

Číslicová filtrace

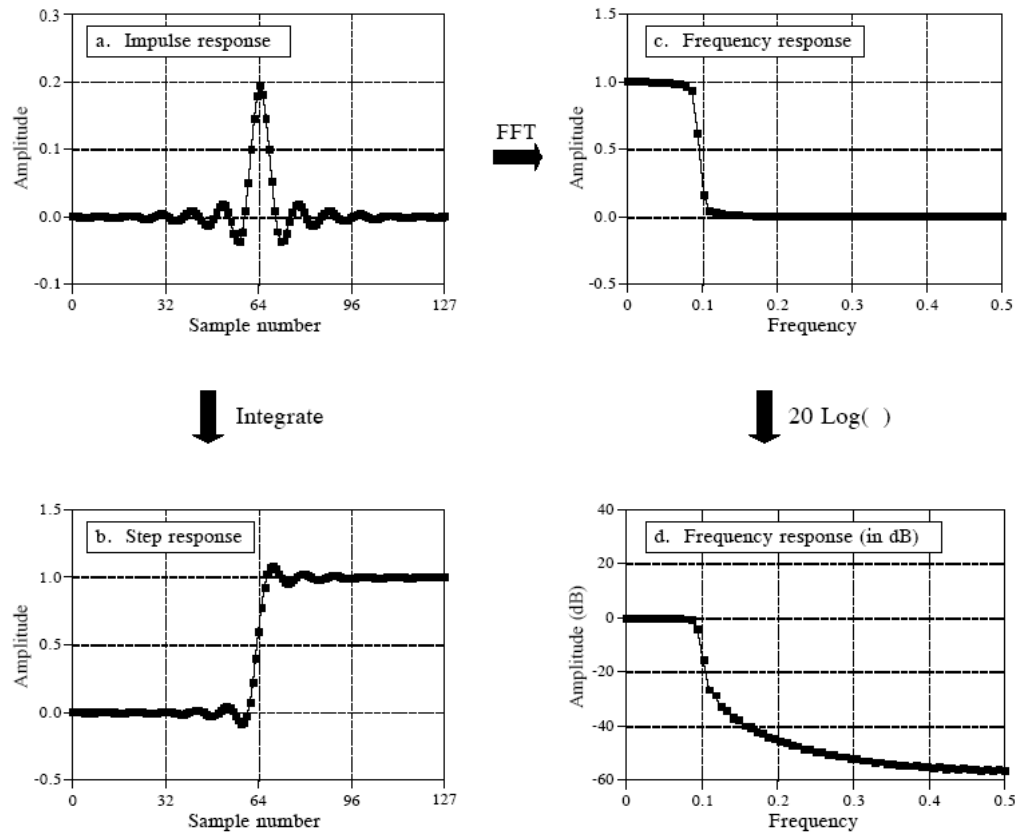
Číslicové filtry

- Použití :
 - Separace signálů
 - Restaurace signálů

Analogové x číslicové filtry :

- Analogové
 - + levné
 - + rychlé
 - + velký dynamický rozsah (v amplitudě i frekvenci)
 - - nevhodné pro nízké kmitočty
 - - nepřesné
 - - závislé na parametrech okolí (např. teplota)
- Číslicové:
 - + přesnost
 - + univerzálnost
 - + vhodné i pro nízké frekvence
 - + stabilita

- Popis filtru:
 - impulsní odezva (odezva filtru na jednotkový impuls)
 - skoková odezva (odezva filtru na jednotkový skok)
 - frekvenční odezva
- Stačí znát jednu odezvu, ostatní lze bez problémů vyčíslit



Rozdělení číslicových filtrů podle účelu

- **Frekvenčně selektivní filtry** - účelem je propustit nebo potlačit složky signálu v určitém frekvenčním pásmu. Realizují se jako FIR popř. IIR filtry

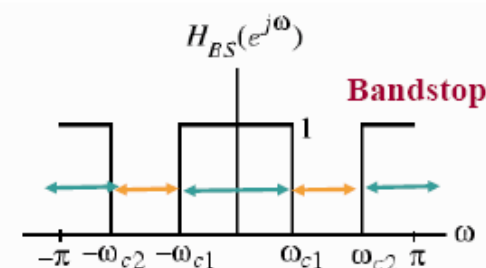
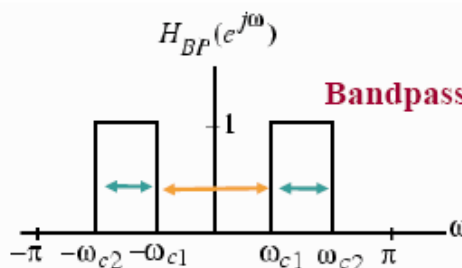
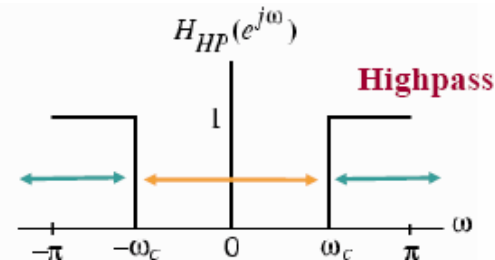
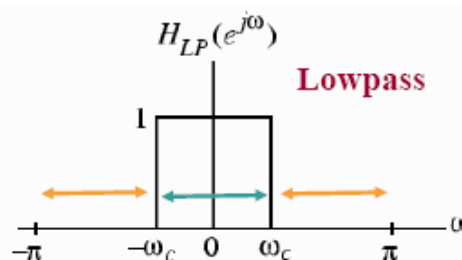
Základní typy:

- Dolní propust (Low-pass filter)
- Horní propust (High-pass filter)
- Pásmová propust (Band-pass filter)
- Pásmová zadrž (Band-stop (reject) filter)

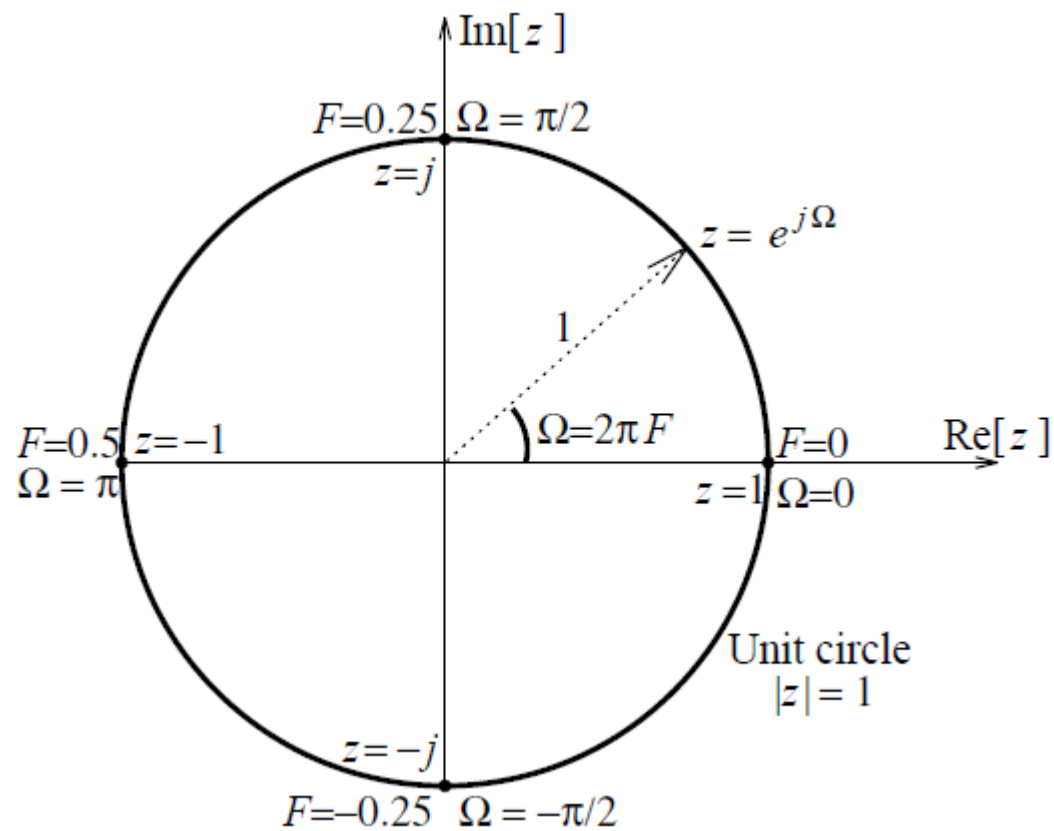
Propustné pásmo

Passband
Stopband

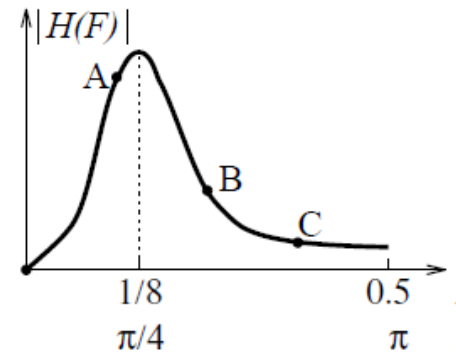
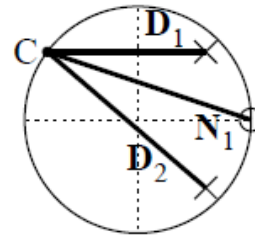
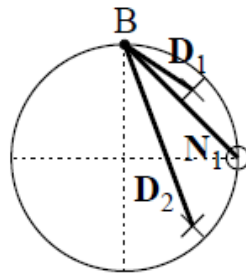
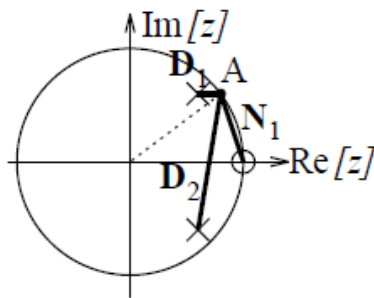
nepropustné pásmo



Frekvenční charakteristika



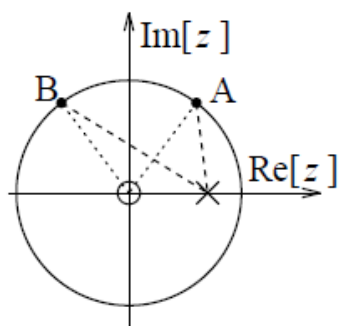
Grafická interpretace frekvenční odezvy



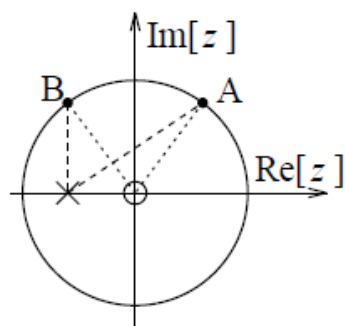
$$H(z) = \frac{8(z - 1)}{(z - 0.6 - j0.6)(z - 0.6 + j0.6)}$$

$$H(\Omega_0) = \frac{8(e^{j\Omega_0} - 1)}{(e^{j\Omega_0} - 0.6 - j0.6)(e^{j\Omega_0} - 0.6 + j0.6)} = \frac{8N_1}{D_1 D_2}$$

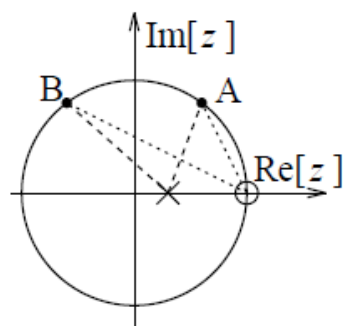
$$|H(\Omega_0)| = 8 \frac{|N_1|}{|D_1||D_2|} = (\text{gain factor}) \frac{\text{PRODUCT OF distances from zeros}}{\text{PRODUCT OF distances from poles}}$$



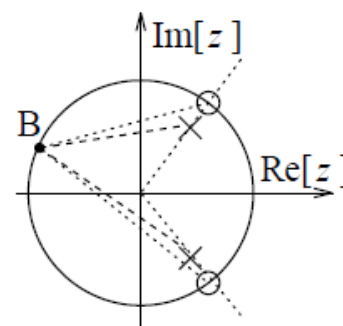
Filter 1



Filter 2



Filter 3



Filter 4

Filtr 1: délka vektoru čitatele je jednotková, délka vektoru jmenovatele roste s rostoucí frekvencí \Rightarrow dolní propust

Filtr 2: délka vektoru čitatele je jednotková, délka vektoru jmenovatele klesá s rostoucí frekvencí \Rightarrow horní propust

Filtr 3: Pro Ω_0 je délka vektoru čitatele nulová, s rostoucí frekvencí roste poměr délky vektoru čitatele ku délce vektoru jmenovatele \Rightarrow horní propust

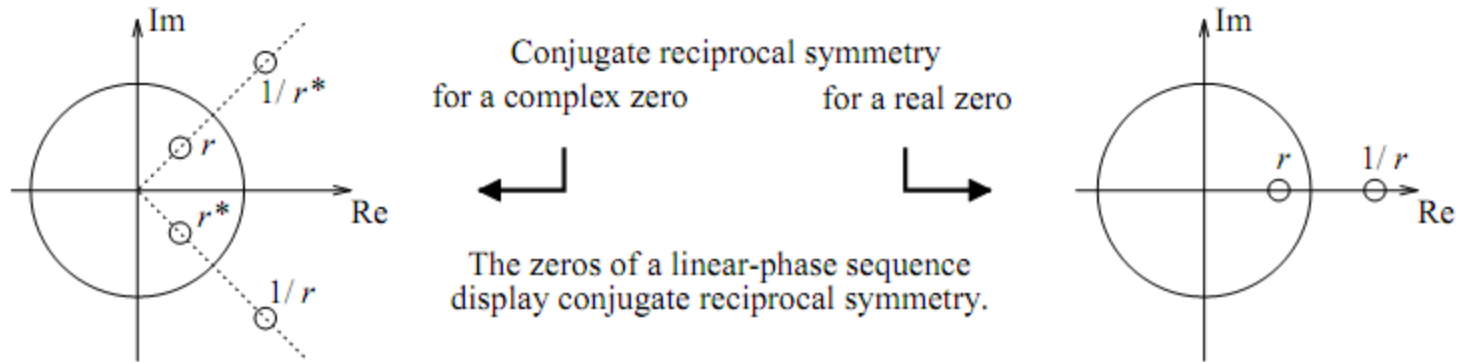
Filtr 4: V bodě A je délka vektoru čitatele nulová, v ostatních frekvencích je poměr délek vektorů čitatele ku jmenovateli přibližně konstantní \Rightarrow pásmová zadrž.

Rozdělení číslicových filtrů:

- **FIR (finite impuls response)** – filtry s konečnou impulsní odezvou,
 - impulsní charakteristika má konečný počet hodnot (N , pro filtr řádu N).
 - filtry jsou vždy stabilní
 - lze je navrhnout s lineární fází (náběžná a doběžná hrana impulsní odezvy je shodná .
 - filtr zpožďuje vstupní signál o $M=(N-1)/2$ (tzv. skupinové zpoždění filtru) vzorků
- **IIR (infinite impuls response)** – filtry s nekonečnou impulsní odezvou
 - impulsní charakteristika nemá konečný počet hodnot
 - jsou výrazně nižšího řádu než Fir filtry se stejnými vlastnostmi a z toho vyplývá že mají:
 - nižší výpočetní složitost v porovnání s Fir filtrem
 - kratší zpoždění mezi vstupem a výstupem
 - není u nich zaručena stabilita
 - fáze není lineární, a doladění fázové charakteristiky je obtížné
 - obecný návrh je relativně složitý v porovnání s FIR
 - jsou citlivé na numerickou přesnost výpočtů

Charakteristika FIR filtrů s lineární fází:

1. Impulzní odezva $h[n]$ je symetrická okolo středového bodu.
2. $H(F)=A(F)e^{j2\pi\alpha F}$ (symetrie $h[n]$), $H(F)=jA(F)e^{j2\pi\alpha F}$ (antisymetrie $h[n]$).
3. Všechny póly jsou umístěny v bodě $z=0$
4. Nuly se obecně vyskytují v komplexně sdružených recipročních čtveřicích. Nuly, které jsou na jednotkové kružnici, jsou pouze v komplexně sdružených dvojicích. Nuly na reálné ose jsou pouze v recipročních dvojicích. Nuly v bodě $z=1$ a $z=-1$ mohou být samostatné.
5. Pro antisymetrickou $h[n]$ se v $z=1$ vyskytuje lichý počet nul, pro symetrickou $h[n]$ je počet nul v $z=1$ sudý.
6. Pokud $h[n]=\pm h[-n]$ je $H(z)=\pm H(1/z)$.



Příklad : Popisuje následující přenosová funkce filtr s lineární fází?

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}$$

Příklad: Nakreslete diagram nul a pólů pro následující impulzní charakteristiku

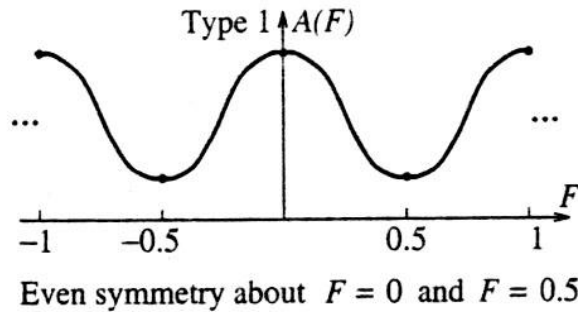
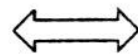
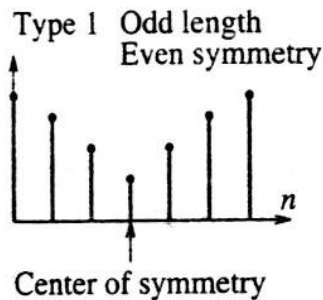
$$h[n] = \delta[n + 2] + 4.25\delta[n] + \delta[n - 2]$$

Příklad: Nakreslete diagram nul a pólů pro následující přenosovou funkci a určete, zda se jedná o filtr s lineární fází.

$$H(z) = z^2 + 2.5z - 2.5z^{-1} - z^{-2}$$

Existují 4 typy filtrů s lineární fází:

- **Typ 1** – sudá symetrie, lichý počet vzorků, střed symetrie v hodnotě $M=(N-1)/2$

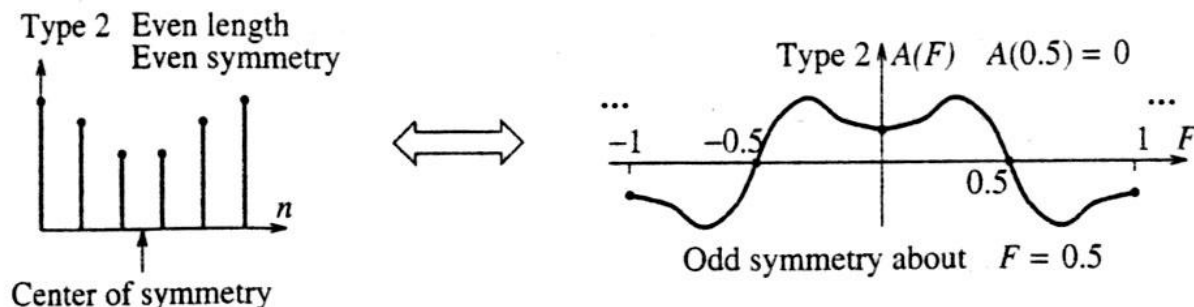


$$H_1(F) = \left[h[M] + 2 \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \cos[(M-k)2\pi F] \right] e^{-j2\pi MF} = A_1(F) e^{-j2\pi MF}$$

- Lineární fáze $-2\pi MF$
- konstantní skupinové zpoždění – M
- amplitudové spektrum $A(F_1)$ je sudě symetrické okolo $F=0$ a $F=0.5$
- $|H_1(0)|$ a $|H_1(0.5)|$ mohou být nenulové

Použití : vhodný pro všechny, typy filtrů , jediné koeficienty vhodné pro pásmovou zadrž

- **Typ 2** – sudá symetrie, sudý počet vzorků N , střed symetrie v hodnotě $M=(N-1)/2$ (mezi dvěma vzorky)

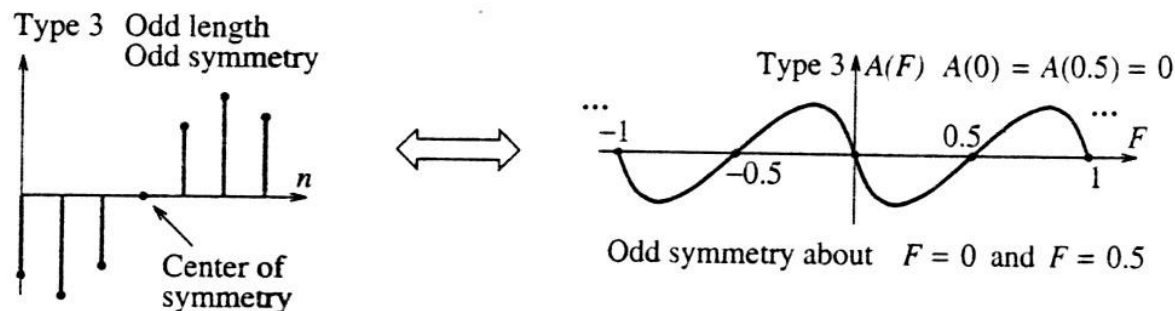


$$H_2(F) = \left[2 \sum_{k=0}^{M-1/2} h[k] \cos[(M-k)2\pi F] \right] e^{-j2\pi MF} = A_2(F) e^{-j2\pi MF}$$

- Lineární fáze $-2\pi MF$
- konstantní skupinové zpoždění – M
- amplitudové spektrum $A(F_1)$ má sudou symetrické okolo $F=0$, lichou symetrie okolo $F=0.5$
- $|H_2(0.5)|$ je vždy nulový

Použití : dolní propust, pásmová propust, diferenciátor, Hilbertův transformátor

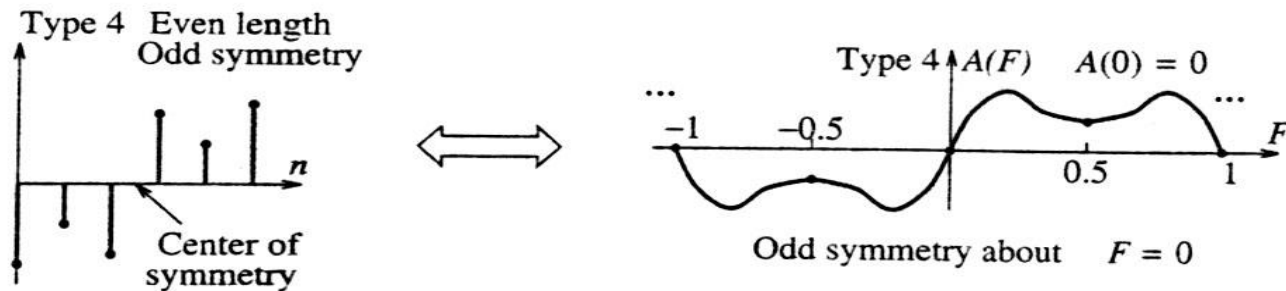
- **Typ 3** – lichá symetrie, lichý počet vzorků N , střed symetrie v hodnotě $M=(N-1)/2$



$$H_3(F) = j \left[2 \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \sin[(M-k)2\pi F] \right] e^{-j2\pi MF} = A_3(F) e^{j(0.5\pi - 2\pi MF)}$$

- Lineární fáze $\pi/2 - 2\pi MF$
- konstantní skupinové zpoždění M
- amplitudové spektrum $A(F_1)$ má lichou symetrii okolo $F=0$ a $F=0.5$
- $|H_3(0)|$ a $|H_3(0.5)|$ je vždy nulový
- Použití : pásmová propust, diferenciátor, Hilbertův transformátor

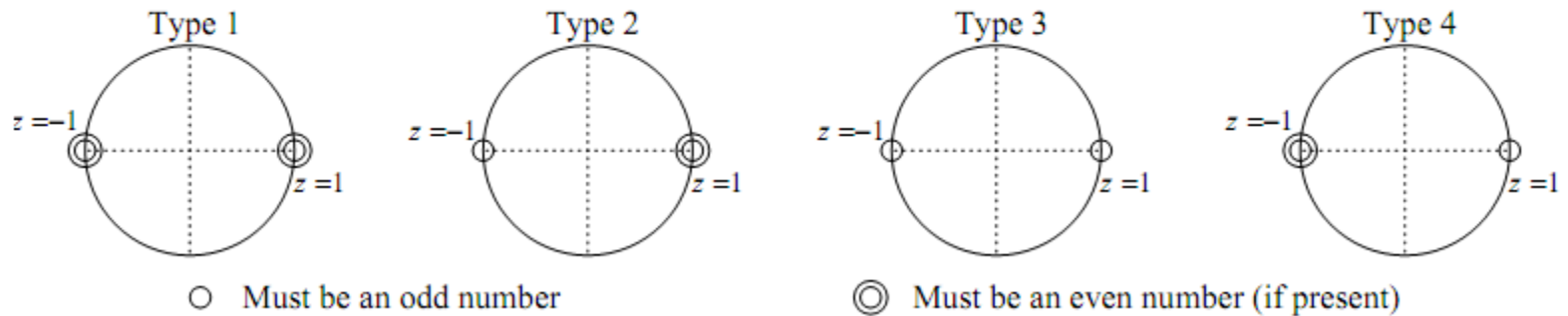
- **Typ 4** – lichá symetrie, sudý počet vzorků N , střed symetrie v hodnotě $M=(N-1)/2$ (mezi dvěma vzorky)



$$H_4(F) = j \left[2 \sum_{k=0}^{M-1/2} h[k] \sin[2(M-k)\pi F] \right] e^{-j2\pi MF} = A_4(F) e^{j(0.5\pi - 2\pi MF)}$$

- Lineární fáze $\pi/2 - 2\pi MF$
- konstantní skupinové zpoždění M
- amplitudové spektrum $A(F_1)$ má lichou symetrii okolo $F=0$ a sudou okolo $F=0.5$
- $|H_4(0)|$ je vždy nulový
- Použití : horní propust, pásmová propust, diferenciátor, Hilbertův transformátor

- Symetrie typu 1 a 2 se používají u základních frekvenčně selektivních filtrů (dolní a horní propust, pásmová propust i pásmová zadrž), symetrie typu 3 se využívá u derivátoru, typ 4 se využívá u Hilbertova transformátoru



- Typ 1: - sudý počet nul v $z = -1$ a sudý v $z = 1$ (pokud se tam vyskytují)
 Typ 2: - lichý počet nul v $z = -1$ a sudý v $z = 1$ (pokud se tam vyskytují)
 Typ 3: - lichý počet nul v $z = 1$ a lichý v $z = -1$
 Typ 4: - lichý počet nul v $z = 1$ a sudý v $z = -1$

Př: Určete pozici všech nul u filtru typu 1 (předpokládáme nejnižší řád) pokud víme, že nuly jsou v pozici $z=0.5e^{j\pi/3}$ a v $z=1$

Př: Určete pozici všech nul u filtru typu 2 (předpokládáme nejnižší řád) pokud víme, že nuly jsou v pozici $z=0.5e^{j\pi/3}$ a v $z=1$

Př. Určete přenosovou funkci a impulzní odezvu filtru s lineární fází typu 3 (nejkratší délky) pokud víme, že jedna nula je v pozici $z=j$ a dvě nuly jsou v pozici $z=1$.

Další typy filtrů

- **Diskrétní integrátor** - počítá integrál pomocí některého ze známých algoritmů numerické matematiky (1-obdélníkové pravidlo, 2-lichoběžníkové pravidlo, 3 –Simpsonovo pravidlo, 4-Ticksovo pravidlo)

$$y(n) = y(n-1) + x(n) \quad (1)$$

$$y(n) = y(n-1) + \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)] \quad (2)$$

$$y(n) = y(n-2) + \frac{1}{3}x(n) + \frac{4}{3}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2) \quad (3)$$

$$y(n) = y(n-2) + 0.3584x(n) + 1.2832x(n-1) + 0.3584x(n-2) \quad (4)$$

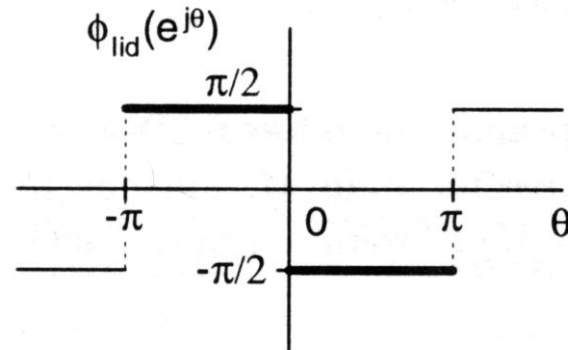
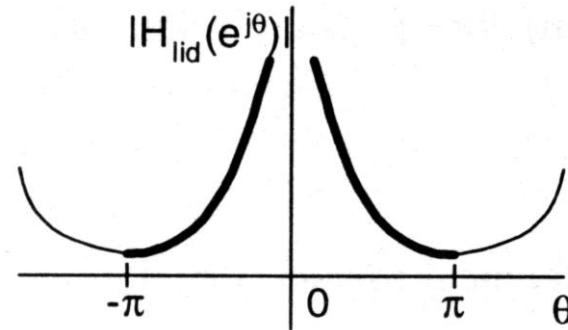
Simpsonův integrál – vhodný pro frekvence $f \in \langle 0, f_{vz}/4 \rangle$

Obdélníkový a lichoběžníkový pro frekvence okolo $f_{vz}/2$

Ticksovo pravidlo -pro širší pásmo integrace s malou chybou

Frekvenční charakteristika ideálního diskrétního integrátoru:

$$H_{id}(e^{j\theta}) = \frac{1}{j\theta} = \frac{1}{\theta} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



- Diskrétní derivátor - je důležitý např. pro stanovení hran v obraze, určování zrychlení z rychlosti u časových průběhů apod.

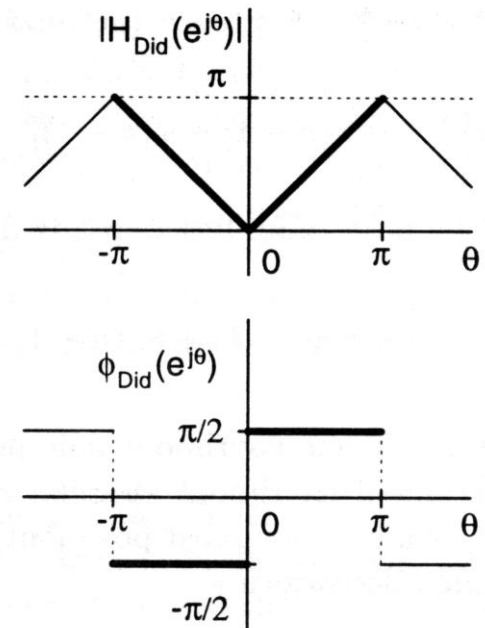
$$y(n) = x(n) - x(n-1) \quad (1)$$

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n+1) - x(n-1)] \quad (2)$$

$$y(n) = \frac{1}{12}[x(n-2) - 8x(n-1) + 8x(n+1) - x(n+2)] \quad (3)$$

Frekvenční charakteristika ideálního diskrétního derivátoru:

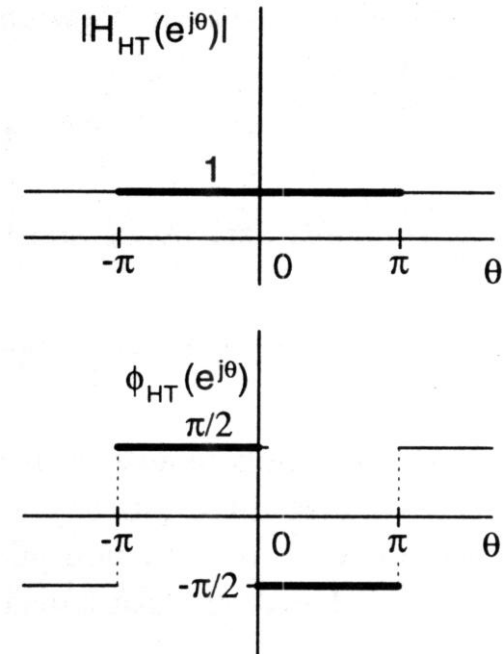
$$H_{Did}(e^{j\theta}) = j\theta, \quad |\theta| \leq \pi$$



- Hilbertův transformátor – používá se k získání imaginární složky ze složky reálné - jedná se o fázový posouvač posouvající fázi v základním intervalu o $-\pi/2$ pro $\theta > 0$ a o $+\pi/2$ pro $\theta < 0$

Ideální frekvenční charakteristika:

$$H_{HT}(e^{j\theta}) = \begin{cases} j, & 0 \leq \theta < \pi \\ -j, & -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$



- Fázové posouvače – mají jednotkovou amplitudovou frekvenční charakteristiku, ale mění průběh fázové charakteristiky na požadovaný. Nejčastěji se používají v kombinaci s jinými filtry (např. IIR) aby bylo dosaženo požadovaného průběhu výsledné fázové charakteristiky (linearita)

Filtr klouzavý průměr

- realizuje klouzavý průměr z daného vzorku a M vzorků předchozích. Používá se pro potlačení periodického rušení superponovaného na konstantní signál, potlačení krátkodobých výkyvů časové řady (vyhlazování trendu v ekonomice)

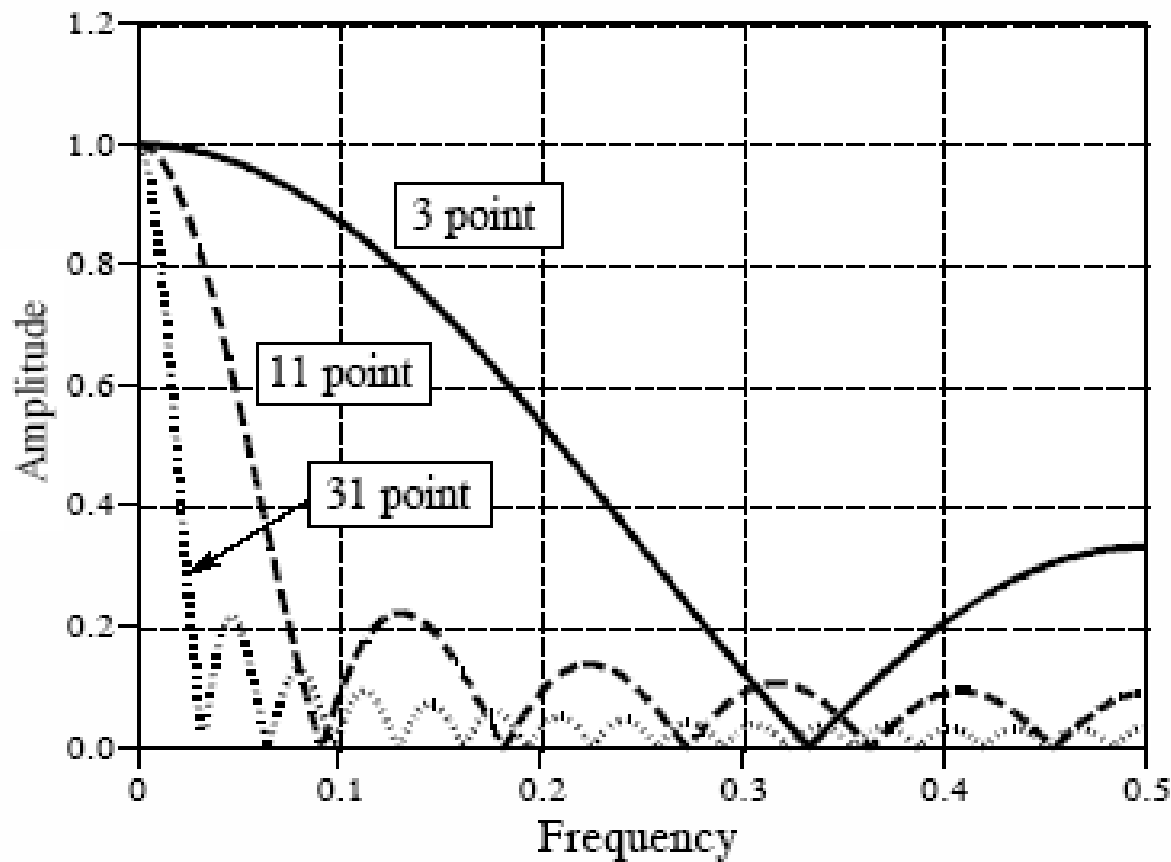
1. Nevážený klouzavý průměr – všechny koeficienty shodné

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=n-(N-1)}^n x(i) = \frac{1}{N} [x(n - (N - 1)) + x(n + 1 - N - 1) + \dots + x(n - 1) + x(n)]$$

Frekvenční charakteristika filtru:

$$|H(f)| = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}$$

$$\varphi_{MA}(e^{j\theta}) = -(N-1)\frac{\theta}{2}$$



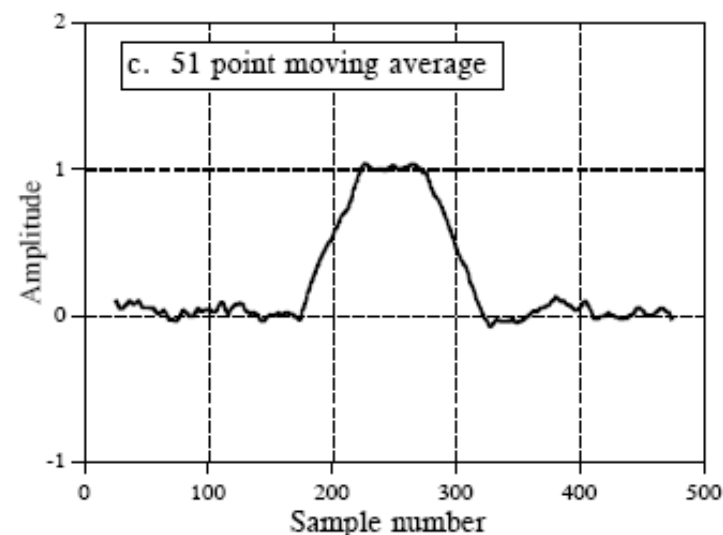
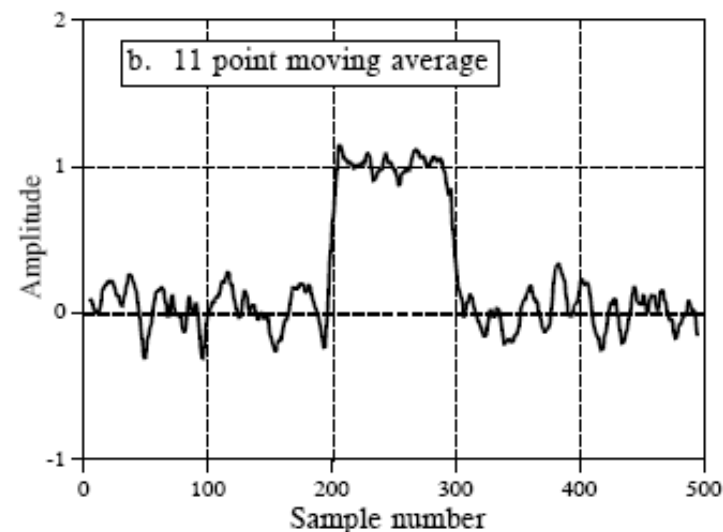
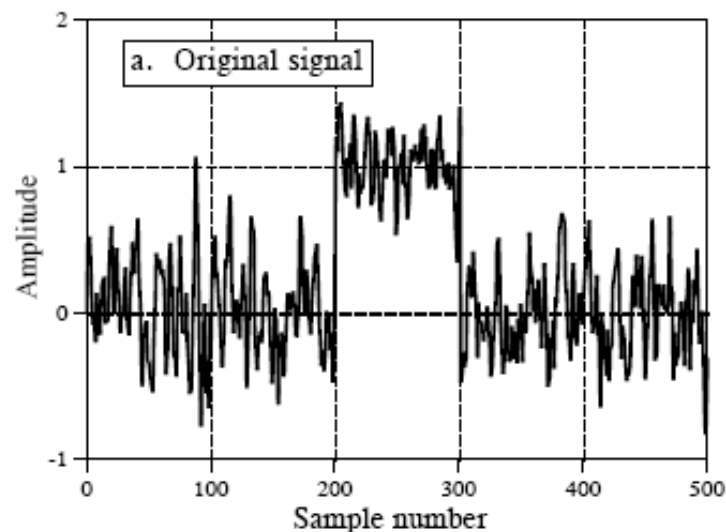
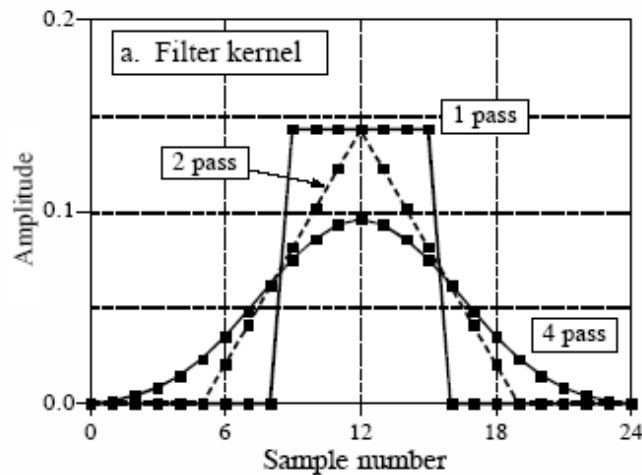


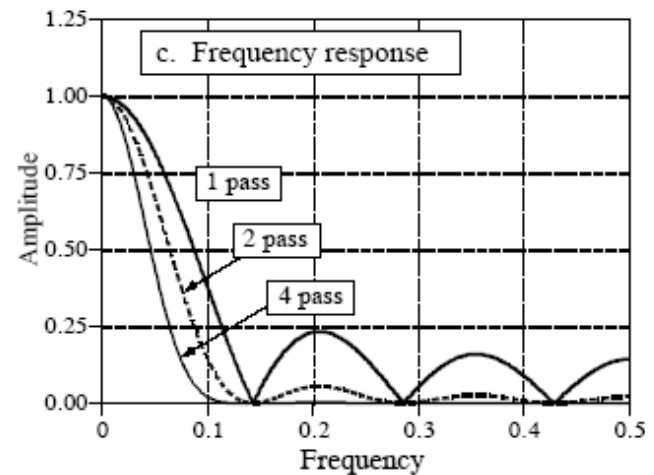
FIGURE 15-1

Example of a moving average filter. In (a), a rectangular pulse is buried in random noise. In (b) and (c), this signal is filtered with 11 and 51 point moving average filters, respectively. As the number of points in the filter increases, the noise becomes lower; however, the edges becoming less sharp. The moving average filter is the *optimal* solution for this problem, providing the lowest noise possible for a given edge sharpness.

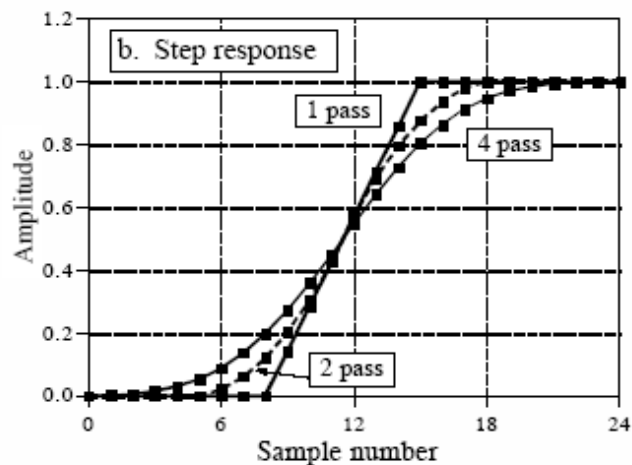
- Klouzavý průměr lze použít opakovaně – odstraňuje lépe šum, ale rozmazává ostré přechody



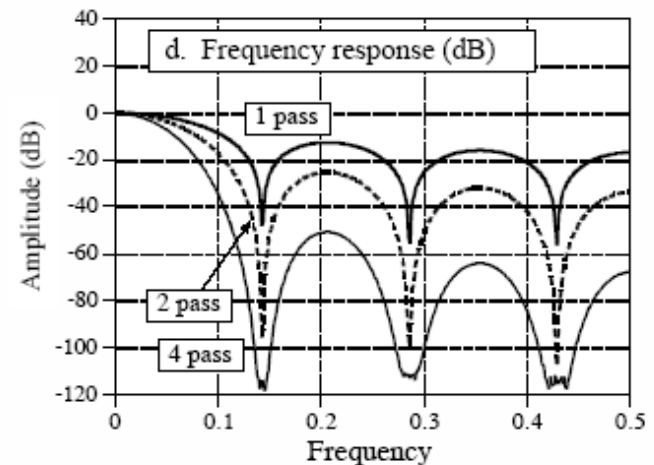
FFT



Integrate



20 Log()

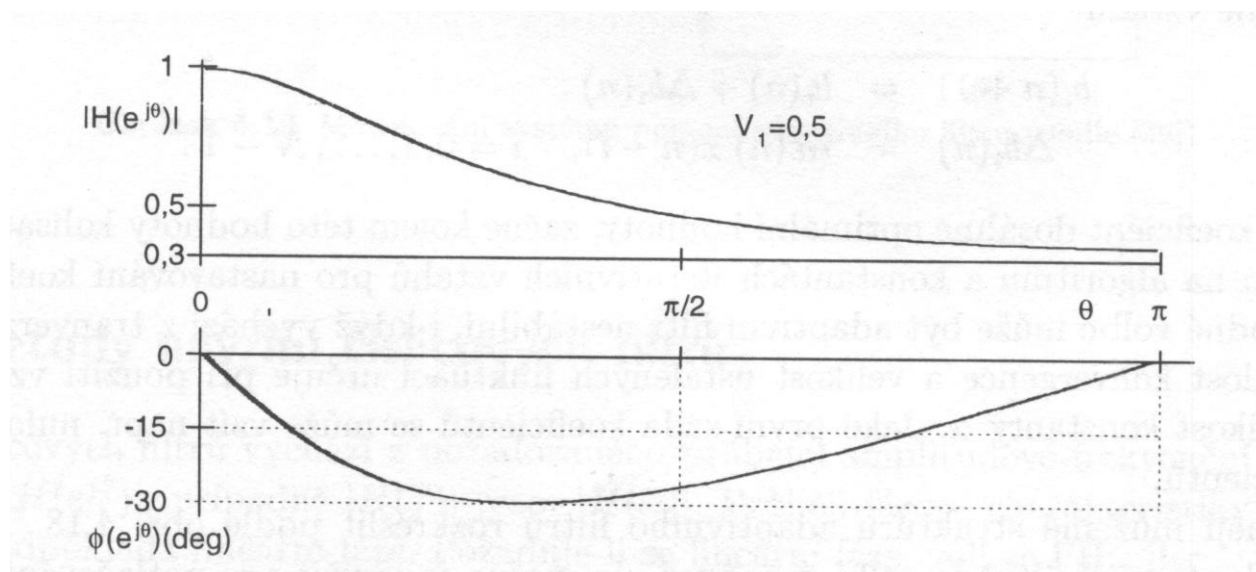


Klouzavý průměr s exponenciálním zapomínáním (exponenciálně vážený klouzavý průměr) – počítá průměr z n posledních hodnot, jejichž váhy V_n exponenciálně klesají se vzdáleností od posledního vzorku (nejstarší vzorek má nejmenší váhu)

$$y(n) = \frac{1}{\sum_{i=n-(N-1)}^n V_1^{n-i}} \sum_{i=n-(N-1)}^n V_1^{n-i} x(i), \quad n \in \langle 0, N \rangle$$

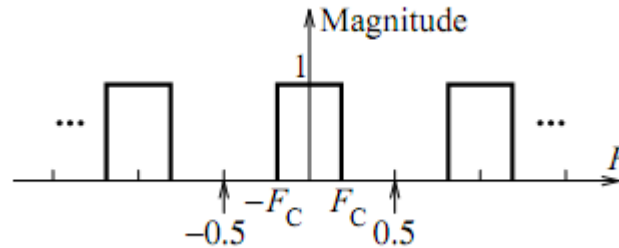
$$y(n) = (1 - V_1) \sum_{i=n-(N-1)}^n V_1^{n-i} x(i)$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1 - V_1}{1 - V_1 e^{-j\theta}}$$



Ideální filtry

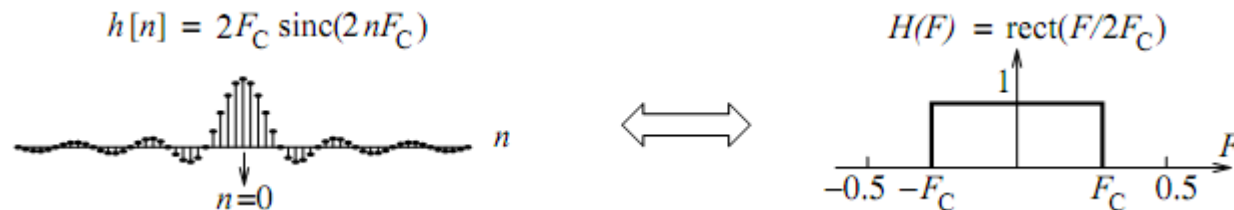
Frekvenční charakteristika ideálního filtru typu dolní propust



Impulzní odezva:

$$h_{\text{LP}}[n] = \int_{-0.5}^{0.5} H_{\text{LP}}(F) e^{j2\pi nF} dF = \int_{-F_C}^{F_C} e^{j2\pi nF} dF = \int_{-F_C}^{F_C} \cos(2\pi nF) dF = \left. \frac{\sin(2\pi nF)}{2\pi n} \right|_{-F_C}^{F_C}$$

$$h_{\text{LP}}[n] = \frac{\sin(2\pi nF_C) - \sin(-2\pi nF_C)}{2\pi n} = \frac{2 \sin(2\pi nF_C)}{2\pi n} = \frac{2F_C \sin(2\pi nF_C)}{2\pi nF_C} = 2F_C \text{sinc}(2nF_C)$$

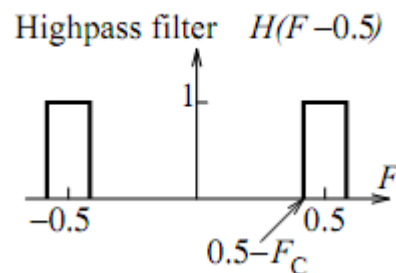
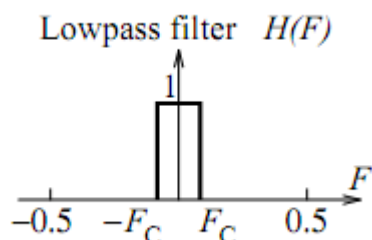


Frekvenční transformace

Filtry se obvykle navrhují jako dolní propusti (DP), přechod na odpovídající typ filtru (HP,PP,PZ) se provádí frekvenční transformací.

Horní propust: - 2 způsoby

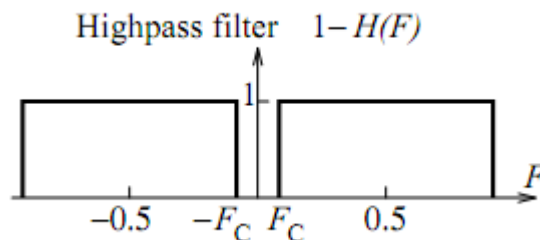
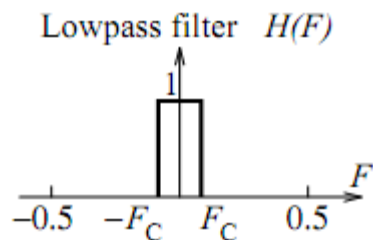
1. Posun spektra dolní



$$\tilde{F}_{H1} = 0.5 - F_C$$

$$h_{H1}[n] = (-1)^n h[n] = 2(-1)^n F_C \text{sinc}(2nF_C)$$

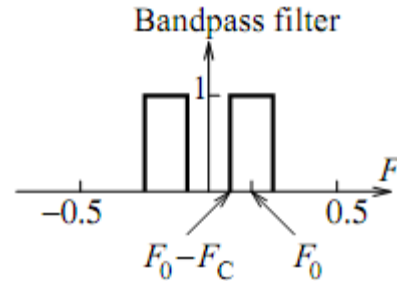
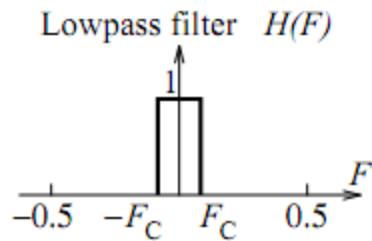
2. Odečtením frekvenční charakteristiky DP od frekvenční charakteristiky all-pass filtru



$$F_{H2} = F_C,$$

$$h_{BS}[n] = \delta[n] - h_{BP}[n] = \delta[n] - 4F_C \cos(2\pi nF_0) \text{sinc}(2nF_C)$$

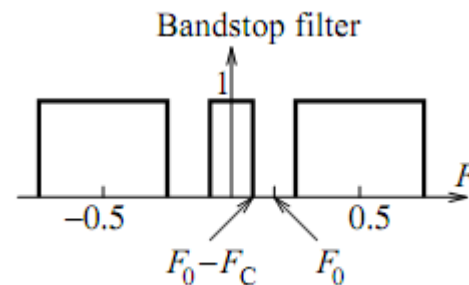
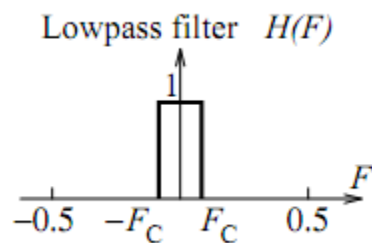
Pásmová propust:



$$H_{BP}(F) = H(F + F_0) + H(F - F_0)$$

$$h_{BP}[n] = 2h[n]\cos(2\pi nF_0) = 4F_C \cos(2\pi nF_0)\text{sinc}(2nF_C)$$

Pásmová zadrž:



$$H_{BS}(F) = 1 - H_{BP}(F)$$

$$h_{BS}[n] = \delta[n] - h_{BP}[n] = \delta[n] - 4F_C \cos(2\pi nF_0)\text{sinc}(2nF_C)$$

Příklad: Použijte frekvenční transformaci pro nalezení frekvenční charakteristiky a impulzní odezvy následujících ideálních filtrů:

- a) Dolní propust $F_c=0.25$
- b) Horní propust $F_c=0.3$
- c) Pásmová propust s $F_1=0.1$ a $F_2=0.3$
- d) Pásmová zadrž s $F_1=0.2$ a $F_2=0.4$

(a) For the lowpass filter, pick the LPF cutoff $F_C = 0.25$. Then, $h[n] = 0.5 \text{ sinc}(0.5n)$.

(b) For a highpass filter whose cutoff is $F_{HP} = 0.3$:

Pick an LPF with $F_C = 0.5 - 0.3 = 0.2$. Then, $h_{HP}[n] = (-1)^n(0.4)\text{sinc}(0.4n)$.

Alternatively, pick $F_C = 0.3$. Then, $h_{HP}[n] = \delta[n] - (0.6)\text{sinc}(0.6n)$.

(c) For a bandpass filter with band edges $[F_1, F_2] = [0.1, 0.3]$:

Pick the LPF cutoff as $F_C = F_2 - F_0 = 0.1$, $F_0 = 0.2$. Then, $h_{BP}[n] = 0.4 \cos(0.4n\pi)\text{sinc}(0.2n)$.

(d) For a bandstop filter with band edges $[F_1, F_2] = [0.2, 0.4]$:

Pick the LPF cutoff as $F_C = F_2 - F_0 = 0.1$, $F_0 = 0.3$. Then, $h_{BS}[n] = \delta[n] - 0.4 \cos(0.6n\pi)\text{sinc}(0.2n)$.

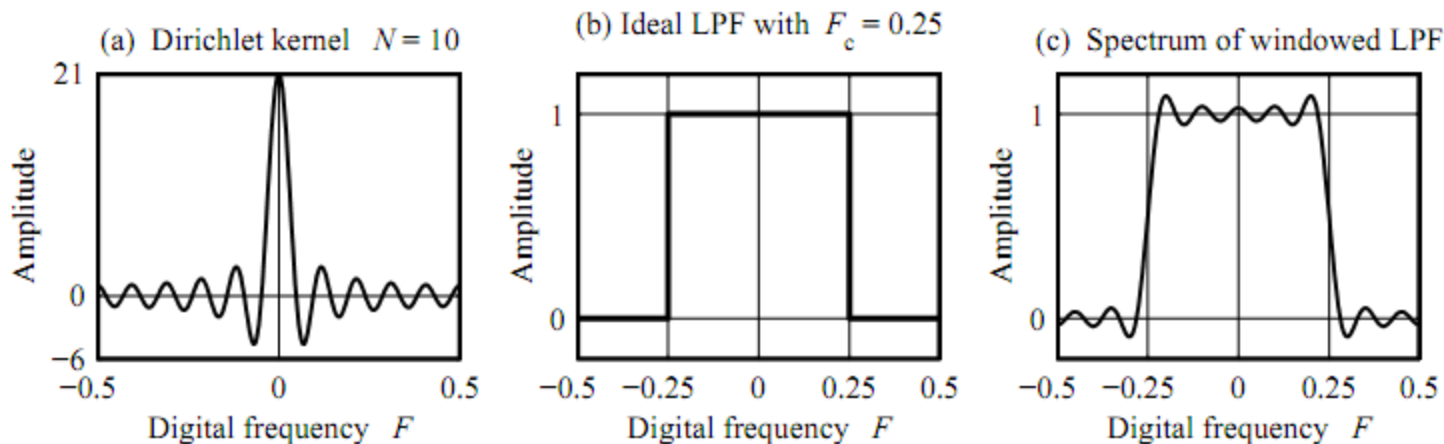
Ideální filtry jsou v praxi nerealizovatelné protože:

- jsou nekauzální (fce sinc je symetrická okolo počátku $n=0$)
- jsou nestabilní (fce sinc není absolutně konvergentní)

Aby bylo možné je realizovat je nutné omezit impulzní odezvu oknem (sinc pro konečnou délku konverguje) a posunout o N vzorků (impulzní odezva se stává kauzální) a je zachovaná symetrie okolo středového bodu (podmínka pro zachování lineární fáze).

Použité okno vždy deformuje tvar frekvenční charakteristiky !!!

Pravoúhlé okno:



Trojúhelníkové okno:

