Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)

Институт № 8 «Информационные технологии и прикладная математика»

Лабораторная работа № 8

По курсу «Численные методы»

«Численное решение многомерных уравнений математической физики»

Выполнила:

Офицерова Т.И.

Группа:

М8О-409Б-19

Преподаватель:

Пивоваров Д.Е.

Москва, 2022

Задача

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением U(x, y).

Описание метода

При численном решении многомерных задач математической физики очень важным является вопрос экономичности методов. Рассмотрим два метода из наиболее распространенных, основанных на расщеплении: метод переменных направлений и метод дробных шагов.

Рассмотрим задачу для двумерного уравнения параболического типа в прямоугольнике со сторонами $l_1,\ l_2$ и граничными условиями первого рода:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \quad x \in (0,\ell_1), \quad y \in (0,\ell_2), \quad t > 0 \ ;$$

$$u(x,0,t) = \varphi_1(x,t)\ ,\ x \in [0,\ell_1],\ \ y = 0\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u(x,\ell_2,t) = \varphi_2(x,t)\ ,\ x \in [0,\ell_1],\ \ y = \ell_2\ ,\ t > 0\ ;$$

$$u(0,y,t) = \varphi_3(y,t)\ ,\ x = 0\ ,\ y \in [0,\ell_2], t > 0;$$

$$u(\ell_1,y,t) = \varphi_4(y,t),\ x = \ell_1, y \in [0,\ell_2],\ \ t > 0\ ;$$

$$u(x,y,0) = \psi\,(x,y)\ ,\ x \in [0,\ell_1]\ ,\ y \in [0,\ell_2]\ ,\ \ t = 0.$$

Первым шагом введем пространственно-временную сетку:

$$\omega^{\tau}_{h_1 h_2} = \left\{x_i = ih_1, i = \overline{0,I};\ x_j = jh_2, j = \overline{0,J}\ ;\ t^k = k\tau\ , k = 0,1,2,\ldots\right\}$$

Рассмотрим метод переменных направлений. Как и в других методах расщепления, шаг по времени τ разбивается на число независимых пространственных переменных. На каждом дробном слое один из пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно, а остальные явно. На следующем дробном шаге неявно аппроксимируется следующий по порядку дифференциальный оператор, а остальные – явно и тд. Таким образом для двумерного случая мы получаем схему:

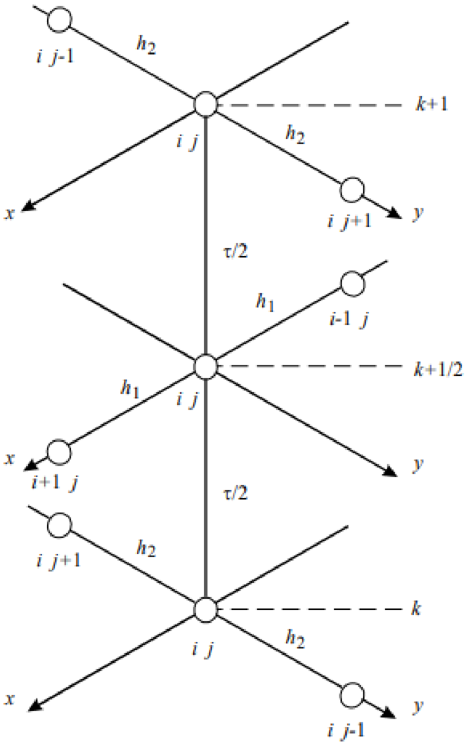
$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^{k}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1\,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1\,j}^{k+1/2}\right) + \frac{a}{h_2^2}\left(u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right) + f_{ij}^{k+1/2},$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1\,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1\,j}^{k+1/2}\right) + \frac{a}{h_2^2}\left(u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}\right) + f_{ij}^{k+1/2}.$$

Таким образом при помощи скалярным прогонок в направлении переменной x мы сначала получаем распределение сеточной функции $u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$, а после второго этапа прогонок уже в направлении переменной y получаем распределение сеточной функции u_{ij}^{k+1}.

В двумерном случае схема абсолютно устойчива и имеет высокую точность.

Также приведем шаблон описанной схемы:

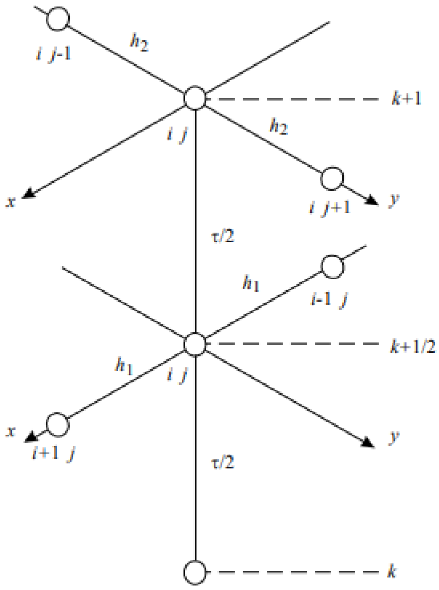


Далее рассмотрим метод дробных шагов, который использует только неявные конечно-разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не содержащих смешанные производные.
Для двумерной задачи схема принимает вид:

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2}-u_{ij}^{k}}{\tau}=\frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1\,j}^{k+1/2}-2u_{ij}^{k+1/2}+u_{i-1\,j}^{k+1/2}\right)+\frac{f_{ij}^{k}}{2},$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k+1/2}}{\tau}=\frac{a}{h_2^2}\left(u_{i\,j+1}^{k+1}-2u_{ij}^{k+1}+u_{i\,j-1}^{k+1}\right)+\frac{f_{ij}^{k+1}}{2}.$$

Таким образом на первом дробном шаге осуществляются скалярные прогонки в направлении x, а на втором дробном шаге – в направлении y. схема метода дробных шагов имеет первый порядок по времени и второй – по переменным x и y.
Приведем шаблон описанной схемы:



Вариант

7.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t,$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) = y\cos t,$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u(x, 1, t) = x\cos t,$$

$$u(x, y, 0) = xy.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy\cos t$.

Решение и код

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

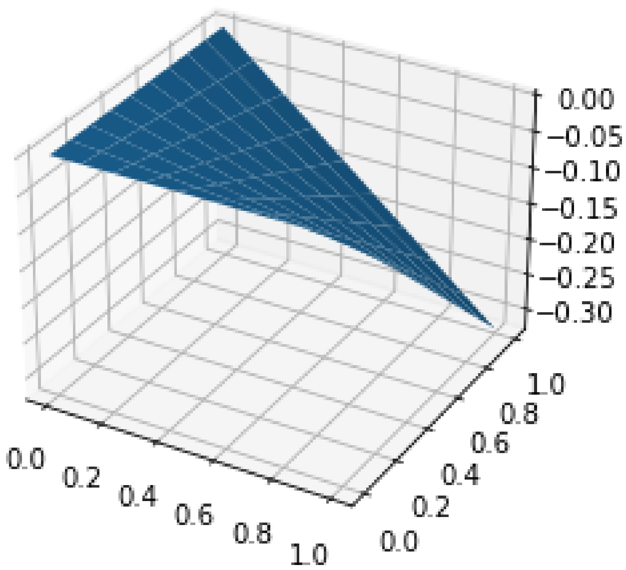
заданные в варианте функции и метод прогонки

```
def f(x, y, t):
    return -x*y*np.sin(t)
def phi1(y, t):
    return 0
def phi2(y, t):
    return y*np.cos(t)
def phi3(x, t):
    return 0
def phi4(x, t):
    return x*np.cos(t)
def psi(x, y):
    return x*y
def solution(x, y, t):
    return x*y*np.cos(t)

l = 1
N = 10
K = 100
Tk = 2
h = l/N
tau = Tk/K
x = np.linspace(0, l, N)
y = np.linspace(0, l, N)
t = np.linspace(0, Tk, K)
X, Y, T = np.meshgrid(x, y, t)

def tma(a, b, c, d):
    n = len(a)
    p, q = [], []
    p.append(-c[0] / b[0])
    q.append(d[0] / b[0])
    for i in range(1, n):
        p.append(-c[i] / (b[i] + a[i] * p[i - 1]))
        q.append((d[i] - a[i] * q[i - 1]) / (b[i] + a[i] * p[i - 1]))
    x = [0 for _ in range(n)]
    x[n - 1] = q[n - 1]
    for i in range(n-2, -1, -1):
```

```
        x[i] = p[i] * x[i+1] + q[i]
    return x
```

аналитическое решение

```
def analitic_solve(N, l, K, T):
    u = np.zeros((N, N, K))
    for i in range(N):
        for j in range(N):
            for k in range(K):
                u[i][j][k] = solution(i*h, j*h, k*tau)
    return u


analitic = analitic_solve(N, l, K, Tk)
x_plt, y_plt = np.meshgrid(x, y)
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection ='3d')
ax.plot_surface(x_plt, y_plt, np.array(analitic[:, :, -1]))
plt.show()
```

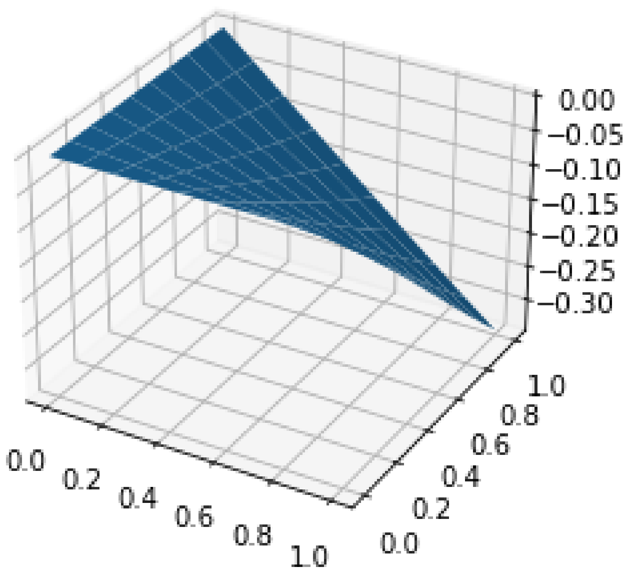


метод переменных направлений

```
def MPN(lbx, ubx, nx, lby, uby, ny, T, K):
    hx = (ubx - lbx)/nx
    x = np.arange(lbx, ubx + hx, hx)
    hy = (uby - lby)/ny
    y = np.arange(lby, uby + hy, hy)
    tau = T/K
    t = np.arange(0, T + tau, tau)

    UU = np.zeros((len(x),len(y),len(t)))
    for i in range(len(x)):
        for j in range(len(y)):
            UU[i,j,0] = psi(x[i], y[j])
```

```
    for k in range(1,len(t)):
        U1 = np.zeros((len(x),len(y)))
        t2 = t[k] - tau/2
        #первый дробный шаг
        L = np.zeros((len(x),len(y)))
        L = UU[:,:,k-1]
        for j in range(len(y)-1):
            aa = np.zeros(len(x))
            bb = np.zeros(len(x))
            cc = np.zeros(len(x))
            dd = np.zeros(len(x))
            bb[0] = hx
            bb[-1] = hx
            cc[0] = 0
            aa[-1] = 0
            dd[0] = phi1(y[j],t2)*hx
            dd[-1] = phi2(y[j],t2)*hx
            for i in range(1, len(x)-1):
                aa[i] = 1
                bb[i] = hx**2 - 2*(hx**2)/tau - 2
                cc[i] = 1
                dd[i] = -2*(hx**2)*L[i,j]/tau - 1*(hx**2)*(L[i,j+1] - 2*L[i,j
] + L[i,j-1])/(hy**2) - (hx**2)*f(x[i],y[j],t2)
            xx = tma(aa, bb, cc, dd)
            for i in range(len(x)):
                U1[i,j] = xx[i]
                U1[i,0] = (phi3(x[i],t2))
                U1[i,-1] = (phi4(x[i],t2))
        for j in range(len(y)):
            U1[0,j] = (phi1(y[j],t2))
            U1[-1,j] = (phi2(y[j],t2))
        #второй дробный шаг
        U2 = np.zeros((len(x),len(y)))

        for i in range(len(x)-1):
            aa = np.zeros(len(x))
            bb = np.zeros(len(x))
            cc = np.zeros(len(x))
            dd = np.zeros(len(x))
            bb[0] = hy
            bb[-1] = hy
            cc[0] = 0
            aa[-1] = 0
            dd[0] = phi3(x[i],t[k])*hy
            dd[-1] = phi4(x[i],t[k])*hy
            for j in range(1, len(y)-1):
                aa[j] = 1
                bb[j] = hy**2 - 2*(hy**2)/tau - 2
                cc[j] = 1
                dd[j] = -2*(hy**2)*U1[i,j]/tau - 1*(hy**2)*(U1[i+1,j] - 2*U1[
i,j] + U1[i-1,j])/(hx**2) - (hy**2)*f(x[i],y[j],t[k])
            xx = tma(aa, bb, cc, dd)
            for j in range(len(y)):
                U2[i,j] = xx[j]
                U2[0,j] = (phi1(y[j],t[k]))
```

```
                U2[-1,j] = (phi2(y[j],t[k]))
        for i in range(len(x)):
            U2[i,0] = (phi3(x[i],t[k]))
            U2[i,-1] = (phi4(x[i],t[k]))
        #print(U2)
        for i in range(len(x)):
            for j in range(len(y)):
                UU[i,j,k] = U2[i,j]

    return UU

pn = MPN(0, 1, N, 0, 1, N, Tk, K)
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection ='3d')
ax.plot_surface(x_plt, y_plt,np.array(pn[:10, :10, -1]))
plt.show()
```

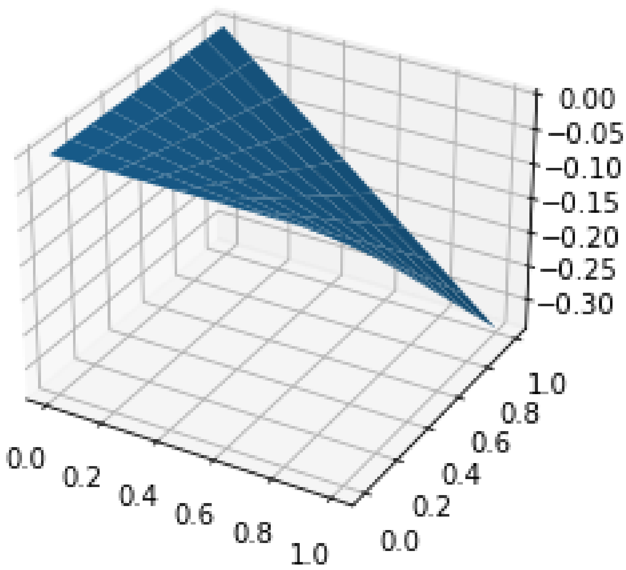


метод дробных шагов

```
def MDSH(lbx, ubx, nx, lby, uby, ny, T, K):
    hx = (ubx - lbx)/nx
    x = np.arange(lbx, ubx + hx, hx)
    hy = (uby - lby)/ny
    y = np.arange(lby, uby + hy, hy)
    tau = T/K
    t = np.arange(0, T + tau, tau)

    UU = np.zeros((len(x),len(y),len(t)))
    for i in range(len(x)):
        for j in range(len(y)):
            UU[i,j,0] = psi(x[i], y[j])

    for k in range(1,len(t)):
        U1 = np.zeros((len(x),len(y)))
        t2 = t[k] - tau/2
```

```python
#первый дробный шаг
L = np.zeros((len(x),len(y)))
L = UU[:,:,k-1]
for j in range(len(y)-1):
    aa = np.zeros(len(x))
    bb = np.zeros(len(x))
    cc = np.zeros(len(x))
    dd = np.zeros(len(x))
    bb[0] = hx
    bb[-1] = hx
    cc[0] = 0
    aa[-1] = 0
    dd[0] = phi1(y[j],t2)*hx
    dd[-1] = phi2(y[j],t2)*hx
    for i in range(1, len(x)-1):
        aa[i] = 1
        bb[i] =  - (hx**2)/tau - 2
        cc[i] = 1
        dd[i] = -(hx**2)*L[i,j]/tau - (hx**2)*f(x[i],y[j],t2)/2
    xx = tma(aa, bb, cc, dd)
    for i in range(len(x)):
        U1[i,j] = xx[i]
        U1[i,0] = (phi3(x[i],t2))
        U1[i,-1] = (phi4(x[i],t2))
for j in range(len(y)):
    U1[0,j] = (phi1(y[j],t2))
    U1[-1,j] = (phi2(y[j],t2))
#второй дробный шаг
U2 = np.zeros((len(x),len(y)))

for i in range(len(x)-1):
    aa = np.zeros(len(x))
    bb = np.zeros(len(x))
    cc = np.zeros(len(x))
    dd = np.zeros(len(x))
    bb[0] = hy
    bb[-1] = hy
    cc[0] = 0
    aa[-1] = 0
    dd[0] = phi3(x[i],t[k])*hy
    dd[-1] = phi4(x[i],t[k])*hy
    for j in range(1, len(y)-1):
        aa[j] = 1
        bb[j] = - (hy**2)/tau - 2
        cc[j] = 1
        dd[j] = -(hy**2)*U1[i,j]/tau - (hy**2)*f(x[i],y[j],t[k])/2
    xx = tma(aa, bb, cc, dd)
    for j in range(len(y)):
        U2[i,j] = xx[j]
        U2[0,j] = (phi1(y[j],t[k]))
        U2[-1,j] = (phi2(y[j],t[k]))
for i in range(len(x)):
    U2[i,0] = (phi3(x[i],t[k]))
    U2[i,-1] = (phi4(x[i],t[k]))
#print(U2)
for i in range(len(x)):
```

```
            for j in range(len(y)):
                UU[i,j,k] = U2[i,j]


    return UU

fs = MDSH(0, 1, N, 0, 1, N, Tk, K)
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection ='3d')
ax.plot_surface(x_plt, y_plt,np.array(fs[:10, :10, -1]))
plt.show()
```



погрешности для каждого метода в различные моменты времени

```
def pogr(res, u, t):
    return np.sqrt(sum([sum([(u[i][j][t]-res[i][j][t])**2 for j in range(len(
x))]) for i in range(len(y))]))
```

```
pogr(pn, analitic, 4)
```

```
0.08848371356825555
```

```
pogr(fs, analitic, 4)
```

```
0.00042177518087825605
```

```
pogr(pn, analitic, 58)
```

```
0.04905504747953388
```

```
pogr(fs, analitic, 58)
```

```
0.00023965383207673926
```

```
pogr(pn, analitic, 94)
```

```
0.02901032197841562
```

```
pogr(fs, analitic, 94)
```

```
0.00013742875416250075
```

Выводы

В ходе выполнения этой работы была решена двумерная начально-краевая задача для дифференциального уравнения параболического типа. Для этого использовались две схемы: схема переменных направлений и схема дробных шагов. В различные моменты времени была вычислена погрешность полученных решений путем сравнения с приведенным в задании аналитическим решением, по результатам вычисления погрешностей можно сделать вывод, что использование метода дробных шагов приводит к более точному решению.