ÚVOD DO LOGIKY

CÍL: NAJÍT METODY SPRÁVNÉHO USUZOVÁNÍ, TJ. POSTUPY, KTERÉ UMOŽŇUJÍ PŘECHÁZET OD OVĚŘENÝCH POZNATKŮ K POZNATKŮM NOVÝM (OVĚŘENÝM A PRAVDIVÝM).

METODY : DEDUKTIVNÍ x INDUKTIVNÍ

DEDUKCE - Z POMĚRNĚ MALÉHO POČTU VÝCHOZÍCH POZNATKŮ (FORMULÍ) ODVOZUJEME NEBO DOKAZUJEME FORMULE DALŠÍ. LZE PŘECHÁZET POUZE OD PRAVDIVÝCH FORMULÍ K PRAVDIVÝM FORMULÍM. ODVOZUJE SE PODLE PRAVIDEL SPRÁVNÉHO USUZOVÁNÍ. DŮKAZ - KONEČNÁ POSLOUPNOST FORMULÍ, JEJÍMŽ POSLEDNÍM ČLENEM JE FORMULE DOKAZOVANÁ A V NÍŽ BYLA PROKÁZÁNA PRAVDIVOST KAŽDÉ DALŠÍ FORMULE.

INDUKCE – ODVOZOVÁNÍ OBECNÉHO POZNATKU Z POZNATKŮ SPECIÁLNÍCH.

HIERARCHIE LOGICKÝCH SYSTÉMŮ

- VÝROKOVÝ POČET
- VÝROKOVÝ POČET S KVANTIFIKÁTORY
- POČET ROVNOSTI
- PREDIKÁTOVÝ POČET PRVNÍHO ŘÁDU (S ROVNOSTÍ)
- PREDIKÁTOVÝ POČET DRUHÉHO ŘÁDU.

PŘ. FORMULE PREDIKÁTOVÉHO POČTU DRUHÉHO ŘÁDU:

$$\forall P \{ [P(a) \land \forall x [[x \neq a \land P(f(x))] \Rightarrow P(x)]] \Rightarrow P(x) \}$$

kvantifikován kvantifikován vázaný

vázaný vázaný vázaný vázaný vázaný vázaný volný

TYPY VÝSKYTŮ PROMĚNNÝCH

VÝROKOVÝ POČET

VÝROK - TVRZENÍ, O NĚMŽ MÁ SMYSL ŘÍCI, ZDA JE PRAVDIVÉ.

ELEMENTÁRNÍ VÝROKY:

„KAREL MÁ BRATRA"

„$2+3=7$"

MOŽNÉ PRAVDIVOSTNÍ HODNOTY

PRAVDA × NEPRAVDA

1 × 0

SLOŽENÉ VÝROKY - VZNIKAJÍ Z ELEMENTÁRNÍCH VÝROKŮ POMOCÍ VÝROKOVÝCH SPOJEK

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

$\neg A$

A	$\neg A$
0	1
1	0

$A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A \Leftrightarrow B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

VÝROKOVÉ PROMĚNNÉ, VÝROKOVÉ SPOJKY A ZÁVORKY TVOŘÍ ABECEDU JAZYKA VÝROKOVÉHO POČTU.

LZE NADEFINOVAT GRAMATIKU, KTERÁ BUDE GENEROVAT VÝROKOVÉ FORMULE, TJ. SPRÁVNĚ VYTVOŘENÉ VÝRAZY JAZYKA VÝROKOVÉHO POČTU.

$V = \{ \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, (,), A, B, \ldots \}$

REKURZIVNÍ DEFINICE FORMULE VÝROKOVÉHO POČTU:

1) KAŽDÁ VÝROKOVÁ PROMĚNNÁ A, B, ... JE VÝROKOVOU FORMULÍ.

2) JESTLIŽE A A B JSOU VÝROKOVÉ FORMULE, JSOU TAKÉ

$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$,

$A \Leftrightarrow B$, (A)

VÝROKOVÉ FORMULE.

JAZYK VÝROKOVÉHO POČTU – MNOŽINA VŠECH FORMULÍ VYTVOŘENÝCH ZE SYMBOLŮ DANÉ ABECEDY.

ABECEDA V MŮŽE BÝT KONEČNÁ I NEKONEČNÁ, JAZYK JE VŽDY NEKONEČNÝ.

PŘ: PRAVDIVOSTNÍ HODNOTA SLOŽENÉHO VÝROKU

$$((A \wedge (\neg B)) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \vee C)$$

A	B	C	$A \wedge (\neg B)$	$(A \wedge (\neg B)) \Rightarrow C$	$A \vee C$	$((A \wedge (\neg B)) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \vee C)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

<u>TAUTOLOGIE</u> (LOGICKY PRAVDIVÁ FORMULE) -

FORMULE, KTERÁ JE PRAVDIVÁ PRO JAKÉKOLI PRAVDIVOSTNÍ HODNOTY PŘIŘAZENÉ PROMĚNNÝM VE FORMULI.

<u>KONTRADIKCE</u> (NESPLNITELNÁ FORMULE) -

FORMULE, KTERÁ JE IDENTICKY NEPRAVDIVÁ (TJ. NEPRAVDIVÁ PRO LIBOVOLNÉ PRAVDIVOSTNÍ HODNOTY VÝROKOVÝCH PROMĚNNÝCH.

<u>SPLNITELNÁ FORMULE</u> - FORMULE, KTERÁ JE PRAVDIVÁ PRO ALESPOŇ JEDNO PŘIŘAZENÍ PRAVDIVOSTNÍCH HODNOT VÝROKOVÝCH PROMĚNNÝCH.

<u>PŘ</u>: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\Leftrightarrow$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

JESTLIŽE JE FORMULE $A \Leftrightarrow B$ TAUTOLOGIÍ, JSOU FORMULE A A B <u>LOGICKY EKVIVALENTNÍ</u>.

LOGICKÉ FUNKCE

LOGICKÁ FUNKCE PŘIŘAZUJE JEDNOZNAČNÉ LOGICKÉ HODNOTY VŠEM MOŽNÝM KOMBINACÍM LOGICKÝCH PROMĚNNÝCH.

$$\left.\begin{array}{l}\text{KONEČNÝ POČET NEZÁVISLE PROMĚNNÝCH}\\ \text{KONEČNÝ POČET PRAVDIVOSTNÍCH HODNOT}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ KONEČNÝ POČET LOGICKÝCH FUNKCÍ

PŘI n LOGICKÝCH PROMĚNNÝCH LZE ZKONSTRUOVAT 2^{2^n} RŮZNÝCH LOGICKÝCH FUNKCÍ.

PŘ: VŠECHNY FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

A	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0 = 0$

$f_1 = A$

$f_2 = \neg A$

$f_3 = 1$

PŘ: VŠECHNY FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0 = 0$

f_1 LOG. SOUČIN

f_2 INHIBICE (TJ. NEGACE IMPLIKACE)

f_3 ASERCE A

f_4 INHIBICE

f_5 ASERCE B

f_6 NONEKVIVALENCE

f_7 LOG. SOUČET

f_8 PEIRCEOVA FCE (NEGACE LOG. SOUČTU)

f_9 EKVIVALENCE

f_{10} NEGACE B

f_{11} IMPLIKACE $B \Rightarrow A$

f_{12} NEGACE A

f_{13} IMPLIKACE $A \Rightarrow B$

f_{14} SHEFFEROVA FCE (NEGACE LOG. SOUČINU)

$f_{15} = 1$

LOGICKÉ VYPLÝVÁNÍ

BUDEME ZKOUMAT, ZDA Z PLATNOSTI JEDNÉ (NEBO NĚKOLIKA) FORMULÍ VYPLÝVÁ PLATNOST JINÉ FORMULE.

PŘ: $F_1: A \Leftrightarrow B \qquad F_2: A \Rightarrow B$

A	B	F_1: $A \Leftrightarrow B$	F_2: $A \Rightarrow B$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

ZŘEJMĚ:

TAM, KDE JE PRAVDIVÁ F_1, JE PRAVDIVÁ I F_2.
VŠECHNY JEDNIČKY V F_1 JSOU POKRYTY JEDNIČKAMI V F_2.

FORMULE F_2 LOGICKY VYPLÝVÁ Z F_1.

(OBRÁCENĚ TO NEPLATÍ).

FORMULE $\mathcal{B}$ LOGICKY VYPLÝVÁ Z FORMULE $\mathcal{A}$, PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ JE VÝROKOVOU TAUTOLOGIÍ.

$\mathcal{A}$ .... ANTECEDENT

$\mathcal{B}$ .... KONSEKVENT

FORMULE $\mathcal{B}$ LOGICKY VYPLÝVÁ Z FORMULÍ $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n) \Rightarrow \mathcal{B}$ JE VÝROKOVOU TAUTOLOGIÍ.

FORMULE $\mathcal{B}$ LOGICKY VYPLÝVÁ Z FORMULÍ $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ PRÁVĚ, KDYŽ

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \mathcal{A}_n \wedge (\neg \mathcal{B})$$

JE KONTRADIKCÍ.

PRAVIDLO MODUS PONENS

JSOU-LI A A $A \to B$ VÝROKOVÉ TAUTOLOGIE, JE I FORMULE B VÝROKOVÁ TAUTOLOGIE.

? JAK DOKÁZAT, ŽE JE NĚJAKÁ FORMULE VÝROKOVOU TAUTOLOGIÍ?

- ÚPLNOU INDUKCÍ S POUŽITÍM SÉMANTIKY LOGICKÝCH FUNKCÍ (POMOCÍ PRAVDIVOSTNÍ TABULKY)
- DEDUKCÍ (ODVOZOVÁNÍM S POMOCÍ PRAVIDLA MODUS PONENS). VYCHÁZÍME OD VÝROKOVÝCH TAUTOLOGIÍ. PRAVIDLEM MP ZE SOUBORU TAUTOLOGIÍ ODVOZUJEME DALŠÍ VÝROKOVÉ TAUTOLOGIE.

FORMULE ZÍSKANÉ DEDUKCÍ Z AXIOMŮ NAZÝVÁME FORMÁLNĚ DOKAZATELNÉ.

AXIOMY – SOUBOR VÝROKOVÝCH TAUTOLOGIÍ (NĚJAKÝM ZPŮSOBEM VYBRANÝ).

KAŽDÁ FORMÁLNĚ DOKAZATELNÁ FORMULE JE VÝROKOVOU TAUTOLOGIÍ.

OTÁZKA: JE KAŽDÁ VÝROKOVÁ TAUTOLOGIE FORMÁLNĚ DOKAZATELNÁ?

DOPOVĚĎ: V ÚPLNÉM SYSTÉM AXIOMŮ ANO.

ÚPLNÝ SYSTÉM AXIOMŮ JE TAKOVÝ SOUBOR AXIOMŮ, V NĚMŽ JE KAŽDÁ VÝROKOVÁ TAUTOLOGIE FORMÁLNĚ DOKAZATELNÁ.

PŘÍKLAD ÚPLNÉHO SYSTÉMU AXIOMŮ:

A1: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

A2: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

A3: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

UVEDENÝ SYSTÉM TŘÍ AXIOMŮ (A1, A2, A3) A JEDNOHO ODVOZOVACÍHO PRAVIDLA (MODUS PONENS) SE NAZÝVÁ HILBERTOVSKÝ FORMÁLNÍ SYSTÉM VÝROKOVÉ LOGIKY.

PŘ: DŮKAZ FORMULE $A \Rightarrow A$ VE FORMÁLNÍM SYSTÉMU VÝROKOVÉ LOGIKY.

1) DO A_1 DOSADÍME ZA B $(A \Rightarrow A)$

$$A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$$

2) DO A_2 DOSADÍME ZA B $(A \Rightarrow A)$
ZA C A

$$(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$$

3) APLIKUJEME MP NA 1) (ANT.) A 2)

$$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$

4) DO A1 DOSADÍME ZA B A

$$A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$$

5) APLIKUJEME MP NA 4) (ANT.) A 3)

$$A \Rightarrow A$$

VÝROKOVÉ TAUTOLOGIE JSOU LOGICKY PRAVDIVÉ ZE SVÉ PODSTATY. NEPŘINÁŠÍ ŽÁDNÉ POZNATKY O ZKOUMANÉ SKUTEČNOSTI.

? JAK VYUŽÍT MECHANISMUS DEDUKTIVNÍHO ODVOZOVÁNÍ PŘI ZKOUMÁNÍ REALITY?

EMPIRICKÉ POZNATKY VYJADŘUJEME FORMULEMI, KTERÉ BUDOU PRAVDIVÉ (TJ. SPLNITELNÉ), ALE NE TAUTOLOGICKY.

TYPICKÉ: REALITU POPÍŠEME k ELEMENTÁRNÍMI VÝROKY. KAŽDÝ Z NICH MŮŽE BÝT PRAVDIVÝ NEBO NEPRAVDIVÝ, TJ. EXISTUJE CELKEM $N_0 = 2^k$ PŘIŘAZENÍ PRAVDIVOSTNÍCH HODNOT. POKUSEM NEBO POZOROVÁNÍM NĚKTERÉ Z TĚCHTO KOMBINACÍ VYLOUČÍME. ZBYDE JICH $N < N_0$. I Z TAKOVÝCH FORMULÍ LZE ODVOZOVAT DALŠÍ FORMULE DEDUKCÍ. Z PRAVDIVÝCH FORMULÍ ODVODÍME FORMÁLNÍM POSTUPEM ZASE PRAVDIVÉ F.

DŮKAZ FORMULE A Z TEORIE T

JE KONEČNÁ POSLOUPNOST FORMULÍ TAKOVÁ, ŽE POSLEDNÍ ČLEN JE FORMULE A A KAŽDÁ Z PŘEDCHOZÍCH FORMULÍ JE BUĎ AXIOM VÝROKOVÉHO POČTU NEBO PATŘÍ DO T NEBO SE ZÍSKÁ Z PŘEDCHOZÍCH FORMULÍ ODVOZOVACÍM PRAVIDLEM MODUS PONENS. POTOM ŘEKNEME, ŽE FORMULE A JE FORMÁLNĚ DOKAZATELNÁ V TEORII T.

ZNAČENÍ : $T \vdash A$

POKUD JE $T = \emptyset$, PAK JE A FORMÁLNĚ DOKAZATELNÁ FORMULE JAZYKA VÝROKOVÉHO POČTU, TJ. VÝROKOVÁ TAUTOLOGIE.

TEORIE T JE SPORNÁ, LZE-LI NAJÍT FORMULI A TAKOVOU, ŽE $T \vdash A$ A $T \vdash \neg A$.

V OPAČNÉM PŘÍPADĚ JE TEORIE T BEZESPORNÁ.

TEORIE A MODELY JAZYKA VÝROKOVÉ LOGIKY

T.... MIMOLOGICKÉ AXIOMY (MNOŽINA FORMULÍ JAZYKA VÝROKOVÉHO POČTU. JSOU TO PRAVDIVÉ (TJ. SPLNITELNÉ) FORMULE. TATO MNOŽINA SE NAZÝVÁ TEORIE JAZYKA VÝROKOVÉHO POČTU.

A..... SOUBOR TŘÍ AXIOMŮ (VÝROKOVÝCH TAUTOLOGIÍ) A1, A2, A3.

Z A a T BUDEME DEDUKCÍ ODVOZOVAT DALŠÍ FORMULE. I TYTO FORMULE BUDOU PRAVDIVÉ (TJ. SPLNITELNÉ).

ZNAČENÍ: $T \vdash \mathcal{A}$

FORMULE $\mathcal{A}$ JE FORMÁLNĚ DOKAZATELNÁ Z TEORIE T.

PŘ: $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$

$T_1 \quad T_2$

1) AXIOM A2

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

2) AXIOM A1, ZA A B→C, ZA B A

$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

3) MIMOLOGICKÝ AXIOM T_2

$B \Rightarrow C$

4) MODUS PONENS NA 3) A 2)

$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

5) MODUS PONENS NA 4) A 1)

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

6) MIMOLOGICKÝ AXIOM T_1

$A \Rightarrow B$

7) MODUS PONENS NA 6) A 5)

$A \Rightarrow C$

VĚTA O DEDUKCI

JESTLIŽE $T \cup \{A\} \vdash B$
PAK $T \vdash (A \Rightarrow B)$.

T.... MNOŽINA PRAVDIVÝCH (SPLNITELNÝCH) FORMULÍ) - TEORIE

A, B ... FORMULE

$\vdash$ ... „LZE FORMÁLNĚ DOKÁZAT"

KONKRÉTNÍ PŘIŘAZENÍ PRAVDIVOSTNÍCH HODNOT VŠEM VÝROKOVÝM PROMĚNNÝM SE NAZÝVÁ MODEL.

MÁ-LI ABECEDA JAZYKA k VÝROKOVÝCH PROMĚNNÝCH, EXISTUJE 2^k MODELŮ.

MODEL JEDNOZNAČNĚ DEFINUJE PRAVDIVOSTNÍ HODNOTU FORMULE.

ZNAČENÍ:

$M \models \mathcal{A}$ FORMULE $\mathcal{A}$ JE PRAVDIVÁ V MODELU M

TAUTOLOGIE - FORMULE PRAVDIVÁ VE VŠECH MODELECH

KONTRADIKCE - FORMULE NEPRAVDIVÁ VE VŠECH MODELECH

M JE MODELEM TEORIE T PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ $M \models \mathcal{A} \quad \forall \mathcal{A} \in T$.

(VŠECHNY MIMOLOGICKÉ AXIOMY TEORIE T JSOU V MODELU M PRAVDIVÉ).

JESTLIŽE JE FORMULE $\mathcal{A}$ PRAVDIVÁ V KAŽDÉM MODELU TEORIE T, PAK FORMULE $\mathcal{A}$ LOGICKY VYPLÝVÁ Z TEORIE T. PÍŠEME $T \vdash \mathcal{A}$. [EKVIVALENTNÍ DEFINICE].

PŘ: DETEKTIVKA – V DOMĚ PANA X SE COSI STALO.

ZJIŠTĚNÁ FAKTA:

SOUSED PANA X VYPOVÍDÁ – VIDĚL JSEM X V OBÝVACÍM POKOJI.

OBÝVACÍ POKOJ SOUSEDÍ S KUCHYNÍ.

VÝSTŘEL PADL V KUCHYNI A RÁNU BYLO SLYŠET VE VŠECH SOUSEDNÍCH MÍSTNOSTECH.

PAN X, KTERÝ DOBŘE SLYŠÍ, ALE ŘEKL, ŽE RÁNU NESLYŠEL.

DOKÁŽEME:

JESTLIŽE SOUSED MLUVIL PRAVDU, PAK PAN X LHAL.

ELEMENTÁRNÍ VÝROKY:

A .... SOUSED MLUVIL PRAVDU

B .... PAN X BYL V OBÝVACÍM POKOJI

C ... PAN X BYL BLÍZKO KUCHYNĚ

D ... PAN X SLYŠEL VÝSTŘEL

E ... PAN X MLUVIL PRAVDU

POZNATKY (MIMOLOGICKÉ AXIOMY):

$$\left.\begin{array}{ll} A \rightarrow B & T_1 \\ B \rightarrow C & T_2 \\ C \rightarrow D & T_3 \\ D \rightarrow \neg E & T_4 \end{array}\right\} \text{TEORIE } T$$

CHCEME DOKÁZAT (FORMULE):

$A \rightarrow \neg E$

DŮKAZ FORMULE ODVOZENÍM Z TEORIE:

1) $A \Rightarrow B$ T1

2) $B \Rightarrow C$ T2

3) $C \Rightarrow D$ T3

4) $D \Rightarrow \neg E$ T4

5) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ A2

6) DO A1 DOSADÍME ZA A $B \Rightarrow C$, ZA B A

$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$

7) MODUS PONENS NA 2) A 6)

$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

8) MODUS PONENS NA 7) A 5)

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

9) MODUS PONENS NA 1) A 8)

$A \Rightarrow C$

10) DO A2 DOSADÍME ZA B C, ZA C D

$(A \Rightarrow (C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow D))$

11) DO A1 DOSADÍME ZA A $C \Rightarrow D$, ZA B A

$(C \Rightarrow D) \Rightarrow (A \Rightarrow (C \Rightarrow D))$

12) MODUS PONENS NA 3) A 11)

$A \Rightarrow (C \Rightarrow D)$

13) MODUS PONENS NA 12) A 10)

$(A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow D)$

14) MODUS PONENS NA 9) A 13)

$A \Rightarrow D$

15) DO A2 DOSADÍME ZA A A, B D, C $\neg E$.

$(A \Rightarrow (D \Rightarrow \neg E)) \Rightarrow ((A \Rightarrow D) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg E))$

16) DO A1 DOSADÍME ZA A $D \Rightarrow \neg E$, B A.

$(D \Rightarrow \neg E) \Rightarrow (A \Rightarrow (D \Rightarrow \neg E))$

17) MODUS PONENS NA 4) A 16)

$A \Rightarrow (D \Rightarrow \neg E)$

18) MODUS PONENS NA 17) A 15)

$(A \Rightarrow D) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg E)$

19) MODUS PONENS NA 14) A 18)

$A \Rightarrow \neg E$

JINÝ DŮKAZ: VĚTOU O LOGICKÉM VYPLÝVÁNÍ.

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow \neg E) \wedge \neg(A \Rightarrow \neg E)$$

TJ. $\underset{1}{(A \Rightarrow B)} \wedge \underset{2}{(B \Rightarrow C)} \wedge \underset{3}{(C \Rightarrow D)} \wedge \underset{4}{(D \Rightarrow \neg E)} \wedge \underset{5}{(A \wedge E)}$ JE KONTRADIKCE

LZE SESTAVIT PRAVDIVOSTNÍ TABULKU (32 ŘÁDKY) - VŠECHNY 0

JINAK - SNAŽÍME SE NAJÍT ŘÁDEK S VÝSLEDNOU HODNOTOU 1, UKÁŽEME, ŽE TO NEJDE (BUDE TO SPOR S PŘEDPOKLADEM)

ABY MĚLA FORMULE HODNOTU 1, MUSÍ MÍT VŠECHNY ZÁVORKY HODNOTU 1

5 ⇒ A, E MUSÍ BÝT SOUČASNĚ 1
PAK 1 ⇒ B MUSÍ BÝT 1
PAK 2 ⇒ C MUSÍ BÝT 1
PAK 3 ⇒ D MUSÍ BÝT 1
PAK 4 ⇒ ¬E MUSÍ BÝT 1

SPOR ↯

NEEXISTUJE MODEL, V NĚMŽ JE FORMULE PRAVDIVÁ ⇒ KONTRADIKCE