ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৪
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: প্রাইমারি (৩য়-৫ম শ্রেণি) **সময়: ২ ঘণ্টা**

Category: Primary (Class 3-5) **Time: 2 Hours**

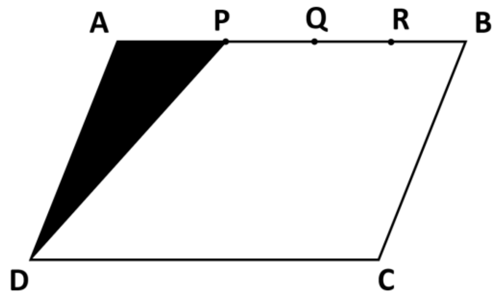
সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রতি সমস্যার পার্শ্ববর্তী ব্যবধিতে তার পূর্ণমান দেয়া রয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি অংক ইংরেজিতে লেখা রয়েছে। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। খসড়ার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও নিবন্ধন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

[Problems are sorted according to its difficulty. Full marks are written inside the bracket at the end of each problem. All numbers except the Question number are written in English. Answers have to be written on the main answer script. Back side of the answer script can be used for doing roughs. Writing name and registration number on each extra page is mandatory.]

১. দুই-অংকের একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার দুইটি অংকই ভিন্ন। সংখ্যাটির শেষ অংকটি প্রথম অংক থেকে $\mathbf{7}$ কম। সংখ্যাটির সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো। [6]

In a two-digit positive integer, both of the digits are different. The last digit of the number is $\mathbf{7}$ less than the first digit. Find the minimum value of the number.

২. $\boldsymbol{ABCD}$ একটি সামান্তরিক যেখানে $\boldsymbol{AP = PQ = QR = RB}$। ছায়াকৃত অংশের ক্ষেত্রফল $\mathbf{9}$ বর্গএকক হলে, $\boldsymbol{PBCD}$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কত? [8]



$\boldsymbol{ABCD}$ is a parallelogram where $\boldsymbol{AP = PQ = QR = RB}$. If the area of the shaded region is $\mathbf{9}$ square unit, then what is the area of the quadrilateral $\boldsymbol{PBCD}$?

৩. পায়েল ব্ল্যাকবোর্ডে পর পর বেশ কিছু অংক লিখলো। লেখার পর দেখলো সে একটি $\mathbf{9}$ অংকের সংখ্যা লিখেছে। সে আরো দেখলো সংখ্যাটি $\mathbf{41}$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। কিন্তু পায়েলের এত বড় সংখ্যা পছন্দ না। তাই সে ইচ্ছামতো দুইটি অংক মুছে দিলো। প্রত্যয় একটু পর রুমে এসে দেখলো বোর্ডে পর পর লেখা রয়েছে $\mathbf{30, 032, 99}$। পায়েলের প্রথমে লেখা সংখ্যাটির সম্ভাব্য সকল মান বের করো। [10]

Payel wrote some digits one by one on blackboard. He noticed that he had written a $\mathbf{9}$ digit number. He also noticed that the number is perfectly divisible by $\mathbf{41}$. But Payel dislikes long numbers. So, he randomly removes two digits. Prattya enters the room and finds out $\mathbf{30}$, $\mathbf{032}$, $\mathbf{99}$ are written on the blackboard one after another. Find out all possible numbers Payel could have written at first.

8. কিছু শহরের মধ্যে রাস্তা বানানো হচ্ছে। রাস্তাগুলো এমনভাবে বানানো হচ্ছে যেন একটি শহর থেকে যেকোনো রাস্তা দিয়ে আবার ঐ শহরে ফিরতে হলে মাঝে কমপক্ষে অন্য আরেকটি শহর পড়ে। যদি দুইটি রাস্তা মিলে যায় এবং তাদের সংযোগস্থল থেকে চার দিকে গেলে চারটা ভিন্ন শহর পাওয়া যায়, তাহলে তাকে আমরা "চৌরাস্তা" বলি। রাস্তাগুলো বানানো শেষে $\mathbf{5}$ টি চৌরাস্তা পাওয়া গেল। যদি রাস্তাগুলো শুধুমাত্র চৌরাস্তা তৈরি করে, তাহলে সর্বনিম্ন কতটি শহর থাকতে পারে? [10]

Some roads are being constructed among some cities. Those are constructed in such a way that if anyone starts from one city and wants to return there using any roads, there is at least one other city that comes in the path. If two roads are joined and from the joining place, we get four different cities in four different directions, then we call it a "cross-road". After building the roads, **5** cross-roads are found. If the roads only make cross-roads, then minimum how many cities can be there?

৫. সর্বোচ্চ যে পূর্ণসংখ্যা দ্বারা দুইটি পূর্নসংখ্যার উভয়কেই ভাগ করা যায়, তাকে আমরা ঐ দুইটি পূর্ণসংখ্যার গসাগু বলি। আবার দুইটি পূর্ণসংখ্যার উভয়ই সর্বনিম্ন যে সংখ্যাকে ভাগ করে, তাকে আমরা বলব ঐ দুইটি পূর্ণসংখ্যার লসাগু। আমরা দুইটি পূর্ণসংখ্যাকে একে অপরের বন্ধু বলব, যদি পূর্ণসংখ্যা দুইটির গসাগু ও লসাগুর যোগফল পূর্ণসংখ্যা দুইটির যোগফলের সমান হয়। তোমার কাছে কিছু পূর্ণসংখ্যা আছে, যারা প্রত্যেকেই **961** এর বন্ধু এবং **961** এর চেয়ে ছোট। তোমার কাছে সর্বোচ্চ কোন পূর্ণসংখ্যাটি থাকতে পারে? [10]

The largest integer that divides two integers is called their GCD. Again, the smallest integer that is divisible by two integers is called their LCM. We call two integer friends if the sum of their GCD and LCM is equal to the sum of those two integers. You have some integers all of which are friends with **961** and smaller than **961**. What is the largest integer you can have?

৬. $$P = 2^9 \times 3^8 \times 4^7 \times 5^6 \times 6^5$$ [5+7]

a) P কে কতভাবে দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণফল আকারে লেখা যায়? (এখানে $a \times b$ এবং $b \times a$ কে একই জোড়া বিবেচনা করো।)

b) P এর কতগুলো উৎপাদক আছে যারা পূর্ণবর্গ সংখ্যা?

a) In how many ways P can be written as the product of two positive integers? (Here $a \times b$ and $b \times a$ are considered as the same pair.)

b) How many factors of P are there which are perfect square numbers?

৭. দেখাও যে, যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য, 5^n কে দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার বর্গের যোগফল আকারে লেখা যায়, যেখানে উক্ত সংখ্যা দুইটি 5 এর সাথে সহমৌলিক। (এখানে a^n বলতে a কে n বার গুণ করা বোঝায়। যেমন: $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ ইত্যাদি) [14]

Show that, for any positive integer n, 5^n can be written as the sum of the squares of two positive integers, where those two integers are co-prime with 5. (Here a^n means multiplication of a, n times. Such as: $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ etc.)

৮. ΔABC এর A বিন্দু এবং BC এর মধ্যবিন্দু P বিন্দুগামী রেখা হলো AP। M হলো AP এর মধ্যবিন্দু। CM কে এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যেন তা AB কে X বিন্দুতে ছেদ করে। $BM = BP$ হলে, প্রমাণ করো যে, $AX = MX$। [14]

In ΔABC, the line going through the point A and the midpoint P of BC is AP. M is the midpoint of AP. CM is extended in a way such that it intersects AB at point X. If $BM = BP$, then prove that $AX = MX$.

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৪
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: জুনিয়র (৬ষ্ঠ-৮ম শ্রেণি) **সময়: ৩ ঘণ্টা**

Category: Junior (Class 6-8) **Time: 3 Hours**

সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রতি সমস্যার পার্শ্ববর্তী ব্যবধিতে তার পূর্ণমান দেয়া রয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি অংক ইংরেজিতে লেখা রয়েছে। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। খসড়ার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও নিবন্ধন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

[Problems are sorted according to its difficulty. Full marks are written inside the bracket at the end of each problem. All numbers except the Question number are written in English. Answers have to be written on the main answer script. Back side of the answer script can be used for doing roughs. Writing name and registration number on each extra page is mandatory.]

১. একটি রেস্টুরেন্টে $\mathbf{112}$ টি ডিম এবং $\mathbf{2}$ জন মানুষ আছে। ডিমগুলো সরাসরি খাওয়া যায় না। এজন্য বিশেষ $\mathbf{2}$ টি বাটন আছে, বাটন $\boldsymbol{A}$ এবং বাটন $\boldsymbol{B}$। বাটন $\boldsymbol{A}$ চাপলে, ডিমসংখ্যা কমে $\boldsymbol{x}$ পরিমাণ হয়ে যায়। ($\boldsymbol{x}$ হচ্ছে ডিমসংখ্যাকে মানুষের সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগফল পাওয়া যায় সেটা। অর্থাৎ, শুরুতে $\boldsymbol{A}$ বাটনটি চাপলে $\boldsymbol{x}$ এর মান হবে $\mathbf{112 \div 2 = 56}$। খেয়াল রাখতে হবে, ভাগফল দশমিক এ আসলে শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যাটি নিতে হবে। যেমন: $\mathbf{7 \div 3 = 2.3333}$ হলে, $\boldsymbol{x}$ এর মান হবে $\mathbf{2}$) আবার, বাটন $\boldsymbol{B}$ চাপলে মানুষ এর সংখ্যা $\mathbf{1}$ জন বৃদ্ধি পায়। তুমি $\boldsymbol{A}$ অথবা $\boldsymbol{B}$ বাটন ইচ্ছামতো যতবার খুশি চাপতে পারো। তুমি চাইলে $\boldsymbol{A}$ এবং $\boldsymbol{B}$ দুইটি বাটন ও ব্যবহার করতে পারো বা যেকোনো একটি বাটন ও ব্যবহার করতে পারো। সর্বনিম্ন কতবার এই বাটন চাপার মাধ্যমে ডিমসংখ্যা শূন্য ($\mathbf{0}$) করা যাবে? [6]

In a restaurant there are $\mathbf{112}$ eggs and $\mathbf{2}$ people. The eggs cannot be eaten directly. There are $\mathbf{2}$ special buttons for this, button $\boldsymbol{A}$ and button $\boldsymbol{B}$. If button $\boldsymbol{A}$ is pressed, then the number of eggs get reduced to $\boldsymbol{x}$. ($\boldsymbol{x}$ is the quotient when the number of eggs is divided by the number of people. That means, if we press the button $\boldsymbol{A}$ at the beginning, then the value of $\boldsymbol{x}$ will be $\mathbf{112 \div 2 = 56}$. Be careful if the quotient is in fraction, you have to take the integer value. Example: in the case of $\mathbf{7 \div 3 = 2.3333}$, the value of $\boldsymbol{x}$ will be $\mathbf{2}$) Again, if the button $\boldsymbol{B}$ is pressed, the number of people gets increased by $\mathbf{1}$. You can press button $\boldsymbol{A}$ or $\boldsymbol{B}$ as many times as you want. You can use both buttons $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ or either button if you want. What is the minimum number of button presses required to make the number of eggs zero ($\mathbf{0}$)?

২. $\boldsymbol{x}$ এর সকল ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক মানের জন্য $\mathbf{4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 4}$ এর মান একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে। গাণিতিকভাবে যাচাই করো। [8]

For all positive integer value of $\boldsymbol{x}$**,** the value of $\mathbf{4x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 8x + 4}$ is a perfect square number. Verify mathematically.

৩. $\Delta \boldsymbol{AFG}$ একটি ত্রিভুজ। $\boldsymbol{AF}$ এবং $\boldsymbol{AG}$ এর উপর $\boldsymbol{B}$ এবং $\boldsymbol{C}$ এমন দুইটি বিন্দু যেন $\boldsymbol{FB = BC = CG}$। $\angle \boldsymbol{ABC}$ এবং $\angle \boldsymbol{ACB}$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক $\boldsymbol{AG}$ এবং $\boldsymbol{AF}$ বাহুকে যথাক্রমে $\boldsymbol{E}$ এবং $\boldsymbol{D}$ বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে, $\boldsymbol{DE \parallel FG}$। [10]

$\Delta \boldsymbol{AFG}$ is a triangle. $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{C}$ are two points on $\boldsymbol{AF}$ and $\boldsymbol{AG}$ such that $\boldsymbol{FB = BC = CG}$. The angle-bisectors of $\angle \boldsymbol{ABC}$ and $\angle \boldsymbol{ACB}$ intersect the sides $\boldsymbol{AG}$ and $\boldsymbol{AF}$ at points $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{D}$ respectively. Prove that $\boldsymbol{DE} \,||\, \boldsymbol{FG}$.

৪. দুইটি বুক ক্লাব $\boldsymbol{A}$ এবং $\boldsymbol{B}$। $\boldsymbol{A}$ ক্লাবে $\mathbf{9}$ জন সদস্য আছে এবং তাদের প্রত্যেকের কাছে থাকা বইয়ের সংখ্যা ভিন্ন, যা প্রথম $\mathbf{9}$ টি মৌলিক সংখ্যা। $\boldsymbol{B}$ ক্লাবে থাকা সদস্যদের প্রত্যেকের বইয়ের সংখ্যাও ভিন্ন এবং তা $\mathbf{123}$ থেকে $\mathbf{231}$ পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো। একদিন যেকোনো ক্লাবের যেকোনো একজন সদস্য অপর ক্লাবে চলে যায়। যার ফলে উভয় ক্লাবের গড় বইয়ের সংখ্যা বৃদ্ধি পায়। কতভাবে যেকোনো ক্লাবের যেকোনো একজন সদস্য অপর ক্লাবে চলে যেতে পারে? [10]

There are two book clubs $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$. Club $\boldsymbol{A}$ has $\mathbf{9}$ members, each owning a different number of books, which are the first $\mathbf{9}$ prime numbers. Each member of club $\boldsymbol{B}$ also has a different number of books, which are the natural numbers from $\mathbf{123}$ to $\mathbf{231}$. One day, any member from any club is transferred to the other club. As a result, the average number of books of each club increases. In how many ways can any member from any club transfer to the other club?

৫. এমন সকল বাস্তবসংখ্যা $\boldsymbol{x}$ বের করো যেন $\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor = \mathbf{2024}$ হয়। [12]

বি. দ্র.: $\lfloor x\rfloor$ দিয়ে সবচেয়ে বড় এমন পূর্ণসংখ্যা বোঝায় যা $\boldsymbol{x}$ এর চেয়ে ছোট অথবা সমান। যেমন, $\lfloor 2.5\rfloor = 2$, $\lfloor \pi\rfloor = 3$, $\lfloor 24\rfloor = 24$, $\lfloor 5.73\rfloor = 5$ ইত্যাদি।

Find all the real numbers $\boldsymbol{x}$ such that $\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor = \mathbf{2024}$.

Note: $\lfloor x\rfloor$ denotes the highest integer less than or equal to $\boldsymbol{x}$. For example, $\lfloor 2.5\rfloor = 2, \lfloor \pi\rfloor = 3, \lfloor 24\rfloor = 24, \lfloor 5.73\rfloor = 5$ etc.

৬. ΔABC একটি ত্রিভুজ যার AC বাহুর উপর D এমন একটি বিন্দু যেন $AB = CD$ হয় এবং $\angle B - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ$, $\angle ADB - \frac{\angle A}{2} = \angle ABD$। BD কে F পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $AB = AF$ হয়। প্রমাণ করো F, ΔABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র। [12]

ΔABC is a triangle where D is a point on the side AC such that $AB = CD$ and $\angle B - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ$, $\angle ADB - \frac{\angle A}{2} = \angle ABD$. BD is extended to F such that $AB = AF$. Prove that F is the circumcentre of triangle ΔABC.

৭. সামিন একটি সুষম $\mathbf{17}$-ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো রঙ করছে। সে রঙ হিসেবে লাল, নীল এবং হলুদ ব্যবহার করছে। সে শীর্ষবিন্দুগুলোকে এমনভাবে রঙ করলো যেন লাল, নীল এবং হলুদ রঙ করা শীর্ষবিন্দুগুলোর সংখ্যা বিজোড় সংখ্যা হয়। সামিন এখন তাহমিদকে বললো এই $\mathbf{17}$ টি শীর্ষবিন্দু থেকে এমন তিনটি শীর্ষবিন্দু বাছাই করতে যেন তিনটি শীর্ষবিন্দু মিলে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ তৈরি করে এবং তিনটি শীর্ষবিন্দু আলাদা আলাদা রঙের হয়। তাহমিদ কি এমন তিনটি শীর্ষবিন্দু বাছাই করতে পারবে? গাণিতিকভাবে দেখাও। [14]

Samin is colouring the vertices of a regular $\mathbf{17}$-gon. He is using the colours red, blue and yellow. He coloured the vertices in a way such that the red, blue and yellow coloured vertices are odd numbered. Now, Samin tells Tahmid to pick three vertices from these $\mathbf{17}$ vertices so that they make an isosceles triangle and all three vertices have different colours. Can Tahmid pick such three vertices? Show mathematically.

৮. $f(n) = 10^n - (5+\sqrt{17})^n - (5-\sqrt{17})^n$ একটি ফাংশন যা $\mathbf{1}$ থেকে বড় সকল পূর্ণসংখ্যা $\boldsymbol{n}$ এর জন্য প্রযোজ্য। প্রমাণ করো যে, $f(n)$ কে 2^{n+1} দ্বারা ভাগ করলে তা সবসময় নিঃশেষে বিভাজ্য হয়। [14]

$f(n) = 10^n - (5+\sqrt{17})^n - (5-\sqrt{17})^n$ is a function which is valid for all integers $\boldsymbol{n}$ greater than $\mathbf{1}$. Prove that, $f(n)$ is always perfectly divisible by 2^{n+1}.

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৪
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি (৯ম-১০ম শ্রেণি) | **সময়: ৩ ঘন্টা ৩০ মিনিট**

Category: Secondary (Class 9-10) | **Time: 3 Hours 30 Minutes**

সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রতি সমস্যার পার্শ্ববর্তী ব্যবধিতে তার পূর্ণমান দেয়া রয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি অংক ইংরেজিতে লেখা রয়েছে। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। খসড়ার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও নিবন্ধন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

[Problems are sorted according to its difficulty. Full marks are written inside the bracket at the end of each problem. All numbers except the Question number are written in English. Answers have to be written on the main answer script. Back side of the answer script can be used for doing roughs. Writing name and registration number on each extra page is mandatory.]

১. সকল অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা x, y খুঁজে বের করো যেন $x^3y + x + y = xy + 2xy^2$ হয়। **[8]**

Find all non-negative integers x, y such that $x^3y + x + y = xy + 2xy^2$.

২. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ $ABCD$ এর কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করে। F ও G যথাক্রমে জ্যা AC ও জ্যা BD এর উপর এমন দুইটি বিন্দু যেন $AF = BE$ এবং $DG = CE$ হয়। প্রমাণ করো যে, B, G, F, C একই বৃত্তের উপরে থাকবে। **[8]**

In a cyclic quadrilateral $ABCD$, the diagonals intersect at E. F and G are on chord AC and chord BD respectively such that $AF = BE$ and $DG = CE$. Prove that, B, G, F, C lie on the same circle.

৩. $\frac{a}{a^2-5} = \frac{b}{5-b^2} = \frac{ab}{a^2b^2-5}$, যেখানে $a + b \neq 0$ এবং a, b বাস্তব সংখ্যা। $a^4 + b^4 = ?$ **[8]**

$\frac{a}{a^2-5} = \frac{b}{5-b^2} = \frac{ab}{a^2b^2-5}$, where $a + b \neq 0$ and a, b are real numbers. $a^4 + b^4 = ?$

৪. ধরো a_1, a_2, a_3 কতগুলো পূর্ণসংখ্যা। প্রমান করো যে, এমন কিছু পূর্ণসংখ্যা b_1, b_2, b_3 আছে যেন: **[10]**

- b_i এর মান $-1, 0$ অথবা 1 যেখানে $i \in \{1,2,3\}$
- সবগুলো সংখ্যা একই সাথে 0 হতে পারবে না।
- $N = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ সংখ্যাটি 7 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে।

Let a_1, a_2, a_3 be integers. Prove that there exist integers b_1, b_2, b_3 such that

- b_i is equal to $-1, 0$ or 1 for all $i \in \{1,2,3\}$
- all numbers can't be 0 at the same time.
- the number $N = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ is perfectly divisible by 7.

৫. ΔXPQ এবং ΔYPQ দুইটি ত্রিভুজ যেন X এবং Y বিন্দু PQ রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত। ΔXPQ এবং ΔYPQ এর পরিব্যাসার্ধ সমান। I এবং J বিন্দু দুইটি যথাক্রমে ΔXPQ এবং ΔYPQ এর অন্তঃকেন্দ্র। PQ রেখার মধ্যবিন্দু M। মনে করো I, M ও J সমরৈখিক। প্রমান করো যে, $XPYQ$ একটি সামান্তরিক। **[10]**

Consider two triangles ΔXPQ and ΔYPQ such that X and Y are on the opposite sides of PQ and the circumradius of ΔXPQ and the circumradius of ΔYPQ are the same. I and J are the incenters of ΔXPQ and ΔYPQ respectively. Let M be the midpoint of PQ. Suppose I, M, J are collinear. Prove that $XPYQ$ is a parallelogram.

৬. $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ হলো 1 থেকে 2024 পর্যন্ত পূর্ণসংখ্যাগুলোর একটি বিন্যাস। নিম্নোক্ত রাশিটির সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো: **[12]**

$$\sum_{i=1}^{2023}\left[(a_i + a_{i+1})\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}\right) + \frac{1}{a_i a_{i+1}}\right]$$

Let $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ be a permutation of integers from 1 to 2024. Find the minimum possible value of

$$\sum_{i=1}^{2023}\left[(a_i + a_{i+1})\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}\right) + \frac{1}{a_i a_{i+1}}\right]$$

৭. $ABCD$ একটি বর্গ। E এবং F বিন্দু যথাক্রমে AB ও BC এর উপর দুইটি বিন্দু যেন $BE = BF$।B বিন্দু হতে CE এর উপর অঙ্কিত লম্ব CE এবং AD কে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে। FH ও CE রেখা P বিন্দুতে এবং GF ও CD রেখা Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করো যে, DP ও BQ রেখা পরস্পর লম্ব। **[14]**

Let $ABCD$ be a square. E and F lie on sides AB and BC, respectively, such that $BE = BF$. The line perpendicular to CE, which passes through B, intersects CE and AD at points G and H, respectively. The lines FH and CE intersect at point P and the lines GF and CD intersect at point Q. Prove that the line DP is perpendicular to the line BQ.

৮. কোনো সমতলে n সংখ্যক বিন্দুর একটি সেটকে "বসন্তি n-বিন্দু" বলা হবে যদি উক্ত সেটের যেকোনো 3টি বিন্দু একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হয়। সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n নির্ণয় করো, যেন উক্ত n এর জন্য একটি "বসন্তি n-বিন্দু"-র সেট পাওয়া যায়। **[14]**

A set consisting of n points on a plane is called a "$bosonti\ n - point$" if any three of its points are located in vertices of an isosceles triangle. Find all positive integers n for which there exists a set of "$bosonti\ n - point$".

৯. সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জোড়া (k, m) নির্ণয় করো, যেন যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য $(n + m)(n + 2m) \cdots (n + km)$ সংখ্যাটি $k!$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। **[16]**

Find all pairs of positive integers (k, m) such that for any positive integer n, the product $(n + m)(n + 2m) \cdots (n + km)$ is divisible by $k!$.

ডাচ-বাংলা ব্যাংক -প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২৪
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: হায়ার সেকেন্ডারি (১১শ-১২শ শ্রেণি) | **সময়: ৩ ঘন্টা ৩০ মিনিট**

Category: Higher Secondary (Class 11-12) | **Time: 3 Hours 30 Minutes**

সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রতি সমস্যার পার্শ্ববর্তী ব্যবধিতে তার পূর্ণমান দেয়া রয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি অংক ইংরেজিতে লেখা রয়েছে। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। খসড়ার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও নিবন্ধন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

[Problems are sorted according to its difficulty. Full marks are written inside the bracket at the end of each problem. All numbers except the Question number are written in English. Answers have to be written on the main answer script. Back side of the answer script can be used for doing roughs. Writing name and registration number on each extra page is mandatory.]

১. সকল মৌলিক সংখ্যা p ও q নির্ণয় করো, যেন $p^3 - 3^q = 10$ হয়। [10]

Find all prime numbers p and q such that $p^3 - 3^q = 10$.

২. $ABCD$ একটি বর্গ। E এবং F বিন্দু যথাক্রমে AB ও BC এর উপর দুইটি বিন্দু যেন $BE = BF$। B বিন্দু হতে CE এর উপর অঙ্কিত লম্ব CE এবং AD কে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে। FH ও CE রেখা P বিন্দুতে এবং GF ও CD রেখা Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করো যে, DP ও BQ রেখা পরস্পর লম্ব। [10]

Let $ABCD$ be a square. E and F lie on the sides AB and BC respectively, such that $BE = BF$. The line perpendicular to CE, which passes through B, intersects CE and AD at points G and H respectively. The lines FH and CE intersect at point P and the lines GF and CD intersect at point Q. Prove that the line DP is perpendicular to the line BQ.

৩. $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ হলো 1 থেকে 2024 পর্যন্ত পূর্ণসংখ্যাগুলোর একটি বিন্যাস। নিম্নোক্ত রাশিটির সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো: [10]

$$\sum_{i=1}^{2023}\left[(a_i + a_{i+1})\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}\right) + \frac{1}{a_i a_{i+1}}\right]$$

Let $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ be a permutation of integers from 1 to 2024. Find the minimum possible value of

$$\sum_{i=1}^{2023}\left[(a_i + a_{i+1})\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}\right) + \frac{1}{a_i a_{i+1}}\right]$$

৪. ধরো $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ কতগুলো পূর্ণসংখ্যা। প্রমাণ করো যে, এমন কিছু পূর্ণসংখ্যা $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ আছে যেন, [10]

- b_i এর মান $-1, 0$ অথবা 1 যেখানে $i \in \{1, 2, \ldots, 11\}$।
- সবগুলো সংখ্যা একই সাথে 0 হতে পারবে না।
- $N = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{11}b_{11}$ সংখ্যাটি 2024 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে।

Let $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ be integers. Prove that there exist integers $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ such that

- b_i is equal to $-1, 0$ or 1 for all $i \in \{1, 2, \ldots, 11\}$.
- all numbers can't be 0 at the same time.
- the number $N = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_{11}b_{11}$ is perfectly divisible by 2024.

৫. ধরো, I হলো ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র এবং P এমন একটি বিন্দু যেন PI, BC এর উপর লম্ব হয় এবং PA, BC এর সমান্তরাল হয়। BC এর যে সমান্তরাল রেখাটি ΔABC এর অন্তঃবৃত্তকে স্পর্শ করে, এই রেখাটি AB এবং AC কে যথাক্রমে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে $\angle BPQ = \angle CPR$। [12]

Let I be the incenter of ΔABC and P be a point such that PI is perpendicular to BC and PA is parallel to BC. Let the line parallel to BC, which is tangent to the incircle of ΔABC, intersect AB and AC at points Q and R respectively. Prove that $\angle BPQ = \angle CPR$.

৬. সকল বহুপদী $P(x)$ নির্ণয় করো, যার জন্য অন্তত একটি বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $a_1, a_2, a_3, \ldots$ থাকে যেন সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m এবং n এর জন্য $a_m + a_n = P(mn)$ হয়। [12]

Find all polynomials $P(x)$ for which there exists a sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ of real numbers such that $a_m + a_n = P(mn)$ for all positive integers m and n.

৭. ধরো $\mathbb{N}$ হলো সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট। এমন সকল ফাংশন $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ নির্ণয় করো যেন সকল $m, n \in \mathbb{N}$ এর জন্য [14]

$$f\left(\left\lceil \frac{f(m)}{n} \right\rceil\right) = \left\lceil \frac{m}{f(n)} \right\rceil$$

বি. দ্র.: $\lceil x \rceil$ দিয়ে সবচেয়ে ছোট এমন পূর্ণসংখ্যা বোঝায় যা x এর চেয়ে বড় অথবা সমান। যেমন: $\lceil 2.5 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 5 \rceil = 5$.

Let $\mathbb{N}$ be the set of all positive integers. Find all functions $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$f\left(\left\lceil \frac{f(m)}{n} \right\rceil\right) = \left\lceil \frac{m}{f(n)} \right\rceil$$

for all $m, n \in \mathbb{N}$.

Note: $\lceil x \rceil$ denotes the least integer greater than or equal to x. For example: $\lceil 2.5 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 5 \rceil = 5$.

৮. দেওয়া আছে, k একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। দেখাও যে, এমন অসংখ্য ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n আছে যেন $\frac{n^n-1}{n-1}$ এর অন্তত k সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন মৌলিক গুণনীয়ক থাকে। [14]

Let k be a positive integer. Show that there exist infinitely many positive integers n such that $\frac{n^n-1}{n-1}$ has at least k distinct prime divisors.

৯. ধরো ABC একটি ত্রিভুজ এবং M হলো BC বাহুর মধ্যবিন্দু। BC এর লম্বদ্বিখণ্ডক ΔABC এর পরিবৃত্ত কে K এবং L বিন্দুতে ছেদ করে (K এবং A বিন্দুদ্বয় BC বাহুর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত)। L এবং M বিন্দুগামী একটি বৃত্ত AK কে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে (P বিন্দুটি AQ বাহুর উপর অবস্থিত)। ΔKMQ এর পরিবৃত্তকে LQ রেখাটি R বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে, $BPCR$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। [14]

Let ABC be a triangle and M be the midpoint of side BC. The perpendicular bisector of BC intersects the circumcircle of ΔABC at points K and L (K and A lie on the opposite sides of BC). A circle passing through L and M intersects AK at points P and Q (P lies on the line segment AQ). LQ intersects the circumcircle of ΔKMQ at R. Prove that, $BPCR$ is a cyclic quadrilateral.

১০. জ্যোতি এবং আজগর $(2n+1) \times (2n+1)$ বোর্ডে একটি গেম খেলছে এবং জ্যোতি প্রথমে চাল দিবে। শুরুতে বোর্ডটির প্রতিটি ঘর সাদা রঙ করা হয়। জ্যোতি তার চালে, যেকোনো একটি সাদা ঘরকে সবুজ রঙ করবে এবং আজগর তার চালে, যেকোনো একটি সাদা ঘরকে লাল রঙ করবে। বোর্ডের প্রতিটি ঘর রঙ করা শেষ হলে গেম শেষ হয়ে যাবে। বোর্ডের দুইটি ঘরকে সন্নিহিত বলা হবে যদি ঘর দুইটির মাঝে অন্তত একটি সাধারণ শীর্ষবিন্দু থাকে। বোর্ডের দুইটি সবুজ রঙের ঘরকে কানেক্টেড বলা হবে যদি ঐ দুইটি ঘরের মাঝে একটি পথ থাকে যেই পথের সবগুলো ঘরের রঙ সবুজ এবং পরপর দুইটি ঘর সন্নিহিত। গেমটি জ্যোতি জিতবে যদি সবুজ ঘরগুলো কানেক্টেড হয়। অন্যথায় আজগর জিতবে। কার জেতার স্ট্র্যাটেজি আছে নির্ণয় করো। [14]

Juty and Azgor plays the following game on a $(2n+1) \times (2n+1)$ board with Juty moving first. Initially all cells are colored white. On Juty's turn, she colors a white cell green and on Azgor's turn, he colors a white cell red. The game ends after they color all the cells of the board. Juty wins if all the green cells are connected, i.e. given any two green cells, there is at least one chain of neighbouring green cells connecting them (we call two cells neighbouring if they share at least one corner), otherwise Azgor wins. Determine which player has a winning strategy.