

Controlli Automatici T

Risposta in frequenza su Matlab

| Prof. Guido Carnevale

Department of Electrical, Electronic, and Information Engineering
Alma Mater Studiorum Università di Bologna
`giuseppe.notarstefano@unibo.it`
`guido.carnevale@unibo.it`

Queste slide sono ad uso interno del corso
Controlli Automatici T dell'Università di Bologna a.a. 25/26.

Risposta in frequenza su Matlab

Data una FdT $G(s)$, possiamo valutarla tramite la funzione Matlab `evalfr` in ogni punto del piano complesso.

```
omega = 10;  
Gjw = evalfr(G, j*omega);
```

Il risultato di `evalfr` è un numero complesso a tutti gli effetti. Quindi possiamo valutarne modulo e fase attraverso le funzioni `abs` ed `angle`.

```
Gjw_mod = abs(Gjw);  
Gjw_phase = angle(Gjw);
```

La funzione `evalfr` ammette come ingresso anche sistemi nello spazio degli stati.

```
omega = 10;  
modello = ss(A,B,C,D);  
Gjw = evalfr(modello, j*omega);
```

Risposta in frequenza: dal dominio di Laplace al dominio del tempo

Dando in ingresso ad una $G(j\omega)$ con poli a parte reale negativa una sinusoide con pulsazione ω , ampiezza U e fase ϕ generiamo un'uscita sinusoidale caratterizzata da:

- pulsazione ω
- ampiezza $U|G(j\omega)| \implies$ fattore moltiplicativo $|G(j\omega)|$ rispetto all'ingresso
- fase $\phi + \arg(G(j\omega)) \implies$ sfasamento $\arg(G(j\omega))$ rispetto all'ingresso

$$u(t) = U \sin(\omega t + \phi) \implies y(t) = U|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi + \arg(G(j\omega)))$$

Risposta in frequenza: dal dominio di Laplace al dominio del tempo

Dando in ingresso ad una $G(j\omega)$ con poli a parte reale negativa una sinusoide con pulsazione ω , ampiezza U e fase ϕ generiamo un'uscita sinusoidale caratterizzata da:

- pulsazione ω
- ampiezza $U|G(j\omega)| \implies$ fattore moltiplicativo $|G(j\omega)|$ rispetto all'ingresso
- fase $\phi + \arg(G(j\omega)) \implies$ sfasamento $\arg(G(j\omega))$ rispetto all'ingresso

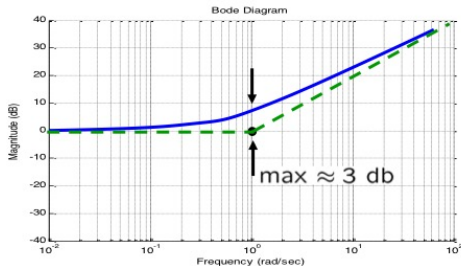
$$u(t) = U \sin(\omega t + \phi) \implies y(t) = U|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi + \arg(G(j\omega)))$$

Esercizio: si consideri un sistema del primo ordine con guadagno statico 0.75, polo reale in -100 e nessun zero. Gli si dia in ingresso una sinusoide con pulsazione $\omega = 100 \text{ rad/s}$, ampiezza $U = 1$ e fase $\phi = 0$. Si calcoli fattore moltiplicativo e sfasamento. Si mostri l'uscita nel dominio del tempo confrontandola con l'ingresso.

Diagrammi di Bode: zero reale (ampiezza)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ (zero reale)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

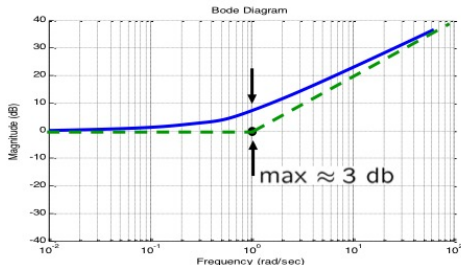


Nota (diagramma asintotico): fino a $\omega = \frac{1}{|\tau|}$, **pulsazione di taglio**, andamento costante a 0dB.

Diagrammi di Bode: zero reale (ampiezza)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ (zero reale)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

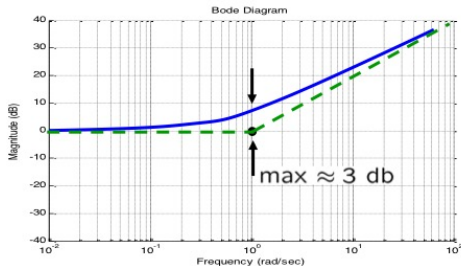


Nota (diagramma asintotico): A partire da $\omega = \frac{1}{|\tau|}$, **pulsazione di taglio**, retta $\log \omega \mapsto -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega$ con pendenza 20dB/dec.

Diagrammi di Bode: zero reale (ampiezza)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ (zero reale)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$



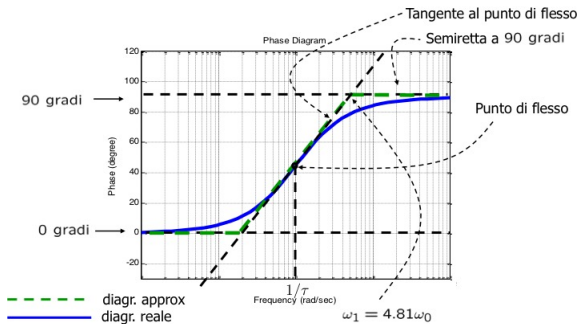
Nota (diagramma reale): scostamento massimo per $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ dove

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + 1} = 20 \log \sqrt{2} \approx 3.$$

Diagrammi di Bode: zero reale negativo (fase)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$, $\tau > 0$ (zero reale negativo)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

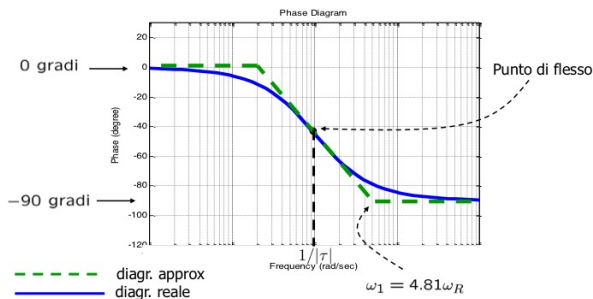


Nota (diagramma reale): il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la **pulsazione di taglio** $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Diagrammi di Bode: zero reale positivo (fase)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$, $\tau < 0$ (zero reale positivo)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

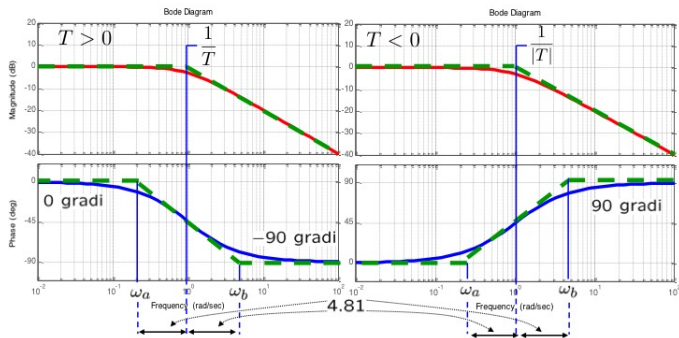


Nota (diagramma reale): il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la **pulsazione di taglio** $\omega = \frac{1}{|\tau|}$.

Diagrammi di Bode: polo reale

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ (polo reale)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

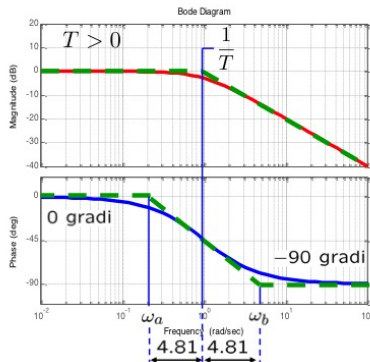


Nota: diagramma ottenuto da quello dello zero ribaltando rispetto all'asse reale (consistentemente con il segno di T).

Diagrammi di Bode: polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, $T > 0$ (polo reale negativo).

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

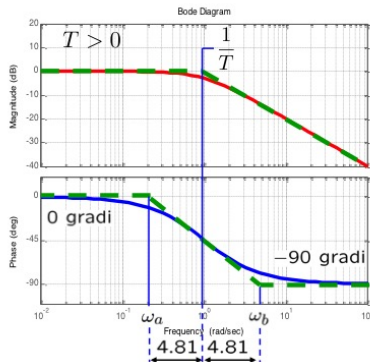


Nota (diagramma asintotico): Fino a $\omega = \frac{1}{T}$, **pulsazione di taglio**, andamento costante a 0dB.

Diagrammi di Bode: polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, $T > 0$ (polo reale negativo).

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

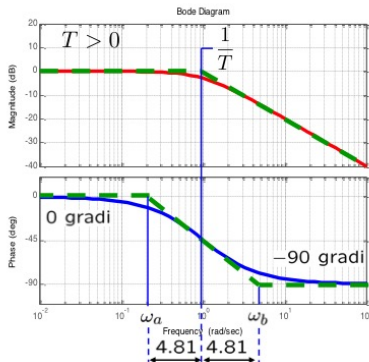


Nota (diagramma asintotico): A partire da $\omega = \frac{1}{T}$, **pulsazione di taglio**, retta $\log \omega \mapsto 20 \log \frac{1}{|T|} - 20 \log \omega$ con pendenza -20dB/dec .

Diagrammi di Bode: polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, $T > 0$ (polo reale negativo).

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

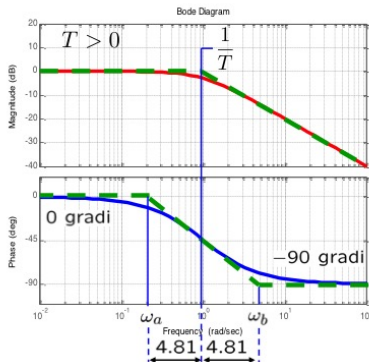


Nota (diagramma reale): scostamento massimo per $\omega = \frac{1}{T}$ dove
 $|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + 1} = -20 \log \sqrt{2} \approx -3$.

Diagrammi di Bode: polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, $T > 0$ (polo reale negativo).

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$



Nota (diagramma reale): il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la **pulsazione di taglio** $\omega = \frac{1}{T}$.

Diagrammi di Bode in Matlab

La funzione `bode` permette di ottenere i diagrammi di Bode delle FdT.

```
bode(G);
```

Le opzioni di default della funzione `bode` prevedono assi orizzontali in scala logaritmica ed espressi in rad/s ed assi verticali in scala logaritmica (dB per l'ampiezza e deg per la fase). Volendo è possibile cambiare queste opzioni.

La funzione `bode` ammette come argomento la rappresentazione nello spazio degli stati.

```
modello = ss(A,B,C,D);  
bode(modello);
```

Diagrammi di Bode in Matlab

La funzione `bode` permette di ottenere i diagrammi di Bode delle FdT.

```
bode(G);
```

Le opzioni di default della funzione `bode` prevedono assi orizzontali in scala logaritmica ed espressi in rad/s ed assi verticali in scala logaritmica (dB per l'ampiezza e deg per la fase). Volendo è possibile cambiare queste opzioni.

La funzione `bode` ammette come argomento la rappresentazione nello spazio degli stati.

```
modello = ss(A,B,C,D);  
bode(modello);
```

Esercizio: definire un sistema del primo ordine con guadagno statico pari a 100, polo in -0.1 e zero in -0.01 . Mostrare i diagramma di Bode dei contributi elementari e poi quello della FdT complessiva.

Diagrammi di Bode: contributi elementari

Esercizio

Mostrare diagramma di Bode di $G(s) = \mu$ con $\mu = 0.1, 1, 10, 100, 1000$.

Mostrare diagramma di Bode di $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ con $\tau = 0.1, 1, 10, 100, 1000$.

Mostrare diagramma di Bode di $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ con $\tau = -0.1, -1, -10, -100, -1000$.

Mostrare diagramma di Bode di $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ con $T = 0.1, 1, 10, 100, 1000$.

Polo reale: proprietà filtrante

Consideriamo il polo reale negativo

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

Per $\omega \gg 1/T$ l'ampiezza $|G(j\omega)|$ è molto bassa.

Si può sfruttare questa proprietà per ottenere un'azione filtrante di tipo passabasso in caso di disturbi ad alta frequenza:

$$u(t) = \underbrace{U_n \sin(\omega_n t)}_{\text{Segnale nominale (desiderato)}} + \underbrace{U_d \sin(\omega_d t)}_{\text{Segnale di disturbo (non desiderato)}}$$

Polo reale: proprietà filtrante

Consideriamo il polo reale negativo

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

Per $\omega \gg 1/T$ l'ampiezza $|G(j\omega)|$ è molto bassa.

Si può sfruttare questa proprietà per ottenere un'azione filtrante di tipo passabasso in caso di disturbi ad alta frequenza:

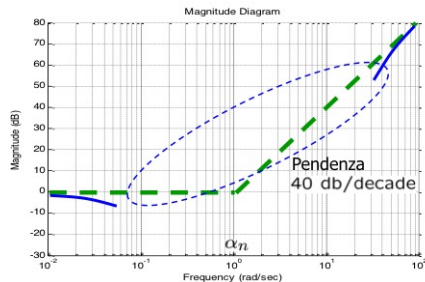
$$u(t) = \underbrace{U_n \sin(\omega_n t)}_{\text{Segnale nominale (desiderato)}} + \underbrace{U_d \sin(\omega_d t)}_{\text{Segnale di disturbo (non desiderato)}}$$

Esercizio: Si consideri $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$ con $T = 0.05$. Si mostri la risposta di $G(s)$ all'ingresso sinusoidale con ampiezza unitaria e pulsazione $\omega_n = 2$ con o senza un disturbo sinusoidale di ampiezza unitaria e pulsazione $\omega_d = 10000$.

Diagrammi di Bode: zeri c.c. (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri c.c.)

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$

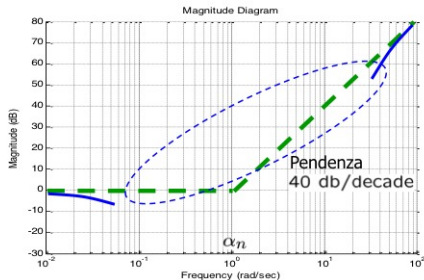


Nota (diagramma asintotico): Fino a $\omega = \alpha_n$, **pulsazione di taglio**, andamento costante a 0dB.

Diagrammi di Bode: zeri c.c. (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri c.c.)

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$

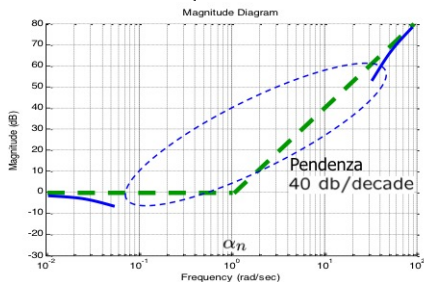


Nota (diagramma asintotico): A partire da $\omega = \alpha_n$, **pulsazione di taglio**, retta $\log \omega \mapsto -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega$ con pendenza 40dB/dec.

Diagrammi di Bode: zeri c.c. (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri c.c.)

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$

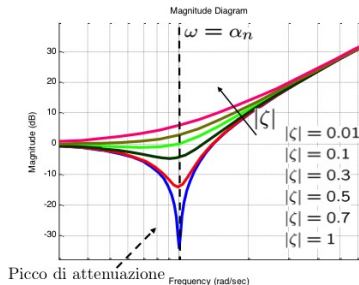


Nota (diagramma reale): scostamento significativo nella zona tratteggiata dipendente dal valore di ζ .

Diagrammi di Bode: zeri c.c. (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri c.c.)

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$

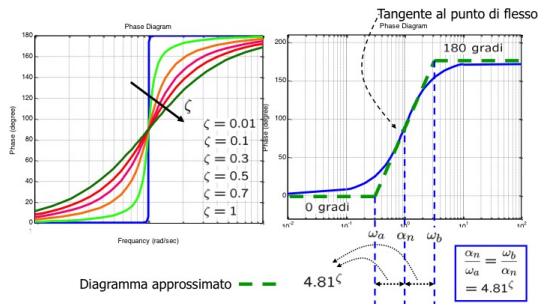


Minimo a pulsazione $\omega_r = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ con $|G_d(j\omega_r)| = 2|\zeta| \sqrt{1 - \zeta^2}$

Diagrammi di Bode: zeri c.c. parte reale negativa (fase)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, $\zeta > 0$ (coppia di zeri c.c.)

$$\arg(G_c(j\omega)) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

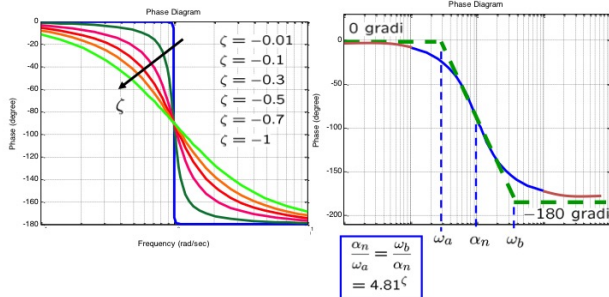


Nota (diagramma reale): il cambio di fase dipende in modo significativo dal valore di ζ .

Diagrammi di Bode: zeri c.c. parte reale positiva (fase)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, $\zeta < 0$ (coppia di zeri c.c.)

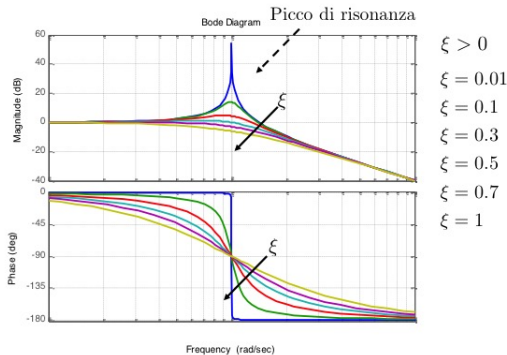
$$\arg(G_c(j\omega)) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ -180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



Nota (diagramma reale): il cambio di fase dipende in modo significativo dal valore di ζ .

Diagrammi di Bode: poli c.c. parte reale negativa

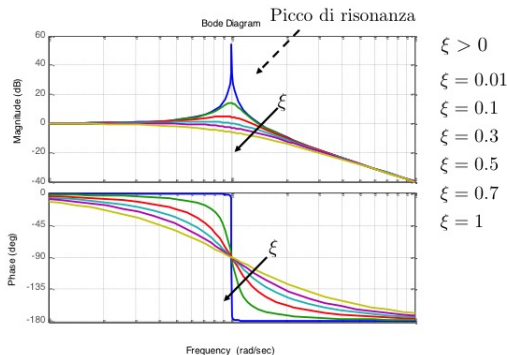
Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi > 0$ (coppia di poli c.c.)



Nota: diagramma ottenuto da quello degli zeri ribaltando rispetto all'asse reale (caso $\xi > 0$ corrispondente a $\zeta > 0$).

Diagrammi di Bode: poli c.c. parte reale negativa

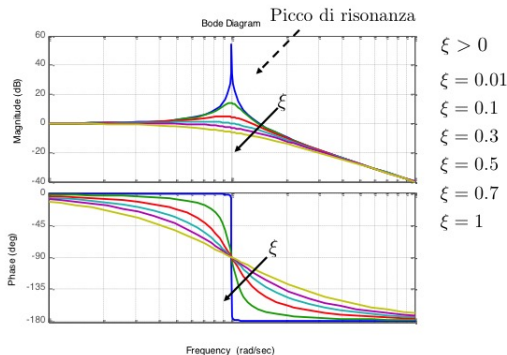
Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi > 0$ (coppia di poli c.c.)



Picco di risonanza alla pulsazione di risonanza $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ con $|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1-\xi^2}}$.

Diagrammi di Bode: poli c.c. parte reale negativa

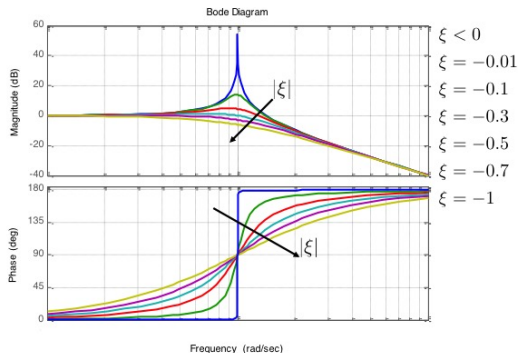
Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi > 0$ (coppia di poli c.c.)



Alla frequenza ω_n si ha $|G_d(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\xi|}$.

Diagrammi di Bode: poli c.c. parte reale positiva

Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi < 0$ (coppia di poli c.c.)



Nota: diagramma ottenuto da quello degli zeri ribaltando rispetto all'asse reale (caso $\xi < 0$ corrispondente a $\zeta < 0$).

Diagrammi di Bode: contributi elementari

Esercizio

Mostrare diagramma di Bode di $G(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ con $\alpha_n = 10$ e $\zeta = 0.1, 0.4, 0.7, 1$.

Mostrare diagramma di Bode di $G(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ con $\alpha_n = 10$ e $\zeta = -0.1, -0.4, -0.7, -1$.

Mostrare diagramma di Bode di $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$ con $\omega_n = 10$ e $\xi = 0.1, 0.4, 0.7, 1$.

Mostrare diagramma di Bode di $G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$ con $\omega_n = 10$ e $\xi = -0.1, -0.4, -0.7, -1$.

Approssimazione a poli complessi coniugati dominanti

Consideriamo una $F(s)$ con una coppia di poli complessi coniugati ed altri poli e zeri:

$$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{N'(s)}{D'(s)}$$

Supponiamo che tutti i poli e gli zeri abbiano parte reale negativa.

Se $\xi\omega_n$ è molto più piccolo (in valore assoluto) rispetto a zeri e poli di $N'(s)/D'(s)$, allora i poli complessi coniugati dovuti al termine $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ saranno dominanti nella risposta di $F(s)$ che quindi possiamo approssimare $F(s)$ tramite quella di:

$$\tilde{F}(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Approssimazione a poli complessi coniugati dominanti

Consideriamo una $F(s)$ con una coppia di poli complessi coniugati ed altri poli e zeri:

$$F(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \frac{N'(s)}{D'(s)}$$

Supponiamo che tutti i poli e gli zeri abbiano parte reale negativa.

Se $\xi \omega_n$ è molto più piccolo (in valore assoluto) rispetto a zeri e poli di $N'(s)/D'(s)$, allora i poli complessi coniugati dovuti al termine $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$ saranno dominanti nella risposta di $F(s)$ che quindi possiamo approssimare $F(s)$ tramite quella di:

$$\tilde{F}(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

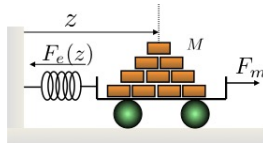
Esercizio: si consideri $F(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)}$ con $\mu = 10$, $\xi = 0.5$, $\omega_n = 5$, $\tau_1 = 0.001$, $\tau_2 = 0.005$, $T_1 = 0.01$, $T_2 = 0.002$ e $T_3 = 0.0001$. Si confrontino la risposte a gradino di $F(s)$ e $\tilde{F}(s) = \frac{\mu \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$ e si mostrino i diagrammi di Bode.

Esempio: carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{b}{M}x_2(t) - \frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$



Si può verificare che

$$G(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \left(sI - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}}_A \right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B = \frac{1}{k} \frac{\frac{k}{M}}{s^2 + 2\frac{b}{2\sqrt{kM}}\sqrt{\frac{k}{M}}s + \frac{k}{M}}$$

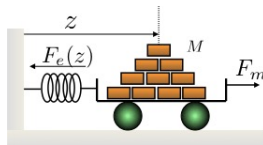
ovvero un sistema del secondo ordine $G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ con $\mu = \frac{1}{k}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$,
 $\xi = \frac{b}{2\sqrt{kM}}$.

Esempio: carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{b}{M}x_2(t) - \frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$



Si può verificare che

$$G(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \left(sI - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}}_A \right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B = \frac{1}{k} \frac{\frac{k}{M}}{s^2 + 2\frac{b}{2\sqrt{kM}}\sqrt{\frac{k}{M}}s + \frac{k}{M}}$$

ovvero un sistema del secondo ordine $G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ con $\mu = \frac{1}{k}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $\xi = \frac{b}{2\sqrt{kM}}$.

Esercizio: Considerare il carrello con $k = 2 \text{ N/m}$, $b = 0.1 \text{ Ns/m}$ ed $M = 0.5 \text{ kg}$. Mostrare i parametri μ , ξ ed ω_n . Forzare con $u(t) = \cos(\omega_n t)$ e mostrare la risposta forzata del sistema.