Controlli Automatici T

Funzioni di trasferimento e risposta a gradino in Matlab

Prof. Guido Carnevale

Department of Electrical, Electronic, and Information Engineering
Alma Mater Studiorum Università di Bologna
guido.carnevale@unibo.it

Funzioni di trasferimento

Consideriamo una funzione di trasferimento $G(s)$ nella forma

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \ldots + b_m s + b_{m+1}}{a_1 s^n + a_2 s^{n-1} + \ldots + a_n s + a_{n+1}}$$

La funzione `tf` permette di dichiarare oggetti di questo tipo.

```
% dichiara G(s) = (s + 7)/(s^2 + 3*s + 2)
numerator   = [1 7];
denominator = [1 3 2];
G = tf(numerator, denominator);
```

Specificare i coefficienti dei polinomi $N(s)$ e $D(s)$ potrebbe risultare scomodo e controintuitivo.

L'alternativa consiste nel dichiarare una variabile simbolica '`s`' ed utilizzarla per dichiarare la funzione di trasferimento in maniera simbolica.

```
%dichiara G(s) = (s + 7)/(s^2 + 3*s + 2)
s = tf('s');
G = (s + 7)/(s^2 + 3*s + 2);
```

Passaggio da Spazio degli Stati a Funzioni di Trasferimento

La funzione `tf` permette di passare dalla rappresentazione nello SS alla FdT corrispondente.

Dato il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

possiamo calcolare la FdT da $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ a $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ usando le funzioni `ss` e `tf`

```
%date A, B, C e D calcola la FdT dall'ingresso all'uscita
modello = ss(A,B,C,D);
G = tf(modello);
```

L'alternativa consiste nell'applicare la formula $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

```
%date A, B, C e D calcola la FdT dall'ingresso all'uscita
s = tf('s');
G = C*inv(s*eye(n) - A)*B + D
```

Poli e zeri di una Funzione di Trasferimento

Data la FdT $G(s)$, possiamo calcolare i suoi poli ed i suoi zeri tramite le funzioni `pole` and `zero`.

```
%data G(s) calcolare poli e zeri
p = pole(G);
z = zero(G);
```

La posizione dei poli e zeri sul piano complesso viene mostrata tramite `pzmap`

```
%mostra la posizione di poli e zeri di G sul piano complesso
pzmap(G);
grid on
```

Conoscendo una realizzazione di G nello spazio degli stati, possiamo usarla per visualizzare poli e zeri.

```
pzmap(A,B,C,D);
grid on
```

Oppure

```
modello = ss(A,B,C,D);
pzmap(modello);
grid on
```

Risposta a gradino

La funzione `step` calcola e mostra la risposta a gradino (unitario) di una funzione di trasferimento.

```
%data G(s) calcolare e mostrare la risposta a gradino
step(G);
```

Aggiungendo il secondo argomento si va a specificare l'intervallo di simulazione

```
%data G(s) calcolare e mostrare la risposta a gradino in [0,10]
TT = 0:0.1:10;
step(G,TT);
```

L'output di `step` puo' essere assegnato ad una variabile e mostrato tramite `plot`.

```
%data G(s) calcolare e mostrare la risposta a gradino in [0,10]
TT = 0:0.1:10;
YY = step(G,TT);
plot(TT,YY);
```

Informazioni risposta a gradino

Le informazioni chiave della risposta a gradino possono essere calcolate tramite la funzione `stepinfo`.

```
information_step = stepinfo(G);
```

```
modello = ss(A,B,C,D);
information_step = stepinfo(modello);
```

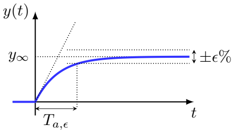
La funzione `stepinfo` restituisce una struttura contentente queste informazioni chiave.

```
information_step =

struct with fields:

        RiseTime: 1.0625
   TransientTime: 318.3659
    SettlingTime: 296.3525
     SettlingMin: 0.4416
     SettlingMax: 1.1055
       Overshoot: 42.1352
      Undershoot: 0
            Peak: 1.1055
        PeakTime: 2.4922
```

Informazioni risposta a gradino

Esempi informazioni chiave dato il valore asintotico y_∞ e massimo y_{max} della risposta

Tempo di assestamento $T_{a,\epsilon}$: tempo tale che $(1-0.01\epsilon)y_\infty \leq y(t) \leq (1+0.01\epsilon)y_\infty \; \forall t \geq T_{a,\epsilon}$



Sovraelongazione percentuale: $S\% = 100\frac{y_{\text{max}}-y_\infty}{y_\infty}$

Per accedere a queste informazioni singolarmente si utilizza il punto:

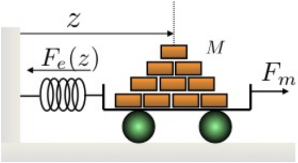
```
information_step.SettlingTime
information_step.Overshoot
```

Alcune di queste informazioni (es.: il tempo di assestamento) vengono calcolate in base a parametri di default che possono essere modificati specficandoli in `stepinfo`.

```
%calcola tempo di assestamento con epsilon = 1 %
epsilon = 1;
sinfo = stepinfo(G, 'SettlingTimeThreshold', epsilon/100);
```

Esempio carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$



x_1 posizione centro di massa
x_2 velocità centro di massa

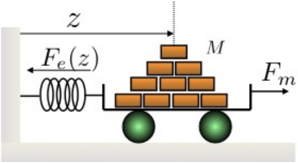
$k = 1\,\mathrm{N/m}$ costante elastica (tempo invariante)
$M = 0.5\,\mathrm{kg}$ massa

Esempio carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$



x_1 posizione centro di massa
x_2 velocità centro di massa

$k = 1\,\mathrm{N/m}$ costante elastica (tempo invariante)
$M = 0.5\,\mathrm{kg}$ massa

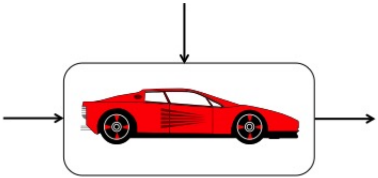
Esercizio: calcolare la FdT che lega ingresso e uscita del sistema carrello, calcolarne poli e zeri, mostrarli nel piano complesso e mostrare la risposta a gradino nell'intervallo $[0, 10]$. Infine, confrontare questa risposta con quella ottenuta usando il modello nello spazio degli stati con condizioni iniziali nulle.

Sistema del primo ordine: cruise control

"Cruise control" (controllo velocità di crociera)

Equazione della dinamica

$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_{\mathsf{m}}(t)$$



Scriviamo equazioni del sistema. Nella dinamica non compare $z(t)$, quindi definiamo $x := \dot{z}$, $u := F_{\mathsf{m}}$ e consideriamo come uscita la velocità $y := x$.

$$\dot{x} = -\frac{b}{M}x + \frac{1}{M}u$$

$$y = x$$

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{Ms + b}}$$

funzione di trasferimento

Sistemi del primo ordine: dalla FdT allo spazio degli stati

Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

Questo tipo di sistemi può essere rappresentato nello spazio degli stati (rappresentazione NON unica) come

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{T}x + \frac{\mu}{T}u \\ y &= x \end{aligned} \qquad (\star)$$

Infatti, la funzione di trasferimento associata a $(\star)$ è $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\mu}{1+Ts}$

- il parametro T in $(\star)$ è la costante di tempo associata al polo,
- il parametro μ in $(\star)$ è il guadagno.

Calcolo risposta a gradino sistemi del primo ordine

Consideriamo un sistema del primo ordine ed un ingresso a gradino di ampiezza k

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}, \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

Calcolo risposta a gradino sistemi del primo ordine

Consideriamo un sistema del primo ordine ed un ingresso a gradino di ampiezza k

$$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts}, \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

L'uscita forzata del sistema $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ nel dominio di Laplace è data da

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+Ts)}$$

Calcolo risposta a gradino sistemi del primo ordine

Consideriamo un sistema del primo ordine ed un ingresso a gradino di ampiezza k

$$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts}, \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

L'uscita forzata del sistema $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ nel dominio di Laplace è data da

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+Ts)} = \underbrace{\frac{\mu k}{s}}_{\mathcal{L}[\mu k 1(t)]} - \underbrace{\frac{\mu k}{1/T + s}}_{\mathcal{L}[\mu k e^{-\frac{t}{T}} 1(t)]}$$

Calcolo risposta a gradino sistemi del primo ordine

Consideriamo un sistema del primo ordine ed un ingresso a gradino di ampiezza k

$$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts}, \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

L'uscita forzata del sistema $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ nel dominio di Laplace è data da

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+Ts)} = \underbrace{\frac{\mu k}{s}}_{\mathcal{L}[\mu k 1(t)]} - \underbrace{\frac{\mu k}{1/T + s}}_{\mathcal{L}[\mu k e^{-\frac{t}{T}} 1(t)]}$$

Osservando le trasformate dei segnali elementari, da questa riscrittura riusciamo a calcolare in maniera immediata l'espressione dell'uscita nel dominio del tempo

$$y(t) = \mu k(1 - e^{-\frac{t}{T}})1(t)$$

Nel Modulo 1 vedrete come effettuare questa antitrasformazione sistematicamente tramite il metodo dei fratti semplici.

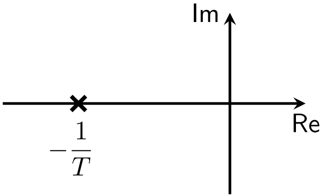
Sistemi del primo ordine

$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$

$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+Ts)}$

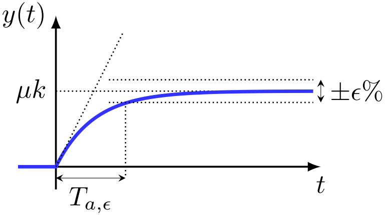
$\mu > 0,\ k > 0,\ T > 0$

Nota: se $T < 0$ sistema instabile



$y(t) = \mu k(1 - e^{-\frac{t}{T}})1(t)$

$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k}{T},\ y_\infty = \mu k$



Tempo di assestamento $T_{a,\epsilon}$: tempo tale che $(1 - 0.01\epsilon)y_\infty \leq y(t) \leq (1 + 0.01\epsilon)y_\infty \ \forall t \geq T_{a,\epsilon}$

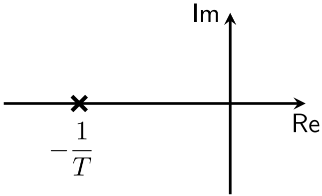
Sistemi del primo ordine

$G(s) = \frac{\mu}{1+Ts} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$

$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+Ts)}$

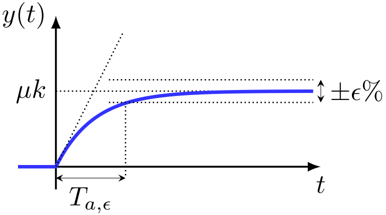
$\mu > 0,\ k > 0,\ T > 0$

Nota: se $T < 0$ sistema instabile



$y(t) = \mu k(1 - e^{-\frac{t}{T}})1(t)$

$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k}{T},\ y_\infty = \mu k$



$$T_{a,\epsilon} = T \ln\left(\frac{1}{0.01\epsilon}\right) \qquad \Rightarrow \qquad T_{a,5} \approx 3T, \quad T_{a,1} \approx 4.6T$$

Sistemi del primo ordine: considerazioni

- Per calcolare la risposta riscrivere $G(s) = \frac{\mu}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$ e sviluppare $Y(s) = G(s)U(s)$ in fratti semplici;
- risposta monotona, modi presenti: $1(t)$ dell'ingresso e $e^{-\frac{t}{T}}$ del sistema;
- valore asintotico è μk, quindi se l'ingresso fosse un riferimento k da seguire, avremmo un errore a regime $e_\infty = |1-\mu|k$;
- $T_{a,\epsilon}$ legato alla costante di tempo T

Risposta a gradino sistemi primo ordine

Consideriamo FdT del primo ordine con guadagno statico unitario

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

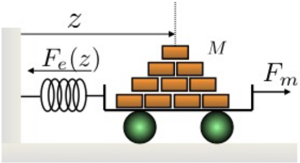
Esercizio: mostrare risposta a gradino sistemi primo ordine per $T = 0.1, 0.2, \ldots, 1$ nell'intervallo $[0, 5]s$.

Sistema del secondo ordine: carrello con attrito

Equazioni del sistema nello spazio degli stati

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$



Nota: in questo modello abbiamo incluso anche una forza di attrito con coefficiente b

$$\boxed{\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1/M}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M}} \\ &= \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}}$$

funzione di trasferimento

con $\mu = \frac{1}{k}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $\xi = \frac{b}{2\sqrt{kM}}$.

Sistemi del secondo ordine: dalla FdT allo spazio degli stati

Consideriamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

Questo tipo di sistemi può essere rappresentato nello spazio degli stati come

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + \mu\omega_n^2 u \\ y &= x_1 \end{aligned} \qquad (\star)$$

Infatti, la funzione di trasferimento associata a $(\star)$ è $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \mu\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

- il parametro ξ in $(\star)$ è il coefficiente di smorzamento,
- il parametro ω_n in $(\star)$ è la pulsazione naturale,
- il parametro μ in $(\star)$ è il guadagno.

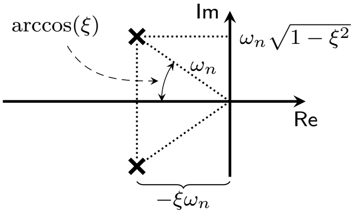
Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati

$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ $\qquad U(s) = \frac{k}{s}$

$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

ξ coefficiente di smorzamento ($|\xi| < 1$)

ω_n pulsazione naturale ($\omega_n > 0$)



$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega t + \varphi))1(t)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},\ \omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2},\ \varphi = \arccos(\xi)$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = \mu\omega_n^2,\ y_\infty = \mu k$$

Tempo di assestamento $T_{a,\epsilon}$: tempo tale che $(1 - 0.01\epsilon)y_\infty \leq y(t) \leq (1 + 0.01\epsilon)y_\infty\ \forall t \geq T_{a,\epsilon}$

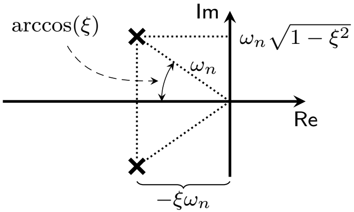
Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati

$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ $\qquad U(s) = \frac{k}{s}$

$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

ξ coefficiente di smorzamento ($|\xi| < 1$)

ω_n pulsazione naturale ($\omega_n > 0$)



$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega t + \varphi))1(t)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},\ \omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2},\ \varphi = \arccos(\xi)$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = \mu\omega_n^2,\ y_\infty = \mu k$$

Approssimazioni di $T_{a,\epsilon}$: $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$ $\qquad T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$

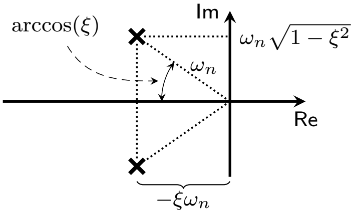
Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

ξ coefficiente di smorzamento ($|\xi| < 1$)

ω_n pulsazione naturale ($\omega_n > 0$)



$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega t + \varphi))1(t)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},\ \omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2},\ \varphi = \arccos(\xi)$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = \mu\omega_n^2,\ y_\infty = \mu k$$

Sovraelongazione percentuale: $S\% = 100\frac{y_{\mathsf{max}} - y_\infty}{y_\infty}$

con y_{max} valore massimo e y_∞ valore asintotico della risposta.

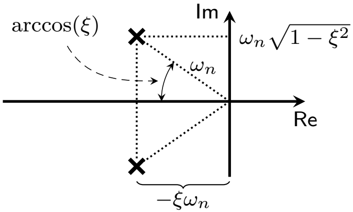
Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati

$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ $\qquad U(s) = \frac{k}{s}$

$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

ξ coefficiente di smorzamento ($|\xi| < 1$)

ω_n pulsazione naturale ($\omega_n > 0$)



$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega t + \varphi))1(t)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},\ \omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2},\ \varphi = \arccos(\xi)$$

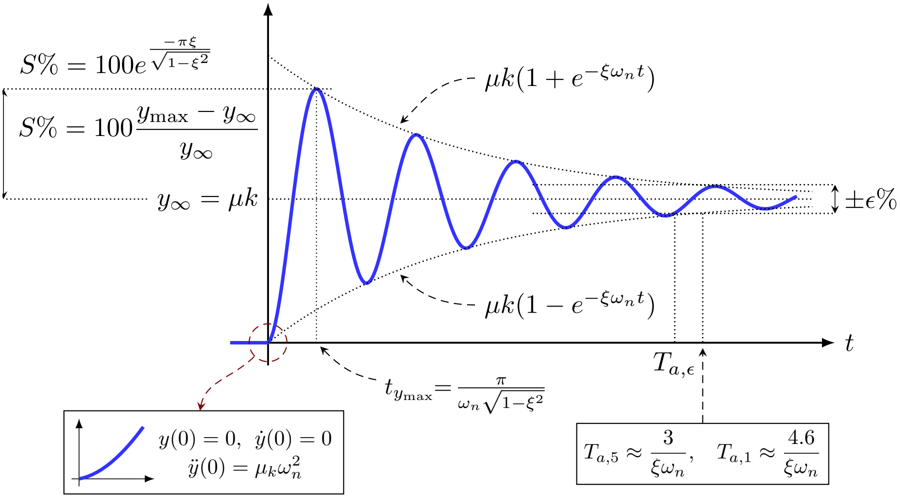
$$y(0) = \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = \mu\omega_n^2,\ y_\infty = \mu k$$

Per sistemi del secondo ordine si trova:

$$S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$y(t) = \mu k(1 - Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega t + \varphi))1(t)$$



Sovraelongazione percentuale in funzione dello smorzamento

La sovraelongazione $S\%$ dipende solo da ξ ed è una funzione monotona decrescente.

$$S\% = 100 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Dato un valore massimo di sovraelongazione $S^\star$, possiamo ricavare il valore di ξ necessario:

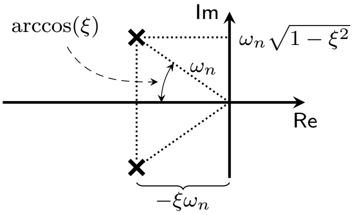
$$S\% \leq S^\star \iff \xi \geq \frac{\left|\ln\left(\frac{S^\star}{100}\right)\right|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{S^\star}{100}\right)}}$$

Luogo di punti a tempo di assestamento costante

Obiettivo: caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) la cui risposta al gradino ha lo stesso tempo di assestamento.

Ricordiamo che

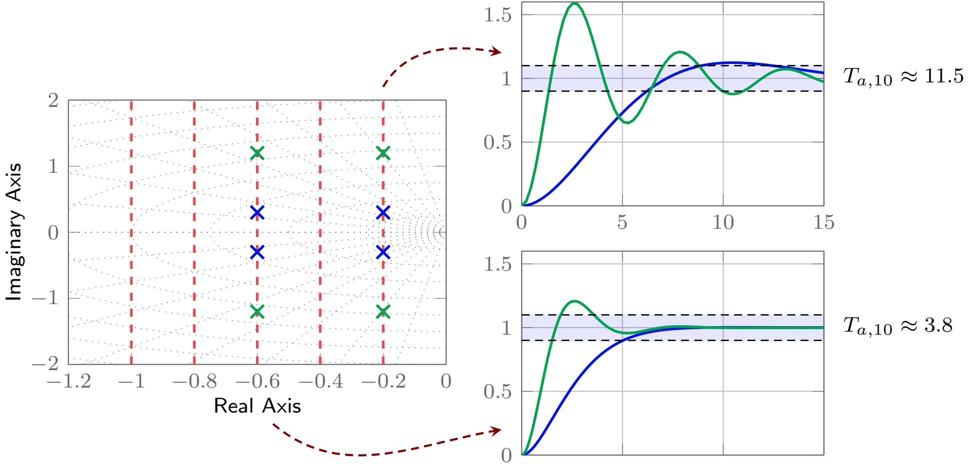
- abbiamo approssimato $T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$ e $T_{a,1} \approx \frac{4.6}{\xi\omega_n}$ e
- abbiamo visto che $-\xi\omega_n$ è la parte reale dei poli complessi coniugati.



Quindi sistemi con poli complessi coniugati che hanno la stessa parte reale avranno una risposta al gradino con stesso tempo di assestamento.

Luogo di punti a tempo di assestamento costante

Sul piano complesso i luoghi di punti a tempo di assestamento costante sono rette parallele all'asse immaginario.

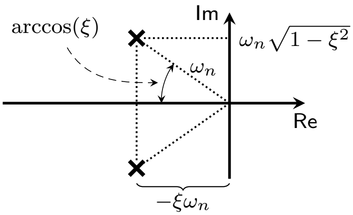


Luogo di punti a sovraelongazione costante

Obiettivo: caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) la cui risposta al gradino ha la stessa sovraelongazione.

Ricordiamo che

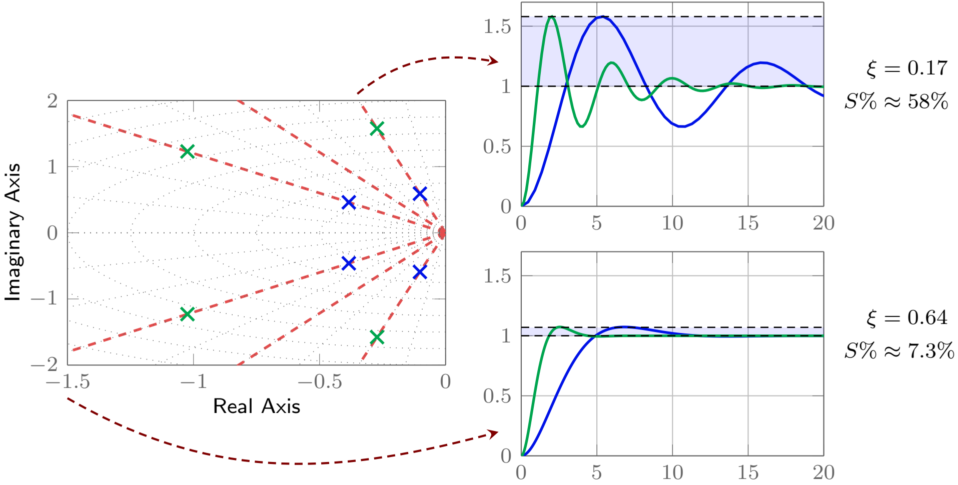
- $S\% = 100 e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ e
- $\arccos(\xi)$ è l'angolo formato con l'asse reale.



Quindi sistemi con stesso coefficiente di smorzamento ξ avranno una risposta al gradino con stessa sovraelongazione.

Luogo di punti a sovraelongazione costante

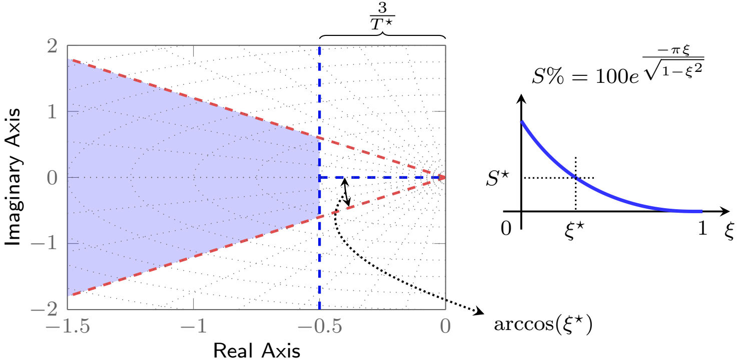
Sul piano complesso i luoghi di punti a sovraelongazione costante sono semirette uscenti dall'origine.



Mappatura di specifiche temporali nel piano complesso

Obiettivo: caratterizzare i sistemi del secondo ordine (con poli complessi coniugati) con $S\% \leq S^*$ e $T_{a,5} \leq T^*$.

Le specifiche sono soddisfatte per $\xi \geq \xi^*$ (con $\xi \leq 1$) e $\xi\omega_n \geq \frac{3}{T^*}$



Nota: i poli complessi coniugati devono trovarsi nella zona colorata.

Risposta a gradino sistemi secondo ordine con poli complessi coniugati

Consideriamo FdT del secondo ordine con guadagno statico unitario

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Esercizio: mostrare risposta a gradino di sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati per $\omega_n = 15$ e $\xi = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ nell'intervallo $[0, 2]s$.

Poi mostrare risposta a gradino di sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati per $\xi = 0.1$ e $\omega_n = 10, 50, 100$ nell'intervallo $[0, 2]s$.

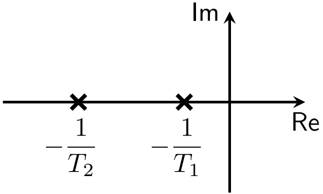
Sistemi del secondo ordine con poli reali

Caso $T_1 \neq T_2$, $T_1 > T_2$

$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$

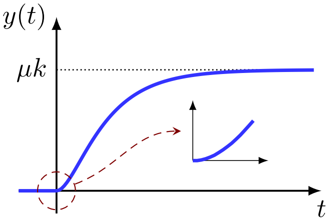
$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$

$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0$



$y(t) = \mu k (1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}) 1(t)$

$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = \frac{\mu k}{T_1 T_2},\ y_\infty = \mu k$

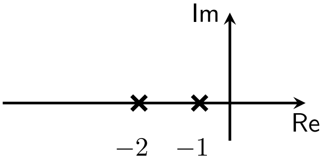


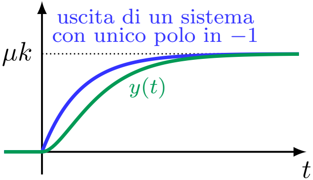
Nota: I modi presenti sono $1(t)$ (ingresso), $e^{-\frac{t}{T_1}}$ e $e^{-\frac{t}{T_2}}$ (sistema).

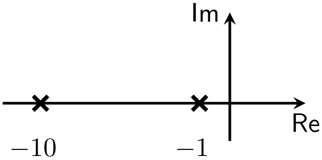
Sistemi a polo dominante

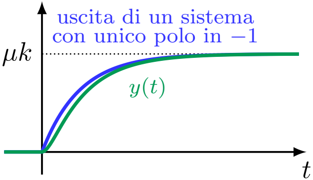
Consideriamo $T_1 \gg T_2$. Nella risposta $e^{-\frac{t}{T_2}} \to 0$ velocemente e $\frac{T_2}{T_1 - T_2} \ll \frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1$, quindi

$$y(t) \approx \mu k(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})1(t)$$





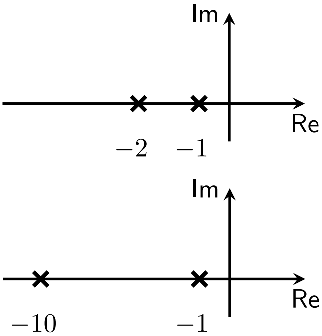


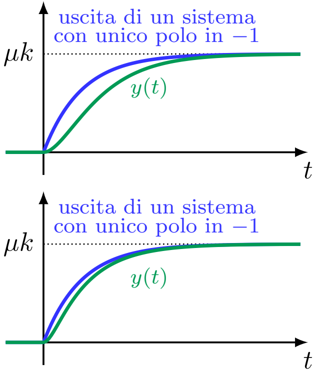


Sistemi a polo dominante

Consideriamo $T_1 \gg T_2$. Nella risposta $e^{-\frac{t}{T_2}} \to 0$ velocemente e $\frac{T_2}{T_1 - T_2} \ll \frac{T_1}{T_1 - T_2} \approx 1$, quindi

$$y(t) \approx \mu k (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) 1(t)$$





Esercizio: confrontare la risposta a gradino di $G_1(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.1s)}$ e $G_2(s) = \frac{1}{(1+s)}$.

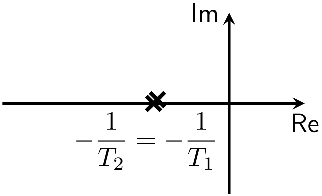
Sistemi del secondo ordine con poli reali coincidenti

Caso $T_1 = T_2$

$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)^2} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$

$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu k}{s(1+T_1 s)^2}$

$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0$



$$y(t) = \mu k \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{t}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}\right) 1(t)$$

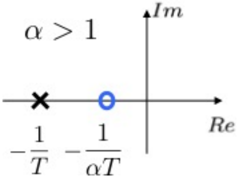
Nota: I modi presenti sono $1(t)$ (ingresso), $e^{-\frac{t}{T_1}}$ e $te^{-\frac{t}{T_1}}$ (sistema).

Sistemi del primo ordine con uno zero

$G(s) = \mu \frac{1+\alpha T s}{1+Ts} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$

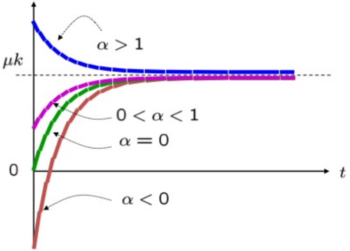
$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\alpha T s}{s(1+Ts)}$

$\mu > 0,\ k > 0,\ T > 0$



$y(t) = \mu k(1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{T}})1(t)$

$y(0) = \mu \alpha k,\ y_\infty = \mu k$



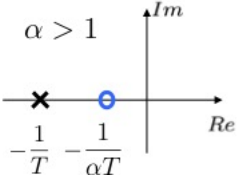
Nota: grado relativo zero (grado numeratore = grado denominatore) implica collegamento algebrico ingresso-uscita ($y(0) = \mu\alpha k \neq 0$). Nello spazio degli stati questo equivale a $D \neq 0$.

Sistemi del primo ordine con uno zero

$G(s) = \mu \frac{1+\alpha T s}{1+Ts} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$

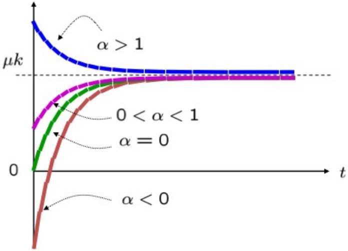
$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\alpha T s}{s(1+Ts)}$

$\mu > 0,\ k > 0,\ T > 0$



$y(t) = \mu k(1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{T}})1(t)$

$y(0) = \mu \alpha k,\ y_\infty = \mu k$



Esercizio: calcolare e mostrare la risposta a gradino di $G(s) = \frac{1+\alpha s}{1+s}$ per $\alpha = 0, 1, 4, 7$.

Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0$$

$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) 1(t)$$

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k \tau}{T_1 T_2},\ y_\infty = \mu k$$

Nota: il segno della derivata $\dot{y}(0) = \frac{\mu k \tau}{T_1 T_2}$ dipende da τ.

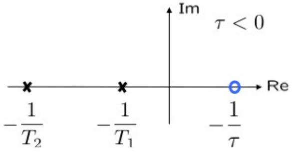
Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

Caso $T_1 > T_2$, $\tau < 0$, sistemi a fase NON minima

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

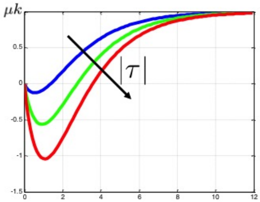
$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k\left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) 1(t)$$

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k \tau}{T_1 T_2},\ y_\infty = \mu k$$



Nota: sottoelongazione ($\dot{y}(0) = \frac{\mu k \tau}{T_1 T_2} < 0$), il sistema inizialmente risponde "in senso contrario" (< 0) rispetto all'ingresso (> 0).

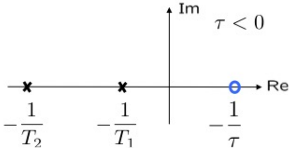
Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

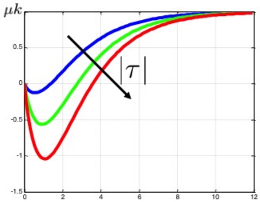
Caso $T_1 > T_2$, $\tau < 0$, sistemi a fase NON minima

$$G(s) = \mu\frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k\frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0$





$$y(t) = \mu k\left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)1(t)$$

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k\tau}{T_1 T_2},\ y_\infty = \mu k$$

Esercizio: calcolare e mostrare la risposta a gradino di $G(s) = \frac{1+\tau s}{(1+2s)(1+s)}$ per $\tau = -1, -2, -5, -10$.

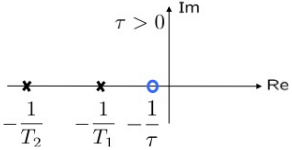
Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

Caso $\tau > T_1 > T_2$, sistemi a fase minima (sovraelongazione)

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

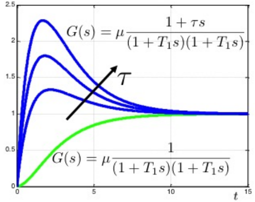
$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) 1(t)$$

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k \tau}{T_1 T_2},\ y_\infty = \mu k$$



Nota: è presente una sovraelongazione tanto più accentuata quanto più lo zero è vicino all'origine (ovvero al crescere di τ).

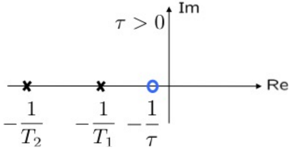
Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

Caso $\tau > T_1 > T_2$, sistemi a fase minima (sovraelongazione)

$$G(s) = \mu\frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

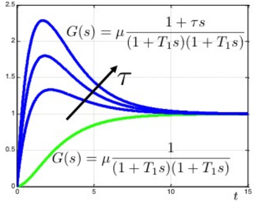
$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k\frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}})1(t)$$

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k\tau}{T_1T_2},\ y_\infty = \mu k$$



Esercizio: calcolare e mostrare la risposta a gradino di $G(s) = \frac{1+\tau s}{(1+2s)(1+s)}$ per $\tau = 0, 1, 4, 5$.

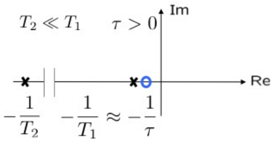
Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

Caso $\tau \approx T_1 \gg T_2$, sistemi a fase minima (code di assestamento)

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

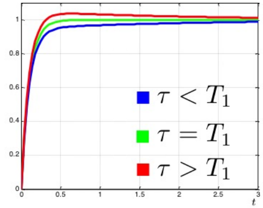
$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k \left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) 1(t)$$

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k \tau}{T_1 T_2},\ y_\infty = \mu k$$



Nota: a causa della non perfetta cancellazione polo/zero ($\tau \approx T_1$) il modo "lento" $e^{-\frac{t}{T_1}}$ è presente e il suo transitorio si esaurisce lentamente.

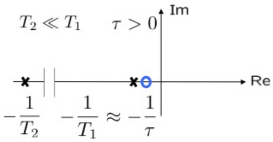
Sistemi del secondo ordine con poli reali e zero

Caso $\tau \approx T_1 \gg T_2$, sistemi a fase minima (code di assestamento)

$$G(s) = \mu \frac{1+\tau s}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \qquad U(s) = \frac{k}{s}$$

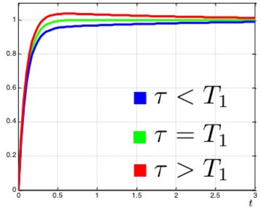
$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu k \frac{1+\tau s}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$\mu > 0,\ k > 0,\ T_1 > 0,\ T_2 > 0$$



$$y(t) = \mu k\left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right)1(t)$$

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{\mu k \tau}{T_1 T_2},\ y_\infty = \mu k$$



Esercizio: calcolare e mostrare la risposta a gradino di $G(s) = \frac{1+\tau s}{(1+10s)(1+s)}$ per $\tau = 9, 10, 11$.