HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$ là

A. $\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$. **B.** $3^x\ln 3+C$.

C. 3^x+C. **D.** $\dfrac{3^{x+1}}{x+1}+C$.

Câu 2: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là

A. $S=\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\right|$.

B. $S=\int_a^b|f(x)+g(x)|dx$.

C. $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$.

D. $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$.

Câu 3: Điểm kiểm ttra 15 phút của lớp 12A được cho bởi bảng sau:

Điểm	**[3;4)**	**[4;5)**	**[5;6)**	**[6;7)**	**[7;8)**	**[8;9)**	**[9;10)**
Số học sinh	3	8	7	12	7	1	1

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là

A. $4,84$. **B.** $2,10$.
C. $2,09$. **D.** $6,94$.

Lời giải

Mẫu số liệu ghép nhóm có cỡ mẫu $n=3+8+7+12+7+1+1=39$.

Gọi $x_1,x_2,....,x_{39}$ là điểm của 39 học sinh và giả sử dãy này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu gốc là $\dfrac{x_{10}+x_{11}}{2}$. Do x_{10},x_{11} đều thuộc nhóm $[4;5)$ nên nhóm này chứa Q_1. Ta có $Q_1=4+\dfrac{\frac{39}{4}-3}{8}.1=\dfrac{155}{32}\approx 4,84$.

Đáp án: A

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a}=(4;-6;2)$ là

A. $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-3t \\ z=2+t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình

A. $y=-\frac{1}{2}$.

B. $x=2$.

C. $y=2$.

D. $x=-\frac{1}{2}$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1)>1$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

D. $\left[1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1 \\ z=3+t \end{cases}$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ?

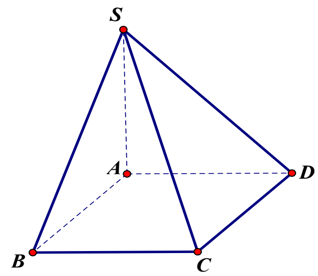
A. $(-2;-1;1)$.

B. $(1;-1;3)$.

C. $(-2;0;1)$.

D. $(2;0;1)$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA\perp(ABCD)$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng SA?



A. SB.　　　　**B.** SC.

C. SD.　　　　**D.** BC.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^x = 3$ là

A. $x = \log_2 3$.　　　　**B.** $x = \log_3 2$.

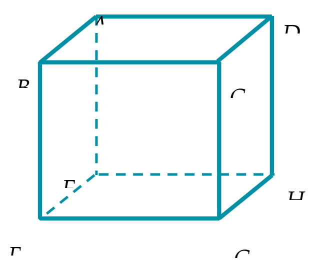
C. $x = \dfrac{3}{2}$.　　　　**D.** $x = \sqrt{3}$

Câu 10: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là $u_2 = 16$ và $u_3 = 32$. Số hạng tiếp theo là

A. 720.　　　　**B.** 81.

C. 64.　　　　**D.** 56.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ (minh họa như hình bên).



Kết quả phép toán $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EH}$ là

A. $\overrightarrow{BD}$.　　　　**B.** $\overrightarrow{AE}$.

C. $\overrightarrow{DB}$.　　　　**D.** $\overrightarrow{BH}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;3]$ và có bảng xét dấu như sau:

x	-2		0		1		3
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm

A. $x = -2$.　　　　**B.** $x = 0$.

C. $x = 1$.　　　　**D.** $x = 3$.

Phần II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x - \sin 2x$.

a) $f(0) = 0;\ f(\pi) = \pi$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{6}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

a) $f(0) = 0 - \sin 2.0 = 0$ và $f(\pi) = \pi - \sin 2\pi = \pi$. **Đúng.**

b) Đạo hàm của $f(x) = x - \sin 2x$ là $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$. **Sai.**

c) $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$ khi đó $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\cos 2\frac{\pi}{6} = 1 - 2\cos\frac{\pi}{3} = 0$ và $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - 2\cos 2\frac{5\pi}{6} = 1 - 2\cos\frac{5\pi}{3} = 0$

, suy ra $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[0;\pi]$. **Đúng.**

d) $f(x) = x - \sin 2x$, $f'(x) = 1 - 2\cos 2x$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \in [0;\pi]$

Ta có: $f(0) = 0; f(\pi) = \pi; f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}; f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;\pi]$ là $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Đúng.**

Câu 2: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần. Gọi x là số ti vi bán được mỗi tuần, p (triệu đồng) là giá bán của mỗi ti vi. Khi đó $p = p(x)$ được gọi là hàm cầu.

a) Hàm cầu là $p = -\frac{1}{200}x + 19$ (triệu đồng).

b) Tổng doanh thu từ tiền bán ti vi là $200p^2 + 3800p$ (triệu đồng).

c) Công ty giảm giá 4,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 8 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

Đáp số

a) Đúng

Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất có dạng $p = ax + b$.

Giá bán ti vi $p_1 = 14$ ứng với $x = 1000$ và giá bán ti vi $p_2 = 14 - 0,5 = 13,5$ ứng với $x = 1000 + 100 = 1100$. Ta tìm được $p = -\frac{1}{200}x + 19$

b) Từ ý a) có $x = 3800 - 200p$

Tổng doanh thu từ tiền bán tivi là $T = x.p = 3800p - 200p^2 = -200p^2 + 3800p$

Suy ra **b) sai**

c) Đúng

Doanh thu T là một hàm số bậc 2 với hệ số $a = -200 < 0$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $p = \frac{3800}{400} = 9,5$. Tức là công ty đã bán mỗi ti vi với giá là 9,5 triệu đồng, hay công ty đã giảm giá 4,5 triệu đồng với khi bán mỗi ti vi.

d) Đúng

Lợi nhuận hàng tuần khi bán x chiếc ti vi là $L(x) = x.p - C(x) = -200p^2 + 3800p - 12000 + 3(3800 - 200p) = -200p^2 + 3200p - 600$

Lập BBT của hàm số $L(x)$ ta có lợi nhuận lớn nhất khi $p = 8$ (triệu đồng).

Câu 3: Một xưởng máy sử dụng một loại linh kiện được sản xuất từ hai cơ sở I và II. Số linh kiện do cơ sở I sản xuất chiếm 61%, số linh kiện do cơ sở II sản xuất chiếm 39%. Tỉ lệ linh kiện đạt tiêu chuẩn của cơ sở I, cơ sở II lần lượt là 93%, 82%. Kiểm tra ngẫu nhiên một linh kiện ở xưởng máy. Xét các biến cố:

A_1: "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở I sản xuất";

A_2: "Linh kiện được kiểm tra do cơ sở II sản xuất";

B: "Linh kiện được kiểm tra đạt tiêu chuẩn".

a) Xác suất $P(A_1) = 0,61$.

b) Xác suất có điều kiện $P(B \mid A_2) = 0,82$.

c) Xác suất $P(B) = 0,8871$.

d) Xác suất có điều kiện $P(A_1 \mid B) = 0,55$.

Lời giải

Ý	a)	b)	c)	d)
Kết quả	Đ	Đ	Đ	S

a) Do $\mathrm{P}(A_1) = 0,61$. Suy ra **a) đúng**.

b) $\mathrm{P}(B \mid A_2) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A_2)}{\mathrm{P}(A_2)} = 0,82$. Do đó **b) đúng**

c) Ta có: $\mathrm{P}(A_1)=0,61;\mathrm{P}(A_2)=0,39;\mathrm{P}(B\mid A_1)=0,93;\mathrm{P}(B\mid A_2)=0,82$.

Theo công thức xác suất toàn phần, ta có:

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A_1).\mathrm{P}(B\mid A_1)+\mathrm{P}(A_2).\mathrm{P}(B\mid A_2)=0,61.0,93+0,39.0,82=0,8871$.

Vậy **c) đúng**

d) Theo công thức Bayes, ta có: $\mathrm{P}(A_1\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A_1).\mathrm{P}(B\mid A_1)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0,61\cdot 0,93}{0,8871}\approx 0,64$.

Vậy **d) sai**

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(17;20;45)$. Biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng là $4km$.

a) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-17)^2+(y-20)^2+(z-45)^2=16000000$.

b) Nếu người đi biển ở vị trí $M(18;21;50)$ thì không thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Nếu người đi biển ở vị trí $N(4019;21;44)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển ở vị trí có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 8 km

Lời giải

a) Đ
b) S
c) S
d) Đ

a) Phương trình mặt cầu tâm $I(17;20;45)$ bán kính $R=4km=4000m$ $(x-17)^2+(y-20)^2+(z-45)^2=16000000$ suy ra mệnh đề **đúng.**

b) $IM=\sqrt{(18-17)^2+(21-20)^2+(50-45)^2}=\sqrt{27}<16000000$. Suy ra người ở vị trí điểm M vẫn nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Suy ra mệnh đề **sai**

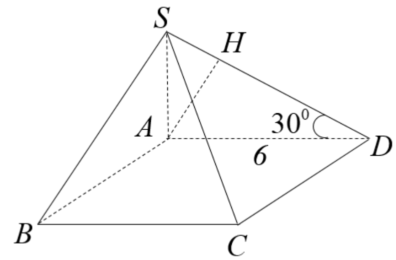
c) $IN=\sqrt{(4019-17)^2+(21-20)^2+(44-45)^2}=\sqrt{16016006}<16000000$. Suy ra người ở vị trí điểm N vẫn nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Suy ra mệnh đề **đúng**.

d) Vì đường kính của mặt cầu trên bằng $8000m$ hay $8km$ nên hai người đi biển ở vị trí có thể nhìn thấy được ánh sáng từ ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá $8km$. Suy ra mệnh đề **đúng.**

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AD=6$. Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy bằng 30^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng bao nhiêu?

Lời giải



Kẻ $AH \perp SD$, ta có $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH \Rightarrow$ AH là đoạn vuông góc chung của AB và SD.

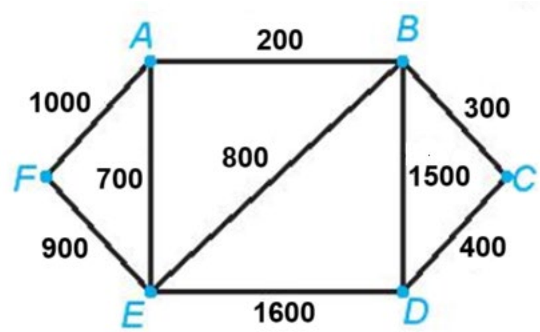
Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy là góc $\widehat{SDA} = 30^0$.

Trong tam giác vuông SAD có $SA = AD.\tan 30^0 = 2\sqrt{3}$.

AH là đường cao trong tam giác vuông SAD nên $AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}.6}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6^2}} = 3$.

Đáp án: 3

Câu 2: Một người đưa thư xuất phát từ bưu điện (vị trí A) và phải đi qua các con đường để phát thư rồi quay lại bưu điện. Sơ đồ các con đường cần đi qua và độ dài của chúng (tính theo mét) được biểu diễn ở hình vẽ dưới. Hỏi người đó phải đi như thế nào để đường đi là ngắn nhất?



Lời giải

Đồ thị trên chỉ có hai đỉnh bậc lẻ là A và D nên ta có thể tìm được một đường đi Euler từ A đến D (đường đi này đi qua mỗi cạnh đúng một lần).

Một đường đi Euler từ A đến D là AFEABEDBCD và tổng độ dài của nó là
1000 + 900 + 700 + 200 + 800 + 1600 + 1500 + 300 + 400 = 7400.

Để quay trở lại điểm xuất phát và có đường đi ngắn nhất, ta cần tìm một đường đi ngắn nhất từ D đến A theo thuật toán gắn nhãn vĩnh viễn.

Đường đi ngắn nhất từ D đến A là DCBA và có độ dài là 400 + 300 + 200 = 900.

Vậy một chu trình cần tìm là AFEABEDBCDCBA và có độ dài là

7400 + 900 = 8300.

Đáp án: 8300

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$, mỗi đơn vị trên một trục ứng với 1 km. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(-688;-185;8)$, chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(91;75;0)$ và theo hướng về đài không lưu. $E(a;b;c)$ là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình. Tính $T=a+b+c$.

Lời giải

Ta có $E(-688+91t;-185+75t;8)$ với $t\geq 0$.

E là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình

$\Rightarrow OE=471 \Leftrightarrow (-688+91t)^2+(-185+75t)^2+8^2=417^2 \Leftrightarrow 13906t^2-152966t+333744=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=8 \end{array}\right.$.

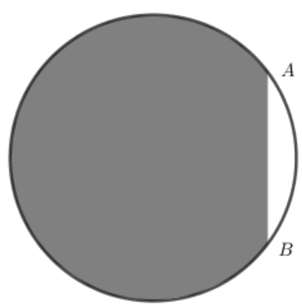
Vì E là vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình $\Rightarrow t=3 \Rightarrow E(-415;40;8)$.

Vậy $a=-415; b=40; c=8 \Rightarrow a+b+c=-367$

Đáp án: -367

Câu 4: Một người có miếng tôn hình tròn có bán kính bằng 5 (m). Người này tính trang trí sơn vẽ trên tấm tôn đó, biết mỗi mét vuông sơn hết 100 nghìn đồng. Tuy nhiên cần có một khoảng trống để treo tấm tôn nên người này bớt lại một phần tấm tôn nhỏ không trang trí (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó $AB=6$ (m).

Hỏi khi trang trí xong người này hết bao nhiêu tiền chi phí (đơn vị nghìn đồng)?

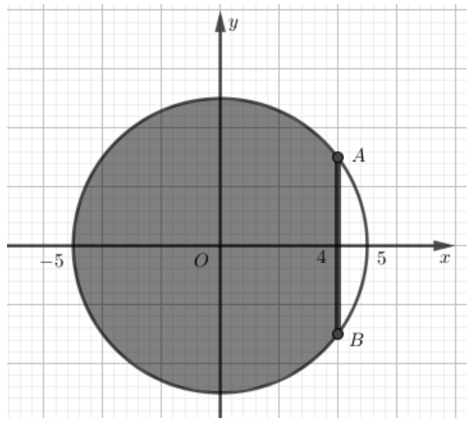


Lời giải

Đáp án: 7445.

Diện tích miếng tôn hình tròn là: $S_1=\pi.R^2=25\pi\left(m^2\right)$.

Xét hệ tọa độ Oxy như hình vẽ



Phương trình của đường tròn tâm O, bán kính bằng 5 là: $x^2 + y^2 = 25$.

Phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn là: $y = \sqrt{25 - x^2}$

$AB = 6 \Rightarrow y_A = 3 \Rightarrow x_A = 4$. Vậy diện tích phần tấm tôn trống là $S_2 = 2.\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{dx}\left(m^2\right)$.

Diện tích phần tấm tôn trang trí là: $S = S_1 - S_2 = 25\pi - 2.\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{dx}\ \left(m^2\right)$.

Vậy số tiền chi phí là: $T = 100.\left(25\pi - 2.\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}\right) \approx 7445$ (nghìn đồng).

Câu 5: Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm. Nhà máy A cần bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Số tiền mà nhà máy A thu được từ việc bán x tấn sản phẩm $(0 \le x \le 100)$ cho nhà máy B là: $R(x) = x.P(x) = x\left(45 - 0{,}001x^2\right) = 45x - 0{,}001x^3$ (triệu đồng).

Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng).

Lợi nhuận (triệu đồng) mà nhà máy A thu được là:

$P(x) = R(x) - C(x) = x\left(45 - 0{,}001x^2\right) - (100 + 30x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100$

Xét hàm số $P(x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100$ với $(0 \le x \le 100)$ ta có:

$P'(x) = -0{,}003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}$

Ta có $P(0) = -100;\ P\left(50\sqrt{2}\right) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607;\ P(100) = 400$

Bảng biến thiên

x	0		$50\sqrt{2}$		100
y'		$+$	0	$-$	
y			$500\sqrt{2}-100$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	100				400

Vậy nhà máy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm cho nhà máy B mỗi tháng.

Đáp án: 70,7

Câu 6: Có hai thùng I và II chứa các sản phẩm có khối lượng và hình dạng như nhau. Thùng I có 5 chính phẩm và 4 phế phẩm, thùng 2 có 6 chính phẩm và 8 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ thùng I sang thùng II. Sau đó, lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ thùng II để sử dụng. Xác suất lấy được chính phẩm từ thùng II là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét các biến cố

A: "Lấy được một chính phẩm từ thùng I sang thùng II"

B: "Lấy được một chính phẩm từ thùng II"

Khi đó: $P(A) = \frac{5}{9}$; $P(\overline{A}) = \frac{4}{9}$; $P(B|A) = \frac{7}{15}$; $P(B|\overline{A}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

Theo công thức xác suất toàn phần, xác suất của biến cố B là:

$$P(B) = P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A}) = \frac{5}{9}.\frac{7}{15} + \frac{4}{9}.\frac{2}{5} \approx 0.44$$

Đáp án: 0,44