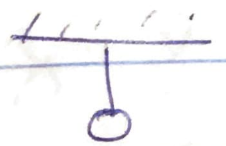
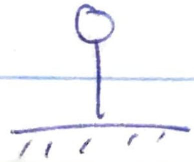
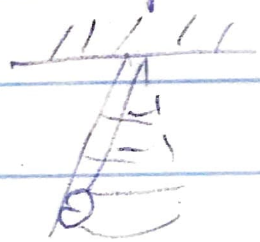
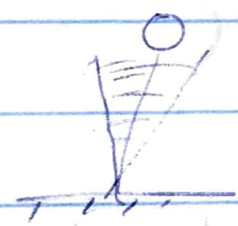
Равновесие — сост. системы, в к. при отсутствии вн. сил, система неподвижна





Устойчивость - в любой мал. окрестность равновесия и начнем движ. из этой окр-ти, но не из самого равновесия.





выходит из окр-ти

либо остановится вн.

либо не вых. из окр.

1) if движ. выходит из окр-ти => равновесие неустойчивое.

2) if движ. останется внутри окр-ти, то равновесие устойчиво по Ляпунову

3) if движ. останется внутри окр-ти и в итоге остановится в равновесии, то равновесие устойчиво асимптотически

~~Фазовое пр-во~~. Фазовое пр-во:

1. Маятник без трения $\ddot{\Theta} + \frac{g}{l}\sin\Theta = 0$.

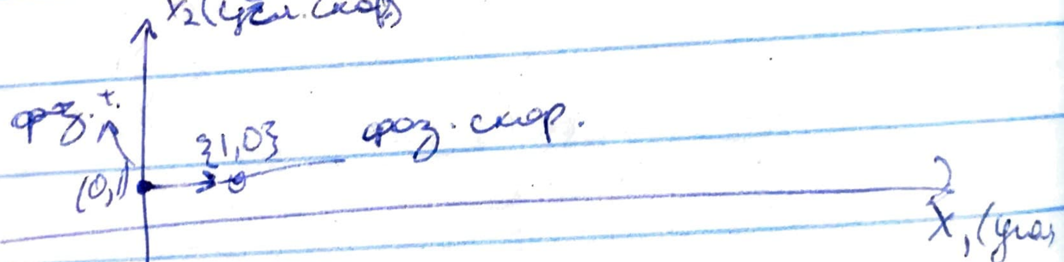
Обозначим $x_1 = \Theta$ и $x_2 = \dot{\Theta} = \omega$

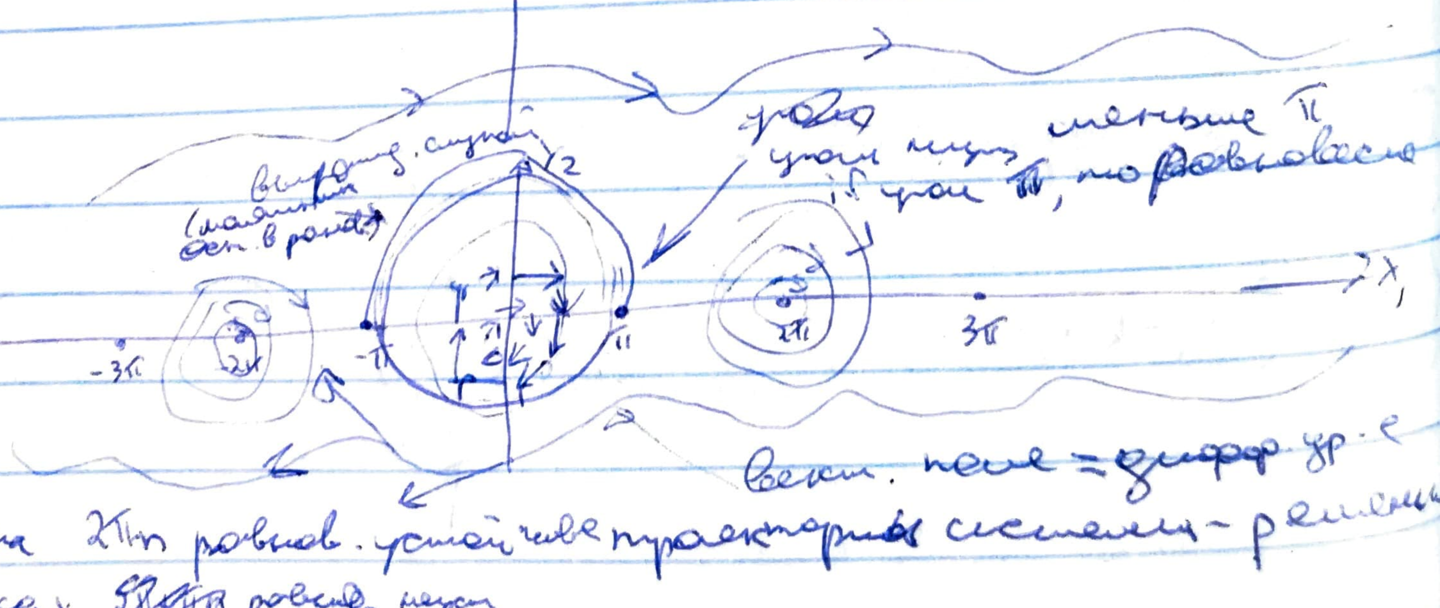
$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 \end{cases}}$$ в общем виде $$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \dot{x} = f(x)$$

x_1, x_2 — фазовые координаты

$\dot{x}_1, \dot{x}_2$ — фазовые скорости

Фазовой точке соотв. фаз. скорость.





Вект. поле = дифф. ур-е

В точке $2\pi n$ равнов. устойчиво траектория системы — решения

В точках ~~…~~ $\pi + 2\pi n$ равнов. неуст.

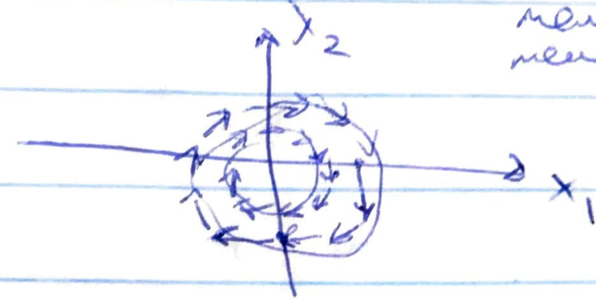
↓ линеаризуем картинку

маятник без трения возле нижнего положения равновесия

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l}\Theta = 0$$

центр

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}x_1 \end{cases}$$



чем ближе к нач. коорд. тем в-р длиннее

⇒ - ур-я

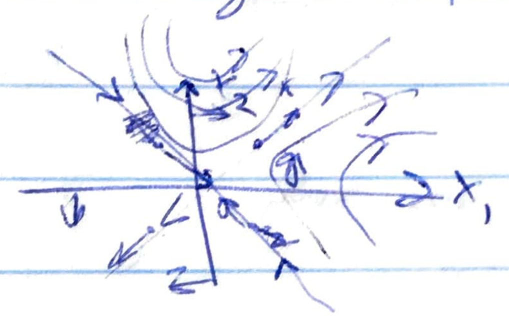
линии - решения

маятник без трения возле верхнего равновесия

$$\ddot{\Theta} - \frac{g}{l}\Theta = 0.$$

седло

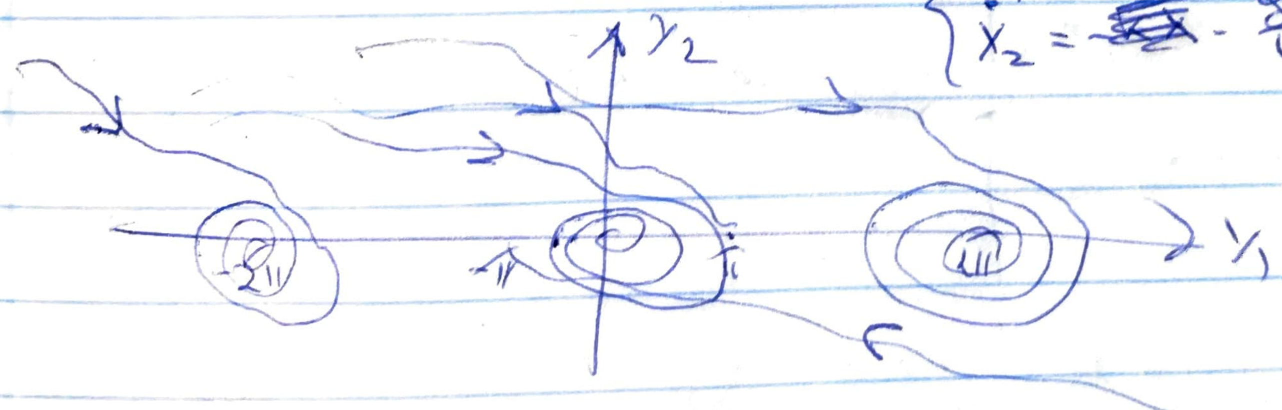
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{l}x_1 \end{cases}$$



маятник с трением

$$\ddot{\Theta} + k\dot{\Theta} + \frac{g}{l}\sin\Theta = 0$$

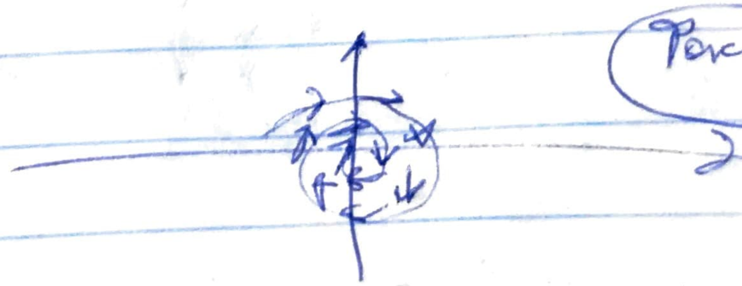
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - kx_2 \end{cases}$$



маятник с трением возле нижнего положения равновесия

фокус

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}x_1 - kx_2 \end{cases}$$



Точки равновесия.

Точки фазового пр-ва, в к-р фаз. скор-ти равны нулю

x_* - точка равновесия сист. $\dot{x} = f(x) \iff f(x^*) = 0$.

<u>def</u> Устойчивость по Ляпунову:

точка равновесия x_* наз. уст. по Ляпунову

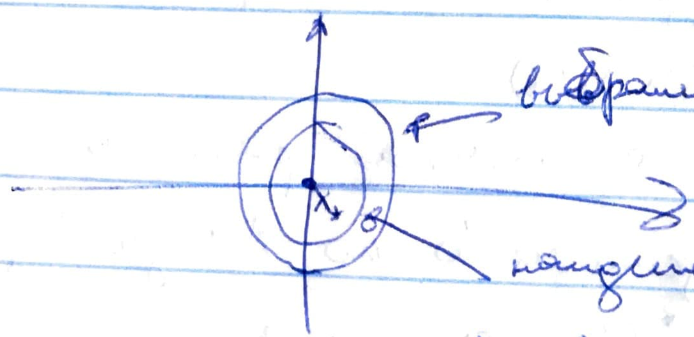
if $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: if норма $\boxed{\|x_0 - x_*\| < \delta}$, то

норма $\boxed{\|x(t) - x_*\| < \varepsilon}$, $\forall t > 0$.

траектория никогда не покинет произвольно малую окр-ть равновесия

траектория началась в δ-окр-ти равновесия

выбрали сами (ε)



нашёлся круг $r = \delta$, что if траект. начн. в круге δ, то оно не выйдет из круга ε.

Асимптот. устойчивость

точка X_* назыв. устойчивой асимптотически, if $\exists\, \delta>0$: if $\|x(0)-x_*\|<\delta$, то $\lim_{t\to\infty}\|x(t)-x^*\|=0$

траектория начинается неподалёку от равновесия

стремится к равновесию

Метод ф-ии Ляпунова. позволяет ~~предсказать~~ ~~устойчивость точки~~ (на примере системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

if можно найти ф-ю $V(x_1,x_2)$ такую, что

1) $V(x_1,x_2)=0$ в точке равновесия

2) $V(x_1,x_2)>0$ рядом с точкой равновесия

3) $\dot{V}(t) \leqslant 0$, где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – рядом с точкой равновесия

то равновесие устойчиво по Ляпунову

(*) if выполнено 3) $\dot{V}(t)<0$, то равновесие устойчиво асимптотически.

Геом. смысл метода ф-ии Ляпунова.

ф-я $V(x_1,x_2)$ задает рельеф фазового пространства

1) высота $V=0$ в точке равновесия

2) высота $V>0$ рядом с равновесием

3) все $\dot{V}(t)$ смотрят вниз ($\dot{V}(t)<0$) или не вверх ($\dot{V}(t)\leq 0$).

Маятник без тр. вокруг нижнего равновесия

выберем $V(x_1, x_2) = \frac{g}{2l} x_1^2 + \frac{x_2^2}{2}$

1) $V(0,0) = 0$.

2) $V(x_1, x_2) > 0$, при $x_1, x_2 \neq 0$.

3) $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot x_1'(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot x_2'(t) =$

$= \frac{g}{l} x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot \left(-\frac{g}{l} x_1\right) = 0$

$\Downarrow$

устойчива по Ляпунову

Маятник с трением вокруг ниж. равновесия

1) –||–

2) –||–

3) $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot x_1'(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot x_2'(t) =$

$= \frac{g}{l} x_1 (x_2) + x_2 \left(-\frac{g}{l} x_1 - k x_2\right) < 0$

почти везде рядом с равновесием

$\Downarrow$

устойчива асимптотически,

Ф-ия Ляпунова часто имеет смысл энергии. Можно выбир. ф-ю Ляп. как сумму кин. и пот. эн. маятника