Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет: «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №2

по курсу «Численные методы»
Тема: «Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений»

Студент: Мариничев И. А.
Группа: М8О-308Б-19
Преподаватель: Пивоваров Д. Е.
Оценка:

Москва
2022

1. Постановка задачи.

Вариант №12.

2.1. Реализовать методы простой итерации и Ньютона решения нелинейных уравнений в виде программ, задавая в качестве входных данных точность вычислений. С использованием разработанного программного обеспечения найти положительный корень нелинейного уравнения (начальное приближение определить графически). Проанализировать зависимость погрешности вычислений от количества итераций.

$$3^x - 5x^2 + 1 = 0$$

2.2. Реализовать методы простой итерации и Ньютона решения систем нелинейных уравнений в виде программного кода, задавая в качестве входных данных точность вычислений. С использованием разработанного программного обеспечения решить систему нелинейных уравнений (при наличии нескольких решений найти то из них, в котором значения неизвестных являются положительными); начальное приближение определить графически. Проанализировать зависимость погрешности вычислений от количества итераций.

Значение параметра a: 3

$$\begin{cases} x_1 - \cos x_2 = a, \\ x_2 - \sin x_1 = a. \end{cases}$$

2. Описание методов.

2.1. Метод простых итераций.

Решаемая задача: Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

Тип метода: Итерационный метод.

Основная идея: Выразить неизвестную переменную из исходного уравнения так, чтобы q было строго меньше 1.

Сложность: O (n) на каждой итерации.

Преимущества: Простота реализации, отсутствие необходимости знаний о первой производной функции.

2.2. Метод Ньютона.

Решаемая задача: Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

Тип метода: Итерационный метод.

Основная идея: Движемся по касательной на каждой итерации.

Сложность: O (n).

Преимущества: Находит решение задачи сильно быстрее, чем МПИ, если верно выделена область поиска.

3. Демонстрация работы программы.

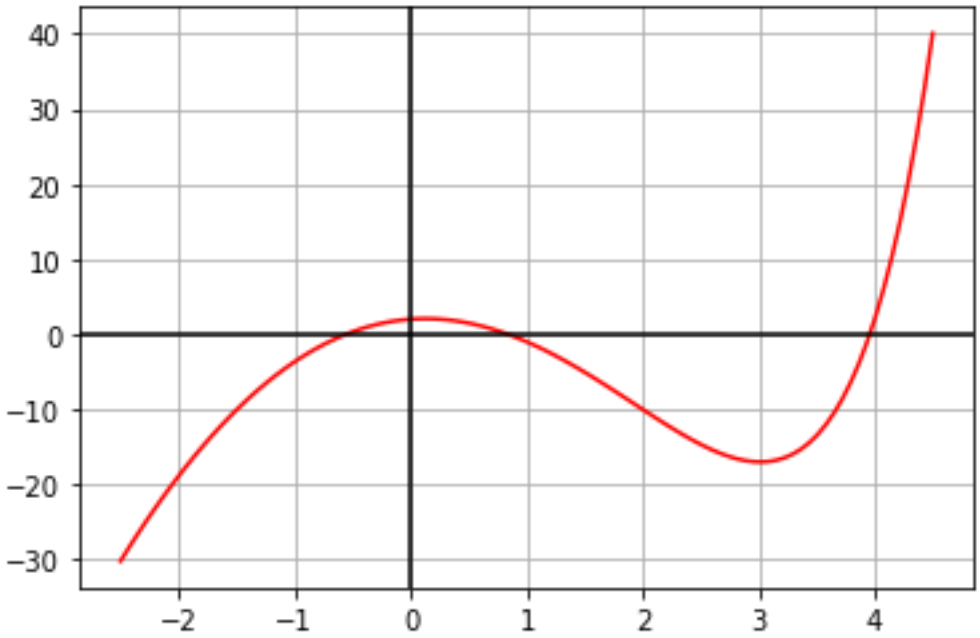
3.1. Анализ функции

Посмотрим на график функции $f(x)$

```
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.misc import derivative
import numpy as np

x = np.linspace(-2.5, 4.5, 100)
f = pow(3, x) - 5 * x**2 + 1 # вариант 12

plt.plot(x, f,color="red")
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.show()
```

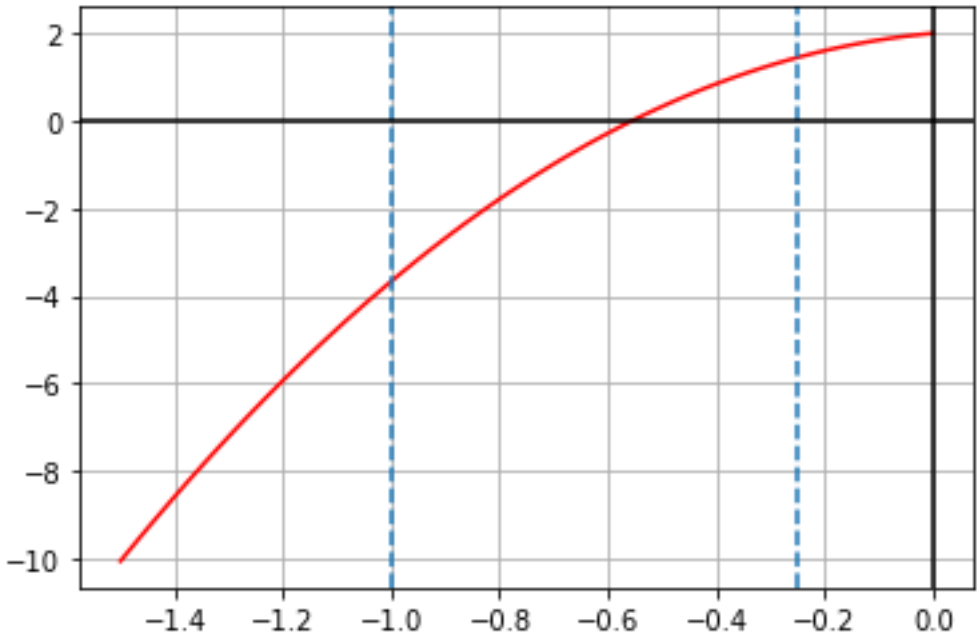


Посмотрим на первое решение. Возьмем отрезок `[-1, -0.25]` для его поиска

```
a1, b1 = -1, -0.25

x = np.linspace(-1.5, 0, 100)
f = pow(3, x) - 5 * x**2 + 1

plt.plot(x, f,color="red")
plt.axvline(a1, linestyle='--')
plt.axvline(b1, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.show()
```

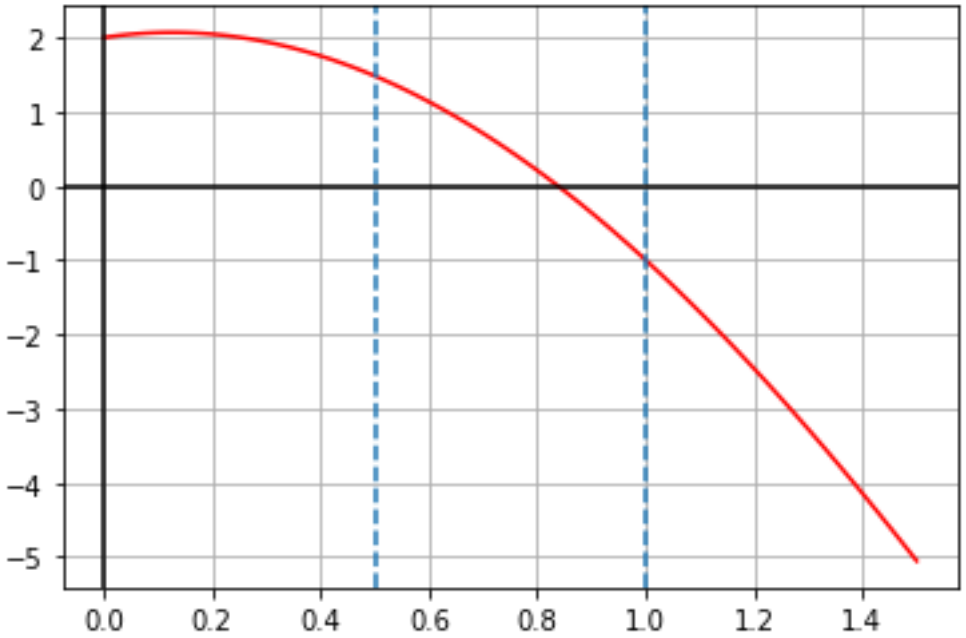


Посмотрим на второе решение. Возьмем отрезок `[0.5, 1]` для его поиска

```
a2, b2 = 0.5, 1

x = np.linspace(0, 1.5, 100)
f = pow(3, x) - 5 * x**2 + 1

plt.plot(x, f,color="red")
plt.axvline(a2, linestyle='--')
plt.axvline(b2, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.show()
```

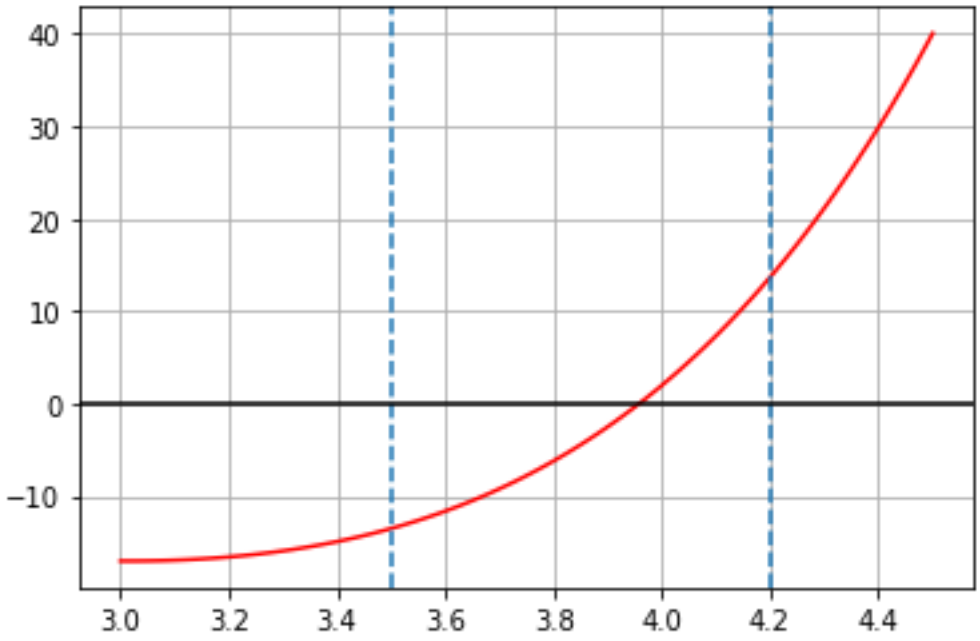


Посмотрим на третье решение. Возьмем отрезок `[3.5, 4.2]` для его поиска

```
a3, b3 = 3.5, 4.2

x = np.linspace(3, 4.5, 100)
f = pow(3, x) - 5 * x**2 + 1

plt.plot(x, f,color="red")
plt.axvline(a3, linestyle='--')
plt.axvline(b3, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.show()
```



Первая производная: $f'(x)$

Для нас важно, чтобы на выбранных выше отрезках знак производной не менялся. Убедимся в этом

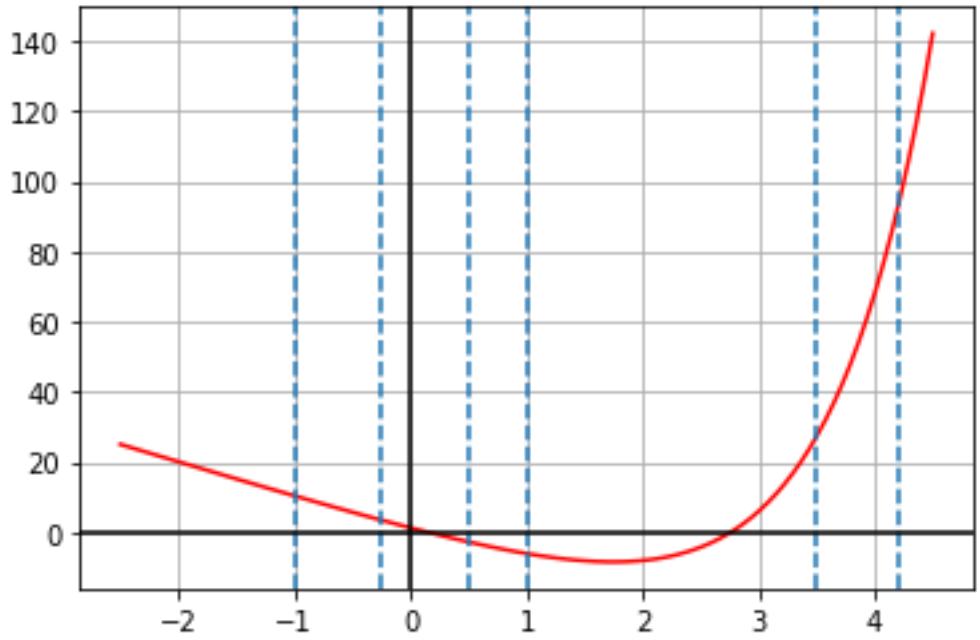
```
def function(x):
    return pow(3, x) - 5 * x**2 + 1

def function_diff(x):
    return derivative(function, x)

x = np.linspace(-2.5, 4.5, 100)

plt.plot(x, function_diff(x), color="red")
plt.axvline(a1, linestyle='--')
plt.axvline(b1, linestyle='--')
plt.axvline(a2, linestyle='--')
plt.axvline(b2, linestyle='--')
plt.axvline(a3, linestyle='--')
plt.axvline(b3, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
```

```
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.show()
```



Производная функции $\phi(x)$

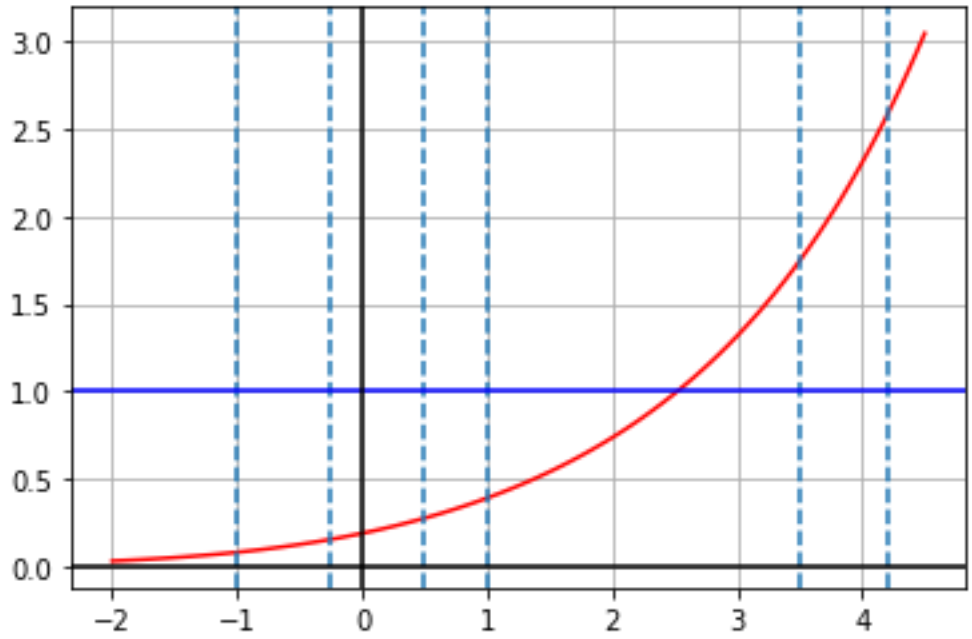
Для нас важно, чтобы q = $\max_{x \in [a,b]} |\phi'(x)| < 1$

```
def phi(x):
    return np.sqrt((pow(3, x) + 1) / 5)

def phi_diff(x):
    return derivative(phi, x)

x = np.linspace(-2, 4.5, 100)

plt.plot(x, phi_diff(x), color="red")
plt.axvline(a1, linestyle='--')
plt.axvline(b1, linestyle='--')
plt.axvline(a2, linestyle='--')
plt.axvline(b2, linestyle='--')
plt.axvline(a3, linestyle='--')
plt.axvline(b3, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axhline(y=1, color='b')
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.show()
```



Как можно заметить нам подхдят только два первых отрезка. Тогда попробуем выразить $\phi(x)$ иначе

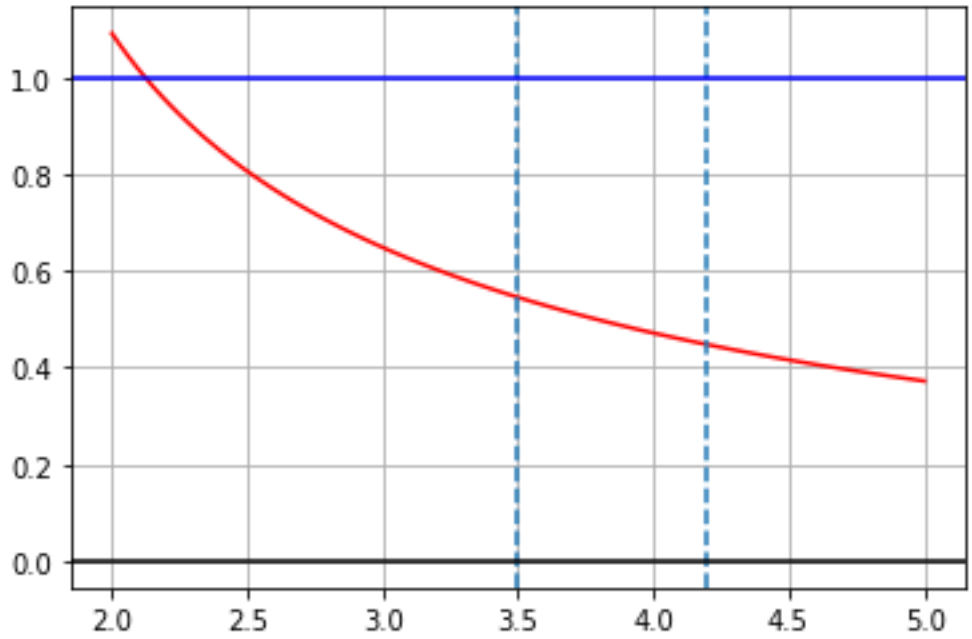
```
def log(a, b):
    return np.log(b) / np.log(a)

def phi(x):
    return log(3, 5 * x**2 - 1)

def phi_diff(x):
    return derivative(phi, x)

x = np.linspace(2, 5, 100)

plt.plot(x, phi_diff(x), color="red")
plt.axvline(a3, linestyle='--')
plt.axvline(b3, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axhline(y=1, color='b')
plt.show()
```



Теперь условие выполняется для третьего отрезка. Соответсвенно, для первых двух отрезков будем использовать первый вариант выражения $\phi(x)$, а для третьего второй вариант $\phi(x)$

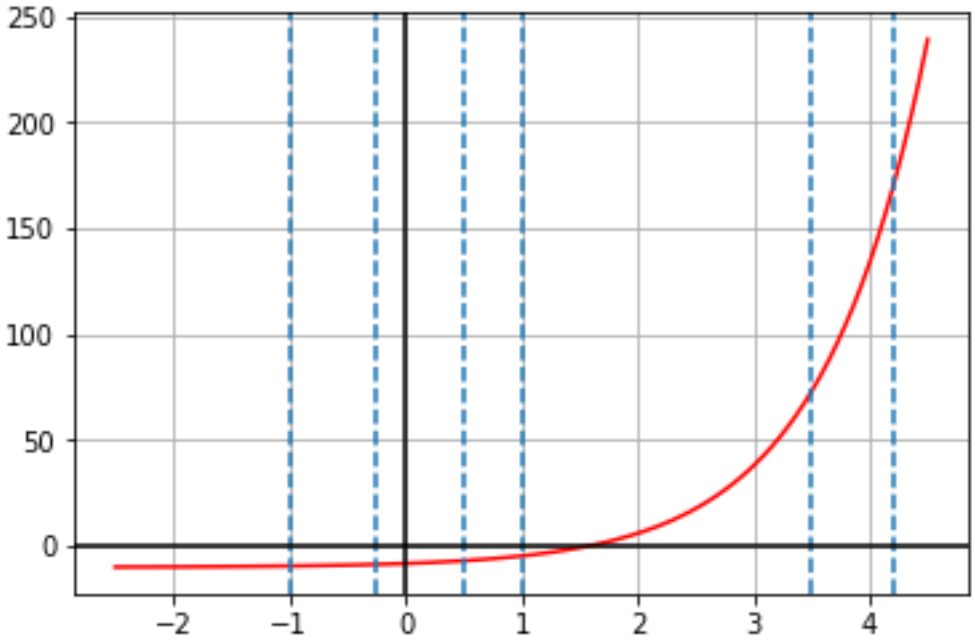
Вторая производная: $f''(x)$

Для нас важно, чтобы на выбранных выше отрезках знак второй производной не менялся. Убедимся в этом

```
def function_second_diff(x):
    return derivative(function_diff, x)

x = np.linspace(-2.5, 4.5, 100)

plt.plot(x, function_second_diff(x), color="red")
plt.axvline(a1, linestyle='--')
plt.axvline(b1, linestyle='--')
plt.axvline(a2, linestyle='--')
plt.axvline(b2, linestyle='--')
plt.axvline(a3, linestyle='--')
plt.axvline(b3, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.show()
```



Численное решение

Теперь запустите в терминале программу на **C++** при помощи команд

```
make
make run
```

В трех появившихся файлах `answer_NN.txt` можно увидеть полученные численные решения. Проверим их

```
x_1 = -0.555548
x_2 =  0.837941
x_3 =  3.95759

print("Значение функции f(x) в найденных точках:")
print(f"1) f({x_1}) = {function(x_1):0.2f}")
print(f"2) f({x_2}) = {function(x_2):0.2f}")
print(f"3) f({x_3}) = {function(x_3):0.2f}")
```

```
Значение функции f(x) в найденных точках:
1) f(-0.555548) = 0.00
2) f(0.837941) = 0.00
3) f(3.95759) = 0.00
```

Наконец, построим полученные точки на графике

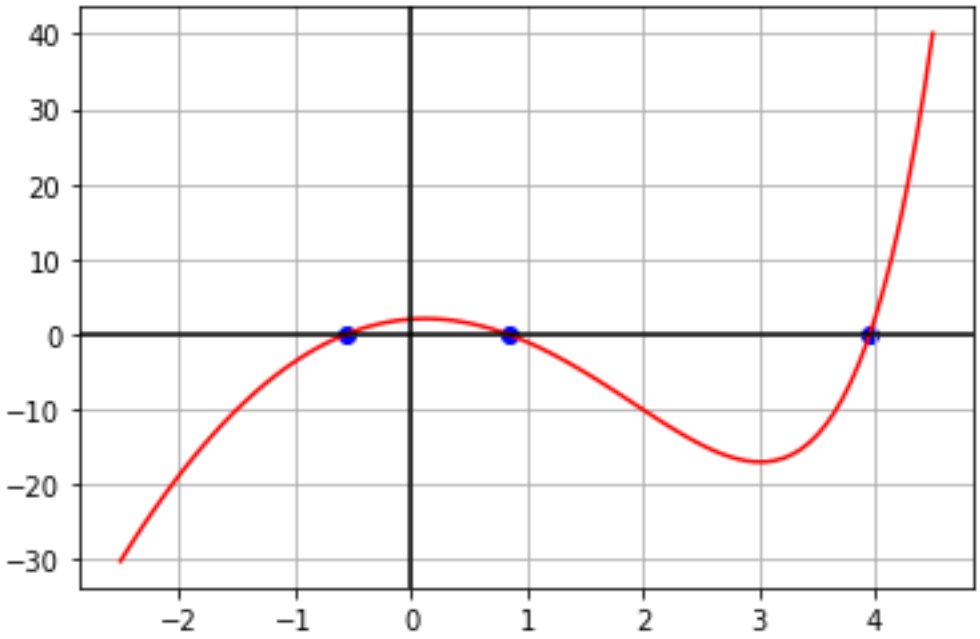
```
x_0 =[x_1, x_2, x_3]

y_0 =[function(x_1), function(x_2), function(x_3)]

x = np.linspace(-2.5, 4.5, 100)
f = pow(3, x) - 5 * x**2 + 1

plt.plot(x, f,color="red")
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y=0, color='k')
```

```
plt.axvline(x=0, color='k')
plt.scatter(x_0, y_0, c ="blue")
plt.show()
```



3.2. Анализ системы

Посмотрим на график системы:

$$\begin{cases} x_1 - \cos(x_2) = 3 \\ x_2 - \sin(x_1) = 3 \end{cases}$$

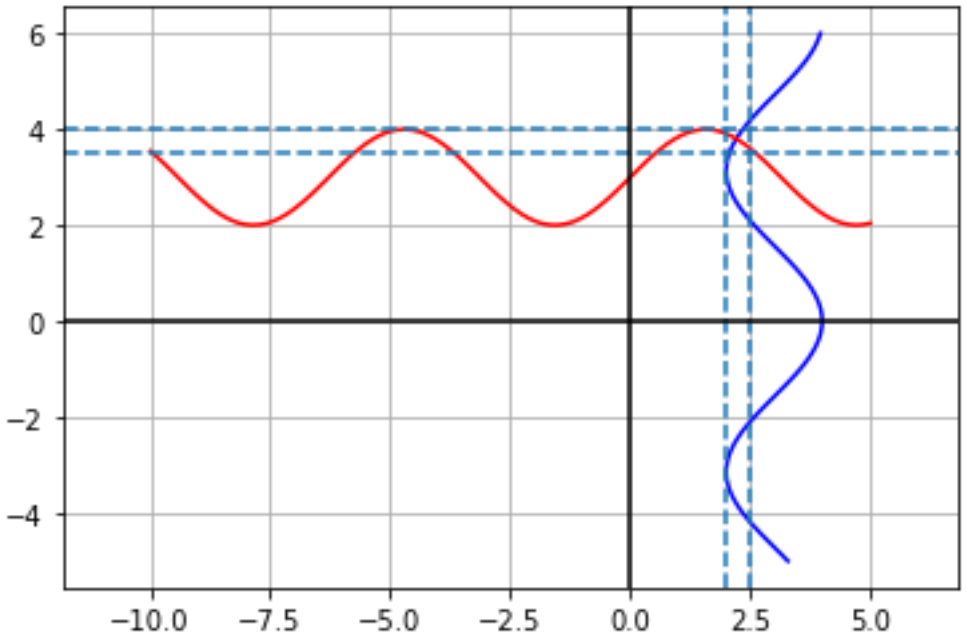
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

X1 = np.linspace(-10,5,100)
X2 = np.linspace(-5, 6, 100)

# вариант 12
x1 = np.cos(X2) + 3
x2 = np.sin(X1) + 3

# область G
a, b = 2, 3.5
c, d = 2.5, 4

plt.plot(x1, X2, color="blue")
plt.plot(X1, x2, color="red")
plt.axvline(a, linestyle='--')
plt.axhline(b, linestyle='--')
plt.axvline(c, linestyle='--')
plt.axhline(d, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.axhline(y = 0, color='k')
plt.axvline(x = 0, color='k')
plt.axis('equal')
plt.show()
```

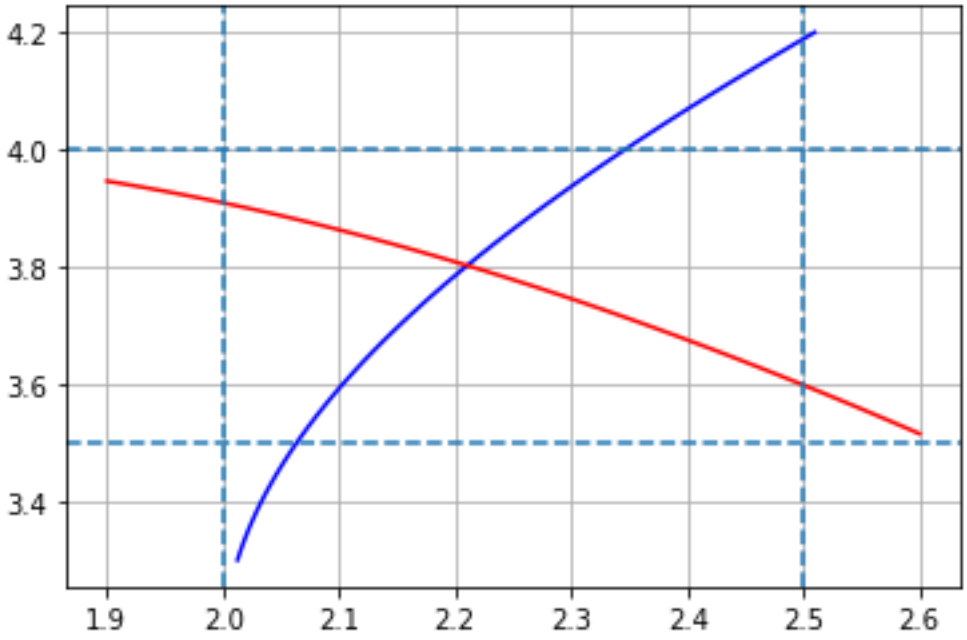


Посмотрим на решение. Возьмем область $G: x_1 \in [2; 2.5], x_2 \in [3.5; 4]$ для его поиска

```
X1 = np.linspace(1.9, 2.6,100)
X2 = np.linspace(3.3, 4.2, 100)

x1 = np.cos(X2) + 3
x2 = np.sin(X1) + 3

plt.plot(x1, X2, color="blue")
plt.plot(X1, x2, color="red")
plt.axvline(a, linestyle='--')
plt.axhline(b, linestyle='--')
plt.axvline(c, linestyle='--')
plt.axhline(d, linestyle='--')
plt.grid(True, which='both')
plt.show()
```



Численное решение

Теперь запустите в терминале программу на **C++** при помощи команд

```
make
make run
```

В трех появившихся файлах `answer_NN.txt` можно увидеть полученное численное решение с разной точностью. Проверим его

```
def f1(x1, x2):
    return x1 - np.cos(x2) - 3

def f2(x1, x2):
    return x2 - np.sin(x1) - 3

x1_0 = 2.21045
x2_0 = 3.80231

print("Значение функций f1(x1, x2) и f2(x1, x2) в найденной точке:")
print(f"f1{x1_0, x2_0} = {f1(x1_0, x2_0):0.2f}")
print(f"f2{x1_0, x2_0} = {f2(x1_0, x2_0):0.2f}")
```

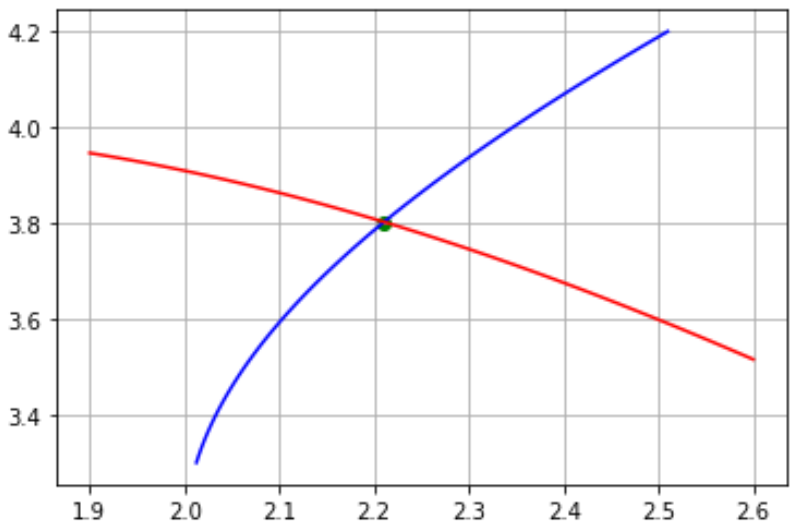
```
Значение функций f1(x1, x2) и f2(x1, x2) в найденной точке:
f1(2.21045, 3.80231) = 0.00
f2(2.21045, 3.80231) = 0.00
```

Наконец, построим полученную точку на графике

```
X1 = np.linspace(1.9, 2.6,100)
X2 = np.linspace(3.3, 4.2, 100)

x1 = np.cos(X2) + 3
x2 = np.sin(X1) + 3

plt.plot(x1, X2, color="blue")
plt.plot(X1, x2, color="red")
plt.grid(True, which='both')
plt.scatter(x1_0, x2_0, c ="green")
plt.show()
```



4. Выводы.

В ходе данной лабораторной работы я изучил базовые численных методы, решающие задачи нелинейной алгебры. При помощи метода простых итераций и метода Ньютона удалось найти решение нелинейного уравнения и системы двух нелинейных уравнений. Основная особенность этих методов состоит в том, что перед тем, как начинать искать решение необходимо провести анализ тех функций, с которыми мы работаем и выделить корректные области для поиска нужного решения.

Стоит также отметить, что те варианты реализаций, которые были написаны мной на C++ носят скорее учебный характер, так как передо мной стояла задача понять алгоритмы при реализации, а не написать максимально оптимальные решатели тех или иных задач.