Introduzione alla funzione di trasferimento

Applicando la trasformata di Laplace è facile ricavare la $X(s)$. Si puù poi applicare l'anti trasformata per ritrovare nel tempo $x(t)$.

Funzione di trasferimento

Consideriamo adesso **solamente l'evoluzione forzata dell'uscita** (quindi un sistema con stato iniziale *a riposo*).

Cosa succede al variare dell'ingresso $U(s)$ all'uscita?

Chiamiamo tutto ciò che è moltiplicato per $U(s)$ come **funzione di trasferimento**.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Nel caso SISO è una funzione scalare, altrimenti vettoriale.

L'uscita *forzata* risulta quindi:

$$Y_f(s) = G(s)\ U(s)$$

Ma supponendo che $x(0) = 0$ (ovvero evoluzione libera nulla) avremo che anche l'uscita totale è pari a:

$$Y(s) = G(s)\ U(s)$$

In questo caso possiamo scrivere anche che

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Vedi onenote per grafico funz di trasf.

La funzione di trasferimento è quindi una descrizione del rapporto tra input e output del sistema.

Come è fatta la $G(s)$?

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

L'unica parte che dipende da s è la parentesi, ovvero $(sI - A)^{-1}$. Andiamo a capire com'è fatta sta matrice.

Condizione di esistenza della matrice $(sI - A)^{-1}$ $\quad s \notin$ autovalori di A, altrimenti il $\det(sI - A) = 0$ (che è proprio il polinomio caratt. di A) e quindi $(sI - A)$ non invertibile.

Vedi onenote per più passaggi

Funzioni di trasferimento di sistemi propri e strettamente propri

Se la D non c'è (il sistema è [[2.0 - Sistemi dinamici in forma di stato#Sistemi **strettamente propri**|strettamente proprio]]) avremo una G con numeratore $n-1$, **strettamente minore** del grado del denominatore di grado n.

Se la D c'è (il sistema è **proprio**, ovvero c'è una relazione algebrica diretta tra ingresso e uscita) avremo una G con numeratore e denominatore di grado n

> [!warning] Stiamo considerando segnali **causali**

- Esempio **derivatore**: NON causale
- Esempio **integratore**: causale ## Funzione di trasferimento pag 16

I **poli** e gli **zeri** sono **reali o complessi coniugati** (poiché radici di polinomi a coefficienti reali).

Poli della funzione di trasferimento I poli della funzione di trasferimento sono **alcuni (o eventualmente tutti) gli autovalori di** A.

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

Forme fattorizzate

2 forme fattorizzate - Forma 1 (*boh non so come si chiama*) - Forma di Bode

Relazione con delta di Dirac

Possiamo interpretare la $G(s)$ come la trasformata della risposta a $\delta(t)$. Infatti

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Pongo $U(s) = 1$ (e quindi $u(t) = \delta(t)$):

$$Y(s) = G(s)$$

Cancellazioni provenendo dalla forma di stato

In generale indicano **mancanza di proprietà strutturali**.

Relazione tra poli e autovalori di A

I poli sono gli **autovalori della matrice A**.

Se ci sono autovalori che non sono poli questo è legato a - non osservabilità oppure - non controllabilità ### Esempi di cancellazioni

Se ci sono delle cancellazioni nella creazione della $G(s)$.

Esercizio: Fare l'esempio 1 ma prendere $y = x_1$. ## Contenuto informativo della funzione di trasferimento

Se il sistema è **raggiungibile** ed **osservabile** (quindi non ci sono cancellazioni nella f. di trasferimento) allora la **funzione di trasferimento ha lo stesso contenuto informativo delle equazioni di stato e di uscita**.

Si dimostra che la funzione di trasferimento individua la parte dello spazio di stato raggiungibile e osservabile. ## Antitrasformata

Se consideriamo $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Se mandiamo una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$ (la cui trasformata $U(s) = 1$) si ha che

$$Y(s) = G(s)$$

> Quindi per la risposta all'impulso le radici di $D(s)$ sono i poli di $G(s)$.

[[CAT_parte3_2023_10_16.pdf#page=26&selection=59,0,72,1|CAT_parte3_2023_10_16, page 26]]

Con un delta in ingresso ottengo quindi in uscita l'antitrasformata della funzione $G(s)$.

> [!question] Cos'è la risposta ad un gradino? La risposta della funzione quando viene messo come ingresso $1(t)$

Sviluppo di Heaviside

Poli singoli

Esercizio: rifare la somma (fratti semplici) e controllare che i poli siano gli stessi

> [!info] Residui associati ai poli
>
> $$k_i = (s + p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-p_i}$$

Vedi onenote per spiegazione di come ci siamo arrivati

Poli complessi coniugati $p_{i,1} = \sigma + j\omega$ $p_{i,2} = \sigma - j\omega$

Si fa vedere che anche i **residui associati** sono **complessi coniugati**.

$$k_{i,1} = Me^{-j\phi} \qquad k_{i,2} = Me^{j\phi}$$

….

L'antitrasformata della somma dei due termini associati è

$$= 2Me^{-\sigma t}\cos(\omega t + \phi) \cdot 1(t)$$

Poli multipli

Pagina 32

Una coppia di poli complessi coniugati mi da un contributo del tipo

Vedi slides

Coppia di poli immaginari puri

> [!error] Attenzione!
>
> $$[2M_{1,1}cos(\omega_n t + \phi) + 2M_{1,2}tcos(\omega_n t + \phi)] \cdot 1(t)$$
>
> Diverge!!!

Modi naturali come risposta all'impulso

Lo sviluppo di Heaviside mi dice che posso scrivere $Y(s)$ come una sommatoria di fratti.

Facendo l'antitrasformata di questi fratti, ottengo una combinazione lineare dei cosiddetti **modi naturali** del sistema.

> [!question] Vale solo perchè consideriamo il delta di dirac e quindi G(s) = Y(s)?

Risposte ad un ingresso generico (pag 36)

In s possiamo scrivere la $Y(s)$ come la somma di un'evoluzione **libera** e di un'**evoluzione forzata**.

Possiamo anche chiamare $Y(s)$ come

$$Y(s) = \frac{N_l(s)}{D(s)}x(0) + \frac{N_g(s)}{D(s)} \cdot \frac{N_u(s)}{D_u(s)}$$

Nella $G(s)$ ho una serie di poli, che nello sviluppo di Heaviside mi portano a tanti fratti sommati. Nella $U(s)$ ho anche qui tanti fratti sommati. Quindi posso considerare la $y(t)$ come la somma di *vedi slides*

Nella mia uscita ho modi naturali che possono venire: - o dal sistema, ovvero dalla $G(s)$ - oppure dall'ingresso, ovvero dalla $U(s)$

> [!question] Da rispiegare tutta sta storia di "modi naturali come risposta all'impulso" e "risposta ad un ingresso generico" e "divisione della parte relativa ai modi naturali e quella relativa ai modi presenti nell'ingresso" ## Risposte di sistemi elementari Nel caso di **poli distinti**, per $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \sum_i \frac{k_i}{s+p_i} + \sum_i \frac{a_i s + b_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2}$$

Stabilità esterna o BIBO

Si dimostra che questa condizione è equivalente al fatto che **tutti i poli di G(s) siano a parte reale STRETTAMENTE negativa**

E' equivalente alla **stabilità asintotica del sistema** (se non ci sono cancellazioni).

Se con un ingresso limitato faccio divergere l'uscita allora non è più BIBO stabile.

> [!question] Auto-question? Sappiamo alcuni sistemi NON BIBO?

[[L4 - Sistemi notevoli]]