

Estudio gráfico de superficies minimales a través de la representación de Weierstrass-Enneper

Paula Solabre Felipe
Sergio Palomo Vega

Tutor: Juan Ángel Rojo Carulli

Junio 2020

Modelización curso 2019/20
ETSIInf UPM



1 Introducción

En este trabajo vamos a hablar de la relevancia de las superficies minimales y la utilidad de la representación en el formato Weierstrass-Enneper.

En la segunda sección, vamos a repasar ciertos conceptos fundamentales y estudiar las coordenadas *isotermas* (también llamadas *conformes*).

En la tercera sección profundizaremos sobre la relación entre superficies minimales y funciones holomorfas.

En la cuarta sección presentaremos la representación de Weierstrass-Enneper para obtener reparametrizaciones de superficies minimales, la cual justificaremos y ejemplificaremos adecuadamente.

Finalmente, en la quinta sección presentaremos algunas superficies minimales que hemos representado usando Maple, acompañadas del código correspondiente a cada una de ellas.



2 Preliminares

Aquí vamos a fijar algunas notaciones e introducir conceptos básicos de variable compleja y superficies, a saber:

- El concepto de función holomorfa $f(u, v)$, aquella que cumple que $f(u, v) = f_1(u, v) + if_2(u, v)$, siendo $z = u + iv$, junto a las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada punto de su dominio (u_0, v_0) .
- Las ecuaciones de Cauchy-Riemann, fundamentales en el momento en que se introduce la variable compleja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial v}(u_0, v_0) &= -\frac{\partial f_2}{\partial u}(u_0, v_0)\end{aligned}$$

- Se llama función *meromorfa* a aquella función holomorfa en todo su dominio salvo en un conjunto finito de puntos, lo que se conoce como los polos.
e.g.: $f(z) = \frac{1}{z}$ es una función meromorfa en \mathbb{C} .
- Se llama *superficie parametrizada* al par (A, φ) donde $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto conexo del plano y $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación inyectiva, continua y cuya aplicación inversa es continua. También se pide que φ sea de clase C^∞ (infinitas veces derivable) y que su matriz Jacobiana $d\varphi$ tenga rango 2 en todo punto $(u, v) \in A$.

$$d\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 2}$$

- Por último, el concepto de *coordenadas isotermas*: si S es una superficie minimal, cerca de cada punto $p \in S$ existe un abierto $U^p \subseteq S$ que contiene a p , y existe una parametrización $\varphi : A \rightarrow U^p$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, tal que, respecto de la parametrización φ , la *primera forma fundamental* tiene la forma $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, es decir, $F = 0, E = G$.



3 Relación entre superficies minimales y funciones holomorfas

Dada una superficie S parametrizada por:

$$\begin{cases} \varphi : A \longrightarrow & S \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto & (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \end{cases}$$

es posible expresar la condición de que φ sea (o no) una parametrización por coordenadas isotermas en términos de que ciertas funciones con valores en \mathbb{C} cumplan una condición algebraica, en concreto $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$, como se verá más adelante.

Además, también se puede traducir la condición de que S sea o no minimal en términos de que dichas funciones sean o no holomorfas. En concreto, a partir de la parametrización $\varphi = (x_1, x_2, x_3)$ puedo definir las 3 funciones \mathbb{C} -valuadas siguientes:

$$\Phi_1(u, v) = \frac{\partial x_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) (x_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) - i \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) \right)$$

En notación abreviada: $\Phi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - i \frac{\partial x_1}{\partial v} \right)$.

Análogamente se definen Φ_2 , Φ_3 , y entonces quedan las siguientes

3.1 Funciones de reparametrización

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - i \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} - i \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} - i \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

Estas tres funciones $\Phi_i : A \longrightarrow \mathbb{C}$ están definidas en $A \subseteq \mathbb{R}^2$ el dominio de la parametrización φ , y toman valores en \mathbb{C} . Con ellas se puede traducir la condición de que φ dé coordenadas isotermas y sea una superficie minimal mediante el siguiente procedimiento:

1. $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0 \iff E = G, F = 0$, o sea si y solo si la parametrización φ da coordenadas isotermas.

2. Φ_1, Φ_2, Φ_3 son funciones holomorfas (o sea, verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann) si y solo si las funciones $x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)$ son funciones armónicas, es decir si y solo si $\Delta x_1 = 0, \Delta x_2 = 0, \Delta x_3 = 0$, donde $\Delta x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, para $x = x(u, v)$ función.
3. Dada una superficie S en coordenadas isoterma dadas por $\varphi : A \longrightarrow S$, la curvatura media H verifica lo siguiente: si definimos el laplaciano de φ componente a componente ($\Delta \varphi = \Delta(x_1, x_2, x_3) = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$) se cumple que $\Delta \varphi = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = 2EH \cdot N$, siendo N el vector normal unitario, o sea $N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$.
4. Conclusión: son equivalentes las siguientes condiciones:
 - (a) La parametrización

$$\begin{aligned} \varphi : A \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \varphi(A) \subseteq \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \end{aligned}$$

tiene como imagen una superficie minimal $S = \varphi(A)$ y es una parametrización isoterma.

- (b) Si defino $\Phi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} - i \frac{\partial x_i}{\partial v} \right)$, se verifica que $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$, y que Φ_i es holomorfa $\forall i = 1, 2, 3$.



4 Representación de Weierstrass - Enneper

Consiste, básicamente, en *reconstruir* la parametrización $\varphi = (x_1, x_2, x_3)$ a partir de las funciones $\Phi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} - i \frac{\partial x_i}{\partial v} \right)$.

Más adelante se demostrará que, en dominios $A \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ suficientemente “buenos” (por ejemplo, si A es un disco), entonces, a partir de las funciones $\Phi_1 = \frac{\partial x_1}{\partial z}$, $\Phi_2 = \frac{\partial x_2}{\partial z}$, $\Phi_3 = \frac{\partial x_3}{\partial z}$ dadas antes, se pueden recuperar x_1, x_2, x_3 salvo una constante. La manera de recuperar x_i a partir de Φ_i es integrando y tomando partes reales:

$$x_i = 2\Re \left(\int \Phi_i(z) dz \right)$$

Entonces, si partimos de 3 funciones Φ_1, Φ_2, Φ_3 que son holomorfas y cumplen $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$, mediante la fórmula (1) podemos definir x_1, x_2, x_3 , que quedan:

$$\begin{cases} \varphi : A & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \end{cases}$$

que es claramente una parametrización, la cual será isoterma porque estoy tomando Φ_1, Φ_2, Φ_3 tales que $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$, y la imagen de φ dada por $S = \varphi(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ será una superficie minimal, porque las Φ_i se tomarán holomorfas de partida.

Por tanto, la construcción de superficies minimales (parametrizadas en un dominio A que elegimos) queda reducida a la construcción de funciones holomorfas Φ_1, Φ_2, Φ_3 tales que $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$.

4.1 Construcción de las Φ_j

Hay muchas formas de construir Φ_1, Φ_2, Φ_3 para que cumplan estas condiciones. Una de ellas es tomar dos funciones $f(z), g(z)$ tales que $f(z)$ sea holomorfa en A , $g(z)$ sea meromorfa en A y $f(z)g^2(z)$ sea holomorfa.

Es decir, $g(z)$ puede tener polos en ciertos puntos de A , pero:

- dichos polos de $g(z)$ deben ser ceros de $f(z)$ de tal modo que, al multiplicar $f(z)$ y $g^2(z)$ me salga una función holomorfa, o sea, que se cancelen los polos de $g^2(z)$ con los ceros de $f(z)$,
- $g(z)$ no se puede anular en A .

Dados tales $f(z), g(z)$, entonces las funciones

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2) \\ \Phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \\ \Phi_3 = f \cdot g \end{cases}$$

son funciones holomorfas en A y cumplen $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 = 0$, ergo me dan $\Phi = (x_1, x_2, x_3)$ parametrización isoterma de una superficie minimal mediante la fórmula $x_i = 2\Re\left(\int \Phi_i(z)dz\right)$, donde $\int \Phi_i(z)dz$ es la integral de $\Phi_i(z)$, o sea una primitiva holomorfa de $\Phi_i(z)$. Aquí usamos un importante teorema de Análisis Complejo.

Por tanto, para que esto no cause problemas, vamos a tomar las funciones $f(z), g(z)$ definidas en discos (o, más generalmente, dominios simplemente conexos del plano), y de este modo las Φ_i también estarán definidas en un disco y podremos entonces asegurar que existe $\int \Phi_i(z)dz =$ primitiva holomorfa de $\Phi_i(z)$.

Ejemplo 1 $f(z) = z^2, g(z) = \frac{1}{z}, f$ es holomorfa en todo \mathbb{C} , g es mesomorfa en \mathbb{C} (pues sus polos son un conjunto discreto de puntos de \mathbb{C}). Además, $f(z)g^2(z) = z^2 \frac{1}{z^2} = 1$ es holomorfa en \mathbb{C} . Por tanto, tanto f como fg^2 son holomorfas en un disco (de radio infinito en este caso) \Rightarrow existe primitiva de las funciones Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Vamos a calcularlas:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2}f(1 - g^2) = \frac{1}{2}z^2(1 - \frac{1}{z^2}) = \frac{1}{2}(z^2 - 1) \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2}f(1 - g^2) = \frac{i}{2}z^2(1 + \frac{1}{z^2}) = \frac{i}{2}(z^2 + 1) \\ \Phi_3 &= f \cdot g = z \end{aligned}$$

Calculamos primitivas de Φ_1, Φ_2, Φ_3 :

$$\begin{aligned} \int \Phi_1(z)dz &= \int \frac{1}{2}(z^2 - 1)dz = \frac{1}{2} \frac{1}{3}z^3 - z = \frac{1}{6}z^3 - z \\ &= \frac{1}{6}(u + iv)^3 - (u + iv), (z = u + iv) \\ &= \frac{1}{6}(u^3 + 3iu^2v - 3uv^2 - iv^3) - (u + iv) \\ &= \frac{1}{6}u^3 - 3uv^2 - u + i(3u^2v - u - v^3) \\ \Rightarrow x_1(u, v) &= 2\Re\left(\int \Phi_1\right) = \frac{1}{3}u^3 - 6uv^2 - 2u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \Phi_2(z)dz &= \int \frac{i}{2}(z^2 + 1)dz = \frac{i}{2} \frac{1}{3} z^3 - z = \frac{i}{6} z^3 - z \\
&= \frac{i}{6}(z^3 + 3z) = \frac{i}{6} z(z^2 + 3), (z = u + iv) \\
&= \frac{i}{6}(u + iv)((u + iv)^2 + 3) = \frac{i}{6}(u + iv)(u^2 - v^2 + 2iuv + 3) \\
&= \frac{i}{6}(u(u^2 - v^3 + 3) - 2uv^2 + i(v(u^2 - v^2 + 3) + 2u^2v)) \\
&= -\frac{1}{6}(v(u^2 - v^2 + 3) + 2u^2v) + \frac{i}{6}(u(u^2 - v^2 + 3) - 2uv^2) \\
&= -\frac{1}{6}(3vu^2 - v^3 + 3v) + \frac{i}{6}(-3uv^2 + u^3 + 3u) \\
\Rightarrow x_2(u, v) &= 2\Re\left(\int \Phi_2\right) = -\frac{1}{3}(3vu^2 - v^3 + 3v) \\
\int \Phi_3(z)dz &= \int \frac{1}{2}zdz = \frac{1}{2}(u + iv)^2 = \frac{1}{2}(u^2 - v^2 + 2iuv) \\
\Rightarrow x_3(u, v) &= 2\Re\left(\int \Phi_3\right) = u^2 - v^2
\end{aligned}$$

La parametrización asociada sería:

$$\begin{aligned}
\Phi(u, v) &= (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \\
&= \left(\frac{1}{3}u^3 - 6uv^2 - 2u, -u^2v + \frac{1}{3}v^3 - v, u^2 - v^2\right)
\end{aligned}$$

4.2 Resultado 1

En una superficie parametrizada por $\varphi : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ conforme, se cumple que $\Delta = 2EH \cdot N$.

Demostración 2 Sabemos que

$$\begin{cases} E = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = G = \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle \\ F = \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0 \end{cases}$$

Por tanto, se deduce que

$$\begin{cases} 0 = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle - \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle & (1) \\ 0 = \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle & (2) \end{cases}$$

Derivamos la primera ecuación respecto de u y de v :

$$(1) \begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial u}(\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle - \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle) = 2\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle - 2\langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle \\ 0 = \frac{\partial}{\partial v}(\langle \Phi_u, \Phi_u \rangle - \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle) = 2\langle \Phi_{uv}, \Phi_u \rangle - 2\langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle \end{cases}$$

Derivamos la segunda ecuación respecto de u y de v :

$$(2) \begin{cases} 0 &= \langle \Phi_{uu}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{uv} \rangle \\ 0 &= \langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_u, \Phi_{vv} \rangle \end{cases}$$

Despejamos en (1) $\langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle = \langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle$, $\langle \Phi_{vu}, \Phi_v \rangle = \langle \Phi_{uv}, \Phi_v \rangle$ y sustituimos esto en:

$$(2) \begin{cases} 0 &= \langle \Phi_{uu}, \Phi_v \rangle + \langle \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle = \langle \Phi_{uu} + \Phi_{vv}, \Phi_v \rangle \\ 0 &= \langle \Phi_{uu}, \Phi_u \rangle + \langle \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle = \langle \Phi_{uu} + \Phi_{vv}, \Phi_u \rangle \end{cases}$$

Por tanto, $\Delta\Phi = \Phi_{uu} + \Phi_{vv}$ es perpendicular a Φ_u, Φ_v , y como Φ_u, Φ_v son base del plano tangente a S , se concluye que $\Delta\Phi$ es un múltiplo del normal unitario N .

Por tanto, existe una función λ tal que $\Delta\Phi = \lambda N$ en todo punto de S . Hallamos λ : $\langle \Delta\Phi, N \rangle = \langle \lambda N, N \rangle = \lambda$, y por otro lado $\langle \Delta\Phi, N \rangle = \langle \Phi_{uu} + \Phi_{vv}, N \rangle = \langle \Phi_{uu}, N \rangle + \langle \Phi_{vv}, N \rangle = e + g$; ahora vemos quién es H y la curvatura media en coordenadas conformes:

$$I = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$L = I^{-1} \cdot II = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \implies H = \frac{1}{2} \text{tr}(L) = \frac{1}{2E}(e + g) \implies e + g = 2EH.$$

Concluimos que $\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = \lambda \cdot N = (e + g) \cdot N = 2EH \cdot N$. \square

4.3 Resultado 2

Supongamos dadas 3 funciones holomorfas Φ_1, Φ_2, Φ_3 definidas en $A \subseteq \mathbb{C}$ un disco (en general, A puede ser un dominio sin agujeros o simplemente conexo), y supongamos que las Φ_j verifican:

1. $|\Phi_1(z)|^2 + |\Phi_2(z)|^2 + |\Phi_3(z)|^2 > 0, \forall z \in A$.
2. $\Phi_1(z)^2 + \Phi_2(z)^2 + \Phi_3(z)^2 = 0, \forall z \in A$.

Definamos las funciones:

$$\begin{bmatrix} x_1(z) = 2\Re\left(\int \Phi_1(z)dz\right) \\ x_2(z) = 2\Re\left(\int \Phi_2(z)dz\right) \\ x_3(z) = 2\Re\left(\int \Phi_3(z)dz\right) \end{bmatrix}$$

,

$$\begin{aligned} \varphi : A &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ z &\longmapsto (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \end{aligned}$$

donde $\int \Phi_j(z)dz$ representa una primitiva (holomorfa) sw $\Phi_1(z)$. Entonces, la función $\varphi : A \implies \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie minimal $S = \varphi(A)$.

Observación 3 Quizás reduciendo A y tomando un disco más pequeño contenido en él para asegurar que Φ es inyectiva y su imagen $S = \varphi(A)$ no tiene autocortes.

Demostración 4 Hay que ver que la función Φ así definida cumple que su diferencial tiene rango 2 en todo punto de A , ya que esto garantiza que su imagen es localmente una superficie. Luego hay que ver que $S = \varphi(A)$ me da una superficie minimal, para lo cual basta ver que $\frac{\partial x_j}{\partial z} := \frac{1}{2} \frac{\partial x_j}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial x_j}{\partial v}$ coincide con $\Phi_j(z)$. Si vemos esto, como $\Phi_j(z)$ es holomorfa, se deducirá que x_j es armónica y, por tanto, $\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0$, lo que implicará que $H = 0$, ya que $\Delta\Phi = 2EH \cdot N$ por lo anterior.

Paso 1 Ver que $\frac{\partial x_j}{\partial z} = \Phi_j(z)$:

Tenemos que, por definición, $x_j(z) = 2\Re \int \Phi_j(z)dz$, donde $\int \Phi_j(z)dz$ es una función cuya derivada $\frac{d}{dz}$ es $\Phi_j(z)$. Llamemos $F_j(z) = \int \Phi_j(z)dz$ a esta función. Pongamos $F_j(z) = f_j(z) + i g_j(z)$ en parte real e imaginaria.

Consideramos $z = u + iv \leftrightarrow (u, v) \in \mathbb{R}^2$. La diferencial de F_j es:

$$dF_j(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial u} & \frac{\partial f_j}{\partial v} \\ \frac{\partial g_j}{\partial u} & \frac{\partial g_j}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

por las ecuaciones de C-R, ya que f_j es holomorfa.

Recordatorio: Esto me dice que

$$dF_j(u, v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

se identifica con el número complejo $a + ib$, ya que

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 - bv_2 \\ bv_1 + av_2 \end{pmatrix} \\ \mathbb{C} \ni v_1 + iv_2 \longmapsto av_1 - bv_2 + i(bv_1 + av_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2)$$

Por tanto, $\Phi_j(z) = \frac{d}{dz}(F_j(z)) = \frac{\partial f_j}{\partial u} + i \frac{\partial g_j}{\partial u}$, con

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial f_j}{\partial u} = \frac{\partial g_j}{\partial v} \\ \frac{\partial f_j}{\partial v} = -\frac{\partial g_j}{\partial u} \end{cases}$$

Por otro lado, $x_j(z) = 2\Re(F_j(z)) = 2f_j(z)$, con lo que $\frac{\partial x_j}{\partial z} = 2\frac{\partial f_j}{\partial z} = 2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f_j}{\partial u} - \frac{i}{2}\frac{\partial f_j}{\partial v}\right) = \frac{\partial f_j}{\partial u} - i\frac{\partial f_j}{\partial v} \underset{(*)}{=} \frac{\partial f_j}{\partial u} + i\frac{\partial g_j}{\partial u} = \Phi_j(z)$ lo cual concluye el paso 1.

Paso 2 La diferencial de $\varphi_j(z) : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene rango 2 en todo $(u, v) \in A$. Sabemos que $|\Phi_1(z)|^2 + |\Phi_2(z)|^2 + |\Phi_3(z)|^2 > 0, \forall z \in A$ y por el paso 1 sabemos que $\Phi_j(z) = \frac{\partial x_j}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial x_j}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial x_j}{\partial v}$, por lo que $|\Phi_j(z)|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2$.

Una comprobación inmediata nos da que $\sum |\Phi_j(z)|^2 = \frac{1}{4}E + \frac{1}{4}G$ con $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$.

También, de la condición $\Phi_1(z)^2 + \Phi_2(z)^2 + \Phi_3(z)^2 = 0$ se obtiene que $F = 0, E = G$, siendo $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$.

Concluimos que $\varphi_u \neq 0, \varphi_v \neq 0$, y φ_u, φ_v son vectores ortogonales en \mathbb{R}^3 , por lo que la diferencial de φ (cuyas columnas son φ_u, φ_v) tiene rango 2 en todo punto.

Por el teorema de la función implícita, deducimos que $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva cerca de cada uno de los puntos de A con lo que, si elegimos un disco D contenido en A donde φ sea inyectiva, entonces $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrización de la superficie $= \varphi(D)$ dada como su imagen. Para no cargar la notación, renombramos $D = A$ y decimos que “ φ es parametrización, quizás reduciendo A .”

Paso 3 La superficie dada por $S = \varphi(A)$ es minimal. Esto es ya inmediato a partir de lo que vimos, puesto que la parametrización φ es conforme (porque $\sum \Phi_j^2 = 0$) y además $\Delta \varphi = 0$ porque Φ_j es holomorfa $\forall j = 1, 2, 3$. \square

Observación 5 En principio, φ podría estar definida en todo \mathbb{R}^2 , pero para que la imagen de φ sea una superficie, es probable que sea necesario restringir su dominio a un disco o algo del estilo. La razón es que φ puede no ser inyectiva en todo \mathbb{R}^2 , es decir la imagen de φ puede tener autointersecciones del tipo de la gráfica.



5 Ejemplos de superficies minimales

A continuación, introduciremos el código Maple que hemos utilizado para representar ciertos ejemplos de superficies minimales.

Para representarlas, hemos usado los siguientes procedimientos:

Procedimiento WE I

Además de las funciones f y g se le da otro parámetro a . Si $a = 1$, $z = e^z$. Si $a = 2$, $z = e^{\wedge}(-iz/2)$, en otro caso z es z .

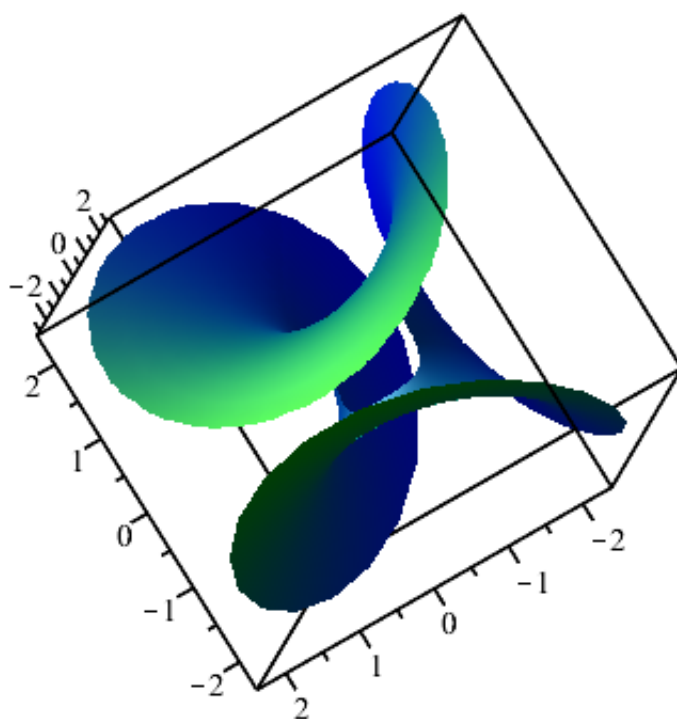
```
> Weierfg := proc(f, g, a)
  local z1, z2, z3, x1, x2, x3, x;
  z1 := int(f*(1-g^2), z);
  z2 := int(I*f*(1+g^2), z);
  z3 := int(2*f*g, z);
  if a = 1 then
    z1 := subs(z = exp(z), z1);
    z2 := subs(z = exp(z), z2);
    z3 := subs(z = exp(z), z3) fi;
  if a = 2 then
    z1 := subs(z = exp(-I*z/2), z1);
    z2 := subs(z = exp(-I*z/2), z2);
    z3 := subs(z = exp(-I*z/2), z3) fi;
  x1 := simplify(convert(simplify(Re(evalc(subs(z = u + I*v, expand(simplify(z1))))), trig), trig), trig);
  x2 := simplify(convert(simplify(Re(evalc(subs(z = u + I*v, expand(simplify(z2))))), trig), trig), trig);
  x3 := simplify(convert(simplify(Re(evalc(subs(z = u + I*v, expand(simplify(z3))))), trig), trig), trig);
  x := [x1, x2, x3];
end;
```

Procedimiento WE II

Además de la función F se le da otro parámetro a . Si $a = 1$, $z = e^z$. Si $a = 2$, $z = e^{\wedge}(-iz/2)$, en otro caso z es z .

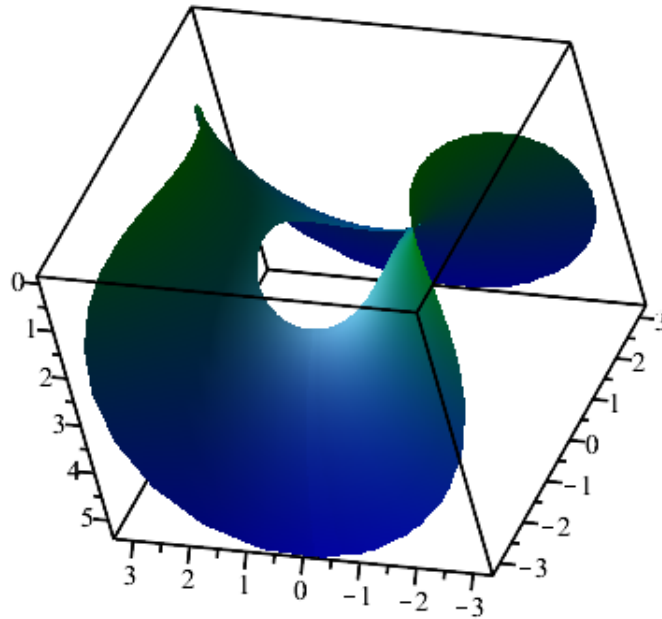
```
> Weier := proc(F, a)
  local z1, z2, z3, x1, x2, x3, x;
  z1 := int(F*(1-z^2), z);
  z2 := int(I*F*(1+z^2), z);
  z3 := int(2*F*z, z);
  if a = 1 then
    z1 := subs(z = exp(z), z1);
    z2 := subs(z = exp(z), z2);
    z3 := subs(z = exp(z), z3) fi;
  if a = 2 then
    z1 := subs(z = exp(-I*z/2), z1);
    z2 := subs(z = exp(-I*z/2), z2);
    z3 := subs(z = exp(-I*z/2), z3) fi;
  x1 := simplify(convert(simplify(Re(evalc(subs(z = u + I*v, expand(simplify(z1))))), trig), trig), trig);
  x2 := simplify(convert(simplify(Re(evalc(subs(z = u + I*v, expand(simplify(z2))))), trig), trig), trig);
  x3 := simplify(convert(simplify(Re(evalc(subs(z = u + I*v, expand(simplify(z3))))), trig), trig), trig);
  x := [x1, x2, x3];
end;
```

Figure 1:



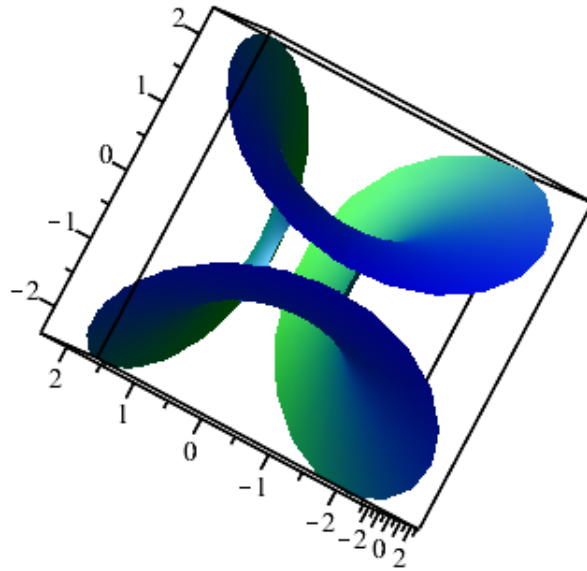
```
> plot3d(Weierfg(z^2, 1/z, 2), u=0..6*Pi, v=-1..1,
  grid=[80, 15], scaling=constrained, orientation=[50, 79],
  shading=XYZ, style=patch, colorscheme=["zgradient", [Green, Blue]]);
```

Figure 2:



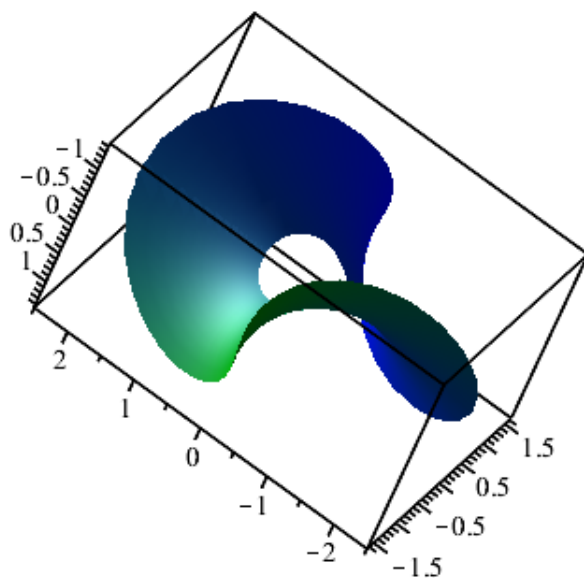
```
> plot3d(Weierfg(-exp(-z), -exp(z) , 2),  
u=0..6*Pi, v=-1..1, grid=[80, 15],  
scaling=constrained, orientation=[50, 79],  
shading=XYZ, style=patch, colorscheme = ["xgradient", [Green, Blue]]);
```

Figure 3:



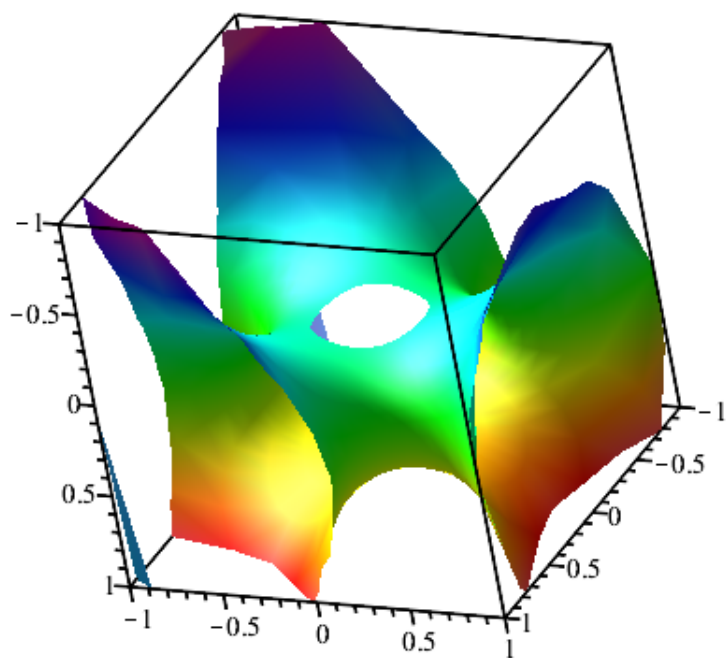
```
> plot3d(Weierfg(1, z, 2), u=0..6*Pi, v=-1..1, grid=[80, 15],  
  scaling=constrained, orientation=[50, 79],  
  shading=XYZ, style=patch, colorscheme = ["zgradient", [Green, Blue]]);
```

Figure 4:



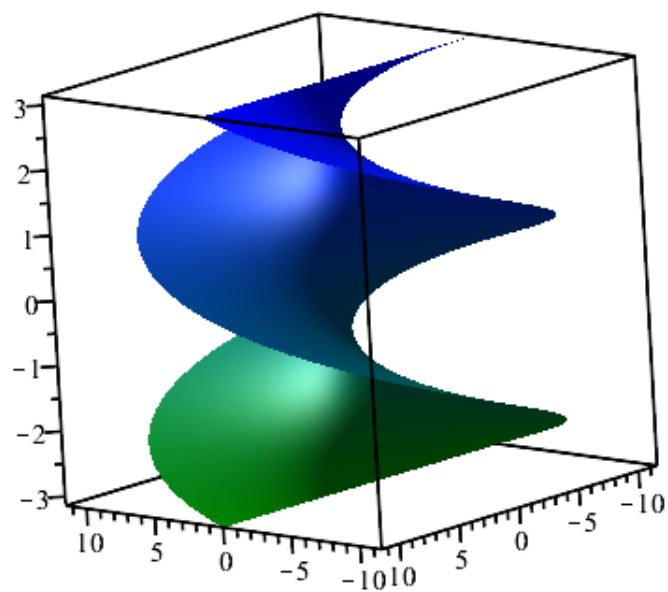
```
> plot3d(Weierfg(- $\frac{I}{2} \cdot \exp(-z)$ , exp(z), 2), u=0..6*Pi, v=-1..1,
  grid=[80, 15], scaling=constrained, orientation=[50, 79],
  shading=XYZ, style=patch, colorscheme=["zgradient", [Green, Blue]]);
```


Figure 5:



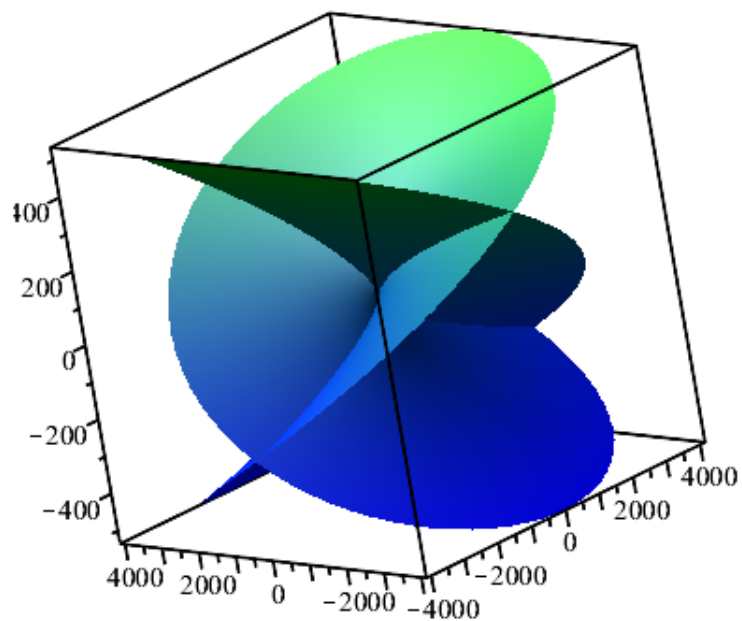
```
> tri := Weierfgy(1/(z^3 - 1)^2, z^2, 0):
> trinoid := subs({u = u*cos(v), v = u*sin(v)}, tri):
> plot3d(trinoid, u = 0..3.5, v = 0..2*Pi, view = [-1..1, -1..1, -1..1],
  grid = [25, 55], style = patch, shading = zhue, orientation = [62, 64]);
```

Figure 6: Helicoide



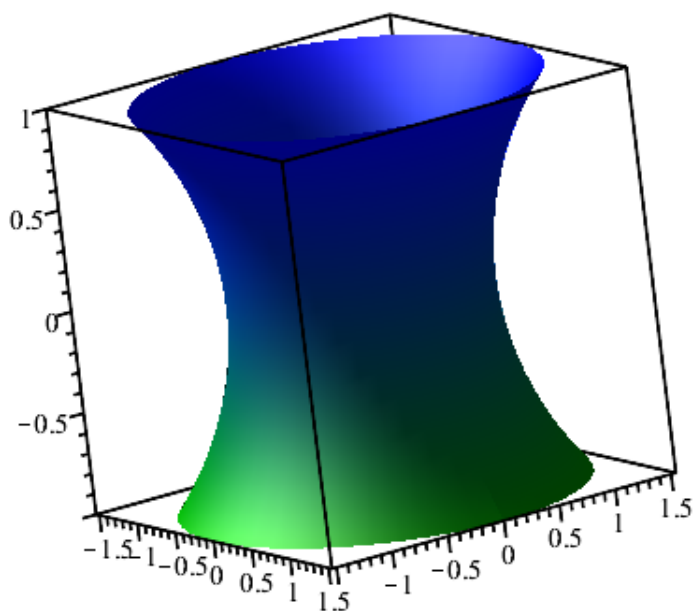
```
> plot3d(Weier( $\frac{I}{2 \cdot z^2}, 2$ ), grid=[100, 100],  
          colorscheme = ["zgradient", [Green, Blue]]);
```

Figure 7: Superficie de Enneper



```
> plot3d(Weier(1 -  $\frac{1}{z^4}$ , 2), grid=[100, 100],
          colorscheme = ["zgradient", [Blue, Green]]);
```

Figure 8: Catenoides



```
> plot3d(Weier( $\frac{1}{2 \cdot z^2}$ , 2), v=-2..2,
  colorscheme = ["zgradient", [Green, Blue]]);
```

