Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Vogliamo calcolare l'uscita in corrispondenza di un ingresso **sinusoidale**.

Consideriamo $G(s)$ con **poli distinti a parte reale negativa** (BIBO stabile)

> [!warning] IMPORTANTE ==Se metto in ingresso una sinusoide ad un sistema BIBO stabile, per $t \gg 0$ avrò in uscita **una sinusoide con pulsazione pari a quella originaria**==

> [!tip] Definizione: Risposta a regime permanente La risposta per $t \gg 0$ si chiama **risposta a regime permanente** (o a **transitorio esaurito**)

Perchè BIBO stabile?

Poiché i poli di G(s) sono a parte reale negativa, i contributi $e^{-p_i t} \cdot 1(t)$ sono tutti convergenti a zero.

Pertanto $y_1(t) \to 0$ **per** $t \to \infty$

Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

Scompongo in serie il segnale sinusoidale, do in ingresso ogni componente e sommo le uscite. Ottengo l'uscita che avrei ottenuto se il segnale fosse stato messo in ingresso tutto quanto insieme.

> [!warning] Consideriamo dei segnali periodici **A REGIME**, cioè ci dimentichiamo del fatto che prima di 0 debba essere 0 il segnale per farne la trasformata.

Risposta a segnali periodici trasformabili secondo Fourier

Anche se il segnale non è periodico, ma possiede trasformata di Fourier,

rivedere cosa viene in uscita mettendo un ingresso una sinusoide matematicamente

Risposta in frequenza

$$G(s)|_{s=j\omega} \in \mathbb{C} : \text{risposta in frequenza}$$

Ci dice **come risponde il nostro sistema ad armoniche diverse** in ingresso. ## Identificazione di sistemi dinamici

In alcuni contesti non è possibile operare in modo *model-based*, ovvero ricavare il modello da qualcos'altro e operare in termini controllistici.

Si può quindi pensare ad un approccio *data-driven*, in cui mando in ingresso una serie di segnali e vedo cosa ottengo in output.

Diagrammi di Bode

Voglio vedere al variare della frequenza di ingresso come si comporta l'ampiezza e la fase dell'uscita (rispetto a quella di ingresso).

Possiamo esprimere la risposta in frequenza in decibel, quindi $|G(j\omega)|_{dB}$

Vedi slide 14 per risposta in frequenza in guadagno e argomento

Per l'argomento uso i decibel (scala logaritmica). Per la fase invece lascio cos'.

Risposta in frequenza in guadagno e argomenti

Utilizzando modulo in decibel e argomento **la funzione trasferimento si trasforma tutta in somme e sottrazioni**, quindi le posso analizzare separatamente in [[#Contributi elementari|contributi elementari]].

> [!warning] Attenzione Con la **scala logaritmica** non riesco a rappresentare $\omega = 0$, perchè per $\omega \to 0^+$, $\log(\omega) \to -\infty$.
>
> Non esiste l'origine! (**Non devo rappresentare l'origine!!**)

Contributi elementari

Ci sono vari contributi elementari: - Per un guadagno statico - Per poli / zeri nell'origine. Differiscono per un meno in log e arg. - Per poli / zeri reali. Stessa cosa di prima. - Per poli / zeri complessi coniugati. Stessa cosa di prima.

Guadagno statico

Se $\mu > 0$, valore in decibel positivo, altrimenti negativo.

Stessa cosa per la fase, quindi al variare di ω la fase non cambia.

Trasla rigidamente in alto o in basso il resto della funzione, sia in ampiezza che in fase.

Zeri nell'origine

Ampiezza La pendenza si misura in **dB/decade**. Per g zeri nell'origine, avrò una pendenza di $20g\ dB/dec$.

Fase: $90g\,\text{deg}$ E' un numero solamente immaginario (la funz di trasf), quindi avrò una fase di 90deg. Se ho g zeri avrò una rotazione ogni volta di 90deg. ### Poli nell'origine

Tutto uguale a zeri nell'origine, tranne per un meno davanti all'ampiezza.

Pendenza: $-20g\ dB/dec$ **Fase**: $-90g\,\text{deg}$

Zeri reali

> [!tip] Diagrammi asintotici Un diagramma che rappresenta l'andamento asintotico per omega molto più piccoli della frequenza di taglio e molto più grandi della frequenza di taglio.
>
> **Per l'esame**: traccio prima i diagrammi asintotici e poi quelli reali
>
> [!warning] Quando possiamo usare il diag asintotico? Una decade prima ed una decade dopo la freq. di taglio.
>
> [!tip] Prendiamo sempre ω positivo

Pulsazione di taglio: $\frac{1}{|\tau|}$

E' legato al valore dello zero, quindi questa si sposta insieme allo spostamento dello zero.

> [!warning] Non arrivo mai a $\omega = 0$ nel diagramma di Bode, in quanto per $\omega = 0$ il log tende a $-\infty$.

Ampiezza Pendenza prima della pulsazione di taglio: 0 dB/dec Pendenza dopo la pulsazione di taglio: 20dB/dec

> [!tip] C'è un discostamento massimo di 3dB tra il diagramma reale e quello asintotico.

Fase **Come facciamo a ottenere un grafico più preciso?**: *Vedi onenote.*

4.81 equivale a 2/3 della decade avanti o indietro. Per noi sarà ≈ 5.

Se lo zero è reale positivo $\tau < 0$ allora avremo uno sfasamento negativo (grafico ribaltato). #### Osservazioni Nel diagramma delle ampiezze noto che fino alla freq. di taglio non ho effetto ($\times 1$) sulla sinusoide in ingresso.

Sulla **fase** invece succede qualcosa anche **prima** di arrivare alla pulsazione di taglio se mi metto nella decade prima e dopo la pulsazione di taglio.

Polo reale

Lo sfasamento della fase per un polo reale **positivo** è lo stesso di uno zero reale **negativo**

Pendenza = -20g dB/dec dopo la puls di taglio.

Pulsazione di taglio: 1/mod(T)

E' quello che abbiamo chiamato **sistema del primo ordine**.

Corrisponde anche ad un **filtro passa basso**.

Risposta a gradino sistemi 1 ordine *Vedi onenote per risposta al grafino sistemi 1 ordine*

Il filtro passa basso mi sta tagliando tutte le freq. elevate. Da questo la risposta a gradino

Infatti se prendo T più grande filtra più frequenze alte.

Zeri complessi coniugati

Ampiezza Due osservazioni per $\zeta \to 0$: - la pulsazione in cui si ottiene il minimo va ad α_n - il picco va a $-\infty$

Fase Per $\zeta = 0$, ho una discontinuità tra 0 e **180deg**

E' come se avessimo due zeri che ognuno da un contributo di 90deg

Minimo a pulsazione:

$$\omega_r = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Poli complessi coniugati

Come se avessi due poli reali.

Scendo di 40 db/dec dopo la freq di taglio in ampiezza. Più è piccola ξ più l'amplificazione aumenta un sacco vicino alla freq. di risonanza.

Scendo a -180 in fase. Più è grande ξ più la transizione è *morbida*.

Picco di risonanza

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Valore del picco:

$$|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1 - \xi^2}} \overset{\text{vedi sotto}}{\widetilde{\approx}} \frac{1}{2|\xi|}$$

> [!tip] Spesso confonderemo $\omega_r \approx \omega_n$.
>
> e confonderemo
>
> $$|G_d(j\omega_r)| \approx \frac{1}{2|\xi|}$$

Poli complessi coniugati *dominanti*

Ritardo temporale

Proprietà bloccante degli zeri

Proprietà di risonanza

Se lo xi non è zero ma molto piccolo non vado a infinito ma sto amplificando molto il segnale nella pulsazione di risonanza

> [!question] Perchè ξ non può essere 0?