Analýza a zpracování signálů

5. Z-transformace

Z-tranformace je mocný nástroj použitelný pro analýzu lineárních discrete-time systémů

- Oboustranná Z-transformace

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}, \quad z \text{ je komplexní číslo } z = |r| e^{j2\pi F} = |r| e^{j\Omega}$$

- Oboustranná transformace konečné řady je výkonová (Laurentova) řada proměnné z. Hodnoty z se kreslí v tzv. Argandově diagramu (z-rovina)
- Společně s hodnotou X(z) se uvádí i oblast, pro kterou X(z) konverguje – tzv. oblast konvergence (ROC – region of convergence).
- Pro dvě odlišné řady může existovat stejná Z-transformace, ale s odlišnou oblastí konvergence, proto je nutné oblast konvergence uvádět. Pokud se ROC neuvádí uvažuje se obvykle pravostranný signál.

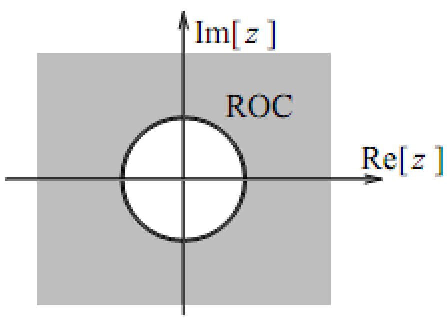
Pro ROC platí následující pravidla :

– **signál konečné délky** – ROC X(z) je celá rovina, kromě z=0 popř. z=∞

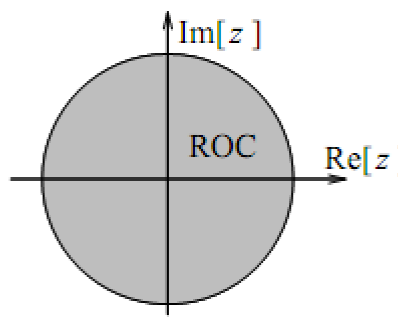
– **pravostranný x[n]** – ROC X(z) je vně kružnice s poloměrem větším, než je velikost (v absolutní hodnotě) největšího pólu

– **levostranný signál** – ROC X(z) je vnitřek kružnice s poloměrem menším, než (v absolutní hodnotě) velikost nejmenšího pólu

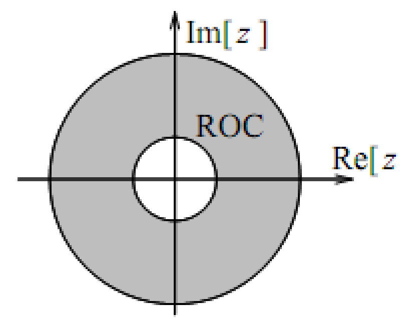
– **oboustranný signál** – ROC X(z) je uvnitř mezikruží ohraničeného největším a nejmenším pólem (v absolutní hodnotě)



ROC (shaded) of right-sided signals



ROC (shaded) of left-sided signals



ROC (shaded) of two-sided signals

EXAMPLE 4.2 (Identifying the ROC)

(a) Let $x[n] = \{4, \ -3, \ \overset{\Downarrow}{2}, \ 6\}$. The ROC of $X(z)$ is $0 < |z| < \infty$ and *excludes* $z = 0$ and $z = \infty$ because $x[n]$ is nonzero for $n < 0$ and $n > 0$.

(b) Let $X(z) = \dfrac{z}{z-2} + \dfrac{z}{z+3}$.

Its ROC depends on the nature of $x[n]$.

If $x[n]$ is assumed right-sided, the ROC is $|z| > 3$ (because $|p|_{\max} = 3$).

If $x[n]$ is assumed left-sided, the ROC is $|z| < 2$ (because $|p|_{\min} = 2$).

If $x[n]$ is assumed two-sided, the ROC is $2 < |z| < 3$.

The region $|z| < 2$ and $|z| > 3$ does not correspond to a valid region of convergence because we must find a region that is common to both terms.

DRILL PROBLEM 4.3

(a) Let $X(z) = \dfrac{z+0.5}{z}$. What is its ROC?

(b) Let $Y(z) = \dfrac{z+1}{(z-0.1)(z+0.5)}$. What is its ROC if $x[n]$ is right-sided?

(c) Let $G(z) = \dfrac{z}{z+2} + \dfrac{z}{z-1}$. What is its ROC if $g[n]$ is two-sided?

(d) Let $H(z) = \dfrac{(z+3)}{(z-2)(z+1)}$. What is its ROC if $h[n]$ is left-sided?

Answers: **(a)** $|z| \neq 0$ **(b)** $|z| > 0.5$ **(c)** $1 < |z| < 2$ **(d)** $|z| < 1$

Vlastnosti oboustranné Z-transformace

Entry	Property	Signal	z-Transform
1	Shifting	$x[n-N]$	$z^{-N}X(z)$
2	Reflection	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
3	Anti-causal	$x[-n]u[-n-1]$	$X\left(\frac{1}{z}\right) - x[0]$ (for causal $x[n]$)
4	Scaling	$\alpha^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$
5	Times-n	$nx[n]$	$-z\,\frac{dX(z)}{dz}$
6	Times-cos	$\cos(n\Omega)x[n]$	$0.5\left[X(ze^{j\Omega}) + X(ze^{-j\Omega})\right]$
7	Times-sin	$\sin(n\Omega)x[n]$	$j0.5\left[X(ze^{j\Omega}) - X(ze^{-j\Omega})\right]$
8	Convolution	$x[n] \star h[n]$	$X(z)H(z)$

Převod signálu do Z oblasti:

- pro signály konečné délky – polynomem proměnné z
- pro ostatní signály - převodní tabulka.

Table 4.1 A Short Table of z-Transform Pairs

Entry	Signal	z-Transform	ROC
	Finite Sequences		
1	$\delta[n]$	1	all z
2	$u[n]-u[n-N]$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$z \neq 0$
	Causal Signals		
3	$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
4	$\alpha^n u[n]$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
5	$(-\alpha)^n u[n]$	$\frac{z}{z+\alpha}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
6	$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
7	$n\alpha^n u[n]$	$\frac{z\alpha}{(z-\alpha)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
8	$\cos(n\Omega)u[n]$	$\frac{z^2 - z\cos\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$\sin(n\Omega)u[n]$	$\frac{z\sin\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
10	$\alpha^n\cos(n\Omega)u[n]$	$\frac{z^2-\alpha z\cos\Omega}{z^2-2\alpha z\cos\Omega+\alpha^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
11	$\alpha^n\sin(n\Omega)u[n]$	$\frac{\alpha z\sin\Omega}{z^2-2\alpha z\cos\Omega+\alpha^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
	Anti-Causal Signals		
12	$-u[-n-1]$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
13	$-nu[-n-1]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert < 1$
14	$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
15	$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{z\alpha}{(z-\alpha)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$

DRILL PROBLEM 4.1

(a) Let $x[n] = \{\overset{\Downarrow}{2},\ 1,\ 0,\ 4\}$. Find its z-transform $X(z)$.

(b) Let $x[n] = \{2,\ -3,\ \overset{\Downarrow}{1},\ 0,\ 4\}$. Find its z-transform $X(z)$.

(c) Let $X(z) = 3z^2 + z - 3z^{-1} + 5z^{-2}$. Find $x[n]$.

Answers: (a) $2 + z^{-1} + 4z^{-3}$ (b) $2z^2 - 3z + 1 + 4z^{-2}$ (c) $\{3,\ 1,\ \overset{\Downarrow}{0},\ -3,\ 5\}$

EXAMPLE 4.1 (The z-Transform from the Defining Relation)

(a) Let $x[n] = \delta[n]$. Its z-transform is $X(z) = 1$. The ROC is the entire z-plane.

(b) Let $x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] - 5\delta[n-1] + 4\delta[n-2]$. This describes the sequence $x[n] = \{2, \overset{\Downarrow}{1}, -5, 4\}$. Its z-transform is evaluated as $X(z) = 2z + 1 - 5z^{-1} + 4z^{-2}$. No simplifications are possible. The ROC is the entire z-plane, except $z = 0$ and $z = \infty$ (or $0 < |z| < \infty$).

(c) Let $x[n] = u[n] - u[n-N]$. This represents a sequence of N samples, and its z-transform may be written as

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-(N-1)}$$

Its ROC is $|z| > 0$ (the entire z-plane except $z = 0$). A closed-form result for $X(z)$ may be found using the defining relation as follows:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, \quad z \neq 1$$

Z-rovina, nuly , póly

Z- transformace lze u většiny signálů vyjádřit jako racionální lomenou funkci, která má tvar:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{B_M z^M + B_{M-1} z^{M-1} + \cdots + B_1 z + B_0}{A_N z^N + A_{N-1} z^{N-1} + \cdots + A_1 z + A_0}$$

Označme:

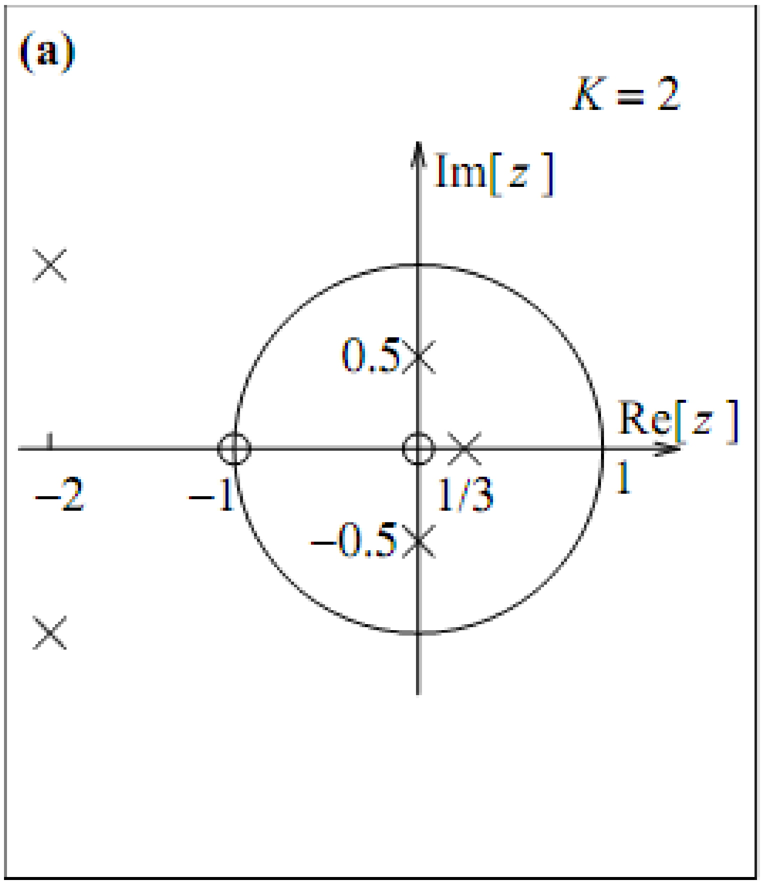
kořeny N(z) jako z_i $\Rightarrow$ nuly O

kořeny D(z) jako p_k $\Rightarrow$ póly X

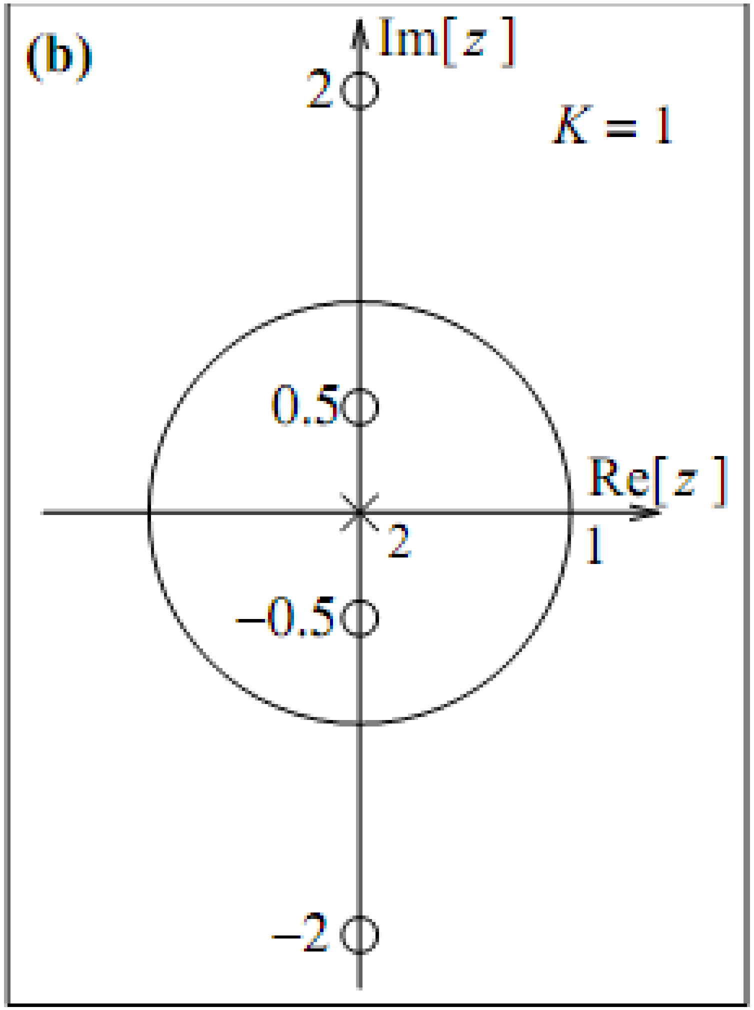
$$X(z) = K \cdot \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_N)}$$

Diagram nul a pólů

$$H(z)=\frac{2z(z+1)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z^2+\frac{1}{4}\right)\left(z^2+4z+5\right)}$$



Příklad : Jaká z-transformace odpovídá následujícímu diagramu nul a pólů ?



(b) What is the z-transform corresponding to the pole-zero pattern of Figure E4.4(b)? Does it represent a symmetric signal?

If we let $X(z) = KN(z)/D(z)$, the four zeros correspond to the numerator $N(z)$ given by

$$N(z) = (z - j0.5)(z + j2)(z + j0.5)(z - j2) = z^4 + 4.25z^2 + 1$$

The two poles at the origin correspond to the denominator $D(z) = z^2$. With $K = 1$, the z-transform is given by

$$X(z) = K\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^4 + 4.25z^2 + 1}{z^2} = z^2 + 4.25 + z^{-2}$$

Checking for symmetry, we find that $X(z) = X(1/z)$, and thus $x[n]$ is even symmetric. In fact, $x[n] = \delta[n+2] + 4.25\delta[n] + \delta[n-2] = \{1, \overset{\Downarrow}{4.25}, 1\}$. We also note that each zero is paired with its reciprocal ($j0.5$ with $-j2$, and $-j0.5$ with $j2$), a characteristic of symmetric sequences.

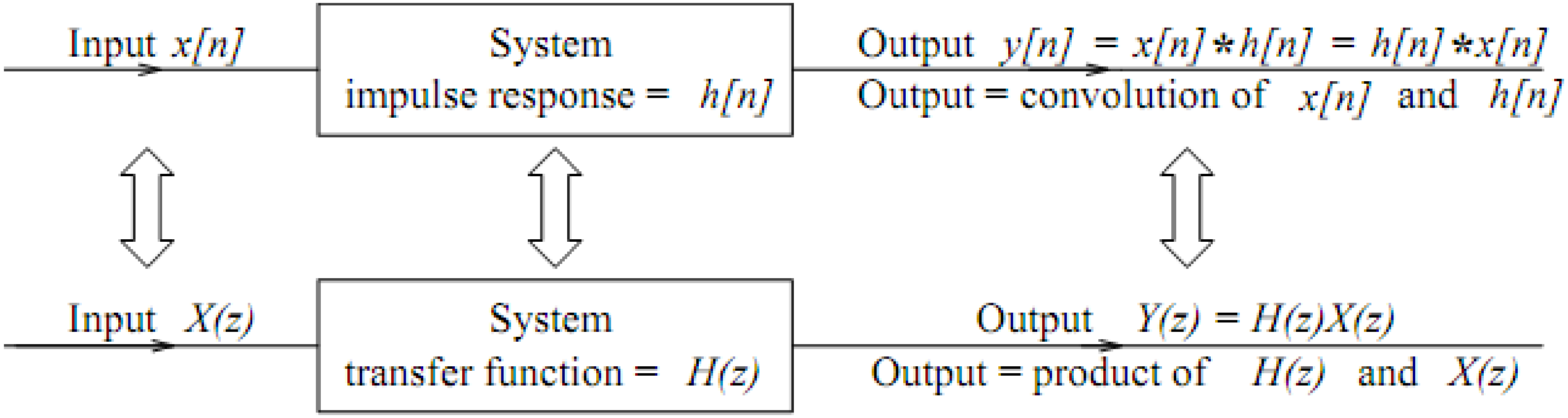
Přenosová funkce systému

Odezva systému y[n] s impulzní odezvou h[n] je dána konvolucí

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

v Z oblasti

$$Y[z] = X[z] \cdot H[z] \quad \Rightarrow \quad H[z] = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



H[z] je přenosová funkce systému a je definována pouze pro ustálený LTI systém jako poměr Z-transformace výstupu k Z-transformaci vstupu.
H(z) je Z-transformace impulzní odezvy h[n]

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} + \cdots B_M z^{-M}}{A_0 + A_1 z^{-1} + \cdots + A_N z^{-N}}$$

DRILL PROBLEM 4.11

(a) Find the transfer function of the digital filter described by $y[n] - 0.4y[n-1] = 2x[n]$.

(b) Find the difference equation of the digital filter described by $H(z) = \dfrac{z-1}{z+0.5}$.

(c) Find the difference equation of the digital filter described by $h[n] = (0.5)^n u[n] - \delta[n]$.

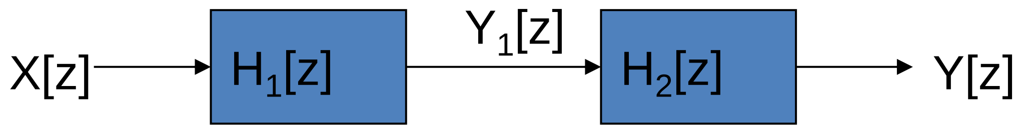
Answers: **(a)** $H(z) = \dfrac{2z}{z-0.4}$ **(b)** $y[n]+0.5y[n-1] = x[n]-x[n-1]$ **(c)** $y[n]-0.5y[n-1] = 0.5x[n-1]$

LTI systém může být popsán:

- přenosovou funkcí
- impulzní odezvou
- diferenční rovnicí
- diagramem nul a pólů

Spojování systémů

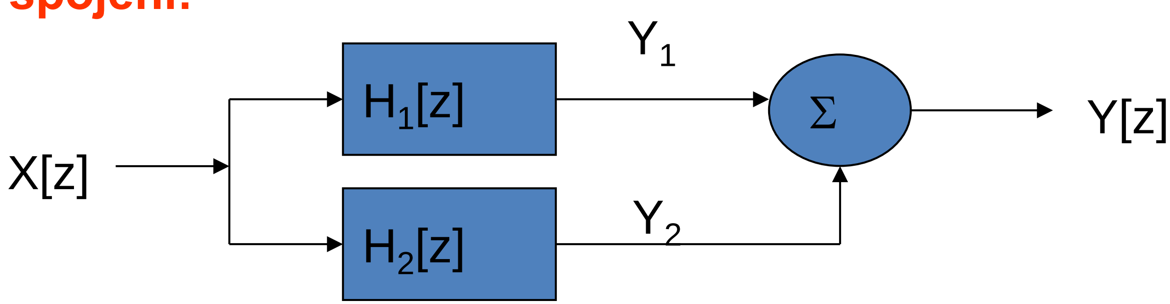
Kaskádní spojení:



$$Y[z]=H_2[z]Y_1[z]=H_2[z](H_1[z]X[z]) =(H_2[z]\ H_1[z])X[z] \Rightarrow H[z]=H_1[z]\ H_2[z]$$

Obecně pro n – kaskádně spojených systémů : $H[z]=H_1[z]\ H_2[z]\ \ldots\ H_n[z]$

Paralelní spojení:



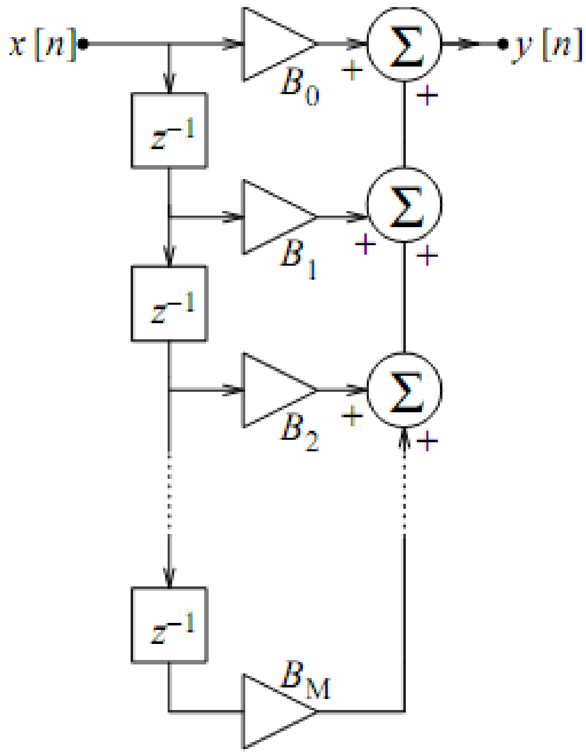
$$Y[z]=H_1[z]X[z]+ H_2[z]X[z] = (H_2[z]+H_1[z])X[z] \Rightarrow H[z]=H_1[z]+H_2[z]$$

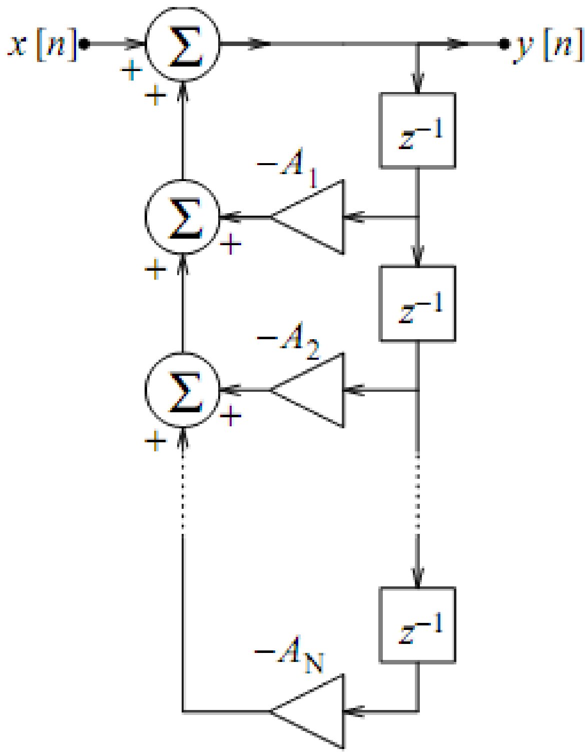
Obecně pro n – paralelně spojených systémů : $H[z]=H_1[z] + H_2[z] +\ldots +H_n[z]$

Realizace přenosové funkce

$$H_N(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + \cdots + B_M z^{-M} \quad y[n] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \cdots + B_M x[n-M]$$

$$H_R(z) = \frac{1}{1 + A_1 z^{-1} + \cdots + A_N z^{-N}} \quad y[n] = -A_1 y[n-1] - \cdots - A_N y[n-N] + x[n]$$

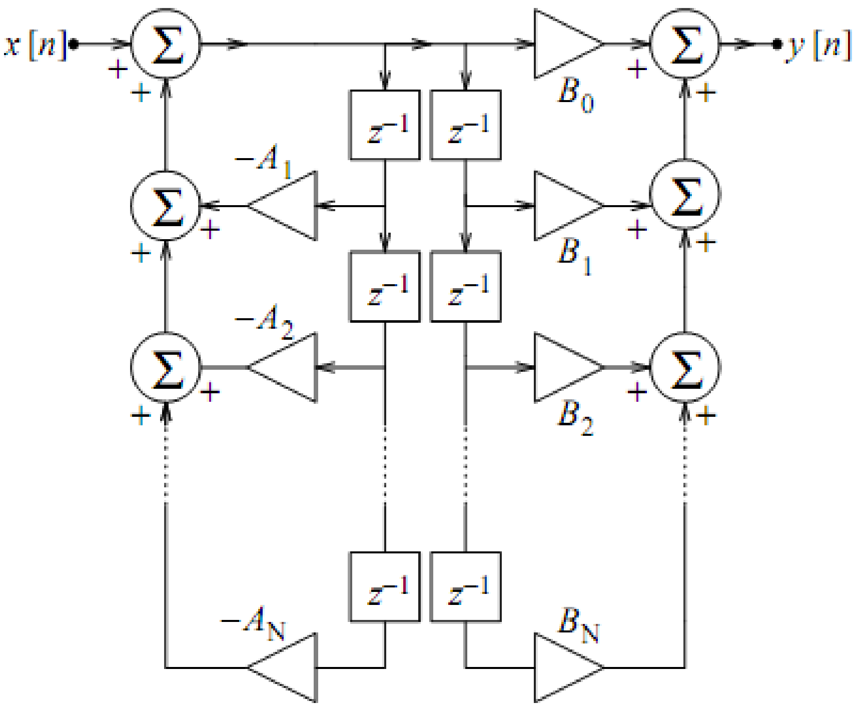


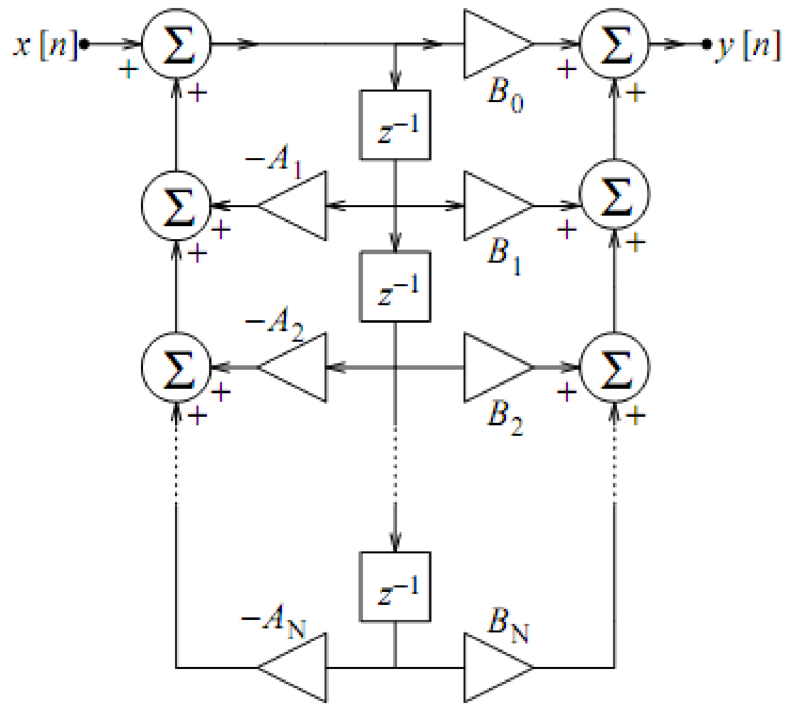


Pro obecnou diferenční rovnici:

$$y[n] = -A_1 y[n-1] - \cdots - A_N y[n-N] + B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \cdots + B_N x[n-N]$$

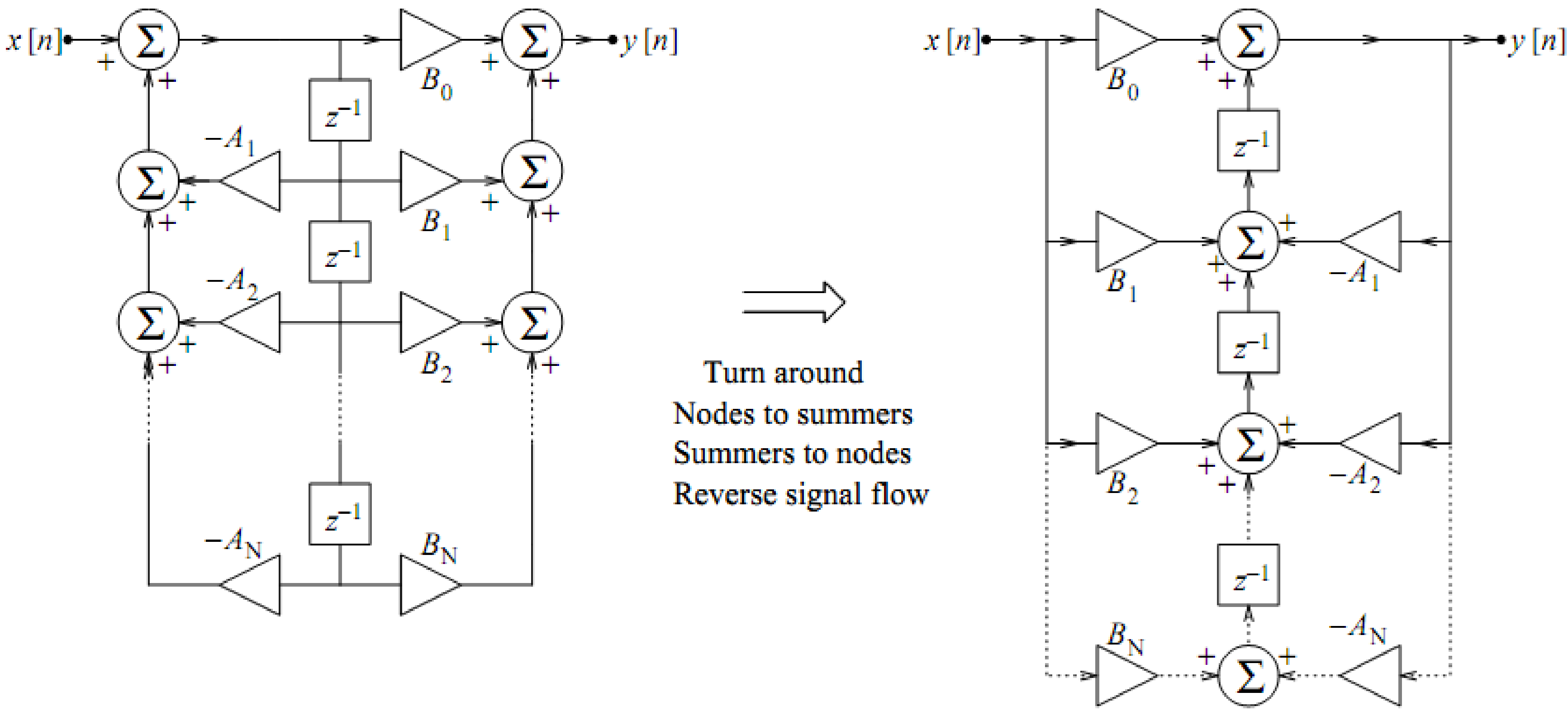
$$H(z) = \frac{B_0 + B_1 z^{-1} + \cdots + B_N z^{-N}}{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \cdots + A_N z^{-N}} = H_N(z) H_R(z)$$





Duální struktura filtru
(Transposed realization)

Vychází z přímé formy II a provede se překlopením – záměna vstupů a výstupů, otočení toku signálu a záměna sumátorů a spojek.



Sériová (kaskádní) realizace filtrů

Přenosová funkce systému může být výsledkem součinu dílčích přenosových funkcí (v kaskádním zapojení)

$$H_c(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot \cdots \cdot H_N(z)$$

Systém N-tého řádu může být realizován jako kaskádní spojení systémů 2. rádu a 1. řádu (pokud N je liché)

Paralelní realizace filtrů

Přenosová funkce systému může být výsledkem součtu dílčích přenosových funkcí (v paralelním zapojení)

$$H_P(z) = H_1(z) + H_2(z) + \ \ldots + H_N(z)$$

Přenosovou funkci systému N-tého řádu můžeme rozložit na parciální zlomky a realizovat systém jako paralelní spojení subsystémů 1. popř. 2. řádu.

Příklad:

1. Nalezněte kaskádní realizaci filtru popsaného přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{z^2(6z-2)}{(z-1)\left(z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}\right)}$$

2. Nalezněte paralelní realizaci filtru popsaného přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

Kauzalita a stabilita LTI systému

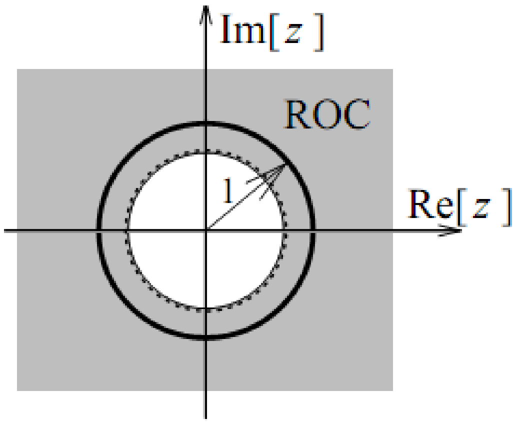
V časové oblasti - kauzální systém má impulzní odezvu h[n]=0, pro n<0.
Pro impulzní odezvu tohoto systému pak platí, že počet nul nesmí přesáhnout počet pólů ⇒stupeň čitatele musí být menší než stupeň jmenovatele.
Stabilní systém - pro h[n] musí platit

$$\left(\sum |h[k]| < \infty\right).$$

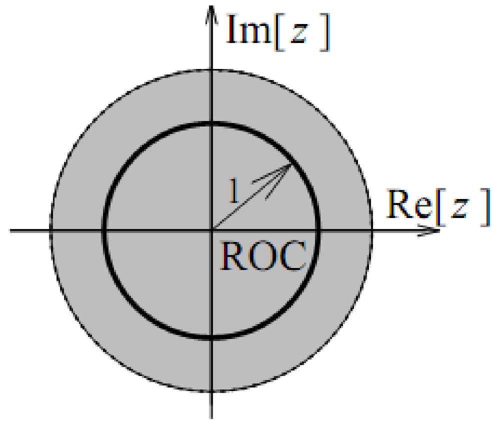
Stabilita (**B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput) ⇒ na omezený vstup reaguje systém omezeným výstupem.

ROC (oblast konvergence) stabilního LTI systému vždy zahrnuje jednotkovou kružnici a platí:

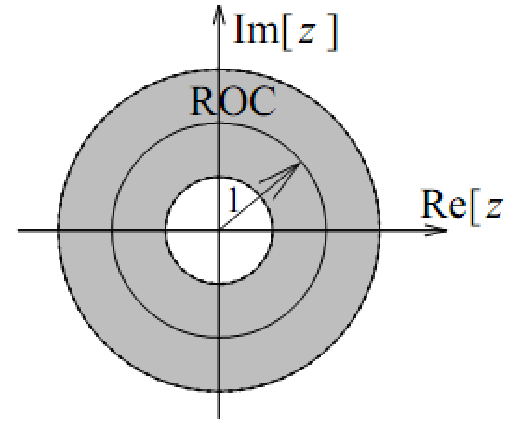
- stabilní a kauzální systém: - všechny póly leží uvnitř jednotkové kružnice
- stabilní a antikauzální systém – všechny póly leží vně jednotkové kružnice



ROC (shaded) of
causal, stable system



ROC (shaded) of
anti-causal, stable system



ROC (shaded) of
two-sided, stable system

Inverzní Z-transformace

Obecně:
$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \oint X[z] \cdot z^{n-1} dz$$

V praxi se obecný vzorec téměř nepoužívá a inverzní transformace se určuje kombinací následujících způsobů :

1. přímý převod
2. dělení polynomů
3. rozklad na parciální zlomky.

Přímý převod: - pro jednoduché případy, kdy je Z- transformace vyjádřena konečnou řadou.

$X[z]= 3z^{-1} + 5z^{-3} + 2z^{-4} \Rightarrow x[n]=3\delta[n-1] + 5\,\delta[n-3] + 2\delta[n-4] \Rightarrow x[n]=\{0, 3, 0, 5, 2\}$

Nebo

$X[z]= 2z^{2} - 5z + 5z^{-1} - 2z^{-2} \Rightarrow x[n]=2\delta[n+2] - 5\,\delta[n+1] + 5\,\delta[n-1] - 2\delta[n-2] \Rightarrow$
$x[n]=\{2, -5, 0, 3, 5, -2\}$

Dělení polynomů: Většinou se používá pokud chceme vyjádřit pouze prvních pár členů odezvy systému - je to obvykle rychlejší než rozklad na parciální zlomky.

Předpokládejme, že : $X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

- pro pravostranný signál: uspořádáme N(z) a D(z) podle sestupných mocnin z a určíme výsledek dělení polynomů – dostaneme mocninou řadu proměnné z^{-1}
- pro levostranný signál: uspořádáme N(z) a D(z) podle vzestupných mocnin z – dostaneme mocninnou řadu proměnné z

$$H[z] = \frac{z-4}{1-z-z^2}$$

$(z-4) : (z^2-z+1) \;=\; z^{-1}-3z^{-2}-4z^{-3}+\ldots \Rightarrow h[n]= \delta[n-1] - 3\delta[n-2] - 4\delta[n-3]$

$\Rightarrow h[n]=\{0,1,-3,-4, \ldots\}$

Rozklad na parciální zlomky :

- princip metody rozkladu spočívá v tom, že výraz pro Z-transformaci se rozloží na součet zlomků, jejichž inverzní transformaci lze najít v tabulkách.
- rozklad se provádí v závislosti na pólech (tj. kořenech jmenovatele).

Rozlišujeme 2 případy:

1. Rozdílné póly- reálné

$$Y(z)=\frac{X(z)}{z}=\frac{P(z)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_N)}=\frac{k_1}{(z+p_1)}+\frac{k_2}{(z+p_2)}+\cdots\frac{k_N}{(z+p_N)}$$

$$kde\;\; k_m=(z+p_m)Y(z)\Big|_{z=-p_m}$$

Rozdílné póly - komplexní

$$Y(z)=\frac{X(z)}{z}=\frac{k_1}{(z+p_1)}+\frac{k_2}{(z+p_2)}+\cdots+\frac{A_1}{(z+r_1)}+\frac{A_1^*}{(z+r_1^*)}+\frac{A_2}{(z+r_2)}+\frac{A_2^*}{(z+r_2^*)}+\cdots$$

2. Opakující se póly - Y(z) obsahuje $(z+r)^k$ pól

$$Y(z) = \frac{X(z)}{z} = \cdots + \frac{A_0}{(z+r_1)^k} + \frac{A_1}{(z+r)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{(z+r)},$$

$$kde\ \ A_0 = (z+r)^k Y(z)\Big|_{z=-r}$$

$$A_1 = \frac{d}{dz}\left[(z+r)^k Y(z)\right]\Big|_{z=-r}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z+r)^k Y(z)\right]\Big|_{z=-r}$$

Zpětná Z-transformace tabulka

Entry	PFE Term $X(z)$	Causal Signal $x[n],\ n \geq 0$
Note: For anti-causal sequences, we get the signal $-x[n]u[-n-1]$ where $x[n]$ is as listed.		
1	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	α^n
2	$\dfrac{z}{(z-\alpha)^2}$	$n\alpha^{(n-1)}$
3	$\dfrac{z}{(z-\alpha)^{N+1}} \quad (N>1)$	$\dfrac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!}\alpha^{(n-N)}$
4	$\dfrac{z(C+jD)}{z-\alpha e^{j\Omega}} + \dfrac{z(C-jD)}{z-\alpha e^{-j\Omega}}$	$2\alpha^n[C\cos(n\Omega) - D\sin(n\Omega)]$
5	$\dfrac{zK\angle\phi}{z-\alpha e^{j\Omega}} + \dfrac{zK\angle-\phi}{z-\alpha e^{-j\Omega}}$	$2K\alpha^n\cos(n\Omega+\phi)$
6	$\dfrac{z(C+jD)}{(z-\alpha e^{j\Omega})^2} + \dfrac{z(C-jD)}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^2}$	$2n\alpha^{n-1}\Big(C\cos[(n-1)\Omega] - D\sin[(n-1)\Omega]\Big)$
7	$\dfrac{zK\angle\phi}{(z-\alpha e^{j\Omega})^2} + \dfrac{zK\angle-\phi}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^2}$	$2Kn\alpha^{n-1}\cos[(n-1)\Omega+\phi]$
8	$\dfrac{zK\angle\phi}{(z-\alpha e^{j\Omega})^{N+1}} + \dfrac{zK\angle-\phi}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^{N+1}}$	$2K\dfrac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!}\alpha^{(n-N)}\cos[(n-N)\Omega+\phi]$

Zpětná Z-transformace rozklad na parciální zlomky

REVIEW PANEL 17.16

Partial Fraction Expansion of $Y(z) = X(z)/z$ Depends on Its Poles (Denominator Roots)

Distinct roots: $Y(z) = \prod_{m=1}^{N} \frac{P(z)}{z+p_m} = \sum_{m=1}^{N} \frac{K_m}{z+p_m}$, where $K_m = (z+p_m)Y(z)\big|_{z=-p_m}$

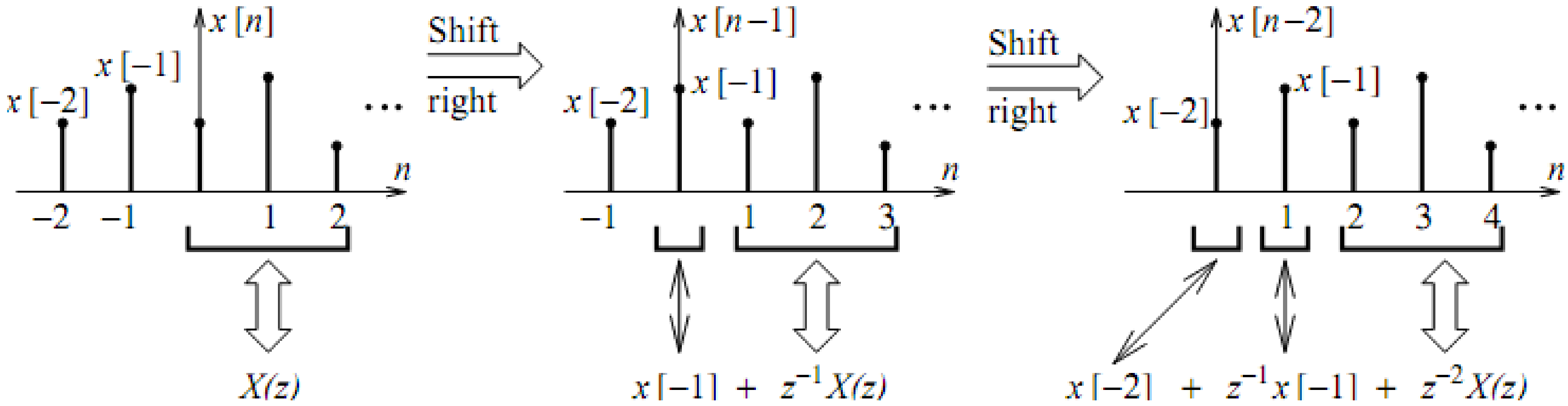
Repeated: $\frac{1}{(z+r)^k} \prod_{m=1}^{N} \frac{P(z)}{z+p_m} = \sum_{m=1}^{N} \frac{K_m}{z+p_m} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{A_n}{(z+r)^{k-n}}$, where $A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z+r)^k Y(z)]\Big|_{z=-r}$

Jednostranná Z-transformace

- používá se při analýze kauzálních systémů a je definována následujícím vztahem

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k},$$

Vlastnosti jednostranné Z-transformace jsou podobné jako u oboustranné, jsou pouze upravené pro práci s kauzálními signály.

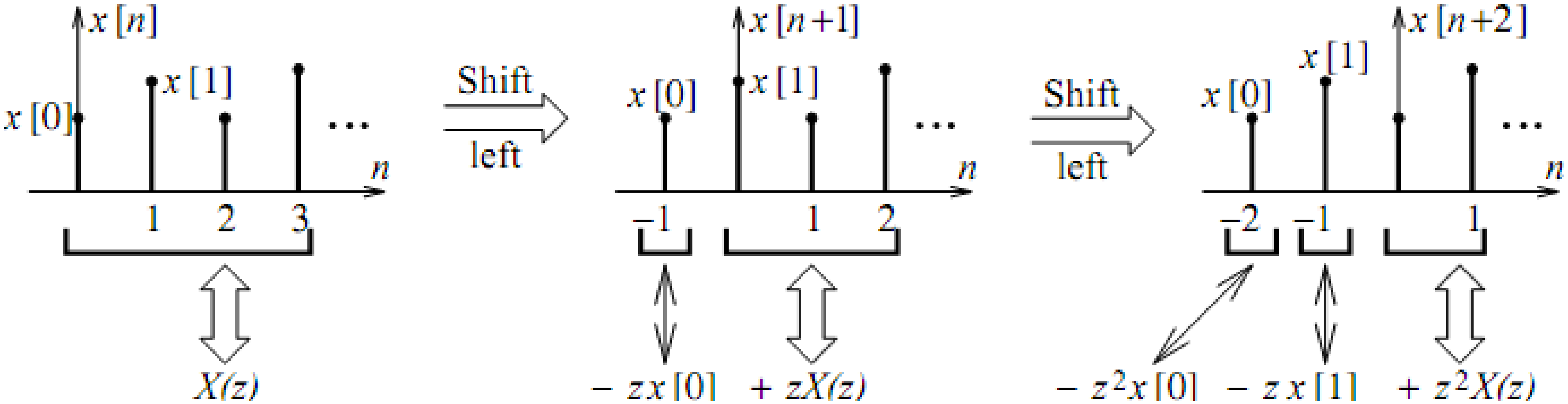


Posun doprava:

$$y[n-1] \Leftrightarrow z^{-1}Y(z) + y[-1]$$

$$y[n-2] \Leftrightarrow z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]$$

$$y[n-N] \Leftrightarrow z^{-N}Y(z) + z^{-(N-1)}y[0] + z^{-(N-2)}y[-2] + \cdots + y[-N]$$



Posun doleva:

$$y[n+1] \Leftrightarrow z\,Y(z) - zy[0]$$

$$y[n+2] \Leftrightarrow z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1]$$

$$y[n+N] \Leftrightarrow z^NY(z) - z^Ny[0] - z^{(N-1)}y[1] - \cdots - zy[N-1]$$

Periodický signál:

$$x_p[n]u[n] \Leftrightarrow \frac{X_1(z)}{1-z^{-N}} = \frac{z^N}{z^N-1}X_1(z)$$

kde $x_1[n]$ je první perioda signálu $x_p[n]$

Věta o počáteční hodnotě:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Věta o koncové hodnotě:

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

Využití Z-transformace k analýze systémů

Systémy popsané diferenční rovnicí:

1. převod diferenční rovnice do Z oblasti s ohledem na vlastnosti posuvu u jednostranné Z transformace a počáteční podmínky
2. výpočet ZIR, ZSR a celkové odezvy
3. zpětná transformace

Příklad. Řešte diferenční rovnici a určete ZIR, ZSR

$$y[n]-0.5y[n-1] = 2(0.25)^n u[n] \quad \text{pro} \quad y[-1]= -2$$

Systémy popsané přenosovou funkcí:

1. určení ZSR: Z přenosové funkce určit Y(z)=X(z)H(z) a provést zpětnou tranformaci
2. určení ZIR: určit diferenční rovnici, převést a postupovat jako u systémů popsaných diferenční rovnicí.

Příklad : Pro zadanou přenosovou funkci H(z), vstup x[n]=4u[n] a počáteční podmínky y[-1]=0 a y[-2]=12, určete ZIR, ZSR, homogenní a partikulární řešení.

$$H(z)=\frac{z^{2}}{z-\frac{1}{6}\,z-\frac{1}{6}}$$