

Лабораторная работа №7

Прямая и обратная задача кинематики. ДН параметры.

1 Методические рекомендации

До начала работы студент должен выполнить предыдущие лабораторные этого цикла.

2 Теоретические сведения

Параметры Денавита-Хартенберга

Как известно, для определения любого трехмерного тела в пространстве достаточно задать ему 6 координат (3 координаты перемещения и 3 координаты вращения). Для оптимизации задачи описания положения тела, существует метод, позволяющий сократить число необходимых координат до 4 - метод Денавита - Хартенберга.

Введем для удобства некоторые понятия, которые будут в дальнейшем использоваться:

1. Обобщенные координаты - координаты манипулятора $[q_1, q_2, q_3...]$, определяемые только положением сочленений [рад].
2. Базовая система координат - Система координат, описывающая положение схвата в декартовом пространстве, относительно системы координат базы (статичной системы координат) [м].
3. Конфигурационное пространство - пространство, задающее конфигурацию системы — совокупность значений всех её обобщенных координат $([q_1, q_2, q_3...])$.
4. Операционное пространство - пространство, задающее положение робота и его схвата, необходимое для манипуляции с физическими объектами.

Параметры, позволяющие описать положение тела данным методом называются параметрами Денавита-Хартенберга:

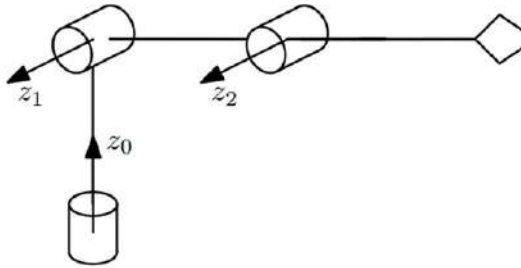
1. Параметрами a_i - обозначаются расстояния вдоль оси x_i (текущая ось) от z_{i-1} до z_i ;
2. Параметры α_i - обозначают угол вращения вокруг оси x_i (текущая ось) от z_{i-1} до z_i ;
3. Параметрами d_i - обозначаются расстояния вдоль оси z_{i-1} (предыдущая ось) от x_{i-1} до x_i ;

4. Параметры θ_i - обозначают угол вращения вокруг оси z_{i-1} (предыдущая ось) от x_{i-1} до x_i .

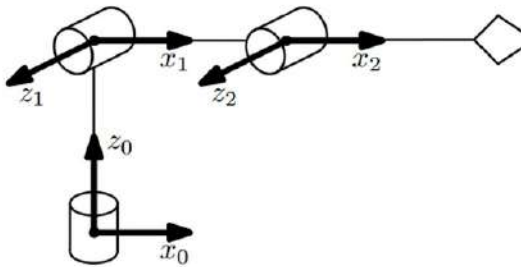
Выбор систем координат

Для удобного определения системы координат в каждом сочленении есть несколько правил:

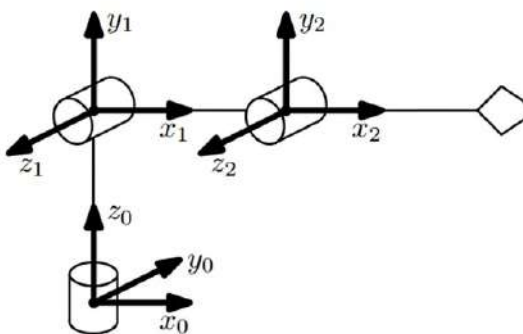
1. Ось z_i выбирается как сонаправленная с осью вращения $i + 1$ сочленения. Далее расположение смежных звеньев будет определяться именно положением этой оси.
2. Для оси x_i существуют два условия: ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и пересекает её при мысленном продолжении. (Для упрощения задачи желательно, чтобы в начальных(нулевых) конфигурациях оси x_{i-1} и x_i были сонаправлены.)
3. Ось y_i задается согласно принципу правой тройки векторов, чтобы выполнялось тождество $(y_i = z_i \times x_i)$.



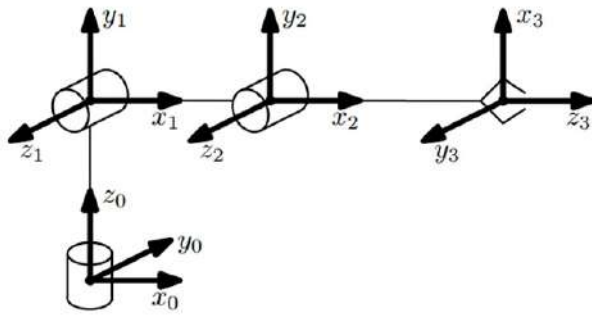
(a) Выбор осей z_i



(б) Выбор осей x_i



(в) Выбор осей y_i



(г) Выбор системы координат n

Рисунок 2.1.1 Определение осей и систем координат.

Как ранее говорилось, сперва выбираются значения осей z_i : ось вращения первого звена будет проходить через ось изображаемого цилиндра, т.к. вращение происходит в этой плоскости, аналогично выбираются оси для остальных звеньев вращения, также можно заметить, что можно было выбрать направление осей z_1 и z_2 "от нас", но это ухудшает наглядность схемы, поэтому выбирается направление "на нас". Оси x_i выбираются по принципу перпендикулярности к соответствующим осям z_{i-1} , и направленные на пересечение с последующими из них, так выбрано направление "вправо" в первом звене и сонаправленном с ним втором для нулевого параметра начального угла в параметрах ДН. Далее происходит смещение только по оси перпендикулярной оси вращения, поэтому направление осей x_i остаётся неизменным. Оси y_i достраиваются в соответствии с правилом правой тройки векторов (можно использовать и левую, что приведёт к некоторым изменениям знаков в дальнейших преобразованиях, но наиболее используемой является правая). Система последнего звена получается путём смещения на некоторое расстояние, поскольку схват и его сочленения статичны.

После того, как были получены значения, достаточные для описания положения тела в пространстве, можно приступать к задачам нахождения связи между обобщенной системой координат манипулятора и системы координат, связанной со схватом (рабочим инструментом). Для этого будут использованы матричные преобразования систем координат.

Прямая задача кинематики

Прямая задача кинематики (ПЗК) заключается в вычислении координат системы, связанной со схватом (рабочим инструментом), в зависимости от обобщенных координат манипулятора.

Для решения ПЗК рассматриваются две системы координат: исходная, связанная с «базой» $o_0x_0y_0z_0$ и итоговая, связанная с рабочим инструментом $o_nx_ny_nz_n$. Как известно, расположение этих двух систем друг относительно друга определяется тремя линейными и тремя угловыми координатами.

Итак, рассмотрим подробнее переход между двумя различными системами координат. Данный переход можно представить в виде: $k^0 = T_n^0 k^n$,

где T_n^0 - матрица преобразования, несущая информацию о линейном смещении и пространственной ориентации одной системы координат относительно другой, k^0 - вектор

в базовой(начальной) системе координат, k^n - вектор в другой системе координат

$$T_n^0 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_n^0 & s_n^0 & a_n^0 & p_n^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n^0 & p_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где векторы n_n^0 , s_n^0 и a_n^0 выражают направления осей x_n , y_n и z_n , соответственно, относительно системы координат $o_0x_0y_0z_0$, $R_n^0 \in SO$ - матрица 3x3 вращения системы $o_nx_ny_nz_n$ относительно $o_0x_0y_0z_0$, $p_n^0 \in R^3$ - вектор линейного смещения начала координат системы $o_nx_ny_nz_n$ относительно $o_0x_0y_0z_0$.

Матрица T_n^0 имеет размерность 4x4, значит нужно расширить векторы координат k^0 и k^n единицей для соответствия размерностей в матричных уравнениях:

$$\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \\ 1 \end{bmatrix} = T_n^0 \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим самые важные свойства, характеристики и отдельные элементарные компоненты, которые будут активно использоваться в пособии:

1. Поворот на нулевой угол определяется единичной матрицей

$$R_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

2. Поворот в отрицательном направлении определяется

$$R_{-\theta} = R_{\theta}^{-1} = R_{\theta}^T$$

3. Существуют так называемые базовые матрицы вращения вокруг осей x, y и z:

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где θ - некоторый угол.

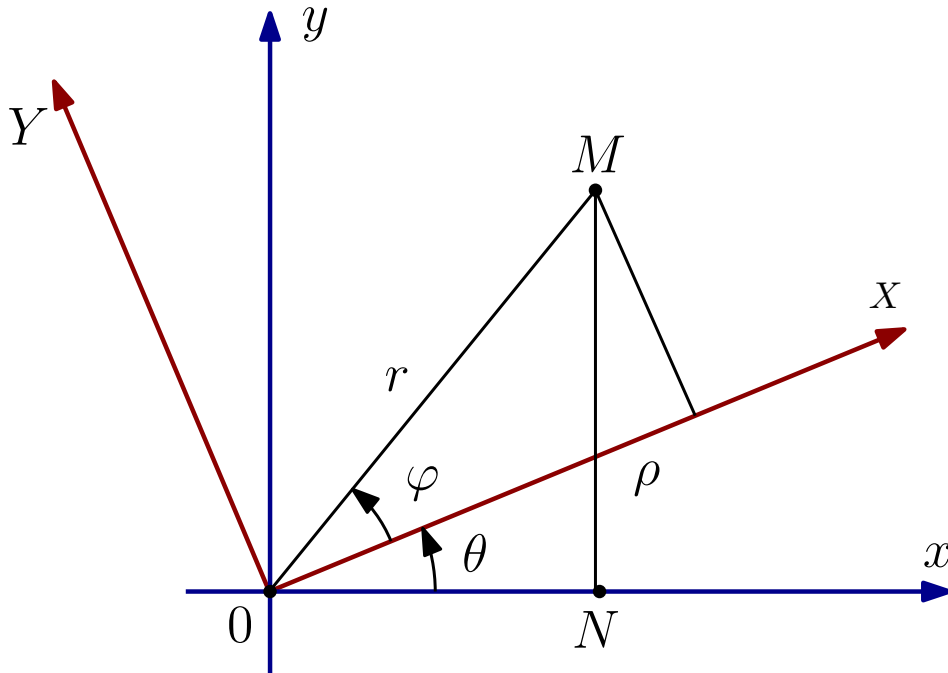


Рисунок 2.2.1 Старая система и новая системы координат

Рассмотрим две системы координат, заданные на плоскости, с общим началом в точке O : исходная система Oxy и новая $OX'Y'$, которая повернута на угол между осями Ox и OX' , равный θ (угол между осями Oy и OY' также равен θ). Выведем формулы, которые выражают старые координаты x и y точки M , выбранной произвольным образом, через ее новые координаты X и Y .

Для этого перейдем в полярные координаты: у старой системы координат полярная ось совпадает с Ox , а у новой - с OX' . Пусть у точки M в новой полярной системе координат будет полярный угол ϕ и полярный радиус r . Тогда, в старой полярной системе полярный угол точки $M = \phi + \theta$, а радиус останется тем же.

Таким образом:

$$x = r \cos(\theta + \phi),$$

$$y = r \sin(\theta + \phi).$$

С использованием тригонометрических тождеств и суммы двух углов, получаем:

$$x = r(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) = (r\cos\phi)\cos\theta - (r\sin\phi)\sin\theta$$

$$y = r(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = (r\cos\phi)\sin\theta + (r\sin\phi)\cos\theta$$

Т.к. $r\cos\phi = X$ и $r\sin\phi = Y$, получаем:

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta. \end{cases}$$

или

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

Возвращаясь к методу Денавита-Хартенберга, напомним, что на предыдущем шаге были получены по четыре параметра для каждого звена манипулятора. Теперь из них необходимо построить соответствующие матрицы однородного преобразования следующим способом:

$$T_i^{i-1} = T_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} T_{z,\alpha_i} = \begin{bmatrix} R_{z,\theta_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & p_{d_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & p_{\alpha_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{x,\alpha_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & \alpha_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & \alpha_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где i - номер звена, R_{z,θ_i} и R_{x,α_i} - базовые матрицы вращения (см. свойство №3):

$$R_{z,\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_{x,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix},$$

где p_{d_i} и p_{α_i} - векторы с ненулевыми компонентами $p_z = d_i$ и $p_x = a_i$, соответственно:

$$p_{d_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix}, p_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Итоговую матрицу, связывающую все системы координат, как и в случае с матрицами вращения, можно получить последовательным перемножением:

$$T_n^0(q) = T_1(q)T_2(q)..T_n(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & p_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрица вращения $R_n^0(q)$ и вектор $p_n^0(q)$ задают, соответственно, ориентацию и положение системы координат, связанной со схватом или рабочим инструментом, относительно базовой системы в зависимости от конфигурации манипулятора, заданной вектором обобщенных координат $q \in \mathbb{R}^n$

Обратная задача кинематики

Обратная задача кинематики (или обобщенно ОЗК) заключается в определение обобщенных координат через линейные и угловые координаты рабочего инструмента (хвата).

Рассмотрим аналитический (геометрический) метод расчёта обобщенных коэффициентов системы:

1. В начале рассмотрим схему, которая была получена после присвоения каждому звену системы координат и определения углов вращения каждого из них

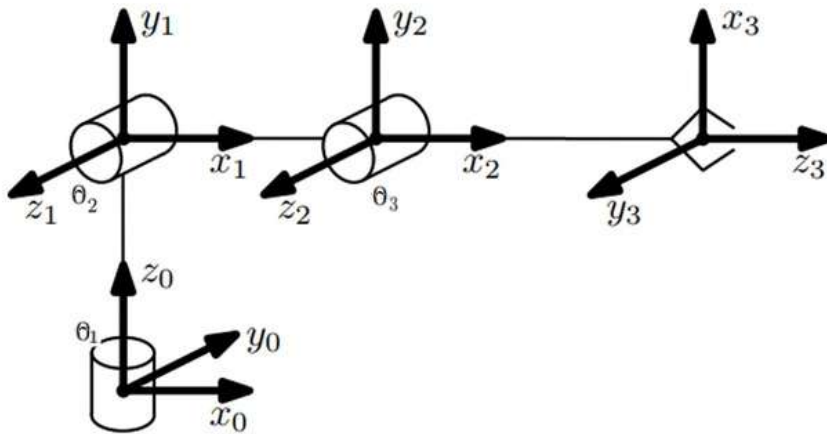


Рисунок 2.3.1 схема манипулятора с обозначенными осями и углами вращений.

2. Далее рассмотрим вид сверху для данной системы

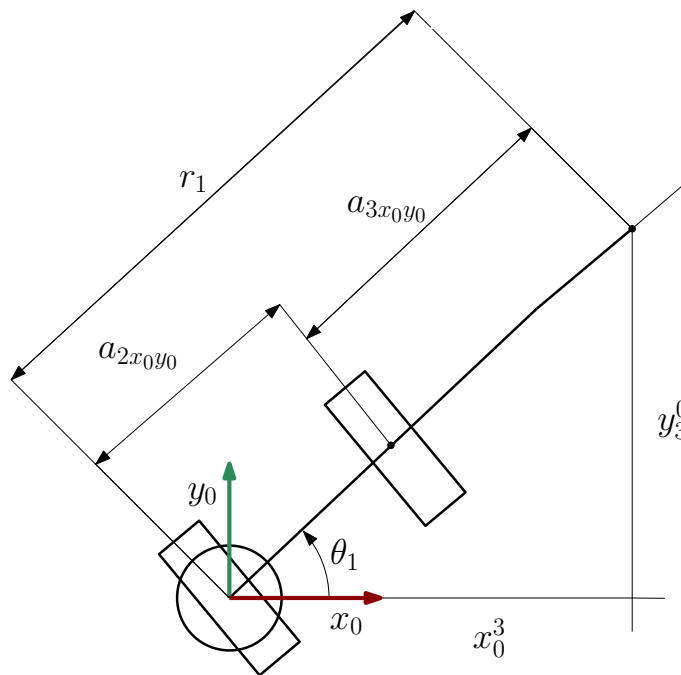
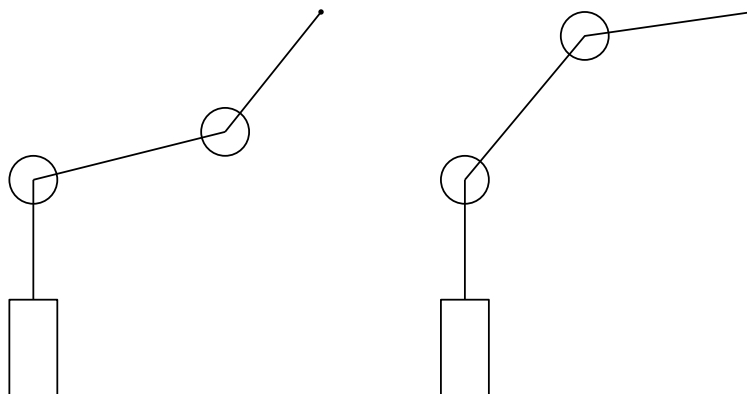


Рисунок 2.3.2 Вид схемы сверху (проекция x_0y_0).

Обозначим нулевую систему координат и угол вращения θ_1 (можно было бы ещё обозначить известные параметры a_2 и a_3 , но в данной проекции отображаются не явные(известные) значения этих параметров, а их проекции на плоскость x_0y_0 , которые соответственно изменяются с изменениями угла, поэтому не указываются на таком виде). Можно заметить, что искомый угол θ_1 выражается через отношение y_3^0 / x_3^0 :

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{y_3^0}{x_3^0}\right); \quad (6)$$

3. Далее рассмотрим вид спереди данной системы, придав звеньям некоторое смещение, (для более наглядного выражения углов). Тут можно выделить неоднозначность решения ОЗК, поскольку можно заметить, что прийти в данную точку возможно несколькими вариантами смещения, к примеру:



а) Второе сочленение расположено снизу б) Второе сочленение расположено сверху.

Рисунок 2.3.3 схема манипулятора для некоторых одинаковых коэффициентов рабочего инструмента.

Каждая конфигурация при решении ОЗК ограничивает рабочую область, поэтому при решении задачи отдается предпочтение конфигурации которая в большей степени удовлетворяет достижению необходимой нам рабочей области. Для примера будет рассматриваться вариант с верхним расположением второго сочленения. Потому что каждая конфигурация при решении ОЗК ограничивает некоторую рабочую область, поэтому при выборе конфигурации отдается предпочтение той, которая в большей степени удовлетворяет достижению необходимой рабочей области.

Итак, здесь помимо обозначения нулевой системы координат (можем обозначить только z_1 , поскольку она является единственной не перпендикулярной осью вращения и задает своё изменение для x_0 и y_0) и углов вращения: θ_2, θ_3 - можно обозначить параметры d_1, a_2 и a_3 , поскольку их величины в данной проекции не изменяются. Также можно задать вспомогательные величины углов и длин: соединение первого и третьего сочленения r_3 , построение до треугольника r_1 и r_2 , а также углы ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .

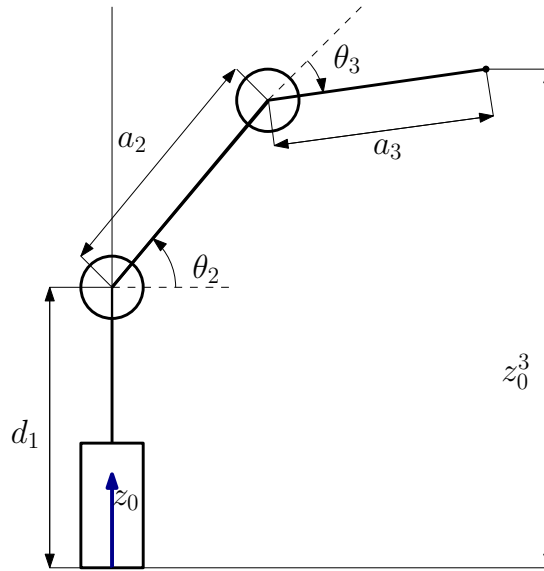


Рисунок 2.3.4 Вид схемы спереди (проекция x_0z_0).

Рассмотрим подробнее схему между вторым, третьим и инструментальным звеньями.

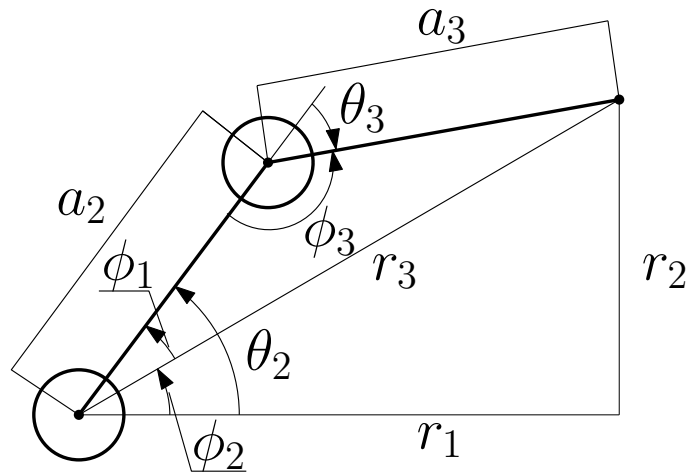


Рисунок 2.3.5 Приближенное изображение схемы с необходимыми обозначениями.

Можно представить угол θ_2 как сумму углов ϕ_2 и ϕ_1 :

$$\theta_2 = \phi_2 + \phi_1; \quad (7)$$

- где ϕ_2 видно из рисунка (треугольник, образованный сторонами r_1 , r_2 и r_3 прямоугольный, ϕ_2 определяет отношение катетов);

$$\phi_2 = \arctg\left(\frac{r_2}{r_1}\right); \quad (8)$$

- r_2 находится как разность между z_0^3 и d_1 :

$$r_2 = z_0^3 - d_1$$

- r_1 определяется из предыдущей проекции (x_0y_0) как сумма проекций $a_{2x_0y_0}$ $a_{3x_0y_0}$, которые в свою очередь определяются через теорему Пифагора:

$$r_1 = a_{2x_0y_0} + a_{3x_0y_0} = \sqrt{(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2}$$

- r_3 находится так же по теореме Пифагора:

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2 + (z_3^0 - d_1)^2}$$

- ϕ_1 находим через теорему косинусов в треугольнике, образованном сторонами a_2 , a_3 , r_3 :

$$\begin{aligned} a_3^2 &= a_2^2 + r_3^2 - 2a_2r_3\cos\phi_1 \\ \cos\phi_1 &= \frac{a_2^2 + r_3^2 - a_3^2}{2a_2r_3} \\ \rightarrow \phi_1 &= \arccos\left(\frac{a_2^2 + r_3^2 - a_3^2}{2a_2r_3}\right); \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом получаем:

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - \arccos\left(\frac{a_2^2 + r_3^2 - a_3^2}{2a_2r_3}\right); \quad (10)$$

Подставляя все известные значения, задается угол:

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{z_3^0 - d_1}{\sqrt{(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2}}\right) - \arccos\left(\frac{a_2^2 + ((x_3^0)^2 + (y_3^0)^2) + (z_3^0 - d_1)^2 - a_3^2}{2a_2\sqrt{(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2} + (z_3^0 - d_1)^2}\right); \quad (11)$$

Далее рассмотрим нахождение угла θ_3 , из рисунка 2.3.5 видно:

$$\theta_3 = \pi - \phi_3; \quad (12)$$

Далее через теорему косинусов в треугольнике (a_2, a_3, r_3) определяется угол ϕ_3 :

$$\begin{aligned} r_3^2 &= a_2^2 + a_3^2 - 2\cos\phi_3a_2r_3 \\ \phi_3 &= \arccos\left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - r_3^2}{2a_2r_3}\right); \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно:

$$\theta_3 = \pi - \arccos\left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - r_3^2}{2a_2r_3}\right) =; \quad (14)$$

Подставляя в (14) значение r_3 получается:

$$\theta_3 = \pi - \arccos\left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - ((x_3^0)^2 + (y_3^0)^2) + (z_3^0 - d_1)^2}{2a_2\sqrt{(x_3^0)^2 + (y_3^0)^2 + (z_3^0 - d_1)^2}}\right); \quad (15)$$

3 Цель работы

Ознакомиться со способом нахождения параметров манипулятора и научиться переходить из декартовых координат в обобщенные и обратно.

4 Порядок выполнения работы

1. Прочитать и постараться понять предложенный теоретический материал, представленный выше.
2. Собрать робота-манипулятора из наборов *LEGO*.
Более подробная инструкция описана в *Приложении А*.
3. Измерить и рассчитать для него параметры Денавита - Хартенберга.
Проверяйте, какие измерения являются a_i и d_i параметрами, не путайте их. Обращайте внимание на то, что при смене робота/изменении его конструкции, скорее всего изменятся ДН параметры.
Более подробная инструкция представлена в *Приложении В*
4. По полученным параметрам расписать ПЗК системы в программе *scilab*.
5. Расчитать ОЗК системы.
Здесь обращайтесь особое внимание на направление осей вращения и осей различных систем координат, на выбранную нулевой конфигурацию системы ("свеча поворот какого-либо звена и т.д.), на оси, от которых идёт расчет углов - всё это влияет на верность ваших дальнейших вычислений.
6. Проверить правильность своих расчетов посредством подстановки прямой и обратной задач в пакете *Scilab*.
Если что-то не сходится ещё раз проверьте, что является для вас нулевой конфигурацией и всевозможные направления и расстановки осей.
7. Написать программу, позволяющую по входным параметрам (координатам в декартовой системе координат) перемещать рабочий инструмент (хват) в заданное положение и определять свои параметры в текущий момент (углы вращения на сочленениях, т.е. обобщенные координаты).
Здесь опять же могут возникнуть неприятные моменты из-за разнонаправленности осей систем координат (в особенности, нулевая и связанная с рабочим инструментом системы).

8. Написать программу, позволяющую по входным параметрам (углам вращения сочленений) перемещать рабочий инструмент (схват) в заданное положение в декартовой системе координат и определять свои параметры в текущий момент (координаты в операционном пространстве).
9. Задать программе набор из пяти произвольных точек в конфигурационном пространстве. С помощью ПИД-регулятора переместить манипулятор в заданные конфигурации. На пути между точками необходимо с заданной частотой писать в файл координаты в операционном и конфигурационном пространстве. Повторить тот-же опыт, но теперь для пяти ключевых точек в декартовой системе координат решить ОЗК и также переместить манипулятор в заданные координаты, записывая в процессе движения в файл координаты в операционном и конфигурационном пространстве.
10. Также в пакете *Scilab* отобразить графики движения манипулятора между точками для двух опытов в конфигурационном пространстве (для всех трех углов q_1, q_2, q_3) и в операционном пространстве (для координат xzy) с помощью *3dplot*.

5 Содержание отчета

1. Фотография собранного манипулятора
2. Таблица ДН параметров манипулятора.
3. Программа *scilab* для решения ПЗК и ОЗК.
4. Графики полученных обобщенных координат и координат в операционном пространстве при перемещении между точками.
5. Исходный код управляющей манипулятором программы.
6. Вывод о результате проделанной работе.

Приложение А

Рекомендации по сборке манипулятора

Ниже будут представлены рекомендации по сборке робота-манипулятора из набора *LEGO*.

Данная информация является рекомендательной, и, конечно, вы можете конструкцию совершенствовать или кардинально менять. Однако, хотелось бы обратить ваше внимание на то, что было бы рационально собирать роботов с одинаковыми, либо легко изменяемыми ДН параметрами (на группу/поток), чтобы не пришлось выполнять их повторные измерения каждый раз, когда заново приходите в лабораторию (а скорее всего за одну пару всё сделать не получится).

Итак, первым шагом необходимо собрать простейшую передаточную модель из двух зубчатых

колёс с максимальным передаточным отношением (это наиболее оптимально). Для этого следует одно зубчатое колесо соединить непосредственно с мотором, а второе -зацепить и закрепить валом.



Рисунок 4.1.1 Изображение зацепления.

Далее собирается движущаяся платформа , к которой затем будут крепиться следующие звенья.

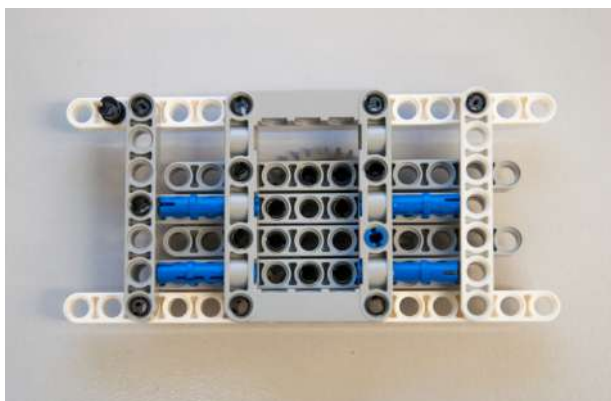


Рисунок 4.1.2 Изображение платформы.

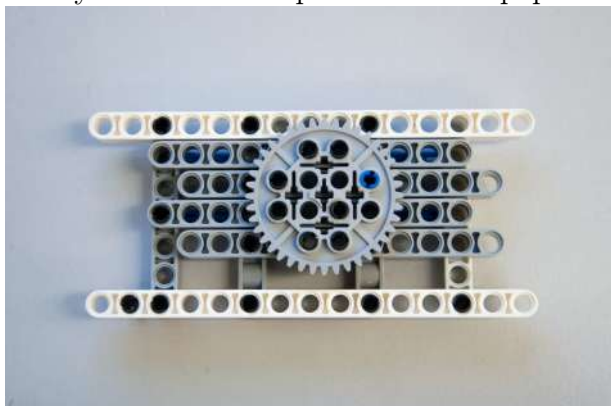


Рисунок 4.1.3 Изображение платформы.

На следующем шаге проводится сборка внешней части нижнего блока для наилучшей устойчивости механизма. Здесь рекомендуется продлить движущуюся платформу и ограничить её колебания в по оси крепления. Также на этом шаге стоит подумать о креплении блока EV3 .

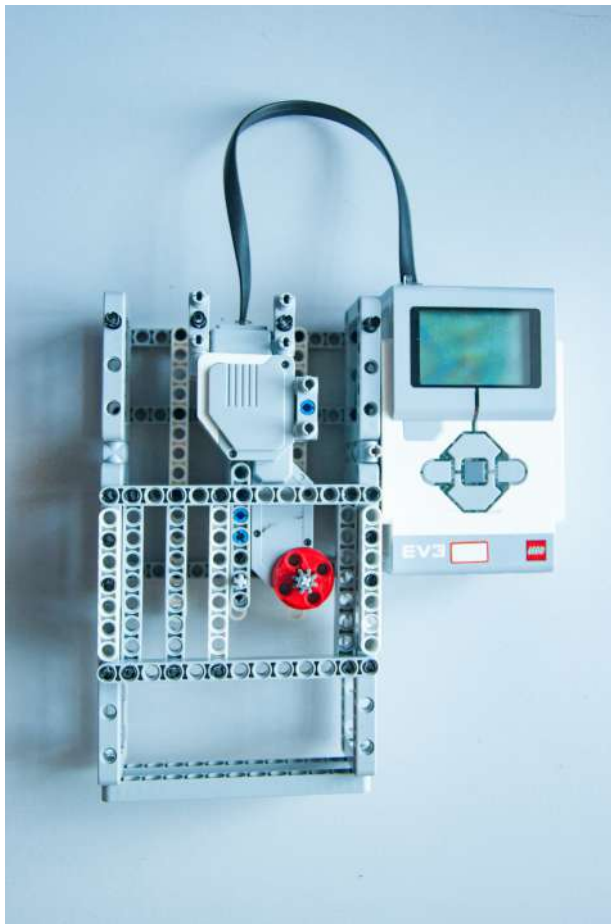


Рисунок 4.1.4 Изображение основного блока.

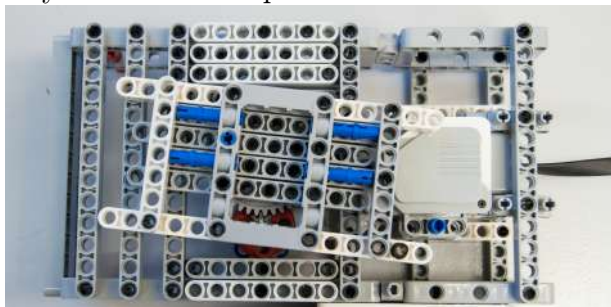


Рисунок 4.1.5 Изображение крепления платформы.

Далее собираются оставшиеся звенья манипулятора (аналогично друг другу): для этого следует собрать передаточные звенья как в первом пункте, только уже закрепить шестеренки с обеих сторон мотора, и соединить сочленения между собой достаточно надежно (предотвращая наибольшие колебания). Последним звеном является рабочий инструмент (возможный хват). Придумайте его оптимальное решение для своей задачи, и изобразите его примерное воплощение. В данном случае задачей было крепление пищащего (рисующего) инструмента. Стоит обратить внимание на то, что крепление соединений к данным шестеренкам

осуществляется по-диагонали, из-за чего стоит приложить некоторые усилия для соединения зубчатого колеса и элемента крепления.

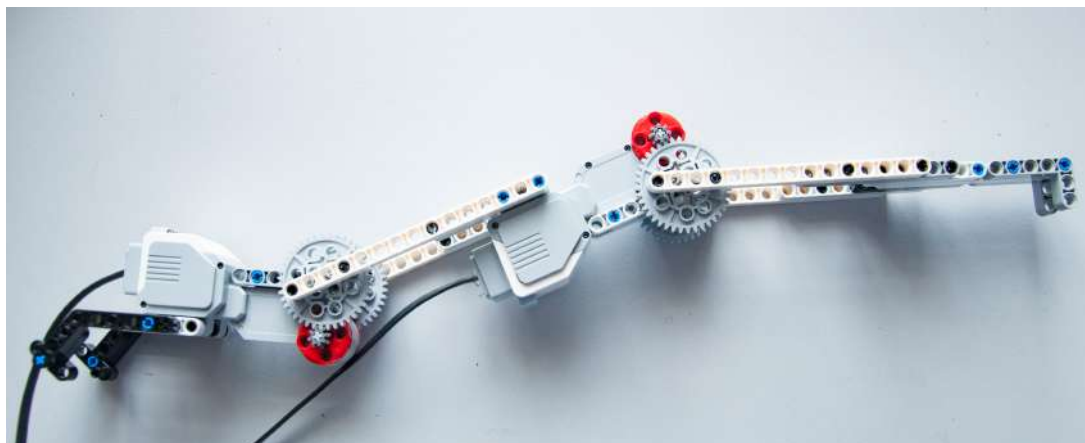


Рисунок 4.1.6 Изображение второго и третьего звеньев манипулятора.

Следующим, и одним из последних, шагом является соединение движущейся платформы, второго и третьего звеньев манипулятора. Здесь очень важно продумать конструкцию таким образом, чтобы максимально предотвратить люфт, который будет появляться во время движения. Особенно, с возникающим достаточно сильным рычагом в виде развернутых звеньев манипулятора. Другими словами, необходимо это крепление сделать достаточно жёстким.

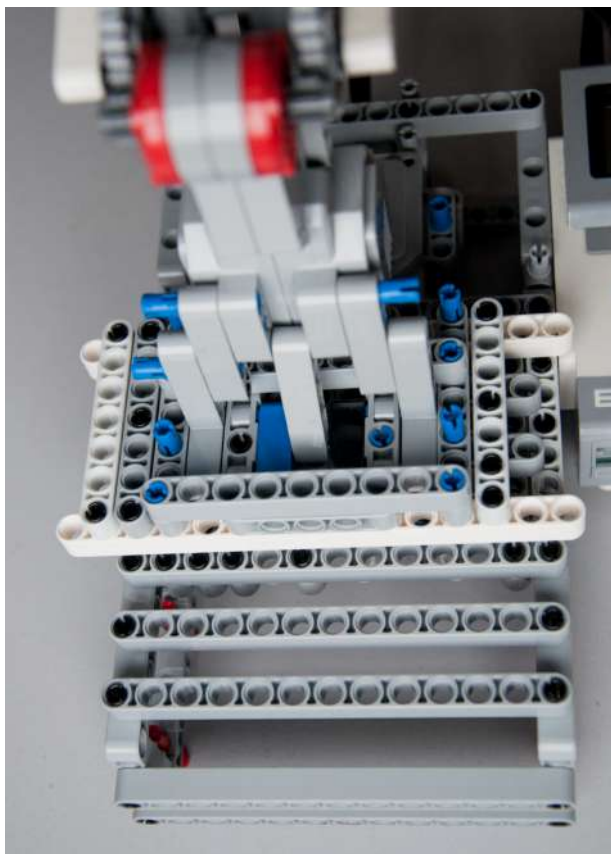


Рисунок 4.1.7 Изображение крепления платформы ко второму сочленению.

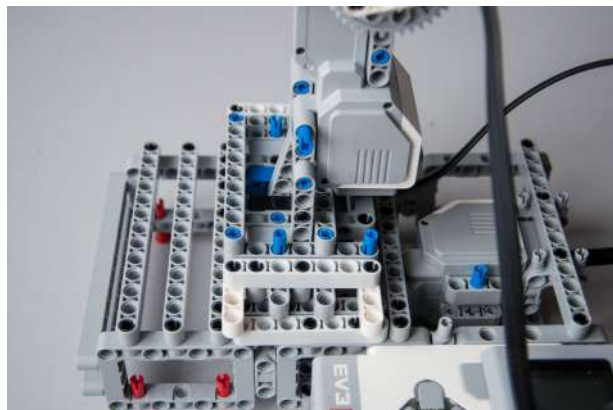


Рисунок 4.1.8 Изображение крепления платформы ко второму сочленению.

Заключительным шагом является проверка люфтов на всех этапах соединений и последующая их доработка.

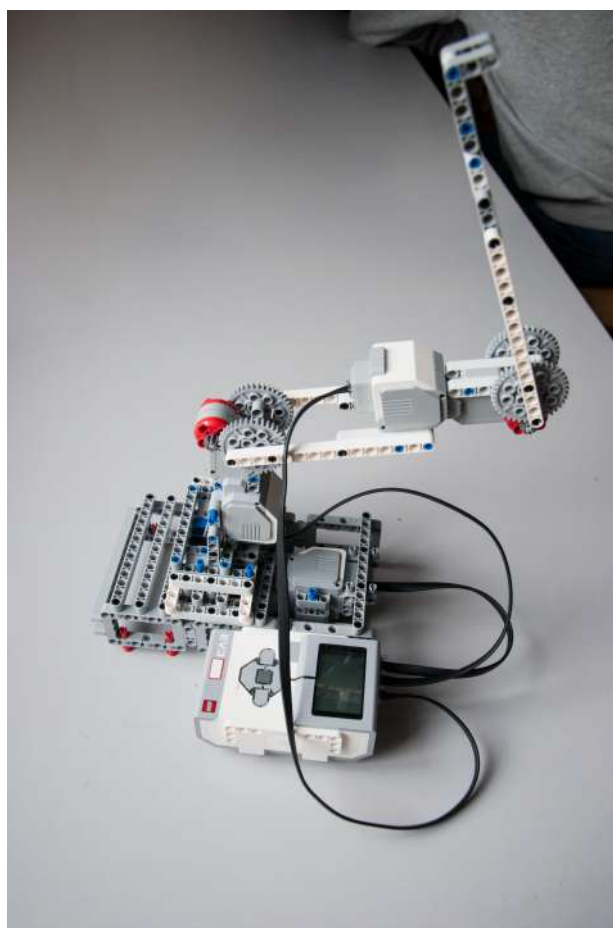


Рисунок 4.1.9 Общий вид робота.

Приложение В

Пример

Рассмотрим нахождение ДН параметров на конкретной задаче:

Пусть имеется такая система:

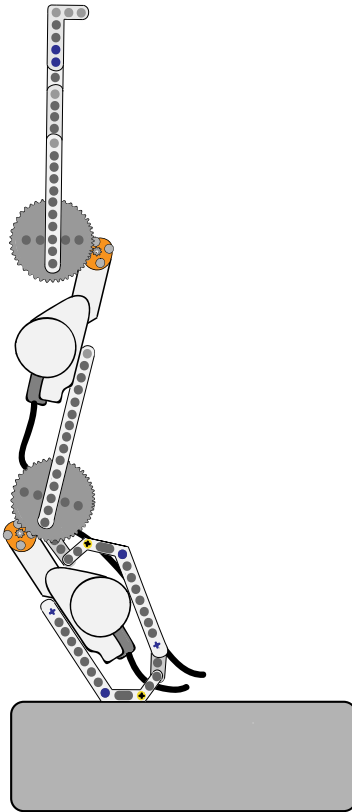


Рисунок 2.1.2 Система для определения ДН параметров.

Расставляются положения ДН-параметров по правилам, описанным выше:

В начале определяются параметры a_i : системы $x_0y_0z_0$ и $x_1y_1z_1$ совпадают, следовательно сдвигов нет, далее рассматривается пара систем $x_1y_1z_1$ и $x_2y_2z_2$ Здесь ось z_2 лежит в плоскости перпендикулярной рассматриваемому виду и располагается в направлении "от нас" её нулевая координата соответственно совпадает с нулевыми координатами x_2 и y_2 , а значит a_1 определяется как расстояние от пересечения x_1z_1 до x_2y_2 по оси x_2 , следующее смещение между осями z_2 z_3 и z_3 z_4 выполняется аналогично, они направлены "от нас" и лежат в перпендикулярной плоскости, их начала лежат на пересечении двух других осей, соответственно получаются значения a_2 и a_3 .

Далее коэффициенты смещения d_i : имеется только смещение d_1 (поскольку остальные системы по осям z_i не имеют сдвигов) от первой системы до второй.

Углы α_i определяются как поворот текущей оси x_i от оси z_{i-1} до оси z_i . Например, для первого звена ось z_0 направлена вверх, а z_1 от нас. Значит, поворот был на угол $\frac{\pi}{2}$.

Углы θ_i определяются как углы вращения на сочленениях: можно заметить, что при переходе от первой системы ко второй производится дополнительный поворот на угол $\frac{\pi}{2}$, что также заносится в параметр, остальные углы подобного дополнительного вращения не имеют.

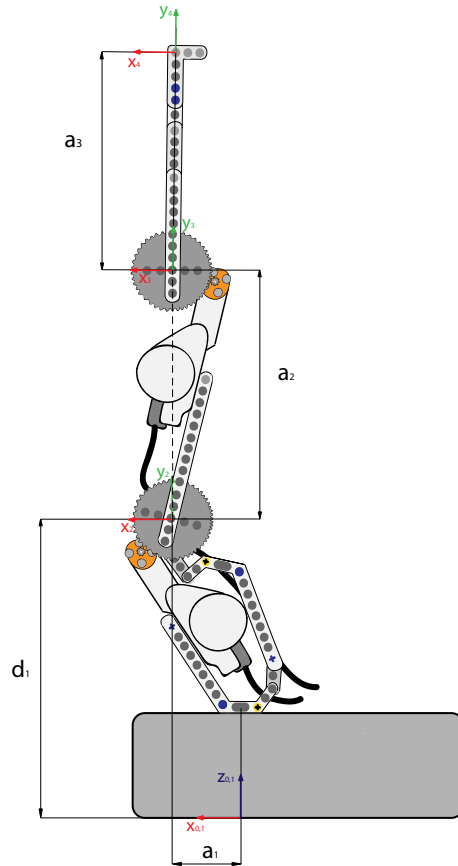


Рисунок 2.1.3 Система с обозначенными ДН параметрами.

Далее измеряются их значения и заносятся в соответствующую таблицу:

Звено i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	$\frac{\pi}{2}$	d_1	θ_1
2	a_2	0	d_2	$\theta_2 + \frac{\pi}{2}$
3	a_3	0	d_3	θ_3

$$a_1 = 0,06 \text{ м}; a_2 = 0,15 \text{ м}; a_3 = 0,145 \text{ м};$$

$$d_1 = 0,163 \text{ м}; d_2 = 0 \text{ м}; d_3 = 0 \text{ м}$$

Подставив все параметры Денавита-Хартенберга для модели, представленной на рис.2.1.1, получим частный случай при $n=3$ матриц однородного преобразования:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & a_1\cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & a_1\sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & -\sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & 0 & a_2 \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) & 0 & a_2 \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & a_3 \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & a_3 \sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$