

Controlli Automatici T: Controllo di un riscaldatore elettrico

Progetto Tipologia b - Traccia 2

Achille Pisani
Alessandro Parmeggiani
Youssef Esam Ebrahim Abou Aiesh

Contents

0 Introduzione	4
0.1 Descrizione del problema	4
0.2 Parametri	4
1 Linearizzazione del sistema	6
1.1 Richieste	6
1.2 Variabili del sistema	6
1.3 Espressione del sistema in forma di stato	6
1.4 Analisi del sistema	7
1.5 Coppia di equilibrio	7
1.5.1 Punto e ingresso di equilibrio	7
1.5.2 Verifica dell'equilibrio nel modello non lineare	7
1.6 Linearizzazione	7
1.6.1 Calcolo delle jacobiane	8
1.6.2 Autovalori e stabilità	8
2 Funzione di trasferimento	8
2.1 Richieste	8
2.2 Definizione della funzione di trasferimento $G(s)$	8
2.3 Calcolo della funzione di trasferimento $G(s)$	9
2.3.1 Guadagno statico	9
2.3.2 Poli e zeri	9
2.3.3 Funzione di trasferimento finale	10
3 Progettazione del regolatore	10
3.1 Richieste	10
3.2 Architettura e funzioni di sensitività	10
3.3 Specifiche	12
3.3.1 Specifica sulla sovraelongazione	13
3.3.2 Specifica sul tempo di assestamento	13
3.4 Regolatore statico $R_s(s)$	14
3.4.1 Vincolo sull'errore a regime	14
3.4.2 Vincolo sul disturbo in bassa frequenza	15
3.5 Regolatore dinamico $R_d(s)$	15
3.5.1 Polo per attenuazione del rumore di misura	15
3.5.2 Rete anticipatrice $R_{lead}(s)$	15
3.5.3 Regolatore dinamico complessivo	16
3.6 Margini di $L(s)$ e attenuazione S, T	17
3.7 Prestazioni nel tempo (gradino)	17
3.7.1 Tempo di assestamento	17
3.7.2 Sovraelongazione massima	17
3.8 Regolatore finale	17
4 Test sul sistema linearizzato	18
4.1 Richieste	18
4.2 Obiettivi	18
4.3 Ingressi	18
4.4 Modello ad anello chiuso e funzioni di trasferimento	19
4.5 Margini di stabilità	20
4.6 Prestazioni sul gradino di riferimento	20
4.7 Scenario lungo: reiezione del disturbo a bassa frequenza	20
4.8 Scenario breve: attenuazione del rumore di misura ad alta frequenza	21
4.9 Uscita totale del sistema	21
5 Test sul sistema non lineare	22
5.1 Richieste	22
5.2 Simulazione	22
5.2.1 Sistema ad anello chiuso non lineare	22
5.2.2 Descrizione dei blocchi	22
5.2.3 Simulazione con disturbi applicati	23

0 Introduzione

0.1 Descrizione del problema

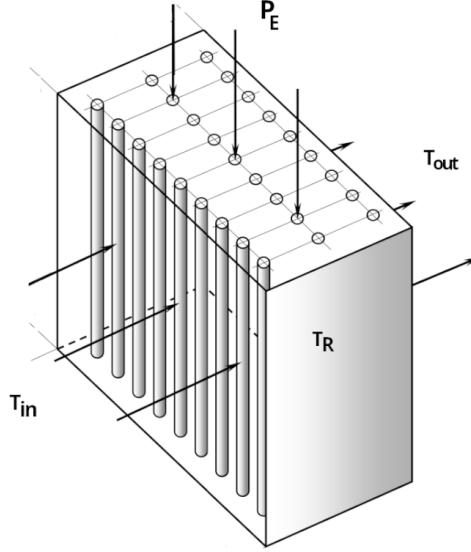


Figura 1: Schema illustrativo del riscaldatore.

Si consideri il sistema in Figura 1 rappresentante un riscaldatore elettrico che riscalda dell'aria in transito. La dinamica del sistema è descritta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$m_R c_R \frac{dT_R(t)}{dt} = h_R A_R (T_{\text{out}}(t) - T_R(t)) + \frac{P_E(t)}{(1 + \kappa T_R(t))} \quad (1)$$

$$m_A c_A \frac{dT_{\text{out}}(t)}{dt} = \dot{m}_A c_A (T_{\text{in}} - T_{\text{out}}(t)) + h_R A_R (T_R(t) - T_{\text{out}}(t)). \quad (2)$$

0.2 Parametri

I parametri forniti dalla traccia sono:

- $T_R(t)$ è la temperatura del riscaldatore [$^{\circ}\text{C}$];
- $T_{\text{out}}(t)$ è la temperatura dell'aria in uscita dal riscaldatore [$^{\circ}\text{C}$];
- $P_E(t)$ è la potenza elettrica fornita [W];
- T_{in} è la temperatura dell'aria in ingresso (ambiente a temperatura costante) [$^{\circ}\text{C}$];
- m_R è la massa del riscaldatore [kg];
- c_R è il calore specifico del riscaldatore [$\text{J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$];
- h_R è il coefficiente di convezione [$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$];
- A_R è l'area di scambio termico tra riscaldatore e aria [m^2];
- κ è il coefficiente di variazione della resistenza con la temperatura [$1/^{\circ}\text{C}$];
- m_A è la massa dell'aria [kg];
- c_A è il calore specifico dell'aria [$\text{J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$];
- \dot{m}_A è la portata massica dell'aria [kg/s].

Si supponga di poter misurare la temperatura dell'aria in uscita dal riscaldatore $T_{\text{out}}(t)$ e di poter agire sulla potenza elettrica fornita al riscaldatore $P_E(t)$.

Parametro	Valore
h_R	50 W/(m ² · ° C)
A_R	0,07 m ²
c_R	840,8 J/(kg · ° C)
c_A	1010 J/(kg · ° C)
m_R	2,542 kg
m_A	0,1041 kg
\dot{m}_A	0,2 kg/s
T_{in}	28 °C
κ	$3 \cdot 10^{-3}$ (1/°C)
$T_{\text{R,e}}$	175 °C
$T_{\text{out,e}}$	30,5036 °C

Tabella 1: Valori dei parametri del riscaldatore

1 Linearizzazione del sistema

1.1 Richieste

Si riporti il sistema (1) nella forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3a)$$

$$y = h(x, u). \quad (3b)$$

In particolare, si dettagli:

- la variabile di stato;
- la variabile d'ingresso;
- la variabile d'uscita;
- la forma delle funzioni f e h .

A partire dai valori di equilibrio $T_{R,e}$ e $T_{\text{out},e}$ (forniti in tabella), si trovi l'intera coppia di equilibrio (x_e, u_e) e si linearizzi il sistema non lineare (3) nell'equilibrio, così da ottenere un sistema linearizzato del tipo

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (4a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u \quad (4b)$$

con opportune matrici A , B , C e D .

1.2 Variabili del sistema

Le variabili individuate per descrivere il sistema in forma di stato sono:

- Lo stato:

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_R(t) \\ T_{\text{out}}(t) \end{bmatrix}$$

dove $T_R(t)$ è la temperatura del riscaldatore ($^{\circ}\text{C}$) e $T_{\text{out}}(t)$ è la temperatura dell'aria in uscita ($^{\circ}\text{C}$).

- L'ingresso:

$$u(t) := P_E(t)$$

ovvero la potenza elettrica fornita al riscaldatore (W).

- L'uscita:

$$y(t) := T_{\text{out}}(t) = x_2(t)$$

ovvero la temperatura dell'aria in uscita ($^{\circ}\text{C}$).

1.3 Espressione del sistema in forma di stato

Il sistema può essere descritto mediante le seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} f_1(T_R(t), T_{\text{out}}(t), u(t)) \\ f_2(T_R(t), T_{\text{out}}(t), u(t)) \end{bmatrix}, \quad y(t) = h(x(t), u(t)) = x_2(t) = T_{\text{out}}(t). \quad (3)$$

Dove, nel dettaglio, le componenti di stato sono governate dalle seguenti equazioni:

$$f_1(T_R, T_{\text{out}}, u) = \frac{a_R(T_{\text{out}} - T_R) + \frac{u}{1 + \kappa T_R}}{m_R c_R},$$

$$f_2(T_R, T_{\text{out}}, u) = \frac{\dot{m}_A c_A (T_{\text{in}} - T_{\text{out}}) + a_R (T_R - T_{\text{out}})}{m_A c_A}.$$

Pertanto, la forma di stato completa risulta:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{a_R(T_{\text{out}} - T_R) + \frac{u}{1+\kappa T_R}}{m_R c_R} \\ \frac{\dot{m}_A c_A (T_{\text{in}} - T_{\text{out}}) + a_R (T_R - T_{\text{out}})}{m_A c_A} \end{bmatrix}, \quad y(t) = T_{\text{out}}(t).$$

1.4 Analisi del sistema

Tramite le equazioni possiamo notare che il sistema è:

- **Tempo invariante**, poichè i coefficienti $A_R, m_R, c_R, m_A, c_A, \kappa, T_{\text{in}}$ sono costanti.
- **SISO**, poichè l'equazione di uscita (3b) ha dimensione $p = 1$ e la dimensione della variabile di ingresso è $m = 1$, quindi abbiamo che ($p = m = 1$).
- **Strettamente proprio**, poichè $y(t) = T_{\text{out}}(t)$, quindi l'uscita non dipende dall'ingresso, ma solo dallo stato.

1.5 Coppia di equilibrio

Dato un sistema tempo invariante continuo di tipo $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, abbiamo che (x_e, u_e) è una coppia di equilibrio se $f(x_e, u_e) = 0$.

1.5.1 Punto e ingresso di equilibrio

Definiamo quindi lo stato di equilibrio come:

$$x_e = \begin{bmatrix} T_{R,e} \\ T_{\text{out},e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175^\circ\text{C} \\ 30, 5036^\circ\text{C} \end{bmatrix} \quad (4)$$

E definendo la costante $K_{T_{R,e}} = 1 + K T_{R,e}$, otteniamo l'ingresso di equilibrio:

$$u_e = P_{E,e} = -a_R (T_{\text{out},e} - T_{R,e}) K_{T_{R,e}} \approx 771,250 \text{ W} \quad (5)$$

1.5.2 Verifica dell'equilibrio nel modello non lineare

Per verificare che (x_e, u_e) è una coppia di equilibrio, valutiamo le equazioni nel punto $(T_{R,e}, T_{\text{out},e}, u_e)$:

$$f_1(T_{R,e}, T_{\text{out},e}, u_e), \quad f_2(T_{R,e}, T_{\text{out},e}, u_e).$$

Possiamo notare che corrispondono alle \dot{T}_R e \dot{T}_{out} del punto di equilibrio.

Dai calcoli otteniamo che:

$$f_1(T_{R,e}, T_{\text{out},e}, u_e) = 0 [\text{C/s}], \quad f_2(T_{R,e}, T_{\text{out},e}, u_e) \approx 9,7 \cdot 10^{-5} [\text{C/s}].$$

Benchè il primo valore sia nullo, il secondo non è esattamente uguale a 0, ma, essendo un valore molto vicino allo 0 possiamo considerare soddisfatta la condizione e supporre (x_e, u_e) coppia di equilibrio. Per procedere in maniera corretta senza supposizioni, possiamo prendere una tolleranza di 10^{-4} .

1.6 Linearizzazione

Preso il punto (x_e, u_e) come coppia di equilibrio, possiamo approssimare il sistema non lineare intorno a tale punto tramite lo sviluppo di Taylor. Se il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile intorno a questo punto, allora lo sarà anche quello non lineare. Pertanto possiamo scrivere il sistema nella seguente forma:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t) + D u(t),$$

dove $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

1.6.1 Calcolo delle jacobiane

Per effettuare la linearizzazione è necessario ricavare le jacobiane delle funzioni di stato $f(x, u)$ rispetto alle variabili di stato e all'ingresso, valutandole nel punto di equilibrio (x_e, u_e) .

La matrice di stato è:

$$A_e = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial T_R} & \frac{\partial f_1}{\partial T_{\text{out}}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial T_R} & \frac{\partial f_2}{\partial T_{\text{out}}} \end{bmatrix}_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} -2.1 \times 10^{-3} & 1.6 \times 10^{-3} \\ 0.033 & -1.9545 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Da A_{11} capiamo che la dinamica di T_R è lenta; da A_{22} capiamo che la dinamica di T_{out} è veloce.

La matrice d'ingresso è:

$$B_e = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{(x_e, u_e)} = \begin{bmatrix} 3.068 \times 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Da B_2 capiamo che l'ingresso non entra direttamente nell'equazione; da B_1 capiamo che

Poiché la sola uscita del sistema è la temperatura T_{out} , (sistema SISO) si ottiene:

$$C_e = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \right|_{(x_e, u_e)} = [0 \ 1], \quad D_e = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \right|_{(x_e, u_e)} = 0. \quad (8)$$

Il sistema linearizzato risulta dunque:

$$\delta \dot{x}(t) = A_e \delta x(t) + B_e \delta u(t), \quad \delta y(t) = C_e \delta x(t) + D_e \delta u(t). \quad (9)$$

1.6.2 Autovalori e stabilità

Per determinare se il sistema è asintoticamente stabile, dobbiamo calcolare gli autovalori della matrice A_e risolvendo il polinomio caratteristico:

$$\det(A_e - \lambda I) = 0.$$

Gli autovalori calcolati numericamente sono:

$$\lambda_1 = -2.1 \times 10^{-3}, \quad \lambda_2 = -1.9545.$$

Gli autovalori hanno parte reale negativa, quindi abbiamo che il sistema linearizzato è asintoticamente stabile.

$$\Re(\lambda_1) < 0, \quad \Re(\lambda_2) < 0.$$

Di conseguenza, anche il sistema non lineare risulta localmente stabile attorno al punto di equilibrio.

2 Funzione di trasferimento

2.1 Richieste

Si calcoli la funzione di trasferimento da δu a δy , ovvero la funzione $G(s)$ tale che $\delta Y(s) = G(s) \delta U(s)$.

2.2 Definizione della funzione di trasferimento $G(s)$

Dato il modello nello spazio di stato linearizzato del sistema

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t) + D u(t),$$

è possibile definire la funzione di trasferimento $G(s)$ come il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita e quella dell'ingresso, assumendo condizioni iniziali nulle $x(0) = 0$.

Applicando la trasformata di Laplace all'evoluzione forzata del sistema si ottiene:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]U(s) \quad (10)$$

da cui segue la definizione di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (11)$$

Essendo il nostro sistema di tipo SISO avremo:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (12)$$

dove $D = \det(sI - A)$ è il polinomio caratteristico della matrice A.

2.3 Calcolo della funzione di trasferimento $G(s)$

Considerata la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\Delta T_{out}(s)}{\Delta PE(s)} \quad (13)$$

2.3.1 Guadagno statico

Definiamo il guadagno statico come:

$$G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [C(sI - A)^{-1}B + D] = -CA^{-1}B + D = 2,518 \cdot 10^{-3} \frac{\text{°C}}{\text{W}} \quad (14)$$

2.3.2 Poli e zeri

Data la funzione di trasferimento

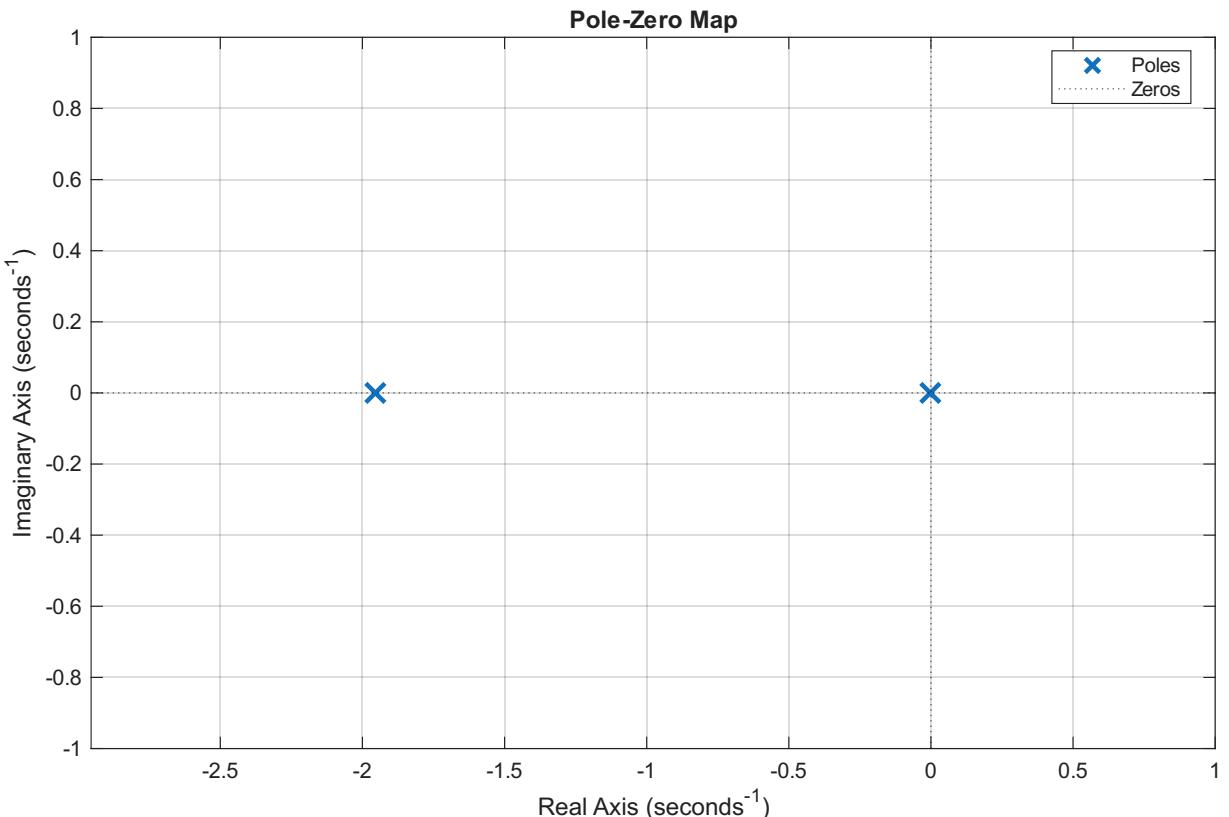
$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Definiamo come **poli** di $G(s)$ le radici del denominatore $D(s)$ e **zeri** le radici del numeratore $N(s)$. Avremo che i poli di $G(s)$ sono:

$$p_1 = -1,9545 \frac{1}{s}, \quad p_2 = -0,0021 \frac{1}{s}. \quad (15)$$

Si osserva che i poli di $G(s)$ coincidono con gli autovalori della matrice A. Tutti i poli presentano parte reale negativa; il sistema è quindi BIBO stabile.

Per quanto riguarda gli zeri di $G(s)$, si può notare che $G(s)$ non ha nessuno zero finito.

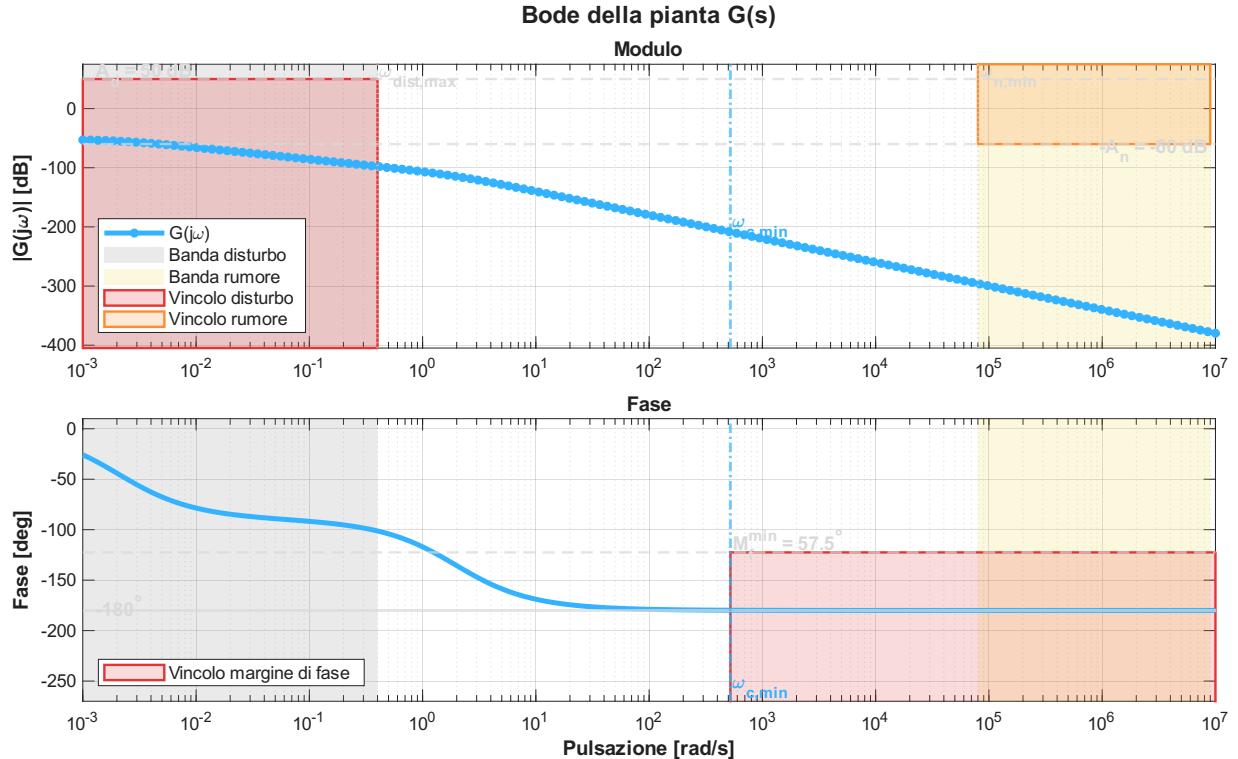


2.3.3 Funzione di trasferimento finale

La funzione di trasferimento della pianta può quindi essere espressa come:

$$G(s) = \frac{1,03 \cdot 10^{-5}}{(s + 1,9545)(s + 0,0021)}.$$

Mostriamo il corrispondente diagramma di Bode:



3 Progettazione del regolatore

3.1 Richieste

Si progetti un regolatore (fisicamente realizzabile) considerando le seguenti specifiche:

- 1) Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.002$ in risposta a un gradino $w(t) = W \cdot \mathbf{1}(t)$ e $d(t) = D \cdot \mathbf{1}(t)$ con ampiezze $W \leq 4$ e $D \leq 3.5$.
- 2) Per garantire una certa robustezza del sistema si deve avere un margine di fase $M_f \geq 50^\circ$.
- 3) Il sistema può accettare una sovraelongazione percentuale al massimo del 11%: $S\% \leq 11\%$.
- 4) Il tempo di assestamento alla $\varepsilon\% = 5\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_{a,\varepsilon} = 0.01$ s.
- 5) Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.4]$, deve essere abbattuto di almeno 50 dB.
- 6) Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[8 \cdot 10^4, 9 \cdot 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno 60 dB.

3.2 Architettura e funzioni di sensitività

Progettiamo un regolatore $R(s)$ per l'impianto $G(s)$ in modo che le specifiche vengano rispettate.

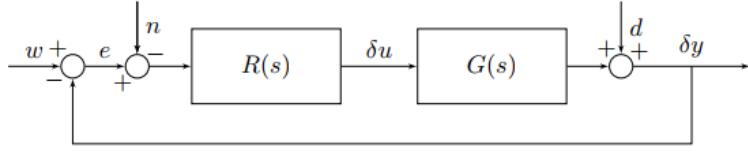


Figura 2: Schema di controllo.

Possiamo definire $L(s) = R(s) \cdot G(s)$, questa viene chiamata funzione d'anello che rappresenta l'elemento fondamentale per l'analisi di stabilità e per la progettazione del sistema di controllo in frequenza. Il sistema è soggetto alla presenza dei seguenti segnali:

- $\omega(t)$: Ingresso di riferimento.
- $y(t)$: Uscita del sistema.
- $e(t) = y(t) - \omega(t)$: Errore tra l'uscita ed il riferimento.
- $d(t)$: Disturbo agente sull'uscita.
- $n(t)$: Rumore di misura.

Prima di continuare definiamo alcuni concetti fondamentali:

Pulsazione critica ω_c

La pulsazione critica ω_c è definita come la pulsazione alla quale il modulo della funzione d'anello attraversa il valore unitario:

$$|L(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

Pulsazione ω_π

È la pulsazione alla quale la fase di $L(j\omega)$ assume il valore di -180° :

$$\arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ$$

Margine di fase

fornisce una misura della robustezza del sistema in termini di stabilità ed è definito come:

$$M_f = \arg(L(j\omega_c)) - (-180^\circ) = \arg(L(j\omega_c)) + 180^\circ$$

Margine di ampiezza

quantifica la tolleranza del sistema a variazioni del guadagno:

$$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

Criterio di Bode

Si supponga che:

1. $L(s)$ non presenti poli a parte reale positiva;
2. il modulo $|L(j\omega)|$ attraversi una sola volta il valore unitario,

allora il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se entrambi i margini risultano positivi.

Per analizzare l'effetto del riferimento, dei disturbi e del rumore di misura, si introducono le seguenti funzioni di sensitività:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (\text{sensitività complementare}), \quad (16)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (\text{sensitività}), \quad (17)$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \quad (\text{sensitività di controllo}). \quad (18)$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottengono le relazioni:

$$Y(s) = F(s)W(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s), \quad (19)$$

$$U(s) = Q(s)W(s) - Q(s)D(s) - Q(s)N(s), \quad (20)$$

$$E(s) = S(s)W(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s). \quad (21)$$

L'obiettivo ideale del controllo è ottenere un'uscita che segua il riferimento e sia poco sensibile ai disturbi e al rumore di misura. In termini di risposta in frequenza, ciò si traduce nelle seguenti condizioni desiderabili:

- $|F(j\omega)| \approx 1$ e $|S(j\omega)| \approx 0$ alle basse frequenze;
- $|F(j\omega)| \approx 0$ alle alte frequenze.

???? L'errore tra l'uscita ed il riferimento è definito come:

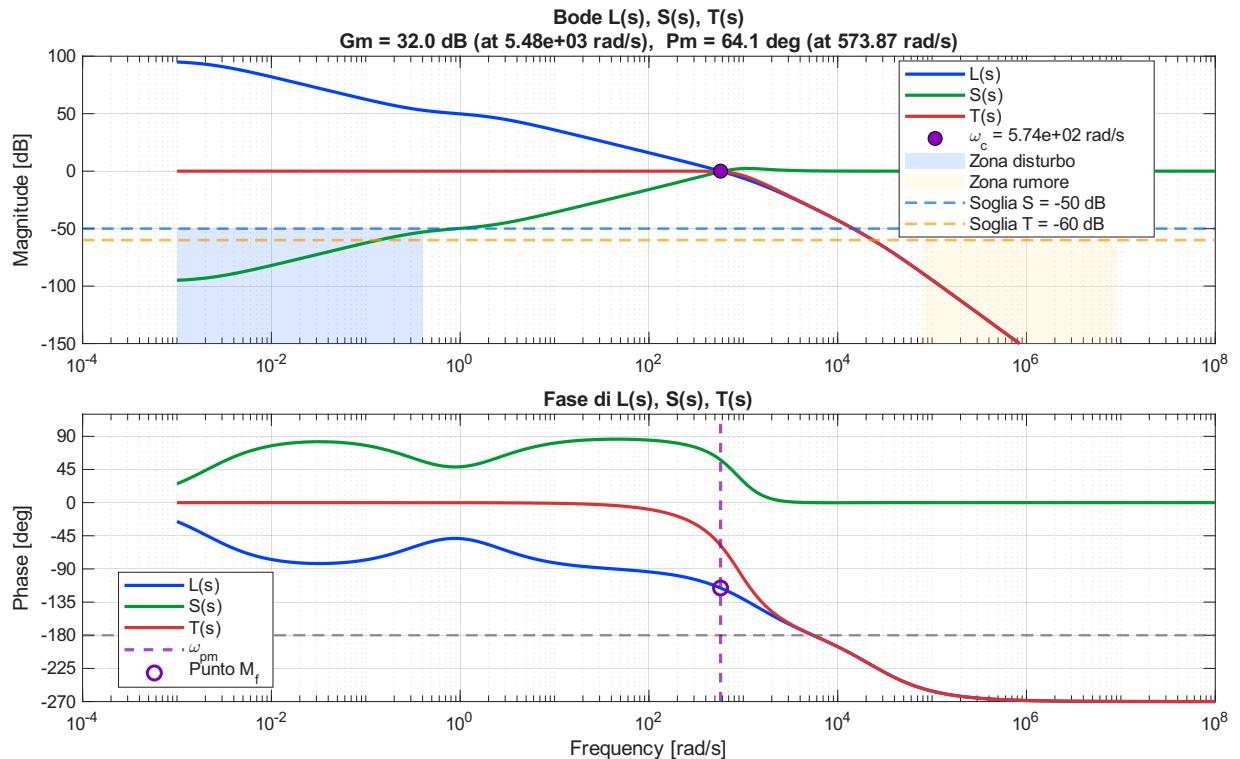
$$e(t) = y(t) - \omega(t)$$

Inoltre, possiamo definire le funzioni di sensitività:

- $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$: funzione di sensitività che modula l'errore e i disturbi.
- $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$: funzione di sensitività complementare che modula il rumore di misura e l'inseguimento del riferimento.

???.

Nel seguente grafico possono essere analizzate le funzioni di sensitività del sistema a confronto con la $L(s)$:



3.3 Specifiche

Le specifiche necessarie affinché il regolatore progettato sia valido sono classificabili come:

- Vincoli
 - Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.002$.
 - Ampiezza gradino $W_{max} = 4$.
 - Disturbo massimo $D_{max} = 3,5$.
 - Margine di fase minimo $M_{f,min} = 50^\circ$.

- Dinamici
 - Overshoot massimo $Sovr_{max} = 0,11$
- Disturbo (bassa frequenza)
 - Attenuazione del disturbo $A_d = 50 \text{ dB}$ in $[0, \omega_{d,max}]$, con $\omega_{d,max} = 0,4$.
- Rumore (alta frequenza)
 - Attenuazione del rumore $A_n = 60 \text{ dB}$ in $[\omega_{n,min}, \omega_{n,max}]$, con $\omega_{n,min} = 8 \cdot 10^4$ e $\omega_{n,max} = 9 \cdot 10^6$

3.3.1 Specifica sulla sovraelongazione

Per i sistemi del secondo ordine, la sovraelongazione percentuale $S\%$ in risposta a un gradino unitario è legata al coefficiente di smorzamento ξ dalla relazione:

$$S\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \quad (16)$$

Invertendo tale relazione è possibile ricavare il valore minimo di smorzamento richiesto in funzione della sovraelongazione massima ammissibile:

$$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{S\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{S\%}{100}\right)}}. \quad (17)$$

Nel presente progetto è richiesta una sovraelongazione percentuale massima pari a:

$$S\% \leq S^* = 11\%.$$

Sostituendo tale valore nella relazione precedente si ottiene:

$$\xi^* \approx 0.575. \quad (18)$$

Per sistemi del secondo ordine è possibile stabilire una relazione approssimata tra il coefficiente di smorzamento ξ e il margine di fase M_f , data da:

$$\xi \approx \frac{M_f}{100}. \quad (19)$$

Da cui segue che il margine di fase minimo richiesto per soddisfare la specifica sulla sovraelongazione è:

$$M_{f,min} \approx 100\xi^* \approx 57.5^\circ. \quad (20)$$

Si osserva che tale valore risulta più restrittivo rispetto al margine di fase minimo imposto dalla specifica di stabilità, risultando quindi determinante nella successiva progettazione del regolatore dinamico. Per quanto riguarda le specifiche derivate, abbiamo come risultati:

$$\xi^* \approx 0,575, \quad M_f \approx 57,5^\circ, \quad \omega_{c,min} = 521,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

3.3.2 Specifica sul tempo di assestamento

Il tempo di assestamento rappresenta un indicatore fondamentale delle prestazioni dinamiche del sistema. In generale, il tempo di assestamento $T_{a,\epsilon}$ è legato alla costante di tempo del sistema e all'errore relativo ammesso ϵ dalla relazione:

$$T_{a,\epsilon} = T \ln\left(\frac{1}{0.01\epsilon}\right). \quad (21)$$

Nel caso di sistemi del secondo ordine, il tempo di assestamento al 5% può essere approssimato dalla ben nota relazione:

$$T_{s,5} \approx \frac{3}{\xi\omega_n}, \quad (22)$$

dove ξ è il coefficiente di smorzamento e ω_n è la pulsazione naturale del sistema. Nel presente progetto è richiesto che il tempo di assestamento soddisfi la specifica:

$$T_{s,5} \leq 0.01 \text{ s.}$$

Utilizzando il valore di smorzamento ricavato dalla specifica sulla sovraelongazione, $\xi^* \approx 0.575$, è possibile stimare una pulsazione naturale minima:

$$\omega_n^{\min} = \frac{3}{\xi^* T_{s,5}} = \frac{3}{0.575 \cdot 0.01} \approx 5.22 \times 10^2 \text{ rad/s.} \quad (23)$$

Si definisce pertanto:

$$\omega_{c,\min} = \omega_n^{\min} \approx 5.22 \times 10^2 \text{ rad/s,} \quad (24)$$

che rappresenta l'estremo inferiore dell'intervallo all'interno del quale dovrà essere posizionata la pulsazione di attraversamento ω_c nella successiva progettazione del regolatore dinamico.

Sintesi regolatore

Il regolatore è realizzato come combinazione tra la sua parte statica e quella dinamica $R(s) = R_s(s) \cdot R_d(s)$.

3.4 Regolatore statico $R_s(s)$

Il regolatore statico ha il compito di soddisfare le specifiche relative al comportamento a regime del sistema, in particolare per quanto riguarda l'errore stazionario in risposta a un riferimento costante e l'attenuazione dei disturbi a bassa frequenza. In generale, considerando un riferimento a gradino $W(s) = W/s$, l'errore a regime è dato da:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)W(s) = W \lim_{s \rightarrow 0} S(s), \quad (25)$$

dove $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$ è la funzione di sensitività. Nel caso di un sistema privo di poli nell'origine, l'errore a regime non è nullo, ma può essere reso sufficientemente piccolo aumentando opportunamente il guadagno d'anello alle basse frequenze. In particolare, indicando con $\mu = \lim_{s \rightarrow 0} L(s)$ il guadagno statico della funzione d'anello, si ottiene:

$$e_\infty = \frac{W}{1 + \mu}. \quad (26)$$

Nel presente progetto non si introduce un polo nell'origine nel regolatore. Di conseguenza, il regolatore statico è scelto come un semplice guadagno costante:

$$R_s(s) = R_s. \quad (27)$$

Questa scelta consente di ridurre l'errore a regime a un valore sufficientemente contenuto, senza introdurre gli effetti collaterali tipici dell'azione integrativa, quali un eccessivo sfasamento e una maggiore sensibilità al rumore alle alte frequenze. Il valore del guadagno statico R_s viene determinato imponendo il soddisfacimento delle specifiche sull'errore a regime e sull'attenuazione del disturbo in uscita nella banda di bassa frequenza. Tra i valori ottenuti, viene selezionato quello più restrittivo, così da garantire il rispetto simultaneo di tutte le specifiche assegnate. Il regolatore statico si occupa delle specifiche riguardanti l'errore a regime. Scegliamo un guadagno R_s per soddisfare i vincoli a bassa frequenza:

3.4.1 Vincolo sull'errore a regime

L'errore dovuto a un ingresso a gradino con retroazione unitaria dipende da $S(0)$. Per avere errore e^* con $W \leq 4$ e $D \leq 3,5$.

Nel caso peggiore:

$$|e_\infty| \leq |S(0)|(W_{max} + D_{max}) \quad (28)$$

Imponendo:

$$|e_\infty| \leq e^*$$

E assumendo:

$$L(0) >> 1$$

Notiamo che:

$$|L(0)| \geq \frac{W_{max} + D_{max}}{e^*}$$

E definiamo:

$$\mu_{s,err} = \frac{W_{max} + D_{max}}{e^*}$$

Siccome $L(0) = R_s G(0)$, otteniamo

$$R_{s,err} = \frac{\mu_{s,err}}{|G(0)|}$$

3.4.2 Vincolo sul disturbo in bassa frequenza

L'attenuazione richiesta $A_d = 50 \text{ dB}$ si traduce in:

$$\mu_{s,dist} = 10^{\frac{A_d}{20}}$$

Imponiamo un loop abbastanza grande a $\omega_{d,max}$:

$$|L(j\omega_{d,max})| \geq 10^{\frac{A_d}{20}}$$

Quindi:

$$R_{s,dist} = \frac{\mu_{s,dist}}{|G(j\omega_{d,max})|}$$

Scegliamo il massimo tra i due per soddisfare entrambi i vincoli: $R_s = \max(R_{s,err}, R_{s,dist})$

I risultati da noi ottenuti sono:

$$R_{s,err} \approx 1,46 \cdot 10^6, \quad R_{s,dist} \approx 2,47 \cdot 10^7$$

Quindi prendiamo:

$$R_s = 2,47 \cdot 10^7$$

3.5 Regolatore dinamico $R_d(s)$

Il regolatore dinamico non ha come obiettivo principale quello di "modificare" il modulo, ma può:

- Modificare fase e pendenza (ci serve per garantire $M_f \geq 50^\circ$ e crossover $> \omega_{c,min}$).
- Ridurre il guadagno alle alte frequenze (finalizzato l'attenuazione del rumore $\geq 60 \text{ dB}$ in $[\omega_{n,min}, \omega_{n,max}]$, con $\omega_{n,min} = 8 \cdot 10^4$ e $\omega_{n,max} = 9 \cdot 10^6$).
- Aumentare il guadagno alle basse frequenze (ci serve per l'attenuazione dei disturbi fino a $\omega_{d,max} = 0,4$)

3.5.1 Polo per attenuazione del rumore di misura

Abbiamo introdotto un polo reale $R_{d,polo}(s)$ ad alta frequenza al fine di garantire l'attenuazione del rumore di misura.

$$R_{d,polo}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_{p,rumore}}} \quad (29)$$

con:

$$\omega_{p,rumore} = k_p \omega_{n,min}, \quad k_p = 0,3$$

Prendiamo $k_p = 0,3$ per mettere il polo sotto la banda del rumore, in modo da attenuare il rumore senza tagliare la dinamica di controllo.

3.5.2 Rete anticipatrice $R_{lead}(s)$

Il fulcro del regolatore dinamico, serve perchè altrimenti il loop sarebbe troppo in ritardo in fase. Fissiamo $\omega_c^* = 1,1\omega_{c,min}$ (leggermente sopra il minimo per compensare approssimazioni).

Ora, valutiamo modulo e fase dell'anello senza rete anticipatrice a ω_c^* , ovvero:

$$L_0(j\omega_c^*) \approx G_e(j\omega_c^*)$$

$$G_e(s) = R_s G(s), \quad G_e(j\omega_c^*)$$

e ricaviamo modulo:

$$|G_e(j\omega_c^*)|$$

e fase:

$$\angle G_e(j\omega_c^*)$$

da cui ricaviamo:

$$PM_0 = 180^\circ + \angle G_e(j\omega_c^*) \quad (30)$$

Nella figura sottostante si può analizzare $G_e(s)$ a confronto con $L(s)$:

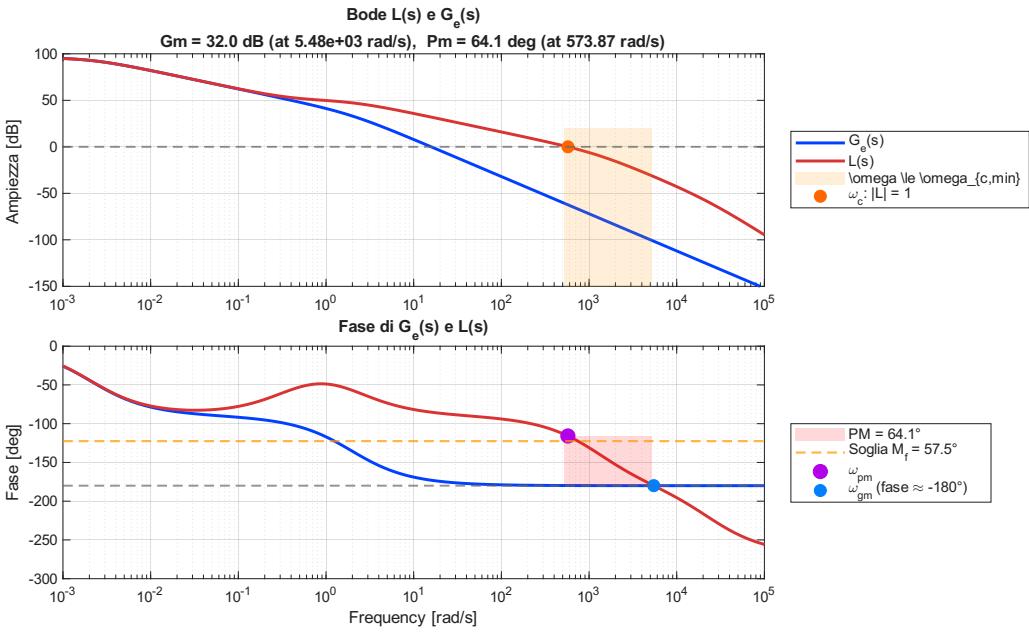


Figura 3: Schema di controllo.

I risultati da noi ottenuti sono:

$$\angle G_e \approx -179,8^\circ, \quad PM_0 \approx 0,2^\circ$$

PM_0 è quasi nullo, pertanto imponiamo PM_{des} , ovvero un margine di fase desiderato, definito come: $PM_{des} = M_f + 8^\circ$, dove abbiamo aggiunto $+8$ per rendere il modello più robusto contro ad incertezze dovute ad approssimazioni.

Pertanto, la fase che un lead deve aggiungere è: $\phi^* = PM_{des} - PM_0$; in parallelo, imponiamo che a ω_c^* il modulo sia 0 dB:

$$|L(j\omega_c^*)| = 1$$

Dato che $L \approx R_d G_e$ a quella frequenza:

$$|R_d(j\omega_c^*)| = \frac{1}{|G_e(j\omega_c^*)|} = M^*$$

La rete lead scelta è:

$$R_{d,antic}(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

Abbiamo trovato un polo a $\alpha\tau$ ed uno zero a τ .

A partire dalle formule standard dello scenario B, arriviamo ad avere le seguenti espressioni:

$$\tau = \frac{M^* - \cos \phi^*}{\omega_c^* \sin \phi^*}, \quad \alpha\tau = \frac{\cos \phi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \phi^*} \quad (31)$$

I risultati da noi ottenuti sono:

$$PM_0 \approx 0,2^\circ, \quad PM_{des} \approx 65,5^\circ, \quad \phi^* \approx 65,3^\circ$$

$$M^* \approx 1305,7, \quad \tau \approx 2,503s, \quad \alpha\tau \approx 8 \cdot 10^{-4}s$$

3.5.3 Regolatore dinamico complessivo

Il regolatore dinamico complessivo risulta quindi:

$$R_d(s) = R_{d,antic}(s) R_{d,polo}(s)$$

Il regolatore dinamico risulta quindi composto da una rete anticipatrice, responsabile dell'incremento del margine di fase e della modellazione della dinamica del sistema, e da un polo ad alta frequenza, introdotto per garantire l'attenuazione del rumore di misura. L'aumento del guadagno alle basse frequenze, necessario per il rigetto dei disturbi, è invece demandato al regolatore statico.

3.6 Margini di L(s) e attenuazione S, T

- Margine di guadagno $G_M = 32,05 dB$.
- Margine di fase $P_M = 64,12^\circ$ a $\omega = 573,87 \frac{rad}{s}$.
- Disturbo (bassa frequenza) $s_{max} = \max |s(j\omega)| \leq 10^{-\frac{A_d}{20}} = -53,08 dB$.
- Rumore (alta frequenza) $T_{max} = \max |T(j\omega)| \leq 10^{-\frac{A_n}{20}} = -89,3 dB$.

3.7 Prestazioni nel tempo (gradino)

Al fine di verificare il rispetto delle specifiche temporali, è stata analizzata la risposta al gradino del sistema in anello chiuso. La funzione di trasferimento dal riferimento all'uscita è data da:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)},$$

dove $L(s) = R(s)G(s)$ rappresenta la funzione d'anello aperto.

È stato applicato un gradino di riferimento di ampiezza W_{max} e la risposta del sistema è stata ottenuta mediante simulazione temporale.

3.7.1 Tempo di assestamento

Il tempo di assestamento al 5% è definito come l'istante oltre il quale l'uscita del sistema rimane permanentemente all'interno di una banda pari al $\pm 5\%$ del valore di regime:

$$0.95 y_\infty \leq y(t) \leq 1.05 y_\infty.$$

Attraverso la funzione `stepinfo` di MATLAB, impostando una soglia di assestamento pari al 5%, è stato calcolato il tempo di assestamento:

$$T_s = 3.25 \cdot 10^{-3} s.$$

Il valore ottenuto risulta inferiore al limite imposto dalla specifica:

$$T_s \leq 1.0 \cdot 10^{-2} s,$$

pertanto la specifica sulla rapidità del sistema risulta soddisfatta.

3.7.2 Sovraelongazione massima

La sovraelongazione percentuale è definita come:

$$S = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100,$$

dove y_{max} rappresenta il valore massimo raggiunto dall'uscita durante il transitorio e y_∞ il valore di regime.

Dall'analisi della risposta al gradino si ottiene:

$$S = 4.98\%.$$

Tale valore risulta ampiamente inferiore al limite massimo consentito dalla specifica:

$$S \leq 11\%,$$

confermando un comportamento ben smorzato del sistema.

3.8 Regolatore finale

Il regolatore finale risulta essere:

$$R(s) = R_d(s) \cdot R_s \quad (32)$$

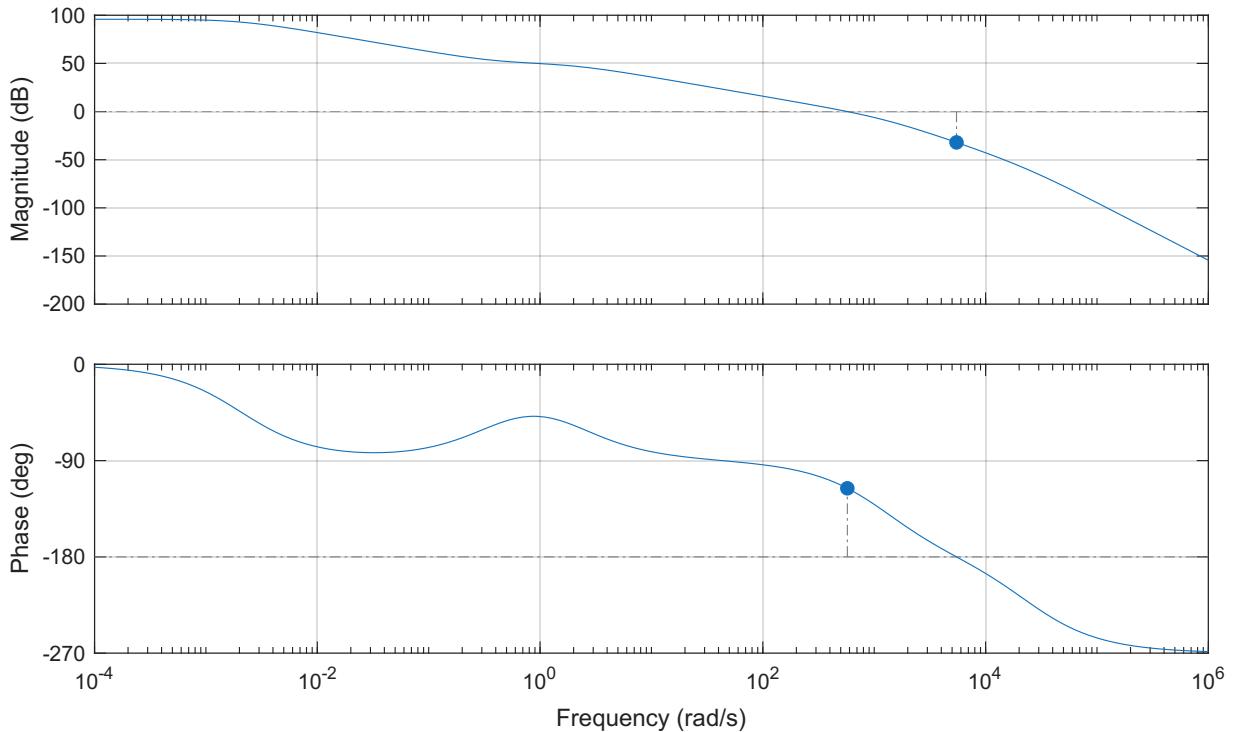
Dopo aver fatto i calcoli risulterà essere:

$$R(s) = 2.47 \cdot 10^7 \frac{1 + 2.503 s}{(1 + 8 \cdot 10^{-4} s) \left(1 + \frac{s}{2.4 \cdot 10^4}\right)}. \quad (33)$$

Quindi la nostra $L(s)$ sarà:

$$L(s) = R(s)G_e(s) = 2.47 \cdot 10^7 \frac{1 + 2.503 s}{(1 + 8 \cdot 10^{-4} s) \left(1 + \frac{s}{2.4 \cdot 10^4}\right)} \cdot \frac{2.54 \cdot 10^2}{(s + 1.9545)(s + 0.0021)}. \quad (34)$$

Punto 3 - Bode di $L(s) = R(s)G(s)$ e margini di stabilità
 $G_m = 32$ dB (at 5.48e+03 rad/s), $P_m = 64.1$ deg (at 574 rad/s)



4 Test sul sistema linearizzato

4.1 Richieste

Testare il sistema di controllo sul sistema linearizzato con $w(t) = 41(t)$, $d(t) = 1.5 \sum_{k=1}^4 \sin(0.08kt)$ e $n(t) = 3 \sum_{k=1}^4 \sin(5 \cdot 10^4 kt)$.

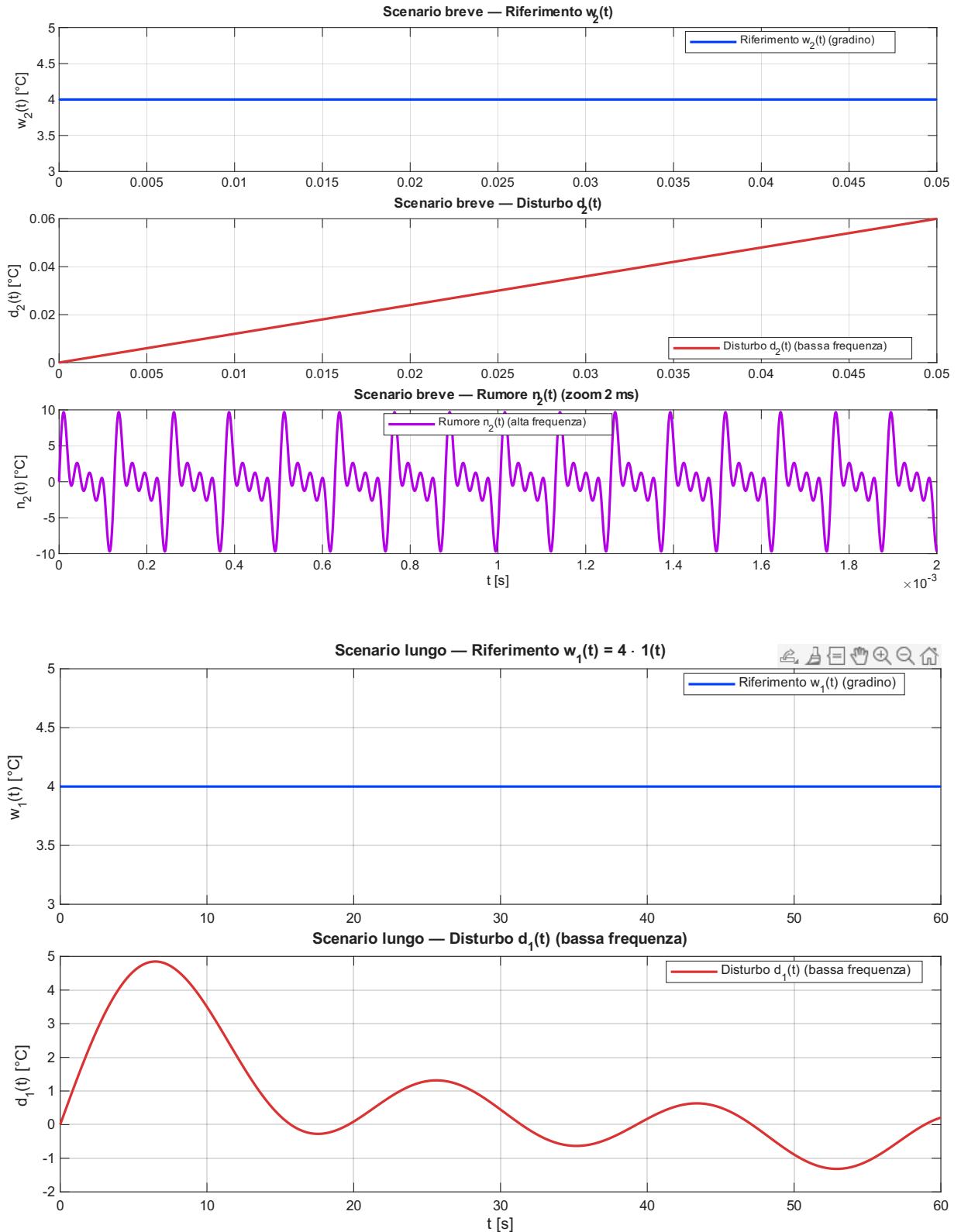
4.2 Obiettivi

Andremo a verificare tramite simulazione nel tempo di un sistema lineare ad anello chiuso che il nostro regolatore soddisfi effettivamente le specifiche su:

- Riferimenti
- Disturbo
- Rumore

4.3 Ingressi

Rappresentazioni grafiche degli ingressi forniti dalla richiesta, prima sullo scenario breve, poi su quello lungo.



4.4 Modello ad anello chiuso e funzioni di trasferimento

Il test è stato condotto sul modello linearizzato del sistema, considerando il comportamento in anello chiuso rispetto ai tre ingressi previsti: riferimento $w(t)$, disturbo $d(t)$ e rumore di misura $n(t)$.

In particolare, definite $L(s)$ come funzione di trasferimento in anello aperto, $T(s)$ come funzione di sensibilità complementare e $S(s)$ come funzione di sensibilità, valgono le seguenti relazioni:

$$T_{wy}(s) = T(s)$$

$$T_{dy}(s) = S(s)$$

$$T_{ny}(s) = -T(s)$$

dove il segno negativo nel trasferimento dal rumore all'uscita è dovuto al fatto che il rumore agisce sul ramo di retroazione.

Queste funzioni di trasferimento vengono utilizzate per valutare separatamente l'effetto dei tre ingressi sull'uscita del sistema.

4.5 Margini di stabilità

I margini di stabilità sono stati calcolati sulla funzione di trasferimento in anello aperto $L(s)$ mediante il comando `margin`. I risultati ottenuti sono:

- Margine di guadagno: $GM = 32.05$ dB
- Margine di fase: $PM = 64.12^\circ$
- Frequenza di attraversamento: $\omega_c = 573.87$ rad/s

Da tali valori capiamo che:

- Il margine di fase è maggiore del valore richiesto, specifica soddisfatta.
- Il margine di guadagno elevato indica una buona tolleranza a variazioni parametriche.
- La frequenza di crossover è coerente con la specifica $\omega_c^* = 1,1\omega_{c,min}$

4.6 Prestazioni sul gradino di riferimento

Le prestazioni dinamiche del sistema sono state valutate applicando un gradino di riferimento $\omega(t) = 4 \cdot 1(t)$ in assenza di disturbi e rumore ($d(t) = 0, n(t) = 0$).

Otteniamo:

- Tempo di assestamento al 5%: $T_s = 3.25 \cdot 10^{-3}$ s
- Overshoot: 4.98%
- Errore a regime: $6.43 \cdot 10^{-5}$ °C

Da questi dati evinciamo che:

- Il tempo di assestamento è molto inferiore al limite.
- L'overshoot è al di sotto del valore (11%) richiesto.
- L'errore a regime è due ordini più piccolo del minimo richiesto.

Avremo che:

$$e_\infty = \omega_{max} |1 - T(0)| = \omega_{max} |S(0)| \quad (35)$$

Ciò conferma che $L(0)$ è grande come, imposto nel progetto del guadagno statico di R_s .

4.7 Scenario lungo: reiezione del disturbo a bassa frequenza

Per valutare la capacità del sistema di rigettare disturbi a bassa frequenza, è stata eseguita una simulazione su un orizzonte temporale lungo (60 s), applicando:

$$d(t) = 1.5 \sum_{k=1}^4 \sin(0.08kt)$$

Il rumore di misura è stato posto nullo.

L'uscita dovuta al solo disturbo è stata calcolata facendo:

$$y_{d1}(t) = T_{dy}(s) d(t)$$

Il valore massimo assoluto osservato è:

$$\max |y_{d1}(t)| = 0.006 \text{ °C}$$

Il disturbo applicato ha ampiezza 1,5 ed è composto da più sinusoidi lente, l'uscita presenta un'oscillazione molto ridotta rispetto all'ampiezza del disturbo ed è coerente con quanto progettato, confermando l'efficacia della funzione di sensibilità $S(s)$ nel rigettare disturbi a bassa frequenza, infatti:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (36)$$

Che in bassa frequenza ha modulo inferiore a -50 dB.

4.8 Scenario breve: attenuazione del rumore di misura ad alta frequenza

Per analizzare l'effetto del rumore di misura, è stata effettuata una simulazione su un intervallo temporale breve (0.05 s) con passo molto ridotto, al fine di catturare le componenti ad alta frequenza.

Ricordiamo che il rumore è definito come:

$$n(t) = 3 \sum_{k=1}^4 \sin(5 \cdot 10^4 kt)$$

L'uscita dovuta al rumore è:

$$y_{n2}(t) = T_{ny}(s) n(t)$$

Il massimo valore assoluto osservato è:

$$\max |y_{n2}(t)| = 5.18 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}$$

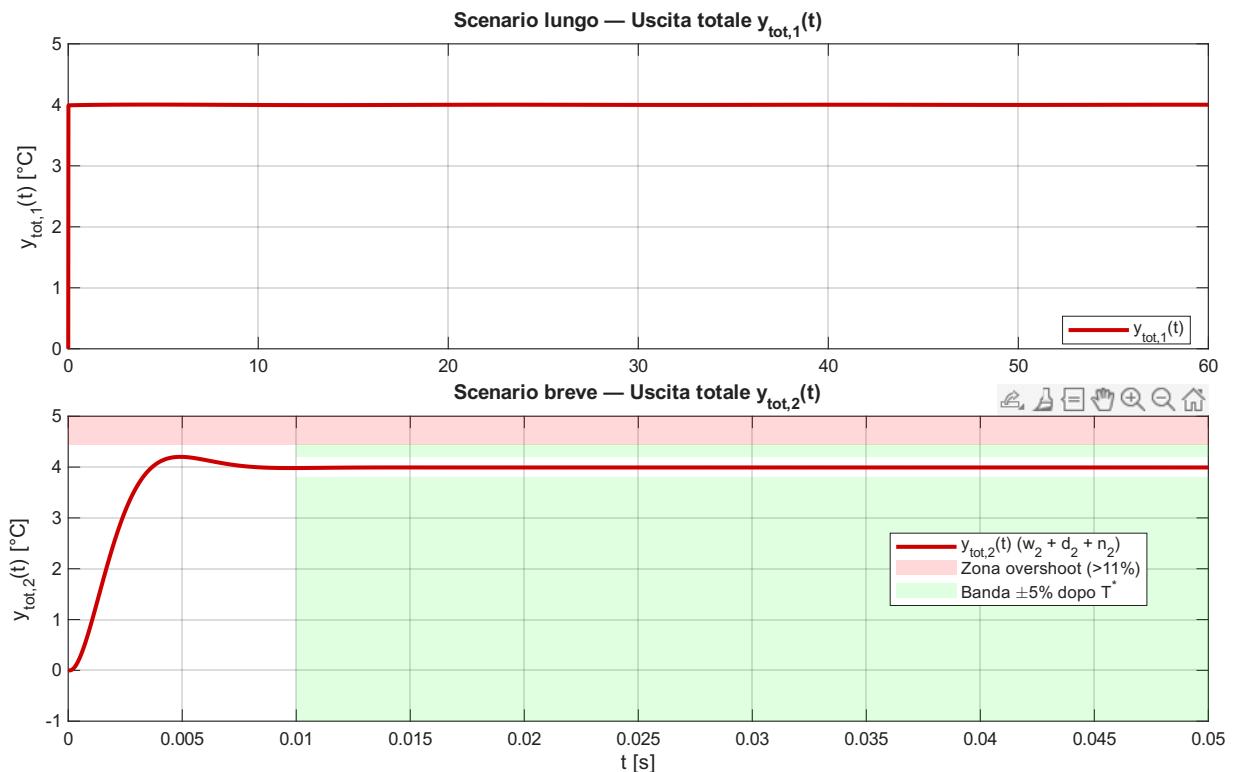
Da questo possiamo evincere che:

- Il rumore ha ampiezza elevata ed è concentrato in alta frequenza.
- L'uscita mostra un'ampiezza molto più piccola confermando una forte attenuazione.

4.9 Uscita totale del sistema

Avendo a disposizione i contributi all'uscita dati da riferimento, disturbi e rumore, possiamo ottenere l'uscita totale con:

$$y(t) = y_w(t) + y_d(t) + y_n(t) \quad (37)$$



Nel complesso, i risultati ottenuti confermano che il regolatore progettato soddisfa tutte le specifiche richieste.

5 Test sul sistema non lineare

5.1 Richieste

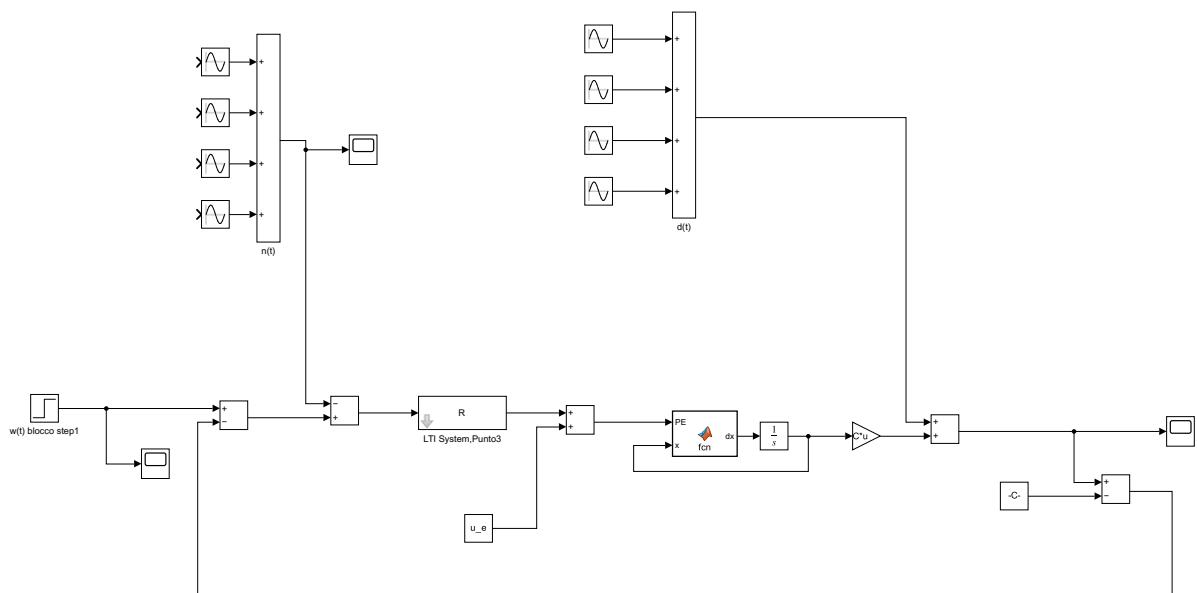
- Testare il sistema di controllo sul modello non lineare (ed in presenza di $d(t)$ ed $n(t)$).
- Supponendo un riferimento $\omega(t) = 2 \cdot 1(t)$, esplorare il range di condizioni iniziali dello stato del sistema non lineare (nell'intorno del punto di equilibrio) tali per cui l'uscita del sistema in anello chiuso converga a $h(x_e, u_e)$.
- Esplorare il range di ampiezza di riferimenti a gradino tali per cui il controllore rimane efficace sul sistema non lineare.

5.2 Simulazione

Per lo svolgimento di questo punto abbiamo utilizzato Simulink.

5.2.1 Sistema ad anello chiuso non lineare

Quella che segue è la rappresentazione del sistema modellata utilizzando Simulink.



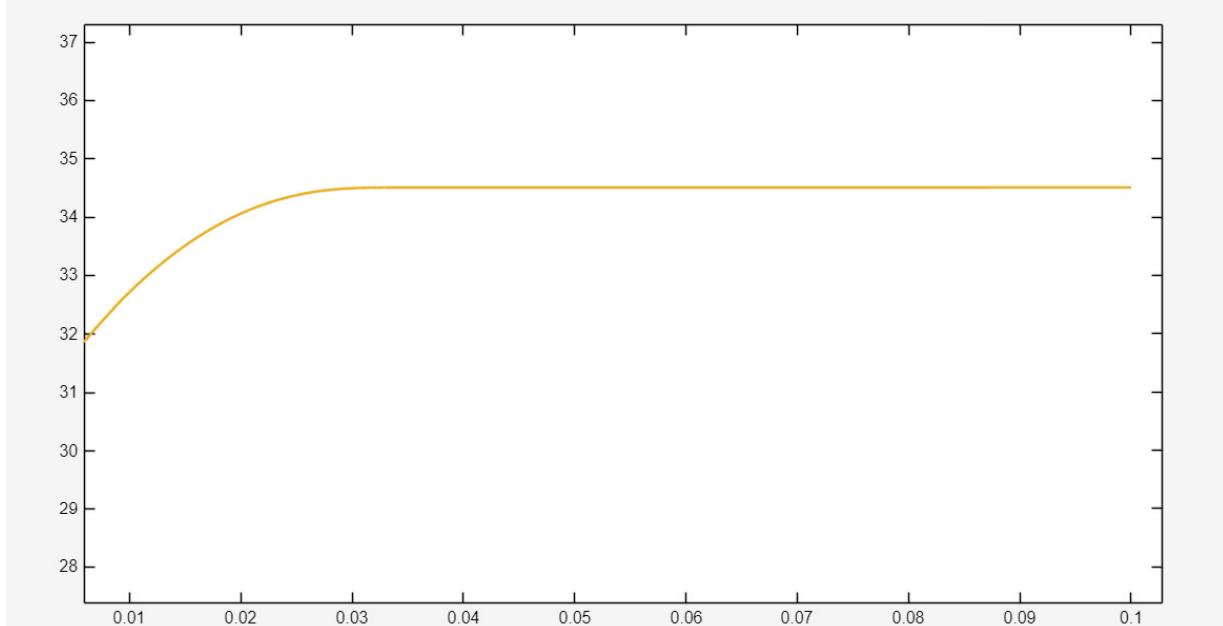
5.2.2 Descrizione dei blocchi

- $\omega(t)$: rappresenta il gradino d'ingresso.
- $n(t)$: rappresenta il rumore di misura.
- R : rappresenta il regolatore.
- dx : blocco MatLab che contiene l'equazione di stato.
- u_e : rappresenta l'ingresso all'equilibrio.

- $\frac{1}{s}$: blocco Integrator che permette di integrare l'equazione differenziale.
- $C * u$: un gain che moltiplica l'uscita del blocco Integrator per la matrice C .
- $d(t)$: rappresenta il disturbo d'uscita.
- $-C-$: sottrazione da applicare per ottenere la non lineare.
- $y(t)$: Blocco scope che mostra l'uscita non lineare.

5.2.3 Simulazione con disturbi applicati

Lo scope all'uscita risulterà:



6 Punti opzionali