



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Ingegneria Informatica

Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia A
Traccia 1

Francesco Badami · Gabriele Doti · Wesley Merkaj

Anno Accademico 2024/25

Indice

Descrizione del problema	2
1 Linearizzazione del sistema	4
1.1 Analisi del sistema fornito	4
1.2 Linearizzazione	5
1.3 Autovalori	5
2 Funzione di trasferimento	7
2.1 Definizione della $G(s)$	7
2.2 Calcolo della $G(s)$	8
3 Sintesi del regolatore	10
3.1 Regolatore statico $R_s(s)$	12
3.2 Regolatore dinamico $R_d(s)$	13
4 Test del sistema di controllo sul sistema linearizzato	17
4.1 Sovraelongazione	18
4.2 Tempo di assestamento	18
5 Test del sistema di controllo sul modello non lineare	19
Punti opzionali	21
6 Punto opzionale 1 - Animazione	21
7 Punto opzionale 2 - Range di condizioni iniziali $[x_1, x_2]$	23
8 Punto opzionale 3 - Range di ampiezze del gradino $w(t) = k \cdot 1(t)$	25
8.1 Intervallo $x_{1,range}$	25
8.2 Intervallo $x_{2,range}$	26
Conclusioni	27

Descrizione del problema

Il progetto riguarda l'utilizzo di tecniche di controlli automatici per il trattamento farmacologico di cellule in ambiente di laboratorio.

Si consideri un gruppo di cellule in cui sono presenti una densità di cellule $n_s(t)$ suscettibili al trattamento farmacologico e una densità di cellule $n_r(t)$ resistenti. Si supponga che la loro evoluzione sia descritta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{n}_s = r_s \left(1 - \frac{n_s + n_r}{K}\right) n_s - m_s c_f n_s - \beta n_s + \gamma n_r - \alpha c_f n_s, \quad (1a)$$

$$\dot{n}_r = r_r \left(1 - \frac{n_s + n_r}{K}\right) n_r - m_r c_f n_r + \beta n_s - \gamma n_r + \alpha c_f n_s. \quad (1b)$$

In cui:

- $n_s \in \mathbb{R}$: densità delle cellule suscettibili al farmaco.
- $n_r \in \mathbb{R}$: densità delle cellule resistenti al farmaco.
- $r_s \in \mathbb{R}$: tasso di crescita delle cellule suscettibili.
- $r_r \in \mathbb{R}$: tasso di crescita delle cellule resistenti.
- $K \in \mathbb{R}$: capacità massima di cellule nel sistema.
- $m_s \in \mathbb{R}$: tasso di mortalità delle cellule suscettibili.
- $m_r \in \mathbb{R}$: tasso di mortalità delle cellule resistenti.
- $c_f \in \mathbb{R}$: concentrazione del farmaco.
- $\alpha \in \mathbb{R}$: tasso di mutazione da suscettibili a resistenti indotto dal farmaco.
- $\beta \in \mathbb{R}$: coefficiente di trasferimento da n_s a n_r .
- $\gamma \in \mathbb{R}$: coefficiente di trasferimento da n_r a n_s .

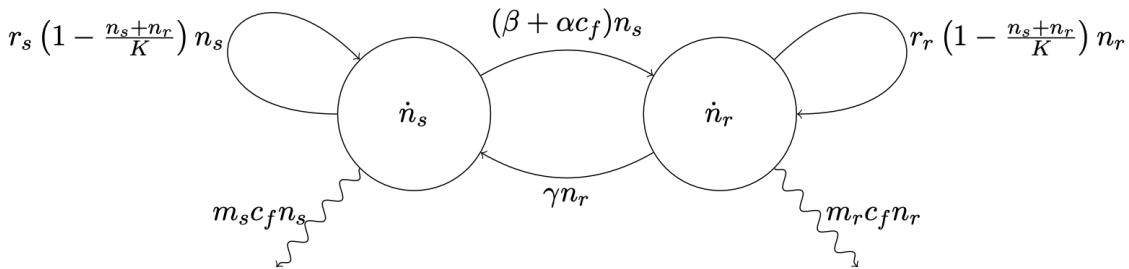


Figura 1: Schema del modello in cui sono rappresentati i flussi delle cellule

Si supponga di poter misurare in ogni istante la densità di cellule resistenti $n_r(t)$ e che sia presente un disturbo $d(t)$ sull'uscita. Infine si ipotizzi la presenza di un disturbo $n(t)$ dovuto ad errori del sistema di misura.

Parametro	Valore
r_s	1.5 [$\frac{1}{s}$]
r_r	1.3 [$\frac{1}{s}$]
K	200 [$\frac{cellule}{L}$]
γ	0.3 [$\frac{1}{s}$]
β	0.3 [$\frac{1}{s}$]
α	0.2 [$\frac{L}{mol \cdot s}$]
m_s	0.7 [$\frac{L}{mol \cdot s}$]
m_r	0.15 [$\frac{L}{mol \cdot s}$]
$n_{s,e}$	100 [$\frac{cellule}{L}$]
$n_{r,e}$	100 [$\frac{cellule}{L}$]

Tabella 1: Valori dei parametri

1 Linearizzazione del sistema

Richiesta: si riporti il sistema (1) nella forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u) \quad (2b)$$

In particolare, si dettagli la variabile di stato, la variabile d'ingresso, la variabile d'uscita e la forma delle funzioni f e h . A partire dai valori di equilibrio $n_{s,e}$ e $n_{r,e}$ (forniti in tabella), si trovi l'intera coppia di equilibrio (x_e, u_e) e si linearizzi il sistema non lineare 2 nell'equilibrio, così da ottenere un sistema linearizzato del tipo

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (3a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u \quad (3b)$$

con opportune matrici A , B , C , D .

1.1 Analisi del sistema fornito

I coefficienti r_s , r_r , K , m_s , m_r , α , β , γ sono costanti e di conseguenza il sistema con cui abbiamo a che fare è **tempo invariante**.

La variabile di stato è $x(t) = [n_s(t), n_r(t)]$; la variabile di ingresso è $u(t) = c_f(t)$ e la variabile di uscita è $y(t) = n_r(t)$.

(2a) è l'equazione di stato ed è un'equazione differenziale di primo ordine di dimensione $n = 2$; (2b) è l'equazione d'uscita, un'equazione algebrica di dimensione $p = 1$; la dimensione della variabile di ingresso è $m = 1$. Possiamo osservare quindi che il sistema è di tipo **SISO** ($p = m = 1$)

1.1.1 Coppia di equilibrio

Dalla teoria sappiamo che dato un sistema tempo invariante continuo di tipo $\dot{x} = f(x, u)$, se $f(x_e, u_e) = 0$ allora (x_e, u_e) è una coppia di equilibrio. Disponendo di x_e e possiamo calcolare u_e , unica incognita del sistema.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1(x_e, u_e) \\ f_2(x_e, u_e) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1 \left(\begin{bmatrix} n_{s,e} \\ n_{r,e} \end{bmatrix}, c_{f,e} \right) \\ f_2 \left(\begin{bmatrix} n_{s,e} \\ n_{r,e} \end{bmatrix}, c_{f,e} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_s \left(1 - \frac{n_{s,e} + n_{r,e}}{K} \right) n_{s,e} - m_s c_{f,e} n_{s,e} - \beta n_{s,e} + \gamma n_{r,e} - \alpha c_{f,e} n_{s,e} \\ r_r \left(1 - \frac{n_{s,e} + n_{r,e}}{K} \right) n_{r,e} - m_r c_{f,e} n_{r,e} + \beta n_{s,e} - \gamma n_{r,e} + \alpha c_{f,e} n_{s,e} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.5 \left(1 - \frac{100+100}{200} \right) 100 - 0.7 \cdot c_{f,e} \cdot 100 - 0.3 \cdot 100 + 0.3 \cdot 100 - 0.2 \cdot c_{f,e} \cdot 100 \\ 1.3 \left(1 - \frac{100+100}{200} \right) 100 - 0.15 \cdot c_{f,e} \cdot 100 + 0.3 \cdot 100 - 0.3 \cdot 100 + 0.2 \cdot c_{f,e} \cdot 100 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{f,e} \\ c_{f,e} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Otteniamo che $c_{f,e} = u_e = 0$.

1.2 Linearizzazione

Tramite Taylor possiamo approssimare il nostro sistema non lineare in un punto, che sceglieremo essere il punto di equilibrio (x_e, u_e) , se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile attorno a questo punto allora lo sarà anche quello non lineare. Ciò ci permette di scrivere il nostro sistema in forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}\end{aligned}$$

Per effettuare la linearizzazione è necessario ricavare le jacobiane delle funzioni f ed h derivandole rispetto alle variabili di stato e all'ingresso nel punto di equilibrio.

$$A_e = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix}$$

$$B_e = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} -90 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_e = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x, u)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_e = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} = \left[\frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \right] \Bigg|_{(x_e, u_e)} = [0]$$

Calcolate le matrici è possibile ottenere la forma linearizzata:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= A_e \delta x(t) + B_e \delta u(t) \\ \delta y(t) &= C_e \delta y(t) + D_e \delta u(t)\end{aligned}$$

1.3 Autovalori

Per determinare se il sistema è asintoticamente stabile, dobbiamo calcolare gli autovalori della matrice A_e . Gli autovalori si trovano risolvendo il polinomio caratteristico $\det(A_e - \lambda I) = 0$ dove I è la matrice identità e λ è l'autovalore. La matrice $A_e - \lambda I$ è

$$A_e - \lambda I = \begin{bmatrix} -1.05 - \lambda & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 - \lambda \end{bmatrix}$$

Ora calcoliamo il determinante

$$\begin{aligned} \det(A_e - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1.05 - \lambda & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1.05 - \lambda)(-0.95 - \lambda) - (-0.45)(-0.35) \\ &= \lambda^2 + 2.00\lambda + 0.84 \\ \det(A_e - \lambda I) = 0 &\implies \lambda^2 + 2.00\lambda + 0.84 = 0 \\ \begin{cases} \lambda_1 = -0.60 \\ \lambda_2 = -1.40 \end{cases} & \end{aligned} \tag{8}$$

Poiché entrambi gli autovalori sono a parte reale negativa, il sistema è **asintoticamente stabile**.

2 Funzione di trasferimento

Richiesta: si calcoli la funzione di trasferimento da δu a δy , ovvero la funzione $G(s)$ tale che $\delta Y(s) = G(s)\delta U(s)$.

2.1 Definizione della $G(s)$

Dato un sistema LTI è possibile definire la trasformata delle equazioni del sistema

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x}(t)) &= X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ \mathcal{L}(y(t)) &= Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)\end{aligned}$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come la trasformata della risposta impulsiva, che è l'uscita in risposta alla delta di dirac. Sapendo che l'uscita di un sistema può essere definita come il prodotto di convoluzione tra l'ingresso $u(t)$ e la risposta impulsiva $g(t)$ allora

$$y(t) = u(t)^*g(t)$$

Trasformando otteniamo

$$\mathcal{L}(y(t)) = Y(s) = U(s)G(s)$$

Considerando la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita troviamo quindi

$$\begin{aligned}Y_f(s) &= (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \\ G(s) &= Y_f(s)U(s) = C(sI - A)^{-1}B + D\end{aligned}$$

con $G(s)$ funzione di trasferimento del sistema assumendo $x(0) = 0$.

Nel caso di sistemi SISO ($m = p = 1$) si ha

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

dove:

- C è una matrice $1 \times n$
- $\text{adj}(sI - A)$ è una matrice $n \times n$
- B è una matrice $n \times 1$
- D è uno scalare 1×1
- $\det(sI - A)$ è un polinomio di grado n

Risulta infine che la $G(s)$ è il rapporto di due polinomi del tipo:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Si può notare che il denominatore corrisponde al polinomio caratteristico della matrice A , quindi le sue radici, ossia i poli, coincidono con gli autovalori di A che permettono di studiare la stabilità del sistema. Infatti dai calcoli precedenti si può osservare che tutti gli autovalori (8.2) soddisfano le condizioni necessarie per garantire che il sistema con cui abbiamo a che fare è **BIBO stabile**.

Un sistema è detto BIBO stabile (Bounded-Input Bounded-Output) quando ad un ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata. Questa proprietà è soddisfatta se e solo se tutti i poli della funzione $G(s)$ hanno parte reale negativa.

2.2 Calcolo della $G(s)$

La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico a stato è definita come

$$G(s) = C_e \cdot (sI - A_e)^{-1} \cdot B_e + D_e$$

Dove l'inverso di $sI - A$ è:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+0.95}{s^2+2.00s+0.84} & \frac{-0.45}{s^2+2.00s+0.84} \\ \frac{-0.35}{s^2+2.00s+0.84} & \frac{s+1.05}{s^2+2.00s+0.84} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori di C_e , $(sI - A_e)^{-1}$, B_e e D_e si ottiene:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{s+0.95}{s^2+2.00s+0.84} & \frac{-0.45}{s^2+2.00s+0.84} \\ \frac{-0.35}{s^2+2.00s+0.84} & \frac{s+1.05}{s^2+2.00s+0.84} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -90 \\ 5 \end{bmatrix} + 0 = \frac{5s + 36.75}{s^2 + 2.00s + 0.84}$$

Ponendo $s = j\omega$ otteniamo $G(j\omega) = \frac{5j\omega + 36.75}{-\omega^2 + 2.00j\omega + 0.84}$

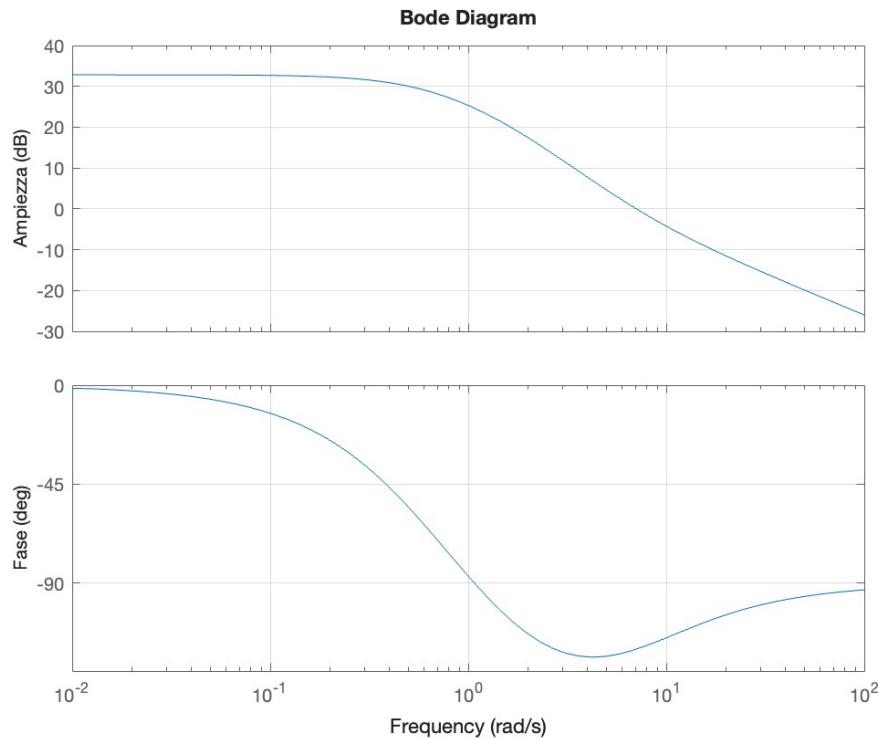


Figura 2: Diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(j\omega)$

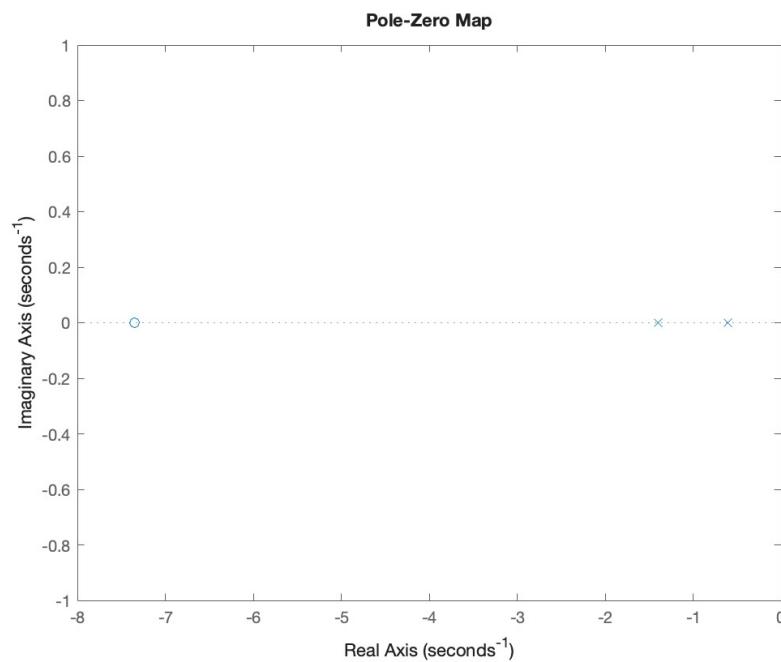


Figura 3: Poli e zeri della funzione di trasferimento $G(s)$

Si può notare che i poli corrispondono agli autovalori (8.2) trovati risolvendo il polinomio caratteristico della matrice A .

3 Sintesi del regolatore

Richiesta: si progetti un regolatore (fisicamente realizzabile) considerando le seguenti specifiche:

1. Errore a regime nullo con riferimento a gradino $w(t) = -20 \cdot 1(t)$ e disturbo sull'uscita $d(t) = -10 \cdot 1(t)$.
2. Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f >= 40^\circ$.
3. Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo del 7%: $S\% <= 7\%$.
4. Il tempo di assestamento all' $\epsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\epsilon} = 1s$.
5. Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.05]$, deve essere abbattuto di almeno 60 dB.
6. Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[10^4, 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 90 dB.

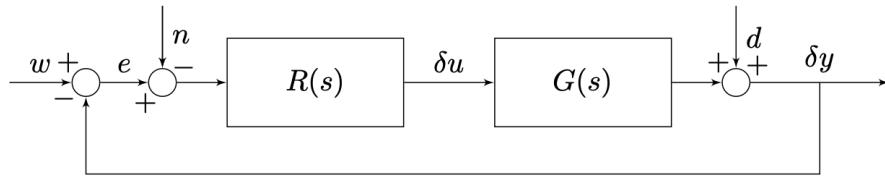


Figura 4: Schema di controllo

Analizzando la figura 4 è possibile definire il blocco $R(s)$, che rappresenta il **regolatore**, in serie con la funzione di trasferimento $G(s)$. Possiamo così definire $L(s) = R(s)G(s)$ che viene chiamata **funzione d'anello**. Sono presenti altri segnali come:

- $w(t)$ è il segnale di riferimento dell'andamento desiderato
- $e(t) = y(t) - w(t)$ è l'errore del valore dell'uscita rispetto al riferimento
- $n(t)$ è il rumore di misura
- $d(t)$ è disturbo in uscita
- $y(t)$ è uscita del sistema

La $w(t)$ e la $d(t)$ sono ingressi a basse frequenze, mentre la $n(t)$ è un ingresso ad alte frequenze.

Prima di iniziare con la progettazione vera e propria del regolatore è necessario definire e descrivere alcuni concetti.

Pulsazione critica: ω_c

È la pulsazione in cui il grafico delle ampiezze della $L(j\omega)$ passa per i 0 dB.

$$|L(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

Pulsazione ω_π

È la pulsazione in cui il grafico dell'argomento della $L(j\omega)$ passa per i -180° .

$$\arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ$$

Margine di fase

Ci dà informazioni riguardo al margine che abbiamo in termini di stabilità.

$$M_f = \arg(L(j\omega_c)) - (-180^\circ) = \arg(L(j\omega_c)) + 180^\circ$$

Margine di ampiezza

Ci dà informazioni riguardo il margine che abbiamo in termini di variazione d'ampiezza.

$$M_a = 0 \text{ dB} - |L(j\omega_\pi)|_{dB} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

Criterio di Bode

Si supponga che

1. $L(s)$ non abbia poli a parte reale (strettamente) positiva.
2. $|L(jw)|_{dB}$ attraversa solo una volta i 0 dB.

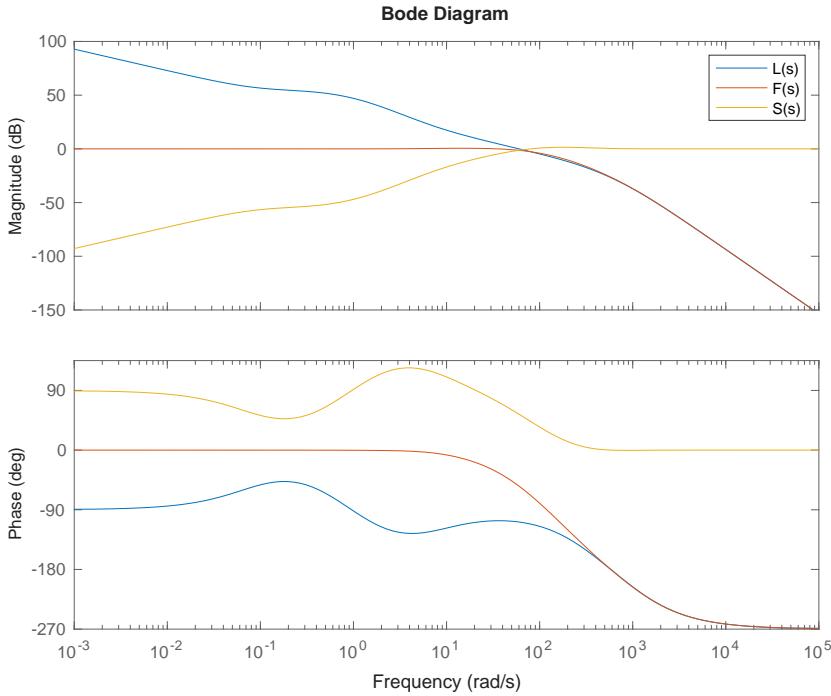
Allora condizione necessaria sufficiente perché il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile è che

$$\begin{cases} \mu > 0 \\ M_f > 0 \end{cases}$$

Funzioni di Sensitività

Necessarie per la progettazione del regolatore sono le funzioni di sensitività.

- Funzione di sensitività complementare: $F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$
- Funzione di sensitività: $S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$
- Funzione di sensitività di controllo: $Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$


 Figura 5: Funzioni di sensitività del sistema a confronto con la $L(s)$

Possiamo definire tramite il **principio di sovrapposizione degli effetti**:

$$Y(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s) \quad (11a)$$

$$U(s) = Q(s)W(s) - Q(s)D(s) - Q(s)N(s) \quad (11b)$$

$$E(s) = S(s)W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s) \quad (11c)$$

L'ideale sarebbe avere un'uscita priva di disturbi e quindi avere $Y(s) = W(s)$, per garantire ciò è allora necessario che:

$$\bullet |F(j\omega)| \approx 1 \quad \text{per } \omega \text{ basse} \quad (12a)$$

$$\bullet |S(j\omega)| \approx 0 \quad \text{per } \omega \text{ basse} \quad (12b)$$

$$\bullet |F(j\omega)| \approx 0 \quad \text{per } \omega \text{ alte} \quad (12c)$$

$$\bullet |F(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 & \text{per } \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)|_{dB} & \text{per } \omega \gg \omega_c \end{cases} \quad (12d)$$

$$\bullet |S(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \text{per } \omega \ll \omega_c \\ 0 & \text{per } \omega \gg \omega_c \end{cases} \quad (12e)$$

$$\bullet |Q(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} -|G(j\omega)|_{dB} & \text{per } \omega \ll \omega_c \\ |R(j\omega)|_{dB} & \text{per } \omega \gg \omega_c \end{cases} \quad (12f)$$

3.1 Regolatore statico $R_s(s)$

Il regolatore statico si occupa delle specifiche riguardanti l'errore a regime, in questo caso avere un errore nullo, ciò non sempre è verificato. In generale si ha infatti che in risposta ad un gradino $W(s) = \frac{W}{s}$

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)W(s) = W \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} = \\ &= W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s} = \begin{cases} W^{\frac{1}{1+\mu}} & \text{se } g = 0 \text{ e quindi non ci sono poli nell'origine} \\ 0 & \text{se } g > 0 \text{ e quindi ci sono poli nell'origine} \end{cases} \end{aligned}$$

Nel nostro caso è quindi necessario aggiungere un polo all'origine, mancante, così da avere un errore nullo.

$$R_s(s) = \frac{1}{s}$$

L'aggiunzione del polo all'origine causa uno sfasamento di -90° e una pendenza dell'ampiezza di -20 dB/dec

3.2 Regolatore dinamico $R_d(s)$

La sintesi di $R_d(s)$ mira a:

1. Imporre ω_c in un certo intervallo
2. Garantire che $\arg(L(j\omega_c)) \geq -180^\circ + M_f$
3. Garantire una certa attenuazione a pendenza di $L(j\omega)$ e $R(j\omega)$ a ω elevate

Utile per lo studio del regolatore dinamico è la definizione del **sistema esteso**

$$G_e(s) = R_s(s)G(s) \quad (14)$$

3.2.1 Specifica sovraelongazione

Per i sistemi del secondo ordine, ricordiamo che la sovraelongazione percentuale $S\%$ è data dalla formula

$$S\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Dunque calcoliamo la ξ :

$$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{S\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{S\%}{100}\right)}}$$

Dal momento che la specifica 3 richiede che il sistema possa accettare una sovraelongazione percentuale al massimo del 7%

$$S\% \leq 7\% = S^*, \quad \xi \geq \frac{-\ln\left(\frac{S^*}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{S^*}{100}\right)}} \implies \xi_{\min} = \xi^* = \frac{-\ln\left(\frac{0.07}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{0.07}{100}\right)}} \approx 0.6461$$

Ricordando che per i sistemi del secondo ordine vale la relazione tra lo smorzamento ξ e il margine di fase M_f , possiamo esprimere ξ in funzione di M_f come segue:

$$\xi = M_f \cdot \frac{2\pi}{180} = M_f \cdot \frac{\pi}{360} = M_f \cdot \frac{3.14}{3.6 \times 100} \approx \frac{M_f}{100}$$

Da questa relazione possiamo calcolare il margine di fase in funzione dello smorzamento:

$$M_{f,\min} \approx 100 \cdot \xi^* = 100 \cdot 0.6461 = 64.61^\circ$$

Si può osservare che la specifica 3 include anche la specifica 2, in quanto il margine minimo risulta 64.61° che è maggiore del margine di fase minimo di 40° richiesto dalla specifica 2.

3.2.2 Specifica tempo di assestamento

Partendo dal tempo di assestamento, ricordiamo che la relazione tra il tempo di assestamento e l'errore di regime ϵ è

$$T_{a,\epsilon} = T \ln \left(\frac{1}{0.01\epsilon} \right)$$

Per i sistemi del secondo ordine possiamo approssimare il tempo di assestamento a 5% come segue

$$T_{a,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}$$

Da questa relazione possiamo calcolare la pulsazione naturale ω_n conoscendo $T_{a,5} = 1$ e $\xi = 0.6461$

$$\omega_n = \frac{3}{\xi T_{a,5}} = \frac{3}{0.6461 \cdot 1} \approx 4.64$$

Dunque definiamo $\omega_{min} = \omega_n = 4.64$, ovvero l'estremo sinistro dell'intervallo in cui posizionare la ω_c .

3.2.3 Aggiunta della rete anticipatrice

L'aggiunta di un polo all'origine nel regolatore statico, dato dalla funzione di trasferimento $R_s(s) = \frac{1}{s}$, porta allo *Scenario B*. In questo scenario, la frequenza di taglio del sistema $G_e(s)$ non si colloca all'interno dell'intervallo $[4.641, 10^4]$, che è l'intervallo in cui dovrebbe trovarsi la frequenza di taglio ω_c , come definito dalla specifica 3 (estremo inferiore) e dalla specifica 6 (estremo superiore). Tale intervallo, inoltre, non soddisfa mai la condizione di un margine di fase superiore a 64.61° , una specifica cruciale per garantire la stabilità e il comportamento desiderato del sistema. Pertanto, si è reso necessario l'uso di un regolatore dinamico che prevede l'aggiunta di una rete anticipatrice

$$R_d(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts}$$

dove α e T sono i parametri da determinare.

$$R_d(j\omega_c^*) = M^* e^{j\varphi^*}$$

Poniamo

$$\frac{1 + j\tau\omega_c^*}{1 + j\alpha\tau\omega_c^*} = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)$$

ovvero

$$1 + j\tau\omega_c^* = M^*(\cos \varphi^* + j \sin \varphi^*)(1 + j\alpha\tau\omega_c^*)$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria otteniamo:

$$1 = M^* \cos \varphi^* - M^* \alpha \tau \omega_c^* \sin \varphi^*$$

$$\tau \omega_c^* = M^* \alpha \tau \omega_c^* \cos \varphi^* + M^* \sin \varphi^*$$

Quindi arriviamo alle seguenti formule di inversione:

$$\alpha = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\tau \omega_c^* \sin \varphi^*}$$

$$\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*}$$

Affinché α e τ siano positivi, è necessario che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \cos \varphi^* > 1 \\ 0 < \varphi^* < \pi \\ \cos \varphi^* > \frac{1}{M^*} \end{cases}$$

Abbiamo ritenuto valido utilizzare uno script Matlab per determinare un ω_c^* tale che $L(j\omega)$ rispettasse tutte le specifiche, iterando a partire da ω_{min} , scegliendo una ω_c^* sufficientemente piccola da non sacrificare la robustezza del sistema di controllo e che al contempo rispettasse le condizioni nel sistema indicato di sopra. Nello script, la M^* e la φ^* vengono determinate a partire dalle seguenti equazioni

$$|G_e(j\omega_c^*)|_{dB} + 20 \log M^* = 0$$

$$M_f^* = 180^\circ + \arg(G_e(j\omega_c^*)) + \varphi^*$$

Avendo scelto $\omega_c^*=60$, si ottiene

$$\begin{aligned} M^* &= 714.89 \\ \phi &= 80.07 \\ \tau &= 12.09 \\ \alpha &= 0.00024 \end{aligned}$$

Definiamo quindi la rete anticipatrice:

$$R_{ant}(s) = \frac{1 + 12.09s}{1 + 0.00024 \cdot 12.09s}$$

3.2.4 Attenuazioni dei disturbi $d(t)$ e $n(t)$

Per le specifica 5 riguardante il disturbo in uscita $d(t)$ ricordiamo che

- $Y_d(j\omega) = S(j\omega)D(j\omega)$
- $|S(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} -|L(j\omega)|_{dB} & \text{per } \omega \ll \omega_c \\ 0 & \text{per } \omega \gg \omega_c \end{cases}$

Poiché $\omega_{dmax} = 0.05 \ll \omega_c = 60$

$$|L(j\omega)|_{dB} \geq A_d \text{ dB} = 60 \text{ dB}$$

Per le specifica 6 riguardante il disturbo di misura $n(t)$ ricordiamo che

- $Y_n(j\omega) = -F(j\omega)N(j\omega)$
- $|F(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \text{per } \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)|_{dB} & \text{per } \omega \gg \omega_c \end{cases}$

Poiché $\omega_{nmin} = 10^4 \gg \omega_c = 60$

$$|L(j\omega)|_{dB} \leq -A_{ndB} = -90_{dB}$$

Per garantire ciò è stato necessario aggiungere un polo $p = \frac{1}{1+10^{-3}s}$ ad alte frequenze per evitare la zona arancione visibile nella figura 6.

3.2.5 Regolatore finale

Il regolatore finale è:

$$R(s) = R_d(s)R_s(s) = \left(\frac{1 + 12.09s}{1 + 0.00024 \cdot 12.09s} \right) \left(\frac{1}{1 + 10^{-3}s} \right) \left(\frac{1}{s} \right)$$

$$L(s) = R_d(s)G_e(s) = \left(\frac{1 + 12.09s}{1 + 0.00024 \cdot 12.09s} \right) \left(\frac{1}{1 + 10^{-3}s} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \left(\frac{5s + 36.75}{s^2 + 2s + 0.84} \right)$$

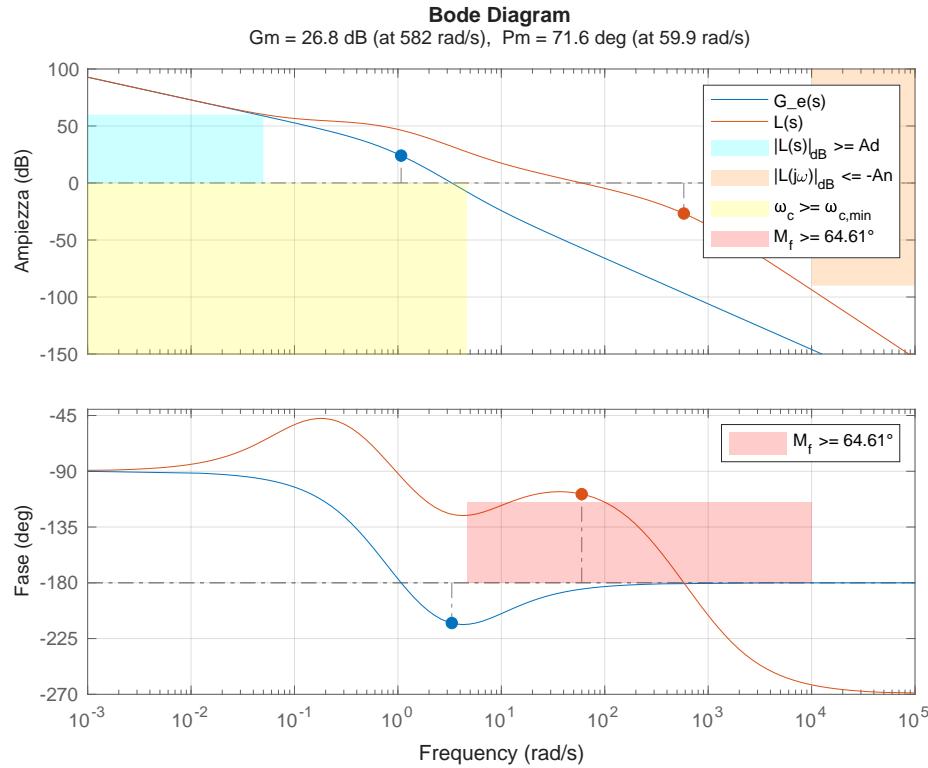


Figura 6: Diagramma di Bode della $G_e(s)$ e della $L(s)$

4 Test del sistema di controllo sul sistema linearizzato

Richiesta: Testare il sistema di controllo sul sistema linearizzato con $w(t) = -20 \cdot 1(t)$, $d(t) = \sum_{k=1}^4 2 \cdot \sin 0.0125kt$ e $n(t) = \sum_{k=1}^4 2 \cdot \sin 10^4 kt$

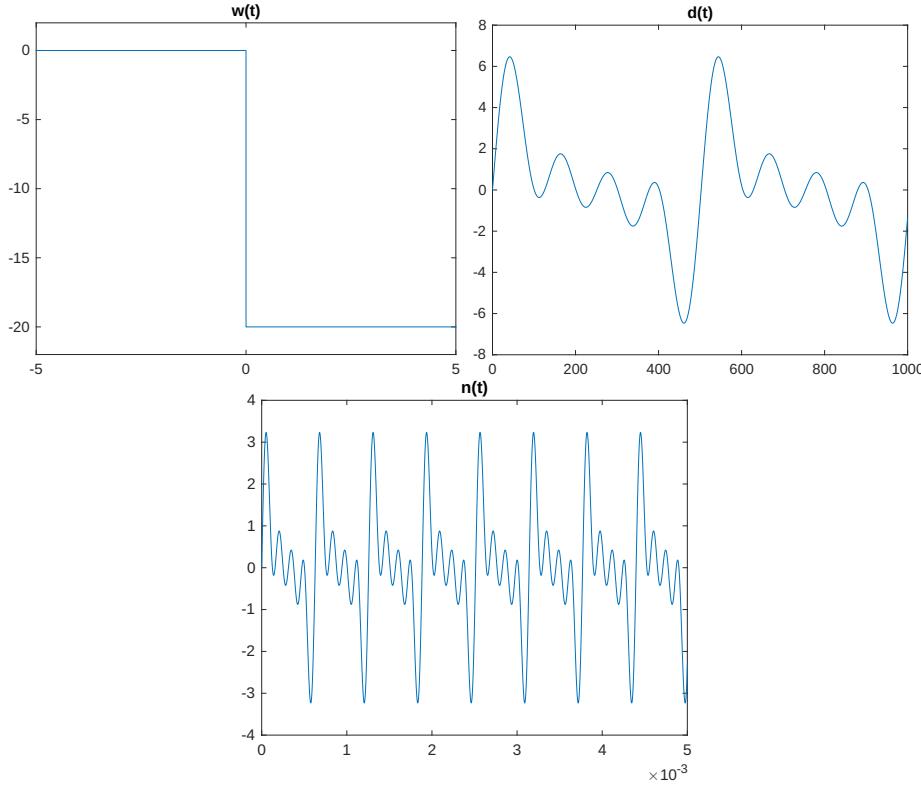


Figura 7: Segnali di ingresso

Dati i segnali in ingresso è possibile ottenere le trasformate:

$$\begin{aligned} W(s) &= -\frac{20}{s} \\ D(s) &= 2 \left(\frac{0.0125}{0.0125^2 + s^2} + \frac{2 \cdot 0.0125}{4 \cdot 0.0125^2 + s^2} + \frac{3 \cdot 0.0125}{9 \cdot 0.0125^2 + s^2} + \frac{4 \cdot 0.0125}{16 \cdot 0.0125^2 + s^2} \right) \\ N(s) &= \left(\frac{10^4}{10^8 + s^2} + \frac{2 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^8 + s^2} + \frac{3 \cdot 10^4}{9 \cdot 10^8 + s^2} + \frac{4 \cdot 10^4}{16 \cdot 10^8 + s^2} \right) \\ Y(s) &= F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s) \end{aligned}$$

Antitrasformando la (11a) si ottiene

$$\delta y(t) = y(t) - y_e(t) = y_w(t) + y_d(t) + y_n(t) - y_e(t)$$

Possiamo ottenere la $y(t)$ ricordando che la nostra $y_e(t) = n_{r,e} = 100$

$$\begin{aligned} y(t) &= \delta y(t) + y_e(t) = y_w(t) + y_d(t) + y_n(t) + y_e(t) \\ \implies y(t) &= y_w(t) + y_d(t) + y_n(t) + 100 \end{aligned}$$

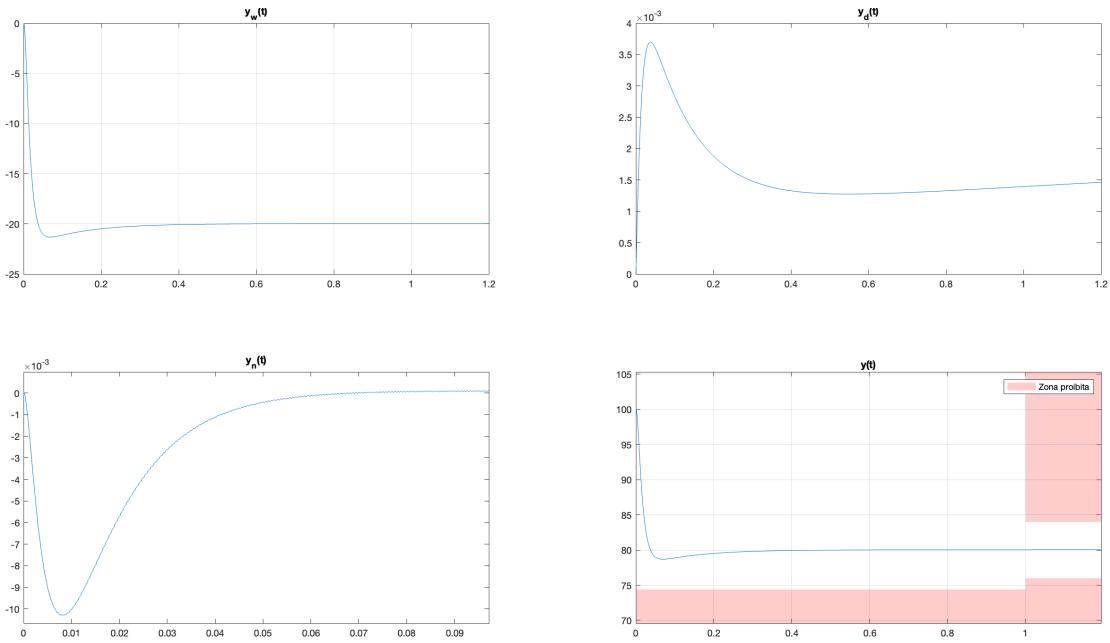


Figura 8: Grafici riguardanti le componenti dell’uscita e l’uscita finale linearizzata

Guardando la $y(t)$ si può notare come i disturbi $d(t)$ e $n(t)$ non inficino sul suo andamento, come voluto tramite progettazione del regolatore ((12a), (12b), (12c)).

L’uscita $y(t)$ del sistema, grazie all’intervento del regolatore, soddisfa pienamente le specifiche di prestazione richieste, in particolare per quanto riguarda la **sovraelongazione** e il **tempo di assestamento**. In dettaglio:

4.1 Sovraelongazione

Il regolatore è stato progettato per mantenere la sovraelongazione al di sotto del 7% consentito. Questo consente al sistema di rispondere in modo rapido ma senza eccessivi picchi di risposta, garantendo stabilità e controllo ottimale. Si evidenzia la zona proibita, posizionata in basso nel grafico della $y(t)$ in figura 8.

4.2 Tempo di assestamento

Grazie al miglioramento delle dinamiche del sistema, l’uscita $y(t)$ raggiunge il valore di riferimento con un errore inferiore al 5% dopo 1 secondo. Ciò significa che il sistema risponde velocemente e si stabilizza rapidamente, rimanendo all’interno dei margini di tolleranza per il tempo di assestamento, senza oscillazioni significative.

In sintesi, l’implementazione del regolatore ha permesso di ottimizzare la risposta del sistema, garantendo il rispetto delle specifiche di sovraelongazione e tempo di assestamento, migliorando così le prestazioni complessive del sistema dinamico.

5 Test del sistema di controllo sul modello non lineare

Richiesta: Testare il sistema di controllo sul modello non lineare (ed in presenza di $d(t)$ ed $n(t)$).

Per svolgere questo punto è necessario utilizzare *Simulink*

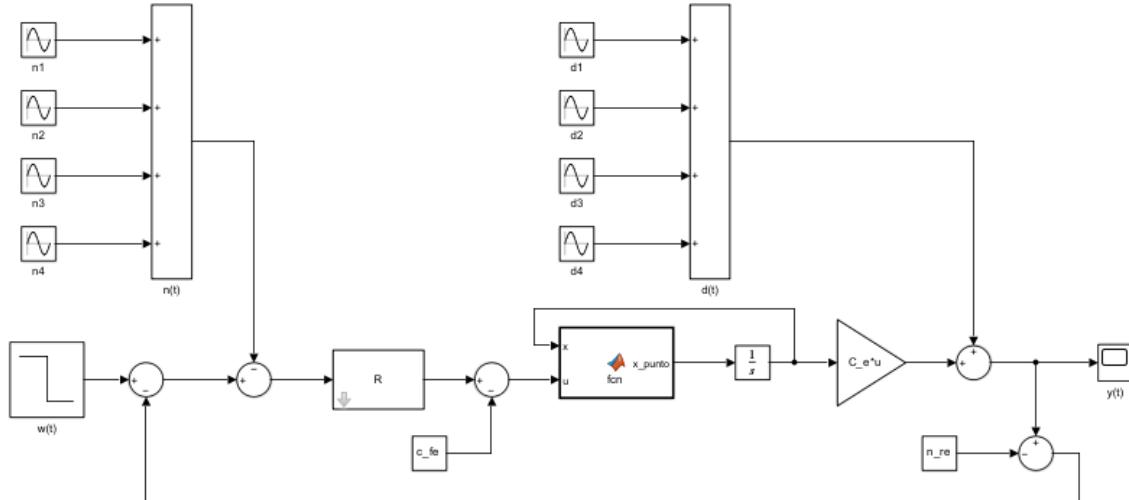


Figura 9: Sistema ad anello chiuso non lineare

Descrizione dei blocchi

- $w(t)$: rappresenta il gradino di ingresso
- $n(t)$: rumore di misura
- R : regolatore inserito tramite un blocco *LTI System*
- c_{fe} : ingresso all'equilibrio
- x_{punto} : blocco *MATLAB* che contiene l'equazione di stato $\dot{x}(t)$
- $\frac{1}{s}$: blocco *Integrator* che permette di integrare l'equazione differenziale con condizioni iniziali inserite $[n_{s,e}; n_{r,e}] = [100; 100]$
- $C_e * u$: un *gain* che moltiplica l'uscita del blocco integratore per la matrice $C_e = [0, 1]$
- $d(t)$: disturbo d'uscita
- $n_{r,e}$: sottrazione per il valore $y_e(t) = n_{r,e} = 100$ per ottenere la **non lineare**
- $y(t)$: blocco *scope* che mostra l'uscita non lineare

In figura 10 sottostante viene mostrata l'uscita $y(t)$ non lineare ottenuta con il blocco *scope* di MATLAB. Notevole è la differenza (riguardante soprattutto le oscillazioni iniziali) rispetto alla linearizzata.

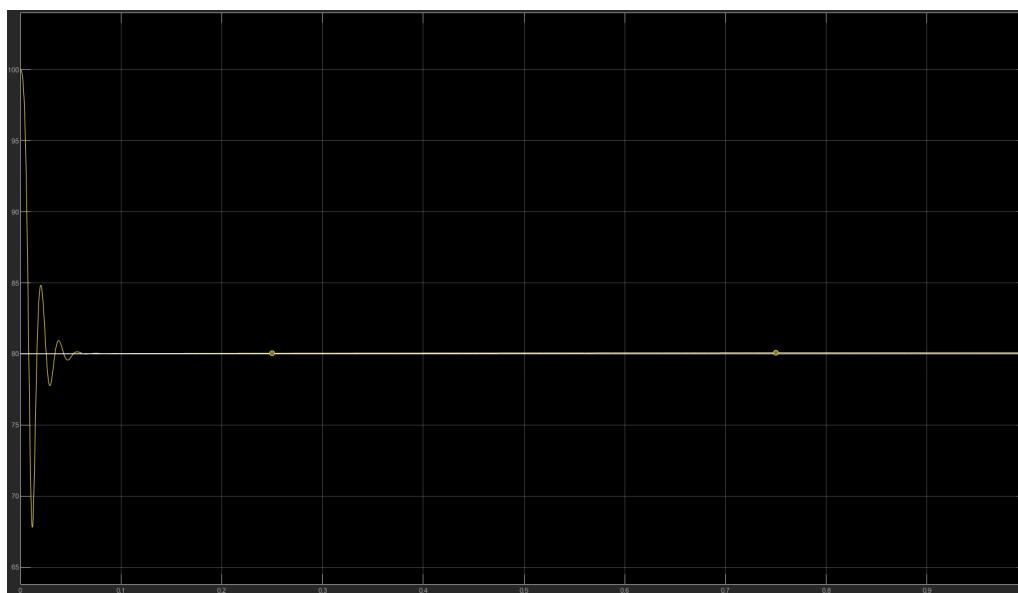


Figura 10: Uscita non lineare

Punti opzionali

6 Punto opzionale 1 - Animazione

Richiesta: Sviluppare (in Matlab) un'interfaccia grafica di animazione in cui si mostri l'evoluzione della densità di cellule per entrambe le tipologie.

Tramite *Matlab* e *Simulink* siamo riusciti a rappresentare l'andamento animato delle cellule resistenti e suscettibili.

Per lo studio delle cellule suscettibili abbiamo calcolato una nuova funzione di trasferimento $G(s)$, in quanto la nuova uscita $y(t)$ rispecchiava l'andamento di $n_s(t)$. Calcoliamo quindi la nuova funzione di trasferimento $G(s)$:

$$A_e = \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} -90 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_e = 0$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico a stato è definita come:

$$G(s) = C_e \cdot (sI - A_e)^{-1} \cdot B_e + D_e$$

Dove l'inverso di $sI - A$ è:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+0.95}{s^2+2.00s+0.84} & \frac{-0.45}{s^2+2.00s+0.84} \\ \frac{-0.35}{s^2+2.00s+0.84} & \frac{s+1.05}{s^2+2.00s+0.84} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori di C_e , $(sI - A_e)^{-1}$, B_e e D_e si ottiene:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{s+0.95}{s^2+2.00s+0.84} & \frac{-0.45}{s^2+2.00s+0.84} \\ \frac{-0.35}{s^2+2.00s+0.84} & \frac{s+1.05}{s^2+2.00s+0.84} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -90 \\ 5 \end{bmatrix} + 0$$

Quindi la funzione di trasferimento finale è $G(s) = \frac{-90s-87.75}{s^2+2.00s+0.84} = -87.75 \cdot \frac{\frac{40}{39}s+1}{1+\frac{1}{s}+\frac{0.84}{s^2}}$

Si può notare come il guadagno $\mu = -87.75$ sia negativo non consentendo di applicare il criterio di Bode, e ciò introduce instabilità nell'uscita in quanto risulta essere divergente, per cui abbiamo optato per un regolatore $R(s) = -1$, il quale cambia il segno alla $G(s)$ e stabilizza l'uscita.

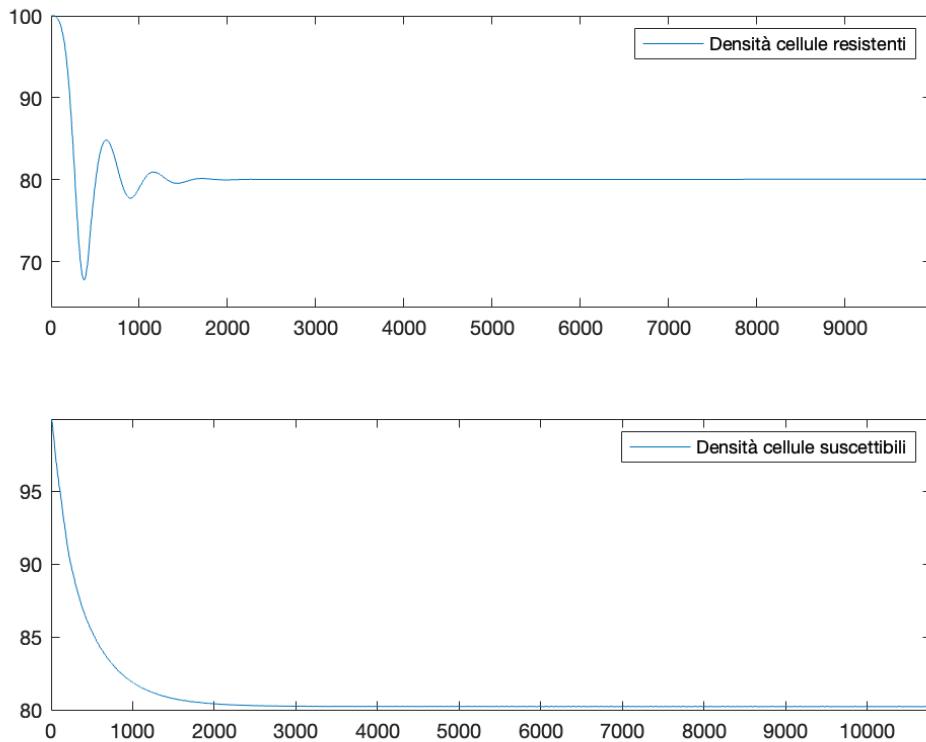


Figura 11: Grafico mostrante $n_r(t)$ e $n_s(t)$

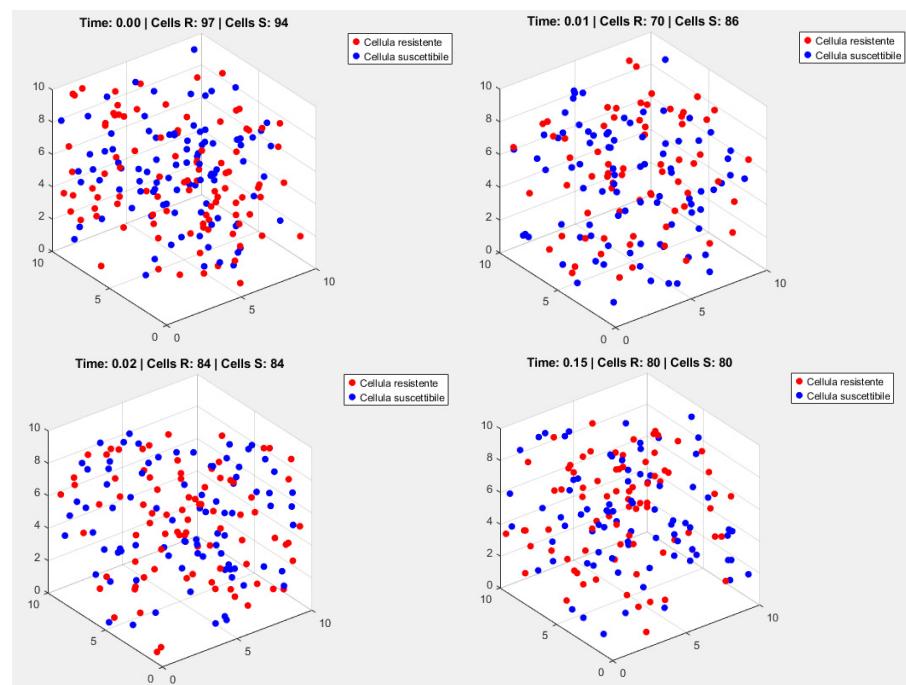


Figura 12: Grafico mostrante l'animazione delle cellule

7 Punto opzionale 2 - Range di condizioni iniziali $[x_1, x_2]$

Richiesta: Supponendo un riferimento $w(t) = 0$, esplorare il range di condizioni iniziali dello stato del sistema non lineare (nell'intorno del punto di equilibrio) tali per cui l'uscita del sistema in anello chiuso converga a $h(x_e, u_e)$.

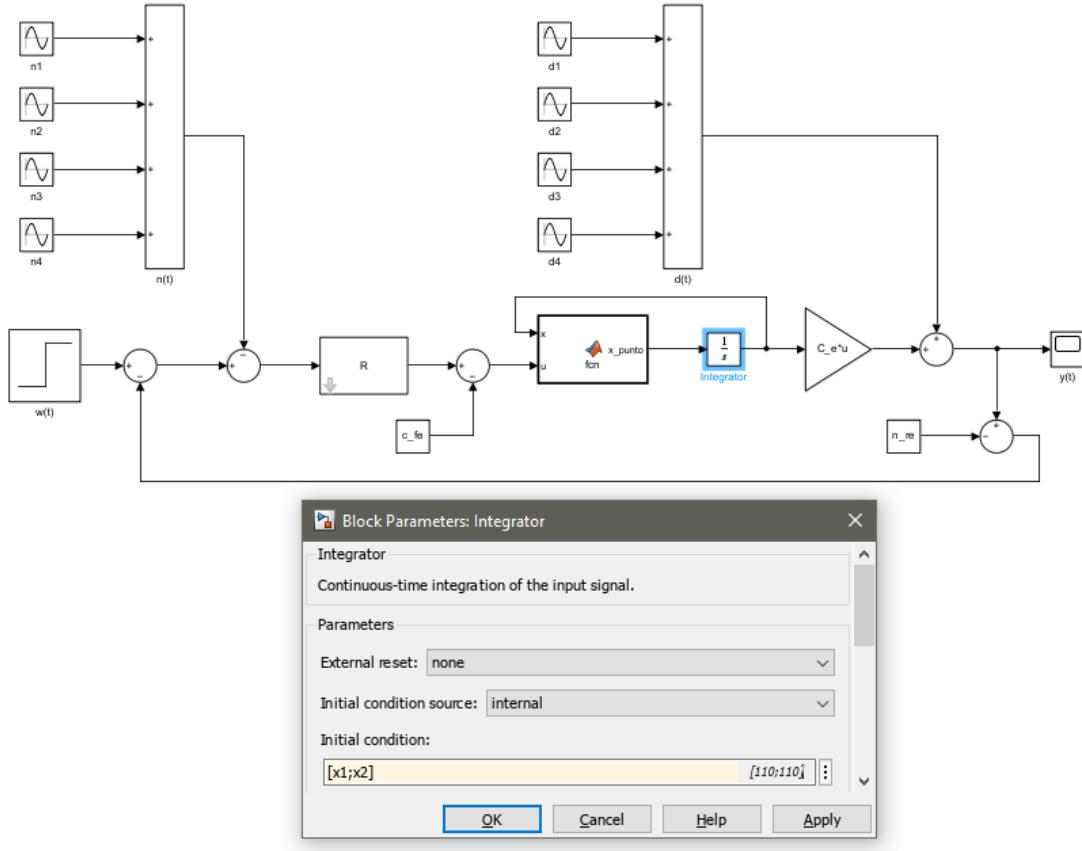


Figura 13: Grafico mostrante le condizioni iniziali (variabili) del blocco integratore

Per svolgere questo punto si è scelto di studiare il range di condizioni iniziali che va da $[n_{s,e} - 10, n_{r,e} - 10]$ a $[n_{s,e} + 10, n_{r,e} + 10]$ con 15 punti equidistanti generati tra il valore iniziale 90 e il valore finale 110

$$x1_{range} = [90, 91.43, 92.86, 94.29, 95.71, 97.14, 98.57, 100, 101.43, 102.86, 104.29, 105.71, 107.14, 108.57, 110]$$

$$x2_{range} = [90, 91.43, 92.86, 94.29, 95.71, 97.14, 98.57, 100, 101.43, 102.86, 104.29, 105.71, 107.14, 108.57, 110]$$

con un totale di 225 combinazioni possibili.

Inoltre $h(x_e, u_e) = n_{r,e} = 100$

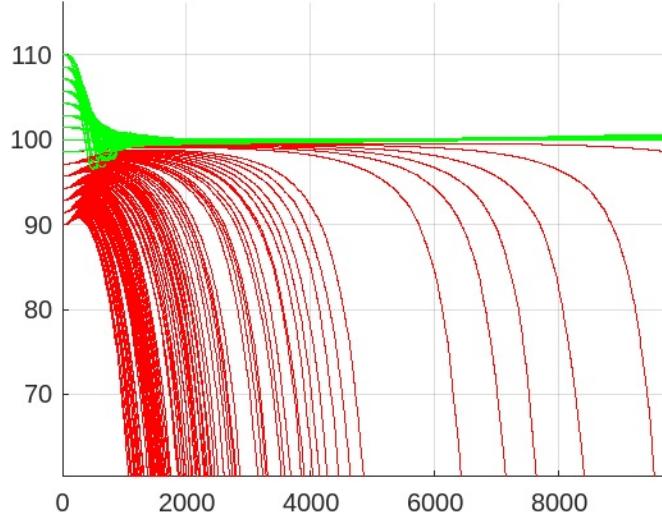
Simulazione condizione init x_1, x_2 da 90 a 110, passo 1.5

Figura 14: Analisi dell’uscita al variare delle condizioni iniziali

Nel grafico della figura 14 vengono mostrate in rosso quelle curve $y(t)$ che non convergono a 100, mentre in verde quelle che rispettano la richiesta. Inoltre è stata stilata una mappa che mostri tutte le combinazioni valide e non.



Figura 15: Mappa delle combinazioni

8 Punto opzionale 3 - Range di ampiezze del gradino $w(t) = k \cdot 1(t)$

Richiesta: Esplorare il range di ampiezza di riferimenti a gradino tali per cui il controllore rimane efficace sul sistema non lineare.

Per svolgere questo punto si è scelto di studiare due intervalli distinti di condizioni iniziali, generati con passi differenti:

- Il primo intervallo $x_{1,range}$ varia da $[-50, 50]$ con un passo di 1, ovvero

$$x_{1,range} = [-50, -49, -48, \dots, 48, 49, 50]$$

- Il secondo intervallo $x_{2,range}$ varia da $[-15, 1]$ con un passo di 0.1, ovvero

$$x_{2,range} = [-15, -14.9, -14.8, \dots, 0.8, 0.9, 1]$$

Per ciascun elemento di $x_{1,range}$ e $x_{2,range}$, è stato calcolato un gradino da inserire come segnale in ingresso al sistema. In particolare, il valore del gradino corrispondeva esattamente al valore specifico dell'elemento considerato nell'intervalle. Successivamente è stato raccolto il segnale di risposta non lineare associato a tale ingresso.

Questo procedimento è stato ripetuto per tutti gli elementi di $x_{1,range}$ e $x_{2,range}$, permettendo di analizzare il comportamento del sistema per un ampio spettro di condizioni iniziali e variazioni di ingresso.

L'analisi delle risposte non lineari ottenute permette di comprendere il comportamento dell'uscita in funzione all'ampiezza del gradino messo in ingresso.

8.1 Intervallo $x_{1,range}$

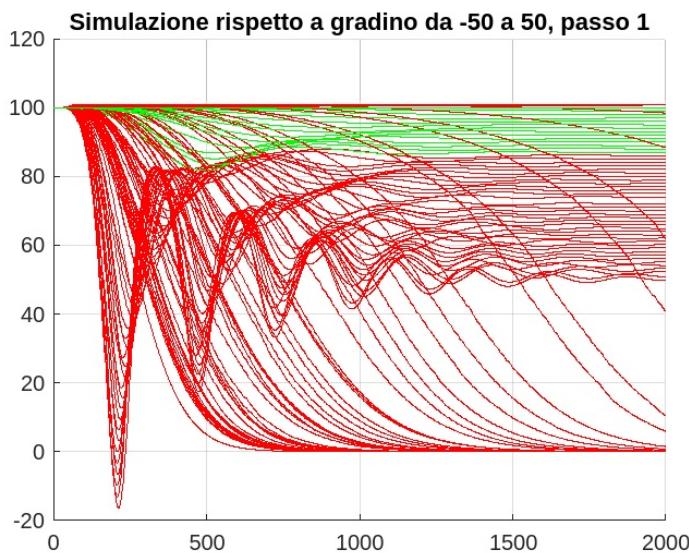


Figura 16: Analisi della sovraelongazione al variare dell'ampiezza del gradino

Analizzando i risultati, si nota che, restringendo l'analisi della sovraelongazione al range $[-14, 0]$, il controllore rimane efficace. In particolare:

- Per gradini di ampiezza minore di -14 , la sovraelongazione risulta maggiore del 7%.
- Per gradini di ampiezza maggiore di 0 , l'uscita del sistema converge a 0 .

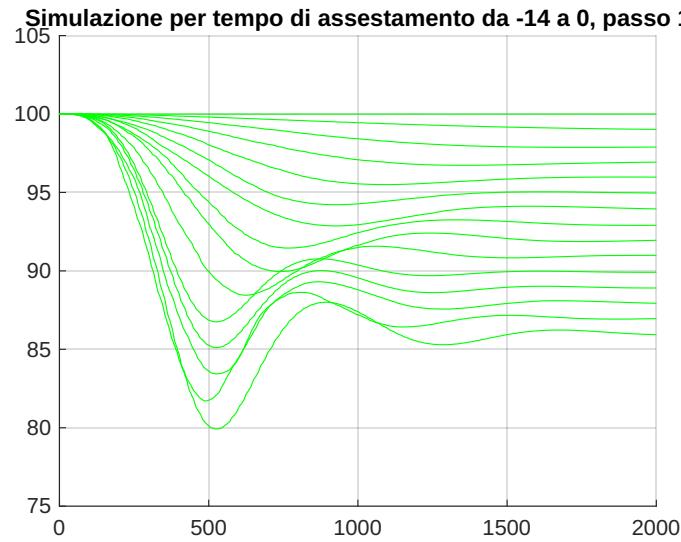


Figura 17: Analisi del tempo di assestamento al variare dell'ampiezza del gradino

Si osserva inoltre che l'uscita si stabilizza molto velocemente, rispettando il tempo di assestamento per tutte le ampiezze, tranne ovviamente per quelle per cui l'uscita diverge.

8.2 Intervallo $x_{2,range}$

Per comprendere con maggiore precisione l'intervallo in cui il sistema non lineare rispetta le specifiche richieste, si è scelto di analizzare i gradini da -15 a 1 , con un passo di 0.1 , anziché 1 . Questo permette di individuare con esattezza l'intervallo di ampiezze del gradino entro cui il controllore garantisce prestazioni accettabili.

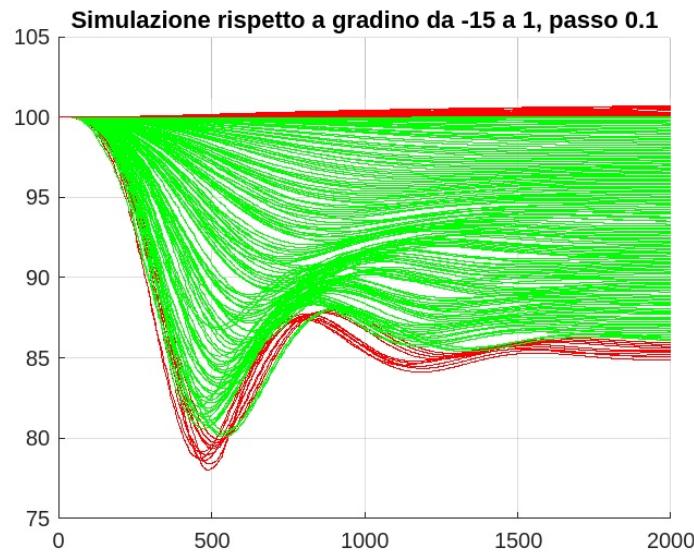


Figura 18: Analisi della sovraelongazione al variare dell'ampiezza del gradino

Il risultato dell'analisi rivela che il range di ampiezza di riferimenti a gradino tali per cui il controllore rimane efficace sul sistema non lineare è circa $[-14, 0]$

Conclusioni

Per concludere si può fare una sintesi di tutto ciò che è stato effettuato.

Dopo aver analizzato il tipo di sistema fornito abbiamo trovato le matrici utili alla scrittura in forma linearizzata intorno al punto di equilibrio (x_e, u_e) .

$$A_e = \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} -90 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad C_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_e = 0$$

Abbiamo calcolato gli autovalori della matrice A_e verificando l'asintotica stabilità del sistema, essendo essi a parte reale negativa.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.60 \\ \lambda_2 = -1.40 \end{cases}$$

Trovando la funzione di trasferimento abbiamo confermato la BIBO stabilità del sistema. Inoltre tramite la rappresentazione dei diagrammi di Bode abbiamo potuto analizzare l'andamento della $G(j\omega)$ (2), i suoi poli e zeri (3).

$$G(s) = \frac{5s + 36.75}{s^2 + 2.00s + 0.84}$$

Abbiamo studiato le specifiche ottenendo valori da soddisfare tramite la sintesi del regolatore definito come prodotto tra la sua parte statica $R_s(s)$ (per l'errore a regime) e la sua parte dinamica $R_d(s)$ (per la sovraccarico percentuale, tempo di assestamento e attenuazione dei disturbi).

- $|e_\infty| = 0$ e aggiunzione di un polo all'origine
- $M_{f,min} \approx 100 \cdot 0.6461 = 64.61^\circ$.
- $\omega_{min} = \omega_n = 4.64$
- $|L(j\omega)|_{dB} \geq A_{ddB} = 60_{dB}$
- $|L(j\omega)|_{dB} \leq -A_{ndB} = -90_{dB}$

Infine abbiamo utilizzato una rete anticipatrice e un polo ad alte frequenze per realizzare la $L(s)$ ottimale in risposta ai segnali $w(t)$, $d(t)$ e $n(t)$. Abbiamo calcolato le trasformate $W(s)$, $D(s)$ e $N(s)$ e l'uscita linearizzata finale.

- $R(s) = R_d(s)R_s(s) = \frac{1+12.09s}{1+0.00024 \cdot 12.09s} \cdot \frac{1}{1+10^{-3}s} \cdot \frac{1}{s}$
- $L(s) = R_d(s)G_e(s) = \frac{1+12.09s}{1+0.00024 \cdot 12.09s} \cdot \frac{1}{1+10^{-3}s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{5s+36.75}{s^2+2s+0.84}$

Lo studio dell'uscita è stato eseguito anche nel caso *non lineare* tramite Simulink, e ciò ha permesso di evidenziare la differenza rispetto all'approssimazione effettuata tramite Taylor, in quanto è facile notare una numerosità di oscillazioni iniziali.

I punti opzionali ci hanno permesso di osservare l'uscita in range di condizioni iniziali variabili con un gradino $w(t) = 0$ in ingresso e in un range di gradini $w(t) = k \cdot 1(t)$.