Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет: «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовой проект

по курсу «Численные методы»
Тема: «Решение СЛАУ методом Монте-Карло»

Студент: Мариничев И. А.
Группа: М8О-308Б-19
Преподаватель: Пивоваров Д. Е.
Оценка:

Москва
2022

1. Описание метода.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

Постановка задачи решения СЛАУ

$$A \cdot \bar{x} = \bar{f}, \quad \text{где} \quad A \in R^{n \times n}, \bar{f} \in R^n$$

A – разреженная матрица, n > 100000.

Численные методы решения СЛАУ:

1. Прямые методы - позволяют найти решение за определенное количество шагов:

• Метод Ньютона, LU-разложение, …

2. Итерационные – устанавливают процедуру уточнения определенного начального приближения к решению

• Метод простой итерации, Гаусса-Зейделя, …

Все методы используют детерминированный алгоритм. Большинство плохо поддаются распараллеливанию. Для итерационных методов существует проблема сходимости.

Метод Монте-Карло – стохастический численный метод

Особенности:

• Использует случайные числа

• Позволяет найти решение любого количества корней, не решая СЛАУ целиком

• Обладает естественным параллелизмом

• Время нахождения одного корня практически не зависит от размерности СЛАУ и зависит только от свойств СЛАУ

Ограничения: • Матрица A коэффициентов СЛАУ должна обладать диагональным преобладанием:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, i = 1, \ldots, n$$

• Нужен качественный генератор случайных чисел

Схема метода Монте-Карло

Для решения СЛАУ методом Монте-Карло необходимо привести ее к следующему виду:

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{f}$$

Метод Монте-Карло заключается в моделировании цепи Маркова, что можно представить как случайное блуждание по матрице коэффициентов. Матрица вероятностей переходов строится по матрице коэффициентов:

$$\begin{cases} p_{ij} = 0, \text{если } a_{ij} = 0, \\ p_{ij} > 0, \text{если } a_{ij} > 0, \\ \sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1. \end{cases}$$

В итоге получим следующую последовательность действий:

1. Получить матрицу коэффициентов. Рассчитать матрицу переходов P. Рассчитать вектор весов W
2. Начало цикла расчета корней СЛАУ
3. Выбор i-го корня для расчета
4. Начало реализации N итераций поиска оценок корня
5. Построить цепь Маркова для оценки E іго корня
6. X[i] += E
7. Конец реализации N итераций поиска оценок корня
8. X[i] /= N
9. Конец цикла расчета корней СЛАУ

2. Реализация на C++.

```
#ifndef MONTE_CARLO_METHOD_HPP
#define MONTE_CARLO_METHOD_HPP

#include <math.h>
#include <algorithm>

#include "matrix.hpp"

template <typename Type>
const Matrix<Type> get_non_absorbing_transition_probability(const Matrix<Type> &A, Matrix<Type> &P)
{
	size_t row = A.rows();
	size_t col = A.cols();
	Matrix<Type> T(row, col);
	Type sum = 0.0;
	for (size_t i = 0; i < row; i++)
	{
		sum = 0.0;
		for (size_t j = 0; j < col; j++)
			sum += abs(A[i][j]);
		for (size_t j = 0; j < col; j++)
		{
			if (sum > 1e-6)
				P[i][j] = abs(A[i][j]) / sum;
			else
				P[i][j] = 0.0;
		}
	}
	for (size_t i = 0; i < row; i++)
	{
		T[i][0] = P[i][0];
		for (size_t j = 1; j < col; j++)
			T[i][j] = T[i][j - 1] + P[i][j];
		T[i][col - 1] = 1.0;
	}
	return T;
}

template <typename Type>
const Matrix<Type> get_absorbing_transition_probability(const Matrix<Type> &A, double scale, Matrix<Type> &P)
{
	size_t row = A.rows();
	size_t col = A.cols();
	Matrix<Type> T(row + 1, col + 1);
	Type sum = 0.0;
	for (size_t i = 0; i < row; i++)
	{
		sum = 0.0;
		double sum1 = 0.0;
```

```
                for (size_t j = 0; j < col; j++)
                        sum += abs(A[i][j]);

                sum = double((double(col) + scale)) / col * sum;
                for (size_t j = 0; j < col; j++)
                {
                        if (sum > 1e-6)
                                P[i][j] = abs(A[i][j]) / sum;
                        else
                                P[i][j] = 0.0;
                        sum1 += P[i][j];
                }
                P[i][col] = 1 - sum1;
        }
        for (size_t i = 0; i < row; i++)
        {
                T[i][0] = P[i][0];
                for (size_t j = 1; j < col; j++)
                        T[i][j] = T[i][j - 1] + P[i][j];

                T[i][col] = 1.0;
        }
        return T;
}

template <typename Type>
class MonteCarloMethod
{
private:
        size_t row;
        size_t col;
        double err, sum1, sum2, x, err_w;
        size_t next, step, times;
        size_t hops;

public:
        void init()
        {
                err = 10000.0;
                sum1 = 0.0;
                sum2 = 0.0;
                x = 0.0;
                next = 0;
                step = 20000;
                times = 1;
                err_w = 1e-6;
                hops = 0;
        }

        std::vector<Type> absorbing(const Matrix<Type> &A, const std::vector<Type> &b, double
_err = 0.1)
        {
                row = A.rows();
```

```
                col = A.cols();
                Matrix<Type> P(row + 1, col + 1);
                Matrix<Type> t = get_absorbing_transition_probability(A, 0.2, P);
                size_t size = b.size();
                std::vector<Type> res(size);
                srand((unsigned)time(NULL));
                size_t total = 0, _total = 0, _hops = 0;
                for (size_t i = 0; i < size; i++)
                {
                        init();
                        total = 0;
                        std::cout << "\nCalculating x[" << i << "]... " << std::endl;
                        while (err > _err)
                        {
                                size_t cc = step;
                                while (step--)
                                {
                                        double v = 1.0;
                                        size_t index = i, next = 0;
                                        while (next != col)
                                        {
                                                double r = double(rand()) / RAND_MAX;
                                                next       =       upper_bound(t[index].begin(),
t[index].end(), r) - t[index].begin();
                                                if (next == col)
                                                        continue;
                                                if (abs(P[index][next]) > 1e-6)
                                                        v = v * A[index][next] / P[index][next];
                                                else
                                                        v = 0;
                                                hops++;
                                                _hops++;
                                                index = next;
                                        }
                                        v = v * b[index] / P[index][col];
                                        sum1 += v;
                                        sum2 += v * v;
                                }
                                step = 1;
                                total = total + cc;
                                if (total % 200000 == 0)
                                        std::cout  <<  total  <<  "  random  walks  generated"  <<
std::endl;
                                x = sum1 / total;
                                double __err = (sum2 - sum1 / total) / total / total;
                                times++;
                                err = sqrt(__err) / x;
                        }
                        std::cout << "\nTotal random walks: " << total << std::endl;
                        std::cout << "Average hops: " << hops / total << std::endl;
                        res[i] = x;
                        _total += total;
                }
```

```
		std::cout << "\nAvegage total random walks: " << _total << std::endl;
		std::cout << "Average hops: " << _hops / _total << std::endl;
		return res;
	}

	std::vector<Type> non_absorbing(const Matrix<Type> &A, const std::vector<Type> &b,
double _err = 0.1)
	{
		row = A.rows();
		col = A.cols();
		Matrix<Type> P(row, col);
		Matrix<Type> t = get_non_absorbing_transition_probability(A, P);
		size_t size = b.size();
		std::vector<Type> res(size);
		srand((unsigned)time(NULL));
		unsigned long long total = 0, _total = 0, _hops = 0;
		for (size_t i = 0; i < size; i++)
		{
			init();
			total = 0;
			std::cout << "\nCalculating x[" << i << "]... " << std::endl;
			while (err > _err)
			{
				unsigned long long cc = step;
				while (step--)
				{
					double v = 0.0, w = 1.0;
					unsigned long long index = i, next = 0;
					while (abs(w) > err_w)
					{
						double r = double(rand()) / RAND_MAX;
						next	=	upper_bound(t[index].begin(),
t[index].end(), r) - t[index].begin();
						if (P[index][next] > 1e-6)
							w = w * A[index][next] / P[index][next];
						else
							w = 0;
						hops++;
						_hops++;
						v = v + w * b[next];
						index = next;
					}
					v = v + b[i];
					sum1 += v;
					sum2 += v * v;
				}
				step = 1;
				total = total + cc;
				if (total % 200000 == 0)
					std::cout	<<	total	<<	"	random	walks	generated"	<<
std::endl;
				x = sum1 / total;
				double __err = (sum2 - sum1 / total) / total / total;
```

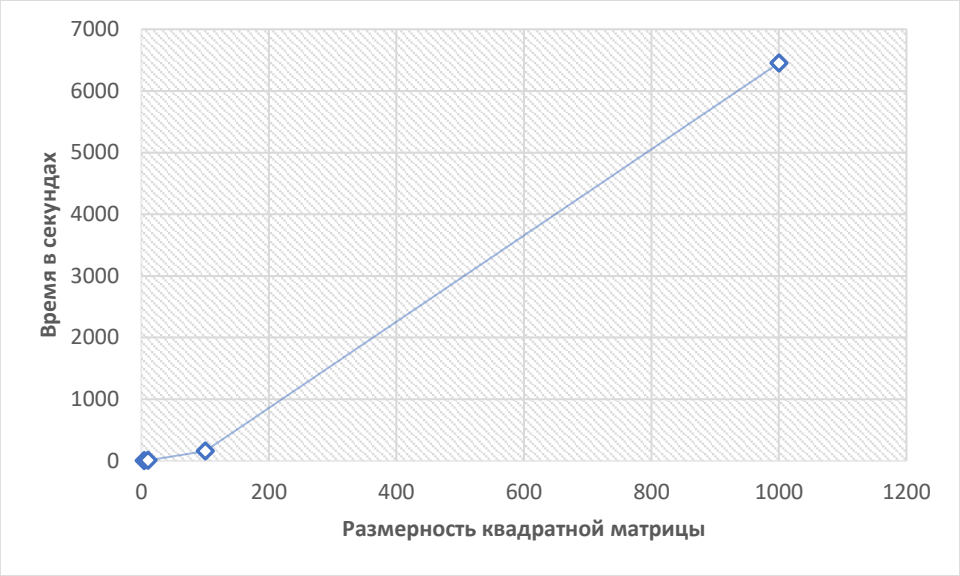
```
                        times++;
                        err = sqrt(__err) / x;
                        if (total >= 5000000)
                                break;
                }
                std::cout << std::endl;
                std::cout << "Total random walks: " << total << std::endl;
                std::cout << "Average hops: " << hops / total << std::endl;
                _total += total;
                res[i] = x;
        }
        std::cout << "Avegage total random walks: " << _total << std::endl;
        unsigned long long avg_total_hops = _hops / _total;
        std::cout << "Average hops: " << avg_total_hops << std::endl;
        return res;
    }
};

#endif /* MONTE_CARLO_METHOD_HPP */
```

3. Демонстрация работы программы.

```
ivan@asus-laptop:~/nm_cp$ ./solution ./tests/4x4.txt -p 0.005 -a
~Monte Carlo method with absorbing matrix~

Calculating x[0]...

Total random walks: 20000
Average hops: 19

Calculating x[1]...

Total random walks: 20000
Average hops: 19

Calculating x[2]...

Total random walks: 20000
Average hops: 20

Calculating x[3]...
200000 random walks generated
400000 random walks generated
600000 random walks generated
800000 random walks generated
1000000 random walks generated
1200000 random walks generated

Total random walks: 1393903
Average hops: 20

Avegage total random walks: 1453903
Average hops: 20

Total time: 744834 microsec

Success! Answer was written to the file 'answers/answer_4x4.txt'
ivan@asus-laptop:~/nm_cp$ cat ./tests/4x4.txt
4 4

14 -4 -2  3
-3 23 -6 -9
-7 -8 21 -5
-2 -2  8 18

38 -195 -27 142
ivan@asus-laptop:~/nm_cp$ cat ./answers/answer_4x4.txt
System solution:
x[0] = -1.448031
x[1] = -6.491393
x[2] = -1.941859
x[3] = 8.052057
```

4. Тест производительности.

Размерность квадратной матрицы	Время в секундах
4	1.678067
10	10.712754
100	161.723802
1000	6452.137604



5. Выводы.

В ходе данной лабораторной работы я изучил метод Монте-Карло в применении к задаче решения систем линейных уравнений. Одним из главных преимуществ данного метода является высокий потенциал распараллеливания, так как каждый корень системы находится независимо от остальных. А главной особенностью является то, что он дает гарантию решения лишь для матриц с диагональным преобладанием.

Стоит отметить, что тот вариант реализации, который был написан мной на C++ носит скорее учебный характер, так как передо мной стояла задача понять алгоритм при реализации, а не написать максимально оптимальный решатель для данной задачи.

Список источников

1. Алгоритм Монте-Карло для решения систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя [Электронный ресурс]: https://cyberleninka.ru/article/n/algoritm-monte-karlo-dlya-resheniya-sistem-lineynyh-algebraicheskih-uravneniy-metodom-zeydelya/viewer
2. Revisit of Monte Carlo Methods on Solving LargeScale Linear Sytems [Электронный ресурс]: https://math.nist.gov/mcsd/Seminars/2014/2014-11-04-Li-presentation.pdf
3. Метод Монте-Карло и его точность [Электронный ресурс]: https://habr.com/ru/post/274975/