BỘ ĐỀ TRỌNG TÂM ÔN LUYỆN ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC HSA

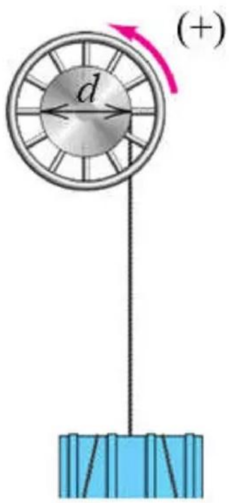
PHẦN: TOÁN HỌC – PHÂN TÍCH SỐ LIỆU

BIÊN SOẠN: ĐỘI NGŨ HSA EDUCATION

ĐỀ SỐ: 10

BẢNG ĐÁP ÁN									
HSA 01	A	**HSA 11**	A	**HSA 21**	C	**HSA 31**	C	**HSA 41**	0,08
HSA 02	D	**HSA 12**	C	**HSA 22**	D	**HSA 32**	B	**HSA 42**	0,45
HSA 03	C	**HSA 13**	D	**HSA 23**	B	**HSA 33**	D	**HSA 43**	84
HSA 04	B	**HSA 14**	A	**HSA 24**	C	**HSA 34**	A	**HSA 44**	0,43
HSA 05	D	**HSA 15**	C	**HSA 25**	A	**HSA 35**	C	**HSA 45**	10
HSA 06	C	**HSA 16**	B	**HSA 26**	C	**HSA 36**	0,37	**HSA 46**	83
HSA 07	B	**HSA 17**	B	**HSA 27**	C	**HSA 37**	43,3	**HSA 47**	0,09
HSA 08	C	**HSA 18**	C	**HSA 28**	D	**HSA 38**	14,1	**HSA 48**	85,2
HSA 09	B	**HSA 19**	D	**HSA 29**	B	**HSA 39**	0,2	**HSA 49**	3574
HSA 10	D	**HSA 20**	A	**HSA 30**	A	**HSA 40**	162	**HSA 50**	8,79

HSA 01: Một ròng rọc có đường kính $d = 26cm$ được sử dụng để cẩu hàng hóa (hình dưới). Tìm quãng đường mà hàng được nâng lên nếu quay ròng rọc một góc có số đo bằng $\frac{9\pi}{4}$ (làm tròn đến phần chục).



A. $0,9m$
B. $0,8m$
C. $1,1m$
D. $1,2m$

Đáp án: A

Lí giải

Bán kính của ròng rọc là $R=\frac{d}{2}=13cm=0,13m$.

Quãng đường mà hàng được nâng lên đúng bằng độ dài cung tròn: $l=R\alpha=0,13.\frac{9\pi}{4}\approx 0,9m$.

HSA 02: Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $mx^2-x+m\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

A. $m=0$

B. $m<0$

C. $0<m\leq\frac{1}{2}$

D. $m\geq\frac{1}{2}$

Đáp án: D

Lí giải

$$mx^2-x+m\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta=(-1)^2-4m^2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 1\leq 4m^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m\leq-\frac{1}{2}\vee m\geq\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\geq\frac{1}{2}.$$

HSA 03: Thành phố X muốn thi công xây dựng cây thông noel đặt ở trung tâm thành phố. Giá thi công tầng thứ nhất là 2 triệu đồng, tầng tiếp theo tăng 500 ngàn đồng và cứ tiếp tục như vậy cho đến tầng 12. Hỏi thành phố X phải trả chi phí thi công là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng)?

A. 55

B. 45

C. 57

D. 60

Đáp án: C

Lí giải

Gọi u_n (triệu đồng) là số tiền thi công tầng thứ n.

Khi đó, ta có $u_1=2$ và $u_{n+1}=u_n+0,5;\ n\geq 1$.

Dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1=2$ và công sai $d=0,5$.

Vậy tổng số tiền thành phố X phải trả là:

$$S_{12}=\frac{12\left[2u_1+(12-1)d\right]}{2}=\frac{12.(2.2+11.0,5)}{2}=57\text{ (triệu)}.$$

HSA 04: Cho tam giác ABC vuông tại A có ba cạnh CA,AB,BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q. Tìm q?

A. $q=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

B. $q=\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$

C. $q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

D. $q=\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$

Đáp án: B

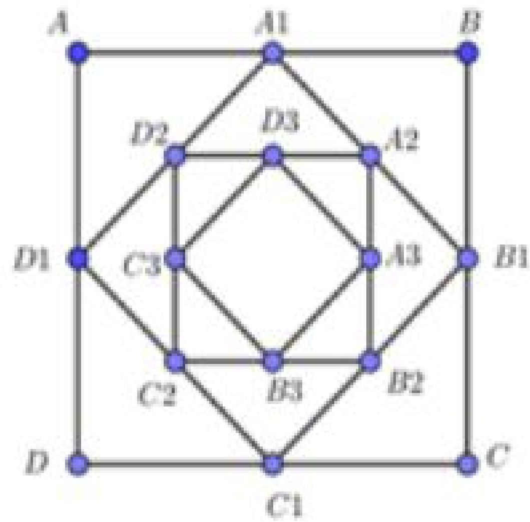
Lí giải

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2=AB^2+AC^2$. Theo giả thiết ta có ba cạnh CA, AB, BC lần lượt tạo thành một cấp số nhân có công bội là q nên $AB=q.AC$ và $BC=q^2.AC$.

Do đó $BC^2=AB^2+AC^2 \Leftrightarrow q^4.AC^2=q^2.AC^2+AC^2 \Leftrightarrow q^4-q^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ q^2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vì $q>0$ nên $q^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q=\dfrac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$.

HSA 05: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Người ta dựng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng $\dfrac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $ABCD$; dựng hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có cạnh bằng $\dfrac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và cứ tiếp tục như vậy. Giả sử cách dựng trên có thể tiến ra vô hạn. Nếu tổng diện tích S của tất cả các hình vuông $ABCD, A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2 ...$ bằng 8 thì a bằng:



A. $2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$
D. 2
Đáp án: D
Lí giải
- Diện tích của hình vuông $ABCD$ là $S_1 = a^2$.
- Diện tích của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ là $S_2 = \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.
- Tương tự diện tích $S_3, S_4....$ lần lượt là $\frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}\ldots$
- Các diện tích này lập thành một Cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = a^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ và $S_n = S_1 + S_2 + ...$
Khi đó $S = \lim S_n = \frac{S_1}{1-q} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$.
$S = 8 \Leftrightarrow a = 2\,(a > 0)$.
HSA 06: Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$.
A. $y' = -x^6 + 2x^4 + 3x^2$
B. $y' = -7x^6 - 10x^4 - 6x^2$
C. $y' = -7x^6 + 10x^4 + 9x^2$
D. $y' = 7x^6 - 10x^4 - 6x^2$
Đáp án: C
Lí giải
Ta có $y' = \left(-x^7 + 2x^5 + 3x^3\right)' = \left(-x^7\right)' + 2\left(x^5\right)' + 3\left(x^3\right)' = -7x^6 + 10x^4 + 9x^2$
HSA 07: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để bất phương trình $4^x - (2m+5)2^x + m^2 + 5m + 4 < 0$ có nghiệm đúng với mọi $x \in [1;2)$.
A. $m \in [0;1]$

B. $m \in [0;1)$
C. $m \in (0;1]$
D. $m \in (0;1)$
Đáp án: B
Lí giải
Đặt $t = 2^x$, $x \in [1;2) \Rightarrow t \in [2;4)$.
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $t^2 - (2m+5)t + m^2 + 5m + 4 < 0$, $t \in [2;4)$.

$\Leftrightarrow [t-(m+4)][t-(m+1)] < 0,\ t \in [2;4)$.

$\Leftrightarrow t \in (m+1; m+4), \forall t \in [2;4)$.

$\Leftrightarrow [2;4) \subset (m+1; m+4) \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 2 \\ 4 \le m+4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [0;1)$.

HSA 08: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (3-x)(x-5)(x-7)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;5)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Đáp án: C

Lí giải

Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 5 \\ x = 7 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		5		7		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$.

HSA 09: Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi d là khoảng cách từ giao điểm I của hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến tùy ý của đồ thị (C). Khi đó giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

A. $2\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{3}$

Đáp án: B

Lí giải

Ta có $I(-1;1)$. $y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

Giả sử $M\left(x_0; \dfrac{x_0+2}{x_0+1}\right)$ là một điểm thuộc $(C), x_0 \ne -1$. Suy ra: $y'(x_0) = \dfrac{-1}{(x_0+1)^2}$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại M là:

$y=\frac{-1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0+1} \Leftrightarrow \frac{x}{(x_0+1)^2}+y-\frac{x_0^2+4x_0+2}{(x_0+1)^2}=0$.

$\Leftrightarrow x+y(x_0+1)^2-(x_0^2+4x_0+2)=0 \ (d)$.

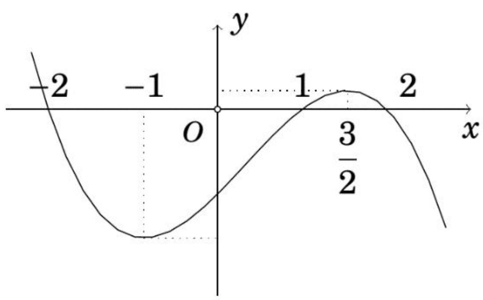
Suy ra: $d_{(I;d)}=\frac{\left|-1+(x_0+1)^2-(x_0^2+4x_0+2)\right|}{\sqrt{1+(x_0+1)^4}}=\frac{\left|-2(x_0+1)\right|}{\sqrt{1+(x_0+1)^4}}=\frac{2|x_0+1|}{\sqrt{1+(x_0+1)^4}}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si: $1+(x_0+1)^4 \geq 2\sqrt{1.(x_0+1)^4}=2(x_0+1)^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $1=(x_0+1)^4 \Leftrightarrow x_0=0$.

Suy ra: $d_{(I;d)} \leq \frac{2|x_0+1|}{\sqrt{2(x_0+1)^2}}=\sqrt{2}$. Vậy $\max d_{(I;d)}=\sqrt{2}$ khi $x_0=0; y_0=2$.

HSA 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $y=(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau:

A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$

B. $(-2;-1)$

C. $(-1;1)$

D. $(1;2)$

Đáp án: D

Lí giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta lập được bảng biến thiên của $y=f(x)$ như sau:

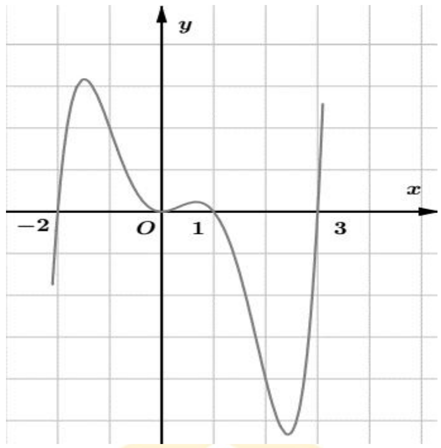
x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$f(1)$	↗	0	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $y = (f(x))^2$, ta có $y' = 2f(x).f'(x)$.

Do $f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) > 0,\ \forall x \in (1;2) \cup (-\infty;-2)$ nên hàm số $y = (f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(1;2)$.

HSA 11: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Tìm số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.

A. 3
B. 4
C. 2
D. 1
Đáp án: A
Lí giải

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3 = 1 \\ x^2 - 3 = 3 \\ x^2 - 3 = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{6} \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$. (nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$ là nghiệm bội bậc chẵn).

Ta có bảng xét dấu y' như sau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		-2		-1		0		1		2		$\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x)=f(x^2-3)$ có 3 điểm cực đại

HSA 12: Cho hàm số $y=f(x)=3x^2-3x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(2x^2-3x+1)$ trên đoạn $[0;1]$ là

A. $\frac{151}{64}$

B. $\frac{153}{64}$

C. $\frac{155}{64}$

D. $\frac{157}{64}$

Đáp án: C

Lí giải

Đặt $t=2x^2-3x+1$, với $x\in[0;1]$ thì $t\in\left[-\frac{1}{8};1\right]$.

Xét hàm $g(t)=f(t)$ trên $\left[-\frac{1}{8};1\right]$, có $g'(t)=f'(t)=0\Leftrightarrow 6t-3=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\in\left[-\frac{1}{8};1\right]$.

Có $g\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{155}{64}$; $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$; $g(1)=2$.

Suy ra, $\max\limits_{[0;1]} y=\max\limits_{\left[-\frac{1}{8};1\right]} g(t)=\frac{155}{64}$.

HSA 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2024;2024]$ để hàm số $y=\frac{mx^2+(2-4m)x+4m+1}{x-1}$ có 2 cực trị và hai giá trị cực trị đó trái dấu.

A. 4049

B. 4045

C. 2023

D. 2024

Đáp án: D

Lí giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\frac{mx^2-2mx-3}{(x-1)^2}$, đặt $g(x)=mx^2-2mx-3$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0, \Delta' > 0, g(1) \neq 0 \Leftrightarrow m < -3$ hoặc $m > 0$

Ta có $x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = -\dfrac{3}{m}$ nên $y_{CD}.y_{CT} < 0 \Leftrightarrow (2mx_1 + 2 - 4m)(2mx_2 + 2 - 4m) < 0$

$\Leftrightarrow 4m^2x_1x_2 + 2m(2-4m)(x_1+x_2) + (2-4m)^2 < 0$

$\Leftrightarrow -12m + 2m(2-4m) + (2-4m)^2 < 0 \Leftrightarrow 4 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{5}$,

kết hợp điều kiện $m \in [-2024; 2024]$ suy ra có 2024 giá trị nguyên của m thoả mãn.

HSA 14: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9$ là:

A. $\dfrac{1}{2}x^4 - 9x + C$

B. $4x^4 - 9x + C$

C. $\dfrac{1}{4}x^4 + C$

D. $4x^3 - 9x + C$

Đáp án: A

Lí giải

Ta có: $\int (2x^3 - 9)\mathrm{d}x = 2.\dfrac{x^4}{4} - 9x + C = \dfrac{x^4}{2} - 9x + C$.

HSA 15: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. Đồ thị hàm số có một tiệm cận xiên $y = ax + b$. Giá trị của $a + 3b$ bằng

A. 5

B. 3

C. -2

D. -1

Đáp án: C

Lí giải

$y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - (x - 1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - 1} = 0 \Rightarrow y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a + 3b = -2$.

HSA 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Gọi T là tập hợp tất cả giá trị thực của k để đường thẳng $d : y = k(x+1) + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho các tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau. Biết $M(-1; 2)$, tính tích tất cả các phần tử của tập T

A. $-\frac{2}{9}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{3}$

D. -1

Đáp án: B

Lí giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$x^3-3x=k(x+1)+2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-2-k)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=2 \\ x^2-x-2-k=0(1) \end{array}\right..$$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)}>0 \\ g(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>-\dfrac{9}{4} \\ k\neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó, d cắt (C) tại $M(-1;2)$, $N(x_1;y_1)$, $P(x_2;y_2)$ với x_1,x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý vi-et: $\begin{cases} S=x_1+x_2=1 \\ P=x_1x_2=-k-2 \end{cases}.$

Tiếp tuyến tại N và P vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1 \Leftrightarrow (3x_1^2-3)(3x_2^2-3)=-1$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2x_1^2-9(x_1^2+x_2^2)+9=-1 \Leftrightarrow 9P^2+18P-9S^2+9=-1$$

$$\Leftrightarrow 9k^2+18k+1=0 \Leftrightarrow k=\frac{-3\pm 2\sqrt{3}}{3} \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy tích các phần tử trong T là $\frac{1}{9}$.

HSA 17: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}.\cos\frac{x}{2}$, $y=0, x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\frac{\pi}{6}(3\pi^2+4\pi-8)$

B. $V=\frac{\pi}{16}(3\pi^2-4\pi-8)$

C. $V=\frac{\pi}{8}(3\pi^2+4\pi-8)$

D. $V=\frac{1}{16}(3\pi^2-4\pi-8)$

Đáp án: B

Lí giải

Thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sqrt{x}\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\left(1+\cos x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left[x\left(x+\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x+\sin x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x\left(x+\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left(\frac{x^2}{2}-\cos x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=\frac{\pi}{16}\left(3\pi^2-4\pi-8\right).$$

HSA 18: Khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x-1$ đến trục hoành là

A. 1

B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{23}{27}$

D. $\frac{1}{3}$

Đáp án: C

Lí giải

$y'=3x^2-4x^2+1$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right..$$

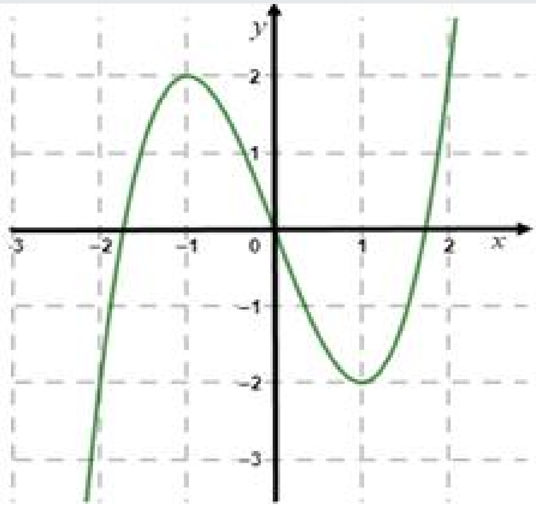
BBT.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{23}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

.

Tọa độ điểm cực đại $A\left(\frac{1}{3};-\frac{23}{27}\right)$. Suy ra $d\left(M,Ox\right)=\left|-\frac{23}{27}\right|=\frac{23}{27}$.

HSA 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $f\left(f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$ có nghiệm là



A. $[-1;2]$
B. $[0;2]$
C. $[-1;1]$
D. $[-2;2]$
Đáp án: D
Lí giải

Vì: $x^2+1\ge 2|x| \Rightarrow \dfrac{2|x|}{x^2+1}\le 1 \Rightarrow -1\le \dfrac{2x}{x^2+1}\le 1$

Từ đồ thị thấy

$x\in[-1;1]\Rightarrow f(x)\in[-2;2]$

$x\in[-2;2]\Rightarrow f(x)\in[-2;2]$

Xét phương trình

$f\left(f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\right)=m$. Đặt $t=\dfrac{2x}{x^2+1}$; $u=f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

Vì $t\in[-1;1]\Rightarrow u\in[-2;2]\Rightarrow f(u)\in[-2;2]$

Vậy để phương trình ban đầu có nghiệm thì $f(u)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$. Nên $m\in[-2;2]$.

HSA 20: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$; $\int_0^2 f(x)dx=1$.

Tính tích phân $I=\int_0^4 f'(\sqrt{x})dx$.

A. $I=-10$
B. $I=-5$
C. $I=0$
D. $I=-18$
Đáp án: A

Lí giải

Đặt $t=\sqrt{x}$, ta có: $t^2=x$ và $2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=4\Rightarrow t=2$.

$I=\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2 2tf'(t)\mathrm{d}t$.

Đặt $u=2t$; $\mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t$ ta được: $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}t$; $v=f(t)$.

Khi đó: $I=\left(2tf(t)\right)\Big|_0^2-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=4f(2)-2.1=4.(-2)-2=-10$.

HSA 21: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$

B. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{5}{4}$

C. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$

D. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$

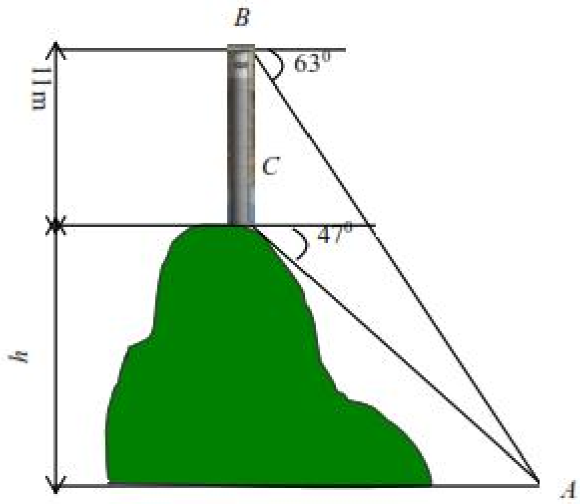
Đáp án: C

Lí giải

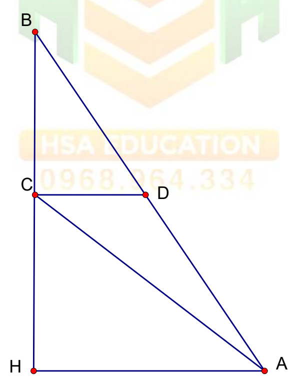
Tâm I của mặt cầu là trung điểm của AB $\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};2;2\right)$. Bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

HSA 22: Trên ngọn đồi có một cái tháp cao $11\ m$. Từ đỉnh B và chân C của tháp nhìn điểm A ở chân đồi dưới các góc tương ứng là 63° và 47°. Tính chiều cao h của ngọn đồi (Làm tròn đến hàng đơn vị).



A. 10
B. 11
C. 12
D. 13
Đáp án: D
Lí giải



Ta có: $CD = BC.\cot 63^0$, $\widehat{CAD} = 63^0 - 47^0 = 16^0$

$$\frac{CA}{\sin\widehat{CDA}} = \frac{CD}{\sin\widehat{CAD}} \Rightarrow CA = \frac{CD.\sin 117^0}{\sin 16^0} = \frac{BC\cot 63^0 \sin 117^0}{\sin 16^0}$$

$$HC = CA.\cos\widehat{HCA} = \frac{BC\cot 63^0.\sin 117^0.\cos 43^0}{\sin 16^0} \approx 13\,(m)$$

HSA 23: Tính diện tích S_D của hình phẳng D được giới hạn bởi các đường $y = \left|\frac{\ln x}{x}\right|$, trục hoành Ox và các đường $x = \frac{1}{e}; x = 2$?

A. $S_D = \frac{1}{2}\left(1+\ln 2\right)$

B. $S_D = \frac{1}{2}\left(1+\ln^2 2\right)$

C. $S_D = \frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2}$

D. $S_D = \frac{1}{2}\left(1-\ln^2 2\right)$

Đáp án: B

Lí giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S_D = \int_{\frac{1}{e}}^{2}\left|\frac{\ln x}{x}\right|\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left|\frac{\ln x}{x}\right|\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}\left|\frac{\ln x}{x}\right|\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = -\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_{\frac{1}{e}}^{1} + \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_{1}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{(\ln 2)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\ln^2 2\right).$$

HSA 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120°$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC)

A. $\frac{3}{4}$

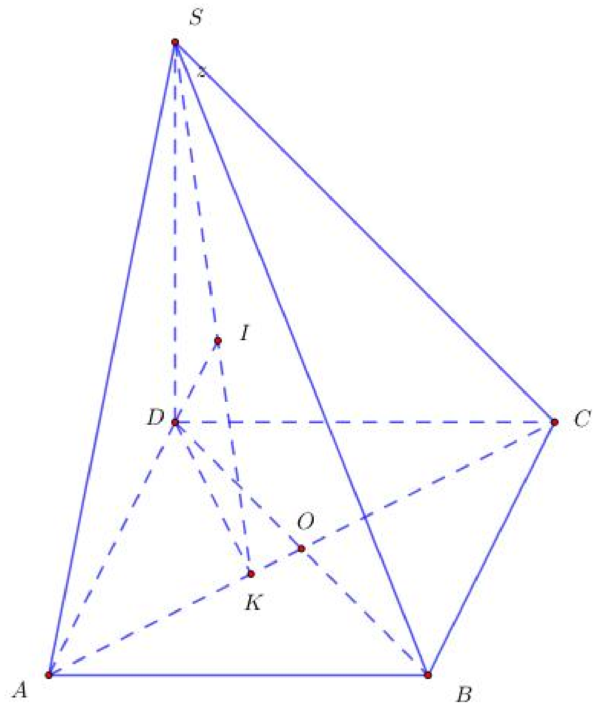
B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$

Đáp án: C

Lí giải



Ta có $\sin\left(\widehat{SB;(SAC)}\right)=\dfrac{d\left(B;(SAC)\right)}{SB}=\dfrac{d\left(D;SAC\right)}{SB}$.

Xét tam giác ABC ta có $AC=\sqrt{BA^2+BC^2-2BA.BC.\cos\widehat{BAC}}=a\sqrt{7}$.

$BO=\sqrt{\dfrac{BA^2+BC^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{4a^2+a^2}{2}-\dfrac{7a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BD=a\sqrt{3}$ và $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{3a^2+3a^2}=a\sqrt{6}$.

Xét tam giác ADC ta có $\dfrac{AD}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{AC}{\sin\widehat{D}}\Rightarrow\sin\widehat{C}=\dfrac{AD.\sin\widehat{D}}{AC}=\dfrac{a.\sin120^\circ}{a\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

Gọi K là hình chiếu của D lên AC, và I là hình chiếu của D lên SK. Ta có $\begin{cases}AC\perp DK\\AC\perp SD\end{cases}\Rightarrow AC\perp DI$.

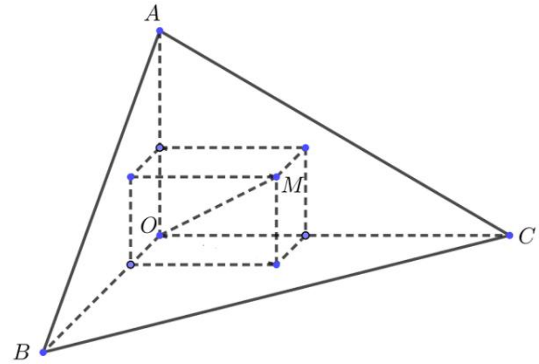
Do đó $\begin{cases}DI\perp SK\\DI\perp AC\end{cases}\Rightarrow d\left(D;(SAC)\right)=DI$.

Mặt khác $\sin\widehat{C}=\dfrac{DK}{DC}\Rightarrow DK=DC.\sin\widehat{C}=2a.\dfrac{\sqrt{21}}{14}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác SDK ta có $DI=\dfrac{SD.DK}{\sqrt{SD^2+DK^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\sqrt{3a^2+\dfrac{21}{49}a^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

Vậy $\sin\left(\widehat{SB;(SAC)}\right)=\dfrac{d(D;SAC)}{SB}=\dfrac{DI}{SB}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{4}$.

HSA 25: Có một khối gỗ dạng hình chóp $O.ABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau, $OA=3\ cm$, $OB=6\ cm$, $OC=12\ cm$. Trên mặt (ABC) người ta đánh dấu một điểm M sau đó người ta cắt gọt khối gỗ để thu được một hình hộp chữ nhật có OM là một đường chéo đồng thời hình hộp có 3 mặt nằm trên 3 mặt của tứ diện (xem hình vẽ).



Thể tích lớn nhất của khối gỗ hình hộp chữ nhật bằng

A. $8\ cm^3$

B. $24\ cm^3$

C. $12\ cm^3$

D. $36\ cm^3$

Đáp án: A

Lí giải

Gọi khoảng cách từ điểm M đến các mặt bên $(OAB),(OBC),(OCA)$ lần lượt là a,b,c.

Khi đó $V_{OABC}=V_{M.OAB}+V_{M.OBC}+V_{M.OAC}$

Hay $\dfrac{1}{6}.3.6.12=\dfrac{1}{3}a.\dfrac{1}{2}.3.6+\dfrac{1}{3}b.\dfrac{1}{2}.6.12+\dfrac{1}{3}c.\dfrac{1}{2}.3.12\Rightarrow 12=a+4b+2c$.

Thể tích khối gỗ hình hộp chữ nhật theo đề bài là $V=abc$

Ta có $abc=\dfrac{1}{8}a.4b.2c\le\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{a+4b+2c}{3}\right)^3=\dfrac{1}{8}.\dfrac{12^3}{27}=8$ (theo Bất đẳng thức Cô-si).

Vậy $V=abc$ đạt giá trị lớn nhất bằng $8\left(cm^3\right)$ khi $a=4b=2c\Leftrightarrow a=4(cm),b=1(cm),c=2(cm)$.

HSA 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên SA, SB, SC tạo với đáy các góc bằng nhau và đều bằng $30°$ Biết $AB=5$, $AC=7$, $BC=8$ tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\dfrac{35\sqrt{13}}{52}$

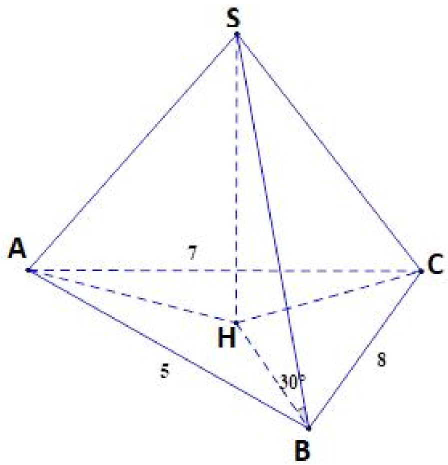
B. $d=\dfrac{35\sqrt{39}}{13}$

C. $d=\dfrac{35\sqrt{39}}{52}$

D. $d=\dfrac{35\sqrt{13}}{26}$

Đáp án: C

Lí giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC)

Ta có $\widehat{SAH}=\widehat{SBH}=\widehat{SCH}=30^\circ$ (theo giả thiết) nên các tam giác vuông SHA, SHB, SHC bằng nhau. Suy ra $HA=HB=HC\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Áp dụng công thức Hê-rông ta có $S_{\Delta ABC}=10\sqrt{3}$.

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\Rightarrow HB=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông SHB: $SH=HB\tan 30^\circ=\dfrac{7}{3}$, $SB=\dfrac{HB}{\cos 30^\circ}=\dfrac{14}{3}$.

Suy ra $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{70\sqrt{3}}{9}$.

Áp dụng công thức Hê-rông ta có $S_{\Delta SBC}=\dfrac{8\sqrt{13}}{3}$.

Do đó $V_{A.SBC}=\dfrac{1}{3}d.S_{\Delta SBC}\Rightarrow d=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}}=\dfrac{3\dfrac{70\sqrt{3}}{9}}{\dfrac{8\sqrt{13}}{3}}=\dfrac{35\sqrt{39}}{52}$.

HSA 27: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=2-3\ln 2$.

Tính $T=a+b$.

A. $T=-1$

B. $T=2$

C. $T=-2$

D. $T=0$

Đáp án: C

Lí giải

Ta có $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(-\frac{a}{x}+b\ln|x|+2x\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{1}=a+1+b\ln 2$.

Theo giả thiết, ta có $2-3\ln 2=a+1+b\ln 2$. Từ đó suy ra $a=1$, $b=-3$. Vậy $T=a+b=-2$.

HSA 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B, AH là đường cao của tam giác SAB. Khẳng định nào sau đây là **sai**.

A. $SA\perp BC$

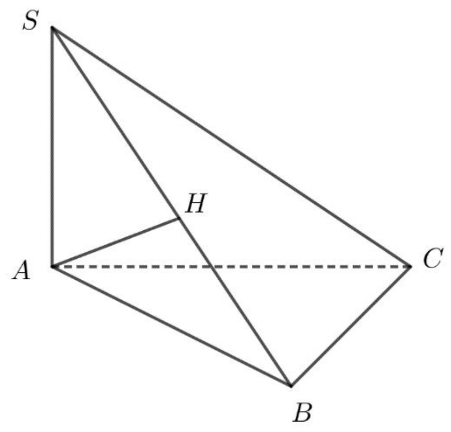
B. $AH\perp SC$

C. $AH\perp BC$

D. $AH\perp AC$

Đáp án: D

Lí giải



Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow BC\perp SA$ nên A đúng.

Và $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$ nên $AH\perp BC$ do đó C đúng.

Mà $\begin{cases} AH\perp SB \\ AH\perp SC \end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SC$ nên B đúng.

HSA 29: Cho Elip có phương trình: $9x^2+25y^2=225$. Lúc đó hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng

A. 15

B. 60

C. 40

D. 30

Đáp án: B

Lí giải

Ta có $9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2=25 \\ b^2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$

Độ dài trục lớn (chiều dài hình chữ nhật cơ sở) $2a=10$.

Độ dài trục nhỏ (chiều rộng hình chữ nhật cơ sở) $2b=6$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $2a.2b=60$

HSA 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(0;1;2)$, $N(7;3;2)$, $P(-5;-3;2)$. Tìm tọa độ điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

A. $Q(-12;-5;2)$

B. $Q(-12;5;2)$

C. $Q(12;5;2)$

D. $Q(-2;-1;2)$

Đáp án: A

Lí giải

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N-x_M=x_P-x_Q \\ y_N-y_M=y_P-y_Q \\ z_N-z_M=z_P-z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7=-5-x_Q \\ 2=-3-y_Q \\ 0=2-z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q=-12 \\ y_Q=-5 \\ z_Q=2 \end{cases} \Rightarrow Q(-12;-5;2)$.

HSA 31: Trong không gian Oxyz , cho hai điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P): x+y-2z+1=0$, $(Q): x-2y-z+4=0$. Đường thẳng Δ qua điểm M , cắt hai mặt phẳng (P), (Q) lần lượt tại B và $C(a;b;c)$ sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=9$

B. $T=3$

C. $T=7$

D. $T=5$

Đáp án: C

Lí giải

Gọi mặt phẳng đi qua M nhận $\overrightarrow{AM}(1;2;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên:

$(R): 1(x-1)+2(y-2)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+z-8=0$.

Gọi d là giao tuyến của mặt phẳng (R) và (P).

Vectơ pháp tuyến của mp (P) là: $\vec{n}(1;1;-2)$

Ta có $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{n}\right]=(-5;3;-1)$

Gọi N là điểm thuộc giao tuyến của (R) và (P) nên tọa độ N là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x+2y+z-8=0 \\ x+y-2z+1=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$ nên $N(0;3;2)$

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases} x=0-5t \\ y=3+3t \\ z=2-t \end{cases}$

Ta có $B\in d$ nên $B(-5t;3+3t;2-t)$

Mặt khác M là trung điểm của đoạn BC nên $\begin{cases} x_C=2.1+5t \\ y_C=2.2-3-3\text{t} \\ \text{z}_C=2.3-2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=2+5t \\ y_C=1-3\text{t} \\ \text{z}_C=4+t \end{cases}$

Mặt khác $C\in(Q)$ nên $2+5t-2(1-3t)-(4+t)+4=0 \Leftrightarrow 10t=0 \Leftrightarrow t=0$.

Nên $C(2;1;4)$ nên $T=a+b+c=7$.

HSA 32: Cho $A(2;1;-1)$ và $(P):x+2y-2z+3=0$. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Tìm tọa độ M thuộc d sao cho $OM=\sqrt{3}$.

A. $(1;-1;-1)$; $\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

B. $(1;-1;1)$; $\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

C. $(1;-1;-1)$; $\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

D. $(1;-1;-1)$; $\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

Đáp án: B
Lí giải

Ta có phương trình đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$.

Lấy điểm $M(2+t;1+2t;-1-2t)\in(d)$. Theo đề, $OM=\sqrt{3}\Rightarrow t=-1 \vee t=-\frac{1}{3}$.

Vậy $M_1(1;-1;1)$; $M_2\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

HSA 33: Người thợ gốm làm cái chum từ một khối cầu có bán kính $5\,\text{dm}$ bằng cách cắt bỏ hai chỏm cầu đối nhau. Tính thể tích của cái chum biết chiều cao của nó bằng $6\,\text{dm}$ (làm tròn đến hàng trăm).

A. $135,02\,\text{dm}^3$

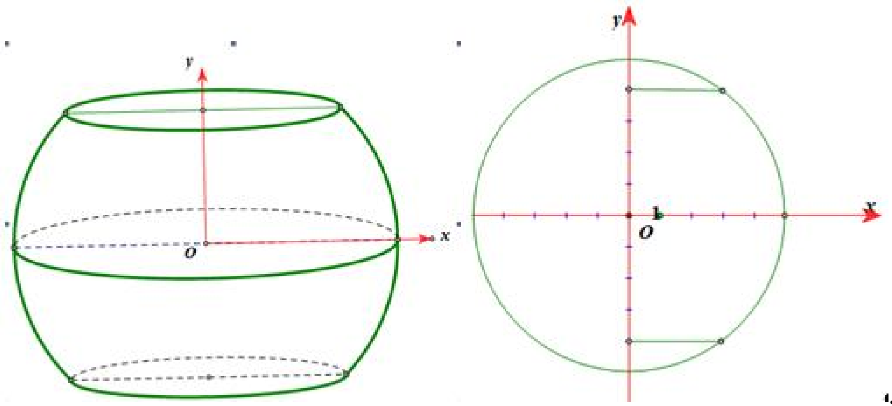
B. $104,67\,\text{dm}^3$

C. $428,74\,\text{dm}^3$

D. $414,69\,dm^3$

Đáp án: D

Lí giải



Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $x=\sqrt{25-y^2}$, trục tung và hai đường thẳng $y=-3$, $y=3$.

Khi quay hình phẳng (H) quanh trục tung ta được hình dạng cái chum.

Vậy thể tích cái chum là: $V=\pi\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{25-y^2}\right)^2 dy=\pi\int_{-3}^{3}\left(25-y^2\right)dy=132\pi\approx 414,69$.

HSA 34: Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$; $d_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$; $d_3:\frac{x+3}{-3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+5}{8}$. Đường thẳng song song với d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{8}$

B. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z}{8}$

C. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z}{8}$

D. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{8}$

Đáp án: A

Lí giải

Gọi d là đường thẳng song song với d_3, cắt d_1 và d_2 lần lượt tại các điểm A, B.

Gọi $A(1+2a;3a;-1-a)$ và $B(-2+b;1-2b;2b)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(b-2a-3;-2b-3a+1;2b+a+1)$.

Đường thẳng d_3 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(-3;-4;8)$.

Đường thẳng d song song với d_3 nên

$$\overrightarrow{AB}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}b-2a-3=-3k\\-2b-3a+1=-4k\\2b+a+1=8k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=\dfrac{3}{2}\\k=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Như vậy $A(1;0;-1)$ và $B=\left(-\dfrac{1}{2};-2;3\right)$.

Phương trình đường thẳng d là: $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{8}$.

HSA 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, $d_2:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+3y+2z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là:

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{2}$

B. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{2}$

C. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+1}{2}$

D. $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z+7}{2}$

Đáp án: C

Lí giải

Gọi $A(-3+t;2-t;1+2t)$ và $B(2+2t';1+t';-1+t')$ lần lượt là giao điểm của đường thẳng cần tìm với d_1 và d_2.

$\overrightarrow{AB}=(5+2t'-t;-1+t'+t;-2+t'-2t)$.

Vì đường thẳng cần tìm vuông góc với (P) nên có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;3;2)$

Do đó $\begin{cases}5+2t'-t=1k\\-1+t'+t=3k\\-2+t'-2t=2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=-4\\k=-2\end{cases}$, suy ra $A(-4;3;-1)$, $B(-6;-3;-5)$. Thay vào các đáp án ta thấy C thỏa mãn.

HSA 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-5t \\ y=4+2t \\ z=1 \end{cases}$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A và B. Tính độ dài đoạn AB (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,37

Lí giải

Tọa độ các giao điểm của d và (S) là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x=2-5t \\ y=4+2t \\ z=1 \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0 \quad (*) \end{cases}$$

Từ (*) ta có: $(2-5t)^2+(4+2t)^2+1^2-2(2-5t)-4(4+2t)+2-3=0$

$$\Leftrightarrow 29t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{2}{29} \end{array}\right.$$

Với $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A(2;4;1)$ hoặc $t=\dfrac{2}{29} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{48}{29} \\ y=\dfrac{120}{29} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{48}{29};\dfrac{120}{29};1\right)$

Vậy $\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{10}{29};\dfrac{4}{29};0\right) \Rightarrow AB=\dfrac{2\sqrt{29}}{29}\approx 0,37$.

HSA 37: Cho một hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $5cm$ và $\widehat{BAD}=60^\circ$. Một mặt phẳng tạo với mặt đáy một góc 60° và cắt tất cả các cạnh bên của hình hộp. Tính diện tích thiết diện tạo thành (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Đáp án: 43,3

Lí giải

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=AB.AD.\sin 60^\circ=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$.

Hình chiếu vuông góc của thiết diện lên mặt phẳng đáy $ABCD$ là hình thoi $ABCD$. Gọi S là diện tích thiết diện. Theo công thức diện tích hình chiếu ta có

$$S_{ABCD}=S.\cos 60^\circ \Rightarrow S=\frac{S_{ABCD}}{\cos 60^\circ}=\frac{\frac{25\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=25\sqrt{3}\approx 43,3.$$

HSA 38: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về lương của nhân viên trong một công ty như sau:

Lương(triệu đồng)	$[9;12)$	$[12;15)$	$[15;18)$	$[18;21)$	$[21;24)$
Số nhân viên	6	12	4	2	1

Tính lương trung bình của các nhân viên trong công ty.

Đáp án: 14,1

Lí giải

Trung bình lương các nhân viên là $\overline{x}=\frac{1}{25}\left(6\cdot 10,5+12\cdot 13,5+4\cdot 16,5+2\cdot 19,5+22,5\right)=14,1$ triệu đồng.

HSA 39: Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có hai bạn A và B, đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Xác suất để hai bạn A và B đứng cạnh nhau.

Đáp án: 0,2

Lí giải

Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh thành một hàng có $10!$ cách $\Rightarrow n\left(\Omega\right)=10!$

Gọi biến cố A: "Xếp 10 học sinh thành một hàng sao cho A và B đứng cạnh nhau".

Xem A và B là nhóm X.

Xếp X và 8 học sinh còn lại có $9!$ cách.

Hoán vị A và B trong X có $2!$ cách.

Vậy có $9!2!$ cách $\Rightarrow n\left(A\right)=9!2!$

Xác suất của biến cố A là: $P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\frac{1}{5}=0,2$.

HSA 40: Kết quả đo chiều cao của 25 học sinh nam lớp 10A của một trường THPT được cho trong bảng sau

Chiều cao (cm)	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số học sinh	1	7	12	3	2

Tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đáp án: 162

Lí giải

Gọi $x_1;x_2...;x_{25}$ là chiều cao của 25 học sinh nam sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Trung vị của dãy số liệu là $x_{13}\in\left[160;165\right)$.

Xác định được: $n=25;n_m=12;C=8;u_m=160;u_{m+1}=165$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$M_e=u_m+\frac{\frac{n}{2}-C}{n_m}.\left(u_{m+1}-u_m\right)=160+\frac{\frac{25}{2}-8}{12}.\left(165-160\right)\approx 162.$$

HSA 41: Trong một hộp đựng 7 bi màu đỏ, 5 bi màu xanh và 3 bi vàng, lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để 3 viên bi lấy được đều có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,08

Lí giải

Tổng số có $7+5+3=15$ viên bi.

Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên có $C_{15}^3=455$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=455$.

Gọi A: 3 viên bi lấy được đều có màu đỏ".

Lấy 3 viên bi màu đỏ từ 7 viên bi màu đỏ có $C_7^3=35 \Rightarrow n(A)=35$.

Vậy xác suất để 3 viên bi lấy được đều có màu đỏ là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{35}{455}=\dfrac{1}{13}\approx 0,08$.

HSA 42: Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc không lớn hơn 6, biết rằng có ít nhất 1 con xúc xắc xuất hiện mặt ba chấm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,45

Lí giải

Gọi A là biến cố: "Tổng số chấm trên hai con xúc xắc không lớn hơn 6".

Gọi B là biến cố: "Có ít nhất 1 con xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm".

Ta có: $n(\Omega)=6.6=36$

$AB=\{(1;3);(3;1);(2;3);(3;2);(3;3)\} \Rightarrow P(AB)=\dfrac{5}{36}$

$\overline{B}=\{(a;b)\,|\,a,b\in\{1;2;4;5;6\}\} \Rightarrow n(\overline{B})=5.5=25$

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{25}{36}=\dfrac{11}{36}$.

Vậy $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{5}{11}\approx 0,45$.

HSA 43: Cho bảng phân bố tần số ghép lớp về độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành như sau sau

Độ dài (cm)	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50]$
Tần số	8	18	24	10

Tính phương sai bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

Đáp án: 84

Lí giải

Độ dài (cm)	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50]$
Giá trị đại diện	15	25	35	45
Tần số	8	18	24	10

Ta có giá trị trung bình $\overline{x}=\dfrac{15.8+25.18+35.24+45.10}{60}=31$.

Khi đó phương sai $s_x^2=\dfrac{8.(15-31)^2+18\cdot(25-31)^2+24.(35-31)^2+10.(45-31)^2}{60}=84$.

HSA 44: Cho hai biến cố A và B với $P(A)=0,85$, $P(B)=0,7$, $P(A\overline{B})=0,58$. Tính $P(\overline{A}B)$.

Đáp án: 0,43

Lí giải

Ta có $P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)\Rightarrow P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0,85-0,58=0,27$.

Lại có $P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B)\Rightarrow P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0,7-0,27=0,43$.

HSA 45: Trong một túi có một số viên kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 viên kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Hà lấy ngẫu nhiên 1 viên kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó Hà lại lấy ngẫu nhiên thêm 1 viên kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác suất Hà lấy được cả hai viên kẹo màu cam là $\frac{1}{3}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu viên kẹo?

Đáp án: 10

Lí giải

Gọi A là biến cố "Hà lấy được viên kẹo màu cam ở lần thứ nhất"

Gọi B là biến cố "Hà lấy được viên kẹo màu cam ở lần thứ hai"

Ta có: xác suất Hà lấy được cả hai viên kẹo màu cam là $\frac{1}{3}$, suy ra $P(AB)=\frac{1}{3}$

Gọi n là số viên kẹo ban đầu trong túi $\left(n\in\mathbb{N}^*, n\neq 1\right)$

$P(A)=\frac{6}{n}$; $P(B|A)=\frac{5}{n-1}$

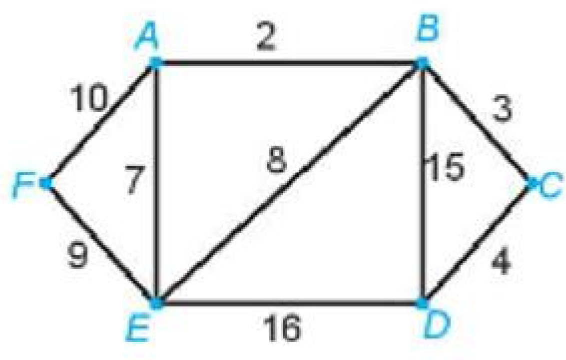
Theo công thức nhân xác suất, ta có:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{6}{n}\cdot\frac{5}{n-1}=\frac{30}{n^2-n}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow n^2-n=90\Leftrightarrow n^2-n-90=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=-9\\n=10\end{array}\right..$$

Ta được $n=-9$ (loại) hoặc $n=10$ (nhận).

Vậy ban đầu trong túi có 10 viên kẹo.

HSA 46: Một người đưa thư xuất phát từ bưu điện phải đi qua một số con đường để phát thư rồi quay về lại điểm xuất phát, hỏi người đó phải đi như thế nào để đường đi là ngắn nhất. Ở đây các điểm cần phát thư nằm dọc theo các con đường cần phải đi qua. Giải bài toán người đưa thư đối với đồ thị có trọng số như hình sau.



Đáp án: 83

Lí giải

Đồ thị chỉ có hai đỉnh bậc lẻ là A và D nên ta có thể tìm được một đường đi Euler từ A đến D (đường đi này đi qua mỗi cạnh đúng một lần).

Một đường đi Euler từ A đến D là AFEABEDBCD và tổng độ dài của nó là
$10 + 9 + 7 + 2 + 8 + 16 + 15 + 3 + 4 = 74$.
Để quay trở lại điểm xuất phát và có đường đi ngắn nhất, ta cần tìm một đường đi ngắn nhất từ D đến A theo thuật toán gắn nhãn vĩnh viễn.
Đường đi ngắn nhất từ D đến A là DCBA và có độ dài là $4 + 3 + 2 = 9$.
Vậy một chu trình cần tìm là AFEABEDBCDCBA và có độ dài là $74 + 9 = 83$.

HSA 47: Kim giờ dài $6cm$ và kim phút dài $11cm$ của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất (tính bằng giờ) để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 0,09
Lí giải

Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác là 2π; kim giờ quét được một góc lượng giác là $\frac{\pi}{6}$.

Hiệu vận tốc giữa kim phút và kim giờ là: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là: $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) : \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{11} \approx 0,09(h)$

HSA 48: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là $95,5$ triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là $1,14\%$. Tính dân số Việt Nam năm 2009 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Đáp án: 85,2
Lí giải

Áp dụng công thức $S = A.e^{ni}$ trong đó: $S = 95,5$ triệu người, $n = 10$ năm, $i = 1,14\%$

Ta có số dân Việt Nam năm 2009 là: $A = \frac{S}{e^{ni}} = \frac{95,5}{e^{10.1,14\%}} \approx 85,2$ triệu người

HSA 49: Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây bị chết thì hiện tượng quang hợp của nó cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Biết rằng nếu gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức:

$P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}\ (\%)$. Lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 65%. Hỏi mẫu gỗ bị chết bao nhiêu năm rồi? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đáp án: 3574

Lí giải

Lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 65% nên ta có:

$P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}=65 \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}}=0,65$.

Logarit cơ số $\frac{1}{2}$ hai vế ta được: $\log_{\frac{1}{2}}(0,5)^{\frac{t}{5750}}=\log_{\frac{1}{2}}0,65 \Leftrightarrow \frac{t}{5750}=\log_{\frac{1}{2}}0,65$.

$\Leftrightarrow t=5750\log_{\frac{1}{2}}0,65\approx 3574$ năm.

HSA 50: Khi ánh sáng đi qua một môi trường [chẳng hạn như không khí, nước, sương mù, …] cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền x, theo công thức $I(x)=I_0e^{-\mu x}$, trong đó I_0 là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và μ là hệ số hấp thu của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thu $\mu=1,4$ và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng giảm $l.10^{10}$ lần. Tìm l (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 8,79

Lí giải

Ta có

Ở độ sâu 2 m: $I(2)=I_0e^{-2,8}$

Ở độ sâu 20 m: $I(20)=I_0e^{-28}$

heo giả thiết $I(2)=l.10^{10}.I(20) \Leftrightarrow e^{-2,8}=l.10^{10}.e^{-28}$

$\Leftrightarrow l=10^{-10}.e^{25,2}\approx 8,79$.