ĐÁP ÁN, HƯỚNG DẪN GIẢI

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12*

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ là:

A. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + C$. **B.** $e^x + C$. **C.** $-\frac{e^x}{x} + C$. **D.** $x.e^{x-1} + C$.

Lời giải

Nguyên hàm của e^x là $e^x + C$.

Đáp án: **B.**

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên đoạn $[a;b]$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích là:

A. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. **B.** $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. **D.** $V = \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quanh trục Ox được tính theo công thức:

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Đáp án: **A.**

Câu 3. Hai mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 có bảng tần số ghép nhóm như sau:

M_1

Nhóm	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Tần số	3	4	8	6	4

M_2

Nhóm	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Tần số	6	8	16	12	8

Gọi s_1, s_2 lần lượt là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $s_1 = s_2$. **B.** $s_1 = 2s_2$. **C.** $2s_1 = s_2$. **D.** $4s_1 = s_2$.

Lời giải

Độ lệch chuẩn của một mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức:

$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}}$,

trong đó:

f_i là tần số của nhóm thứ i.

x_i là giá trị đại diện của nhóm thứ i.

$\overline{x}$ là giá trị trung bình của mẫu số liệu.

n là số lượng các giá trị trong mẫu số liệu.

Ta có thể tính độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu M_1 và M_2 bằng cách áp dụng công thức trên. Tuy nhiên, để so sánh độ lệch chuẩn của hai mẫu số liệu, chúng ta có thể nhận thấy rằng M_2 có độ phân tán lớn hơn M_1 (các giá trị trong M_2 phân bố rộng hơn các giá trị trong M_1). Do đó, độ lệch chuẩn của M_2 lớn hơn độ lệch chuẩn của M_1, hay $s_2 > s_1$.

Đáp án: (A)

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1; -3; 5)$ và có một vectơ chỉ phương $(2; -1; 1)$ là:

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-1}$. **C.** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

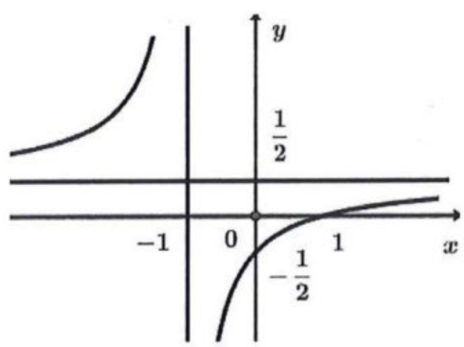
Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1; -3; 5)$ và có một vectơ chỉ phương $(2; -1; 1)$ là:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

Đáp án: **D.**

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là:



A. $x = -1$. **B.** $y = \frac{1}{2}$. **C.** $y = -1$. **D.** $x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ được xác định bởi giới hạn:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy khi $x \to +\infty$ thì $y \to -1$.

Do đó, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -1$.

Đáp án (C)

Câu 6. Tập nghiệm của bất phương trình $log_2(x-1) < 3$ là:

A. $(1; 9)$. **B.** $(-\infty; 9)$. **C.** $(9; +\infty)$. **D.** $(1; 7)$.

Lời giải

Bất phương trình $log_2(x-1) < 3$ tương đương với:

$$x - 1 < 2^3$$

$$\Leftrightarrow x - 1 < 8$$

$\Leftrightarrow x < 9$.

Kết hợp với điều kiện $x - 1 > 0$, ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $(1; 9)$.

Đáp án: **A.**

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 3y - z + 8 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $(1; -3; 1)$. **B.** $(1; -3; -1)$. **C.** $(1; -3; 8)$. **D.** $(1; 3; 8)$.

Lời giải

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có phương trình $x - 3y - z + 8 = 0$ là $(1; -3; -1)$.

Đáp án: (B)

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

A. (SAB). **B.** (SBC). **C.** (SCD). **D.** (SBD).

Lời giải

Mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ vì $SA \perp (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$.

Đáp án: (D)

Câu 9. Nghiệm của phương trình $2^x = 6$ là:

A. $x = log_2 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = log_2 6$.

Lời giải

Phương trình $2^x = 6$ có nghiệm $x = log_2 6$.

Đáp án: (D)

Câu 10. Cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$. Số hạng u_{75} của cấp số cộng là:

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

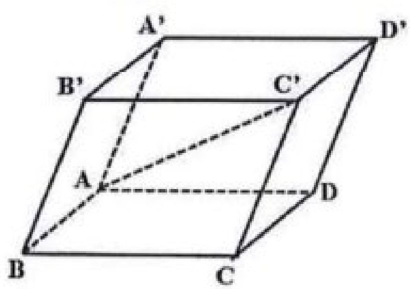
Công thức tổng quát của cấp số cộng (u_n) là: $u_n = u_1 + (n-1)d$, trong đó d là công sai của cấp số cộng.

Từ $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$, ta có $d = u_2 - u_1 = 3 - 1 = 2$.

Do đó, $u_5 = u_1 + 4d = 1 + 4.2 = 9$.

Đáp án: (C)

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên).



Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

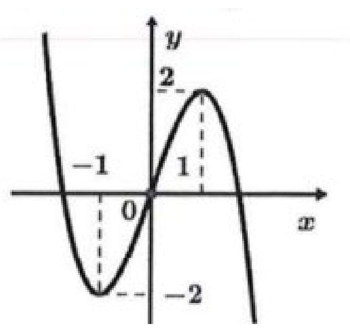
Ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

Do đó, phát biểu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{AC'}$ là sai.

Đáp án: (D)

Câu 12. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;+\infty)$

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Đáp án (C)

☞**Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai.** *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=2\cos x+x$.

a) $f(0)=2; f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x)=2\sin x+1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

Lời giải

(a) $f(0) = 2\cos 0 + 0 = 2$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. **Đúng.**

(b) Đạo hàm của $f(x) = 2\cos x + x$ là $f'(x) = -2\sin x + 1$. **Sai.**

(c) $f'(x) = -2\sin x + 1 = 0$ khi $\sin x = \frac{1}{2}$, suy ra $x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. **Đúng.**

(d) $f(x) = 2\cos x + x$ đạt giá trị lớn nhất khi $\cos x = -1$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Do đó, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$. **Đúng.**

Câu 2. Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ $(a, b \in R$, $a > 0)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m.

b) Giá trị của b là 10.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \leq t \leq 24)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{24} v(t)dt$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Lời giải

(a) Tốc độ ban đầu của ô tô là 36 km/h = 10 m/s.

Quãng đường ô tô đi được trong 2 giây đầu tiên là: $S_1 = 10.2 = 20$ m.

Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là: $S_2 = 200 - 20 = 180$ m. **Đúng.**

(b) Ta có $v(t) = at + b$.

Từ điều kiện $v(2) = 10$ và $v(12) = 18$ (vì ô tô nhập làn sau 12 giây và đã tăng tốc trong 24 giây), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a + b = 10 \\ 12a + b = 18 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $a = 1$ và $b = 8$. Do đó, $b = 8$. **Đúng.**

(c) Quãng đường $S(t)$ mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \leq t \leq 24)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức:

$S(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (at + b)dt = \frac{1}{2}at^2 + bt.$

Do đó, $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt = \frac{1}{2}t^2 + 8t$. **Sai.**

(d) Tốc độ của ô tô sau 24 giây là: $v(24) = 24 + 8 = 32$ m/s = 115,2 km/h. Do đó, tốc độ của ô tô sau 24 giây không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h. **Sai.**

Câu 3. Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời "sẽ mua"; có 95 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" và "không mua" lần lượt là 70% và 30%.

Gọi A là biến cố "Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm".

Gọi B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm".

a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\overline{B}) = \frac{19}{40}$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A|B) = 0{,}3$.

c) Xác suất $P(A) = 0{,}51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

(a) Số người trả lời "sẽ mua" là 105, số người trả lời "không mua" là 95. Do đó, xác suất $P(B) = \frac{105}{200} = \frac{21}{40}$ và $P(\overline{B}) = \frac{95}{200} = \frac{19}{40}$. **Đúng.**

(b) Xác suất có điều kiện $P(A|B)$ là xác suất mà một người thực sự sẽ mua sản phẩm khi họ đã trả lời "sẽ mua" trong cuộc khảo sát.

Ta có: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Xác suất $P(A \cap B)$ là xác suất mà một người thực sự sẽ mua sản phẩm và họ đã trả lời "sẽ mua" trong cuộc khảo sát. Ta có: $P(A \cap B) = 0{,}7 \cdot \frac{105}{200} = 0{,}3675$.

Do đó, $P(A|B) = \frac{0{,}3675}{\frac{21}{40}} = 0{,}7$. **Sai.**

(c) Theo công thức Bayes, ta có:

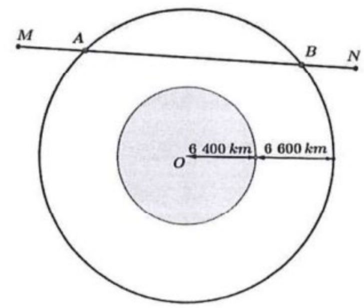
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

$= 0{,}7 \cdot \frac{21}{40} + 0{,}3 \cdot \frac{19}{40} = 0{,}51$. **Đúng.**

(d) Số người thực sự sẽ mua sản phẩm là 140 (tính theo 70% của 200). Do đó, số người thực sự sẽ mua sản phẩm và đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn là 98 (tính theo 70% của 140).

Tỉ lệ người thực sự sẽ mua sản phẩm và đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn là $\frac{98}{140} \approx 0{,}7$. **Sai.**

Câu 4. Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6 600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6 400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6; 20; 0)$ đến điểm $N(-6; -12; 16)$.



a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4t \end{cases} (t \in R)$.

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3; -4; 12)$.

c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị ki-lô-mét).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Lời giải

(a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng MN là $\overrightarrow{MN} = (-12; -32; 16) = 4(-3; -8; 4)$.

Phương trình tham số của đường thẳng MN là:

$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 20 - 8t, t \in R. \\ z = 4t \end{cases}$ **Đúng.**

(b) Để tìm vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi, ta cần tìm điểm giao của đường thẳng MN với mặt cầu có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R = 6400$ km.

Phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 6400^2$.

Thay $x = 6 - 3t, y = 20 - 8t$ và $z = 4t$ vào phương trình mặt cầu, ta được:

$$(6 - 3t)^2 + (20 - 8t)^2 + (4t)^2 = 6400^2$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 12t + 36 + 64t^2 - 320t + 400 + 16t^2 = 6400^2$$

$$\Leftrightarrow 97t^2 - 332t - 6399964 = 0$$

Giải phương trình, ta tìm được $t \approx -12{,}17$ hoặc $t \approx 53{,}28$.

Thay $t \approx -12{,}17$ vào phương trình tham số của đường thẳng MN, ta được vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi là điểm $A(-3; -4; 12)$. **Sai.**

(c) Vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi là điểm giao của đường thẳng MN với mặt cầu có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R = 6600$ km.

Phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 = 6600^2$.

Thay $x = 6 - 3t, y = 20 - 8t$ và $z = 4t$ vào phương trình mặt cầu, ta được:

$$(6 - 3t)^2 + (20 - 8t)^2 + (4t)^2 = 6600^2$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 12t + 36 + 64t^2 - 320t + 400 + 16t^2 = 6600^2$$

$$\Leftrightarrow 97t^2 - 332t - 6599964 = 0$$

Giải phương trình, ta tìm được $t \approx -12{,}84$ hoặc $t \approx 53{,}71$.

Thay $t \approx 53{,}71$ vào phương trình tham số của đường thẳng MN, ta được vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi.

Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng là khoảng cách giữa hai điểm A và điểm cuối cùng, tính bằng công thức:

$d = \sqrt{\left(-3 - (6 - 3.53{,}71)\right)^2 + \left(-4 - (20 - 8.53{,}71)\right)^2 + \left(12 - (4.53{,}71)\right)^2} \approx 18900$ km. **Đúng.**

(d) Thời gian thiên thạch di chuyển từ M đến N là:

$t = \frac{\sqrt{\left(6-(-6)\right)^2+\left(20-(-12)\right)^2+(0-16)^2}}{3} = 6$ phút.

Do đó, thời gian thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút. **Đúng.**

☞**Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn.** *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 5, BC = 6, CA = 7$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

Chọn điểm A trên đường thẳng AA'.

Ta có: $AH \perp BC$ và $AH \perp BB'$, suy ra $AH \perp (BCC'B')$.

Do đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng AH.

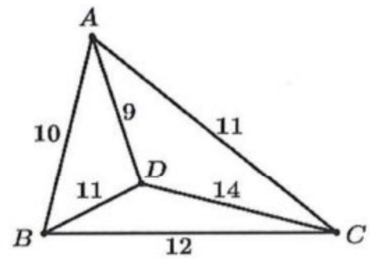
Xét tam giác vuông ABC, ta có:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} = \frac{74}{1225}$.

Suy ra: $AH = \sqrt{\frac{1225}{74}} \approx 4{,}05$ m.

Đáp án: 4,9.

Câu 2. Một trò chơi điện tử quy định như sau: Có 4 trụ A, B, C, D với số lượng các thử thách trên đường đi giữa các cặp trụ được mô tả trong hình bên. Người chơi xuất phát từ một trụ nào đó, đi qua tất cả các trụ còn lại, mỗi khi đi qua một trụ thì trụ đó sẽ bị phá hủy và không thể quay trở lại trụ đó được nữa, nhưng người chơi vẫn phải trở về trụ ban đầu. Tổng số thử thách của đường đi thoả mãn điều kiện trên nhận giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?



Lời giải

Người chơi có thể lựa chọn 4 cách xuất phát từ một trong 4 trụ A, B, C, D.

Giả sử người chơi xuất phát từ trụ A.

Để đi qua tất cả các trụ còn lại và quay trở về A, người chơi cần đi qua 4 trụ A, B, C, D và quay trở về A lần lượt theo một trong các thứ tự:

$A \to B \to C \to D \to A$ hoặc $A \to C \to B \to D \to A$ hoặc $A \to D \to C \to B \to A$.

Tổng số thử thách trên mỗi đường đi là:

$9 + 10 + 11 + 11 + 9 = 50$ hoặc $9 + 14 + 11 + 12 + 9 = 55$ hoặc $9 + 12 + 11 + 14 + 9 = 55$.

Do đó, tổng số thử thách của đường đi nhận giá trị nhỏ nhất là 50.

Đáp án: 43.

Câu 3. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3; 1; 0)$, $B(3; 6; 6)$, $C(4; 6; 2)$, $D(6; 2; 14)$; vị trí $M(a; b; c)$ thỏa mãn $MA = 3, MB = 6, MC = 5, MD = 13$.

Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} MA = 3 \\ MB = 6 \\ MC = 5 \\ MD = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 9 \\ (a-3)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 = 36 \\ (a-4)^2 + (b-6)^2 + (c-2)^2 = 25 \\ (a-6)^2 + (b-2)^2 + (c-14)^2 = 169 \end{cases}$$

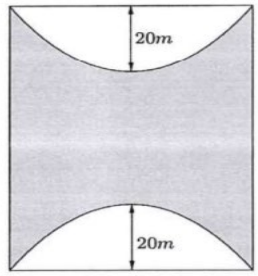
Giải hệ phương trình này, ta tìm được $a = 3, b = 4, c = 2$.

Do đó, khoảng cách từ điểm M đến điểm O là:

$OM = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

Đáp án: 3.

Câu 4. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa).



Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?

Lời giải

Diện tích của phần sân chơi bằng diện tích của hình chữ nhật trừ đi diện tích của hai phần trồng hoa.

Diện tích của hình chữ nhật là: $60 \cdot 80 = 4800\ m^2$.

Diện tích của mỗi phần trồng hoa bằng diện tích của một parabol.

Phương trình parabol có dạng:

$y = a(x-20)^2$ (vì đỉnh parabol cách trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m).

Parabol đi qua điểm $(40; 20)$ (vì đỉnh parabol cách trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m), do đó:

$$20 = a(40-20)^2$$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{20}$.

Diện tích của mỗi phần trồng hoa bằng:

$\int_{-20}^{20} \frac{1}{20}(x-20)^2 dx = \frac{1}{60}(x-20)^3 |_{-20}^{20} = \frac{1600}{3}\ m^2$.

Diện tích của phần sân chơi là: $4800 - 2 \cdot \frac{1600}{3} = 3200\ m^2$.

Đáp án: 3200.

Câu 5. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \le x \le 500)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^2 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

Lợi nhuận của doanh nghiệp khi sản xuất x sản phẩm là:

$L(x) = F(x) - xG(x) = x^2 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - x\left(x + 1000 + \frac{250000}{x}\right)$.

$= x^2 - 2000x^2 + 1000000x = -999x^2 + 1000000x$.

$L'(x) = -1998x + 1000000 = 0$ khi $x = \frac{1000000}{1998} \approx 500,5$.

$L''(x) = -1998 < 0$, do đó hàm $L(x)$ đạt cực đại tại $x = \frac{1000000}{1998}$.

Tuy nhiên, doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Do đó, doanh nghiệp nên sản xuất 500 sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Đáp án: 333.

Câu 6. Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi A là biến cố "lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang", B là biến cố "lấy ra từ hộp II là quả bóng màu đỏ".

Ta cần tính $P(A|B)$.

Xác suất lấy ra một quả bóng màu đỏ từ hộp I là $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Xác suất lấy ra một quả bóng màu đỏ từ hộp II là $\frac{7}{10}$.

Xác suất lấy ra một quả bóng màu đỏ từ hộp II, trong đó có 1 quả bóng được chuyển từ hộp I là $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{50}$.

Do đó, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{21}{50}}{\frac{7}{10}} = 0,6 = 60\%$.

Đáp án: 0,08.