PŘEHLED VZORCŮ A HLAVNÍCH POJMŮ
na přednáškách KMA/PSA
3. a 4. týdne ZS 2015/16

(následující bude mj. promítnuto během těchto přednášek PSA - volná místa na stránkách jsou úmyslně : po vytištění lze používat k doplnění vlastních poznámek)

Vysvětlení, použití, grafy, příklady, etc. budou na přednášce.

---

4. NĚKTERÁ DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ

X ... **diskrétní náhodná veličina**

- **ALTERNATIVNÍ rozdělení** s parametrem $p \in (0, 1)$:

X nabývá jen hodnot 0 nebo 1, přičemž $\boxed{P(0) = 1 - p\,,\ P(1) = p}$

Píšeme: $X \sim A(p)$.

Výpočtem: $E(X) = p, \quad D(X) = p\,(1 - p)$.

- **BINOMICKÉ rozdělení** s parametry $n \in \mathrm{N}$, $p \in (0,1)$:

X nabývá jen $0, 1, \ldots, n$ a platí: $\boxed{P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pro } k = 0, 1, \ldots, n}$

Píšeme: $X \sim Bi(n,p)$

$Bi(n,p)$ je součtem n nezáv. veličin s rozd. $A(p)$, takže: $E(X) = n\,p\,,\, D(X) = n\,p\,(1-p)$

- **HYPERGEOMETRICKÉ rozdělení** s param. $N, K, n \in \mathbf{N}, n \leq N, K \leq N$:

  $\boxed{P(k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$

  pro všechna $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, taková, že $k \leq K$, $0 \leq n-k \leq N-K$

Píšeme: $X \sim HG(N, K, n)$.

• **POISSONOVO rozdělení** s parametrem $\lambda > 0$:
X může nabývat jen hodnot $k = 0, 1, 2, \dots$ a platí

$$\boxed{P(k) = e^{-\lambda} \cdot \tfrac{\lambda^k}{k!} \quad \text{pro} \quad k = 0, 1, 2, \dots .}$$

Píšeme: $X \sim Po(\lambda)$

Výpočtem: $E(X) = \lambda\,,\ D(X) = \lambda$

Jsou-li $X_i \sim Po(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ **nezávislé** náh. veličiny, $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$,
pak $X \sim Po(\lambda)$, kde $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Poisson. rozdělení lze použít k aproximaci binomického rozdělení: pro $\boxed{n \geq 30}$ a $\boxed{p \leq 0,1}$

$$\boxed{Bi(n,p) \approx Po(\lambda), \quad \text{kde } \lambda = n \cdot p}$$

Funkční hodnoty distribuční funkce $F(x)$ Poissonova rozdělení bývají **tabelovány** pro některá $\lambda \leq 10$.

Pro $\lambda \geq 9$ používáme aproximaci normálním rozdělením - bude později.

5. NĚKTERÁ SPOJITÁ ROZDĚLENÍ

X ... **spojitá náhodná veličina**

ROVNOMĚRNÉ rozdělení na intervalu (a, b) :
X má hustotu ppsti

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b) \\ \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}}$$

Píšeme: $\quad X \sim R(a, b)$

Výpočtem: $E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

EXPONENCIÁLNÍ rozdělení s parametrem $\delta > 0$:
X má hustotu

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0] \\ \\ \dfrac{1}{\delta}\, e^{-\frac{x}{\delta}} & \text{pro } x \in (0, +\infty) \end{cases}}$$

Píšeme: $X \sim Exp(\delta)$.

Distribuční funkce :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0] \\ \\ 1 - e^{-\frac{x}{\delta}} & \text{pro } x \in (0, +\infty) \end{cases}}$$

Výpočtem: $E(X) = \delta$, $\quad D(X) = \delta^2$.

NORMÁLNÍ rozdělení s parametry $\mu \in \mathrm{R}$, $\sigma > 0$:
X má pro $x \in (-\infty, +\infty)$ hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

(její graf je symetrický kolem přímky $x = \mu$)

Píšeme: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Výpočtem lze ověřit: $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$.

Používá se též název **GAUSSOVO rozdělení**.

$N(0,1)$ . . . **normované normální rozdělení**

Hustota: $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}$, $u \in (-\infty, +\infty)$

její graf je symetrický kolem přímky $u = 0$, a proto
distribuční funkce - píšeme $\Phi(u)$ - je **tabelována** jen pro $u \geq 0$, neboť platí:

$$\boxed{\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)}$$

Je-li $F(x)$ distribuční funkce rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, pak

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

6. APROXIMACE NORMÁLNÍM ROZDĚLENÍM

Je-li $n \in N$ tak velké, že $\boxed{\, n\,p\,(1-p) \geq 9\,}$, pak

$$\boxed{Bi(n,p) \approx N(np,\, np\,(1-p))}$$

Je-li $\boxed{\,\lambda \geq 9\,}$, lze použít aproximaci:

$$\boxed{Po(\lambda) \approx N(\lambda,\, \lambda\,)}$$

Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **nezávislé** náhodné veličiny se stejným rozdělením, $E(X_i) = \mu_0$, $D(X_i) = \sigma_0^2$, pak pro "dost velké n" platí:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu_0,\, n\sigma_0^2\,)}$$

Odtud pak: $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \approx N\left(\mu_0,\, \frac{\sigma_0^2}{n}\right)$

Mají-li $X_1, X_2, \ldots, X_n$ navíc normální rozdělení, má i jejich součet a průměr (přesně) normální rozdělení.