

PDF: [[CAT\_parte2\_2023\_10\_11.pdf]]

## Linearizzare un sistema non lineare (tempo invariante)

Supponiamo di voler analizzare un sistema

- **NON** lineare
- tempo **invariante**

**vicino ad un equilibrio.**

Sia  $(x_e, u_e)$  una **coppia di equilibrio**, ( $f(x_e, u_e) = 0$ ), utilizziamo lo sviluppo in serie di Taylor fino al primo termine.

**Analogia:** Approssimazione lineare di una funzione

Modelleremo come LTI l'**errore relativo ad uno stato di equilibrio**.

**Perchè prendo un punto di equilibrio?**

*In generale posso farla su una generica traiettoria, ma se lo faccio su una coppia di equilibrio ottengo un sistema **tempo invariante**.*

### Come si linearizza?

Considero una traiettoria del sistema, a partire dall'equilibrio  $(x_e, u_e)$ .

Scriviamo lo stato  $x(t)$  come:

$$x(t) = x_e + \tilde{x}(t)$$

con:

- $x_e$ : stato di equilibrio
- $\tilde{x}(t)$ : variazione rispetto all'equilibrio

Scriviamo l'ingresso  $u(t)$  come:

$$u(t) = u_e + \tilde{u}(t)$$

con:

- $u_e$ : ingresso di equilibrio
- $\tilde{u}(t)$ : variazione rispetto all'equilibrio

Essendo una traiettoria, vale che

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(\overbrace{x_e + \tilde{x}(t)}^{x(t)}\right) = f\left(\overbrace{x_e + \tilde{x}(t)}^{x(t)}, \overbrace{u_e + \tilde{u}(t)}^{u(t)}\right)$$

Possiamo però anche esprimere  $f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))$  come serie di Taylor:

$$f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) = \underbrace{f(x_e, u_e)}_{0 \text{ per definizione}} - \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} (x_e + \tilde{x}(t) - x_e) - \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} (u_e + \tilde{u}(t) - u_e) - \text{term. di ord. sup.}$$

Ricordando che la  $x_e$  è costante, sappiamo che la derivata di  $x_e + \tilde{x}(t)$  è uguale alla semplice derivata di  $\tilde{x}(t)$ :

$$\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) = \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \dot{\tilde{x}}(t)$$

Unendo le due equazioni precedenti otteniamo che

$$\dot{\tilde{x}} = \text{sviluppo di taylor} + \text{termine di ordine superiore}$$

Ricordando che  $f(x_e, u_e) = 0$  per definizione:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. di ord. sup.}$$

Chiamiamo

$$A := \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_n} \end{array} \right] \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

$$B := \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial u_n} \end{array} \right] \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

Da cui (ripetendo gli stessi passaggi per  $y$ )

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + \text{term. ordine sup.} \quad \tilde{y} = C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) + \text{term. ordine sup.}$$

Se voglio buttare via il resto allora ci metto un circa uguale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + \text{term. ordine sup.} \\ &\approx A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \frac{d}{dt}\tilde{y}(t) &= C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) + \text{term. ordine sup.} \\ &\approx C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

### Sistema linearizzato

$$\dot{\Delta x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)\Delta y(t) = C\Delta x(t) + D\Delta u(t)$$

$\Delta x$  e  $\Delta u$  sono le approssimazioni delle variazioni.

### Stabilità e linearizzazione

**Teorema: stabilità asintotica di linearizzazioni** Dato un sistema **non lineare tempo invariante**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

#### Ipotesi

- $(x_e, u_e)$  è una coppia di equilibrio;
- il sistema linearizzato intorno ad  $(x_e, u_e)$  è **asintoticamente stabile** ==

**Tesi** L'equilibrio  $(x_e, u_e)$ , è (localmente) **asintoticamente stabile** nel sistema di partenza.

*Source: [[CAT\_parte2\_2023\_10\_11.pdf#page=103&selection=4,0,53,39|CAT\_parte2\_2023\_10\_11, page 103]]*

**Teorema: instabilità delle linearizzazioni** Dato un sistema non lineare tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

#### Ipotesi

- $(x_e, u_e)$  è una coppia di equilibrio.
- il sistema linearizzato intorno ad  $(x_e, u_e)$  ha **almeno un autovalore a parte reale positiva** ==

**Tesi** L'equilibrio  $(x_e, u_e)$  è **instabile**

*Source: [[CAT\_parte2\_2023\_10\_11.pdf#page=103&selection=55,0,103,11|CAT\_parte2\_2023\_10\_11, page 103]]*

---

**Nota:** Non si può dire nulla in caso si abbiano autovalori con  $\Re(\lambda) \leq 0$  ma di cui almeno uno ha  $\Re(\lambda) = 0$

**Analogia con funzione scalare:** Se ho una derivata di una funzione = 0 non ho idea se la funzione cresce o decresce.

Se ho un autovalore nullo mi sta dicendo che la linearizzazione non ha informazioni su come varia la funzione di stato.

## Controllo non-lineare mediante linearizzazione

Consideriamo un sistema nonlineare generico:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

e la sua linearizzazione intorno all'equilibrio  $(x_e, u_e)$

$$\dot{\Delta x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

Se  $\Delta x \rightarrow 0$ , allora  $x(t) \rightarrow x_e$  (ricordiamo che  $x(t) \approx x_e + \Delta x$ ).

Scelgo quindi una  $\Delta u(t)$  che sia funzione dello stato, ovvero

$$\Delta u(t) = K \Delta x(t) + \Delta v(t)$$

*con  $\Delta v(t)$  un termine che mi riservo per eventuali altre correzioni*

Ottengo quindi un sistema ad anello chiuso del tipo

$$\dot{\Delta x}(t) = (A_e + B_e K) \Delta x(t) + B_e \Delta v(t)$$

Progetto  $K$  in modo che la matrice della dinamica  $(A_e + B_e K)$  sia asintoticamente stabile.

Grazie ai teoremi visti in precedenza, anche nel sistema non lineare in anello chiuso otterrò un equilibrio (localmente) asintoticamente stabile

### Legge di controllo finale

$$u(t) = u_e + K \cdot \overbrace{(x(t) - x_e)}^{\approx \Delta x} + \tilde{v}(t) \approx u_e + K \cdot \Delta x(t) + \tilde{v}(t)$$