

Лабораторная работа №6а

Разработка системы управления для неполноприводного робота.

Часть 1. Построение математической модели объекта управления.

1 Методические рекомендации

До начала работы студент должен выполнить предыдущие лабораторные этого цикла. Необходимо знание основ механики, математического анализа и линейной алгебры.

2 Теоретические сведения

В завершающей данный курс лабораторной работе, имеющей две версии ее содержания, предлагается разработать систему управления для одного из неполноприводных роботов. Грубо последние можно определить как устройства, у которых количество управляемых приводов меньше числа степеней свободы (значение данного термина см. ниже по тексту).

Данная версия 6-ой работы посвящена робототехническому механизму, обычно именуемому как «обратный маятник на тележке». Его примерный вид можно видеть на рис.

1.



Рис. 1. Пример создаваемого робота.

Обратный (перевернутый) маятник

Любой физический маятник¹ имеет два положения равновесия, которые называются *устойчивым* и *неустойчивым* (рис. 2). В обоих все действующие на маятник силы ($m\vec{g}$ — сила тяжести, \vec{N} — сила реакции шарнира) уравниваются друг друга, поэтому, не подвергаясь внешнему воздействию, он пробудет в любом из них бесконечно долго.

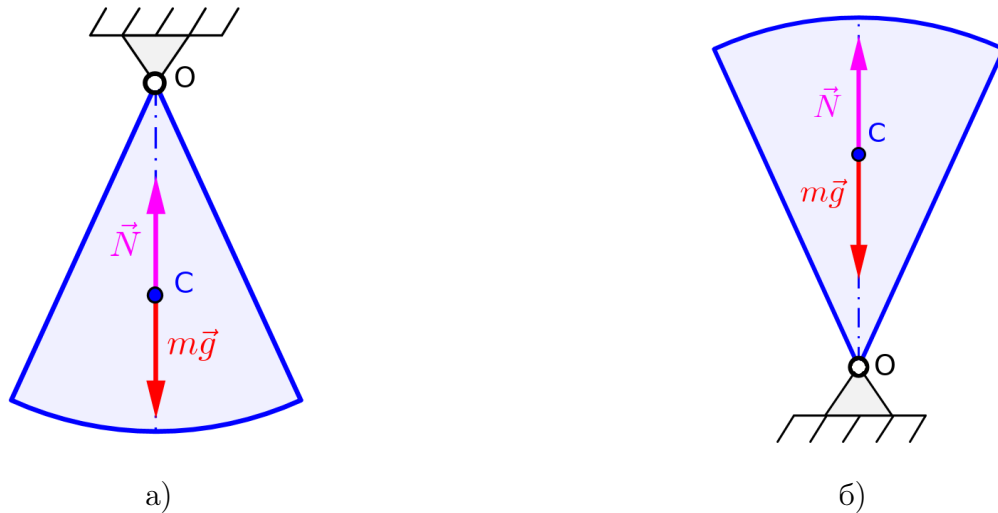


Рис. 2. Положения равновесия физического маятника: а) устойчивое; б) неустойчивое.

Несмотря на внешнее сходство, достаточно очевидно, что эти положения имеют одно серьезное отличие. Оно заключается в том, что при выведении маятника из состояния, показанного на рис. 2а, он начнет колебаться² относительно своего первоначального положения, то есть не удалится из него, а вот при выведении маятника из состояния, изображенного на рис. 2б, он в свою первоначальную позицию уже не вернется.

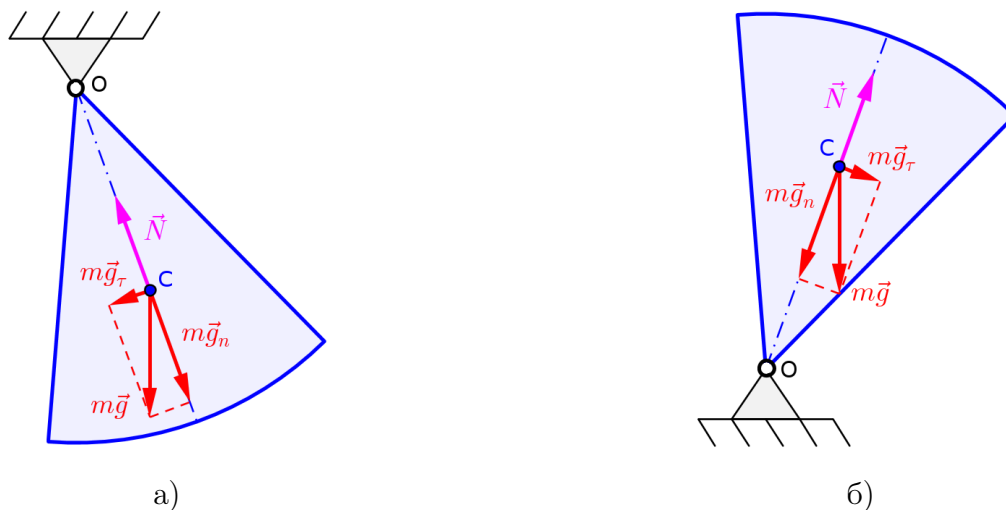


Рис. 3. Промежуточные положения физического маятника.

¹Физический маятник — маятник, у которого колеблющаяся часть представлена некоторым твердым телом, а сила, вызывающая его движение — силой тяжести.

²Ко всему прочему благодаря действующим в любой системе силам трения совершаемые им колебания будут затухающими.

Такое поведение маятника объясняется направлением силы $m\vec{g}_\tau$, появляющейся при отклонении маятника из положений равновесия: в первом случае она будет направлена в сторону положения равновесия, а во втором — от нее (рис. 3). Указанная сила не является самостоятельной, а представляет из себя лишь составляющую силы $m\vec{g}$, направленную по касательной к траектории движения центра масс тела.

Вопреки сказанному бывает необходимым заставить маятник именно в неустойчивом состоянии. Это достигается либо непосредственным воздействием на его тело некоторой силой, либо ускоренным перемещением шарнира, к которому он прикреплен. В последнем случае (рис. 4), как известно, относительно своей точки опоры маятник будет вести себя так, как будто испытывает действие силы $m\vec{a}$ (\vec{a} — упомянутое ускорение), направленной в сторону, противоположную перемещению шарнира. При этом тот эффект (или явление), которое получается в результате указанных действий — маятник, колеблющийся относительно своего положения неустойчивого равновесия — и называется *обратным маятником*.

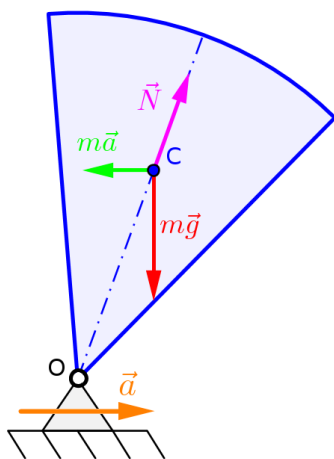


Рис. 4. Пример удерживающего воздействия.

В этой версии данной лабораторной работы предлагается реализовать модель как раз такого устройства. При этом задача сводится к тому, чтобы собрать на основе все того же конструктора LEGO Mindstorms маятник-палочку и поместить его на подвижное основание, представляющее из себя четырехколесную полноприводную тележку. Благодаря специально разработанному алгоритму, последняя, ускоренно перемещаясь, должна уметь удерживать маятник в неустойчивом положении.

Описание состояния исследуемого устройства

Предположим, что «тело» нашего робота уже собрано. В таком случае согласно материалам прошлых работ следующим шагом должно стать составление его математической модели.

Для этого в первую очередь определим те величины, которые описывают положение робота в пространстве.

Поместим исследуемый механизм в прямоугольную систему координат. Поскольку его движения будут происходить только вдоль некоторой прямой, то, во-первых, для описания происходящих в нем изменений хватит всего одной координатной плоскости (пусть ею будет XOY), а, во-вторых, каждое из входящих в робот тел можно будет рассматривать как лежащую

в ней плоскую фигуру, что мы и сделаем. В итоге с учетом всех замечаний получим то, что представлено на рис. 5.

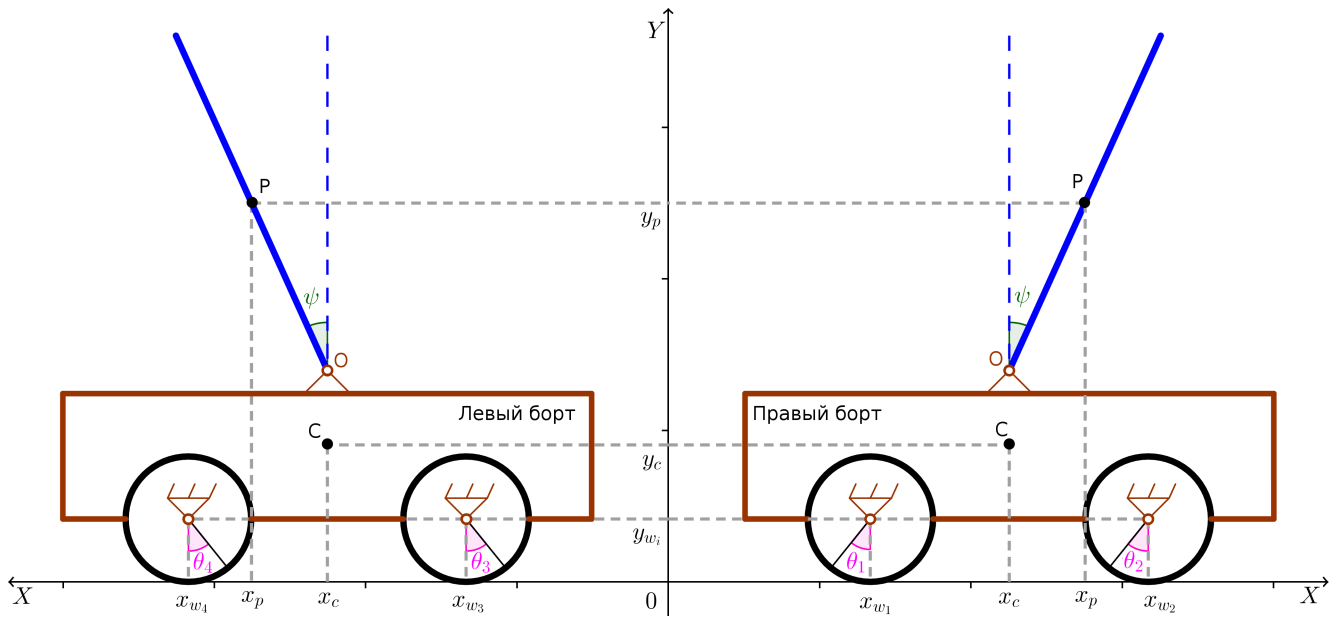


Рис. 5. Проекция робота в прямоугольную систему координат.

Как известно, любая геометрическая фигура, отличная от точки, обладает тремя *степенями свободы*, то есть ее положение в плоскости однозначно определяется заданием как минимум каких-либо трех величин.³ Обычно в их роли выступают декартовы координаты одной из точек рассматриваемой фигуры и некоторый угол, происхождение которого может быть самым разнообразным.

Наш робот состоит из шести тел: четырех колес, маятника и тележки — и, как следует из выше сказанного, положение каждого из них должно характеризоваться тремя какими-либо величинами. Определимся в качестве таковых взять координаты их центров масс $((x_{w_i}, y_{w_i}), (x_c, y_c) \text{ и } (x_p, y_p))$, где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ и углы: на который он отклоняется от вертикали — для маятника (ψ); на который она поворачивается из первоначального положения — для тележки (ζ ; не обозначен на рис. 5 по причинам, которые будут указаны ниже); на который они поворачиваются из первоначального положения — для колес (θ_i). Несложно видеть, что в таком случае сам робот (все входящие в него тела вместе взятые) описывается $3 \cdot 6 = 18$ -ью величинами.

³Положение любой плоской фигуры однозначно определяется положениями двух ее точек. В свою очередь, положение каждой точки задается указанием ее декартовых координат — двух чисел. Из сказанного, на первый взгляд, кажется, что положение фигуры в таком случае будет определяться $2 + 2 = 4$ -мя величинами, а значит она будет иметь четыре степени свободы. Однако, поскольку у недеформируемого тела координаты любых двух его точек, находящихся на расстоянии d друг от друга, связаны известным соотношением

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2, \quad (1)$$

позволяющим найти величину одной из координат по значениям остальных, получается, что для фигуры можно определять значение всего трех из четырех характеризующих ее положение величин. Последнее же и означает, что плоская фигура на плоскости обладает тремя степенями свободы.

Заметим, что иногда определенное таким способом количество координат, характеризующих исследуемый механизм, оказывается избыточным. Это происходит в том случае, если взаимодействие составляющих его тел друг с другом или с другими телами приводит к тому, что на движения или положения первых налагаются определенные ограничения. Они, называемые *связями*⁴, в общем случае выражаются в том, что значения координат или скоростей рассматриваемых тел не могут быть любыми, а должны подчиняться определенным количественным соотношениям. При всем этом интересующие нас ситуации, в которых количество степеней свободы рассматриваемого механизма оказывается меньшим, чем сумма количеств степеней свободы, входящих в него тел, возникают тогда, когда эти соотношения касаются только координат и могут быть записаны в виде некоторых равенств, подобных выражению (1)⁵.

А теперь поясним сказанное на примере нашего робота, для которого количество степеней свободы (говорим, забегая вперед) оказывается на самом деле меньшим 18-ти.

Первая связь, наблюдаемая в нашей модели, создается шарниром, соединяющим маятник и тележку. Ее существование сказывается на том, что положение этих тел относительно друг друга не может быть произвольным. Математически она записывается в виде двух уравнений:

$$x_p = x_c + |OP| \sin \psi \quad (2)$$

$$y_p = y_c + |OC| + |OP| \cos \psi \quad (3)$$

где $|OP|$ и $|OC|$ — длины отрезков OP и OC соответственно (последний подразумевается параллельным оси OY). Если учесть, что центр масс тонкого однородного стержня находится в его середине, то есть

$$|OP| = \frac{l}{2}, \quad (4)$$

где l — длина маятника, то данные выражения можно переписать в виде

$$x_p = x_c + \frac{l}{2} \sin \psi \quad (5)$$

$$y_p = y_c + |OC| + \frac{l}{2} \cos \psi. \quad (6)$$

Полученные соотношения позволяют по известным значениям трех из пяти встречающихся в них величин в любой момент времени вычислять остальные две. Следовательно, для того чтобы описать состояние механизма в любой момент времени, две координаты можно не узнавать непосредственно, а рассчитывать по полученным выражениям исходя из значений остальных. Это, в свою очередь, говорит о том, что две величины становятся лишними, а значит указанная связь снижает предполагаемое количество степеней свободы механизма на две — до 16-ти. Условимся «отбросить» x_p и y_p .

Следующая порция связей оказывает непосредственное влияние на колеса робота. В нее входят, во-первых, связи создаваемые плоскостью, по которой движется механизм, во-вторых,

⁴Иногда под *связями* подразумевают не сами ограничения, а создающие их тела, например нити, балки и т.д.

⁵Помимо указанных существуют и иные связи, приводящие к уменьшению количества степеней свободы, однако в данном курсе о них говорится не будет.

связи, создаваемые осями, которые объединяют колеса в пары, и, в-третьих, те, которые создаются крепежными элементами, соединяющими колеса с тележкой. В конечном итоге их существование вызывает следующие очевидные последствия:

- Все колеса, катясь, перемещаются по одной и той же горизонтальной плоскости. Это приводит к тому, что ординаты центров масс всех колес будут одинаковыми и равными, например, y_w .⁶ Однако несложно видеть, что при движении тележки координата y_w меняться не будет ($y_w = \text{const}$), а следовательно, нет необходимости каждый раз находить и ее. Действительно, ведь, измерив ее единожды, в дальнейшем значение y_w будет известным в любой момент времени.

Таким образом, имеем, что из рассмотрения выбывают еще четыре степени свободы, которые ранее были представлены координатами y_{w_i} , где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- Все колеса, катясь, движутся в плоскостях, параллельных введенной нами плоскости XOY , следовательно центры масс тех из них, которые являются соосными, будут обладать одинаковыми абсциссами. Математически это можно записать как

$$x_{w_1} = x_{w_3} = x_{w_1}^*, \quad (7)$$

$$x_{w_2} = x_{w_4} = x_{w_2}^*, \quad (8)$$

где $x_{w_1}^*$ и $x_{w_2}^*$ — просто новые обозначения. Данные выражения показывают, что указанная особенность вычитает еще две степени свободы, и их общее количество сокращается до 10-ти.

- Соосные колеса в любой момент времени будут характеризоваться одинаковыми значениями углов поворота из начального положения, следовательно аналогичные прошлым выражения:

$$\theta_1 = \theta_3 = \theta_1^*, \quad (9)$$

$$\theta_2 = \theta_4 = \theta_2^* \quad (10)$$

— покажут, что рассмотренная связь уменьшит «оставшееся» количество степеней свободы еще на два.

Тележка, входящая в состав робота, также испытывает влияние связей. Одна из них, которая, впрочем, уже рассматривалась, будет действовать со стороны шарнира, соединяющего тележку с маятником, остальные — со стороны крепежных элементов, соединяющих ее с колесами. В итоге совокупное действие этих связей приводит к тому, что тележка при своем движении, во-первых, не поворачивается относительно первоначального состояния,⁷ а во-вторых, не перемещается по вертикали. Сказанное, как уже можно догадаться, означает, что ответственные за отмеченные особенности величины (угол ζ и ординату y_c) также можно вывести из рассмотрения.

⁶Это свойство стало причиной того, что на рис. 5 было дано лишь их общее обозначение — y_{w_i} .

⁷Это, к слову сказать, является причиной того, что на приводимых рисунках не отмечался угол ζ

Опираясь на последствия существования выше описанных связей, к данному моменту мы установили, что количество степеней свободы нашего робота, скорее всего, будет равно шести. До сих пор оставшиеся актуальными величины, характеризующие его состояние, показаны на рис. 6. Однако необходимо заметить, что настоящее количество степеней свободы окажется еще меньшим.

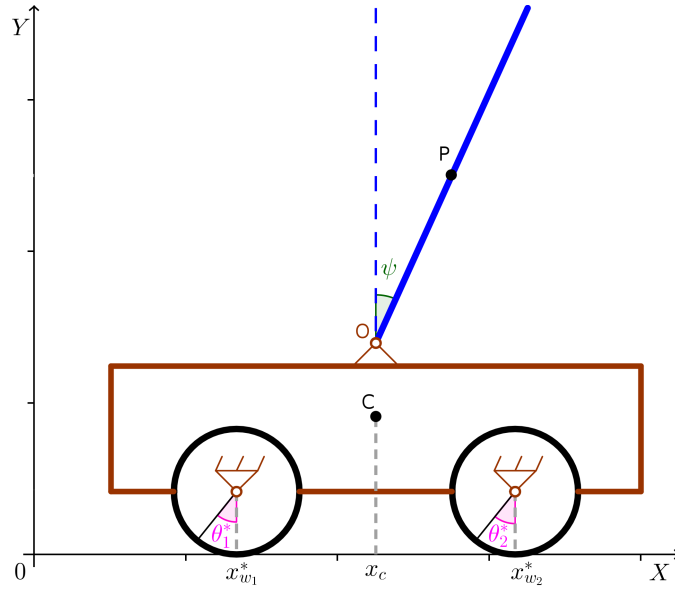


Рис. 6. Неисключенные величины и их физический смысл.

Дело в том, что ряд оставшихся величин позволят исключить те связи, которые являются следствием недеформируемости входящих в робот тел и постоянства расстояний между их различными точками.⁸ Например, из-за указанных особенностей абсциссы центров масс колес и тележки будут удовлетворять выражениям

$$x_{w2}^* - x_c = const \quad (11)$$

$$x_c - x_{w1}^* = const, \quad (12)$$

которые позволят вывести из рассмотрения еще две координаты (пусть ими будут x_{w1}^* и x_{w2}^*) и сократить прогнозируемое количество степеней свободы механизма до 4-ех.

Достигнув этого момента, надо сказать, что никакие дальнейшие поиски связей не приведут ни к какому результату, а следовательно количество степеней свободы нашего робота на самом деле равно 4-ем. Однако, если рассмотреть частный случай, предположив, что при движении механизма его колеса не проскальзывают относительно поверхности,⁹ по которой он движется, можно получить еще две связи. Первая из них заключается в том, что углы поворота всех колес будут равны между собой:

$$\theta_1^* = \theta_2^* = \theta, \quad (13)$$

⁸Похожая ситуация рассматривалась в сноске 3.

⁹С точки зрения кинематики это означает, что при движении колеса точки, по которым оно и поверхность касаются друг друга, будут иметь равные скорости.

где θ — просто новое обозначение, а вторая приводит к тому, что перемещение робота (d) будет связано с углом θ выражением¹⁰

$$d = r\theta, \quad (14)$$

где r — радиус колеса (рис. 7). Последнее уравнение с учетом выражения

$$x_c = d + x_c^{(0)}, \quad (15)$$

где $x_c^{(0)}$ — значение x_c в начальный момент времени, позволяет заключить, что

$$x_c = x_c^{(0)} + r\theta. \quad (16)$$

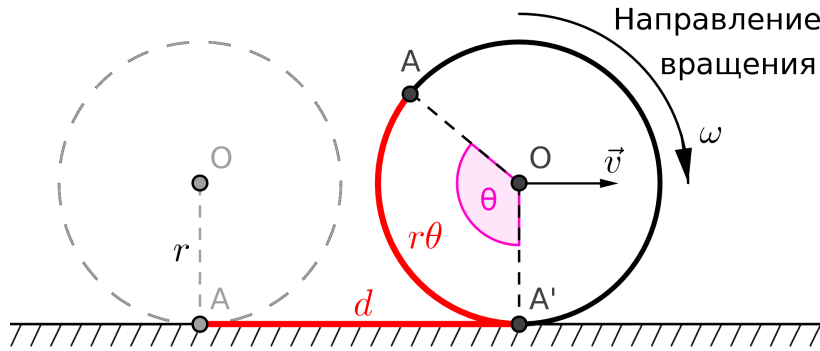


Рис. 7. Движение колеса без проскальзывания.

Очевидно, что в таком случае первая связь позволит отбросить величины θ_1^* и θ_1^* , заменив их одним углом θ , а вторая — абсциссу x_c . Таким образом, имеем, что исследуемый механизм имеет всего две степени свободы, выражающиеся в нашем случае углами θ и ψ .¹¹

В заключение важно отметить, что подобные углам θ и ψ величины носят название *обобщенных координат*. Именно о них упоминалось в тексте лабораторной работы №1.

Уравнения движения робота

Теперь, после того, как для робота были определены характеризующие его состояние величины, настало время написания соответствующих уравнений. Всего предстоит раскрыть две стороны его работы — механическую и электродинамическую.

Начнем с первой. Подобно тому, как это было сделано в работе №1, сначала мы воспользуемся законами Ньютона, а уже потом — уравнениями Лагранжа.

Согласно одному из подходов к описанию движения твердых тел, для того чтобы полностью охарактеризовать поведение исследуемого тела, надо составить уравнения второго закона

¹⁰Поскольку «дорожное покрытие» покоится, скорость любой ее точки равна нулю. С учетом того, что точки, по которым колесо и «дорога» касаются друг друга (на рис. 7 это точка A'), движутся с одинаковой скоростью, получаем, что скорость точки A' также будет равна нулю ($v_a = 0$).

С другой стороны, скорость точки A' , согласно преобразованиям Галилея, равна сумме скорости центра масс (\vec{v}) колеса и скорости движения точки A' относительно последнего (\vec{v}_{ac}), т.е. $\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}_{ac}$. Поскольку относительно центра масс точка A' совершает чисто вращательное движение с угловой скоростью ω , то $v_{ac} = \omega \cdot r$ и $\vec{v}_{ac} \updownarrow \vec{v}$. Сбрав все наблюдения воедино, получим, что $v = \omega r$. Из последнего же равенства и следует выражение (14).

¹¹Еще раз подчеркнем, что можно было бы выбрать и другую пару координат.

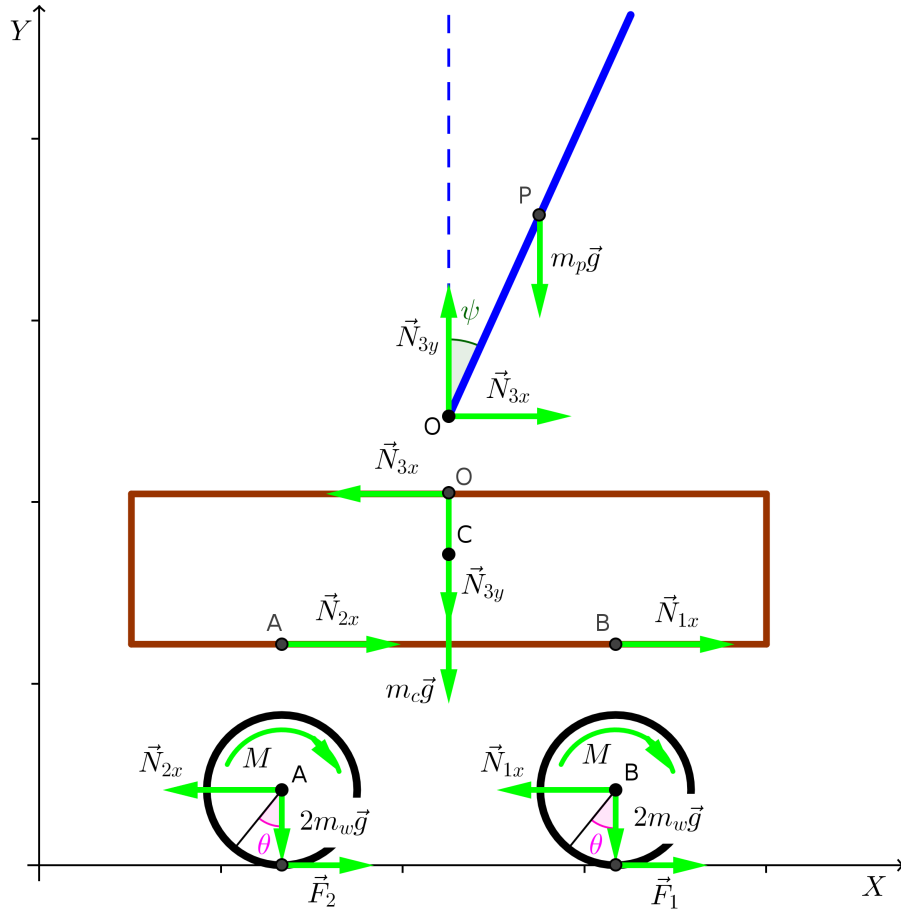


Рис. 8. Действующие в системе силы.

Ньютона для его вращательного и поступательного движений. При этом для написания уравнений, описывающих его поступательное движение, тело следует принять за материальную точку, а при определении уравнений вращательного движения моменты всех сил и момент инерции самого тела следует отсчитывать от его центра масс. В таком случае, отметив силы, действующие в нашем механизме (рис. 8; отмечены не все силы, действующие в системе, а только те, которые потребуются), получим¹²

для маятника:

$$m_p \ddot{x}_p = N_{3x}, \quad (2\text{-ой закон в проекциях на ось } OX) \quad (17)$$

$$m_p \ddot{y}_p = N_{3y} - m_p g, \quad (2\text{-ой закон в проекциях на ось } OY) \quad (18)$$

$$J_p \ddot{\psi} = N_{3y} \frac{l}{2} \sin \psi - N_{3x} \frac{l}{2} \cos \psi; \quad (\text{уравнение моментов}) \quad (19)$$

для тележки:

$$m_c \ddot{x}_c = N_{1x} + N_{2x} - N_{3x}; \quad (2\text{-й закон в проекциях на ось } OX) \quad (20)$$

для одной пары колес:

$$2m_w \ddot{x}_{w1}^* = F_1 - N_{1x}, \quad (2\text{-й закон в проекциях на ось } OX) \quad (21)$$

$$2J_w \ddot{\theta} = M - F_1 r; \quad (\text{уравнение моментов}) \quad (22)$$

¹²Все входящие в приведенные ниже уравнения величины, которые могут каким-либо образом зависеть от времени, считайте таковыми.

для другой:

$$2m_w\ddot{x}_{w2}^* = F_2 - N_{2x}, \quad (2\text{-й закон в проекциях на ось } OX) \quad (23)$$

$$2J_w\ddot{\theta} = M - F_2r, \quad (\text{уравнение моментов}) \quad (24)$$

где N_1 и N_2 — силы реакции, возникающие между тележкой и разными парами соосных колес (индексами помечены их проекции на соответствующие оси); N_3 — сила реакции, возникающая между маятником и тележкой; F_1 и F_2 — силы трения возникающие между парами соосных колес и «дорожным покрытием» (аналогичные силы приводят в движение автомобили); M — вращательный момент, с которым мотор NXT действует на колеса; m_w — масса одного колеса; m_p — масса маятника; m_c — масса тележки; J_p — момент инерции маятника; J_w — момент инерции колеса; g — ускорение свободного падения.

Комментируя полученные уравнения можно сказать следующее. Во-первых, как мы уже отмечали ранее, соосные колеса обладают одинаковыми кинематическими характеристиками. По этой причине уравнения движения составлены сразу для их пар, а не для отдельных колес. Это объясняет, почему перед величинами m_w и J_w стоят множители, равные двум. Во-вторых, важно отметить то, что при написании уравнений подразумевалось, что в конструкцию робота входят два двигателя NXT: первый подает силовое воздействие на одну пару колес, второй — на другую, как на рис. 1. Это объясняет, почему момент без всяких числовых коэффициентов присутствует в соответствующих уравнениях для обеих пар колес.

Для дальнейшего использования полученных уравнений несколько преобразуем их:

1 Подставим значение N_{3x} из (17) и значение N_{3y} из (18) в уравнение (19):

$$(m_p\ddot{y}_p + m_pg) \frac{l}{2} \sin \psi - m_p\ddot{x}_p \frac{l}{2} \cos \psi = J_p\ddot{\psi}. \quad (25)$$

2 Сложим уравнения друг с другом уравнения (21) и (23), а также (22) и (24):

$$(F_1 + F_2) - (N_{1x} + N_{2x}) = 2m_w(\ddot{x}_{w1}^* + \ddot{x}_{w2}^*) \quad (26)$$

$$2M - (F_1 + F_2)r = 4J_w\ddot{\theta}. \quad (27)$$

3 Подставим выражение для суммы $(F_1 + F_2)$ из (27) в (26):

$$N_{1x} + N_{2x} = \frac{2M}{r} - \frac{4J_w}{r}\ddot{\theta} - 2m_w(\ddot{x}_{w1}^* + \ddot{x}_{w2}^*). \quad (28)$$

4 Подставим выражение для суммы $(N_{1x} + N_{2x})$ из (28) и выражение для N_{3x} из (17) в уравнение (20):

$$\frac{2M}{r} - \frac{4J_w}{r}\ddot{\theta} - 2m_w(\ddot{x}_{w1}^* + \ddot{x}_{w2}^*) - m_p\ddot{x}_p = m_c\ddot{x}_c. \quad (29)$$

5 Объединим уравнения (29) и (25) в систему:

$$\begin{cases} (m_p\ddot{y}_p + m_pg) \frac{l}{2} \sin \psi - m_p\ddot{x}_p \frac{l}{2} \cos \psi = J_p\ddot{\psi} \\ \frac{2M}{r} - \frac{4J_w}{r}\ddot{\theta} - 2m_w(\ddot{x}_{w1}^* + \ddot{x}_{w2}^*) - m_p\ddot{x}_p = m_c\ddot{x}_c. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, применением законов Ньютона к нашему механизму была получена система уравнений (30). Несложно видеть, что в то время, как исследуемый робот имеет всего две степени свободы, она содержит сразу семь величин, описывающих положение различных тел в пространстве. Поскольку такое их количество избыточно, выразим лишние из них через функции $\theta(t)$ и $\psi(t)$, опираясь на ранее полученные уравнения связей:

- 1 Так как, согласно выражениям (11) и (12), функции $x_c(t)$, $x_{w_1}^*(t)$ и $x_{w_2}^*(t)$ отличаются друг от друга на постоянные величины, можно сделать вывод, что их производные будут равны. По этой причине заменим в выражении (30) функции $\ddot{x}_{w_1}^*$ и $\ddot{x}_{w_2}^*$ на функцию \ddot{x}_c :

$$\begin{cases} (m_p \ddot{y}_p + m_p g) \frac{l}{2} \sin \psi - m_p \ddot{x}_p \frac{l}{2} \cos \psi = J_p \ddot{\psi} \\ \frac{2M}{r} - \frac{4J_w}{r} \ddot{\theta} - 4m_w \ddot{x}_c - m_p \ddot{x}_p = m_c \ddot{x}_c. \end{cases} \quad (31)$$

- 2 Получим, согласно уравнению (16):

$$\ddot{x}_c = r \ddot{\theta}. \quad (32)$$

- 3 Получим из уравнений (16), (5) и (6):

$$\ddot{x}_p = r \ddot{\theta} - 0.5l \dot{\psi}^2 \sin \psi + 0.5l \ddot{\psi} \cos \psi, \quad (33)$$

$$\ddot{y}_p = -0.5l \dot{\psi}^2 \cos \psi - 0.5l \ddot{\psi} \sin \psi. \quad (34)$$

- 4 Подставим выражения, полученные в двух прошлых пунктах, в систему (31):

$$\begin{cases} \left(m_p \left(-0.5l \dot{\psi}^2 \cos \psi - 0.5l \ddot{\psi} \sin \psi \right) + m_p g \right) \frac{l}{2} \sin \psi - \\ \quad - m_p \left(r \ddot{\theta} - 0.5l \dot{\psi}^2 \sin \psi + 0.5l \ddot{\psi} \cos \psi \right) \frac{l}{2} \cos \psi = J_p \ddot{\psi} \\ \frac{2M}{r} - \frac{4J_w}{r} \ddot{\theta} - 4m_w r \ddot{\theta} - m_p \left(r \ddot{\theta} - 0.5l \dot{\psi}^2 \sin \psi + 0.5l \ddot{\psi} \cos \psi \right) = m_c r \ddot{\theta}, \end{cases} \quad (35)$$

и упростим полученный результат:

$$\begin{cases} -0.25m_p l^2 \ddot{\psi} + 0.5m_p l g \sin \psi - 0.5m_p r l \ddot{\theta} \cos \psi = J_p \ddot{\psi} \\ \frac{2M}{r} - \frac{4J_w}{r} \ddot{\theta} - 4m_w r \ddot{\theta} - m_p r \ddot{\theta} + 0.5m_p l \dot{\psi}^2 \sin \psi - 0.5m_p l \ddot{\psi} \cos \psi = m_c r \ddot{\theta}. \end{cases} \quad (36)$$

В лице полученных выражений (36) мы получили систему из двух дифференциальных уравнений (относительно функций $\psi(t)$ и $x_c(t)$), полностью описывающих все механические процессы, протекающие в нашем роботе. Следовательно, главная цель, которая ставилась при обращении к законам Ньютона была достигнута, и теперь, вернувшись немного назад, можно подойти к изучению движения исследуемого механизма с другой стороны — используя уравнения Лагранжа.

Напоминаем, что для того, чтобы найти функцию Лагранжа исследуемой системы в первую очередь надо определить выражения для кинетической и потенциальной энергий входящих в нее тел. Тогда с учетом того, что полная кинетическая энергия твердого тела складывается из энергии поступательного движения его центра масс и энергии вращательного движения

относительно последнего, и принимая за «нулевой уровень» потенциальной энергии плоскость $y = 0$, получим

для маятника:

$$T_n^{(p)} = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2), \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (37)$$

$$T_\theta^{(p)} = \frac{1}{2} J_p \dot{\psi}^2, \quad (\text{для вращательного движения отн. центра масс}) \quad (38)$$

$$U^{(p)} = m_p g y_p; \quad (\text{потенциальная энергия маятника}) \quad (39)$$

для тележки:

$$T_n^{(c)} = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2, \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (40)$$

$$U^{(c)} = \text{const}; \quad (\text{потенциальная энергия тележки}) \quad (41)$$

для всех колес в совокупности:

$$T_n^{(w)} = 4 \cdot \frac{1}{2} m_w \dot{x}_c^2, \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (42)$$

$$T_\theta^{(w)} = 4 \cdot \frac{1}{2} J_w \dot{\theta}^2, \quad (\text{для вращательного движения отн. центра масс}) \quad (43)$$

$$U^{(w)} = \text{const}, \quad (\text{потенциальная энергия всех колес}) \quad (44)$$

где выражением $(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2)$ определяется скорость поступательного движения центра масс маятника. Особо следует отметить, что в выражении для кинетической энергии поступательного движения колес стоит производная от координаты x_c , но это не является ошибкой. Чтобы понять, почему так можно написать, достаточно вспомнить условия перехода от системы (30) к системе (31).

Выразим все «лишние» координаты в полученных выражениях через θ и ψ . В таком случае получим следующие изменения

для маятника:

$$T_n^{(p)} = \frac{1}{2} m_p \left(r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \frac{l^2}{4} + r l \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi \right), \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (45)$$

$$U^{(p)} = m_p g \left(C + \frac{l}{2} \cos \psi \right); \quad (\text{потенциальная энергия маятника}) \quad (46)$$

для тележки:

$$T_n^{(c)} = \frac{1}{2} m_c r^2 \dot{\theta}^2; \quad (\text{для поступательного движения тележки}) \quad (47)$$

для всех колес в совокупности:

$$T_n^{(w)} = 2 m_w r^2 \dot{\theta}^2, \quad (\text{для поступательного движения центра масс}) \quad (48)$$

где

$$C = y_c + |OC| = \text{const}. \quad (49)$$

Функция Лагранжа, представляющая, как уже было сказано в первой работе, из себя разность полной кинетической и потенциальной энергий системы, для нашего механизма определится из формулы

$$L = T_n^{(p)} + T_\epsilon^{(p)} + T_n^{(c)} + T_n^{(w)} + T_\epsilon^{(w)} - U^{(p)} - U^{(c)} - U^{(w)}, \quad (50)$$

подставив в которую все выше приведенные значения для входящих в нее величин, окончательно получим

$$L = \frac{1}{2}m_p r^2 \dot{\theta}^2 + m_p \dot{\psi}^2 \frac{l^2}{8} + m_p r \frac{l}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi + \frac{1}{2}J_p \dot{\psi}^2 - m_p g C - \\ - m_p g \frac{l}{2} \cos \psi + \frac{1}{2}m_c r^2 \dot{\theta}^2 + 2m_w r^2 \dot{\theta}^2 + 2J_w \dot{\theta}^2 - U^{(c)} - U^{(w)}. \quad (51)$$

Уравнения Лагранжа для робота примут вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2M, \end{cases} \quad (52)$$

и здесь надо дать определенные пояснения относительно составов правых частей полученных выражений. Дело в том, что в тексте первой лабораторной работы принципы их формирования приведены не были. На самом же деле эти правила выглядят так:

- 1 Выявить в механизме все силы и моменты сил, которые не являются ни потенциальными, ни силами (или моментами) реакций. В нашем случае этим требованиям удовлетворяют только момент M и силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 .
- 2 Мысленно дать обобщенной координате, лежащей в основании рассматриваемого уравнения Лагранжа,¹³ очень малое положительное приращение. Пусть используемая координата это x , тогда ее приращение — это δx .
- 3 Выявить, какие из ранее выбранных сил или моментов обязательно совершат механическую работу при таком приращении координаты, и составить выражения для этих работ.
- 4 Поделить сумму полученных работ на δx . Результат этой операции и будет выражением, которое следует подставить в правую часть используемого уравнения Лагранжа.

Если теперь рассмотреть уравнения (52) с учетом этих объяснений, станет понятно, почему составы правых частей именно такие. Приращение координаты ψ не сопровождается работой ни одной из выше указанных физических величин, поэтому в правой части первого выражения стоит ноль. Приращение же угла θ на величину $\delta\theta$ обязательно сопровождается работой моментов M обоих двигателей NXT, равной $2M \cdot \delta\theta$. Следовательно в правую

¹³В основе каждого из уравнений Лагранжа лежит одна из обобщенных координат механизма. По этой причине количество уравнений, необходимое для полного описания движения системы, всегда будет совпадать с количеством ее степеней свободы.

часть соответствующего уравнения следует написать результат от ее деления на приращение координаты:

$$\frac{2M \cdot \delta\theta}{\delta\theta} = 2M. \quad (53)$$

Особо следует отметить то, что силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 при приращении координаты θ работы не совершают, хотя на первый взгляд может показаться, что вдвоем они создают отрицательную работу, равную $-(F_1 + F_2)r \cdot \delta\theta$. Подвох в нашем случае заключается в том, что скорости точек, к которым они приложены, а ими являются точки касаний колес с «дорогой», равны нулю. Отсюда получается, что указанные силы не вызывают перемещения точек своего приложения, а это и означает, что их работа равна нулю.

Выяснив, чем определяется состав правой части уравнений Лагранжа, можно пойти дальше и выполнить необходимые операции дифференцирования в (52). Тогда имеем, что результаты промежуточных вычислений окажутся равными:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = m_p \dot{\psi} \frac{l^2}{4} + m_p r \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \psi + J_p \dot{\psi}, \quad (54)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = m_p \ddot{\psi} \frac{l^2}{4} + m_p r \frac{l}{2} \ddot{\theta} \cos \psi - m_p r \frac{l}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + J_p \ddot{\psi}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -m_p r \frac{l}{2} \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + m_p g \frac{l}{2} \sin \psi, \quad (56)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_p r^2 \dot{\theta} + m_p r \frac{l}{2} \dot{\psi} \cos \psi + m_c r^2 \dot{\theta} + 4m_w r^2 \dot{\theta} + 4J_w \dot{\theta}, \quad (57)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_p r^2 \ddot{\theta} + m_p r \frac{l}{2} \ddot{\psi} \cos \psi - m_p r \frac{l}{2} \dot{\psi}^2 \sin \psi + m_c r^2 \ddot{\theta} + 4m_w r^2 \ddot{\theta} + 4J_w \ddot{\theta}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (59)$$

а итоговый запишется в виде

$$\begin{cases} m_p \ddot{\psi} \frac{l^2}{4} + m_p r \frac{l}{2} \ddot{\theta} \cos \psi + J_p \ddot{\psi} - m_p g \frac{l}{2} \sin \psi = 0 \\ m_p r^2 \ddot{\theta} + m_p r \frac{l}{2} \ddot{\psi} \cos \psi - m_p r \frac{l}{2} \dot{\psi}^2 \sin \psi + m_c r^2 \ddot{\theta} + 4m_w r^2 \ddot{\theta} + 4J_w \ddot{\theta} = 2M, \end{cases} \quad (60)$$

Данные уравнения полностью совпадают с полученной ранее системой (36). Это еще один раз показывает нам то, что оба использованных метода, имея свои плюсы и минусы, тем не менее эквивалентны. В заключение перепишем полученный результат в виде

$$\begin{cases} (m_p l^2 + 4J_p) \ddot{\psi} + 2m_p l r \ddot{\theta} \cos \psi - 2m_p g l \sin \psi = 0 \\ 0.5m_p l r \ddot{\psi} \cos \psi + (m_p r^2 + m_c r^2 + 4m_w r^2 + 4J_w) \ddot{\theta} - 0.5m_p l r \dot{\psi}^2 \sin \psi = 2M. \end{cases} \quad (61)$$

После того, как для исследуемого устройства были найдены уравнения, характеризующие протекающие в нем механические процессы, настало время определить соотношения, которые свяжут их с электродинамической стороной функционирования робота. Для этого в первую очередь следует вспомнить, что в прошлых лабораторных было получено следующее уравнение, описывающее вращение ротора мотора NXT:

$$k_m I + M_{oth} = J \ddot{\theta}, \quad (62)$$

где J — приведенный к выходному валу мотора NXT момент инерции ротора электродвигателя; I — сила тока в обмотках ротора; $k_m I$ — вращательный момент, раскручивающий вал; M_{oth} — сумма внешних моментов сил, действующих на вал.

На следующем шаге рассмотрим процесс передачи силового воздействия с вала мотора на колеса тележки.

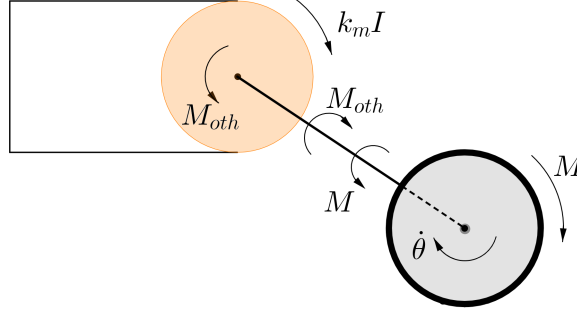


Рис. 9. Передача силового воздействия с мотора на колеса.

Согласно рис. 9, на колеса с моментом M действует стержень, соединяющий их с валом мотора. В свою очередь колеса действуют на него с таким же моментом, направленным в противоположную сторону.¹⁴ Стержень и вал сервопривода действуют друг на друга с моментом M_{oth} . В результате, записав для вращательного движения указанных тел соответствующие уравнения, получим¹⁵:

$$k_m I - M_{oth} = J\ddot{\theta}, \quad (\text{для вала мотора}) \quad (63)$$

$$M_{oth} - M = J_o\ddot{\theta}, \quad (\text{для соединительного стержня}) \quad (64)$$

где J_o — момент инерции соединительного стержня. Из полученных уравнений, полагая $J_o = 0$ по причине его малости, несложно получить, что

$$M_{oth} = M, \quad (65)$$

а значит

$$M = k_m I - J\ddot{\theta}. \quad (66)$$

Выражение для силы тока следует взять из второй работы:

$$IR = U - k_e \dot{\theta} - L_p \dot{I}, \quad (67)$$

где $U = U_{ctrl}$. Из него, пренебрегая в силу ее малости индуктивностью, получим

$$I = \frac{U - k_e \dot{\theta}}{R}. \quad (68)$$

Выражение для M в таком случае запишется в виде

$$M = \frac{k_m}{R} (U - k_e \dot{\theta}) - J\ddot{\theta}. \quad (69)$$

¹⁴В данном случае это напрямую следует из третьего закона Ньютона.

¹⁵Перед M_{oth} в приводимых уравнениях в отличие от (62) поставлен минус по той причине, что теперь под ним мы понимаем конкретный момент сил, а не используем M_{oth} как некоторое обобщающее обозначение.

Подставим полученное выражение в нашу систему (61):

$$\begin{cases} (m_p l^2 + 4J_p) \ddot{\psi} + 2m_p l r \ddot{\theta} \cos \psi - 2m_p g l \sin \psi = 0 \\ 0.5m_p l r \ddot{\psi} \cos \psi + (m_p r^2 + m_c r^2 + 4m_w r^2 + 4J_w) \ddot{\theta} - \\ - 0.5m_p l r \dot{\psi}^2 \sin \psi = \frac{2k_m}{R} (U - k_e \dot{\theta}) - 2J \ddot{\theta}. \end{cases} \quad (70)$$

и перепишем ее в виде

$$\begin{cases} (m_p l^2 + 4J_p) \ddot{\psi} + 2m_p l r \ddot{\theta} \cos \psi - 2m_p g l \sin \psi = 0 \\ 0.5m_p l r \ddot{\psi} \cos \psi + (m_p r^2 + m_c r^2 + 4m_w r^2 + 4J_w + 2J) \ddot{\theta} - \\ - 0.5m_p l r \dot{\psi}^2 \sin \psi + \frac{2k_m k_e}{R} \dot{\theta} = \frac{2k_m}{R} U. \end{cases} \quad (71)$$

В лице данной системы мы получили математическую модель рассматриваемого робота, то есть совокупность уравнений, описывающих все протекающие в нем механические и электродинамические процессы. Из сказанного следует, что в общем виде задача данного раздела решена. Несмотря на это, прежде, чем его завершить, следует сделать еще пару немаловажных вещей.

Во-первых, можно видеть, что в уравнениях (71) присутствуют сложные зависимости от величин ψ и θ , а также от их производных. Это неоправданно сильно затрудняет техническую реализацию робота, поэтому модель следует упростить. Легчайший способ сделать это видится в том, чтобы линеаризовать полученные уравнения, то есть сделать все зависимости от указанных функций линейными, что мы и сделаем.

Учитывая, что при малых углах (выраженных в радианах) приближенно выполняются следующие равенства:

$$\sin \alpha = \alpha, \quad \cos \alpha = 1, \quad (72)$$

сделаем соответствующие замены в (71):

$$\begin{cases} (m_p l^2 + 4J_p) \ddot{\psi} + 2m_p l r \ddot{\theta} - 2m_p g l \psi = 0 \\ 0.5m_p l r \ddot{\psi} + (m_p r^2 + m_c r^2 + 4m_w r^2 + 4J_w + 2J) \ddot{\theta} - 0.5m_p l r \dot{\psi}^2 \psi + \frac{2k_m k_e}{R} \dot{\theta} = \frac{2k_m}{R} U. \end{cases} \quad (73)$$

Учитывая, что при перемножении двух и более чисел, по модулю меньших единицы, абсолютное значение итогового результата еще более уменьшается, положим в (73) все квадраты и взаимные произведения величин ψ и θ (и их производных) равными нулю:

$$\begin{cases} (m_p l^2 + 4J_p) \ddot{\psi} + 2m_p l r \ddot{\theta} - 2m_p g l \psi = 0 \\ 0.5m_p l r \ddot{\psi} + (m_p r^2 + m_c r^2 + 4m_w r^2 + 4J_w + 2J) \ddot{\theta} + \frac{2k_m k_e}{R} \dot{\theta} = \frac{2k_m}{R} U. \end{cases} \quad (74)$$

Таким образом, мы упростили нашу математическую модель и сделали ее более доступной для технической реализации. Теперь упростим ее для дальнейших математических расчетов, переписав в определенном матричном виде.

Введем следующие обозначения:

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad (75)$$

$$u = U. \quad (76)$$

С учетом их можно записать систему (74) в виде

$$E\ddot{q} + F\dot{q} + Gq = Hu \quad (77)$$

где

$$E = \begin{bmatrix} 2m_plr & m_pl^2 + 4J_p \\ m_pr^2 + m_cr^2 + 4m_wr^2 + 4J_w + 2J & 0.5m_plr \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2k_mk_e}{R} & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -2m_pgl \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2k_m}{R} \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Теперь выразим из полученного уравнения матрицу \ddot{q} , умножив все выражение на матрицу E^{-1} слева и перебросив некоторые слагаемые в другую часть уравнения:

$$\ddot{q} = -E^{-1}F\dot{q} - E^{-1}Gq + E^{-1}Hu, \quad (79)$$

где

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{0.5m_plr}{\varkappa_1} & -\frac{m_pl^2 + 4J_p}{\varkappa_1} \\ -\frac{r^2(m_p + m_c + 4m_w) + 4J_w + 2J}{\varkappa_1} & \frac{2m_plr}{\varkappa_1} \end{bmatrix}, \quad E^{-1}F = \begin{bmatrix} -\frac{2k_mk_e(m_pl^2 + 4J_p)}{R\varkappa_1} & 0 \\ \frac{4k_mk_em_plr}{R\varkappa_1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$E^{-1}G = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m_p^2gl^2r}{\varkappa_1} \\ 0 & \frac{2m_pgl(r^2(m_p + m_c + 4m_w) + 4J_w + 2J)}{\varkappa_1} \end{bmatrix}, \quad E^{-1}H = \begin{bmatrix} -\frac{2k_m(m_pl^2 + 4J_p)}{R\varkappa_1} \\ \frac{4k_m m_plr}{R\varkappa_1} \end{bmatrix}, \quad (80)$$

где, в свою очередь,

$$\varkappa_1 = m_p^2l^2r^2 - (m_pl^2 + 4J_p)(r^2(m_p + m_c + 4m_w) + 4J_w + 2J). \quad (81)$$

Приводя получившееся выражение обратно в форму системы, получим

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{2k_mk_e(m_pl^2 + 4J_p)}{R\varkappa_1}\dot{\theta} + \frac{m_p^2gl^2r}{\varkappa_1}\dot{\psi} - \frac{2k_m(m_pl^2 + 4J_p)}{R\varkappa_1}U \\ \ddot{\psi} = -\frac{4k_mk_em_plr}{R\varkappa_1}\dot{\theta} - \frac{2m_pgl(r^2(m_p + m_c + 4m_w) + 4J_w + 2J)}{\varkappa_1}\dot{\psi} + \frac{4k_m m_plr}{R\varkappa_1}U. \end{cases} \quad (82)$$

Для того чтобы теперь окончательно перейти к тому виду математической модели, который нам нужен, добавим в нее еще одно глупое, но заведомо верное уравнение:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} = \frac{2k_mk_e(m_pl^2 + 4J_p)}{R\varkappa_1}\dot{\theta} + \frac{m_p^2gl^2r}{\varkappa_1}\dot{\psi} - \frac{2k_m(m_pl^2 + 4J_p)}{R\varkappa_1}U \\ \ddot{\psi} = -\frac{4k_mk_em_plr}{R\varkappa_1}\dot{\theta} - \frac{2m_pgl(r^2(m_p + m_c + 4m_w) + 4J_w + 2J)}{\varkappa_1}\dot{\psi} + \frac{4k_m m_plr}{R\varkappa_1}U. \end{cases} \quad (83)$$

В этом случае введем обозначение

$$x = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (84)$$

математическую модель нашего робота можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (85)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{m_p^2 g l^2 r}{\kappa_1} & \frac{2k_m k_e (m_p l^2 + 4J_p)}{R\kappa_1} & 0 \\ -\frac{2m_p g l (r^2(m_p + m_c + 4m_w) + 4J_w + 2J)}{\kappa_1} & -\frac{4k_m k_e m_p l r}{R\kappa_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2k_m (m_p l^2 + 4J_p)}{R\kappa_1} \\ \frac{4k_m m_p l r}{R\kappa_1} \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Схема моделирования работы механизма

Схема моделирования исследуемого робота, построенная на основании его математической модели (уравнения (83)) будет иметь вид, показанный на рис. 10.

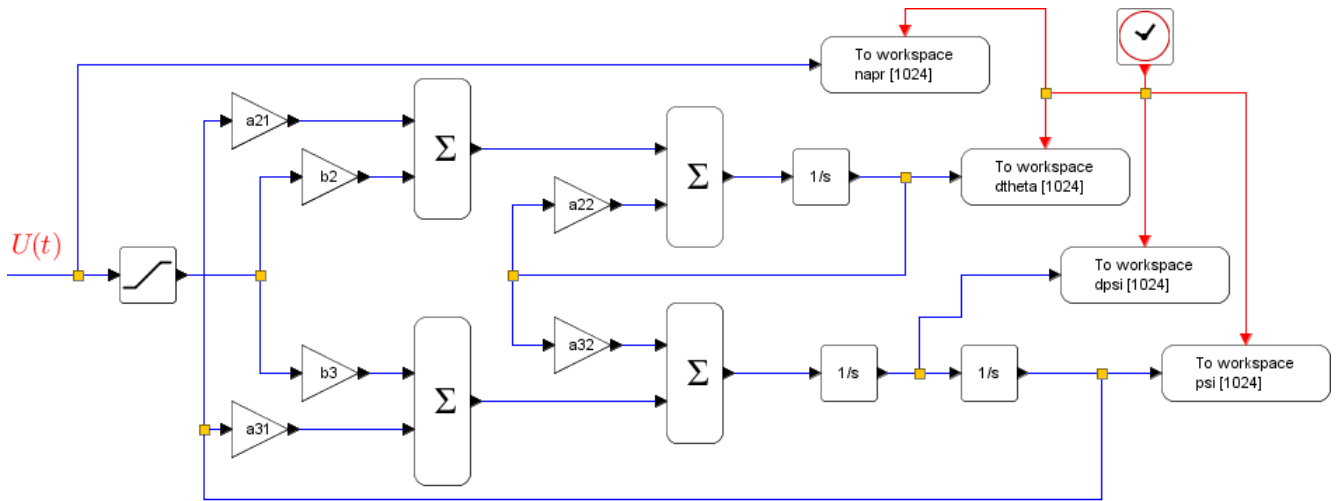


Рис. 10. Схема моделирования работы устройства.

Расшифровка входящих в нее переменных такова:

$$\begin{aligned} a22 &= \frac{2k_m k_e (m_p l^2 + 4J_p)}{R\kappa_1} & a32 &= -\frac{4k_m k_e m_p l r}{R\kappa_1} \\ a21 &= \frac{m_p^2 g l^2 r}{\kappa_1} & a31 &= -\frac{2m_p g l (r^2(m_p + m_c + 4m_w) + 4J_w + 2J)}{\kappa_1} \\ b2 &= -\frac{2k_m (m_p l^2 + 4J_p)}{R\kappa_1} & b3 &= \frac{4k_m m_p l r}{R\kappa_1} \end{aligned} \quad (88)$$

Используя схему моделирования нашего устройства, мы имеем своей целью при известной зависимости $U(t)$ и при заданных начальных условиях — значениях функций $\psi(t)$, $\dot{\psi}(t)$ и $\dot{\theta}(t)$ в момент времени $t = 0$ — определить дальнейшее поведение робота. Под нахождением последнего подразумевается, что в результате моделирования нам станут известны значения тех характеризующих состояние механизма величин, которые входят в его математическую модель. В данном случае их роль играют ψ , $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$.

Четыре регистрирующих блока с надписью To Workspace нужны (соответственно сверху вниз) для фиксации значений U , $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ и ψ . Входящие в эту схему блоки, помеченные значком Σ , на выходе выдают сумму своих входных сигналов.

Разобраться в строении схемы моделирования помогут уравнения математической модели, записанные немного в другом виде — см. систему (89).

$$\begin{cases} \psi = \int \dot{\psi} dt \\ \dot{\theta} = \int \left(\frac{2k_m k_e (m_p l^2 + 4J_p)}{R\kappa_1} \dot{\theta} + \frac{m_p^2 g l^2 r}{\kappa_1} \psi - \frac{2k_m (m_p l^2 + 4J_p)}{R\kappa_1} U \right) dt \\ \dot{\psi} = \int \left(-\frac{4k_m k_e m_p l r}{R\kappa_1} \dot{\theta} - \frac{2m_p g l (r^2 (m_p + m_c + 4m_w) + 4J_w + 2J)}{\kappa_1} \psi + \frac{4k_m m_p l r}{R\kappa_1} U \right) dt. \end{cases} \quad (89)$$

Эту же схему моделирования можно представить и более компактно. Результат — см. рис. 11. По сравнению с прошлой в этой ее версии опущены два лишних сумматора.

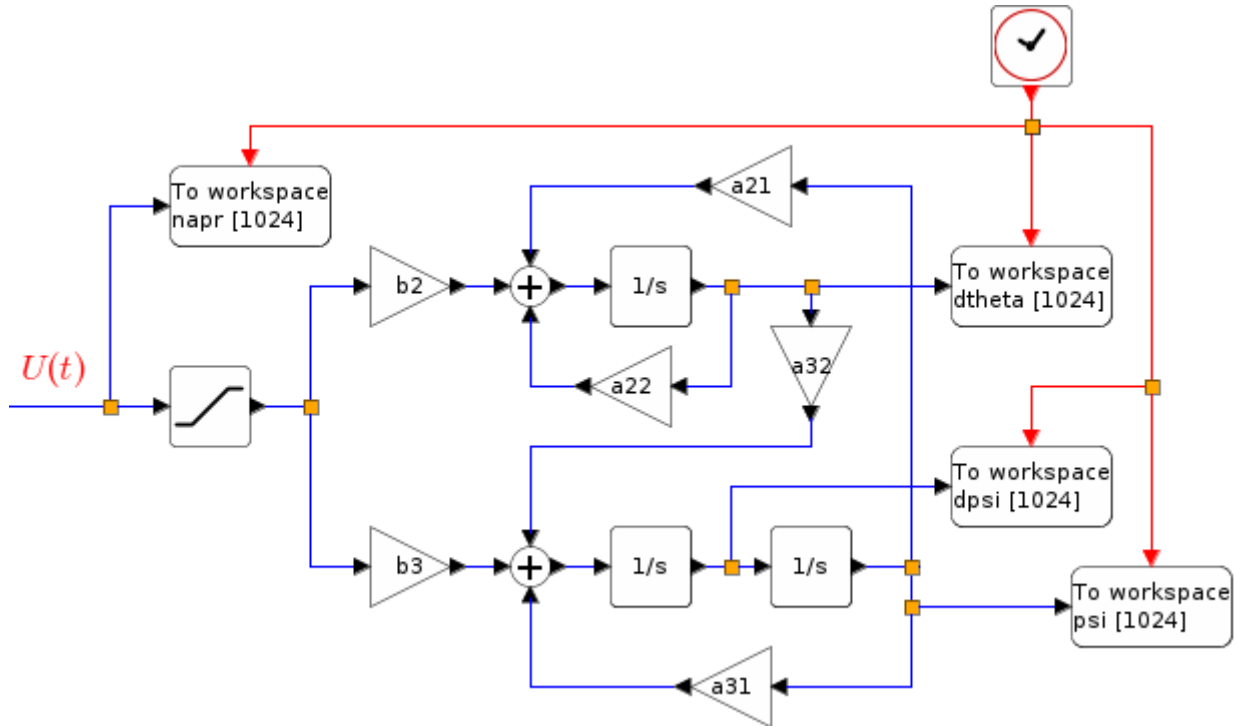


Рис. 11. Схема моделирования работы устройства в более компактной форме.