Markus Heizenreder-Reitz

Martin Niemöller Schule Wiesbaden
Informatik – Kurs/Klasse E1
25.08.2025

Informationsblatt Nr. 1

Zahlensysteme

In der westlichen Welt werden Zahlen normalerweise im *Zehnersystem* dargestellt. Vermutlich ist dies eine Konsequenz aus der Tatsache, dass ein Mensch in der Regel *zehn* Finger besitzt und diese in der Ihnen bereits seit Jahren vertrauten Weise zum Zählen verwendet.

Dies gilt aber nicht unbedingt für alle Kulturen und Völker wie das Beispiel der *Oksapmin*[1] zeigt. Bei diesen war bis zum Kontakt mit der Zivilisation (ca. 1940) statt der Zahl zehn eine andere von besonderer Bedeutung für das Zählen. Die *Oksapmin* beschränkten sich nicht auf die Verwendung ihrer Finger, sondern integrierten Teile des Oberkörpers in ihr Zählschema, wodurch problemlos bis 27 gezählt werden kann[2].

Zehnersystem im Detail

In der frühen Phase Ihrer Schullaufbahn haben Sie bereits den Aufbau einer Zahl im Zehnersystem kennengelernt. Eine solche Zahl besteht aus aneinander gereihten *Ziffern*, wobei die am weitesten rechts stehende als „Einer“, die links darauf folgende als „Zehner“, die darauf folgende als „Hunderter“ usw. bezeichnet wird. Im Zehnersystem kann jede Ziffer eines der *zehn* möglichen *Symbole* 0, 1, 2, ..., 9 sein.

Jede Ziffernposition innerhalb einer Zahl besitzt eine bestimmte *Wertigkeit*. Diese ergibt sich aus dem Ihnen (mittlerweile eher unbewusst) bekannten Berechnungsschema, welches im Fall der Zahl 1234 wie folgt auszuführen ist:

$$1234 = \mathbf{1} \cdot 1000 + \mathbf{2} \cdot 100 + \mathbf{3} \cdot 10 + \mathbf{4} \cdot 1$$

Deutlicher wird das Vorgehen bei Verwendung der *Potenzschreibweise*:

$$1234 = \mathbf{1} \cdot 10^3 + \mathbf{2} \cdot 10^2 + \mathbf{3} \cdot 10^1 + \mathbf{4} \cdot 10^0$$

Dadurch werden folgende Tatsachen erkennbar:

1. Die *Wertigkeit* der i-ten Stelle im Zehnersystem ist 10^i.
2. Die Stellen einer Zahl werden *von rechts beginnend* und startend mit der Positionsnummer 0 durchnummeriert.
3. Der Wert einer Zahl im Zehnersystem ergibt sich, indem die *zur jeweiligen Stelle gehörende Ziffer mit der Wertigkeit der Stelle multipliziert und die Ergebnisse aufsummiert* werden.

Die *Basis* eines Stellenwertsystems ist die Basis der Potenzierung, mit deren Ergebnis jeweils die Multiplikation mit dem jeweiligen Stellenwert durchgeführt wird. Im Fall des Zehnersystems ist dies die Zahl 10 – dies erklärt den Namen des üblicherweise im Alltag verwendeten Zahlensystems.

Umrechnung von einem anderen Zahlensystem ins Zehnersystem

Neben dem Zahlensystem zur Basis 10 existieren beliebig viele weitere Zahlensysteme, die sich bezüglich der verwendeten Basis unterscheiden. Das in der Informatik häufig genutzte *Binärsystem* basiert auf der Basis 2.

Im Zusammenhang mit den für die einzelnen Ziffern einer Zahl im jeweiligen Zahlensystem zur Verfügung stehenden *Symbolen* ist Ihnen möglicherweise schon eine weitere Gesetzmässigkeit aufgefallen: In einem Zahlensystem zur Basis b gibt es nur die Symbole 0, 1, ..., $(b-1)$. Für das Binärsystem mit der Basis $b = 2$ bedeutet dies, dass Zahlen in diesem System nur aus den Ziffern 0 und 1 zusammengesetzt sind.

[1] Weitere Informationen sind zum Beispiel auf den Seiten von *Geoffrey Saxe* unter der Adresse `https://www.culturecognition.com` zu finden.

[2] Ein genauerer Blick in die auf der angegebenen Webseite zu findende Abbildung ergibt, dass eigentlich *dreißig* verschiedene Stellen des Oberkörpers zum Zählen verwendet werden. Für mehrere Stellen sind Namen und Gesten aber identisch, sodass diese nicht unterscheidbar sind.

Um auszudrücken, dass eine Zahl in einem anderen als dem Zehnersystem zu interpretieren ist, wird als zusätzliche Information die *verwendete Basis in tiefgestellter Schreibweise hinter der eigentlichen Zahl notiert*. Die Umrechnung der Ziffernfolge in das Zehnersystem erfolgt dann nach dem oben beschriebenen Schema, nur dass sich nun die Wertigkeit der i-ten Stelle durch die von 10 abweichende Basis – für das betrachtete Beispiel ist dies 2 – ergibt.

$$101011_2 = \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = 43$$

Ganz allgemein lässt sich der Wert einer Ziffernfolge in einem Zahlensystem zur Basis b berechnen, indem der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{n} z_i \cdot b^i = z_0 \cdot b^0 + z_1 \cdot b^1 + ... + z_n \cdot b^n = z_n \cdot b^n + ... + z_1 \cdot b^1 + z_0 \cdot b^0$$

betrachtet wird. Der Bezeichner z_i steht dabei für die Ziffer an der i-ten Stelle der umzuwandelnden Zahl und das Zeichen $\sum$ ist eine *Kurzschreibweise für die durchzuführende Summation*.

Umrechnung vom Zehnersystem in ein anderes Zahlensystem

Zwar kann durch dieses Rechenschema eine Zahl auf einfache Weise aus einem anderen Zahlensystem ins Zehnersystem umgerechnet werden. Der umgekehrte Weg, beispielsweise die Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Binärzahl, ist bisher aber nur durch geschicktes Ausprobieren und Überlegen beschreitbar.

Um diesen Zustand zu beseitigen, wird nun ein Verfahren beschrieben, mit welchem eine Zahl im Zehnersystem in eine Zahl eines anderen Zahlensystems umgewandelt werden kann. Durch *geschicktes Ausklammern* im vorherigen Beispiel ergibt sich

$$101011_2 = \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 = ((((\mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{0}) \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{0}) \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{1}$$

Zur Herleitung eines Verfahrens – in der Informatik wird üblicherweise statt Verfahren der Begriff *Algorithmus* verwendet – welches die Umwandlung einer Zahl im Zehnersystem in die Darstellung im Zahlensystem zur Basis b ermöglicht, ist ein Rückgriff auf die Mathematik der Unterstufe notwendig – genauer gesagt wird die *Division mit Rest* benötigt.

Übertragen auf die *geschickte Umformung* ist erkennbar, dass durch die Ermittlung des Rests, welcher bei der Division durch die Basis des Zielzahlensystems entsteht, jeweils die *am weitesten rechts stehende Ziffer im Zielzahlensystem* ermittelt wird. Die verbleibenden, noch zu betrachtenden, Ziffern entsprechen dem Ergebnis der ganzzahligen Division.

$$\underbrace{((((\mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{0}) \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{0}) \cdot 2 + \mathbf{1})}_{\texttt{Divisionsergebnis}} \cdot 2 + \underbrace{\mathbf{1}}_{\texttt{Rest}}$$

Die Umwandlung der Dezimalzahl 4711 in die zugehörige Binärzahl geschieht somit wie nachfolgend dargestellt.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
4711 & : & 2 & = & 2355 & R & 1 \\
2355 & : & 2 & = & 1177 & R & 1 \\
1177 & : & 2 & = & 588 & R & 1 \\
588 & : & 2 & = & 294 & R & 0 \\
294 & : & 2 & = & 147 & R & 0 \\
147 & : & 2 & = & 73 & R & 1 \\
73 & : & 2 & = & 36 & R & 1 \\
36 & : & 2 & = & 18 & R & 0 \\
18 & : & 2 & = & 9 & R & 0 \\
9 & : & 2 & = & 4 & R & 1 \\
4 & : & 2 & = & 2 & R & 0 \\
2 & : & 2 & = & 1 & R & 0 \\
1 & : & 2 & = & 0 & R & 1
\end{array}$$

Werden die ermittelten Reste *beginnend mit der letzten Berechnungszeile* von *links nach rechts* aufgeschrieben, so ergibt sich

$$4711 = 1001001100111_2$$

Das Ergebnis lässt sich überprüfen, indem eine Rückumwandlung ins Zehnersystem durchgeführt wird:

$$\begin{array}{rcl}
1001001100111_2 & = & \mathbf{1} \cdot 2^{12} + \mathbf{0} \cdot 2^{11} + \mathbf{0} \cdot 2^{10} + \mathbf{1} \cdot 2^9 + \mathbf{0} \cdot 2^8 + \mathbf{0} \cdot 2^7 + \mathbf{1} \cdot 2^6 + \mathbf{1} \cdot 2^5 + \mathbf{0} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \\
& = & 4096 + 512 + 64 + 32 + 4 + 2 + 1 \\
& = & 4711
\end{array}$$