

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Michał Piwoński

Finite difference & uncertain volatility

Inżynieria Finansowa 1 - projekt II - raport

Wrocław, 2017

Spis treści

1.	Wstępne założenia i uwagi	2
2.	Teoria	3
2.1.	Założenia	3
2.2.	Estymacja parametrów	3
2.3.	Metoda różnic skończonych (finite difference)	4
2.4.	Stabilność i złożoność	7
2.5.	Niepewna zmienność - uncertain volatility	8
2.6.	Dywidenda	9
3.	Wyniki	10
3.1.	Analiza błędu	10
3.2.	Europejska opcji call	13
3.3.	Europejska opcja put	18
3.4.	Opcje amerykańskie	22
3.4.1.	Amerykańska opcja call	23
3.4.2.	Amerykańska opcja put	29
4.	Podsumowanie	38

1. Wstępne założenia i uwagi

Projekt nad którym pracowaliśmy dotyczył wyceny opcji barierowych z dywidendą wypłacaną przez aktywo podstawowe w ustalonej chwili i wysokości przy niepewności co do parametru zmienności w modelu.

W całości niniejszej pracy przyjmujemy poniższe ustalenia zgodnie z wymogami treści projektu.

Mówiąc *dziś* będziemy mieli na myśli 1 stycznia 2016r. Opcje, które poddamy analizie będą zapadały 30 czerwca 2016r. Będą one oparte o indeks WIG20 z GPW, jednakże zostaną rozszerzone o dodatkowe teoretyczne parametry. Zakładać będziemy (niezgodnie z dzisiejszą rzeczywistością), że istnieją opcje barierowe i dodatkowo, że indeks WIG20 płaci kwotową dywidendę w połowie życia opcji. Jeżeli nie zostanie powiedziane inaczej wszystkie opcje będą miały tę samą cenę wykonania wynoszącą 2400.

Aby uniknąć uciążliwych i karkołomnych wybiegów leksykalnych pojęcia *indeks WIG20* i *wartość indeksu WIG20* utożsamiać będziemy z pojęciami *akcja* i *cena akcji*

W celu dokonania analizy, wyciągnięcia wniosków i wizualizacji wyników zaimplementujemy model wyceny opcji korzystając z języków R i C++. Wszelkie niezbędne dane historyczne pobierzemy z serwisu *stooq.pl*.

2. Teoria

Jako, że część teoretyczna jako główny temat podejmuje metodę różnic skończonych, jej właśnie poświęcimy większość uwagi. Pełna spójność i przejrzystość wymagałaby również wprowadzenia modelu wyceny Blacka-Scholesa, chociażby na rzecz porównań. W celu utrzymania objętości poniższego raportu w rozsądnych granicach, założymy u czytelnika znajomość tego zagadnienia i będziemy wprowadzać jedynie ewentualne niuanse. Model Blacka-Scholesa był tematem poprzedniego projektu i został wyczerpująco omówiony w dołączonym do niego raporcie.

2.1. Założenia

Główne założenia będą identyczne z tymi właściwymi modelowi Blacka-Scholesa. Przede wszystkim przyjmujemy więc, że aktywo podstawowe (u nas indeks WIG20) porusza się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, oznaczać jego wartość będziemy przez S :

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}.$$

Korzystając z lematu Itô i istnienia portfela delta-neutralnego. Uzyskujemy równanie Blacka-Scholesa:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

gdzie V jest wartością opcji. Zwróćmy uwagę, że jest to postać ogólna, która nie ogranicza nas tylko do opcji waniliowych. Należy mieć świadomość, że jest to szczególne równanie ciepła i można przez zadanie odpowiednich warunków brzegowych dostosować je do szerszego spektrum wycen.

2.2. Estymacja parametrów

Standardową czynnością jest kalibracja modelu przez wyestymowanie występujących w równaniach parametrów. Zauważmy jednak, że parametr średniej μ jest niematerialny i wpływa jedynie na symulowany ruch aktywa podstawowego - nie pojawia się we wzorach i nie ma wpływu na cenę opcji. Parametr zmienności σ z kolei jest narzucony w treści projektu. Do pośrednich obliczeń, gdzie niepewna zmienność nie będzie brana pod uwagę, przyjmujemy ją odgórnie, tak żeby wizualizacje były czytelne. Pozostaje nam do ustalenia jedynie stopa wolna od ryzyka.

Przyjmijmy za nią rentowność 35-tygodniowych bonów skarbowych, która wynosiła 1 stycznia:

$$r = 1,29\%.$$

W kwestii niepewnej zmienności sigmę umieścimy domyślnie w przedziale zasugerowanym przez treść projektu.

$$[\sigma_{min}, \sigma_{max}] = [20\%, 30\%].$$

W dalszej części postaramy się jednak również zaprezentować jakie skutki spowoduje manipulacja końcami tego przedziału. Ograniczeń co do wartości parametrów nie będziemy traktować szczególnie restrykcyjnie, skupimy się raczej na pokazaniu wyników w zależności od różnych ich wartości.

2.3. Metoda różnic skończonych (finite difference)

Metoda różnic skończonych stanowi algorytm służący przybliżaniu rozwiązań równań różniczkowych - nie musi się wcale ograniczać do zastosowań finansowych. Metoda została opisana dużo wcześniej niż model Blacka-Scholesa, dzięki temu nie ma chociażby trudności z znalezieniem szczegółowych źródeł i prac naukowych na jej temat.

Dla wyrobienia intuicji można powiedzieć, że jednowymiarowym analogonem tej metody jest Schemat Eulera. My zajmiemy się przypadkiem dwuwymiarowym.

Finite difference w skrócie polega więc na dyskretyzacji równania różniczkowego i przybliżania analitycznego rozwiązania poprzez iteracyjne wyznaczenie wartości w konkretnych punktach. Przy przyjętych założeniach wizualnie należy wyobrazić sobie siatkę punktów, których jedną współrzędną jest czas a drugą wartość cena akcji. Payoff opcji jest warunkiem brzegowym w chwili końcowej i stanowić będzie punkt startowy dla naszego algorytmu.

Wspomnianą siatkę tworzyć będą wiersze reprezentujące stały poziom cen akcji, będą oddalone od siebie o krok δS . Kolumny z kolei będą odpowiadały ustalonym punktom czasowym co krok δt .

Aby nie komplikować niepotrzebnie poniższego rozumowania będziemy tymczasowo mieli na myśli waniliowe opcje europejskie.

Zdefiniujmy teraz:

$$\theta := \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\Delta := \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\Gamma := \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Wiemy, że:

$$V(S, t + \delta t) = V(S, t) + \theta \delta t + O(\delta t^2),$$

gdzie $O(\cdot)$ to notacja dużego O , tzn. $\exists M > 0$ takie, że $O(\delta t^2) \leq M\delta t^2$, dla $0 < |t| < t_0$ i pewnych ustalonej dodatniej stałej M i t_0 . Znaczy to, że błąd jest mniejszy niż δt^2 z dokładnością do dodatniej stałej dla δt bliskich 0. Mówi się, że błąd jest w takim przypadku kwadratowy.

Zauważmy również, że

$$\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(S, t + \Delta t) - V(S, t)}{\Delta t} \approx \frac{V(S, t + \delta t) - V(S, t)}{\delta t} =: \hat{\theta}.$$

Chcielibyśmy oszacować błąd tego przybliżenia:

$$\frac{V(S, t + \delta t) - V(S, t)}{\delta t} - \theta = \frac{O(\delta t^2)}{\delta t} = O(\delta t).$$

Dzięki tak zdyskretyzowanej pochodnej cząstkowej możemy z błędem liniowym aproksymować wartość opcji w punktach siatki na jednym poziomie S , tj. o ile spada/wzrasta wartość opcji w czasie, jeżeli cena akcji się nie zmienia. Wyznaczenie wartości θ nie jest jednak możliwe w podany sposób, gdyż na razie znamy wartości opcji tylko w chwili końcowej. Możemy jednak wykorzystać pozostałe wyrazy z równania Blacka-Scholesa. W analogiczny sposób zdyskretyzujemy więc Δ i Γ .

Aproksymowaną deltę wyznaczyć można na różne sposoby, my jednak od razu skupimy uwagę na *central difference*, gdyż ma ona mniejszy błąd niż alternatywy:

$$\Delta \approx \frac{V(S + \delta S, t) - V(S - \delta S, t)}{2\delta S}.$$

To samo rozumowanie prowadzi do następującej aproksymacji gammy:

$$\Gamma \approx \frac{V(S + \delta S, t) - 2V(S, t) + V(S - \delta S, t)}{\delta S^2}.$$

Obie mają błąd kwadratowy ($O(\delta S^2)$).

Ostatecznie:

$$\hat{\theta} = \frac{V(S, t - \delta t) - V(S, t)}{\delta t} \approx$$

$$\approx r \left(V(S,t) - \frac{V(S + \delta S, t) - V(S - \delta S, t)}{2\delta S} \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{V(S + \delta S, t) - 2V(S, t) + V(S - \delta S, t)}{\delta S^2}$$

$$V(S, t - \delta t) \approx V(S, t) - \hat{\theta}.$$

Implementacja powyższego algorytmu wymaga jeszcze wprowadzenia dodatkowych ograniczeń. Zwróćmy uwagę, że w powyższy sposób uzyskamy z n punktów początkowych tylko $n - 2$ punktów po jednym kroku czasu. W celu umożliwienia implementacji rozwiązania i poradzenia sobie z powyższym wprowadzimy dodatkowe ograniczenia. Czas jest naturalnie ograniczony przez *dziś* i moment wygaśnięcia opcji. W przypadku wysokości cen akcji z dołu ogranicza nas 0, ale z góry ograniczenie należy wybrać. Kierując się prostą heurystyką sugerowaną przez literaturę fachową (patrz: Wilmott, P. *On quantitative finance*) przyjmujemy, że wartość S ogranicza trzykrotność strike'u opcji. U nas będzie to więc

$$S_{max} = 7200.$$

Liczba ta ma symulować nieskończoność. Wprowadźmy dla porządku oznaczenie ilości kroków:

$$I := \frac{S_{max}}{\delta S},$$

$$N := \frac{T}{\delta t}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{C(S, t)}{S} = 1$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0$$

oraz:

$$C(0, t) = 0$$

$$P(0, t) = K e^{-r(T-t)},$$

gdzie K to strike, T - zapadalność, C - wartość opcji call, P - wartość opcji put.

W związku z powyższym uzupełnimy brakujące wartości w najwyższym wierszu siatki ekstrapolując liniowo dwie najbliższe niższe wartości a w najniższym wpisujemy je zgodnie z obserwacją.

Dla opcji barierowych sytuacja się upraszcza, jako że projekt dotyczy opcji call up-and-out oraz put down-and-out. Wiersz siatki odpowiadający barierze wypełniamy zerami - opcja traci w momencie osiągnięcia bariery całą wartość. Opcja call jest ograniczona z góry przez barierę, więc nie wymaga żadnych dodatkowych zabiegów w celu uzupełnienia wartości skrajnych. Dla opcji put stosujemy aproksymację nieskończoności i ekstrapolację liniową jak wyżej.

2.4. Stabilność i złożoność

Istotnym zagadnieniem metody jest stabilność rozwiązania, pełne rozumowanie i dowody na postać warunków można znaleźć w książce P. Wilmotta *On quantitative finance*. Dla nas istotnym ograniczeniem będzie jedynie:

$$\delta t \leq \frac{\delta S^2}{\sigma^2 S^2}.$$

W implementacji jako parametru funkcji odpowiedzialnej za wykonanie metody finite difference używać będziemy tylko δS . Krok czasu δt wyznaczany będzie wewnętrznie zgodnie z powyższym ograniczeniem. Manualne sterowanie jednym i drugim wymagałoby monitorowania warunku na bieżąco.

Powyższe niesie ze sobą jedną istotną implikację. Implementacja oparta jest o układ dwóch zagnieżdżonych pętli, co jest dość standardowym podejściem przy wyznaczaniu wartości w punktach dwuwymiarowej siatki. W celu zwiększenia dokładności naszych wyników chcielibyśmy wziąć jak najmniejsze δS . Pętle mają złożoność liniową $O(n)$. Zauważmy jednak, że przy zagnieżdżeniu dwóch pętli o niezwiązanej żadną zależnością liczbie kroków złożoność wzrasta do $O(n^2)$. Warunek gwarantujący stabilność dodatkowo pogarsza sytuację - zagęszczając siatkę za względu na krok ceny akcji n -krotnie, musimy zagęścić siatkę za względu na krok czasu n^2 -krotnie. Skutkuje to wzrostem złożoności do $O(n^3)$.

Naszym głównym narzędziem był język R. Język ten różne swoje zalety przypłaca między innymi bardzo wolnymi w porównaniu do konkurencji pętlami. Zazwyczaj można uniknąć problemu stosując umiejętnie wektoryzację, niestety w tym przypadku jest to utrudnione, gdyż pętla w każdym kroku korzysta z 3 sąsiadujących punktów. Jednoczesne zachowanie stabilności, dokładności i racjonalnego czasu wykonania algorytmu okazało się nie do pogodzenia. Z pomocą przyszedł nam język C++ i R-owy pakiet *Rcpp*, który pozwala stosować oba w jednym edytorze. Udało się dzięki przepisaniu pętli pozbyć wąskiego gardła i uzyskać satysfakcjonujące rezultaty. Poniższa tabela przedstawia mediany czasu wykonania algorytmu w milisekundach dla dwóch wspomnianych rozwiązań i określonej przy I ilości kroków aktywa podstawowego.

I	R	C++
100	252.83	0.33
150	846.90	1.04
200	1995.97	2.31
300	6815.19	8.50
1000	-	444.12

Jak widać różnica w szybkości to około 800 razy na korzyść C++.

2.5. Niepewna zmienność - uncertain volatility

Parametrem w największym stopniu wpływającym na cenę opcji jest zmienność. Należy jej wartość wyznaczyć stosunkowo dokładnie, co nastęrcza problemów - nikt nie wie jaka będzie zmienność w przyszłości. Możemy jednak, zamiast wyznaczać pojedynczą wartość, oszacować ją przez przedział.

Zauważmy, że wartość opcji waniliowych jest tym większa im większa jest zmienność. Skutkuje to tym, że jeżeli zmienność będzie mniejsza niż przypuszczaliśmy, to jako wystawca opcji zyskamy, jeżeli większa - stracimy. Przy opcjach barierowych sprawa nie jest taka prosta - duża zmienność zwiększa zarówno szansę na zysk jak i na uderzenie w barierę i anulację opcji. W zależności od ceny aktywa podstawowego, korzystna może być dla nas duża zmienność lub mała. Rozwińmy teraz równanie Blacka-Scholesa o możliwość wyboru σ , przy której wycenimy opcję w konkretnym kroku. Będziemy ją w domyśle wybierać tak, żeby zabezpieczyć się na najgorszy scenariusz przy danym poziomie S .

Weźmy teraz portfel delta-neutralny (z perspektywy wystawcy opcji):

$$\Pi = \Delta S - V$$

Zauważmy następującą równość:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial V}{\partial S} dS - \left(\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \right) = r\Pi dt, \\ d\Pi &= -\frac{\partial V}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt = r\Pi dt. \end{aligned}$$

Na portfelu delta-neutralnym powinniśmy zarobić co najmniej stopę wolną od ryzyka r . Aby tak się stało w powyższym równaniu musimy wstawić zmienność, przy której w danej chwili i przy danym poziomie ceny akcji lewa strona będzie najmniejsza - jest to najgorszy scenariusz.

$$\min_{\sigma^- < \sigma < \sigma^+} d\Pi = r\Pi dt$$

Zauważmy, że to czy wybierzemy sigmę jako lewy czy prawy koniec zadanego przedziału niepewności $[\sigma^-, \sigma^+]$, zależy od znaku Γ , pozostałe wyrazy są nieujemne.

$$\sigma(\Gamma) = \begin{cases} \sigma^+ & \text{dla } \Gamma > 0 \\ \sigma^- & \text{dla } \Gamma < 0 \end{cases}$$

Tak dobierane zmienności minimalizują $d\Pi$. Jest to proste do zaimplementowania w metodzie różnic skończonych. Z kolei rozwiązanie analityczne byłoby trudne do znalezienia - równanie staje się nieliniowe.

2.6. Dywidenda

Kolejnym czynnikiem wpływającym na cenę akcji jest wypłata dywidendy z jej tytułu. W naszym projekcie przyjęta jest w chwili 0 dywidenda kwotowa w znanej wysokości D wypłacana w konkretnej chwili $t = T/2$. Jednakże zamiast rozważać jak bardzo ona wpływa, możemy zadać pytanie z innej strony, czy wolelibyśmy nabyć akcje przed wypłatą dywidendy czy może po jej wypłacie?

W tym miejscu musimy przyjąć pewne oznaczenia. Datę wypłaty dywidendy oznaczoną przez t podzielimy na chwilę tuż przed wypłatą dywidendy, którą oznaczymy przez t^- oraz chwilę po wypłacie t^+ .

Osoba, która nabywa akcje do momentu t^- uzyskuje również prawa do dywidendy. W przypadku zakupu po t^+ takie prawo nie przysługuje. Wygląda na to, że lepiej jest kupić akcje tuż przed dniem dywidendy. Oczywiście, ta przewaga jest równoważona przez spadek cen akcji, jaki występuje po wypłacie dywidendy. W dniu wypłaty kurs akcji spada o wartość dywidendy. Jeśli tak by nie było, zachodziła by możliwość arbitrażu. Możemy zapisać równość:

$$S(t^-) = S(t^+) - D$$

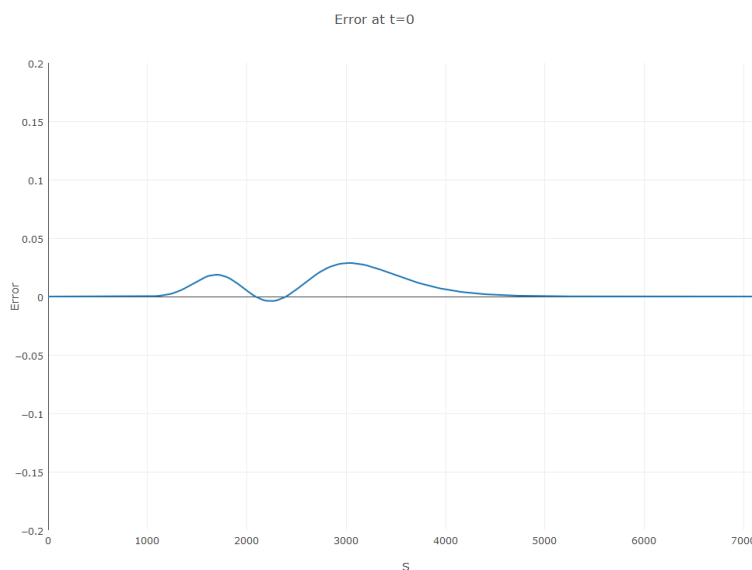
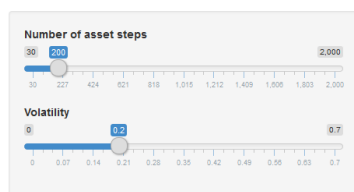
Ukazuje ona spadek ceny aktywa podstawowego po wypłacie dywidendy. Trzeba zaznaczyć, że cena akcji przed jak i po wypłacie dywidendy porusza się z geometrycznym ruchem Browna z tymi samymi parametrami, następuje jedynie przesunięcie o kwotę dywidendy na skali wartości aktywa podstawowego. Ten skok w cenie akcji będzie mieć wpływ na wartość opcji, co zostanie pokazane w dalszej części raportu.

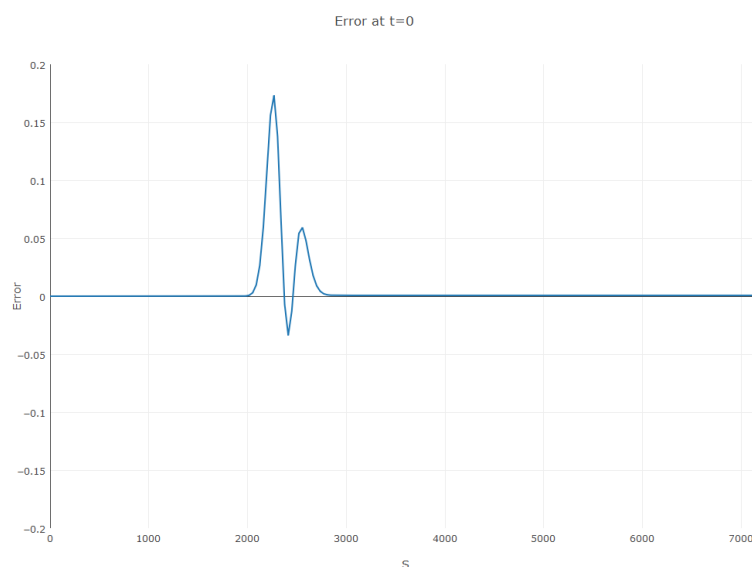
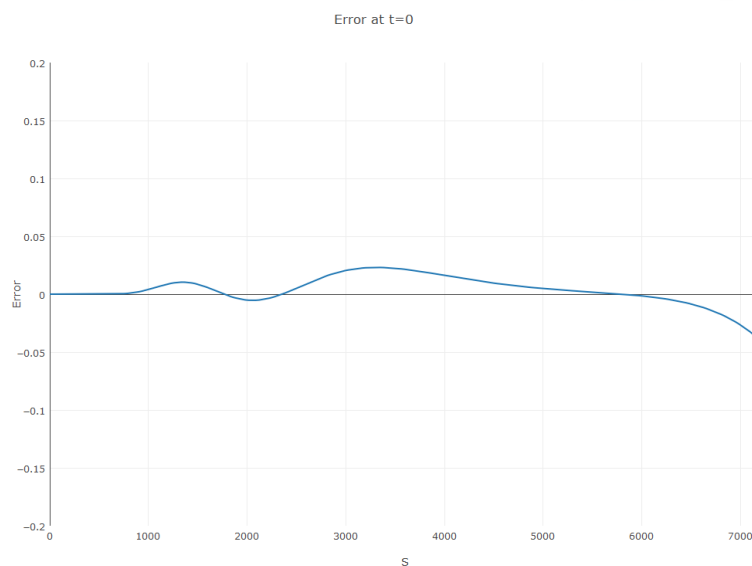
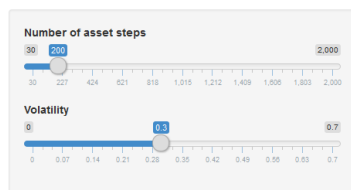
3. Wyniki

Zdecydowaliśmy się oprzeć prezentację wyników o dwie interaktywne aplikacje napisane z wykorzystaniem R-owych pakietów *Shiny* i *Plotly*. Zaprezentujemy zrzuty ekranu z ich działania, tak skadrowane i sparametryzowane, żeby możliwie czytelnie pokazać wyniki i spisać na ich podstawie wnioski.

3.1. Analiza błędu

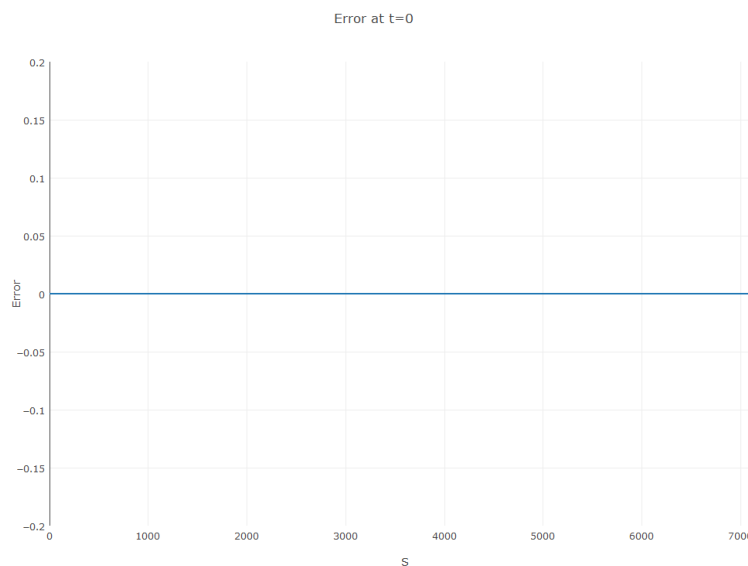
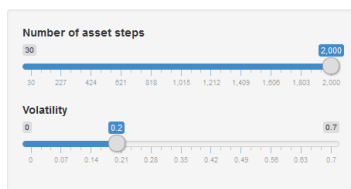
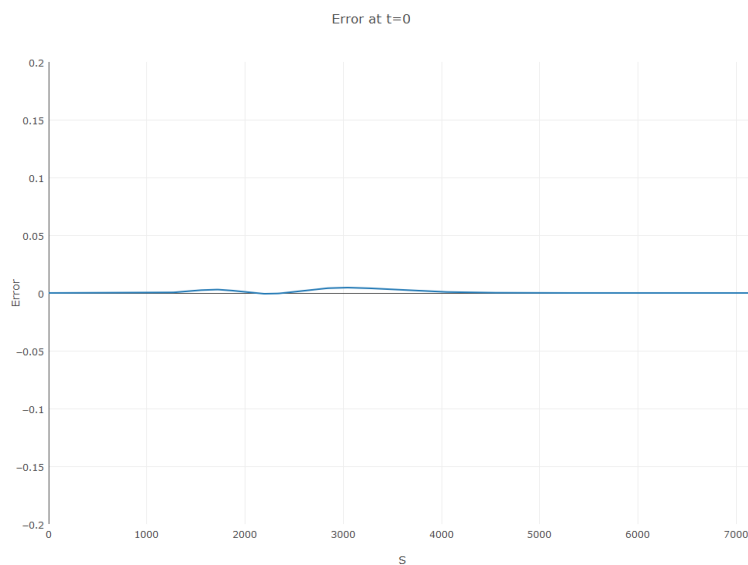
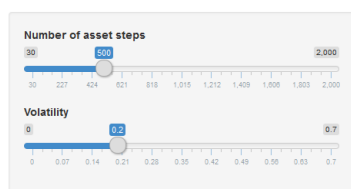
W poniższym podrozdziale przeanalizujemy jak bardzo wyniki uzyskane w naszej implementacji metody finite difference różnią się od analitycznego rozwiązania. Zamieszczone wykresy tworzone są dla europejskich opcji waniliowych (błędy są identyczne zarówno dla call jak i put) jako różnica między wartością opcji wyliczoną ze wzoru Blacka-Scholesa a wartością opcji wyznaczoną za pomocą omawianej metody w chwili 0.





Jak widzimy dla stosunkowo małych parametrów zmienności błąd jest większy, ale skupia się na mniejszym przedziale. Wynika to ze tego, że obszar w którym opcja jest at the money się zawęża. W związku z tym przy zbyt dużym kroku możemy 'przeskoczyć' obszar at the money - jest on kluczowy, gdyż poza nim funkcja wartości opcji zachowuje się z dobrym przybliżeniem liniowo.

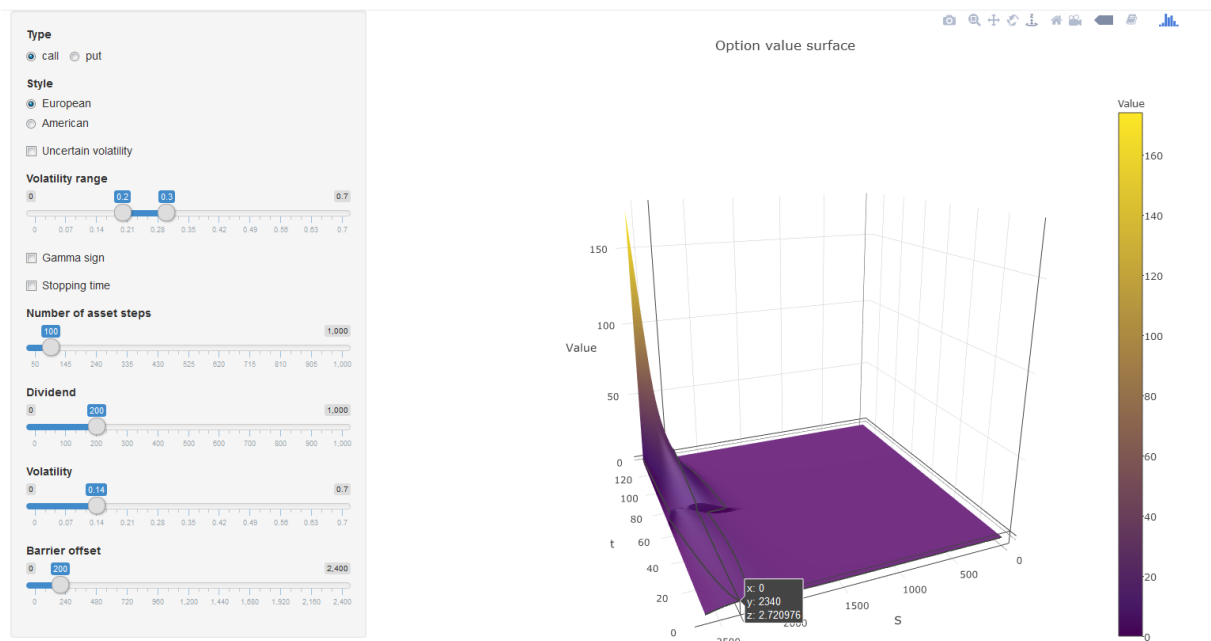
Z kolei dla stosunkowo dużej zmienności widzimy, że błąd oprócz rozłożenia się na większym przedziale pojawia się też blisko górnego ograniczenia. Należy pamiętać, że ograniczenie to wybraliśmy jako przybliżenie nieskończoności. Dla 'dużej' zmienności jest 'większa' szansa, że faktycznie je osiągniemy. Wypukłość przestaje być zaniedbywalna i wartość uzyskana przez ekstrapolację liniową odbiega od wyniku analitycznego.



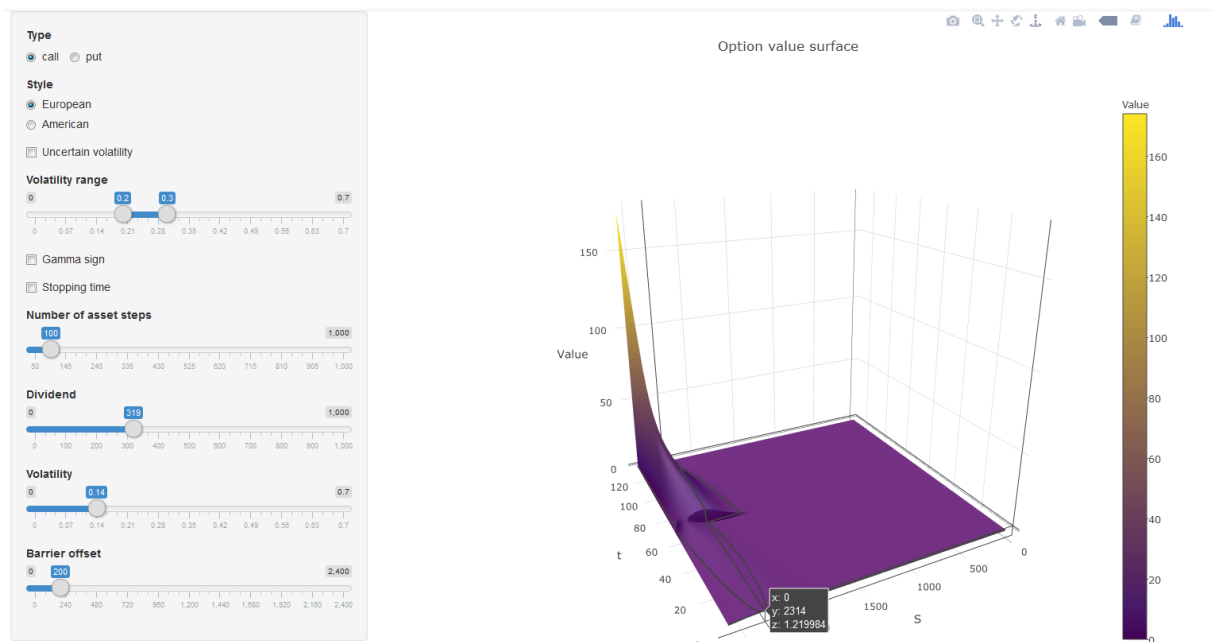
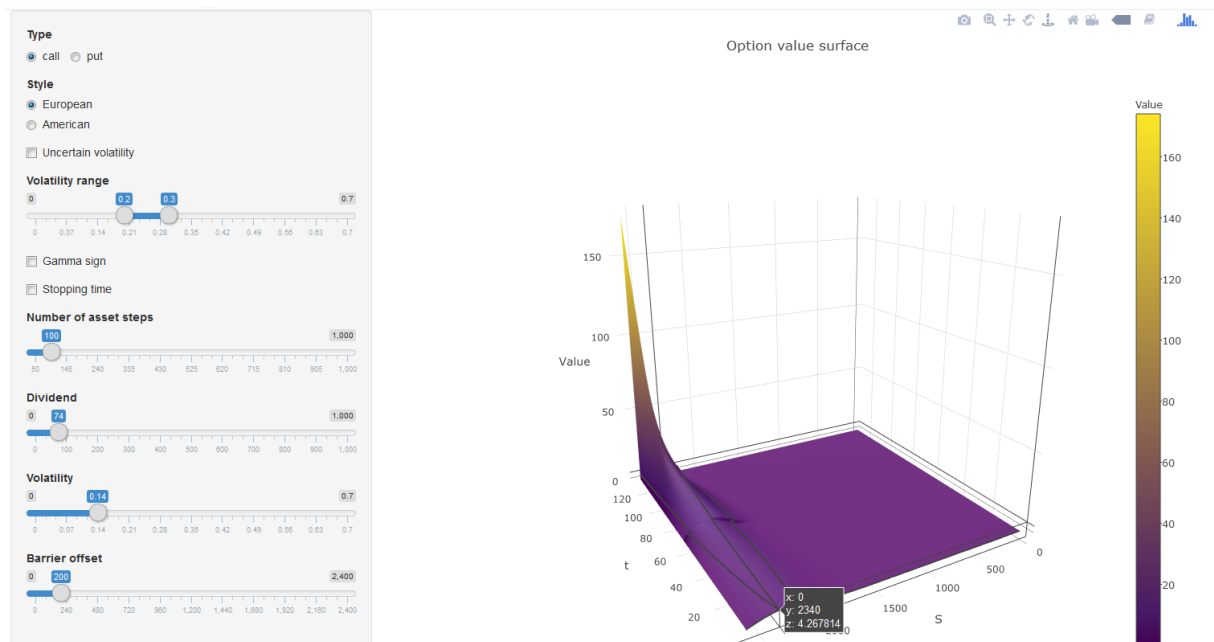
Zgodnie z oczekiwaniami, zagęszczając siatkę uzyskujemy wartości coraz bardziej zbliżone do tych otrzymanych analitycznie. Oczywiście zgodnie z ustaleniami teoretycznymi w poprzednim rozdziale metoda jest zbieżna do modelu Blacka-Scholesa. Zaprezentowane wykresy zachowują się w zgodzie z tą zależnością - przybliżają się do osi OX.

3.2. Europejska opcji call

Wiemy, że w przypadku zwykłej opcji call jej wartość rośnie wraz ze wzrostem ceny akcji, jednakże sprawa komplikuje się w przypadku z barierą oraz wypłatą dywidendy.



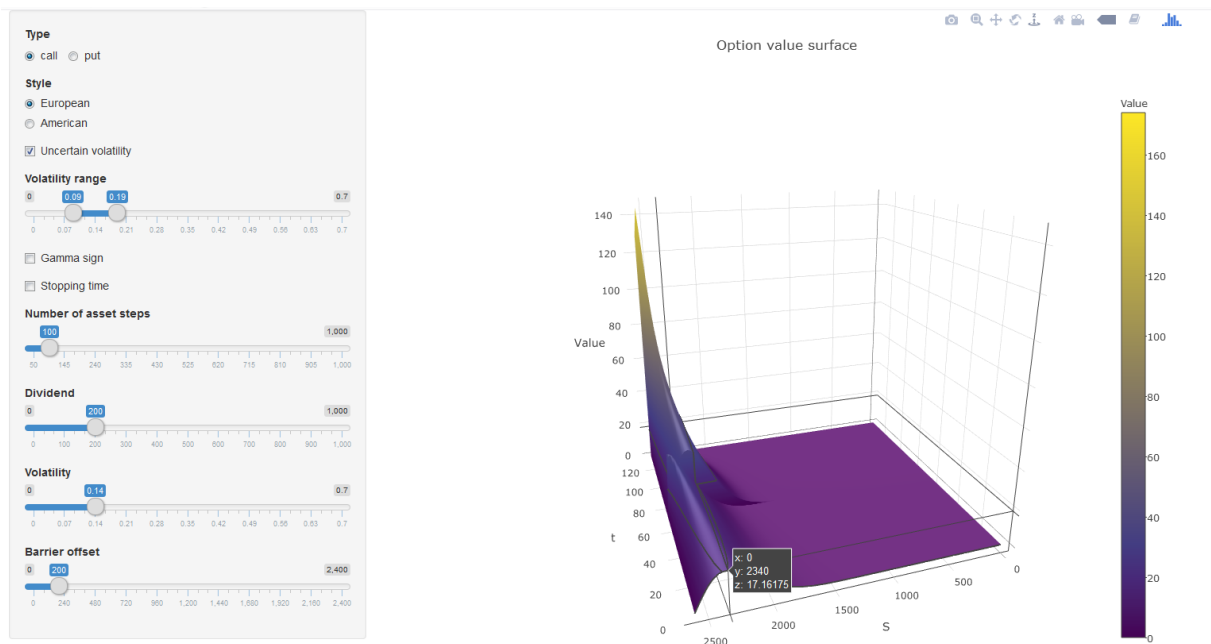
Możemy zaobserwować spadek wartości opcji w okolicach bariery, który spowodowany jest wzrostem prawdopodobieństwa tego, że w następnej chwili kurs aktywa podstawowego wzrośnie, nasza opcja uderzy w barierę i stanie się bezwartościowa. Jednakże musimy pamiętać o wypłacie dywidendy w chwili t , która będzie podnosić wartość derywatywy, ponieważ zbliżając się do chwili t wiemy, że zaraz spadnie cena aktywa podstawowego o wartość D i oddalimy się od bariery jak zostało to opisane w poprzednim rozdziale. Po jej wypłacie opcja zachowuje się klasycznym modelem Blacka-Scholesa dla europejskich opcji call barierowych.



Na powyższych wizualizacjach widzimy wpływ wzrostu kwoty dywidendy D na zachowanie wartości opcji. Możemy zaobserwować spadek wartości opcji do chwili

t wraz z podnoszeniem kwoty dywidendy. Ponieważ w chwili 0 wiemy, że kurs aktywa podstawowego odnotuje duży spadek o kwotę D przez co coraz bardziej spadamy poniżej kwoty wykonania, zmniejsza się również szansa na to, że po chwili t^+ notowania akcje wzrosną o tyle, że opcja znów będzie in-the-money.

Kolejnym elementem, który analizowaliśmy był wpływ różnych przedziałów niepewnej zmienności na wartość opcji. Poniżej zaprezentowane są wykresy dla różnych przedziałów.



Type
☒ call ☐ put

Style
☒ European ☐ American

☒ Uncertain volatility

Volatility range
 0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7
 0.15 0.25

☐ Gamma sign

☐ Stopping time

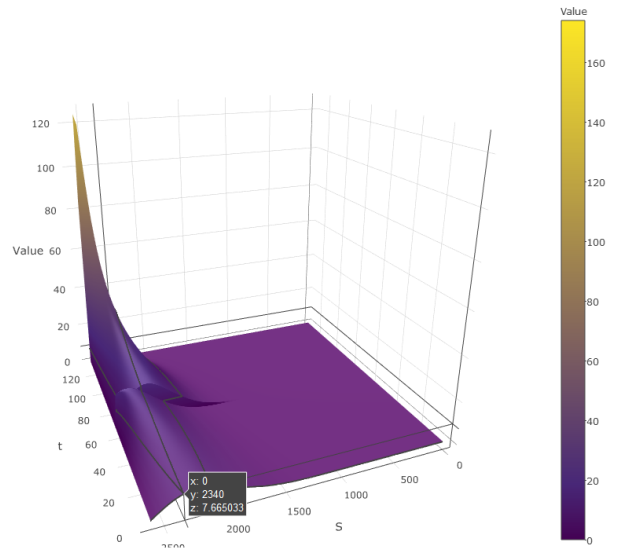
Number of asset steps
 50 100 145 240 335 430 525 620 715 810 905 1,000
 100

Dividend
 0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1,000
 200

Volatility
 0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7
 0.14

Barrier offset
 0 200 400 600 800 1,000 1,200 1,400 1,600 1,800 2,000 2,200 2,400
 200

Option value surface



Type
☒ call ☐ put

Style
☒ European ☐ American

☒ Uncertain volatility

Volatility range
 0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7
 0.09 0.26

☐ Gamma sign

☐ Stopping time

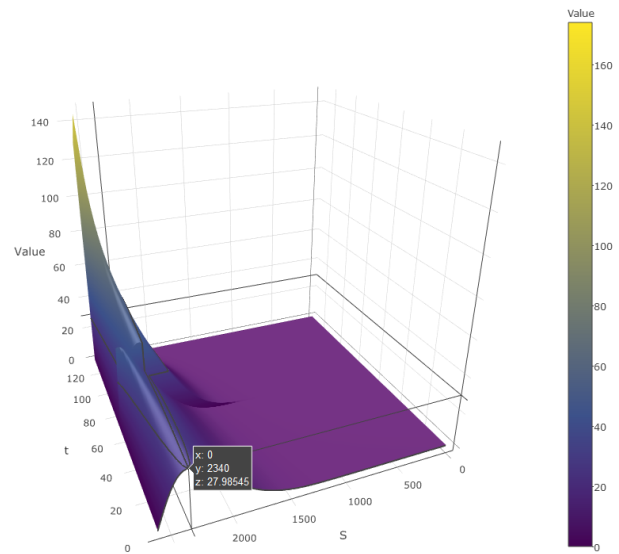
Number of asset steps
 50 100 145 240 335 430 525 620 715 810 905 1,000
 100

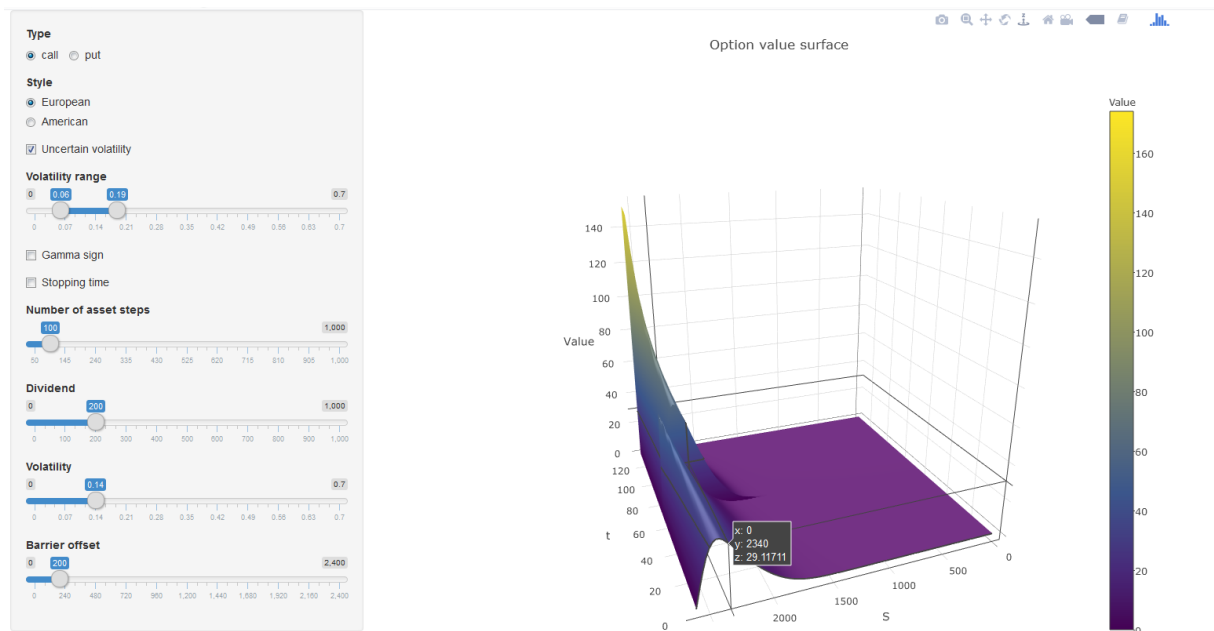
Dividend
 0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1,000
 200

Volatility
 0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7
 0.14

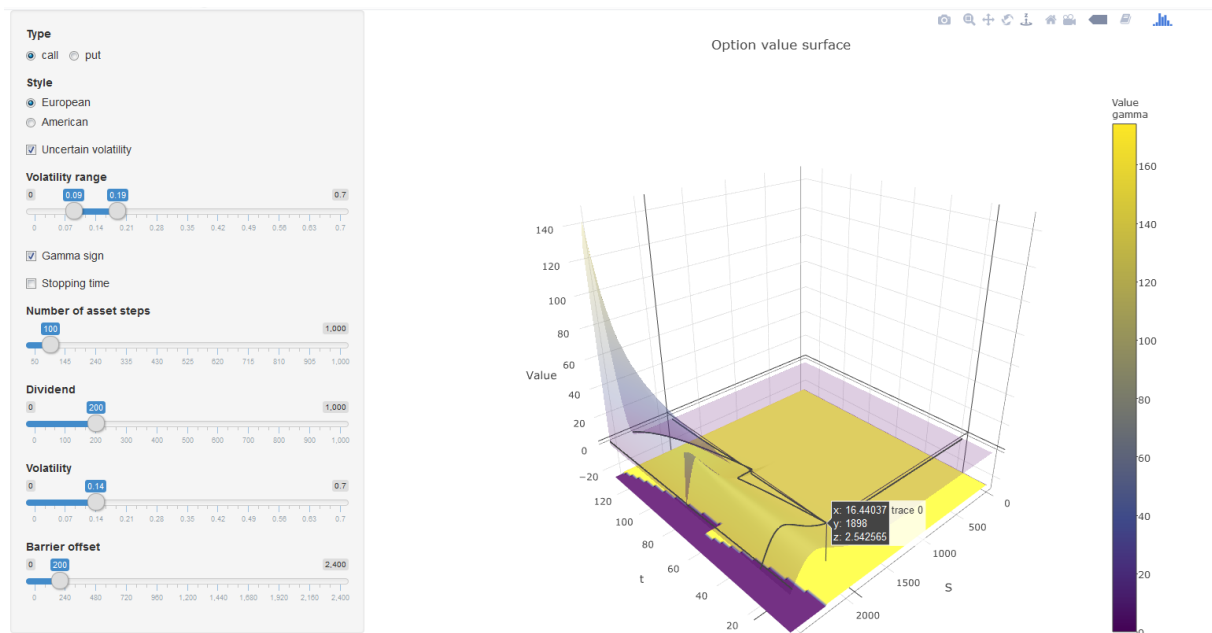
Barrier offset
 0 200 400 600 800 1,000 1,200 1,400 1,600 1,800 2,000 2,200 2,400
 200

Option value surface





Zgodnie z założeniami projektu, musimy być zawsze przygotowani na najgorszy scenariusz dlatego łatwo zauważyć, że wraz z rozszerzaniem przedziału z prawej strony wzrasta wartość opcji przy barierze. Spowodowane jest to właśnie faktem, że jako wystawca opcji musimy zabezpieczyć się przed najgorszym scenariuszem, czyli dużymi skokami aktywa podstawowego, które są możliwe przez dużą wartość σ^+ , przez co wzrasta wartość opcji.



Powyższy wykres ukazuje nam znak gammy na naszej siatce. Zgodnie z teorią opisaną w poprzednich rozdziałach, wiemy, że możemy z niego odczytać w jakich momentach wybieramy σ^+ a kiedy σ^- . W okolicach bariery, jak zostało napisane powyżej, musimy zabezpieczyć się przed dużym skokiem akcji, czyli naturalnie wybieramy σ^+ . Ten obszar zwiększa się wraz z rozszerzaniem przedziału niepewnej zmienności z prawej strony. Dzieje się tak, bo jako wystawca musimy brać pod uwagę możliwość coraz większych skoków aktywa podstawowego. Z drugiej strony σ^- jest wybierana w miejscach, gdzie najgorszym przypadkiem jest scenariusz, gdzie mała zmiana akcji spowoduje, że opcja pozostanie bezwartościowa.

3.3. Europejska opcja put

W przypadku opcji put rozważania będą analogiczne, jednakże część czynników będzie miała odwrotny wpływ, niż w przypadku opcji call.

Type
☐ call ☒ put

Style
☒ European
☐ American
☐ Uncertain volatility

Volatility range
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

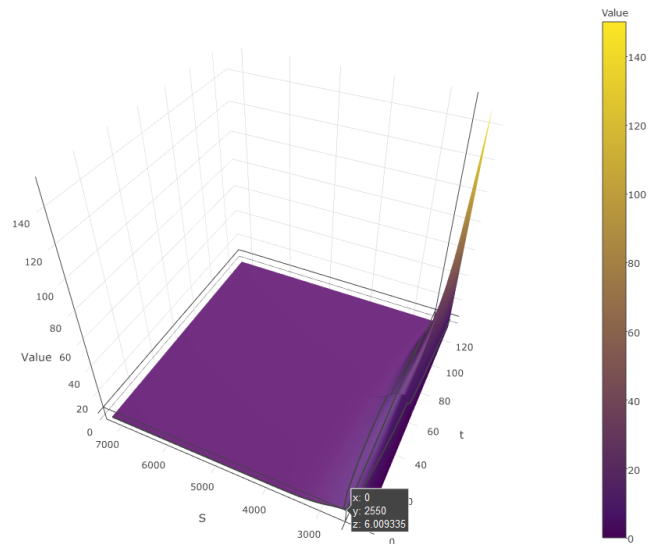
Number of asset steps
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

Dividend
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

Volatility
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

Barrier offset
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

Option value surface



Type
☐ call ☒ put

Style
☒ European
☐ American
☐ Uncertain volatility

Volatility range
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

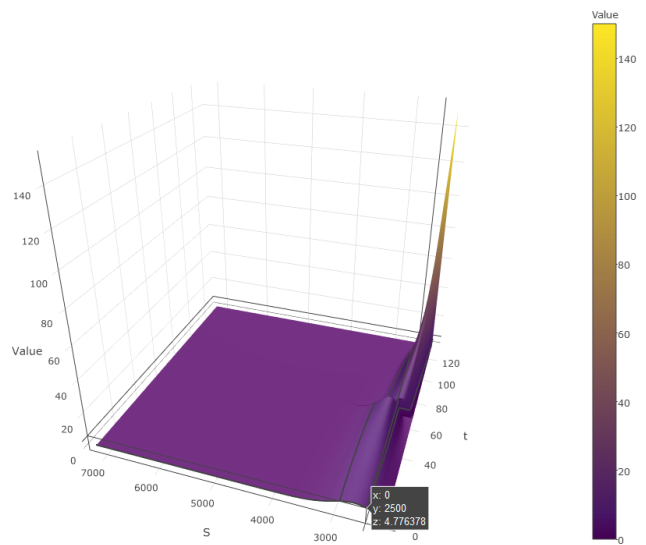
Number of asset steps
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

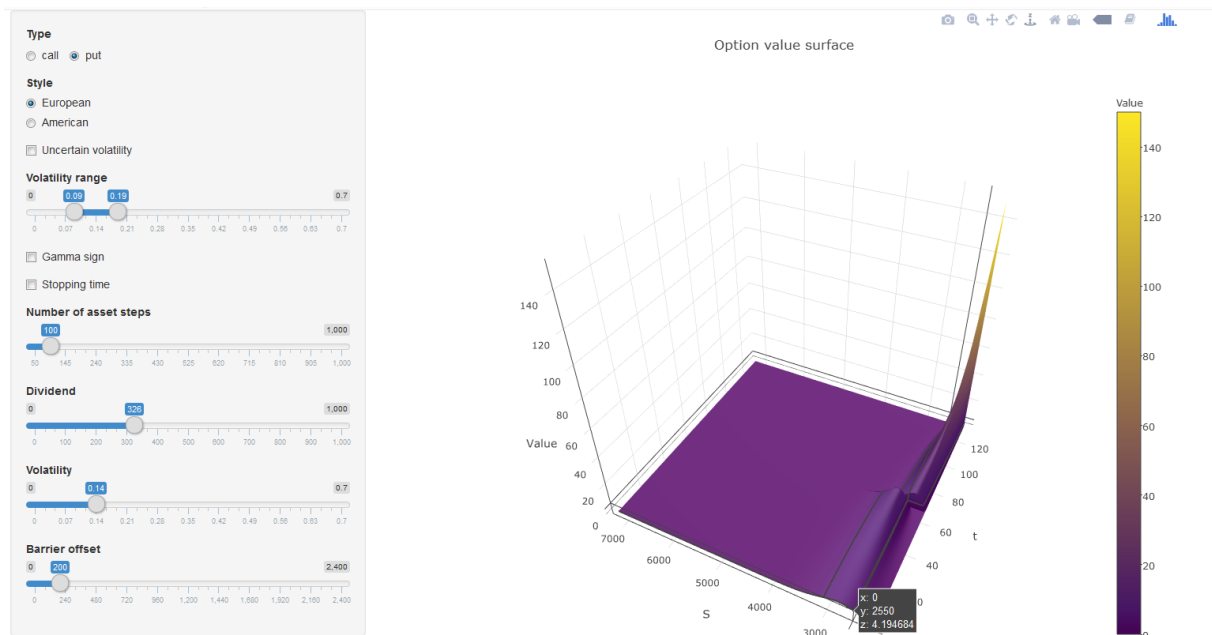
Dividend
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

Volatility
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

Barrier offset
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

Option value surface





Tak więc dywidenda będzie znacząco obniżać wartość opcji przy barierze do chwili t , ponieważ wraz z zbliżaniem się do chwili wypłaty kwoty D zwiększa się prawdopodobieństwo, że po wypłacie dywidendy cena aktywa podstawowego spadnie poniżej bariery i opcja stanie się bezwartościową. Kolejny czynnik, czyli rozszerzanie przedziału niepewnej zmienności ma taki sam wpływ, jak zostało to szczegółowo opisane w poprzednim podrozdziale. Widać to na wykresie znaku gammy, który potwierdza te wnioski, jednakże zachodzi jedna mała różnica.

Type
☐ call ☒ put

Style
☒ European
☐ American

☒ Uncertain volatility

Volatility range
 0 0.09 0.19 0.7

☒ Gamma sign

☐ Stopping time

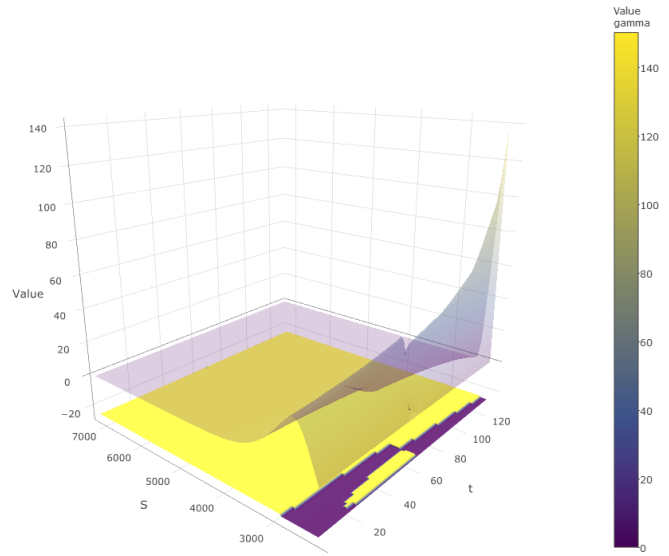
Number of asset steps
 50 100 145 240 335 430 525 620 715 810 905 1,000

Dividend
 0 200 1,000

Volatility
 0 0.14 0.7

Barrier offset
 0 200 2,400

Option value surface



Type
☐ call ☒ put

Style
☒ European
☐ American

☒ Uncertain volatility

Volatility range
 0 0.155 0.255 0.7

☒ Gamma sign

☐ Stopping time

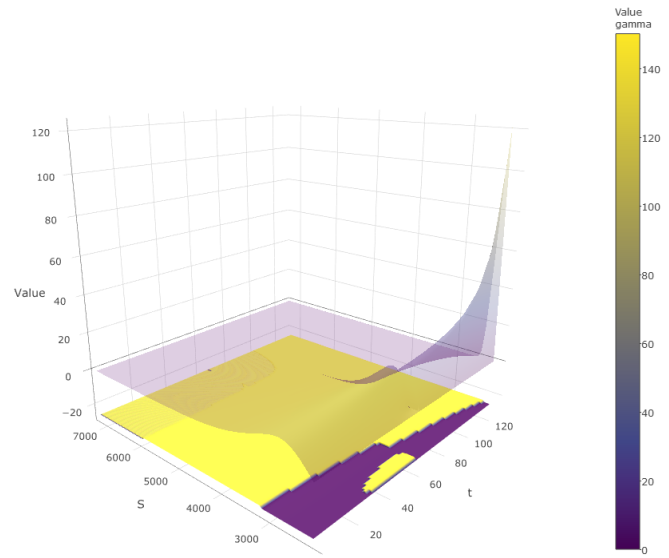
Number of asset steps
 50 100 145 240 335 430 525 620 715 810 905 1,000

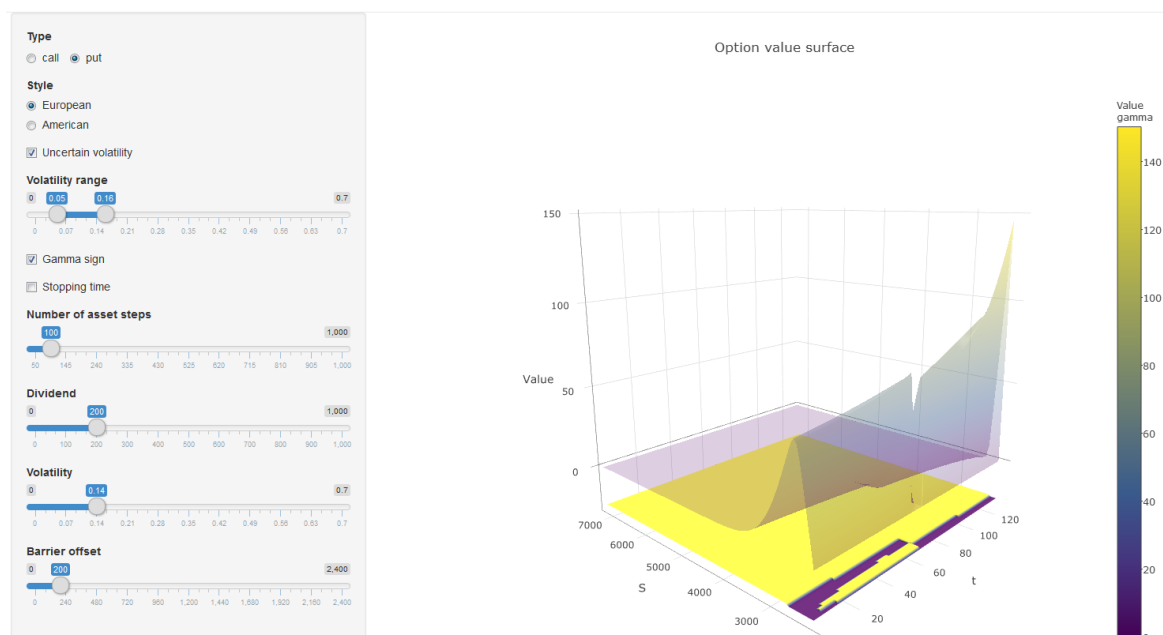
Dividend
 0 200 1,000

Volatility
 0 0.14 0.7

Barrier offset
 0 200 2,400

Option value surface





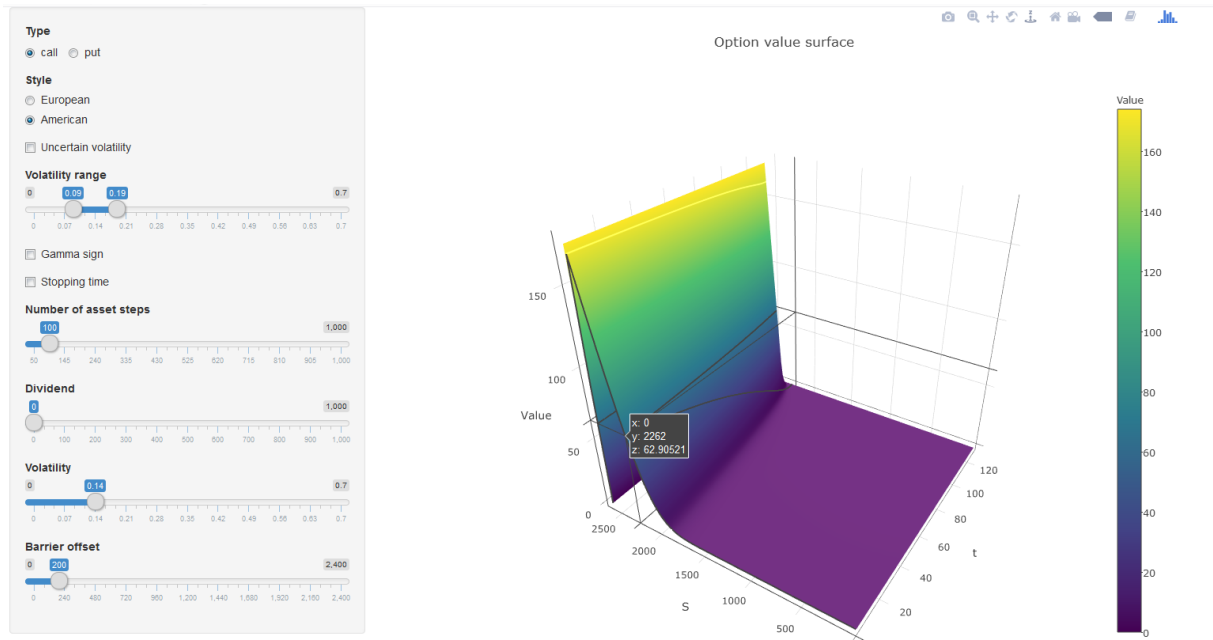
Na powyższych wykresach możemy zauważyć w okolicach bariery do chwili t żółty obszar, który świadczy o wyborze σ^- . W przeciwieństwie do opcji call, w tym miejscu gorszym scenariuszem jest mała zmiana akcji, co tylko zwiększy prawdopodobieństwo, że po wypłacie dywidendy i spadku ceny aktywa podstawowego uderzymy w barierę.

3.4. Opcje amerykańskie

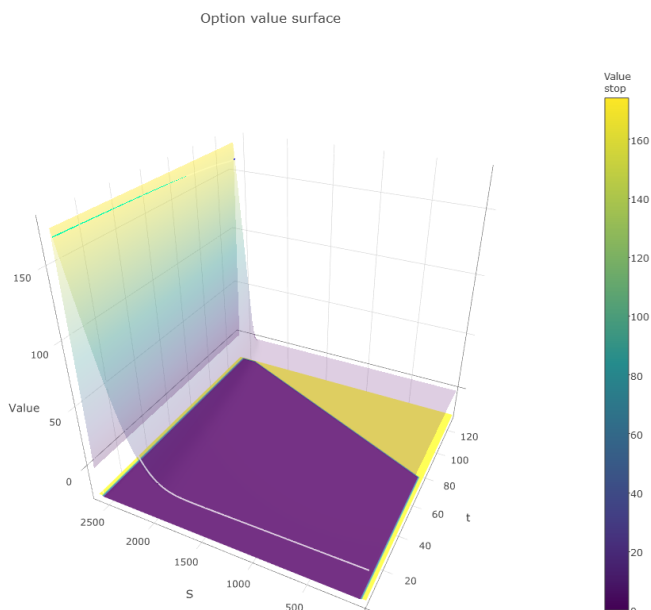
Opcje amerykańskie różnią się od europejskich tym, że można je wykonać w dowolnym momencie przed wygaśnięciem. Ich wartości są w związku z tym istotnie różne wartości ich europejskich odpowiedników. W oczywisty sposób muszą być one chociażby wyższe - opcję europejską można traktować jako szczególny przypadek opcji amerykańskiej wykonanej w ostatniej chwili. Skoro opcja amerykańska daje więcej możliwości, musi być droższa. W każdym rozpatrywanym kroku czasu jako nabywca opcji musimy zastanowić się, czy opłaca nam się ją w tej chwili wykonać czy poczekać. W teorii decyduje o tym to, czy oczekiwany wzrost wartości opcji jest większy niż stopa wolna od ryzyka. Sprowadza się to do odpowiedzenia na pytanie czy wyższy jest dzisiejszy payoff, czy wartość uzyskana w modelu gdyby warunkiem brzegowym równania Blacka-Scholesa była jutrzejsza wartość opcji. Dla opcji waniliowych call okazuje się, że opłaca się czekać do momentu wygaśnięcia, a opcję

put wykonać przy pewnej wartości S , gdy jest odpowiednio głęboko in-the-money. W kolejnych dwóch podrozdziałach przeanalizujemy jak wpływa na optymalny czas zatrzymania i wartość opcji uwzględnienie wypłaty dywidendy, barier i niepewnej zmienności.

3.4.1. Amerykańska opcja call



Powyższy wykres przedstawia wartość barierowej amerykańskiej opcji call. W przeciwieństwie do opcji europejskich, wartość przy barierze jest duża. Z racji tego, że mamy kontrolę nad czasem wykonania, możemy (teoretycznie) wykonać opcję tuż przed uderzeniem ceny akcji w barierę i zyskać natychmiast wartość payoff. W związku z tym możemy też powiedzieć, że opcja tuż przy barierze jest dla nas warta w każdej chwili czasu dokładnie tyle ile wynosi payoff. Zgodnie z intuicją i wcześniejszymi ustaleniami optymalny moment zatrzymania to każde t gdy $S = B - \varepsilon$, dla $\varepsilon > 0$ (w domyśle 'małego') i bariery o wysokości B . W metodzie finite difference $\varepsilon = \delta S$. Poniższy wykres potwierdza nasze wnioski. Żółty kolor mapy ciepła oznacza, że opcję należy wykonać a fioletowy, że nie.



Należy skomentować jeszcze obszar wykresu rozciągający się od payoffu jako żółty trójkąt i $S = 0$. Zauważmy, że metoda różnic skończonych dla każdego z trzech punktów takich, że $V(S + \delta S, t) = V(S - \delta S, t) = V(S, t) = 0$, zwróci $V(S, t - \delta t) = 0$. Stąd, poczynając od $t = T$ i wartości S dla których payoff wynosi zero, uzyskamy $i - k$ zer w $t = T - k\delta t$ dla. Wobec tego zera te tworzą widoczny wyżej trójkąt. Z racji tego że nasz model stanowi jedynie aproksymację stwierdza on niezgodnie z prawdą, że opcja jest w tym obszarze warta dokładnie 0. Zadany warunek na optymalność wykonania zwraca w takim wypadku również prawdę.

Na kolejnej ilustracji prezentujemy wpływ uwzględnienia wypłaty dywidendy. Ustalamy jej wysokość aż na $D = 400$ w celu uwydatnienia własności, które spodziewamy się zaobserwować.

Type
☒ call ☐ put

Style
☐ European
☒ American
☐ Uncertain volatility

Volatility range
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

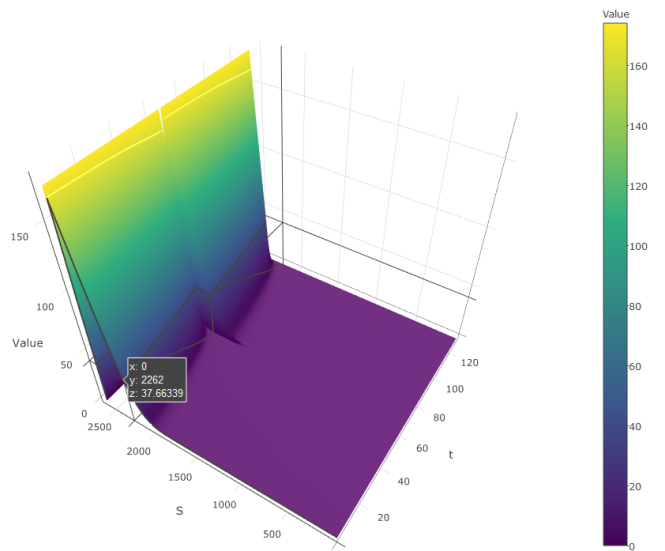
Number of asset steps
☐ Gamma sign
☐ Stopping time

Dividend

Volatility

Barrier offset

Option value surface



Type
☒ call ☐ put

Style
☐ European
☒ American
☐ Uncertain volatility

Volatility range
☐ Gamma sign
☒ Stopping time

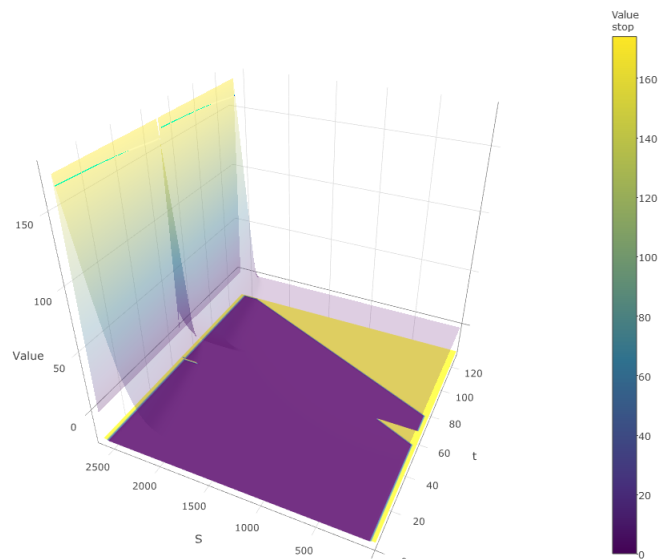
Number of asset steps

Dividend

Volatility

Barrier offset

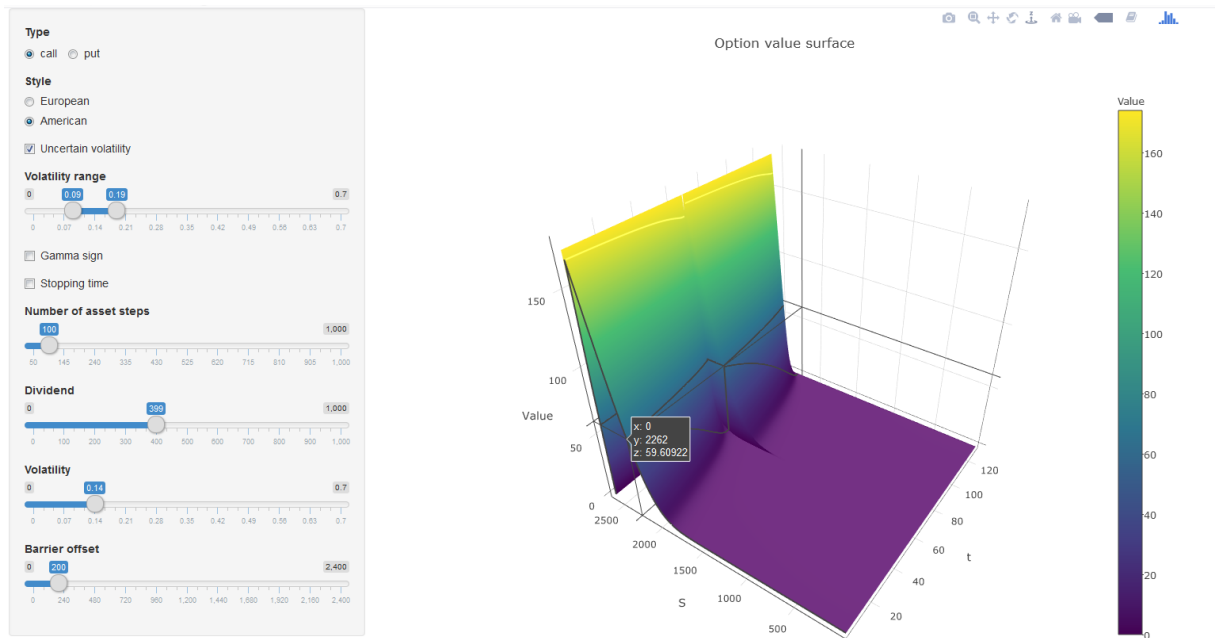
Option value surface



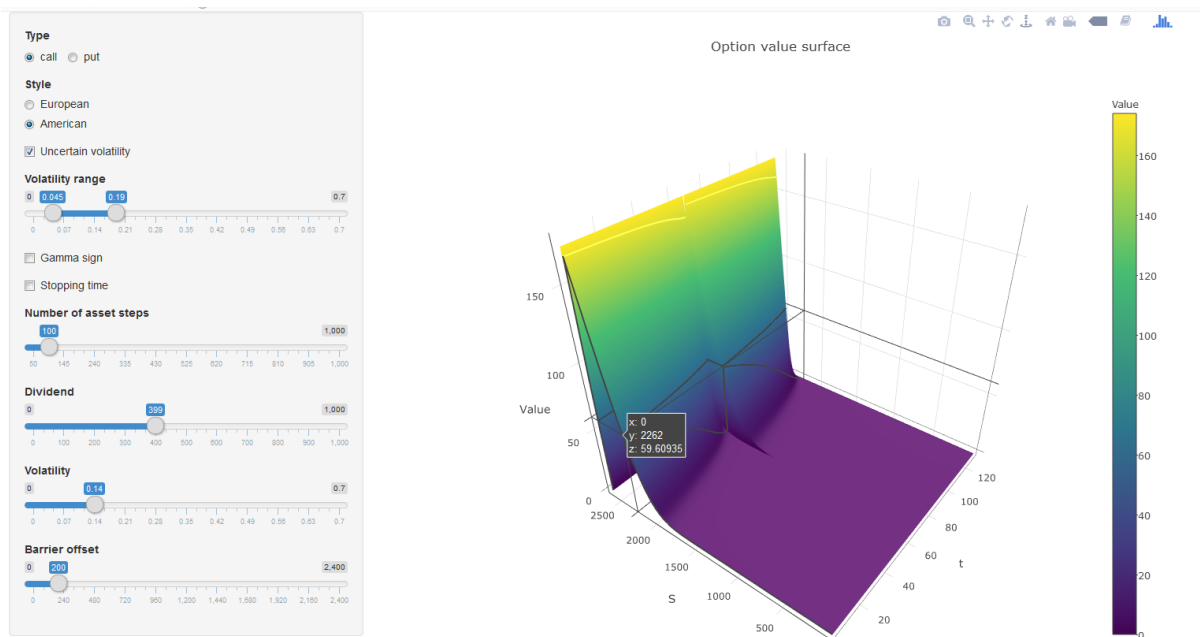
Przy uwzględnieniu dywidendy wartość opcji w chwilach przed jej wypłatą spada. Spowodowane jest to tym, że po pierwsze cena akcji spada i zmniejsza się nasz payoff, ale również tym, że oddalamy się o wysokość dywidendy od strike'a i zmniejszamy tym samym szansę na dotarcie ceny akcji do dużych wartości w drugiej połowie życia opcji. Na wartości blisko bariery dywidenda nie wpływa wcale - nie ma ona dla nas znaczenia, póki opcja jest in-the-money i możemy w każdej chwili zainkasować payoff.

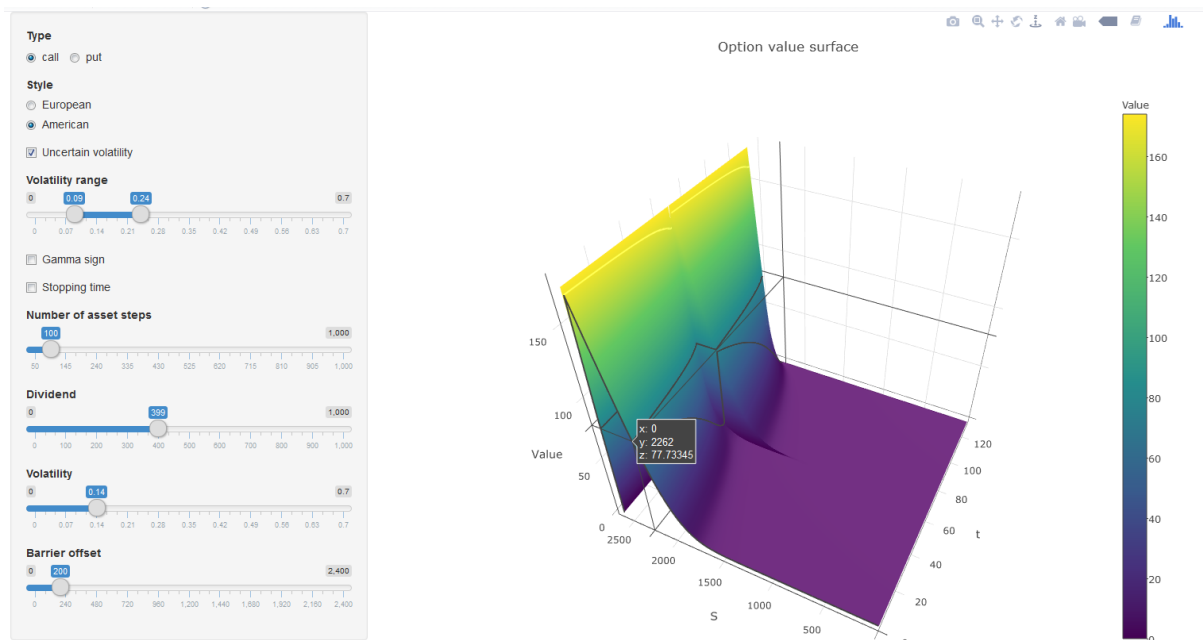
Optymalny czas zatrzymania nie ulega zmianie poza samym momentem wypłaty dywidendy. Jeżeli tuż przed nią wartość aktywa podstawowego jest w obszarze z dodatnim payoffem to opłaca nam się nam opcję wykonać tuż przed. Zauważmy na potwierdzenie, że szerokość żółtego klina odpowiada dodatniej części payoffu (wartości opcji w $t = T$). Dodatkowy mniejszy 'trójkąt' powstały po przeciwnej stronie mapy jest wynikiem teoretycznego spadku ceny akcji do 0 w momencie wypłaty dywidendy dla S mniejszych niż jej wysokość (wypłata doprowadza do bankructwa).

Przejdźmy teraz do zagadnienia niepewnej zmienności. Będziemy pracować na przedziale $[\sigma^-, \sigma^+] = [9\%, 19\%]$. Podyktowane jest to wzrastającą złożonością obliczeniową - σ bierze udział przy wyznaczaniu δt w sposób gwarantujący stabilność. Mimo przepisania pętli w C++ złożoność jest dla nas nadal problemem. Wąskim gardłem okazuje się być procesowanie graficzne wykresów.

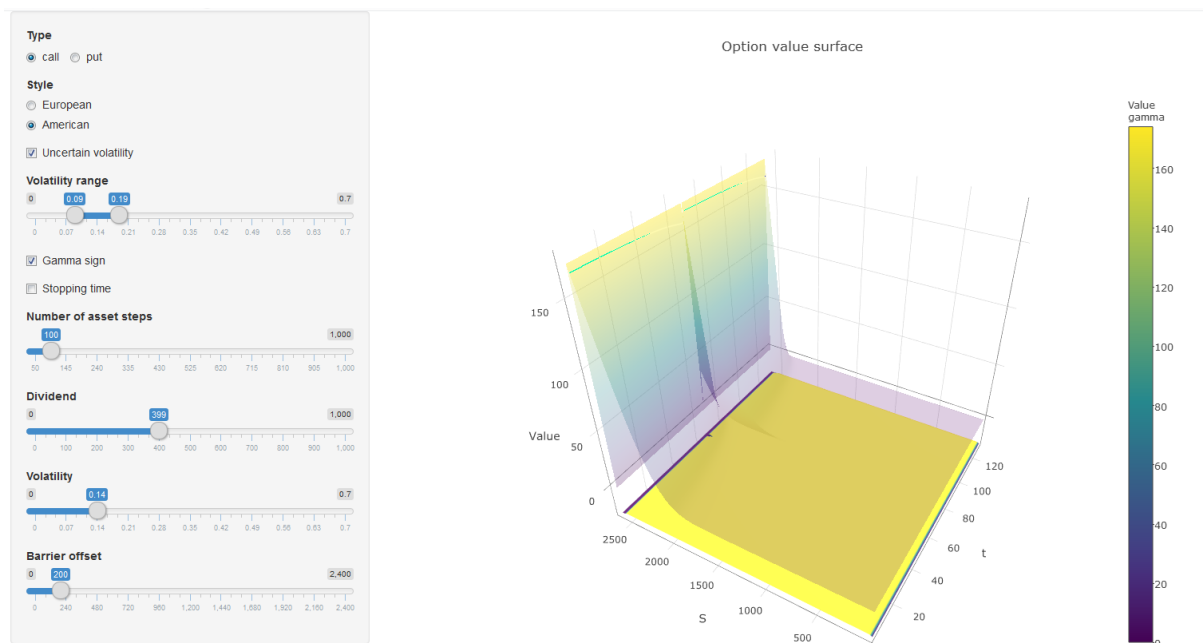


Jak widać, tak jak w przypadku opcji europejskich włączenie do modelu niepewnej zmienności podnosi ich teoretyczną wartość. Przypominamy, że analizujemy sytuację z perspektywy wystawcy i zabezpieczenie najgorszego scenariusza wymaga wystawienia instrumentu po wyższej cenie. Poniżej zaobserwujemy jednak pewien niuans





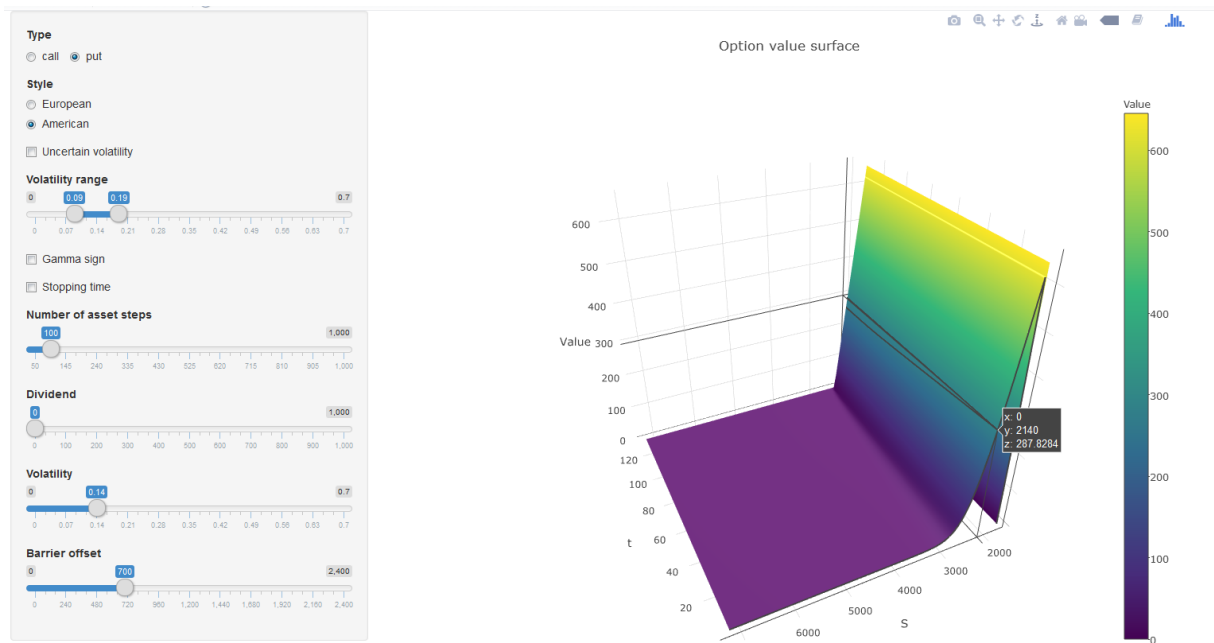
Manipulacja lewym końcem przedziału nie zmienia wartości opcji. Istotnie wpływa na nią tylko lewy koniec. Obserwację tę tłumaczy kolejny wykres.

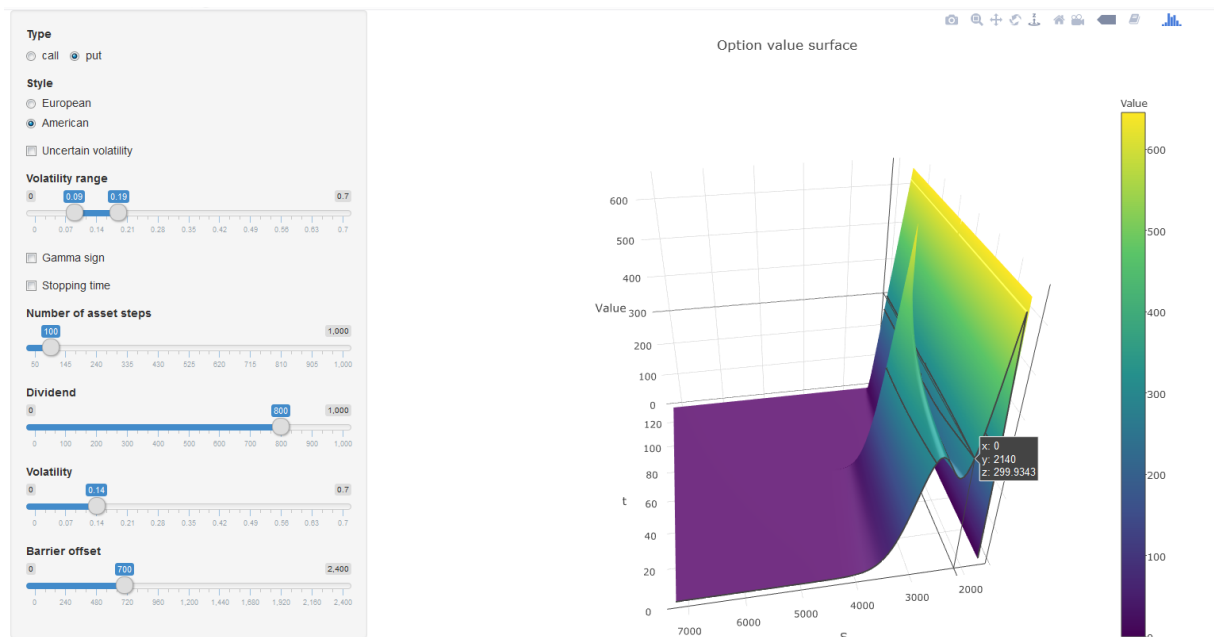


Jak widzimy gamma wartości opcji jest wszędzie poza samą barierą dodatnia. Skutkuje to tym, że jako najgorszy scenariusz zawsze wybieramy σ^+ . Dlatego wartość σ^- nie ma tutaj znaczenia.

3.4.2. Amerykańska opcja put

Niniejszy podrozdział rozpoczniemy analogicznie jak poprzedni - dotyczący opcji call. Poniższe wykresy ilustrują wartość opcji put z dywidendą i bez oraz optymalne czasy zatrzymania dla obu tych przypadków. W celach prezentacyjnych wybraliśmy parametry: $D = 800$ i $|K - B| = 700$.





Opcja put, odwrotnie niż call, zyskuje na fakcie, że w trakcie jej życia wypłacana będzie dywidenda. Jest to zrozumiałe ze względu na to, że przy spadku wartości aktywa podstawowego wartość opcji put rośnie (o ile nie trafi wraz z tym spadkiem w barierę). Oczekiwany wzrost z tego tytułu odzwierciedlony jest przez dodatkowy szczyt na otrzymanej powierzchni. Szczyt ten odpowiada oczekiwaniu, że tuż po wypłacie dywidendy znajdziemy się głęboko in-the-money i tuż przed barierą. "Przełącz" kolei odpowiada sytuacji kiedy payoff uzyskany w wczesnego wykonania jest niski lub zerowy a wypłata dywidendy dodatkowo sprawi, że wartość aktywa podstawowego przekroczy barierę, więc nie możemy liczyć na skokowy przyrost wartości z tego tytułu. Wraz z oddaleniem się od momentu wypłaty dywidendy wzrasta niepewność co do tego, w które miejsce dotrze cena akcji, dlatego wykres się wygładza. Można tłumaczyć to jako konsekwencję równania ciepła. Wypłata dywidendy interpretujemy jako zadanie nowego warunku brzegowego podyktowanego charakterystyką danej opcji. Co więcej, rozumowanie to jest uniwersalne i działa dla wszystkich omawianych typów opcji.

Type
☐ call ☒ put

Style
☐ European ☒ American

☐ Uncertain volatility

Volatility range
 0 0.09 0.19 0.7

☐ Gamma sign

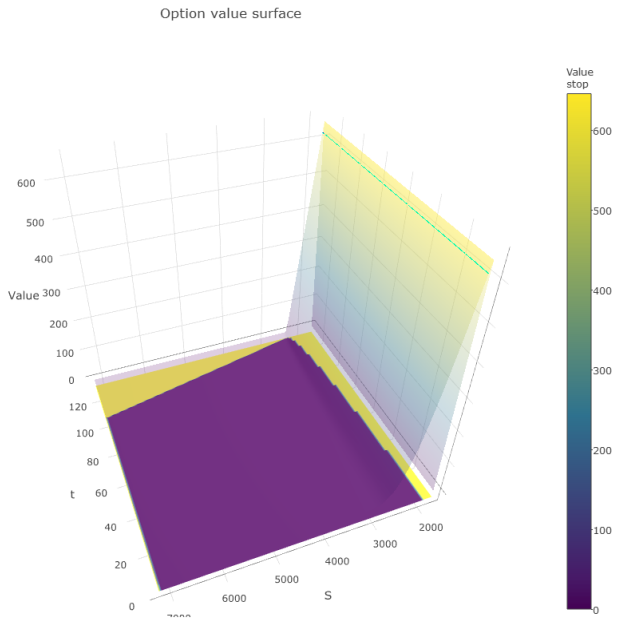
☒ Stopping time

Number of asset steps
 50 100 145 240 335 430 525 620 715 810 905 1,000

Dividend
 0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1,000

Volatility
 0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7

Barrier offset
 0 240 480 720 960 1,200 1,440 1,680 1,920 2,160 2,400



Type
☐ call ☒ put

Style
☐ European ☒ American

☐ Uncertain volatility

Volatility range
 0 0.09 0.19 0.7

☐ Gamma sign

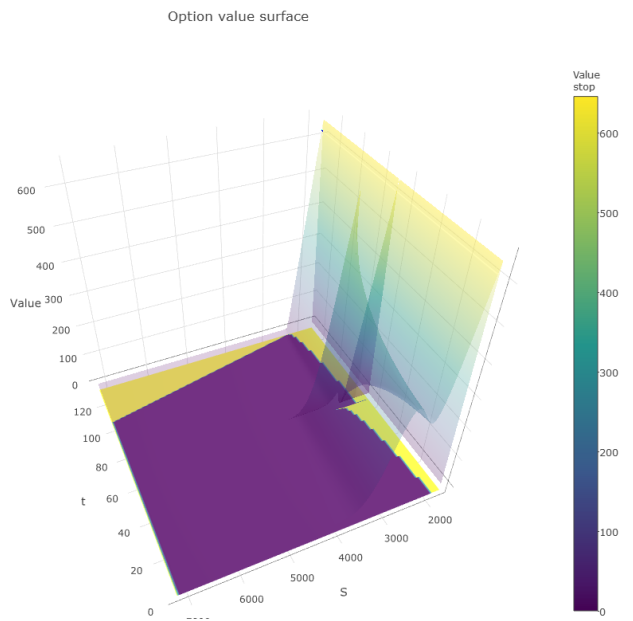
☒ Stopping time

Number of asset steps
 50 100 145 240 335 430 525 620 715 810 905 1,000

Dividend
 0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1,000

Volatility
 0 0.07 0.14 0.21 0.28 0.35 0.42 0.49 0.56 0.63 0.7

Barrier offset
 0 240 480 720 960 1,200 1,440 1,680 1,920 2,160 2,400

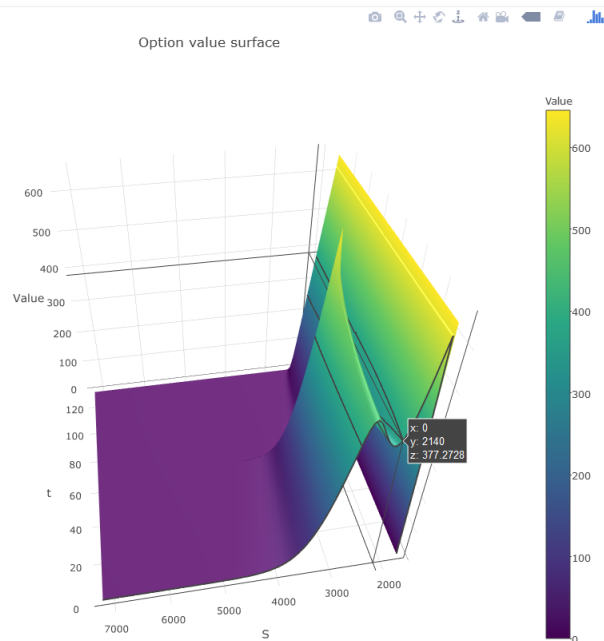
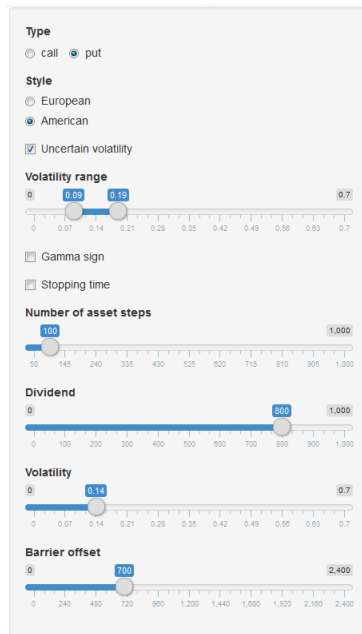


Optymalne momenty zatrzymania dla opcji put nie wypadają jedynie w $t = T$ i tuż przed barierą. Nie będziemy dogłębnie omawiać tego faktu, gdyż wyznaczenie wartości krytycznych S i t jest w ogólności trudnym zagadnieniem wymagającym prawdopodobnie stworzenia osobnej pracy. Możemy jednak podać intuicję prowadzącą do takich wniosków. Z racji tego, że ewolucja cen aktywa podstawowego opisana jest przez geometryczny ruch Browna, S_t ma rozkład logarytmiczno-normalny dla każdego t . Rozkład ten jest niesymetryczny - dla $\mu = -\sigma^2/2$ połowa jego masy skupiona jest na przedziale $(0,1)$ a druga na $(1,\infty)$ (mediana to $e^{\mu-\sigma^2/2}$). Dla opcji put payoff rośnie gdy S spada zgodnie z liniową proporcją. Dla S odpowiednio blisko 0 bardziej opłaca się wykonać opcję put i zarabiać stopę wolną od ryzyka od uzyskanego payoffu niż stosunkowo niewielkie różnice wartości opcji różnice wynikające z małych różnic bezwzględnych S .

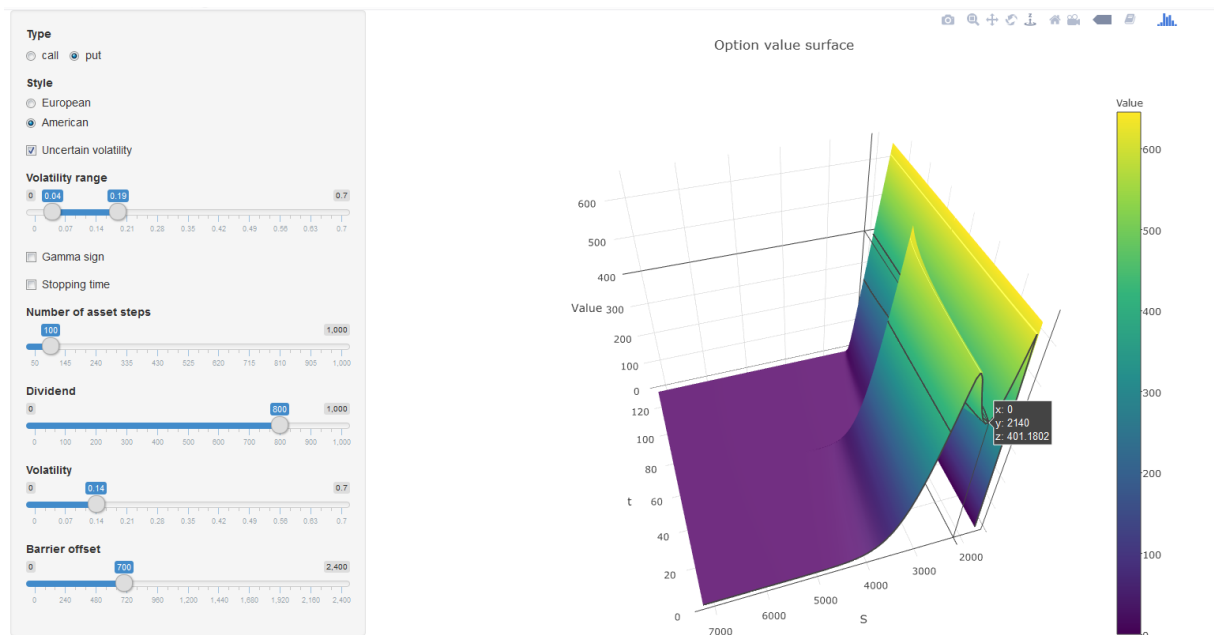
Przy opcji barierowej obserwujemy analogiczną zależność. Opłaca się je wykonać od pewnych wartości S i t w dodatnim obszarze payoffu.

W momencie wypłaty dywidendy opłaca się oczywiście wykonać opcję tak, żeby nie uderzyć w barierę. Co więcej, kiedy zbliżamy się do momentu wypłaty i prawdopodobieństwo uderzenia barierą jest 'duże' należy również wykonać opcję - wartość oczekiwana dalszego zysku z jej tytułu jest mniejsza niż stopa wolna od ryzyka.

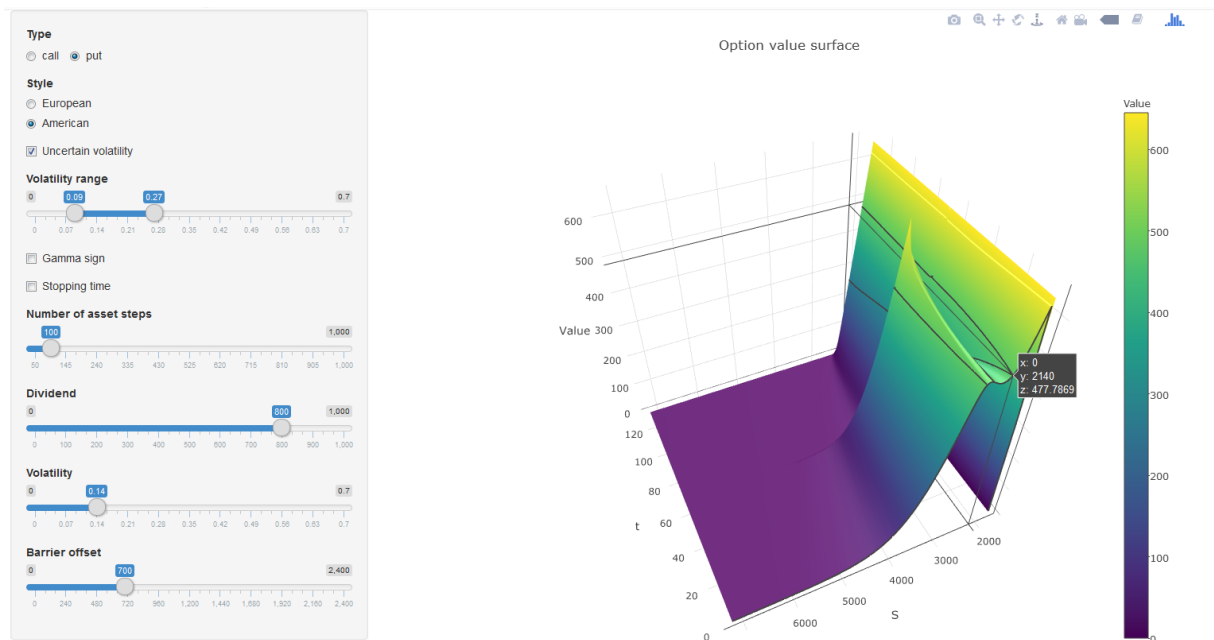
Przejdźmy teraz do zagadnienia niepewnej zmienności.



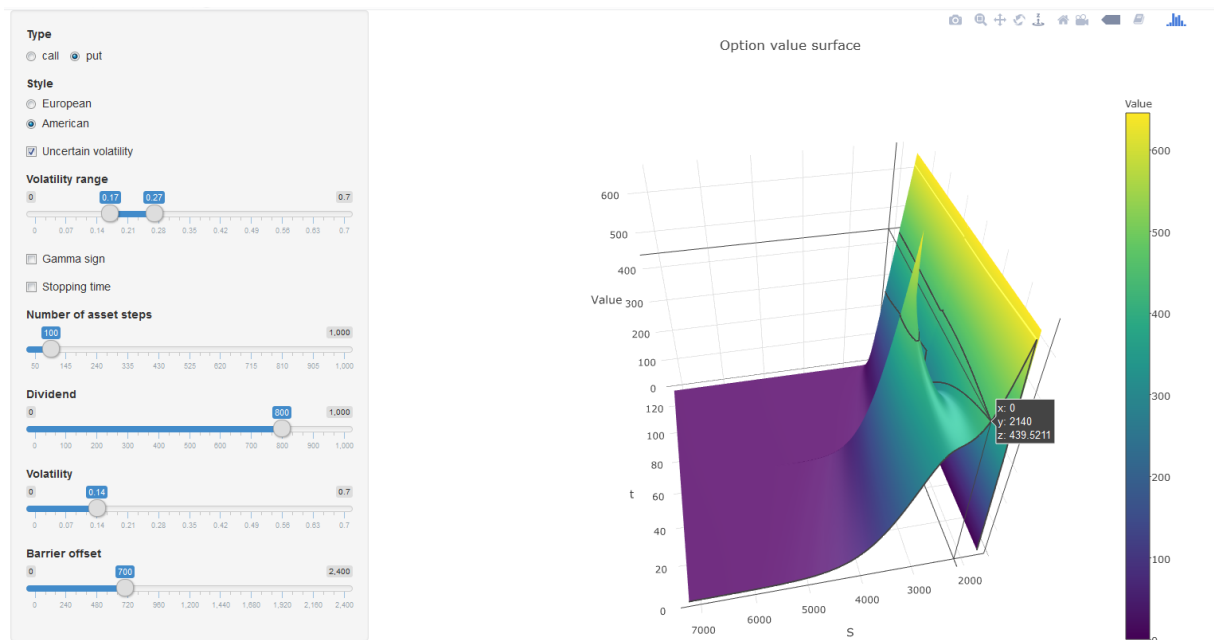
Możemy zaobserwować, że ponownie wartości na całej płaszczyźnie dość znacznie wzrosły. Co więcej, zagłębienie wynikające z położenia pomiędzy dwoma najkorzystniejszymi wartościami S stało się płytsze. Zabezpieczając się na najgorszy scenariusz z perspektywy wystawcy, gdy S jest w obszarze zagłębienia, niepożądana jest maksymalna z zakładanych zmienności. Z kolei blisko szczytów niekorzystna jest σ^- - szansa, że korzystny dla właściciela opcji poziom wartości S się nie zmienia jest większa. Konsekwencją takiego stanu rzeczy jest postać kolejnego wykresu - oddaliśmy na nim lewy koniec przedziału niepewnej zmienności.



"Grań" powstała przez uwzględnienie dywidendy dodatkowo się wypiętrzyła. Szansa na to, że S pozostanie w pobliżu wartości $B - D$ jest przy założeniu mniejszej σ^- jeszcze większa. Musimy w związku z tym ustalić wyższe ceny dla tego poziomu S . Zgodnie z tą samą logiką, poszerzeniu przedziału z prawej strony powinno odpowiadać podniesienie "przełącznika" wykresie. Poniżej ilustrujemy ten przypadek.



Zakładając większą σ^+ szansa na przejście do niekorzystnego dla nas scenariusza jest "duża", należy więc wystawić opcję za wyższą kwotę dla S w zagłębionym obszarze. Rozważmy jeszcze przypadek gdy przedział jest takiej samej długości jak wyjściowo, lecz w całości przesunięty dalej od 0.



Jak widać, założenie ogólnie wyższej zmienności sprawia, że wykres się wygładza. Prawdopodobieństwa pozostania w początkowo korzystnej lub niekorzystnej pozycji jest mniejsze, więc przekrój wartości opcji w $t = 0$ powinien być kształtem zbliżony do analogicznego przekroju dla opcji put bez dywidendy.

Wszystkie powyższe wnioski odnośnie niepewnej zmienności są spójne z wykresem znaku gammy. Zgodnie z intuicjami i kształtem powierzchni gamma jest ujemna jedynie w obszarze "przełęczy". Według wcześniejszych ustaleń teoretycznych dla ujemnej gammy należy wybierać σ^+ .

Type
☐ call ☒ put

Style
☐ European ☒ American

☐ Uncertain volatility

Volatility range
 0 0.09 0.19 0.7

☒ Gamma sign

☐ Stopping time

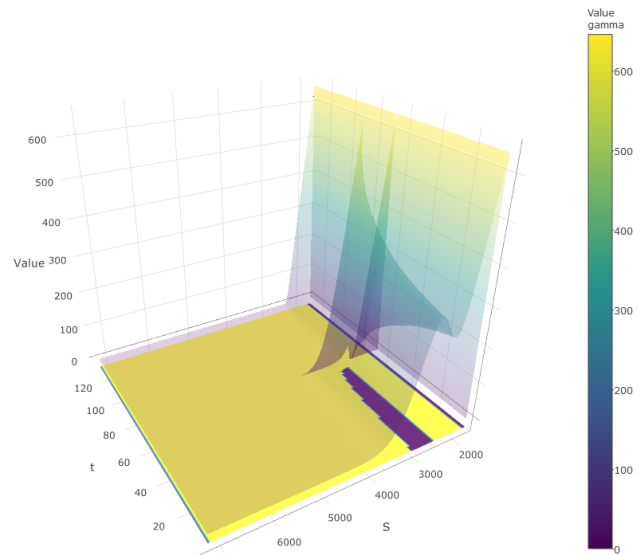
Number of asset steps
 50 100 145 240 335 430 525 620 715 810 905 1,000

Dividend
 0 500 1,000

Volatility
 0 0.14 0.7

Barrier offset
 0 700 2,400

Option value surface



4. Podsumowanie

W ramach niniejszego projektu zmierzaliśmy się z powodzeniem ze wszystkimi przewidzianymi zadaniami. Sformułowaliśmy niezbędną teorię, opisaliśmy metodę różnic skończonych rozszerzając ją o kolejne uogólnienia. Udało nam się uwzględnić wypłatę dywidendy, niepewną zmienność, wczesne wykonanie opcji amerykańskich i dodanie barier. Pokazaliśmy tym samym użyteczność metody - rozwiązanie analityczne takie jak model Blacka-Scholesa nie pozwala na podobne rozważania. Uniwersalna implementacja algorytmu pozwoliła na stworzenie dynamicznych i sparametryzowanych wizualizacji. Na podstawie otrzymanych wykresów wyrobiliśmy sobie odpowiednie intuicje i wyciągnęliśmy wnioski.

Ponadto zwróciliśmy uwagę na dokładność, optymalność i stabilność metody. Na podstawie zadanego warunku zaprogramowaliśmy kontrolę stabilności. Pokazaliśmy, jaka jest wielkość błędu dyskretyzacji otrzymanego równania różniczkowego i w jakim stopniu manipulacja krokiem algorytmu wpływa na czas jego wykonania. Z napotkanymi na tym polu trudnościami poradziliśmy sobie przez zastosowanie dwóch różnych języków programowania i umiejętne połączenie zalet każdego z nich.