Bezpečnost v informačních technologiích (KIV/BIT)

4. Šifrování veřejným a soukromým klíčem (asymetrické šifry)

Ing. Pavel Král, Ph.D.

Katedra informatiky a výpočetní techniky
Západočeská Univerzita

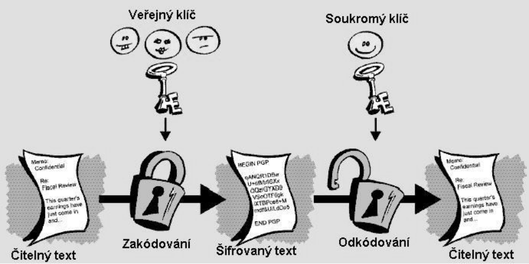
9. března 2016

Obsah

Šifrování s veřejným klíčem

- problém distribuce klíčů →
- 1976 Diffie & Hellman: dva klíče (šifrovací a dešifrovací)
  - možnost odvození dešifrovacího z šifrovacího
- zveřejnění šifrovacího klíče → veřejný klíč
- utajení dešifrovacího klíče → tajný (soukromý) klíč

Asymetrické šifry



- E šifrovací fce
- D dešifrovací fce
- VK_p šifrovací (veřejný) klíč příjemce P
- SK_p dešifrovací (soukromý) klíč příjemce P
- P plaintext (znak, nebo blok)
- C šifrový text

Šifrování

- $C = E_{VK_p}(P)$

Dešifrování

- $P = D_{SK_p}(C)$

- začátek: každý příjemce vygenerování veřejného a soukromého klíče
- $\rightarrow$ problém: zprávy pro více příjemců

Zavazadlový algoritmus

- první algoritmus pro šifrování veřejným klíčem
- Merkle & Hellman
- použití pouze pro šifrování
- založen na NP složitosti zavazadlového (knapsack) problému
- z bezpečnostního hlediska označen za nevyhovující $\times$ demonstrace využití NP složitosti v kryptografii

Zavazadlový algoritmus - princip

- předměty o hmotnosti $m_1, ..., m_N$
- potřeba zabalit z těchto předmětů zavazadlo o váze M
- $\rightarrow$ musí platit: $M = b_1.m_1 + b_2.m_2 + ... + b_N.m_N$, kde
- **cíl**: najít koeficienty $b_i \in \{0; 1\}$ pro $i \in \{1, ..., N\}$

- zakódování zprávy = tajný výběr podmnožiny předmětů $\rightarrow$ zavazadlo
- zveřejnění: celk. hmotnost M + seznam všech předmětů $m_1, ..., m_N$
- potřeba zjištění, které předměty v zavazadle ???
- problém ve volbě hmotností předmětů:
  - jednoduchý problém $\rightarrow$ možnost rozluštění kdokoli
  - složitý problém $\rightarrow$ nerozluští nikdo
  - **autoři návrh převodu: jednoduchý problém $\rightarrow$ složitý** pomocí modulární aritmetiky

Šifrování:

P =	0	1	1	1	0	0
Hmotnosti	1	5	6	11	14	20

$C = \;???\; = 22$

- hmotnosti: $1, 5, 6, 11, 14$ a 20 (zveřejněno)
- váha zavazadla: 22 (zveřejněno)
- hledám koeficienty: $22 = ???$

Zavazadlový algoritmus

Triviální příklad

Šifrování:

$P =$	0	1	1	1	0	0
Hmotnosti	1	5	6	11	14	20

$$C = 5 + 6 + 11 = 22$$

- hmotnosti: $1, 5, 6, 11, 14$ a 20 (zveřejněno)
- váha zavazadla: 22 (zveřejněno)
- hledám koeficienty: $22 = 5 + 6 + 11$

Zavazadlový algoritmus - princip - podrobně

Tvorba klíčového páru

Volba soukromého klíče

- množina koeficientů = superrostoucí posloupnost
- platí tedy: $\sum_{i=1}^{k} m_i < m_{i+1}$ - snadné nalezení (= soukromý klíč)
- × posloupnost není superrostoucí - velmi obtížné určení (= veřejný klíč)

Transformace soukromého klíče na klíč veřejný

- vynásobení ∀ prvků superrostoucí posloupnosti číslem $p \; mod \; q$, kde:
  - $q > \sum_{i=1}^{N} m_i$
  - p nesmí mít žádné společné součinitele s modulem $mod \; q$

Vystavení veřejného klíče

Zavazadlový algoritmus - princip - podrobně

Šifrování zprávy (pomocí veřejného klíče)

Dešifrování

Transformace šifrových bloků na snadný problém

- vynásobení čísel reprezentujících šifrové bloky výrazem p^{-1} *mod* q

Dešifrování pomocí soukromého klíče

Zavazadlový algoritmus - příklad

Tvorba klíčového páru:

1. volba soukromého klíče: $\{2, 3, 6, 13, 27, 52\}$
2. transformace na veřejný klíč: vynásobení zvoleným $p \; mod \; q$, $p = 31$, $q = 105$: $\{62, 93, 81, 88, 102, 37\}$
3. vystavení veřejného klíče

Šifrování (veřejným klíčem):

1. rozdělení zprávy na bloky: $011000110101101110 \rightarrow$ 011000 110101 101110 (dle počtu prvků klíče)
2. $011000 \rightarrow 93 + 81 = 174$
   $110101 \rightarrow 62 + 93 + 88 + 37 = 280$
   $101110 \rightarrow 62 + 81 + 88 + 102 = 333$
3. $\rightarrow$ šifrový text: $C = \{174, 280, 333\}$

Zavazadlový algoritmus - příklad

Dešifrování (soukromým klíčem):

1. příjemce: znalost hodnot $p = 31$ a modulu $q = 105$ a soukromého klíče $\{2, 3, 6, 13, 27, 52\}$
2. určení p^{-1}: $31.(p^{-1}) \equiv 1\ (mod\ 105) \rightarrow p^{-1} = 61$
3. $C = \{174, 280, 333\}$ vynásobení výrazem $61\ mod\ 105$ + rozklad $\rightarrow$ položky soukromého klíče $\rightarrow$ zpráva
4. 174×61 mod $105 = 9 = 3 + 6$
   280×61 mod $105 = 70 = 2 + 3 + 13 + 52$
   333×61 mod $105 = 48 = 2 + 6 + 13 + 27$
5. $P = 011000\ 110101\ 101110$

Zavazadlový algoritmus - poznámky

- autor Merkle - jistota s bezpečností algoritmu $\rightarrow$ nabídka 100,- $ za rozluštění - Shamir (druhý z autorů alg. RSA) rozluštil
- $\rightarrow$ zesílení algoritmu - nabídka 1000,- $ za rozluštění - Rivest (první z autorů alg. RSA)
- $\rightarrow$ zavazadlový algoritmus (+ alg. z něho odvozené) se nepovažuje za bezpečný

Algoritmus RSA

- 1977 - **R**ivest, **S**hamir, **A**dleman (RSA) - návrh nového šifrovacího algoritmu veřejného klíče
- nejznámější a nejpoužívanější
- použití dosud: dostatečné délka klíče → považován za bezpečný
- vhodný pro šifrování i pro el. podpis

Algoritmus RSA - princip

Předpoklad:

- rozklad velkého čísla na součin prvočísel (faktorizace) = velmi obtížná úloha
- žádný algoritmus faktorizace, který by pracoval alespoň v polynomiálním čase vůči velikosti binárního zápisu čísla n
- $\rightarrow$ z čísla n ($n = p \times q$) praktická nemožnost zjištění p a q v "rozumném" čase
- $\times$ násobení dvou velkých čísel je jednoduchá úloha
- potřeba volby dostatečně velkých prvočísel (100-200 míst nebo více), prvočísla řádově stejně velká

Algoritmus RSA - popis

Tvorba klíčů

- výběr dvou velkých prvočísel p a q
- výpočet $n = p \,.\, q$
- výpočet $x = (p-1)(q-1)$
- volba klíče e (celé číslo; $e < x$; e je s x nesoudělné)
- nalezení klíče d tak, aby $de \equiv 1 \; (mod \; x) \rightarrow$
- $d = e^{-1} (mod \; x)$ (výpočet d pomocí rozšířeného Euclidova algoritmu)
- d tajný (soukromý) klíč; e a n veřejný klíč
- p a q nepotřebné $\rightarrow$ možno odložit $\times$ utajit

Algoritmus RSA - popis

Šifrování

- rozdělení zprávy na bloky P_i kratší než n
- $C_i = P_i^e \, mod \; n$

Dešifrování

- $P_i = C_i^d \, mod \; n$

Poznámky

- možnost šifrování klíčem d a dešifrování pomocí e
- Rychlost:
  - HW realizace: asi 1000 $\times$ pomalejší než DES
- Bezpečnost:
  - $n >= 2048 \rightarrow$ alg. považován za bezpečný

Algoritmus RSA - příklad

Tvorba klíčů

- $p = 47$, $q = 71$ (prvočísla)
- $n = p\ .\ q = 3337$ (modul, veřejný)
- náhodná volba klíče $e = 79$ (veřejný, šifrovací exponent)
  - e nemá žádné společné součinitele s $x = (p-1)(q-1) = 46 * 70 = 3220$
- $d = 79^{-1} mod\ 3220$ (Euclidův rozšířený alg.) $\rightarrow$
- $d = 1019$ (soukromý, dešifrovací exponent)

Šifrování:

- Zpráva: 688
- $C = 688^{79} mod\ 3337 = 1570$

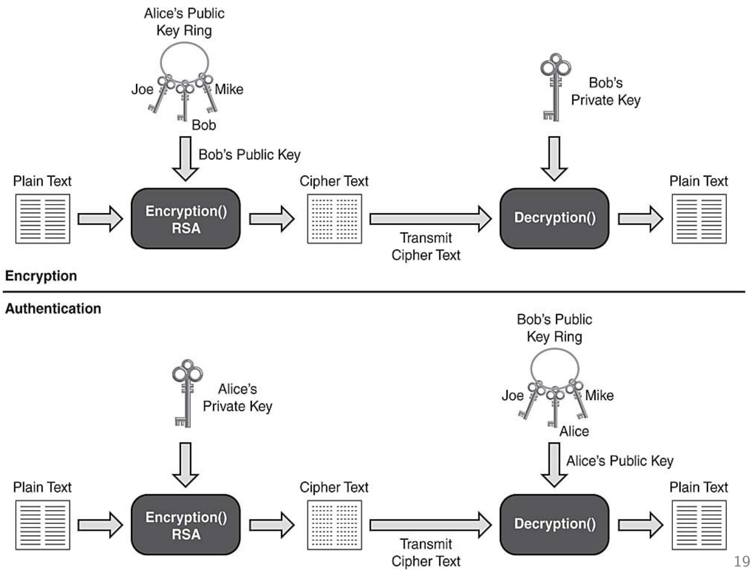
Dešifrování:

- $P = 1570^{1019} mod\ 3337 = 688$

RSA - použití

Šifrování

Autentizace a el. podpis



El Gamalův systém

- založen na obtížnosti výpočtu diskrétních logaritmů v konečném tělese
- nepatentován
- použití pro šifrování i el. podpis
- nevýhoda: délka šifrového textu $= 2\times$ délka otevřeného textu
- více viz [1]

El Gamalův systém - šifrování

Generování klíčů

- volba: p, g a $x \leftrightarrow p$ .. prvočíslo, $g < p$, $x < p$
- výpočet: $y = g^x mod\ p$
- $VK = \{y, g, p\}$
- $SK = \{x\}$
- g a p .. možno sdílet skupinou uživatelů

Šifrování

- náhodná volba $k \leftrightarrow$ žádný spol. dělitel s $(p - 1)$
- $K = y^k mod\ p$
- $Ca = g^k mod\ p$
- $Cb = P.K\ mod\ p$

Dešifrování

- $K = Ca^x mod\ p \leftrightarrow K.K^{-1} = 1(mod\ p)$
- $P = K^{-1} Cbmod\ p$

El Gamalův systém - šifrování - příklad

- $P = 100$
- $p = 139,\ g = 3,\ x = 12,\ k = 52$
- $VK = ?$
- $SK = ?$
- $C = ?$
- $P = ?$ (zkouška)

El Gamalův systém - šifrování - příklad

- $P = 100$
- $p = 139,\ g = 3,\ x = 12,\ k = 52$

Výpočet VK, SK

- $y = g^x mod\ p = 3^{12} mod\ 139 = 44$
- $VK = \{y,\ g,\ p\} = \{44,\ 3,\ 139\}$
- $SK = x = 12$

Šifrování

- $K = y^k mod\ p = 44^{52} mod\ 139 = 112$
- $Ca = g^k mod\ p = 3^{52} mod\ 139 = 38$
- $Cb = P.K\ mod\ p = 100.112\ mod\ 139 = 80$

Dešifrování

- $K = Ca^x mod\ p = 38^{12} mod\ 139 = 112 \leftrightarrow$
  $K.K^{-1} = 1(mod\ p) = 36$
- $P = K^{-1} Cb\ mod\ p = 36 \times 80\ mod\ 139 = 100$

Metoda eliptických křivek

- 1985 - návrh metody: Neal Koblitz a Victor S. Miller (nezávisle)
- založena na algebraických strukturách eliptických křivek nad konečnými poli
- více viz kniha [2]

Taher El Gamal,
"A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms,"
in *Proceedings of CRYPTO 84 on Advances in cryptology*, New York, NY, USA, 1985, pp. 10–18, Springer-Verlag New York, Inc.

Alfred J. Menezes,
Elliptic Curve Public Key Cryptosystems,
Springer, 1993.