CHƯƠNG VII

# QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

## BÀI 27: THỂ TÍCH

## I LÝ THUYẾT.

Thể tích là một trong những khái niệm toán học xuất hiện thường xuyên trong cuộc sống, đo sự chiếm chỗ của vật thể trong không gian. Bài học này đưa ra công thức thể tích của các hình khối ứng với các hình mà ta đã học.

Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cụt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy **S** và chiều cao $h$ là $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot \mathbf{S}$.
- Thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích đáy lớn **S**, diện tích đáy bé **S'** và chiều cao $h$ là $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(\mathbf{S}+\mathbf{S}'+\sqrt{\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}'}\right)$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy **S** và chiều cao $h$ là $V=h\cdot\mathbf{S}$.

**Nhận xét**

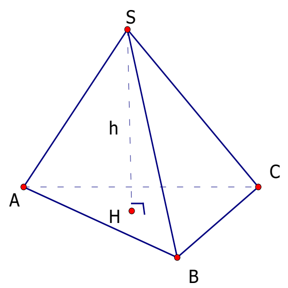
- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

**CHÚ Ý:**

**1.** Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước $a,b,c$: $\boxed{V=a.b.c}$

**2.** Thể tích khối lập phương có kích thước $a$: $\boxed{V=a^3}$

**3. Thể tích khối chóp**

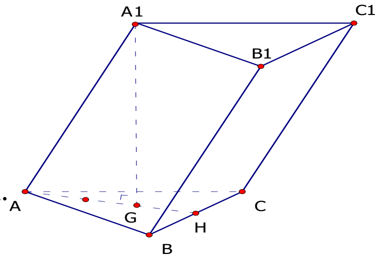



+ Thể tích khối chóp $\boxed{V=\frac{1}{3}.S.h}$

Trong đó: $S$ là diện tích đa giác đáy.

$h$: là chiều cao của khối chóp.

**4. Thể tích khối lăng trụ**




Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V = S.h}$

$S$ là diện tích đa giác đáy.

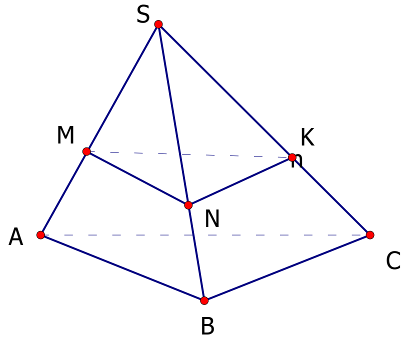
$h$: là chiều cao của khối lăng trụ.

**Lưu ý**: Lăng trụ đứng có chiều cao là độ dài cạnh bên.

**5. Tỉ số thể tích.**

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng $SA, SB, SC$ lần lượt lấy ba điểm $M, N, K$ khác với $S$, khi đó ta có:

$$\frac{V_{S.MNK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SK}{SC}.$$

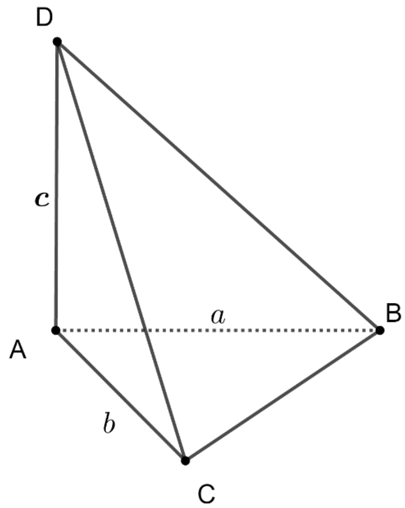



\+ Các công thức tính nhanh (nếu có), có chứng minh các công thức tính nhanh (nếu có thể).

**CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT SỬ DỤNG ĐỂ LÀM BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

***CÔNG THỨC 1:*** Với tứ diện $ABCD$ có $AB, AC, AD$ đôi một vuông góc và $AB = a, AC = b, AD = c$, ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc$.

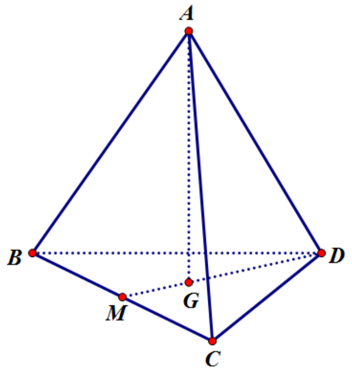
**Chứng minh**




Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}AD.\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{6}abc$.

***CÔNG THỨC 2:*** Thể tích khối tứ diện đều cạnh $a$: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

**Chứng minh**



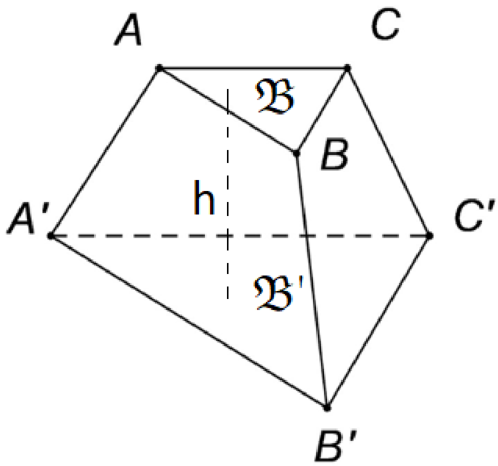

Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $BCD$.

Ta có $DG=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, suy ra $AG=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích tam giác $BCD$: $S_{BCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

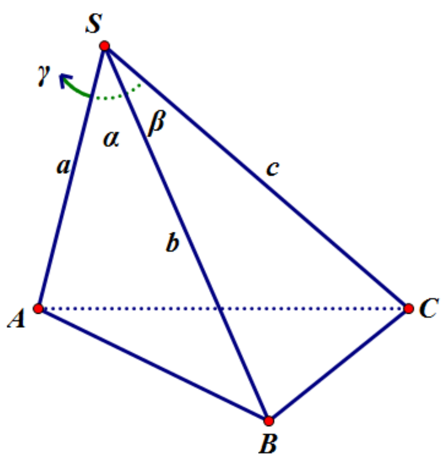
Thể tích khối tứ diện đều cạnh $a$ là: $V=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

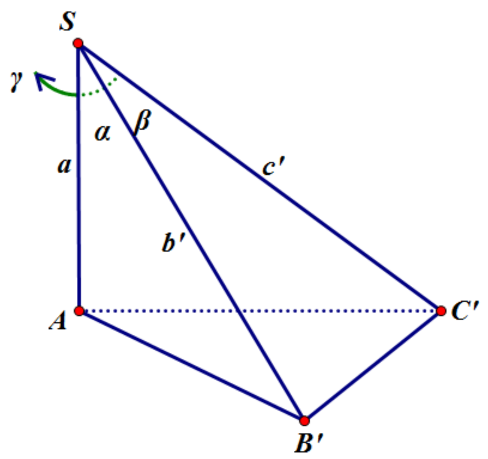
***CÔNG THỨC 3:*** Thể tích của khối chóp cụt $V=\frac{1}{3}h\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right)$ với $h$ là khoảng cách giữa hai đáy, $B,B'$ là diện tích của hai đáy




***CÔNG THỨC 4:*** Thể tích khối tứ diện biết các góc $\alpha,\beta,\gamma$ và các cạnh $a,b,c$ tại cùng một đỉnh: $V=\frac{abc}{6}.\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$

**Chứng minh**




Xét tứ diện $S.ABC$ có các góc $\alpha,\beta,\gamma$ và các cạnh $a,b,c$ tại đỉnh $S$ như hình vẽ trên.

Dựng mặt phẳng qua $A$, vuông góc với $SA$, cắt các cạnh $SB,SC$ lần lượt tại $B',C'$.

Ta có $SB'=\dfrac{SA}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{\cos\alpha};SC'=\dfrac{SA}{\cos\beta}=\dfrac{a}{\cos\beta}$ và $AB'=a\tan\alpha, AC'=a\tan\beta$.

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{bc}{a^2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Áp dụng định lí cosin trong $\Delta SB'C'$, có

$$2AB'AC'.\cos\widehat{B'AC'}=AB'^2+AC'^2-B'C'^2$$

$$=a^2\tan^2\alpha+a^2\tan^2\beta-a^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\right)=a^2\left(\frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha.\cos\beta}-2\right)$$

$$\Rightarrow AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}=a.\frac{\cos\gamma-\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}.$$

Ta có $\left(AB'.AC'.\sin\widehat{B'AC'}\right)^2=\left(AB'.AC'\right)^2-\left(AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}\right)^2$

$$=a^4\tan^2\alpha\tan^2\beta-a^4.\frac{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=a^4\frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\beta\right)-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

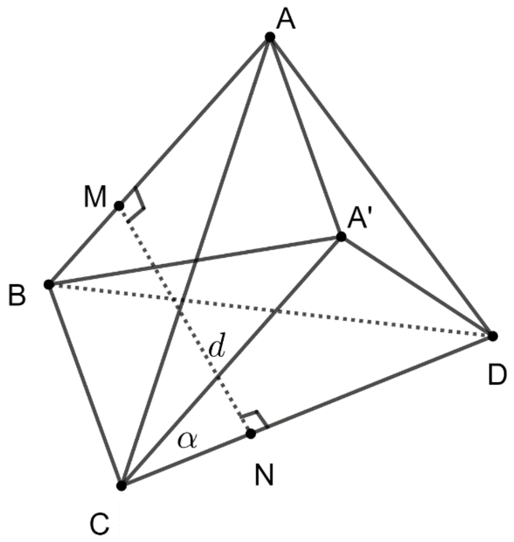
$$=a^4.\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\Rightarrow S_{AB'C'}=\frac{AB'.AC'.\sin\widehat{B'AC'}}{2}=\frac{a^2\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Suy ra $V_{S.ABC}=\dfrac{bc}{a^2\cos\alpha\cos\beta}V_{S.AB'C'}=\dfrac{abc}{6}.\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$.

***CÔNG THỨC 5:*** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a; CD = b; d\left(AB, CD\right) = d; \left(AB; CD\right) = \alpha$. Khi đó $V_{ABCD} = \frac{1}{6}abd\sin\alpha$

**Chứng minh**




Trong mặt phẳng $\left(ABC\right)$ vẽ hình bình hành $CBAA'$.

Ta có $AA' \parallel BC$ nên $V_{ABCD} = V_{A'BCD}$.

Gọi $MN$ là đoạn vuông góc chung của $AB$ và $CD$ với $M \in AB, N \in CD$.

Vì $BM \parallel CA'$ nên $V_{BA'CD} = V_{MA'CD}$. Ta có $MN \perp AB$ nên $MN \perp CA'$.

Ngoài ra $MN \perp CD$ nên $MN \perp \left(CDA'\right)$.

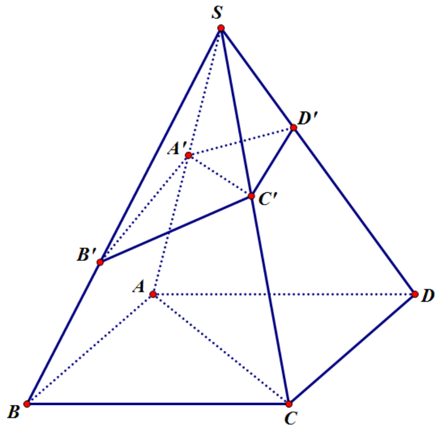
Ta có $\left(AB, CD\right) = \left(A'C, CD\right) = \alpha$.

Do đó $V_{MACD} = \frac{1}{3}S_{ACD} \cdot MN = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}CA' \cdot CD \cdot \sin\alpha \cdot MN = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\alpha$.

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB \cdot CD.d.\sin\alpha$.

***CÔNG THỨC 6:*** Tỉ số thể tích hai hình chóp có đáy hình bình hành. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành; và hình chóp tứ giác $S.A'B'C'D'$ có $A', B', C', D'$ lần lượt nằm trên các cạnh $SA, SB, SC, SD$; khi đó: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right)$.

**Chứng minh**

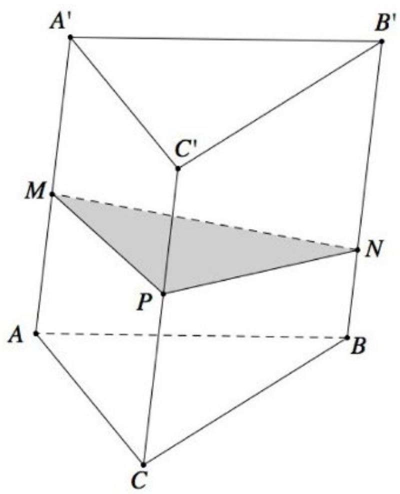



Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.A'C'D'}}{2V_{S.ACD}} + \frac{V_{S.A'C'B'}}{2V_{S.ACB}} = \frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD} + \frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}$

$= \frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\left(\frac{SB'}{SB} + \frac{SD'}{SD}\right).$

**_CÔNG THỨC 7:_** Mặt phẳng $(\alpha)$ cắt các cạnh của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ lần lượt tại $M, N, P$ sao cho $\frac{AM}{AA'} = x, \frac{BN}{BB'} = y, \frac{CP}{CC'} = z$. Khi đó $V_{ABC.MNP} = \frac{x+y+z}{3} V_{ABC.A'B'C'}$.

**Chứng minh**




Ta có $V_{ABCMNP} = V_{NACB} + V_{NACPM}$ .

$V_{NACB} = \frac{BN}{BB'} \cdot V_{B'ACB} = \frac{BN}{BB'} \cdot \frac{1}{3} V_{ABCA'B'C'} \quad (1).$

$\frac{V_{NACPM}}{V_{B'ACC'A'}} = \frac{S_{ACPM}}{S_{ACC'A'}} = \frac{(CP + AM)\cdot\frac{1}{2}}{AA'} = \frac{1}{2}\left(\frac{CP}{CC'} + \frac{AM}{AA'}\right)$

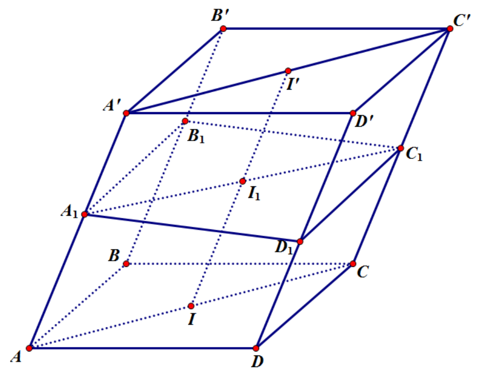
$\Rightarrow V_{NACPM} = \frac{1}{2}\left(\frac{CP}{CC'} + \frac{AM}{AA'}\right) \cdot \frac{2}{3} V_{ABCA'B'C'} \quad (2).$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra $V_{ABCMNP} = V_{NACB} + V_{NACPM} = \frac{1}{3}\left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{AM}{AA'}\right) \cdot V_{ABCA'B'C'}$.

***CÔNG THỨC 8:*** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, lấy $A_1, B_1, C_1, D_1$ lần lượt trên các cạnh $AA', BB', CC', DD'$ sao cho bốn điểm ấy đồng phẳng. Ta có tỉ số thể tích hai khối đa diện:

$$\frac{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}\right)$$

**Chứng minh**




Gọi $I, I'$ lần lượt là trung điểm $AC, A'C'$. Ta chứng minh được ba mặt phẳng $(ACC'A'), (BDD'B'), (A_1B_1C_1D_1)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến đồng quy tại $I_1$.

Ta có $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$, suy ra $A_1B_1 \parallel C_1D_1$. Tương tự, ta cũng được $A_1D_1 \parallel B_1C_1$.

Suy ra $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành, ta có $I_1$ là trung điểm $A_1C_1$.

Ta có $II_1$ là đường trung bình trong các hình thang $AA_1C_1C$ và $BB_1D_1D$, suy ra $2II_1 = AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

Suy ra: $\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'} = \frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}$.

Áp dụng công thức tỉ số thể tích trong khối lăng trụ tam giác, ta có:

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} + V_{ACD.A_1C_1D_1}$$

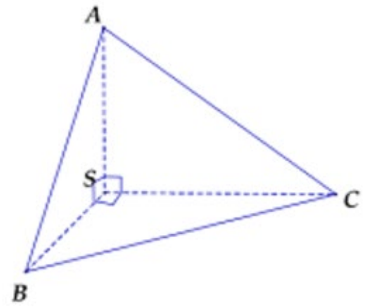
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'}\right).\frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} + \frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{DD_1}{DD'} + \frac{CC_1}{CC'}\right).\frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'}\right).V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}\left(\frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}\right).V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

***CÔNG THỨC 9:*** Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác $SAB, SBC, SAC$ lần lượt là $S_1, S_2, S_3$.

**Khi đó:** $V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$.

**Chứng minh**




Đặt $SA = a,\ SB = b,\ SC = c$.

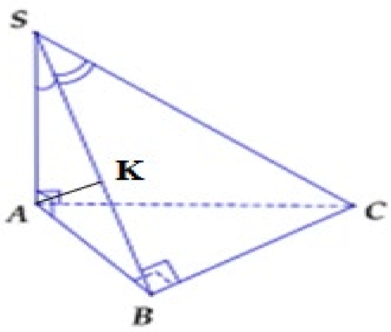
Suy ra $S_1 = \dfrac{1}{2}ab; S_2 = \dfrac{1}{2}bc; S_3 = \dfrac{1}{2}ca$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{\sqrt{a^2b^2c^2}}{6} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}ab\right)\left(\frac{1}{2}bc\right)\left(\frac{1}{2}ca\right)}}{3} = \frac{\sqrt{2.S_1.S_2.S_3}}{3}.$$

***CÔNG THỨC 10:*** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với $(ABC)$, hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SBC)$ vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \beta; \widehat{ASB} = \alpha$.

**Khi đó:** $V_{S.ABC} = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$

**Chứng minh**




$SA = SB.\cos\alpha$.

$(SAB)$ và $(SBC)$ vuông góc với nhau.

Nên $BC$ vuông góc $(SAB)$.

Tam giác $SBC$ vuông tại $B$ nên $BC = SB.\tan\beta \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}.SB.BC = \dfrac{1}{2}.SB^2.\tan\beta$

Kẻ $AK$ vuông góc $SB$. Lúc này $AK$ sẽ là khoảng cách từ $A$ đến $SBC$. Do $AK$ vuông góc $BC$ và $SB$.

Ta có $AK = SA.sin\alpha = SB.sin\alpha.cos\alpha$.

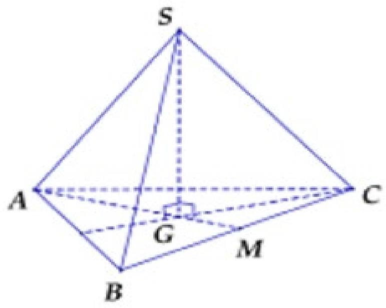
$$AK = \frac{SB\sin 2\alpha}{2}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}.$$

***CÔNG THỨC 11:*** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh bằng $a$, cạnh bên bằng $b$.

**Khi đó:** $V_{SABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$.

**Chứng minh**




$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

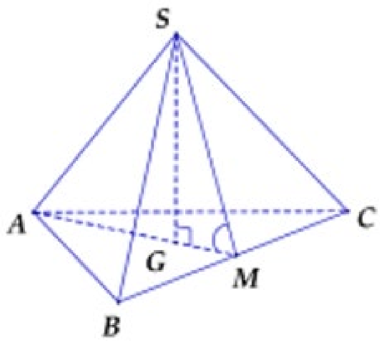
$$SG = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}.$$

***CÔNG THỨC 12:*** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$ và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc $\alpha$.

**Khi đó:** $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\tan\alpha}{24}$.

**Chứng minh**



$GM=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

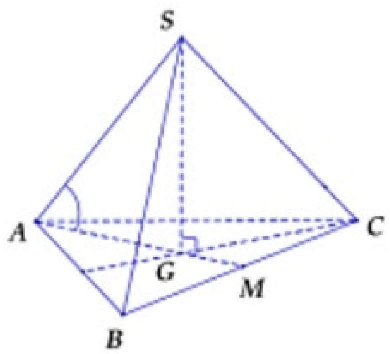
$SG=\frac{\sqrt{3}}{6}a\tan\alpha$.

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\frac{\sqrt{3}}{6}atan\alpha=\frac{a^3tan\alpha}{24}$.

***CÔNG THỨC 13:*** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng $b$ và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc $\beta$.

**Khi đó:** $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.cos^2\beta}{4}$.

**Chứng minh**




$SG=b\sin\beta$.

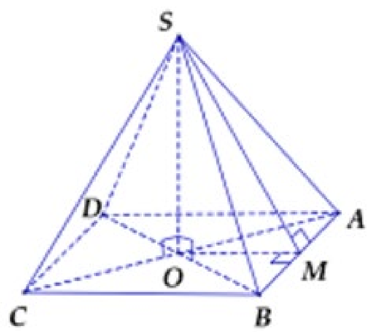
$AM=\frac{3}{2}AG=\frac{3}{2}.b.cos\beta\Rightarrow BC=\sqrt{3}.b.cos\beta$.

$S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}b^2\cos^2\beta\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.cos^2\beta}{4}$.

***CÔNG THỨC 14:*** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$, và $SA=SB=SC=SD=b$.

**Khi đó:** $V_{ABCD}=\frac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$.

**Chứng minh**



$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

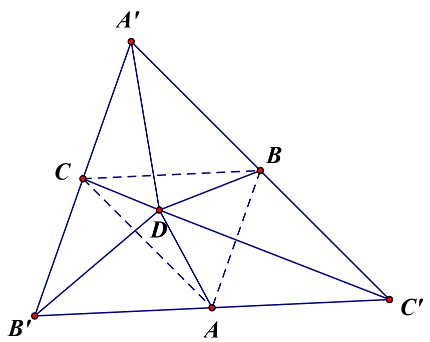
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.a^2.\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$.

***CÔNG THỨC 15:*** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$ (tứ diện gần đều).

**Khi đó:** $V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

**Chứng minh**

**Cách 1:**



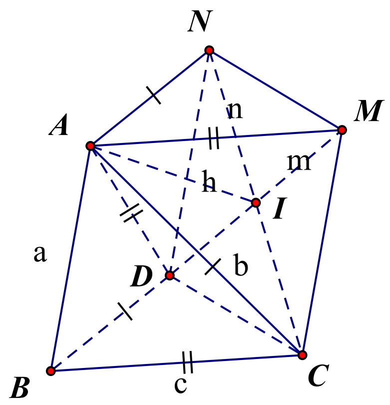

Dựng tứ diện $D.A'B'C'$ sao cho $A$, $B$, $C$ lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Khi đó tứ diện $D.A'B'C$ có các cạnh $DA'$, $DB'$, $DC'$ đôi một vuông góc.

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{DA'B'C'} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC'$.

Ta có $\begin{cases} DA'^2 + DC'^2 = 4b^2 \\ DA'^2 + DB'^2 = 4a^2 \\ DB'^2 + DC'^2 = 4c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DA'^2 = 2(a^2+b^2-c^2) \\ DB'^2 = 2(a^2-b^2+c^2) \\ DC'^2 = 2(-a^2+b^2+c^2) \end{cases}$.

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC' = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

**Cách 2*:*** Dựng lăng trụ $AMNBCD$ như hình bên.




Từ giả thiết ta có: $MNDC$ là hình thoi; các tam giác $CAN$, $DAM$ là các tam giác cân, suy ra: $AI \perp NC, AI \perp DM \Rightarrow AI \perp (CDMN)$.

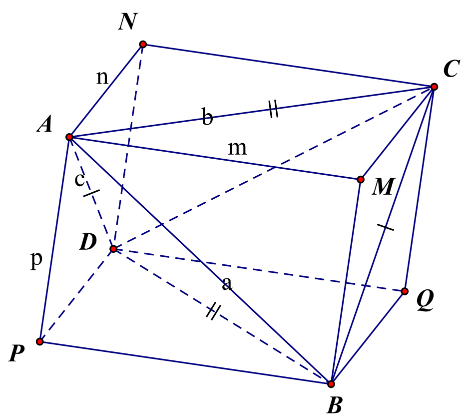
Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{2}V_{A.MNDC} = \frac{1}{2}.4V_{A.IMN} = 2V_{A.IMN} = \frac{1}{3}IA.IM.IN = \frac{1}{3}h.m.n$.

Từ $\begin{cases} h^2+m^2=c^2 \\ h^2+n^2=b^2 \\ m^2+n^2=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2} \\ n^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ h^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2} \end{cases}$.

Suy ra:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}.$$

**Cách 3:** Dựng hình hộp chữ nhật $AMCN.PBQD$ như hình bên.




Gọi các kích thước của hình hộp là $m,\ n,\ p$.

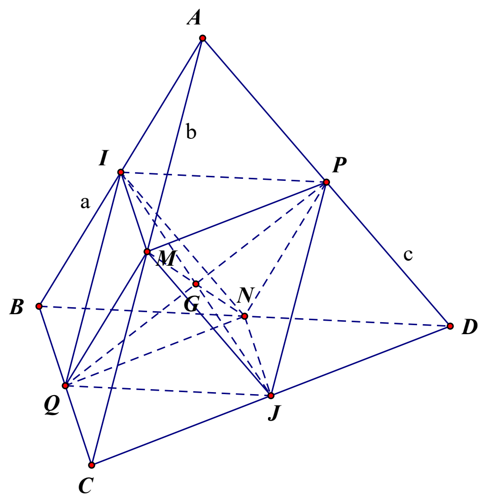
Ta có: $V_{PADB} = V_{MABC} = V_{QBCD} = V_{NACD} = \frac{1}{6}V_{AMCN.PBQD}$. Suy ra:

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{AMCN.PBQD}=\frac{1}{3}m.n.p$.

Ta có: $\begin{cases} m^2+n^2=b^2 \\ m^2+p^2=a^2 \\ p^2+n^2=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ n^2=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2} \\ p^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2} \end{cases}$.

$V_{ABCD}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

**Cách 4:**




Gọi $I,\ J,\ M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ CD,\ AC,\ BD,\ AD,\ BC$.

Ta thấy tứ giác $MINJ$ là hình thoi. Ta chứng minh được $PQ$ vuông góc với $AD$ và $BC$ nên $PQ$ vuông góc với $mp(IMJN)$.

Gọi $G$ là giao điểm của các đường $IJ, MN,\ PQ$. Ta có

$V_{PMINJQ}=2V_{P.MINJ}=2.\frac{1}{3}PG.\frac{1}{2}IJ.MN=\frac{1}{6}PQ.IJ.MN$.

Vì $V_{AIMP}=V_{BINQ}=V_{CQMJ}=V_{DPNJ}=\frac{1}{8}V_{ABCD}$ nên

$V_{PIMJNQ}=V_{ABCD}-(V_{AIMP}+V_{BINQ}+V_{CQMJ}+V_{DPNJ})=\frac{1}{2}V_{ABCD}$.

Suy ra $V_{ABCD}=2V_{PIMJN}=\frac{1}{3}PQ.IJ.MN$.

Ta tính được:

$$IJ^2 = IC^2 - CJ^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} - \frac{\mathrm{CD}^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Tương tự:

$$PQ^2 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}; \; MN^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}$$

Từ đó:

$$V_{ABC\mathrm{D}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

### DẠNG 1. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

**Kiến thức cần nhớ:**

**1)** Công thức tính: $V = \frac{1}{3}B.h$ ( $B$ : diện tích đáy và $h$ là chiều cao của khối chóp).

**2)** Chiều cao của khối chóp thường tính bằng độ dài cạnh vuông góc với đáy

**Loại 1: Tính bằng công thức**

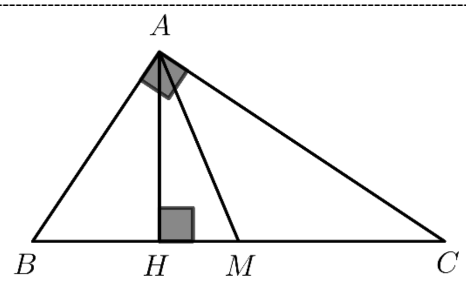
**Phương pháp giải (kiến thức cần nhớ):**

Ở loại toán này trình bày cách tính thể tích khối chóp có một cạnh vuông góc với đáy bằng sử dụng đơn thuần công thức $V = \frac{1}{3}B.h$, trong đó $B$ : diện tích đáy và $h$ là chiều cao của khối chóp. Ta cần nhớ một số kiến thức cơ bản sau:

**1. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông**

<table>
<tr><td>

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $AH.BC = AB.AC$
- $AB^2 = BH.BC$ , $AC^2 = CH.CB$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ , $AH^2 = BH.CH$

</td><td>


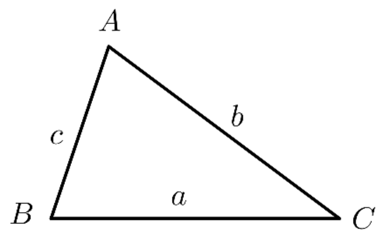
</td></tr>
</table>

**2. Các hệ thức trong tam giác thường**

<table>
<tr><td>

✓ Định lý hàm cosin:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

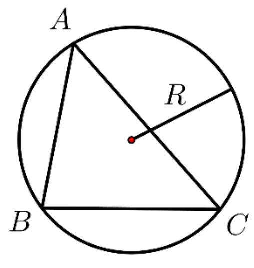
</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

✓ Định lý hàm sin:

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

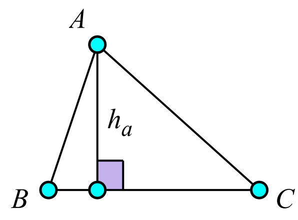
( $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ )

</td><td>


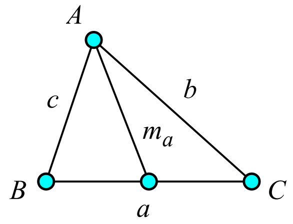
</td></tr>
<tr><td>

✓ Công thức tính diện tích tam giác:

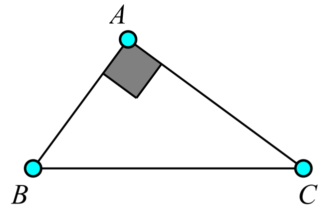
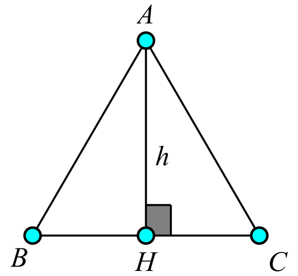
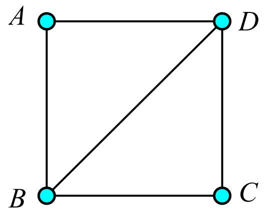
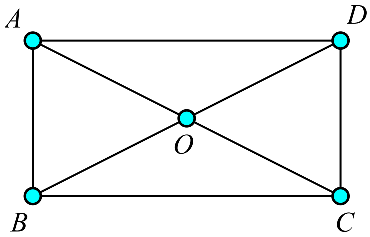
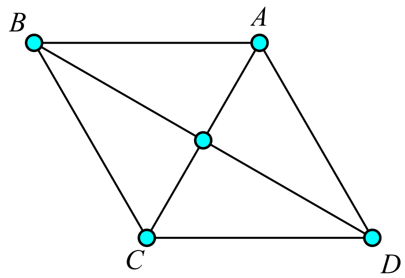
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

</td><td>


</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| • $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}$, $S_{\Delta ABC}=pr$<br>• $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ | Trong đó: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, $r$ bán kính đường tròn nội tiếp |
| ✓ Công thức tính độ dài đường trung tuyến:<br>• $m_a^2=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, $m_b^2=\dfrac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}$<br>• $m_c^2=\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$ |  |

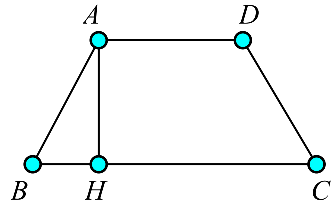
**3. Diện tích đa giác:**

| | |
|---|---|
| ✓ Tam giác vuông<br>• Diện tích: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC$ |  |
| ✓ Diện tích tam giác đều<br>• Diện tích: $S=\dfrac{AB^2.\sqrt{3}}{4}$.<br>• Đường cao: $h=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$. |  |
| ✓ Hình vuông:<br>• Diện tích: $S=AB^2$<br>• Đường chéo: $AC=BD=AB\sqrt{2}$ |  |
| ✓ Hình chữ nhật:<br>• Diện tích: $S=AB.AD$<br>• Đường chéo: $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}$ |  |
| ✓ Hình thoi:<br>• Diện tích: $S=\dfrac{1}{2}AC.BD$<br>• Đặt biệt: $1$ trong các góc trong của hình thoi bằng $60^\circ$, khi đó hình thoi được tạo bởi $2$ tam giác đều. |  |

✓ Hình thang:

• Diện tích: $S = \dfrac{(AD + BC)AH}{2}$

• Đặc biệt: Hình thang vuông, hình thang cân




**Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông tại $A$, $AB = a, AC = 2a$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABC$.

**Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $\Delta ABC$ vuông cân tại $A$, $SA = BC = a$. Tính theo $a$ thể tích $V$ của khối chóp $S.ABC$

**Câu 3:** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác $ABC$ vuông tại $B$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB = a\sqrt{5}$.

**Câu 4:** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, cạnh bên $SA$ vuông góc đáy và $SA = 2\sqrt{3}a$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABC$.

**Câu 5:** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Câu 6:** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, $SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$, $AC = a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

**Câu 7:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $AB = 3a$, $AD = 2a$, $SB = 5a.$ Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABCD$ theo $a.$

**Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$ có $AB = a,\ AD = 3a,\ BC = a.$ Biết $SA = a\sqrt{3},$ tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo $a.$

**Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a$ và góc $\widehat{BAD} = 60°$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

**Câu 10:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác $SBD$ là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

## LOẠI 2: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY KHI BIẾT GÓC GIỮA ĐƯỜNG VÀ MẶT

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):**

Cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu $d \perp (P)$ thì $\widehat{(d,(P))} = 90°.$

- Nếu $d$ không vuông góc với $(P)$ thì $\widehat{(d,(P))} = \widehat{(d,d')}$ với $d'$ là hình chiếu của $d$ trên $(P)$

*Chú ý:* $0° \le \widehat{(d,(P))} \le 90°.$

**Câu 11:** Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa $SC$ và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

**Câu 12:** Cho hình chóp $SABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$ với $AC = a$ biết $SA$ vuông góc với đáy $(ABC)$ và $SC$ hợp với $(SAB)$ một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

**Câu 13:** Cho hình chóp $SABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$ biết $SA$ vuông góc với đáy $ABC$ và $SA$ hợp với $(SBC)$ một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

**LOẠI 3: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY KHI BIẾT GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG**

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):**

**-** Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau: Cho hai mặt phẳng $(P)$ và $(Q)$ cắt nhau theo giao tuyến $d$. Từ một điểm $I$ bất kì trên $d$ ta dựng đường thẳng $a$ trong $(P)$ vuông góc với $d$ và dựng đường thẳng $b$ trong $(Q)$ vuông góc với $d$. Khi đó góc giữa $(P)$ và $(Q)$ là góc giữa hai đường thẳng $a$ và $b$.

- Diện tích hình chiếu của đa giác: $S' = S.\cos\alpha$

(với $S$ là diện tích đa giác nằm trong $(P)$ và $S'$ là diện tích hình chiếu vuông góc của đa giác đó trên $(Q)$, $\alpha$ là góc giữa $(P)$ và $(Q)$)

**Câu 14:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(SBD)$ và $(ABCD)$ là $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Câu 15:** Cho khối chóp $S.ABC$ có $ABC$ là tam giác vuông cân tại $A$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABC)$ là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

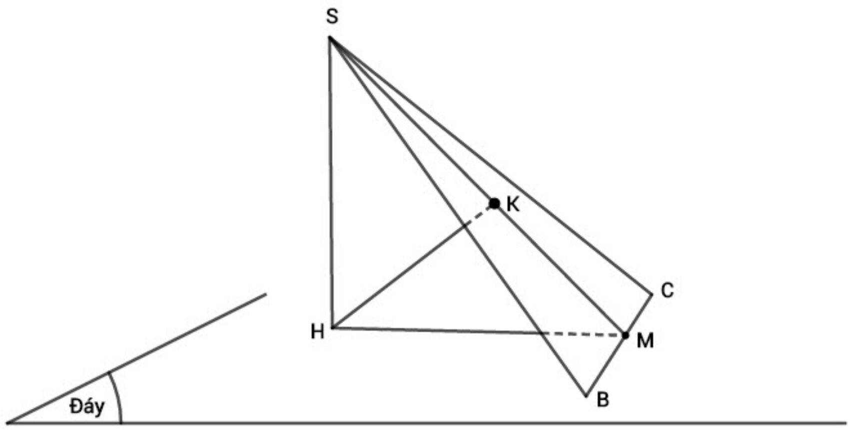
**Câu 16:** Cho khối chóp $S.ABC$ có cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng $(SBC)$ và $(ABC)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA = a$ và diện tích tam giác $SBC$ bằng $3a^2$.

**Câu 17:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng $(SAD)$ và $(SBC)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

## LOẠI 4. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY KHI BIẾT KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG.

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):**

**1)** Cần nhớ kiến thức cơ bản về xác định khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.




Xét tam giác $SHM$ vuông tại $H$, $HM$ vuông góc với $BC$ và $HK$ là đường cao

 Tính khoảng cách từ chân đường cao $H$ đến mặt bên $(SBC)$ ta sử dụng công thức

$$HK = \frac{HM.SH}{\sqrt{HM^2 + SH^2}}$$

 Tính độ dài cạnh $SH$ ta sử dụng công thức

$$SH = \frac{HM.HK}{\sqrt{HM^2 - HK^2}}$$

**2)** Trong trường hợp bài toán cho khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đáy đến mặt bên, ta phải dùng tỷ lệ để đưa về khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.

**Câu 18:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$. Cạnh bên $SA$ vuông góc với mặt đáy $(ABC)$. Khoảng cách $d$ từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính $V_{S.ABC}$.

**Câu 19:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$; cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt phẳng $(SBD)$ bằng $\frac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Câu 20:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$, $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi $E$ là trung điểm của cạnh $AD$, khoảng cách $d$ từ điểm $E$ đến mặt phẳng $(SCD)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

## DẠNG 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH LÀ CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRÊN MẶT ĐÁY (KHÔNG TRÙNG VỚI CÁC ĐỈNH CỦA ĐA GIÁC ĐÁY)

### PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CƠ BẢN)

+ Tóm tắt ngắn gọn kiến thức cơ bản cần nắm.

Công thức tính thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}.B.h$. (Trong đó: $B$ là diện tích đáy, $h$ là chiều cao)

- Để tính thể tích của khối chóp, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định đường cao. Tính đường cao.

Bước 2: Nhận dạng đáy. Tính diện tích của đáy.

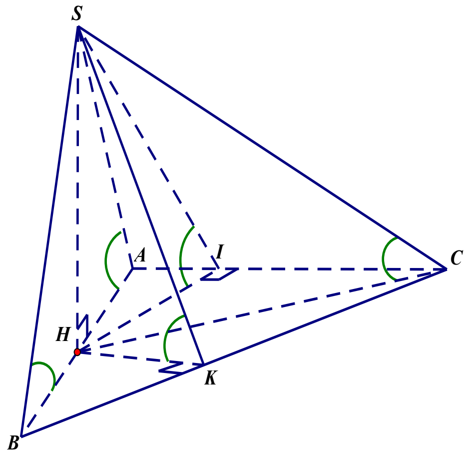
Bước 3: Tính thể tích theo công thức.

**Chú ý:**

**1.** Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

**2. Nếu** $(SAB)\perp(ABC)$ **thì đường cao** $SH$ **của tam giác** $SAB$ chính là đường cao của khối chóp $S.ABC$

**3. Góc giữa cạnh bên và đáy**




$\widehat{\left(SA,(ABC)\right)}=\widehat{SAH}$, $\widehat{\left(SB,(ABC)\right)}=\widehat{SBH}$, $\widehat{\left(SC,(ABC)\right)}=\widehat{SCH}$.

Tóm lại, $\widehat{\left(SM,(ABC)\right)}=\widehat{SMH}$, $\forall M\in(ABC)$.

**4. Góc giữa mặt bên và đáy:**

$\widehat{\left((SBC),(ABC)\right)}=\widehat{SKH}$, $\widehat{\left((SAC),(ABC)\right)}=\widehat{SIH}$.

Chú ý: $HK=AA'.\frac{BH}{AB}$, $HI=BB'.\frac{AH}{AB}$ (với $AA'$, $BB'$ là các đường cao của tam giác $ABC$)

**TRƯỜNG HỢP 1: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM TRÊN CẠNH CỦA ĐA GIÁC ĐÁY (MỘT MẶT BÊN CỦA HÌNH CHÓP VUÔNG GÓC VỚI MẶT ĐÁY).**

**Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông cân tại $C$, tam giác $SAB$ đều cạnh $a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp.

**Câu 22:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác $SAB$ cân tại $S$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng $SC$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

**Câu 23:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân đỉnh $A$, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt bên $SAB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Câu 24:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, tam giác $SAC$ vuông tại $S$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên $SA$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

**Câu 25:** Cho tứ diện $ABCD$ có $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$, tam giác $BCD$ cân tại $D$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Biết $AD$ hợp với $(ABC)$ một góc $60°$. Tính thể tích của khối tứ diện đã cho.

**Câu 26:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, mặt bên $SAB$ là tam giác cân tại $S$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. $SC$ tạo với $(SAB)$ một góc $45°$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

**TRƯỜNG HỢP 2: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM Ở MIỀN TRONG CỦA ĐA GIÁC ĐÁY**

**Câu 27:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{3}a$ tâm $O$, $SO$ vuông góc với $(ABCD)$, $SO = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

**Câu 28:** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, tam giác $ABC$ là tam giác đều cạnh $2a$, khoảng cách giữa $SA$ và $BC$ bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Câu 29:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của $S$ lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác $ABC$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của $AB, SD$. Biết cosin góc giữa hai đường thẳng $CN$ và $SM$ bằng $\frac{2\sqrt{26}}{13}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Câu 30:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh bằng $1$. Biết khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ $B$ đến mặt phẳng $(SAC)$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ $C$ đến mặt phẳng $(SAB)$ bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của $S$ xuống đáy nằm trong tam giác $ABC$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**TRƯỜNG HỢP 3: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM Ở MIỀN NGOÀI CỦA ĐA GIÁC ĐÁY**

**Câu 31:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $A$, biết $AB = AC = a$. Hình chiếu của đỉnh $S$ lên mặt phẳng $(ABC)$ là điểm $H$ đối xứng với $A$ qua $BC$. Góc giữa $SA$ và đáy bằng $45^\circ$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo $a$.

**Câu 32:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$. Hình chiếu của đỉnh $S$ lên mặt phẳng $(ABC)$ là điểm $H$ đối xứng với $A$ qua $BC$. Biết $SA = 2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo $a$.

**DẠNG 3: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP ĐỀU**

**PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ)**

**1) Hình chóp đều:** Là hình chóp có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
**2) Tính chất:** Trong hình chóp đều ta có:
- Chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
- Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

**3) Tứ diện đều:** Hình hình chóp có bốn mặt là tam giác đều.
**Đường cao là đường kẻ từ đỉnh qua tâm của đáy.**

**Câu 33:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$, đường cao của hình chóp bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Câu 34:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Gọi $H$ là trọng tâm của tam giác $ABC$, $AH = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Câu 35:** Thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$, cạnh bên bằng $3a$.

**Câu 36:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $20$, cạnh bên bằng $30$. Tính thể tích $V$ của khối chóp đã cho.

**Câu 37:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Câu 38:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$, góc giữa mặt phẳng $(SBC)$ và mặt phẳng $(ABC)$ là $45^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Câu 39:** Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$ và góc giữa mặt bên và mặt phẳng chứa đa giác đáy bằng $60^\circ$?

**Câu 40:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có chiều cao bằng $2a$, $\widehat{SBA} = 45^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Câu 41:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa mặt phẳng $(SAB)$ và mặt đáy bằng $30^\circ$. Khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt phẳng $(SAB)$ bằng $a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

**Câu 42:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài đường cao bằng $a$, diện tích mặt bên bằng $\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng.

**Câu 43:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Câu 44:** Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$ và góc ở đỉnh của mặt bên bằng $60^0$?

**Câu 45:** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh $AB$ bằng $a$. Các cạnh bên $SA$, $SB$, $SC$ cùng tạo với mặt đáy một góc $60^\circ$. Gọi $D$ là giao điểm của $SA$ với mặt phẳng qua $BC$ và vuông góc với $SA$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.BCD$?

**Câu 46:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$. Khoảng cách từ trọng tâm $G$ của tam giác $SAC$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Câu 47:** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Gọi $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của $SB, SC$. Biết $(AMN)\perp(SBC)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.