Příklad 1

Jen počítání a hraní si s integrály.

Příklad 2

Nezávislost náhodných veličin implikuje nulovost kovariance[1]. Obrácená implikace neplatí, ale v případě nenulové kovariance je náhodnost vyloučena. Vyplatí se na to tedy kouknout.

Definujme si veličiny $X \equiv X_1 + X_2$ a $Y \equiv 3X_1 - X_2 + X_3$. Pro střední hodnoty X a Y platí:

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 = 2 - 3 = -1$$

$$\mathrm{E}Y = 3\mathrm{E}X_1 - \mathrm{E}X_2 + \mathrm{E}X_3 = 3 \cdot 2 - (-3) + 4 = 13.$$

Dále potřebujeme střední hodnotu součinu veličin $X \cdot Y$, tedy[2]

$$\begin{aligned} \mathrm{E}XY &= \mathrm{E}\left[(X_1 + X_2) \cdot (3X_1 - X_2 + X_3)\right] \\ &= \mathrm{E}\left(3X_1^2 - X_1X_2 + 4X_1X_3 - X_2X_3 + X_3^2\right) = \\ &= 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 4 + 16 = 78 \end{aligned}$$

Kovariance tedy vychází

$$\mathrm{cov}(X, Y) = 78 + (-1) \cdot 13 \neq 0,$$

z čehož plyne, že veličiny X a Y **nemohou být nezávislé**.

Příklad 3

Pro zahození hypotézy na hladině $\alpha = 5\,\%$ musí výraz

$$n\left(\bar{x} - \mu_0\right)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} \left(\bar{x} - \mu_0\right)$$

dávat větší hodnoty, než funkce $\chi^2_{1-\alpha,p}$, která pro hodnoty $\alpha = 5\,\%$ a $p = 2$ dává 10,597.

Dosadíme, co máme, a zjednodušíme [3]:

$$\frac{10}{11} \cdot \begin{pmatrix} a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \frac{90}{11} a^2.$$

Teď se zajímáme pro jaká a to je větší než $\chi^2_{1-\alpha,p} = 10{,}597$, tedy[4]:

$$\begin{aligned} \frac{90}{11} a^2 &> 10{,}597 \\ a^2 &> \frac{11 \cdot 10{,}597}{90} \\ a^2 &> 1{,}2951. \end{aligned}$$

[1] Kovariance $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$

[2] Autor si vyhrazuje právo na případnou chybu :D

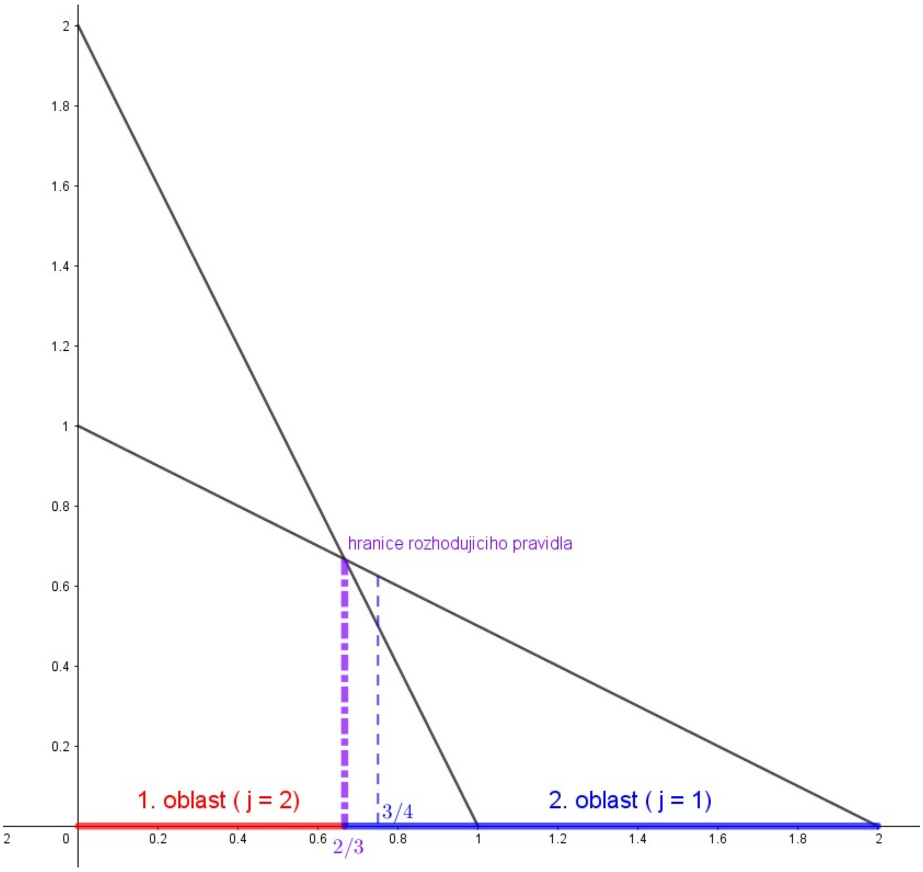
[3] Inverzní matice $\Sigma^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ a vektor středních hodnot $\mu = (0{,}0)$

[4] Hodnota v posledním řádku je záměrně zaokrouhlena dolů, aby jsme v žádném případě nenarušili nerovnost ($c > 5{,}25 \implies c > 5{,}2$, ale ne $c > 5{,}3$)

Z toho tedy plyne, že hypotézu o nulové střední hodnotě zamítneme, pokud $|a| > 1{,}138$ (přibližně).

Příklad 4

Vysvětlení řešení je zčásti na obrázku, z části triviální.



Obrázek 1: Obrázek vydá za cca 10^3 slov.