Analýza a zpracování signálů

4. Diskrétní systémy,výpočet impulsní odezvy, konvoluce, korelace

Diskrétní systémy

Diskrétní sytém - zpracovává časově diskrétní vstupní signál x[n] a produkuje časově diskrétní výstupní signál y[n].

$$x[n] \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y[n]$$

Kategorie diskrétních systémů:

• lineární/nelineární - systém, který splňuje následující rovnici je lineární,

$$A \cdot x_1[n] + B \cdot x_2[n] \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow A \cdot y_1[n] + B \cdot y_2[n]$$

pokud není rovnice splněna, je systém nelineární.

- časově invariantní/variantní : - pokud odezva systému závisí pouze na tvaru vstupního signálu a ne na čase, kdy je na vstup přiveden signál, je systém časově invariantní

$$x[n-m] \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y[n-m]$$

Systémy, který nesplňují předchozí vlastnost je časově variantní. (např. adaptivní filtry)

Lineární časově invariantní systém (LTI) splňuje zároveň podmínku linearity a časové invariance – lze ověřit následujícím testem:

1. Diferenční rovnice popisující LTI systém, musí mít konstantní koeficienty a nesmí obsahovat konstantní termy.
2. Pokud se v termech vyskytují součiny vstupů s výstupu, popř. rovnice obsahuje konstantní termy → systém je nelineární.
3. Pokud jsou koeficienty funkcí *n* nebo je násobena proměnná *n* uvnitř závorek → systém je časově variantní.

Př.:

a) $y[n]-2y[n-1]=4x[n]$ → LTI

b) $y[n]-2ny[n-1]=x[n]$ → pouze lineární

c) $y[n]-2y^2[n-1]=2x[n]-2x[n-1]$ → nelineární, ale TI

d) $y[n]-2y[n-1]=2^{x[n]}\,x[n]$ → nelineární, ale TI

e) $y[n]-4y[n]y[2n]=x[n]$ → nelineární, časově variantní

- Kauzalita systému – u kauzálního systému y[n] nezávisí na budoucích hodnotách x[n], tj. v rovnici se nevyskytují termy jako x[n+2] apod., pokud se vyskytují je systém nekauzální. Typicky kauzální jsou systémy, které pracují v reálném čase.

$$y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=B_0x[n+K]$$ je kauzální pro $K \le 0$

$$y[n+L]+A_1y[n+L-1]+\ldots+A_Ly[n]=B_0x[n+L]$$ je kauzální pro $K \le L$

Pokud je systém popsán přenosovou funkcí

ˇ

$$H(z)=\frac{B_0z^P+B_1z^{P-1}+\ldots+B_{P-1}+B_P}{A_0z^Q+A_1z^{Q-1}+\ldots+A_{Q-1}+A_Q}$$

pak je kauzální, pokud $P \le Q$.

- Statický a dynamický systém – pokud odezva systému v čase n=n_0 závisí pouze na hodnotě vstupu v čase n=n_0 → systém je statický, jinak je dynamický.

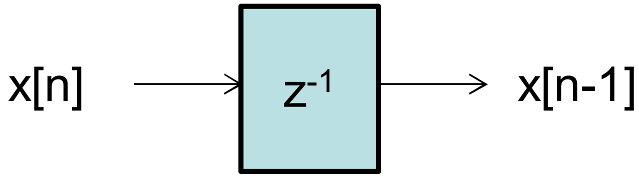
$$y[n+\alpha] = kx[n+\alpha]$$

Příklady:

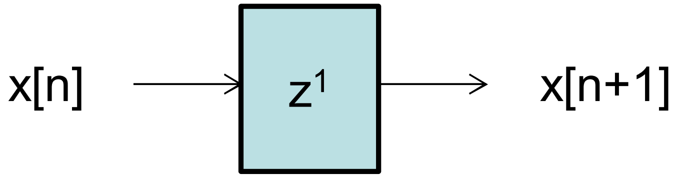
$y[n] = x[n+2]$	$\Rightarrow$	nekauzální, dynamický
$y[n+4] + y[n+3] = x[n+2]$	$\Rightarrow$	kauzální, dynamický
$y[n] = 2x[\alpha n] \quad \alpha = 1$	$\Rightarrow$	kauzální, statický
$\alpha < 1$	$\Rightarrow$	kauzální, dynamický
$\alpha > 1$	$\Rightarrow$	nekauzální, dynamický
$y[n] = 2(n+1)x[n]$	$\Rightarrow$	kauzální, statický, časově variantní

Základní stavební bloky diskrétních systémů

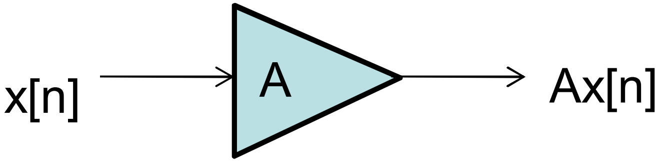
Zpoždění:



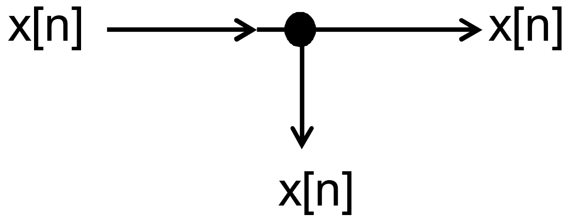
Posun:



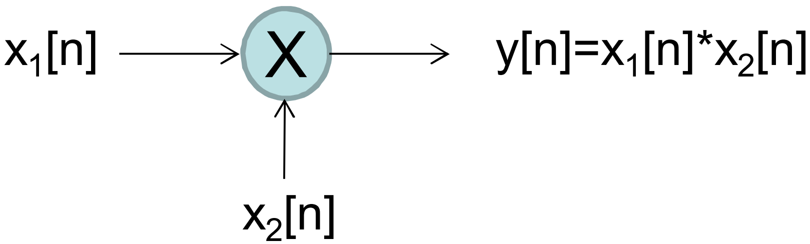
Násobení:



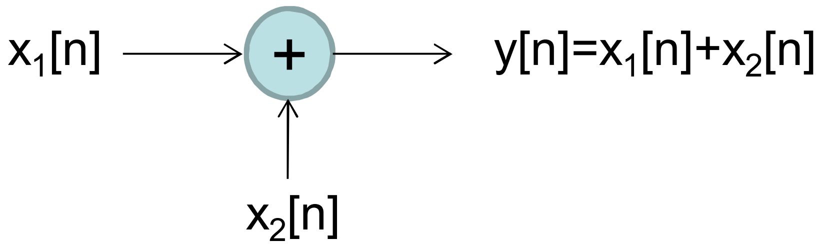
Větvení signálu:



Násobení signálů:



Součet signálů:



Implementace diskrétních systémů

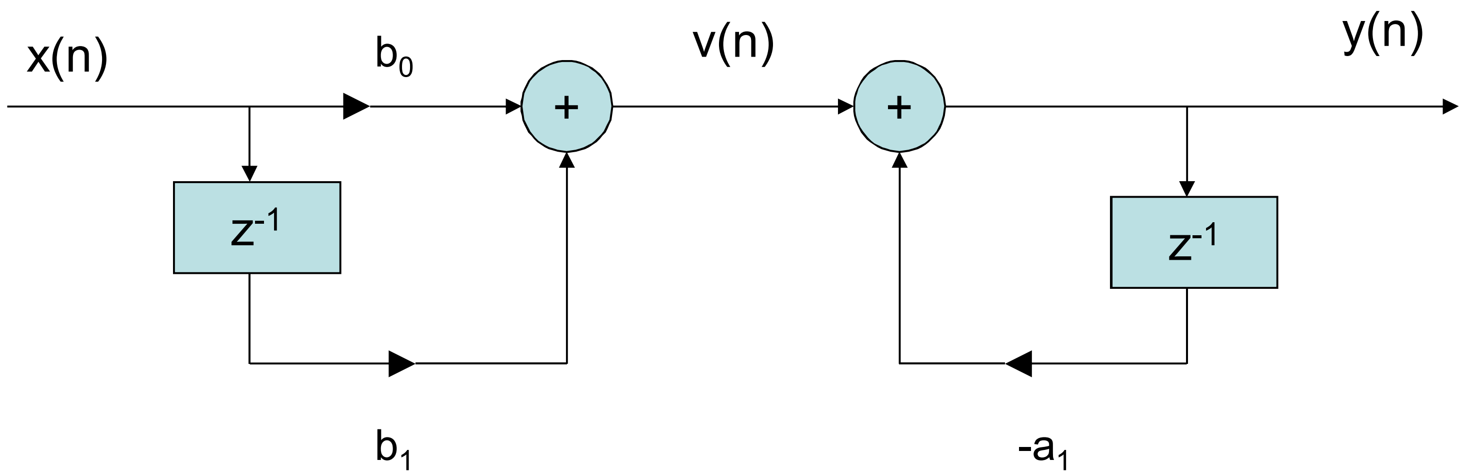
Struktury pro realizaci LTI systému

- Uvažujme diferenční rovnici 1. řádu

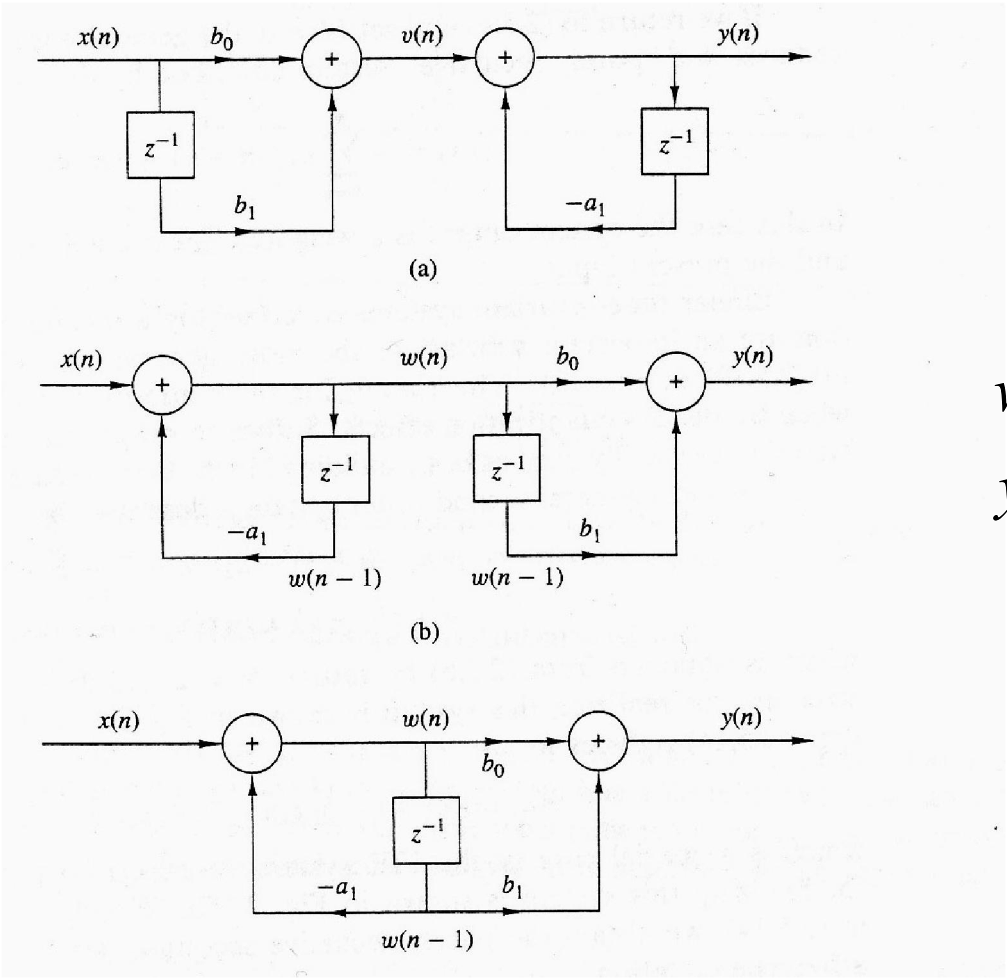
$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

Přímá forma – struktura I

- Využívá 2 zpožďovací členy – jeden ve vstupní větvi, druhý ve větvi výstupní



Převod mezi první a druhou přímou formou



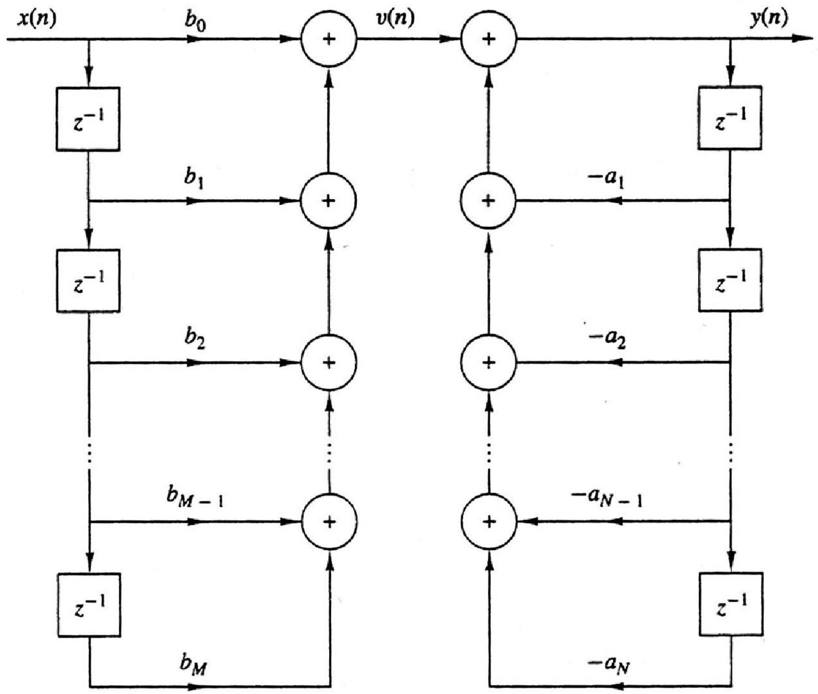
Přímá forma I

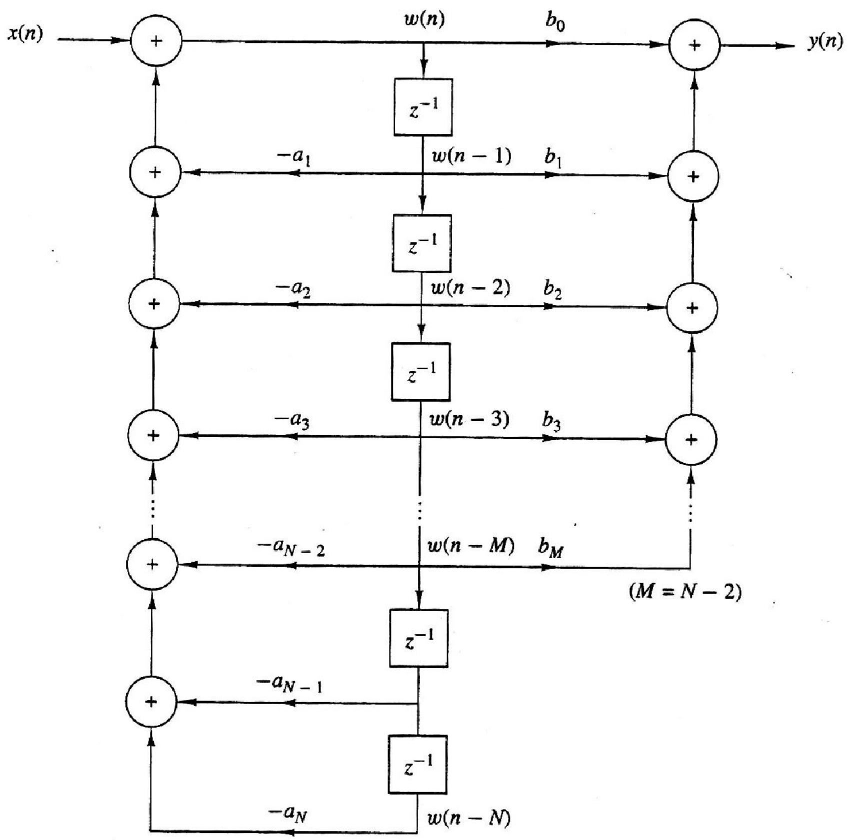
$$w[n] = -a_1 w[n-1] + x[n]$$
$$y[n] = b_o w[n] + b_1 w[n-1]$$

Přímá forma II

Přímá forma II se používá v praktických aplikacích - je efektivnější, obsahuje pouze jedinou zpožďovací linku

Převod z přímé formy I do přímé formy II pro diferenční rovnici N-tého řádu



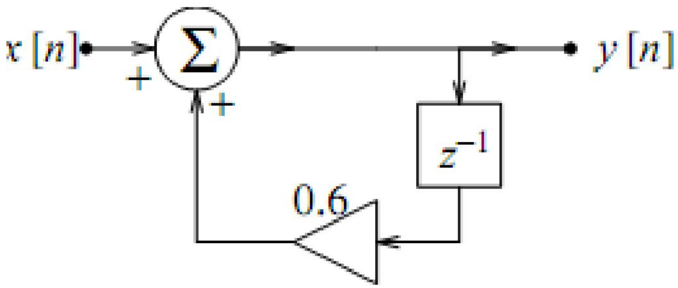


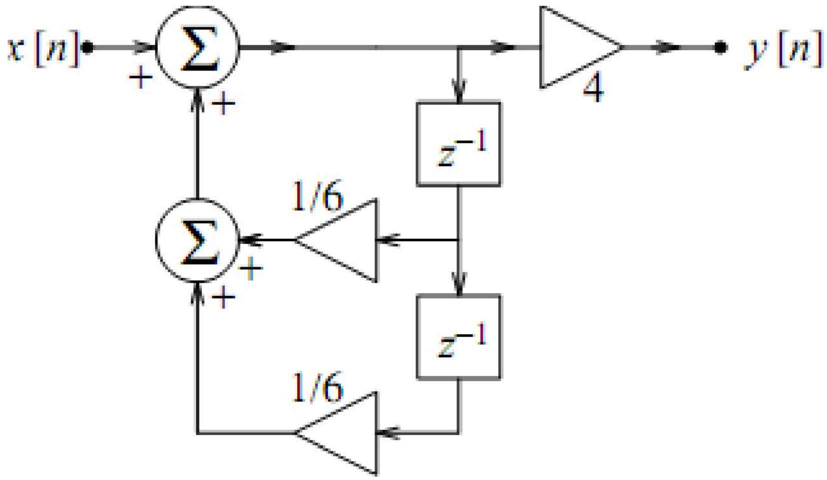
Příklad:

- Nakreslete blokové schéma následujících systémů:

a) y[n]-0.6y[n-1]=x[n]

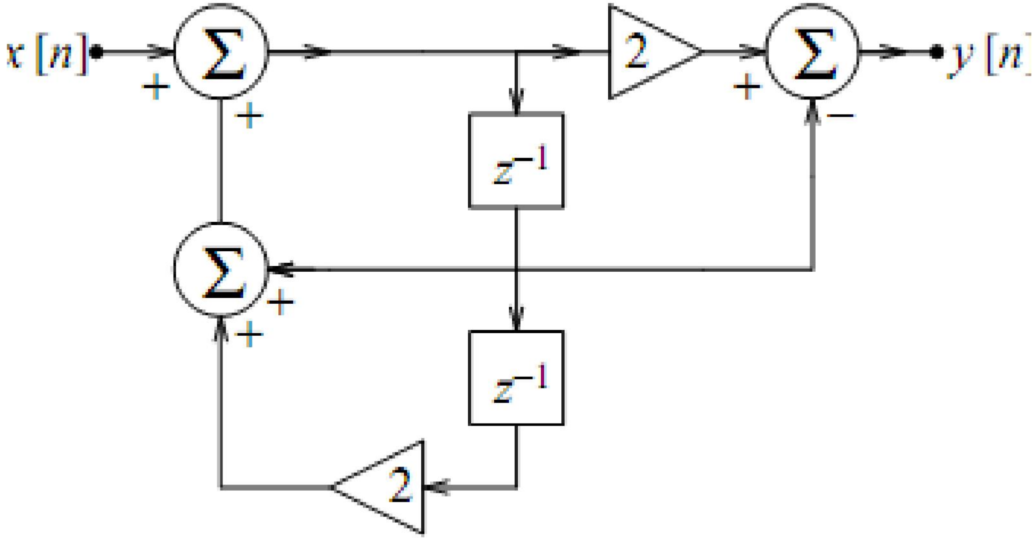
b) y[n]-1/6y[n-1]-1/6y[n-2]=4x[n]





Příklad:

c) Určete diferenční rovnici systému z následujícího obrázku]



$$y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = 2x[n] - x[n-1]$$

Analýza diskrétních systémů

- V časové oblasti je možné analyzovat diskrétní systémy následujícími modely:
  - Diferenční rovnicí - tento model lze aplikovat na lineární, nelineární a časově variantní systémy. Pro LTI systémy se využívá principu superpozice
  - Impulzní odezvou – popisuje odezvu ustáleného LTI systému. Výstup systému je možné popsat jako konvoluční součet vstupu a impulsní odezvy h[n].
  - Stavové rovnice a stavové proměnné – lze použít pro systém n-tého řádu, který popisuje systémem n diferenčních rovnic prvého řádu – tzv. stavové rovnice. Tento popis je vhodný pro složité a nelineární systémy

Číslicové systémy popsané diferenční rovnicí

- Obecný popis – rekurzivní filtr N-tého řádu – autoregressive moving average (ARMA) filter

$$y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=B_0x[n]+B_1x[n-1]+\ldots+B_Mx[n-M]$$

- Nerekurzivní filtr (FIR) „klouzavý“ průměr – moving average (MA)

$$y[n]=B_0x[n]+B_1x[n-1]+\ldots+B_Mx[n-M]$$

- rekurzivní IIR filtr N-tého řádu – autoregressive (AR) filter

$$y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=B_0x[n]$$

Výpočet odezvy y[n] diskrétního systému na vstup x[n]

- pro nerekurzivní systémy jednoduché – počítáme vážený součet vstupních hodnot
- pro rekurzivní filtr – musíme řešit diferenční rovnici N-tého řádu - musíme znát počáteční podmínky y[-1], y[-2], … , y[-N]

Příklad:
Rekurzívní výpočet diferenční rovnice

a) $y[n]-a_1y[n-1]=b_0u[n]$ $\quad y[-1]=0$

b) $y[n]-a_1y[n-1]=b_0nu[n]$ $\quad y[-1]=0$

c) $y[n]-y[n-1]=x[n]-x[n-3]$ $\quad x[n]=\delta[n]$, $y[-1]=0$

(a) Consider a system described by $y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 u[n]$. Let the initial condition be $y[-1] = 0$. We then successively compute

$$\begin{aligned} y[0] &= a_1 y[-1] + b_0 u[0] = b_0 \\ y[1] &= a_1 y[0] + b_0 u[1] = a_1 b_0 + b_0 = b_0[1 + a_1] \\ y[2] &= a_1 y[1] + b_0 u[2] = a_1[a_1 b_0 + b_0] + b_0 = b_0[1 + a_1 + a_1^2] \end{aligned}$$

The form of $y[n]$ may be discerned as

$$y[n] = b_0[1 + a_1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{n-1} + a_1^n]$$

Using the closed form for the geometric sequence results in

$$y[n] = \frac{b_0(1 - a_1^{n+1})}{1 - a_1}$$

If the coefficients appear as numerical values, the general form may not be easy to discern.

(b) Consider a system described by $y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 n u[n]$. Let the initial condition be $y[-1] = 0$. We then successively compute

$$\begin{aligned}
y[0] &= a_1 y[-1] = 0 \\
y[1] &= a_1 y[0] + b_0 u[1] = b_0 \\
y[2] &= a_1 y[1] + 2b_0 u[2] = a_1 b_0 + 2b_0 \\
y[3] &= a_1 y[2] + 3b_0 u[3] = a_1[a_1 b_0 + 2b_0] + 3b_0 = a_1^2 + 2a_1 b_0 + 3b_0
\end{aligned}$$

The general form is thus $y[n] = a_1^{n-1} + 2b_0 a_1^{n-2} + 3b_0 a_1^{n-3} + (n-1)b_0 a_1 + nb_0$.

We can find a more compact form for this, but not without some effort. By adding and subtracting $b_0 a_1^{n-1}$ and factoring out a_1^n, we obtain

$$y[n] = a_1^n - b_0 a_1^{n-1} + b_0 a_1^n [a_1^{-1} + 2a_1^{-2} + 3a_1^{-3} + \cdots + n a_1^{-n}]$$

Using the closed form for the sum $\Sigma\, kx^k$ from $k = 1$ to $k = N$ (with $x = a^{-1}$), we get

$$y[n] = a_1^n - b_0 a_1^{n-1} + b_0 a_1^n \frac{a^{-1}[1 - (n+1)a^{-n} + na^{-(n+1)}]}{(1 - a^{-1})^2}$$

What a chore! More elegant ways of solving difference equations are described later in this chapter.

(c) Consider the recursive system $y[n] = y[n-1] + x[n] - x[n-3]$. If $x[n]$ equals $\delta[n]$ and $y[-1] = 0$, we successively obtain

$$\begin{array}{ll} y[0] = y[-1] + \delta[0] - \delta[-3] = 1 & \qquad y[3] = y[2] + \delta[3] - \delta[0] = 1 - 1 = 0 \\ y[1] = y[0] + \delta[1] - \delta[-2] = 1 & \qquad y[4] = y[3] + \delta[4] - \delta[1] = 0 \\ y[2] = y[1] + \delta[2] - \delta[-1] = 1 & \qquad y[5] = y[4] + \delta[5] - \delta[2] = 0 \end{array}$$

The impulse response of this "recursive" filter is zero after the first three values and has a finite length. It is actually a nonrecursive (FIR) filter in disguise!

Řešení rovnice:

- Rekurzivně – přímočaré řešení, postupně počítáme hodnoty y[0], y[1],…
- Formální řešení diferenční rovnice

$$y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=x[n]$$

Řešení rovnice lze rozdělit na dvě části

- řešení homogenní rovnice y_h – pravá strana rovnice je nulová
- partikulární řešení řešíme rovnici s pravou stranou

Homogenní rovnice

$$y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=0$$

Řešením je lineární kombinace exponenciálních funkcí, jejichž základy odpovídají kořenům charakteristické rovnice

$$1+A_1z^{-1}+A_2z^{-2}+\ldots+A_Nz^{-N}=0$$

$$z^N+A_1z^{N-1}+A_2z^{N-2}+\ldots+A_N=0$$

- Charakteristická rovnice má N kořenů $z_1, z_2, \ldots, z_N$
- pro reálné různé kořeny, má řešení diferenční rovnice tvar:

$$y_H[n] = K_1 z_1^{\,n} + K_2 z_2^{\,n} + \ldots + K_N z_N^{\,n}$$

- pro násobné a komplexní kořeny se výsledek modifikuje podle tabulky 3.2
- konstanty K_1, K_2, … , K_N se určí na základě počátečních podmínek

Partikulární řešení y_P závisí na tvaru vstupního signálu – tabulka 3.1

Celková odezva je pak dána součtem $y_H + y_P$

- pro stabilní systémy určuje y_H přechodový stav
- pro systém s harmonickým vstupem určuje y_P ustálený stav, který je také harmonický

Řešení homogenní rovnice

Table 3.2 Form of the Natural Response for Discrete LTI Systems

Entry	Root of Characteristic Equation	Form of Natural Response
1	Real and distinct: r	Kr^n
2	Complex conjugate: $re^{j\Omega}$	$r^n[K_1\cos(n\Omega) + K_2\sin(n\Omega)]$
3	Real, repeated: r^{p+1}	$r^n(K_0 + K_1 n + K_2 n^2 + \cdots + K_p n^p)$
4	Complex, repeated: $\left(re^{j\Omega}\right)^{p+1}$	$r^n\cos(n\Omega)(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \cdots + A_p n^p)$ $+ r^n\sin(n\Omega)(B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + \cdots + B_p n^p)$

Partikulární řešení

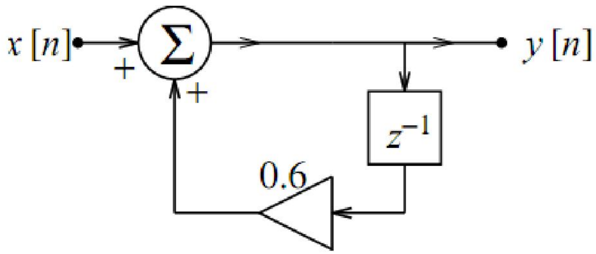
Table 3.1 Form of the Forced Response for Discrete LTI Systems

Note: If the right-hand side (RHS) is α^n, where α is also a root of the characteristic equation repeated p times, the forced response form must be multiplied by n^p.

Entry	Forcing Function (RHS)	Form of Forced Response
1	C_0 (constant)	C_1 (another constant)
2	α^n (see note above)	$C\alpha^n$
3	$\cos(n\Omega + \beta)$	$C_1 \cos(n\Omega) + C_2 \sin(n\Omega)$ or $C \cos(n\Omega + \phi)$
4	$\alpha^n \cos(n\Omega + \beta)$ (see note above)	$\alpha^n[C_1 \cos(n\Omega) + C_2 \sin(n\Omega)]$
5	n	$C_0 + C_1 n$
6	n^p	$C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \cdots + C_p n^p$
7	$n\alpha^n$ (see note above)	$\alpha^n(C_0 + C_1 n)$
8	$n^p\alpha^n$ (see note above)	$\alpha^n(C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \cdots + C_p n^p)$
9	$n \cos(n\Omega + \beta)$	$(C_1 + C_2 n)\cos(n\Omega) + (C_3 + C_4 n)\sin(n\Omega)$

Příklady:

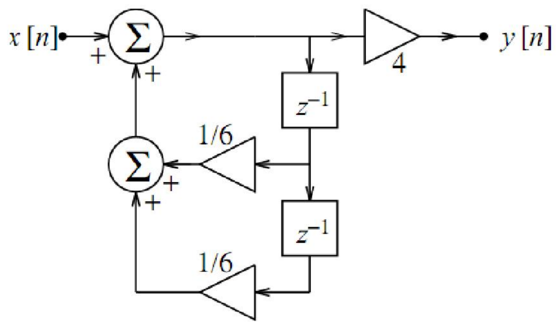
1. Určete odezvu systému y[n] z následujícího obrázku na vstup $x[n]=(0.4)^n$, $n\geq 0$, pro počáteční podmínky $y[-1]=10$.



2. Určete odezvu systému $y[n]-0.5y[n-1]=5\cos(0.5n\pi)$, $n\geq 0$, $y[-1]=4$

3. Určete odezvu systému $y[n]-0.5y[n-1]=3(0.5)^n$, $n\geq 0$, $y[-1]=2$

4. Určete odezvu systému y[n] z následujícího obrázku na vstup $x[n]=u[n]$, pro počáteční podmínky $y[-1]=1$, $y[-2]=12$



Zero-Input, Zero-State Response

Odezvu y(t) LTI systému je možné zapsat jako součet ZSR ($y_{zsr}(t)$ – předpokládáme nulové počáteční podmínky) a ZIR ($y_{zir}(t)$ – předpokládáme nulový vstup)

Řešení diferenční rovnice:

$$y[n]+A_1 y[n-1]+\ldots+A_N y[n-N]=x[n]$$

1) Určíme ZSR – při řešení uvažujeme nulové počáteční podmínky

$$y[n]+A_1 y[n-1]+\ldots+A_N y[n-N]=x[n]$$

2) Určíme ZIR – při řešení uvažujeme zadané počáteční podmínky

$$y[n]+A_1 y[n-1]+\ldots+A_N y[n-N]=0$$

3) Výsledné řešení má tvar $y[n]=y_{ZSR}[n]+y_{ZIR}[n]$

Řešení obecné diferenční rovnice s využitím Zsr a Zir

$$y[n] + A_1 y[n-1] + \ldots + A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \ldots + B_M x[n-M]$$

1. Nalezneme Zir – uvažujeme nulovou pravou stranu a zadané počáteční podmínky (je shodné s řešením homogenní rovnice)
2. Nalezneme ZSR pro rovnici s jednoduchým vstupem y_{zsr0}, uvažujeme nulové počáteční podmínky

$$y[n] + A_1 y[n-1] + \ldots + A_N y[n-N] = x[n]$$

3. Superpozicí dostaneme

$$y[n] = y_{Zir} + B_0 y_{Zsr0}[n] + B_1 y_{Zsr0}[n-1] + \ldots + B_M y_{Zsr0}[n-M]$$

1. Určete ZIR a ZSRa celkovou odezvu systému $y[n]-0.6y[n-1]=(0.4)^n$, $n \geq 0$, $y[-1]=10$

Impulsní odezva diskrétního systému

Impulsní odezva h[n] ustáleného LTI systému je odezva na jednotkový impuls δ[n]

Výpočet impulsní odezvy:

1. Pro nerekurzivní (FIR) filtr délky M+1 popsaný rovnicí

$$y[n] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] \ldots + B_M x[n-M]$$

je impulsní odezva h[n] M+1 prvková řada, lze zapsat jako

$$h[n] = B_0 \delta[n] + B_1 \delta[n-1] + \ldots + B_M \delta[n-M]$$

$$\Downarrow$$

$$h[n] = \{B_0, B_1, B_2, \cdots, B_M\}$$

2. Impulsní odezva systému popsaného diferenční rovnicí s jedním vstupem

$$y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=x[n]$$

Abychom nalezli impulzní odezvu h[n], řešíme rovnici

$$h[n]+A_1h[n-1]+\ldots+A_Nh[n-N]=\delta[n]$$

Protože vstup $\delta[n]$ je nulový pro n>0, postačí najít řešení homogenní rovnice pro počáteční podmínku h[0]=1. (pro rovnice vyšších řádů jsou ostatní podmínky h[-1]= h[-2]… =0

$$h[n]+A_1h[n-1]+\ldots+A_Nh[n-N]=0, \qquad h[0]=1$$

3. Impulsní odezva systému popsaného diferenční rovnicí s obecným vstupem

$$y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=B_0x[n]+B_1x[n-1]+\ldots+B_Mx[n-M]$$

Postup:

a) Nalezneme řešení diferenční rovnice s jedním vstupem $h_0[n]$(viz. bod 2)

b) Použijeme superpozicia určíme celkovou impulsní odezvu h[n] jako

$$h[n]=B_0h_0[n]+B_1h_0[n-1]+\ldots+B_Mh_0[n-M]$$

1. Určete impulzní odezvu systému, který je popsán diferenční rovnicí
   $y[n]-0.6y[n-1]=x[n]$,

2. Určete impulzní odezvu systému 2. řádu, který je popsán diferenční rovnicí
   $y[n]- 1/6y[n-1]- 1/6y[n-2]=x[n]$,

3. Určete impulzní odezvu systém;, který je popsány diferenčními rovnicemi
   $y[n]-0.6y[n-1]=4x[n]$, $y[n]-0.6y[n-1]=3x[n-1] -x[n]$,

Diskrétní konvoluce

- může být provdena buď v časové nebo frekvenční oblasti
- používá se k určení impulsní odezvy ustáleného LTI systému
- je založena na principu linearity a časové invariance

Předpokládejme, že známe impulsní odezvu systému *h[n]*.
Je-li na vstupu posloupnost

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

dostaneme, na výstupu

operace konvoluce

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

→ výstupní odezvu systému je možné popsat jako konvoluci vstupu a impulsní odezvy systému

Vlastnosti konvoluce

- Vlastnosti jsou založeny na linearitě a časové invarianci

1. Jsou-li x[n] a h[n] posunuté o n_0 vzorků, pak je o stejný počet vzorků posunut i výstup

$$x[n-n_0]*h[n]=x[n]*h[n-n_0]=y[n-n_0]$$

2. Vztah mezi součtem vzorků x[n], y[n], h[n]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\right)$$

3. Pro kauzální systém h[n]=0, a kauzální signál x[n]=0, pro n<0, je výstup y[n] také kauzální

$$y[n]=x[n]*h[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]=\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$$

Matematicky je konvoluce:

- komutativní

$$a[n]*b[n]=b[n]*a[n]$$

- asociativní

$$(a[n]*b[n])*c[n]=a[n]*(b[n]*c[n])$$

- distributivní

$$a[n]*b[n]+a[n]*b[n]=a[n]*(b[n]+a[n])$$

Konvoluce konečné řady

V praxi nás obvykle zajímají konečné posloupnosti. Konvoluce dvou konečných posloupností je opět konečná posloupnost a platí:

1. Počáteční index y[n] je součet počátečních indexů x[n] a h[n],
2. koncový index y[n] je součet koncových indexů x[n] a h[n],
3. délka L_y posloupnosti y[n] je $L_y=L_x+L_h-1$

Metody výpočtu konvoluce

Metoda sčítání po sloupcích

Postup:

1. Zapsat posloupnost x[n] pod h[n],
2. každým vzorkem x[n] násobit h[n], zapsat výslednou posloupnost pod předchozí (začátek posloupnosti je v pozici vzorku)
3. Sečíst sloupce

Př:

$h[n]=\{ 1,2,2,3 \}$ $x[n]=\{ 2,-1,3 \}$

h[n]	1	2	2	3		
x[n]	2	-1	3			
	2	4	4	6		
		-1	-2	-2	3	
			3	6	6	9
y[n]	2	3	5	10	9	9

$y[n]=\{2,3,5,10,3,9\} = 2\delta[n]+3\delta[n-1]+5\,\delta[n-2]+10\,\delta[n-3]+3\,\delta[n-4]+9\,\delta[n-5]$

Metoda sliding-strip

Postup:

1. Překlopíme x[n] a posuneme vzorky tak, aby poslední vzorek byl proti prvnímu vzorku h[n]
2. Posouváme vzorky x[n] doprava, násobíme protilehlé vzorky x[n] a h[n] a sčítáme

Př. h[n]={ 2,5,0,4 } x[n]={ 4,1,3 }

		2	5	0	4
3	1	4			

y[0] = 4*2=8

	2	5	0	4
3	1	4		

y[1] = 2*1+4*5=22

2	5	0	4
3	1	4	

y[2]=3*2+1*5+4*0=11

2	5	0	4
	3	1	4

y[3] = 3*5+1*0+4*4=31

2	5	0	4	
		3	1	4

y[4] = 3*0+1*4=4

2	5	0	4		
			3	1	4

y[5] = 3*4=12

y[n]={ 8,22,11,31,4,12 }

Metoda násobení koeficientů polynomu

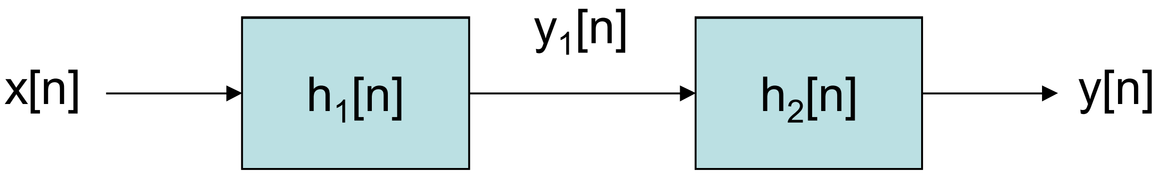
Princip: Diskrétní konvoluce dvou řad konečné délky x[n] a h[n] je ekvivalentní násobení dvou polynomů, jejichž koeficienty jsou popsány polynomy x[n] a h[n]

Př. $h[n]=\{2,5,0,4\}$ $x[n]=\{4,1,3\}$

$$h[z]=2z^3+5z^2+0z+4 \qquad x[z]=4z^2+1z+3$$

$$y[z]=8z^5+22z^4+11z^3+31z^2+4z+12 \qquad y[n]=\{8,22,11,31,4,12\}$$

Impulsní odezva systémů spojených v kaskádě



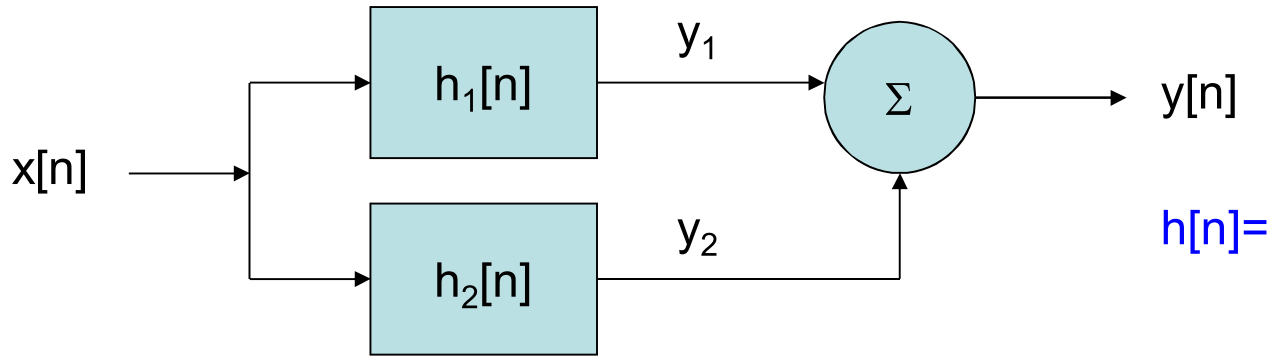
$h[n]=h_1[n]*h_2[n]$

$y_1[n]= x[n]*h_1[n]$

$y_2[n]=y_1[n]*h_2[n]=(x[n]* h_1[n])* h_2[n]=x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$

obecně : $h[n]=h_1[n]*h_2[n]*h_3[n]*\ldots*h_n[n]$

Impulsní odezva systémů spojených paralelně



$h[n]=h_1[n]+h_2[n]$

$y[n]=y_1[n]+y_2[n]=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]=x[n]*(h_1[n]+h_2[n])$

Obecně : $h[n]= h_1[n]+h_2[n]+h_3[n]+\ldots+h_n[n]$

Odezva systému na periodický vstup

- odezva diskrétního LTI systému na periodický vstup s periodou N vzorků je také periodická se stejnou periodou

Př. x[n]={1,2,-3,1,2,-3,1,2,-3, … } h[n]={1,1}

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
x[n]	1	2	-3	1	2	-3	1	2	-3	1	2	-3	
h[n]	1	1											
	1	2	-3	1	2	-3	1	2	-3	1	2	-3	
		1	2	-3	1	2	-3	1	2	-3	1	2	-3
y[n]	1	3	-1	-2	3	-1	-2	3	-1	-2	3	-1	

tenhle vzorek nemá správnou hodnotu

y[n] je periodické s periodou 3

y[n] odpovídá konvoluci, kromě hodnoty prvního vzorku - výpočet lze modifikovat – počítáme konvoluci přes jedinou periodu a poslední vzorek přičteme k prvnímu

Př.

x[n]={1,2,-3}   h[n]={1,1}

x[n]	1	2	-3	
h[n]	1	1		
	1	2	-3	
		1	2	-3
	1	3	-1	-3
	-3			
	-2	3	-1	

y[n]={-2, 3, -1} – jedna perioda výsledku

Periodická konvoluce

- jedná se o konvoluci mezi dvěma periodickými signály s periodou N, výsledkem je periodický signál se stejnou periodou

$x_p[n]=\{\underset{\uparrow}{1},0,1,1\}$ $h_p[n]=\{\underset{\uparrow}{1},2,3,1\}$ - perioda N=4

1.Krok – výpočet lineární konvoluce

Index n	0	1	2	3	4	5	6
$h_p[n]$	1	2	3	1			
$x_p[n]$	1	0	1	1			
	1	2	3	1			
		0	0	0	0		
			1	2	3	1	
				1	2	3	1
$y[n]$	1	2	4	4	5	4	1

2. Krok – výsledek předchozího kroku rozdělíme na N-tice a N-tice sečteme

Index n	0	1	2	3
First half of $y[n]$	1	2	4	4
Wrapped around half of $y[n]$	5	4	1	0
Periodic convolution $y_p[n]$	6	6	5	4

Periodickou konvoluci je možné počítat také jako maticové násobení – vytvoří se speciální matice C_x (circulant matrix), která obsahuje v řádcích posunuté verze signálu x.

$$\mathbf{C_x} = \left[\begin{array}{lllll} x[0] & x[N-1] & \dots & x[2] & x[1] \\ x[1] & x[0]\dots & & & x[2] \\ x[2] & x[1] & \dots & & x[3] \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x[N-2] & & \dots & x[0] & x[N-1] \\ x[N-1] & x[N-2] & \dots & x[1] & x[0] \end{array}\right]$$

Touto maticí se pak násobí vektor $h[n]^T$ a výsledkem je sloupcový vektor, ve kterém jednotlivé prvky odpovídají prkům periodické konvoluce.

Př. $x_p[n]=\{ 1,0,2 \}$ $h_p[n]=\{1,2,3\}$

$$\mathbf{C_x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad y_1[n] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dekonvoluce (identifikace systému)

Známe-li impulsní odezvu systému h[n], lze určit výstup y[n]=h[n]*x[n].
Pokud známe x[n] a y[n] jak určit h[n] ? → dekonvolucí.

Výpočet dekonvoluce:

1. Rekurzívní výpočet

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$$

pro n=0

$$y[0]=x[0]\cdot h[0] \quad \Rightarrow \quad h[0]=\frac{y[0]}{x[0]}$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]=h[n]\cdot x[0]+\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h[n]=\frac{1}{x[0]}\left[y[n]-\sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]\right] \quad pro \quad n>0$$

Potřebujeme vyhodnotit M-N+1 bodů h[n], kde M,N, jsou délky y a x.
Tato metoda se používá zřídka - mohou být problémy se šumem.

2. Dělení polynomů - vstupy a výstupy chápeme jako polynomy řádu M, N, impulzní odezvu h[w] určíme jako dělení polynomů y[w]/x[w]

Příklad:

x[n]={2,5,0,4}   y[n]={8,22,11,31,4,12}

Určit h[n] rekurzívní metodou a metodou dělení polynomů.

Diskrétní korelace

Korelace vyjadřuje míru podobnosti mezi dvěma signály. Diskrétní vzájemná korelace mezi x[n] a h[n] je definována jako:

$$r_{xh}[n] = x[n] \star\star h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[k-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k+n]h[k]$$

$$r_{hx}[n] = h[n] \star\star x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[k-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k+n]x[k]$$

Vztah mezi konvolucí a korelací:

$$r_{xh}[n] = x[n] ** h[n] = x[n] * h[-n] \qquad r_{hx}[n] = h[n] ** x[n] = h[n] * x[-n]$$

$$N_r = N_x + N_h - 1$$

$$\sum r[n] = \left(\sum x[n]\right)\left(\sum h[n]\right)$$

Autokorelace – je definována jako vzájemná korelace téhož signálu. Je to sudá funkce s maximem v ń=0

$$r_{xx}[n] = x[n] ** x[n] = x[n] * x[-n] \qquad r_{xx}[n] = r_{xx}[-n] \qquad r_{xx}[n] \le r_{xx}[0]$$

Autokorelace se často využívá jako metoda detekce signálu, který je skryt v šumu. Šum je nekorelovaný se signálem -> pokud je ve zkoumaných datech přítomen užitečný signál výsledná autokorelace vykazuje ostrý vrchol v ń=0.

Periodická diskrétní korelace/autokorelace

pro pereodické řady se stejnou periodou N je definována jako:

$$r_{xhp}[n] = x[n] \circledast\circledast h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[k-n] \qquad r_{hxp}[n] = h[n] \circledast\circledast x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[k-n]$$

Postup výpočtu periodické korelace/autkorelace je obdobný jako u periodické konvoluce

Korelace se často využívá jako metoda detekce periodicity signálu poškozeného šumem, popř. v radarové technice pro nalezení cíle apod.

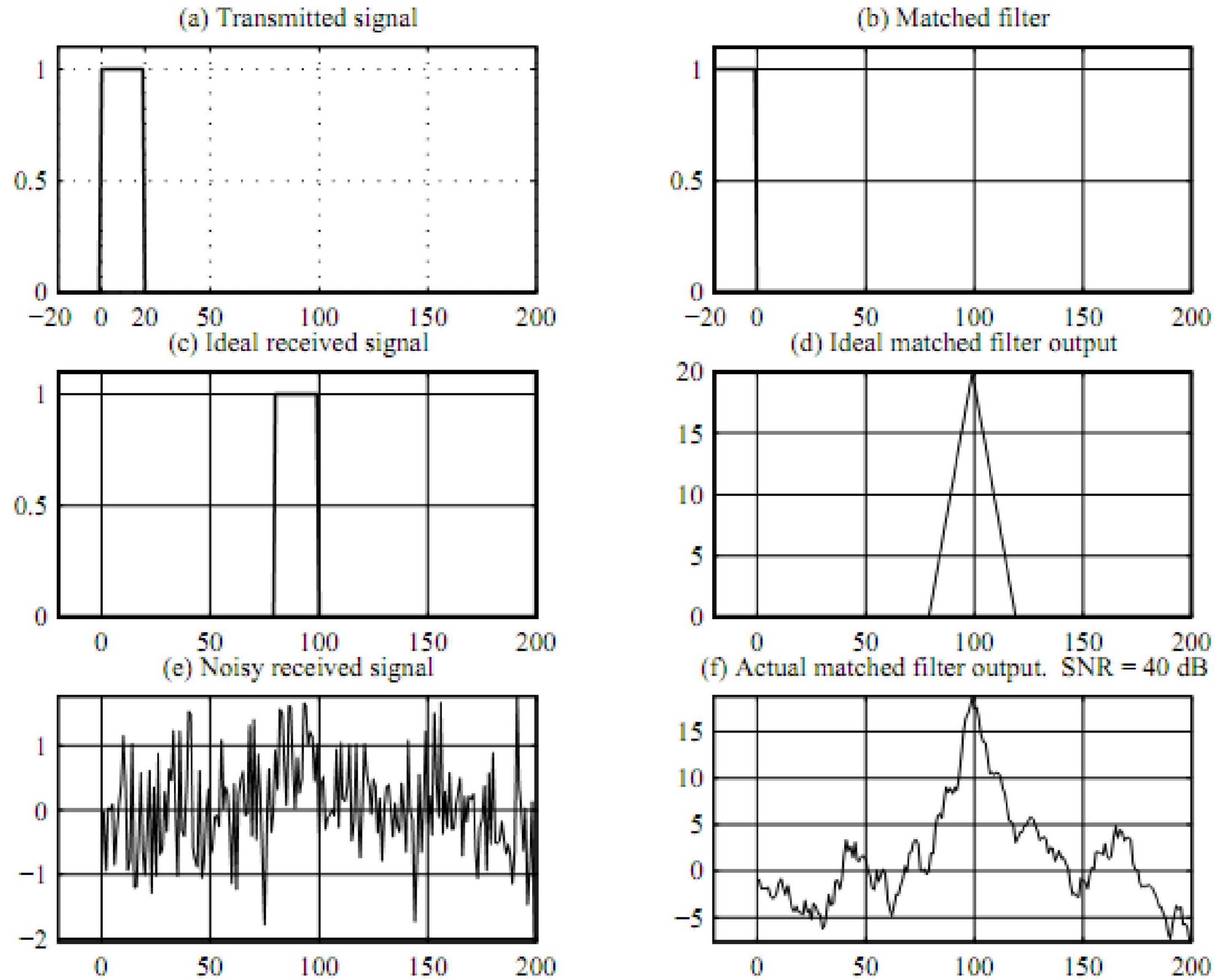
Detekce cíle: Radar vyslílá dotazovací signál $x[n]$ směrem k cíli. Signál odražený od cíle se vrací zpět a radar přijímá signál $s[n]=\alpha x[n-D]+p[n]$, kde D je zpždění signálu (je úměrné vzdálenosti cíle od radaru) a $p[n]$ je šum. Korelační přijímač vyhledává v $s[n]$ dotazovací signál $x[n]$ a určuje zpoždění.

Určení periodicity zašuměného signálu a rekonstrukce signálu: Periodický signál $x[n]$ je poškozen šumem a my máme k dispozici pouze zašuměnou verzi is[n]=x[n]+p[n] , kde $p[n]$ je šum, který obvykle nekoreluje se signálem.

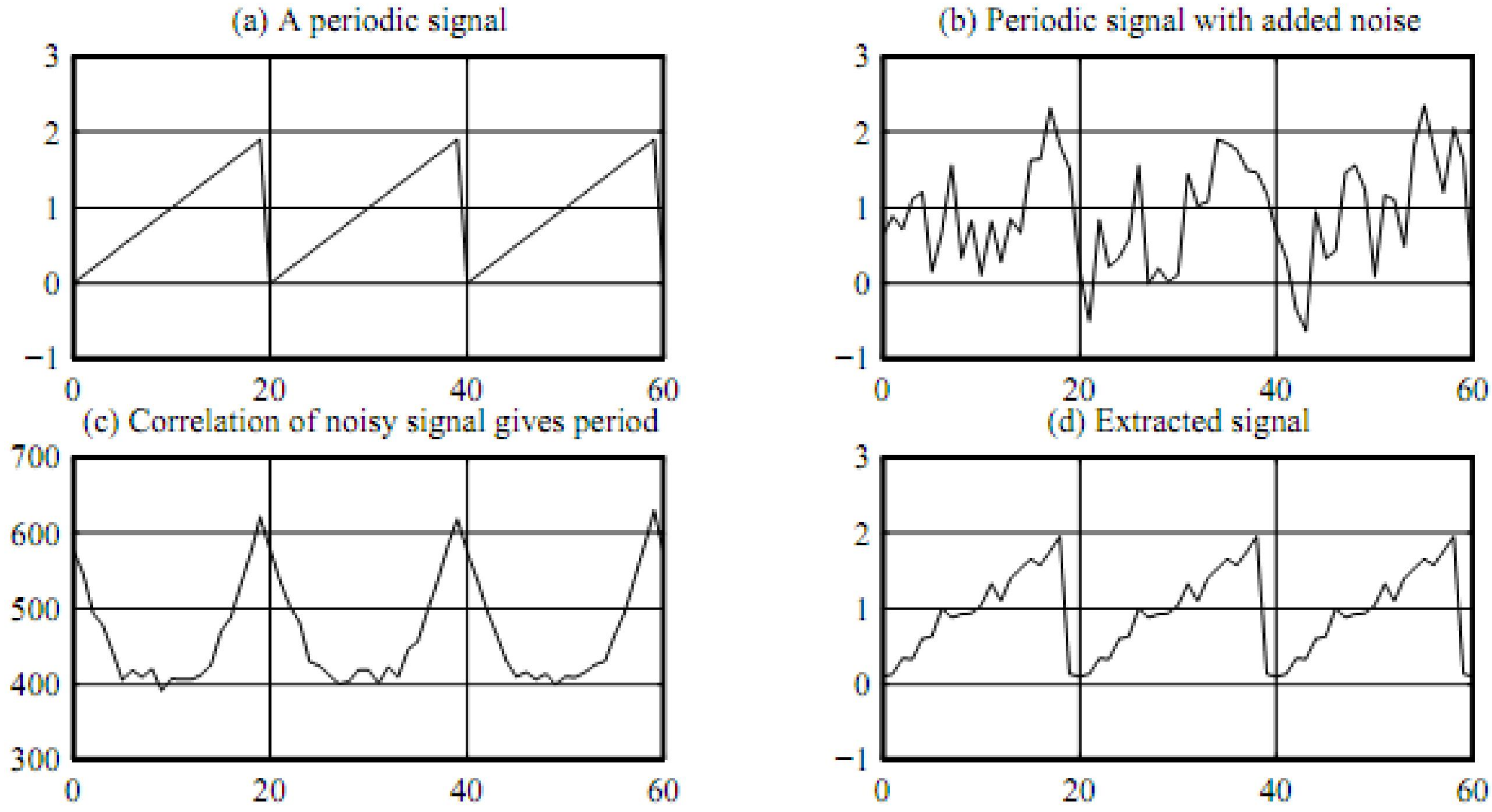
Postup při rekonstrukci:

1. Nejprve určíme periodu N signálu $s[n]$ - v periodické autokorelaci signálu $s[n]$ se objevují vrcholy v násobcích periody.
2. Signál $x[n]$ určíme jako periodickou vzájemnou autokorelaci $s[n]$ a řady impulsů $i[n]$ s periodou N tj. $i[n]=\delta(n-kN)$

Detekce cíle

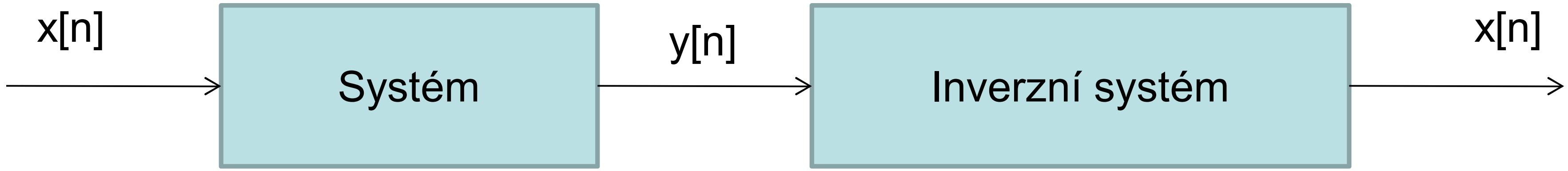


Rekonstrukce zašuměného periodického signálu



Inverzní systémy

Používají se ke korekci poruch, které mohou vznikat např. během měření signálu.



K nalezení inverzního systémy stačí jednoduše zaměnit vstupy a výstupy v diferenční rovnici. Impulzní odezva sytému se pak určí z nalezené diferenční rovnice.

Př. Systém: $y[n]+2y[n-1] = 3x[n]+4x[n-1]$

Inverzní systém: $3y[n]+4y[n-1] = x[n]+2x[n-1]$

Aby byl systém invertibilní musí různým vstupům odpovídat různé výstupy (mezi vstupy a výstupy je prosté zobrazení). Např. systém $y[n]=\cos(x[n])$ není invertibilní.