,03.0,95+0,97.0,01}\approx 0,746.$$

Câu 16: Được biết có 5% đàn ông bị mù màu, và $0,25\%$ phụ nữ bị mù màu (*Nguồn: F. M. Dekking et al., A modern introduction to probability and statistics – Understanding why and how, Springer, 2005).* Giả sử số đàn ông bằng số phụ nữ. Chon một người bị mù màu. Xác suất để người đó là đàn ông là bao nhiêu?

A. $\dfrac{19}{21}$. **B.** $\dfrac{20}{21}$. **C.** $\dfrac{24}{25}$. **D.** $\dfrac{18}{25}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố người được chọn là đàn ông, B là biến cố người được chọn mù màu.

Theo đề bài ra ta có $P\left(B|A\right)=0,05;P\left(B|\overline{A}\right)=0,0025$.

Vì số đàn ông bằng số phụ nữ nên ta có $P\left(A\right)=P\left(\overline{A}\right)=0,5$.

Áp dụng công thức Bayes ta có xác suất để chọn được một người đàn ông mù màu là

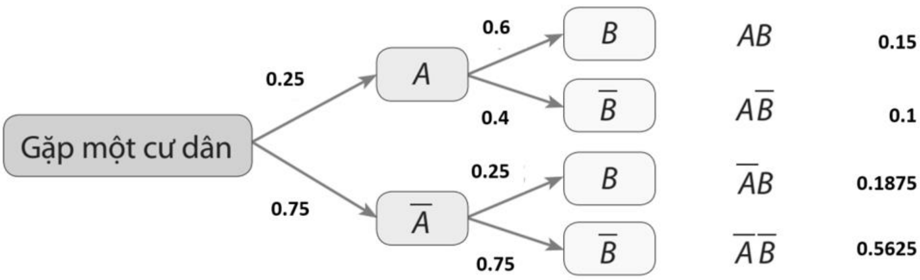
$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\right).P\left(B|A\right)}{P\left(A\right).P\left(B|A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B|\overline{A}\right)}=\frac{0,5.0,05}{0,5.0,05+0,5.0,0025}=\frac{20}{21}.$$

Câu 17: Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 25% cư dân hút thuốc lá. Tỉ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 60% và 25%. Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{7}{9}$. **D.** $\frac{8}{9}$.

Lời giải

Giả sử ta gặp một cư dân của xã, gọi A là biến cố "Người đó có hút thuốc lá" và B là biến cố "Người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp". Ta có sơ đồ hình cây sau:



Ta có $P\left(B\right)=P\left(A\right).P\left(B|\ A\right)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B|\ \overline{A}\right)=0,15+0,1875=0,3375$.

Theo công thức Bayes, ta có $P(A|\ B)=\frac{P(A)P(B|\ A)}{P(B)}=\frac{0,15}{0,3375}=\frac{4}{9}$.

Vậy nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khoẻ về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là $\frac{4}{9}$.

Câu 18: Áo sơ mi An Phước trước khi xuất khẩu sang Mỹ phải qua 2 lần kiểm tra, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất, và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tìm xác suất để 1 chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu?

A. $\frac{95}{98}$. **B.** $\frac{931}{1000}$. **C.** $\frac{95}{100}$. **D.** $\frac{98}{100}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: ” Qua được lần kiểm tra đầu tiên”$\Rightarrow P\left(A\right)=0,98$

Gọi B là biến cố: “Qua được lần kiểm tra thứ 2”$\Rightarrow P\left(B\,|\,A\right)=0,95$

Chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu phải thỏa mãn 2 điều kiện trên hay ta đi tính $P(A\cap B)$

Ta có: $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(B|A).P(A)=0,95.0,98=\dfrac{931}{1000}$.

Câu 19: Giả sử có một loại bệnh S mà tỉ lệ người mắc bệnh là $0,1\%$. Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh S khi xét nghiệm cũng có phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính giả là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh S có 5% số người xét nghiệm lại có phản ứng dương tính). Khi một người xét nghiệm có phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh S của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

A. $1,96\%$. **B.** $1,69\%$. **C.** $1,97\%$. **D.** $0,5\%$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Người đó mắc bệnh S"; B là biến cố: "Người đó xét nghiệm có phản ứng dương tính".

Ta cần tính $P(A|B)$.

Ta có: $P(A)=0,001$; $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,001=0,999$; $P(B|A)=1$; $P(B|\overline{A})=0,05$.

Thay vào công thức Bayes ta được:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\frac{0,001.1}{0,001.1+0,999.0,05}=\frac{20}{1019}\approx 1,96\%.$$

Câu 20: Giả sử tỉ lệ người dân của thủ đô Hà Nội nghiện thuốc lá là 30%; tỉ lệ người bị bệnh phổi là 38% và tỉ lệ người bị bệnh phổi trong số người nghiện thuốc lá là 80%. Chọn ngẫu nhiên một người của thủ đô Hà Nội, tính xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi.

A. $\dfrac{7}{13}$. **B.** $\dfrac{6}{19}$. **C.** $\dfrac{4}{13}$. **D.** $\dfrac{12}{19}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "người nghiện thuốc lá".
Gọi B là biến cố "người bị bệnh phổi".

Ta có: $\begin{cases}P(A)=0,3.\\P(B)=0,38.\\P(B|A)=0,8.\end{cases}$

Xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh phổi là $P(A|B)$

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,3.0,8}{0,38}=\dfrac{12}{19}$

Trong số người bị bệnh phổi của thủ đô Hà Nội, có khoảng $\dfrac{12}{19}$ số người nghiện thuốc lá.

Câu 21: Có hai đội thi đấu môn bơi lội. Đội I có 4 vận động viên, đội II có 6 vận động viên. Xác suất đạt huy chương bạc của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là $0,7$ và $0,6$. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương bạc. Tính xác suất để vận động viên này thuộc đội I.

A. $\frac{8}{11}$. **B.** $\frac{11}{16}$. **C.** $\frac{3}{16}$. **D.** $\frac{7}{16}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: " Vận động viên được chọn thuộc đội I ".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: " Vận động viên được chọn thuộc đội II ".

B là biến cố: " Vận động viên được chọn đạt huy chương bạc".

Khi đó $P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P(\overline{A}).P(B\,|\,\overline{A})$.

Trong đó: $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(B\,|\,A)=0,7$; $P(\overline{A})=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $P(B\,|\,\overline{A})=0,6$.

Suy ra: $P(B)=\frac{2}{5}.0,7+\frac{3}{5}.0,6=\frac{16}{25}$.

Theo công thức Bayes ta có: $P(A\,|\,B)=\frac{P(A).P(B\,|\,A)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{5}.0,7}{\frac{16}{25}}=\frac{7}{16}$.

Câu 22: Một ứng dụng được sử dụng để chặn cuộc gọi rác trong điện thoại. Tuy nhiên, vì ứng dụng không tuyệt đối hoàn hảo nên một cuộc gọi rác bị chặn với xác suất $0,8$ và một cuộc gọi đúng (không phải là cuộc gọi rác) bị chặn với xác suất $0,01$. Thống kê cho thấy tỉ lệ cuộc gọi rác là 10%. Chọn ngẫu nhiên một cuộc gọi không bị chặn. Xác suất để đó là cuộc gọi đúng là

A. $\frac{891}{911}$. **B.** $\frac{891}{911}$. **C.** $\frac{123}{892}$. **D.** $\frac{213}{911}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố: "cuộc gọi được chọn là cuộc gọi rác", B là biến cố: "cuộc gọi chọn bị chặn" thì $\overline{B}$ là biến cố: "cuộc gọi được chọn không bị chặn".

Theo đầu bài ta có: $P(A)=0,1$, $P(\overline{A})=0,9$, $P(B|A)=0,8$, $P(B|\overline{A})=0,01$.

Ta có: $P(B)=P(B|A).P(A)+P(B|\overline{A}).P(\overline{A})=0,8.0,1+0,01.0,9=0,089$.

Vì $P(B|\overline{A})=0,01\Rightarrow P(\overline{B}|\overline{A})=0,99$, $P(B|A)=0,8\Rightarrow P(\overline{B}|A)=0,2$

Theo công thức Bayes ta có:

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}).P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{A}).P(\overline{B}|\overline{A})+P(A).P(\overline{B}|A)}=\frac{0,9.0,99}{0,9.0,99+0,1.0,2}=\frac{891}{911}.$$

Câu 23: Năm 2001, Cộng đồng châu Âu có làm một đợt kiểm tra rất rộng rãi các con bò để phát hiện những con bò bị bệnh bò điên. Không có xét nghiệm nào cho kết quả chính xác 100%. Một loại xét nghiệm, mà ở đây ta gọi là xét nghiệm X, cho kết quả như sau: Khi con bò bị bệnh bò điên thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm X là 70%, còn khi con bò không bị bệnh thì xác suất để có phản ứng dương tính trong xét nghiệm X là 10%. Biết rằng tỉ lệ bò bị mắc bệnh bò điên ở Hà Lan là 13 con trên 1000000 con. Khi một con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm X thì xác suất để nó bị mắc bệnh bò điên là:

A. $\frac{91}{100078}$. **B.** $\frac{91}{1000078}$. **C.** $\frac{91}{3000052}$. **D.** $\frac{91}{8999974}$.

Lời giải

Xét các biến cố:

A: "Con bò ở Hà Lan bị bệnh bò điên";

B: "Con bò ở Hà Lan có phản ứng dương tính với xét nghiệm X".

Theo giả thiết, ta có: $P(A)=0,000013; P(B|A)=0,7; P\left(B|\overline{A}\right)=0,1.$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(B)=P(A).P(B|A)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B|\overline{A}\right)=0,000013.0,7+(1-0,000013).0,1=0,1000078.$

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{0,000013.0,7}{0,1000078}=\frac{91}{1000078}$.

Vậy xác suất để một con bò Hà Lan bị bệnh bò điên nếu nó phản ứng dương tính với xét nghiệm A là $\frac{91}{1000078}$.

Câu 24: Trường THPT Hòa Bình có 20% học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc, trong số học sinh đó có 85% học sinh biết chơi đàn guitar. Ngoài ra, có 10% số học sinh không tham gia câu lạc bộ âm nhạc cũng biết chơi đàn guitar. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Giả sử học sinh đó biết chơi đàn guitar. Xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc là:

A. $\frac{17}{25}$. **B.** $\frac{7}{25}$. **C.** $\frac{17}{29}$. **D.** $\frac{17}{75}$.

Lời giải

Xét các biến cố: A: "Chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc";

B: "Chọn được học sinh biết chơi đàn guitar".

Khi đó, $P(A)=0,2; P\left(\overline{A}\right)=0,8; P(B|A)=0,85; P\left(B|\overline{A}\right)=0,1$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(B)=P(A).P(B|A)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B|\overline{A}\right)=0,2.0,85+0,8.0,1=0,25$.

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{0,2.0,85}{0,25}=0,68=\frac{17}{25}$.

Vậy xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ âm nhạc, biết học sinh đó chơi được đàn guitar là $\frac{17}{25}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Giả sử bệnh hiểm nghèo X có tỉ lệ nhiễm bệnh là $0,5\%$, xét nghiệm loại bệnh này có tỉ lệ dương tính giả là 4%. Khi xét nghiệm cho một người, ta gọi A là biến cố "Người được chọn không nhiễm bệnh" và B là biến cố "người được chọn có phản ứng dương tính". Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Người được chọn không nhiễm bệnh có tỉ lệ $P\left(A\right)=0,995$

b) Tỉ lệ người không nhiễm bệnh trong số những người có phản ứng dương tính là

$$P\left(B\,|\,A\right)=0,04.$$

c) Tỉ lệ người nhiễm bệnh trong số những người có phản ứng dương tính là $P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=0,005$.

d) Khả năng nhiễm bệnh của một người có phản ứng dương tính là $P\left(\overline{A}\,|\,B\right)=\dfrac{25}{224}$.

Lời giải

a) Đúng: Người được chọn không mắc bệnh có tỉ lệ $P\left(A\right)=1-0,5\%=0,995$

b) Đúng: Do trong số những người không mắc bệnh có 4% phản ứng dương tính nên

$$P\left(B\,|\,A\right)=0,04.$$

c) Sai: Những người mắc bệnh đều có phản ứng dương tính nên $P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=1$.

d) Đúng: Khả năng mắc bệnh của một người có phản ứng dương tính là

$$P\left(\overline{A}\,|\,B\right)=\frac{P\left(\overline{A}\right)P\left(B\,|\,\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)P\left(B\,|\,\overline{A}\right)+P\left(A\right)P\left(B\,|\,A\right)}=\frac{0,005.1}{0,005.1+0,995.0,04}=\frac{25}{224}.$$

Câu 2: Một căn bệnh có 2% dân số mắc phải. Một phương pháp chẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là 99%. Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 99% số trường hợp. Với người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 97%. Lấy một người đi kiểm tra. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra là $0,02$.

b) Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $0,99$.

c) Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là: $0,01$.

d) Biết rằng đã có kết quả chuẩn đoán là dương tính, xác suất để người đó thực sự bị bệnh là $0,25$

Lời giải

a) Đúng: Gọi A là biến cố "người đó mắc bệnh"

Xác suất để người đó mắc bệnh khi chưa kiểm tra: $P\left(A\right)=2\%=0,02$

b) Đúng: Gọi B là biến cố "kết quả kiểm tra người đó là dương tính"

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh là: $P(B|A)=99\%=0,99$

c) Sai: Xác xuất kết quả âm tính nếu người đó không mắc bệnh là: $P(\overline{B}|\overline{A})=97\%=0,97$.

Xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh là:

$$P(B|\overline{A})=1-P(\overline{B}|\overline{A})=1-0,97=0,03$$

d) Sai: Do đó xác suất để người đó không mắc bệnh khi chưa kiểm tra: $P(\overline{A})=1-0,02=0,98$

Xác suất để người đó thực sự bị bệnh là:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\frac{0,02.0,99}{0,02.0,99+0,98.0,03}=\frac{33}{82}\approx 0,402.$$

Câu 3: Một chiếc hộp có 50 viên bi, trong đó có 30 viên bi màu đỏ và 20 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 80% số viên bi màu đỏ đánh số và 60% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Lấy ra ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất để lấy được bi đánh số có màu vàng là $0,6$.

b) Xác suất để lấy được bi không đánh số có màu đỏ là $0,8$.

c) Xác suất để viên bi được lấy ra có đánh số là $0,36$.

d) Xác suất để lấy viên bi màu đỏ có đánh số là $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "viên bi được lấy ra có đánh số"

Gọi B là biến cố "viên bi được lấy ra có màu đỏ", suy ra $\overline{B}$ là biến cố "viên bi được lấy ra có màu vàng",

a) Đúng: $P(A|\overline{B})=60\%=0,6$

b) Sai: $P(A|B)=80\%=0,8$, nên $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=1-0,8=0,2$.

c) Sai: Ta có: $P(B)=\frac{30}{50}=0,6$; $P(\overline{B})=\frac{20}{50}=0,4$

Vậy $P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,6.0,8+0,4.0,6=0,72$

d) Đúng: Ta có: $P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{0,6.0,8}{0,72}=\frac{2}{3}$.

Câu 4: Chạy Marathon là môn thể thao mà tại đó, người chơi sẽ hoàn thành quãng đường 42,195 km trong khoảng thời gian nhất định. FM sub 4 là thành tích dành cho những người chơi hoàn thành quãng đường Marathon dưới 4 giờ. Trong CLB AKR, tỷ lệ thành viên nam là 72%, tỷ lệ thành viên nữ là 28%. Đối với nam, tỷ lệ VĐV hoàn thành Marathon sub 4 là 32%; đối với nữ tỷ lệ VĐV hoàn thành sub 4 là 3%. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên từ CLB AKR. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi VĐV được chọn là nam, xác suất để VĐV này chưa hoàn thành sub 4 cự ly Marathon là 68%.

b) Xác suất để thành viên được chọn đã hoàn thành sub 4 là 22%.

c) Xác suất để thành viên được chọn là nữ đã hoàn thành sub 4 là 2%.

d) Biết rằng VĐV được chọn đã hoàn thành sub 4, xác suất để VĐV đó là nam bằng 96%.

Lời giải

Gọi A là biến cố VĐV được chọn là nam.

Gọi B là biến cố VĐV được chọn đã hoàn thành cự ly Marathon sub 4.

a) Đúng: Khi VĐV được chọn là nam, xác suất để VĐV này chưa hoàn thành sub 4 cự ly Marathon là: $P\left(\overline{B}\,|\,A\right)=1-P\left(B\,|\,A\right)=1-32\%=68\%$.

b) Sai: Xác suất để VĐV được chọn đã hoàn thành sub 4 là:

$$P(B)=P(A).P(B\,|\,A)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=0,72.0,32+0,28.0,03\approx 0,24=24\%.$$

c) Sai: Xác suất để VĐV được chọn là nữ và đã hoàn thành sub 4 là:

$$P\left(\overline{A}.B\right)=P\left(\overline{A}\right).P\left(B\,|\,\overline{A}\right)=0,28.0,03\approx 0,0084\approx 0,84\%.$$

d) Đúng: Biết VĐV đã hoàn thành sub 4, xác suất để VĐV đó là nam là:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A).P(B\,|\,A)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B\,|\,A)}{P(A).P(B\,|\,A)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B\,|\,\overline{A}\right)}$$

$$=\frac{0,72.0,32}{0,72.0,32+0,28.0,03}\approx 0,96=96\%$$

Câu 5: Hộp thứ nhất có 1 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Hộp thứ hai có 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi là khác nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai. Sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp thứ hai. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp hai là bi đỏ bằng $\frac{19}{45}$.

b) Xác suất để hai viên bi lấy ra từ hộp hai có 1 bi đỏ và 1 bi xanh bằng $\frac{1}{9}$.

c) Biết rằng hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai là bi đỏ. Xác suất để 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng là bi đỏ bằng $\frac{14}{19}$.

d) Biết rằng hai viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có 1 bi đỏ và 1 bi xanh. Xác suất để 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất cũng có 1 bi đỏ và 1 bi xanh bằng $\frac{5}{19}$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Lấy được hai viên bi đỏ từ hộp thứ nhất" và B là biến cố "Lấy được hai viên bi đỏ từ hộp thứ hai".

Gọi C là biến cố "Lấy được 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh từ hộp thứ nhất" và D là biến cố "Lấy được 1 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh từ hộp thứ hai".

Ta có: $P(A)=\frac{C_5^2}{C_6^2}=\frac{2}{3}$; $P(B|A)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$; $P(C)=\frac{C_1^1C_5^1}{C_6^2}=\frac{1}{3}$; $P(D|C)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$.

Suy ra $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{1}{3}$; $P(B|\overline{A})=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$; $P(\overline{C})=1-P(C)=\frac{2}{3}$; $P(D|\overline{C})=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$

a) Đúng: $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}.\frac{7}{15}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{19}{45}$.

b) Sai: $P(D)=P(C).P(D|C)+P(\overline{C}).P(D|\overline{C})=\frac{1}{3}.\frac{8}{15}+\frac{2}{3}.\frac{7}{15}=\frac{22}{45}$.

c) Đúng: Áp dụng công thức Bayes ta có $P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{2}{3}.\frac{7}{15}:\frac{19}{45}=\frac{14}{19}$.

d) Sai: $P(C|D)=\frac{P(C).P(D|C)}{P(D)}=\frac{1}{3}.\frac{8}{15}:\frac{22}{45}=\frac{4}{11}$.

Câu 6: Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Tỉ lệ nhân viên nữ và tỉ lệ nhân viên nam mua bảo hiểm nhân thọ lần lượt là 7% và 5%. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên của doanh nghiệp. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ là $0,061$.

b) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Xác suất nhân viên đó là nam là $\frac{55}{118}$.

c) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Xác suất nhân viên đó là nữ là $\frac{63}{118}$

d) Biết rằng nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ. Khi đó nhân viên đó là nam nhiều hơn là nữ.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Nhân viên được chọn là nữ" và B là biến cố "Nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ".

Theo đề ta có $P(A)=0,45$; $P(B|A)=0,07$; $P(B|\overline{A})=0,05$. Suy ra $P(\overline{A})=0,55$

a) Sai: Ta có $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=0,45.0,07+0,55.0,05=0,059$.

b) Đúng: $P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}{P(B)}=\frac{0,55.0,05}{0,059}=\frac{55}{118}$.

c) Đúng: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,45.0,07}{0,059}=\dfrac{63}{118}$.

d) Sai: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,45.0,07}{0,059}=\dfrac{63}{118}$

Do $P(A|B)=\dfrac{63}{118}>\dfrac{55}{118}=P(\overline{A}|B)$ nên nhân viên được chọn có mua bảo hiểm nhân thọ là nữ sẽ nhiều hơn là nam.

Câu 7: Một loại xét nghiệm nhanh SARS-CoV-2 cho kết quả dương tính với $76,2\%$ các ca thực sự nhiễm virus và kết quả âm tính với $99,1\%$ các ca thực sự không nhiễm virus. Giả sử tỉ lệ người nhiễm virus SARS-CoV-2 trong một cộng đồng là 1%. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất xét nghiệm cho kết quả âm tính của các ca thực sự nhiễm virus là $0,23$.

b) Xác suất xét nghiệm cho kết quả dương tính của các ca thực sự không nhiễm virus là: $0,009$.

c) Xác suất người làm xét nghiệm có kết quả dương tính là: $0,017$.

d) Biết rằng đã có kết quả chuẩn đoán là dương tính, xác suất để người đó thực sự bị bệnh là $\dfrac{381}{850}$

Lời giải

Gọi *A* là biến cố "Người làm xét nghiệm có kết quả dương tính" và *B* là biến cố "Người nhiễm virus".

a) Sai: Do xét nghiệm cho kết quả dương tính với $76,2\%$ các ca thực sự nhiễm virus nên Xác suất xét nghiệm cho kết quả âm tính của các ca thực sự nhiễm virus là: $P(\overline{A}|B)=0,238$.

b) Đúng: Do xét nghiệm cho kết quả âm tính với $99,1\%$ các ca thực sự không nhiễm virus nên

$P(\overline{A}|\overline{B})=0,991$. Suy ra $P(A|\overline{B})=1-0,991=0,009$.

Xác suất xét nghiệm cho kết quả dương tính của các ca thực sự không nhiễm virus là: $0,009$.

c) Đúng: Do tỉ lệ người nhiễm virus trong cộng đồng là 1% nên $P(B)=0,01$ và $P(\overline{B})=0,99$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có xác suất người làm xét nghiệm có kết quả dương tính là: $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0,01.0,762+0,99.0,009=0,01653\approx 0,017$

d) Đúng: Xác suất để người đó thực sự bị bệnh khi có kết quả chuẩn đoán là dương tính là

Ta có: $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0,01.0,762}{0,017}=\dfrac{381}{850}$.

Câu 8: Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh *X* có 50% học sinh lựa chọn tổ hợp B00 (Gồm các môn Toán, Hóa, Sinh). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp B00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là $0,6$; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp B00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là $0,7$. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ đại học. Gọi A là biến cố: ’’Học sinh đó chọn tổ hợpB00 ’’; B là biến cố: ’’Học sinh đó đỗ đại học’’. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất $P\left(\overline{A}\right)=0,5$.

b) Xác suất $P(B\mid A)=0,4$.

c) Xác suất $P\left(B\mid\overline{A}\right)$ thuộc khoảng $(0,2;\,0,5)$.

d) $\dfrac{P(A\mid B)}{P(B\mid A)}$ lớn hơn $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: $\overline{A}$ là biến cố: “Học sinh đó không chọn tổ hợp B00”

Ta có: $P(A)=0,5\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0,5=0,5$.

b) Sai: $P(B\mid A)$ là xác suất để một học sinh đỗ đại học với điều kiện học sinh đó chọn tổ hợp $B00\Rightarrow P(B\mid A)=0,6$.

c) Sai: $P\left(B\mid\overline{A}\right)$ là xác suất để một học sinh đỗ đại học với điều kiện học sinh đó không chọn tổ hợp B00. Ta có: $P\left(B\mid\overline{A}\right)=0,7$.

d) Đúng: Theo công thức Bayes, ta có: $P(A\mid B)=\dfrac{P(A).P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B\mid\overline{A}\right)}$

$$\Rightarrow\frac{P(A\mid B)}{P(B\mid A)}=\frac{P(A)}{P(A)P(B\mid A)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B\mid\overline{A}\right)}=\frac{0,5}{0,5.0,6+0,5.0,7}=\frac{10}{13}$$

Câu 9: Có hai đội thi đấu môn bắn súng. Đội I có 8 vận động viên, đội II có 10 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,6 và 0,55. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất để vận động viên chọn ra thuộc đội I là $\dfrac{5}{9}$

b) Xác suất không đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội II là $0,45$

c) Xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng là $\dfrac{103}{180}$

d) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Xác suất để vận động viên này thuộc đội I là $\dfrac{48}{103}$.

Lời giải

a) Sai : Xác suất để vận động viên chọn ra thuộc đội I là $\dfrac{8}{18}=\dfrac{4}{9}$.

b) Đúng: Xác suất không đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội II là $1-0,55=0,45$

c) Đúng : Gọi A là biến cố: “Vận động viên đạt huy chương vàng”, B là biến cố: “Thành viên đội I” thì biến cố đối của B là $\overline{B}$: “Thành viên đội II đạt huy chương vàng”.

Do đó, $P(B)=\frac{8}{18}=\frac{4}{9};P(\overline{B})=\frac{5}{9}$; $P(A|B)=0,6;P(A|\overline{B})=0,55$

Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=\frac{4}{9}.0,6+\frac{5}{9}.0,55=\frac{103}{180}$

d) Đúng : Ta có $P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{9}.0,6}{\frac{103}{180}}=\frac{48}{103}$

Câu 10: Một kho hàng có 1000 thùng hàng với bề ngoài giống hệt nhau, trong đó có 480 thùng hàng loại I và 520 thùng hàng loại II. Trong số các thùng hàng đó, có 80% thùng hàng loại I và 85% thùng hàng loại II đã được kiểm định. Chọn ngẫu nhiên một thùng hàng trong kho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất chọn được thùng hàng loại I bằng 48%.

b) Xác suất chọn được thùng hàng loại II đã được kiểm định bằng 38,4%.

c) Xác suất chọn được thùng hàng chưa kiểm định bằng 17,4%.

d) Giả sử thùng hàng được lấy ra là thùng hàng chưa được kiểm định, xác suất thùng hàng đó là thùng loại I thấp hơn xác suất thùng hàng đó là thùng loại II.

Lời giải

Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một thùng hàng trong kho.

Gọi A là biến cố: "Chọn được thùng hàng loại I".

B là biến cố: "Chọn được thùng hàng đã được kiểm định".

Theo bài ra ta có $P(B|A)=80\%, P(B|\overline{A})=85\%$

a) Đúng: Xác suất chọn được thùng hàng loại I là $P(A)=\frac{480}{1000}=48\%$.

b) Sai: Ta có $P(\overline{A})=\frac{520}{1000}=52\%$, $P(B|\overline{A})=85\%$.

Xác suất chọn được thùng hàng loại II đã được kiểm định là

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=52\%.85\%=44,2\%.$$

c) Đúng: Xác suất chọn được thùng hàng đã được kiểm định là

$$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=48\%.80\%+52\%.85\%=82,6\%$$

Suy ra xác suất chọn được thùng hàng chưa kiểm định là $P(\overline{B})=1-P(B)=17,4\%$

d) Sai: Giả sử thùng hàng được lấy ra là thùng hàng chưa được kiểm định.

Xác suất thùng hàng đó là thùng loại I là $P(A|\overline{B})=\frac{P(A).P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})}=\frac{48\%.(1-80\%)}{17,4\%}=\frac{16}{29}$.

Xác suất thùng hàng đó là thùng loại II là $P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}).P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})}=\frac{52\%.(1-85\%)}{17,4\%}=\frac{13}{29}$.

Vậy xác suất thùng hàng đó là thùng loại I cao hơn xác suất thùng hàng đó là thùng loại II.

Câu 11: Có hai đội tham gia một cuộc thi bơi lội. Đội I có 7 vận động viên, đội II có 9 vận động viên. Xác suất giành huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II lần lượt là 0.07 và 0.06. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất để vận động viên được chọn thuộc đội I là $\frac{9}{16}$

b) Xác suất để vận động viên này không giành được huy chương vàng nếu thuộc đội II là $0,94$

c) Xác suất để vận động viên này giành được huy chương vàng là $\frac{103}{1060}$

d) Giả sử vận động viên được chọn giành huy chương vàng. Xác suất để vận động viên này thuộc đội I là $\frac{49}{103}$.

Lời giải

a) Sai: Xác suất để vận động viên chọn ra thuộc đội I là $\frac{7}{16}$.

b) Đúng: Xác suất không đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội II là $1-0,06=0,94$

c) Sai : Gọi A là biến cố: "Vận động viên đạt huy chương vàng", B là biến cố: "Thành viên đội I" thì biến cố đối của B là $\overline{B}$: "Thành viên đội II".

Do đó, $P(B)=\frac{7}{16};P(\overline{B})=\frac{9}{16}$; $P(A\,|\,B)=0,07;P(A\,|\,\overline{B})=0,06$

Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P(\overline{B}).P(A\,|\,\overline{B})=\frac{7}{16}.0,07+\frac{9}{16}.0,06=\frac{103}{1600}$$

d) Đúng: Ta có $P(B\,|\,A)=\frac{P(B).P(A\,|\,B)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{16}.0,07}{\frac{103}{1600}}=\frac{49}{103}$

Câu 12: Một hộp có 80 viên bi, trong đó có 50 viên bi màu đỏ và 30 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Sau khi kiểm tra, người ta thấy có 60% số viên bi màu đỏ đánh số và 50% số viên bi màu vàng có đánh số, những viên bi còn lại không đánh số. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Xác suất chọn được viên bi màu đỏ bằng $62,5\%$.

b) Xác suất chọn được viên bi màu vàng có đánh số bằng 18,57%.

c) Xác suất chọn được viên bi không đánh số bằng 43,75%.

d) Giả sử viên bi được lấy ra là viên bi chưa được đánh số, xác suất để viên bi đó là bi đỏ thấp hơn xác suất viên bi đó là bi vàng.

Lời giải

Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một viên bi.

Gọi A là biến cố: "Chọn được viên bi màu đỏ"; B là biến cố: "Chọn được viên bi đã được đánh số". Theo bài ra ta có $P(B|A)=60\%, P(B|\overline{A})=50\%$

a) Đúng: Xác suất chọn được viên bi màu đỏ là $P(A)=\frac{50}{80}=62,5\%$.

b) Sai: Ta có $P(\overline{A})=\frac{30}{80}=37,5\%$, $P(B|\overline{A})=50\%$.

Xác suất chọn được viên bi màu vàng đã được đánh số là

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=37,5\%.50\%=18,75\%.$$

c) Đúng: Xác suất chọn được viên bi đã được đánh số là

$$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=62,5\%.60\%+37.5\%.50\%=56,25\%$$

Suy ra xác suất chọn được viên bi chưa đánh số là $P(\overline{B})=1-P(B)=43,75\%$.

d) Sai: Giả sử viên bi được lấy ra là viên bi chưa được đánh số. Khi đó:

Xác suất để viên bi đó là bi đỏ: $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A).P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})}=\dfrac{62.5\%.(1-60\%)}{43,75\%}=\dfrac{4}{7}$.

Xác suất để viên bi đó là bi vàng: $P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{P(\overline{A}).P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})}=\dfrac{37,5\%.(1-50\%)}{43,75\%}=\dfrac{3}{7}$.

Vậy xác suất viên bi đó là bi đỏ cao hơn xác suất viên bi đó là bi xanh.

Câu 13: Một nhà máy có hai phân xưởng X và Y cùng sản xuất một loại sản phẩm. Phân xưởng X sản xuất 60% và phân xưởng Y sản xuất 40% tổng số sản phẩm của cả nhà máy. Tỉ lệ phế phẩm của phân xưởng X, phân xưởng Y lần lượt là 10% và 5%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho hàng của nhà máy.

a) Xác suất lấy được sản phẩm phẩm tốt, biết sản phẩm đó do phân xưởng X sản xuất bằng 95%.
b) Xác suất lấy được phế phẩm là 10%.
c) Giả sử đã lấy được phế phẩm, xác suất phế phẩm đó do phân xưởng Y sản xuất bằng 75%.
d) Nếu lấy được sản phẩm tốt, khả năng sản phẩm đó do phân xưởng X sản xuất cao hơn khả năng sản phẩm đó do phân xưởng Y sản xuất.

Lời giải

Xét phép thử lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho hàng của nhà máy.
Gọi A là biến cố: "Lấy được sản phẩm do phân xưởng X sản xuất".
$\overline{A}$ là biến cố: "Lấy được sản phẩm do phân xưởng Y sản xuất".
B là biến cố: "Lấy được phế phẩm".
$\overline{B}$ là biến cố: "Lấy được sản phẩm tốt".

Theo bài ra ta có $P(A)=60\%, P(A)=40\%, P(B|A)=10\%, P(B|\overline{A})=5\%$

a) Sai: Xác suất lấy được sản phẩm phẩm tốt, biết sản phẩm đó do phân xưởng X sản xuất là xác suất có điều kiện $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=90\%$.

b) Sai: Xác suất lấy được phế phẩm là

$$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=60\%.10\%+40\%.5\%=8\%.$$

c) Đúng: Giả sử đã lấy được phế phẩm, xác suất phế phẩm đó do phân xưởng Y sản xuất là xác suất có điều kiện $P(A|B)$. Ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{60\%.10\%}{8\%}=75\%$

d) Đúng:Ta có $P(\overline{B})=1-P(B)=1-8\%=92\%$; $P(\overline{B}|A)=90\%$;

$P(\overline{B}|\overline{A})=1-P(B|\overline{A})=1-5\%=95\%$.

Nếu lấy được sản phẩm tốt thì:

Xác suất sản phẩm đó do phân xưởng X sản xuất là $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A).P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})}=\dfrac{60\%.90\%}{92\%}=\dfrac{27}{46}$

Xác suất sản phẩm đó do phân xưởng Y sản xuất là $P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=\dfrac{P\left(\overline{A}\right).P\left(\overline{B}\middle|\overline{A}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{40\%.95\%}{92\%}=\dfrac{19}{46}$

Vì $\dfrac{27}{46}>\dfrac{19}{46}$ nên nếu lấy được sản phẩm tốt, khả năng sản phẩm đó do phân xưởng X sản xuất cao hơn khả năng sản phẩm đó do phân xưởng Y sản xuất.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tại một địa phương có 500 người cao tuổi, bao gồm 260 nam và 240 nữ. Trong đó nhóm người cao tuổi nam và nữ lần lượt có 40% và 55% bị bệnh tiểu đường. Chọn ngẫu nhiên một người. Xác suất để chọn được một người không bị bệnh tiểu đường là bao nhiêu?*(làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm)*

Lời giải

Xét các biến cố:

A: " Chọn được người không bị tiểu đường"

B: " Chọn được người cao tuổi là nam"

$\overline{B}$: " Chọn được người cao tuổi là nữ "

Từ giải thuyết ta có $P(B)=\dfrac{260}{500}=0,52$; $P(A\,|\,B)=1-0,4=0,6$;

$P\left(\overline{B}\right)=\dfrac{240}{500}=0,48$; $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=1-0,55=0,45$

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A)=P(B).P(A\,|\,B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,52.0,6+0,48.0,45=0,528\approx 0,53.$$

Câu 2: Một loại linh kiện do hai nhà máy I,II cùng sản xuất. Tỉ lệ phế phẩm của nhà máy I,II lần lượt là : $0,04;0,03$. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy I và 120 sản phẩm của nhà máy II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện của lô hàng đó. Giả sử linh kiện được chọn là phế phẩm. Tính xác suất linh kiện này thuộc nhà máy I.*(làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần trăm).*

Lời giải

Ta xét các biến cố

A: " Linh kiện được lấy ra là phế phẩm"

B: " Linh kiện lấy ra từ nhà máy I "

$\overline{B}$: " Linh kiện lấy ra từ nhà máy II "

Theo giả thuyết ta có $P(B)=\dfrac{80}{200}=0,4$; $P\left(\overline{B}\right)=\dfrac{120}{200}=0,6$; $P(A\,|\,B)=0,04$; $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=0,03$

Theo công thức toàn phần xác suất lấy linh kiện là phế phẩm là

$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=$ $0,4.0,04+0,6.0,03=0,034$.

Mặt khác theo công thức Bayes xác suất linh kiện phế phẩm do nhà máy I sản xuất là:

$$P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\frac{0,4.0,04}{0,034}=\frac{8}{17}\approx 0,47$$

Câu 3: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ loại I và loại II lần lượt là $0,9$ và $0,7$. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ đó bắn trúng đích, tính xác suất để xạ thủ đó là xạ thủ loại I?

Lời giải

Gọi A là biến cố " viên đạn trúng đích".

B_1 là biến cố " chọn xạ thủ loại I bắn"; B_2 là biến cố " chọn xạ thủ loại II bắn".

$P(B_1)=\frac{2}{10}=0,2$; $P(A|B_1)=0,9$; $P(B_2)=\frac{8}{10}=0,8$; $P(A|B_2)=0,7$.

Hai biến cố $B_1;B_2$ tạo thành họ đầy đủ các biến cố. Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)=0,2.0,9+0,8.0,7=0,74.$$

Áp dụng công thức Bayes có: $P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0,9.0,2}{0,74}=\frac{9}{37}\approx 0,24$.

Câu 4: Một công ty du lịch bố trí chỗ nghỉ cho đoàn khách tại ba khách sạn A,B,C theo tỉ lệ 20%, 50 %, 30%. Tỉ lệ hỏng điều hòa ở ba khách sạn lần lượt là 5%, 4%, 8%. Tính xác suất để một khách ở khách sạn C, biết khách đó ở phòng điều hòa không bị hỏng (kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi biến cố H: "Khách nghỉ ở phòng có điều hòa bị hỏng"

A: "Khách nghỉ tại khách sạn A"

B: "Khách nghỉ tại khách sạn B"

C: "Khách nghỉ tại khách sạn C"

Theo bài ra ta có: $P(A)=0,2$; $P(B)=0,5$; $P(C)=0,3$.

$P(H|A)=0,05$; $P(H|B)=0,04$; $P(H|C)=0,08$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có:

$P(H)=P(A).P(H|A)+P(B).P(H|B)+P(C).P(H|C)$

$=0,2.0,05+0,5.0,04+0,3.0,08=0,054$.

Áp dụng công thức Bayes, xác suất để một khách ở khách sạn A, biết khách đó ở phòng điều hòa bị hỏng là: $P(A|H)=\frac{P(A).P(H|A)}{P(H)}=\frac{0,2.0,05}{0,054}=\frac{5}{27}\simeq 0,19$.

Áp dụng công thức Bayes, xác suất để một khách ở khách sạn C, biết khách đó ở phòng điều hòa không bị hỏng là:

$$P\left(C\mid\overline{H}\right)=\frac{P(C).P\left(\overline{H}\mid C\right)}{P\left(\overline{H}\right)}=\frac{0,3.(1-0,08)}{1-0,054}=\frac{138}{473}\simeq 0,29.$$

Câu 5: Cho hộp I gồm 5 bi trắng và 5 bi đỏ, hộp II gồm 6 bi trắng và 4 bi đỏ. Bỏ ngẫu nhiên hai bi từ hộp I sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp II một bi. Giả sử lấy được viên bi trắng. Tính xác suất để lấy được bi trắng từ hộp I. (kết quả để dưới dạng số thập phân và làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Gọi K_1: "Bi lấy ra từ hộp II là bi của hộp I"

K_2: "Bi lấy ra từ hộp II là bi của hộp II"

A: "Lấy được bi trắng"

Ta có: $P(K_1)=\frac{C_2^1}{C_{12}^1}=\frac{1}{6}$; $P(K_2)=\frac{C_{10}^1}{C_{12}^1}=\frac{5}{6}$; $P(A\mid K_1)=\frac{C_5^1}{C_{10}^1}=\frac{1}{2}$; $P(A\mid K_2)=\frac{C_6^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{5}$.

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có xác suất để lấy được bi trắng là:

$$P(A)=P(K_1).P(A\mid K_1)+P(K_2).P(A\mid K_2)=\frac{1}{6}.\frac{1}{2}+\frac{5}{6}.\frac{3}{5}=\frac{7}{12}\simeq 0,58.$$

Áp dụng công thức Bayes, xác suất để lấy được bi trắng của hộp I là:

$$P(K_1\mid A)=\frac{P(K_1).P(A\mid K_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}.\frac{1}{2}}{\frac{7}{12}}=\frac{1}{7}\simeq 0,14.$$

Câu 6: Một xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus và cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus. Biết rằng tỉ lệ người nhiễm Covid – 19 trong một cộng đồng nào đó là 1%. Một người trong cộng đồng đó cho kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để người đó thực sự bị nhiễm virus có dạng $\frac{a}{b}$ (Phân số tối giản). Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Người đó bị nhiễm Virus"; B là biến cố "Người đó cho kết quả dương tính".

Xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả dương tính với 90% các trường hợp thực sự nhiễm virus $P(B\mid A)=0,9$.

Xét nghiệm Covid – 19 cho kết quả âm tính với 80% các trường hợp thực sự không nhiễm virus, nên cho kết quả dương tính với 20% các trường hợp không thực sự nhiễm virus $P\left(B\mid\overline{A}\right)=0,2$

$P(A)=0,01\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=0,99$

Do đó xác suất để người đó cho kết quả dương tính là:

$$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})=0,01.0,9+0,99.0,2=0,207$$

Xác suất để người nhiễm virus cho kết quả dương tính là:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0,01.0,9}{0,207}=\frac{1}{23}$$

Vậy $a=1,b=23\Rightarrow a+b=24$.

Câu 7: Tỷ lệ người nghiện thuốc lá tại một vùng là 30%. Biết rằng tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người nghiện thuốc là 60%, còn tỷ lệ người bị viêm họng trong số những người không nghiện là 40%. Lấy ngẫu nhiên một người thấy người ấy không bị viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc lá. *(Làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)*

Lời giải

Gọi A là biến cố "Người này bị nghiện thuốc lá"; B là biến cố "Người này không bị viêm họng"

Ta có $P(A)=0,3\Rightarrow P(\overline{A})=0,7$.

Tỷ lệ người bị viêm họng trong số người bị nghiện thuốc là $P(\overline{B}\mid A)=0,6$

Tỷ lệ người bị viêm họng trong số người không bị nghiện thuốc là $P(\overline{B}\mid \overline{A})=0,4$

Do đó $P(\overline{B})=P(A).P(\overline{B}\mid A)+P(\overline{A}).P(\overline{B}\mid \overline{A})=0,3.0,6+0,7.0,4=0,46$.

Suy ra $P(B)=1-P(\overline{B})=0,54$.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0,3.0,4}{0,54}=\frac{2}{9}\approx 0,22.$$

Câu 8: Trong một đợt nghiên cứu tỷ lệ ung thư do hút thuốc lá gây nên, người ta thấy rằng tại tỉnh Hà Nam tỉ lệ người dân của tỉnh nghiện thuốc lá là 20%; tỉ lệ người bị bệnh ung thư trong số người nghiện thuốc lá là 70%, trong số người không nghiện thuốc lá là 15%. Hỏi khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất người đó nghiện thuốc lá là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi A là biến cố "người nghiện thuốc lá", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "người không nghiện thuốc lá"

Gọi B là biến cố "người bị bệnh ung thư"

Theo giả thiết ta có: $P(A)=0,2\Rightarrow P(\overline{A})=0,8;\ P(B\mid A)=0,7;\ P(B\mid \overline{A})=0,15$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P(\overline{A}).P(B\mid \overline{A})=0,2.0,7+0,8.0,15=0,26$$

Xác suất mà người đó là nghiện thuốc lá khi biết bị bệnh ung thư là $P(A|B)$

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{0,2.0,7}{0,26}=\dfrac{7}{13}\approx 0,54$.

Như vậy khi gặp một người bị bệnh ung thư tại tỉnh này thì xác suất (làm tròn đến hàng phần trăm) người đó nghiện thuốc lá là $0,54$.

Câu 9: Một đội bắn súng gồm có 8 nam và 2 nữ. Xác suất bắn trúng của các xạ thủ nam là 0,8 còn của các xạ thủ nữ là 0,9. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ bắn một viên đạn và xạ thủ đó đã bắn trúng. Tính xác suất (làm tròn đến hàng phần trăm) để xạ thủ đó là nữ?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Xạ thủ được chọn là nữ", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "xạ thủ được chọn là nam"

Gọi B là biến cố "xạ thủ được chọn bắn trúng"

Theo giả thiết ta có: $P(A)=\dfrac{2}{2+8}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow P(\overline{A})=\dfrac{4}{5}$; $P(B|A)=0,9$; $P(B|\overline{A})=0,8$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=\frac{1}{5}.0,9+\frac{4}{5}.0,8=0,82$$

Xác suất để xạ thủ được chọn ra bắn trúng đó là nữ là $P(A|B)$

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{5}.0,9}{0,82}=\dfrac{9}{41}\approx 0,22$.

Vậy xác suất để xạ thủ bắn trúng đó là nữ là $0,22$.

Câu 10: Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất ra thị trường, mỗi bóng đèn đều được kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo nên tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 và tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95. Hãy tính tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng.

Lời giải

Gọi A là biến cố "bóng đạt chuẩn sau khi qua kiểm tra chất lượng"

B là biến cố "sản phẩm đạt tiêu chuẩn".

Theo bài ra ta có: $P(B)=0,8$; $P(\overline{B})=1-0,8=0,2$

Do tỉ lệ công nhận một bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 0,9 nên $P(A|B)=0,9$.

Tỉ lệ loại bỏ một bóng hỏng là 0,95 nên $P(A|\overline{B})=1-0,95=0,05$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,8.0,9+0,2.0,05=0,73.$$

Câu 11: Một lớp học có số học sinh nữ chiếm 45% tổng số học sinh cả lớp. Cuối năm tổng kết, lớp học đó có tỉ lệ học sinh giỏi là nữ là 30%, học sinh giỏi là nam chiếm 40%. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn 1 học sinh của lớp để đại diện cho lớp lên nhận thưởng. Biết rằng học sinh được chọn là học sinh giỏi. Tính xác suất để em đó là nữ.
Chú ý: Các kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải

Gọi A là biến cố "học sinh được chọn là học sinh giỏi"

B là biến cố "học sinh được chọn là học sinh nữ".

Theo bài ra ta có: $P(B)=0,45;\ \ P(\overline{B})=1-0,45=0,55$.

Do lớp học đó có tỉ lệ học sinh giỏi là nữ là 30%, học sinh giỏi là nam chiếm 40% nên:

$P(A|B)=0,3$ và $P(A|\overline{B})=0,4$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$P(A)=P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})=0,45.0,3+0,55.0,4\simeq 0,36$.

Gọi C là biến cố "học sinh giỏi được chọn là học sinh nữ" thì $C=B|A$ nên theo công thức Bayes ta có: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{0,45.0,3}{0,355}\simeq 0,38$.

Câu 12: Công ty sữa Việt Nam phát phiếu thăm dò khách hàng ở một thành phố với hai câu hỏi: "Tháng vừa rồi bạn có xem quảng cáo về Vinamilk không?" và "Tháng vừa rồi bạn có mua sản phẩm nào của Vinamilk không?". Kết quả thăm dò như sau: Số người xem quảng cáo Vinamilk chiếm tỉ lệ 40% tổng số người khảo sát, số người có mua sản phẩm của Vinamilk chiếm tỉ lệ 25% tổng số người khảo sát. Trong số người mua sản phẩm của Vinamilk thì số người xem quảng cáo chiếm tỉ lệ 60%. Chọn ngẫu nhiên một khách hàng trong số các khách hàng đã xem quảng cáo về Vinamilk. Xác suất khách hàng đó mua sản phẩm Vinamilk khi đã xem quảng cáo là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố "Có mua sản phẩm của Vinamilk".
Gọi B là biến cố "Có xem quảng cáo của Vinanilk".
Khi đó ta tính $P(A|B)$ tức là tính xác suất biến cố "Có mua sản phẩm của Vinamilk khi đã xem quảng cáo".

Theo công thức Bayes ta có $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(B)}$.

Ta có xác suất của biến cố A là: $P(A)=25\%=\dfrac{1}{4}$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B)=40\%=\dfrac{2}{5}$.

Xác suất khách hàng xem quảng cáo khi đã mua sản phẩm của Vinamilk: $P(B|A)=60\%=\dfrac{3}{5}$

Xác suất khách hàng mua sản phẩm khi xem quảng cáo là:

$$P(A\mid B)=\frac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}.\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{8}.$$

Câu 13: Dây chuyền lắp ráp nhận được các chi tiết do hai máy sản xuất. Trung bình máy thứ nhất cung cấp 70% chi tiết, máy thứ hai cung cấp 30% chi tiết. Khoảng 95% chi tiết do máy thứ nhất sản xuất là đạt tiêu chuẩn, còn 80% chi tiết do máy thứ hai sản xuất là đạt tiêu chuẩn. Lấy ngẫu nhiên từ dây chuyền một sản phẩm, thấy nó đạt tiêu chuẩn. Tìm xác suất để sản phẩm đó do máy thứ nhất sản xuất.

Lời giải

Gọi A là biến cố " Chi tiết lấy từ dây chuyền sản xuất đạt chuẩn".

Gọi B_1 là biến cố "Chi tiết do máy thứ nhất sản xuất".

B_2 là biến cố "Chi tiết do máy thứ hai sản xuất"

Khi đó ta tính $P(B_1\mid A)$ tức là tính xác suất biến cố "Chi tiết đó do máy thứ nhất sản xuất khi nó là sản phẩm đạt chuẩn".

Theo công thức Bayes ta có $P(B_1\mid A)=\dfrac{P(B_1).P(A\mid B_1)}{P(B_1).P(A\mid B_1)+P(B_2).P(A\mid B_2)}$.

Ta có: $P(B_1)=0,7$; $P(B_2)=0,3$; $P(A\mid B_1)=0,95$; $P(A\mid B_2)=0,80$.

Xác suất để chi tiết đó do máy thứ nhất sản xuất khi nó là sản phẩm đạt chuẩn:

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1).P(A\mid B_1)}{P(B_1).P(A\mid B_1)+P(B_2).P(A\mid B_2)}=\frac{0,7.0,95}{0,7.0,95+0,3.0,8}=\frac{133}{181}\approx 0,7348.$$

Câu 14: Một căn bệnh có 1% dân số mắc phải. Một phương pháp chuẩn đoán được phát triển có tỷ lệ chính xác là: Với những người bị bệnh, phương pháp này sẽ đưa ra kết quả dương tính 98%. Với những người không mắc bệnh, phương pháp này cũng chuẩn đoán đúng 98 trong 100 trường hợp không mắc bệnh (tức là có 2 người không mắc bệnh nhưng xuất hiện dương tính "giả"). Nếu một người kiểm tra và kết quả là dương tính, xác suất để người đó thực sự bị bệnh là bao nhiêu?.

Lời giải

Gọi biến cố A: "Người đó mắc bệnh",

biến cố B: "Kết quả kiểm tra của người đó là dương tính".

Ta cần tìm $P(A\mid B)$: xác suất một người bị bệnh trong điều kiện người đó kiểm tra kết quả là dương tính.

Căn bệnh có 1% dân số mắc phải nên xác suất để một người mắc bệnh là $P(A)=1\%$.

Xác suất để người đó không mắc bệnh là $P(\overline{A})=99\%$.

$P(B\mid A)=98\%$: xác suất kết quả dương tính nếu người đó mắc bệnh.

$P(B\mid \overline{A})=2\%$: xác suất kết quả dương tính nếu người đó không mắc bệnh.

Theo công thức Bayes:

$$P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\frac{0,01.0,98}{0,01.0,98+0,99.0,02}=\frac{49}{148}\approx 33\% .$$

Vậy xác suất để người đó mắc bệnh nếu kết quả dương tính là 33%.

Câu 15: Trước khi đưa sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó và thấy có 50 người trả lời "sẽ mua", 90 người trả lời "có thể sẽ mua" và 60 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỷ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời trên tương ứng là 60%, 40% và 1%. Trong số khách hàng thực sự mua sản phẩm thì xác suất khách hàng trả lời "sẽ mua" là $\frac{a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{1}{2}a+b$.

Lời giải

Gọi biến cố A: "Người được phỏng vấn sẽ mua sản phẩm".

Biến cố H_1: "Khách hàng được phỏng vấn trả lời sẽ mua".

Biến cố H_2: "Khách hàng được phỏng vấn trả lời có thể sẽ mua".

Biến cố H_3: "Khách hàng được phỏng vấn trả lời không mua".

Ta có $P(H_1)=\frac{50}{200}=0,25$ $\quad P(H_2)=\frac{90}{200}=0,45$ $\quad P(H_3)=\frac{60}{200}=0,3$

$P(A|H_1)=0,6$; $P(A|H_2)=0,4$; $P(A|H_3)=0,1$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần, ta có tiềm năng của sản phẩm đó trên thị trường là

$P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)+P(H_3).P(A|H_3)$

$=0,25.0,6+0,45.0,4+0,3.0,1=0,36.$

Theo công thức Bayes, ta có xác suất khách hàng trả lời "sẽ mua" là

$$P(H_1|A)=\frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{0,25.0,6}{0,36}=\frac{5}{12}.$$

Suy ra $a=5, b=12$. Vậy $T=\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}.5+12=14,5.$

Câu 16: Một nhà đầu tư phân loại các dự án trong một chu kỳ đầu tư thành 3 loại: ít rủi ro, rủi ro trung bình và rủi ro cao. Tỷ lệ các dự án các loại đó tương ứng là $20\%;\ 45\%$ *và* 35%. Kinh nghiệm cho thấy tỷ lệ các dự án gặp rủi ro khi đầu tư tương ứng là $5\%;\ 20\%$ *và* 40%. Nếu một dự án gặp rủi ro sau kỳ đầu tư thì khả năng dự án rủi ro lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi A là biến cố dự án gặp rủi ro trong kỳ đầu tư.

$H_i\ (i=1,2,3)$ lần lượt là các biến cố dự án thuộc loại ít rủi ro, rủi ro trung bình và rủi ro cao

$P(H_1)=0,2;\ P(H_2)=0,45;\ P(H_3)=0,35$.

$P(A|H_1)=0,05;\ P(A|H_2)=0,2;\ P(A|H_2)=0,4$.

$P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)+P(H_3).P(A|H_3)=0,24$.

$P(H_1|A)=\frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)}\approx 0,04;\ P(H_2|A)=\frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(A)}\approx 0,38$.

$P\left(H_3\mid A\right)=\dfrac{P\left(H_3\right).P\left(A\mid H_3\right)}{P(A)}\approx 0,58$

Vậy khả năng dự án gặp rủi ro là cao nhất là $0,58$.

Câu 17: Có hai đồng xu có hình thức giống nhau, trong có có một đồng xu cân đối đồng chất và một đồng xu không cân đối có xác suất khi tung đồng xu xuất hiện mặt ngửa là $\dfrac{2}{3}$. Một người lấy ngẫu nhiên một đồng xu trong hai đồng xu đã cho, tung đồng xu đó 3 lần thì đều thấy xuất hiện mặt ngửa, xác suất người đó lấy được đồng xu cân đối là bao nhiêu? (*Làm tròn đến hàng phần mười.*)

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Lấy được đồng xu cân đối đồng chất" và B là biến cố: "Tung đồng xu ba lần đều xuất hiện mặt ngửa". Khi đó ta cần tính $P(A\mid B)$.

Ta có $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{1}{2}$ và $P(B\mid A)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$, $P\left(B\mid\overline{A}\right)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$.

Theo công thức Bayes và công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B\mid\overline{A}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{27}}\approx 0.3.$$

Câu 18: Trường X có 20% học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao, trong số học sinh đó có 85% học sinh biết chơi môn bóng bàn. Ngoài ra, có 10% số học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao cũng biết chơi môn bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Giả sử học sinh đó biết chơi môn bóng bàn. Xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ thể thao là $\dfrac{a}{b}$. Tính $a-b$?

Lời giải

Xét các biến cố: A: "Chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ thể thao";

B: "Chọn được học sinh biết chơi bóng bàn".

Khi đó, $P(A)=0,2$; $P\left(\overline{A}\right)=0,8$; $P(B\mid A)=0,85$; $P\left(B\mid\overline{A}\right)=0,1$.

Theo công thức xác suất toàn phần ta có:

$P(B)=P(A).P(B\mid A)+P\left(\overline{A}\right).P\left(B\mid\overline{A}\right)=0,2.0,85+0,8.0,1=0,25$.

Theo công thức Bayes, xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ thể thao, biết học sinh đó chơi được môn bóng bàn là:

$P(A\mid B)=\dfrac{P(A).P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{0,2.0,85}{0,25}=\dfrac{17}{25}$ nên $a=17,b=25\Rightarrow a-b=-8$.

Câu 19: Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử có ba dây chuyền sản xuất A, B và C. Dây chuyền A sản xuất 50% số linh kiện, dây chuyền B sản xuất 30% và dây chuyền C sản xuất 20% số linh kiện. Tỷ lệ phế phẩm của từng dây chuyền lần lượt là 2%, 3% và 1%. Chọn một linh kiện ngẫu nhiên và phát hiện là phế phẩm thì xác suất để linh kiện đó được sản xuất từ dây chuyền A là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi các biến cố:

A: "Linh kiện được sản xuất từ dây chuyền A"

B: "Linh kiện được sản xuất từ dây chuyền B"

C: "Linh kiện được sản xuất từ dây chuyền C"

D: "Linh kiện là phế phẩm".

Dựa vào dữ liệu đề bài ta có: $P(A)=0.5$; $P(B)=0.3$; $P(C)=0.2$; $P(D|A)=0.02$

$P(D|B)=0.03$; $P(D|C)=0.01$.

Xác suất để sản xuất một linh kiện phế phẩm là:

$P(D)=P(A).P(D|A)+P(B).P(D|B)+P(C).P(D|C)=0,5.0,02+0,3.0,03+0,2.0,01=0,021.$

Nếu chọn một linh kiện ngẫu nhiên và phát hiện là phế phẩm thì xác suất để linh kiện đó được sản xuất từ dây chuyền A là: $P(A|D)=P(A).\dfrac{P(D|A)}{P(D)}=0,5.\dfrac{0,02}{0,021}\simeq 0,48$.

Câu 20: Một lớp học có tỉ lệ học sinh nữ là 60%, trong đó tỉ lệ học sinh nam và học sinh nữ tham gia câu lạc bộ Hip hop của trường lần lượt là 25% và 5%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp có tham gia câu lạc bộ Hip hop, tính xác suất để học sinh đó là nam.

Lời giải

Gọi A là biến cố: " Chọn được học sinh tham gia câu lạc bộ Hip hop " và B là biến cố: "Chọn được học sinh nam". Khi đó ta cần tính $P(B|A)$.

Ta có $P(\overline{B})=0,6$, $P(B)=0,4$ và $P(A|B)=0,25$, $P(A|\overline{B})=0,05$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0,4.0,25+0,6.0,05=0,13$$

Áp dụng công thức Bayes, ta có :

$$P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}=\frac{0,4.0,25}{0,13}\approx 0.77\,.$$

Câu 21: Trong một đợt kiểm tra sức khoẻ, có một loại bệnh X mà tỉ lệ người mắc bệnh là $0,2\%$ và một loại xét nghiệm Y mà ai mắc bệnh X khi xét nghiệm Y cũng có phản ứng dương tính. Tuy nhiên, có 6% những người không bị bệnh X lại có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Chọn ngẫu nhiên 1 người trong đợt kiểm tra sức khoẻ đó. Giả sử người đó có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y. Xác suất người đó mắc bệnh X là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét các biến cố :

A: "Người được chọn mắc bệnh X";

B: "Người được chọn có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y".

Khi đó, $P(A)=0,002$; $P(\overline{A})=1-0,002=0,998$; $P(B|A)=1$; $P(B|\overline{A})=0,06$.

Theo công thức Bayes, ta có: $P(A|B)=\dfrac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})}=\dfrac{0,002.1}{0,06188}\approx 0,03.$

Câu 22: Có hai đội thi đấu môn bắn súng. Đội I có 5 vận động viên, đội II có 7 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II lần lượt là $0,65$ và $0,55$. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên. Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Xác suất để vận động viên này thuộc đội I là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét các biến cố sau:

A: "Vận động viên được chọn thuộc đội I";

B: "Vận động viên được chọn đạt huy chương vàng".

Khi đó, $P(A)=\frac{5}{12}$; $P(\overline{A})=\frac{7}{12}$; $P(B|A)=0,65$; $P(B|\overline{A})=0,55$.

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất để vận động viên được chọn đạt huy chương vàng là: $P(B)=P(A).P(B|A)+P(\overline{A}).P(B|\overline{A})=\frac{5}{12}.0,65+\frac{7}{12}.0.55=\frac{71}{120}$.

Theo công thức Bayes, xác suất để vận động viên được chọn đạt huy chương vàng, thuộc đội I là: $P(A|B)=\frac{P(A).P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{12}.0,65}{\frac{71}{120}}\approx 0,46$.

-----------------HẾT-----------------