НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Численные методы
Отчет по лабораторной работе №6 "Численное дифференцирование и решение задачи Коши."
Вариант 52

Студент:	Волков Павел Евгеньевич
Преподаватель:	Амосова Ольга Алексеевна
Группа:	А-14-19

Москва
2021

Задача 6.1

Постановка задачи

Исследовать поведение погрешностей при численном дифференцировании функции.

№	$f(x)$	$[a, b]$
5.2.52	$6e^{-x}\sin 2\pi x$	$[0, 3]$

Решение

Для вычисления производной в точке $c = 0.9$ будем использовать 2 формулы - правой и левой разностной производной:

$$f'(x) \approx \frac{f(c+h_k) - f(c)}{h_k}$$
$$f'(x) \approx \frac{f(c) - f(c-h_k)}{h_k}$$

Приведем графики погрешностей вычисления производных 1-го и 2-го порядка в точке $c = 0.9$.

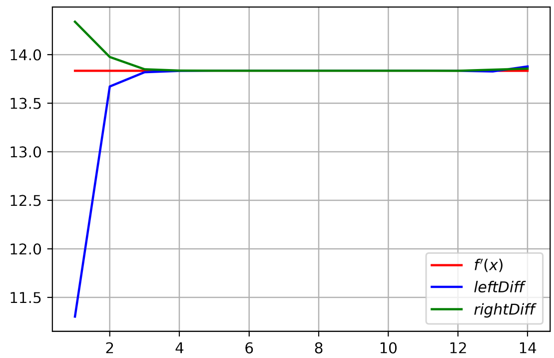

Рис. 1: Графики производных 1-го порядка, вычисленных с помощью формул левых и правых разностных производных

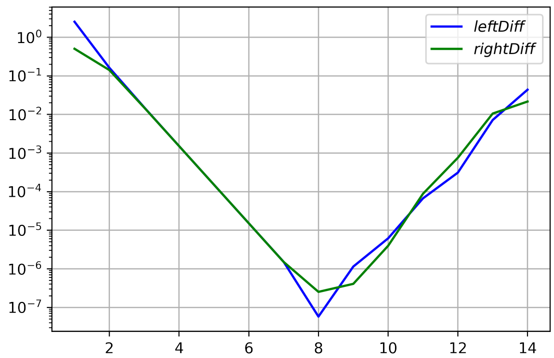

Рис. 2: Графики погрешностей вычисления первой производной по левой и правой формулам разностных производных

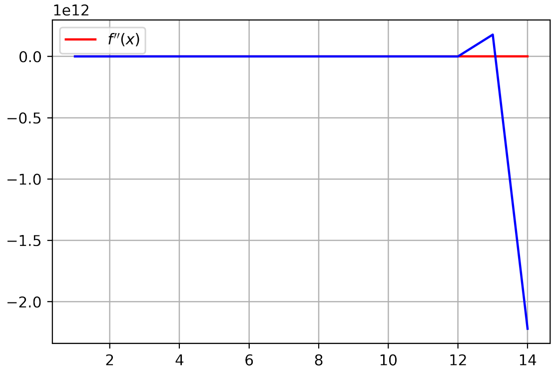

Рис. 3: График производной 2-го порядка

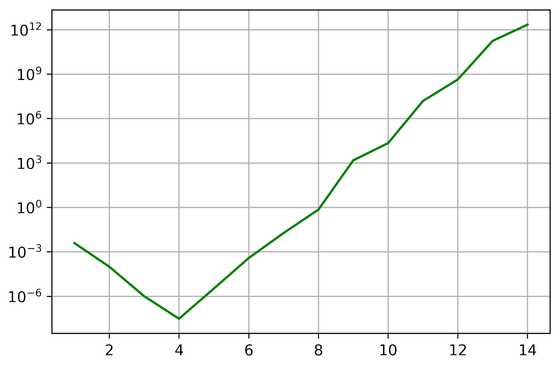

Рис. 4: Погрешность вычисления второй производной

$f'(c) = 13.83391227$	Первый результат при шаге $h = 10^{-1}$	Наилучший результат при шаге $h = 10^{-8}$	Последний результат при шаге $h = 10^{-15}$
Формула (1)	$dl_1 = 14.33853900$ $\Delta l_1 = 0.50462672$	$dl_1 = 13.83391252$ $\Delta l_1 = 0.00000025$	$dl_{15} = 13.76676550$ $\Delta l_{15} = 0.06714676$
Формула (2)	$dl_1 = 11.30169535$ $\Delta l_1 = 2.53221691$	$dl_1 = 13.83391221$ $\Delta l_1 = 0.00000006$	$dl_{15} = 13.76676550$ $\Delta l_{15} = 0.06714676$
$f''(c) = 30.37231240$	Первый результат при шаге $h = 10^{-1}$	Наилучший результат при шаге $h = 10^{-4}$	Последний результат при шаге $h = 10^{-15}$
Формула (6)	$dl_1 = 30.36843645$ $\Delta l_1 = 0.00387594$	$dl_1 = 30.37231237$ $\Delta l_1 = 0.00000003$	$dl_{15} = 0.0$ $\Delta l_{15} = 30.37231240$

Выведем формулу (6) вычисления второй производной: $f''(x) \approx \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$
Для этого возьмем 3 узла интерполяции и построим по ним многочлен Ньютона 2 степени, а затем дважды продифференцируем его:

$$P_2(x) = f_i + \frac{\Delta f_i}{h}(x - x_i) + \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$
$$P_2'(x) = \frac{\Delta f_i}{h} + \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}((x - x_i) + (x - x_{i+1}))$$
$$P_2''(x) = 2\frac{\Delta^2 f_i}{2h^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

Задача 6.2

Постановка задачи

Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1-го порядка с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ на отрезке $[\pi/2, \pi/2 + 0.8]$.

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{t} + \dfrac{\cos t}{t} \\ y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Решение

Найдем аналитическое решение:

$$y' + \frac{y}{t} = 0$$
$$y_{\text{одн}} = \frac{C(t)}{t}$$
$$y'_{\text{одн}} = \frac{tC'(t) - C(t)}{t^2}$$
$$y'_{\text{одн}} + \frac{y_{\text{одн}}}{t} = \frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t^2} = \frac{\cos t}{t}$$
$$C'(t) = \cos t$$
$$y = \frac{\sin t}{t} + \frac{C}{t}$$
$$y = \frac{\sin t}{t} - \frac{1}{t}$$

Запишем расчетную формулу для метода Эйлера: $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ и правило Рунге для данного метода: $y_i^{h/2} - y(t_i) \approx y_i^{h/2} - y_i^h$. При поиске решения с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ с помощью данного метода потребовалось 131073 точки, то есть шаг, на котором точность достигается равен $h = 6.103515625 \times 10^{-6}$.

При поиске решения с помощью экстраполяционного метода Адамса 3-го порядка, так как нам известно точное решение, зададим значения в точках $y_1 = y(a+h), y_2 = y(a+2h)$ так как метод является 3-х точечным. Ниже представлена расчетная формула данного метода. Для нахождения решения с заданной точностью потребовалось 65 точек, то есть величина шага составила $h = 0.0125$.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}[23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2})]$$

Ниже на графиках представлены графики точного и приближенного решений, а также графики погрешностей.

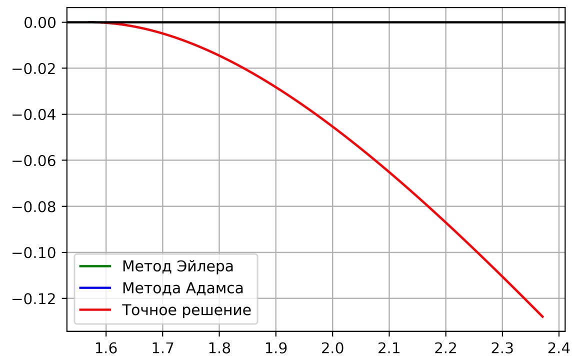

Рис. 5: Графики решений

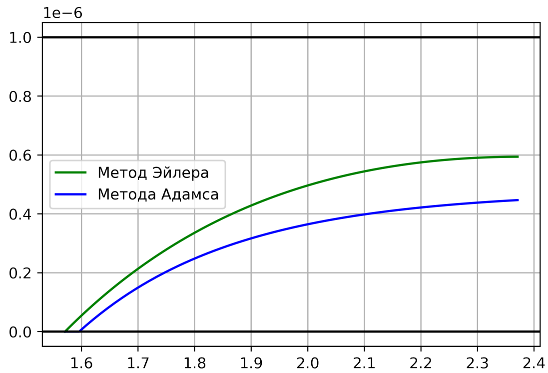

Рис. 6: Погрешность нахождения решений

На втором графике(Рис. 6) Видно, что метод Адамса показывает большую точность, причем на меньшем количестве узлов, что является результатом более высокого порядка точности данного метода по сравнению с методом Эйлера.