

# Návrh FIR filtrů

- Při návrhu FIR filtru řešíme obvykle následující problémy:
  - volba frekvenční odezvy požadovaného filtru; nejčastěji volíme ideální charakteristiku normovanou k Nyquistově frekvenci, popř. tzv. toleranční schema
  - stanovení délky (řádu) filtru  $M$ ; nejčastěji odhadem (první krok) a v dalších krocích se iterativním postupem se zpřesňuje
  - zavedení kritéria kvality posouzení skutečné frekvenční charakteristiky.

Jako kritérium pro hodnocení aproximace frekvenční charakteristiky lze použít:

- a) Průměr kvadratické chyby (kritérium nejmenších čtverců), kterým minimalizujeme chybu  $E$

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} \|H(j\omega) - H_d(j\omega)\|^2$$

- b) Maximální chybu frekvenční charakteristiky ve specifikované oblasti (propustné, popř. nepropustné) - tzv. Čebyševova aproximace
- c) Kritérium založené na aproximaci Taylorovým rozvojem požadované frekvenční charakteristiky – tzv. Butterworthova aproximace

- volba metody stanovení koeficientů filtru

# Metody návrhu koeficientů filtru

- metoda Fourierových řad s využitím funkce okna
- metoda frekvenčního vzorkování
- Remezův algoritmus optimalizovaného návrhu používající Čebyševovu aproximaci chyby

# **Metoda Fourierových řad**

# Postup 1

- Princip metody vychází z toho, že frekvenční charakteristika filtru je periodická a je ji možné reprezentovat jako Fourierovu řadu, tj. frekvenční odezva se rozvine do Fourierovy řady a tento rozvoj se omezí na konečný počet koeficientů. Výsledná odezva aproximuje originální požadovanou charakteristiku.

Algoritmus :

1. Specifikace požadavků na frekvenční charakteristiku filtru  $H_d(j\omega)$
2. Stanovení délky filtru
3. Výpočet koeficientů filtru  $h[n]$ , pro hodnoty  $n=0,1,\dots,M$  s použitím vztahu

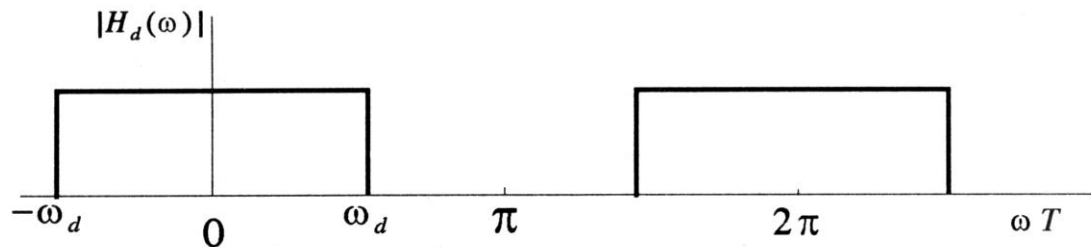
$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |H_d(j\omega)| \cos(m\omega) + j \sin(m\omega)$$

kde  $m=n-M/2$

4. Výsledné koeficienty vynásobíme vhodným oknem abychom omezili zákmity ve frekvenční charakteristice (Gibbsův jev)
5. Pro výsledné koeficienty vypočteme skutečnou odezvu filtru, pokud nevyhovuje, zvolíme jiné  $N$  a postup opakujeme.

## Příklad 1: Návrh dolní propusti

Navrhněte FIR filtr, který bude aproximovat amplitudovou charakteristiku ideálního filtru s dolní mezní frekvencí  $f_d=2\text{kHz}$  při vzorkovací frekvenci  $f_v=8\text{kHz}$



frekvenční charakteristika dolní propusti

Řešení: Mezní frekvence  $\omega_c$  normovaná k vzorkovacímu kmitočtu  $f_v$  bude

$$\omega_d = 2\pi f_d / f_v$$

Aplikujeme rovnici:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d}^{\omega_d} |H_d(j\omega)| \cos(m\omega) + j \sin(m\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d}^{\omega_d} \cos(m\omega) d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d}^{\omega_d} \sin(m\omega) d\omega$$



$$h_d = \frac{\sin(m\omega)}{2\pi m} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sin(\pi m / 2)}{\pi m} \quad \text{kde } m=n-10$$

Pro výpočet vzorku  $h_d[n]$  pro  $m=0$  a  $n=10$  se použije l'Hospitalovo pravidlo (derivujeme čitatel podle  $m$  a dosadíme  $m=0$ )

$$h_d = \left. \frac{d[\sin(m\omega)] / dm}{d[2\pi m] / dm} \right|_{m=0} = \left. \frac{(\pi/2) \cos(\pi m/2)}{\pi} \right|_{m=0} = 0.5$$

$h[0] = h[20] =$	0.00000
$h[1] = h[19] =$	0.03537
$h[2] = h[18] =$	0.00000
$h[3] = h[17] =$	-0.04547
$h[4] = h[16] =$	0.00000
$h[5] = h[15] =$	0.06366
$h[6] = h[14] =$	0.00000
$h[7] = h[13] =$	-0.10610
$h[8] = h[12] =$	0.00000
$h[9] = h[11] =$	0.31831
$h[10] =$	0.50000

koeficienty dolní propusti

## Příklad 2: Návrh horní propusti

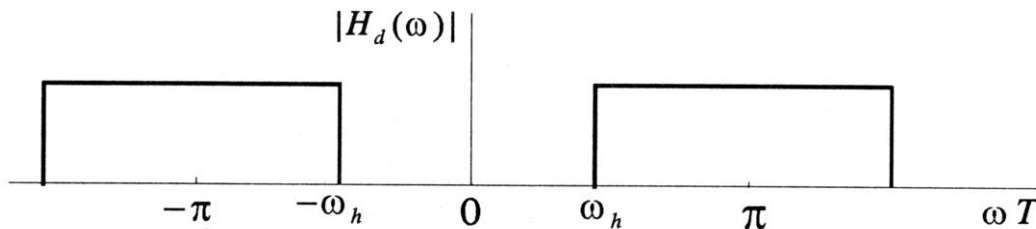
Navrhňte filtr FIR délky  $N=21$ , který bude aproximovat amplitudovou charakteristiku ideálního filtru typu horní propust s normovanou horní mezní frekvencí  $\omega_h = 3\pi/5$ .

Řešení: Impulsní charakteristika filtru je dána vztahem

$$h[n] = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_h}{\pi} & \text{pro } m = 0 \\ \frac{-\sin(m\omega_h)}{m\pi} & \text{pro } m \neq 0 \end{cases}$$

$h[0] = h[20] =$	0.00000
$h[1] = h[19] =$	0.03364
$h[2] = h[18] =$	-0.02339
$h[3] = h[17] =$	-0.02673
$h[4] = h[16] =$	0.05046
$h[5] = h[15] =$	0.00000
$h[6] = h[14] =$	-0.07568
$h[7] = h[13] =$	0.06237
$h[8] = h[12] =$	0.09355
$h[9] = h[11] =$	-0.30273
$h[10] =$	0.40000

koefficienty horní propusti



frekvenční charakteristika horní propusti



### Příklad 3: Návrh pásmové propusti

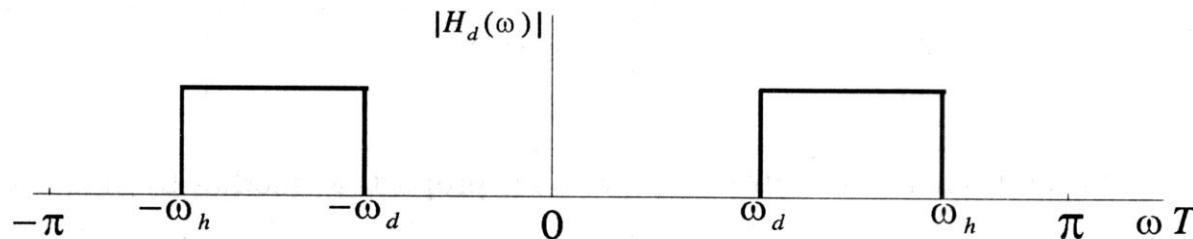
Navrhňte filtr FIR délky  $N=21$ , který bude aproximovat amplitudovou charakteristiku ideálního filtru typu pásmová propust. Normované kmitočty nechť jsou: spodní mez propustného pásma  $\omega_h = 2\pi/5$ , horní mez propustného pásma  $\omega_d = 3\pi/5$ .

Řešení: Impulsní charakteristika je dána vztahem

$$h[n] = \begin{cases} \frac{\omega_h - \omega_d}{\pi} & \text{pro } m = 0 \\ \frac{\sin(m\omega_h) - \sin(m\omega_d)}{m\pi} & \text{pro } m \neq 0 \end{cases}$$

$h[0] = h[20] =$	0.00000
$h[1] = h[19] =$	0.00000
$h[2] = h[18] =$	0.04677
$h[3] = h[17] =$	0.00000
$h[4] = h[16] =$	-0.10091
$h[5] = h[15] =$	0.00000
$h[6] = h[14] =$	0.15136
$h[7] = h[13] =$	0.00000
$h[8] = h[12] =$	-0.18710
$h[9] = h[11] =$	0.00000
$h[10] =$	0.20000

koefficienty pásmové propusti



frekvenční charakteristika pásmové propusti

#### Příklad 4: Návrh pásmové zadržky

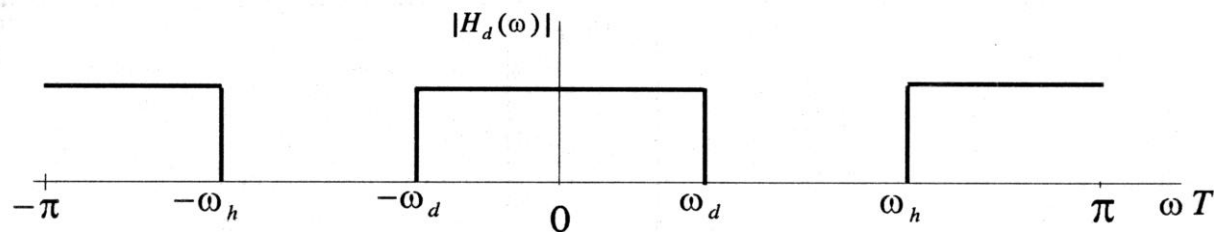
Navrhněte filtr FIR délky  $N=21$ , který bude aproximovat amplitudovou charakteristiku ideálního filtru typu pásmová propust. Mezní kmitočty nepropustného pásma jsou 1.6kHz a 2.4kHz. Normované kmitočty necht' jsou: spodní mez propustného pásma  $\omega_d = 2\pi/5$ , horní mez propustného pásma  $\omega_h = 3\pi/5$ .

Řešení: Impulsní charakteristika je dána vztahem

$$h[n] = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_h - \omega_d}{\pi} & \text{pro } m = 0 \\ \frac{\sin(m\omega_d) - \sin(m\omega_h)}{m\pi} & \text{pro } m \neq 0 \end{cases}$$

$h[0] = h[20] =$	0.00000
$h[1] = h[19] =$	0.00000
$h[2] = h[18] =$	-0.04677
$h[3] = h[17] =$	0.00000
$h[4] = h[16] =$	0.10091
$h[5] = h[15] =$	0.00000
$h[6] = h[14] =$	-0.15136
$h[7] = h[13] =$	0.00000
$h[8] = h[12] =$	0.18710
$h[9] = h[11] =$	0.00000
$h[10] =$	0.80000

Koeficienty impulsní odezvy



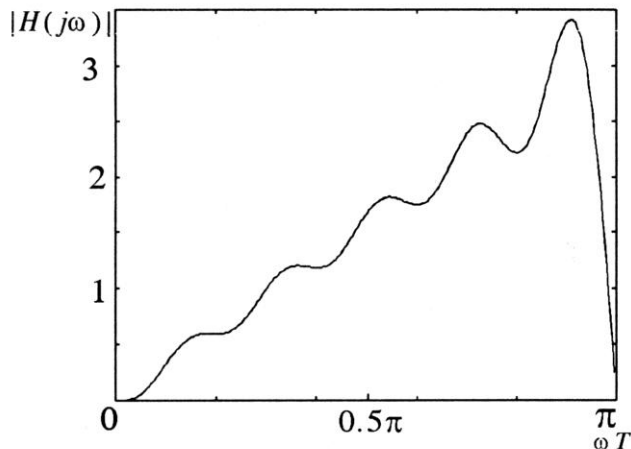
frekvenční charakteristika pásmové zadržky

#### Příklad 4: Návrh diferenciátoru

Ideální diferenciátor může být aproximován filtrem FIR s lineární fází. Frekvenční odezva diferenciátoru je  $H(j\omega)=j\omega$ . Navrhujeme-li diferenciátor se symetrií typu 3, bude mít lichý počet vzorků.

Řešení: Impulsní charakteristika je dána vztahem

$$h_d[n] = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega \sin(m\omega) d\omega = \begin{cases} 0 & \text{pro } m=0 \\ \frac{\cos(\pi n)}{n} & \text{pro } m \neq 0 \end{cases}$$



Frekvenční charakteristika

-h[0] = h[20] =	-0.10000
-h[1] = h[19] =	0.11111
-h[2] = h[18] =	-0.12500
-h[3] = h[17] =	0.14286
-h[4] = h[16] =	-0.16667
-h[5] = h[15] =	0.20000
-h[6] = h[14] =	-0.25000
-h[7] = h[13] =	0.33333
-h[8] = h[12] =	-0.50000
-h[9] = h[11] =	1.00000
h[10] =	0.00000

Koeficienty impulsní odezvy

# Okna používaná k omezení zámků frekvenční charakteristiky

V uvedených příkladech bylo využito pravoúhlé okno. K většímu omezení zámků se však častěji používá některé z následujících oken:

- Okno trojúhelníkové (Bartlett):<sup>8</sup>

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{n}{M/2}, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - \frac{2n}{M}, & M/2 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Okno Hann (hanning, Hanning, von Hann):

$$w_{HN}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{2\pi n}{M}), & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

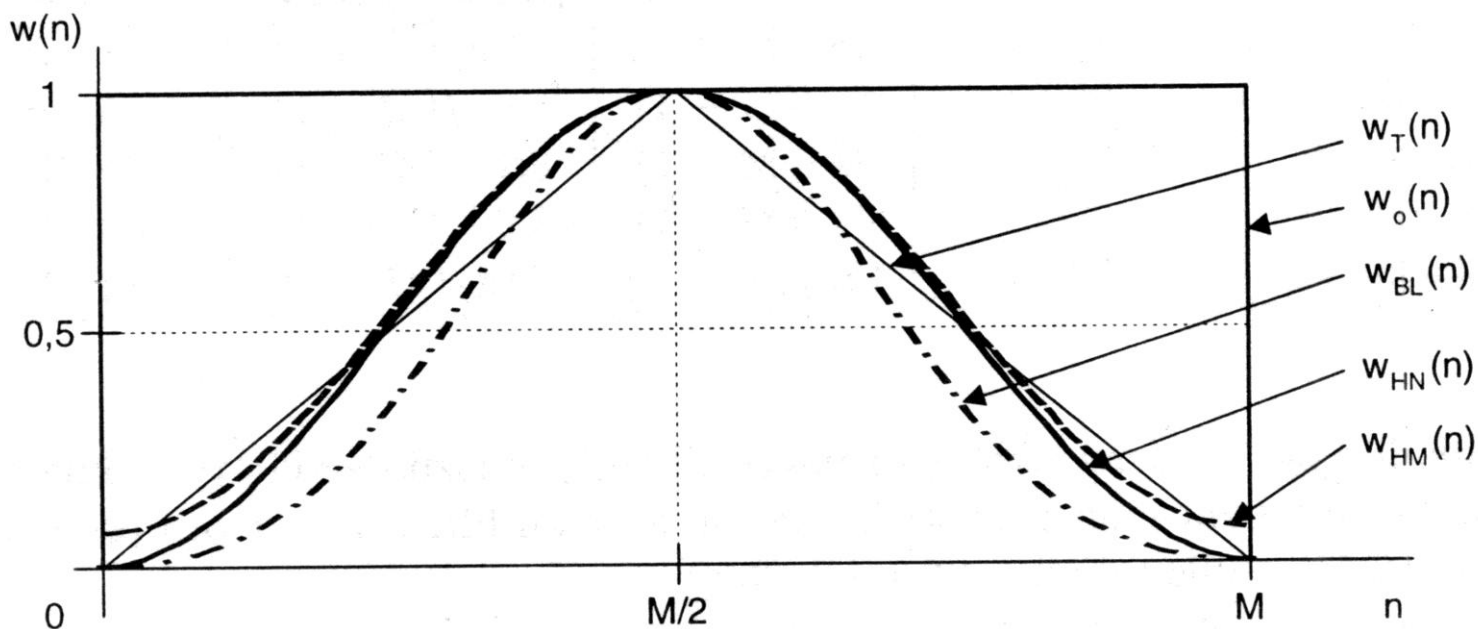
- Okno Hamming:

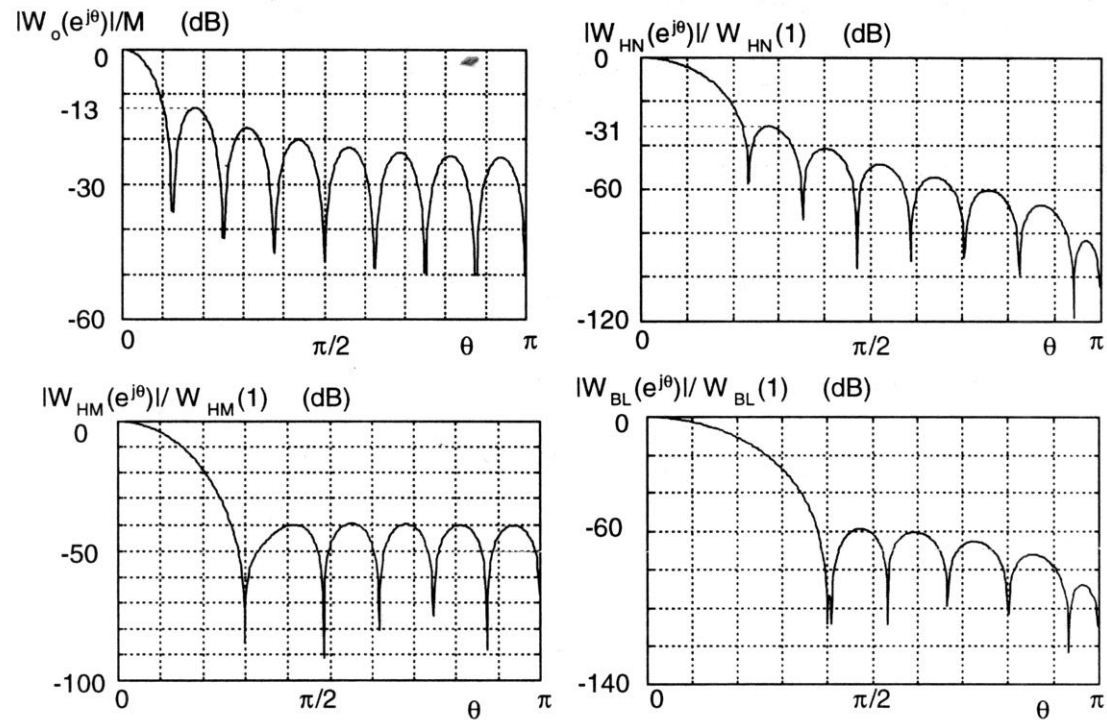
$$w_{HM}(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cdot \cos \frac{2\pi n}{M}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Okno Blackman:

$$w_{BL}(n) = \begin{cases} 0,42 - 0,50 \cdot \cos \frac{2\pi n}{M} + 0,08 \cdot \cos \frac{4\pi n}{M}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

# Průběhy oken v časové oblasti a jejich frekvenční charakteristiky





**Obrázek 4.23** Normovaná spektra základních oken (obdélníkového, Hannova, Hammingova a Blackmanova) pro  $M + 1 = 16$

**Tabulka 4.1** Klasická okna: základní vlastnosti a užití pro návrh FIR DP

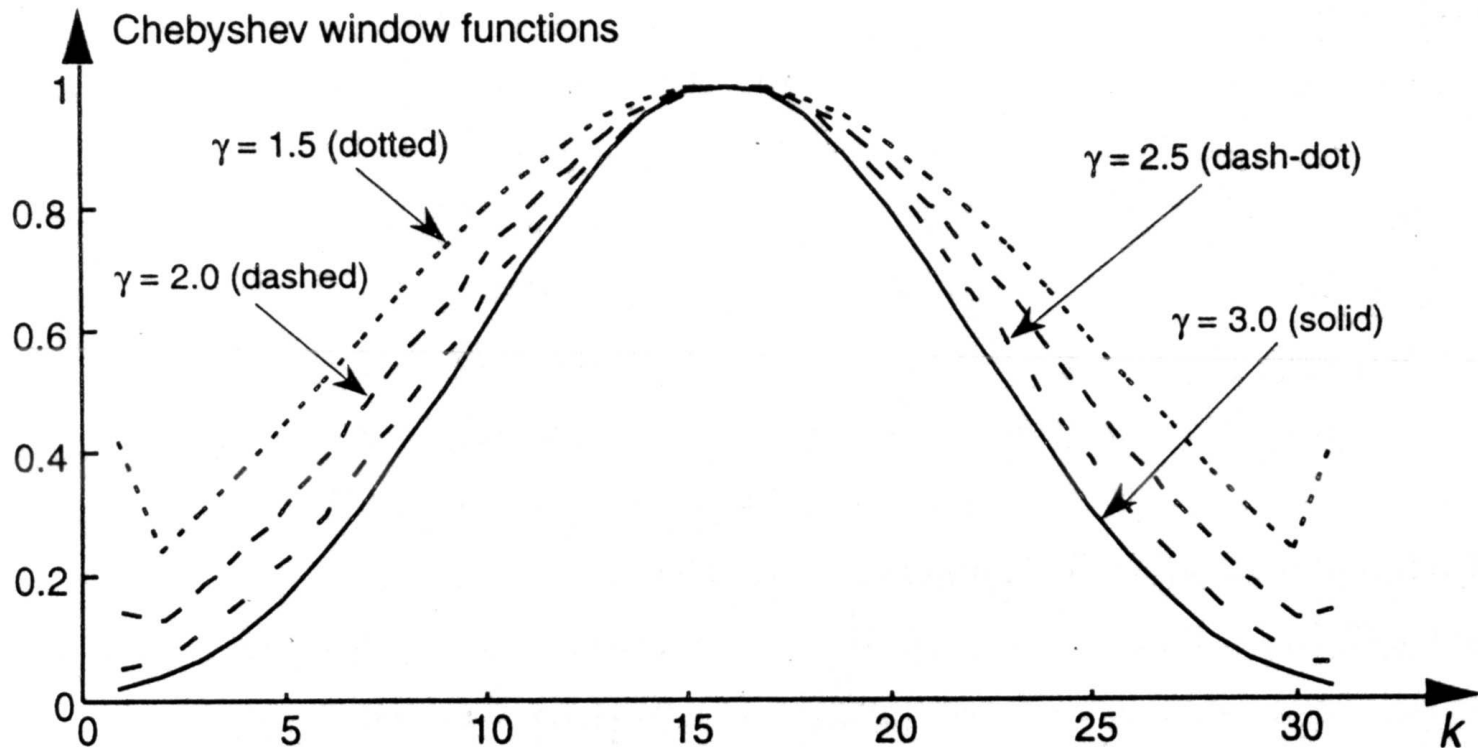
název okna	1. postranní lalok	šířka hl. laloku	šířka přech. pásma	minimální zeslabení
obdélník	-13dB	$4\pi/(M + 1)$	$1.8\pi/(M + 1)$	21 dB
trojúhelník	-25dB	$8\pi/(M + 1)$	$5.6\pi/(M + 1)$	25 dB
Hann	-31dB	$8\pi/(M + 1)$	$6.2\pi/(M + 1)$	44 dB
Hamming	-41dB	$8\pi/(M + 1)$	$6.6\pi/(M + 1)$	53 dB
Blackman	-57dB	$12\pi/(M + 1)$	$11\pi/(M + 1)$	74 dB

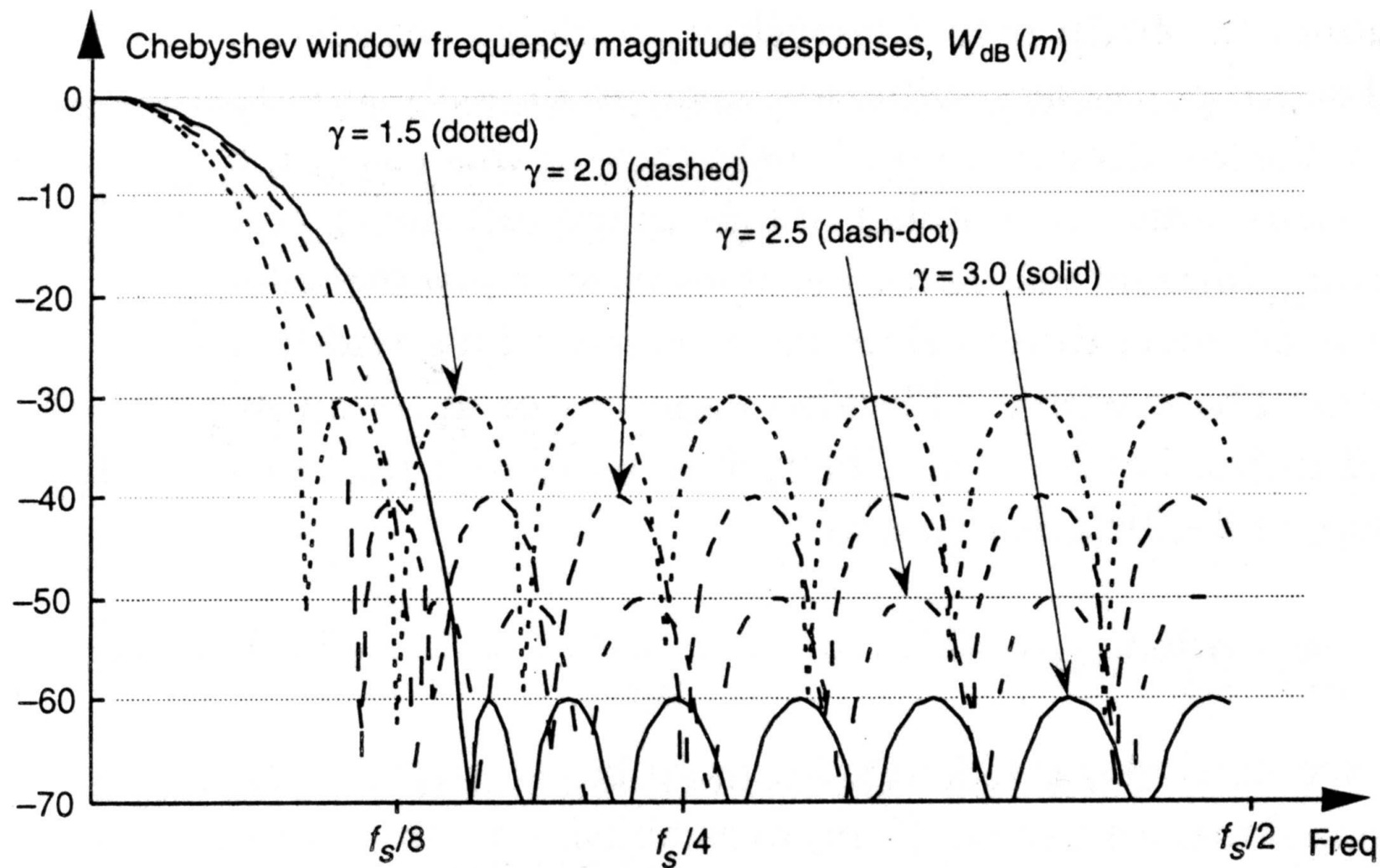
Speciální typy oken u kterých lze změnou parametrů měnit vlastnosti:

- Čebyševovo okno

$$w_{CH}(n) = \frac{\cos \left[ M \cos^{-1} \left[ \alpha \cos \left( \pi \frac{n}{M} \right) \right] \right]}{\cosh [M \cos^{-1}(\alpha)]}$$

$$\alpha = \cosh \left( \frac{1}{N} \cosh^{-1} (10^{\gamma}) \right) \quad n=0,1,\dots,M$$

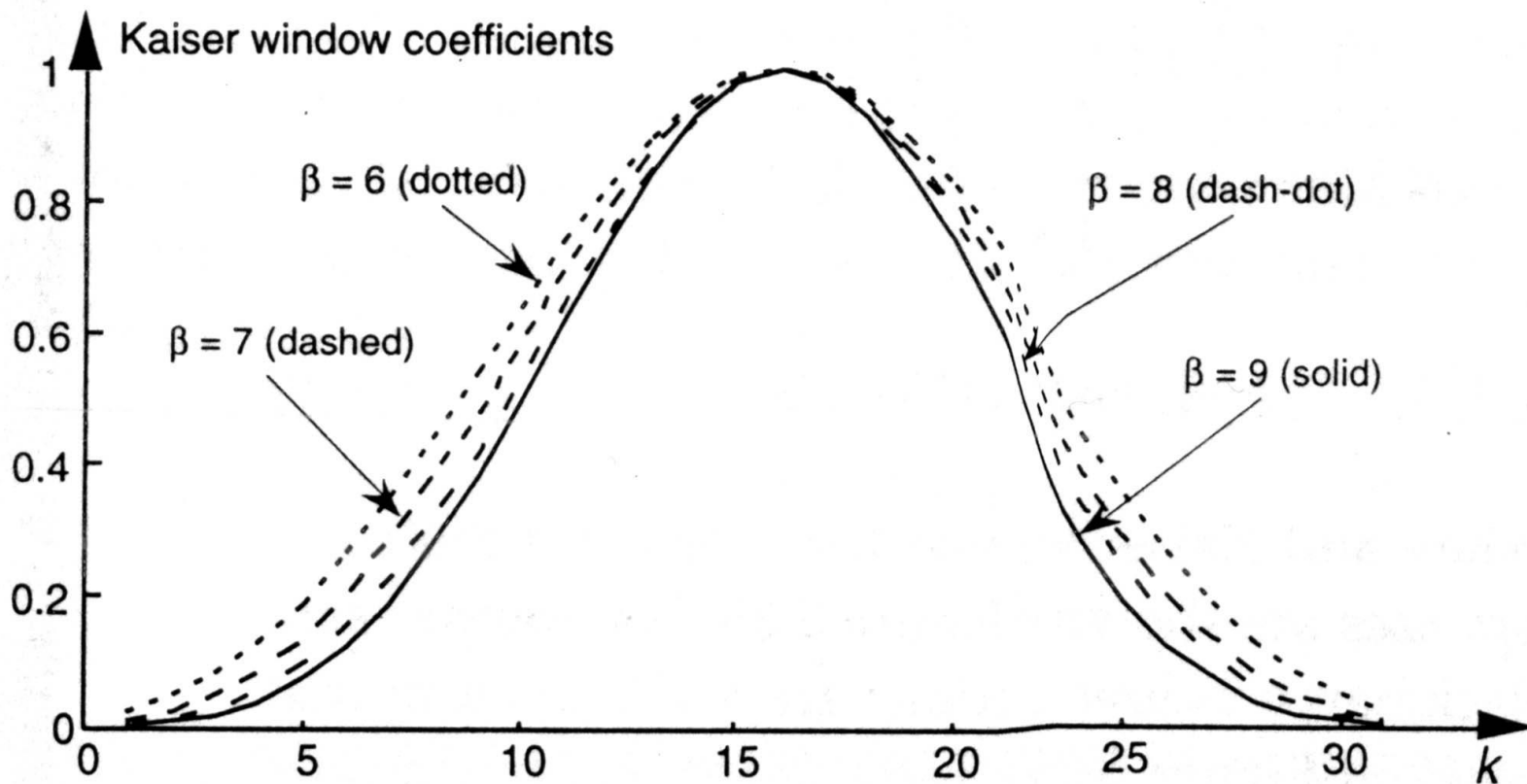


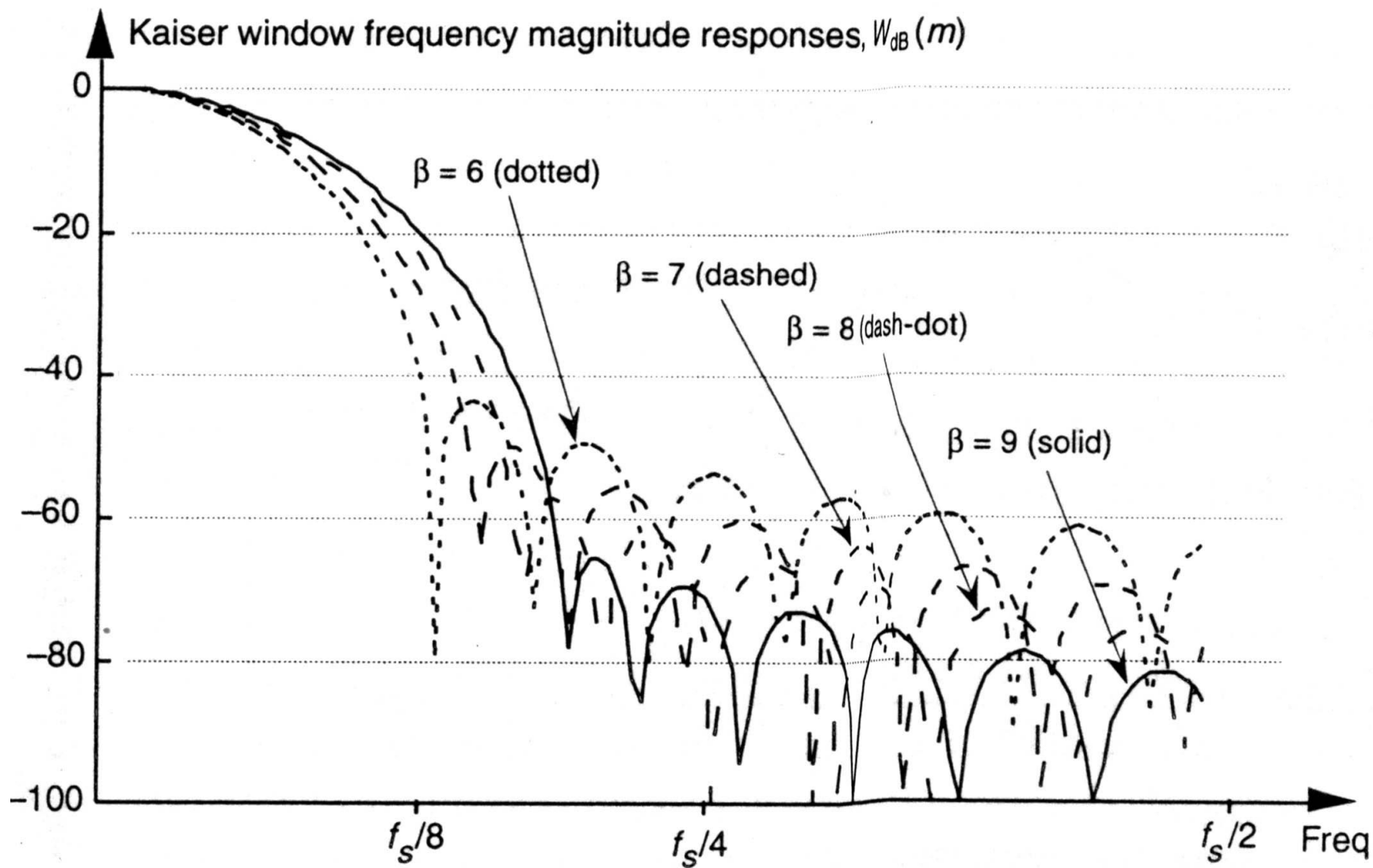




- Kaiserovo okno

$$w_K(n) = \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq M$$

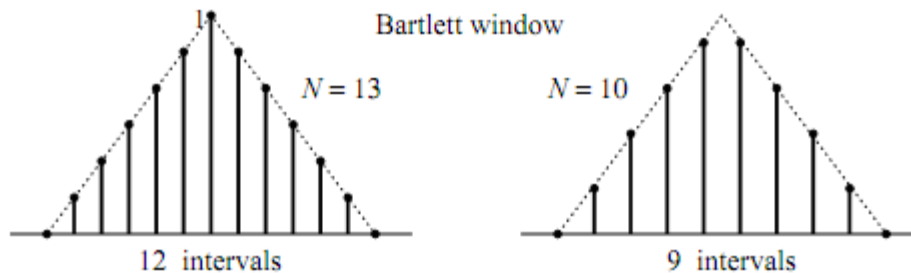




## Postup 2

- Stejný princip jako v předchozím případě, ale umožňuje určit řád filtru a vhodné okno na základě parametrů  $A_s$  (útlum v nepropustné části) a  $A_p$  (útlum v propustné části) použitých v tolerančním schématu.

### Násobení impulzní odezvy oknem

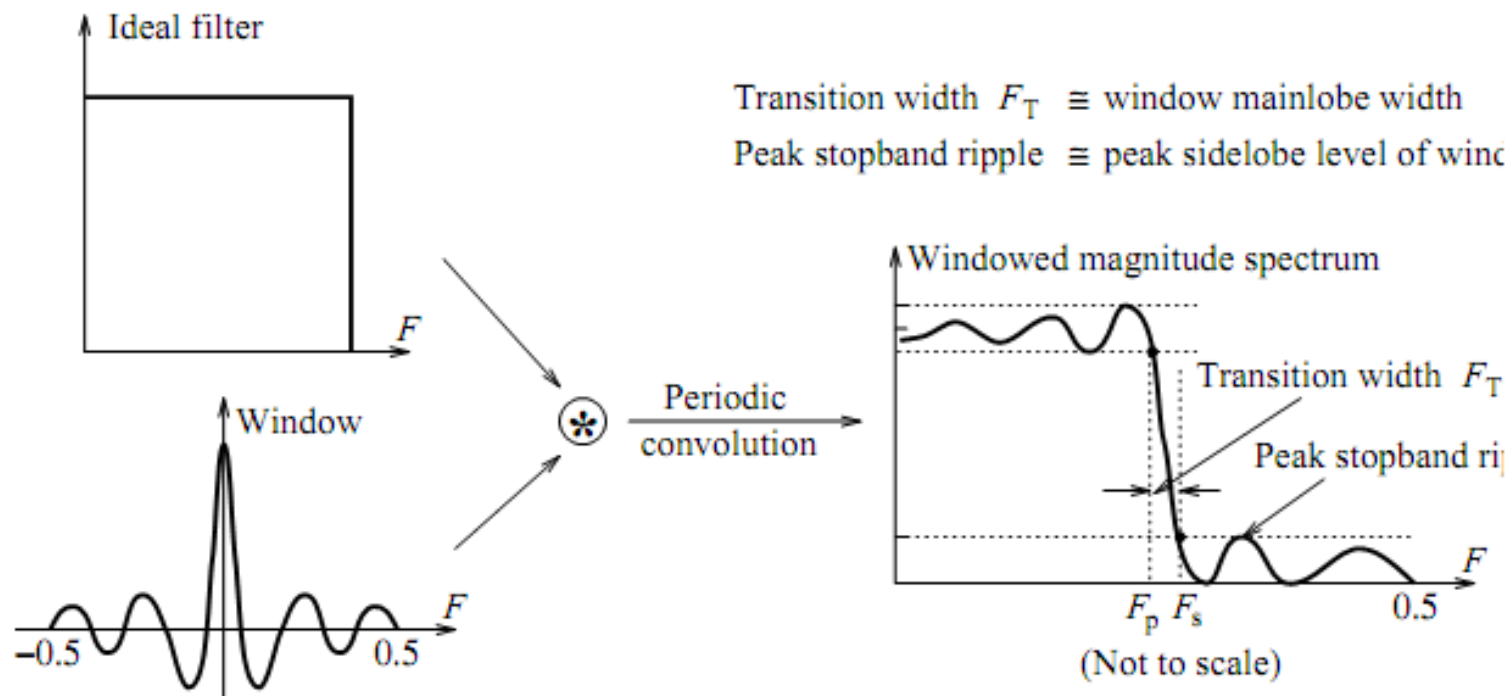


$N$  –bodové FIR okno obsahuje  $N$  vzorků (zahrnujeme oba koncové vzorky) a  $N-1$  intervalů. Násobení oknem odpovídá násobení vzorku okna proti vzorku impulzní odezvy  $\Rightarrow$  okno musíme vhodně vypočítat vzorky okna tak aby bylo symetrické vzhledem k impulzní odezvě. Symetrická odezva FIR filtru (DP) násobeného oknem pak bude mít tvar

$$hw[n] = 2F_c \text{sinc}(2nF_c)w[n], \quad -0.5(N-1) \leq n \leq 0.5(N-1)$$

Pro sudé  $N$ , není index  $n$  celé číslo a k vytvoření kauzální impulzní odezvy je nutné použít neceločíselné zpoždění

# Tvar frekvenčního spektra FIR filtru násobeného oknem



## Parametry filtru (toleranční schéma)

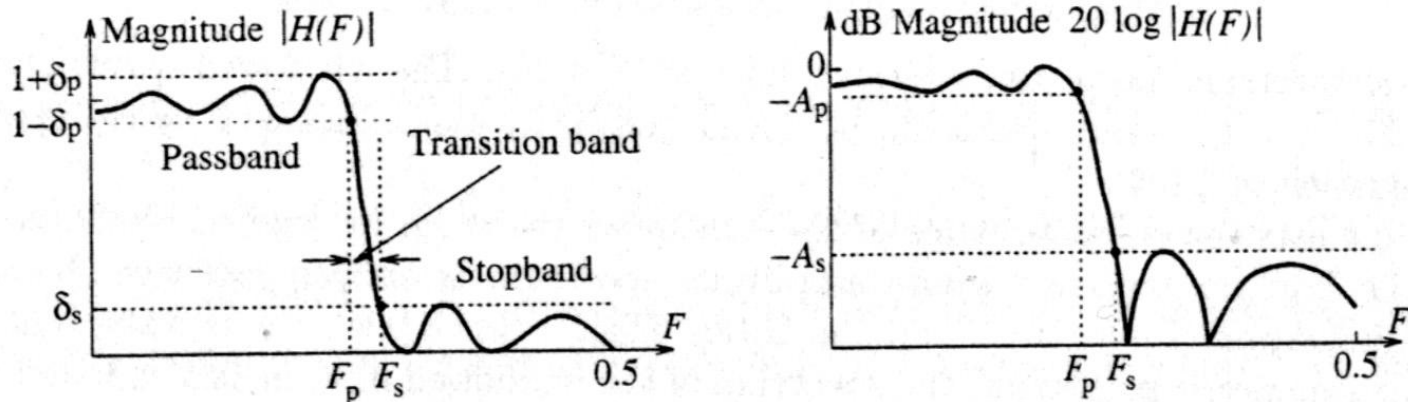
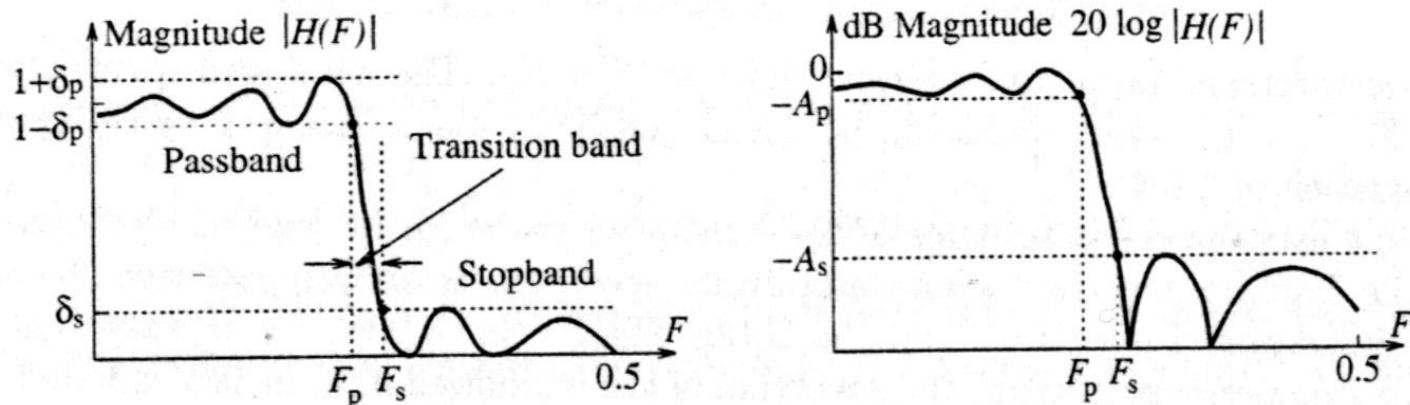


Figure 20.10 The features of a typical filter

- Vztah mezi útlumem  $A$  a ziskem  $G$  v lineárním a decibelovém měřítku:
  - ❖ lineární měřítko – útlum je převrácená hodnota zisku
$$G = |H(f)|, \quad A = 1/|H(f)|$$
  - ❖ decibelové měřítko – útlum v dB je záporná hodnota zisku
$$G_{\text{dB}} = 20\log|H(f)|, \quad A_{\text{dB}} = -20\log|H(f)|$$

# Přepočet mezi parametry zvlňnění a decibelovými charakteristikami $A_p$ a $A_s$



**Figure 20.10** The features of a typical filter

$$A_p(\text{dB}) = -20 \log\left(\frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p}\right) \quad A_s(\text{dB}) = -20 \log\left(\frac{\delta_s}{1 + \delta_p}\right) \approx -20 \log \delta_s, \quad \delta_p \ll 1$$

$$\delta_p = \frac{10^{A_p/20} - 1}{10^{A_p/20} + 1} \quad \delta_s = (1 + \delta_p)10^{-A_s/20} \approx 10^{-A_s/20}, \quad \delta_p \ll 1$$

# Postup návrhu FIR filtru

- normalizace analogové frekvence vzorkovací frekvencí (převod na digitální frekvenci  $F \in \langle 0,1 \rangle$ )
- stanovení  $F_p$  a  $F_s$  dolní propusti
- určení frekvence  $F_c$  (cut-off frequency)  $F_c = 0.5(F_p + F_s)$
- Volba okna (z následující tabulky), které splňuje podmínku  $A_{ws} \geq A_s$  a  $A_{wp} \leq A_p$
- stanovení délky okna  $N$  z hodnoty  $FT = F_s - F_p = F_{ws} = C/N$  (hodnota  $C$  z tabulky)
- výpočet impulzní odezvy DP filtru  $h(n) = 2F_c \text{sinc}(2nF_c)$ ,  $|n| \leq 0.5(N-1)$
- vynásobení odezvy zvoleným oknem  $h_{lp}(n) = w(n)h(n)$
- provedení spektrální transformace na (pokud je to nutné)
- Ověření frekvenční charakteristiky a případné doladění  $N$  a  $F_c$  tak, aby odpovídaly specifikaci

## Tabulky parametrů a vlastností používaných oken

Window	Peak Ripple $\delta_p = \delta_s$	Passband Attenuation $A_{WP}$ (dB)	Peak Sidelobe Attenuation $A_{WS}$ (dB)	Transition Width $F_{WS} \approx C/N$
Boxcar	0.0897	1.5618	21.7	$C = 0.92$
Cosine	0.0207	0.36	33.8	$C = 2.1$
Riemann	0.0120	0.2087	38.5	$C = 2.5$
von Hann (Hanning)	0.0063	0.1103	44	$C = 3.21$
Hamming	0.0022	0.0384	53	$C = 3.47$
Blackman	$(1.71)10^{-4}$	$(2.97)10^{-3}$	75.3	$C = 5.71$
Dolph ( $R = 40$ dB)	0.0036	0.0620	49	$C = 3.16$
Dolph ( $R = 50$ dB)	$(9.54)10^{-4}$	0.0166	60.4	$C = 3.88$
Dolph ( $R = 60$ dB)	$(2.50)10^{-4}$	0.0043	72	$C = 4.6$
Harris (0)	$(8.55)10^{-4}$	0.0148	61.4	$C = 5.36$
Harris (1)	$(1.41)10^{-4}$	$(2.44)10^{-3}$	77	$C = 7.45$
Harris (2)	$(1.18)10^{-4}$	$(2.06)10^{-3}$	78.5	$C = 5.6$
Harris (3)	$(8.97)10^{-5}$	$(1.56)10^{-3}$	81	$C = 5.6$
Harris (4)	$(9.24)10^{-5}$	$(1.61)10^{-3}$	81	$C = 5.6$
Harris (5)	$(9.96)10^{-6}$	$(1.73)10^{-4}$	100	$C = 7.75$
Harris (6)	$(1.94)10^{-6}$	$(3.38)10^{-5}$	114	$C = 7.96$
Harris (7)	$(5.26)10^{-6}$	$(9.15)10^{-5}$	106	$C = 7.85$



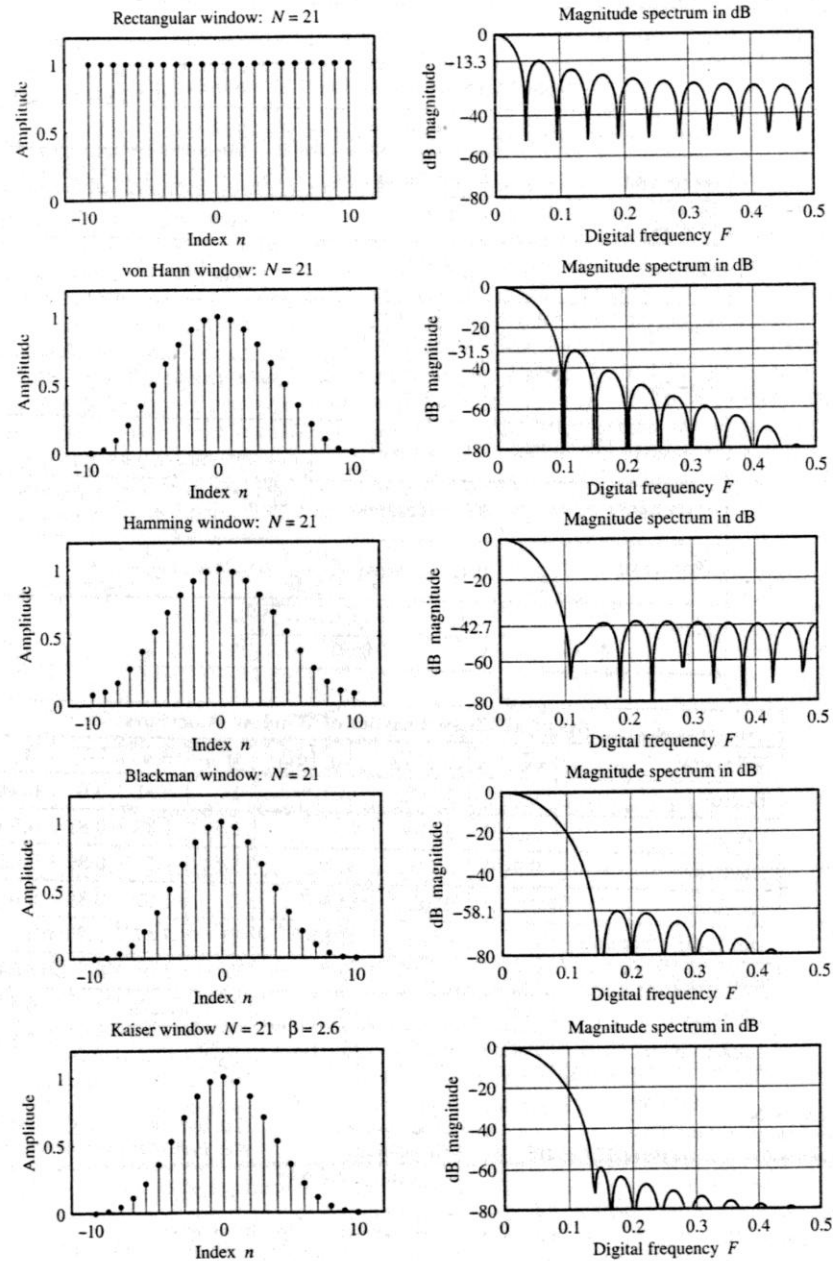


Figure 20.8 Commonly used DTFT windows and their spectra

**Table 8.2** Some Windows for FIR Filter Design

<b>Note:</b> $I_0(x)$ is the modified Bessel function of order zero.	
<b>Window</b>	<b>Expression</b> $w[n]$ , $-0.5(N-1) \leq n \leq 0.5(N-1)$
Boxcar	1
Cosine	$\cos\left(\frac{n\pi}{N-1}\right)$
Riemann	$\text{sinc}^L\left(\frac{2n}{N-1}\right)$ , $L > 0$
Bartlett	$1 - \frac{2 n }{N-1}$
von Hann (Hanning)	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right)$
Hamming	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right)$
Blackman	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4n\pi}{N-1}\right)$
Kaiser	$\frac{I_0(\pi\beta\sqrt{1-4[n/(N-1)]^2})}{I_0(\pi\beta)}$

Spectral Characteristics of Window Functions								
Window	$G_P$	$G_S/G_P$	$A_{SL}$ (dB)	$W_M$	$W_S$	$W_6$	$W_3$	$D_S$
Boxcar	1	0.2172	13.3	1	0.81	0.6	0.44	20
Cosine	0.6366	0.0708	23	1.5	1.35	0.81	0.59	40
Riemann	0.5895	0.0478	26.4	1.64	1.5	0.86	0.62	40
Bartlett	0.5	0.0472	26.5	2	1.62	0.88	0.63	40
von Hann (Hanning)	0.5	0.0267	31.5	2	1.87	1.0	0.72	60
Hamming	0.54	0.0073	42.7	2	1.91	0.9	0.65	20
Blackman	0.42	0.0012	58.1	3	2.82	1.14	0.82	60
Kaiser ( $\beta = 2.6$ )	0.4314	0.0010	60	2.98	2.72	1.11	0.80	20

#### NOTATION:

$G_P$ : Peak gain of mainlobe

$G_S$ : Peak sidelobe gain

$D_S$ : High-frequency attenuation (dB/decade)

$A_{SL}$ : Sidelobe attenuation ( $\frac{G_P}{G_S}$ ) in dB

$W_6$ : 6-dB half-width

$W_S$ : Half-width of mainlobe to reach  $P_S$

$W_3$ : 3-dB half-width

$W_M$ : Half-width of mainlobe

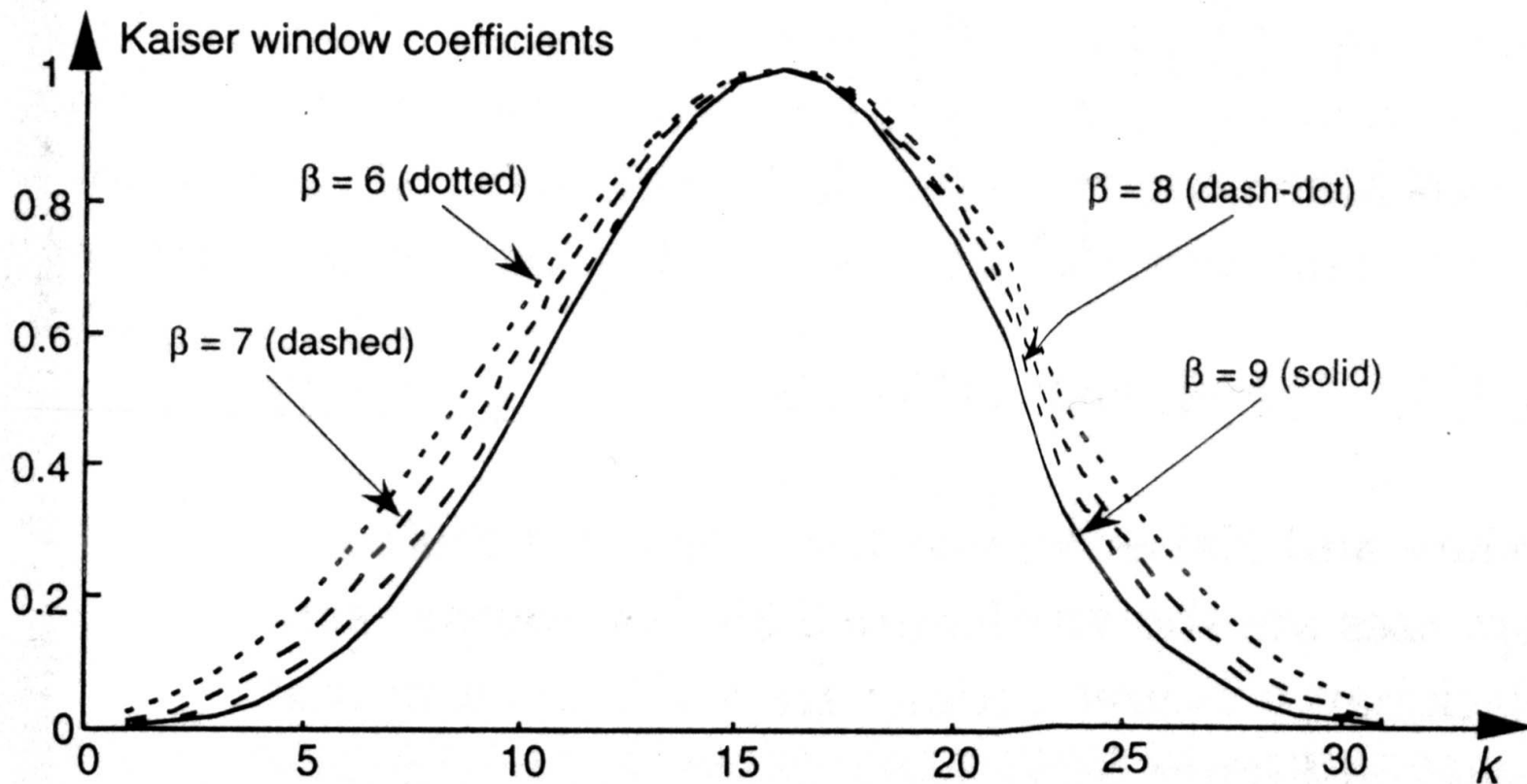
#### Notes:

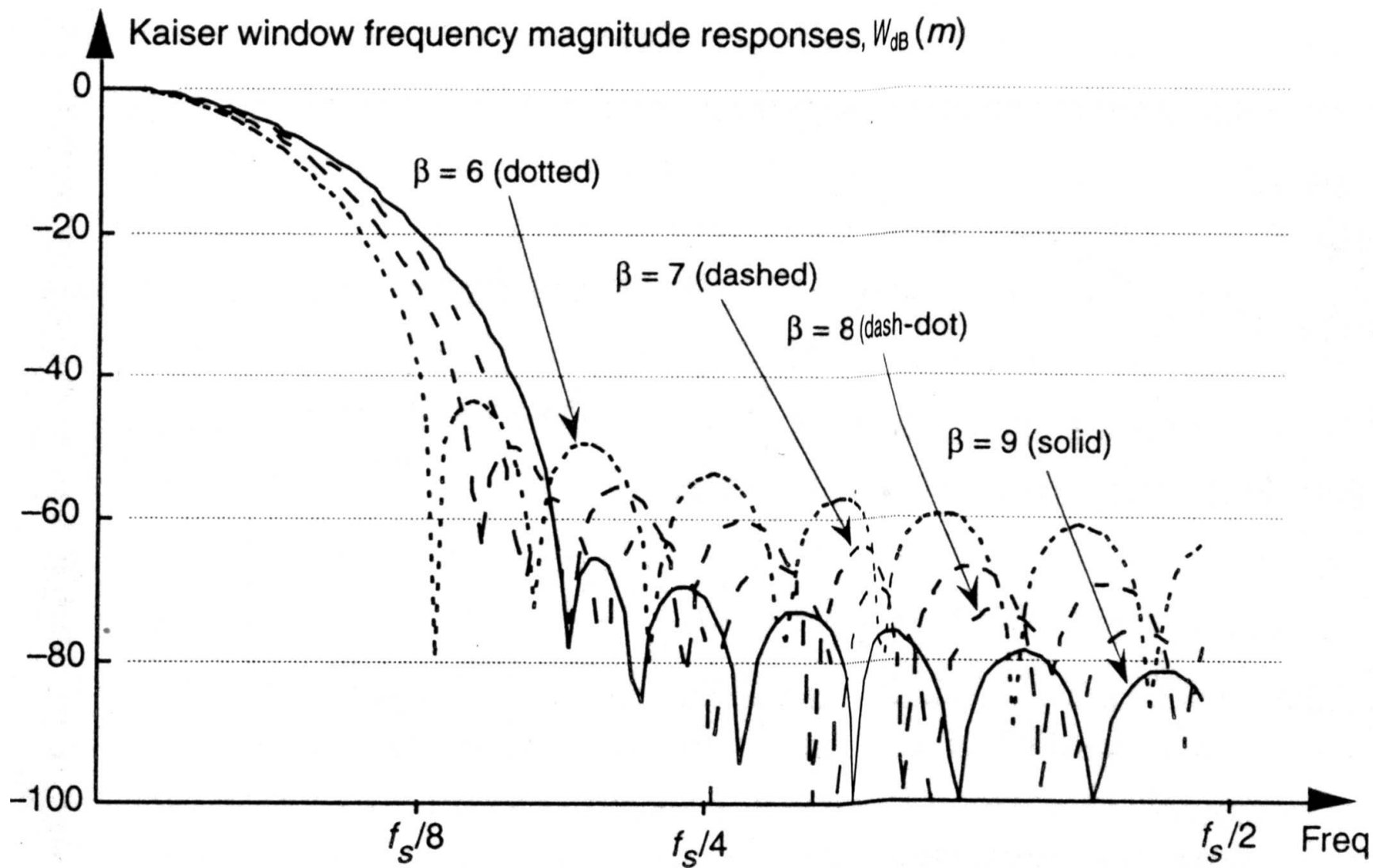
1. All widths ( $W_M$ ,  $W_S$ ,  $W_6$ ,  $W_3$ ) must be normalized (divided) by the window length  $N$ .
2. Values for the Kaiser window depend on the parameter  $\beta$ . Empirically determined relations are

$$G_P = \frac{|\text{sinc}(j\beta)|}{I_0(\pi\beta)}, \quad \frac{G_S}{G_P} = \frac{0.22\pi\beta}{\sinh(\pi\beta)}, \quad W_M = (1 + \beta^2)^{1/2}, \quad W_S = (0.661 + \beta^2)^{1/2}$$

- Kaiserovo okno

$$w_K(n) = \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq M$$





## Stanovení délky N a koeficientu $\beta$ u Kaiserova okna

1. Určení zvlnění v propustné a nepropustné části

$$\delta_p = \frac{10^{A_p/20} - 1}{10^{A_p/20} + 1} \quad \delta_s = 10^{-A_s/20} \quad \delta = \min(\delta_p, \delta_s)$$

2. Určení aktuálního útlumu v nepropustné části ze zvlnění  $\delta$

$$A_{s0} = -20 \log \delta \text{ dB}$$

3. Určení délky filtru N

$$N \geq \begin{cases} \frac{A_{s0} - 7.95}{14.36(F_s - F_p)} + 1, & A_{s0} \geq 21 \text{ dB} \\ \frac{0.9222}{F_s - F_p} + 1, & A_{s0} < 21 \text{ dB} \end{cases}$$

#### 4. Určení parametru $\beta$ Kaiserova okna

$$\beta = \begin{cases} 0.0351(A_{s0} - 8.7), & A_{s0} > 50 \text{ dB} \\ 0.186(A_{s0} - 21)^{0.4} + 0.0251(A_{s0} - 21), & 21 \text{ dB} \leq A_{s0} \leq 50 \text{ dB} \\ 0, & A_{s0} < 21 \text{ dB} \end{cases}$$

# Spektrální transformace

Začínáme s návrhem dolní propusti s jednotkovým ziskem v propustné části a mezní frekvencí  $F_c = 0.5(F_p + F_s)$  jejíž nekauzální impulzní odezva  $h_{LP}[n]$  je symetricky oříznuta na délku  $N$  a má tvar

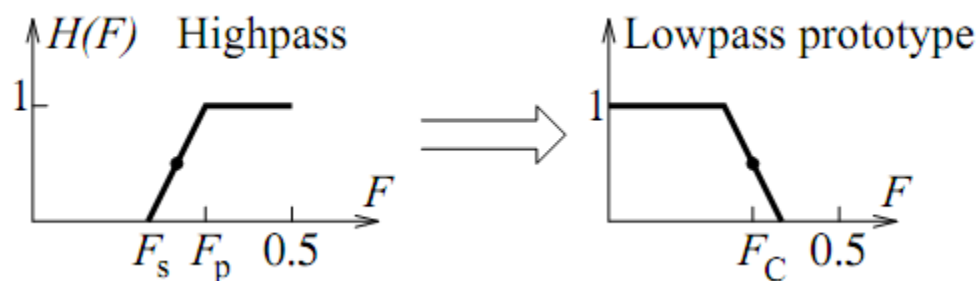
$$h_{LP}[n] = 2F_C \operatorname{sinc}(2nF_C), \quad -0.5(N-1) \leq n \leq 0.5(N-1)$$

Pro  $N$  sudé jsou hodnoty  $n$  neceločíselné a je lepší pracovat s kauzální verzí, která má tvar  $h_{LP}[k]$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ , kde  $k = n + 0.5(N-1)$ . Reindexovaná odezva má tvar

$$h_{LP}[k] = 2F_C \operatorname{sinc}\{2[k - 0.5(N-1)]F_C\}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$



Transformace LP  $\rightarrow$  HP  $H_{\text{HP}}(F) = 1 - H_{\text{LP}}(F)$



$$F_C = 0.5(F_p + F_s)$$

$$h_{\text{HP}}[n] = \delta[n] - 2F_C \text{sinc}(2nF_C)w[n]$$

Nekauzální impulzní odezva má tvar:

$$h_{\text{HP}}[n] = \delta[n] - h_{\text{LP}}[n]$$

– platí to **pouze pro liché N** a jednotkový zisk  $G$ , pro jiný  $G$  platí

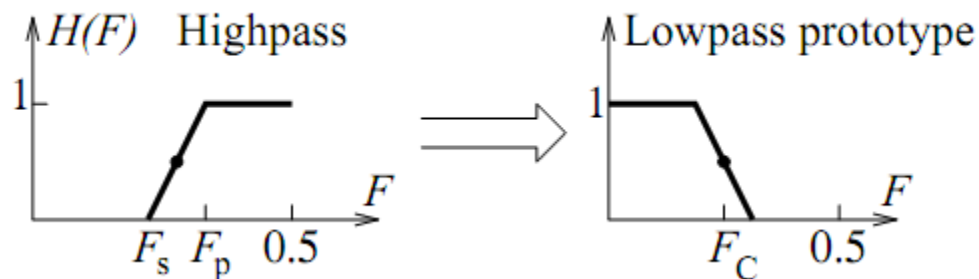
$$h_{\text{HP}}[n] = G\delta[n] - h_{\text{LP}}[n].$$

Kauzální odezva má tvar (po reindexaci):

$$h_{\text{HP}}[k] = \delta[k - 0.5(N - 1)] - 2F_C \text{sinc}\{2[k - 0.5(N - 1)]F_C\}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

Transformace LP  $\rightarrow$  HP

$$H_{\text{HP}}(F) = H_{\text{LP}}(F - 0.5)$$



$$F_C = 0.5 - 0.5(F_p + F_s)$$

$$h_{\text{HP}}[n] = (-1)^n 2F_C \text{sinc}(2nF_C)w[n]$$

Transformace je vhodná pro FIR i IIR filtry libovolné délky (sudé i liché).

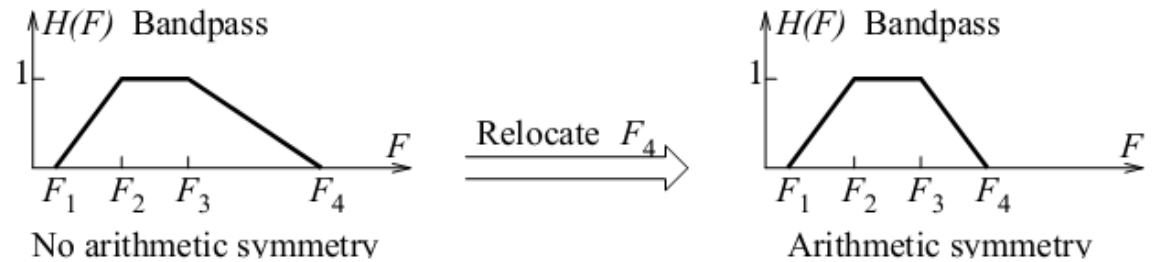
Pro kauzální filtr má impulzní odezva tvar:

$$h_{\text{HP}}[k] = (-1)^k h_{\text{LP}}[k], \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

kde kauzální prototyp impulzní odezvy ideální dolní propusti má tvar

$$h_{\text{LP}}[k] = 2F_C \text{sinc}\{2[k - 0.5(N - 1)]F_C\}, \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad \text{where } F_C = 0.5 - F_H$$

## Transformace LP → BP



1. Přebíhová pásma  $[F_1, F_2]$  a  $[F_3, F_4]$  musí být symetrická, pokud nejsou tak je vytvoříme symetricky z užšího pásma.
2. Určíme střed propustného pásma  $F_0$ :

$$F_0 = 0.5(F_2 + F_3) = 0.5(F_1 + F_4)$$

3. Posuneme spektrum dolní propusti o  $\pm F_0$  :

$$H_{BP}(F) = H_{LP}(F + F_0) + H_{LP}(F - F_0)$$

4. Určíme impulzní odezvu pásmové propusti

$$h_{BP}[n] = 2 \cos(2n\pi F_0) h_{LP}[n] = 4F_C \operatorname{sinc}(2nF_C) \cos(2\pi nF_0), \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

kde  $F_C$  je mezní frekvence prototypu filtru DP:

$$F_C = 0.5(F_3 + F_4) - F_0$$

5. Přeindexujeme  $n$  na  $k$ , abychom dostali kauzální impulzní charakteristiku  $h_{BP}[k]$ :  
 $0 \leq k \leq N-1$ , kde  $k = n + 0.5(N-1)$

## Transformace LP→ BS

### 1. způsob

Pro pásmovou zádrž musíme použít filtr typu 4 (sudá symetrie, lichá délka  $N$ ). Transformace je popsána vztahem  $H_{BS}(F) = 1 - H_{BP}(F)$ , což vede k nekauzální impulzní odezvě:

$$h_{BS}[n] = \delta[n] - h_{BP}[n] = \delta[n] - 4F_C \operatorname{sinc}(2nF_C) \cos(2\pi nF_0), \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

Přeindexujeme  $n$  na  $k$ , abychom dostali kauzální impulzní charakteristiku  $h_{BP}[k]$ :  $0 \leq k \leq N-1$ , kde  $k = n + 0.5(N-1)$

### 2. způsob

Pásmovou zádrž můžeme realizovat jako součet dolní propusti s mezní frekvencí  $F_L = 0.5(F_1 + F_2)$ , a horní propusti s  $F_H = 0.5(F_3 + F_4)$  což vede k nekauzální impulzní odezvě:

$$h_{BS}[n] = 2F_L \operatorname{sinc}(2nF_L) + 2(-1)^n (0.5 - F_H) \operatorname{sinc}[2n(0.5 - F_H)], \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

Přeindexujeme  $n$  na  $k$ , abychom dostali kauzální impulzní charakteristiku  $h_{BP}[k]$ :  $0 \leq k \leq N-1$ , kde  $k = n + 0.5(N-1)$

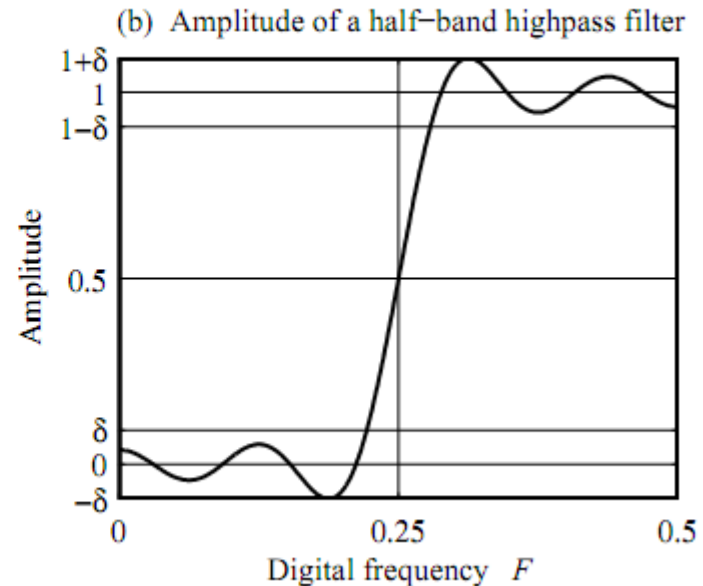
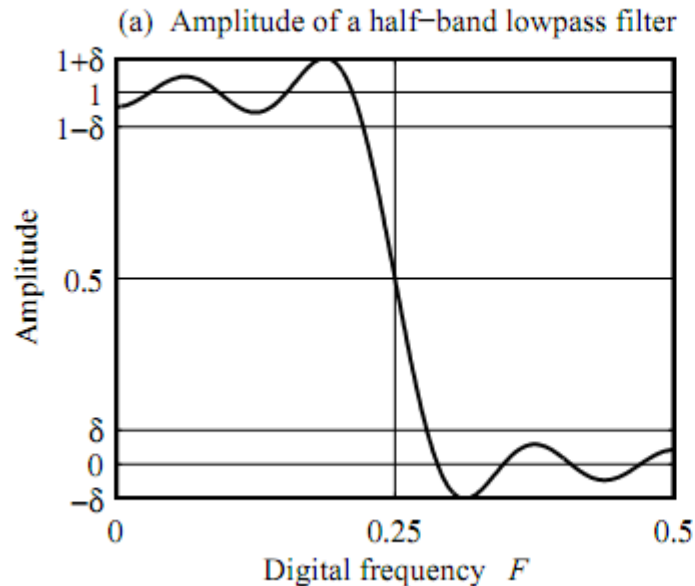
Příklad: Navrhněte FIR filtry které splňují následující specifikace:

1.  $f_p = 2 \text{ kHz}$ ,  $f_s = 4 \text{ kHz}$  ,  $A_p = 2 \text{ dB}$ ,  $A_s = 40 \text{ dB}$  ,  $S = 20 \text{ kHz}$
2.  $f_p = 4 \text{ kHz}$ ,  $f_s = 2 \text{ kHz}$  ,  $A_p = 2 \text{ dB}$ ,  $A_s = 40 \text{ dB}$  ,  $S = 20 \text{ kHz}$
3. propustné pásmo  $[4,8] \text{ kHz}$ , nepropustné pásmo  $[2,12] \text{ kHz}$ ,  
 $A_p = 3 \text{ dB}$ ,  $A_s = 45 \text{ dB}$  ,  $S = 25 \text{ kHz}$

# Půlpásmový (Half-Band) FIR filtr

Vlastnosti:

- ✓ má lichý počet koeficientů impulzní odezvy
- ✓ polovina koeficientů impulzní odezvy má nulovou hodnotu ( $h[n] = 0$  pro sudé  $n$ ) → jednodušší realizace (je potřeba pouze polovina násobiček)
- ✓ mezní frekvence  $F_C = 0.25 \Rightarrow$  při návrhu je potřeba upravit vzorkovací frekvenci



# Postup návrhu půl-pásmového FIR filtru

- Stanovení vzorkovací frekvence  $S = 2(f_p + f_s)$  (pro DP a HP) nebo  $S = 4f_0$  (pro PP a PZ)
- stanovení  $F_p$  a  $F_s$  dolní propusti
- určení frekvence  $F_c$  (cut-off frequency)  $F_c = 0.5(F_p + F_s)$
- Volba okna (z následující tabulky), které splňuje podmínku  $A_{ws} \geq A_s$  a  $A_{wp} \leq A_p$
- stanovení délky okna  $N$  z hodnoty  $FT = F_s - F_p = F_{ws} = C/N$  (hodnota  $C$  z tabulky).  **$N$  musí být liché !**
- výpočet impulzní odezvy DP filtru  $h(n) = 2F_c \text{sinc}(2nF_c)$ ,  $|n| \leq 0.5(N-1)$
- vynásobení odezvy zvoleným oknem  $h_{lp}(n) = w(n)h(n)$
- provedení spektrální transformace na (pokud je to nutné)
- Ověření frekvenční charakteristiky a případné doladění  $N$ , aby frekvenční charakteristika odpovídala specifikaci

Příklad: Navrhněte půl-pásmovou dolní propust, která splňuje následující požadavky: konec propustného pásma  $F_p=8\text{kHz}$

začátek nepropustného pásma  $F_s=16\text{kHz}$

$$A_p = 1\text{dB}$$

$$A_s = 50\text{dB}$$

Příklad: Navrhněte půl-pásmovou pásmovou zadrž, která splňuje následující požadavky: hrany nepropustného pásma  $[2,3]\text{ kHz}$

hrany propustného pásma  $[1,4]\text{ kHz}$

$$A_p = 1\text{dB}$$

$$A_s = 50\text{dB}$$



# Metoda frekvenčního vzorkování

## Princip :

- Vycházíme z amplitudové frekvenční charakteristiky, kterou navzorkujeme a určíme pro ní impulsovou odezvu.
- Výhodné, pokud máme složitější tvar frekvenční charakteristiky

## Postup:

1. Vybereme  $N$  ekvidistantních hodnot (vzorků) požadované amplitudové frekvenční odezvy  $H(F)$ , které odpovídají frekvenčnímu rozsahu  $0 \leq F < 1$

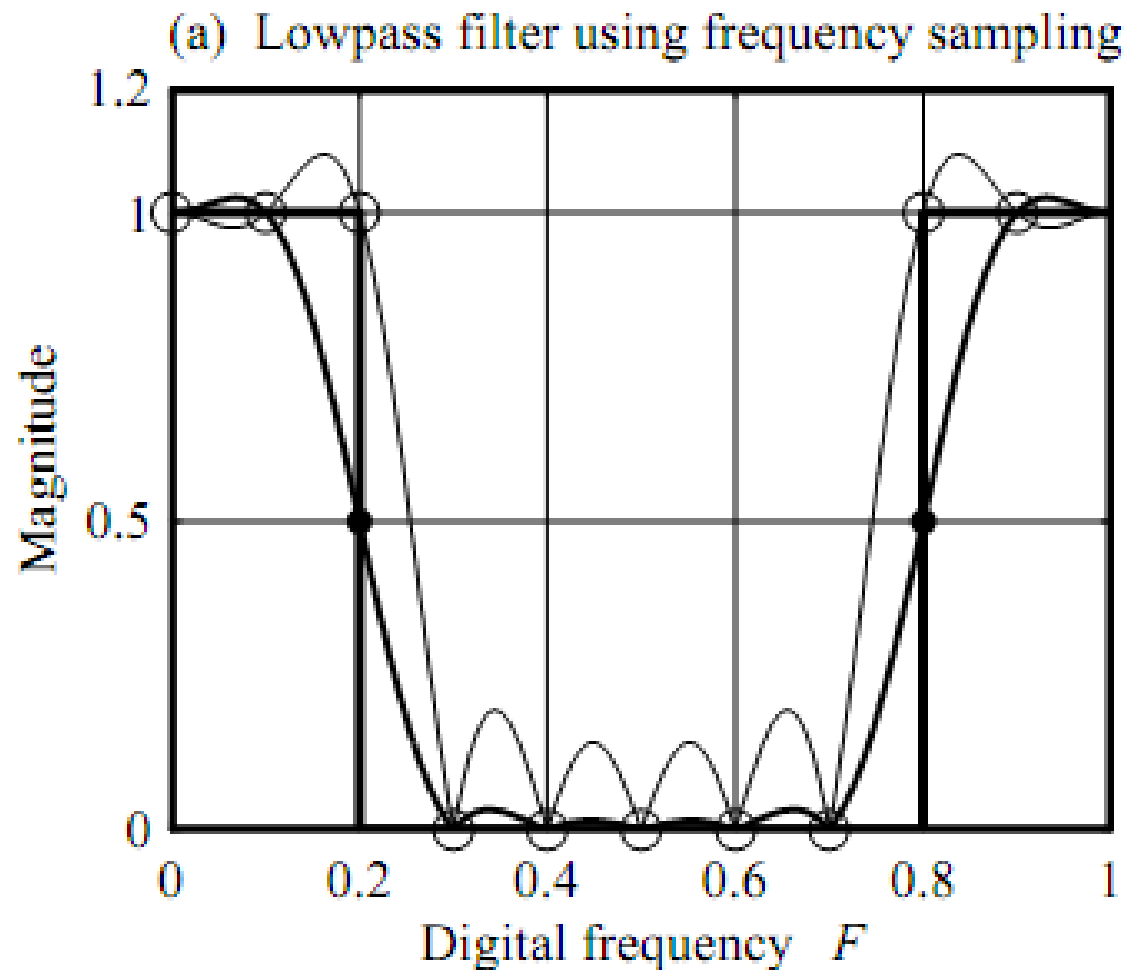
$$H[k] = H(F) \Big|_{F=k/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

2. Jelikož  $h[n]$  musí být reálné  $\Rightarrow H[k]$  musí být komplexně sdružené okolo  $k=0.5N \Rightarrow H[0]$  je samostatný a nastavuje se na hodnotu v souladu s typem filtru  $H[0]=0$  pro HP a PP
3. Pro sudé  $N$  není  $h[n]$  symetrické, abychom zajistily symetrii nastavuje se  $h[0]=h[N]=0.5h[0]$ .
4. Aby byla  $h[n]$  kauzální, musíme jí zpozdít  $\Rightarrow$  zavedeme fázový posun do frekvenční charakteristiky, která bude mít tvar  $H[k]|e^{j\phi[k]}$   
 $\Rightarrow$  určíme fázi prvních  $N/2$  vzorků

$$\phi[k] = \frac{-\pi k(N-1)}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 0.5(N-1)$$

5. Pro filtry typu 3 a 4 (antisymetrické) musíme přidat k  $\phi[k]$  konstantní fázový posun (až do indexu  $k=0.5N$ ). Zbývající vzorky jsou komplexně sdružené
6. Na takto získanou poskoupnost aplikujeme IDFT (IFFT)
7. Ze získaných koeficientů určíme frekvenční charakteristiku, porovnáme s požadovanou a popř. upravíme amplitudy koeficientů frekvenční charakteristiky a pokračujeme krokem 3.
8. Výslednou impulsovou odezvu násobíme vhodným oknem

Příklad: Uvažujte charakteristiku ideální DP podle obrázku a určete koeficienty filtru



Příklad: Uvažujte charakteristiku ideální HP podle obrázku a určete koeficienty filtru

