Analýza a zpracování signálů

3. Číselné řady, jejich vlastnosti a základní operace, náhodné signály

Diskrétní signál – funkce nezávislé proměnné.

!!! Pozor !!!! : signál není definován mezi dvěma následujícími vzorky (a není tam ani nulový).

Signál (posloupnost vzorků) může být definován :

- jako funkce, např.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{n = 1...3} \\ 4 & \text{n = 2} \\ 0 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

- jako tabulka hodnot

n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x[n]	...	0	0	0	1	4	1	0	0

- jako posloupnost x[n]= {..., 0, 0, 0,1, 4, 1, 0, 0 }

- jako posloupnost konečné délky x[n]= {3, -1, -2, 5, 0, 4, 1, -1 }

Charakteristiky signálu:

- Diskrétní součet

$$S_D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

- Absolutní součet

$$S_A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|$$

- Kumulativní součet

$$S_C[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Energie

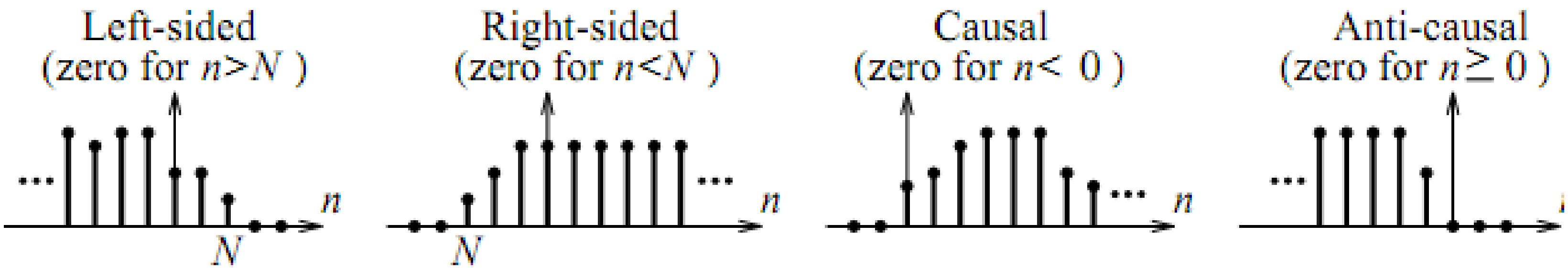
- pro neperiodické signály je definována jako součet okamžitých výkonů

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p[n]$$

- pro periodické signály je energie nekonečná a neposkytuje žádnou užitečnou informaci – počítají se průměrné hodnoty v rámci jedné periody

Diskrétní signály:

- levostranné
- pravostranné
- kauzální
- antikauzální



- periodické opakují se po N vzorcích (N je perioda, musí to být vždy celé číslo).

$$x[n]=x[n \pm kN], \quad \text{pro} \quad k=1,2,3, \ldots$$

Perioda N součtu periodických diskrétních signálů je rovna nejmenšímu společnému násobku dílčích period.

Příklady:

a) Jaká je perioda následujícího signálu ?

$$x[n] = \{\ldots,\ \overset{\Downarrow}{1},\ 2,\ 0,\ 0,\ 4,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 4,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 4,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 4,\ \ldots\}.$$

b) Jaká je perioda součtu signálu g[n]=x[n]+y[n] ? Jaké jsou hodnoty vzorků jedné periody signálu g[n]

$$x[n] = \{\ldots,\ \overset{\Downarrow}{1},\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

$$y[n] = \{\ldots,\ \overset{\Downarrow}{1},\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

- Průměrná hodnota periodického signálu $$x_{av} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]$$
- Průměrný výkon periodického signálu $$P = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \left|x[m]\right|^2$$

U neperiodických signálů lze x_{av} a P uvažovat jako limitní případy:

$$x_{av} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1}\sum_{m=-L}^{L} x[m]$$

$$P = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1}\sum_{m=-L}^{L} \left|x[m]\right|^2$$

Signály s konečnou energií $\Rightarrow$ energetické signály

Signály s konečným průměrným výkonem $\Rightarrow$ výkonové signály

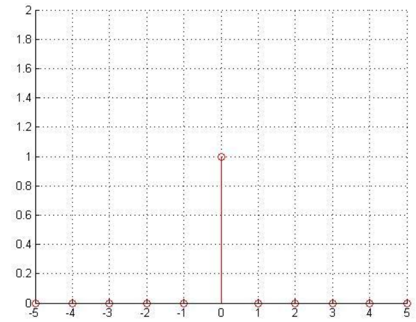
U energie a výkonu se při zpracování diskrétních signálů obvykle neudávají jednotky [watt] a [joule], protože často zpracováváme pouze řadu čísel bezrozměrných)

Příklady k procvičení:

1. Uvažujme signál x[n]={1,2,0,0,4}. Jaká je energie x[n]?
2. Uvažujme signál x[n]={…,1,2,0,0,4, 1,2,0,0,4, 1,2,0,0,4,1,2,…}. Určete průměrný výkon.

Základní diskrétní signály

- Jednotkový impuls



$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Vlastnosti impulsu :

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k] = x[k]$$

Filtrační vlastnosti impulsu (sifting property)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-k] = x[k]$$ impuls propouští pouze hodnotu v n=k

$\Rightarrow$ Diskrétní signál může být reprezentován jako součet posunutých impulsů vážených hodnotou x[k].

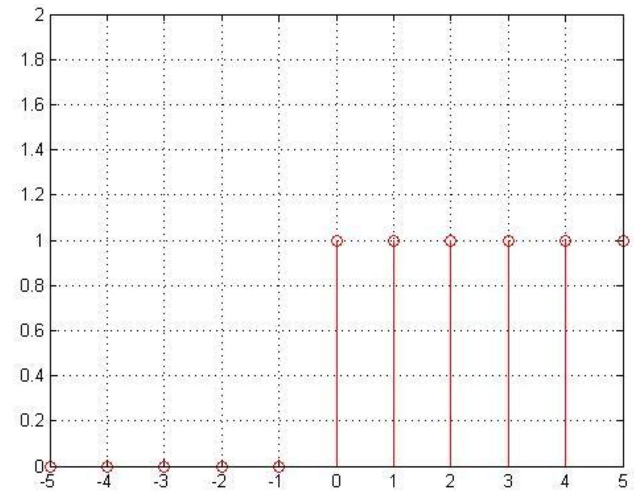
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$\Rightarrow$ Toho se využívá při určení odezvy LTI systému, pokud známe impulsní charakteristiku

- Jednotkový skok

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

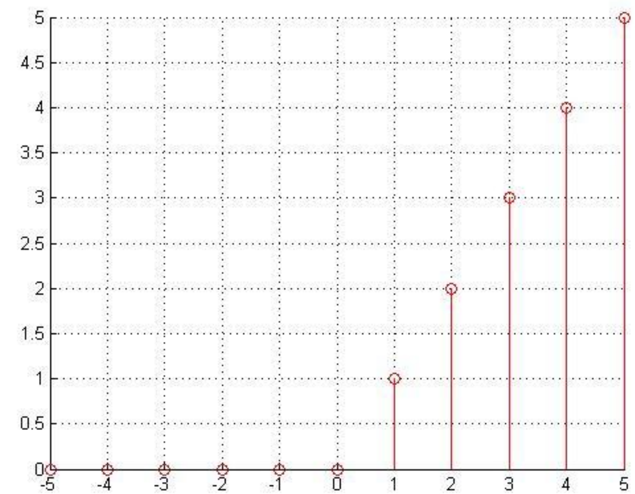
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$



- Lineární funkce (ramp)

$$r[n] = nu[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & n \geq 0 \end{cases}$$

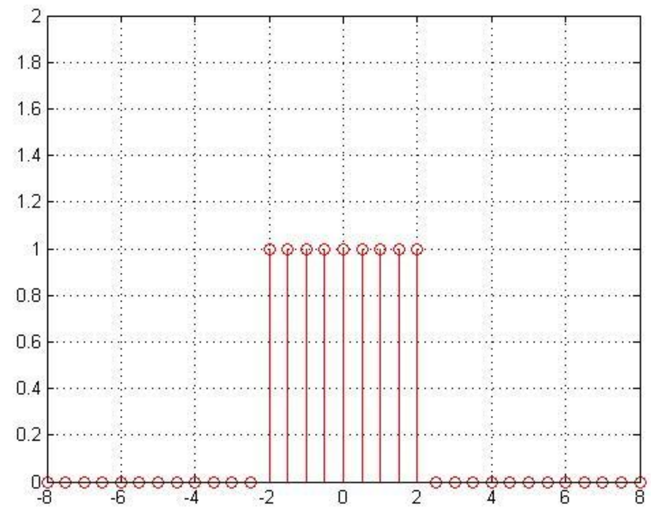
$$r[n] = \sum_{k=0}^{\infty} k\delta[n-k]$$



Diskrétní pulzní signály

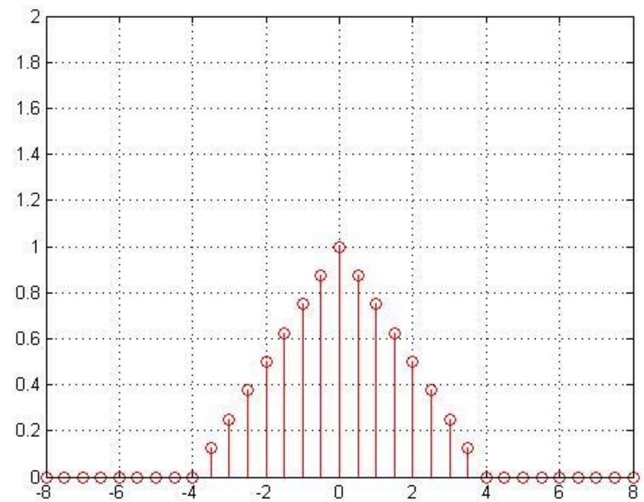
Obdélníkový pulz :

$$rect\left(\frac{n}{2N}\right)=\begin{cases}1 & |n|\leq N\\ 0 & pro\ ostatní\ n\end{cases}$$



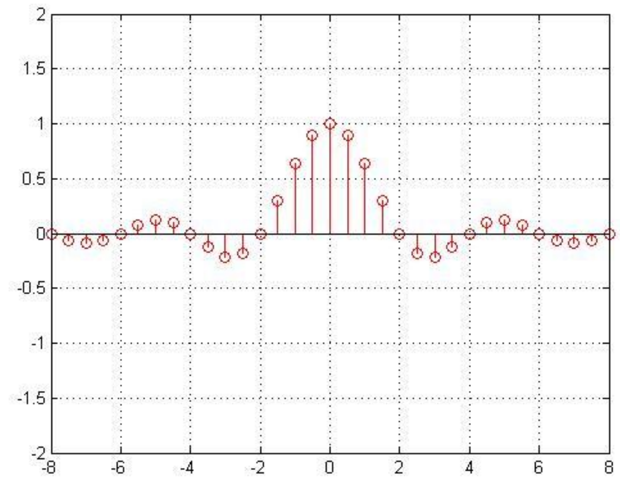
Trojúheníkový pulz :

$$tri\left(\frac{n}{N}\right)=\begin{cases}1-\frac{|n|}{N} & |n|\leq N\\ 0 & pro\ ostatní\ n\end{cases}$$



- Diskrétní funkce sinc:

$$\sin c\left(\frac{n}{N}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\left(\frac{n\pi}{N}\right)} \qquad \text{sinc}(0)=1$$

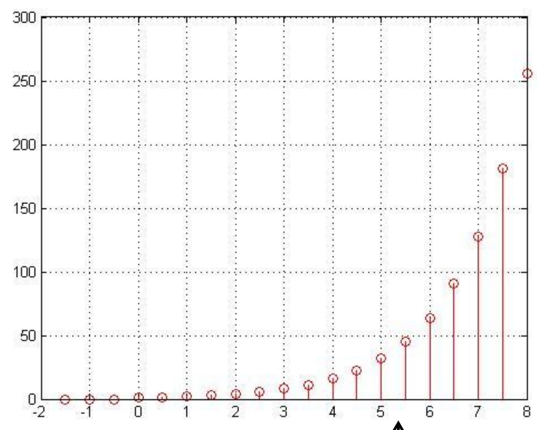


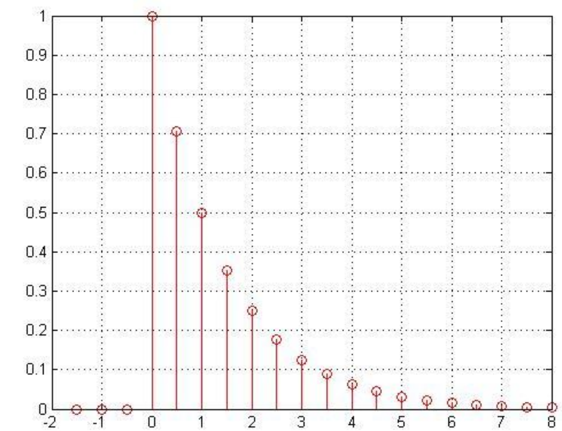
funkce sinc(n/N) je rovná nule v n=kN, kde k=±1, ±2, ±3 …

Obálka funkce sinc má hlavní lalok a klesající postranní laloky.

- Diskrétní exponenciála:

$$x[n]=\alpha^{n}u[n]$$





Pro reálnou hodnotu α exponenciála buď roste (α>0) nebo klesá (α<0).
Pro komplexní $\alpha = re^{j\theta}$ $x[n]= r^{n}[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)]u[n]$

Diskrétní sinusoida

- Vznikne vzorkováním analogové sinusoidy $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ v okamžicích t_S.
- Vzorkovací frekvence $S=1/t_S$

$$x[n]=\cos(2\pi\cdot f\cdot nt_s+\Theta)=\cos(2\pi\cdot n\frac{f}{S}+\Theta)=\cos(2\pi\cdot n\cdot F+\Theta)$$

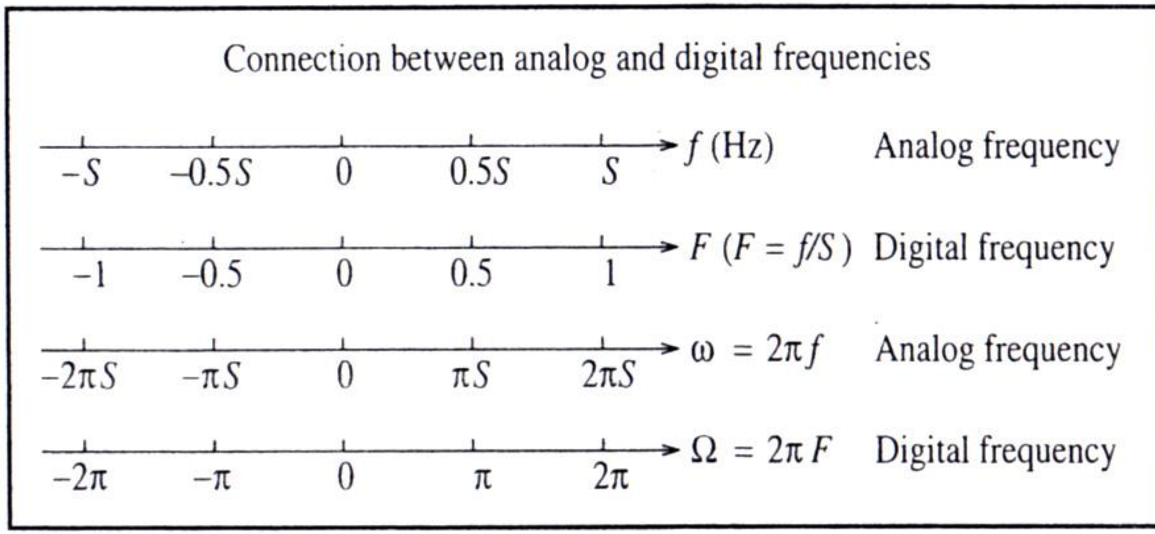
nebo obecná komplexní sinusoida

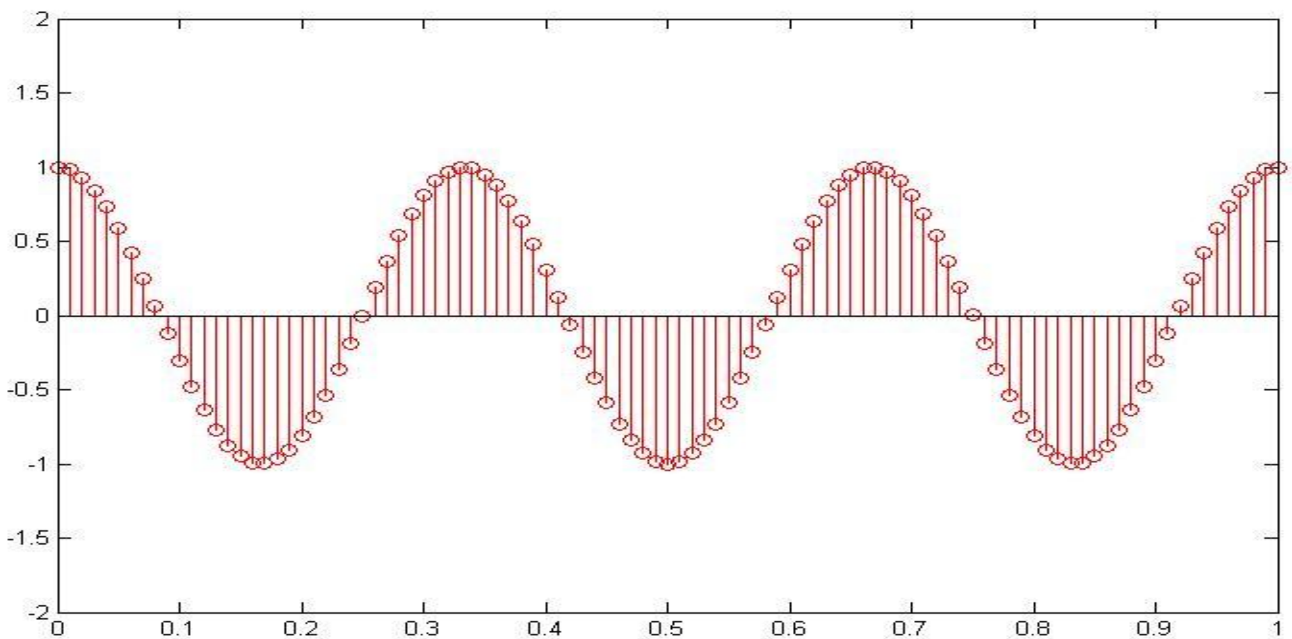
$$x[n]=e^{j2\pi\cdot n\cdot F+\Theta}=\cos(2\pi\cdot n\cdot F+\Theta)+j\sin(2\pi\cdot n\cdot F+\Theta)$$

f – analogová frekvence [Hz] $\omega = 2\pi f$ - úhlová frekvence [rad]

F – normalizovaná frekvence F=f/S - tzv číslicová frekvence [cykly/vzorek]

Ω – číslicová úhlová frekvence $\Omega = 2\pi F$ [rad/vzorek]


Connection between analog and digital frequencies
−S
−0.5S
0
0.5S
S
f (Hz)
Analog frequency
−1
−0.5
0
0.5
1
F (F = f/S)
Digital frequency
−2πS
−πS
0
πS
2πS
ω = 2πf
Analog frequency
−2π
−π
0
π
2π
Ω = 2πF
Digital frequency


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Analogová sinusoida $x(t)=\cos(2\pi f_0+\Theta)$ má dvě významné vlastnosti:

- je periodická v čase pro každou frekvenci f_0
- je jednoznačně určená svojí frekvencí

!!! POZOR !!! Diskrétní sinusoidy tyto vlastnosti obecně nemusí splňovat.

Periodicita: $x[n+M] = x[n]$

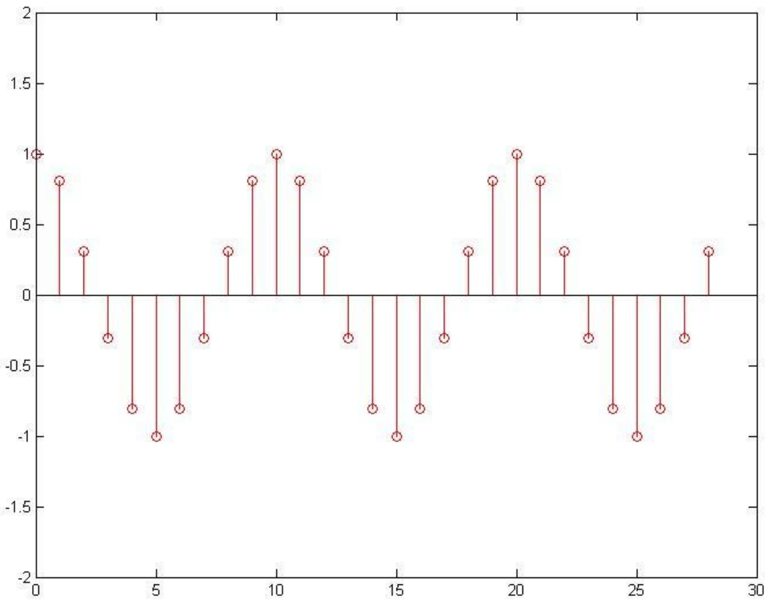
$$\cos(2\pi nF_0+\Theta) = \cos(2\pi(n+N)F_0+\Theta) = \cos(2\pi nF_0+\Theta+2\pi NF_0)$$

jsou ekvivalentní, pouze pokud je NF_0 rovno celému číslu k

$$\Downarrow$$

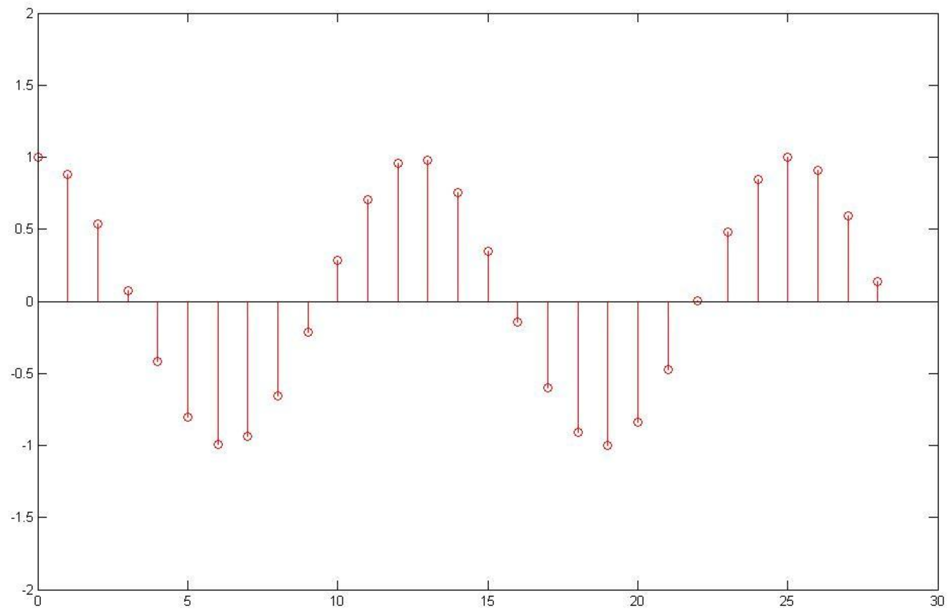
F_0 musí být rovno k/N

Diskrétní sinusoida je periodická pouze tehdy, když je její číslicová frekvence racionálním zlomkem, tj. lze ji vyjádřit jako poměr dvou celých čísel.
Platí, že jedna perioda vzorkované diskrétní sinusoidy je získána z k period analogového signálu



Periodická sinusoida

Neperiodická sinusoida



Uvažujme $x[n]= \cos(2\pi nF_0+\Theta)$ a přidejme celé číslo m k F_0

$$x[n]= \cos(2\pi n(F_0+m)+\Theta) = x[n]= \cos(2\pi nF_0+\Theta + 2\pi nm) = x[n]$$

$$\Downarrow$$

diskrétní sinusoidy jsou identické pro frekvence $F_0 + m$

$$\Downarrow$$

spektrum diskrétní sinusoidy je periodické

$$\Downarrow$$

nelze od sebe odlišit vzorky sinusoid s frekvencemi $F_0 \pm m$

Pro diskrétní sinusoidy a harmonické signály se zavádí tzv. centrální perioda (základní rozsah)

$$-0.5 \leq F \leq 0.5$$

Diskrétní sinusoidy mohou být jednoznačně identifikovány pouze pokud mají frekvenci v základním rozsahu. Sinusoida s frekvencí F_0 větší než základní rozsah může být reprezentována jako $F_a=F_0-M$ (F_a je tzv. „alias“ frekvence).

Základní operace se signály

- Posun signálu
- Otočení signálu
- Decimace
- Interpolace

Posun signálu:

signál x[n] může být posunut (v čase) záměnou nezávisle proměnné *n* za *n-k* , kde *k* je celé číslo.

k>0 – zpoždění signálu o k časových jednotek (posun signálu doprava)

k<0 – předsunutí signálu o *k* jednotek doleva.

Je- li signál uložen na disku (off-line zpracování) jsou možné oba posuny, pro real-time zpracování, není možný posun doleva.

Při posunu signálu se posouvá počátek signálu do hodnoty :

$$n_N = n \pm k$$

Otočení signálu :

y[n]=x[-n] reprezentuje časově otočenou verzi x[n] („zrcadlový obraz x[n]) okolo počátku.

Otočení signálu : y[n]=x[-n] reprezentuje časově otočenou verzi x[n] („zrcadlový obraz x[n]”) okolo počátku.

Signál y[n] = x[-n-k] lze získat 2 způsoby:

a) x[n] $\Rightarrow$ zpoždění (posun do prava) o *k* vzorků $\Rightarrow$ x[n-k] $\Rightarrow$ otočení $\Rightarrow$ x[-n-k]

b) x[n] $\Rightarrow$ otočení x[-n] $\Rightarrow$ předsunutí (posun doleva) o k vzorků $\Rightarrow$ x[-n-k]

Decimace signálu

- proces který redukuje délku signálu (zmenšuje délku) odstraněním určitých vzorků. Obecně decimace faktorem N znamená, že zvolíme každý N-tý vzorek původního signálu $\Rightarrow$ výsledný signál je N-krát kratší

$$y[n] = x[Nn]$$

Interpolace signálu

– proces ve kterém prodlužujeme signál přidáním dalších vzorků. Pro N-násobnou interpolaci dostáváme N-krát delší signál (bereme vzorky v N-krát kratším úseku).

- Pokud známe analogový signál (z něhož vzniknul diskrétní signál y[n]), nebo umíme vyjádřit y[n], pak není určení interpolace problém.
- Pokud neznáme analytickou podobu signálu je nutné doplnit vzorky:
  - „zero interpolation“ - hodnoty přidaných vzorků jsou nulové, tato operace se označuje jako „up-sampling“

$$y[n] = \begin{cases} x(n/N) & n = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \end{cases}$$

  - „step interpolation“ - hodnoty přidaných vzorků jsou shodné s předchozí hodnotou
  - „linear interpolation“ - hodnoty přidaných vzorků vytváří lineární funkci s okolními vzorky

interpolace faktorem N se označuje $x^{\uparrow}[n/N]$

!!! POZOR !! na pořadí prováděných operací decimace a iterpolace – nemusí to být inverzní operace (viz příklad).

Neceločíselné zpoždění (fractional delays)

v některých praktických případech se požaduje neceločíselné zpoždění (např. o polovinu vzorku), které lze implementovat operacemi decimace a interpolace.

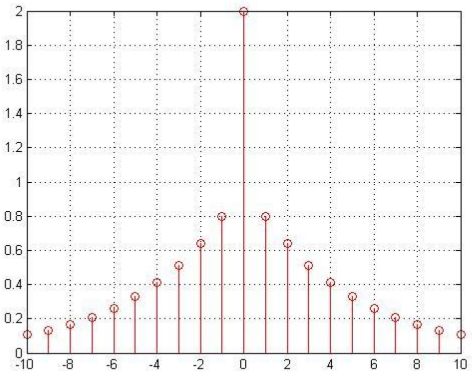
Př. Chceme vytvořit signál $$y[n] = x\left[n - \frac{M}{N}\right] = x\left[\frac{n-M}{N}\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{\text{Interpolace faktorem } N} \xrightarrow{x^{\uparrow}[n/N]} \boxed{\text{Zpoždění o M vzorků}} \xrightarrow{x[(n-M)/N]}$$

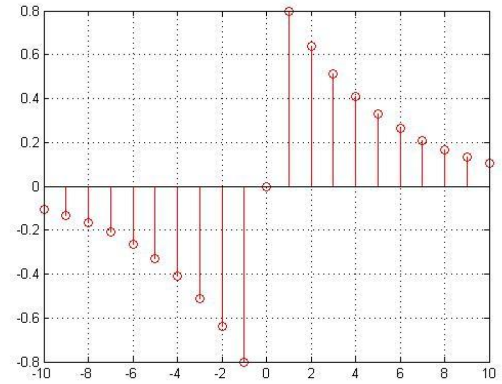
$$x[(n-M)/N] \longrightarrow \boxed{\text{decimace faktorem } N} \longrightarrow x[(Nn-M)/N]$$

Symetrie signálu

- Symetrie (sudá symetrie): x[n] = x[-n]



- Antisymetrie (lichá symetrie): x[n] = -x[-n]



- Symetrie a antisymetrie se vzájemně vylučují. Pokud je signál vytvořen jako součet symetrickéhoi a antisymetrického signálu, tak výsledný signál není ani symetrický, ani antisymetrický.

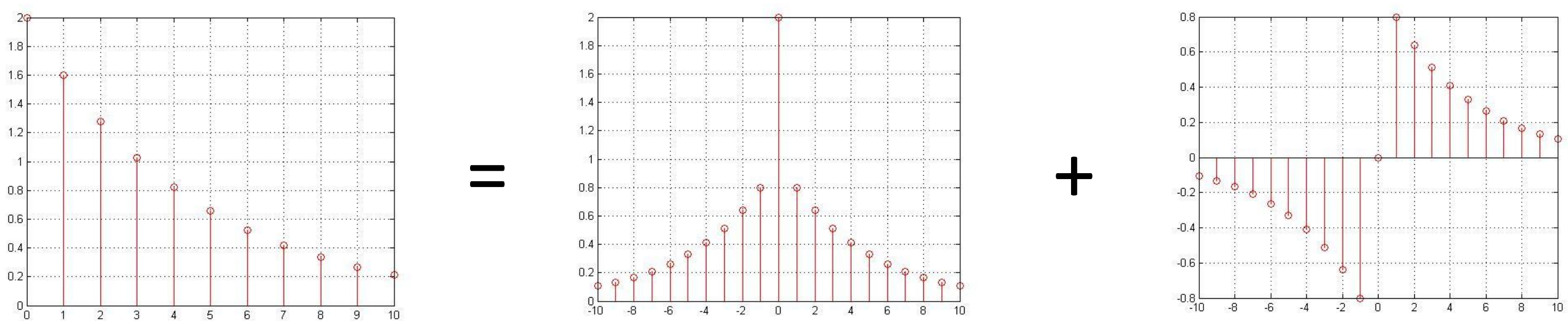
$$\Downarrow$$

Libovolný nesymetrický signál může být vytvořen jako součet symetrického a antisymetrického signálu.

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$$x_e[n] = 0.5x[n] + 0.5x[-n]$$

$$x_o[n] = 0.5x[n] - 0.5x[-n]$$



Pokud je signál x[n]:

- symetrický - x_o je nulové
- antisymetrický - x_e je nulové

Příklady k procvičení:

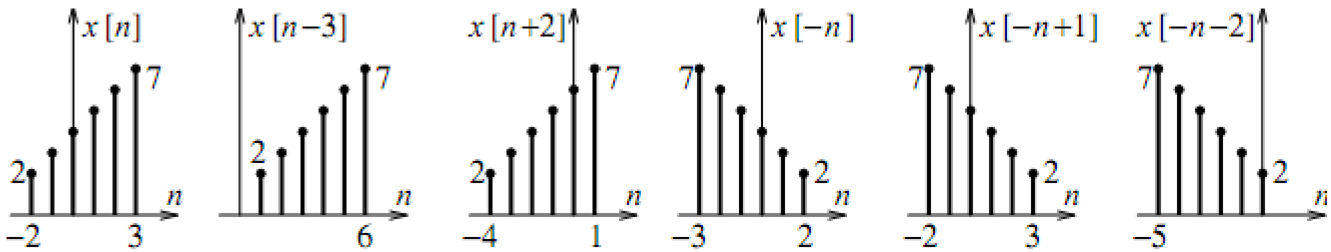
1. Pro signál $x[n]=\{2,3,4,5,6,7\}$ (červená hodnota značí okamžik n=0) určete:
   a) $y[n]=x[n-3]$
   b) $f[n] = x[n+2]$
   c) $g[n] = x[-n]$
   d) $h[n] = x[-n+1]$
   e) $s[n] = x[-n-2]$

2. Signál $x[n]=\{4, -2, 4, -6, 0\}$ dekomponujte na součet symetrického a antisymetrického signálu
3. Pro signál $x[n]=\{1,2,5,-1\}$ vytvořte $x[2n]$ a různé verze interpolovaného signálu $x^{\uparrow}[n/3]$

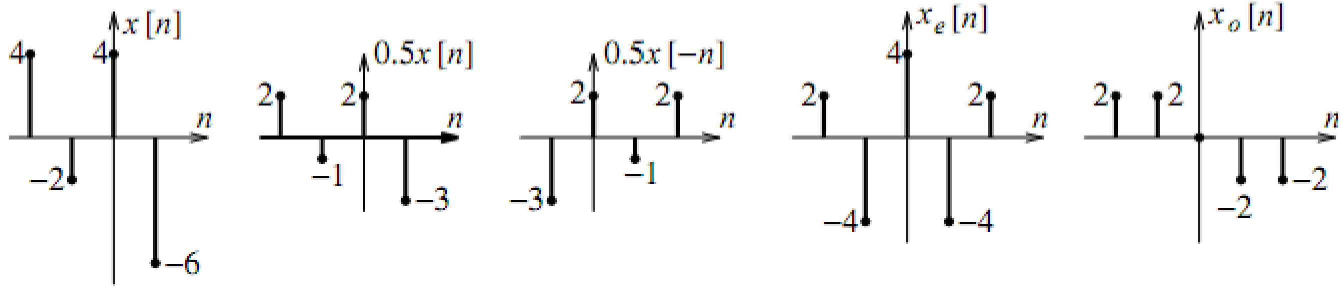
4. Pro signál $x[n]=\{3,4,5,6\}$ určete : (použijte „step“ interpolaci)
   a) $g[n]=x[2n-1]$ a $h[n]=x[0.5n-1]$
   b) $y[n]=x[2n/3]$

5. Pro signál $x[n]=\{2,4,6,8\}$ určete $y[n]=x[n-0.5]$. (Použijte lineární interpolaci.)

1.


x [n]
2
7
n
−2
3
x [n−3]
2
7
n
6
x [n+2]
2
7
n
−4
1
x [−n]
7
2
n
−3
2
x [−n+1]
7
2
n
−2
3
x [−n−2]
7
2
n
−5

2.


x [n]
4
4
−2
−6
n
0.5x [n]
2
2
−1
−3
n
0.5x [−n]
2
2
−3
−1
n
x_e [n]
4
2
2
−4
−4
n
x_o [n]
2
2
−2
−2
n

Úvod do náhodných signálů

- deterministické signály (predikovatelné) – každá realizace experimentu (měření za stejných podmínek) dává stejné hodnoty (stejný signál)
- náhodné signály – stejný experiment dává rozdílné výsledky, opakováním experimentu dostáváme řadu realizací (signálů) - tzv. náhodný proces X(t). Výsledek experimentu lze popsat pravděpodobnostně (pravděpodobností

  Pr(A) $\in$ <0, 1>.
- K úplnému popisu náhodného procesu musíme:
  1. Znát rozsah hodnot náhodné proměnné x (může být konečný i nekonečný).
  2. Určit pravděpodobnosti s jakými se vyskytují jednotlivé hodnoty – tzv. distribuční funkci F(x) $\in$<0, 1>.

$$F\left(x_1\right) = \Pr(x < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1) d(x)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\Pr(x_1 \le x \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Charakteristiky náhodných signálů

Střední hodnota (očekávaná hodnota): $$\overline{E}(x) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Kvadrát střední hodnoty: $$\overline{E}(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

Momenty: n-tý moment: $$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f(x)dx$$

Centrální momenty: $$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^n \cdot f(x)dx$$

μ_2 - rozptyl :

$$\delta_x^2 = \overline{E}(x - m_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx = \overline{E}(x^2) - m_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 \cdot f(x)dx - m_x^2$$

Rozptyl δ_x^2 určuje podíl střídavé složky signálu, odmocnina rozptylu je tzv. směrodatná odchylka δ_x -určuje míru nejistoty měření signálu.

Pro periodické signály s periodou T lze rozptyl určit jako:

$$\delta_x^2 = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt}_{\text{celkový výkon signálu}} - \Bigg[\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt}_{\text{výkon stejnosměrné složky}}\Bigg]^2$$

Rozptyl některých periodických signálů:

Sinusoida:

$$x(t) = A\cos(2\pi\frac{t}{T} + \Theta) \quad \rightarrow \quad \delta^2 = \frac{A^2}{2}$$

Pilovitý průběh

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\frac{t}{T} \quad 0 \le t \le T \\ x(t) &= A\left(1 - \frac{|t|}{0.5T}\right) \quad |t| \le 0.5T \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \delta^2 = \frac{A^2}{12}$$

Obdélník:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A \quad 0 \le t < 0.5T \\ x(t) &= 0 \quad 0.5 \le t < T \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \delta^2 = \frac{A^2}{4}$$

Pravděpodobnostní rozložení

Rovnoměrné rozložení:

- každá z hodnot je stejně pravděpodobná
- f(x) je pravoúhlý impuls s jednotkovou plochou definovaný jako:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & pro\ ostatní\ x \end{cases}$$

- střední hodnota $0.5(\alpha + \beta)$

- rozptyl:

$$\delta_x^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

- distribuční funkce:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{(x-a)}{b-\alpha} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Gausovo (normální rozložení):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_x^2}} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\delta_x} \right]$$

- vrchol pro $x=m_x$,
- sudá symetrie okolo vrcholu $x=m_x$
- inflexní body v $m_x \pm \delta$

Vlastnosti:

1. Pokud má x normální rozložení $\Rightarrow$ax+b, a>0 má také normální rozložení
2. Součet signálů s normálním rozložením má také normální rozložení, střední hodnota součtu je rovná součtu středních hodnot dílčích rozložení, rozptyl je roven součtu rozptylů.
3. Poměr $(x-m_x)$ a δ_x je pro normální rozložení je $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $\Rightarrow$ u normálního rozložení lze pracovat s $(x-m_x)$ místo s δ_x
4. Všechny momenty vyšších řádů lze pro Gaussovskou proměnnou určit pouze na základě znalosti prvních dvou momentů.

   pro liché n jsou n-té momenty nulové

   pro sudé n=2k je n-tý centrální moment: $\frac{(2k)!}{k!\,2^k}$

Gausovská distribuční funkce:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{(\lambda-m_x)^2}{2\delta^2}\right]d\lambda$$

Standardní Gausovské rozložení:

střední hodnota nulová,

´ rozptyl roven jedné

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}d\lambda$$

Chybová funkce: - často používaná funkce, tabulky erf funkce jsou rozšířené, k dispozici i v MATLABU (erf(x)).

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\lambda^2}dx$$

Gausovskou distribuční funkci lze vyjádřit chybovou funkcí:

$$F(x)=P\left(\frac{x-m_x}{\delta}\right)=0.5+0.5\,erf\left(\frac{x-m_x}{\delta\sqrt{2}}\right)$$

Pravděpodobnost, že x leží mezi x_1 a x_2 lze vyjádřit erf funkcí.

$$P[x_1 \le x \le x_2] = F(x_2) - F(x_1) = 0.5 erf\left(\frac{x_2 - m_x}{\delta\sqrt{2}}\right) - erf\left(\frac{x_1 - m_x}{\delta\sqrt{2}}\right)$$

Q-funkce:

- pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná s normálním rozložením nabývá hodnoty >x

$$Q(x) = 1 - P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{\frac{-\lambda^2}{2}} d\lambda$$

Q – funkci lze vyjádřit chybovou funkcí:

$$Q(x) = 0.5 - 0.5 erf\,(x\sqrt{2})$$

Pravděpodobnost, že x leží mezi x_1 a x_2 lze vyjádřit Q - funkcí.

$$P[x_1 \leq x \leq x_2] = Q\left(\frac{x_2 - m_x}{\delta}\right) - Q\left(\frac{x_1 - m_x}{\delta}\right)$$

Centrální limitní věta:

Součet velkého množství náhodných signálů s libovolným rozložením (ale stejným), konečným průměrem (střední hodnotou), konverguje k normálnímu rozložení (má asymptoticky normální rozložení).

Věta platí i pro diskrétní náhodné proměnné.

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_i, n \qquad n >> 1$$

$$\Downarrow$$

$$f_n(s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma_x^2}} \exp\left(- \frac{(s - nm_x)^2}{2n\sigma_x^2} \right), \qquad n >> 1$$

Náhodné signály:

- Stacionární - pravděpodobnostní popis signálu nezávisí na počátku časové osy
- Ergodický signál - náhodný signál, jehož určitá časová charakteristika má nulový rozptyl (je ergodický vůči této charakteristice)
- Striktně ergodický – stacionární a ergodický
- Pseudonáhodný signál - není úplně náhodný, je to uměle generovaný signál s definovaným statistickým rozdělením pravděpodobnosti. Pseudonáhodný signál je periodický s velmi dlouhou periodou. V rámci periody splňuje požadované vlastnosti.

Analýza náhodných signálů:
v praxi obvykle neznáme statistický popis náhodné proměnné - můžeme stanovit odhad parametrů a naměřených hodnot signálu x_k, k=1,2,..., N.

$$m_x = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k, \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_k - m_x\right)^2$$

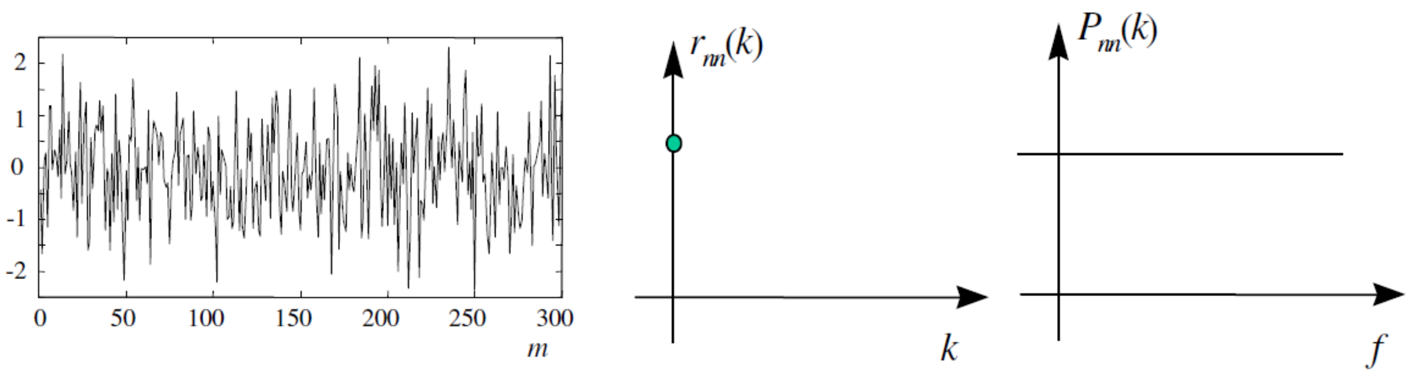
Šum

- Šum je definován jako nežádoucí signál, který interferuje s „užitečným“ signálem (naměřeným nebo přeneseným komunikačním kanálem).
- V závislosti na zdroji může být šum klasifikován do následujících kategorii:
  a) Akustický šum - zdrojem je vibrace, pohyb pohyb, srážka objektů atd. (klimatizace, ventilátor počítače, pohyb aut vítr, déšť, rozhovor lidí)
  b) Elektromagnetický šum – zdrojem jsou elektrická zařízení (rádio, TV, mobilní telefony)
  c) Elektrostatický šum – zdrojem jsou obvykle zářivky, výbojky
  d) Zkreslení přenosového kanálu – echo, útlum
  e) Šum vzniklý zpracováním – kvantizační šum, ztráta datových paketů při komunikaci

- V závislosti na frekvenci může být šum klasifikován jako:
  a) Šum s uzkým pásmem (narrowband) - obvykle 50/60Hz z elektrických zařízení
  b) Bílý šum – čistě náhodný šum s hladkou frekvenční charakteristikou (obsahuje rovnoměrné zastoupení všech frekvencí)
  c) Pásmově omezený bílý šum - hladká frekvenční charakteristika v pásmu, které je zpracováváno zařízením
  d) Barevný šum – šum, který není bílý, nebo libovolný širokopásmový šum který nemá hladkou frekvenční charakteristiku
  e) Impulzívní šum – krátké pulsy s náhodné amplitudou a délkou trvání
  f) Krátkodobý šum - pulzy s delší dobou trvání

Bílý šum

- Nekorelovaný náhodný signál s rovnoměrnou výkonovou spektrální hustotou
- Čistý bílý šum je teoretický pojem (podle definice má stejný výkon ve všech frekvencích v intervalu (-∞, +∞), cože je v praxi nerealizovatelné)
- V praxi se pracuje s pásmově omezeným bílým šumem (má stejný výkon (ploché spektrum) v definovaném rozsahu frekvencí)

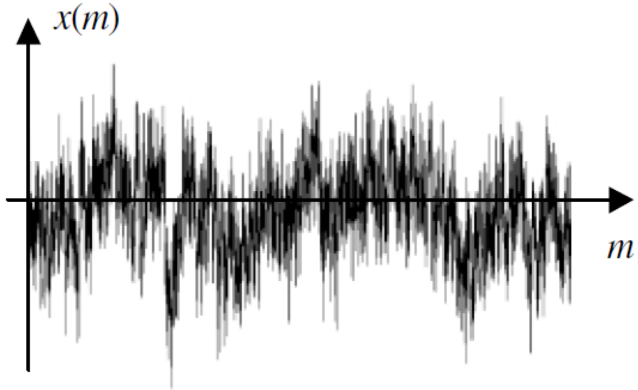


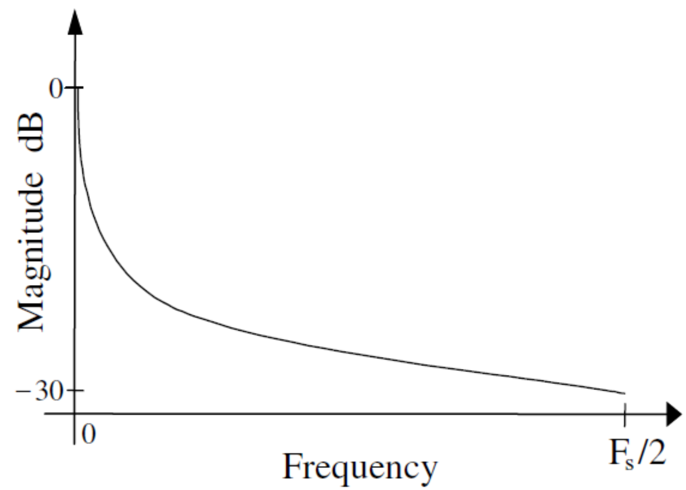
Barevný šum

- Libovolný širokopásmový šum, který nemá hladké spektrum

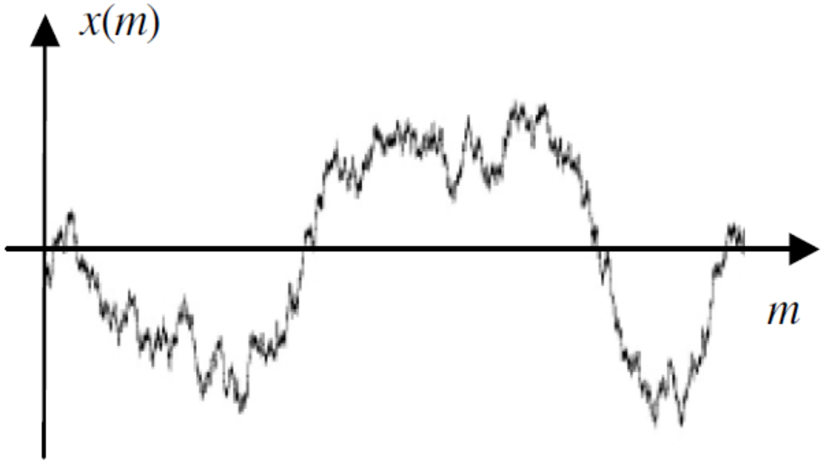
Jednotlivé typy (nejčastěji používané):

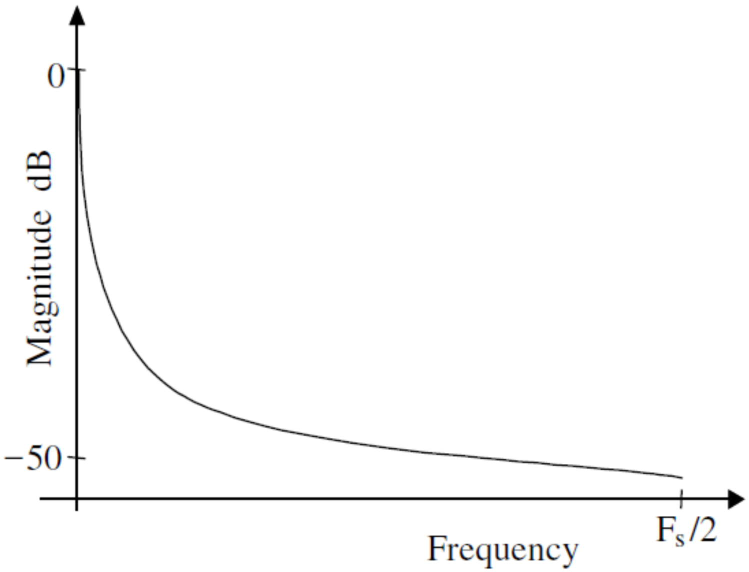
a) Růžový šum - známý také jako 1/f šum, výkonová spektrální hustota je rovna převrácené hodnotě frekvence (při dvojnásobné frekvenci klesne energie o 3dB). V logaritmických souřadnicích je energie růžového šumu stejná ve stejně širokých pásmech (např. v oktávách).





Hnědý šum – podobný růžovému šumu ale s výkonovou hustotou sníženou o 6dB za oktávu se zvyšující se frekvencí (hustota je úměrná $1/f^2$). Může být generován algoritmem, který simuluje Brownův pohyb





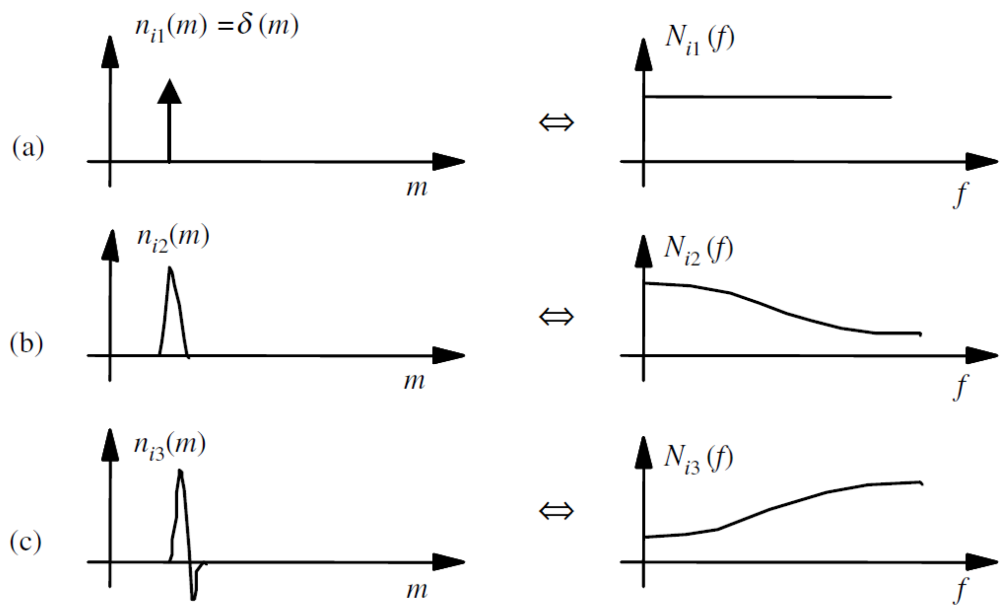
a) Modrý (azurový) šum – výkonová spektrální hustota se zvyšuje o 3dB na oktávu s rostoucí frekvencí (hustota je úměrná f)

b) Purpurový (fialový) šum - výkonová spektrální hustota se zvyšuje o 6dB na oktávu s rostoucí frekvencí (hustota je úměrná f^2).

c) Šedý šum – používá se v psychoakustice k měření křivky hladiny hlasitosti

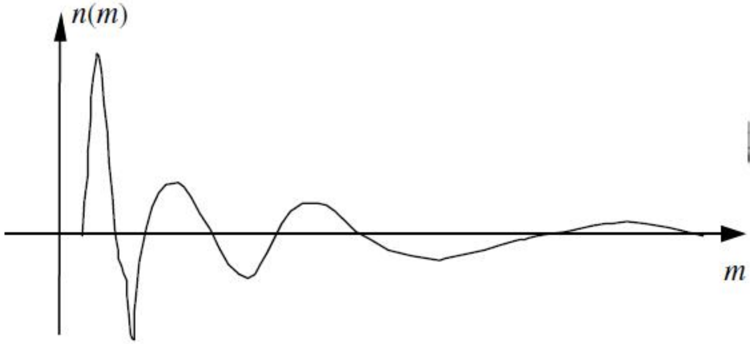
Impulzívní šum

Impulzívní šum tvoří krátkodobé impulsy (např. v audiotechnice do 3ms, f_s=20Khz). Obvyklý zdroj stisk kláves, praskání u starých gramofonových záznamu apod.

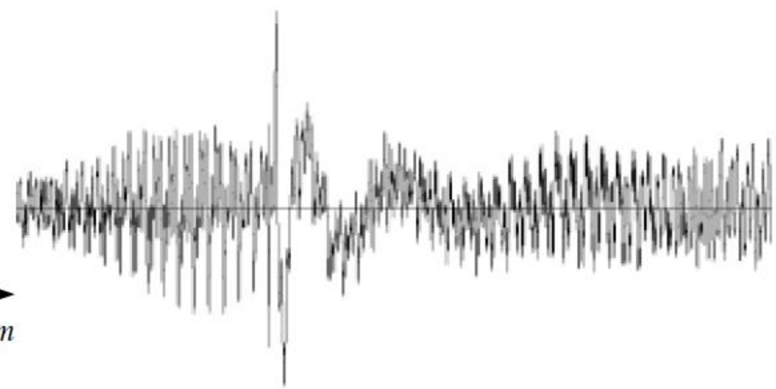


Krátkodobý šum

Krátkodobý šum tvoří relativně krátký ostrý pulz následovaný klesajícími nízkofrekvenčními oscilacemi. Příklad: poškrábané gramofonové desky.



(a)


(b)

Tepelný (Johnsonův) šum

Je způsoben náhodným pohybem elektronů v odporových strukturách.

Výstřelový (Shot) šum

Vzniká např. náhodnou rekombinací párů elektron-díra v polovodičích nebo náhodnou změnou emise elektronů v elektronkách.

Elektromagnetický šum

Vzniká v každém elektrickém zařízení, které generuje spotřebovává nebo přenáší elektrickou energii. Typickými zdroji šumu jsou transformátory, radiové a televizní vysílače, výbojky, motory, startéry u automobilů apod.

Poměr signál šum:

Pro zašuměný signál x(t)=s(t)+An(t), kde s(t) je užitečný signál, An(t) je šum (s amplitudou A), lze určit hodnotu SNR (signal-to-noise ratio) jako poměr výkonu signálu σ_x^2 k výkonu šumu $A^2\,\sigma_n^2$ udávaný v decibelech (dB)

$$SNR = 10\log\left(\frac{\sigma_s^2}{A^2\sigma_n^2}\right)\quad dB$$

Zlepšit SNR je obvykle možné metodou tzv. koherentního průměrování signálů.