

# CONTROLLI AUTOMATICI T

PROF. LORENZO MARCONI - CODICE CORSO: 28015 - CFU: 9

---

Ultima Revisione: 11 aprile 2016

## Indice

<b>1 Sistemi Dinamici Tempo Continui</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione al corso . . . . .	1
1.1.1 Le origini del controllo . . . . .	2
1.1.2 Terminologia . . . . .	2
1.1.3 Progetto di un Sistema di Controllo: le Fasi . . . . .	3
1.2 Modello Matematico di un Sistema Generico . . . . .	3
1.2.1 Esempio: Circuito RC . . . . .	5
1.2.2 Esempio: Sistema Meccanico . . . . .	5
1.3 Tipologie di Sistemi Dinamici . . . . .	5
1.3.1 Esempio . . . . .	6
<b>2 Principi di Modellistica</b>	<b>7</b>
2.1 Derivazione del Modello Matematico mediante Indagine Diretta . . . . .	8
2.1.1 Variabili Energetiche . . . . .	9
2.1.2 Scomposizione di un Sistema Complessivo in Sottosistemi Elementari . . . . .	9
2.1.3 Derivazione del modello matematico . . . . .	10
2.2 Modelli Matematici di Componenti Elementari . . . . .	11
2.2.1 Accumulatori capacitivi . . . . .	11
2.2.2 Accumulatori indutttivi . . . . .	12
2.2.3 Dissipatori di potenza . . . . .	13
2.3 Modelli Matematici per Sistemi Complessi . . . . .	14
2.3.1 Esempio: Circuito Elettrico . . . . .	14
2.3.2 Esempio: Sistema Meccanico . . . . .	15
2.3.3 Esempio: VTOL . . . . .	16
2.4 Modelli di Sistemi Elettromeccanici . . . . .	17
2.4.1 Esempio: Motore Elettrico in Corrente Continua . . . . .	18
2.4.2 Esempio: Altoparlante Magnetico . . . . .	20
2.5 Movimento ed Equilibrio . . . . .	20
2.6 Linearizzazione di un Sistema Non Lineare . . . . .	21
2.6.1 Esempio: Linearizzazione Sistema VTOL . . . . .	21
2.7 Princípio di Sovrapposizione degli Effetti per Sistemi Lineari . . . . .	23

<b>3 Studio nel Dominio di Laplace</b>	<b>24</b>
3.1 Trasformata di Laplace . . . . .	24
3.2 Trasformata inversa di Laplace . . . . .	25
3.3 Proprietà della Trasformata di Laplace . . . . .	26
3.3.1 Dimostrazione della Proprietà di Derivazione . . . . .	27
3.4 Trasformate di funzioni notevoli e segnali elementari . . . . .	27
3.4.1 Trasformata della Delta di Dirac . . . . .	27
3.4.2 Trasformata della Funzione Gradino . . . . .	27
3.4.3 Trasformata della Funzione «Rampa» . . . . .	28
3.4.4 Trasformata dell'Esponenziale . . . . .	28
3.4.5 Trasformate delle funzioni Seno e Coseno . . . . .	28
3.4.6 Trasformata di una Potenza . . . . .	29
3.5 Trasformate di funzioni più complesse . . . . .	29
3.5.1 Trasformata della funzione Impulso Rettangolare . . . . .	29
3.5.2 Trasformata di una funzione «Onda Triangolare» . . . . .	30
<b>4 Funzione di Trasferimento</b>	<b>31</b>
4.1 Definizione di Zeri e Poli . . . . .	39
4.2 Rappresentazione in Forma Fattorizzata . . . . .	39
4.3 Rappresentazione in Forma Alternativa . . . . .	40
4.3.1 Rappresentazione di Zeri e Poli sul piano di Gauss . . . . .	41
4.3.1.1 Esempio: Pendolo inverso . . . . .	42
4.3.1.2 Esempio: Altoparlante Magnetico . . . . .	43
4.3.1.3 Esempio: VTOL . . . . .	43
4.4 Antitrasformazione attraverso Fratti Semplici . . . . .	46
4.4.1 Poli Reali Semplici . . . . .	46
4.4.2 Poli Complessi a Molteplicità 1 . . . . .	48
4.4.2.1 Esempio: Calcolo dell'Antitrasformata . . . . .	49
4.4.2.2 Esempio: Sistema Meccanico . . . . .	51
4.4.3 Calcolo di Fratti Semplici a Molteplicità > 1 . . . . .	54
4.4.3.1 Esempio: Calcolo dell'Antitrasformata . . . . .	56
4.4.3.2 Esempio: Calcolo della Risposta al Gradino . . . . .	56
4.4.3.3 Esempio: Sistema Meccanico . . . . .	57
4.5 Modi del Sistema . . . . .	58
4.5.1 Effetto degli Ingressi nella Risposta Forzata . . . . .	59
4.5.1.1 Risonanza . . . . .	59
4.5.1.2 Proprietà Bloccante degli Zeri . . . . .	60
4.6 Composizione di Schemi a Blocchi . . . . .	61
<b>5 Stabilità e Risposte di Sistemi Elementari</b>	<b>62</b>
5.1 Stabilità Esterna . . . . .	62
5.2 Risposte Temporali di Sistemi Elementari . . . . .	64
5.2.1 Sistemi del Primo Ordine . . . . .	64
5.2.2 Sistemi del Secondo Ordine . . . . .	66
5.3 Luoghi a Sovraetensione Costante . . . . .	71
5.4 Luoghi a Tempo di Assestamento Costante . . . . .	71

5.4.1	Esempio: Sistema Meccanico . . . . .	73
5.5	Polo Dominante . . . . .	74
5.6	Effetto degli Zeri nella Risposta di Sistemi Elementari . . . . .	74
5.6.1	Sistema del Primo Ordine con uno Zero Reale . . . . .	74
5.6.1.1	Sistema del Primo Ordine con uno Zero nell'Origine . . . . .	75
5.6.2	Sistema del Secondo Ordine con Zero Reale e Poli Reali Negativi . . . . .	76
5.6.2.1	Sistemi a Fase Non Minima . . . . .	76
5.6.2.2	Sistemi a Fase Minima . . . . .	76
5.6.3	Sistema del Secondo Ordine con Zero Reale e Poli Complessi Coniugati	80
<b>6</b>	<b>Analisi Armonica di Sistemi Dinamici</b>	<b>83</b>
6.1	Segnali Periodici: Serie di Fourier . . . . .	83
6.2	Segnali Non Periodici: Trasformata di Fourier . . . . .	84
6.3	Spettro di Ampiezza, Spettro di Fase . . . . .	85
6.3.1	Spettro di un Segnale Periodico . . . . .	85
6.3.2	Spettro di un Segnale Non Periodico . . . . .	86
6.4	Funzione di Risposta Armonica . . . . .	86
6.4.1	Introduzione . . . . .	86
6.4.2	Formalizzazione Matematica . . . . .	87
6.5	Teorema del Regime Permanente . . . . .	91
6.6	Rappresentazione Grafica della Risposta Armonica: Diagrammi di Bode . . . . .	95
6.6.1	Diagramma del Guadagno Statico . . . . .	99
6.6.2	Diagramma di uno Zero nell'Origine . . . . .	99
6.6.3	Diagramma di un Polo nell'Origine . . . . .	100
6.6.4	Diagramma di uno Zero Reale . . . . .	100
6.6.5	Diagramma di un Polo Reale . . . . .	102
6.6.6	Diagramma di Zeri Complessi Coniugati . . . . .	104
6.6.7	Diagramma di Poli Complessi Coniugati . . . . .	106
6.6.7.1	Picco di Risonanza . . . . .	108
6.6.7.2	Picco di Attenuazione . . . . .	108
6.6.8	Ritardo Temporale . . . . .	117
6.7	Filtri . . . . .	118
6.7.1	Esempio: Altoparlante Magnetico . . . . .	118
6.7.2	Sistemi Passa Basso . . . . .	120
6.7.3	Sistemi Passa Alto . . . . .	121
6.7.4	Sistemi Passa Banda . . . . .	122
6.7.4.1	Casi Particolari: Sistemi con Poli Reali . . . . .	123
6.7.4.2	Casi Particolari: Sistemi con Poli Complessi Coniugati . . . . .	124
6.7.5	Sistemi Elimina Banda . . . . .	129
6.8	Proprietà Bloccante degli Zeri nel Dominio della Frequenza . . . . .	130
6.8.1	Esempio: Caso di uno Zero nell'Origine . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Sistemi di Controllo</b>	<b>132</b>
7.1	Introduzione . . . . .	132
7.2	Strutture di Sistemi di Controllo . . . . .	133
7.2.1	Controllo in Catena Aperta ( <i>Feedforward</i> ) . . . . .	133

7.2.1.1	Esempio: Caso Ideale . . . . .	135
7.2.1.2	Esempio: Incertezze Parametriche . . . . .	136
7.2.1.3	Esempio: Disturbi Esogeni . . . . .	136
7.2.2	Controllo in Retroazione ( <i>Feedback</i> ) . . . . .	137
7.2.3	Controllo a Struttura Mista . . . . .	139
7.2.3.1	Elaborazione del Riferimento e dell'Errore di Inseguimento Congiunta . . . . .	139
7.2.3.2	Elaborazione del Riferimento e dell'Errore di Inseguimento Disgiunta . . . . .	139
7.3	Passaggio al Dominio della Frequenza . . . . .	140
7.4	Metodologie di Progetto per Controllori in Retroazione . . . . .	140
7.4.1	Metodologie Analitiche . . . . .	140
7.4.1.1	Esempio: Incertezze Parametriche . . . . .	141
7.4.1.2	Metodologie non Analitiche . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Rapporto fra Sistema in Retroazione e Sistema ad Anello Aperto</b> . . . . .	<b>143</b>
8.1	Luogo delle Radici . . . . .	143
8.1.1	Proprietà . . . . .	144
8.1.2	Asintoti . . . . .	145
8.1.2.1	Esempi: Sistemi del Primo Ordine . . . . .	146
8.1.2.2	Esempi: Sistemi del Secondo Ordine Reali . . . . .	149
8.1.2.3	Esempi: Sistemi del Secondo Ordine Complessi . . . . .	152
8.1.2.4	Esempi: Sistemi di Ordine Superiore . . . . .	154
8.1.3	Uso del Luogo delle Radici per Progetto Robusto . . . . .	156
8.2	Schema a Blocchi Reale . . . . .	158
8.3	Funzioni di Sensitività . . . . .	160
8.4	Criterio di Bode . . . . .	162
8.4.1	Introduzione: Margine di Fase, Margine di Ampiezza . . . . .	163
8.4.2	Eccezioni . . . . .	164
8.4.3	Enunciato . . . . .	166
8.4.4	Conseguenze . . . . .	167
8.5	Studio delle Funzioni di Sensitività in relazione a $L(s)$ . . . . .	169
8.5.1	Funzione di Sensitività Complementare $F(s)$ . . . . .	169
8.5.1.1	Esempi: Imposizione di Margine di Fase e Tempo di Assestamento . . . . .	171
8.5.2	Funzione di Sensitività $S(s)$ . . . . .	173
8.5.2.1	Principio del Modello Interno . . . . .	174
8.5.2.2	Applicazioni . . . . .	176
8.5.3	Funzione di Sensitività del Controllo $Q(s)$ . . . . .	177
<b>9</b>	<b>Realizzazione del Progetto</b> . . . . .	<b>179</b>
9.1	Comprensione delle Specifiche di Progetto . . . . .	179
9.1.1	Specifiche Statiche . . . . .	179
9.1.1.1	Errore sul Riferimento e Disturbi sull'Uscita . . . . .	180
9.1.1.2	Disturbi sull'Attuatore . . . . .	181
9.1.1.3	Esempio: Ingresso Simultaneo di Segnali Costanti . . . . .	181

9.1.2	Specifiche Dinamiche . . . . .	184
9.1.2.1	Conseguenze della Presenza degli Zeri . . . . .	185
9.1.3	Specifiche su Moderazione del Controllo e Realizzabilità del Controllore	186
9.2	Implementazione dei Vincoli: Struttura di Controllo a Due Stadi . . . . .	187
9.2.1	Progetto del Regolatore Statico . . . . .	187
9.2.2	Progetto del Regolatore Dinamico . . . . .	188
9.2.2.1	«Scenario A» . . . . .	189
9.2.2.2	«Scenario B» . . . . .	193
9.3	Progetto di Reti Correttive . . . . .	207
9.3.1	Reti Ritardatrici . . . . .	207
9.3.1.1	<i>Tuning</i> pratico di una Rete Ritardatrice . . . . .	208
9.3.1.2	Formule di Inversione . . . . .	208
9.3.1.3	Procedura Matlab . . . . .	209
9.3.1.4	Sovraelongazione e Code di Assestamento: Progetto per Cancellazione . . . . .	211
9.3.1.5	Esempio di Progetto per Cancellazione . . . . .	215
9.3.2	Reti Anticipatici . . . . .	216
9.3.2.1	Algoritmo di Progettazione per Reti Anticipatici . . . . .	219
9.3.2.2	Formule di Inversione . . . . .	220
9.3.2.3	Procedura Matlab . . . . .	221
9.3.2.4	Sovraelongazione e Code di Assestamento: Progetto per Cancellazione . . . . .	223
9.3.2.5	Esempio di Progetto per Cancellazione . . . . .	224
9.4	Struttura di Controllo in Cascata . . . . .	226
9.4.1	Esempio . . . . .	228
9.5	Compensazione ad Anello Aperto . . . . .	229
9.5.1	Utilizzo di un Regolatore <i>Feedforward</i> . . . . .	229
9.5.1.1	Scenario di Utilizzo . . . . .	231
9.5.1.2	Esempio . . . . .	231
9.5.2	Utilizzo di un Prefiltro . . . . .	233
9.5.2.1	Primo Scenario: Moderazione della Variabile di Controllo e Rallentamento del Sistema . . . . .	233
9.5.2.2	Filtri di Butterworth . . . . .	235
9.5.2.3	Secondo Scenario: Accelerazione del Sistema Controllato e Ampliamento della Banda . . . . .	241
9.6	<i>Wind up</i> . . . . .	244
9.6.1	Realizzazione del Circuito Anti - <i>Wind up</i> . . . . .	245

---

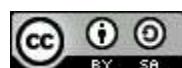
## *Nota dell'autrice:*

Questi appunti sono stati scritti *da studenti, per studenti*, senza alcuno scopo di lucro.

All'interno viene seguito sia un filone cronologico, in base agli argomenti spiegati a lezione, sia uno di organicità fra i vari temi trattati: lo scopo degli appunti è unicamente quello di essere di supporto agli studenti del corso di Controlli Automatici T.

Pertanto, questi appunti sono **gratuitamente scaricabili** sul sito del corso (<https://sites.google.com/site/teachingcasy/courses/year-2016-2017/controlli>): se avete pagato per ottenerli, siete stati truffati.

Questi appunti non sono in alcun modo ufficiali, e non offrono, in alcun modo, garanzie di correttezza negli argomenti trattati.



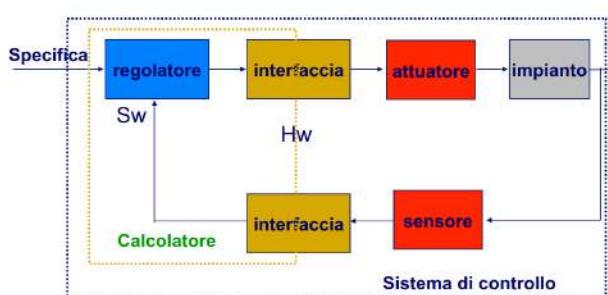
LEZIONE 1

DATA: 22/09/2015

# 1 Sistemi Dinamici Tempo Continui

## 1.1 Introduzione al corso

Significato del termine *controllo*: si raccolgono dati e informazioni al fine di agire sul comportamento di un sistema/macchina/apparato/impianto migliorandolo in tempo reale. In questo senso il «controllo» può essere ritrovato ovunque, per esempio in molte delle attività quotidiane di un uomo (camminare, guidare, ...). Si può parlare inoltre di *controllo in catena aperta* (quando l'azione sul sistema è finita nel tempo, dopo la raccolta delle condizioni iniziali) e *controllo in retroazione* (quando l'azione è prolungata nel tempo attraverso la ricezione di un feedback delle proprie azioni, sul quale si articola la modifica successiva).



Si noti la differenza fra il termine *controllo* e il termine *monitoraggio*: quest'ultimo indica un'attività di semplice osservazione; mentre il controllo comprende anche l'agire per alterare il comportamento di un sistema. Quando il controllo viene esercitato da una macchina si parla di controllo *automatico*. Per esercitare il controllo di un sistema è necessario averne un *modello* che permetta di sapere come questo è fatto e come agire per modificarne lo stato; serve poi un *sensore* generico (può essere il cervello umano come un termometro, come un altro tipo di macchinario) per raccogliere i dati delle condizioni iniziali, una *unità di controllo* collegata ad un *attuatore* ed un *algoritmo* (generalmente una funzione

modificare lo stato; serve poi un *sensore* generico (può essere il cervello umano come un termometro, come un altro tipo di macchinario) per raccogliere i dati delle condizioni iniziali, una *unità di controllo* collegata ad un *attuatore* ed un *algoritmo* (generalmente una funzione

matematica) che indichi come modificare il sistema in base agli obiettivi da raggiungere. Da qui l'importanza di descrivere il sistema attraverso un modello adeguato, che tenga in considerazione anche i disturbi che si possono verificare durante il funzionamento dell'apparato (e non solo i casi in cui «tutto va bene»).

### 1.1.1 Le origini del controllo

Inizialmente sviluppata nel IXX secolo da Maxwell e Vyshnegradskii, lo studio della teoria del controllo venne portata avanti soprattutto per motivi bellici, fino a quando, nel XX secolo, si divise nei due filoni ingegneristico e matematico - teorico, sviluppati separatamente dai paesi occidentali e dall'Unione Sovietica. Con la seconda guerra mondiale l'importanza di questa disciplina andò aumentando, e i riscontri sul piano concreto confermarono le aspettative (conquista dello spazio, sviluppo di microprocessori...).

### 1.1.2 Terminologia

**Sistema:** insieme costituito da più parti (identificabili come sottosistemi) tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comportamento. Possono distinguersi in

- s. **fisici** quando si tratta di un insieme complesso costituito da elementi materiali,
- s. **astratti** quando l'insieme è costituito da elementi immateriali.

In generale ci si occuperà sempre di sistemi fisici. Bisogna inoltre tener conto del fatto che ogni sistema ha dei **sottosistemi** e può essere a sua volta considerato come un sottosistema, a seconda del livello di dettaglio scelto.

**Collegamento** è il termine che si usa per descrivere l'interazione del sistema con il resto del mondo, anche tramite disturbi (collegamenti non voluti); i collegamenti fondamentali sono

- ingressi**, cioè azioni che vengono svolte dall'esterno sul sistema, solitamente in grado di modificarne il comportamento;
- uscite**, intese come risultati esterni o effetti delle azioni e dell'evoluzione temporale del sistema dovuta alle condizioni iniziali.

Spesso l'attribuzione di determinati ingressi o uscite è arbitraria, a seconda delle scelte di progetto. In alcuni casi la scelta di un parametro in ingresso rispetto ad un altro può essere più conveniente per il raggiungimento dell'uscita desiderata, anche se entrambi potrebbero potenzialmente essere dati in ingresso.

I sistemi possono essere classificati come **autonomi** quando non possiedono ingressi e la loro evoluzione temporale non dipende dal resto del mondo - non si possono quindi controllare.

**Modello:** rappresentazione, fisica o astratta, di un sistema in maniera approssimata, costruita per uno scopo. Non esiste una rappresentazione univoca per ogni sistema: se ne possono costruire infinite, ognuna delle quali può mettere in evidenza aspetti diversi a seconda dell'obiettivo considerato. Si parla di

**m. matematico** quando il sistema viene scritto da un sistema di equazioni, solitamente differenziali (dipendenza del comportamento dal tempo) che rappresentano i fenomeni fisici più rilevanti per il controllo che si vuole attuare.

### 1.1.3 Progetto di un Sistema di Controllo: le Fasi

- Descrizione del problema e definizione degli obiettivi da raggiungere; stime dei costi e della qualità del controllo (framework del progetto);
- Scelta del modello matematico che descriva il sistema; definizione degli ingressi e delle uscite, costruzione del modello in maniera dinamica attraverso strumenti di simulazione come Matlab
  - Osservazione delle reazioni del modello ideato agli input, con eventuale modifica del modello;
- Realizzazione del sistema;
- Sperimentazione del sistema di controllo ideato per conoscerne i limiti: è possibile ottenere gli obiettivi desiderati in realtà?<sup>1</sup> Se sì fino a che punto?
  - Studio del sistema attraverso feedback;
  - Studio delle reazioni in situazioni limite;
- Studio della robustezza e dell'affidabilità del controllo.

LEZIONE 2

DATA: 23/09/2015

## 1.2 Modello Matematico di un Sistema Generico

L'interazione del sistema col mondo esterno avviene, nel modello matematico, attraverso due vettori di variabili che dipendono dal tempo:

- **Variabili di ingresso:** rappresentano azioni compiute sul sistema da agenti esterni che ne influenzano il comportamento.
- **Variabili di uscita:** rappresentano il prodotto dell'elaborazione delle variabili di ingressi da parte del sistema.

Le variabili di ingresso e uscita hanno fra di loro un rapporto di causa - effetto dovuto al fatto che il sistema è dinamico e cambia a seconda degli stimoli esterni. Se tuttavia le uscite dipendessero unicamente dagli ingressi si avrebbe la corrispondenza del modello matematico con una relazione di tipo semplicemente algebrico, mentre ciò solitamente non succede: lo stato del sistema è infatti determinato anche dalla storia passata, e il modello matematico è più probabilmente una equazione di tipo differenziale.

Si può infatti definire lo *stato di un sistema* come la grandezza che sintetizza la storia passata del sistema al fine di calcolare l'uscita corrente. A questo scopo vi sono le:

---

<sup>1</sup>Il controllo può migliorare il sistema, ma non stravolgerlo: una panda non potrà mai correre in F1.

- **Variabili di stato:** descrivono la «situazione interna» del sistema (determinata dalla storia passata); sono necessarie per determinare l'uscita.

Preso un circuito RC e, definiti come ingresso la tensione del generatore e come uscita la tensione ai capi della resistenza, il comportamento del sistema non può essere descritto da una equazione algebrica: i valori delle sue uscite dipendono infatti anche dalla variabile di stato (la tensione ai capi del condensatore) e quindi dagli eventi precedenti (per esempio: il condensatore era carico?).

Un esempio più complesso può essere dato da un sistema meccanico comprendente un carrellino attaccato a una molla, sul quale è applicata una forza motrice  $F_m$ : considerata quest'ultima come ingresso, e posta la posizione del carrello come uscita, per descrivere il sistema sono necessarie altre due variabili (di stato) quali posizione attuale e velocità del carrello. Formalmente, scriviamo questa relazione come

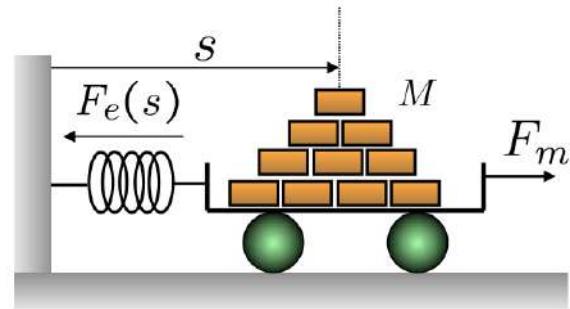
$$y(t) = h(x(t), u(t), t)$$

dove  $y(t)$  rappresenta il vettore uscita,  $x(t)$  descrive lo stato del sistema e  $u(t)$  è il vettore degli ingressi.

Secondo questa legge, in un istante  $t$  generico l'uscita dipende in maniera algebrica dall'ingresso e dallo stato in quell'istante. Dato che la relazione ingresso - uscita non è solo algebrica ma è anche dinamica, serve una legge che permetta di calcolare l'evoluzione dello stato (cosa che non possiamo fare con quella precedente); abbiamo quindi:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

secondo la quale la derivata dello stato rispetto al tempo dipende dallo stato stesso e dall'ingresso. Per cui, sapendo la variazione nel tempo degli ingressi, e lo stato in un certo  $t$  (quindi  $u(t), t > t_0$  e  $x(t_0)$ ) è possibile calcolare la variazione nel tempo dello stato (si intende  $x(t)$ ) e le uscite  $y(t)$ . Si noti bene che:



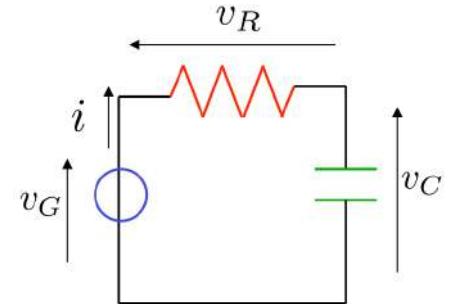
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{pmatrix}$$

$$f(x, u, t) = \begin{pmatrix} f_1(x, u, t) \\ f_2(x, u, t) \\ \dots \\ f_n(x, u, t) \end{pmatrix}, \quad h(x, u, t) = \begin{pmatrix} h_1(x, u, t) \\ h_2(x, u, t) \\ \dots \\ h_r(x, u, t) \end{pmatrix}$$

dove  $n$  è l'ordine del sistema ed è relativo allo stato,  $m$  indica il numero di ingressi ed  $r$  il numero di uscite. Il vettore di ingressi  $u$  contiene variabili d'ingresso, (possono comprendere anche disturbi in ingresso).  $f$  è un vettore di funzioni che dipendono dallo stato, dall'istante di tempo e dagli ingressi. Allo stesso modo,  $h$  è un vettore di funzioni di uscita.

### 1.2.1 Esempio: Circuito RC

Per la legge di Kirchhoff,  $v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$ ; sappiamo inoltre, per la legge dinamica del condensatore, che  $C \frac{dv_C(t)}{dt} = i(t)$  e che  $v_R(t) = Ri(t)$  per la legge di Ohm. Poniamo in ingresso la tensione del generatore ( $u = v_G$ ), in uscita la tensione sul resistore ( $y = v_R$ ) e come variabile di stato del sistema la tensione sul condensatore ( $x = v_C$ ); si ottiene  $\dot{x}(t) = \frac{i(t)}{C} = \frac{v_R(t)}{RC} = \frac{v_G(t) - v_C(t)}{RC} = \frac{u(t) - x(t)}{RC}$  e  $y(t) = u(t) - x(t)$ .



Si può notare che in questo caso l'uscita si ricava dall'ingresso attraverso una equazione algebrica, e poiché non c'è una dipendenza dal tempo può essere assimilata in una  $h(x, u)$ , come anche  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u)$ . Se invece la resistenza cambiasse nel tempo diventerebbe necessario introdurre una dipendenza dal tempo, trasformando la derivata dello stato nel tempo in  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u, t)$ .

Infine, poiché c'è una sola variabile di stato si ha che  $n = 1$  e il sistema si dice lineare del primo ordine.

### 1.2.2 Esempio: Sistema Meccanico

Prendiamo come esempio il sistema meccanico costituito dal carrellino descritto in precedenza. Per la legge di Newton,  $F = ma$ , si ha  $M \frac{d^2 s}{dt^2} = F_m - F_e(s)$ . Definendo  $x_1 = s$ ,  $x_2 = \frac{ds}{dt} = \dot{x}_1$ , tali che  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{ds}{dt} \end{pmatrix}$ , si impone che lo stato del sistema dipenda dalla posizione attuale del carrellino e dalla sua velocità; la formula precedente diventa  $\ddot{x}_2 = \frac{1}{M}(F_m - F_e(x_1))$ . Poiché inoltre gli ingressi sono rappresentati dalla forza motrice applicata,  $u := F_m$ ; le uscite si rappresentano come  $h(x, u) := \frac{1}{M}(u - F_e(x))$ . A questo punto, per poter calcolare effettivamente le uscite manca una equazione che permetta di trovare lo stato:  $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ .

Calcoliamo quindi la derivata di  $x$ , cioè la derivata di un vettore colonna:  $\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{M}(u - F_e(x)) \end{pmatrix}$ .

## 1.3 Tipologie di Sistemi Dinamici

**SISO** o Single Input Single Output, sono quei sistemi in cui il numero di ingressi e uscite coincidono, e sono uguali a 1 ( $r = m = 1$ ).

**MIMO** o Multi Input Multi Output, rappresenta tutte le altre possibili combinazioni di ingressi e uscite, non per forza con lo stesso valore.

**Strettamente Proprio** o anche «puramente dinamico» nel caso in cui l'uscita dipenda dall'ingresso solo attraverso lo stato, cioè  $y(t) = h(x(t), t)$ . La dipendenza delle uscite dagli ingressi non è visibile nella equazione che descrive le stesse, ma nella equazione che descrive lo stato  $x(t)$ .

**Proprio** in tutti i casi che non rientrano nella definizione precedente.

**Stazionario** quando le funzioni  $f$  e  $h$  non dipendono esplicitamente dal tempo, ovvero  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  e  $y(t) = h(x(t), u(t))$ .

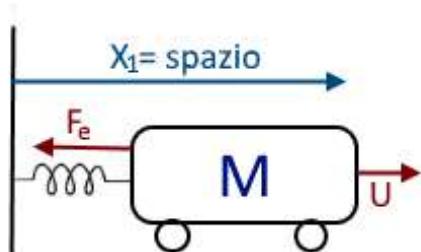
**Tempo Variante** in caso contrario. Per esempio, ciò si verifica in un circuito RC quando il valore della resistenza può cambiare nel tempo.

**Lineare** quando le funzioni  $f$  ed  $h$  dipendono linearmente dalle variabili di stato e di ingresso, come ad esempio nel caso  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  e  $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ , dove  $\dim(A) = n \times n$ ,  $\dim(B) = n \times m$ ,  $\dim(C) = r \times n$ ,  $\dim(D) = r \times m$ .

- Se il sistema è lineare e stazionario  $(A(t), B(t), C(t), D(t)) = (A, B, C, D)$ ;
- Se il sistema è strettamente proprio,  $D(t) = 0$ .

**Non Lineare** in caso contrario.

### 1.3.1 Esempio



Si prenda una massa, mobile su un piano senza attriti e vincolata ad un punto da una molla di costante elastica  $k$ . Poiché le variabili di stato (come vedremo meglio in seguito) sono legate alla forza e alla velocità, poniamo  $x_1 = s$  e  $\dot{x}_1 = x_2$ . Osservando l'andamento della forza elastica in funzione dello spazio possiamo dire che nel complesso il suo andamento non è lineare (figura 1), ma se consideriamo solo i valori all'interno di un certo range allora possiamo ricadere all'interno di quella ipotesi ( $F_e(x_1) \approx kx_1$ ), e utilizzare le facilitazioni del caso. Inoltre, questo sistema si presenta

come un sistema SISO, poiché abbiamo due variabili di stato, un ingresso e una uscita ( $r = m = 1$ ).

Per la legge di Newton,  $\sum F = ma = m\dot{x}_2 = u(x_1) - F_e(x_1) = u(x_1) - kx_1$ , da cui  $\dot{x}_2 = \frac{u(x_1)}{M} - \frac{kx_1}{M}$ . Da ciò risulta

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{u(x_1)}{M} - \frac{kx_1}{M} \end{pmatrix}.$$

Considerando  $y = x_1$ , si valuta che le formule per i sistemi lineari viste sopra ( $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  e  $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ ) risultano, in un contesto matriciale, così definite:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + B \cdot u(t) \quad y(t) = C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + D \cdot u(t)$$

Allora,

- $A$  è quella matrice  $2 \times 2$  tale che, moltiplicata per  $x_1$  e poi per  $x_2$ , dà come risultato la sua derivata  $\dot{x}$  (NOTA BENE: si intende la derivata del vettore!).

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{pmatrix}$  (reverse-engineering:  $a_{11}$ : che cosa, moltiplicato per  $x_1$ , dà  $\dot{x}_1$ ?  $a_{21}$ : che cosa, moltiplicato per  $x_1$ , dà  $\dot{x}_2$ ? Ecc...)

- $B$  contribuisce insieme ad  $A$  a formare la derivata di  $x$ , apportando i coefficienti del vettore degli ingressi (in questo caso è uno scalare). Per cui otteniamo:

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{M} \end{pmatrix}$  (reverse engineering: dobbiamo ottenere  $\dot{x}_2 = \frac{u}{M}$ , per cui la prima riga avrà valore zero (perché corrisponde a  $\dot{x}_1$ ) e la seconda  $\frac{1}{M}$ ).

- $C$  è una matrice  $1 \times 2$  i cui valori si ottengono dalla moltiplicazione degli ingressi per il vettore  $x$  (più la somma di  $D$ , che in questo caso vale zero).

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

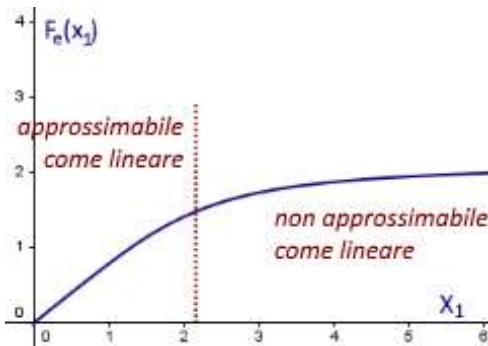


Figura 1: Andamento della Forza elastica

## 2 Principi di Modellistica

Abbiamo già detto che per esercitare adeguatamente il controllo desiderato su un sistema è necessario avere un modello matematico che lo descriva in modo appropriato; da qui, l'importanza della ricerca dello stesso.

A tale scopo, esistono dei pattern predefiniti e consolidati, che elenchiamo di seguito.

**Indagine Diretta:** il sistema viene scomposto in sottosistemi elementari il cui modello matematico è facilmente identificabile, e il modello complessivo viene dedotto componendo i modelli dei sottosistemi elementari. Tale metodo è consigliato in casi semplici nei quali l'introspezione fisica del sistema permette la modellazione.

**Black Box:** in maniera opposta rispetto al metodo precedente, poiché non vi è alcun tipo di introspezione, il sistema viene modellato come una «scatola nera» il cui funzionamento interno è trascurato; si studia unicamente la relazione fra i segnali

di ingresso e quelli di uscita (analisi armonica). È consigliabile utilizzare questa soluzione quando la fisica del sistema è così complessa da non permettere introspezione.

**Gray Box:** come indica il nome, rappresenta un approccio misto fra i due estremi appena descritti. Il sistema complessivo viene scomposto in sottosistemi, alcuni dei quali vengono modellati attraverso introspezione, mentre altri attraverso analisi ingresso/uscita.

## 2.1 Derivazione del Modello Matematico mediante Indagine Diretta

Per derivare il modello matematico si può fare uso dell'analisi energetica del sistema. A tale scopo si introduce la

$$\frac{dE(t)}{dt} = P(t)$$

secondo la quale la variazione infinitesima di energia è uguale alla *potenza istantanea*. Fisicamente, questa legge vuole indicare che la potenza fornita al sistema in un certo istante può variare il suo livello di energia, essere dissipata o essere trasferita all'esterno (eventualmente ad un altro sistema fisico).

Nella scelta del modello matematico conviene quindi prendere come variabili di stato quelle grandezze che determinano quantità di energia accumulate nel sistema, dette **variabili energetiche**. In ogni dominio energetico (escludendo quello termico, abbiamo: elettrico, meccanico, fluidi) ci sono **due variabili energetiche e due meccanismi di accumulo dell'energia**; il prodotto delle due variabili rappresenta la potenza del particolare dominio.

Esempio sistema Meccanico: abbiamo energia cinetica ed energia potenziale, che corrispondono alle variabili di stato velocità e forza.

Esempio sistema Elettrico: abbiamo energia accumulata in modo induttivo e capacitivo, alle quali collegiamo corrente e tensione (variabili di stato).

Tale parallelismo si presenta anche nei fluidi, ma nel programma del corso trascureremo questo settore rispetto agli altri.

### 2.1.1 Variabili Energetiche

Dominio	Potenza	Variabili Energetiche	
Elettrico	$v(t) \cdot i(t)$	tensione ai capi di un conduttore	corrente attraverso un conduttore
Meccanico traslazionale	$v(t) \cdot f(t)$	velocità traslazionale di un corpo	forza applicata ad un corpo
Meccanico rotazionale	$\omega(t) \cdot c(t)$	velocità rotazionale di un corpo	coppia applicata ad un corpo
Fluidico	$p(t) \cdot q(t)$	pressione ai capi di una condotta	portata di una condotta
Termico	$w(t)$	flusso di calore	

Le formule delle variabili energetiche corrispondenti per ogni dominio sono:

Dominio	Accumulo Capacitivo	Accumulo Induttivo	Dissipazione
Elettrico	$E = \frac{1}{2}Cv^2$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	$v = R_e i$
Meccanico tr	$E = \frac{1}{2}Mv^2$	$E = \frac{1}{2}\frac{1}{K}f^2$ nota <sup>2</sup>	$v = \frac{1}{\beta}f$ nota <sup>3</sup>
Meccanico rot	$E = \frac{1}{2}J\omega^2$ nota <sup>4</sup>	$E = \frac{1}{2}\frac{1}{K}c^2$ nota <sup>5</sup>	$\omega = \frac{1}{\beta}c$
Fluidico	$E = \frac{1}{2}C_f p^2$ nota <sup>6</sup>	$E = \frac{1}{2}L_f q^2$ nota <sup>7</sup>	$p = R_f q$ nota <sup>8</sup>
Termico	$E = C_t T$ nota <sup>9</sup>	assente	$T = R_t w$ nota <sup>10</sup>

LEZIONE 3

DATA: 24/09/2015

### 2.1.2 Scomposizione di un Sistema Complessivo in Sottosistemi Elementari

Per definire il modello matematico occorre individuare dei sottosistemi elementari che compongono il sistema complessivo; ce ne possono essere diversi tipi nello stesso sistema, e anche più di uno per ogni tipo. Di seguito si fa corrispondere a ogni sottosistema identificato un modello energetico, in modo da poter individuare le variabili di stato, gli ingressi e le uscite al sistema.

Nella figura (2) vediamo un circuito elettrico in cui sono stati evidenziati tre meccanismi

<sup>2</sup>Qui, K è la Rigidità longitudinale del corpo.

<sup>3</sup>Dove beta è il coefficiente di attrito viscoso, anche per la riga sottostante. f è la frequenza di rotazione.

<sup>4</sup>J è il momento di inerzia. Questo misura l'inerzia del corpo al mutare della sua velocità rotazionale, una grandezza fisica utile per descrivere il comportamento dinamico dei corpi in rotazione attorno ad un asse.

<sup>5</sup>Qui, K è la Rigidità torsionale del corpo.

<sup>6</sup> $C_f$  è la Capacità fluidica.

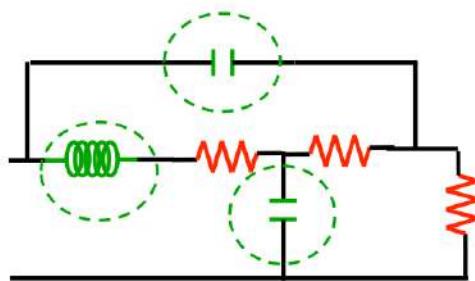
<sup>7</sup> $L_f$  è l'Induttanza fluidica.

<sup>8</sup> $R_f$  è la Resistenza fluidica.

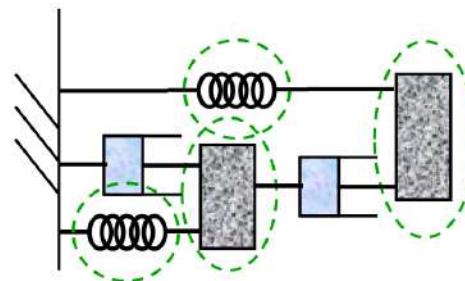
<sup>9</sup> $C_t$  è la Capacità termica.

<sup>10</sup> $R_t$  è la Resistenza termica.

di accumulo (il sistema si dice di complessità di ordine tre): da questo possiamo capire che avremo tre variabili di stato indipendenti, a ognuna delle quali faremo corrispondere un certo valore di tensione o di corrente a seconda del modello matematico che andremo a scegliere. Nella figura (3) vediamo invece un sistema meccanico con masse e molle, per un totale di quattro meccanismi di accumulo dell'energia; avremo quindi quattro variabili di stato, due delle quali rappresentate mediante forza e velocità, mentre le altre due con forze e costanti elastiche.



**Figura 2:** Circuito elettrico



**Figura 3:** Sistema meccanico

Dai modelli energetici stabiliti nel punto precedente, derivano i modelli matematici mediante i principi base della fisica (in prima istanza, il principio di conservazione dell'energia). Per i sistemi elettrici si useranno le equazioni di Kirchhoff, per quelli meccanici il bilanciamento delle forze e delle coppie, per quelli idraulici le equazioni di Bernoulli. In generale, la complessità dinamica di un sistema (numero di variabili di stato) è legata al numero di elementi di accumulo presenti: dipende quindi dal modello che il progettista ne fa, e quindi in ultima analisi dagli obiettivi che si vogliono raggiungere.

### 2.1.3 Derivazione del modello matematico

Per semplicità, si consideri un generico parametro  $K$  di accumulo dell'energia (induttiva o capacitiva), con  $x$  e  $y$  variabili energetiche del medesimo dominio. Si ha  $E(t) = \frac{1}{2}Kx^2(t)$  come energia accumulata dal sistema nell'istante  $t$ , e la corrispondente potenza è  $P(t) = x(t) \cdot y(t)$  (come può essere in un circuito elettrico il prodotto tensione per corrente).

Poiché  $dE(t) = P(t)dt$  si ha che  $d(\frac{1}{2}Kx^2(t)) = x(t)y(t)dt$ ; derivando a sinistra dell'uguale otteniamo  $Kx(t)dx(t) = x(t)y(t)dt$ , da cui  $y(t) = K\frac{dx(t)}{dt}$ . Tale relazione, già vista in precedenza, collega la variazione di una delle due variabili energetiche all'altra, e rappresenta il modello generalizzato del meccanismo di accumulo dell'energia per un accumulatore elementare non dissipativo. Per rimanere nell'esempio del circuito elettrico, potremmo avere  $i = C\frac{dv}{dt}$ , dove  $i$  e  $v$  sono le variabili di stato e  $C = K$ ; in generale però la formula è indipendente dal particolare dominio energetico.

Ricapitolando, per definire un modello matematico occorre seguire i seguenti passi:

- Scelta delle variabili di stato;
- Scomposizione del sistema complessivo in sottosistemi elementari;

- Ricomposizione dei modelli elementari tramite le leggi base della fisica;
- Derivazione del modello matematico.

## 2.2 Modelli Matematici di Componenti Elementari

Come abbiamo visto ci possono essere due tipi di variabili energetiche per ogni sistema possibile (escluso quello di tipo termico): quelle di tipo induttivo e quelle di tipo capacitivo. Di seguito quindi elencheremo, per ognuno dei sistemi e delle tipologie di variabili, i modelli di accumulatori energetici. La loro importanza è dovuta anche alle analogie che sussistono fra i modelli di sistemi elettrici e quelli di altri sistemi (cosa che nel passato è stata ampiamente sfruttata per effettuare simulazioni mediante circuiti). Ancora una volta, si conferma il fatto che un sistema fisico può essere rappresentato in diversi modi a seconda delle caratteristiche che il progettista vuole evidenziare, date determinate specifiche.

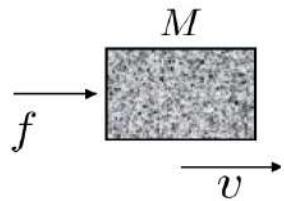
Per il significato delle variabili si rimanda alle note [Variabili Energetiche](#).

### 2.2.1 Accumulatori capacitivi

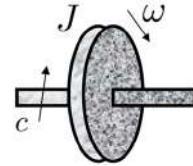
Condensatore: si hanno corrente e tensione come variabili energetiche, supponendo assenza di resistenza e induttanza. Modello matematico corrispondente:  $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$ .  
Accumulo di energia:  $E(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t)$ .

Massa/inerzia:

- si hanno forza  $f$  e velocità traslazionale  $v$  come variabili energetiche, supponendo assenza di attrito. Modello matematico corrispondente:  $f(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$ .  
Accumulo di energia:  $E(t) = \frac{1}{2} Mv^2(t)$ .
- si hanno coppia  $c$  e velocità rotazionale  $\omega$  come variabili energetiche, supponendo assenza di elasticità. Modello matematico corrispondente:  $c(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$ .  
Accumulo di energia:  $E(t) = \frac{1}{2} J\omega^2(t)$ .

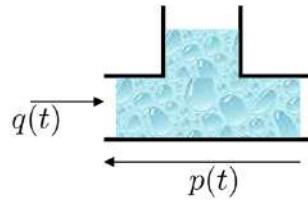


**Figura 4:** Massa

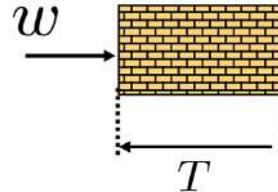


**Figura 5:** Inerzia

Condotta Idraulica: si hanno portata  $p$  e pressione  $q$  come variabili energetiche, supponendo assenza di attrito e inerzia nel fluido. Modello matematico corrispondente:  $q(t) = C_f \frac{dp(t)}{dt}$ .  
Accumulo di energia:  $E(t) = \frac{1}{2} C_f p^2(t)$ .



Parete: si ha la temperatura  $T$  come variabile energetica, supponendo assenza di dissipazione. Modello matematico corrispondente:  $w(t) = C_t \frac{dT(t)}{dt}$ .  
Accumulo di energia:  $E(t) = C_t T(t)$ .

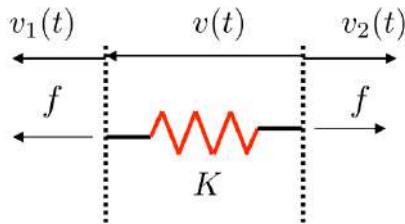


### 2.2.2 Accumulatori induttivi

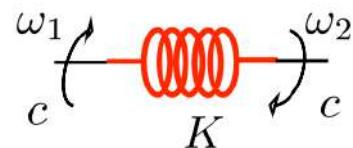
Induttore: si hanno corrente e tensione come variabili energetiche, supponendo assenza di resistenza e capacità. Modello matematico corrispondente:  $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ .  
Accumulo di energia:  $E(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$ .

Molla lineare/torsionale:

- si hanno forza  $f$  e velocità traslazionale  $v$  come variabili energetiche, supponendo assenza di massa e attrito. Modello matematico corrispondente:  $v(t) = \frac{1}{K} \frac{df(t)}{dt}$ .  
Accumulo di energia:  $E(t) = \frac{1}{2K} f^2(t)$ .
- si hanno coppia  $c$  e velocità di rotazione  $\omega$  come variabili energetiche, supponendo assenza di massa e attrito. Modello matematico corrispondente:  $\omega(t) = \frac{1}{K} \frac{dc(t)}{dt}$ .  
Accumulo di energia:  $E(t) = \frac{1}{2K} c^2(t)$ .

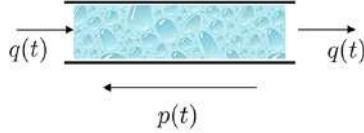


**Figura 6:** Molla Lineare



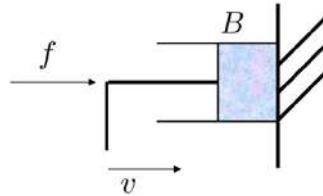
**Figura 7:** Molla Torsionale

**Condotta Idraulica:** si hanno portata  $p$  e pressione  $q$  come variabili energetiche, supponendo assenza di attrito e capacità. Modello matematico corrispondente:  $p(t) = L_f \frac{dq(t)}{dt}$ . Accumulo di energia:  $E(t) = \frac{1}{2} L_f q^2(t)$ .



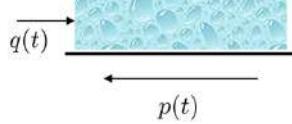
### 2.2.3 Dissipatori di potenza

**Ammortizzatore:** si hanno forza  $f$  e velocità  $v$  come variabili energetiche, supponendo che la massa sia nulla e i corpi rigidi. Modello matematico corrispondente:  $f = Bv$ . Potenza istantanea dissipata:  $P = fv = Bv^2 = \frac{1}{B}f^2$ .

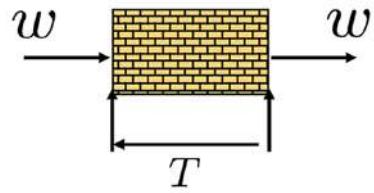


**Resistore:** si hanno forza  $f$  e velocità  $v$  come variabili energetiche, supponendo che la massa sia nulla e i corpi rigidi. Modello matematico corrispondente:  $f = Bv$ . Potenza istantanea dissipata:  $P = fv = Bv^2 = \frac{1}{B}f^2$ .

**Condotta Idraulica:** si hanno portata  $p$  e pressione  $q$  come variabili energetiche, supponendo che la condotta sia piena e l'inerzia del fluido sia nulla. Modello matematico corrispondente:  $q = \frac{1}{R_f}p$ . Potenza istantanea dissipata:  $P = qp = R_f q^2 = \frac{1}{R_f}p^2$ .



**Parete:** si ha la temperatura  $T$  come variabile energetica, supponendo assenza di accumulo di calore interno. Modello matematico corrispondente:  $T = R_t w$ . Potenza istantanea dissipata:  $P = w = \frac{1}{R_t}T$ .



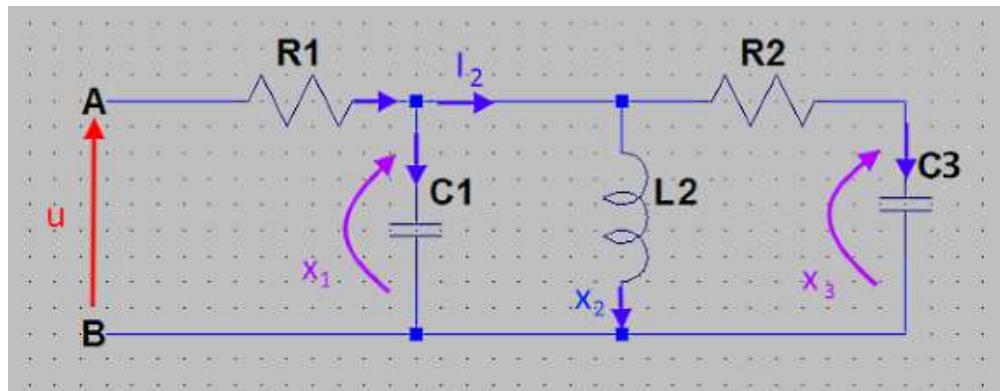
## 2.3 Modelli Matematici per Sistemi Complessi

Costruire un modello matematico per un sistema di tipo elettrico può risultare semplice attraverso l'uso delle equazioni di Kirchhoff; per i sistemi meccanici è invece necessario effettuare il diagramma di corpo libero. Ciò consiste nel considerare solo le masse, e nel sostituire gli elementi di collegamento dalle relative azioni (per esempio, una forza). Se due elementi di accumulo dello stesso tipo non sono separati da elementi dissipativi o accumulativi di un altro tipo, vanno considerati come un unico elemento di accumulo.

La complessità dinamica di un sistema è legato al numero di elementi di accumulo presenti, che ne dà anche l'ordine di derivazione massimo della variabile di uscita.

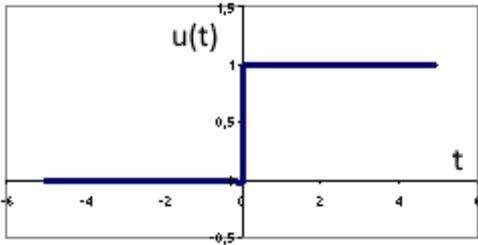
### 2.3.1 Esempio: Circuito Elettrico

Si prenda in esame il circuito elettrico mostrato in figura: abbiamo come ingressi  $u$  la differenza di potenziale applicata fra i nodi A e B, e tre meccanismi di accumulo da considerare separatamente per le tre variabili di stato. Assumeremo alla tensione ai capi di  $C_1$  la prima variabile di stato,  $x_1$ , alla corrente nell'induttore  $L_2$  la seconda,  $x_2$ , infine alla tensione ai capi del secondo condensatore  $C_3$  la terza,  $x_3$ .

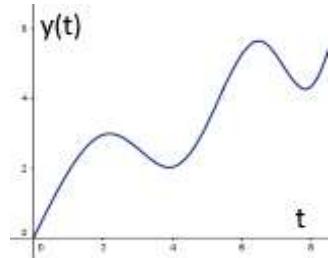


Supponiamo poi che gli ingressi abbiano un andamento come quello mostrato in figura. Per quanto riguarda le uscite, decidiamo che vogliamo monitorare l'andamento della corrente nell'induttore; per questo motivo  $y$  coincide con  $x_2$ , e ha andamento qualitativo come mostrato in figura.

In queste ipotesi, le leggi costitutive dei due componenti scelti come meccanismi di accumulo diventano:  $C_1 \dot{x}_1 = i_{C_1}$ ,  $L_2 \dot{x}_2 = x_1$  (poiché  $L_2$  e  $C_1$  sono in parallelo) e  $C_3 \dot{x}_3 = i_{C_3}$  (la corrente che passa per  $C_3$  è la stessa che attraversa  $R_2$ ). Considerando poi la maglia di sinistra, e



**Figura 8:** Andamento degli ingressi



**Figura 9:** Andamento delle uscite

detta  $v_1$  la differenza di potenziale ai capi di  $R_1$ , attraversata da corrente  $i_1$ , si ha per la legge delle maglie che  $u - v_1 - v_C = 0$ , cioè  $u - i_1 R_1 - x_1 = 0$ , da cui ricaviamo  $i_1 = \frac{u-x_1}{R_1}$ . Sempre per la legge delle maglie ottengo poi  $V_{C_1} - V_{R_2} - V_{C_3} = 0$ , considerando come maglia quella formata dal primo condensatore e dal ramo con  $R_2$  e  $C_3$  (ossia eliminando il ramo che contiene l'induttore). Questa diventa  $x_2 - i_{C_3} R_2 - x_3 = 0$ , da cui  $i_{C_3} = \frac{x_1-x_3}{R_2}$ . Per mettere insieme tutte le correnti trovate dobbiamo utilizzare la legge dei nodi, secondo la quale  $I_2 = x_2 + i_{C_3}$  e  $i_1 = i_{C_1} + I_2$ . Allora  $i_{C_1} = \frac{u-x_1}{R_1} - x_2 - \frac{x_1-x_3}{R_2}$ .

Riscriviamo quindi le leggi costitutive sostituendo le espressioni delle correnti; otteniamo:  $C_1 \dot{x}_1 = \frac{u-x_1}{R_1} - x_2 - \frac{x_1-x_3}{R_2} = \frac{u}{R_1} - x_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - x_2 - \frac{x_3}{R_2}$ ;  $L_2 \dot{x}_2 = x_1$ ;  $C_3 \dot{x}_3 = \frac{x_1-x_3}{R_2}$ . Possiamo quindi costruire il vettore delle variabili di stato, dal quale poi calcolare  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  secondo la legge  $\vec{\dot{x}} = A\vec{x} + Bu$ .

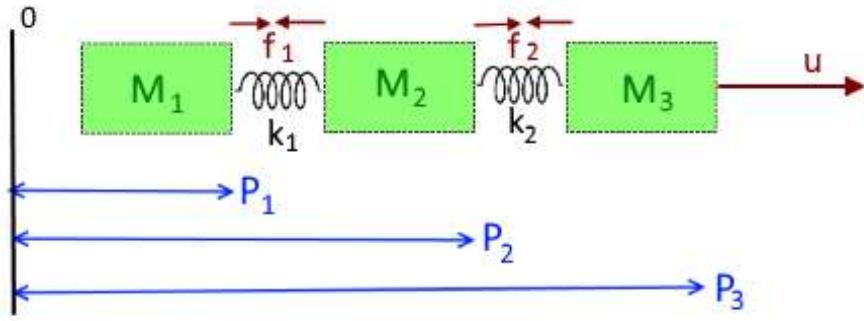
$$\text{Il vettore delle derivate delle variabili di stato viene } \vec{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \left( \frac{u}{R_1} - x_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - x_2 - \frac{x_3}{R_2} \right) \\ \frac{x_1}{L_2} \\ \frac{1}{C_3} \left( \frac{x_1-x_3}{R_2} \right) \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} - \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_1} & 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0.$$

$C$  e  $D$  vengono calcolati attraverso la legge  $y = Cx + Du = x_2$  (nel nostro caso); poiché dobbiamo ottenere solo  $x_2$ , dell'intero vettore delle variabili di stato servirà solo l'elemento in seconda posizione, e da qui deriva il risultato di  $C$  (come anche il fatto che  $D$  sia nullo). In ultima analisi, il sistema considerato risulta essere SISO lineare.

### 2.3.2 Esempio: Sistema Meccanico

Si consideri il sistema meccanico mostrato in figura, costituito da tre masse collegate fra loro da due molle, corrispondenti a tre accumuli capacitivi più due induttori, per un totale di cinque variabili di stato (sistema con una complessità del quinto ordine).



$P_1, P_2, P_3$  sono le posizioni in cui si trovano le tre masse;  $k_1$  e  $k_2$  sono le costanti elastiche delle due molle, rispettivamente;  $f_1$  ed  $f_2$  sono le forze di compressione ed estensione a cui entrambe le molle sono sottoposte, secondo la legge  $\frac{df}{dt} = kv$  (dove  $v$  è la velocità a cui avvengono tali compressioni/estensioni). Definite  $x_1 = \dot{P}_1$ ,  $x_2 = \dot{P}_2$ ,  $x_3 = \dot{P}_3$  (cioè le velocità di spostamento dei tre blocchi),  $x_4 = f_1$ ,  $x_5 = f_2$ , esprimiamo le forze agenti su ogni blocco attraverso la legge di Newton:

$$M_1 \frac{dx_1}{dt} = f_1 = x_4;$$

$$M_2 \frac{dx_2}{dt} = f_2 - f_1 = x_5 - x_4;$$

$$M_3 \frac{dx_3}{dt} = u - f_2 = u - x_5.$$

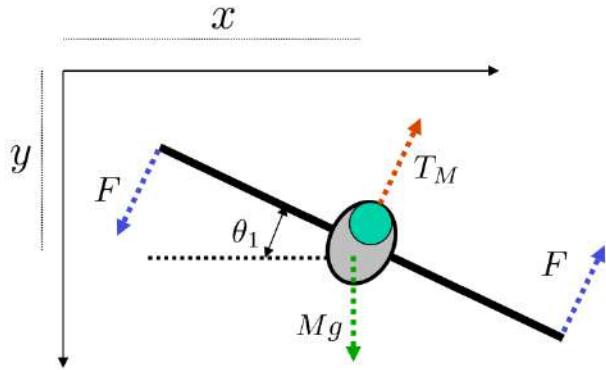
Inoltre, poiché  $\frac{df}{dt} = kv$ ,  $\frac{dx_4}{dt} = k_1(x_2 - x_1)$ , e  $\frac{dx_5}{dt} = k_2(x_3 - x_2)$ .

$$\text{Otteniamo } \dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{x_4}{M_1} \\ \frac{x_5 - x_4}{M_2} \\ \frac{u - x_5}{M_3} \\ k_1(x_2 - x_1) \\ k_2(x_3 - x_2) \end{pmatrix}, \text{ da cui } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{M_2} & \frac{1}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{M_3} \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \text{ e } D = 0 \text{ (anche questo sistema è strettamente dinamico).}$$

### 2.3.3 Esempio: VTOL

Prendiamo in esame un piccolo drone capace di volare, come quello mostrato in figura. Tale sistema va considerato nella sua complessità come un corpo rigido formato unicamente da masse (non c'è elasticità) che può muoversi in tutte le direzioni, traslando e ruotando; avremo quindi tre variabili di stato o meccanismi di accumulo.

Considerati poi  $x$  e  $y$  come delle variabili rappresentanti lo spazio, definiamo la velocità di traslazione sull'asse delle  $x$ ,  $x_1 = \dot{x}$ , quella verticale sull'asse delle  $y$ ,  $x_3 = \dot{y}$ . Per



la legge di Newton,  $M\dot{x}_1 = Fx$  e  $M\dot{x}_3 = Fy$ .

Chiamo inoltre la velocità angolare di rotazione rispetto all'orizzonte  $x_5$ , tale che  $x_5 = \dot{\theta}$ . Essendo  $J$  il momento di inerzia rispetto al centro di gravità,  $J\dot{x}_5 = C$ , dove  $C$  indica le coppie di forze.

Passando a definire gli ingressi, in questo caso dobbiamo parlare di vettore  $u$  in quanto ce ne sono due: il primo è  $u_1 = T_M$ , mentre per ricavare il secondo dobbiamo prima considerare le forze applicate sulla punta delle ali. Scomponendo  $F$  nelle sue due componenti osserviamo che la  $F_x = M\frac{dx_1}{dt} = u_1 \sin(\theta)$  si trova in valori uguali e opposti nei due punti, e per questo si semplifica; rimangono quindi solo le  $F_y = M\frac{dx_3}{dt} = -u_1 \cos(\theta) + Mg$ . Per quanto riguarda le coppie, le  $F$  contribuiscono a determinarne il valore mentre la forza peso e  $T_M$  no (dal momento che sono applicate nel centro). Poiché sono forze ortogonali,  $C = -2Fl$ , dove  $l$  è il braccio, e il verso è negativo rispetto a quello di  $\theta$ ; a questo punto pongo  $F = u_2$ , da cui  $C = -2u_2 l = J\dot{x}_5$ .

Ora che ho espresso le forze in funzione delle variabili di stato dovrei isolare le derivate delle variabili stesse per trovare  $x$  e  $y$ ; tuttavia ciò non è propriamente corretto poiché  $\theta$  non è una variabile di stato. È quindi necessario inserire nuove variabili di stato in modo da correggere questa scorrettezza:  $x_0 = x$ , tale che  $\dot{x}_0 = x_1$ ;  $x_2 = y$ , tale che  $\dot{x}_1 = \frac{1}{M}u_1 \sin(x_4)$  e  $x_4 = \dot{x}_5$ ;  $x_4 = \theta$ , da cui  $\dot{x}_3 = -\frac{1}{M}u_1 \cos(x_4) + g$ , e  $\dot{x}_4 = x_5$ ; infine,  $\dot{x}_5 = \frac{-2l}{J}u_2$ . In conclusione, abbiamo:

$$y = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}; \quad f(x, u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{M}u_1 \sin(x_4) \\ x_3 \\ -\frac{1}{M}u_1 \cos(x_4) + g \\ x_5 \\ -\frac{2l}{J}u_2 \end{pmatrix}.$$

LEZIONE 4

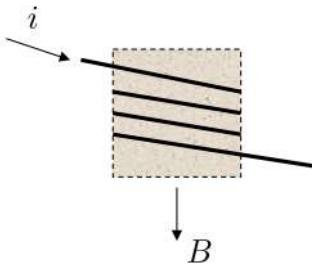
DATA: 29/09/2015

Abbiamo visto nelle lezioni precedenti come studiare e riprodurre matematicamente sia sistemi di tipo elettrico che di tipo meccanico; in questa lezione proveremo a introdurre sistemi che combinano i due ambiti, detti per questo *elettromeccanici*. Ne costituiscono gli esempi più rilevanti i motori elettrici, che non tratteremo però in maniera estensiva a causa della natura del corso.

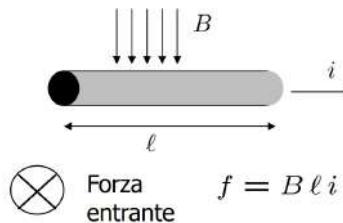
## 2.4 Modelli di Sistemi Elettromeccanici

Per descrivere questi sistemi diventano fondamentali le leggi dell'elettromagnetismo, che riepiloghiamo brevemente:

1. Una carica elettrica in moto all'interno di un conduttore (ovvero una corrente elettrica) genera un campo magnetico proporzionale alla corrente stessa. Preso ad esempio un solenoide attraversato da corrente  $i$ , con  $N$  spire di raggio  $R$ , il campo magnetico che si genera al suo interno vale  $B = \frac{\mu}{2\pi R} Ni$ .

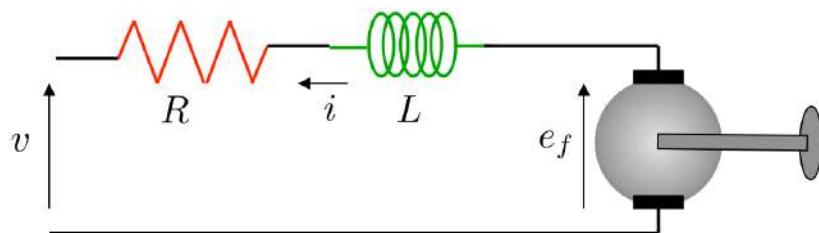


2. Anche conosciuta come Forza di Lorentz, afferma che un campo magnetico esercita una forza su qualunque carica elettrica che si muove relativamente al campo stesso, secondo la legge  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Tale legge si definisce *elettromeccanica* perché si parte da una grandezza elettrica e si arriva ad una meccanica; detto in modo «spicchio», questa legge afferma che se un conduttore in cui scorre corrente elettrica è immerso in un opportuno campo magnetico, si creerà una forza agente sul conduttore stesso che tenderà a spostarlo secondo la sua direzione e verso.



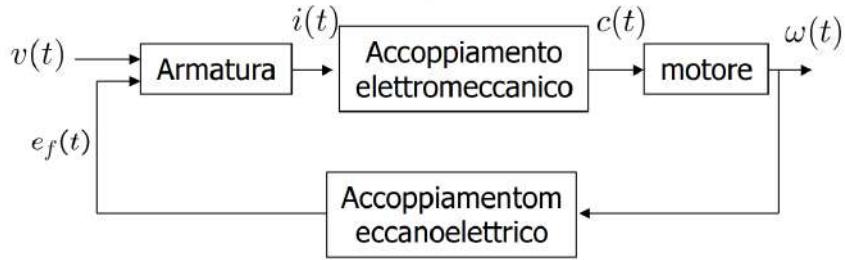
3. Quando un conduttore si trova in moto relativo rispetto ad un campo magnetico, si stabilisce una differenza di potenziale ai capi del conduttore stesso. Questo fenomeno viene descritto da una legge detta *meccanico-elettrica* (duale rispetto alla precedente, come suggerisce il nome) secondo la quale, se un conduttore immerso in un campo magnetico è sottoposto a una certa velocità, si crea una differenza di potenziale ai suoi capi; tale valore risulta essere proporzionale alla velocità stessa  $v$  e alla lunghezza del conduttore  $l$ , come descritto dall'equazione  $\Delta e = e_2 - e_1 = Blv$ .

#### 2.4.1 Esempio: Motore Elettrico in Corrente Continua



Sia dato il circuito elettrico in figura, contenente una resistenza e un induttore e collegato a un rotore. Il principio di funzionamento del sistema è grossomodo il seguente: una spira

conduttrice è avvolta attorno al rotore (a destra in figura), e i suoi estremi sono collegati ad una parte statica (detta appunto statore) tramite *spazzole*, che permettono il passaggio della corrente ma non ostacolano la rotazione. Data in ingresso una certa tensione nel circuito scorre corrente, arrivando fino alla bobina (attorno al rotore): in queste condizioni si crea un effetto elettromeccanico per cui il campo magnetico genera una forza meccanica sul rotore, in particolare una coppia, che gli permette di ruotare. Questo movimento crea però le condizioni per un altro effetto, quello meccanico - elettrico, in quanto si ha un conduttore in moto all'interno di uno spazio sottoposto a campo magnetico: si crea quindi una differenza di potenziale agli estremi del circuito, secondo una sorta di schema ciclico.



Come modellare questo sistema? Si supponga che il campo magnetico sia costante, e che conseguentemente anche la corrente e quindi la coppia lo siano; inoltre la differenza di potenziale (per quanto riguarda la forza contro-elettromotrice) è proporzionale alla velocità di rotazione  $\omega$  e al campo magnetico  $B$ . Chiamiamo la coppia generata  $C_m = Ki$ , la forza contro-elettromotrice  $e_f = K\omega$  e la coppia di carico  $C_r(t)$ .

Applicando Kirchhoff possiamo modellare ora il circuito: prendiamo come variabile di stato la corrente nell'induttore e chiamiamola  $x_1$  (è la stessa corrente in ingresso alla bobina):  $v_L = L \frac{di(t)}{dt} = L \dot{x}_1$ ; per la LKV ottengo  $v(t) - e_f(t) = Rx_1 + L \dot{x}_1 = v(t) - K\omega$ . Quindi  $L \dot{x}_1 = u - K\omega - Rx_1$  è il modello per la parte «elettrica» del sistema, anche se comunque contiene una grandezza meccanica ( $\omega$ ); quando si andrà a considerare la parte «meccanica» si avrà invece come seconda variabile di stato una grandezza meccanica (velocità).

Considerando a questo punto il sistema meccanico, troviamo un corpo rigido che ruota sottoposto ad una coppia: poniamo quindi come variabile di stato  $x_2 = \omega$ . Il modello che lo definisce ha come idea di fondo che il momento di inerzia ( $J \frac{d\omega}{dt}$ ) sia uguale alla sommatoria delle coppie che agiscono sul sistema:  $J \dot{x}_2 = Kx_1 - hx_2 - C_r(t)$ . Vediamo che sono comprese anche le forze di disturbo, come possono esserlo una coppia di carico e l'attrito ( $h$  è infatti il coefficiente di attrito viscoso).

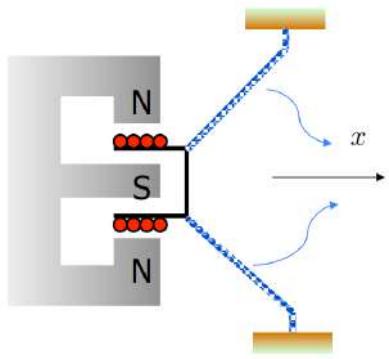
Abbiamo ottenuto un sistema del secondo ordine; ci sono due variabili di stato ( $x_1, x_2$ ) e due variabili di ingresso (oltre a  $v(t)$  abbiamo infatti la coppia di carico, che, pur essendo un disturbo, è da considerare). Scriviamo ora le derivate delle variabili di stato così da poter calcolare le matrici  $A, B, C, D$  (la modellazione tramite sistema lineare è possibile grazie ad approssimazione):

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}(u - Kx_2 - Rx_1), \text{ e } \dot{x}_2 = \frac{1}{J}(Kx_1 - hx_2 - C_r(t)).$$

Come uscite di interesse consideriamo la corrente nell'induttore e la velocità di rotazione, per motivi di progetto.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K}{L} \\ \frac{K}{J} & -\frac{h}{J} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.4.2 Esempio: Altoparlante Magnetico



L'effetto complessivo dato da questo sistema consiste nella vibrazione delle membrane, che attraverso onde di pressione permette di udire determinati suoni.

Il movimento delle membrane è proporzionale alla corrente che scorre nel circuito. Il sistema è formato da un magnete permanente attorno al quale è avvolta una spira, a sua volta è collegata a un supporto che le permette di trasmettere la vibrazione alle membrane. In ingresso si applica ai capi della bobina una tensione  $v_f(t)$ , proporzionale all'effetto che si vuole ottenere in uscita; nella bobina scorre quindi corrente, cosa che induce la formazione di una forza elettromotrice, ad

essa proporzionale<sup>11</sup>, responsabile della vibrazione della bobina e quindi delle membrane. Come effetto «secondario», questo moto di conduttore in un campo magnetico causa la comparsa della forza meccanico - elettrica, o contro elettromotrice, con la comparsa di una differenza di potenziale ai capi del conduttore che fa ripartire il ciclo.

Descriviamo matematicamente il sistema, scomponendolo in parti di più facile comprensione: la forza esercitata dal campo magnetico sul conduttore vale  $f(t) = Bli(t)$ , mentre per quanto riguarda il sottosistema costituito unicamente da parti meccaniche abbiamo, secondo la legge di Newton,  $M\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t) - \omega\dot{x}(t)$ , dove  $\ddot{x}$  è la velocità di movimento (detto  $x$  lo spazio),  $f(t)$  è la forza generata dal campo magnetico,  $kx(t)$  è una forza che si oppone (data dal coefficiente elastico della membrana) e  $\omega$  è un termine dissipativo, uno smorzamento proporzionale alla velocità.

Definiamo le variabili di stato: come visto in altri esercizi, poiché  $x$  non è variabile di stato (in quanto lo è  $\dot{x}$ ), aggiungiamo una variabile  $x_0$  corrispondente allo spostamento, tale che  $\dot{x}_0 = x_1$ . Possiamo scrivere quindi  $M\ddot{x}_1 = f(t) - kx_0 - \omega x_1$ ; risulta un sistema meccanico del secondo ordine.

Rimane da modellare ancora la parte meccanico - elettrica: il sistema dato dalla bobina viene descritto da  $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v_f(t) - e(t)$ , dove  $e(t)$  è la forza contro elettromotrice pari a  $Bli(t)$ . In questo ambito abbiamo come variabile di stato la corrente nell'induttore, che chiameremo  $x_2$ : possiamo quindi riscrivere l'equazione come  $L\dot{x}_2 + Rx_2 = v_f(t) - e(t)$ , che rappresenta un sistema elettrico del primo ordine; il sistema complessivo è elettromeccanico e del terzo ordine.

## 2.5 Movimento ed Equilibrio

Dato  $u(t)$ , con  $t \geq t_0$ , ed  $x(t_0)$ , è possibile determinare l'andamento dello stato  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ , tramite integrazione dell'equazione differenziale, e di conseguenza l'andamento di  $y(t)$  per gli stessi valori.  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ , è detta **evoluzione** o **traiettoria dello stato**. Questa definizione è indipendente dal tipo di sistema, e afferma semplicemente che l'evoluzione di un sistema

---

<sup>11</sup>La forza responsabile di questo movimento è la forza di Lorentz, come visto nel punto (2) precedentemente (Accoppiamento Elettromeccanico).

a partire da un certo stato (con il quale è stato inizializzato), noti gli ingressi, si chiama «traiettoria dello stato».

Per sistemi stazionari pilotati da ingressi costanti ( $u(t) = \bar{u} = \text{cost}$ ) è di interesse calcolare le eventuali traiettorie dello stato e dell'uscita che risultano costanti, cioè quando  $x(t) = \bar{x} = \text{cost}$  e  $y(t) = \bar{y} = \text{cost}$ ,  $t \geq t_0$ . Se lo stato è costante significa che la sua derivata è uguale a zero, da cui consegue che  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ <sup>12</sup> e che  $\bar{y} = h(\bar{x}, \bar{u})$ . Quando ciò accade,  $\bar{x}$  viene detto **stato di equilibrio del sistema** (o traiettoria di equilibrio), e il significato «pratico» della cosa può essere individuato considerando un esempio in cui ci sono tanti ingressi (magari alcuni anche indesiderati), che tuttavia si bilanciano l'uno con l'altro, lasciando appunto il sistema in equilibrio. In questi casi il sistema non evolve (l'uscita è anch'essa costante).

## 2.6 Linearizzazione di un Sistema Non Lineare

Abbiamo studiato fino a questo momento sistemi lineari: bisogna però notare che la maggior parte dei sistemi esistenti in realtà non segue affatto queste regole, ma presenta una complessità molto maggiore in termini matematici. Per questo motivo, ci approcceremo a casi reali solo previa semplificazione del sistema, ossia attraverso un processo di linearizzazione dello stesso. Proviamo a spiegare come questo avviene.

Ponendo  $\delta x = x - \bar{x}$ ,  $\delta y = y - \bar{y}$ ,  $\delta z = z - \bar{z}$ , calcoliamo la derivata del vettore degli stati sviluppandola in serie secondo Taylor:

$$\dot{x} = f(x, u) = 0 + \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta u + o(\delta x, \delta u); \text{ senza espandere ulteriormente, perché le } o(\delta x, \delta u) \text{ possono essere trascurate se } \delta x, \delta u \text{ sono sufficientemente piccoli. Allo stesso modo, } y = h(x, u) = h(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x + \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta u + o(\delta x, \delta u).$$

Per le formule di linearità,  $\dot{x} = A\delta x + B\delta u$  e  $\delta y = C\delta x + D\delta u$ , otteniamo che  $A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x$ ,  $B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta u$ ,  $C = \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta x$  e  $D = \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \delta u$ .

In tutto ciò bisogna considerare che probabilmente  $x$ ,  $u$  e  $y$  sono dei vettori: vediamo di seguito un esempio dei calcoli che si dovrebbero affrontare per la derivata di  $f(x, u)$ .

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f(x, u) = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{pmatrix}, \text{ da cui } \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} & \dots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_n} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} & \dots & \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_n} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \end{pmatrix}.$$

### 2.6.1 Esempio: Linearizzazione Sistema VTOL

Proviamo ora a studiare questo sistema non lineare, che precedentemente abbiamo invece considerato come tale. Bisogna quindi procedere al calcolo del punto di equilibrio, e successivamente alla linearizzazione del sistema in quel punto.

Le variabili vengono assegnate nello stesso modo visto precedentemente; qui ci limiteremo a elencarle (per una spiegazione più accurata, si rimanda all'esempio 2.3.3). Gli ingressi  $u_1$ ,  $u_2$  corrispondono rispettivamente alla forza peso  $Mg$  applicata nel centro del corpo rigido

<sup>12</sup>Le coppie di stato iniziale e ingresso che soddisfano la relazione di equilibrio devono dare  $f = 0$ .

e alla componente  $y$  della forza agente sulla punta delle ali. Affinché il sistema si trovi in equilibrio nello spazio, è necessario che la forza peso sia controbilanciata da una forza uguale e contraria che tenga il drone sospeso, mentre la forza sulla punta delle ali deve essere nulla. Abbiamo allora  $\vec{u} = (u_1 \ u_2) = (Mg \ 0)$ .

Avevamo poi assegnato alle variabili  $x_1, x_3, x_5$  i valori delle velocità nello spazio (rispettivamente sull'asse  $x, y$ , e rispetto all'orizzonte con l'angolo  $\theta$ ) e per renderlo matematicamente corretto avevamo aggiunto altre tre variabili di stato  $(x_0, x_2, x_4)$ , ottenendo alla fine

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \text{ tale che}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{M}u_1\sin(x_4) \\ x_3 \\ -\frac{1}{M}u_1\cos(x_4) + g \\ x_5 \\ -\frac{2l}{J}u_2 \end{pmatrix}.$$

Per la definizione di stato di equilibrio del sistema (cioè un valore tale che lo stato rimane costante) dobbiamo imporre  $\bar{x}_1 = \bar{x}_3 = \bar{x}_5 = 0$ <sup>13</sup>: infatti se un valore è costante la sua derivata è nulla, e di conseguenza  $\dot{x} = 0$ , da cui deriva quello che abbiamo appena detto. Come ulteriore conseguenza abbiamo che  $\frac{1}{M}u_1\sin(x_4) = 0$ , e che  $-\frac{1}{M}u_1\cos(x_4) + g$ , dalle quali si ottiene che  $x_4 = 0$ , insieme alla conferma che  $u_1 = Mg$ .  $x_0$  e  $x_2$  non compaiono nelle equazioni necessarie alla determinazione dell'equilibrio, per cui il loro valore, qualunque esso sia, non incide sul risultato finale. Sintetizzando:

Punto di equilibrio:  $\begin{cases} (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5) = (\star, 0, \star, 0, 0, 0) \\ (\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (Mg, 0) \end{cases}$

Poiché per il sistema linearizzato è necessario calcolare  $\delta x = A\delta x + B\delta u$ , si procede alla derivazione di  $f(x, u)$ .  $A = \frac{df}{du}|_{\bar{x}, \bar{u}}$ , in particolare:

$$f_0(x, u) = x_1 \Rightarrow \frac{\partial f_0}{\partial x} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0);$$

$$f_1(x, u) = \frac{1}{M}u_1\sin(x_4) \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{u_1\cos(x_4)}{M} \ 0);$$

$$f_2(x, u) = x_3 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0);$$

$$f_3(x, u) = -\frac{1}{M}u_1\cos(x_4) + g \Rightarrow \frac{\partial f_3}{\partial x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{u_1\sin(x_4)}{M} \ 0);$$

$$f_4(x, u) = x_5 \Rightarrow \frac{\partial f_4}{\partial x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1);$$

$$f_5(x, u) = -\frac{2l}{J}u_2 \Rightarrow \frac{\partial f_5}{\partial x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0);$$

Dopodiché, tutte le derivate andrebbero calcolate in  $\bar{x}$ , il che apporta dei cambiamenti solo in  $\frac{\partial f_1}{\partial x}|_{\bar{x}, \bar{u}}$ , che risulta  $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ g \ 0)$ , e in  $\frac{\partial f_3}{\partial x}|_{\bar{x}, \bar{u}}$  che risulta  $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ .

---

<sup>13</sup>Questi valori hanno «la barra» poiché sono quelli che dobbiamo imporre affinché si realizzi l'equilibrio.

Possiamo quindi ora costruire  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ passando poi a derivare } f \text{ rispetto a } u \text{ per ottenere } B.$$

$$f_0(x, u) = x_1 \Rightarrow \frac{\partial f_0}{\partial u} = (0 \ 0);$$

$$f_1(x, u) = \frac{1}{M} u_1 \sin(x_4) \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial u} = \left( \frac{\sin(x_4)}{M} \ 0 \right);$$

$$f_2(x, u) = x_3 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial u} = (0 \ 0);$$

$$f_3(x, u) = -\frac{1}{M} u_1 \cos(x_4) + g \Rightarrow \frac{\partial f_3}{\partial u} = \left( -\frac{\cos(x_4)}{M} \ 0 \right);$$

$$f_4(x, u) = x_5 \Rightarrow \frac{\partial f_4}{\partial u} = (0 \ 0);$$

$$f_5(x, u) = -\frac{2l}{J} u_2 \Rightarrow \frac{\partial f_5}{\partial u} = (0 \ -\frac{2l}{J});$$

che calcolate in  $\bar{u}$  diventano (solo quelle con cambiamenti):  $\frac{\partial f_1}{\partial u}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (0 \ 0)$ ,  $\frac{\partial f_3}{\partial u}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (-\frac{1}{M} \ 0)$ . In conclusione, otteniamo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2l}{J} \end{pmatrix}.$$

Osservando le  $\delta x$  ottenute, possiamo vedere che il sistema iniziale è stato diviso in due sottosistemi SISO: il primo comprende  $\delta x_0$ ,  $\delta x_1$ ,  $\delta x_4$  e  $\delta x_5$  (del quarto ordine, quindi) e riguarda la forza agente sulla punta delle ali (alterandone la dinamica attraverso  $x_4$ ,  $x_5$  si va a incidere sulle coordinate laterali  $\delta x_0$ ,  $\delta x_1$ ). Il secondo invece comprende  $\delta x_2$  e  $\delta x_3$ : è del secondo ordine ed è disaccoppiato dal precedente, poiché riguarda la dinamica verticale del corpo rigido studiato<sup>14</sup>.

LEZIONE 5

DATA: 30/09/2015

## 2.7 Principio di Sovrapposizione degli Effetti per Sistemi Lineari

Si prenda un determinato sistema lineare dinamico e lo si consideri in due occasioni diverse:

- in moto con stato  $x'(t)$ ,  $t \geq t_0$ , abbiamo  
 $\dot{x}'(t) = A(t)x'(t) + B(t)u'(t)$   
 $y'(t) = C(t)x'(t) + D(t)u'(t)$   
 con stato iniziale  $x(t_0) = x'_0$ .

<sup>14</sup>Da ora in poi trascureremo, per semplicità notazionale, le  $\delta$  davanti alle  $x$ , anche se si sottintenderà comunque il loro significato.

- in moto con stato  $x''(t)$ ,  $t \geq t_0$ , abbiamo  

$$x''(t) = A(t)x''(t) + B(t)u''(t)$$
  

$$y''(t) = C(t)x''(t) + D(t)u''(t)$$
  
con stato iniziale  $x(t_0) = x_0''$ .

Poiché il principio di sovrapposizione stabilisce che per un sistema dinamico lineare l'effetto di una somma di perturbazioni in ingresso è uguale alla somma degli effetti prodotti da ogni singola perturbazione, possiamo affermare che, dati un ingresso  $u''' = \alpha u'(t) + \beta u''(t)$  e uno stato iniziale  $x'''_0 = \alpha'_0 + \beta''_0$ , il moto risultante è descritto da  $x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t)$  e l'uscita corrisponde a  $y'''(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t)$ . Essendo  $(\alpha, \beta)$  dei numeri arbitrari, si ha che per il principio di sovrapposizione degli effetti il comportamento di un sistema in risposta a «piccole perturbazioni» differisce da quello in risposta a «grandi perturbazioni» solo per un fattore di scala fra i due valori.

Come conseguenza di questa legge si ha che in generale la risposta di un sistema può essere descritta come la somma di una **risposta libera** (ottenuta come *risposta del sistema quando l'ingresso è nullo*) e di una **risposta forzata** (si intende *la risposta del sistema all'ingresso, senza considerare le condizioni iniziali*), espresso anche dalla formula  $y(t) = y_L(t) + y_F(t)$ . Tali contributi possono essere studiati separatamente.

### 3 Studio nel Dominio di Laplace

Possiamo introdurre la **trasformata di Laplace** come uno strumento matematico per lo studio delle equazioni differenziali lineari. Tramite la trasformata è infatti possibile riscrivere le equazioni differenziali lineari tempo invarianti alla base di sistemi dinamici in modo che la loro risoluzione risulti di molto semplificata. In questo modo lo studio di un sistema dinamico si articolerà nei seguenti passi:

1. Studio del sistema ed elaborazione del modello matematico caratteristico (sotto forma di equazione differenziale lineare);
2. Trasformazione dell'equazione secondo Laplace (*problema Immagine*);
3. Elaborazione della soluzione nel dominio di Laplace (*soluzione Immagine*);
4. Antitrasformata di Laplace della soluzione trovata, con la quale si ottiene la soluzione al problema di partenza.

#### 3.1 Trasformata di Laplace

Per utilizzare la trasformata di Laplace dovremo fare largo uso dei numeri complessi, per cui si invita chiunque non si senta sufficientemente preparato ad approfondire personalmente l'argomento. Di seguito riprendiamo solo i concetti fondamentali di numero complesso.

##### Richiamo.

Rappresentazione di un numero in coordinate cartesiane :  $s = \sigma + j\omega$ , dove  $\sigma$  è la parte reale e  $\omega$  la parte immaginaria.

Rappresentazione di un numero in coordinate polari:  $s = \rho e^{j\phi}$ , dove  $\rho$  è il modulo e  $\phi$  l'argomento.

Per passare da coordinate polari a cartesiane usiamo  $\sigma = \rho \cos(\phi)$  e  $\omega = \rho \sin(\phi)$ .

Per passare invece da coordinate cartesiane a coordinate polari usiamo  $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$  e  $\phi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$ .

La trasformata di Laplace si applica a qualunque funzione di variabile reale associandole una funzione di variabile complessa. Sia data una funzione  $f(t)$  definita su numeri reali per  $t \geq 0$ , come può esserlo ad esempio  $f(t) = \sigma'(t) + j\omega'(t)$ . La sua trasformata di Laplace è la funzione definita sull'insieme continuo  $s$  data da

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

$\mathcal{L}\{f\}(s)$  può anche essere indicata con  $\mathcal{L}[f(t)]$ , ma in entrambi i casi risulta uguale a  $F(s)$ . Il valore  $s$  è un numero complesso appartenente al piano di Gauss, e posto a destra di una retta parallela ad un asse immaginario la cui posizione dipende da  $f(t)$ ; in particolare: la trasformata di Laplace esiste tipicamente per tutti i numeri reali  $\Re(s) > a$ , dove  $a$  è una costante (detta *ascissa di convergenza*) che dipende dalla funzione originaria, e costituisce la *regione di convergenza*.

### 3.2 Trasformata inversa di Laplace

Sotto alcune ipotesi la trasformazione inversa risulta definita come

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

dove  $\sigma_0$  è una qualunque ascissa appartenente al dominio di convergenza di  $F(s)$ . La trasformata di Laplace è una funzione biunivoca e per cui il passaggio all'antitrasformata (o viceversa) non comporta la perdita di nessun contenuto informativo; per un numero complesso ciò è possibile se  $-\pi < \phi \leq \pi$ .

### 3.3 Proprietà della Trasformata di Laplace

Linearità	$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Derivazione <sup>15</sup>	$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-k-1} f(t)}{dt^{n-k-1}} \Big _0$
Integrazione	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$
Traslazione Temporale	$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$
Teorema del valore iniziale <sup>16</sup>	$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Teorema del valore finale	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Se ne dà di seguito una breve spiegazione:

- **Linearità:** La trasformata della somma di due funzioni note è uguale alla somma delle loro trasformate.
- **Derivazione:** Si dimostra per induzione, partendo dalla derivata di grado zero fino a quella di grado  $n$ -esimo.
- **Integrazione:** È l'operazione inversa della derivazione.
- **Traslazione temporale:** La trasformata di una funzione ritardata di un valore  $t$  è la trasformata della funzione moltiplicata per un fattore che tiene conto del ritardo.
- **Teorema del valore iniziale:** permette di sapere il valore iniziale della  $f(t)$  conoscendone la trasformata.
- **Teorema del valore finale:** Permette di dedurre il  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  conoscendo la sua trasformata di Laplace.

<sup>15</sup>Dimostrazione data in seguito

<sup>16</sup>Tale limite potrebbe anche non esistere.

### 3.3.1 Dimostrazione della Proprietà di Derivazione

Dimostriamo tale proprietà per induzione. Cominciando quindi dalla derivata di grado zero,  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ . Passiamo quindi alla derivata prima:  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^\infty df(t) e^{-st} = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - (-s) \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$  per la formula di derivazione per parti<sup>17</sup>. Otteniamo quindi  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -f(0) + sF(s)$ . Proseguendo,  $\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s[sF(s) - f_0] - \frac{df(t)}{dt}\Big|_{t=0}$  che otteniamo allo stesso modo della prima. Per cui, per una derivata di ordine n deduciamo la formula generica di cui sopra.

## 3.4 Trasformate di funzioni notevoli e segnali elementari

### 3.4.1 Trasformata della Delta di Dirac



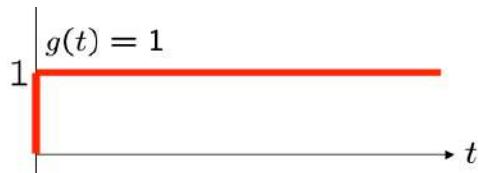
**Figura 10:** Delta di Dirac

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \text{ dove } \delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

Per dimostrarlo, consideriamo la funzione  $f(t)$  così definita:  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$ . Si

ha che  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{t_0} \frac{1}{t_0} dt = 1 \forall t_0$ . La trasformata di Laplace di tale funzione risulta  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{t_0} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1-e^{-st_0}}{st_0}$ . Se calcoliamo il limite di  $f(t)$  per  $t \rightarrow 0^+$  nell'intervallo  $(0, t_0)$ , il valore della funzione cresce senza limiti mentre la lunghezza dell'intervallo diminuisce sempre di più, in modo che il valore di  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  rimanga unitario (funzione assimilabile alla delta di Dirac). Facendo a questo punto il limite della sua trasformata, tramite la regola di de l'Hopital otteniamo  $\lim_{t_0 \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{-st_0}}{st_0} = \lim_{t_0 \rightarrow 0^+} \frac{se^{-st_0}}{s} = 1$ .

### 3.4.2 Trasformata della Funzione Gradino



**Figura 11:** Funzione Gradino Unitario

---

<sup>17</sup>  $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Sia  $g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ . Allora la sua trasformata secondo Laplace risulta  $\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = [-\frac{1}{s}e^{-st}]_0^\infty = \frac{1}{s}$ . Quando il gradino non è unitario, la relativa funzione si presenta come  $g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ k & t > 0 \end{cases}$ ,  $k \equiv \text{cost}$ ; allora  $\mathcal{L}[g(t)] = \frac{k}{s}$ .

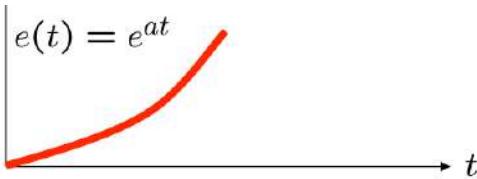
### 3.4.3 Trasformata della Funzione «Rampa»



**Figura 12:** Funzione «Rampa»

Sia  $r(t) = \int_0^\infty g(t)dt$ , di modo che risulti  $r(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$ . Allora la sua trasformata secondo Laplace risulta  $\mathcal{L}[r(t)] = \int_0^\infty r(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt = [-\frac{t}{s}e^{-st}]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}dt = -[\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$ . Poiché deriviamo la funzione «rampa» dalla funzione gradino, vale anche in questo caso la proprietà secondo cui se  $g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ k & t > 0 \end{cases}$ ,  $k \equiv \text{cost}$  allora  $\mathcal{L}[r(t)] = \frac{k}{s^2}$ .

### 3.4.4 Trasformata dell'Esponenziale



**Figura 13:** Grafico di una funzione esponenziale

Sia  $e(t)$  una funzione esponenziale del tipo  $e(t) = e^{at}$ . La trasformata secondo Laplace di tale funzione risulta:  $\mathcal{L}[e(t)] = \int_0^\infty e(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{t(a-s)}dt = \frac{1}{s-a}$ .

### 3.4.5 Trasformate delle funzioni Seno e Coseno

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \phi)] = \frac{\omega \cos(\phi) \pm s \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

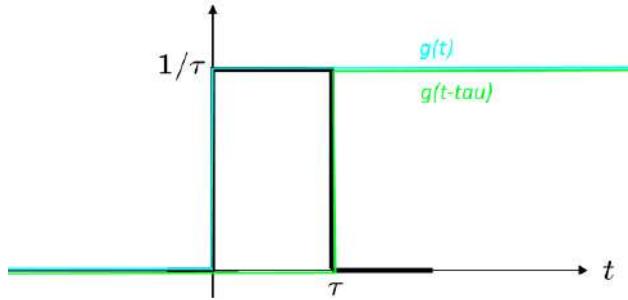
$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}; \quad \mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \phi)] = \frac{s \cos(\phi) \mp \omega \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2}$$

### 3.4.6 Trasformata di una Potenza

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{(n+1)}}$$

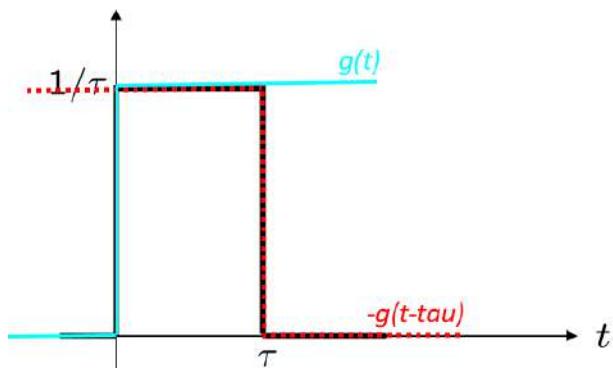
## 3.5 Trasformate di funzioni più complesse

### 3.5.1 Trasformata della funzione Impulso Rettangolare

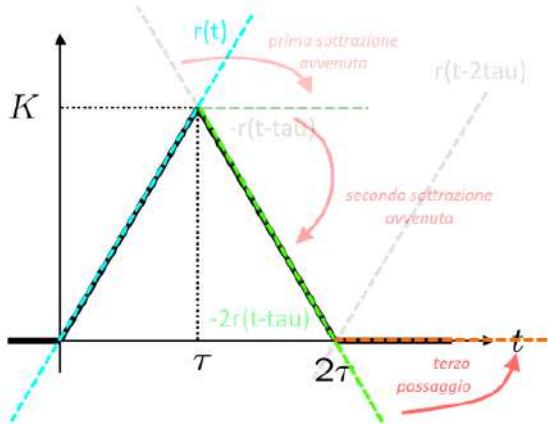


**Figura 14:** Grafico di un Impulso Rettangolare (1)

In questo esempio è molto importante capire come viene descritta la figura. Vogliamo arrivare a rappresentare matematicamente un impulso rettangolare (in nero nella figura 14) e vogliamo farlo attraverso l'uso di funzioni gradino  $g(t)$ . Per questo motivo prendiamo una funzione gradino  $g(t)$  di ampiezza  $\frac{1}{\tau}$  così definita:  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\tau} & t \geq 0 \end{cases}$  (azzurra in figura) e una identica ma ritardata di un valore  $\tau$  (verde in figura), di cui riportiamo per completezza la definizione:  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{1}{\tau} & t \geq \tau \end{cases}$ . In questo modo, facendo la sottrazione fra la prima e la seconda riusciamo perfettamente a descrivere l'impulso rettangolare, come volevamo (Figura 15).



**Figura 15:** Grafico di un Impulso Rettangolare (2)



**Figura 16:** Grafico di una funzione «Onda Triangolare»

Definiamo a questo punto la nostra funzione impulso rettangolare:  $f(t) = \frac{1}{\tau}[g(t) - g(t-\tau)]$ .<sup>18</sup> La trasformata secondo Laplace di questa funzione si calcola attraverso  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{\tau}\{\mathcal{L}[g(t)] - \mathcal{L}[g(t-\tau)]\}$  per la proprietà di linearità della trasformata. Otteniamo  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{\tau} \frac{(1-e^{-\frac{\tau}{s}})}{s}$ , che è una funzione trascendente<sup>19</sup>.

### 3.5.2 Trasformata di una funzione «Onda Triangolare»

La funzione che vogliamo andare a descrivere è, anche in questo caso, quella di colore nero in figura 16. Possiamo ottenerla attraverso la combinazione lineare di tre funzioni «rampa» opportunamente ritardate. Partiamo quindi nel modo più semplice, descrivendo il tratto di funzione compreso fra 0 e  $\tau$  attraverso una normale funzione rampa  $r(t)$  (azzurra in figura). Per la definizione di funzione rampa, che esiste fino all'infinito, dobbiamo trovare un modo di «fermare» questa funzione e di farle cambiare andamento; per questo motivo utilizziamo un'altra funzione rampa, con le seguenti caratteristiche:

- Ritardata di  $-\tau$ , poiché altrimenti avrebbe centro nell'origine, mentre noi vogliamo che incontri la nostra prima funzione «rampa» proprio in  $x = \tau$  invece che in  $x = 0$ ;
- Di coefficiente angolare con segno opposto, perché così è la funzione che dobbiamo andare a descrivere (grigia in figura);
- Moltiplicata per un coefficiente angolare di valore 2, perché senza di quello ci saremmo limitati ad «annullare» la funzione in quel punto, facendo rimanere una costante di valore pari a  $K$  (quello che succede dopo la prima sottrazione). Il coefficiente angolare in questione può essere interpretato semplicemente come un «sottraiamo due volte» la stessa funzione rampa ritardata, piuttosto che con il significato che ha riguardo alla pendenza delle rette. Questo è ciò che succede infatti con la terza funzione che andremo ad aggiungere.

Il risultato di questa combinazione lineare viene mostrato in verde chiaro in figura. A questo punto però la funzione ottenuta va all'infinito verso il basso (per lo stesso motivo per cui

<sup>18</sup>Raccogliamo  $\frac{1}{\tau}$  di modo da ottenere la funzione gradino unitario.

<sup>19</sup>Si chiamano funzioni trascendenti tutte quelle funzioni che non sono algebriche. Possono ad esempio contenere espressioni logaritmiche, esponenziali, trigonometriche. Per maggiori informazioni vedi Wikipedia.

prima andava verso l'alto), per cui dobbiamo aggiungere un ulteriore fattore che «termini» questo andamento riducendo la funzione a una costante di valore zero. Per fare ciò utilizziamo una ulteriore funzione rampa (beige in figura): ritardata di  $2\tau$  e di coefficiente angolare positivo proprio per annullare quella «precedente».

La nostra funzione risulta quindi definita come  $f(t) = \frac{K}{\tau}r(t) - \frac{2K}{\tau}r(t-\tau) + \frac{K}{\tau}r(t-2\tau)$ , e la sua trasformata secondo Laplace è la somma algebrica delle trasformate:  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{K}{\tau} \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-\tau s}}{s^2} + \frac{e^{-2\tau s}}{s^2} \right]$ .

## 4 Funzione di Trasferimento

Abbiamo già visto che, dato un sistema lineare tempo invariante, l'evoluzione temporale dello stato e dell'uscita è data dal contributo dell'evoluzione forzata (quando lo stato iniziale è nullo) e dell'evoluzione libera (quando gli ingressi sono nulli). Preso quindi un sistema dinamico descritto da  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$ , definisco le trasformate di Laplace di queste tre funzioni del tempo:

$$X(s) := \mathcal{L}[x(t)],$$

$$Y(s) := \mathcal{L}[y(t)],$$

$$U(s) := \mathcal{L}[u(t)].$$

Poiché  $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$  e, per la proprietà delle derivate  $\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x_0$ , abbiamo  $sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$  per la proprietà di linearità della trasformata di Laplace. Raccolgo e isolo  $X(s)$ :  $X(s)(sI - A) = BU(s) + x_0$ , dove  $I$  è la matrice identità. Quindi  $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x_0$ . Considerando la trasformazione dell'uscita, secondo la quale  $Y(s) = CX(s) + DU(s)$ , e raccogliendo il fattore delle uscite, ottengo  $Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$ .

Da queste due equazioni possiamo vedere chiaramente i contributi dati dall'evoluzione libera e dall'evoluzione forzata:

$$X(s) : \begin{cases} (sI - A)^{-1}BU(s) & \text{evoluzione forzata} \\ (sI - A)^{-1}x_0 & \text{evoluzione libera} \end{cases}$$

$$Y(s) : \begin{cases} [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) & \text{evoluzione forzata} \\ C(sI - A)^{-1}x_0 & \text{evoluzione libera} \end{cases}$$

I risultati ottenuti confermano che attraverso la trasformata di Laplace diventa più semplice risolvere le equazioni differenziali che descrivono i sistemi dinamici, in quanto il problema della loro risoluzione viene aggirato, passando attraverso una equazione algebrica.

Per calcolare la parte di  $Y(s)$  che corrisponde all'evoluzione forzata possiamo utilizzare la **Funzione di Trasferimento**, che si definisce come

$$G(s) := [C(sI - A)^{-1}B + D]$$

in modo che risulti

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

La funzione di trasferimento risulta essere una funzione razionale<sup>20</sup> fratta in cui l'ordine del polinomio al denominatore è  $n$ , cioè l'ordine di complessità del sistema, mentre l'ordine del numeratore è  $\leq n$ . È adatta per descrivere completamente (cioè senza perdita di informazione) la risposta forzata di un sistema - che è quello di ci occuperemo nel nostro corso - ma non descrive il sistema completo!

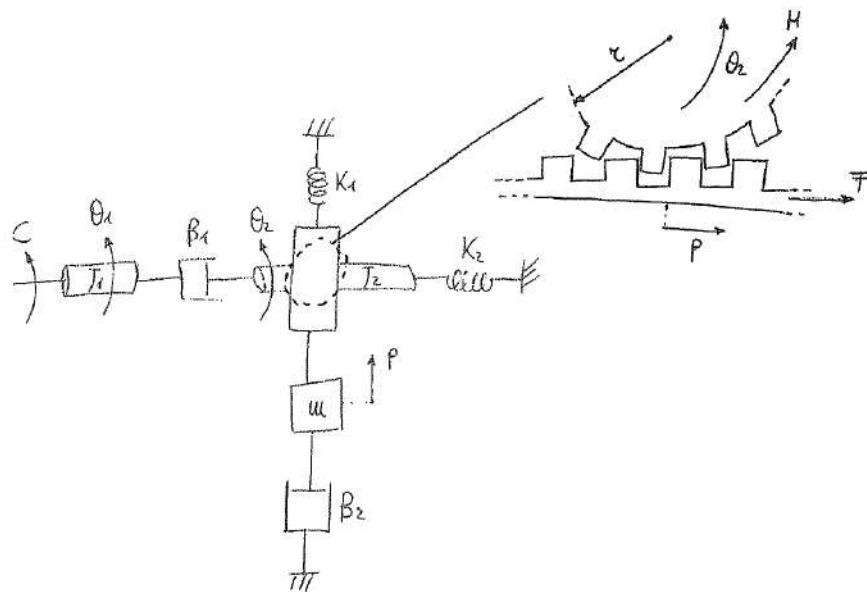
Possiamo trovare  $G(s)$  sapendo che  $(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$ ; come calcolare quindi la matrice aggiunta? Cominciamo invertendo le righe della matrice con le sue colonne, in modo da ottenere  $(sI - A)^T$ , la matrice trasposta. Da questa poi calcoliamo la matrice dei cofattori (o complementi algebrici), dove un cofattore relativo alla posizione  $i, j$  è così definito:  $\text{cof}_{i,j}(sI - A) := (-1)^{i+j} \cdot \det [(sI - A)_{i,j}]$ ; qui il termine  $\det [(sI - A)_{i,j}]$  rappresenta il minore di  $(sI - A)$  ottenuto cancellando la riga  $j$ -esima e la colonna  $i$ -esima.

LEZIONE 6

DATA: 01/10/2015

## Esercitazione 1

### Primo Esercizio: Sistema Meccanico



NOTA: Questo esercizio non è stato terminato in classe e per questo motivo non lo approfondiremo ulteriormente.

Abbiamo un sistema con due parti:

---

<sup>20</sup>Cioè scrivibile per mezzo di polinomi.

- verticale: con una molla con costante  $K$  e un rullo che ruota/striscia sul secondo rullo. Vi è anche una massa legata.
- orizzontale: vi sono due rulli. Quello a sinistra ha una coppia, ovvero una forza torcente che lo fa girare. La molla con costante  $k$ , per la forza torcente si restringerà e farà girare l'altro rullo che però imprimerà una forza torcente resistente quindi contraria a quella del primo rullo.

Vediamo i due sistemi separatamente:

Abbiamo uno spostamento  $p$  dovuto al peso della massa  $m$  e dalla forza della molla di costante elastica  $K$

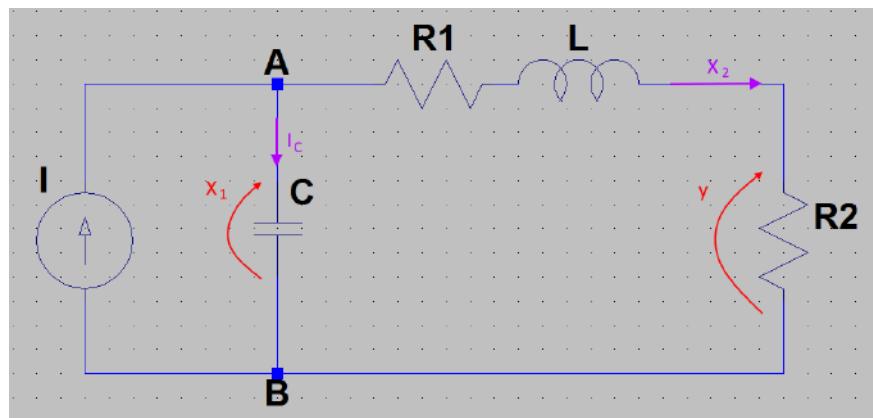
$$m\ddot{p} = F - mg - Kp$$

Il sistema orizzontale invece è composto da due cilindri. Una coppia  $C$  fa girare il primo rullo, la coppia  $N$  fa girare il secondo rullo. Avendo rotazione inversa, si frenano a vicenda. (momento angolare per accelerazione angolare è uguale alla sommatoria delle forze.)

$$J_1\theta_1 = C - \dot{K}(\theta_1 - \theta_2)$$

La coppia è una forza torcente ovvero fa girare il rullo in un verso. Il rullo girando, crea una forza. Il rullo però di fatto girerà con una forza che è dovuta alla coppia  $C$  ma c'è l'altro rullo che inizialmente è fermo che siccome creerà un contrasto, diminuirà l'intensità di rotazione del primo rullo. Quindi di fatto, appena viene creata la coppia  $C$ , si crea una coppia  $N$  sul rullo 2 che contrasta la  $C$ .

## Secondo Esercizio: Sistema Elettrico



Sia dato il circuito elettrico in figura. Sappiamo già che  $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$  e che  $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ . Assegniamo quindi le variabili di stato agli elementi appropriati ( $x_1$  per la tensione nel condensatore,  $x_2$  per la corrente nell'induttore) e scriviamo le equazioni che descrivono il sistema, considerando come ingressi la corrente fornita dal generatore  $I$ :

$$\begin{cases} Cx_1 = u - x_2 \\ x_1 - R_1x_2 - R_2x_2 - L\dot{x}_2 = 0 \\ y = R_2x_2 \end{cases} . \text{ Isoliamo ora le variabili di stato: } \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{u}{C} - \frac{x_2}{C} \\ \dot{x}_2 = \frac{x_1}{L} - \frac{(R_1+R_2)}{L}x_2 \\ y = R_2x_2 \end{cases} ;$$

da qui deduciamo subito che  $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_1+R_2}{L} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \ R_2]$  e  $D = 0$ .

Vogliamo calcolare ora  $G(s)$ , la funzione di trasferimento, attraverso la formula  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ ; assegniamo quindi dei valori arbitrari a resistenze, conduttanze e induttanze (precisamente  $C = 0.5F$ ,  $L = 1H$ ,  $R_2 = 1\Omega$ ,  $R_1 = 3\Omega$ ) in modo da ottenere  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Cominciamo calcolando  $(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$ : sapendo che  $(sI - A) = \begin{bmatrix} (s - 0) & (0 - (-2)) \\ (0 - 1) & (s - (-4)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s + 4 \end{bmatrix}$ , trovo  $\det(sI - A) = s(s+4)+2$ ; a questo punto calcolo la matrice aggiunta.  $(sI - A)^T = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s + 4 \end{bmatrix}$  è la matrice trasposta, per cui  $\text{Adj}(sI - A)$  viene  $\begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}$ , da cui risulta  $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+4)+2} \begin{bmatrix} s+4 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$ ; possiamo ora sostituire nella formula e ricavare  $G(s)$ .

$$(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2s-4}{s(s+4)+2} \\ \frac{2}{s(s+4)+2} \end{bmatrix}; \text{ infine, } G(s) = \frac{2}{s(s+4)+2}.$$

## Terza Parte: introduzione a Matlab Simulink

```
%INTRODUZIONE A MATLAB/ SIMULINK

%% <1: STRUMENTI DI CALCOLO>
4+sqrt(2)-sin(0.2*pi)^2+exp(2)
%osservare la variabile "ans"

%% <2: DEFINIZIONE VARIABILI>
a=4;
b=2;
% prodotto
a*b
% punto e virgola
% pulizia Command Window
clc

%Per cancellare una variabile:
clear a;
%Per cancellare tutte le variabili appartenenti al workspace corrente:
clear all;

%% <3: WORKSPACE>
%Ogni variabile definita in questo modo
%viene conservata in memoria nel workspace.

%save + load:

b=2;
save myWorkspace b;
clear b;
load myWorkspace b;
```

```

%% <4: HELP>
%Help: fornisce la descrizione completa di
%tutte le funzioni predefinite

%es:
help load;

%% <1b : ALTRI STRUMENTI DI CALCOLO>
a = 5;
b = 2;
max(a,b)
min(a,b)

%E' buona norma utilizzare l'help di Matlab per ogni problema

%% <5: MATRICI>
A=[1 2;3 4]
% separazione con spazi (righe) e punti e virgola (colonne)
%selezionare un elemento:
A(1,2);

%<5.1: WILDCARD>
%prima riga:
A(1,:);
%seconda colonna:
A(:,2);
%</5.1: WILDCARD>

%<5.2: SOTTOMATRICI>
B=[1 , 2 , 3 ; 4 , 5 , 6];
%Selezione delle righe 1 e 2 + colonne 2 e 3
B(1:2,2:3);
%</5.2: SOTTOMATRICI>

%% <6: OPERAZIONI ELEMENTARI SU MATRICI>
%trasposta:
A';
%inversa:
inv(A);
%calcolo del rango di una matrice:
rank(A);
%calcolo della traccia di una matrice:
trace(A);
%calcolo degli autovalori di una matrice:
eig(A)
%calcolo della norma di una matrice:
norm(A);
% di default viene utilizzata la "norma 2" equivalente a..

```

```

sqrt(max(eig(A'*A)))
%per conoscere le dimensioni di una matrice (numero di righe e colonne):
size(A);

%% <7: MATRICI SPECIALI>
n=4;
m=2;
%matrice identità nxn:
eye(n);
%matrice di zeri nxm:
zeros(n,m);
%matrice di uni nxm:
ones(n,m);
%matrice nxm con elementi distribuiti
%uniformemente tra 0 e 1:
rand(n,m);

%% <8: VETTORI>
v1=(0:10);
v2=(1:0.5:3);
v3=[3 6 1 7];

%% <9: POLINOMI>
%Sono definiti come vettori.
%Es:  $3s^2 + 2s + 1$ 
pol=[3 2 1];
%Calcolo delle radici (roots):
roots(pol);
%Valutazione in un punto (polyval):
polyval(pol,0);

%% <10: FUNZIONI>
% Vedere file aggiunta.m
A=[1 0 2; 2 4 1; 3 1 2]
n=norma(A)

%% <11: CONTROLLO FLUSSO>
a=2;
if (a>=2)
    disp('Ciao');
end

i=1;
while (i<10)
    disp('i='); disp(i);
    i=i+1;
end
%vedere HELP per for, switch, break...

```

```

%% <12: PLOT>
%vettore di tempo da 0 a 10 con risoluzione 0.01:
t=0:0.01:10;
figure(1);
plot(t,sin(t));

%Clear della figura:
clf;

%Disegnare piu grafici nella stessa figura
subplot(2,1,1); plot(t,sin(t));
subplot(2,1,2); plot(t,cos(t));

clf;
%Disegnare piu grafici sovrapposti
plot(t,sin(t), t, cos(t));

%ALTRI METODI DI PLOTTAGGIO:
%loglog: plotta il grafico 2-D con scale logaritmiche per
%entrambi gli assi;

%semilogx: plotta il grafico 2-D con scala logaritmica
%per l'asse x e lineare per l'asse y;

%semilogy: plotta il grafico 2-D con scala lineare per
%l'asse x e logaritmica per l'asse y;

%MESH: (GAFICI 3D)
x=(0:0.01:2*pi); y=(0:0.01:2*pi);
for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        z(i,j)=sin(x(i)+y(j));
    end
end
figure(2)
mesh(x,y,z);

%ELABORARE GRAFICI:
figure(3)
plot(t,sin(t));
title('Funzione sin(t)');
axis( [0 9 -2 2] );
grid on;
xlabel('[sec]');
ylabel('[m]');
legend('Grafo della funzione');
%LE FIGURE SI POSSONO ESPORTARE: .fig, PDF, EPS,... etc! Comodo per la

```

```

%relazione / progetto finale.

%le proprieta si possono modificare anche da menu grafico!

%% <13: CONTROL SYSTEM TOOLBOX E SIMULAZIONE DI SISTEMI>
%Sistema nello spazio degli stati:
A=[0 1 ; -2 -1];
B=[0;1];
C=[1 0];
D=0;
S=ss(A,B,C,D);

%LSIM:
t=(0:0.01:5);
u=sin(2*pi*2*t);
x0=[0;1];
y=lsim(S,u,t,x0);
figure(8)
plot(t,y);
title('Funzione lsim');
grid on;
xlabel('[sec]'); ylabel('[N]');
legend('Risposta a un ingresso sinusoidale');

%% Next: FUNZIONI DI TRASFERIMENTO, SIMULINK!
% comando per esportare grafici da simulink
% 1) aprire uno scope con doppio click
% 2) entrare nelle impostazioni (seconda icona in alto a sinistra) --> Hystory
% 3) scegliere "Save data to workspace" e impostare un nome nella label sottostante
% 4) completare una simulazione
simplot(nome_scope)
% comando per ottenere sfondo bianco
whitebg

```

## LEZIONE 7

DATA: 06/10/2015

Come è stato detto nella lezione precedente, il calcolo della funzione di trasferimento non è sufficiente nel caso si voglia determinare completamente l'uscita di un sistema: rimane esclusa l'evoluzione libera del sistema, che va quindi aggiunta in un secondo momento, come mostra la formula  $Y(s) = G(s)U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$ .

Ricordiamo anche che  $G(s) = \frac{C \text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$ , e riprendendo le osservazioni sul grado dei polinomi in questa equazione, definiamo come **grado relativo** la differenza fra l'ordine del polinomio al denominatore e quello del polinomio al numeratore; tale numero è sempre  $\geq 0^{21}$ . Nel caso sia uguale a zero di parla di **collegamento algebrico ingresso-uscita**, e la funzione di trasferimento si dice *propria*, mentre il valore massimo che può raggiungere è

<sup>21</sup>Si consiglia a proposito la pagina

<https://www.quora.com/Why-can-t-the-number-of-zeros-be-greater-than-the-number-of-poles-in-a-transfer-function>

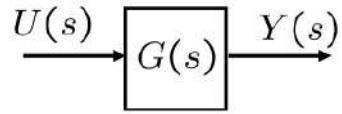
pari a  $n$  nel caso il grado del polinomio al numeratore sia zero.

Osservando ora il polinomio che costituisce la risposta libera, notiamo che  $C(sI - A)^{-1}x_0 = C \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} x_0$ : anche  $y_L$  è una funzione razionale fratta in cui l'ordine del polinomio al numeratore è minore di quello al denominatore. L'unica differenza rispetto ai polinomi presenti in  $G(s)$  è la presenza di  $x_0$ , un vettore di una colonna di  $n$  righe (presente ovviamente solo se il sistema non parte in quiete, nel qual caso è nullo).

## 4.1 Definizione di Zeri e Poli

Tenendo conto del fatto che la funzione di trasferimento è costituita da polinomi, è possibile riscriverla come segue:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}$$



**Figura 17:** Rappresentazione a blocchi

(con  $m \leq n$ ), per cui anche  $Y(s)$  può essere riscritta come  $Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s) + \frac{N_{x_0}(s)}{D(s)}$ <sup>22</sup>. Per il teorema fondamentale dell'algebra, ogni polinomio di grado  $n$  ha  $n$  radici<sup>23</sup> complesse (nel caso più generale); per questo motivo, riscriviamo  $G(s)$  come moltiplicazione di tutte le sue radici:

$$G(s) = \frac{\rho(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}.$$

Si definiscono **zeri** le radici del polinomio  $N(s)$  (in questo caso, le  $z_1, \dots, z_m$ ); si definiscono **poli** le radici del polinomio  $D(s)$  (in questo caso, le  $p_1, \dots, p_n$ ). Poiché alcuni dei poli possono essere uguali a zero, è possibile raccogliere le  $s$  corrispondenti: se ne raccoglierà un numero  $g$ , tale che  $D(s) = s^g(s + p_1) \cdots (s + p_{n-g})$ .

I poli della funzione di trasferimento sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice di stato  $A$  (sono cioè tutti gli autovalori di  $A$  a meno di cancellazioni tra radici del numeratore e del denominatore).

## 4.2 Rappresentazione in Forma Fattorizzata

Alla luce di quanto detto sopra possiamo riscrivere la Funzione di Trasferimento come la «produttoria» delle radici del polinomio:

$$G(s) = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod_k (s + z_k) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{n,i} s + \alpha_{n,i}^2)}{\prod_k (s + p_k) \prod_i (s^2 + 2\delta_i \omega_{m,i} s + \omega_{m,i}^2)}.$$

I poli e gli zeri di cui si è già parlato corrispondono alla prima «produttoria», sia al numeratore che al denominatore, mentre la seconda è dovuta alle radici di tipo complesso. Abbiamo detto infatti che per il teorema fondamentale dell'algebra ogni polinomio ammette radici di tipo

<sup>22</sup>In questo caso,  $D(s) = \det(sI - A)$ .

<sup>23</sup>Si chiama radice  $b$  di un polinomio  $p$  (in questo caso, in una sola variabile) un valore tale che  $p(b) = 0$ , ossia quel valore per cui il polinomio si annulla.

complesso, tuttavia siccome il campo dei Reali rappresenta una parte di quello dei Complessi, il teorema permette effettivamente anche la presenza di radici reali.

Non bisogna però escludere la presenza di radici complesse, che vengono quindi rappresentate nella produttoria. Poiché quando queste sono presenti si trovano sempre a coppie complesse coniugate, la moltiplicazione di queste ultime fra loro permette di eliminare la parte immaginaria accettando di tenere un «micropolinomio» del secondo ordine.

L'esempio in seguito dovrebbe chiarire ulteriori dubbi:

Date due radici complesse (poli)  $p_1 = (\Re + j\Im)$  e  $p_2 = (\Re - j\Im)$  tali che nella forma fattorizzata avremo al denominatore  $(s + p_1) \cdot (s + p_2)$ , il loro prodotto è  $(s + \Re + j\Im)(s + \Re - j\Im) = s^2 + s\Re - j\Im s + s\Re + \Re^2 - j\Re\Im + j\Im s + j\Re\Im + (\Im)^2 = s^2 + 2s\Re + (\Re)^2 + (\Im)^2$ , cioè un polinomio di coefficienti reali. Per coerenza con la rappresentazione in forma fattorizzata dobbiamo porre

$$(\Re)^2 + (\Im)^2 \triangleq (\omega_m)^2$$

e

$$\Re \triangleq \delta_i \omega_{m,i}.$$

Il polo può allora essere riscritto come  $\delta_i \omega_{m,i} + j\sqrt{(\omega_m)^2 - (\delta_i \omega_{m,i})^2} = \delta_i \omega_{m,i} + j\omega_m \sqrt{1 - (\delta_i)^2}$ , (considerando  $\Im = \sqrt{(\omega_m)^2 - (\delta_i \omega_{m,i})^2}$ ). Per analogia con la rappresentazione polare, scrivendo  $p = \omega_{m,i} \left( \delta_i + j\sqrt{1 - (\delta_i)^2} \right)$  risulta che  $\omega_{m,i}$  corrisponde al modulo del polo, mentre  $\delta_i$  corrisponde al coseno della sua fase. Vengono quindi date alcune importanti definizioni:

- Il coefficiente  $(\zeta_i, \delta_i)$  viene chiamato **coefficiente di smorzamento**<sup>24</sup> e risulta  $\delta_i = \frac{\Re}{\omega_{m,i}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} = \cos(\phi)$ ;
- Il termine  $(\alpha_{n,i}, \omega_{m,i})$  si dice **pulsazione naturale**,<sup>25</sup> e si ha che  $\omega_{m,i} = |p_k| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ ;
- $\rho$  viene chiamata **costante di trasferimento** e **g tipo**.

### 4.3 Rappresentazione in Forma Alternativa

Si chiama Rappresentazione in Forma Alternativa la seguente

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_k (1 + T_k s) \prod_i \left( 1 + 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{1}{\alpha_{n,i}^2} s^2 \right)}{\prod_k (1 + \tau_k s) \prod_i \left( 1 + 2 \frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} s + \frac{1}{\omega_{m,i}^2} s^2 \right)},$$

dove  $\tau_i, T_i$  sono le **costanti di tempo** del polo (e dello zero) e  $\mu$  viene detto **guadagno**. È possibile ottenere questa rappresentazione raccogliendo gli  $\alpha$  al numeratore e gli  $\omega$  al denominatore. Si può quindi dire che ad ogni polo reale  $p_k$  viene associata una costante di

---

<sup>24</sup>Come si può immaginare dal nome, indica «quanto è smorzato» il sistema: se  $\delta$  è piccolo, il sistema sarà poco smorzato, permettendo uscite del sistema potenzialmente molto alte o con alti sbalzi nei valori.

<sup>25</sup>Google dà una definizione di «Natural frequency» come

«the frequency at which a system oscillates when not subjected to a continuous or repeated external force.»

Per maggiori informazioni si rimanda a [https://en.wikipedia.org/wiki/Natural\\_frequency](https://en.wikipedia.org/wiki/Natural_frequency) e [http://www.electroyou.it/vis\\_resource.php?section=DomRisp&id=360](http://www.electroyou.it/vis_resource.php?section=DomRisp&id=360)

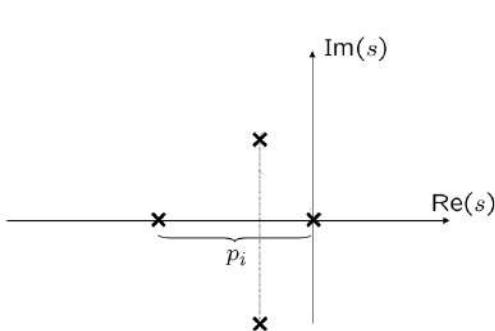
tempo così definita:  $\tau_i = -\frac{1}{p_k}$ ; essa è positiva solo se il polo è negativo. Per gli zeri reali vale una relazione analoga:  $\tau_j = -\frac{1}{z_k}$ . Per il guadagno infine, possiamo dire che il suo valore corrisponde a quello della FdT quando  $s = 0$  ( $\mu = G(s)|_{s=0}$ ).

Si menziona a questo proposito la funzione Matlab  $k = \text{dcgain}(\text{sys})$ :

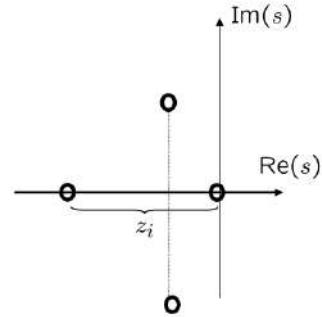
« $k = \text{dcgain}(\text{sys})$  computes the DC gain  $k$  of the LTI model  $\text{sys}$ .»

è la descrizione riportata dalla documentazione Matlab.

#### 4.3.1 Rappresentazione di Zeri e Poli sul piano di Gauss



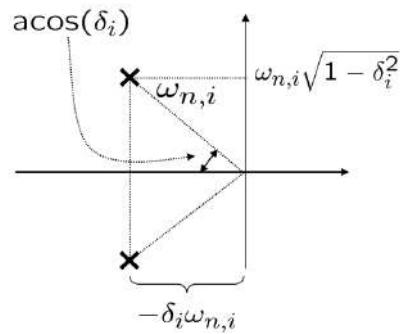
**Figura 18:** Rappresentazione dei Poli



**Figura 19:** Rappresentazione degli Zeri

Generalmente abbiamo un polo/zero per ogni radice reale e una coppia di poli/zeri per ogni radice complessa (il «micropolinomio» infatti contiene due soluzioni complesse coniugate, che corrispondono a  $\begin{cases} \zeta_i \alpha_{n,i} \pm j \alpha_{n,i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} & \text{per gli zeri} \\ \delta_i \omega_{m,i} \pm j \omega_{m,i} \sqrt{1 - \delta_i^2} & \text{per i poli} \end{cases}$ ).

Da quello che abbiamo detto nei paragrafi precedenti discende il significato delle rappresentazioni in figura. Si prenda come caso di esempio concreto quello del polo rappresentato in figura 20.



**Figura 20:** Rappresentazione con  $|\delta| \leq 1$

Il valore di  $\delta$  è rilevante nel posizionamento del polo sul piano; può essere di aiuto tenere a mente  $\delta$  come coseno dell'angolo  $\theta$ : considerando lo «zero» giacente sull'asse Reale negativo, il vettore gira in senso orario attorno all'origine.

Avremo quindi:

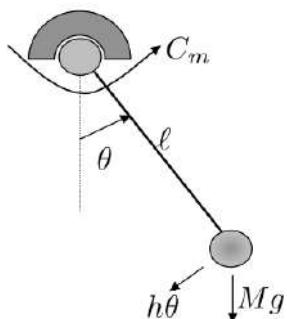
$-1 < \delta < 0$  Il polo si trova sul semipiano Reale positivo.

$\delta = 0$  Il polo e il suo coniugato si trovano sull'asse Immaginario, ad una distanza dall'origine pari al valore del modulo in entrambe le direzioni.

$0 < \delta < 1$  Il polo si trova nel secondo (e il suo coniugato nel terzo) quadrante; più  $\delta$  è piccolo, più ci si avvicina all'asse Immaginario<sup>26</sup> (viceversa con l'asse Reale). La parte Reale è negativa.

$\delta = \pm 1$  Il polo e il suo coniugato si trovano sull'asse Reale, ad una distanza dall'origine pari al valore del modulo.

#### 4.3.1.1 Esempio: Pendolo inverso



Per questo esempio si consideri il sistema già linearizzato, il cui sviluppo può essere trovato nelle dispense del corso; si sceglie come convenzione di scrivere gli stati direttamente con le « $x$ » invece che con  $\delta x$ , anche se viene comunque sottinteso che sia  $x - \bar{x}$  (sistema linearizzato). Partiamo quindi da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t) \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \cos(\bar{\theta})x_1(t) - \frac{h}{Ml^2}\dot{x}_2(t) + \frac{1}{Ml^2}\dot{u}(t) \end{cases}; \text{ sapendo che } y = x_1 = \theta, \text{ risulta:}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\bar{\theta}) & -\frac{h}{Ml^2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{pmatrix}, C = [1 \ 0].$$

Si passa al calcolo della funzione di trasferimento

$$(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{l} \cos(\bar{\theta}) & s + \frac{h}{Ml^2} \end{pmatrix} \text{ e del suo determinante: } \det(sI - A) = s(s + \frac{h}{Ml^2}) + \frac{g}{l} \cos(\bar{\theta}) = s^2 + s \frac{h}{Ml^2} + \frac{g}{l} \cos(\bar{\theta}).$$

$$(sI - A)^T = \begin{pmatrix} s & \frac{g}{l} \cos(\bar{\theta}) \\ -1 & s + \frac{h}{Ml^2} \end{pmatrix}, \text{ per cui } \text{Adj}(sI - A) = \begin{pmatrix} s + \frac{h}{Ml^2} & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\bar{\theta}) & s \end{pmatrix}; \text{ senza sviluppare i calcoli, } G(s) \text{ risulta } G(s) = \frac{1}{s^2 + s \frac{h}{Ml^2} + \frac{g}{l} \cos(\bar{\theta})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{h}{Ml^2} & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\bar{\theta}) & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{pmatrix}.$$

---

<sup>26</sup>Poiché  $\delta$  è l'arco il cui coseno è  $\theta$ , quando  $\delta \rightarrow 0$  l'angolo  $\theta \rightarrow 90^\circ$ .

### 4.3.1.2 Esempio: Altoparlante Magnetico

Per svolgere questo esercizio daremo per scontato di aver già studiato il sistema<sup>27</sup>, e partiremo quindi, come indicato nelle diapositive del corso, dal sistema già linearizzato. Sono quindi

$$\text{dati } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} & -\frac{\beta}{M} \\ 0 & -\frac{\beta}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}; \text{ sia l'uscita } y = x_2 = v_x.$$

Troviamo subito che  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , poiché  $y$  è noto, come anche l'equazione con cui ricavarla (1.3). Inoltre  $D = 0$  poiché non c'è collegamento algebrico ingresso-uscita (4). Vogliamo

calcolare  $G(s)$ <sup>28</sup>, per cui per prima cosa si trova  $(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ \frac{k}{M} & s + \frac{b}{M} & \frac{\beta}{M} \\ 0 & \frac{\beta}{L} & s + \frac{R}{L} \end{pmatrix}$ , da cui

$$\det(sI - A) = s \left[ (s + \frac{b}{M})(s + \frac{R}{L}) - \frac{\beta^2}{ML} \right] + 1 \left[ \frac{k}{M}(s + \frac{R}{L}) - 0 \right] + 0 = s \left[ s^2 + s \left( \frac{b}{M} + \frac{R}{L} \right) + \frac{bR}{ML} - \frac{\beta^2}{ML} \right] + s \frac{k}{M} + \frac{kR}{ML} = s^3 + s^2 \left( \frac{b}{M} + \frac{R}{L} \right) + s \left( \frac{bR - \beta^2}{ML} + \frac{k}{M} \right) + \frac{kR}{ML} \text{ (polinomio del terzo ordine).}$$

Bisognerebbe a questo punto calcolare la matrice aggiunta (formula a pagina 32) ma osservando le matrici  $B$  e  $C$  si nota la consistente presenza di zeri: si può per questo motivo utilizzare un «trucchetto» che permette di semplificare di molto i calcoli. Questo stratagema consiste nell'evitare di calcolare determinati elementi della matrice aggiunta, quegli stessi elementi che poi moltiplicati per  $B$  e  $C$  darebbero un risultato nullo (di che importanza è infatti il valore di un numero moltiplicato per zero?).

Seguendo il ragionamento, e sapendo che nel prodotto fra matrici l'ordine è rilevante, consideriamo il prodotto della matrice aggiunta per  $C$ : l'unica riga che avrebbe senso calcolare è la seconda. Proseguendo, si «moltiplichia» per  $B$ : si annullano così altri due termini (della riga rimasta) e alla fine risulta che l'unico elemento da calcolare della matrice aggiunta è il terzo della seconda riga ( $\text{Adj}_{2,3}$ ), con un valore di  $-\frac{s\beta}{M}$ . In conclusione,

$$G(s) = -\frac{\beta}{M} \frac{s}{\det(sI - A)} = -\frac{\beta}{M} \frac{s}{s^3 + s^2 \left( \frac{b}{M} + \frac{R}{L} \right) + s \left( \frac{bR - \beta^2}{ML} + \frac{k}{M} \right) + \frac{kR}{ML}}$$

dove vediamo al numeratore un polinomio del primo ordine.

Il grado relativo del sistema (4) è 2 e il tipo del sistema è  $-1$ . Per quanto riguarda invece zeri e poli, ci si accorge con facilità che c'è un solo zero e che si trova nell'origine, mentre i poli sono meno immediati da individuare. Infatti per sapere la loro collocazione sul piano di Gauss si dovrebbe conoscere i valori numerici delle costanti  $M$ ,  $b$ , ecc. e per questo motivo ci limitiamo a dire che si potrebbe averne uno sull'asse reale negativa e due complessi coniugati sempre nel semipiano sinistro.

### 4.3.1.3 Esempio: VTOL

Proseguiamo lo sviluppo di questo esempio visto a pagina 21: in quell'occasione abbiamo dimostrato come calcolare le matrici  $A$  e  $B$  per un sistema linearizzato, senza terminare il

---

<sup>27</sup>In classe si è preferito approfondire l'esempio del VTOL; di conseguenza su questi appunti non saranno presenti tutti i passaggi che portano al punto da cui iniziamo ora. Tuttavia, si rimanda alle diapositive dove tale svolgimento è descritto anche per l'altoparlante magnetico.

<sup>28</sup>Ci interessa solo l'evoluzione forzata del sistema - diamo per scontato che  $x_0 = 0$ .

ragionamento fino alla formulazione di  $f(x, u)$ . Nello svolgimento di questo esempio cercheremo invece di colmare questa lacuna passando solo in seguito al calcolo di  $A$  e  $B$ .

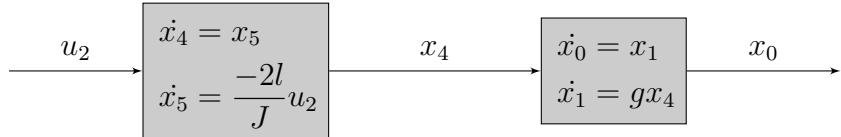
Partiamo considerando le variabili  $x_2$  e  $x_3$  fra le sei che descrivono il sistema; ricordiamo anche che in ingresso abbiamo  $u_1(t)$  e in uscita  $y(t)$ , le quali diventeranno poi  $U_1(s)$  e  $Y_1(s)$  (la trasformata della posizione verticale) nel dominio di Laplace.

Dal momento che, come abbiamo detto, non è stata calcolata  $f(x, u)$  linearizzata, si mostra ora il procedimento: nel caso delle variabili  $x_2$  e  $x_3$  calcoliamo come prima cosa  $\frac{\partial f_2}{\partial x}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$  e  $\frac{\partial f_3}{\partial x}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ . Ripetiamo, derivando rispetto allo stato:  $\frac{\partial f_2}{\partial u}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (0 \ 0)$  e  $\frac{\partial f_3}{\partial u}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (-\frac{1}{M} \ 0)$ ; moltiplicando rispettivamente per lo stato e per gli ingressi otteniamo infine  $\dot{x}_2 = 1 \cdot x_3 + 0 = x_3$  e  $\dot{x}_3 = 0 - \frac{1}{M} \cdot u_1 = -\frac{1}{M} \cdot u_1$ .

Allora  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{pmatrix}$ ,  $C = (1 \ 0)$ <sup>29</sup>, da cui  $(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$  e  $(sI - A)^T = \begin{pmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{pmatrix}$ . Calcoliamo anche  $\det(sI - A) = s^2$ ; si procede per calcolare la matrice aggiunta con lo stesso stratagemma usato nell'esercizio precedente. Infatti moltiplicando tale matrice per  $C$  la seconda riga si annullerebbe, e dal prodotto per  $B$  rimarrebbe solo il secondo elemento della seconda riga diverso da zero; tale elemento è  $\text{Adj}_{1,2} = 1$ . La Funzione di Trasferimento risulta quindi  $G(s) = \frac{-\frac{1}{M}}{s^2}$ .

Bisogna però tenere conto che, come mostrato dalla linearizzazione del sistema, il modello matematico del VTOL comprende due sottosistemi: uno del secondo ordine, che ne descrive la dinamica verticale (del quale abbiamo appena calcolato la Funzione di Trasferimento) e uno del quarto ordine, che invece abbiamo tenuto da parte (per studiarlo successivamente) decidendo di considerare per primi  $\dot{x}_2$  e  $\dot{x}_3$  e i valori corrispondenti per le matrici.

Studiamo ora il sistema del quarto ordine: come è possibile vedere dal suo schema a blocchi, esso presenta una complessità leggermente maggiore di quello precedente. L'ingresso  $u_2$  applica una forza sulla punta delle ali, innescando una rotazione e di conseguenza (tramite  $x_4$ <sup>30</sup>, l'angolo di rotazione) uno spostamento descritto attraverso coordinate laterali. I due blocchi riguardano quindi rispettivamente la dinamica laterale e quella angolare.



L'osservazione dello schema a blocchi è utile anche per semplificare lo sviluppo dei calcoli che descrivono il sistema: si può notare infatti che il blocco costituito dalle variabili  $x_4$  e  $x_5$  è formalmente uguale al sistema del secondo ordine studiato prima; per questo motivo è

<sup>29</sup>Abbiamo dato per scontato fino a questo momento, ma ripetiamo per scrupolo, che in tutti questi casi  $D = 0$ : *in primis* perché stiamo studiando sistemi linearizzati (che, come tali, hanno  $D$  nullo), e in secondo luogo perché in caso contrario non potremmo utilizzare la Funzione di Trasferimento.

<sup>30</sup> $x_4$  si comporta come un «ingresso virtuale» per il secondo blocco, una variabile sulla quale però non si può agire. La conseguenza diretta dell'ingresso  $u_2$  è quindi il cambiamento di angolazione, dal quale consegue una spinta laterale per proiezione della  $T_M$ .

possibile affermare che la risposta del primo blocco agli ingressi  $u_2$  sarà  $-\frac{2l}{s^2}$ . Si dà tuttavia una dimostrazione sommaria di quanto affermato:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2l}{J} \end{pmatrix}$ ,  $C = (1 \ 0)$ , da cui  $(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$  e  $(sI - A)^T = \begin{pmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{pmatrix}$ ; inoltre  $\det(sI - A) = s^2$ . Ripetendo gli stessi passaggi otteniamo  $\text{Adj}_{1,2} = 1$ , e  $G(s) = -\frac{2l}{s^2}$  CVD.

Passiamo quindi al secondo blocco:  $\frac{\partial f_0}{\partial x}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = (0 \ 0)$  e  $\frac{\partial f_0}{\partial u}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ g \ 0) = (0 \ 0)$ , per cui, poiché  $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$  abbiamo che, per il sistema linearizzato,  $\dot{x}_0 = f_0(x, u) = 1 \cdot x_1 + 0 = x_1$ . Si ripete il procedimento per la seconda variabile di stato:  $\frac{\partial f_1}{\partial x}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ g \ 0)$  e  $\frac{\partial f_1}{\partial u}|_{\bar{x}, \bar{u}} = (0 \ 0)$ , da cui  $\dot{x}_1 = g \cdot x_4 + 0 = gx_4$ .

Allora troviamo che  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$ <sup>31</sup>,  $C = (1 \ 0)$ , da cui  $(sI - A) = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$  e  $(sI - A)^T = \begin{pmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{pmatrix}$  e  $\det(sI - A) = s^2$ , quindi (per gli stessi motivi di cui sopra)  $\text{Adj}_{1,2} = 1$ , e  $G(s) = -\frac{g}{s^2}$ .

Grazie alle proprietà della Trasformata di Laplace la risposta  $Y_2(s)$ <sup>32</sup> all'ingresso  $U_2(s)$  si può trovare facilmente moltiplicando le due  $G(s)$  trovate. Abbiamo quindi  $Y_2(s) = -\frac{2gl}{Js^4}U_2(s)$ .

Nel secondo sistema, il polinomio del quarto ordine al denominatore dà quattro radici coincidenti nell'origine, mentre nel secondo ne abbiamo invece due; non ci sono zeri (in entrambi i sistemi). Il grado relativo del primo sistema è due, mentre del secondo quattro. Ricordiamo che la linearizzazione ha trasformato un sistema accoppiato del sesto ordine in due disaccoppiati (uno del secondo e uno del quarto ordine).

Per anticipare i prossimi concetti di teoria, si consideri l'ingresso al sistema (era  $T_M(t)$ <sup>33</sup>, la cui trasformata nel dominio di Laplace è  $U(s)$ ) e si applichi un valore impulsivo, perturbando il suo valore: in parole povere, se al posto di  $T_M$  c'è una  $\delta$  di Dirac, quale sarà la reazione delle uscite ( $Y_1(s) = \mathcal{L}\{y_1(t)\}$ )? Sapendo che  $\mathcal{L}\{\delta\} = 1 = U(s)$  e che  $Y(s) = G(s)U(s)$  (uscita forzata conseguente all'ingresso dato), allora  $Y_1(s) = \frac{-1}{s^2}$ .

Notiamo poi che l'uscita nel dominio di Laplace segue la signature della trasformata della funzione «rampa»: ci è così possibile passare molto rapidamente al dominio del tempo - grazie infatti alla conoscenza delle trasformate dei segnali ele-

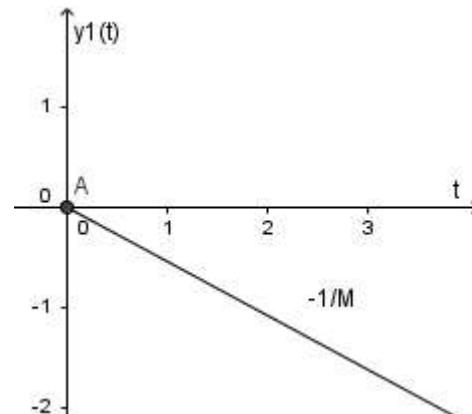


Figura 21: Antitrasformata di  $Y_1(s)$

<sup>31</sup>Nota Bene:  $x_4$  è effettivamente considerato come ingresso!

<sup>32</sup>È la trasformata di Laplace di  $x_0$ .

<sup>33</sup>Si intende una  $\delta T_M$ , poiché il sistema è stato linearizzato: quindi un ingresso tale per cui il sistema è in equilibrio.

mentari non è stato necessario calcolare la trasformata, né l'antitrasformata. L'uscita risulta quindi essere una retta di pendenza  $-\frac{1}{M}$ .

Che significato ha fisicamente il risultato che ottenuto? Poiché abbiamo preso come convenzione per il segno positivo dello spostamento una  $x$  rivolta verso il basso, un'uscita negativa mostra che il drone «schizza verso l'alto» senza fermarsi, continuando a salire come la funzione rampa, anche se lo *spike* applicato in ingresso è istantaneo. Ciò è dovuto all'assenza di attrito, che infatti non è stato considerato nel sistema in esame.

## 4.4 Antitrasformazione attraverso Fratti Semplici

Una volta descritto e risolto il sistema nel dominio di Laplace sarebbe utile poter riportare i risultati ottenuti nel dominio del tempo: come si può arrivare a questo risultato? Poiché nell'ambito del corso studiato le  $G(s)$  saranno sempre funzioni razionali fratte, calcolare  $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$  si riduce a calcolare l'antitrasformata di un rapporto fra polinomi; considerando inoltre un orizzonte più ampio, nel quale  $Y(s)$  comprende anche la risposta libera del sistema  $\mathcal{L}\{y_L\} = L(s)$ <sup>34</sup>, grazie alla proprietà di linearità dell'operatore antitrasformata è possibile calcolare i due contributi separatamente. Se anche  $U(s)$  fosse esprimibile come un rapporto di polinomi ci troveremmo in una situazione particolarmente favorevole; nei nostri esempi questa condizione sarà sempre verificata. Nel complesso, la procedura di antitrasformazione verrebbe applicata ad un numero finito di frazioni che, sommate fra di loro, restituiscono la Funzione di Trasferimento.

Procediamo attraverso un esempio che descriva un metodo per antitrasformare più agevolmente  $\frac{N(s)}{D(s)}$ ; tale metodo è quello dello *sviluppo in fratti semplici*, che permette di riscrivere il rapporto di polinomi come somma di termini elementari (l'antitrasformata dei quali può essere calcolata separatamente grazie alla proprietà di linearità). Risulta quindi, nel caso di poli a molteplicità 1,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \sum_{i=1}^n k_i \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + p_i}\right\}$$

dove  $p_i \neq p_j$  e  $k_i \equiv \text{cost}$ , queste ultime dette anche *residui*.

### 4.4.1 Poli Reali Semplici

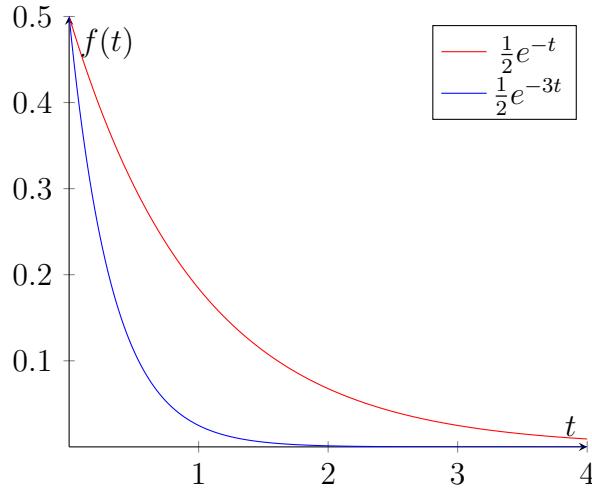
Sia  $\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$  una funzione razionale fratta generica in cui il denominatore ha tutte le radici disgiunte. La formula generale che presentiamo per il calcolo dei residui è

$$k_i = (s - p_k) \cdot \left. \frac{N(s)}{D(s)} \right|_{s=p_i}$$

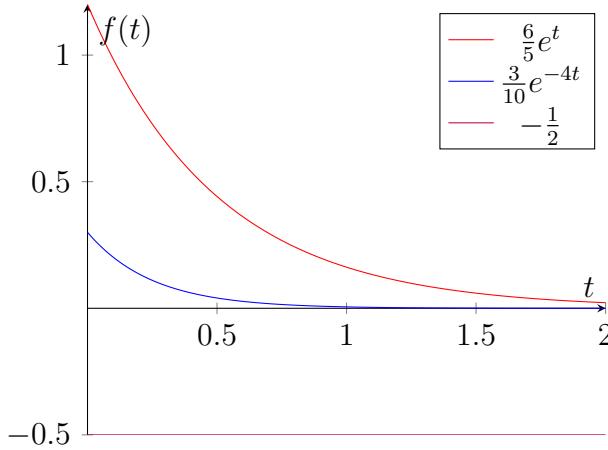
Nel caso specifico,  $k_1 = \left. \frac{s+2}{s+3} \right|_{s=-1} = \frac{1}{2}$  e  $k_2 = \left. \frac{s+2}{s+1} \right|_{s=-3} = \frac{1}{2}$ , quindi  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_2}{s+3}\right\} = k_1 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + k_2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}$ .

---

<sup>34</sup>Anche  $L(s)$  è una funzione razionale fratta.



Facciamo un altro esempio prendendo una funzione più complessa:  $\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2+3s+2}{s(s-1)(s+4)}$ , sapendo che in ingresso abbiamo una funzione gradino. Cominciamo scomponendo in fratti semplici  $\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-1} + \frac{k_3}{s+4}$ ; cerchiamone poi il valore:  $k_1 = \left. \frac{s^2+3s+2}{(s-1)(s+4)} \right|_{s=0} = -\frac{1}{2}$ ,  $k_2 = \left. \frac{s^2+3s+2}{s(s+4)} \right|_{s=1} = \frac{6}{5}$ ,  $k_3 = \left. \frac{s^2+3s+2}{s(s-1)} \right|_{s=-4} = \frac{6}{20}$ . Esprimiamo ora l'antitrasformata attraverso esponenziali:  $y(t) = -\frac{1}{2}e^{0t} + \frac{6}{5}e^{t} + \frac{3}{10}e^{-4t}$ , nei quali si riconoscono l'effetto dell'ingresso ( $-\frac{1}{2}$ ) e quello dei due poli ( $\frac{6}{5}e^t + \frac{3}{10}e^{-4t}$ ).



I grafici in figura mostrano gli *andamenti qualitativi* dello sviluppo in fratti semplici. Dopo aver svolto alcuni esempi possiamo affermare che:

1. La presenza di funzioni esponenziali nella funzione antitrasformata è dovuta alla presenza di poli sull'asse reale (di conseguenza, poli con  $\Im = 0$ );
2. Gli zeri e le condizioni iniziali non influenzano lo sviluppo qualitativo dell'antitrasformata, bensì quello *quantitativo*, influendo sul valore dei residui e in generale dei fattori moltiplicativi.

#### 4.4.2 Poli Complessi a Molteplicità 1

Sia una coppia di poli complessi coniugati  $p_{i,1} = \sigma + j\omega$  e  $p_{i,2} = p_{i,1}^* = \sigma - j\omega$ ; ponendo il caso in cui  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{k_{i,2}}{s+p_{i,2}} \right\} = k_{i,1}e^{-p_{i,1}t} + k_{i,2}e^{-p_{i,2}t} = k_{i,1}e^{-t(\sigma+j\omega)} + k_{i,2}e^{-t(\sigma-j\omega)}$ , cerchiamo di seguito di spiegare come calcolare i residui di questo sviluppo in fratti semplici.

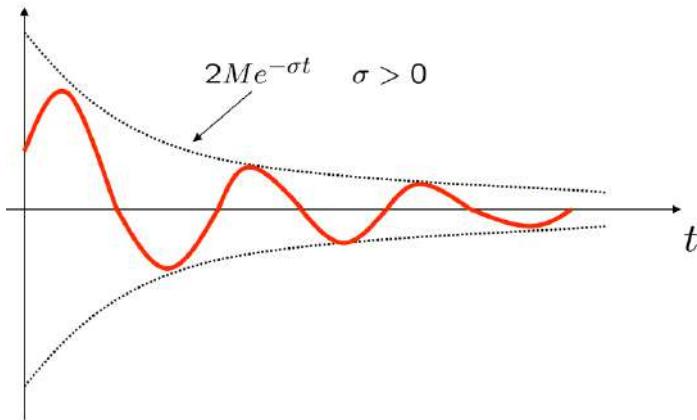
Nel caso di poli complessi coniugati si ha che  $k_1 = u_1 + jv_1$  e  $k_2 = u_1 - jv_1$ , da cui lo sviluppo in fratti semplici risulta  $\frac{u_1+jv_1}{s+p_{i,1}} + \frac{u_1-jv_1}{s+p_{i,2}}$ ; posto  $M := |k_1| = |k_2| = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$  e  $\phi = \arg \{k_1\} = \arg \{k_2\} = \arctan \left\{ \frac{v_1}{u_1} \right\}$  si ha che  $k_1 = Me^{-j\phi}$ ,  $k_2 = Me^{j\phi}$ .

Allora  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{k_{i,2}}{s+p_{i,2}} \right\} = Me^{-j\phi}e^{-t(\sigma+j\omega)} + Me^{j\phi}e^{-t(\sigma-j\omega)} = M [e^{-t\sigma-j(\phi+\omega t)} + e^{-t\sigma+j(\phi+\omega t)}]$ .

Si raccoglie la parte reale  $\sigma$  dell'esponenziale:  $Me^{-\sigma t} [e^{j(\phi+\omega t)} + e^{-j(\phi+\omega t)}]$ .

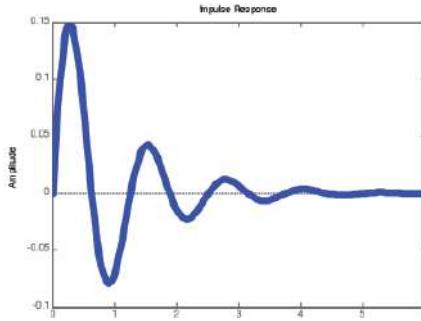
Per le formule di Eulero,  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{k_{i,2}}{s+p_{i,2}} \right\} = 2Me^{-\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ .

**NOTA:** Questo significa che, in pratica, per ogni *coppia* di fratti semplici (corrispondenti ad una radice complessa) si ha solamente *un* contributo nella risposta nel dominio temporale. In sostanza, quando si presenta una coppia di poli complessi coniugati (a molteplicità singola) al denominatore di una funzione di trasferimento, il suo effetto sulla funzione antitrasformata è quello di introdurre un segnale periodico (cioè un coseno) la cui frequenza  $\omega$  è pari alla  $\Im(p)$ . Tale segnale sarà poi modulato in ampiezza da un segnale esponenziale governato da  $\sigma = \Re(p)$ , come mostrato nella figura seguente.

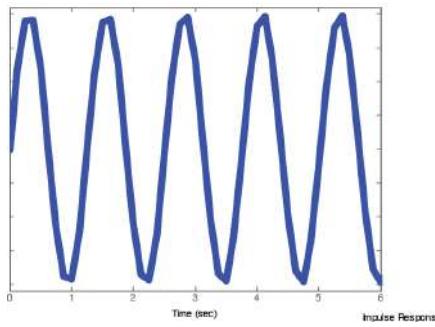


Tale andamento è prevedibile qualitativamente osservando la rappresentazione dei poli nel piano di Gauss: quando la parte reale è positiva la coppia di poli si troverà nel semipiano sinistro. Si delineano quindi i seguenti casi:

- Poli molto lontani dall'asse Immaginario: il valore di  $\sigma$  sarà consistente e questo si rifletterà sull'esponenziale, facendolo tendere a zero molto più velocemente. In questo caso possiamo dire che lo smorzamento della funzione periodica (ad opera dell'esponenziale) avviene molto velocemente;



- Poli molto lontani dall'asse Reale: il valore di  $\Im$  sarà rilevante, incidendo sulla frequenza del coseno nella funzione antitrasformata;
- Poli giacenti sull'asse Immaginario: in questo caso particolare  $\sigma = 0 \Rightarrow e^{-\sigma} = 1$ . La funzione coseno non viene quindi modulata, e continua il suo andamento all'infinito; si dice che il sistema va in *risonanza*. Questa casistica verrà approfondita in futuro.



Se invece la parte reale è negativa i poli si troveranno nel semipiano destro, e l'unico caso che non è ancora stato trattato è quello generico: a causa di  $\sigma < 0$  si avrà che  $e^{-\sigma} \rightarrow \infty$  all'aumentare di  $t$ ; di conseguenza la funzione antitrasformata avrà inizialmente un'ampiezza molto ristretta, che andrà aumentando fino ad «esplosione» seguendo l'andamento dell'esponenziale.

#### 4.4.2.1 Esempio: Calcolo dell'Antitrasformata

Antitrasformare la funzione  $Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ .

Cerchiamo quindi le radici del polinomio al denominatore,  $s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ , ottenendo come risultato  $s = -1$  e  $s = -2$ . Questo sistema avrà quindi due poli (collocati nei punti appena detti) e uno zero (sull'asse Reale in  $-3$ ).

Possiamo calcolare il guadagno del sistema,  $\mu = \frac{3}{2}$ , e il grado relativo, che risulta uguale a 1.

- Proviamo poi ad ampliare l'esercizio calcolando la risposta all'impulso del sistema (cioè  $y(t)$  quando  $u(t)$  è una delta di Dirac).

È noto che in questo caso  $U(s) = 1$  e che di conseguenza  $Y(s) = G(s)$ ; per rispondere alla domanda calcoliamo quindi  $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} \right\}$ .

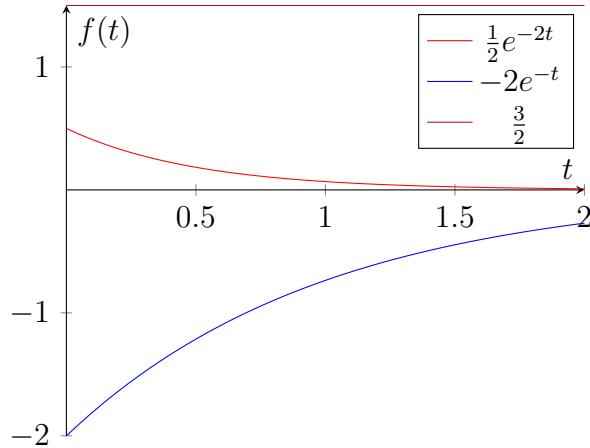
$$k_1 = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2, \quad k_2 = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1, \quad \text{da cui } y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.$$

- Un'ulteriore alternativa può essere quella di calcolare la funzione di uscita quando in ingresso abbiamo una funzione gradino:

Anche in questo caso  $U(s)$  è già nota ed è uguale a  $\frac{1}{s}$ , da cui consegue immediatamente che  $Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{s+3}{(s^2+3s+2)s}$ . Abbiamo una scomposizione in fratti semplici così definita:  $Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}$ . Calcoliamo il valore dei residui:

$$k_1 = \left. \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=0} = \frac{3}{2}, \quad k_2 = \left. \frac{s+3}{s(s+2)} \right|_{s=-1} = -2, \quad k_3 = \left. \frac{s+3}{(s+1)s} \right|_{s=-2} = \frac{1}{2}, \text{ da cui } y(t) = \frac{3}{2}e^0 - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Il risultato di questo esercizio poteva anche essere dedotto dal teorema del valore finale:  $\lim_{t \rightarrow \infty} sY(s) = G(0)$ , poiché grazie al particolare ingresso possiamo semplificare la  $s$ .



- Calcolare l'andamento dell'uscita all'ingresso  $u(t) = \sin(t)$ .

La Funzione di Trasferimento  $G(s)$  è la stessa degli esempi precedenti, ma la particolarità di questo caso è il forzamento che si introduce attraverso  $u(t)$ : la funzione seno. Sappiamo già che  $\mathcal{L}^{-1}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$ , da cui  $Y(s) = \frac{s+3}{(s^2+1)(s+1)(s+2)}$ : si vede chiaramente la differenziazione dei contributi al sistema, poiché il primo fattore al denominatore è dovuto all'ingresso mentre gli altri due sono una conseguenza del sistema stesso. Abbiamo quindi uno zero e tre poli; di questi ultimi, due giacciono sull'asse Reale (nei punti  $-2$  e  $-3$ ), mentre l'ultimo (insieme al suo coniugato) giace sull'asse Immaginario (punti  $-1$  e  $1$ ).

Si riscrive la Funzione di Trasferimento in forma fattorizzata, ottenendo  $Y(s) = \frac{s+3}{(s+j)(s-j)(s+1)(s+2)}$ , e si procede alla scomposizione in fratti semplici: otteniamo quattro fratti elementari, due dei quali sono accoppiati (quelli corrispondenti alle radici complesse coniugate). Risulta infatti  $\frac{k_{1,1}}{s+j} + \frac{k_{1,2}}{s-j} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}$ . Procediamo al calcolo dei singoli residui:

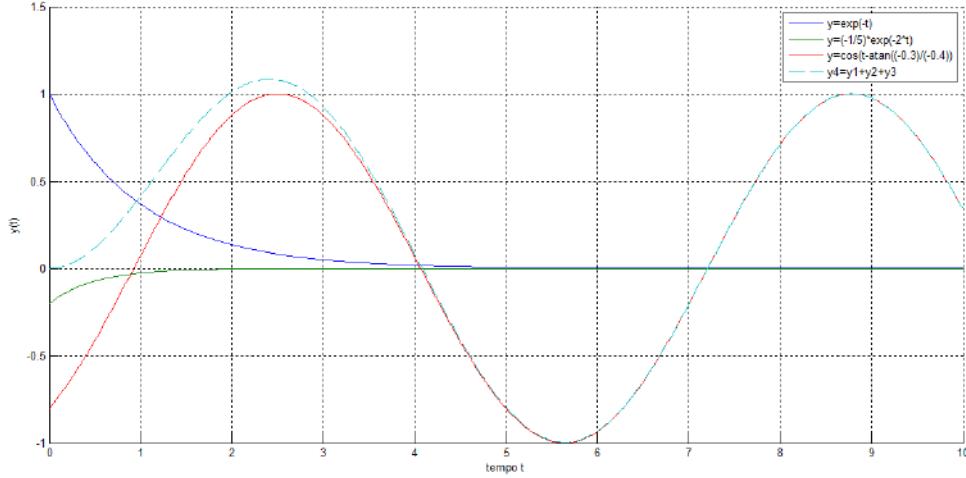
$$k_2 = \left. \frac{s+3}{(s^2+1)(s+2)} \right|_{s=-1} = 1, \quad k_3 = \left. \frac{s+3}{(s+1)(s^2+1)} \right|_{s=-2} = -\frac{1}{5},$$

$$k_{1,1} = \left. \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s-j)} \right|_{s=-j} = \frac{3-j}{-2j(1-j)(2-j)} = \frac{3-j}{(2-j)(-2-2j)} = \frac{3-j}{-6-2j} = \frac{-16+12j}{40} = -0.4 + 0.3j,$$

$$\text{da cui si deduce che } k_{1,2} = \left. \frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+j)} \right|_{s=j} = \frac{-16-12j}{40} = -0.4 - 0.3j.$$

Si può, a questo punto, scrivere la risposta nel dominio del tempo: è necessario però prestare particolare attenzione al contributo dato dalle radici complesse, poiché questo va scritto secondo la seguente signature:  $2Me^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ ; si calcola allora il modulo

del residuo ( $M = \sqrt{(-0.4)^2 + (-0.3)^2} = 0.5$ ) e la sua fase ( $\phi = \arctan(\frac{-0.3}{-0.4})$ )<sup>35</sup>. Rimane inoltre da ricavare  $\omega$ : poiché esso è il coefficiente di  $j$  si deduce, dall'osservazione delle radici, che  $\omega = 1$ . Sempre osservando le radici si deduce che  $\sigma = 0$ . Nel complesso otteniamo una  $y(t) = e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + 1 \cos [t + \arctan(\frac{-0.3}{-0.4})]$ .



#### 4.4.2.2 Esempio: Sistema Meccanico

Si calcoli l'andamento di  $y(t)$  del sistema mostrato in figura nel caso  $F_m$  sia una funzione gradino nei casi

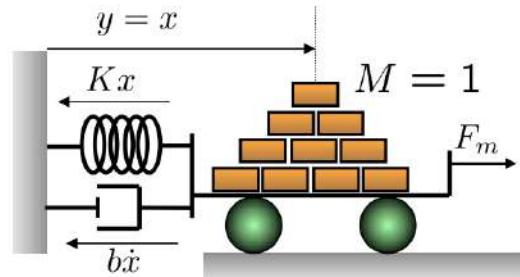
$$1. \ b = 2, K = \frac{3}{4}$$

$$2. \ b = 2, K = \frac{5}{4}.$$

Partiamo risolvendo il sistema in generale. La variabile  $x$  indica lo spostamento e non costituisce di per sé, come abbiamo già visto, una variabile energetica: si decide per questo motivo di considerare la sua derivata,  $v = \dot{x} = x_2$ , in quanto le si può associare un accumulo di energia cinetica. Scriviamo quindi la prima equazione che descrive lo stato del sistema:  $M\ddot{x}_2 = \sum F_i = u(t) - f_e - bx_2$ , dove  $f_e$  è la forza elastica data dall'opposizione al moto della molla con costante elastica  $k$ ,

mentre  $bx_2$  è la forza (di verso opposto agli ingressi  $u(t)$ ) associata allo smorzatore ( $b$  è il suo coefficiente di attrito viscoso).

Aggiungiamo una variabile di stato  $x_3$  per descrivere la forza elastica, di modo che  $\dot{x}_3 = kv = kx_2$ . Se  $M = 1$ , l'equazione precedente risulta  $\ddot{x}_2 = u(t) - \dot{x}_3 - bx_2$ , da cui  $\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} =$



<sup>35</sup>Si noti l'importanza di specificare, nell'arctan(), se il segno  $-$  è al numeratore o al denominatore:  $\arctan(\frac{-1}{3}) \neq \arctan(\frac{1}{-3})$ .

$\begin{pmatrix} -b & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$ . Pongo una ulteriore variabile  $\dot{x}_1 = x_2$ , tale che  $y = x_1$ ; il

sistema precedentemente descritto diventa:  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & -1 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$ ;

otteniamo anche  $C = (1 \ 0 \ 0)$  e  $D = 0$ .

È facile notare come questo sistema sia ridondante a causa del collegamento fra le variabili  $x_3$  e  $x_1$ : infatti ho definito quest'ultimo come la derivata di  $x_2$ , mentre  $x_3$  ne è la derivata moltiplicata per la costante elastica della molla; è evidente che  $x_3 = k \int x_2 = kx_1$ . Semplifi-

chiamo quindi il sistema, fino ad ottenere le seguenti equazioni:  $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ M\dot{x}_2 = u - kx_1 - bx_2 \\ y = x_1 \end{cases}$ ,

dalle quali  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$  e  $y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Per calcolare  $y(t)$  si potrebbe calcolare la trasformata  $G(s)$  e poi antitrasformare, mentre invece cercheremo di evitare questo procedimento: si proceda quindi calcolando la trasformata di Laplace delle equazioni che descrivono il sistema (trovate prima). Risulta

$\begin{cases} sX_1(s) - X_{10} = X_2(s) \\ sX_2(s) - X_{20} = U(s) - kX_1(s) - bX_2(s) \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases}$ , dove  $X_1(s)$  e  $X_2(s)$  sono particolari condizioni iniziali.

Si isola  $X_2(s)$  nella seconda equazione, eguagliando il termine ottenuto alla prima equazione:  $\frac{U(s) - kX_1(s) + X_{20}}{s+b} = sX_1(s) - X_{10} \Rightarrow U(s) - kX_1 + X_{20} = s^2X_1(s) - sX_{10} + sbX_1(s) - bX_{10}$ ; infine  $s^2X_1(s) + bsX_1(s) + kX_1 = sX_{10} + bX_{10} + X_{20} + U(s)$ .

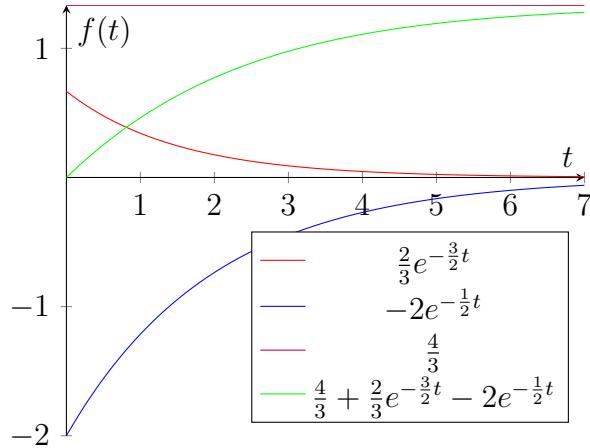
Posso ora trovare  $Y(s)$  isolando il termine  $X_1(s)$  nell'equazione appena trovata:  $Y(s) = X_1 = \frac{sX_{10} + bX_{10} + X_{20} + U(s)}{s^2 + sb + k}$ , dove  $\begin{cases} \frac{U(s)}{s^2 + sb + k} & \text{risposta forzata} \\ \frac{sX_{10} + bX_{10} + X_{20}}{s^2 + sb + k} & \text{risposta libera} \end{cases}$ . Sapendo che  $U(s) = \frac{1}{s}$ ,  $Y_F(s) = \frac{1}{s(s^2 + sb + k)}$ .

1. Considerando  $Y_F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + \frac{3}{4})}$ , si risolva l'equazione in  $s$  per trovare zeri e poli.

Risulta  $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{2}$ , da cui ricaviamo  $s = -\frac{3}{2}$  e  $s = -\frac{1}{2}$ . Possiamo riscrivere  $Y_F(s)$  attraverso la scomposizione in fratti semplici, ottenendo tre residui:  $\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+\frac{3}{2}} + \frac{k_3}{s+\frac{1}{2}}$ .

Si trova facilmente il valore del primo residuo ( $k_1 = \frac{4}{3}$ ), mentre per gli altri due calcoliamo  $k_2 = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})s} \Big|_{s=-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$  e  $k_3 = \frac{1}{(s+\frac{3}{2})s} \Big|_{s=-\frac{1}{2}} = -2$ . Ecco allora  $y(t) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} - 2e^{-\frac{1}{2}t}$ .

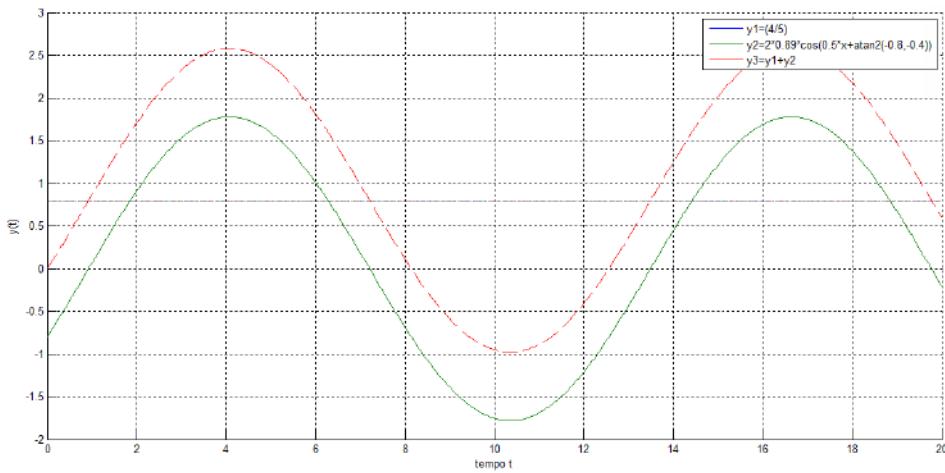
In questo caso,  $\mu = \frac{4}{3}$ .



2. In questo caso  $Y_F(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+\frac{5}{4})}$ , e risolvendo l'equazione in  $s$  risulta  $s = \frac{-2+j}{2}$  e  $s = \frac{-2-j}{2}$ : si ottengono due poli complessi coniugati.

Considerando come riferimento l'equazione  $s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2$  risulta che  $\omega_m = \sqrt{\frac{5}{4}}$  e  $\delta\omega_m = 1$ , da cui  $\delta = \sqrt{\frac{4}{5}}$ : i poli si troveranno nel secondo e terzo quadrante.

Sviluppo in fratti semplici:  $Y_F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_{2,1}}{s + \frac{2+j}{2}} + \frac{k_{2,2}}{s + \frac{2-j}{2}}$ ; si omette il calcolo dei residui per brevità (e perché assolutamente standard), riportando solo i valori risultanti  $k_1 = \frac{4}{5}$ ,  $k_{2,1} = -0.4 - 0.8j$  e  $k_{2,2} = -0.4 + 0.8j$ . Per scrivere la risposta nel dominio del tempo calcoliamo il modulo ( $M = \sqrt{(-0.4)^2 + (-0.8)^2} \approx 0.89$ ) e la fase ( $\phi = \arctan(\frac{-0.8}{-0.4})$ ):  $y(t) = \frac{4}{5} + 2 \cdot 0.89 e^{-t} \cos\left[\frac{t}{2} + \arctan\left(\frac{-0.8}{-0.4}\right)\right]$ .



#### 4.4.3 Calcolo di Fratti Semplici a Molteplicità > 1

Introduciamo la formula generale per lo sviluppo di questo caso attraverso un esempio: si prenda una funzione razionale fratta  $\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\frac{N(s)}{D(s)}}{\frac{D(s) \cdot (s+1)^3}{(s+1)^3}}$  della quale è noto lo sviluppo in fratti semplici (si prende in considerazione solo il fattore  $(s+1)^3$  per mostrare come trattarlo)  $\frac{k_{1,3}}{s+1} + \frac{k_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{k_{1,1}}{(s+1)^3}$ .

Per il calcolo dei residui si segue l'ordine indicato dai pedici, partendo da quello che ha denominatore di grado maggiore: in questo caso il calcolo del residuo segue la procedura standard (ed è per questo che lo si svolge per primo). Risulta quindi  $k_{1,1} = \left. \frac{N(s)}{D(s)} \cdot (s+1)^3 \right|_{s=-1}$ .

Si passa poi a  $k_{1,2}$ : il calcolo per ottenerlo passerà attraverso l'applicazione di una derivata il cui grado cresce con il diminuire di quello al denominatore. Di conseguenza, il passaggio ad un esponente 2 dal valore precedente (che era 3), implica l'applicazione di una derivata prima al calcolo del residuo; un lettore attento potrà intuire che anche nel caso precedente vi era una derivata, ma di grado zero, poiché non vi era alcuna diminuzione nell'esponente al denominatore. Ultima ma non meno importante è la moltiplicazione per l'inverso del fattoriale del grado della derivata; allora  $k_{1,2} = \left. \frac{d}{ds} \left[ \frac{N(s)}{D(s)} \cdot (s+1)^2 \right] \right|_{s=-1}$ .

Seguendo la stessa logica,  $k_{1,3} = \left. \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{N(s)}{D(s)} \cdot (s+1) \right] \right|_{s=-1}$ .

Per induzione, ricaviamo la formula generica

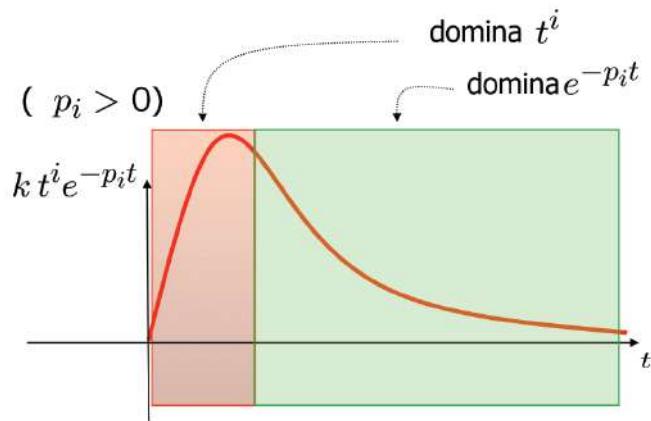
$$k_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left. \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} (s+p_i)^{r_i} \cdot \frac{N(s)}{D(s)} \right|_{s=p_i}$$

Una volta calcolati i residui è il momento di antitrasformare secondo Laplace: indichiamo di seguito la formula generale che indica la funzione risultante.

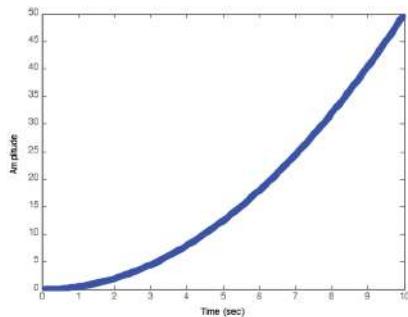
$$y(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{r_i} \frac{k_{i,j}}{(r_i-j)!} \cdot t^{(r_i-j)} \cdot e^{(p_i t)}$$

Per quanto riguarda le rappresentazioni qualitative delle funzioni ottenute si può tenere conto delle seguenti linee guida:

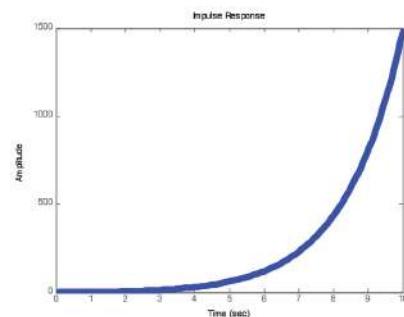
- Poli reali:



Come possiamo vedere non vi sono oscillazioni di nessun tipo in quanto il polo è reale; un'altra osservazione importante è che il polo tenderà sempre a zero (eventualmente impiegando un tempo maggiore) indipendentemente dall'altezza di picco raggiunta. I poli nell'origine seguono l'andamento mostrato di seguito.

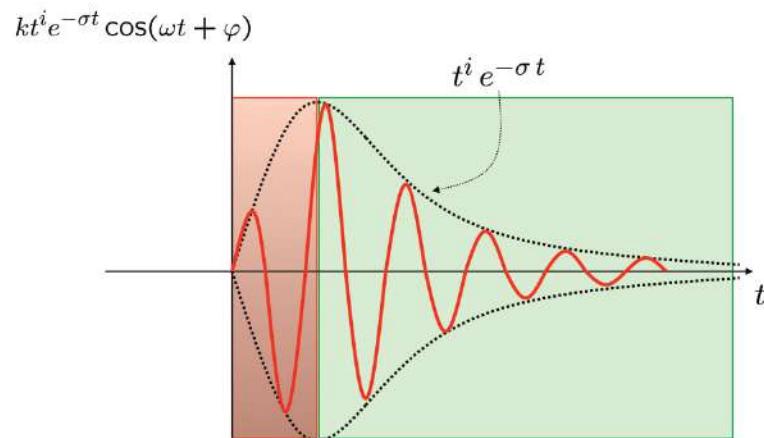


**Figura 22:** Andamento polo nell'origine

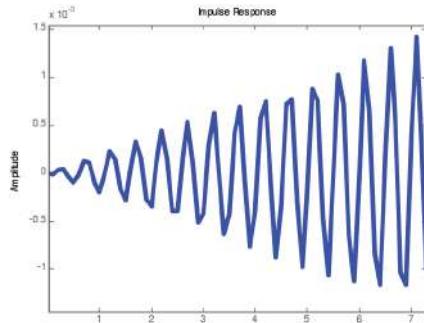


**Figura 23:** Andamento polo con  $\Re > 0$

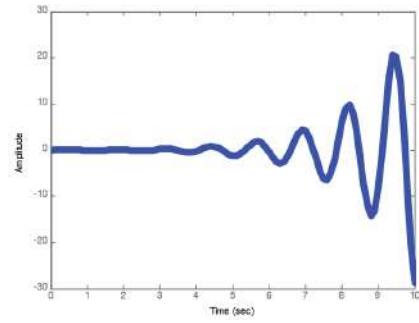
- Poli complessi:



In figura vediamo l'andamento qualitativo di due generici poli complessi coniugati giacenti nel secondo e terzo quadrante: a causa della parte Immaginaria le oscillazioni tendono ad aumentare molto velocemente, finché non subentra la parte Reale, nel coefficiente dell'esponenziale, che modula questa funzione sinusoidale. Quando invece la parte reale viene a mancare la risposta del sistema «esplosa», aumentando all'infinito. L'ultimo caso possibile è quello in cui  $\Re > 0$ : il comportamento della curva è opposto a quello visto nel primo caso, poiché parte molto smorzato per poi aumentare di colpo a causa della modulazione dell'esponenziale.



**Figura 24:** Polo giacente sull'asse  $\Im$



**Figura 25:** Andamento polo con  $\Re > 0$

#### 4.4.3.1 Esempio: Calcolo dell'Antitrasformata

Si calcoli  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2(s+2)}\right\}$ : nel piano di Gauss, il sistema presenta una radice in  $-2$  con molteplicità 1 e due radici in  $-1$  con molteplicità pari a due. Attraverso la scomposizione in fratti semplici si ottiene  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_{1,i}}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{(s+2)}\right\}$ , dove la  $i$  nel primo residuo si usa per indicare quale delle due radici viene considerata.

Per il calcolo dei residui è conveniente partire da quello associato al denominatore di grado minore, in questo caso  $k_2$ : allora  $k_2 = \left.\frac{2}{(s+1)^2(s+2)} \cdot (s+2)\right|_{s=-2} = 2$ ; ciò dimostra che nel caso di radice semplice si applica ancora la regola generale (anche se in coppia con un termine di molteplicità maggiore). Proseguendo,  $k_{1,2} = \left.\frac{2}{(s+1)^2(s+2)} \cdot (s+1)^2\right|_{s=-1} = 2$ , mentre  $k_{1,1} = \left.\frac{d}{ds} \left(\frac{2}{(s+1)^2(s+2)} \cdot (s+1)^2\right)\right|_{s=-1} = \left.\frac{d}{ds} \left(\frac{2}{s+2}\right)\right|_{s=-1} = \left.\frac{0-2}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = -2$ .

Potremmo ora antitrasformare, ma invece che riportare i calcoli ci si concentra maggiormente sul significato qualitativo dei risultati ottenuti: il primo termine corrisponderà a un esponenziale del tipo  $e^{-2t}$  come da regola generale, mentre per quanto riguarda gli altri due termini avremo un esponenziale «classico»  $e^{-t}$  ed uno moltiplicato per  $t$  ( $t \cdot e^{-t}$ ) a causa della molteplicità doppia. In conclusione,  $y(t) = 2e^{-2t} + 2te^{-t} - 2e^{-t}$ .

#### 4.4.3.2 Esempio: Calcolo della Risposta al Gradino

Si supponga di avere una funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{s+3}{s(s+2)}$ : essa presenta uno zero in  $-3$ , un polo nell'origine e un altro polo in  $-2$ .

Inizialmente, per espandere l'esercizio, si calcoli la risposta del sistema all'impulso  $\delta(t)$ : si pone  $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$ , da cui deriva  $Y(s) = G(s)$ . La risposta nel dominio del tempo sarà  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = k_1 e^{0t} + k_2 e^{-2t}$ , dove i residui assumono i valori  $k_1 = \frac{s+3}{s+2}|_{s=0} = \frac{3}{2}$  e  $k_2 = \frac{s+3}{s}|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$ . Allora  $y(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$ : la funzione parte con un salto  $\approx \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ , salvo poi convergere asintoticamente a 1.5.

Passiamo poi alla risposta al gradino, come richiesto dalla specifica: la trasformata della funzione gradino vale  $U(s) = \frac{1}{s}$ , per cui  $Y(s) = U(s) \cdot G(s) = \frac{s+3}{s^2(s+2)}$ . Allora  $y(t) = k_{1,1} t e^{0t} + k_{1,2} e^{0t} + k_2 e^{-2t}$ ; si calcola di seguito il valore dei residui:

$$k_2 = \frac{s+3}{s^2}|_{s=-2} = \frac{1}{4}; k_{1,1} = \frac{s+3}{s+2}|_{s=0} = \frac{3}{2}; k_{1,2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{s+3}{s+2} \right)|_{s=0} = \frac{s+2-(s+3)}{(s+2)^2}|_{s=0} = -\frac{1}{4}.$$

In conclusione otteniamo una  $y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t}$ : questa funzione ha una risposta «polynomialmente esplosiva»<sup>36</sup>, poiché tende asintoticamente all'infinito.

#### 4.4.3.3 Esempio: Sistema Meccanico

Si prenda come linea guida lo stesso sistema meccanico studiato al paragrafo 4.4.2.2, osservando la risposta del sistema  $y(t)$  quando in ingresso si ha una funzione seno. La trasformata dell'ingresso è  $U(s) = \frac{1}{s^2+1}$ , mentre la risposta forzata che avevamo trovato è  $\frac{U(s)}{s^2+sb+k}$ , da cui  $Y_F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+sb+k)}$ . Si proceda ora a studiare il sistema nei due casi proposti.

1.  $b = 2, K = 1$ , dove ricordiamo che  $b$  indica lo smorzamento e  $K$  la rigidezza della molla.

Si riscrive la risposta del sistema evidenziando le radici:  $Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2s+1)} = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{1}{(s+j)(s-j)(s+1)^2}$ ; come possiamo vedere, il forzamento porta nel sistema due radici di tipo complesso, entrambe giacenti sull'asse Immaginario. C'è un ulteriore polo collocato in  $-1$ , di molteplicità due. Si tralascia il calcolo dei residui, poiché come abbiamo già detto questi influiscono solamente sull'aspetto quantitativo della risposta; andremo invece a studiare nel dettaglio il suo aspetto qualitativo.

L'antitrasformata della risposta sarà quindi del tipo  $y(t) = 2M e^{0t} \cos(t + \phi) + k_{1,1} e^{-t} + k_{1,2} t e^{-t}$ : come possiamo vedere, le oscillazioni non saranno modulate, dal momento che l'esponenziale che le moltiplica vale 1 (parte reale nulla), e contemporaneamente queste oscillazioni avranno pulsazione unitaria ( $\Im = 1$ ).

Per quanto riguarda gli altri due termini, questi tendono a zero, dopo un certo tempo, in quanto  $\Re > 0$ , mentre il primo termine è persistente. Nel complesso, la curva che descrive il sistema parte da zero: ciò perché il grado relativo del sistema è pari a due e pertanto non vi è collegamento algebrico ingresso - uscita (il sistema non reagisce immediatamente all'ingresso applicato); dopo un certo tempo  $t$  i due esponenziali si saranno esauriti (transitorio terminato) e la curva si sarà stabilizzata sul termine  $2M \cos(t + \phi)$ .

2.  $b = 0, K = 1$ : questo sistema non ha alcun tipo di smorzamento, ma solamente una parte elastica.

---

<sup>36</sup>Citazione necessaria.

In questo caso  $Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+1)} = \frac{1}{(s^2+1)^2}$ : non abbiamo più una coppia di poli reali (con  $\Re < 0$ ) ma bensì un polo complesso coniugato (due radici), giacente sull'asse Immaginario, di molteplicità 2. Anche in questo caso si sorvola sulla parte strettamente di calcolo per individuare il comportamento qualitativo del sistema: la risposta sarà  $y(t) = k_{1,1}te^{0t} \cos(t+\phi) + k_{1,2}e^{0t} \cos(t+\phi)$ <sup>37</sup>, dove il secondo termine è costante, mentre il primo ha un andamento crescente, poiché modulato da una funzione «rampa» (totale assenza di parte reale).

Questo fenomeno meccanico avviene quando si prende un carrellino *privo di smorzamento* e con costante elastica pari a 1: l'ingresso sinusoidale forzato, anche se limitato, ha frequenza identica alla costante di rigidezza della molla e per questo *manda il sistema in risonanza*.

LEZIONE 11

DATA: 14/10/2015

## 4.5 *Modi del Sistema*

Come abbiamo già visto (paragrafo 2.7), la risposta di un sistema ad un ingresso può essere espressa come somma dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata; in particolare, secondo la formula seguente, nella quale si individuano tre contributi:

$$Y(s) = G(s)U(S) + L(s, x_0) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{k_{1,i}}{(s+p_i)^{r_i}}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \frac{k_{2,i}}{(s+p_i)^{r_i}}}_{(2)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{k_{3,i}}{(s+p_i)^{r_i}}}_{(3)}$$

Si noti che il denominatore delle tre sommatorie è uguale, poiché come abbiamo visto a pagina 39, il denominatore della  $y_L$  si calcola nello stesso modo di quello di  $G(s)$ . Se si volesse quindi scomporre non solo la risposta forzata (come abbiamo fatto fino adesso) ma tutta la risposta del sistema attraverso fratti semplici, il risultato si presenterebbe in una forma simile a quella mostrata più in alto, ossia suddiviso in tre blocchi; i rispettivi denominatori rappresentano:

1. Le *dinamiche proprie* del sistema, come masse e molle (il loro contributo si trasmette attraverso la funzione di trasferimento);
2. I *contributi dell'ingresso* ( dovuti alla presenza di  $U(s)$  );
3. Il contributo delle *condizioni iniziali*, quando  $x_0 \neq 0$ ; il suo denominatore è uguale a quello del primo blocco perché anche questo descrive dinamiche proprie del sistema.

Nei casi corrispondenti ai punti (1) e (3) si parla di **modi** del sistema dinamico, cioè andamenti qualitativi elementari propri del sistema che caratterizzano la risposta forzata (dinamiche

---

<sup>37</sup>In questo caso il coefficiente dell'esponenziale si può arbitrariamente indicare sia con  $2M$  che tramite i residui come è stato fatto sopra.

indipendenti dall'ingresso). Queste informazioni sono utili per inquadrare a livello qualitativo il comportamento del sistema a fronte di certi ingressi (impulso, funzione sinusoidale...).

Se ad esempio si hanno due poli reali, uno in  $-10$  e uno in  $-1$ , è immediatamente noto che si avrà un andamento di tipo esponenziale tendente a zero, dove il primo polo raggiungerà l'asse molto più velocemente del secondo. Allo stesso modo, in presenza di due coppie di poli complessi coniugati, si estinguerebbe più velocemente quello che fra i due è più lontano dall'asse immaginaria (a causa di un maggiore valore nella parte reale), e viceversa.

Dalla teoria dello sviluppo in fratti semplici deriva anche che, attraverso questo metodo, è possibile rappresentare sistemi dinamici - e le relative  $y_F$  - anche quando il grado  $n$  è particolarmente elevato. In altre parole, ogni sistema complesso è rappresentabile per mezzo di una combinazione lineare (banalmente, una sommatoria nella maggior parte dei casi) di sottosistemi elementari di primo e secondo ordine, ciascuno governato dal particolare polo.

#### 4.5.1 Effetto degli Ingressi nella Risposta Forzata

Vi sono un paio di casi limite nei quali le considerazioni svolte finora non vengono applicate: accade infatti che gli ingressi modificano radicalmente la dinamica del sistema, attraverso termini chiamati *modi dell'ingresso*. Avevamo già introdotto una di queste due situazioni quando l'andamento della risposta era strutturalmente diverso da quello atteso, dicendo che il sistema andava in **risonanza**. Al contrario, il secondo caso si presenta quando l'ingresso non produce alcun effetto sull'uscita: si parla di **proprietà bloccante degli zeri**. Esaminiamole più in dettaglio di seguito.

##### 4.5.1.1 Risonanza

Si prenda ad esempio la funzione di trasferimento  $G(s) = K \frac{s+1}{(s^2 + \omega_s^2)(s+2)}$ , con ingresso  $U(s) = \frac{\omega_I}{s^2 + \omega_I^2}$  (una sinusoide di pulsazione  $\omega_I$ ):

- Quando  $\omega_I \neq \omega_s$ ,  
la risposta del sistema sarà standard: avremo un contributo di tipo esponenziale dovuto al polo reale, uno di tipo oscillatorio non smorzato dovuto alla radice complessa (entrambi fanno parte dei modi naturali del sistema, in quanto presenti già nella  $G(s)$ ) e un altro, sempre oscillatorio, dovuto alla radice complessa introdotta dall'ingresso. In sostanza, l'andamento qualitativo della risposta sarà descritto da  $y(t) = \underbrace{k_0 e^{-2t}}_{\text{Modi naturali}} + \underbrace{k_1 \cos(\omega_s t + \phi_1)}_{\text{Effetto forzamento}} + k_2 \cos(\omega_I t + \phi_2)$ .

Il comportamento fisico del sistema sarà approssimativamente il seguente: inizialmente ci sarà un transitorio governato dall'esponenziale e dai modi del sistema, finché questo non si assesterà seguendo il contributo dell'ingresso.

- Quando  $\omega_I = \omega_s$ ,  
la risposta del sistema differisce dal caso precedente in quanto la radice complessa di  $G(s)$  ha ora molteplicità 2: la risposta sarà del tipo  $y(t) = \omega_1 K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{(s^2 + \omega_s^2)^2 (s+2)} \right\} = k_0 e^{-2t} + k_{1,1} t \cos(\omega_s t + \phi_1) + k_{1,2} \cos(\omega_s t + \phi_2)$ . Come si può osservare non vi è differenza nei modi naturali del sistema, mentre quello che prima era il contributo dell'ingresso

ora è una funzione sinusoidale alla quale viene moltiplicato un termine  $t$  (si può dire che ha un andamento «esplosivo»).

Il comportamento fisico del sistema ora non ha un comportamento stabile a regime ma tende all'infinito con un andamento di tipo oscillatorio.

#### 4.5.1.2 Proprietà Bloccante degli Zeri

Supponiamo di avere un sistema dinamico con due poli coincidenti<sup>38</sup> e uno zero complesso, con una funzione di trasferimento del tipo  $G(s) = K \frac{(s^2 + \omega_s^2)}{(s+2)^2}$ . Si applica in ingresso una funzione seno  $U(s) = \frac{\omega_I}{s^2 + \omega_I^2}$ ; anche in questo caso si parametrizza  $\omega_I$  per studiare la risposta del sistema a seconda dei valori che assume.

- Quando  $\omega_I \neq \omega_s$ ,

la risposta del sistema si presenta in modo standard: nei modi naturali abbiamo due contributi, dovuti alla molteplicità doppia del polo al denominatore, seguiti poi dall'effetto dal forzamento, che introduce un contributo di tipo oscillatorio. Complessivamente si può scrivere  $y(t) = \underbrace{k_0 e^{-2t} + k_1 t e^{-2t}}_{\text{Modi naturali}} + \underbrace{k_2 \sin(\omega_I t + \phi_1)}_{\text{Effetto forzamento}}$ .

Anche in questo caso il comportamento fisico del sistema sarà standard: è presente infatti un transitorio governato dall'esponenziale (il fattore  $t$  introduce qualche «intoppo» che non modifica in sostanza il trend generale), al termine del quale l'uscita si stabilizza su un andamento oscillatorio.

- Quando  $\omega_I = \omega_s$ ,

la moltiplicazione di  $U(s)$  per  $G(s)$  provoca la «semplificazione» dello zero con il polo relativo all'ingresso e di conseguenza ogni contributo di tipo oscillatorio scompare dall'uscita  $Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$ . Nel dominio dei tempi si avrà  $y(t) = k_0 e^{-2t} + k_1 t e^{-2t}$ .

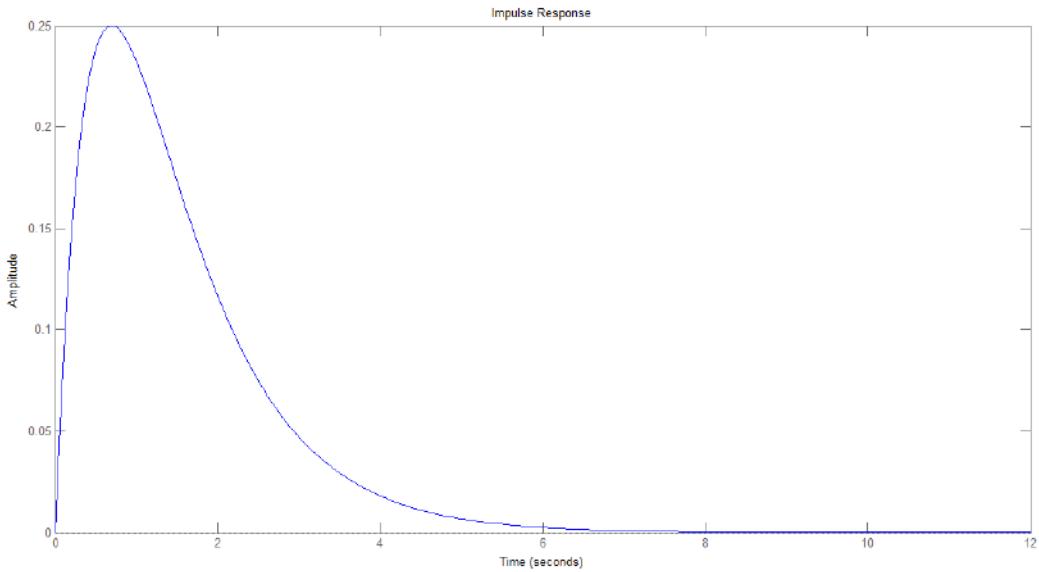
Il comportamento fisico del sistema è, in un certo senso, molto singolare: ad un ingresso forzato di tipo oscillatorio il sistema tende a zero (terminato un transitorio intermedio). Questo andamento della risposta spiega il nome della proprietà, dal momento che in pratica la funzione data in ingresso non compare in uscita (come se fosse stata «bloccata» dal sistema e, in particolare, dagli zeri).

Un altro esempio di questa proprietà viene presentato in seguito.

Data una  $G(s) = \frac{s *}{(s+1)(s+2)}$  (dove al numeratore si intende specificare unicamente la presenza di uno zero nell'origine, mentre la presenza di altri fattori moltiplicativi è arbitraria) a cui si applica una funzione a gradino in ingresso ( $U(s) = \frac{1}{s}$ ), si ha che  $Y(s) = \frac{*}{(s+1)(s+2)}$ . Antitrasformando otterremo una risposta nel dominio del tempo il cui andamento qualitativo è descritto da  $y(t) = k_0 e^{-t} + k_1 e^{-2t}$ : anche in questo caso a fronte di un segnale costante il sistema avrà una evoluzione in fase transitoria, tendendo poi asintoticamente a zero a regime.

---

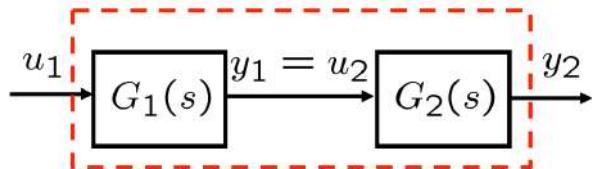
<sup>38</sup>Questa particolarità non è rilevante per l'applicazione della proprietà in sé in quanto, come dice il nome stesso, quello su cui ci si focalizza sono gli zeri.



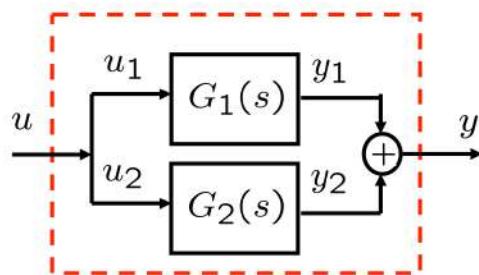
## 4.6 Composizione di Schemi a Blocchi

Come abbiamo anticipato nello svolgimento dell'esercizio sul VTOL ( a pagina 43) è possibile semplificare un sistema complesso mediante la sua scomposizione in sottosistemi più semplici. Ci sono diversi modi di realizzare queste semplificazioni e di interconnetterle fra loro:

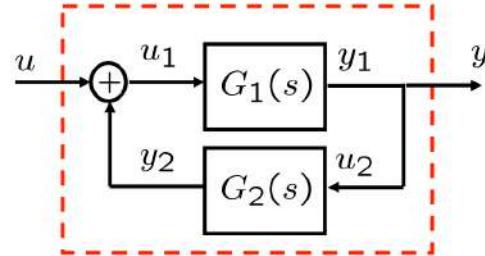
**Serie:** L'uscita di una funzione di trasferimento è l'ingresso dell'altra; dette queste due funzioni  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  la loro composizione segue la legge  $G_{serie}(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$ .



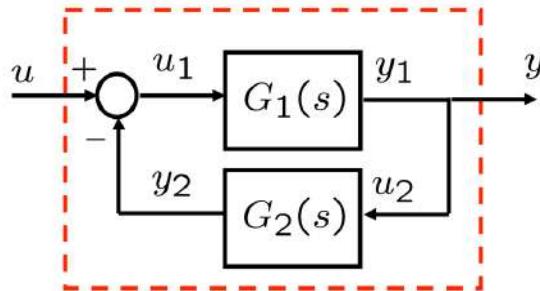
**Parallelo:** Lo stesso ingresso pilota due funzioni di trasferimento  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ , le uscite delle quali vengono sommate in una unica  $y$ ; la legge che descrive il sistema è  $G_{parallelo}(s) = G_1(s) + G_2(s)$ .



**Retroazione Positiva:** L'ingresso di  $G_1(s)$  è dato dall'uscita di  $G_2(s)$  più un segnale  $u$  e l'ingresso di  $G_2(s)$  è dato dall'uscita di  $G_1(s)$ . La funzione di trasferimento complessiva è  $G_{retro+}(s) = \frac{G_1(s)}{1-G_1(s)G_2(s)}$ .



**Retroazione Negativa:** In questo caso dimostriamo la legge che descrive il sistema. Si ha che  $Y(s) = G_1(s) \cdot U(s) = G_1(s)[U(s) - Y_2(s)] = G_1(s)[U(s) - G_2(s) \cdot Y(s)]$ ; si raccoglie  $Y(s)$ :  $Y(s)[1 + G_1(s) \cdot G_2(s)] = G_1(s) \cdot U(s)$ , da cui  $G_{retro-}(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$ .

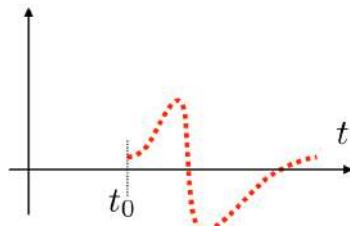


## 5 Stabilità e Risposte di Sistemi Elementari

### 5.1 Stabilità Esterna

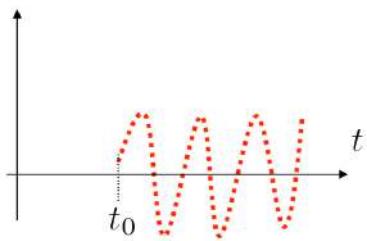
Riassumiamo i casi visti fino ad ora per quanto riguarda i tipi di risposta che un sistema può dare quando ha come ingresso un impulso.

1. Transitorio con terminazione: il sistema «ha un sussulto» dovuto alla delta di Dirac data in ingresso<sup>39</sup>, e successivamente si riassetta a un valore fisso;

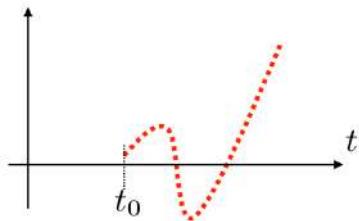


<sup>39</sup>Sarebbe possibile in realtà avere diversi tipi di andamenti, a seconda dell'ingresso dato: potrebbero quindi anche esserci oscillazioni o curve di tipo esponenziale, tuttavia in ogni caso tutti questi andamenti si esauriscono alla fine del transitorio.

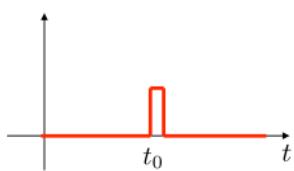
2. Transitorio al termine del quale la funzione si assesta ad un andamento costante;



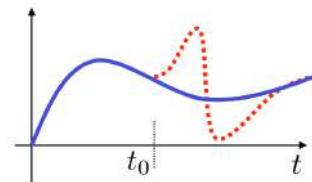
3. Transitorio dopo il quale la funzione tende a infinito.



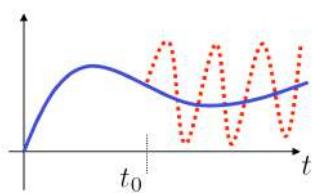
Considerando però il teorema della sovrapposizione degli effetti i tre precedenti casi possono essere visti sotto una luce diversa. Si consideri infatti un sistema con un certo ingresso (detto  $y_{nominale}$ ) sul quale viene forzato un impulso all'istante  $t_0$ : nelle risposte si potranno allora riconoscere l'andamento della risposta all'ingresso nominale, perturbato, dopo l'istante  $t_0$ , dal forzamento dato in ingresso.



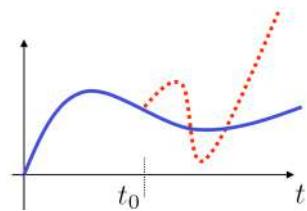
**Figura 26:** Ingresso:  $\delta$  di Dirac



**Figura 27:** Andamento *asintoticamente stabile*



**Figura 28:** Andamento *semplicemente stabile*



**Figura 29:** Andamento *instabile*

Nel caso di questi tre andamenti si parla di *stabilità esterna*, poiché le osservazioni fatte sul sistema si limitano all'applicazione di un ingresso e allo studio della relativa uscita, senza comprendere in alcun modo le dinamiche interne al sistema, né il concetto di stato: ci si attiene al rapporto causa-effetto fra input e output.

Formalizziamo quanto detto introducendo un teorema; come abbiamo detto valuteremo il sistema dall'esterno («ai morsetti») senza introdurre lo stato. Dato quindi un sistema per il quale sono definite  $U_{nom}(s)$ ,  $G(s)$ ,  $Y_{nom}(s)$  e applicato a tale sistema un impulso del tipo  $\delta$  di Dirac, si ha  $Y_{per}(s) = G(s) \cdot [U_{nom}(s) + \delta]^{40} = Y_{nom}(s) + G(s)\delta \Rightarrow Y_{per}(s) - Y_{nom}(s) = G(s) \cdot \delta$ . Nel dominio del tempo si ha  $\mathcal{L}^{-1}\{Y_{per}(s) - Y_{nom}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \delta\}$ , che mostra di quanto le uscite si discostano dal valore nominale a fronte dell'ingresso forzato; indichiamo ora per quali valori di  $G(s)$  si hanno i casi suddetti:

- Figura 27: Sistema **asintoticamente stabile**, quando tutti i poli di  $G(s)$  hanno parte reale negativa<sup>41</sup>;
- Figura 28: Sistema **semplicemente stabile**, quando tutti i poli di  $G(s)$  hanno parte reale non positiva, ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità 1<sup>42</sup>;
- Figura 29: Sistema **instabile**, quando esiste almeno un polo a parte reale positiva o nulla con molteplicità maggiore di 1.

Si parla di **stabilità BIBO** nel caso di sistemi asintoticamente stabili: l'acronimo Bounded Input, Bounded Output significa infatti che a fronte di ingressi limitati questa categoria di sistemi dà sempre uscite limitate.

## 5.2 Risposte Temporali di Sistemi Elementari

Poiché per lo studio di sistemi complessi è utile saperli scomporre in sottosistemi più semplici (metodo visto in precedenza e formalmente spiegato a pagina 61) diventa rilevante a sua volta lo studio di sistemi semplici. Di seguito mostreremo quindi le analisi degli andamenti temporali di sistemi elementari a fronte di ingresso a gradino, al fine di identificare la relazione tra i parametri della FdT e l'andamento stesso della risposta.

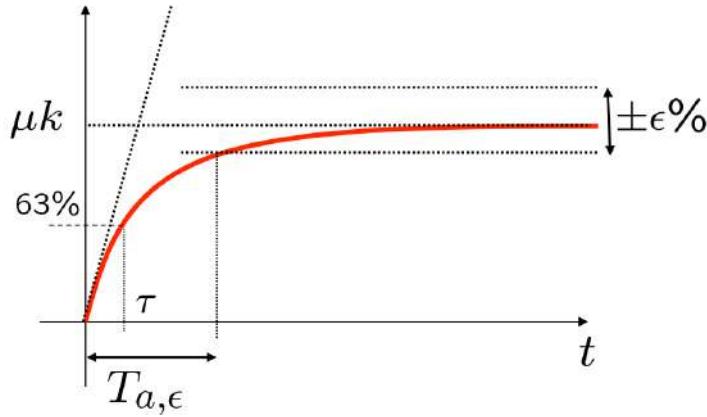
### 5.2.1 Sistemi del Primo Ordine

Si prenda una funzione di trasferimento  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$ , dove possiamo rappresentare  $G(s)$  in forma alternativa (si veda pagina 40) come  $G(s) = \mu \frac{1}{1+\tau s}$ : possiamo osservare che questo sistema ha un solo polo, posizionato in  $-\frac{1}{\tau}$ . Si applica in ingresso un gradino di ampiezza  $k$ : avremo quindi  $G(s) = \mu \frac{k}{s(1+\tau s)}$  e l'uscita nel dominio del tempo diventa  $y(t) = \mu k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ; come si può vedere dal grafico, l'esponenziale parte da zero, tendendo poi asintoticamente, a transitorio terminato, al valore  $\mu k$ .

<sup>40</sup>Si è supposto che l'ampiezza dell'impulso applicato non fosse 1 (impulso unitario) ma  $\delta$ .

<sup>41</sup>È irrilevante che questi siano reali o complessi, come anche la loro molteplicità (che può essere quindi anche maggiore di 1): l'importante è che la parte reale sia, appunto, minore di zero.

<sup>42</sup>Tollerati quindi anche eventuali poli complessi che rispettino queste condizioni.



Risulta più evidente ora il significato del termine «guadagno» dato alla costante  $\mu$ : questa indica infatti di quanto, a regime, l'ingresso viene amplificato o attenuato sull'uscita del sistema.

Anticipiamo che si possono ricavare altre informazioni sulla risposta dallo studio delle sue derivate: poiché in analisi derivare una funzione in un punto significa ricavare la pendenza della retta tangente alla curva in quel punto, si intuisce che la derivata della risposta di un sistema nell'origine indica quanto quella curva «cresce velocemente». In questo caso  $\dot{y}(0) = \frac{\mu k}{\tau}$  e ciò conferma che la funzione ha inizialmente una crescita brusca e ripida; vedremo in altri casi con derivata prima nulla, che questa pendenza diventa tanto più dolce quanto è maggiore il grado della prima derivata ad essere non nulla. L'andamento della funzione in questo senso è strettamente legato al grado relativo della  $G(s)$ <sup>43</sup>.

Si definisce inoltre il concetto di **tempo di assestamento all' $\varepsilon\%$** <sup>44</sup>: questo serve per identificare «praticamente» un momento di fine del transitorio (in quanto «matematicamente» esso ha durata infinita); tale momento viene scelto nell'istante in cui la curva differisce al massimo dell' $\varepsilon\%$  del suo valore dal valore a regime. Si ha che questo valore è proporzionale a  $\tau$  di un fattore che varia a seconda dei casi:

- $T_{ass,5\%} = 3\tau$ ;
- $T_{ass,1\%} = 4.6\tau$ .

Chiaramente, più la costante di tempo è alta più l'andamento introdotto dal polo è lento ad esaurirsi e, poiché  $\tau$  è inversamente proporzionale a  $p$ , si ha la conferma che i poli vicini all'origine hanno tempo di assestamento maggiore di quelli che invece se ne trovano lontani. ( $T_{ass,\varepsilon\%}$  inversamente proporzionale a  $p$ ). È possibile calcolare la costante di proporzionalità fra  $\tau$  e  $T_{ass,\varepsilon\%}$  attraverso la formula  $\ln\left(\frac{100}{\varepsilon}\right)$ .

È importante notare che il valore della risposta al gradino unitario calcolato in  $\tau$ , solo per i sistemi del primo ordine, corrisponde a  $y(\tau) = \mu k(1 - e^{-1}) \approx 0.63\mu k$ .

<sup>43</sup>Si vedrà come, aumentando il grado della  $G(s)$ , l'andamento iniziale diventerà più dolce.

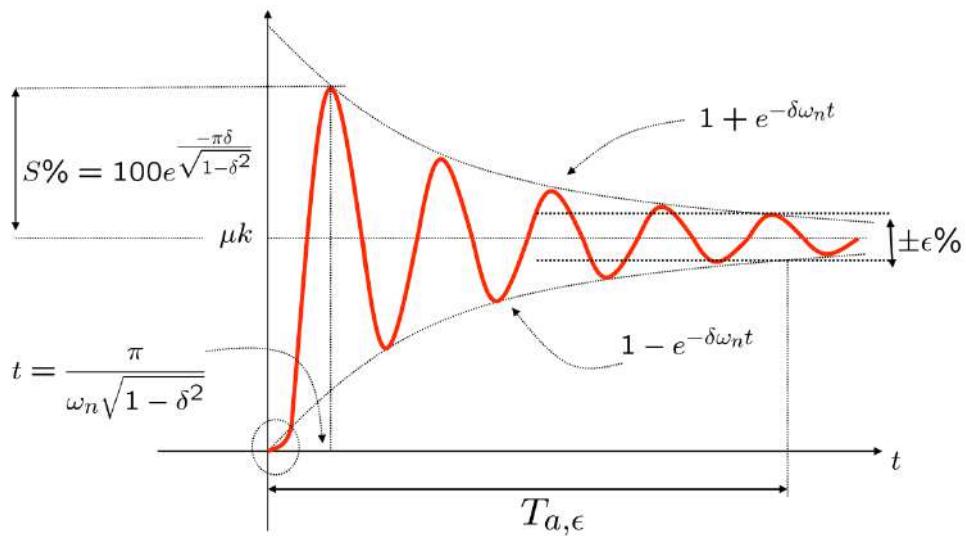
<sup>44</sup>Tipicamente si utilizza il 5% o l'1%. Sono valori per cui, convenzionalmente, si intende esaurito il transitorio.

### 5.2.2 Sistemi del Secondo Ordine

Complichiamo ora la FdT considerata in precedenza inserendo al denominatore una coppia di poli complessi coniugati:  $G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ ; l'ingresso è ancora un gradino di ampiezza  $k$ ,  $U(s) = \frac{k}{s}$ .

La risposta del sistema sarà sulla falsariga di  $y(t) = \mu k [1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \phi)]$ , dove  $A = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$ ,  $\omega = \omega_n \sqrt{1-\delta^2}$ ,  $\phi = \arccos(\delta)$ : comprenderà quindi un termine costante e uno oscillatorio, quest'ultimo governato dalla parte immaginaria e modulato in ampiezza dalla parte reale. Più in particolare, ci si aspetta che il sistema parta da zero - ha infatti due poli e nessuno zero (grado relativo uguale a due e assenza di collegamento algebrico ingresso - uscita) - passando poi ad un andamento di tipo oscillatorio durante il transitorio.

A regime, il sistema si assesta sul valore  $\mu k$ , cioè il valore dell'ampiezza del gradino moltiplicato per  $G(0)$ <sup>45</sup>. Vediamo l'andamento qualitativo dell'uscita nella figura sottostante, presentandone di seguito alcuni indicatori importanti per il suo studio.



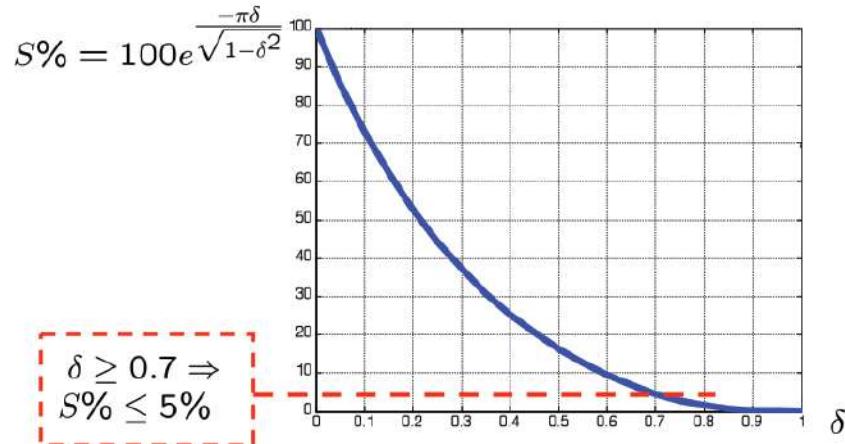
- *Istante di tempo a cui corrisponde il picco di massima sovraelongazione:* si trova dividendo  $\pi$  per la parte immaginaria di una coppia di poli complessi, quindi  $t = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$ ;
- **Sovraelongazione percentuale**, indicata con il simbolo  $S\%$ , mostra di quanto si estende (inteso anche come «si allontana») la risposta (in riferimento al picco più alto) rispetto al valore nominale atteso a regime.

Di conseguenza, a una sovraelongazione alta corrispondono oscillazioni vistose mentre a una sovraelongazione prossima allo zero corrispondono picchi poco accentuati.

Si può calcolare con la seguente formula:  $S\% = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$ , della quale salta all'occhio l'assenza di  $\omega_n$  e la dipendenza dal coefficiente di smorzamento  $\delta$ . Quando  $\delta \approx 1$  si ha che  $S \rightarrow 0\%$ , caso in cui i poli sono molto schiacciati sull'asse Reale; al contrario, quando  $\delta \approx 0$ ,  $S \rightarrow 100\%$ : i poli sono schiacciati sull'asse Immaginario.

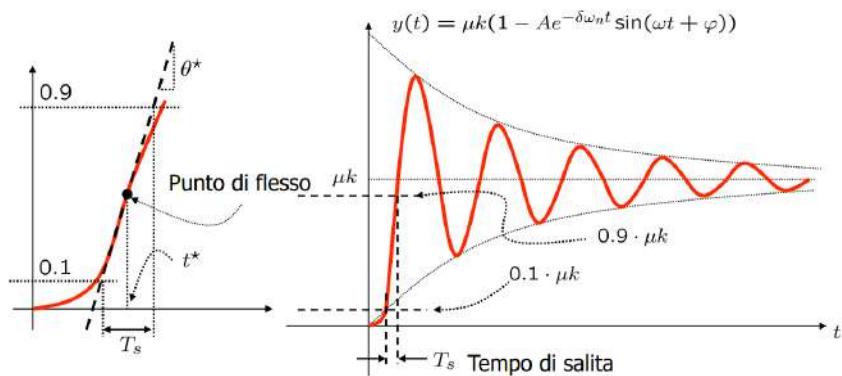
Spesso si dice che il sistema non ha sovraelongazione anche se  $S\%$  non è esattamente nulla: sono i casi in cui  $S\% \leq 5\%$  (a cui corrisponde un  $\delta \geq 0.7$ ).

<sup>45</sup>Anche per i sistemi del secondo ordine vale la «regola» secondo la quale il guadagno indica l'attenuazione o amplificazione dell'ingresso.



**Figura 30:** Relazione fra  $\delta$  e Sovraclongazione percentuale

- La derivata prima della risposta in zero è nulla: si nota infatti che nell'origine la curva non ha un andamento eccessivamente brusco.
- **Tempo di assestamento:** ne avevamo già parlato, ma vediamo in questo caso che  $T_{ass\ 5\%} \approx \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{\sigma}$ , dove  $\sigma$  è la parte Reale e quindi l'inverso della costante di tempo. Vale la stessa formula per  $T_{ass\ 1\%}$ . Si noti che, data  $S\%$  è possibile calcolare  $\delta$  e che, dato  $T_{ass}$  è possibile calcolare  $\omega_n$ , ricostruendo in questo modo la radice complessa coniugata.
- **Tempo di salita:** tempo occorrente affinché l'uscita passi dal 10 al 90% del valore finale.



Vediamo di seguito alcuni esempi in Matlab che spieghino più chiaramente i concetti visti finora.

```
mu=1;
tau=1;
N=mu;
D=[tau,1];
G=tf(N,D);
step(G)
```

definisce una FdT di questo tipo:  $G(s) = \frac{1}{1+ts}$  tramite il comando `tf(num,den)` che in questo caso<sup>46</sup> prende in ingresso un numeratore e un denominatore «preconfezionati» per la funzione di trasferimento. In questo caso il denominatore è una matrice: la documentazione Matlab dice in generale:

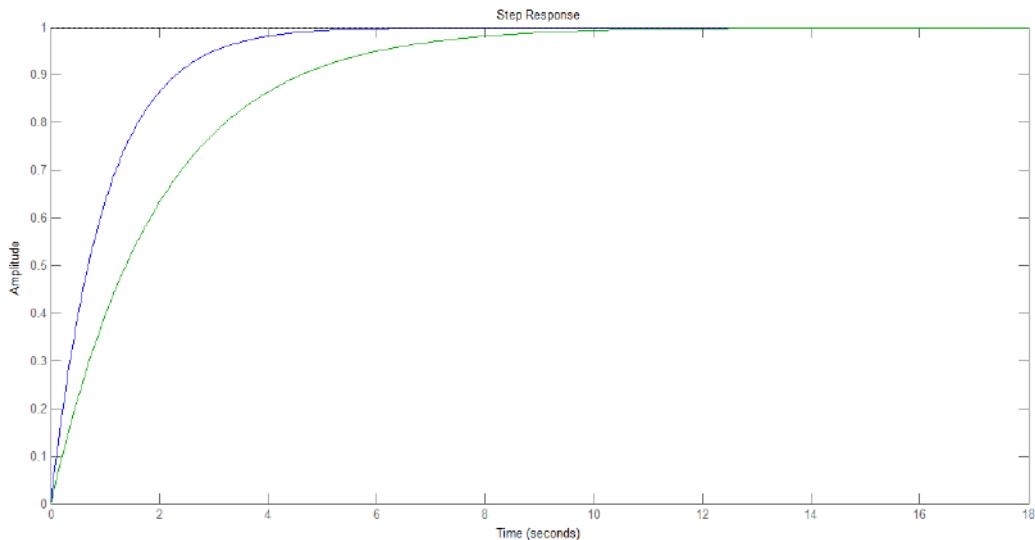
«Use the `tf` command with cell array arguments. In this case, `num` and `den` are cell arrays of row vectors with as many rows as outputs and as many columns as inputs. The row vectors `num{i,j}` and `den{i,j}` specify the numerator and denominator of the transfer function from input `j` to output `i`.»

mentre nel caso dei sistemi SISO come quello che stiamo considerando

«In the SISO case, `num` and `den` are the real- or complex-valued row vectors of numerator and denominator coefficients ordered in descending powers of `s`. These two vectors need not have equal length and the transfer function need not be proper. For example, `h = tf([1 0],1)` specifies the pure derivative  $h(s) = s$ .»

Ciò implica che nel caso di un sistema SISO, `num` e `den` (argomenti della funzione `tf`) sono vettori riga che costituiscono i coefficienti (reali o complessi) dei polinomi in `s` (in ordine decrescente) rispettivamente del numeratore e del denominatore della funzione di trasferimento.

Al grafico che abbiamo ottenuto ne sovrapponiamo un altro con `tau=2`. Facciamo uno `step()`<sup>47</sup> anche per quest'ultima, aggiungendo il comando `hold on` affinché le curve rimangano nella stessa finestra. Otteniamo il grafico di seguito, dove la curva in verde è quella aggiunta come seconda:



Analizzando il grafico si vede che:

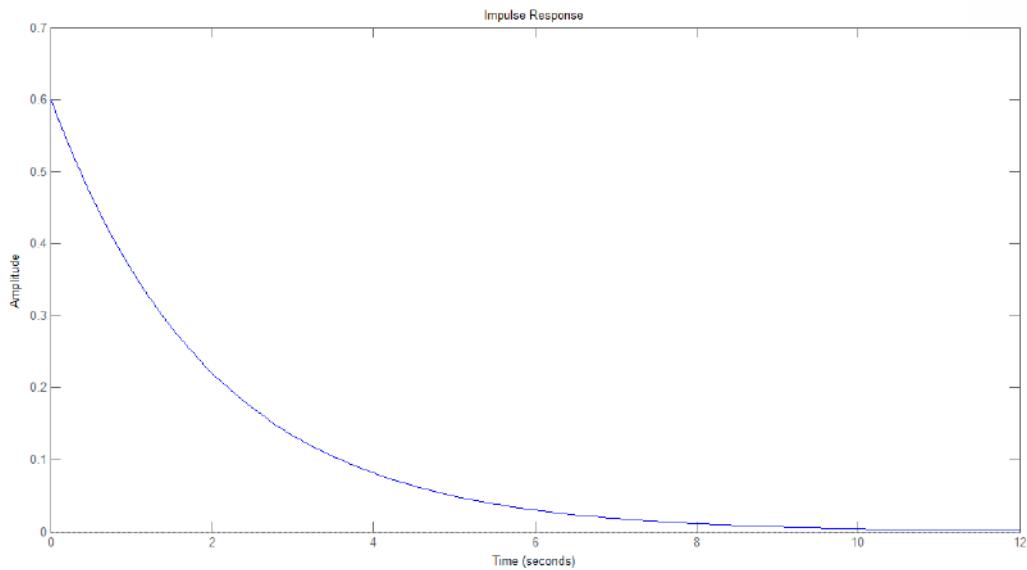
- Avendo dato in ingresso un gradino unitario, entrambe le curve raggiungono il valore 1 (guadagno statico unitario); se si provasse con `mu=1.2` la funzione si porterebbe a quel valore.

<sup>46</sup>Esistono molte signature diverse di `tf()`.

<sup>47</sup>Plotta la risposta al gradino unitario del sistema.

- La curva blu ( $\tau = 1$ ) raggiunge il valore a regime in circa 5 secondi<sup>48</sup>, mentre la seconda (verde,  $\tau = 2$ ) quasi nel doppio del tempo: si pensi alla formula per il calcolo di  $T_{ass}$ , nella quale  $\tau$  si trova al denominatore.

Si mostra anche la risposta all'impulso della funzione  $G$  (qui calcolata con  $mu=1.2$  e  $tau=2$ ):



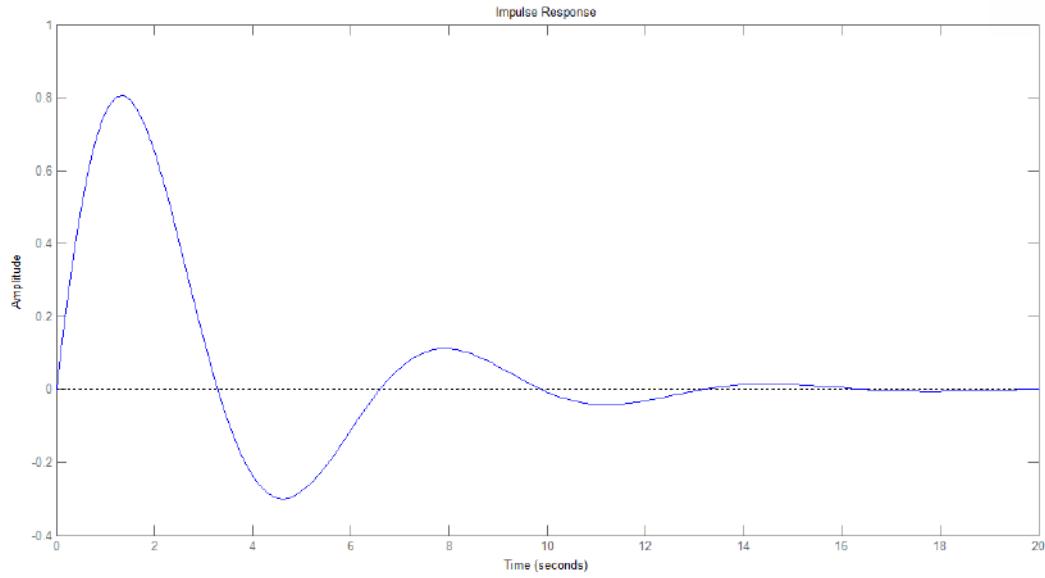
Per definire invece una FdT con poli complessi coniugati:

```
mu=1.2;
delta=0.3;
omegan=1;
N=mu*omegan^2;
D=[1,2*delta*omegan,omegan^2];
G=tf(N, D);
```

La funzione che abbiamo definito è pari a  $G(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ , e diamo nuovamente in ingresso un impulso unitario; otteniamo il grafico seguente:

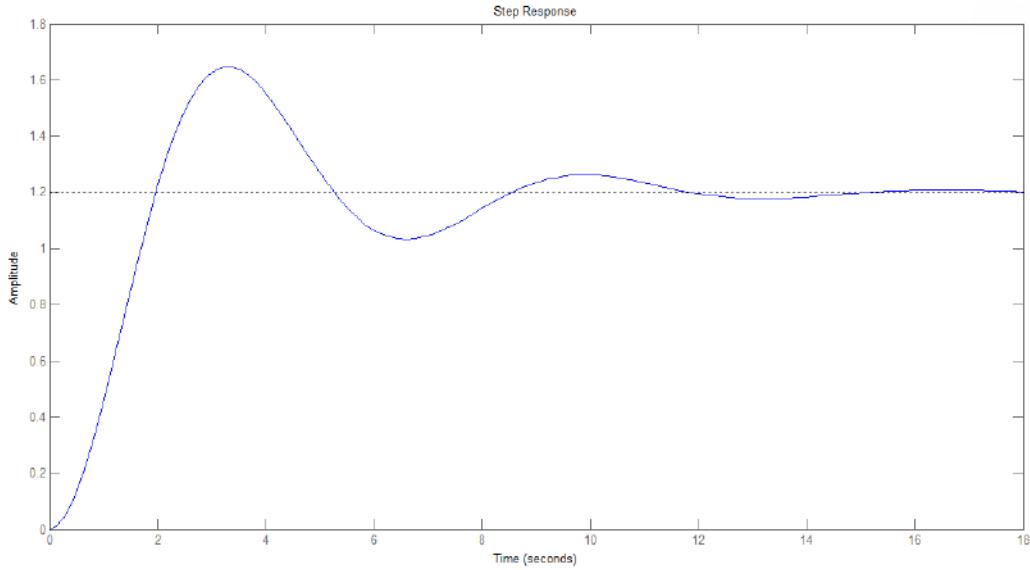
---

<sup>48</sup>Se poi si considera che  $\tau = 1$ ,  $T_{ass} \approx 4.6$  come precedentemente spiegato.



Andiamo poi a calcolare  $\text{roots}(D)$ , cioè a cercare le radici del polinomio al denominatore, ottenendo  $p = 0.3 \pm 0.95j$ .

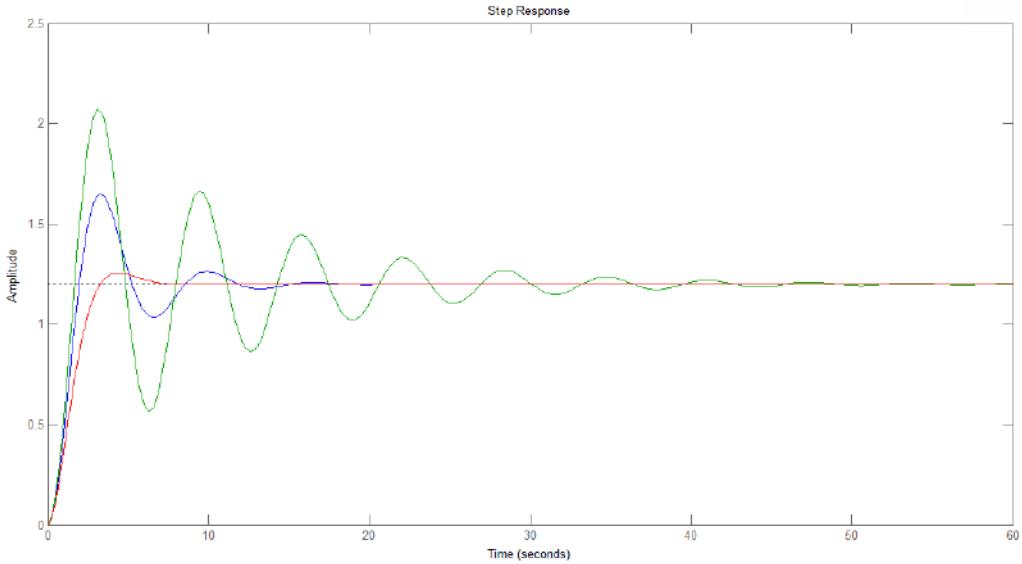
La risposta al gradino unitario ( $\text{step}(G)$ ) è invece:



Possiamo osservare che

- Il sistema parte da zero e si assesta a 1.2 (guadagno statico);
- È presente un picco di sovraelongazione che è  $\approx 1.6$ , quando il valore che la curva assume a regime è 1.2: possiamo dedurne che il picco di sovraelongazione è circa del 40%. Questo valore è associato al valore di  $\delta$  scelto: facciamo di seguito tre prove con tre diversi valori di  $\delta$  per mostrare come questo influenzi l'andamento della risposta.

Otteniamo, nel complesso:



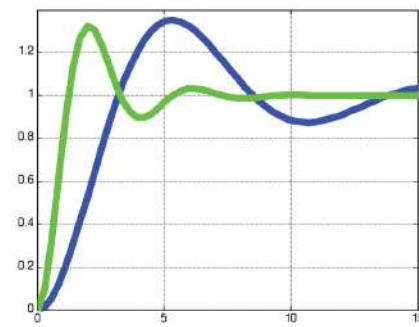
dove la traccia blu è quella vista precedentemente, quella verde ha un  $\delta = 0.1$  e quella rossa ha invece  $\delta = 0.7$ . Coerentemente con il grafico, per la traccia verde dovremo avere un coefficiente di sovraelongazione molto più elevato, come anche una variazione nel tempo di assestamento: dal  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{\delta\omega_n} = \frac{4.6}{0.3} \approx 15s$  del primo caso si passa ad un  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{\delta\omega_n} = \frac{4.6}{0.1} \approx 46s$  per la curva verde e un  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{\delta\omega_n} = \frac{4.6}{0.7} \approx 6.5s$  per quella rossa (che ha anche sovraelongazione molto minore).

### 5.3 Luoghi a Sovraelongazione Costante

In linea con gli esempi appena presentati, proponiamo la seguente problematica: caratterizzare le funzioni di trasferimento che a fronte di un ingresso a gradino presentano la stessa sovraelongazione.

In pratica, non importa se i poli corrispondono a curve con andamenti diversi (anche tempi di assestamento diversi), poiché i picchi di sovraelongazione possono comunque avere lo stesso valore (Figura 31).

Si definiscono quindi i *luoghi a sovraelongazione costante*, ovvero semirette uscenti dall'origine del piano di Gauss lungo le quali il valore di  $\delta$  non cambia. Poiché  $\delta$  è legato all'angolo si osserva che per punti molto vicini all'asse Reale la sovraelongazione è bassa, crescendo poi mano a mano che ci si avvicina all'asse Immaginario.

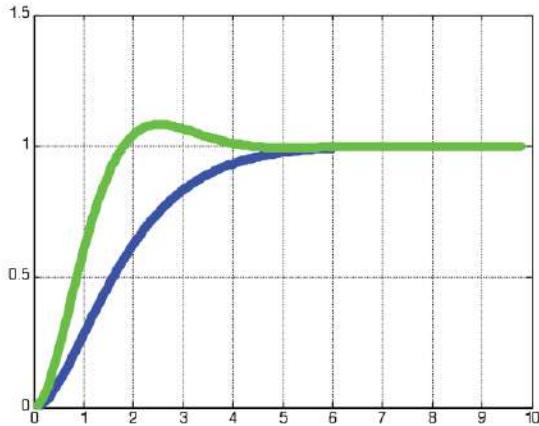


**Figura 31:** Sovraclongazione costante

### 5.4 Luoghi a Tempo di Assestamento Costante

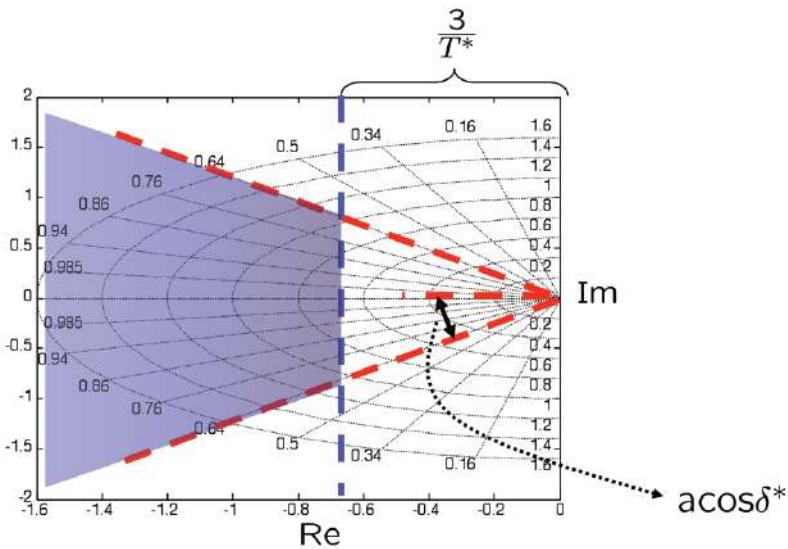
Allo stesso modo, esistono curve diverse (anche con sovraelongazione diversa) che tuttavia hanno lo stesso tempo di assestamento. In termini matematici, due curve hanno lo stesso

tempo di assestamento quando entrano nello stesso momento nella «finestrella» che delimita  $T_{ass\ 5\%}$ .



Si definiscono quindi i ***luoghi a tempo di assestamento costante*** come delle rette parallele all'asse Immaginario, in cui tutti i poli che vi appartengono hanno la stessa parte reale  $\sigma$ . Ovviamente, più ci si avvicina all'origine degli assi più il tempo di assestamento aumenta, più ce ne si allontana più questo diminuisce ( $T_{ass}$  inversamente proporzionale a  $\sigma$ ).

È possibile combinare le due zone del piano complesso per identificare poli complessi coniugati con un tempo di assestamento  $T_{ass\ 5\%} < T_{ass}^*$  e con sovraelongazione  $S\% < S^*$  (dove  $S\%$  e  $T_{ass}$  sono valori dati come riferimento).



I poli con le suddette specifiche saranno quelli appartenenti all'area di piano evidenziata in blu/viola. Questa zona si ottiene considerando un  $\delta$  compreso fra 1 e quello corrispondente a  $S^*$  dato (quindi  $\delta^* \leq \delta \leq 1$ ) per quanto riguarda il luogo dei punti a sovraelongazione costante; allo stesso modo, si considerano solo quei punti in cui  $T_{ass\ 5\%}$  corrisponde a un  $\delta\omega_n$  maggiore di quello dato.

#### 5.4.1 Esempio: Sistema Meccanico

Si riprende il filo, per questo esercizio, da quello affrontato a pagina 51. In quell'occasione avevamo considerato  $M = 1$  introducendo una notevole semplificazione; reintroduciamo ora questo termine per avere un esempio il più generale possibile.

Si riportano i calcoli senza alcun commento, perché per ogni spiegazione è possibile vedere la pagina sopra indicata. Partiamo dalla trasformata di Laplace del sistema di equazioni rappresentativo della dinamica del sistema:

$$\begin{cases} sX_1(s) - X_{10} = X_2(s) \\ sMX_2(s) - MX_{20} = U(s) - kX_1(s) - bX_2(s) \quad ; \text{ considerando la seconda equazione:} \\ Y(s) = X_1(s) \end{cases}$$

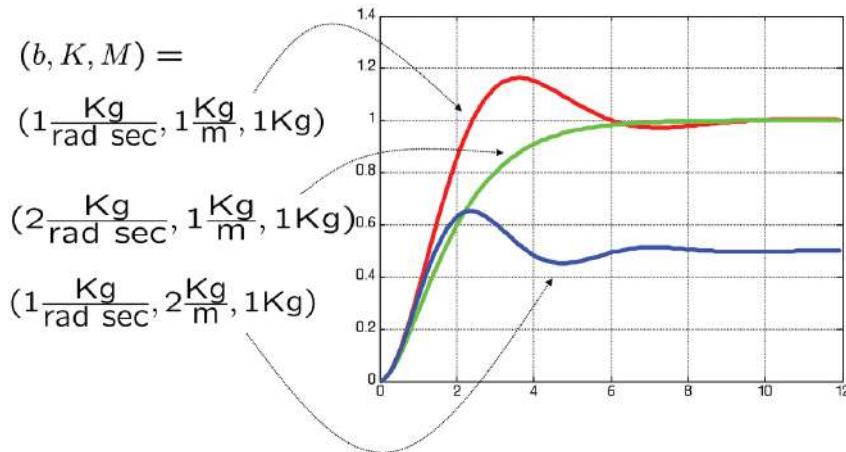
$$X_2(s)[sM + b] = U(s) - kX_1(s) + MX_{20} \Rightarrow X_2(s) = \frac{U(s) - kX_1(s) + MX_{20}}{sM + b}.$$

Si egualgia il termine ottenuto alla prima equazione:  $\frac{U(s) - kX_1(s) + MX_{20}}{sM + b} = sX_1(s) - X_{10} \Rightarrow U(s) - kX_1(s) + MX_{20} = s^2MX_1(s) - sMX_{10} + sbX_1(s) - bX_{10}$ ; infine  $s^2MX_1(s) + bsX_1(s) + kX_1 = sMX_{10} + bX_{10} + X_{20} + U(s)$ .

Risulta  $Y(s) = X_1 = \frac{sMX_{10} + bX_{10} + X_{20} + U(s)}{Ms^2 + sb + k}$ , dove  $\begin{cases} \frac{U(s)}{Ms^2 + sb + k} & \text{risposta forzata} \\ \frac{sMX_{10} + bX_{10} + X_{20}}{Ms^2 + sb + k} & \text{risposta libera} \end{cases}$ . Sapendo che  $U(s) = \frac{1}{s}$ ,  $Y_F(s) = \frac{1}{s(Ms^2 + sb + k)}$ .

Si vuole eguagliare la  $G(s)$  ottenuta a  $\mu \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$ ; per questo motivo, cominciamo raccogliendo  $M$ :  $\frac{1}{M} \frac{1}{(s^2 + s \frac{b}{M} + \frac{k}{M})}$ . Per avere  $\omega_n^2 = \frac{k}{M}$  bisogna che  $\frac{\delta\omega_n}{2} = \frac{b}{2M} = \frac{b}{2\sqrt{M}} \cdot \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ , da cui  $\delta = \frac{b}{2\sqrt{kM}}$ . Sostituendo emerge infine che  $\mu = \frac{1}{k}$ . Abbiamo dimostrato come la parte reale di un polo complesso coniugato dipende da parametri fisici caratteristici del sistema (qui, smorzamento e massa:  $\delta\omega_n = \frac{b}{2M}$ ).

Da questi calcoli emerge che più la molla è rigida, più il guadagno statico è basso; contemporaneamente,  $\delta \propto b$ : entrambi i termini infatti si riferiscono a uno smorzamento.



In figura possiamo vedere i possibili casi di variazione dei parametri: in verde, una variazione di  $\delta$  rispetto alla curva rossa; in blu, una variazione di  $\mu$  rispetto alla stessa curva di

riferimento. È evidente dai grafici che un aumento del coefficiente di smorzamento diminuirà la sovraelongazione, lasciando intatto il guadagno statico (primo caso) mentre un aumento nella rigidezza della molla inciderà su quest'ultimo, abbassandolo (secondo caso).

## 5.5 Polo Dominante

Questo paragrafo vuole dare una definizione matematica di un concetto già noto: se si prende una funzione di trasferimento con due poli reali molto distanti fra loro (in un caso molto semplice), si noterà che uno dei due tende a zero più velocemente dell'altro. Si parla di *polo dominante* in riferimento al polo più lento ad assestarsi al valore di regime<sup>49</sup> ( $\tau_1 \gg \tau_2 \rightarrow \frac{1}{\tau_1} \ll \frac{1}{\tau_2}$ ), e che quindi influenza maggiormente la risposta del sistema.

Data una  $G(s) = \mu \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$  e un ingresso al sistema  $U(s) = \frac{k}{s}$ , la risposta al gradino sarà assimilabile a quella del sistema di ordine inferiore, con polo uguale a quello dominante. In particolare, la risposta nel dominio del tempo sarà sulla falsariga di  $y(t) = \mu k \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$ . Il sistema:

- A regime tende a  $\mu k$  (entrambi gli esponenziali si esauriscono);
  - Ha un andamento smorzato non oscillatorio (dal momento che i poli sono reali);
  - Ha derivata prima in zero nulla e derivata seconda in zero non nulla: la curva iniziale non è brusca.
- Questa è la differenza effettiva con un sistema del primo ordine, che ha un grado relativo minore (e derivata prima in zero non nulla).
- Nel caso in cui  $\tau_1 \rightarrow \infty$  si avrebbe:

$$\begin{aligned} & - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \rightarrow 1; \\ & - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il concetto di polo dominante si applica anche a poli complessi coniugati, e a sistemi che hanno entrambi i tipi di poli. Se una coppia di poli complessi coniugati si trova vicino all'asse Immaginario, questa sarà dominante su un polo reale più lontano rispetto ad essa; ci saranno comunque delle oscillazioni, ed il sistema del secondo ordine non sarà ragionevolmente simile a quello approssimato del primo ordine.

L'ordine 10 inteso come differenza fra un polo ed un altro rappresenta il limite minimo per cui si può parlare di polo dominante (es.  $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.1$  ).

## 5.6 Effetto degli Zeri nella Risposta di Sistemi Elementari

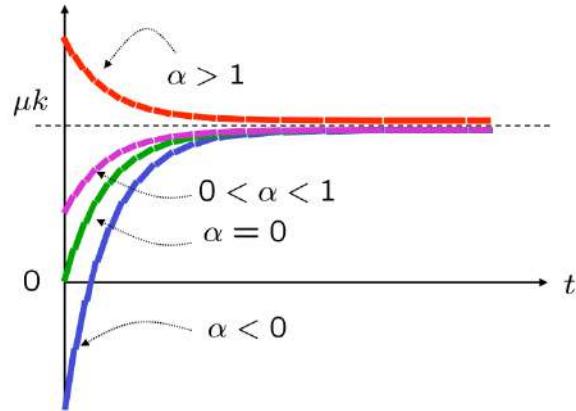
### 5.6.1 Sistema del Primo Ordine con uno Zero Reale

Si consideri un sistema con  $G(s) = \mu \frac{1+\alpha \tau s}{1+\tau s}$ , dove  $\alpha$  è un parametro inserito per mostrare la variazione della posizione dello zero rispetto al polo. Vediamo subito che il grado relativo è zero: ciò implica la presenza del *collegamento algebrico ingresso - uscita*.

---

<sup>49</sup>Questo polo è generalmente quello dei due più vicino all'origine.

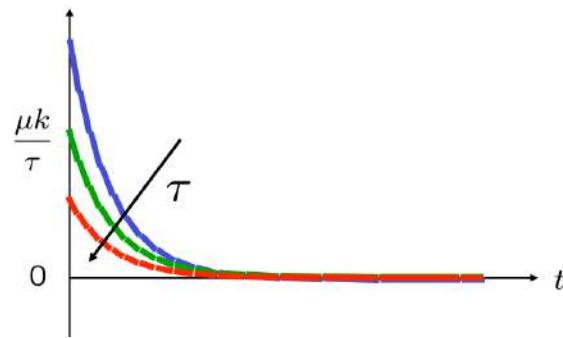
Si procede poi antitrasformando<sup>50</sup>; da questa procedura otteniamo una risposta  $y(t) = \mu k \left[ 1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$ . A seconda dei valori di  $\alpha$  cambia l'andamento della curva, come mostrato in figura sottostante:



- Nel caso in cui  $\alpha > 1$  si ha  $\alpha\tau_1 > \tau_1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha\tau_1} < \frac{1}{\tau_1}$ : lo zero si trova più vicino all'origine rispetto al polo. Inoltre, il termine  $(\alpha - 1)$  è positivo, e poiché l'esponenziale è sempre positivo allora tutta la quantità nella parentesi esterna è positiva. La curva parte immediatamente e in modo abbastanza veloce, convergendo al valore di regime dall'alto.
- Quando invece  $0 < \alpha < 1$ , lo zero si trova dall'altra parte sull'asse Reale rispetto a prima: in questo caso è il polo a essere più vicino all'origine. Non si ha quindi lo stesso andamento descritto precedentemente, poiché si tende al valore di regime «da sotto» e attraverso una curva molto meno accentuata, anche se il «salto» iniziale è comunque presente.
- Se  $\alpha = 0$  si torna nel caso noto in cui non è presente alcuno zero.
- Se  $\alpha < 0$  si parte da un valore negativo, per poi crescere fino al raggiungimento del valore di regime.

#### 5.6.1.1 Sistema del Primo Ordine con uno Zero nell'Origine

Data una funzione di trasferimento del tipo  $G(s) = \mu \frac{s}{1+\tau s}$  con ingresso  $U(s) = \frac{k}{s}$  vediamo che nella  $Y(s)$  il forzamento dell'ingresso scompare poiché si semplifica con lo zero nell'origine<sup>51</sup>. Allora l'antitrasformata risulta  $y(t) = \frac{\mu k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ : l'andamento della curva è asintoticamente nullo.



<sup>50</sup>Tralasciamo lo sviluppo in fratti semplici e il calcolo dei residui.

<sup>51</sup>Applicazione della proprietà bloccante degli zeri.

## 5.6.2 Sistema del Secondo Ordine con Zero Reale e Poli Reali Negativi

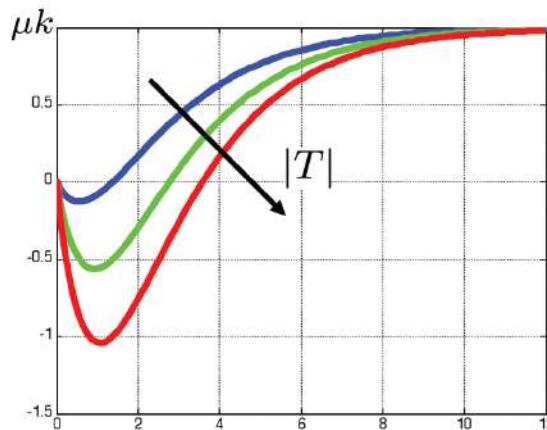
Sia data una  $G(s) = \mu \frac{1+Ts}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$  sulla quale è inserito un forzamento di tipo  $U(s) = \frac{k}{s}$ : questo sistema presenta due poli negativi (asintotica stabilità) rispettivamente posizionati in  $\frac{1}{\tau_1}$  e  $\frac{1}{\tau_2}$ . Vi è anche uno zero la cui posizione varia a seconda del variare di  $T$ .

In generale avremo una risposta qualitativa  $y(t) = \mu k \left( 1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$ ; osservando gli andamenti asintotici si vede che  $y(0) = 0$  (grado relativo unitario) e che  $y(\infty) = \mu k$ . L'influenza dello zero nell'andamento della curva è già visibile nella derivata prima:  $\dot{y}(0) = \mu k \frac{T}{\tau_1 \tau_2}$ ; sappiamo che questa indica la pendenza e di conseguenza la «velocità» che la risposta assume inizialmente nel suo tragitto verso il valore a regime e quindi dovremo aspettarci delle variazioni in questo senso.

Si ricorda che il valore dello zero non influenza la stabilità (o instabilità) del sistema ma solo il suo andamento quantitativo. Vediamo in seguito due sottocasi

### 5.6.2.1 Sistemi a Fase Non Minima

È questo il caso in cui  $T < 0$ <sup>52</sup>: lo zero è posizionato sull'asse Reale positiva (semipiano destro) e la derivata prima in zero è negativa (ha segno opposto a quello di  $\mu k$ ). Conseguenza: la risposta parte con una *sottoelongazione*, tanto maggiore quanto lo è  $|T|$  ( $\frac{1}{|T|}$  si avvicina all'asse Immaginario).



Esempio di sistema a fase non minima: sistemi flessibili, come ad esempio una sbarra a cui si applica una forza ad una delle estremità.

### 5.6.2.2 Sistemi a Fase Minima

Si parla di sistemi a fase minima nel caso in cui  $T \gg \tau_1 > \tau_2 > 0$ : lo zero è posizionato nel semipiano sinistro, ma molto vicino all'asse Immaginario.

Analizziamo la risposta del sistema: il primo esponenziale ( $-\frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ ) è nel complesso positivo; esso è riferito al polo dominante, e di conseguenza tenderà a zero lentamente. Il secondo esponenziale ( $\frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ ) è invece negativo e più veloce ad andare a zero.

<sup>52</sup>Si dicono appunto *sistemi a fase non minima* quei sistemi che hanno almeno uno zero posizionato nel semipiano destro (parte Reale positiva, quindi costante di tempo negativa).

La somma dei due contributi darà una *sovraelongazione*<sup>53</sup>, tendendo a zero dall'alto; questa sovraelongazione sarà più grande per valori di  $T$  maggiori (quindi quanto più lo zero si avvicinerà all'origine). Bisogna anche mettere in evidenza la differenza che si ha rispetto all'equivalente sistema del primo ordine privo di zero: in questo caso la risposta è molto più brusca perché  $\dot{y}(0) = \mu k \frac{T}{\tau_1 \tau_2} \gg \mu k \frac{1}{\tau_1 \tau_2}$ .

## LEZIONE 13

DATA: 20/10/2015

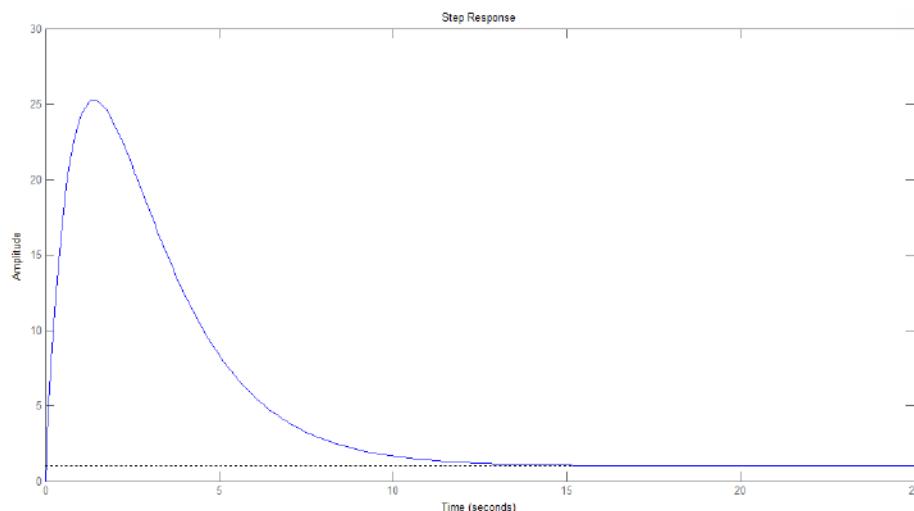
Proviamo ora a studiare l'andamento delle risposte in questi casi utilizzando Matlab.

```
tau1=2;
tau2=1;
T=100;
N=[T,1];
D=conv([tau1,1],[tau2,1]);
G=tf(N,D);
step(G)
```

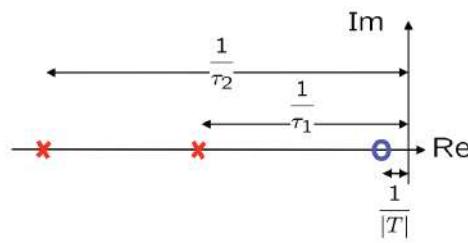
dove la funzione *conv(u, v)* è definita dalla documentazione Matlab come segue:

«*w = conv(u,v)* returns the convolution of vectors *u* and *v*. If *u* and *v* are vectors of polynomial coefficients, convolving them is equivalent to multiplying the two polynomials.»

In pratica, in questo caso l'istruzione *conv([tau1,1],[tau2,1])* equivarrà a  $\tau_1 \tau_2$ ,  $\tau_1 + \tau_2$ , 1 (rispettivamente i coefficienti di  $s^2$  ed  $s$ , più il termine noto). La risposta al gradino dà la seguente curva:



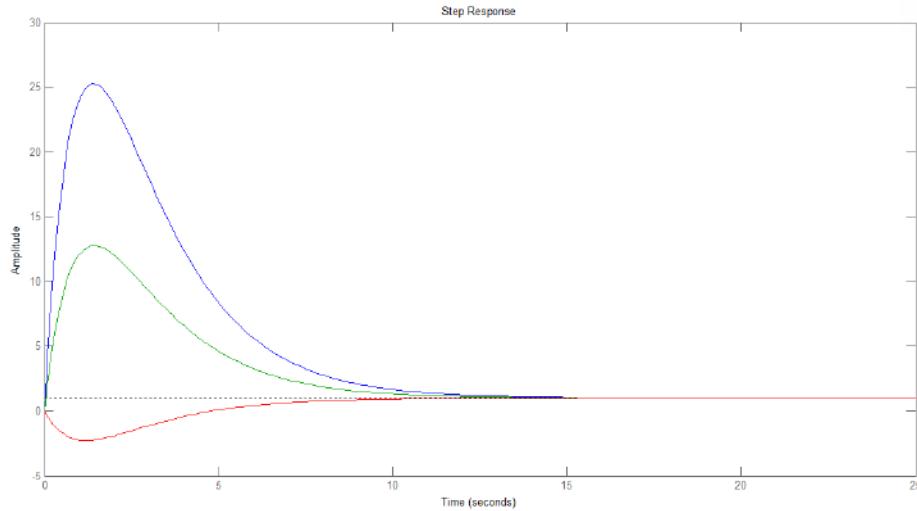
<sup>53</sup>La differenza con la sovraelongazione in presenza di poli complessi coniugati è rilevante!



**Figura 32:** Posizionamento poli - zero

che vediamo partire da 1 invece che dall'origine perché  $\mu = 1$ . Si nota anche un picco di sovraelongazione molto accentuato (arriva fino circa a 25), per poi tornare al valore di regime ( $k = 1$  perché il gradino è unitario).

Modifichiamo l'input precedente spostando progressivamente lo zero in modo che si allontani dall'origine. Poniamo inizialmente  $T=50$  e poi  $T=-10$ . Otteniamo le tre curve in figura, delle quali quella blu è la prima di cui si è parlato, seguita da quella verde e da quella rossa.



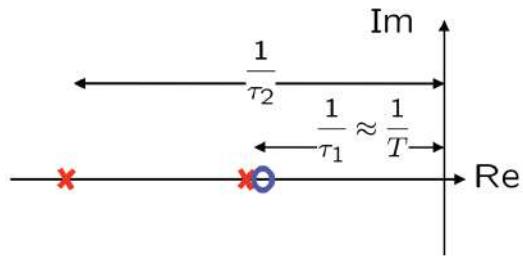
La sovraelongazione diminuisce nel secondo caso, fino a diventare una sottoelongazione nel terzo. Si parla di sistemi a fase minima nel primo e secondo caso, mentre la curva rossa descrive un sistema a fase non minima.

### Quasi Cancellazione

Si parla di *quasi cancellazione* nel caso in cui lo zero sia molto vicino al polo, quasi sovrapposti, «come se il polo fosse quasi cancellato». La formulazione matematica di quello che abbiamo appena detto è la seguente:  $T \approx \tau_1 > \tau_2 > 0$ . La formulazione della risposta nel dominio del tempo è sempre la stessa:  $y(t) = \mu k \left( 1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$ , e anche in questo caso il coefficiente  $\frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2}$  dell'esponenziale più veloce  $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$  è negativo e tende a zero velocemente.

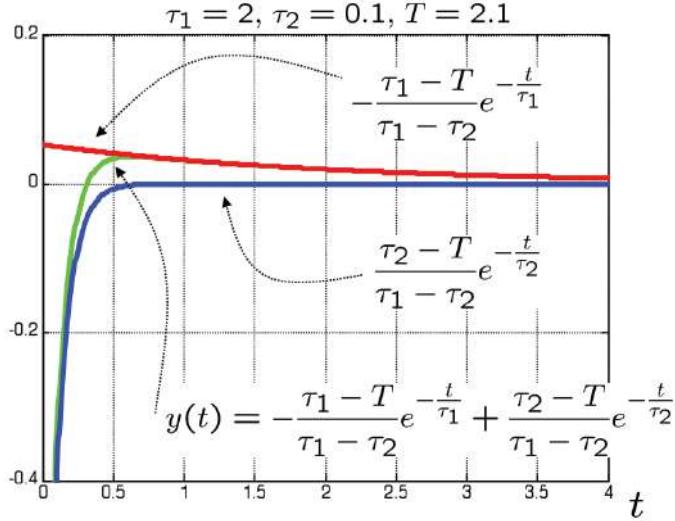
Si parla di

- quasi cancellazione *da destra* quando il coefficiente  $\frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2}$  dell'esponenziale più lento  $e^{-\frac{t}{\tau_1}}$  è negativo e molto piccolo, in quanto  $\tau_1 > \tau_2$  e  $T > \tau_1$ , seppur questi ultimi sono quasi uguali. L'effetto della moltiplicazione di un termine molto piccolo per un

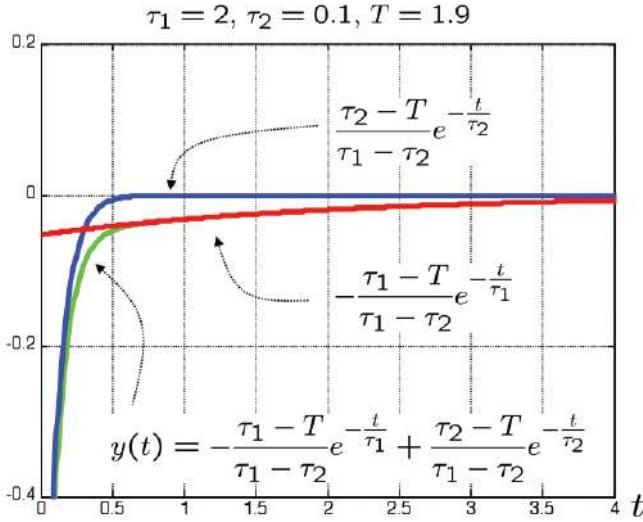


**Figura 33:** Configurazione poli/zero per Q.C. da destra

esponenziale che tende a zero lentamente (che corrisponderebbe al polo dominante) implica che nell'andamento finale della risposta il contributo di questo polo è quasi irrilevante fino al momento in cui non si esaurisce quello del polo «veloce».



- quasi cancellazione *da sinistra* quando il coefficiente  $\frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2}$  dell'esponenziale più lento  $e^{-\frac{t}{\tau_1}}$  è positivo e molto piccolo, in quanto  $\tau_1 > \tau_2$  e  $T < \tau_1$ . Anche in questo caso si ha l'effetto descritto sopra, con la differenza che la curva corrispondente al polo in questione si trova sotto l'asse dei tempi.



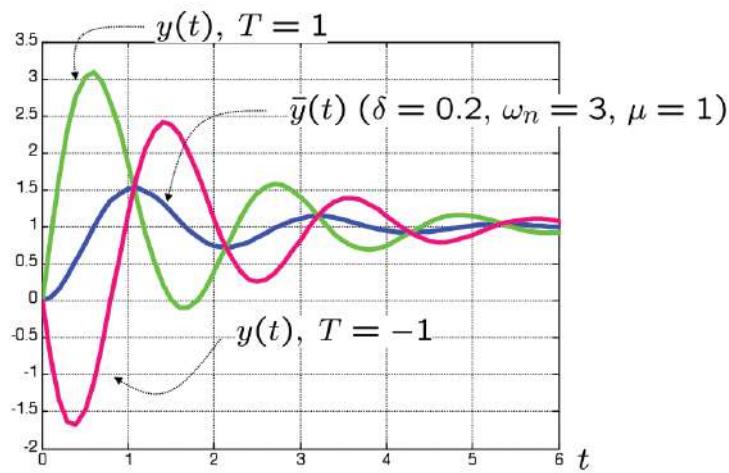
In entrambi i casi il transitorio è governato dalla dinamica «veloce», dando l'impressione di essere un sistema del primo ordine: nel caso di quasi cancellazione da destra avremo una piccola sovraelongazione, mentre nell'altro caso si parlerà invece di una piccola sottoelongazione. Successivamente ci si assesterà al valore di regime dall'alto o dal basso grazie all'ingresso del polo «lento», che in questo caso avrà un tempo di assestamento molto grande. Si definisce **coda di assestamento** la porzione (in questo caso consistente) di curva impiegata per raggiungere il valore di regime.

Questo fenomeno viene anche chiamato **doppia dinamica**, in quanto il sistema sembra avere due comportamenti diversi (prima molto veloce, poi molto lento).

È importante tenere presente che l'influenza dello zero è rilevante solamente quando questo si trova vicino all'origine; quanto più, invece, se ne allontana, tanto più la sua presenza è trascurabile (escluso il caso in cui non sia sovrapposto a un polo).

### 5.6.3 Sistema del Secondo Ordine con Zero Reale e Poli Complessi Coniugati

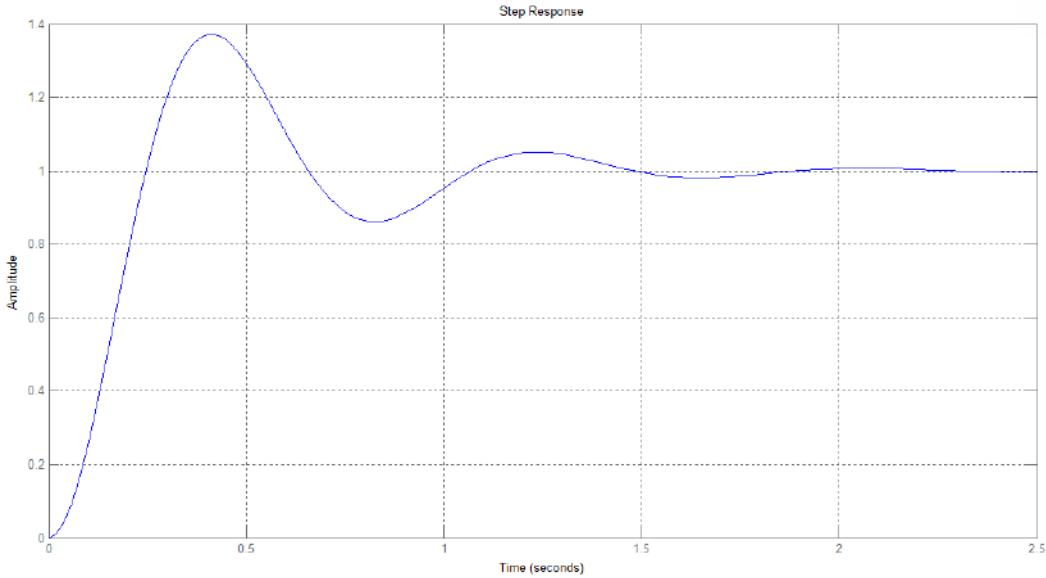
Sia  $G(s) = \mu\omega_n^2 \frac{1+Ts}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)}$ ; la risposta al gradino del sistema mostra che la presenza dello zero porta, nella dinamica del sistema, una notevole accelerazione rispetto all'equivalente del secondo ordine senza zero. In figura possiamo vedere confrontato questo caso con due curve che invece presentano una radice al numeratore, e in particolare rappresentano un sistema a fase minima (curva verde) e uno a fase non minima (curva rosa).



## Esercitazione 2

### Primo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



1.  $G(s) = \frac{64(1+0.07s)}{s^2+4.8s+64}$
2.  $G(s) = \frac{64}{s^2+4.8s+64}$
3.  $G(s) = \frac{4}{s^2+1.2s+4}$
4.  $G(s) = \frac{50}{(s+0.5)(s^2+8s+100)}$

Cominciamo considerando la prima FdT data: questa presenta due poli complessi coniugati in  $-2.4 \pm 7.63j$  e uno zero in  $T = 0.07$ . Dalla formula generale della  $G(s)$  troviamo che  $\omega_n = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow \delta\omega_n = \frac{4.8}{2} \Rightarrow \delta = 0.3$ . Raccogliendo  $\omega_n$  troviamo che  $\mu = 1$ ; inoltre, il grado relativo è unitario. La prima di queste due affermazioni concorda con il grafico presentato, in quanto è noto che l'ingresso è un gradino unitario, tuttavia la seconda no: si vede infatti dal grafico che l'andamento della curva nei pressi dell'origine è leggermente concavo, cosa che potrebbe succedere solo nel caso in cui  $y(0) = 0$  (e fosse non nulla la derivata seconda o terza); ciò implica un grado relativo maggiore di 1. La prima FdT è quindi scartata.

La seconda ha lo stesso denominatore della prima, ma nessuno zero: per questo motivo ha grado relativo maggiore di uno e rimane quindi candidata come FdT corrispondente.

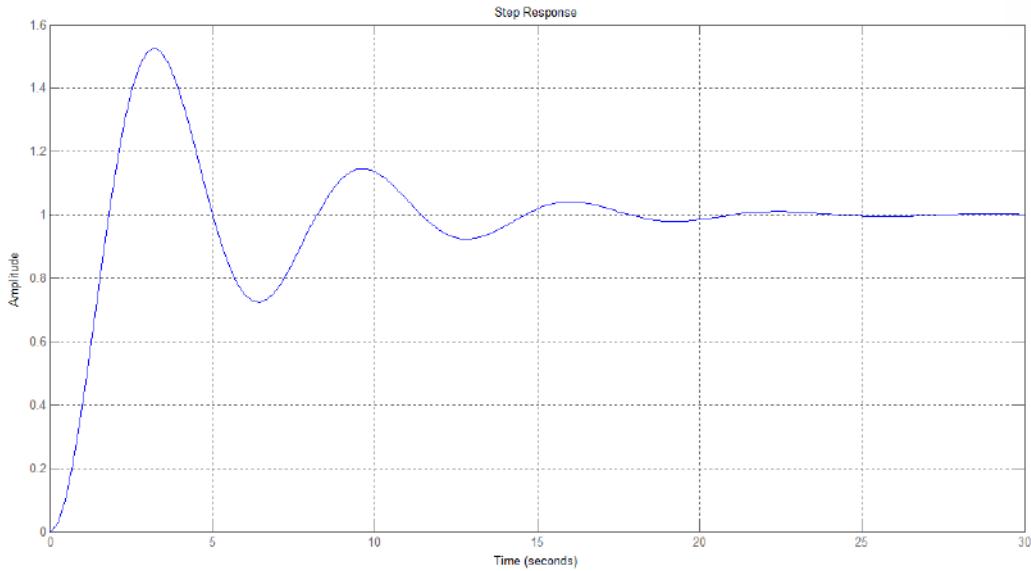
Prendendo in considerazione la terza funzione proposta, calcoliamo un  $\delta\omega_n = \frac{1.2}{2} = 0.6$ . Risulta quindi un tempo di assestamento  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{0.6} \approx 8s$ : questo tempo è incompatibile con quello mostrato in figura, che si aggira sui due secondi. La terza funzione proposta viene quindi scartata.

Rimane la quarta: il grado relativo è 3; calcoliamo quindi il tempo di assestamento per cercare di capire se ci sono elementi discordanti col grafico. La costante di tempo del polo reale è 0.5, mentre quella del polo immaginario è 4 (corrispondente con la sua parte reale): è immediato capire che il polo dominante è quello reale. Risulta  $T_{ass\ 1\%} = 4.6 \cdot 2 \approx 9s$ : anche questo è troppo lento per essere quello mostrato in figura.

Anche se è ormai scontato che la funzione corrispondente sia la seconda, controlliamo la compatibilità della sua sovraelongazione con quella del grafico: attraverso la formula vista troviamo  $S\% \approx 37\%$ , che conferma che la seconda è la funzione di trasferimento mostrata in figura.

## Secondo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



1.  $G(s) = \frac{100}{s^2+4s+100}$
2.  $G(s) = \frac{0.02}{(s+0.02)(s^2+0.4s+1)}$
3.  $G(s) = \frac{1}{s^2+0.4s+1}$
4.  $G(s) = \frac{16}{s^2+4s+16}$

Prima di cominciare a studiare le quattro funzioni date notiamo alcuni elementi caratteristici della curva che possono aiutarci nell'individuazione della funzione corrispondente. Per prima cosa, il tempo di assestamento è  $\approx 30s$  e il valore di regime è 1; inoltre, il picco più alto raggiunge circa altezza 1.5, il che significa che  $S\% \approx 50\%$ .

Si comincia anche in questo caso dalla prima funzione: individuiamo subito la parte reale, così da poter calcolare il tempo di assestamento. Risulta  $\delta\omega_n = 2 \Rightarrow T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{2} \approx 2s$ , che evidentemente è troppo basso, e porta la prima funzione alla «bocciatura».

Nella seconda funzione per il calcolo di  $T_{ass}$  è richiesta l'individuazione del polo dominante: la costante di tempo del polo reale è chiaramente 0.02, mentre si calcola che per il polo complesso essa vale 0.2. Allora  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{0.02} \approx 230s$ : come il primo, questo tempo di assestamento è evidentemente incompatibile con quello mostrato in figura; la seconda funzione

viene scartata.

Consideriamo allora la terza: abbiamo un solo polo complesso, la cui costante di tempo vale 0.2; calcoliamo quindi  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{0.2} \approx 23\text{s}$ , un tempo che, se l'ultima funzione viene scartata, potrebbe candidare la terza funzione ad essere quella corretta.

Infine, calcoliamo la costante di tempo del polo nella quarta funzione, inserendola direttamente nella formula per trovare il tempo di assestamento.  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{2} \approx 2$ , come nel primo caso: queste due funzioni hanno lo stesso luogo di tempo di assestamento, che tuttavia non coincide con quello della curva in figura.

Anche in questo caso è ormai chiaro quale sia la funzione di trasferimento corrispondente, tuttavia si fa comunque un check sulla sovraelongazione percentuale. Per la terza funzione risulta  $\omega_n = 1 \Rightarrow \delta = 0.2$ , da cui  $S\% \approx 52\%$ , che conferma la nostra ipotesi.

LEZIONE 14

DATA: 21/10/2015

## 6 Analisi Armonica di Sistemi Dinamici

In questa parte del corso ci si occuperà di studiare la risposta a regime di sistemi dinamici ad armoniche complesse in ingresso. Vedremo come sia possibile scomporre questi segnali complessi in una somma (finita o meno) di segnali più semplici - opportunità da cogliere al volo nel momento in cui il sistema considerato è lineare. Infine, verranno presentate metodologie per lo studio delle risposte a regime di sistemi dinamici a fronte di ingressi complessi.

Citazioni varie tratte da Wikipedia, dove non diversamente specificato.

### 6.1 Segnali Periodici: Serie di Fourier

Si definisce *periodica* di periodo  $T > 0$  una funzione  $f(t)$  tale che

$$f(t + mT) = f(t) \quad \forall t \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}$$

Si definisce inoltre **pulsazione della funzione** la quantità  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

Una *qualunque* funzione periodica  $f(t)$  di periodo  $T$  è rappresentabile, per mezzo della *Serie di Fourier*, come una somma di armoniche sinusoidali di frequenza crescente (ma sempre multipla di una pulsazione fondamentale).

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(\omega_0 n t + \phi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

è la rappresentazione in *forma trigonometrica* della serie di Fourier. I coefficienti che vi compaiono sono definiti in funzione di  $c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ :

- $a_0 = c_0$  rappresenta la componente continua della  $f(t)$  (poiché ha frequenza nulla) ed è un numero reale;

Si definisce **armonica fondamentale** quell'armonica che si ottiene per  $n = 1$  e che ha quindi la stessa pulsazione del segnale. In generale, la  $k$ -esima armonica è quella che ha pulsazione  $k\omega_0$ .

- $r_n = |c_n|$ : l'ampiezza  $r_n$  del coseno determina il «peso» dell'armonica stessa all'interno della sommatoria che descrive il segnale.
- $\phi_n = \arg(c_n)$  è lo sfasamento della  $k$ -esima armonica.

Come si può immaginare, il «peso» dei segnali non è costante all'interno della sommatoria: questo in particolare varia all'interno di un certo range detto **banda del segnale**. Al di fuori di essa il contributo di questi segnali è trascurabile: ciò implica che, incidentalmente, per questi segnali il numero di armoniche presenti nella serie è finito. La banda di un segnale si definisce quindi come quell'intervallo di pulsazioni  $[n_{lower}\omega_0, n_{upper}\omega_0]$  compreso tra la minima e la massima pulsazione significativa. Derivano di conseguenza le definizioni di *segnali a banda limitata* (ossia segnali per i quali questo intervallo è finito) e di *segnali a banda illimitata*, in tutti gli altri casi.

Sviluppare un segnale attraverso la serie di Fourier significa rappresentarlo attraverso una serie di coseni, «trasferendolo» nel *dominio delle frequenze*. Questo procedimento viene chiamato *analisi armonica*.

## 6.2 Segnali Non Periodici: Trasformata di Fourier

Per i segnali che non rientrano nella classe descritta in precedenza è comunque possibile definire un procedimento matematico che permette di scriverli attraverso armoniche sinusoidali, a patto di accettare una maggiore complessità matematica.

Data una funzione  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{C}$  si definisce *trasformata di Fourier* la funzione complessa di variabile reale  $\omega$  definita come

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Poiché la trasformata di Fourier è biunivoca è sempre possibile calcolare la *trasformata inversa* di Laplace:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (2\Re\{F(\omega)\} - 2\Im\{F(\omega)\} j) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [F_c(\omega) \cos(\omega t) + F_s(\omega) \sin(\omega t)] d\omega \end{aligned}$$

È possibile spiegare intuitivamente questa formula attraverso una similitudine con la serie di Fourier: una  $f(t)$  generica è infatti uguale a una somma, da meno a più infinito, di contributi infinitesimi. Questi corrispondono a seni e coseni, non più multipli di una  $\omega_0$  ma comunque con pulsazione crescente, modulati in ampiezza dalle parti Reale e Immaginaria della trasformata. Se considerati, sempre intuitivamente, alla stregua degli  $r_k$ , i due coefficienti indicano il «peso» della singola armonica all'interno della trasformata.

Infine, vi sono due aspetti importanti da notare:

1. La trasformata di Laplace<sup>54</sup> è un'estensione della trasformata di Fourier, introdotta poiché consente di trattare funzioni particolari che non sono integrabili secondo Fourier, come le funzioni continue a tratti. Data la trasformata di Laplace di una funzione (o segnale), sotto determinate ipotesi si può ottenere la sua trasformata di Fourier ponendo  $s = 2\pi \cdot i \cdot f$ , dove  $i$  è l'unità immaginaria e  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  la frequenza delle sinusoidi di base la cui combinazione lineare determina la trasformata di Fourier.
2. Nel caso di funzioni periodiche, la trasformata di Fourier può essere semplificata con il calcolo di un insieme discreto di ampiezze complesse, chiamati coefficienti della serie di Fourier.

## 6.3 Spettro di Ampiezza, Spettro di Fase

Si definiscono  $|F(\omega)|$  *spettro di ampiezza* e  $\arg\{F(\omega)\}$  *spettro di fase*. Questi due valori sono generalmente diversi per ognuna delle armoniche che compongono la trasformata e si possono rappresentare nel loro complesso attraverso due grafici omonimi.

### 6.3.1 Spettro di un Segnale Periodico

Se il segnale in oggetto è un segnale periodico, la sua trasformata di Fourier è un insieme discreto di valori, che in tal caso prende il nome di spettro *discreto* o spettro «a pettine»: la frequenza più bassa è l'armonica fondamentale ed è quella che ha peso maggiore nella ricomposizione finale del segnale.

Nello spettro delle ampiezze si rappresenta in ordinata l'ampiezza delle diverse armoniche del segnale in funzione della loro frequenza (rappresentata in ascissa); analogamente lo spettro delle fasi rappresenta la fase delle diverse armoniche del segnale in funzione della loro frequenza. Poiché in un segnale periodico le armoniche hanno solo frequenze multiple intere di quella del segnale, gli spettri delle ampiezze e delle fasi sono grafici discontinui, rappresentati per mezzo di righe. Ciascuna riga dello spettro rappresenta una armonica del segnale. Lo spettro più semplice è quello di un segnale sinusoidale: esso è costituito da una sola riga in corrispondenza della frequenza del segnale.

Intuitivamente, all'aumentare del numero di righe e dell'ampiezza, la forma d'onda del segnale periodico si discosta sempre di più da quella di una semplice sinusoide. Viceversa, se lo spettro contiene la fondamentale e poche altre armoniche di piccola ampiezza, allora la forma d'onda del segnale sarà quasi sinusoidale.

Più stretta è la banda di un certo segnale, più la forma del segnale si avvicina a quella di una sinusoide (e viceversa). Come si può facilmente vedere, i segnali reali non hanno praticamente mai una banda perfettamente limitata, cioè non esiste una frequenza al di sopra della quale le armoniche del segnale hanno un'ampiezza esattamente uguale a zero.

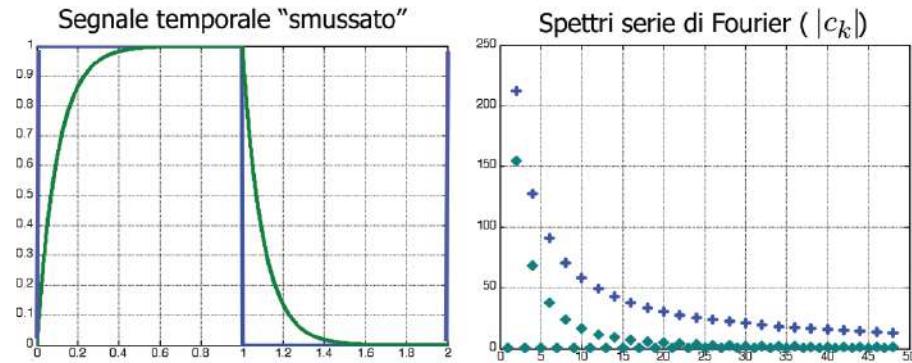
È interessante osservare che esiste una semplice relazione fra la larghezza di banda di un segnale e la rapidità con cui il segnale varia nel tempo: infatti in generale i segnali a banda stretta variano «lentamente» nel tempo, mentre i segnali a banda larga presentano variazioni «veloci». Possiamo motivare questa affermazione in base alle considerazioni fatte in

---

<sup>54</sup>Già studiata nel paragrafo 3 a a pagina 24

precedenza a proposito del fatto che i segnali a banda stretta hanno una forma d'onda che assomiglia a quella di una sinusoide (e dunque hanno un andamento piuttosto «arrotondato», senza brusche variazioni), mentre i segnali a banda larga, essendo costituiti da molte armoniche, sono molto diversi da una sinusoide (e dunque, intuitivamente, presentano fronti più «ripidi», cioè variano più rapidamente).<sup>55</sup>

A conferma di quanto detto viene mostrato in seguito il grafico di un'onda quadra (in blu) e di un segnale simile ma «smussato», con i relativi spettri di ampiezza a lato.



Il segnale smussato ha uno spettro di fase che tende ad andare a zero più velocemente rispetto a quello non smussato: di conseguenza servirà un numero minore di armoniche per rappresentarlo, ed è possibile dire che la sua banda è più stretta. Più si «smussa» il segnale (rendendolo simile a una sinusoide), più la banda si stringe, in accordo con quanto detto in precedenza.

### 6.3.2 Spettro di un Segnale Non Periodico

Nel caso in cui la funzione sia non periodica lo spettro è continuo.

## 6.4 Funzione di Risposta Armonica

### 6.4.1 Introduzione

In teoria dei sistemi dinamici, la risposta in frequenza o risposta armonica di un sistema dinamico è la descrizione della sua uscita (una funzione del tempo) utilizzando come variabile la frequenza invece che il tempo (ovvero nel dominio della frequenza).

L'analisi in frequenza del comportamento di un sistema viene svolta molto spesso quando si ha a che fare con sistemi lineari (in configurazione stabile), i quali hanno la fondamentale proprietà di rispondere ad un input puramente sinusoidale con un'uscita della stessa frequenza, ovvero restituiscono la medesima sinusoide in ingresso sfasata e moltiplicata per un fattore scalare. Se il sistema è un sistema dinamico lineare stazionario (LTI) tale fattore moltiplicativo non varia nel tempo; per tale motivo la risposta in frequenza di sistemi LTI viene caratterizzata completamente dalla risposta all'impulso, cioè dall'uscita del sistema quando in ingresso vi è un solo impulso che contiene tutte le frequenze, generalmente un impulso a delta di Dirac. La risposta in frequenza è in tal caso esplicitata dalla funzione di

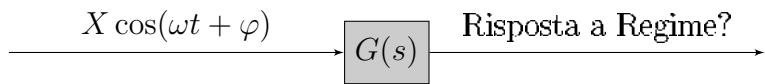
<sup>55</sup>Liberamente tratto da <http://www.elemania.altervista.org/filtri/fourier/fourier4.html>

trasferimento (definita come la trasformata di Laplace della risposta all'impulso a delta di Dirac).

Esplcitamente, dato un sistema lineare stabile, in cui il legame tra ingresso ed uscita è rappresentato da una equazione differenziale lineare, applicando un segnale sinusoidale  $u(t) = X \sin(\omega t)$  di ampiezza  $X$  e frequenza  $\omega$  si ha che, dopo che è terminato il periodo transitorio, il segnale in uscita risulta sinusoidale e della stessa frequenza di quello d'ingresso, ovvero del tipo  $y(t) = Y \sin(\omega t + \phi)$ . L'ampiezza  $Y$  e lo sfasamento  $\phi$  sono funzioni della frequenza.

#### 6.4.2 Formalizzazione Matematica

Preso un sistema dinamico arbitrariamente complesso, assunto che questo sia asintoticamente stabile (tutti i poli hanno parte reale negativa) si dà in ingresso un'armonica generica  $u(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ : quale sarà l'uscita del sistema?



Per calcolare l'uscita nel dominio di Laplace,  $Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \cdot \frac{s \cos(\phi) - \omega \sin(\phi)}{s^2 + \omega^2} X$ ; sviluppando in fratti semplici otteniamo due macro contributi: quello dell'ingresso e quello del sistema dinamico:  $Y(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + p_i}}_{\text{contributo n poli}} + \underbrace{\frac{k_\omega}{s - j\omega} + \frac{k_\omega^*}{s + j\omega}}_{\text{contributo ingresso}}$ .

Poiché il sistema è asintoticamente stabile è certo che, a fronte di un ingresso limitato, anche l'uscita sarà limitata (*BIBO*): il contributo dei poli dunque sarà evidente durante il transitorio, salvo poi tendere asintoticamente a zero al termine dello stesso, lasciando spazio al contributo dell'ingresso. Essendo interessati alla risposta a regime, possiamo trascurare completamente il calcolo dei residui relativi ai poli, dedicandoci unicamente a quelli relativi al contributo dell'ingresso:  $k_\omega = G(s) \cdot \frac{s \cos(\phi) - \omega \sin(\phi)}{s + j\omega} X \Big|_{s=j\omega}$ . Sviluppiamo i calcoli<sup>56</sup>:

$$G(j\omega) \cdot \frac{j\omega \cos(\phi) - \omega \sin(\phi)}{j\omega + j\omega} X = X G(j\omega) \cdot \frac{j \cos(\phi) - \sin(\phi)}{2j} = X G(j\omega) \left[ \frac{\cos(\phi) + j \sin(\phi)}{2} \right]; \text{ poiché, per le formule di Eulero } \cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}, \sin(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} \text{, } k_\omega \text{ risulta } X G(j\omega) \cdot \left( \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{4} + j \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{4j} \right) = X G(j\omega) \frac{2}{4} e^{j\phi} = X G(j\omega) \frac{e^{j\phi}}{2}.$$

Rappresentando  $G(j\omega)$  in forma esponenziale ( $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\arg\{G(j\omega)\}}$ ) il risultato precedente diventa  $\frac{X|G(j\omega)|}{2} e^{j(\phi + \arg\{G(j\omega)\})}$ .

Allora  $k_\omega$  è un numero complesso di modulo  $\frac{|X| |G(j\omega)|}{2}$  e fase  $\phi + \arg\{G(j\omega)\}$ . Prima di antitrasformare rimangono da determinare  $\sigma$  e  $\omega$ : osservando le radici si trova che  $\sigma = 0$ , mentre il valore di  $\omega$  rimane parametrizzato. Possiamo allora scrivere la risposta nel dominio del tempo:  $y_F(t) = 2 \cdot \frac{|X| |G(j\omega)|}{2} \cdot e^{0t} \cos(\omega t + \phi + \arg\{G(j\omega)\})$ ; posta  $\phi_y(\omega) = \phi + \arg\{G(j\omega)\}$ ,  $Y(\omega) = X |G(j\omega)|$ ,

$$y_F(t) = Y(\omega) \cos(\omega t + \phi_y(\omega)).$$

<sup>56</sup>Per ogni dubbio si faccia riferimento al paragrafo 4.4.2 e in particolare all'esempio a pagina 50.

Il significato di questa formula è il seguente:

Ogni sistema dinamico lineare tempo invariante asintoticamente stabile sollecitato da un ingresso sinusoidale risponde a regime con una uscita sinusoidale alla stessa frequenza della forzante e con una ampiezza e una fase che dipendono dalla frequenza (oltre che dalla ampiezza e fase della forzante).

Ricordiamo che nella formulazione della  $y_F(t)$  il modulo indica una eventuale amplificazione, o attenuazione, dell'uscita rispetto all'ingresso, mentre la fase mostra i rispettivi sfasamenti.

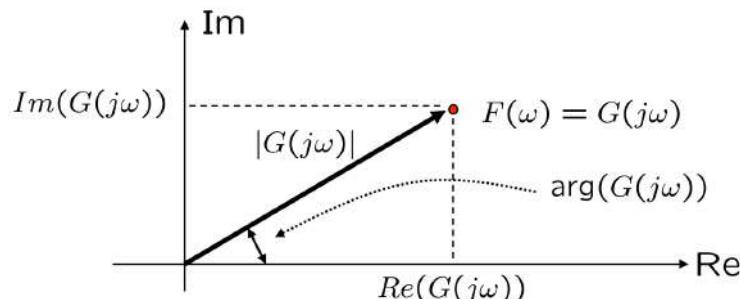
A questo punto, si definisce **funzione di risposta armonica** la

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j[\phi_y(\omega) - \phi]}$$

talche

$$F(\omega) = |G(j\omega)| e^{j\arg\{G(j\omega)\}}.$$

Essa è effettivamente una funzione complessa di variabile reale che descrive la relazione fra ingresso e uscita di un sistema dinamico attraverso i fattori amplificazione/attenuazione e sfasamento. Il suo modulo rappresenta intuitivamente la variazione dell'ampiezza, ed il suo argomento la variazione della fase; entrambe queste quantità sono indipendenti dall'ampiezza e fase del forzamento. La  $F(\omega)$  ha in un certo senso un contenuto informativo minore della corrispondente  $G$ , poiché descrive la funzione in riferimento a un solo valore di  $\omega$ , mentre la  $G$  dà una visione «complessiva» della funzione.



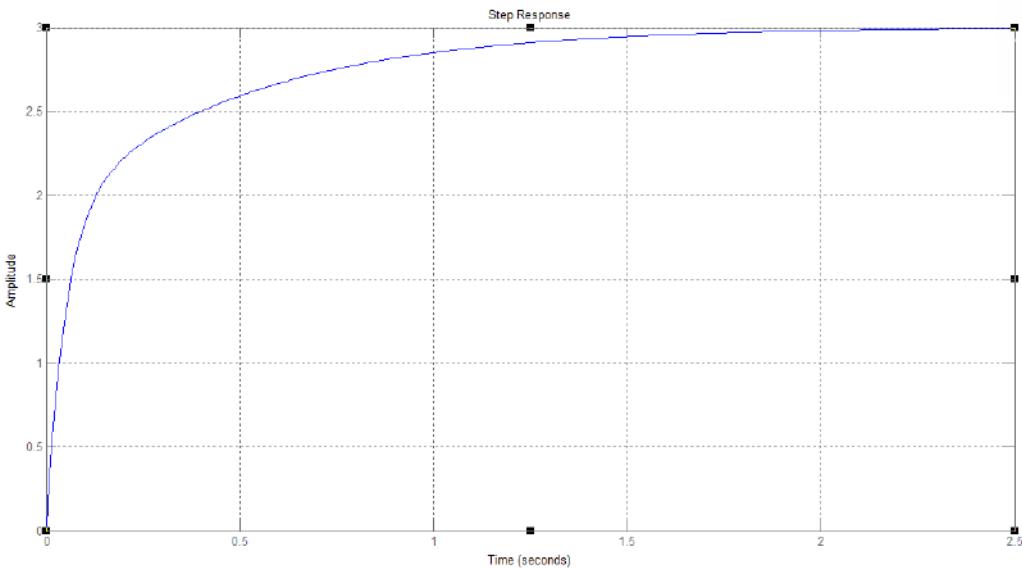
Alcune deduzioni banali che si possono trarre da questa figura sono le seguenti:

- La variazione del modulo corrisponde a un allontanamento, o un avvicinamento, all'origine degli assi: in base a questa variazione nella posizione del punto vi sarà una attenuazione o amplificazione dell'uscita, indipendentemente dalla pulsazione dell'armonica in ingresso.
- Similmente, la variazione dell'argomento di un punto nel piano di Gauss implicherà uno sfasamento, positivo o negativo, dell'uscita rispetto all'ingresso.

# Esercitazione 3

## Primo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



$$1. \ G(s) = \frac{40(s+3)}{(s+2)(s+20)}$$

$$2. \ G(s) = \frac{200(s+15)}{(s+10)(s+100)}$$

$$3. \ G(s) = \frac{90(s+2)}{(s+3)(s+20)}$$

$$4. \ G(s) = \frac{9}{(s+3)}$$

Cominciamo osservando che il guadagno statico della curva data è pari a tre: un rapido controllo su tutte e quattro le funzioni mostra che ciascuna di esse ha lo stesso valore di  $\mu$ , che quindi non è di alcun aiuto nel riconoscimento della funzione giusta.

Osservando le risposte proposte vediamo che tre di queste hanno due poli, mentre la quarta solo uno: dedurre dalla curva proposta il grado relativo sarebbe a questo punto molto utile per escludere almeno una delle funzioni. Prendendo quindi la quarta funzione (grado relativo unitario), calcoliamo il tempo di assestamento all' 1%:  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{3} \approx 1.5s$  è un valore compatibile con quello del grafico, tuttavia questa funzione viene scartata ugualmente perché  $y(\tau)$  non corrisponde al 63% del valore finale  $\mu k$  (caratteristica fondamentale dei sistemi del primo ordine).

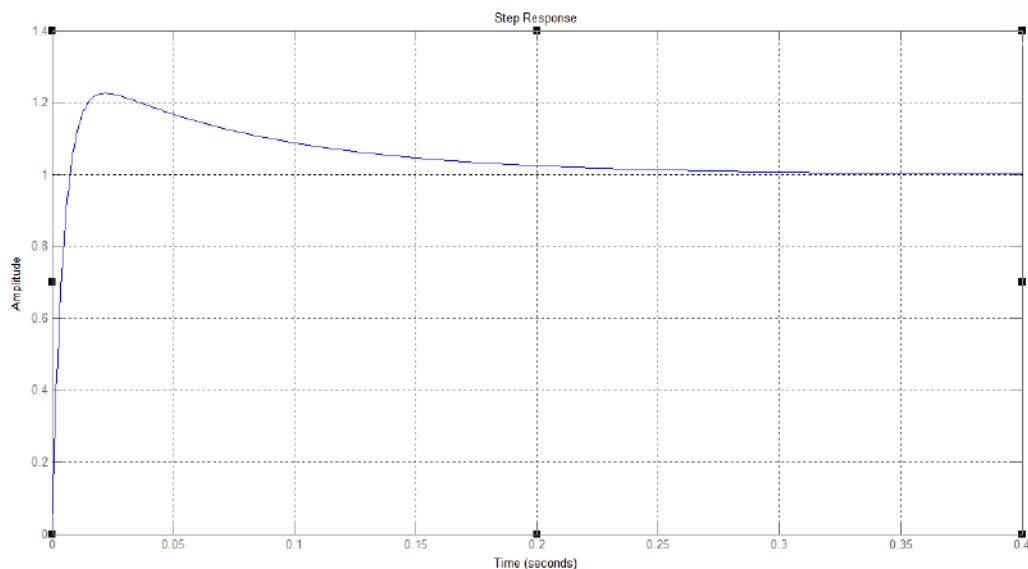
Osservando meglio l'andamento della curva possiamo notare allora che la crescita iniziale è repentina, fino ad un punto in cui però diminuisce notevolmente: è possibile quindi che si tratti di un caso di doppia dinamica, e in particolare di quasi cancellazione da sinistra.

A questo punto non resta che osservare le tre funzioni rimanenti e cercare quella con la corretta configurazione poli - zeri: a questo proposito, la terza funzione viene scartata in quanto si tratta di quasi cancellazione da destra. Per decidere fra le due funzioni rimanenti calcolo il tempo di assestamento di ciascuna, identificando preliminarmente il polo dominante ( $\tau = \frac{1}{2}$  per la prima,  $\tau = \frac{1}{10}$  per la seconda).

Risultano rispettivamente  $T_{ass\ 1\%} \approx 2.3s$  e  $T_{ass\ 1\%} \approx 0.5s$ , da cui è evidente che la funzione corrispondente alla curva data è la prima.

## Secondo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



$$1. G(s) = \frac{154(s+13)}{(s+200)(s+10)}$$

$$2. G(s) = \frac{260(s+10)}{(s+200)(s+13)}$$

$$3. G(s) = \frac{26(s+1)}{(s+20)(s+1.3)}$$

$$4. G(s) = \frac{1600}{s^2 + 40s + 1600}$$

Anche in questo caso si comincia osservando la curva data: dal momento che non è presente alcun tipo di oscillazione, la quarta funzione proposta è scartata. Vediamo poi che questo caso è simile, in una certa misura, a quello visto nell'esercizio precedente: abbiamo infatti una crescita molto repentina che sale superando il valore di regime, salvo poi convergere a questo dall'alto tramite una coda di assestamento. Da questo andamento capiamo di dover cercare nelle funzioni proposte una quasi cancellazione da destra.

Nella prima, il polo dominante si trova più vicino all'origine dello zero: non è il caso in cui ci troviamo e per questo scartiamo questa opzione.

Passando poi alla seconda si può notare che questa rispetta questo vincolo (zero più vicino all'origine del polo dominante) e per questo motivo rimane fra quelle valide.

Infine anche la terza proposta rispetta questo vincolo, e si decide perciò di calcolare il tempo di assestamento come ulteriore fattore di confronto:  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{1.3} \approx 3.5\text{s}$ , che è decisamente troppo grande.

Rimane quindi la seconda funzione proposta: per corroborare la sua scelta ne calcoliamo il tempo di assestamento:  $T_{ass\ 1\%} = \frac{4.6}{13} \approx 0.3\text{s}$ , che corrisponde a quello mostrato in figura.

LEZIONE 15

DATA: 22/10/2015

## 6.5 Teorema del Regime Permanente

È la formalizzazione di quanto descritto precedentemente, e riguarda pertanto la funzione di risposta armonica.

Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta avente i poli a parte reale negativa soggetto ad eccitazione sinusoidale presenta, *a regime*, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione. La funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  è legata alla funzione di trasferimento  $G(s)$  dalla relazione  $F(\omega) = G(j\omega)$ <sup>57</sup><sup>58</sup>.

Si portano ora alcuni esempi in Matlab per spiegare meglio i concetti introdotti.

```
s=tf('s');
g1=1/(s+1);
g2=1/(s^2+0.1*s+1);
t=0:0.1:100;
omega=0.5;
u=sin(omega*t);
g=g1;
y=lsim(g,u,t);
plot(t,y,'blue',t,u,'green')
```

Il primo comando serve per definire una funzione di trasferimento nel dominio di Laplace; è già stato visto, ma con una signature diversa, e per questo motivo si riporta di seguito la spiegazione fornita dalla documentazione Matlab al riguardo:

«You can also use real- or complex-valued rational expressions to create a TF model. To do so, first type either:

$s = \text{tf}(s)$  to specify a TF model using a rational function in the Laplace variable, s.

$z = \text{tf}'(z', Ts)$  to specify a TF model with sample time  $Ts$  using a rational function in the discrete-time variable, z.

Once you specify either of these variables, you can specify TF models directly as rational expressions in the variable s or z by entering your transfer function as a rational expression in either s or z.»

<sup>57</sup>Non dirlo all'esame, concettualmente non va bene.

<sup>58</sup>A proposito, si consiglia la lettura delle pagine web [https://it.wikipedia.org/wiki/Risposta\\_in\\_frequenza](https://it.wikipedia.org/wiki/Risposta_in_frequenza) e [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_di\\_trasferimento](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_di_trasferimento)

Il caso da noi preso in esame è chiaramente il primo.

Successivamente abbiamo la definizione di un vettore dei tempi che va da zero a cento per mezzo di scatti di ampiezza 0.1, seguita dalla definizione della pulsazione della funzione in ingresso<sup>59</sup>. Sempre la documentazione Matlab chiarisce l'utilizzo della funzione *lsim(sys,u,t)*:

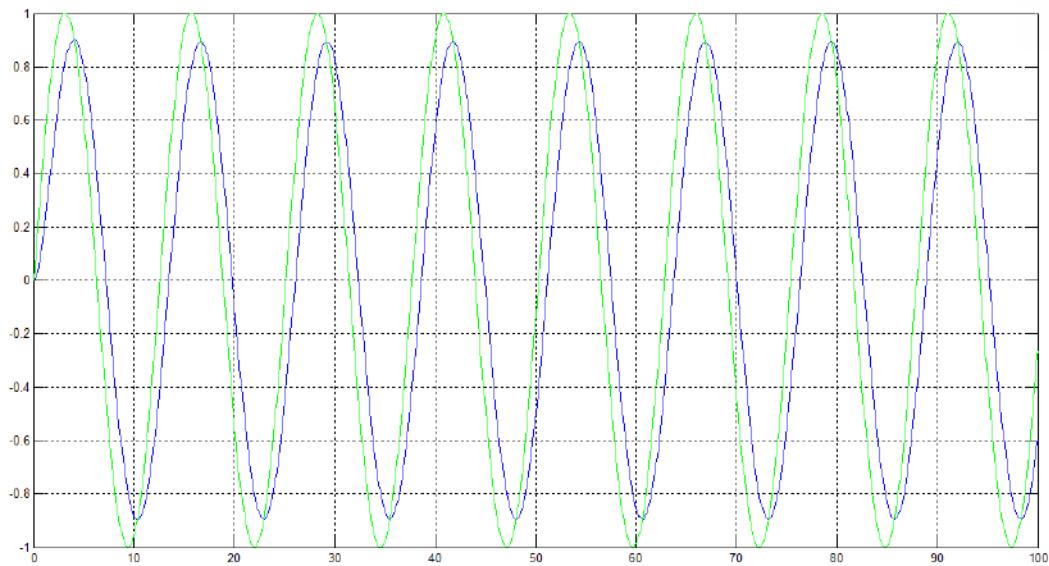
«*lsim* simulates the (time) response of continuous or discrete linear systems to arbitrary inputs. When invoked without left-hand arguments, *lsim* plots the response on the screen.

*lsim(sys,u,t)* produces a plot of the time response of the dynamic system model *sys* to the input history, *t,u*. The vector *t* specifies the time samples for the simulation (in system time units, specified in the *TimeUnit* property of *sys*), and consists of regularly spaced time samples:

$$t = 0:dt:T_{final}$$

The input *u* is an array having as many rows as time samples (*length(t)*) and as many columns as system inputs. For instance, if *sys* is a SISO system, then *u* is a *t*-by-1 vector.»

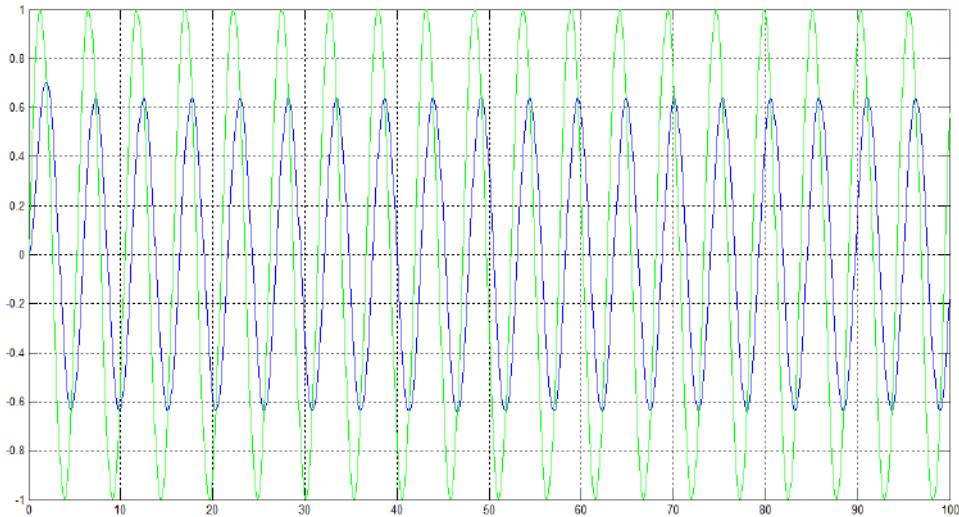
L'output di questo file comandi è il seguente:



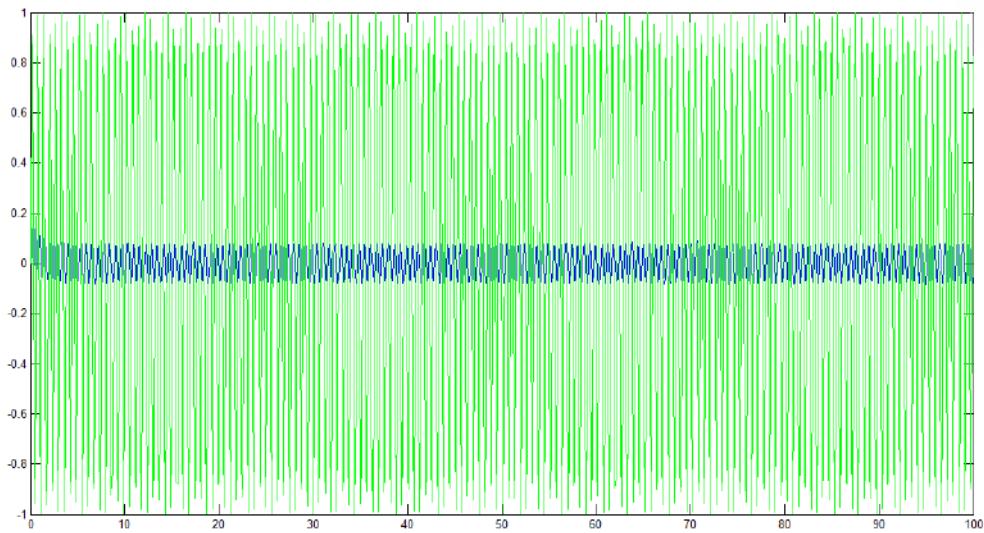
In verde abbiamo rappresentato l'ingresso, in blu l'uscita del sistema: vediamo che le due curve hanno la stessa pulsazione, ampiezza diversa (l'ingresso ha ampiezza unitaria, l'uscita è leggermente attenuata) e anche fase diversa (è infatti visibile uno sfasamento fra le due curve). Queste osservazioni sono comprovate dal fatto che  $|G(j\omega)| < 1$ .

Si modifica ora il sistema dato inserendo *omega=1.2*, con il seguente risultato:

<sup>59</sup>Si fa notare che anche *u* è un vettore di diecimila elementi.



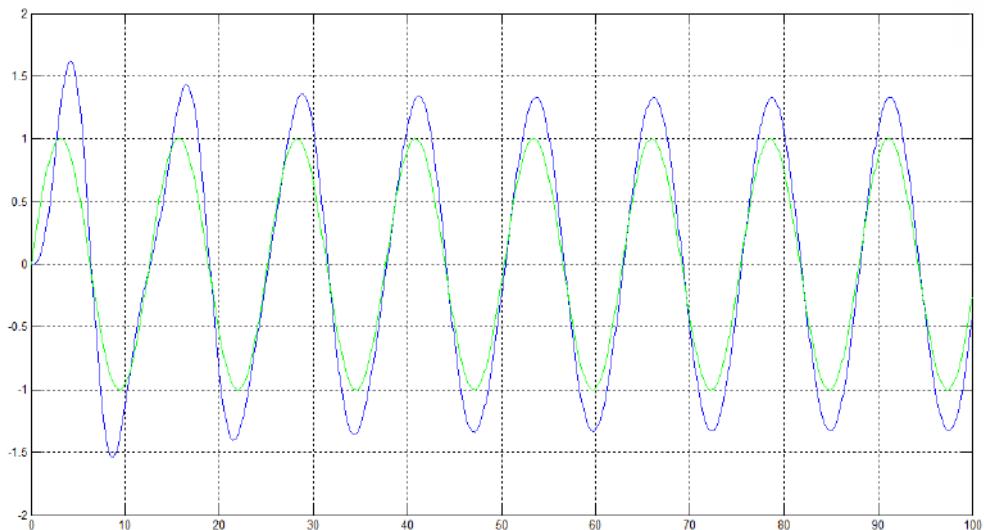
La pulsazione è costante fra ingresso e uscita, ma vi è una variazione consistente per quanto riguarda l'ampiezza - l'uscita è molto smorzata - e anche lo sfasamento aumenta leggermente. Si prova, come ultimo caso, quello in cui  $\omega=10$ . Tale valore è chiaramente esagerato, e la sua scelta è dovuta a motivi didattici: attraverso questo grafico possiamo mostrare chiaramente come  $\omega$  influisca sull'attenuazione dell'uscita rispetto all'ingresso. Anche lo sfasamento cambia.



È possibile infine sintetizzare il comportamento del sistema:

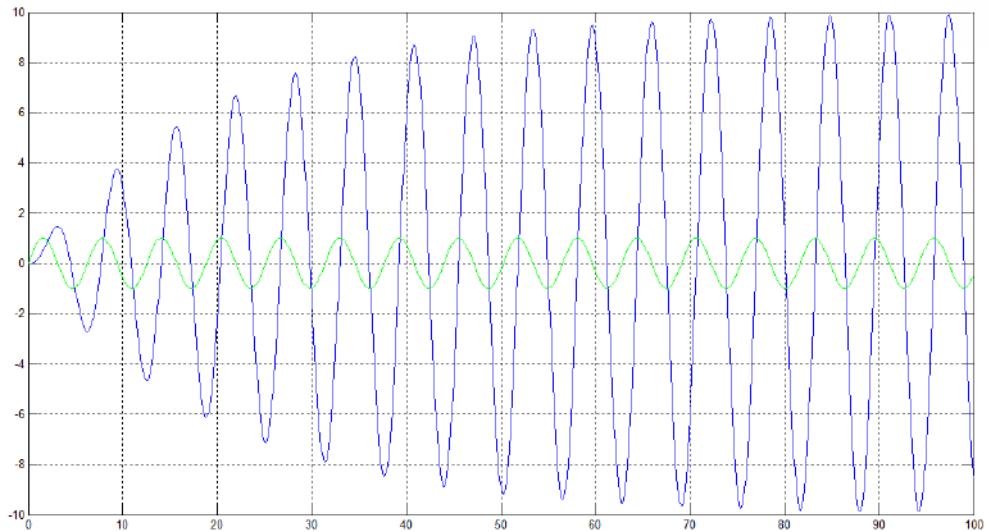
- A frequenze basse non vi è quasi differenza fra ingresso e uscita: il sistema lascia passare il segnale inserendo pochissime variazioni fra le due.
- A frequenze alte l'uscita è molto ridotta rispetto all'ingresso, quasi come se scomparisse.

Si cambia ora sistema di riferimento, ponendo  $g=g/2$  e  $\omega=0.5$ . La risposta del sistema è la seguente:



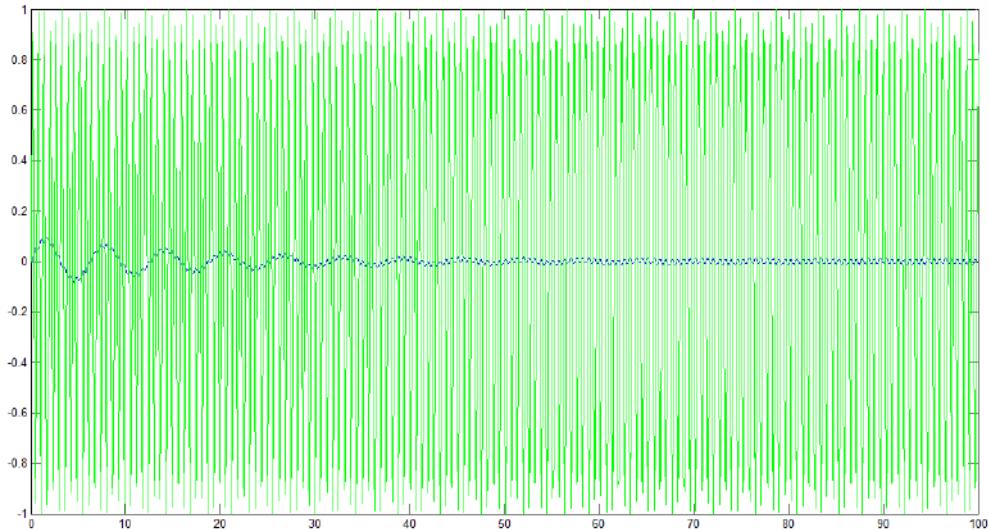
Anche in questo caso è plottata in verde l'armonica in ingresso; tuttavia il sistema reagisce amplificando il segnale, come possiamo vedere dalla curva blu - rappresentante l'uscita - che ha ampiezza maggiore di quella verde. Lo sfasamento è diverso da quello dato dal sistema  $g1$ , ma nel complesso lo sfasamento fra ingresso e uscita è poco rilevante.

Seguendo lo stesso percorso, si modifica la pulsazione del segnale in ingresso, aumentandola:  $\omega=1$ .



In questo grafico è ben visibile il transitorio dell'uscita, durante il quale si ha un aumento progressivo dell'ampiezza. È però nel nostro interesse solamente la risposta a regime, dalla quale si evince che a fronte di un'armonica in ingresso con ampiezza unitaria, il sistema risponde con un'armonica di pari frequenza e ampiezza circa decuplicata. Anche lo sfasamento fra le due comincia a essere consistente.

Volendo aumentare ancora la pulsazione, poniamo  $\omega=10$ , con il seguente risultato:



La curva rappresentante l'uscita è, a regime, fortemente attenuata rispetto all'ampiezza dell'armonica in ingresso. Come si può intuire, questo andamento della risposta al variare della pulsazione è collegato al concetto di risonanza, e ne parleremo più ampiamente in seguito (seppure il concetto sia già stato introdotto nel paragrafo 4.5.1.1).

Il motivo di questi esempi in Matlab è quello di mostrare come sia possibile identificare le variazioni di ampiezza e fase fra ingresso e uscita di un sistema quando non si conoscono i suoi zeri né i suoi poli, tanto meno il modello matematico; l'unica ipotesi da fare è che il sistema sia asintoticamente stabile. Ciò è possibile attraverso tentativi nei quali si forzano in ingresso armoniche con diverse pulsazioni: attraverso lo studio dei dati raccolti da tutte le uscite è quindi possibile dedurre quanto detto.

Se il sistema fosse instabile, l'uscita sarebbe descritta dalla formula vista all'inizio del paragrafo 6.4.2: non sarebbe più possibile trascurare però i termini relativi all'ingresso presenti durante il transitorio.

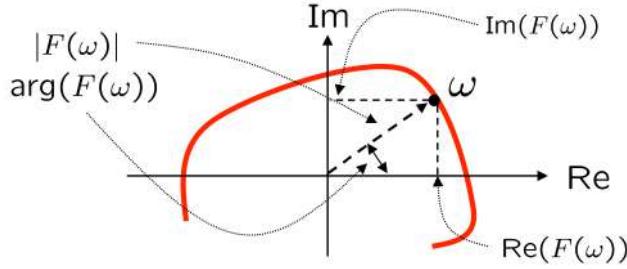
## 6.6 Rappresentazione Grafica della Risposta Armonica: Diagrammi di Bode

Esistono dei metodi di rappresentazione della risposta armonica che permettono di vedere a colpo d'occhio quali siano l'ampiezza e la fase dell'armonica rappresentata? Vi sono in effetti tre possibili rappresentazioni che soddisfano questo requisito:

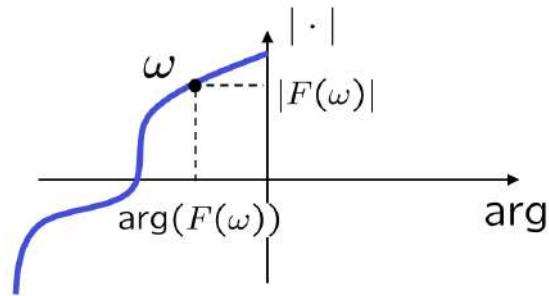
- Diagrammi di Bode;
- Diagramma di Nyquist;
- Diagramma di Nichols.

Cominciamo descrivendo il primo: i diagrammi di Bode sono appunto due grafici, rappresentanti rispettivamente  $|F(\omega)|$ ,  $\forall \omega \in [0, \infty]$  e  $\arg\{F(\omega)\}$ , nello stesso dominio del precedente.

Diversamente, il diagramma di Nyquist rappresenta l'andamento di  $\omega$  nel piano di Gauss, all'interno del quale si muove il vettore di modulo  $|F(\omega)|$  e argomento  $\arg\{F(\omega)\}$ .



Infine, il diagramma di Nichols ha sull'asse delle ascisse  $\arg \{F(\omega)\}$ , su quello delle ordinate  $|F(\omega)|$ . Per ogni  $\omega$  scelta il sistema dà in uscita una diversa armonica: l'incrocio dei rispettivi valori di modulo e fase individuerà un punto sul piano; una volta effettuati sufficienti tentativi, l'insieme dei punti darà una curva che descrive l'andamento della pulsazione in funzione del modulo e della fase dell'armonica.



Durante questo corso si farà uso unicamente dei diagrammi di Bode. Proseguiamo di seguito con una spiegazione su come tracciare questi grafici.

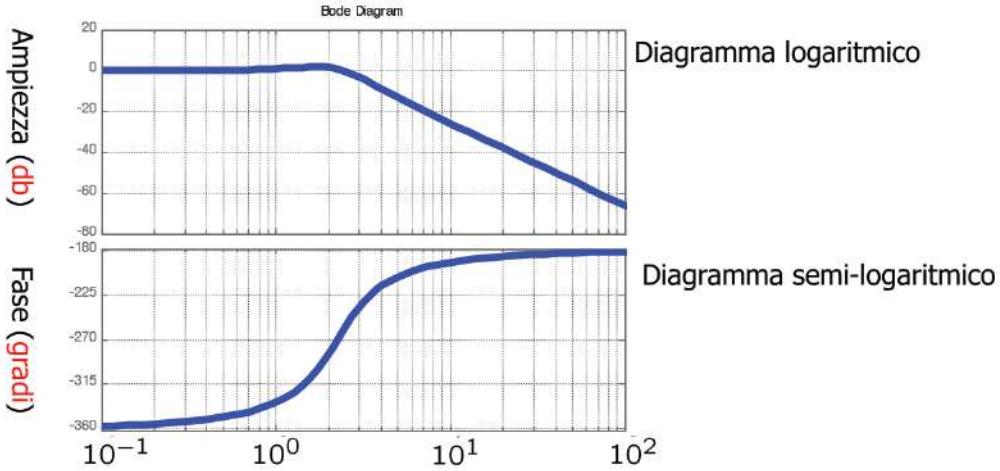
$$\text{Si prenda una generica } G(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_k (1+T_k s) \prod_i \left(1+2\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{1}{\alpha_{n,i}^2} s^2\right)}{\prod_k (1+\tau_k s) \prod_i \left(1+2\frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} s + \frac{1}{\omega_{m,i}^2} s^2\right)}, \text{ della quale si calcola la}$$

$$F(\omega) = G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \cdot \frac{\prod_k (1+T_k j\omega) \prod_i \left(1+2\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} j\omega + \frac{1}{\alpha_{n,i}^2} (j\omega)^2\right)}{\prod_k (1+\tau_k j\omega) \prod_i \left(1+2\frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} j\omega + \frac{1}{\omega_{m,i}^2} (j\omega)^2\right)}.$$

Di questa formulazione si analizzeranno in particolare quattro aspetti (che presentiamo a coppie per organicità):

- $\frac{\mu}{(j\omega)^g}$ , cioè il guadagno statico e le coppie poli/zeri nell'origine;
- $\frac{\prod_k (1+T_k j\omega) \prod_i \left(1+2\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} j\omega + \frac{1}{\alpha_{n,i}^2} (j\omega)^2\right)}{\prod_k (1+\tau_k j\omega) \prod_i \left(1+2\frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} j\omega + \frac{1}{\omega_{m,i}^2} (j\omega)^2\right)}$ , cioè le (altre) coppie poli/zeri, reali e complessi coniugati.

Poiché la scala utilizzata per la rappresentazione dei moduli nei diagrammi di Bode è di tipo logaritmico, si interrompe brevemente il filo del discorso per inserire un piccolo ripasso su numeri complessi e logaritmi, al fine di acquisire familiarità con questa scala (*decibel*, dB). La scelta di una scala di tipo logaritmico è dovuta alla necessità di rappresentare in dettaglio grandezze che variano in campi molto estesi.



**Richiamo.** Per quanto riguarda i numeri complessi,

$$\begin{aligned} |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\ \arg \{a \cdot b\} &= \arg \{a\} + \arg \{b\} \\ \arg \left\{ \frac{a}{b} \right\} &= \arg \{a\} - \arg \{b\} \\ \arg \{a^k\} &= k \arg \{a\}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda invece i logaritmi,

$$\begin{aligned} \log(|a| \cdot |b|) &= \log(|a|) + \log(|b|) \\ \log \left( \frac{|a|}{|b|} \right) &= \log(|a|) - \log(|b|) \\ \log(|a|^k) &= k \log(|a|). \end{aligned}$$

Dati quindi  $(a, \dots, d)$  complessi e  $(k, \dots, q)$  interi si ha che:

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{a \cdots b^k}{c \cdots d^q} \right) &= \log(|a|) + \cdots + k \log(|b|) - \log(|c|) - \cdots - q \log(|d|); \\ \arg \left\{ \frac{a \cdots b^k}{c \cdots d^q} \right\} &= \arg \{a\} + \cdots + k \arg \{b\} - \arg \{c\} - \cdots - q \arg \{d\}. \end{aligned}$$

Si applicano queste proprietà alla  $F(\omega)$ :

- $\log \{F(\omega)\} = \log(|\mu|) - g \log(|j\omega|) + \sum_i \log(|1 + jT_k \omega|) + \sum_i \log \left( \left| 1 + 2\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} j - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right| \right) - \sum_i \log(|1 + j\tau_k \omega|) - \sum_i \log \left( \left| 1 + 2\delta_i \frac{\omega}{\omega_{m,i}} j - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2} \right| \right);$
- $\arg \{F(\omega)\} = \arg \{\mu\} + g \arg \{j\omega\} + \sum_i \arg \{1 + jT_k \omega\} + \sum_i \arg \left\{ 1 + 2\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} j - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right\} - \sum_i \arg \{1 + j\tau_k \omega\} - \sum_i \arg \left\{ 1 + 2\delta_i \frac{\omega}{\omega_{m,i}} j - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2} \right\};$

Queste proprietà permettono quindi la semplificazione di operazioni complesse in una somma di fattori elementari. Un paio di ulteriori semplificazioni dipendono dai seguenti accorgimenti:

- I contributi dei poli si ottengono da quelli degli zeri attraverso un cambio di segno (ribaltamento attorno all'asse delle ascisse).
- I contributi di poli/zeri multipli si ottengono da quelli a molteplicità singola moltiplicando per la molteplicità.

### Come avviene la conversione in dB?

Data una funzione  $F$ , il suo modulo si converte in dB attraverso la formula

$$|F|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(|F|)$$

Come regola generale si ha

$$|F| < 1 \Rightarrow |F|_{\text{dB}} < 0$$

$$|F| > 1 \Rightarrow |F|_{\text{dB}} > 0$$

dove alcuni casi particolari sono i seguenti:

- $|F| = 1 \Rightarrow |F|_{\text{dB}} = 0$ , indicando che non c'è amplificazione né attenuazione.
- $|F| \rightarrow 0 \Rightarrow |F|_{\text{dB}} \rightarrow -\infty$  è il caso in cui vi è annullamento della funzione in uscita.

Per quanto riguarda invece gli argomenti, dal momento che la loro rappresentazione avviene in gradi, non vi è bisogno di alcun accorgimento specifico.

Per plottare il diagramma di Bode in Matlab esiste la funzione *bode(sys)*, della quale si riportano diverse signature in quanto utili durante tutto l'arco del corso. Per ulteriori informazioni si rimanda alla documentazione Matlab.

*«bode(sys)* creates a Bode plot of the frequency response of a dynamic system model *sys*. The plot displays the magnitude (in dB) and phase (in degrees) of the system response as a function of frequency. [...]»

*bode(sys1,...,sysN)* plots the frequency response of multiple dynamic systems in a single figure. All systems must have the same number of inputs and outputs.

*bode(sys1,PlotStyle1,...,sysN,PlotStyleN)* plots system responses using the color, linestyle, and markers specified by the PlotStyle strings. [...]

*[mag,phase] = bode(sys,w)* returns magnitudes *mag* in absolute units and phase values *phase* in degrees. The response values in *mag* and *phase* correspond to the frequencies specified by *w* as follows:

-If *w* is a cell array {*wmin*,*wmax*}, *[mag,phase] = bode(sys,w)* returns the system response at frequency values in the range {*wmin*,*wmax*}.

-If *w* is a vector of frequencies, *[mag,phase] = bode(sys,w)* returns the system response at each of the frequencies specified in *w*.

*[mag,phase,wout] = bode(sys)* returns magnitudes, phase values, and frequency values *wout* corresponding to *bode(sys)*.»

Presentiamo di seguito alcuni «pattern» relativi ai quattro fattori di interesse all'interno di  $F(\omega)$ .

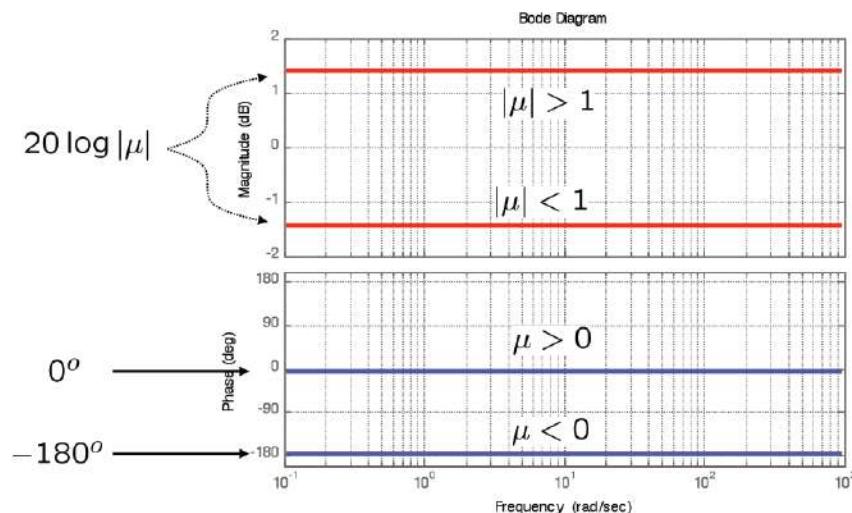
### 6.6.1 Diagramma del Guadagno Statico

Per il modulo risulta

$$|\mu|_{dB} = \begin{cases} > 0 & |\mu| > 1 \\ = 0 & |\mu| = 1 \\ < 0 & |\mu| < 1 \end{cases}$$

mentre per l'argomento

$$\arg \{\mu\} = \begin{cases} 0^\circ & \mu > 0 \\ -180^\circ & \mu < 0 \end{cases}$$



### 6.6.2 Diagramma di uno Zero nell'Origine

Abbiamo  $G(s) = s$ , da cui  $F(\omega) = j\omega$ . Allora per il modulo risulta

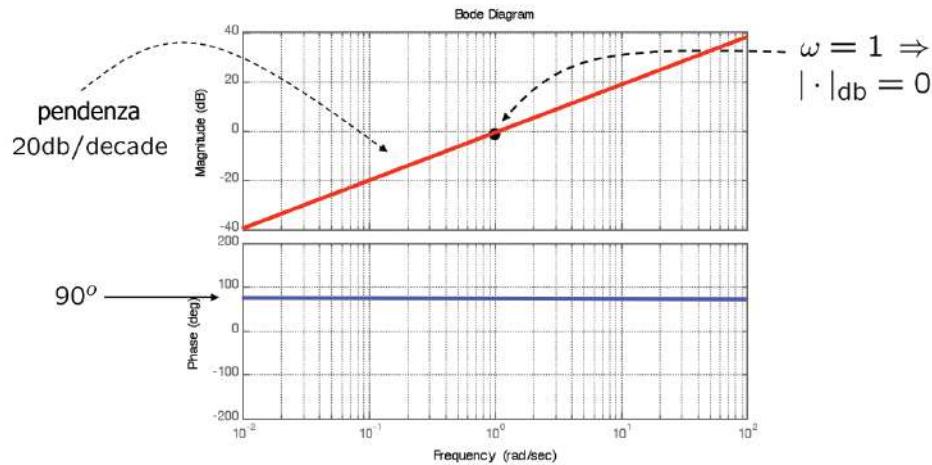
$$20 \log \{|j\omega|\} = 20 \log \left\{ \sqrt{\omega^2} \right\} = 20 \log (\omega)$$

mentre per l'argomento

$$\arg \{j\omega\} = \arctan \left( \frac{\omega}{0} \right) = \arctan (\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

---

<sup>60</sup>La fase viene presa negativa perché per convenzione il sistema introduce un ritardo sull'uscita, piuttosto che un'anticipazione.



Questo andamento nel diagramma dei moduli mostra che per ogni incremento di ordine di grandezza vi è un aumento di pendenza pari a 20dB.

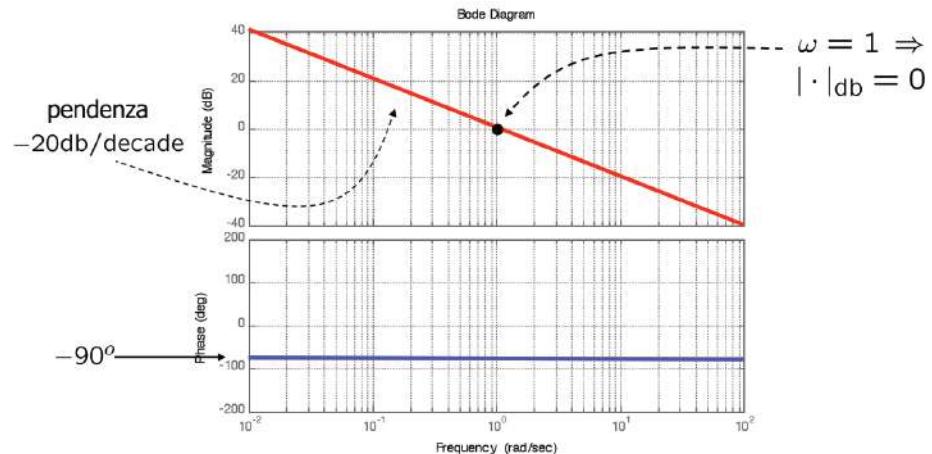
### 6.6.3 Diagramma di un Polo nell'Origine

Come precedentemente detto, i contributi degli zeri e dei poli sono speculari, cioè uguali a meno del segno. Si parte da  $G(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow F(\omega) = G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$  per il modulo risulta infatti

$$20 \log \left\{ \left| \frac{1}{j\omega} \right| \right\} = 20 \log (1) - 20 \log (|j\omega|) = -20 \log \left\{ \sqrt{\omega^2} \right\} = -20 \log (\omega)$$

mentre per l'argomento

$$\arg \left\{ \frac{1}{j\omega} \right\} = \arg \{1\} - \arg \{j\omega\} = \arctan (0) - \arctan \left( \frac{\omega}{0} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

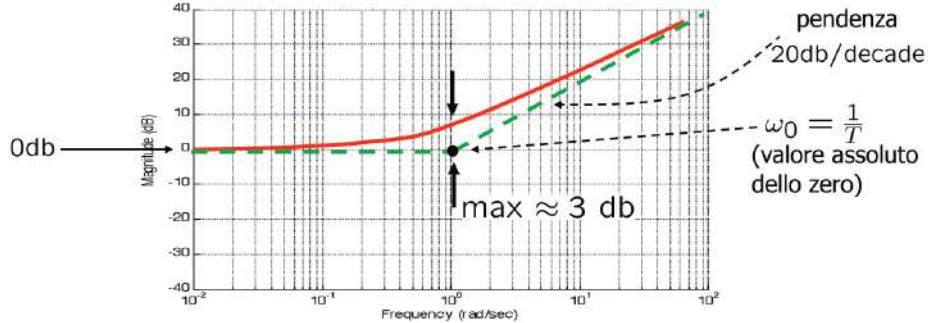


### 6.6.4 Diagramma di uno Zero Reale

Si parte da una generica  $G(s) = 1 + Ts$ , da cui otteniamo  $F(\omega) = G(j\omega) = 1 + jT\omega$ . Per il modulo risulta

$$20 \log \{ |1 + jT\omega| \} = 20 \log \{ \sqrt{1 + T^2\omega^2} \}^{61} \approx$$

$$\begin{cases} 20 \log (1) = 0 & \omega \ll \frac{1}{|T|} \\ 20 \log \{ |T| \omega \} = 20 \log (\omega) - 20 \log \left( \frac{1}{|T|} \right) & \omega \gg \frac{1}{|T|} \end{cases}$$



Si è scelto di indicare con una linea tratteggiata il grafico approssimato, con una linea continua la curva reale; in generale ci limiteremo a tracciare diagrammi con linee spezzate (dette *curve asintotiche*), anche se questo implica l'introduzione di un piccolo errore di approssimazione. Da questo grafico si nota che l'inclinazione della curva cambia al variare di  $\omega$ , seguendo in ogni caso il «pattern» per le pendenze descritto fino ad ora.

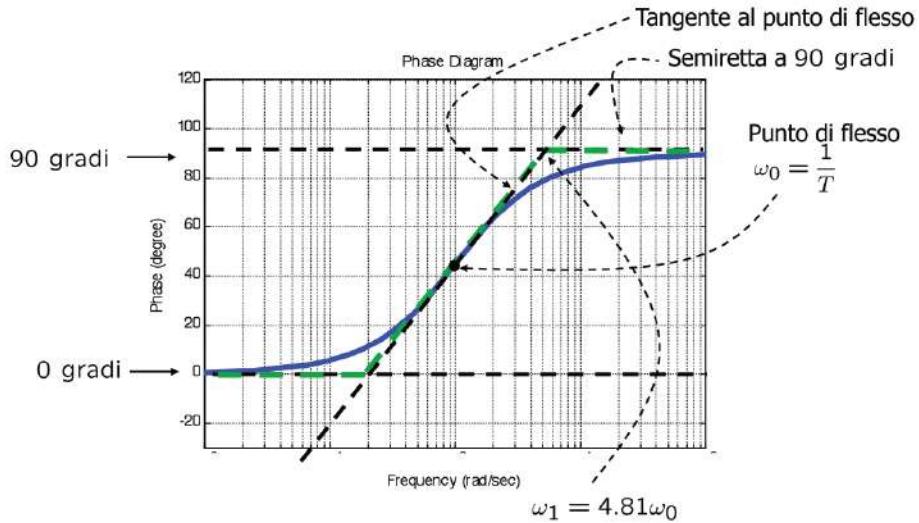
Nel punto di intersezione con l'asse 0dB si ha  $\omega = \frac{1}{T}$ : questo punto avrà sempre una notevole rilevanza, e quel valore delle  $\omega$  verrà detto **pulsazione di rottura**. Come si può quindi dedurre, la posizione dello zero influenza il valore di  $\omega$ , mentre il segno della  $T$  non ha invece alcuna influenza (non importa se la parte reale positiva o meno); questa particolarità si avrà anche per i poli. La posizione dello zero fa in sostanza da «spartiacque» fra due andamenti diversi del grafico, ed è in questo senso che vanno intese le indicazioni  $\omega \ll \frac{1}{|T|}$ ,  $\omega \gg \frac{1}{|T|}$ . Si fa notare infine che la massima distanza esistente fra la rappresentazione asintotica e l'andamento reale si ha per  $\omega = \frac{1}{|T|}$  e vale circa 3dB.

Per la fase invece è necessario considerare due casi separati a seconda del valore della costante di tempo  $T$ . Per  $T > 0$ , cioè zero a parte reale negativa,

$$\arg \{ 1 + jT\omega \} = \arctan \left( \frac{T\omega}{1} \right) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{T} \\ \frac{\pi}{2} & \omega \gg \frac{1}{T} \end{cases}$$

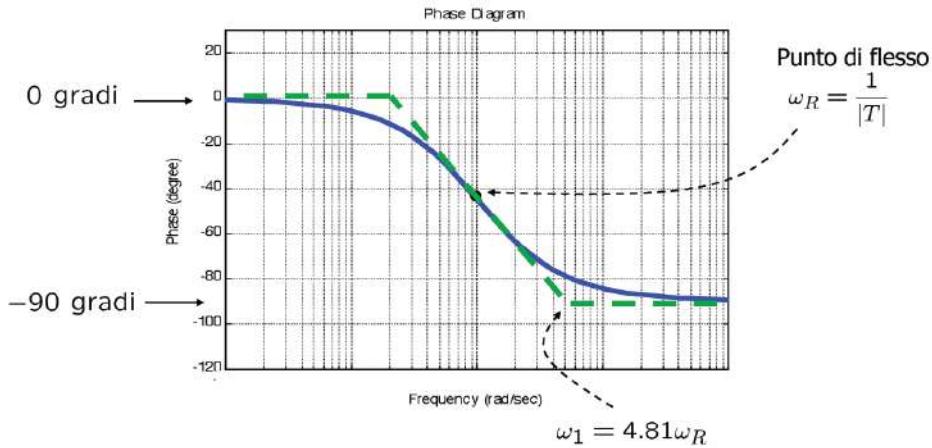
---

<sup>61</sup>Si ricorda che dato  $z = a + jb$ ,  $|z| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}$ .



Il comportamento della curva fra il valori  $0^\circ$  e  $180^\circ$  è frutto di un'approssimazione.  
Quando invece  $T < 0$ ,

$$\arg \{1 + jT\omega\} = \arctan \left( \frac{T\omega}{1} \right) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|T|} \\ -\frac{\pi}{2} & \omega \gg \frac{1}{|T|} \end{cases}$$



### 6.6.5 Diagramma di un Polo Reale

La costruzione di questi diagrammi segue gli stessi schemi di quelli illustrati per gli zeri, a meno del segno.

Presa  $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ , da cui otteniamo  $F(\omega) = G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega}$ . Per il modulo risulta

$$20 \log \left\{ \left| \frac{1}{1+j\tau\omega} \right| \right\} = -20 \log \left\{ \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \right\} \approx$$

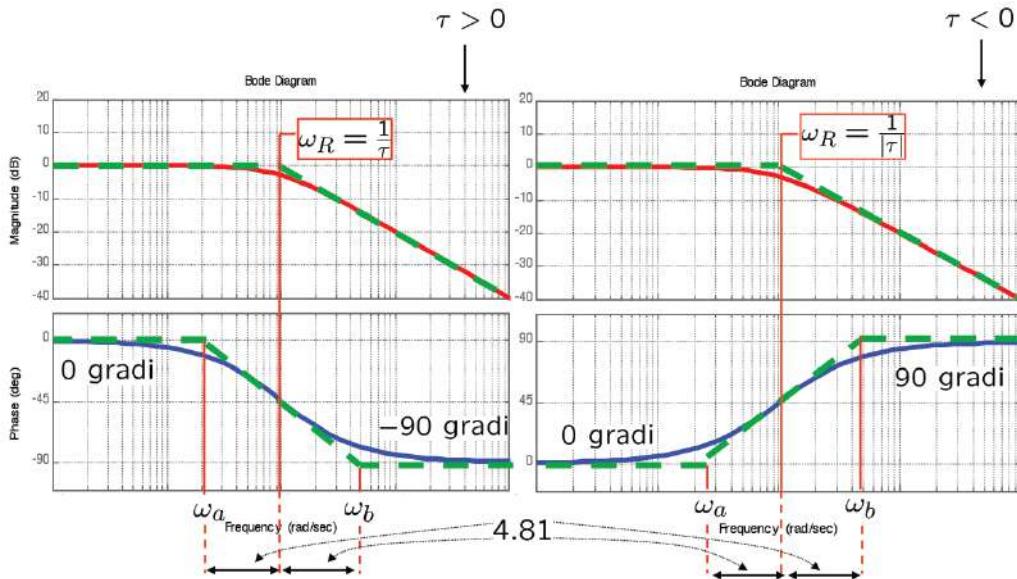
$$\begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \{ |\tau| \omega \} = 20 \log(\omega) - 20 \log \left( \frac{1}{|\tau|} \right) & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

mentre per la fase invece è necessario considerare due casi separati a seconda del valore della costante di tempo  $\tau$ . Per  $\tau > 0$ , cioè polo a parte reale negativa,

$$-\arg\{1 + j\tau\omega\} = -\arctan\left(\frac{\tau\omega}{1}\right) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ -\frac{\pi}{2} & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

Quando invece  $\tau < 0$ ,

$$-\arg\{1 + j\tau\omega\} = -\arctan\left(\frac{\tau\omega}{1}\right) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ \frac{\pi}{2} & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}.$$



Detta  $\omega_R$  la pulsazione di rottura, si ha che i cambiamenti di pendenza nei diagrammi asintotici avvengono alle pulsazioni  $\omega_b = 4.81\omega_R$  e  $\omega_a = \frac{\omega_R}{4.81}$ . Il valore «4.81» indica operativamente dove la curva comincia a crescere (e dove termina la sua crescita) rispetto alla pulsazione di rottura - in parole povere, «quanto prima» e «quanto dopo» quel valore.

Si ricorda il significato fisico, per quanto riguarda il diagramma dei moduli, della retta sul valore 0dB: si ha questo risultato quando il modulo della  $F$  è unitario, il che significa che l'armonica in ingresso viene «passata» in uscita senza alcun tipo di cambiamento (qui, per le  $\omega < \omega_R$ ). Quando la retta invece ha pendenza negativa si ha un'attenuazione forte da parte del sistema.

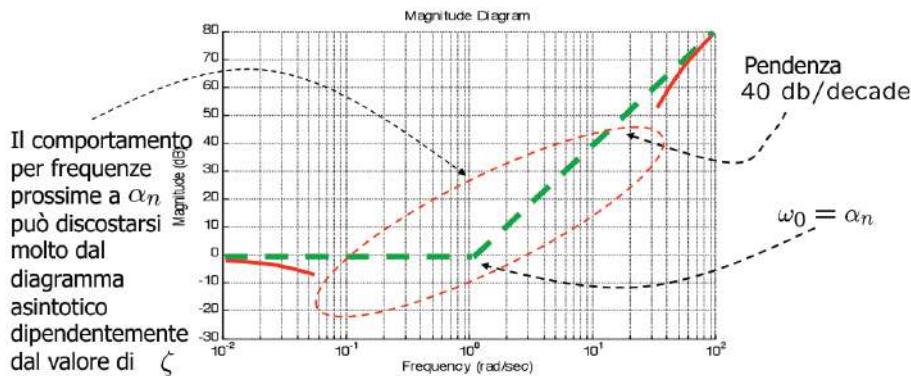
Considerando poi il diagramma delle fasi, possiamo dire nel complesso che per quanto riguarda gli zeri, questo si muove in un range di valori che va da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ ; diversamente, per il poli il range è compreso fra i  $-90^\circ$  e gli  $0^\circ$ . Questo avviene solo, però, per poli asintoticamente stabili! Se scegliessimo invece poli instabili (invalidando l'ipotesi iniziale del teorema del regime permanente) il diagramma dei moduli rimarrebbe invariato, mentre gli intervalli di appartenenza dei diagrammi delle fasi verrebbero invertiti.

### 6.6.6 Diagramma di Zeri Complessi Coniugati

Si consideri una  $G(s) = 1 + 2\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}}s + \frac{1}{\alpha_{n,i}^2}s^2$  e se ne calcoli la funzione di risposta armonica  $F(\omega) = G(j\omega) = G(s) = 1 + 2j\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}}\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2}$ . Per il modulo risulta:

$$20 \log \left\{ \left| 1 + 2j\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}}\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right| \right\} = 20 \log \left\{ \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right)^2 + \left( 2j\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}}\omega \right)^2} \right\} \approx$$

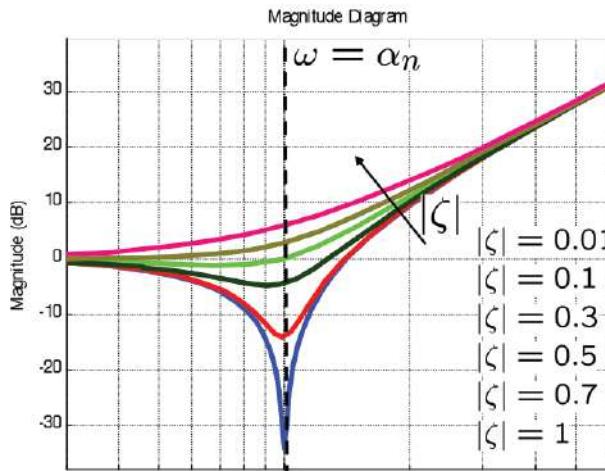
$$\begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \left\{ \left( \frac{\omega}{\alpha_n} \right)^2 \right\} = 40 \log(\omega) - 40 \log(\alpha_n) & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



Anche in questo caso, il valore «spartiacque» è  $\alpha_n$ , che porremo quindi uguale alla pulsazione  $\omega_0$  (approfondiremo poi come questa pulsazione coincida con quella di risonanza). La pendenza doppia rispetto agli zeri reali è dovuta alla presenza di due zeri - appunto, quello complesso e il suo coniugato. Vediamo come può variare il grafico nei pressi di  $\alpha_n$  a seconda del valore di  $\zeta$ .

Facendo la derivata di  $20 \log \left\{ \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right)^2 + \left( 2j\frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}}\omega \right)^2} \right\}$  e cercando il suo minimo, si trova che questo dipende appunto da  $\zeta$ , poiché vale  $2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$  e si trova alla pulsazione  $\alpha_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ .

Più il coefficiente di smorzamento diminuisce (cioè più lo zero si avvicina all'asse Immaginario), più la frequenza tende a  $\alpha_n$ , e il valore del picco tende a valori nulli (corrispondenti a  $-\infty$  in decibel). Al contrario, al crescere di  $\zeta$  il picco tende a scomparire, e l'andamento della funzione assomiglia a quello di uno zero reale. Questo «picco» viene detto *picco di attenuazione*.



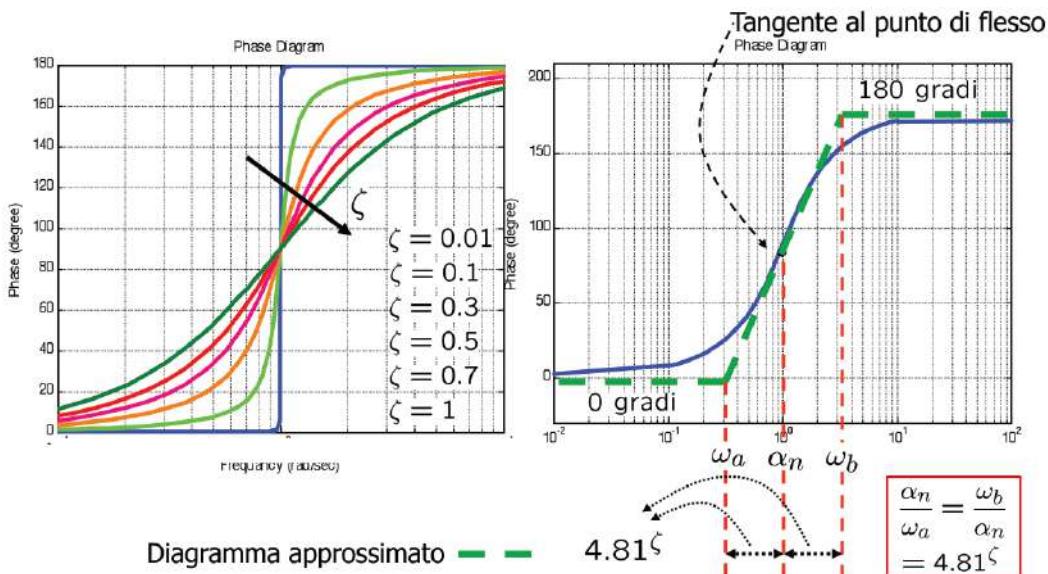
Questo caso dimostra i limiti della rappresentazione per mezzo di diagrammi asintotici, dal momento che il picco non sarebbe stato rappresentato correttamente.

Il segno della radice dello zero non conta per la stesura del diagramma dei moduli: la loro posizione, e in ultima analisi, la caratteristica «a fase minima» o «non minima»<sup>62</sup> sono assolutamente irrilevanti.

Per la fase invece è necessario considerare due casi separati a seconda del valore del coefficiente di smorzamento  $\zeta$ . Per  $\zeta > 0$ , cioè zero a fase minima (parte reale negativa),

$$\arg \left\{ 1 + 2j \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} \omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right\} = \arctan \left( \frac{2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2}} \right) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ \pi & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

Il range di valori fra cui spazia il grafico va da  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , poiché, come già detto per le ampiezze, si deve tener conto di due zeri. Anche in questo caso il valore del coefficiente di smorzamento influenza l'andamento della curva, in particolare nel punto di flesso: più  $\zeta$  diventa piccolo più l'andamento della curva è brusco, come possiamo vedere in figura.

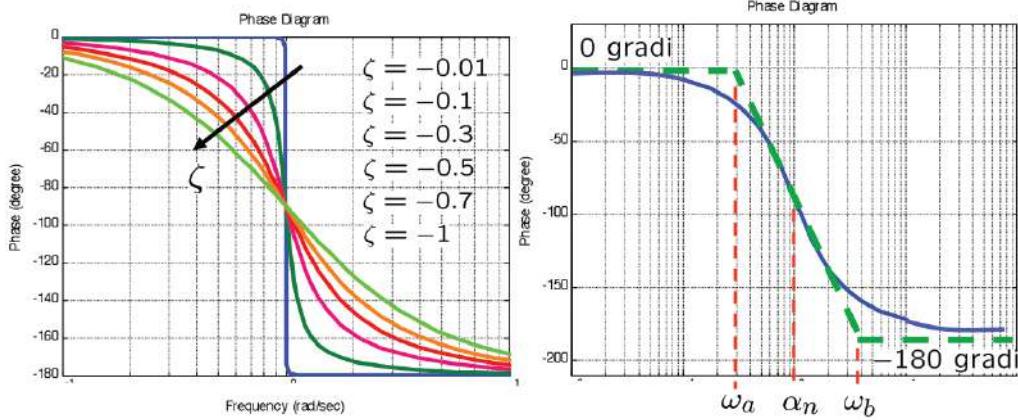


<sup>62</sup>Per ogni dubbio consultare pagina 76

Quando invece  $\zeta < 0$  (zero a fase non minima),

$$\arg \left\{ 1 + 2j \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} \omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2} \right\} = \arctan \left( \frac{2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2}} \right) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ -\pi & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

In questo caso il range di valori fra cui spazia il grafico va da  $-180^\circ$  a  $0^\circ$ .



### 6.6.7 Diagramma di Poli Complessi Coniugati

Presi  $G(s) = \frac{1}{1+2j\frac{\delta_i}{\omega_{m,i}}s + \frac{1}{\omega_{m,i}^2}s^2}$ , da cui otteniamo  $F(\omega) = G(j\omega) = G(s) = \frac{1}{1+2j\frac{\delta_i}{\omega_{m,i}}\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2}}$ . Per il modulo risulta

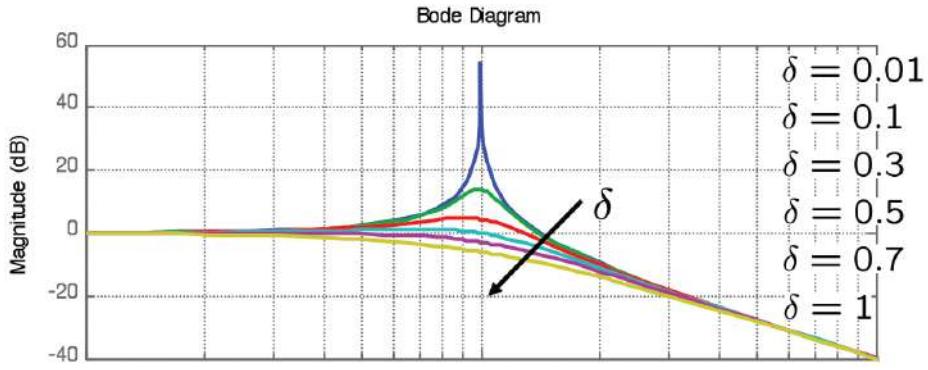
$$20 \log \left\{ \left| \frac{1}{1+2j\frac{\delta_i}{\omega_{m,i}}\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2}} \right| \right\} = -20 \log \left\{ \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2} \right)^2 + \left( 2 \frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} \omega \right)^2} \right\} \approx$$

$$\begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \omega_m \\ 20 \log \left\{ \left( \frac{\omega}{\delta_i} \right)^2 \right\} = 20 \log(\omega) - 20 \log(\delta_i) & \omega \gg \omega_m \end{cases}$$

Anche in questo caso è necessario completare il grafico nell'intorno di  $\omega_m$ , dove i diagrammi asintotici non hanno sufficiente precisione. Più il coefficiente di smorzamento tende a zero (cioè più il polo si avvicina all'asse Immaginario), più la frequenza tende a  $\omega_m$ , e il valore del picco tende a valori nulli (corrispondenti a  $+\infty$  in decibel)<sup>63</sup>. Al contrario, al crescere di  $\delta_i$  il picco tende a scomparire.

Facendo la derivata di  $20 \log \left\{ \left| \frac{1}{1+2j\frac{\delta_i}{\omega_{m,i}}\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2}} \right| \right\}$  e cercando il suo massimo, si trova che questo dipende appunto da  $\delta_i$ , poiché vale  $\frac{1}{2\delta_i\sqrt{1-\delta_i^2}}$  e si trova alla pulsazione  $\omega_m\sqrt{1-2\delta_i^2}$ , confermando quanto detto sopra.

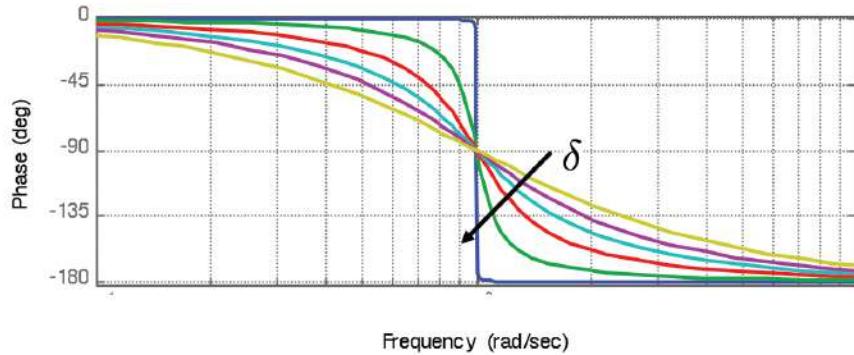
<sup>63</sup>Si ricordi che l'andamento dei poli è speculare a quello degli zeri, a meno del segno.



Il segno del  $\delta$  non influisce sul diagramma dei moduli, ma produce due andamenti diversi per quanto riguarda il tracciamento delle fasi: per  $\delta > 0$  (parte reale negativa),

$$-\arg \left\{ 1 + 2j \frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} \omega - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2} \right\} = -\arctan \left( \frac{2 \frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2}} \right) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_m \\ -\pi & \omega \gg \omega_m \end{cases}$$

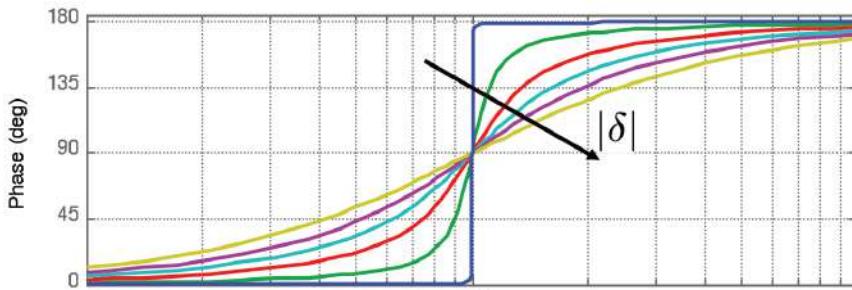
Si vede nuovamente l'andamento speculare rispetto agli zeri: range di valori compreso fra  $-180^\circ$  e  $0^\circ$ , con andamento variabile a seconda del valore assunto da  $\delta^{64}$ .



Al contrario, quando  $\delta < 0$  (parte reale positiva, poli instabili),

$$-\arg \left\{ 1 + 2j \frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} \omega - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2} \right\} = -\arctan \left( \frac{2 \frac{\delta_i}{\omega_{m,i}} \omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{m,i}^2}} \right) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_m \\ \pi & \omega \gg \omega_m \end{cases}$$

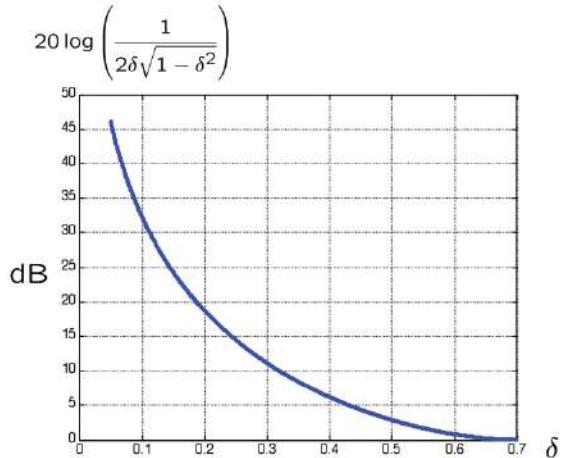
Il range di valori si sposta, andando da  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .



<sup>64</sup>Si fa notare che il senso della freccia nella figura seguente è opposto a quello della freccia nella figura precedente (seguendo il valore crescente di  $\delta$ ).

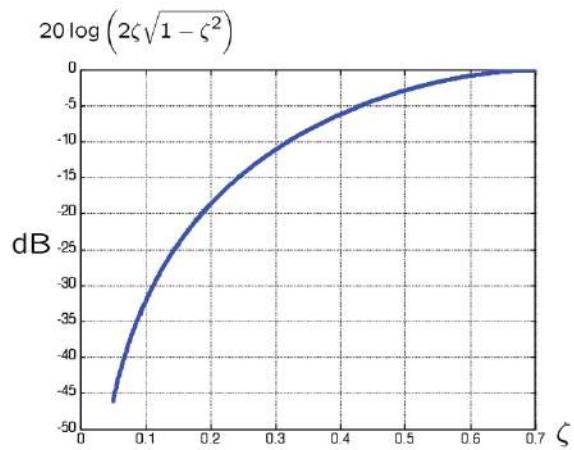
### 6.6.7.1 Picco di Risonanza

Il valore di picco  $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$  alla frequenza  $\omega_R = \omega_m\sqrt{1-2\delta^2}$  viene detto, come abbiamo anticipato, *picco di risonanza*. Fisicamente rappresenta il fattore di amplificazione massima della coppia di poli a fronte di sollecitazioni alla frequenza di risonanza  $\omega_R$ .



### 6.6.7.2 Picco di Attenuazione

Il valore di minimo  $M_R = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$  alla frequenza  $\omega_R = \alpha_n\sqrt{1-2\zeta^2}$  viene detto *picco di attenuazione*. Fisicamente rappresenta il fattore di attenuazione massima della coppia di zeri a fronte di sollecitazioni alla frequenza di risonanza  $\omega_R$ .



## Esercitazione 4

Data la  $G(s) = \frac{10000(s+30)}{s(s+10)(s+300)}$ , disegnarne il diagramma di Bode delle ampiezze e delle fasi.

Si procede individuando i fattori elementari, dei quali abbiamo studiato l'andamento nei diagrammi di Bode; cominciando da  $\mu$  abbiamo  $G(s) = \frac{10^4 \cdot 30}{10 \cdot 300} = 10^2$ . Successivamente si identificano i poli e gli zeri presenti della funzione di trasferimento data: si individua un solo

zero in  $-30$  e tre poli, collocati in  $0, -10, -300$ . Dalla mappa poli - zeri che costruiamo possiamo dedurre che il primo contributo nel diagramma delle ampiezze sarà quello del polo nell'origine, seguito dal polo in  $-10$ , dallo zero e dall'ultimo polo rimanente. Si fa presente che nel grafico esplicativo i poli sono rappresentati in gradazioni di blu con linea tratteggiata, mentre lo zero è viola e con tratto *dotted*.

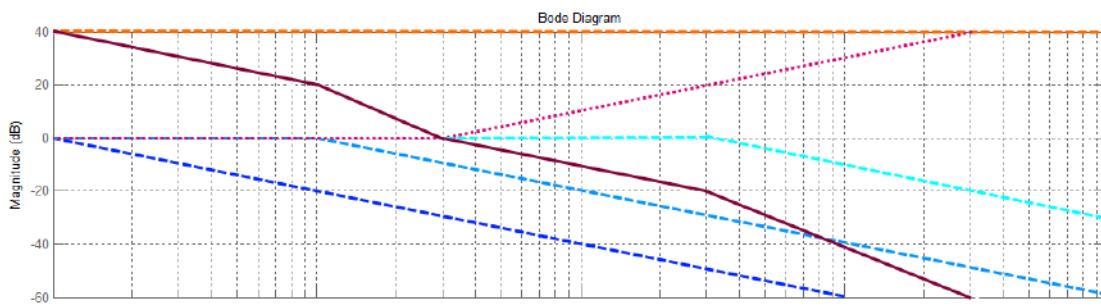
Si parte da  $\mu$ : esso è maggiore di 1, quindi il suo grafico asintotico sarà collocato sopra l'asse 0dB; in particolare il valore sarà costante e collocato a  $20 \log(10^2) = 40$ dB (arancione in figura).

Consideriamo ora il polo nell'origine. È noto che i poli hanno una pendenza di  $20 \frac{\text{dB}}{\text{decade}}$ , e in particolare che i poli nell'origine intersecano l'asse 0dB alla pulsazione  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (blu in figura). Per quanto riguarda invece il polo in  $-10$  dobbiamo considerare come pulsazione di rottura  $\omega_R = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ : il grafico asintotico di questo polo sarà una linea retta fino a  $\omega_R$ , punto dopo il quale «crollerà» a  $20 \frac{\text{dB}}{\text{decade}}$  (azzurro scuro in figura).

Seguendo la mappa poli - zeri, si arriva ora allo zero in  $-30$ : il suo grafico si trova «steso» sull'asse 0dB fino alla pulsazione di rottura in  $\omega_R = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , dopodiché comincia a salire con pendenza  $20 \frac{\text{dB}}{\text{decade}}$ . Infine, l'ultimo polo posizionato in  $-300$  avrà pulsazione di rottura in  $\omega_R = 300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ; prima di quel valore non darà alcun contributo, mentre dopo  $\omega_R$  sarà una retta con pendenza negativa  $20 \frac{\text{dB}}{\text{decade}}$  (azzurro chiaro in figura)<sup>65</sup>.

Si tenga presente il significato fisico di ciò che avviene nel sistema: il fatto di vedere le curve dei vari poli «stese» sulla retta 0dB significa che in quel momento essi non stanno dando nessun contributo al sistema, e che, quindi, fino alla loro pulsazione di rottura lasciano passare il segnale in ingresso completamente inalterato. Dopo la  $\omega_R$  invece, agiscono sull'ingresso inserendo attenuazioni o amplificazioni a seconda della loro pendenza.

Bisogna ora sommare i vari contributi per ottenere il grafico asintotico finale per le ampiezze. La curva delle somme è rappresentata con un tratto unitario in viola scuro, ed importante notare come la sua pendenza oscilli fra i  $20$  e i  $40 \frac{\text{dB}}{\text{decade}}$  a seconda dei contributi in gioco.

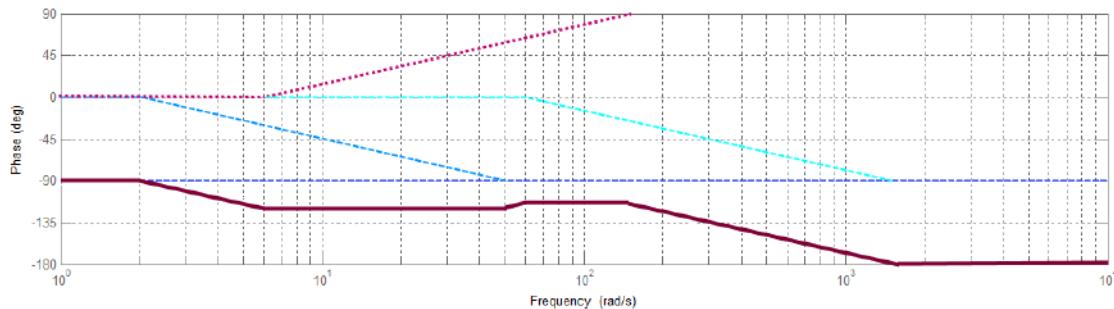


Passiamo ora al diagramma delle fasi: come abbiamo visto,  $\mu$  non dà contributo quando il suo valore è positivo e per questo motivo eviteremo di tracciarlo sul diagramma finale. Passando ai poli, ci ricordiamo che ogni polo aggiunge uno sfasamento di  $-90^\circ$  rispetto all'origine: nel grafico questi verranno mostrati con linee tratteggiate in gradazioni di blu, ognuno contribuendo in un range compreso fra  $[-4.81 + \omega_R, 4.81 + \omega_R]$ , quando raggiunge l'asse  $\omega = -90^\circ$ .

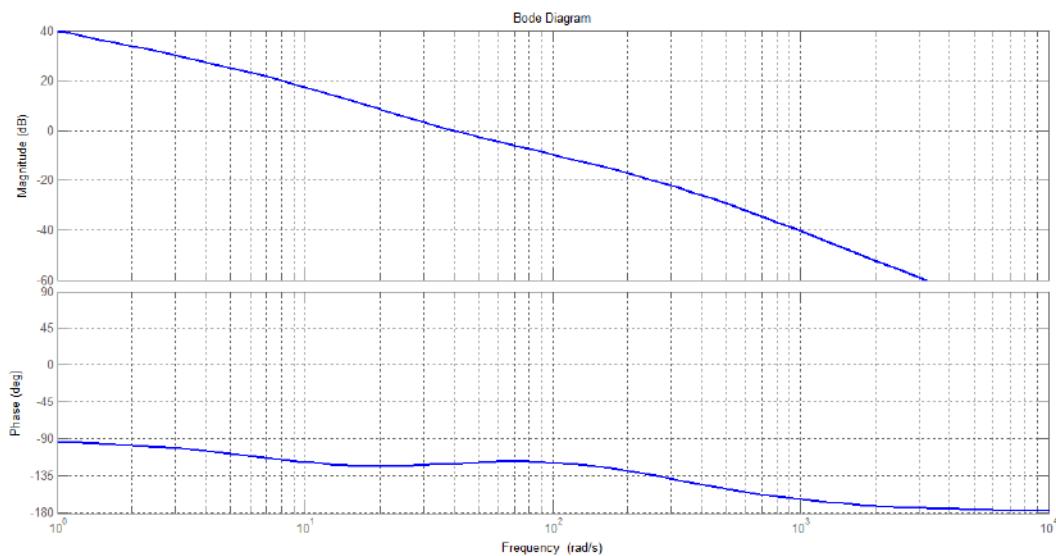
<sup>65</sup>Nota: nel grafico l'ultimo polo «parte» solo dalla pulsazione di rottura dello zero per motivi di chiarezza grafica: troppi colori sovrapposti avrebbero confuso il grafico.

Per calcolare con precisione gli estremi di questo intervallo ci si ponga all'origine degli assi e si conti fino alla frequenza  $\omega = 5$ : in quel valore ci si trova ragionevolmente vicino a 4.81. A questo punto si misura la distanza della pulsazione trovata dall'origine degli assi, tenendo questo valore (in cm) come costante da aggiungere e togliere ad ogni  $\omega_R$  per trovare i valori di «inizio» e «fine» sfasamento. Questo procedimento è valido grazie all'utilizzo della scala logaritmica.

Lo stesso vale per lo zero (rappresentato con la stessa convenzione assunta per le fasi), il quale viene però sfasato di  $+90^\circ$ <sup>66</sup>.



Nel complesso, il grafico plottato con Matlab risulta così:



Si segnala l'esistenza di una funzione di libreria, scaricabile all'indirizzo <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23870-asymptotic-bode-diagram>, che permette di plottere il diagramma asintotico di una funzione di trasferimento, dati il numeratore e il denominatore.

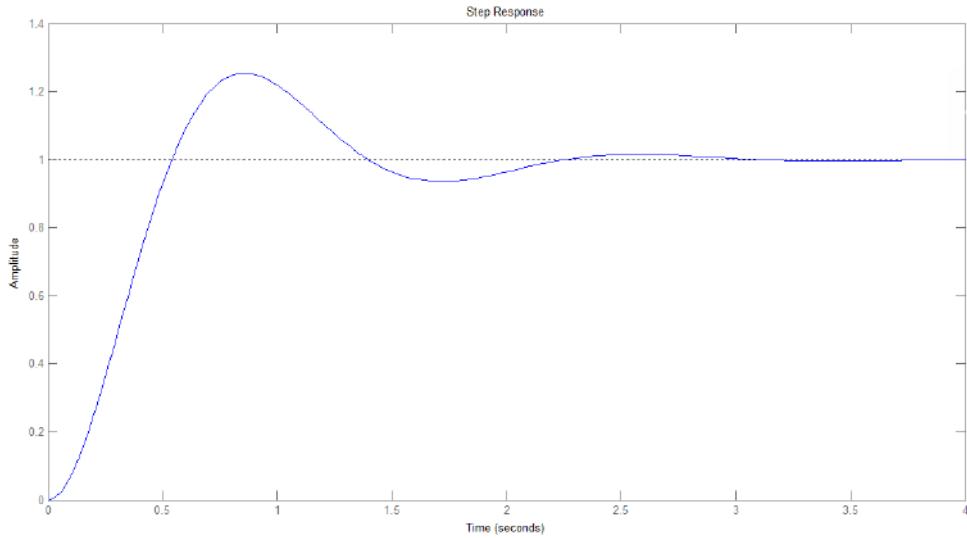
---

<sup>66</sup>Nota: nel grafico l'ultimo polo «parte» solo dalla pulsazione di rottura dello zero per motivi di chiarezza grafica: troppi colori sovrapposti avrebbero confuso troppo il grafico.

# Esercitazione 5

## Primo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



1.  $G(s) = \frac{1.6(s+10)}{s^2+3.2s+16}$
2.  $G(s) = \frac{20}{(1+3s)(s^2+3.6s+20)}$
3.  $G(s) = \frac{16}{s^2+1.2s+16}$
4.  $G(s) = \frac{16}{s^2+3.2s+16}$

Osserviamo la curva data: si nota che la risposta al gradino presenta delle oscillazioni che a regime tendono a zero. Possiamo dedurre allora che è presente nella  $G(s)$  una coppia di poli complessi coniugati smorzata, e che il guadagno statico è unitario, poiché il valore di regime è 1. Sempre dall'osservazione della curva si ricava che la sovraelongazione massima percentuale si aggira intorno a 1.3 e il tempo di assestamento è pari circa a 3 secondi. Passiamo quindi all'analisi delle funzioni date, cercando quale fra di esse presenta le caratteristiche sopra elencate.

La prima  $G(s)$  ha come caratteristica quella di avere uno zero; dal suo polo complesso coniugato ricaviamo  $\omega_n = \sqrt{16} = 4$  e  $\delta = \frac{3.2}{2\cdot 4} = 0.4$ . Possiamo calcolare la sovraelongazione percentuale attraverso la formula  $S\% = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \approx 25\%$ : il 25% del valore di regime è 0.25, per cui questo risultato non costituisce «una smentita», quanto più una conferma della similitudine fra questa  $G(s)$  e quella rappresentata. Poiché notiamo che questo  $\delta$  è condiviso anche dalla seconda e dalla quarta funzione, la sovraelongazione percentuale non costituisce un fattore di eliminazione nemmeno per queste due, mentre per la terza  $G(s)$  ricaviamo  $\delta = \frac{1.2}{2\sqrt{16}} = 0.15 \Rightarrow S\% \approx 62\%$  - il che significa che la terza funzione non è quella rappresentata.

Passiamo al calcolo del tempo di assestamento al 5%: per i poli complessi coniugati,  $T_{ass\ 5\%} = \frac{3}{\Re} = \frac{3}{\delta\omega_n}$ , quindi per la prima  $G(s)$  ricaviamo un  $T_{ass\ 5\%} \approx 1.8$ s, che è un valore accettabile. Calcoliamo le pulsazioni naturali e i coefficienti di smorzamento delle altre due funzioni, ricavando che  $\omega_{n_1} = \omega_{n_4} = 4$  e  $\omega_{n_2} = \sqrt{20}$ , mentre  $\delta_1 = \delta_4 = \delta_2 = 0.4$ . Si nota allora che il tempo di assestamento della quarta funzione (come anche la sua sovraelongazione percentuale) è uguale a quello ottenuto per la prima; per quanto riguarda la seconda  $G(s)$  invece, il  $T_{ass\ 5\%} = 9$ s perché il polo dominante è effettivamente quello reale (le radici del polinomio complesso sono  $-1.8000 \pm 4.0939j$ ); questo valore non corrisponde a quanto mostrato in figura e di conseguenza la seconda funzione viene scartata.

Rimangono valide, a questo punto, la prima e la quarta funzione proposte.

Come avevamo già fatto notare, ciò che differenzia la prima funzione dalle altre (tutte quante con un polo complesso coniugato) era la presenza dello zero, e in questo caso si ha che le due funzioni sarebbero del tutto uguali se quello zero non ci fosse.

Osservando poi il valore dello zero si può intuire che, poiché la sua distanza dall'origine rispetto a quella del polo (collocato in  $-1.6 \pm 3.6j$ ) è notevole, la sua influenza sul sistema è trascurabile<sup>67</sup>. Le due funzioni possono allora essere considerate equivalenti, ed entrambi valide.

Si illustra di seguito come lo stesso esercizio può essere svolto utilizzando Matlab.

```
s=tf('s')
G1=1.6*(s+10)/(s^2+3.2*s+16)
G2=20/(1+3*s)/(s^2+3.6*s+20)
G3=16/(s^2+1.2*s+16)
G4=16/(s^2+3.2*s+16)
% calcolo pulsazioni naturali e smorzamenti
damp(G1)
damp(G2)
damp(G3)
damp(G4)
```

Si comincia definendo una funzione di trasferimento e immettendo poi le quattro  $G$  proposte. Il comando *damp(sys)* è così definito dalla documentazione Matlab:

«*damp(sys)* displays a table of the damping ratio (also called damping factor), natural frequency, and time constant of the poles of the linear model *sys*. For a discrete-time model, the table also includes the magnitude of each pole. Frequencies are expressed in units of the reciprocal of the *TimeUnit* property of *sys*. Time constants are expressed in the same units as the *TimeUnit* property of *sys*.»

In pratica, *damp(sys)* prende in ingresso un «linear dynamic system model» qualunque e restituisce

- La radici di ogni polo (o zero);
- Un vettore contenente la  $\omega_n$  di ogni polo (e zero), in ordine di frequenza crescente;

<sup>67</sup>Lo zero in questione è molto veloce, anche a prescindere dal confronto con il polo.

- Un vettore contenente il coefficiente di smorzamento (damping ratio)  $\delta$  di ogni polo (e zero), in ordine di frequenza crescente.

Si calcolano poi le sovraelongazioni di ogni funzione:

```
S1=100*exp((-pi*d1)/(1-d1^2)^0.5)
S2=100*exp((-pi*d2)/(1-d2^2)^0.5)
S3=100*exp((-pi*d3)/(1-d3^2)^0.5)
S4=100*exp((-pi*d4)/(1-d4^2)^0.5)
```

Si ricorda che cliccando con il tasto destro sul plot di una curva, e selezionando poi *characteristics* è possibile visualizzarne diverse proprietà quali il tempo di assottamento e la sovraelongazione.

Come approfondimento si propone il codice seguente, che mostra il cambiamento della risposta al gradino al variare della costante di tempo T dello zero. Questo si riferisce a quanto abbiamo detto per il confronto fra la prima funzione di trasferimento e la seconda: al diminuire della T (e quindi all'allontanarsi dello zero dall'origine) il contributo dello zero diventa sempre meno rilevante.

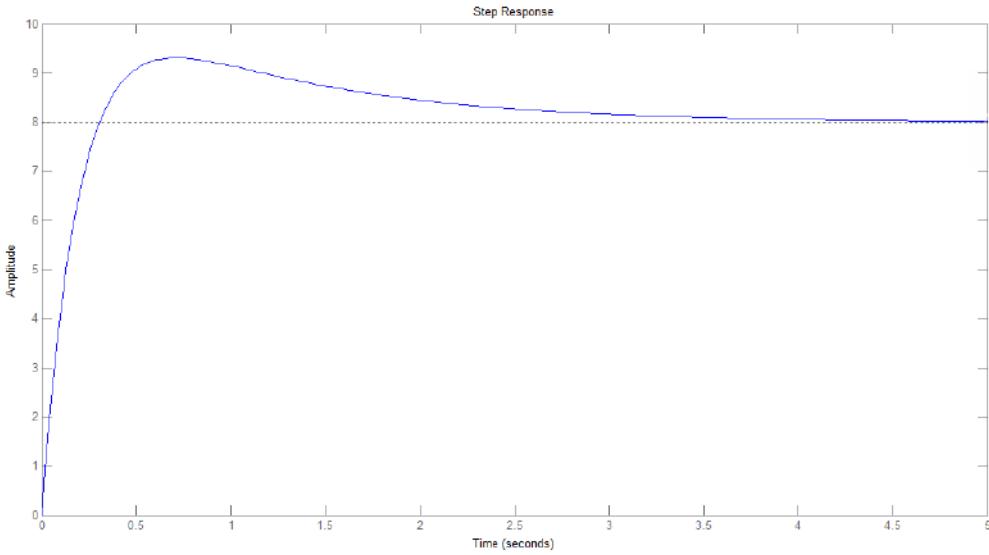
```
figure(3)
grid on
for i=0:0.5:5
T=5-i;
F=(1+T*s)/(s^2+3.6*s+20);
step(1/(s^2+3.6*s+20), F);
grid on;
ylim([-0.15 0.15]);
pause(0.5);
end
```

Infine, è possibile osservare le differenze fra le risposte delle varie funzioni pottandole tutte nella stessa finestra:

```
figure(2)
step(G1, G2, G3, G4)
grid on
legend ('G1', 'G2', 'G3', 'G4')
```

## Secondo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



$$1. \ G(s) = \frac{53.3(s+0.75)}{(s+5)(s+1)}$$

$$2. \ G(s) = \frac{30(s+1)}{(s+5)(s+0.75)}$$

$$3. \ G(s) = \frac{45.7}{(s+5)(s+40)}$$

$$4. \ G(s) = \frac{717(s+1)}{(s+1.4)(s+8)^2}$$

Ricordando la teoria a pagina 76, osserviamo la figura: è chiaramente presente una doppia dinamica, in quanto il polo raggiunge e supera il valore di regime in un tempo molto breve, salvo poi tendere dall'alto a questo valore in un tempo molto lungo. Abbiamo quindi sovraelongazione insieme ad una coda di assestamento, e da questa intuizione possiamo considerare note le posizioni reciproche dei poli e degli zeri: si tratta di quasi cancellazione da destra. Fra le funzioni date si cercheranno quelle che presentano due poli, quello dominante «quasi cancellato» dallo zero alla sua destra (più vicino all'origine).

A fronte di queste considerazioni possiamo immediatamente scartare la seconda e la terza equazione fra quelle proposte, in quanto non rispecchiano il caso appena descritto. Studiamo allora le caratteristiche della prima e della quarta equazione, per identificare quale fra di esse è quella che descrive il sistema proposto in figura.

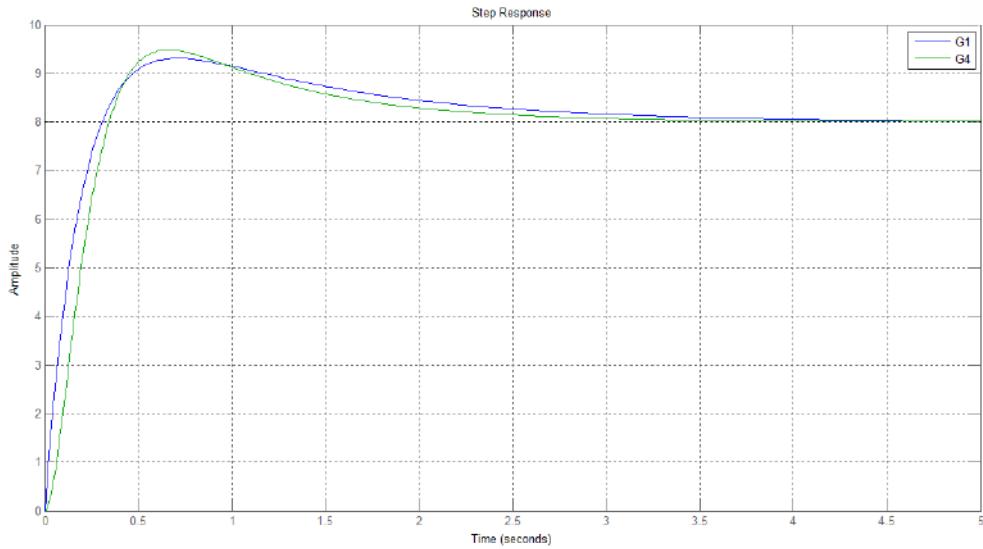
Poiché le coppie polo - zero sono molto simili  $\left(\frac{(s+0.75)}{(s+1)}, \frac{(s+1)}{(s+1.4)}\right)$  si decide di studiare le dinamiche «veloci», cioè quelle che tendono a zero più velocemente, per vedere se presentano qualche differenza dalla curva proposta. Si calcola a questo scopo il tempo di assestamento al 5% di entrambi i casi:

- Per la prima  $G(s)$  abbiamo  $\frac{1}{s+5}$ :  $T_{ass\ 5\%} = \frac{3}{5} = 0.6\text{s}$ ;
- Per la seconda abbiamo invece  $\frac{1}{(s+8)^2}$ , per cui  $T_{ass\ 5\%} = \frac{4.7}{8} \approx 0.59\text{s}$ <sup>68</sup>

<sup>68</sup>Il perché ci voglia la costante 4.7 nel calcolo del tempo di assestamento di un polo a molteplicità due non è noto, ma «lo possiamo prendere per buono». Si suppone, comunque, che il motivo risieda nella più elevata molteplicità.

Si osserva che i due tempi sono sostanzialmente uguali, e per questo motivo sia la prima che la quarta funzione possono corrispondere a quella mostrata in figura.

Un plot con Matlab mostra che effettivamente le differenze fra le due curve non sono molto accentuate.



Non viene riportato il codice necessario per inserire e plottare le quattro funzioni perché standard e reperibile sul sito Teaching Casy.

### Terzo Esercizio

Data la  $G(s) = \frac{2000(s+2)}{s(s+10)(s+40)}$ , disegnarne il diagramma di Bode delle ampiezze e delle fasi.

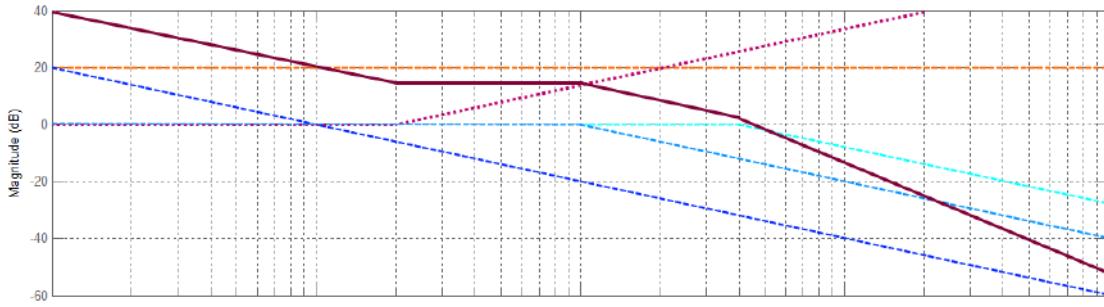
Cominciamo «scomponendo» la funzione di trasferimento data in fattori elementari, che andremo poi a disegnare singolarmente, utilizzando la stessa convenzione grafica dell'esercitazione precedente. Si cerca per primo il valore del guadagno statico:  $\mu = \frac{2000 \cdot 2}{10 \cdot 40} = 10$ , che trasformato in decibel risulta  $\mu_{dB} = 20 \log(10) = 20$ . Il suo valore viene rappresentato nel grafico delle ampiezze come un linea retta sul valore 20dB.

Individuiamo poi tre poli (rispettivamente nell'origine, in  $-10$  e in  $-40$ ) e uno zero, collocato in  $-2$ .

Partendo dal polo nell'origine, il suo andamento nel grafico degli argomenti è quello di una retta con pendenza  $-20 \frac{dB}{decade}$  che incrocia in  $\omega = 1$  l'asse 0dB; tutti gli altri poli giacciono sulla stessa asse fino a quando non incontrano la loro pulsazione di rottura  $\omega_R$  (rispettivamente  $10 \frac{rad}{s}$  e  $40 \frac{rad}{s}$ ), momento dopo il quale il loro andamento assume una pendenza di  $-20 \frac{dB}{decade}$ . Possiamo notare che inizialmente  $\mu$  e il polo nell'origine partono entrambi con un guadagno pari a 20: di conseguenza il sistema presenta un guadagno complessivo iniziale pari a 40dB.

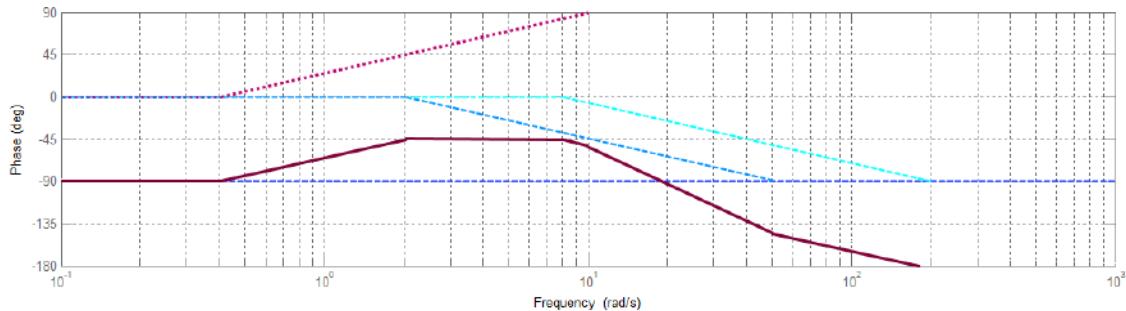
Come già sappiamo, inoltre, poli e zeri si comportano in maniera speculare e per questo lo zero della FdT data rimarrà sull'asse 0dB fino alla pulsazione  $\omega_R = 2$ , cambiando successivamente andamento in quello di una retta con pendenza  $20 \frac{dB}{decade}$ .

Al termine, il diagramma delle ampiezze si presenta approssimativamente così:

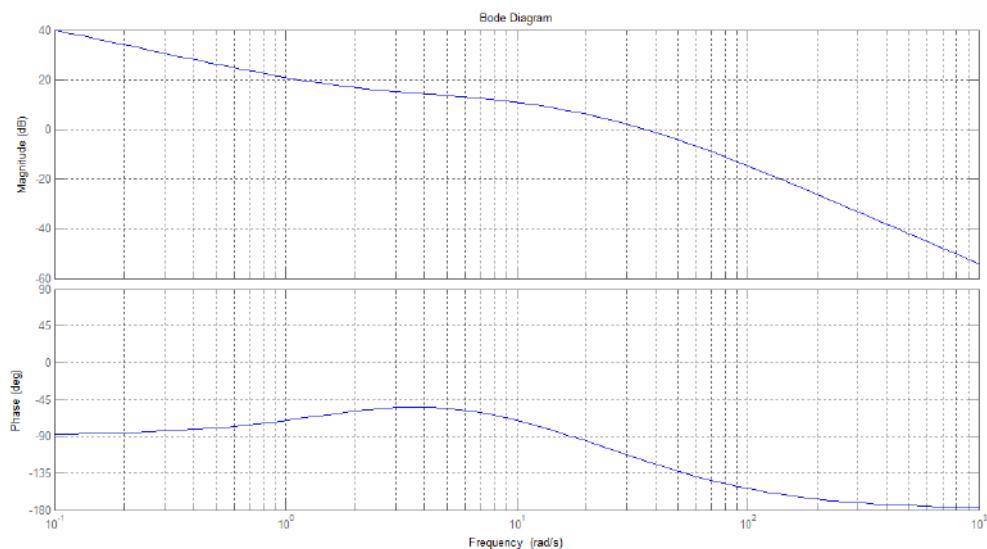


Si prosegue disegnando il diagramma delle fasi: anche in questo caso evitiamo di disegnare il contributo dovuto al guadagno statico, che è nullo dal momento che  $\mu > 0$ . Passando alla rappresentazione dei poli, è noto che ognuno di essi contribuisce con uno sfasamento pari a  $-90^\circ$ , con un cambiamento che comincia «4.81 prima» e termina «4.81 dopo» la pulsazione di rottura (esclusi i poli nell'origine, il cui sfasamento copre tutta la banda). Lo stesso si può dire degli zeri, facendo però attenzione ad invertire i segni: per ogni zero si ha infatti uno sfasamento di  $+90^\circ$ .

Poiché abbiamo una funzione di trasferimento con uno zero e tre poli, possiamo anticipare che lo sfasamento complessivo raggiungerà  $180^\circ$ . Attraverso un altro metodo, possiamo ottenere lo stesso risultato moltiplicando  $\frac{\pi}{2}$  per il grado relativo, che in questo caso dà appunto  $180^\circ$ . Al termine, il diagramma delle fasi si presenta approssimativamente così:



Ecco infine il grafico complessivo plottato con Matlab.



### 6.6.8 Ritardo Temporale

Poiché andremo prossimamente a studiare sistemi in retroazione, è importante sapere come si comporta un sistema a fronte di ritardi (ovviamente la loro presenza non è irrilevante). Nel dominio di Laplace, possiamo trovare la funzione che lega l'uscita del sistema ad un ritardo  $T$  nel modo seguente:

$$Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{y(t - T)\} = Y(s)e^{-sT}$$

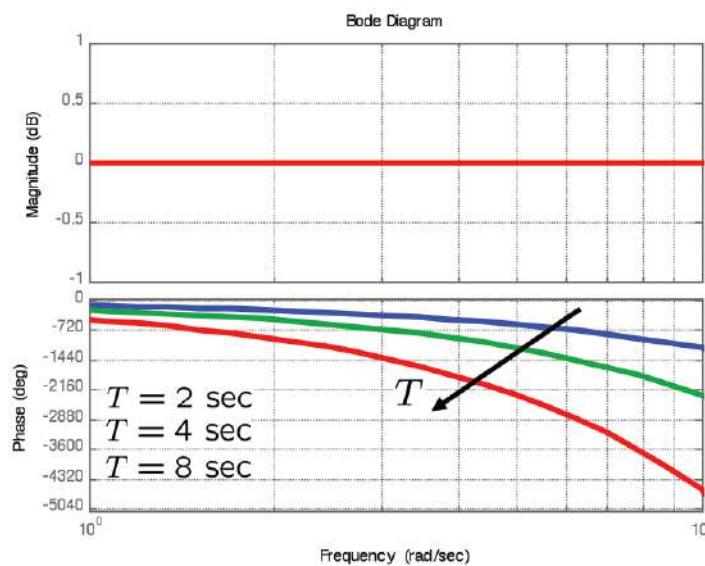
riconducibile in ultima analisi a una proprietà della Trasformata di Laplace, di cui si è già parlato a pagina 26. È quindi  $e^{-sT}$  il fattore che identifica il ritardo in una generica relazione ingresso - uscita  $Y(s) = G(s)U(s)$ .

Se volessimo a questo punto antitrasformare, ciò non sarebbe possibile con i metodi analizzati in questo corso in quanto la funzione non è più razionale fratta a causa della presenza dell'esponenziale<sup>69</sup>.

È possibile però «aggirare» questo problema semplicemente evitando di antitrasformare e considerando invece la rappresentazione di questo contributo nel diagramma di Bode: sostituendo  $j\omega$  in  $s$  si ottiene

$$e^{-j\omega T} \rightarrow \begin{cases} |e^{-j\omega T}| = 1 \\ \arg\{e^{-j\omega T}\} = -\omega T \end{cases}$$

a cui corrisponde il grafico seguente



<sup>69</sup>L'esponenziale è infatti una funzione trascendente. Si ricorda che fanno parte delle funzioni trascendenti tutte le funzioni non algebriche - alle quali peraltro si limita la nostra conoscenza delle antitrasformate.

Da questa rappresentazione è possibile dedurre che l'introduzione di un qualunque ritardo non ha alcun effetto sul diagramma dei moduli, mentre per le fasi  $\arg\{G(j\omega)e^{-j\omega T}\} = \arg\{G(j\omega)\} + \arg\{e^{-j\omega T}\}$ . La comparsa di un termine proporzionale alla frequenza (oltre che al ritardo stesso) comporta uno sfasamento sempre maggiore al crescere di  $\omega$ . Vediamo infatti che a basse frequenze il contributo del ritardo è minimale, quasi indipendente dal valore di  $T$  e quasi trascurabile (rispetto al grafico non ritardato), mentre mano a mano che la frequenza aumenta, lo sfasamento negativo diventa sempre più grande.

## 6.7 Filtri

Si può associare un sistema dinamico ad un filtro quando si evidenziano alcune differenze «caratteristiche» della funzione in uscita rispetto alla funzione in ingresso. In particolare:

- Vengono amplificate, o, in generale, si trovano in uscita solamente le armoniche a bassa frequenza;
- Vengono amplificate, o, in generale, si trovano in uscita solamente le armoniche ad alta frequenza;
- Vengono amplificate, o, in generale, si trovano in uscita solamente le armoniche appartenenti ad una certa banda;
- Vengono eliminate, o, in generale, non si trovano in uscita solamente le armoniche appartenenti a una certa banda.

### 6.7.1 Esempio: Altoparlante Magnetico

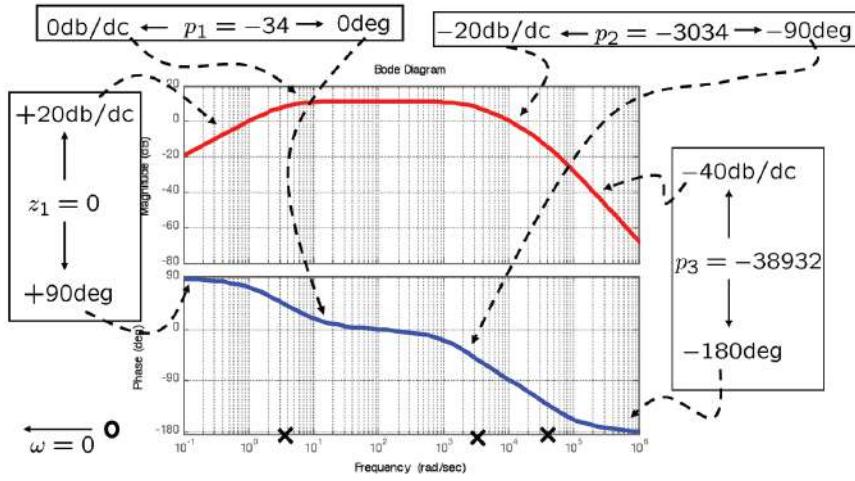
Anche in questo caso si prosegue dall'ultimo esempio dello stesso tipo, presentato a pagina 43. In quella sede avevamo sviluppato e completato i calcoli per la funzione di trasferimento, che ora riportiamo e studiamo al fine di tracciarne il grafico di Bode.

Si prende quindi la funzione ottenuta e la si riscrive nel modo seguente:  $G(s) = \frac{b_1 s}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$ , dove  $b_1 = k$ ,  $a_3 = LM$ ,  $a_2 = L\beta + MR$ ,  $a_1 = Lh + \beta R + k^2$ ,  $a_0 = hR$ . I dati fisici relativi ai parametri utilizzati sono disponibili nelle slides del corso, tuttavia non verranno riportati in quanto si preferisce dare rilevanza ai concetti piuttosto che ai calcoli.

Questa formulazione, sebbene possa sembrare complicata, serve a mettere in luce la struttura poli - zeri del sistema: si possono infatti identificare uno zero nell'origine e tre poli, dai quali consegue che il sistema è del terzo ordine con grado relativo 2. Calcolando le radici, possiamo identificare due poli «lenti», corrispondenti alla parte meccanica del sistema (collocati in  $-3.4, -3034$ ) e un polo più veloce, attribuibile invece alla parte elettrica del sistema<sup>70</sup> (collocato in  $-38932$ ). L'unico modo di lavorare adeguatamente con valori diversi è attraverso l'utilizzo di una scala logaritmica, che mostra la propria utilità proprio in occasioni come questa. Analizziamo a questo punto il diagramma di Bode:

---

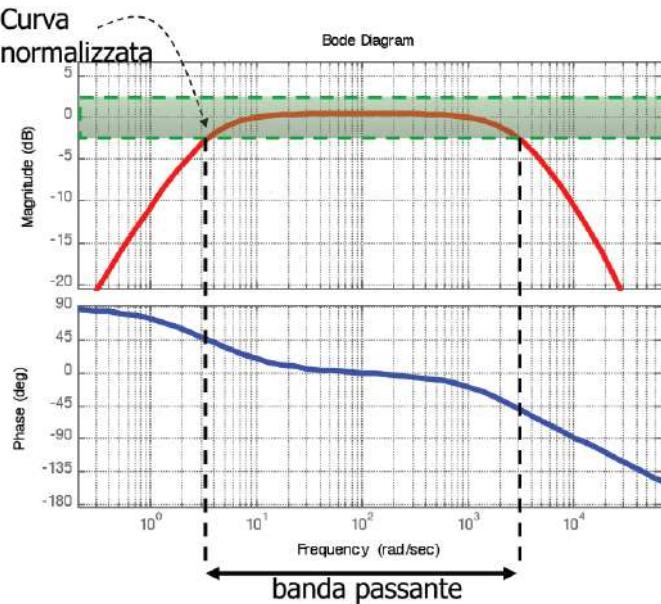
<sup>70</sup>Le loro frequenze sono strutturalmente più veloci.



A basse frequenze sono presenti unicamente i contributi di guadagno statico e zero nell'origine: il diagramma dei moduli mostra una crescita con pendenza  $20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ , similmente il diagramma delle fasi ha uno sfasamento positivo di  $90^\circ$ . Questo andamento continua fino alla pulsazione di rottura del primo dei tre poli,  $\omega_R \approx 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ : in questo punto la pendenza negativa introdotta dal primo polo compensa la crescita dello zero nell'origine, e il diagramma degli argomenti diventa quindi costante. Per quanto riguarda invece lo sfasamento è visibile un calo da  $90^\circ$  a  $0^\circ$  (da 4.81 prima a 4.81 dopo  $\omega_R$ ), a causa dell'introduzione di uno sfasamento negativo. Nel complesso, a basse frequenze il sistema presenta un'attenuazione in modulo dell'armonica in ingresso (tanto più grande quanto il valore di  $\omega$  è piccolo).

A causa della notevole differenza fra la frequenza del primo e quella del secondo polo, tale andamento costante su entrambi i grafici si estende dalla pulsazione  $\omega \approx 3$  fino a  $\omega \approx 3000$ . Il significato fisico di questo andamento è molto semplice: il sistema lascia passare quasi inalterata ogni armonica in quell'intervallo. Non vi è quasi sfasamento, e per quanto riguarda i moduli vediamo un'amplificazione moderata, ma costante, per tutte le armoniche appartenenti a questo range; il valore di questa amplificazione dipende dal guadagno statico. Successivamente, ognuno dei due poli introdurrà una ulteriore pendenza di  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$  (per il diagramma dei moduli) e uno sfasamento aggiuntivo di  $-90^\circ$  (nel diagramma delle fasi). Nel complesso quindi, il sistema si presenta ad alte frequenze con un'attenuazione dei moduli molto forte (pendenza  $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ ) e uno sfasamento di circa  $-180^\circ$ .

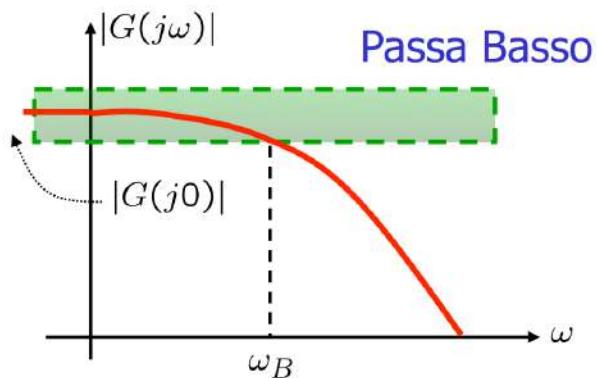
Si può dire allora che questo è un sistema di tipo ***passa - banda***, in quanto lascia passare inalterate solamente le armoniche la cui frequenza appartiene alla banda suddetta; tutte le altre vengono smorzate in uscita, tanto più quanto ci si allontana dai valori della banda (sia in negativo che in positivo).



In figura possiamo vedere la *curva normalizzata* agli 0dB: ciò significa che è stato applicato alla funzione «originale» un fattore correttivo che ha spostato il suo valore di regime da un certo valore (per esempio 10dB) a 0dB. Si identifica a questo punto un range di valori sull'asse delle ampiezze, convenzionalmente  $[-3, 3]$  dB, oppure una fascia ampia 6dB centrata sul valore massimo: si chiama **banda passante** l'intervallo di frequenze in cui il diagramma di Bode delle ampiezze è compreso in questo intervallo.

L'andamento del diagramma dei moduli permette l'identificazione e la suddivisione delle funzioni di trasferimento secondo determinati criteri: si parla quindi di funzioni *passa basso*, *passa alto*, *passa banda*, *elimina banda*, ognuna delle quali corrisponde a uno dei casi descritti all'inizio della sezione. Il termine «*filtro*» utilizzato per descrivere il sistema va inteso con il significato (più generale possibile) di una Black box che, a fronte di un input, manda in output un'armonica sulla quale sono state apportate certe modifiche. Il diagramma delle fasi non entra in questa classificazione.

### 6.7.2 Sistemi Passa Basso



Si parla di sistemi passa basso quando il sistema lascia genericamente passare in uscita le armoniche che si trovano a basse frequenze.

Calcoliamo velocemente l'equivalente in scala lineare di  $-3\text{dB}$ :

$$-3 = 20 \log(x)$$

$$-\frac{3}{20} = \log(x)$$

$$x = 10^{-\frac{3}{20}} = 0.707 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ugualmente per i 3dB:  $x = 10^{\frac{3}{20}} = 1.414 \approx \sqrt{2}$ . Allora

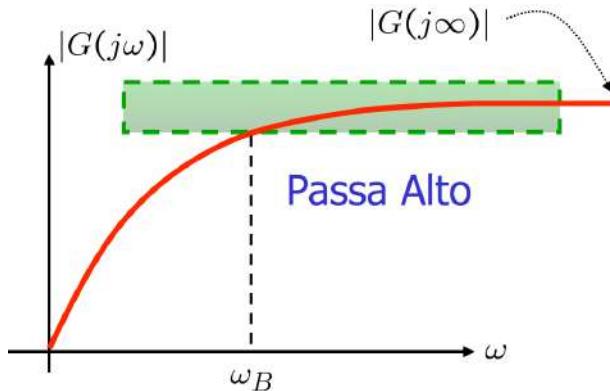
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2} & \forall \omega \leq \omega_B \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \forall \omega > \omega_B \end{cases}$$

Questa formula significa che (considerando un polo solo, nel caso più semplice):

- Per tutte le frequenze minori della frequenza di taglio, il valore del modulo della  $G$  è compreso fra  $-3$  e 3dB;
- Per le frequenze maggiori di  $\omega_B$  il valore del modulo di  $G$  sarà sempre minore di  $-3$ dB (l'attenuazione fuori dall'intervallo è direttamente proporzionale a  $\omega$ ).

In entrambi i casi (come anche nei prossimi esempi) i valori del modulo della  $G$  sono rapportati all'intervallo di frequenze «permesse» centrato sul guadagno statico  $G(0)$ <sup>71</sup>. Il range di banda passante è  $[0, \omega_B]$ .

### 6.7.3 Sistemi Passa Alto



Si parla di sistemi passa alto quando il sistema lascia genericamente passare in uscita le armoniche che si trovano ad alte frequenze. Sistemi di questo tipo devono avere un rapporto poli-zeri che permetta la salita del diagramma dei moduli ad un certo valore (compreso nel range della banda passante) e il suo assestamento a quello stesso valore. Un esempio molto semplice potrebbe essere  $G(s) = \mu \frac{s}{s+p}$  (notare che il valore di  $\mu$  permette di modulare l'altezza della curva rispetto ai valori in dB corrispondenti alla banda passante).

$$\begin{cases} \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \forall \omega < \omega_B \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} \leq \sqrt{2} & \forall \omega \geq \omega_B \end{cases}$$

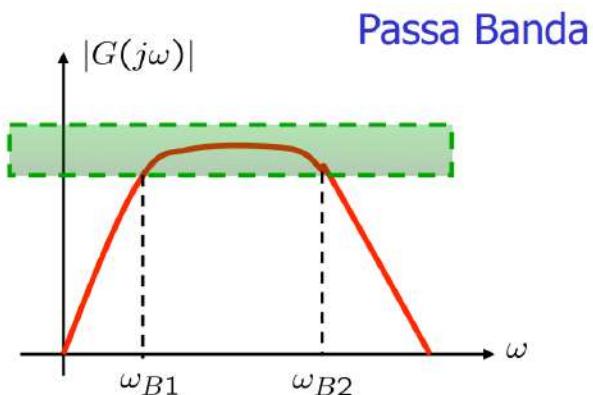
<sup>71</sup>Notare che in questi casi il valore del guadagno statico corrisponde al valore massimo (o anche guadagno massimo) che il diagramma dei moduli può assumere nel range di valori corrispondente alla banda passante. Questo vale anche per i casi seguenti.

Questa formula significa che:

- Per tutte le frequenze minori della frequenza di taglio, il valore del modulo della  $G$  sarà sempre minore di  $-3\text{dB}$  (l'attenuazione a frequenze minori di  $\omega_B$  è inversamente proporzionale a  $\omega$ , ossia l'armonica è tanto più attenuata quanto più  $\omega$  è piccolo);
- Per le frequenze maggiori di  $\omega_B$  il valore del modulo di  $G$  sarà sempre contenuto all'interno del range  $[-3, 3]\text{ dB}$ .

In questo caso il range di banda passante è  $[\omega_B, \infty]$ .

#### 6.7.4 Sistemi Passa Banda



Ne è un esempio l'altoparlante magnetico visto nell'ultimo esercizio. Si parla di sistemi passa banda quando il sistema lascia genericamente passare in uscita le armoniche che si trovano all'interno di un range di frequenze, detto banda passante. Sistemi di questo tipo devono avere un rapporto poli - zeri che permetta la salita del diagramma dei moduli ad un certo valore (compreso nel range della banda passante) e successivamente la «discesa» della curva, una volta terminato l'intervallo della banda passante. Affinché ciò sia possibile sono necessari, nel caso più semplice, uno zero e due poli con frequenze di taglio diverse; un esempio potrebbe essere  $G(s) = \mu \frac{s}{(s+p_1)(s+p_2)}$ ,  $p_1 \neq p_2$ .

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} \leq \sqrt{2} & \forall \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}] \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \forall \omega \notin [\omega_{B1}, \omega_{B2}] \end{cases}$$

Questa formula significa che:

- Per tutte le frequenze minori della frequenza di taglio  $\omega_{B1}$ , il valore del modulo della  $G$  sarà sempre minore di  $-3\text{dB}$  (l'armonica è tanto più attenuata quanto più  $\omega$  è piccolo);
- Per le frequenze maggiori di  $\omega_{B1}$  e minori di  $\omega_{B2}$  il valore del modulo di  $G$  sarà sempre contenuto all'interno del range  $[-3, 3]\text{ dB}$ , proporzionalmente al valore massimo che può assumere,  $|G(j\omega_{max})|$ ;
- Per le frequenze maggiori di  $\omega_{B2}$  il valore del modulo di  $G$  sarà sempre minore di  $-3\text{dB}$  (l'attenuazione è direttamente proporzionale a  $\omega$ ).

In questo caso il range di banda passante è chiaramente  $[\omega_{B1}, \omega_{B2}]$ , e dipende in maniera congiunta dalle costanti di tempo  $\tau_1$  e  $\tau_2$  dei due poli.

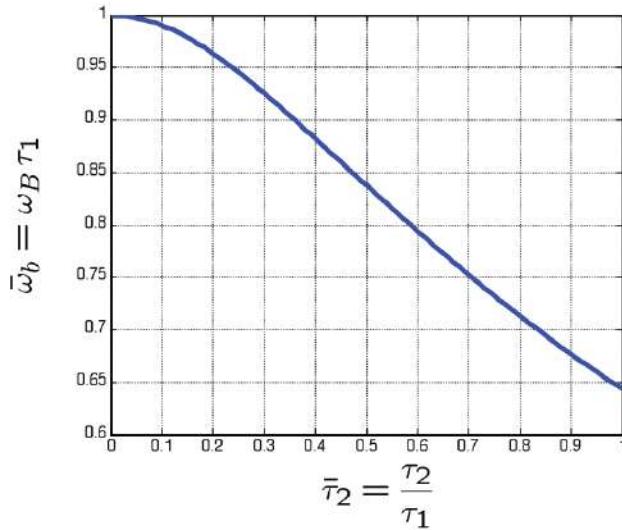
#### 6.7.4.1 Casi Particolari: Sistemi con Poli Reali

In termini matematici si possono presentare due casi, che sono i seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 0 & \tau_1 \gg \tau_2 \quad (\text{situazione con polo dominante}) \\ \frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 1 & \tau_1 \approx \tau_2 \quad (\text{situazione con poli coincidenti}) \end{cases}$$

Se uno dei due poli è dominante rispetto all'altro, la risposta del sistema è assimilabile a quella di un sistema del primo ordine con solo il polo dominante. Ciò significa che il sistema è equivalente ad un filtro passa basso con frequenza di taglio pari a quella del polo dominante, in quanto quando si raggiunge la frequenza del secondo polo si è già fuori dall'intervallo di «frequenze permesse» (a causa della pendenza  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$  dopo il primo polo), e per questo motivo il suo contributo è irrilevante.

Se al contrario le due costanti di tempo sono molto simili non è possibile parlare di dinamica dominante, né di sistema equivalente.



Nel grafico è rappresentato il rapporto fra la grandezza dell'intervallo di banda passante (nei due casi) e il rapporto fra i poli (dinamica dominante o meno).  $\omega_B$  è la pulsazione di termine banda e  $\tau_1$  la costante di tempo dell'eventuale polo dominante. Esso riassume quanto precedentemente detto:

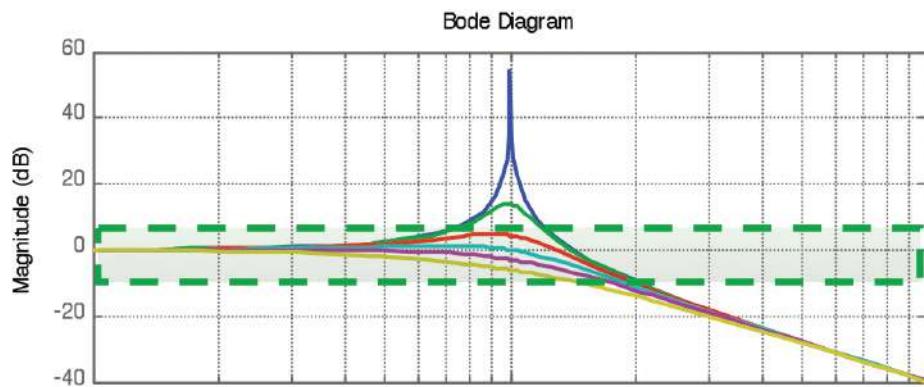
- Quando il rapporto fra le costanti di tempo tende a zero il valore sull'asse delle ordinate tende a 1: un sistema del primo ordine con il polo dominante è equivalente a quello preso in considerazione (del secondo ordine).
- Diversamente, quando il rapporto fra le costanti di tempo tende a 1, un sistema del primo ordine non è più in grado di descrivere adeguatamente quello preso in considerazione, anzi, la sua banda risulterebbe molto più piccola di quella effettiva (abbassamento del valore sulle ordinate da 1 a 0.6).

La banda passante risulta essere una funzione quasi lineare di  $\frac{1}{\tau_1}$  (con costante di proporzionalità che dipende dalla posizione reciproca delle due costanti di tempo).

#### 6.7.4.2 Casi Particolari: Sistemi con Poli Complessi Coniugati

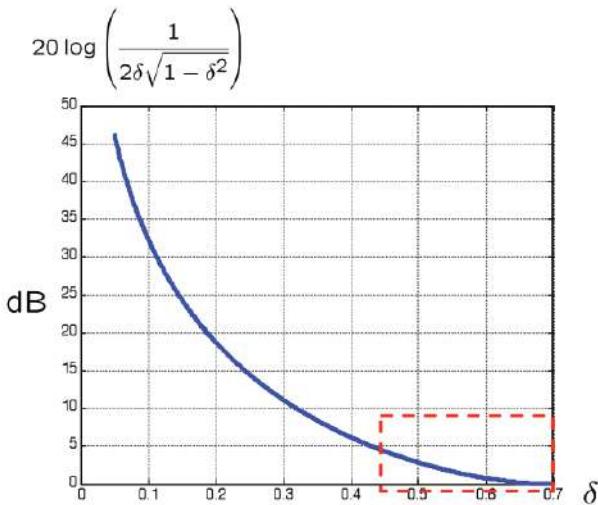
Un altro caso particolare è quello in cui si ha una  $G(s)$  con una coppia di poli complessi coniugati (ad esempio  $\mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$ ). Abbiamo visto ([Diagramma di Poli Complessi Coniugati](#) a pagina 106) come si comporta questa funzione di trasferimento nel diagramma dei moduli: essa rimane schiacciata sull'asse 0dB fino al raggiungimento della pulsazione di risonanza, in corrispondenza della quale si ha appunto il picco di risonanza, per poi scendere con una pendenza di  $-40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ .

Supponendo che la fascia di moduli in cui l'uscita rimane costante sia centrata in 0dB, risulta che tutte le pulsazioni da  $0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ad (approssimativamente) la pulsazione di risonanza appartengono alla banda passante, come se il sistema descritto fosse di tipo passa basso. In realtà, si ha in aggiunta un intervallo che comincia dopo la pulsazione di risonanza (approssimativamente) e si estende fino a quando il grafico non scende definitivamente.

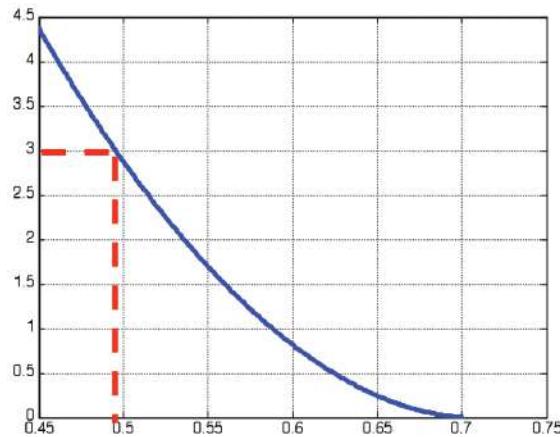


Nel complesso non è possibile allora definire il sistema come passa basso, poiché il suo comportamento è ambivalente: inizialmente non vi è alcun intervento sulle armoniche in uscita, che vengono invece notevolmente amplificate nell'intorno della pulsazione di risonanza, salvo poi essere smorzate progressivamente passato questo valore.

In particolare, ciò che impedisce di inquadrare questo sistema in un determinato tipo di filtro è il picco di risonanza, che causa (quando presente) una uscita, seguita poi da un nuovo ingresso nella fascia di ampiezze corrispondente alla banda passante. Una soluzione a questo problema consisterebbe quindi nell'avere un picco la cui altezza non supera il valore dell'estremo superiore della suddetta fascia. Come è noto, il picco di risonanza dipende dal coefficiente di smorzamento  $\delta$ : è possibile allora ricondurre questa funzione di trasferimento ad un sistema di tipo passa basso nei casi in cui i valori di  $\delta$  sono sufficientemente elevati - in altre parole, lo smorzamento è tale da contenere l'altezza del picco di risonanza. Nel grafico seguente è mostrato il rapporto fra i valori di delta e il modulo in dB della funzione:

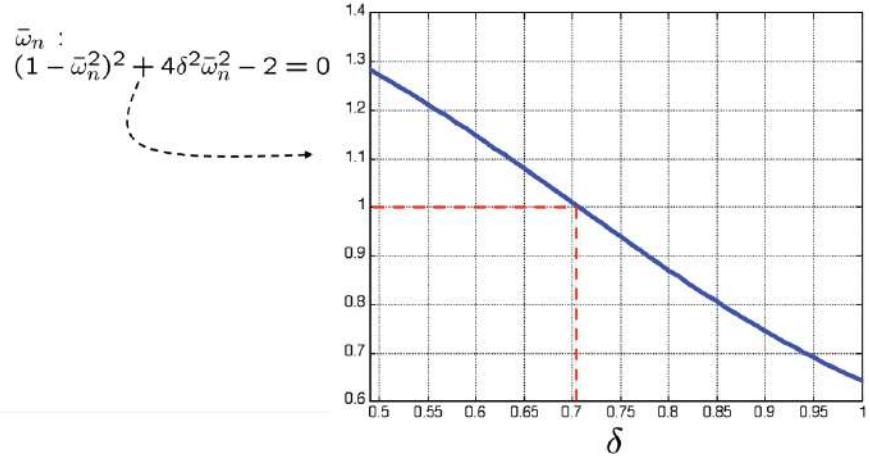


I valori di  $\delta$  che mantengono il modulo della funzione all'interno della banda si possono individuare cercando le corrispondenze date dalla curva per i valori (sulle ordinate) inferiori a 3dB, evidenziati in figura da un rettangolo rosso tratteggiato e di seguito riportati ingranditi.



Si evince allora che è possibile parlare di sistema passa basso (del secondo ordine, ritornando quindi al caso appena spiegato) solamente per i poli complessi coniugati con  $\delta \geq 0.49$ . Non è possibile invece definire una banda in questo senso per i sistemi con un coefficiente di smorzamento minore di 0.49.

Confrontando  $\omega_B$  con la pulsazione naturale  $\omega_n$  troviamo che esse sono legate dal coefficiente  $\bar{\omega}_n$ , il cui andamento è mostrato nel grafico seguente al variare di  $\delta$ , dove  $\delta \in [0.49, 1]$ .



Risulta che il rapporto fra i due è quasi lineare: più  $\delta$  è basso, più  $\bar{\omega}_n$  è elevato, e viceversa. Ciò significa che la grandezza della banda è inversamente proporzionale allo smorzamento del sistema ( $\bar{\omega}_n$  dipende da  $\delta$ ), e in particolare:

- Per sistemi molto smorzati, la pulsazione di termine banda ( $\omega_b$ ) sarà maggiore della pulsazione naturale, e quindi anche della pulsazione di risonanza;
- Per sistemi poco smorzati (cioè con  $\delta \approx 0.49$ ) il sistema tenderà ad avere una banda meno estesa, in particolare con  $\omega_b < \omega_n$ .

La pulsazione di termine banda,  $\omega_b$ , coincide con la pulsazione naturale quando  $\delta = 0.7$ .

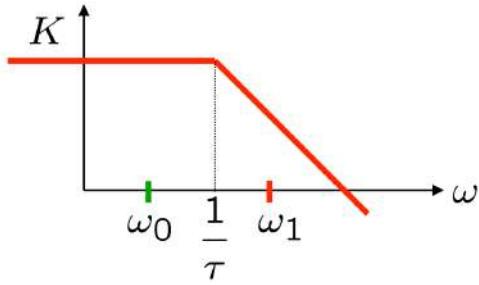
## Conclusioni

Riprendiamo quindi quanto detto all'inizio di questo capitolo e in particolare col [Teorema del Regime Permanente](#) a pagina 91: ogni sistema dinamico prende in ingresso delle armoniche che vengono riportate in uscita eventualmente con una variazione nei moduli o nelle fasi; non vi è però alcun tipo di generazione o eliminazione di armoniche da parte del sistema stesso. La variazione nelle ampiezze o nelle fasi che vi è dalla funzione di ingresso a quella di uscita è descrivibile e dipende dalla funzione di risposta armonica.

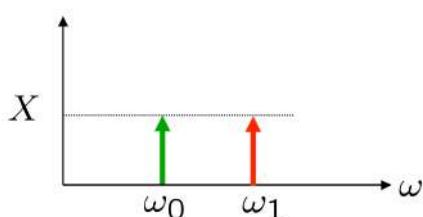
Per dimostrarlo, prendiamo un sistema dinamico con  $G(s) = \mu \frac{1}{\tau s + 1}$ , al quale viene applicato un seno come ingresso forzato; si analizzano le risposte per due frequenze in ingresso diverse,  $\omega_0$  e  $\omega_1$ . È noto l'andamento del diagramma dei moduli della funzione di trasferimento: questo non apporterà alcun contributo prima della sua pulsazione di rottura, dopo la quale subirà un crollo ad una pendenza di  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ , come mostrato in figura seguente (sistema di tipo passa basso). In entrambi i casi è corretto dire che in uscita ci sarà, a regime, un'armonica di pulsazione  $\omega_0$ <sup>72</sup> con modulo pari a quello di  $G(j\omega)$  a quella particolare pulsazione (quindi  $|G(j\omega_0)| = X$ ); la particolarità che differenzia un caso dall'altro è proprio l'andamento del grafico dei moduli (e quindi in generale l'estensione della banda).

---

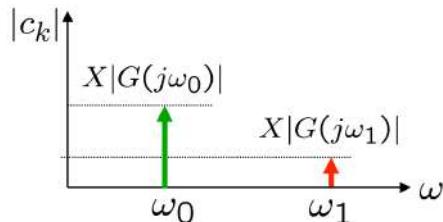
<sup>72</sup>La stessa armonica!



- Se la frequenza del seno in ingresso è  $\omega_0$ , o più in generale *la pulsazione è contenuta in banda*, il valore dell'ampiezza della funzione di uscita è  $X$ , modulato da  $\mu$ : se  $\mu > 0$ , l'armonica sarà amplificata, se  $\mu = 1$  (corrispondente a 0dB) sarà inalterata, se infine  $\mu < 0$  sarà attenuata. In questo caso si suppone  $\mu = 1$ : non vi è quindi alcun tipo di amplificazione o attenuazione.
- Se la frequenza del seno in ingresso è  $\omega_1$ , o più in generale *la pulsazione non è contenuta in banda*, il valore dell'ampiezza della funzione di uscita è attenuato rispetto a  $X$ , secondo un coefficiente di proporzionalità diretta che dipende dalla distanza fra  $\omega_1$  e  $\omega_R$ , cioè la pulsazione di taglio dalla quale il valore del modulo comincia a calare. Questo coefficiente corrisponde a  $|G(j\omega_1)|$ .



**Figura 34:** Spettro di Ampiezza in Ingresso

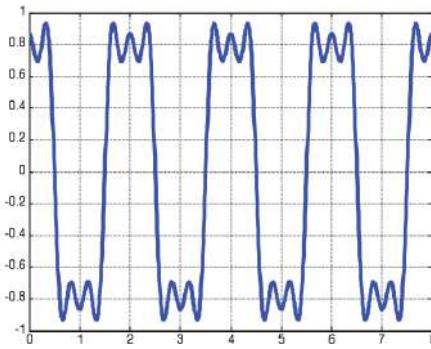


**Figura 35:** Spettro di Ampiezza in Uscita

Questa regola vale in ogni caso, anche quando il segnale di ingresso è formato da una somma di molte armoniche: per ognuna di esse si può applicare questo ragionamento.

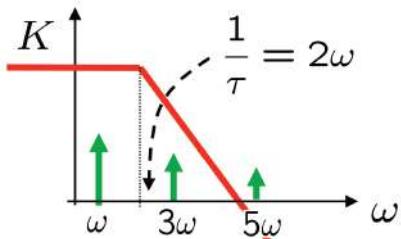
### Esempio

Si prenda allora una funzione costituita dalla somma di tre armoniche:  $f(t) = \cos(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5} \cos(5\omega t)$ , data in ingresso ad un sistema con funzione di trasferimento  $G(s) = \mu \frac{1}{(\tau s + 1)^2}$ . Si considerino fissati i valori  $\omega = \pi$ ,  $\mu = 1$ : il sistema è allora una somma di tre armoniche di pulsazione  $\pi$ ,  $3\pi$ ,  $5\pi$ , con un risultato che è il seguente:

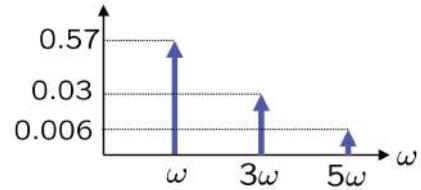


Le ampiezze corrispondenti alle tre pulsazioni in ingresso sono rispettivamente 1dB, 0.33dB, 0.2dB; il sistema è di tipo passa basso.

- Nel primo caso, si sceglie la costante di tempo in modo tale che risulti  $\frac{1}{\tau} = 2\omega$ , ossia: solo la prima pulsazione è in banda. Il risultato in uscita è mostrato dalla figura seguente, dove vediamo che la prima armonica cala leggermente, mentre le altre due vengono attenuate di circa un ordine di grandezza.

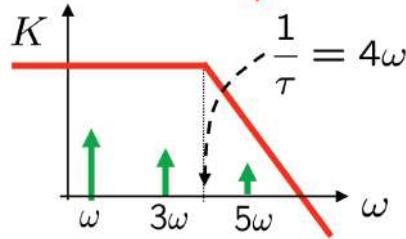


**Figura 36:** Diagramma dei Moduli

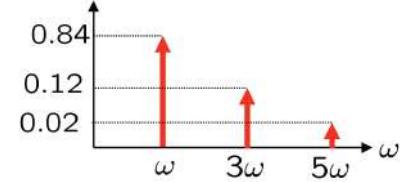


**Figura 37:** Spettro di Ampiezza in Uscita

- Successivamente si pone  $\frac{1}{\tau} = 4\omega$ : si allarga la banda in modo tale che le prime due armoniche siano comprese. Come risultato si può osservare che il loro smorzamento diminuisce rispetto al primo caso, mentre la terza armonica (seppur abbia modulo maggiore) ancora non compare in uscita.

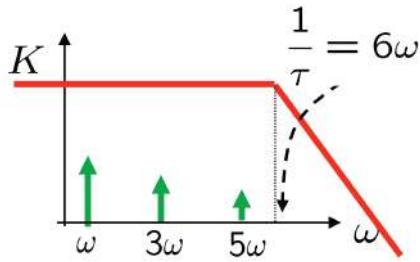


**Figura 38:** Diagramma dei Moduli

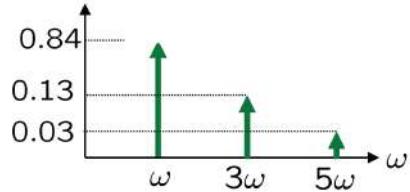


**Figura 39:** Spettro di Ampiezza in Uscita

- Infine, si pone  $\frac{1}{\tau} = 6\omega$  in modo tale che tutte e tre le armoniche rientrino in banda. Possiamo vedere dal grafico della funzione di uscita che in questo caso l'andamento rispecchia quasi perfettamente quello dell'ingresso.

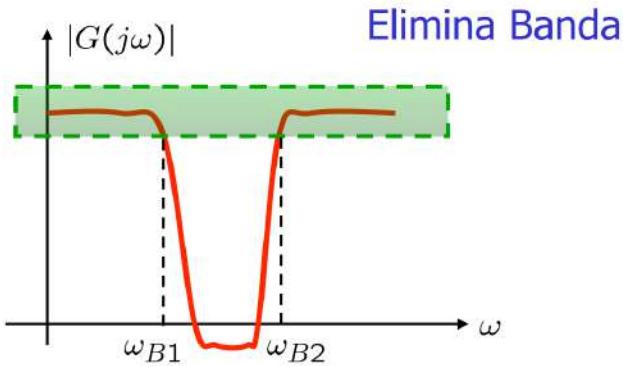


**Figura 40:** Diagramma dei Moduli



**Figura 41:** Spettro di Ampiezza in Uscita

### 6.7.5 Sistemi Elimina Banda



Si parla di sistemi elimina banda quando il sistema elimina genericamente in uscita le armoniche che non si trovano all'interno di un range di frequenze, la banda passante. Sistemi di questo tipo devono avere un rapporto poli - zeri di questo tipo: un polo non nell'origine, che crolla a una frequenza  $\omega_{B1}$ , seguito da due zeri che compensano la pendenza negativa e la portano successivamente ad una positiva ( $20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ ). Si arriva così alla frequenza  $\omega_{B2}$ , quando un secondo polo termina la crescita data dallo zero permettendo alla curva di mandare in uscita (quasi) inalterate le frequenze in banda passante. Affinché ciò sia possibile sono necessari, nel caso più semplice, due zeri e due poli con frequenze di taglio diverse.

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} \leq \sqrt{2} & \forall \omega \in [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty] \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}} & \forall \omega \notin [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty] \end{cases}$$

Questa formula significa che:

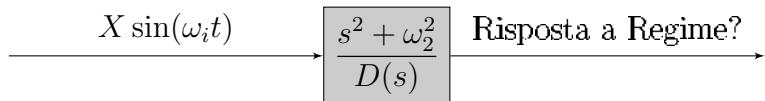
- Per tutte le frequenze minori della frequenza di taglio  $\omega_{B1}$ , e per le frequenze maggiori di  $\omega_{B2}$ , il valore del modulo della  $G$  sarà sempre contenuto all'interno del range  $[-3, 3]$  dB, proporzionalmente al valore massimo che può assumere,  $|G(j\omega_{max})|$ ;
- Per le frequenze maggiori di  $\omega_{B1}$  e minori di  $\omega_{B2}$  il valore del modulo di  $G$  sarà sempre minore di -3dB.

Il range di banda passante diventa  $[0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty]$ .

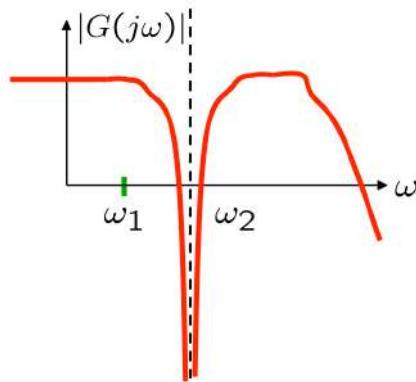
## 6.8 Proprietà Bloccante degli Zeri nel Dominio della Frequenza

Ci si occuperà, in questo capitolo, di «rivisitare» la proprietà bloccante degli zeri (della quale avevamo già parlato nell'omonimo capitolo a pagina 60) osservandola da un punto di vista frequenziale. Si prenda come primo caso di esempio quello di un sistema con due zeri complessi coniugati come quello mostrato nel grafico seguente (si sottintende un sistema asintoticamente stabile con poli a parte reale negativa). Successivamente, si pensi di alimentare quel sistema mediante un'armonica in ingresso di tipo sinusoidale,  $X \sin(\omega_i t)$ , la cui frequenza è parametrizzata in modo da permetterci di analizzare due casi differenti, in cui  $\omega_i$  è rispettivamente:

1. Una generica frequenza diversa da  $\omega_2$ , che chiameremo  $\omega_1$ ;
2. La stessa  $\omega_2$ . Facciamo notare che in questo punto il diagramma dei moduli della  $G$  tende a meno infinito, e che questo valore corrisponde alla parte immaginaria di quella coppia di poli.



È nota<sup>73</sup> la rappresentazione nel diagramma di Bode del modulo della risposta: vediamo infatti la presenza di un picco di attenuazione che tende a  $-\infty$  (in quanto il coefficiente di smorzamento  $\delta$  è nullo) nel punto in cui  $\omega = \omega_2$ <sup>74</sup>. L'andamento del grafico dei moduli dipende dalle parti restanti della funzione di trasferimento (e in particolare da  $D(s)$ ): nella figura mostrata in seguito, si suppone che essa abbia un certo guadagno costante, e successivamente un certo grado relativo per il quale «crolla» ad alte frequenze.

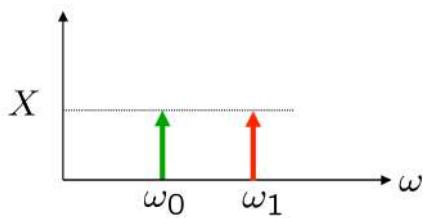


Nel primo caso, la risposta del sistema a regime sarà  $X |G(j\omega_1)| \cdot \sin(\omega_1 t + \arg\{G(j\omega_1)\})$  che è il caso *standard* visto fino a questo momento: come possiamo vedere anche nel diagramma dei moduli in figura, in uscita ci sarà la stessa armonica con un modulo amplificato o attenuato a seconda del valore di  $|G(j\omega_1)|$ .

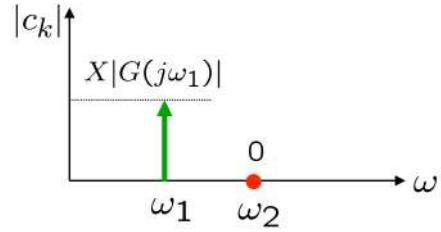
<sup>73</sup>Vedi pagina 104.

<sup>74</sup> $\omega_2 = \omega_n$

Al contrario, nel secondo caso vediamo applicata la proprietà bloccante degli zeri: l'armonica data in ingresso non è presente in uscita, a causa della semplificazione degli zeri della  $G$  con i poli introdotti dall'ingresso sinusoidale. Poiché in assenza della forzatura il grafico avrebbe avuto un picco a  $-\infty$ , è possibile dire che il seno in ingresso causa un'attenuazione infinita di quella armonica (corrispondente alla sua «scomparsa» dallo spettro delle ampiezze).

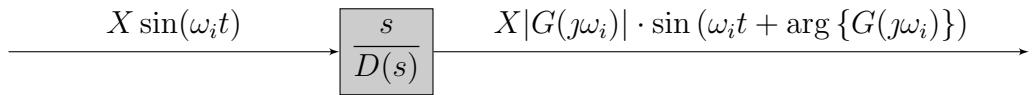


**Figura 42:** Spettro di Ampiezza in Ingresso

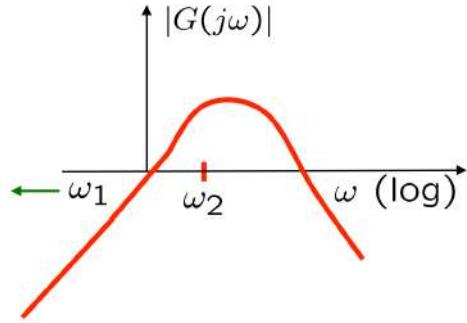


**Figura 43:** Spettro di Ampiezza in Uscita

### 6.8.1 Esempio: Caso di uno Zero nell'Origine



Preso un sistema dinamico come quello mostrato in figura, ci si ricorda<sup>75</sup> che l'andamento del grafico dei moduli in caso di uno zero nell'origine presenta una retta con pendenza  $20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$  passante per l'origine degli assi. Nel grafico mostrato sotto possiamo vedere un andamento leggermente diverso in quanto si suppone la presenza di altri contributi nella  $G(s)$  non specificati.

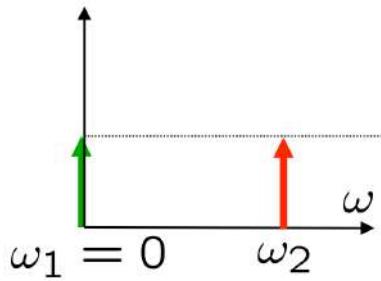


L'elemento su cui bisogna porre attenzione è che, grazie a questo zero, per  $\omega \rightarrow 0$  in scala lineare si ha un'attenuazione infinita in dB.

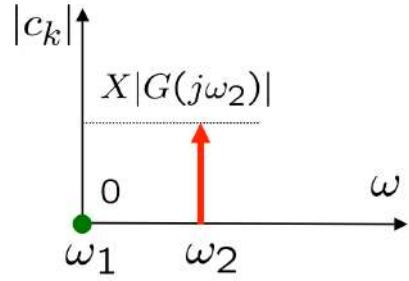
Si suppone, come nell'esempio precedente, di dare in ingresso al sistema un seno di pulsazione  $\omega_i$ , e di osservare il suo andamento al variare del parametro. In generale,  $\forall \omega \neq \omega_1$  si presenterà sull'uscita a regime un'armonica  $X|G(j\omega_2)| \sin(\omega_2 t + \arg \{G(j\omega_2)\})$ , ossia un'armonica il cui spettro delle ampiezze vedrà il modulo iniziale  $X$  attenuato o amplificato di un valore pari a  $|G(j\omega_2)|$  (caso standard).

<sup>75</sup>In caso contrario, vedere pagina 100.

Quando invece la pulsazione del segnale in ingresso coincide con quello dello zero della  $G$  (che in questo caso è  $0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e corrisponde a  $\omega_1$ , un segnale costante) l'armonica non sarà presente in uscita a regime in quanto attenuata di un fattore infinito.



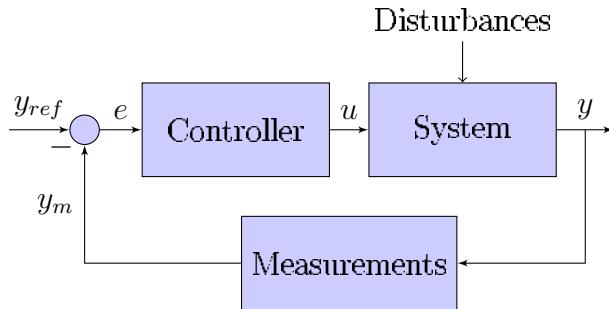
**Figura 44:** Spettro di Ampiezza in Ingresso



**Figura 45:** Spettro di Ampiezza in Uscita

## 7 Sistemi di Controllo

### 7.1 Introduzione



L'idea generale è quella di avere un impianto con un solo ingresso sul quale è possibile agire mediante un «controllore», al fine non solo di modificarne l'uscita (secondo certe specifiche richieste) ma anche di renderlo robusto a disturbi che possono entrare nel sistema.

In particolare, l'ingresso dato  $y_{ref}$  viene spesso chiamato **riferimento** in quanto è un ingresso noto; l'uscita è invece detta  $y$  ed è in generale diversa da  $y_{ref}$ : ciò avviene a causa dell'introduzione di un **errore di inseguimento** o *di tracking* pari alla differenza fra la  $y$  desiderata e quella effettiva in uscita.

Il «controllore» è un sistema dinamico descritto da una funzione di trasferimento;

- Quando questo riceve informazioni dall'impianto, tipicamente attraverso una retroazione dell'uscita, si parla di *controllo in retroazione* o **feedback**;
- Quando questo non succede si parla invece di *controllo in catena aperta* o **feedforward**.

Il suo obiettivo è garantire che l'uscita «insegua» al meglio il riferimento  $y_{ref}$  secondo le specifiche date. Queste possono essere di due tipi:

**Specifiche Statiche:** vincoli da imporre al sistema a transitorio esaurito. Si può richiedere ad esempio di eliminare l'errore, in modo che il riferimento e l'uscita coincidano, oppure inserire un margine di tolleranza dello stesso, sopra il quale non è possibile andare. In questa seconda casistica l'uscita e l'ingresso saranno difformi, ma apparterranno allo stesso range di valori.

**Specifiche Dinamiche:** vincoli da imporre al sistema in fase di transitorio. Ne sono degli esempi il tempo di assestamento (che generalmente viene richiesto diverso da quello dell'impianto), l'introduzione di un massimo per i picchi di sovraelongazione, la richiesta di una certa velocità nell'inseguimento del segnale di riferimento a fronte di variazioni repentine.

È spesso dato per scontato che la prima specifica da rispettare è quella di progettare un regolatore che sia **stabile**. Sono tuttavia un po' meno evidenti le modalità con cui raggiungere questa stabilità, in quanto la si intende sia in condizioni nominali che perturbate: la robustezza è infatti un requisito fondamentale dei sistemi che si studieranno; una volta ottenuta andrà inoltre *preservata*.

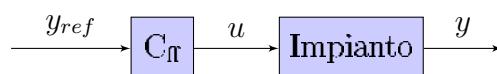
È importante che il soddisfacimento di queste specifiche avvenga in maniera «non eccessiva»: come verrà chiarito in seguito, l'imposizione di vincoli eccessivamente stringenti non funziona da un punto di vista fisico (anche se matematicamente può sembrare di sì). La variabile  $u$  viene detta **variabile di controllo** ed è quella che rappresenta propriamente questo aspetto: se si impongono, attraverso il regolatore, amplificazioni esorbitanti o variazioni repentine, non sarà possibile trasferire questo segnale al sistema dinamico<sup>76</sup>.

Non bisogna poi dimenticare la presenza di disturbi esterni non misurabili a priori, insieme ad incertezze parametriche sul modello (si intende la conoscenza approssimativa dell'impianto, del quale ci si è occupati nella parte di modellistica, solitamente linearizzando un sistema non lineare). Queste ultime due caratteristiche sono quelle che motivano l'introduzione di una retroazione nel sistema di controllo, poiché se il comportamento del sistema fosse noto a priori con certezza sarebbe possibile, attraverso il modello matematico, determinare (a priori) l'uscita, secondo il modello voluto. Tuttavia, è appunto l'ingresso di incertezze nell'impianto che richiede l'utilizzo di una retroazione.

## 7.2 Strutture di Sistemi di Controllo

Si ricorda brevemente che l'argomento è già stato introdotto nel paragrafo [Composizione di Schemi a Blocchi](#) a pagina [61](#), al quale si rimanda per eventuali dubbi.

### 7.2.1 Controllo in Catena Aperta (*Feedforward*)




---

<sup>76</sup>I motivi possono essere ad esempio il costo proibitivo di un componente con tali specifiche, o anche la sua assenza sul mercato.

Come abbiamo anticipato, questo tipo di controllore ha diversi limiti; tuttavia ha anche molti vantaggi, che spiegheremo precisamente di seguito.

La sua progettazione parte dalla conoscenza del modello matematico del sistema: esso viene realizzato applicando le specifiche sulla base del modello nominale del sistema; si assume poi che tutti i rapporti fra la  $y$  e la  $y_{ref}$  vengano rispettati nella realizzazione e nel funzionamento. Lo svantaggio principale è appunto la *mancanza di robustezza* di questo sistema, dovuta ad una necessità di conoscere perfettamente il modello, unita all'impossibilità di agire su potenziali disturbi in ingresso. Il vantaggio è però quello di una performance ottima, poiché si cabla la  $u$  sulla base di  $y_{ref}$  in maniera predittiva, senza la necessità di elaborare un errore (sotto le ipotesi di un modello accurato e di un ambiente in cui sono assenti disturbi). Non c'è quindi nemmeno bisogno di un sensore, cosa che potrebbe rappresentare un risparmio economico a livello di componenti e computazionale in termini di elaborazione.

### Come si realizza un Regolatore in Catena Aperta?

Ci si trova nel caso in cui la descrizione matematica del sistema è nota: sulla base di questo modello si definisce una funzione di trasferimento che rispetti le specifiche statiche e dinamiche di progetto, detta  $G_{ref}(s)$ . A questo punto, è possibile realizzare il regolatore procedendo per inversione:

$$R_{ff}(s) = \frac{G_{ref}(s)}{G(s)}$$

In altre parole,  $R_{ff}$  è quella funzione che permette alla funzione di trasferimento del sistema dato di «annullarsi» con la  $G_{ref}$  scelta dal progettista: si ottiene la **cancellazione totale**<sup>77</sup> della dinamica controllata.

$$Y(s) = R_{ff}(s)G(s)Y_{ref}(s) = G_{ref}(s)Y_{ref}(s)$$

Nel caso in cui vi siano delle incertezze in ingresso al sistema si possono analizzare separatamente i casi in cui esse dipendano da disturbi esogeni o da incertezze parametriche del sistema.

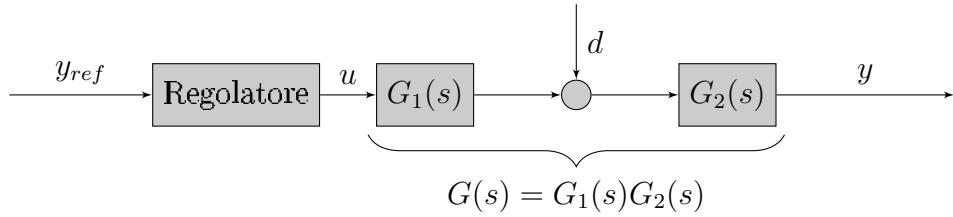
### Se vi sono Incertezze Parametriche

Risulta  $G(s) = G_{nom}(s) \cdot \Delta G(s)$ , dove  $G_{nom}(s)$  corrisponde al modello conosciuto e  $\Delta G(s)$  corrisponde alle incertezze. Seguendo il ragionamento appena fatto,  $R_{ff}(s) = \frac{G_{ref}(s)}{G_{nom}(s)} \Rightarrow R_{ff}(s)G(s) = G_{ref}(s)\Delta G(s)$ : il sistema compensato ( $R_{ff}(s)G(s)$ ) differisce da quello desiderato ( $G_{ref}(s)$ ) in quanto  $G(s) \neq G_{nom}(s)$ .

---

<sup>77</sup>Nota Bene: la formula appena introdotta per la descrizione del regolatore è valida in ogni caso lo si voglia progettare per cancellazione; al contrario, la sua applicazione nella formula seguente dipende dal particolare schema di progetto presentato in questo esempio, anche se la logica è sempre la stessa.

## Se sono presenti Disturbi Esogeni



Il sistema considerato ha due ingressi: possiamo, grazie alla sovrapposizione degli effetti, elaborarli separatamente e poi sommarli per trovare l'uscita complessiva. In particolare:

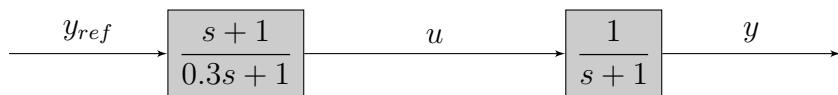
- Considerando  $y_{ref} \neq 0, d = 0$ , il primo blocco rimane invariato: si ha quindi  $Y(s) = R_{ff}(s)G(s)Y_{ref}(s)$ .
- Considerando  $y_{ref} = 0, d \neq 0$ , il secondo blocco comprende l'ingresso dato dal disturbo e la  $G_2(s)$ , per un risultato di  $Y(s) = G_2(s)D(s)$ .

Nel complesso,  $Y(s) = R_{ff}(s)G_1(s)G_2(s)Y_{ref}(s) + G_2(s)D(s)$ .

Sostituendo nella  $Y(s)$  la definizione di  $R_{ff}(s)$  si ottiene  $Y(s) = G_{ref}(s)Y_{ref}(s) + G_2(s)D(s)$ : è evidente che l'uscita tiene conto di un termine ulteriore rispetto a quello dato dalla funzione di trasferimento progettata, dipendente dal disturbo entrato nel sistema. Allora  $y \neq y_{ref}$ .

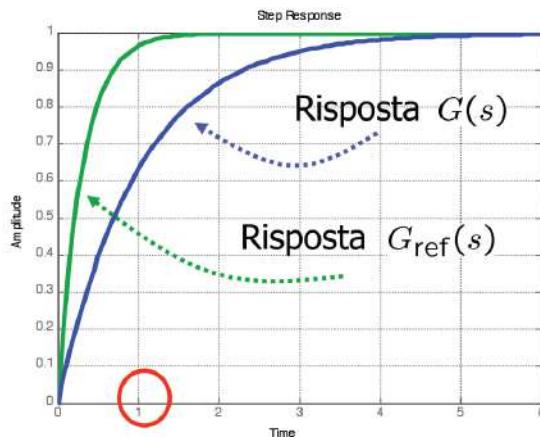
### 7.2.1.1 Esempio: Caso Ideale

Sia dato il sistema mostrato nel grafico.



La funzione di trasferimento del sistema è quindi  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ : supponiamo però di volere un'uscita più veloce, in particolare tale che  $y_{ref} = \frac{1}{s}$ . Studiando il sistema, questo si presenta senza smorzamenti e con un  $T_{ass\ 1\%} \approx 4.6s$ . Le specifiche date per «inseguire» al meglio il riferimento sono:

- Mantenere il guadagno statico unitario ed errore di inseguimento nullo: possiamo esprimere matematicamente questo vincolo con il  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_{ref}(t)| = 0$ ;
- Diminuire il tempo di assestamento, raggiungendo un valore  $T_{ass\ 5\%} \leq 1s$ ;
- Mantenere nulla la sovraelongazione percentuale  $S\%$ .

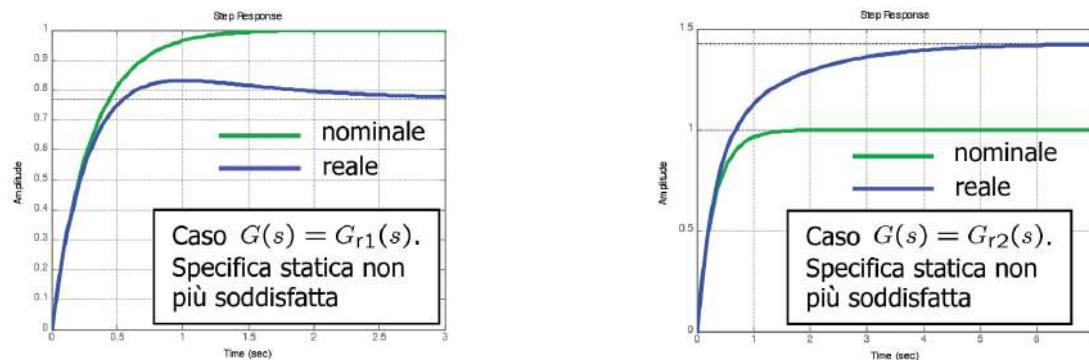


Per soddisfare queste specifiche (la prima statica, le altre due dinamiche) si progetta una  $G_{ref}$  con un solo polo reale (per evitare sovraelongazioni) con costante di tempo  $\tau$  tale che  $1 \geq 3\tau^{78}$ : si ricava  $\tau = 0.3$ , da cui  $G_{ref}(s) = \frac{1}{0.3s+1}$ . Allora, secondo la formula appena vista,  $R_{ff}(s) = \frac{s+1}{0.3s+1}$ .

### 7.2.1.2 Esempio: Incertezze Parametriche

Si estende con questo secondo esempio il caso presentato precedentemente. Abbiamo infatti  $G_{nom}(s) = \frac{1}{s+1}$  e un regolatore in feedforward  $R_{ff}(s) = \frac{s+1}{0.3s+1}$ , mentre la dinamica reale del sistema è descritta dalle funzioni  $G_1(s) = \frac{1}{s+1.3}$  (nel caso il polo sia stimato per eccesso) o  $G_2(s) = \frac{1}{s+0.7}$  (nel caso il polo sia stimato per difetto).

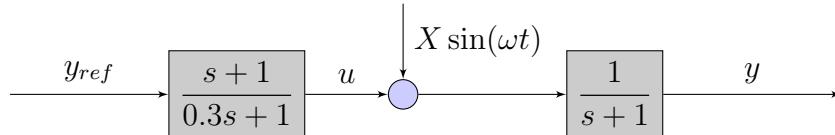
Il regolatore riesce, in queste situazioni, a svolgere il suo compito solo parzialmente: fino a un certo valore ricalca fedelmente il riferimento, per poi seguire un andamento diverso.



### 7.2.1.3 Esempio: Disturbi Esogeni

Si prenda un disturbo  $D(s) = X \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ , e lo stesso sistema dinamico analizzato negli esempi precedenti. Inoltre,

- $G(s) = G_2(s) = \frac{1}{s+1}$ ,
- $G_1(s) = 1$ ,
- $R_{ff}(s) = \frac{s+1}{0.3s+1}$ .

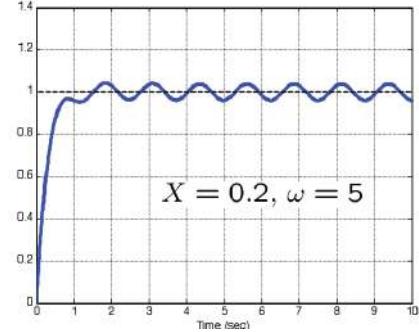
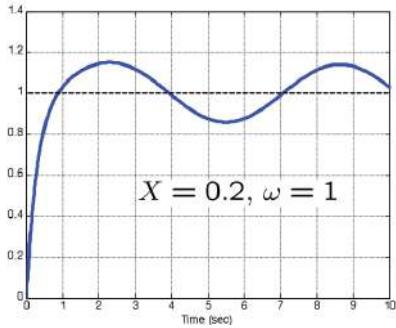


Lo schema a blocchi mostra ciò che succede nel sistema: il disturbo sinusoidale entra nel sistema senza che il controllore possa fare alcunché, contribuendo ad allontanare la  $y$  in uscita dalla  $y_{ref}$  desiderata.

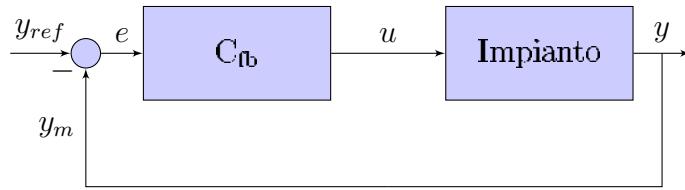
In figura sono plottati alcuni andamenti che il sistema può assumere a seconda della frequenza del disturbo in ingresso.

Nota: se nel secondo caso può sembrare che il disturbo sia meglio attenuato, ciò è dovuto probabilmente a caratteristiche intrinseche dell'impianto, ma sicuramente non al regolatore.

<sup>78</sup>Secondo la definizione data di tempo di assestamento (vedi pagina 65).



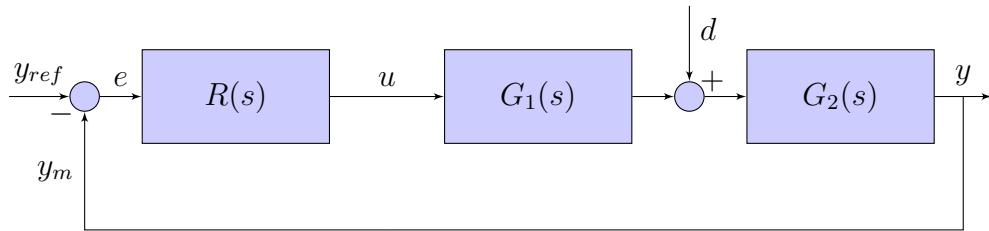
### 7.2.2 Controllo in Retroazione (Feedback)



Questa tipologia di impianto è più utile in casi «non ideali», quando cioè non è noto precisamente il modello del sistema e si tiene conto di possibili disturbi in ingresso. Per questo motivo questo impianto offre una maggiore robustezza, ed è questo il suo principale vantaggio. Vi sono tuttavia anche degli svantaggi: il progetto diventa potenzialmente molto più complesso e vi è necessità di utilizzare sensori (introduzione di un costo per i componenti). Uno svantaggio più subdolo è il seguente: poiché il controllore prende in ingresso un errore (o dipende da esso, nel caso lo debba annullare), fino al momento in cui non se ne commette uno questo non entra in funzione. Ci si trova come vincolati ad attendere - si deve tener conto anche di un piccolo ritardo - la ricezione di un errore, e fino al momento in cui questo arriva il controllore non è attivo.

Vediamo ora un esempio più specifico di un controllore in retroazione.

Per maggiore generalità, la  $G(s)$  è stata divisa in due blocchi  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ , con l'aggiunta di un disturbo esogeno  $d$  in ingresso fra il primo e il secondo blocco. Si può quindi dire che sono presenti due input (dei quali uno «positivo» e uno «negativo»), cioè la  $y_{ref}$  e il disturbo  $d$ .



Si possono individuare due casi limite:

- $G_1(s)$  è unitario: allora  $G_{ref} \equiv G_2$  e il disturbo  $d$  si applica sull'ingresso del sistema;
- $G_2(s)$  è unitario: allora  $G_{ref} \equiv G_1$  e il disturbo  $d$  influenza l'uscita del sistema;

mentre in tutti gli altri casi  $d$  entra in un punto generico della catena in retroazione. Come abbiamo visto per il controllo in catena aperta, consideriamo un sistema con due ingressi e modelliamo la relazione ingresso - uscita facendo uso della sovrapposizione degli effetti. Si fa notare che in questo caso non avremo più  $Y_{ref}$  nel primo blocco, in quanto si considera l'errore come ingresso; questo inoltre verrà d'ora in poi indicato con  $E = \mathcal{L}\{e(t)\}$ , dove  $e(t)$  definito precedentemente.

Si passa quindi da

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)Y_{ref}(s) + G_2(s)D(s)$$

a

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)E(s) + G_2(s)D(s).$$

Considerando  $d = 0$  si ottiene  $Y(s) = G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)E(s)$ ; poiché  $E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s) \Rightarrow Y(s) = G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)[Y_{ref}(s) - Y(s)]$ . Raccogliendo  $Y(s)$  otteniamo l'espressione:

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)Y_{ref}(s)}{G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s) + 1}$$

che è, in altre parole, la relazione ingresso uscita del sistema in assenza di disturbi. Possiamo quindi dedurre che l'uscita dipende dalla dinamica del plant controllato  $G(s)$  come anche dal grado di libertà dato dal regolatore  $R_{fd}(s)$ .

Considerando invece  $Y_{ref} = 0$  l'espressione del segnale in uscita nel dominio di Laplace passa da  $Y(s) = G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)E(s) + G_2(s)D(s)$  a  $Y(s) = G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)[-Y(s)] + G_2(s)D(s)$ . Raccogliamo ancora una volta, in modo da isolare  $Y(s)$ ; si ottiene

$$Y(s) = \frac{G_2(s)D(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)}$$

Anche in questo caso l'uscita dipende dalla dinamica del plant e dal regolatore in feedback, mentre in aggiunta c'è anche la dipendenza dal disturbo  $D(s)$ .

Se si considera un caso più generale, la  $Y(s)$  comprende entrambi i contributi. Potremmo infatti scrivere:

$$G_{1,fb}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)}{G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s) + 1}, \quad G_{2,fb}(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s)}$$

in modo che risulti  $Y(s) = G_{1,fb}(s)Y_{ref}(s) + G_{2,fb}(s)D(s)$ .

Osservando più attentamente le due espressioni appena trovate si nota la presenza di un fattore comune:  $G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s) = G(s)R_{fb}(s)$ . Si definisce questa relazione come **funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto  $L(s)$** .

Intuitivamente, quando  $G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s) \gg 1 \forall s$

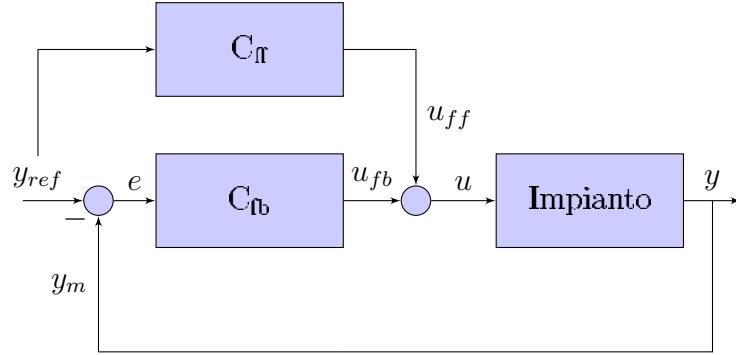
- $G_{1,fb}(s) \approx 1$ : ciò significa che la  $Y_{ref}$  viene copiata perfettamente in uscita (inseguimento fedele).
- $G_{2,fb}(s) \approx \frac{1}{R_{fd}(s)G_1(s)}$ : il disturbo viene filtrato in uscita.

Vedremo in seguito il significato fisico dell'ipotesi  $G_1(s)G_2(s)R_{fb}(s) \gg 1 \forall s$ .

### 7.2.3 Controllo a Struttura Mista

È possibile considerare delle varianti ai sistemi precedenti, coniugando i due aspetti. Vediamo alcuni esempi.

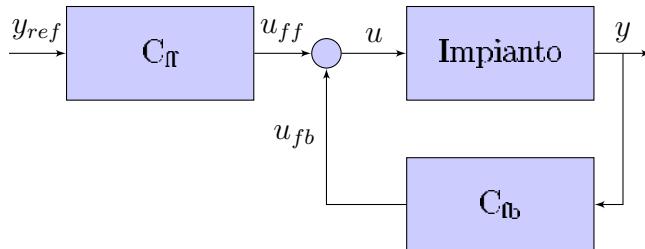
#### 7.2.3.1 Elaborazione del Riferimento e dell'Errore di Inseguimento Congiunta



Data una buona conoscenza del sistema, unita all'assenza di disturbi, il controllore feedforward si occupa di «inseguire» la  $y_{ref}$ , dando in uscita un segnale che è un preciso inseguimento del riferimento in ingresso. Le performance sono ottime e il controllore in feedback non entra mai in gioco.

Quando si verifica una variazione rispetto alle condizioni nominali il controllore  $ff$  ha un'azione limitata: il controllore  $fb$  si occupa quindi di gestire l'errore, affiancandosi all'azione nominale. In questo modo si coniugano le performances con la robustezza, e, anche se gli svantaggi del controllore  $ff$  vengono superati, quelli del controllore in feedback rimangono: per la sua entrata in funzione è necessario attendere un errore sul segnale.

#### 7.2.3.2 Elaborazione del Riferimento e dell'Errore di Inseguimento Disgiunta



In questo secondo esempio, il regolatore feedforward processa il riferimento e il regolatore in feedback processa la  $y$ : i due controllori agiscono in maniera disgiunta sul segnale. I vantaggi sono ancora quelli di unire le performances (date dal controllo in catena aperta) e la robustezza (data dal controllore in retroazione). Anche se questo modello supera gli svantaggi della versione precedente, non ne è completamente esente: non sempre infatti la  $y$  e la  $y_{ref}$  possono essere misurate separatamente.

## 7.3 Passaggio al Dominio della Frequenza

In base al Teorema del Regime Permanente, è possibile scrivere

$$F_{1,fb}(\omega) = \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)R_{fb}(j\omega)}{G_1(j\omega)G_2(j\omega)R_{fb}(j\omega) + 1}, \quad F_{2,fb}(\omega) = \frac{G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)R_{fb}(j\omega)}$$

Queste due funzioni descrivono come vengono filtrate le armoniche in ingresso al sistema. Si fa notare che tali proprietà di filtraggio sono modificabili attraverso il progetto del regolatore. In particolare,

- $|F_{1,fb}(\bar{\omega})|$  è il fattore di attenuazione (o amplificazione) a regime della componente a frequenza  $\bar{\omega}$  del segnale di riferimento  $y_{ref}$ .

Ad esempio: si vuole garantire che l'inseguimento a regime della funzione  $y_{ref}$  nell'intervallo  $[\omega_{r Lower}, \omega_{r Upper}]$  abbia una precisione  $E$ .

$$|Y_{ref}(j\omega) - Y(j\omega)| = |Y_{ref}(j\omega) - F_{1,fb}(\omega)Y_{ref}(j\omega)| = |1 - F_{1,fb}(\omega)| \cdot |Y_{ref}(j\omega)| \leq E |Y_{ref}(j\omega)| \quad \forall \omega \in [\omega_{r Lower}, \omega_{r Upper}]$$

Quindi  $\left|1 - \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)R_{fb}(j\omega)}{G_1(j\omega)G_2(j\omega)R_{fb}(j\omega) + 1}\right| \leq E \quad \forall \omega \in [\omega_{r Lower}, \omega_{r Upper}]$ . Assumendo come prima  $G_1(j\omega)G_2(j\omega)R_{fb}(j\omega) \gg 1 \quad \forall \omega \in [\omega_{r Lower}, \omega_{r Upper}]$ <sup>79</sup> risulta  $|R_{fb}(j\omega)| \geq \frac{1}{E|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|} \quad \forall \omega \in [\omega_{r Lower}, \omega_{r Upper}]$ .

- $|F_{2,fb}(\bar{\omega})|$  è il fattore di attenuazione (o amplificazione) a regime della componente a frequenza  $\bar{\omega}$  del disturbo  $d$ .

Ad esempio: si vuole attenuare, a regime, un disturbo  $d$  di una quantità  $A$ ; non è nota la forma d'onda del disturbo ma si sa che esso si manifesta nell'intervallo  $[\omega_{d Lower}, \omega_{d Upper}]$ . Per fare ciò si deve imporre  $\frac{G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)R_{fb}(j\omega)} \leq A \quad \forall \omega \in [\omega_{d Lower}, \omega_{d Upper}]$ .

Si considera allora di operare nell'ipotesi che  $G_1(j\omega)G_2(j\omega)R_{fb}(j\omega) \gg 1 \quad \forall \omega \in [\omega_{d Lower}, \omega_{d Upper}]$ : per ottenere l'attenuazione del disturbo sarà necessario progettare un regolatore tale che  $|R_{fb}(j\omega)| \geq \frac{1}{A|G_1(j\omega)|} \quad \forall \omega \in [\omega_{d Lower}, \omega_{d Upper}]$ .

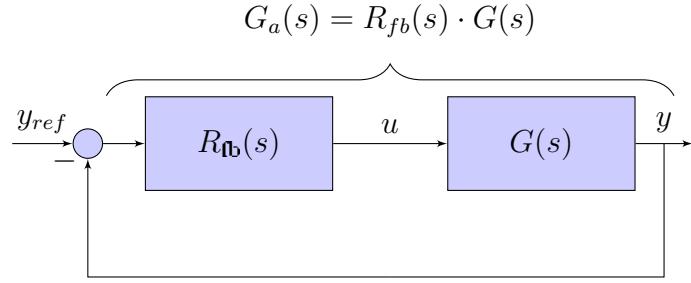
## 7.4 Metodologie di Progetto per Controllori in Retroazione

### 7.4.1 Metodologie Analitiche

Questa metodologia prevede la conoscenza del sistema, così da poterlo descrivere mediante una funzione di trasferimento; a questo punto, si progetta la  $G_{ref}$  in modo da soddisfare le specifiche richieste, e il regolatore si deriva da queste due funzioni per cancellazione. Come è evidente, si segue la stessa linea guida del sistema ad anello aperto.

---

<sup>79</sup>È come imporre che il modulo del regolatore sia maggiore di un certo valore all'interno di un intervallo di frequenze.



Come abbiamo visto nelle sezioni precedenti, nel caso in cui si voglia mantenere la stabilità, limitare le sovraelongazioni e modificare il tempo di assestamento la  $G_{ref}$  più adatta è quella seguente:  $\frac{1}{\tau s+1}$ ; la  $R$  viene progettata inoltre come  $\frac{1}{G}$ .

Si comincia cercando la relazione ingresso - uscita del sistema, che risulta

$$Y(s) = G(s)R_{fb}(s)[Y_{ref}(s) - Y(s)] \Rightarrow Y(s)[1 + G(s)R_{fb}(s)] = G(s)R_{fb}(s)Y_{ref}(s),$$

da cui  $Y(s) = \frac{G_a(s)}{1+G_a(s)}Y_{ref}(s)$ . Ponendo  $G_{ref}(s) = \frac{G_a(s)}{1+G_a(s)}$ <sup>80</sup>, e di conseguenza  $\frac{1}{\tau s+1} = \frac{G_a(s)}{1+G_a(s)}$ , risulta che  $G_a(s) = \frac{1}{\tau s}$ . Attraverso la relazione che permette di progettare il regolatore per cancellazione, e sapendo che  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ , si calcola un regolatore in feedback con funzione di trasferimento  $R_{fb}(s) = \frac{s+1}{\tau s}$ . A questo punto è possibile imporre qualunque specifica desiderata riguardante il tempo di assestamento. Si noti che questo regolatore ha un polo nell'origine, cosa che gli impedisce di essere asintoticamente stabile: vedremo in seguito come in realtà ciò sia abbastanza «normale» in questi casi.

È importante sottolineare che questo approccio è valido sia per la relazione ingresso - uscita rispetto alla  $Y_{ref}(s)$  sia per quella dei disturbi.

Poiché l'approccio analitico è basato sulla *cancellazione* della dinamica del sistema controllato e sulla sua *sostituzione* con una dinamica desiderata, si ha un consistente problema di robustezza a fronte di incertezze parametriche sulla dinamica controllata. L'approccio «a forza bruta», cioè la cancellazione di ogni informazione presente nel sistema, è quindi svantaggioso: in questo caso vediamo che la cancellazione implica l'introduzione nel regolatore di zeri, che aumentano l'instabilità (e la complessità) del sistema. È possibile intuire infatti che l'introduzione di componenti non stabili per la cancellazione di dinamiche non critiche era probabilmente evitabile senza grosse perdite, o risolvibile mediante un progetto alternativo.

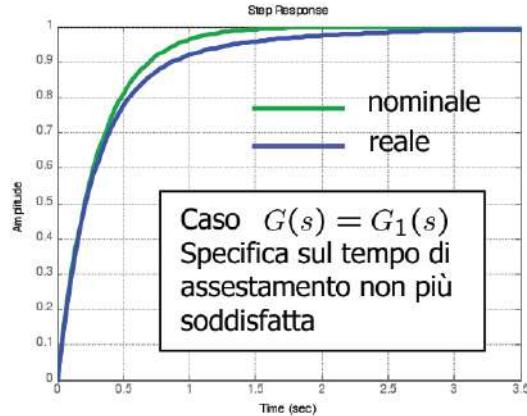
#### 7.4.1.1 Esempio: Incertezze Parametriche

Estendendo l'esempio precedente, si vuole progettare un regolatore in retroazione conoscendo  $G_{nom}(s) = \frac{1}{s+1}$ ; vi sono tuttavia alcune incertezze sulla dinamica, che danno origine a due casi: in entrambi il regolatore è stato progettato sulla base del modello noto, ma

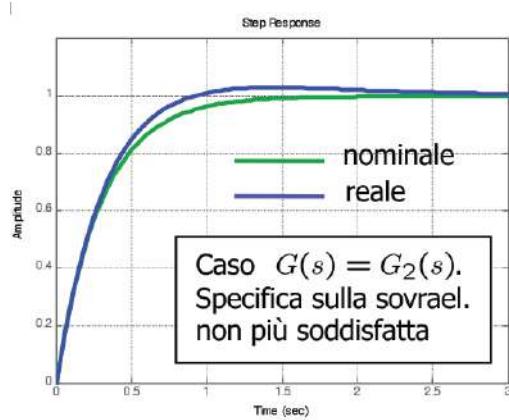
1.  $G_{reale}(s) = G_1(s) = \frac{1}{s+1.3}$ . Ne consegue che  $G_{ref}(s) = \frac{R_{fb}(s)G_1(s)}{1+R_{fb}(s)G_1(s)} = \frac{3.33s+3.33}{s^2+4.633s+3.33}$ ;

---

<sup>80</sup>Ciò discende dalla relazione  $Y(s) = G_{ref}(s)Y_{ref}(s)$ , come dimostrato a pagina 134.



2.  $G_{reale}(s) = G_2(s) = \frac{1}{s+0.7}$ . Ne consegue che  $G_{ref}(s) = \frac{R_{fb}(s)G_2(s)}{1+R_{fb}(s)G_2(s)} = \frac{3.33s+3.33}{s^2+4.033s+3.33}$ .



In entrambi i casi, un intervento mirato ad un miglioramento del sistema ha invece causato l'ingresso di poli complessi coniugati.

#### 7.4.2 Metodologie non Analitiche

Poiché spesso le specifiche di progetto non sono date in termini rigorosi, quanto più «per intervalli», è possibile sfruttare questi gradi di libertà per trovare metodologie di progetto robuste non basate sulla cancellazione totale della dinamica controllata.

Per fare ciò è però necessaria una «traduzione» delle specifiche date a livello progettuale in indicazioni precise riferite al sistema ad anello; il progetto avverrebbe inoltre per tentativi.

Diventa quindi di fondamentale importanza capire l'effetto delle specifiche date (applicate al sistema mediante la funzione di trasferimento ad anello aperto) una volta inserite in un sistema in retroazione, cioè la relazione fra quelle che abbiamo chiamato  $G_{ref}(s)$  e  $G_a(s)$ .

Uno degli obiettivi prioritari della teoria che segue sarà quello di:

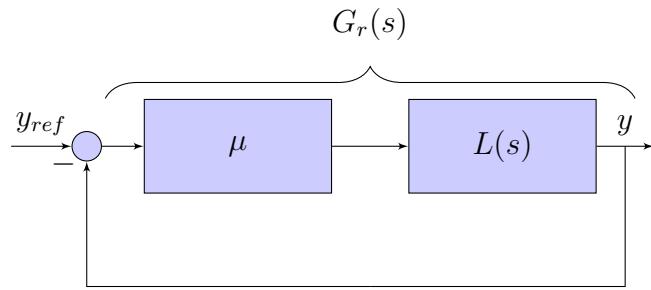
1. Mettere in luce relazioni tra funzioni di trasferimento e funzioni di risposta armonica del sistema retroazionato, e le relative grandezze della funzione di anello (al fine di tradurre specifiche del sistema in retro in specifiche sulla funzione di anello).

2. Identificare metodologie di progetto robuste sul sistema ad anello.

## 8 Rapporto fra Sistema in Retroazione e Sistema ad Anello Aperto

### 8.1 Luogo delle Radici

Si definisce *luogo delle radici* uno strumento utile a identificare la collocazione dei poli del sistema retroazionato, al variare del guadagno statico, a partire dai poli - zeri del *sistema ad anello aperto*. Vediamone subito un esempio pratico.



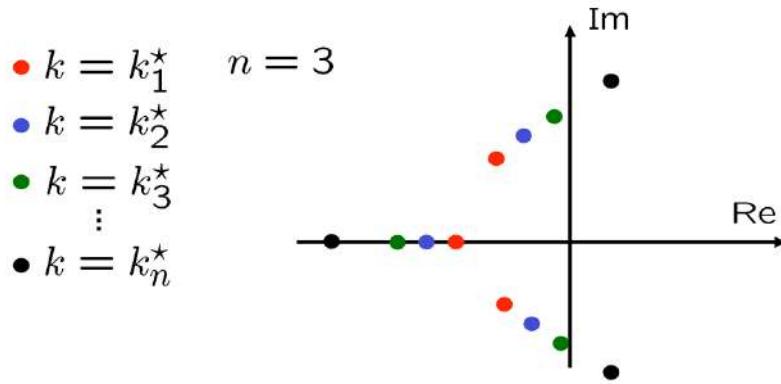
Si ha che  $G_r(s) = \frac{\mu L(s)}{1 + \mu L(s)}$  ed  $L(s) = R(s)G(s)$ , che possiamo anche scrivere come  $L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ ; se sostituiamo quest'ultimo valore nella  $G_r(s)$  risulta  $\mu \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{D(s)}{D(s) + \mu N(s)} = \mu \frac{N(s)}{D(s) + \mu N(s)}$ .

I poli del sistema retroazionato  $G_r(s)$  sono le soluzioni dell'equazione  $D(s) + \mu N(s) = 0$ : esse intuitivamente spazieranno da

- $\mu \rightarrow 0 \Rightarrow [D(s) + \mu N(s)] \rightarrow D(s)$ . In altre parole, i *poli* del sistema retroazionato coincidono con quelli della funzione  $L(s)$ . L'equazione caratteristica si riduce a  $D(s) = 0$ .
- $\mu \rightarrow \infty \Rightarrow [D(s) + \mu N(s)] \rightarrow N(s)$ , cioè i poli del sistema retroazionato vanno a coincidere con gli *zeri* della funzione ad anello aperto. L'equazione caratteristica si riduce a  $N(s) = 0$ .

Il numero di soluzioni possibili dipende dal grado del polinomio caratteristico, e in particolare dall'ordine di  $D(s)$ <sup>81</sup>: il numero di poli del sistema retroazionato è uguale al numero di poli del sistema ad anello aperto. Per ogni valore del guadagno statico  $\mu$  (fissato) esistono quindi  $n$  soluzioni nel piano complesso, tante quante i poli. Indicando ogni soluzione con un punto, l'insieme delle soluzioni  $\forall \mu$  dà origine ad una curva, detta anche «ramo»: il luogo delle radici è costituito dall'insieme dei «rami» ottenuti, sui quali  $n$  punti identificano i poli del sistema retroazionato per quel valore di  $\mu$ .

<sup>81</sup>Questo perché nella stragrande maggioranza dei casi il numero dei poli sarà maggiore del numero degli zeri, al fine di garantire stabilità.



A questo proposito, si segnala la funzione Matlab *rlocus(sys)*:

«*rlocus* computes the root locus of a SISO open-loop model. The root locus gives the closed-loop pole trajectories as a function of the feedback gain  $k$  (assuming negative feedback). Root loci are used to study the effects of varying feedback gains on closed-loop pole locations. In turn, these locations provide indirect information on the time and frequency responses.»

Inoltre,

«If sys has transfer function

$$h(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

the closed-loop poles are the roots of

$$d(s) + kn(s) = 0$$

*rlocus* adaptively selects a set of positive gains  $k$  to produce a smooth plot.

Alternatively,

*rlocus(sys,k)*

uses the user-specified vector  $k$  of gains to plot the root locus.»

### 8.1.1 Proprietà

1. Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli del sistema ad anello aperto, parametrizzati nel valore di  $\mu$ . Questo avviene perché a ciascun ramo è associato un polo.
2. Ogni ramo parte, per  $\mu = 0$ , da un polo del sistema ad anello aperto e termina, per  $\mu \rightarrow \infty$ , su uno zero del sistema ad anello aperto o, altrimenti, all'infinito.  
Avevamo infatti detto che in quest'ultimo caso i poli del regolatore in retroazione assomigliavano agli zeri della funzione ad anello aperto, tuttavia poiché vi sono più poli che zeri (grado relativo maggiore o uguale a uno) alcuni di questi poli «non avranno zeri a cui tendere» e per questo andranno all'infinito. Il numero di poli che presentano questo comportamento è pari al grado relativo.
3. Il luogo delle radici è simmetrico rispetto l'asse Reale, per costruzione.
4. Un punto dell'asse Reale appartiene al luogo delle radici se si lascia alla sua *destra* un numero totale *dispari* di poli/zeri del sistema ad anello aperto. I poli complessi coniugati non entrano nel computo in quanto si considerano a coppie.

5. Gli asintoti si diramano da un punto dell'asse Reale di valore

$$\sigma_a = \underbrace{\frac{1}{n-m}}_{\text{grado relativo}} \cdot \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i}_{\text{poli di } L(s)} - \underbrace{\sum_{i=1}^m z_i}_{\text{zeri di } L(s)} \right)$$

6. Gli asintoti dividono il piano complesso in parti uguali. In particolare l'angolo che l'asintoto forma con l'asse reale è

$$\theta_{\alpha, \nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} \quad \nu = 0, 1, \dots, n-m-1$$

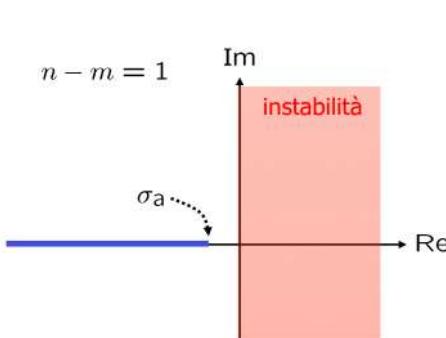
7. Per sistemi a grado relativo maggiore di 1, la somma dei poli del sistema in retro è costante al variare di  $\mu$  e in particolare vale

$$\sigma = \sum_{i=1}^n p_i$$

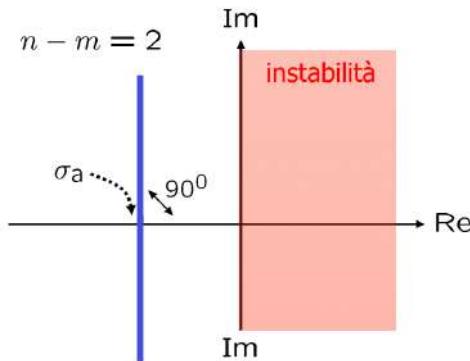
dove  $p_i$  sono i poli del sistema ad anello aperto. In altre parole, il numero di poli del sistema ad anello aperto è uguale al numero di poli del sistema retroazionato, anche se al variare di  $\mu$  questi poli cambiano.

### 8.1.2 Asintoti

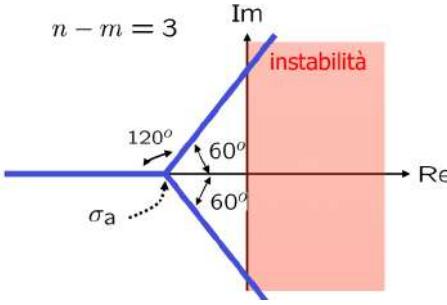
Riportiamo di seguito una serie di grafici che formalizzano la suddivisione del piano complesso: se ne vedrà un uso pratico negli esempi seguenti.



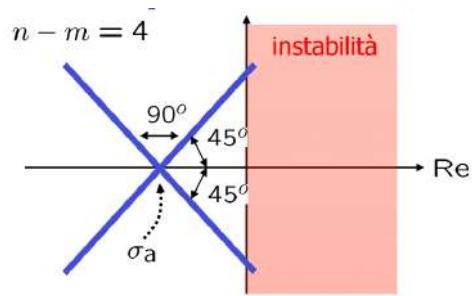
**Figura 46:** Asintoti con grado relativo 1



**Figura 47:** Asintoti con grado relativo 2



**Figura 48:** Asintoti con grado relativo 3



**Figura 49:** Asintoti con grado relativo 4

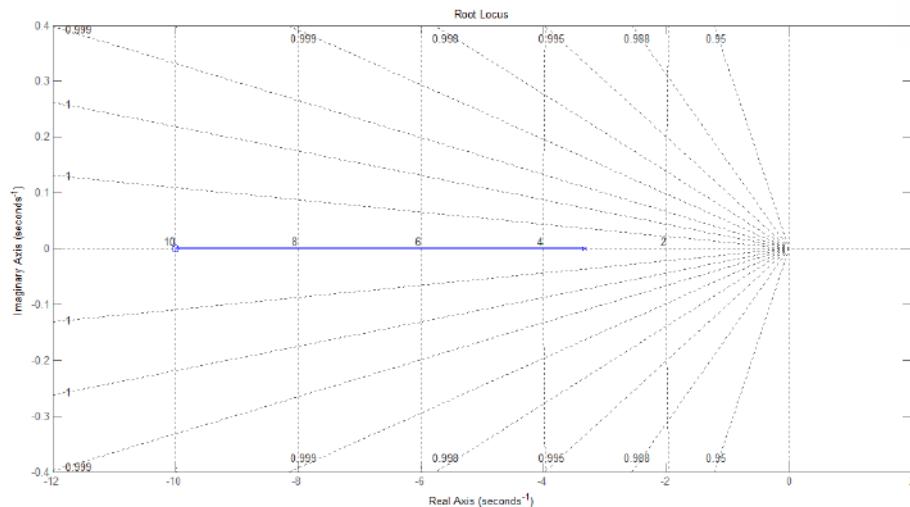
### 8.1.2.1 Esempi: Sistemi del Primo Ordine

1)

Sia data una funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto  $L(s) = \frac{\tau_Z s + 1}{\tau_P s + 1}$ . Considerando il sistema chiuso in retroazione, dopo aver introdotto il guadagno  $\mu$ , tracciarne il luogo delle radici.

Per cominciare, si localizzano il polo e lo zero sul piano di Gauss: in questo caso sono entrambi a parte reale negativa; immaginando che  $\tau_Z < \tau_P$  avremo il polo più vicino all'origine, seguito dallo zero ad una certa distanza. Seguendo le regole, sappiamo che l'andamento del grafico «partirà» dalla posizione del polo e «terminerà» nella posizione dello zero, per valori di  $\mu$  che vanno da zero a infinito. Non ci sono altri rami perché il grado relativo è pari a zero. Una volta stabilito questo, non è comunque noto l'andamento preciso del grafico: non sappiamo ad esempio se si allontana dall'asse o se vi rimane appoggiato sopra, se si sviluppa solo nel secondo quadrante o anche nel terzo. Si prova allora per tentativi, facendosi guidare dalle proprietà sopra descritte.

Per prima cosa, è possibile scartare l'ipotesi secondo la quale il grafico si estende solo nel secondo quadrante (e in analogia, solo nel terzo), in quanto ciò viola la proprietà di simmetria. In secondo luogo, non è possibile che si trovi su entrambi i quadranti, poiché abbiamo detto che vi è un solo ramo. Come conseguenza, questo sarà adiacente all'asse Reale negativo.



Incidentalmente, si riporta il codice Matlab utilizzato per ottenere questo grafico (i valori delle costanti di tempo sono arbitrari all'interno delle ipotesi fatte).

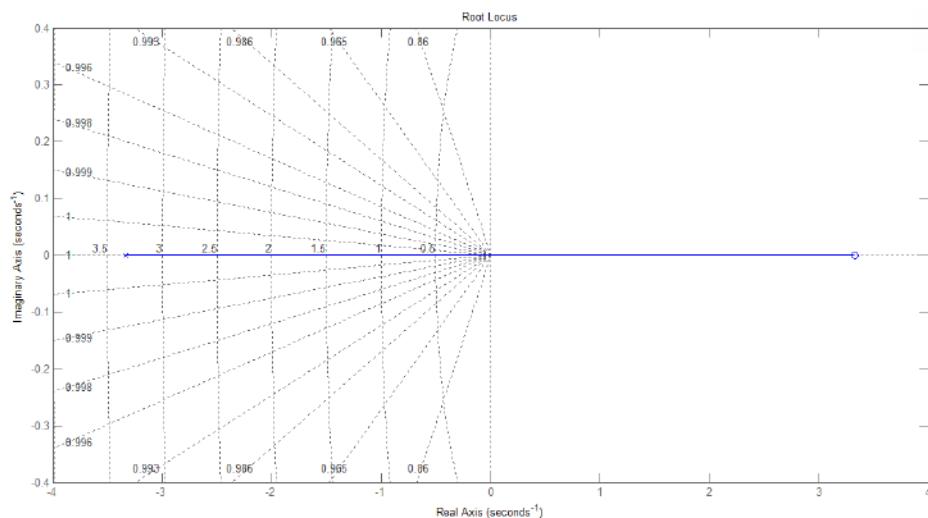
```
N=[0.1, 1];
D=[0.3, 1];
H=tf(N,D);
rlocus(H);
```

Osserviamo poi che i punti compresi fra lo zero e il polo fanno parte del luogo delle radici, in quanto alla loro destra hanno un solo polo; tutti gli altri punti hanno alla loro destra un numero pari di zeri e/o poli, e non fanno per questo motivo parte del luogo delle radici.

Quello che questo grafico permette di capire è che il sistema in retro costruito a partire da questa  $L(s)$  è asintoticamente stabile indipendentemente dal valore di  $\mu$ , poiché i valori che il suo unico polo può assumere sono quelli evidenziati dal luogo delle radici: esso è a parte reale negativa e progressivamente sempre più lontana dall'asse Immaginario. Una conseguenza «secondaria» di questo andamento è che il sistema retroazionato acquista velocità.

2)

Se la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto vista nell'esercizio precedente fosse a fase non minima<sup>82</sup> il luogo delle radici corrispondente sarebbe stato il seguente:



Per gli stessi ragionamenti fatti nell'esempio precedente si ha un solo ramo giacente sull'asse Reale. Bisogna notare in questo caso la posizione dello zero, a parte reale positiva.

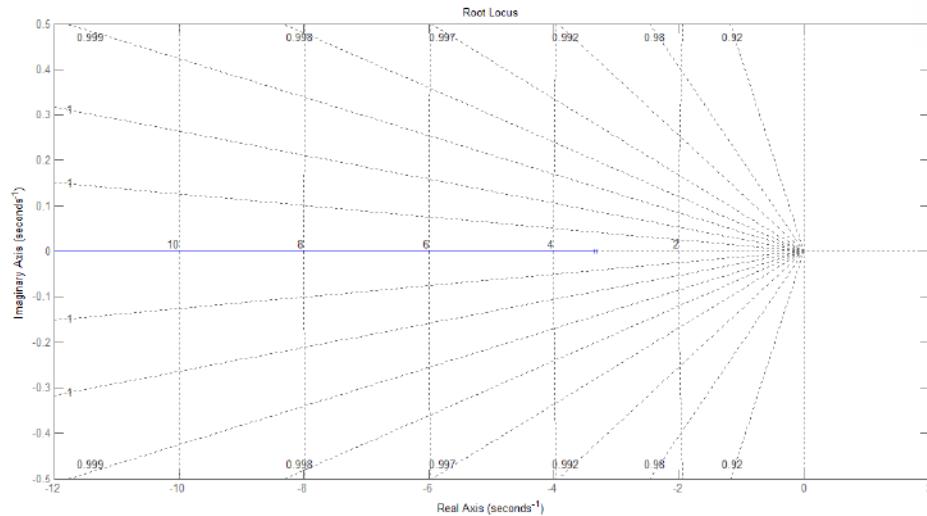
Il sistema in retroazione è stabile per valori bassi del guadagno statico. All'aumentare di  $\mu$  la curva si avvicina sempre di più all'origine degli assi (valori di  $\mu$  «critici»), finché non passa nel semipiano destro, terminando sul valore dello zero: il sistema si destabilizza, diventando anche più lento.

<sup>82</sup>Per chi avesse bisogno di rinfrescare il significato del termine, si rimanda al paragrafo (5.6.2) a pagina 76.

3)

Si consideri il caso seguente:  $L(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ .

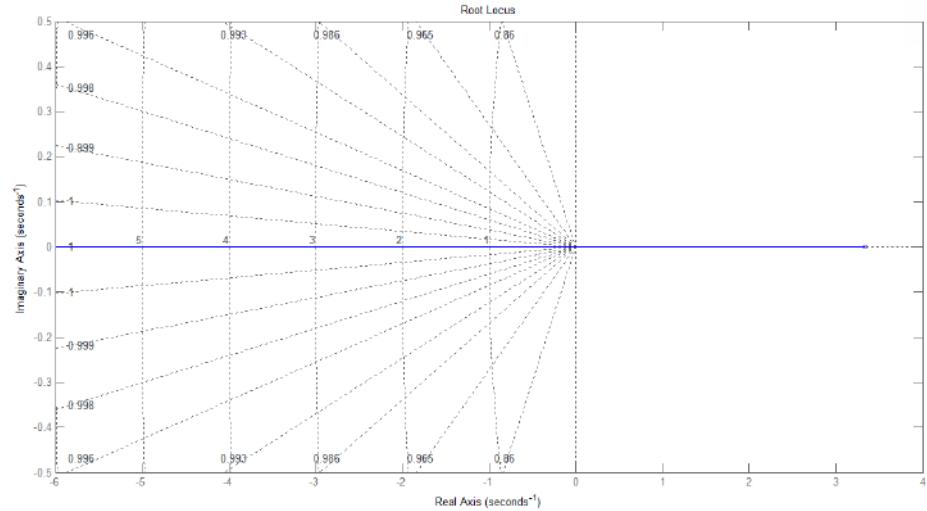
Il grado relativo è unitario e il luogo delle radici è costituito da tutti i punti alla destra del polo, fino ad infinito.



Anche in questo caso l'aumento del guadagno statico produce un aumento di velocità nel sistema retroazionato.

4)

Se la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto vista nell'esercizio precedente avesse il polo a parte reale positiva, il luogo delle radici corrispondente sarebbe stato il seguente:



Il significato fisico di questo grafico è il seguente: il sistema è inizialmente instabile - poiché parte da una situazione in cui il polo è a parte reale positiva - attraversa una fase in cui vi è un guadagno statico «critico» (corrispondente ai punti vicino all'intersezione con l'asse Immaginario) e diventa successivamente asintoticamente stabile.

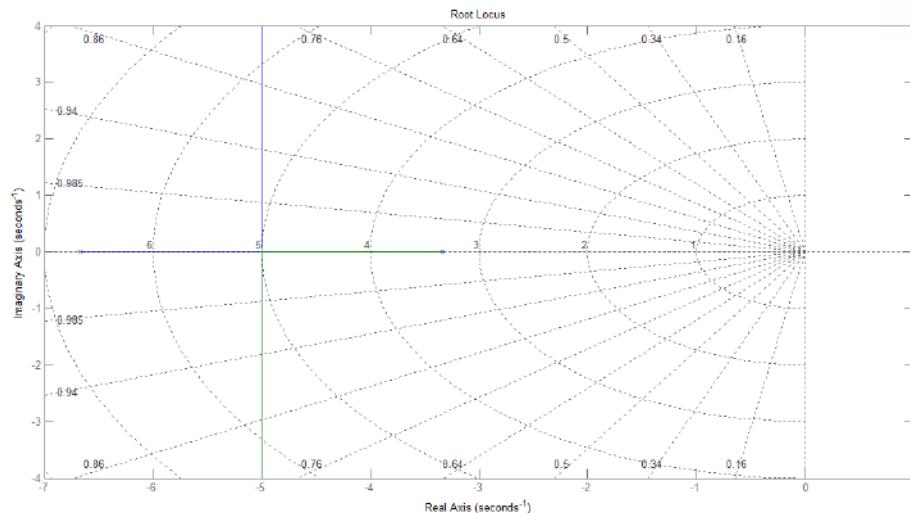
### 8.1.2.2 Esempi: Sistemi del Secondo Ordine Reali

1)

Si consideri la seguente funzione ad anello aperto  $L(s) = \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)}$ .

Il grado relativo è pari a 2: non essendoci alcuno zero, entrambi i rami tendono all'infinito su un asintoto verticale collocato nell'intervallo fra  $[-p_2, -p_1]$  (il luogo delle radici comprende l'intervallo e l'asintoto). Si calcola il punto  $\sigma_a = \frac{1}{2}(-p_1 - p_2)$ , nel quale i due poli coincidono prima di diventare complessi coniugati. Questa scelta per il luogo delle radici permette anche di rispettare l'ultima proprietà, in quanto il numero di poli del sistema retroazionato è pari a quello del sistema ad anello aperto per ogni valore di  $\mu$ .

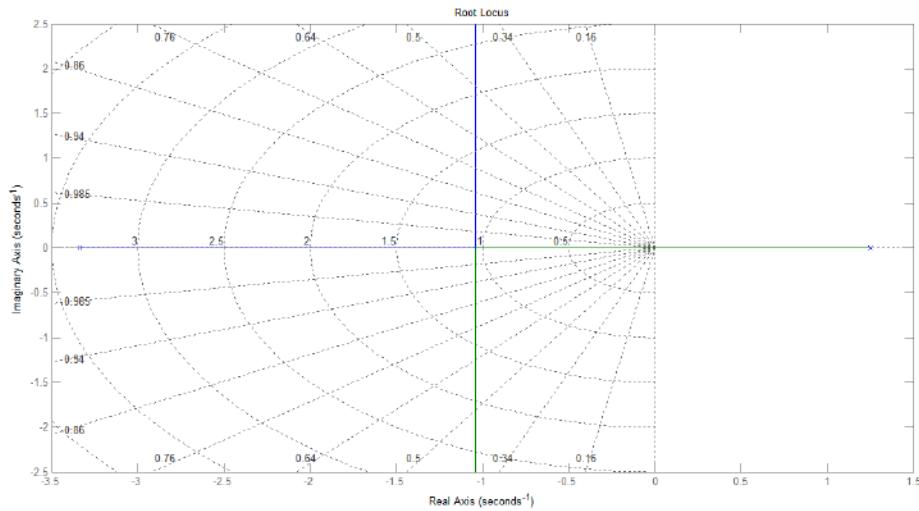
Si osserva che, da un certo punto in poi, la parte immaginaria di questi due poli aumenta proporzionalmente al guadagno statico, mentre la parte reale rimane costante: questi poli appartengono a un luogo a tempo di assestamento costante<sup>83</sup>. Poiché il coefficiente di smorzamento è inversamente proporzionale a  $\mu$ , risulta che nel sistema retroazionato questi due poli daranno sovraelongazioni sempre maggiori, pur rimanendo stabili a regime (parte reale negativa).



Si fa notare che, in tutti gli esempi di questo tipo, le proprietà indicate non specificano quale dei due poli si muove verso l'alto o verso il basso (o in generale segua una traiettoria piuttosto che un'altra); l'attribuzione dei colori ai loro percorsi è stata fatta da Matlab in base a calcoli specifici.

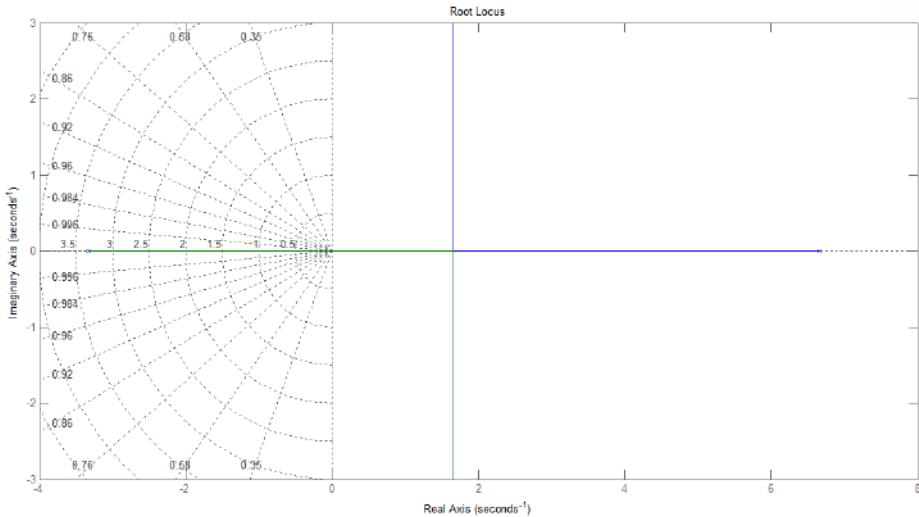
Se il sistema fosse invece instabile (caso in cui uno dei due poli presenta parte reale positiva) non vi sarebbe alcun cambiamento nell'utilizzo delle proprietà: si segue il procedimento appena descritto e si arriva pressappoco allo stesso grafico.

<sup>83</sup>Per tutti i dettagli si rimanda al paragrafo 5.4 a pagina 71.



Nel caso studiato la parte reale del polo positivo è abbastanza piccola, sufficientemente da lasciare il punto di incontro nel semipiano sinistro: il significato fisico di questo luogo delle radici è che per valori di  $\mu$  piccoli il sistema in retroazione è instabile. Ci sarà poi un  $\mu$  critico<sup>84</sup>, corrispondente all'attraversamento dell'origine, dopo il quale il sistema diventerà asintoticamente stabile. Anche qui è presente un range di valori del guadagno statico per cui i poli sono entrambi reali, al di fuori del quale essi diventano complessi coniugati; l'introduzione di oscillazioni nella risposta del sistema in retroazione non compromette tuttavia la sua stabilità.

È possibile a questo punto prendere in considerazione un'ulteriore variante, che vede il polo a parte reale positiva con una costante di tempo  $\tau$  piccola, tale che il punto  $\sigma_a$  si trova nel semipiano destro:



In questo caso il sistema in retroazione non acquisterà mai stabilità, poiché per ogni valore di  $\mu$  esiste almeno un polo a parte reale positiva.

---

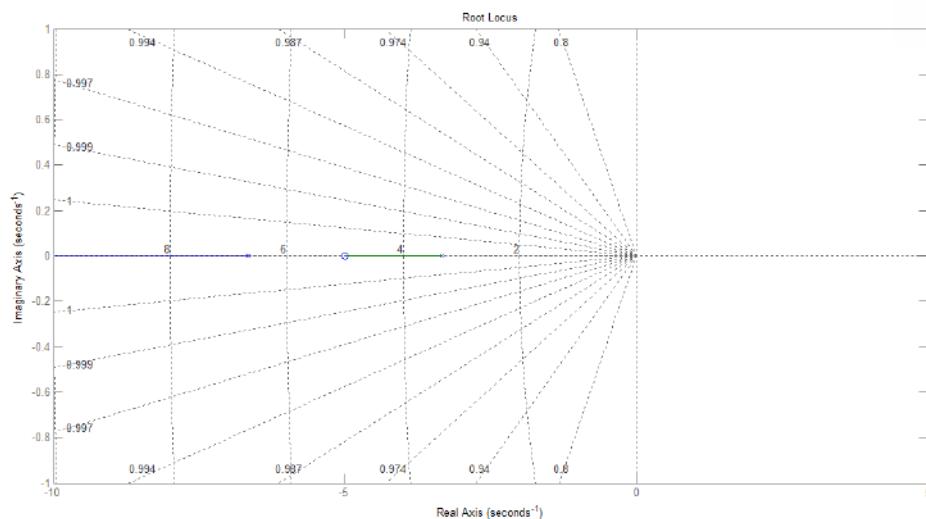
<sup>84</sup>Tempi di assestamento molto lunghi a causa di una parte Reale molto piccola.

Se, infine,  $\sigma_a$  dovesse coincidere con l'asse Immaginario, il sistema sarà inizialmente instabile a causa della presenza di un polo a parte reale positiva; successivamente si avranno due poli a parte immaginaria nulla, e il comportamento del sistema in retroazione sarà oscillatorio (sistema «semplicemente stabile»).

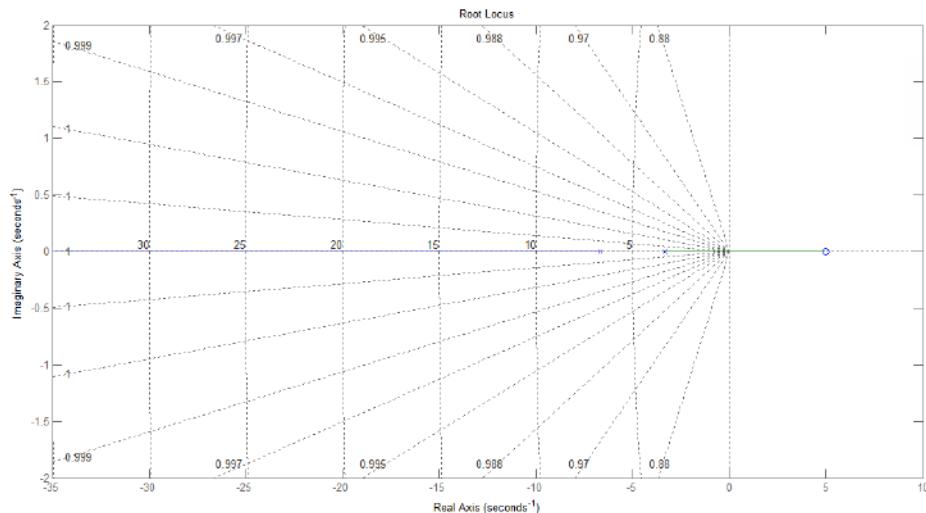
2)

Sia data  $L(s) = \frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)}$ , dove lo zero si considera  $-p_2 < -z < -p_1$ .

Diversamente dall'esempio precedente, il grado relativo è unitario, e il luogo delle radici si estenderà su due intervalli: prima da  $-p_1$  a  $-z$  (tendendo al primo per  $\mu \approx 0$ , spostandosi invece verso il secondo per  $\mu \rightarrow \infty$ ) e poi da  $-p_2$  a  $-\infty$ .



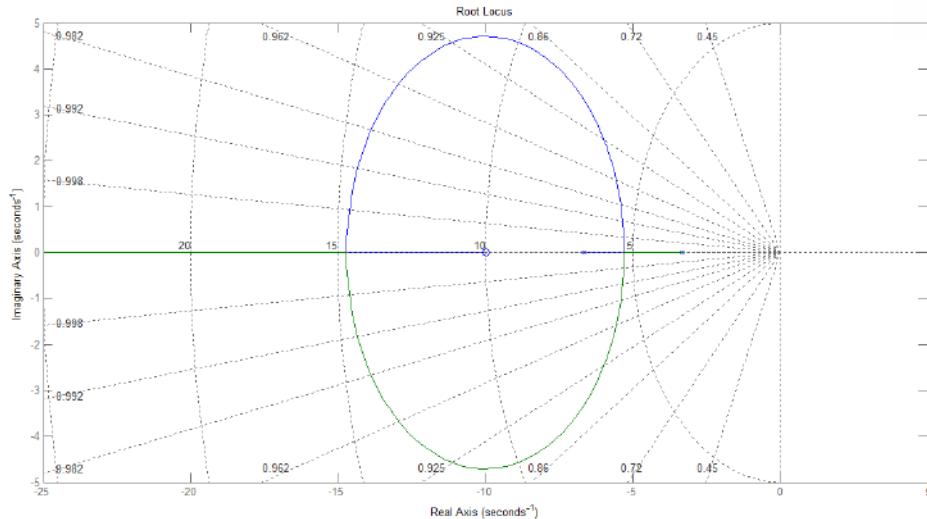
Si consideri la seguente variante: nel caso lo zero sia a parte reale positiva (cioè fase non minima), non cambia l'applicazione delle regole e il risultato finale, tuttavia il sistema risultante diventa instabile. Nel caso precedente infatti tutti i poli erano a parte reale negativa, indipendentemente dal valore del guadagno statico, mentre in questo caso è evidente che per valori di  $\mu$  grandi il ramo più a destra si trova nel semipiano destro: ciò implica che un polo avrà parte reale positiva.



3)

Un'ulteriore variante dell'esempio precedente è quella di considerare la configurazione poli - zeri nel piano complesso tale che  $-z < -p_2 < -p_1$ . Il luogo delle radici sarà ora compreso fra i due poli, insieme a tutti i punti a destra dello zero. Inoltre, poiché il grado relativo è unitario il piano sarà diviso in due parti simmetriche: sapendo che uno dei due poli avrà un ramo che tende a  $-\infty$ , mentre l'altro tenderà verso lo zero, l'unica possibilità è quella mostrata in figura.

Per valori di  $\mu$  piccoli, due poli tendono ad avvicinarsi l'uno all'altro (fino ad un valore di  $\mu$  per il quale si avrà un unico polo di molteplicità 2), allontanandosi poi in direzioni opposte secondo traiettorie «semicircolari»<sup>85</sup> fino ad un punto a destra dello zero. Durante questo secondo tratto, i due poli diventano complessi coniugati, mentre tornano a coincidere in un punto non noto a priori. Quando  $\mu \rightarrow \infty$ , uno dei due poli coinciderà con lo zero, diventando il polo dominante; l'altro diventerà invece quasi ininfluente, a causa della sua alta velocità.



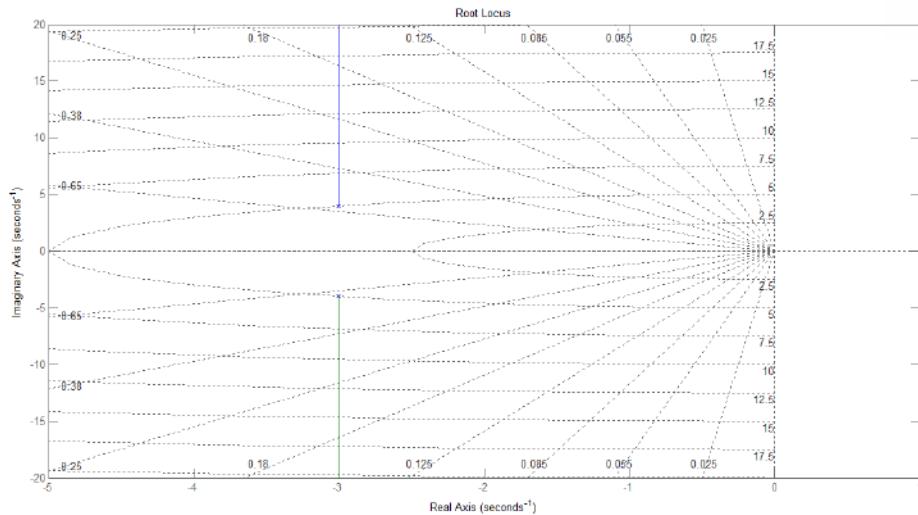
Sostanzialmente, la dinamica iniziale non presenta oscillazioni, quella intermedia sì (con sovraelongazioni diverse a seconda del valore di  $\mu$ ), quella finale invece no; inoltre per  $\mu \rightarrow \infty$  il sistema si velocizza molto.

#### 8.1.2.3 Esempi: Sistemi del Secondo Ordine Complessi

1)

Si consideri la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto  $L(s) = \frac{1}{s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2}$ . In questo caso il grado relativo è 2 e i poli non si trovano sull'asse Reale: non c'è nessun punto che possa appartenere al luogo delle radici a destra né a sinistra dei due poli, inoltre entrambi devono tendere a infinito per  $\mu \rightarrow \infty$ , rispettando, in tutto questo, il vincolo di simmetria. L'unica possibilità aperta è che seguano come asintoto la retta che passa per le loro due coordinate, individuando come luogo delle radici due semirette di verso opposto che tendono ad infinito.

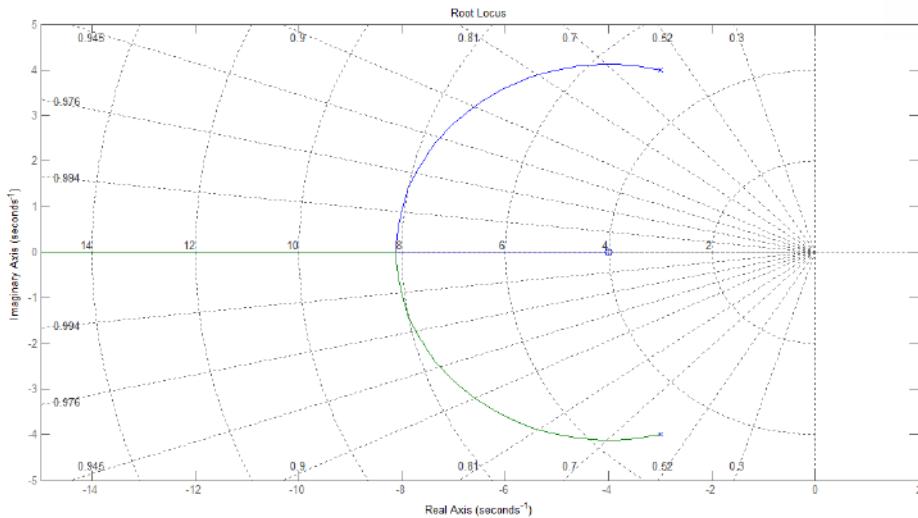
<sup>85</sup>Nota Bene: le proprietà non descrivono l'andamento della traiettoria nello spazio, e qui si dice che la traiettoria è «semicircolare» solo a fronte del grafico ottenuto con Matlab. In linea di principio, qualunque traiettoria simmetrica rispetto all'asse Reale potrebbe andare bene.



2)

Si consideri la funzione presentata nell'esercizio precedente e le si aggiunga uno zero, al fine di ottenere il seguente risultato:  $L(s) = \frac{s+z}{s^2+2\delta\omega_n+\omega_n^2}$ .

In questo caso il grado relativo è unitario: uno dei due poli tenderà all'infinito mentre l'altro, muovendosi specularmente, tenderà allo zero. In particolare, entrambi seguiranno una traiettoria «semicircolare» dalla loro generica posizione in mezzo al piano complesso, per arrivare in un punto  $\sigma_a$  poco a sinistra dello zero; da lì, punto in cui coincidono in un unico polo reale di molteplicità doppia, uno dei due tenderà a  $-\infty$  e l'altro alla posizione dello zero.



Da questo esempio emerge come è possibile passare da un sistema con poli complessi coniugati a parte reale negativa ad un sistema con poli reali (ugualmente stabili) semplicemente aumentando il guadagno statico.

#### 8.1.2.4 Esempi: Sistemi di Ordine Superiore

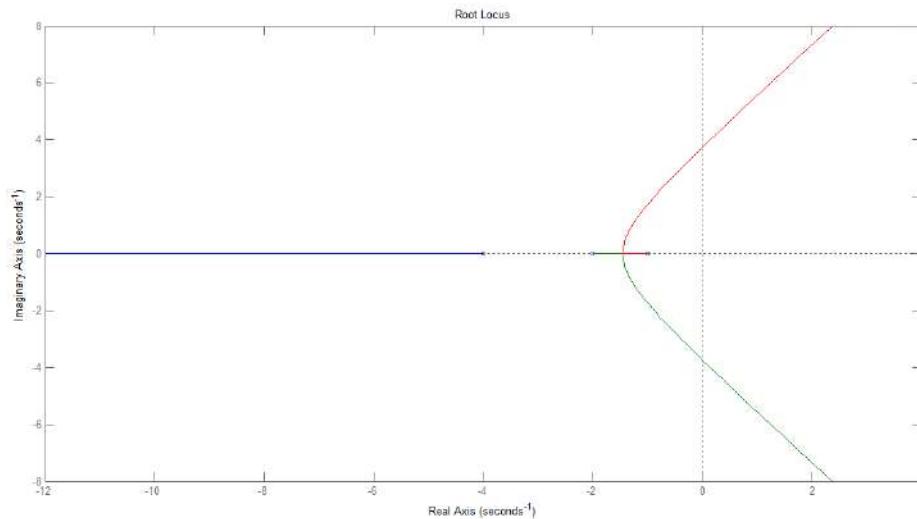
1)

Si prenda la funzione di trasferimento  $L(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.25s)(1+0.5s)}$ ; come si nota già ad una prima occhiata, tutti e tre i poli sono a parte reale negativa e ciò comporta l'asintotica stabilità del sistema.

Procediamo con l'applicazione delle proprietà per individuare il luogo delle radici: poiché vi sono tre poli è già possibile dire che questo grafico presenterà tre rami e, dal momento che non vi sono zeri, tutti e tre tenderanno all'infinito. Attraverso la formula della proprietà 5 si calcola il punto da cui si diramano i tre asintoti:  $\sigma_a = \frac{1}{3} \cdot (-1 - 2 - 4 - 0) = -\frac{7}{3}$ .

A questo punto è necessario pensare a come disegnare questi tre rami attraverso il piano rispettando i vincoli di simmetria: l'idea più banale è quella di suddividerlo in tre aree, ognuna di  $120^\circ$ . Per individuare più precisamente i luoghi delle radici, osserviamo che a destra del polo in  $-4$  ci sono tre poli: il primo dei tre asintoti è quindi quello che va da  $-4$  a  $-\infty$ . Spostandosi verso l'asse Immaginario, rimangono a destra due poli: non vi sono radici quindi fino al punto in cui si incontra il polo in  $-2$ , e non ve ne sono più passato quello in  $-1$ .

Rimangono due rami, che devono essere speculari e tendere all'infinito, entrambi in una porzione di piano di  $120^\circ$ . Per quanto riguarda valori di  $\mu \approx 0$ , entrambi partono dal rispettivo polo, andandosi incontro: ne consegue che circa a metà dell'intervallo fra un polo e l'altro essi si incontrano; ciò corrisponderà, nel sistema in retro, a un polo con molteplicità doppia. L'unica possibilità che hanno all'interno delle specifiche da rispettare è allontanarsi dall'asse Reale, uno speculare all'altro, sull'asintoto che divide il piano in 2 parti (quindi uno a  $60^\circ$  e l'altro a  $-60^\circ$  rispetto all'asse delle ascisse). Il risultato complessivo è il seguente:



Il significato fisico del sistema è il seguente: per quanto riguarda il polo che tende a  $-\infty$  sull'asse Reale non vi sono differenze rispetto agli esercizi precedenti; considerando invece i due rami rimanenti si ha che per  $\mu$  piccoli i due poli sono reali, ma andando avanti essi diventano poli complessi coniugati a parte reale positiva, causando l'instabilità del sistema.

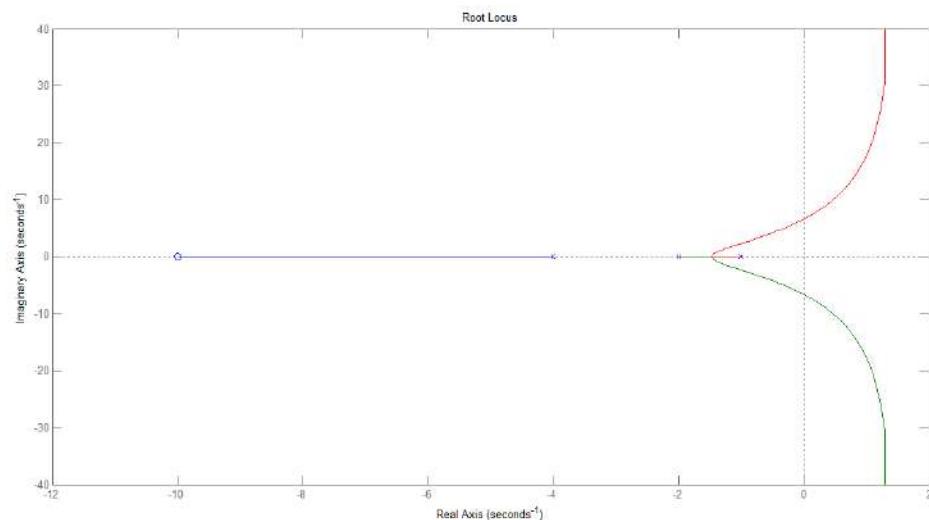
2)

Si consideri la seguente  $L(s) = \frac{(s+10)}{(1+s)(1+0.25s)(1+0.5s)}$ .

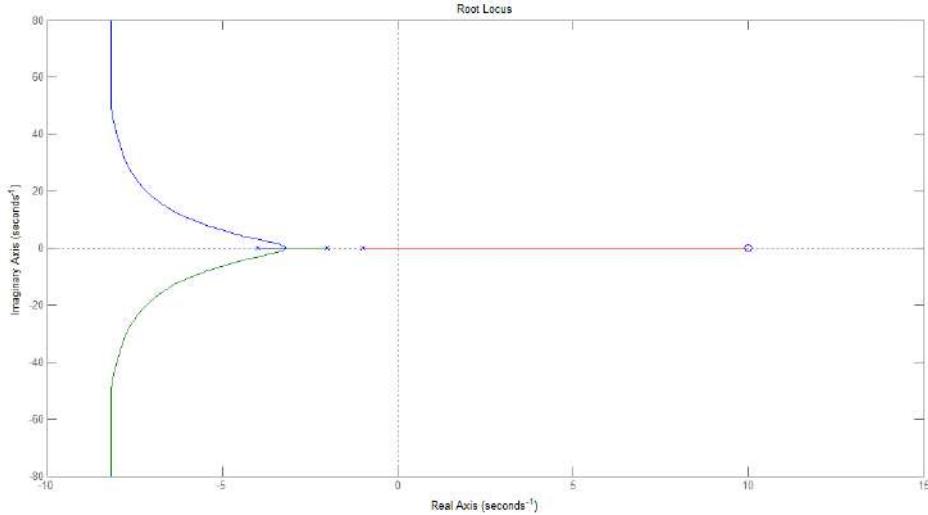
La funzione di anello aperto presenta 3 poli, e di conseguenza ci saranno 3 rami nel grafico; uno di essi tenderà allo zero per valori di  $\mu$  molto grandi, mentre gli altri due tenderanno all'infinito. Si ricorda che la forma di questi rami non è definita a priori dalle proprietà del luogo delle radici.

Calcoliamo  $\sigma_a = \frac{1}{2} \cdot [-1 - 2 - 4 - (-10)] = \frac{3}{2}$ : si nota che i poli tendono a spostare il punto di convergenza degli asintoti verso sinistra, mentre gli zeri lo spostano verso destra.

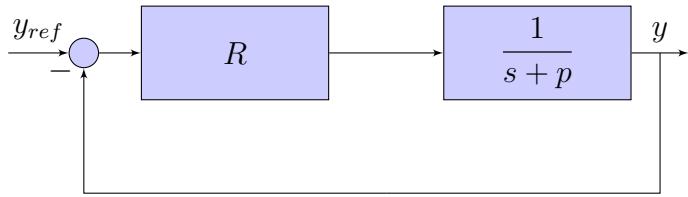
Questo sistema in retro avrà inizialmente tre poli a parte reale negativa, fino a un valore di  $\mu$  per cui due di essi coincidono, dando luogo a un polo di molteplicità doppia, sempre a parte Reale negativa. Successivamente, gli stessi poli diventeranno complessi coniugati e, per  $\mu \rightarrow \infty$ , avranno parte reale positiva e parte immaginaria crescente: il sistema diventerà instabile.



In questo secondo caso, dove lo zero è a parte reale positiva, calcoliamo un  $\sigma_a = \frac{1}{2} \cdot [-1 - 2 - 4 - (+10)] = -\frac{17}{2}$ . Diversamente quindi dall'esempio precedente, i poli complessi coniugati (originati da poli reali per valori di  $\mu$  grandi) si trovano nel semipiano sinistro: essi daranno luogo a sovraelongazioni ampie, ma non a instabilità. Tuttavia il sistema non presenterà in ogni modo asintotica stabilità, poiché il polo dominante tenderà allo zero a fase non minima, acquisendo a sua volta parte reale positiva.



### 8.1.3 Uso del Luogo delle Radici per Progetto Robusto



Si considerano per questo esempio le specifiche e l'ingresso utilizzati nell'esempio a pagina 135, con la particolarità che la posizione del polo della  $G(s)$  non è nota a priori con certezza (si suppone  $p_{nom} = 1$ ), ma può variare all'interno di un intervallo [0.7, 1.3].

Ricapitoliamo le specifiche per il progetto del regolatore in retroazione: dato un ingresso a gradino di ampiezza  $g$ ,

- La sovraelongazione dev'essere nulla, o al più 5% del valore finale;
- Il tempo di assestamento dev'essere al più un secondo;
- L'errore a regime dev'essere nullo.

Partendo dalla specifica statica, sappiamo che affinché questa venga rispettata è necessario imporre  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_{ref}(t)| = 0$ . Osservando il grafico del plant si ricava la funzione di trasferimento  $Y(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}Y_{ref}(s)$ : si impone che il guadagno statico sia unitario, in modo da avere l'uscita a regime di ampiezza  $g$ . Ma  $1 = \frac{R(0)G(0)}{1+R(0)G(0)}$  è valida solamente quando  $R(0)G(0) = +\infty$ .

Poiché  $G(s)$  è data,  $G(0) = \frac{1}{p}$ ; di conseguenza, deve essere  $R(0) = +\infty$ : ciò avviene solo in presenza di un polo nell'origine. È importante notare che l'imposizione di un polo nell'origine non definisce il regolatore nella sua interezza: vi sono anche altre specifiche da soddisfare e per questo motivo generalmente il regolatore sarà più complesso.

Per soddisfare le specifiche sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione (specifiche dinamiche) era stato presentato un metodo notevole a pagina 71 e seguenti, che consiste nell'individuare una porzione del piano complesso all'interno della quale i valori di  $\delta$  e  $\tau$  soddisfano le specifiche date. In particolare:

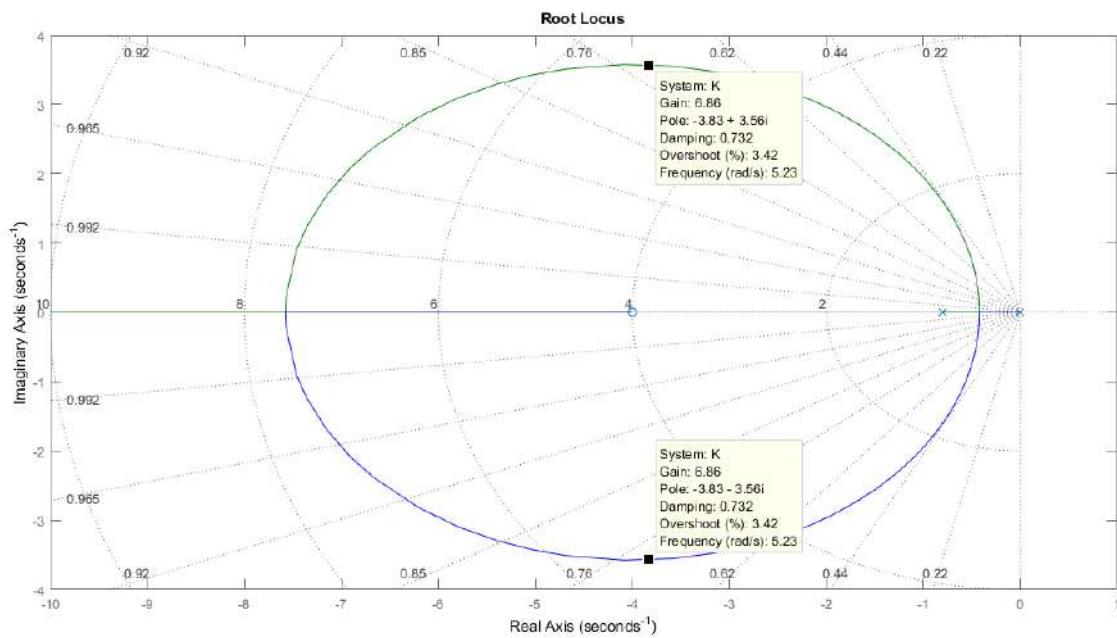
- La specifica sul tempo di assestamento impone a tutti i poli di trovarsi a sinistra di una retta  $x = 4.6$ ;
- La specifica sulla sovraelongazione percentuale impone a tutti i poli di trovarsi nella regione di piano delimitata dalle semirette per le quali  $\delta \geq 0.7$ .

Proviamo a chiederci a questo punto se le specifiche individuate fino a questo momento sono sufficienti a realizzare il sistema richiesto: queste sono il polo nell'origine e il guadagno statico del regolatore.

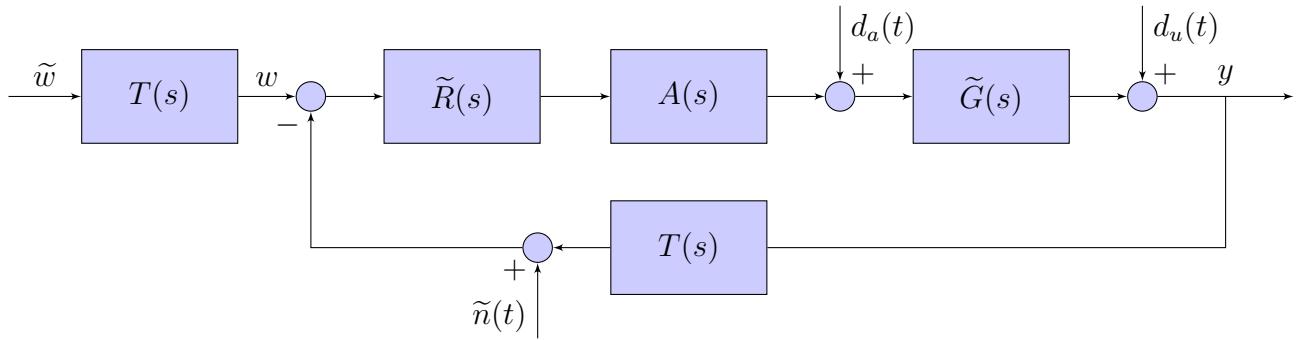
Si traccia per questo motivo il luogo delle radici della funzione open loop  $\frac{1}{s(s+p)}$ , e il risultato è un asintoto posizionato circa fra 0 e 1: questa soluzione è da scartare in quanto le radici del sistema closed loop si trovano in una zona del piano complesso che non è quella individuata dalle specifiche dinamiche. È necessario spostarsi di molto a sinistra, e l'aggiunta di un polo a sinistra non basta: si decide anche di cancellare con uno zero il polo già presente (progetto analitico). Il regolatore siffatto risulta  $R(s) = \frac{\mu(s+1)}{s(s+10)}$ .

Attraverso il plot del luogo delle radici e il calcolo di  $\sigma_a$  sembra che questa possa essere la scelta giusta, tuttavia rimangono le incertezze sulla posizione del polo a creare problemi (tallone d'Achille del progetto analitico).

Infine, si decide di lasciar perdere l'approccio per cancellazione, limitandosi ad aggiungere uno zero nella «zona permessa»: il suo effetto sarà quello di attirare uno dei due poli (o quello nell'origine, oppure quello parametrizzato), mentre il polo rimanente tenderà a  $-\infty$ , in quanto a sinistra dello zero tutti i punti appartengono al luogo delle radici. Come ultima mossa, è sufficiente imporre un valore del guadagno statico abbastanza grande, per cui la porzione di luogo delle radici considerata ricada interamente all'interno dell'area di piano precedentemente evidenziata. Sotto queste ipotesi, un esempio di regolatore è  $R(s) = \frac{\mu(s+4)}{s(s+p)}$ .



## 8.2 Schema a Blocchi Reale



Possiamo cominciare a descrivere questo schema a blocchi dal sistema  $\tilde{G}(s)$ , che è il sistema fisico vero e proprio; si nota subito, inoltre il suo disaccoppiamento dall'*attuatore*  $A(s)$ , ossia quel blocco tecnologico che si occupa di fornire potenza e implementare la dinamica del sistema (come ad esempio un motore elettrico che dà potenza ad un sistema meccanico). L'attuatore potrebbe avere una dinamica propria che gli permette di realizzare il suo compito, ad esempio dei poli e degli zeri; a volte è possibile trascurarla, ma non sempre.

Si riconosce poi il regolatore  $\tilde{R}(s)$  che impone i gradi di libertà del sistema (poli, zeri, guadagno statico...); questo blocco prende in ingresso la differenza fra il segnale di riferimento e un segnale retroazionato, dato dal *sensore*. Anche il sensore ha una sua dinamica, e la sua funzione è quella di «recuperare» il segnale di uscita, come un termometro fa con la temperatura dell'acqua dopo che questa è stata scaldata. Idealmente però la sua dinamica, come quella dell'attuatore, è unitaria.

Bisogna considerare che il riferimento  $\tilde{w}$  viene filtrato da una replica della dinamica del sensore  $T(s)$  per ottenere un riferimento «compatibile» con la dinamica dell'uscita retroazionata. In altre parole, se il segnale retroazionato subisce alcuni cambiamenti (rallentamento, filtraggio...) a causa di un sensore scadente, è opportuno che il segnale di ingresso (da cui andrà sottratto quello retroazionato) sia omogeneo al segnale retroazionato stesso.

Si fa inoltre presente che, d'ora in poi, il riferimento  $y_{ref}$  prende anche il nome di  $w$ .

Si nota anche la presenza di diversi tipi di disturbi:

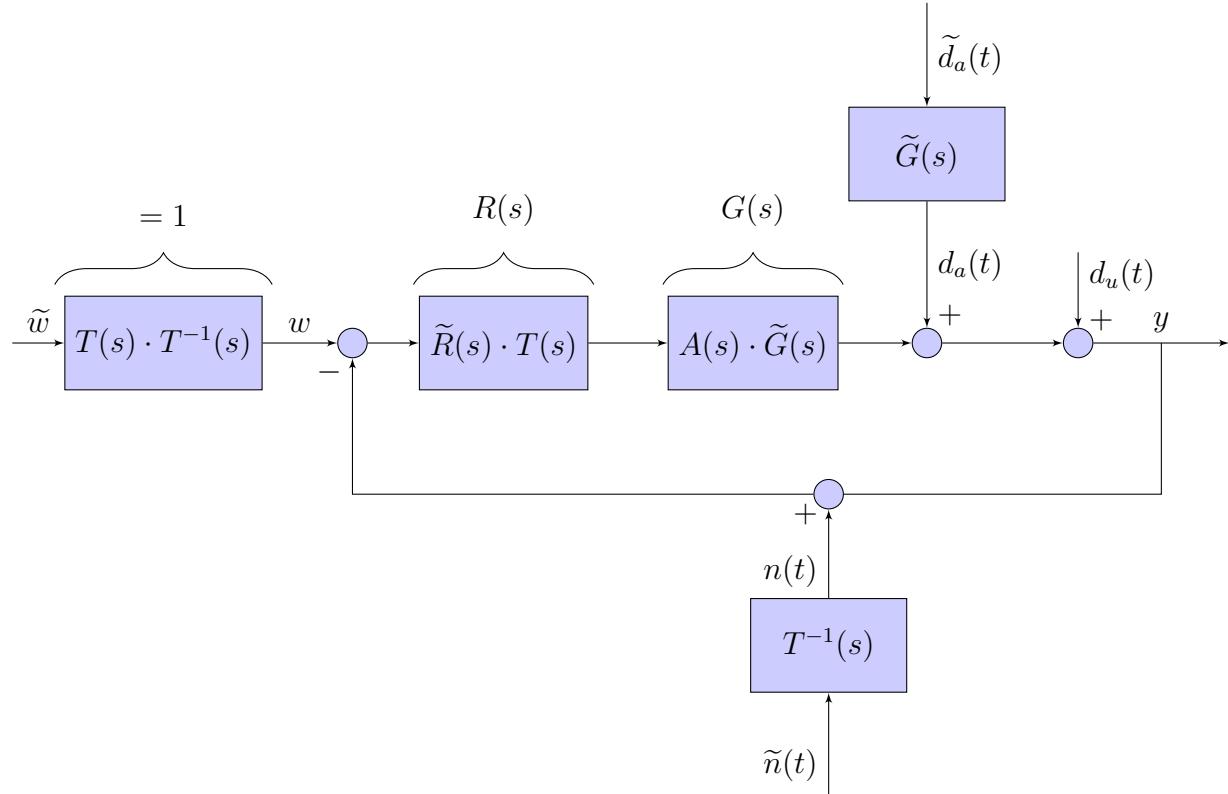
- Disturbo sull'attuatore  $d_a(t)$ : equivale ad un disturbo sull'ingresso del sistema. Si può considerare come esempio un disturbo sulla coppia che imprime la rotazione al sistema: questa viene in qualche modo frenata, ma non è noto a priori come o in che misura.
- Disturbo sull'uscita  $d_u(t)$ ; ne è un esempio un disturbo di vento sulla posizione del VTOL, che contribuisce a spostare il drone dalla posizione in cui dovrebbe trovarsi.
- Disturbo generico o *noise*  $\tilde{n}(t)$ : viene inserito sulla retroazione in prossimità del sensore ed è un generico disturbo dovuto all'ambiente esterno; si trova generalmente in alta frequenza e dipende anche dalla qualità del sensore.

È possibile ricondursi ad un caso semplificato di schema a blocchi seguendo le successive indicazioni, applicabili grazie alla proprietà di linearità.

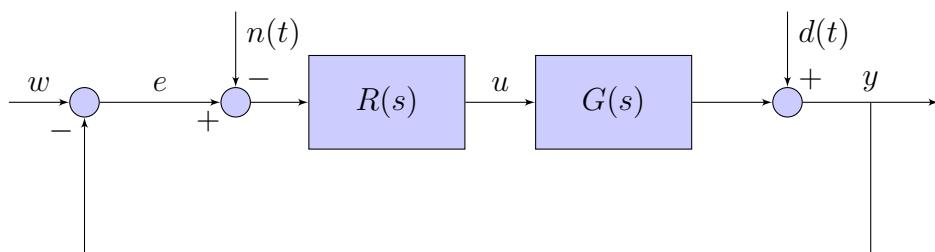
- Si «raccoglie» il blocco  $T(s)$  della retroazione e lo si porta sia a monte del sommatore, dove quindi risulta ora un blocco  $T(s) \cdot T^{-1}(s)$ , sia a valle del sommatore, dove risulta un blocco  $T(s)\tilde{R}(s)$ , sia, infine, a monte del disturbo  $\tilde{n}(t)$ , che entra quindi nella retroazione come  $n(t)$ .
- Si «raccoglie» il blocco  $G(s)$  portandolo sia a monte del disturbo, sia all'interno del blocco attuatore.

Di conseguenza, dentro il regolatore è compresa la dinamica del sensore (idealmente trascurabile, perché unitaria) e dentro la dinamica del sistema è compreso l'attuatore (anche questo idealmente trascurabile).

Lo schema semplificato del sistema è il seguente:



Ne presentiamo in ogni caso una versione più immediata, dove sono stati posti  $R(s) = \tilde{R}(s)T(s)$  e  $G(s) = A(s)\tilde{G}(s)$ , in modo che sia chiaramente visibile la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto  $L(s) = R(s)G(s)$ <sup>86</sup>.



<sup>86</sup>Si fa presente che, per linearità, è possibile spostare il blocco del rumore  $n(t)$  in ingresso, a patto di cambiarlo di segno. Come vedremo al termine del paragrafo (8.3), è necessario anteporre un «-» quando si considerano i blocchi sulla retroazione; poiché in questo caso il rumore aveva segno positivo sulla retroazione, lo si considera negativo sul ramo «open loop».

Questo sistema ha tre ingressi:  $w$ ,  $n$ ,  $d$  (che si intende comprensivo dei disturbi sull'uscita e sull'ingresso); formalmente vi è solamente un'uscita, mentre in pratica ne verranno considerate diverse a seconda delle specifiche da imporre.

Una caratteristica particolarmente rilevante dei disturbi in ingresso  $n$ ,  $d$ , è il **disaccoppiamento frequenziale** fra i due segnali: le *bande* dei segnali di riferimento e dei disturbi di uscita  $d$  sono *spettralmente disgiunte* rispetto alla banda che caratterizza i disturbi di misura  $n$ . In particolare, ingresso e disturbi sull'uscita si trovano a frequenze basse, mentre i disturbi di misura si trovano a frequenze elevate. È possibile sfruttare questa proprietà progettando il regolatore in modo che abbia «comportamenti diversi» a seconda della frequenza in cui opera, in modo da cancellare entrambe le interferenze.

### 8.3 Funzioni di Sensitività

Riepiloghiamo le uscite e gli ingressi significativi:

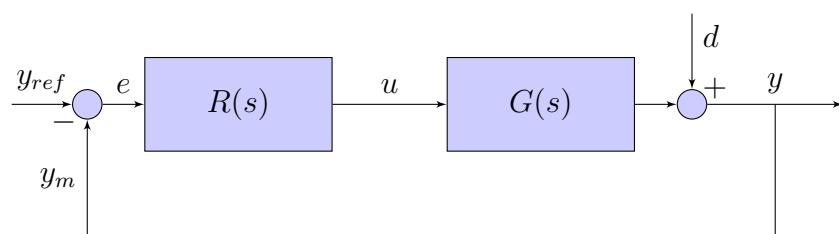
- $e(t)$ : *errore di inseguimento*;
- $y(t)$ : *uscita controllata*;
- $u(t)$ : «*sforzo*» di controllo<sup>87</sup>;
  
- $w(t)$ : *riferimento* (detto anche *set point*);
- $d(t)$ : *disturbi su ingresso, uscita*;
- $n(t)$ : *disturbi di misura*.

Le funzioni di sensitività rappresentano le funzioni di trasferimento tra gli ingressi significativi e le uscite di interesse. Si definiscono:

**Funzione di Sensitività:**

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$

Mette in relazione il *disturbo*  $d$  e l'*uscita*  $y$ , e la si può ottenere facilmente da questo schema a blocchi:



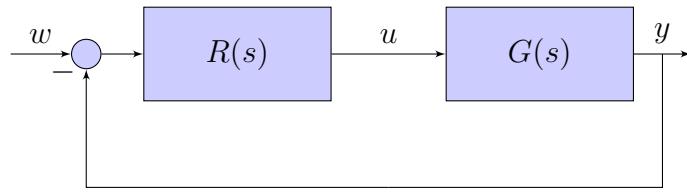
<sup>87</sup>In termini approssimati, si vuole indicare attraverso questa variabile il lavoro che l'attuatore deve compiere. Anche se l'obiettivo primario dei sistemi di controllo è l'inseguimento rapido e preciso del riferimento sull'uscita, bisogna tenere conto di limiti tecnologici «pratici» che non sono immediatamente visibili attraverso i calcoli. La  $u(t)$  è come una «spia» che indica quando il controllo che si vuole porre è irrealizzabile (poiché ad esempio non esistono attuatori che diano quei risultati, o hanno un costo proibitivo).

$Y(s) = R(s)G(s)E(s) + D(s)$ ; ponendo  $W = 0$  risulta  $E(s) = -Y(s)$ , da cui  $Y(s) = -Y(s)R(s)G(s) + D(s)$ . Isolando l'uscita si ricava  $Y(s) = \frac{1}{1+R(s)G(s)}D(s)$ , come volevasi dimostrare.

### Funzione di Sensitività Complementare:

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Mette in relazione l'*ingresso*  $w$  con l'*uscita*  $y$ , e la si può ottenere facilmente da questo schema a blocchi:

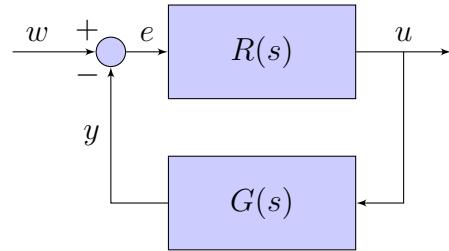


$Y(s) = R(s)G(s)[W(s) - Y(s)]$ . Isolando l'uscita si ricava  $Y(s) = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)}W(s)$ , come volevasi dimostrare.

### Funzione di Sensitività del Controllo:

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Mette in relazione l'*ingresso*  $w$  con la *variabile di controllo*  $u$ , e la si può ottenere facilmente da questo schema a blocchi:



$U(s) = R(s)E(s)$ , e poiché  $E(s) = W(s) - U(s)G(s)$ ,  $U(s) = R(s)[W(s) - U(s)G(s)]$ . Raccogliendo  $U(s)$  risulta  $U(s) = \frac{R(s)}{1+R(s)G(s)}W(s)$ , come volevasi dimostrare.

In modo analogo si ricavano le altre sei relazioni, da noi non riportate perché non di importanza primaria. Tutte le equazioni sono state ricavate facendo uso della sovrapposizione degli effetti. Al termine, si possono scrivere tutte e nove le relazioni attraverso un prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{pmatrix}$$

Esiste una regola mnemonica per ricordare tutte e nove le formule, semplicemente a partire dallo schema a blocchi: si parte dalla nozione che il denominatore è comune a tutte e tre le funzioni di trasferimento (e che per questo va ricordato «a parte»). Per quanto riguarda il numeratore, questo può essere ricavato percorrendo nei due sensi il sistema ad anello aperto (considerando il risultato con un segno «-» nel caso sia da destra verso sinistra<sup>88</sup>): i blocchi e le variabili incontrate compariranno al numeratore.

### Considerazioni:

- Le funzioni dipendono congiuntamente da  $R(s)$  e  $G(s)$  (funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto,  $L(s)$ ) tranne la funzione di sensitività del controllo in cui la FdT del regolatore entra singolarmente.
- Il denominatore (e in particolare i poli) di tutte le funzioni di sensitività è lo stesso. Si può quindi parlare di stabilità del sistema in retroazione indipendentemente dal particolare ingresso.

Ciò equivale a dire:

- che i poli del sistema retroazionato corrispondono alle radici dell'equazione caratteristica  $1 + L(s) = 0$ , e viceversa.
- che si può parlare di sistema in retro asintoticamente stabile quando tutte le radici dell'equazione caratteristica hanno parte reale minore di zero, e viceversa.
- posto di avere un sistema asintoticamente stabile, che a fronte di ingressi limitati le uscite saranno limitate anch'esse (*BIBO*).

- Strutturalmente<sup>89</sup> si ha  $S(s) + F(s) = 1$ .

Le conseguenze di questa equazione sono notevoli: infatti, la cancellazione del disturbo  $d$  sull'uscita (che richiederebbe  $S(s) = 0$ ) implica che  $F(s) = 1$ , il che equivale a lasciar passare indisturbato il disturbo  $N(s)$  in uscita (e viceversa).

Nella teoria che segue, ci si riferirà spesso a questo problema definendolo un *problema di trade off*, per evidenziare l'impossibilità di soddisfare entrambe le specifiche contemporaneamente. Si cercherà di trovare una soluzione sfruttando il disaccoppiamento frequenziale fra i due segnali.

## 8.4 Criterio di Bode

Introduciamo ora un tool detto criterio di Bode, che permette di dedurre conclusioni sulla stabilità del sistema in retro attraverso lo studio nel dominio della frequenza della funzione ad anello aperto  $L(s) = R(s)G(s)$ .

Uno dei vantaggi di questo criterio è la sua immediatezza: dalla lettura del diagramma di Bode della funzione ad anello aperto è già possibile dedurre se il sistema in retroazione

<sup>88</sup>Nota Bene: questo comprende anche gli elementi sulla retroazione!

<sup>89</sup>Cioè indipendentemente dal particolare tipo di progetto o di regolatore.

è stabile o meno. Non solo: l'informazione letta permetterà di conoscere il *margine di stabilità del sistema*, ossia quanto è «robusta» una particolare configurazione; ad esempio, sarà possibile sapere se esso è immune a disturbi in ingresso oppure no, ecc.

#### 8.4.1 Introduzione: Margine di Fase, Margine di Ampiezza

Si presentano i concetti di margine di fase e margine di ampiezza, necessari per comprendere il criterio stesso.

**Margine di Fase:**

$$M_f := 180^\circ + \arg \{L(j\omega_C)\}$$

dove  $\omega_C$  è quella pulsazione tale che  $|L(j\omega_C)|_{\text{dB}} = 0$ . Il margine di fase si misura in gradi.

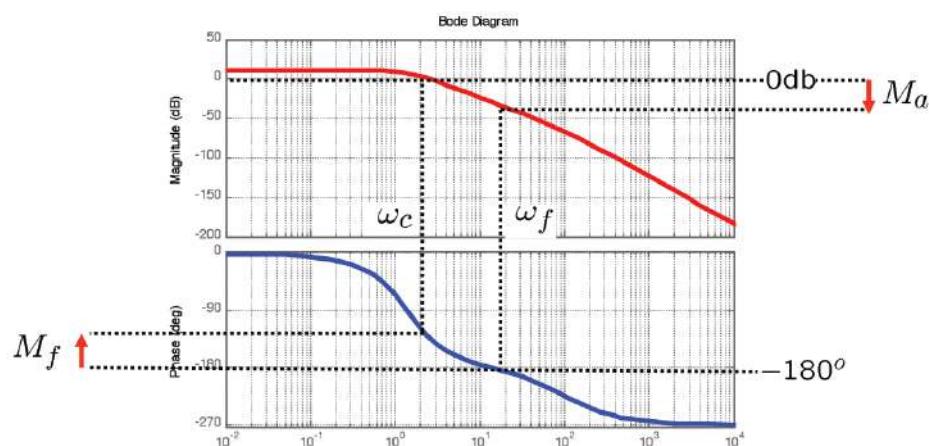
In altre parole, nel diagramma di Bode della  $L(s)$  si cerca la pulsazione in cui la curva attraversa l'asse 0dB; in quel punto si legge il valore della fase e lo si somma a  $180^\circ$ , ottenendo il margine di fase. Vi sono «casi patologici» in cui la pulsazione è sempre confinata sotto, o sopra, l'asse 0dB, o alternativamente quando vi sono attraversamenti multipli: non è possibile in questi casi definire in maniera univoca il margine di fase.

**Margine di Ampiezza:**

$$M_a := -|L(j\omega_f)|_{\text{dB}}$$

dove  $\omega_f$  è quella pulsazione tale che  $\arg \{L(j\omega_f)\} = -180^\circ$ . Il margine di ampiezza si misura in dB.

In altre parole, si cerca un punto del grafico in cui la fase della  $L(s)$  vale  $-180^\circ$ ; a quella pulsazione, si legge il valore dello sfasamento, ottenendo il margine di ampiezza.



A questo proposito segnaliamo la funzione Matlab *margin(sys)*:

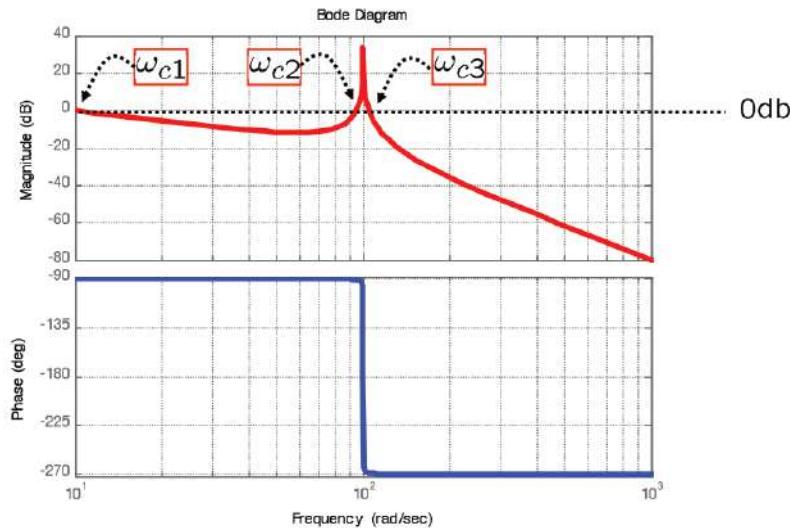
«margin calculates the minimum gain margin, Gm, phase margin, Pm, and associated frequencies Wgm and Wpm of SISO open-loop models. The gain and phase margin of a system sys indicates the relative stability of the closed-loop system formed by applying unit negative feedback to sys[...].

The gain margin is the amount of gain increase or decrease required to make the loop gain unity at the frequency Wgm where the phase angle is  $-180^\circ$  (modulo  $360^\circ$ ). In other words, the gain margin is  $1/g$  if g is the gain at the  $-180^\circ$  phase frequency. Similarly, the phase margin is the difference between the phase of the response and  $-180^\circ$  when the loop gain is 1.0. The frequency Wpm at which the magnitude is 1.0 is called the unity-gain frequency or gain crossover frequency. It is generally found that gain margins of three or more combined with phase margins between 30 and 60 degrees result in reasonable trade-offs between bandwidth and stability.»

#### 8.4.2 Eccezioni

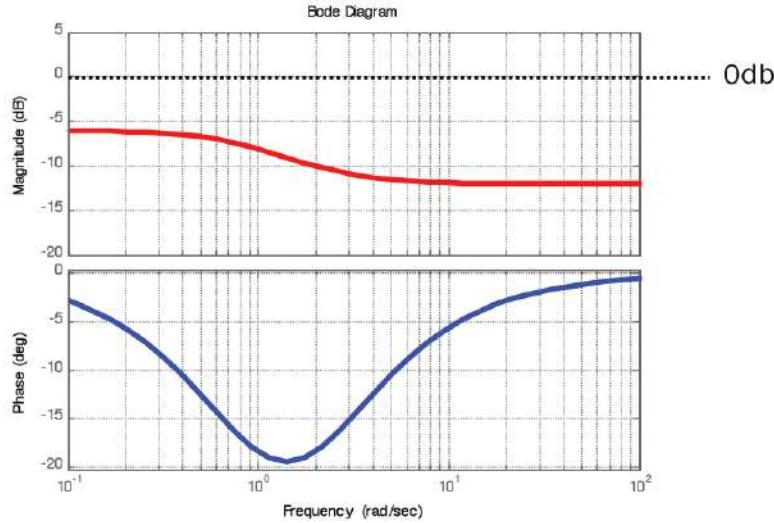
##### Intersezioni Multiple

È questo il caso in cui è presente una coppia di poli complessi coniugati poco smorzata: il suo picco di risonanza causa infatti due attraversamenti aggiuntivi rispetto a quello «canonico», a frequenze maggiori. Ne è un esempio la funzione  $L(s) = \frac{10^5}{s(s^2+0.2s+10^4)}$



##### Assenza di Intersezioni

In questo caso, la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto presenta un guadagno statico minore di uno, insieme ad una configurazione poli-zeri tale che non vi è sufficiente amplificazione da compensare il basso guadagno. Ne è un esempio la seguente  $L(s) = \frac{10^{-1}(0.1s+1)}{s+1}$ .

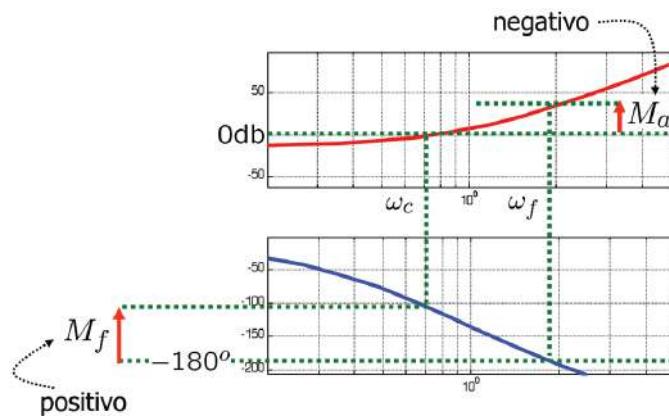


### Discordanza fra $M_f$ e $M_a$

Nell'ambito del nostro corso, anche questa situazione farà parte dei «casi patologici», in quanto ci limiteremo a trattare i casi in cui i segni dei due margini sono concordati.

Questa situazione si presenta ad esempio con una  $L(s) = 0.5 \cdot \frac{(1-s)^3}{(1+0.01s)^3}$ , dove vi sono tre zeri a fase non minima che intervengono a frequenze più basse rispetto ai poli. In termini di diagramma di Bode, questo significa che la curva parte sotto l'asse 0dB, dalla quale poi si stacca quando intervengono i tre zeri (il sistema subisce, in quel momento, una repentina amplificazione). A frequenze più alte vi è l'ingresso dei poli: essi frenano l'amplificazione, lasciandola costante per tutti i valori di  $\omega$  maggiori.

Per quanto riguarda invece il diagramma delle fasi, è importante ricordarsi che gli zeri si comportano come poli, poiché sono a fase non minima: nel complesso si avrà quindi uno sfasamento molto consistente, corrispondente a  $3 \cdot 90^\circ + 3 \cdot 90^\circ \approx 600^\circ$  in negativo.



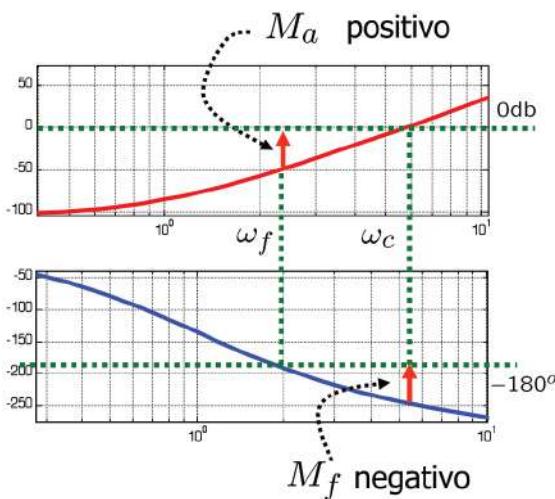
**Figura 50:**  $M_f > 0$ ,  $M_a < 0$

In questo primo caso (figura 50), la pulsazione di cross  $\omega_C$  è circa uguale a quella di taglio degli zeri: il margine di fase in  $\omega_C$  è positivo, poiché per costruzione lo sfasamento termina

circa 4.81 dopo la pulsazione di ingresso (degli zeri, in questo caso) - non sono ancora stati raggiunti i  $-180^\circ$  in quel punto.

Quando poi la pulsazione aumenta, raggiungendo finalmente uno sfasamento pari a  $-\pi$ , si osserva una crescita nel diagramma dei moduli, naturalmente presente a causa degli zeri a basse frequenze. Poiché il margine di ampiezza è pari a  $-|L(j\omega_f)|_{dB}$ , risulta che margine di fase e margine di ampiezza sono discordi.

In un secondo caso (figura 51), abbiamo un guadagno statico più basso del precedente:  $L(s) = 5 \cdot 10^{-3} \frac{(1-s)^3}{(1+0.01s)^3}$ .



**Figura 51:**  $M_f < 0$ ,  $M_a > 0$

Il ragionamento è uguale a quello visto per il caso precedente, tuttavia si deve tenere conto che il guadagno statico è molto più basso, e di conseguenza la pulsazione  $\omega_C$  sarà spostata molto più avanti, in ogni caso dopo l'ingresso degli zeri. In quel punto il grafico avrà già uno sfasamento superiore a  $-180^\circ$ , per cui risulterà un margine di fase negativo. Al contrario, nel punto in cui lo sfasamento sarà pari a  $-180^\circ$  avremo un modulo della funzione negativo, che corrisponderà a un margine di ampiezza positivo.

Poiché in generale questi sono casi isolati, si ipotizzerà d'ora in poi la concordanza fra margine di fase e margine di ampiezza.

#### 8.4.3 Enunciato

Sotto le seguenti ipotesi,

- Stabilità asintotica della funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto  $L(s)$ ,
- Guadagno statico della stessa maggiore di zero ( $L(0) > 0$ ),

vale la tesi:

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile (radici di  $1 + L(s) = 0$  tutte a parte reale negativa) è che il margine di fase di sia positivo.

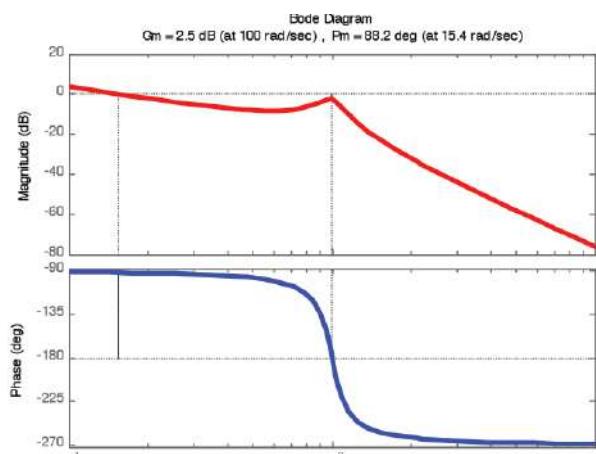
Si dà a questa proprietà una motivazione intuitiva: se il margine di fase è positivo deve risultare che anche il margine di ampiezza è positivo. Queste due condizioni insieme danno come quadro generale quello di una funzione che attenua l'armonica di pulsazione  $\omega_f$ , poiché a un margine di fase positivo corrisponde, per ipotesi, un  $|L(j\omega_f)|_{dB}$  negativo.

Il motivo per cui questa condizione è auspicabile è il seguente: è noto che  $\angle L(j\omega_f) = -180^\circ$ , per cui quando nel blocco  $L(s)$  entra un'armonica con  $\omega = \omega_f$ , in uscita si avrà la stessa armonica sfasata di  $-\pi$  (non si fanno ipotesi sul modulo). L'uscita viene poi retroazionata, e torna in ingresso al blocco  $L(s)$  cambiata di segno e in fase all'ingresso<sup>90</sup>, al quale viene poi sommata: l'ingresso viene quindi amplificato, creando dopo un certo tempo un'uscita simile a quella di un sistema in risonanza. Il criterio di Bode impone che l'uscita venga retroazionata attenuata, affinché ciò non si verifichi.

#### 8.4.4 Conseguenze

Per dimostrare come il criterio di Bode dia indicazioni anche sulla robustezza del sistema, si presentano di seguito un paio di casi in cui sono presenti incertezze sulla funzione  $L(s)$ . Nel primo, si suppone di avere un cambiamento nel modulo della  $G(s)$ , cosa che può essere dovuta ad esempio ad un cambiamento di valore del guadagno statico; nel secondo caso, si analizza un'incertezza sugli argomenti, che può essere causata da un ritardo.

Da questi esempi si deduce anche che *elevati margini di fase e di ampiezza garantiscono la stabilità del sistema in retro anche in presenza di grosse incertezze*; tuttavia, i margini valutati separatamente potrebbero non essere indicatori affidabili di robustezza.

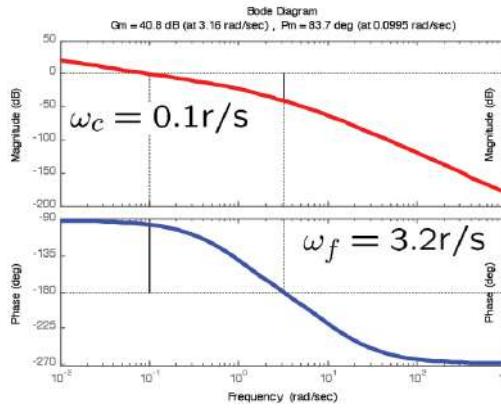


Nella figura qui sopra, nonostante il margine di fase sia molto elevato la stabilità del sistema in retro non è robusta a causa del basso margine di ampiezza. La funzione corrispondente contiene chiaramente una coppia di poli complessi coniugati:  $L(s) = \frac{15 \cdot 10^4}{s(s^2 + 20s + 10^4)}$ .

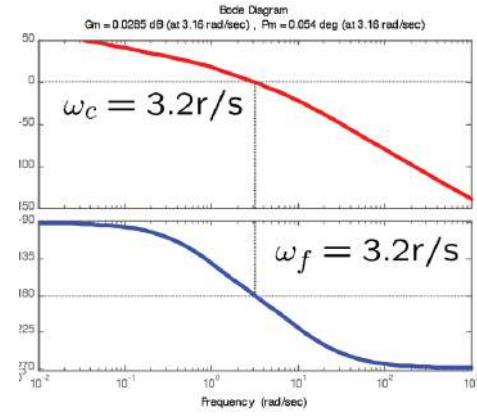
<sup>90</sup>Suppongo che il motivo abbia a che fare con gli angoli associati:  $\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\alpha)$ , che se si pensa poi cambiato di segno diventa di nuovo  $\sin(\alpha)$ . Lo stesso per il coseno:  $\cos(\alpha - \pi) = -\cos(\alpha)$ , eccetera.

## Incertezze nel Guadagno Statico

Si considera per il primo caso  $L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$ , mentre per il secondo  $L(s) = \frac{109.64}{s(s+1)(s+10)}$ . Nel primo caso, il sistema mostrato è asintoticamente stabile, con un buon margine di fase. Il secondo caso è stato scelto con un valore del guadagno statico tale che  $\omega_C$  e  $\omega_f$  coincidano, e il margine di fase diventi prossimi a zero.



**Figura 52:**  $M_a = 40.8\text{dB}$ ,  $M_f = 83^\circ$



**Figura 53:**  $M_a \approx 0\text{dB}$ ,  $M_f \approx 0^\circ$

Il margine di ampiezza mostrato nel primo caso è pari al guadagno del secondo caso: questo sta a dire che il primo sistema riesce a sopportare incertezze sul modulo pari a circa 40dB.

## Incertezze sull'Entità del Ritardo

Si cerca ora di andare ad agire solo sul diagramma delle fasi, lasciando inalterato quello delle ampiezze. Per farlo, ci si deve servire di termini che abbiano sempre modulo unitario, e di un parametro che permetta di variare la fase.

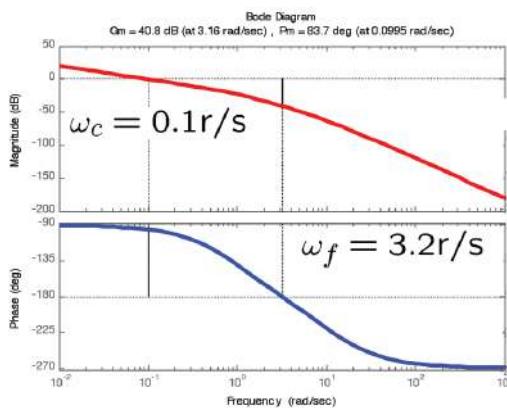
Sotto queste ipotesi si considera, per il primo caso, ancora  $L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$ , mentre per il secondo  $L(s) = \frac{e^{-14s}}{s(s+1)(s+10)}$ .

Poiché il diagramma dei moduli non subisce alcuna variazione, la pulsazione di cross rimarrà sempre pari a  $0.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Per quanto riguarda invece il diagramma delle fasi, l'introduzione di un ritardo causa uno sfasamento sempre maggiore al crescere di  $\omega$ , al punto in cui  $\omega_C$  e  $\omega_f$  coincidono nel secondo grafico.

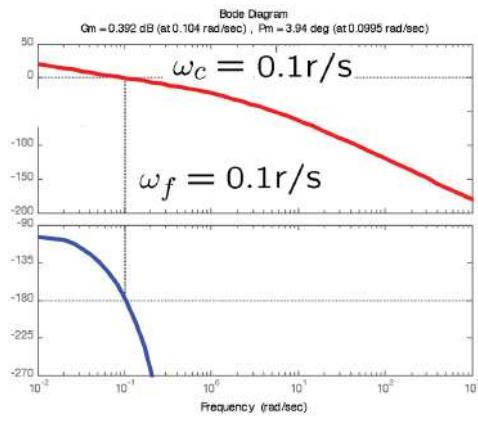
In generale, dato un ritardo  $e^{-Ts}$ , lo sfasamento negativo introdotto dal ritardo di entità  $T$  alla frequenza  $\omega_C$  risulta  $\Delta\phi = -T\omega_C$ . Ne deriva che il massimo ritardo tollerabile è

$$T_{max} < \frac{M_f}{\omega_C}$$

Si osserva che il ritardo tollerabile è direttamente proporzionale al margine di fase disponibile.



**Figura 54:**  $M_a = 40.8 \text{ dB}$ ,  $M_f = 83^\circ$



**Figura 55:**  $M_a \approx 0 \text{ dB}$ ,  $M_f \approx 0^\circ$

## 8.5 Studio delle Funzioni di Sensitività in relazione a $L(s)$

Come avevamo anticipato, diventa fondamentale capire come passare dalle proprietà della funzione ad anello aperto alla corrispondente funzione ad anello chiuso (ossia le funzioni di sensitività).

### 8.5.1 Funzione di Sensitività Complementare $F(s)$

Ritornando sulla matrice con le funzioni di sensitività (paragrafo 8.3) si osserva che la funzione di sensitività complementare mette in relazione

- l'uscita  $Y(s)$  con l'ingresso  $W(s)$ ;
- l'uscita  $Y(s)$  con il disturbo di misura  $N(s)$ ;
- l'errore  $E(s)$  con il disturbo di misura  $N(s)$ .

A questo punto, è chiaro che la specifica di inseguimento dell'ingresso diventa contrastante con quella di eliminazione del disturbo di misura, in quanto la prima richiederebbe  $F(s) = 1$  mentre la seconda richiederebbe una  $F(s)$  nulla.

Come anticipato, è possibile sfruttare il disaccoppiamento frequenziale<sup>91</sup> per superare (almeno parzialmente) questo problema.

Poiché  $F(s) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$ , per soddisfare le specifiche statiche a fronte di disturbi di tipo  $n$  e del riferimento  $w$ , l'obiettivo sarà quello di progettare il regolatore al fine di avere  $|L(j\omega)|$ :

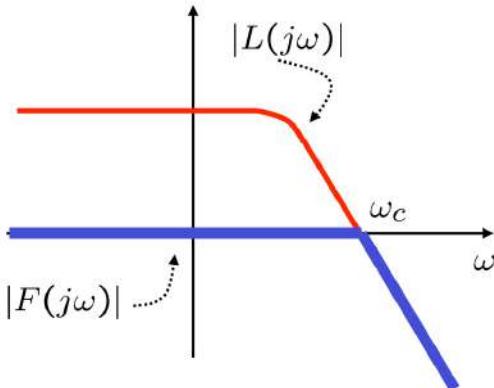
- «grande», che significa  $|F(j\omega)|$  unitario, nell'intervallo di frequenze dove si trovano le componenti del riferimento, solitamente a basse frequenze;
- «piccolo» nel campo di frequenze dov'è confinato il disturbo di misura, solitamente alte frequenze.

Da queste due specifiche deriva che  $|L(j\omega)|$  ha le caratteristiche della funzione passa basso.

<sup>91</sup>Nel caso migliore, non solo i due tipi di segnali occupano intervalli frequenziali diversi, ma sussiste anche un certo spazio fra questi due intervalli.

$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_C \\ |L(j\omega)| & \omega > \omega_C \end{cases}$$

dove  $\omega_C$  è la pulsazione di attraversamento della  $L$ . Gli effetti di questa scelta sono evidenti: il segnale di riferimento, insieme ad eventuali disturbi, viene riportato in uscita fino alla pulsazione di attraversamento. Da quel valore in poi, si ha che i disturbi di misura sono fortemente attenuati sull'uscita.



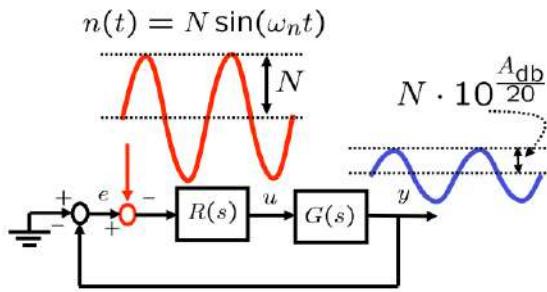
Per ottenere una  $L(j\omega)$  che rispetti le specifiche, si potrebbe utilizzare un regolatore con un guadagno statico molto alto: in questo modo si avrebbe l'amplificazione necessaria alle basse frequenze. Supponendo poi di volere una cancellazione del disturbo di misura il più precisa possibile, si potrebbe trovare la pulsazione di intervento del disturbo, inserendo a quella frequenza una *coppia di zeri complessi coniugati* poco smorzati (o a smorzamento nullo): la loro presenza darebbe luogo ad un picco di attenuazione collocato sulla pulsazione di taglio, ottenendo uno smorzamento pressoché infinito<sup>92</sup>. L'inserimento nella  $L(j\omega)$  di una coppia di zeri ad alta frequenza implica la loro presenza anche nella  $F(j\omega)$ : si vedrà fra poco come la loro presenza diventi, in certi casi, obbligatoria.

Quando invece è sufficiente attenuare il disturbo di misura in uscita, si può utilizzare la relazione  $Y(s) = F(s) \cdot N(s)$ . Consideriamo ad esempio il seguente caso.

Si ha un disturbo  $n(t) = N \sin(\omega_n t)$  in ingresso, verosimilmente con  $\omega_n > \omega_C$ , ed è richiesto che il *ripple* sull'uscita sia molto attenuato. Sapendo che  $|F(j\omega_n)| \approx |L(j\omega_n)|$ , si progetta il regolatore in modo da imporre che  $L$  abbia una determinata pendenza, così che anche  $F$  segua lo stesso andamento. Detto infatti  $A|_{dB}$  il valore (negativo) del modulo di  $F$  alla pulsazione di intervento del disturbo, si impone che  $|Y(j\omega_n)| = N \cdot 10^{\frac{A|_{dB}}{20}}$  attraverso il teorema del regime permanente<sup>93</sup>: utilizzando l'equazione  $Y(s) = F(s) \cdot N(s)$  si può quindi ricavare il modulo del regolatore a quella pulsazione.

<sup>92</sup>Ricordiamo solo marginalmente i rischi di un progetto per cancellazione, per il quale è richiesta una conoscenza molto precisa del disturbo da cancellare.

<sup>93</sup>Il modulo dell'uscita alla pulsazione richiesta è pari al modulo dell'ingresso moltiplicato per il modulo della funzione di trasferimento del sistema alla pulsazione richiesta.



Proseguendo nello studio, si osserva che gli zeri della funzione di sensitività complementare sono gli stessi zeri della funzione di trasferimento ad anello aperto, mentre i poli derivano in maniera complessa dai poli e dagli zeri della  $L(s)$ .

Da questa osservazione consegue che non si possono assegnare arbitrariamente gli zeri della  $F$  nel progetto del regolatore, in quanto al suo numeratore è presente anche  $G(s)$ , i cui zeri sono fissati.

Inoltre, se  $G(s)$  presenta degli zeri mal posizionati (ad esempio vicino all'origine), è opportuno porli in cancellazione (quando possibile) attraverso il progetto del regolatore, per evitare che dinamiche indesiderate si ripercuotano sulla funzione ad anello chiuso.

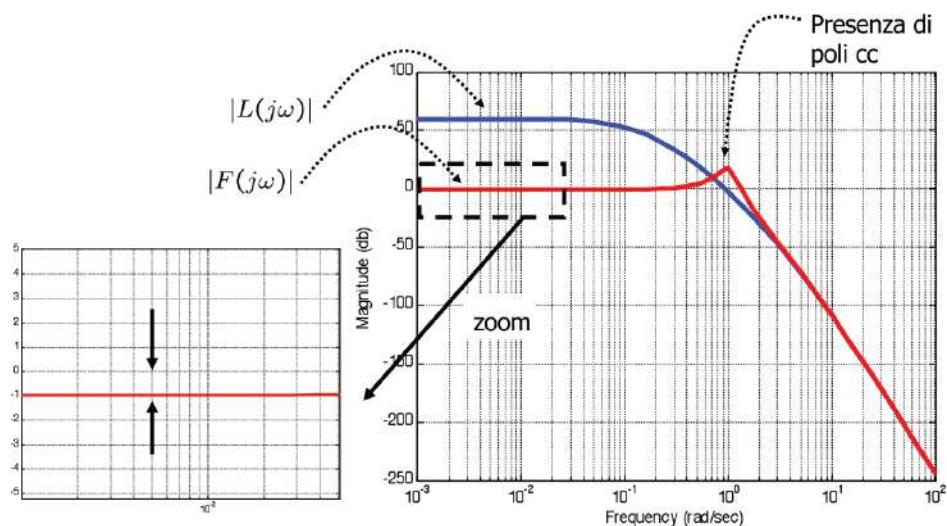
In particolare, bisogna porre attenzione alle seguenti problematiche: quando il sistema ha uno zero a *fase minima* vicino all'asse Immaginario è possibile cancellarlo con un polo del regolatore, anche nel caso in cui questo zero presenti incertezza (pur di non complicare troppo il progetto). Quando invece lo zero è a *fase non minima* sarebbe necessario, per porlo in cancellazione, mettere nel regolatore un polo a parte reale positiva, creando instabilità: questo è da evitare.

LEZIONE 23

DATA: 11/11/2015

### 8.5.1.1 Esempi: Imposizione di Margine di Fase e Tempo di Assestamento

Nel seguente diagramma di Bode è plottato un grafico che rispecchia il caso appena trattato, avendo considerato come funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto  $L(s) = \frac{20}{(1+10s)(1+2s)(1+0.2s)}$ .



Si osserva che:

- A basse frequenze,  $|F(j\omega)| \approx 0$ : in particolare il modulo vale  $-1$ ;
- Ad alte frequenze, l'attenuazione è molto forte (come richiesto);
- Nella fascia intermedia, l'approssimazione non è molto valida: l'andamento approssimato di  $|F(j\omega)|$  mostra come si possa pensare che la funzione di sensitività complementare abbia una coppia di poli complessi coniugati alla pulsazione  $\omega_C$ .

Data una funzione ad anello aperto  $L(s)$  con una certa pulsazione di attraversamento  $\omega_C$  e un certo margine di fase, risulta che  $F(s)$  ha una coppia di poli complessi coniugati dominante<sup>94</sup> (questo non preclude l'esistenza di poli di altro tipo) con una pulsazione naturale  $\omega_N \approx \omega_C$  e un coefficiente di smorzamento  $\delta = \frac{M_f}{100}$  (dove  $M_f$  è espresso in gradi)<sup>95</sup>.

In un sistema generico, il vincolo margine di fase - coefficiente di smorzamento occupa una posizione molto rilevante. Prendendo un esempio, si vogliono imporre sulla risposta di un sistema in retroazione le specifiche di sovraelongazione percentuale pressoché assente, unita a quella di tempo di assestamento inferiore o uguale a un secondo. Entrambe le specifiche sono da applicare alla  $F(s)$ , e dipendono dal coefficiente di smorzamento  $\delta$ : per avere  $S\% \approx 0$  è richiesta  $\delta \geq 0.75$ , e per ottenere una  $\delta$  elevata è necessario che il margine di fase sia a sua volta elevato<sup>96</sup>.

Poiché le specifiche richiedevano anche un vincolo sul tempo di assestamento ( $T_{ass\ 5\%} \leq 1s$ ) si pone  $\frac{3}{\delta\omega_n} \leq 1$ , da cui  $\delta\omega_n \geq 3$  e  $\omega_n \geq 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Allora è possibile passare alla funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto:  $\omega_C \geq 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (posto che il margine di fase soddisfa le specifiche, e in particolare  $M_f(s) > 75^\circ$ ).

In questo modo è possibile passare dalle specifiche di un sistema a quelle dell'altro (*dalla  $F(s)$  alla  $L(s)$* ), tuttavia si sottolinea particolarmente che la relazione  $\delta = \frac{M_f}{100}$ , seppur corretta nella maggior parte dei casi, *non* è da prendere come assolutamente valida, ma come linea guida da verificare (in quanto combina specifiche statiche e dinamiche).

Come regola empirica si può usare anche la sua diretta conseguenza: se il margine di fase della funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto è  $< 75^\circ$ , il sistema in retroazione avrà una coppia di poli complessi coniugati.

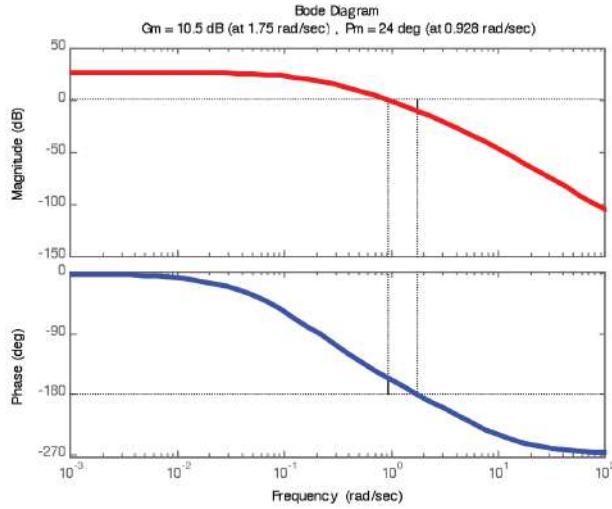
Per verificare praticamente quanto appena detto, si plotta il grafico di Bode della  $L(s)$  da cui siamo partiti, invocando poi la funzione *margin(sys)*: Matlab calcola un margine di fase  $M_f = 24^\circ$  e una pulsazione di attraversamento  $\omega_C = 0.93 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

---

<sup>94</sup>Come si vedrà anche nell'esempio seguente, è fondamentale sottolineare che queste specifiche sono imposte sul polo (o sulla coppia di poli, se complessi coniugati) dominante, cioè più vicini all'asse Immaginario.

<sup>95</sup>Per la dimostrazione matematica si vedano le slides del corso, Parte 8, da n° 28 in poi. In questo caso il procedimento è stato tralasciato per dare spazio al significato intuitivo.

<sup>96</sup>Per eventuali dubbi si rimanda a pagina 106.



Ci si aspetta, di conseguenza, che il sistema in retro abbia una coppia di poli complessi coniugati dominante, con  $\omega_N \approx \omega_C = 0.93 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\delta = \frac{M_f}{100} = 0.24$ : dal calcolo della  $F(s)$  risulta che  $\omega_N = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\delta = 0.195$  e che vi è in aggiunta un polo reale in  $s = -5.2$ . La stima fatta attraverso la relazione margine di fase - coefficiente di smorzamento è risultata molto accurata.

### 8.5.2 Funzione di Sensitività $S(s)$

Ritornando alla matrice con le funzioni di sensitività (paragrafo 8.3) si osserva che la funzione di sensitività mette in relazione

- l'uscita  $Y(s)$  con il disturbo  $D(s)$ ;
- l'errore  $E(s)$  con l'ingresso  $W(s)$ ;
- l'errore  $E(s)$  con il disturbo  $D(s)$ .

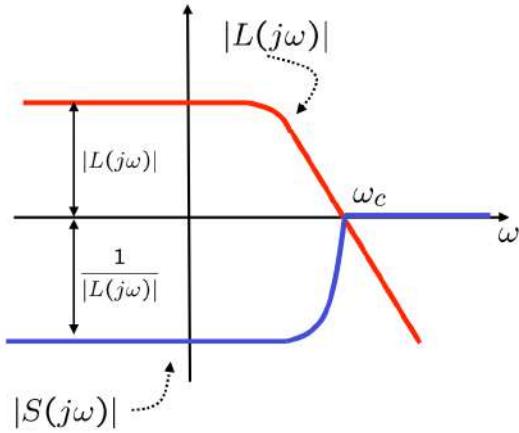
Per questo motivo, esigenze progettuali imporranno di tenere  $S(s)$  il più bassa possibile: ciò evita la presenza di errori o disturbi in uscita, ottenendo un buon *tracking* del riferimento. Come già noto, questa specifica si scontra con la relazione  $F(s) + S(s) = 1$ , motivo per cui si assume il disaccoppiamento frequenziale fra i due tipi di disturbi e l'ingresso. Inoltre, le scelte fatte per la  $F(s)$  a questo proposito incidono sulla  $S(s)$ :

- Assumere  $|L(j\omega)| \gg 1$  a basse frequenze impone  $S \approx 0$ ,  $F(s) \approx 1$ ;
- Assumere  $|L(j\omega)| \ll 1$  ad alte frequenze impone  $S \approx 1$ ,  $F(s) \approx 0$ .

La pulsazione spartiacque fra i due comportamenti della  $S(j\omega)$  è a tutti gli effetti la pulsazione di *cross*  $\omega_C$  della  $|L(j\omega)|$ . Questo comportamento è schematizzabile attraverso il seguente sistema:

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| = \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega \leq \omega_C \\ 1 & \omega > \omega_C \end{cases}$$

ed è chiaramente il comportamento di un filtro passa alto con pulsazione di taglio  $\omega_C$ . Nella figura seguente, la relazione fra i moduli della  $S(j\omega)$  e della  $L(j\omega)$ .



Il significato fisico generale di questo grafico è il seguente:

- A basse frequenze e in generale per  $\omega \leq \omega_C$ , eventuali disturbi in bassa frequenza vengono attenuati in uscita, come anche però eventuali segnali di riferimento. *L'attenuazione sul segnale di uscita è pari a un fattore  $|L(j\omega)|$* <sup>97</sup>.
- Ad alte frequenze e in generale per  $\omega > \omega_C$ , vengono attenuati i disturbi di misura (sull'uscita), mentre rimane il tracking del segnale di riferimento (non vi è alcuna attenuazione).

Infine, si dimostra facilmente che, posta  $L(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow S(s) = \frac{D(s)}{N(s)+D(s)}$ : da questa relazione si deduce che gli zeri della  $S(s)$  coincidono con i poli di  $L(s)$ , mentre i poli di  $S(s)$  dipendono in maniera complessa da poli e zeri di  $L(s)$ .

### 8.5.2.1 Principio del Modello Interno

È possibile ridurre a zero la distanza fra il riferimento e l'uscita, o in altre parole, far sì che  $E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s) = 0$  anche quando tale disaccoppiamento è dovuto ad un disturbo sull'uscita. Per ottenere questo risultato si ricordi quanto appena detto, e cioè che la  $S$  può garantire un'attenuazione pari all'inverso del modulo della  $L(s)$ : attraverso il regolatore è possibile allora aggiungere poli o zeri tali che

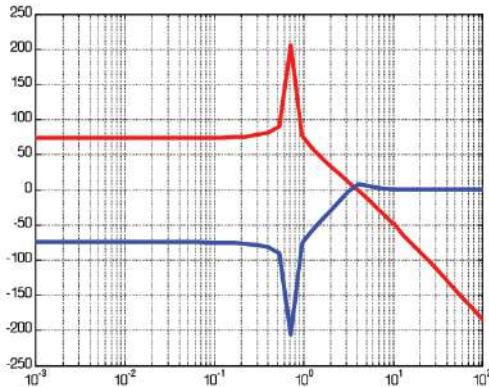
- L'errore sia nullo, quando è nota in modo preciso l'armonica da attenuare;
- L'errore si trovi al di sotto di una certa soglia, quando sono note solo le componenti spettrali del disturbo (pulsazione massima, ampiezza massima).

Per soddisfare la prima condizione, si consideri la seguente  $L(s) = \frac{20}{(1+\frac{s}{5})(s^2+0.001s+0.1)}$ , insieme a un disturbo generico sull'uscita.

Questa funzione di trasferimento ad anello aperto presenta una coppia di poli complessi coniugati poco smorzata, che è ben visibile in termini di picco di risonanza nel plot del

<sup>97</sup>Ciò implica che più cresce il modulo di  $L(j\omega)$ , maggiore è l'attenuazione che si avrà in uscita grazie alla funzione di sensitività.

diagramma di Bode. Lo stesso grafico evidenzia la simmetria tra l'andamento della  $L(j\omega)$  (in rosso) e la funzione di sensitività (in blu).

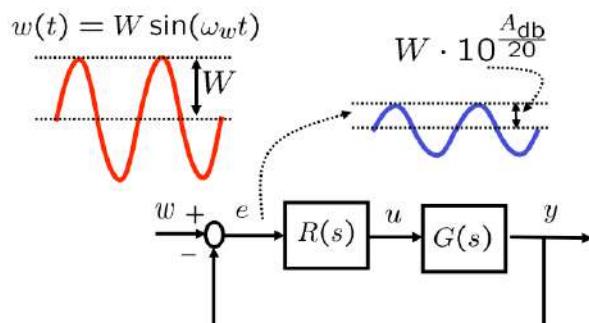


La scelta di poli complessi coniugati al denominatore<sup>98</sup> non è casuale: il picco di attenuazione della  $S(s)$  può essere calibrato in modo tale che la pulsazione di taglio attenuti un disturbo a quella frequenza. Questo permette un inseguimento perfetto del riferimento a regime (attenuazione «infinita» del disturbo), ma richiede una conoscenza molto precisa del segnale in ingresso. In alternativa, è possibile mantenere  $L(j\omega)$  ad un valore molto alto per tutto il range di frequenze all'interno del quale il disturbo potrebbe presentarsi, in modo da avere, se non una cancellazione, almeno un'attenuazione consistente.

Vediamo di seguito esempio in cui si cerca di attenuare l'errore sul riferimento; in questo caso, si può utilizzare la relazione  $E(s) = W(s) \cdot S(s)$ .

Si ha in ingresso un segnale  $w(t) = W \sin(\omega_W t)$ , verosimilmente con  $\omega_W < \omega_C$ : è richiesto che l'errore di inseguimento sia attenuato ad un'ampiezza pari a  $W \cdot 10^{\frac{A|_{\text{dB}}}{20}}$ , dove  $A|_{\text{dB}}$  è il valore (negativo) del modulo di  $S$  alla pulsazione  $\omega_W$ . Sapendo che  $|S(j\omega_W)| \approx -|L(j\omega_W)|$ , si progetta il regolatore in modo da imporre che  $L$  abbia una determinata amplificazione, così che l'attenuazione data da  $S$  possa soddisfare la specifica.

Si impone quindi che  $|E(j\omega_W)| = W \cdot 10^{\frac{A|_{\text{dB}}}{20}}$  attraverso il teorema del regime permanente: utilizzando l'equazione  $E(s) = W(s) \cdot S(s)$  si può quindi ricavare il modulo del regolatore a quella pulsazione.




---

<sup>98</sup>Nota bene: non fare confusione con la coppia di *zeri* complessi coniugati dei quali si è parlato per la funzione di sensitività complementare!

Questi esempi spiegano praticamente il *principio del modello interno*, che ha il seguente enunciato:

Affinché un segnale di riferimento, o un disturbo sull'uscita, con una componente spettrale alla frequenza  $\omega_W$  sia inseguito, o attenuato, a regime in uscita è necessario e sufficiente che si realizzino contemporaneamente le seguenti condizioni:

1. Stabilità asintotica del sistema chiuso in retroazione;
2. Presenza di una coppia di poli complessi coniugati a smorzamento nullo e pulsazione  $\omega_W$  nella funzione di trasferimento del *sistema ad anello aperto*<sup>99</sup>.

LEZIONE 24

DATA: 12/11/2015

### 8.5.2.2 Applicazioni

#### Errore nullo con Segnali Sinusoidali

Sia data in ingresso l'armonica

$$w(t) = W \sin(\omega_W t + \phi_W), \quad \mathcal{L}\{w(t)\} = W(s) = W \frac{\omega_W \cos(\phi_W) + s \sin(\phi_W)}{s^2 + \omega_W^2}$$

L'errore associato a questa armonica per mezzo della funzione di sensitività è  $E(s) = S(s)W(s)$ , e sostituendo risulta pari a  $\frac{D_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)} \cdot W \frac{\omega_W \cos(\phi_W) + s \sin(\phi_W)}{s^2 + \omega_W^2}$ . Affinché l'errore sia pari a zero, è possibile «cancellare» il contributo dell'ingresso inserendo nella  $S(s)$  uno zero che annulli il contributo dei poli di  $W(s)$ <sup>100</sup>. Incidentalmente, dal momento che gli zeri della  $S(s)$  sono uguali ai poli della  $L(s)$ , questo significherà anche avere una coppia di poli complessi coniugati (nel caso del seno) nella funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto. Come sempre, è richiesta nel contempo l'asintotica stabilità del sistema in retroazione.

#### Errore nullo con Segnali Costanti

Prima di introdurre l'esempio vero e proprio si dà una breve spiegazione di cos'è un *segnaletico costante*<sup>101</sup>.

**Richiamo.** Una sinusoide con pulsazione  $0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  dovrebbe avere un periodo infinito. Infatti:  $\lim_{\omega \rightarrow 0} T = \frac{2\pi}{\omega} = \infty$ .

Ma una sinusoide che si ripete con un periodo infinitamente lungo è in pratica un segnale non periodico. Con un ragionamento matematico più rigoroso sarebbe possibile dimostrare che una sinusoide con pulsazione nulla corrisponde ad un segnale continuo (ovvero costante nel tempo).

<sup>99</sup> Alternativamente: vedi sopra.

<sup>100</sup> Si ricorda che gli zeri non influenzano lo sviluppo qualitativo dell'antitrasformata e quindi sono a questo proposito irrilevanti (pagina 47).

<sup>101</sup> Liberamente tratto da <http://www.elemania.altervista.org/filtris/rispfreq/ris2.html>.

Pertanto il valore  $\omega = 0$  sui grafici della risposta in frequenza rappresenta un segnale di ingresso costante.

Si prova a dimostrare la validità di questo ragionamento per mezzo del *teorema del valore finale*, ponendosi nel caso in cui il segnale in ingresso è una *funzione a gradino* di ampiezza  $W$ . Il motivo di questa scelta è dovuto al fatto che il limite all'interno del teorema generalmente non converge se non per funzioni costanti (non sarebbe andato quindi bene nel caso di funzioni sinusoidali)<sup>102</sup>.

È possibile in questo contesto scrivere:  $E(s) = S(s) \cdot \frac{W}{s} = \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{W}{s}$ ; per il teorema del valore finale  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ , che in questo caso diventa  $\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+L(s)} \cdot \frac{W}{s} = \frac{1}{1+L(0)} \cdot W$ . Questo risultato è generico e mostra che senza l'inserimento di un polo nell'origine l'errore non scompare, ma è modificabile (entro certi limiti) attraverso il regolatore. Questo, e in particolare il suo guadagno statico, entra nel merito attraverso  $L(0)$ .

Nel caso generale in cui  $W(s) = \frac{p}{s^k}$  (trasformata di Laplace di un ingresso del tipo «funzione rampa»), sarà necessario inserire nella  $S(s)$  almeno<sup>103</sup>  $k$  zeri per avere un errore nullo - mantenendo l'asintotica stabilità. L'inserimento di un numero minore di  $k$  di zeri nella  $S$  comporterà la cancellazione solo parziale dei poli nell'errore: se si pensa quindi all'anti-trasformata di un termine  $\frac{\text{cost}}{s^n}$ ,  $0 < n < k$ , questa presenterà sempre almeno un termine costante ( $ke^{0t}$ ), impedendo la scomparsa, a regime, dell'errore sull'uscita.

La tabella seguente mette in relazione la molteplicità dei poli presenti nell'ingresso ( $k$ ) con quella dei poli della  $L$  (ricordiamo che  $g$  si chiama «tipologia», vedi pagina 40): ad esempio, se è presente un polo non compensato nell'ingresso ( $k = 1$ ,  $g = 0$ ) si avrà in uscita un errore pari a  $\frac{W}{\mu+1}$ , mentre per ogni valore di  $g > 0$  l'errore sarà nullo (per quello che abbiamo appena detto, che è un'applicazione del principio del modello interno). È possibile derivarla dalla formula  $\lim_{s \rightarrow 0} sS(s)W(s) = s^{g-k+1} \cdot \left. \frac{W}{\mu+s^g} \right|_{s=0}$  (che non dimostriamo).

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$g = 0$	$\frac{W}{\mu+1}$	$\infty$	$\infty$
$g = 1$	0	$\frac{W}{\mu}$	$\infty$
$g = 2$	0	0	$\frac{W}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

Si fa notare ancora una volta che l'aggiunta di poli nell'origine, sebbene porti un immediato giovamento al sistema (dovuto all'eliminazione dell'errore) rischia anche di compromettere la sua stabilità.

### 8.5.3 Funzione di Sensitività del Controllo $Q(s)$

Osservando la matrice con le funzioni di sensitività ( a pagina 161) si osserva che la  $Q(s)$  mette in relazione:

<sup>102</sup>Per imporre l'attenuazione di un disturbo di tipo sinusoidale si dovranno quindi utilizzare altre metodologie, come ad esempio il Teorema del regime permanente.

<sup>103</sup>Si intende, oltre alla generica presenza di altri elementi.

- la variabile di controllo  $U(s)$  con l'ingresso  $W(s)$ ;
- la variabile di controllo  $U(s)$  con il disturbo sull'uscita  $D(s)$ ;
- la variabile di controllo  $U(s)$  con il disturbo di misura  $N(s)$ .

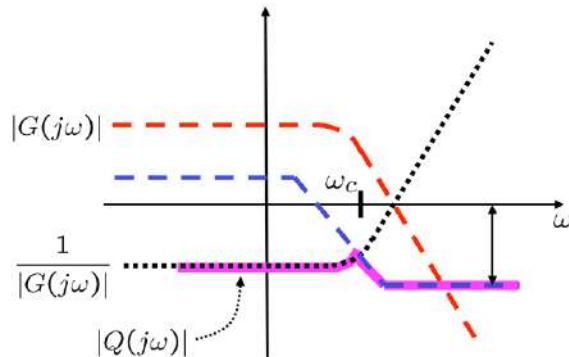
Seguendo il ragionamento fatto nel paragrafo introduttivo sui sistemi di controllo<sup>104</sup>, sarebbe auspicabile mantenere una  $Q(s)$  «piccola»

- a basse frequenze, per moderare disturbi e riferimenti sull'uscita;
- ad alte frequenze, per moderare disturbi di misura.

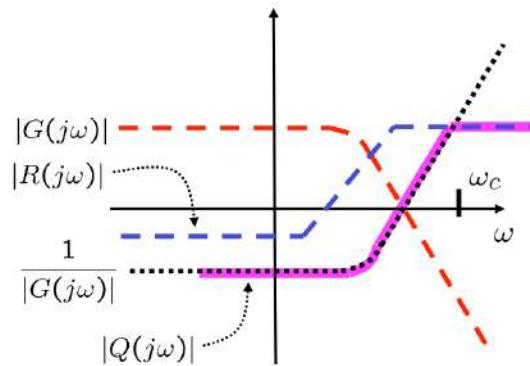
Per analizzare questo comportamento scomponiamo  $L(s)$  in  $R(s)$ ,  $G(s)$ ; allora otteniamo il sistema

$$|Q(j\omega)| = \left| \frac{R(j\omega)}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} \right| = \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \omega \leq \omega_C \\ |R(j\omega)| & \omega > \omega_C \end{cases}$$

dove  $\omega_C$  è la pulsazione di attraversamento della  $L(j\omega)$ . Dal sistema si nota che il fattore di attenuazione della  $Q(j\omega)$  a basse frequenze, pari al guadagno del plant, *non è* in quanto tale *condizionabile* attraverso il progetto del controllo. Diversamente, il fattore di attenuazione a frequenze elevate è condizionabile attraverso il progetto del regolatore.



Se tuttavia la pulsazione di attraversamento  $\omega_C$  è maggiore di quella della  $G$ , nel momento in cui  $G$  attraversa l'asse 0dB, essa è ancora il riferimento della  $Q$ , che di conseguenza sta amplificando! La  $Q$  continuerà a salire, seguendo un andamento a specchio rispetto alla  $G$ , fino alla  $\omega_C$ , pulsazione in cui si affiancherà al regolatore.




---

<sup>104</sup>Vedi pagina 132.

Onde evitare che ciò accada è consigliabile progettare *regolatori di tipo passa - basso*, quando compatibile con le specifiche di progetto: infatti regolatori di tipo passa - alto amplificherebbero ad alte frequenze, che è quello che vogliamo evitare quando  $Q(s)$  assomiglia alla  $R(s)$ .

## 9 Realizzazione del Progetto

Riassumendo quanto visto nella sezione (8.4.4),

- Alti margini di fase e di ampiezza danno garanzie di buona robustezza a fronte di incertezze sulla funzione di risposta armonica di anello.
- La presenza di ritardi non modellati  $T$  risulta tanto più critica (a parità di margine di fase) quanto più la pulsazione di attraversamento  $\omega_C$  è alta ( $T_{max} < \frac{M_f}{\omega_C}$ ).

Da queste considerazioni ricaviamo due importanti vincoli, necessari per la stabilità del sistema:

1. *Lower bound* su margine di fase e di ampiezza (significa cioè che non possono essere minori di un certo valore);
2. *Upper bound* sulla pulsazione di attraversamento della funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto (cioè esiste un limite superiore ai valori che  $\omega_C$  può assumere).

Vedremo nelle sezioni seguenti applicare questi due vincoli.

### 9.1 Comprensione delle Specifiche di Progetto

#### 9.1.1 Specifiche Statiche

L'argomento era già stato introdotto nel capitolo 7.1.

In generale, le specifiche statiche possono tradursi, nel dominio della frequenza, come vincoli sulla pendenza del diagramma delle ampiezze di  $|L(j\omega)|$  e di  $|R(j\omega)|$ , dai quali si individuano alcune zone in cui i grafici *non* possono trovarsi.

Ad una prima occhiata, risulta:

- Per i disturbi sull'uscita:  $|L(j\omega)|$  dovrà avere modulo alto, per cui si individua una zona subito sopra l'asse 0dB, proporzionale all'attenuazione richiesta del disturbo, in cui  $L$  non può entrare.

*Lower bound* su  $|L(j\omega)|$ .

- Per i disturbi sull'attuatore: si ricava che l'attenuazione di questi disturbi dipende dall'inverso di  $|R(j\omega)|$ ; per lo stesso motivo di cui sopra, si individua una zona del diagramma dei moduli all'interno della quale il grafico del regolatore non può entrare.

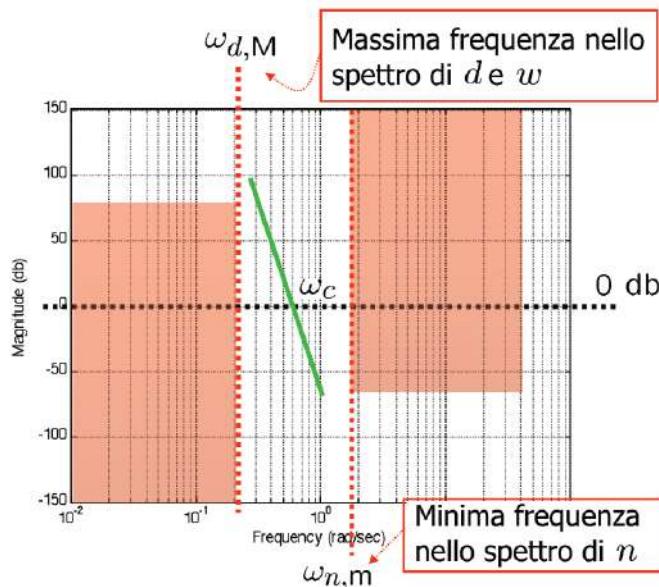
*Lower bound* su  $|R(j\omega)|$ .

- Per i disturbi di misura: il diagramma del  $|L(j\omega)|$  deve essere «piccolo» ad alte frequenze, quindi deve trovarsi attenuato di una quantità richiesta dopo che ha attraversato l'asse 0dB. Si individua quindi una zona subito sotto tale asse, ampia quanto l'attenuazione desiderata, all'interno della quale  $|L(j\omega)|$  non può entrare.

*Upper bound* su  $|L(j\omega)|$ .

Cercando di mettere insieme questi vincoli si ricava anche che il grafico di  $|L(j\omega)|$  dovrà attraversare l'asse 0dB nell'intervallo compreso fra la banda del disturbo sull'uscita e la banda del disturbo di misura (si capisce ora perché avevamo auspicato che il disaccoppiamento frequenziale prevedesse anche intervalli lontani, oltre che non sovrapposti, per i due disturbi).

Questa specifica si traduce in  $\omega_{d,MAX} \leq \omega_C \leq \omega_{n,MIN}$ .



#### 9.1.1.1 Errore sul Riferimento e Disturbi sull'Uscita

È noto l'errore massimo che si vuole in uscita sull'inseguimento del segnale di riferimento: per applicare questo vincolo si utilizza la caratteristica della  $L(j\omega)$  secondo la quale l'inverso del suo modulo nel campo di frequenze in cui è confinato il riferimento, e/o il disturbo, rappresenta il fattore di attenuazione dell'errore e/o del disturbo stesso.

Si individua quindi una zona, delimitata sia in frequenza che in ampiezza dall'estensione del disturbo  $d$ , all'interno della quale  $|L(j\omega)|$  non può entrare: è questo il *lower bound*.

Per soddisfare la specifica statica è necessario imporre:

- Se  $e^* > 0 \Rightarrow |L(0)| \geq L^*$ ;
- Se  $e^* = 0 \Rightarrow |L(0)| = \infty$  (presenza di almeno un polo nell'origine)

dove  $e^*$  è l'errore desiderato,  $L^*$  il valore del lower bound. Si ricorda che l'argomento era già stato affrontato nel paragrafo [7.3 a pagina 140](#).

### 9.1.1.2 Disturbi sull'Attuatore

Per tenere conto di questo particolare tipo di disturbi è necessario disaccoppiarli dai disturbi sull'uscita, con i quali erano stati uniti attorno a pagina 160.

Sapendo che  $G(s)D_a(s)$  rappresenta il disturbo equivalente sull'uscita nel legame fra  $d_a(t)$  ed  $e(t)$ ,  $E(s) = S(s)G(s)D_a(s) = \frac{G(s)}{1+L(s)}D_a(s)$ , e per  $|L(j\omega)| \gg 1$  risulta  $\frac{|G(s)|}{|1+L(s)|} \approx \frac{1}{|R(j\omega)|}$ .

Il fattore di attenuazione è dato dall'inverso di  $|R(j\omega)|$  - non di  $|L(j\omega)|$ , come nel caso precedente! Nel caso di disturbi sull'attuatore, il *lower bound* è quindi su  $|R(j\omega)|$ .

In conclusione, per soddisfare la specifica statica è necessario imporre:

- Se  $e^* > 0 \Rightarrow |R(0)| \geq L^*$ ;
- Se  $e^* = 0 \Rightarrow |R(0)| = \infty$  (presenza di almeno un polo nell'origine)

### 9.1.1.3 Esempio: Ingresso Simultaneo di Segnali Costanti

Sia dato un sistema con tre ingressi:  $W(s)$ ,  $D_a(s)$ ,  $D(s)$ , tutti e tre collegati all'errore attraverso la funzione di sensitività. Per la proprietà di sovrapposizione degli effetti risulta  $E(s) = S(s) \cdot \frac{W}{s} + S(s) \cdot \frac{D}{s} + S(s)G(s) \cdot \frac{D_a}{s}$ , dove si suppone di aver dato tre ingressi a gradino di ampiezza diversa. Risolvendo i calcoli risulta  $E(s) = \frac{1}{1+R(s)G(s)} \left( \frac{W+D}{s} \right) + \frac{G(s)}{1+R(s)G(s)} \cdot \frac{D_a}{s}$ . Applichiamo il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{1}{1+R(s)G(s)} \left( \frac{W+D}{s} \right) + \frac{G(s)}{1+R(s)G(s)} \cdot \frac{D_a}{s} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+R(0)G(0)} (W + D) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(0)}{1+R(0)G(0)} \cdot D_a \end{aligned}$$

- Se la specifica non chiede errore nullo,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| \leq e^* \neq 0$   
 $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+R(0)G(0)} (W + D) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(0)}{1+R(0)G(0)} \cdot D_a \leq \frac{|D| + |W|}{1+\mu_L} + |D_a| \cdot \frac{\mu_G}{1+\mu_L} \leq \frac{D^* + W^*}{1+\mu_L} + \frac{D_a^* \mu_G}{1+\mu_L}$ ,  
dove  $\mu_G = G(0)$ ,  $\mu_L = L(0) = \mu_G \mu_R$  e infine  $\mu_R = R(0)$ ; i moduli si intendono come «il massimo valore che quel segnale può assumere». I valori con  $*$  sono quelli che si vogliono imporre attraverso le specifiche, e vale  $|W| \leq W^*$ ,  $|D_a| \leq D_a^*$ ,  $|D| \leq D^*$ . La specifica è soddisfatta se

$$\mu_R \geq \frac{D^* + W^*}{\mu_G e^*} + \frac{D_a^*}{e^*} - 1$$

Il primo termine è dovuto a disturbi sull'uscita e sui riferimenti, mentre il secondo ai disturbi sull'attuatore.

- Se la specifica chiede errore nullo,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+R(0)G(0)} (W + D) + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(0)}{1+R(0)G(0)} \cdot D_a = 0$$

- Uguagliare a zero il primo termine significa imporre che  $R(0)G(0) = \infty$ , in quanto  $W$  e  $D$  sono costanti. Si ha questo risultato per  $s = 0$ , quando la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto ha un polo nell'origine, come afferma il principio del modello interno.

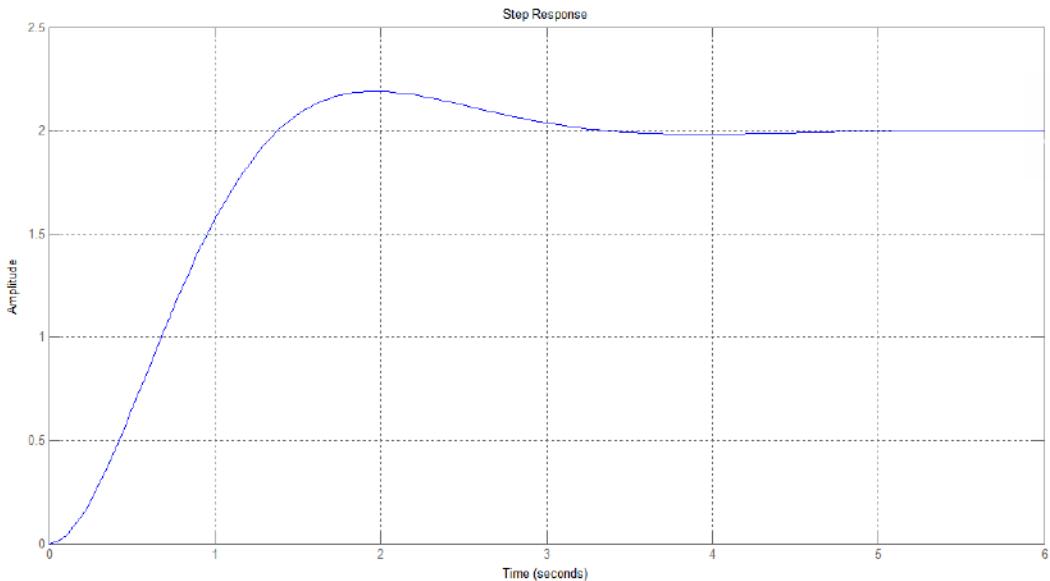
- Uguagliare a zero il secondo termine significa imporre che  $G(0) = 0$ , o alternativamente  $R(0) = \infty$  ( $D_a$  è un termine costante). Questo si verifica quando il plant presenta almeno un polo nell'origine, o il regolatore presenta almeno un polo nell'origine.

Nota Bene: queste formule si applicano *solo* a segnali a gradino, in quanto per segnali sinusoidali il teorema del valore finale *non* si applica. Si evidenzia che la stessa problematica era stata affrontata nel paragrafo 8.5.2.2 a pagina 176.

## Esercitazione 6

### Primo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



1.  $G(s) = \frac{0.5}{s^2+0.6s+0.25}$
2.  $G(s) = \frac{8}{s^2+2.4s+4}$
3.  $G(s) = \frac{32}{(s^2+2.4s+16)}$
4.  $G(s) = \frac{2.67}{(s+0.33)(s^2+2.4s+4)}$

Si verifica facilmente che il guadagno è pari a 2 per ogni funzione, e che il grado relativo è pari a 2 solamente per le prime tre funzioni, mentre l'ultima ha grado relativo 3 (e per questo motivo è molto più probabile che questa possa essere scartata).

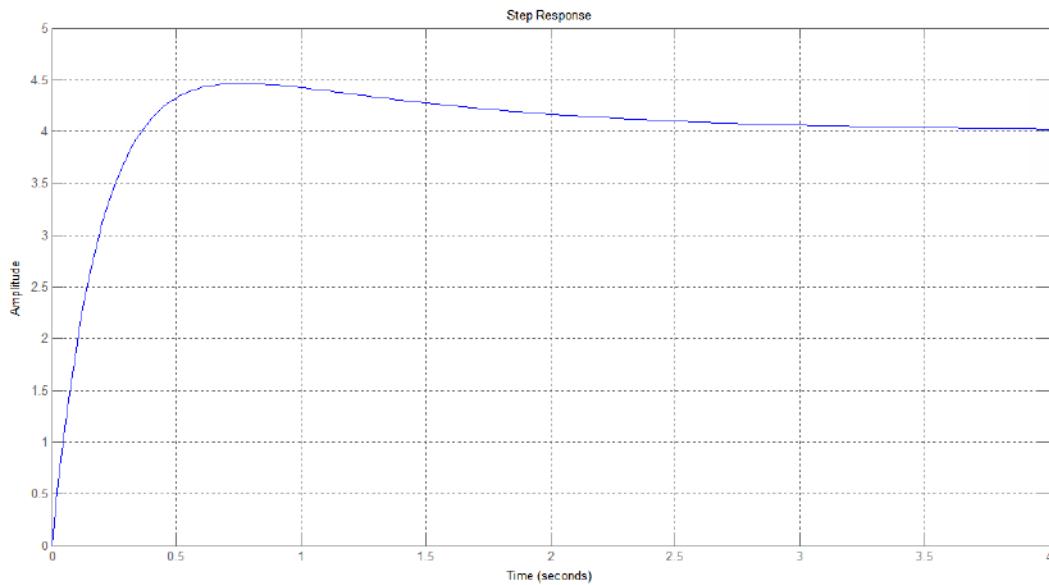
Si passa quindi ad analizzare il tempo di assestamento: risulta che la prima e l'ultima  $G(s)$  sono troppo lente ( $T_{ass}$  pari, rispettivamente, a 15.3s e 13.93s), mentre la seconda e la terza

hanno lo stesso tempo di assestamento - 3.8s - che è un valore accettabile. Per discriminare fra le due si cerca quindi il valore del coefficiente di smorzamento  $\delta$ , che risulta, per la seconda  $G(s)$  pari a 0.6, mentre per la terza vale 0.3.

Poiché non vi sono marcate oscillazioni, che si avrebbero nel caso in cui  $\delta$  avesse un valore basso, concludiamo che la funzione rappresentata nel grafico è la seconda.

## Secondo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



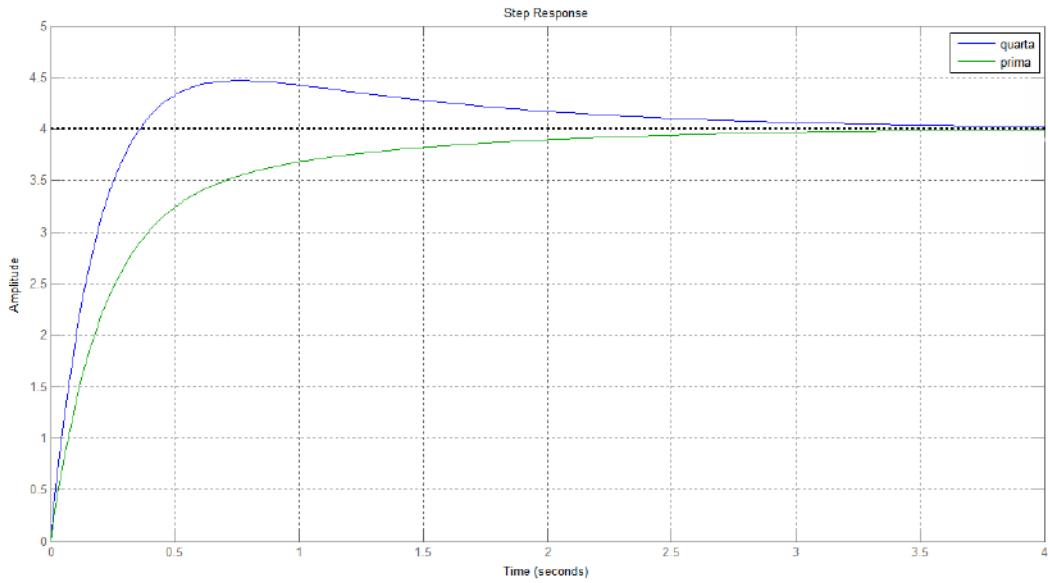
1.  $G(s) = \frac{16.7(s+1.2)}{(s+5)(s+1)}$
2.  $G(s) = \frac{0.5(s+0.8)}{(s+1)(s+0.1)}$
3.  $G(s) = \frac{2.5(s+0.08)}{(s+0.5)(s+0.1)}$
4.  $G(s) = \frac{25(s+0.8)}{(s+5)(s+1)}$

Osserviamo subito che il grado relativo è unitario per tutte le  $G(s)$  proposte, e che allo stesso modo il guadagno è circa 4 per ognuna di esse: nessuno quindi di questi parametri ci permette di eliminare una funzione.

Passando poi alla valutazione del tempo di assestamento, si trova che solo la prima e la quarta funzione di trasferimento hanno un tempo compatibile con quello mostrato dal grafico (4.6s), mentre la seconda e la terza vengono eliminate in quanto troppo lente ( $T_{ass} = \frac{4.6}{0.1} = 46$ s). Si è sottinteso che ognuno di questi tempi è stato calcolato considerando il polo dominante.

Infine, per discriminare fra le due  $G(s)$  rimaste, si osserva che la curva in figura presenta una sovraelongazione da zero: per questo motivo consideriamo la mappa poli - zeri di entrambe le funzioni, e da queste deduciamo che la funzione corrispondente a quella plottata è la quarta.

Infatti, la posizione dei suoi poli e zeri concorda con il grafico, mentre nella prima vediamo che lo zero si trova a destra del polo dominante: questo (come mostrato nella figura seguente) causa una sottoelongazione, che non è quello che stavamo cercando.



LEZIONE 25

DATA: 17/11/2015

### 9.1.2 Specifiche Dinamiche

Come per le specifiche statiche, la prima definizione si trova a pagina [132](#).

Le specifiche dinamiche comprendono vincoli sul tempo di assestamento e su sovraelongazione percentuale massima nella risposta del sistema al riferimento (spesso segnale a gradino). Come avevamo visto in [Uso del Luogo delle Radici per Progetto Robusto](#) a pagina [156](#), queste specifiche si rispettano individuando una zona in cui  $\delta$  e  $\omega_n$  soddisfano le specifiche.

Inoltre, erano stati introdotti a pagina [172](#) alcuni strumenti per la rapida risoluzione delle specifiche dinamiche:

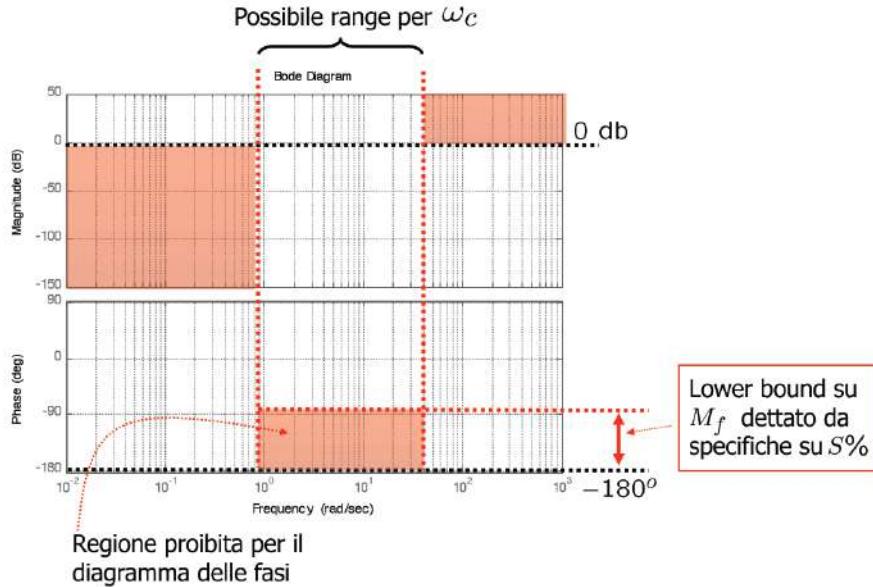
- $S\% \leq S^* \Rightarrow \delta \geq \delta^*$ , da cui deriva  $M_f \geq M_f^*$ .

*Lower bound su  $M_f$*

- $T_{ass1\%} \leq T^* \Rightarrow \frac{4.6}{T^*} \leq \delta \omega_n$ , da cui deriva  $\frac{4.6}{T^*} \leq \frac{M_f}{100} \omega_n$ , ossia  $M_f \omega_n \geq \frac{460}{T^*}$ .

*Lower bound su  $\omega_C$*

Graficamente, l'insieme di questi due vincoli individua una zona possibile di questo tipo:



In alcuni casi, non è necessario andare a calcolare questi valori per verificare che le specifiche siano rispettate: sotto ipotesi di regolarità il valore del margine di fase potrebbe essere dedotto dalla lettura della pendenza del diagramma delle ampiezze in corrispondenza di  $\omega_C$ . Infatti, se  $L(s)$  è stabile e a fase minima, è possibile fare la seguente deduzione:  
Se il diagramma delle ampiezze ha una pendenza di  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$  in corrispondenza della pulsazione di attraversamento, e tale pendenza si conserva per circa una decade a cavallo di  $\omega_C$ , allora è lecito aspettarsi una fase per  $\omega = \omega_C$  di circa  $-90^\circ$  e quindi un margine di fase  $M_f \approx 90^\circ$ .

A valle di queste osservazioni si fa notare inoltre che questi vincoli su margine di fase e tempo di assestamento del sistema si riflettono anche sui poli complessi coniugati dominanti che il sistema in retro potrebbe eventualmente presentare. Il luogo delle radici è in ogni caso lo strumento migliore per chiarire queste problematiche.

### 9.1.2.1 Conseguenze della Presenza degli Zeri

1. Caso in cui gli zeri si trovano vicino all'asse Immaginario: la loro presenza può causare *sorelongazioni*, o *sottoelongazioni*, indipendenti dalla presenza di poli complessi coniugati inseriti per rispettare le specifiche.
2. Caso in cui gli zeri si trovano vicino a poli reali di tipo dominante: questo crea *code di assestamento* che influiscono negativamente sulla risposta, anche a discapito del tempo di assestamento.

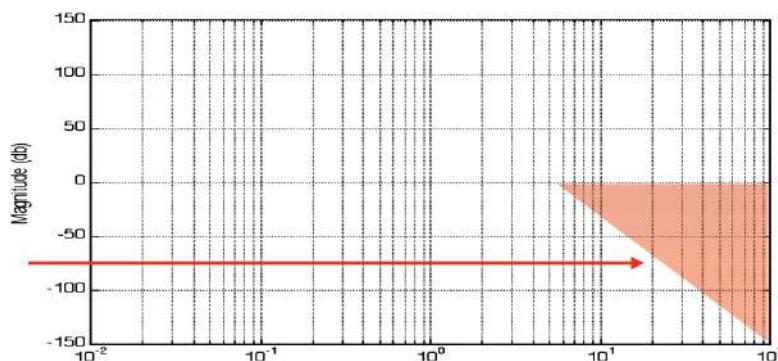
Si ribadisce quindi quanto detto nel paragrafo (5.6.2) e nel paragrafo (8.5.1) riguardo agli zeri del sistema in retroazione, e in particolare della  $F(s)$ : per evitare comportamenti non voluti e potenziali degradazioni delle prestazioni si eviti di inserire zeri vicino all'asse Immaginario, e si pongano in cancellazione eventuali zeri della  $G(s)$  mal posizionati (i. e. zeri a fase minima).

### 9.1.3 Specifiche su Moderazione del Controllo e Realizzabilità del Controllore

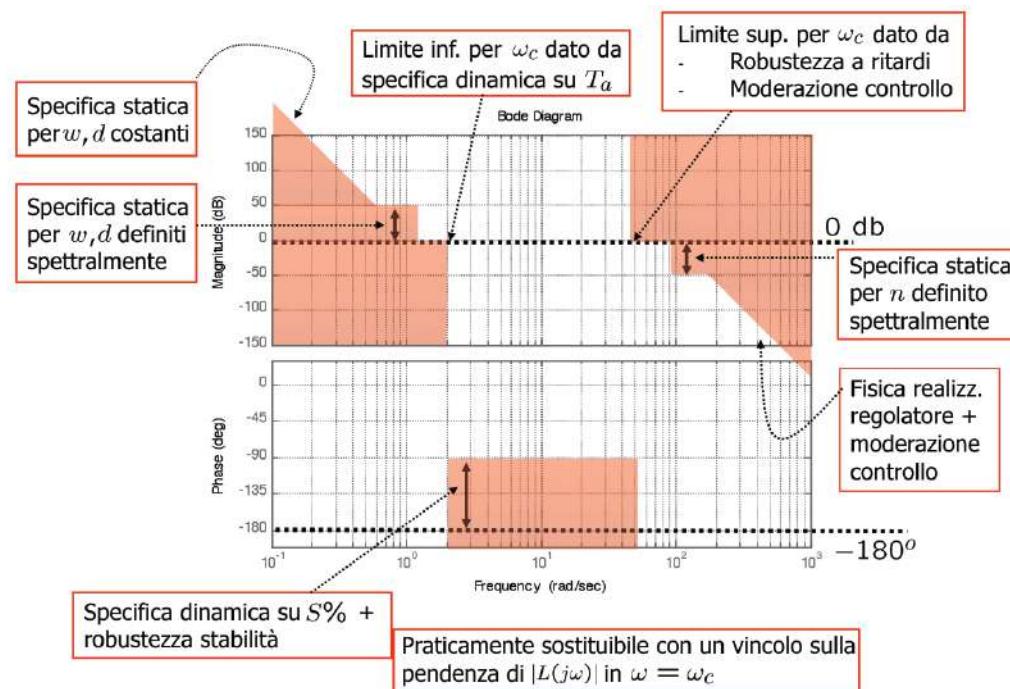
Come avevamo detto nello studio della funzione di sensitività del controllo, al fine di moderare  $Q(s)$  è necessario:

- Limitare la pulsazione di attraversamento di  $L(s)$  rispetto a quella della  $G$ , onde amplificare il minor numero di disturbi possibile;
- Realizzare regolatori di tipo passa - basso.

Per quanto riguarda la fisica realizzabilità (grado relativo maggiore o uguale a zero) il grado relativo di  $L(s)$  deve essere maggiore di quello di  $G(s)$ . Di conseguenza, la pendenza del diagramma dei moduli della  $L$  a frequenze elevate sarà almeno pari (o maggiore) di quella della  $G$ , come mostrato in figura.



Nel complesso, unendo tutti i vincoli visti fino a questo momento, risulta un diagramma di Bode simile a quello mostrato di seguito, dove le zone colorate in rosa sono quelle interdette.



## 9.2 Implementazione dei Vincoli: Struttura di Controllo a Due Stadi

È possibile, e conveniente, dividere il progetto del regolatore in due passi, ciascuno dedicato al soddisfacimento di un tipo di specifiche. Quindi

$$R(s) = R_s(s) \cdot R_d(s)$$

**Regolatore Statico:** mira a imporre specifiche statiche a bassa frequenza (in particolare per  $\omega < \omega_C$ ), riguardanti quindi disturbi sull'uscita o sui riferimenti.

$$R_s(s) = \frac{\mu_s}{s^i}$$

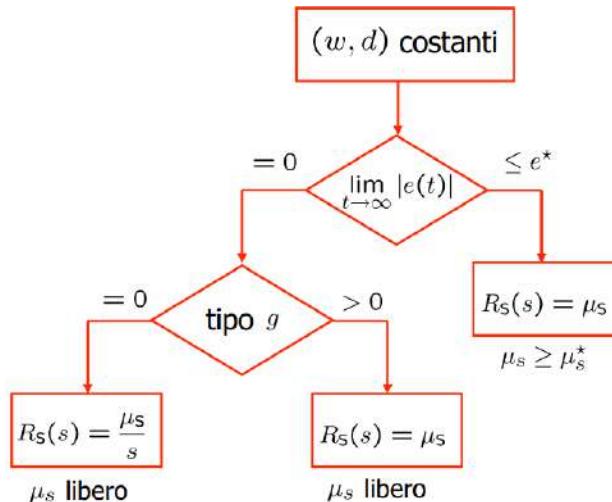
**Regolatore Dinamico:** mira a imporre specifiche dinamiche ad alta frequenza (in particolare per  $\omega > \omega_C$ ), riguardanti disturbi di misura (ed altri vincoli).

$$R_d(s) = \mu_d \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n_z} (\tau_{z,i}s + 1)}{\prod_{k=1}^{n_p} (\tau_{p,k}s + 1)}$$

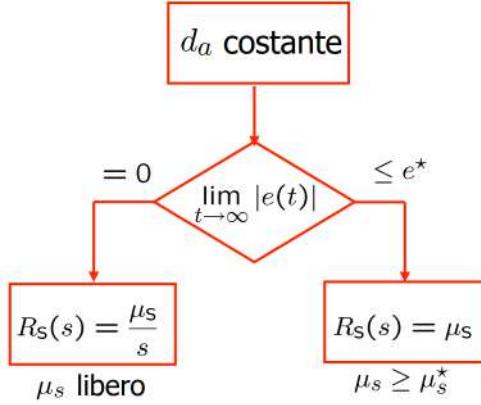
### 9.2.1 Progetto del Regolatore Statico

Condensiamo in un diagramma di Venn immediato quanto detto per le specifiche statiche e in particolare nella tabella a pagina 177. Indichiamo di seguito tre casistiche di disturbi e riferimenti, e il procedimento da seguire in ciascuna situazione a seconda della specifica sull'errore.

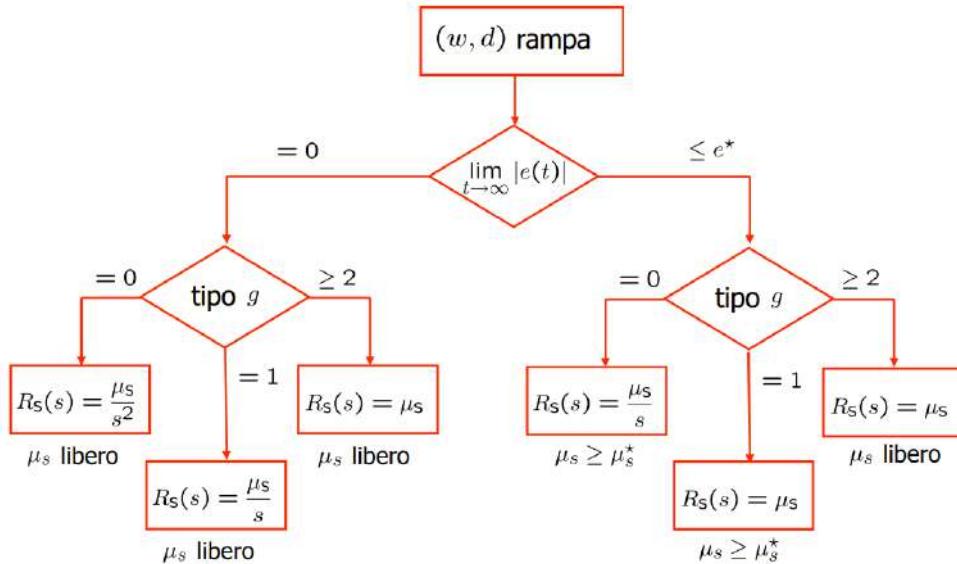
Algoritmo da seguire in caso si prendessero in considerazione il riferimento e il disturbo sull'uscita:



Quando, a fronte delle stesse richieste, si prendono in considerazione i disturbi sull'attuatore:



Nel caso ci si trovasse invece in presenza di segnali «rampa»:



Per soddisfare la specifica statica nel caso venisse richiesta l'attenuazione di un disturbo caratterizzato spettralmente, si agisce sul guadagno  $\mu_s$ , generalmente alzandolo di una quantità proporzionale all'attenuazione desiderata.

### 9.2.2 Progetto del Regolatore Dinamico

Si tratta di implementare quei vincoli di cui al paragrafo (9.1.2):

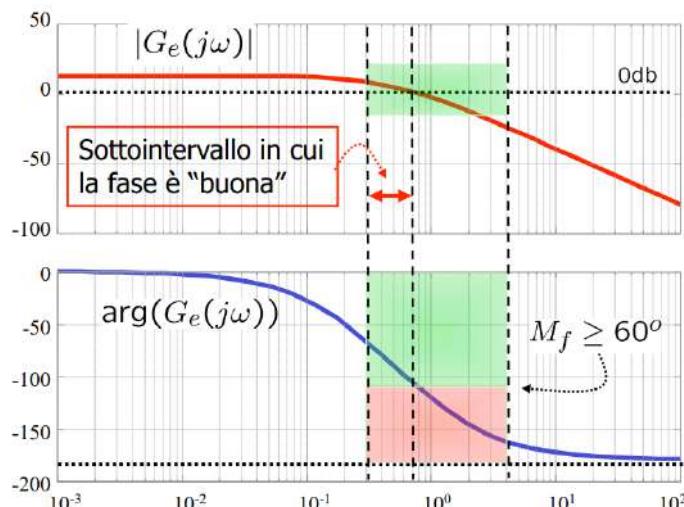
- Imporre un intervallo di pulsazioni « valide » in cui  $L(s)$  può attraversare;
- Imporre un margine di fase, all'interno di questo intervallo, che garantisca robustezza e, insieme al vincolo su  $\omega_C$ , soddisfi le specifiche su tempo di assestamento e sovraelongazione percentuale;
- Garantire una certa attenuazione a frequenze elevate, sia per avere un'attenuazione dei disturbi ad alte frequenze che per mantenere bassa la variabile  $u$ . Si fa notare che l'aggiunta di poli, al fine di rispettare questa specifica, causa una notevole « degradazione » del margine di fase, che tuttavia è accettabile poiché al di fuori dell'intervallo di cui al punto precedente.

L'imposizione di queste specifiche va fatta a valle del progetto del regolatore statico, su quello che viene chiamato **sistema esteso**:  $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ . Le scelte fatte per il regolatore statico influenzano infatti il progetto del regolatore dinamico:

- Se si è utilizzato il guadagno del regolatore statico  $\mu_S$ , allora il guadagno  $\mu_d$  non sarà utilizzabile nel regolatore dinamico ( $\mu_d = 1$ ). In caso contrario, è possibile sfruttare questo grado di libertà.
- Se il progetto di  $R_s(s)$  ha previsto l'attenuazione di un disturbo a basse frequenze - quindi indirettamente l'amplificazione di  $|L(j\omega)|$  - bisognerà fare attenzione nel porre poli e zeri di  $R_d(s)$  a frequenza sufficientemente elevata, onde rispettare un sufficiente disaccoppiamento frequenziale.

### 9.2.2.1 «Scenario A»

Definiamo come *scenario A* una configurazione del diagramma di Bode per la quale, nell'intervallo prestabilito per la pulsazione di attraversamento  $\omega_C$ , esiste un sotto - intervallo in cui il valore della fase del sistema esteso è maggiore del limite dato dal margine di fase desiderato.



Come è facile immaginare, si impone l'attraversamento all'interno del sotto - intervallo, generalmente attraverso l'introduzione di poli. Questo introduce tuttavia un deterioramento del margine di fase come effetto collaterale.

Ovviamente, non ha senso introdurre un numero di poli tale da alterare eccessivamente la fase.

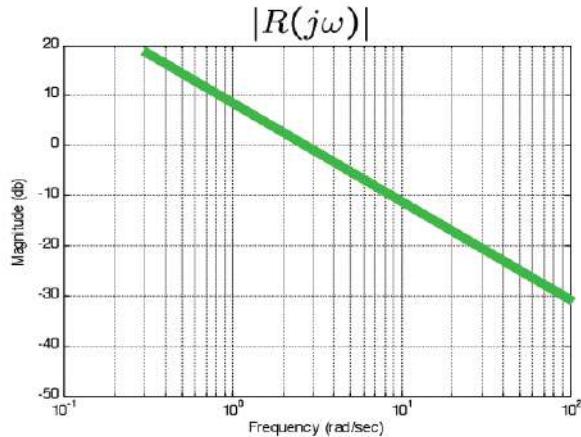
Il procedimento da seguire in questo scenario cambia a seconda dei gradi di libertà e delle scelte fatte nella progettazione del regolatore statico.

#### Primo caso: $\mu_d$ libero

Si impone l'attraversamento scegliendo un guadagno statico appropriato. In particolare, il guadagno sarà pari all'inverso del modulo di  $G_e(j\omega_C)$ .

Risulta quindi  $R_d(s) = \mu_d = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_C)|_{dB}}{20}}$ .

Nel complesso, il grafico del regolatore assomiglia al seguente:



Allo stesso tempo, le specifiche statiche sono realizzate imponendo un polo nell'origine. Questo tipo di regolatore viene definito **regolatore integrale**.

LEZIONE 26

DATA: 18/11/2015

### Secondo caso: $\mu_d$ vincolato

L'attenuazione dei moduli nell'intervallo di pulsazioni scelto può essere ottenuto utilizzando un polo, ma, come è stato detto, il suo inserimento provoca un deterioramento della fase in un contesto in cui il suo valore è molto importante: questa scelta va considerata attentamente.

Nel caso si scegliesse di inserirlo, il polo va calibrato in modo che alla pulsazione  $\omega_C$  l'attenuazione introdotta sia pari alla distanza del grafico dall'asse 0dB, quindi in particolare a  $|G_e(j\omega_C)|$ .

Per recuperare lo sfasamento negativo si può pensare di inserire uno zero in modo che risulti

$$R_d(s) = \frac{1 + \alpha_a \tau_a s}{1 + \tau_a s}, \quad 0 < \alpha_a < 1$$

Si definiscono queste **reti ritardatrici**.

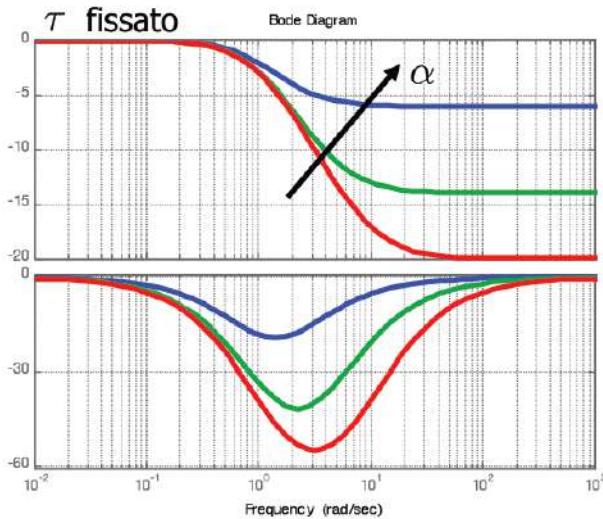
Per i vincoli imposti, *lo zero interviene a una pulsazione più alta del polo*: si conserva l'attenuazione dei moduli necessaria, mentre lo sfasamento negativo quasi non influisce. Ciò accade a causa del «tempo» impiegato a passare da un valore all'altro: se la pulsazione di intervento dello zero non è troppo lontana da quella del polo, lo sfasamento negativo effettivamente raggiunto sarà minore, in quanto la compensazione positiva interviene prima che si raggiunga  $4.81 + \frac{1}{\tau_a}$ . Il risultato complessivo è quindi costituito dall'intervento del polo, seguito da quello dello zero: ciò permette di ottenere attenuazione nell'intervallo, mentre lo sfasamento è già stato recuperato.

Bisogna porre molta attenzione al fatto che, a livello pratico, la pulsazione di intervento dello zero sarà  $\frac{1}{\alpha_a \tau_a}$ :

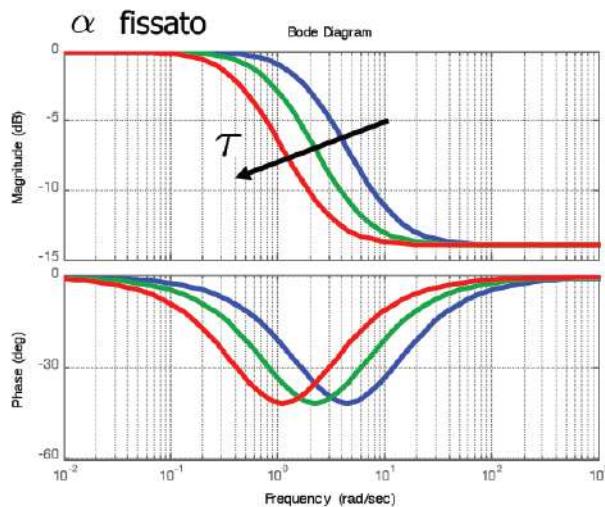
- Se  $\alpha_a$  è piccolo si avrà una pulsazione complessiva più grande e quindi più lontana da quella dello polo. La conseguenza è che il tempo nel quale il polo interviene da solo è maggiore: l'attenuazione e lo sfasamento saranno maggiori.
- Se  $\alpha_a$  è grande si avrà una pulsazione complessiva non molto diversa da quella del polo. Come conseguenza, lo zero interverrà quasi subito, limitando attenuazione e sfasamento.

La conseguenza di questo ragionamento è la seguente:

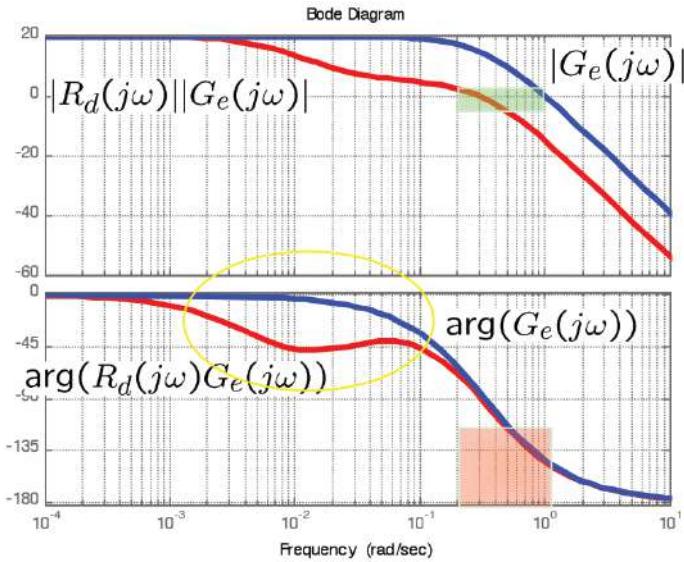
- Il livello di attenuazione desiderato dipende da  $\alpha_a$ , ed è inversamente proporzionale al suo valore; il punto di intervento rimane fisso.



- Dopo  $4.81 + \frac{1}{\alpha_a \tau_a}$  la fase sarà ritornata al suo valore «buono»: le frequenze in cui  $R_d(s)$  attenua ma non sfasa possono essere scelte arbitrariamente calibrando  $\tau_a$  (in altre parole, variando  $\tau$  si sposta il punto di intervento della rete lasciando fisso il livello di attenuazione massimo).

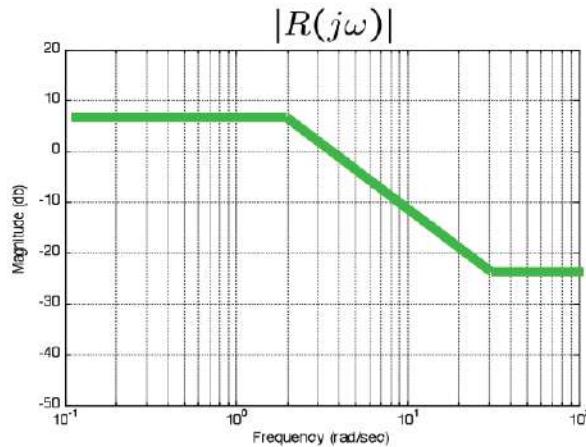


Applicando un regolatore dinamico di questo tipo all'esempio visto all'inizio del capitolo si ottiene un diagramma di Bode siffatto:



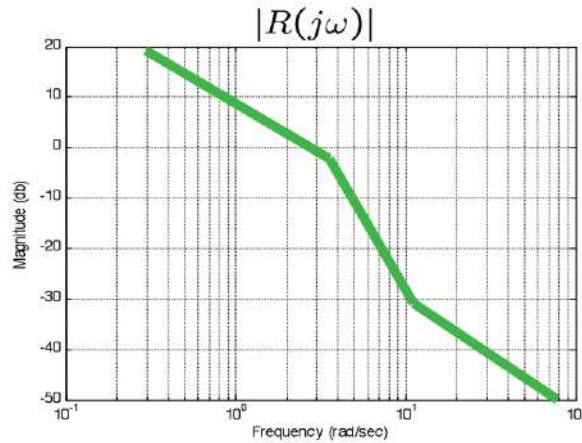
Si possono fare, a valle di questo ragionamento, le seguenti osservazioni (sul regolatore nella sua interezza):

- Il vincolo di *fisica realizzabilità* è sempre verificato in quanto il grado relativo sarà sempre  $\geq 0$ , a seconda della presenza di poli nell'origine del regolatore statico.
- È possibile inserire ulteriori poli ad alta frequenza per soddisfare specifiche di attenuazione di disturbi di misura.
- L'andamento complessivo del regolatore è di tipo passa - basso, considerando che i poli intervengono a frequenze più basse dello zero.



Le specifiche statiche a bassa frequenza vengono soddisfatte tramite l'imposizione del guadagno.

Una ulteriore alternativa è la seguente: le specifiche statiche a bassa frequenza vengono soddisfatte con un guadagno statico sufficientemente elevato e l'imposizione di un polo nell'origine.

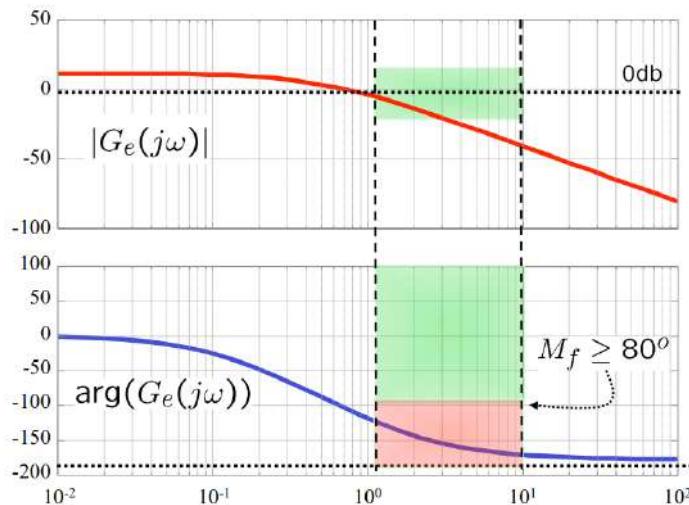


In questo scenario, la funzione di sensitività del controllo sarà caratterizzata da valori bassi, il che significa «controlli non nervosi».

#### 9.2.2.2 «Scenario B»

Definiamo come *scenario B* una configurazione del diagramma di Bode per la quale, nell'intervallo prestabilito per la pulsazione di attraversamento  $\omega_C$ , la fase del sistema esteso è minore del limite dato dal margine di fase desiderato.

Lo scenario B è quasi una certezza nel caso si decida di mettere una quantità eccessiva di poli nell'origine nella parte statica<sup>105</sup>.



Anche in questo caso, la scelta più immediata è quella di progettare il regolatore dinamico in modo da fornire anticipo di fase nell'intervallo di attraversamento desiderato. È possibile ottenere questo effetto attraverso l'inserimento di zeri, se si accetta l'effetto collaterale intrinseco, cioè l'amplificazione dei moduli.

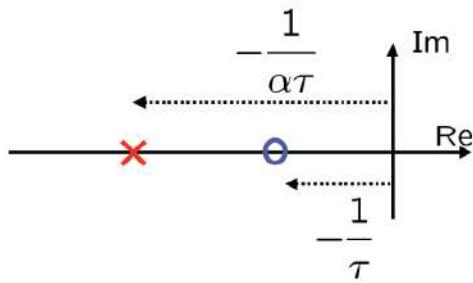
---

<sup>105</sup>Questo spiega perché era stato detto di evitare simili scelte.

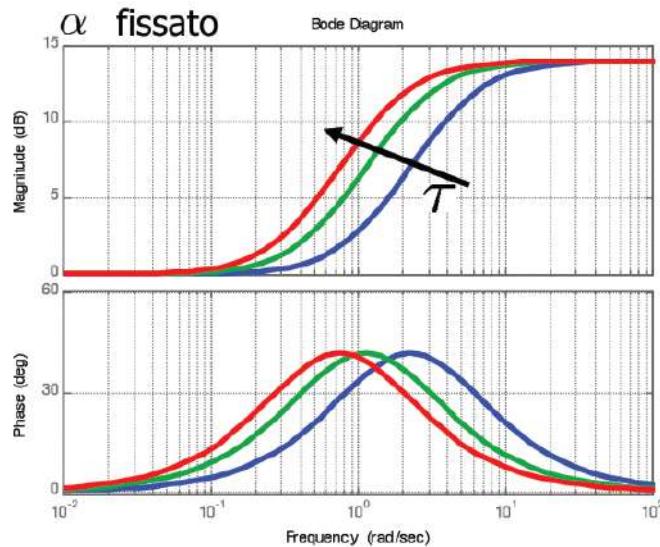
Il regolatore dinamico avrà, nel caso più semplice, *uno zero seguito da un polo*: poiché ciò significa che lo zero si trova a pulsazione minore di quella del polo, si definisce lo zero come  $(1 + \tau s)$  e il polo come  $(1 + \alpha \tau s)$ , dove  $0 < \alpha < 1$ .

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau_b s}{1 + \alpha_b \tau_b s}$$

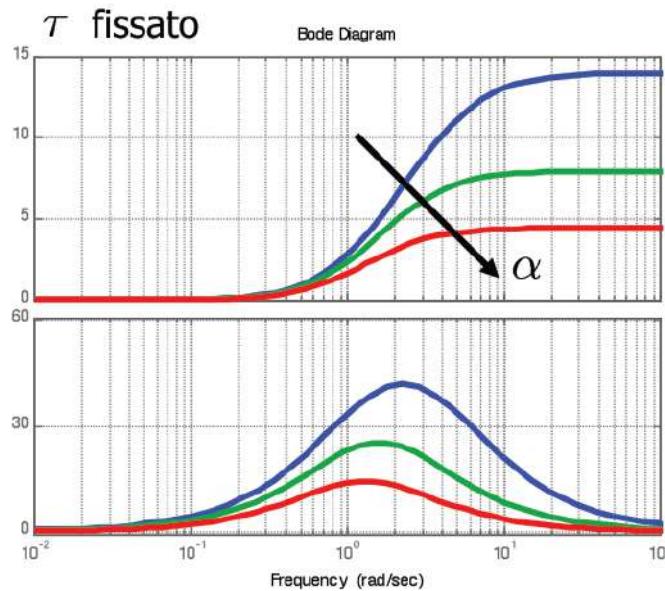
Si parla in questo caso di **reti anticipatrici**. Questo, a differenza del regolatore di tipo A, permette di avere un picco di sfasamento positivo all'interno dell'intervallo.



- Il parametro  $\tau$  descrive il punto di intervento della rete ed è indipendente dallo sfasamento richiesto.



- Dal parametro  $\alpha$  deriva la quantità di sfasamento richiesto e anche l'amplificazione conseguente, mentre rimane invariato il punto di intervento della rete. Poiché infatti la pulsazione del polo sarà praticamente  $\frac{1}{\alpha\tau}$ ,
  - Se  $\alpha_a$  è piccolo si avrà una pulsazione complessiva più grande e quindi più lontana da quella dello zero. La conseguenza è che il tempo nel quale lo zero interviene da solo è maggiore: l'amplificazione e lo sfasamento saranno maggiori.
  - Se  $\alpha_a$  è grande si avrà una pulsazione complessiva non molto diversa da quella dello zero. Come conseguenza, il polo interverrà quasi subito, limitando amplificazione e sfasamento.

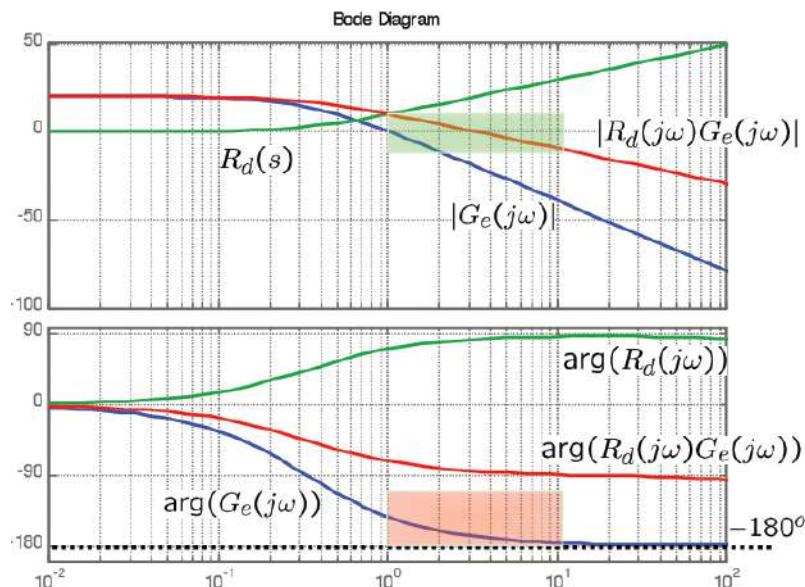


Passando più «nel particolare», è necessario costruire una rete diversa a seconda dello sfasamento richiesto dalle specifiche. Si analizzano di seguito alcuni macro-casi.

### Primo caso: Anticipo di Fase Necessario < 90°

È questo il caso in cui si deve inserire *uno* zero, quando l'anticipo di fase necessario è minore di 90° (fattualmente 70°-75°<sup>106</sup>);

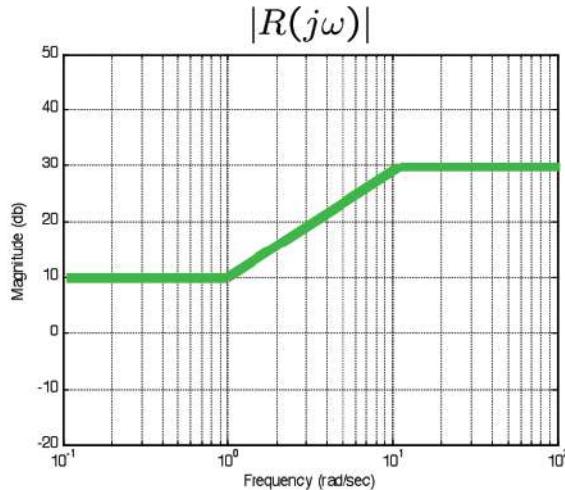
- Pro: miglioramento del margine di fase.
- Contro: l'amplificazione dei moduli sposta in avanti la pulsazione di attraversamento; questa potrebbe incidentalmente finire al di fuori dell'intervallo di pulsazioni desiderato.



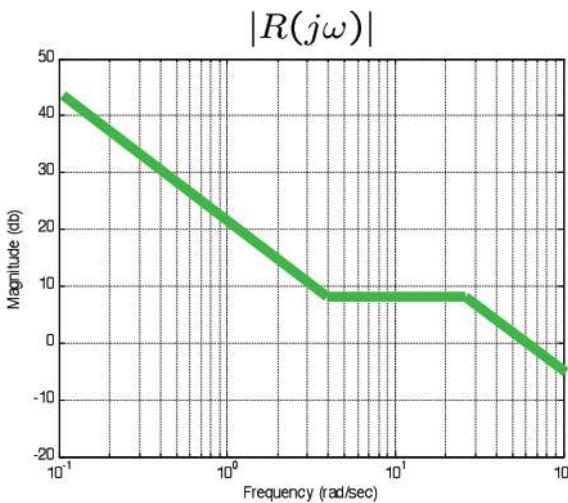
<sup>106</sup>Il principale motivo di questo limite è che recuperare un margine di fase superiore a 70°, o 75°, comporta l'inserimento di uno zero molto vicino all'asse Immaginario, mentre solitamente si vogliono evitare condizioni critiche.

In questo primo caso, il regolatore complessivo può avere due andamenti differenti, a seconda del percorso scelto per il soddisfacimento di specifiche statiche:

- Le specifiche statiche a bassa frequenza sono state soddisfatte tramite l'utilizzo del guadagno statico, e l'anticipo di fase necessario era minore di  $90^\circ$ .



- Le specifiche statiche a bassa frequenza sono state soddisfatte tramite l'inserimento di un polo nell'origine, e l'anticipo di fase necessario era minore di  $90^\circ$ . Risulta che il secondo polo, inserito tramite il regolatore dinamico, è ridondante (non necessario per fisica realizzabilità), ed è possibile eliminarlo.

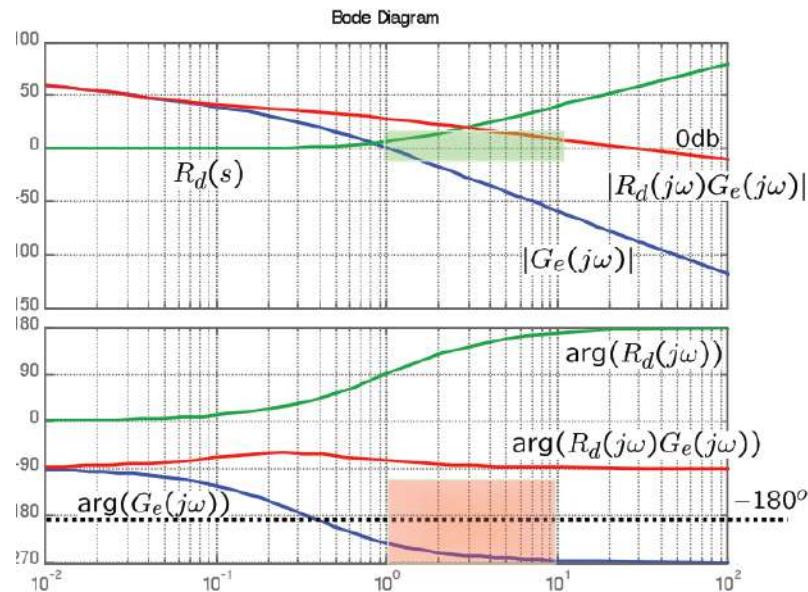


In quest'ultimo caso, in cui il regolatore complessivo si presenta come  $R(s) = \mu \frac{1+\tau_z s}{s}$ , si parla di **regolatore proporzionale - integrale**.

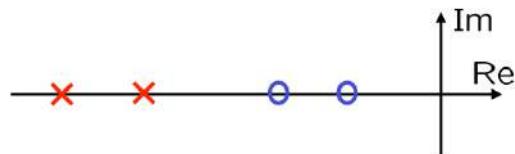
#### Secondo caso: Anticipo di Fase Necessario $> 90^\circ$ e $< 180^\circ$

È questo il caso in cui si devono inserire *due* zeri, quando l'anticipo di fase necessario è compreso fra  $90^\circ$  e  $180^\circ$  (fattualmente, da  $70^\circ$ - $75^\circ$  in poi);

- Pro: ulteriore miglioramento del margine di fase.
- Contro: il rischio che la pulsazione di attraversamento finisca al di fuori dell'intervallo di frequenze ammesso aumenta.



$$R_d(s) = \frac{1 + \tau_b s}{1 + \alpha_b \tau_b s} \cdot \frac{1 + \tau_{b2} s}{1 + \alpha_{b2} \tau_{b2} s}$$

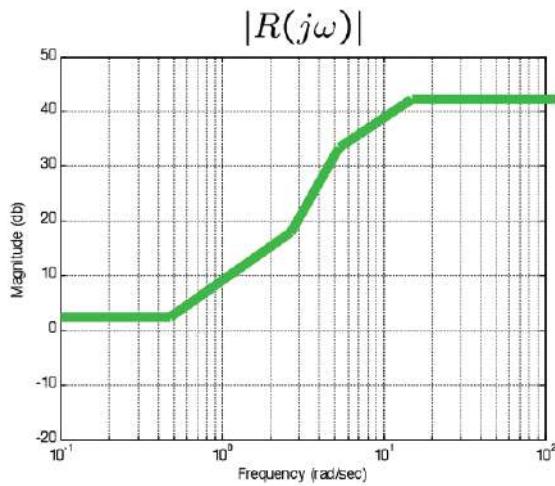


In entrambi i casi si ha per ipotesi  $0 < \alpha_b < 1$ ; il progetto di questa rete può essere ricondotto al caso di *due reti anticipatrici*.

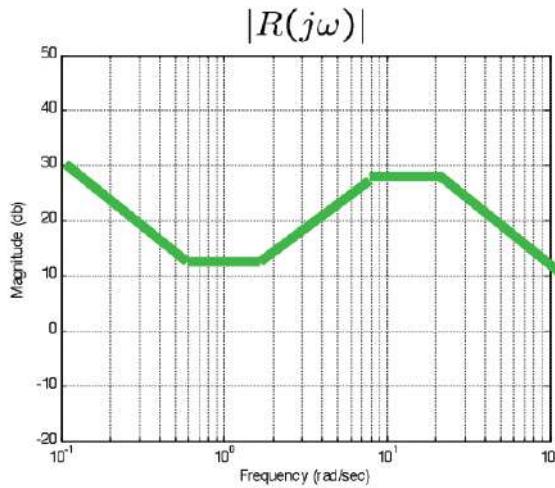
La fisica realizzabilità del regolatore può essere ottenuta mediante l'inserimento di poli ad alta frequenza (in relazione al numero di zeri di  $R_d$ ), ad una frequenza di intervento sufficientemente elevata, in modo da non alterare le caratteristiche nell'intorno della pulsazione di attraversamento.

Nel secondo caso, il regolatore complessivo può avere due andamenti differenti, a seconda del percorso scelto per il soddisfacimento di specifiche statiche:

- Le specifiche statiche a bassa frequenza sono state soddisfatte tramite l'utilizzo del guadagno statico, e l'antico di fase necessario era compreso fra  $90^\circ$  e  $180^\circ$ .



- Le specifiche statiche a bassa frequenza sono state soddisfatte tramite l'inserimento di un polo nell'origine, e l'anticipo di fase necessario era compreso fra  $90^\circ$  e  $180^\circ$ . Risulta che il secondo polo, inserito tramite il regolatore dinamico, è ridondante (non necessario per fisica realizzabilità), ed è possibile eliminarlo.



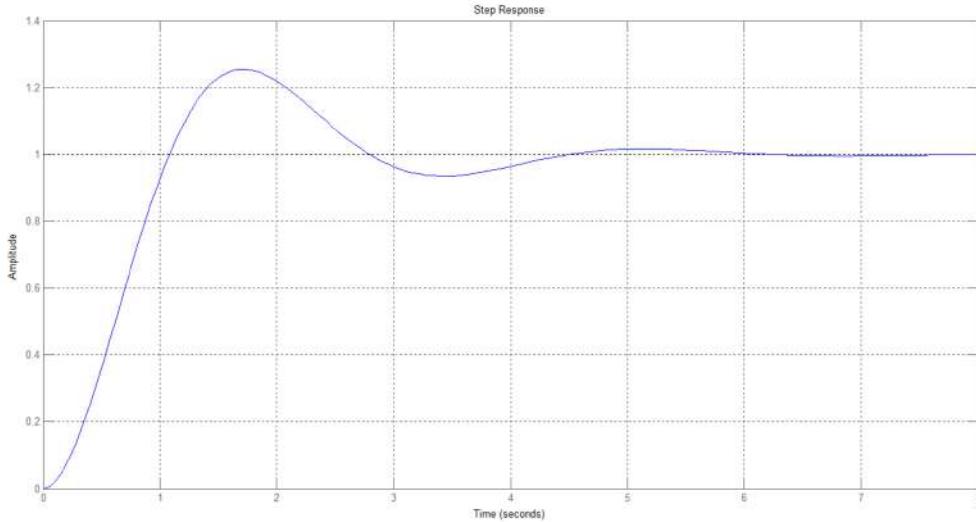
A prescindere dall'anticipo di fase necessario, una volta imposto il regolatore dinamico si possono verificare due casi:

- La pulsazione di attraversamento si trova all'interno dell'intervallo desiderato. Il progetto può considerarsi terminato (escluso l'inserimento di poli ad alta frequenza).
- La pulsazione di attraversamento non si trova all'interno dell'intervallo desiderato. Proseguiamo lo studio di questo caso in una nuova sezione.

# Esercitazione 7

## Primo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



1.  $G(s) = \frac{1.44}{s^2+1.7s+1.44}$
2.  $G(s) = \frac{25}{s^2+4s+25}$
3.  $G(s) = \frac{0.325}{(s+0.1)(s^2+1.6s+3.25)}$
4.  $G(s) = \frac{4}{(s^2+1.6s+4)}$

Si verifica immediatamente che tutte le funzioni date hanno guadagno statico unitario, e di conseguenza questo parametro non ci permette di «scartarne» nessuna.

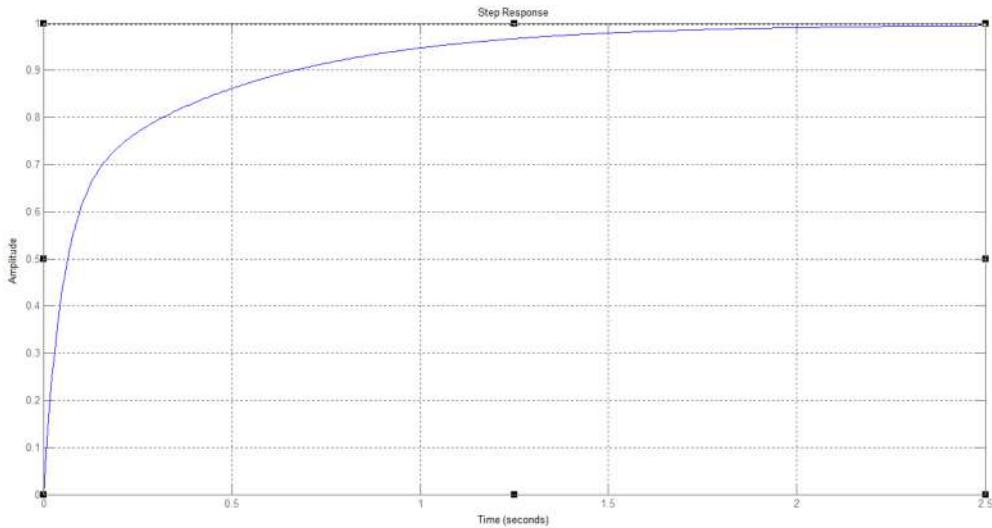
Passiamo quindi al calcolo dei tempi di assestamento, che ci permettono di scartare senza dubbio la seconda (perché troppo veloce) e la terza  $G(s)$  (perché troppo lenta)<sup>107</sup>. La prima e la quarta hanno tempo di assestamento simile; per discriminare fra le due è possibile studiare il coefficiente di smorzamento: il plot che viene mostrato indica infatti che la coppia di poli complessi coniugati che lo genera è poco smorzata.

Risulta che per la prima funzione,  $\delta \approx 0.7$ , mentre per la quarta  $\delta \approx 0.4$ : chiaramente lo smorzamento della prima è maggiore di quello della quarta, il che ci induce a pensare che la  $G(s)$  corrispondente al grafico sia la quarta fra quelle proposte.

<sup>107</sup>Inoltre la terza funzione ha grado relativo pari a 3, mentre il grafico della consegna assomiglia di più a quello di una funzione con grado relativo inferiore.

## Secondo Esercizio

Sia data la curva mostrata in figura, e quattro funzioni di trasferimento. Si indichi quale delle quattro corrisponde alla curva e perché.



1.  $G(s) = \frac{13.3(s+3)}{(s+2)(s+20)}$
2.  $G(s) = \frac{27(s+2)}{(s+3)(s+18)}$
3.  $G(s) = \frac{66.7(s+15)}{(s+10)(s+100)}$
4.  $G(s) = \frac{8}{(s+8)}$

Anche in questo caso, verifichiamo facilmente che il guadagno statico di tutte e quattro le funzioni è pari o approssimabile a 1; similmente, il grado relativo è sempre unitario.

Analizzando il tempo di assestamento (per ciascuna funzione si identifica il polo dominante), è possibile affermare che la funzione corrispondente a quella plottata è la prima, per incompatibilità dei risultati rimanenti. Risulta infatti:

1.  $T_{ass} = \frac{4.6}{2} = 2.3$
2.  $T_{ass} = \frac{4.6}{3} = 1.53$
3.  $T_{ass} = \frac{4.6}{10} = 0.46$
4.  $T_{ass} = \frac{4.6}{8} = 0.57$

## Terzo Esercizio

```

%%%%% ESERCITAZIONE 19/9/2015 %%%%%%
s=tf('s')

%% ESERCIZI SU REGOLATORI STATICI
% (esercizi 1, 3, 8, 9)

% CASO 1
% funzione di trasferimento
G=0.24/(s+0.2)^2/(s+2)
% guadagno statico di G
k=dcgain(G)

% diagramma di bode
figure(1)
bode(G)
grid on

% SPECIFICHE STATICHE
% - errore a regime nullo a fronte di ingressi a gradino

% REGOLATORE STATICO
% l'unica specifica da rispettare è quella sull'errore a regime.
% La funzione di trasferimento tra riferimento ed errore è la funzione di
% sensitività  $S(s)=1/(1+L(s))$ , che dunque deve dare guadagno pari a
% (-infinito), in decibel, ad  $w=0$  (il gradino è una funzione costante).
% La  $S(s)$  per basse frequenze è approssimabile, in modulo, a  $1/|L(s)|$ 
% --> è necessario imporre una funzione d'anello  $L(s)$  con guadagno
% infinito, sempre in decibel, a pulsazione nulla
% --> nella  $L(s)$  deve essere presente almeno un polo nell'origine.
% Nella  $G(s)$  non sono presenti poli nell'origine, quindi è necessario
% inserirne uno nel regolatore
Rs=1/s

% funzione di trasferimento estesa
Ge=G*Rs

% diagrammi di bode della funzione Ge ottenuta
figure(2)
margin(Ge)
grid on

% SPECIFICHE DINAMICHE
% - pulsazione di attraversamento wc pari a 0.1 rad/s
% - margine di fase di almeno 60°

% REGOLATORE DINAMICO
% la fase di  $Ge(s)$  in  $wc=0.1$  è di  $-146^\circ$ , quindi il margine di fase vale

```

```

% Mf=180-146=34, contro i 60° desiderati
% --> è necessario un anticipo di fase di 27° alla pulsazione wc=0.1 rad/s
% è necessario abbassare il guadagno di Ge(s), dato che ora taglia troppo
% avanti, a 0.5 rad/s
% --> sono necessari un anticipo di fase e un guadagno
% - l'anticipo di fase può essere dato da uno ZERO...
% - il guadagno mu del regolatore è ancora un parametro libero...

% CASO 2
% funzione di trasferimento
G=10/(s+2)/(s+3)
% guadagno statico di G
k=dcgain(G)

% diagramma di bode
figure(3)
bode(G)
grid on

% SPECIFICHE STATICHE
% - errore a regime pari a 0.5 a fronte di disturbo sull'uscita d(t)=3*sin(0.1*t)

% REGOLATORE STATICO
% l'unica specifica da rispettare è quella sull'errore a regime.
% La funzione di trasferimento tra disturbo d ed errore è la funzione di
% sensitività  $S(s)=1/(1+L(s))$ , che dunque deve garantire una certa attenuazione
% ad  $w=0.1$  rad/s.
% La  $S(s)$  per basse frequenze è approssimabile, in modulo, a  $1/|L(s)|$ 
% --> è necessario impostare una funzione d'anello  $L(s)$  con un guadagno
% sufficientemente elevato alla pulsazione del disturbo
% calcolo il guadagno modulo di  $G(jw)$  in  $w=0.1$  rad/s in scala lineare
k=10^(4.42/20)
%  $1/(mu*k) < 0.5 \rightarrow mu = 1/(0.5*k)$ 
mu=6/k
Rs=mu

% funzione di trasferimento estesa
Ge=G*Rs

% diagrammi di bode della funzione Ge ottenuta
figure(4)
margin(Ge)
grid on

% SPECIFICHE DINAMICHE
% - pulsazione di attraversamento wc pari a 9 rad/s
% - margine di fase di almeno 50°

```

```

% REGOLATORE DINAMICO
% la fase di Ge(s) in wc=9 è di -149°, quindi il margine di fase vale
% Mf=180-149=31, contro i 50° desiderati
% --> alla pulsazione wc la fase non è sufficiente rispetto alle specifiche
% --> SCENARIO B
% --> l'anticipo di fase può essere dato da uno ZERO...
% --> RETE ANTICIPATRICE

% CASO 3
% funzione di trasferimento
G=1440/(s+2)/(s+3)/(s+40)
% guadagno statico di G
k=dcgain(G)

% diagramma di bode
figure(5)
bode(G)
grid on

% SPECIFICHE STATICHE
% - errore a regime minore del 10% a fronte di ingressi a gradino

% REGOLATORE STATICO
% l'unica specifica da rispettare è quella sull'errore a regime.
% La funzione di trasferimento tra riferimento ed errore è la funzione di
% sensitività  $S(s)=1/(1+L(s))$ , che dunque deve garantire una certa attenuazione
% ad w=0 (il gradino è una funzione costante).
% La S(s) per basse frequenze è approssimabile, in modulo, a  $1/|L(s)|$ 
% --> è necessario impostare una funzione d'anello L(s) con un guadagno
% sufficientemente elevato, sempre in decibel, a pulsazione nulla
%  $1/(1+\mu*k)<0.1 \rightarrow 1+\mu*k>10$ 
mu=9/k
Rs=mu

% funzione di trasferimento estesa
Ge=G*Rs

% diagrammi di bode della funzione Ge ottenuta
figure(4)
margin(Ge)
grid on

% SPECIFICHE DINAMICHE
% - pulsazione di attraversamento wc pari a 9 rad/s
% - margine di fase di almeno 30°

% REGOLATORE DINAMICO
% la fase di Ge(s) in wc=9 è di -160°, quindi il margine di fase vale

```

```

% Mf=180-160=20, contro i 30° desiderati
% - l'anticipo di fase può essere dato da uno ZERO...
% --> è necessario procedere diversamente dal caso 1

% CASO 4
% funzione di trasferimento
G=0.0336/(s+0.1)/(s+0.3)/(s+2)
% guadagno statico di G
k=dcgain(G)

% diagramma di bode
figure(5)
bode(G)
grid on

% SPECIFICHE STATICHE
% - errore a regime minore del 10% a fronte di ingressi a gradino

% REGOLATORE STATICO
% l'unica specifica da rispettare è quella sull'errore a regime.
% La funzione di trasferimento tra riferimento ed errore è la funzione di
% sensitività  $S(s)=1/(1+L(s))$ , che dunque deve garantire una certa attenuazione
% ad  $w=0$  (il gradino è una funzione costante).
% La  $S(s)$  per basse frequenze è approssimabile, in modulo, a  $1/|L(s)|$ 
% --> è necessario imporre una funzione d'anello  $L(s)$  con un guadagno
% sufficientemente elevato, sempre in decibel, a pulsazione nulla
%  $1/(1+\mu*k)<0.1 \rightarrow 1+\mu*k>10$ 
mu=9/k
Rs=mu

% funzione di trasferimento estesa
Ge=G*Rs

% diagrammi di bode della funzione Ge ottenuta
figure(4)
margin(Ge)
grid on

% SPECIFICHE DINAMICHE
% - pulsazione di attraversamento  $w_c$  pari a 0.2 rad/s
% - margine di fase di almeno 55°

% REGOLATORE DINAMICO
% la fase di  $Ge(s)$  in  $w_c=0.2$  è di -104°, quindi il margine di fase vale
%  $Mf=180-104=76$ , contro i 55° desiderati
% il guadagno di  $Ge(s)$  in  $w_c=0.2$  rad/s è di 10 decibel
% - è necessaria un'attenuazione nel modulo di  $Ge(s)$ 
% - alla pulsazione desiderata il margine di fase è sufficiente

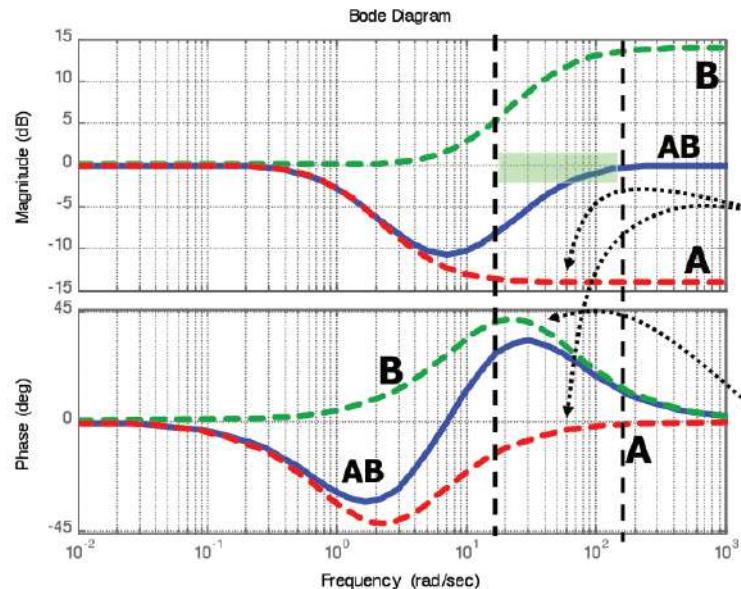
```

### Terzo caso: Ritorno allo Scenario A

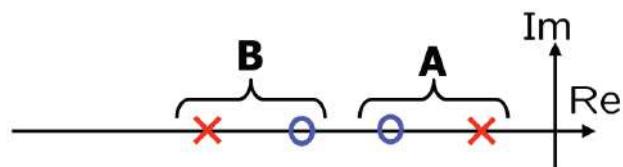
Ci si trova a questo punto in uno *scenario A* in cui il margine di fase, all'interno dell'intervallo di pulsazioni ammesse, ha un valore sufficientemente elevato. Si tratta a questo punto di agire sui moduli senza modificare la fase. Questo tipo di rete viene definito *rete ritardo-anticipo*. Riprendendo la casistica vista in precedenza, potrebbe essere necessario

- Modificare il guadagno statico  $\mu_d$  nel caso  $\mu_S$  sia un vincolo non utilizzato;
- Aggiungere un regolatore  $R_d(s) = \frac{1+\alpha_a\tau_{as}}{1+\tau_{as}}$ ,  $0 < \alpha_a < 1$  in caso contrario. Allora la struttura completa del regolatore risulta  $R_d(s) = \frac{1+\tau_b s}{1+\alpha_b\tau_b s} \cdot \frac{1+\alpha_a\tau_{as}}{1+\tau_{as}}$ , o alternativamente  $R_d(s) = \frac{1+\tau_b s}{1+\alpha_b\tau_b s} \cdot \frac{1+\tau_{b2}s}{1+\alpha_{b2}\tau_{b2}s} \cdot \frac{1+\alpha_a\tau_{as}}{1+\tau_{as}}$ .

Il confronto tra scenario A e scenario B permette di comprendere meglio com'è fatto il regolatore e qual'è la sua funzione in questo caso.



La mappa poli - zeri del regolatore complessivo si presenta così:

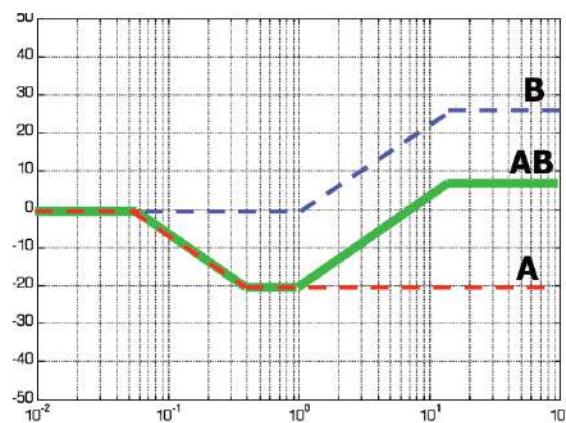


Nel complesso si possono fare le seguenti osservazioni: il regolatore presenta un andamento di tipo passa - alto. Questo ha come conseguenza che la funzione di sensitività del controllo amplifica ad alte frequenze, cosa che a sua volta impone «controlli nervosi».

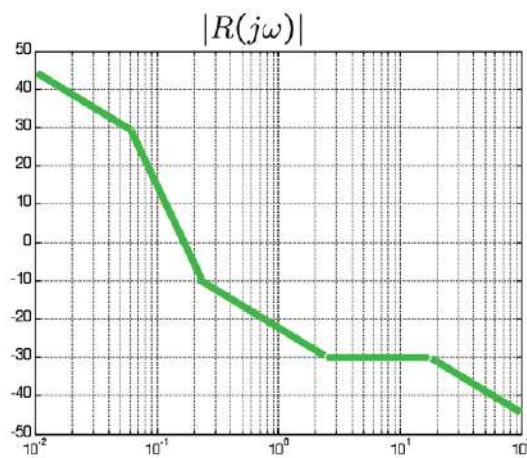
Al fine di minimizzare questo aspetto è possibile calibrare l'intervento del polo a frequenze elevate, pur stando attenti a non esagerare (o l'amplificazione introdotta dallo zero sarà eccessiva).

In questo terzo e ultimo caso, il regolatore complessivo può avere almeno due andamenti differenti, a seconda del percorso scelto per il soddisfacimento di specifiche statiche:

- Le specifiche statiche a bassa frequenza sono state soddisfatte tramite l'utilizzo del guadagno statico, l'anticipo di fase necessario era minore di  $90^\circ$ , ma era necessario riportare la pulsazione di attraversamento all'interno dell'intervallo.



- Le specifiche statiche a bassa frequenza sono state soddisfatte tramite l'inserimento di un polo nell'origine, l'anticipo di fase necessario era minore di  $90^\circ$ , ma era necessario riportare la pulsazione di attraversamento all'interno dell'intervallo. Risulta che il secondo polo, inserito tramite il regolatore dinamico, è ridondante (non necessario per fisica realizzabilità), ed è possibile eliminarlo.



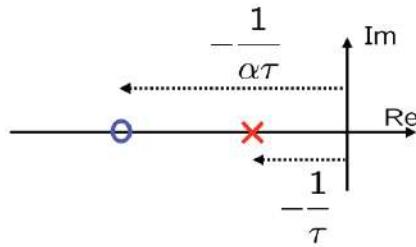
In quest'ultimo caso, in cui il regolatore complessivo si presenta come  $R(s) = \mu \frac{1+\tau_z s}{1+\alpha \tau_{z2} s}$ , si parla di **regolatore proporzionale - integrale - derivativo**. Il nome è dovuto alla proporzionalità della variabile  $u(t)$  con  $\mu$ , con la derivata e con l'integrale dell'errore  $e(t)$ .

## 9.3 Progetto di Reti Correttive

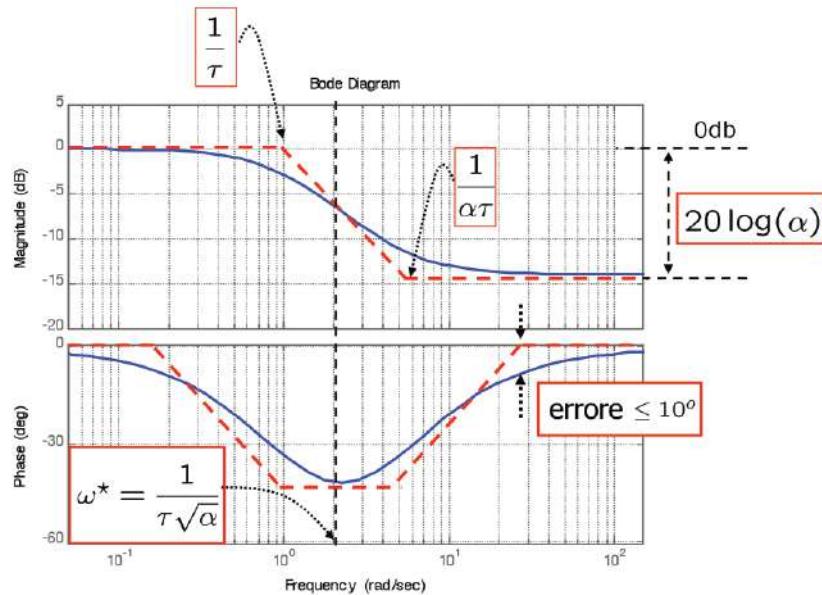
Esaminiamo in dettaglio come realizzare le tre tipologie di reti sopra menzionate: reti ritardatrici, reti anticipatrici, reti ritardo - anticipo. Si rimanda al paragrafo 9.1.2.1 a pagina 185 per quanto diremo nei paragrafi (9.3.1.4) e (9.3.2.4).

### 9.3.1 Reti Ritardatrici

Ci troviamo in questo caso in quello che abbiamo definito *scenario A*, con un regolatore del tipo  $R(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . La configurazione poli-zeri di questo regolatore è la seguente,

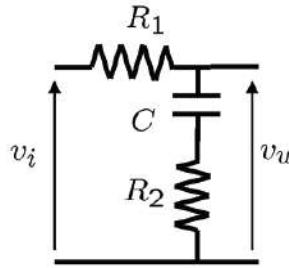


dove chiaramente risulta che la costante di tempo dello zero è minore di quella del polo. Se si suppone di *non* avere il guadagno libero, l'attenuazione che introduce il polo vale  $20 \log(\alpha)$ : più  $\alpha$  è piccolo, più la pulsazione di intervento dello zero si allontana, aumentando l'attenuazione introdotta. D'altra parte, in termini di fase, si ottiene in alta frequenza attenuazione senza sfasamento. Si indica con  $\omega^* = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$  la *pulsazione di massimo sfasamento*.



Per una precisa spiegazione del significato dei parametri si rimanda a quella fatta a pagina 190 quando le reti ritardatrici sono state introdotte per la prima volta.

Incidentalmente, si ricorda che una rete elettrica del tipo presentato in figura costituisce una rete ritardatrice con  $\tau = C(R_1 + R_2)$  ed  $\alpha = \frac{R_2}{R_2 + R_1}$ .



### 9.3.1.1 Tuning pratico di una Rete Ritardatrice

Si prenda come ipotesi quella di trovarsi in uno scenario A: per prima cosa, si legge il modulo della  $G_e$  nella pulsazione di attraversamento desiderata, verificando la necessità di attenuazione. Si impone quindi  $-|G_e(j\omega_C^*)|_{dB} = 20 \log(\alpha)$ , in modo da trovare praticamente il valore del parametro  $\alpha$ .

Poiché si vuole beneficiare dell'attenuazione dei moduli senza variazione nelle fasi si dovrà impostare l'attraversamento in una pulsazione successiva a  $\omega_b$  - che è la pulsazione dove termina lo sfasamento indotto dallo zero e la fase torna com'era prima dell'intervento della rete ritardatrice. Per motivi di errore e di approssimazione, si può considerare approssimativamente  $\omega_b$  collocata una decade dopo la pulsazione di intervento del polo, e la sua posizione è individuata da  $\omega_b = \frac{4.81}{\alpha\tau}$ <sup>108</sup>. Fatte queste considerazioni, è possibile calcolare  $\tau$  ponendo  $\alpha\tau = \frac{10}{\omega_C^*}$ .

In generale, compatibilmente con le specifiche di progetto, è sempre meglio posizionare le pulsazioni di attraversamento della rete ad alte frequenze, onde evitare uno zero molto vicino all'asse Immaginario.

### 9.3.1.2 Formule di Inversione

L'obiettivo è identificare delle formule per il progetto dei gradi di libertà  $\alpha$ ,  $\tau$  al fine di assegnare una certa pulsazione di attraversamento e un certo margine di fase desiderati.

Il contesto della rete ritardatrice è quello di una rete che attenua e sfasa in ritardo: per questo motivo non è possibile impostare  $\omega_C^*$  strettamente maggiore della pulsazione di attraversamento del sistema esteso (sarebbe una contraddizione in quanto in tal caso sarebbe necessaria una amplificazione). Per lo stesso motivo, non si può desiderare al termine dell'intervento dello zero una fase maggiore o uguale di quella del sistema esteso, in quanto il sistema sfasa (anche se di poco) in ritardo; la fase dopo l'imposizione della rete ritardatrice sarà quindi leggermente più bassa di prima.

Si vogliono trovare  $\alpha$ ,  $\tau$  al fine di progettare una rete che dia un'attenuazione  $M^*$  alla pulsazione  $\omega_C^*$ , con  $0 < M^* < 1$ , e uno sfasamento  $\phi^*$ , con  $-90^\circ < \phi^* < 0^\circ$ ; deve valere inoltre il vincolo  $\alpha > 0 \Leftrightarrow M^* < \cos(\phi^*)$ . Le formule<sup>109</sup> sono:

$$\tau = \frac{\cos(\phi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_C^* \cdot \sin(\phi^*)} \quad \alpha\tau = \frac{M^* - \cos(\phi^*)}{\omega_C^* \cdot \sin(\phi^*)}$$

<sup>108</sup>Si fa notare che  $\frac{1}{\alpha\tau}$  è la pulsazione di intervento dello zero.

<sup>109</sup>Si può trovare una dimostrazione più precisa nelle slides del corso, Parte 10, slide 11.

Allora possiamo definire gli step per imporre il margine di fase desiderato:

1. Ricavare  $|G_e(j\omega_C^*)|$ ,  $\arg \{G_e(j\omega_C^*)\}$  tramite la lettura del diagramma di Bode;

2. Calcolare:

$$(a) M^* = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_C^*)|_{dB}}{20}}$$

$$(b) \phi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg \{G_e(j\omega_C^*)\}$$

3. Verificare che siano soddisfatti i vincoli

$$(a) M^* < 1, \text{ ovvero } |G_e(j\omega_C^*)|_{dB} > 0$$

$$(b) -90^\circ < \phi^* < 0^\circ, \text{ ovvero } \arg \{G_e(j\omega_C^*)\} > -180^\circ + M_f^*$$

$$(c) M^* < \cos(\phi^*)$$

4. Calcolare  $\alpha$ ,  $\tau$  mediante le formule di inversione date.

LEZIONE 29

DATA: 25/11/2015

### 9.3.1.3 Procedura Matlab

A monte del codice, si riporta la documentazione Matlab che descrive il comportamento di un paio di funzioni utilizzate all'interno del programma.

*[x,y]=ginput(n): Graphical input from mouse or cursor*

«ginput raises crosshairs in the current axes to for you to identify points in the figure, positioning the cursor with the mouse. The figure must have focus before ginput can receive input. If it has no axes, one is created upon the first click or keypress.

*[x,y] = ginput(n) enables you to identify n points from the current axes and returns their x- and y-coordinates in the x and y column vectors. Press the Return key to terminate the input before entering n points. Specify n as a positive integer.»*

*disp(X): Display value of variable*

«*disp(X) displays the value of variable X without printing the variable name. Another way to display a variable is to type its name, but this displays a leading "X =", which is not always ideal.»*

Ad esempio, definite

```
A = [15 150];
S = 'Hello World.';
```

*disp(A)* restituisce

e  $disp(S)$  restituisce

Hello World.

Ulteriori informazioni sulle funzioni usate possono essere reperite a pagina 98, dove sono state introdotte per la prima volta.

```
% Funzione ProgettaRR: Data in ingresso la funzione di trasferimento
% del sistema non compensato, viene implementata la procedura di sintesi
% di una rete ritardatrice mediante diagrammi di Bode con imposizione
% del margine di fase e della frequenza di attraversamento
function [alpha,tau]=ProgettaRR(Num,Den)

% Tracciamo il diagramma di bode del sistema non compensato
bode(Num,Den);
grid;
% Richiesta di evidenziare con il mouse un punto sul diagramma delle fasi
% che identifica la posizione desiderata del diagramma delle fasi di L(s)
% in corrispondenza della pulsazione di attraversamento desiderata (la coordinata x
% del punto selezionato rappresenta la w_c desiderata e la coordinata y +180° il
% valore del margine di fase desiderato)
disp('Individuare la wc e il margine di fase desiderato indicando il punto di passaggio
    desiderato nel diagramma delle fasi')
[Wcd,PAd]=ginput(1);
% Stampiamo sul video i valori desiderati
disp('Margine di fase desiderato: ')
MFd=180+PAd
disp('Pulsazione di attraversamento desiderata: ')
Wcd
% Calcolo dell'attenuazione e del ritardo di fase (espresso in rad) da
% introdurre mediante la rete

% Troviamo il valore del modulo e dell'argomento del sistema esteso non
% compensato alla frequenza di attraversamento
[M,P,W]=bode(Num,Den);
% Cerchiamo l'indice del vettore più vicino alla pulsazione di attraversamento desiderata e la
% memorizziamo in i
[V,i]=min(abs(W-Wcd));
% Si cercano ora modulo e argomento in quella pulsazione
GeWcd=M(i);
ArgGeWcd=P(i);
% Modulo e argomento finali
Pd=-180+MFd-ArgGeWcd;
Md=1/GeWcd;
% Conversione in radianti di Pd
Pd=Pd*pi/180;
```

```

% Check sulla realizzabilità della rete
if (Md>1 || Pd>0 || cos(Pd)<Md)
    disp('Attenzione: sintesi non possibile con una rete ritardatrice');
    return;
end
% Calcolo dell'alpha e tau della rete sulla base delle formule di inversione
tau=(cos(Pd)-1/Md)/(Wcd*sin(Pd));
alpha=(Md-cos(Pd))/(Wcd*sin(Pd))/tau;
% Tracciamento del diagramma di bode della rete e del sistema compensato
hold on
bode([alpha*tau,1],[tau,1]);
bode(conv([alpha*tau,1],Num),conv([tau,1],Den));
hold off

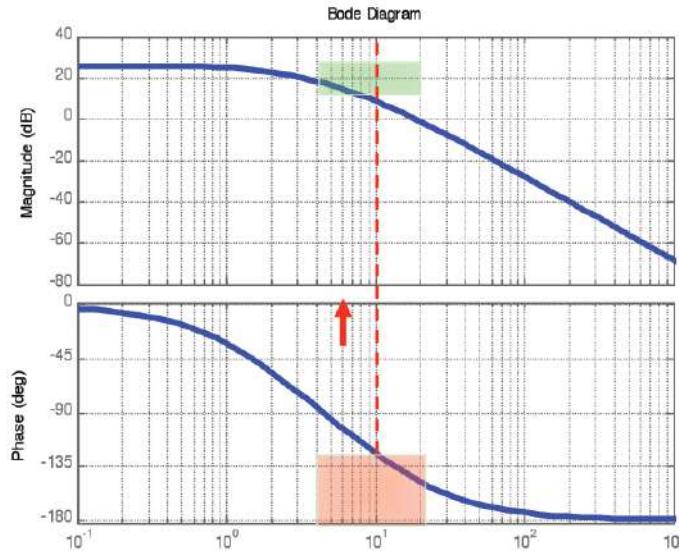
```

### 9.3.1.4 Sovraelongazione e Code di Assestamento: Progetto per Cancellazione

Si porta ora un esempio di applicazione delle formule suddette, nel quale si esplora anche la possibilità di creare, tramite l'imposizione del regolatore dinamico, delle code di assestamento nella risposta del sistema in retroazione.

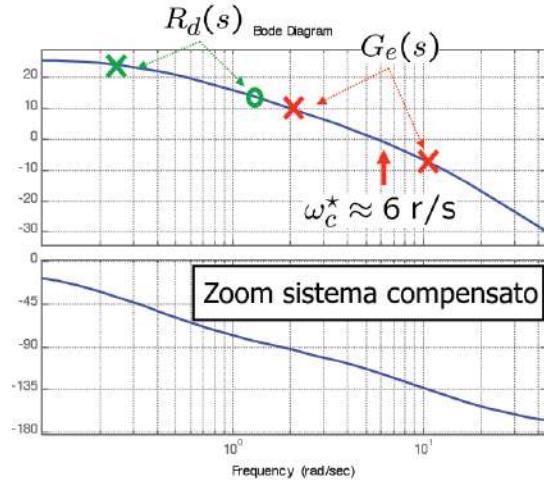
Si supponga di essere in uno scenario di tipologia A, dove è quindi nota la  $G_e = \frac{20}{(1+0.5s)(1+0.1s)}$ ; le specifiche dinamiche da applicare sono le seguenti:

1. Pulsazione di attraversamento  $4 \leq \omega_C^* \leq 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
2. Margine di fase  $M_f^* = 60^\circ$



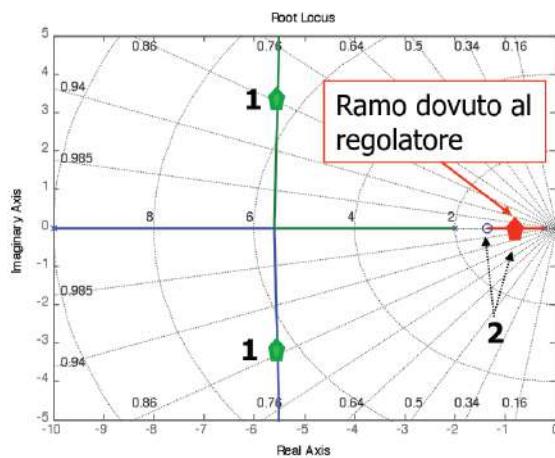
Una possibile scelta per la pulsazione di attraversamento è  $\omega_C^* \approx 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ; per quanto detto a pagina 172, il sistema in retro avrà quindi una coppia di poli complessi coniugati dominanti con  $\delta = 0.6$  e  $\omega_n = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (secondo un procedimento di «traduzione» delle specifiche dinamiche in vincoli nel dominio della frequenza).

Si ponga particolare attenzione ai passaggi seguenti. Poiché lo scenario di una rete ritardatrice è quello in cui è necessaria una attenuazione dei moduli, senza essere affetti da sfasamento, diventa necessario porre il polo e lo zero del regolatore dinamico *prima* della pulsazione di attraversamento desiderata, ed in particolare ad una pulsazione per cui, in  $\omega_C^*$ , lo sfasamento residuo sia molto piccolo.



In formule matematiche, questo significa che  $\frac{1}{\alpha\tau} < \omega_C^*$ , e il polo sarà conseguentemente collocato ancor più vicino all'asse Immaginario. Poiché gli zeri della  $L(s)$  sono anche zeri della  $F(s)$ , questo zero in bassa frequenza entrerà a far parte del sistema retroazionato, portando con se due possibili conseguenze:

1. Possibile sovraelongazione da zero.
2. Considerando il luogo delle radici, un polo del sistema in retroazione sarà potenzialmente attratto verso lo zero così posizionato, finendo in «quasi cancellazione». Questo polo (della  $F(s)$ ) non è previsto nella specifica, e causa una coda di assestamento nella risposta del sistema.

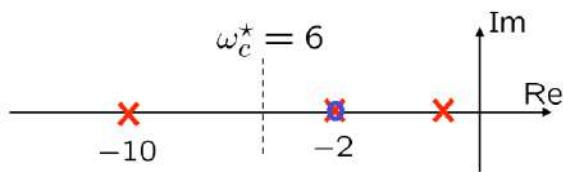


È importante notare che queste situazioni si verificano spesso quando si cerca, all'interno del progetto del regolatore, di guadagnare quanto più margine di fase possibile, magari andando oltre la specifica richiesta.

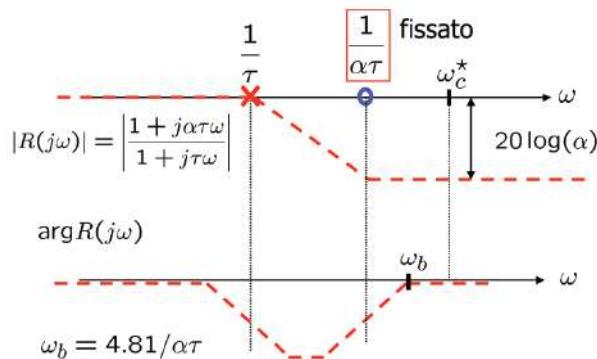
## Algoritmo di Progetto per Cancellazione

Oltre ad evitare di mettere poli e zeri a frequenze troppo basse per guadagnare margine di fase, è possibile seguire una seconda strada, quella del *progetto per cancellazione*, per eliminare quanto più possibile l'eventualità di sovraelongazioni o code di assestamento. In ogni caso, è necessario verificare caso per caso quale strategia sia meglio applicare, in quanto non esiste un procedimento assoluto.

Secondo questo metodo, si progetta il regolatore dinamico in modo che lo zero si trovi in cancellazione con uno dei poli del sistema controllato. In particolare, è conveniente applicare questa soluzione quando uno dei poli del plant si trova nell'intorno della pulsazione in cui avremmo voluto applicare lo zero: risulta così che i due sono in cancellazione (o in quasi cancellazione nel caso il polo non sia noto con certezza). In questo modo, si ha l'effetto voluto da parte del regolatore, ma lo zero non entra a far parte del sistema in retroazione, in quanto «cancellato» all'interno della  $L(s)$ .



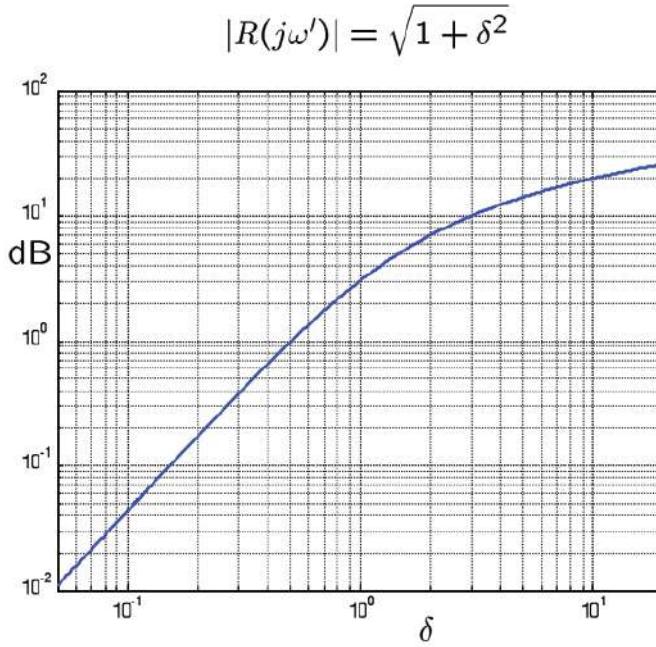
Per completare la rete ritardatrice rimane da posizionare il polo. Come è facile intuire, si è in questo caso obbligati a rispettare l'imposizione dello zero (di cui al passo precedente), che determina la perdita di un grado di libertà. Non è possibile scegliere sia la pulsazione di attraversamento che lo sfasamento, oltre alla scelta del  $\tau$  (posizione del polo): purtroppo bisognerà accontentarsi di avere specifiche un po' più «lasche» imponendo solo uno dei due parametri (la pulsazione di attraversamento).



Presentiamo di seguito un algoritmo che si può applicare per realizzare questo tipo di progetto.<sup>110</sup>

<sup>110</sup>In particolare ci si riferisce a quello che sulle slides del corso (pacchetto 10, slide numero 26) viene definito «Approccio alternativo». Il procedimento trattato sulle slides precedenti non viene preso in considerazione in quanto non trattato a lezione.

Definita la pulsazione di attraversamento dello zero<sup>111</sup>  $\omega_b = \frac{1}{\alpha\tau}$ , è possibile introdurre il coefficiente  $\delta$ <sup>112</sup>: come vedremo anche nel progetto di reti anticipatrici (a pagina 218), questo coefficiente permette di conoscere, a cavallo della pulsazione di rottura  $\omega_b$ , le caratteristiche di  $1 + \tau s$  indipendentemente da dove lo zero è collocato (come caratteristiche si intendono chiaramente amplificazione e sfasamento, in funzione di  $\delta$ ).



**Figura 56:** Livello di Amplificazione

Ad esempio, in figura (56), considerando  $\delta = 1$  si legge che l'amplificazione ottenuta è pari a 3dB: si noti quindi come è possibile conoscere queste caratteristiche indipendentemente dal grafico effettivo della  $L$  e dalla pulsazione di rottura.

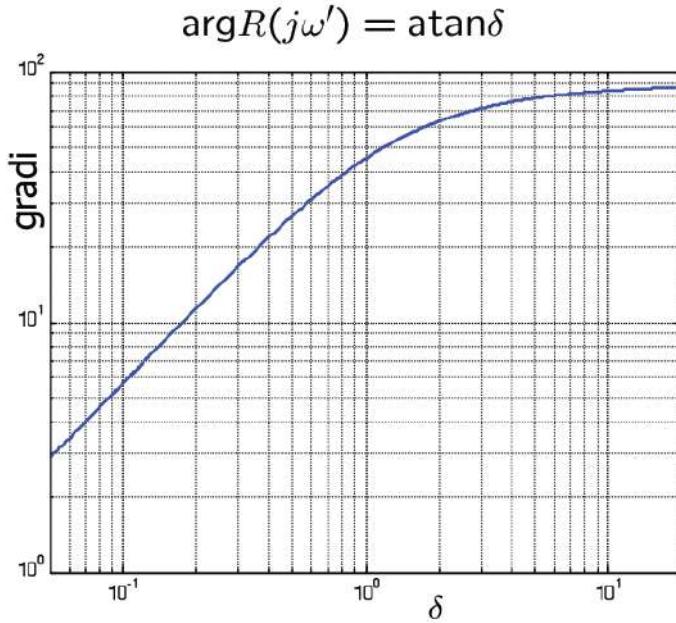
Analogamente, osservando la figura (57), è possibile scegliere un  $\delta$  e conoscere lo sfasamento associato nell'intorno della pulsazione di rottura.

Passiamo finalmente ai passi dell'algoritmo di progettazione da implementare:

1. Si parte con lo zero fissato in cancellazione:  $\tau_z = \alpha\tau$  è noto, ed è possibile quindi determinare lo sfasamento  $\phi_z > 0$  e l'amplificazione  $M_z > 0$  ottenuti in  $\omega_C^*$  (la pulsazione di attraversamento della  $L(s)$  è fissata) mediante i grafici [Entità Sfasamento](#) e [Livello di Amplificazione](#). Si considera  $\delta = \frac{\omega_C^*}{\omega_b}$ , con  $\omega_b = \frac{1}{\tau_z} = \frac{1}{\alpha\tau}$ .
2. Calcolare l'attenuazione  $M_p$  desiderata per il polo, affinché la pulsazione di attraversamento effettiva coincida con  $\omega_C^*$ , attraverso la formula  $M_p = -[|G_e(j\omega_C^*)|_{dB} + M_z]$ . Considerando poi il grafico [Livello di Amplificazione](#) cambiato di segno, posso risalire

<sup>111</sup>È possibile utilizzare i diagrammi in seguito anche per un polo: in quel caso è necessario interpretarli con il segno «-» nell'asse delle ordinate.

<sup>112</sup>NOTA BENE: questa lettera è stata scelta solo per omogeneità con le slides del corso. Per questo motivo si vuole sottolineare che NON ci si riferisce al coefficiente di smorzamento (finora, e nel seguito, indicato con quella lettera) ma ad una semplice costante di proporzionalità.



**Figura 57:** Entità Sfasamento

ad un valore di  $\delta$  attraverso il valore di  $M_p$  trovato, preso sull'asse delle ordinate. Si indica con  $\delta^*$  questo valore.

3. Preso quindi  $\delta^*$ , cioè il  $\delta$  che garantisce l'attenuazione  $M_p$  e l'attraversamento  $\omega_C^*$ , lo si sostituisce nella formula  $\delta^* = \frac{\omega_C^*}{\omega_b}$  in modo tale da ricavare  $\omega_b$ , pulsazione di taglio del polo.
4. Contemporaneamente, si verifica se  $\delta^*$  permette di ottenere il margine di fase necessario secondo la specifica. Per fare ciò, si calcola  $\phi_p(\delta^*)$  attraverso il grafico **Entità Sfasamento**, verificando che valga la disequazione  $180^\circ + \arg\{G_e(j\omega_C^*)\} + \phi_Z + \phi_p(\delta^*) \geq M_f^*$ .

### 9.3.1.5 Esempio di Progetto per Cancellazione

Si riprende, cercando stavolta di svolgerlo, l'esempio con cui avevamo introdotto la problematica delle sovraelongazioni e code di assestamento.

È data una  $G_e = \frac{20}{(1+0.5s)(1+0.1s)}$ , con specifiche dinamiche

1. Pulsazione di attraversamento  $4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \leq \omega_C^* \leq 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
2. Margine di fase  $M_f^* = 60^\circ$

I poli della  $G_e$  sono collocati in  $2\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e  $10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ : si prova, come prima scelta, a cancellare il polo più in bassa frequenza, imponendo  $\frac{1}{\alpha\tau} = 2\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega_b$ . Inoltre, all'interno dell'intervallo di pulsazioni messe, sceglieremo  $\omega_C^* = 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ : è possibile, a questo punto, portare a termine il primo degli step dell'algoritmo suddetto, calcolando l'amplificazione e la fase introdotti dallo zero appena fissato.

Per la formula  $\delta = \frac{\omega_C^*}{\omega_b}$  risulta  $\delta = 5$ , che dà secondo il grafico [Livello di Amplificazione](#) circa 15dB di amplificazione. Allo stesso modo, si trovano circa  $80^\circ$  di anticipo di fase (consultazione del grafico [Entità Sfasamento](#)). Procedendo al secondo step, si calcolano  $|G_e(j\omega_C^*)| = 8.3\text{dB}$  e  $\arg\{G_e(j\omega_C^*)\} = -120^\circ$ , dai quali risulta  $M_p \approx -23\text{dB}$ . Allora si trova  $\delta^* \approx 10$ ,  $\phi_p(\delta^*) \approx -85^\circ$ , e come ultima cosa rimane da controllare il vincolo sul margine di fase.  $M_f = 180^\circ + (-120^\circ + 80^\circ - 85^\circ) = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$ : la fase guadagnata non è sufficiente a rispettare la specifica dinamica data.

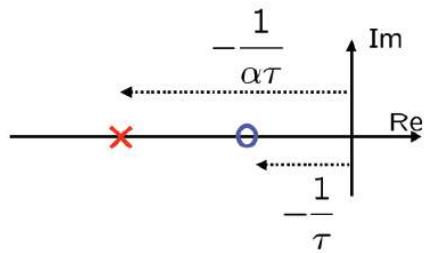
Si sceglie allora una pulsazione di attraversamento diversa,  $\omega_C^* = 4\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , svolgendo il procedimento dall'inizio: risulta  $\delta = 2$ , da cui  $M_Z \approx 7\text{dB}$ ,  $\phi_Z \approx 60^\circ$ . Per il secondo step,  $|G_e(j\omega_C^*)| = 18.1\text{dB}$  e  $\arg\{G_e(j\omega_C^*)\} = -86^\circ$ , dai quali risulta  $M_p \approx -25\text{dB}$ . Si calcola quindi  $\delta^*$  dal grafico [Livello di Amplificazione](#) ( $\delta^* = 15$ ) e successivamente la fase  $\phi_p(\delta^*) = -90^\circ$ .

Controlliamo infine il margine di fase complessivo:  $M_f = 180^\circ + (-86^\circ + 60^\circ - 90^\circ) = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$ . La specifica è stata rispettata e il progetto può dirsi concluso.

### 9.3.2 Reti Anticipatrici

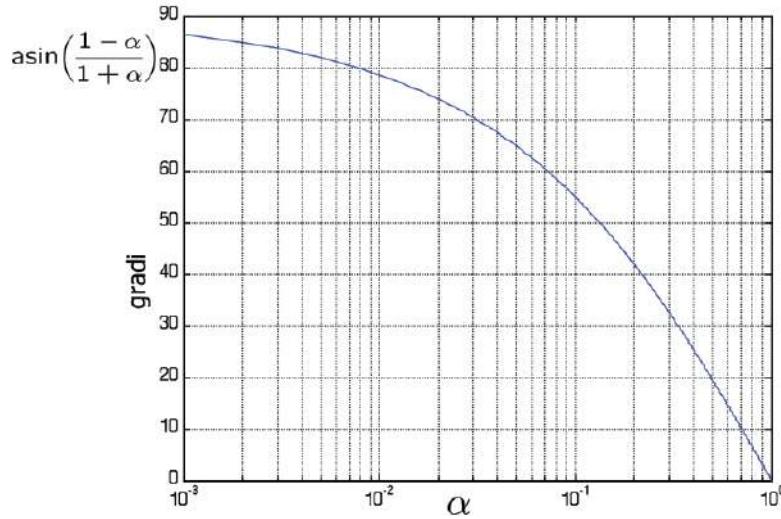
Ci troviamo in questo caso in quello che abbiamo definito *scenario B*, con un regolatore del tipo  $R(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . In generale, in questi casi si vuole ottenere un miglioramento della fase anche anche a costo di una amplificazione dei moduli (o ancora, uno spostamento della pulsazione di attraversamento).

La configurazione poli-zeri di questo regolatore è la seguente



In questo caso, la costante di tempo del polo è più piccola di quella dello zero.

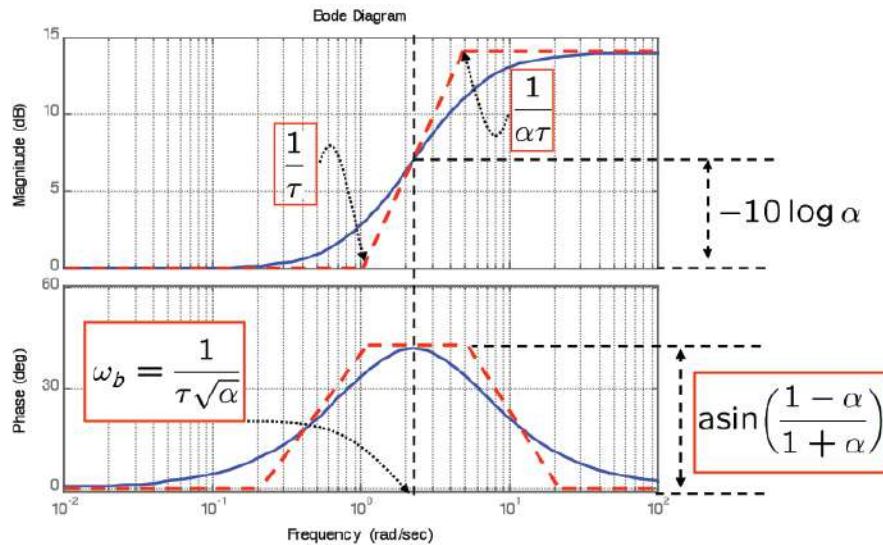
L'introduzione dello zero prima del polo causa una amplificazione di un valore proporzionale alla «distanza» fra il polo e lo zero: questa quantità vale  $-10 \log(\alpha)$ . Per quanto riguarda le fasi, si ottiene un picco di fase positiva pari a  $\arcsin(\frac{1-\alpha}{1+\alpha})$  centrato alla pulsazione  $\omega_b = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$ , che direttamente proporzionale alla distanza fra polo e zero.



**Figura 58:** Picco di Massimo Sfasamento

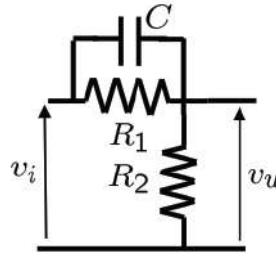
Infatti, come si può intuire,

- Quando  $\alpha \approx 0$  risulta  $\arcsin\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \approx 1$ : il picco tende a  $90^\circ$ , il polo e lo zero sono lontani<sup>113</sup>.
- Quando  $\alpha \approx 1$  risulta  $\arcsin\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \approx 0$ : il picco tende a  $0^\circ$ , il polo e lo zero sono vicini.



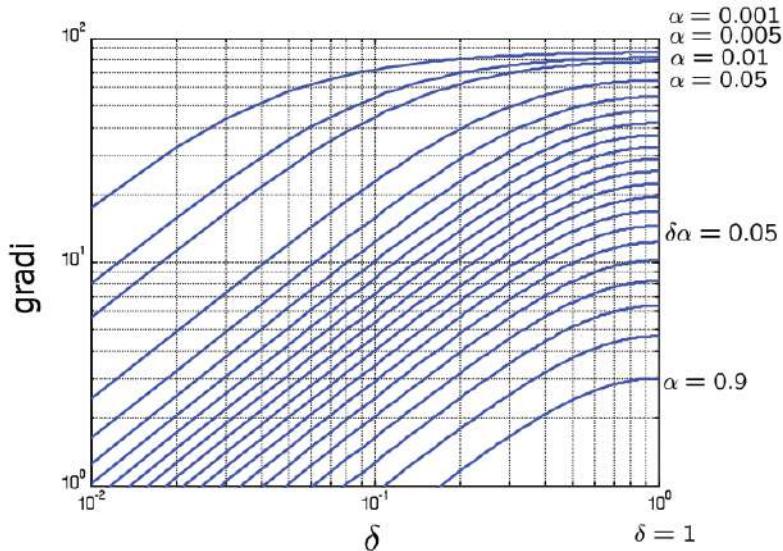
Incidentalmente, si ricorda che una rete elettrica del tipo presentato in figura costituisce una rete anticipatrice con  $\tau = CR_1$  ed  $\alpha = \frac{R_2}{R_2 + R_1}$ .

<sup>113</sup>Si ricorda che il valore  $90^\circ$  è solo ideale, mentre in pratica non è possibile ottenere più di  $70^\circ$ - $75^\circ$  di fase «guadagnata». Questo limite è dovuto alla funzione di sensitività del controllo, e al vincolo di evitare zeri vicino all'asse Immaginario.



Si definisce per comodità una pulsazione  $\omega' = \delta\omega_b$ <sup>114</sup> che permette il calcolo del modulo e della fase della rete correttrice nell'intorno della pulsazione di massimo sfasamento  $\omega_b$ ; risultano allora

- $\arg \{R(j\omega')\} = \arctan \left\{ \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \right\} - \arctan \{\delta \cdot \sqrt{\alpha}\}$  calcola l'entità dello sfasamento positivo alla pulsazione  $\omega'$ .

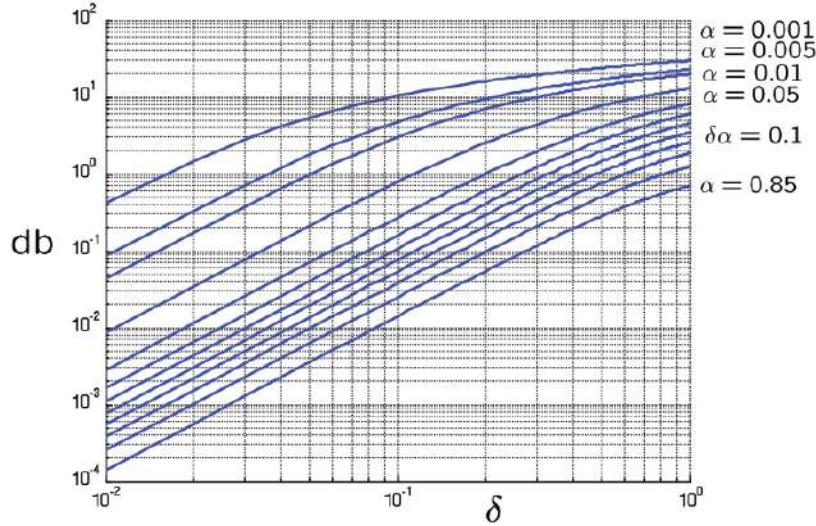


**Figura 59:** Entità Sfasamento

Questo importante grafico permette di conoscere la quantità di sfasamento che si può ottenere per ogni  $\alpha$ , al variare di  $\delta$ . In altre parole, per ogni  $\alpha$  si individua lo sfasamento richiesto sull'asse delle ordinate, il quale permette a sua volta di trovare per intersezione il valore di  $\delta$ : a questo punto è noto di quanto ci si sposterebbe rispetto alla pulsazione di picco  $\omega_b$ .

- $|R(j\omega')| = 10 \cdot \log \left( \frac{1 + \frac{\delta^2}{\alpha}}{1 + \delta^2 \alpha} \right)$  calcola il livello di amplificazione alla pulsazione  $\omega'$ .

<sup>114</sup>NOTA BENE: il parametro  $\delta$  in questione NON è il coefficiente di smorzamento (fino ad ora indicato con  $\delta$ ) ma una normale costante numerica di proporzionalità. Si è seguita questa notazione solamente per omogeneità con le slides del corso.



**Figura 60:** Livello di Amplificazione

Anche questo grafico è rilevante: è possibile capire attraverso la sua lettura l'amplificazione ottenuta per ogni valore di  $\alpha$ , in funzione del valore di  $\delta$ .

Non si descrive, per le reti anticipatrici, nessun algoritmo di *tuning* pratico della rete, ma si passa subito ad un algoritmo analitico più avanzato ed efficiente.

### 9.3.2.1 Algoritmo di Progettazione per Reti Anticipatrici

Si presentano di seguito gli step da seguire.

- Scegliere una pulsazione di attraversamento desiderata all'interno dell'intervallo di pulsazioni ammesse. Chiameremo questa pulsazione  $\omega_C^*$ .
  - Calcolare il modulo a quella pulsazione:  $A = |G_e(j\omega_C^*)|_{dB}$ <sup>115</sup>
  - Calcolare la fase a quella pulsazione:  $\phi = \arg\{G_e(j\omega_C^*)\}$
- Identificare nel diagramma [Livello di Amplificazione](#) tutte le possibili coppie  $\alpha, \delta$  associate all'amplificazione  $-A$  richiesta; si scelga fra queste quella con  $\delta \approx 1$ , ed eventualmente  $\alpha \approx 1$ . Chiamiamo la coppia scelta  $\alpha^*, \delta^*$ .
- Verificare sul diagramma [Entità Sfasamento](#) se esiste uno sfasamento positivo maggiore o uguale a quello necessario corrispondente alla coppia  $\alpha^*, \delta^*$ . Se si trova che diverse coppie  $\alpha, \delta$  soddisfano le specifiche per lo sfasamento, seguire nella scelta gli stessi criteri del punto precedente.
- Se tale coppia esiste, si pone  $\alpha = \alpha^*, \tau = \frac{\delta^*}{\omega_C^* \sqrt{\alpha}}$ . In caso contrario, scegliere una nuova  $\omega_C^*$ .

In alternativa, sotto opportune ipotesi, è possibile utilizzare le formule di inversione.

---

<sup>115</sup>Deve essere minore di zero in quanto la rete anticipatrice fornisce amplificazione dei moduli.

### 9.3.2.2 Formule di Inversione

Anche in questo caso, l'obiettivo è quello di identificare delle formule per il progetto dei gradi di libertà  $\alpha$ ,  $\tau$  al fine di assegnare una certa pulsazione di attraversamento e un certo margine di fase desiderati.

Poiché per definizione la rete anticipatrice amplifica e sfasa in anticipo, la pulsazione  $\omega_C^*$  deve essere maggiore di quella del sistema esteso, e deve valere anche  $\arg \{G_e(j\omega_C^*)\} < -180 + M_f^*$ , dove  $M_f^*$  è il margine di fase desiderato.

Si vogliono trovare  $\alpha$ ,  $\tau$  al fine di progettare una rete che dia un'amplificazione  $M^*$  alla pulsazione  $\omega_C^*$ , con  $M^* > 1$ , e uno sfasamento  $\phi^*$ , con  $0^\circ < \phi^* < 90^\circ$ ; deve valere inoltre il vincolo  $\alpha > 0 \Leftrightarrow \cos(\phi^*) > \frac{1}{M^*}$ . Le formule sono:

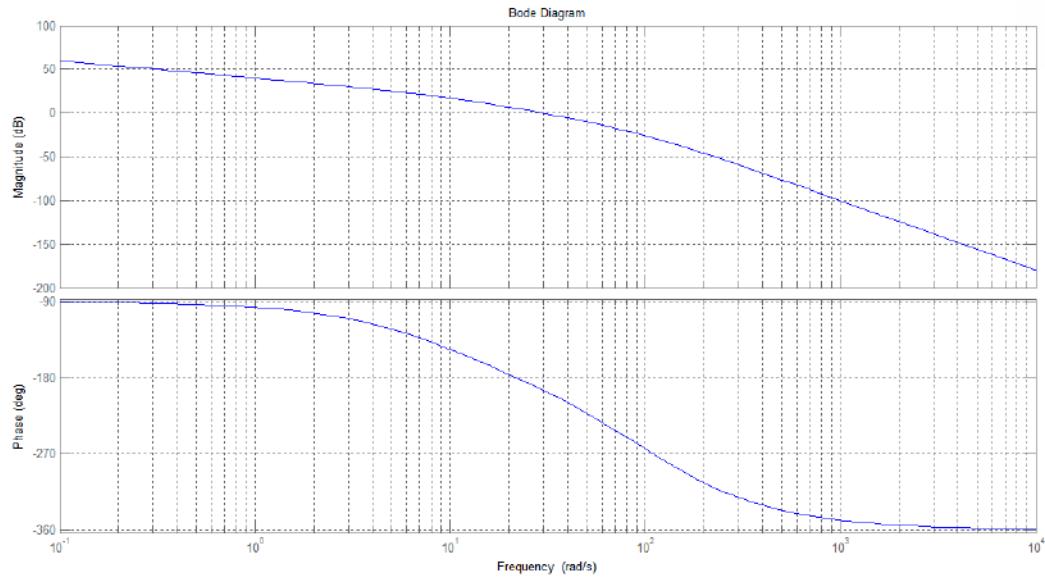
$$\tau = \frac{M^* - \cos(\phi^*)}{\omega_C^* \cdot \sin(\phi^*)} \quad \alpha\tau = \frac{\cos(\phi^*) - \frac{1}{M^*}}{\omega_C^* \cdot \sin(\phi^*)}$$

Si definiscono quindi gli step per imporre il margine di fase desiderato:

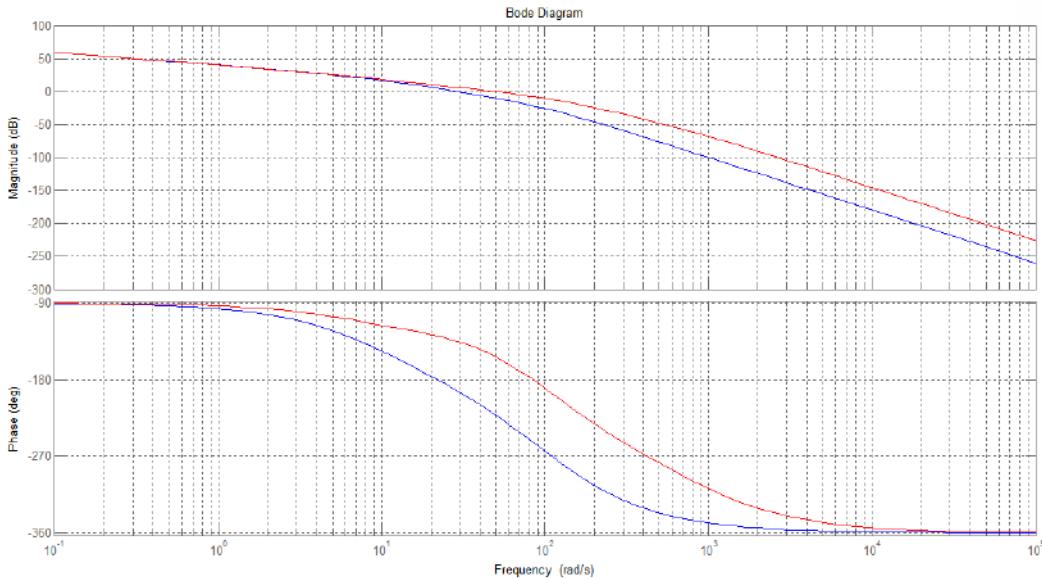
1. Ricavare  $|G_e(j\omega_C^*)|$ ,  $\arg \{G_e(j\omega_C^*)\}$  tramite la lettura del diagramma di Bode;
2. Calcolare:
  - (a)  $M^* = 10^{-\frac{|G_e(j\omega_C^*)|_{dB}}{20}}$
  - (b)  $\phi^* = -180^\circ + M_f^* - \arg \{G_e(j\omega_C^*)\}$
3. Verificare che siano soddisfatti i vincoli
  - (a)  $M^* > 1$ , ovvero  $|G_e(j\omega_C^*)|_{dB} < 0$
  - (b)  $0^\circ < \phi^* < 90^\circ$ , ovvero  $\arg \{G_e(j\omega_C^*)\} < -180^\circ + M_f^*$
  - (c)  $\cos(\phi^*) > \frac{1}{M^*}$
4. Calcolare  $\alpha$ ,  $\tau$  mediante le formule di inversione date.

#### Esempio (*Best Case*)

Sia data una  $G_e = \frac{100}{s(1+\frac{s}{10})(1+\frac{s}{100})^2}$ ; si chiede di imporre una  $\omega_C^* = 60 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e un  $M_f^* = 50^\circ$ .



La lettura dell'argomento in  $\omega_C^*$  dà  $-12.4$ , mentre la fase vale  $-201^\circ$ <sup>116</sup>. Si calcolano quindi un  $M^* = 4.17$  e un  $\phi^* = 71^\circ$ , da cui, attraverso le formule di inversione risultano  $\alpha = 0.019$  e  $\tau = 0.06$ . Il diagramma di Bode del sistema compensato è il seguente, in rosso per evidenziare il confronto con quello del sistema non compensato.



### 9.3.2.3 Procedura Matlab

Come per le reti ritardatrici (a cui si rimanda<sup>117</sup> nel caso non fossero chiare alcune funzioni utilizzate) si riporta di seguito un piccolo programma che implementa i passaggi di teoria appena visti.

<sup>116</sup>Nel ricontrolare i calcoli sono emersi dei valori diversi da quelli riportati sopra:  $|G_e(j\omega_C^*)| = -13.91$  e  $\arg \{G_e(j\omega_C^*)\} = -232.46$ .

<sup>117</sup>Consultare pagina 209.

```

% Funzione ProgettaRA: Data in ingresso la funzione di trasferimento
% del sistema non compensato, viene implementata la procedura di sintesi
% di una rete Anticipatrice mediante diagrammi di Bode con imposizione
% del margine di fase
function [alpha,tau]=ProgettaRA(Num,Den)

% Tracciamo il diagramma di bode del sistema non compensato
bode(Num,Den);
grid;
% Richiesta di evidenziare con il mouse un punto sul diagramma delle fasi
% che identifica la posizione desiderata del diagramma delle fasi di L(s)
% in corrispondenza della pulsazione di attraversamento desiderata (la coordinata x
% del punto selezionato rappresenta la w_c desiderata e la coordinata y +180° il
% valore del margine di fase desiderato)
disp('Individuare la wc e il margine di fase desiderato indicando il punto di passaggio
desiderato nel diagramma delle fasi')
[Wcd,PAd]=ginput(1);
% Stampiamo sul video i valori desiderati
disp('Margine di fase desiderato: ')
MFd=180+PAd
disp('Pulsazione di attraversamento desiderata: ')
Wcd
% Calcolo dell'attenuazione e del ritardo di fase (espresso in rad) da
% introdurre mediante la rete

% Troviamo il valore del modulo e dell'argomento del sistema esteso non
% compensato alla frequenza di attraversamento
[M,P,W]=bode(Num,Den);
% Cerchiamo l'indice del vettore più vicino alla pulsazione di attraversamento desiderata e lo
% memorizziamo in i
[V,i]=min(abs(W-Wcd));
% Si cercano ora modulo e argomento in quella pulsazione
GeWcd=M(i);
ArgGeWcd=P(i);
% Modulo e argomento finali
Pd=-180+MFd-ArgGeWcd;
Md=1/GeWcd;
% Conversione in radianti di Pd
Pd=Pd*pi/180;

% Check sulla realizzabilità della rete
if (Md<1 || Pd<0 || cos(Pd)<1/Md)
    disp('Attenzione: sintesi non possibile con una rete anticipatrice');
    return;
end
% Calcolo dell'alpha e tau della rete sulla base delle formule di inversione
tau=(Md-cos(Pd))/(Wcd*sin(Pd));
alpha=(cos(Pd)-1/Md)/(Wcd*sin(Pd))/tau;

```

```
% Tracciamento del diagramma di bode della rete e del sistema compensato
hold on
bode([tau,1],[tau*alpha,1]);
bode(conv([tau,1],Num),conv([alpha*tau,1],Den));
hold off
```

### 9.3.2.4 Sovraelongazione e Code di Assestamento: Progetto per Cancellazione

Si supponga di essere in uno scenario di tipo «B», in cui lo zero del regolatore dinamico si trova più vicino, rispetto al polo, all'asse Immaginario, ed è collocato prima di  $\omega_C^*$ . Come è noto, gli zeri del regolatore, e quindi gli zeri della  $L(s)$ , influiscono sulla retroazione in quanto zeri della funzione di sensitività complementare. L'ovvia conclusione è che la criticità dello zero andrà a influire anche sul sistema in retroazione.

Questa è una condizione di apparente contraddizione, in quanto si è portati a posizionare lo zero a basse frequenze - così da guadagnare un margine di fase consistente, diminuendo la sovraelongazione - tuttavia ciò comporta l'avvicinamento dello zero all'asse Immaginario, con un conseguente aumento della sovraelongazione che questo darà nella risposta!

Un ulteriore problematica che si crea in questo caso è la seguente: studiando il luogo delle radici del sistema in retro, si osserva che questo zero «attrae» uno dei poli del sistema in retro, generalmente quello dominante, portandolo vicino all'asse Immaginario; per valori di  $\mu$  elevati, si avrà che i suddetti polo e zero si troveranno in quasi cancellazione, vanificando gli sforzi del progettista per controllare il tempo di assestamento.

In sintesi, le conseguenze indesiderate dell'errato posizionamento dello zero del regolatore sono le seguenti: da una parte, *possibili sovraelongazioni del sistema in retro*, molto maggiori di quelle attese; dall'altra, comparsa di *code di assestamento* che spesso e volentieri impediscono di soddisfare la specifica sul tempo di assestamento.

Facciamo notare infine che, nonostante l'argomento fosse stato affrontato anche per le reti ritardatrici, il problema è molto più consistente nel caso delle reti anticipatrici, dal momento che, nel regolatore, lo zero è per definizione collocato a frequenza minore del polo.

#### Algoritmo di Progetto per Cancellazione

Si possono individuare alcune strategie per affrontare questi problemi, tuttavia ognuna di esse è da verificare caso per caso, senza prenderle come assolute. Alcune di queste comprendono:

- Rivedere le specifiche, cambiando la pulsazione di attraversamento o diminuendo  $M_f^*$ ; questo comporta però l'utilizzo di ulteriori procedure correttive;
- Cercare di portare lo zero in alta frequenza, per quanto possibile;
- Effettuare un progetto per cancellazione.

Nel caso in cui un polo del plant si trovi in prossimità dello zero critico del regolatore, è possibile porre tale zero in cancellazione sul polo. In questo modo, si avrà l'effetto benefico dello zero all'interno del sistema senza che questo entri a far parte della retroazione.

Il polo del regolatore che si vuole cancellare va scelto prima della pulsazione  $\omega_C^*$ , ma più in alta frequenza possibile.

Questa scelta «consuma» un grado di libertà della rete: rimane infatti da collocare il polo del regolatore, che permette di imporre l'attraversamento nella pulsazione desiderata, ma non la fase risultante in quel punto. Si potrebbe scegliere altrimenti di imporre il polo in modo da rispettare il vincolo sul margine di fase: questo tuttavia porterebbe in progettista nella condizione di non sapere, e nemmeno avere sotto il suo controllo, dove la curva andrà ad attraversare l'asse 0dB. In altre parole, si sceglierrebbe  $\omega_p$  tale da imporre un certo  $M_f$  nella pulsazione di cross, quando, con una certa probabilità, non si attraverserebbe nemmeno in quel punto. Si preferisce per questo motivo il primo fra gli approcci presentati. Riepiloghiamo quindi l'algoritmo da seguire in questa situazione:

1. Fissare  $\tau$  in modo che lo zero del regolatore si trovi in cancellazione con il polo del plant;
2. Fissare  $\alpha$  in modo che  $\arcsin\left\{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right\} = -180^\circ + M_f^* - \arg\{G_e(j\omega_C)\} + \Delta\phi$  (cioè che  $\alpha$  dia il margine di fase richiesto nel punto di attraversamento, comprensivo eventualmente di un ulteriore sfasamento), come indicato dalla figura 58 a pagina 217;
3. Verificare il margine di fase per il sistema compensato valutando l'effetto dell'amplificazione introdotta dalla rete ovvero fissando eventualmente un valore di  $\alpha$  differente (o, in ultima analisi, anche di  $\omega_C$ ).

Si verifica tuttavia che questo algoritmo è empirico, e in ultima analisi non molto conclusivo. Per questo motivo se ne introduce un altro, più preciso<sup>118</sup>.

1. Fissare  $\tau$  in modo che lo zero del regolatore si trovi in cancellazione con il polo del plant (scelto secondo le considerazioni di cui sopra);
2. Detta  $\tau = \tau_z$ , è possibile calcolare  $\omega_b = \frac{1}{\tau_z}$  e anche  $\delta = \frac{\omega_C^*}{\omega_b}$ ; attraverso i grafici **Entità Sfasamento** e **Livello di Amplificazione** a pagina 219 si valutano quindi lo sfasamento  $\phi_z > 0$  e l'amplificazione  $M_z > 0$  introdotti dallo zero alla pulsazione  $\omega_C^*$ ;
3. Calcolare l'attenuazione  $M_p$  desiderata per il polo alla pulsazione  $\omega_C^*$  attraverso la formula  $M_p = -[\|G_e(j\omega_C^*)\|_{\text{dB}} + M_z]$ , trovando poi sul grafico **Livello di Amplificazione** il valore  $\delta^*$  corrispondente;
4. Valutare se lo sfasamento introdotto dal polo (detto  $\phi_p$ , si legge dal grafico **Entità Sfasamento** una volta noto  $\delta^*$ ) corrisponde a quello desiderato attraverso la formula  $180^\circ + \arg\{G_e(j\omega_C^*)\} + \phi_z + \phi_p \geq M_f^*$ ;
5. In caso di successo, si pone  $\alpha\tau = \frac{\delta^*}{\omega_C^*}$ . In caso contrario, provare con un diverso valore di  $\omega_C^*$ .

### 9.3.2.5 Esempio di Progetto per Cancellazione

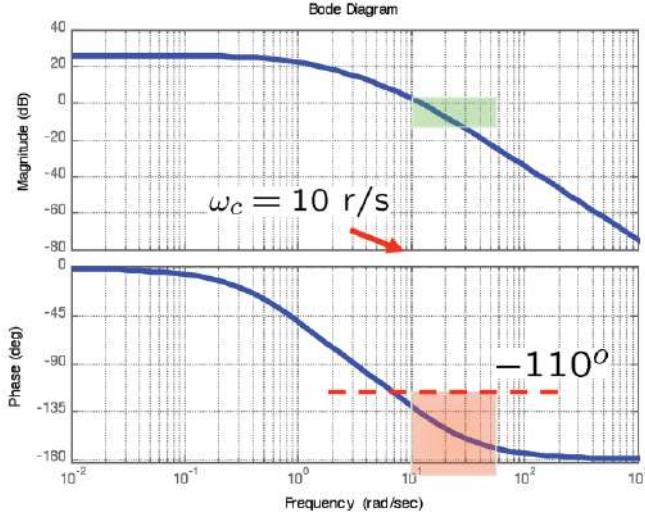
Sia data  $G_e = \frac{19}{(1+s)(1+0.1s)}$ , con specifiche dinamiche

1. Pulsazione di attraversamento  $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \leq \omega_C^* \leq 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

---

<sup>118</sup>Questo algoritmo si trova nelle slides del corso (Parte 10) sotto il nome di «Approccio Alternativo» ed è quello che è stato effettivamente trattato a lezione.

## 2. Margine di fase $M_f^* > 70^\circ$



I poli della  $G_e$  sono collocati in  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e  $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ : si prova, come prima scelta, a cancellare il polo più in alta frequenza, imponendo  $\frac{1}{\alpha_T} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \omega_b$ . Inoltre, all'interno dell'intervallo di pulsazioni permesse, scegliamo  $\omega_C^* = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ : è possibile, a questo punto, portare a termine il primo degli step dell'algoritmo suddetto, calcolando l'amplificazione e la fase introdotti dallo zero appena fissato.

Si noti che lo zero comincia a dare anticipo di fase «4.81 prima» della sua pulsazione di intervento: poiché in questo caso essa coincide con  $\omega_C^*$ , si vuole sottolineare che la curva avrà già migliorato la sua fase una volta raggiunta la pulsazione di taglio. La scelta è dovuta infatti a due fattori importanti:

1.  $\arg \{G_e(j\omega_C^*)\}$ ,  $\omega_C^* = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , non è troppo distante dai  $-110^\circ$  (il valore che è necessario raggiungere per soddisfare la specifica sul margine di fase), per cui basta anche recuperare, attraverso la rete anticipatrice, un valore non troppo alto in termini di fase.
2. Il polo scelto per la cancellazione è quello più in alta frequenza dei due, e permette di allontanare lo zero dall'asse Immaginario rimanendo comunque all'interno del range di pulsazioni in specifica.

Per la formula  $\delta = \frac{\omega_C^*}{\omega_b}$  risulta  $\delta = 1$ , che dà secondo il grafico [Livello di Amplificazione](#) circa 3dB di amplificazione. Allo stesso modo, si trovano circa  $45^\circ$  di anticipo di fase (consultazione del grafico [Entità Sfasamento](#)). Procedendo al secondo step, si calcolano  $|G_e(j\omega_C^*)| = 2.5 \text{dB}$  e  $\arg \{G_e(j\omega_C^*)\} = -130^\circ$ , dai quali risulta  $M_p \approx -5.5 \text{dB}$ . Allora si trova  $\delta^* \approx 1.8$ ,  $\phi_p(\delta^*) \approx -61^\circ$ , e come ultima cosa rimane da controllare il vincolo sul margine di fase.  $M_f = 180^\circ + (-130^\circ + 45^\circ - 61^\circ) = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$ : la fase guadagnata non è sufficiente a rispettare la specifica dinamica data.

Si sceglie allora una pulsazione di attraversamento diversa,  $\omega_C^* = 18 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , svolgendo il procedimento dall'inizio<sup>119</sup>: risulta  $\delta = 1.8$ , da cui  $M_Z \approx 6.3 \text{dB}$ ,  $\phi_Z \approx 61^\circ$ . Per il secondo step,  $|G_e(j\omega_C^*)| = -5.9 \text{dB}$  e  $\arg \{G_e(j\omega_C^*)\} = -148^\circ$ , dai quali risulta  $M_p \approx -0.4 \text{dB}$ . Si

<sup>119</sup>Il polo cancellato rimane lo stesso, come anche la pulsazione di taglio dello zero.

calcola quindi  $\delta^*$  dal grafico [Livello di Amplificazione](#) ( $\delta^* = 0.3$ ) e successivamente la fase  $\phi_p(\delta^*) = -17^\circ$ .

Controlliamo infine il margine di fase complessivo:  $M_f = 180^\circ + (-148^\circ + 61^\circ - 17^\circ) = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$ . La specifica è stata rispettata e il progetto può dirsi concluso.

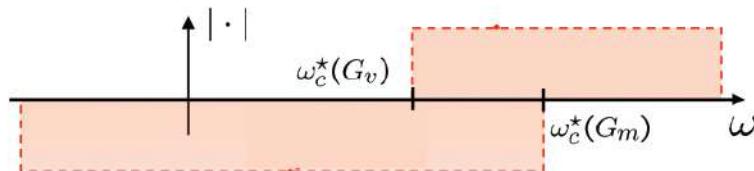
LEZIONE 31

DATA: 01/12/2015

## 9.4 Struttura di Controllo in Cascata

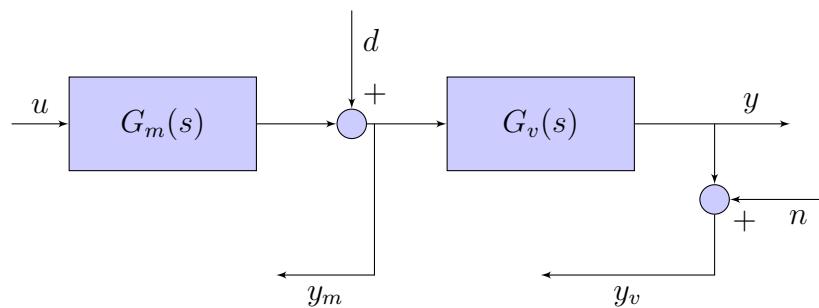
Si ricade in questo scenario quando il disaccoppiamento frequenziale è scarso o insufficiente, ed è quindi impossibile scegliere una pulsazione di attraversamento che rispetti le specifiche. Alcuni dei motivi per cui ciò accade riguardano la sovrapposizione delle frequenze di ingresso fra i disturbi in bassa frequenza e quelli in alta frequenza, o in generale le specifiche sulla pulsazione di attraversamento (ad esempio, intervallo di frequenze permesse molto piccolo).

Una delle strade possibili per realizzare il progetto di controllo è quella di realizzare due regolatori separati<sup>120</sup>, uno che intervenga a frequenze basse (occupandosi quindi di neutralizzare i disturbi in ingresso in quell'intervallo di pulsazioni, senza considerare gli altri) e uno che intervenga a frequenze alte (il quale si occupa solamente dei disturbi a frequenze alte).



Suddividendo questi intervalli in due sistemi - detti **sistema a monte**, **sistema a valle** - ne consegue che le dinamiche del sistema a monte sono rapide, quelle del sistema a valle sono più lente.

Quando si considera solo il sistema a monte, una pulsazione di attraversamento a frequenze elevate consente di progettare una  $F(j\omega)$  che elimini tutti i disturbi in bassa frequenza, rendendo nello stesso tempo il sistema molto veloce. Questa specifica è tuttavia incompatibile con il progetto del sistema a valle, il quale richiede un attraversamento a frequenze più basse (caratteristica che, intrinsecamente, rallenta il sistema).



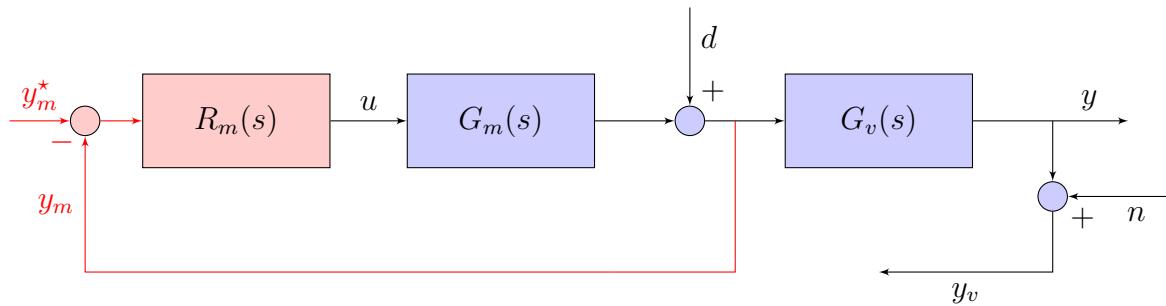
<sup>120</sup>Si considera, come al paragrafo [\(7.2.1\)](#),  $G(s) = G_M(s) \cdot G_V(s)$ .

Utilizzando questa strategia, si considera l'uscita del primo sistema misurabile attraverso una retroazione. Come si può immaginare, questo tipo di impostazione, anche se semplifica il progetto del regolatore, richiede un costo implementativo maggiore: sono richiesti, ad esempio, due attuatori e due sensori invece di uno.

In generale (e soprattutto nei casi da noi analizzati), il sistema a monte presenterà molte meno criticità del sistema a valle, rendendo il progetto del suo regolatore molto semplice. Praticamente, il progetto si articola in due fasi:

### 1. Progetto dell'*inner loop*

Ci si cura solamente del progetto del sistema a monte, e se tutto va bene il disturbo in *bassa frequenza* non si propaga al sistema a valle. Il regolatore viene studiato attraverso «l'uscita intermedia»  $y_m$ , e le sue dinamiche sono molto veloci.



Come abbiamo fatto nello studio degli schemi a blocchi, ricaviamo da questo schema la relazione ingresso - uscita.  $Y_m(s) = D(s) + G_m(s)R_m(s)[Y_m^*(s) - Y_m(s)]$ ; saltando qualche passaggio, si moltiplicano i fattori dentro la parentesi e poi si isola  $Y_m(s)$ . Si ottiene

$$Y_m(s) = \frac{1}{1 + G_m(s)R_m(s)}D(s) + \frac{G_m(s)R_m(s)}{1 + G_m(s)R_m(s)}Y_m^*$$

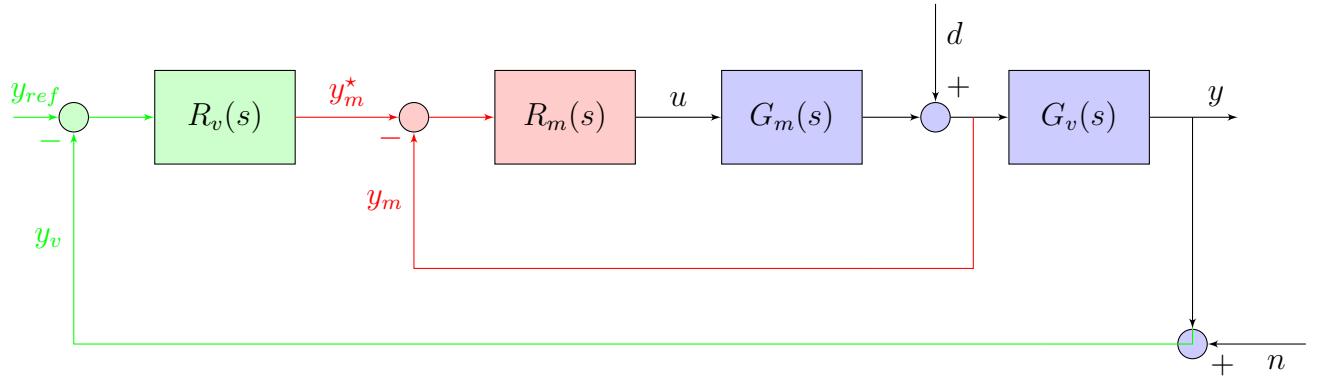
dove si riconoscono facilmente la funzione di sensitività ( $\frac{1}{1 + G_m(s)R_m(s)}$ ) e la funzione di sensitività complementare ( $\frac{G_m(s)R_m(s)}{1 + G_m(s)R_m(s)}$ ). Possiamo quindi imporre i vincoli di attenuazione dei disturbi dei quali abbiamo parlato precedentemente:

- $|S_m(j\omega)| \approx 0 \quad \forall \omega < \omega_C^*$  del plant a valle
- $|F_m(j\omega)| \approx 1 \quad \forall \omega < \omega_C^*$  del plant a valle

Come risultato, i disturbi in bassa frequenza sono praticamente assenti, e  $Y_m \approx Y_m^*$  per  $\omega < \omega_C^*$  considerando il plant a valle.

### 2. Progetto dell'*outer loop*

Si impongono pulsazioni di attraversamento molto basse: questo, come abbiamo detto, neutralizza i disturbi in *alta frequenza* ma permette anche di considerare il loop interno come un «cortocircuito», ossia  $Y_m^* \approx Y_m$  nel campo di frequenze dove agisce questo secondo blocco.



#### 9.4.1 Esempio

Siano  $G_m(s) = \frac{1}{1+0.05s}$ ,  $G_v = \frac{e^{-4s}}{(1+s)^2}$ ; indichiamo di seguito le specifiche progettuali da implementare:

1. A regime:

- Errore sull'uscita nullo su un riferimento in ingresso a gradino;
- Sovraelongazione percentuale  $S\% \approx 20\%$ ;
- Tempo di assestamento  $T_{ass} \approx 40s$ ;

2. Attenuazione del disturbo  $d$  sull'uscita di almeno 10dB per  $\omega_d \leq 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ;

3. Attenuazione del disturbo di misura  $n$  di almeno 10dB per  $\omega_n \geq 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

In questo esempio, la  $G_m(s)$  viene anche chiamata *dinamica di attuazione*, e la  $G_v(s)$  *dinamica di sistema*, volendo intendere con questi due termini che la  $G_m$  descrive il comportamento di un attuatore, il quale comanda un sistema molto più lento (la  $G_v$ ).

Ad una prima occhiata si può notare che il sistema complessivo presenta una doppia dinamica, in quanto il sistema a monte è molto più veloce del sistema a valle. Inoltre, il sistema a valle presenta anche un ritardo intrinseco di quattro secondi rispetto al riferimento in ingresso.

Si comincia dall'errore nullo a regime: per ottenere il soddisfacimento di questo vincolo è necessario imporre un polo nel regolatore  $R_v(s)$ , in quanto non è presente alcun polo nell'origine all'interno del plant a valle. Ricaviamo poi il coefficiente di smorzamento dalla specifica sulla sovraelongazione attraverso la figura 30 a pagina 67: anche se in modo un po' approssimativo, possiamo dire che  $\delta \approx 0.5$ , da cui si deduce un margine di fase  $M_f = 50^\circ$ . Infine, imponendo il vincolo sul tempo di assestamento, risulta una pulsazione di cross piuttosto bassa, il che è coerente con la specifica di attenuazione del disturbo di misura; entrambe risultano allora in contrasto con il secondo vincolo, che riguarda il disturbo sull'uscita (che richiede  $\omega_C \gg 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ).

Si decide quindi di procedere con il progetto dell'inner loop, imponendo una pulsazione di attraversamento di  $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ : il sistema è veloce e ha una buona attenuazione del disturbo sull'uscita. Per realizzare ciò si inserisce un polo nell'origine, alzando il guadagno in modo da

attraversare dove desiderato. Successivamente si aggiunge uno zero per guadagnare fase, ottenendo un regolatore complessivo del tipo  $R_m(s) = 11.2 \cdot \frac{0.02s+1}{s}$ . La scelta della pulsazione di attraversamento è dovuta anche al bisogno di disaccoppiamento frequenziale rispetto all'outer loop, per il quale si è scelta una pulsazione di  $0.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (una decade di distacco è solitamente sufficiente).

Si passa quindi al progetto dell'outer loop, considerando il plant e il regolatore a monte come un corto circuito: come avevamo detto si inserisce un polo nell'origine, salvo poi accorgersi che la fase nella pulsazione di cross non è delle migliori. Per recuperare si inseriscono due zeri, insieme ad un polo di fisica realizzabilità, ottenendo complessivamente  $R_v(s) = 0.14 \cdot \frac{(s+1)(7s+1)}{s(3.5s+1)}$ . Attraverso il grafico di Bode si verifica che il margine di fase ottenuto in questa seconda parte è  $54^\circ$ .

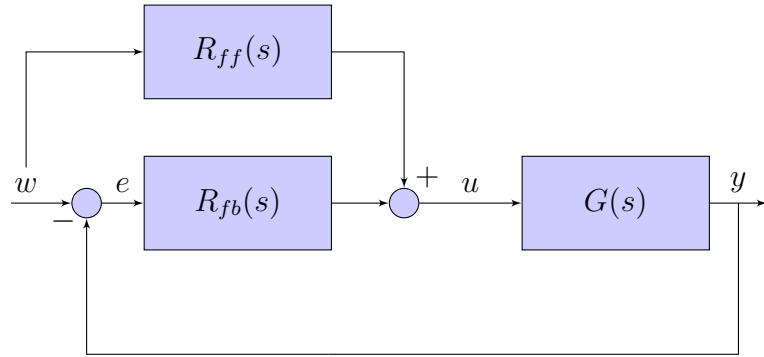
Infine, si uniscono i due progetti.

## 9.5 Compensazione ad Anello Aperto

### 9.5.1 Utilizzo di un Regolatore *Feedforward*

Si riprende in questo paragrafo quanto detto precedentemente (7.2.3.1) riguardo alla struttura mista degli organismi di controllo: un controllore feedforward unito ad un controllore feedback permette di ottenere ottime performances nominali insieme a robustezza alle incertezze. Infatti, il regolatore in avanti si occupa di ottenere un inseguimento perfetto in condizioni nominali (azione predittiva), mentre il regolatore in retroazione entra in gioco una volta che è stato commesso un errore rispetto al riferimento (in questo senso, si può dire che esso è «in ritardo»).

Facciamo notare brevemente che i casi affrontati in questo paragrafo non condividono nulla con il contesto del controllo in cascata, poiché non si pone come ipotesi quella di avere una retroazione intermedia. Si chiarisce, in ogni caso, che i due scenari *non* sono incompatibili: sono semplicemente diversi.



La relazione ingresso - uscita è la seguente:  $Y(s) = G(s)U(s) = G(s) [R_{fb}(s)E(s) + W(s)R_{ff}(s)] = G(s) \{R_{fb}(s) [W(s) - Y(s)] + W(s)R_{ff}(s)\}$ .

A questo punto si risolve l'equazione in modo da trovare  $Y(s)$ ; risulta  $\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)R_{fb}(s)}{1+G(s)R_{fb}(s)} + \frac{G(s)R_{ff}(s)}{1+G(s)R_{fb}(s)}$ .

Per avere un impianto di controllo ideale sarebbe necessario progettare il regolatore feed-forward in modo che  $R_{ff}(s) = \frac{1}{G(s)}$ : allora risulterebbe  $\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{1}{G(s)}R_{fb}(s)+1}{1+\frac{1}{G(s)}R_{fb}(s)} \Rightarrow \frac{Y(s)}{W(s)} = 1 \Rightarrow Y(s) = W(s)$ .

Tuttavia, vi è un problema di realizzabilità intrinseco, dovuto al fatto che l'espressione del plant contiene solitamente un numero consistente di poli: realizzare un regolatore che presenta solo zeri (probabilmente molti zeri) inciderebbe negativamente sulla funzione di sensitività del controllo, senza tenere conto della complessità del progetto.

Come è stato fatto altre volte all'interno del corso, spostarsi nel dominio della frequenza potrebbe aiutare a semplificare il progetto. Applicando la trasformata di Fourier otteniamo  $Y(j\omega) = \frac{G(j\omega)R_{fb}(j\omega)+G(j\omega)R_{ff}(j\omega)}{1+G(j\omega)R_{fb}(j\omega)}W(j\omega)$  e si può considerare che la relazione  $R_{ff}(j\omega) = \frac{1}{G(j\omega)}$  deve valere solo nel campo di frequenze dove  $W(j\omega) \neq 0$ . Si dice allora che il regolatore è progettato in ***inversione*** o ***retroazione selettiva***, stando a significare che la *banda di interesse* per l'intervento del regolatore coincide con la banda di  $W$ . Vengono, di fatto, cancellati *solo* i poli che entrano in quel campo di frequenze. In altre parole, sono rilevanti tutti i poli la cui frequenza di taglio cade prima della pulsazione di cross: questi «verranno cancellati», mentre quelli con frequenza di taglio maggiore no.

Non vengono comunque eliminati i problemi (già noti) dovuti a un progetto di questo tipo:

- Il modello del plant è noto solo nominalmente: il progetto per cancellazione non è robusto rispetto a questo tipo di difetti (cancellazione approssimata nel caso di variazioni in banda);
- Un regolatore contenente un numero maggiore di zeri rispetto al numero dei poli
  - Amplifica i disturbi che entrano nel suo range di frequenze.
  - Crea problemi dal punto di vista della funzione di sensitività del controllo<sup>121</sup>: essa avrebbe un andamento di tipo passa - alto (vedi paragrafo [8.5.3 a pagina 177](#)).

È comunque possibile inserire poli di fisica realizzabilità nel regolatore feedforward dove necessario (s'intende fuori banda), per cercare di diminuire questi effetti negativi.

Un progetto funzionale, anche se un po' approssimato, di  $R_{ff}(s)$  consiste nell'inversione del guadagno statico della  $G(s)$ : si ha quindi in questo caso  $R_{ff}(s) = \frac{1}{\mu}$  (il regolatore è sempre considerato come un'inversione selettiva nel dominio della frequenza, anche se la frequenza è nulla). Già questo tipo di regolatore è migliorativo in termini di performance, anche se chiaramente esistono progetti più mirati e complessi.

---

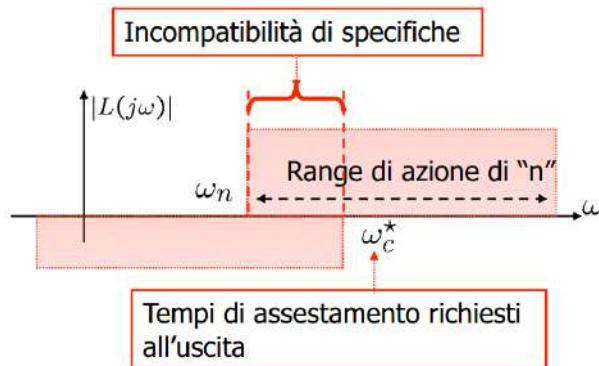
<sup>121</sup>Per ottenere l'equazione sulla slides Parte 11, numero 5 si può partire da  $U(s) = W(s) \cdot R_{ff}(s) + E(s) \cdot R_{fb}(s)$  e proseguire con le sostituzioni, isolando  $W(s)$  e  $U(s)$ , ma non mi compare il termine  $R_{ff}(s)R_{fb}(s)G(s)$  che c'è lì, anche se la condizione successiva risulta soddisfatta. Quindi boh.

### 9.5.1.1 Scenario di Utilizzo

Si ha un sistema con uscite  $y$  rumorose: ciò è dovuto alla presenza critica di disturbi di tipologia  $n$  ad alta frequenza, che, se il sistema è di bassa qualità, possono scendere a bassa frequenza; vi sono inoltre ritardi su  $G(s)$ . In questo contesto si è portati ad attraversare a bassa frequenza, rallentando il sistema in retroazione: questo permette da un lato di attenuare i disturbi in alta frequenza, dall'altro di contenere il ritardo massimo del sistema (vedere pagina 167).

Supponiamo parallelamente di avere specifiche per un tempo di assestamento molto basso, che richiederebbe un sistema in retroazione molto veloce nell'inseguimento dell'ingresso, e quindi anche un attraversamento (da parte della  $L$ ) in alta frequenza: ci si trova in una situazione di stallo, dovuta all'incompatibilità della specifica rispetto alla situazione attuale.

Si decide quindi di ignorare la specifica sul tempo di assestamento della  $y$  nel progetto del regolatore in retroazione, dando la precedenza alla robustezza ai disturbi  $n$  e al ritardo  $T$ , in quanto queste due cose sono prioritarie per garantire la stabilità del sistema.



Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento si decide di progettare un regolatore feedforward, che in quanto tale non è influenzato dalle patologie della retroazione.

### 9.5.1.2 Esempio

È data  $G(s) = \frac{1}{(1+0.01s)(1+0.002s)^2}$  i cui poli intervengono a  $100\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e a  $500\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (il secondo ha molteplicità 2). Le specifiche date, «trasformate» in specifiche frequenziali, sono:

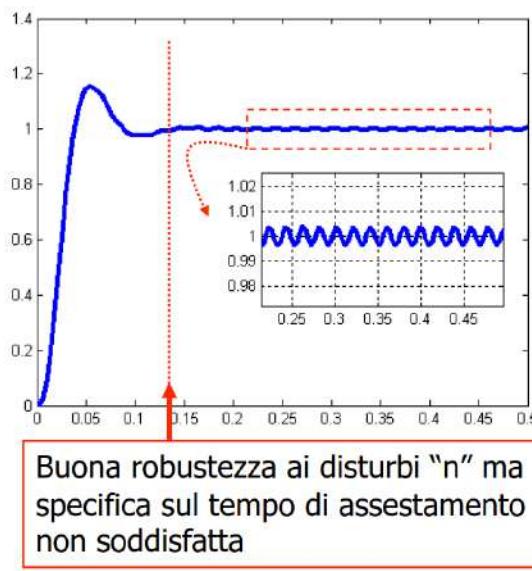
- Errore a regime nullo su ingresso a gradino;
- Tempo di assestamento  $T_{ass} \leq 0.03$  s e sovraelongazione percentuale  $S\% \approx 15\%$ ;
- Attenuazione di disturbi in ingresso a frequenza  $f = 50\text{Hz}$ , cioè alla pulsazione  $\omega = 50 \cdot 2 \cdot \pi = 314\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Per il rispetto delle specifiche statiche è richiesta l'introduzione di un polo nell'origine. Per quanto riguarda le specifiche dinamiche, dal grafico in figura 30 a pagina 67 si ricava che  $\delta \approx 0.5$ , e da qui possiamo calcolare il margine di fase e la pulsazione naturale della dinamica dominante del sistema in retro. Infatti,  $M_f \approx 50^\circ$  e  $T_{ass1\%} = \frac{4.6}{\delta\omega_n} \Rightarrow \delta\omega_n \geq \frac{4.6}{0.03} = 153$ ; sostituendo, risulta  $\omega_C^* = 306.6 \approx 310\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Si nota però a questo punto l'incompatibilità di questi vincoli con la specifica di attenuazione del disturbo di misura, la quale richiede una

pulsazione di attraversamento molto minore di  $314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  al fine di avere un'attenuazione sufficiente (nel diagramma dei moduli) appena si raggiunge la frequenza di ingresso del disturbo stesso.

Anche in questo caso si decide di dare la precedenza a quelle specifiche che garantiscono la stabilità del sistema: si pone la pulsazione di attraversamento in bassa frequenza, facendo conto di inserire in seguito un regolatore feedforward che si occupi di velocizzare le dinamiche del sistema, rispettando la specifica sul tempo di assestamento.

Per garantire l'attenuazione necessaria a  $314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  si pone un polo nell'origine (che soddisfa nel contempo la specifica statica), alzando il guadagno in modo da attraversare intorno ai  $50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (circa una decade prima). Il margine di fase risultante è pari a  $M_f = 50^\circ$ ; il plot del risultato è il seguente.



Come previsto, è necessario ora progettare il regolatore in avanti in modo da velocizzare il sistema, al fine di rispettare la specifica sul tempo di assestamento.

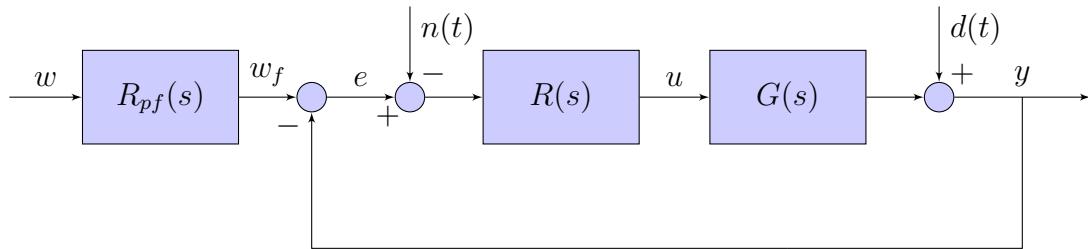
A tal fine, e secondo il metodo di progettazione per inversione selettiva, risulta necessario cancellare il polo in  $100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ; i poli in  $500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  non sono strettamente in banda, tuttavia ne si cancella comunque uno<sup>122</sup>. Infine, si aggiungono due poli in «altissima frequenza», fuori banda, per ottenere grado relativo nullo. Il regolatore complessivo risulta  $R_{ff}(s) = \frac{(1+0.01s)(1+0.002s)}{(1+0.001s)^2}$ . Facendo il plot di  $R_{ff}(s) \cdot G(s)$  si vede come il diagramma dei moduli sia circa pari a zero fino al termine della banda, mentre a frequenze più alte crolla a valori inferiori allo zero.

E nel caso  $G(s)$  presentasse delle incertezze?

<sup>122</sup>Non cancellarne nessuno era comunque un'ipotesi valida, al fine di ottenere un regolatore il più semplice possibile. Allo stesso modo era possibile cancellarli entrambi, per eliminare completamente il loro effetto, aggiungendo poi tre poli di fisica realizzabilità invece che due, sempre ad altissima frequenza. L'implementazione in questo caso però sarebbe diventata troppo complessa (si ricordi quanto detto a proposito di un regolatore  $R_{ff}(s) = \frac{1}{\mu}$ ), anche in vista delle difficoltà date dalla funzione di sensitività del controllo (amplificazione data dagli zeri fino a quando non entrano in gioco in poli in alta frequenza).

Si prenda come caso di studio quello in cui l'inverso del guadagno statico è errato: infatti abbiamo  $G(s) = \frac{0.8}{(1+0.01s)(1+0.002s)^2}$ , mentre  $R_{ff}(s)$  risulta uguale a quella vista nel caso precedente. In questa situazione il regolatore in avanti «lavora male», in quanto non è l'inverso della funzione corretta: ciò provoca l'ingresso di un errore, che a sua volta comporta un'azione correttiva ulteriore da parte del regolatore in feedback, permettendo di avere in uscita una risposta adeguata e corretta. Ciò è possibile grazie all'azione del regolatore integrale, il quale riesce ad abbattere il disturbo indipendentemente dalla sua ampiezza.

### 9.5.2 Utilizzo di un Prefiltro



L'idea alla base del blocco di *prefiltro* è quella, appunto, di filtrare l'ingresso, «migliorandone» le componenti frequenziali senza intaccare il loop.

Ci occuperemo in particolare di due casi, che studieremo separatamente:

1. Il prefiltro deve moderare la variabile di controllo, senza alterare le performances dinamiche del sistema in retroazione (ad esempio, il tempo di assestamento).
2. Il prefiltro deve ampliare la banda del sistema controllato.

#### 9.5.2.1 Primo Scenario: Moderazione della Variabile di Controllo e Rallentamento del Sistema

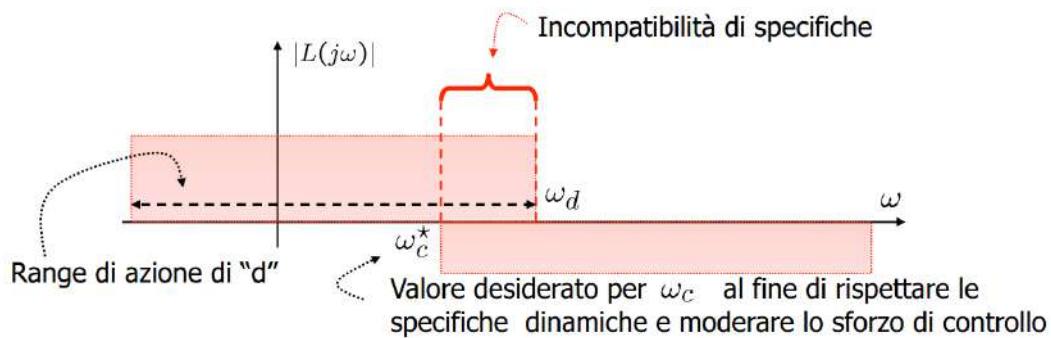
Proviamo di seguito a contestualizzare la scelta del primo tipo di prefiltro, spiegando com'è possibile, attraverso questo blocco, moderare la variabile di controllo.

Mandare in ingresso un gradino (o in generale un segnale molto ripido) significa mandare in ingresso un segnale molto ricco dal punto di vista armonico (come abbiamo spiegato nel paragrafo 6.3.1). In pratica, si dà in input al sistema uno *spike*: a causa dell'alta velocità di transizione dell'ingresso, il sistema non è in grado di inseguire il riferimento in maniera precisa e finisce per assestarsi al valore giusto solamente a regime. Inoltre, segnali bruschi danno discontinuità e introducono errori, insieme a sovraelongazioni brusche dell'uscita.

Quando ci si trova in questo scenario, l'uscita ha durante il transitorio delle variazioni brusche, e l'attuatore compie un notevole sforzo per controllare il sistema; nel complesso, questo implica che il segnale in ingresso al regolatore è molto brusco e che si ha una correzione solo attraverso la retroazione, in ritardo. Sarebbe più proficuo se lo spettro del segnale fosse «dolce» in termini di spettro di ampiezza, e ciò è facilmente raggiungibile mandando in ingresso «meno armoniche» (da un punto di vista frequenziale), cioè un segnale smussato che tenda al valore di regime.

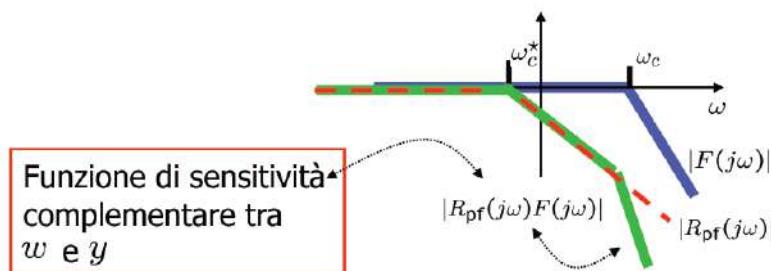
Entrando maggiormente nel dettaglio, lo scenario in cui questo prefiltro diventa necessario è il seguente:

- Le specifiche sul tempo di assestamento richiedono una pulsazione  $\omega_C^*$  a bassa frequenza;
- Il range di frequenza  $\omega < \omega_d$  nel quale è compreso il disturbo di tipo  $d$  collide con la specifica sul tempo di assestamento, poiché  $\omega_d > \omega_C^*$ ;
- L'attuatore disponibile per l'implementazione è di bassa qualità: è necessario quindi che l'andamento di  $u$  sia il più basso e controllato possibile.



Come è facile intuire, la specifica di attenuazione dei disturbi porta ad attraversare a frequenze  $\omega > \omega_d$ , mentre quelle sul tempo di assestamento e variabile del controllo richiedono un attraversamento a frequenze più basse; avendo deciso di inserire un prefiltro si dà, nel progetto del regolatore, la precedenza alla stabilità del sistema, seguendo questo vincolo piuttosto che quello sul tempo di assestamento. Questa scelta rende il sistema in retroazione piuttosto veloce, ma peggiora la situazione della funzione di sensitività del controllo.

Il progetto del prefiltro consisterebbe in sostanza nel progetto di una rete passa - basso, che filtri tutte le componenti frequentiali  $\omega > \omega_C^*$ ; bisogna fare attenzione a non porre la sua pulsazione di attraversamento troppo in bassa frequenza, poiché questo rallenterebbe eccessivamente il sistema (degrado caratteristiche dinamiche).



Poiché l'effetto del prefiltro è da una parte, rallentare il sistema, dall'altra moderare la variazione del segnale d'ingresso (al fine di moderare la variabile di controllo), anche l'uscita  $y$  del sistema beneficia del suo lavoro: un «effetto collaterale» è allora la *scomparsa* (o la diminuzione) delle *brusche sovraelongazioni* che caratterizzavano il suo transitorio.

## Progetto del Prefiltro

Praticamente, le caratteristiche del prefiltro in fase di progettazione sono le seguenti:

- Guadagno statico unitario, al fine di non alterare il valore di regime di  $w(t)$ : questo significa  $R_{pf}(0) = 1$ .
- Filtro passa - basso con pulsazione di rottura nell'intorno di  $\omega_C^*$ , che è la pulsazione richiesta dalle specifiche dinamiche. L'abbassamento della pulsazione di attraversamento  $\omega_C^*$  al di sotto della pulsazione di cross di  $L(s)$  peggiorerebbe le caratteristiche del sistema in retro, limitandone la banda.

Posti questi vincoli, derivano in maniera immediata le tipologie più semplici di prefiltri:

- Filtro del primo ordine:

$$R_{pf}(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \tau = \frac{1}{\omega_C^*}$$

È molto semplice e questo costituisce il suo «punto forte»; d'altra parte, seppur utile come filtro, non garantisce un'attenuazione molto precisa in quanto dopo la pulsazione di taglio si ha una pendenza aggiuntiva di soli  $-20 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$ .

- Filtro del secondo ordine reale:

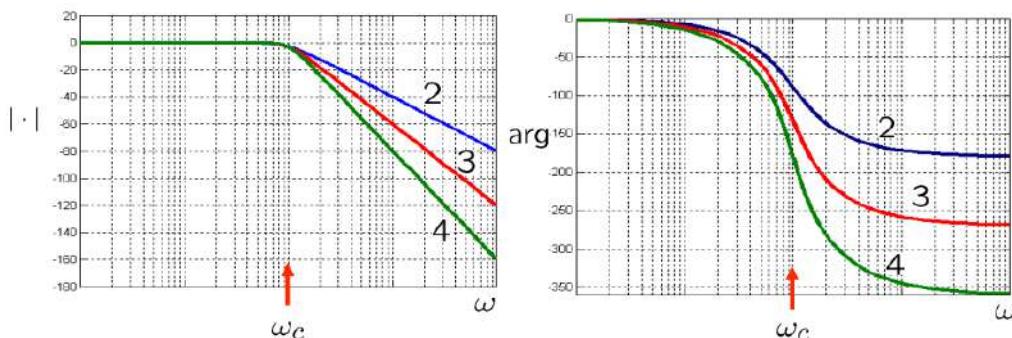
$$R_{pf}(s) = \frac{1}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad \tau_1 \approx \tau_2 = \frac{0.65}{\omega_C^*}$$

Si fa notare che, mentre da una parte potrebbe sembrare positivo fare un prefiltro con un numero maggiore di poli (in quanto il filtraggio è più preciso ed il risultato è teoricamente migliore), d'altra parte questo comporta una complicazione del sistema e quindi una maggiore difficoltà da questo punto di vista.

### 9.5.2.2 Filtri di Butterworth

Sono filtri generalmente più complessi, in quanto hanno poli complessi e/o di ordine superiore. La loro caratteristica principale è quella di massimizzare le caratteristiche filtranti: si lascia passare il più possibile il contenuto armonico in banda per poi bloccare quasi completamente le armoniche fuori banda.

Questi filtri di ordine  $n$  presentano solamente poli: in particolare il polinomio al denominatore è parametrizzato in termini di  $s'$ , dove  $s' = \frac{s}{\omega_C}$  e  $\omega_C$  è la pulsazione di fine banda. Si considera  $R_{pf}(s) = \frac{1}{B_n(s')}$ .



Si fa notare che i poli utilizzati sono complessi coniugati in quanto (come abbiamo anche già visto) le loro capacità di attenuazione sono spesso molto maggiori di quelle dei poli reali.

Ordine	$s' = \frac{s}{\omega_C}$
2	$B_2(s) = s'^2 + 1.414s' + 1$
3	$B_3(s) = (s'^2 + s' + 1)(s' + 1)$
4	$B_4(s) = (s'^2 + 0.765s' + 1)(s'^2 + 1.848s' + 1)$

### Esempio di Utilizzo

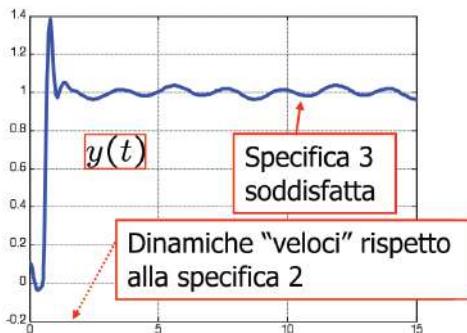
Viene dato un plant descritto da  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(0.05s+1)}$ , sul quale devono essere applicate le seguenti specifiche:

1. Errore nullo a regime su ingresso a gradino;
2. Tempo di assestamento  $T_{ass} \leq 8s$  e sovraelongazione percentuale  $S\% \leq 25\%$ ;
3. Attenuazione pari a 10dB di un disturbo sull'uscita con frequenza massima  $\omega_d = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

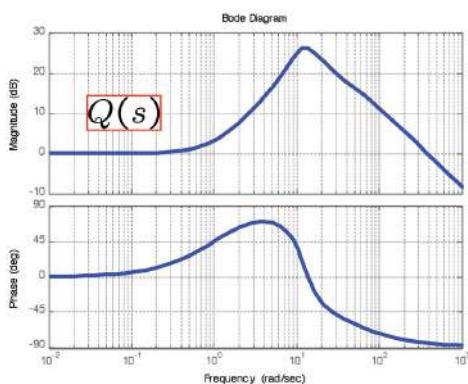
Anche in questo caso è facile notare che le specifiche su tempo di assestamento e sovraelongazione collidono con quella di attenuazione del disturbo sull'uscita. Infatti:  $S\% \leq 25\%$  corrisponde, secondo il grafico in figura 30 a pagina 67 ad un  $\delta \approx 0.4$ , da cui deriva un margine di fase  $M_f \approx 40^\circ$ ; per il tempo di assestamento risulta  $\delta\omega_n \leq \frac{3}{8} \Rightarrow \omega_n \leq \frac{3}{8 \cdot 0.4} = 0.9 \approx 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , specifica che collide con l'attenuazione di  $d$  dal momento che per ottenere quest'ultima è necessaria  $\omega_C \gg 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Bisogna rivedere quindi il progetto di  $L(s)$  cambiando  $\omega_C^*$  da  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ad una pulsazione che garantisca almeno 10dB di attenuazione in  $3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (si dà la precedenza alla stabilità del sistema).

Il regolatore in retroazione comprenderà quindi un polo nell'origine per soddisfare il vincolo sull'errore a regime, uno zero per riguadagnare fase, l'utilizzo del guadagno statico per l'impostazione dell'attraversamento in un punto adatto, insieme ad un polo di fisica realizzabilità, ottenendo nel complesso  $R(s) = 31.6 \cdot \frac{0.35s+1}{s(0.025s+1)}$ . Si osserva che l'attraversamento in alta frequenza rende il sistema più veloce rispetto alle dinamiche previste con la  $\omega_C^*$  iniziale e rispetto al vincolo sul tempo di assestamento.

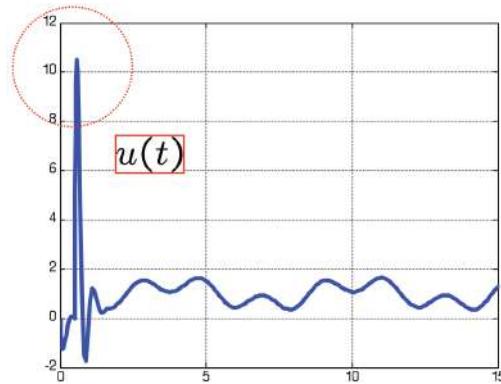
Il risultato è il seguente: si osservano i plot della risposta, con un ingresso simulato tramite la somma di due armoniche a pulsazioni  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e  $3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .



Tuttavia, nonostante la specifica di progetto sembri rispettata (perfino con qualità) osservando il plot della funzione di sensitività del controllo, e della relativa  $u(t)$ , risulta che lo sforzo di controllo effettuato per raggiungere questi risultati è eccessivo.



**Figura 61:** Bode della funzione  $Q(s)$



**Figura 62:** Plot  $u(t)$

Per diminuire lo sforzo di controllo e rallentare il sistema si decide di utilizzare un filtro di Butterworth del secondo ordine con pulsazione di taglio pari a  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

LEZIONE 33

DATA: 02/12/2015

## Esercitazione 8

## Esempio di Progetto con Rete Anticipatrice

```

%%%%%
%%%%%
%% Esercizio E2
%%%%%
%%%%%
%%%%% Plant
Np=1;
Dp=conv([1,1],conv([0.005,1],[0.005,1]));
Gp=tf(Np,Dp)

%% Specifiche statiche
%% Eoo = 0 (risposta al gradino)

%% Specifiche dinamiche
%% Dinamica dominante del sistema closed-loop data da una coppia di poli
%% cc. con omega_n = 5 e delta = 0.4 (Tempo di assestamento atteso = 4.6/2 =
%% 2.3 sec)

```

```

%% Traduzione delle specifiche in specifiche frequenziali:
%% omegac ~= 5 r/s
%% Mf ~= 40 gradi

%% Bode sistema esteso (Plant + polo nell'origine)
Ne=Np;
De=conv(Dp,[1,0])
Ge = tf(Ne,De);
bode(Ge)

%% Dall'analisi dei diagrammi si nota che serve un'azione
%% anticipatrice in
%% grado di anticipare di almeno (30^o).
%% Proviamo con una rete anticipatrice progettata per
%% via analitica

[alpha, tau]= ProgettaRA(Ne,De)
R1=tf([tau,1],[alpha*tau,1]);
R1=R1*tf(1,[1,0]);
margin(Gp*R1)

%% Valutiamo il luogo delle radici del sistema cosi' ottenuto
rlocus(R1*Gp)

%% Alcune cosiderazioni: il tempo di assestamento atteso per il sistema in
%% retro e' circa 2.3 sec. Tale tempo e' compatibile con le dinamiche associate ai due rami
%% che si dipartono dai due poli in bassa frequenza. E' poi presente un
%% ramo che va dal polo nell'origine allo zero della rete che risulta potenzialmente critico
%% dal punto di vista delle code. L'eventuale coda risulta essere
%% associata ad un polo che ha costante di tempo piu' grande di quella
%% dello zero che e' pari a 8.8sec. (a cui e' associato quindi un tempo di assestamento
%% pari a 4.6 * 8.8 ~= 40 sec). La coda e' quindi sicuramente critica nel
%% caso in cui il residuo associato al polo in quasi cancellazione non sia cosi'
%% piccolo da rendere tutto trascurabile. Inoltre la coda risulta essere
%% "dal basso"

%% Verifichiamo l'esistenza della coda analizzando la risposta al gradino
%% del sistema in retro (funzione di sensitivita' complementare)
R1=R1;
F1= R1*Gp/(1 + R1*Gp)
step(F1,30)
%% Risulta una coda di assestamento molto vistosa che
%% impone, se fattibile, un progetto per cancellazione

%%%%%%%%%%%%%
%% Progetto in cancellazione
%%%%%%%%%%%%%

%% Posizioniamo lo zero in cancellazione con il polo in -1

```

```

%% e valutiamo i diagrammi del sistema esteso cosi'
%% ottenuto ( $G_p +$  polo nell'origine + zero in cancellazione)
bode(Gp*tf([1,1],[1,0]))
%% Dal diagramma noto che il sistema risulta avere un'ottima
%% fase alla
%% pulsazione 5 r/s (~90 gradi). Teoricamente progettando
%% il guadagno
%% (che risulta libero)
%% in modo da imporre l'attraversamento a 5 r/s avrei gia'
%% un progetto
%% ammissibile (margin di fase del sistema ~90 gradi, grado relativo del
%% sistema =0). Proviamo questa strada...

%% Il guadagno del sistema esteso ad  $\omega=5$  risulta ~-14 db. Quindi
%% progetto il  $\mu$  in modo da guadagnare 14 db
mu= 10^(14/20);
R2=mu*tf([1,1],[1,0])
%% valutiamo il margine di fase
margin(R2*Gp)
%% e la risposta al gradino della funzione di sensitività complementare
F2= R2*Gp/(1 + R2*Gp)
step(F2,10)
%% Le specifiche sono soddisfatte in maniera molto "generosa".
%% Proviamo a
%% progettare un polo da inserire nel regolatore in modo da
%% peggiorare le
%% caratteristiche dinamiche della risposta (rimanendo
%% sempre in specifica)
%% ma migliorando le caratteristiche della funzione di
%% sensitività del
%% controllo. In altre parole proviamo a progettare il
%% regolatore dinamico
%% come una rete anticipatrice con lo zero in cancellazione. Nota che in
%% questo caso il progetto risulta semplificato in quanto il
%% guadagno statico risulta libero.

%% Dall'esame del diagramma di bode del sistema esteso con lo zero in
%% cancellazione
bode(Gp*tf([1,1],[1,0]))
%% notiamo che la fase alla  $\omega=5$  r/s risulta circa -90 gradi. Quindi il
%% polo puo' essere fissato in modo da "mangiarsi" fino a -50 gradi (per avere un margine
%% di fase di 40 gradi) alla  $\omega=5$ . Dai diagrammi elementari del polo noto che posso
%% scegliere  $\delta=1$  ovvero  $\tau_p = 1/5$ 
R3=tf([1,1],[1,0])*tf(1,[1/5,1]);
%% Valutiamo il diagramma di bode del sistema cosi' ottenuto per valutare
%% il valore del guadagno che garantisce l'attraversamento a 5 r/s
bode(R3*Gp)
%% Il sistema a 5r/s "perde" 17 db. Quindi progetto  $\mu$  come
mu = 10^(17/20);

```

```

R3=R3*mu;

%% valutiamo il margine di fase
margin(R3*Gp)
%% e la risposta al gradino della funzione di sensitivita' complementare
F3= R3*Gp/(1 + R3*Gp)
step(F3,10)

%% Confronto delle risposte dei tra regolatori
step(F1,10)
hold on
step(F2,10)
step(F3,10)
hold off
%% Il primo regolatore (F1) mostra, come già notato, una coda di assestamento che viola la specifica sul tempo di assestamento. Il secondo regolatore (F2) sembra il migliore, poichè dà un buono smorzamento ed è molto veloce; infine abbiamo il terzo regolatore (F3).

%% Confronto delle tre funzioni di sensitivita' del controllo
Q1=R1/(1+R1*Gp);
Q2=R2/(1+R2*Gp);
Q3=R3/(1+R3*Gp);
bode(Q1)
hold on
bode(Q2)
bode(Q3)
hold off
%% Dopo aver osservato gli step delle tre funzioni di anello (in retroazione), si plottano anche le funzioni di sensitività del controllo. Da questo studio emerge che il secondo regolatore, avendo grado relativo zero, amplifica fino a 10dB in alta frequenza; le altre due sono quasi equivalenti (mentre in bassa frequenza tutte e tre si assomigliano).

%% Confronto dei tre "sforzi" di controllo a fronte dell'applicazione
%% del segnale di riferimento a gradino unitario
step(Q1,10)
hold on
step(Q2,10)
step(Q3,10)
hold off

%% Valutiamo come un disturbo ad alta frequenza (disturbo di misura ottenuto
%% comando due armoniche a frequenze 150 e 200 r/s) viene amplificato/attenuato
%% sull'ingresso di controllo
t=[0:0.001:30];
n=sin(200*t)+sin(150*t);
u1=lsim(Q1,n,t);
u2=lsim(Q2,n,t);
u3=lsim(Q3,n,t);
figure(1)

```

```

plot(t,u1,'blue')
hold on
plot(t,u2,'red')
plot(t,u3,'green')
hold off
figure(2)
plot(t,n)
%% questa "prova del nove" mostra come in realtà il secondo regolatore non sia robusto all'
    %% ingresso di disturbi in alta frequenza, perchè (come abbiamo detto) li amplifica. Di
    %% conseguenza, il terzo regolatore è quello migliore.

```

Nota: i «diagrammi elementari del polo» a cui ci si riferisce corrispondono (probabilmente) alla figura [57 a pagina 215](#).

Questo tipo di progetto costituisce un'alternativa a quello visto nel paragrafo [9.3.2.4 a pagina 223](#).

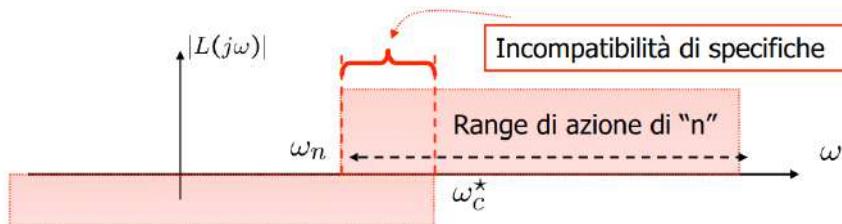
LEZIONE 34

DATA: 03/12/2015

### 9.5.2.3 Secondo Scenario: Accelerazione del Sistema Controllato e Ampliamento della Banda

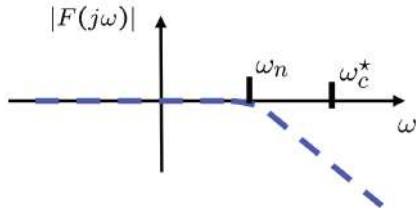
Descriveremo in questo capitolo il secondo tipo di prefiltro, tenendo a mente che il suo utilizzo è molto meno frequente rispetto a quello del primo tipo.

Si può scegliere di utilizzare un prefiltro del secondo tipo quando si ha un *upper bound* sulla pulsazione di attraversamento  $\omega_C^*$ , dovuta ad esempio a disturbi di misura in bassa frequenza o alla presenza di ritardi sul sistema controllato; l'immediata conseguenza di questo vincolo è la limitazione della massima velocità di risposta del sistema. In contemporanea, la presenza di specifiche sul tempo di assestamento impongono una pulsazione di cross maggiore del vincolo di cui sopra.

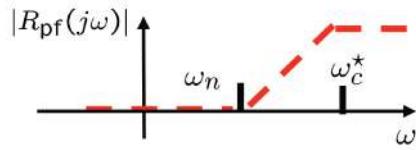


Come di consueto, la scelta in questa situazione è quella che privilegia la stabilità del sistema: si progetta un regolatore in feedback che attraversi a basse frequenze, in modo da garantire un'adeguata attenuazione del disturbo di misura. La dinamica risultante del sistema è «lenta» rispetto a quella richiesta dalle specifiche dinamiche.

Si passa poi al progetto del prefiltro, il quale viene modellato come un sistema di tipo passa-alto: la pulsazione di taglio dello zero (che amplifica) è quella data dal vincolo sul tempo di assestamento, mentre quella del polo (pulsazione di termine banda) corrisponde alla  $\omega_C^*$ .

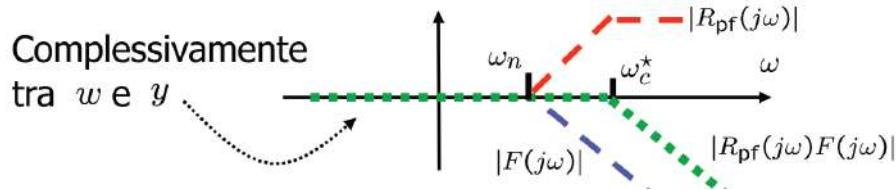


**Figura 63:** Plot di  $|F(j\omega)|$  dopo l'applicazione del regolatore in feedback



**Figura 64:** Plot dell'andamento del prefiltro di secondo tipo

Nel complesso, tutte le componenti frequenziali nell'intervallo  $\omega_n < \omega < \omega_c^*$  vengono amplificate, ottenendo il risultato mostrato nella figura sottostante.



Si fa presente che, nel caso fosse necessaria unicamente un'accelerazione del sistema (senza trovarsi nello scenario appena descritto), la soluzione consigliata è quella di utilizzare un regolatore feedforward invece che un prefiltro.

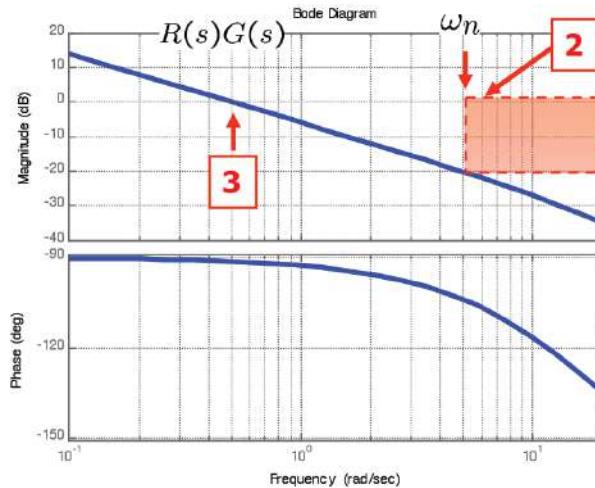
### Esempio: Progetto del Prefiltro

Viene dato un plant descritto da  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(0.05s+1)}$ , sul quale devono essere applicate le seguenti specifiche:

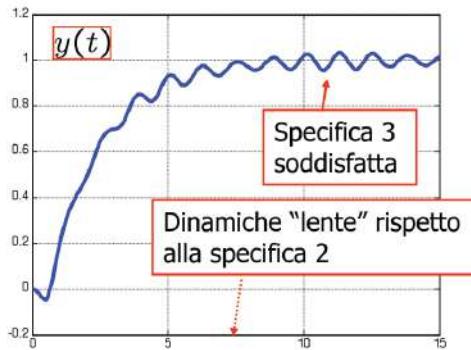
1. Errore nullo a regime su ingresso a gradino;
2. Tempo di assestamento  $T_{ass} \leq 2s$  e sovraelongazione percentuale  $S\% \leq 25\%$ ;
3. Attenuazione pari a 20dB di un disturbo di misura che agisce nello spettro  $\omega_n \geq 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Si osserva che le specifiche su tempo di assestamento e sovraelongazione collidono con quella di attenuazione del disturbo di misura. Infatti:  $S\% \leq 25\%$  corrisponde, secondo il grafico in figura 30 a pagina 67 ad un  $\delta \approx 0.4$ , da cui deriva un margine di fase  $M_f \approx 40^\circ$ ; per il tempo di assestamento risulta  $\delta\omega_n \leq \frac{4.6}{2} \Rightarrow \omega_n \leq \frac{4.6}{2 \cdot 0.4} = 5.75 \approx 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , specifica che collide con l'attenuazione di  $n$  dal momento che per ottenere quest'ultima è necessaria  $\omega_c \ll 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Bisogna rivedere quindi il progetto di  $L(s)$  cambiando  $\omega_c^*$  da  $6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  ad una pulsazione che garantisca almeno 20dB di attenuazione in  $5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  (si dà la precedenza alla stabilità del sistema).

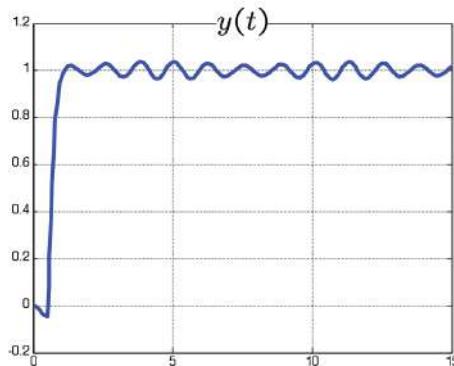
Il regolatore in retroazione si realizza mediante un polo nell'origine per soddisfare il vincolo sull'errore a regime, e l'utilizzo del guadagno statico per l'imposizione dell'attraversamento in un punto adatto, ottenendo nel complesso  $R(s) = \frac{1.41}{s}$ . Si osserva che l'attraversamento in bassa frequenza rende il sistema più lento rispetto alle dinamiche previste con la  $\omega_c^*$  iniziale e, allo stesso tempo, rispetto al vincolo sul tempo di assestamento.



Facendo un plot della funzione di uscita è possibile osservare come il disturbo di misura sia sufficientemente attenuato, in accordo con le specifiche richieste. Si nota anche, tuttavia, che il tempo di assestamento è pari circa a 8s, molto maggiore di quello richiesto.



Per rispettare infine anche questa specifica si progetta un prefiltro fatto da uno zero in bassa frequenza, seguito da un polo, secondo il modello dei sistemi passa - alto. Precisamente, si decide di porre la pulsazione di intervento dello zero  $\omega_Z = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  e quella del polo pari a  $\omega_P = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .



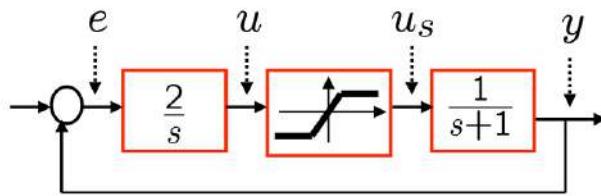
È possibile vedere il cambiamento della curva per quanto riguarda il tempo di assestamento, mentre l'attenuazione del disturbo rimane invariata.

## 9.6 Wind up

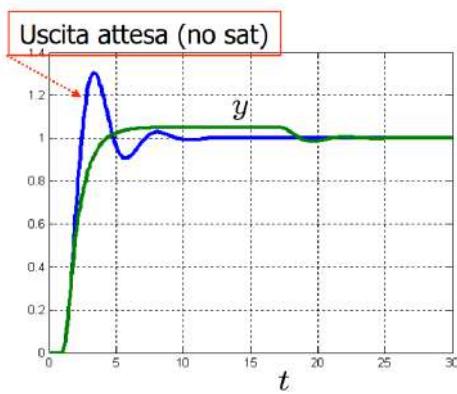
Ci si trova in questo scenario quando sono presenti *simultaneamente*:

- Un regolatore integrale<sup>123</sup>, ovvero un regolatore con un polo nell'origine;
- Saturazione della variabile di controllo (in quanto  $u(t)$  ha ampiezza massima e minima limitate, dovute a vincoli tecnologici dell'attuatore)<sup>124</sup>.

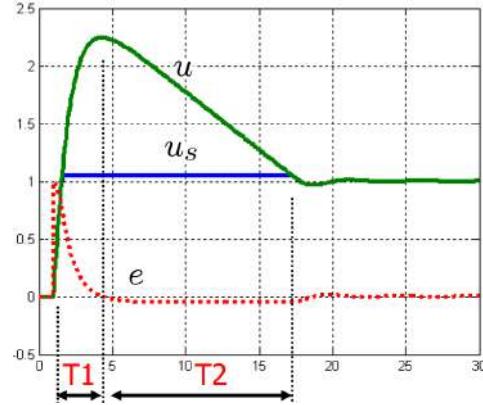
Si definiscono infatti gli estremi entro cui il sistema lavora in regione lineare come  $[-u_M, u_M]$ , e quando il segnale in uscita dal regolatore (la  $u(t)$  appunto) non si trova all'interno dell'intervallo, questo viene sostituito in ingresso al plant dal valore di uno dei due estremi.



Si prenda ad esempio il sistema  $\frac{1}{s+1}$ , controllato da un regolatore integrale del tipo  $\frac{2}{s}$ : si suppone che il sistema attraversi a basse frequenze, e che le specifiche di progetto siano rispettate. Analizziamo, di seguito, il transitorio dell'uscita  $y(t)$ .



**Figura 65:** Plot dell'uscita del sistema



**Figura 66:** Plot di  $u(t)$

Osservando la figura (66) possiamo vedere che vi sono due fasi distinte nel transitorio:

- La prima fase, detta  $T_1$ , vede un *errore positivo* e l'uscita del sistema inizialmente nulla (figura (65)): si consideri che la curva verde mostra l'andamento effettivo del segnale).

<sup>123</sup>Ricordiamo, in questo caso, che  $u(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$ .

<sup>124</sup>Non si è mai considerato questo aspetto in maniera precisa durante il corso, ma si sono fatti alcuni sforzi verso l'implementazione di regolatori che moderassero la variabile di controllo. In altre parole, si è cercato di fare in modo che questa rimanesse sempre nella sua regione lineare di funzionamento. Si deve comunque tenere conto dell'eventualità della saturazione.

In particolare, l'errore è nullo in un primo istante, diventando unitario appena dopo l'ingresso del segnale a gradino; il segnale in uscita arriva dopo un certo ritardo. Ci si aspetta, durante questo primo intervallo, che la  $u$  cresca di molto, in quanto il regolatore integrale si innesca, lavorando su una quantità positiva: il suo andamento effettivo è mostrato dalla curva verde, mentre quella blu indica che il sistema prende in ingresso il massimo valore scelto per la saturazione.

Questa situazione può anche essere descritta dicendo che il plant non riceve più in ingresso il segnale elaborato dal regolatore: l'uscita è *open loop*. Inoltre, poiché  $y(t)$  viene retroazionata, anche l'errore evolverà da quel momento come se fosse *open loop*. L'uscita del sistema è governata dall'ampiezza  $u_M$  e dalla dinamica del plant; non si ha più alcun controllo sulla retroazione.

- Vi è un istante in cui l'errore cambia di segno, in prossimità della sovraelongazione presente in uscita (caso ideale).
- La seconda fase, detta  $T_2$ , è caratterizzata da un *errore negativo*: ne consegue che l'uscita del regolatore diminuisce, «de-saturando».

Il valore di  $u$  continua a diminuire, come mostrato dalla curva verde in figura (66), ma non vi è effettivo controllo sul sistema fino al momento in cui il suo valore non torna all'interno dell'intervallo di funzionamento lineare. La durata di questo intervallo è direttamente proporzionale al valore massimo raggiunto dalla variabile di controllo durante la prima fase.

L'uscita  $y$  raggiunge il valore di regime al termine di  $T_2$ , mentre prima si trovava ad un valore diverso dettato dalla saturazione del sistema. Questo è chiaramente un deterioramento del comportamento del sistema: è possibile adottare degli accorgimenti per correggere questo fenomeno?

Bisogna inoltre rendersi conto che, a causa della saturazione, l'azione integrale del regolatore durante tutto l'intervallo non solo è inutile (in quanto non viene trasmessa a valle) ma è anche controproducente, in quanto più aumenta il valore della  $u$ , più tempo sarà necessario per la «scarica» successiva. È possibile impedire che questo avvenga, ad esempio entrando in zona di funzionamento lineare senza aspettare la fine del periodo  $T_2$ ? O, meglio ancora, è possibile fermare l'azione del regolatore subito dopo il suo ingresso in zona di saturazione senza cambiare completamente il suo funzionamento?

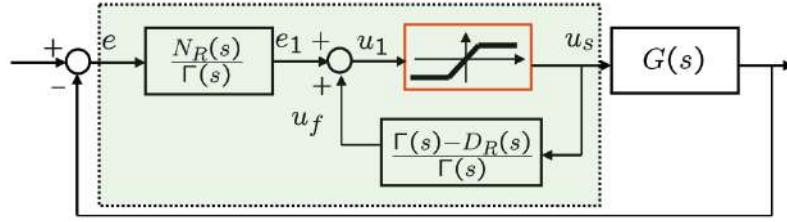
### 9.6.1 Realizzazione del Circuito Anti - *Wind up*

Si parte dal regolatore come questo è stato progettato nelle fasi precedenti, indipendentemente dalla sua tipologia (sempre considerando che questo abbia un polo nell'origine); si procede a questo punto con una modifica progettuale che permette al regolatore di entrare in zona lineare quando si ha il cambiamento di segno dell'errore.

A questo proposito, si sceglie un polinomio arbitrario  $\Gamma(s)$  tale che

- I suoi poli siano tutti a parte reale negativa;
- Il suo grado relativo sia almeno uguale al grado relativo del denominatore del regolatore (in altre parole, deve avere almeno tanti poli quanti ne ha il regolatore);
- Sia verificata la disequazione  $\frac{N_R(0)}{\Gamma(0)} > 0$ .

La modifica da implementare al sistema è la seguente:

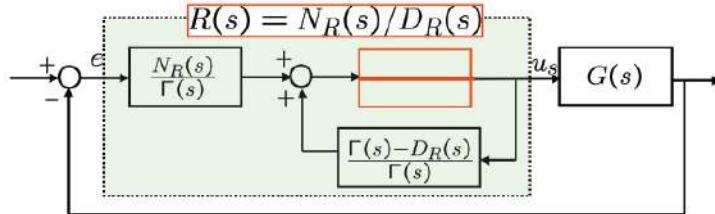


$$u_s = \begin{cases} u_1 & |u_1| \leq u_M \\ u_M \cdot \text{sign}\{u_1\} & |u_1| > u_M \end{cases}$$

Il funzionamento del sistema dopo la modifica è il seguente:

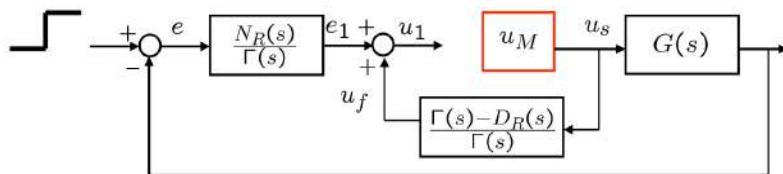
- Quando si è in zona lineare:

Il «blocco rosso» della saturazione si comporta come un cortocircuito e l'ingresso del plant non è influenzato dalle modifiche alterate, poiché risulta  $U(s) = \frac{N_R(s)}{\Gamma(s)} \cdot E(s) + \frac{\Gamma(s)-D_R(s)}{\Gamma(s)} \cdot U(s) \Rightarrow U(s) \cdot \Gamma(s) = N_R(s) \cdot E(s) + U(s) \cdot \Gamma(s) - U(s) \cdot D_R(s)$ , da cui  $N_R(s) \cdot E(s) = D_R(s) \cdot U(s) \Rightarrow \frac{N_R(s)}{D_R(s)} \cdot E(s) = U(s)$ , come in un sistema senza modifiche.



- Quando si è in saturazione:

Il blocco inserito non impedisce al sistema di saturare, quanto più, come già evidenziato, permette di evitare che il regolatore continui a integrare il segnale di ingresso una volta superata la soglia \$u\_M\$.



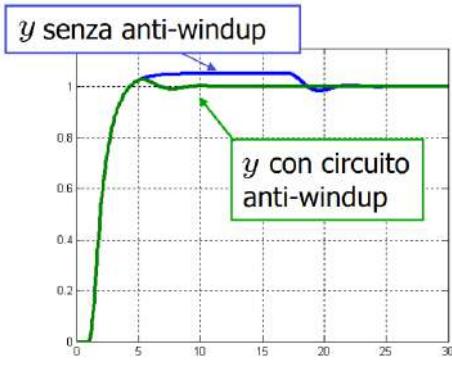
Analizziamo il comportamento del sistema in caso di saturazione positiva.

Risulta  $\frac{\Gamma(0)-D_R(0)}{\Gamma(0)} = \mu = 1^{125}$ , per cui al termine del transitorio su quella funzione, il valore in uscita sarà pari a quello in ingresso (perché il sistema è asintoticamente stabile come avevamo presupposto). La velocità del transitorio dipende dalle scelte fatte per  $\Gamma(0)$ . Da questa retroazione risulta  $u_1(t) = e_1(t) + u_M$ .

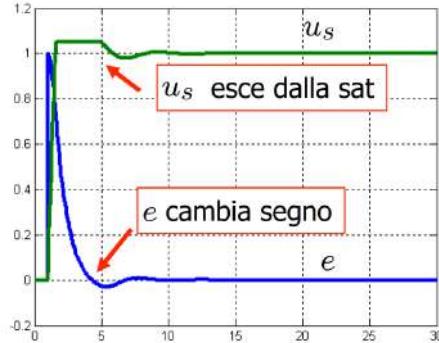
<sup>125</sup>Il motivo è il seguente: risulta  $D_R(0) = 0$  in quanto si è nell'ipotesi di regolatore integrale.

Non appena  $e(t)$  cambia segno (punto che coincide, in figura (65), con l'inizio del «pianerottolo»), anche  $e_1(t)$  cambia segno (poiché  $\frac{N_R(0)}{\Gamma(0)} = \mu > 0$  per ipotesi): ne consegue che  $u_1(t) < u_M$ . Allora il sistema rientra in zona di funzionamento lineare.

Facendo il confronto con le figure (67), (68) vediamo come risultano l'uscita e la variabile di controllo del sistema una volta applicato il circuito anti - wind up.



**Figura 67:** Confronto delle uscite del sistema



**Figura 68:** Confronto delle variabili di controllo

LEZIONE 35

DATA: 03/12/2015

## Esercitazione 9

### Prima Parte: Esempio di Progetto con Rete Ritardatrice

```
%%%%%
Esercizio E3
%%%%%

%%% Plant controllato
Np= [0.0336];
Dp= poly([-0.1,-0.3,-2]);
Gp=tf(Np,Dp);

%% Specifiche: errore a regime a fronte di un riferimento a gradino <= al
%% 10%. Ta = 46 sec, Mf=50 gradi.
%% ==> omega_c =0.2 r/s M_f = 50 gradi.

%% Specifica statica-soluzione 1: no azione integrale
```

```

%% Si calcola il valore del guadagno statico da imporre attraverso il teorema del valore finale
, imponendo lim (per s>0) di s*E(s)<0.1*W, dove W è l'ampiezza del gradino in ingresso
. Successivamente, si sostituisce E(s)=S(s)*W/s e poi S(s)=1/R(s)/G(s) (si considerano
ovviamente i moduli delle funzioni calcolate in 0).
%% se la specifica richiede anche l'attenuazione di un disturbo sull'uscita, ad esempio un'
attenuazione di 20 volte, si utilizza il teorema del regime permanente. Anche in questo
caso (stiamo considerando un disturbo definito spettralmente di ampiezza max Dmax e
frequenza max omega_d=5rad/s) la specifica richiede l'imposizione di un determinato
guadagno all'interno del regolatore statico, calcolabile come segue:
%%Dmax*|S(jomega_d)|<Dmax/20, dove poi si sostituisce a |S| 1/|L|/|R|, come per la
specifica sull'ingresso. Si considera omega_d come pulsazione in quanto vale come caso
peggiore.
mu=16;
Ge=mu*Gp;
bode(Ge)
%% Dall'analisi del diagramma di bode vediamo che il sistema esteso
%% alla pulsazione omega=0.2 r/s amplifica di 10 db e sfasa in ritardo
%% di -104 gradi ===> Progetto compatibile con l'uso di una rete ritardatrice (scenario A):
    per avere Mf pari a 50, arg{Ge(omega_c)}=-125°, per cui si possono perdere circa 20°
    attraverso la rete. L'attenuazione richiesta nel contempo è 10 dB.
%%come primo metodo possiamo provare ad utilizzare il tuning pratico, imponendo log(
    alpha)=10dB: nella rete ritardatrice interviene prima il polo, e "alpha dopo" lo zero. In
    questo modo si impone che "alpha dopo" l'intervento del polo, questo abbia dato 10dB di
    attenuazione; così può intervenire lo zero e fermare questo andamento.
%% si calcola poi tau attraverso l'imposizione della pulsazione di attraversamento-> in
    particolare omega del polo è circa una decade prima di omega_c desiderata. Allora 1/(
    alpha*tau)=10*0.2 rad/s
%% Proviamo inizialmente a progettarla mediante le formule di inversione
[alpha,tau]=ProgettaRR(mu*Np,Dp);
Nr1=[alpha*tau,1];
Dr1=[tau,1];
R1=mu*tf(Nr1,Dr1);

rlocus(R1*Gp)
%% Dall'analisi del luogo delle radici si ipotizza che la rete progettata
%% non e' critica dal punto di vista delle code di assestamento (infatti lo zero della rete
%% risulta a sinistra della dinamica dominante del sistema closed loop).
%% Verifichiamolo valutando la risposta al gradino della funzione di
%% sensitività complementare
F1=R1*Gp/(1+ R1*Gp);
step(F1)

```

## Seconda Parte: Progetto per Cancellazione

È dato il plant  $G(s) = \frac{0.00336}{(s+0.1)(s+0.03)(s+2)}$ . Le specifiche richieste sono le seguenti:

- Errore nullo a regime su ingresso a gradino;

- Imposizione sulla dinamica in retroazione di  $\delta = 0.65$ ,  $\omega_n = 0.08 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Immediatamente si deduce la necessità di un polo nell'origine all'interno del regolatore statico ( $R_s = \frac{1}{s}$ ,  $\mu$  libero) e l'imposizione della  $\omega_C^* = 0.08 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Si procede quindi al progetto del regolatore dinamico.

Risultano  $|G_e(j\omega_C^*)|_{\text{dB}} \approx 4\text{dB}$ ,  $\arg\{G_e(j\omega_C^*)\} \approx -200^\circ$ : volendo imporre un margine di fase di  $65^\circ$  è necessario recuperare  $\Delta\phi^* = 85^\circ$ ; per avere l'attraversamento alla stessa pulsazione in cui il margine di fase è quello richiesto,  $M^* = -4\text{dB}$ .

Per recuperare fase è necessario agire imponendo due zeri (anche se matematicamente sembra che uno solo possa bastare). In questa sede tuttavia svolgeremo i calcoli e realizzeremo il progetto utilizzando un solo zero, così da comprendere il procedimento. Come scegliere quindi il polo da cancellare?

- Il polo collocato in  $-2$  è troppo in «alta frequenza» e per questo viene scartato (sarebbe una buona scelta come secondo polo da cancellare nel caso di un progetto per cancellazione con due zeri).
- Si prova a cancellare il polo in  $0.1$ , approfittando del fatto che si ha anticipo di fase già prima della pulsazione di intervento: questa strada si rivela tuttavia errata in quanto risulta che la fase guadagnata nella pulsazione di interesse è insufficiente ( $45^\circ$  invece che  $85^\circ$ ).
- Rimane infine l'ultimo polo: si pone quindi lo zero in  $0.03$ .

Si valuta lo sfasamento guadagnato attraverso questo zero considerando il grafico (57): calcoliamo un  $\delta = \frac{\omega'}{\omega_b} = \frac{0.08}{0.03} \approx 3$ , da cui risulta uno sfasamento di circa  $75^\circ$ , ancora insufficiente. Ciò ribadisce che la strada corretta da seguire per questo tipo di progetto è quella che comprende due zeri nel regolatore.

Si considera pertanto un progetto «classico» di rete anticipatrice, mettendo da parte l'idea precedente di un progetto per cancellazione. È possibile «sintonizzare» il picco di massimo sfasamento positivo attraverso la formula  $\arcsin\left\{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right\} = 85^\circ$ , alla pulsazione  $\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$  (si veda, in caso di necessità di chiarimenti, il paragrafo 9.3.2 a pagina 216). Si ricorda che lo sfasamento totale va diviso fra le due reti anticipatrici.

Parallelamente, ci si disinteressa completamente dello sfasamento positivo introdotto dalla rete, grazie al fatto che il guadagno è libero: al termine del progetto si imporrà infatti  $|G_e(j\omega_C)| = -\mu$ .

Questo tipo di progetto è il migliore, quando le condizioni lo permettono, in quanto massimizza il valore di  $\alpha$  compatibilmente con la richiesta di anticipo di fase. Una delle sue conseguenze positive è quella di dare poca amplificazione, il che si riflette anche su un andamento positivo della  $Q(s)$ .