

Linearizzare un sistema non lineare (tempo invariante)

Supponiamo di voler analizzare un sistema

- **NON** lineare
- tempo **invariante**

vicino ad un equilibrio.

Sia (x_e, u_e) una **coppia di equilibrio**, ($f(x_e, u_e) = 0$), utilizziamo lo sviluppo in serie di Taylor fino al primo termine.

Analogia: Approssimazione lineare di una funzione

Modelleremo come LTI l'**errore relativo ad uno stato di equilibrio.**

Perchè prendo un punto di equilibrio?

*In generale posso farla su una generica traiettoria, ma se lo faccio su una coppia di equilibrio ottengo un sistema **tempo invariante**.*

Come si linearizza?

Considero una traiettoria del sistema, a partire dall'equilibrio (x_e, u_e) .

Scriviamo lo stato $x(t)$ come:

$$x(t) = x_e + \tilde{x}(t)$$

con:

- x_e : stato di equilibrio
- $\tilde{x}(t)$: variazione rispetto all'equilibrio

Scriviamo l'ingresso $u(t)$ come:

$$u(t) = u_e + \tilde{u}(t)$$

con:

- u_e : ingresso di equilibrio
- $\tilde{u}(t)$: variazione rispetto all'equilibrio

Essendo una traiettoria, vale che

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\overbrace{(x_e + \tilde{x}(t))}^{x(t)} = f(\overbrace{(x_e + \tilde{x}(t))}^{x(t)}, \overbrace{(u_e + \tilde{u}(t))}^{u(t)})$$

Possiamo però anche esprimere $f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t))$ come serie di Taylor:

$$f(x_e + \tilde{x}(t), u_e + \tilde{u}(t)) = \overset{0 \text{ per definizione}}{\widehat{f(x_e, u_e)}} - \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} (x_e + \tilde{x}(t) - x_e) - \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} (u_e + \tilde{u}(t) - u_e) - \text{term. di ord. sup.}$$

Ricordando che la x_e è costante, sappiamo che la derivata di $x_e + \tilde{x}(t)$ è uguale alla semplice derivata di $\tilde{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(x_e + \tilde{x}(t)) = \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \dot{\tilde{x}}(t)$$

Unendo le due equazioni precedenti otteniamo che

$$\dot{\tilde{x}} = \text{sviluppo di taylor} + \text{termine di ordine superiore}$$

Ricordando che $f(x_e, u_e) = 0$ per definizione:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{x}(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \tilde{u}(t) + \text{term. di ord. sup.}$$

Chiamiamo

$$A := \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_n} \end{array} \right] \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

$$B := \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial u_n} \end{array} \right] \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

Da cui (ripetendo gli stessi passaggi per y)

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + \text{term. ordine sup.} \quad \dot{\tilde{y}} = C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) + \text{term. ordine sup.}$$

Se voglio *buttare via il resto* allora ci metto un circa uguale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) + \text{term. ordine sup.} \\ &\approx A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \frac{d}{dt}\tilde{y}(t) &= C\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t) + \text{term. ordine sup.} \\ &\approx A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

Sistema linearizzato

$$\dot{\Delta x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

Δx e Δu sono le approssimazioni delle variazioni.

Stabilità e linearizzazione

Teorema: stabilità asintotica di linearizzazioni Dato un sistema **non** lineare tempo invariante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Ipotesi

- (x_e, u_e) è una coppia di equilibrio;
- il sistema linearizzato intorno ad (x_e, u_e) è **asintoticamente stabile**

Tesi L'equilibrio (x_e, u_e) , è (localmente) **asintoticamente stabile** nel sistema di partenza.

Source: [\[\[CAT_parte2_2023_10_11.pdf#page=103&selection=4,0,53,39|CAT_parte2_2023_10_11, page 103\]\]](#)

Teorema: instabilità delle linearizzazioni Dato un sistema non lineare tempo invariante:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Ipotesi

- (x_e, u_e) è una coppia di equilibrio.
- il sistema linearizzato intorno ad (x_e, u_e) ha **almeno un autovalore a parte reale positiva**

Tesi L'equilibrio (x_e, u_e) è **instabile**

Source: [\[\[CAT_parte2_2023_10_11.pdf#page=103&selection=55,0,103,11|CAT_parte2_2023_10_11, page 103\]\]](#)

Nota: Non si può dire nulla in caso si abbiano autovalori con $\Re(\lambda) \leq 0$ ma di cui almeno uno ha $\Re(\lambda) = 0$

Analogia con funzione scalare: Se ho una derivata di una funzione = 0 non ho idea se la funzione cresce o decresce.

Se ho un autovalore nullo mi sta dicendo che la linearizzazione non ha informazioni su come varia la funzione di stato.

Controllo non-lineare mediante linearizzazione

Consideriamo un sistema nonlineare generico:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

e la sua linearizzazione intorno all'equilibrio (x_e, u_e)

$$\dot{\Delta x}(t) = A_e \Delta x(t) + B_e \Delta u(t)$$

Se $\Delta x \rightarrow 0$, allora $x(t) \rightarrow x_e$ (ricordiamo che $x(t) \approx x_e + \Delta x$).

Scelgo quindi una $\Delta u(t)$ che sia funzione dello stato, ovvero

$$\Delta u(t) = K \Delta x(t) + \Delta v(t)$$

con $\Delta v(t)$ un termine che mi riservo per eventuali altre correzioni

Otengo quindi un sistema ad anello chiuso del tipo

$$\dot{\Delta x}(t) = (A_e + B_e K) \Delta x(t) + B_e \Delta v(t)$$

Progetto K in modo che la matrice della dinamica $(A_e + B_e K)$ sia asintoticamente stabile.

Grazie ai teoremi visti in precedenza, anche nel sistema non lineare in anello chiuso otterrò un equilibrio (localmente) asintoticamente stabile

Legge di controllo finale

$$u(t) = u_e + K \cdot \overbrace{(x(t) - x_e)}^{\approx \Delta x} + \tilde{v}(t) \approx u_e + K \cdot \Delta x(t) + \tilde{v}(t)$$