BỘ ĐỀ TRỌNG TÂM ÔN LUYỆN ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC HSA

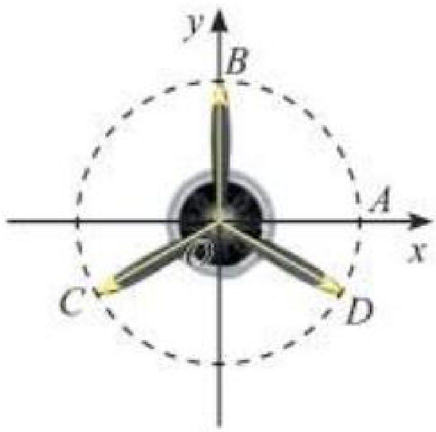
PHẦN: TOÁN HỌC – PHÂN TÍCH SỐ LIỆU

BIÊN SOẠN: ĐỘI NGŨ HSA EDUCATION

ĐỀ SỐ: 09

BẢNG ĐÁP ÁN									
HSA 01	A	**HSA 11**	B	**HSA 21**	A	**HSA 31**	D	**HSA 41**	C
HSA 02	A	**HSA 12**	D	**HSA 22**	A	**HSA 32**	D	**HSA 42**	C
HSA 03	B	**HSA 13**	C	**HSA 23**	A	**HSA 33**	A	**HSA 43**	C
HSA 04	B	**HSA 14**	D	**HSA 24**	B	**HSA 34**	A	**HSA 44**	A
HSA 05	A	**HSA 15**	D	**HSA 25**	B	**HSA 35**	C	**HSA 45**	A
HSA 06	B	**HSA 16**	C	**HSA 26**	D	**HSA 36**	B	**HSA 46**	C
HSA 07	B	**HSA 17**	B	**HSA 27**	C	**HSA 37**	A	**HSA 47**	D
HSA 08	C	**HSA 18**	D	**HSA 28**	D	**HSA 38**	C	**HSA 48**	A
HSA 09	A	**HSA 19**	A	**HSA 29**	B	**HSA 39**	B	**HSA 49**	B
HSA 10	B	**HSA 20**	A	**HSA 30**	D	**HSA 40**	B	**HSA 50**	A

HSA 01: Vị trí các điểm B,C,D trên cánh quạt ở hình sau có thể được biểu diễn bởi góc lượng giác nào sau đây?



A. $\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$.

B. $k\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$.

D. $\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$.

Đáp án: A

Lí giải

Chọn điểm biểu diễn ở B. Các góc $\widehat{DOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD}=\dfrac{2\pi}{3}$.

HSA 02: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để với mọi $x\in\mathbb{R}$ để bất phương trình $x^2+(m+2)x+8m+1>0$ đúng với $x\in\mathbb{R}$.

A. 27.
B. 28.
C. Vô số.
D. 26.

Đáp án: A

Lí giải

$$f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ \Delta=(m+2)^2-4(8m+1)<0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m^2-28m<0\Leftrightarrow 0<m<28$.

Do đó $m\in\{1;2;...;27\}$

Vậy có 27 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HSA 03: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

A. 98.

B. 100.

C. 102.

D. 104.

Đáp án: B

Lí giải

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1=7, d=5$. Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1+u_2+...+u_n=25450=S_n$.

Ta có $25450=S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=7n+\dfrac{n^2-n}{2}.5$

$\Leftrightarrow 5n^2+9n-50900=0\Leftrightarrow n=100$.

HSA 04: Cho bố số $a,\ b,\ c,\ d$ biết rằng $a,\ b,\ c$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q>1$; còn $b,\ c,\ d$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12$.

A. $q=\dfrac{18+\sqrt{73}}{24}$.

B. $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}$.

C. $q=\dfrac{20+\sqrt{73}}{24}$.

D. $q=\dfrac{21+\sqrt{73}}{24}$.

Đáp án: B

Lí giải

Giả sử a,b,c lập thành cấp số cộng công bội q. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b=aq,\ c=aq^2 \\ b+d=2c \\ a+d=14 \\ b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq+d=2aq^2 & (1) \\ a+d=14 & (2) \\ a\left(q+q^2\right)=12 & (3) \end{cases}$$

Nếu $q=0 \Rightarrow b=c=0=d$ (vô lí)

Nếu $q=-1 \Rightarrow b=-a; c=a \Rightarrow b+c=0$ (vô lí).

Vậy $q\neq 0,\ q\neq -1,$ từ (2) và (3) ta có: $d=14-a$ và $a=\dfrac{12}{q+q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{12q}{q+q^2}+\frac{14q^2+14q-12}{q+q^2}=\frac{24q^3}{q+q^2} \Leftrightarrow 12q^3-7q^2-13q+6=0$$

$$\Leftrightarrow (q+1)\left(12q^2-19q+6\right)=0 \Leftrightarrow q=\frac{19\pm\sqrt{73}}{24}.$$

Vì $q>1$ nên $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}$.

SHA 05: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C\left(x\right)=50000+105x$. Khi số sản phẩm sản xuất ra ngày càng nhiều thì chi phí trung bình chỉ tối đa là

A. 105.

B. 150.

C. 205

D. 100

Đáp án: A

Lí giải

Chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm là:

$\bar{C}(x)=\dfrac{50000+105x}{x}$ (sản phẩm).

$$\lim_{x\to+\infty}\bar{C}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{50000+105x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{50000}{x}+105\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{50000}{x}+105\right)=105.$$

Khi số sản phẩm sản xuất ra ngày càng nhiều thì chi phí trung bình chỉ tối đa là 105 nghìn.

SHA 06: Tính đạo hàm của hàm số $y=x^4-3x^2+\frac{1}{2}x+3$.

A. $y'=4x^4-6x^2+\frac{1}{2}$.

B. $y'=4x^3-6x+\frac{1}{2}$.

C. $y'=4x^3-6x+\frac{7}{2}$.

D. $y'=4x^3-6x-\frac{1}{4}$.

Đáp án: B

Lí giải

Áp dụng quy tắc đạo hàm của tổng và hiệu các hàm số ta có:

$$y'=\left(x^4-3x^2+\frac{1}{2}x+3\right)'=\left(x^4\right)'-\left(3x^2\right)'+\left(\frac{1}{2}x\right)'+\left(3\right)'=4x^3-6x+\frac{1}{2}.$$

SHA 07: Cho bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x-m\le 0$ $\quad(1)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$ để bất phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

A. 2023.

B. 2025.

C. 2024.

D. 2026.

Đáp án: B

Lí giải

Đặt $t = \log_2 x$ với $x \in (1;2) \Rightarrow \ t \in (0;1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ bất phương trình $t^2 - 2t \le m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ với $t \in (0;1)$ ta có bảng biến thiên sau:

t	0		1
$f(t)$	0	$\searrow$	-1

Khi đó, bất phương trình $f(t) \le m$ có nghiệm $t \in (0;1)$ $\Leftrightarrow \min\limits_{[0;1]} f(t) < m \Leftrightarrow -1 < m$.

Vì m nguyên và m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$ nên $m \in \{0;1;2;...;2024\}$.

Vậy có 2025 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán

HSA 08: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1) + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Không có giá trị m thỏa mãn.
B. $m \ne 1$.
C. $m = 1$.
D. Luôn thỏa mãn với mọi m.
Đáp án: C

Lí giải

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1)$

Ta có: $\Delta' = (-3m)^2 - 3.3.(2m-1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta' \le 0$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 < 0 \Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) \le 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow m = 1$.

HSA 09: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$ Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 10.
B. 9.
C. 0.

D. 4.

Đáp án: A

Lí giải

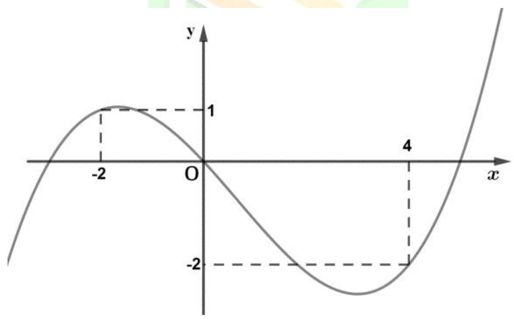
Điều kiện $m \neq 0$.

Phương trình tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là: $x+2=0$ và $y-1=0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$ là: (d): $y=\frac{3x}{m^2}+\frac{m^2-6m+6}{m^2}$. Đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(-2;\frac{m-6}{m}\right)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(2m-2;1)$

theo giả thiết ta có $2m-2+\frac{m-6}{m}=-5 \Rightarrow m=1; \mathrm{m}=-3$.

Vậy bằng tổng bình phương các phần tử của S bằng 10.

HSA 10: Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\neq 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

A. 12.

B. 9.

C. 6.

D. 15.

Đáp án: B

Lí giải

Xét $g'(x) = -2f'(3-2x+m) + 2x - (m+3)$. Xét phương trình $g'(x) = 0$, đặt $t = 3-2x+m$ thì phương trình trở thành $-2.\left[f'(t) - \frac{-t}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=4 \\ t=0 \end{array}\right.$.

Từ đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+m}{2}, x_2 = \frac{m+3}{2}, x_3 = \frac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x > x_1$ thì $t < t_1$ nên $f(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x) \le 0, \forall x \in (0;1)$ từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} \frac{3+m}{2} \le 0 < 1 \le \frac{5+m}{2} \\ 1 \le \frac{-1+m}{2} \end{array}\right.$ và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6;6)$ của m là -3; 3; 4; 5.

HSA 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

A. $\left[-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right] \backslash \left\{0;\frac{15}{13}\right\}$.

B. $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right) \backslash \left\{0;\frac{15}{13}\right\}$.

C. $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right) \backslash \{0\}$.

D. $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right) \backslash \left\{\frac{15}{13}\right\}$.

Đáp án: B

Lí giải

$$y' = f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) = \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)' \cdot \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2 \left(\frac{5x}{x^2+4} - a\right)\left(13\frac{5x}{x^2+4} - 15\right)^3$$

$$=\frac{20-5x^2}{\left(x^2+4\right)^2}.\frac{25x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\left(\frac{-ax^2+5x-4a}{x^2+4}\right)\left(\frac{-15x^2+65x-60}{x^2+4}\right)^3.$$

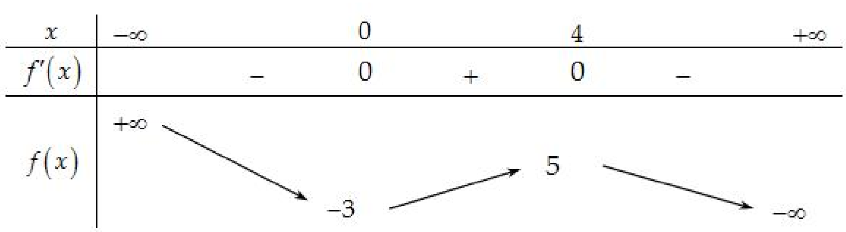
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\x=0\\x=3\\x=\dfrac{4}{3}\\-ax^2+5x-4a=0\qquad(1)\end{array}\right.\qquad\qquad (\,x=0\ \textit{là nghiệm kép}\,).$$

đặt $g\left(x\right)=-ax^2+5x-4a$

Ycbt thỏa mãn khi phương trình $y'=0$ có 6 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ phương trình $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác $\pm2;0;1;4$. (Nếu $g\left(0\right)=0$ thì $y'=0$ chỉ có 5 nghiệm bội lẻ).

$$\text{Điều kiện: }\begin{cases}a\neq0\\\Delta=5^2-4a.4a>0\\g\left(2\right)\neq0\\g\left(-2\right)\neq0\\g\left(0\right)\neq0\\g\left(3\right)\neq0\\g\left(\dfrac{4}{3}\right)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq0\\-\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{5}{4}\\a\neq\pm\dfrac{5}{4}\\a\neq0\\a\neq\dfrac{15}{13}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{5}{4}\\a\neq0\\a\neq\dfrac{15}{13}\end{cases}.$$

HSA 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $\left[1;3\right]$.



A. 15.

B. $\frac{25}{3}$.

C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Đáp án: D

Lí giải

$g'(x)=(4-2x)f'(4x-x^2)+x^2-6x+8=(2-x)\left[2f'(4x-x^2)+4-x\right]$.

Với $x\in[1;3]$ thì $4-x>0$; $3\le 4x-x^2\le 4$ nên $f'(4x-x^2)>0$.

Suy ra $2f'(4x-x^2)+4-x>0$, $\forall x\in[1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1		2		3
g'		+	0	−	
g	$g(1)$	↗	$g(2)$	↘	$g(3)$

Suy ra $\max\limits_{[1;3]} g(x)=g(2)=f(4)+7=12$.

HSA 13: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2(m+1)x+m-1}{x-1}$. Có bao nhiêu số nguyên $m\in -10;10$ để hàm số có cực đại và cực tiểu.

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Đáp án: C

Lí giải

Hàm số đã cho liên tục và xác định trên $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3m - 1}{\left(x-1\right)^2} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1$

$\Leftrightarrow g\left(x\right) = x^2 - 2x - 3m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1$. $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = 12m + 5 > 0 \\ g\left(-1\right) = 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-5}{12} \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$. Do

m nguyên và $m \in -10;10$ nên có 11 giá trị m thỏa mãn.

HSA 14: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$

B. $\dfrac{x^3}{3} + x + C$

C. $6x + C$

D. $x^3 + x + C$

Đáp án: D

Lí giải

$\int \left(3x^2 + 1\right) dx = x^3 + x + C.$

HSA 15: Cho hàm số $y = 2x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x = 2$.

B. $y = x - 2$.

C. $y = x - 1$.

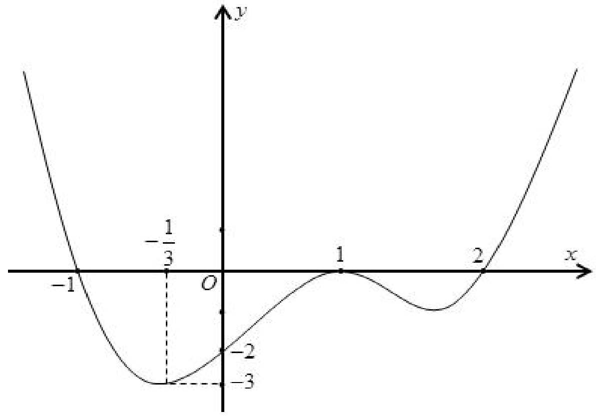
D. $y = 2x - 1$

Đáp án: D

Lí giải

Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2x - 1 + \dfrac{1}{2x-1} - (2x-1) \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{2x-1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

HSA 16: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x)=0$. Số phần tử của tập S là

A. 8.

B. 10.

C. 9.

D. 6.

Đáp án: C

Lí giải

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=f''(x).f'(f'(x)-1)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(f'(x)-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{3} \\ x=1 \\ x=x_0\in(1\,;2) \\ f'(x)-1=-1 \\ f'(x)-1=1 \\ f'(x)-1=2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta cũng có:

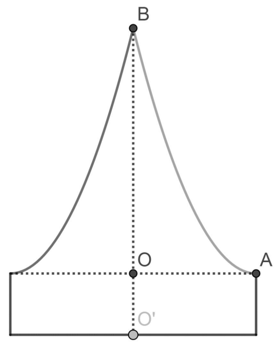
$f'(x)-1=-1 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$f'(x)-1=1 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-\infty\,;-1) \\ x=x_2\in(2\,;+\infty) \end{array}\right.$.

$$f'(x)-1=2 \Leftrightarrow f'(x)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_3 \in (-\infty\,;\,x_1) \\ x=x_4 \in (x_2\,;\,+\infty) \end{array}\right..$$

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm.

HSA 17: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\dfrac{2750\pi}{3}\ (\text{cm}^3)$

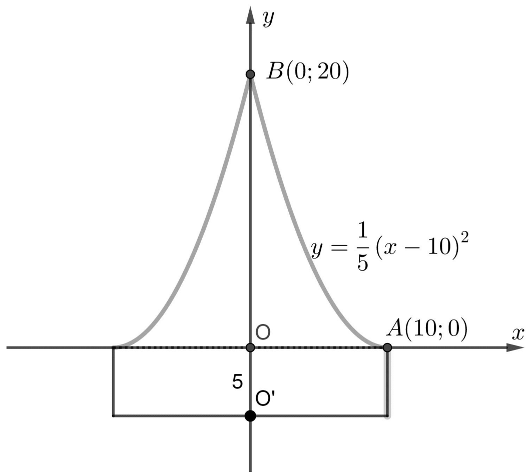
B. $\dfrac{2500\pi}{3}\ (\text{cm}^3)$

C. $\dfrac{2050\pi}{3}\ (\text{cm}^3)$

D. Đáp án: B

Lí giải

(cm^3)



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V = V_1 + V_2$

$V_1 = 5.10^2\pi = 500\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-10)^2$.

Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a = \dfrac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \dfrac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

Suy ra $V_2 = \pi \int_0^{20} \left(10 - \sqrt{5y}\right)^2 \text{dy} = \pi\left(3000 - \dfrac{8000}{3}\right) = \dfrac{1000}{3}\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.

Do đó $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1000}{3}\pi + 500\pi = \dfrac{2500}{3}\pi \ \left(\text{cm}^3\right)$.

HSA 18: Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \left|x^2 - 2x\right|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Đáp án: D

Lí giải

+) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+) $y'=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'\left(x^2-2x\right)}{\left|x^2-2x\right|}=\dfrac{(2x-2)\left(x^2-2x\right)}{\left|x^2-2x\right|}$.

+) y' không xác định hoặc $y'=0\Leftrightarrow(2x-2)\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right.$.

+) BBT:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$y=f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

HSA 19: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

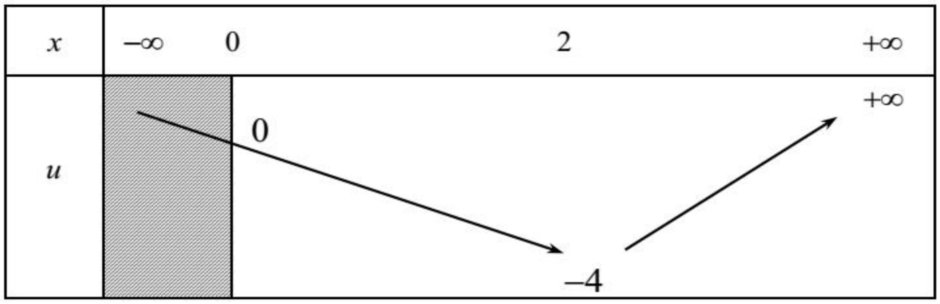
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 15.
B. 12.
C. 14.
D. 13.
Đáp án: A

Lí giải

Đặt $u = x^2 - 4x$ (1)

Ta có BBT sau:



Ta thấy:

+ Với $u < -4$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $u = -4$, phương trình (1) có một nghiệm $x = 2 > 0$.

+ Với $-4 < u < 0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x > 0$.

+ Vơi $u \geq 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x > 0$

Khi đó $3f\left(x^2 - 4x\right) = m \Rightarrow f\left(u\right) = \frac{m}{3}$ (2), ta thấy:

+ Nếu $\frac{m}{3} = -3 \Leftrightarrow m = -9$, phương trình (2) có một nghiệm $u = 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-3 < \frac{m}{3} < -2 \Leftrightarrow -9 < m < -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u > 0$ và một nghiệm $u \in \left(-2;0\right)$ nên phương trình đã cho có ba ngiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = -2 \Leftrightarrow m = -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u = -4$, một nghiệm $u \in \left(-2;0\right)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-2 < \frac{m}{3} < 2 \Leftrightarrow -6 < m < 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, hai nghiệm $u \in \left(-4;0\right)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, một nghiệm $u = -2$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} > 2 \Leftrightarrow m > 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.

Vậy $-9 < m \leq 6 \Rightarrow$ có 15 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

HSA 20: Biết $\int_1^4 f\left(x\right)dx = 5$ và $\int_4^5 f\left(x\right)dx = 20$. Tính $\int_1^2 f\left(4x-3\right)dx - \int_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx$.

A. $I = \frac{15}{4}$.

B. $I=15$.

C. $I=\frac{5}{2}$.

D. $I=25$.

Đáp án: A

Lí giải

Đặt $t=4x-3\Rightarrow dt=4dx$ thì

$$\int_1^2 f(4x-3)\,dx=\frac{1}{4}\int_1^5 f(t)\,dt=\frac{1}{4}\left(\int_1^4 f(t)\,dt+\int_4^5 f(t)\,dt\right)=\frac{1}{4}(5+20)=\frac{25}{4}.$$

Đặt $u=e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}dx$ thì

$$\int_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^4 f(u)\,du=\frac{5}{2}.$$

Vậy $I=\frac{25}{4}-\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$.

HSA 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3),\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\frac{3}{4}$.

B. $m=4;n=-3$.

C. $m=1;n=0$.

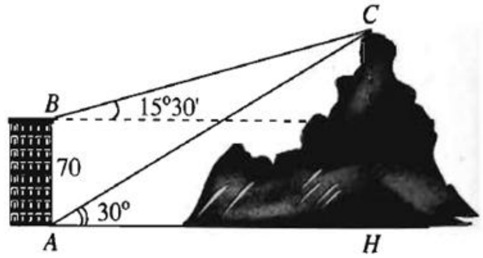
D. $m=7;n=-\frac{4}{3}$.

Đáp án: A

Lí giải

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}\ (k>0)\Leftrightarrow \begin{cases}2=k\\ m-1=3k\\ 3=k(-2n)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}k=2\\ m=7\\ n=-\frac{3}{4}\end{cases}$. Vậy $m=7;n=-\frac{3}{4}$

HSA 22: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB=70\,\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30^0, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^030'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 135m .
B. $234m$.
C. 165m .
D. 195m .
Đáp án: A

Lí giải

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB}=60^0$, $\widehat{ABC}=105^030'$ và $c=70$.

Khi đó $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0 \Leftrightarrow \widehat{C}=180^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=180^0-165^030 \;=14^030$.

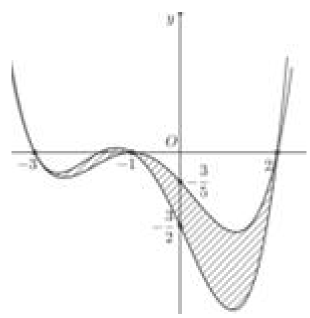
Theo định lí sin, ta có $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ hay $\dfrac{b}{\sin 105^030}=\dfrac{70}{\sin 14^030}$

Do đó $AC=b=\dfrac{70.\sin 105^030'}{\sin 14^030'}\approx 269,4$ m.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30^0 nên $CH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{269,4}{2}=134,7$ m.

Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

HSA 23: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;\ 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. $3,11$
B. $2,45$

C. $3,21$

D. $2,95$

Đáp án: A

Lí giải

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=(ax+3a)(x^2-x-2)=ax^3-ax^2-2ax+3ax^2-3ax-6a$

$=ax^3+2ax^2-5ax-6a$

$f(0)-g(0)=-6a$, quan sát hình vẽ ta có $f(0)-g(0)=-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Nên $-6a=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-3}{20}$ $S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{2}\left|\frac{-3}{20}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{80}=3.1625$

HSA 24: Hình chóp $S.ABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=SB=SC$. Gọi I là trung điểm của AB. Góc giữa SI và BC bằng

A. $30°$.

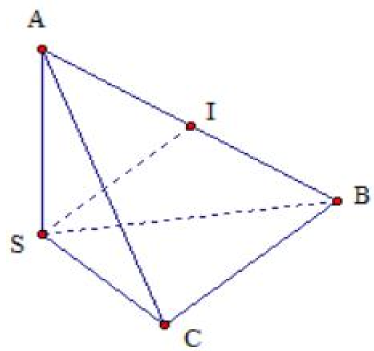
B. $60°$.

C. $45°$.

D. $90°$.

Đáp án: B

Lí giải



Ta có: $\cos\left(\overrightarrow{SI};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{SI}.\overrightarrow{BC}}{SI.BC}=\frac{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}\right).\overrightarrow{BC}}{\frac{BC}{2}.BC}=\frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}$

$=\frac{\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{BC}}{BC^2}=\frac{SB.BC.\cos135°}{BC^2}=\frac{SB.SB\sqrt{2}.\cos135°}{2SB^2}=\frac{\sqrt{2}.\cos135°}{2}=-\frac{1}{2}$.

Suy ra: $\left(\overrightarrow{SI};\overrightarrow{BC}\right)=120°\Rightarrow(SI;BC)=60°$.

HSA 25: Người ta vận chuyển một thúng hàng có dạng hình hộp chữ nhật bằng cách móc bốn dây cáp vào bốn góc trên của thùng hàng và đầu còn lại móc vào cần cẩu như hình vẽ

Biết rằng các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau là $60°$. Chiếc cần cẩu kéo thùng hàng lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ chịu được tối đa lực căng là $5000N$. Hỏi cần cẩu nâng được thùng hàng có khối lượng (đơn vị kg) tối đa là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? Lấy $g = 10m/s^2$.

A. 1628.

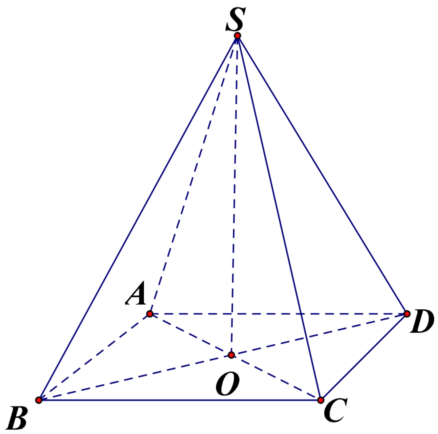
B. 1732.

C. 1723.

D. 1800.

Đáp án: B

Lí giải



Theo hình vẽ ta có các vec tơ $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{DS}$ biểu thị các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$

Khi đó $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = -\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}\right) = -4\overrightarrow{SO}$

Vì các đoạn dây cáp có độ dài bằng nhau và tạo góc tạo bởi hai đoạn dây cáp đối diện nhau bằng $60°$ nên ΔSAC cân và $\widehat{ASC} = 60°$ do đó tam giác SAC đều suy ra

$SO = SA.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}\right| = 4SO = 4.5000.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10000\sqrt{3}N$

Lại có $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} \Rightarrow P = m.g = 10m$

Để cần cẩu nâng được thùng hàng thì

$\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}\right| \ge P \Rightarrow 10.000\sqrt{3} \ge 10m \Leftrightarrow m \le 1.000\sqrt{3} \approx 1732kg$

HSA 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

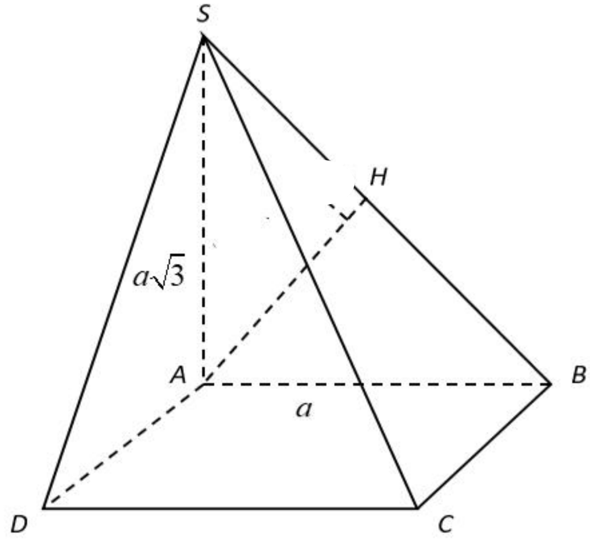
B. $a\sqrt{3}$.

C. $\dfrac{a}{2}$.

D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án: D

Lí giải



Kẻ $AH \perp SB$ $(*)$

Ta có $BC \perp AB$ (Do $ABCD$ là hình vuông)

$BC \perp SA$ (Do $SA \perp (ABCD)$)

Suy ra $BC \perp (SAB)$

Suy ra $BC \perp AH$ $(**)$

Từ $(*),(**)$ suy ra $AH \perp (SBC)$. Suy ra $d\left(A,(SBC)\right) = AH$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

HSA 27: Biết $I = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = a\ln\frac{2}{3} + b, (a,b \in \mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $a + 4b$ bằng

A. 50
B. 60
C. 59
D. 40

Đáp án: C

Lí giải

Ta có $I = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = \int_{-1}^{0} \left(3x+11+\frac{21}{x-2}\right)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + 11x + 21.\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^{0}$

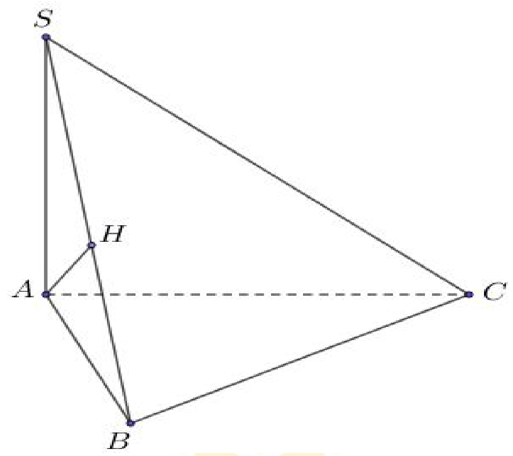
$= 21.\ln\frac{2}{3} + \frac{19}{2}$. Suy ra $a = 21, b = \frac{19}{2}$. Vậy $a + 4b = 59$

HSA 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B. Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Khẳng định nào sau đây **SAI**?

A. $AH \perp SC$.
B. $AH \perp BC$.
C. $SA \perp BC$.
D. $AH \perp AC$.

Đáp án: D

Lí giải



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$, suy ra C đúng.

Lại có $BC \perp AB$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \supset AH \Rightarrow BC \perp AH$, suy ra B đúng.

Mặt khác $AH \perp SB$, $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC) \supset SC \Rightarrow AH \perp SC$, suy ra A đúng.

HSA 29: Cho hypebol (H) có hai tiêu điểm $F_1; F_2$ nằm trên Ox và đối xứng qua gốc tọa độ O, (H) đi qua điểm M có hoành độ -5 và $MF_1 = \frac{9}{4}; MF_2 = \frac{41}{4}$. Phương trình chính tắc của hypebol (H) là:

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

C. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

D. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Đáp án: B

Lí giải

Gọi phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $F_1F_2=2c$ mà $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

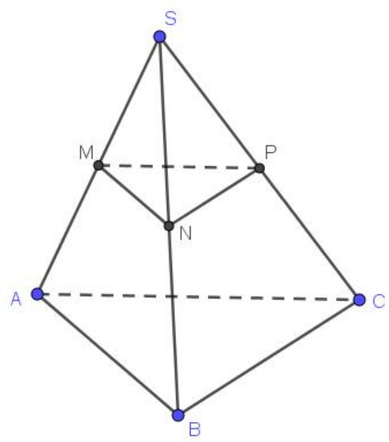
Ta có $|MF_1-MF_2|=8=2a \Rightarrow a=4$.

Gọi $M(-5;y_1);F_1(-c;0);F_2(c;0) \Rightarrow F_1M^2=(c-5)^2+y_1^2;F_2M^2=(c+5)^2+y_1^2$

$\Rightarrow F_1M^2-F_2M^2=-20c=-100 \Rightarrow c=5 \Rightarrow b^2=9$.

Vậy $(H):\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

HSA 30: Cho tứ diện $S.ABC$ có M,N,P là trung điểm của SA,SB,SC. Tìm khẳng định đúng?



A. $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.

B. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}$.

C. $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}\right)$.

D. $\overrightarrow{AB}=2\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.

Đáp án: D

Lí giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MN}=2\left(\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}\right)$.

HSA 31: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Điểm M di chuyển trên mặt cầu (S) đồng thời thỏa mãn $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6$. Điểm M luôn thuộc mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x-2y-6z+9=0$.

B. $2x-2y-6z-9=0$.

C. $2x+2y+6z+9=0$.

D. $2x-2y+6z+9=0$.

Đáp án: D

Lí giải

Gọi điểm $M(x;y;z)\in(S)$ là điểm cần tìm.

Khi đó: $x^2+y^2+(z+2)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4z+4=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=-4z-3 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$ và $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;z-2)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=6 \Leftrightarrow x(x-2)+y(y+2)+z(z-2)=6$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=6 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được

$-4z-3-2x+2y-2z-6=0 \Leftrightarrow 2x-2y+6z+9=0$.

HSA 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ và điểm $A(2;3;4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x+2y+2z+15=0$

B. $x+y+z+7=0$

C. $2x+2y+2z-15=0$

D. $x+y+z-7=0$

Đáp án: D

Lí giải

Dễ thấy A nằm ngoài mặt cầu (S). Tâm mặt cầu là $I(1;2;3)$.

Đường thẳng AM tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow AM\perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IM}=0$

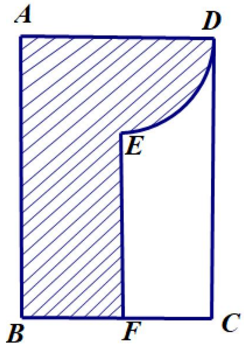
$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)+(y-3)(y-2)+(z-4)(z-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-1-1)(x-1)+(y-2-1)(y-2)+(z-3-1)(z-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-(x+y+z-7)=0$

$\Leftrightarrow x+y+z-7=0 \; (Do \; (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0)$.

SHA 33: Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB. Biết $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB=3cm$, $AD=2cm$; F là trung điểm của BC; điểm E cách AD một đoạn bằng $1cm$.



Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)

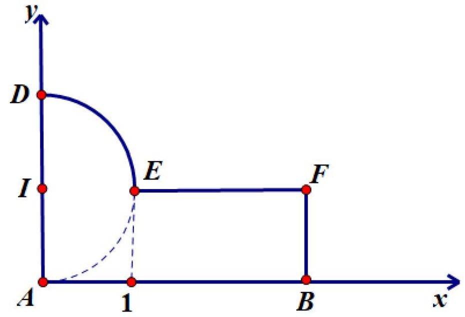
A. $16,5$cm.
B. 21 cm.
C. 18 cm.
D. $19,5$cm

Đáp án: A

Lí giải

Chọn hệ trục Oxy có $O \equiv A$; $B \in Ox; D \in Oy$.

Ta có: $A(0;0)$; $D(0;2)$; $B(3;0)$; $E(1;1)$



Đường tròn tâm $I(0;1)$ chứa cung ED có phương trình là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Nên cung trên của đường tròn tâm I là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$.

Thể tích của vật thể trang trí là:

$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx+\pi\int_1^3 1^2\,dx\approx 16,5(cm^3)$.

HSA 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có đáy là AB và CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a,b,c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -3.
B. 1.

C. 3 .

D. -1.

Đáp án: A

Lí giải

Phương trình đường thẳng d qua $C(-6;3;6)$ và song song với đường thẳng AB là

$\frac{x+6}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-6}{2}$

Điểm D thuộc đường thẳng d nên gọi tọa độ D là $D(-6-2t;3+t;6+2t)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân nên ta có:

$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right| \Leftrightarrow t^2+8t+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-6 \end{array}\right.$.

Với $t=-2 \Rightarrow D_1(-2;1;2)$, tứ giác là hình bình hành nên loại.

Với $t=-6 \Rightarrow D_2(6;-3;-6)$ thỏa mãn, nên $6-3-6=-3$.

HSA 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P),(P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$.

B. $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$.

C. $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$.

D. $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Đáp án: C

Lí giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=1$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-1)$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d, ta có $K(t;2+t;-t)\Rightarrow\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$.

Vì $IK\perp d$ nên $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{IK}=0\Leftrightarrow t-1+2+t-(-t+1)=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow\overrightarrow{IK}(-1;2;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng IK là $\begin{cases}x=1-t'\\y=2t'\\z=-1+t'\end{cases}$

Khi đó, trung điểm H của TT' nằm trên IK nên $H(1-t';2t';-1+t')\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(-t';2t';t')$. Mặt khác, ta có: $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK}=IT^2\Leftrightarrow\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK}=1\Leftrightarrow t'+4t'+t'=1\Leftrightarrow t'=\frac{1}{6}\Rightarrow H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$.

HSA 36: Trong không gian O*xyz*, cho ba đường thẳng $d_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}$; $d_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{-1}$ và $d_3:\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{6}$.

B. $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-6}$.

C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{6}$.

D. $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{6}$.

Đáp án: B

Lí giải

Từ $d_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}\Rightarrow d_1:\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+t\\z=2-2t\end{cases}$; từ $d_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{-1}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_2}=(3;-2;-1)\\A(-1;0;-4)\end{cases}$;

Từ $d_3:\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{6}\Rightarrow\overrightarrow{u_3}=(4;-1;6)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_3

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3}\right]=\left(\begin{vmatrix}-2&-1\\-1&6\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&3\\6&4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3&-2\\4&-1\end{vmatrix}\right)=(-13;-22;5)\\A(-1;0;-4)\in(P)\end{cases}$$

$\Rightarrow(P):-13(x+1)-22y+5(z+4)=0\Leftrightarrow(P):13x+22y-5z-7=0$

Gọi B là giao điểm của (P) và d_1. Đường thẳng đi qua B và song song với d_3 chính là đường thẳng cần tìm.

Gọi $B(3+2t; -1+t; 2-2t)$. Thay tọa độ B vào (P): $13(3+2t)+22(-1+t)-5(2-2t)-7=0$

$\Rightarrow\ t=0 \Rightarrow\ B(3;-1;2)$

Vì đường thẳng cần tìm song song với (d_3) nên có các véc tơ chỉ phương là $n.\overrightarrow{u_3}$ $(n\neq 0; n\in\mathbb{Z})$

Như vậy chỉ có đáp án B là hợp lý.

HSA 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$, cạnh bên $SA=3a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AO. Gọi α là góc giữa đường thẳng SH và mặt phẳng (SBD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

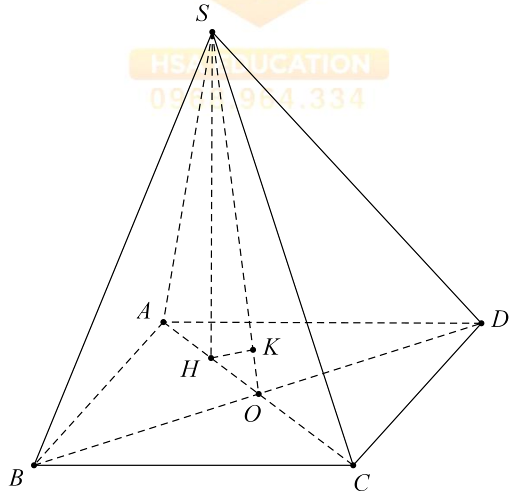
B. $\sqrt{5}$.

C. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án: A

Lí giải



Ta có: $SH\perp(ABCD)$, gọi K là hình chiếu của điểm H xuống cạnh SO.

Do $\begin{cases} BD\perp AO \\ BD\perp SH \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SHO) \Rightarrow BD\perp HK$.

Khi đó $\begin{cases} HK\perp SO \\ HK\perp BD \end{cases} \Rightarrow HK\perp(SBD)$, suy ra KS là hình chiếu SH xuống mặt phẳng (SBD). Do đó góc giữa đường thẳng SH và mặt phẳng (SBD) bằng $\widehat{HSK}$.

$AH = HO = a\sqrt{2}; SH = a\sqrt{7}; HK = \dfrac{SH.HO}{\sqrt{SH^2 + SO^2}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{3}$

Trong tam giác HKS, $\sin\widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{a\sqrt{14}}{3} : a\sqrt{7} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

HSA 38: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 25 cây dừa giống như sau:

Chiều cao (cm)	$[0;10)$	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50)$
Số cây	4	6	7	5	3

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

A. $M_e = \dfrac{175}{7}$.

B. $M_e = \dfrac{165}{5}$.

C. $M_e = \dfrac{165}{7}$.

D. $M_e = \dfrac{165}{3}$.

Đáp án: C

Lí giải

Cỡ mẫu: $n = 4 + 6 + 7 + 5 + 3 = 25$.

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_{25}$ là chiều cao của 25 cây dừa giống được sắp xếp theo thứ tự không giảm. Khi đó, trung vị là x_{13}. Do x_{13} thuộc nhóm $[20;30)$ nên nhóm này chứa trung vị. Do đó:

$p = 3$, $a_3 = 20$, $m_3 = 7$, $m_1 + m_2 = 10$, $a_4 - a_3 = 10$. Do đó:

$$M_e = 20 + \frac{\frac{25}{2} - 10}{7}.10 = \frac{165}{7}.$$

HSA 39: Có 6 chiếc ghế được kê thành một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C, ngồi và hàng ghế đó, sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh. Xác suất để học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B bằng

A. $\dfrac{1}{6}$.

B. $\dfrac{3}{20}$.

C. $\frac{2}{15}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Đáp án: B

Lí giải

Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh thành hàng ngang, không gian mẫu có số phần tử là: $6!$.
Gọi M là biến cố “học sinh lớp C chỉ ngồi cạnh học sinh lớp B”.
Xét các trường hợp:
Trường hợp 1. Học sinh lớp C ngồi đầu dãy
+ Chọn vị trí cho học sinh lớp C có 2 cách.
+ Chọn 1 học sinh lớp B ngồi cạnh học sinh lớp C có 2 cách.
+ Hoán vị các học sinh còn lại cho nhau có $4!$ cách.
Trường hợp này thu được: $2.2.4! = 96$ cách.
Trường hợp 2. Học sinh lớp C ngồi giữa hai học sinh lớp B, ta gộp thành 1 nhóm, khi đó:
+ Hoán vị 4 phần tử gồm 3 học sinh lớp A và nhóm gồm học sinh lớp B và lớp C có: $4!$ cách.
+ Hoán vị hai học sinh lớp B cho nhau có: $2!$ cách.
Trường hợp này thu được: $4!.2! = 48$ cách.
Như vậy số phần tử của biến cố M là: $48 + 96 = 144$.

Xác suất của biến cố M là $P(M) = \frac{144}{6!} = \frac{1}{5}$.

HSA 40: Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$	$[11;13)$	$[13;15)$
Số ngày	2	7	7	3	1

Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $[7;\ 9)$.

B. $[9;\ 11)$.

C. $[11;\ 13)$.

D. $[13;\ 15)$.

Đáp án: B

Lí giải

Gọi $x_1, x_2, ..., x_{20}$ là doanh thu bán hàng trong 20 ngày xếp theo thứ tự không giảm.

Khi đó: $x_1, x_2 \in [5;7)$, $x_3, ..., x_9 \in [7;\ 9)$,, $x_9, ..., x_{16} \in [9;\ 11)$ $x_{17}, ..., x_{19} \in [11;\ 13)$, $x_{20} \in [13;\ 15)$

Do đó, trung vị của mẫu số liệu thuộc nhóm $[9;\ 11)$

HSA 41: Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp gồm 19 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số chẵn bằng

A. $\frac{10}{19}$.

B. $\frac{5}{19}$.

C. $\frac{4}{19}$.

D. $\frac{9}{19}$.

Đáp án: C

Lí giải

Gọi X là tập hợp 19 số nguyên dương đầu tiên. Suy ra $X=\{1;2;3;...;18;19\}$

Khi đó tập X có 19 phần tử, trong đó có 9 phần là số chẵn, 10 phần tử là số lẻ.

Chọn đồng thời hai số từ tập X, ta có C_{19}^{2} (cách chọn)

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử chọn đồng thời hai số từ tập X.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega)=C_{19}^{2}$

Gọi A là biến cố: "Chọn được hai số chẵn từ tập X"

Khi đó số phần tử của biến cố A: $n(A)=C_{9}^{2}$

Vậy xác suất của biến cố A: $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_9^2}{C_{19}^2}=\frac{4}{19}$.

HSA 42: Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi "Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe Camry". Bạn Minh Hiền được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng là:

A. $\frac{1}{20}$.

B. $\frac{1}{19}$.

C. $\frac{1}{190}$.

D. $\frac{1}{10}$.

Đáp án: C

Lí giải

Gọi A là biến cố "nắp khoen đầu trúng thưởng"

Gọi B là biến cố "nắp khoen thứ hai trúng thưởng".

Ta đi tính $P(A \cap B)$

Khi bạn rút thăm lần đầu thì trong hộp có 20 nắp trong đó có 2 nắp trúng do đó $P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Khi biến cố A đã xảy ra thì còn lại 19 nắp trong đó có 1 nắp trúng thưởng, do đó: $P(B | A) = \frac{1}{19}$

ta có $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B | A).P(A) = \frac{1}{19}.\frac{1}{10} = \frac{1}{190}$

HSA 43: Người ta ghi lại tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) của một số nhà đầu tư (với số tiền đầu tư như nhau), khi đầu tư vào hai lĩnh vực A, B cho kết quả như sau:

Tiền lãi	$[5; 10)$	$[10; 15)$	$[15; 20)$	$[20; 25)$	$[25; 30)$
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro đầu tư các lĩnh vực có giá trị trung bình tiền lãi gần bằng nhau. Lĩnh vực nào có phương sai, độ lệch chuẩn tiền lãi cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, độ rủi ro của cổ phiếu nào cao hơn?

A. Lĩnh vực A có độ rủi ro bằng lĩnh vực B.
B. Lĩnh vực A có độ rủi ro cao hơn lĩnh vực B.
C. Lĩnh vực A có độ rủi ro thấp hơn lĩnh vực B.
D. Không so sánh được.

Đáp án: C

Lí giải

Lĩnh vực A

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Giá trị đại diện	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực A	2	5	8	6	4

Lĩnh vực B

Tiền lãi	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25)	[25; 30)
Giá trị đại diện	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
Số nhà đầu tư vào lĩnh vực B	8	4	2	5	6

Giá trị trung bình của hai lĩnh vực A và B là

$$\overline{x}_A = \frac{1}{25}.(2.7,5 + 5.12,5 + 8.17,5 + 6.22,5 + 4.27,5) = 18,5$$

$$\overline{x}_B = \frac{1}{25}.(8.7,5 + 4.12,5 + 2.17,5 + 5.22,5 + 6.27,5) = 16,9$$

Về độ trung bình đầu tư vào lĩnh vực A lãi hơn lĩnh vực B.

Độ lệch chuẩn của hai lĩnh vực A và B là

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{25}.(2.7,5^2 + 5.12,5^2 + 8.17,5^2 + 6.22,5^2 + 4.27,5^2) - 18,5^2} = 5,8$$

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{25}.(8.7,5^2 + 4.12,5^2 + 2.17,5^2 + 5.22,5^2 + 6.27,5^2) - 16,9^2} = 8,04.$$

Như vậy độ lệch chuẩn của mẫu số liệu thu tiền được hàng tháng khi đầu tư vào lĩnh vực B cao hơn lĩnh vực A nên đầu tư vào lĩnh vực B rủi ro hơn.

HSA 44: Lớp Toán Sư Phạm có 95 Sinh viên, trong đó có 40 nam và 55 nữ. Trong kỳ thi môn Xác suất thống kê có 23 sinh viên đạt điểm giỏi (trong đó có 12 nam và 11 nữ). Gọi tên ngẫu nhiên một sinh viên trong danh sách lớp. Tìm xác suất gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn Xác suất thống kê, biết rằng sinh viên đó là nữ?

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{11}{23}$.

C. $\frac{12}{23}$.

D. $\frac{11}{19}$.

Đáp án: A

Lí giải

Gọi A là biến cố "gọi được sinh viên nữ"

Gọi B là biến cố "gọi được sinh viên đạt điểm giỏi môn Xác suất thống kê",

Ta đi tính $P(B \mid A)$

ta có: $n(A)=\frac{55}{95}$; $n(A \cap B)=\frac{11}{95}$

Do đó: $P(B|A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{n(A \cap B)}{n(A)}=\frac{11}{95}:\frac{55}{95}=\frac{11}{55}=\frac{1}{5}$.

HSA 45: Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10, nếu biết rằng có ít nhất một con đã ra mặt 5 chấm.

A. $\frac{3}{11}$.

B. $\frac{11}{25}$.

C. $\frac{12}{23}$.

D. $\frac{11}{19}$.

Đáp án: A

Lí giải

Gọi A là biến cố: "ít nhất một con đã ra mặt 5 chấm"

Gọi B là biến cố: "tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 10"

Ta có:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

Biến cố B có các trường hợp $\{(4;6),(6;4),(5;5),(5;6),(6;5),(6;6)\}$

Biến cố $A \cap B$ có 3 trường hợp xảy ra: $\{(5;5),(5;6),(6;5)\}$ có xác suất là: $P(A \cap B)=\frac{3}{36}$

Vậy $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}}=\dfrac{3}{11}$

SHA 46: Trong sân vận động có tất cả 20 dãy ghế, dãy đầu tiên có 30 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 2 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 136.
B. 68.
C. 1960.
D. 980.

Đáp án: C

Lí giải

Gọi $u_1, u_2, \dots u_{20}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai,… và dãy ghế số hai mươi. Ta có công thức truy hồi ta có $u_n = u_{n-1} + 2$ $(n = 2, 3, \dots, 20)$.

Ký hiệu: $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$, theo công thức tổng các số hạng của một cấp số cộng, ta được:

$S_{20} = \dfrac{20}{2}\left[2u_1 + (20-1)2\right] = 980$.

SHA 47: Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

A. $\dfrac{\pi}{11}$.
B. $\dfrac{23\pi}{21}$.
C. $\dfrac{3\pi}{11}$.
D. $\dfrac{23\pi}{11}$.

Đáp án: D

Lí giải

Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác 2π ; kim giờ quét được một góc $\dfrac{\pi}{6}$.

Hiệu vận tốc giữa kim phút và kim giờ là $2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\dfrac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là: $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right):\frac{11\pi}{6}=\frac{1}{11}$ (giờ)

Vậy sau $\frac{1}{11}$ (giờ) hai kim sẽ vuông góc với nhau.

Tổng quãng đường hai đầu mút kim đi được là: $l=R.\alpha=6.\frac{1}{11}.\frac{\pi}{6}+11.\frac{1}{11}.2\pi=\frac{23\pi}{11}(\text{ cm})$

Dựa vào thông tin cung cấp dưới đây để trả lời các câu hỏi từ 48 đến 50

Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép.

HSA 48: Sau khi gửi 1 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng là

A. $532,5$ triệu.

B. $534,5$ triệu.

C. $531,5$ triệu.

D. 533 triệu.

Đáp án: A

Lí giải

Sau một năm số tiền gửi là $500(1+6,5\%)^1=532,5$ (triệu đồng).

HSA 49: Cần ít nhất bao nhiêu năm thì số tiền mà người đó có trong ngân hàng là 600 triệu đồng

A. 2 năm.

B. 3 năm.

C. 4 năm.

D. 5 năm.

Ta có **Đáp án: B**

Lí giải

$500(1+6,5\%)^n=600\Rightarrow n=\log_{1,065}\left(\frac{6}{5}\right)\approx 3$ năm.

HSA 50: Do thiếu tiền nên ở cuối năm thứ 3, người đó đã rút 100 triệu đồng từ ngân hang và tiếp tục gửi thêm 2 năm nữa thì rút toàn bộ số tiền. Số tiền khi rút về gần với kết quả nào dưới đây.

A. $671,6$ triệu.

B. $671,2$ triệu.

C. 690 triệu.

D. $630,5$ triệu.

Đáp án: A

Lí giải

Sau khi rút về 100 triệu đồng và tiếp tục gửi trong vòng 2 năm tiếp theo, người đó có số tiền là $\left[500(1+6,5\%)^3-100\right].(1+6,5\%)^2 \approx 571,621$ triệu đồng. Tổng số tiền người đó có được sau 5 năm (sau khi làm tròn) là $571,621+100=671,621$ triệu đồng, gần nhất với 671,6 triệu đồng.