Controlli Automatici T
Progetto B2

Beatrice Casoni · Gaia Filippone · Daniele Maccagnan

Anno Accademico 2024 - 2025

Indice

Descrizione del problema

schema.jpg

Figure 1: Schema illustrativo della tavola motorizzata

Si consideri il sistema in Figura 1 rappresentante una tavola rotante motorizzata dove l'accoppiamento tra motore e tavola avviene tramite un giunto cardanico. Si considerino $\theta(t)$ posizione angolare della tavola e $\omega(t)$ la sua velocità angolare. Si consideri inoltre C_m, ossia la coppia generata dal motore elettrico come ingresso di controllo. Si supponga che la dinamica del sistema sia descritta dalla seguente equazione differenziale:

$$J\dot{\omega} = \tau(\theta)C_m - \beta\omega - k\theta,$$

$$\text{dove } \tau(\theta) = \frac{cos(\alpha)}{1-(sin(\alpha)cos(\theta))^2}$$

in cui

- $\tau(\theta)$ è il rapporto di trasmissione del giunto cardanico, funzione di θ e dell'angolo α tra i due alberi, albero motore e albero condotto
- Il parametro J rappresenta il momento di inerzia della tavola
- Il parametro β indica l'attrito viscoso
- Il parametro k indica l'elasticità del disco

Si supponga di poter misurare in ogni istante la posizione angolare $\theta(t)$ della tavola. Infine si ipotizzi la presenza di un disturbo $n(t)$ dovuto ad errori di misura e di un disturbo $d(t)$ sull'uscita.

Parametri del sistema

k	1000
β	0.77
α	$25°$
J	549
θ_e	$140°$

1 Punto 1: Linearizzazione del sistema

1.1 Testo punto 1

Si riporti il sistema nella forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u),$$
$$y = h(x, u)$$

In particolare si dettagli la **variabile di stato**, la **variabile d'ingresso**, la **variabile d'uscita** e la forma delle funzioni f e h. A partire dal valore di equlibrio θ_e (fornito in tabella), si trovi l'intera coppia di equilibrio (x_e, u_e) e si linearizzi il sistema non lineare nell'equilibrio, cosi da ottenere un sistema linearizzato del tipo

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u$$
$$\delta y = C\delta x + D\delta u$$

con opportune matrici A, B, C, D.

1.2 Analisi del problema

Definizione delle varibili

Al fine di individuare le variabili di stato, ingresso e uscita andiamo a considerare le variabili presenti nell'equazione differenziale che descrive il sistema:

- J, β, k vengono definite come costanti, e in quanto tali per definizione non possono essere veriabili.
- C_m viene presentata direttamente dal problema come *ingresso di controllo*.
- θ indica la posizione angolare della tavola, il testo suppone di poterla misurare (*variabile d'uscita*).
- ω e $\dot{\omega}$ rappresentano rispettivamente la velocità e l'accelerazione della tavola, potrebbero sembrare nuove variabili ma sono intrinsecamente legate alla posizione in quanto $\dot{\theta} = \omega$ e $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$.

Da qui assegniamo le variabili come segue:

- La **variabile d'ingresso** $u(t)$ è rappresentata dalla variabile C_m (vettore monodimensionale).
- La **variabile di stato** $x(t)$ è un vettore in due dimensioni ($x = [x_1\, x_2]$) con $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta} = \omega$.
- La **variabile d'uscita** $y(t)$ è quella misurata dal sensore ed è quindi rappresentata da $y(t) = x_1(t)$ (vettore monodimensionale).

In conclusione:

- La coppia C_m generata dal motore rappresenta la coppia torcente che il motore elettrico applica alla tavola ed è una misura della forza rotazionale che agisce su quest'ultima per farla ruotare (intorno all'asse fissato dell'albero condotto). Controllando la coppia C_m possiamo regolare il movimento della tavola rotante.
- Questa coppia viene trasmessa alla tavola attraverso il giunto cardanico, che è un tipo di giunto non omocinetico, ovvero in cui il rapporto di trasmissione non è costante nel tempo (e unitario), indipendentemente dall'angolo di rotazione dell'albero. Il rapporto di trasmissione $t = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ è il rapporto tra ω_2 velocità angolare in uscita (albero motore) e ω_1 velocità angolare in ingresso (albero condotto). Vediamo come il giunto cardanico introduce effetti di trasmissione non lineari in quanto la velocità angolare istantanea dell'albero condotto è funzione di θ. Nel nostro caso:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{cos(\alpha)}{1 - (sin(\alpha)cos(\theta))^2} = \tau(\theta)$$

Il sistema con il giunto cardanico è un sistema non lineare, per cui, al fine di progettare un controllore efficace si rende necessaria la linarizzazione attorno ad un punto di equilibrio.

Funzioni f e h
Coerentemente con la scelta delle variabili, ricaviamo in modo immediato le funzioni f e h.
f deve essere una funzione definita $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ in quanto potrebbe essere esplicitata come

$$f(x(t), u(t)) = (f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)),\ f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)))$$

in particolare:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u)$$

Avendo definito x_1 come la posizione e x_2 come la velocità del sistema:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) = x_2$$

perchè per definizione la velocità è la derivata della posizione, mentre per ricavare f_2 è sufficiente isolare $\dot{\omega}$ nell'equazione fornita nel testo del problema

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) = \frac{u}{J}\tau(x_1) - \frac{\beta}{J}x_2 - \frac{k}{J}x_1$$

La funzione di uscita h è immediata e vale:

$$y = h(x_1, x_2, u) = x_1$$

Coppia di equilibrio
Dato un sistema tempo invariante continuo di tipo $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia $f(x_e, u_e) = 0$ allora (x_e, u_e) è una coppia di equilibrio.
Si noti che il nostro caso tratta un sistema tempo invariante continuo, di conseguenza è possibile ottenere la coppia di equilibrio (x_e, u_e) ponendo $f(x_e, u_e) = 0$. Nel nostro caso f ha valori in $\mathbb{R}^2$, il che porta alle seguenti ugualianze:

$$\dot{x}_1 = x_{e2} = 0$$
$$\dot{x}_2 = \tfrac{u_e}{J}\tau(x_{e1}) - \tfrac{\beta}{J}x_{e2} - \tfrac{k}{J}x_{e1} = 0$$

Nella tabella fornita dal testo è presente il valore dell'angolo θ con il sistema in equilibrio, θ_e. Come spiegato in precedenza θ è anche la variabile di stato x_1, e il valore x_2 è la sua derivata, si ha di conseguenza:

$$x_e = [\theta_e\ \dot{\theta}_e] = [140°\ 0]$$

Andando poi a sostituire nell'equazione f_2:

$$0 = \tfrac{u_e}{J}\tau(140°) - 0 - \tfrac{k}{J}140°$$

da cui otteniamo:

$$u_e = \tfrac{k \cdot 140°}{\tau(140°)} = 2413.5$$

Infine è immediato definire $y_e = h(x_e, u_e)$ in quanto:

$$y_e = x_{e1} = \theta_e = 140°$$

Linearizzazione del sistema
Un sistema è *lineare* se le funzioni di stato e uscita sono lineari nelle variabili x e u. Se un sistema ha funzioni di stato e uscita lineari in x e u (*lineare*) e che non dipendono esplicitamente da t, allora si tratta di un sistema *lineare tempo invariante* (**LTI**).
I sistemi LTI consentono notevoli agevolazioni in fase di calcolo, in particolare permettono di raggruppare i coefficienti di x e u in matrici per ottenere la caratteristica forma:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t)\end{gathered}$$

con A, B, C, D opportune matrici. Per effettuare la linearizzazione di un sistema non lineare occorre:

- Ricavare le jacobiane delle funzione h e f, derivandole per le variabili di stato e ingresso
- Calcolare le matrici così ottenute nel punto di equilibrio (x_e, u_e)

$$\begin{aligned}
A = \frac{\partial}{\partial x} f(x,u)\Big|_{(x_e,u_e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x,u) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x,u) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x,u) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x,u) \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_e,u_e)} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} - \frac{u}{J}\left(\frac{2cos(\alpha)sin^2(\alpha)sin(x_1)cos(x_1)}{(1-sin^2(\alpha)cos^2(x_1))^2}\right) & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_e,u_e)} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k-u_e(\psi(\theta_e))}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9470 & -0.0014 \end{bmatrix} \\
B = \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\Big|_{(x_e,u_e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f_1(x,u) \\ \frac{\partial}{\partial u} f_2(x,u) \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_e,u_e)} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{cos(\alpha)}{J(1-sin^2(\alpha)cos^2(x_1))} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_e,u_e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\tau(\theta_e)}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0018 \end{bmatrix} \\
C = \frac{\partial}{\partial x} h(x,u)\Big|_{(x_e,u_e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} h(x,u) & \frac{\partial}{\partial x_2} h(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\
D = \frac{\partial}{\partial u} h(x,u)\Big|_{(x_e,u_e)} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} h(x,u) \end{bmatrix}\Big|_{(x_e,u_e)} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

In conclusione possiamo esplicitare la forma linearizzata usando le matrici appena ottenute:

$$\delta\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9470 & -0.0014 \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0018 \end{bmatrix} \delta u(t)$$

$$\delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \delta u(t)$$

2 Punto 2: Funzione di trasferimento

In questa sezione andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy.

2.1 Come ricavare la fdt

Sia il seguente un sistema lineare tempo invariante:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax(t) + Bu(t)\\ y &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

e siano $X(s) := \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) := \mathcal{L}[u(t)]$, $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]$. Ricordando che $\mathcal{L}[\frac{d}{dt}x(t)] = sX(s) - x(0)$ e la proprietà di linearità trasformiamo entrambi i membri:

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s)\\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Isoliamo $X(s)$ e $Y(s)$:

$$\begin{aligned}(sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s)\\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(s) &= \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{\text{Evoluzione libera}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}BU(s)}_{\text{Evoluzione forzata}}\\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{\text{Evoluzione libera}} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)}_{\text{Evoluzione forzata}}\end{aligned}$$

Assumendo $x(0) = 0$ si ottiene:

$$Y_f(s) = Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) = G(s)U(s)$$

con:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \tfrac{Y(s)}{U(s)}$$

2.2 FdT del nostro problema

Riprendiamo i nostri dati:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9470 & -0.0014 \end{bmatrix}\\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0018 \end{bmatrix}\\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\\ D &= [0]\end{aligned}$$

In particolare troviamo

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.9470 & s + 0.0014 \end{bmatrix}$$

e procediamo a calcolarne l'inversa. Sappiamo che l'inversa di una matrice M si calcola nel seguente modo:

$$M^{-1} = \tfrac{adj(M)}{det(M)}$$

Troviamo il determinante:

$$det(sI - A) = s^2 + (0.0014)s + 0.9470$$

La matrice aggiunta:

$$adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s + 0.0014 & 1 \\ -0.9470 & s \end{bmatrix}$$

e a questo punto:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+0.0014}{s^2+(0.0014)s+0.9470} & \frac{1}{s^2+(0.0014)s+0.9470} \\ -\frac{0.9470}{s^2+(0.0014)s+0.9470} & \frac{s}{s^2+(0.0014)s+0.9470} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+0.0014}{s^2+(0.0014)s+0.9470} & \frac{1}{s^2+(0.0014)s+0.9470} \\ -\frac{0.9470}{s^2+(0.0014)s+0.9470} & \frac{s}{s^2+(0.0014)s+0.9470} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0018 \end{bmatrix} + [0] = \frac{1}{1.8 \cdot 10^{-3} s^2 + 2.52 \cdot 10^{-6} s + 1.7 \cdot 10^{-3}}$$

Ottenuta la funzione di trasferimento è possibile ottenere la risposta in frequenza valutando $G(s)$ per $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{-1.8 \cdot 10^{-3}\omega^2 + 2.52 \cdot 10^{-6} j\omega + 1.7 \cdot 10{-3}} = \frac{1}{-A\omega^2 + Bj\omega + C}$$

Si può subito notare la presenza di due poli c.c. , perciò riconduciamo la nostra $G(j\omega)$ alla seguente forma:

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Dividiamo tutti i termini al denominatore per C:

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\frac{B}{2C}\omega - \frac{A}{C}\omega^2}$$

Ora, confrontando i due denominatori possiamo arrivare alle seguenti ugualianze:

$$-\frac{A}{C} = -\frac{1}{\omega_n^2}$$
$$\frac{B}{2C} = \xi\frac{1}{\omega_n}$$

Dalle quali possiamo ricavare il coefficiente di smorzamento ξ e la pulsazione naturale ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{C}{A}} = \sqrt{0.94} \approx 0.97$$
$$\xi = \frac{B\omega_n}{2C} \approx 7.19 \cdot 10^{-4}$$

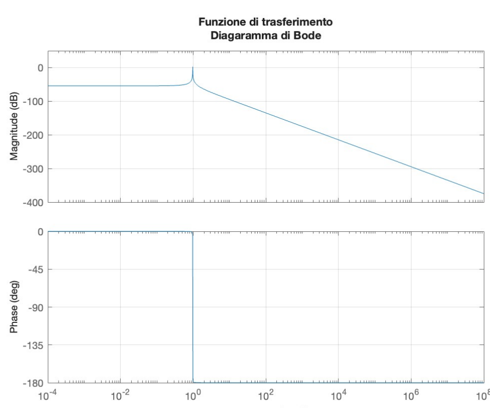

Figure 2: Funzione di traferimento iniziale

3 Punto 3: Sintesi del Regolatore

3.1 Specifiche del sistema di controllo

- Errore a regime $|e_\infty| \leq e^\star = 0.05$ in risposta a un gradino $w(t) = 2(t)$ e $d(t) = 1.2(t)$.
- Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 35°$.
- Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo del 20%: $S\% \leq 20\%$.
- Il tempo di assestamento alla $\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato $T_{a,\epsilon} = 0.006s$.
- Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.7]$, deve essere abbattuto di almeno 35dB.
- Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[2 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 69dB.

3.2 Sintesi regolatore statico

Il regolatore statico è impiegato per soddisfare la precisione statica sulla risposta a gradino e l'attenuazione del disturbo sull'uscita $d(t)$. In particolare il regolatore statico permette di effettuare una traslazione della funzione di trasferimento nel diagramma delle ampiezze, e ciò avviene definendo una costante che permetta di esaudire le specifiche di progetto. Questa costante viene definita come:

$$\mu = \max\left(\frac{\frac{D^\star + W^\star}{e^\star}}{|G(0j)|}, \frac{10^{\frac{A_d}{20}}}{|G(0.7j|)}\right) = \max\Big(32865, 13935\Big) = 32865$$

Ovvero la massima differenza in decibel tra:

- L'ampiezza della funzione di trasferimento calcolata in $0j$ e il valore $\frac{D^\star + W^\star}{e^\star}$ dell'errore a gradino.
- L'ampiezza della funzione di trasferimento calcolata nel limite destro della banda dei disturbi di uscita e il valore minimo richiesto per l'abbattimento degli stessi ($35dB$).

La Figura mostra i grafici prima e dopo la traslazione effettuata dal regolatore statico:

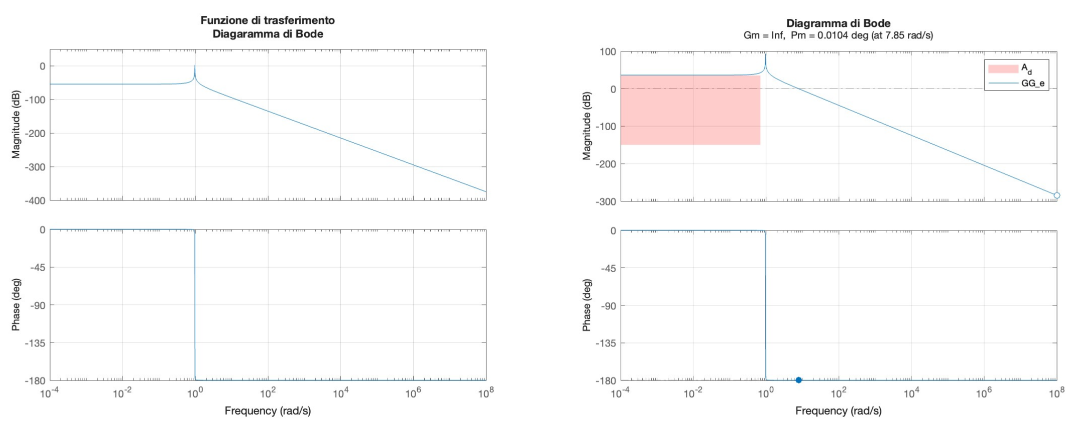

Figure 3: Traslazione effettuata dal regolatore statico

Come si può notare il regolatore statico applica una transalzione di $32865\big|_{dB} \approx 90dB$.

3.3 Sintesi regolatore dinamico

Il regolatore dinamico deve permettere di rispettare le altre condizioni date dalle specifiche del progetto.

Elaborazione specifiche di progetto

L'obiettivo è quello di ottenere due poli complessi coniugati nella funzione $F(j\omega) = \frac{R(j\omega)G(j\omega)}{1+R(j\omega)G(j\omega)}$ in corrispondenza di ω_c (intersezione della funzione con l'asse degli $0dB$).

Iniziamo con il calcolo dello smorzamento, rispettando la condizione di sovraelongazione massima ($S^\star = 8\%$): la sovraelongazione è pari a

$$S = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

ricavando la formula inversa si ottiene il valore fissato di $\xi^\star$:

$$\xi^\star = \frac{\ln(S^\star)}{\sqrt{\pi^2 + \ln(S^\star)^2}} = 0.4559$$

Ottenuto lo smorzamento è possibile calcolare il margine di fase M_f[1]:

$$\xi = \frac{M_f}{2}\frac{\pi}{180} \Rightarrow M_f \approx 100\xi \Rightarrow M_f \geq 100\xi^\star \Rightarrow M_f \geq 45.6$$

E utilizzando il tempo di assestamento $T^\star$ fornito nelle specifiche del progetto si può ottenere ω_c:

$$T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n} \Rightarrow T_{a,\epsilon} \geq \frac{460}{M_f\omega_c} \Rightarrow \omega_c \geq \frac{460}{M_f T_{a,\epsilon}} \Rightarrow \omega_{c_{MIN}} \approx 1.68 \cdot 10^3$$

Tutte queste condizioni sono mappate nella Figura 4.

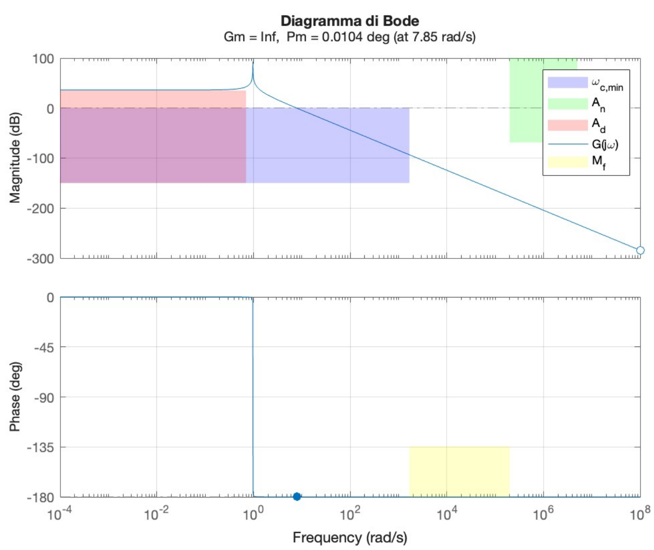

Figure 4: Funzione con specifiche di progetto graficate

[1] Il margine di fase finale è stato scelto come il margine maggiore tra $100\xi^\star = 45.6°$ e $M_f = 35°$ dato dalle specifiche del progetto.

Rete anticipatrice

Per permettere alla funzione di trasferimento di rispettare tutte le specifiche è necessario progettare una rete anticipatrice, ovvero una nuova funzione di trasferimento del tipo:

$$R_d(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$

che abbia quindi uno zero in $\frac{1}{\tau}$ e un polo in $\frac{1}{\alpha\tau}$. Questa disposizione permette di aumentare il valore di ω_c e di far crescere e poi ridiminuire la fase della funzione.

Bisogna ottenere un regolatore dinamico che permetta di

- Forzare un'amplificazione di 0dB in corrispondenza di un $\omega_c^\star$ scelto.
- Forzare il valore della fase in corrispondenza di $\omega_c^\star$ e porlo pari a un ulteriore valore scelto $M_f^\star$.

Quindi definiamo

$$R_d(j\omega) = M^\star e^{j\phi^\star}$$

con $M^\star = \frac{1}{|G_e(j\omega_c^\star)|}$ e $\phi^\star = M_f^\star - 180 - \arg\{G_e(j\omega_c^\star)\}$

Ovvero:

$$\frac{1+j\tau\omega_c^\star}{1+j\alpha\tau\omega_c^\star} = M^\star e^{j\phi^\star}$$

Da cui si ottengono:

$$\tau = \frac{M^\star - \cos\phi^\star}{\omega_c^\star \sin\phi^\star} \approx 38$$

$$\alpha\tau = \frac{\cos\phi^\star - \frac{1}{M^\star}}{\omega_c^\star \sin\phi^\star} = 3.604 \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha = \frac{\alpha\tau}{\tau} = 9.486 \cdot 10^{-6} = 0.000009$$

Di conseguenza

$$R_d(s) = \frac{1 + 38 \cdot s}{1 + 3.604 \cdot 10^{-4} \cdot s}$$

In particolare sono stati scelti i valori $\omega_c^\star = 1.9 \cdot 10^3$ e $M_f^\star = M_f + 10° = 55.6°$

La funzione di trasferimento completa $L(s) = G(s)R_s(s)R_d(s)$ così ottenuta (con l'aggiunta della rete anticipatrice) è rappresentata in Figura.

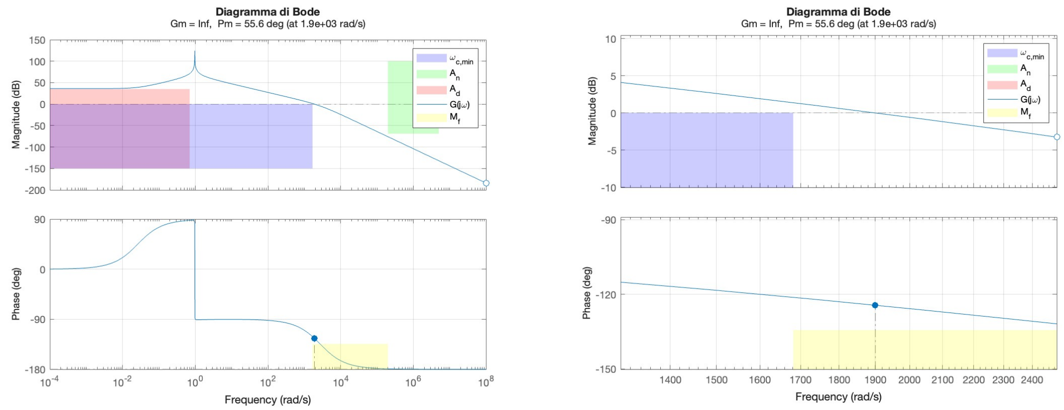

Figure 5: Funzione con aggiunta della rete anticipatrice

In conclusione la funzione di trasferimento in anello $L(s)$ rispetta tutti i vincoli forniti dalla traccia del progetto, il sistema verrà testato nei punti successivi.

4 Punto 4: Test sul sistema linearizzato

Testare il sistema di controllo sul sistema linearizzato con

$$w(t) = 2(t)$$

$$d(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.2\sin(0.01kt)$$

$$n(t) = \sum_{k=1}^{4} 0.2\sin(2 \cdot 10^5 kt)$$

4.1 Svolgimento

In questa sezione procederemo analizzando le tre casistiche e mostrando la risposta del nostro sistema nelle tre situazioni diverse. Nel primo caso dobbiamo studiare la risposta ad un gradino di ampiezza 1.5, andremo quindi a ricavarci la funzione di sensività complementare $F(s)$ con la seguente formula:

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Verrà moltiplicata per la trasformata del gradino $W(s)$ in modo da ottenere l'uscita per l'ingresso desiderato

$$Y_w(s) = F(s)W(s)$$

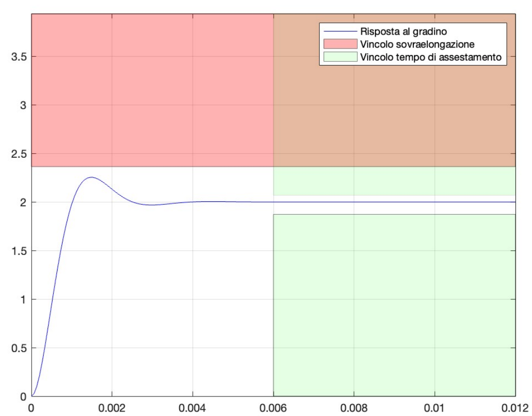

Figure 6: Risposta del sistema al gradino

Come possiamo notare, il risultato rispetta chiaramente i vincoli di sovraelongazione e di tempo di assestamento precisati nei punti precedenti.

Proseguiamo quindi prendendo come variabile d'uscita $Y_d(s)$ con ingresso $D(s)$, trasformata del disturbo in uscita inizialmente descritto, ponendo $W(s) = 0$ e $N(s) = 0$. In questo caso abbiamo bisogno di trovare la funzione si sensività complementare $S(s)$ ricavabile sempre dalla nostra funzione di trasferimento in anello chiuso $L(s)$:

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}$$

Useremo la funzione di sensività $F(s)$ precedentemente calcolata per testare anche la risposta del nostro sistema di controllo quando in ingresso poniamo solamente il disturbo di misura $n(t)$, trasformato secondo Laplace in $N(s)$ e ponendo questa volta $W(s) = 0$ e $D(s) = 0$, avendo come uscita $Y_n(s)$. Le due risposte saranno dunque calcolate nel seguente modo:

$$Y_d(s) = S(s)D(s)$$

$$Y_n(s) = -F(s)N(s)$$

Andiamo ad analizzare graficamente queste due casistiche.

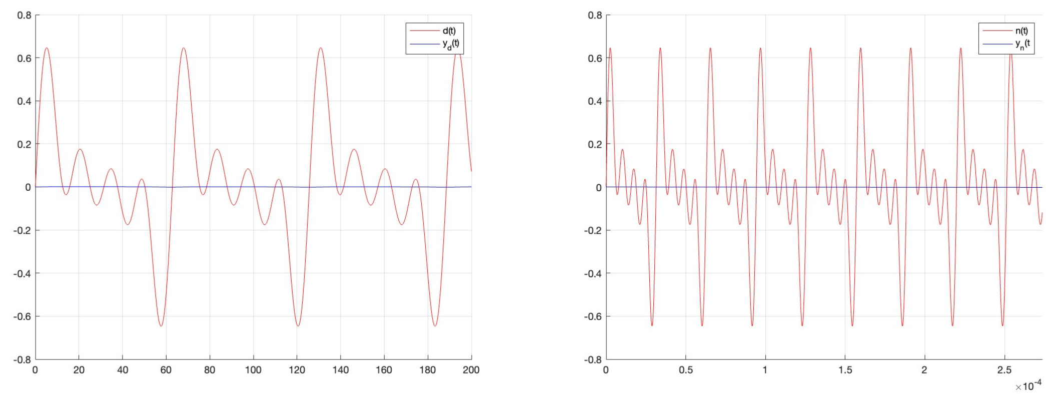

Figure 7: Risposta del sistema ai disturbi

Come possiamo notare, in entrambi i casi l'uscita viene quasi totalmente abbattuta. Questo perchè nella progettazione del nostro regolatore abbiamo sfruttato una caratteristica importante dei due disturbi $d(t)$ e $n(t)$: entrambi hanno le proprie bande limitate in opportuni range. $d(t)$ infatti ha bande a bassa frequenza, mentre $n(t)$ lavora con bande ad alta frequenza.
Il regolatore è stato costruito in modo da avere $S(j\omega) \ll 1$ a basse frequenze e $F(j\omega) \ll 1$ ad alte frequenza, provando in questo modo ad abbattere entrambi i disturbi. I risultati ottenuti sono quindi in accordo con le specifiche del problema.

5 Punto 5: Simulazione non linearizzata

Testare il sistema di controllo sul modello non lineare (ed in presenza di $d(t)$ ed $n(t)$).

5.1 Svolgimento

Il primo passo per svolgere questo punto è quello di ricostruire il sistema linearizzato su simulink:

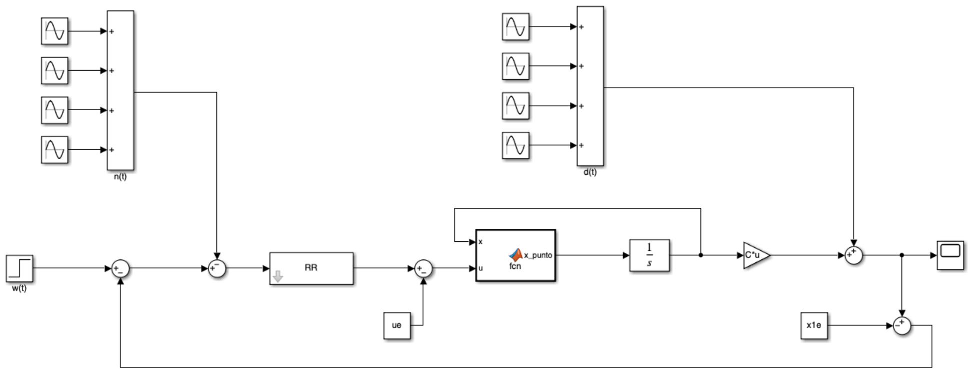

Figure 8: Riproduzione sistema non linearizzato su simulink

Per ottenere il sistema non linearizzato sono stati inseriti i seguenti componenti in particolare:

- L'ingresso è un blocco che genera una funzione a gradino di altezza 2.
- Un blocco *LTI System* contiene la funzione del regolatore `RR`.
- Un blocco *MATLAB Function* è il centro del sistema e contiene la funzione $f(x, u)$ definita all'inizio del progetto. Infatti esso avrà due ingressi (x, bidimensionale, e u, monodimensionale) e un uscita ($\dot{x}$, bidimensionale).
- Un blocco *integrator* che integra il valore di uscita dal blocco matlab per ottenere x da $\dot{x}$. Si noti che l'uscita dell'integratore è messa in retroazione per essere utilizzata come ingresso della funzione matlab. L'integratore permette inoltre di inserire i valori iniziali dello stato, in particolare sono stati scelti i valori dell'equilibrio $[x_{1_e}, x_{2_e}]$.
- Il *gain* moltiplica il valore di uscita dell'integratore per la matrice C (che ricordiamo essere [1 0]).
- Diversi operatori somma e differenza consentono di effettuare operazioni sui diversi segnali del sistema, tra cui i disturbi.
- Lo *scope* permette infine di visualizzare l'uscita del sistema.

I valori di equilibrio vengono sommati e sottratti all'ingresso e all'uscita per permettere l'utilizzo del regolatore progettato per il sistema non linearizzato.
Ricostruito il sistema si può procedere alla simulazione del gradino.

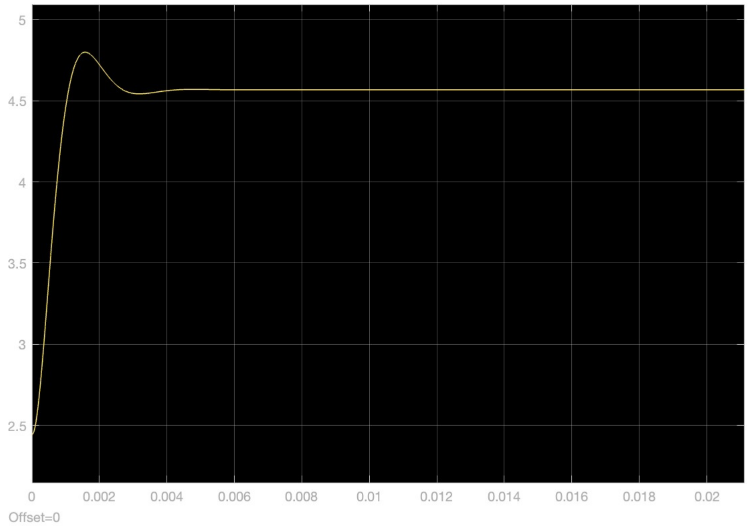

Figure 9: Riproduzione del gradino sul sistema non linearizzato

Il gradino è traslato di un valore $y_e = 2.4435$ e converge quindi a 4.4435, tuttavia i tempi di assestamento risultano notevolmente maggiori rispetto a quelli del sistema linearizzato.

6 Punto opzionale 2: Range di condizioni iniziali $[x1, x2]$

Richiesta: Supponendo un riferimento $w(t) = 0$, esplorare il range di condizioni iniziali dello stato del sistema non lineare (nell'intorno del punto di equilibrio) tali per cui l'uscita del sistema in anello chiuso converga a $h(x_e, u_e)$.

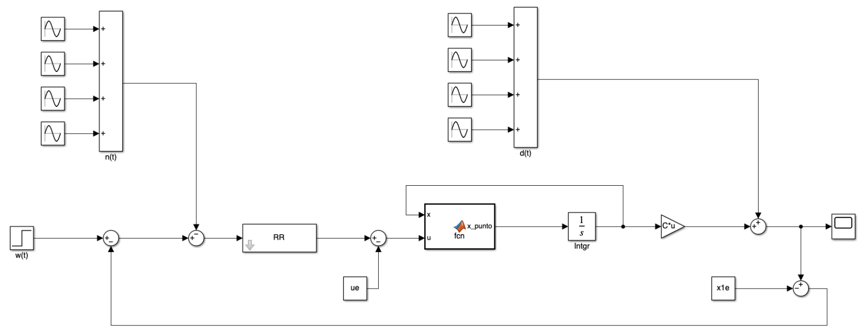

Figure 10: Grafico mostrante le condizioni iniziali (variabili) del blocco integratore

Per svolgere questo punto si è scelto di studiare il range di condizioni iniziali (da considerare nell'intorno del punto di equilibrio) scelto come segue:

- $x_1 \in [x_{1_e} - x_{1_e}, x_{1_e} + x_{1_e}]$.
- $x_2 \in [x_{2_e} - x_{1_e}, x_{2_e} + x_{1_e}]$.

Inoltre $h(x_e, u_e) = x_{1e} = 2.4435$

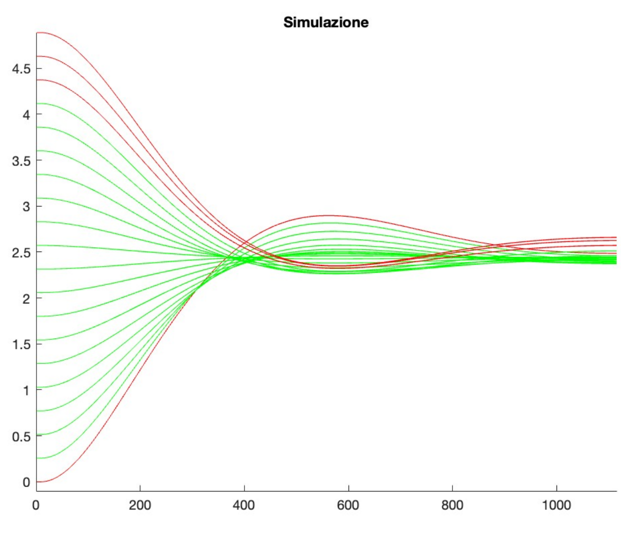

Figure 11: Analisi dell'uscita al variare delle condizioni iniziali

Nel grafico in figura vengono mostrate in rosso le curve $y(t)$ che non convergono a 2.44, mentre in verde quelle che rispettano la richiesta.