В спектральном мире сложности, уходим в мир Жордана!

Алексей Перегудин, 2021

Спектральное разложение существует
не у всех матриц

Не любая матрица
подобна диагональной

Сложность №1

Комплексные собственные числа

Находим собственные числа

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$ Характеристическое уравнение

$$\lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i$$ Собственные числа матрицы A

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = i, \qquad v_1 = ?$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix \\ iy \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -y = ix \\ x = iy \end{cases}$$

y – любое число, $x = iy$

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -i, \qquad v_2 = ?$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -i \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ix \\ -iy \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -y = -ix \\ x = -iy \end{cases}$$

x – любое число, $y = ix$

Например, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

Спектральное разложение

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$A = PDP^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5i & 0.5 \\ 0.5 & -0.5i \end{bmatrix}$$

Вещественная матрица разложилась
на комплексные сомножители

Путешествие через комплексный мир

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
x & \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \arrow[r, mapsto, "\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}", "A"'] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}", "\begin{bmatrix}-0.5i & 0.5\\0.5 & -0.5i\end{bmatrix}"'] & \begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix} & y = Ax \\
\hat{x} & \begin{bmatrix}2-i\\1-2i\end{bmatrix} \arrow[r, mapsto, "\begin{bmatrix}i & 0\\0 & -i\end{bmatrix}", "D"'] & \begin{bmatrix}1+2i\\-2-i\end{bmatrix} \arrow[u, mapsto, "P", "\begin{bmatrix}i & 1\\1 & i\end{bmatrix}"'] & \hat{y} = D\hat{x}
\end{tikzcd}$$

Путешествие через комплексный мир

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
x \arrow[r, dash] & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \arrow[rr, mapsto, "\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}", "A"'] \arrow[d, mapsto, "P^{-1}", "\begin{bmatrix} -0.5i & 0.5 \\ 0.5 & -0.5i \end{bmatrix}"'] & & \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \arrow[r, dash] & y = Ax \\
\hat{x} \arrow[r, dash] & \begin{bmatrix} 2-i \\ 1-2i \end{bmatrix} \arrow[rr, mapsto, "\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}", "D"'] & & \begin{bmatrix} 1+2i \\ -2-i \end{bmatrix} \arrow[u, mapsto, "P", "\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}"'] \arrow[r, dash] & \hat{y} = D\hat{x}
\end{tikzcd}
$$

Оставим комплексные числа

Удобный факт

Различным собственным числам соответствуют линейно независимые собственные вектора

Дана матрица и её собственные числа

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 5$$

Существует ли у этой матрицы спектральное разложение?

Дана матрица и её собственные числа

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 5$$

Существует ли у этой матрицы спектральное разложение?

Да, ведь различным собственным числам соответствуют линейно независимые собственные вектора

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Если собственные числа вещественные и различные,
то существует вещественное спектральное разложение

Если собственные числа комплексные и различные,
то существует комплексное спектральное разложение

Что если собственные числа повторяются?

Сложность №2

Повторяющиеся собственные числа

Находим собственные числа

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 1$$

Два одинаковых собственных числа матрицы I

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Подходят любые x и y!

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Подходят любые x и y!

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ Подходят любые x и y!

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Подходят любые x и y!

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}$ Подходят любые x и y!

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Любой вектор $v \in \mathbb{R}^2$ является собственным

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Любой вектор $v \in \mathbb{R}^2$ является собственным

Можно выбрать два линейно независимых

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Любой вектор $v \in \mathbb{R}^2$ является собственным

Можно выбрать два линейно независимых

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$

Спектральное разложение существует

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$$

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Любой вектор $v \in \mathbb{R}^2$ является собственным

Можно выбрать два линейно независимых

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Спектральное разложение существует

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Любой вектор $v \in \mathbb{R}^2$ является собственным

Можно выбрать два линейно независимых

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Спектральное разложение существует

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Любой вектор $v \in \mathbb{R}^2$ является собственным

Можно выбрать два линейно независимых

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$

Спектральное разложение существует

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}^{-1}$$

Находим собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad v = ?$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Любой вектор $v \in \mathbb{R}^2$ является собственным

Можно выбрать два линейно независимых

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$

Спектральное разложение существует

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$$

Выберите собственные вектора

Матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Какие из этих векторов – собственные?

$$\underset{\text{А}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Б}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{В}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Г}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Д}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Е}}{\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Ж}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{З}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{И}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{К}}{\begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \end{bmatrix}}$$

Выберите собственные вектора

Матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Какие из этих векторов – собственные?

$$\underset{\text{А}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Б}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{В}}{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Г}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Д}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Е}}{\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Ж}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{З}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{И}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{К}}{\begin{bmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \\ 23 \\ 24 \\ 25 \end{bmatrix}}$$

Как устроены множества собственных векторов?

(для простоты, считаем нуль-вектор собственным)

Как устроены множества собственных векторов?

Множество собственных векторов, соответствующих заданному собственному числу, является линейным пространством

Оно называется собственным подпространством

Собственные подпространства

Матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$$

Собственные вектора

Собственные подпространства

Матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$$

Собственные вектора

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Можно найти один линейно независимый вектор, соответствующий собственному числу 1

Собственные подпространства

Матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$$

Собственные вектора

Можно найти два линейно независимых вектора, соответствующих собственному числу 2

Собственные подпространства

Матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$$

Собственные вектора

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

Можно найти три линейно независимых вектора, соответствующих собственному числу 3

Собственные подпространства

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

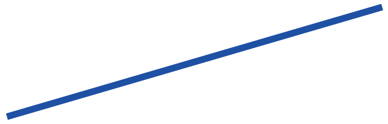
$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Собственные подпространства

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$



Прямая

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

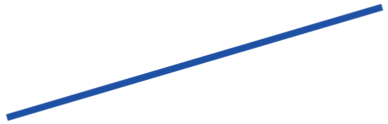
$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Собственные подпространства

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$



Прямая

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

Плоскость

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$$

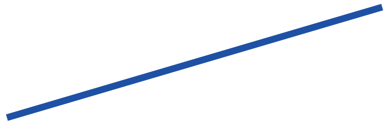
$$\mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Собственные подпространства

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$

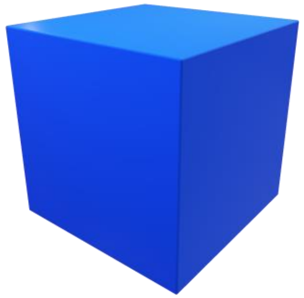


Прямая

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Плоскость

$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$



Трёхмерность

Может показаться, что кратные собственные числа гарантируют, что у матрицы будет больше собственных векторов

Может показаться, что кратные собственные числа гарантируют, что у матрицы будет больше собственных векторов

Но это не так

Два примера

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = 3x \\ 3y = 3y \end{cases}$$

Подойдут любые x и y

Собственных векторов – целая плоскость!

Найдутся два линейно независимых? ДА

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 3x \\ y = 3y \end{cases}$$

x – любое число,
y – обязательно 0

Найдутся два линейно независимых?

НЕТ Только один

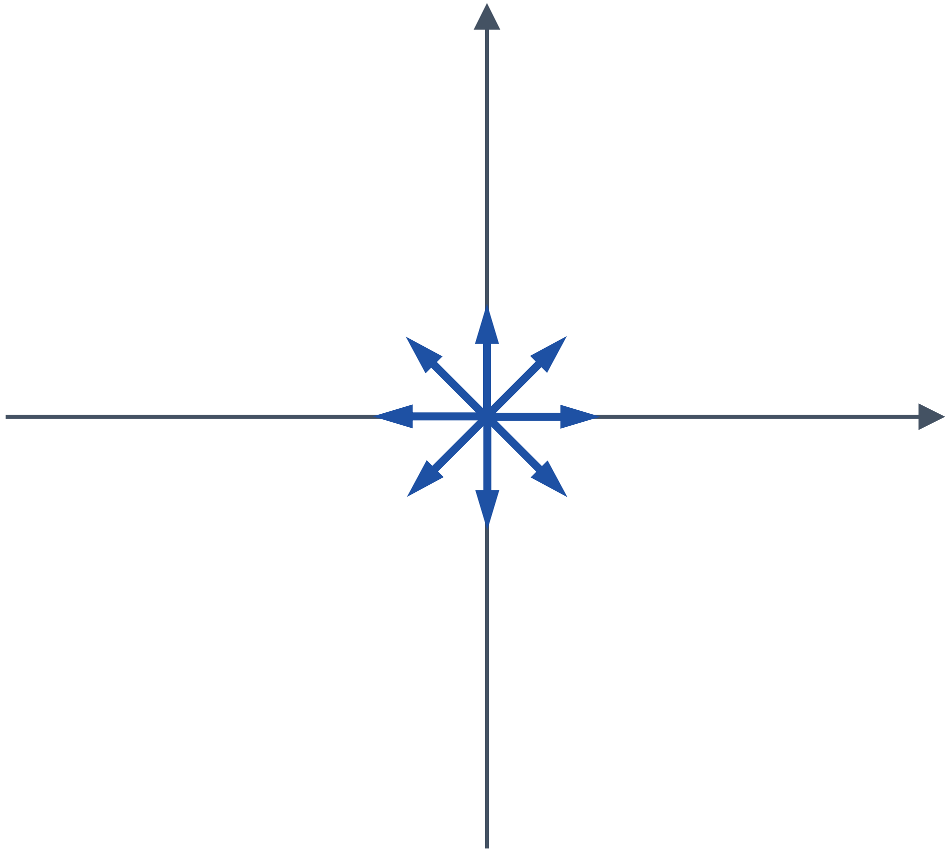
Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

Геометрический смысл

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Растянем ось x

Растянем ось y

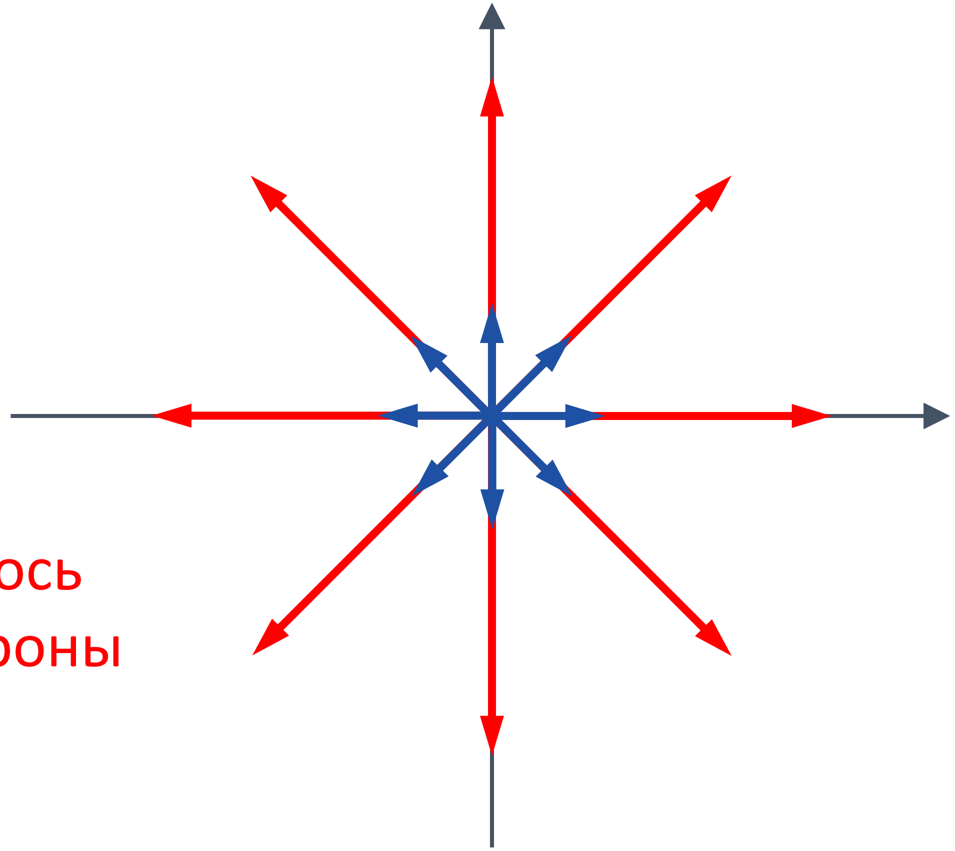


Геометрический смысл

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Растянули ось x

Растянули ось y



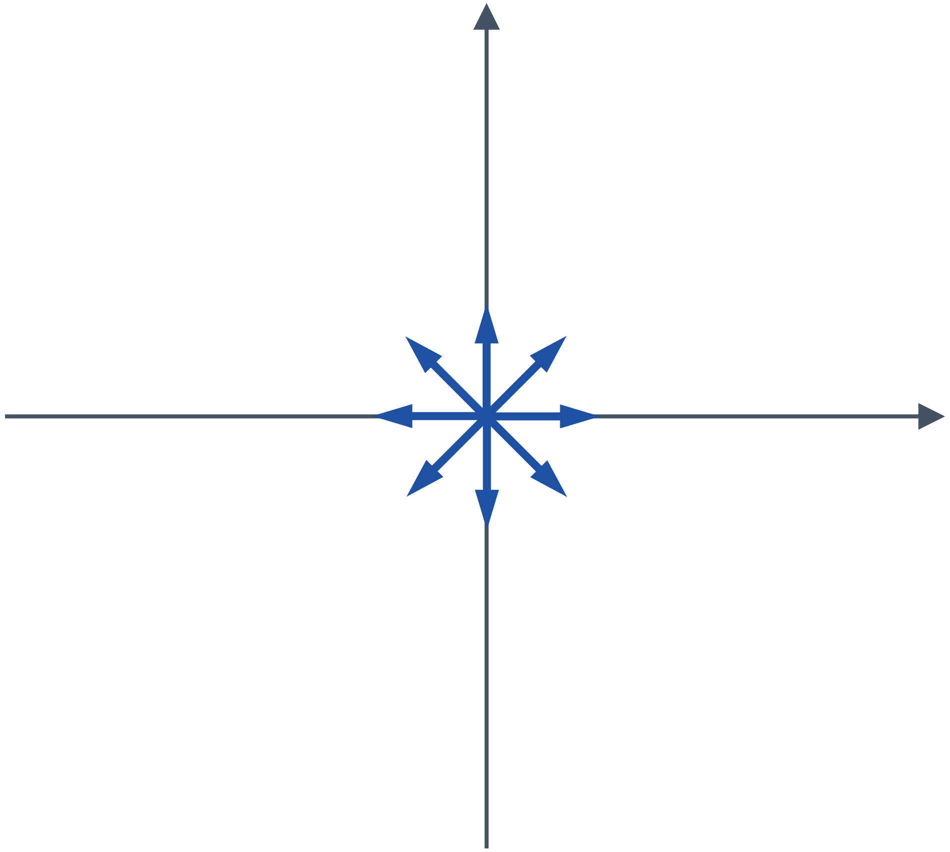
Растянулось
во все стороны

Геометрический смысл

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Растянем ось x

Растянем и сдвинем всё остальное

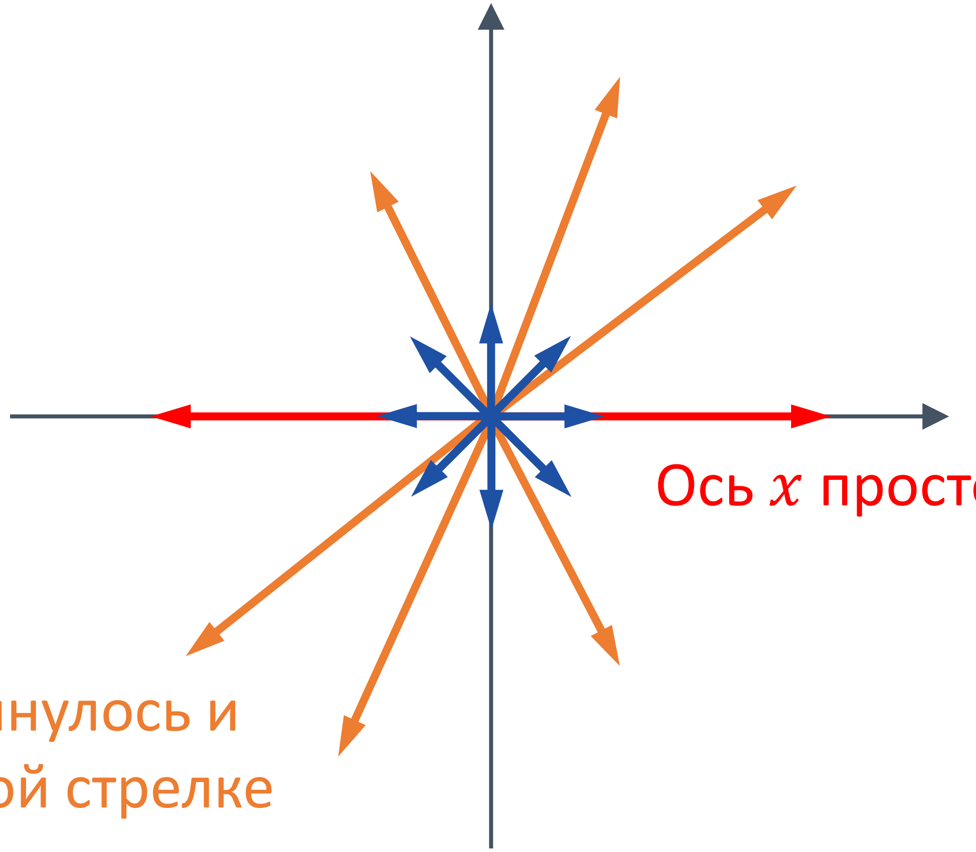


Геометрический смысл

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Растянули ось x

Растянули и сдвинули всё остальное



Спектральное разложение

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

✓ Есть!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}^{-1}$$

× Невозможно найти два линейно независимых столбца матрицы P

Диагонализируемость

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Подобна (является!) диагональной

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Не подобна диагональной

Ещё три примера

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

У всех трёх матриц одинаковые собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

А что с собственными векторами?

Находим собственные вектора матрицы A

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 2x \\ y + z = 2y \\ x + z = 2z \end{cases} \qquad x = y = z$$

Собственным подпространством, соответствующим $\lambda = 2$, является прямая

Можно найти только один линейно независимый собственный вектор

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Находим собственные вектора матрицы B

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2x \\ y + z = 2y \\ -y + 3z = 2z \end{cases} \qquad y = z$$

Собственным подпространством, соответствующим $\lambda = 2$, является плоскость

Можно найти только два линейно независимых собственных вектора

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Находим собственные вектора матрицы C

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases}$$

Собственным подпространством, соответствующим $\lambda = 2$, является трёхмерие

Можно найти три линейно независимых собственных вектора

Например, $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Существование спектрального разложения

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & * & * \\ 3 & * & * \\ 3 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & * & * \\ 3 & * & * \\ 3 & * & * \end{bmatrix}^{-1}$$

Нет

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 2 & 2 & * \\ 2 & 2 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 2 & 2 & * \\ 2 & 2 & * \end{bmatrix}^{-1}$$

Нет

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Есть

Сложности спектрального мира

Сложности спектрального мира

Сложность №1

Комплексные собственные числа

Сложность №2

Повторяющиеся собственные числа

Линейно независимых собственных векторов много

(целые «собственные подпространства»)

Линейно независимых собственных векторов недостаточно

(тогда спектрального разложения нет)

Алгебраическая и геометрическая кратность собственных чисел

Определения

$$Alg(\lambda)$$

Алгебраическая кратность собственного числа –
– кратность соответствующего корня характеристического уравнения.

$$Geom(\lambda)$$

Геометрическая кратность собственного числа –
– количество линейно независимых собственных векторов,
соответствующих этому собственному числу.

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 3)^2 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 3$
Собственные вектора	$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(3) = ?$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(3) = ?$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 3)^2 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 3$
Собственные вектора	$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(3) = 2$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(3) = 2$

Примеры

Матрица

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

Собственные числа

$$\lambda = 3$$

Собственные вектора

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Алгебраические кратности собственных чисел

$$Alg(3) = ?$$

Геометрические кратности собственных чисел

$$Geom(3) = ?$$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 3)^2 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 3$
Собственные вектора	$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ×
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(3) = 2$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(3) = 1$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 2)^3 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 2$
Собственные вектора	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\times$ $\times$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(2) = ?$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(2) = ?$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 2)^3 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 2$
Собственные вектора	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\times$ $\times$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(2) = 3$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(2) = 1$

Примеры

Матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение

$$(\lambda - 2)^3 = 0$$

Собственные числа

$$\lambda = 2$$

Собственные вектора

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \times$$

Алгебраические кратности собственных чисел

$$Alg(2) = ?$$

Геометрические кратности собственных чисел

$$Geom(2) = ?$$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 2)^3 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 2$
Собственные вектора	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\times$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(2) = 3$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(2) = 2$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 2)^3 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 2$
Собственные вектора	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(2) = ?$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(2) = ?$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 2)^3 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 2$
Собственные вектора	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(2) = 3$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(2) = 3$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 3)(\lambda - 5)^2 = 0$
Собственные числа	$\lambda = 3 \qquad \lambda = 5$
Собственные вектора	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(3) = 1 \qquad Alg(5) = 2$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(3) = 1 \qquad Geom(5) = 2$

Примеры

Матрица	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
Характеристическое уравнение	$(\lambda - 3)^2(\lambda - 5) = 0$
Собственные числа	$\lambda = 3$ $\quad$ $\lambda = 5$
Собственные вектора	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Алгебраические кратности собственных чисел	$Alg(3) = 2$ $\quad$ $Alg(5) = 1$
Геометрические кратности собственных чисел	$Geom(3) = 2$ $\quad$ $Geom(5) = 1$

Примеры

Матрица

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение

$$(\lambda - 3)^2(\lambda - 5) = 0$$

Собственные числа

$$\lambda = 3 \qquad \lambda = 5$$

Собственные вектора

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \times \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Алгебраические кратности собственных чисел

$$Alg(3) = 2 \qquad Alg(5) = 1$$

Геометрические кратности собственных чисел

$$Geom(3) = 1 \qquad Geom(5) = 1$$

Геометрическая кратность и Nullspace

Геометрическая кратность и Nullspace

Если λ_1 – собственное число матрицы A, то все соответствующие ему собственные вектора v удовлетворяют уравнению

$$Av = \lambda_1 v$$

$$\Updownarrow$$

$$(A - \lambda_1 I)v = 0$$

Собственные вектора матрицы A, соответствующие λ_1, – это ненулевые элементы пространства

$$\mathrm{Nullspace}(A - \lambda_1 I)$$

Геометрическая кратность и Nullspace

Множество собственных векторов матрицы A с собственным числом λ_1

$$\mathrm{Nullspace}(A - \lambda_1 I)$$

Сколько линейно независимых векторов в нём можно найти?

$$\dim \mathrm{Nullspace}(A - \lambda_1 I)$$
$$\parallel$$
$$\mathrm{nullity}(A - \lambda_1 I)$$

Вот столько

Геометрическая кратность и Nullspace

$$\boxed{Geom(\lambda_1) = \text{nullity}(A - \lambda_1 I)}$$

Геометрическая кратность и Nullspace

Матрица	Собственные числа	Алгебраические кратности
$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\lambda = 3$	$Alg(3) = 1$
	$\lambda = 5$	$Alg(5) = 2$

Геометрические кратности

$$Geom(3) = \text{nullity}(A - 3I) = \text{nullity}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$Geom(5) = \text{nullity}(A - 5I) = \text{nullity}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Геометрическая кратность и Nullspace

Матрица	Собственные числа	Алгебраические кратности
$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\lambda = 3$	$Alg(3) = 2$
	$\lambda = 5$	$Alg(5) = 1$

Геометрические кратности

$$Geom(3) = \text{nullity}(A - 3I) = \text{nullity}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$Geom(5) = \text{nullity}(A - 5I) = \text{nullity}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Геометрическая кратность и Nullspace

Матрица	Собственные числа	Алгебраические кратности
$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\lambda = 3$	$Alg(3) = 2$
	$\lambda = 5$	$Alg(5) = 1$

Геометрические кратности

$$Geom(3) = \text{nullity}(A - 3I) = \text{nullity}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$Geom(5) = \text{nullity}(A - 5I) = \text{nullity}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Факт

$$\boxed{1 \leq Geom(\lambda_i) \leq Alg(\lambda_i)}$$

Геометрическая кратность и спектральное разложение

Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет спектральное разложение $A = PDP^{-1}$, где $P, D \in \mathbb{C}^{n\times n}$, тогда и только тогда, когда для всех собственных чисел выполнено

$$Geom(\lambda_i) = Alg(\lambda_i)$$

Геометрическая кратность и спектральное разложение

Если хотя бы для одного собственного числа геометрическая кратность строго меньше алгебраической кратности

$$Geom(\lambda_i) < Alg(\lambda_i)$$

то спектрального разложения не существует

Как быть в этом случае?

Обобщённые собственные вектора

Обобщённые собственные вектора

$$(A - \lambda I)^k w = 0$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $w \in \mathbb{R}^n$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{N}$

$(w \neq 0)$

w – обобщённый собственный вектор

(Если $k = 1$, то w – собственный вектор)

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Обобщённый собственный вектор

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Обобщённый собственный вектор

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Собственный вектор

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Обобщённый собственный вектор

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ Обобщённый собственный вектор

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ Обобщённый собственный вектор

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 5$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Собственный вектор

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ Обобщённый собственный вектор

$$(A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Обобщённый собственный вектор

Жордановы цепочки

Если $(A-\lambda I)v_1 = 0,$ $(v_1$ – собственный вектор)

$$(A-\lambda I)w_{11} = v_1,$$

$$(A-\lambda I)w_{12} = w_{11},$$

$$(A-\lambda I)w_{13} = w_{12},$$

то $(v_1, w_{11}, w_{12}, w_{13})$ – жорданова цепочка обобщённых собственных векторов

При этом выполнено:

$(A-\lambda I)^2 w_{11} = 0$ w_{11} – обобщённый собственный вектор с $k = 2$

$(A-\lambda I)^3 w_{12} = 0$ w_{12} – обобщённый собственный вектор с $k = 3$

$(A-\lambda I)^4 w_{13} = 0$ w_{13} – обобщённый собственный вектор с $k = 4$

Пример

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad w_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad w_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 5I)w_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = w_{11}$$

$$(A - 5I)w_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1$$

$$(A - 5I)v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Собственный вектор

v_1

w_{11}

Обобщённые собственные вектора

w_{12}

У любой матрицы $A_{n \times n}$ можно найти n линейно независимых обобщённых собственных векторов

Структура жордановых цепочек

Царь-пример

$$A_{20\times 20}$$

λ_1

$Alg(\lambda_1) = 8$

$Geom(\lambda_1) = 3$

λ_2

$Alg(\lambda_2) = 4$

$Geom(\lambda_2) = 2$

λ_3

$Alg(\lambda_3) = 3$

$Geom(\lambda_3) = 3$

λ_4

$Alg(\lambda_4) = 5$

$Geom(\lambda_4) = 1$

Царь-пример

$$A_{20\times 20}$$

λ_1

$Alg(\lambda_1) = 8$

$Geom(\lambda_1) = 3$

v_1 v_2 v_3

λ_2

$Alg(\lambda_2) = 4$

$Geom(\lambda_2) = 2$

v_4 v_5

λ_3

$Alg(\lambda_3) = 3$

$Geom(\lambda_3) = 3$

v_6 v_7 v_8

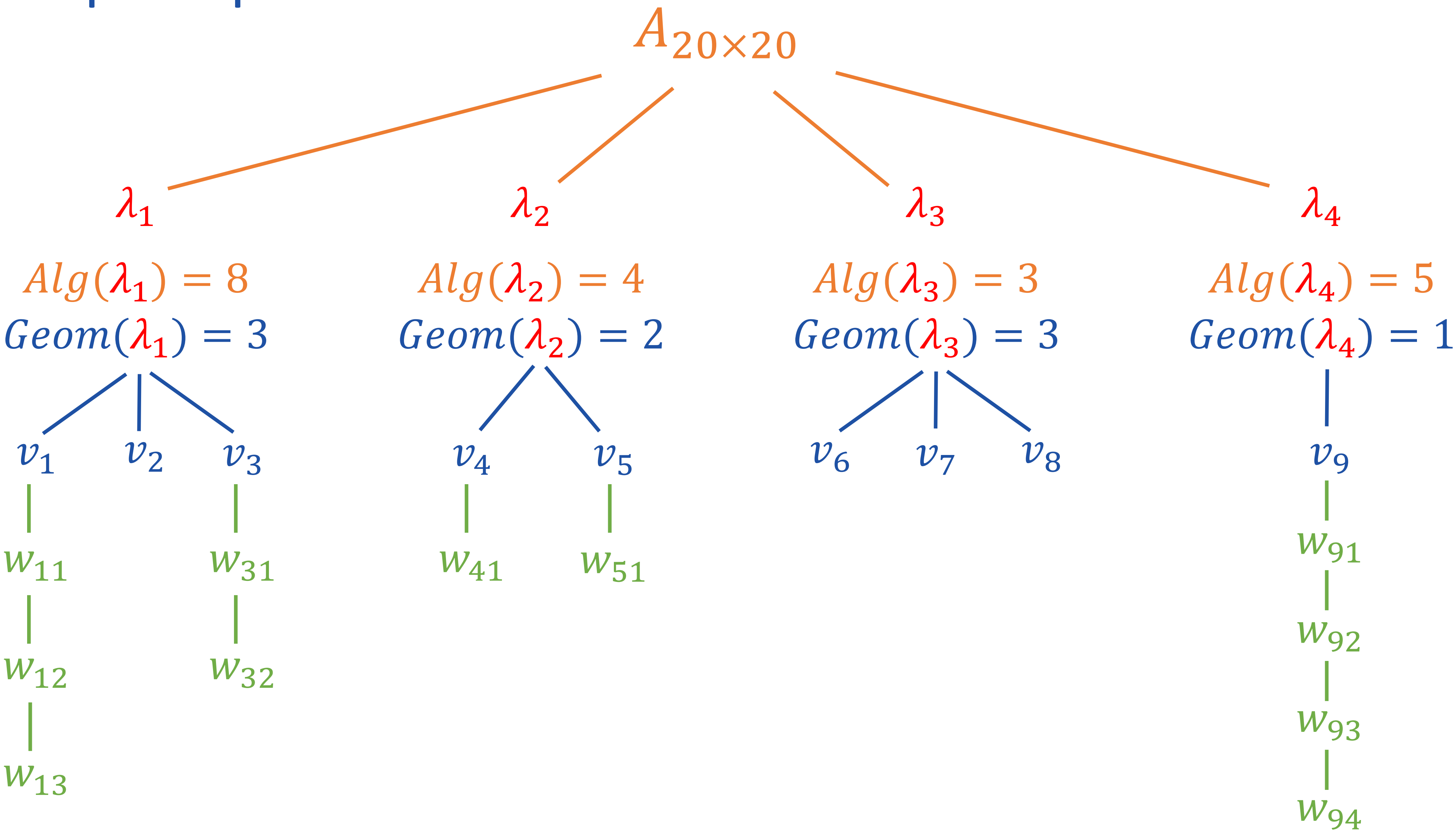
λ_4

$Alg(\lambda_4) = 5$

$Geom(\lambda_4) = 1$

v_9

Царь-пример


$A_{20\times 20}$
λ_1
λ_2
λ_3
λ_4
$Alg(\lambda_1) = 8$
$Geom(\lambda_1) = 3$
$Alg(\lambda_2) = 4$
$Geom(\lambda_2) = 2$
$Alg(\lambda_3) = 3$
$Geom(\lambda_3) = 3$
$Alg(\lambda_4) = 5$
$Geom(\lambda_4) = 1$
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
w_{11}
w_{12}
w_{13}
w_{31}
w_{32}
w_{41}
w_{51}
w_{91}
w_{92}
w_{93}
w_{94}

Царь-пример

$$A_{20\times 20}$$

λ_1

$Alg(\lambda_1) = 8$

$Geom(\lambda_1) = 3$

v_1 — w_{11} — w_{12} — w_{13}

v_2

v_3 — w_{31} — w_{32}

λ_2

$Alg(\lambda_2) = 4$

$Geom(\lambda_2) = 2$

v_4 — w_{41}

v_5 — w_{51}

λ_3

$Alg(\lambda_3) = 3$

$Geom(\lambda_3) = 3$

v_6

v_7

v_8

λ_4

$Alg(\lambda_4) = 5$

$Geom(\lambda_4) = 1$

v_9 — w_{91} — w_{92} — w_{93} — w_{94}

Всего 20 линейно независимых обобщённых собственных векторов

9 собственных + 11 в цепочках

Жордановы клетки

Мини-матрицы, соответствующие жордановым цепочкам

Жорданова цепочка с собственным числом λ

$$v_1 - w_2 - w_3 - \cdots - w_k$$

Соответствующая ей жорданова клетка

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k}$$

Примеры жордановых клеток

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$
$k = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$
$k = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0$
$k = 4$

$$[7]$$

$\lambda = 7$
$k = 1$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$\lambda = i$
$k = 2$

$$\begin{bmatrix} -3i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3i \end{bmatrix}$$

$\lambda = -3i$
$k = 4$

Жорданова матрица

Блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой – жордановы клетки

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & S_m \end{bmatrix},$$

где $S_1, S_2, \dots, S_m$ – жордановы клетки.

Жорданова матрица

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой – жордановы клетки

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & S_m \end{bmatrix},$$ где $S_1, S_2, \ldots, S_m$ – жордановы клетки.

Жорданова матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Её жордановы клетки

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Примеры жордановых матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Сколько жордановых клеток у этой жордановой матрицы?

Примеры жордановых матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Сколько жордановых клеток у этой жордановой матрицы?

3

Примеры жордановых матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Сколько жордановых клеток у этой жордановой матрицы?

Примеры жордановых матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Сколько жордановых клеток у этой жордановой матрицы?

$$4$$

Примеры жордановых матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Сколько жордановых клеток у этой жордановой матрицы?

Примеры жордановых матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Сколько жордановых клеток у этой жордановой матрицы?

6

Примеры жордановых матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Сколько жордановых клеток у этой жордановой матрицы?

Примеры жордановых матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Сколько жордановых клеток у этой жордановой матрицы?

Это не жорданова матрица!

Жорданово разложение

$$A = PSP^{-1}$$

A — исходная матрица

P — матрица обобщённых собственных векторов

S — жорданова матрица

Жорданово разложение

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & A & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}} = \underset{P}{\begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}} \underset{S}{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}} \underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}^{-1}}$$

Структура жордановых цепочек

λ_1: v_1, v_2 $\qquad$ λ_2: v_3, v_4, v_5

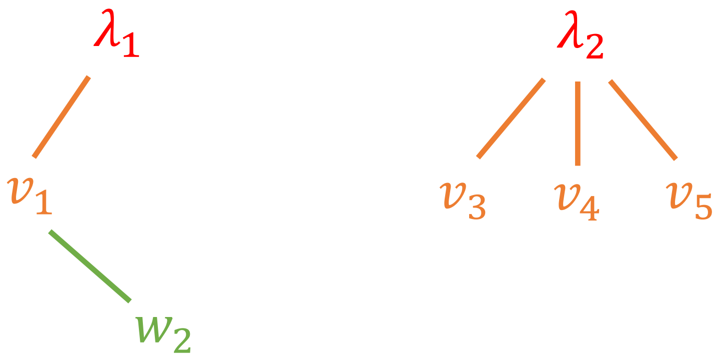
$Geom(\lambda_1) = 2$ $\qquad$ $Geom(\lambda_2) = 3$

Жорданово разложение

$$\begin{array}{cccc} A & P & S & P^{-1} \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & A & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & w_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & w_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \end{array}$$

Структура жордановых цепочек

$Geom(\lambda_1) = 1$



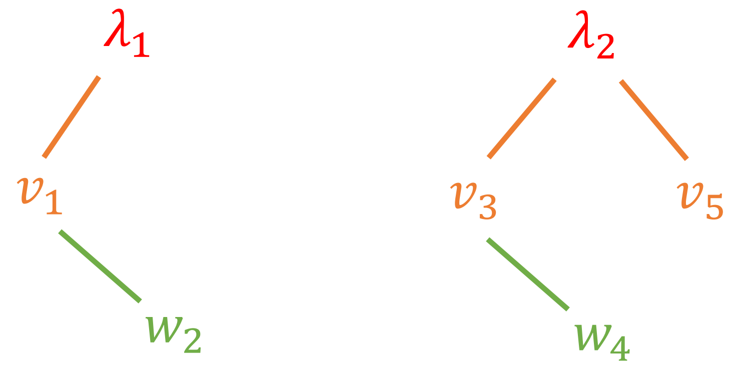
$Geom(\lambda_2) = 3$

Жорданово разложение

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & A & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}} = \underset{P}{\begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & w_2 & v_3 & w_4 & v_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}} \underset{S}{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}} \underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & w_2 & v_3 & w_4 & v_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}^{-1}}$$

Структура жордановых цепочек

$Geom(\lambda_1) = 1$



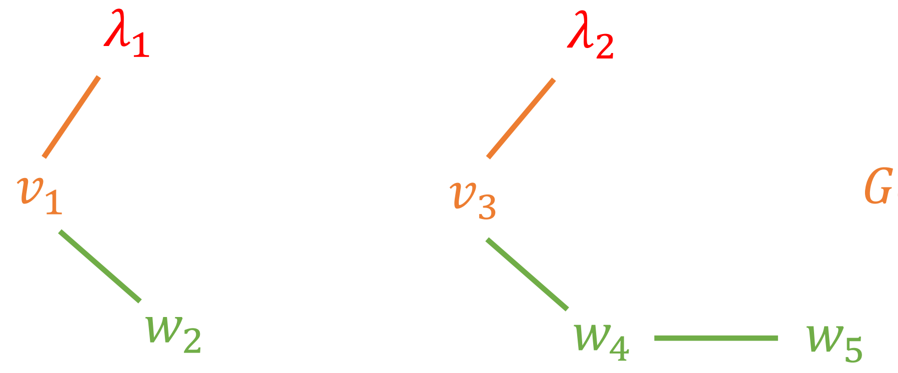
$Geom(\lambda_2) = 2$

Жорданово разложение

$$\begin{array}{cccc} A & P & S & P^{-1} \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & A & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & w_2 & v_3 & w_4 & w_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_1 & w_2 & v_3 & w_4 & w_5 \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}^{-1} \end{array}$$

Структура жордановых цепочек

$Geom(\lambda_1) = 1$



$Geom(\lambda_2) = 1$

Жорданово разложение

Любая квадратная матрица A имеет жорданово разложение

$$A = PSP^{-1}$$

Любая квадратная матрица подобна жордановой матрице

Жорданово разложение

Любая квадратная матрица A имеет жорданово разложение

$$A = PSP^{-1}$$

Матрица S называется жордановой формой матрицы A

Примеры жорданова разложения

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Жорданова цепочка

$$\lambda = 5 \;—\; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;—\; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;—\; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма

В стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

В базисе обобщённых собственных векторов

Примеры жорданова разложения

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Жорданова цепочка

$$\lambda = 2 \quad — \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad — \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad — \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма

В стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

В базисе обобщённых собственных векторов

Примеры жорданова разложения

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Жордановы цепочки

$$\lambda = 2 \quad — \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \lambda = 2 \quad — \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad — \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма

В стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

В базисе обобщённых собственных векторов

Примеры жорданова разложения

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Жордановы цепочки

$$\lambda = 2 \quad — \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad — \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \lambda = 2 \quad — \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма

В стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В базисе обобщённых собственных векторов

Примеры жорданова разложения

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Жордановы цепочки

$$\lambda = 1 \quad \text{——} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \lambda = 2 \quad \text{——} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{——} \quad \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма

В стандартном базисе

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

В базисе обобщённых собственных векторов

Примеры жорданова разложения

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Жордановы цепочки

$\lambda = 1$ — $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\lambda = 2$ — $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\lambda = 2$ — $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Жорданова форма

В стандартном базисе $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ В базисе (обобщённых) собственных векторов

Царь-пример

$A_{20\times 20}$

λ_1 λ_2 λ_3 λ_4

$Alg(\lambda_1) = 8$ $Alg(\lambda_2) = 4$ $Alg(\lambda_3) = 3$ $Alg(\lambda_4) = 5$

$Geom(\lambda_1) = 3$ $Geom(\lambda_2) = 2$ $Geom(\lambda_3) = 3$ $Geom(\lambda_4) = 1$

v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9

w_{11} w_{31} w_{41} w_{51} w_{91}

w_{12} w_{32} w_{92}

w_{13} w_{93}

w_{94}

Всего 20 линейно независимых обобщённых собственных векторов

9 собственных + 11 в цепочках

Жорданова форма царь-примера

$$
\overset{\text{♛}}{J} = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc|cc|cc|c|c|c|ccccc}
\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4
\end{array}\right]
$$

С помощью жордановой формы мы победили проблему недостатка собственных векторов!

Можем ли мы победить проблему комплексных собственных чисел?

Да!

С помощью небольшой модификации

Вещественные жордановы клетки для $\lambda \in \mathbb{C}$

Вещественные жордановы клетки для $\lambda \in \mathbb{C}$

Жордановы цепочки для

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i$$

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i$$

$$v_1 — w_2 — w_3 — \cdots — w_k$$

$$\bar{v}_1 — \bar{w}_2 — \bar{w}_3 — \cdots — \bar{w}_k$$

Вещественная жорданова клетка

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & & & & \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & \alpha & \beta & 1 & 1 \\ & & & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ & & & & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}_{2k\times 2k}$$

Примеры вещественных жордановых клеток

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2 \pm 3i$$
$$k = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \pm i$$
$$k = 2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5 \pm 7i$$
$$k = 3$$

Двуликость жордановой формы

Двуликость жордановой формы

Пусть матрица имеет собственные числа

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = 3 \pm 4i, \qquad \lambda_5 = 5\,, \qquad \lambda_{6,7} = 6 \pm 7i\,,$$

и при этом

$$Geom(3+4i) = Geom(3-4i) = 1$$

Двуликость жордановой формы

Пусть матрица имеет собственные числа $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = 3 \pm 4i$, $\lambda_5 = 5$, $\lambda_{6,7} = 6 \pm 7i$,

и при этом $Geom(3+4i) = Geom(3-4i) = 1$

Жорданова форма над $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} 3+4i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3+4i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-4i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6+7i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-7i \end{bmatrix}$$

Более диагональная, но комплексная

Жорданова форма над $\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Менее диагональная, зато вещественная

Двуликость жордановой формы

А если у матрицы такие же собственные числа, но

$Geom(3 + 4i) = Geom(3 - 4i) = 2$?

Двуликость жордановой формы

А если у матрицы такие же собственные числа, но

$$Geom(3+4i) = Geom(3-4i) = 2?$$

Жорданова форма над $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} 3+4i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3+4i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-4i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6+7i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-7i \end{bmatrix}$$

Совсем диагональная, но комплексная

Жорданова форма над $\mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Не совсем диагональная, зато вещественная

Любая квадратная матрица обладает жордановым разложением

$$A = PSP^{-1}$$

Любая квадратная матрица подобна жордановой матрице

Если геометрические кратности собственных чисел матрицы равны их алгебраическим кратностям, то жорданово разложение является спектральным разложением

$$A = PDP^{-1}$$

В этом случае матрица подобна диагональной

Жорданова форма матрицы – это самый диагональный вид матрицы, который можно получить с помощью замены базиса

Жордан смотрит на тебя как на победителя