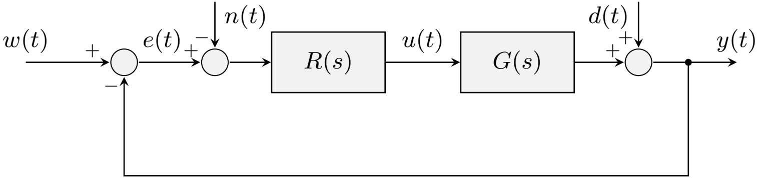
Controlli Automatici T

Stabilità e prestazioni su Matlab

Prof. Guido Carnevale

Department of Electrical, Electronic, and Information Engineering
Alma Mater Studiorum Università di Bologna
giuseppe.notarstefano@unibo.it
guido.carnevale@unibo.it

Funzioni di sensitività



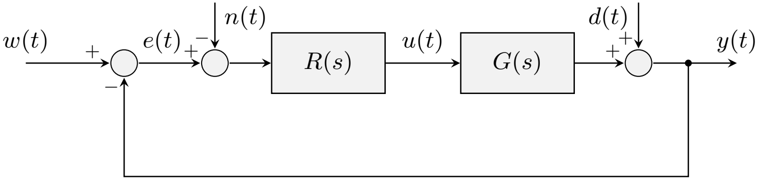
Ingressi (del sistema in anello chiuso):

- $w(t)$ riferimento (andamento desiderato per $y(t)$)
- $d(t)$ disturbo in uscita
- $n(t)$ disturbo di misura

Uscite di interesse:

- $e(t) = w(t) - y(t)$ errore di inseguimento
- $y(t)$ uscita controllata
- $u(t)$ ingresso di controllo del sistema in anello aperto (impianto)

Funzioni di sensitività



Funzioni di sensitività:
funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite di interesse.

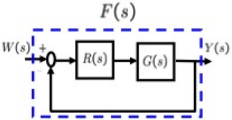
Funzioni di sensitività

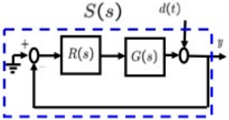
$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$ Funzione di sensitività

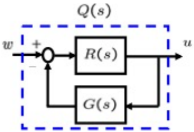
$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$ Funzione di sensitività complementare

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$ Funzione di sensitività del controllo

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$







Funzioni di sensitività: considerazioni

Stabilità

Il denominatore di tutte le funzioni di sensitività è lo stesso. Si ricordi che la stabilità è determinata dai poli della funzione di trasferimento.

Nota: Questo è consistente con il fatto che la stabilità del sistema (retroazionato) non dipende dal particolare ingresso considerato.

Relazioni tra le funzioni di sensitività

Le funzioni di sensitività $S(s)$ e $F(s)$ dipendono dal prodotto $L(s) = R(s)G(s)$, mentre $Q(s)$ dipende esplicitamente da $R(s)$.

Le funzioni di sensitività $S(s)$ e $F(s)$ sono legate tra loro, infatti

$$F(s) + S(s) = 1.$$

Per seguire fedelmente il riferimento $w(t)$ vorremmo $F(s) = 1$ e per annullare l'effetto del disturbo $d(t)$ vorremmo $S(s) = 0$.

Tuttavia se $F(s) = 1$ il disturbo $n(t)$ non sarebbe per niente attenuato.

Funzioni di sensitività: considerazioni

Sarà fondamentale la separazione di banda vista in precedenza:

- riferimento $w(t)$ e disturbo in uscita $d(t)$ in basse frequenze
- disturbo di misura $n(t)$ ad alte frequenze.

Importante

Per $F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$ cercheremo di avere

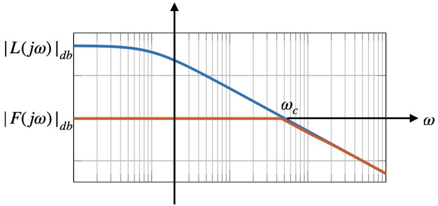
- $|F(j\omega)| \approx 1$ a basse frequenze (inseguimento di $w(t)$)
- $|F(j\omega)| \approx 0$ ad alte frequenze (abbattimento di $n(t)$)

Quindi progetteremo $R(j\omega)$ in modo che

- $|L(j\omega)| \gg 1$ a basse frequenze
- $|L(j\omega)| \ll 1$ ad alte frequenze

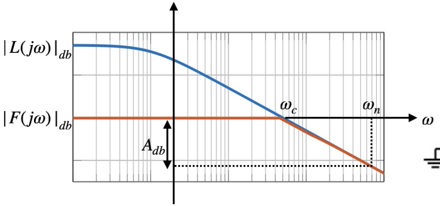
È utile effettuare una analisi in frequenza delle funzioni di sensitività.

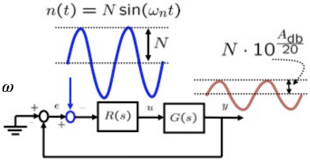
Funzione di sensitività complementare



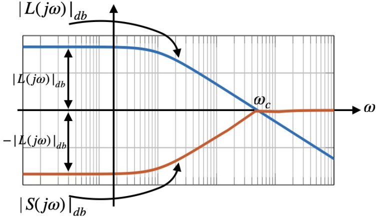
Andamento approx. di $|F(j\omega)|$:

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}\right| \approx \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \omega \le \omega_c \\ |L(j\omega)| & \text{se} \quad \omega > \omega_c \end{cases}$$



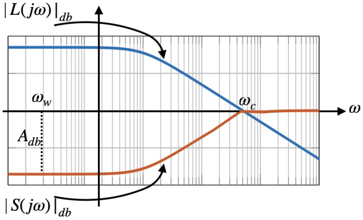


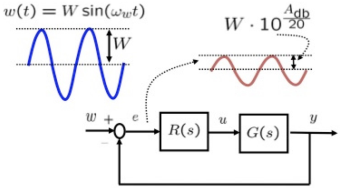
Funzione di sensitività



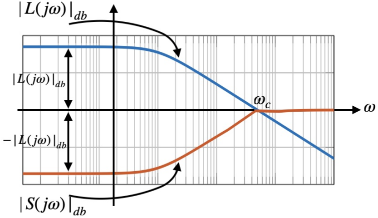
Andamento approx. di $|S(j\omega)|$:

$$|S(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+L(j\omega)}\right| \approx \begin{cases} \dfrac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{db} & \text{se} \quad \omega \leq \omega_c \\ 1 & \text{se} \quad \omega > \omega_c \end{cases}$$



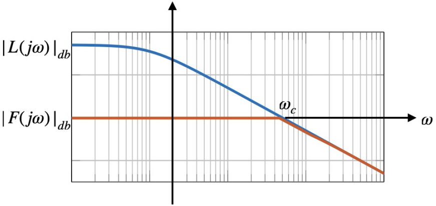


Approssimazione funzioni di sensitività



Andamento approx. di $|S(j\omega)|$:

$$|S(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+L(j\omega)}\right| \approx \begin{cases} \dfrac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{db} & \text{se} \quad \omega \leq \omega_c \\ 1 & \text{se} \quad \omega > \omega_c \end{cases}$$



Andamento approx. di $|F(j\omega)|$:

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}\right| \approx \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)| & \text{se} \quad \omega > \omega_c \end{cases}$$

Esercizio: si consideri la FdT $L(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ con $\mu = 50$, $T_1 = 50$ e $T_2 = 1000$. Si calcoli la pulsazione critica di $L(s)$. Si confrontino il diagramma di Bode di $L(s)$ ed $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ e, poi, quello di $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$ e $1/L(s)$.

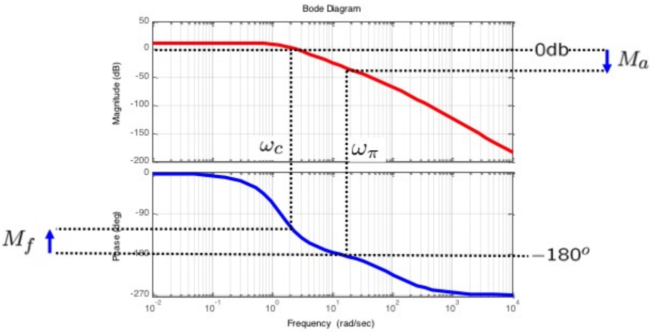
Margini di fase e ampiezza

Margine di fase:

$M_f = 180^o + \arg(L(j\omega_c))$ con ω_c t.c. $|L(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0$

Margine di ampiezza:

$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{\text{dB}}$ con ω_π t.c. $\arg(L(j\omega_\pi)) = -180^o$



La funzione margin

La funzione Matlab `permette` di calcolare M_a, M_f, ω_π ed ω_c di una FdT.

```
[M_a,M_f,omega_pi,omega_c] = margin(G);
```

Nota: la funzione `margin` calcola il margine di ampiezza in scala lineare e il margine di fase in gradi.

Nota: se usiamo `margin` senza assegnarne l'output otterremo una figura che mostra i margini visualizzati sul diagramma di Bode.

```
% senza output visualizziamo i margini sul diagramma di Bode
margin(G);
```

Criterio di Bode

Teorema (Criterio di Bode)
Si supponga che

1. $L(s)$ non abbia poli a parte reale (strettamente) positiva
2. il diagramma di Bode del modulo di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse a 0 dB.

Allora, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che risulti $\mu > 0$ (con μ guadagno statico di $L(j\omega)$) e $M_f > 0$.

Nota: la stabilità del sistema in retroazione è determinata dalla lettura di un solo punto sul diagramma di Bode di $L(j\omega)$.

Nota: M_f e M_a in genere vanno considerati simultaneamente e forniscono una misura della robustezza rispetto a incertezze su $L(s)$.

Margine di ampiezza e fase: tolleranza rispetto ad incertezze

Margine di ampiezza

L'aggiunta di un guadagno statico μ non modifica il diagramma delle fasi mentre trasla del valore $20\log(\mu)$ il diagramma del modulo. Di conseguenza l'aggiunta di un guadagno statico non modifica la pulsazione ω_π.

Possiamo quindi interpretare il margine di ampiezza M_a come il massimo guadagno statico ulteriore che si riesce a tollerare senza avere instabilità.

Margine di ampiezza e fase: tolleranza rispetto ad incertezze

Margine di ampiezza

L'aggiunta di un guadagno statico μ non modifica il diagramma delle fasi mentre trasla del valore $20\log(\mu)$ il diagramma del modulo. Di conseguenza l'aggiunta di un guadagno statico non modifica la pulsazione ω_π.
Possiamo quindi interpretare il margine di ampiezza M_a come il massimo guadagno statico ulteriore che si riesce a tollerare senza avere instabilità.

Margine di fase

L'aggiunta di un ritardo temporale $e^{-s\tau}$ non modifica il diagramma del modulo ma introduce uno sfasmamento $-\omega\tau$. Di conseguenza il ritardo temporale non modifica la pulsazione ω_c.
Possiamo quindi usare il margine di fase M_f per calcolare il massimo ritardo tollerabile $e^{-s\tau}$ con $\tau = \frac{M_f}{\omega_c}$.

Margine di ampiezza e fase: tolleranza rispetto ad incertezze

Margine di ampiezza

L'aggiunta di un guadagno statico μ non modifica il diagramma delle fasi mentre trasla del valore $20\log(\mu)$ il diagramma del modulo. Di conseguenza l'aggiunta di un guadagno statico non modifica la pulsazione ω_π.
Possiamo quindi interpretare il margine di ampiezza M_a come il massimo guadagno statico ulteriore che si riesce a tollerare senza avere instabilità.

Margine di fase

L'aggiunta di un ritardo temporale $e^{-s\tau}$ non modifica il diagramma del modulo ma introduce uno sfasmamento $-\omega\tau$. Di conseguenza il ritardo temporale non modifica la pulsazione ω_c.
Possiamo quindi usare il margine di fase M_f per calcolare il massimo ritardo tollerabile $e^{-s\tau}$ con $\tau = \frac{M_f}{\omega_c}$.

Esercizio: si consideri la FdT $L(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$ con $\mu = 100$, $\tau = 100$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0.01$ e $T_3 = 0.001$. Si calcolino M_a, M_f, ω_π ed ω_c e si visualizzino i margini sul diagramma di Bode. Calcolare la risposta a gradino di $L(s)$ retroazionata. Infine, mostrare la risposta a gradino ottenuta retroazionando $L_1(s) = 0.99 M_a L(s)$, $L_2(s) = 1.01 M_a L(s)$, $L_3(s) = e^{-0.99\frac{M_f}{\omega_c}s} L(s)$ e $L_4(s) = e^{-1.01\frac{M_f}{\omega_c}s} L(s)$.