Sia f una funzione $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ (per noi saranno *segnali di ingresso, uscita di sistemi dinamici*)

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

se esiste per qualche s, ovvero se **l'integrale converge**.

> [!tip] Se non ci fosse la e^{-st}, l'integrale mi darebbe un numero.
>
> Se lo moltiplico per e^{-st}, per ogni valore di s ottengo un nuovo integrale con un altro risultato. Quindi al cambiamento di s cambia il risultato $F(s)$.

Notazione Trasformazione di Laplace $\mathcal{L}$ $\quad f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

Osservazione L'e^{-st} *garantisce* un po' la convergenza dell'integrale per un po' di più di funzioni.

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{converge}}$$

Osservazione: ascissa di convergenza Sia $\overline{\sigma} > -\infty$ estremo inferiore di $s = \sigma + j\omega$ per cui l'integrale converge.

Allora trasformata esiste nel semipiano $Re(s) > \overline{\sigma}$.

$$\overline{\sigma} \quad \text{ascissa di convergenza}$$

[[CAT_parte3_2023_10_16.pdf#page=4&selection=3,0,36,22|CAT_parte3_2023_10_16, page 4]]

Osservazione: trasformate razionali

Le trasformate con cui lavoreremo saranno quasi sempre **rapporti di polinomi primi tra loro**.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con $N(s), D(s)$ polinomi primi tra loro.

Zeri e poli della trasformata razionale

- **Zeri**: Radici di $N(s)$
- **Poli**: Radici di $D(s)$

> [!info] Nota Poichè vedremo che i **coefficienti** dei polinomi $N(s)$ e $D(s)$ saranno **reali**, allora avremo **zeri e poli** - *reali* o - *complessi coniugati*

Esempio: *vedi onenote*

Antitrasformata

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\ e^{st}\ ds$$

con $\sigma > \overline{\sigma}$

Notazione Antitrasformata di Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ $\qquad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

> [!tip] Nota Si assume $f(t) = 0$ per $t < 0$.
>
> Sotto questa ipotesi c'è una corrispondenza biunivoca tra $f(t)$ e $F(s)$.

Perchè la trasformata di Laplace?

```
flowchart TD;
    A[Problema oggetto] -...->|difficile| B[Soluzione oggetto];
    A <--> C;
    C[Problema immagine] --> D[Soluzione immagine];
    D <--> B;
```

Proprietà

Proprietà di linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Vedi onenote per dimostrazione

Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \qquad \forall \tau > 0$$

Vedi onenote per dimostrazione ### Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Vedi onenote per dimostrazione

Derivazione nel tempo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t)|_{t=0}$$

Vedi onenote per dimostrazione ### Integrazione (nel tempo)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Convoluzione (nel tempo)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\ d\tau\right] = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

Teorema del valore iniziale

Ipotesi: Sia $f(t) \in \mathbb{R}$ una funzione del tempo con - trasformata razionale $F(s) = \frac{N(Ss)}{D(s)}$ - grado$\{D(s)\} >$ grado$\{N(s)\}$

Tesi:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

La funzione per $t = 0$ si comporta come $sF(s), s \to \infty$.

Teorema del valore finale

Ipotesi: Sia $f(t) \in \mathbb{R}$ una funzione del tempo con - trasformata razionale $F(s) = \frac{N(Ss)}{D(s)}$ - grado$\{D(s)\} >$ grado$\{N(s)\}$ - poli (radici di $D(s)$) nulli o a parte reale negativa

Tesi:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

La funzione per $t \to \infty$ si comporta come $sF(s), s \to 0$.

Trasformata di segnali elementari

Vedi slides

> [!warning] Attenzione Se prendo $sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$, devo considerare anche $1(t-\frac{\pi}{2})$, altrimenti non va bene.
>
> *Vedi onenote per grafico*

Next: [[3.3 - Funzione di trasferimento]]