PŘEHLED VZORCŮ A HLAVNÍCH POJMŮ
na přednáškách KMA/PSA
1. a 2. týdne ZS ak. r. 2015/16

následující text bude mj. promítnut během těchto přednášek PSA - volná místa na stránkách jsou úmyslně : po vytištění lze používat k doplnění vlastních poznámek

Vysvětlení, použití, grafy, příklady, etc. budou na přednášce.

I. POČET PRAVDĚPODOBNOSTI

1. ÚVOD

2. NÁHODNÝ JEV

Náhodný pokus - aspoň dva různé výsledky

Náhodné jevy - podmnožiny množiny Ω všech možných výsledků pokusu

Označení: $A \subset \Omega$,$B \subset \Omega, \ldots$

$\emptyset$ ... nemožný jev

Ω ... jistý jev

Operace s jevy:

- sjednocení dvou jevů: $A \cup B$ (A nebo B)
- průnik dvou jevů: $A \cap B$ (A a B)
- negace jevu A: $\overline{A}$ (jev opačný neboli doplňkový k A)

Neslučitelné (disjunktní) jevy:
Jevy A, B se nazývají neslučitelné, je-li $A \cap B = \emptyset$.

3. PRAVDĚPODOBNOST JEVU

$$A \longrightarrow P(A)$$

A...jev, P(A)...**pravděpodobnost (ppst) jevu A**

Axiomy ppsti:

A_1: $0 \leq P(A) \leq 1\,;$

A_2: pro neslučitelné jevy $A_1, A_2, \ldots$ platí: $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)\,;$

A_3: $P(\Omega) = 1$, kde Ω je jev jistý.

Statistická "definice"ppsti

Pravděpodobnost $P(A)$ jevu A je limita relativní četnosti jevu A, zvětšujeme-li počet pokusů $n \to \infty$.

Klasická definice ppsti

Za určitých specifických podmínek lze ppst jevu počítat pomocí tzv. klasické definice ppsti - více **viz cvičení PSA**

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \quad .$$

Některé další možné definice ppsti: **geometrická** nebo **axiomatická (Kolmogorovova)**

Základní pravidla pro ppst (lze je odvodit z axiomů A_1, A_2, A_3):

- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(\,\overline{A}\,) = 1 - P(A)$ (**ppst opačného jevu**)
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  (**ppst sjednocení jevů**)

4. PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

Definice. Nechť A, B jsou jevy, $P(B) \neq 0$.

Pak **pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B** se značí $P(A|B)$ a je definována jako podíl

$$\mathbf{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \qquad (1)$$

Analogicky (pro $P(A) \neq 0$):

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\,. \qquad (1')$$

Nezávislost jevů A, B.

Požadavek: Výskyt jevu B nemá ovlivňovat ppst jevu A, resp. naopak, tj. $P(A|B) = P(A)$, resp. $P(B|A) = P(B)$.

Dosazením těchto rovností do levé strany (1), resp. (1') a úpravou dostaneme **pro nezávislé jevy** A, B:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)} \qquad (2)$$

Rovnost (2) lze použít jako **definici nezávislosti jevů** A, B.

Nejsou-li jevy nezávislé, pak se nazývají **závislé** (a rovnost (2) pro ně neplatí).

Pojem nezávislosti lze rozšířit na n jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 3)$.

5. VĚTA O ÚPLNÉ PRAVDĚPODOBNOSTI, BAYESOVA VĚTA

Nechť pro jevy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ platí:

- $B_i \cap B_j \quad \forall\, i \neq j$,
- $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
- $P(B_i) > 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$,
- $A \subset \Omega$ (tj. A je libovolný jev).

Pak platí:

$$P(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

(tzv. **věta o úplné ppsti**)

Je-li navíc $P(A) > 0$, pak pro $k = 1, 2, \ldots, n$ platí:

$$P(B_k|A) = \tfrac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}$$

(tzv. **Bayesova věta**, věta o inverzní ppsti)

Důkaz:

II. NÁHODNÁ VELIČINA

1. POJEM NÁHODNÉ VELIČINY

Náhodná veličina (náhodná proměnná) je "vhodná"reálná funkce definovaná na množině Ω

$$X : \Omega \to R$$

(zpřesnění bude dále)

Označení:

X, Y, Z ... **náhodné veličiny** (jsou to funkce)

$x,\ y,\ z\ \ldots$ jejich **realizace** (jsou to reálná čísla)

Náhodná veličina: a) **diskrétní** - může nabývat (s nenulovou ppstí) jen konečně nebo spočetně mnoha hodnot ;

b) **spojitá** - může nabývat libovolné hodnoty z intervalu (intervalů) reálných čísel.

U náh. veličiny nutno určit též její **rozdělení ppsti**.

Definice: Řekneme, že náhodná veličina X má rozdělení diskrétního typu (krátce: **DISKRÉTNÍ** náh. veličina), právě když existuje konečná nebo spočetná množina reálných čísel $x_1, x_2, \ldots$ taková, že:

$$P(X = x_j) > 0 \quad pro \quad j = 1, 2, \ldots$$

$$a \qquad \sum_{x_j} P(x_j) = 1$$

Funkci, která u **diskrétní** náh. veličiny X přiřadí každému $x \in R$ ppst $P(X = x)$, krátce $P(x)$, nazveme **PRAVDĚPODOBNOSTNÍ FUNKCE**

Jiným typem náh.veličin jsou náh.veličiny spojitého typu (krátce: **SPOJITÉ** náh.veličiny).

Pro **spojitou** náh. veličinu se definuje tzv. **HUSTOTA PPSTI** jako funkce $f(x)$, k níž se "blíží" histogram relativních četností při zjemňujícím se dělení viz obr.

[Hustota ppsti je **nezáporná funkce** a **obsah plochy** ("pod grafem") **je roven 1 .**]

Definice: HUSTOTA ppsti náh.veličiny X je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $(-\infty, +\infty)$ taková, že:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = P(x_1 < X < x_2)$$

pro libovolná x_1, x_2 taková, že $x_1 < x_2$.

Pozn.: 1) $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = P(-\infty < X < +\infty) = P(\Omega) = 1$

3) $P(X = x_0) = P(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$

2. DISTRIBUČNÍ FUNKCE

Popsat rozdělení ppsti náh. veličiny X (**diskr.** nebo **spoj.**) lze též pomocí tzv. **DISTRIBUČNÍ FUNKCE** $F(x)$, kterou definujeme takto:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, +\infty)}$$

Z definice $F(x)$ ihned plyne:

- $0 \leq F(x) \leq 1$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$;
- $F(x)$ je **neklesající** funkce ;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Distribuční funkce **diskrétní** náh. veličiny je **nespojitá**
[je tzv. "schodovitá", tj. neklesající a po částech konstantní].

Distribuční funkce **spojité** náhodné veličiny je **spojitá**.

3. STŘEDNÍ HODNOTA, ROZPTYL

Základní charakteristikou **polohy** náhodné veličiny X je tzv. **STŘEDNÍ HODNOTA** , píšeme $E(X)$.

Pro **diskrétní** náhodnou veličinu X definujeme:

$$\boxed{E(X) = \sum_i x_i \cdot P(x_i)}$$

kde sčítáme přes všechna i, pro která $P(x_i) > 0$.

Pro **spojitou** náhodnou veličinu X definujeme:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx}$$

kde $f(x)$ je hustota ppsti.

Základními charakteristikami **variability** (proměnlivosti) náhodné veličiny X jsou **ROZPTYL** , píšeme $D(X)$, a **SMĚRODATNÁ ODCHYLKA**, píšeme $\sigma(X)$.
Definujeme je takto:

$$\boxed{D(X) = E(X - E(X))^2}$$

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$$

Pozn.:

• Roznásobením pravé strany definice $D(X)$ a úpravou dostaneme tzv. **výpočetní tvar rozptylu**:

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

kde $E^2(X) = (E(X))^2$
a kde $E(X^2) = \sum\limits_i x_i^2 \cdot P(x_i)$ pro diskr.náh.veličinu,
$E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$ pro spoj.náh.veličinu.

• $E(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ jsou **reálná čísla** (navíc: $D(X) \geq 0$, $\sigma(X) \geq 0$)

• Jsou-li X, Y náh. veličiny a c je reálná konstanta, pak:

$E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$,

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,

$D(c\,X) = c^2\,D(X)$,

$\sigma(c\,X) = |c|\,\sigma(X)$.

• Jsou-li X, Y *nezávislé*, pak platí: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
(Pro X, Y *závislé* může nastat: "<", "-", ">".)

• Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *nezávislé*, pak platí: $D(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i)$.

K podrobnějšímu popisu náh.veličiny X se zavádí další charakteristiky.

Pro $k = 1, 2, \ldots$ definujeme: $\mu_k^{\prime}(X) = E(X^k) \quad \ldots \quad k-$tý obecný moment

$\mu_k(X) = E(X - E(X))^k \ldots k-$tý centrální moment

Charakteristika

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}$$

se nazývá **koeficient šikmosti**.

Charakteristika

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3$$

se nazývá **koeficient špičatosti**.