Замена базиса и спектральное разложение

Алексей Перегудин, 2021

Стандартный базис и другие базисы

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 4\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$$

(в стандартном базисе)

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 4\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$$

(в стандартном базисе)

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\-5\end{bmatrix}$$

(в другом базисе)

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Стандартный базис и другие базисы

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 4\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$$

(в стандартном базисе)

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\-5\end{bmatrix}$$

(в другом базисе)

$$\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$$

(в ещё каком-то базисе)

Стандартный базис и другие базисы

Когда мы пишем $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$,

то автоматически задаём координаты вектора

в стандартном базисе

Стандартный базис и другие базисы

Когда мы пишем $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$,

то автоматически задаём координаты вектора

в стандартном базисе

До выбора базиса у вектора вообще нет координат,

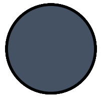
он просто **нечто**

Стандартный базис и другие базисы

Когда мы пишем $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$,

то автоматически задаём координаты вектора
в стандартном базисе

До выбора базиса у вектора вообще нет координат,
он просто **нечто**



Стандартный базис и другие базисы

$$\bullet = 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bullet = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$$

(в стандартном базисе)

$$\bullet = 1 \cdot \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bullet = \begin{bmatrix}1\\3\\-5\end{bmatrix}$$

(в другом базисе)

$$\bullet = 1 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bullet = \begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$$

(в ещё каком-то базисе)

Стандартный базис и другие базисы

Точка на прямой не имеет координат, пока не заданы деления

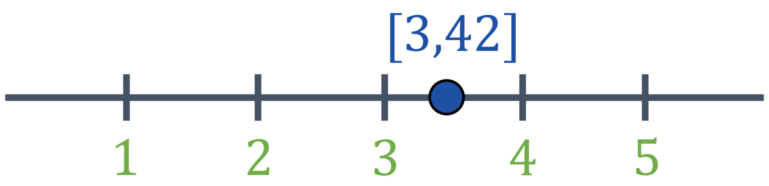
Стандартный базис и другие базисы

Точка на прямой не имеет координат, пока не заданы деления

Стандартный базис и другие базисы

Точка на прямой не имеет координат, пока не заданы деления

$\Rightarrow$



Стандартный базис и другие базисы

Если мы просто пишем вектор $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, то это значит, что мы задали его в стандартном базисе.

Стандартный базис и другие базисы

Если мы просто пишем вектор $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, то это значит, что мы задали его в стандартном базисе.

Но, может быть, мы хотим поменять базис?

Замена базиса вектора

Замена базиса вектора

Координаты вектора
в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Замена базиса вектора

Координаты вектора
в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_3 \\ | \end{bmatrix}$$

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора
в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_3 \\ | \end{bmatrix}$$

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора
в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_3 \\ | \end{bmatrix}$$

Координаты вектора
в новом базисе

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора
в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_3 \\ | \end{bmatrix}$$

Координаты вектора
в новом базисе

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Замена базиса вектора

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Новый базис

Координаты вектора
в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Координаты вектора
в новом базисе

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в новом базисе

$$v = P\hat{v}$$

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в новом базисе

$$v = P\hat{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$P^{-1}v = P^{-1}P\hat{v}$$

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в новом базисе

$$v = P\hat{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$P^{-1}v = P^{-1}P\hat{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{v} = P^{-1}v$$

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в новом базисе

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в новом базисе

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в стандартном базисе

Замена базиса вектора

Новый базис

Координаты вектора в новом базисе

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Координаты вектора в стандартном базисе

Формула для замены базиса вектора

$$\hat{v} = P^{-1} v$$

Пример замены базиса вектора

Найти координаты вектора $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ относительно базиса $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Пример замены базиса вектора

Найти координаты вектора $\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$ относительно базиса $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$v = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \hat{v} = ?$$

Пример замены базиса вектора

Найти координаты вектора $\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$ относительно базиса $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$v = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \hat{v} = ?$$

$$\hat{v} = P^{-1}v$$

Пример замены базиса вектора

Найти координаты вектора $\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$ относительно базиса $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$v = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \hat{v} = ?$$

$$\hat{v} = P^{-1}v = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$$

Пример замены базиса вектора

Найти координаты вектора $\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$ относительно базиса $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$$v = \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \hat{v} = ?$$

$$\hat{v} = P^{-1}v = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & -2\\1 & -2 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix}$$

Пример замены базиса вектора

Найти координаты вектора $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ относительно базиса $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{v} = ?$$

$$\hat{v} = P^{-1} v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Замена базиса матрицы (линейного преобразования)

Замена базиса матрицы

Пусть матрица A переводит вектор x в вектор y

$$y = Ax$$

Замена базиса матрицы

Пусть матрица A переводит вектор x в вектор y

$$y = Ax$$

Пусть вектора x и y после замены базиса превращаются в $\hat{x}$ и $\hat{y}$:

$$\hat{x} = P^{-1}x \qquad \hat{y} = P^{-1}y$$

Замена базиса матрицы

Пусть матрица A переводит вектор x в вектор y

$$y = Ax$$

Пусть вектора x и y после замены базиса превращаются в $\hat{x}$ и $\hat{y}$:

$$\hat{x} = P^{-1}x \qquad \hat{y} = P^{-1}y$$

Какая матрица теперь связывает вектора $\hat{x}$ и $\hat{y}$?

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Замена базиса матрицы

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Пусть матрица A переводит вектор x в вектор y

$$y = Ax$$

Пусть вектора x и y после замены базиса превращаются в $\hat{x}$ и $\hat{y}$:

$$\hat{x} = P^{-1}x \qquad \hat{y} = P^{-1}y$$

Какая матрица теперь связывает вектора $\hat{x}$ и $\hat{y}$?

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Уже не A, какая-то другая!

Замена базиса матрицы

Пусть матрица A переводит вектор x в вектор y

$$y = Ax$$

Пусть вектора x и y после замены базиса превращаются в $\hat{x}$ и $\hat{y}$:

$$\hat{x} = P^{-1}x \qquad \hat{y} = P^{-1}y$$

Какая матрица теперь связывает вектора $\hat{x}$ и $\hat{y}$?

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Уже не A, какая-то другая! Как её узнать?

Замена базиса матрицы

Исходные равенства

Манипуляции

Результат

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

$$\hat{y} = P^{-1}y$$

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Замена базиса матрицы

Исходные равенства

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

$$\hat{y} = P^{-1}y$$

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Манипуляции

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Результат

Замена базиса матрицы

Исходные равенства

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

$$\hat{y} = P^{-1}y$$

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Манипуляции

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

$$P^{-1}y = BP^{-1}x$$

Результат

Замена базиса матрицы

Исходные равенства

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

$$\hat{y} = P^{-1}y$$

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Манипуляции

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

$$P^{-1}y = BP^{-1}x$$

$$PP^{-1}y = PBP^{-1}x$$

Результат

Замена базиса матрицы

Исходные равенства

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

$$\hat{y} = P^{-1}y$$

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Манипуляции

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

$$P^{-1}y = BP^{-1}x$$

$$PP^{-1}y = PBP^{-1}x$$

$$y = PBP^{-1}x$$

Результат

Замена базиса матрицы

Исходные равенства	Манипуляции	Результат
$y = Ax$	$\hat{y} = B\hat{x}$	
$\hat{x} = P^{-1}x$	$P^{-1}y = BP^{-1}x$	
$\hat{y} = P^{-1}y$	$PP^{-1}y = PBP^{-1}x$	
$\hat{y} = B\hat{x}$	$y = PBP^{-1}x$	
	$y = Ax$	

Замена базиса матрицы

Исходные равенства

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

$$\hat{y} = P^{-1}y$$

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Манипуляции

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

$$P^{-1}y = BP^{-1}x$$

$$PP^{-1}y = PBP^{-1}x$$

$$y = PBP^{-1}x$$

$$y = Ax$$

Результат

$$\boxed{A = PBP^{-1}}$$

Замена базиса матрицы

Исходные равенства

$$y = Ax$$

$$\hat{x} = P^{-1}x$$

$$\hat{y} = P^{-1}y$$

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

Манипуляции

$$\hat{y} = B\hat{x}$$

$$P^{-1}y = BP^{-1}x$$

$$PP^{-1}y = PBP^{-1}x$$

$$y = PBP^{-1}x$$

$$y = Ax$$

Результат

$$\boxed{A = PBP^{-1}}$$

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Замена базиса матрицы

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$B = P^{-1}AP$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & B & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & P & * \\ * & * & * \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & P & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Замена базиса матрицы

Формула для замены базиса матрицы

$$B = P^{-1}AP$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & B & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & P & * \\ * & * & * \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & P & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Коммутативная диаграмма (множества)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "P^{-1}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Коммутативная диаграмма (множества)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[r, swap, "\substack{\text{Отображение} \\ \text{в стандартном базисе}}"] \arrow[d, swap, "P^{-1}"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "P^{-1}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

Коммутативная диаграмма (множества)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Отображение
в стандартном базисе

Переход в новый базис

Коммутативная диаграмма (множества)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "P^{-1}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

Отображение
в стандартном базисе

Переход в новый базис

Отображение
в новом базисе

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"] \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y}
\end{tikzcd}
$$

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"] \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y}
\end{tikzcd}
$$

Стрелку можно развернуть

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y} \arrow[u, mapsto, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Стрелку можно развернуть

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y} \arrow[u, mapsto, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y} \arrow[u, mapsto, "P"']
\end{tikzcd}$$

Было отображение
в стандартном базисе

$A =$

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y} \arrow[u, mapsto, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Было отображение
в стандартном базисе

Нырнули
в новый базис

$$A = \quad P^{-1}$$

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y} \arrow[u, mapsto, "P"']
\end{tikzcd}$$

Было отображение
в стандартном базисе

Нырнули
в новый базис

$$A = \quad B P^{-1}$$

Выполнили отображение в
новом базисе

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"'] & y \\
\hat{x} \arrow[r, mapsto, "B"] & \hat{y} \arrow[u, mapsto, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Было отображение
в стандартном базисе

Нырнули
в новый базис

$$A = PBP^{-1}$$

Вынырнули
обратно

Выполнили отображение в
новом базисе

Коммутативная диаграмма (элементы)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "A"] & y \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"] \\
\hat{x} \arrow[u, mapsto, "P"] \arrow[r, mapsto, "B"'] \arrow[ur, phantom, "B = P^{-1}AP"] & \hat{y}
\end{tikzcd}
$$

Развернув стрелки, получаем аналогичную формулу для B

Пример замены базиса матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её вид в базисе $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Пример замены базиса матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её вид в базисе $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Пример замены базиса матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её вид в базисе $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP$$

Пример замены базиса матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её вид в базисе $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример замены базиса матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её вид в базисе $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример замены базиса матрицы

Матрица $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ задана в стандартном базисе. Найти её вид в базисе $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример на диаграмме

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \arrow[r, mapsto, "\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}", "A"'] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}", "\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}"'] & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = y = Ax \arrow[d, mapsto, "P^{-1}"', "\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}"] \\
\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \arrow[r, mapsto, "\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}", "\hat{A}"'] & \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \hat{y} = \hat{A}\hat{x}
\end{tikzcd}
$$

Подобные матрицы

Подобные матрицы

матрицы, соответствующие одному и тому же преобразованию, заданному в разных базисах

Свойства подобных матриц

Свойства подобных матриц

Если A и B — подобные матрицы, то

$$\det A = \det B$$

$$\operatorname{trace} A = \operatorname{trace} B$$

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$$

$$\operatorname{nullity} A = \operatorname{nullity} B$$

Свойства подобных матриц

Если A и B — подобные матрицы, то

$$\boxed{\begin{gathered} \det A = \det B \\ \operatorname{trace} A = \operatorname{trace} B \end{gathered}} \qquad \boxed{\begin{gathered} \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B \\ \operatorname{nullity} A = \operatorname{nullity} B \end{gathered}}$$

Определитель и след матрицы не зависят от выбранной системы координат, то есть являются геометрическими свойствами линейного преобразования

Свойства подобных матриц

Если A и B — подобные матрицы, то

$$\boxed{\begin{gathered}\det A = \det B \\ \operatorname{trace} A = \operatorname{trace} B\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B \\ \operatorname{nullity} A = \operatorname{nullity} B\end{gathered}}$$

Определитель и след матрицы не зависят от выбранной системы координат, то есть являются геометрическими свойствами линейного преобразования

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

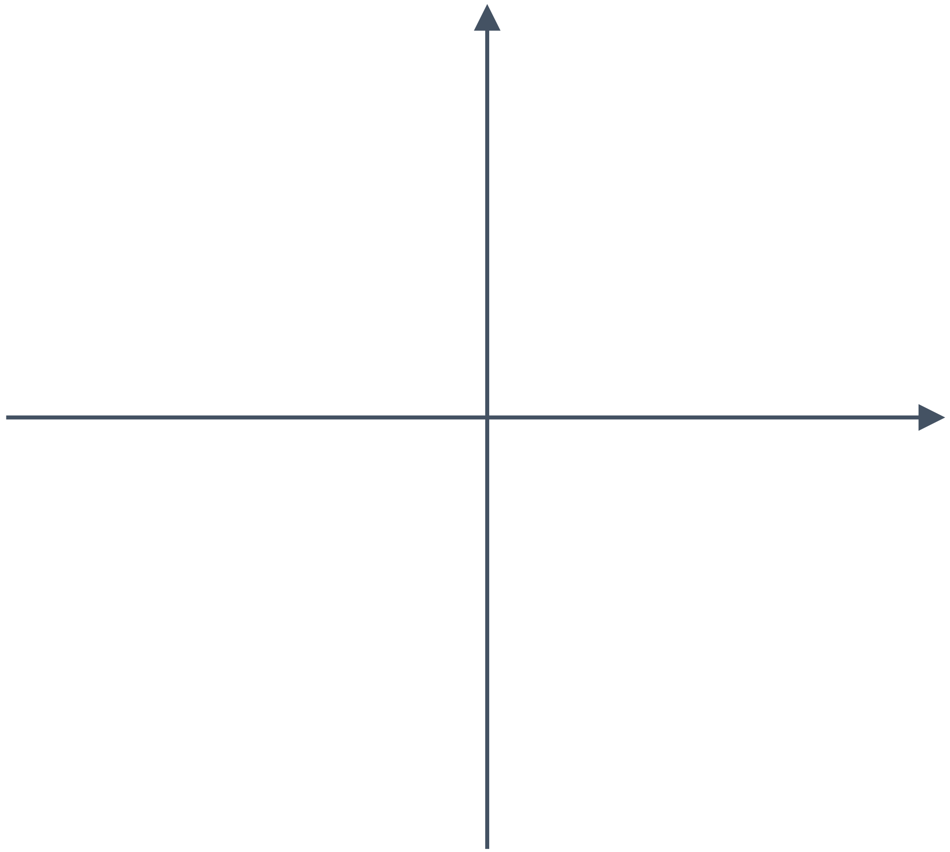
Эти матрицы выглядят по-разному, но описывают одно и то же преобразование пространства

$$\begin{bmatrix}-3 & -2 & -1\\ -4 & -3 & -2\\ -0 & -0 & -1\end{bmatrix}$$

Собственные вектора и собственные числа

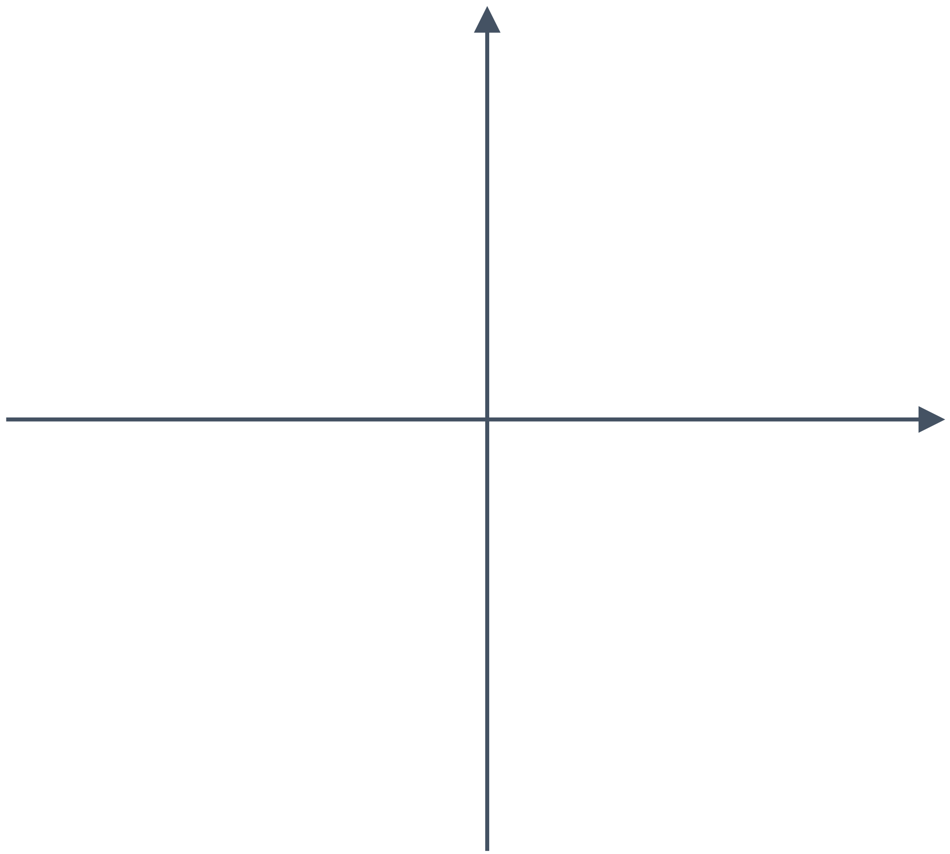
Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



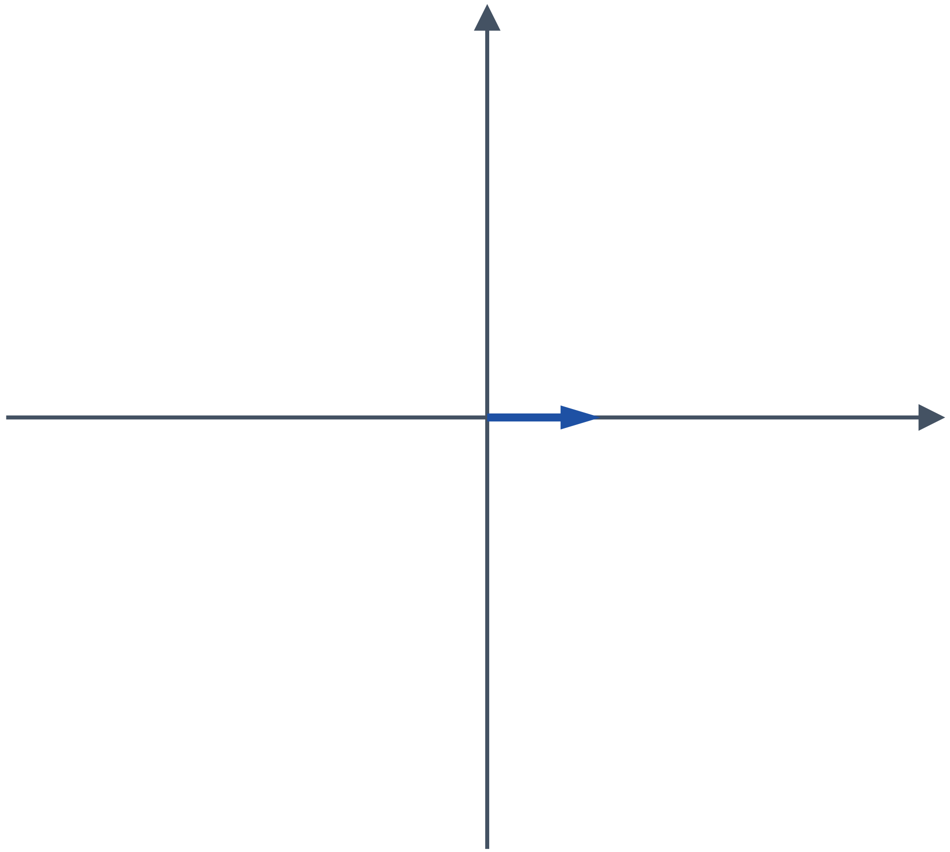
Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



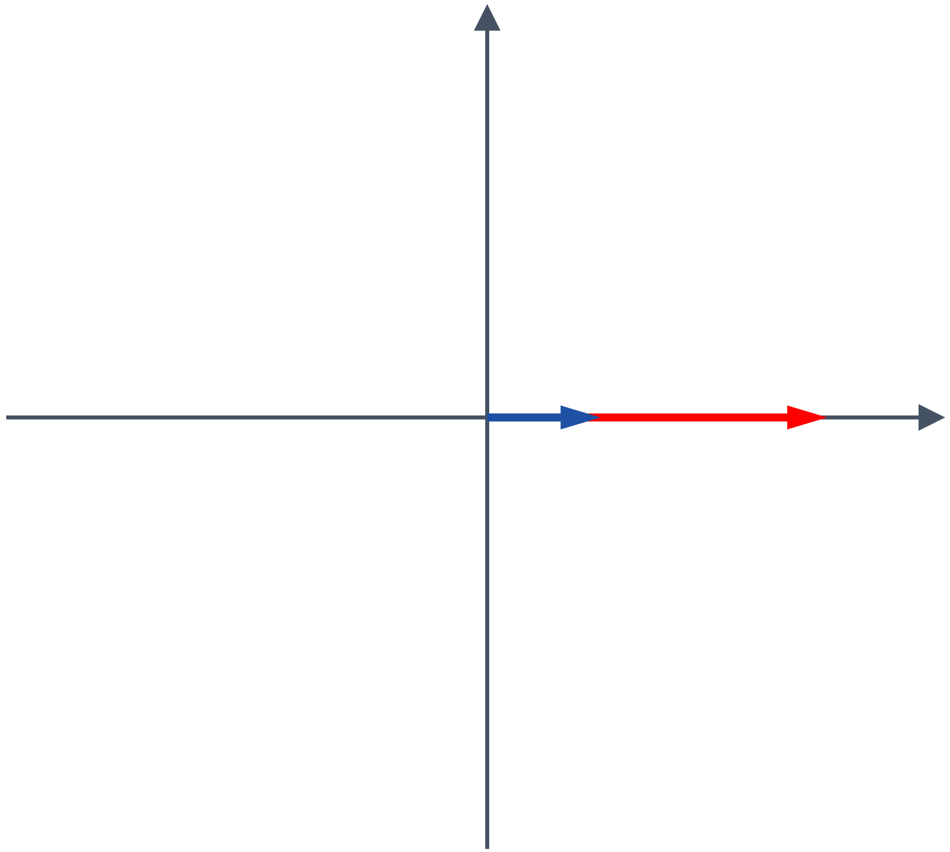
Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$



Собственные вектора и собственные числа

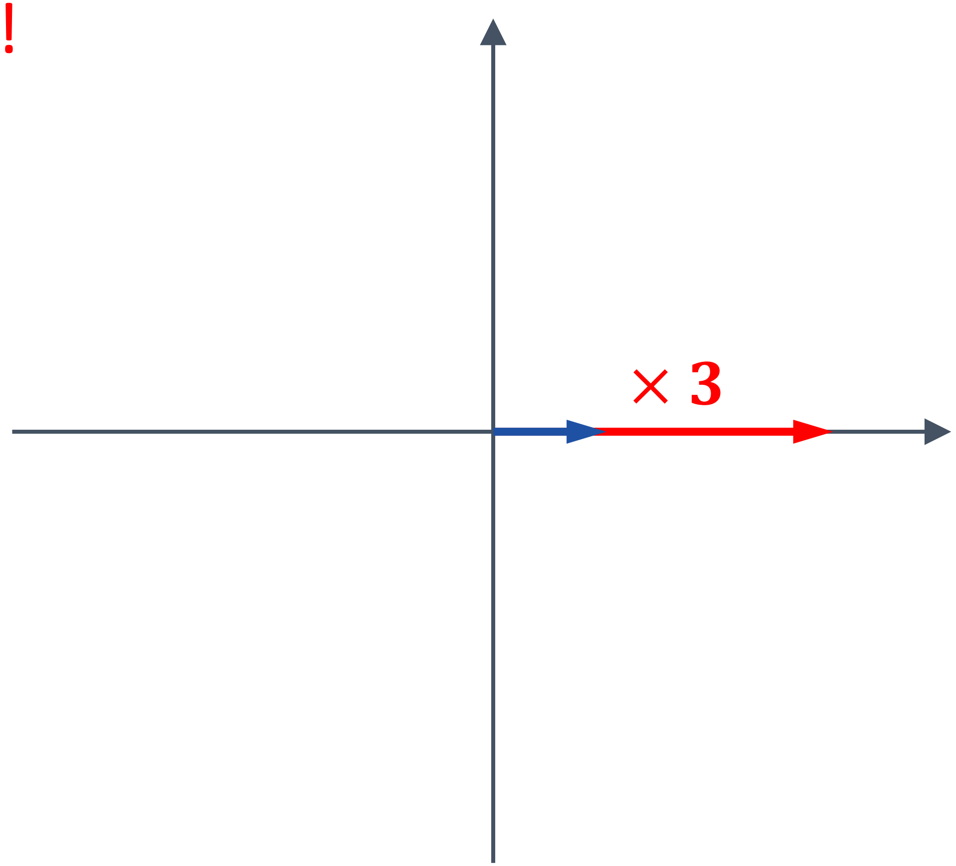
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

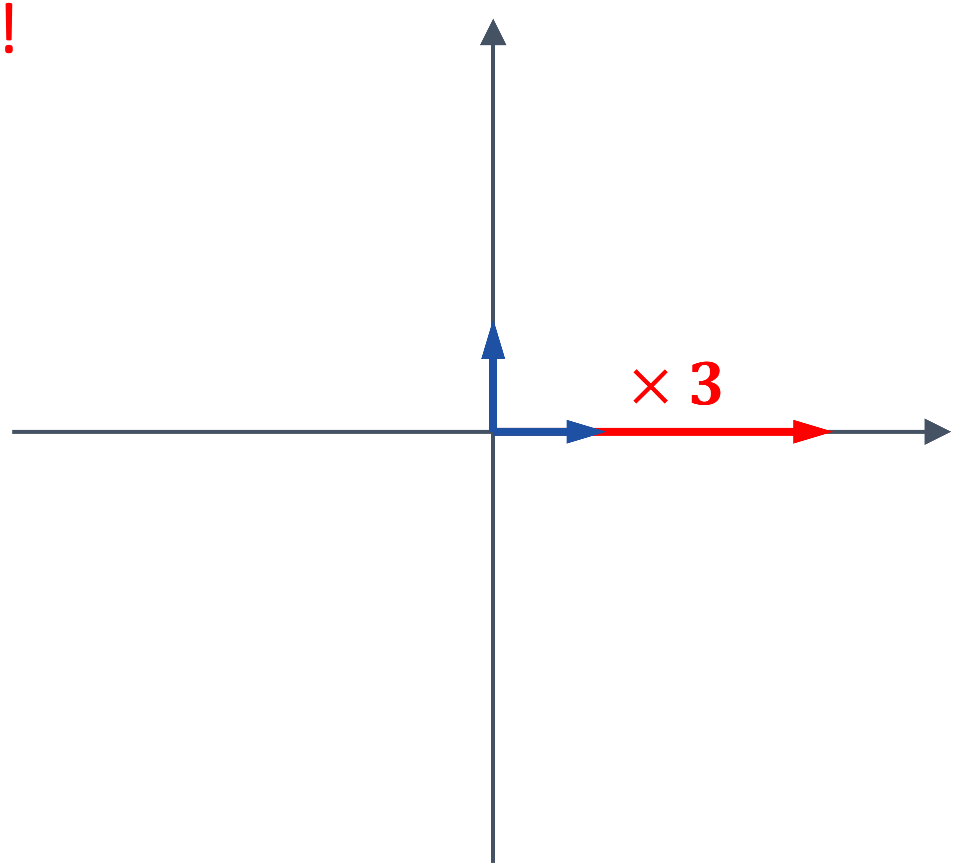


Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

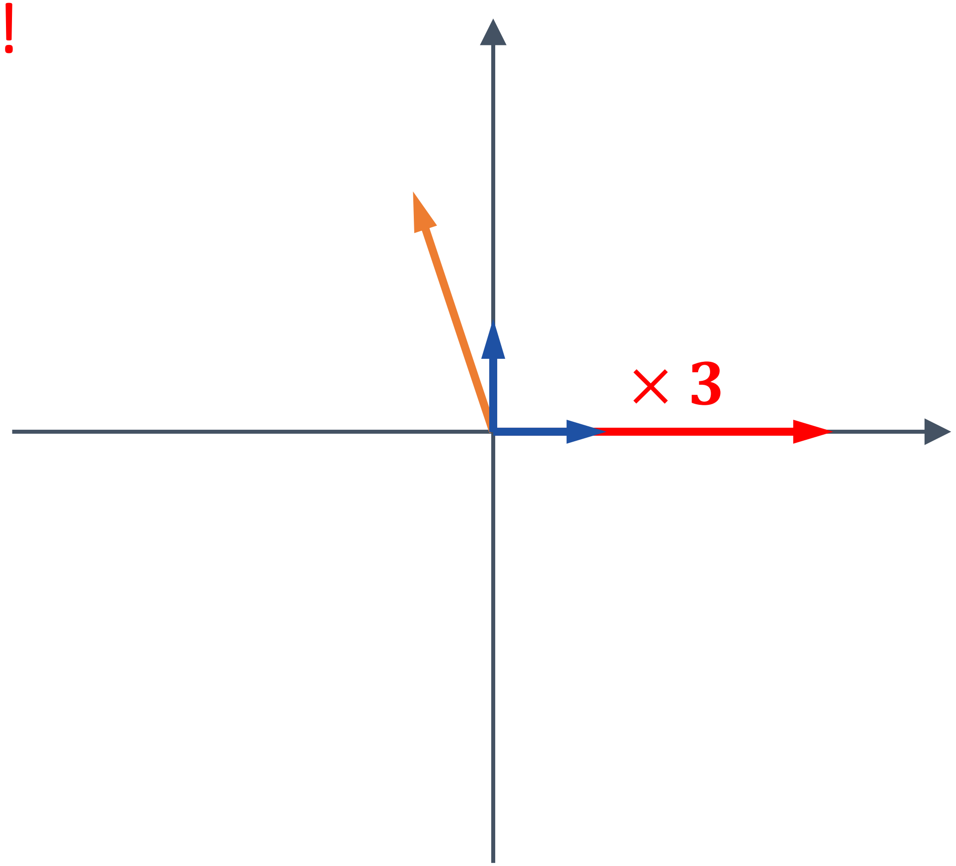


Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



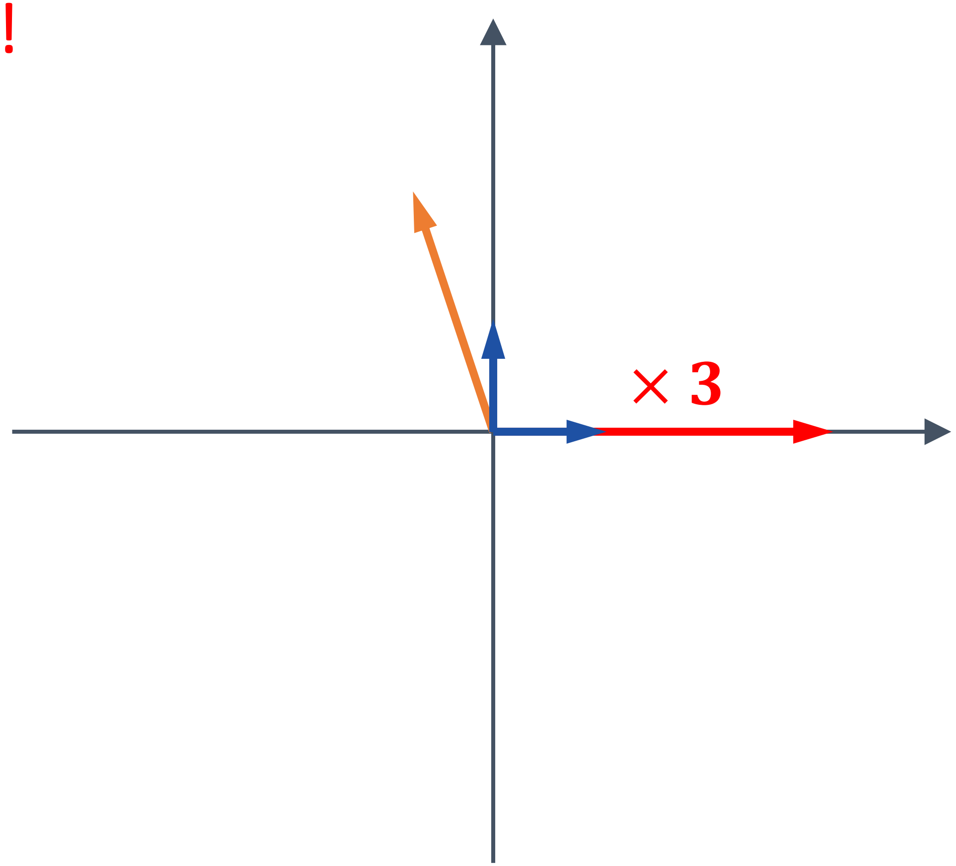
Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

☹



Собственные вектора и собственные числа

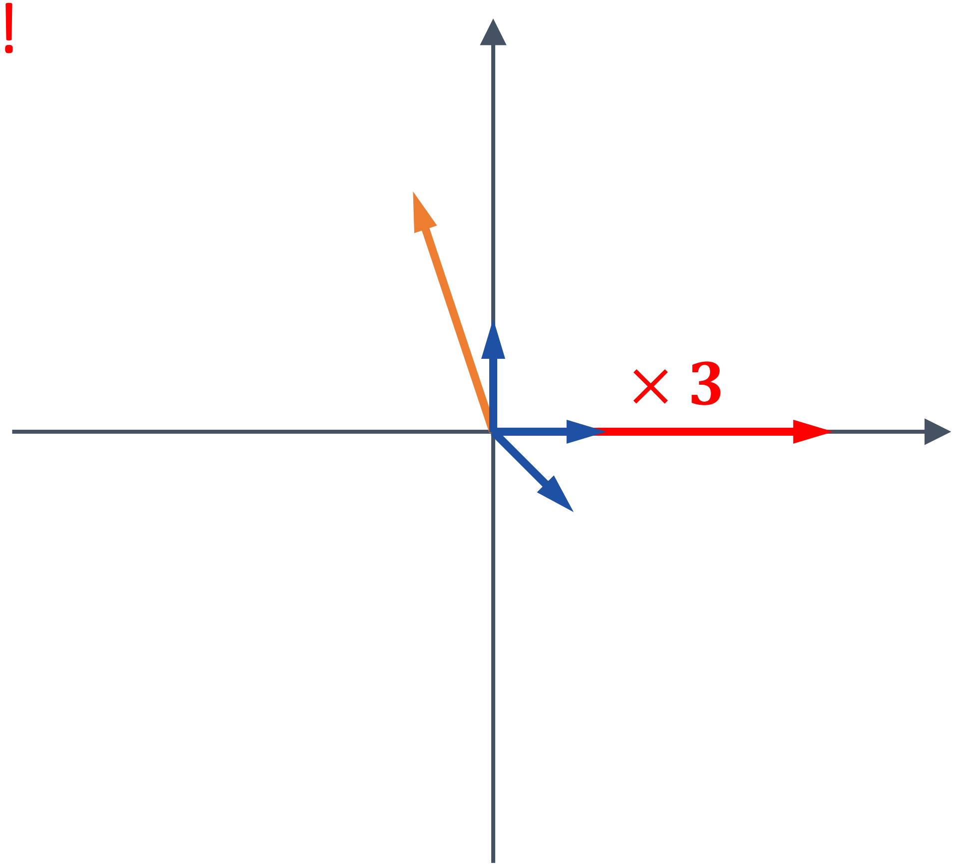
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$



Собственные вектора и собственные числа

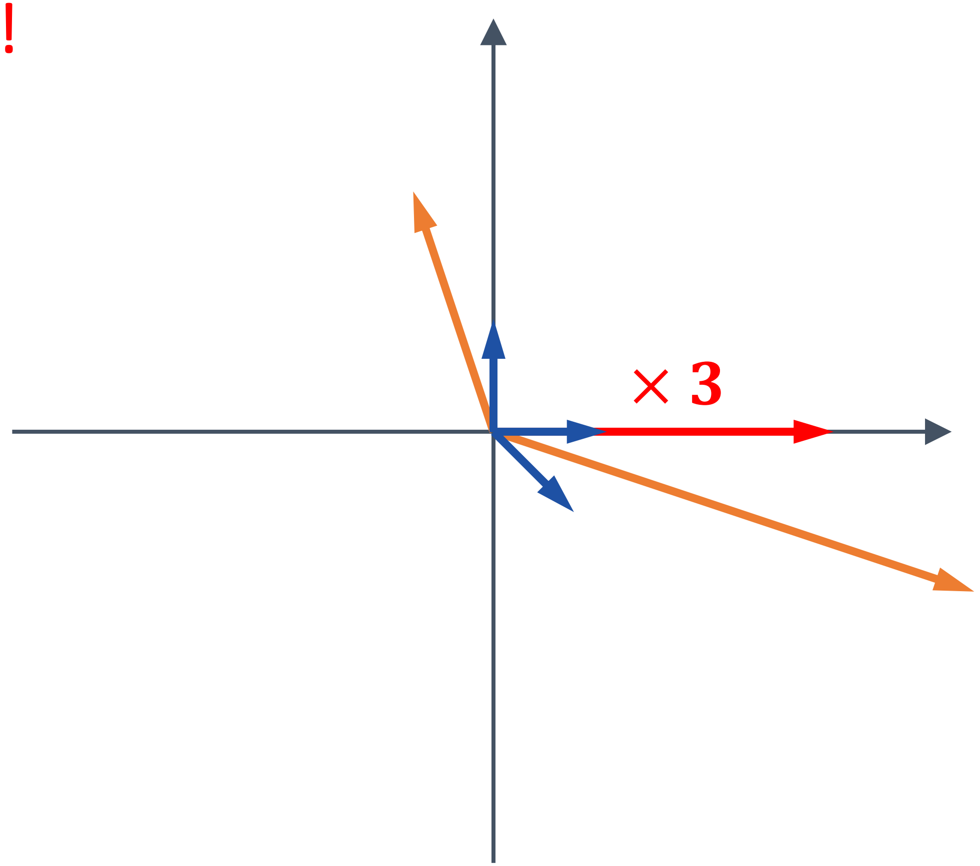
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

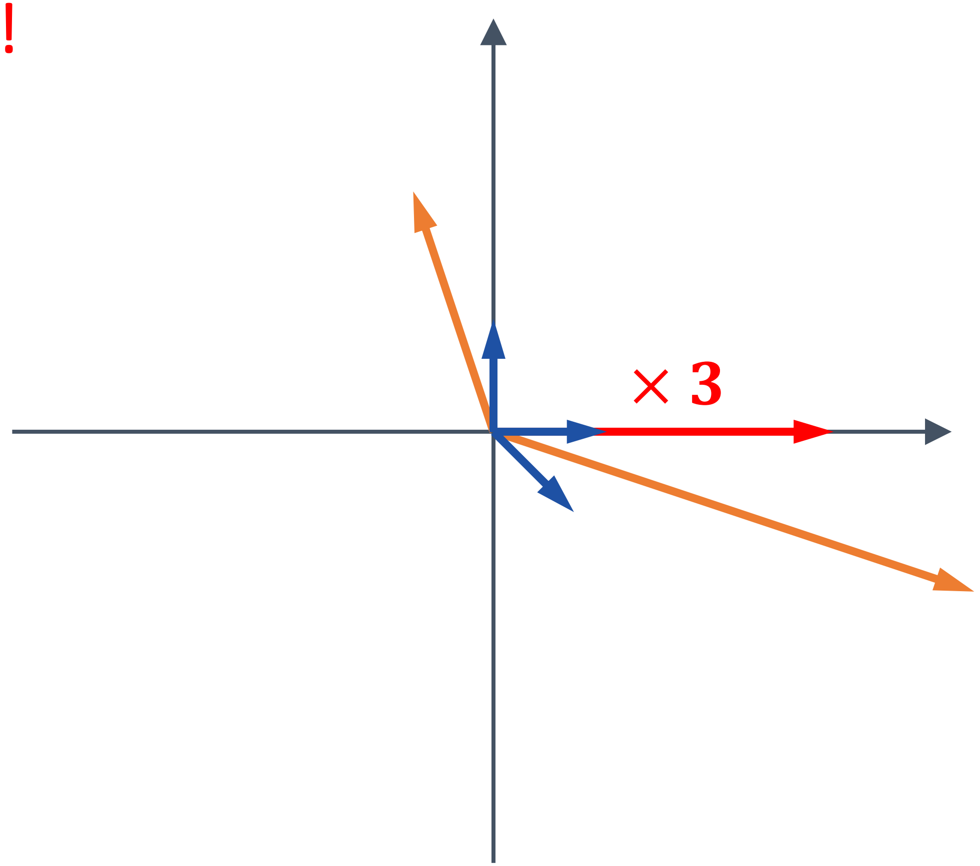
Умножился на 3!

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

☹



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

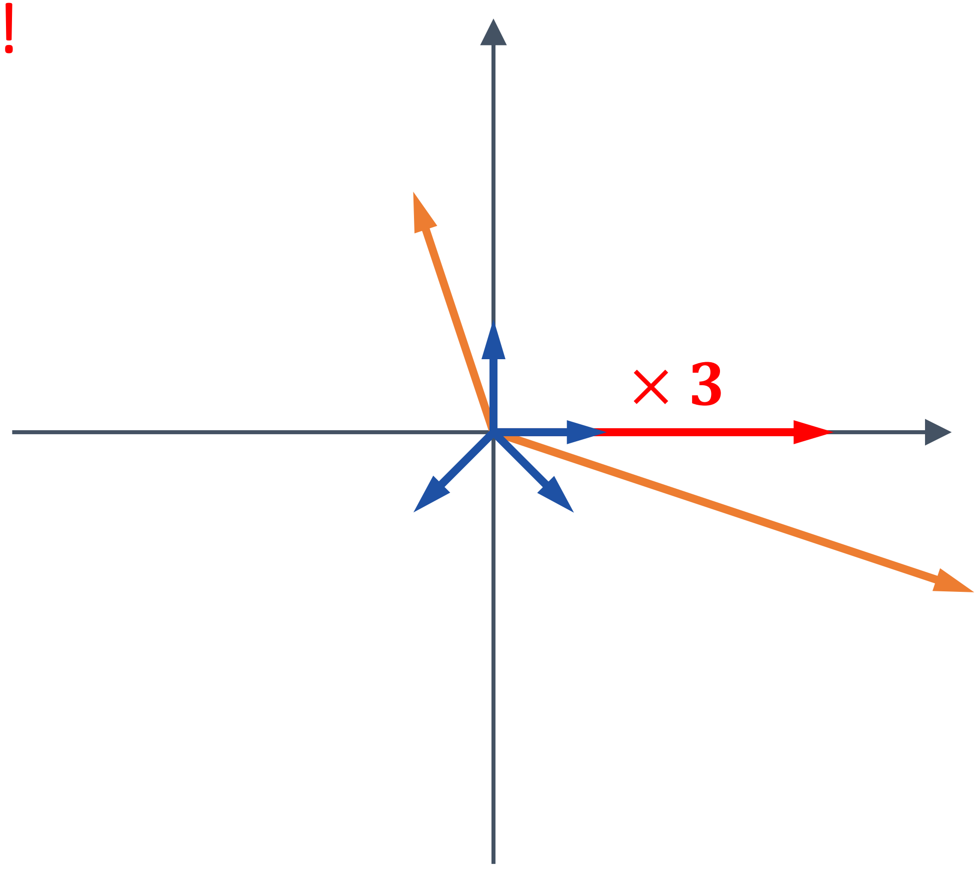
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

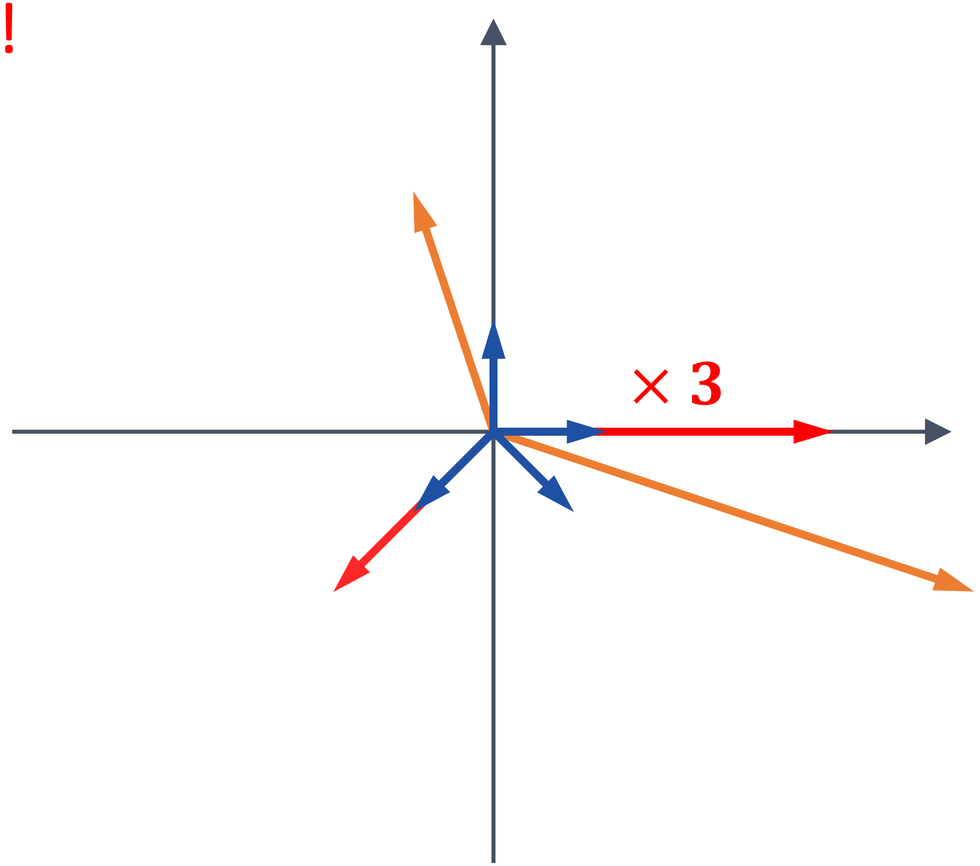
$$\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$$



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Умножился на 3!

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

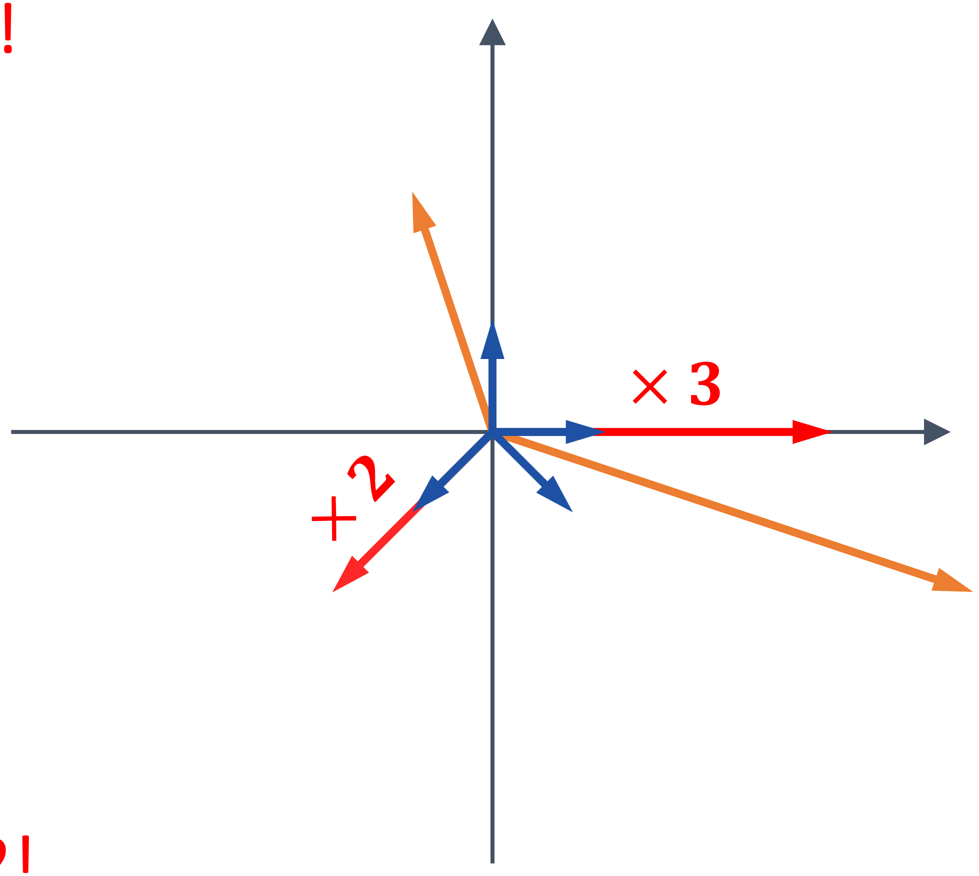
☹

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Умножился на 2!



Собственные вектора и собственные числа

Определение

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ таковы, что

$$Av = \lambda v$$

$$\Updownarrow$$

v – собственный вектор матрицы A,

λ – соответствующее ему собственное число матрицы A

Собственные вектора и собственные числа

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

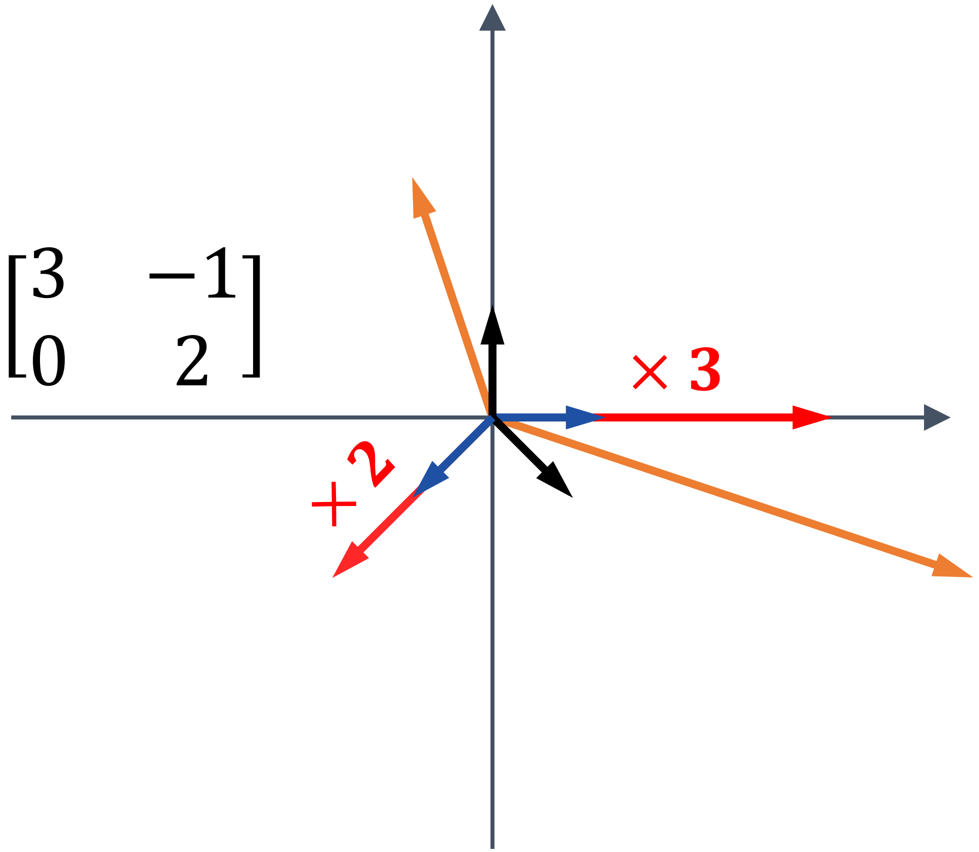
собственный вектор с собственным числом $\lambda_1 = 3$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

собственный вектор с собственным числом $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

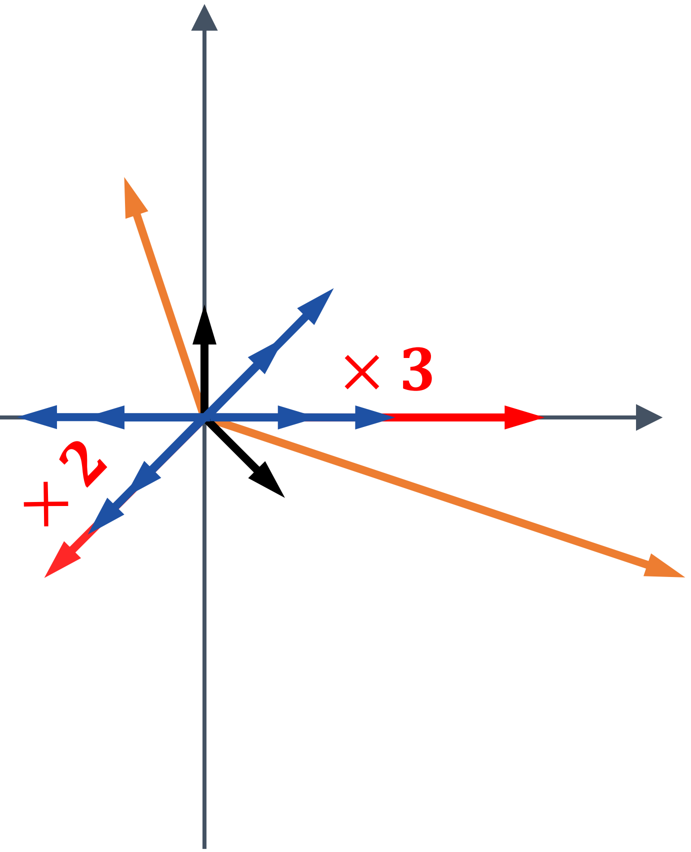
несобственные вектора



Собственные вектора и собственные числа

Любой вектор параллельный собственному – собственный

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Собственные вектора и собственные числа

Любой вектор параллельный собственному – собственный

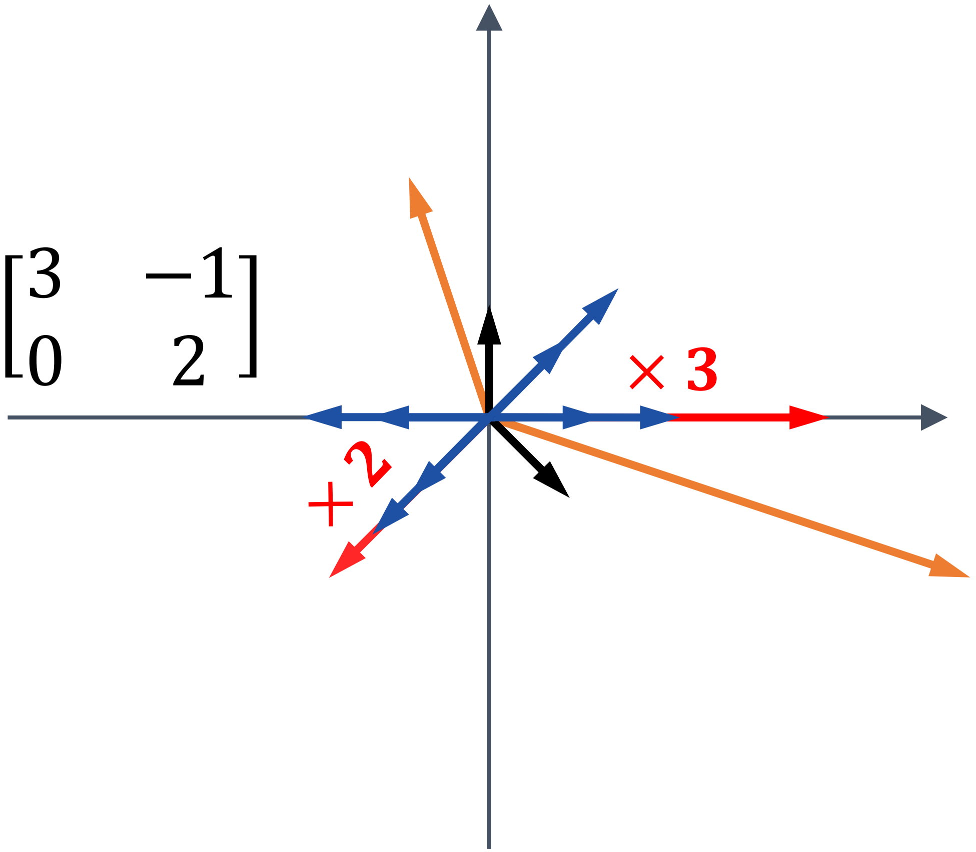
$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

собственный вектор с собственным числом $\lambda_1 = 3$

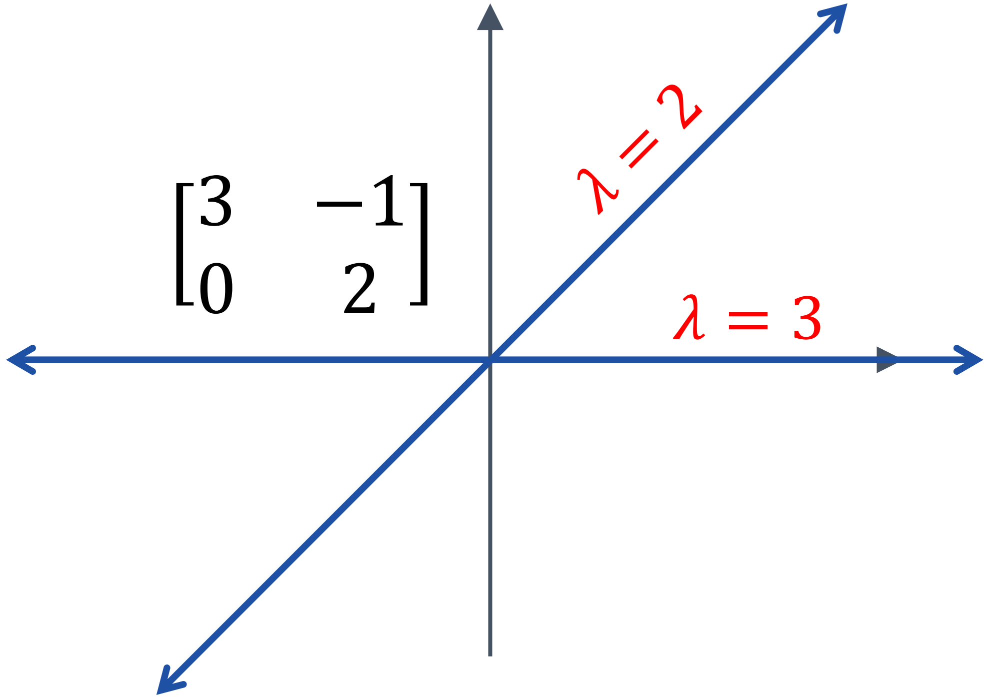
$$v_2 = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}$$

собственный вектор с собственным числом $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

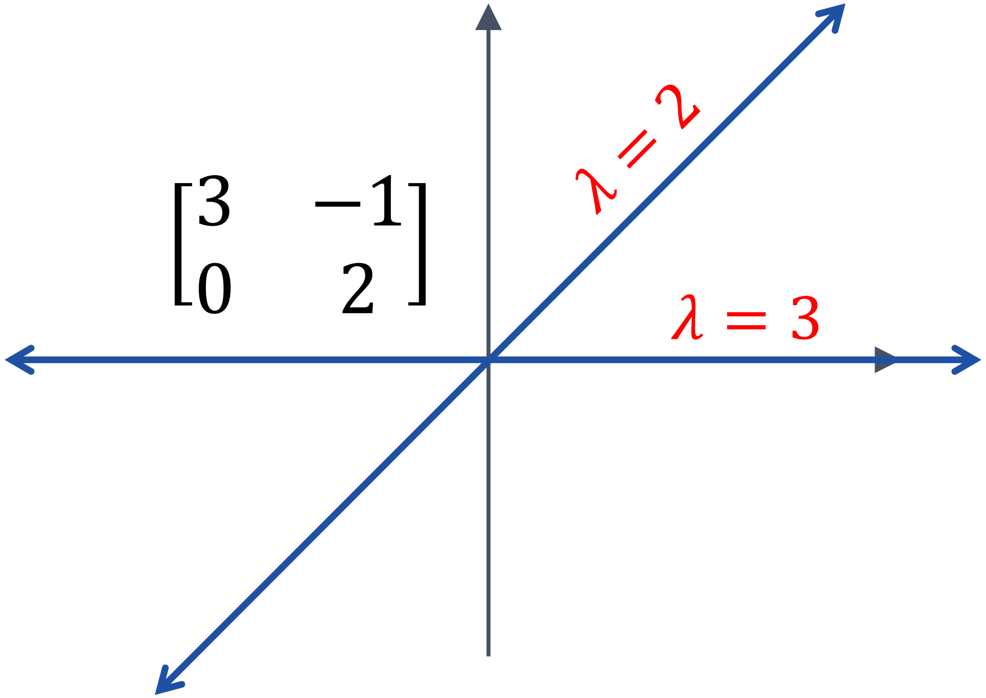


Собственные вектора и собственные числа



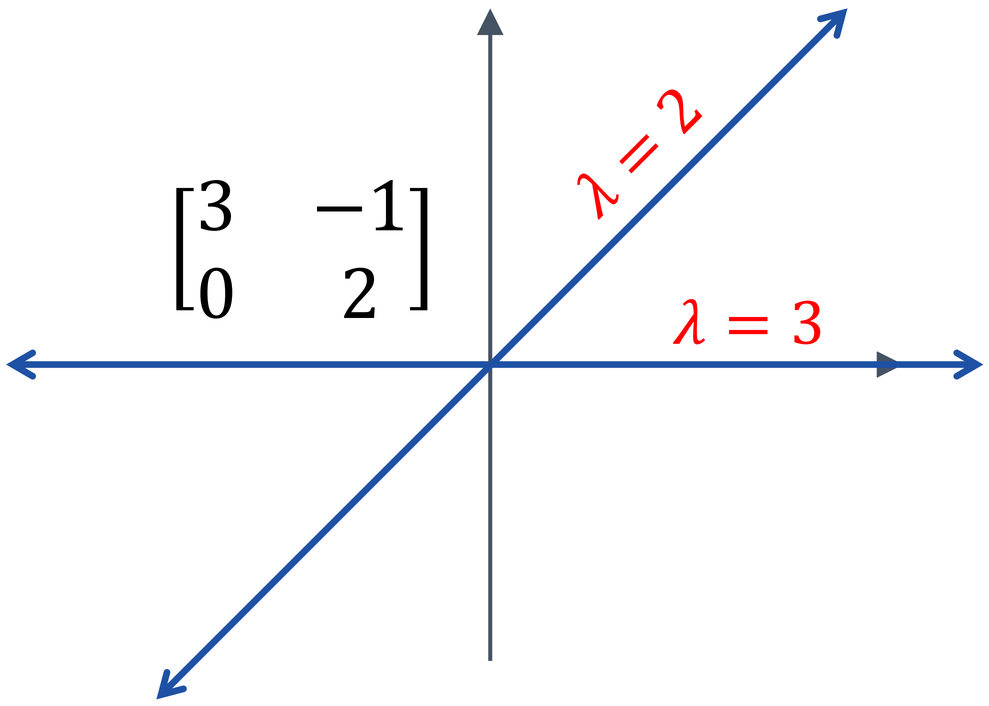
Собственные вектора и собственные числа

Собственные вектора задают направления, по которым матрица только растягивает пространство (без вращения)



Собственные вектора и собственные числа

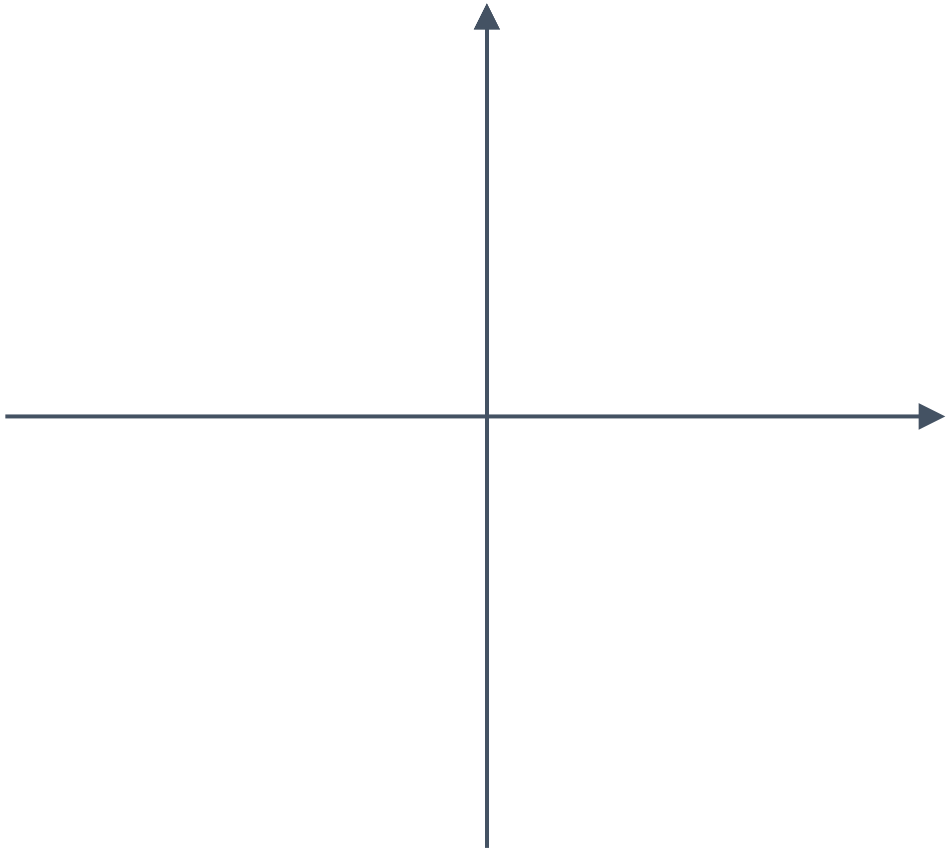
Собственные вектора задают направления, по которым матрица только растягивает пространство (без вращения)



Собственные числа показывают, во сколько раз растягивает

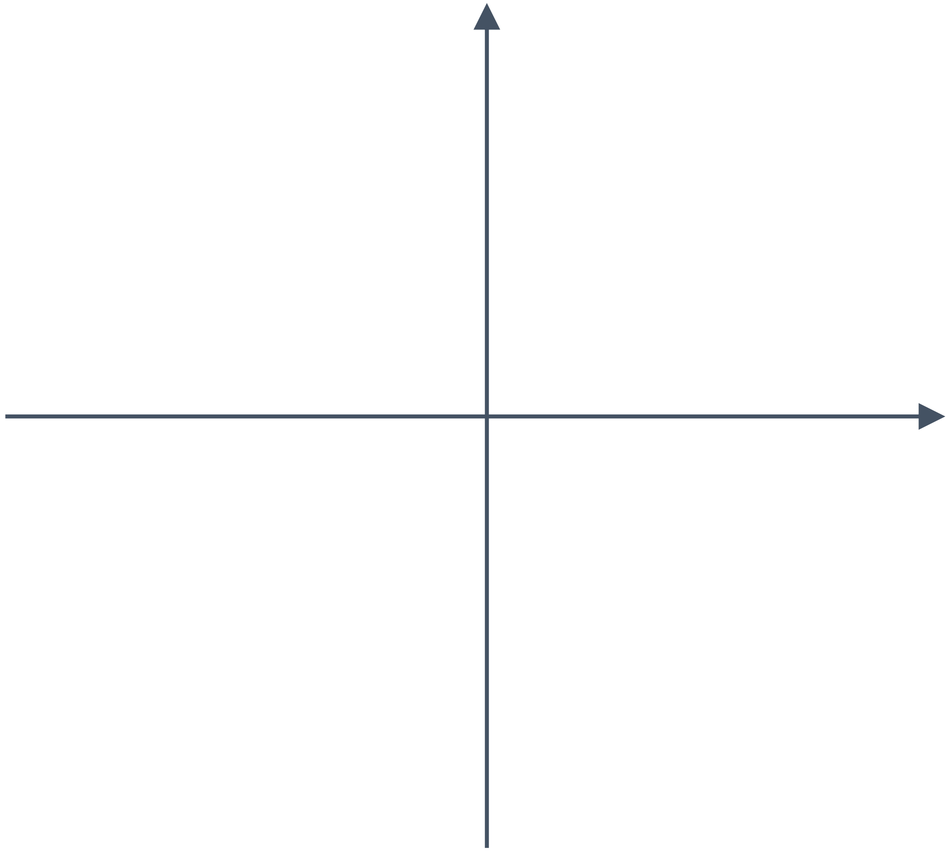
Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$



Собственные вектора и собственные числа

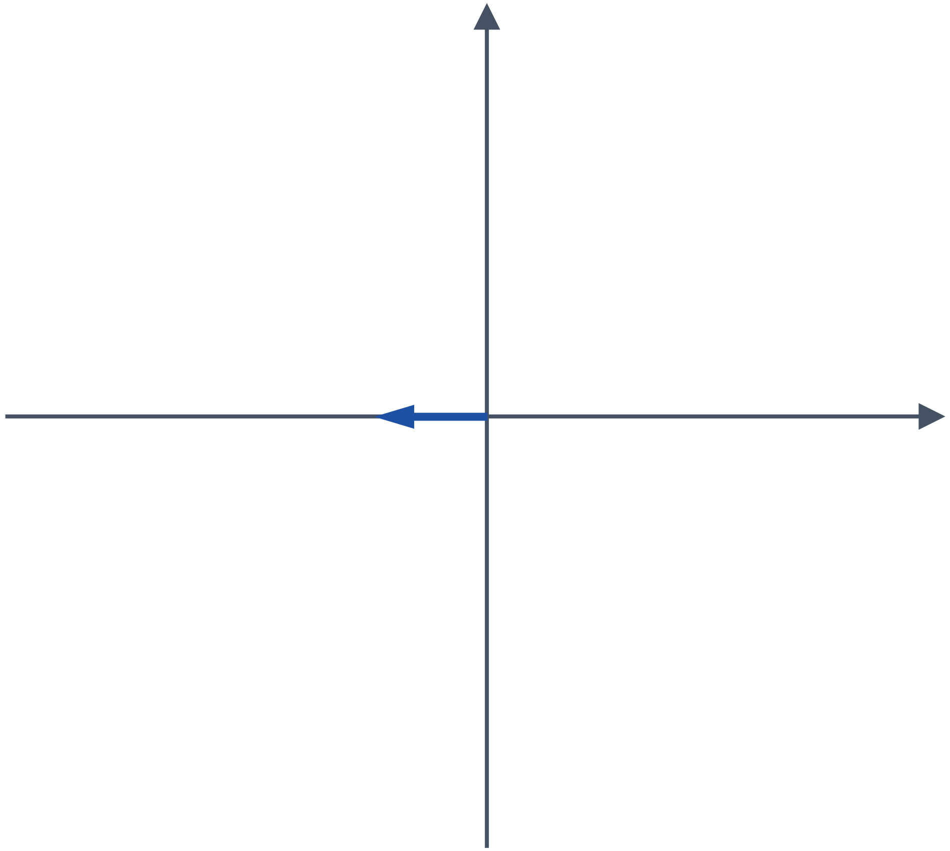
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$



Собственные вектора и собственные числа

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

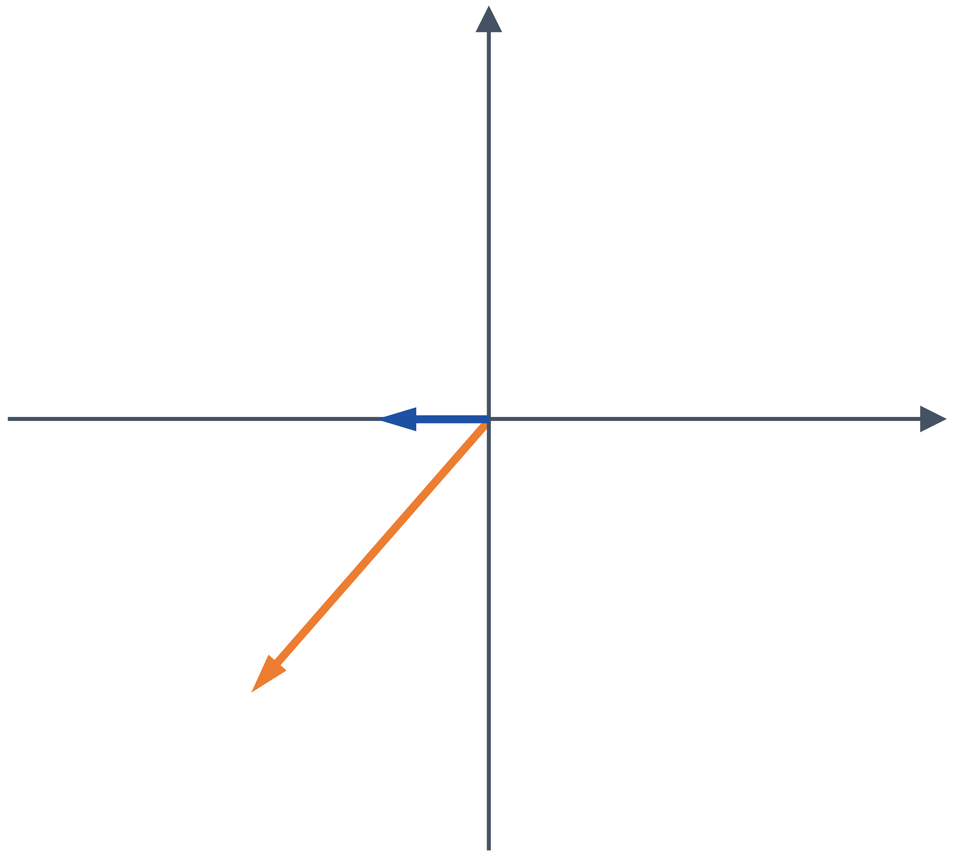
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

☹

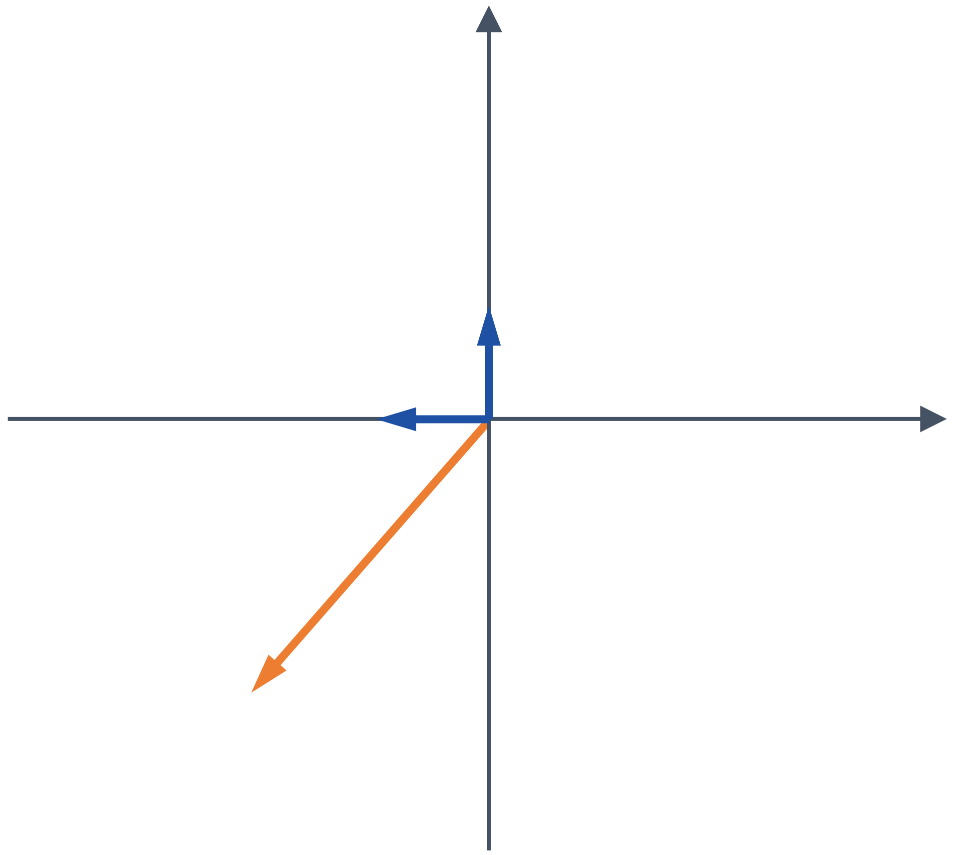


Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

☹

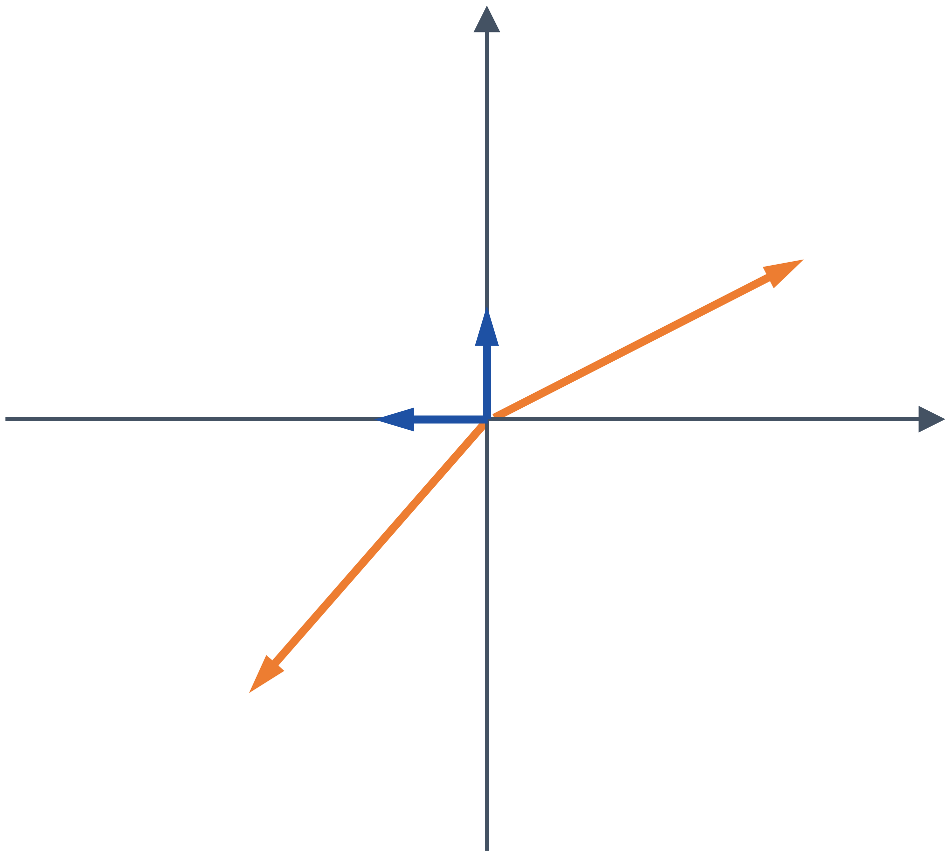
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$ ☹

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$ ☹

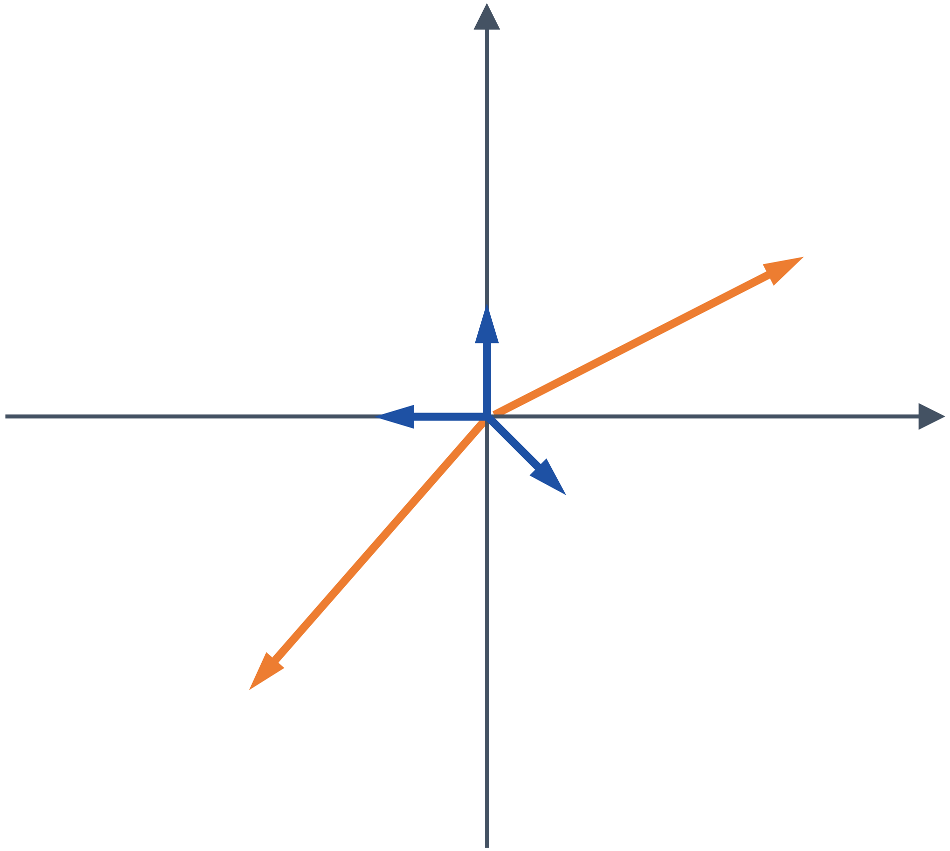


Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$ ☹

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$ ☹

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

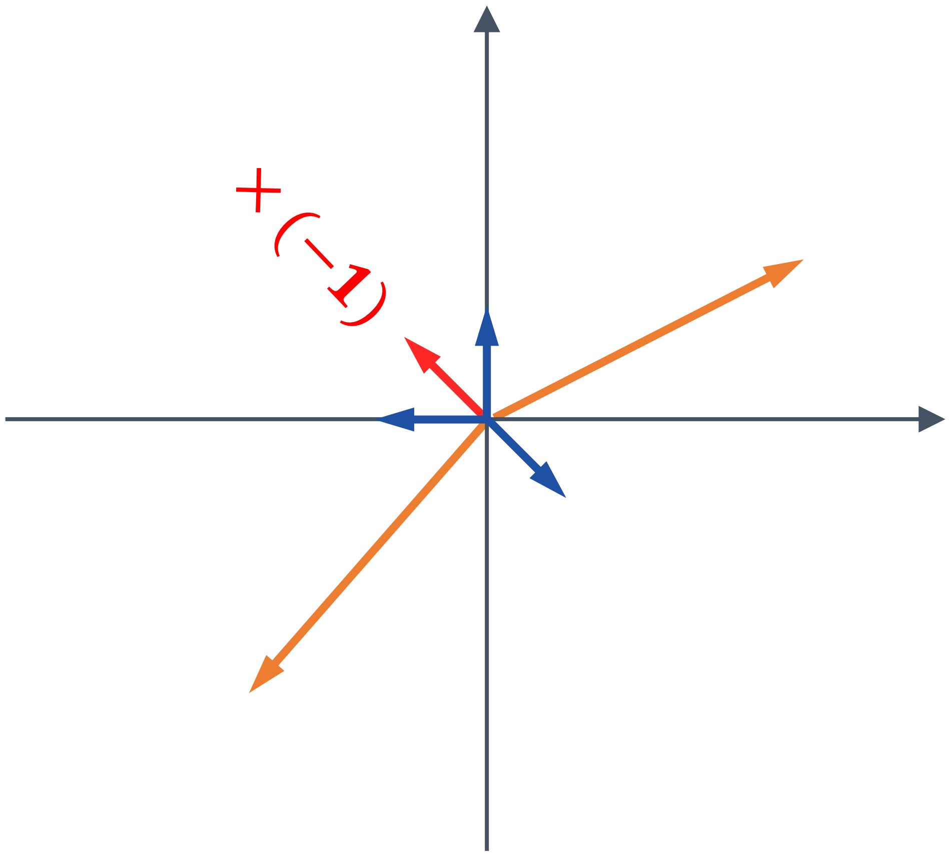
☹

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Умножился на -1!



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

☹

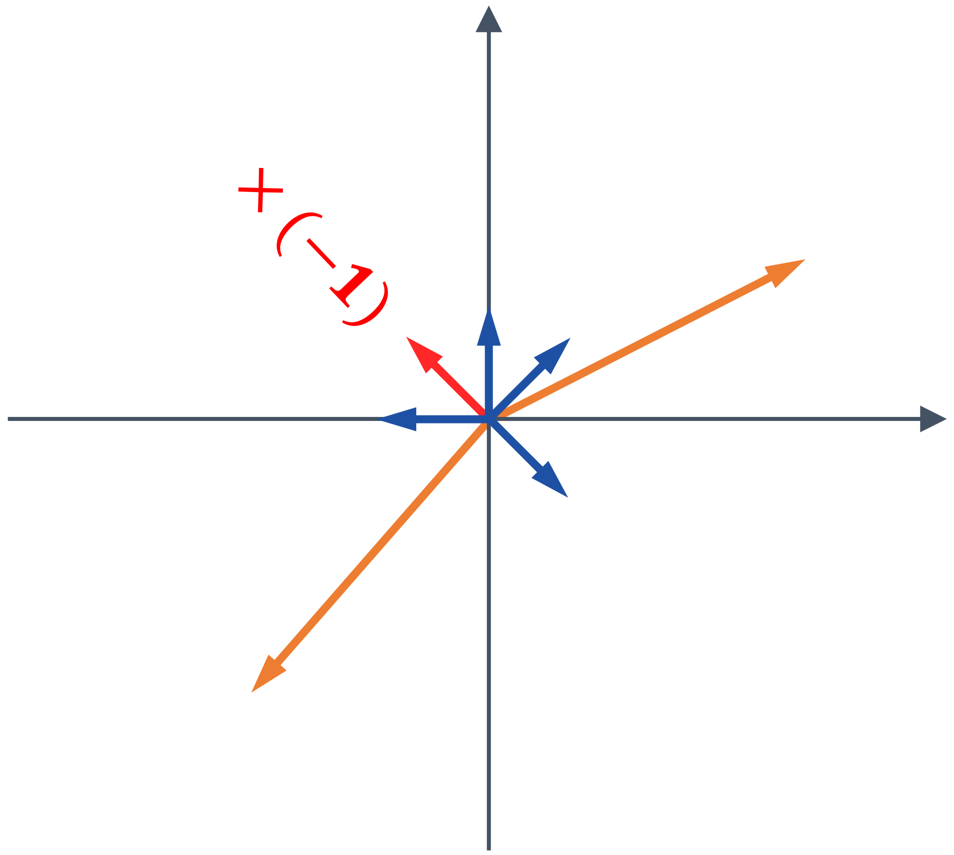
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Умножился на -1!

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$



Собственные вектора и собственные числа

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

☹

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

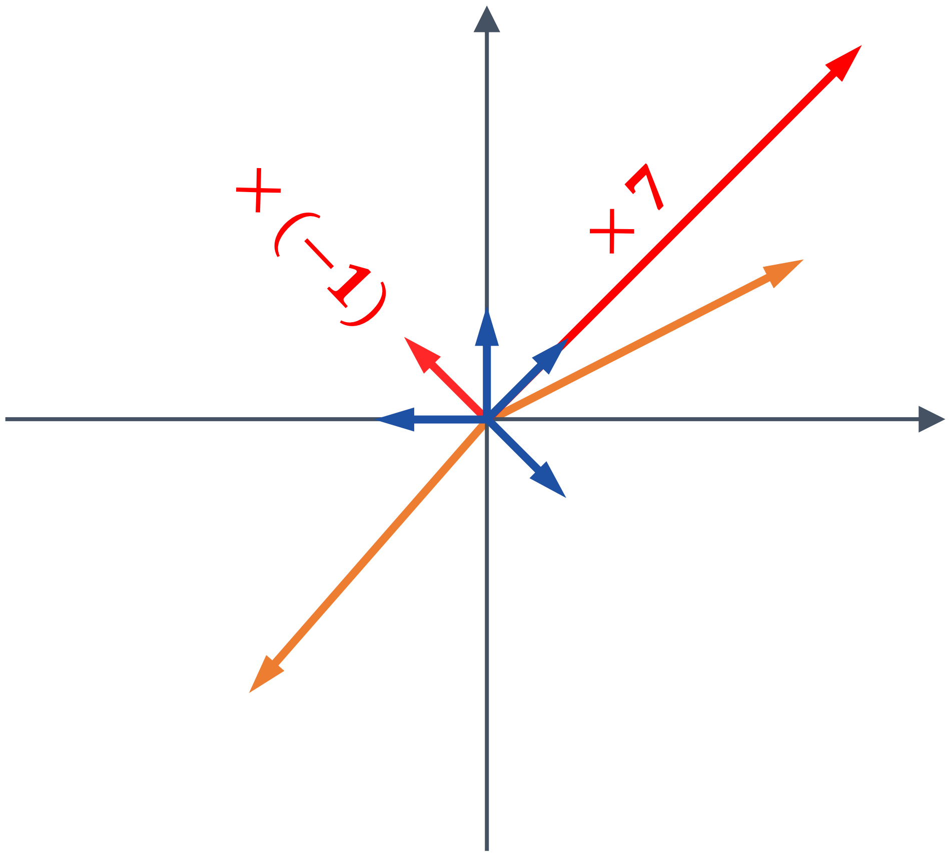
☹

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Умножился на -1!

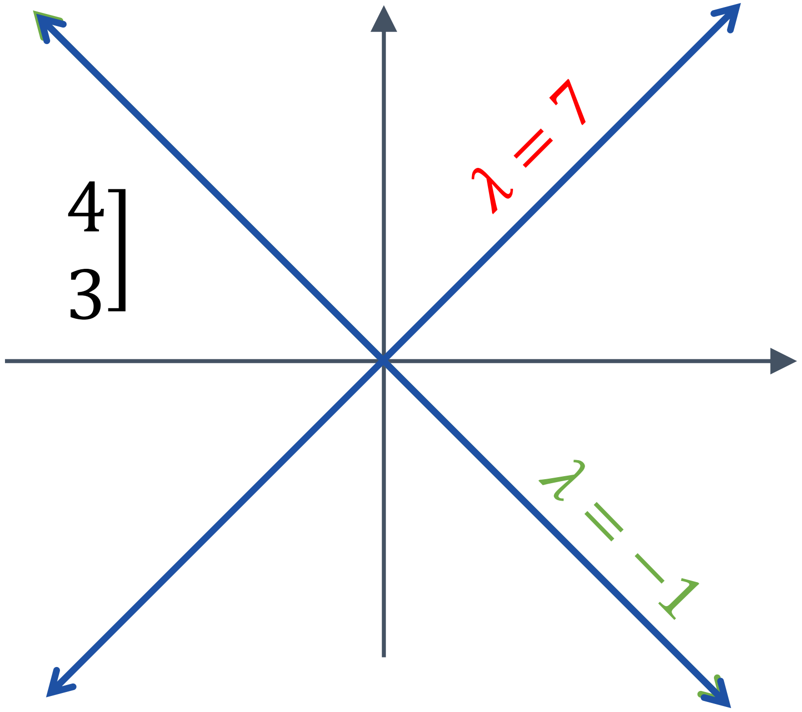
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Умножился на 7!



Собственные вектора и собственные числа

Плоскость перевернули



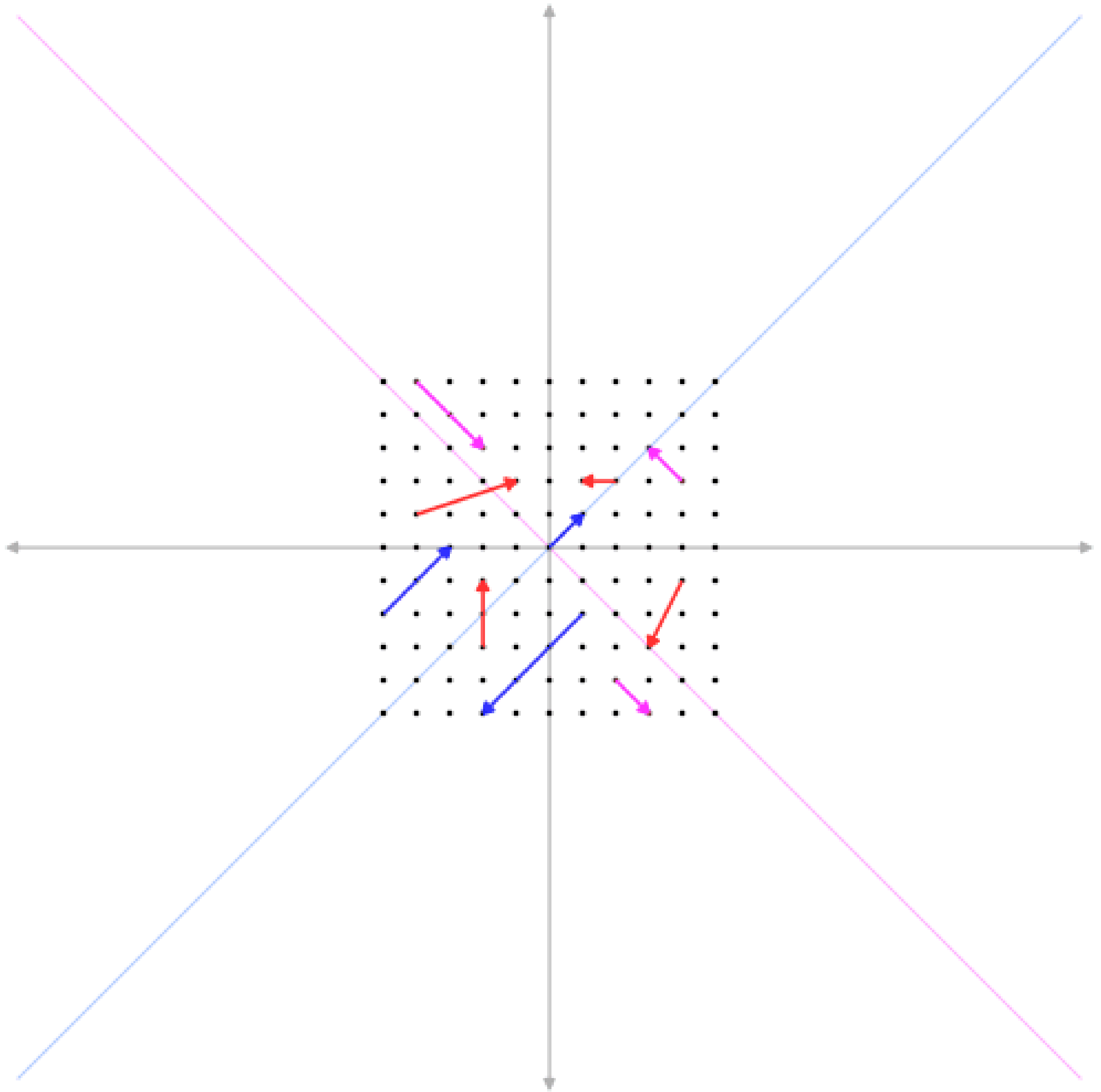
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

И в 7 раз растянули

Собственные вектора и собственные числа

Отображение

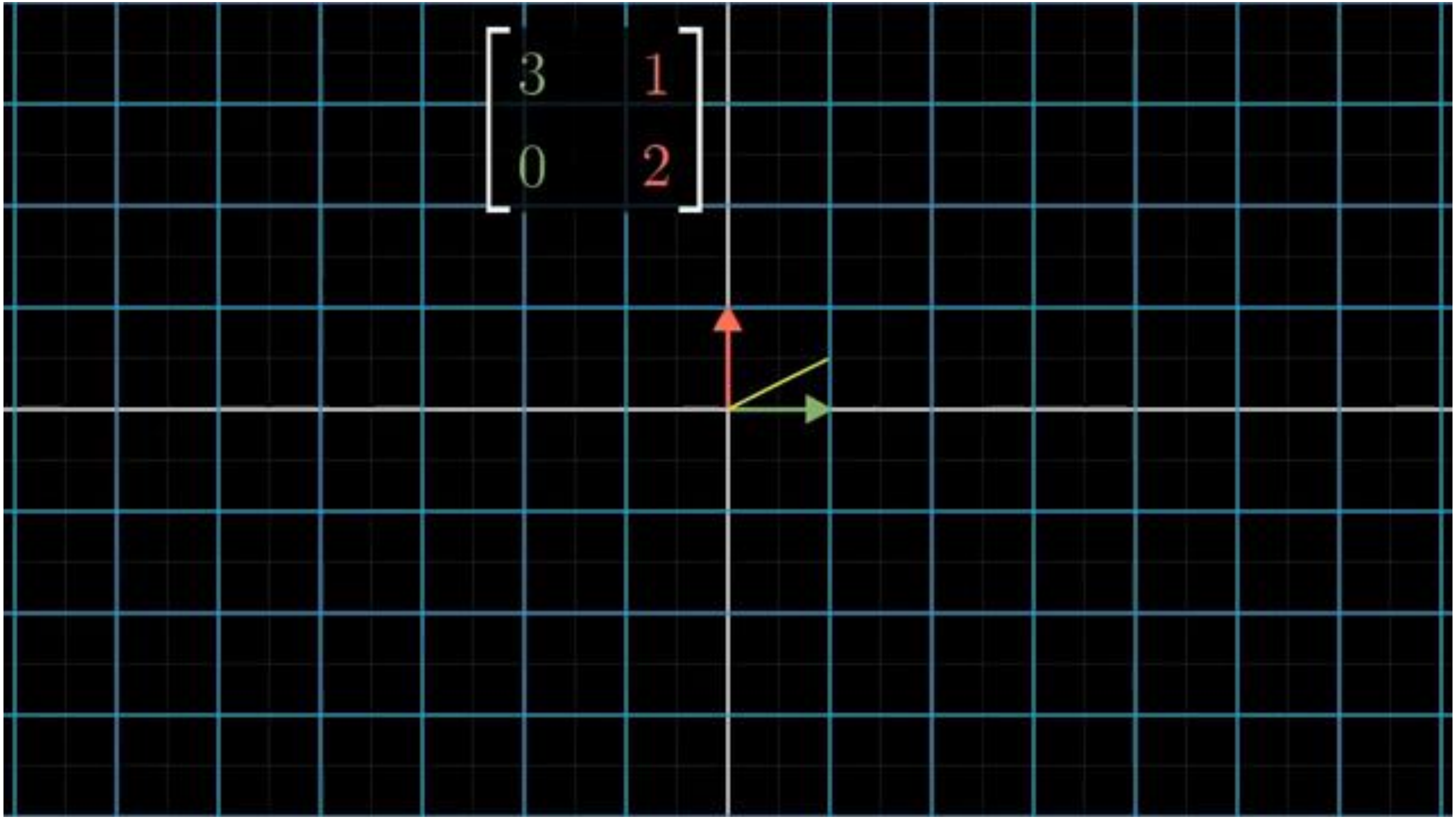
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



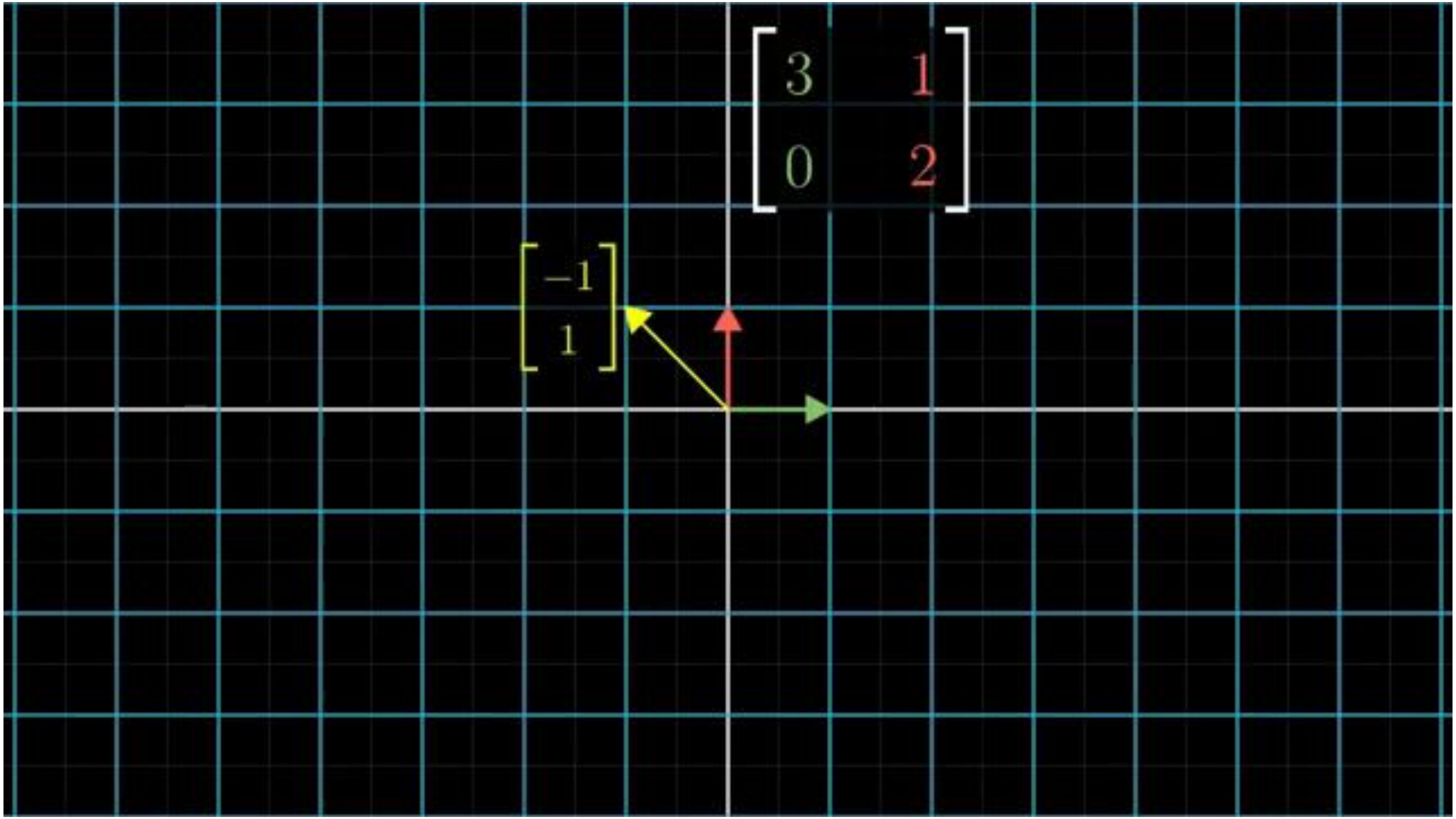
Собственные вектора

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

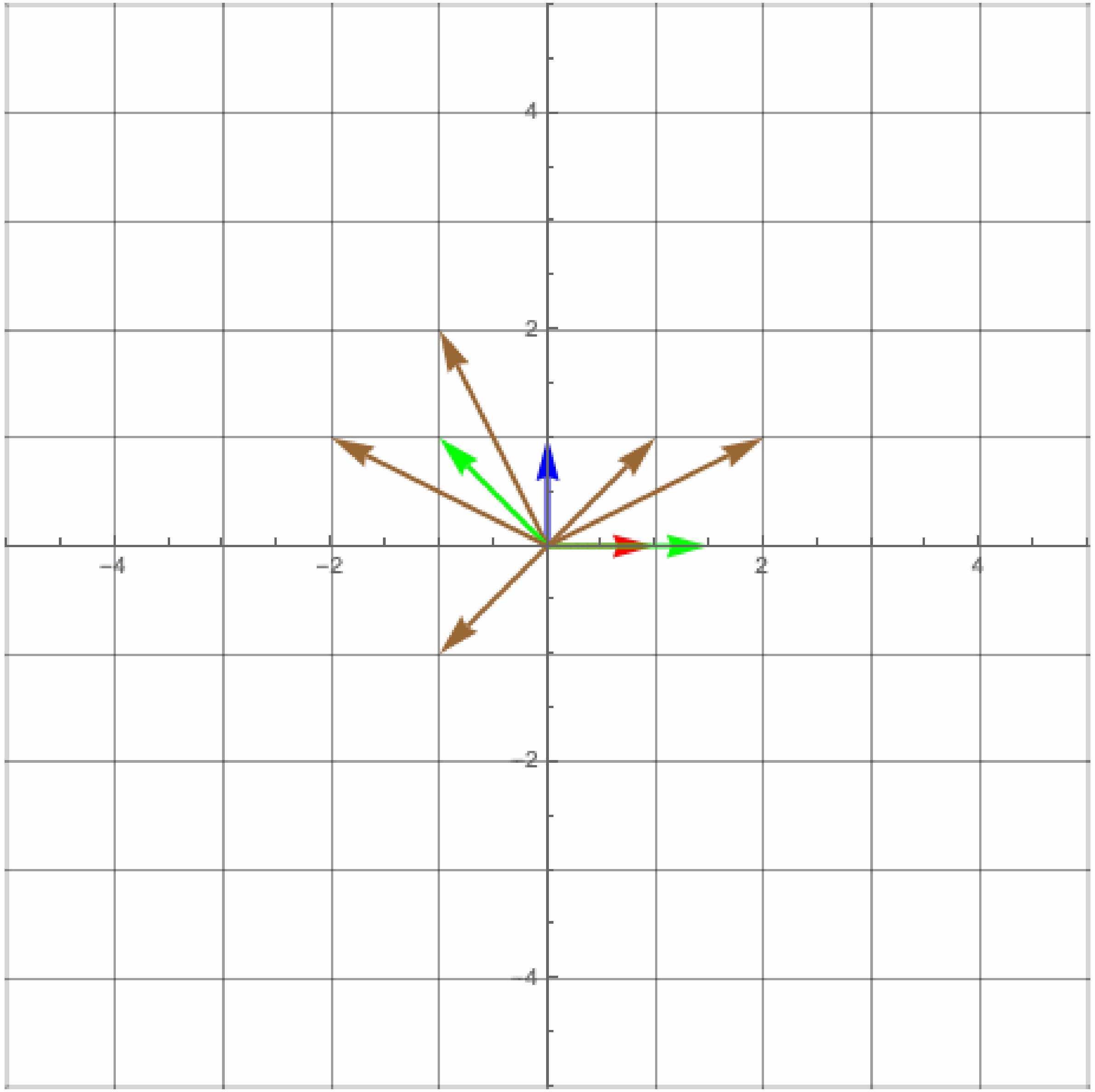
Собственные вектора и собственные числа



Собственные вектора и собственные числа



Собственные вектора и собственные числа



Вывод формулы для собственных чисел

Вывод формулы для собственных чисел

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0$$

Вывод формулы для собственных чисел

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0$$

Вывод формулы для собственных чисел

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Вывод формулы для собственных чисел

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$v \in \mathrm{Nullspace}(A - \lambda I)$$

Вывод формулы для собственных чисел

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$v \in \mathrm{Nullspace}(A - \lambda I)$$

$$\mathrm{Nullspace}(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

Вывод формулы для собственных чисел

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$v \in \mathrm{Nullspace}(A - \lambda I)$$

$$\mathrm{Nullspace}(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

$$\mathrm{nullity}(A - \lambda I) > 0$$

Вывод формулы для собственных чисел

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$v \in \mathrm{Nullspace}(A - \lambda I)$$

$$\mathrm{Nullspace}(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

$$\mathrm{nullity}(A - \lambda I) > 0 \iff \mathrm{rank}(A - \lambda I) < n$$

Вывод формулы для собственных чисел

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$v \in \mathrm{Nullspace}(A - \lambda I)$$

$$\mathrm{Nullspace}(A - \lambda I) \neq \{0\}$$

$$\mathrm{nullity}(A - \lambda I) > 0 \iff \mathrm{rank}(A - \lambda I) < n$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Вывод формулы для собственных чисел

Характеристическое уравнение

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

(формула для вычисления собственных чисел)

Вывод формулы для собственных чисел

Характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\lambda I - A) = 0$$

(формула для вычисления собственных чисел)

Вычисление собственных чисел

Вычисление собственных чисел

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных чисел

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

Вычисление собственных чисел

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff \det\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

Вычисление собственных чисел

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

Вычисление собственных чисел

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff \det\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\boxed{(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0}$$

Вычисление собственных чисел

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \iff \det\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\boxed{(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0}$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$$

Собственные числа матрицы A

Вычисление собственных чисел

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных чисел

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 7 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 7 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 7 \end{bmatrix} = 0$$

Вычисление собственных чисел

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 7 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 7 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 7 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 7)^3 + 1 - 1 - (\lambda - 7) - (\lambda - 7) + (\lambda - 7) = 0$$

Вычисление собственных чисел

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 7 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 7 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 7 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 7)^3 + 1 - 1 - (\lambda - 7) - (\lambda - 7) + (\lambda - 7) = 0$$

$$(\lambda - 7)^3 - (\lambda - 7) = 0$$

Вычисление собственных чисел

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 7 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 7 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 7 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 7)^3 + 1 - 1 - (\lambda - 7) - (\lambda - 7) + (\lambda - 7) = 0$$

$$(\lambda - 7)^3 - (\lambda - 7) = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda^2 - 14\lambda + 48) = 0$$

Вычисление собственных чисел

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 7 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda - 7 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 7 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 7)^3 + 1 - 1 - (\lambda - 7) - (\lambda - 7) + (\lambda - 7) = 0$$

$$(\lambda - 7)^3 - (\lambda - 7) = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda^2 - 14\lambda + 48) = 0$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 7$ $\quad\lambda_2 = 8$ $\quad\lambda_3 = 6$

Вычисление собственных векторов

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3,\quad v_1 = ?$

$\lambda_2 = 2,\quad v_2 = ?$

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных векторов

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3x \\ \qquad 2y = 3y \end{cases}$$

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3x \\ \quad\;\; 2y = 3y \end{cases}$$

x – любое число,

y – обязательно 0

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3x \\ \quad\;\; 2y = 3y \end{cases}$$

x – любое число,

y – обязательно 0

Подходит, например, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3x \\ 2y = 3y \end{cases}$$

x – любое число,
y – обязательно 0

Подходит, например, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3x \\ 2y = 3y \end{cases}$$

x – любое число,

y – обязательно 0

Подходит, например, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3x \\ 2y = 3y \end{cases}$$

x – любое число,
y – обязательно 0

Подходит, например, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases}$$

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3x \\ 2y = 3y \end{cases}$$

x – любое число,
y – обязательно 0

Подходит, например, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases}$$

Подходят любые равные друг другу x и y

Вычисление собственных векторов

$\lambda_1 = 3, \qquad v_1 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3x \\ 2y = 3y \end{cases}$$

x – любое число,
y – обязательно 0

Подходит, например, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 2x \\ 2y = 2y \end{cases}$$

Подходят любые равные друг другу x и y

Например, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

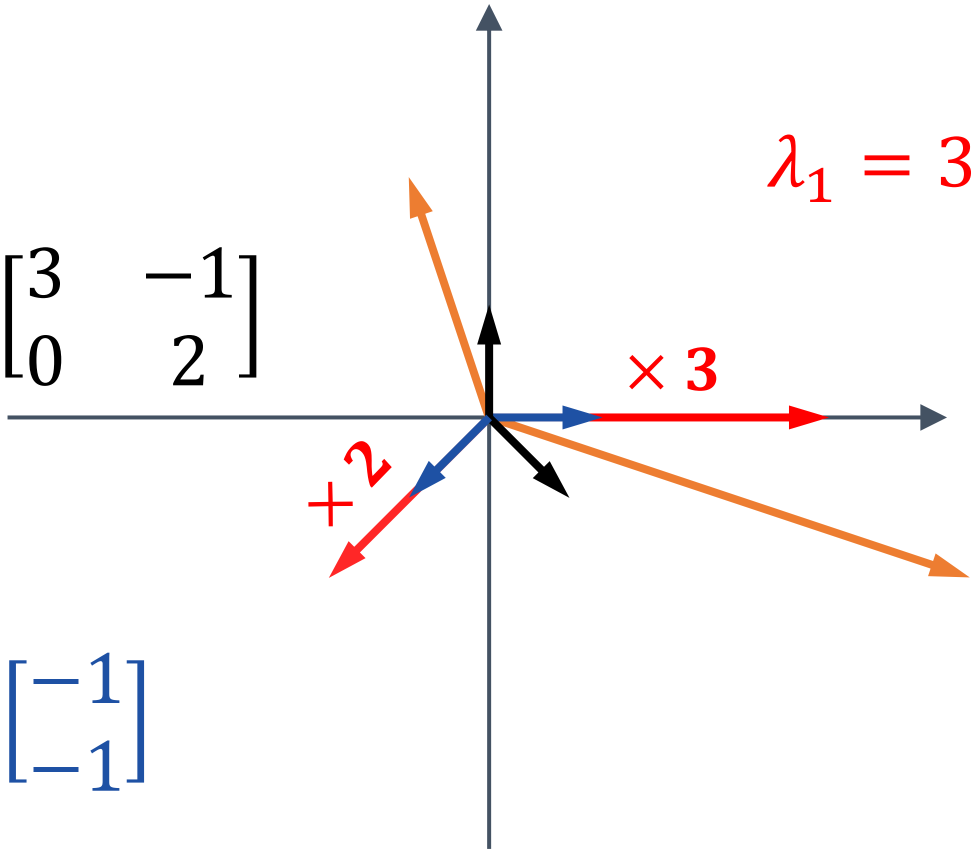
Вычисление собственных векторов

$$\lambda_1 = 3 \qquad\qquad \lambda_2 = 2$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных векторов

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_1 = 3 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Матрица $A_{n\times n}$ имеет ровно n собственных чисел

(с учётом кратности)

Матрица $A_{n\times n}$ имеет ровно n собственных чисел (с учётом кратности)

Множество $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ собственных чисел матрицы $A_{n\times n}$ называется её спектром

Связь спектра с определителем и следом

Связь спектра с определителем и следом

Определитель матрицы равен произведению её собственных чисел

$$\boxed{\det A_{n\times n} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Связь спектра с определителем и следом

Определитель матрицы равен произведению её собственных чисел

$$\boxed{\det A_{n\times n} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

След матрицы равен сумме её собственных чисел

$$\boxed{\operatorname{trace} A_{n\times n} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Связь спектра с определителем и следом

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = 2$$

$$\det A = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\operatorname{trace} A = 3 + 2 = 5$$

Связь спектра с определителем и следом

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

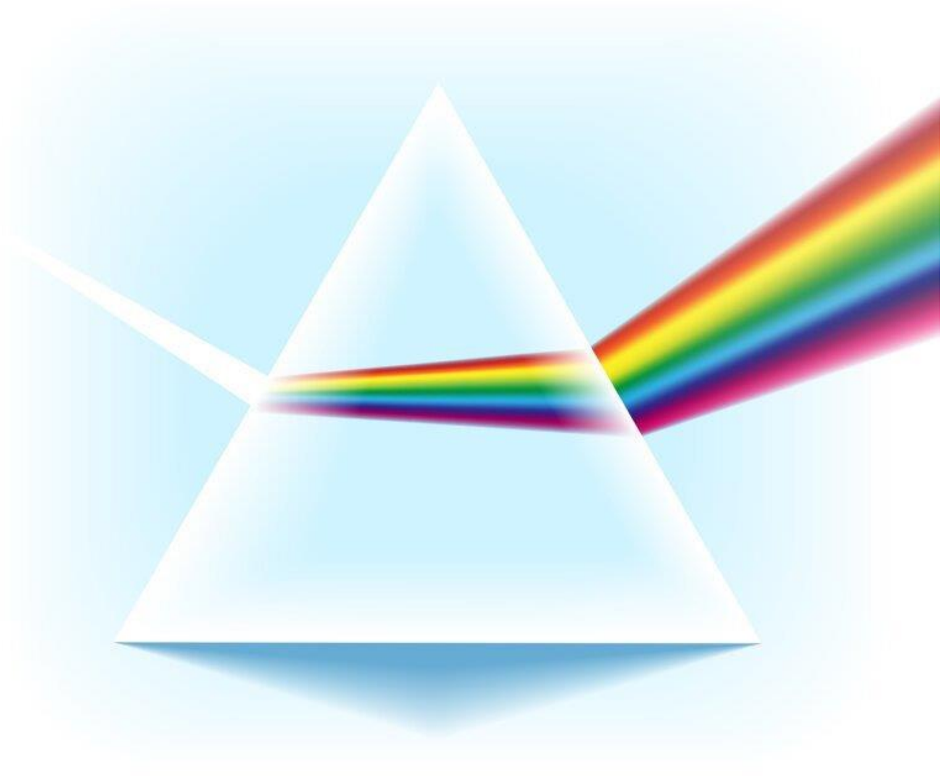
$$\lambda_1 = 7$$
$$\lambda_2 = -1$$

$$\det B = 7 \cdot (-1) = -7$$

$$\operatorname{trace} B = 7 + (-1) = 6$$

Связь спектра с определителем и следом

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_1 = 7$$
$$\lambda_2 = 8$$
$$\lambda_3 = 6$$

$$\det C = 7 \cdot 8 \cdot 6 = 336$$

$$\operatorname{trace} C = 7 + 8 + 6 = 21$$

Спектральное разложение

Спектральное разложение

Пусть $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные числа,

v_1, v_2, v_3 – собственные вектора

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \\ Av_3 = \lambda_3 v_3 \end{cases}$$

Спектральное разложение

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \\ Av_3 = \lambda_3 v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Спектральное разложение

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \\ Av_3 = \lambda_3 v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Спектральное разложение

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \\ Av_3 = \lambda_3 v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \\ Av_3 = \lambda_3 v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$? \Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \\ Av_3 = \lambda_3 v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \lambda_3 v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

(если вектора v_1, v_2, v_3 линейно независимы) $\Updownarrow$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1}$$

Матрица разложена на «хорошие» множители

Спектральное разложение

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & A & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Матрица разложена на «хорошие» множители

A – исходная матрица

P – матрица собственных векторов матрицы A

D – диагональная матрица собственных чисел матрицы A

Спектральное разложение

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$$

Спектральное разложение

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 3 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$

Варианты спектрального разложения

Спектральное разложение

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 3 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$

Варианты спектрального разложения

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \nearrow & \lambda_1 = 3 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \\ \searrow & \lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Варианты спектрального разложения

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 3 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$

Варианты спектрального разложения

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 3 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$$

Варианты спектрального разложения

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} \lambda_1 = 3 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} \end{cases}$$

Варианты спектрального разложения

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} \lambda_1 = 3 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 2 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} \end{cases}$$

Варианты спектрального разложения

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Спектральное разложение

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 7 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix}$$

Спектральное разложение

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \nearrow \searrow$$

$$\lambda_1 = 7 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_1 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \xrightarrow{\text{любой вида}} v_2 = \begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix}$$

Варианты спектрального разложения

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -26 \\ -5 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -26 \\ -5 & 26 \end{bmatrix}^{-1} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 & -5 \\ 26 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -26 & -5 \\ 26 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$$

Подобие и спектральное разложение

Подобие и спектральное разложение

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Подобие и спектральное разложение

Матрица в стандартном базисе

Какой-то базис

Матрица в каком-то базисе

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Подобие и спектральное разложение

Матрица в стандартном базисе

Какой-то базис

Матрица в каком-то базисе

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Подобие и спектральное разложение

Матрица в стандартном базисе

Какой-то базис

Матрица в каком-то базисе

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Матрица в стандартном базисе

Базис собственных векторов

Матрица в базисе собственных векторов

Подобие и спектральное разложение

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

В базисе собственных векторов матрица выглядит как диагональная

Как преобразует диагональная матрица?

Как преобразует диагональная матрица?

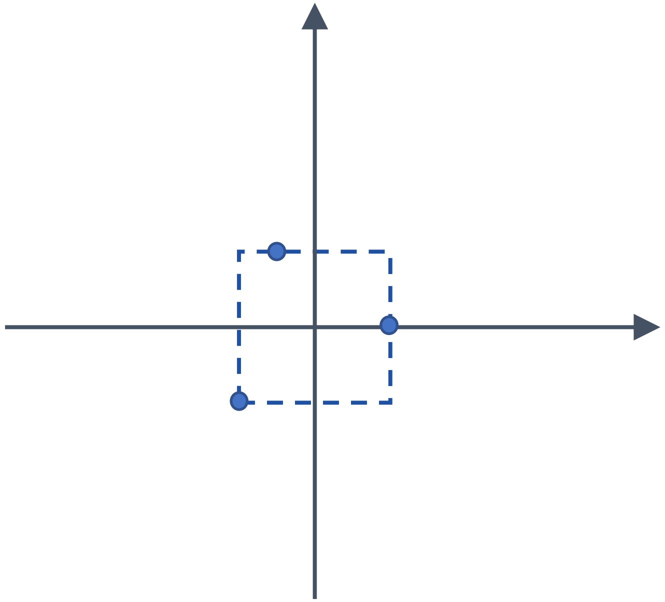
Просто масштабирует каждую координату

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ \lambda_3 z \end{bmatrix}$$

Как преобразует диагональная матрица?

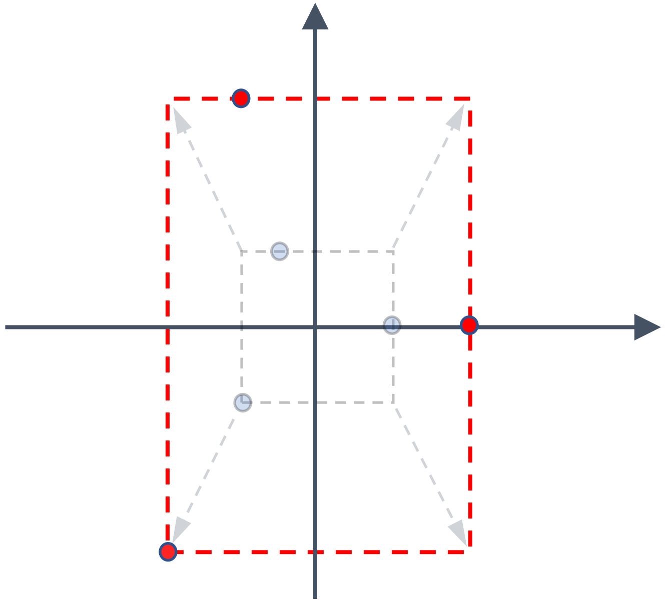
Просто масштабирует каждую координату

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \\ \lambda_3 z \end{bmatrix}$$



$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

Растяжение в 2 раза по x
и в 3 раза по y



Геометрический смысл спектрального разложения

Геометрический смысл спектрального разложения

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

Преобразование
в стандартном базисе

Переход в базис
собственных векторов

Возвращение
в стандартный базис

Покоординатное масштабирование

Геометрический смысл спектрального разложения

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Преобразование
в стандартном базисе

Переход в базис
собственных векторов

$A =$

Возвращение
в стандартный базис

Покоординатное масштабирование

Геометрический смысл спектрального разложения

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Преобразование
в стандартном базисе

Переход в базис
собственных векторов

$$A = \qquad P^{-1}$$

Возвращение
в стандартный базис

Покоординатное масштабирование

Геометрический смысл спектрального разложения

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Преобразование
в стандартном базисе

Переход в базис
собственных векторов

$$A = \quad DP^{-1}$$

Возвращение
в стандартный базис

Покоординатное масштабирование

Геометрический смысл спектрального разложения

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Преобразование
в стандартном базисе

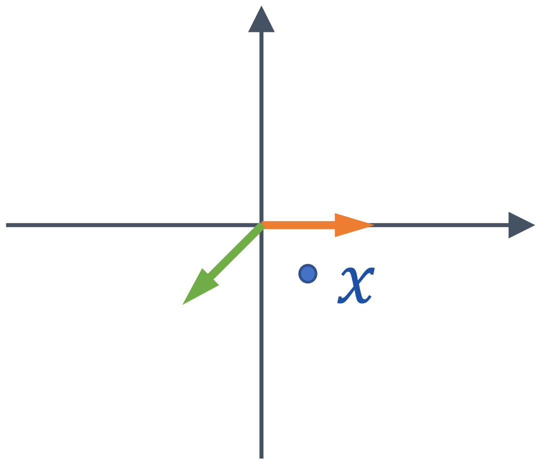
Переход в базис
собственных векторов

$$A = PDP^{-1}$$

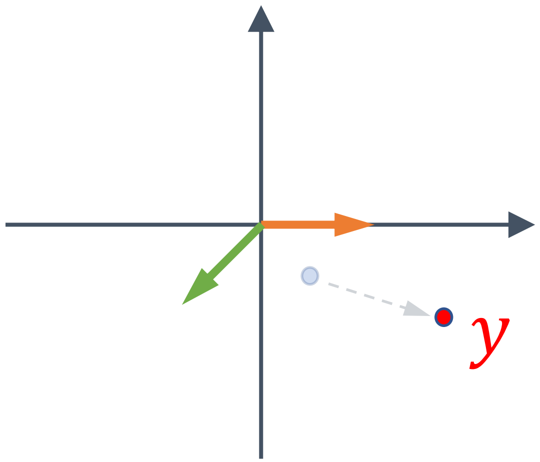
Возвращение
в стандартный базис

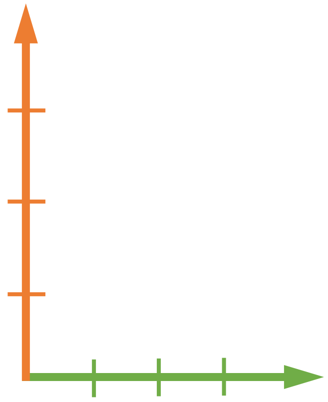
Покоординатное масштабирование

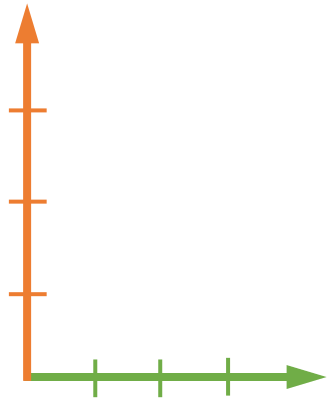
Геометрический смысл спектрального разложения



$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

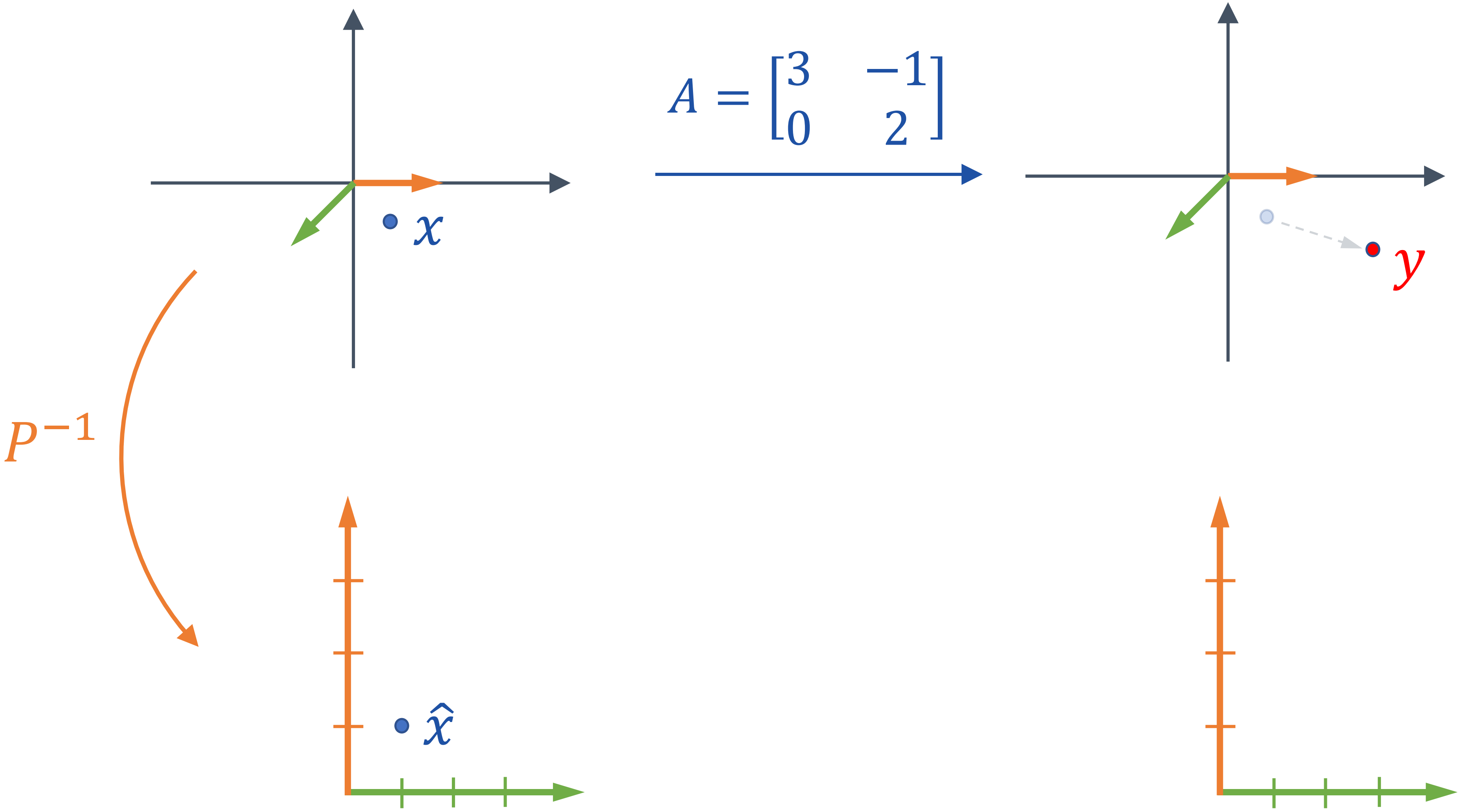




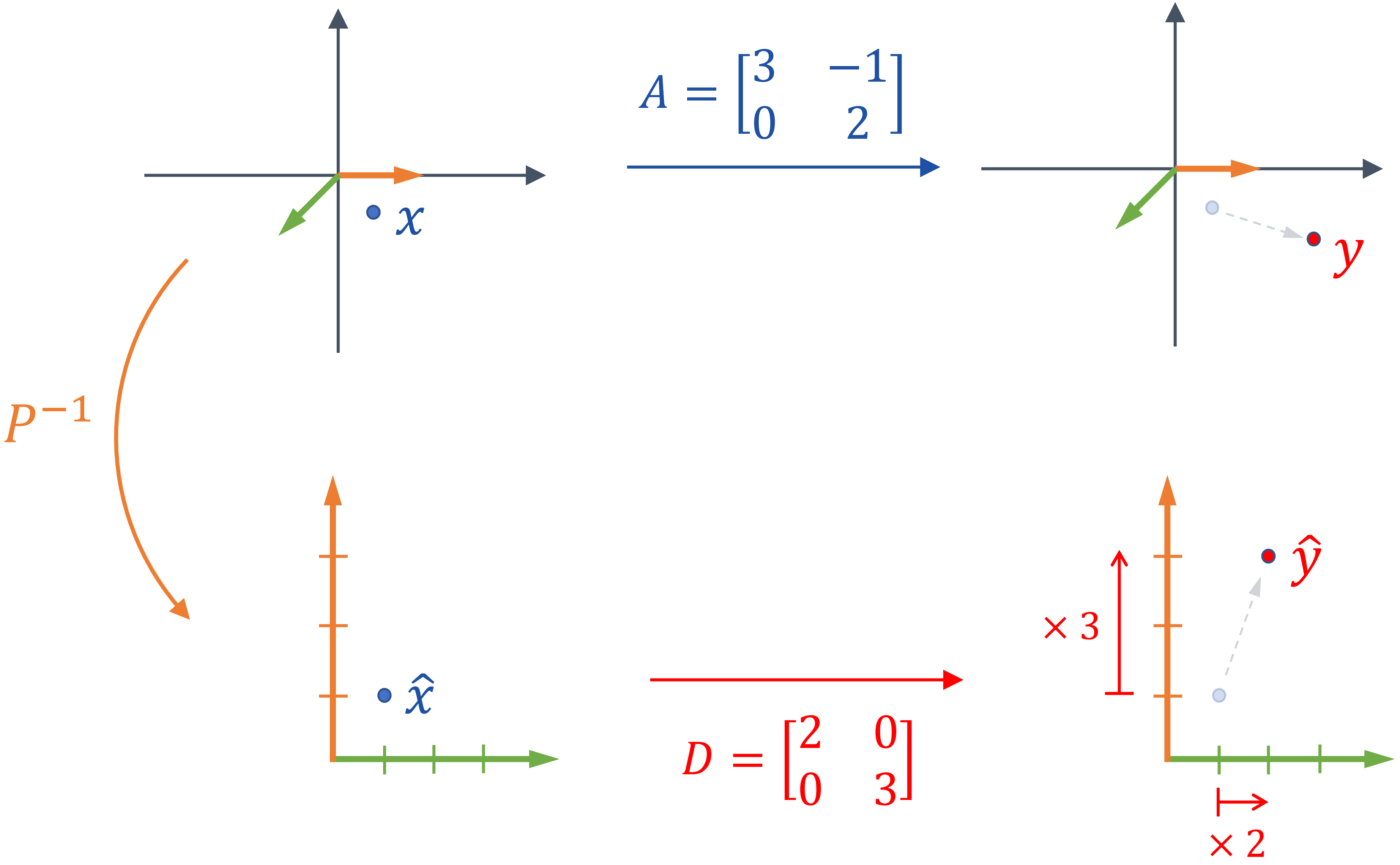


Геометрический смысл спектрального разложения

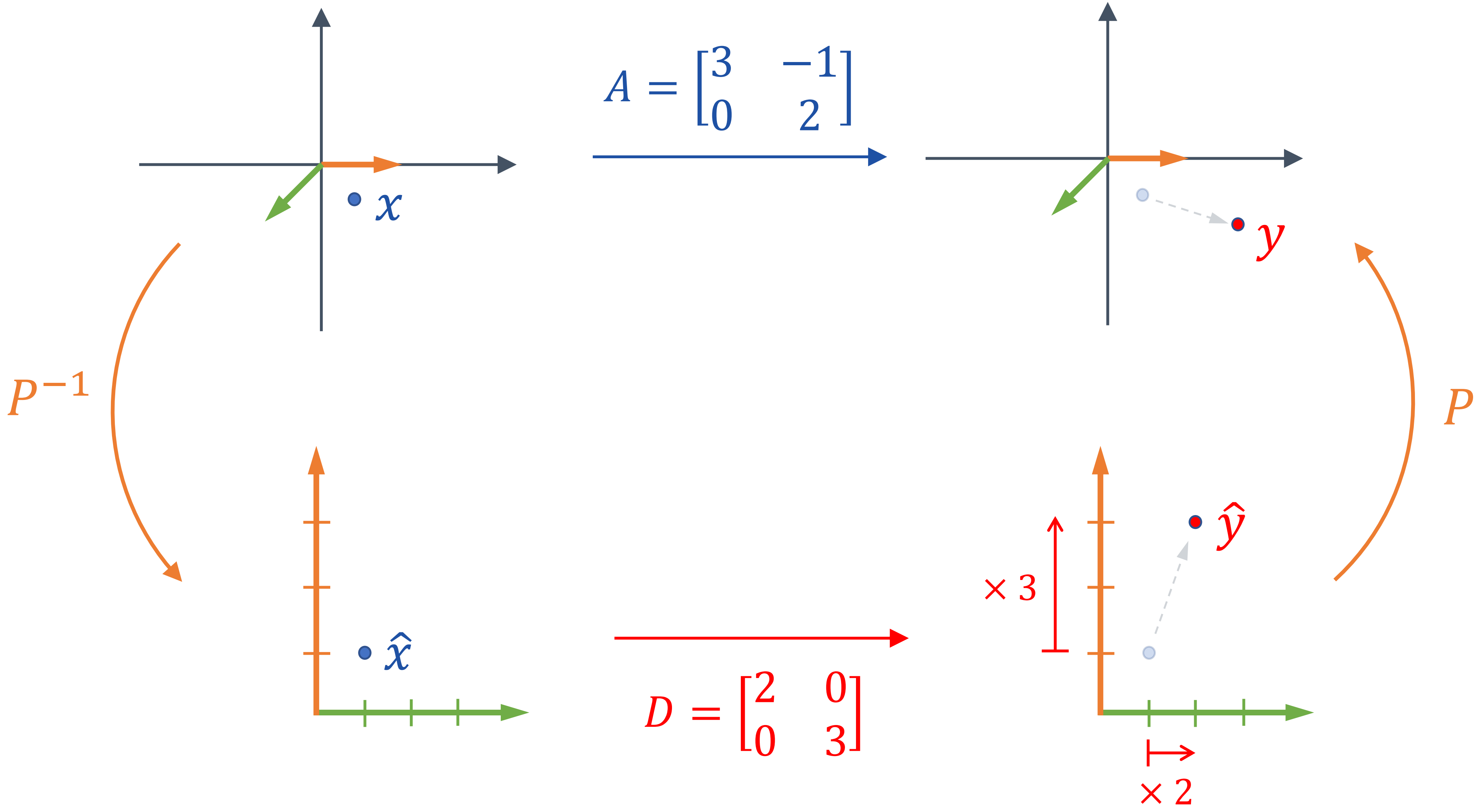
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Геометрический смысл спектрального разложения



Геометрический смысл спектрального разложения



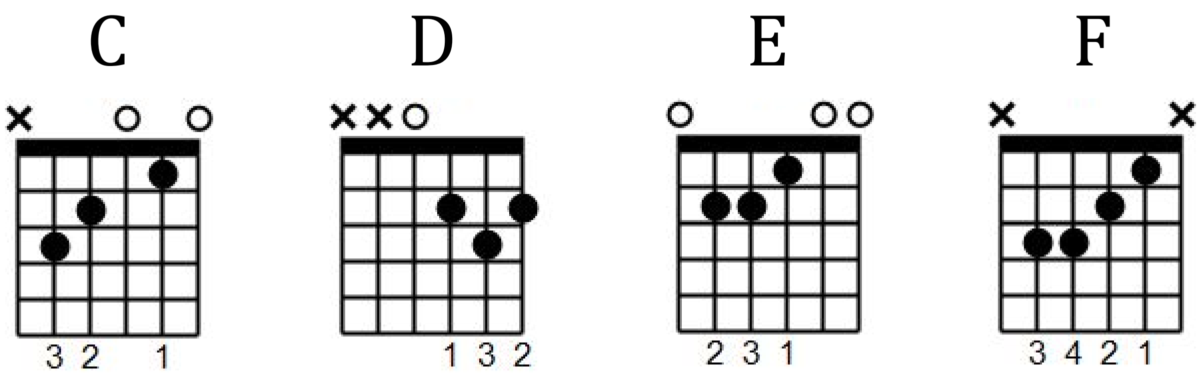
В базисе собственных векторов матрица выглядит как диагональная, то есть просто!

Гитарная аналогия

Гитарная аналогия

Аккорды в стандартном гитарном строе

(стандартный базис)

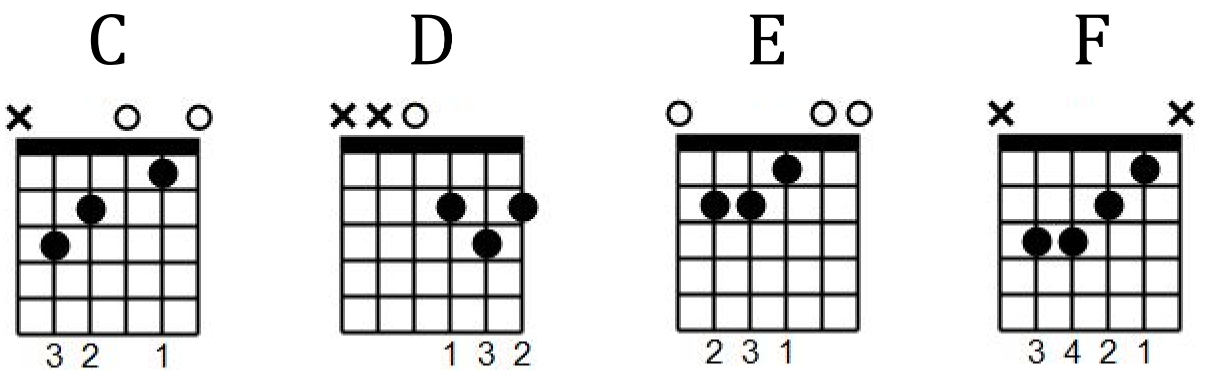


Гитарная аналогия

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

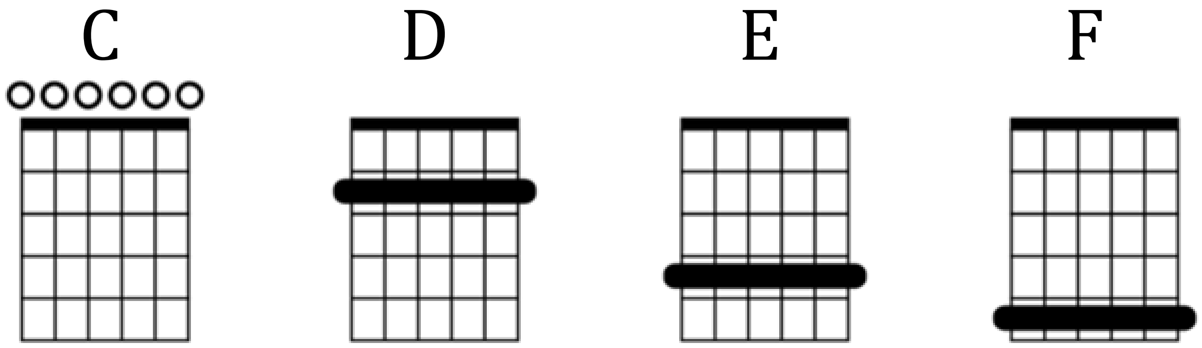
Аккорды в стандартном гитарном строе

(стандартный базис)



Аккорды в строе “Open C”

(простой базис для мажорных аккордов)



Подобие и собственные числа

Подобие и собственные числа

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Если матрицы подобны,
то их собственные числа совпадают

Подобие и собственные числа

Если матрицы подобны,
то их собственные числа совпадают

$$\boxed{\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \\ \operatorname{trace} A &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \end{aligned}}$$

Поэтому у них одинаковые
определитель и след

Подобие и собственные числа

Если матрицы подобны,
то их собственные числа совпадают

$$\boxed{\begin{gathered}\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \\ \operatorname{trace} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n\end{gathered}}$$

Поэтому у них одинаковые
определитель и след

Если матрицы подобны,
но не равны, то их
собственные вектора различны

Музыкальная аналогия

Музыкальная аналогия

Матрица ⟷ Аккорд

Собственные числа ⟷ Отдельные звуки

Музыкальная аналогия

Подобные матрицы –
одна и та же матрица в разных базисах

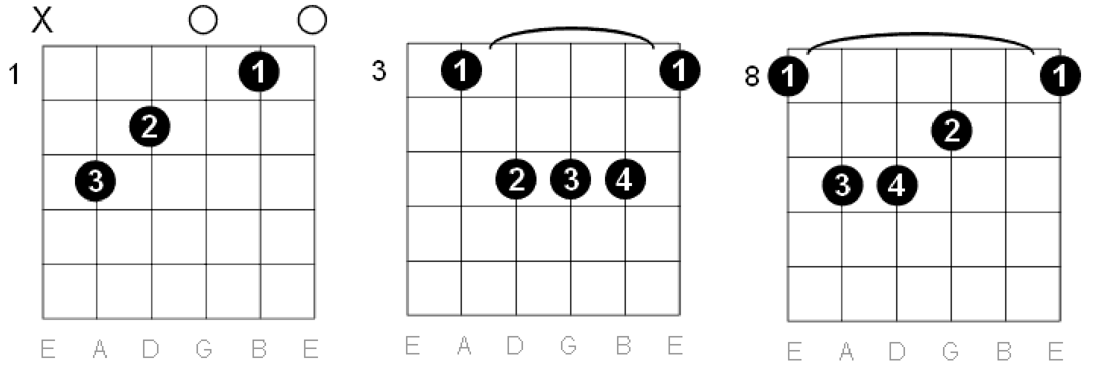
$$\begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Музыкальная аналогия

Подобные матрицы –
одна и та же матрица в разных базисах

$$\begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Разные аппликатуры –
один и тот же аккорд, по-разному зажатый

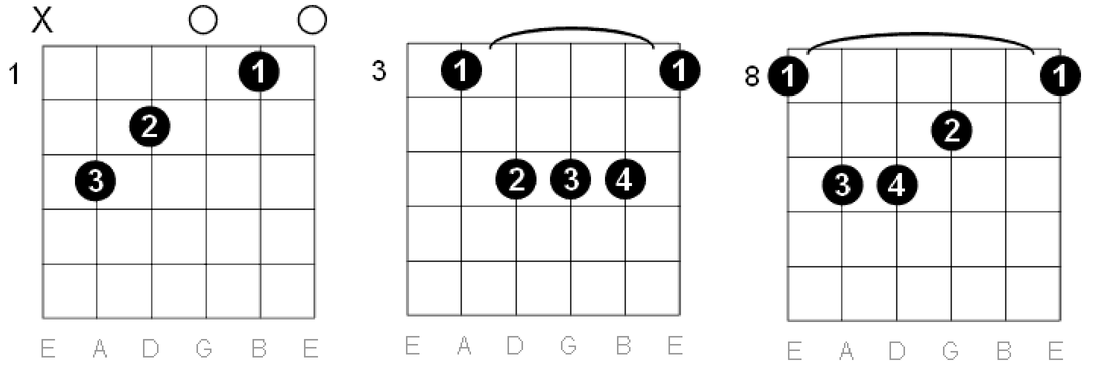


Музыкальная аналогия

Подобные матрицы –
одна и та же матрица в разных базисах

$$\begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Разные аппликатуры –
один и тот же аккорд, по-разному зажатый



Собственные числа матрицы
одинаковы во всех базисах

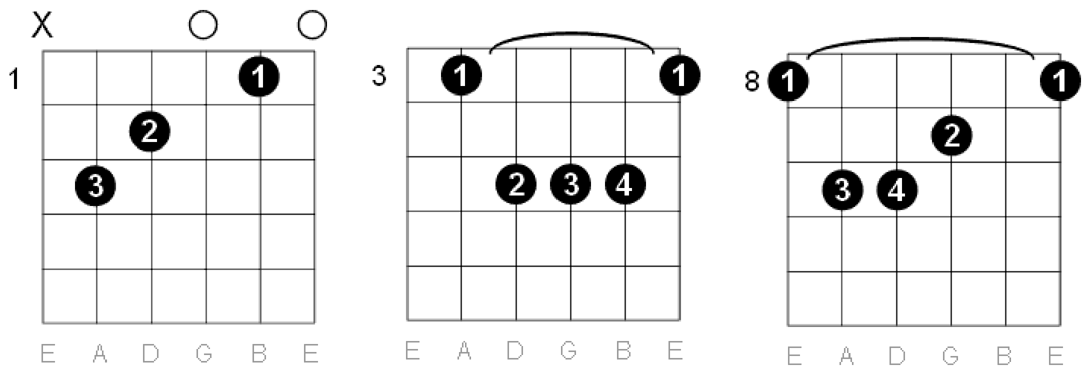
$$\lambda_1 = 7$$
$$\lambda_2 = 8$$
$$\lambda_3 = 6$$

Музыкальная аналогия

Подобные матрицы –
одна и та же **матрица** в разных базисах

$$\begin{bmatrix} 11 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Разные аппликатуры –
один и тот же **аккорд**, по-разному зажатый



Собственные числа матрицы
одинаковы во всех базисах

$$\lambda_1 = 7$$
$$\lambda_2 = 8$$
$$\lambda_3 = 6$$

Ноты, составляющие **аккорд**,
одинаковы во всех аппликатурах

Удобных базисов!

Алексей Перегудин, 2021