Лабораторная работа №4
Робот с дифференциальным приводом

1 Методические рекомендации

До начала работы студент должен выполнить предыдущие лабораторные этого цикла.

2 Теоретические сведения

В прошлой работе вы успели познакомиться с таким приемом управления, как ПИД-регулятор. Путем его реализации вам удалось реализовать процесс движения вдоль стены с минимальной ошибкой управления. В данной лабораторной работе будет предложено создать алгоритм движения широко используемого робота с дифференциальным приводом в заданную точку. Такой вид конструкции робота предполагает достаточно большую подвижность и мобильность вкупе со сравнительно легкой математической моделью.

Как уже было описано ранее, колесный робот с дифференциальным приводом имеет два *ведущих* колеса, которые приводятся в движение моторами (по одному с каждой стороны робота), и одно *свободное* колесо, которое служит для баланса и равновесия колесного робота. Дифференциальный привод является простейшим механическим приводом, так как поворот робота не требует поворота никаких из колес. Если ведущие колеса двигаются с одинаковой скоростью, то робот двигается назад или вперед; если одно из колес вращается с большей скоростью, то робот едет по изогнутой траектории вдоль дуги с мгновенным радиусом; если же оба колеса вращаются с одинаковой скоростью, но в разных направлениях, то робот совершает поворот вокруг середины отрезка, соединяющего ведущие колеса. Очевидно, что данный тип привода не позволяет мгновенно поворачивать.

В робототехнике широко применяется два способа локализации, то есть нахождения координат устройства.

- Глобальный - получение абсолютных координат робота. Например, GPS
- Локальный - получение координат робота, относительно какой-либо точки. Например, центра комнаты.

Для модели робота EV3 центром координат всегда будет точка, в которой была запущена программа, а сведения о собственных координатах робот в данном случае будет получать посредством одометрии - использовании данных о движении приводов.

Модель робота

Рассмотрим кинематическую модель робота с дифференциальным приводом и введем некоторые важные величины.

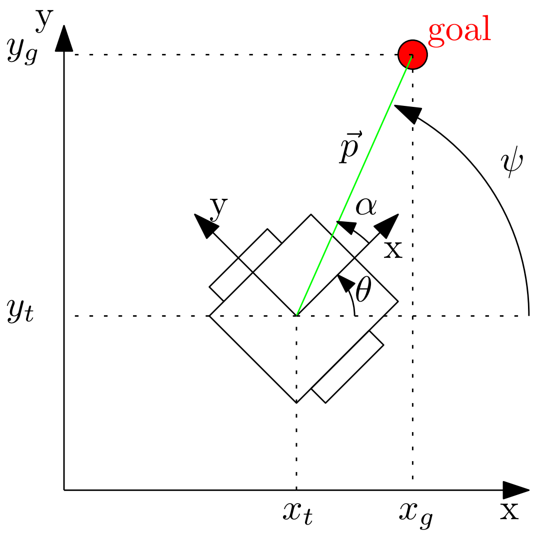

Рис. 1. Модель робота.

$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} x_g - x_t & y_g - y_t \end{pmatrix}$- вектор робот-цель. Длина этого вектора равна расстоянию от робота до целевой точки.

θ - угол между роботом и базовой осью OX (курс).

ψ - азимут. Угол между OX и направлением на цель.

$\alpha = \psi - \theta$ - курсовой угол. Разность между азимутом и курсом робота.

v - линейная скорость робота.

ω - угловая скорость робота.

Приведенная ниже система уравнений связывает производные координат робота по времени с лнейной скоростью робота:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cdot \cos\theta \\ \dot{y} = v \cdot \sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

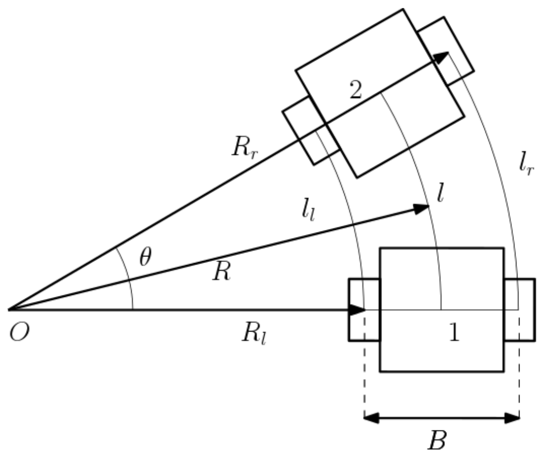

Рис. 2. Движение робота из точки 1 в точку 2.

Вспомним определение производной из курса математического анализа:

$$\dot{f}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

При работе с реальным роботом самый маленький измеримый отрезок времени равен времени одной итерации цикла программы. Чтобы воспользоваться формулой (1) для вычисления текущих координат x и y робота, заменим производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$ их численными приближениями (здесь Δt - *конечный* маленький отрезок времени, например, время одной итерации цикла программы):

$$\begin{cases} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = v \cdot \cos\theta \\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = v \cdot \sin\theta \end{cases} \tag{3}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) + v \cdot \cos\theta \cdot \Delta t \\ y(t+\Delta t) = x(t) + v \cdot \sin\theta \cdot \Delta t \end{cases} \tag{4}$$

В последних двух формулах равенство выполняется только приближённо, однако тем лучше, чем меньше Δt. Обозначив символами x_{cur}, y_{cur} текущие координаты робота и символами x_{prev}, y_{prev} - его координаты в предыдущий момент времени (например, на предыдущей итерации цикла), приходим к формулам:

$$\begin{cases} x_{cur} = x_{prev} + v \cdot \cos\theta \cdot \Delta t \\ y_{cur} = y_{prev} + v \cdot \sin\theta \cdot \Delta t \end{cases} \tag{5}$$

В течение времени Δt, за которое происходит переход между предыдущим и текущим положением робота, можно считать, что скорости вращения колёс постоянны, следовательно центр робота движется по дуге окружности с центром O и радиусом R (см. рисунок 2). Это означает, что все точки робота имеют одинаковую угловую скорость ω относительно точки O, при этом левое колесо движется по окружности радиуса R_l, а правое - по окружности радиуса R_r. При этом центр робота находится посередине между колесами:

$$R = \frac{R_l + R_r}{2} \tag{6}$$

Выражаем линейную скорость робота через его угловую скорость:

$$v = \omega \cdot R = \frac{\omega R_l + \omega R_r}{2} \tag{7}$$

Слагаемые в числителе являются не чем иным, как линейными скоростями колес робота. А значит, линейная скорость робота может быть вычислена как среднее арифметическое линейных скоростей его колес:

$$v = \frac{v_l + v_r}{2} \tag{8}$$

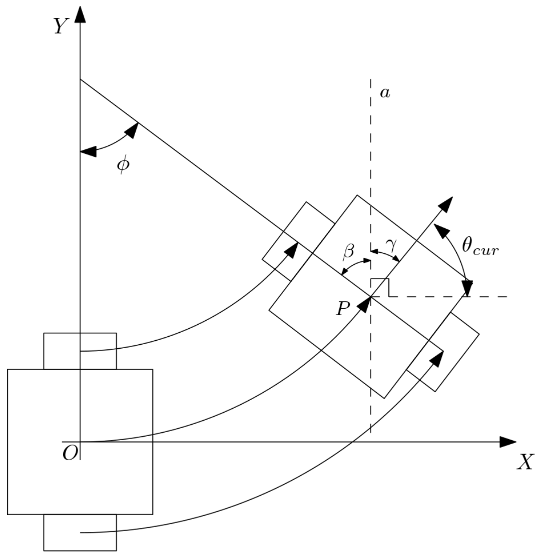

Рис. 3. Движение робота из точки 1 в точку 2.

Подставляем полученное выражение в (5):

$$\begin{cases} x_{cur} = x_{prev} + \cos\theta \cdot \frac{v_l + v_r}{2} \cdot \Delta t \\ y_{cur} = y_{prev} + \sin\theta \cdot \frac{v_l + v_r}{2} \cdot \Delta t \end{cases} \tag{9}$$

Пусть $l_l = v_l \cdot \Delta t$ - путь, пройденный левым колесом робота за время одной итерации цикла, $l_r = v_r \cdot \Delta t$ - соответстущий путь, пройденный правым колесом. Пусть ψ_l и ψ_r - углы поворота валов моторов соответственно левого и правого колеса за то же время, r - радиус колеса. Тогда имеем:

$$v_l \cdot \Delta t = l_l = \psi_l \cdot r \tag{10}$$

$$v_r \cdot \Delta t = l_r = \psi_r \cdot r \tag{11}$$

Подставим полученные выражения в формулу (9):

$$\begin{cases} x_{cur} = x_{prev} + \cos\theta \cdot \frac{\psi_l + \psi_r}{2} \cdot r \\ y_{cur} = y_{prev} + \sin\theta \cdot \frac{\psi_l + \psi_r}{2} \cdot r \end{cases} \tag{12}$$

Следущая задача состоит в определении курса робота θ (угол между направлением движения робота и осью OX). Проведем вспомогательную прямую a, которая параллельна оси OY, через центр робота, обозначенный буквой P (рис. 3). Углы ϕ и β являются накрест лежащими при параллельных прямых, и поэтому равны. Вектор линейной скорости робота перпендикулярен радиусу окружности, по которой он движется, следовательно:

$$\gamma = 90^o - \beta = 90^o - \phi \tag{13}$$

Из рисунка не трудно увидеть, что:

$$\theta = 90^o - \gamma = 90^o - 90^o + \phi \quad \Rightarrow \quad \theta = \phi \tag{14}$$

Пути l_l и l_r можно также выразить через формулу для нахождения дуги окружности:

$$\begin{cases} l_r = \phi R_r \\ l_l = \phi R_l \end{cases} \tag{15}$$

Так как центр робота находится посередине между колес, воспользуясь шириной колеи B (расстояние между колесами), мы можем переписать систему (15) следующим образом:

$$\begin{cases} l_r = \phi(R + \frac{B}{2}) \\ l_l = \phi(R - \frac{B}{2}) \end{cases} \tag{16}$$

Вычтим из первого уравнение второе и получим:

$$l_r - l_l = \phi B \quad \Rightarrow \quad l_r - l_l = \theta B \tag{17}$$

Длины дуг, по которым двигались правое и левое колеса можно также найти, пользуясь формулами для длины дуги окружности и зная угол поворота вала мотора за время выполнения одной итерации (ψ_r и ψ_l) и радиус колеса (r):

$$\begin{cases} l_r = \psi_r r \\ l_l = \psi_l r \end{cases} \tag{18}$$

Подставив (18) в (17), получаем:

$$(\psi_r - \psi_l)r = B\theta \quad \Rightarrow \quad (\psi_r - \psi_l)\frac{r}{B} = \theta \tag{19}$$

Пользуясь формулой (19) можно получить угол, на который повернулся робот за время одной итерации. Следовательно, для рассчета полного угла робота относительно оси OX можно использовать следущую формулу:

$$\theta_{cur} = \theta_{prev} + \theta \tag{20}$$

$$\theta_{cur} = \theta_{prev} + (\psi_r - \psi_l)\frac{r}{B} \tag{21}$$

Таким образом, можно объединить в одну систему уравнения (12) и (21), которые позволяют определить положение и курсовой угол робота:

$$\begin{cases} x_{cur} = x_{prev} + \cos\theta \cdot \frac{\psi_l + \psi_r}{2} \cdot r \\ y_{cur} = y_{prev} + \sin\theta \cdot \frac{\psi_l + \psi_r}{2} \cdot r \\ \theta_{cur} = \theta_{prev} + (\psi_r - \psi_l)\frac{r}{B} \end{cases} \tag{22}$$

Ниже сформулируем формулы для контроля оптимальных линейной и угловой скорости робота. Заметим, что на данный момент происходит реализация лишь пропорционального регулятора и в будущих лабораторных работах к нему будет добавлена интегральная и дифференциальная составляющая.

$$U_s = K_s \cdot \rho, K_s > 0 \tag{23}$$

$$U_r = K_r \cdot \alpha, K_r > 0 \tag{24}$$

где K_f и K_r - коэффициенты для пропорционального регулятора.

Описание задания работы

Необходимо создать робота-машинку с дифференциальным приводом, который будет способен приезжать в точку с заранее заданными координатами.

Напряжения, которые подаются на двигатели, равны тем, что были использованы в лабораторной работе №4. На один двигатель подается напряжение равное $(U_s + U_r)$, а на другой $(U_s - U_r)$. Как уже было замечено раннее, первая составляющая напряжения отвечает за движение прямо $(U_{straight})$, а другая за поворот $(U_{rotation})$. Обе составляющих подчиняются законам (23) и (24).

Моделирование в Xcos

В данной работе потребуется создать блок-схему, которая моделирует работу программы робота и позволяет прогонозировать его движение.

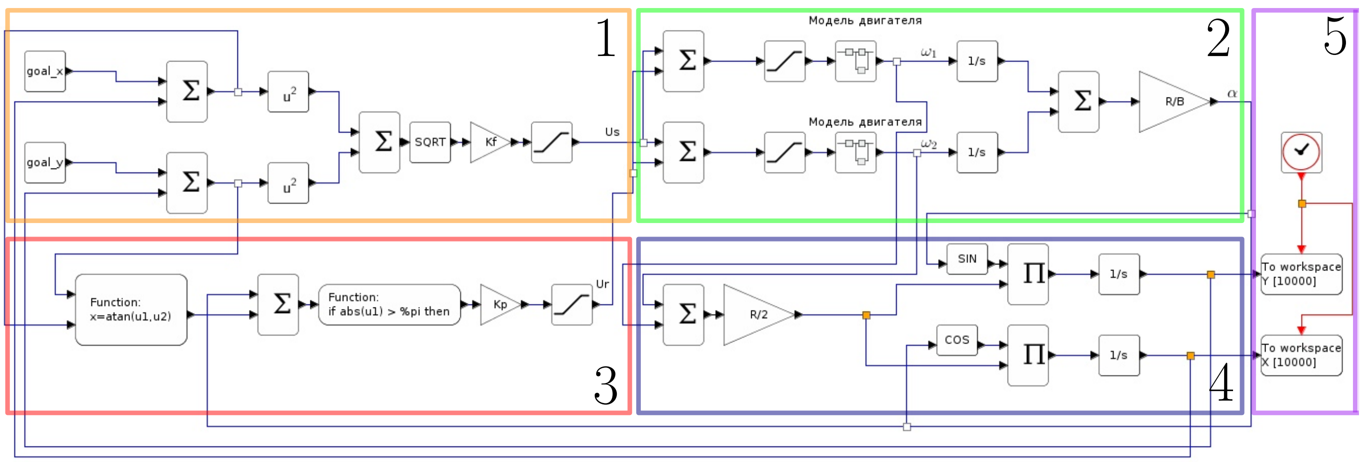

Рис. 4. Полная схема моделирования

Её можно разбить на несколько отдельных схем, каждая из которых выполняет определенную функцию.

1 Работа с координатами и задание линейной скорости (сигнала $U_{straight}$).

2 Получение угловых скоростей с помощью моделей двигателей, которые следует взять из 2 лабораторной работы, и преобразование угловых скоростей в угол поворота робота.

3 Получение курсового угла и задание угловой скорости (сигнала $U_{rotation}$).

В данной схеме стоит заметить, что в одном из блоков используется математическая функция $atan$, возвращающая значения $(-\pi; \pi]$. В тех случаях, когда роботу надо развернуться на 180 градусов или приблизительно на данный угол, функция начинает возвращать значения резко скачущие в пределах $(-\pi; \pi]$, что заставляет робота постоянно менять направление своего движения. Данную проблему можно решить, использовав функцию $atan2$ вместо функции $atan$.

4 Получение текущих координат робота.

5 Вывод значений X и Y в workspace для последующих построений графиков.

3 Цель работы

Получить опыт построения математической модели робота, освоить алгроитм движения робота с дифференциальным приводом к заданной точке.

4 Порядок выполнения работы

1 Собрать робота-машинку, контрукционно схожим с роботом в лабораторных работах 3 или 4, но без каких-либо установленных датчиков.

2 Создать модель в Xcos, используя схемы п. 2.

3 Написать программу на языке python3, которая будет удовлетворять разделу ”Описание задания работы”, и подобрать значение коэффициентов для двух пропорциональных регуляторов.

4 Записать в файл координаты робота x и y во время его движения в целевые точки, заданные преподавателем. После выполнения этого пункта у вас должно быть 4 разных файла с данными. Пример рис. 6. Стоит учесть, что на рисунке указаны простейшие точки: (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), но робот должен будет проехать к любым точкам, которые будут заданы преподавателем.

5 Преподаватель задает 4 целевые точки, которые образуют квадрат. Необходимо модифицировать схему моделирования и ранее написанную программу для движения робота так, чтобы при достижении первой из них машинка автоматически начинала ехать к следущей точке из списка и так далее. В конце машинка должна приехать в первую точку из списка. Во время движения машинки записать в файл координаты робота. Пример такого движения рис. 7

6 Написать программу в Scilab для построения траектории робота.

7 Построить траектории, полученные с моделей и с реального робота, в одной координатной плоскости. Они должны совпадать полностью или с небольшими отклонениями. Пример рис. 5.

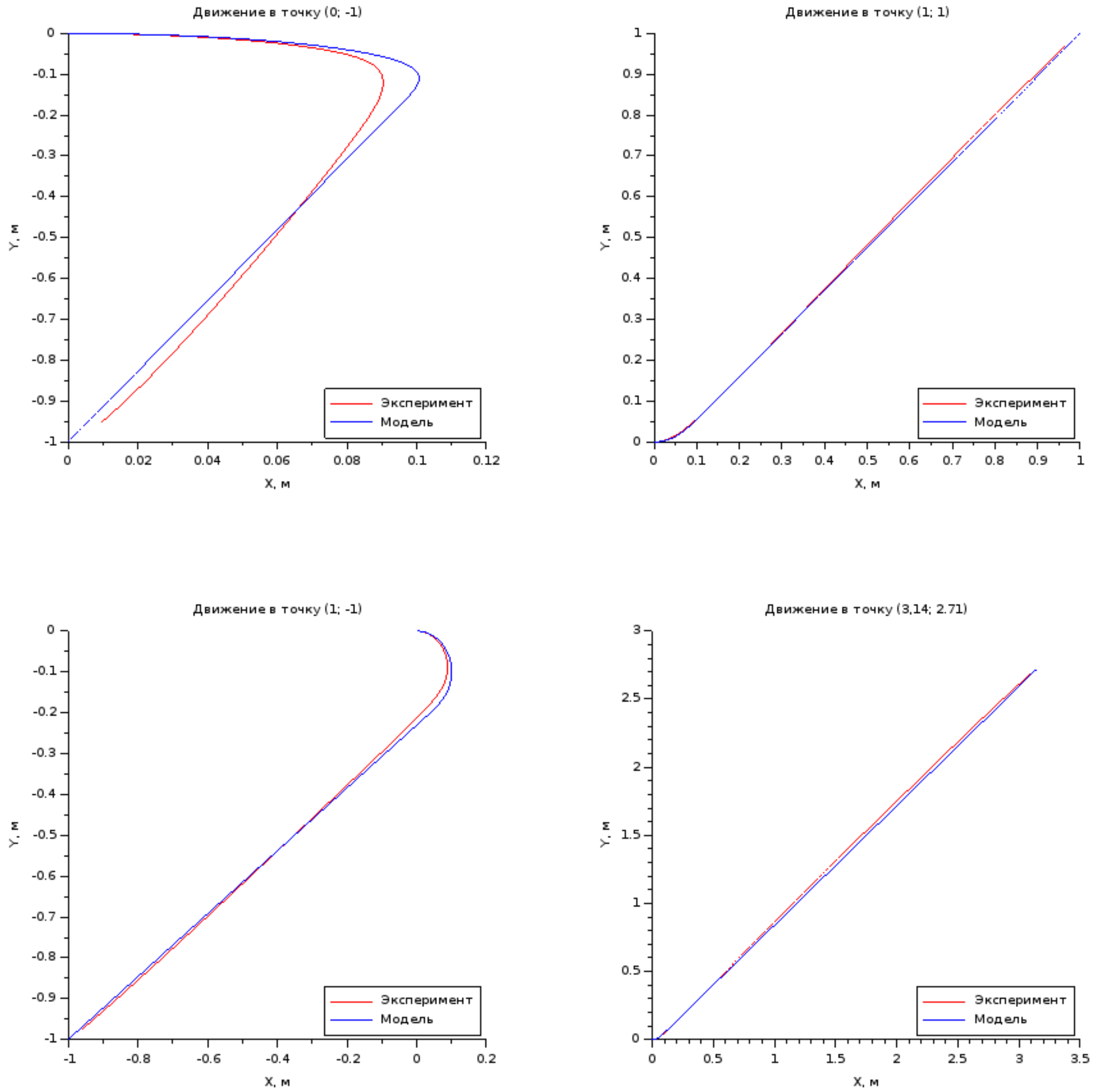

Рис. 5. Примеры полученных траекторий.

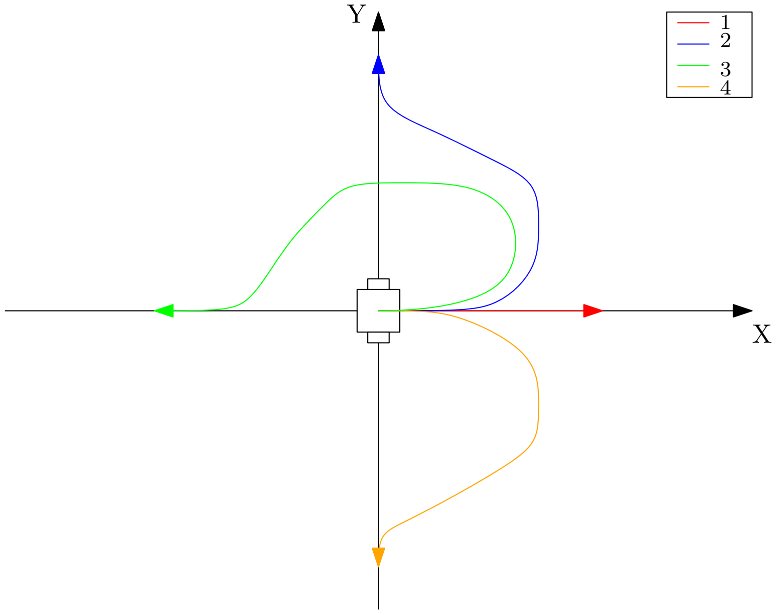

Рис. 6. Пример выполнения задания 1.

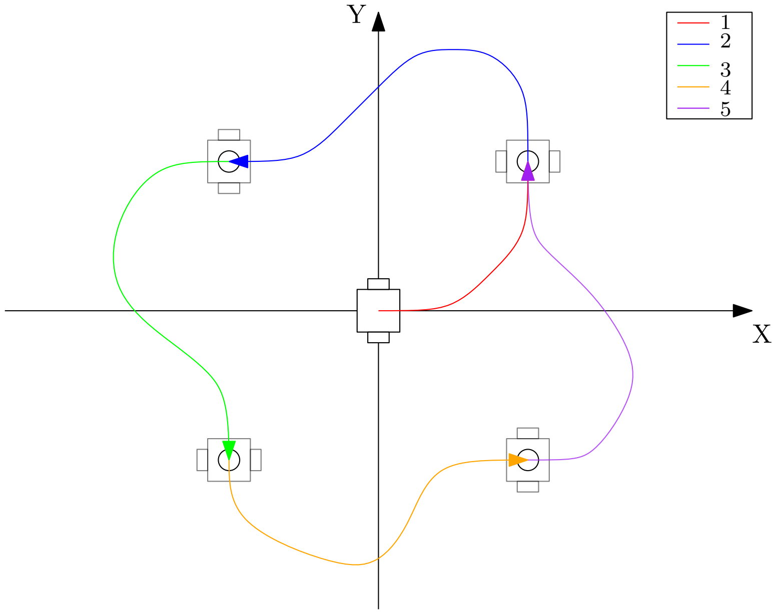

Рис. 7. Пример выполнения задания 2.

Приложение А
Пример подходящего для экспериментов робота-машинки.

Рис. 8. Основные детали робота.

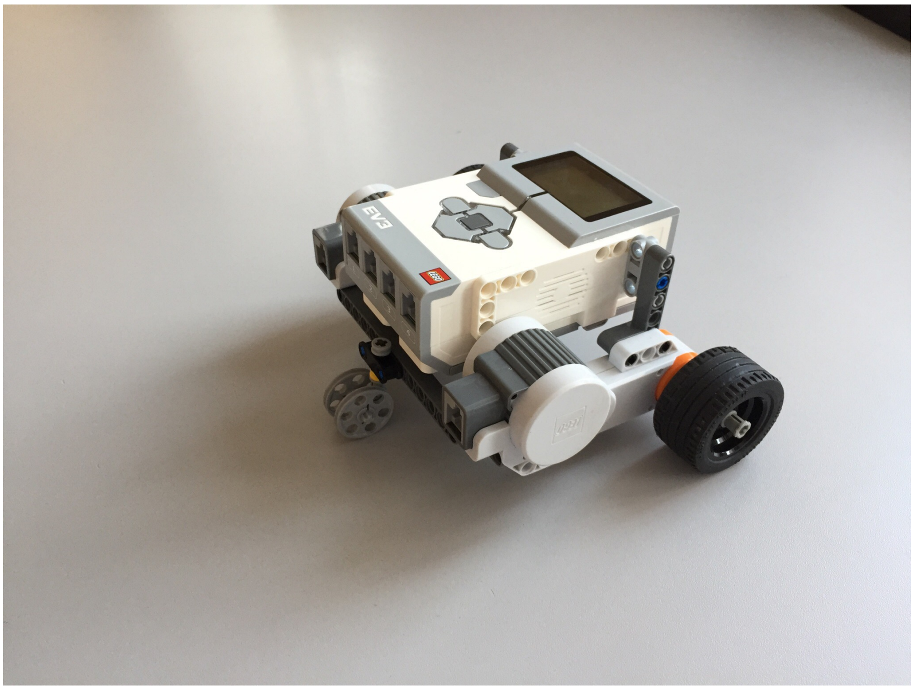

Рис. 9. Пример робота.