# Линейные пространства и отображения

Алексей Перегудин, 2020

# Линейное пространство

Множество, элементы которого
можно складывать друг с другом и умножать на числа

# Линейное пространство

Множество, элементы которого
можно складывать друг с другом и умножать на числа

$V$ – множество

# Линейное пространство

Множество, элементы которого
можно складывать друг с другом и умножать на числа

$V$ – множество

$$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$$

# Линейное пространство

Множество, элементы которого
можно складывать друг с другом и умножать на числа

$V$ – множество

$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$

$v \in V,\ c$ – число $\quad \Rightarrow \quad cv \in V$

# Линейное пространство

Множество, элементы которого
можно складывать друг с другом и умножать на числа

$V$ – множество

$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$

$v \in V$, $c$ – число $\quad \Rightarrow \quad cv \in V$

$\Rightarrow \quad V$ – линейное пространство

# Линейное пространство

Множество, элементы которого
можно складывать друг с другом и умножать на числа

$V$ – множество

$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$

$v \in V$, $c$ – число $\quad \Rightarrow \quad cv \in V$

$\Rightarrow$

$V$ – линейное пространство

(над $\mathbb{R}$, если $c \in \mathbb{R}$)

# Линейное пространство

Множество, элементы которого
можно складывать друг с другом и умножать на числа

$V$ – множество

$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$

$v \in V$, $c$ – число $\quad \Rightarrow \quad cv \in V$

$\Rightarrow$

$V$ – линейное пространство

(над $\mathbb{R}$, если $c \in \mathbb{R}$)

(над $\mathbb{C}$, если $c \in \mathbb{C}$)

# Линейное пространство

Множество, элементы которого
можно складывать друг с другом и умножать на числа

$V$ – множество

$v_1, v_2 \in V \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_2 \in V$

$v \in V$, $c$ – число $\quad \Rightarrow \quad cv \in V$

$\Rightarrow$

$V$ – линейное пространство

элементы $V$ – вектора

# Примеры линейных пространств

# Примеры линейных пространств



Вещественные числа $\mathbb{R}$

# Примеры линейных пространств



Вещественные числа $\mathbb{R}$

Сложение

$$2 + 5 = 7$$

# Примеры линейных пространств



Вещественные числа $\mathbb{R}$

Сложение

$2 + 5 = 7$

Умножение на число

$-10 \cdot 5 = -50$

# Примеры линейных пространств



Векторы $\mathbb{R}^n$

Сложение

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}7\\7\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\9\\7\end{bmatrix}$$

Умножение на число

$$2 \cdot \begin{bmatrix}7\\7\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14\\14\\14\end{bmatrix}$$

# Примеры линейных пространств



Матрицы $\mathbb{R}^{m\times n}$

Сложение

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\\6 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}$$

Умножение на число

$$3 \cdot \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$$

# Примеры линейных пространств



Множество из одного нуля $\{0\}$

Сложение

$$0 + 0 = 0$$

Умножение на число

$$5 \cdot 0 = 0$$

# Примеры линейных пространств

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Множество $P_n$ многочленов степени $\leq n$

Сложение

$$(1 + x^2) + (x - x^2) = (1 + x)$$

Умножение на число

$$5 \cdot (1 + x^2) = (5 + 5x^2)$$

# Примеры линейных пространств

Множество $P_\infty$ всех многочленов

Сложение

$$(5 + x^2) + (x^{999} - x^2) = (1 + x^{999})$$

Умножение на число

$$3 \cdot 2x^{1001} = 6x^{1001}$$

# Примеры линейных пространств



Множество $C^0$ всех непрерывных функций (на $\mathbb{R}$)

Сложение

$$f(x) + g(x)$$

Умножение на число

$$c \cdot f(x)$$

# Примеры линейных пространств



Множество $C^{\infty}$ всех гладких функций (на $\mathbb{R}$)

Сложение

$$f(x) + g(x)$$

Умножение на число

$$c \cdot f(x)$$

# Примеры линейных пространств

Множество $l^\infty$ всех ограниченных последовательностей

Сложение

$$\begin{array}{rl} & 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \\ + & \\ & 7, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots \\ = & \\ & 8, 5, 6, 5, 6, 5, \ldots \end{array}$$

Умножение на число

$$4 \cdot \; 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

$$= \; 4, 0, 4, 0, 4, 0, \ldots$$

# Антипримеры

# Антипримеры

Положительные числа $\mathbb{R}_{>0}$

# Антипримеры

Положительные числа $\mathbb{R}_{>0}$

Множество всех матриц

# Антипримеры



Положительные числа $\mathbb{R}_{>0}$

Множество всех матриц

Все возрастающие функции

# Антипримеры



Положительные числа $\mathbb{R}_{>0}$

Множество всех матриц

Все возрастающие функции

Все функции, имеющие разрыв типа «скачок»

# Линейная оболочка

# Линейная оболочка набора векторов

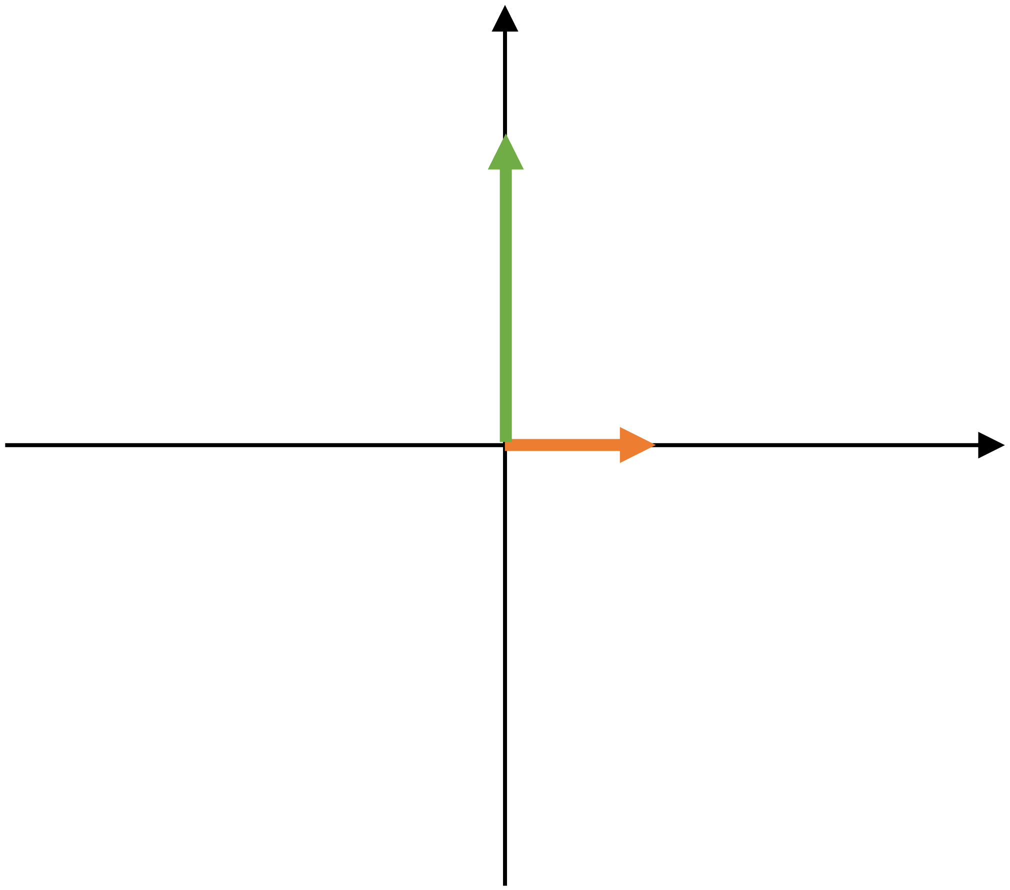
$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

множество всех линейных комбинаций этих векторов

# Линейная оболочка (примеры)



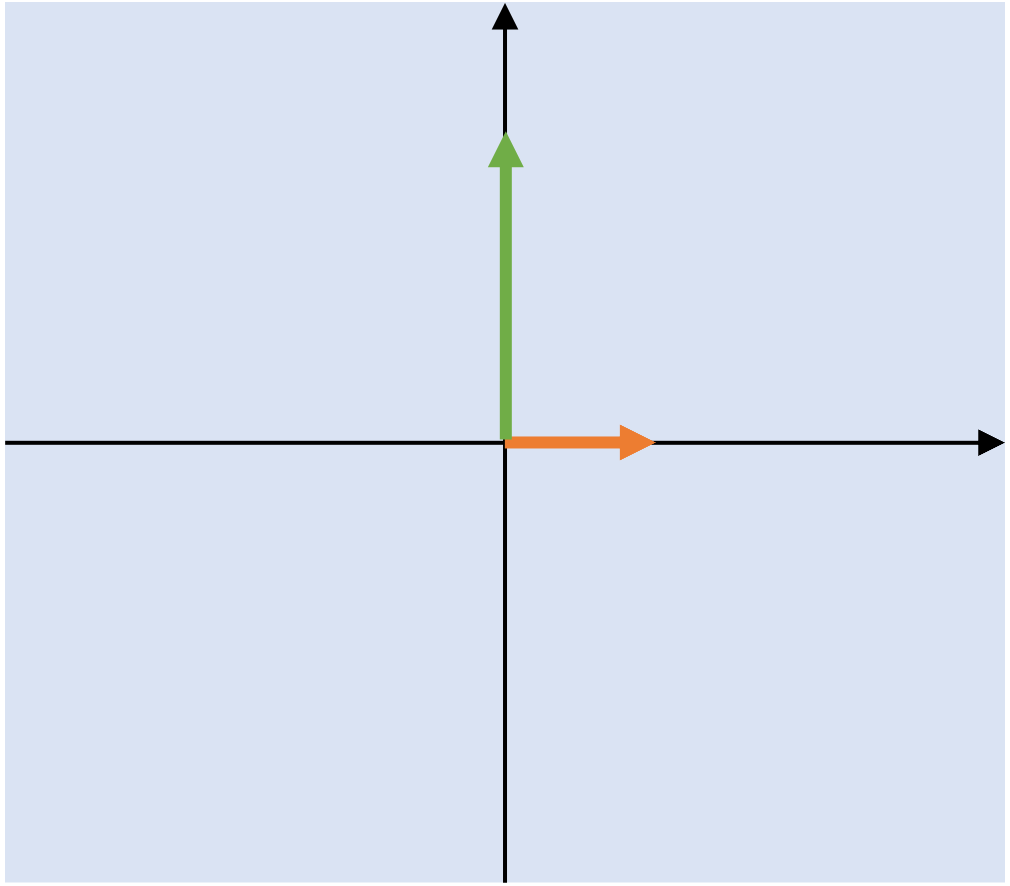
$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \ ?$$



# Линейная оболочка (примеры)



$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

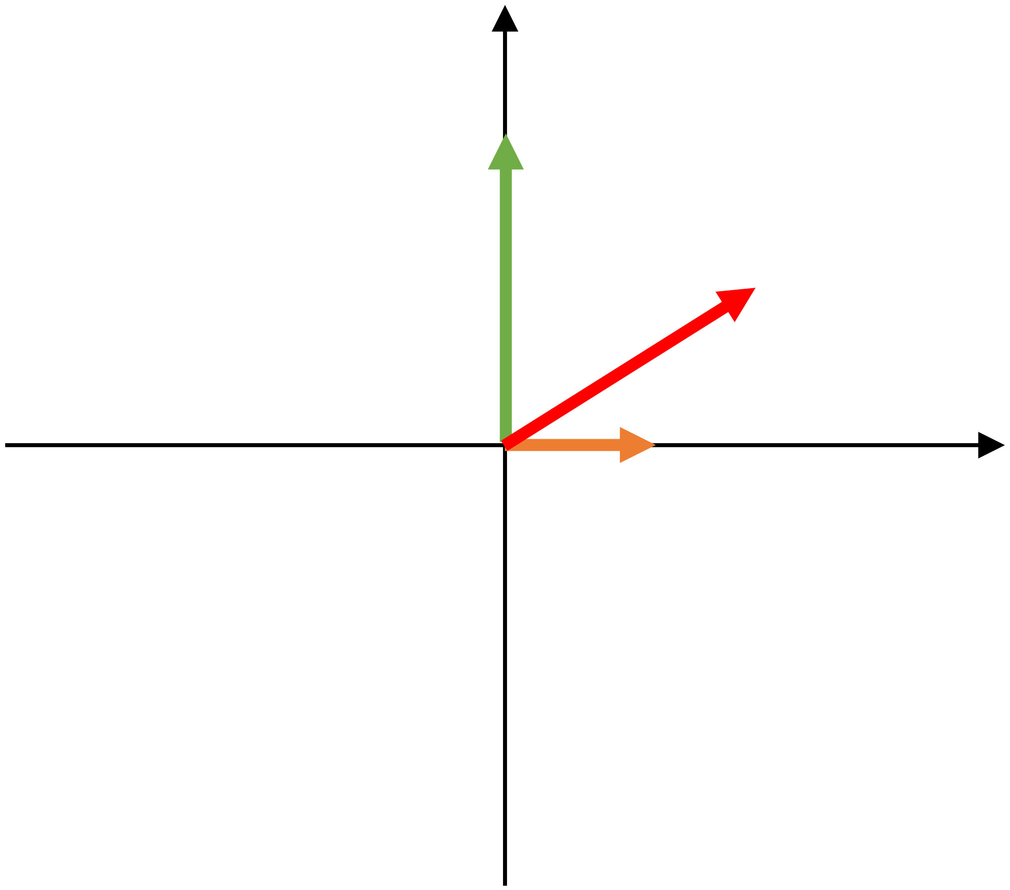


# Линейная оболочка (примеры)



$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\color{orange}{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}},\color{green}{\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}},\color{red}{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}}\right)=\ ?$$

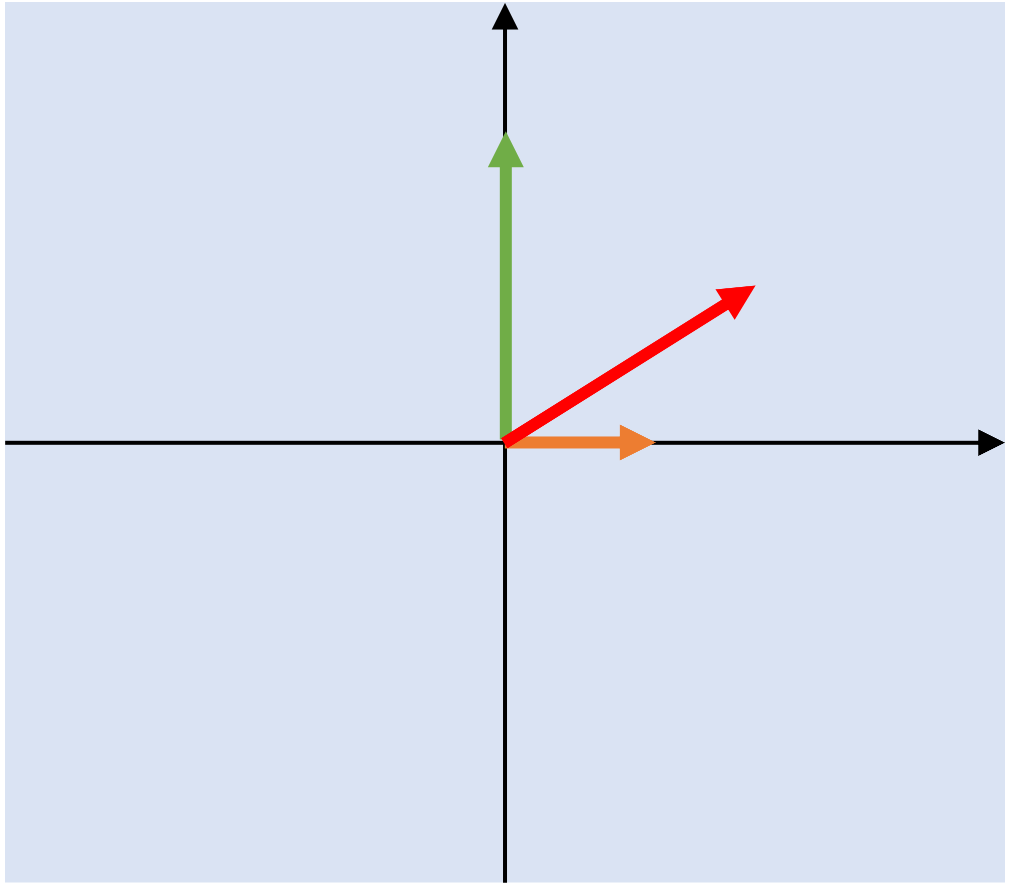


# Линейная оболочка (примеры)



$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

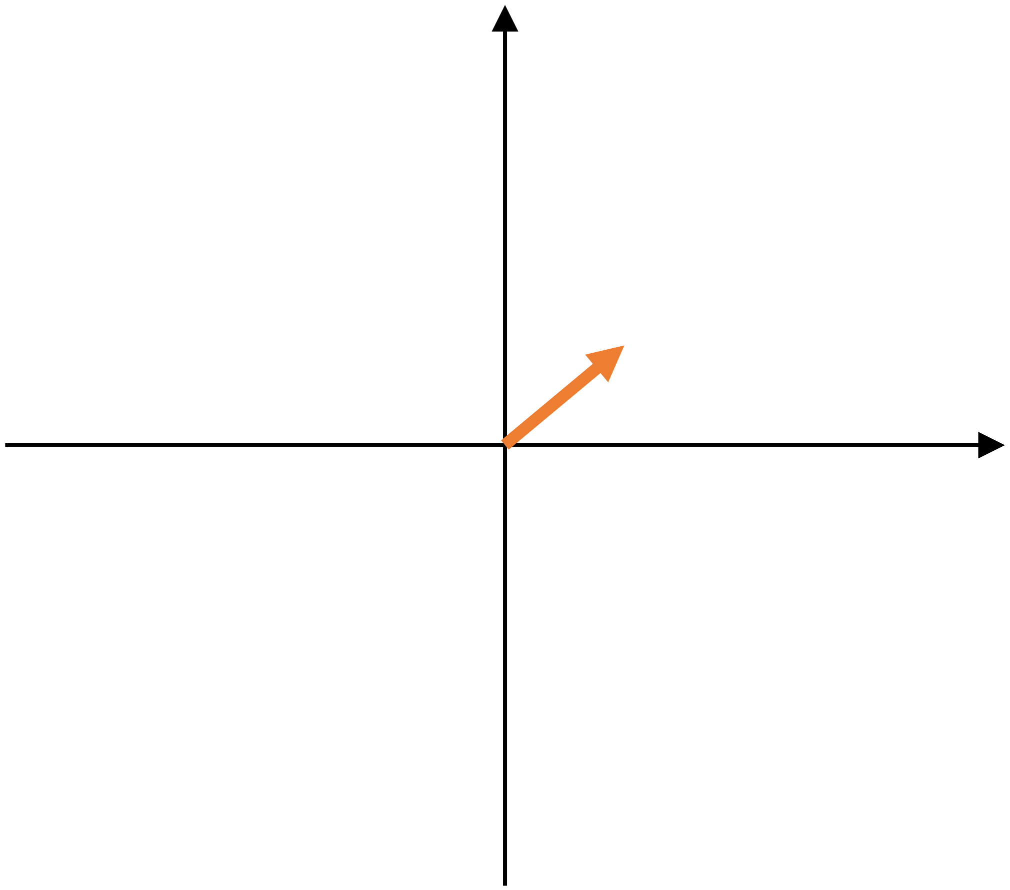


# Линейная оболочка (примеры)

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \ ?$$



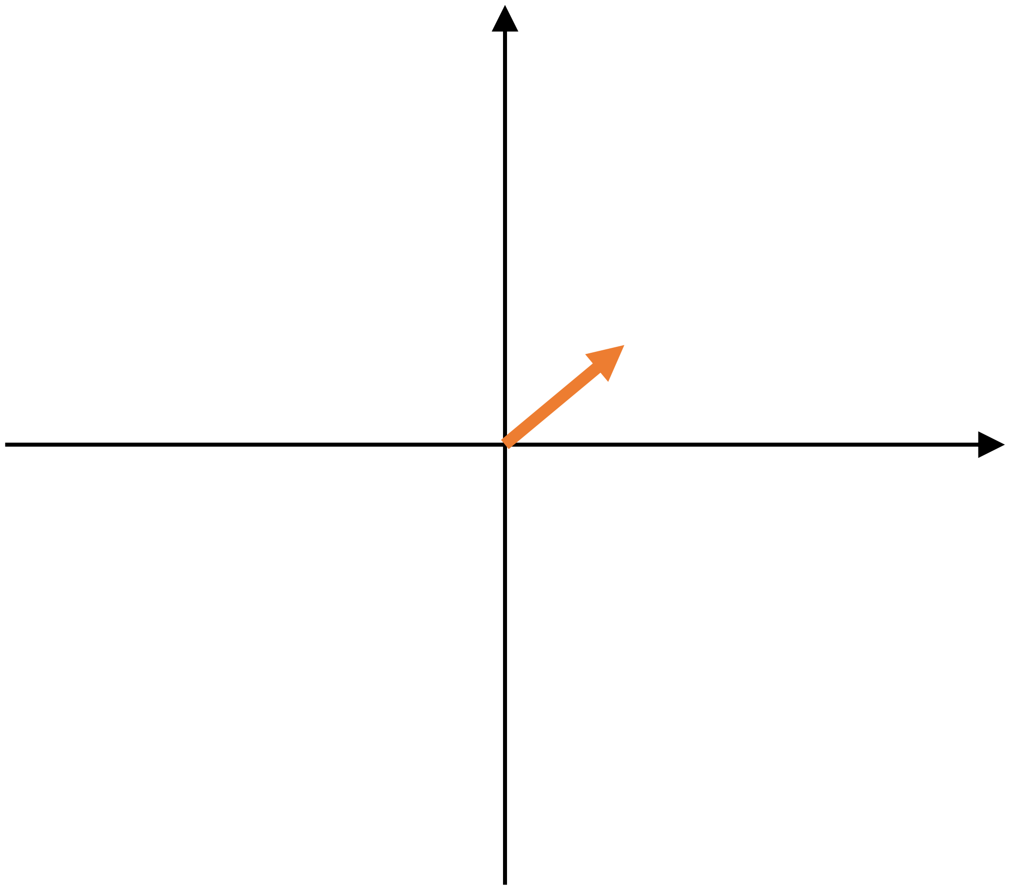
# Линейная оболочка (примеры)



$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \left\{a \cdot \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$$

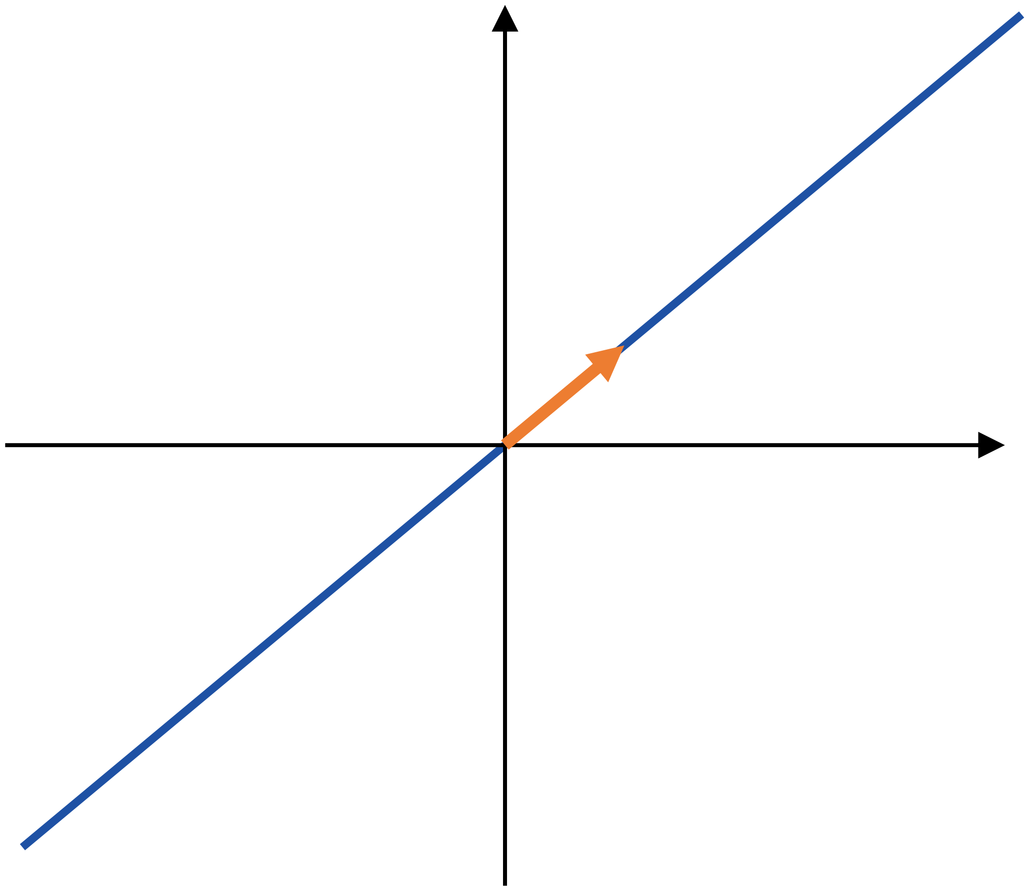


# Линейная оболочка (примеры)

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix}\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$$



# Линейная оболочка (примеры)

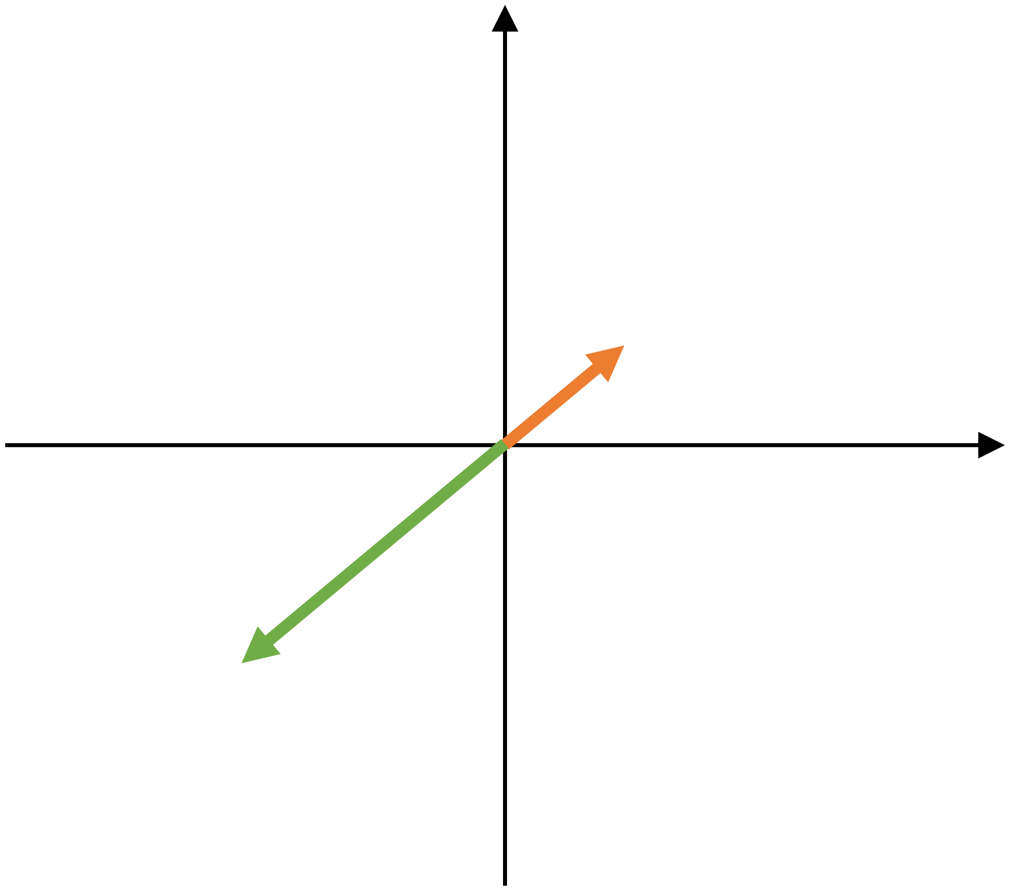


$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\-5\end{bmatrix}\right) = \ ?$$



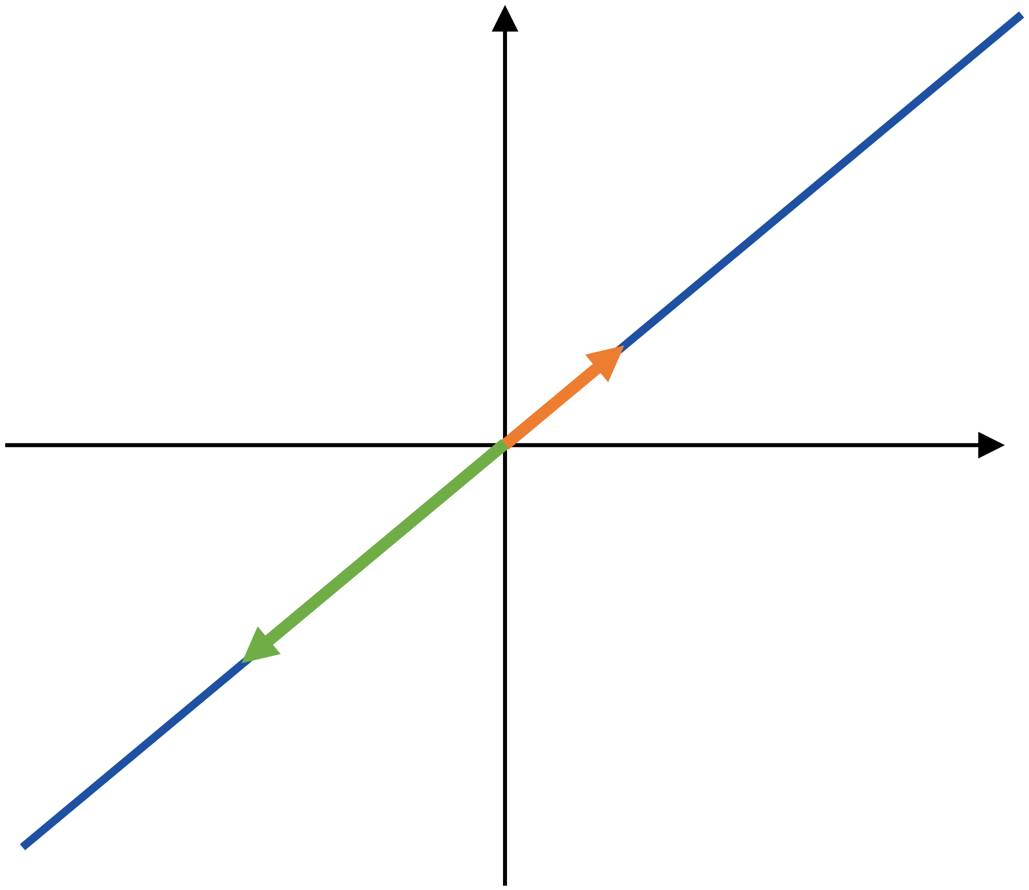
# Линейная оболочка (примеры)

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\-5\end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R}\right\}$$



# Линейная оболочка (примеры)



Общее решение диф. уравнения

$$\ddot{y} = -y$$

# Линейная оболочка (примеры)



Общее решение диф. уравнения $\ddot{y} = -y$

имеет вид $y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$

# Линейная оболочка (примеры)

Общее решение диф. уравнения $\ddot{y} = -y$

имеет вид $y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$

Множество всех решений этого уравнения:

$$\mathrm{Span}(\sin t\,, \cos t)$$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$$\Downarrow$$

$$cx = ca_1 v_1 + ca_2 v_2$$

# Линейная оболочка

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$$\Downarrow$$

$$cx = c a_1 v_1 + c a_2 v_2$$

$$\Updownarrow$$

$$cx \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \qquad y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \qquad y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 \qquad y = b_1 v_1 + b_2 v_2$$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$x \in \operatorname{Span}(v_1, v_2) \qquad y \in \operatorname{Span}(v_1, v_2)$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 \qquad y = b_1 v_1 + b_2 v_2$$

$$\Downarrow$$

$$x + y = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2$$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \qquad y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 \qquad y = b_1 v_1 + b_2 v_2$$

$$\Downarrow$$

$$x + y = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x + y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$\begin{array}{c} x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \\ y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} cx \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \\ x + y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \end{array}$$

# Линейная оболочка



## Теоремка

Линейная оболочка является линейным пространством

## Доказательство

$$\begin{matrix} x \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \\ y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} cx \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \\ x + y \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \end{matrix}$$

Линейная оболочка замкнута относительно сложения и умножения на число ⇒ является линейным пространством

# Линейная оболочка



## Факт

Линейная оболочка векторов – наименьшее линейное пространство, содержащее эти вектора

# Линейное подпространство

# Линейное подпространство

$V$ – линейное пространство $\qquad$ $W$ – линейное пространство

Если $W \subseteq V$, то $W$ – линейное подпространство пространства $V$

# Линейное подпространство



### Факт

$\{0\}$ и само $V$ являются линейными подпространствами любого линейного пространства $V$

# Линейное подпространство



## Факт

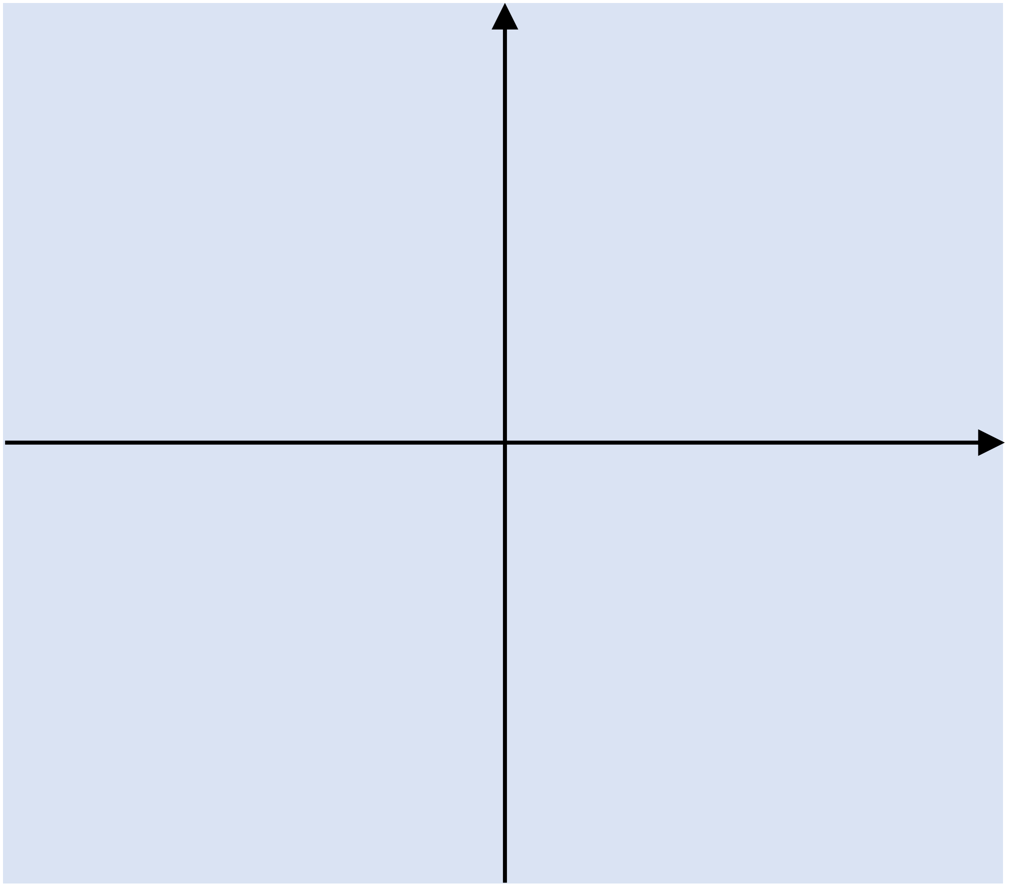
$\{0\}$ и само $V$ являются линейными подпространствами любого линейного пространства $V$

## Очевидный факт

Если $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, то $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ – линейное подпространство пространства $V$

# Линейное подпространство (примеры)

$$V = \mathbb{R}^2$$

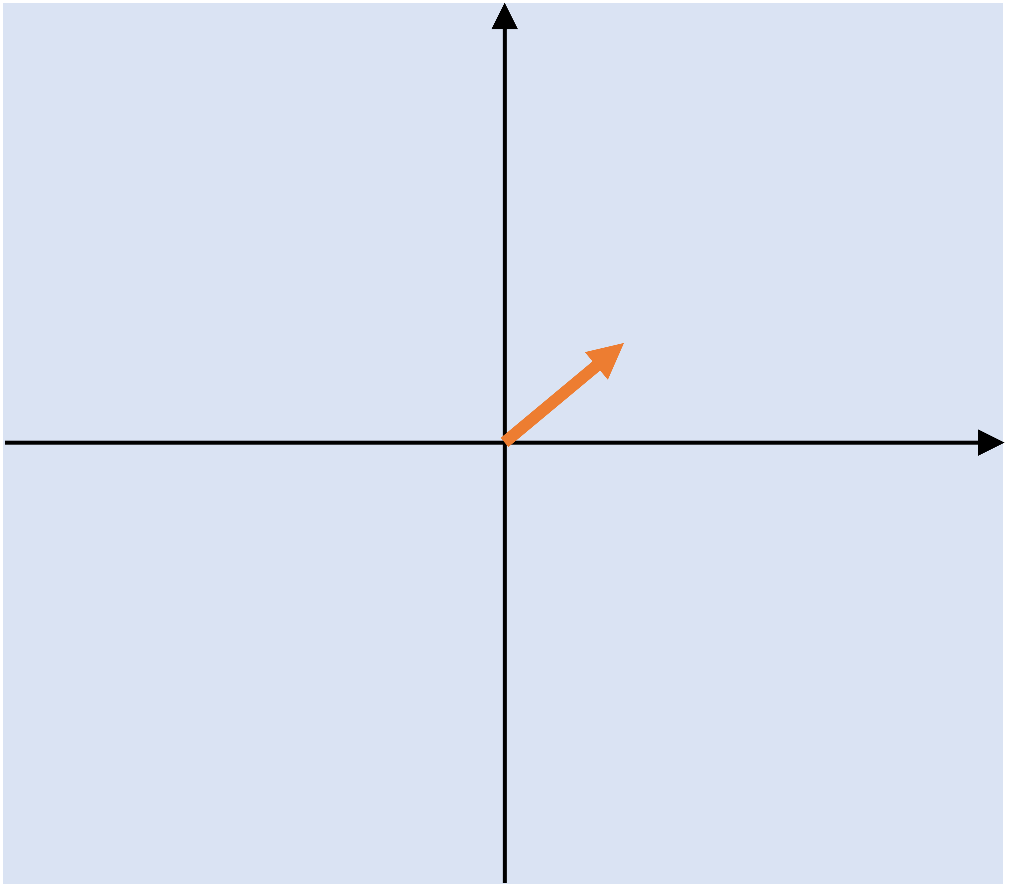


# Линейное подпространство (примеры)



$$V = \mathbb{R}^2$$

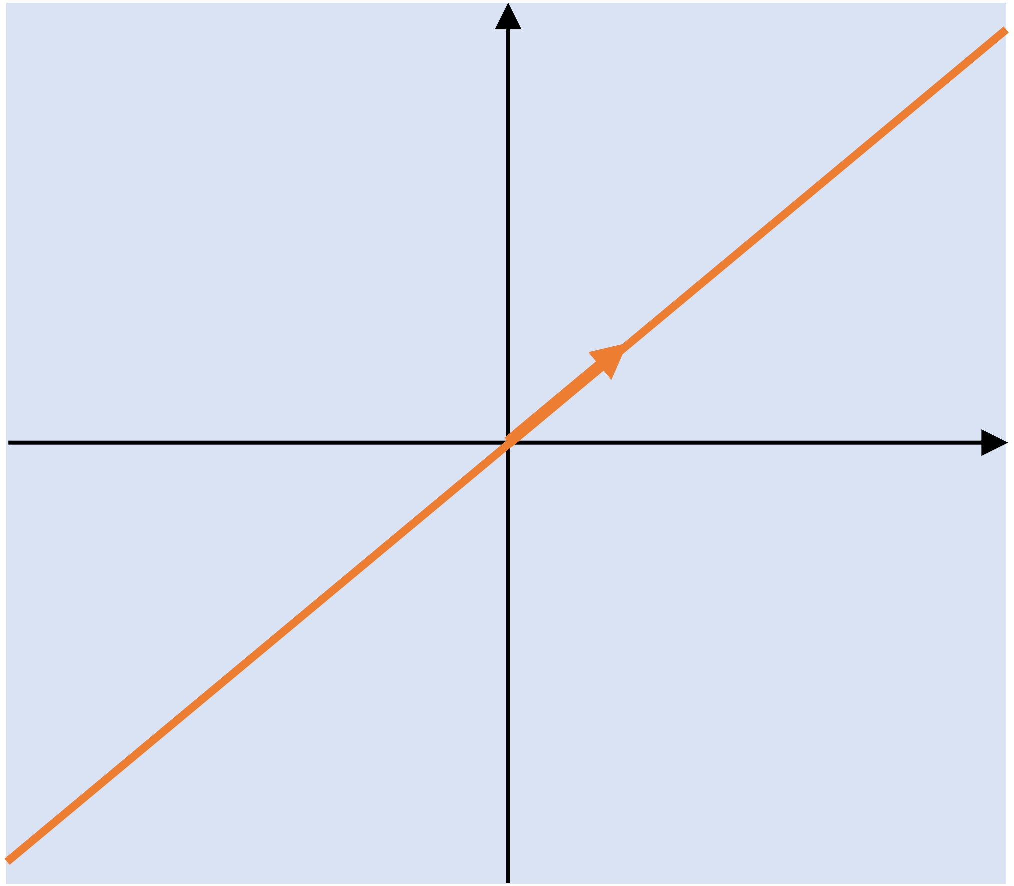
$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$



# Линейное подпространство (примеры)

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

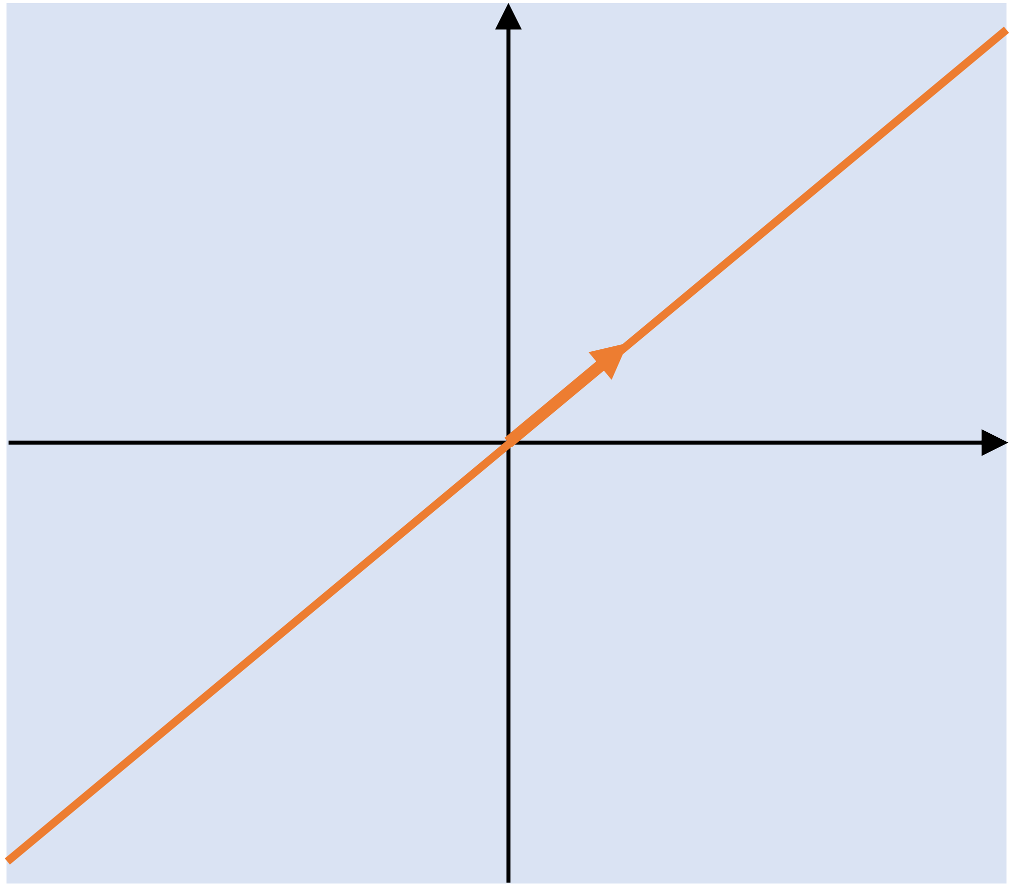


# Линейное подпространство (примеры)

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$W \subseteq V$$



# Линейное подпространство (примеры)

$C^{\infty}$ – линейное пространство
гладких функций

# Линейное подпространство (примеры)

$C^{\infty}$ – линейное пространство гладких функций

$C^{0}$ – линейное пространство непрерывных функций

# Линейное подпространство (примеры)

$C^\infty$ – линейное пространство гладких функций

$C^0$ – линейное пространство непрерывных функций

$P_{10}$ – линейное пространство полиномов степени $\leq 10$

# Линейное подпространство (примеры)

$C^{\infty}$ – линейное пространство гладких функций

$C^{0}$ – линейное пространство непрерывных функций

$P_{10}$ – линейное пространство полиномов степени $\leq 10$

$P_{\infty}$ – линейное пространство всех полиномов

# Линейное подпространство (примеры)



$C^{\infty}$ – линейное пространство гладких функций

$C^{0}$ – линейное пространство непрерывных функций

$P_{10}$ – линейное пространство полиномов степени $\leq 10$

$P_{\infty}$ – линейное пространство всех полиномов

Кто кому подпространство?

# Линейное подпространство (примеры)



$C^\infty$ – линейное пространство гладких функций

$C^0$ – линейное пространство непрерывных функций

$P_{10}$ – линейное пространство полиномов степени $\leq 10$

$P_\infty$ – линейное пространство всех полиномов

$$P_{10} \subseteq P_\infty \subseteq C^\infty \subseteq C^0$$

# Базис и размерность пространства

# Базис и размерность пространства



Пусть $n$ – наименьшее возможное число элементов набора $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ такого, что $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$

# Базис и размерность пространства



Пусть $n$ – наименьшее возможное число элементов набора $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ такого, что $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$

Тогда $n$ называется размерностью пространства $V$

$$\boxed{\dim V = n}$$

# Базис и размерность пространства



Пусть $n$ – наименьшее возможное число элементов набора $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ такого, что $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n) = V$

Тогда $n$ называется размерностью пространства $V$

$$\boxed{\dim V = n}$$

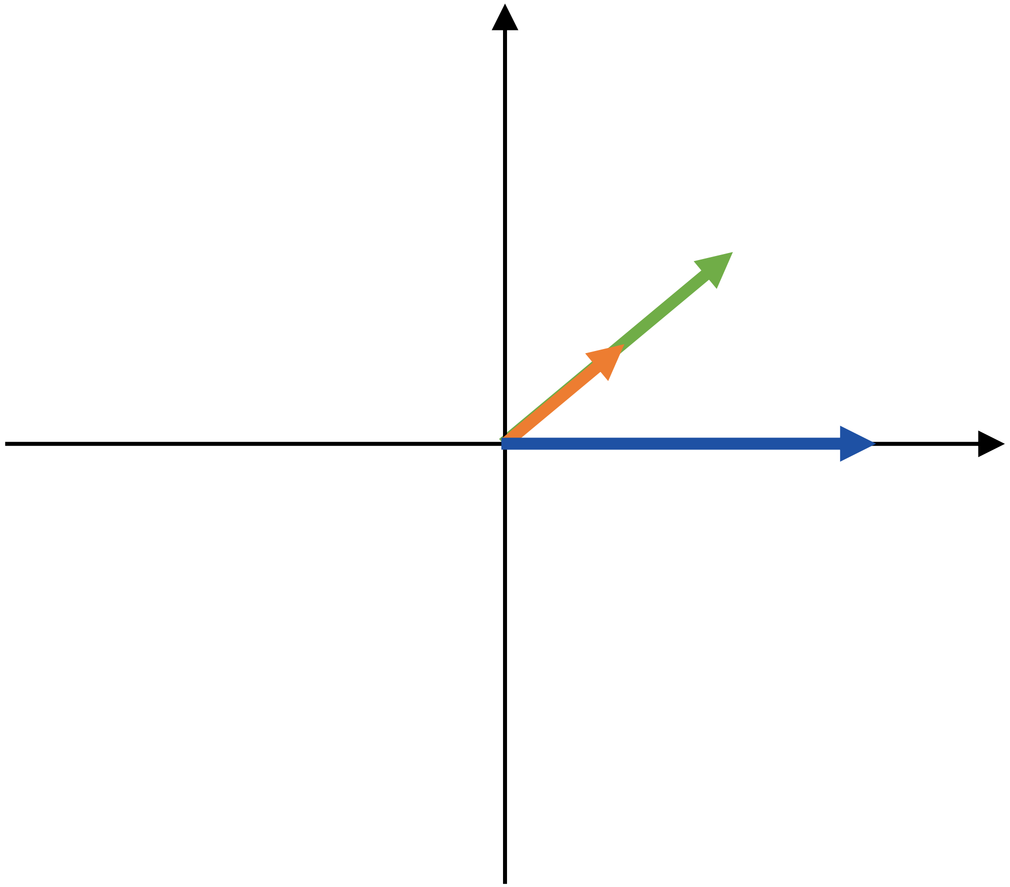
А сам набор $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – базисом пространства $V$ (одним из возможных)

# Базис и размерность пространства



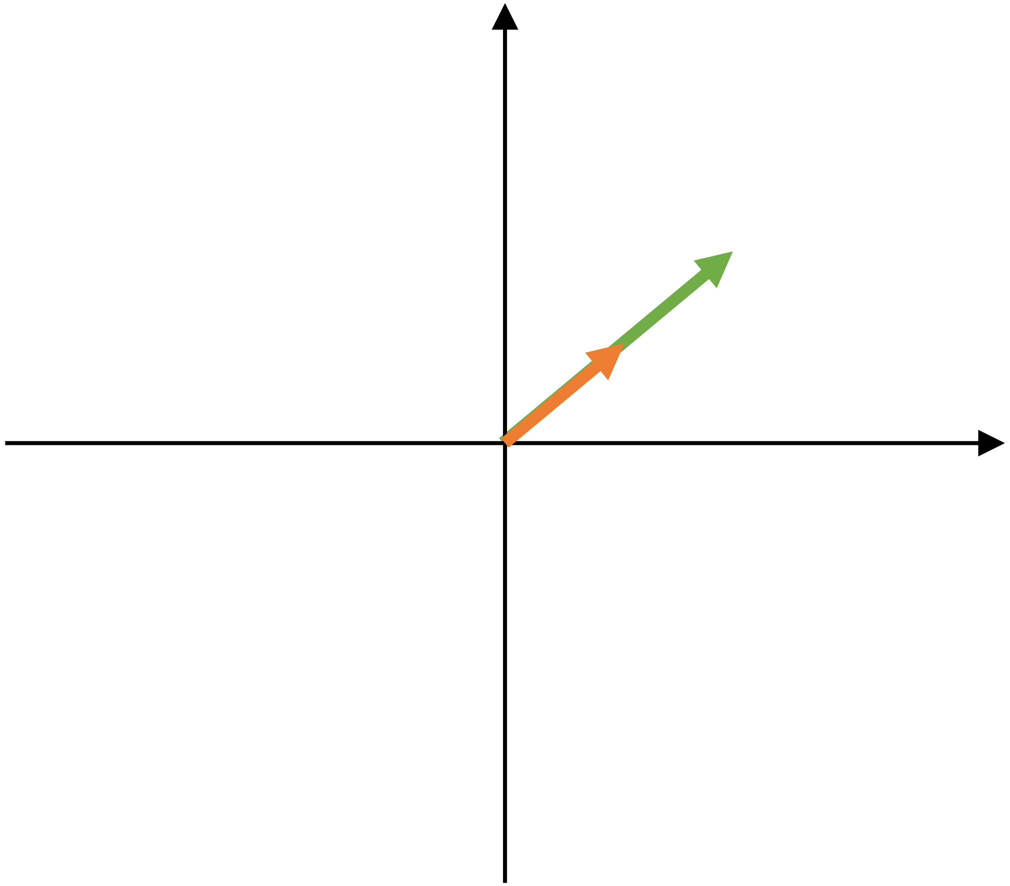
Посмотрим на три вектора

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Базис и размерность пространства

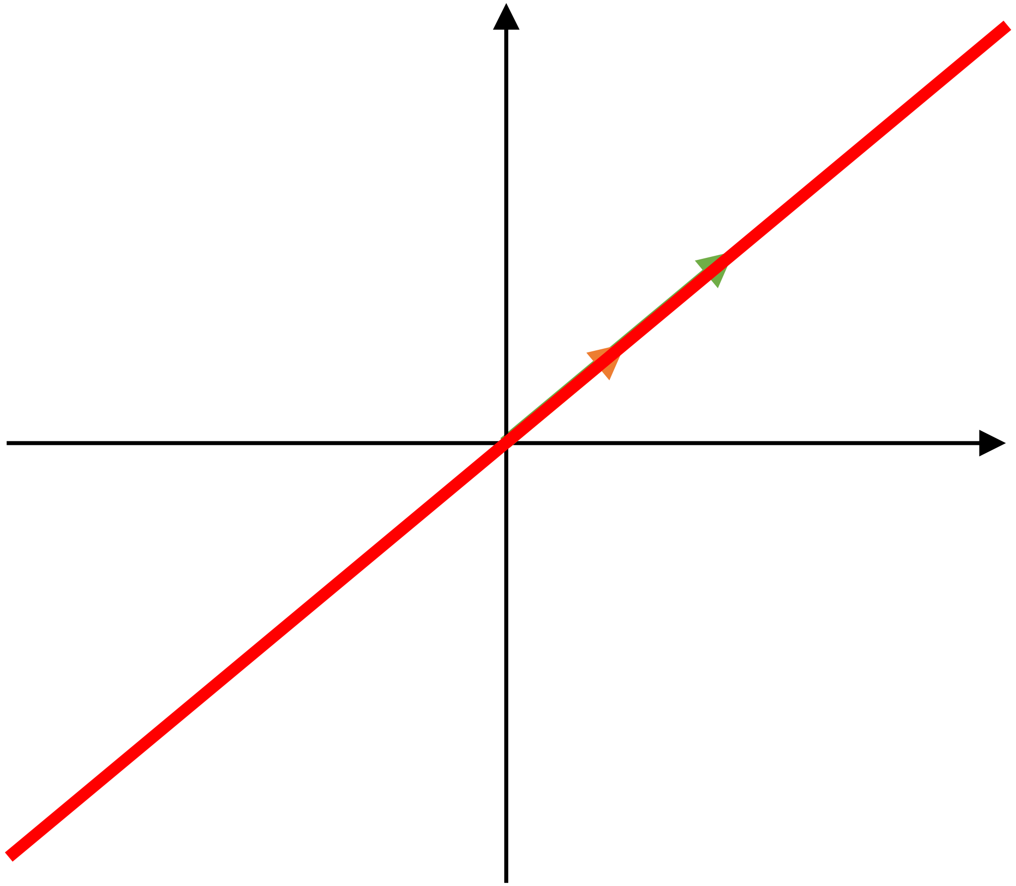
$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)$$



# Базис и размерность пространства



$$\text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

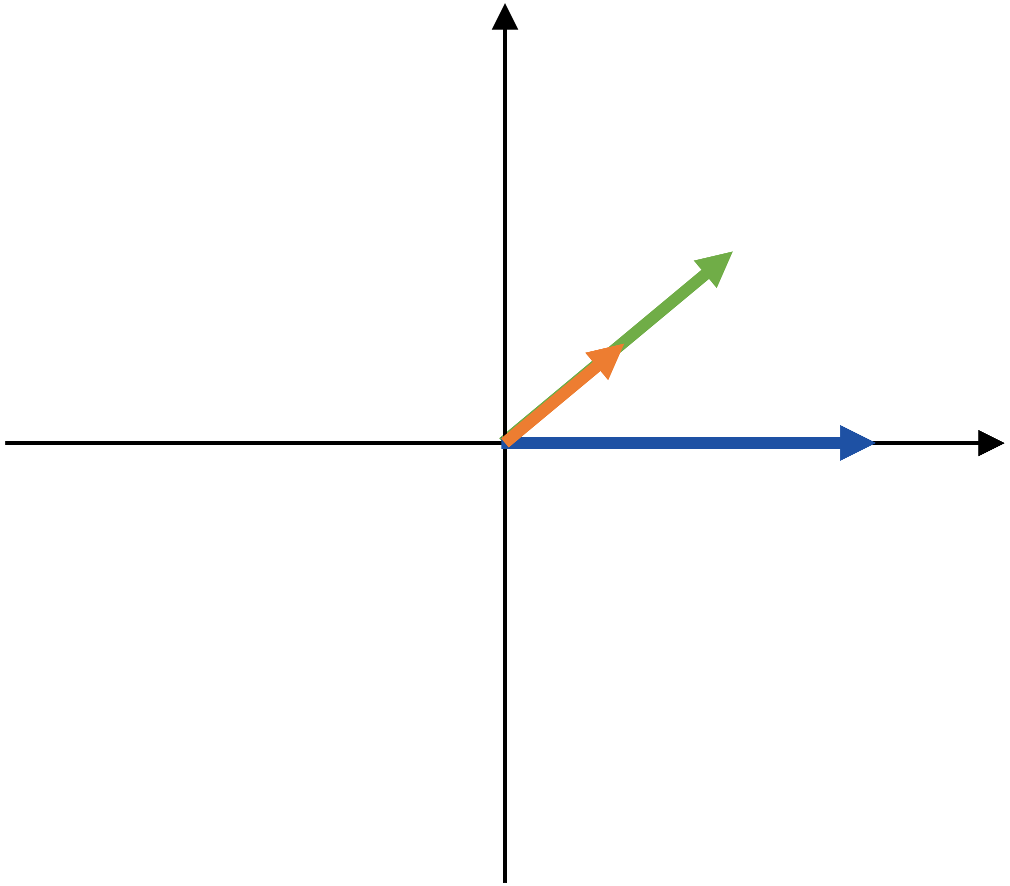


# Базис и размерность пространства



$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)$$

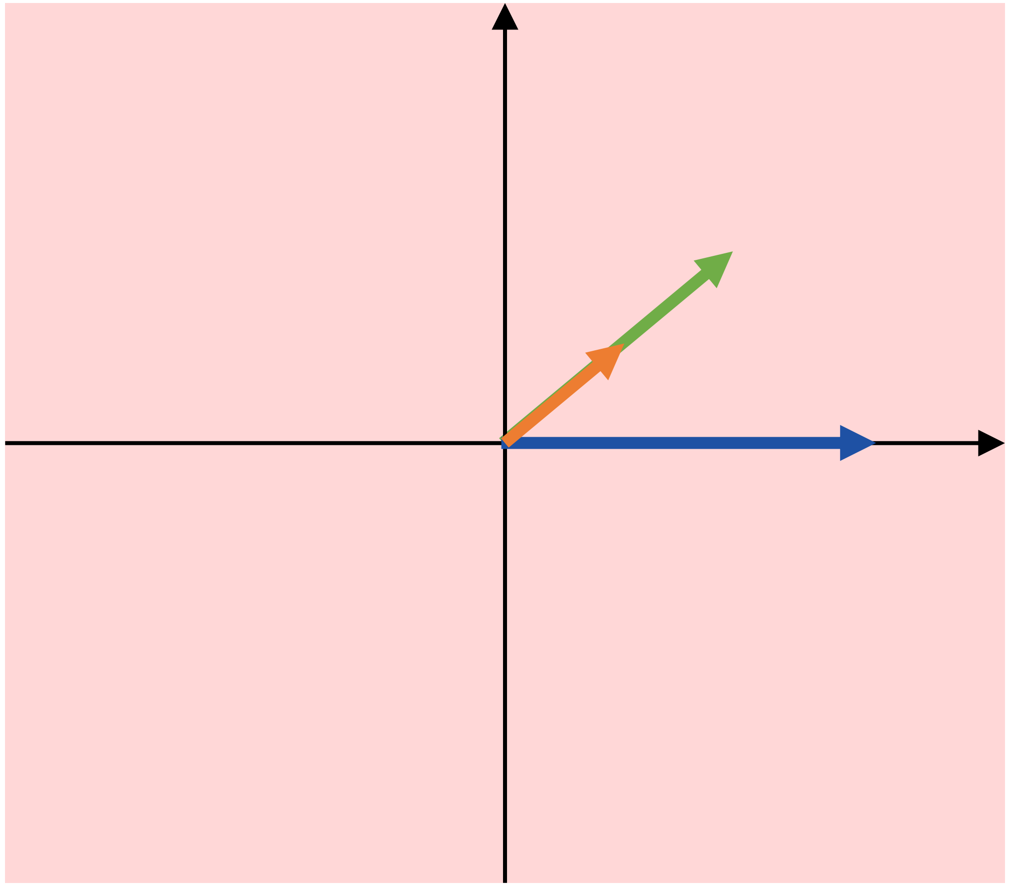


# Базис и размерность пространства



$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$



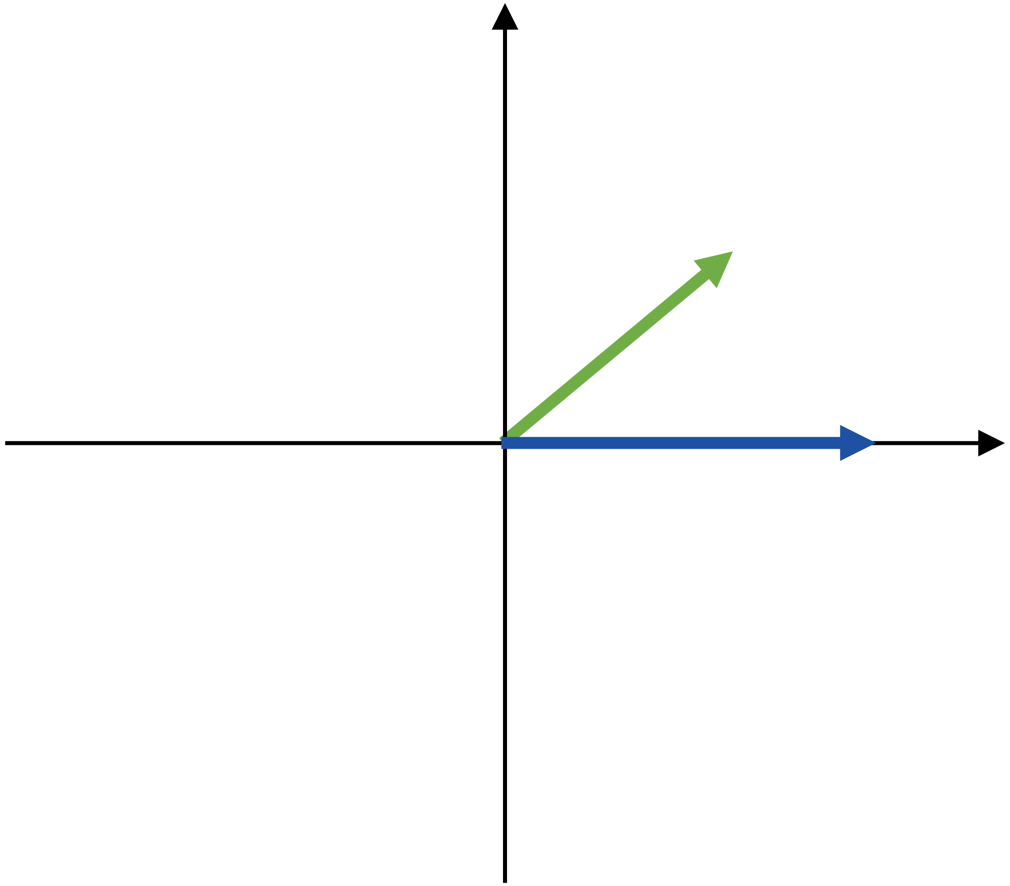
# Базис и размерность пространства



$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)$$

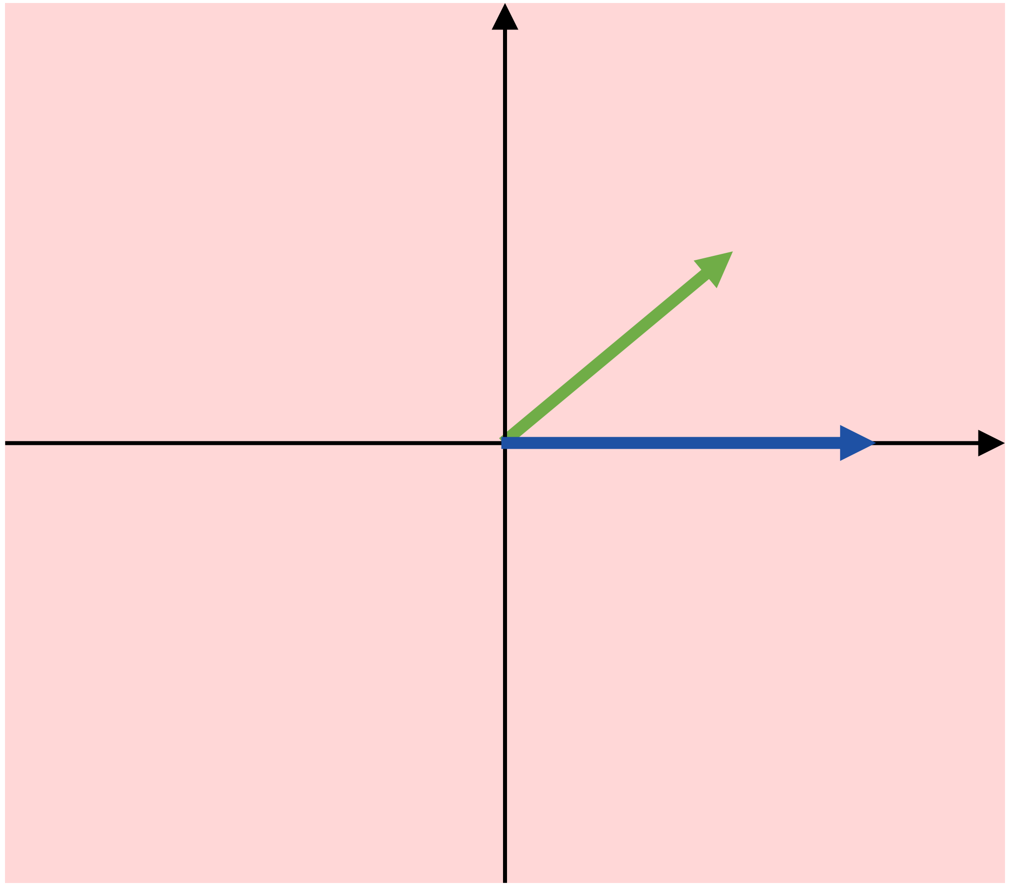


# Базис и размерность пространства

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$



# Базис и размерность пространства

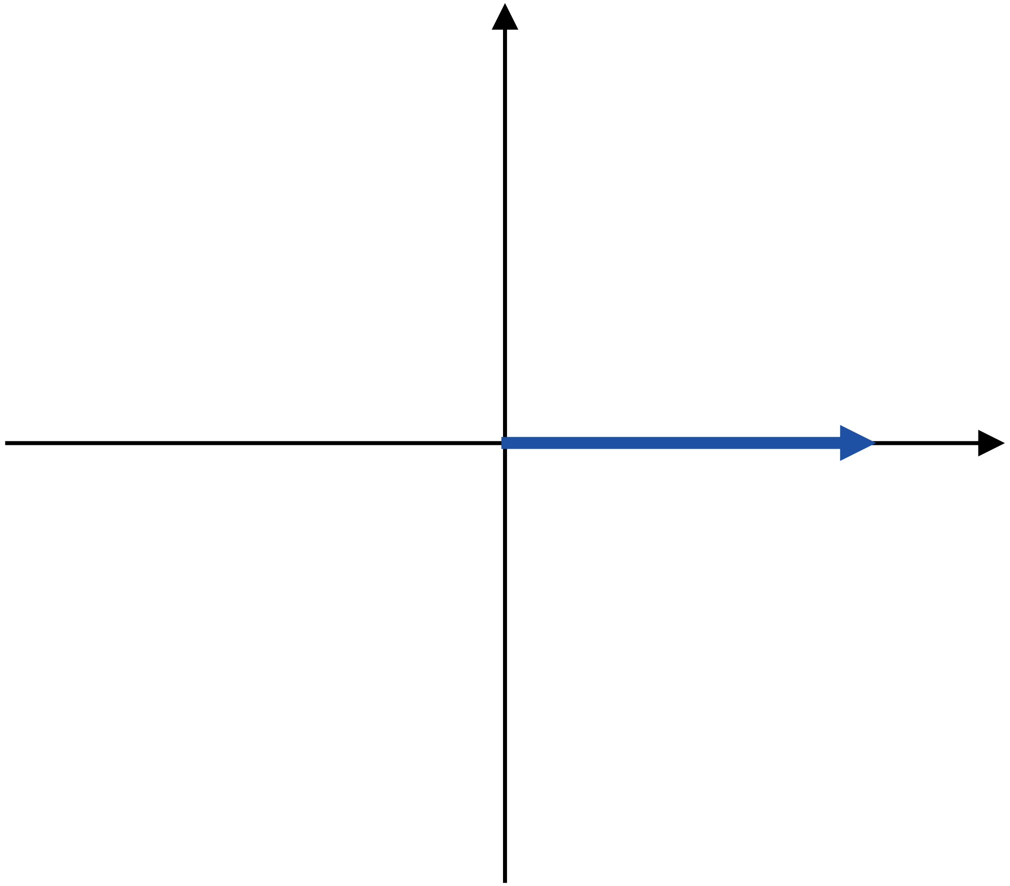


$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right)$$



# Базис и размерность пространства

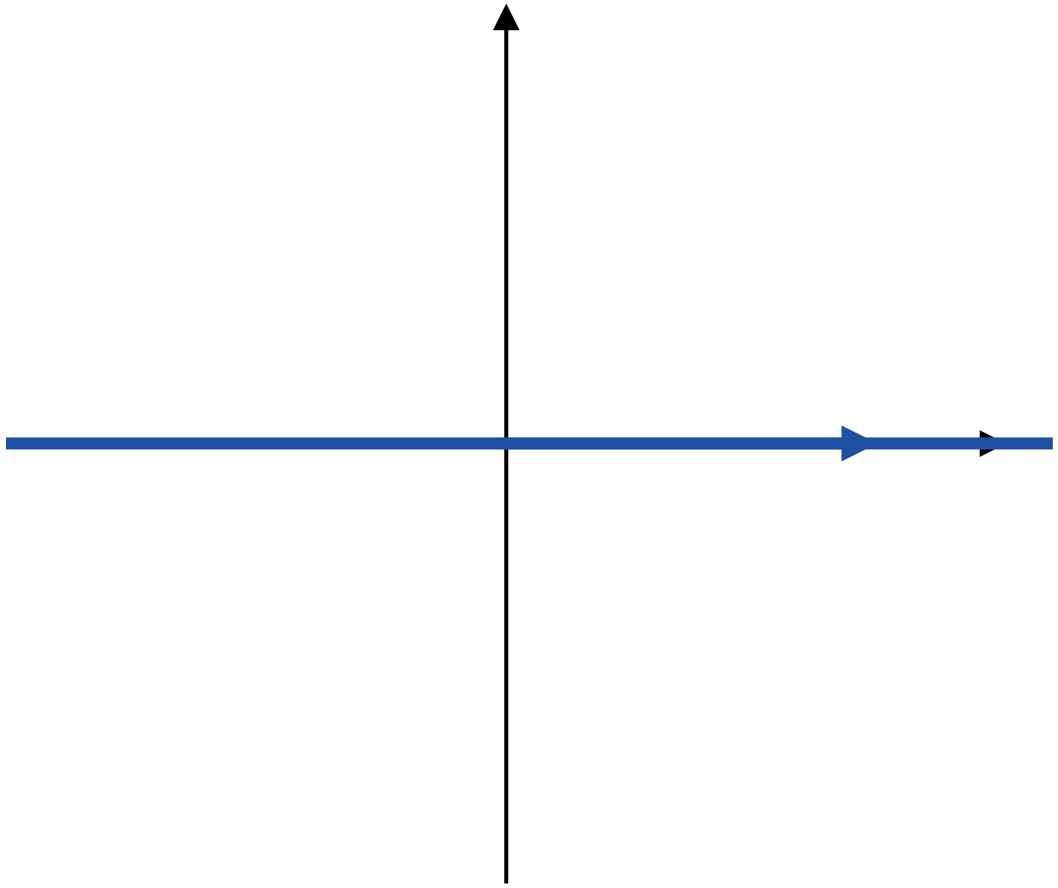


$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$



# Базис и размерность пространства

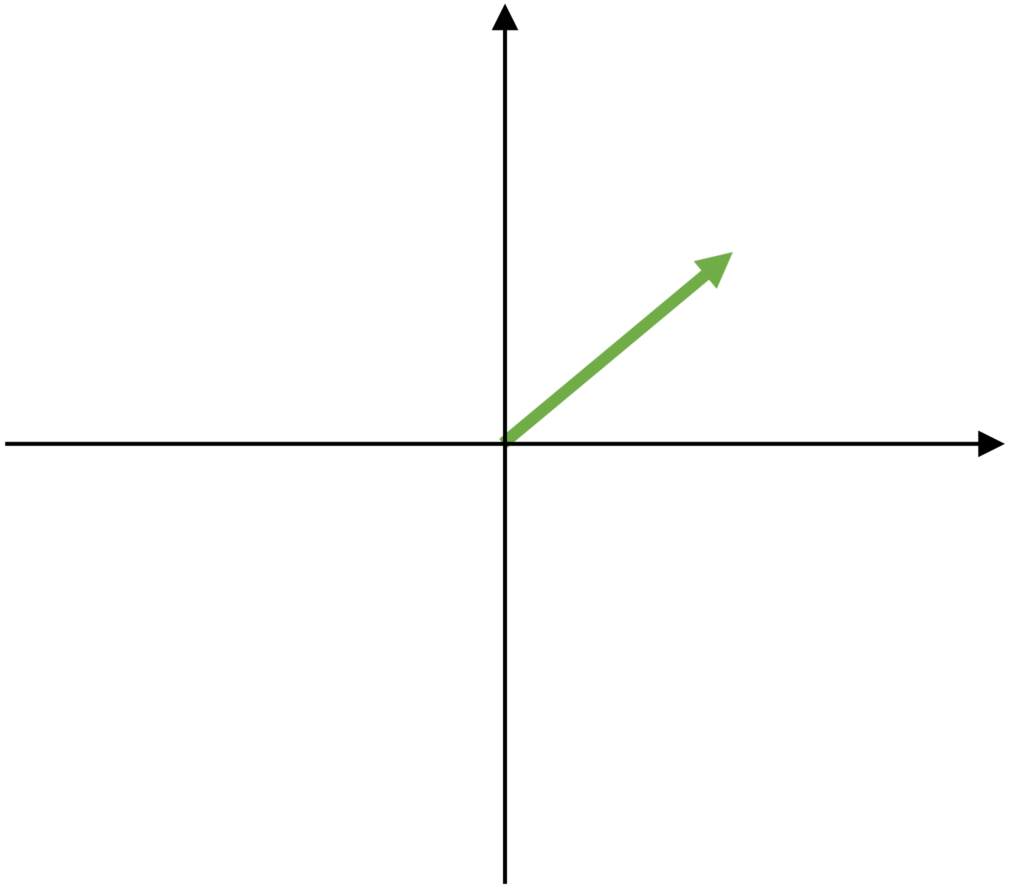
$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right)$$



# Базис и размерность пространства



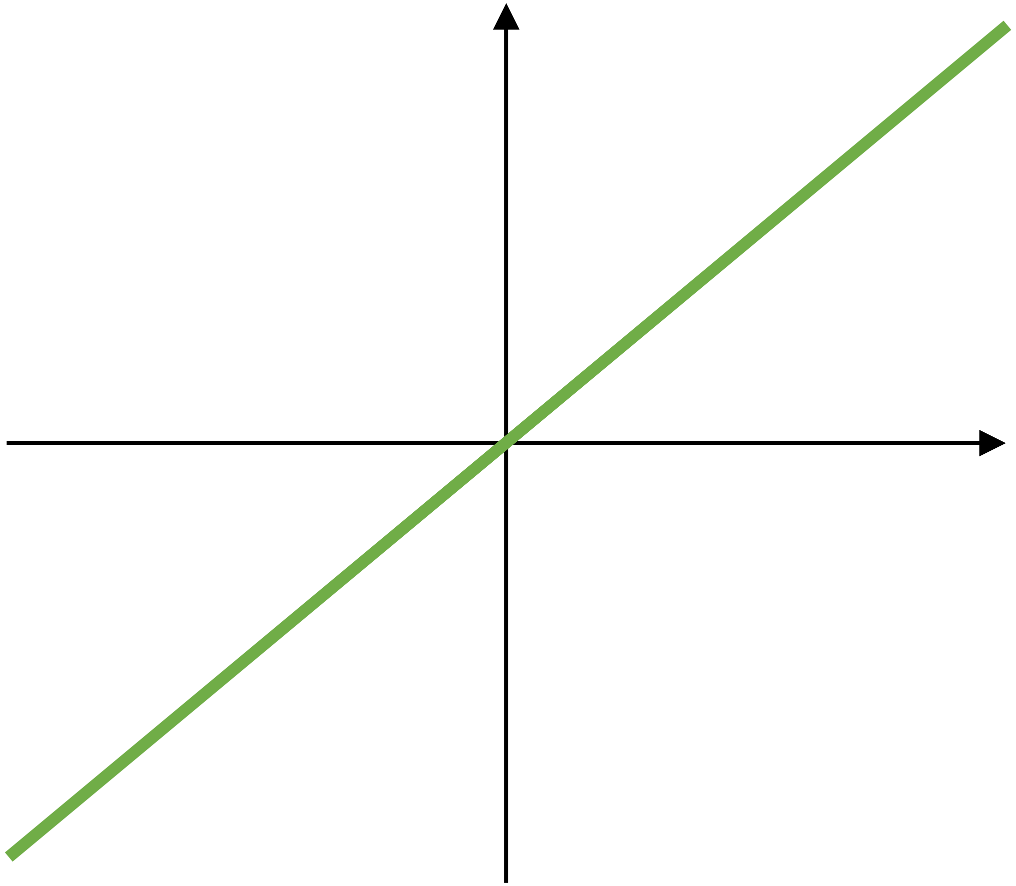
$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$



# Базис и размерность пространства



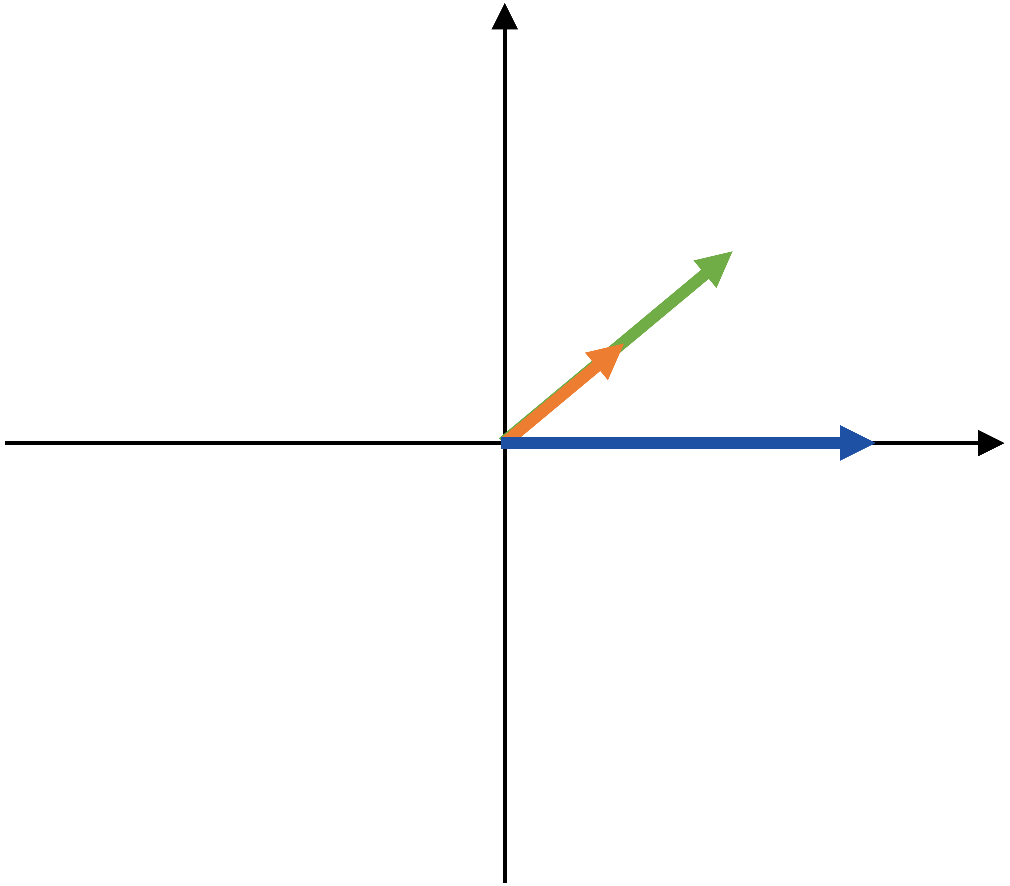
$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^2$$

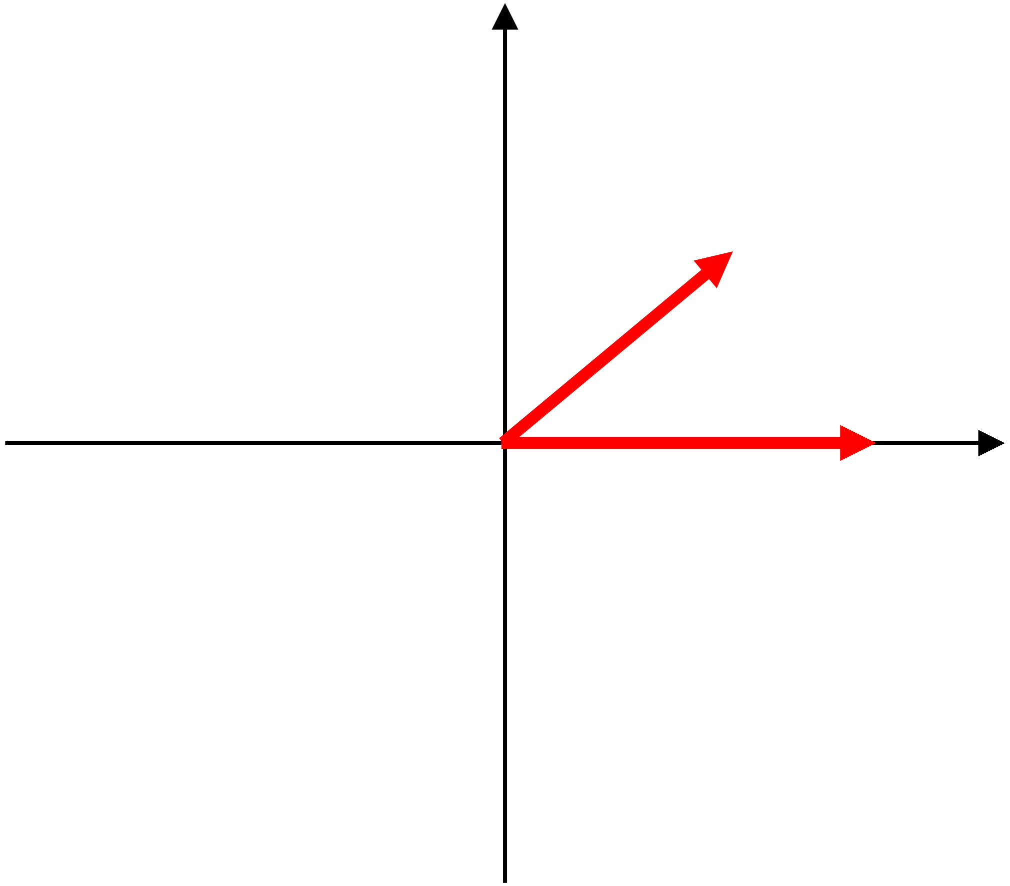


# Базис и размерность пространства



$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

базис



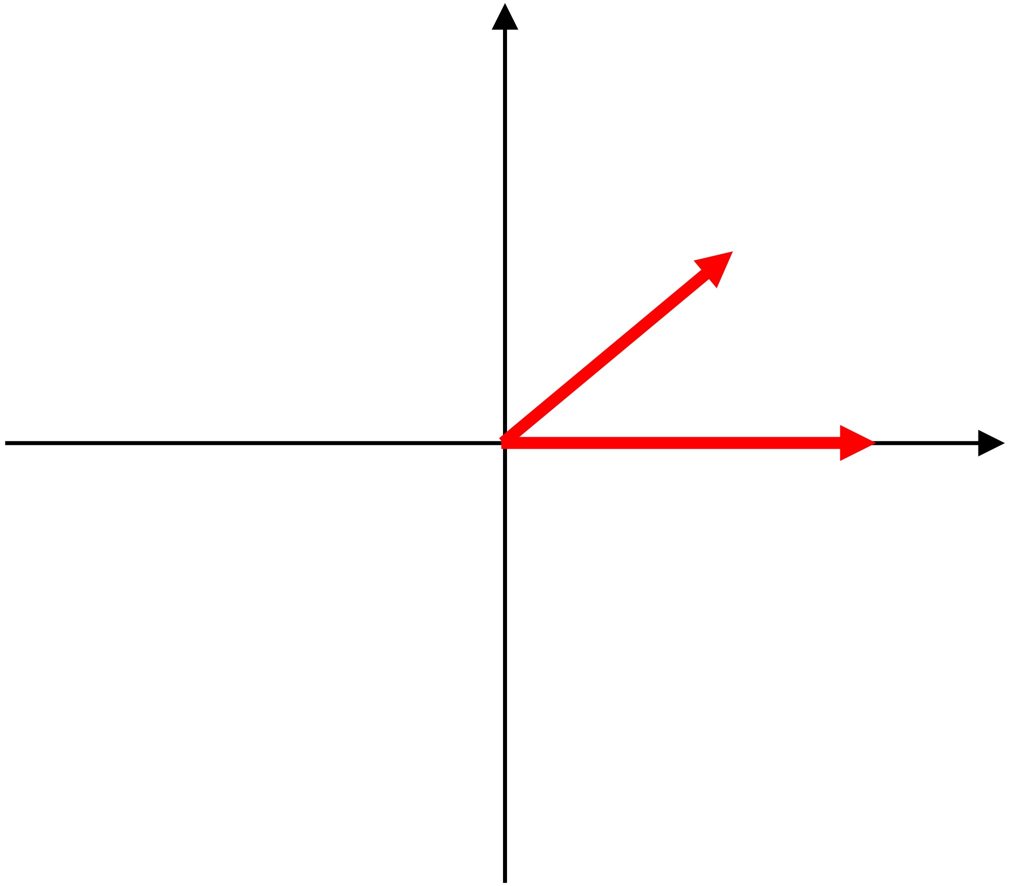
# Базис и размерность пространства



$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$$

базис

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$



# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства полиномов третьей степени

$P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$?

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства полиномов третьей степени
$P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$?

$$P_3 = \mathrm{Span}(1, x, x^2, x^3)$$

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства полиномов третьей степени

$$P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}?$$

$$P_3 = \mathrm{Span}(1, x, x^2, x^3)$$

$$\dim P_3 = 4$$

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства всех полиномов $P_\infty$?

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства всех полиномов $P_\infty$?

$$P_\infty = \operatorname{Span}\left(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots\right)$$

# Базис и размерность пространства

Какова размерность пространства всех полиномов $P_\infty$?

$$P_\infty = \mathrm{Span}\left(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots\right)$$

$$\dim P_\infty = \infty$$

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства всех полиномов $P_\infty$?

$$P_\infty = \operatorname{Span}\left(1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots\right)$$

$$\dim P_\infty = \infty$$

(счетная бесконечность)

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства гладких функций $C^{\infty}$?

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства гладких функций $C^\infty$?

$$C^\infty = \mathrm{Span}(???)$$

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства гладких функций $C^{\infty}$?

$$C^{\infty} = \operatorname{Span}(???)$$

$$\dim C^{\infty} = \infty$$

# Базис и размерность пространства



Какова размерность пространства гладких функций $C^{\infty}$?

$$C^{\infty} = \mathrm{Span}(???)$$

$$\dim C^{\infty} = \infty$$

(несчетная бесконечность)

# Линейные отображения

# Линейные отображения

Отображение $f : V \to W$ между линейными пространствами $V$ и $W$ называется линейным, если

$$\boxed{\begin{gathered} f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ f(cv) = cf(v) \end{gathered}}$$

# Примеры линейных отображений

# Примеры линейных отображений



## Линейная комбинация координат вектора

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + 3y$$

# Примеры линейных отображений



## Линейная комбинация координат вектора

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + 3y$$

## Уважает сложение

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

# Примеры линейных отображений



## Линейная комбинация координат вектора

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + 3y$$

## Уважает умножение на число

$$f\left(c \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2cx + 3cy = c \cdot f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

# Примеры линейных отображений



Вычисление следа матрицы

$$tr : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \mathrm{trace}(A)$$

# Примеры линейных отображений



## Вычисление следа матрицы

$$tr : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \mathrm{trace}(A)$$

## Уважает сложение

$$tr(A + B) = \sum (a_{ii} + b_{ii}) = \sum a_{ii} + \sum b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

# Примеры линейных отображений



## Вычисление следа матрицы

$$tr : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \mathrm{trace}(A)$$

## Уважает умножение на число

$$tr(c \cdot A) = \sum ca_{ii} = c\sum a_{ii} = c \cdot tr(A)$$

# Примеры линейных отображений

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

## Взятие производной

$$\frac{d}{dt} : C^{\infty} \to C^{\infty} : y(t) \mapsto \dot{y}(t)$$

# Примеры линейных отображений



## Взятие производной

$$\frac{d}{dt} : C^{\infty} \to C^{\infty} : y(t) \mapsto \dot{y}(t)$$

## Уважает сложение

$$\frac{d}{dt}(y_1 + y_2) = \frac{d}{dt}(y_1) + \frac{d}{dt}(y_2)$$

# Примеры линейных отображений



## Взятие производной

$$\frac{d}{dt} : C^{\infty} \to C^{\infty} : y(t) \mapsto \dot{y}(t)$$

## Уважает умножение на число

$$\frac{d}{dt}(c \cdot y) = c \cdot \frac{d}{dt}(y)$$

# Антипримеры

# Антипримеры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Вычисление длины вектора

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto \|v\|$$

# Антипримеры



## Вычисление длины вектора

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto \|v\|$$

Не уважает сложение

$$\|a + b\| \neq \|a\| + \|b\|$$

# Антипримеры



Вычисление длины вектора

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto \|v\|$$

Не уважает сложение

$$\|a + b\| \neq \|a\| + \|b\|$$

Вычисление определителя

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \det(A)$$

# Антипримеры



## Вычисление длины вектора

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto ||v||$$

**Не уважает сложение**

$$||a + b|| \neq ||a|| + ||b||$$

## Вычисление определителя

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} : A \mapsto \det(A)$$

**Не уважает умножение на число**

$$\det(cA) = c^n \det(A) \neq c\det(A)$$

# Матрица как линейное отображение

# Матрица как линейное отображение



Матрице $A_{m \times n}$ соответствует линейное отображение

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$$

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$

Пространство $\mathbb{R}^2$

# Матрица как линейное отображение



Пространство $\mathbb{R}^3$

Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение



Пространство $\mathbb{R}^3$

Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Сейчас придёт матрица
и будет отображать…

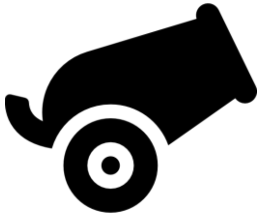
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$ | Пространство $\mathbb{R}^2$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

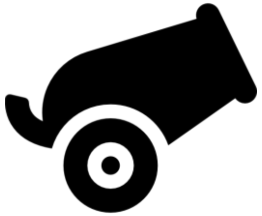
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$

Пространство $\mathbb{R}^2$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение



Пространство $\mathbb{R}^3$

Пространство $\mathbb{R}^2$

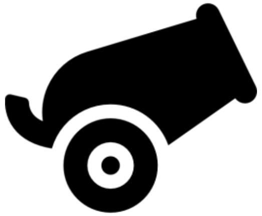
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$ Пространство $\mathbb{R}^2$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

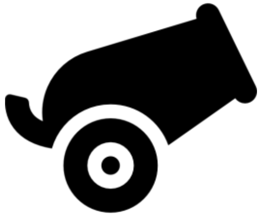
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение



Пространство $\mathbb{R}^3$

Пространство $\mathbb{R}^2$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

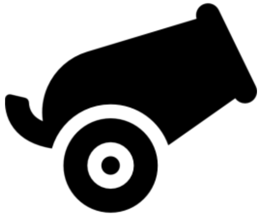
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$ 	Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}$$

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$ Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$

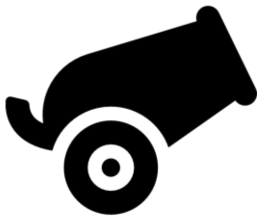
$$\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$

Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$

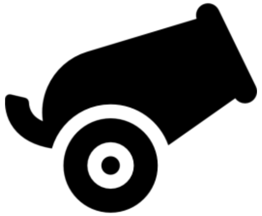
$$\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}$$

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$ | Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

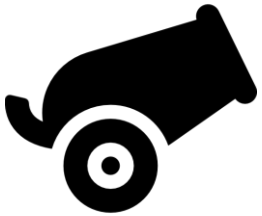
# Матрица как линейное отображение



Пространство $\mathbb{R}^3$ | Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix} =$$

# Матрица как линейное отображение

Пространство $\mathbb{R}^3$ Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\25\end{bmatrix}$$

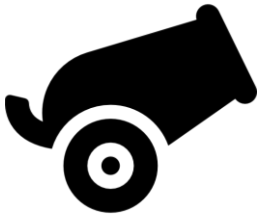
# Матрица как линейное отображение



Пространство $\mathbb{R}^3$ Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\25\end{bmatrix}$$

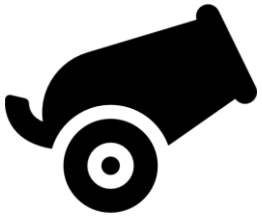
# Матрица как линейное отображение

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Пространство $\mathbb{R}^3$ — Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}5\\9\end{bmatrix}$$



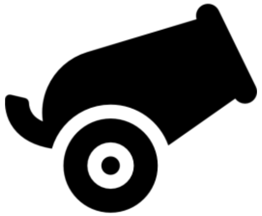
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\25\end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение



Пространство $\mathbb{R}^3$ — Пространство $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$



Матрица $2 \times 3$ сработала как линейное отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение



$$\begin{bmatrix} | \\ y \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & A & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ x \\ | \end{bmatrix}$$

Матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ отображает вектор $x \in \mathbb{R}^n$ в вектор $y \in \mathbb{R}^m$ (легко показать, что это отображение – линейное)

# Матрица как линейное отображение



Любое линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto y$
может быть задано как $y = Ax$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

# Матрица как линейное отображение



Любое линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto y$ может быть задано как $y = Ax$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

## Пример

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto 2x_1 + 3x_2$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Матрица как линейное отображение



Любое линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto y$ может быть задано как $y = Ax$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

# Матрица как линейное отображение



Любое линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto y$ может быть задано как $y = Ax$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Куда при этом переходят стандартные базисные вектора пространства $\mathbb{R}^n$?

# Матрица как линейное отображение



Любое линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto y$ может быть задано как $y = Ax$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Куда при этом переходят стандартные базисные вектора пространства $\mathbb{R}^n$?

В вектора, совпадающие со столбцами матрицы!

# Смысл столбцов матрицы

# Смысл столбцов матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ соответствует отображению $f : \mathbb{R}^{?} \to \mathbb{R}^{?}$

# Смысл столбцов матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ соответствует отображению $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

# Смысл столбцов матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ соответствует отображению $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Во что она превратит стандартный базис $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ пространства $\mathbb{R}^3$?

# Смысл столбцов матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ соответствует отображению $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Во что она превратит стандартный базис $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ пространства $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

# Смысл столбцов матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ соответствует отображению $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Во что она превратит стандартный базис $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ пространства $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

В вектора $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, совпадающие со столбцами матрицы.

# Смысл столбцов матрицы

Хочу задать линейное отображение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
указав, куда переходят базисные вектора.

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\8\\0\end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\3\\3\\3\end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\7\\8\\6\end{bmatrix}$$

# Смысл столбцов матрицы



Хочу задать линейное отображение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
указав, куда переходят базисные вектора.

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\8\\0\end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\3\\3\\3\end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\7\\8\\6\end{bmatrix}$$

Какая матрица соответствует этому отображению?

# Смысл столбцов матрицы

Хочу задать линейное отображение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
указав, куда переходят базисные вектора.

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\8\\0\end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\3\\3\\3\end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\7\\8\\6\end{bmatrix}$$

Какая матрица соответствует этому отображению?

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\0 & 3 & 7\\8 & 3 & 8\\0 & 3 & 6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times3}.$$

# Композиция отображений
# = произведение матриц

# Картинка

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
$$

# Картинка

$$f(x) = Ax$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

# Картинка

$f(x) = Ax$

$g(x) = Bx$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
$$

# Картинка

$f(x) = Ax$

$g(x) = Bx$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
$$

$$h(x) = g\big(f(x)\big)$$

Отображение $h$ – композиция отображений $f$ и $g$

# Картинка

$$f(x) = Ax \qquad g(x) = Bx$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}$$

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = \ ?\ x$$

Отображение $h$ — композиция отображений $f$ и $g$

# Картинка

$$f(x) = Ax \qquad g(x) = Bx$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = BAx$$

Отображение $h$ — композиция отображений $f$ и $g$

# Картинка

$$f(x) = Ax \qquad\qquad g(x) = Bx$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}$$

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = BAx$$

$$B_{k\times m}A_{m\times n} = (BA)_{k\times n}$$

Отображение $h$ $-$ композиция отображений $f$ и $g$

# Картинка

$f(x) = Ax$

$g(x) = Bx$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

$h(x) = g\big(f(x)\big) = BAx$

Такие картинки называются коммутативными диаграммами

# Особые пространства, связанные с матрицей

# Range $A$

Множество всех векторов $Ax \in \mathbb{R}^m$, которые могут получиться из всевозможных векторов $x \in \mathbb{R}^n$ в результате отображения $x \mapsto Ax$

# Range $A$

Множество всех векторов $Ax \in \mathbb{R}^m$, которые могут получиться из всевозможных векторов $x \in \mathbb{R}^n$ в результате отображения $x \mapsto Ax$

$$\boxed{\text{Range } A_{m\times n} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}}$$

# Range $A$

Множество всех векторов $Ax \in \mathbb{R}^m$, которые могут получиться из всевозможных векторов $x \in \mathbb{R}^n$ в результате отображения $x \mapsto Ax$

$$\boxed{\text{Range } A_{m\times n} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}}$$

## Другие названия

Образ матрицы $A$, столбцовое пространство матрицы $A$, $\mathrm{Im}(A)$

# Примеры

$$\mathrm{Range}\,[1 \quad 1] =$$

# Примеры

$$\operatorname{Range}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} =$$ множество всех возможных значений произведения $$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$$

# Примеры



$$\mathrm{Range}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = $$ множество всех возможных значений произведения $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$ $= ?$

# Примеры



$$\mathrm{Range}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \text{множество всех возможных значений произведения } \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = \mathbb{R}$$

# Примеры



$\text{Range}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} =$ множество всех возможных значений произведения $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ $= \mathbb{R}$

$$\text{Range}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} =$$

# Примеры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$\text{Range}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \underset{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}{\text{множество всех возможных значений произведения}} = \mathbb{R}$$

$$\text{Range}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \underset{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}{\text{множество всех возможных значений произведения}}$$

# Примеры

$$\text{Range}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \text{множество всех возможных значений произведения } \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = \mathbb{R}$$

$$\text{Range}\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = \text{множество всех возможных значений произведения } \begin{bmatrix}1 & 2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = ?$$

# Примеры

$\text{Range}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} =$ множество всех возможных значений произведения $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$ $= \mathbb{R}$

$\text{Range}\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 0 & 0\end{bmatrix} =$ множество всех возможных значений произведения $\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$ $= \left\{ \begin{bmatrix}a \\ 0\end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathrm{Range}\,A =$ линейная оболочка столбцов

# $\mathrm{Range}\,A =$ линейная оболочка столбцов



Произведение матрицы на вектор $=$
линейная комбинация столбцов матрицы

# Range $A$ = линейная оболочка столбцов



Произведение матрицы на вектор =
= линейная комбинация столбцов матрицы

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

# Range $A$ = линейная оболочка столбцов



Произведение матрицы на вектор =
= линейная комбинация столбцов матрицы

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix}$$

# $\mathrm{Range}\,A$ = линейная оболочка столбцов



Произведение матрицы на вектор =
линейная комбинация столбцов матрицы

$\Downarrow$

$\mathrm{Range}$ матрицы – множество всех возможных линейных комбинаций столбцов матрицы

# Range $A$ = линейная оболочка столбцов



Произведение матрицы на вектор =
линейная комбинация столбцов матрицы

$$\Downarrow$$

Range матрицы – множество всех возможных линейных комбинаций столбцов матрицы

$$\Downarrow$$

$$\text{Range}\,A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix}\right)$$

# Nullspace $A$

Множество всех векторов $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $Ax = 0$

# Nullspace $A$

Множество всех векторов $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $Ax = 0$

$$\boxed{\text{Nullspace } A_{m\times n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \in \mathbb{R}^m\}}$$

# Nullspace $A$

Множество всех векторов $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $Ax = 0$

$$\boxed{\text{Nullspace } A_{m \times n} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \in \mathbb{R}^m\}}$$

## Другие названия

Нуль-пространство матрицы $A$, ядро матрицы $A$, $\mathrm{Ker}(A)$

# Примеры

$$\mathrm{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} =$$

# Примеры

$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} =$$

множество всех $\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$ таких, что

$$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = 0$$

# Примеры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \begin{array}{c}\text{множество всех } \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \\ \text{таких, что} \\ \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = 0\end{array} = ?$$

# Примеры



$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \begin{array}{c}\text{множество всех } \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} \\ \text{таких, что} \\ \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = 0\end{array} = \left\{ \begin{bmatrix}a \\ -a\end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$

# Примеры



$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} =$$

множество всех $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ таких, что

$$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix}a\\-a\end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} =$$

# Примеры



$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = $$ множество всех $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ таких, что $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0$ $$= \left\{\begin{bmatrix}a\\-a\end{bmatrix}\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = $$ множество всех $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ таких, что $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

# Примеры



$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \begin{matrix}\text{множество всех } \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \\ \text{таких, что} \\ \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0\end{matrix} = \left\{\begin{bmatrix}a\\-a\end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{matrix}\text{множество всех } \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \\ \text{таких, что} \\ \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\end{matrix} = ?$$

# Примеры



$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} = \text{множество всех } \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \text{ таких, что } \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0 = \left\{ \begin{bmatrix}a\\-a\end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Nullspace}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \text{множество всех } \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \text{ таких, что } \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathrm{Range}\, A_{m\times n}$ – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$

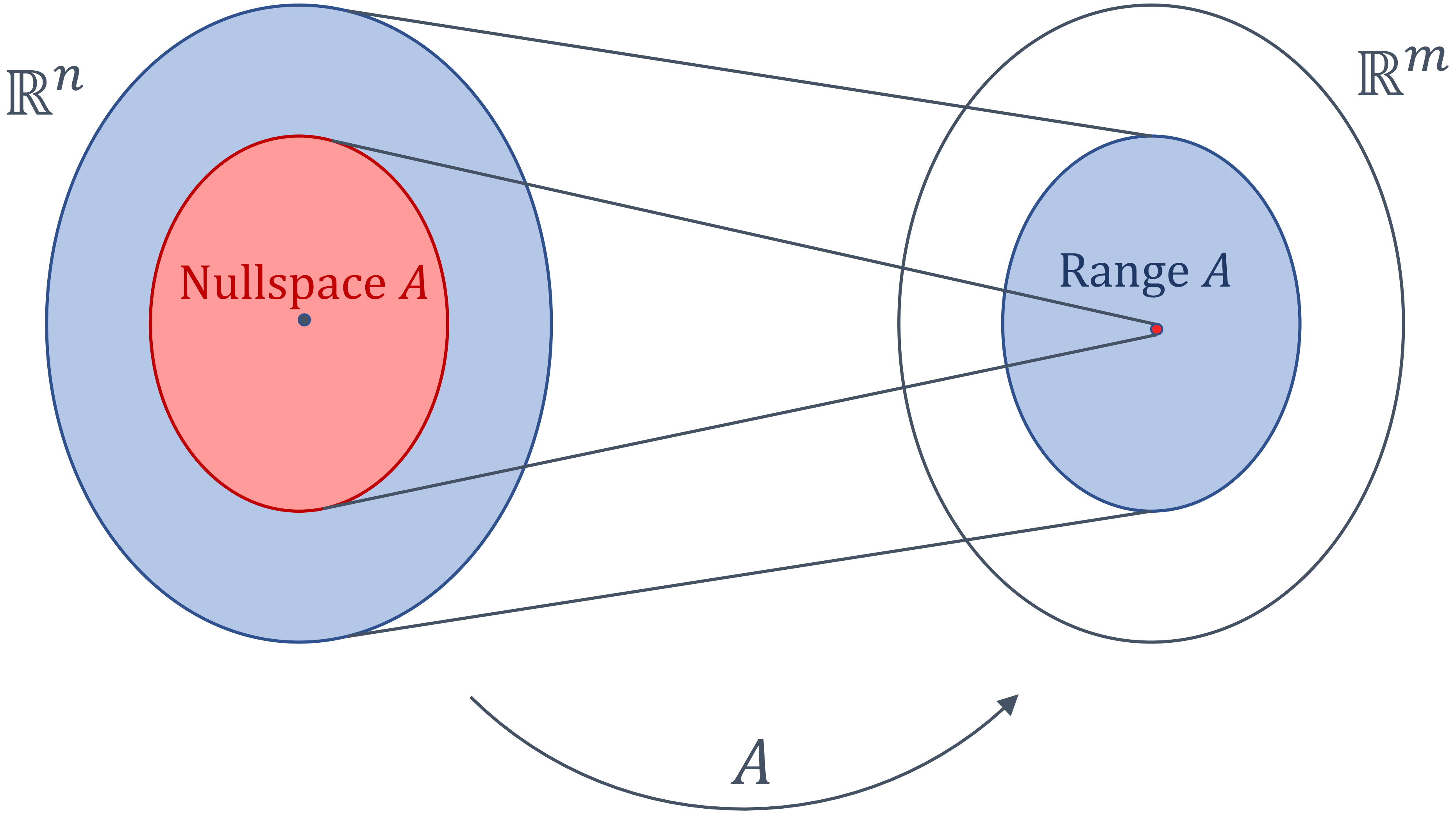
$\mathrm{Nullspace}\, A_{m\times n}$ – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$

Range $A_{m\times n}$ — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$

Nullspace $A_{m\times n}$ — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$

Оба факта докажите самостоятельно

# Картинка



# Размерности образа и ядра

# Размерности образа и ядра

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Range} A) \\ \operatorname{nullity} A = \dim(\operatorname{Nullspace} A)\end{gathered}}$$

# Размерности образа и ядра

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Ранг матрицы

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Range} A)\\ \operatorname{nullity} A = \dim(\operatorname{Nullspace} A)\end{gathered}}$$

# Размерности образа и ядра

Ранг матрицы

$$\text{rank}\, A = \dim(\text{Range}\, A)$$

$$\text{nullity}\, A = \dim(\text{Nullspace}\, A)$$

«Дефект», «размерность ядра» матрицы

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range}\,A = ?$ $\quad$ $\text{rank}\,A = ?$ $\quad$ $\text{Nullspace}\,A = ?$ $\quad$ $\text{nullity}\,A = ?$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Range}\, A = ?$ $\quad \mathrm{rank}\, A = ?$ $\quad \mathrm{Nullspace}\, A = ?$ $\quad \mathrm{nullity}\, A = ?$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range}\, A = ?$ $\quad$ $\text{rank}\, A = ?$ $\quad$ $\text{Nullspace}\, A = ?$ $\quad$ $\text{nullity}\, A = ?$

$$\text{Range}\, A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}\right)$$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range } A = ?$ $\text{rank } A = ?$ $\text{Nullspace } A = ?$ $\text{nullity } A = ?$

$$\text{Range } A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range}\, A = ?$ $\quad \text{rank}\, A = ?$ $\quad \text{Nullspace}\, A = ?$ $\quad \text{nullity}\, A = ?$

$$\text{Range}\, A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

# Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range}\, A = ?$ $\text{rank}\, A = ?$ $\text{Nullspace}\, A = ?$ $\text{nullity}\, A = ?$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range}\, A = ?$ $\quad \text{rank}\, A = ?$ $\quad \text{Nullspace}\, A = ?$ $\quad \text{nullity}\, A = ?$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 3x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range } A = ?$ $\text{rank } A = ?$ $\text{Nullspace } A = ?$ $\text{nullity } A = ?$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 3x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1$ и $x_5$ должны быть нулями, остальные – любые.

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range}\, A = ?$ $\text{rank}\, A = ?$ $\text{Nullspace}\, A = ?$ $\text{nullity}\, A = ?$

$$\text{Nullspace}\, A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range } A = ?$ $\quad \text{rank } A = ?$ $\quad \text{Nullspace } A = ?$ $\quad \text{nullity } A = ?$

$$\text{Nullspace } A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range}\, A = ?$ $\text{rank}\, A = ?$ $\text{Nullspace}\, A = ?$ $\text{nullity}\, A = ?$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{Range } A = ?$ $\quad \text{rank } A = ?$ $\quad \text{Nullspace } A = ?$ $\quad \text{nullity } A = ?$

$$\text{Range } A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{Nullspace } A = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Range}\,A = ?$ $\quad \mathrm{rank}\,A = ?$ $\quad \mathrm{Nullspace}\,A = ?$ $\quad \mathrm{nullity}\,A = ?$

$$\mathrm{Range}\,A = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \mathrm{Nullspace}\,A = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$\mathrm{rank}\,A = 2$

$\mathrm{nullity}\,A = 3$

# Пример

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} A = 2 \qquad \operatorname{nullity} A = 3$$

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{nullity} A = \text{ширина матрицы}$$

# Пример



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} A = 2 \qquad \operatorname{nullity} A = 3$$

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{nullity} A = \text{ширина матрицы}$$

Это неслучайно!

# Rank-nullity theorem

(теорема о ранге и дефекте, теорема о размерностях ядра и образа)

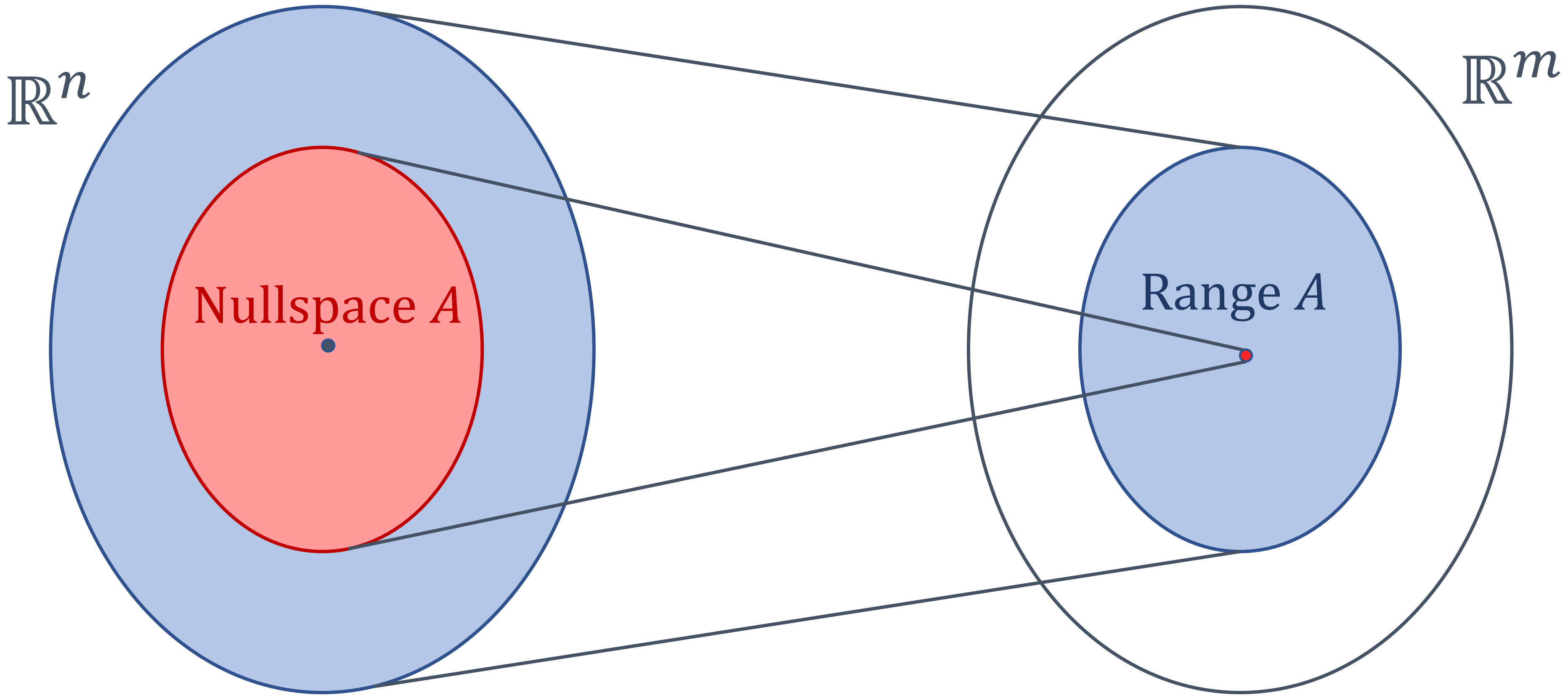
# Rank-nullity theorem

(теорема о ранге и дефекте, теорема о размерностях ядра и образа)

$$\boxed{\operatorname{rank} A_{m\times n} + \operatorname{nullity} A_{m\times n} = n}$$

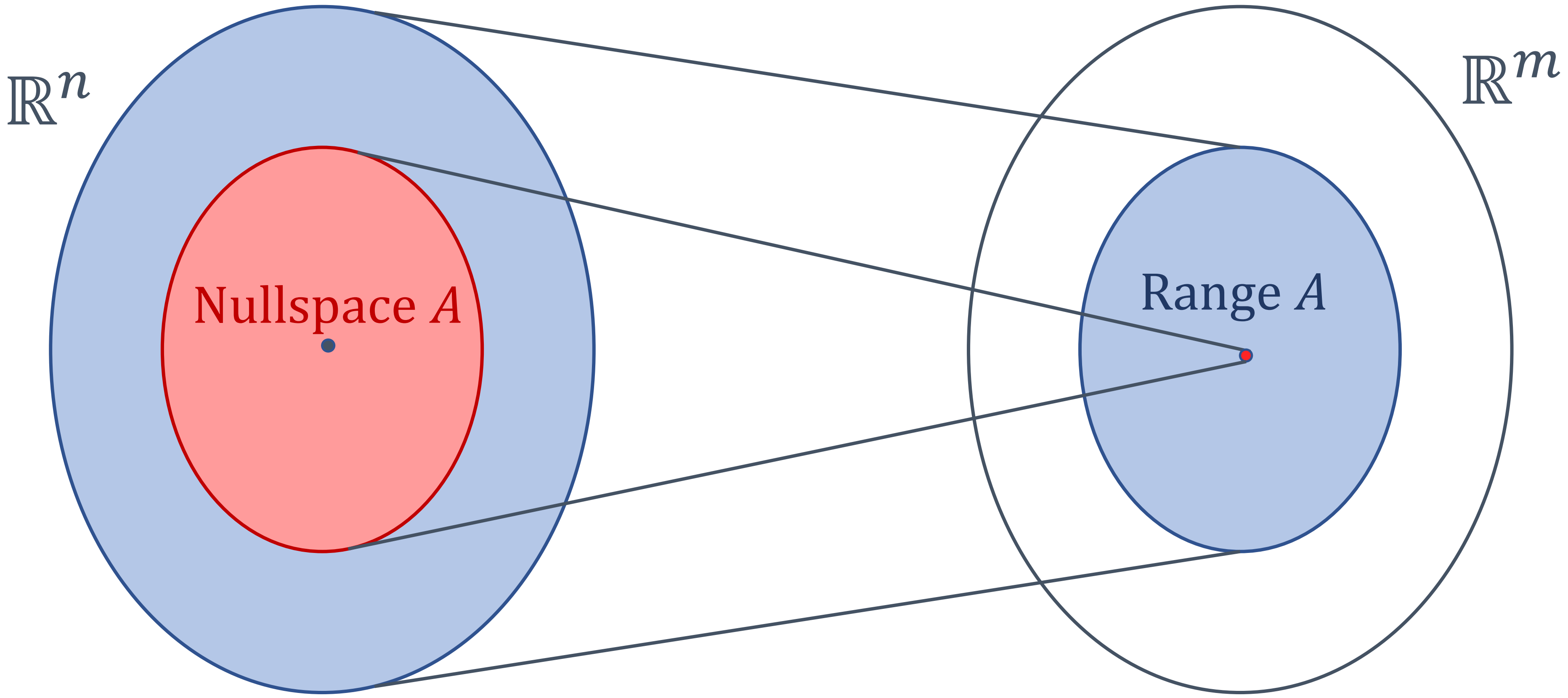
# Как увидеть эту теорему на картинке?





# Как увидеть эту теорему на картинке?






Размерность синенького + размерность красненького = размерность исходного пространства

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

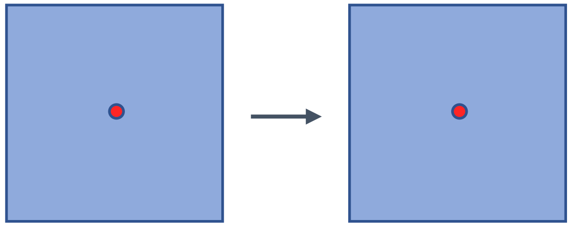
# Примеры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

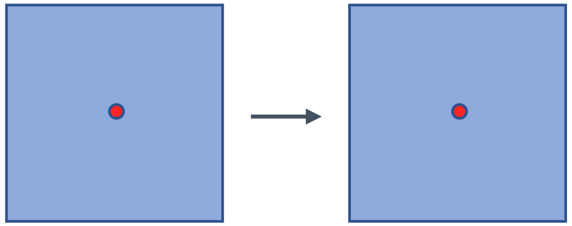
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость $\to$ плоскость



$\text{Range}\ A = \mathbb{R}^2$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

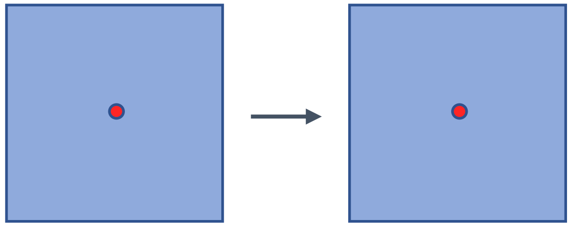
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

$$\text{rank } A = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

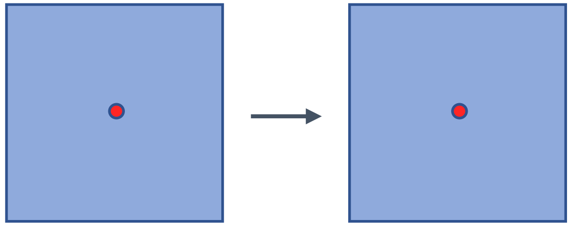
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\mathrm{Range}\ A = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{rank}\ A = 2$$

$$\mathrm{Nullspace}\ A = \{0\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

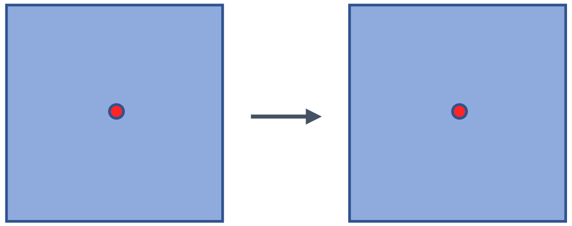
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

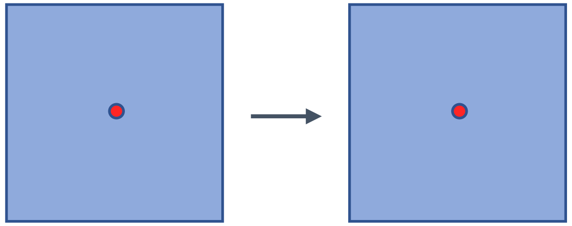
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

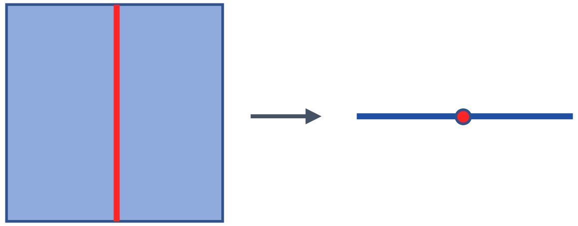
$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

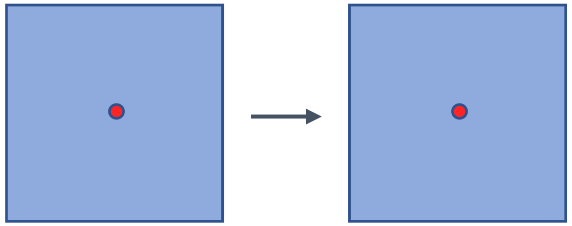
# Примеры



Рассмотрим три линейных отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

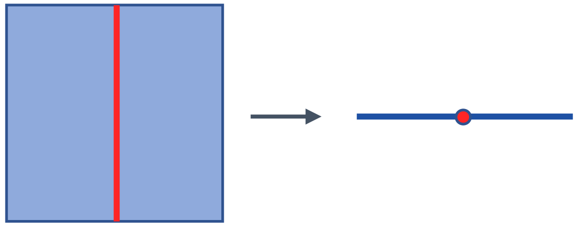
$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\text{Range } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

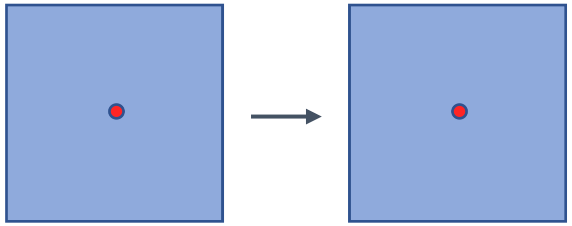
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

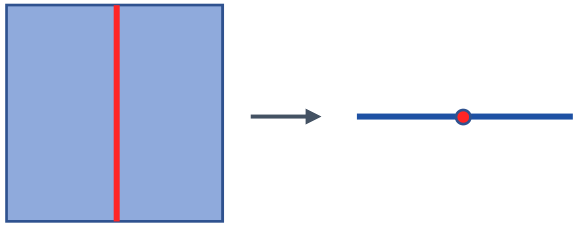
$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\text{Range } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{rank } B = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

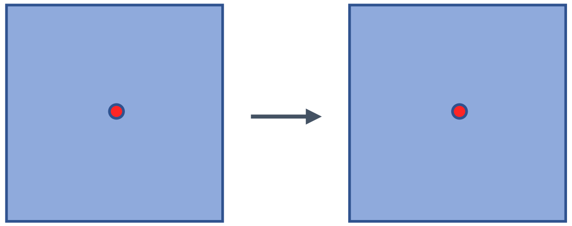
# Примеры



Рассмотрим три линейных отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

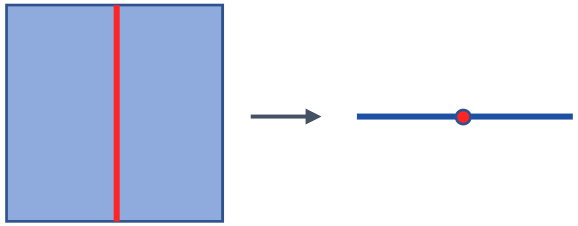
$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\text{Range } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{rank } B = 1$$

$$\text{Nullspace } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

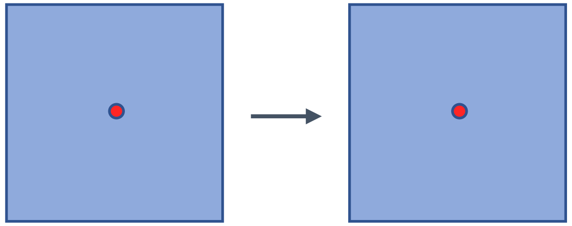
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

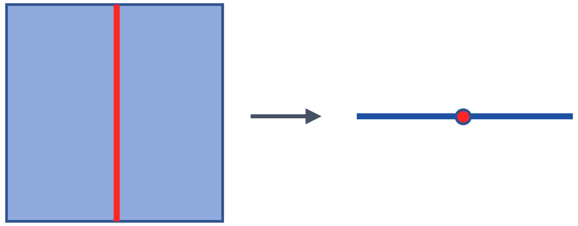
$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\text{Range } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{rank } B = 1$$

$$\text{Nullspace } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{nullity } B = 1$$

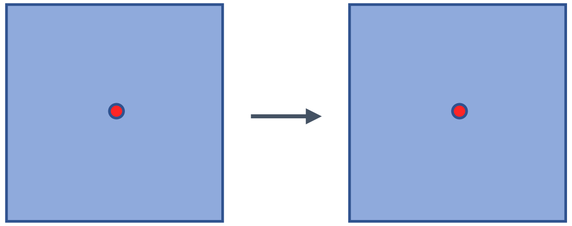
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\mathrm{Range}\ A = \mathbb{R}^2$$

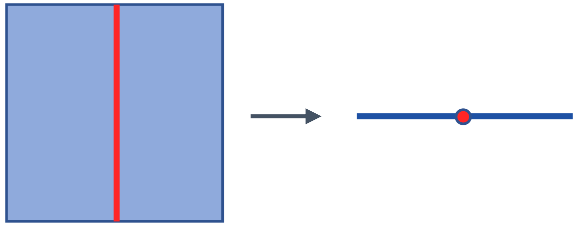
$$\mathrm{rank}\ A = 2$$

$$\mathrm{Nullspace}\ A = \{0\}$$

$$\mathrm{nullity}\ A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\mathrm{Range}\ B = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

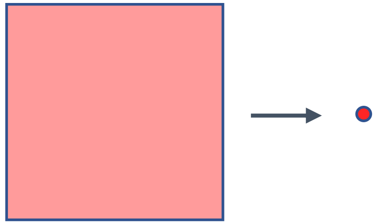
$$\mathrm{rank}\ B = 1$$

$$\mathrm{Nullspace}\ B = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathrm{nullity}\ B = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → точка

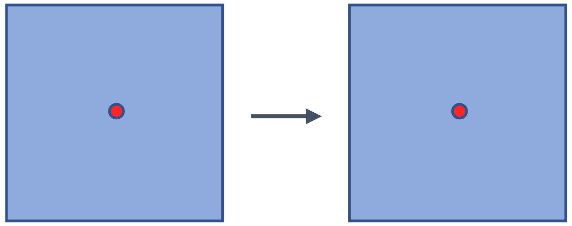


# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

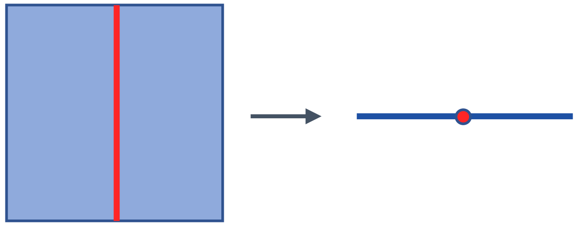
$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\text{Range } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

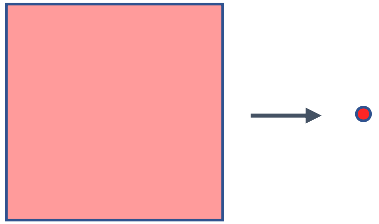
$$\text{rank } B = 1$$

$$\text{Nullspace } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{nullity } B = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → точка



$$\text{Range } C = \{0\}$$

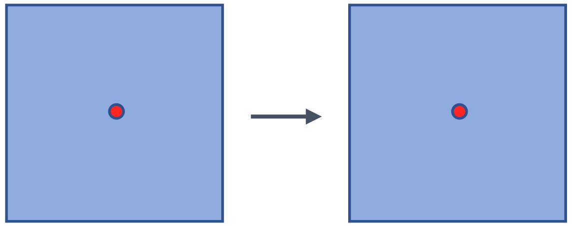
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$$

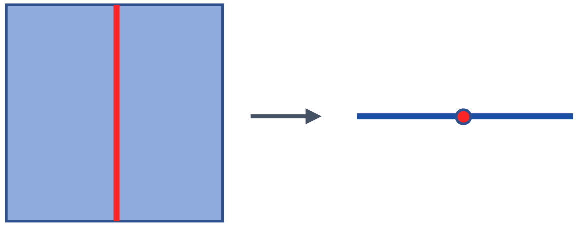
$$\text{rank } A = 2$$

$$\text{Nullspace } A = \{0\}$$

$$\text{nullity } A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\text{Range } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

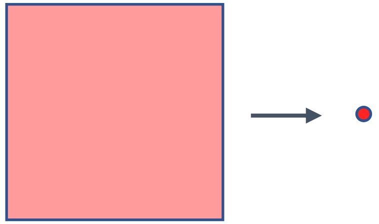
$$\text{rank } B = 1$$

$$\text{Nullspace } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{nullity } B = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → точка



$$\text{Range } C = \{0\}$$

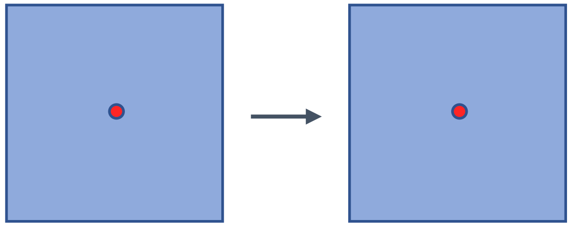
$$\text{rank } C = 0$$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$\text{Range } A = \mathbb{R}^2$

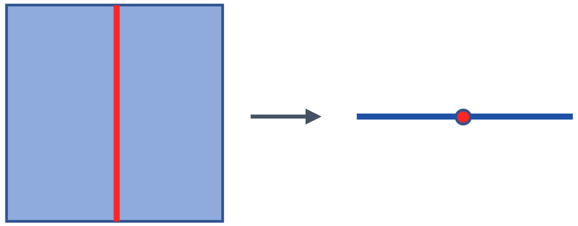
$\text{rank } A = 2$

$\text{Nullspace } A = \{0\}$

$\text{nullity } A = 0$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$\text{Range } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

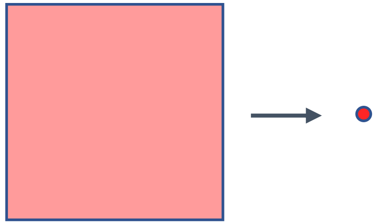
$\text{rank } B = 1$

$\text{Nullspace } B = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$\text{nullity } B = 1$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → точка



$\text{Range } C = \{0\}$

$\text{rank } C = 0$

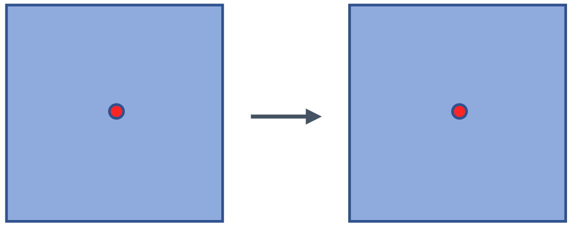
$\text{Nullspace } C = \mathbb{R}^2$

# Примеры

Рассмотрим три линейных отображения $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

плоскость → плоскость



$$\mathrm{Range}\ A = \mathbb{R}^2$$

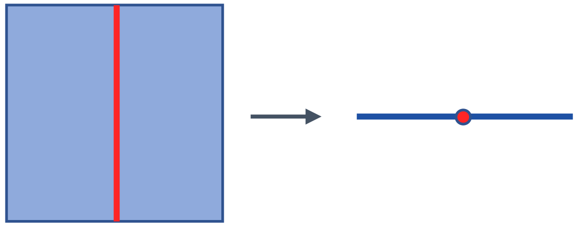
$$\mathrm{rank}\ A = 2$$

$$\mathrm{Nullspace}\ A = \{0\}$$

$$\mathrm{nullity}\ A = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → прямая



$$\mathrm{Range}\ B = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

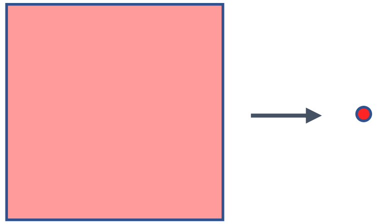
$$\mathrm{rank}\ B = 1$$

$$\mathrm{Nullspace}\ B = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathrm{nullity}\ B = 1$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

плоскость → точка



$$\mathrm{Range}\ C = \{0\}$$

$$\mathrm{rank}\ C = 0$$

$$\mathrm{Nullspace}\ C = \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{nullity}\ C = 2$$

Линейное преобразование — линейное отображение $f : V \to V$ пространства в себя

Линейному преобразованию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ соответствует **квадратная** матрица

# Примеры линейных преобразований плоскости

# Растяжение

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$

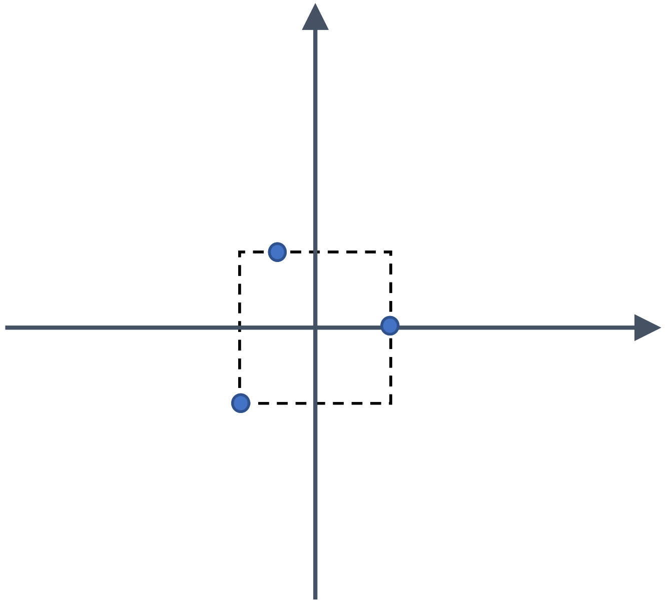
# Растяжение

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{\text{old}} \\ 3y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$

# Растяжение



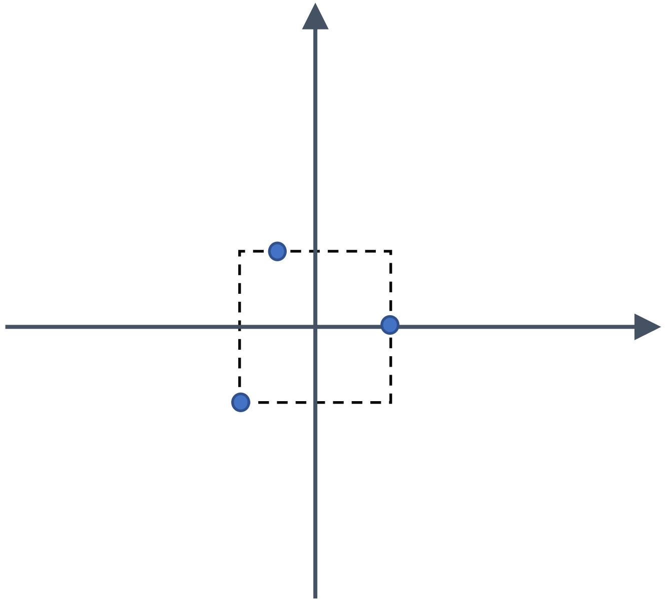
$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$

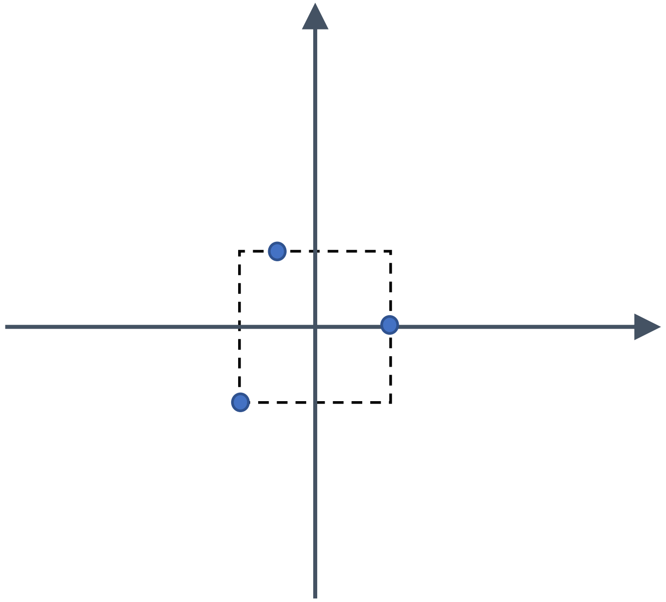


# Растяжение



$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$

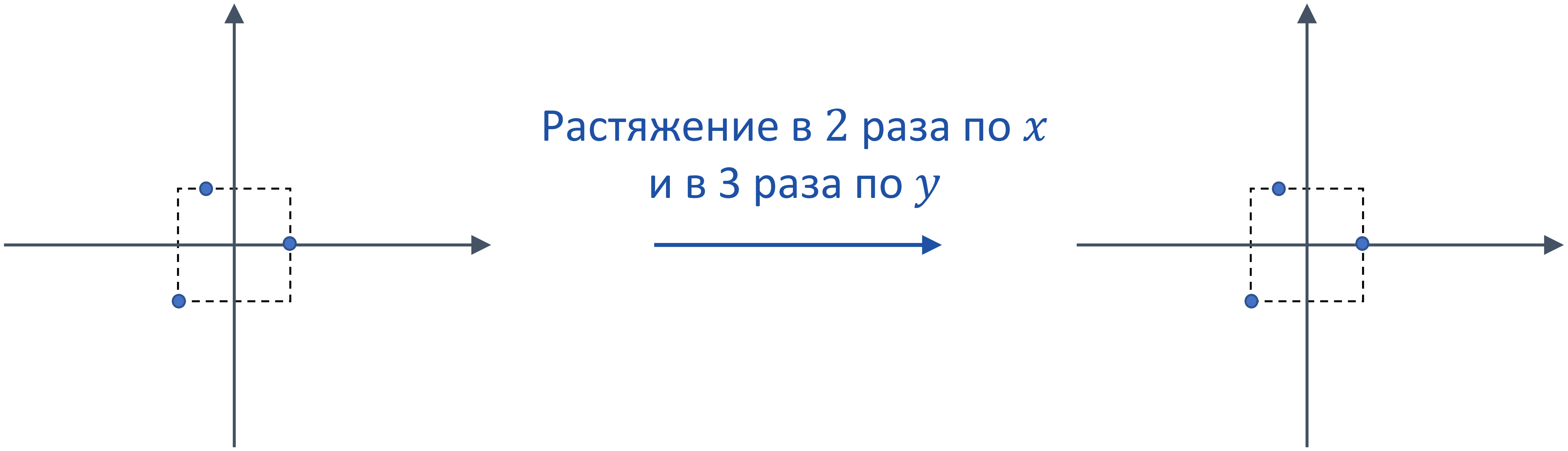




# Растяжение



$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$

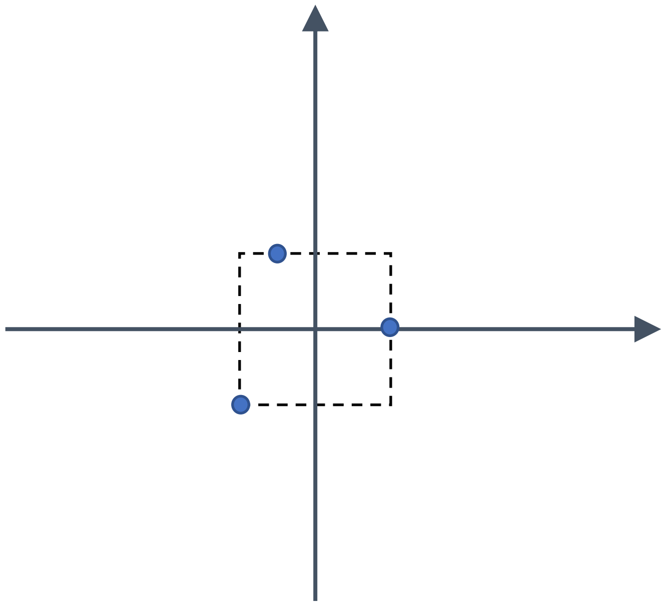


Растяжение в 2 раза по $x$
и в 3 раза по $y$

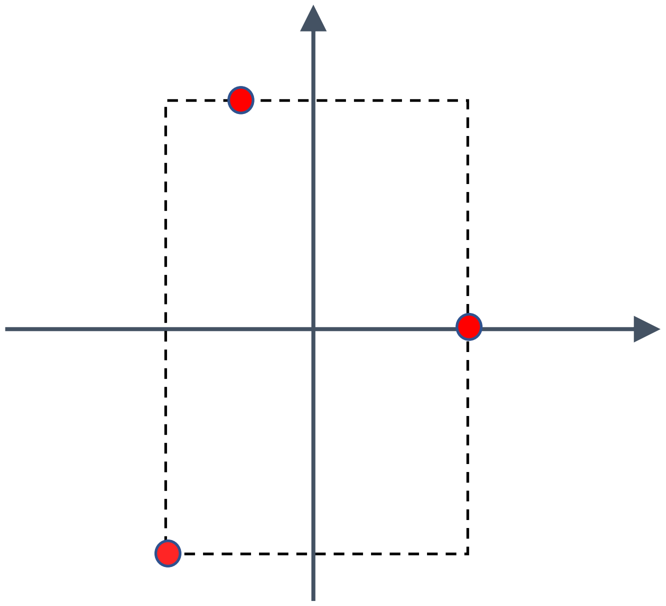
# Растяжение



$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$



Растяжение в 2 раза по $x$ и в 3 раза по $y$



# Поворот

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$

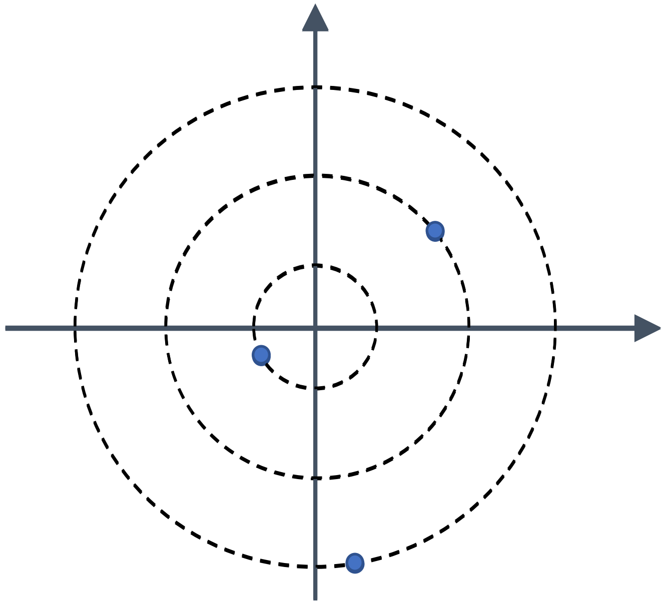
# Поворот

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{\text{old}} \\ x_{\text{old}} \end{bmatrix}$$

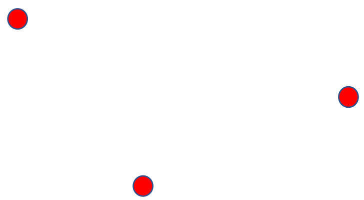
# Поворот



$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$



Поворот на $90^{\circ}$
против часовой стрелки



# Ещё примеры

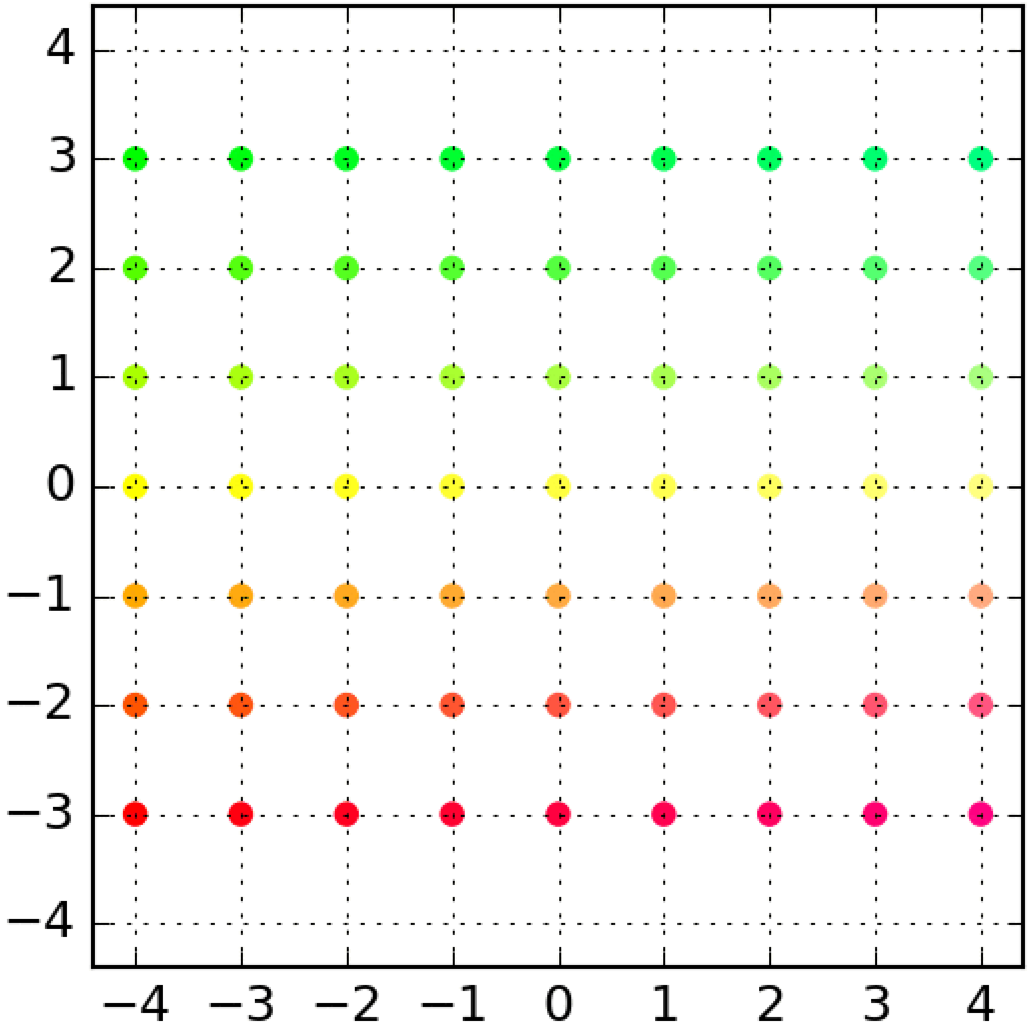
# Ещё примеры

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

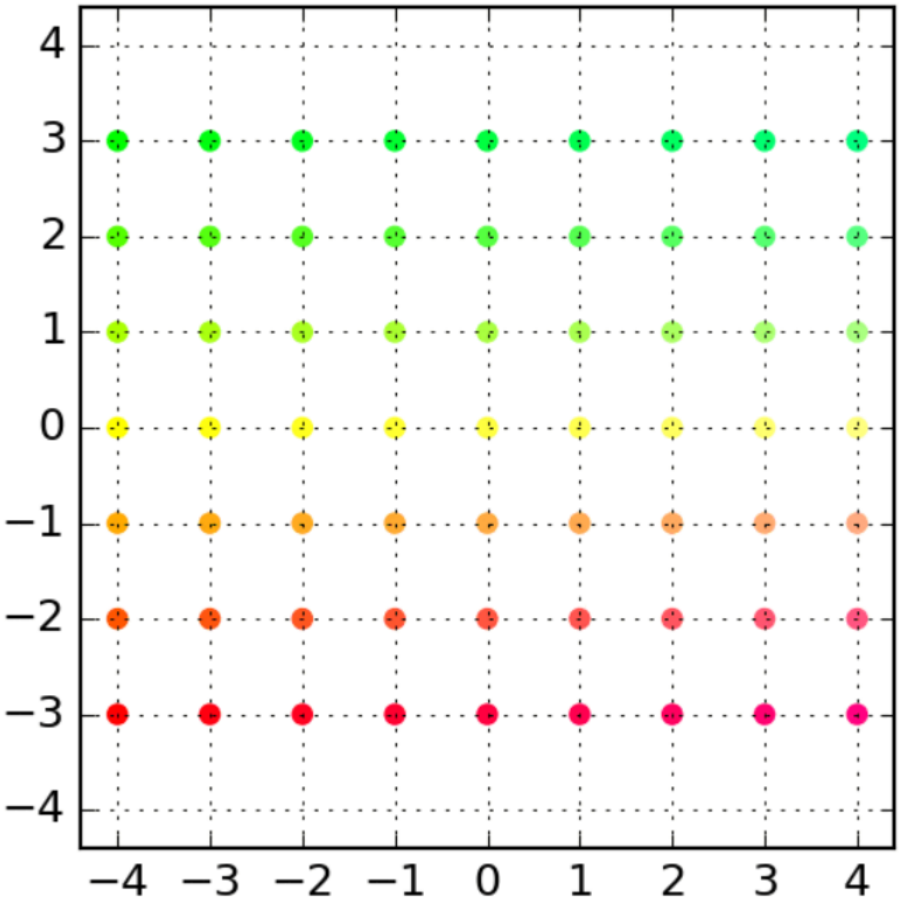
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Ещё примеры

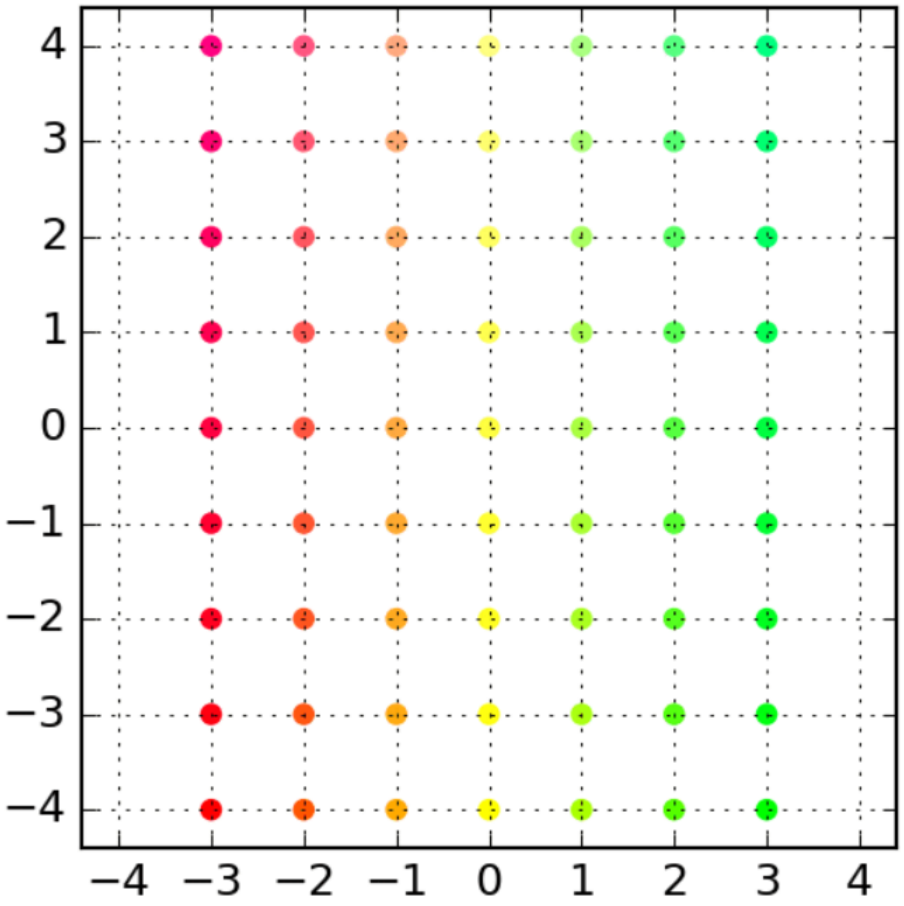
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$



# Ещё примеры




$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



# Ещё примеры

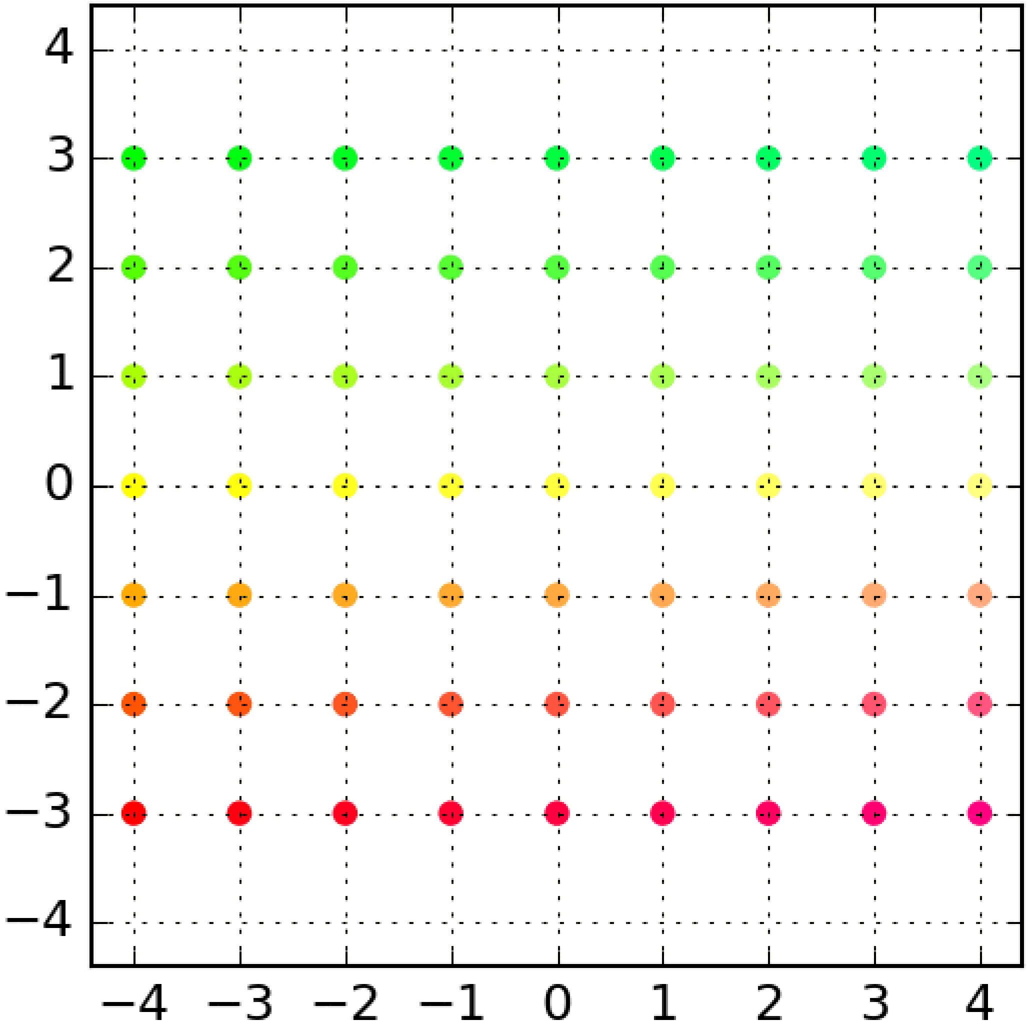


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

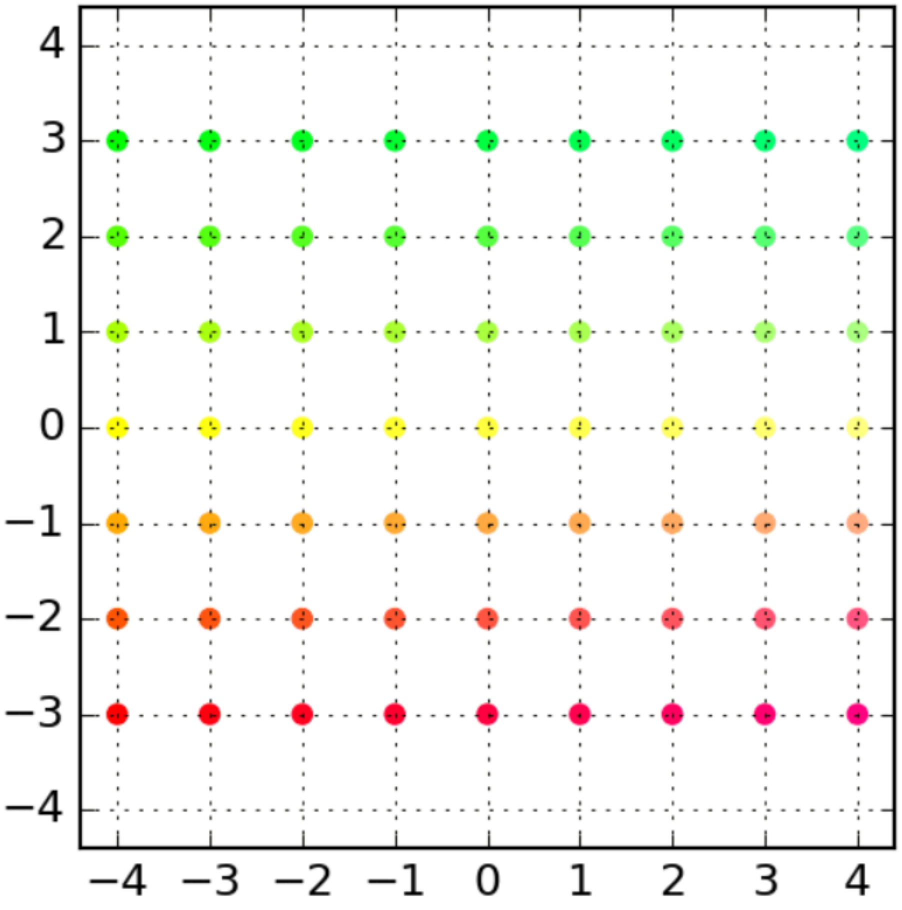
# Ещё примеры



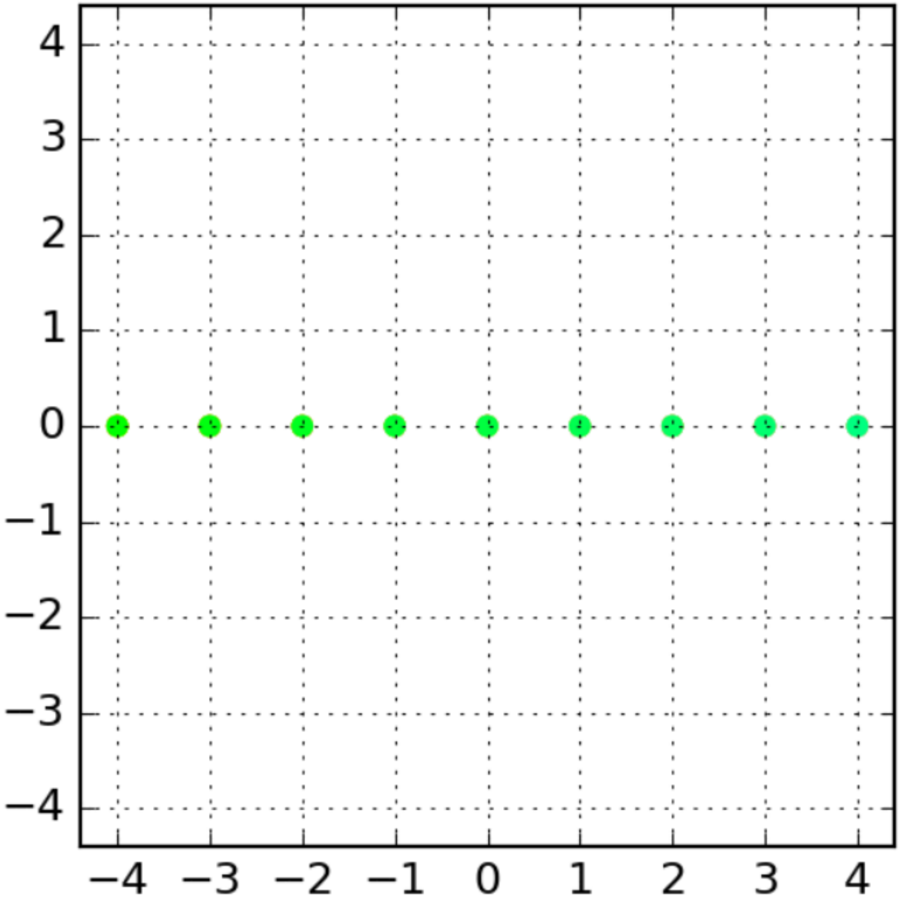
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$



# Ещё примеры




$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

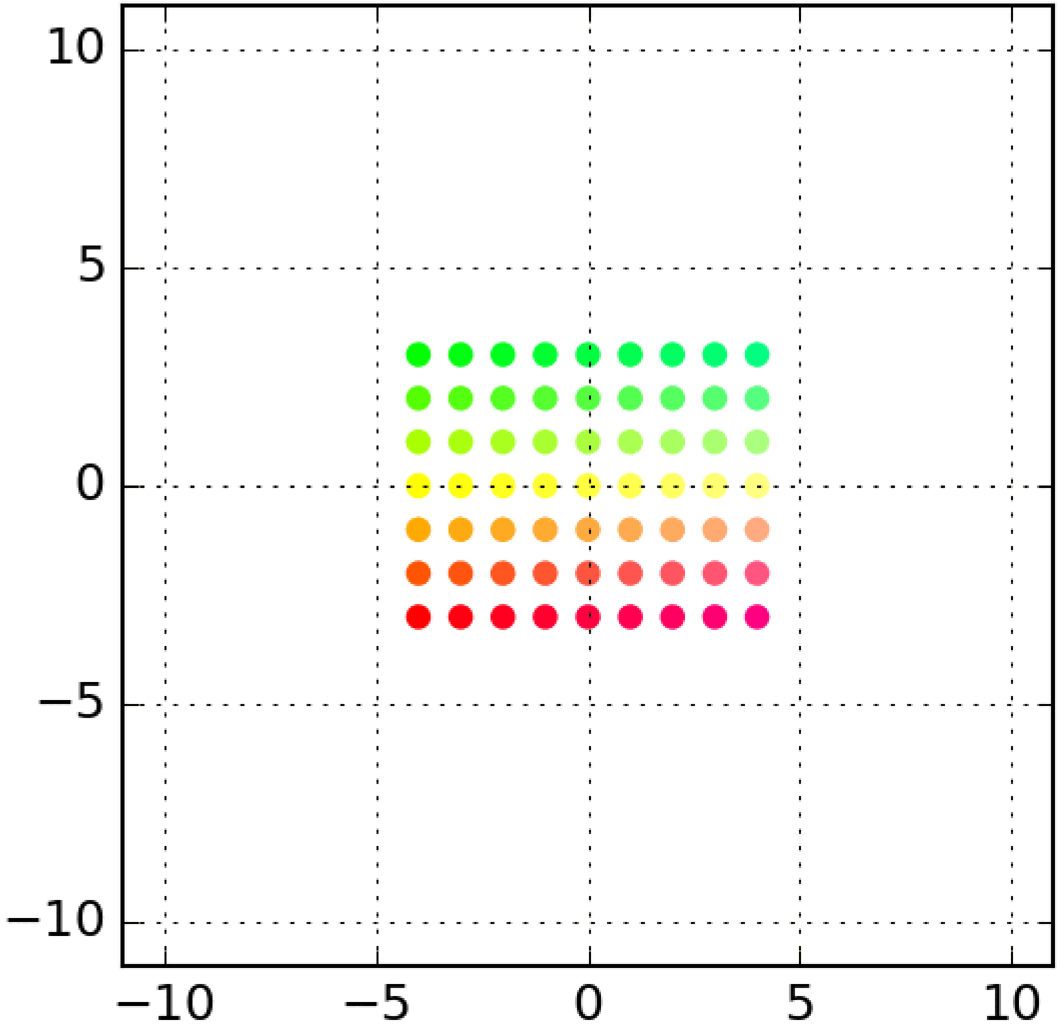


# Ещё примеры

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

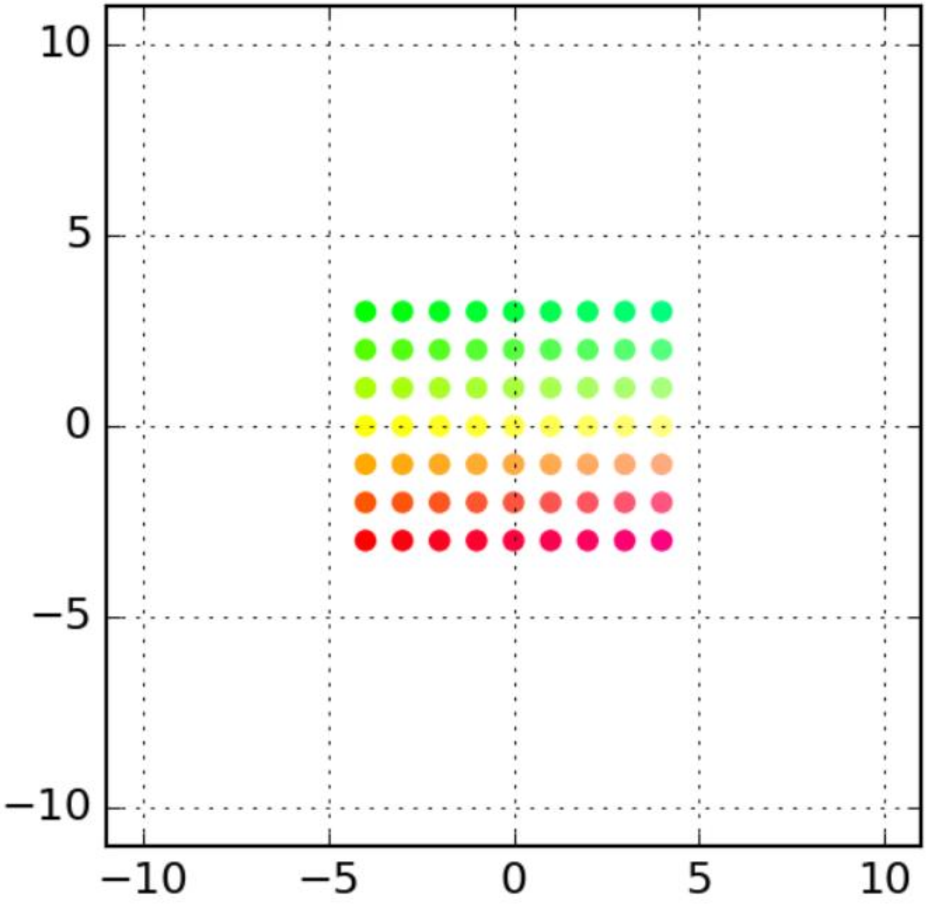
# Ещё примеры

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

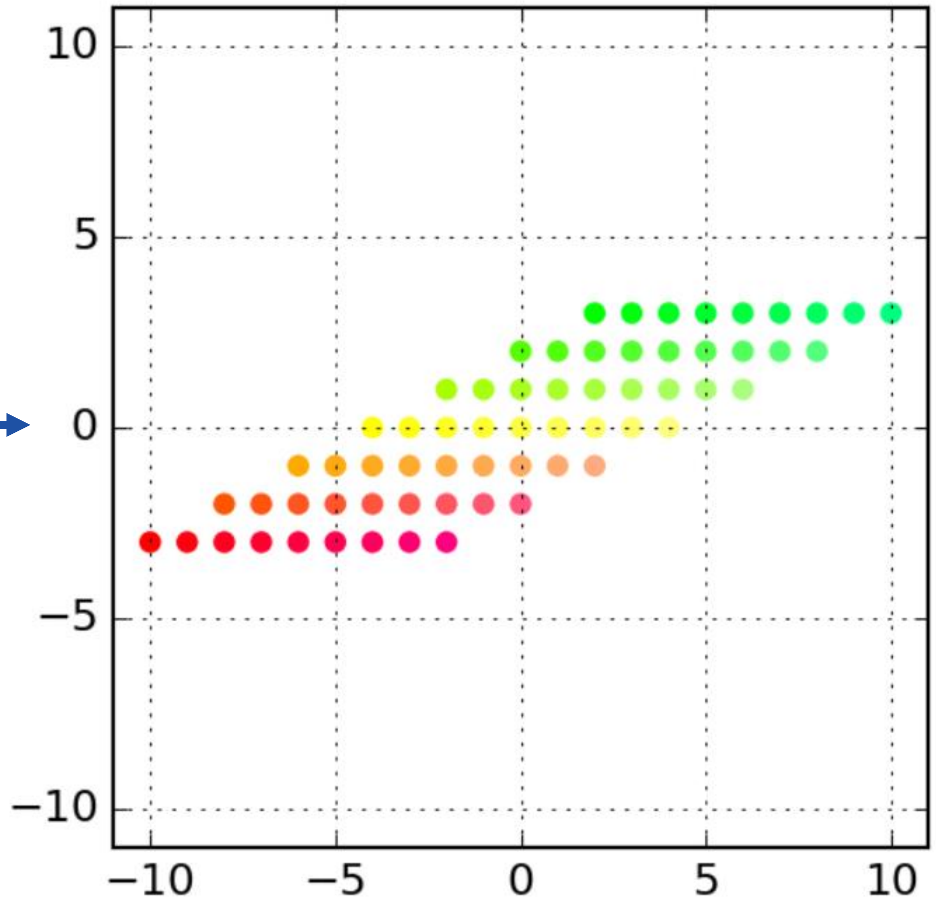


# Ещё примеры






$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



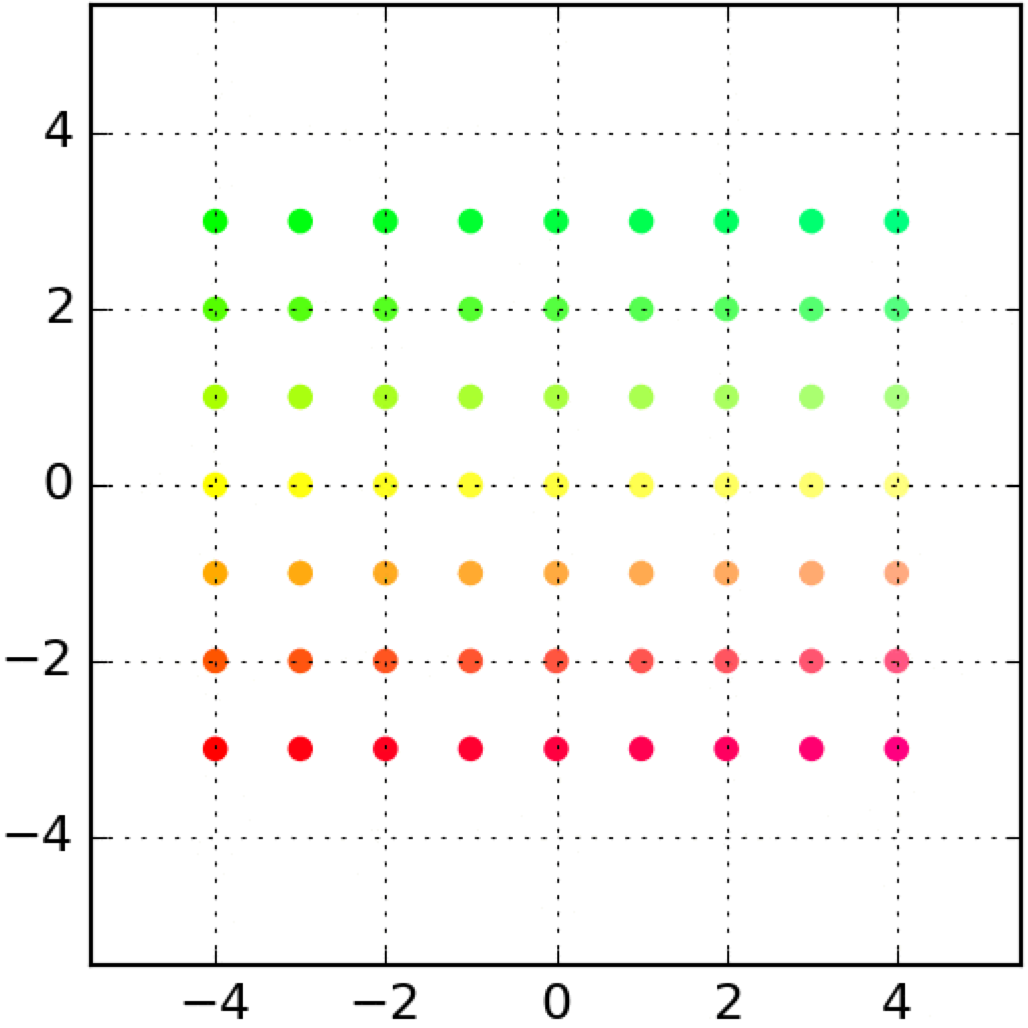
# Ещё примеры



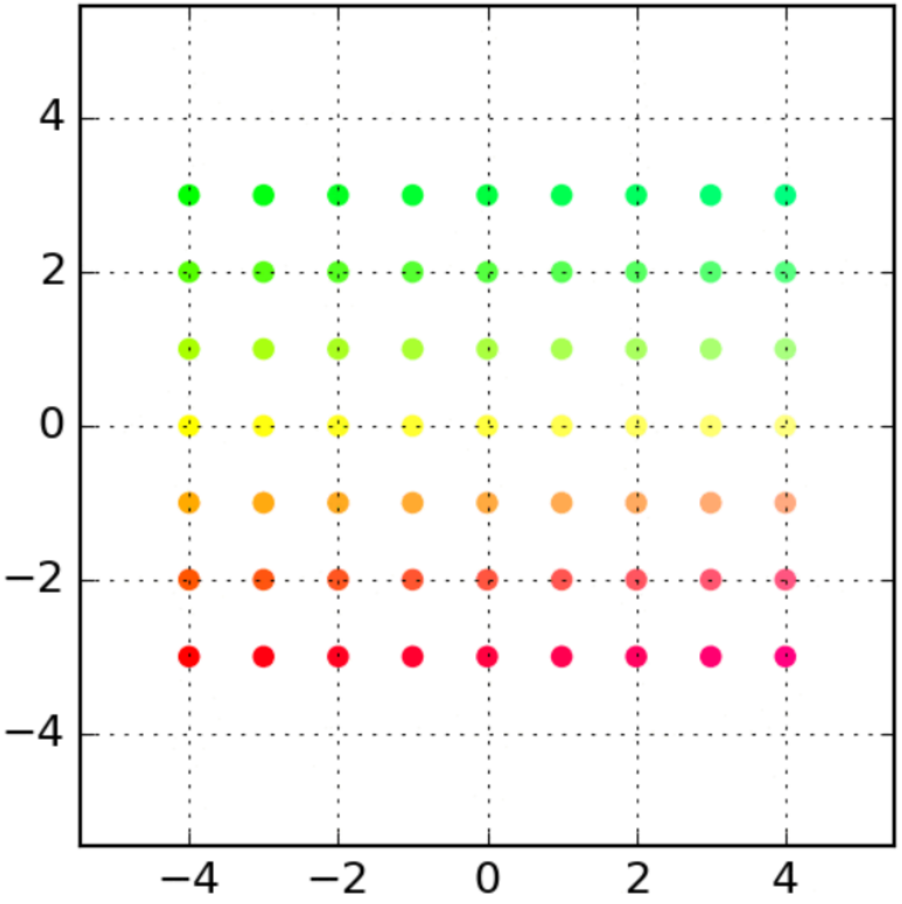
$$\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}$$

# Ещё примеры

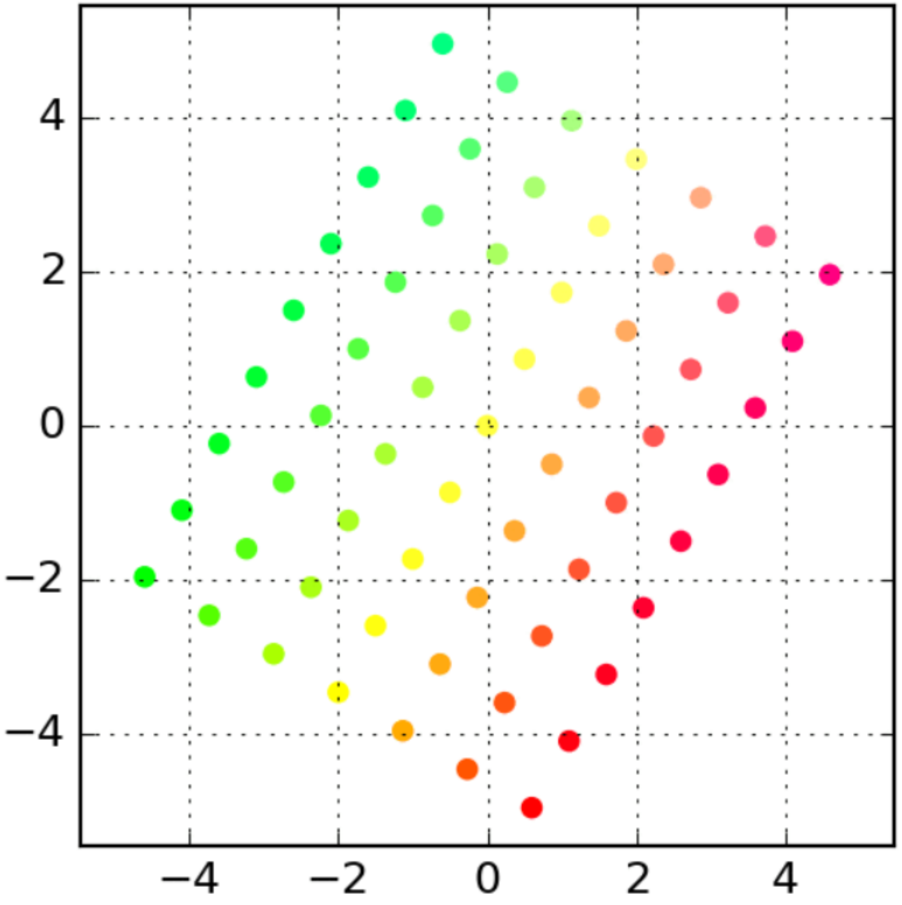
$$\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix} \sim$$



# Ещё примеры




$$\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}$$



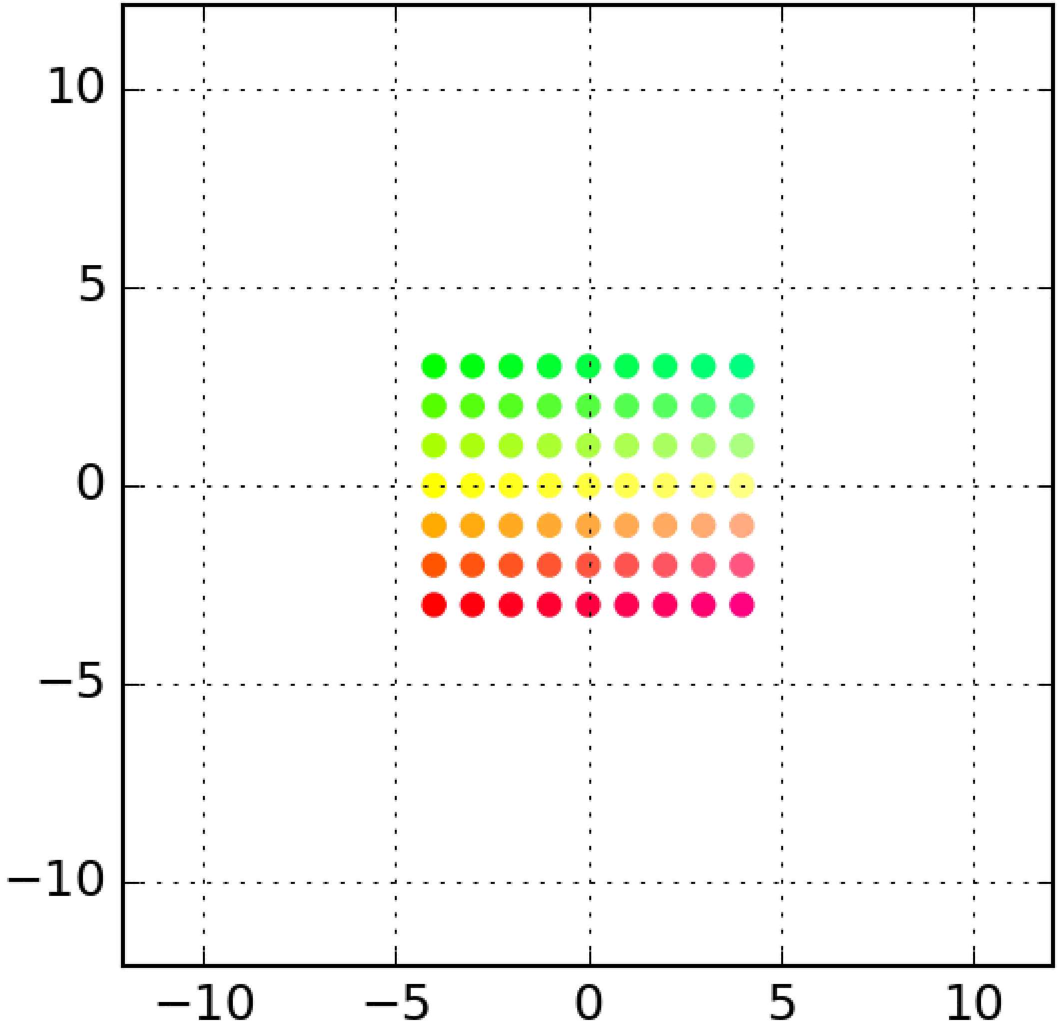
# Ещё примеры

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ещё примеры

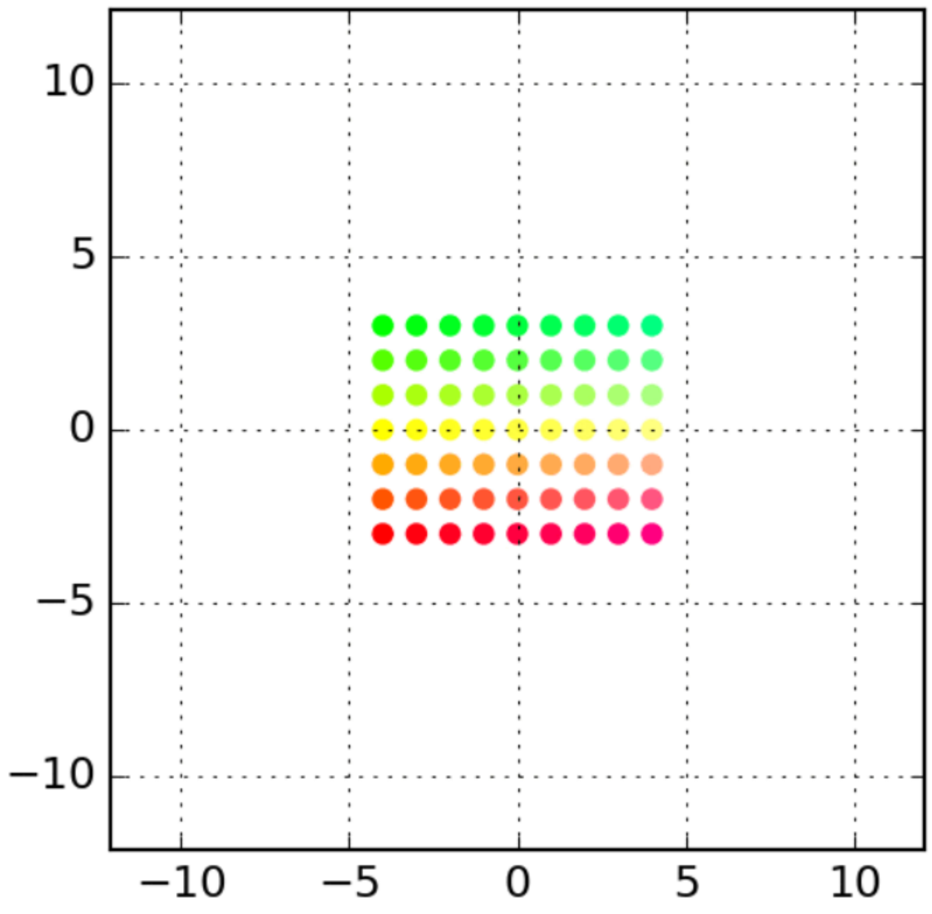


$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

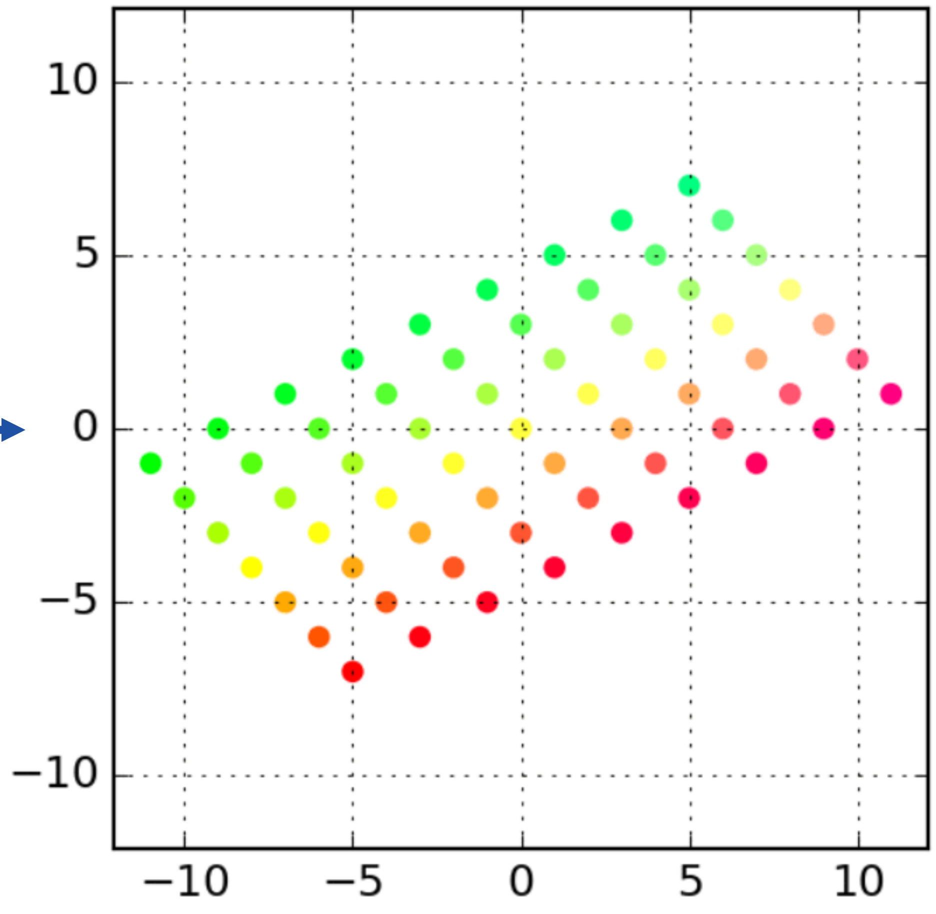


# Ещё примеры





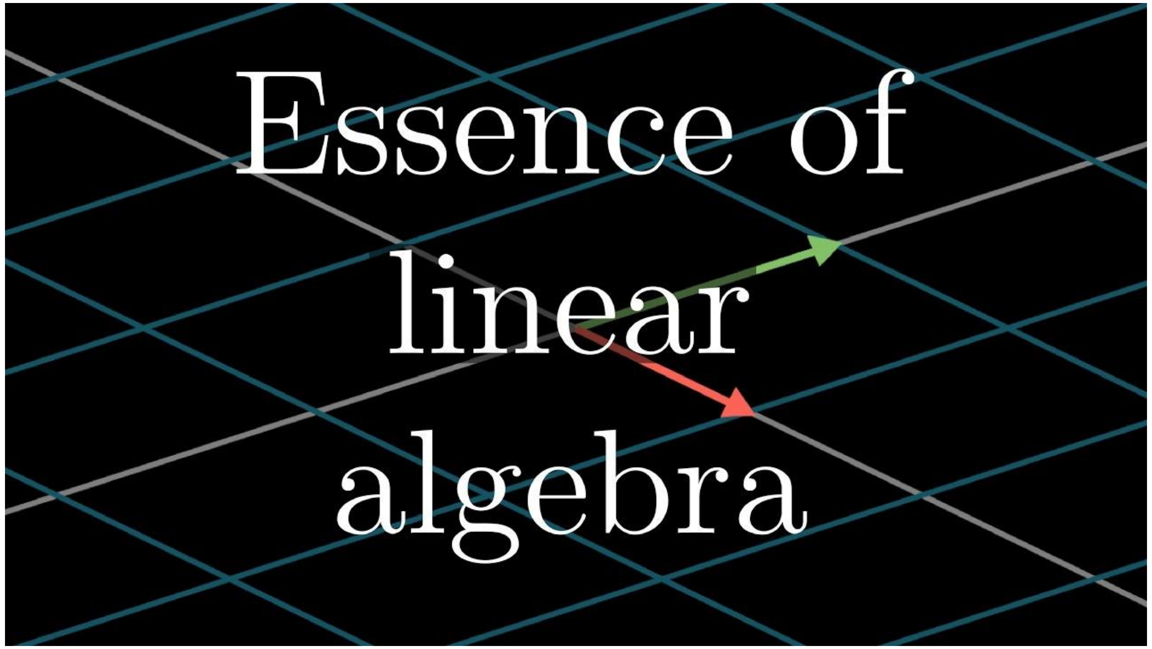

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



# Стоит посмотреть

Канал:


Плейлист:



Удачных путешествий
по линейным пространствам!