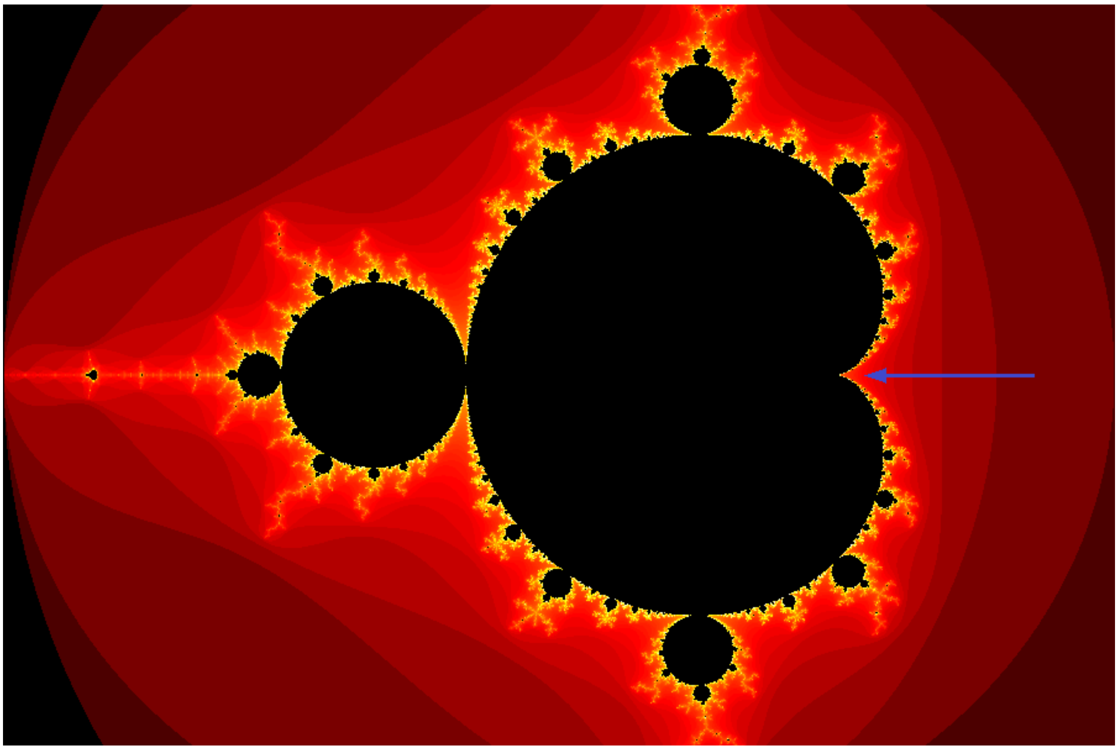
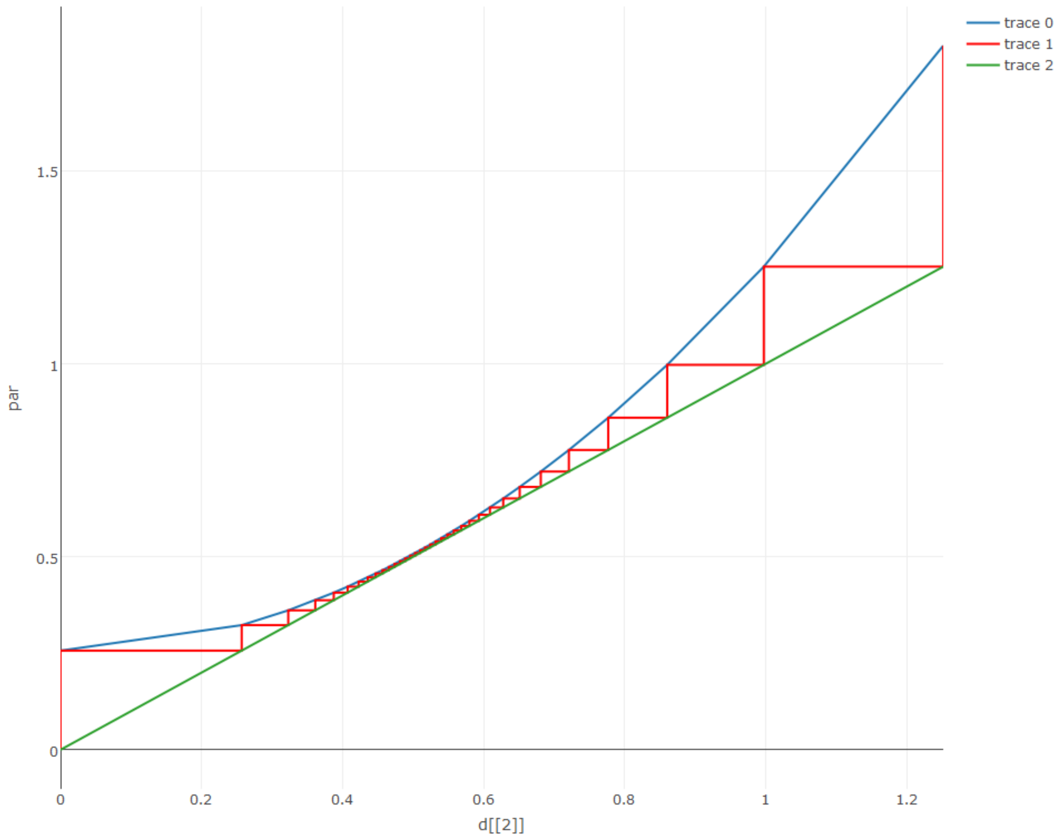
Mandelbrot set and Π



Rysunek 1: Zbiór Mandelbrota



Rysunek 2: Ilustracja problemu

Rozważmy następującą rekurencję:

$$z_{n+1} = z_n^2 + \frac{1}{4} = \varepsilon,$$

$$z_0 = \frac{1}{2}.$$

Odejmując z_n:

$$z_{n+1} - z_n = \left(z_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon$$

Wiemy, że $\forall \varepsilon > 0 \exists N : N = N_- + N_+$ i $z_{N_-} = 0$, $z_{N_+} = 2$. Zauważmy, że w otoczeniu $n = 0$ punkty z_n leżą dowolnie blisko siebie dla odpowiednio dobranego ε. Możemy więc przyjąć, że z_n są dobrze przybliżane przez pewne równanie różniczkowe. Biorąc $t(\varepsilon)$:

$$z'(t) = \left(z(t) - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon.$$

Rozwiążmy:

$$\int \frac{z'(t)}{\left(z(t)-\frac{1}{2}\right)^2+\varepsilon}\mathrm{d}t = \int 1\mathrm{d}t,$$

$$\int \frac{z'(t)}{\left(\frac{z(t)-\frac{1}{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2+1}\mathrm{d}t = t + C,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{arctg}\left(\frac{z(t)-\frac{1}{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = t + C$$

Warunkiem brzegowym jest $z(0) = \frac{1}{2}$, więc $C = 0$. Zauważmy, że nie jest nam potrzebna sama $z(t)$, ale właśnie $t(\varepsilon)$. Ostatecznie:

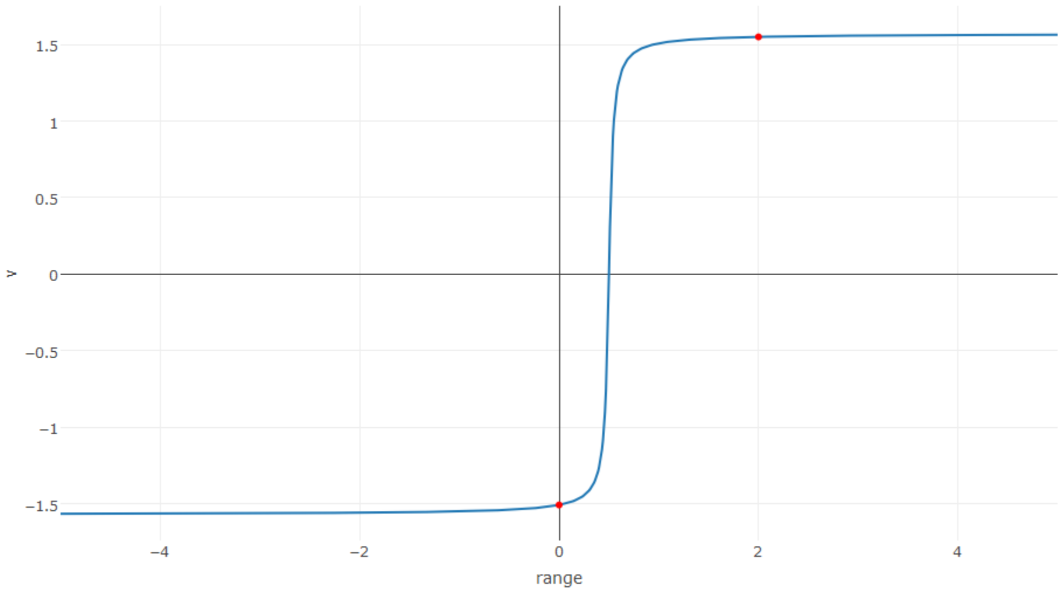
$$t(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{arctg}\left(\frac{z(t(\varepsilon))-\frac{1}{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Analogicznie do N_+ i N_- zdefiniujmy teraz $T_-(\varepsilon)$ i $T_+(\varepsilon)$ tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$z\left(T_-(\varepsilon)\right) = 0$$
$$z\left(T_+(\varepsilon)\right) = 2$$
$$T(\varepsilon) = T_+(\varepsilon) - T_-(\varepsilon)$$

Istotna jest właściwa interpretacja powyższego rozbicia. Zauważmy, że badamy tylko asymptotykę w otoczeniu $t = 0$ tj. $z = \frac{1}{2}$. Zakładamy, że frakcja czasu spędzonego na przez rekurencję w tym otoczeniu jest dowolnie duża w stosunku do reszty przedziału $[0, 2]$, dlatego mówimy że można zaniedbać początkowe i końcowe iteracje. To również pozwala nam nieformalnie korzystać z ciągłej wersji (równania różniczkowego). Skoro t wyraża się funkcją arctg to $z(t)$ będzie pewnym $tg(Cx) + 1/2$, skalowanym w granicy tak, żeby w zerze był prawie poziomy i asympototy pionowe były dowolnie daleko. My patrzymy tylko na przedział w którym ten tangens osiąga 0 (w pewnym ujemnym $T_-(\varepsilon)$) i 2 (w pewnym dodatnim $T_+(\varepsilon)$). Interesuje nas de facto długość tego przedziału w zależności od ε.

Przechodząc więc do funkcji odwrotnej (tj. czasu) $t(\varepsilon)$. Analogicznie jak $z(t)$ arctg jest tutaj 'rozciągany' tyle że w pionie i patrzymy dla jakie wartości osiąga granicznie w 0 i 2 znormalizowany przez $\sqrt{\varepsilon}$. Ilustruje to poniższy wykres.



Rysunek 3: Wykres $\sqrt(\varepsilon)t(\varepsilon)$ z zaznaczonymi $\sqrt{\varepsilon}T_-(\varepsilon)$ i $\sqrt{\varepsilon}T_+(\varepsilon)$

Zbadajmy granicę:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{\varepsilon}T_-(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{z(T_-(\varepsilon)) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{\varepsilon}T_+(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{z(T_+(\varepsilon)) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Skoro obie granice istnieją i są skończone to granica ich różnicy jest różnicą granic tj.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sqrt{\varepsilon}T(\varepsilon) = \pi$$

Stąd liczba iteracji potrzebnych do przejścia do 2 pomnożona przez pierwiastek z ε zbiega do π.

Michał Piwoński