Chương 01

Bài 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM TOÁN THỰC TẾ

A. Lý thuyết

1. TỐC ĐỘ THAY ĐỔI CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG

Giả sử y là một hàm số của x và ta viết $y = f(x)$. Nếu x thay đổi từ x_1 đến x_2, thì sự thay đổi của x là $\Delta x = x_2 - x_1$ và sự thay đổi tương ứng của y là $\Delta y = f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)$.

Tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi trung bình của y đối với x trên đoạn $\left[x_1; x_2\right]$.

Giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}$ được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của y đối với x tại điểm $x = x_1$.

Như vậy, đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điêm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

-Nếu $C = C\left(t\right)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t, thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t.

- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t, thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t.

- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.

- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x+1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87 , bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

Ví dụ 1. Khi bỏ qua sức cản của không khi, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2m với vận tốc ban đầu $24,5\text{m/s}$ là $h(t)=2+24,5t-4,9t^2$ (theo Vật lí đọi cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hinh hoá bằng hàm số $P(t)=\dfrac{a}{b+e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t=0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b. Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x)=30000+300x-2,5x^2+0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x)=\dfrac{300x}{100-x}$ (triêu dông), $0\le x<100$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=C(x)$. Tự đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

2. MỘT VÀI BÀI TOÁN TỐI ƯU HOÁ ĐƠN GIẢN

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một bài toán tối ưu hoá:

Bước 1. Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.

Bước 2. Chọn một đại lượng thich hợp nào đó, kí hiệu là x, và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x. Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x. Tìm tập xác định của hàm số $Q=Q(x)$.

Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q=Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

Ví dụ 5. Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 7. Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là

$P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x), x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

a) Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hằng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?

b) Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng hay không?

Lời giải

....

....

....

....

....

....