....

Jméno PŘÍJMENÍ STUDIJNÍ OBOR

TEORETICKÁ ČÁST ZKOUŠKY Z PŘEDMĚTU KMA/MSM - **A**

Doba na vypracování testu je 90 minut.

....

1. (3 body) .

Je dána funkce

$$f(x,y) = \alpha(x+2y),$$

kde $1 < y < x < 2$.

(a) Načrtněte definiční oblast dvourozměrné náhodné veličiny.

(b) Určete neznámou konstantu tak, aby funkce $f(x,y)$ byla funkcí hustoty.

(c) Určete marginální a podmíněné funkce hustoty a distribuční funkce.

(d) Určete $\mathrm{E}\,\boldsymbol{X}$ a $\mathbf{Var}\,\boldsymbol{X}$.

(Integrály nemusíte dopočítávat ...)

2. (2 body) .

Nechť $\mathbf{X} \sim N_3(\mu, \Sigma)$, kde $\mu = (2,-3,4)^T$ a $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Rozhodněte, zda složky vektoru $\boldsymbol{Y} = (X_1 + X_2, 3X_1 - X_2 + X_3)$ jsou nezávislé.

3. (3 body) .

Předpokládejme náhodný výběr rozsahu $n = 10$ z dvourozměrného normálního rozdělení

$$\boldsymbol{X} \sim N\left(\mu, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

kde výběrový průměr je $\overline{\boldsymbol{x}} = (a,a)^T$. Při kterých hodnotách parametru a zamítnu hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\mu} = (0,0)^T$ proti alternativní hypotéze $H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq (0,0)$ na hladině $\alpha = 5\%$?

Nápověda: Kritický obor testu o parametrech $\boldsymbol{\mu}$ při známém Σ založený na náhodném výběru $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ je

$$W = \left\{ \mathcal{X} : n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1} (\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0) > \chi^2_{1-\alpha,p} \right\}.$$

4. (2 body) .

Nechť $A_j \sim f_j(x) = j \cdot \left(1 - \dfrac{x}{3-j}\right), x \in (0, 3-j), j = 1,2$. Podle rozhodovacího pravidla diskriminační analýzy založené na maximálně věrohodnostním přístupu určete, do které skupiny bude zařazen bod $3/4$.

Načrtněte obě funkce hustoty a na obrázku označte hranice pro rozhodovací pravidlo.