ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6
ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ и РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, главы 12 и 13].

Варианты заданий к задачам 6.1–6.2 даны в **ПРИЛОЖЕНИИ 6.А.**

ТРЕБОВАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 6

Задачи выполняются *с помощью Python*.

Задача 6.1. Исследовать поведение погрешностей при численном дифференцировании функции.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Взять функцию из задачи 5.2. Выбрать фиксированную точку c на отрезке [a,b] и вычислить значения производных, указанных в индивидуальном варианте в точке c.

2. Задать массив шагов $h_k = 10^{-k}$, k=1,…15, и вычислить массивы приближенных значений производных в точке c по формуле (1) и по формуле из индивидуального варианта (для примера взята формула (4)):

$$d1_k = \frac{f(c+h_k) - f(c)}{h_k} \quad (1) \quad \text{и} \quad d4_k = \frac{f(c-2h_k) - 8f(c-h_k) + 8f(c+h_k) - f(c+2h_k)}{12h_k} \quad (4),$$

k=1,…15. Вычислить также массивы значений погрешностей: $\Delta 1_k = \left| d1_k - f'(c) \right|$ и $\Delta 4_k = \left| d4_k - f'(c) \right|$

3.По полученным таблицам результатов найти оптимальное значение шага дифференцирования для каждого метода. Результаты вычислений внести в первую часть таблицы (см. **ПРИЛОЖЕНИЕ 6.В).**

4. Проделать те же вычисления для производной более высокого порядка, указанной в индивидуальном варианте. Найти оптимальное значение шага дифференцирования, результаты внести во вторую часть таблицы (см. **ПРИЛОЖЕНИЕ 6.В).**

5. По полученным данным построить графики погрешностей

6. Вывести оценку погрешности указанной в индивидуальном варианте формулы.

7. Оформить отчет по работе.

Задача 6.2. Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Найти аналитическое решение задачи 24 из РЗ.

2.Составить программу вычисления решения методом Эйлера с заданной точностью, используя правило Рунге. Найти решение задачи с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, число точек N и шаг, при котором точность достигается. Построить график решения.

3. Составить программу вычисления решения с заданной точностью методом индивидуального варианта. Найти решение задачи с заданной точностью, число точек N и шаг, при котором точность достигается. Построить график решения задачи.

4. Сравнить полученные результаты.

5. Оформить отчет по задаче

ПРИЛОЖЕНИЕ 6.А

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 6

ВНИМАНИЕ! Номер варианта N для лабораторных работ вычисляется по следующей формуле:

1) $N = I$ для группы А-5-19;
2) $N = 25 + I$ для группы А-13а-19
3) $N = 40 + I$ для группы А-13б-19
4) $N = 55 - I$ для группы А-14-19
5) $N = 41 - I$ для группы А-16-19

Таблица вариантов к задаче 6.1.

Варианты	Методы решения
$N=$ 1,8,15,22, 29,36,43,50,57	$f'(x)$: центральная разностная производная (3) $f''(x)$: формула 4-го порядка точности (11) Для четных вариантов вывод формулы (3),для нечетных вариантов вывод формулы (3а)
$N=$ 2,9,16,23,30,37,44,51,58	$f'(x)$: односторонняя разностная производная второго порядка (4); $f''(x)$: формула (9) Для четных вариантов вывод формулы (9),для нечетных вариантов вывод формулы (4а)
$N=$ 3,10,17,24,31,38,45,52,59	$f'(x)$: левая разностная производная (2) $f''(x)$: центральная производная второго порядка (6) Для четных вариантов вывод формулы (6),для нечетных вариантов вывод формулы (6а)
$N=$ 4,11,18,25,32,39,46,53,60	$f'(x)$: односторонняя разностная производная второго порядка (5) $f''(x)$: формула 4-го порядка точности (11) Для четных вариантов вывод формулы (5),для нечетных

	вариантов вывод формулы (5а)
$N =$ 5,12,19,26,33,40,47,54	$f'(x)$: левая разностная производная (2) $f''(x)$: односторонняя правая производная второго порядка (7) Для четных вариантов вывод формулы (7),для нечетных вариантов вывод формулы (2а)
$N =$ 6,13,20,27,34,41,48,55	$f'(x)$: центральная разностная производная (3) $f''(x)$: односторонняя левая производная второго порядка (8) Для четных вариантов вывод формулы (8),для нечетных вариантов вывод формулы (8а)
$N =$ 7,14,21,28,35,42,49,56	$f'(x)$: односторонняя разностная производная второго порядка (4); $f'''(x)$: центральная производная второго порядка (10) Для четных вариантов вывод формулы (10),для нечетных вариантов вывод формулы (4)

Таблица вариантов к задаче 6.2

Номер варианта	**Метод решения задачи Коши**
1, 14, 27,40,53	Эйлера-Коши
2, 15, 28,41,54	Усовершенствованный Эйлера
3, 16, 29,42,55	Рунге-Кутты 3 порядка I
4, 17, 30,43,56	Рунге-Кутты 2 порядка (I)
5, 18, 31,44,57	Метод разложения по Тейлору 2 порядка
6, 19, 32,45,58	Рунге-Кутты 3 порядка III
7, 20, 33,46,59	Рунге-Кутты 2 порядка (II)
8, 21, 34,47,60	Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка
9, 22, 35,48,61	Формула Гира 2-го порядка точности
10, 23, 36,49,62	Формула Гира 3-го порядка точности
11,24,37,50,63	Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка
12,25,38,51,64	Интерполяционный метод Адамса 3-го порядка
13,26,39,52,65	Экстраполяционный метод Адамса 3-го порядка

ПРИЛОЖЕНИЕ 6.В

Задача 6.1. Пример заполнения результатов в задаче нулевого варианта.

ФИО Группа Номер варианта 0

Функция: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$; $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$; $f''(x)=-\frac{4}{(x+1)^3}$;

Значения производных: $f'(c)$ = 0.125 $f''(c)$= - 0.0625

(1) $f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; (4) $f'(x)\approx\frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h}$.

(11) $f''(x)\cong\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$

$f'(c)$	Первый результат при шаге $h=10^{-1}$	Наилучший результат при шаге $h=$	Последний результат при шаге $h=10^{-15}$
Формула (1)	$d1_1$= 0.122 $\Delta1_1$ = 0.003		$d1_{15}$= 0.111 $\Delta1_{15}$ =0.014
Формула (4)	$d1_1$= 0.122 $\Delta1_1$ = 0.003		$d1_{15}$= 0.111 $\Delta1_{15}$ =0.014
$f''(c)$	Первый результат при шаге $h=10^{-1}$	Наилучший результат при шаге $h=$	Последний результат при шаге $h=10^{-15}$
Формула (11)	$d1_1$= -0.06254 $\Delta1_1$ = 0.00003		$d1_{15}$= 0 $\Delta1_{15}$ =0.0625

ПРИЛОЖЕНИЕ 6.С

Формулы численного дифференцирования ***первого порядка точности***

(1) $f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; **остаточный** член (**1а**) $R=\frac{M_2}{2}h.$

(2) $f'(x)\approx\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$; **остаточный** член **(2а)** $R=\frac{M_2}{2}h.$

Формулы численного дифференцирования ***второго порядка точности***

(3) **Центральная** разностная производная $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$;

(3а) остаточный член $R = \dfrac{M_3}{6} h^2$.

Односторонние формулы численного дифференцирования ***второго порядка:***

(**4**) $f'(x) \approx \dfrac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$; остаточный член **(4а)** $R = \dfrac{M_3}{3} h^2$.

(**5**) $f'(x) \approx \dfrac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h}$; остаточный член **(5а)** $R = \dfrac{M_3}{3} h^2$.

(**6**) Формула вычисления **второй производной** $f''(x) \cong \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$;

(6а) остаточный член $R = \dfrac{M_4}{12} h^2$.

(**7**) **одностороння правая** производная для вычисления **второй производной**

$f''(x) \cong \dfrac{2f(x) - 5f(x+h) + 4f(x+2h) - f(x+3h)}{h^2}$; **(7а) остаточный** член $R = \dfrac{11M_4}{12} h^2$.

(**8**) **одностороння левая** производная для вычисления **второй производной**

$f''(x) \cong \dfrac{2f(x) - 5f(x-h) + 4f(x-2h) - f(x-3h)}{h^2}$; **(8а) остаточный** член $R = \dfrac{11M_4}{12} h^2$.

(**9**) формула для вычисления **первой производной** ***четвёртого порядка точности***

$f'(x) \approx \dfrac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$. **(9а) остаточный** член $R = \dfrac{M_5}{30} h^4$.

(**10**) формула для вычисления **третьей производной** второго порядка точности

$f'''(x) \cong \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3}$; **(10а) остаточный** член $R = \dfrac{M_5}{4} h^2$.

(**11**) формула для вычисления **второй производной** ***четвёртого порядка точности***

$f''(x) \approx \dfrac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2}$.

(11а) остаточный член $R = \dfrac{M_5}{4} h^4$.

(**12**) формула для вычисления третьей **производной** ***четвёртого порядка точности*** $f'''(x) \cong \dfrac{-f(x+3h) + 8f(x+2h) - 13f(x+h) + 13f(x-h) - 8f(x-2h) + f(x-3h)}{8h^3}$;

(12а) остаточный член $R = \dfrac{M_5}{4} h^4$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6.D

I. ***Правило Рунге практической оценки погрешности*** **решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка (правило двойного пересчета):**

$y(t_i) - y_i^{h/2} \approx \varepsilon_i^h$, где $\varepsilon_i^h = \dfrac{y_i^{h/2} - y_i^h}{2^p - 1}$, $i = 1,...,N$, p — порядок метода (вычисления ведутся в узлах сетки t_i).

Уточненное решение вычисляется по формуле: $y_{i,\text{уточн}} = y_i^{h/2} + \varepsilon_i^h$, $i = 1,...,N$.

II. Расчетные формулы методов решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка:

1. Метод разложения по формуле Тейлора:

2-го порядка: $\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h \cdot f(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \cdot \left(f_t'(t_i, y_i) + f_y'(t_i, y_i) \cdot f(t_i, y_i) \right);$

3-го порядка: $\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + h \cdot f + \frac{h^2}{2!} \cdot \left(f_t' + f_y' \cdot f \right) + \frac{h^3}{3!} \cdot \left(f_{tt}'' + 2 f_{ty}'' \cdot f + f_t' \cdot f_y' + (f_y')^2 \cdot f + f_{yy}'' \cdot f^2 \right);$

(в этих формулах значения функции $f(t, y)$ и её частных производных берутся в точке $M_i(t_i, y_i)$).

2. Модифицированный метод Эйлера 2-го порядка (метод Эйлера-Коши):

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) \right].$$

3. Усовершенствованный метод Эйлера 2 порядка:

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{2} f(t_i, \boldsymbol{y}_i)\right).$$

4. Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I): $\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k1} + 4 \cdot \boldsymbol{k2} + \boldsymbol{k3})$, где

$$\boldsymbol{k1} = f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{k2} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k1}{2}\right), \quad \boldsymbol{k3} = f(t_i + h, y_i - h \cdot k1 + 2h \cdot k2).$$

5. Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант II): $\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{4}(\boldsymbol{k1} + 3 \cdot \boldsymbol{k3})$, где

$$\boldsymbol{k1} = f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{k2} = f\left(t_i + \frac{h}{3}, y_i + h\frac{k1}{3}\right), \quad \boldsymbol{k3} = f\left(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + h\frac{2}{3}k2\right).$$

6. Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант III): $\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{9}(2 \cdot \boldsymbol{k1} + 3 \cdot \boldsymbol{k2} + 4 \cdot \boldsymbol{k3})$, где

$$\boldsymbol{k1} = f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{k2} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k1}{2}\right), \quad \boldsymbol{k3} = f\left(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + h\frac{3}{4}k2\right).$$

7. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка: $\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k1} + 2 \cdot \boldsymbol{k2} + 2 \cdot \boldsymbol{k3} + \boldsymbol{k4})$, где

$$\boldsymbol{k1} = f(t_i, y_i), \quad \boldsymbol{k2} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k1}{2}\right), \quad \boldsymbol{k3} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k2}{2}\right), \quad \boldsymbol{k4} = f(t_i + h, y_i + h \cdot k3).$$

8. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка:

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{2} \cdot \left[3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1})\right].$$

9. Экстраполяционный метод Адамса 3-го порядка:

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{12} \cdot \left[23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2})\right].$$

10. Экстраполяционный метод Адамса 4-го порядка:

$$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i + \frac{h}{24} \cdot \left[55f(t_i, y_i) - 59f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, y_{i-3})\right].$$

11. Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right)$$

12. Интерполяционный метод Адамса 3-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\right)$$

13. Метод Гира 2-го порядка:

$$\frac{3y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1}}{2h} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

14. Метод Гира 3-го порядка:

$$\frac{11y_{n+1} - 18y_n + 9y_{n-1} - 2y_{n-2}}{6h} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994