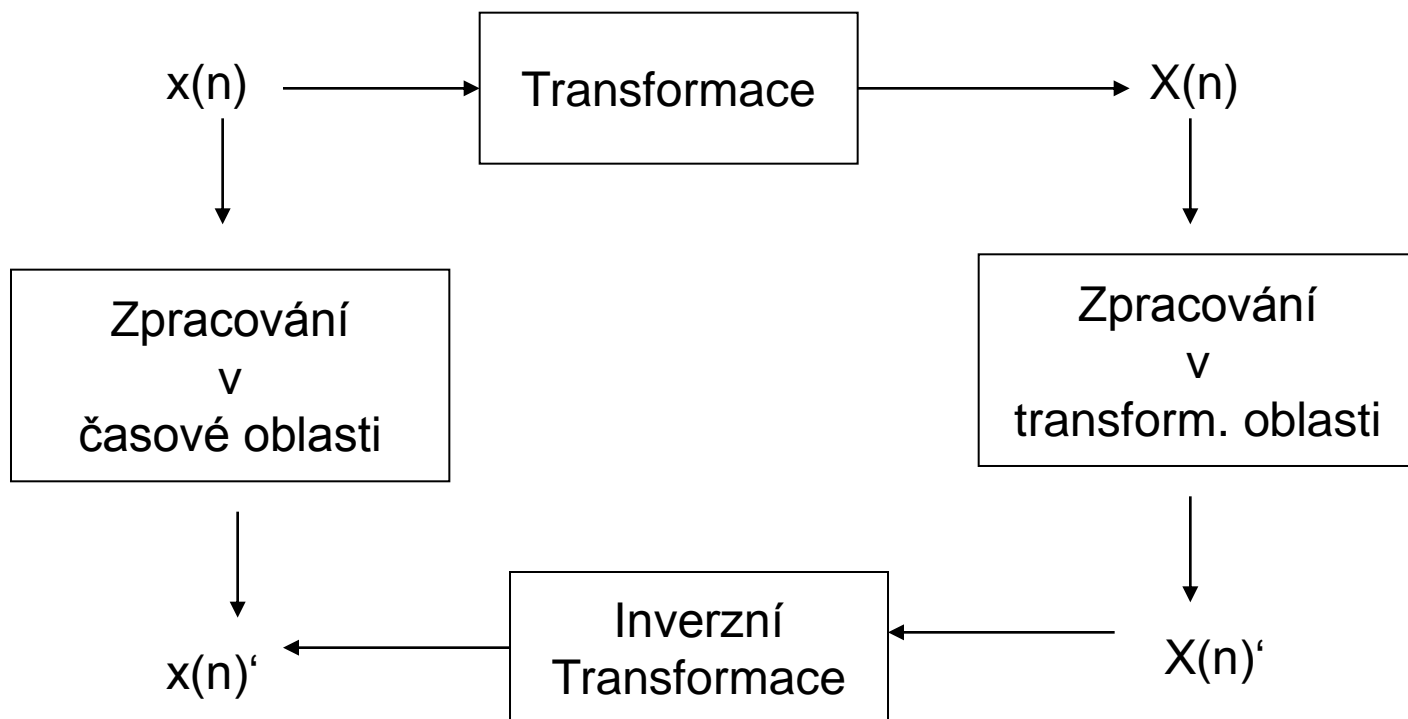


Analýza signálů ve frekvenční oblasti

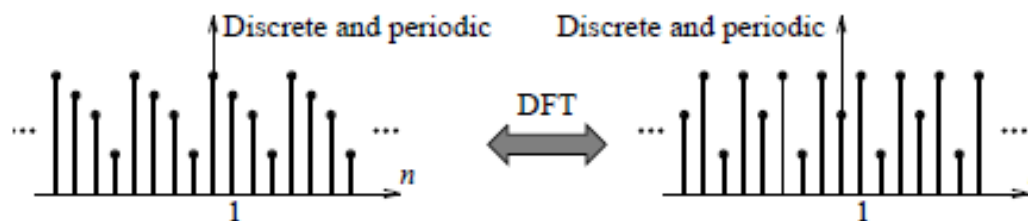
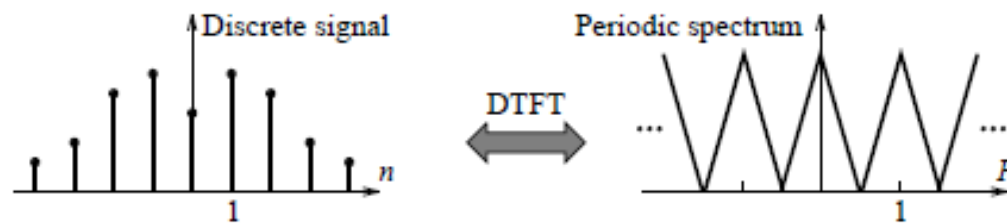
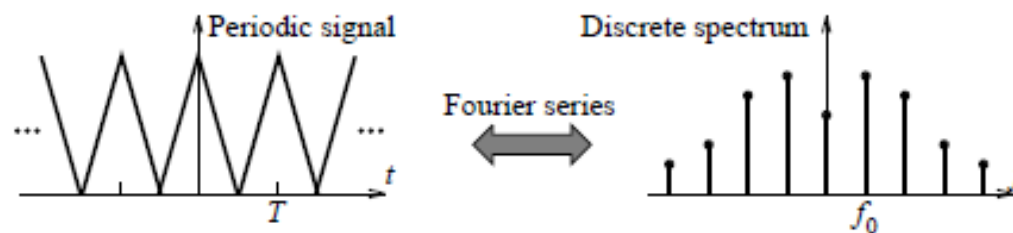
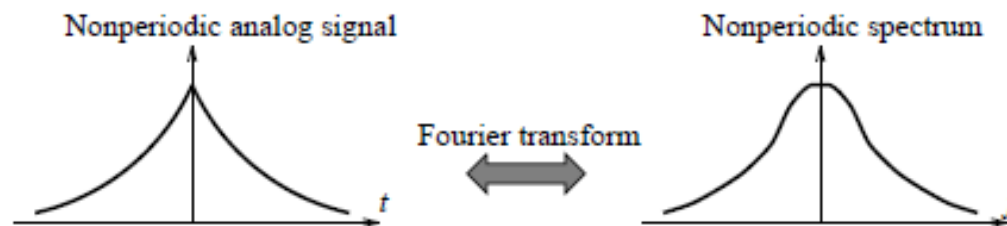
Fourierova transformace

Základní idea transformace



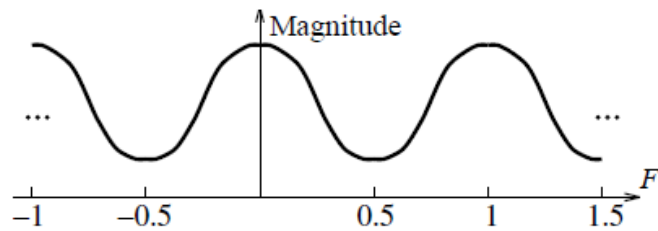
Typy Fourierových transformací

Operation in the Time Domain	Result in the Frequency Domain	Transform
Aperiodic, continuous $x(t)$	Aperiodic, continuous $X(f)$	FT
Periodic extension of $x(t) \Rightarrow x_p(t)$ Period = T	Sampling of $X(f) \Rightarrow X[k]$ Sampling interval = $1/T = f_0$	FS
Sampling of $x_p(t) \Rightarrow x_p[n]$ Sampling interval = t_s	Periodic extension of $X[k] \Rightarrow X_{\text{DFS}}[k]$ Period = $S = 1/t_s$	DFS
Sampling of $x(t) \Rightarrow x[n]$ Sampling interval = 1	Periodic extension of $X(f) \Rightarrow X(F)$ Period = 1	DTFT
Periodic extension of $x[n] \Rightarrow x_p[n]$ Period = N	Sampling of $X(F) \Rightarrow X_{\text{DFT}}[k]$ Sampling interval = $1/N$	DFT

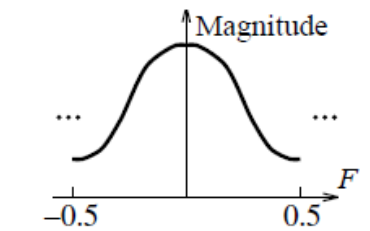


Discrete Time Fourier Transform

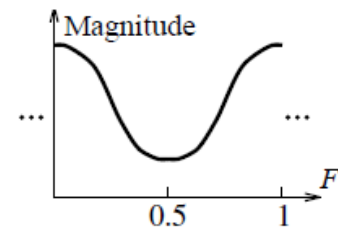
Symetrie DTFT spektra reálného signálu



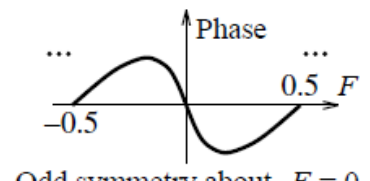
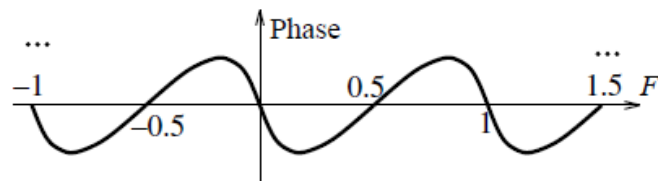
The DTFT is periodic, with period $F = 1$



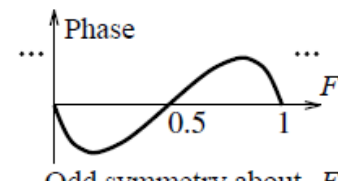
Even symmetry about $F = 0$



Even symmetry about $F = 0.5$



Odd symmetry about $F = 0$



Odd symmetry about $F = 0.5$

Table 5.1 Some Useful DTFT Pairs

Note: In all cases, we assume $ \alpha < 1$.			
Entry	Signal $x[n]$	The F -Form: $X(F)$	The Ω -Form: $X(\Omega)$
1	$\delta[n]$	1	1
2	$\alpha^n u[n], \alpha < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi F}}$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$
3	$n\alpha^n u[n], \alpha < 1$	$\frac{\alpha e^{-j2\pi F}}{(1 - \alpha e^{-j2\pi F})^2}$	$\frac{\alpha e^{-j\Omega}}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})^2}$
4	$(n+1)\alpha^n u[n], \alpha < 1$	$\frac{1}{(1 - \alpha e^{-j2\pi F})^2}$	$\frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})^2}$
5	$\alpha^{ n }, \alpha < 1$	$\frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos(2\pi F) + \alpha^2}$	$\frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2}$
6	1	$\delta(F)$	$2\pi\delta(\Omega)$
7	$\cos(2n\pi F_0) = \cos(n\Omega_0)$	$0.5[\delta(F + F_0) + \delta(F - F_0)]$	$\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$
8	$\sin(2n\pi F_0) = \sin(n\Omega_0)$	$j0.5[\delta(F + F_0) - \delta(F - F_0)]$	$j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$
9	$2F_C \text{sinc}(2nF_C) = \frac{\sin(n\Omega_C)}{n\pi}$	$\text{rect}\left(\frac{F}{2F_C}\right)$	$\text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_C}\right)$
10	$u[n]$	$0.5\delta(F) + \frac{1}{1 - e^{-j2\pi F}}$	$\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}$

Table 5.2 Properties of the DTFT

Property	DT Signal	Result (F -Form)	Result (Ω -Form)
Folding	$x[-n]$	$X(-F) = X^*(F)$	$X(-\Omega) = X^*(\Omega)$
Time shift	$x[n - m]$	$e^{-j2\pi mF} X(F)$	$e^{-j\Omega m} X(\Omega)$
Frequency shift	$e^{j2\pi nF_0} x[n]$	$X(F - F_0)$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Half-period shift	$(-1)^n x[n]$	$X(F - 0.5)$	$X(\Omega - \pi)$
Modulation	$\cos(2\pi nF_0) x[n]$	$0.5[X(F + F_0) + X(F - F_0)]$	$0.5[(X(\Omega + \Omega_0) + X(\Omega - \Omega_0))]$
Convolution	$x[n] \star y[n]$	$X(F)Y(F)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
Product	$x[n]y[n]$	$X(F) \star Y(F)$	$\frac{1}{2\pi} [X(\Omega) \star Y(\Omega)]$
Times- n	$nx[n]$	$\frac{j}{2\pi} \frac{dX(F)}{dF}$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Parseval's relation	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2[k] = \int_1 X(F) ^2 dF = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) ^2 d\Omega$		
Central ordinates	$x[0] = \int_1 X(F) dF = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) d\Omega \quad X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$		
	$X(F) \Big _{F=0.5} = X(\Omega) \Big _{\Omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]$		

Diskrétní Fourierova transformace

N-bodová DFT signálu s N vzorky:

$$X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

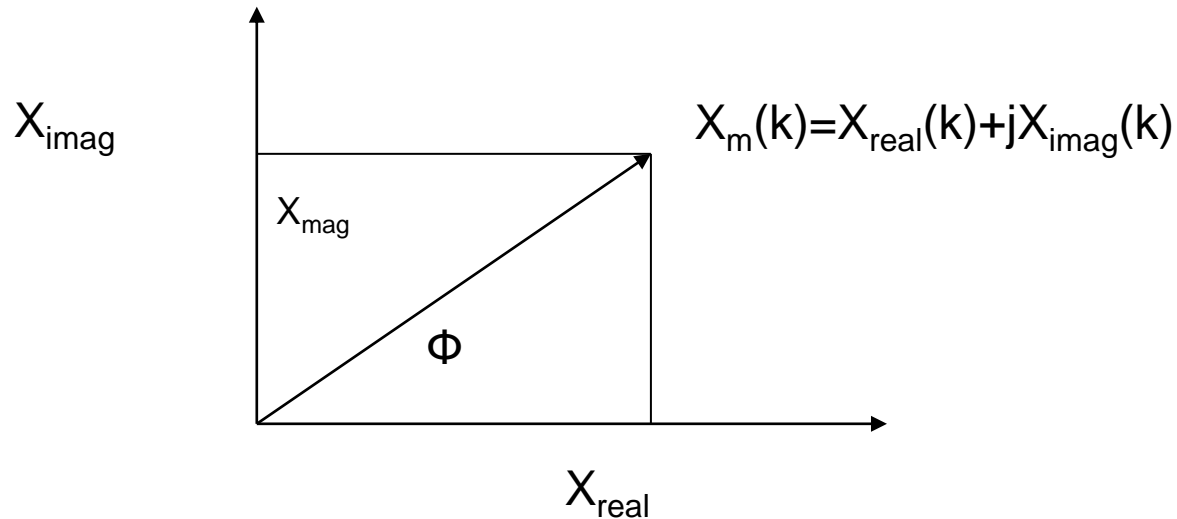
$$X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi nk/N) - j \sin(2\pi nk/N)]$$

zpětná transformace IDFT :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DFT}[k] e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Jelikož $e^{j2\pi nk/N}$ je periodická, je periodická i DFT a IDFT \Rightarrow počítáme vzorky pouze přes jednu periodu.

Polární tvar DFT

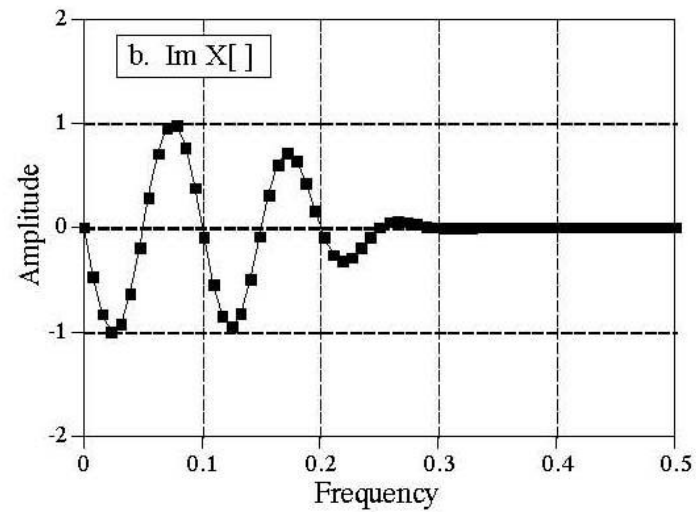
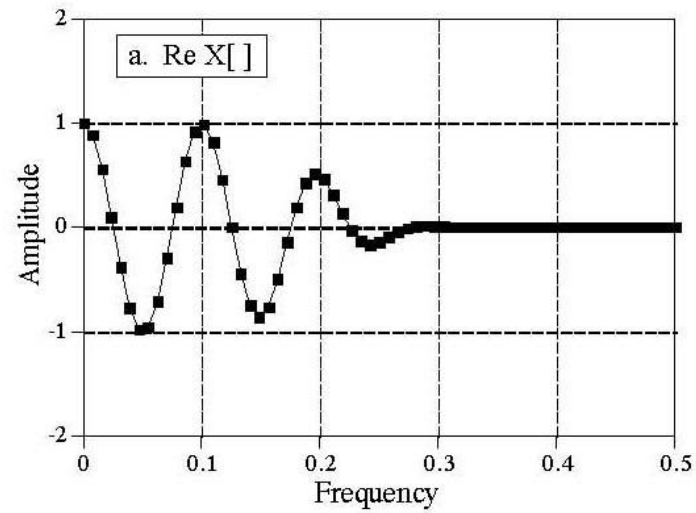


$$X_{\text{mag}} = |X_{\text{mag}}| = \sqrt{X_{\text{real}}(k)^2 + X_{\text{imag}}(k)^2}$$

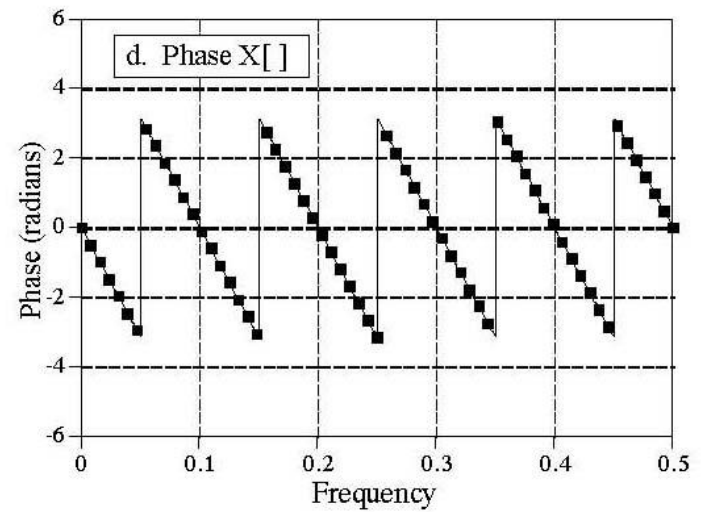
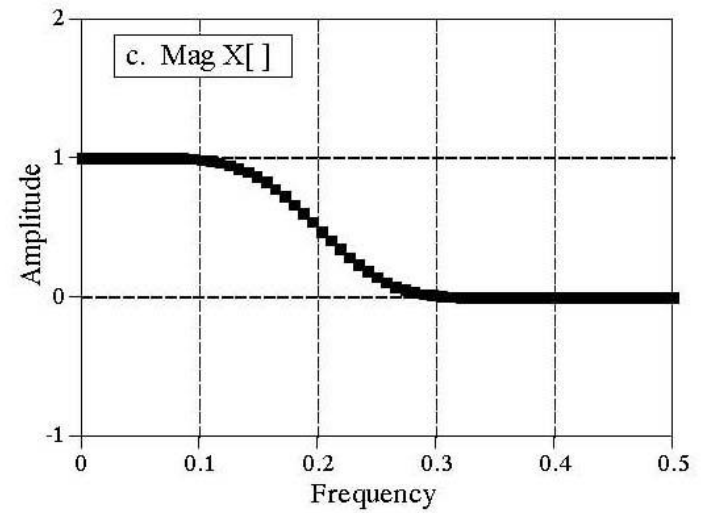
$$X_{\Phi} = \tan^{-1} \left[\frac{X_{\text{imag}}(k)}{X_{\text{real}}(k)} \right]$$

$$X_{PS}(k) = X_{\text{mag}}(k)^2 = X_{\text{real}}(k)^2 + X_{\text{imag}}(k)^2$$

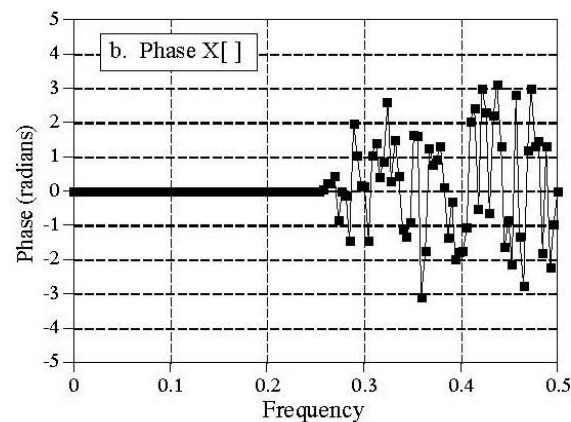
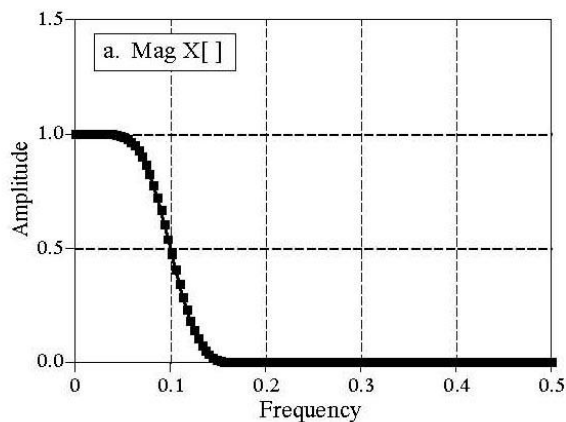
Rectangular



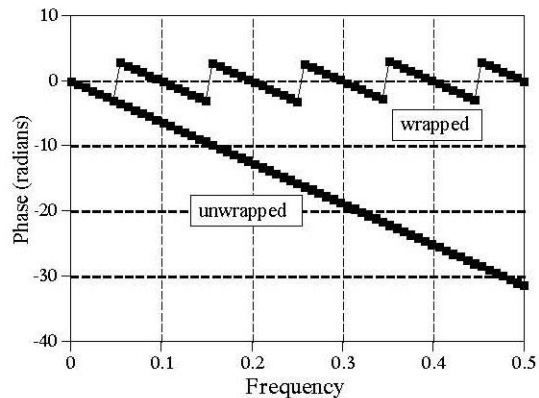
Polar



- Při použití polární reprezentace DFT – pozor na následující možné problémy :
 - správnou konverzi fáze - sw většinou vrací fázový úhel v radiánech a to v rozsahu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$
 - při výpočtu fáze pozor na nulovou reálnou část (přetečení) (fáze je v tomto případě $\pm 90^\circ$)
 - pozor na správnou konverzi úhlu z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ na interval $\langle 0, \pi \rangle$
 - fáze u velmi nízkých amplitud, které se ztrácí v šumů může chaoticky kmitat okolo nulové hodnoty



- fázová charakteristika se opakuje s periodou 2π – to způsobuje v některých případech nespojitost ve fázové charakteristice



- Amplitudová frekvenční charakteristika je vždy kladná – problémy mohou nastat pokud imaginární část transformovaného signálu je celá nulová -> může docházet ke prudké změně ve fázové charakteristice mezi $-\pi$ a π

Př.: Výpočet DFT z definice: $x[n]=\{1,2,1,0\}$

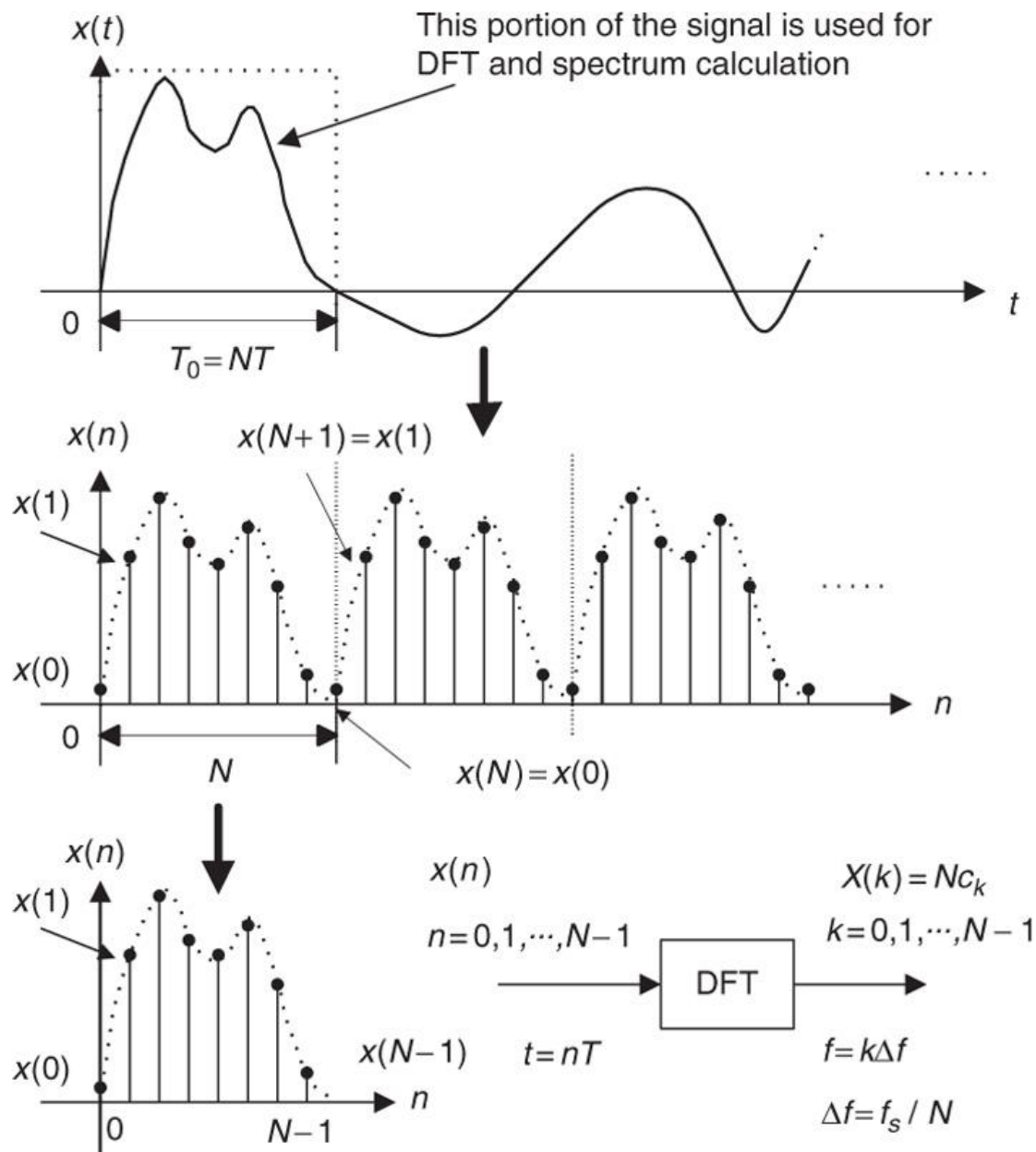
$$k = 0 : X_{DFT}[0] = \sum_{n=0}^3 x[n]e^0 = 1 + 2 + 1 + 0 = 4$$

$$k = 1 : X_{DFT}[1] = \sum_{n=0}^3 x[n]e^{-j\frac{n\pi}{2}} = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 1e^{-j\pi} + 0 = -2j$$

$$k = 2 : X_{DFT}[2] = \sum_{n=0}^3 x[n]e^{-jn\pi} = 1 + 2e^{-j\pi} + 1e^{-j2\pi} + 0 = 0$$

$$k = 3 : X_{DFT}[3] = \sum_{n=0}^3 x[n]e^{-j\frac{3n\pi}{2}} = 1 + 2e^{-j\frac{3\pi}{2}} + 1e^{-j3\pi} + 0 = 2j$$

$$X_{DFT}[k]=\{4,-2j,0,2j\}$$



Vlastnosti DFT

Property	Signal	DFT	Remarks
Shift	$x[n - n_0]$	$X_{\text{DFT}}[k]e^{-j2\pi kn_0/N}$	No change in magnitude
Shift	$x[n - 0.5N]$	$(-1)^k X_{\text{DFT}}[k]$	Half-period shift for even N
Modulation	$x[n]e^{j2\pi nk_0/N}$	$X_{\text{DFT}}[k - k_0]$	
Modulation	$(-1)^n x[n]$	$X_{\text{DFT}}[k - 0.5N]$	Half-period shift for even N
Folding	$x[-n]$	$X_{\text{DFT}}[-k]$	This is <i>circular</i> folding.
Product	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{N} X_{\text{DFT}}[k] \star Y_{\text{DFT}}[k]$	The convolution is <i>periodic</i> .
Convolution	$x[n] \star y[n]$	$X_{\text{DFT}}[k] Y_{\text{DFT}}[k]$	The convolution is <i>periodic</i> .
Correlation	$x[n] \star \star y[n]$	$X_{\text{DFT}}[k] Y_{\text{DFT}}^*[k]$	The correlation is <i>periodic</i> .
Central ordinates	$x[0] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{\text{DFT}}[k] \qquad X_{\text{DFT}}[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$		
Central ordinates	$x[\frac{N}{2}] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k X_{\text{DFT}}[k] \text{ (} N \text{ even)} \qquad X_{\text{DFT}}[\frac{N}{2}] = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n] \text{ (} N \text{ even)}$		
Parseval's relation	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{\text{DFT}}[k] ^2$		

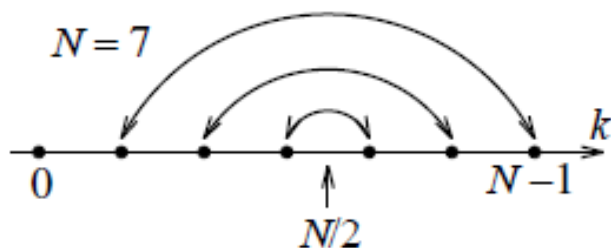
Symetrie DFT:

DFT reálného signálu vykazuje komplexně sdruženou symetrii okolo počátku tj.:

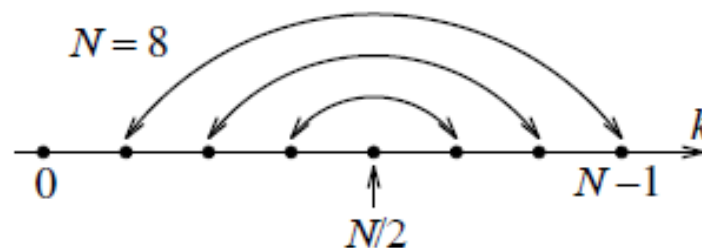
$$X_{\text{DFT}}[-k] = X_{\text{DFT}}^*[k]$$

Protože je DFT periodické $X_{\text{DFT}}[-k] = X_{\text{DFT}}[N-k]$

Conjugate symmetry $X[k] = X^*[N-k]$



Conjugate symmetry $X[k] = X^*[N-k]$



Výpočet hodnot pro $k=0$ a $k=N/2$ (pro sudé N)

$$X_{\text{DFT}}[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$X_{\text{DFT}}\left[\frac{N}{2}\right] = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n]$$

$$x[0] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{\text{DFT}}[k]$$

$$x\left[\frac{N}{2}\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k X_{\text{DFT}}[k]$$

Vlastnosti DFT

1. Linearita $k_1x_1(n) + k_2x_2(n) \leftrightarrow k_1X_1(n) + k_2X_2(n)$
2. Periodičnost - funkce $x(n)$ a $X(n)$ jsou periodické s periodou $P=N$
3. Kruhový časový posun :

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn_0} \cdot X[k], \quad n_0 - \text{celé}$$

\Rightarrow posun v čase způsobí změnu ve fázi

4. Kruhový frekvenční posun

$$X[k - k_0] \leftrightarrow e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn_0} \cdot x[n], \quad k_0 - \text{celé}$$

4. Periodická konvoluce v časové oblasti

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1[k] \cdot X_2[k]$$

Periodickou konvoluci dvou sekvencí délky N určíme jako součin N -bodových transformací.

5. Periodická korelace

$$x_1[n] ** x_2[n] \leftrightarrow X_1[k] \cdot X_2^*[k]$$

6. Obraz obrácené posloupnosti

$$x[-n] \leftrightarrow X[-k]$$

7. Vlastnosti spektra reálné posloupnosti

$$X[k] = X^*[-k] = X^*[N-k]$$

$$\operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X(N-k)]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X(N-k)]$$

$$|X(k)| = |X(N-k)|$$

$$\phi(k) = -\phi(N-k)$$

5. Periodická konvoluce ve frekvenční oblasti

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{N} X_1[k] * X_2[k]$$

8. Vlastnosti spektra reálné a sudé posloupnosti

- **je-li $x[n]$ reálná a sudá je i $X[k]$ reálná sudá**

9. Vlastnosti spektra reálné a liché posloupnosti

- **je-li $x[n]$ reálná a lichá, pak je $X[k]$ imaginární, lichá**

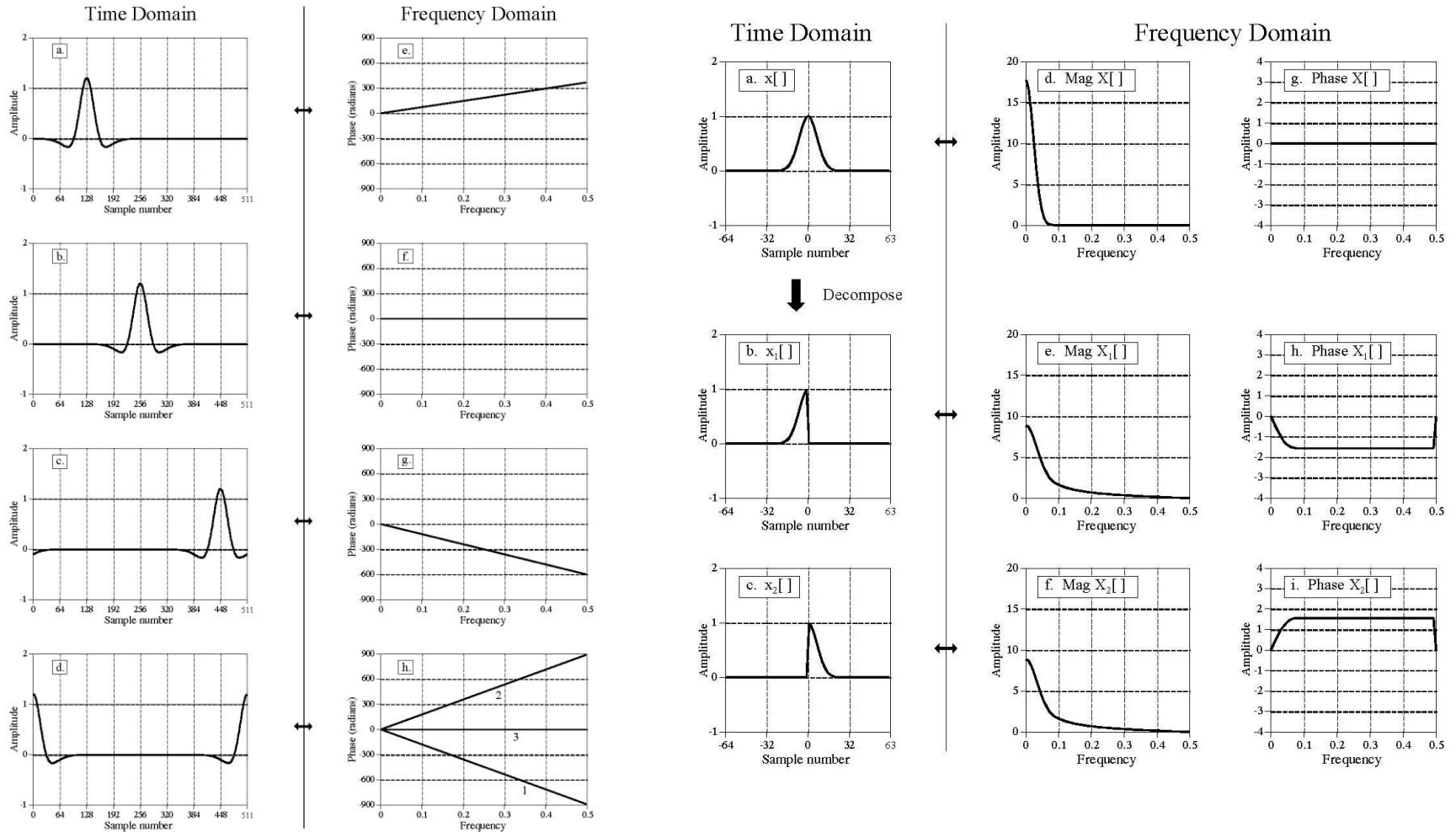
10. Alternativní vzorec pro výpočet IDFT

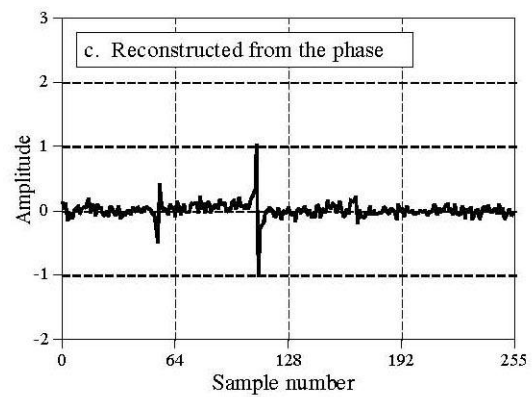
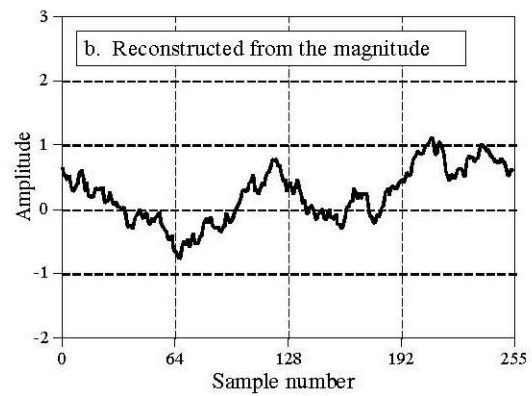
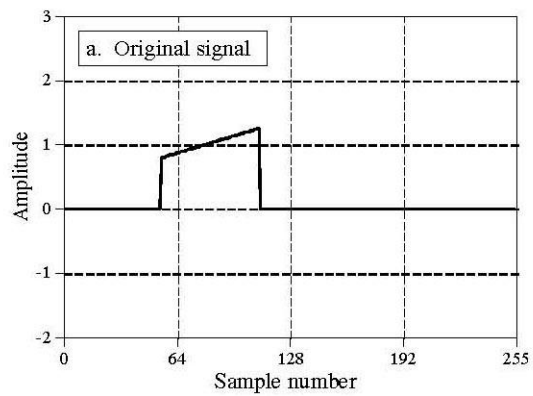
$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right]^*$$

K výpočtu inverzní transformace je možné použít algoritmů pro výpočet DFT:

- nejprve obrátíme znaménka hodnot imaginární části $X(k)$,
- vypočteme DFT
- obrátíme znaménka imaginárních částí vypočtených hodnot
- výsledek vydělíme N

Vlastnosti fázové charakteristiky





Velikost DFT vzorků

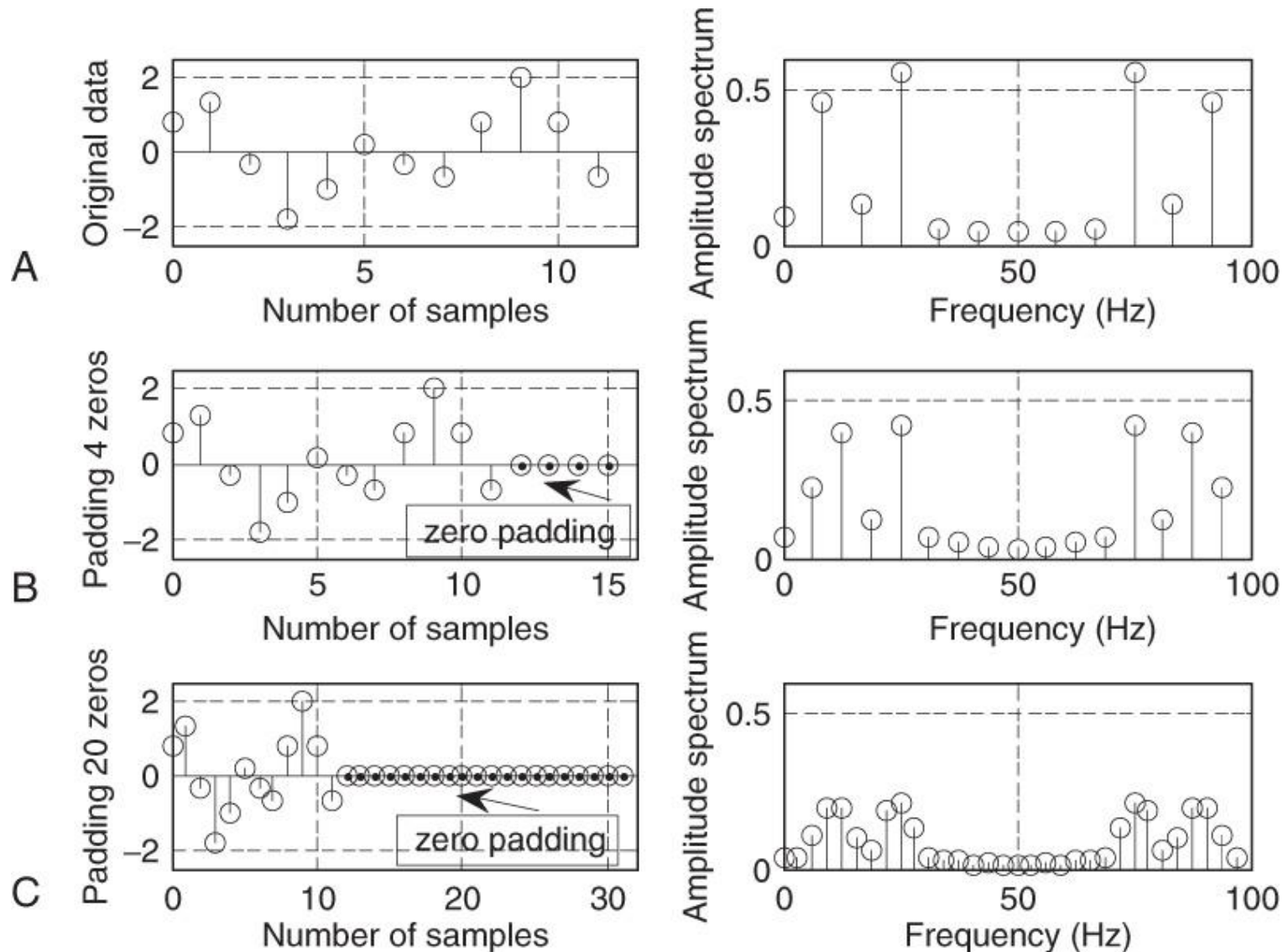
- Je-li $x(n)$ reálný vstupní signál složený ze sinusovek s odpovídající amplitudou A_0 a celočíselným počtem cyklů přes N vzorků, je velikost DFT vzorku odpovídající sinusovky M_r daná vztahem

$$M_r = A_0 \frac{N}{2}$$

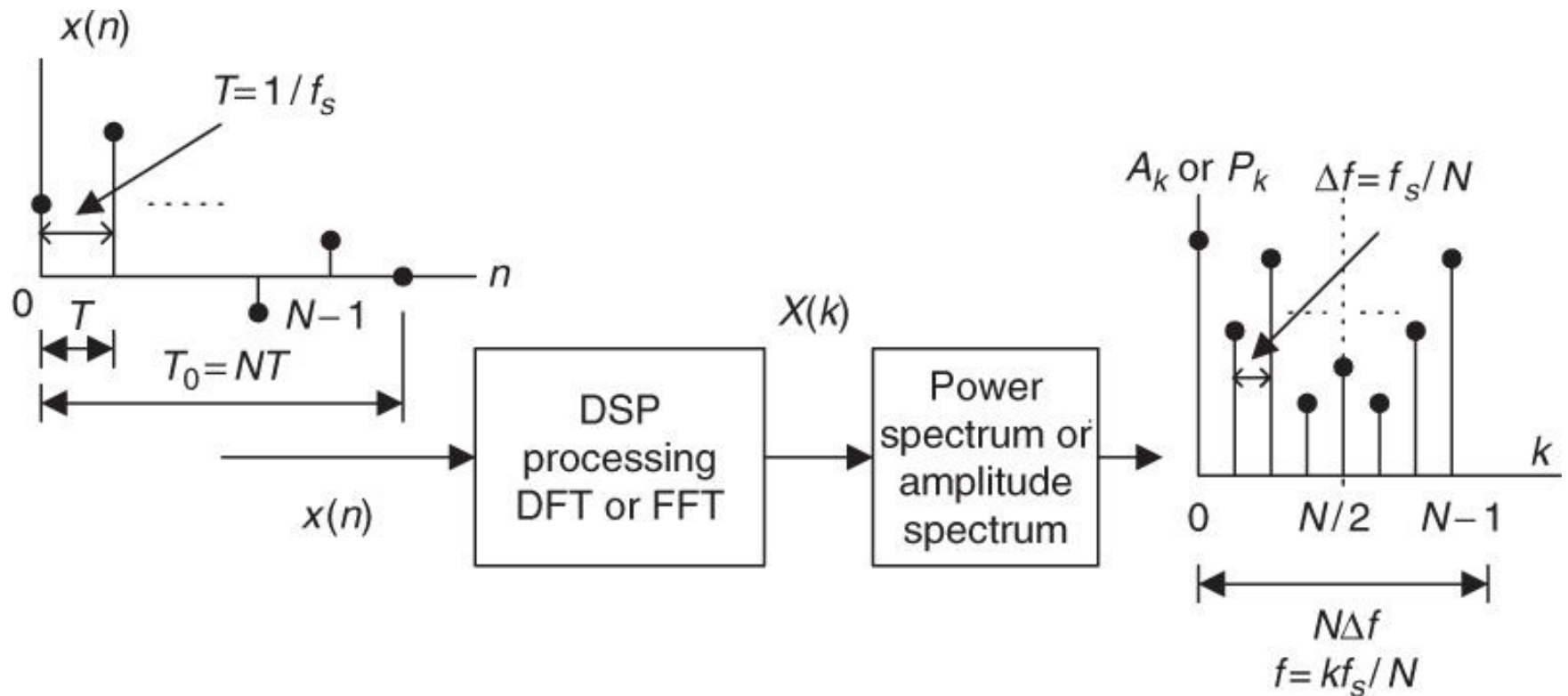
- Pro komplexní vstupní signál s velikostí A_0 (tj. $A_0 e^{j2\pi ft}$) je výstupní velikost DFT vzorků

$$M_r = A_0 N$$

Rozlišení DFT



Amplitudové, fázové, výkonové spektrum



Replikace signálu a nulová interpolace spektra

Existuje vztah mezi replikací v jedné oblasti a nulovou interpolací v druhé oblasti:

Je-li $x[n]$ M-krát replikován, je $\text{DFT}(x[n])$ interpolován (nulová interpolace) a násoben M:

$$\begin{array}{c} x[n] \rightarrow \text{DFT} \rightarrow X_{\text{DFT}}[k] \\ \{ \underbrace{x[n], x[n], \dots, x[n]}_{\text{M-krát}} \} \leftrightarrow M X_{\text{DFT}}^{\uparrow}[k/M] \end{array}$$

M-násobná interpolace:

$$\begin{array}{c} x^{\uparrow}[n/M] \leftrightarrow \{ \underbrace{X_{\text{DFT}}[k], X_{\text{DFT}}[k], \dots, X_{\text{DFT}}[k]}_{\text{M-krát}} \} \end{array}$$

DFT dvojice

Impulz : $\{1, 0, 0, \dots, 0\} \leftrightarrow \{1, 1, 1, \dots, 1\}$ konstanta

Konstanta: $\{1, 1, 1, \dots, 1\} \leftrightarrow \{N, 0, 0, \dots, 0\}$ impulz

Exponenciála: $\alpha^n \leftrightarrow \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}$

Sinusoida: $\cos\left(2\pi n \frac{k_0}{N}\right) \leftrightarrow 0.5N\delta[k - k_0] + 0.5N\delta[k - (N - k_0)]$
 \Downarrow

N-bodová sinusoida s periodou N a $F_0 = k/N$ má pouze dva nenulové vzorky

Inverzní DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DFT}[k] e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT a IDFT mají podobný vztah, až na znaménko u exponenciály a normalizační faktor $1/N$.

Je-li DFT symetrická (komplexně sdružená symetrie) $\Rightarrow x[n]$ může být vyjádřena jako součet sinusoid, protože dvojici $Ae^{j\Theta}$ v k_0 a v $N-k_0$ odpovídá sinusoida

$$\frac{2A}{N} \cos\left(2\pi n \frac{k_0}{N} + \Theta\right)$$

$X_{DFT}[0]$ odpovídá dc složce $X_{DFT}[0]/N$ a DFT vzorek $X_{DFT}[N/2]$ (pro sudé N) odpovídá frekvenci $F = 0.5$ a odpovídá signálu $K \cos(n\pi)$, kde $K = (1/N)X_{DFT}[N/2]$

Př.: $X_{DFT}[k] = \{4, -2j, 0, 2j\}$

$$n = 0: x[0] = 0.25 \cdot \sum_{k=0}^3 X_{DFT}[k] e^0 = 0.25 \cdot (1 + 2 + 1 + 0) = 1$$

$$n = 1: x[1] = 0.25 \cdot \sum_{k=0}^3 X_{DFT}[k] e^{j\frac{k\pi}{2}} = 0.25 \cdot (4 - 2je^{j\frac{\pi}{2}} + 0 + 2je^{j\frac{3\pi}{2}}) = 2$$

$$n = 2: x[2] = 0.25 \cdot \sum_{k=0}^3 X_{DFT}[k] e^{jk\pi} = 0.25 \cdot (4 - 2je^{j\pi} + 0 + 2je^{j3\pi}) = 1$$

$$n = 3: x[3] = 0.25 \cdot \sum_{k=0}^3 X_{DFT}[k] e^{j\frac{3k\pi}{2}} = 0.25 \cdot (4 - 2je^{j\frac{3\pi}{2}} + 0 + 2je^{j\frac{9\pi}{2}}) = 0$$

IDFT $\rightarrow x[n] = \{1, 2, 1, 0\}$

Alternativní vzorec pro výpočet IDFT

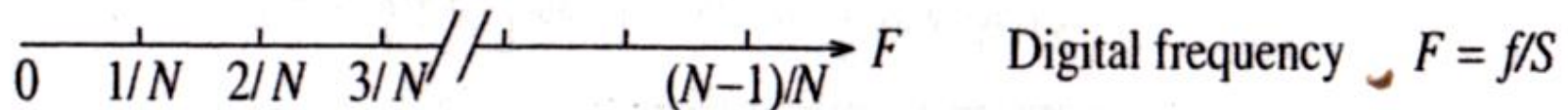
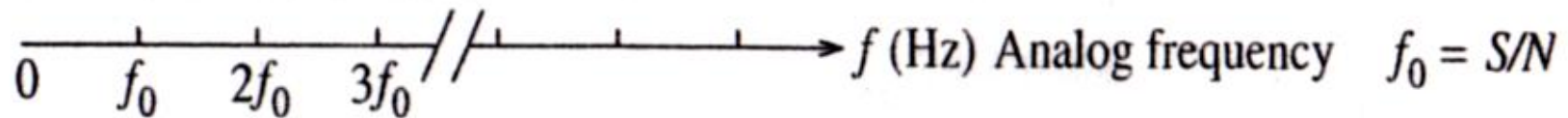
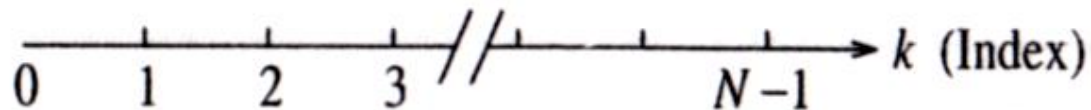
$$x(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right]^*$$

K výpočtu inverzní transformace je možné použít algoritmů pro výpočet DFT:

- nejprve obrátíme znaménka hodnot imaginární části $X(k)$,
- vypočteme DFT
- obrátíme znaménka imaginárních částí vypočtených hodnot
- výsledek vydělíme N

DFT- volba frekvenční osy

DFT samples may be plotted against the index or against frequency

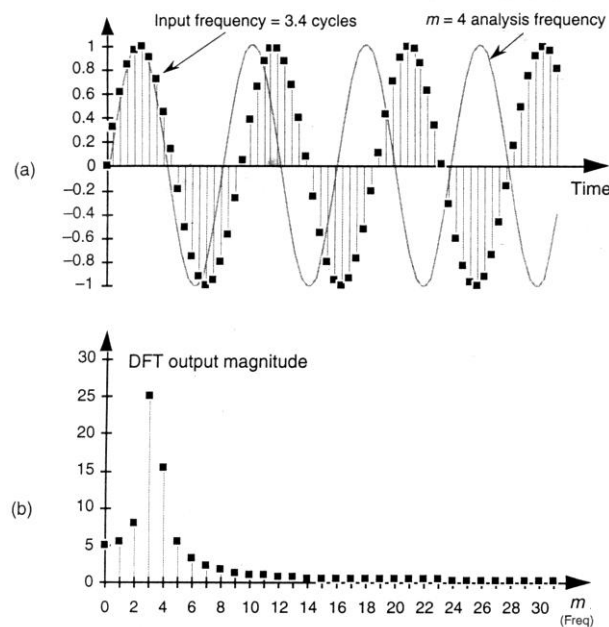
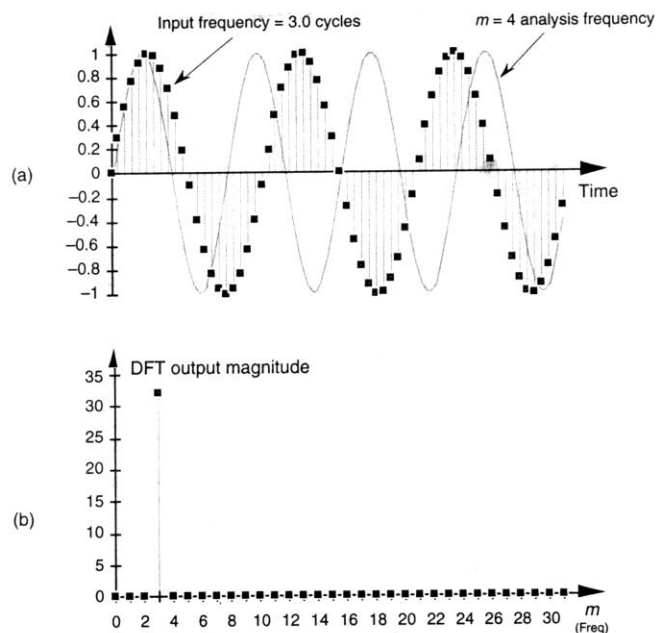


Two more options are:

- $\omega = 2\pi f$ (analog radian frequency)
- $\Omega = 2\pi F$ (digital radian frequency)

Prosakování ve spektru (Spectrum leakage)

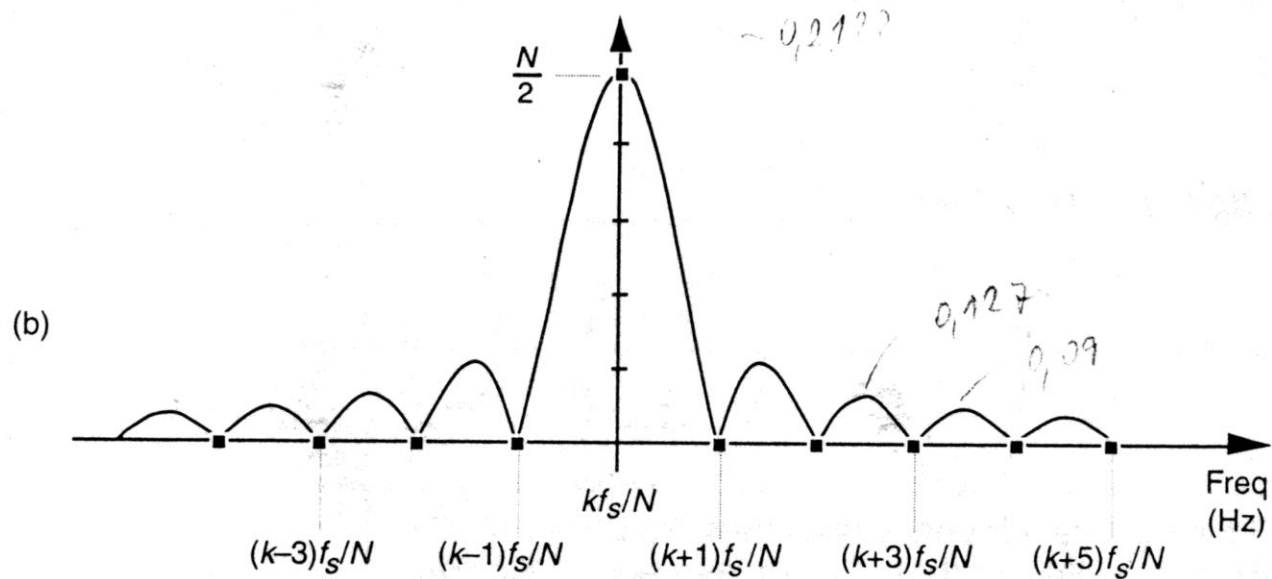
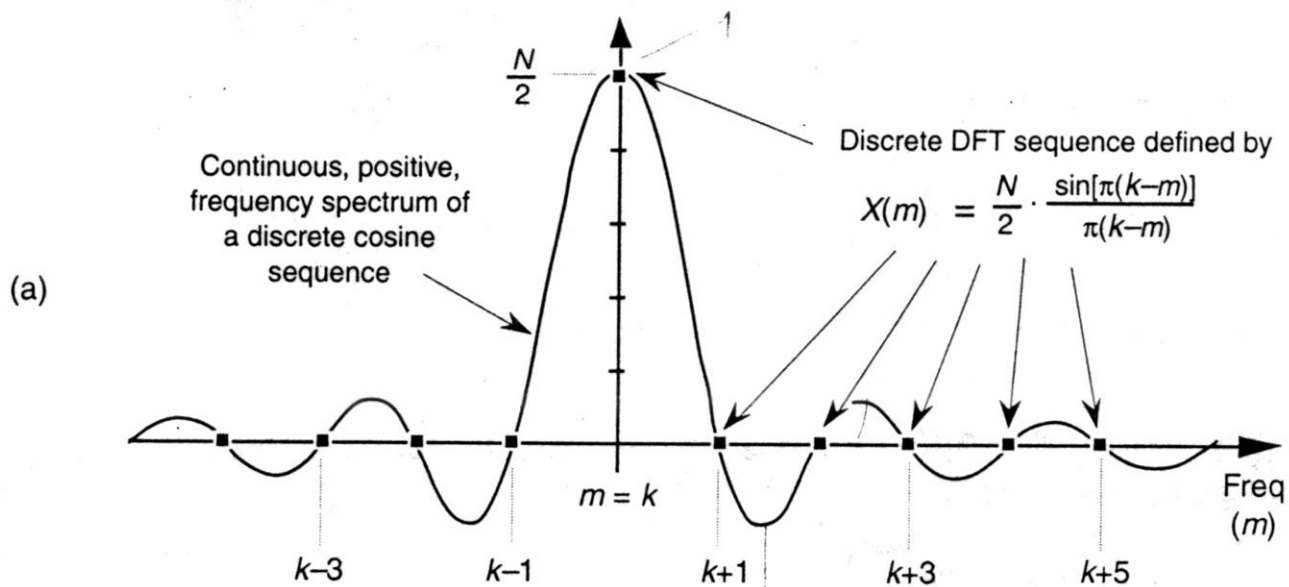
- Prosakování se vyskytuje tehdy, pokud u vzorkovaného analogového signálu počítáme DFT z N vzorků a v těchto vzorcích není obsažen celočíselný počet period sinusoid obsažených ve vstupním signálu.
- Při prosakování se v DFT vyskytnou spektrální čáry i jinde než v $\pm f_0$ (f_0 je frekvence vstupního signálu)
- Prosakování je možné eliminovat, ale nelze jej odstranit úplně.

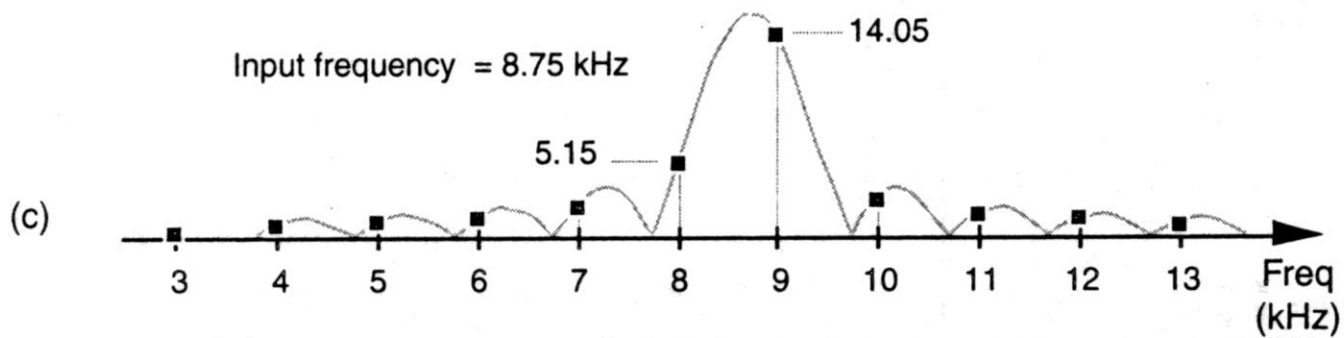
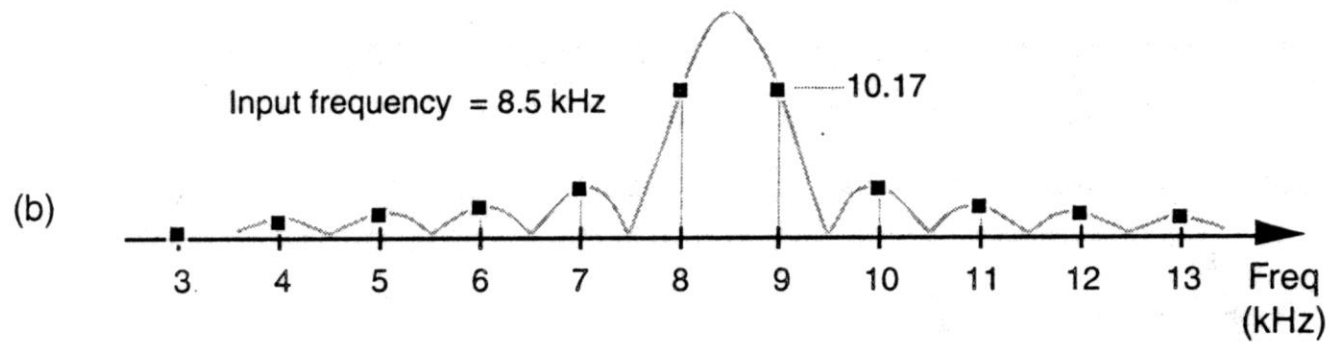
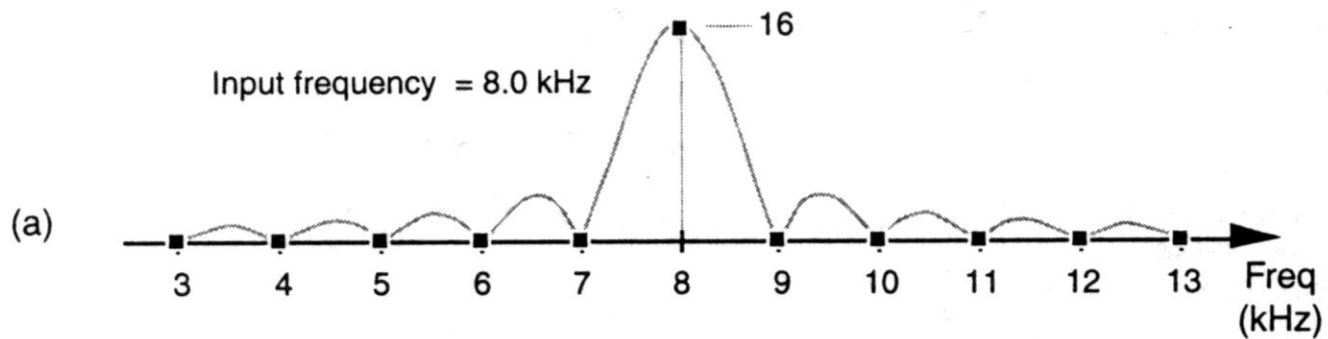


- K vysvětlení prosakování ve spektru se používá Fourierův obraz reálné kosinové funkce

$$x_r(n) = \cos(2\pi nK / N),$$

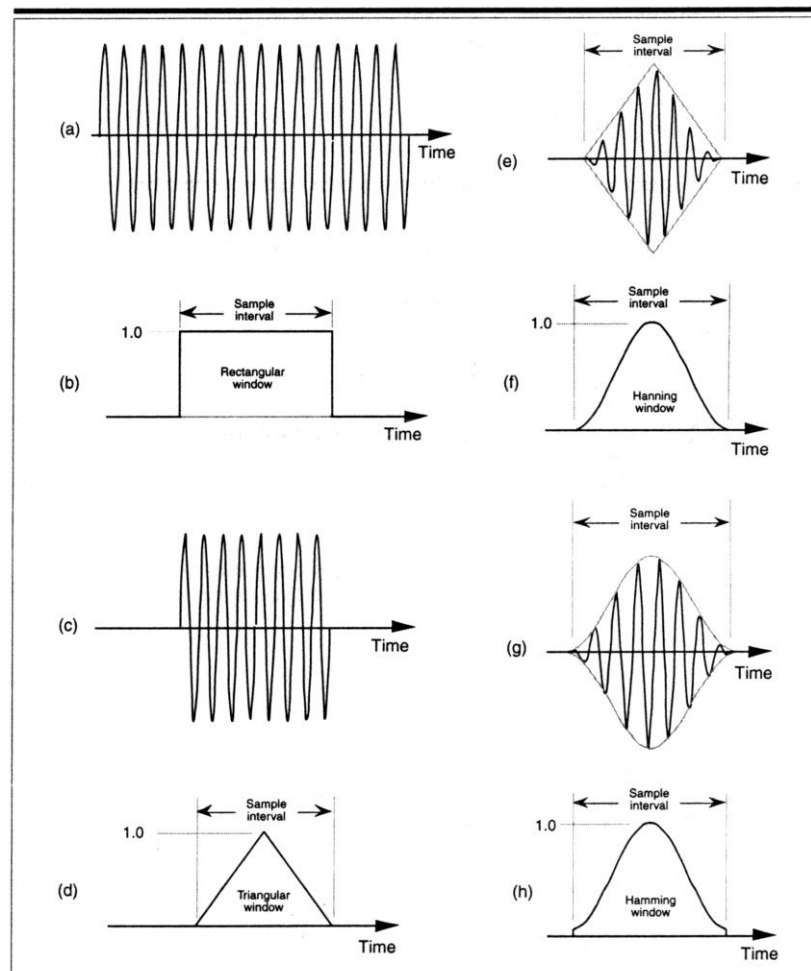
$$X_r(m) = e^{j[n(k-m)-\pi(k-m)/N]} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin[\pi(k-m)]}{\sin[\pi(k-m)/N]} + \\ + e^{j[n(k+m)-\pi(k+m)/N]} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin[\pi(k+m)]}{\sin[\pi(k+m)/N]}$$





K omezení vlivu prosakování ve spektru se před provedením DFT násobí vstupní signál tzv. vyhlazovacím oknem.

$$X_w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \cdot x(n) e^{j2\pi mn/N}$$



Maticový zápis DFT a IDFT

Označíme $W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$

$$X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_{DFT}[k] [W_N^{nk}]^* \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

N DFT rovnic lze zapsat maticově

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$$

Nx1 matice

NxN matice

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ W_N^0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Maticový zápis IDFT

$$X = W_N^{-1} X \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{N} [W_N^*]^T X$$

IDFT matice

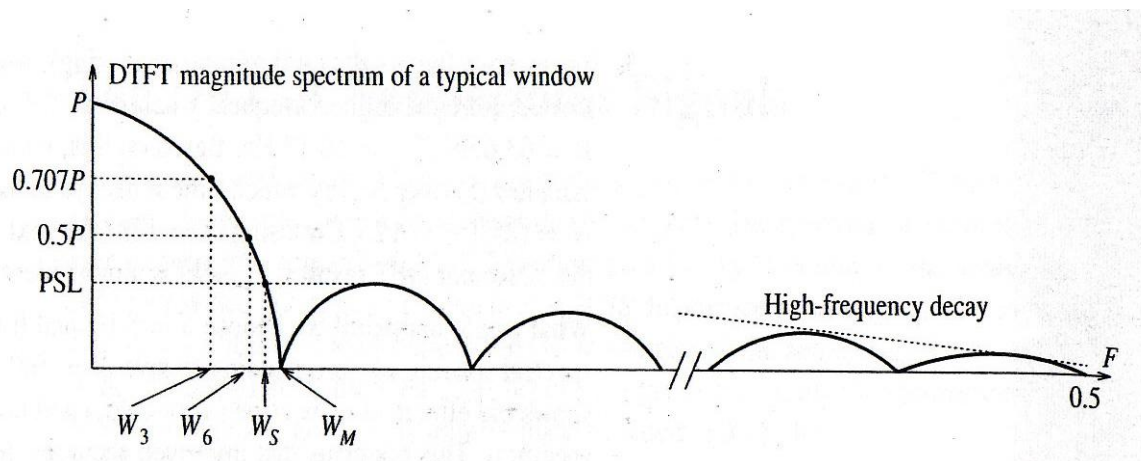
$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} [W_N^*]^T$$

Spektrální vyhlazení časovými okny

- výběr N vzorků vzorkovaného signálu = násobení vzorkovaného signálu pravoúhlým oknem
- kromě pravoúhlého okna lze použít i jiné typy oken
- každé okno má určitou frekvenční charakteristiku a podle toho je vhodné pro zpracování určitého typu signálu

Základní charakteristiky oken

- Amplitudová charakteristika



$$20 \log \frac{P}{0.5P} = 6dB \Rightarrow W_6$$

$$20 \log \frac{P}{0.707P} = 3dB \Rightarrow W_3$$

Další charakteristiky oken:

koherentní zesílení (coherent gain)

$$CG = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |w[k]|$$

ENBW (equivalent noise bandwidth)

$$ENBW = \frac{N \sum_{k=0}^{N-1} |w[k]|^2}{\left| \sum_{k=0}^{N-1} w[k] \right|}$$

SL (scallop loss)

$$SL = 20 \log \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} w[k] e^{\frac{-j\pi k}{N}} \right|}{\sum_{k=0}^{N-1} w[k]}$$

Používaná DFT okna a jejich charakteristiky

Entry	Window	Expression for $w[n]$	$W_M = \frac{K}{N}$	Normalized Peak Sidelobe
1	Boxcar	1	$2/N$	$0.2172 \approx -13.3$ dB
2	Bartlett	$1 - \frac{2 k }{N}$	$4/N$	$0.0472 \approx -26.5$ dB
3	von Hann	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$	$4/N$	$0.0267 \approx -31.5$ dB
4	Hamming	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$	$4/N$	$0.0073 \approx -42.7$ dB
5	Blackman	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi k}{N}\right)$	$6/N$	$0.0012 \approx -58.1$ dB
6	Kaiser	$\frac{I_0(\pi\beta\sqrt{1 - (2k/N)^2})}{I_0(\pi\beta)}$	$\frac{2\sqrt{1 + \beta^2}}{N}$	$\frac{0.22\pi\beta}{\sinh(\pi\beta)} \approx -45.7$ dB (for $\beta = 2$)

NOTES: $k = 0.5N - n$, where $n = 0, 1, \dots, N - 1$. W_M is the main-lobe width.

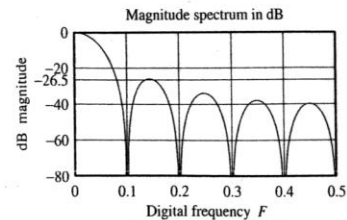
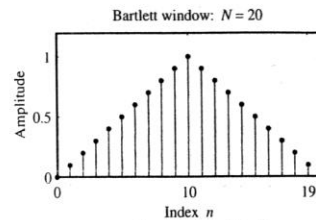
For the Kaiser window, $I_0(\cdot)$ is the modified Bessel function of order zero.

For the Kaiser window, the parameter β controls the peak sidelobe level.

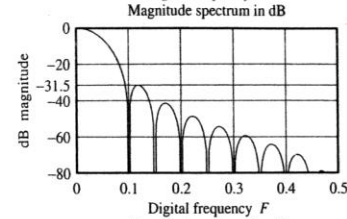
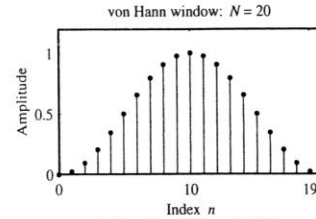
The von Hann window is also known as the *Hanning* window.

Používaná DFT okna a jejich charakteristiky

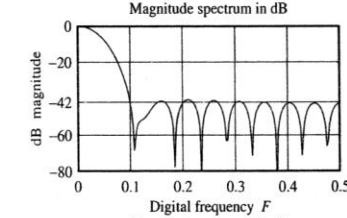
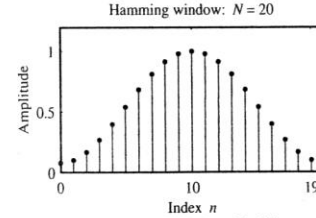
Bartlett



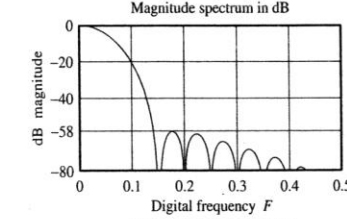
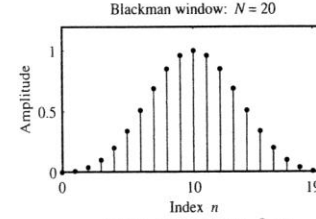
von Hann



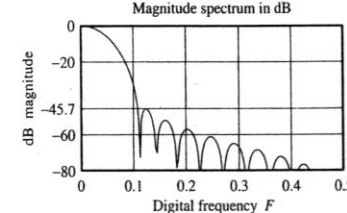
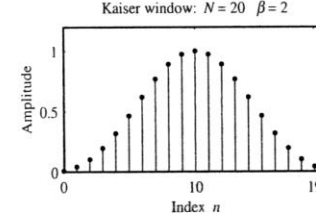
Hamming



Blackmann



Kaiser



- Zvětšování délky okna (u všech oken) klesá šířka hlavního laloku, velikost postranních laloků se téměř nemění
- Ideální případ amplitudové charakteristiky (pro okno dané délky) - **úzký (a co nejvyšší) hlavní lalok a nízké postranní laloky** -> protichůdné požadavky - většinou s klesající šířkou hlavního laloku roste amplituda postranních laloků
- **Dynamické rozlišení** - schopnost odlišit velké změny v amplitudě signálu.
- **Frekvenční rozlišení okna** - schopnost od sebe odlišit sinusovky s podobnou amplitudou a blízkou frekvencí.
Platí: při použití vyhlazovacích oken od sebe nelze odlišit dvě sinusovky s frekvencemi nižšími než je šířka hlavního laloku okna.

$$\Delta F = \frac{\Delta f}{S} = W_M = \frac{k}{N}$$

ke zmenšení ΔF musíme zmenšit $W_M \rightarrow$ zvětšit N (ale ne přidáním nul !!!) \rightarrow více vzorků signálu

Příklad: $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t) + A_2 \cos(2\pi(f_0 + \Delta f)t)$

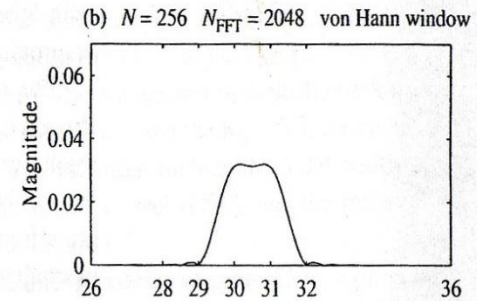
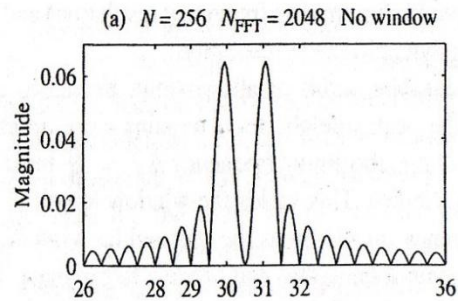
$$A_1 = A_2 = 1 \quad f_0 = 30 \text{ Hz} \quad S = 128 \text{ Hz}$$

Máme N vzorků, doplnit počet nulami na N_{FFT}

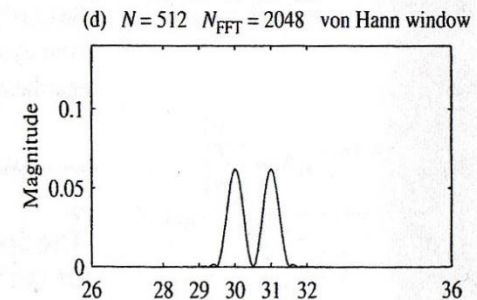
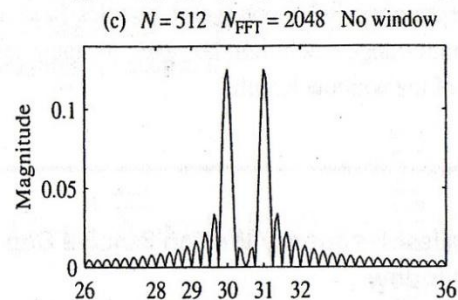
Jaké je nejmenší Δf pro: pravoúhlé okno von Hannovo okno

pro následující N a N_{FFT} :

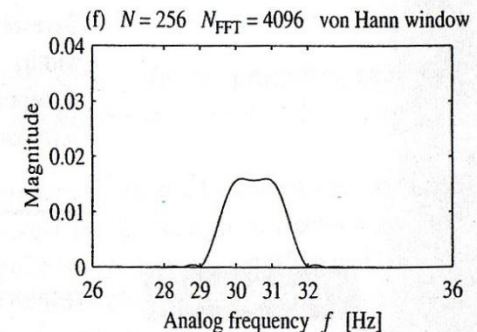
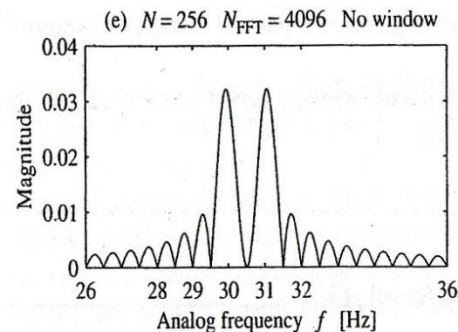
a) $N=256$, $N_{\text{FFT}}=2048$



b) $N=512$, $N_{\text{FFT}}=2048$

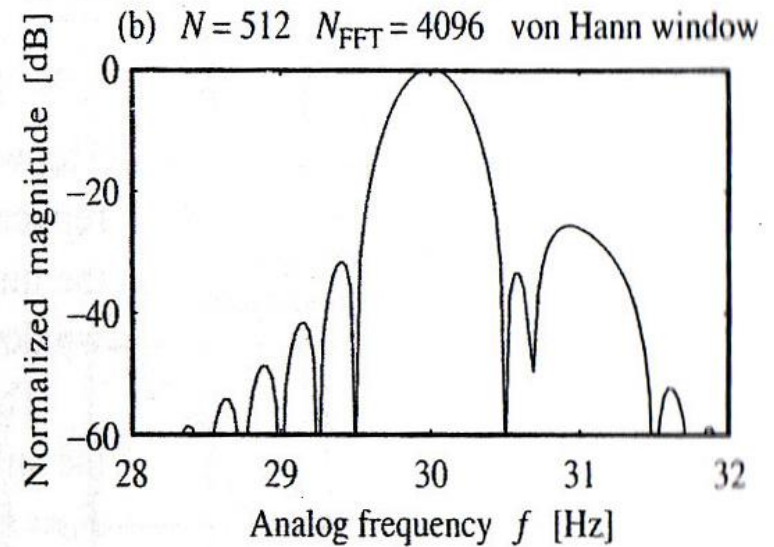
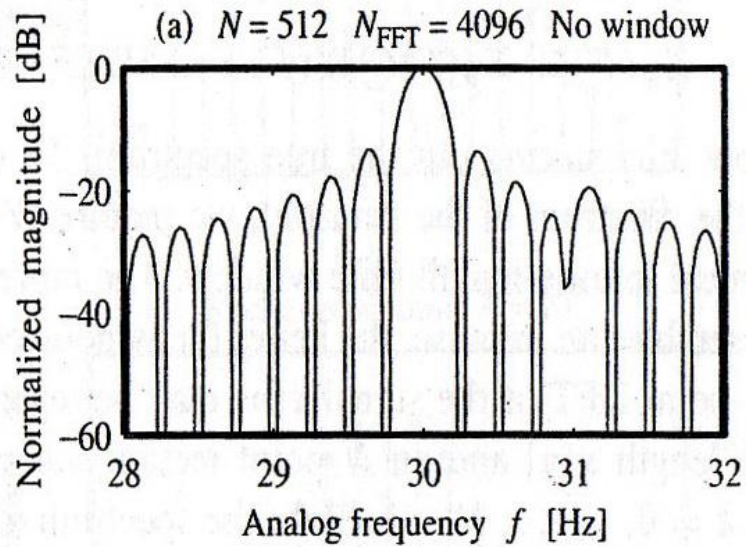


c) $N=256$, $N_{\text{FFT}}=4096$



⇒ nelze zvětšit rozlišení přidáním nul, ale pouze zvětšením délky signálu

$$A_2 = 0.05 \quad (26\text{dB pod } A_1 \text{ tj. } 20\log(1/0.05))$$



Odhad spektra

- Výkonová spektrální hustota (PSD – power spectral density) $R_{xx}(f)$ analogového výkonového nebo náhodného signálu $x(t)$ je Fourierova transformace autokorelační funkce $r_{xx}(t)$.
- $R_{xx}(f)$ je reálná nezáporná sudá funkce s hodnotou $R_{xx}(0)$ rovnou průměrnému výkonu signálu $x(t)$.
- PSD se používá k odhadu spektra vzorkovaného signálu konečné délky

Dva způsoby odhadu spektra :

- neparametrický odhad – o signálu nic nevíme a odhadujeme spektrum
- parametrický odhad – odhad spektra modelujeme jako koeficienty filtru buzeného šumem

Neparametrické odhady:

- Periodogram – periodogram $P[k]$ je založena na DFT (FFT) N -vzorkované řady $x[n]$ a je definován jako:

$$P[k] = \frac{1}{N} |X_{DFT}[k]|^2$$

- dobrý odhad pro deterministické, pásmově omezené, výkonové signály, vzorkované vyšší frekvencí než Nyquistova
- Špatné pro signály poškozené šumem

Welchova metoda

- je založená na průměrování překrývajících se periodogramových odhadů
- Princip:
 - signál je rozdělen na k překrývajících se M vzorkovaných úseků (s překrytím D vzorků, $D=50-75\%$). Každý úsek je násoben M vzorkovým oknem $w(n)$ kvůli omezení prosakování.
 - PSD každého úseku je odhadnuto periodogramem
 - k periodogramů je zprůměrováno – M -bodový průměrný periodogram
- Metoda je vhodná pro detekci frekvencí, které jsou blízko sebe (dobré frekvenční rozlišení)

Bartlettova metoda

- Jako Welchova metoda, ale segmenty se nepřekrývají a nejsou násobeny oknem

Blackman-Tukey metoda:

- metoda určuje PSD z autokorelace násobené oknem
- Princip:
 - N vzorkový signál $x[n]$ je doplněn nulami na $2N$ vzorků výsledkem je signál $y[n]$
 - určí se periodická autokorelace $y[n]$ nalezením $Y_{\text{FFT}}[k]$ a určením IFFT součinu $Y_{\text{FFT}}[k] Y_{\text{FFT}}[k]^*$ a dostaneme $2N$ bodový autokorelační odhad $r_{xx}[n]$.
 - autokorelační odhad $r_{xx}[n]$ je násoben M -bodovým oknem (kvůli vyhlazení spektra a redukci vlivu špatného autokorelačního odhadu signálu konečné délky)
 - určíme FFT M -bodové autokorelace násobené oknem a dostaneme vyhlazený periodogram
 - menší M (užší okno) lepší vyhlazení, ale může dojít k maskování některých špiček (peaků) nebo k překrytí ostrých detailů. Obvykle se používá M v rozsahu $M=0.1N$ až $M=0.5N$
 - jako okno pro vyhlazení se nejčastěji používá Bartlettovo okno.
- metoda je vhodná pro detekci dobře oddělených peaků s rozdílnou velikostí (dobré dynamické rozlišení)

Rychlá Fourierova transformace

FFT

Algoritmus využívá symetrie a periodicity exponenciály $W_N = e^{-j2\pi n/N}$

1	$e^{-j2\pi n/N} = e^{-j2\pi(n+N)/N}$	$W_N^{n+N} = W_N^n$
2	$e^{-j2\pi(n+\frac{N}{2})/N} = e^{-j2\pi n/N}$	$W_N^{n+\frac{N}{2}} = -W_N^n$
3	$e^{-j2\pi k} = e^{-j2\pi Nk/N} = 1$	$W_N^{Nk} = 1$
4	$e^{-j2(\frac{2\pi}{N})} = e^{-j2\pi \frac{N}{2}}$	$W_N^2 = W_{N/2}$

Základní výsledky využité ve FFT výpočtech:

1-bodová transformace : DFT jediného čísla A je číslo A

2-bodová transformace : DFT 2-bodové řady

$$X_{\text{DFT}}[0] = x[0] + x[1]$$

$$X_{\text{DFT}}[1] = x[0] - x[1]$$

- Radix 2-FFT transformace využívá toho, že N-bodová DFT může být zapsána jako součet dvou N/2 bodových transformací vytvořených ze sudých a lichých vzorků.

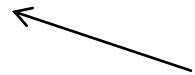
$$\begin{aligned}
 X_{DFT}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] W_N^{(2n+1)k} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] W_N^{2nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] W_N^{2nk} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n] W_{\frac{N}{2}}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] W_{\frac{N}{2}}^{nk}
 \end{aligned}$$

Označíme $X^e[k]$ – sudé vzorky (sudý index) a $X^o[k]$ - liché vzorky (lichý index), pak

$$X_{DFT}[k] = X^e[k] + W_N^k X^o[k] \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Na základě periodicity lze odvodit:

$$\begin{aligned}
 X_{DFT}[k] &= X^e[k] + W_N^k X^o[k] & k = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}N - 1 \\
 X_{DFT}\left[k + \frac{N}{2}\right] &= X^e\left[k + \frac{N}{2}\right] + W_N^{k + \frac{N}{2}} X^o\left[k + \frac{N}{2}\right] = \\
 &= X^e[k] - W_N^k X^o[k] & k = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}N - 1
 \end{aligned}$$

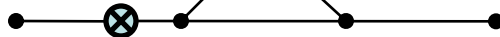


tzv. Danielson-Lanzos lemma

$A = X^e[k]$



$B = X^o[k]$

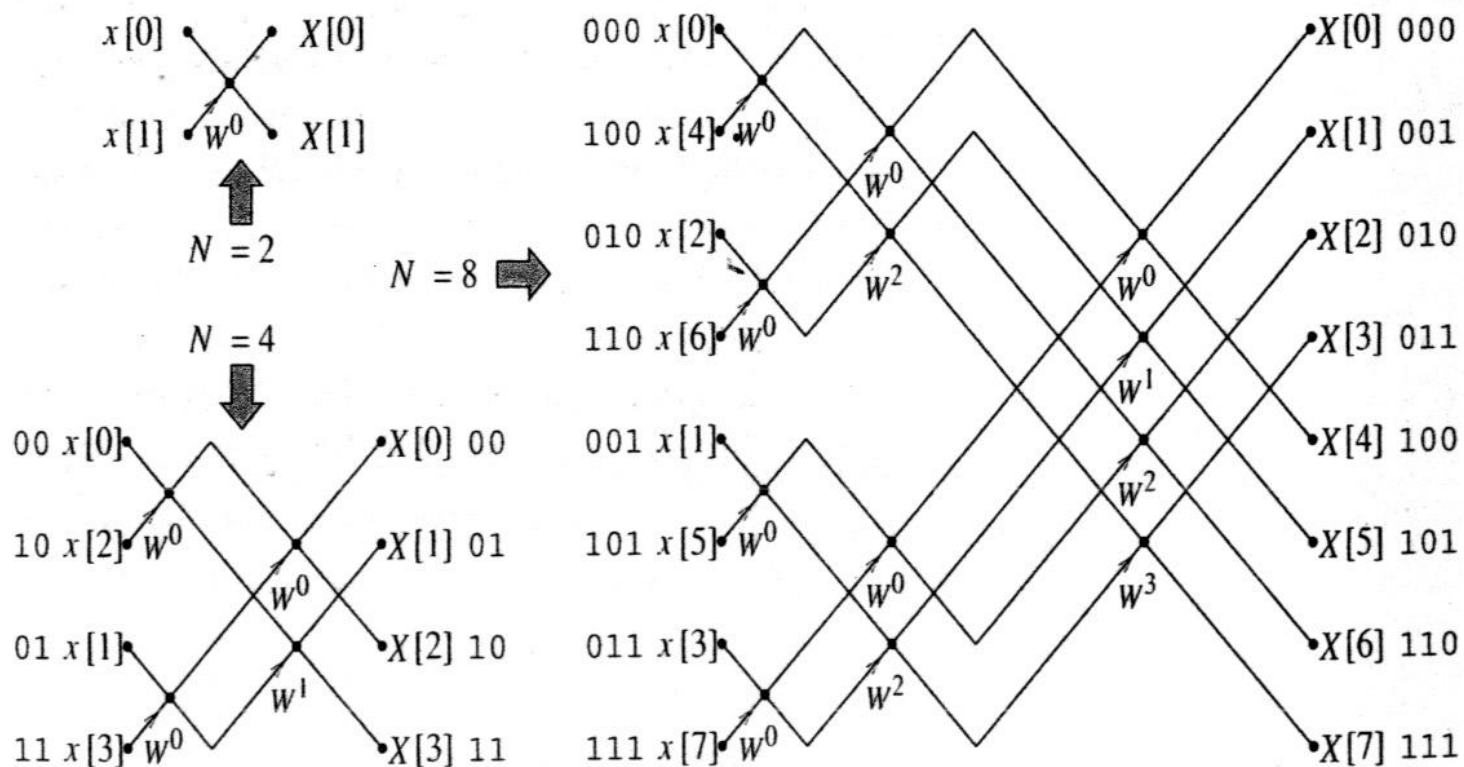


Entry	Characteristic	Decimation in Frequency	Decimation in Time
1	Number of samples	$N = 2^m$	$N = 2^m$
2	Input sequence	Natural order	Bit-reversed order
3	DFT result	Bit-reversed order	Natural order
4	Computations	In place	In place
5	Number of stages	$m = \log_2 N$	$m = \log_2 N$
6	Multiplications	$\frac{N}{2} \log_2 N$ (complex)	$\frac{N}{2} \log_2 N$ (complex)
7	Additions	$N \log_2 N$ (complex)	$N \log_2 N$ (complex)

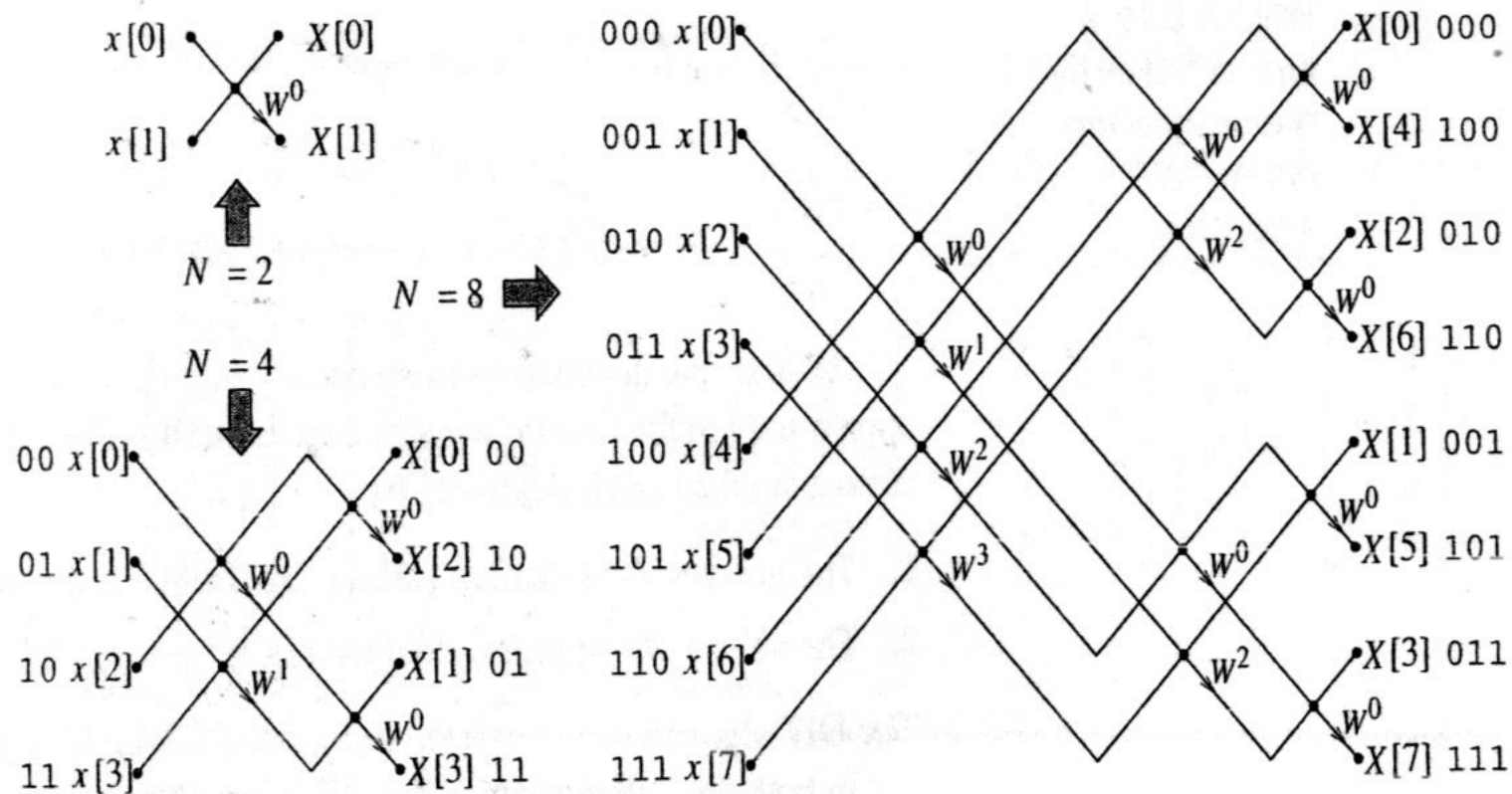
Structure of the i th Stage

8	Number of butterflies	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{2}$
9	Butterfly input	A (top) and B (bottom)	A (top) and B (bottom)
10	Butterfly output	$(A + B)$ and $(A - B)W_N^t$	$(A + BW_N^t)$ and $(A - BW_N^t)$
11	Twiddle factors t	$2^{i-1} Q, Q = 0, 1, \dots, P - 1$	$2^{m-i} Q, Q = 0, 1, \dots, P - 1$
12	Values of P	$P = 2^{m-i}$	$P = 2^{i-1}$

Výpočet FFT – decimace ve frekvenci DIF



Výpočet FFT – decimace v čase DIT



Výpočet FFT - porovnání

Feature	N -Point DFT	N -Point FFT
Algorithm	Solution of N equations in N unknowns	$0.5N$ butterflies/stage, m stages Total butterflies = $0.5mN$
Multiplications	N per equation	1 per butterfly
Additions	$N - 1$ per equation	2 per butterfly
Total multiplications	N^2	$0.5mN = 0.5N \log_2 N$
Total additions	$N(N - 1)$	$mN = N \log_2 N$