PDF: [[CAT_parte2_2023_10_11.pdf]]

Quando parleremo di un sistema parleremo di **una ODE ==ASTRATTA==**, perchè descrive il comportamento nel tempo di un sistema.

Questo perchè $t \in \mathbb{R}$.

> [!warning] Importante Non vogliamo controllare **SOLO** il circuito elettrico. Voglio trovare un SET di equazioni ODE generali, tali per cui **il modello può essere applicato su vari casi**.
>
> [!warning] Notazione Con il punto indichiamo **sempre** le derivate **rispetto al tempo**

Forma di stato

Sistemi in **forma di stato**: un sistema che descriviamo con due equazioni: - l'equazione **di stato** (una ODE **del primo ordine**) - l'equazione **di uscita** (una equazione algebrica)

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: **stato** del sistema all'istante t $u(t) \in \mathbb{R}^m$: **ingresso** del sistema all'istante t $y(t) \in \mathbb{R}^p$: **uscita** del sistema all'istante t

Vedi onenote "Sistemi in forma di stato"

> [!warning] Attenzione Ricorda che **l'equazione di stato** è un **equazione vettoriale**, ovvero **è composta da n componenti**.
>
> [!warning] Attenzione Per noi ogni componente dello stato **è uno scalare**.
>
> Se ho un vettore devo scomporlo in più variabili di stato.

Stato iniziale

Abbiamo bisogno però anche l'**inizializzazione** del sistema, ovvero lo **stato iniziale**

> [!tldr] Stato iniziale
> $$x(t_0) = x_0$$
>
> t_0: tempo iniziale
>
> [!question] E' limitante il fatto che ci sia solo il primo ordine?
>
> **NO**, perchè abbiamo un vettore di ODE del primo ordine e possiamo legarle da derivate, quindi derivata prima di derivata prima = derivata seconda.

Sistemi causali

> Se la soluzione x(t) a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau), \tau \geq t_0$, allora il sistema è detto **causale**.

> [[CAT_parte2_2022_09_20.pdf#page=8&selection=3,1,41,16|CAT_parte2_2022_09_20, page 8]]

Ovvero la soluzione non dipende dagli ingressi futuri del sistema, ovvero è un sistema realizzabile fisicamente.

Per i sistemi causali, sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione f, **si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'eq. di stato**. ### Sistemi discreti

La variabile **tempo è un numero intero**.

L'equazione di stato non è differenziale, ma è una **equazione alle differenze finite (FDE)**.

Esempi

- pipeline di un processore o di un processo di produzione, intrinsecamente discreti
- tutti gli algoritmi sono sistemi discreti
- per usare tool devo lavorare in discreto oppure chiedere ai tool adeguati

Esempio: circuito elettrico slide 7

Sensore che misura $v_R(t)$ La leggo e la chiamo **uscita** del sistema.

$$y(t) = u(t) - x(t)$$

> [!warning] In questo caso potrei ricavare lo stato dalle variabili di uscita, **ma questa cosa non è detta**.

Esempio: carrello - slide 8

Ipotizziamo un **centro di massa**. Le forze agiscono sul centro di massa.

Esempio: auto in rettilineo - slide 9

Esempio: pendolo - slide 11

Traiettoria di un sistema

E' una particolare funzione del tempo $(x(t), u(t))$ che deve soddisfare l'equazione di stato.

- $x(t)$ traiettoria di stato
- $y(t)$ traiettoria dell'uscita

> [!warning] Nota Per sistemi **senza ingresso** (non forzati) la traiettoria $x(t), t \geq t_0$ è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0}

Come ottenerla facilmente?

1. Scegliamo un ingresso
2. Integriamo

> [!tip] Obiettivo Avere uno **stato desiderato** e capire **quali uscite dare** per fare in modo di ottenerlo. ### Equilibrio di un sistema di controllo *Vedi slide, pagina 13*

Coppia di equilibrio

(x_e, u_e) è una coppia di equilibrio se

$x(t_0) = x_e$ $u(t) = u_e, \quad \forall t \geq t_0$

allora

$x(t) = x_e, \forall t \geq t_0$

Vedi "equilibri del pendolo" su OneNote

Proprietà sistemi tempo invarianti continui

Data una coppia di equilibrio (x_e, u_e), vale che

$$f(x_e, u_e) = 0$$

Richiami di calcolo matriciale ↗

Classificazione di sistemi in forma di stato

L'ideale sarebbe ottenere una f ed una h assolutamente generiche. Il problema è che più teniamo generali ste due funzioni, meno possiamo dire.

Quindi prendiamo delle **sottoclassi** e le analizziamo. - SISO (Single Input Single Output) - MIMO (Multiple Input Multiple Output)

Sistemi monovariabili (SISO)

Lo stato ha una generica dimensione n, ma l'ingresso e l'uscita hanno **dimensione 1**.

$y \in \mathbb{R}$ $u \in \mathbb{R}$

Sistemi strettamente propri

Proprio $\sim$ Causalità

- **Propri**
- **Strettamente propri**: quando l'equazione di uscita non dipende dall'ingresso.

> [!tip] Nel caso di un sistema strettamente proprio una **discontinuità** in ingresso non determina una discontinuità in uscita.

Sistemi forzati

- **Non forzati**: quando non ha un ingresso
- **Forzati**: quando ha un ingresso

Fissata la $x(t_0) = x_0$ il sistema procederà allo stesso modo ogni volta (considerando che la f considera anche il disturbo come funzione del tempo).

> [!warning] Nota Sceglieremo $u(t)$ come "funzione di $x(t)$ o $y(t)$".
>
> Preferibilmente dalla $y(t)$ visto che la $x(t)$ in generale è non nota.

Sistemi tempo invarianti

sistemi tempo **invarianti** $\subset$ sistemi tempo **varianti**

Vedi onenote per i grafici

> Tempo invarianti

[[CAT_parte2_2022_09_20.pdf#page=32&selection=70,0,70,16|CAT_parte2_2022_09_20, page 32]]

Data una traiettoria $(x(t), u(t)), t > 0$, $\forall \Delta \in \mathbb{R}$ vale che per $x(t_0 + \Delta) = x_0$, allora $(x_\Delta(t), U_\Delta(t)) = (x(t-\Delta), u(t-\Delta))$ è una traiettoria.

> [!tip] Non dipendenza dal tempo Si dimostra che un sistema è tempo invariante *se e solo se*, le funzioni f e h **non dipendono esplicitamente dal tempo**.

$$(x, u) \longmapsto f(x, u)$$

> [!info] **Per sistemi tempo invarianti** prenderemo, senza perdere generalità,
> $$t_0 = 0$$

Sistemi lineari

Un sistema sotto forma di stato è **lineare** se e solo se: - la funzione di stato f è **lineare** in x e in u - la funzione di uscita h è **lineare** in x e in u

> [!tip] Coppia di equilibrio per un **sistema lineare**
>
> $(0, 0)$ è sempre un equilibrio per un sistema lineare.
>
> Quindi, **nei sistemi lineari c'è sempre almeno una coppia di equilibrio**, essendo che la funzione è lineare e quindi lo 0 va in 0.

Rappresentazione matriciale

Se il sistema è **lineare** posso rappresentarlo in maniera **matriciale**.

> [!error] Questa è una notazione compatta!!!!

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
\dot{y}(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
\end{aligned}
$$

$$
A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \; B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & ... & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots(t) \\ b_{n1}(t) & ... & b_{nm}(t) \end{bmatrix} \; C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & ... & c_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}(t) & ... & c_{pn} \end{bmatrix} \; D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & ... \\ \vdots & \ddots \\ d_{p1}(t) & ... \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}(t) & ... & b_{1m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & ... & b_{nm}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}
$$

> [!tip] Il modello del sistema è **completamente descritto** da 4 matrici!

Attenzione alla grandezza delle matrici! - $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ - $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Nel caso di sistemi SISO, avremo una particolare struttura.

Sistema lineare tempo invariante

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

Le matrici A, B, C, D non dipendono dal tempo (e.g. sono **costanti**).

Sistema lineare SISO

Nei sistemi lineari SISO ($m = 1, p = 1$) - la matrice B è un vettore riga ($n \times 1$) - la matrice C è un vettore colonna ($1 \times n$) - la matrice D è uno scalare (1×1)

Principio di sovrapposizione degli effetti

> [!error] Vale solo per i **sistemi lineari**! (anche tempo varianti)

Se prendo una *combinazione lineare* degli stati iniziali e la **stessa** combinazione lineare di traiettorie, **ottengo come traiettoria la combinazione lineare delle traiettorie**.

[[CAT_parte2_2022_09_20.pdf#page=42|Vedi slides]]

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dato lo stato iniziale $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0_a} + \beta x_{0_b}$ si ha che

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è una traiettoria del sistema.

Per chi vuole c'è la dimostrazione a pag 43 (materiale aggiuntivo)

Scomposizione di un'evoluzione di un sistema lineare in evoluzione forzata ed evoluzione libera

Vedi onenote per dettagli: "Scomposizione di un sistema lineare"

Considero due traiettorie di stato, quella ottenuta

	$x_l(t)$	$x_f(t)$
Stato iniziale	x_0	0
Ingresso	0	$u(t)$
	Evoluzione **libera**	Evoluzione **forzata**

Ogni evoluzione di un sistema lineare si può scrivere come la somma di - un'**evoluzione libera** - un'**evoluzione forzata**

Entrambe le evoluzioni valgono dallo **stesso istante iniziale**. Quindi *fisicamente* dovrei fare gli esperimenti in *contemporanea*.

> [!tip] La stessa cosa vale per le uscite, ovvero
>
> $$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Evoluzione libera di un LTI

Quando studio l'evoluzione libera del sistema, ne studio la componente $Ax(t)$

Traiettorie: LTI esempio scalare

Vedi pagina 48

Traiettorie: LTI caso generale

In generale so che quindi l'evoluzione dello stato di un sistema è dato da - un **esponenziale** che rappresenta l'evoluzione libera - un **integrale di convoluzione** che rappresenta l'evoluzione forzata

> [!warning] Importante Nel caso dell'evoluzione libera, **tutto il comportamento del sistema è rappresentato dalla matrice** A.

Esponenziale di matrice

$$e^{At} := I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + ...$$

Proprietà della matrice esponenziale

Esponenziale e cambio di base

$$e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$$

Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi

> L'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi è una matrice diagonale a blocchi in cui ogni blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente della matrice di partenza.

[[CAT_parte2_2022_09_20.pdf#page=50&selection=22,0,25,69|CAT_parte2_2022_09_20, page 50]]

Modi naturali del sistema (LTI)

L'**evoluzione libera** di un ***sistema lineare tempo invariante*** sarà un vettore dove tutte le componenti sono *combinazioni lineari* di:

$$t^q e^{\lambda t}$$

- con λ autovalori della matrice A. - con eventualmente $\lambda \in \mathbb{C}$

I termini t^q $e^{\lambda t}$ sono detti **modi naturali** del sistema.

> [!tldr] Ricorda L'**evoluzione libera** dello stato è **combinazione lineare dei modi**.

> [!info] Evoluzione libera dell'uscita Poichè l'uscita è lineare nello stato, anche l'**evoluzione libera dell'uscita** è combinazione lineare dei modi

Gli autovalori possono essere - reali - complessi coniugati

> [!warning] Perchè? Si dimostra che un polinomio a coefficienti tutti reali ha radici reali o complessi coniugati.
>
> Si dimostra che i coefficienti jiq corrispondenti a i e ¯ i sono anch'essi complessi coniugati.

[[CAT_parte2_2022_09_20.pdf#page=56&selection=109,0,125,35|CAT_parte2_2022_09_20, page 56]]

Si verifica quindi per calcolo diretto che le soluzioni $x_{l,j}(t)$ sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati $\lambda_i =$

$\sigma_i + j\omega_i$ e $\bar{\lambda}_i$ sono del tipo:

$$t^{q-1} e^{\sigma_i t} cos(\omega_i t + \phi_i)$$

con opportuni valori della fase ϕ_i.

[[CAT_parte2_2022_09_20.pdf#page=56&selection=126,0,157,13|CAT_parte2_2022_09_20, page 56]]

Caso molteplicita algebrica = molteplicita geometrica

Supponiamo che le **molteplicità algebriche** $n_1, \ldots, n_r$ degli autovalori di A coincidano con le **molteplicità geometriche** (ad es quando gli **autovalori sono distinti**).

Si dimostra che i coefficienti h_i sono tutti pari ad 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

Modo	Autovalore
$e^{\lambda_i t}$	Reale
$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \omega_i)$	Complesso coniugato

> [!info] Molteplicità algebrica Grado con cui si trova l'autovalore nel polinomio caratteristico

> [!info] Molteplicità geometrica Grandezza dell'autospazio di quell'autovalore #### Autovalori reali semplici ($\Im(\lambda) = 0$)

$\lambda > 0$ -> sistema **diverge** $\lambda = 0$ -> sistema **stabile** $\lambda < 0$ -> sistema **converge** a stabilità

Caso generale

Autovalori reali con m.a > m.g

$t^q \neq 0$

$\lambda > 0$: diverge comunque $\lambda = 0$: dipende dal valore di t^q. Può divergere. Diverge come un polinomio in t, non come un esponenziale though. $\lambda < 0$: gli esponenziali vanno a zero più velocemente dei polinomi. Nella parte iniziale predomina la parte divergente, poi però la funzione va a zero.

> [!warning] Occhio al transitorio! Per *lambda* < 0 devo stare attento al transitorio!

Autovalori complessi coniugati con m.a. > m.g.

$\sigma_i > 0$: diverge comunque. Va ad infinito sinusoidalmente. $\sigma_i = 0$: come nel caso precedente, dipende dal valore di t^q. Può divergere. Diverge come un polinomio in t, non come esponenziale. $\sigma_i = 0$: crescita iniziale. Dopo un po' l'esponenziale predomina ma poi mi porta il segnale a zero.

> [!error] Attenzione ai σ_i! Sia per $\sigma_i > 0$ che per $\sigma_i = 0$ devo stare attento, perchè nel primo caso diverge, nel secondo caso PUO' divergere.

Esempio: carrello (pag 47)

Esempio con controllo su onenote

Nel caso di $h^2 = 4Mk$, la molt algebrica è 2 e si dimostra che la molt. geom. = 1.

> [!warning] Se la $u(t)$ è solo funzione dello stato possiamo considerare il sistema come comunque "ad evoluzione libera".

Equilibrio: richiami per sistemi tempo invarianti continui

Se (x_e, u_e) è una **coppia di equilibrio** - $f(x_e, u_e) = 0$ (ricordiamo che f è la *derivata*)

Se il sistema non è forzato - $f(x_e) = 0$

Ricordiamoci che il nostro sistema è un **modello della realtà**, quindi non avrò mai un ingresso e uno stato iniziale *ideali (posti ad un valore noto e certo).*

Cosa succede quando supponiamo che esistano **perturbazioni** sullo *stato iniziale*?

Stabilità interna

Interna perchè dipende da variazioni di variabili interne del sistema (ovvero dello stato).

- **==Equilibrio stabile==** *Partendo da vicino all'equilibrio rimaniamo vicino all'equilibrio Vedi slides per definizione rigorosa.*

- **Equilibrio instabile** Uno stato di equilibrio **NON** stabile.

- **Equilibrio attrattivo** $\exists\ \delta > 0, \quad \forall x_0 : ||x_0 - x_e|| \leq \delta$ allora risulta che

  $$lim_{t\to\infty} ||x(t) - x_e|| = 0$$

  osservazioni:

1. è $t \to \infty$, quindi posso farmi anche il giro del mondo prima di collassare sull'equilibrio
2. esiste **ALMENO** un delta, non per ogni epsilon, ovvero non è detto che io rimanga in un intorno definito

quindi, **non è detto sia stabile**

- **==Equilibrio asintoticamente stabile==** E' contemporaneamente
  - **stabile**
  - **attrattivo**

Osservazioni

- Stabilità **locale** *In un intorno dello stato di equilibrio* x_e
- Stabilità **globale** *Se valgono* $\forall x \in \mathbb{R}^n$
- Stabilità **di una traiettoria** *Le definizioni di stabilità si possono generalizzare ad una traiettoria* $\bar{x}(t), t \geq 0$

  In generale si considera la stabilità di uno stato come nel caso della traiettoria ma con una *costante* come traiettoria.

Next: [[2.1 - Sistemi lineari tempo invariante]]