



Chương 01

Bài 3.

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A

Lý thuyết

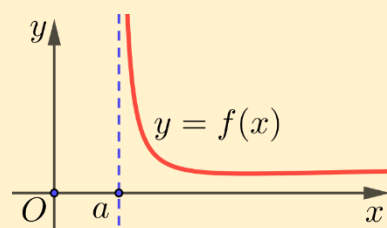
1. Tiệm cận đứng



Định nghĩa:

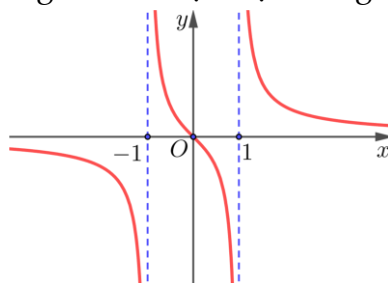
Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$



Chú ý

» Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = -1$



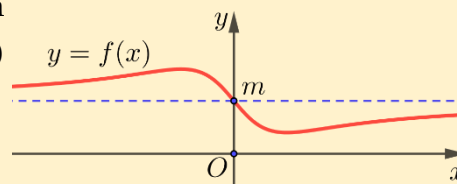
2. Tiệm cận ngang



Định nghĩa:

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

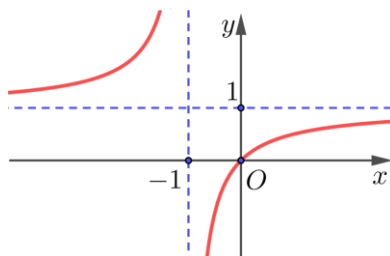
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$
- hoặc
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$





Chú ý

- » Đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y = 1$ và tiệm cận đứng $x = -1$



3. Tiệm cận xiên



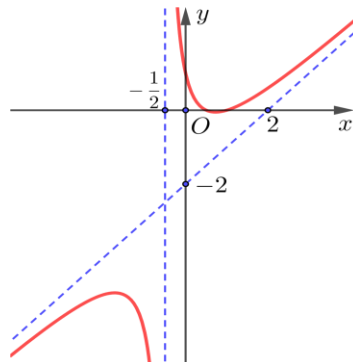
Định nghĩa:

Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{hoặc} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Chú ý

- » Đồ thị hàm số $f(x) = x - 2 + \frac{3}{2x+1}$ cùng tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$ và tiệm cận xiên $y = x - 2$





B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị



Phương pháp

- » **Bước 1:** Tìm Tập xác định của hàm số. Giả sử $D = (-\infty; +\infty) \setminus \{x_0\}$.
- » **Bước 2:** Quan sát Bảng biến thiên hoặc đồ thị, tìm giới hạn
 - » $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
 - » $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 - » $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (ax + b)] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (ax + b)] = 0 \end{cases}$ thì $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

** Chú ý:

- » $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_2 \Rightarrow y = y_1; y = y_2$ là hai đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- » Tập xác định không có chứa $+\infty; -\infty$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.
- » Hàm số xác định trên \mathbb{R} thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.



Ví dụ 1.1.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	$-$	$ $	$-$	0	$+$
y	1	2	3		

\swarrow $-\infty$ \searrow -3 \nearrow

Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

.....

.....

.....

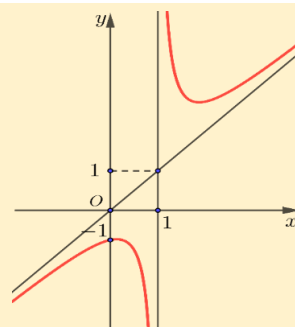
.....

.....



Ví dụ 1.2.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$	
y'	$-$	\parallel	$+$	$+$	0	$-$
y	5		$+\infty$		1	
	\searrow	\nearrow		\nearrow	\searrow	
		3		-2		-5

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 2. Tìm các đường tiệm cận khi cho bảng biến thiên – đồ thị



Phương pháp

Để tìm tiệm cận ngang, tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$

- » **Bước 1:** Tìm Tập xác định của hàm số.
- » **Bước 2:** Tìm **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có):
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- » **Bước 3:** Tìm **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số bằng cách tính các giới hạn (nếu có):
 $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x)$
- » **Bước 4:** Tìm **tiệm cận xiên** (dành cho hàm số có dạng phân thức có bậc tử số lớn hơn bậc mẫu số 1 bậc) bằng một trong hai cách sau:

» Cách 1: Nếu biểu diễn $f(x) = ax + b + g(x)$ thì tính $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) \end{cases}$

» Cách 2: Xác định đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ bằng cách xác định hệ số a, b :

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ hoặc } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ với } a \neq 0.$$

Khi đó tương ứng ta có $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$ hoặc $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

* * Chú ý:

- » Đồ thị hàm số chỉ có thể có một trong hai loại tiệm cận ngang hoặc tiệm cận xiên.
- » Nếu hàm số xác định trên toàn bộ tập số thực thì không có tiệm cận đứng.
- » Hàm số hằng $y = b$ có đồ thị nhận $y = b$ là tiệm cận ngang, hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có đồ thị nhận chính nó $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.

Ví dụ 2.1.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+1}{x}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.3.

Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 3. Đường tiệm cận liên quan góc – khoảng cách – diện tích



Phương pháp

- » **Bước 1:** Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.
- » **Bước 2:** Dựa vào các giả thiết: khoảng cách, góc, diện tích,... để tính toán hoặc thiết lập phương trình, hệ phương trình để tìm ẩn cần tìm.

Ví dụ 3.1.

Tìm các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{4mx+3m}{x-2}$ có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2024?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 3.2.

Cho hàm số $y = \frac{2x^2-x}{x-1}$ có đồ thị (C) .

- (1) Tính khoảng cách từ $M(2; 1)$ đến đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số (C) .
- (2) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (C) cắt hai trục tọa độ lần lượt tại hai điểm A, B . Tính diện tích của tam giác OAB đó.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.3.

Cho hàm số $y = \frac{4x+4}{3-x}$ có đồ thị là (C) . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (C) .

✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 4. Bài toán thực tế và ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận



Phương pháp

- » **Bước 1:** Biểu diễn các đại lượng với nhau thông qua hàm số.
- » **Bước 2:** Tìm tiệm của hàm số vừa tìm được.
- » **Bước 3:** Nêu ý nghĩa của giá trị gần về tiệm cận



Ví dụ 4.1.

Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100-x} \text{ (triệu đồng)}, 0 \leq x < 100.$$

Hãy cho biết:

- (1) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- (2) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right)$, trong đó $x \geq 1$.

- (1) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $1; +\infty$), hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- (2) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.3.

Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

- (1) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200+t}$.
- (2) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $0; +\infty$), hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- (3) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....