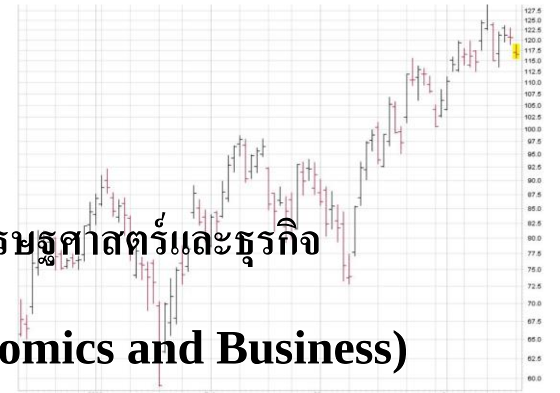


การวิเคราะห์อนุกรมเวลาสำหรับเศรษฐศาสตร์และธุรกิจ

(Time Series Analysis for Economics and Business)

การวิเคราะห์อนุกรมเวลาสำหรับเศรษฐศาสตร์และธุรกิจ

(Time Series Analysis for Economics and Business)

ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์

2562

คำนำ

หน่วยงานต่าง ๆ ในภาคเศรษฐกิจที่เกี่ยวข้องกับการวางแผนไม่ว่าจะเป็นของภาครัฐบาลหรือภาคเอกชน มักจะต้องมีการพยากรณ์ตัวแปรต่าง ๆ เพื่อประกอบการตัดสินใจในการบริหารจัดการให้ได้ประโยชน์สูงสุด ตัวอย่างเช่น นักการเงินต้องการพยากรณ์ข้อมูลราคาหุ้นรายวันของบริษัทที่สนใจ นักการตลาดต้องการพยากรณ์ข้อมูลยอดขายรายสัปดาห์ของสินค้าที่ตนเองดูแลอยู่ หรือนักเศรษฐศาสตร์ต้องการพยากรณ์ราคาสินค้ารายเดือน การพยากรณ์ตัวแปรเหล่านี้ต้องใช้เทคนิคทางสถิติที่เรียกว่า การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (Time Series Analysis) โดยหนังสือเล่มนี้จะอธิบายถึงเทคนิคการวิเคราะห์อนุกรมเวลาในรูปแบบต่าง ๆ อันจะสามารถช่วยให้หน่วยงานต่าง ๆ ทั้งภาครัฐบาลและภาคเอกชนสามารถนำข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีอยู่แล้วไปใช้พยากรณ์ได้อย่างถูกต้อง

การวิเคราะห์อนุกรมเวลามีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่ Box และ Jenkin (1970) ได้พัฒนาการวิเคราะห์อนุกรมเวลา จากนั้นจะมีการนำเสนอเทคนิคทางสถิติใหม่ ๆ ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาเสมอ เช่น Engle (1982) ได้มีการพัฒนาแนวคิดของแบบจำลอง ARCH, Bollerslev (1986) ได้พัฒนาต่อยอดขึ้นไปเป็นแบบจำลอง GARCH, Engle and Granger (1987) ได้พัฒนาแนวคิดความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวและการปรับตัวระยะสั้นให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวจากสมการเดียว และ Johansen (1988) ได้พัฒนาแนวคิดการหาความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจากการใช้หลายสมการ เทคนิคทางสถิติดังกล่าวได้มีการนำมาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยด้านเศรษฐศาสตร์และด้านการเงินอย่างแพร่หลาย โดยหนังสือเล่มนี้จะมีการอธิบายถึงเทคนิคทางสถิติที่กล่าวมาทั้งหมดนี้

ผู้เขียนต้องการให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้สามารถเข้าใจถึงเทคนิคทางสถิติดังกล่าวทั้งหมดให้ง่ายที่สุด ด้วยการยกตัวอย่างประกอบในทุก ๆ บท อย่างไรก็ดี ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ต้องมีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์และสถิติในระดับที่ดีพอสมควรและต้องเข้าใจถึงการวิเคราะห์แบบจำลองทางเศรษฐมิติเบื้องต้นเป็นอย่างดีด้วย ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษาทั้งระดับปริญญาตรี ปริญญาโท หรือบุคลากรทั้งในภาครัฐบาลและภาคเอกชนที่ต้องวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาในงานวิจัยด้านเศรษฐศาสตร์หรือธุรกิจ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นการปูพื้นฐานสำคัญสำหรับผู้ที่ต้องการศึกษาต่อในระดับปริญญาโทหรือปริญญาเอกในสาขาเศรษฐศาสตร์ การเงิน หรือธุรกิจ ได้เป็นอย่างดี

ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์

ตุลาคม 2562

สารบัญ

บทที่ 1
แนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับการวิเคราะห์อนุกรมเวลา

การวิเคราะห์อนุกรมเวลา เป็นเทคนิคทางสถิติที่ภาครัฐบาลและภาคธุรกิจสามารถนำไปใช้พยากรณ์ค่าของตัวแปรที่สนใจได้ เช่น ภาคธุรกิจใช้เทคนิคการวิเคราะห์อนุกรมเวลาในการพยากรณ์ยอดขาย ภาครัฐบาลใช้เทคนิคการวิเคราะห์อนุกรมเวลาในการพยากรณ์อัตราเงินเฟ้อ ช่วงหลายสิบปีที่ผ่านมา นักเศรษฐมิติก็ได้มีการวิจัยและพัฒนาเทคนิคการวิเคราะห์อนุกรมเวลาให้ลึกซึ้งมากขึ้นเรื่อย ๆ เพื่อจะนำไปประยุกต์ใช้กับทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์ หรือทฤษฎีทางธุรกิจและการเงินได้อย่างถูกต้องมากขึ้น เราจะเห็นว่ามีงานวิจัยทางเศรษฐศาสตร์ ธุรกิจ และการเงิน นำเทคนิคการวิเคราะห์อนุกรมเวลามาประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลาย ดังนั้น นักศึกษาหรือนักวิจัยทางเศรษฐศาสตร์ ธุรกิจ และการเงิน ควรทำความเข้าใจถึงเทคนิคการวิเคราะห์อนุกรมเวลาให้ถูกต้องเพื่อที่จะนำมาใช้ประโยชน์ได้อย่างถูกต้องที่สุด

ในบทนี้จะปูพื้นฐานเกี่ยวกับแนวคิดการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่ควรทราบ ซึ่งประกอบด้วย (1) ความหมายของอนุกรมเวลา (2) แนวคิดการพยากรณ์อนุกรมเวลา (3) ส่วนประกอบของอนุกรมเวลา (4) วิธีการพยากรณ์ (5) ค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ (6) การวิเคราะห์ความถูกต้องของการพยากรณ์ รายละเอียดของแต่ละหัวข้อข้างต้นอธิบายได้ดังนี้

1.1 ความหมายของอนุกรมเวลา

อนุกรมเวลา (Time series) หมายถึง การเก็บรวบรวมข้อมูลของตัวแปรหนึ่งตามลำดับเวลา ตัวอย่างเช่น ข้อมูลราคาหุ้นรายวันตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 2554–30 มิถุนายน 2556 ข้อมูลอัตราแลกเปลี่ยนรายสัปดาห์ตั้งแต่สัปดาห์ที่ 1–สัปดาห์ที่ 52 ของปี 2555 ข้อมูลอัตราเงินเฟ้อรายเดือนตั้งแต่เดือนมีนาคม 2540–ตุลาคม 2554 ข้อมูล GDP รายไตรมาสตั้งแต่ไตรมาสที่ 2 ของปี 2525–ไตรมาสที่ 4 ของปี 2554 ข้อมูลผลผลิตข้าวรายปีตั้งแต่ปี 2520–2554 และข้อมูลอัตราการว่างงานรายปีตั้งแต่ปี 2530–2554 เป็นต้น ตัวแปรที่ยกตัวอย่างมาข้างต้นนี้ ล้วนเป็นตัวแปรสุ่ม (random or stochastic variables) ทั้งหมด ทั้งนี้เพราะในแต่ละช่วงเวลาข้อมูลดังกล่าวสามารถเพิ่มขึ้นหรือลดลงหรือเท่าเดิมก็ได้ซึ่งไม่อาจทราบล่วงหน้าได้ เมื่อกรณีนี้เกิดขึ้น เราจะเรียกว่าเป็น อนุกรมเวลาแบบสุ่ม (Stochastic Process หรือ Random Process)[1] และหลังจากข้อมูลของตัวแปรที่สนใจถูกเก็บรวบรวมมาแล้ว ไม่ว่าจะเป็นรายวัน รายสัปดาห์ รายเดือน รายไตรมาส หรือรายปี ค่าทางสถิติเบื้องต้น ได้แก่ ค่าเฉลี่ย (Mean) ความแปรปรวน (Variance) และความแปรปรวนร่วมระหว่างช่วงเวลา (Autocovariance) จะต้องสามารถคำนวณได้เสมอ

อนุกรมเวลาแบบสุ่มของตัวแปรหนึ่ง จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ X_t หรือ $\{X_t\}$ ก็ได้ โดยค่าทางสถิติทั้ง 3 ค่าข้างต้น ได้แก่

- ค่าเฉลี่ยของ X_t เขียนแทนด้วยด้วย $\mathrm{E}(X_t) = \mu_t$
- ค่าความแปรปรวนของ X_t เขียนแทนด้วย $\mathrm{var}(X_t) = \sigma_t^2$
- ค่าความแปรปรวนร่วมระหว่างช่วงเวลา t_t และ t_2 ของ X_t เขียนแทนด้วย $\gamma_{t_1,t_2} = \mathrm{cov}(X_{t_1}, X_{t_2}), \quad t_1 \neq t_2$

โดย μ_t, σ_t^2 และ γ_{t_1,t_2} เรียกรวมกันว่าค่าพารามิเตอร์ (parameters) และเมื่อฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X_t เป็นแบบการแจกแจงแบบปกติ เราจะเรียก X_t ว่าเป็นอนุกรมเวลาแบบเกาส์เซียน (Gaussian process)

ในกรณีที่ X_t ถูกเก็บรวมรวมต่อเนื่องกันมาเป็นจำนวน T ช่วงเวลา จะพบว่ามีค่าพารามิเตอร์ μ_t (t =1, 2, …, T) จำนวน T ตัว ได้แก่ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_T$ และมีค่าพารามิเตอร์ σ_t^2 (t =1, 2, …, T) จำนวน T ตัว ได้แก่ $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_T^2$ และมีค่าพารามิเตอร์ γ_{t_1,t_2} (t_1, t_2 =1, 2,

[1] นั่นคือ จะมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นในแต่ละช่วงเวลาอยู่ด้วย

…, T และ $t_1 \neq t_2$) จำนวน $\frac{T(T-1)}{2}$ ตัว[2] รวมค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดคือ $T + T + \frac{T(T-1)}{2} = \frac{T(T+3)}{2}$ ตัว นั่นคือหากเราเก็บรวบรวมข้อมูลอนุกรมเวลาแบบสุ่มจำนวน 120 เดือน จะพบว่ามีค่าพารามิเตอร์ถึง $120 + 120 + \frac{120(120-1)}{2} = \frac{120(120+3)}{2} = 7{,}380$ ตัวเพื่อที่จะลดจำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่านี้ เราสามารถทำได้โดยกำหนดข้อสมมุติคือให้ยอดขายรายเดือนดังกล่าวมีความนิ่ง (stationary[3]) ซึ่งจะมีการกล่าวรายละเอียดในหนังสือเล่มนี้

1.2 แนวคิดการการพยากรณ์อนุกรมเวลา

การพยากรณ์ (Forecasting) หมายถึงการคาดการณ์เหตุการณ์ในอนาคต ถ้าพิจารณาในมุมมองของนักธุรกิจ มักจะมีการพยากรณ์ยอดขายสินค้าของตนเอง พยากรณ์อัตราดอกเบี้ยเงินกู้ พยากรณ์ราคาสินค้าของคู่แข่ง พยากรณ์ปริมาณการใช้วัตถุดิบ ถ้าเป็นนักการเงินจะต้องทำการพยากรณ์ราคาหุ้น พยากรณ์อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ หรือถ้าเป็นนักเศรษฐศาสตร์มักต้องพยากรณ์อัตราการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ พยากรณ์อัตราเงินเฟ้อ พยากรณ์อัตราการว่างงาน

ในการพยากรณ์ตัวแปรใด ๆ ก็ตาม เราจะต้องใช้ข้อมูลของตัวแปรนั้นในอดีตที่ผ่านมา เช่น หากนักธุรกิจต้องการพยากรณ์ยอดขายของบริษัทตนเองในเดือนหน้า ข้อมูลที่สำคัญที่สุดที่ต้องมีก็คือ ยอดขายของบริษัทที่ผ่านมาในอดีต จากนั้นจะผู้บริหารจะต้องทำการวิเคราะห์ข้อมูลยอดขายในอดีตนั้น แล้วจึงนำผลการวิเคราะห์ที่ได้ไปใช้พยากรณ์ข้อมูลนั้น

สาเหตุที่ต้องมีการรวบรวมข้อมูลยอดขายในอดีตเนื่องจากการวิเคราะห์ข้อมูลยอดขายในอดีตจะช่วยให้สามารถระบุถึงรูปแบบที่ค่าของตัวแปรยอดขายนั้นเป็นอยู่ และการนำผลการวิเคราะห์ (หรือรูปแบบที่ระบุได้) ไปใช้พยากรณ์ยอดขายของบริษัท ซึ่งจะต้องอยู่ภายใต้ข้อสมมุติว่า **“รูปแบบที่ระบุได้จากข้อมูลยอดขายในอดีตนั้น ต้องเหมือนเดิมหรือไม่เปลี่ยนแปลงในอนาคต”**

จากการพยากรณ์ภายใต้ข้อสมมุติข้างต้น ทำให้เรากล่าวได้ว่า การพยากรณ์ยอดขายมีโอกาสที่เกิดความผิดพลาดได้ หากรูปแบบที่ระบุได้จากข้อมูลในอดีตไม่เหมือนเดิมหรือเปลี่ยนแปลงไปในอนาคต เช่น หลังจากเกิดแผ่นดินไหวครั้งใหญ่ หรือการจลาจลครั้ง

---

[2] คำนวณจาก ${}_{2}^{T}C = \frac{T!}{(T-2)!2!} = \frac{T(T-1)}{2}$

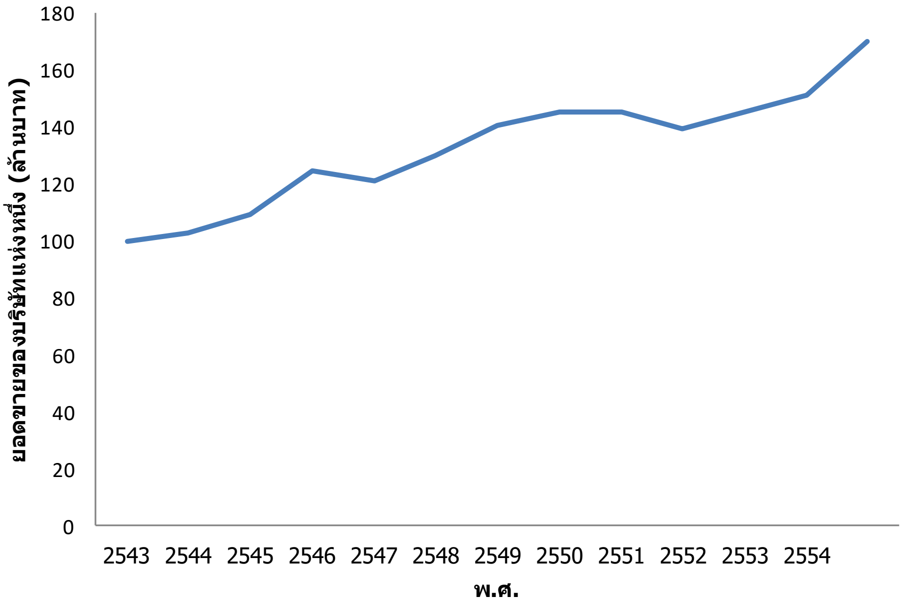
[3] หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งคือ ความนิ่งแบบไม่มีพลัง (weakly stationary)

ประวัติศาสตร์ เราจะใช้รูปแบบที่ระบุได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลยอดขายบะหมี่กึ่งสำเร็จรูปในอดีตไปใช้พยากรณ์ยอดขายบะหมี่กึ่งสำเร็จรูปนี้ไม่ได้ เนื่องจากพฤติกรรมผู้บริโภคเปลี่ยนไปแล้ว

1.3 ส่วนประกอบของอนุกรมเวลา (Components of a Time Series)

อนุกรมเวลาของตัวแปรหนึ่ง จะประกอบไปด้วย 4 ส่วน คือ แนวโน้ม วัฏจักร ความผันแปรจากฤดูกาล และความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติ ความหมายของส่วนประกอบแต่ละส่วนมีรายละเอียดดังนี้

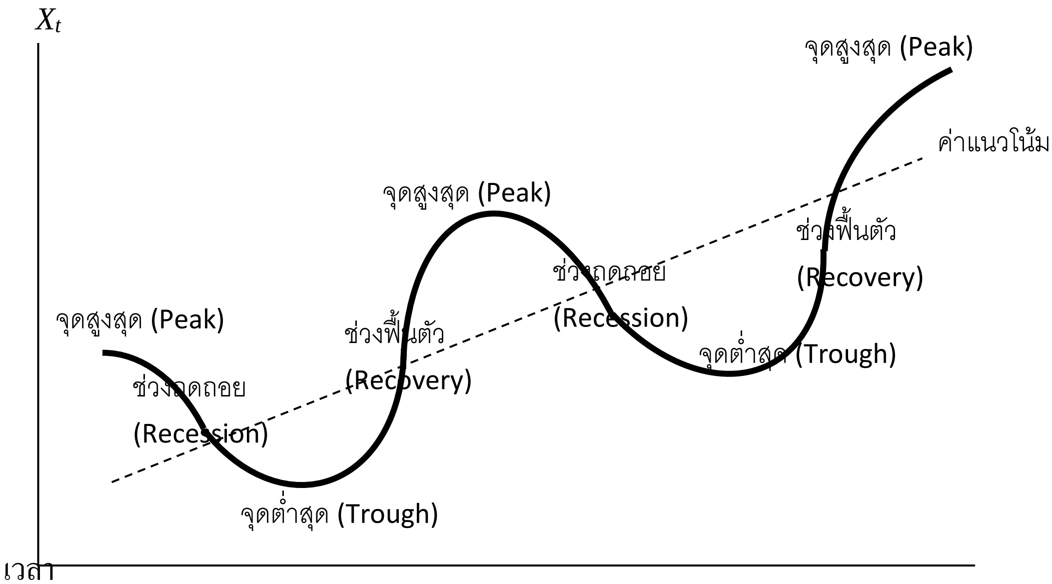
(1) แนวโน้ม (Trend) คือ ส่วนที่ทำให้อนุกรมเวลามีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ หรือลดลงเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป เรามักใช้แนวโน้มในการบอกว่าอนุกรมเวลาที่เก็บข้อมูลมามีอัตราการเพิ่มขึ้นหรืออัตราการลดลงในระยะยาว เช่น ข้อมูลยอดขายรายเดือนของบริษัทแห่งหนึ่งแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 1.1 แสดงยอดขายรายเดือนของบริษัทแห่งหนึ่ง

จากรูปที่ 1.1 เรากล่าวได้ว่า แนวโน้มยอดขายสินค้าของบริษัทมีลักษณะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากประชากรในประเทศเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ รายได้ของคนในประเทศมากขึ้นเรื่อย ๆ หรือเทคโนโลยีการผลิตดีขึ้น บริษัทจึงสามารถขายสินค้าได้เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป

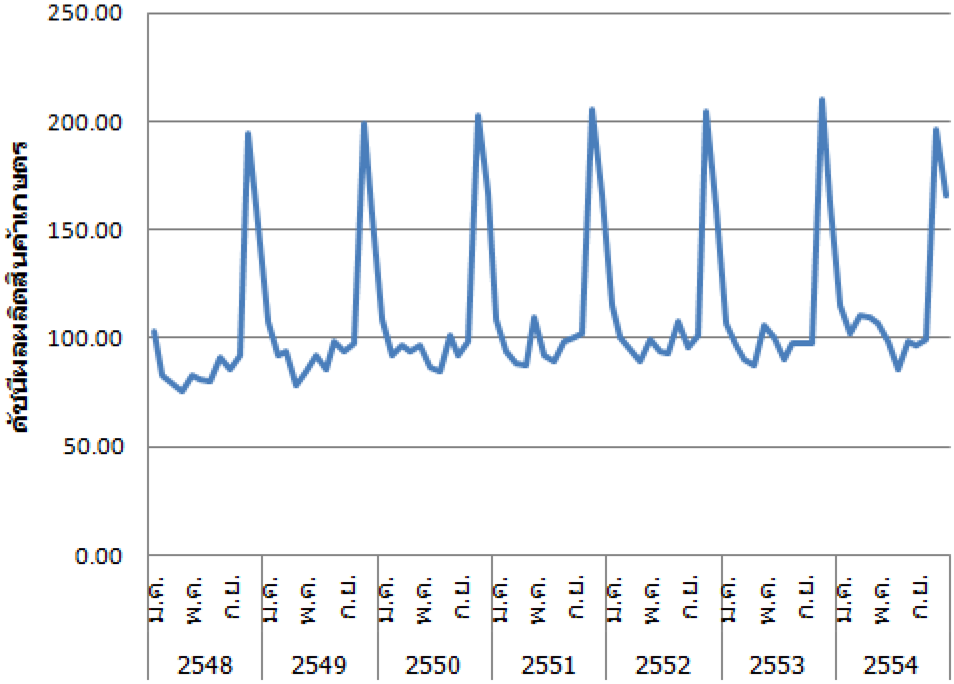
(2) **วัฏจักร (Cycle)** คือ ส่วนที่ทำให้อนุกรมเวลาที่เก็บข้อมูลได้มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไปรอบ ๆ ค่าแนวโน้ม (ซึ่งแสดงด้วยเส้นประดังรูปที่ 1.2) การนับระยะเวลาของส่วนวัฏจักร จะนับจุดสูงสุดหนึ่ง (peak) ไปยังอีกจุดสูงสุดหนึ่ง หรือจากจุดต่ำสุดหนึ่ง (trough) ไปยังอีกจุดต่ำสุดหนึ่ง ซึ่งจะต้องกินเวลาตั้งแต่ 2 ปีถึง 10 ปีขึ้นไป (หรือนานกว่านั้น) ส่วนของ วัฏจักรจะเริ่ม ณ เวลาใดก็ได้ ตัวอย่างของวัฏจักรแสดงได้ในรูปที่ 1.2 เมื่อส่วนของวัฏจักรอยู่ในช่วงที่ทำให้อนุกรมเวลามีค่าลดลง เราจะเรียกว่าช่วงถดถอย (Recession) และหลังจากผ่านจุดต่ำสุดไปแล้ว ส่วนของวัฏจักรที่ทำให้อนุกรมเวลามีค่าเพิ่มขึ้น เราจะเรียกว่าช่วงฟื้นตัว (Recovery)



รูปที่ 1.2 แสดงอนุกรมเวลาที่มีส่วนของวัฏจักร

(3) **ความผันแปรจากฤดูกาล (Seasonal Variations)** คือ รูปแบบในช่วงเวลาหนึ่งของอนุกรมเวลาที่จะเป็นภายใน 1 ปี และจะเป็นแบบนี้ซ้ำกันทุกปี ตัวอย่างเช่น อุณหภูมิเฉลี่ยในเดือนเมษายน จะสูงกว่าอุณหภูมิเฉลี่ยในเดือนอื่น ๆ และจะเป็นเช่นนี้ซ้ำ ๆ กันทุกปี ค่าใช้ไฟฟ้าในเดือนพฤศจิกายน–ธันวาคม จะต่ำกว่าค่าใช้ไฟฟ้าในเดือนอื่น ๆ และเป็นเช่นนี้ทุกปี บริษัททัวร์จะมีรายรับในช่วงปิดเทอมสูงกว่าเดือนอื่น ๆ และเป็นเช่นนี้ทุกปี ยอดขายห้างสรรพสินค้าในเดือนธันวาคม จะสูงกว่ายอดขายเดือนอื่น ๆ และเป็นเช่นนี้ทุกปี

เมื่อพิจารณารูปที่ 1.3 ซึ่งแสดงข้อมูลดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรกรรมรายเดือนตั้งแต่ปี 2548–2554 ของประเทศหนึ่ง เมื่อเราสังเกต ณ ปี 2548 จะพบว่าดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรกรรมในช่วงเดือนพฤศจิกายนและธันวาคม สูงกว่าเดือนอื่น ๆ และในปีอื่น ๆ ก็จะมีลักษณะเช่นนี้ ดังนั้น เรากล่าวได้ว่าดัชนีผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือนของประเทศนี้มีอิทธิพลของความผันแปรจากฤดูกาลเข้ามาเกี่ยวข้องในเดือนพฤศจิกายนและธันวาคมของทุกปี ทั้งนี้อาจเป็นเพราะผลผลิตทางการเกษตรของประเทศนี้จะออกมาพร้อม ๆ กันในช่วงเวลาดังกล่าว



รูปที่ 1.3 แสดงดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรของประเทศหนึ่งเป็นรายเดือนตั้งแต่ปี 2548–2554

(4) ความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติ (Irregular Fluctuations) คือ ส่วนที่ทำให้อนุกรมเวลามีค่าที่ผิดปกติไปจากรูปแบบที่เคยเป็น มักเกิดจากเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (Shock) เช่น แผ่นดินไหว สึนามิ ระเบิด การหยุดงานประท้วง ฯลฯ ส่วนความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติคำนวณจากการนำค่าของส่วนแนวโน้ม ค่าของส่วนวัฏจักร และค่าของความผันแปรจากฤดูกาลไปหักล้างค่าอนุกรมเวลานั้นนั่นเอง

ในทางปฏิบัตินั้น ข้อมูลอนุกรมเวลาที่เก็บรวบรวมได้อาจประกอบด้วยส่วนใดส่วนหนึ่งหรือทั้ง 4 ส่วน โดยอาจอยู่ในรูปของผลรวมหรือผลคูณก็ได้

1.4 วิธีการพยากรณ์

ในหัวข้อที่ 1.3 เราได้ทราบถึงแนวคิดของการพยากรณ์อนุกรมเวลาแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะมาดูรายละเอียดถึงวิธีการพยากรณ์ว่าเป็นอย่างไร โดยพิจารณาจากตัวอย่างดังนี้

สมมุติบริษัทผลิตรถยนต์แห่งหนึ่งต้องการพยากรณ์ยอดขายรถยนต์ของตนเองในเดือนหน้า ยอดขายรถยนต์ที่ผ่านมาในอดีตของตนเองจะเป็นฐานข้อมูลสำคัญที่จำเป็นต้องใช้ เนื่องจากการวิเคราะห์ข้อมูลในอดีตจะช่วยให้สามารถระบุถึงรูปแบบของยอดขายรถยนต์ของบริษัทนี้ว่าเป็นอย่างไร จากนั้นเราจึงนำผลการวิเคราะห์ที่ได้ไปใช้พยากรณ์ยอดขายรถยนต์ของบริษัทนี้[4] อย่างไรก็ดี การนำผลการวิเคราะห์ที่ได้ไปใช้พยากรณ์ยอดขายของบริษัทนั้น อยู่ภายใต้ข้อสมมุติว่ารูปแบบที่ระบุได้จากยอดขายในอดีตต้องเหมือนเดิม นั่นคือ การพยากรณ์ยอดขายของบริษัทในอนาคต สามารถเกิดความผิดพลาดได้ หากรูปแบบที่ระบุได้จากยอดขายในอดีตไม่เหมือนเดิมหรือเปลี่ยนแปลงไปในอนาคต เช่น หลังจากที่รัฐบาลประเทศหนึ่งประกาศคืนภาษีให้กับผู้ซื้อรถยนต์รักษาสิ่งแวดล้อม (Ecology Car หรือมักเรียกสั้น ๆ ว่า Eco Car) จำนวน 100,000 บาท เราจะใช้รูปแบบที่ระบุได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลยอดขายรถยนต์ในอดีตไปใช้พยากรณ์อีกไม่ได้ เนื่องจากพฤติกรรมผู้บริโภคเปลี่ยนไปแล้ว

เมื่อบริษัทพบว่ารูปแบบที่ระบุได้จากข้อมูลในอดีตมีการเปลี่ยนแปลง จะต้องมีการปรับค่าพยากรณ์ที่ได้เพื่อให้คลาดเคลื่อนน้อยที่สุด เช่น หลังจากที่รัฐบาลประเทศหนึ่งประกาศคืนภาษีให้กับผู้ซื้อรถยนต์รักษาสิ่งแวดล้อม ประชาชนจำนวนมากย่อมมีความต้องการซื้อรถยนต์รุ่นดังกล่าว ในกรณีนี้บริษัทควรปรับค่าพยากรณ์ให้เพิ่มขึ้นมากกว่าที่คำนวณได้

วิธีการพยากรณ์ (Forecasting Methods) แบ่งเป็น 2 วิธี ได้แก่ วิธีพยากรณ์เชิงคุณภาพและวิธีพยากรณ์เชิงปริมาณ ดังอธิบายต่อไปนี้

(1) วิธีพยากรณ์เชิงคุณภาพ (Qualitative Forecasting Method) เป็นการใช้ความเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ซึ่งมักเป็นผู้ที่มีประสบการณ์สูงในเรื่องที่เกี่ยวข้อง วิธีนี้มักใช้ในกรณีที่ไม่สามารถหาข้อมูลได้ เช่น หากผู้บริหารต้องการพยากรณ์ยอดขายสินค้าตัวใหม่ของบริษัท จะไม่มีข้อมูลยอดขายสินค้าตัวนี้ในอดีต ดังนั้น การพยากรณ์ต้องใช้ความเห็นของฝ่ายการตลาด ซึ่งถือ

---

[4] ในบทถัดไปจะกล่าวถึงวิธีการระบุรูปแบบและวิธีการวิเคราะห์เพื่อพยากรณ์ยอดขาย

เป็นผู้เชี่ยวชาญและมีประสบการณ์ในเรื่องที่เกี่ยวข้องนี้สูง ในหนังสือเล่มนี้จะไม่กล่าวถึงการพยากรณ์ด้วยวิธีนี้

(2) วิธีพยากรณ์เชิงปริมาณ (Quantitative Forecasting Method) เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลในอดีตของตัวแปรที่สนใจ แล้วนำไปใช้พยากรณ์ข้อมูลนั้นในอนาคต วิธีการพยากรณ์เชิงปริมาณมีหลายวิธี แต่ในหนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึงการพยากรณ์ของ Box-Jenkins ซึ่งถือเป็นวิธีที่เหมาะกับการใช้พยากรณ์อนุกรมเวลาที่รูปแบบมีการเปลี่ยนแปลงเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป วิธีนี้ต้องใช้ข้อมูลในอดีตจำนวนมาก และยังมีเงื่อนไขว่าอนุกรมเวลานั้นต้องมีความนิ่ง (Stationary)[5] และไม่มีความผันแปรจากฤดูกาล (No Seasonal Variations) **วิธีการของ Box-Jenkins** มีขั้นตอนสรุปได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 : การระบุแบบจำลอง (Model Identification) เป็นขั้นตอนของตรวจสอบค่าสหสัมพันธ์ของอนุกรมเวลาที่กำลังพิจารณา ว่ามีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับค่าของมันเองในช่วงเวลาอื่น ๆ หรือไม่ การตรวจสอบนี้สามารถทำได้ด้วยการคำนวณค่า SAC (Sample Autocorrelation Function) และค่า SPAC (Sample Partial Autocorrelation Function) จากอนุกรมเวลาที่เก็บรวบรวมมา[6] แล้วนำมาใช้ตัดสินใจเบื้องต้นว่าควรใช้แบบจำลองของ Box–Jenkins แบบใด เช่น ควรเลือกแบบจำลอง AR (Autoregressive หรือ MA (Moving Average) หรือ ARMA (Autoregressive Moving Average)[7]

ขั้นที่ 2 : การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter Estimation) คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองที่เลือกในขั้นที่ 1

ขั้นที่ 3 : การตรวจสอบแบบจำลอง (Model Checking) เป็นขั้นตอนที่ทำเพื่อยืนยันว่าแบบจำลองที่ประมาณขึ้นในขั้นที่ 2 มีคุณสมบัติที่เหมาะสมทางสถิติหรือไม่ โดยพิจารณาจากตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (Stochastic Disturbance Term) จากแบบจำลองในขั้นที่ 1 ต้องไม่มีความสัมพันธ์กันเอง[8] หากพบว่าตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของแบบจำลองในขั้นที่ 1 มีความสัมพันธ์กันเอง แล้วเราจะต้องกลับไปเริ่มทำขั้นที่ 1 ใหม่

---

[5] รายละเอียดจะกล่าวในบทที่ 2

[6] รายละเอียดจะกล่าวในบทที่ 2

[7] รายละเอียดจะกล่าวในบทที่ 3

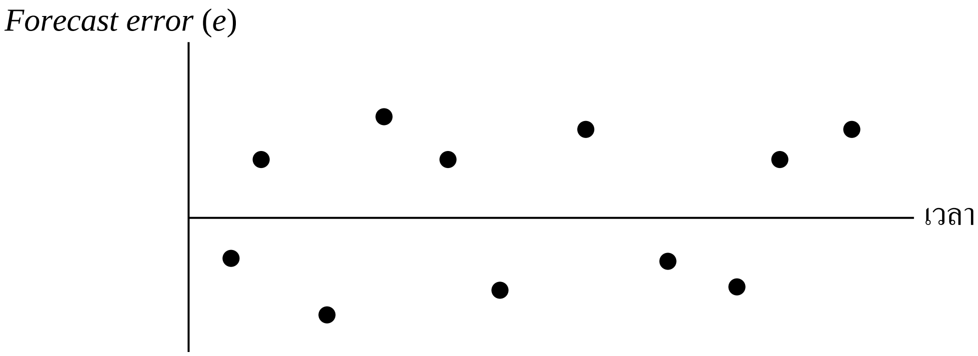
[8] หรือไม่มี autocorrelation นั่นเอง

1.5 ค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์

ไม่ว่าเราจะใช้วิธีการพยากรณ์แบบใด จะต้องมี "**ค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ (Errors in Forecasting หรือ Forecast Error เขียนแทนด้วยตัว *e*)"** เสมอ ทั้งนี้มาจากสาเหตุหลัก 2 ประการ คือ ประการที่ 1 เกิดจากส่วนประกอบของ "ความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติ" มีค่ามาก ประการที่ 2 เกิดจากความไม่ถูกต้องในการวิเคราะห์รูปแบบ ส่วนแนวโน้ม ส่วนวัฏจักร และส่วนความผันแปรทางฤดูกาลจากข้อมูลในอดีต ค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์วัดได้จากสูตรต่อไปนี้

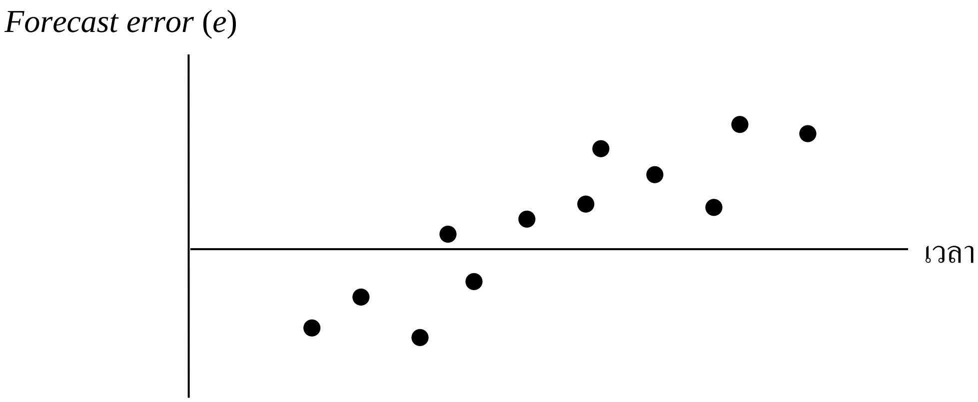
$$e = X_t - \hat{X}_t \tag{1.1}$$

โดยที่ $\hat{X}_t$ คือค่าพยากรณ์ของอนุกรมเวลา X_t ซึ่งสะท้อนถึงรูปแบบของ X_t ที่วิเคราะห์จากข้อมูลในอดีต ซึ่งจะประกอบด้วยส่วนแนวโน้ม ส่วนวัฏจักร และส่วนความผันแปรทางฤดูกาล นั่นคือ ค่าคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ ($e = X_t - \hat{X}_t$) ก็คือส่วนของ "ความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติ" นั่นเอง และเนื่องจากความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติเป็นตัวแปรสุ่ม เมื่อเรานำค่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์ (e) มา plot graph จะพบว่ามีลักษณะแบบสุ่มรอบ ๆ ศูนย์ ดังรูปที่ 1.4

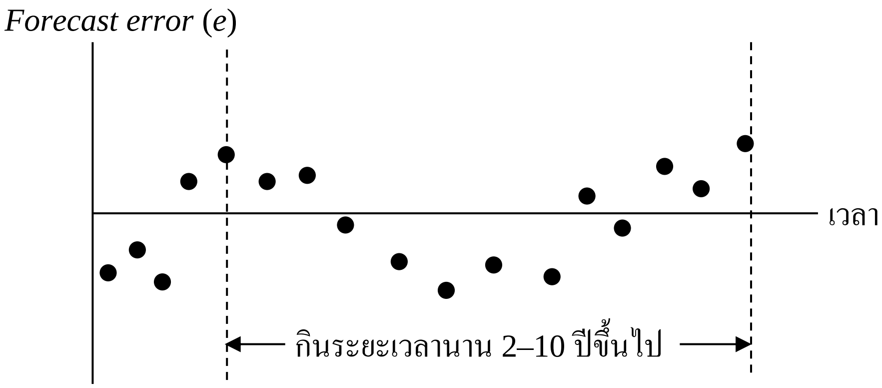


รูปที่ 1.4 แสดงค่าความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติที่มีลักษณะเป็นแบบสุ่ม

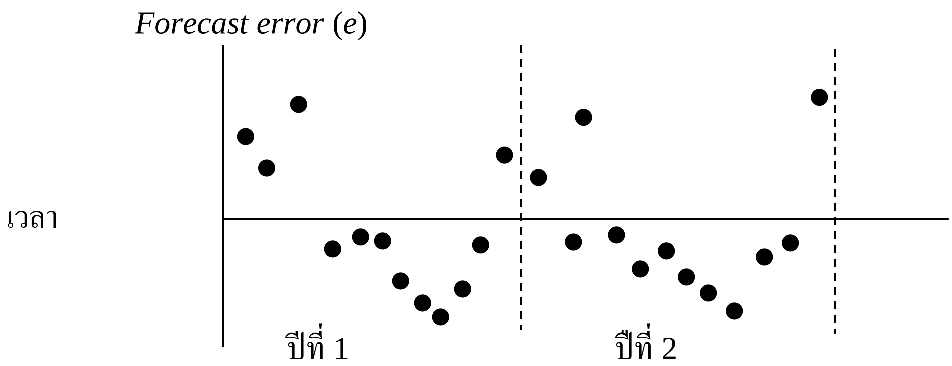
จากแนวคิดข้างต้น ทำให้เราสรุปได้ว่า หากรูปแบบการวิเคราะห์อนุกรมเวลา ไม่สามารถสะท้อนส่วนแนวโน้มได้ จะพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์จะมีแนวโน้ม ดังรูปที่ 1.5 แต่หากรูปแบบการวิเคราะห์อนุกรมเวลาไม่สามารถสะท้อนส่วนวัฏจักร จะพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์จะมีส่วนวัฏจักร ดังรูปที่ 1.6 และหากรูปแบบการวิเคราะห์อนุกรมเวลาไม่สามารถสะท้อนส่วนความผันแปรทางฤดูกาล จะพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนในการพยากรณ์จะมีส่วนความผันแปรทางฤดูกาล ดังรูปที่ 1.7 รูปแบบการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่ดีจะต้องเป็นมีค่าความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติที่เป็นแบบสุ่ม หรือรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.5 แสดงค่าความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติที่มีส่วนของแนวโน้มอยู่ด้วย



รูปที่ 1.6 แสดงค่าความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติที่มีส่วนของวัฏจักรอยู่ด้วย



รูปที่ 1.7 แสดงค่าความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติที่มีส่วนของความผันแปรทางฤดูกาลอยู่ด้วย

1.6 การวิเคราะห์ความถูกต้องของการพยากรณ์

ในทางปฏิบัติ เราอาจพบรูปแบบการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่ดีมากกว่า 1 รูปแบบ ดังนั้นหากเราจำเป็นต้องเลือกรูปแบบพยากรณ์ที่วิเคราะห์จากข้อมูลในอดีตว่าควรเลือกใช้แบบใด เราอาจใช้ค่าสูตร Root Mean Square Error (RMSE) ดังแสดงต่อไปนี้

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T}(X_t - \hat{X}_t)^2}{T}}$$

เราจะเลือกใช้รูปแบบการพยากรณ์ที่ให้ค่า RMSE ต่ำกว่า ตัวอย่างการคำนวณค่า RMSE แสดงได้ดังตารางที่ 1.1–1.3 ต่อไปนี้

ตารางที่ 1.1 แสดงตัวอย่างที่ 1 ในการคำนวณค่า RMSE

ค่าจริง (X_t)	**ค่าพยากรณ์** $(\hat{X}_t)$	**ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์** $(X_t - \hat{X}_t)$	**ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ยกกำลังสอง** $(X_t - \hat{X}_t)^2$
25	22	3	9
28	30	–2	4
29	30	–1	1

จากตารางที่ 1.1 จะได้ RMSE $= \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{3}(X_t - \hat{X}_t)^2}{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}} = \sqrt{4.67} = 2.16$

ตารางที่ 1.2 แสดงตัวอย่างที่ 2 ในการคำนวณค่า RMSE

ค่าจริง (X_t)	**ค่าพยากรณ์** $(\hat{X}_t)$	**ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์** $(X_t - \hat{X}_t)$	**ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ยกกำลังสอง** $(X_t - \hat{X}_t)^2$
60	57	3	9
64	61	+3	9
67	70	-3	9

จากตารางที่ 1.2 จะได้ RMSE $= \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{3}(X_t - \hat{X}_t)^2}{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

ตารางที่ 1.3 แสดงตัวอย่างที่ 3 ในการคำนวณค่า RMSE

ค่าจริง (X_t)	**ค่าพยากรณ์** $(\hat{X}_t)$	**ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์** $(X_t - \hat{X}_t)$	**ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ยกกำลังสอง** $(X_t - \hat{X}_t)^2$
6,000	5,900	+100	10,000
6,400	6,500	–100	10,000
6,700	7,300	–600	360,000

จากตารางที่ 1.3 จะได้ RMSE $= \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{3}(X_t - \hat{X}_t)^2}{3}} = \sqrt{\frac{380,000}{3}}$

$= \sqrt{126,666.667} = 355.9$

จากตารางที่ 1.1–1.3 จะสังเกตเห็นได้ว่า ยิ่งหน่วยของอนุกรมเวลามีค่ามากขึ้น จะมีโอกาสมากที่จะได้ค่า RMSE สูงมากขึ้นไปด้วย ในกรณีที่เราต้องการเปรียบเทียบเทคนิคการพยากรณ์อนุกรมเวลา 2 ชุดที่มีหน่วยต่างกันมาก เราสามารถใช้สูตร Root Mean Squared Percentage Error (RMSPE) ในการเปรียบเทียบดังนี้

$$\text{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{X_t - \hat{X}_t}{X_t}\right)^2}$$

ตัวอย่างในการคำนวณค่า RMSPE แสดงได้ในตารางที่ 1.4 ถึง 1.5 หลังจากที่ได้ค่า RMSPE เราจึงสามารถนำมาใช้เปรียบเทียบความถูกต้องของการพยากรณ์อนุกรมเวลา 2 ชุดที่มีหน่วยต่างกันได้แล้ว

ตารางที่ 1.4 แสดงตัวอย่างที่ 1 ในการคำนวณค่า RMSPE

ค่าจริง (X_t)	ค่าพยากรณ์ ($\hat{X}_t$)	$(X_t - \hat{X}_t)$	$\frac{X_t - \hat{X}_t}{X_t}$	$\left(\frac{X_t - \hat{X}_t}{X_t}\right)^2$
60	57	+3	3/60 = 0.0500	0.0025
64	61	+3	3/64 = 0.0469	0.0022
67	70	-3	–3/67 = –0.0448	0.0020

$$\text{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{X_t-\hat{X}_t}{X_t}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}0.0067} = 0.047$$

ตารางที่ 1.5 แสดงตัวอย่างที่ 2 ในการคำนวณค่า RMSPE ตัวอย่าง

ค่าจริง (X_t)	ค่าพยากรณ์ ($\hat{X}_t$)	$(X_t - \hat{X}_t)$	$\frac{X_t - \hat{X}_t}{X_t}$	$\left(\frac{X_t - \hat{X}_t}{X_t}\right)^2$
6,000	5,900	+100	100/6000 ≈ 0.0167	0.00028
6,400	6,500	–100	–100/6400 ≈ –0.0156	0.00024
6,700	7,300	–600	–600/6700 ≈ –0.0896	0.00803

$$\text{RMSPE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{X_t-\hat{X}_t}{X_t}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}0.00855} = 0.053$$

บทที่ 2
ความนิ่งของอนุกรมเวลา ค่า SAC และค่า SPAC

ในบทที่ 1 เราทราบถึงแนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับการวิเคราะห์อนุกรมเวลาไปแล้ว ซึ่งในส่วนของหัวข้อวิธีการพยากรณ์ ได้กล่าวถึงวิธีการของ Box-Jenkins ว่าเป็นวิธีหนึ่งที่เหมาะสมจะนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง เนื่องจากรูปแบบของข้อมูลทางธุรกิจและเศรษฐกิจโดยมากจะเปลี่ยนแปลงไปเรื่อย ๆ อย่างไรก็ดี การนำวิธีการ Box-Jenkins ไปใช้พยากรณ์อนุกรมเวลา มีเงื่อนไขคือ อนุกรมเวลานั้นต้องมีความนิ่ง (Stationary) และต้องไม่มีความผันแปรทางฤดูกาล (No Seasonal Variation) ดังนั้น ในหัวข้อแรกของบทนี้ เราจะมาทำความเข้าใจความหมายและลักษณะของอนุกรมเวลาที่มีความนิ่งและไม่นิ่ง (Stationary and Nonstationary) เสียก่อน จากนั้นในหัวข้อที่ 2 และ 3 จะมาทำความเข้าใจเกี่ยวกับการคำนวณและความหมายของค่า SAC (Sample Autocorrelation Function) และ SPAC (Sample Partial Autocorrelation Function) ตามลำดับ อันจะเป็นพื้นฐานสำคัญที่จะใช้ระบุรูปแบบตามวิธีการของ Box-Jenkin รายละเอียดแต่ละหัวข้อมีดังนี้

2.1 ความนิ่งของข้อมูล (Stationary)

อนุกรมเวลาของตัวแปร X_t จะมีความนิ่ง[1] ก็ต่อเมื่อมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้เกิดขึ้น

(1) ค่าเฉลี่ยของตัวแปร X ในแต่ละช่วงเวลา t มีค่าคงที่ หรือเขียนได้ว่า $E(X_t) = \mu$, $t = 1, 2, \ldots, T$

(2) ความแปรปรวนของตัวแปร X ในแต่ละช่วงเวลา t มีค่าคงที่ หรือเขียนได้ว่า $\mathrm{var}(X_t) = E(X_t-\mu)^2 = \sigma_X^2$, $t = 1, 2, \ldots, T$

(3) ความแปรปรวนร่วมของตัวแปร X ณ เวลา t_1 และเวลา t_2 ($t_1 \neq t_2$) จะมีค่าคงที่ หรือเขียนได้ว่า $\gamma_\tau = cov(X_{t_1}, X_{t_2})$ โดยที่ $t_1-t_2 = \tau$ ซึ่งหมายถึง ความแปรปรวนร่วมระหว่างข้อมูลอนุกรมเวลา (X_t) ที่ต่างช่วงเวลากัน จะขึ้นอยู่กับระยะห่างของช่วงเวลาทั้งสอง ซึ่งก็คือ τ นั่นเอง (หรือกล่าวอีกอย่างว่า ความแปรปรวนร่วมระหว่างข้อมูลอนุกรมเวลา (X_t) ที่ต่างช่วงเวลากัน จะไม่ขึ้นอยู่กับว่าขณะนั้นตัวแปร X_t อยู่ที่ ณ เวลา t_1 หรือ t_2) ดังนั้น เราเขียนได้อีกว่า $\gamma_\tau = cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = cov(X_{t_1+k}, X_{t_2+k})$ โดย k คือค่าคงที่ และจากคุณสมบัติข้อนี้ เราจะได้คุณสมบัติดังนี้เพิ่มเติมด้วย ได้แก่ ความแปรปรวนของตัวแปร X ณ เวลา t เขียนได้อีกอย่างดังนี้ $\mathrm{var}(X_t) = \mathrm{cov}(X_t, X_t) = \gamma_0$ และความแปรปรวนร่วมของอนุกรมเวลา X ณ เวลา t_1 และ t_2 จะเท่ากับความแปรปรวนร่วมของอนุกรมเวลา X ณ เวลา t_2 และ t_1 เขียนได้อีกอย่างคือ $cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = cov(X_{t_2}, X_{t_1})$ หรือ $\gamma_\tau = \gamma_{-\tau}$

เมื่ออนุกรมเวลา X_t มีความนิ่ง ($t = 1, 2, \ldots, T$) จะพบว่าค่าพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องจะมีทั้งหมดจำนวน $T+1$ ตัว ได้แก่ μ, σ_X^2, γ_τ ($\tau = t_2-t_1$, $t_1 \neq t_2$)[2] เมื่อพิจารณาค่าพารามิเตอร์ γ_τ จะพบว่า ยิ่งจำนวนข้อมูล T เพิ่มขึ้น จะมีค่าพารามิเตอร์ γ_τ เพิ่มขึ้นตามไปด้วย และในกรณีค่าอนุกรมเวลา X_t ณ สองช่วงเวลาใด ๆ มีความสัมพันธ์กัน (หรือ $\gamma_\tau \neq 0$) เรากล่าวว่าอนุกรมเวลา X_t นั้นมีความจำ (memory of the process)

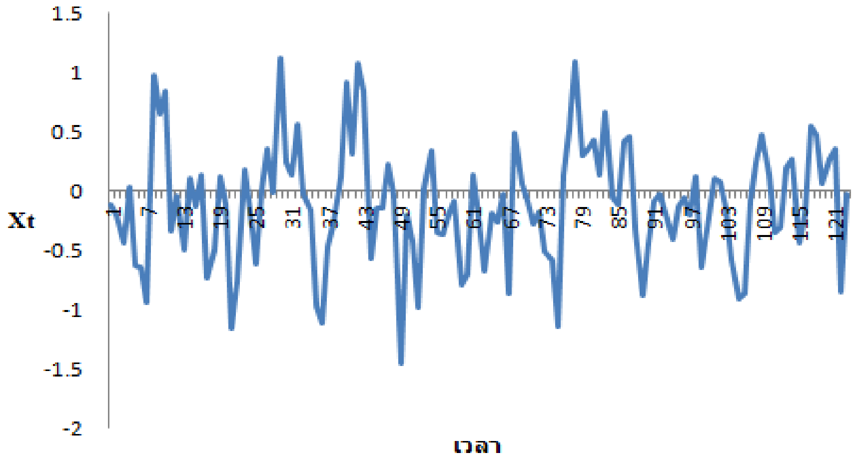
เมื่อพิจารณาค่าพารามิเตอร์ μ ซึ่งแสดงถึงค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t และค่าพารามิเตอร์ σ_X^2 ที่แสดงถึงความแปรปรวนของอนุกรมเวลา X_t โดยทั้งสองค่านี้จะค่าคงที่ตลอดช่วงเวลา

---

[1] ความนิ่งที่จะอธิบายในหนังสือเล่มนี้ หมายถึงความนิ่งแบบไม่มีพลัง (weakly stationary) แต่เพื่อความสะดวกจะใช้แค่คำว่า "ความนิ่ง (Stationary)" เท่านั้น

[2] พารามิเตอร์ γ_τ จะมีทั้งหมดมีจำนวน $T-1$ ตัว เนื่องจากพิจารณาที่ช่วงห่างของเวลา ($\tau = t_2-t_1$) ซึ่งเป็นไป $T-1$ กรณี ได้แก่ $\tau = 1, 2, \ldots, T-1$

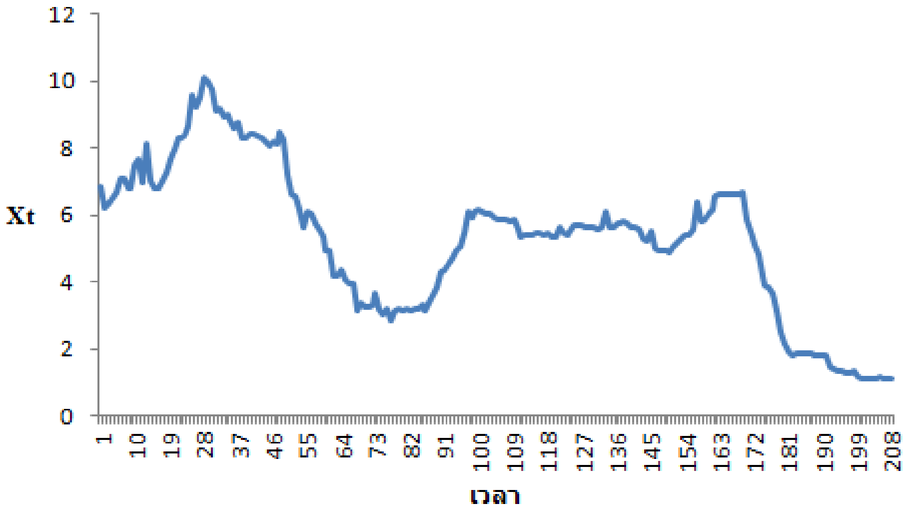
$t = 1, 2, \ldots, T$ ดังนั้น เมื่อนำข้อมูล X_t มาแสดงลงในกราฟที่มีแกนตั้งคือค่า X_t และแกนนอนคือเวลาเริ่มที่ $t = 1, \ldots, T$ พบว่าลักษณะกราฟที่ได้จะผันผวนในอัตราคงที่รอบ ๆ ค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง ดังแสดงได้ดังตัวอย่างในรูปที่ 2.1 ดังนี้



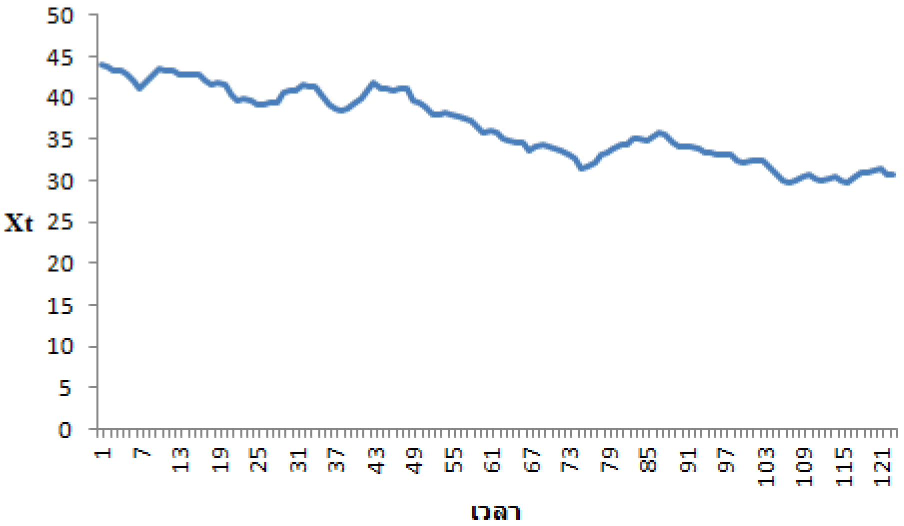
รูปที่ 2.1 อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง

และหาก X_t ไม่มีความนิ่ง (Nonstationary time series) การนำข้อมูล X_t มาแสดงลงในกราฟที่มีแกนตั้งคือค่า X_t และแกนนอนคือเวลาเริ่มที่ $t = 1, \ldots, T$ พบว่าลักษณะกราฟที่ได้จะผันผวนในอัตราไม่คงที่ (อาจผันผวนมากขึ้นเรื่อย) รอบ ๆ ค่าคงที่ค่าหนึ่งก็ได้ (รูปที่ 2.2) หรืออาจจะผันผวนคงที่รอบเส้นแนวโน้มหนึ่ง[3] (รูปที่ 2.3) ก็ได้

[3] ในกรณีนี้ เราเรียกว่า อนุกรมเวลามีความนิ่งรอบเส้นแนวโน้ม (Trend Stationary) เนื่องจากหากนำเส้นแนวโน้มออกไปจากอนุกรมเวลานี้จะเป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่งนั่นเอง



รูปที่ 2.2 อนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง (ผันผวนมากขึ้นรอบค่าคงที่ค่าหนึ่ง)



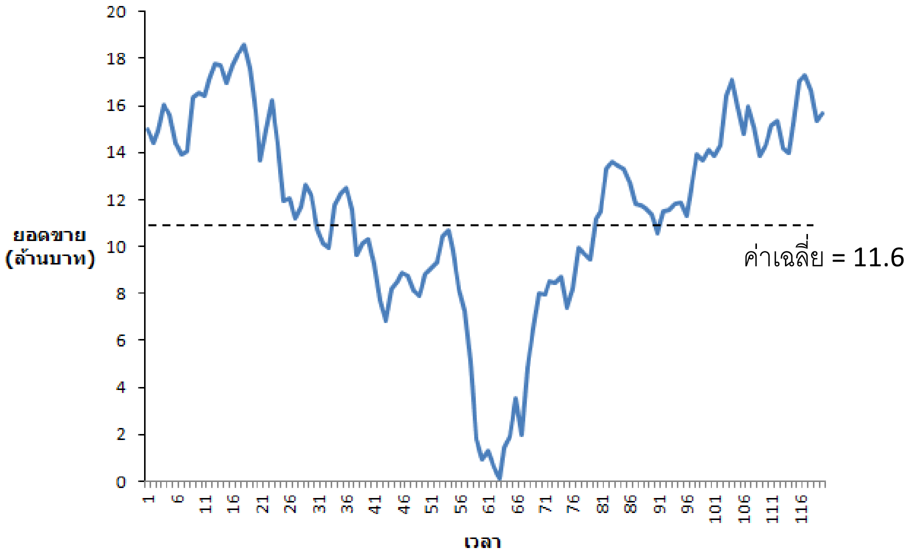
รูปที่ 2.3 อนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง (ผันผวนคงที่รอบเส้นแนวโน้ม)

หากเราพบว่าอนุกรมเวลาไม่มีความนิ่ง (nonstationary) แล้ว เราอาจสามารถแปลงข้อมูลนั้นให้มีความนิ่ง (stationary) ได้ โดยการทำผลต่างลำดับที่ 1 (First differencing) ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยนำข้อมูลในช่วงเวลาก่อนหน้านี้มาหักออกจากข้อมูลปัจจุบัน ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}, \quad t = 2, 3, \ldots, T$$

จะเห็นว่าจำนวนข้อมูลของ ΔX_t มีทั้งหมด $T - 1$ ข้อมูล ทั้งนี้เพราะเมื่อพิจารณา ณ ข้อมูลตัวแรก (หรือ $t = 1$) เราจะไม่สามารถหาค่าของ X_{t-1} ได้นั่นเอง ทำให้การคำนวณผลต่างลำดับที่ 1 ของอนุกรมเวลา ต้องเริ่มตั้งแต่เวลา t = 2 เป็นต้นไป

ลองพิจารณาตัวอย่างดังนี้ กำหนดให้ Y_t คืออนุกรมเวลายอดขายแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อหนึ่งเป็นรายเดือน (หน่วยล้านบาท) จำนวน 120 เดือน ตั้งแต่มกราคม 2544–ธันวาคม 2553 หรือ $t = 1, 2, \ldots, 120$ โดยข้อมูลเขียนเป็นกราฟได้ดังรูปที่ 2.4 ดังนี้

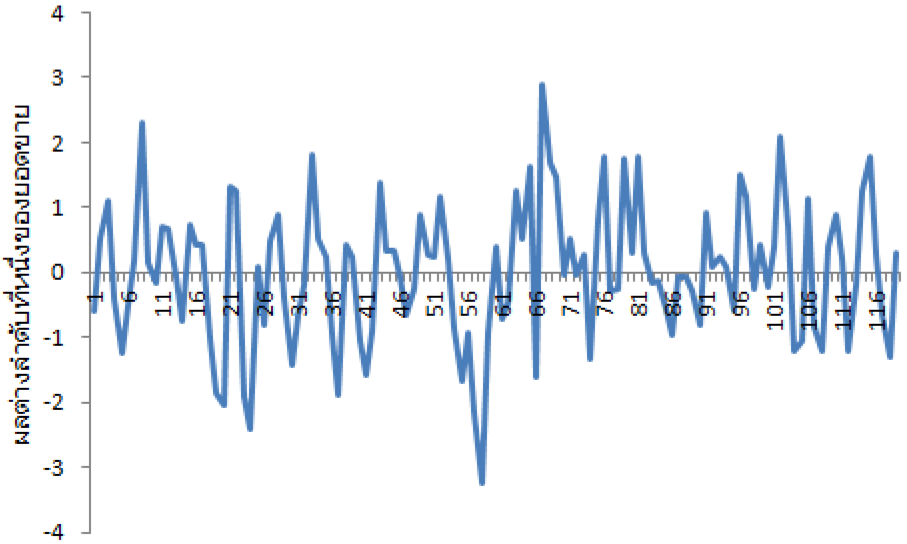


รูปที่ 2.4 แสดงยอดขายรายเดือนของแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อหนึ่ง (Y_t)

จากการสังเกตรูปที่ 2.4 จะอนุมานได้ว่าอนุกรมเวลายอดขายของแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อหนึ่ง (Y_t) ไม่มีความนิ่ง ทั้งนี้เพราะข้อมูลผันผวนมาก ความแปรปรวนไม่น่าจะคงที่ รอบ ๆ ค่าเฉลี่ย 11.6 ล้านบาท ในกรณีนี้ เราอาจลองหาผลต่างลำดับที่ 1 ของยอดขายแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อนี้ ณ เวลา t จากสูตรต่อไปนี้

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}, \quad t = 2, \ldots, 120$$

จะเห็นว่าจำนวนข้อมูลของ ΔY_t จะเหลือ 119 ข้อมูลเท่านั้น และเมื่อนำมาวาดกราฟแสดงได้ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงผลต่างลำดับที่ 1 ของยอดขายรายเดือนแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อหนึ่ง (ΔY_t)

จากการสังเกตรูปที่ 2.5 จะอนุมานได้ว่าผลต่างลำดับที่ 1 ของอนุกรมเวลายอดขายแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อหนึ่ง (ΔY_t) มีความนิ่งแล้ว ทั้งนี้เพราะลักษณะของข้อมูลมีความผันผวนคงที่รอบ ๆ ค่าคงที่ (ซึ่งก็คือศูนย์) นั่นเอง

2.2 Sample Autocorrelation Function (SAC)

ในการพิจารณาว่าอนุกรมเวลาที่พิจารณาอยู่มีความนิ่งหรือไม่นั้น นอกจากจะใช้กราฟเพื่อประเมินถึงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอนุกรมเวลาว่าคงที่หรือไม่ เราอาจคำนวณค่า SAC (Sample Autocorrelation Function) และ SPAC (Sample Partial Autocorrelation Function) มาร่วมพิจารณาเพื่อให้แน่ใจว่าอนุกรมเวลามีความนิ่งจริงหรือไม่อีกด้วย นอกจากนี้ค่า SAC ยังช่วยในการตัดสินใจเบื้องต้นว่าควรเลือกแบบจำลองของ Box-Jenkins ชนิดใดกับอนุกรมเวลาที่กำลังพิจารณาอยู่อีกด้วย[4]

---

[4] เช่น ควรนำแบบจำลอง Autoregressive (AR) หรือ Moving Average (MA) มาใช้กับอนุกรมเวลาที่กำลังพิจารณาดี (รายละเอียดนี้จะกล่าวในบทที่ 3)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติที่เราควรทราบเกี่ยวกับค่า SAC ซึ่งประกอบด้วยการคำนวณและความหมายของค่า SAC และการทดสอบสมมุติฐานของ TAC (Theoretical Autocorrelation Function) รายละเอียดมีดังนี้

2.2.1 การคำนวณและความหมายของค่า SAC

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_T$ คืออนุกรมเวลาชุดหนึ่งที่มีความนิ่งจำนวน T ข้อมูล ค่า SAC ณ k ช่วงเวลาที่แล้ว (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ r_k) คำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(X_t-\bar{X})(X_{t+k}-\bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} \qquad (2.1)$$

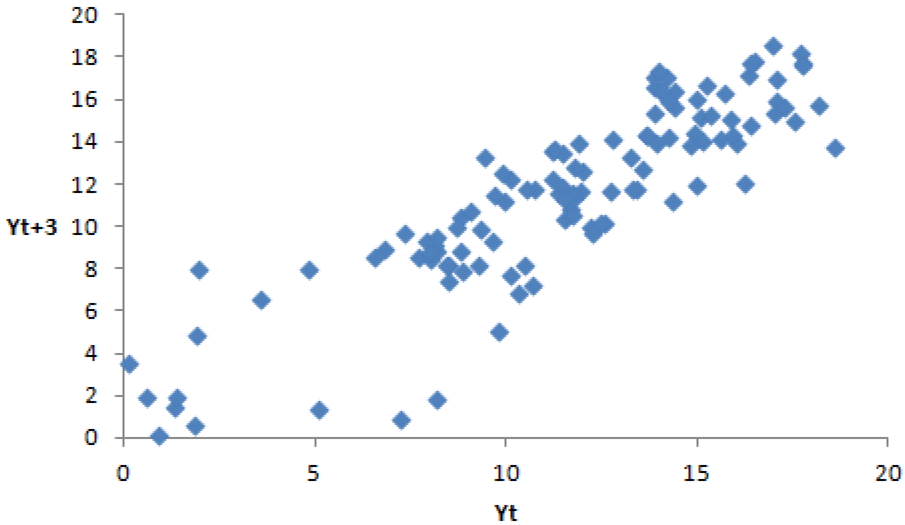
โดยที่ $\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{T}$ ซึ่งก็คือ ค่าเฉลี่ยนั่นเอง

จากสูตรตามสมการที่ (2.1) ค่า SAC ณ k ช่วงเวลาที่แล้ว (r_k) ก็คือ ค่าสหสัมพันธ์ (correlation) ระหว่างอนุกรมเวลา ณ ช่วงเวลาปัจจุบัน (X_t) กับอนุกรมเวลา ณ k ช่วงเวลาถัดไป (X_{t+k}) นั่นเอง หรืออาจจะกล่าวอีกอย่างว่า r_k เป็นค่าสหสัมพันธ์ (correlation) ระหว่างอนุกรมเวลา ณ ช่วงเวลาปัจจุบันกับอนุกรมเวลา ณ k ช่วงเวลาที่ผ่านมาก็ได้

และเนื่องจาก r_k เป็นค่าสหสัมพันธ์ จึงมีคุณสมบัติต่อไปนี้

- ถ้าค่า $r_k > 0$ หมายถึง อนุกรมเวลา X_t เปลี่ยนแปลงในทิศทางเดียวกันกับข้อมูลตัวมันเองใน k ช่วงเวลาที่แล้ว
- ถ้าค่า $r_k < 0$ หมายถึง อนุกรมเวลา X_t จะเปลี่ยนแปลงในทิศทางตรงกันข้ามข้อมูลตัวมันเองใน k ช่วงเวลาที่แล้ว
- ถ้าค่า r_k เข้าใกล้ 0 หมายถึง อนุกรมเวลา X_t ไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าจะเป็นไปในทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงกันข้ามกับข้อมูลตัวมันเองใน k ช่วงเวลาที่แล้ว
- ค่า r_k จะอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1

ในที่นี้จะใช้ตัวอย่างที่กล่าวถึงอนุกรมเวลายอดขายแฮมเบอร์เกอร์รายเดือนยี่ห้อหนึ่ง (Y_t) มาคำนวณค่า SAC ณ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว (ซึ่งเขียนแทนด้วย r_3) [5] เมื่อเราลองวาดกราฟเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Y_t กับ Y_{t+3} พบว่าแสดงได้ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Y_t และ Y_{t+3}

จากรูปที่ 2.6 แสดง Y_t มีความสัมพันธ์กับ Y_{t+3} ทิศทางเดียวกัน นั่นคือเราสามารถบอกได้ว่าค่า *SAC* ณ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว หรือ r_3 ควรมีค่ามากกว่าศูนย์ โดย r_3 คำนวณได้ดังนี้

$$r_3 = \frac{\sum_{t=1}^{T-3}(X_t - \bar{X})(X_{t+3} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} = 0.853$$

ส่วนค่า r_1, r_2, r_4 ก็สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T-1}(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} = 0.963$$

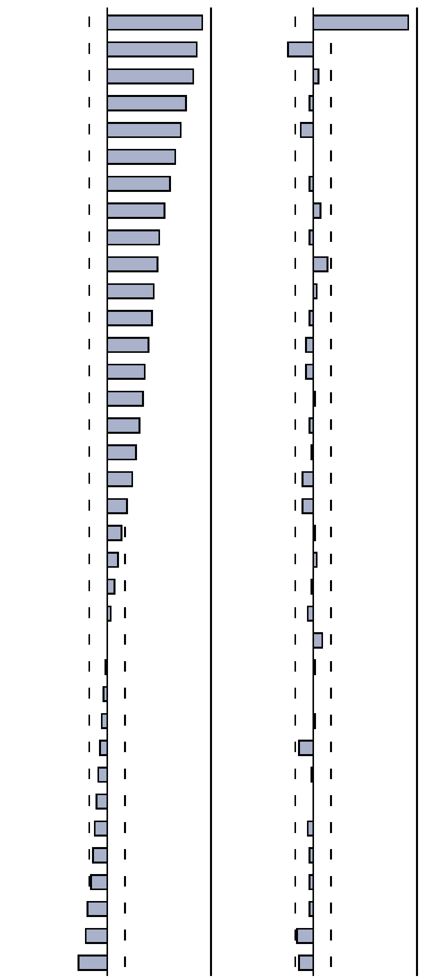
$$r_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T-2}(X_t - \bar{X})(X_{t+2} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} = 0.907$$

---

[5] นั่นคือ $k = 3$ นั่นเอง

$$r_4 = \frac{\sum_{t=1}^{T-4}(X_t - \bar{X})(X_{t+4} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} = 0.801$$

ทำนองเดียวกัน ค่า SAC ณ ช่วงเวลาอื่น ๆ ก็สามารถคำนวณได้โดยใช้แนวคิดเดียวกันนี้ สมมุติให้ค่า SAC ณ 1, 2, …., 36 ช่วงเวลาที่แล้ว (หรือ $r_1, r_2, \ldots, r_{36}$) ที่คำนวณได้ จะแสดงด้วยรูปที่ 2.7 ดังนี้[6]



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.963	0.963	113.99	0.000
		2	0.907	-0.261	216.16	0.000
		3	0.853	0.044	307.25	0.000
		4	0.801	-0.026	388.17	0.000
		5	0.743	-0.115	458.40	0.000
		6	0.684	0.005	518.57	0.000
		7	0.628	-0.027	569.62	0.000
		8	0.579	0.068	613.39	0.000
		9	0.532	-0.047	650.66	0.000
		10	0.495	0.137	683.33	0.000
		11	0.469	0.035	712.81	0.000
		12	0.444	-0.031	739.59	0.000
		13	0.416	-0.074	763.27	0.000
		14	0.383	-0.073	783.57	0.000
		15	0.353	0.022	800.93	0.000
		16	0.323	-0.045	815.61	0.000
		17	0.290	-0.021	827.61	0.000
		18	0.251	-0.106	836.62	0.000
		19	0.203	-0.099	842.57	0.000
		20	0.155	0.015	846.07	0.000
		21	0.112	0.027	847.92	0.000
		22	0.072	-0.013	848.71	0.000
		23	0.033	-0.060	848.87	0.000
		24	0.002	0.096	848.87	0.000
		25	-0.021	0.022	848.94	0.000
		26	-0.039	0.005	849.18	0.000
		27	-0.052	0.019	849.60	0.000
		28	-0.067	-0.140	850.31	0.000
		29	-0.084	-0.023	851.43	0.000
		30	-0.099	0.004	853.03	0.000
		31	-0.118	-0.051	855.34	0.000
		32	-0.140	-0.027	858.61	0.000
		33	-0.164	-0.042	863.13	0.000
		34	-0.190	-0.036	869.31	0.000
		35	-0.228	-0.170	878.26	0.000
		36	-0.279	-0.154	891.81	0.000

รูปที่ 2.7 แสดงค่า SAC ของยอดขายรายเดือนแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อหนึ่ง ณ 1–36 ช่วงเวลาที่แล้ว

[6] ค่า AC ที่แสดงในรูปนี้หมายถึงค่า SAC

2.2.2 การทดสอบสมมุติฐานของ TAC (Theoretical Autocorrelation Function)

การคำนวณค่า SAC โดยแท้จริงแล้วมีจุดประสงค์เพื่อนำมาใช้ประมาณค่า TAC (Theoretical Autocorrelation Function) ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ที่เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ρ ค่า TAC ณ k ช่วงเวลาที่แล้ว (เขียนแทนด้วย ρ_k) มีสูตรในการคำนวณดังนี้

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{var(X_t)}\sqrt{var(X_{t+k})}} = \frac{E\left[\left(X_t - E(X_t)\right)\left(X_{t+k} - E(X_{t+k})\right)\right]}{\sqrt{var(X_t)}\sqrt{var(X_{t+k})}}$$

เมื่ออนุกรมเวลา X_t มีความนิ่ง จะได้ว่า $E(X_t) = E(X_{t+k})$ และ $var(X_t) = var(X_{t+k})$ ดังนั้น เราจะได้

$$\begin{aligned}
\rho_k &= \frac{E\left[\left(X_t - E(X_t)\right)\left(X_{t+k} - E(X_t)\right)\right]}{\sqrt{var(X_t)}\sqrt{var(X_t)}} \\
&= \frac{E\left[\left(X_t - E(X_t)\right)\left(X_{t+k} - E(X_t)\right)\right]}{var(X_t)} \\
&= \frac{E\left[\left(X_t - E(X_t)\right)\left(X_{t+k} - E(X_t)\right)\right]}{E\left(X_t - E(X_t)\right)^2} \\
&= \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{Var(X_t)} \\
&= \frac{\gamma_k}{\gamma_0}
\end{aligned}$$

r_k จะเป็นตัวประมาณค่าที่สอดคล้องกับ ρ_k เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (consistency estimators of ρ_k)[7] หรือเขียนได้ว่า[8] $plim\ r_k = \rho_k$ ซึ่งหมายถึง r_k จะใช้เป็นตัวประมาณค่า ρ_k ได้เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และหากตัวอย่างมีขนาดเล็กแล้ว r_k จะเป็นตัวประมาณค่าที่เอนเอง (biased estimator) ของ ρ_k

---

[7] Tsay, R. S. *Analysis of Financial Time Series* (John Wiley & Sons, Inc., 2002), p. 24.

[8] plim ย่อมาจาก probability limit

ค่า r_k ที่คำนวณขึ้นมานี้ ถูกคำนวณจากค่าของอนุกรมเวลา X ที่เก็บได้มาในอดีตซึ่งถือว่าเป็นตัวแปรสุ่ม[9] ดังนั้น ค่า r_k จะเป็นตัวแปรสุ่มด้วย โดยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ r_k คำนวณจากสูตรดังต่อไปนี้ [10]

$$S_{r_k} = \sqrt{\frac{1+2r_1^2+2r_2^2+\cdots+r_q^2}{T}} \quad \text{, โดยที่ } k > q$$

โดยค่า r_j^2 คือค่า SAC ณ j ช่วงเวลาที่แล้วยกกำลังสอง ส่วน q คือค่าคงที่ค่าหนึ่งที่น้อยกว่า k เช่น q อาจมีค่าเท่ากับ k–1 ก็ได้

หากอนุกรมเวลา $X_1, X_2, \ldots, X_T$ เป็นอิสระต่อกันแล้ว จะได้ว่า $r_1, r_2, \ldots, r_q$ จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่า r_k จะประมาณด้วยสมการข้างล่างนี้

$$S_{r_k} = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

Brockwell and David (1991)[11] ได้สรุปไว้ว่า หากอนุกรมเวลา ($X_1, X_2, \ldots, X_T$) มีการแจกแจงที่เหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน (independent and identically distributed: iid) และมีความแปรปรวนคงที่แล้ว หากอนุกรมเวลาชุดนี้ถูกนำมาใช้คำนวณค่า r_k แล้ว “**เมื่อ T มีขนาดใหญ่ r_k จะมีการแจกแจงที่สามารถประมาณด้วยการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนคือ $\frac{1}{T}$**” หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $r_k \sim N(0, \frac{1}{T})$

จากตัวอย่างยอดขายรายเดือนของแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อหนึ่ง ซึ่งเราได้คำนวณแล้วว่า r_3 = 0.853 ดังนั้น การทดสอบสมมุติฐาน $H_0: \rho_3 = 0$ และ $H_1: \rho_3 \neq 0$ ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 สามารถคำนวณได้ด้วยค่าสถิติ

---

[9] การที่อนุกรมเวลา X เป็นตัวแปรสุ่ม นั่นหมายถึงค่า X ที่เก็บมาในอดีตเราไม่ทราบค่าที่แท้จริงล่วงหน้า เช่น ถ้าหากมีเหตุการณ์ไม่คาดฝันเกิดขึ้น เช่น เกิดมหาอุทกภัย แล้วอาจจะส่งผลให้ค่าอนุกรมเวลา X ที่เก็บมาไม่เหมือนเดิมได้

[10] Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (California: Addison-Wesley, 1990), p. 21.

[11] Brockwell, P.J. and Davis, R.A., *Time Series*: *Theory and Methods*, 2nd Edition. (New York: Springer-Verlag, 1991), p. 221.

$$z_{r_3} = \frac{r_3}{s_{r_3}} = \frac{0.853}{\frac{1}{\sqrt{120}}} = 0.853\sqrt{120} = 9.344$$

จากการเปิดค่าวิกฤติในตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ที่ระดับนัยสำคัญ (α) = 0.05 ค่าวิกฤตที่ได้คือ $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$ ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก H_0: $\rho_3 = 0$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ซึ่งหมายถึงยอดขายรายเดือนของแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อนี้ ณ เดือนปัจจุบันจะมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับยอดขายของ 3 เดือนก่อนหน้านี้ที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 5

เมื่อพิจารณารูปที่ 2.7 เส้นประ 2 เส้นที่อยู่ตรงรูปกราฟของ Autocorrelations คือค่า $\pm\frac{2}{\sqrt{T}}$ ดังนั้น เราสามารถใช้เส้นประ 2 เส้นนี้เป็นเกณฑ์ในการทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\rho_k = 0$ และ H_1: $\rho_k \neq 0$ ที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 5 ได้[12] กล่าวคือ หากค่า r_k อยู่เลยเส้นประไม่ว่าจะเป็นเส้นใดเส้นหนึ่ง จะแสดงถึงการทดสอบสมมุติฐานดังกล่าวมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 5 แต่หากค่า r_k อยู่ภายในเส้นประทั้งสองเส้นนี้ จะแสดงถึงการทดสอบสมมุติฐานดังกล่าวไม่มีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 5

หากเราต้องการทดสอบว่าอนุกรมเวลาเป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ หรือไม่ สามารถทำได้โดยการทดสอบสมมุติฐานต่อไปนี้

H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$

H_1: มีค่าพารามิเตอร์ข้างต้นอย่างน้อย 1 ตัวไม่เป็นศูนย์

การทดสอบสมมุติฐานข้างต้น จะใช้ค่าสถิติ Ljung-Box Q ซึ่งมีสูตรดังนี้[13]

$$Q(m) = T(T+2)\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j^2}{T-j}$$

เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่แล้ว ตัวสถิติ $Q(m)$ จะมีการแจกแจงประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบ Chi-square ที่มีองศาของความเป็นอิสระ m ในทางปฏิบัติ การเลือกค่า m ที่น้อยเกินไป อาจทำให้ผลการทดสอบไม่เจอปัญหาความสัมพันธ์ต่อกันของอนุกรมเวลา ในขณะที่การเลือกค่า m ที่

---

[12] เป็นค่าประมาณ เนื่องจากถ้าเป็นที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 5 จะต้องใช้ค่า $\pm\frac{1.96}{\sqrt{T}}$ อย่างไรก็ดี โปรแกรมสำเร็จรูปที่หนังสือเล่มนี้ใช้เส้นประที่คำนวณจาก $\pm\frac{2}{\sqrt{T}}$ ซึ่งมีค่าใกล้เคียงกัน

[13] การใช้ค่าสถิตินี้ทดสอบ เราอาจเรียกอีกอย่างว่า Portmanteau Test

มากเกินไปจะทำให้อำนาจการทดสอบของตัวสถิติ Q(m) ต่ำ (low power of test) เนื่องจากค่าสหสัมพันธ์ ณ ช่วงเวลาหนึ่งที่มีนัยสำคัญ อาจถูกลดความสำคัญลงจากค่าสหสัมพันธ์ ณ ช่วงเวลาอื่น ๆ ที่ไม่มีนัยสำคัญ Tsay (2003)[14] พบว่าค่า $m \approx \ln(T)$ จะมีอำนาจของการทดสอบดีกว่าค่าอื่น ๆ

จากตัวอย่างยอดขายรายเดือนของแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อหนึ่ง สมมุติให้เราต้องการทดสอบสมมุติฐานดังนี้

H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

H_1: มีค่าพารามิเตอร์ข้างต้นอย่างน้อย 1 ตัวไม่เป็นศูนย์

เราได้คำนวณแล้วว่า $r_1 = 0.963$ $r_2 = 0.907$ และ $r_3 = 0.853$ (แสดงเพียงทศนิยม 3 ตำแหน่งแรกเท่านั้น) ดังนั้น ค่าสถิติ $Q(3)$ คำนวณดังนี้

$$Q(3) = T(T+2)\sum_{j=1}^{3}\frac{r_j^2}{T-j}$$

$$= 120(120+2)\left(\frac{r_1^2}{120-1}+\frac{r_2^2}{120-2}+\frac{r_3^2}{120-3}\right)$$

$$= 120(120+2)\left(\frac{0.963^2}{119}+\frac{0.907^2}{118}+\frac{0.853^2}{117}\right) = 307.20$$

ในทางปฏิบัติ โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติจะทำการคำนวณค่า $Q(m)$ ให้ ซึ่งจะใช้ค่า r_1 r_2 และ r_3 ที่มีทศนิยมตามเป็นจริง (ดูรูปที่ 2.7) และจะได้ค่า Q(3) = 307.25 และมีค่า probability หรือ p-value = 0.000 ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐาน H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 นั่นคือยอดขายรายเดือนของแฮมเบอร์เกอร์ยี่ห้อนี้มีความสัมพันธ์กับยอดขายใน 3 เดือนที่ผ่านมา ที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 1 และเมื่อพิจารณาที่ค่า m อื่น ๆ จะให้ข้อสรุปเดียวกัน นั่นคือเรากล่าวได้ว่า อนุกรมเวลายอดขายรายเดือนของแฮมเบอร์เกอร์ไม่เป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ อย่างมีนัยสำคัญ

[14] Tsay, R. S., *Analysis of Financial Time Series* (John Wiley & Sons, Inc, 2002), p. 25.

2.3 Sample Partial Autocorrelation Function (SPAC)

ในหัวข้อนี้จะแบ่งออกเป็น 2 หัวข้อย่อย หัวข้อย่อยแรกจะกล่าวถึงแนวคิดของการหาค่า TPAC (Theoretical Partial Autocorrelation Function) และค่า SPAC (Sample Partial Autocorrelation Function) และในหัวข้อย่อยที่ 2 จะกล่าวถึงการทดสอบสมมุติฐานของค่า TPAC ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.3.1 แนวคิดของการหาค่า TPAC และค่า SPAC

เราทราบแล้วว่า ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงระหว่าง X_t กับ X_{t-3} แสดงได้ด้วยค่า TAC ณ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว (ซึ่งเขียนแทนด้วย ρ_3)[15] และหากเราพบว่า $\rho_3 \neq 0$ อาจมีสาเหตุมาจาก X_t มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับ X_{t-1}, X_{t-2} และ X_{t-3} มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับ X_{t-1}, X_{t-2} ดังนั้นจึงทำให้ X_t มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงกับ X_{t-3} ด้วยนั่นเอง

เมื่อเราต้องการหาความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงระหว่าง X_t กับ X_{t-3} โดยไม่มีอิทธิพลของ X_{t-1} และ X_{t-2} เข้ามาเกี่ยวข้อง จะแสดงได้ด้วยค่า TPAC (Theoretical Partial Autocorrelation) ณ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว (เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า ϕ_{33}) นั่นคือการหาค่า ϕ_{33} สามารถหาได้การใช้สมการถดถอยเชิงพหุ[16]

เพื่อให้เข้าใจได้ง่าย เราจะสมมุติให้อนุกรม X_t (t =1, 2, …, T) มีความนิ่งและมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ค่า TPAC ณ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว ซึ่งเขียนแทนด้วย ϕ_{33} หาได้จากสมการถดถอยต่อไปนี้

$$X_{t+3} = \phi_{31}X_{t+2} + \phi_{32} X_{t+1} + \phi_{33}X_t + u_{t+3} \qquad (2.2)$$ [17]

โดย u คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (stochastic disturbance term หรือ random error term) การหาค่า ϕ_{33} สามารถทำได้ดังนี้

จากสมการที่ (2.2) คูณตลอดด้วย X_{t+2} จะได้

$$X_{t+3} X_{t+2} = \phi_{31}X_{t+2}^2 + \phi_{32} X_{t+1} X_{t+2} + \phi_{33}X_t X_{t+2} + X_{t+2}u_{t+3}$$

---

[15] อย่าลืมว่า เราสามารถใช้สัญลักษณ์ X_{t+3} กับ X_t ก็ได้

[16] สำหรับผู้สนใจ อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้ใน ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์, *เศรษฐมิติเบื้องต้น*, พิมพ์ครั้งที่ 2. (กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554), หน้า 61–65.

[17] สมการที่ (2.2) อาจเขียนในรูป $X_t = \phi_{31}X_{t-1} + \phi_{32} X_{t-2} + \phi_{33}X_{t-3} + u_t$ ก็ได้

ใส่ค่าคาดหวัง (take expected value) จะได้

$$E(X_{t+3}X_{t+2}) = \phi_{31}E(X_{t+2}^2) + \phi_{32}E(X_{t+1}X_{t+2}) + \phi_{33}E(X_t X_{t+2}) + E(X_{t+1}u_{t+3})$$

$$Cov(X_{t+3}, X_{t+2}) = \phi_{31}Var(X_{t+2}) + \phi_{32}Cov(X_{t+1}, X_{t+2}) + \phi_{33}Cov(X_t, X_{t+2})$$

[$\because E(X_{t+1}u_{t+3})=0$]

$$\gamma_1 = \phi_{31}\gamma_0 + \phi_{32}\gamma_1 + \phi_{33}\gamma_2$$

เนื่องจากเมื่อ X_t มีความนิ่งแล้ว ความแปรปรวนร่วมระหว่างข้อมูลอนุกรมเวลา (X_t) ที่ต่างช่วงเวลากัน จะขึ้นอยู่กับระยะห่างของช่วงเวลาทั้งสอง เช่น $Cov(X_{t+3}, X_{t+2}) = Cov(X_{t+1}, X_{t+2}) = \gamma_1$ และ $Cov(X_{t+2}, X_{t+3}) = Cov(X_{t+3}, X_{t+2})$ หรือ $\gamma_1 = \gamma_{-1}$ นอกจากนี้ เราจะเขียนได้อีกว่า $Var(X_{t+2}) = \gamma_0$ และเมื่อเรานำค่า γ_0 หารตลอดจะได้[18]

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_{31}\frac{\gamma_0}{\gamma_0} + \phi_{32}\frac{\gamma_1}{\gamma_0} + \phi_{33}\frac{\gamma_2}{\gamma_0}$$

$$\rho_1 = \phi_{31}\rho_0 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2 \qquad (2.3)$$

โดย ρ_1 และ ρ_2 ก็คือค่า TAC ณ 1 และ 2 ช่วงเวลาที่แล้ว ตามลำดับ ส่วน ρ_0 คือค่าพารามิเตอร์ที่แสดงสหสัมพันธ์ของตัวเองซึ่งจะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

ทำนองเดียวกัน เมื่อเรานำ X_{t+1} คูณสมการที่ (2.2) และใส่ค่าคาดหวัง แล้วนำ γ_0 หารตลอดจะได้

$$\rho_2 = \phi_{31}\rho_1 + \phi_{32}\rho_0 + \phi_{33}\rho_1 \qquad (2.4)$$

นำ X_t คูณสมการที่ (2.2) และใส่ค่าคาดหวัง แล้วนำ γ_0 หารตลอดจะได้

$$\rho_3 = \phi_{31}\rho_2 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_0 \qquad (2.5)$$

เพื่อให้เห็นภาพชัดเจน เขียนสมการที่ (2.3) ถึง (2.5) เรียงต่อกันได้ดังนี้[19]

$$\rho_1 = \phi_{31}\rho_0 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2$$

$$\rho_2 = \phi_{31}\rho_1 + \phi_{32}\rho_0 + \phi_{33}\rho_1$$

$$\rho_3 = \phi_{31}\rho_2 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_0$$

---

[18] จากหัวข้อ 2.2.2 แสดงให้เห็นแล้วว่า $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

[19] ระบบสมการที่เขียนในลักษณะนี้เรียกว่า Yule–Walker Equations

จะเห็นว่า เราสามารถหาค่า TPAC ณ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{33}) จากการแก้ระบบสมการข้างบนนี้นั่นเอง จากการใช้กฎของเครเมอร์ (Cramer's rule) จะได้

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

การหาค่า ϕ_{33} จากการแก้สมการที่ (2.3) ถึง (2.5) เป็นการใช้แนวคิดเดียวกับการหาค่า ϕ_{33} ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดนั่นเอง ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ผลการประมาณสมการที่ (2.2) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด เขียนได้ดังนี้

$$\hat{X}_{t+3} = \hat{\phi}_{31}X_{t+2} + \hat{\phi}_{32}X_{t+1} + \hat{\phi}_{33}X_t$$

เราจะได้ว่า $\hat{\phi}_{33}$ ก็คือค่า SPAC (Sample Partial Autocorrelation) ณ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าของ ϕ_{33} นั่นเอง[20]

จากแนวคิดเดียวกันนี้ $\hat{\phi}_{kk}$ สามารถคำนวณได้จากการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ X_t ของสมการถดถอย (2.6) นั่นเอง

$$\hat{X}_{t+k} = \hat{\phi}_{k1}X_{t+k-1} + \hat{\phi}_{k2}X_{t+k-2} + \hat{\phi}_{k3}X_{t+k-3} + \cdots + \hat{\phi}_{kk}X_t \qquad (2.6)$$

2.3.2 การทดสอบสมมุติฐานของค่า TPAC

ค่า $\hat{\phi}_{kk}$ ก็คือตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดนั่นเองซึ่งถือเป็นตัวแปรสุ่ม และหากอนุกรมเวลา $X_1, X_2, \ldots, X_T$ เป็นอิสระต่อกัน และมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนคงที่แล้ว จะได้ว่าความแปรปรวนของ $\hat{\phi}_{kk}$ สามารถประมาณได้ด้วย $\frac{1}{T}$ (หรือเขียนเป็นสมการได้ว่า $Var\left(\hat{\phi}_{kk}\right) = \frac{1}{T}$)[21] ดังนั้น การทดสอบสมมุติฐานของค่า ϕ_{kk} สามารถใช้แนวคิดเดียวกับการทดสอบสมมุติฐานของค่า ρ_k ซึ่งกล่าวไว้ในหัวข้อ 2.2.2 และเมื่อพิจารณารูปที่ 2.7 เส้นประ 2 เส้นที่อยู่ตรงรูปกราฟ

---

[20] สำหรับการหาค่า $\phi_{11}, \phi_{22}, \ldots, \phi_{kk}$ จะอธิบายอธิบายไว้ในภาคผนวก 2ก

[21] Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Method* (California : Addison-Wesley, 1989), p. 23.

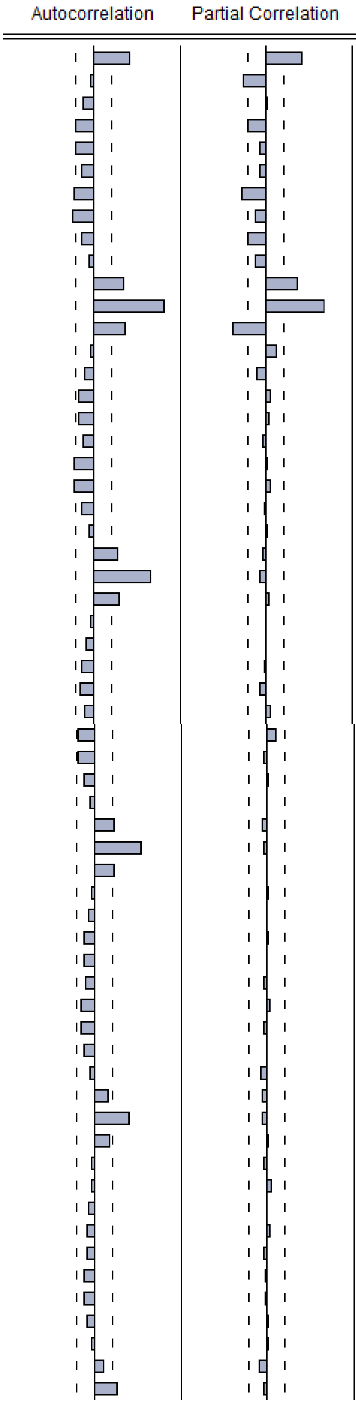
ของ PAC (Partial Autocorrelations) คือค่า $\pm\frac{2}{\sqrt{T}}$ ดังนั้นสามารถใช้เส้นประ 2 เส้นนี้เป็นเกณฑ์ในการทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\phi_{kk} = 0$ และ H_1: $\phi_{kk} \neq 0$ ที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 5 ได้เช่นกัน

2.4 การกำจัดความผันแปรจากฤดูกาล (Removal Seasonal Variations)

การนำวิธีการของ Box-Jenkins มาใช้วิเคราะห์อนุกรมเวลา นอกจากเงื่อนไขว่า อนุกรมเวลานั้นต้องมีความนิ่งแล้ว ยังมีอีกเงื่อนไขหนึ่งคือ อนุกรมเวลานั้นต้องไม่มีความผันแปรจากฤดูกาล ซึ่งข้อมูลทางเศรษฐกิจและธุรกิจส่วนใหญ่ที่เป็นรายไตรมาสหรือรายเดือนมักจะมีความผันแปรจากฤดูกาล เช่น ดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรรายเดือน มักจะมีความผันแปรจากฤดูกาล เนื่องจากจำนวนผลผลิตจะเกี่ยวข้องกับสภาพอากาศในแต่ละเดือน หรือยอดขายรายไตรมาสของห้างสรรพสินค้า ก็มักจะมีความผันแปรทางฤดูกาลเช่นกัน เนื่องจากจะมีผู้คนต้องการจับจ่ายใช้สอยเพื่อซื้อของขวัญให้แก่กันในช่วงไตรมาสสุดท้ายของปี ความผันแปรจากฤดูกาลที่มีอยู่อนุกรมเวลามักจะเป็นสาเหตุหลักที่ทำให้ความแปรปรวนของอนุกรมเวลานั้นมีค่าสูง ดังนั้น การวิเคราะห์อนุกรมเวลาโดยไม่คำนึงถึงว่ามีความผันแปรทางฤดูกาลอยู่หรือไม่ อาจทำให้ผลการพยากรณ์มีความคลาดเคลื่อนสูงได้

จากบทที่ 1 เราได้กล่าวถึงความผันแปรจากฤดูกาลในหัวข้อ 1.3 ซึ่งได้ยกตัวอย่างดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรของประเทศหนึ่งเป็นรายเดือนตั้งแต่ปี 2548–2554 (ดูรูปที่ 1.3) จะสังเกตว่าอนุกรมเวลานี้จะเพิ่มสูงขึ้นในช่วงปลายปี และเมื่อเข้าไปดูรายละเอียดในอนุกรมเวลานี้ จะพบว่าดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรกรรมของประเทศนี้ ณ เดือนพฤศจิกายนจะสูงกว่าเดือนอื่น ๆ และเป็นเช่นนี้ตั้งแต่ปี 2548–2554

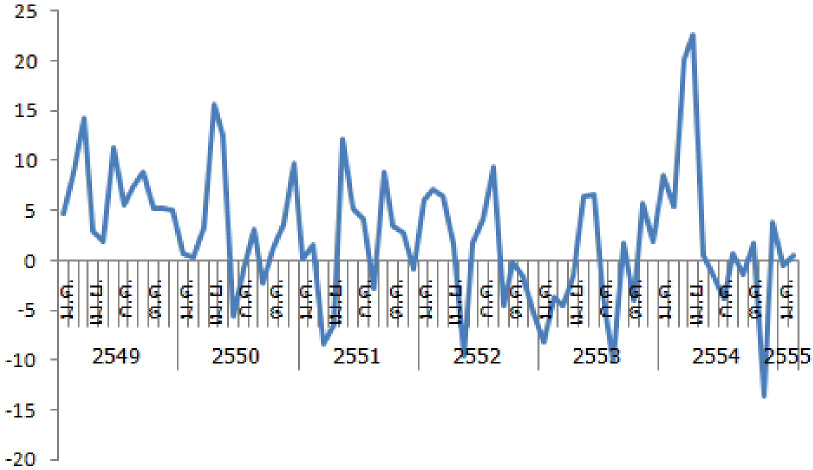
การตรวจสอบว่าอนุกรมเวลามีความผันแปรจากฤดูกาลเข้ามาเกี่ยวข้องหรือไม่ เราสามารถพิจารณาได้ด้วยการตรวจสอบว่า ค่า TAC ณ ช่วงเวลา s $2s$ $3s$ $4s$ ... ที่ผ่านมา จะต้องมีนัยสำคัญทางสถิติ โดย s คือช่วงเวลาของฤดูกาล (seasonal period) ในแต่ละปี ($s = 4$ เมื่อใช้ข้อมูลรายไตรมาส และ $s = 12$ เมื่อใช้ข้อมูลรายเดือน)



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.437	0.437	17.002	0.000
2	-0.031	-0.274	17.087	0.000
3	-0.122	0.020	18.438	0.000
4	-0.214	-0.218	22.659	0.000
5	-0.229	-0.071	27.570	0.000
6	-0.151	-0.080	29.734	0.000
7	-0.245	-0.293	35.474	0.000
8	-0.246	-0.121	41.342	0.000
9	-0.154	-0.206	43.659	0.000
10	-0.055	-0.122	43.965	0.000
11	0.353	0.377	56.543	0.000
12	0.842	0.710	129.12	0.000
13	0.370	-0.408	143.29	0.000
14	-0.035	0.119	143.42	0.000
15	-0.106	-0.106	144.61	0.000
16	-0.178	0.062	148.04	0.000
17	-0.187	0.028	151.85	0.000
18	-0.131	-0.036	153.75	0.000
19	-0.239	0.015	160.19	0.000
20	-0.240	0.047	166.80	0.000
21	-0.155	-0.023	169.59	0.000
22	-0.061	0.014	170.03	0.000
23	0.288	-0.035	180.02	0.000
24	0.695	-0.073	238.95	0.000
25	0.304	0.039	250.44	0.000
26	-0.032	-0.007	250.57	0.000
27	-0.086	-0.001	251.53	0.000
28	-0.147	-0.023	254.34	0.000
29	-0.161	-0.070	257.80	0.000
30	-0.113	0.044	259.54	0.000
31	-0.198	0.099	264.95	0.000
32	-0.202	-0.029	270.64	0.000
33	-0.136	0.013	273.30	0.000
34	-0.049	0.008	273.65	0.000
35	0.233	-0.064	281.73	0.000
36	0.552	-0.034	327.80	0.000
37	0.238	0.005	336.57	0.000
38	-0.027	0.010	336.69	0.000
39	-0.071	-0.006	337.49	0.000
40	-0.117	0.024	339.74	0.000
41	-0.131	0.004	342.64	0.000
42	-0.102	-0.038	344.42	0.000
43	-0.159	0.031	348.84	0.000
44	-0.162	-0.044	353.58	0.000
45	-0.120	0.006	356.22	0.000
46	-0.053	-0.069	356.74	0.000
47	0.164	-0.060	361.96	0.000
48	0.407	-0.060	394.90	0.000
49	0.172	0.020	400.97	0.000
50	-0.026	-0.026	401.11	0.000
51	-0.049	0.052	401.63	0.000
52	-0.076	-0.002	402.92	0.000
53	-0.087	0.035	404.65	0.000
54	-0.082	-0.046	406.25	0.000
55	-0.121	-0.023	409.84	0.000
56	-0.122	-0.010	413.61	0.000
57	-0.093	0.023	415.87	0.000
58	-0.038	0.019	416.28	0.000
59	0.100	-0.098	419.06	0.000
60	0.265	-0.031	439.48	0.000

รูปที่ 2.8 แสดงค่า SAC ของดัชนีผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือน ณ 1–60 ช่วงเวลาที่แล้ว

รูปที่ 2.8 แสดงผลการคำนวณค่า SAC ของอนุกรมเวลาดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรรายเดือนของประเทศนี้ตั้งแต่ 1 ถึง 60 ช่วงเวลาที่แล้ว เมื่อการทดสอบความมีนัยสำคัญของค่า TAC เราสรุปได้ว่า ค่า TAC ณ 12 24 36 48 60 ช่วงเวลาที่ผ่านมา (หรือเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ρ_{12}, ρ_{24}, ρ_{36}, ρ_{48}, ρ_{60}) มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับร้อยละ 5 ซึ่งเป็นการยืนยันว่าอนุกรมดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรรายเดือนของประเทศนี้ มีความผันแปรจากฤดูกาลเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย วิธีการหนึ่งที่สามารถนำมาใช้เพื่อกำจัดอิทธิพลทางฤดูกาลคือ การหาผลต่างของฤดูกาล (seasonal difference) ซึ่งคำนวณจากการนำดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตร ณ t–12 เดือนที่แล้วไปหักออกจากดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรของเดือน t (t = 13, 14, …, T)[22] หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $Y_t - Y_{t-12}$ (สมมุติให้ Y_t คือดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรรายเดือนของประเทศนี้) ผลการคำนวณผลต่างของฤดูกาลแสดงได้ดังรูปที่ 2.9 ดังนี้



รูปที่ 2.9 แสดงกราฟของดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรรายเดือนของประเทศหนึ่งหลังจากทำผลต่างของฤดูกาล

จากรูปที่ 2.9 จะเห็นว่า ความผันแปรจากฤดูกาลได้หมดไปแล้วหลังจากการทำผลต่างของฤดูกาลด้วยการคำนวณ ($Y_t - Y_{t-12}$) และจากการตรวจสอบค่า TAC ณ ช่วงเวลา 12, 24, 36, 48, …, 60 ที่ผ่านมา (ρ_{12}, ρ_{24}, …, ρ_{60}) พบว่ามีเพียงค่า ρ_{12} เท่านั้นที่มีนัยสำคัญทางสถิติ ในขณะที่ $\phi_{12,12}$ ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ นั่นคือความผันแปรทางฤดูกาลได้หายไปแล้วนั่นเอง

[22] อาจมองว่า คำนวณจากการนำดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรแต่ละเดือนไปหักออกจากดัชนีนี้ใน 12 เดือนถัดไปก็ได้

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.326	0.326	8.1991	0.004
		2	0.050	-0.063	8.3981	0.015
		3	-0.052	-0.055	8.6088	0.035
		4	0.086	0.139	9.1969	0.056
		5	0.037	-0.041	9.3060	0.097
		6	0.010	0.001	9.3138	0.157
		7	-0.027	-0.012	9.3767	0.227
		8	-0.088	-0.098	10.032	0.263
		9	0.127	0.218	11.436	0.247
		10	0.021	-0.117	11.473	0.322
		11	-0.104	-0.117	12.435	0.332
		12	-0.308	-0.211	21.062	0.049
		13	0.055	0.252	21.343	0.066
		14	0.053	-0.069	21.608	0.087
		15	0.010	-0.039	21.617	0.118
		16	-0.125	-0.073	23.124	0.110
		17	-0.042	0.063	23.301	0.140
		18	-0.064	-0.124	23.710	0.165
		19	-0.033	-0.000	23.820	0.203
		20	0.121	0.166	25.337	0.189
		21	0.093	0.156	26.255	0.197
		22	0.070	-0.117	26.782	0.220
		23	0.044	0.002	26.991	0.256
		24	0.060	-0.039	27.398	0.286
		25	-0.052	0.104	27.708	0.321
		26	0.066	0.018	28.223	0.348
		27	0.032	-0.040	28.346	0.393
		28	0.099	0.119	29.533	0.386
		29	0.011	-0.034	29.547	0.437
		30	0.155	0.087	32.633	0.339
		31	0.042	-0.071	32.863	0.376
		32	-0.101	-0.023	34.234	0.361
		33	-0.061	0.074	34.747	0.385
		34	-0.030	-0.106	34.872	0.426
		35	-0.016	-0.058	34.908	0.473
		36	-0.137	-0.095	37.687	0.392
		37	-0.020	0.101	37.748	0.435
		38	-0.076	0.011	38.642	0.440
		39	-0.070	-0.184	39.432	0.451
		40	-0.066	0.085	40.160	0.463
		41	-0.058	-0.092	40.727	0.483
		42	-0.142	-0.027	44.271	0.376
		43	-0.063	-0.114	44.992	0.388
		44	-0.016	-0.021	45.038	0.428
		45	-0.092	0.051	46.696	0.403
		46	-0.035	-0.015	46.938	0.434
		47	0.044	0.005	47.350	0.458
		48	0.033	-0.110	47.593	0.489
		49	-0.079	0.013	48.988	0.474
		50	-0.064	-0.086	49.951	0.475
		51	0.002	-0.067	49.952	0.515
		52	0.025	0.088	50.110	0.549
		53	0.029	-0.011	50.329	0.579
		54	-0.028	-0.091	50.555	0.608
		55	-0.007	0.041	50.571	0.644
		56	0.037	-0.002	50.992	0.664
		57	0.038	0.043	51.476	0.682
		58	0.048	0.020	52.279	0.687
		59	-0.019	0.041	52.410	0.715
		60	0.040	0.001	53.043	0.726

รูปที่ 2.10 แสดงค่า SAC ของผลต่างทางฤดูกาลของดัชนีผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือน ณ 1–60 ช่วงเวลาที่แล้ว

บทที่ 3

วิธีการของ Box-Jenkins : การระบุแบบจำลอง

ในบทที่ 3 นี้จะกล่าวถึงวิธีการของ Box-Jenkins ที่จะนำมาใช้วิเคราะห์อนุกรมเวลา ซึ่งมี 3 ขั้นตอน ได้แก่ **ขั้นที่ 1** เป็นขั้นที่ระบุแบบจำลอง กล่าวคือ อนุกรมเวลานั้นควรนำไปใช้กับแบบจำลองชนิดใด **ขั้นที่ 2** เป็นการประมาณค่าแบบจำลองที่ถูกระบุในขั้นที่ 1 **และขั้นที่ 3** เป็นขั้นการตรวจสอบว่าแบบจำลองที่ระบุมาในขั้นที่ 1 มีความถูกต้องเหมาะสมหรือไม่ โดยใช้ผลการประมาณค่าในขั้นที่ 2 เป็นตัวประเมิน หลังจากได้แบบจำลองที่ดีที่สุดแล้ว เราจะศึกษาถึงการนำแบบจำลองนั้นไปใช้พยากรณ์อนุกรมเวลา อย่างไรก็ดี เราควรมารู้จักคำนิยามของศัพท์ "ตัวรบกวนขาว (White Noise)" ซึ่งมักมีการอ้างถึงมากในการวิเคราะห์อนุกรมเวลากันเสียก่อน จากนั้นเราจะมาดูว่าแบบจำลองของ Box-Jenkins มีอะไรบ้าง และหัวข้อสุดท้ายจึงกล่าวถึงขั้นตอนที่ 1 ซึ่งก็คือการระบุแบบจำลอง Box-Jenkins ว่ามีแนวคิดอย่างไร

3.1 ตัวรบกวนขาว (White Noise)[1]

ถ้า $u_1, u_2, \ldots, u_T$ คือลำดับของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงเหมือนกัน (*iid*: independent identically distributed random variable) ที่ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเป็นค่าคงที่แล้ว อนุกรม u_t $(t = 1, 2, \ldots, T)$ ถูกเรียกว่า “ตัวรบกวนขาว (White Noise)” และถ้าพบว่าอนุกรม u_t มีการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น σ^2 แล้ว เราจะเรียกอนุกรม u_t ว่า “ตัวรบกวนขาวแบบเกาส์เซียน (Gaussian White Noise)”

ถ้า u_t เป็นตัวรบกวนขาวแล้ว ทั้งค่า TAC ทุก ๆ ช่วงเวลาที่ผ่านมาจะมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ การทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ จะต้องไม่มีนัยสำคัญทางสถิตินั่นเอง[2] และเมื่อพิจารณาค่า TPAC ทุก ๆ ช่วงเวลาที่ผ่านมาก็ต้องมีค่าเท่ากับศูนย์เช่นกัน นั่นคือ การทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\phi_{kk} = 0$, $k \neq 0$ จะต้องไม่มีนัยสำคัญทางสถิติด้วย และเราจึงกล่าวได้ว่าอนุกรมเวลาที่เป็นตัวรบกวนขาวว่า**ไม่มีความจำ (no memory)** เนื่องจากค่าของ u ในช่วงเวลาก่อนหน้านี้จะไม่ส่งผลกระทบใด ๆ ในค่า u ณ ปัจจุบันนั่นเอง[3]

3.2 แบบจำลองของ Box-Jenkins

ก่อนที่เราจะมาดูว่า การระบุแบบจำลองตามวิธีการของ Box-Jenkins ทำอย่างไรนั้น เราควรมาศึกษาถึงแบบจำลองที่ Box-Jenkins ได้เสนอไว้เสียก่อน ซึ่งได้แก่ แบบจำลอง Autogressive (AR) แบบจำลอง Moving Average (MA) แบบจำลอง Autoregressive Moving Average (ARMA) และแบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) รายละเอียดมีดังนี้

---

[1] หรืออาจเรียกว่า ตัวแปรสุ่มแท้จริง (Purely Random Process) ก็ได้

[2] วิธีการทดสอบสามารถทำได้ด้วยการใช้ค่าสถิติ Ljung-Box Q ซึ่งกล่าวไว้แล้วในบทที่ 2

[3] หรือเขียนได้ว่า ค่าความแปรปรวนร่วมของ u_t และ u_{t-k} เป็นศูนย์นั่นเอง หรือเขียนได้ว่า $Cov(u_t, u_{t-k}) = 0$, $k \neq 0$

3.2.1 แบบจำลอง Autoregressive (AR)

แบบจำลอง Autoregressive (AR) เป็นแบบจำลองที่แสดงถึงอนุกรมเวลา X_t ขึ้นอยู่กับค่าของมันเองในอดีตที่ผ่านมา เราจะเริ่มศึกษารูปแบบที่ง่ายที่สุด ซึ่งก็คือแบบจำลอง Autoregressive ลำดับที่ 1 หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า AR(1) จากนั้นจึงศึกษาถึงแบบจำลอง AR(2) และแบบจำลองในรูปทั่วไปคือ AR(p)

(1) แบบจำลอง Autoregressive ลำดับที่ 1

แบบจำลอง Autoregressive ลำดับที่ 1 เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.1}$$

โดย X_t คืออนุกรมเวลา

α_0 และ α_1 คือ ค่าพารามิเตอร์

ε_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนที่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวแบบเกาส์เซียน

เราอาจเรียกว่า ε_t ว่าเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (random shock) ซึ่งหมายถึงปัจจัยอื่น ๆ นอกเหนือจาก X_{t-1} ที่มีผลกระทบต่อ X_t โดยเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลา จะเป็นอิสระต่อกัน (นั่นคือ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$) จะเป็นอิสระต่อกันตามคุณสมบัติของตัวรบกวนขาว

จากแบบจำลอง AR(1) ของอนุกรม X_t ถ้านำอนุกรมนี้มาหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC แสดงได้ดังสมการที่ (3.2)–(3.5) ตามลำดับดังนี้[4]

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \qquad (3.2)^5$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2} \qquad (3.3)^6$$

$$\rho_k = \alpha_1^k \tag{3.4}$$

---

[4] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 3ก

[5] จากสมการจะเห็นว่า หากแบบจำลอง AR(1) ไม่มีค่าคงที่ α_0 แล้วค่าเฉลี่ยของ X_t จะเท่ากับศูนย์

[6] อย่าลืมว่า $\gamma_0 = \mathrm{Cov}(X_t, X_t) = \mathrm{Var}(X_t)$

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & \text{เมื่อ } k = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } k \geq 2 \end{cases} \tag{3.5}$$

ถ้ากำหนดให้ L คือตัวดำเนินการความล่าช้า (Lag Operator) ที่มีคุณสมบัติ $L^j X_t = X_{t-j}$ ดังนั้น สมการที่ (3.1) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 L \cdot X_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - \alpha_1 L) X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)\, X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \tag{3.6}$$

โดย $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L$ สมการที่ (3.6) เป็นวิธีการเขียนอีกแบบหนึ่งที่ใช้แสดงแบบจำลอง AR(1) ของอนุกรม X_t และเงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t มีความนิ่งคือ "ค่าสัมบูรณ์ของราก (หรือคำตอบ) ของสมการ $\alpha(L) = 0$ **ต้องมากกว่า 1** "[7]

จาก $1 - \alpha_1 L = 0$ จะได้ค่าสัมบูรณ์ของคำตอบสมการนี้ก็คือ $|L| = \left|\frac{1}{\alpha_1}\right|$ ดังนั้น $|L| > 1$ ก็ต่อเมื่อ $|\alpha_1| < 1$ เราจึงกล่าวได้ว่า "**อนุกรมเวลา X_t ที่แสดงด้วยรูปแบบ AR(1) จะมีความนิ่งก็ต่อเมื่อ $|\alpha_1| < 1$**" เงื่อนไข $|\alpha_1| < 1$ ยังทำให้เราแน่ใจด้วยว่า ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอนุกรม X_t ในรูปแบบ AR(1) จะสามารถหาค่าได้ และความแปรปรวนมีค่าเป็นบวกอีกด้วย

ดังนั้น เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.4) จะสรุปได้ว่า ค่า TAC ของอนุกรม X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง AR(1) จะลดลงเรื่อย ๆ แบบเอกซ์โพเนนเชียล (Damped Exponential) เมื่อ $0 < \alpha_1 < 1$ ซึ่งแสดงตัวอย่างได้ดังรูป 3.1 และ TAC ของอนุกรม X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง AR(1) จะลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียล (Damped exponential with oscillation) เมื่อ $-1 < \alpha_1 < 0$ ดังแสดงตัวอย่างในรูป 3.2

จากรูปที่ 3.1 แสดงค่า SAC (ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณค่า TAC) และเราจะสรุปได้ว่าค่า TAC มีลักษณะที่ลดลงอย่างรวดเร็ว และแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 5 ตั้งแต่ช่วงเวลาที่ 1 ถึง 9 ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่า TAC ของอนุกรมเวลานี้ลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ส่วนรูปที่ 3.2 จะสรุปได้ว่า TAC มีค่าเป็นบวกและลบสลับกันไปและมีค่าลดลงเรื่อย ๆ และ

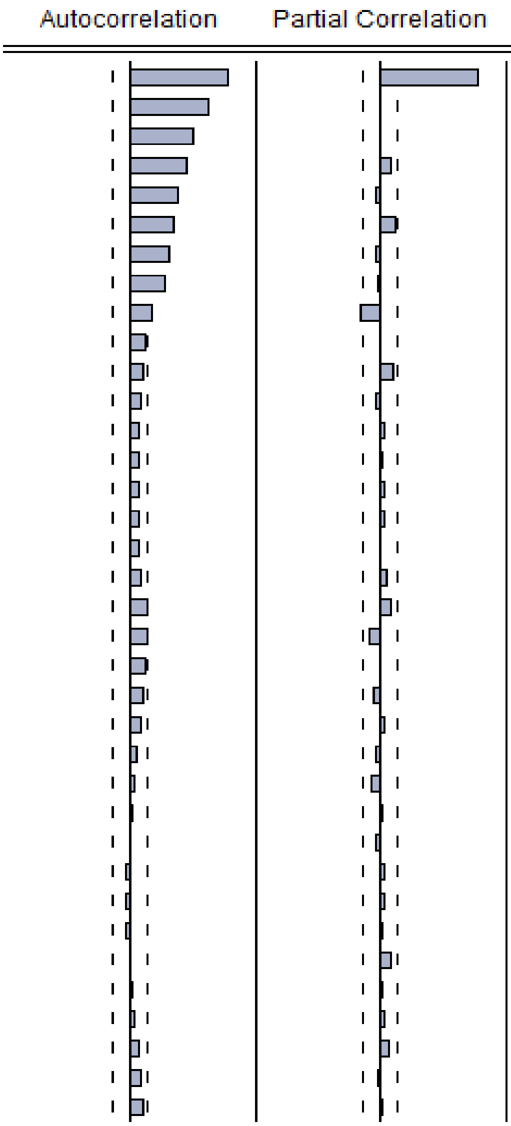
---

[7] Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (California : Addison-Wesley, 1990), p. 33.

แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 5 ตั้งแต่ช่วงเวลา 1–5 ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่า TAC ของอนุกรมเวลานี้ ลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียล

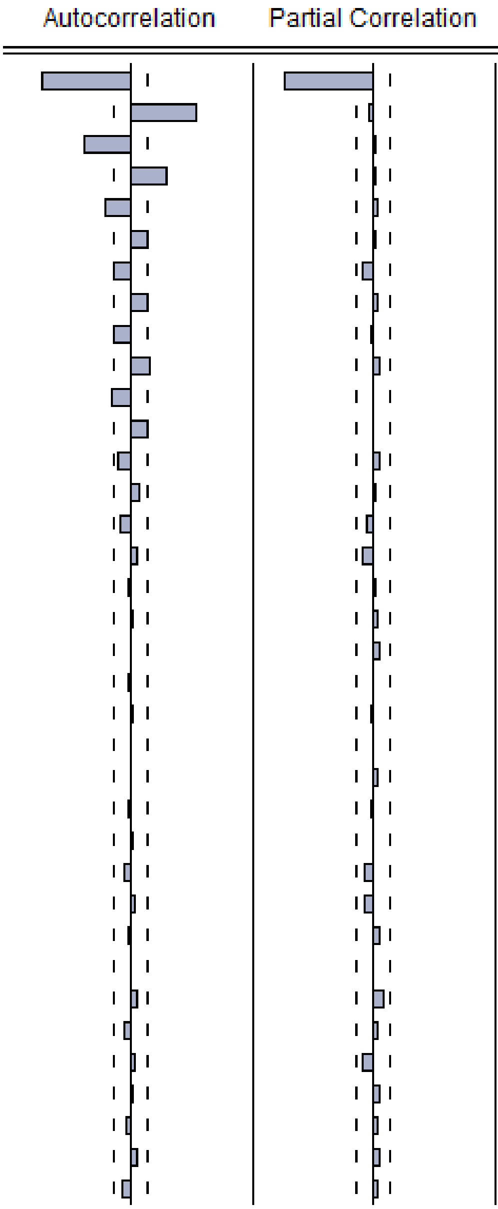
และเมื่อพิจารณาสมการที่ (3.5) จะสรุปได้ว่า ค่า TPAC ของอนุกรม X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง AR(1) ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้วจะมีค่าไม่เป็นศูนย์ และ TPAC จะมีค่าเป็นศูนย์ตั้งแต่ 2 ช่วงเวลาที่แล้วขึ้นไป หรือกล่าวว่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง AR(1) สิ้นสุดหลังจาก 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (Cuts off after lag 1) ดังแสดงในตัวอย่างรูปที่ 3.1 และ 3.2

จากรูปที่ 3.1 และ 3.2 แสดงค่า SPAC ด้วย (ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณ TPAC) จะเห็นว่าช่วงเวลาที่ 1 เท่านั้นที่ค่า TPAC มีนัยสำคัญทางสถิติร้อยละ 5 นั่นคือ เราอ้างอิงได้ว่า TPAC เป็นศูนย์ตั้งแต่ 2 ช่วงเวลาที่ผ่านมาเป็นต้นไป หรือ TPAC สิ้นสุดหลังจาก 1 ช่วงเวลาที่แล้วเป็นต้นไป ที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 5



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.810	0.810	133.07	0.000
2	0.654	-0.003	220.44	0.000
3	0.530	0.002	277.99	0.000
4	0.461	0.094	321.86	0.000
5	0.387	-0.039	352.84	0.000
6	0.368	0.130	381.02	0.000
7	0.327	-0.041	403.39	0.000
8	0.283	-0.020	420.28	0.000
9	0.183	-0.163	427.38	0.000
10	0.120	0.007	430.42	0.000
11	0.105	0.104	432.79	0.000
12	0.090	-0.047	434.52	0.000
13	0.077	0.026	435.81	0.000
14	0.077	0.013	437.12	0.000
15	0.081	0.039	438.55	0.000
16	0.081	0.035	440.01	0.000
17	0.078	0.004	441.35	0.000
18	0.094	0.055	443.31	0.000
19	0.144	0.098	447.94	0.000
20	0.139	-0.088	452.29	0.000
21	0.128	-0.000	455.96	0.000
22	0.100	-0.059	458.25	0.000
23	0.093	0.027	460.23	0.000
24	0.064	-0.046	461.18	0.000
25	0.032	-0.078	461.41	0.000
26	0.012	0.015	461.45	0.000
27	-0.002	-0.046	461.45	0.000
28	-0.026	0.029	461.61	0.000
29	-0.033	0.034	461.86	0.000
30	-0.027	0.014	462.03	0.000
31	0.002	0.092	462.03	0.000
32	0.024	0.024	462.18	0.000
33	0.039	0.025	462.54	0.000
34	0.075	0.080	463.90	0.000
35	0.095	-0.025	466.09	0.000
36	0.101	0.012	468.58	0.000

รูปที่ 3.1 แสดงตัวประมาณค่า TAC ที่ลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล และตัวประมาณค่า TPAC ที่สิ้นสุดหลัง 1 ช่วงเวลาที่ผ่านมา



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.758	-0.758	116.55	0.000
2	0.560	-0.033	180.59	0.000
3	-0.405	0.020	214.27	0.000
4	0.300	0.019	232.84	0.000
5	-0.206	0.040	241.64	0.000
6	0.149	0.022	246.26	0.000
7	-0.144	-0.086	250.60	0.000
8	0.150	0.034	255.33	0.000
9	-0.149	-0.010	260.01	0.000
10	0.158	0.047	265.33	0.000
11	-0.158	-0.007	270.68	0.000
12	0.146	-0.002	275.28	0.000
13	-0.106	0.048	277.68	0.000
14	0.081	0.017	279.12	0.000
15	-0.087	-0.059	280.79	0.000
16	0.053	-0.082	281.40	0.000
17	-0.021	0.017	281.50	0.000
18	0.014	0.026	281.55	0.000
19	0.004	0.053	281.55	0.000
20	-0.016	0.001	281.60	0.000
21	0.014	-0.024	281.65	0.000
22	-0.001	0.005	281.65	0.000
23	0.003	0.026	281.65	0.000
24	-0.014	-0.013	281.70	0.000
25	0.019	0.003	281.78	0.000
26	-0.050	-0.073	282.36	0.000
27	0.036	-0.079	282.66	0.000
28	-0.012	0.045	282.70	0.000
29	-0.005	0.005	282.71	0.000
30	0.055	0.095	283.41	0.000
31	-0.065	0.034	284.42	0.000
32	0.031	-0.094	284.65	0.000
33	0.017	0.050	284.72	0.000
34	-0.037	0.032	285.05	0.000
35	0.065	0.042	286.08	0.000
36	-0.070	0.030	287.28	0.000

รูปที่ 3.2 แสดงตัวประมาณค่า TAC ที่ลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลแบบขึ้น ๆ ลง ๆ และตัวประมาณค่า TPAC ที่สิ้นสุดหลัง 1 ช่วงเวลาที่ผ่านมา

(2) แบบจำลอง Autoregressive ลำดับที่ 2

แบบจำลอง Autoregressive ลำดับที่ 2 หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า AR(2) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{3.7}$$

จากสมการที่ (3.7) จะเห็นว่าต่างจากสมการที่ (3.1) ตรงที่มีตัวแปรอิสระ X_{t-2} เพิ่มขึ้นมาในสมการนั่นเอง และถ้านำอนุกรมนี้มาหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน แสดงได้ดังสมการที่ (3.8) และ (3.9) ตามลำดับดังนี้[8]

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{3.8}$$

$$\gamma_0 = \frac{(1-\alpha_2)\sigma^2}{(1+\alpha_2)[(1-\alpha_2)^2-\alpha_1^2]} \tag{3.9}$$

ส่วนค่า TAC แสดงได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} \\ \rho_2 &= \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 = \frac{\alpha_1^2+\alpha_2-\alpha_2^2}{1-\alpha_2} \\ \rho_k &= \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2}\ , \quad k \geq 3 \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

และค่า TPAC แสดงได้ดังนี้

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & \text{เมื่อ } k = 1 \\ \alpha_2 & \text{เมื่อ } k = 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } k \geq 3 \end{cases} \tag{3.11}$$

[8] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 3ข

เราสามารถใช้ตัวดำเนินการความล่าช้า (L) ช่วยในการเขียนแบบจำลอง AR(2) ได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 L \cdot X_t + \alpha_2 L^2 \cdot X_t + \varepsilon_t$$

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$$

$$\alpha(L) X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \tag{3.12}$$

โดย $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2$ เงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t ในรูปแบบ AR(2) มีความนิ่ง ก็ใช้แนวคิดเดียวกันคือ "ค่าสัมบูรณ์คำตอบของสมการ $\alpha(L) = 0$ **ต้องมากกว่า 1**" แต่ในกรณีของแบบจำลอง AR(2) จะมีความซับซ้อนมากกว่าเนื่องจากจะมีคำตอบ 2 ค่า อย่างไรก็ดี เงื่อนไขดังกล่าวสรุปได้ดังนี้[9]

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 + \alpha_1 < 1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 < 1 \\ -1 < \alpha_2 < 1 \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

เงื่อนไขทั้งสาม ตามที่แสดงในสมการที่ (3.13) ยังทำให้เราแน่ใจด้วยว่า ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอนุกรม X_t ในรูปแบบ AR(2) จะสามารถหาค่าได้ และความแปรปรวนมีค่าเป็นบวกอีกด้วย

การพิจารณารูปแบบค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง AR(2) อาจเป็นแบบลดลงเรื่อย ๆ แบบเอกซ์โพเนนเชียล จะลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลก็ได้[10] และเมื่อพิจารณาสมการที่ (3.11) จะสรุปได้ว่า ค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง AR(2) ณ 1 และ 2 ช่วงเวลาที่แล้วจะมีค่าไม่เป็นศูนย์ ส่วน TPAC จะมีค่าเป็นศูนย์ตั้งแต่ 3 ช่วงเวลาที่แล้วขึ้นไป หรือกล่าวว่า TPAC สิ้นสุดหลังจาก 2 ช่วงเวลาที่แล้ว (Cuts off after lag 2)

---

[9] สำหรับผู้สนใจดูรายละเอียดได้ใน Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (California: Addison-Wesley, 1990), pp. 39–40.

[10] การพิสูจน์ลักษณะค่า TAC ของแบบจำลอง AR(2) จะต้องใช้ความรู้เรื่อง Difference Equation ซึ่งจะไม่กล่าวรายละเอียดในหนังสือเล่มนี้ สำหรับผู้สนใจดูรายละเอียดได้ใน Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (California: Addison-Wesley, 1990), pp. 27–30, 40–41.

(3) แบบจำลอง Autoregressive ลำดับที่ p

แบบจำลอง Autoregressive ลำดับที่ p หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า AR(p) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{3.14}$$

สมการที่ (3.14) สามารถเขียนได้อีกอย่างคือ

$$\alpha(L)\, X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \tag{3.15}$$

โดยที่ $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p$ ค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ AR(p) แสดงได้ดังนี้

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p)} \tag{3.16}$$

ส่วนความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ AR(p) สามารถหาได้โดยใช้แนวคิดเดียวกับกรณีที่ผ่านมา รวมทั้งเงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t ในรูปแบบ AR(p) มีความนิ่ง ก็ยังคงเหมือนเดิม คือ “ค่าสัมบูรณ์คำตอบของสมการ $1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p = 0$ **ต้องมากกว่า 1**” เพียงแต่จะมีความซับซ้อนมากกว่าเท่านั้นเอง อย่างไรก็ดีลักษณะค่า TAC และ TPAC สรุปได้ดังนี้

ค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง AR(p) อาจเป็นแบบลดลงเรื่อย ๆ แบบเอกซ์โพเนนเชียล จะลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลก็ได้ ส่วนค่า TPAC ของของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง AR(p) ณ ช่วงเวลา 1 จนถึง p ที่ผ่านมา จะมีค่าไม่เป็นศูนย์ และจะมีค่าเป็นศูนย์ตั้งแต่ p+1 ช่วงเวลาที่แล้วเป็นต้นไป หรือกล่าวว่า TPAC สิ้นสุดหลังจาก p ช่วงเวลาที่แล้ว (Cuts off after lag p)

3.2.2 แบบจำลอง Moving Average (MA)

แบบจำลอง Moving Average (MA) เป็นแบบจำลองที่แสดงถึง อนุกรมเวลา X_t ขึ้นอยู่กับตัวรบกวนขาว (ε) ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน เราจะเริ่มศึกษารูปแบบที่ง่ายที่สุด ซึ่งก็คือแบบจำลอง Moving Average ลำดับที่ 1 หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า MA(1) จากนั้นจึงศึกษาถึงแบบจำลอง MA(2) และแบบจำลองในรูปทั่วไปคือ MA(q)

(1) แบบจำลอง Moving Average ลำดับที่ 1

แบบจำลอง Moving Average ลำดับที่ 1 เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} \tag{3.17}$$

โดย X_t คืออนุกรมเวลา

β_0 และ β_1 คือค่าพารามิเตอร์

ε_t คือตัวรบกวนขาว ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนคือ σ^2 หรือเขียนเป็นสมการได้ว่า $E(\varepsilon_t) = 0$ และ $var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ สำหรับ $t = 1, 2, \ldots, T$ เราจะพิจารณาว่า ε_t ก็คือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน ซึ่งเป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ โดยเราจะไม่สามารถเก็บข้อมูลนี้ได้

จากแบบจำลอง MA(1) ของอนุกรม X_t ถ้านำอนุกรมนี้มาหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน แสดงได้ดังสมการที่ (3.18) และ (3.19) ตามลำดับดังนี้[11]

$$\mu = \beta_0 \tag{3.18}$$
[12]

$$\gamma_0 = (1 + \beta_1^2)\sigma^2 \tag{3.19}$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอนุกรม X_t ที่เป็นรูปแบบ MA(1) จะมีค่าคงที่เสมอทุก ๆ ช่วงเวลา t นอกจากนี้เรายังสามารถแสดงให้ได้ว่า ความแปรปรวนร่วมระหว่างข้อมูลอนุกรมเวลา (X_t) ที่ต่างช่วงเวลากัน จะขึ้นอยู่กับระยะห่างของช่วงเวลา (ดูสมการที่ 3ค–4 ในภาคผนวก 3ค) ดังนั้น เรากล่าวได้ว่าอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) จะมีความนิ่งเสมอ

ส่วนค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) แสดงได้ดังสมการที่ (3.20) ดังนี้[13]

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\beta_1}{1+\beta_1^2} & ,k = 1 \\ 0 & ,k > 1 \end{cases} \tag{3.20}$$

---

[11] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 3ค

[12] จะเห็นว่า ค่าเฉลี่ยของอนุกรม X_t ในมีรูปแบบ Moving Average จะเป็นค่าเดียวกับค่าคงที่ (β_0) เสมอ นั่นคือถ้าแบบจำลองไม่มีค่าคงที่ ($\beta_0 = 0$) จะได้ว่าอนุกรมเวลา X_t มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์

[13] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 3ค

จากสมการที่ (3.20) จะเห็นว่า ค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง MA(1) จะมีค่าไม่เป็นศูนย์ ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้ว และจะมีค่าเป็นศูนย์ตั้งแต่ 2 ช่วงเวลาที่แล้วขึ้นไป หรือกล่าวว่า TAC สิ้นสุดหลังจาก 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (Cuts off after lag 1)

เราทราบจากบทที่ 2 แล้วว่า TPAC (Theoretical Partial Autocorrelation) ณ k ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{kk}) ก็คือความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงระหว่าง X_t กับ X_{t-k} โดยไม่มีอิทธิพลของ X_{t-1}, X_{t-2}, …, และ $X_{t-(k-1)}$ เข้ามาเกี่ยวข้อง นั่นคือการหาค่า ϕ_{kk} สามารถหาได้การวิเคราะห์สมการถดถอยเชิงพหุ[14]

$$X_{t+k} = \phi_{k0}+\phi_{k1}X_{t+k-1} + \phi_{k2} X_{t+k-2} +\ldots +\phi_{kk}X_t + u_{t+k} \qquad (3.21)$$

สมการที่ (3.21) อาจเขียนในรูปดังต่อไปนี้ก็ได้

$$X_t = \phi_{k0}+ \phi_{k1}X_{t-1} + \phi_{k2} X_{t-2} +\ldots +\phi_{kk}X_{t-k} + u_t \qquad (3.22)$$

ดังนั้น เพื่อให้สามารถหาค่า TPAC ได้ เราจะต้องแปลงอนุกรมเวลา X_t ที่มีรูปแบบเป็น MA(1) ให้อยู่ในรูป Autoregressive เสียก่อน ซึ่งมีวิธีทำดังนี้

จากแบบจำลอง MA(1) ดังสมการที่ (3.17) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปต่อไปนี้ได้

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1 L\varepsilon_t$$ โดยที่ L คือตัวดำเนินการความล่าช้า

$$X_t = \beta_0 + (1-\beta_1 L)\varepsilon_t$$

$$\frac{X_t}{1-\beta_1 L} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1 L} + \varepsilon_t \qquad (3.23)$$

เนื่องจากตัวดำเนินการความล่าช้าจะมีผลต่อตัวแปรสุ่ม เช่น X_t หรือ ε_t เท่านั้น ทำให้ตัวดำเนินการความล่าช้าที่อยู่ในพจน์แรกทางขวามือ $\left(\frac{\beta_0}{1-\beta_1 L}\right)$ ไม่มีผลใด ๆ ดังนั้น เราจึงเขียนได้ว่า $\frac{\beta_0}{1-\beta_1 L} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}$ แต่เมื่อพิจารณาพจน์ทางซ้ายมือ $\frac{X_t}{1-\beta_1 L}$ มีทั้งตัวแปรสุ่ม X_t และตัวดำเนินการความล่าช้า นั่นคือตัวดำเนินการความล่าช้าจะต้องส่งผลกระทบต่อตัวแปรสุ่ม X_t ในรูปแบบหนึ่ง

[14] สำหรับผู้สนใจ อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้ใน ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์, *เศรษฐมิติเบื้องต้น*, พิมพ์ครั้งที่ 2. (กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554), หน้า 61–65.

ถ้ากำหนดให้ $|\beta_1| < 1$ แล้วตัวดำเนินการความล่าช้าจะต้องส่งผลกระทบต่อตัวแปรสุ่ม X_t ในรูปแบบของอนุกรมอนันต์เรขาคณิต ซึ่งเขียนได้เป็น $\frac{X_t}{1-\beta_1 L} = X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_1^2 X_{t-2} + \cdots$ ดังนั้น สมการที่ (3.23) จะเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_1^2 X_{t-2} + \cdots = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \varepsilon_t$$

หรือเขียนได้ว่า

$$X_t = c_0 + c_1 X_{t-1} + c_2 X_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t \qquad (3.24)$$

โดยที่ $c_0 = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}$, $c_1 = -\beta_1$, $c_2 = -\beta_1^2, \ldots$

สมการที่ (3.24) ก็คืออนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ AR(∞) นั่นเอง กล่าวโดยสรุปก็คือ อนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) จะสามารถแปลงสลับให้อยู่ในรูปแบบ AR(∞) ได้ (Invertibility) ก็ต่อเมื่อ $|\beta_1| < 1$

นอกจากนี้สมการที่ (3.24) เป็นการยืนยันว่า เราสามารถใช้วิธีการหาค่า TPAC เดียวกับที่ได้อธิบายไว้ในภาคผนวก 2ก แล้วนั่นเอง[15] และค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) แสดงได้ดังสมการที่ (3.25) ดังนี้[16]

$$\emptyset_{kk} = \frac{-\beta_1^k}{1 + \beta_1^2 + \beta_1^4 + \cdots + \beta_1^{2k}} \quad \text{สำหรับ } k \geq 1 \qquad (3.25)$$

จากสมการ (3.25) เนื่องจาก $|\beta_1| < 1$ ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่า ค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง MA(1) จะลดลงเรื่อย ๆ แบบเอกซ์โพเนนเชียลหรือลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลก็ได้

[15] ดังนั้น หากเราพบว่า $|\beta_1| > 1$ ทำให้ไม่สามารถแปลงอนุกรมเวลาที่อยู่ในรูป MA(1) ให้เป็น AR(∞) ได้ กรณีนี้จะไม่สามารถคำนวณค่า TPAC ได้

[16] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 3ค

(2) แบบจำลอง Moving Average ลำดับที่ 2

แบบจำลอง Moving Average ลำดับที่ 2 หรือ MA(2) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} \tag{3.26}$$

จากแบบจำลอง MA(2) ของอนุกรม X_t ถ้านำอนุกรมนี้หาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน จะแสดงได้ดังสมการที่ (3.27) และ (3.28) ตามลำดับดังนี้[17]

$$\mu = \beta_0 \tag{3.27}$$

$$\gamma_0 = (1+\beta_1^2+\beta_2^2)\sigma^2 \tag{3.28}$$

จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอนุกรม X_t ที่เป็นรูปแบบ MA(2) จะมีค่าคงที่เสมอทุก ๆ ช่วงเวลา t นอกจากนี้เรายังสามารถแสดงให้ได้ว่า ความแปรปรวนร่วมระหว่างข้อมูลอนุกรมเวลา (X_t) ที่ต่างช่วงเวลากัน จะขึ้นอยู่กับระยะห่างของช่วงเวลา (ดูสมการ 3ง–4 ในภาคผนวก 3ง) ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่าอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(2) จะมีความนิ่งเสมอเช่นกัน

ส่วนค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(2) แสดงได้ดังสมการที่ (3.29) ดังนี้[18]

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\beta_1(1-\beta_2)}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & ,k=1 \\[2ex] \dfrac{-\beta_2}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & ,k=2 \\[2ex] 0 & ,k>2 \end{cases} \tag{3.29}$$

จากสมการที่ (3.29) จะเห็นว่า ค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง MA(2) จะมีค่าไม่เป็นศูนย์ ณ 1 และ 2 ช่วงเวลาที่แล้ว และจะมีค่าเป็นศูนย์ตั้งแต่ 3 ช่วงเวลาที่แล้วขึ้นไป หรือกล่าวว่า TAC สิ้นสุดหลังจาก 2 ช่วงเวลาที่แล้ว (Cuts off after lag 2)

---

[17] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 3ง

[18] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 3ง

สำหรับการหาค่า TPAC ของอนุกรมเวลาที่อยู่ในรูป MA(2) เราจะต้องแปลงให้อยู่ในรูป Autoregressive เสียก่อน ซึ่งมีวิธีทำคล้ายกับกรณีที่แล้วดังนี้

จากแบบจำลอง MA(2) ดังสมการที่ (3.26) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปต่อไปนี้ได้

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1 L\varepsilon_t - \beta_2 L^2\varepsilon_t \qquad \text{โดยที่ } L \text{ คือตัวดำเนินการความล่าช้า}$$

$$X_t = \beta_0 + (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2)\varepsilon_t$$

$$\frac{X_t}{1-\beta_1 L-\beta_2 L^2} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1 L-\beta_2 L^2} + \varepsilon_t$$

หรือเขียนได้อีกแบบคือ

$$\frac{X_t}{\beta(L)} = \frac{\beta_0}{\beta(L)} + \varepsilon_t \tag{3.30}$$

โดยที่ $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2$ และเมื่อพิจารณาพจน์แรกทางขวามือของสมการที่ (3.30) จะเขียนได้เป็น $\frac{\beta_0}{\beta(L)} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1 L-\beta_2 L^2} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1-\beta_2}$ เนื่องจากไม่มีตัวแปรสุ่มอยู่ในพจน์นี้ สำหรับพจน์ทางซ้ายมือของสมการ $\left(\frac{X_t}{\beta(L)}\right)$ จะเห็นว่ามีตัวแปรสุ่ม X_t และตัวดำเนินการความล่าช้าอยู่ในพจน์นี้ นั่นคือตัวดำเนินการความล่าช้าจะต้องส่งผลกระทบต่อตัวแปรสุ่ม X_t ในรูปแบบหนึ่ง

เราสามารถแปลงอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(2) ให้กลายเป็นรูปแบบ AR(∞) ได้ (Invertibility) ก็ต่อเมื่อ **"ค่าสัมบูรณ์คำตอบของสมการ $\beta(L) = 0$ มีค่ามากกว่า 1"**[19] ซึ่งทำให้เราได้เงื่อนไขดังนี้

$$\left.\begin{array}{l} \beta_2 + \beta_1 < 1 \\ \beta_2 - \beta_1 < 1 \\ -1 < \beta_2 < 1 \end{array}\right\} \tag{3.31}$$

[19] Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (California: Addison-Wesley, 1990), pp. 49, 55.

เมื่ออนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปตามแบบจำลอง MA(2) สามารถแปลงให้อยู่ ใน รูป Autoregressive ได้แล้ว ทำให้เราแน่ใจว่า สามารถหาค่า TPAC ด้วยวิธีการที่อธิบายใน ภาคผนวก 2ก ซึ่งสรุปได้ดังนี้

$$\emptyset_{11} = \rho_1$$

$$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\emptyset_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}$$

ส่วน $\phi_{44}, \phi_{55}, \ldots$ สามารถหาได้ด้วยแนวคิดเดียวกันนี้ โดยค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง MA(2) อาจจะลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลหรืออาจลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลก็ได้ขึ้นอยู่กับรากของสมการ $\beta(L) = 0$[20]

(3) แบบจำลอง Moving Average ลำดับที่ *q*

แบบจำลอง Moving Average ลำดับที่ q หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า MA(q) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q\varepsilon_{t-q} \tag{3.32}$$

สมการที่ (3.32) สามารถเขียนได้อีกอย่างคือ

$$\beta(L)X_t = \beta_0 + \varepsilon_t \tag{3.33}$$

[20] Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (California: Addison-Wesley, 1990), p. 51.

โดยที่ $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_q L^q$ ค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(q) แสดงได้ดังนี้

$$\mu = \frac{\beta_0}{1-(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_q)} \tag{3.34}$$

ส่วนความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(q) สามารถหาได้โดยใช้แนวคิดเดียวกับกรณีที่ผ่านมา รวมทั้งเงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t ในรูปแบบ MA(q) สามารถแปลงให้อยู่ในรูป AR(∞)ได้ ก็ยังคงเหมือนเดิม คือ “ค่าสัมบูรณ์คำตอบของสมการ $1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_q L^q = 0$ ต้องมากกว่า 1” เพียงแต่จะมีความซับซ้อนมากกว่าเท่านั้นเอง[21] อย่างไรก็ดีลักษณะค่า TAC และ TPAC สรุปได้ดังนี้

ค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง MA(q) ณ ช่วงเวลา 1 จนถึง q ที่ผ่านมา จะมีค่าไม่เป็นศูนย์ และจะมีค่าเป็นศูนย์ตั้งแต่ q+1 ช่วงเวลาที่ผ่านมาเป็นต้นไป หรือกล่าวว่า TAC สิ้นสุดหลังจาก q ช่วงเวลาที่แล้ว (Cuts off after lag q) ส่วนค่า TPAC ของของอนุกรมเวลา X_t ที่เป็นไปตามแบบจำลอง MA(q) อาจเป็นแบบลดลงเรื่อย ๆ แบบเอกซ์โพเนนเชียลหรือจะลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลก็ได้

3.2.3 แบบจำลอง Autoregressive Moving Average (ARMA)

ในการประยุกต์ใช้แบบจำลอง AR หรือ MA กับอนุกรมเวลา อาจอยู่ในรูปของลำดับที่สูง ทำให้ต้องมีการประมาณค่าพารามิเตอร์จำนวนมาก เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าว Box, Jenkins, และ Reinsel[22] ได้เสนอแบบจำลองที่เรียกว่า แบบจำลอง Autoregressive Moving Average (ARMA) ซึ่งเป็นแบบจำลองที่แสดงถึง อนุกรมเวลา X_t ขึ้นอยู่กับค่าของมันเองในอดีตที่ผ่านมา และขึ้นอยู่กับตัวรบกวนขาวตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบัน ซึ่งก็คือแบบจำลองที่ผสมผสานระหว่างแบบจำลอง Autoregressive และแบบจำลอง Moving Average นั่นเอง

[21] ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ในภาคผนวก 3จ

[22] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., and Reinsel, G. C., *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3rd edition. (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1994)

เราจะเริ่มศึกษารูปแบบที่ง่ายที่สุด ซึ่งก็คือแบบจำลอง Autoregressive Moving Average ลำดับที่ (1,1) หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า ARMA(1,1) จากนั้นจึงศึกษาถึงแบบในรูปทั่วไปคือ ARMA(p,q)

(1) แบบจำลอง Autoregressive Movieng Average ลำดับที่ (1,1)

แบบจำลอง ARMA(1,1) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{3.35}$$

โดยที่ X_t คืออนุกรมเวลา

α_0, α_1 และ β_1 คือค่าพารามิเตอร์

ε_t คือตัวรบกวนขาว ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนคือ σ^2 และเราจะพิจารณาว่า ε_t ก็คือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน ซึ่งเป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ โดยเราจะไม่สามารถเก็บข้อมูลนี้ได้

เช่นเดียวกับการวิเคราะห์แบบจำลองของ Box-Jenkins ที่ผ่านมา เราสามารถใช้ตัวดำเนินการความล่าช้า (L) ช่วยในการเขียนแบบจำลอง ARMA(1,1) ได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 L \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 L \cdot \varepsilon_t$$

$$(1 - \alpha_1 L)X_t = \alpha_0 + (1 - \beta_1 \mathrm{L})\varepsilon_t$$

$$\alpha(L)X_t = \alpha_0 + \beta(L)\varepsilon_t$$

โดย $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L$ และ $\beta(L) = 1 - \beta_1 L$ เนื่องจากแบบจำลอง ARMA(1,1) เกิดจากการผสมกันระหว่างแบบจำลอง AR(1) และ MA(1) ดังนั้น การพิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t ในรูปแบบ ARMA(1,1) มีความนิ่ง ก็ใช้แนวคิดเดียวกันกับกรณี AR(1) คือ "ค่าสัมบูรณ์คำตอบของสมการ $1 - \alpha_1 L = 0$ **ต้องมากกว่า 1**"[23] ส่วนเงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t ในรูปแบบ ARMA(1,1) สามารถแปลงให้อยู่ในรูป AR(∞)ได้ ก็ใช้แนวคิดเดียวกับกรณี MA(1) ซึ่งก็คือ "ค่าสัมบูรณ์คำตอบของสมการ $1 - \beta_1 L = 0$ **ต้องมากกว่า 1**" [24]

---

[23]ซึ่งจะทำให้ได้เงื่อนไขคือ $|\alpha_1| < 1$

[24]ซึ่งจะทำให้ได้เงื่อนไขคือ $|\beta_1| < 1$

จากแบบจำลอง ARMA(1,1) ของอนุกรม X_t ถ้านำอนุกรมนี้มาหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่า TAC แสดงได้ดังสมการที่ (3.36) ถึง (3.38) ตามลำดับดังนี้[25]

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \tag{3.36}$$

$$\gamma_0 = \frac{(1+\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1)}{(1-\alpha_1^2)}\sigma^2 \tag{3.37}$$

$$\rho_1 = \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1-\beta_1)(1-\alpha_1\beta_1)}{1+\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1} & ,k=1 \\ \alpha_1\rho_{k-1} & ,k\geq 2 \end{cases} \tag{3.38}$$

จากสมการที่ (3.38) จะเห็นว่า ค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ ARMA(1,1) ตั้งแต่ 2 ช่วงเวลาที่แล้วขึ้นไป จะมีลักษณะเดียวกับค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ AR (1) คือลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลหรือ ลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์–โพเนนเชียลก็ได้ สำหรับค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ ARMA(1,1) ตั้งแต่ 2 ช่วงเวลาที่แล้วขึ้นไป จะมีลักษณะเดียวกับค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) คือลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล หรือลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลก็ได้

(2) แบบจำลอง Autoregressive Movieng Average ลำดับที่ (*p*, *q*)

แบบจำลอง ARMA(*p*,*q*) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q\varepsilon_{t-q} \tag{3.39}$$

เราสามารถเขียนแบบจำลอง ARMA(*p*, *q*) อีกรูปแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\alpha(L)\, X_t = \alpha_0 + \beta(L)\, \varepsilon_t \tag{3.40}$$

โดยที่ $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p$ และ

$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_q L^q$

[25] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 3ฉ

จะเห็นว่าแบบจำลอง ARMA(p, q) เกิดจากการผสมกันระหว่างแบบจำลอง AR(p) และ MA(q) ดังนั้น การพิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t ในรูปแบบ ARMA(p, q) มีความนิ่ง ก็ใช้แนวคิดเดียวกันกับกรณี AR(p) คือ “ค่าสัมบูรณ์คำตอบของสมการ $\alpha(L) = 0$ **ต้องมากกว่า 1**” ส่วนเงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t ในรูปแบบ ARMA(p, q) สามารถแปลงให้อยู่ในรูป AR(∞)ได้ ก็ใช้แนวคิดเดียวกับกรณี MA(q) ซึ่งก็คือ “ค่าสัมบูรณ์คำตอบของสมการ $\beta(L) = 0$ **ต้องมากกว่า 1**” ส่วนลักษณะค่า TAC และ TPAC สรุปได้ดังนี้

ค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ ARMA(p, q) จะมีลักษณะเดียวกับค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ AR (p) คือลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลหรือลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลก็ได้ โดยเริ่มหลังจาก q ช่วงเวลาที่แล้วขึ้นไป สำหรับค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ ARMA(p, q) จะมีลักษณะเดียวกับค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(q) คือลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลหรือลดลงในลักษณะลูกคลื่นแบบเอกซ์โพเนนเชียลก็ได้ โดยเริ่มหลังจาก p ช่วงเวลาที่แล้วขึ้นไป

จะเห็นว่า ค่า TAC และค่า TPAC ของแบบจำลอง ARMA(p, q) มีลักษณะเหมือนกัน คือจะลดลงอย่างรวดเร็ว ทำให้การระบุช่วงเวลาล่าช้า p และ q เป็นไปได้ยาก ทำให้ Tsay and Tiao (1984) เสนอวิธีการคำนวณ ESACF (Extended Sample Autocorrelation Function) เพื่อใช้เป็นหลักเกณฑ์ในการพิจารณาช่วงเวลาล่าช้า p และ q ในแบบจำลอง ARMA โดยค่า EACF มีลักษณะแสดงได้ด้วยตาราง 2 ทางดังนี้

ตารางที่ 3.1 แสดงลักษณะของค่า ESACF

AR	MA					
	0	1	2	3	4	…
0	$\hat{\rho}_1^{(0)}$	$\hat{\rho}_2^{(0)}$	$\hat{\rho}_3^{(0)}$	$\hat{\rho}_4^{(0)}$	$\hat{\rho}_5^{(0)}$	…
1	$\hat{\rho}_1^{(1)}$	$\hat{\rho}_2^{(1)}$	$\hat{\rho}_3^{(1)}$	$\hat{\rho}_4^{(1)}$	$\hat{\rho}_5^{(1)}$	…
2	$\hat{\rho}_1^{(2)}$	$\hat{\rho}_2^{(2)}$	$\hat{\rho}_3^{(2)}$	$\hat{\rho}_4^{(2)}$	$\hat{\rho}_5^{(2)}$	…
3	$\hat{\rho}_1^{(3)}$	$\hat{\rho}_2^{(3)}$	$\hat{\rho}_3^{(3)}$	$\hat{\rho}_4^{(3)}$	$\hat{\rho}_5^{(3)}$	…
:	:	:	:	:	:	…

โดยที่ $\hat{\rho}_j^{(m)}$ คือค่า ESACF[26] ของอนุกรมเวลา X_t, $m = 1, 2, \ldots$ และหากอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ ARMA(p,q) แล้ว Tsay and Tiao (1984) ได้พิสูจน์ว่า

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \hat{\rho}_j^{(m)} = \begin{cases} 0 \quad \text{(เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ O)} & \text{เมื่อ } 0 \le m - p \le j - q \\ \text{ค่าคงที่ไม่เป็นศูนย์ (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ } \times\text{)} & \text{เมื่อเป็นกรณีอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดย $\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \hat{\rho}_j^{(m)}$ หมายถึง ความน่าจะเป็นของค่า $\hat{\rho}_j^{(m)}$ เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และความแปรปรวนของ $\hat{\rho}_j^{(m)}$ จะถูกประมาณด้วย $\frac{1}{T-m-j}$ ดังนั้น หากอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ ARMA(1,2) ค่า ESACF แสดงได้ในตารางที่ 3.2 ดังนี้

ตารางที่ 3.2 แสดงลักษณะของค่า ESACF ของอนุกรมเวลาที่มีรูปแบบ ARMA(1,2)

	MA					
AR	0	1	2	3	4	…
0	×	×	×	×	×	
1	*	×	O	O	O	…
2	*	*	×	O	O	
3	*	*	*	*	O	
:			:			

หมายเหตุ เครื่องหมาย O แสดงถึงค่า ESACF ที่เป็นศูนย์ หรือไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ
เครื่องหมาย × แสดงถึงค่า ESACF ที่ไม่เป็นศูนย์ หรือมีนัยสำคัญทางสถิติ
เครื่องหมาย * แสดงถึงค่า ESACF ที่อาจจะเป็นศูนย์หรือไม่ใช่ศูนย์ก็ได้

จากตารางข้างต้น เราจะสังเกตว่ามีค่า ESACF ที่เป็นศูนย์ในลักษณะสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ตำแหน่ง (1,2) ซึ่งตรงกับรูปแบบของอนุกรมเวลา X_t ดังนั้น หากเราพบว่าอนุกรมเวลาใด ๆ ที่มีลักษณะค่า ESACF ที่เป็นศูนย์ในลักษณะสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ตำแหน่ง (p,q) นั่นหมายถึงเราควรใช้รูปแบบ ARMA(p,q) กับอนุกรมเวลานั้น

[26] สำหรับผู้สนใจ ดูรายละเอียดได้ในภาคผนวก 3ช

3.3 การระบุแบบจำลองของ Box-Jenkins

จากหัวข้อที่แล้ว เราได้กล่าวถึงแบบจำลองของ Box-Jenkins ซึ่งได้แก่ แบบจำลอง Autoregressive แบบจำลอง Moving Average และแบบจำลอง Autoregressive Moving Average จะเห็นว่าในแต่ละแบบจำลองจะมีลักษณะของค่า TAC และค่า TPAC ไม่เหมือนกัน จากจุดนี้เอง ทำให้เราสามารถนำค่าดังกล่าวมาใช้ในการระบุแบบจำลองและค่าความล่าช้าของแบบจำลองนั้น ด้วยค่า TAC และ TPAC ซึ่งสรุปได้ดังตารางที่ 3.3 แต่หากค่า TAC และ TPAC ไม่เป็นไปเงื่อนไขที่สรุปในตารางดังกล่าว เราอาจพิจารณาการใช้ค่า ESACF ในการเลือกรูปแบบ ARMA(p,q)

ตารางที่ 3.3 แสดงลักษณะของค่า TAC และ TPAC ของแบบจำลอง Box-Jenkins

แบบจำลองของ Box-Jenkins	**ลักษณะของค่า TAC**	**ลักษณะของค่า TPAC**
แบบจำลอง AR(1): $X_t = \alpha_0+\alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$	ลดลงอย่างรวดเร็ว	สิ้นสุดหลัง 1 ช่วงเวลาที่แล้ว
แบบจำลอง AR(2): $X_t = \alpha_0+\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2}+ \varepsilon_t$	ลดลงอย่างรวดเร็ว	สิ้นสุดหลัง 2 ช่วงเวลาที่แล้ว
แบบจำลอง AR(p): $X_t = \alpha_0+\alpha_1 X_{t-1} +\ldots + \alpha_2 X_{t-2}+ \varepsilon_t$	ลดลงอย่างรวดเร็ว	สิ้นสุดหลัง p ช่วงเวลาที่แล้ว
แบบจำลอง MA(1): $X_t = \beta_0 + \beta_1\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t$	สิ้นสุดหลังจาก 1 ช่วงเวลาที่แล้ว	ลดลงอย่างรวดเร็ว
แบบจำลอง MA(2): $X_t = \beta_0 + \beta_1\varepsilon_{t-1}+ \beta_2\varepsilon_{t-2}+\varepsilon_t$	สิ้นสุดหลังจาก 2 ช่วงเวลาที่แล้ว	ลดลงอย่างรวดเร็ว

แบบจำลองของ Box-Jenkins	ลักษณะของค่า TAC	ลักษณะของค่า TPAC
แบบจำลอง MA(q): $X_t = \beta_0 + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$	สิ้นสุดหลังจาก q ช่วงเวลาที่แล้ว	ลดลงอย่างรวดเร็ว
แบบจำลอง ARMA(p,q): $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_2 X_{t-2} + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta_q\varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$	• ทั้ง TAC ลดลงเรื่อย ๆ อย่างรวดเร็วหลัง q ช่วงเวลาที่แล้ว และ TPAC ลดลงเรื่อย ๆ อย่างรวดเร็วหลัง p ช่วงเวลาที่แล้ว • เนื่องจากลักษณะ TAC และ TPAC ของแบบจำลอง ARMA(p, q) มักจะไม่ช่วยในการระบุช่วงเวลาล่าช้า (p,q) ดังนั้น เราจึงอาจใช้ตารางสองทางที่แสดงความมีนัยสำคัญและไม่มีนัยสำคัญของค่า ESACF โดยเราต้องสังเกต ความไม่มีนัยสำคัญของค่า ESACF ว่ามีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมเริ่มต้นที่จุดยอด ณ ตำแหน่งใด และใช้ตำแหน่งจุดยอดนั้นเป็นช่วงเวลาล่าช้า (p,q) นั่นเอง	

บทที่ 4
วิธีการของ Box-Jenkins : การประมาณค่าพารามิเตอร์และการตรวจสอบแบบจำลอง

ในบทที่แล้ว เราทราบแล้วว่าควรจะเลือกแบบจำลอง Box-Jenkins ชนิดใด และทราบถึงวิธีการคาดเดาว่าควรใช้ค่าช่วงเวลาล่าช้า (lag) เท่าใดกับแบบจำลองชนิดนั้น ในบทนี้จะมากล่าวถึงขั้นตอนที่ 2 และขั้นตอนที่ 3 ซึ่งก็คือวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง Box-Jenkins ที่เลือกมา และการตรวจสอบแบบจำลอง ตามลำดับ จากนั้นเราจะมาดูตัวอย่างการประยุกต์ใช้แบบจำลอง Box-Jenkins รายละเอียดแต่ละหัวข้ออธิบายได้ดังต่อไปนี้

4.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter Estimation)

4.1.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง Autoregressive

พิจารณาแบบจำลอง AR(p)

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง AR(p) ได้แก่ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ ส่วนตัวแปรตามคือ X_t และตัวแปรอิสระคือ $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-3}$ ถ้าตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ε_t มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว แล้วจะทำให้แบบจำลอง AR(p) มีคุณสมบัติดังนี้ สมการถดถอยเป็นรูปแบบเชิงเส้นในค่าพารามิเตอร์ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนจะต้องไม่มีความสัมพันธ์กันเอง ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่ในแต่ละตัวอย่าง ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนจะต้องไม่สัมพันธ์กันเอง และต้องไม่สัมพันธ์กับตัวแปรอิสระทุกตัวในแบบจำลอง ซึ่งสอดคล้อง

กับข้อสมมุติของ Classical Linear Regression Model (CLRM)[1] ภายใต้ข้อสมมุติที่กล่าวถึงนี้ ทำให้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด มีคุณสมบัติไม่เอนเอียง (Unbiased) และหากเราใช้ตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ในการประมาณค่าด้วยแล้ว ค่าความน่าจะเป็นของตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดก็คือค่าพารามิเตอร์จริง ๆ ของมัน (Consistency) กล่าวโดยสรุปก็คือ เราจะใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง AR(p) นั่นเอง

4.1.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง Moving Average

เพื่อให้เข้าใจง่าย เราจะเริ่มจากการพิจารณาแบบจำลอง MA(1) โดยกำหนดให้ $\beta_0 = 0$ ดังนี้

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \qquad (4.1)$$

ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง MA(1) คือ β_1 ส่วนตัวแปรตามคือ X_t และตัวแปรอิสระมี 1 ตัว ได้แก่ ε_{t-1} (ซึ่งไม่สามารถเก็บข้อมูลได้) ส่วน ε_t เรายังถือว่าเป็นตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนซึ่งจะเป็นต้องมีในการวิเคราะห์แบบจำลองสมการถดถอย โดย ε_t มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และความแปรปรวนคงที่ (σ^2)

โดยทั่วไปแล้ว การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง Moving Average นั้นสามารถทำได้ 2 วิธีหลัก ๆ คือ วิธีการหาความน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood) และวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square) การประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธีนี้ จะทำได้ก็ต่อเมื่อค่า ε_{t-1} ได้มีการคำนวณขึ้นมาก่อน ซึ่งทำได้ด้วยการกำหนดข้อสมมุติ 2 แบบ ได้แก่

(1) การกำหนดให้ค่าเริ่มแรกของเหตุการณ์ไม่คาดฝันเป็นศูนย์ (ซึ่งในกรณี MA(1) จะหมายถึงการกำหนดให้ $\varepsilon_0 = 0$) การประมาณค่าพารามิเตอร์ภายใต้ข้อสมมุตินี้จะเรียกว่า การใช้วิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีเงื่อนไข (Conditional Maximum Likelihood) และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบวนซ้ำที่มีเงื่อนไข (Conditional Iterative Least Square)[2]

---

[1] อ่านรายละเอียดเพิ่มเติมได้ใน ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์, *เศรษฐมิติเบื้องต้น*, พิมพ์ครั้งที่ 2. (กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554), หน้า 17–18.

[2] สำหรับผู้สนใจ ดูภาคผนวก 4ก

(2) การนำค่าพยากรณ์ย้อนหลัง (Backcasts) ในค่าเริ่มแรกของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (ในกรณี MA(1) จะหมายถึง $\hat{\varepsilon}_0$) มาใช้เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ วิธีการดังกล่าวจะเรียกว่า การใช้วิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Maximum Likelihood) และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Least Square)[3]

สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง MA(q) เมื่อ $q > 1$ ก็สามารถแนวคิดเดียวกันข้างต้น เพียงแต่จะซับซ้อนมากขึ้น โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์จะทำได้ก็ต่อเมื่อค่า $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$ (ในกรณีของ MA(q) จะหมายถึง $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{1-q}$) ได้มีการคำนวณขึ้นมาก่อน ซึ่งทำได้ 2 วิธี คือ (1) การกำหนดให้ค่าเริ่มแรกของเหตุการณ์ไม่คาดฝันเป็นศูนย์ (ในกรณี MA(q) จะหมายถึงการกำหนดให้ $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \varepsilon_{-2} = \ldots = \varepsilon_{1-q} = 0$) หรือ (2) การใช้ค่าพยากรณ์ย้อนหลัง (Backcasts) ในค่าเริ่มแรกของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (ในกรณี MA(q) จะหมายถึง $\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_{-1}, \hat{\varepsilon}_{-2}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{1-q}$)

4.1.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง Autoregressive Moving Average

พิจารณาแบบจำลอง ARMA(p, q) ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{t-q}, \qquad (4.2)$$

ค่าพารามิเตอร์คือ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ ตัวแปรตามคือ X_t และตัวแปรอิสระ ได้แก่ $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$ (อย่าลืมว่า เราไม่สามารถเก็บข้อมูล $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$ ได้) ส่วน ε_t เรายังถือว่าเป็นตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนที่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และความแปรปรวนคงที่

ทำนองเดียวกับแบบจำลอง MA(q) เราจะสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดหรือวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดก็ได้ เพียงแต่เราต้องมีการหาค่า $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$ ($t = q, q+1, \ldots, T$) ขึ้นมาก่อน ซึ่งอาจจะใช้วิธีการกำหนดให้ค่าแรกเริ่มของเหตุการณ์ไม่คาดฝันเป็นศูนย์ ซึ่งในกรณีของ ARMA(p,q) จะหมายถึงการกำหนดให้ $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \ldots = \varepsilon_{1-q} = 0$ นั่นเอง (ซึ่งจะเรียกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไขกับวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีเงื่อนไข) หรือ

[3] สำหรับผู้สนใจ ดูภาคผนวก 4ข

อาจใช้วิธีการพยากรณ์ย้อนหลังของค่า $\hat{\varepsilon}_0, \hat{\varepsilon}_{-1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{-q}$ ก็ได้ (ซึ่งจะเรียกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่มีเงื่อนไขกับวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไข)

4.2 การตรวจสอบแบบจำลอง (Diagnostic Checking)

หัวข้อนี้จะกล่าวถึง**ขั้นที่ 3** ซึ่งเป็นขั้นการตรวจสอบว่าแบบจำลองที่ระบุมาในขั้นที่ 1 มีความเหมาะสมเพียงพอแล้วหรือไม่ ซึ่งเกณฑ์ในการพิจารณาก็คือ ε_t ในแบบจำลองที่เลือกต้องมีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ความแปรปรวนคงที่ และเป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ แต่เนื่องจาก ε_t ไม่สามารถเก็บข้อมูลได้ เราจึงต้องใช้ค่าความผิดพลาดที่ได้จากการประมาณแบบจำลองในขั้นที่ 2 (หรือภาษาอังกฤษใช้คำว่า Residual: e_t) เป็นตัวทดสอบแทน ε_t โดย $e_t = X_t - \hat{X}_t$

ดังนั้น การทดสอบว่าแบบจำลองที่ประมาณขึ้นในขั้นที่ 2 มีความเหมาะสมเพียงพอแล้วหรือไม่ มีวิธีการทดสอบสรุปได้ดังตารางที่ 4.1 ต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 แสดงคุณสมบัติของ ε_t และวิธีการทดสอบคุณสมบัติของ ε_t

คุณสมบัติของ ε_t	**วิธีทดสอบคุณสมบัติของ ε_t**
1. ค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนของคงที่	พิจารณาได้จากลักษณะกราฟของ e_t ที่มีแกนนอนเป็นช่วงเวลา ว่าต้องมีลักษณะกระจายอยู่รอบ ๆ ศูนย์ และมีความแปรปรวนที่คงที่
2. เป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ	ทดสอบสมมุติฐาน $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ ด้วยการใช้ค่าสถิติ Ljung-Box Q ซึ่งมีสูตรดังนี้ $Q(m) = T(T+2)\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j^2}{T-j}$ โดยค่า r_j คือค่า SAC ณ j ช่วงเวลาที่แล้วที่คำนวณจากค่า e_t ที่ได้ในขั้นที่สอง และเนื่องจาก e_t คำนวณจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง ARMA(p, q)

ตารางที่ 4.1 (ต่อ)

คุณสมบัติของ ε_t	วิธีทดสอบคุณสมบัติของ ε_t
1. เป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ	ดังนั้น องศาของความเป็นอิสระในกรณีนี้คือ $m-p-q$ ถ้าผลการทดสอบสมมุติฐานข้างต้น สรุปว่า เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักข้างต้นได้ นั่นคือ ε_t จะเป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ

หลังจากที่เราตรวจสอบคุณสมบัติของ ε_t ตามตารางที่ 4.1 หากพบว่า ε_t ไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว เราจะต้องกลับไปเริ่มทำขั้นที่ 1 และ 2 ใหม่ แล้วทำการตรวจสอบความเหมาะสมใหม่อีกครั้ง หากพบว่า ε_t ไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวอีก ก็ต้องกลับไปทำขั้นที่ 1 และ 2 ใหม่ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่า ε_t ในแบบจำลองสุดท้ายที่ประมาณขึ้นมีคุณสมบัติเป็น ตัวรบกวนขาว

ในทางปฏิบัติ อาจเป็นไปได้ว่าเราอาจสามารถหาแบบจำลองมากกว่า 1 แบบที่ค่า ε_t มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว หากกรณีนี้เกิดขึ้น เราอาจต้องใช้แนวคิดดังต่อไปนี้ในการร่วมพิจารณาเลือกแบบจำลองที่ดีที่สุด ได้แก่

(1) ค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองที่เลือกมีนัยสำคัญทางสถิติทุกตัว

(2) หากเราพบว่าแบบจำลองสองแบบ เช่น แบบจำลอง AR(3) และแบบจำลอง ARMA(1,1) มีความเหมาะสม กล่าวคือ ε_t เป็นตัวรบกวนขาว อีกทั้งค่าสัมประสิทธ์ทั้งหมดล้วนแล้วมีนัยสำคัญทางสถิติทั้ง 2 แบบจำลอง เมื่อกรณีนี้เกิดขึ้น เราอาจเลือกแบบจำลองที่มีค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ (forecast error) ที่ต่ำกว่า ด้วยการพิจารณาค่า Akaike’s Information Criterion (AIC) ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\mathrm{AIC}(k) = -2\left(\frac{l}{N}\right) + \frac{2}{N}k \tag{4.3}$$

โดยที่ l คือค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งจะคำนวณจากตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ Box–Jenkins ส่วน k คือจำนวนพารามิเตอร์ที่ประมาณในแบบจำลอง Box-Jenkins และ N คือจำนวนตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณค่าแบบจำลอง

พิจารณา $-2\left(\frac{l}{N}\right)$ ซึ่งเป็นพจน์แรกของค่า AIC เนื่องจากค่า l สามารถใช้เป็นตัววัดว่าแบบจำลองของ Box–Jenkins ที่ประมาณขึ้นมาสอดคล้องกับตัวอย่างของข้อมูลดีแค่ไหน ส่วนพจน์ที่ 2 คือ $\frac{2}{T}k$ ถูกเรียกว่า ฟังก์ชันลงโทษ (penalty function) ซึ่งเป็นตัวที่ทำให้ค่า AIC สูงขึ้นเมื่อจำนวนพารามิเตอร์มากขึ้นใน ดังนั้น การใช้ค่า AIC เป็นเกณฑ์ในการเลือกแบบจำลองที่ดีกว่าก็คือแบบจำลองนั้นต้องมีค่า AIC ต่ำกว่า

นอกจากนี้ เราอาจใช้ค่า Schwartz's SBC Criterion (SBC) เป็นเกณฑ์ในการเลือกแบบจำลองที่ดีกว่าก็ได้ โดยค่า SBC มีสูตรดังนี้

$$\mathrm{SBC}(k) = -2\left(\frac{l}{N}\right) + \frac{\ln N}{N}k \qquad (4.4)$$

โดยฟังก์ชันลงโทษของค่า SBC คือ $\frac{\ln N}{N}k$ ทำนองเดียวกัน การใช้ค่า SBC เป็นเกณฑ์ในการเลือกแบบจำลองที่ดีกว่า ก็คือแบบจำลองนั้นต้องมีค่า SBC ที่ต่ำกว่านั่นเอง

เมื่อเปรียบเทียบฟังก์ชันลงโทษของ AIC และ SBC จะพบว่า ในทางปฏิบัติ $\ln N$ มักจะมีค่ามากกว่า 2 เสมอ นั่นคือฟังก์ชันลงโทษของ SBC จะมีค่ามากกว่าฟังก์ชันลงโทษของ AIC นั่นคือการใช้เกณฑ์ในการเลือกแบบจำลองไม่เหมือนกัน (ก็คือการใช้ AIC และ SBC) อาจให้ผลการเลือกแบบจำลองไม่เหมือนกันได้ โดยหากเราใช้ค่า SBC เป็นเกณฑ์ในการเลือกแบบจำลองที่ดีกว่า แบบจำลองนั้นมักจะมีค่าพารามิเตอร์น้อยกว่า

ส่วนเราจะทราบได้อย่างไรว่า ควรใช้ค่า AIC หรือ SBC ในการเลือกแบบจำลอง Box–Jenkins ที่ดีกว่านั้น ใช้แนวคิดดังนี้ หากตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ควรใช้ค่า SBC เป็นเกณฑ์ในการเลือก (เนื่องจาก ค่า AIC จะมีให้ผลการเลือกแบบจำลองที่เอนเอียงไปเลือกแบบจำลองที่มีค่าพารามิเตอร์มากกว่า) ส่วนหากตัวอย่างมีขนาดเล็กแล้วการใช้ AIC เป็นเกณฑ์ในการเลือกแบบจำลอง จะให้ผลการเลือกแบบจำลอง Box–Jenkins ที่ถูกต้องกว่าการใช้ SBC[4]

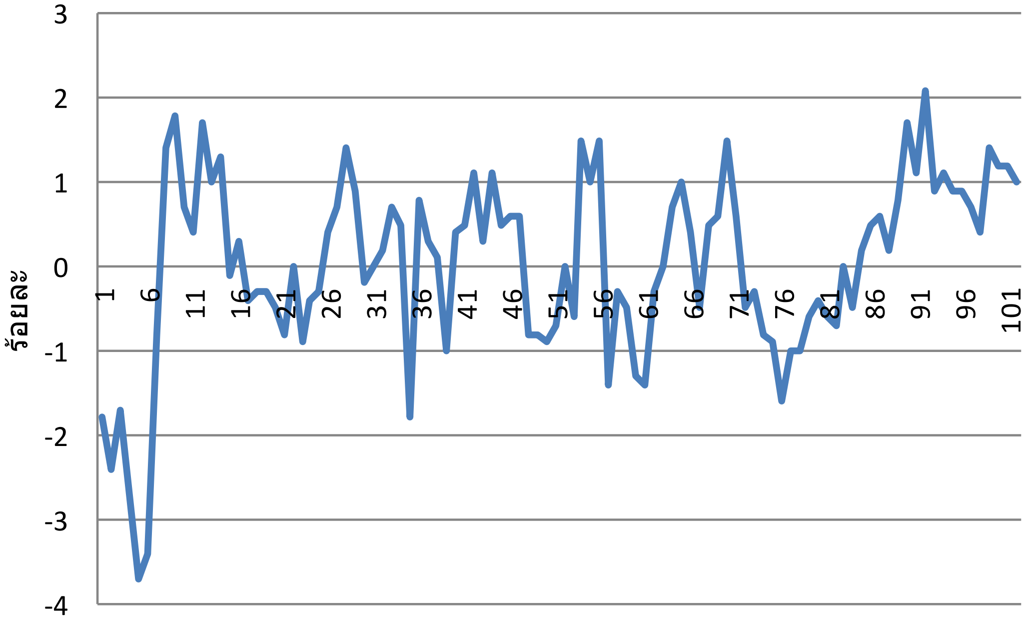
---

[4] Ender,W., *Applied Econometrics Time Series*, 3rd edition. (John–Wiley & Son Inc., 2010), p. 120.

4.3 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้แบบจำลองของ Box-Jenkins กับอนุกรมเวลา

หลังจากที่เราทราบขั้นตอนทั้งหมดในการประยุกต์ใช้แบบจำลอง Box-Jenkins แล้ว ในหัวข้อนี้เราจะนำขั้นตอนดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับนำอนุกรมเวลา ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 สมมุติให้อัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยรายเดือนของประเทศหนึ่งจำนวน 102 เดือนแสดงได้ด้วยรูปที่ 4.1 ดังนี้

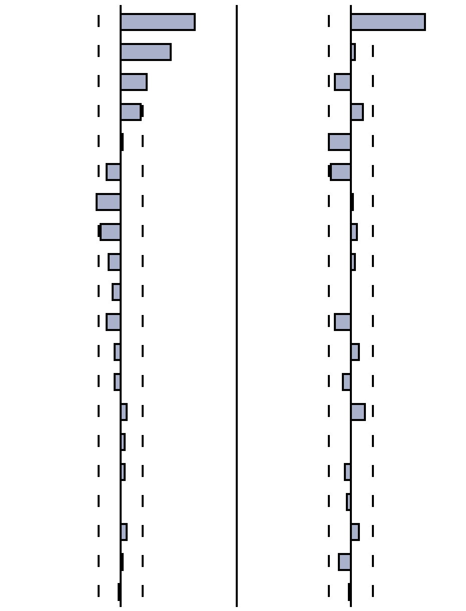


รูปที่ 4.1 แสดงอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยรายเดือนของประเทศหนึ่ง

จากรูปจะเห็นว่า อัตราเงินเฟ้อของประเทศนี้ในช่วงเดือนแรก ๆ ที่เก็บข้อมูลมามีความผันผวนเล็กน้อย และจากนั้นไม่นานอัตราเงินเฟ้อแสดงลักษณะว่ามีความนิ่ง เมื่อพิจารณาค่า SAC และ SPAC (ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณค่า TAC และ TPAC ตามลำดับ) ดังรูปที่ 4.2 จะทำให้เราสรุปได้ว่า ค่า TAC มีลักษณะที่ลดลงอย่างรวดเร็วอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ร้อยละ 5 ในช่วงเวลาที่ 1–3 เราจึงกล่าวได้ว่า TAC ของอนุกรมเวลานี้ลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ในขณะที่ค่า TPAC สิ้นสุดหลังช่วงเวลาที่ 1 อย่างมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 5 ดังนั้น เราน่าจะลองเลือกใช้แบบจำลอง AR(1) กับอัตราเงินเฟ้อของประเทศนี้ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (4.5)$$

โดย Y_t คืออัตราเงินเฟ้อของประเทศนี้



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.662	0.662	46.097	0.000
2	0.458	0.034	68.352	0.000
3	0.235	-0.144	74.263	0.000
4	0.174	0.109	77.536	0.000
5	0.010	-0.195	77.546	0.000
6	-0.139	-0.178	79.690	0.000
7	-0.211	0.021	84.641	0.000
8	-0.173	0.059	88.001	0.000
9	-0.112	0.038	89.427	0.000
10	-0.082	-0.004	90.196	0.000
11	-0.122	-0.141	91.944	0.000
12	-0.064	0.068	92.430	0.000
13	-0.058	-0.074	92.830	0.000
14	0.042	0.128	93.046	0.000
15	0.030	-0.000	93.155	0.000
16	0.033	-0.053	93.292	0.000
17	0.002	-0.026	93.293	0.000
18	0.062	0.080	93.786	0.000
19	0.022	-0.113	93.848	0.000
20	-0.018	-0.017	93.890	0.000

รูปที่ 4.2 แสดงค่า SAC และ SPAC ของอัตราเงินเฟ้อของประเทศหนึ่ง

หลังจากระบุรูปแบบจำลองของ Box-Jenkins ได้แล้ว ขั้นตอนต่อไปก็คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์ การใช้อัตราเงินเฟ้อ (Y_t) กับแบบจำลอง AR(1) แสดงผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$\hat{Y}_t = 0.038 + 0.668\, Y_{t-1} \qquad (4.6)$$

t- statistics (0.473) (9.102)***

AIC = 2.408 SCB =2.459

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 1

จะเห็นว่า ค่าคงที่ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ นั่นคือค่าคงที่ควรเป็นศูนย์ซึ่งสอดคล้องกับรูปที่ 4.1 ที่แสดงถึงอนุกรมเวลาของอัตราเงินเฟ้อไม่มีจุดตัดนั่นเอง ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.7}$$

และผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ แสดงได้ดังนี้

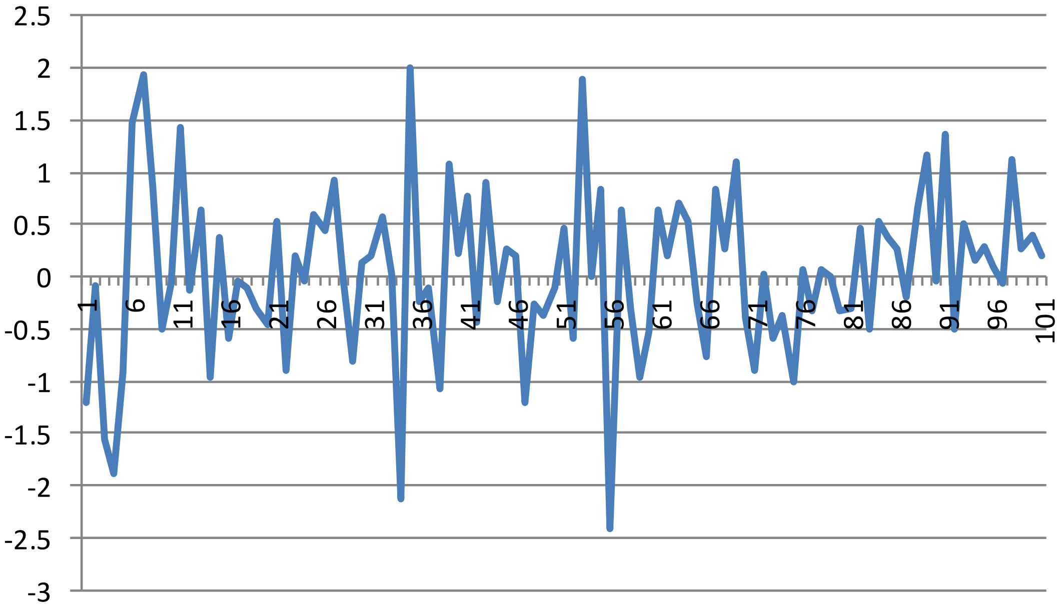
$$\hat{Y}_t = 0.669\ Y_{t-1} \tag{4.8}$$

t- statistics (9.154)***

AIC = 2.390 SCB =2.416

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 1

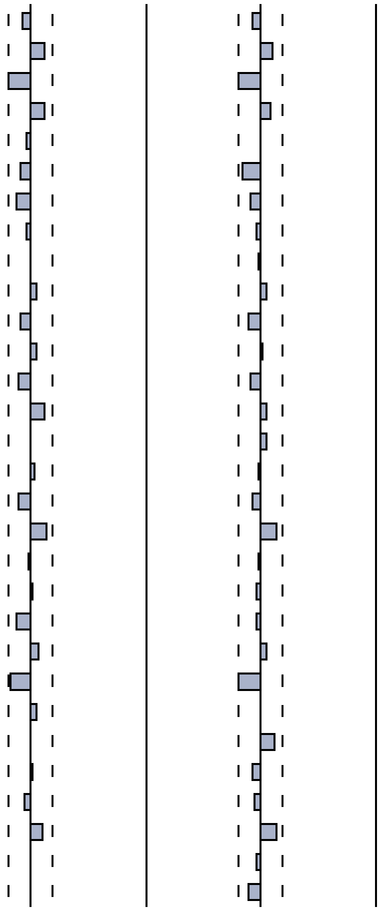
จากนั้นมาถึงขั้นตอนที่ 3 คือการตรวจสอบว่าค่า ε_t ของแบบจำลอง AR(1) ที่ไม่มีค่าคงที่ (ซึ่งก็คือสมการ (4.7) นั่นเอง) ว่ามีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวหรือไม่ เมื่อเราพิจารณารูปที่ 4.3 ที่แสดงค่าความผิดพลาด (Residual: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$) ที่ได้จากการประมาณสมการที่ (4.8) จะพบว่า ค่า e_t มีลักษณะกระจายอยู่รอบ ๆ ศูนย์ และมีความแปรปรวนที่คงที่



รูปที่ 4.3 แสดงค่าความผิดพลาด (ค่า Residual) ที่ได้จากการประมาณสมการที่ (4.8)

และเมื่อพิจารณารูปที่ 4.4 ที่แสดงค่า SAC SPAC และค่าสถิติ Ljung-Box Q ที่คำนวณจาก e_t ของสมการที่ (4.8) จะทำให้เราสรุปได้ว่า ε_t มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว เนื่องจากเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ ได้ ไม่ว่าจะพิจารณาที่ $m = 1, 2, \ldots$ ก็ตาม ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่าแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดของอัตราเงินเฟ้อของประเทศนี้คือ AR(1) ที่ไม่มีค่าคงที่นั่นเอง

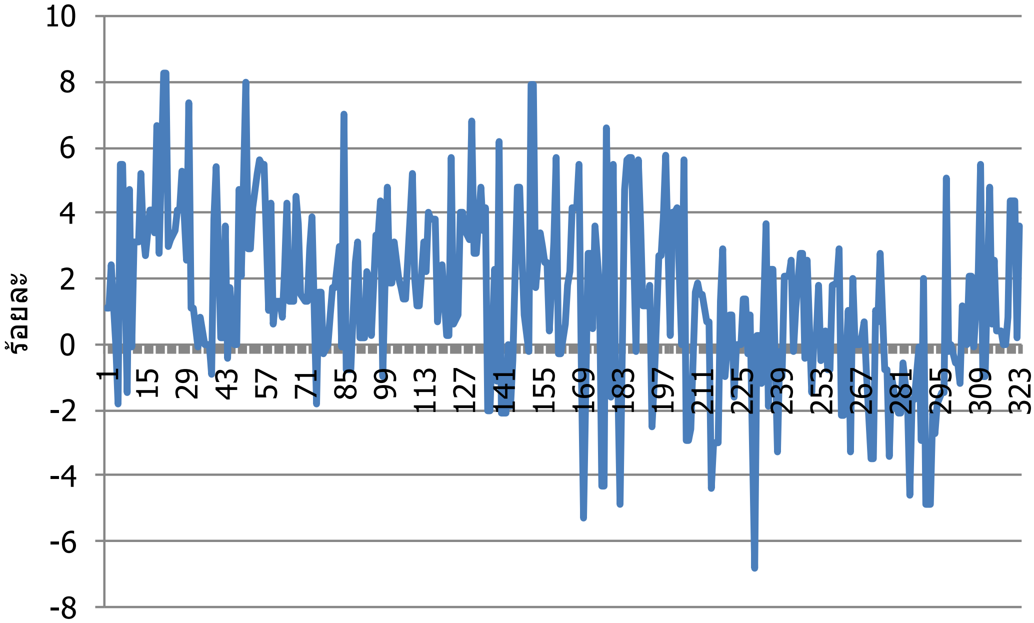
Autocorrelation Partial Correlation



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.066	-0.066	0.4474	0.504
2	0.118	0.114	1.9142	0.384
3	-0.202	-0.190	6.2249	0.101
4	0.120	0.093	7.7763	0.100
5	-0.048	0.002	8.0248	0.155
6	-0.086	-0.156	8.8292	0.183
7	-0.124	-0.090	10.533	0.160
8	-0.039	-0.044	10.702	0.219
9	0.005	-0.022	10.704	0.297
10	0.064	0.061	11.176	0.344
11	-0.095	-0.101	12.229	0.347
12	0.047	0.019	12.492	0.407
13	-0.100	-0.091	13.684	0.397
14	0.130	0.050	15.702	0.332
15	-0.005	0.049	15.706	0.402
16	0.036	-0.022	15.864	0.463
17	-0.113	-0.081	17.432	0.425
18	0.143	0.134	19.999	0.333
19	-0.010	-0.014	20.011	0.394
20	0.021	-0.037	20.067	0.454
21	-0.122	-0.036	22.018	0.398
22	0.070	0.048	22.656	0.421
23	-0.178	-0.190	26.894	0.261
24	0.048	-0.002	27.207	0.295
25	0.003	0.125	27.209	0.346
26	0.020	-0.076	27.264	0.396
27	-0.062	-0.055	27.796	0.422
28	0.109	0.137	29.480	0.388
29	0.002	-0.041	29.481	0.440
30	0.007	-0.101	29.488	0.492

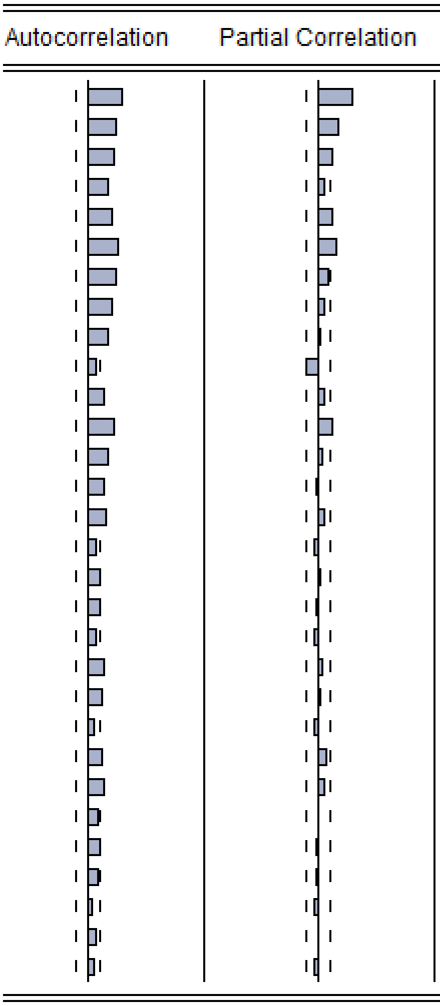
รูปที่ 4.4 แสดงค่า SAC SPAC และค่าสถิติ Ljung-Box Q ของ e_t จากสมการที่ (4.8)

ตัวอย่างที่ 2 สมมุติอัตราการเปลี่ยนแปลงของผลผลิตอุตสาหกรรมของประเทศหนึ่งจำนวน 324 เดือนแสดงได้ด้วยรูปที่ 4.5 ดังนี้



รูปที่ 4.5 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงผลผลิตอุตสาหกรรมของประเทศหนึ่ง

จากรูปที่ 4.5 จะเห็นว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของผลผลิตอุตสาหกรรมของประเทศนี้มีลักษณะมีความนิ่ง เมื่อพิจารณาค่า SAC และ SPAC (ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณค่า TAC และ TPAC ตามลำดับ) ดังรูปที่ 4.6 จะเห็นว่าไม่มีรูปแบบที่ชัดเจนทำให้เราสรุปได้ว่าควรใช้แบบจำลอง Autoregressive หรือ Moving Average อย่างไรก็ดี เราอาจพิจารณาได้ 2 มุมมอง



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.308	0.308	30.988	0.000
2	0.256	0.178	52.430	0.000
3	0.231	0.127	69.921	0.000
4	0.179	0.057	80.456	0.000
5	0.221	0.120	96.638	0.000
6	0.270	0.157	120.91	0.000
7	0.246	0.095	141.09	0.000
8	0.211	0.044	156.04	0.000
9	0.177	0.016	166.57	0.000
10	0.066	-0.099	168.03	0.000
11	0.143	0.042	174.90	0.000
12	0.222	0.121	191.58	0.000
13	0.184	0.037	203.10	0.000
14	0.145	-0.022	210.27	0.000
15	0.172	0.051	220.32	0.000
16	0.078	-0.042	222.41	0.000
17	0.115	0.023	226.93	0.000
18	0.106	-0.013	230.83	0.000
19	0.074	-0.046	232.75	0.000
20	0.141	0.038	239.63	0.000
21	0.120	0.023	244.68	0.000
22	0.042	-0.043	245.29	0.000
23	0.122	0.071	250.55	0.000
24	0.141	0.062	257.53	0.000
25	0.097	0.006	260.86	0.000
26	0.101	-0.012	264.50	0.000
27	0.088	-0.008	267.23	0.000
28	0.039	-0.045	267.79	0.000
29	0.079	0.008	270.05	0.000
30	0.042	-0.038	270.68	0.000

รูปที่ 4.6 แสดงค่า SAC และ SPAC ของอัตราการเปลี่ยนแปลงผลผลิตอุตสาหกรรมของประเทศหนึ่ง

มุมมองที่ 1 : ค่า TAC เริ่มลดลงในช่วงเวลาที่ 1– 4 (แม้ว่าจะเพิ่มขึ้นอีกในช่วงเวลาถัดไปก็ตาม) และค่า TPAC สิ้นสุดหลังช่วงเวลาที่ 3 หากมองในแง่มุมนี้ แบบจำลองที่ควรนำมาใช้ก็คือ AR(3) ดังแสดงได้ดังนี้

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t \qquad (4.9)$$

โดยที่ Y_t คือผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือนของประเทศหนึ่ง ส่วนผลการประมาณค่าพารามิเตอร์เขียนได้ดังนี้

$$\hat{Y}_t = 0.722 + 0.231Y_{t-1} + 0.145Y_{t-2} + 0.128Y_{t-3} \qquad (4.10)$$

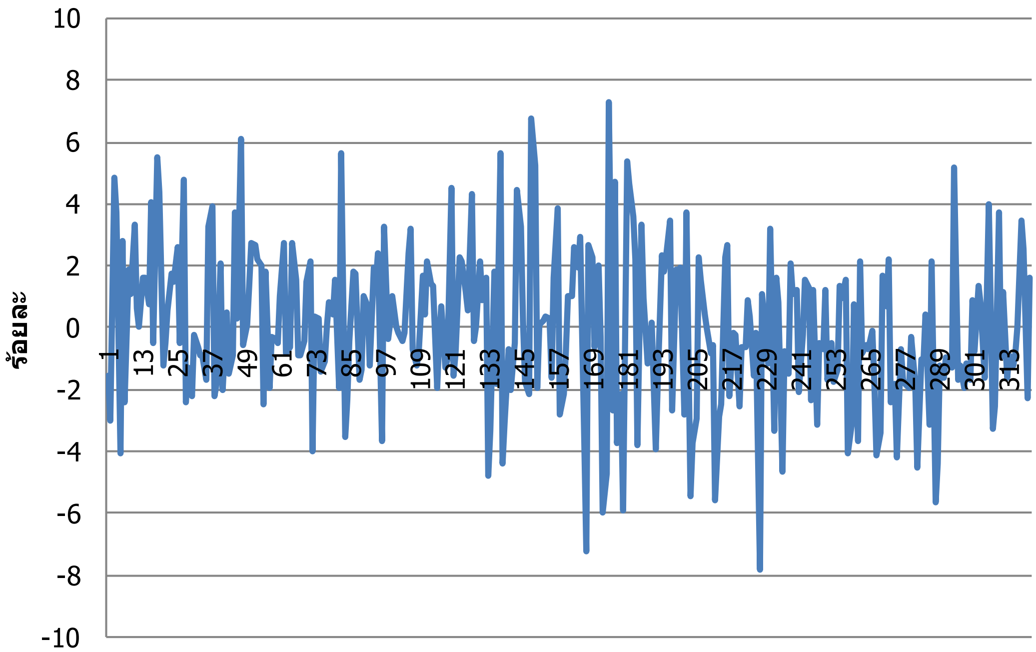
t- statistics (4.14)*** (4.15)*** (2.56)** (2.29)**

AIC = 4.692 SCB =4.739

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 1

** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 5

และเมื่อตรวจสอบค่า e_t ของสมการที่ (4.10) พบว่า ลักษณะของค่า e_t กระจายอยู่รอบ ๆ ศูนย์และความแปรปรวนคงที่ (ดูรูปที่ 4.7) และเมื่อพิจารณาค่าสถิติ Ljung-Box Q (ดูรูปที่ 4.8) จะพบว่า เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ เมื่อ $m \geq 7$ ที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 10 ดังนั้น ε_t ของสมการ AR(3) จึงไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว แบบจำลอง AR(3) ไม่ใช่แบบจำลองที่เหมาะสมที่จะนำมาใช้กับผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือนของประเทศนี้ ดังนั้น เราต้องกลับไปทำขั้นตอนที่หนึ่งใหม่ โดยเปลี่ยนมุมมองการพิจารณาดังนี้



รูปที่ 4.7 แสดงค่าความผิดพลาด (ค่า Residual) ที่ได้จากการประมาณสมการที่ (4.10)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.007	-0.007	0.0139	0.906
		2	-0.024	-0.024	0.1993	0.905
		3	-0.060	-0.061	1.3797	0.710
		4	-0.021	-0.023	1.5271	0.822
		5	0.058	0.054	2.6126	0.759
		6	0.131	0.128	8.2695	0.219
		7	0.122	0.128	13.203	0.067
		8	0.079	0.101	15.283	0.054
		9	0.040	0.073	15.817	0.071
		10	-0.106	-0.085	19.590	0.033
		11	0.019	0.015	19.715	0.049
		12	0.135	0.112	25.838	0.011
		13	0.092	0.054	28.681	0.007
		14	0.030	-0.002	28.981	0.011
		15	0.083	0.085	31.311	0.008
		16	-0.035	-0.014	31.716	0.011
		17	0.033	0.037	32.078	0.015
		18	0.021	0.004	32.224	0.021
		19	-0.008	-0.049	32.246	0.029
		20	0.085	0.027	34.727	0.022
		21	0.053	0.017	35.686	0.024
		22	-0.062	-0.069	37.012	0.024
		23	0.051	0.046	37.905	0.026
		24	0.081	0.066	40.198	0.020
		25	0.031	0.027	40.531	0.026
		26	0.036	0.018	40.978	0.031
		27	0.030	0.022	41.302	0.039
		28	-0.035	-0.041	41.743	0.046
		29	0.019	-0.009	41.869	0.058
		30	-0.055	-0.088	42.964	0.059

รูปที่ 4.8 แสดงค่า SAC SPAC และค่าสถิติ Ljung-Box Q ของ e_t จากสมการที่ (4.10)

มุมมองที่ 2 : ค่า TAC เริ่มลดลงหลังช่วงเวลาที่ 1 (แม้ว่าจะเพิ่มขึ้นอีกในช่วงเวลาถัดไปก็ตาม) และค่า TPAC ก็เริ่มลดลงหลังช่วงเวลาที่ 1 ดังนั้น เราอาจพิจารณาการใช้แบบจำลอง ARMA(1,1) เพื่อให้แน่ใจอาจใช้ตาราง ESACF[5] ในการพิจารณา

ตารางที่ 4.2 แสดงผลการคำนวณค่า ESACF ส่วนตารางที่ 4.3 แสดงค่า P-Value ของค่า ESACF ที่คำนวณได้ และตารางที่ 4.4 จะสรุปความมีนัยสำคัญของค่า ESACF ซึ่งจะเห็นว่าค่า

[5] โปรแกรมสำเร็จรูปที่มีการคำนวณค่า ESACF มีหลายโปรแกรม เช่น SAS และ R เป็นต้น แต่โปรแกรม Eviews จะไม่มีคำสั่งให้คำนวณค่า ESACF ให้

ESACF ที่ไม่มีนัยสำคัญมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม โดยจุดยอดคือ (1,1) ดังนั้น เราจึงควรลอง รูปแบบ ARMA(1,1) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} - \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (4.11)$$

ตารางที่ 4.2 แสดงค่า ESACF ของผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือนของประเทศหนึ่ง

Extended Sample Autocorrelation Function

Lags	MA 0	MA 1	MA 2	MA 3	MA 4	MA 5	MA 6	MA 7	MA 8
AR 0	0.3078	0.2557	0.2306	0.1787	0.2211	0.2703	0.2461	0.2114	0.1773
AR 1	-0.4419	-0.0201	0.0287	-0.0581	0.0029	0.0546	0.0104	0.0050	0.1091
AR 2	-0.4777	-0.3676	-0.0090	-0.0601	0.0035	0.0471	-0.0092	0.0018	0.0369
AR 3	-0.3779	-0.2001	0.0545	-0.0575	0.0083	0.0470	-0.0021	0.0007	0.0082
AR 4	-0.3909	-0.2030	-0.3658	-0.1131	0.0122	0.0042	0.0373	0.0146	0.0226
AR 5	-0.4808	0.1863	-0.2249	0.1019	0.0092	0.0013	0.0109	-0.0107	0.0460
AR 6	-0.4456	0.1079	0.0018	0.0889	0.0073	-0.3723	0.0035	0.0017	0.0111
AR 7	-0.3595	0.0905	-0.0042	0.2420	-0.0480	-0.3731	0.1712	0.0028	0.0037
AR 8	-0.3225	0.0090	0.0370	0.1010	-0.0749	-0.3000	0.0744	-0.0211	-0.0016

ตารางที่ 4.3 แสดงค่า P-value ของค่า ESACF ของผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือนของประเทศหนึ่ง

ESACF Probability Values

Lags	MA 0	MA 1	MA 2	MA 3	MA 4	MA 5	MA 6	MA 7	MA 8
AR 0	<.0001	<.0001	0.0003	0.0071	0.0011	0.0001	0.0008	0.0052	0.0221
AR 1	<.0001	0.7617	0.6593	0.3742	0.9647	0.4114	0.8752	0.9399	0.0718
AR 2	<.0001	<.0001	0.8813	0.3529	0.9577	0.5039	0.9012	0.9793	0.5444
AR 3	<.0001	0.0006	0.3795	0.4905	0.9247	0.4998	0.9767	0.9917	0.8896
AR 4	<.0001	0.0006	<.0001	0.1606	0.8953	0.9635	0.6013	0.8265	0.7075
AR 5	<.0001	0.0140	0.0134	0.3063	0.9237	0.9887	0.8978	0.8905	0.4971
AR 6	<.0001	0.1252	0.9794	0.3664	0.9400	<.0001	0.9578	0.9787	0.8627
AR 7	<.0001	0.1971	0.9527	0.0003	0.5494	<.0001	0.0299	0.9689	0.9546
AR 8	<.0001	0.8892	0.5904	0.1295	0.3312	<.0001	0.3048	0.7568	0.9808

ตารางที่ 4.4 แสดงความมีนัยสำคัญของค่า ESACF ของผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือนของประเทศหนึ่ง

	MA								
AR	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1	X	O	O	O	O	O	O	O	O
2	X	X	O	O	O	O	O	O	O
3	X	X	O	O	O	O	O	O	O
4	X	X	X	O	O	O	O	O	O
5	X	X	X	O	O	O	O	O	O
6	X	O	O	O	O	X	O	O	O
7	X	O	O	X	O	X	X	O	O
8	X	O	O	O	O	X	O	O	O

หมายเหตุ เครื่องหมาย O แสดงถึงค่า ESACF ที่เป็นศูนย์ หรือไม่มีนัยสำคัญทางสถิติที่ร้อยละ 5
เครื่องหมาย × แสดงถึงค่า ESACF ที่ไม่เป็นศูนย์ หรือมีนัยสำคัญทางสถิติที่ร้อยละ 5

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง ARMA(1,1) ข้างต้นแสดงได้ดังนี้[6]

$$\hat{Y}_t = 0.077 + 0.948\, Y_{t-1} - 0.803\, \varepsilon_{t-1}$$

t- statistics (1.52) $(32.03)^{***}$ $(-14.54)^{***}$

AIC = 4.643 SCB =4.678

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 1

** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 5

เนื่องจากค่าคงที่ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ จึงควรใช้แบบจำลอง ARMA(1,1) ที่กำหนดให้ $\alpha_0 = 0$ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} - \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.12}$$

[6] คำนวณด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการที่ (4.12) คือ

$$\hat{Y}_t = 0.982\, Y_{t-1} - 0.843\, \varepsilon_{t-1} \qquad (4.13)$$

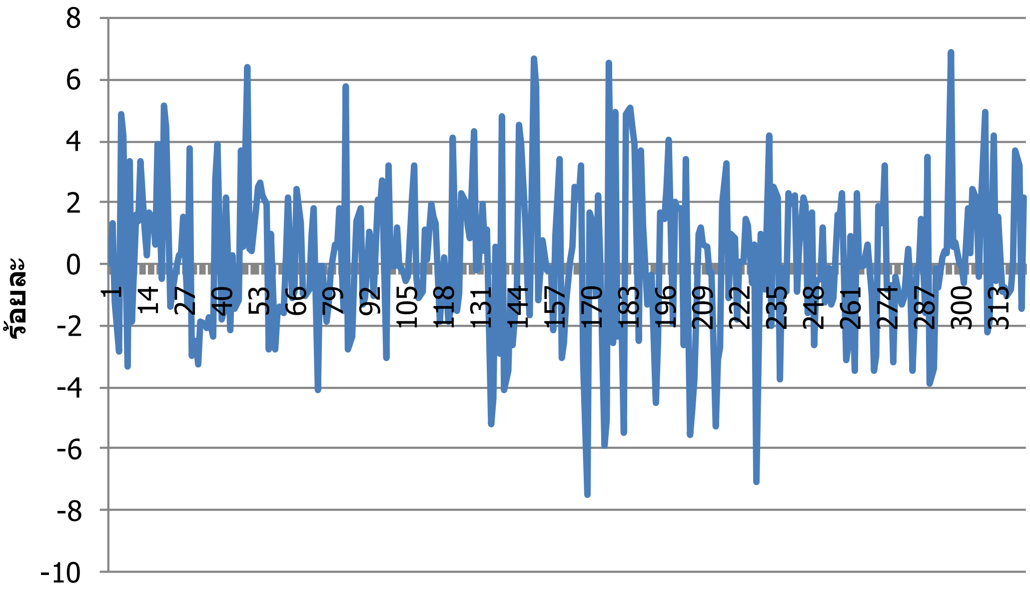
t- statistics (74.39)*** (–22.53)***

AIC = 4.648 SCB =4.672

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 1

** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 5

ส่วนค่า e_t จากสมการที่ (4.13) แสดงได้ดังรูปที่ 4.9 ซึ่งจะเห็นว่ามีการกระจายรอบ ๆ ศูนย์และความแปรปรวนคงที่ และเมื่อพิจารณารูปที่ 4.5 ซึ่งแสดงค่าสถิติ Ljung-Box Q จะเห็นว่าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ ดังนั้น ε_t ของสมการที่ (4.12) เป็นตัวรบกวนขาว แบบจำลอง ARMA(1,1) ที่ไม่มีค่าคงที่ จึงมีเหมาะสมเพียงพอที่จะนำมาใช้กับผลผลิตอุตสาหกรรมรายเดือนของประเทศนี้

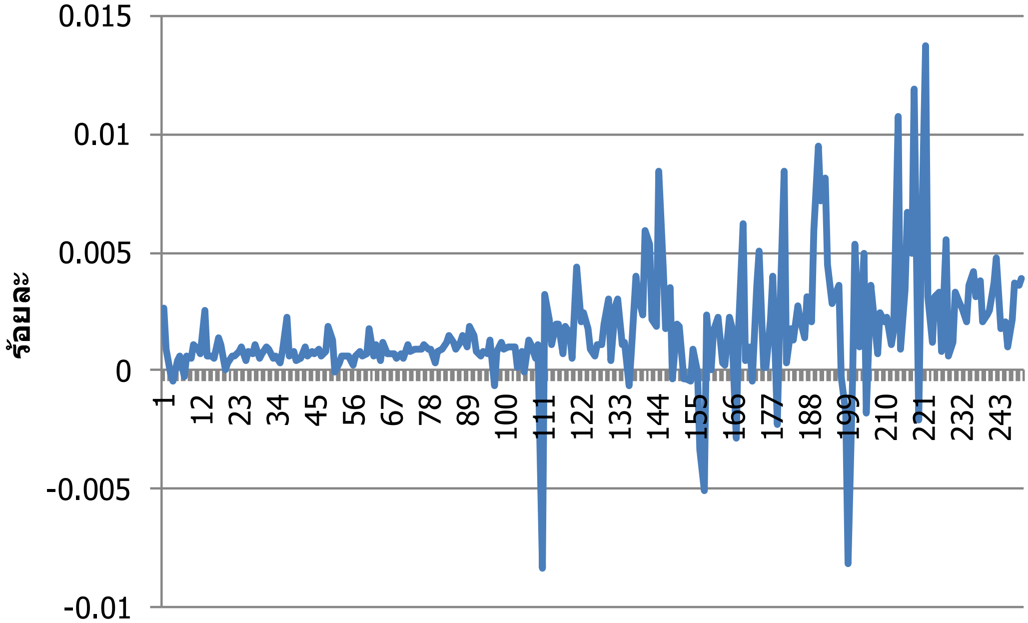


รูปที่ 4.9 แสดงค่าความผิดพลาด (ค่า Residual) ที่ได้จากการประมาณสมการที่ (4.13)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.050	0.050	0.8125	0.367
		2	-0.007	-0.010	0.8297	0.660
		3	-0.026	-0.026	1.0599	0.787
		4	-0.084	-0.081	3.3615	0.499
		5	-0.012	-0.004	3.4063	0.638
		6	0.068	0.067	4.9241	0.554
		7	0.046	0.036	5.6205	0.585
		8	0.013	0.002	5.6741	0.684
		9	-0.021	-0.020	5.8237	0.757
		10	-0.162	-0.150	14.595	0.148
		11	-0.045	-0.025	15.289	0.170
		12	0.074	0.076	17.132	0.145
		13	0.030	0.012	17.435	0.180
		14	-0.015	-0.046	17.508	0.230
		15	0.034	0.032	17.893	0.268
		16	-0.086	-0.060	20.414	0.202
		17	-0.027	-0.001	20.658	0.242
		18	-0.030	-0.036	20.975	0.281
		19	-0.069	-0.080	22.614	0.255
		20	0.028	-0.000	22.895	0.294
		21	0.005	-0.010	22.903	0.349
		22	-0.101	-0.085	26.472	0.232
		23	0.013	0.028	26.533	0.276
		24	0.041	0.036	27.121	0.299
		25	-0.016	-0.013	27.216	0.345
		26	-0.008	-0.033	27.237	0.397
		27	-0.023	-0.034	27.421	0.441
		28	-0.089	-0.084	30.236	0.352
		29	-0.034	-0.043	30.641	0.383
		30	-0.089	-0.103	33.493	0.302

รูปที่ 4.10 แสดงค่า SAC SPAC และค่าสถิติ Ljung-Box Q ของ e_t จากสมการที่ (4.13)

ตัวอย่างที่ 3 สมมุติอัตราเงินผลตอบแทนของพันธบัตรรัฐบาลรายเดือนของประเทศหนึ่งจำนวน 251 เดือนแสดงได้ด้วยรูปที่ 4.11 ดังนี้



รูปที่ 4.11 แสดงอัตราผลตอบแทนของพันธบัตรรัฐบาลของประเทศหนึ่ง

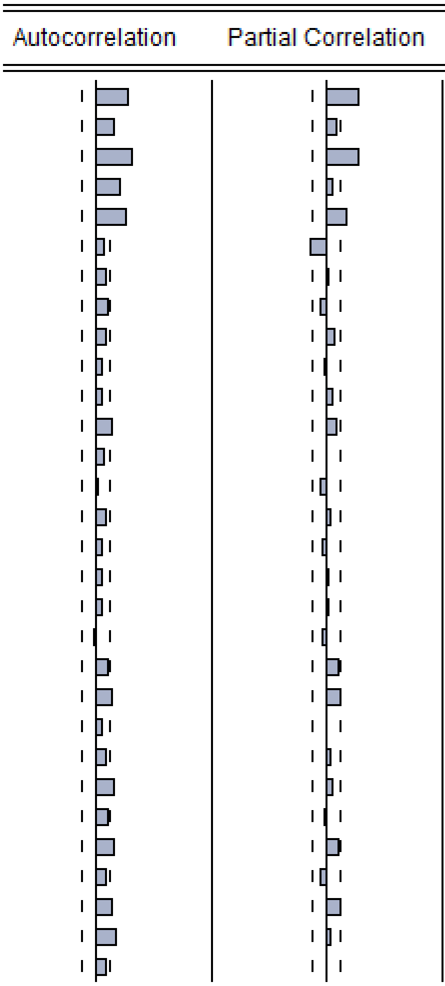
จากรูปจะเห็นว่า อัตราผลตอบแทนของพันธบัตรรัฐบาลของประเทศนี้โดยเฉลี่ยสูงกว่าศูนย์เล็กน้อย และในช่วงหลังของอนุกรมเวลาที่เก็บรวบรวมมา มีเหตุการณ์ไม่ปกติเกิดขึ้นทำให้อัตราผลตอบแทนของพันธบัตรรัฐบาลมีการเปลี่ยนแปลงต่างไปจากเดิม เช่น เดือนที่ 111 อัตราผลตอบแทนมีค่าเป็น –0.008 หรือในเดือนที่ 222 อัตราผลตอบแทนมีค่า 0.014 อย่างไรก็ดี หลังจากเดือนที่มีความผิดปกติ อัตราผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาลมีแนวโน้มปรับตัวเข้าสู่ค่าเฉลี่ย นั่นคือ ความผิดปกติที่เกิดขึ้นเป็นแค่ชั่วคราวเท่านั้น มิได้ส่งผลต่ออัตราผลตอบแทนในเดือนถัด ๆ ไป ดังนั้น อัตราผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาลถือว่ามีความนิ่ง[7]

จากรูปที่ 4.12 แสดงค่า SAC และ SPAC (ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณค่า TAC และ TPAC ตามลำดับ) จะเห็นว่าไม่มีรูปแบบที่ชัดเจนทำให้เราสรุปได้ว่าควรใช้แบบจำลอง Autoregressive

---

[7] ในบทที่ 5 เราจะศึกษาถึงตัวสถิติที่นำมาใช้ทดสอบความนิ่งของตัวแปร ที่เรียกว่า การทดสอบ unit root ซึ่งจะให้ผลสรุปที่เป็นรูปธรรมมากกว่าการพิจารณาจากกราฟ

หรือ Moving Average ดังนั้น เราจะใช้ตารางที่แสดงความมีนัยสำคัญของค่า ESACF (ตารางที่ 4.5) ในการพิจารณาแทน



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.283	0.283	20.238	0.000
2	0.169	0.096	27.471	0.000
3	0.331	0.286	55.404	0.000
4	0.211	0.061	66.827	0.000
5	0.264	0.178	84.682	0.000
6	0.067	-0.153	85.829	0.000
7	0.085	0.015	87.689	0.000
8	0.104	-0.057	90.524	0.000
9	0.083	0.067	92.328	0.000
10	0.066	-0.021	93.455	0.000
11	0.056	0.065	94.271	0.000
12	0.144	0.092	99.744	0.000
13	0.070	-0.001	101.05	0.000
14	0.021	-0.050	101.16	0.000
15	0.092	0.030	103.45	0.000
16	0.048	-0.034	104.06	0.000
17	0.059	0.022	105.01	0.000
18	0.056	0.016	105.86	0.000
19	-0.016	-0.042	105.93	0.000
20	0.110	0.102	109.24	0.000
21	0.155	0.119	115.89	0.000
22	0.051	-0.004	116.62	0.000
23	0.096	0.033	119.17	0.000
24	0.159	0.065	126.24	0.000
25	0.111	-0.021	129.67	0.000
26	0.171	0.099	137.87	0.000
27	0.087	-0.054	139.99	0.000
28	0.154	0.117	146.74	0.000
29	0.188	0.030	156.85	0.000
30	0.084	0.008	158.88	0.000

รูปที่ 4.12 แสดงค่า SAC SPAC และค่าสถิติ Ljung-Box Q ของอัตราผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาลของประเทศหนึ่ง

จากตารางที่ 4.5 จะเห็นว่า ค่า ESACF ที่ไม่มีนัยสำคัญมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมได้หลายรูป โดยจุดยอดมีดังนี้ (0,5), (1,5), (2,5), (4,6) และ (9,8) ดังนั้น เราจึงควรลองรูปแบบ

ARMA(0,5)[8] ARMA(1,5) ARMA(2,5) ARMA(4,6) และ ARMA(9,8) ผลการประมาณค่าพารมิเตอร์ของแบบจำลอง 5 แบบสรุปได้ดังตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.5 แสดงความมีนัยสำคัญของค่า ESACF ของอัตราผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาลของประเทศหนึ่ง

AR	MA 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	X	X	X	X	X	O	O	O	O	O	O
1	X	O	X	O	X	O	O	O	O	O	O
2	X	X	O	O	X	O	O	O	O	O	O
3	X	X	X	O	X	X	O	O	O	O	O
4	X	X	X	O	X	X	O	O	O	O	O
5	X	X	X	O	O	X	O	O	O	O	O
6	O	X	X	O	O	O	O	O	O	O	O
7	X	O	X	O	O	O	X	O	O	O	O
8	X	X	X	O	O	O	X	X	O	X	O
9	X	X	O	O	X	O	O	X	O	O	O
10	X	X	O	X	X	O	O	X	O	O	O

จากตารางที่ 4.6 จะเห็นว่า เมื่อพิจารณาค่าสถิติ Ljung-Box Q จะพบว่าไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ[9] นั่นคือแบบจำลองทั้ง 5 แบบนี้มีความเหมาะสมเพียงพอ อย่างไรก็ดี ในแต่ละแบบจำลองยังพบว่ามีค่าสัมประสิทธิ์บางค่าที่ไม่มีนัยสำคัญ ดังนั้น เราจะทำการประมาณแบบจำลองใหม่ โดยการตัดค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่มีนัยสำคัญมากที่สุดออกไปก่อน แล้วนำมาประมาณค่าใหม่ จากนั้นก็พิจารณาตัดค่าสัมประสิทธิ์อีกที่ไม่มีนัยสำคัญมากที่สุดออกไปอีก แล้วประมาณค่าพารามิเตอร์อีกครั้ง ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้แบบจำลองที่ค่าสัมประสิทธิ์ทุกค่ามีนัยสำคัญ ดังแสดงดังตารางที่ 4.7

[8] ซึ่งก็คือแบบจำลอง MA(5) นั่นเอง

[9] จะไม่แสดงรูปดังกล่าวเพื่อประหยัดพื้นที่ และนอกจากนี้ ค่าผิดพลาด (Residual: e_t) ที่คำนวณได้จากแบบจำลอง ARMA ทั้ง 5 แบบจำลองพบว่า กระจายรอบ ๆ ศูนย์และมีความแปรปรวนคงที่ ซึ่งมิได้แสดงรูปเพื่อประหยัดพื้นที่เช่นเดียวกัน

ตารางที่ 4.6 แสดงผลการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง ARMA จำนวน 5 แบบจำลองที่เลือกมา

ค่าสัมประสิทธิ์	แบบจำลอง				
	ARMA(0,5) หรือ MA(5)	ARMA(1,5)	ARMA(2,5)	ARMA(4,6)	ARMA(9,8)
ค่าคงที่	0.002 (6.43)***	0.001 (2.94)***	0.001 (2.77)***	0.0000096 (0.57)	0.001 (1.44)
Y_{t-1}		0.211 (0.91)	0.202 (0.63)	0.920 (3.06)***	0.048 (0.30)
Y_{t-2}			0.033 (0.12)	–0.195 (–0.47)	0.023 (0.16)
Y_{t-3}				0.353 (0.91)	0.318 (3.09)***
Y_{t-4}				–0.073 (–0.33)	–0.192 (–2.22)**
Y_{t-5}					0.199 (2.55)**
Y_{t-6}					–0.694 (–9.01)***
Y_{t-7}					0.095 (0.72)
Y_{t-8}					0.436 (3.42)***
Y_{t-9}					0.183 (2.13)**
ε_{t-1}	0.219 (3.52)***	0.020 (0.09)	0.029 (0.09)	–0.736 (–2.51)**	0.165 (1.05)
ε_{t-2}	0.012 (0.19)	–0.030 (–0.40)	–0.059 (–0.26)	–0.008 (–0.02)	0.011 (0.07)
ε_{t-3}	0.307 (5.11)***	0.322 (5.24)***	0.318 (3.84)***	–0.001 (–0.002)	0.019 (0.19)
ε_{t-4}	0.158 (2.50)**	0.097 (1.01)	0.102 (0.78)	–0.154 (–0.64)	0.240 (2.68)***
ε_{t-5}	0.252 (4.04)***	0.235 (3.24)***	0.225 (2.47)**	0.206 (1.52)	0.105 (1.24)
ε_{t-6}				–0.301 (–3.09)***	0.660 (7.35)***
ε_{t-7}					0.069 (0.46)
ε_{t-8}					–0.539 (–3.79)***

ตารางที่ 4.6 (ต่อ)

ค่าสัมประสิทธิ์			แบบจำลอง		
	ARMA(0,5) หรือ MA(5)	ARMA(1,5)	ARMA(2,5)	ARMA(4,6)	ARMA(9,8)
ค่าสถิติ Ljung-Box Q	23.808	21.941	21.626	17.163	20.246
AIC	–9.470	–9.463	–9.451	–9.468	–9.443
SBC	–9.385	–9.364	–9.338	–9.312	–9.184

หมายเหตุ ตัวเลขใน ( ) คือค่าสถิติ t

ค่าสถิติ Ljung-Box Q เป็นค่าที่ใช้ทดสอบ H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{30} = 0$

***, ** และ * หมายถึงมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 1, ร้อยละ 5 และร้อยละ 10 ตามลำดับ

จากตารางที่ 4.7 จะเห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์ทุกค่ามีนัยสำคัญทางสถิติ และค่าสถิติ Ljung-Box Q ก็ไม่มีนัยสำคัญ ดังนั้น แบบจำลองที่แสดงในตารางที่ 4.7 ล้วนแล้วแต่มีความเหมาะสมเพียงพอ แต่หากเราต้องการเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุด เราอาจใช้ค่า AIC หรือค่า SBC เป็นเกณฑ์ และเนื่องจากขนาดของตัวอย่างค่อนข้างใหญ่ (T = 251) เราจึงใช้ค่า SBC ในการพิจารณา ซึ่งจะพบว่าแบบจำลอง ARMA(4,6) หลังจากตัดตัวแปรที่ไม่มีนัยสำคัญออกทีละตัวแล้ว จะมีค่า SBC ต่ำที่สุดคือ –9.452 ดังนั้น แบบจำลองที่เหมาะสมที่สุดที่ควรใช้กับอัตราผลตอบแทนพันธบัตรรัฐบาลของประเทศนี้เขียนได้ดังเป็น

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_t = {} & \underset{(12.14)^{***}}{0.876\,Y_{t-1}} \; - \underset{(-2.41)^{**}}{0.193\,Y_{t-2}} \; + \underset{(0.88)^{***}}{0.327\,Y_{t-3}} \; - \underset{(-10.54)^{***}}{0.725\,\varepsilon_{t-1}} \; - \underset{(-3.34)^{***}}{0.229\,\varepsilon_{t-2}} \; + \underset{(2.20)^{***}}{0.168\,\varepsilon_{t-5}} \\
& - \underset{(-4.70)^{***}}{0.313\,\varepsilon_{t-6}}
\end{aligned}
$$

ตารางที่ 4.7 แสดงผลการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง ARMA ทั้ง 5 แบบจำลอง หลังจากตัดค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่มีนัยสำคัญออก

ค่าสัมประสิทธิ์	แบบจำลอง				
	ARMA(0,5) หรือ MA(5)	ARMA(1,5)	ARMA(2,5)	ARMA(4,6)	ARMA(9,8)
ค่าคงที่	0.002 (6.49)***	0.001 (5.55)***	0.001 (5.55)***		0.001 (2.75)***
Y_{t-1}		0.225 (3.59)***	0.225 (3.59)***	0.876 (12.14)***	0.134 (2.03)**
Y_{t-2}				–0.193 (–2.41)**	
Y_{t-3}				0.327 (6.88)***	0.263 (5.81)***
Y_{t-4}					–0.085 (–1.70)*
Y_{t-5}					0.289 (7.53)***
Y_{t-6}					–0.590 (–10.85)***
Y_{t-7}					0.131 (2.55)**
Y_{t-8}					0.449 (9.21)***
Y_{t-9}					–
ε_{t-1}	0.216 (3.55)***			–0.725 (–10.54)***	0.120 (3.57)***
ε_{t-2}	–				–
ε_{t-3}	0.306 (5.15)***	0.320 (5.45)***	0.320 (5.45)***		–
ε_{t-4}	0.160 (2.53)**			–0.229 (–3.34)***	0.166 (6.36)***
ε_{t-5}	0.249 (4.21)***	0.230 (3.89)***	0.230 (3.89)***	0.168 (2.20)**	–
ε_{t-6}				–0.313 (–4.70)***	0.516 (13.04)***
ε_{t-7}					–
ε_{t-8}					–0.616 (–18.70)***

ตารางที่ 4.7 (ต่อ)

ค่าสัมประสิทธิ์			แบบจำลอง		
	ARMA(0,5) หรือ MA(5)	ARMA(1,5)	ARMA(2,5)	ARMA(4,6)	ARMA(9,8)
ค่าสถิติ Ljung-Box Q	24.060	26.880	26.880	18.435	22.844
AIC	–9.478	–9.476	–9.476	–9.552	–9.474
SBC	–9.407	–9.419	–9.419	–9.452	–9.301

หมายเหตุ ตัวเลขใน ( ) คือค่าสถิติ t

ค่าสถิติ Ljung-Box Q เป็นค่าที่ใช้ทดสอบ H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{30} = 0$

***, ** และ * หมายถึงมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 1, ร้อยละ 5 และร้อยละ 10 ตามลำดับ

บทที่ 5
แบบจำลองอนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง
(Nonstationary Time Series Models)

ในบทที่ผ่านมา เราได้ศึกษาถึงวิธีการของ Box-Jenkins ซึ่งเป็นวิธีการที่ต้องนำมาใช้กับอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง (Stationary) แต่ในทางปฏิบัติ อนุกรมเวลาในทางเศรษฐศาสตร์ ในทางการเงิน หรือในทางธุรกิจ มักจะไม่มีความนิ่ง (Nonstationary) ซึ่งทำให้วิธีการของ Box-Jenkins ในบทก่อนหน้านี้ไม่สามารถนำมาใช้ได้ ในบทนี้ เราจะมาศึกษาว่า หากอนุกรมเวลาไม่มีความนิ่งแบบจำลองอนุกรมเวลาที่ควรนำมาใช้จะมีลักษณะอย่างไร มีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองของ Box-Jenkins หรือไม่ อย่างไรก็ดี เราควรมาทำความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะของอนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่งเสียก่อนซึ่งจะกล่าวในหัวข้อแรก จากนั้นหัวข้อที่ 2 จะกล่าวถึง ลักษณะของค่า TAC และ TPAC ของอนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง หัวข้อที่ 3 จะแนะนำแบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) ซึ่งเป็นแบบจำลองที่สามารถใช้กับอนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่งได้ หัวข้อที่ 4 จะกล่าวถึงการทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลา ซึ่งเป็นวิธีการทดสอบทางสถิติ มิใช่พิจารณาจากกราฟหรือค่า SAC และ SPAC หัวข้อที่ 5 จะกล่าวถึงการทดสอบความนิ่งด้วยวิธี Augmented Dickey–Fuller (ADF) ซึ่งเป็นวิธีที่พัฒนามาจากวิธีที่ได้กล่าวในหัวข้อที่ 4 และหัวข้อสุดท้าย จะแสดงถึงตัวอย่างการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง รายละเอียดของแต่ละหัวข้อมีดังนี้

5.1 อนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง (Nonstationary Time Series Models)

จากบทที่ 2 เราทราบแล้วว่าอนุกรมเวลา X_t จะมีความนิ่ง (Stationary) ก็ต่อเมื่อ (1) ค่าเฉลี่ยของตัวแปร X ในแต่ละช่วงเวลา t มีค่าคงที่ หรือเขียนได้ว่า $E(X_t) = \mu$, $t = 1, 2, \ldots, T$ และ (2) ความแปรปรวนของตัวแปร X ในแต่ละช่วงเวลา t มีค่าคงที่ หรือเขียนได้ว่า $var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = \sigma_X^2$, $t = 1, 2, \ldots, T$ และ (3) ความแปรปรวนร่วมของตัวแปร X ณ เวลา t_1 และเวลา t_2 ($t_1 \neq t_2$) จะมีค่าคงที่ หรือเขียนได้ว่า $\gamma_\tau = cov(X_{t_1}, X_{t_2})$

ดังนั้น หากอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่ง (Nonstationonry) อาจเป็นเพราะมีสาเหตุมาจากค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t ไม่คงที่ หรือเขียนได้ว่า $E(X_t) = \mu_t$, $t = 1, 2, \ldots, T$ หรือ ความแปรปรวนของอนุกรมเวลา X_t ไม่คงที่ เช่น เมื่อเวลาผ่านไป ความแปรปรวนของอนุกรมเวลา X_t จะเพิ่มขึ้นตามไปด้วย โดยหากอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่งนั้นอาจมาจากรูปแบบของแบบจำลอง 4 ประเภทใหญ่ ๆ ดังนี้

5.1.1 อนุกรมเวลา X_t ประกอบด้วยแนวโน้มแบบกำหนดได้ (Deterministic Trend)

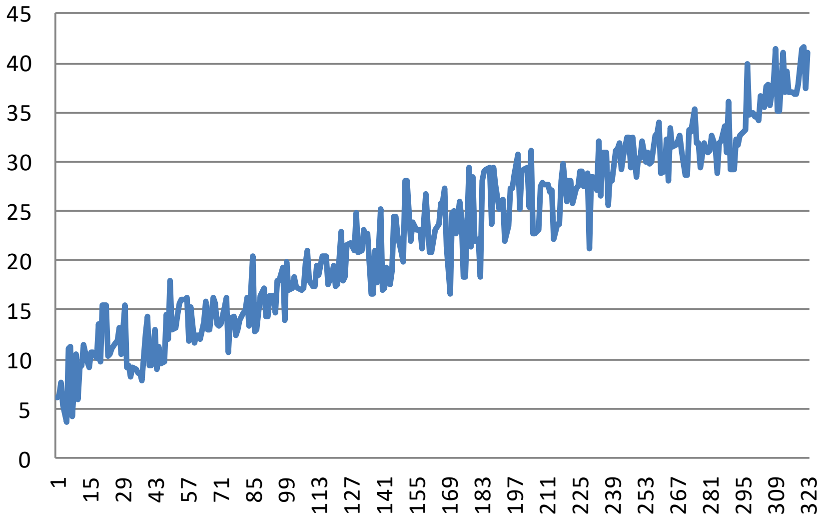
หมายถึง อนุกรมเวลา X_t ขึ้นอยู่กับแนวโน้มของเวลา (เขียนแทนด้วย t) เช่น อนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูป

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varepsilon_t \tag{5.1}$$

โดย φ_0 และ φ_1 คือค่าพารามิเตอร์ที่แสดงถึงค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์ของ t ตามลำดับ ส่วน ε_t คือตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคงที่ จากสมการที่ (5.1) เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\mu_t = E(X_t) = \varphi_0 + \varphi_1 t$ ดังนั้น เราจะเขียนได้ว่า

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

เมื่ออนุกรมเวลา X_t ประกอบด้วยแนวโน้มแบบกำหนดได้ จะหมายถึงค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t (หรือเขียนแทนด้วย μ_t) อยู่ในรูปแบบจำลองแนวโน้มที่กำหนดได้นั่นเอง และเมื่อเราวาดกราฟอนุกรมเวลา X_t จะมีลักษณะกระจายรอบ ๆ เส้นแนวโน้มกำหนดได้นั่นเอง ตัวอย่างเช่น ถ้า $\mu_t = 5 + 0.1t$ รูปกราฟของ X_t จะมีลักษณะดังรูปที่ 5.1

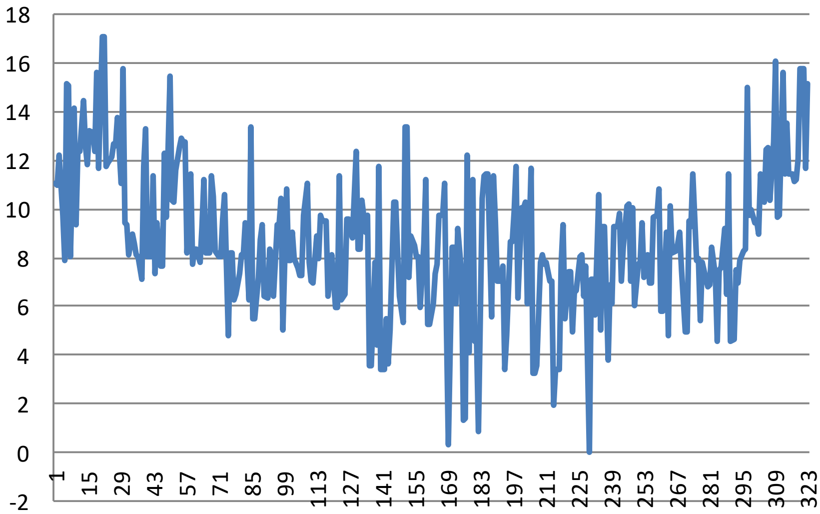


รูปที่ 5.1 แสดงอนุกรมเวลา X_t ที่มีค่าเฉลี่ยคือ $\mu_t = 5 + 0.1t$

นอกจากนี้ แนวโน้มกำหนดได้อาจอยู่ในรูปพาราโบลาคือ $\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2$ ดังนั้น X_t จะเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \varepsilon_t \tag{5.2}$$

เมื่อเราวาดกราฟอนุกรมเวลา X_t จะมีลักษณะกระจายรอบ ๆ เส้นพาราโบลา เช่น ถ้า $\mu_t = 10 - 0.06t + 0.002t^2$ รูปกราฟของ X_t จะมีลักษณะดังรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2 แสดงอนุกรมเวลา X_t ที่มีค่าเฉลี่ยคือ $\mu_t = 10 - 0.06t + 0.002t^2$

แนวโน้มที่กำหนดได้อาจอยู่ในรูปทั่วไปคือ $\mu_t = \varphi_0 + \varphi_1 t + \ldots + \varphi_k t^k + \varepsilon_t$ อนุกรมเวลา X_t จะเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 t + \ldots + \varphi_k t^k + \varepsilon_t \qquad (5.3)$$

นอกจากรูปแบบโพลิโนเมียลแล้ว แนวโน้มที่กำหนดได้อาจอยู่ในรูปแบบอื่น ๆ เช่น รูปแบบของตรีโกณมิติก็ได้ กล่าวโดยสรุป หากค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t เป็นแบบจำลองแนวโน้มกำหนดได้แล้ว กราฟของอนุกรมเวลา X_t จะมีลักษณะกระจายรอบ ๆ เส้นแนวโน้มที่กำหนดได้นั้นเสมอ

อนุกรมเวลาอยู่ในรูปสมการที่ (5.1)–(5.3) ล้วนเป็นอนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่งทั้งสิ้น แต่มีข้อสังเกตว่า หากเรากำจัดส่วนของแนวโน้มที่กำหนดได้ออกไปจากอนุกรมเวลา X_t แล้ว จะได้อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง ดังนั้น เราอาจเรียกอนุกรมเวลาที่มีลักษณะนี้ว่ามีความนิ่งรอบเส้นแนวโน้ม (ภาษาอังกฤษใช้คำว่า Trend Stationary)

พิจารณาอนุกรมเวลา X_t ที่ค่าเฉลี่ยอยู่ในรูปแนวโน้มกำหนดได้ ดังสมการที่ (5.1) จะได้ว่า $\mathrm{E}(X_t) = \varphi_0 + \varphi_1 t$ และ $\mathrm{E}(X_{t-1}) = \varphi_1 + \varphi_1(t-1)$ นั่นคือ $\mathrm{E}(X_t) - \mathrm{E}(X_{t-1}) = \varphi_1$ ซึ่งแปลความหมายได้ว่า ค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t จะเปลี่ยนแปลงในอัตราที่คงที่เท่ากับ φ_1 นั่นเอง ซึ่งจะตรงกับลักษณะของอนุกรมเวลาทางเศรษฐศาสตร์ การเงิน และธุรกิจ

และหากพิจารณาอนุกรมเวลา X_t ที่ค่าเฉลี่ยอยู่ในรูปแนวโน้มกำหนดได้ ดังสมการที่ (5.2) จะได้ว่า $\mathrm{E}(X_t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2$ และ $\mathrm{E}(X_{t-1}) = \varphi_1 + \varphi_1(t-1) + \varphi_2(t-1)^2$ นั่นคือ $\mathrm{E}(X_t) - \mathrm{E}(X_{t-1}) = (\varphi_1 - \varphi_2) + 2\varphi_2 t$ ซึ่งแปลความหมายได้ว่า ค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t จะเปลี่ยนแปลงในอัตราที่มากขึ้นเรื่อย ๆ เนื่องจากขึ้นอยู่กับค่า $2\varphi_2 t$ $(t = 1, 2, \ldots, T)$ ซึ่งอนุกรมเวลาในทางเศรษฐศาสตร์ การเงิน และธุรกิจ ที่มีลักษณะเช่นนี้จะน้อยมาก ดังนั้น ในหนังสือเล่มนี้ จะเน้นกรณีที่ค่าเฉลี่ยอยู่ในรูปแบบจำลองเชิงเส้นตรง

เมื่อเราพิจารณาสมการที่ (5.1) ค่า ε_t อาจแปลความหมายได้ว่า เป็นค่าที่ทำให้อนุกรมเวลา X_t เบี่ยงเบนออกไปจากรูปแบบแนวโน้ม (หรือค่าเฉลี่ย) ณ เวลา t และจากสมการที่ (5.1) เมื่อย้อนเวลากลับไป 1 ช่วงเวลา จะเขียนได้ว่า

$$X_{t-1} = \varphi_0 + \varphi_1(t-1) + \varepsilon_{t-1} \qquad (5.4)$$

ทำนองเดียวกัน ค่า ε_{t-1} อาจแปลความหมายได้ว่า เป็นค่าที่ทำให้อนุกรมเวลา X_{t-1} เบี่ยงเบนออกไปจากรูปแบบแนวโน้ม (หรือค่าเฉลี่ย) ณ เวลา $t-1$ เมื่อเรานำสมการที่ (5.4) ไปหักออกจากสมการที่ (5.1) จะได้

$$\Delta X_t = \varphi_1 + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \tag{5.5}$$

โดยที่ $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ จากสมการที่ (5.5) อธิบายได้ว่า อนุกรมเวลา X_t ที่เปลี่ยนแปลงไปในแต่ละช่วงเวลา จะมีการหักค่าที่เบี่ยงเบนออกไปจากรูปแบบแนวโน้มกำหนดได้ (หรือค่าเฉลี่ย) ณ เวลาที่แล้ว ($-\varepsilon_{t-1}$) และมีการเพิ่มค่าที่เบี่ยงเบนออกไปจากรูปแบบแนวโน้มกำหนดได้ (หรือค่าเฉลี่ย) ณ ปัจจุบัน (ε_t) เข้ามาแทน หรือกล่าวอีกอย่างคือ อนุกรมเวลา X_t จะมีการปรับตัวให้กลับเข้าสู่เส้นแนวโน้มกำหนดได้ (หรือค่าเฉลี่ย) ก่อนเสมอ ($-\varepsilon_{t-1}$) และจากนั้นก็จะมีเหตุการณ์ไม่คาดฝันใหม่เข้ามากระทบเพิ่มขึ้นเสมอ ($+\varepsilon_t$) นอกจากนี้ยังมีข้อสังเกตจากสมการที่ (5.5) อีกอย่างคือ การทำผลต่างลำดับที่ 1 ของอนุกรมเวลาที่ค่าเฉลี่ยอยู่ในรูปแนวโน้มกำหนดได้นั้น จะทำให้ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันเอง[1]

5.1.2 อนุกรมเวลา X_t ประกอบด้วยแนวโน้มแบบสุ่ม (Stochastic Trend)

หมายถึง อนุกรมเวลา X_t ขึ้นอยู่กับแนวโน้มแบบสุ่ม ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{5.6}$$

โดยที่ μ_t คือแนวโน้มแบบสุ่ม ส่วน ε_t คือตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคงที่ โดยที่ $E(X_t) = E(\mu_t)$ ซึ่งหมายถึง ค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t ก็คือค่าเฉลี่ยของแนวโน้มแบบสุ่ม นั่นเอง ส่วนความหมายของแนวโน้มแบบสุ่มอธิบายได้ดังนี้

การที่ μ_t ในแต่ละช่วงเวลาจะเป็นแบบสุ่ม หมายถึงไม่สามารถกำหนดได้แน่นอน นั่นคือ การเปลี่ยนแปลงของ μ_t ก็จะเป็นแบบสุ่ม ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\mu_t - \mu_{t-1} = \varphi_0 + \nu_t \tag{5.7}$$

สมการที่ (5.7) เขียนได้อีกอย่างคือ

---

[1] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 5ก

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \varphi_0 + v_t \tag{5.8}$$

โดยที่ v_t คือตัวแปรสุ่มที่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนคงที่ σ_v^2 และ v_t เป็นอิสระกับ ε_t ต่อไป เราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี คือกรณีแนวโน้มที่เป็นแบบสุ่มไม่มีค่าคงที่ ($\varphi_0 = 0$) และมีค่าคงที่ ($\varphi_0 \neq 0$) รายละเอียดแต่ละกรณีอธิบายได้ดังต่อไปนี้

(1) แนวโน้มที่เป็นแบบสุ่มไม่มีค่าคงที่

จากสมการที่ (5.7) เมื่อ $\varphi_0 = 0$ เราจะได้แนวโน้มที่เป็นแบบสุ่มที่ไม่มีค่าคงที่ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\mu_t - \mu_{t-1} = v_t \tag{5.9}$$

สมการที่ (5.9) เขียนได้อีกอย่างคือ

$$\mu_t = \mu_{t-1} + v_t \tag{5.10}$$

เราจะเรียก แบบจำลองแนวโน้มแบบสุ่มตามสมการที่ (5.9) หรือ (5.10) ว่าการเดินแบบสุ่ม (Random Walks) เมื่อสังเกตสมการที่ (5.9) จะบอกได้ว่า แนวโน้มแบบสุ่มที่เปลี่ยนไปจากเวลาที่แล้ว ($\mu_t - \mu_{t-1}$) ไม่ได้มีการหักค่าตัวแปรสุ่มที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาก่อนหน้านี้ออกไป (v_{t-1}) นั่นหมายถึงจะมีการสะสมค่าเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่ผ่านมาแล้วในอดีตไปเรื่อย ๆ (v_{t-1}, v_{t-2}, …) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

จากสมการที่ (5.10) ถ้ากำหนดให้ $\mu_0 = 0$

ณ $t = 1$ จะได้ $\quad \mu_1 = \mu_0 + v_1 = v_1$

ณ $t = 2$ จะได้ $\quad \mu_2 = \mu_1 + v_2 = v_1 + v_2$

ณ $t = 3$ จะได้ $\quad \mu_3 = \mu_2 + v_3 = v_1 + v_2 + v_3$

$\vdots$

ณ $t = T$ จะได้ $\quad \mu_T = \mu_{T-1} + v_T = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_T$

หรือเราเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\mu_t = \sum_{i=1}^{t} v_i \tag{5.11}$$

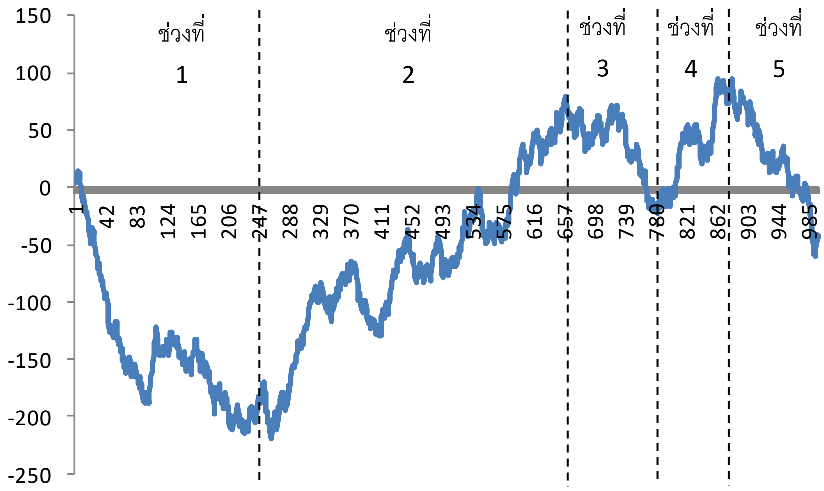
ส่วนค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ แนวโน้มแบบสุ่ม (μ_t) แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$E(\mu_t) = 0 \tag{5.12}$$

$$Var(\mu_t) = t\sigma_v^2 \tag{5.13}$$[2]

จะเห็นว่า ความแปรปรวนของ แนวโน้มแบบสุ่ม เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป ดังนั้น เรากล่าวได้ว่า μ_t คือตัวแปรสุ่มที่ไม่มีความนิ่ง

เมื่อเราทำการจำลองค่า μ_t จำนวน 1,000 ค่าขึ้นมาจากสมการ $\mu_t = \mu_{t-1} + v_t$ โดยกำหนดให้ค่า $\mu_0 = 0$ และ v_t เป็นตัวรบกวนขาว การจำลองครั้งแรกแสดงได้ดังรูปที่ 5.3 ซึ่งจะเห็นว่าลักษณะกราฟของ μ_t สามารถแบ่งออกได้เป็น 5 ช่วง



รูปที่ 5.3 แสดงการจำลองการเดินแบบสุ่ม (Random Walk) ครั้งที่ 1

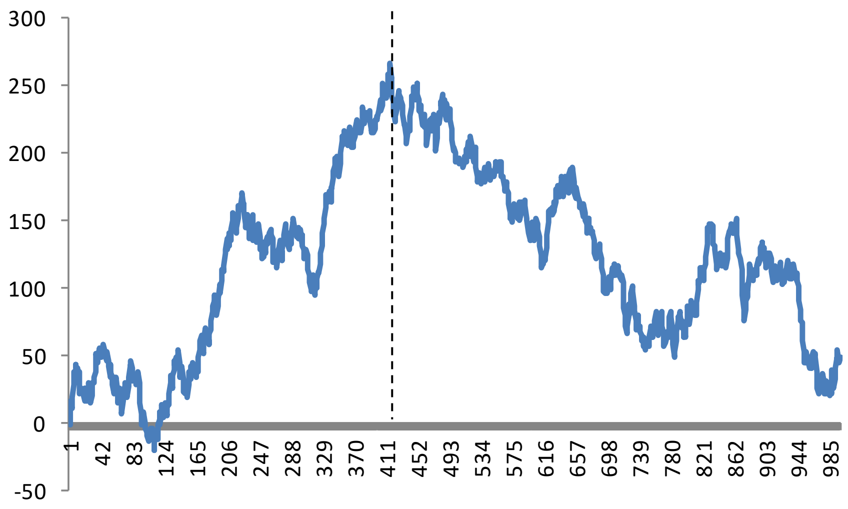
ช่วงที่ 1 ค่าของ μ_t โดยรวมลดลง ซึ่งแสดงถึงเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (v_t) ส่วนมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ทำให้ค่า μ_t ซึ่งเกิดจากการสะสมของค่า v_t ในอดีต ($\sum_{i=1}^{t} v_i$) มีค่าติดลบนั่นเอง และในช่วงที่ 2 ค่าของ μ_t โดยรวมเริ่มเพิ่มขึ้น ซึ่งแสดงถึงเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (v_t) เริ่มมีค่ามากกว่าศูนย์ในช่วง

---

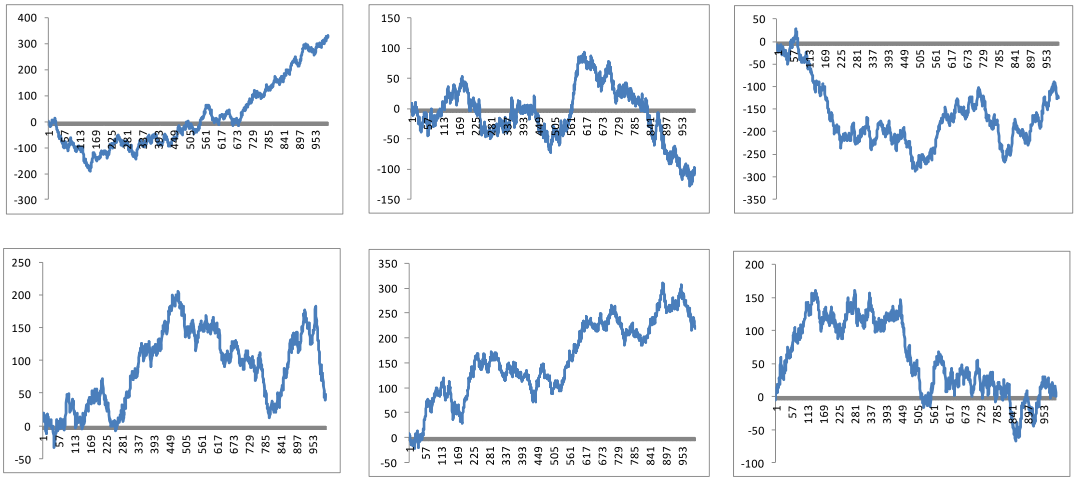
[2] อย่าลืมว่า ตัวแปรสุ่ม v_t เป็นตัวรบกวนขาว ซึ่งต้องเป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ ดังนั้น $Cov(v_i, v_j) = 0, i \neq j$

นี้ ทำให้ค่า μ_t ซึ่งเกิดจากการสะสมของค่า v_t ในอดีต $(\sum_{i=1}^{t} v_i)$ ติดลบน้อยลงเรื่อย ๆ จนมีค่าเป็นบวก ณ $t \approx 600$ สำหรับช่วงอื่น ๆ ก็สามารถพิจารณาได้ในลักษณะเดียวกันนี้

และเมื่อทำการจำลองค่าครั้งที่ 2 (เนื่องจาก v_t คือตัวแปรสุ่ม ดังนั้น ในการจำลองแต่ละครั้งจะได้ค่าไม่เท่ากัน) แสดงได้ดังรูปที่ 5.4 จะได้ลักษณะกราฟของ μ_t สามารถแบ่งกว้าง ๆ ออกได้เป็น 2 ช่วง ก็คือ ช่วงที่ 1 ค่า μ_t โดยรวมเพิ่มขึ้น ซึ่งแสดงถึงเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (v_t) โดยรวมมากกว่าศูนย์ ทำให้ค่า μ_t ซึ่งเกิดจากการสะสมของค่า v_t ในอดีต $(\sum_{i=1}^{t} v_i)$ มีค่าเป็นบวกมากขึ้นเรื่อย ๆ แต่พอถึงช่วงที่ 2 ค่า μ_t โดยรวมเริ่มลดลง ซึ่งแสดงถึงเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (v_t) เริ่มมีค่าน้อยกว่าศูนย์ในช่วงนี้ อันทำให้ค่า μ_t ซึ่งเกิดจากการสะสมของค่า v_t ในอดีต $(\sum_{i=1}^{t} v_i)$ เริ่มเป็นบวกน้อยลง และหากเราทำการจำลองต่อไปอีก 6 ครั้ง จะได้ลักษณะของค่า μ_t ที่แตกต่างกันออกไปดังสรุปในรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.4 แสดงการจำลองการเดินแบบสุ่ม (Random Walk) ครั้งที่ 2



รูปที่ 5.5 แสดงการจำลองการเดินแบบสุ่ม (Random Walk) อีก 6 ครั้งถัดไป

จากรูปที่ 5.5 จะเห็นว่า หากตัวแปรสุ่ม v_t ส่วนใหญ่มีค่าเป็นบวก จะทำให้ลักษณะของค่า μ_t มีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ได้เช่นกัน แม้ว่าจะไม่มีตัวแนวโน้มที่กำหนดได้อยู่ใน μ_t ก็ตาม และเมื่อเราแทนค่าสมการที่ (5.11) ลงใน (5.6) เราจะสามารถเขียนอนุกรมเวลา X_t เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \sum_{i=1}^{t} v_i + \varepsilon_t \tag{5.14}$$

ε_t คือตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคงที่ สมการที่ (5.14) แสดงถึงอนุกรมเวลา X_t มีแนวโน้มสุ่มเป็นตัวประกอบส่วนหนึ่ง ดังนั้น เมื่อเราวาดกราฟอนุกรมเวลา X_t จะมีลักษณะเดียวกับการเดินแบบสุ่ม ซึ่งจะเป็นอนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง

(2) แนวโน้มที่เป็นแบบสุ่มที่มีค่าคงที่

แบบจำลองแนวโน้มแบบสุ่มที่มีค่าคงที่ จะเขียนได้ดังนี้

$$\mu_t - \mu_{t-1} = \varphi_0 + v_t \tag{5.15}$$

สมการที่ (5.15) เขียนได้อีกอย่างคือ

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \varphi_0 + v_t \tag{5.16}$$

เราอาจเรียกแนวโน้มแบบสุ่มตามสมการที่ (5.15) หรือ (5.16) ว่า การเดินแบบสุ่มที่มีแนวโน้ม (Random Walks with Drift) ก็ได้ ซึ่งแสดงถึงค่า μ_t จะมีแนวโน้มเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ดังแสดงได้ดังนี้

จากสมการที่ (5.16) ถ้ากำหนดให้ $\mu_0 = 0$

ณ $t = 1$ จะได้ $\mu_1 = \mu_0 + \varphi_0 + v_1 = \varphi_0 + v_1$

ณ $t = 2$ จะได้ $\mu_2 = \mu_1 + \varphi_0 + v_2 = 2\varphi_0 + v_1 + v_2$

ณ $t = 3$ จะได้ $\mu_3 = \mu_2 + \varphi_0 + v_3 = 3\varphi_0 + v_1 + v_2 + v_3$

:

ณ $t = T$ จะได้ $\mu_T = \mu_{T-1} + \varphi_0 + v_T = T\varphi_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_T$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\mu_t = \varphi_0 t + \sum_{i=1}^{t} v_i \qquad (5.17)$$

จากสมการที่ (5.17) เรากล่าวได้ว่า แนวโน้มแบบสุ่ม (μ_t) เกิดจากการสะสมของค่า v_t ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน ($\sum_{i=1}^{t} v_i$) และการสะสมของค่า φ_0 ตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบันเช่นกัน ($\varphi_0 + \varphi_0 + \ldots + \varphi_0 = \varphi_0 t$) ส่วนค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ แนวโน้มแบบสุ่ม (μ_t) แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\mathrm{E}(\mu_t) = \varphi_0 t \qquad (5.18)$$

$$\mathrm{Var}(\mu_t) = t\sigma_v^2 \qquad (5.19)$$ [3]

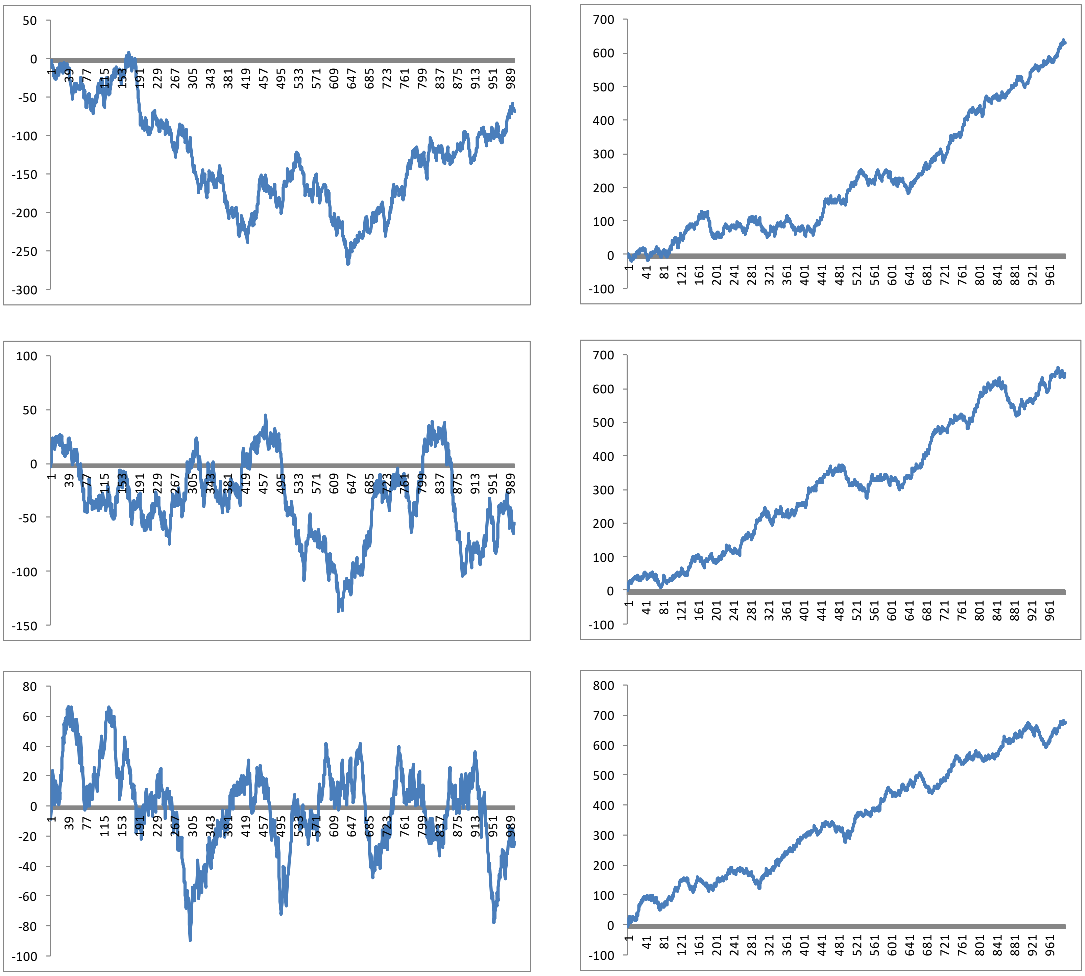
จะเห็นว่า ทั้งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของแนวโน้มแบบสุ่มเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป ดังนั้นเรากล่าวได้ว่า μ_t คือตัวแปรสุ่มที่ไม่มีความนิ่ง

เมื่อพิจารณาสมการที่ (5.18) จะพบว่าค่าเฉลี่ยแนวโน้มแบบสุ่ม**จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ** ในอัตราที่คงที่เท่ากับ φ_0 เมื่อเราทำการจำลองค่า μ_t จำนวน 1,000 ค่า ขึ้นมาจากสมการ $\mu_t = \mu_{t-1} + v_t$ และจากสมการ $\mu_t = \mu_{t-1} + \varphi_0 + v_t$ โดยกำหนดให้ค่า $\mu_0 = 0$, $\varphi_0 = 0.7$ และ v_t เป็นตัวรบกวนขาว

[3] อย่าลืมว่า ตัวแปรสุ่ม v_t เป็นตัวรบกวนขาว ซึ่งต้องเป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ ดังนั้น $\mathrm{Cov}(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$

โดยทำทั้งหมด 10 ครั้ง แล้วนำมาเปรียบเทียบกันแสดงได้ดังรูปที่ 5.6 โดยรูปฝั่งซ้ายจะเป็นรูปของการเดินแบบสุ่ม ฝั่งขวาจะรูปของการเดินแบบสุ่มที่มีแนวโน้ม

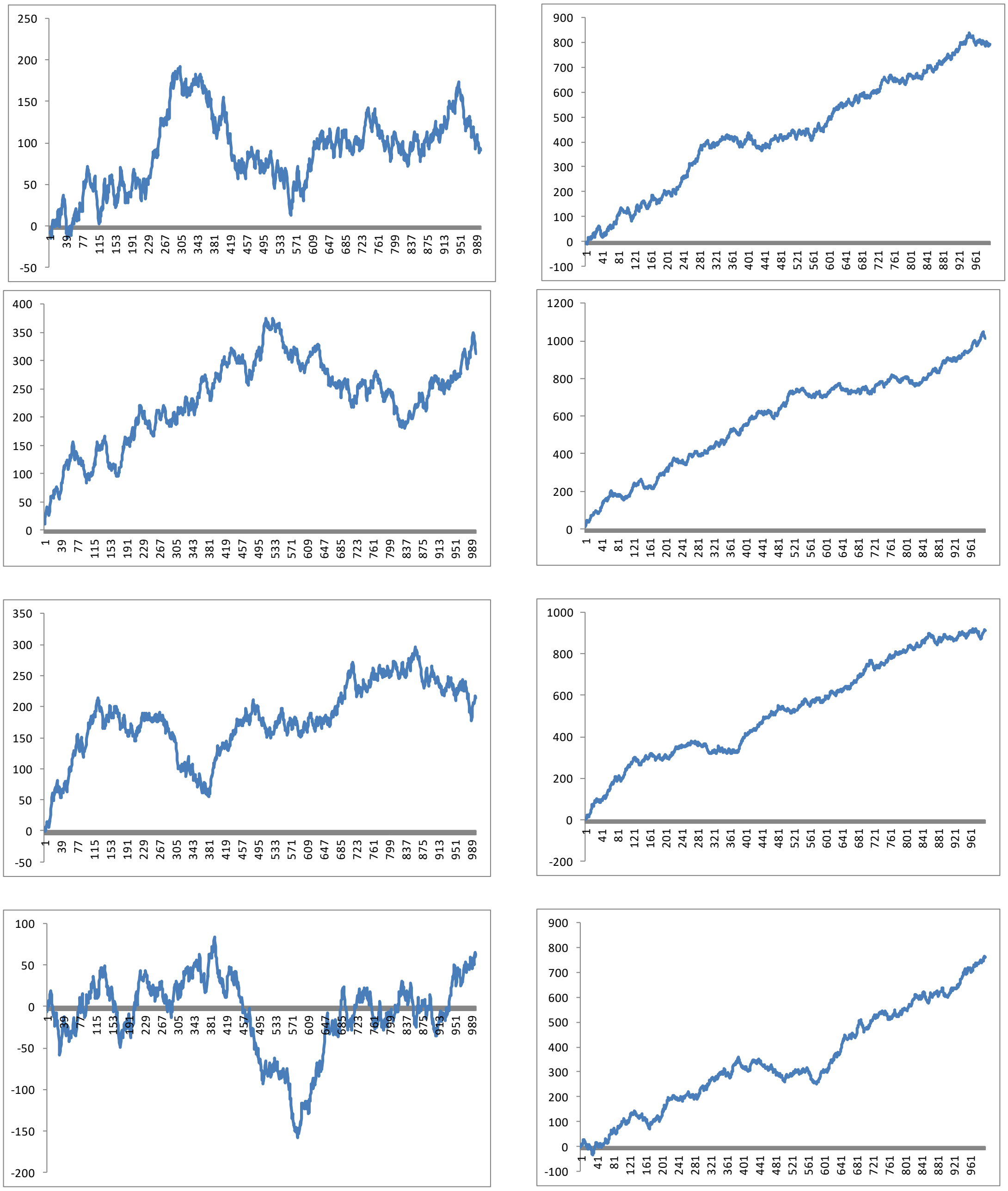
$\mu_t = \mu_{t-1} + v_t$ $\mu_t = \mu_{t-1} + 0.7 + v_t$



ที่มา : จากการคำนวณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป

รูปที่ 5.6 แสดงการจำลองค่าจำนวน 1,000 ข้อมูลของแบบจำลอง (ก) $\mu_t = \mu_{t-1} + v_t$ และ (ข) $\mu_t = \mu_{t-1} + 0.7 + v_t$ เมื่อกำหนดให้ $\mu_0 = 0$ จำนวน 10 ครั้ง

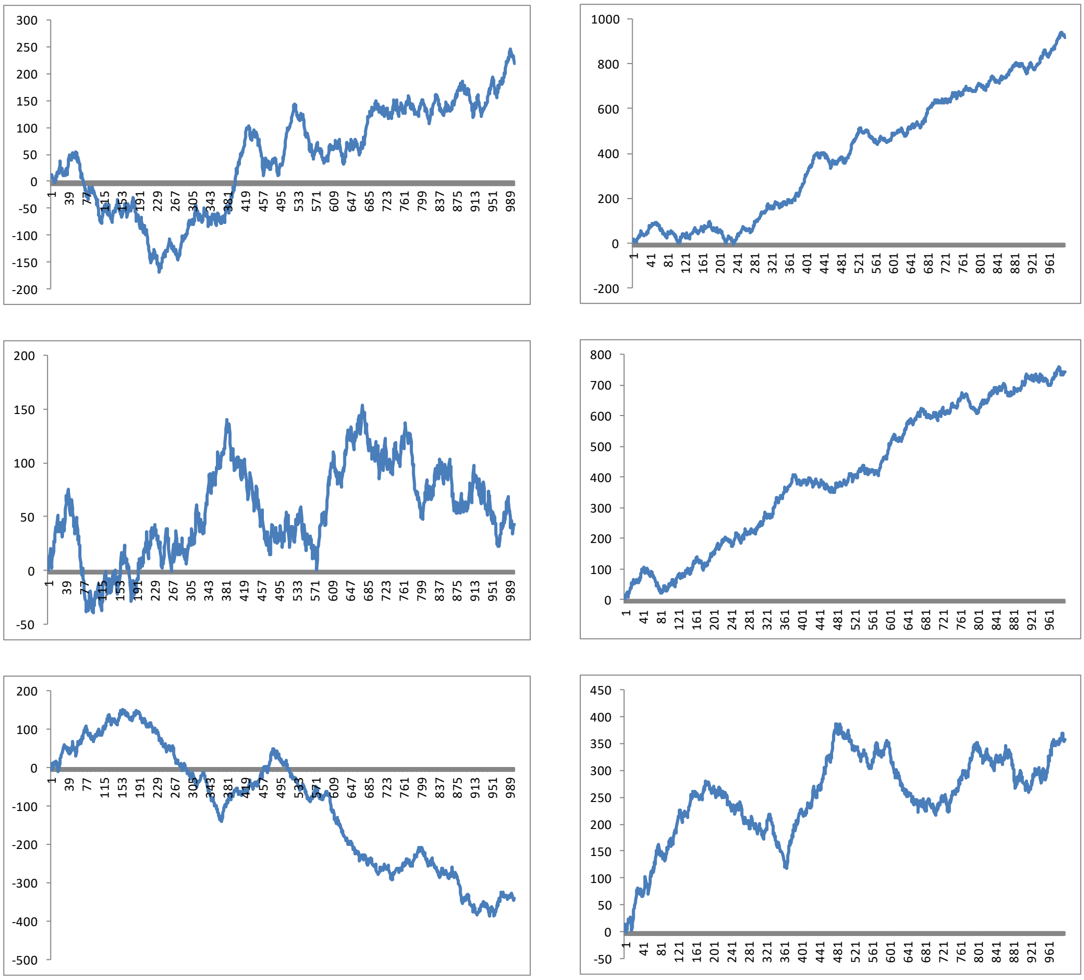
$\mu_t = \mu_{t-1} + v_t$ $\qquad$ $\mu_t = \mu_{t-1} + 0.7 + v_t$



ที่มา : จากการคำนวณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป

รูปที่ 5.6 (ต่อ)

$\mu_t = \mu_{t-1} + v_t$ $\qquad\qquad$ $\mu_t = \mu_{t-1} + 0.7 + v_t$



ที่มา : จากการคำนวณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป

รูปที่ 5.6 (ต่อ)

จากการจำลองค่า μ_t ดังแสดงในรูปที่ 5.6 จะสังเกตเห็นว่า ค่า μ_t ที่เกิดจาก $\mu_t = \mu_{t-1} + 0.7 + v_t$ ที่มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เสมอ ทั้งนี้เนื่องจากค่าเฉลี่ยของ μ_t ในกรณีนี้คือ $E(\mu_t) = 0.7t$ ส่วนค่า μ_t ที่เกิดจาก $\mu_t = \mu_{t-1} + v_t$ อาจมีลักษณะขึ้น ๆ ลง ๆ หรือมีลักษณะที่เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ หรือลดลงเรื่อย ๆ ก็ได้ กล่าวโดยสรุป อนุกรมเวลาที่มีการเดินแบบสุ่ม (Random Walk) อาจมีลักษณะขึ้น ๆ ลง ๆ หรือมีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นหรือมีแนวโน้มที่ลดลงก็ได้ ส่วนอนุกรมเวลาที่มีการเดินแบบสุ่มที่มีแนวโน้ม (Random Walk with Drift) มักจะมีลักษณะที่มีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

จากสมการที่ (5.6) เมื่อย้อนกลับไป 1 ช่วงเวลา เราจะได้

$$X_{t-1} = \mu_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$$

นำสมการข้างต้นไปหักออกจากสมการที่ (5.6) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= (\mu_t - \mu_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \\ &= \varphi_0 + v_t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \\ &= \varphi_0 + a_t \end{aligned} \tag{5.20}$$

โดยที่ a_t คือผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน v_t, ε_t และ ε_{t-1} หรือเขียนได้ว่า $a_t = v_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ หรือกล่าวได้ว่า a_t ถือเป็นตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการที่ (5.20) นั่นเอง ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนคือ σ_a^2

จากสมการที่ (5.20) จะเห็นว่า หลังจากการทำผลต่างลำดับที่หนึ่งกับอนุกรมเวลา X_t (หรือเขียนแทนด้วย ΔX_t) จะพบว่า แนวโน้มแบบสุ่มถูกกำจัดให้หายไป เหลือเพียงแต่ส่วนของค่าคงที่ (φ_0) และตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน a_t เท่านั้น ส่วนค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ ΔX_t เป็นค่าคงที่ทั้งคู่ ซึ่งก็คือ φ_0 และ σ_a^2 ส่วนค่าความแปรปรวนร่วมของ ΔX_{t_1} และ ΔX_{t_2} ขึ้นอยู่กับช่วงห่างของเวลา[4] **ดังนั้น เรากล่าวได้ว่า ΔX_t เป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง**

5.1.3 อนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปการเดินแบบสุ่ม (Random Walk)

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้รู้จักแนวโน้มแบบสุ่ม ซึ่งถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบการเดินแบบสุ่ม ดังนั้น ถ้าอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปการเดินแบบสุ่ม จะหมายถึง อนุกรมเวลา X_t ขึ้นอยู่กับค่าของมันในช่วงเวลาที่ผ่านมา ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.21}$$

โดยที่ ε_t คือตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคงที่ จะเห็นว่าสมการที่ (5.21) ก็คือแบบจำลอง AR(1) โดยที่ ค่าสัมประสิทธิ์ของ X_{t-1} มีค่าเป็น 1 นั่นเอง และเราสามารถเขียนสมการที่ (5.21) เขียนได้เป็น

---

[4] ใช้วิธีพิสูจน์ เหมือนกับเป็นกรณี Moving Average

$$X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t \tag{5.22}$$

หรือ
$$\alpha(L)\, X_{t-1} = \varepsilon_t \tag{5.23}$$

โดยที่ $\alpha(L) = 1 - L$ และค่าสัมบูรณ์ของรากของสมการ $\alpha(L) = 0$ หาได้จาก $1 - L = 0$ จะได้ $|L| = 1$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1[5] ดังนั้น เรากล่าวได้ว่าอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่ง

ทำนองเดียวกัน กรณีแนวโน้มแบบสุ่มที่มีรูปแบบเป็นการเดินแบบสุ่ม (Random Walk) เมื่อกำหนดให้ $X_0 = 0$ อนุกรมเวลา X_t ที่แสดงดังสมการที่ (5.21) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \tag{5.24}$$

จากสมการที่ (5.24) ทำให้เราทราบว่า อนุกรมเวลา X_t มีค่าเฉลี่ยคงที่คือ $E(X_t) = 0$ แต่ความแปรปรวนจะไม่คงที่ เนื่องจาก $\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$ ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่า อนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบการเดินแบบสุ่มจะไม่มีความนิ่ง

และถ้าอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปการเดินแบบสุ่มแบบมีแนวโน้ม (Random Walk with Drift) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = X_{t-1} + \alpha_0 + \varepsilon_t \tag{5.25}$$

ทำนองเดียวกัน เมื่อกำหนดให้ $X_0 = 0$ อนุกรมเวลา X_t ที่แสดงดังสมการ (5.25) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \tag{5.26}$$

จากสมการที่ (5.26) จะได้ว่า อนุกรมเวลา X_t มีค่าเฉลี่ยไม่คงที่ คือ $E(X_t) = \alpha_0 t$ และความแปรปรวนก็ไม่คงที่ด้วยคือ $\mathrm{Var}(X_t) = t\sigma^2$ ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่า อนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ใน

---

[5] ค่าสัมบูรณ์ของราก (หรือคำตอบ) ของสมการ $\alpha(L) = 0$ **ต้องมากกว่า 1** เราจึงสรุปได้ว่าอนุกรมเวลา X_t ในรูป Autoregressive มีความนิ่ง

รูปแบบการเดินแบบสุ่มแบบมีแนวโน้มจะไม่มีความนิ่ง จะเห็นว่าค่าคงที่ α_0 แท้จริงแสดงถึงค่าแนวโน้มที่มีในค่าเฉลี่ย $E(X_t)$ นั่นเอง เราจึงเรียกว่า "การเดินแบบสุ่มแบบ**มีแนวโน้ม**" นั่นเอง

เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$ สามารถแปลความหมายได้ว่าเป็นแนวโน้มแบบสุ่ม (Stochastic Trend) ได้เช่นกัน นั่นคือ อนุกรมเวลาที่อยู่ในรูปแบบการเดินแบบสุ่ม และที่อยู่ในรูปแบบการเดินแบบสุ่มที่มีแนวโน้ม จะประกอบด้วยแนวโน้มแบบสุ่มเสมอ นอกจากนี้ เมื่อเราพิจารณาผลต่างลำดับที่ 1 ของอนุกรมเวลา X_t ทั้ง 2 รูปแบบดังกล่าว จะสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (5.27) และ (5.28) ตามลำดับได้ดังนี้

$$\Delta X_t = \varepsilon_t \qquad (5.27)$$ [6]

$$\Delta X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \qquad (5.28)$$ [7]

จากการสังเกต สมการที่ (5.27) และ (5.28) แสดงถึงค่าของอนุกรมเวลา X_t ที่เปลี่ยนไปในแต่ละช่วงเวลาเป็นแบบสุ่ม โดยอาจเปลี่ยนไปแบบมากขึ้นหรือลดลงสลับกันไปก็ได้ขึ้นอยู่กับค่าของ ε_t หรือกล่าวอีกอย่างคือหลังจากการทำผลต่างลำดับที่หนึ่งของอนุกรมเวลาที่มีรูปแบบการเดินแบบสุ่ม ไม่ว่าจะมีแนวโน้มหรือไม่มีก็ตาม จะได้อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง

5.1.4 อนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปผลรวมลำดับที่ d (Integrated of order d)

พิจารณาอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบการเดินแบบสุ่มแบบมีแนวโน้ม : $X_t = X_{t-1} + \alpha_0 + \varepsilon_t$ ถ้าทำผลต่างลำดับที่ 1 กับ X_t (ΔX_t) จะทำให้ได้อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\Delta X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \qquad \text{หรือ} \qquad (1-L)X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$$

ในกรณีนี้ เราจะกล่าวว่า X_t อยู่ในรูปผลรวมลำดับที่ 1 หรือเขียนได้ว่า $X_t \sim I(1)$ ทั้งนี้เป็นเพราะเราสามารถเขียน X_t ให้อยู่ในรูปผลรวมของอนุกรมเวลาที่มีความนิ่งดังแสดงต่อไปนี้ (สมมุติให้ $X_0 = 0$)

---

[6] ค่าเฉลี่ยคงที่คือ $E(X_t) = 0$ และความแปรปรวนก็คงที่ด้วยคือ $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2$ และความแปรปรวนร่วมคือ $Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = |t_1 - t_2|\sigma^2$

[7] ค่าเฉลี่ยคงที่คือ $E(X_t) = \alpha_0$ และความแปรปรวนก็คงที่ด้วยคือ $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2$ และความแปรปรวนร่วมคือ $Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = |t_1 - t_2|\sigma^2$

$$X_t = \alpha_0 t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

โดยค่าคงที่ α_0 จะกลายเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้ t (อย่าลืมว่า ε_t คือตัวรบกวนขาว และจากคุณสมบัติของตัวรบกวนขาว เราจึงกล่าวได้ว่า ε_t ถือเป็นตัวแปรสุ่มที่มีความนิ่งนั่นเอง)

ทำนองเดียวกัน หากเราพบว่าอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่ง แต่หากเราทำผลต่างลำดับที่ 2 กับอนุกรมเวลา X_t ($\Delta^2 X_t$)แล้ว[8] พบว่าอนุกรมเวลาที่ได้มีความนิ่ง ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\Delta^2 X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t \qquad \text{หรือ} \qquad (1-L)^2 X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$$

เราจะเรียกว่า X_t อยู่ในรูปผลรวมลำดับที่ 2 หรือเขียนได้ว่า $X_t \sim I(2)$ ทั้งนี้เป็นเพราะเราสามารถเขียน X_t ให้อยู่ในรูปผลรวมจำนวนสองครั้งซ้อนกันของอนุกรมเวลาที่มีความนิ่งดังแสดงต่อไปนี้

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_1 t^2 + \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i$$

โดยค่าคงที่ α_0 จะเกี่ยวข้องกับค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้ (φ_1, φ_2)[9]

ดังนั้น เรากล่าวในรูปทั่วไปได้ว่า หากอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่ง และการทำผลต่างลำดับที่ d กับอนุกรมเวลา X_t จะทำให้ได้อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง ซึ่งแสดงได้จาก

$$\Delta^d X_t = \varepsilon_t \qquad \text{หรือ} \qquad (1-L)^d X_t = \varepsilon_t$$

แล้วเราจะเรียกว่า X_t อยู่ในรูปผลรวมลำดับที่ d หรือเขียนได้ว่า $X_t \sim I(d)$ ทั้งนี้เป็นเพราะเราสามารถเขียน X_t ให้อยู่ในรูปผลรวมจำนวน d ครั้งซ้อนกันของอนุกรมเวลาที่มีความนิ่งนั่นเอง

---

[8] ผลต่างลำดับที่ 2 ของ X_t เขียนแทนด้วย $\Delta^2 X_t = \Delta(\Delta X_t) = \Delta(X_t - X_{t-1}) = \Delta X_t - \Delta X_{t-1}$

$= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

หรืออาจหาจากการใช้ตัวดำเนินการล่าช้า (Lag Operator) ดังนี้

ให้ $\Delta = 1-L$ ดังนั้น $\Delta^2 X_t = (1-L)^2 X_t = (1-2L+L^2) X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$

[9] ดูภาคผนวก 5ข

5.2 ค่า TAC และ TPAC ของอนุกรมเวลาที่มีการเดินแบบสุ่ม

จากบทที่ 3 เราทราบแล้วว่า อนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูป AR(1): $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ มีค่า TAC และ TPAC ดังนี้

$$\rho_k = \alpha_1^k$$

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & \text{เมื่อ } k = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } k \geq 2 \end{cases}$$

และเมื่อเราพิจารณาจากสมการที่ (5.21) และ (5.25) แสดงอนุกรมเวลา X_t มีการเดินแบบสุ่มแบบไม่มีแนวโน้มและแบบมีแนวโน้มตามลำดับ โดยแท้จริงแล้ว แบบจำลองทั้ง 2 แบบ ก็คือรูปแบบของ AR(1) โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ของ X_{t-1} มีค่าเป็น 1 นั่นเอง ($\alpha_1 = 1$) ดังนั้น ค่า TAC และ TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่มีรูปแบบการเดินแบบสุ่ม (ไม่ว่าจะมีแนวโน้มหรือไม่มีแนวโน้มก็ตาม) จะเป็นดังนี้

$$\rho_k = 1$$

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } k = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } k \geq 2 \end{cases}$$

นั่นคือค่า TAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่มีการเดินแบบสุ่ม จะมีค่าเท่ากับ 1 ไม่ว่า k จะมีค่าเท่าใดก็ตาม ส่วนค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่มีการเดินแบบสุ่ม จะมีค่าเท่ากับ 1 สำหรับ 1 ช่วงเวลาที่ผ่านมาเท่านั้น ($k = 1$) จากนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ สมมุติอนุกรมเวลาหนึ่งมีรูปแบบเป็นการเดินแบบสุ่มแล้ว ค่า SAC และ SPAC ของอนุกรมเวลาดังกล่าวจะมีลักษณะดังรูปที่ 5.7

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.999	0.999	7053.7	0.000
		2	0.999	0.024	14098.	0.000
		3	0.998	0.010	21135.	0.000
		4	0.997	-0.010	28162.	0.000
		5	0.997	0.010	35181.	0.000
		6	0.996	-0.004	42191.	0.000
		7	0.995	-0.005	49192.	0.000
		8	0.994	-0.004	56184.	0.000
		9	0.994	-0.001	63168.	0.000
		10	0.993	0.009	70143.	0.000
		11	0.992	-0.003	77109.	0.000
		12	0.992	-0.010	84066.	0.000
		13	0.991	-0.003	91014.	0.000
		14	0.990	0.007	97954.	0.000
		15	0.990	0.010	104884	0.000
		16	0.989	-0.010	111807	0.000
		17	0.988	-0.006	118720	0.000
		18	0.987	-0.007	125624	0.000
		19	0.987	0.013	132519	0.000
		20	0.986	0.009	139406	0.000
		21	0.985	0.007	146285	0.000
		22	0.985	-0.006	153155	0.000
		23	0.984	-0.014	160016	0.000
		24	0.983	-0.020	166868	0.000
		25	0.983	-0.000	173710	0.000
		26	0.982	0.004	180544	0.000
		27	0.981	-0.014	187369	0.000
		28	0.980	0.015	194184	0.000
		29	0.980	-0.014	200990	0.000
		30	0.979	0.012	207787	0.000
		31	0.978	-0.012	214575	0.000
		32	0.977	-0.007	221353	0.000
		33	0.977	0.000	228122	0.000
		34	0.976	-0.014	234882	0.000
		35	0.975	-0.017	241632	0.000
		36	0.974	-0.008	248371	0.000

รูปที่ 5.7 แสดงค่า SAC และ SPAC ของอนุกรมเวลาที่มีการเดินแบบสุ่ม

5.3 แบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)

เราทราบจากบทก่อนหน้านี้แล้วว่า แบบจำลองของ ARMA(p, q) จะต้องนำไปใช้กับอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง (Stationary) เท่านั้น ดังนั้น หากเราพบว่าอนุกรมเวลาไม่มีความนิ่ง (Nonstationary) เราจะต้องแปลงอนุกรมเวลานั้นให้มีความนิ่งเสียก่อน จึงจะนำมาใช้กับแบบจำลองของ Box-Jenkins ได้ และวิธีการหนึ่งที่มักถูกนำมาใช้แปลงอนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่งให้เป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่งก็คือ วิธีการหาผลต่าง (differencing) ดังเช่นที่ได้อธิบายไว้ก่อนหน้านี้

ถ้ากำหนดให้อนุกรมเวลา $X_t \sim \mathrm{I}(d)$ ดังนั้น อนุกรมเวลา $\Delta^d X_t$ ซึ่งเป็นอนุกรมที่มีความนิ่งแล้ว จะสามารถนำไปใช้กับแบบจำลอง ARMA(p,q) ได้ และจะเรียกว่าแบบจำลอง Autoregressive Integrated Moving Average ลำดับที่ (p, d, q) หรือเขียนย่อ ๆ ว่า ARIMA(p, d, q) ซึ่งมีรูปทั่วไปเขียนได้ดังนี้

$$\alpha(L)\Delta^d X_t = \theta_0 + \beta(L)\varepsilon_t \tag{5.29}$$

โดยที่ $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p$

$\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_q L^q$

ε_t คือตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และความแปรปรวนคงที่ σ^2

θ_0 คือค่าพารามิเตอร์ ซึ่งจะแสดงถึงค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้ เมื่อ $d > 0$[10] ดังนั้น เราจึงควรให้ $\theta_0 \neq 0$ หากอนุกรมเวลาที่รวบรวมมาแสดงถึงการมีแนวโน้มกำหนดได้อย่างชัดเจน

เพื่อให้เข้าใจง่าย พิจารณาแบบจำลอง ARIMA(0,1,1) หรือ IMA(1,1) โดยที่ $\theta_0 = 0$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\Delta X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{5.30}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \tag{5.31}$$

---

[10] ถ้า $d = 0$ แล้ว ค่า $\theta_0 = \mu\,(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_p)$ นั่นเอง

จะเห็นว่า เมื่อ $\beta_1 = 0$ แล้วอนุกรมเวลา X_t ที่แสดงด้วยสมการที่ (5.31) ก็คือรูปแบบการเดินแบบสุ่มนั่นเอง ดังนั้น หากค่า SAC ของอนุกรมเวลา X_t ไม่ลดลงเมื่อเวลาผ่านไป ในขณะที่ค่า SAC และ SPAC ของ ΔX_t เป็นไปตามลักษณะของ MA(1) เราจึงควรเลือกใช้แบบจำลอง IMA(1,1) แต่อย่าลืมว่าเราต้องตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองตามวิธีเดียวกับที่ได้ศึกษามาในบทก่อนหน้านี้ด้วย

5.4 การทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลา (Stationary Test of Time Series)

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ เราทราบแล้วว่า ถ้า $X_t \sim I(d)$ แล้ว $\Delta^d X_t$ จะเป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง (โดยที่ $d \geq 1$) ในทางปฏิบัติ มีนักสถิติ 2 ท่าน คือ Dickey และ Fuller ได้เสนอวิธีการทางสถิติที่ใช้ทดสอบอนุกรมเวลาว่ามีความนิ่งหรือไม่ ซึ่งเราสามารถนำใช้การทดสอบว่า ลำดับที่ควรทำผลต่าง (d) ควรเป็นที่เท่าใดจึงจะได้อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง รายละเอียดของการทดสอบความนิ่ง อธิบายได้ดังต่อไปนี้

พิจารณาอนุกรมเวลา AR(1) ดังนี้

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{กำหนดให้ } X_0 = 0 \qquad (5.32)$$

ณ $t = 1$ จะได้ $\quad X_1 = \rho X_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon_1$

ณ $t = 2$ จะได้ $\quad X_2 = \rho X_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_2 + \rho\varepsilon_1$

ณ $t = 3$ จะได้ $\quad X_3 = \rho X_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_3 + \rho\varepsilon_2 + \rho^2\varepsilon_1$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เราจะเขียนในรูปทั่วไปได้ว่า

$$X_t = \varepsilon_t + \rho^1\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho^{t-1}\varepsilon_1$$

หรือ $$X_t = \sum_{i=0}^{t-1} \rho^i \varepsilon_{t-i} \qquad (5.33)$$

เมื่อ $\rho = 1$ แล้วสมการที่ (5.33) จะแสดงถึงอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบการเดินแบบสุ่ม (Random Walk) นั่นเอง ในทางปฏิบัติ มักพบได้ว่าอนุกรมเวลาทางเศรษฐศาสตร์ ทางธุรกิจ และ

ทางการเงิน มีโอกาสที่จะเป็นในลักษณะนี้ และ ถ้า $0 < \rho < 1$ แล้วสมการที่ (5.33) จะแสดงถึงเหตุการณ์ไม่คาดฝันในอดีต ยิ่งผ่านมานานเท่าไหร่ จะยิ่งส่งผลกระทบต่อ X_t ในปัจจุบันน้อยลงเท่านั้น ซึ่งอนุกรมเวลาทางเศรษฐศาสตร์ ทางธุรกิจ และทางการเงินก็มีโอกาสที่จะเป็นลักษณะนี้ด้วย

แต่ถ้า $\rho > 1$ สมการที่ (5.33) จะแสดงถึงเหตุการณ์ไม่คาดฝันในอดีตยิ่งผ่านมานานเท่าใดจะยิ่งส่งผลกระทบต่อ X_t ในปัจจุบันมากขึ้นเท่านั้น ซึ่งในโลกแห่งความเป็นจริงแล้ว ไม่มีตัวแปรทางเศรษฐศาสตร์ ทางธุรกิจ หรือทางการเงินใด ๆ ที่มีลักษณะนี้ เช่นเดียวกับกรณีที่ $-1 < \rho < 0$ สมการที่ (5.33) จะแสดงถึงค่าของตัวแปร X_t จะเกิดจากการสะสมค่าของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในอดีตแบบเป็นขึ้น ๆ ลง ๆ (เป็นบวกบ้าง เป็นลบบาง) ขึ้นอยู่กับช่วงเวลาที่ผ่านมาว่าเป็นเลขคู่หรือเลขคี่และจะส่งผลกระทบต่อ X_t น้อยลงเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป ในขณะที่หาก $\rho < -1$ จะมีลักษณะขึ้น ๆ ลง ๆ เช่นกัน (เป็นบวกบ้าง เป็นลบบาง) แต่จะส่งผลกระทบต่อ X_t รุนแรงขึ้น เรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป ซึ่งในโลกแห่งความเป็นจริงแล้ว ตัวแปรทางเศรษฐศาสตร์ ทางธุรกิจ หรือทางการเงิน จะไม่มีลักษณะเช่นนี้

กล่าวโดยสรุปก็คือ อนุกรมเวลาที่ใช้รูปแบบ AR(1) จะไม่มีความนิ่งเมื่อ $|\rho| \geq 1$ และมีความนิ่งเมื่อ $|\rho| < 1$ และในทางปฏิบัติเรามักจะพบใน 2 กรณีเท่านั้น คือ $\rho = 1$ หรือ $0 < \rho < 1$

ดังนั้น นักสถิติ 2 ท่าน คือ Dickey and Fuller (1979)[11] จึงเสนอวิธีการทดสอบว่าอนุกรมเวลามีแนวโน้มแบบสุ่มหรือไม่ด้วยการทดสอบสมมุติฐานดังนี้

H_0: $\rho = 1$ (หมายถึง อนุกรมเวลาที่พิจารณาอยู่มีแนวโน้มแบบสุ่ม)

H_1: $|\rho| < 1$ (หมายถึง อนุกรมเวลาที่พิจารณาอยู่ไม่มีแนวโน้มแบบสุ่ม)

ถ้าเราปฏิเสธสมมุติฐานหลัก แล้วค่า ρ ในสมมุติฐานรองจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 $(0 < \rho < 1)$ ดังนั้น สมมุติฐานรอง อาจเขียนสั้น ๆ ว่า $H_1: \rho < 1$ ก็ได้ ส่วนการทดสอบสมมุติฐานข้างต้นสามารถทำได้ด้วยการใช้ค่าสถิติ t^* ดังสูตรต่อไปนี้

$$t^* = \frac{\hat{\rho} - 1}{se(\hat{\rho})}$$

[11] Dickey, D. A., and W. A. Fuller, “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root,” *Journal of American Statistical Association* 74 (1979): 427–431.

พิจารณา เมื่อแทนค่า ρ ภายใต้สมมุติฐานหลัก (ซึ่งก็คือ $\rho = 1$) จะทำให้สมการ AR(1) เป็นดังนี้

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{หรือ} \quad \alpha(L)X_t = \varepsilon_t$$

โดยที่ $\alpha(L) = 1 - L$ ซึ่งจะได้ว่ารากของสมการ $\alpha(L) = 0$ ก็คือ 1 จึงทำให้เราอาจเรียกการทดสอบดังกล่าวว่า การทดสอบ Unit Root นั่นเอง

อย่างไรก็ดี นักสถิติ Dickey และ Fuller พบว่า ถ้าค่าพารามิเตอร์ภายใต้สมมุติฐานหลักคือ $\rho = 1$ เป็นจริง [12]แล้วตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ($\hat{\rho}$) จะไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ[13] แม้ว่าจะมีตัวอย่างขนาดใหญ่ก็ตาม นั่นคือการทดสอบสมมุติฐานจะใช้ค่าวิกฤติจากตารางการแจกแจงปกติ ตารางการแจกแจงแบบ t หรือตารางการแจกแจงแบบ F ไม่ได้ ดังนั้น นักสถิติทั้ง 2 ท่านนี้จึงได้คำนวณค่าวิกฤติขึ้นมาใหม่ โดยแบ่งการคำนวณค่าวิกฤตตามสมการที่ใช้ทดสอบ Unit Root ดังนี้

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.34}$$

$$X_t = \beta_0 + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.35}$$

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.36}$$

จะเห็นว่า สมการที่ (5.36) มีตัวแปรแนวโน้มกำหนดได้และค่าคงที่มาร่วมในการทดสอบ Unit Root ด้วย ส่วนสมการที่ (5.35) มีเฉพาะค่าคงที่เท่านั้น และสมการที่ (5.34) ไม่มีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มที่กำหนดได้ การที่เราจะเลือกใช้สมการที่ (5.34)–(5.36) อันใดอันหนึ่งในการทดสอบ Unit Root นั้นมีหลักเกณฑ์ดังนี้

เมื่อเราวาดกราฟของอนุกรมเวลาที่ต้องการทดสอบความนิ่ง แล้วพบว่าอนุกรมเวลานั้นเคลื่อนขึ้น ๆ ลง ๆ อยู่รอบ ๆ ศูนย์ เราควรเลือกใช้สมการที่ (5.34) และหากพบว่าอนุกรมไม่มีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงเมื่อเวลาผ่านไป แต่จะเคลื่อนขึ้น ๆ ลง ๆ อยู่รอบ ๆ ค่าคงที่ค่าหนึ่ง เราควรเลือกใช้สมการที่ (5.35) และหากอนุกรมเวลานั้นมีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงเมื่อเวลาผ่านไป เราควรเลือกใช้สมการที่ (5.36)[14]

---

[12] หรือกล่าวว่า อนุกรมเวลา X_t มีแนวโน้มแบบสุ่ม

[13] แต่จะมีการแจกแจงที่เรียกว่า Wiener process หรือ Brownian motion

[14] Hill, R. C., W. E. Griffiths, and G. C. Lim, *Principle of Econometrics*, 3rd edition. (John Wiley&Sons, Inc., 2008), p. 336.

เมื่อเรานำ X_{t-1} ไปหักออกทั้ง 2 ข้างของสมการที่ (5.34), (5.36) และ (5.36) เราจะได้สมการต่อไปนี้

$$\Delta X_t = \gamma X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.37}$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \gamma X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.38}$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.39}$$

โดยที่ $\gamma = \rho - 1$ เราสามารถใช้สมการในการทดสอบว่าอนุกรมเวลา X_t มีความนิ่งหรือไม่ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองต่อไปนี้

H_0: $\gamma = 0$ (ซึ่งเทียบเท่ากับ H_0: $\rho = 1$)

H_1: $\gamma < 0$ (ซึ่งเทียบเท่ากับ H_0: $\rho < 1$)

การใช้รูปแบบสมการที่ (5.37)–(5.39) ในการทดสอบ Unit Root จะทำให้เราคำนวณค่าสถิติ t ได้ง่ายขึ้นดังนี้

$$t^* = \frac{\hat{\gamma}}{se(\hat{\gamma})}$$

จะเห็นว่า การคำนวณค่าสถิติ t^* จะมีสูตรเหมือนกันกรณีที่เรากำลังทดสอบว่าค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยแตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ ซึ่งเรามักคุ้นเคยกับค่า t^* ในลักษณะนี้ จึงทำให้ในทางปฏิบัติเรามักใช้สมการที่ (5.37)–(5.39) ในการทดสอบ Unit Root

5.5 การทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลาด้วยวิธี Augmented Dickey–Fuller (ADF)

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราศึกษาถึงการทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลา ด้วยวิธีการของ Dickey–Fuller ซึ่งวิธีนี้จะต้องใช้ทดสอบกับอนุกรมเวลาที่อยู่ในรูป AR(1) เท่านั้นว่ามีแนวโน้มแบบสุ่มหรือไม่ แต่หากอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ AR(p) วิธีการของ Dickey–Fuller จะต้องมีการปรับปรุงเพิ่มเติม (Augmented) เพื่อให้ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของแบบจำลองที่ใช้ทดสอบ Unit Root มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น สมมุติให้อนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ AR(2) ดังนี้

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \tag{5.40}$$

จากสมการข้างต้น เราจะพิสูจน์ได้ว่า

$$X_t - \alpha_1 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-2} = \varepsilon_t \tag{5.41}$$

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)X_t = \varepsilon_t$$

หรือ $\alpha(L)X_t = \varepsilon_t$

โดยที่ $\alpha(L) = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)$ และจากบทที่ 3 เราทราบแล้วว่า เงื่อนไขที่ทำให้อนุกรม X_t มีความนิ่งคือ “ค่าสัมบูรณ์ของราก(หรือคำตอบ)ของสมการ $\alpha(L) = 0$ **ต้องมากกว่า 1**”

ถ้ากำหนดให้ $(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) = (1 - \pi_1 L)(1 - \pi_2 L)$ ดังนั้น ค่าสมบูรณ์ของรากของสมการ $\alpha(L)=0$ ได้แก่ $\left|\frac{1}{\pi_1}\right|$ และ $\left|\frac{1}{\pi_2}\right|$ เราจึงกล่าวได้ว่า อนุกรมเวลา X_t ซึ่งอยู่ในรูปแบบ AR(2) จะมีความนิ่งก็ต่อเมื่อ $|\pi_1| < 1$ และ $|\pi_2| < 1$

ตัวอย่าง สมมุติให้อนุกรมเวลา Z_t ที่อยู่ในรูป AR(2) ดังนี้

$$Z_t = 1.5 Z_{t-1} - 0.5 Z_{t-2} + \varepsilon_t$$

นั่นคือ $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = -0.5$ จากสมการข้างต้นเขียนได้ดังนี้

$$Z_t - 1.5 Z_{t-1} + 0.5 Z_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$(1 - 1.5L + 0.5L^2)Z_t = \varepsilon_t$$ นั่นคือ $\alpha(L) = 1 - 1.5L + 0.5L^2$

$$(1 - 1L)(1 - 0.5L)Z_t = \varepsilon_t$$

นั่นคือ จะได้ $\pi_1 = 1$ และ $\pi_2 = 0.5$ ดังนั้น $|\pi_1| = 1$ และ $|\pi_2| = 0.5$ เราจึงกล่าวได้ว่า อนุกรมเวลา Z_t ไม่มีความนิ่ง และจากการสังเกตเราพบว่า $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = -0.5$ และ $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 0.5$ นั่นคือ $\pi_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ และ $\pi_2 = -\alpha_2$

และตอนนี้เราจะมาดูว่าการทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลาด้วยวิธี ADF จะเป็นอย่างไร จากสมการที่ (5.40) นำ X_t ไปหักออกทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$X_t - X_{t-1} = (\alpha_1 - 1)X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

นำ $\alpha_2 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการจะได้

$$\Delta X_t = (\alpha_1 - 1)X_{t-1} + (\alpha_2 X_{t-1} - \alpha_2 X_{t-1}) + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\Delta X_t = (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)X_{t-1} - \alpha_2 (X_{t-1} - X_{t-2}) + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)X_{t-1} - \alpha_2 \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

หรือ $$\Delta X_t = (\pi_1 - 1)X_{t-1} - \alpha_2 \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

ถ้ากำหนดให้ $\gamma = \pi_1 - 1$ และ $c_1 = -\alpha_2$ สมการข้างบนจะเขียนได้เป็น

$$\Delta X_t = \gamma X_{t-1} + c_1 \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{5.42}$$

วิธีการทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลาด้วยวิธี ADF จะใช้สมการที่ (5.42) โดยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองดังนี้ H_0: $\gamma = 0$ และ H_1: $\gamma < 0$ ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก นั่นหมายถึงอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่ง[15] และหากปฏิเสธสมมุติฐานหลัก จะหมายถึงอนุกรมเวลา X_t มีความนิ่ง[16]

ทำนองเดียวกับกรณีการทดสอบความนิ่งด้วยวิธี Dickey–Fuller ค่าวิกฤติที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรอง H_0: $\gamma = 0$ และ H_1: $\gamma < 0$ จะแบ่งตามสมการที่ใช้ทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลา X_t (หรือเรียกว่าการทดสอบ Unit Root) ดังแสดงต่อไปนี้

---

[15] หรือเรียกว่า **มี** Unit Root เนื่องจากเมื่อ $\gamma = 0$ จะหมายถึง $\pi_1 = 1$

[16] หรือเรียกว่า **ไม่มี** Unit Root เนื่องจากเมื่อ $\gamma < 0$ จะหมายถึง $\pi_1 < 1$

$$\Delta X_t = \gamma X_{t-1} + c_1\Delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.43)$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \gamma X_{t-1} + c_1\Delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.44)$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + c_1\Delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.45)$$

และเมื่อพิจารณากรณีทั่วไป คืออนุกรมเวลา X_t มีรูปแบบ AR(p) สมการที่ใช้ทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลา X_t ด้วยวิธี ADF แบ่งเป็น 3 กรณีเช่นเดียวกับที่ผ่านมา ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\Delta X_t = \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} c_i\,\Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (5.46)$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} c_i\,\Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (5.47)$$

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} c_i\,\Delta X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (5.48)$$

โดยที่ $\gamma = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p - 1)$ ส่วนค่าความล่าช้า (p) ที่จะใช้ในสมการข้างบนนี้ จะเลือกด้วยการใช้หลักเกณฑ์ที่ว่า จะต้องทำให้ค่า SBC มีค่าต่ำที่สุด[17]

วิธีการทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลา X_t ด้วยวิธี ADF จะใช้สมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองดังนี้ H_0: $\gamma = 0$ และ H_1: $\gamma < 0$ ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก นั่นหมายถึงอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่ง (หรืออนุกรมเวลา X_t มี Unit Root) และหากปฏิเสธสมมุติฐานหลักจะหมายถึงอนุกรมเวลา X_t มีความนิ่ง

ถ้าค่าพารามิเตอร์ภายใต้สมมุติฐานหลักคือ $\gamma = 0$ เป็นจริง[18] แล้วตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ($\hat{\gamma}$) จะไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ[19] ในกรณีนี้ เราจะใช้ค่าสถิติ t ของ $\hat{\gamma}$ มาใช้เทียบกับค่าวิกฤตของ MacKinnon (1991, 1996)[20] ซึ่งเป็นค่าวิกฤติที่ใช้ได้กับกรณีที่ตัวอย่าง

---

[17] หรืออาจพิจารณาจากค่า AIC แทน SBC ก็ได้

[18] หรือกล่าวว่า อนุกรมเวลา X_t มีแนวโน้มแบบสุ่ม

[19] แต่จะมีการแจกแจงที่เรียกว่า Wiener process หรือ Brownian motion

[20] สำหรับผู้สนใจ อ่านได้จาก MacKinnon, J. G. (1991), "Critical values for cointegration tests," บทที่ 13 ใน *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, ed. R. F. Engle and C. W. J. Granger.

มีขนาดเล็กด้วย[21] ส่วนค่าสถิติ t ของค่าสัมประสิทธิ์ ΔX_{t-i} ($i = 1, 2, \ldots, p-1$) สามารถเทียบกับค่าวิกฤติจาตาราง t หรือ F ได้[22]

สำหรับการเลือกว่าควรใช้สมการที่ (5.46) (5.47) หรือ (5.48) เพื่อทดสอบ Unit Root นั้น ก็มีหลักเกณฑ์เช่นเดียวกับกรณีการทดสอบของ Dickey–Fuller กล่าวคือ เมื่อเราวาดกราฟของอนุกรมเวลาที่ต้องการทดสอบความนิ่ง แล้วพบว่า อนุกรมเวลานั้นเคลื่อนขึ้น ๆ ลง ๆ อยู่ รอบ ๆ ศูนย์ เราควรเลือกใช้สมการ (5.46) และหากพบว่าอนุกรมไม่มีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงเมื่อเวลาผ่านไป แต่เคลื่อนที่ขึ้น ๆ ลง ๆ รอบค่าคงที่ค่าหนึ่ง เราควรเลือกใช้สมการที่ (5.47) และหากอนุกรมเวลานั้นมีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงเมื่อเวลาผ่านไป เราควรเลือกใช้สมการที่ (5.48)

อย่างไรก็ดี หากต้องการทราบในรายละเอียดเพิ่มมากขึ้น เช่น กราฟอนุกรมเวลา X_t มีลักษณะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ทำให้เราตัดสินใจใช้สมการที่ (5.48) ในการทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลา X_t และเมื่อพบว่าสมมุติฐาน H_0: $\gamma = 0$ ไม่สามารถปฏิเสธได้ จึงสรุปว่าอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่ง ในกรณีนี้หากต้องการทราบรายละเอียดเพิ่มเติมอีกว่า อนุกรมเวลา X_t ซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ นี้มาจากอิทธิพลของแนวโน้มกำหนดได้ (t) ด้วยหรือไม่ สามารถทำได้ด้วยการตั้งสมมุติฐาน H_0: $\gamma = \beta_1 = 0$ โดยใช้ค่าสถิติ $F^* = \frac{(RSS_r - RSS_{ur})/q}{RSS_{ur}/(T-K)}$ โดยที่ RSS_r คือความแปรปรวนในส่วนที่อธิบายไม่ได้จากสมการถดถอยที่ถูกจำกัด (restricted residual sum of square) โดยสมการถดถอยที่ถูกจำกัดจะหมายถึงสมการถดถอยที่ค่าพารามิเตอร์มีค่าเป็นไปตามสมมุติฐานหลัก ส่วน RSS_{ur} คือความแปรปรวนในส่วนที่อธิบายไม่ได้จากสมการถดถอยที่ไม่ถูกจำกัด (unrestricted residual sum of square) ซึ่งหมายถึงสมการถดถอยที่ไม่มีการใส่ข้อจำกัดใด ๆ ในค่าพารามิเตอร์เลยนั่นเอง ส่วน q ก็คือจำนวนพารามิเตอร์ที่ถูกจำกัดตามสมมุติฐานหลักนั่นเอง T คือจำนวนข้อมูลที่ใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ และ K คือจำนวนพารามิเตอร์ของสมการที่ไม่ใส่ข้อจำกัดใด ๆ[23] ส่วนค่าวิกฤติที่ใช้เทียบกับค่า F^* จะต้องเป็นค่าวิกฤตที่คำนวณโดย Dickey–

Oxford, Oxford University Press. และ MacKinnon, J. G., “Numerical distribution functions for unit root and cointegration tests,” *Journal of Applied Econometrics* 11 (1996): 601–618.

[21] ปัจจุบันโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Eviews จะมีการแสดงค่าวิกฤติมาที่คำนวณจากวิธีการของ MacKinnon (1991, 1996) ให้ด้วย ทำให้การทดสอบ Unit root เป็นเรื่องสะดวกขึ้นมาก

[22] Hamilton, J. D., *Time Series Analysis* (New Jersey: Princeton University Press, 1994), pp. 528–529.

[23] ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ใน ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์, *เศรษฐมิติเบื้องต้น*, พิมพ์ครั้งที่ 2. (กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554), หน้า 81–84.

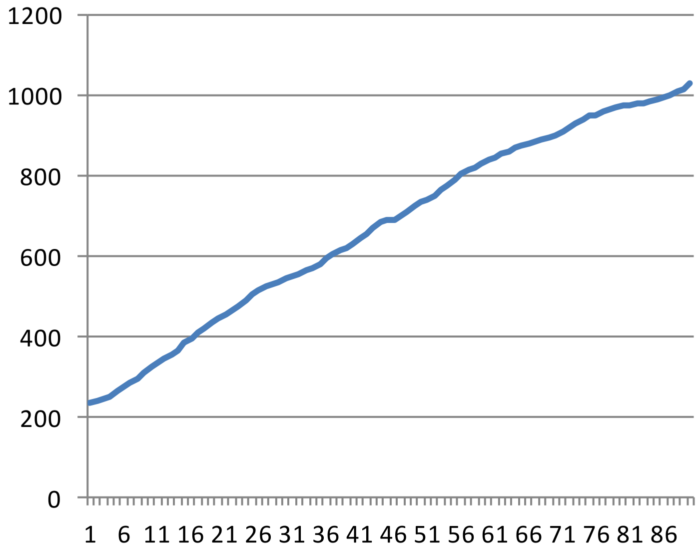
Fuller (1981) ซึ่งสรุปไว้ใน Hamilton, J. D. (1994: 764) ซึ่งหากผลการทดสอบสรุปว่า ไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก จะหมายถึงอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่ง โดยแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ มิได้มาจากแนวโน้มกำหนดได้ (t) เลย ทำนองเดียวกัน หากเราตัดสินใจเลือกใช้สมการที่ (5.47) ในการทดสอบความนิ่ง และพบว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐาน H_0: $\gamma = 0$ ได้ และเราต้องการทราบในรายละเอียดอีกว่า อนุกรมเวลา X_t มีอิทธิพลของค่าคงที่ β_0 ด้วยหรือไม่ เราจะต้องใช้สมมุติฐาน H_0: $\gamma = \beta_0 = 0$ ในการทดสอบ โดยใช้ค่าสถิติ F^* เช่นเดียวกัน และค่าวิกฤติก็หาได้จาก Hamilton, J. D. (1994: 764) เช่นกัน

5.6 ตัวอย่างการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง

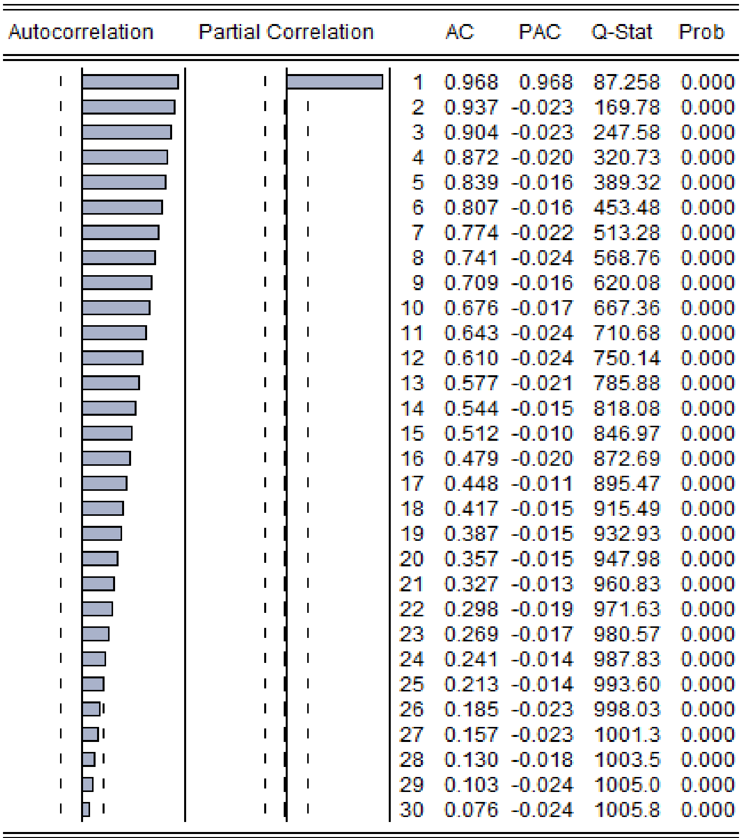
สมมุติให้ X_t คือยอดขายสินค้ารายเดือน (พันบาท) ของบริษัทแห่งหนึ่งจำนวน 90 เดือน แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.8 ดังนี้ จะเห็นว่ายอดขายรายเดือนของบริษัทแห่งนี้มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และเมื่อลองหาค่า SAC, ค่า SPAC และค่าสถิติ Ljung-Box Q ที่แสดงในรูปที่ 5.9 ทำให้เราสรุปได้ว่าค่า TAC ลดลงอย่างช้า ๆ และมีนัยสำคัญทางสถิติจนถึงช่วงเวลาที่ 26 ที่ผ่านมา จากนั้น TAC จะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ส่วนค่า TPAC มีนัยสำคัญทางสถิติที่ 1 ช่วงเวลาที่ผ่านมาเท่านั้น จากนั้นค่า TPAC จะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติอีกเลย จากข้อมูลทั้ง 2 รูปนี้ เราสามารถบอกได้ว่ายอดขายรายเดือนของบริษัทนี้น่าจะไม่มีความนิ่ง อย่างไรก็ดี เพื่อให้ผลการสรุปนี้มีความน่าเชื่อถือมากขึ้น เราจะทดสอบความนิ่งของยอดขายรายเดือนของบริษัทนี้ด้วยวิธีการทดสอบของ ADF โดยจะเลือกใช้สมการที่ (5.48) ในการทดสอบ เนื่องจากกราฟของยอดขายรายเดือนแสดงถึงแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ และเราพบว่าค่าความล่าช้าที่ $p = 2$ จะทำให้ค่า SBC = 4.954 ซึ่งมีค่าต่ำที่สุด[24] ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์แสดงได้ดังนี้

---

[24] โปรแกรมสำเร็จรูป Eviews 7.0 จะทำการเลือกค่าความล่าช้า (p) โดยใช้หลักเกณฑ์ว่า เป็นค่าที่ทำให้ SBC (หรือค่าอื่น ๆ เช่น AIC) มีค่าต่ำที่สุดให้เองโดยอัตโนมัติ ซึ่งทำให้การทดสอบ Unit Root ด้วยวิธี ADF มีความรวดเร็วมากขึ้น



รูปที่ 5.8 แสดงยอดขายรายเดือน (พันบาท) ของบริษัทแห่งหนึ่ง



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.968	0.968	87.258	0.000
		2	0.937	-0.023	169.78	0.000
		3	0.904	-0.023	247.58	0.000
		4	0.872	-0.020	320.73	0.000
		5	0.839	-0.016	389.32	0.000
		6	0.807	-0.016	453.48	0.000
		7	0.774	-0.022	513.28	0.000
		8	0.741	-0.024	568.76	0.000
		9	0.709	-0.016	620.08	0.000
		10	0.676	-0.017	667.36	0.000
		11	0.643	-0.024	710.68	0.000
		12	0.610	-0.024	750.14	0.000
		13	0.577	-0.021	785.88	0.000
		14	0.544	-0.015	818.08	0.000
		15	0.512	-0.010	846.97	0.000
		16	0.479	-0.020	872.69	0.000
		17	0.448	-0.011	895.47	0.000
		18	0.417	-0.015	915.49	0.000
		19	0.387	-0.015	932.93	0.000
		20	0.357	-0.015	947.98	0.000
		21	0.327	-0.013	960.83	0.000
		22	0.298	-0.019	971.63	0.000
		23	0.269	-0.017	980.57	0.000
		24	0.241	-0.014	987.83	0.000
		25	0.213	-0.014	993.60	0.000
		26	0.185	-0.023	998.03	0.000
		27	0.157	-0.023	1001.3	0.000
		28	0.130	-0.018	1003.5	0.000
		29	0.103	-0.024	1005.0	0.000
		30	0.076	-0.024	1005.8	0.000

รูปที่ 5.9 แสดงค่า SAC และ SPAC ที่คำนวณจากอนุกรมเวลายอดขายของบริษัทแห่งหนึ่ง

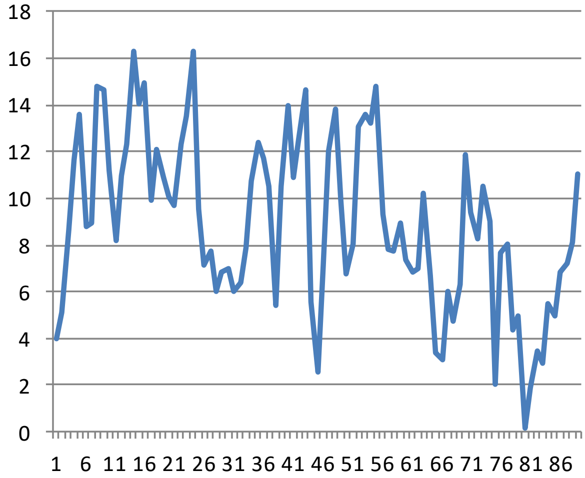
$$\widehat{\Delta X}_t = 8.777 + 0.085t - 0.013X_{t-1} + 0.557\Delta X_{t-1}$$
$$t^* \;=\; (2.81) \quad (0.73) \quad (-1.03) \qquad (6.01)$$

ในการทดสอบ Unit Root ของ X_t เราจะต้องใช้การทดสอบสมมุติฐานแบบหางเดียวคือ H_0: $\gamma = 0$ และ H_1: $\gamma < 0$ จากสมการจะได้ว่า $\hat{\gamma} = -0.013$ ซึ่งมีค่าสถิติ $t^* = -1.03$ และที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 0.05 ค่าวิกฤติของ MacKinnon (1996) คือ –3.46 นั่นคือ $t^* = -1.03$ > ค่าวิกฤติ = –3.46 ดังนั้น เราจึงไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 หรืออาจพิจารณาจากค่า Probability (P-value) ของ $t^* = -1.03$ คือ 0.9805[25] ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญ 0.05 จึงไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 0.05 ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า ยอดขายของบริษัทแห่งนี้ไม่มีความนิ่งที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ดังนั้น เราจึงทำผลต่างลำดับที่ 1 ของยอดขายบริษัทแห่งนี้ ซึ่งคำนวณจากสูตร $Y_t = X_t - X_{t-1}$ แล้วนำมาวาดกราฟได้ดังรูปที่ 5.10 ซึ่งจะพบว่าแนวโน้มได้หายไป ลักษณะของ Y_t มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนที่คงที่ทุก ๆ ช่วงเวลา และเมื่อใช้อนุกรมเวลา Y_t ในการคำนวณค่า SAC ค่า SPAC และค่าสถิติ Ljung-Box Q ที่แสดงในรูปที่ 5.11 ทำให้เราสรุปได้ว่า ค่า TAC ลดลงอย่างรวดเร็ว โดยมีนัยสำคัญทางสถิติจนถึงช่วงเวลาที่ 6 ที่ผ่านมาเท่านั้น จากนั้น TAC จะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ ส่วนค่า TPAC มีนัยสำคัญทางสถิติที่ 1 ช่วงเวลาที่ผ่านมาเท่านั้น จากนั้นค่า TPAC จะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติอีกเลย จากข้อมูลทั้ง 2 รูปนี้ ผลต่างลำดับที่ 1 ของยอดขายรายเดือนของบริษัทนี้น่าจะมีความนิ่ง แต่เพื่อให้มีความน่าเชื่อถือ เราจะใช้วิธี ADF ในการทดสอบความนิ่งของ Y_t โดยจะเลือกใช้สมการที่ (5.47) ในการทดสอบความนิ่ง เนื่องจากลักษณะกราฟของ Y_t ไม่มีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ แต่ยังคงแสดงดังการมีค่าคงที่อยู่ ซึ่งสังเกตจากรูปว่ามีจุดตัดแกนตั้งนั่นเอง ซึ่งเขียนสมการได้ดังนี้

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \gamma Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} c_i \,\Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (5.49)$$

[25] P-value ของ t^* กรณีนี้จะคำนวณจากการแจกแจงแบบ Brownian Motion หรือ Wiener Process



รูปที่ 5.10 แสดงผลต่างลำดับที่ 1 ของยอดขายรายเดือนของบริษัทแห่งหนึ่ง

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.643	0.643	38.026	0.000
		2	0.321	-0.157	47.632	0.000
		3	0.246	0.188	53.312	0.000
		4	0.238	0.040	58.687	0.000
		5	0.256	0.122	64.984	0.000
		6	0.262	0.057	71.668	0.000
		7	0.168	-0.089	74.462	0.000
		8	0.090	0.006	75.268	0.000
		9	0.041	-0.066	75.442	0.000
		10	0.042	0.033	75.625	0.000
		11	0.045	-0.030	75.835	0.000
		12	0.068	0.066	76.324	0.000
		13	0.051	-0.031	76.602	0.000
		14	0.037	0.040	76.753	0.000
		15	0.123	0.170	78.411	0.000
		16	0.139	-0.058	80.542	0.000
		17	0.084	0.002	81.335	0.000
		18	0.142	0.145	83.644	0.000
		19	0.177	-0.006	87.249	0.000
		20	0.069	-0.159	87.802	0.000
		21	-0.024	-0.076	87.873	0.000
		22	-0.109	-0.156	89.318	0.000
		23	-0.114	0.017	90.908	0.000
		24	-0.048	0.017	91.194	0.000
		25	-0.084	-0.132	92.084	0.000
		26	-0.109	0.100	93.624	0.000
		27	-0.067	0.075	94.209	0.000
		28	-0.057	0.012	94.636	0.000
		29	-0.027	0.096	94.732	0.000
		30	0.043	0.058	94.984	0.000

รูปที่ 5.11 แสดงค่า SAC และ SPAC ที่คำนวณจากผลต่างลำดับที่ 1 อนุกรมเวลายอดขายของบริษัทแห่งหนึ่ง

เนื่องจาก $Y_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$ ดังนั้น สมการที่ (5.49) อาจเขียนอีกแบบคือ

$$\Delta^2 X_t = \beta_0 + \gamma \Delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} c_i \Delta^2 X_{t-i} + \varepsilon_t \tag{5.50}$$

จากสมการที่ (5.49) หรือ (5.50) พบว่า ค่าความล่าช้าที่ $p = 1$ จะทำให้ค่า SBC = 4.950 ซึ่งมีค่าต่ำที่สุด ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์แสดงได้ดังนี้

$$\widehat{\Delta Y_t} = 3.237 - 0.355 Y_{t-1}$$
$$t^* = (4.15) \quad (-4.37)$$

หรือเขียนได้อีกแบบดังนี้

$$\widehat{\Delta^2 X_t} = 3.237 - 0.355 \Delta X_{t-1}$$
$$t^* = (4.15) \quad (-4.37)$$

จากสมการจะได้ว่า $\hat{\gamma} = -0.355$ ซึ่งมีค่าสถิติ $t^* = -4.37$ และที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 0.05 ค่าวิกฤติของ MacKinnon (1996) คือ –2.895 นั่นคือ $t^* = -4.37 <$ ค่าวิกฤติ = –2.895 ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 หรืออาจพิจารณาจากค่า Probability (P-value) ของ $t^* = -1.03$ ที่คำนวณจาก Weiner Process คือ 0.0006[26] ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญ 0.05 จึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 0.05 ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า ผลต่างลำดับที่ 1 ของยอดขายของบริษัทแห่งนี้**มีความนิ่ง**ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 และเราสรุปได้ว่า $X_t \sim I(1)$ ดังนั้น เราควรใช้แบบจำลอง ARIMA(p, 1, q) กับอนุกรมเวลายอดขายของบริษัทนี้ ส่วนค่า p และ q ควรมีค่าเป็นเท่าใดนั้นจะต้องทำตามขั้นตอนที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 3 และ 4 เพียงแค่แตกต่างกันตรงที่จะใช้อนุกรมเวลา ΔX_t มิใช่อนุกรมเวลา X_t เท่านั้น ซึ่งจะไม่ขอกล่าวซ้ำในที่นี้อีก

[26] การใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ เช่น Eviews จะคำนวณ P-value นี้มาให้

บทที่ 6
แบบจำลองอนุกรมเวลาที่มีความผันแปรทางฤดูกาล

จากบทที่ 1 เราทราบแล้วว่า “ความผันแปรทางฤดูกาล (Seasonal Variation) คือรูปแบบในช่วงเวลาหนึ่งของอนุกรมเวลาที่จะเป็นภายใน 1 ปี และจะเป็นแบบนี้ซ้ำกันทุกปี” ซึ่งอนุกรมเวลาทางเศรษฐศาสตร์ ทางธุรกิจ หรือทางการเงิน ที่มีความถี่เป็นรายเดือนหรือรายไตรมาส อาจจะมีปรากฏการณ์ที่แสดงให้เห็นถึงความผันแปรทางฤดูกาลอยู่ด้วย เช่น ดัชนีผลผลิตอุตสาหกรรมของประเทศหนึ่งในเดือนเมษายนจะน้อยกว่าดัชนีผลผลิตอุตสาหกรรมของเดือนอื่น ๆ และจะเป็นเช่นนี้ซ้ำกันทุกปี จำนวนห้องพักที่ถูกจองของโรงแรมในไตรมาสสุดท้ายจะสูงกว่าไตรมาสอื่น ๆ และจะเป็นเช่นนี้ซ้ำกันทุกปี

เราจะเรียก “ระยะเวลาที่สั้นที่สุดที่อนุกรมเวลาจะแสดงให้เห็นว่ามีความผันแปรทางฤดูกาลอีกครั้ง” ว่า ช่วงเวลาของฤดูกาล (Seasonal Period: s) ตัวอย่างเช่น จากการเก็บข้อมูลอนุกรมเวลารายเดือนของดัชนีผลผลิตอุตสาหกรรมของประเทศหนึ่งในเดือนเมษายนจะน้อยกว่าดัชนีผลผลิตอุตสาหกรรมของเดือนอื่น ๆ และจะเป็นเช่นนี้ซ้ำกันทุกปี จะได้ว่าช่วงเวลาของฤดูกาล (s) คือ 12 ($s = 12$) หรือจากการเก็บข้อมูลอนุกรมเวลารายเดือนของดัชนีผลผลิตสินค้าเกษตรของประเทศหนึ่งพบว่า ผลผลิตในเดือนพฤศจิกายนจะสูงกว่าเดือนอื่น ๆ และเป็นเช่นนี้ทุก ๆ ปี ดังนั้นช่วงเวลาของฤดูกาล (s) คือ 12 ($s = 12$) และหากเราเก็บรวบรวมข้อมูลรายไตรมาสของจำนวนห้องพักที่ถูกจองของโรงแรมในไตรมาสสุดท้ายจะสูงกว่าไตรมาสอื่น ๆ และจะเป็นเช่นนี้ซ้ำกันทุกปี จะได้ว่าช่วงเวลาของฤดูกาล (s) คือ 4 ($s = 4$) หรือจากการรวบรวมข้อมูลอนุกรมเวลารายไตรมาสของยอดขายเครื่องปรับอากาศบริษัทแห่งหนึ่งพบว่า ยอดขายเครื่องปรับอากาศในไตรมาสที่ 2

จะสูงกว่าไตรมาสอื่น ๆ และเป็นเช่นนี้ทุก ๆ ปี ดังนั้น ช่วงเวลาของฤดูกาล (s) กรณีนี้ก็คือ 4 (s = 4) เป็นต้น

ความผันแปรทางฤดูกาลเป็นอีกเรื่องหนึ่งที่ต้องให้ความสำคัญ เนื่องจากอนุกรมเวลาที่นำมาใช้กับวิธีการของ Box–Jenkins นอกจากจะต้องมีความนิ่ง (Stationary) แล้วยังต้องไม่มีความผันแปรทางฤดูกาล (No Seasonal Variation) อีกด้วย เมื่อความผันแปรทางฤดูกาลอยู่ในอนุกรมเวลา X_t จะทำให้แบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์มีความซับซ้อนมากขึ้น เพราะอนุกรมเวลาในช่วงเวลาที่ t อาจสัมพันธ์กับอนุกรมเวลาในช่วงเวลาที่ $t–s$ ด้วยเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น เราอาจนึกภาพการจัดเรียงอนุกรมเวลาที่มีความผันแปรทางฤดูกาลให้เป็น 2 มิติ ดังรูปแบบที่เสนอโดย Buy–Ballot อันจะทำให้เข้าใจได้มากขึ้น

ตารางที่ 6.1 การแสดงการจัดเรียงข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีความผันแปรทางฤดูกาลตามแบบของ Buy–Ballot

	1	2	3	…	s	รวม	เฉลี่ย
	X_1	X_2	X_3	…	X_s	$\sum X_{.1}$	$\bar{X}_{.1}$
	X_{s+1}	X_{s+2}	X_{s+3}	…	X_{2s}	$\sum X_{.2}$	$\bar{X}_{.2}$
	:	:	:	:	:	:	:
	$X_{(T-1)s+1}$	$X_{(T-1)s+2}$	$X_{(T-1)s+3}$	…	X_{Ts}	$\sum X_{.T}$	$\bar{X}_{.T}$
รวม	$\sum X_{1.}$	$\sum X_{2.}$	$\sum X_{3.}$	…	$\sum X_{T.}$	$\sum X$	$\frac{\sum X}{s}$
เฉลี่ย	$\bar{X}_{1.}$	$\bar{X}_{2.}$	$\bar{X}_{3.}$	…	$\bar{X}_{T.}$	$\frac{\sum X}{T}$	$\frac{\sum X}{Ts}$

โดยที่ $\sum X_{.j}$ คือผลรวมของอนุกรมเวลา X ในปีที่ $j = 1, 2, ….\ T$

$\bar{X}_{.j}$ คือค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X ในปีที่ $j = 1, 2, ….\ T$

$\sum X_{j.}$ คือผลรวมของอนุกรมเวลา X ในฤดูกาลที่ $j = 1, 2, ….\ s$

$\bar{X}_{j.}$ คือค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X ในฤดูกาลที่ $j = 1, 2, ….\ s$

$\sum X$ คือผลรวมของอนุกรมเวลา X ทั้งหมด ทุก ๆ ปีและทุก ๆ ฤดูกาล

เพื่อให้เราสามารถนำแบบจำลองของ Box-Jenkins ไปประยุกต์ใช้กับอนุกรมเวลาที่มีความผันแปรทางฤดูกาลได้ โดยทั่วไปเราจะใช้วิธีใดวิธีหนึ่งใน 2 วิธี คือ (1) กำจัดความผันแปร

ทางฤดูกาลออกไปจากอนุกรมเวลา หรือ (2) นำอิทธิพลของความผันแปรทางฤดูกาลเข้าไปอยู่ในแบบจำลองของ Box-Jenkins ด้วย รายละเอียดแต่ละวิธีอธิบายได้ดังต่อไปนี้

6.1 การกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลออกไปจากอนุกรมเวลา

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการกำจัดความผันแปรทางฤดูกาล ภายใต้ข้อสมมุติว่า ความผันแปรทางฤดูกาลเป็นแบบกำหนดได้ (Deterministic Seasonal) ซึ่งหมายถึง ความผันแปรทางฤดูกาลจะมีรูปแบบที่แน่นอนในทุก ๆ ปี และจะเป็นอิสระกับส่วนประกอบอื่น ๆ ของอนุกรมเวลา (ได้แก่ ส่วนของแนวโน้ม ส่วนของวัฏจักร และส่วนของความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติ) หนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึงวิธีหลัก ๆ 3 วิธีในการกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลชนิดนี้ออกจากอนุกรมเวลาเท่านั้น ซึ่งได้แก่ การใช้ตัวแปรหุ่น การใช้วิธีการหาผลต่างของฤดูกาล และวิธี Census X-11 รายละเอียดแต่ละวิธีมีดังนี้

6.1.1 การใช้ตัวแปรหุ่น (Dummy Variables)

เมื่ออนุกรมเวลา X_t ประกอบด้วยความผันแปรทางฤดูกาลเป็นแบบกำหนดได้ เราจะเขียนได้ว่า

$$X_t = \beta_0 + S_t + \varepsilon_t$$

โดยที่ S_t คือส่วนของความผันแปรทางฤดูกาล และ ε_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนซึ่งจะมีส่วนของแนวโน้ม ส่วนของวัฏจักรและส่วนความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติรวมอยู่ด้วย β_0 คือค่าพารามิเตอร์ เมื่อความผันแปรทางฤดูกาลเป็นแบบกำหนดได้ เราสามารถใช้รูปแบบต่อไปนี้แสดงส่วนของความผันแปรทางฤดูกาลได้ด้วยผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของตัวแปรหุ่น (Dummy Variable) ดังนี้

$$S_t = \sum_{j=1}^{s-1} \beta_j D_{jt}$$

โดยที่ $D_{jt} = 1$ เมื่อ t คือฤดูกาลที่ j และเป็น 0 เมื่อเป็นกรณีอื่น ๆ ดังนั้น อนุกรมเวลา X_t เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \beta_0 + \left(\sum_{j=1}^{s-1} \beta_j D_{jt}\right) + \varepsilon_t \tag{6.1}$$

เมื่อเราประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (6.1) วิธีกำลังสองน้อยที่สุด เราจะเขียนได้ว่า

$$X_t = b_0 + \left(\sum_{j=1}^{s-1} b_j D_{jt}\right) + e_t \tag{6.2}$$

โดยที่ e_t คือค่าความผิดพลาดที่เกิดจากการประมาณสมการที่ (6.2) (หรือค่า residual นั่นเอง) ซึ่งสามารถแปลความหมายได้เป็น ค่าของอนุกรมเวลา X_t ที่มีการกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลออกไปแล้ว ดังจะเห็นได้จากสมการต่อไปนี้

$$e_t = X_t - b_0 - \sum_{j=1}^{s-1} b_j D_{jt} \tag{6.3}$$

6.1.2 การใช้วิธีหาผลต่างของฤดูกาล (Seasonal Differencing)

เมื่ออนุกรมเวลา X_t ประกอบด้วยความผันแปรทางฤดูกาล โดยช่วงเวลาของฤดูกาลคือ s การกำจัดความผันแปรของฤดูกาลสามารถใช้วิธีการหาผลต่างลำดับที่ s แสดงได้ดังนี้

$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s} = (1 - L^s)X_t \tag{6.4}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าอนุกรมเวลาที่พิจารณาเป็นข้อมูลรายไตรมาส (s = 4) การกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลแบบสุ่มจะทำโดยใช้สูตร $\Delta_4 X_t = X_t - X_{t-4}$ ซึ่งจะถูกเรียกว่าผลต่างฤดูกาล และถ้าอนุกรมเวลาที่พิจารณาเป็นข้อมูลรายเดือน (s =12) การกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลแบบสุ่มจะทำโดยใช้สูตร $\Delta_{12} X_t = X_t - X_{t-12}$ และจะเรียกว่าเหมือนกันว่าผลต่างฤดูกาล ดังนั้น การกล่าวถึง “ผลต่างฤดูกาล” จะต้องให้ข้อมูลกำกับเสมอด้วยว่าช่วงเวลาของฤดูกาล (s) มีค่าเท่าไหร่เสมอ

6.1.3 วิธี Census X-11

ถ้ากำหนดให้ X_t คืออนุกรมเวลาที่มีส่วนของความผันแปรทางฤดูกาล การกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลด้วยวิธีนี้ มีข้อสมมุติว่า ผลรวมอนุกรมเวลา X_t ในแต่ละปีจะมีความผันแปรทางฤดูกาลเล็กน้อยเท่านั้น[1] เราจะเริ่มศึกษาวิธีนี้ด้วยการพิจารณาสมการต่อไปนี้

$$N_t = P_t + \varepsilon_t$$

โดยที่ P_t คือส่วนของแนวโน้มและวัฏจักร

ε_t คือส่วนของความผันผวนจากเหตุการณ์ไม่ปกติ

ดังนั้น N_t หมายถึงส่วนของอนุกรมเวลาที่ไม่มีความผันแปรทางฤดูกาลนั่นเอง ซึ่งสามารถประมาณด้วยสมการต่อไปนี้

$$\widehat{N}_t = \sum_{i=-m}^{m} \lambda_i X_{t-i} \tag{6.5}$$

โดยที่ m คือจำนวนเต็มบวก และ λ_i คือค่าคงที่ซึ่งมีคุณสมบัติ $\lambda_i = \lambda_{-i}$ และ $\sum_{i=-m}^{m} \lambda_i = 1$ และส่วนความผันแปรทางฤดูกาลจะประมาณจากการนำ $\widehat{N}_t$ ไปหักออกจากอนุกรมเวลา X_t หรือเขียนได้ว่า

$$\hat{S}_t = X_t - \widehat{N}_t$$

โดยที่ $\hat{S}_t$ คือส่วนของความผันแปรทางฤดูกาลที่ถูกประมาณขึ้น ดังนั้น การกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลออกไปจากอนุกรมเวลา X_t ทำได้ด้วยการหาใช้สมการ $X_t - \hat{S}_t$ ซึ่งมักถูกเรียกชื่อว่าอนุกรมเวลาที่ถูกปรับฤดูกาล (seasonally adjusted time series) จะเห็นว่าอนุกรมเวลาที่ปรับฤดูกาลก็คือ $\widehat{N}_t$ ในสมการที่ (6.5) นั่นเอง

---

[1] Wei, W. W. S., *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods* (California: Addison-Wesley, 1990), p. 161.

6.2 แบบจำลองของ Box-Jenkins กับอิทธิพลของความผันแปรทางฤดูกาล

หากความผันแปรทางฤดูกาลที่อยู่ในอนุกรมเวลาเป็นแบบสุ่ม (Stochastic Seasonal) และมีความสัมพันธ์กับส่วนอื่น ๆ ของอนุกรมเวลา แล้วการกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลด้วยวิธีที่กล่าวในหัวข้อที่แล้วอาจไม่ทำให้ความผันแปรทางฤดูกาลถูกกำจัดออกไปได้ หากกรณีนี้เกิดขึ้น เราอาจนำฤดูกาลใส่รวมเข้าไปในแบบจำลองอนุกรมเวลาของ Box–Jenkins โดยตรงซึ่งจะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ (1) แบบจำลองที่ใช้กับอนุกรมเวลาที่ความผันแปรทางฤดูกาลมีความนิ่ง (Stationary Seasonal Process) และ (2) แบบจำลองที่ใช้กับอนุกรมเวลาที่ความผันแปรทางฤดูกาลไม่มีความนิ่ง (Nonstationary Seasonal Process) ดังจะอธิบายต่อไปนี้

6.2.1 แบบจำลองที่ใช้กับอนุกรมเวลาที่ความผันแปรทางฤดูกาลมีความนิ่ง

ในกรณีที่อนุกรมเวลามีความผันแปรทางฤดูกาลเป็นแบบสุ่ม หมายถึงความผันแปรทางฤดูกาลจะไม่มีรูปแบบที่แน่นอน ตัวอย่างเช่น ในปีที่ผ่านมา ประเทศหนึ่งเกิดเหตุการณ์รุนแรงทางการเมือง มีการประท้วงกันในไตรมาสที่ 2 เหตุการณ์ดังกล่าวได้ทำให้ยอดขายลดลง แต่ในปีนี้ สถานการณ์ทางการเมืองไม่มีการส่อเค้าว่าจะเกิดเหตุการณ์รุนแรงในไตรมาสเดียวกันขึ้นอีก ทำให้ยอดขายในไตรมาสดังกล่าวอยู่ในภาวะปกติ ดังนั้น เรากล่าวว่าความผันแปรทางฤดูกาลที่เกิดขึ้นในไตรมาสที่ 2 ของปีที่แล้ว ส่งผลต่อยอดขายไตรมาสที่ 2 ของปีนี้เพียงชั่วคราวเท่านั้น หรือเรียกว่าความผันแปรทางฤดูกาลมีความนิ่ง (Stationary Seasonal Process) ในกรณีนี้ไม่จำเป็นต้องกำจัดอิทธิพลของฤดูกาลออกไป แต่จะนำฤดูกาลเข้าไปร่วมใช้ในแบบจำลองอนุกรมเวลาเลย และจะเรียกว่า แบบจำลอง **Seasonal Autoregressive Moving Average** หรือเขียนสั้น ๆ ว่า แบบจำลอง **Seasonal ARMA** ดังจะอธิบายต่อไปนี้

กำหนดให้ X_t คืออนุกรมเวลาหนึ่งเป็นอนุกรมรายไตรมาส และความผันแปรทางฤดูกาลมีความนิ่ง เราสามารถเขียนอนุกรมเวลา X_t ให้อยู่ในรูปต่อไปนี้ได้

$$X_t = A_1 X_{t-4} + v_t, \qquad |A_1| < 1 \tag{6.6}$$

โดยที่ v_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนที่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว จะเห็นว่าสมการข้างบนนี้ก็คือแบบจำลอง AR(4) ที่ค่าสัมประสิทธิ์ของ X_{t-1}, X_{t-2} และ X_{t-3} เป็น 0 และ $|A_1| < 1$ ก็คือเงื่อนไขที่แสดงให้เห็นว่าความผันแปรทางฤดูกาลที่อยู่ในอนุกรมเวลา X_t มีความนิ่งนั่นเอง ถ้านำอนุกรม X_t

นี้มาหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC จะแสดงได้ดังสมการที่ (6.7) ถึง (6.10) ตามลำดับดังนี้[2]

$$\mu = 0 \tag{6.7}$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - A_1^2} \tag{6.8}$$

$$\rho_k = \begin{cases} (A_1)^{\frac{k}{4}}, & k = 0,4,8,\ldots \\ 0, & \text{เมื่อเป็นกรณีอื่น ๆ} \end{cases} \tag{6.9}$$

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} \rho_4, & \text{เมื่อ } k = 4 \\ 0, & \text{เมื่อเป็นกรณีอื่น ๆ} \end{cases} \tag{6.10}$$

เนื่องจาก $|A_1| < 1$ และเมื่อพิจารณาสมการที่ (6.9) เราจะสรุปได้ว่า ถ้า $0< A_1 < 1$ แล้วค่า TAC จะลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล ณ ช่วงเวลาที่ 4, 8, 12, … ที่ผ่านมา และถ้า $-1 < A_1 < 0$ แล้วเมื่อเวลาผ่านไปเรื่อย ๆ ค่า TAC จะลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลขึ้น ๆ ลง ๆ ณ ช่วงเวลาที่ 4, 8, 12, … ที่ผ่านมา และถ้า $|A_1|$ ยิ่งเข้าใกล้ 1 มากขึ้นเรื่อย ๆ แล้วรูปแบบของฤดูกาลก็จะยิ่งชัดขึ้นเรื่อย ๆ และจะมีอยู่ต่อไปอย่างยาวนาน แต่ตราบใดที่ $|A_1|$ ยิ่งเข้าใกล้ 0 มากขึ้นเรื่อย ๆ รูปแบบของฤดูกาลจะค่อย ๆ หายไปอย่างรวดเร็วเมื่อเวลาผ่านไป ส่วนสมการที่ (6.10) แสดงให้เห็นว่ารูปแบบ TPAC จะไม่เท่ากับศูนย์ ณ ช่วงเวลาที่ 4 ที่ผ่านมาเท่านั้น

แบบจำลองตามสมการที่ (6.6) แสดงถึงผลกระทบของฤดูกาลในรูปแบบ AR เท่านั้น แต่ในทางปฏิบัติ อนุกรมเวลาอาจมีอยู่ในรูปแบบ ARMA ก็ได้ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$A(L^s)X_t = B(L^s)\, v_t \tag{6.11}$$

โดย s คือช่วงเวลาของฤดูกาล

$$A(L^s) = 1 - A_1L^s - A_2L^{2s} - \ldots - A_P L^{Ps} \tag{6.12}$$

$$B(L^s) = 1 - B_1L^s - B_2L^{2s} - \ldots - B_QL^{Qs} \tag{6.13}$$

---

[2] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 6ก

เราจะเรียกสมการที่ (6.11) ว่าแบบจำลอง ARMA เฉพาะส่วนของฤดูกาล (Pure Seasonal ARMA model) ลำดับที่ $(P,Q)_s$ และในทางปฏิบัติ เป็นไปได้ว่าอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ AR(1) พร้อม ๆ กับมีอิทธิพลฤดูกาลด้วย ดังสมการที่ (6.14)

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + A_1 X_{t-4} + v_t\,, \quad |\alpha_1| < 1 \text{ และ } |A_1| < 1 \tag{6.14}$$

สมการที่ (6.14) แสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของความผันแปรทางฤดูกาลเมื่อ $s = 4$ และยังมีอิทธิพลของอนุกรมเวลาในไตรมาสที่ผ่านมาด้วย กล่าวคือ อนุกรมเวลา X_t ในไตรมาสที่ 2 สัมพันธ์กับไตรมาสที่ 1 และไตรมาสที่ 2 ของปีนี้ก็สัมพันธ์กับไตรมาสที่ 2 ของปีที่แล้วด้วยนั่นเอง

ทำนองเดียวกัน ในทางปฏิบัติ สมการที่ (6.11) ซึ่งแสดง X_t อยู่ในรูปแบบจำลอง ARMA เฉพาะส่วนของฤดูกาล ลำดับที่ $(P,Q)_s$ ก็อาจอยู่ในรูปแบบ ARMA(p, q) พร้อม ๆ กันด้วย โดยหาก v_t อยู่ในรูปแบบ ARMA(p, q) ดังต่อไปนี้

$$\alpha(L)v_t = \beta(L)\varepsilon_t \tag{6.15}$$

หรือ $$v_t = \frac{\beta(L)}{\alpha(L)}\varepsilon_t$$

โดยที่ ε_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนที่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots$ $\alpha_p L^p$
และ $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots \beta_q L^q$ ดังนั้น สมการที่ (6.11) จะเขียนได้ว่า

$$A(L^s)\alpha(L)\, X_t = B(L^s)\,\beta(L)\,\varepsilon_t \tag{6.16}$$

สมการที่ (6.16) จะถูกเรียกว่าแบบจำลองการคูณฤดูกาลของ ARMA (Multiplicative Seasonal ARMA model) ลำดับที่ $(p,q)\times(P,Q)_s$ หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า ARMA$(p,q)(P,Q)_s$ หรือ ARMA$(p,q)\times(P,Q)_s$ ซึ่งเป็นแบบจำลองอนุกรมเวลาที่มีการใช้กันมากเมื่ออนุกรมเวลามีความผันแปรทางฤดูกาล ดังนั้น เราจึงควรเข้าใจสมการที่ใช้แสดงแบบจำลองการคูณฤดูกาล ARMA$(p, q)(P,Q)_s$ โดยจะขอยกตัวอย่าง**แบบจำลอง ARMA (0,1)(0,1)$_s$** ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

จากแบบจำลอง **ARMA (0,1)(0,1)$_s$** เราสามารถบอกได้ว่า $p = 0$ และ $q = 1$ ซึ่งหมายถึง $\alpha(L) = 1$ และ $\beta(L) = 1 - \beta_1 L$ ตามลำดับนั่นเอง นอกจากนี้แบบจำลองดังกล่าวยังบอกเราด้วยว่า

$P = 0$ และ $Q = 1$ ส่วนช่วงเวลาของฤดูกาลอยู่ในรูปทั่วไปคือ s นั่นคือเราจะได้ว่า $A(L^s) = 1$ และ $B(L) = 1 - B_1L^s$ ตามลำดับ ดังนั้น แบบจำลอง ARMA$(0,1)(0,1)_s$ จึงเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$A(L^s)\alpha(L)\, X_t = B(L^s)\,\beta(L)\,\varepsilon_t$$

$$(1)(1)X_t = (1-B_1L^s)(1-\beta_1L)\varepsilon_t$$

$$X_t = (1-\beta_1L - B_1L^s + \beta_1B_1L^{s+1})\,\varepsilon_t$$

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1\,\varepsilon_{t-1} - B_1\,\varepsilon_{t-s} + \beta_1B_1\,\varepsilon_{t-s-1} \qquad (6.17)$$

จะเห็นว่า สมการที่ (6.17) จะมีลักษณะเป็นแบบจำลอง Moving Average นั่นเอง ถ้านำอนุกรม X_t ที่อยู่ในรูป ARMA$(0,1)(0,1)_s$ มาหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่า TAC จะแสดงได้ดังสมการที่ (6.18)–(6.20) ตามลำดับดังนี้[3]

$$\mu = 0 \qquad (6.18)$$

$$\gamma_0 = (1+\beta_1^2)(1+B_1^2)\sigma^2 \qquad (6.19)$$

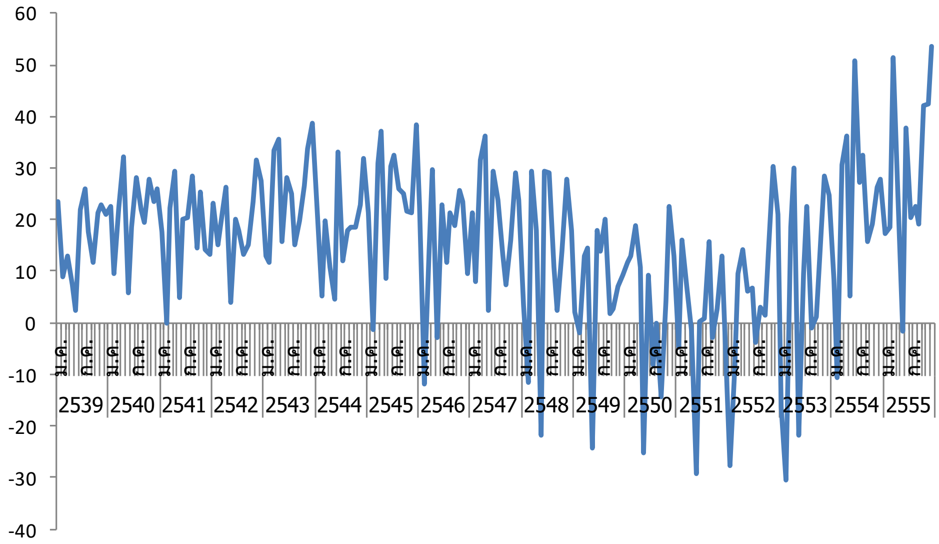
$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\beta_1}{(1+\beta_1^2)} & k = 1 \\ \dfrac{-B_1}{(1+B_1^2)} & k = s \\ \dfrac{\beta_1B_1}{(1+\beta_1^2)(1+B_1^2)} & k = s-1 \text{ และ } s+1 \\ 0 & k \neq 0, 1, s-1, s, s+1 \end{cases} \qquad (6.20)$$

ลักษณะรูปแบบของค่า TAC พิจารณาได้จากสมการที่ (6.20) โดยถ้า $s = 4$ จะได้ว่า TAC จะไม่เป็นศูนย์ที่ช่วงเวลา 1, 3, 4, 5 ที่ผ่านมา และจะเป็นศูนย์ที่ช่วงเวลาอื่น ๆ และถ้า s =12 เราจะสรุปได้ว่า TAC จะไม่เป็นศูนย์ ณ ช่วงเวลา 1, 11, 12, 13 ที่ผ่านมา และจะเป็นศูนย์ที่ช่วงเวลาอื่น ๆ[4]

[3] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 6ข

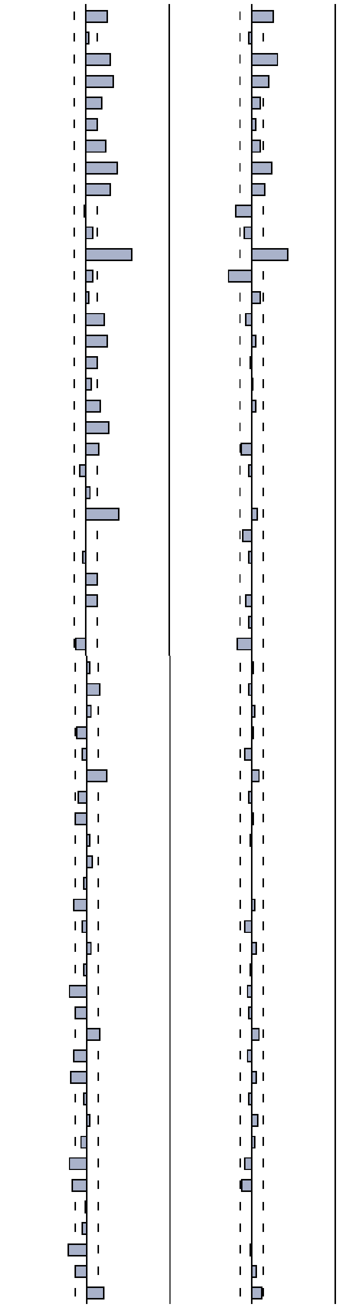
[4] ส่วนการหาค่า TPAC ณ k ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{kk}) สามารถใช้แนวคิดเดียวกับที่ได้อธิบายไว้ในภาคผนวก 3ค แต่จะมีความซับซ้อนมากกว่า

ตอนนี้เราจะมาดูตัวอย่างการวิเคราะห์แบบจำลองอนุกรมเวลาที่ความผันแปรทางฤดูกาลมีความนิ่ง ให้ X_t คืออนุกรมเวลากำไรต่อเดือนของบริษัทหนึ่ง (หมื่นบาท) ตั้งแต่เดือนมกราคม 2539–เดือนธันวาคม 2555 ซึ่งแสดงในรูปที่ 6.1 และจากรูปดังกล่าว เราไม่เห็นรูปแบบของฤดูกาลชัดเจน ในกรณีนี้ เพื่อให้แน่ใจว่าอนุกรมเวลาดังกล่าวมีความผันแปรทางฤดูกาลหรือไม่ เราสามารถใช้ค่า SAC ของอนุกรมเวลาดังกล่าวร่วมในการพิจารณาด้วย (แสดงในรูปที่ 6.2) และจากรูปดังกล่าว ทำให้เราสรุปได้ว่าค่า TAC มีนัยสำคัญที่ความล่าช้า (lag) 12, 24, 36 และลดลงเรื่อย ๆ อย่างรวดเร็ว นั่นคืออนุกรมเวลานี้มีอิทธิพลของความผันแปรทางฤดูกาล โดยมีช่วงเวลาของฤดูกาล (s) คือ 12 และความผันแปรทางฤดูกาลมีความนิ่ง ดังนั้น ในกรณีนี้เราควรนำฤดูกาลเข้าไปใช้ร่วมกับแบบจำลองอนุกรมเวลาดังกล่าว และเนื่องจาก TPAC มีนัยสำคัญที่ความล่าช้า 12 แต่ไม่มีนัยสำคัญที่ความล่าช้า 24, 36, … นั่นคือ เราควรลองระบุรูปแบบเป็น P=1 และ Q = 0 ในขั้นตอนแรก[5]



รูปที่ 6.1 แสดงกำไรของบริษัทรายเดือน (หมื่นบาท)

[5] การนำแบบจำลอง Box-Jenkins กับอนุกรมเวลาที่มีความผันแปรทางฤดูกาล ก็ยังคงมี 3 ขั้นตอนเช่นเดิม



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.263	0.263	14.310	0.000
2	0.037	-0.034	14.596	0.001
3	0.299	0.321	33.324	0.000
4	0.339	0.210	57.542	0.000
5	0.198	0.111	65.817	0.000
6	0.146	0.042	70.357	0.000
7	0.247	0.108	83.327	0.000
8	0.388	0.254	115.67	0.000
9	0.305	0.167	135.75	0.000
10	-0.012	-0.203	135.78	0.000
11	0.083	-0.095	137.29	0.000
12	0.578	0.450	210.41	0.000
13	0.098	-0.282	212.53	0.000
14	0.027	0.111	212.69	0.000
15	0.236	-0.077	225.12	0.000
16	0.278	0.046	242.36	0.000
17	0.143	-0.012	246.97	0.000
18	0.073	0.012	248.16	0.000
19	0.174	0.065	255.03	0.000
20	0.291	0.002	274.32	0.000
21	0.160	-0.131	280.21	0.000
22	-0.077	-0.046	281.57	0.000
23	0.047	0.000	282.10	0.000
24	0.413	0.073	321.97	0.000
25	-0.004	-0.112	321.98	0.000
26	-0.046	-0.048	322.48	0.000
27	0.148	-0.004	327.70	0.000
28	0.148	-0.081	332.96	0.000
29	0.001	-0.030	332.96	0.000
30	-0.129	-0.177	336.95	0.000
31	0.025	0.019	337.10	0.000
32	0.165	-0.046	343.79	0.000
33	0.045	0.026	344.29	0.000
34	-0.134	0.016	348.73	0.000
35	-0.060	-0.083	349.62	0.000
36	0.255	0.096	365.92	0.000
37	-0.103	-0.040	368.61	0.000
38	-0.147	0.017	374.06	0.000
39	0.027	-0.022	374.25	0.000
40	0.067	-0.003	375.40	0.000
41	-0.043	-0.005	375.88	0.000
42	-0.157	0.040	382.28	0.000
43	-0.055	-0.091	383.05	0.000
44	0.059	0.047	383.96	0.000
45	-0.033	-0.019	384.24	0.000
46	-0.211	-0.059	396.13	0.000
47	-0.153	-0.028	402.40	0.000
48	0.171	0.094	410.24	0.000
49	-0.169	-0.060	417.94	0.000
50	-0.189	0.050	427.68	0.000
51	-0.025	-0.025	427.85	0.000
52	0.030	0.074	428.10	0.000
53	-0.075	0.029	429.66	0.000
54	-0.217	-0.090	442.86	0.000
55	-0.172	-0.124	451.24	0.000
56	-0.017	-0.004	451.33	0.000
57	-0.065	-0.006	452.53	0.000
58	-0.230	-0.015	467.70	0.000
59	-0.141	0.056	473.44	0.000
60	0.212	0.121	486.51	0.000

รูปที่ 6.2 แสดงค่า SAC และ SPAC ของอนุกรมเวลากำไรของบริษัทแห่งหนึ่ง

นอกจากนี้ อย่าลืมพิจารณาด้วยว่าอนุกรมเวลากำไรรายเดือนของบริษัทนี้มีรูปแบบของ ARMA(p,q) ผสมอยู่ด้วยหรือไม่ ซึ่งจากรูปที่ 6.2 พบว่า SAC ณ ช่วงเวลาล่าช้าอื่น ๆ เริ่มลดลงตั้งแต่ค่าความล่าช้าที่ 4 ส่วนค่า SPAC เริ่มลดลงตั้งแต่ค่าความล่าช้าที่ 3 และอิทธิพลความผันแปรทางฤดูกาลลดลง เรื่อย ๆ ดังนั้น เราอาจลองใช้แบบจำลอง ARMA(3,4)$(1,0)_{12}$ ซึ่งเขียนได้ดังนี้[6]

$$A(L^{12})\,\alpha(L)\,X_t \;=\; B(L^{12})\,\beta(L)\,\varepsilon_t$$

$$(1-\mathrm{A}_1 L^{12})(1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2-\alpha_3 L^3)\,X_t \;=\; (1-\beta_1 \mathrm{L}-\beta_2 L^2-\beta_3 L^3-\beta_4 L^4)\varepsilon_t$$

หลังจากที่เราทำขั้นตอนที่หนึ่งเสร็จเรียบร้อยแล้ว เราจะต้องทำขั้นตอนที่ 2 ต่อ ซึ่งก็คือการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง ARMA(3,4)$(1,0)_{12}$ ซึ่งสามารถใช้วิธีที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 นั่นเอง และจากนั้นเราต้องทำขั้นที่ 3 ก็คือ การตรวจสอบแบบจำลองที่ระบุได้ในขั้นที่ 1 ว่ามีความเหมาะสมหรือไม่ หากพบว่ายังไม่มีความเหมาะสม ก็ต้องกลับไปประบุแบบจำลองในขั้นตอนที่ 1 ใหม่อีกครั้ง ซึ่งจะไม่ขอกล่าวซ้ำอีก

6.2.2 แบบจำลองที่ใช้กับอนุกรมเวลาที่ความผันแปรทางฤดูกาลไม่มีความนิ่ง

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้ศึกษาแบบจำลองอนุกรมเวลาที่ความผันแปรทางฤดูกาลเกิดขึ้นชั่วคราว (หรือเรียกว่าความผันแปรทางฤดูกาลมีความนิ่ง[7]) แต่ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาถึงกรณีที่ความผันแปรทางฤดูกาลไม่หายไปหรือหายไปอย่างช้า ๆ (หรือเรียกว่าความผันแปรทางฤดูกาลไม่มีความนิ่ง[8]) ตัวอย่างเช่น ประเทศหนึ่งมีความไม่สงบทางการเมือง และมีการประท้วงเกิดขึ้นในช่วงไตรมาสที่ 2 ซึ่งทำให้ยอดขายของบริษัทลดลง ในปีต่อไปพบว่า การประท้วงมักจะเกิดขึ้นในช่วงไตรมาสที่ 2 อีก และเหตุการณ์ประท้วงดังกล่าวของประเทศนี้ดูเหมือนจะไม่หายไปง่าย ๆ นั่นคือ ยอดขายของบริษัทในไตรมาสที่ 2 จะถูกกระทบจากเหตุการณ์นี้ไปเรื่อย ๆ เช่นกัน เราจึงกล่าวได้ว่า

---

[6] จากแบบจำลอง ARMA(3,4)$(1,0)_{12}$ บอกเราว่า $p = 3$ และ $q = 4$ นั่นคือจะได้ $\alpha(L) = 1-\alpha_1 L-\alpha_2 L^2-\alpha_3 L^3$ และ $\beta(L) = 1-\beta_1 L-\beta_2 L^2-\beta_3 L^3-\beta_4 L^4$ ตามลำดับ นอกจากนี้แบบจำลองดังกล่าวยังบอกเราอีกว่า ช่วงเวลาของฤดูกาล (s) คือ 12 ส่วน $P = 1$ และ $Q = 0$ นั่นคือ $A(L^{12}) = 1-\mathrm{A}_1 L^{12}$ และ $\mathrm{B}(L^{12}) = 1$

[7] ภาษาอังกฤษใช้คำว่า Stationary Seasonal Process

[8] ภาษาอังกฤษใช้คำว่า Nonstationary Seasonal Process

ความผันแปรทางฤดูกาลมีลักษณะ**ไม่นิ่ง** เมื่อกรณีนี้เกิดขึ้น เราอาจใช้วิธีการหาผลต่างของฤดูกาล (Seasonal Differencing)[9] เพื่อให้อนุกรมเวลามีความนิ่งเสียก่อน โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$\mathrm{A}(L^s)\alpha(L)\,\Delta_s^D X_t = \mathrm{B}(L^s)\,\beta(L)\,\varepsilon_t \qquad (6.21)$$

โดยที่ D คือดีกรีในการทำการทำผลต่างของฤดูกาล[10]

$A(L^s) = 1 - A_1L^s - A_2L^{2s} - \ldots - A_PL^{Ps}$

$B(L^s) = 1 - B_1L^s - B_2L^{2s} - \ldots - B_QL^{Qs}$

$\alpha(L) = 1 - \alpha_1L - \alpha_2L^2 - \ldots\ \alpha_pL^p$

$\beta(L) = 1 - \beta_1L - \beta_2L^2 - \ldots\ \beta_qL^q$

เราลองมาดูตัวอย่างการเขียนสมการตามแบบจำลอง (6.21) ดังนี้

ถ้ากำหนดให้ $p = 0$, $q = 0$, $D = 1$, $P = 0$, $Q = 1$ และ $s = 4$ จากข้อมูลดังกล่าวเราจะได้ $\alpha(L) = 1$, $\beta(L) = 1$, $A(L^4) = 1$ และ $B(L^4) = 1 - B_1L^4$ แบบจำลองตามสมการที่ (6.21) เขียนได้ดังนี้

$$\Delta_4^1 X_t = (1 - B_1L^4)\,\varepsilon_t$$

หรือ $X_t - X_{t-4} = \varepsilon_t - B_1\varepsilon_{t-4}$

และถ้ากำหนดให้ $p = 0$, $q = 0$, $D = 2$, $P = 0$, $Q = 2$ และ $s = 4$ สมการที่ (6.21) จะเขียนได้ดังนี้

$$\Delta_4^2 X_t = (1 - B_1L - B_2L^{2(4)})\varepsilon_t$$

$$(1 - L^4)^2 \mathrm{X_t} = (1 - B_1L^4 - B_2L^8)\,\varepsilon_t$$

หรือ $X_t - 2X_{t-4} + X_{t-8} = \varepsilon_t - B_1\varepsilon_{t-4} - B_2\varepsilon_{t-8}$

นอกจากนี้ ในทางปฏิบัติแม้ว่าความไม่นิ่งของอนุกรมเวลาที่มีสาเหตุมาจากความผันแปรทางฤดูกาลได้ถูกกำจัดจากการใช้ผลต่างของฤดูกาลแล้ว แต่อนุกรมเวลานั้นอาจแสดงให้เห็นว่ายังมี

[9] วิธีการหาผลต่างของฤดูกาล สามารถกำจัดความผันแปรทางฤดูกาลทั้งกรณีที่เป็นแบบกำหนดได้และกรณีที่เป็นแบบสุ่ม

[10] โดยที่ $\Delta_s^D X_t = (1 - L^s)^D X_t$ เช่น ถ้า $D = 2$ จะได้ $\Delta_s^2 X_t = (1 - L^s)^2 X_t = (1 - 2L^s + L^{2s})X_t = X_t - 2X_{t-s} + X_{t-2s}$

ความไม่นิ่งอยู่อีก ในกรณีนี้เราจะต้องกำจัดความไม่นิ่งนี้ต่อไปอีกด้วยวิธีการหาผลต่างลำดับที่ d หรือเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$A(L^s)\alpha(L)\Delta^d\Delta_s^D X_t = B(L^s)\,\beta(L)\,\varepsilon_t \qquad (6.22)$$[11]

เราจะเรียกแบบจำลองตามสมการที่ (6.22) ว่าแบบจำลอง Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average ลำดับที่ $(p, d, q)\times(P, D, Q)_s$ หรือเขียนสั้นว่า **Seasonal ARIMA $(p, d, q)(P, D, Q)_s$ หรือ Seasonal ARIMA $(p, d, q)\times(P, D, Q)_s$** ก็ได้

สำหรับวิธีการเขียนสมการของแบบจำลอง Seasonal ARIMA $(p,d, q)\times(P, D, Q)_s$ มีวิธีคล้ายกับที่ได้อธิบายไปเมื่อครู่นี้ เช่น ถ้ากำหนดให้ $p = 0$, $d = 1$, $q = 0$, $D = 1$, $P = 0$, $Q = 1$ และ $s = 12$ แล้วแบบจำลอง Seasonal ARIMA $(0, 1, 0)\times(0, 1, 1)_{12}$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\Delta\Delta_{12}^1 X_t = (1-B_1L^{12})\,\varepsilon_t$$

หรือ $$(1-L)(1-L^{12})X_t = (1-B_1L^{12})\,\varepsilon_t$$

และถ้ากำหนดให้ $p = 0$, $d = 2$, $q = 0$, $D = 2$, $P = 0$, $Q = 2$ และ $s = 12$ แล้วแบบจำลอง Seasonal ARIMA $(0, 2, 0)\times(0, 2, 2)_{12}$ เขียนได้ดังนี้

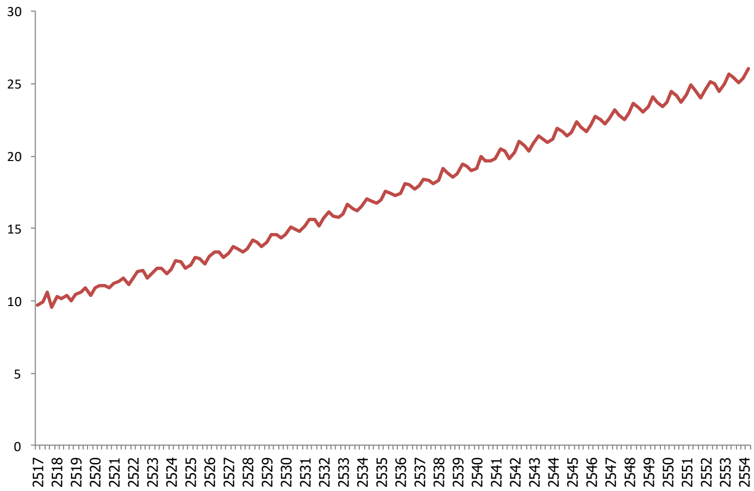
$$\Delta^2\Delta_{12}^2 X_t = (1-B_1L^{12}-B_2L^{24})\,\varepsilon_t$$

หรือ $$(1-L)^2(1-L^{12})^2 X_t = (1-B_1L^{12}-B_2L^{24})\,\varepsilon_t$$

ตอนนี้ เราจะมาดูตัวอย่างการวิเคราะห์แบบจำลองอนุกรมเวลาที่ความผันแปรทางฤดูกาลไม่มีความนิ่ง กำหนดให้ X_t คืออนุกรมเวลามูลค่าการส่งออกรายไตรมาสของบริษัทหนึ่ง (ล้านบาท) ตั้งแต่ไตรมาสที่ 1 ของปี 2517–ไตรมาสที่ 2 ของปี 2554 ซึ่งแสดงในรูปที่ 6.3

---

[11] เราอาจสลับที่ Δ^d กับ Δ_s^D ก็ได้ ซึ่งแสดงได้ดังนี้ $A(L^s)\alpha(L)\Delta_s^D\Delta^d X_t = B(L^s)\,\beta(L)\,\varepsilon_t$

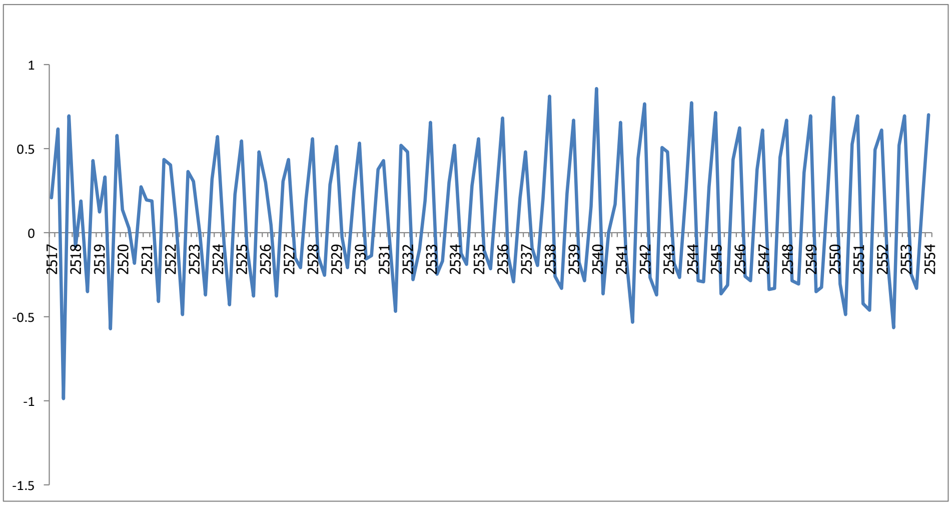


รูปที่ 6.3 แสดงมูลค่าการส่งออกสินค้ารายไตรมาสของบริษัทหนึ่ง (ล้านบาท)

จากรูปดังกล่าว มูลค่าการส่งออกสินค้ารายไตรมาสของบริษัทนี้มีแนวโน้มที่เพิ่มขึ้น เรื่อย ๆ และเมื่อพิจารณาค่า SAC ของอนุกรมเวลาดังกล่าว (ดูรูปที่ 6.4) ทำให้เราสรุปได้ว่าค่า TAC มีนัยสำคัญทางสถิติตั้งแต่ช่วงเวลาที่ 1–30 และแสดงลักษณะที่ลดลงอย่างช้า ๆ นั่นคืออนุกรมเวลามูลค่าการส่งออกสินค้ารายไตรมาสของบริษัทนี้ไม่มีความนิ่ง และเพื่อให้ได้อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง เราจะคำนวณผลต่างลำดับที่หนึ่งของอนุกรมเวลาดังกล่าวหรือเขียนแทนด้วย ΔX_t ซึ่งแสดงในรูปที่ 6.5

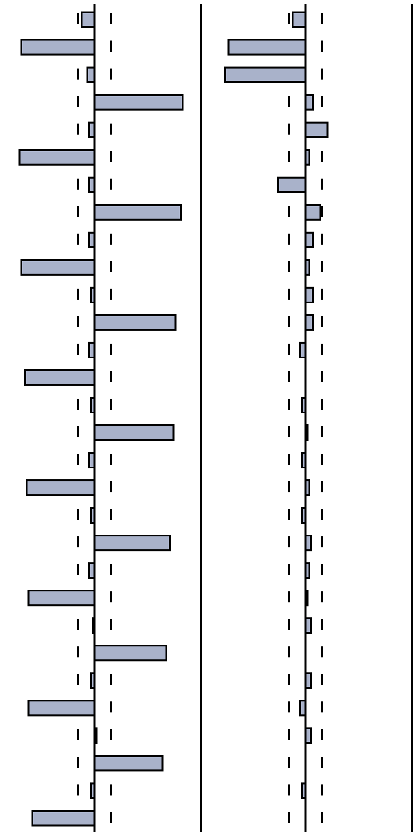
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.977	0.977	146.04	0.000
		2	0.956	0.046	286.98	0.000
		3	0.943	0.135	424.77	0.000
		4	0.925	-0.060	558.50	0.000
		5	0.903	-0.117	686.69	0.000
		6	0.882	-0.010	809.82	0.000
		7	0.867	0.106	929.67	0.000
		8	0.850	-0.026	1045.7	0.000
		9	0.827	-0.101	1156.3	0.000
		10	0.806	-0.014	1262.1	0.000
		11	0.792	0.093	1364.9	0.000
		12	0.774	-0.025	1464.0	0.000
		13	0.752	-0.087	1558.0	0.000
		14	0.731	-0.022	1647.5	0.000
		15	0.715	0.064	1733.9	0.000
		16	0.698	0.000	1816.8	0.000
		17	0.675	-0.084	1895.0	0.000
		18	0.655	-0.016	1969.0	0.000
		19	0.639	0.044	2040.1	0.000
		20	0.622	0.003	2107.8	0.000
		21	0.599	-0.069	2171.2	0.000
		22	0.579	-0.014	2230.8	0.000
		23	0.563	0.036	2287.8	0.000
		24	0.546	0.001	2341.8	0.000
		25	0.523	-0.061	2391.8	0.000
		26	0.503	-0.026	2438.3	0.000
		27	0.488	0.032	2482.4	0.000
		28	0.470	0.004	2523.8	0.000
		29	0.448	-0.058	2561.6	0.000
		30	0.428	-0.017	2596.4	0.000

รูปที่ 6.4 แสดงค่า SAC และ SPAC ของมูลค่าการส่งออกสินค้ารายไตรมาสของบริษัทหนึ่ง



รูปที่ 6.5 แสดงผลต่างลำดับที่หนึ่งของมูลค่าการส่งออกสินค้ารายไตรมาสของบริษัทหนึ่ง (หรือ ΔX_t)

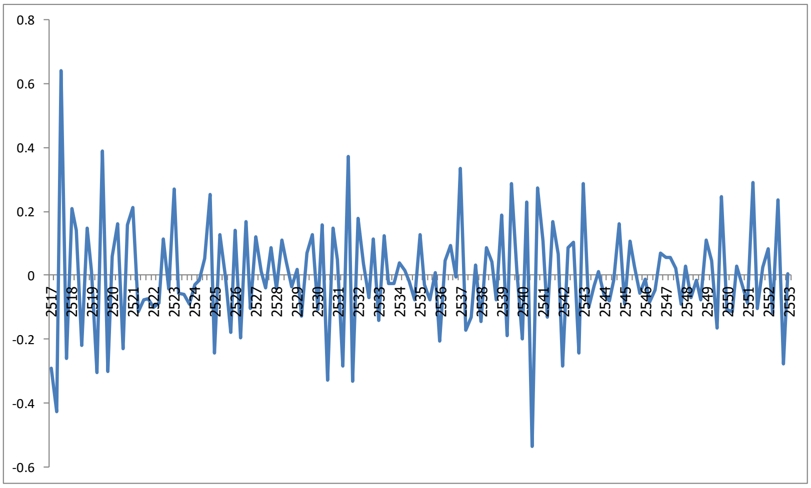
และเพื่อให้ทราบว่า อนุกรมเวลา ΔX_t มีความผันแปรทางฤดูกาลหรือไม่ และความผันแปรทางฤดูกาลมีลักษณะที่นิ่งหรือไม่นิ่ง เราต้องใช้ค่า SAC ของ ΔX_t ในการพิจารณา ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 6.6



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.134	-0.134	2.7500	0.097
		2	-0.723	-0.755	82.820	0.000
		3	-0.066	-0.801	83.490	0.000
		4	0.858	0.076	197.63	0.000
		5	-0.057	0.213	198.13	0.000
		6	-0.731	0.032	282.29	0.000
		7	-0.062	-0.263	282.89	0.000
		8	0.848	0.155	397.54	0.000
		9	-0.062	0.080	398.17	0.000
		10	-0.717	0.032	481.33	0.000
		11	-0.034	0.075	481.52	0.000
		12	0.789	0.067	583.72	0.000
		13	-0.051	-0.057	584.15	0.000
		14	-0.693	-0.004	664.26	0.000
		15	-0.034	-0.043	664.45	0.000
		16	0.769	0.009	764.38	0.000
		17	-0.057	-0.045	764.93	0.000
		18	-0.666	0.032	841.14	0.000
		19	-0.028	-0.028	841.28	0.000
		20	0.741	0.052	937.03	0.000
		21	-0.056	0.036	937.58	0.000
		22	-0.651	0.015	1012.6	0.000
		23	-0.010	0.058	1012.6	0.000
		24	0.699	0.006	1100.6	0.000
		25	-0.044	0.041	1101.0	0.000
		26	-0.647	-0.057	1177.4	0.000
		27	0.016	0.043	1177.5	0.000
		28	0.663	-0.004	1259.1	0.000
		29	-0.048	-0.029	1259.6	0.000
		30	-0.619	0.004	1331.9	0.000

รูปที่ 6.6 แสดงค่า SAC และ SPAC ของ ΔX_t

จากรูปดังกล่าว ทำให้เราสรุปได้ว่า ค่า TAC มีนัยสำคัญที่ lag 4, 8, 12 และลดลงช้ามาก นั่นคือ อนุกรมเวลานี้มีอิทธิพลของความผันแปรทางฤดูกาล โดยมีช่วงเวลาของฤดูกาล (s) คือ 4 และความผันแปรทางฤดูกาลนี้ไม่นิ่ง ดังนั้น ในกรณีนี้เราควรทำผลต่างฤดูกาลต่อไปอีก หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $\Delta_4\Delta X_t$



รูปที่ 6.7 แสดงอนุกรมเวลา $\Delta_4\Delta X_t$

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.550	-0.550	44.777	0.000
		2	0.080	-0.319	45.729	0.000
		3	0.240	0.196	54.406	0.000
		4	-0.502	-0.367	92.570	0.000
		5	0.278	-0.305	104.32	0.000
		6	-0.056	-0.179	104.81	0.000
		7	-0.089	-0.058	106.04	0.000
		8	0.171	-0.169	110.61	0.000
		9	-0.056	-0.067	111.11	0.000
		10	-0.010	-0.047	111.12	0.000
		11	0.052	-0.026	111.55	0.000
		12	-0.040	0.005	111.81	0.000
		13	-0.018	0.021	111.86	0.000
		14	-0.010	-0.069	111.87	0.000
		15	0.013	-0.017	111.90	0.000
		16	-0.057	-0.086	112.43	0.000
		17	0.020	-0.165	112.49	0.000
		18	0.098	0.004	114.11	0.000
		19	-0.099	-0.015	115.77	0.000
		20	0.100	-0.032	117.49	0.000
		21	-0.070	-0.139	118.33	0.000
		22	0.058	0.170	118.92	0.000
		23	-0.068	-0.002	119.74	0.000
		24	0.012	-0.005	119.77	0.000
		25	0.011	-0.029	119.79	0.000
		26	-0.057	0.043	120.38	0.000
		27	0.120	0.065	122.99	0.000
		28	-0.073	0.063	123.96	0.000
		29	0.027	0.020	124.09	0.000
		30	0.016	-0.004	124.14	0.000
		31	-0.091	-0.027	125.68	0.000
		32	0.040	-0.074	125.99	0.000
		33	0.025	0.001	126.10	0.000
		34	-0.058	-0.014	126.75	0.000
		35	0.081	-0.005	128.01	0.000
		36	0.011	0.034	128.03	0.000

รูปที่ 6.8 แสดงค่า SAC และ SPAC ของ $\Delta_4\Delta X_t$

รูปที่ 6.7 แสดงอนุกรมเวลา $\Delta_4\Delta X_t$ และรูปที่ 6.8 แสดงค่า SAC และค่า SPAC[12] ของอนุกรมเวลาดังกล่าว จากรูปทั้งสองเราสรุปได้ว่า ความผันแปรทางฤดูกาลที่อยู่ในอนุกรม $\Delta_4\Delta X_t$ เป็นแบบชั่วคราวคือเกิดขึ้นที่ 4 ช่วงเวลาที่แล้วเท่านั้น[13] และเมื่อพิจารณาค่า SAC ของ $\Delta_4\Delta X_t$ ณ ช่วงเวลาที่ 4, 8, 12, … พบว่า มีค่าสิ้นสุดหลังช่วงเวลาที่ 4 เป็นต้นไป ส่วนค่า SPAC ของ $\Delta_4\Delta X_t$ ณ ช่วงเวลาที่ 4, 8, 12, … ก็พบว่า มีค่าสิ้นสุดหลังช่วงเวลาที่ 4 เป็นต้นไป นั่นคือเราอาจลองเลือกลำดับ $(P, Q) = (1,1)$

ต่อมาเราควรพิจารณาด้วยว่าอนุกรมเวลา $\Delta_4\Delta X_t$ ควรมีรูปแบบ ARMA(p, q) อยู่ด้วยหรือไม่ ซึ่งพิจารณาได้จากค่า SAC และ SPAC ของ $\Delta_4\Delta X_t$ ณ ช่วงเวลาที่ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, … (โดยไม่พิจารณา SAC ณ ช่วงเวลา 4, 8, 12 เพราะพิจารณาจากในรูปความผันแปรทางฤดูกาลไปแล้ว) ซึ่งพบว่า SAC มีค่าสิ้นสุดหลังช่วงเวลาที่ 1 (ช่วงเวลาที่ 2 ไม่มีนัยสำคัญ แม้ว่าช่วงเวลาที่ 3 จะมีนัยสำคัญก็ตามแต่ มีนัยสำคัญเล็กน้อย ซึ่งไม่ชัดเจนเหมือน lag ที่ 1) ส่วนค่า SPAC ของ $\Delta_4\Delta X_t$ ณ ช่วงเวลาที่ 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, … (ไม่ต้องมองที่ช่วงเวลาที่ 4, 8, 12, …) พบว่าลดลงอย่างรวดเร็ว เราจึงควรลองเลือก $(p,q) = (0,1)$

กล่าวโดยสรุป ลำดับที่เราควรลองเลือกคือ $(P,Q) = (1,1)$ และ $(p,q) = (0,1)$ และเนื่องจากเรากำลังพิจารณาอนุกรมเวลา $\Delta_4\Delta X_t$ ไปประยุกต์ใช้กับแบบจำลองของ Box-Jenkins นั่นคือเราจะมีค่า $d = 1$, $D = 1$, $s = 4$ ดังนั้น ในขั้นที่ 1 แบบจำลองที่ระบุได้คือ Seasonal ARIMA$(0,1,1)\times(1,1,1)_4$ นั่นเอง และอย่าลืมว่าหลังจากประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองนี้แล้ว เราต้องทำการตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองดังที่ได้เคยศึกษาไว้แล้วในบทที่ 4 ด้วย

---

[12] อย่าลืมว่าเราคำนวณค่า SAC ขึ้นมาเพื่อใช้เป็นตัวประมาณค่า TAC

[13] ซึ่งสังเกตจากค่า TAC ณ 4 ช่วงเวลาที่แล้ว มีนัยสำคัญทางสถิติ

บทที่ 7
การพยากรณ์

ในบทนี้ เราจะมาศึกษาถึงการใช้แบบจำลอง Box-Jenkins ในการพยากรณ์อนุกรมเวลา ดังนั้นก่อนอื่น เราควรที่จำมาทราบถึงแนวคิดในการพยากรณ์ว่ามีหลักเกณฑ์อย่างไรเสียก่อนซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อที่หนึ่ง จากนั้นเราจะนำแนวคิดดังกล่าวมาใช้พยากรณ์ข้อมูลด้วยแบบจำลองของ ARMA ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อที่สอง และท้ายสุดจะกล่าวถึงการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARIMA รายละเอียดแต่ละหัวข้อมีดังต่อไปนี้

7.1 แนวคิดในการพยากรณ์

กำหนดให้เซตของข้อมูลอนุกรมเวลาที่เราทราบค่าคือ $\{X_T, X_{T-1}, X_{T-2}, \ldots, X_1\}$ ซึ่งจะเรียกรวมว่า ข่าวสารที่มีอยู่ ณ ช่วงเวลาที่ T (จะใช้ตัวย่อว่า I_T : Information available at period T) ค่าพยากรณ์ของอนุกรมเวลานี้ล่วงหน้าไป h ช่วงเวลาคำนวณจากค่าคาดหวังของ X_{T+h} ภายใต้เงื่อนไขของการมีข่าวสาร ณ ช่วงเวลาที่ T (I_T) ซึ่งเขียนในรูปสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(h) &= \mathrm{E}(X_{T+h}|I_T) \\ &= \mathrm{E}(X_{T+h}|\, X_1, X_2, \ldots, X_T) \qquad (7.1) \end{aligned}$$

การใช้ค่าพยากรณ์ตามสมการที่ (7.1) จะทำให้ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดจากการพยากรณ์ยกกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด (Minimum Means Square Error (MSE) Forecasting)[1] ซึ่งจะเป็นแนวคิดการพยากรณ์ที่จะนำไปใช้กับแบบจำลองของ Box–Jenkins ส่วนค่าความผิดพลาดจากการใช้สมการที่ (7.1) ในการพยากรณ์ จะคำนวณจากสมการดังต่อไปนี้

---

[1] สำหรับผู้สนใจวิธีนี้ อ่านวิธีพิสูจน์ได้ใน Cryer, J. D. and K. Chan, *Time Series Analysis with Applications in R*, 2nd edition. (Springer Science+Business Media, LLC, 2008), pp. 218–220.

$$e_T(h) \quad = X_{T+h} - \hat{X}_{T+h} \tag{7.2}$$

และความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการใช้สมการที่ (7.1) ในการพยากรณ์ คำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$\text{Var}(e_T(h)) = \text{Var}(X_{T+h} - \hat{X}_{T+h}) \tag{7.3}$$

7.2 การพยากรณ์อนุกรมเวลาด้วยแบบจำลอง ARMA

เพื่อให้เข้าใจได้ง่าย ในหัวข้อนี้จะเริ่มจากการใช้แบบจำลอง AR(1) ในการพยากรณ์ จากนั้นจะกล่าวถึงการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง MA(1) การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARMA(1,1) และท้ายสุดจะเป็นการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARMA(p,q) รายละเอียดแต่ละหัวข้อเป็นดังนี้

7.2.1 การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง AR(1)

เราทราบแล้วว่า แบบจำลอง AR(1) เขียนได้ดังรูปต่อไปนี้

$$X_t \quad = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \text{โดยที่ } t = 1, 2, \ldots, T$$

ถ้าเราพิจารณา ณ ช่วงเวลาที่ T แบบจำลอง AR(1) จะกลายเป็น

$$X_T \quad = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T-1} + \varepsilon_T \tag{7.4}$$

อย่าลืมว่า ตอนนี้เราทราบค่า $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (หรือเขียนแทนด้วย I_T)

- **การพยากรณ์ 1 ช่วงเวลา ล่วงหน้า** (1- step ahead forecast)

จากสมการที่ (7.4) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + 1$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+1} \quad = \alpha_0 + \alpha_1 X_T \quad + \varepsilon_{T+1} \tag{7.5}$$

ค่าพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (1- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(1) &= \text{E}(X_{T+1} | I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \text{E}(X_T | I_T) + \text{E}(\varepsilon_{T+1} | I_T) \end{aligned} \tag{7.6}$$

เนื่องจาก $I_T = \{X_1, X_2, \ldots, X_T\}$ ซึ่งเป็นข่าวสารที่เราทราบค่าแล้ว ดังนั้น X_T เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง (ไม่ใช่ตัวแปรสุ่มแล้ว) แต่เนื่องจากเรายังไม่ทราบข่าวสาร ณ ช่วงเวลาที่ T+1 ดังนั้น ε_{T+1} ยังถือเป็นตัวแปรสุ่มที่มีคุณสมบัติเช่นเดิมคือเป็นตัวรบกวนขาว[2] ดังนั้น สมการที่ (7.6) จะเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_T(1) = \alpha_0 + \alpha_1 X_T \tag{7.7}$$

ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (1-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} e_T(1) &= X_{T+1} - \hat{X}_T(1) \\ &= \varepsilon_{T+1} \end{aligned} \tag{7.8}$$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้าคือ

$$\mathrm{Var}(e_T(1)) = \mathrm{Var}[\varepsilon_{T+1}] = \sigma^2 \tag{7.9}$$

- **การพยากรณ์ 2 ช่วงเวลา ล่วงหน้า** (2- step ahead forecast)

  จากสมการที่ (7.4) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + 2$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+2} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \tag{7.10}$$

ค่าพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า (2- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(2) &= \mathrm{E}(X_{T+2} | I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_{T+1} | I_T) + \mathrm{E}(\varepsilon_{T+2} | I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \hat{X}_T(1) \end{aligned} \tag{7.11}$$

ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า (2-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} e_T(2) &= X_{T+2} - \hat{X}_T(2) \\ &= \alpha_1\left(X_T - \hat{X}_T(1)\right) + \varepsilon_{T+2} \quad = \alpha_1 e_T(1) + \varepsilon_{T+2} \\ &= \alpha_1 \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \end{aligned} \tag{7.12}$$

[2] นั่นคือ ε_{T+1} มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ความแปรปรวนคงที่ σ^2 และเป็นอิสระกับค่าของมันเอง ณ ช่วงเวลาอื่น ๆ (ε_{T+S} , $s \neq 0$)

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้าคือ

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(e_T(2)) &= Var(\alpha_1\varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}) \\ &= \alpha_1^2 Var(\varepsilon_{T+1}) + Var(\varepsilon_{T+2}) + 2\alpha_1 Cov(\varepsilon_{T+1}, \varepsilon_{T+2})\end{aligned}$$

จากคุณสมบัติที่ว่า ε_t เป็นตัวรบกวนขาว ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\mathrm{Var}(e_T(2)) = (\alpha_1^2 + 1)\sigma^2 \qquad (7.13)$$

- **การพยากรณ์ *j* ช่วงเวลาล่วงหน้า** (*j*- step ahead forecast)

  จากสมการที่ (7.4) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + j$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+j} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+(j-1)} + \varepsilon_{T+j} \qquad (7.14)$$

ค่าพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า (*j*- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\hat{X}_T(j) &= \mathrm{E}(X_{T+j}|\, I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\mathrm{E}(X_{T+(j-1)}\,|\, I_T) + \mathrm{E}(\varepsilon_{T+j}|\, I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\hat{X}_T(j-1) \qquad (7.15)\end{aligned}$$

และเมื่อ $j \rightarrow \infty$ แล้วค่าพยากรณ์จะคำนวณจากสมการต่อไปนี้[3]

$$\hat{X}_T(j) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \qquad (7.16)$$

สมการที่ (7.16) แสดงให้เราทราบว่า เมื่อเราพยากรณ์ไปข้างหน้าไกลขึ้นเรื่อย ๆ ค่าพยากรณ์จะเข้าใกล้ค่า $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} = \mathrm{E}(X_t)$ ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ AR(1) นั่นเอง ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า (*j*-step ahead forecast error) และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้[4]

$$e_T(j) = \alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots + \alpha_1\varepsilon_{T+j-1} + \varepsilon_{T+j} \qquad (7.17)$$

$$\mathrm{Var}(e_T(j)) = \left(\alpha_1^{2(j-1)} + \alpha_1^{2(j-2)} + \cdots + \alpha_1^2 + 1\right)\sigma^2 \qquad (7.18)$$

---

[3] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 7ก

[4] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 7ข

และเมื่อ $j \to \infty$ แล้วค่าความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์แสดงได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(e_T(j)) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}$$

นั่นคือ ถ้าเราพยากรณ์ล่วงหน้าไกลขึ้นเรื่อย ๆ จะพบว่าค่าความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง AR(1) จะสูงขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไรก็ดี หากอนุกรมเวลา X_t มีความนิ่ง ($|\alpha_1| < 1$) ความแปรปรวนนี้จะลู่เข้าหาค่าคงที่ $\frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2}$ ซึ่งก็คือความแปรปรวนของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ AR(1) นั่นเอง

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น สมมุติให้แบบจำลองที่เหมาะสมในการประยุกต์ใช้กับอนุกรมเวลาอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยรายเดือนของประเทศหนึ่งคือแบบจำลอง AR(1) ซึ่งเขียนได้ดังสมการที่ (7.19) ดังนี้

$$\hat{Y}_t = 0.669\, Y_{t-1} \qquad , t = 1, 2, \ldots, 102 \qquad (7.19)$$

t- statistics (9.154)***

AIC = 2.390 SCB =2.416

RSS (Residual Sum of Square) = 63.277[5]

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 1

และถ้าข้อมูลสุดท้ายที่ใช้ค่าพารามิเตอร์ของสมการที่ (7.19) คือ $Y_{102} = 1\%$ ดังนั้น เราจะได้ค่าพยากรณ์อัตราเงินเฟ้อเฉลี่ยรายเดือนของประเทศนี้ ในเดือนที่ 103, 104 และ105 แสดงได้ดังนี้

$$\hat{Y}_{103} = \hat{Y}_{102}(1) = 0.669Y_{102} = 0.669(1\%) = 0.669\%$$

$$\hat{Y}_{104} = \hat{Y}_{102}(2) = 0.669\hat{Y}_{102}(1) = 0.669(0.669\%) = 0.448\%$$

$$\hat{Y}_{105} = \hat{Y}_{102}(3) = 0.669\hat{Y}_{102}(2) = 0.669(0.448\%) = 0.3\%$$

---

[5] $\mathrm{RSS} = \sum_{t=2}^{102}(Y_t - \hat{Y}_t)$ เราต้องเริ่มคำนวณตั้งแต่ $t = 2$ เนื่องจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง AR(1) ต้องเริ่มใช้ข้อมูลตั้งแต่ตัวที่ 2 เป็นต้นไป ดังนั้น จำนวนข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่า AR(1) คือ 101 (N = 101)

เนื่องจาก $s^2 = \frac{RSS}{N\text{-}K} = \frac{63.277}{101\text{-}1} = 0.633$ (N คือจำนวนข้อมูลที่ใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง AR(1) และ K คือจำนวนพารามิเตอร์ในแบบจำลอง AR(1)) ตัวประมาณค่าความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1, 2 และ 3 ช่วงเวลาล่วงหน้าคำนวณได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(e_{102}(1)) = s^2 = 0.633$$

$$\mathrm{Var}(e_{102}(2)) = (\hat{\alpha}_1^2 + 1)s^2 = (0.669^2 + 1)(0.633) = 0.916$$

$$\mathrm{Var}(e_{102}(3)) = (\hat{\alpha}_1^4 + \hat{\alpha}_1^2 + 1)s^2 = (0.669^4 + 0.669^2 + 1)(0.633) = 1.043$$

หรือเรากล่าวได้ว่า ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1, 2 และ 3 ช่วงเวลาล่วงหน้า คำนวณได้ดังนี้

$$S.E.(e_{102}(1)) = \sqrt{Var(e_{102}(1))} = \sqrt{0.633} = 0.796$$

$$S.E.(e_{102}(2)) = \sqrt{Var(e_{102}(2))} = \sqrt{0.916} = 0.957$$

$$S.E.(e_{102}(3)) = \sqrt{Var(e_{102}(3))} = \sqrt{1.043} = 1.021$$

7.2.2 การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง MA(1)

เราทราบแล้วว่า แบบจำลอง MA(1) เขียนได้ดังรูปต่อไปนี้

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} \quad \text{โดยที่ } t = 1, 2, \ldots, T$$

ถ้าเราพิจารณา ณ ช่วงเวลาที่ T แบบจำลอง MA(1) จะกลายเป็น

$$X_T = \beta_0 + \varepsilon_T - \beta_1\varepsilon_{T-1} \tag{7.20}$$

อย่าลืมว่าตอนนี้เราทราบค่า $X_1, X_2, \ldots, X_T$ และทราบค่า $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$ (หรือเขียนแทนด้วย I_T) ดังนั้น $I_T = \{X_1, \ldots, X_T, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T\}$

- **การพยากรณ์ 1 ช่วงเวลา ล่วงหน้า** (1- step ahead forecast)

จากสมการที่ (7.20) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T+1$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+1} = \beta_0 + \varepsilon_{T+1} - \beta_1\varepsilon_T \qquad (7.21)$$

ค่าพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (1- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(1) &= E(X_{T+1} | I_T) \\ &= \beta_0 + E(\varepsilon_{T+1}|I_T) - \beta_1 E(\varepsilon_T | I_T) \qquad (7.22) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $I_T = \{X_1,\ldots, X_T, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T\}$ ซึ่งเป็นข่าวสารที่เราทราบค่าแล้ว ดังนั้น ε_T ไม่ถือเป็นตัวแปรสุ่ม แต่ ε_{T+1} เป็นตัวแปรสุ่มที่มีคุณสมบัติเช่นเดิมคือเป็นตัวรบกวนขาว ดังนั้น สมการที่ (7.22) จะเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_T(1) = \beta_0 - \beta_1\varepsilon_T \qquad (7.23)$$

ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (1-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} e_T(1) &= X_{T+1} - \hat{X}_T(1) \\ &= \varepsilon_{T+1} \qquad (7.24) \end{aligned}$$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้าคำนวณได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(e_T(1)) = \mathrm{Var}[\varepsilon_{T+1}] = \sigma^2 \qquad (7.25)$$

- **การพยากรณ์ 2 ช่วงเวลา ล่วงหน้า** (2- step ahead forecast)

จากสมการที่ (7.20) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T+2$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+2} = \beta_0 + \varepsilon_{T+2} - \beta_1\varepsilon_{T+1} \qquad (7.26)$$

ค่าพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า (2- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(2) &= E(X_{T+2} | I_T) \\ &= \beta_0 + E(\varepsilon_{T+2}|I_T) - \beta_1 E(\varepsilon_{T+1} | I_T) \qquad (7.27) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $I_T = \{X_1, \ldots, X_T, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T\}$ ซึ่งเป็นข่าวสารที่เราทราบค่าแล้ว ดังนั้น ε_{T+1} และ ε_{T+2} คือตัวแปรสุ่มที่มีคุณสมบัติเช่นเดิมคือเป็นตัวรบกวนขาว ดังนั้น สมการที่ (7.27) จะเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_T(2) = \beta_0 \tag{7.28}$$

ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า (2-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} e_T(2) &= X_{T+2} - \hat{X}_T(2) \\ &= \varepsilon_{T+2} - \beta_1 \varepsilon_{T+1} \end{aligned} \tag{7.29}$$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้าคำนวณได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(e_T(2)) = (1+\beta_1^2)\,\sigma^2 \tag{7.30}$$

ซึ่งสมการที่ (7.30) ก็คือความแปรปรวนของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) นั่นเอง

- **การพยากรณ์ *j* ช่วงเวลา ล่วงหน้า** (*j*- step ahead forecast)

จากสมการที่ (7.20) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + j$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+j} = \beta_0 + \varepsilon_{T+j} - \beta_1 \varepsilon_{T+(j-1)} \tag{7.31}$$

ค่าพยากรณ์ *j* ช่วงเวลาล่วงหน้า (*j*- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(j) &= \mathrm{E}(X_{T+j} \mid I_T) \\ &= \beta_0 + \mathrm{E}(\varepsilon_{T+j} \mid I_T) - \beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{T+(j-1)} \mid I_T) \end{aligned} \tag{7.32}$$

เนื่องจาก $I_T = \{X_1, \ldots, X_T, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T\}$ ซึ่งเป็นข่าวสารที่เราทราบค่าแล้ว ดังนั้น ε_{T+j} และ $\varepsilon_{T+(j-1)}$ คือตัวรบกวนขาว ดังนั้น สมการ (7.32) จะเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_T(j) = \beta_0 \tag{7.33}$$

ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ *j* ช่วงเวลาล่วงหน้า (*j*-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} e_T(j) &= X_{T+j} - \hat{X}_T(j) \\ &= \varepsilon_{T+j} - \beta_1 \varepsilon_{T+(j-1)} \end{aligned} \tag{7.34}$$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้าคำนวณได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(e_T(j)) = (1+\beta_1^2)\ \sigma^2 \tag{7.35}$$

จากสมการที่ (7.28) และ (7.33) แสดงให้เห็นว่า อนุกรมเวลาที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) จะมีค่าพยากรณ์ตั้งแต่ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้าเป็นต้นไป ($j \geq 2$) คงที่เท่ากับ β_0 ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลาตามแบบจำลอง MA(1) นั่นเอง และจากสมการที่ (7.30) และ (7.35) กล่าวได้ว่า อนุกรมเวลาที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) จะมีความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์คงที่เท่ากับ $(1+\beta_1^2)\sigma^2$ ซึ่งก็คือความแปรปรวนของแบบจำลอง MA(1) นั่นเอง

เมื่อใช้วิธีเดียวกันนี้ในการพยากรณ์อนุกรมเวลาที่อยู่ในรูป MA(q) จะได้ข้อสรุปคล้ายกัน คือ เมื่อเราพยากรณ์ไกลออกไปคือตั้งแต่ช่วงเวลาที่ q+1 เป็นต้นไป จะพบว่าค่าพยากรณ์คือค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลาตามแบบจำลอง MA(q) นั่นเอง (ซึ่งก็คือ β_0) และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์จะมีค่าเท่ากับความแปรปรวนของแบบจำลอง MA(q) นั่นเอง $\Big($ซึ่งก็คือ $\left(1+\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_q^2\right)\sigma^2\Big)$

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น สมมุติให้แบบจำลองที่เหมาะสมในการประยุกต์ใช้กับอนุกรมเวลาอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลหนึ่งต่อเงินดอลลาร์รายวันของประเทศหนึ่ง (Y_t) จำนวน 150 วัน คือแบบจำลอง MA(2) ซึ่งเขียนได้ดังสมการที่ (7.36) ดังนี้

$$\hat{Y}_t = 35.177 - 0.527\varepsilon_{t-1} + 0.661\,\varepsilon_{t-2}\,,\ \ t = 1, 2, \ldots, 15 \tag{7.36}$$

t- statistics (158.75)*** (–8.44)*** (10.55)***

AIC = 2.390 SCB =2.416

RSS (Residual Sum of Square) = 845.684

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 1

ในการพยากรณ์อนุกรมเวลาด้วยแบบจำลอง MA(2) ณ เวลา T+1 จะต้องใช้ข้อมูล ε_T และ ε_{T-1} ซึ่งประมาณด้วยค่าความผิดพลาดจากการประมาณสมการที่ (7.36) หรือค่า Residual (e_t) ณ เวลา T และ T–1 นั่นเอง (หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า e_T และ e_{T-1} ตามลำดับ)

จากสมการที่ (7.36) พบว่าค่า e_{150} และ e_{149} มีค่าเป็น –2.301 และ –3.305 ตามลำดับ ดังนั้น ค่าพยากรณ์อัตราแลกเปลี่ยนรายวันของประเทศนี้ ในเดือนที่ 151 ถึง 155 แสดงได้ดังนี้

$\hat{Y}_{151} = \hat{Y}_{150}(1)$ = 35.177 – 0.527e_{150} + 0.661e_{149}

= 35.177 – 0.527(–2.301) + 0.661(–3.305) = 34.205

$\hat{Y}_{152} = \hat{Y}_{150}(2)$ = 35.177 – 0.527e_{151} + 0.661e_{150}

= 35.177 – 0.527(0) + 0.661(–2.301) = 33.656

$\hat{Y}_{153} = \hat{Y}_{150}(3)$ = 35.177 – 0.527e_{152} + 0.661e_{151}

= 35.177 – 0.527(0) + 0.661(0) = 33.177

$\hat{Y}_{154} = \hat{Y}_{150}(4)$ = 35.177 – 0.527e_{153} + 0.661e_{152}

= 35.177 – 0.527(0) + 0.661(0) = 33.177

$\hat{Y}_{155} = \hat{Y}_{150}(5)$ = 35.177 – 0.527e_{154} + 0.661e_{153}

= 35.177 – 0.527(0) + 0.661(0) = 33.177

จะเห็นว่าค่าพยากรณ์ตั้งแต่ 3 ช่วงเวลาล่วงหน้าเป็นต้นไปเท่ากับ 33.177 ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลาที่อยู่ในรูปแบบ MA(2) นั่นเอง และจากการใช้แนวคิดเดียวกับที่ได้อธิบายไว้ในกรณี MA(1) ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ช่วงเวลาที่ 151–155 ช่วงเวลาล่วงหน้า แสดงได้ดังนี้

$e_{150}(1) = X_{151} - \hat{X}_{150}(1) = \varepsilon_{151}$

$e_{150}(2) = X_{152} - \hat{X}_{150}(2) = \varepsilon_{152} - \beta_1\varepsilon_{151}$

$e_{150}(3) = X_{153} - \hat{X}_{150}(3) = \varepsilon_{153} - \beta_1\varepsilon_{152} - \beta_2\varepsilon_{151}$

$e_{150}(4) = X_{154} - \hat{X}_{150}(4) = \varepsilon_{154} - \beta_1\varepsilon_{153} - \beta_2\varepsilon_{152}$

$e_{150}(5) = X_{155} - \hat{X}_{150}(5) = \varepsilon_{155} - \beta_1\varepsilon_{154} - \beta_2\varepsilon_{153}$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ ณ ช่วงเวลาที่ 151–155 ล่วงหน้า คำนวณได้ดังนี้

$\text{Var}(e_{150}(1)) = \sigma^2$

$\text{Var}(e_{150}(2)) = (1+\beta_1^2)\,\sigma^2$

$\text{Var}(e_{150}(3)) = (1+\beta_1^2 + \beta_2^2)\,\sigma^2$

$\text{Var}(e_{150}(4)) = (1+\beta_1^2 + \beta_2^2)\,\sigma^2$

$\text{Var}(e_{150}(5)) = (1+\beta_1^2 + \beta_2^2)\,\sigma^2$

เนื่องจาก $s^2 = \frac{\text{RSS}}{\text{N-K}} = \frac{845.684}{150\text{-}3} = 5.753$ ซึ่งเราจะใช้เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ σ^2 โดย N คือจำนวนข้อมูลที่ใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองซึ่งมีค่าเท่ากับ 150 ส่วน K คือจำนวนพารามิเตอร์ในแบบจำลอง MA(2)ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3 ดังนั้น ตัวประมาณค่าความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ ณ ช่วงเวลาที่ 151–155 คือ

$$\text{Var}(e_{150}(1)) = s^2 = 5.753$$

$$\text{Var}(e_{150}(2)) = (1+\hat{\beta}_1^2)\, s^2 = [1+(-0.527)^2]5.753 = 7.351$$

$$\text{Var}(e_{150}(3)) = (1+\hat{\beta}_1^2+\hat{\beta}_2^2)\, s^2 = [1+(-0.527)^2+(0.661)^2]5.753 = 9.864$$

$$\text{Var}(e_{150}(4)) = (1+\hat{\beta}_1^2+\hat{\beta}_2^2)\, s^2 = [1+(-0.527)^2+(0.661)^2]5.753 = 9.864$$

$$\text{Var}(e_{150}(5)) = (1+\hat{\beta}_1^2+\hat{\beta}_2^2)\, s^2 = [1+(-0.527)^2+(0.661)^2]5.753 = 9.864$$

ดังนั้น ตัวประมาณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ ณ ช่วงเวลาที่ 151–155 คำนวณได้ดังนี้

$$S.E.\big(e_{150}(1)\big) = \sqrt{Var\big(e_{150}(1)\big)} = \sqrt{5.753} = 2.395$$

$$S.E.\big(e_{150}(2)\big) = \sqrt{Var\big(e_{150}(2)\big)} = \sqrt{7.351} = 2.711$$

$$S.E.\big(e_{150}(3)\big) = \sqrt{Var\big(e_{150}(3)\big)} = \sqrt{9.864} = 3.141$$

$$S.E.\big(e_{150}(4)\big) = \sqrt{Var\big(e_{150}(4)\big)} = \sqrt{9.864} = 3.141$$

$$S.E.\big(e_{150}(5)\big) = \sqrt{Var\big(e_{150}(5)\big)} = \sqrt{9.864} = 3.141$$

7.2.3 การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARMA(1, 1)

พิจารณาแบบจำลอง ARMA(1, 1) ซึ่งเขียนได้ในรูปต่อไปนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \quad \text{โดยที่ } t = 1, 2, \ldots, T$$

ถ้าเราพิจารณา ณ ช่วงเวลาที่ T แบบจำลอง ARMA(1,1) จะกลายเป็น

$$X_T = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T-1} + \varepsilon_T - \beta_1 \varepsilon_{T-1} \tag{7.37}$$

ซึ่งตอนนี้เราทราบค่า $X_1, X_2, \ldots, X_T$ และ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$ (หรือเขียนแทนด้วย I_T)

- **การพยากรณ์ 1 ช่วงเวลา ล่วงหน้า** (1- step ahead forecast)

จากสมการที่ (7.37) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T+1$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+1} = \alpha_0 + \alpha_1 X_T + \varepsilon_{T+1} - \beta_1 \varepsilon_T \tag{7.38}$$

ค่าพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (1- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(1) &= \mathrm{E}(X_{T+1} | I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_T | I_T) + \mathrm{E}(\varepsilon_{T+1} | I_T) - \beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_T | I_T) \end{aligned} \tag{7.39}$$

เนื่องจาก $I_T = \{X_1, \ldots, X_T, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T\}$ ซึ่งเป็นข่าวสารที่เราทราบค่าแล้ว ดังนั้น X_T และ ε_T ถือเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง (ไม่ใช่ตัวแปรสุ่มแล้ว) ในขณะที่ ε_{T+1} ยังเป็นตัวแปรสุ่มที่มีคุณสมบัติเช่นเดิมคือเป็นตัวรบกวนขาว ดังนั้น สมการที่ (7.39) จะเขียนได้เป็น

$$\hat{X}_T(1) = \alpha_0 + \alpha_1 X_T - \beta_1 \varepsilon_T \tag{7.40}$$

ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (1-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} e_T(1) &= X_{T+1} - \hat{X}_T(1) \\ &= \varepsilon_{T+1} \end{aligned} \tag{7.41}$$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้าคำนวณได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(e_T(1)) = \mathrm{Var}[\varepsilon_{T+1}] = \sigma^2 \tag{7.42}$$

- **การพยากรณ์ 2 ช่วงเวลา ล่วงหน้า** (2- step ahead forecast)

จากสมการที่ (7.37) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + 2$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+2} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - \beta_1 \varepsilon_{T+1} \qquad (7.43)$$

ค่าพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า (2- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\hat{X}_T(2) &= E(X_{T+2} \mid I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{T+1} \mid I_T) + E(\varepsilon_{T+2} \mid I_T) - \beta_1 E(\varepsilon_{T+1} \mid I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \hat{X}_T(1) \qquad (7.44)\end{aligned}$$

ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า (2-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}e_T(2) &= X_{T+2} - \hat{X}_T(2) \\ &= \alpha_1 \left(X_{T+1} - \hat{X}_T(1)\right) + \varepsilon_{T+2} - \beta_1 \varepsilon_{T+1} \\ &= \alpha_1 e_T(1) + \varepsilon_{T+2} - \beta_1 \varepsilon_{T+1}\end{aligned}$$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้าคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(e_T(2)) &= \alpha_1^2 Var\big(e_T(1)\big) + Var(\varepsilon_{T+2}) + \beta_1^2 Var(\varepsilon_{T+1}) \\ &= \alpha_1^2 \sigma^2 + \sigma^2 + \beta_1^2 \sigma^2 \\ &= (1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2)\sigma^2 \qquad (7.45)\end{aligned}$$

- **การพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า** (j-step ahead forecast)

จากสมการที่ (7.37) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + j$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+j} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+(j-1)} + \varepsilon_{T+j} - \beta_1 \varepsilon_{T+(j-1)} \qquad (7.46)$$

ค่าพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า (j- step ahead forecast) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\hat{X}_T(j) &= E(X_{T+j} \mid I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{T+j} \mid I_T) + E(\varepsilon_{T+j} \mid I_T) - \beta_1 E(\varepsilon_{T+(j-1)} \mid I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \hat{X}_T(j-1) \qquad (7.47)\end{aligned}$$

และเมื่อ $j \rightarrow \infty$ แล้วค่าพยากรณ์จะคำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$\hat{X}_T(j) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \qquad (7.48)^{6}$$

สมการที่ (7.48) แสดงให้เราทราบว่า เมื่อเราพยากรณ์ไปข้างหน้าไกลขึ้นเรื่อย ๆ ค่าพยากรณ์จะเข้าใกล้ค่า $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} = \mathrm{E}(X_t)$ ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ ARMA(1,1) นั่นเอง

ส่วนค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า (j-step ahead forecast error) และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้[7]

$$\begin{aligned} e_T(j) = {} & \alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots + \alpha_1\varepsilon_{T+j-1} + \varepsilon_{T+j} \\ & - \beta_1\{\alpha_1^{j-1}\varepsilon_T + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+1} + \ldots + \alpha_1\varepsilon_{T+j-2} + \varepsilon_{T+j-1}\} \end{aligned} \qquad (7.49)$$

$$\mathrm{Var}(e_T(j)) = (1+\beta_1^2)\left(\alpha_1^{2(j-1)} + \alpha_1^{2(j-2)} + \cdots + \alpha_1^2 + 1\right)\sigma^2 \qquad (7.50)$$

นั่นคือ ถ้าเราพยากรณ์ล่วงหน้าไกลขึ้นเรื่อย ๆ จะพบว่าค่าความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARMA(1,1) จะสูงขึ้นเรื่อย ๆ

จากสมการที่ (7.50) เมื่อ $j \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $\mathrm{Var}(e_T(j)) = \frac{(1+\beta_1^2)\sigma^2}{(1-\alpha_1^2)}$ นั่นคือ เมื่อพยากรณ์ไกลขึ้นเรื่อย ๆ แล้วความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARMA(1,1) จะลู่เข้าหาค่าคงที่ $\frac{(1+\beta_1^2)\sigma^2}{(1-\alpha_1^2)}$ เสมอตราบใดที่อนุกรมเวลา X_t มีความนิ่ง (เนื่องจาก $|\alpha_1| < 1$) และค่าคงที่นี้เป็นการผสมผสานกันระหว่างส่วนของความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์จากของแบบจำลอง AR(1) และจากแบบจำลอง MA(1) เข้าด้วยกันนั่นเอง

---

[6] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 7ค

[7] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 7ง

7.2.4 การพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARMA(p, q)

พิจารณาแบบจำลอง ARMA(p,q) ซึ่งเขียนได้ดังรูปต่อไปนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

โดยที่ $t = 1, 2, \ldots, T$ ถ้าเราพิจารณา ณ ช่วงเวลาที่ T แบบจำลอง ARMA(p,q) จะกลายเป็น

$$X_T = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T-1} + \alpha_2 X_{T-2} + \ldots + \alpha_p X_{T-p} + \varepsilon_T - \beta_1 \varepsilon_{T-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{T-q} \qquad (7.51)$$

หรือเขียนได้อีกแบบคือ

$$\alpha(L) X_T = \alpha_0 + \beta(L) \varepsilon_T \qquad (7.52)$$

โดยที่ $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L - \ldots - \alpha_p L^p$ และ $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L - \ldots - \beta_q L^q$ และข่าวสารที่มีอยู่ ณ เวลา T เขียนแทนด้วย $I_T = \{X_1, \ldots, X_T, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T\}$ และจากสมการที่ (7.51) จะได้ค่า X_{T+1} และ X_{T+2} ได้ดังนี้

$$X_{T+1} = \alpha_0 + \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \ldots + \alpha_p X_{T+(1-p)} + \varepsilon_{T+1} - \beta_1 \varepsilon_T - \beta_2 \varepsilon_{T-1} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{T+(1-q)}$$

$$X_{T+2} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+1} + \alpha_2 X_T + \ldots + \alpha_p X_{T+(2-p)} + \varepsilon_{T+2} - \beta_1 \varepsilon_{T+1} - \beta_2 \varepsilon_T - \ldots - \beta_q \varepsilon_{T+(2-q)}$$

การพยากรณ์อนุกรมเวลา 1 และ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า จากแบบจำลอง ARMA(p, q) เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(1) &= \mathrm{E}(X_{T+1} | I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 X_T + \alpha_2 X_{T-1} + \ldots + \alpha_p X_{T+(1-p)} - \beta_1 \varepsilon_T - \ldots - \beta_q \varepsilon_{T+(1-q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(2) &= \mathrm{E}(X_{T+2} | I_T) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \hat{X}_T(1) + \alpha_2 X_T + \ldots + \alpha_p X_{T-(p-2)} - \beta_2 \varepsilon_T - \ldots - \beta_q \varepsilon_{T+(2-q)} \end{aligned}$$

และเราสามารถเขียนในรูปทั่วไปคือค่า X_{T+j} ได้ดังนี้

$$X_{T+j} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+(j-1)} + \ldots + \alpha_p X_{T+(j-p)} + \varepsilon_{T+j} - \beta_1 \varepsilon_{T+(j-1)} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{T+(j-q)} \qquad (7.53)$$

และการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า เขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\hat{X}_T(j) = \mathrm{E}(X_{T+j}|\, I_T)$$
$$= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \hat{X}_T(j-i) - \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_T(j-i) \qquad (7.54)$$

โดยที่ $\hat{X}_T(j-i) = X_{T+(j-i)}$ เมื่อ $j - i \le 0$

$$\varepsilon_T(j-i) = \begin{cases} \varepsilon_{T+(j-i)} & ,\text{ถ้า } j-i \le 0 \\ 0 & ,\text{ถ้า } j-i > 0 \end{cases}$$

นอกจากนี้ เรายังพิสูจน์ได้เช่นเดียวกับกรณี ARMA(1,1) คือเมื่อ $j \to \infty$ แล้วค่าพยากรณ์จะคำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$\hat{X}_T(j) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_p} \qquad (7.55)$$

สมการที่ (7.55) หมายถึงเมื่อเราพยากรณ์ไปข้างหน้าไกลขึ้นเรื่อย ๆ ค่าพยากรณ์จะเข้าใกล้ค่า $\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_p}$ = E(X_t) ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ ARMA(p,q) นั่นเอง ส่วนค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า (j-step ahead forecast error) และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า จะทำได้ง่ายเมื่อเราแปลงแบบจำลอง ARMA(p, q) ให้อยู่ในรูป MA(∞) ดังจะอธิบายดังนี้[8]

เนื่องจากอนุกรมเวลา X_t มีความนิ่ง ดังนั้น สมการที่ (7.52) เขียนใหม่ได้เป็น

$$X_T = \frac{\alpha_0}{\alpha(L)} + \frac{\beta(L)}{\alpha(L)}\varepsilon_T \qquad (7.56)$$

เมื่อพิจารณา $\frac{\alpha_0}{\alpha(L)} = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_p}$ = E(X_t)ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยนั่นเอง และเมื่อพิจารณา $\frac{\beta(L)}{\alpha(L)}\varepsilon_T$ จะเห็นว่าเกี่ยวข้องกับตัวแปร ε_T ดังนั้น $\frac{\beta(L)}{\alpha(L)}\varepsilon_T = \frac{1-\beta_1 L-\cdots-\beta_q L}{1-\alpha_1 L-\cdots-\alpha_p L}\varepsilon_T$ จะไม่ใช่ค่าคงที่

ถ้ากำหนดให้ $\frac{\alpha_0}{\alpha(L)} = \mu$

และ $$\frac{\beta(L)}{\alpha(L)} = \varphi(L) = 1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \cdots \qquad (7.57)$$

[8] ดูภาคผนวก 3จ ประกอบ จะทำให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น

ดังนั้น สมการที่ (7.56) ที่แสดงแบบจำลอง ARMA(p, q) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป MA(∞) ได้ดังนี้

$$X_T = \mu + \varepsilon_T + \varphi_1\varepsilon_{T-1} + \varphi_2\,\varepsilon_{T-2} + \ldots \qquad (7.58)$$ [9]

หรือเขียนได้ว่า

$$X_T = \mu + \varphi(L)\varepsilon_T \qquad (7.59)$$

เราเรียก φ_i ($i = 1, 2,\ldots$) ว่าฟังก์ชันแรงกระตุ้นตอบสนอง (impulse response function) ของแบบจำลอง ARMA และเมื่ออนุกรมเวลา X_t มีความนิ่งแล้วจะได้ว่า $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2, \ldots$ จะลดลงอย่างรวดเร็วแบบเอกซ์โพเนนเชียล[10] นั่นคือเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่เกิดขึ้น ณ ปัจจุบัน จะมีผลกระทบต่ออนุกรมเวลา X_t ลดลงเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป เราสามารถใช้สมการที่ (7.58) ในการหาค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า (j-step ahead forecast error) และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า ดังจะอธิบายดังนี้

จากการใช้สมการที่ (7.58) อนุกรมเวลา X_{T+1}, X_{T+2} และ X_{T+3} เขียนได้ดังนี้

$$X_{T+1} = \mu + \varepsilon_{T+1} + \varphi_1\varepsilon_T + \varphi_2\,\varepsilon_{T-1} + \ldots$$

$$X_{T+2} = \mu + \varepsilon_{T+2} + \varphi_1\varepsilon_{T+1} + \varphi_2\,\varepsilon_T + \varphi_3\,\varepsilon_{T-1} + \ldots$$

$$X_{T+3} = \mu + \varepsilon_{T+3} + \varphi_1\varepsilon_{T+2} + \varphi_2\,\varepsilon_{T+1} + \varphi_3\,\varepsilon_T + \varphi_4\,\varepsilon_{T-1} + \ldots$$

และค่าพยากรณ์ 1, 2 และ 3 ช่วงเวลาล่วงหน้าก็คือ

$$\hat{X}_T(1) = \mathrm{E}(X_{T+1}|\,I_T) = \mu + \varphi_1\varepsilon_T + \varphi_2\,\varepsilon_{T-1} + \ldots$$

$$\hat{X}_T(2) = \mathrm{E}(X_{T+2}|\,I_T) = \mu + \varphi_2\,\varepsilon_T + \varphi_3\,\varepsilon_{T-1} + \ldots$$

$$\hat{X}_T(3) = \mathrm{E}(X_{T+3}|\,I_T) = \mu + \varphi_3\,\varepsilon_T + \varphi_4\,\varepsilon_{T-1} + \ldots$$

นั่นคือค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1, 2 และ 3 ช่วงเวลาล่วงหน้า ก็คือ

$$e_T(1) = X_{T+1} - \hat{X}_T(1) = \varepsilon_{T+1}$$

---

[9] เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น ดูตัวอย่างการหาค่า φ_i ($i = 1, 2, \ldots$) ในภาคผนวก 7จ

[10] Tsay, R. S., *Analysis of Financial Time Series* (John Wiley & Sons, Inc, 2002), p. 55.

$$e_T(2) = X_{T+2} - \hat{X}_T(2) = \varepsilon_{T+2} + \varphi_1\varepsilon_{T+1}$$

$$e_T(3) = X_{T+3} - \hat{X}_T(3) = \varepsilon_{T+3} + \varphi_1\varepsilon_{T+2} + \varphi_2\varepsilon_{T+1}$$

ความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ 1, 2 และ 3 ช่วงเวลาล่วงหน้า จะเป็น

$$\mathrm{Var}(e_T(1)) = \sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(e_T(2)) = (1+\varphi_1^2)\,\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(e_T(3)) = (1+\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,\sigma^2$$

นั่นคือ ค่าความผิดพลาดและความแปรปรวนของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้าเขียนได้ดังนี้

$$e_T(j) = \varepsilon_{T+j} + \varphi_1\varepsilon_{T+(j-1)} + \varphi_2\varepsilon_{T+(j-2)} + \ldots + \varphi_{j-1}\,\varepsilon_{T+1} \qquad (7.60\text{ ก})$$

$$\mathrm{Var}(e_T(j)) = (1+\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \cdots + \varphi_{j-1}^2)\sigma^2 \qquad (7.60\text{ ข})$$

7.3 การพยากรณ์อนุกรมเวลาด้วยแบบจำลอง ARIMA

เราทราบแล้วว่า เมื่ออนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง และการทำผลต่างลำดับที่ d กับอนุกรมเวลานั้น จะทำให้ได้อนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง การนำอนุกรมผลต่างลำดับที่ d นี้ไปประยุกต์ใช้กับแบบจำลองของ Box–Jenkins จะถูกเรียกว่าแบบจำลอง ARIMA(p, d, q)

เพื่อให้เข้าใจได้ง่าย กำหนดให้ X_t คืออนุกรมเวลาที่ไม่มีความนิ่ง โดยที่ $Z_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ คืออนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง และแบบจำลองที่เหมาะสมกับอนุกรมเวลา X_t คือแบบจำลอง ARIMA(1,1,0) ซึ่งเขียนได้ในรูปต่อไปนี้

$$\Delta X_t = \alpha_0 + \alpha_1\Delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{โดยที่ } t = 1, 2, \ldots, T \qquad (7.61\text{ ก})$$

หรือเขียนได้ว่า

$$Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{โดยที่ } t = 1, 2, \ldots, T \qquad (7.61\text{ ข})$$

ถ้าเราพิจารณา ณ ช่วงเวลาที่ T แบบจำลอง ARIMA(1,1,0) จะกลายเป็น

$$Z_T = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{T-1} + \varepsilon_T \qquad (7.62)$$

และ ณ ตอนนี้เราทราบค่า $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (หรือเขียนแทนด้วย I_T)

เมื่อใช้สมการที่ (7.62) เราจะคำนวณค่าพยากรณ์ $\hat{Z}_{T+1}, \hat{Z}_{T+2}, \hat{Z}_{T+3}$ ได้จากสมการต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned} \hat{Z}_{T+1} &= \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_T \\ \hat{Z}_{T+2} &= \alpha_0 + \alpha_1 \Delta \hat{X}_{T+1} \\ \hat{Z}_{T+3} &= \alpha_0 + \alpha_1 \Delta \hat{X}_{T+2} \\ &\vdots \\ \hat{Z}_{T+j} &= \alpha_0 + \alpha_1 \Delta \hat{X}_{T+(j-1)} \end{aligned}\right\} \quad (7.63)^{11}$$

จะเห็นว่า ค่าพยากรณ์จากการใช้แบบจำลอง ARIMA(1,1,0) ดังสมการ (7.62) จะอยู่ในรูปผลต่างลำดับที่ 1 ($\hat{Z}_{T+j} = \Delta \hat{X}_{T+j}$) แต่หากเราต้องการพยากรณ์ค่าอนุกรมเวลา $\hat{X}_{T+j}$ สามารถทำได้ด้วยการพิจารณาดังนี้

เนื่องจาก $\hat{Z}_{T+1} = \hat{X}_{T+1} - \hat{X}_T$ (7.64 ก)

$$\hat{Z}_{T+2} = \hat{X}_{T+2} - \hat{X}_{T+1} \quad (7.64\ ข)$$

$$\hat{Z}_{T+3} = \hat{X}_{T+3} - \hat{X}_{T+2} \quad (7.64\ ค)$$

$$\vdots$$

$$\hat{Z}_{T+j} = \hat{X}_{T+j} - \hat{X}_{T+j} \quad (7.64\ ง)$$

จากสมการที่ (7.64 ก) จะเห็นว่า $\hat{X}_T$ ไม่ต้องมีการพยากรณ์ เพราะเราทราบข้อมูลจริงของมันอยู่แล้วซึ่งก็คือ X_T ดังนั้น ค่าพยากรณ์ $\hat{X}_{T+1}$ คำนวณได้จากสมการ

$$\hat{X}_{T+1} = X_T + \hat{Z}_{T+1} \quad (7.65\ ก)$$

ส่วนค่าพยากรณ์ $\hat{X}_{T+2}, \hat{X}_{T+3}, \ldots, \hat{X}_{T+j}$ คำนวณได้ดังนี้

---

[11] เราอาจเขียน $\hat{Z}_{T+j}$ ในรูป $\hat{Z}_T(j)$ ก็ได้ และอย่าลืมว่า $Z_t = \Delta X_t$

$$\hat{X}_{T+2} = X_T + \hat{Z}_{T+1} + \hat{Z}_{T+2} \quad (7.65 \text{ ข})$$

$$\hat{X}_{T+3} = X_T + \hat{Z}_{T+1} + \hat{Z}_{T+2} + \hat{Z}_{T+3} \quad (7.65 \text{ ค})$$

$$\vdots$$

$$\hat{X}_{T+j} = X_T + \sum_{k=1}^{j} \hat{Z}_{T+k} \quad (7.65 \text{ ง})$$

อีกวิธีหนึ่งที่สามารถใช้หาค่าพยากรณ์ $\hat{X}_{T+1}, \hat{X}_{T+2}, \ldots$ จากแบบจำลอง ARIMA(1,1,0) ได้ คือการแปลงสมการที่ (6.61 ก) ดังนี้

$$X_t - X_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1(X_{t-1} - X_{t-2}) + \varepsilon_t$$

$$X_t = \alpha_0 + (\alpha_1+1)X_{t-1} - \alpha_1 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad \text{โดยที่ } t = 1, 2, \ldots, T \quad (7.66)$$

หรือเขียนใหม่ได้ว่า

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad \text{โดยที่ } t = 1, 2, \ldots, T \quad (7.67)$$

โดยที่ $\varphi_0 = \alpha_0$, $\varphi_1 = \alpha_1+1$, $\varphi_2 = -\alpha_1$ เราสามารถใช้สมการที่ (7.67) ในการหาค่าพยากรณ์ $\hat{X}_{T+j}$ ก็ได้ โดยคำตอบจะได้เท่ากัน ส่วนการหาค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ สามารถใช้แนวคิดเช่นเดียวกับที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้ แต่จะมีลักษณะหนึ่งที่ต่างกันคือ **ความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์จะยิ่งมีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ ไม่ลู่เข้าหาค่าคงที่ใดค่าคงที่หนึ่ง เมื่อมีการพยากรณ์ห่างออกไป** ทั้งนี้เป็นเพราะอนุกรมเวลา X_t ไม่มีความนิ่งนั่นเอง

สำหรับการพยากรณ์ด้วยแบบจำลอง ARIMA(p,1,q) ก็สามารถใช้แนวคิดของสมการที่ (7.65) หรือจะใช้สมการที่ (7.67) ก็ได้ แต่การแปลงสมการจะซับซ้อนขึ้นเล็กน้อยดังแสดงต่อไปนี้

สมมุติให้แบบจำลอง ARIMA(p,1,q) เขียนได้ดังนี้

$$\Delta X_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_{t-1} + \alpha_2 \Delta X_{t-2} + \ldots + \alpha_p \Delta X_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_1 \varepsilon_{t-q}$$

$$X_t - X_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1(X_{t-1} - X_{t-2}) + \alpha_2(X_{t-2} - X_{t-3}) + \ldots + \alpha_p(X_{t-p} - X_{t-p-1})$$

$$+ \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_1 \varepsilon_{t-q}$$

$$X_t = \alpha_0 + (\alpha_1+1)X_{t-1} + (\alpha_2-\alpha_1)X_{t-2} + (\alpha_3-\alpha_2)X_{t-3} + \ldots + (\alpha_p-\alpha_{p-1})X_{t-p} - \alpha_p X_{t-p-1}$$
$$+\varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_1\varepsilon_{t-q}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varphi_3 X_{t-3} + \ldots + \varphi_p X_{t-p} + \varphi_{p+1} X_{t-p-1}$$
$$+\varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_1\varepsilon_{t-q} \qquad (7.68)$$

โดยที่ $\varphi_0 = \alpha_0$, $\varphi_1 = \alpha_1+1$, $\varphi_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ และ $\varphi_{p+1} = -\alpha_p$

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น สมมุติให้แบบจำลองที่เหมาะสมในการประยุกต์ใช้กับอนุกรมเวลายอดขายยาสีฟันยี่ห้อหนึ่งรายสัปดาห์ (X_t) จำนวน 90 สัปดาห์ (หน่วย : พันหลอด) คือแบบจำลอง ARIMA(1,1,0) ซึ่งเขียนได้ดังสมการที่ (7.69) ดังนี้

$$\hat{Z}_t = 3.237 + 0.645 Z_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots, 90 \qquad (7.69)$$

t- statistics (4.15)*** (7.95)***

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ระดับร้อยละ 1 และ $Z_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1}$

ถ้ากำหนดให้ยอดขายยาสีฟันยี่ห้อนี้ ณ สัปดาห์ที่ 90 (X_{90}) คือ 1,029.48 พันหลอด และผลการพยากรณ์ด้วยสมการที่ (7.69) จะได้ $\hat{Z}_{91}$ = 10.375, $\hat{Z}_{92}$ = 9.933 และ $\hat{Z}_{93}$ = 9.648 ซึ่งเป็นค่าพยากรณ์ในรูปผลต่างลำดับที่ 1 ของยอดขายยาสีฟันยี่ห้อนี้ การพยากรณ์ยอดขายยาสีฟันยี่ห้อนี้ เราสามารถใช้แนวคิดของสมการที่ (7.65ก)–(7.65ค) ดังนี้

$$\hat{X}_{91} = X_{90} + \hat{Z}_{91}$$
$$= 1{,}029.48 + 10.375$$
$$= 1{,}039.855 \text{ พันหลอด}$$

$$\hat{X}_{92} = X_{90} + (\hat{Z}_{91} + \hat{Z}_{92})$$
$$= 1{,}029.48 + 10.375 + 9.933$$
$$= 1{,}049.788 \text{ พันหลอด}$$

$$\hat{X}_{93} = X_{90} + (\hat{Z}_{91} + \hat{Z}_{92} + \hat{Z}_{93})$$
$$= 1{,}029.48 + 10.375 + 9.933 + 9.648$$
$$= 1{,}059.436 \text{ พันหลอด}$$

อีกวิธีหนึ่งที่สามารถใช้พยากรณ์ $\hat{X}_{91}, \hat{X}_{92}$ และ $\hat{X}_{93}$ ก็คือการแปลงสมการที่ (7.69) มิให้อยู่ในรูปผลต่างดังนี้

$$\hat{X}_t - \hat{X}_{t-1} = 3.237 + 0.645(X_{t-1} - X_{t-2}),\ t = 1, 2, \ldots, 90$$

พิจารณา ณ เวลา $t+1$ สมการข้างบนจะกลายเป็น

$$\hat{X}_{t+1} - \hat{X}_t = 3.237 + 0.645(X_t - X_{t-1}),\ t = 1, 2, \ldots, 90$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\hat{X}_{T+1} - \hat{X}_T = 3.237 + 0.645(X_T - X_{T-1})$$

อย่าลืมว่า T คือช่วงเวลาสุดท้ายข้อมูลอนุกรมเวลาที่รวบรวมมา ดังนั้นเราจึงต้องทราบข้อมูล X_T และ X_{T-1} อยู่แล้ว[12] จึงไม่จำเป็นต้องใช้ค่าพยากรณ์ $\hat{X}_T$ แต่สามารถใช้ค่าจริง ๆ ของมันเลย นั่นคือ $\hat{X}_T = X_T$ ดังนั้น สมการข้างบนเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{T+1} - X_T &= 3.237 + 0.645(X_T - X_{T-1}) \\
\hat{X}_{T+1} &= 3.237 + X_T + 0.645X_T - 0.645X_{T-1} \\
\hat{X}_{T+1} &= 3.237 + 1.645X_T - 0.645X_{T-1} \qquad (7.70)
\end{aligned}$$

ถ้ากำหนดให้ยอดขายยาสีฟัน ณ สัปดาห์ที่ 89 (X_{89}) คือ 1,018.42 พันหลอด และยอดขายยาสีฟัน ณ สัปดาห์ที่ 90 (X_{90}) คือ 1,029.48 พันหลอด ดังนั้น การใช้สมการที่ (7.70) คำนวณค่าพยากรณ์ $\hat{X}_{91}, \hat{X}_{92}$ และ $\hat{X}_{93}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{91} &= 3.237 + 1.645X_{90} - 0.645X_{89} \\
&= 3.237 + 1.645(1,029.48) - 0.645(1,018.42) \\
&= 1,039.85 \\
\hat{X}_{92} &= 3.237 + 1.645\hat{X}_{91} - 0.645X_{90} \\
&= 3.237 + 1.645(1,039.85) - 0.645(1,029.48) \\
&= 1,049.78
\end{aligned}$$

---

[12] สำหรับตัวอย่างกรณีนี้ มี $T = 90$ ดังนั้น เราต้องทราบค่าจริงของยอดขายยาสีฟันในสัปดาห์ที่ 90 (X_{90}) อยู่แล้ว จึงไม่จำเป็นต้องพยากรณ์ $\hat{X}_{90}$ เราสามารถใช้ค่าจริง ๆ คือ X_{90} แทน $\hat{X}_{90}$ ได้เลย

$$\hat{X}_{93} = 3.237 + 1.645\hat{X}_{92} - 0.645\hat{X}_{91}$$
$$= 3.237 + 1.645(1{,}049.78) - 0.645(1{,}039.85)$$
$$= 1{,}059.42$$

ผลการคำนวณจะต่างจากวิธีก่อนหน้านี้ในทศนิยมหลัง ๆ เท่านั้น ซึ่งเกิดจากการใช้ทศนิยมของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ไม่ครบทุกตำแหน่งในการคำนวณ แต่หากคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะพบว่าค่าพยากรณ์ทั้งสองวิธีนี้จะเท่ากันเสมอ

สำหรับการพยากรณ์อนุกรมเวลาด้วยแบบจำลอง Seasonal ARIMA สามารถนำแนวคิดที่กล่าวมาทั้งหมดในบทนี้ไปประยุกต์ใช้ได้เช่นกัน จึงไม่ขอกล่าวซ้ำในที่นี้อีก

บทที่ 8
แบบจำลองอนุกรมเวลาเมื่อมีความไม่คงที่ในความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (Time Series Model of Heteroscedasticity)

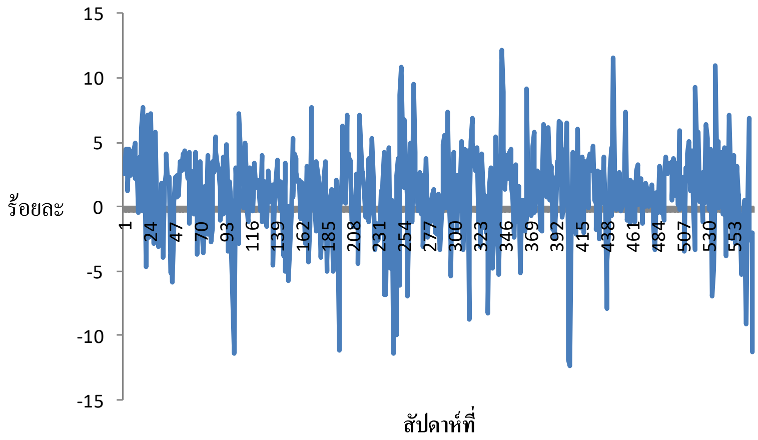
อนุกรมเวลาที่เกี่ยวข้องทางด้านการเงิน เช่น ราคาหุ้นของบริษัทแห่งหนึ่ง อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ ราคาทองคำ ราคาสินค้าเกษตรในตลาดซื้อล่วงหน้า ฯลฯ มักจะมีความแปรปรวนไม่คงที่ กล่าวคือ บางช่วงจู่ ๆ ตัวแปรเหล่านี้จะมีความแปรปรวนมาก แต่บางช่วงเวลากลับมีความแปรปรวนน้อย นักเก็งกำไรทางการเงินในระยะสั้นมักให้ความสำคัญกับลักษณะความแปรปรวนดังกล่าว เพราะจะกระทบต่อการตัดสินใจลงทุนในระยะสั้น แต่นักเก็งกำไรทางการเงินในระยะยาวมักจะไม่สนใจความแปรปรวนที่ไม่คงที่ซึ่งมักเกิดขึ้นในระยะสั้น

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น ขอยกตัวอย่างต่อไปนี้ ในการวิเคราะห์ข้อมูลราคาหลักทรัพย์ของบริษัท A ณ วันใดวันหนึ่งนั้น ราคาหลักทรัพย์ของบริษัท A สามารถมีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ ได้ตลอดทั้งวัน นั่นคือราคาหลักทรัพย์บริษัท A มีความแปรปรวน (Variance) ซึ่งนักเก็งกำไรในระยะยาวจะสนใจถึงความแปรปรวนของราคาหลักทรัพย์ A ที่เกิดขึ้นในระยะยาว เช่น จะดูความแปรปรวนล่วงหน้าไป 5–10 ปี ซึ่งจะเรียกว่า ความแปรปรวนแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Variance หรือ Unconditional Heteroscedasticity) ซึ่งจะ**ไม่ขึ้น**อยู่กับราคาหลักทรัพย์ A เมื่อวานนี้ หรือเมื่อ 2 วันก่อนหน้านี้ หรือไม่ขึ้นอยู่กับว่ามีการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันใด ๆ ที่ผ่านมา เช่น การระเบิดในใจกลางเมืองเมื่อวานนี้

แต่สำหรับนักเก็งกำไรในระยะสั้น การลงทุนในหลักทรัพย์ A จะต้องพิจารณาถึงความเสี่ยงของหลักทรัพย์นี้ อันสามารถดูได้จากค่าความแปรปรวนของหลักทรัพย์ A ในระยะสั้น ซึ่งมัก**ขึ้น**อยู่กับราคาหลักทรัพย์ A เมื่อวานนี้หรือเมื่อ 2 วันก่อนหน้านี้ หรือขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่ผ่านมา เช่น เกิดการแผ่นดินไหวครั้งรุนแรงเมื่อ 2 วันก่อน การเกิดระเบิด ณ ใจกลางเมืองเมื่อ

3 วันก่อน เราเรียกความแปรปรวนลักษณะนี้ว่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance หรือ Conditional Heteroscedasticity)

สมมุติให้ข้อมูลอัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาหลักทรัพย์ A จำนวน 572 สัปดาห์ แสดงได้ดังรูปที่ 8.1



รูปที่ 8.1 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาหลักทรัพย์

จากรูป เราสรุปลักษณะอนุกรมเวลาได้ดังนี้ (1) ความแปรปรวนของอนุกรมเวลานี้ในบางช่วงเวลามีค่าสูงขึ้น และมีบางช่วงเวลาที่ความแปรปรวนดังกล่าวต่ำลง (2) ความแปรปรวนในอนุกรมเวลานี้จะเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป กล่าวคือ ค่อย ๆ สูงขึ้น หรือค่อย ๆ ลดลง และความแปรปรวนดังกล่าวจะไม่เปลี่ยนแปลงแบบก้าวกระโดด (3) แม้ว่าความแปรปรวนของอนุกรมเวลาค่อย ๆ เพิ่มขึ้น แต่จะไม่เพิ่มขึ้นจนมีค่าเป็นอนันต์ จะค่อย ๆ ลดลงในช่วงเวลาถัดไป นั่นคือ เมื่อเราเก็บข้อมูลความแปรปรวนที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงเวลาได้ จะได้ข้อมูลความแปรปรวนที่มีความนิ่ง

ในบทนี้ เราจึงมาศึกษาแบบจำลองที่สามารถใช้กับอนุกรมเวลาที่มีความแปรปรวนในลักษณะดังกล่าว และยังสามารถนำไปใช้พยากรณ์ทั้งค่าของอนุกรมเวลา และค่าความแปรปรวนในระยะสั้นของอนุกรมเวลานั้นอีกด้วย แบบจำลองนี้แบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ แบบจำลอง ARCH และ แบบจำลอง GARCH แต่ก่อนอื่นเราควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับการหา ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข (Conditional Mean) และความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) เสียก่อน รายละเอียดมีดังต่อไปนี้

8.1 ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขและความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Mean and Conditional Variance)

ในหัวข้อนี้ จะแสดงถึงวิธีการหาค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขและความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข ดังจะยกตัวอย่างต่อไปนี้ กำหนดให้นักเก็งกำไรในระยะสั้น ต้องการพยากรณ์ความแปรปรวนรายวันในราคาหลักทรัพย์ของบริษัทหนึ่ง โดยสร้างแบบจำลองดังนี้

$$Y_{t+1} = \mu + \varepsilon_{t+1}X_t \tag{8.1}$$

โดยที่ Y_{t+1} คือราคาของหลักทรัพย์บริษัทหนึ่ง ณ เวลา $t+1$

X_t คือตัวแปรอิสระที่มีผลกระทบต่อราคาหลักทรัพย์บริษัทหนึ่ง ณ เวลา t

ε_{t+1} คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวและอาจเรียกว่า "เหตุการณ์ที่ไม่คาดฝัน (shock)" ก็ได้

μ คือค่าคงที่

ถ้ากำหนดให้ตัวแปรอิสระ ณ เวลาที่ 1, 2, …, t เป็นตัวแปรที่เราทราบค่าแล้ว นั่นคือ X_t ถือเป็นค่าคงที่ ไม่ใช่ตัวแปรสุ่มแล้ว และค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ Y_{t+1} ภายใต้เงื่อนไขว่าเราทราบว่าค่าตัวแปรอิสระ X ที่ผ่านมา จะหาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\mathrm{E}(Y_{t+1}|X_t) = \mu \tag{8.2}$$
$$\mathrm{Var}(Y_{t+1}|X_t) = X_t^2\sigma^2 \tag{8.3}$$

สมการที่ (8.2) ก็คือค่าเฉลี่ยของราคาหลักทรัพย์บริษัทนี้แบบมีเงื่อนไข (Conditional Mean) ส่วนสมการที่ (8.3) คือค่าความแปรปรวนของราคาหลักทรัพย์บริษัทนี้แบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) ซึ่งอาจถูกเรียกว่าค่าเฉลี่ยในระยะสั้นและความแปรปรวนในระยะสั้นของราคาหลักทรัพย์ของบริษัทนี้ตามลำดับก็ได้ และจะเห็นว่าความแปรปรวนของราคาหลักทรัพย์บริษัทนี้ในระยะสั้นขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรอิสระ X_t ด้วย กล่าวคือ ยิ่ง X_t มีค่ามากขึ้นจะทำให้ $\mathrm{Var}(Y_{t+1}|X_t)$ ยิ่งสูงขึ้น

ลองพิจารณาอีกตัวอย่างหนึ่ง กำหนดให้นักเก็งกำไรรายหนึ่งต้องการพยากรณ์ความแปรปรวนรายวันในอัตราแลกเปลี่ยนของประเทศหนึ่ง โดยสร้างแบบจำลองดังนี้

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q}\beta_i\varepsilon_{t-i} + \gamma X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{8.4}$$

โดยที่ Y_t คืออัตราแลกเปลี่ยนของประเทศหนึ่ง ณ เวลา t

X_{t-1} คือตัวแปรอิสระที่มีผลกระทบต่ออัตราแลกเปลี่ยนของประเทศนี้ ณ เวลา $t-1$

ε_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว หรืออาจเรียกว่าเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (shock)

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของอัตราแลกเปลี่ยนประเทศนี้ ณ เวลา t ภายใต้เงื่อนไขว่าเราทราบข่าวสารทั้งหมด ณ เวลา $t-1$ หรือเขียนแทนด้วย I_{t-1} (ซึ่งหมายถึง เราทราบข้อมูลของ X_{t-1}, Y_{t-1}, Y_{t-2}, …,Y_{t-p}, ε_{t-1}, ε_{t-2}, …, ε_{t-q}) หาได้จากสมการต่อไปนี้

$$E(Y_t|I_{t-1}) = \alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q}\beta_i\varepsilon_{t-i}+\gamma X_{t-1} \quad (8.5)$$

$$Var(Y_t|I_{t-1}) = var(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma^2 \quad (8.6)$$

ในกรณีนี้จะเห็นว่า ความแปรปรวนของอัตราแลกเปลี่ยนของประเทศนี้ในระยะสั้นไม่ขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปรอิสระ X_t

สมการที่ (8.3) และ (8.6) เป็นตัวอย่างของสมการที่ใช้อธิบายความแปรปรวนของอนุกรมเวลาในระยะสั้น ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่เกิดขึ้นในอดีต ในหัวข้อถัดไปจะแสดงถึงสมการที่ใช้อธิบายความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มในระยะสั้นที่เกี่ยวของกับเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่เกิดขึ้นในอดีตซึ่งเรียกว่าแบบจำลอง ARCH

8.2 แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH)

แบบจำลอง ARCH คือแบบจำลองที่มีลักษณะ 2 อย่าง ได้แก่ (1) เหตุการณ์ไม่คาดฝัน (ε_t) **ไม่ขึ้น**อยู่กับเหตุการณ์ไม่คาดฝันในอดีต หรือกล่าวว่าตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนไม่มีความสัมพันธ์กันเองนั่นเอง (No Serial Correlation) จะเขียนได้ดังนี้

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \quad (8.7\ ก)$$

โดยที่ v_t คือตัวรบกวนขาว ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ความแปรปรวนเท่ากับ 1, σ_t คือค่าพารามิเตอร์ที่แสดงถึงส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน[1]ของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในระยะสั้น และ (2) ความแปรปรวน

[1] หรืออาจเรียก σ_t ว่าความผันผวน (Volatility) ของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในระยะสั้นก็ได้ ซึ่งก็คือรากที่ 2 ของค่าความแปรปรวนของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในระยะสั้นนั่นเอง

ของเหตุการณ์ไม่คาดฝันแบบมีเงื่อนไข **อยู่ในรูปพหุนามกำลังสองของเหตุการณ์ไม่คาดฝันอดีต** ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\text{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_2\varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \gamma_m\varepsilon_{t-m}^2 \qquad (8.7\ ข)$$[2]

โดย I_{t-1} คือข่าวสารทั้งหมดที่เกิดขึ้น ณ เวลา $t-1$ และ $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ คือค่าพารามิเตอร์ และ $\gamma_0 > 0, \gamma_i \geq 0$ เมื่อ $i > 0$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขของที่ทำให้แน่ใจว่าความแปรปรวนของเหตุการณ์ไม่คาดฝันมีค่าเป็นบวก[3] จากสมการที่ (8.7 ข) เรามีข้อสังเกตดังนี้

(1) ภายใต้เงื่อนไขว่าเราทราบข่าวสารทั้งหมด ณ เวลา t–1 ค่าของ $\varepsilon_{t-1}^2, \ldots, \varepsilon_{t-m}^2$ จะไม่ใช่ตัวแปรสุ่มอีกต่อไป โดยจะถือเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง ดังนั้น σ_t^2 ก็คือพารามิเตอร์ค่าหนึ่งนั่นเอง

(2) หากค่ากำลังสองของเหตุการณ์ที่ไม่คาดฝันที่ผ่านมา m ช่วงเวลา หรือ $\{\varepsilon_{t-i}^2\}_{i=1}^m$ มีค่ามากขึ้น จะทำให้ $\text{var}(\varepsilon_t|I_{t-1})$ จะมีค่าสูงขึ้น

แบบจำลองที่มีเงื่อนไขตามสมการที่ (8.7 ก) และ (8.7 ข) จะถูกเรียกว่า แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroscedasticity ลำดับที่ m หรือ ARCH(m) เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น พิจารณาแบบจำลอง ARCH(1) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \qquad (8.8\ ก)$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 \qquad (8.8\ ข)$$

โดยที่ $\gamma_0 > 0$ และ $\gamma_1 \geq 0$ สมการที่ (8.8 ข) แสดงความแปรปรวนของ ε_t ในระยะสั้นซึ่งอาจถูกเขียนได้อีกแบบคือ

$$\text{E}(\varepsilon_t^2|I_{t-1}) = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 \qquad (8.9)$$

---

[2] สมการที่ (8.7 ข) อาจเขียนในรูป $\sigma_t = \sqrt{\gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_m\varepsilon_{t-m}^2}$ และเราจะเรียกว่าเป็นสมการที่แสดงความผันผวน (Volatility)

[3] สมการที่ (8.7 ก) และ (8.7 ข) อาจถูกเขียนเป็นสมการเดียวในรูปต่อไปนี้

$$\varepsilon_t = v_t\sqrt{\gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_m\varepsilon_{t-m}^2}$$

การหาค่าเฉลี่ยแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Mean) และค่าความแปรปรวนแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Variance) ของ ε_t ต้องใช้ความรู้เรื่องการหาค่าคาดหวังแบบซ้ำ 2 ครั้ง (Double Expected Value)[4] แสดงได้ดังนี้

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t) = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}(\varepsilon_t|\, I_{t-1})] = \mathrm{E}\,(\sigma_t\,\mathrm{E}(v_t)\,] = \sigma_t\,\mathrm{E}(v_t) = 0 \tag{8.10}$$

ทำนองเดียวกัน ความแปรปรวนของ ε_t แบบไม่มีเงื่อนไขหรือในระยะยาวหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) &= \mathrm{E}[\mathrm{E}(\varepsilon_t^2|I_{t-1})]\\ &= \mathrm{E}[\gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2]\\ &= \gamma_0 + \gamma_1\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2)\end{aligned}$$

นั่นคือ $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \gamma_0 + \gamma_1\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1})$

เนื่องจาก ε_t เป็นตัวรบกวนขาวซึ่งความแปรปรวนจะคงที่เสมอ นั่นคือ $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2$ ดังนั้น สมการข้างบนจะเขียนได้ว่า

$$\sigma^2 = \gamma_0 + \gamma_1\,\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\gamma_0}{1-\gamma_1} \tag{8.11 ก}$$

$$\text{หรือ } Var(\varepsilon_t) = \frac{\gamma_0}{1-\gamma_1} \tag{8.11 ข}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (8.10) และ (8.11 ข) จะกล่าวได้ว่าค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในระยะยาวเป็นค่าคงที่ทั้งคู่ โดยไม่เกี่ยวข้องกับการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันในช่วงเวลาก่อนหน้านี้ นอกจากนี้เรายังต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติมเพื่อให้แน่ใจว่า $\mathrm{Var}(\varepsilon_t)$ มีค่าเป็นบวกและสามารถหาค่าได้ ซึ่งก็คือ $\gamma_0 > 0$ และ $0 \le \gamma_1 < 1$

---

[4] ค่าคาดหวังแบบซ้ำ 2 ครั้ง มีคุณสมบัติดังนี้ "**ถ้า *X* และ *Y* คือตัวแปรสุ่มใด ๆ แล้ว** $\mathbf{E}g(Y) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(g(Y)|\,X)]$" ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ใน Mittelhammer, R. C., *Mathematical Statistics for Economics and Business* (New York: Springer–Verlag Inc., 1996), pp. 127–128.

ส่วนการหาค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนในระยะสั้นของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน หรือเรียกว่า ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข (Conditional Mean) และค่าความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) แสดงได้ดังนี้

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = 0$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2$$

นั่นคือ เรากล่าวได้ว่าค่าเฉลี่ยของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในระยะสั้นจะเป็นค่าคงที่ แต่ค่าความแปรปรวนของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในระยะสั้นจะขึ้นอยู่กับการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันในช่วงเวลาก่อนหน้าด้วย

ต่อมาเราจะมาดูว่าเมื่อตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (ε_t) เป็น ARCH แล้วจะทำให้อนุกรมเวลา Y เป็น ARCH ด้วยหรือไม่ กำหนดให้นักเก็งกำไรในระยะสั้นต้องการพยากรณ์ความแปรปรวนในราคาหลักทรัพย์ของบริษัท A โดยสร้างแบบจำลอง AR(1) ดังนี้

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (8.12\text{ ก})$$[5]

และนักเก็งกำไรรายนี้ประยุกต์ใช้ ARCH (1) กับเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (ε_t) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \qquad (8.12\text{ ข})$$

และ $$\mathrm{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 \qquad (8.12\text{ ค})$$[6]

ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนในระยะสั้นราคาหลักทรัพย์ของบริษัท A หาได้จากสมการที่ (8.12 ก) ดังนี้

$$\mathrm{E}(Y_t|I_{t-1}) = \alpha_1 Y_{t-1} + \mathrm{E}(\varepsilon_t|I_{t-1})$$

$$= \alpha_1 Y_{t-1} \qquad (8.13\text{ ก})$$[7]

$$\mathrm{Var}(Y_t|I_{t-1}) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1})$$

[5] เราอาจเรียกสมการนี้ว่า สมการค่าเฉลี่ย (Mean Equation) ของอนุกรมเวลา Y_t

[6] เราอาจเรียกสมการนี้ว่า สมการความแปรปรวน (Variance Equation) ของอนุกรมเวลา Y_t

[7] ภายใต้เงื่อนไขว่าเราทราบข่าวสาร ณ เวลาที่ $t-1$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $I_{t-1} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{t-1}\}$ นั่นคือ Y_{t-1} ถือเป็นค่าคงที่

$$= \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 \qquad (8.13 \text{ ข})$$

จากการพิจาณาแบบจำลอง ARCH มีข้อสังเกตที่น่าสนใจดังนี้

ก. ความแปรปรวนราคาหลักทรัพย์ของบริษัท A ในระยะสั้น หรือ Var(Y_t | I_{t-1}) มีค่าเท่ากับความแปรปรวนของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในระยะสั้นหรือ Var(ε_t| I_{t-1}) ซึ่งจะขึ้นอยู่กับค่าเหตุการณ์ไม่คาดฝันยกกำลังสองในช่วงเวลาที่แล้ว นั่นคือเมื่อเราสมมุติให้ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ε_t เป็น ARCH(1) จะทำให้อนุกรมเวลา Y ย่อมมีรูปแบบ ARCH(1) ด้วย

ข. เมื่อมีเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่มีขนาดรุนแรงเกิดขึ้น จะทำให้ความแปรปรวนในระยะสั้นมีค่ามากตามไปด้วย นั่นคือมี**โอกาส**[8]ที่จะเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่รุนแรงตามมาอีก

ค. ในแบบจำลอง ARCH นั้น การเกิดเหตุการณ์ที่ไม่คาดฝัน (shock) ไม่ว่าจะเป็นด้านบวกหรือด้านลบ จะส่งผลกระทบต่อความแปรปรวนระยะสั้นในตัวแปร Y (เช่นราคาหลักทรัพย์) เหมือนกัน (เนื่องจากเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (shock : ε_t) จะมีการยกกำลังสอง) ซึ่งในโลกความเป็นจริงจะส่งผลกระทบต่อความแปรปรวนในตัวแปร Y ไม่เหมือนกัน

ง. อนุกรมเวลาที่ใช้ในแบบจำลอง ARCH ยังต้องเป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง แม้ว่าความแปรปรวนของ Y_t ในระยะสั้นจะมีค่าไม่คงที่ แต่ความแปรปรวนในระยะยาวของ Y_t มีค่าคงที่[9]

8.2.1 การสร้างแบบจำลอง ARCH

ในหัวข้อที่แล้ว เราทราบถึงลักษณะของแบบจำลอง ARCH มาแล้ว และในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำไปใช้ในทางปฏิบัติ กล่าวคือการนำแบบจำลอง ARCH ไปประยุกต์ใช้กับอนุกรมเวลา มี 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 : สร้างสมการค่าเฉลี่ย (Mean Equation) ของอนุกรมเวลา Y_t โดยอาจเป็นแบบจำลองของ Box–Jenkins หรือแบบจำลองการวิเคราะห์การถดถอย เพื่อให้ได้ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนไม่สัมพันธ์กันเอง (No Serial Correlation) ในที่นี้ขอยกตัวอย่าง สมการค่าเฉลี่ยอยู่ในรูปสมการถดถอยดังนี้

---

[8] เราใช้คำว่าโอกาส เนื่องจากไม่จำเป็นต้องเกิดขึ้นเสมอไป

[9] ความนิ่งหรือไม่นิ่งของอนุกรมเวลา Y_t จะต้องพิจารณาจากค่าเฉลี่ยในระยะยาว และความแปรปรวนในระยะยาว

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \ldots + \beta_K X_{Kt} + \varepsilon_t \tag{8.14}$$

โดยที่ $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{Kt}$ คือตัวแปรอิสระ ณ เวลา t และ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ คือค่าพารามิเตอร์

เราสามารถใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Square: OLS) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (8.14) ทำให้คำนวณค่าความผิดพลาดจากการประมาณสมการถดถอย (Residual : e_t) ได้

ขั้นที่ 2 : ใช้ค่า e_t จากการประมาณสมการค่าเฉลี่ยของ Y_t ในขั้นที่หนึ่ง ทดสอบว่าแบบจำลอง ARCH มีความเหมาะสมกับการประยุกต์ใช้กับ Y_t หรือไม่ ซึ่งทำได้ 2 วิธี ได้แก่ วิธีที่1 ใช้ค่าสถิติ Ljung–Box Q หรือ $Q(m)$ ของ e_t^2 ซึ่งหากพบว่าสมมุติฐานหลัก H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ ถูกปฏิเสธ นั่นหมายถึงแบบจำลอง ARCH สามารถนำมาใช้กับอนุกรมเวลา Y_t ได้ แต่หากสมมุติฐานหลัก H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$ ไม่ถูกปฏิเสธ นั่นหมายถึงแบบจำลอง ARCH ไม่ควรนำมาใช้กับอนุกรมเวลา Y_t ส่วนวิธีที่ 2 คือการใช้สมการต่อไปนี้

$$e_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 e_{t-1}^2 + \gamma_2 e_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_m e_{t-m}^2 + u_t \tag{8.15}$$

จากนั้นทำการทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$ โดยค่าสถิติที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานข้างดังกล่าวคือ LM = $N \times R^2 \sim \chi_m^2$ โดยที่ N คือจำนวนข้อมูลที่ใช้ประมาณสมการที่ (8.15) และ R^2 คือค่าสัมประสิทธิ์ของการกำหนดที่ได้จากสมการที่ (8.15) หรืออาจใช้ค่าสถิติ F ในการทดสอบสมมุติฐานนี้แทนก็ได้[10] ถ้าผลการทดสอบสรุปว่า เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก จะหมายถึงแบบจำลอง ARCH สามารถนำไปใช้กับอนุกรมเวลา Y_tได้ แต่หากผลการทดสอบสรุปว่าสมมุติฐานหลักไม่ถูกปฏิเสธ นั่นคือแบบจำลอง ARCH ไม่ควรนำไปใช้กับอนุกรมเวลา Y_t

เมื่อพิจารณาสมการที่ (8.15) จะเห็นว่า อยู่ในรูปแบบจำลอง AR(m) นั่นคือ เราสามารถใช้หลักเกณฑ์ที่ได้เคยศึกษามาแล้วในบทที่ 2 ในการลองเลือกค่า m ขึ้นมาก็ได้ ซึ่งก็คือค่า TPAC ของอนุกรมเวลา e_t^2 จะสิ้นสุดหลังจาก m ช่วงเวลาที่แล้ว (Cut off after lag m)[11]

---

[10] สำหรับสูตรในการของค่าสถิติ F ดูได้ใน ภูมิฐาน รังกคูลนุวัฒน์, *เศรษฐมิติเบื้องต้น*, พิมพ์ครั้งที่ 2. (กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554), หน้า 80.

[11] การเลือกค่า m ด้วยวิธีนี้จะได้ผลดีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

ขั้นที่ 3 : ประมาณสมการความแปรปรวน (Variance Equation) ของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน หากสมมุติฐานหลักในขั้นที่ 2 ถูกปฏิเสธ แล้วจึงประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งของสมการค่าเฉลี่ยและสมการความแปรปรวนพร้อม ๆ กันด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุด(Maximum Likelihood)[12]

ขั้นที่ 4 : ตรวจสอบว่าแบบจำลอง ARCH ที่สร้างขึ้นว่าเหมาะสมหรือไม่ โดยใช้หลักเกณฑ์ดังนี้

- $\tilde{e}_t$ (ค่ามาตรฐานของ e_t) จะต้องไม่มีความสัมพันธ์กันเอง และ
- $\tilde{e}_t^2$ (ค่ามาตรฐานของ e_t ยกกำลังสอง) ก็จะต้องไม่มีความสัมพันธ์กันเองด้วย

การทดสอบดังกล่าวสามารถทำได้ด้วยการใช้ค่าสถิติ Ljung–Box Q ของ $\tilde{e}_t$ และ $\tilde{e}_t^2$ ตามลำดับ สูตรในการคำนวณค่ามาตรฐานของ e_t คือ $\tilde{e}_t = \dfrac{e_t}{\sigma_t}$ ส่วนค่า σ_t จะประมาณจากรากที่ 2 ของค่าพยากรณ์ที่ได้จากสมการความแปรปรวน (8.15) นั่นเอง ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อย่อยถัดไปนี้

8.2.2 การพยากรณ์ความแปรปรวนระยะสั้น

ในกรณีของแบบจำลอง ARCH(1) การพยากรณ์ความแปรปรวนระยะสั้น สามารถทำได้ด้วยการใช้สมการต่อไปนี้

$$\text{Var}(\varepsilon_t | I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

โดยมีเงื่อนไขว่า เราทราบข่าวสารทั้งหมด ณ เวลา t–1 หรือเขียนแทนด้วย I_{t-1} (ซึ่งหมายถึง เราทราบข้อมูลทุกตัวแปรตั้งแต่เวลาที่ 1, 2, …, จนถึง t–1) แนวคิดการพยากรณ์ความแปรปรวนจะเหมือนกับที่ได้อธิบายไว้ในบทที่แล้ว ดังนั้นจะขอยกตัวอย่างการคำนวณค่าพยากรณ์ของความแปรปรวนระยะสั้น ณ ช่วงเวลา t, t+1, t+2 และ t+3 ดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_t^2 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \varepsilon_{t-1}^2 \\
\hat{\sigma}_{t+1}^2 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \hat{\sigma}_t^2 \\
\hat{\sigma}_{t+2}^2 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \hat{\sigma}_{t+1}^2 \\
\hat{\sigma}_{t+3}^2 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \hat{\sigma}_{t+2}^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

---

[12] สำหรับผู้สนใจ ดูภาคผนวก 8ก

ค่า ε_{t-1}^2 จะต้องเป็นค่าที่เราใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุด และเราสามารถเขียนค่าพยากรณ์ความแปรปรวนในระยะสั้นในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\hat{\sigma}_{t+j}^2 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \hat{\sigma}_{t+j-1}^2 \quad (8.16)$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_{t+j-1}^2 = \varepsilon_{t+j-1}^2$ เมื่อ $j-1 < 0$ และเมื่อ $j \to \infty$ แล้วค่าพยากรณ์ความแปรปรวนในระยะสั้นจะคำนวณจากสมการต่อไปนี้[13]

$$\hat{\sigma}_{t+j}^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{1-\hat{\gamma}_1} \quad (8.17)$$

สมการที่ (8.17) แสดงให้เราทราบว่า เมื่อเราพยากรณ์ไปข้างหน้าไกลขึ้นเรื่อย ๆ ค่าพยากรณ์ความแปรปรวนระยะสั้น จะเข้าใกล้ค่า $\frac{\hat{\gamma}_0}{1-\hat{\gamma}_1}$ ซึ่งก็คือตัวประมาณความแปรปรวนของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในระยะยาวนั่นเอง (ดูสมการที่ (8.11 ข) ประกอบ) ส่วนแนวคิดการพยากรณ์กรณีใช้แบบจำลอง ARCH(m) ดูได้ในภาคผนวก 8ค

8.2.3 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้แบบจำลอง ARCH

สมมุติให้นักเก็งกำไรคนหนึ่งเก็บข้อมูลอัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาหลักทรัพย์ (GP_t) จำนวน 572 สัปดาห์ (ดูรูปที่ 8.1) ซึ่งจะเห็นว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาหลักทรัพย์นี้รายสัปดาห์ พบว่าบางช่วงเวลามีความแปรปรวนมากขึ้น บางช่วงก็มีความแปรปรวนน้อยลงสลับกันไป ทำให้นักเก็งกำไรสร้างแบบจำลองเพื่ออธิบายอนุกรมเวลา GP_t ดังนี้

$$GP_t = \beta_1 + \beta_2 GP_{t-1} + \beta_3 Inf_t + \beta_4 Tbond_t + \varepsilon_t \quad (8.18\ ก)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \quad (8.18\ ข)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_m \varepsilon_{t-m}^2 \quad (8.18\ ค)$$

โดยที่ GP_t คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาหลักทรัพย์ ณ เวลาที่ t, Inf_t คืออัตราเงินเฟ้อ ณ เวลา t, $Tbond_t$ คืออัตราดอกเบี้ยของหุ้นกู้อายุสามเดือน 1 ณ เวลาที่ t, ε_t คือตัวแปรสุ่ม

[13] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 8ข

คลาดเคลื่อนของสมการค่าเฉลี่ย ณ เวลาที่ t และ v_t เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ N(0,1) และเป็นอิสระจากช่วงเวลาอื่น ๆ

สมการที่ (8.18 ก) ก็คือสมการค่าเฉลี่ย ส่วนสมการที่ (8.18 ค) คือสมการความแปรปรวนนั่นเอง เพื่อให้แน่ใจว่าควรใช้แบบจำลอง ARCH กับอนุกรมเวลา GP_t หรือไม่ เราควรทำขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 ก่อน ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 : ประมาณสมการค่าเฉลี่ย (8.18) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งผลการประมาณสมการค่าเฉลี่ยคือ

$$\widehat{GP}_t = 1.18 + 0.208GP_{t-1} - 1.180Inf_t - 1.250Tbond_t \qquad (8.19 ก)$$

ค่าสถิติ $t = (5.60)^{***}$ $(5.07)^{***}$ $(-2.63)^{***}$ $(-4.29)^{***}$

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 0.01

จากนั้นคำนวณค่าความผิดพลาดของการประมาณสมการค่าเฉลี่ย (e_t) จาก $GP_t - \widehat{GP}_t$ ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในต่อขั้นที่ 2

ขั้นที่ 2 : เราจะใช้ค่า e_t^2 ในทดสอบว่าแบบจำลอง ARCH สามารถใช้กับอนุกรมเวลานี้ได้หรือไม่ เมื่อพิจารณารูปที่ 8.2 ซึ่งแสดงค่า TPAC ของค่า e_t^2 สิ้นสุดหลัง 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (นั่นคือ $m = 1$) และค่า Q(1) = 6.381 ซึ่งมีค่า P-value = 0.000 ทำให้เราสรุปได้ว่าแบบจำลอง ARCH(1) สามารถนำมาใช้ร่วมกับอนุกรมเวลานี้ได้

อีกวิธีหนึ่งที่สามารถใช้ทดสอบได้เช่นกัน ก็คือใช้สมการที่ (8.15) โดยลองเลือก $m = 1$ ผลการประมาณแสดงได้ดังนี้

$$\hat{e}_t^2 = 9.378 + 0.115e_{t-1}^2 \qquad (8.19 ข)^{14}$$

$(10.02)^{***}$ $(2.64)^{***}$

$R^2 = 0.012$ $N = 570$

---

[14] จำนวนตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณสมการที่ (8.19 ข) คือ 570 (N = 570) เนื่องจากในสมการค่าเฉลี่ย (8.19 ก) มีการใช้ตัวแปรอิสระ 1 ช่วงเวลาที่ผ่านมา ดังนั้นทำให้เราต้องเริ่มใช้ข้อมูลตั้งแต่ตัวอย่างที่ 2 ถึง 572 เป็นต้นไปในการคำนวณค่า e_2, e_3, …, e_{572} (มี 571 ข้อมูล) และสมการที่ (8.19 ข) มีการใช้ค่า e_{t-1} นั่นคือ เราต้องเริ่มใช้ข้อมูลตั้งแต่ e_3, …,e_{572} (มีจำนวน 570 ข้อมูล)

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\gamma_1 = 0$ และ H_1: $\gamma_1 \neq 0$ คือค่าสถิติ $LM = N \times R^2 = 570 \times 0.0122 = 6.954$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(1)}$ และที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 0.05 ค่าวิกฤตในกรณีนี้คือ 3.841 ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 0.05 นั่นคือ แบบจำลอง ARCH สามารถนำมาใช้ร่วมกับอนุกรมเวลานี้ได้[15]

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.105	0.105	6.3810	0.012
		2	0.018	0.007	6.5739	0.037
		3	0.059	0.057	8.5749	0.036
		4	0.019	0.007	8.7780	0.067
		5	0.061	0.058	10.898	0.053
		6	0.109	0.095	17.742	0.007
		7	0.034	0.012	18.410	0.010
		8	0.017	0.005	18.571	0.017
		9	0.018	0.003	18.750	0.027
		10	0.009	-0.000	18.796	0.043
		11	0.027	0.014	19.207	0.057
		12	0.033	0.016	19.850	0.070
		13	-0.017	-0.028	20.017	0.095
		14	-0.024	-0.026	20.351	0.119
		15	0.037	0.038	21.174	0.131
		16	0.001	-0.007	21.175	0.172
		17	-0.050	-0.055	22.650	0.161
		18	0.057	0.063	24.596	0.136
		19	-0.007	-0.013	24.622	0.173
		20	-0.043	-0.036	25.720	0.175
		21	-0.029	-0.034	26.235	0.198
		22	-0.004	0.008	26.243	0.241
		23	0.019	0.028	26.464	0.279
		24	-0.047	-0.059	27.780	0.269
		25	0.002	0.020	27.783	0.318
		26	-0.007	-0.000	27.809	0.368
		27	-0.024	-0.015	28.149	0.403
		28	-0.030	-0.025	28.692	0.428
		29	-0.065	-0.058	31.246	0.354
		30	-0.020	-0.003	31.499	0.391
		31	0.017	0.026	31.674	0.433
		32	-0.050	-0.038	33.201	0.408
		33	-0.013	-0.001	33.299	0.453
		34	0.052	0.060	34.944	0.423
		35	-0.027	-0.010	35.375	0.450
		36	-0.037	-0.031	36.194	0.460

รูปที่ 8.2 แสดงค่า SAC และ SPAC ของค่า e_t^2 จากสมการที่ (8.19 ก)

[15] เราอาจใช้ค่าสถิติ F ในการทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\gamma_1 = 0$ และ H_1: $\gamma_1 \neq 0$ ก็ได้ และเนื่องจากการทดสอบสมมุติฐานนี้เป็นการทดสอบสมมุติฐานรายตัว ดังนั้น ค่าสถิติ t ก็สามารถใช้ทดสอบสมมุติฐานนี้ได้เช่นกัน

ขั้นที่ 3 : ประมาณสมการความแปรปรวน (Variance Equation) ของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน ด้วยการลองเลือกค่า m = 1 ดังนั้น แบบจำลอง ARCH ที่จะนำมาประยุกต์ใช้กับอนุกรมเวลา อัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาหลักทรัพย์ เขียนได้ดังนี้

$$GP_t = \beta_1 + \beta_2 GP_t + \beta_3 Inf_t + \beta_4 Tbond_t + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งของสมการค่าเฉลี่ยและสมการความแปรปรวนข้างต้นพร้อม ๆ กัน ด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Maximum Likelihood) แสดงได้ดังนี้

$$\widehat{GP}_t = \underset{(6.53)^{***}}{1.409} + \underset{(3.40)^{***}}{0.170 GP_t} - \underset{(-3.73)^{***}}{1.474\, Inf_t} - \underset{(-5.44)^{***}}{1.353 Tbond_t} \quad (8.20\ \text{ก})$$

$$\sigma_t^2 = \underset{(14.87)}{8.981} + \underset{(3.09)}{0.160\, \varepsilon_{t-1}^2} \quad (8.20\ \text{ข})$$

ขั้นที่ 4 : ตรวจสอบแบบจำลองARCH ที่สร้างขึ้นว่าเหมาะสมกับข้อมูลหรือไม่ ซึ่งเราต้องคำนวณค่ามาตรฐานของค่าผิดพลาดที่ได้จากการประมาณสมการค่าเฉลี่ย (8.20 ก) หรือเขียนเป็นสมการได้เป็น $\tilde{e}_t = \frac{e_t}{\sigma_t}$ โดยที่ $e_t = GP_t - \widehat{GP}_t$ และค่า σ_t จะประมาณจากการหาค่ารากที่สองของค่า σ_t^2 ซึ่งประมาณขึ้นจาก (8.18 ข)[16] และค่า SAC และค่าสถิติ Q ของ $\tilde{e}_t$ แสดงได้ดังรูปที่ 8.3 ทำให้เราสรุปได้ว่า $\tilde{e}_t$ (ค่ามาตรฐานของ e_t) จะต้องไม่มีความสัมพันธ์กันเอง นั่นคือสมการค่าเฉลี่ย (8.20 ก) ที่ประมาณขึ้นมีความเหมาะสมแล้ว อย่างไรก็ดี เราต้องตรวจสอบความเหมาะสมของสมการความแปรปรวน (8.20 ข) ด้วย ซึ่งพิจารณาได้ค่า SAC และค่าสถิติ Q ของ $\tilde{e}_t^2$ (ดูรูปที่ 8.4) ซึ่งให้ข้อสรุปได้ว่า $\tilde{e}_t^2$ (ค่ามาตรฐานของ e_t ยกกำลังสอง) ไม่มีความสัมพันธ์กันเองด้วย ดังนั้น เรากล่าวได้ว่าแบบจำลอง ARCH(1) ที่ประมาณขึ้นมีความเหมาะสมในการประยุกต์ใช้กับอนุกรมเวลาอัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาหลักทรัพย์แล้ว

---

[16] ดูตัวอย่างการคำนวณในภาคผนวก 8ง

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.018	0.018	0.1861	0.666
		2	-0.024	-0.024	0.5061	0.776
		3	0.030	0.031	1.0249	0.795
		4	0.013	0.011	1.1221	0.891
		5	0.084	0.085	5.1924	0.393
		6	-0.033	-0.037	5.8166	0.444
		7	-0.049	-0.044	7.2009	0.408
		8	0.067	0.063	9.8393	0.276
		9	0.015	0.010	9.9641	0.353
		10	-0.047	-0.049	11.237	0.339
		11	0.078	0.085	14.802	0.192
		12	-0.047	-0.049	16.087	0.187
		13	0.038	0.033	16.943	0.202
		14	-0.032	-0.040	17.533	0.229
		15	-0.099	-0.083	23.342	0.077
		16	0.051	0.035	24.864	0.072
		17	-0.007	-0.005	24.894	0.097
		18	0.010	0.023	24.959	0.126
		19	-0.061	-0.068	27.129	0.102
		20	-0.034	-0.014	27.802	0.114
		21	-0.003	-0.017	27.807	0.146
		22	0.015	0.005	27.935	0.178
		23	-0.081	-0.058	31.857	0.103
		24	0.034	0.039	32.535	0.114
		25	0.016	0.012	32.695	0.139
		26	0.006	0.018	32.715	0.171
		27	0.053	0.044	34.432	0.154
		28	0.013	0.037	34.532	0.184
		29	0.054	0.030	36.285	0.165
		30	0.022	0.018	36.582	0.190

รูปที่ 8.3 แสดงค่า SAC และ SPAC ของค่า e_t จากสมการที่ (8.20 ก)

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.012	-0.012	0.0825	0.774
		2	0.015	0.014	0.2052	0.903
		3	0.061	0.061	2.3516	0.503
		4	0.015	0.017	2.4863	0.647
		5	0.057	0.056	4.3730	0.497
		6	0.116	0.115	12.230	0.057
		7	0.004	0.005	12.240	0.093
		8	0.026	0.017	12.641	0.125
		9	0.022	0.008	12.921	0.166
		10	0.014	0.007	13.034	0.222
		11	0.025	0.010	13.410	0.267
		12	0.035	0.020	14.128	0.293
		13	-0.001	-0.005	14.128	0.365
		14	-0.041	-0.052	15.129	0.369
		15	0.041	0.032	16.140	0.373
		16	0.010	0.007	16.195	0.439
		17	-0.043	-0.047	17.282	0.435
		18	0.082	0.073	21.262	0.266
		19	-0.009	-0.002	21.309	0.320
		20	-0.038	-0.032	22.175	0.331
		21	-0.027	-0.045	22.608	0.365
		22	0.005	0.008	22.623	0.423
		23	0.024	0.030	22.969	0.463
		24	-0.057	-0.071	24.885	0.412
		25	0.014	0.021	25.008	0.462
		26	0.004	0.014	25.016	0.518
		27	-0.015	-0.007	25.159	0.566
		28	-0.018	-0.024	25.364	0.608
		29	-0.056	-0.053	27.230	0.559
		30	-0.024	-0.015	27.574	0.593

รูปที่ 8.4 แสดงค่า SAC และ SPAC ของค่า $\tilde{e}_t^2$ จากสมการที่ (8.20 ก)

8.3 แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)

ในกรณีที่ลำดับ m ของแบบจำลอง ARCH มีค่ามาก ทำให้ค่าพารามิเตอร์มีจำนวนมากตามไปด้วย Bollerslev (1986) จึงได้เสนอแบบจำลอง GARCH ขึ้นมา ซึ่งสามารถลดจำนวนค่าพารามิเตอร์ลงได้ ซึ่งมีแนวคิดดังนี้

แบบจำลอง GARCH จะนำความแปรปรวนในระยะสั้นที่ผ่านมาในอดีตมาใส่เพิ่มเข้ามาในแบบจำลอง ARCH โดยเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า GARCH (p,m) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \quad (8.21 \text{ ก})$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\sigma_{t-i}^2 \quad (8.21 \text{ ข})$$

โดยที่ v_t เป็น white noise ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1, ส่วน $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ จะแสดงค่าพารามิเตอร์ของ ARCH และ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ จะแสดงค่าพารามิเตอร์ของ GARCH จะเห็นว่า ถ้า $p = 0$ แล้วแบบจำลอง GARCH(p,m) = GARCH(0, m) ซึ่งก็คือแบบจำลอง ARCH(m) นั่นเอง

เนื่องจาก σ_t^2 และ σ_{t-i}^2 คือค่าพารามิเตอร์ซึ่งเก็บข้อมูลไม่ได้ เราจึงเขียนสมการที่ (8.21 ข) โดยใช้เงื่อนไขดังนี้

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$$

ดังนั้น $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + \eta_t$

หรือเขียนได้ว่า $\sigma_t^2 = \varepsilon_t^2 - \eta_t$

และ $\sigma_{t-i}^2 = \varepsilon_{t-i}^2 - \eta_{t-i}$

โดยที่ η_t คือตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ($\mathrm{E}(\eta_t) = 0$, $t = 1, 2, \ldots, T$) เมื่อนำค่า σ_t^2 และ σ_{t-i}^2 จากสมการข้างบนไปแทนในสมการที่ (8.21 ข) ได้สมการดังนี้

$$\varepsilon_t^2 - \eta_t = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\theta_i(\varepsilon_{t-i}^2 - \eta_{t-i})$$

$$\varepsilon_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{p}\theta_i\eta_{t-i} + \eta_t$$

$$\varepsilon_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,p)}(\gamma_i + \theta_i)\varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{p}\theta_i\eta_{t-i} + \eta_t \qquad (8.21\text{ ค})$$

จากสมการที่ (8.21 ค) จะเห็นได้ชัดเจนว่าอยู่ในรูปของ ARMA(max(m,p), p) นั่นคือ แบบจำลอง GARCH เปรียบเสมือนกับการนำแบบจำลอง ARMA ไปใช้กับอนุกรมเวลา ε_t^2 นั่นเอง และเราสามารถใช้สมการนี้ในการหาความแปรปรวนในระยะยาวได้ดังนี้

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,p)}(\gamma_i + \theta_i)E(\varepsilon_{t-i}^2)$$

เนื่องจาก ε_t เป็น white noise มีความแปรปรวนคงที่ นั่นคือ $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-i}^2)$ เราจะได้

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \frac{\gamma_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,p)}(\gamma_i + \theta_i)} \qquad (8.22)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (8.21 ข) และ (8.22) จะสรุปได้ว่า

- เพื่อให้ความแปรปรวนทั้งระยะสั้นและระยะยาวมีค่าเป็นบวก เราจะต้องมีเงื่อนไขดังนี้ $\gamma_0 > 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\theta_i \geq 0$ และ $\sum_{i=1}^{\max(m,p)}(\gamma_i + \theta_i) < 1$
- จากสมการที่ (8.22) จะได้ว่า ความแปรปรวนในระยะยาวของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (ε_t) มีค่าคงที่ ไม่เกี่ยวข้องกับการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันในช่วงเวลาก่อนหน้านี้
- จากสมการที่ (8.21 ข) จะได้ว่า ความแปรปรวนในระยะสั้นของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (ε_t) มีค่าไม่คงที่ โดยจะเกี่ยวข้องกับการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันและค่าความแปรปรวนในช่วงเวลาก่อนหน้านี้

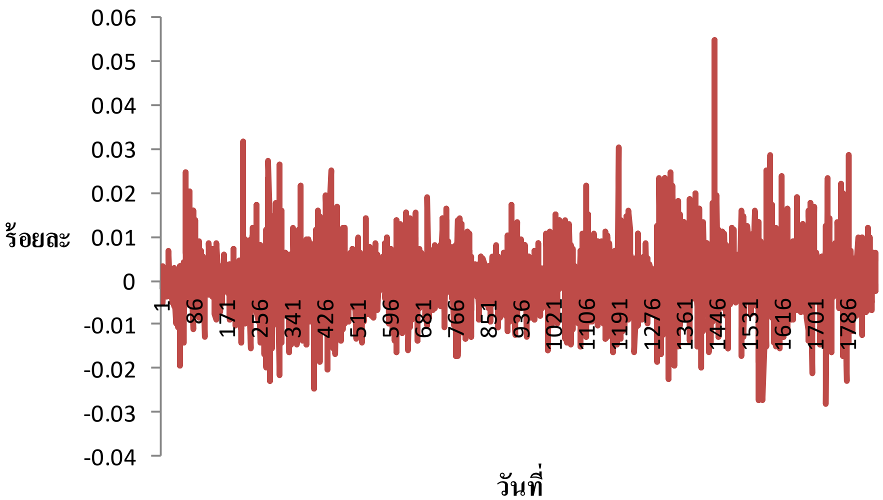
สำรับค่าเฉลี่ยในระยะสั้นและระยะยาวสามารถหาได้โดยใช้วิธีเดียวกันกับที่ใช้ในกรณีของ ARCH ซึ่งจะพบว่ามีค่าเท่ากับศูนย์ทั้ง 2 กรณี ส่วนขั้นตอนการสร้างแบบจำลอง GARCH ก็จะเหมือนกับกรณีการสร้างแบบจำลอง ARCH เช่นกัน เพียงแต่อย่าลืมว่าเราใช้แบบจำลอง GARCH เมื่อพบว่าลำดับที่เหมาะสมของแบบจำลอง ARCH มีค่ามาก และโดยทั่วไปเรามักใช้แบบจำลอง GARCH ที่มีลำดับต่ำเท่านั้น ซึ่งก็คือ GARCH(1,1) GARCH(1,2) หรือ GARCH(2,1)[17] ส่วนการพยากรณ์ความแปรปรวนในระยะสั้นจากแบบจำลอง GARCH คำนวณได้จากผลการประมาณสมการที่ (8.21 ข) นั่นเอง และเมื่อพยากรณ์ความแปรปรวนใน

[17] Tsay, R. S., *Analysis of Financial Time Series* (John Wiley & Sons, Inc, 2002), p. 95.

ระยะสั้นไปข้างหน้าเรื่อย ๆ จะพบว่าค่าความแปรปรวนระยะสั้นค่อย ๆ เข้าใกล้ค่าความแปรปรวนในระยะยาว ดังสมการที่ (8.22)

8.3.1 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้แบบจำลอง GARCH

สมมุติว่านักเศรษฐศาสตร์คนหนึ่งเก็บข้อมูลอัตราการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราสกุลหนึ่ง (EXC_t) จำนวน 1,867 วัน ดังรูปที่ 8.5 ซึ่งจะเห็นว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราสกุลนี้ พบว่าบางช่วงเวลามีความแปรปรวนมากขึ้น บางช่วงก็มีความแปรปรวนน้อยลง สลับกันไป ทำให้นักเศรษฐศาสตร์ลองสร้างแบบจำลอง ARCH เพื่ออธิบายอนุกรมเวลา EXC_t ดังนี้



รูปที่ 8.5 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของอัตราแลกเปลี่ยนเงินสกุลหนึ่งรายวัน

$$Exc_t = \alpha_1 Exc_{t-1} + \alpha_2 Exc_{t-2} + \varepsilon_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} + \beta_2\varepsilon_{t-2} \quad \text{(8.23 ก)}$$ [18]

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \quad \text{(8.23 ข)}$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_m\varepsilon_{t-m}^2 \quad \text{(8.23 ค)}$$ [19]

---

[18] สมการนี้อาจเรียกว่า สมการค่าเฉลี่ย (Mean Equation)

[19] สมการนี้อาจเรียกว่า สมการความแปรปรวน (Variance Equation)

โดย ε_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการค่าเฉลี่ย ณ เวลาที่ t และ v_t เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ N(0,1) และเป็นอิสระจากช่วงเวลาอื่น ๆ เพื่อให้แน่ใจว่าควรใช้แบบจำลอง ARCH กับอนุกรมเวลา EXC_t หรือไม่ เรายังคงทำตามขั้นตอนดังอธิบายไว้ในหัวข้อที่แล้ว

ขั้นแรก เราจะประมาณสมการค่าเฉลี่ย (8.23 ก) ซึ่งอยู่ในรูปแบบจำลอง ARMA(2,2) ซึ่งผลการประมาณสมการค่าเฉลี่ยแสดงได้ดังนี้

$$\widehat{EXC}_t = -0.883\, EXC_{t-1} - 0.781\, EXC_{t-2} + 0.814\, \varepsilon_{t-1} + 0.750\varepsilon_{t-2} \qquad (8.24)$$

ค่าสถิติ $t = (-8.17)^{***} \quad (-8.94)^{***} \quad (7.26)^{***} \quad (8.14)^{***}$

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 0.01

จากนั้นคำนวณค่าความผิดพลาดของการประมาณสมการค่าเฉลี่ย (e_t) จากสูตร $EXC_t - \widehat{EXC}_t$ ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในขั้นที่ 2 ต่อไปนี้

ขั้นที่ 2 เราจะใช้ค่า e_t^2 ในทดสอบว่าแบบจำลอง ARCH สามารถใช้กับอนุกรมเวลานี้ได้หรือไม่ เมื่อพิจารณารูปที่ 8.6 ซึ่งแสดงค่า SPAC ของค่า e_t^2 และเราจะสรุปได้ว่า TPAC ณ 36 ช่วงเวลาที่แล้วของ e_t^2 แตกต่างจากศูนย์อย่างมีนัยสำคัญ[20] นอกจากนี้เมื่อพิจารณาค่า Q(36) = 0.053 โดยมีค่า P-value คือ 0.000 นั่นหมายถึงแบบจำลอง ARCH(36) สามารถนำมาใช้ร่วมกับอนุกรมเวลานี้ได้

ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง ARCH(36) มีจำนวนมาก เพื่อแก้ไขปัญหาดังกล่าว เราจึงควรลองเลือกใช้แบบจำลอง GARCH โดยอาจลองพิจารณา GARCH(1,1) GARCH(1,2) และ GARCH(2,1) ส่วนหลักเกณฑ์การเลือกแบบจำลองที่เหมาะสมที่สุด จะใช้หลักเกณฑ์เดิมก็คือ $\tilde{e}_t$ (ค่ามาตรฐานของ e_t) จะต้องไม่มีความสัมพันธ์กันเอง และ $\tilde{e}_t^2$ (ค่ามาตรฐานของ e_t ยกกำลังสอง) ก็จะต้องไม่มีความสัมพันธ์กันเองด้วย โดยจะไม่ขอกล่าวซ้ำในที่นี้อีก

---

[20] ดูวิธีการทดสอบความมีนัยสำคัญของค่า TPAC ในหัวข้อ 2.3.2

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.098	0.098	17.905	0.000
		2	0.072	0.064	27.719	0.000
		3	0.060	0.048	34.428	0.000
		4	0.070	0.057	43.648	0.000
		5	0.090	0.074	58.906	0.000
		6	0.151	0.130	101.72	0.000
		7	0.052	0.015	106.80	0.000
		8	0.076	0.047	117.73	0.000
		9	0.037	0.004	120.33	0.000
		10	0.086	0.056	134.10	0.000
		11	0.060	0.021	140.84	0.000
		12	0.053	0.011	146.09	0.000
		13	0.036	0.006	148.56	0.000
		14	0.076	0.045	159.50	0.000
		15	0.072	0.042	169.18	0.000
		16	0.039	-0.004	172.07	0.000
		17	0.018	-0.013	172.71	0.000
		18	0.028	-0.000	174.23	0.000
		19	0.043	0.018	177.69	0.000
		20	0.016	-0.021	178.20	0.000
		21	-0.008	-0.038	178.31	0.000
		22	0.033	0.017	180.33	0.000
		23	0.036	0.022	182.76	0.000
		24	0.009	-0.012	182.92	0.000
		25	0.049	0.030	187.40	0.000
		26	0.013	-0.002	187.72	0.000
		27	0.041	0.034	190.96	0.000
		28	0.006	-0.016	191.03	0.000
		29	0.081	0.065	203.56	0.000
		30	0.045	0.023	207.46	0.000
		31	-0.001	-0.025	207.47	0.000
		32	0.019	0.007	208.17	0.000
		33	0.036	0.011	210.62	0.000
		34	0.017	-0.000	211.17	0.000
		35	0.020	-0.011	211.91	0.000
		36	0.053	0.041	217.17	0.000

รูปที่ 8.6 แสดงค่า SAC และ SPAC ของค่า e_t^2 ที่คำนวณจากสมการที่ (8.24)

8.4 แบบจำลองอื่น ๆ ที่ใช้กับอนุกรมเวลาที่มีความไม่คงที่ในความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน

แบบจำลองอื่น ๆ ที่ใช้กับอนุกรมเวลาที่มีความไม่คงที่ในความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ก็คือแบบจำลองที่มีการพัฒนาแนวคิดของแบบจำลอง GARCH ให้มีความเหมาะสมกับอนุกรมเวลา โดยเฉพาะอนุกรมเวลาที่เกี่ยวกับข้อมูลทางการเงิน โดยในหนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึง (1) แบบจำลอง GARCH in Mean (2) แบบจำลองที่แสดงความไม่สมมาตรของการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (ซึ่งจะศึกษาถึงแบบจำลอง Threshold GARCH กับแบบจำลอง Exponential GARCH) และ (3) แบบจำลอง Integrated GARCH รายละเอียดแต่ละแบบจำลองมีดังนี้

8.4.1 แบบจำลอง GARCH in Mean (GARCH-M)

อนุกรมเวลาทางการเงิน เช่น อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์ มักจะขึ้นอยู่กับความเสี่ยงของหลักทรัพย์นั้นด้วย กล่าวคือ ยิ่งหลักทรัพย์ใดมีความเสี่ยงมาก จะทำให้อัตราผลตอบแทนของหลักทรัพย์นั้นสูงขึ้นด้วย การวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่มีลักษณะดังกล่าวควรนำค่าความเสี่ยงเข้ามาเป็นตัวแปรอิสระตัวหนึ่งในสมการค่าเฉลี่ยด้วยนั่นเอง โดยความเสี่ยงนี้คำนวณได้โดยใช้สมการความแปรปรวนระยะสั้นของแบบจำลอง GARCH นั่นเอง

การนำความแปรปรวนระยะสั้นของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน ณ เวลาปัจจุบัน มาเป็นตัวแปรอธิบายตัวหนึ่งในสมการค่าเฉลี่ย จะเรียกว่าแบบจำลอง GARCH in Mean (GARCH–M) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \mu + \delta\,\sigma_t^2 + \varepsilon_t \qquad (8.25\text{ ก})$$ [21]

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \qquad (8.25\text{ ข})$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\sigma_{t-i}^2 \qquad (8.25\text{ ค})$$

[21] สมการค่าเฉลี่ยนี้อาจอยู่ในรูปแบบจำลองของ Box-Jenkins หรือสมการถดถอยที่มีตัวแปรอิสระอื่น ๆ ก็ได้

ถ้าเราใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานระยะสั้นของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน มาเป็นตัววัดความเสี่ยงแบบจำลอง GARCH–M จะเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \mu + \delta\sigma_t + \varepsilon_t \qquad (8.26\ \text{ก})$$ [22]

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \qquad (8.26\ \text{ข})$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\sigma_{t-i}^2 \qquad (8.26\ \text{ค})$$

และถ้าเราใช้ค่าลอการิทึมฐานธรรมชาติ (Natural logarithm) ของความแปรปรวนระยะสั้นของเหตุการณ์ไม่คาดฝันมาเป็นตัววัดความเสี่ยง แบบจำลอง GARCH–M จะเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \mu + \delta\ln(\sigma_t^2) + \varepsilon_t \qquad (8.27\ \text{ก})$$ [23]

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \qquad (8.27\ \text{ข})$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\sigma_{t-i}^2 \qquad (8.27\ \text{ค})$$

8.4.2 แบบจำลองที่แสดงความไม่สมมาตรของการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝัน

เมื่อพิจารณาสมการความแปรปรวนในแบบจำลอง GARCH(p,m)

$$\text{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\sigma_{t-i}^2$$

จะกล่าวได้ว่า เหตุการณ์ที่ไม่คาดฝันในช่วงเวลาก่อนหน้านี้ (ε_{t-i}) ไม่ว่าจะเป็นเหตุการณ์ด้านลบ ($\varepsilon_{t-i} < 0$) หรือด้านบวก ($\varepsilon_{t-i} > 0$) ก็จะส่งผลกระทบต่อความแปรปรวนในระยะสั้นแบบสมมาตร (symmetric effect)

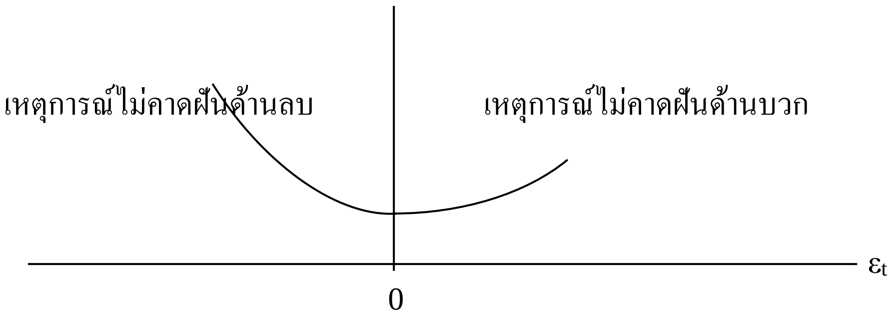
แต่ในโลกแห่งความเป็นจริง โดยเฉพาะอนุกรมเวลาทางด้านการเงิน เช่น ราคาสินทรัพย์ทางการเงินทั้งหลาย มักพบว่า เมื่อเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันด้านลบ จะทำให้ราคาสินทรัพย์ทางการเงินลดลง ในขณะที่การเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันด้านบวก จะทำให้ราคาสินทรัพย์ทางการเงินเพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่าการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันทางด้านลบ จะทำให้ความแปรปรวนในระยะสั้นของราคาสินทรัพย์ทางการเงินเพิ่มขึ้นมากกว่าการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันด้านบวก (ลักษณะดังกล่าวจะเรียกว่า Leverage Effect) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 8.7 ต่อไปนี้

$\text{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1})$

---

[22] สมการค่าเฉลี่ยนี้อาจอยู่ในรูปแบบจำลองของ Box-Jenkins หรือสมการถดถอยที่มีตัวแปรอิสระอื่น ๆ ก็ได้

[23] สมการค่าเฉลี่ยนี้อาจอยู่ในรูปแบบจำลองของ Box-Jenkins หรือสมการถดถอยที่มีตัวแปรอิสระอื่น ๆ ก็ได้



รูปที่ 8.7 แสดง Leverage Effect

แบบจำลองที่ใช้อธิบายอนุกรมเวลาที่มีลักษณะของ Leverage Effect ที่จะกล่าวถึงในหนังสือเล่มนี้มีสองแบบจำลอง ได้แก่ แบบจำลอง Threshold GARCH (TGARCH) และแบบจำลอง Exponential GARCH (EGARCH) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

(1) แบบจำลอง Threshold GARCH (TGARCH)

แบบจำลอง TGARCH เป็นแบบจำลองที่ใช้ตัวแปรหุ่นในการแสดง Leverage Effect ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{r} \delta_i d_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \sigma_{t-i}^2 \qquad (8.28)$$

โดยที่ $d_{t-i} = \begin{cases} 1, \text{ เมื่อ } \varepsilon_{t-i} < 0,\ i = 1,2,\ldots,r & \text{(เกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันด้านลบ ณ เวลา } t-i\text{)} \\ 0, \text{ เมื่อ } \varepsilon_{t-i} \geq 0 & \end{cases}$

(2) แบบจำลอง Exponential GARCH (EGARCH)

กำหนดให้ $z_t = \dfrac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $E(z_t) = 0$ และ $E\{|z_t| - E(|z_t|)\} = 0$ แบบจำลอง EGARCH เป็นแบบจำลองมีการกำหนดฟังก์ชัน $g(z_t)$ ซึ่งใช้แสดง Leverage Effect ดังนี้

$$g(z_t) = \lambda z_t + \omega\{|z_t| - E(|z_t|)\} \qquad (8.29)$$ [24]

[24] ถ้า z_t มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน จะได้ว่า $E(|z_t|) = \sqrt{2/\pi}$ ดังนั้น (8.29) เขียนได้อีกอย่างคือ $g(z_t) = \lambda z_t + \omega\{|z_t| - \sqrt{2/\pi}\}$

โดยที่ z_t คือผลกระทบของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในทางบวกหรือลบ ที่ส่งผลกระทบต่อฟังก์ชัน $g(z)$ ไม่เท่ากัน[25] (asymmetry effect)

$|z_t| - E(|z_t|)$ คือผลกระทบของเหตุการณ์ไม่คาดฝันในทางบวกหรือลบ ที่ส่งผลกระทบต่อฟังก์ชัน $g(z)$ เท่ากัน[26] (symmetry effect) หรือเรียกว่า ผลกระทบของขนาด (Magnitude Effect)

λ และ ω คือค่าพารามิเตอร์

แบบจำลอง EGARCH (p,m) จะใช้ฟังก์ชัน $g(z)$ ในการแสดง Leverage effect ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \mu + \varepsilon_t \qquad (8.30\ ก)^{27}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \qquad (8.30\ ข)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i g(z_{t-i}) \text{ โดยที่ } \gamma_1 = 1 \qquad (8.30\ ค)^{28}$$

ถ้า z_t มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน สมการที่ (8.30 ค) เขียนอีกอย่างได้ว่า

$$\ln(\sigma_t^2) = \mu + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \omega \left|\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right| + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \lambda \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma_{t-k}} \qquad (8.30\ ง)$$

โดยที่ $\mu = \left(\gamma_0 - m\omega\sqrt{2/\pi}\right)$ และ r คือช่วงเวลาที่เกิด Leverage Effect

เพื่อให้เข้าใจง่ายขึ้น จึงขอยกตัวอย่างแบบจำลอง EGARCH (1,1) โดยกำหนดว่า 1 ช่วงเวลาที่แล้วเท่านั้นที่มี Leverage Effect จะเขียนได้ดังนี้

$$\ln(\sigma_t^2) = \mu + \theta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \omega \left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \lambda \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \quad \text{(อย่าลืมว่า } \gamma_1 = 1\text{)} \qquad (8.30\ จ)$$

โดยที่ $\mu = \left(\gamma_0 - \omega\sqrt{2/\pi}\right)$

- เมื่อเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันด้านบวก ($\varepsilon_t > 0$) เราจะได้ $g(z_t) = (\lambda + \omega)z_t - \omega\sqrt{2/\pi}$
- เมื่อเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันด้านลบ ($\varepsilon_t < 0$) เราจะได้ $g(z_t) = (\lambda - \omega)z_t - \omega\sqrt{2/\pi}$

[25] สังเกตจากพจน์นี้ไม่มีการใส่ค่าสัมบูรณ์ใด ๆ

[26] สังเกตจากพจน์นี้มีการใส่ค่าสัมบูรณ์

[27] สมการค่าเฉลี่ยนี้อาจอยู่ในรูปแบบจำลองของ Box-Jenkins หรือสมการถดถอยที่มีตัวแปรอิสระอื่น ๆ ก็ได้

[28] สมการความแปรปรวนระยะสั้น (8.20 ค) แสดงถึงค่า $\sigma_t^2 > 0$ เสมอ โดยไม่ต้องมีเงื่อนไขว่า $\theta_i > 0$ และ $\gamma_i > 0$ ตามของแบบจำลอง GARCH

พิจารณาสมการที่ (8.30 จ) ถ้ากำหนดให้ $\lambda < 0$ จะหมายถึงการเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันด้านลบในช่วงเวลาก่อนหน้านี้ ($\varepsilon_{t-1} < 0$) จะทำให้ σ_t^2 เพิ่มขึ้น[29] ซึ่งตรงกับแนวคิดของ Leverage Effect ที่ได้อธิบายไว้ก่อนหน้านี้นั่นเอง ดังนั้น หากเราต้องการทดสอบว่า อนุกรมเวลาหนึ่ง (X_t) มี Leverage Effect หรือไม่ ทำได้โดยการทดสอบสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองดังนี้

$$H_0: \lambda = 0 \text{ และ } H_1: \lambda < 0 \tag{8.31}$$

หากเราปฏิเสธสมมุติฐานหลักข้างต้น จะหมายถึงอนุกรมเวลา X_t มี Leverage Effect แต่หากไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้ นั่นคืออนุกรมเวลา X_t ไม่มี Leverage Effect นั่นเอง

8.4.3 แบบจำลอง Integrated GARCH (IGARCH)

จากแบบจำลอง GARCH(p,m)

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \tag{8.21 ก}$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \sigma_{t-i}^2 \tag{8.21 ข}$$

เราทราบแล้วว่าสมการความแปรปรวนระยะสั้น (8.21 ข) สามารถเขียนได้อีกแบบดังนี้

$$\varepsilon_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{\max(m,p)} (\gamma_i + \theta_i)\varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{p} \theta_i(\eta_{t-i}) + \eta_t \tag{8.21 ค}$$

และความแปรปรวนในระยะยาวเขียนได้ดังนี้

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \text{E}(\varepsilon_t^2) = \frac{\gamma_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(m,p)} (\gamma_i + \theta_i)} \tag{8.22}$$

เมื่อ $\sum_{i=1}^{\max(m,p)} (\gamma_i + \theta_i) < 1$ เราจะกล่าวได้ว่า ความแปรปรวนในระยะยาว var(ε_t) คือค่าคงที่ค่าหนึ่งที่มากกว่าศูนย์ นั่นคือ เมื่อมีเหตุการณ์ไม่คาดฝันเกิดขึ้น ($\varepsilon_t \neq 0$) แล้วค่าความแปรปรวนในระยะสั้น (σ_t^2) จะค่อย ๆ ลดลงเมื่อเวลาผ่านไป จนกลับเข้าสู่ค่าความแปรปรวนในระยะยาว

[29] ทั้งนี้เพราะ $\lambda \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ มีค่าเป็นบวก (อย่าลืมว่า σ_t คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานซึ่งต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ)

แต่หาก $\sum_{i=1}^{\max(m,p)}(\gamma_i + \theta_i) = 1$ หรือ $\sum_{i=1}^{m}\gamma_i + \sum_{i=1}^{p}\theta_i = 1$ เราจะกล่าวได้ว่า ความแปรปรวนในระยะยาว var(ε_t) มีค่าเป็นอนันต์ นั่นคือ เมื่อมีเหตุการณ์ไม่คาดฝันเกิดขึ้น ($\varepsilon_t \neq 0$) แล้วค่าความแปรปรวนในระยะสั้น σ_t^2 จะไม่ลดลง แต่จะค่อยเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ จนเป็นอนันต์ เราจะเรียกแบบจำลองลักษณะนี้ว่า แบบจำลอง Integrated GARCH (IGARCH)

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น จึงขอยกตัวอย่างการเขียนแบบจำลอง IGARCH(1,1) ด้วยการเริ่มจากแบบจำลอง GARCH(1,1) ดังนี้

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \tag{8.32 ก}$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1\sigma_{t-1}^2 \tag{8.32 ข}$$

เมื่อ $\gamma_1 + \theta_1 = 1$ นั่นคือ แล้วเราจะได้แบบจำลอง IGARCH(1,1) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \tag{8.33 ก}$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + (1-\gamma_1)\sigma_{t-1}^2 \tag{8.33 ข}$$

บทที่ 9
การถดถอยปลอมและความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Spurious Regression and Cointegration)

พิจารณาสมการถดถอยที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ 1 ตัว ดังนี้

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T \tag{9.1}$$

Y_t คือตัวแปรตาม และ X_t คือตัวแปรอิสระ ส่วน β_1 และ β_2 คือค่าพารามิเตอร์ และ u_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (Stochastic disturbance term หรือ random error term) การนำอนุกรมเวลา Y_t และ X_t มาวิเคราะห์การถดถอยดังสมการข้างต้นอยู่ภายใต้ข้อสมมุติของ Classical Linear Regression Model (CLRM)[1] ซึ่งมีเงื่อนไขเกี่ยวข้องกับค่า u_t สรุปได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E(u_t) &= 0 \\ \mathrm{Var}(u_t) &= \sigma^2 \\ \mathrm{Cov}(u_t, u_s) &= 0, \; t \neq s \end{aligned}$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวแสดงถึงตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (u_t) จะต้องเป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง (stationary)[2] หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $u_t \sim I(0)$ ในขณะที่อนุกรมเวลา Y_t และ X_t สามารถเป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่งหรือไม่ก็ได้ หากสมการที่ (9.1) ถูกต้องแล้ว เรากล่าวได้ว่าเมื่อ X_t

---

[1] สำหรับผู้สนใจ อ่านเพิ่มเติมได้จาก ภูมิฐาน รังกคูลนุวัฒน์, *เศรษฐมิติเบื้องต้น*, พิมพ์ครั้งที่ 2. (กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554), หน้า 17–18.

[2] เพื่อให้การศึกษาบทนี้ให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น ควรทบทวนความเข้าใจในบทที่ 5 อีกครั้ง

หรือ u_t ตัวใดตัวหนึ่งเป็น I(1) แล้ว Y_t จะต้องเป็น I(1) ด้วยแน่นอน แต่หากทั้ง X_t และ u_t เป็น I(0) ทั้งคู่ แล้ว Y_t จะต้องเป็น I(0) ด้วย

คุณสมบัติของตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดของสมการที่ (9.1)[3] โดยแบ่งตามลักษณะของ X_t และ u_t ว่าเป็น I(0) หรือเป็น I(1) สรุปได้ดังตารางที่ 9.1 ต่อไปนี้[4]

ตารางที่ 9.1 คุณสมบัติของตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเมื่อใช้อนุกรมเวลาในการวิเคราะห์สมการถดถอย

	$u_t \sim$ **I(0)**	$u_t \sim$ **I(1)**
$X_t \sim$ **I(0)**	b_2 จะมีคุณสมบัติทั้ง Consistency และ Asymptotically Normal Distributed	b_2 จะไม่มีคุณสมบัติทั้ง Consistency และ Asymptotically Normal Distributed
$X_t \sim$ **I(1)**	b_2 จะมีคุณสมบัติ Consistency แต่ไม่มีคุณสมบัติ Asymptotically Normal Distributed	b_2 จะไม่มีคุณสมบัติทั้ง Consistency และ Asymptotically Normal Distributed

หมายเหตุ

- b_2 มีคุณสมบัติ Consistency จะหมายถึง เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่แล้ว จะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นของ b_2 จะเท่ากับค่าพารามิเตอร์ β_2
- b_2 ไม่มีคุณสมบัติ Consistency จะหมายถึง เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่แล้ว จะได้ว่า ค่าความน่าจะเป็นของ b_2 จะไม่เท่ากับค่าพารามิเตอร์ β_2
- b_2 มีคุณสมบัติ Asymptotically Normal Distributed จะหมายถึง เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่แล้ว จะได้ว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นของ b_2 จะเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติ
- b_2 ไม่มีคุณสมบัติ Asymptotically Normal Distributed จะหมายถึง เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่แล้ว จะได้ว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นของ b_2 จะไม่เข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติ

[3] ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ b_1 และ b_2 คือตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ β_1 และ β_2 ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ตามลำดับ

[4] Murray, M. P., *Econometrics*: *A Modern Introduction* (Boston: Pearson Education, Inc., 2006), p. 770.

ในทางปฏิบัติ ข้อมูลทางเศรษฐกิจ ธุรกิจ หรือการเงินที่ถูกใช้เป็นตัวแปรตามและตัวแปรอิสระ มักเป็น I(1) และมักพบว่า u_t **~ I(1) เมื่อกรณีนี้เกิดขึ้น เราจะเรียกสมการถดถอยที่ประมาณขึ้นว่าสมการถดถอยปลอม (Spurious Regression)** ซึ่งเป็นหัวข้อที่เราควรทำความเข้าใจให้ชัดเจน เนื่องจากจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาแนวคิดความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegration) อีกด้วย

ดังนั้น ในบทนี้เราจะศึกษาการถดถอยปลอมในหัวข้อแรก ในหัวข้อที่ 2 จะกล่าวถึงวิธีการแก้ไขเมื่อเกิดปัญหาการถดถอยปลอม จากนั้นจะกล่าวถึงตัวอย่างการวิเคราะห์สมการถดถอยที่ถูกประมาณขึ้นว่าเป็นการถดถอยปลอมหรือไม่ และในหัวข้อสุดท้ายจะกล่าวถึงแนวคิดของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Long-run relationship หรือ Cointegration) ซึ่งมีการประยุกต์ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์และทางการเงินอย่างแพร่หลาย รายละเอียดของแต่ละหัวข้อมีดังนี้

9.1 สมการถดถอยปลอม (Spurious Regression)

เมื่อเราใช้อนุกรมเวลาในการวิเคราะห์สมการถดถอย แล้วตัวแปรตาม (Y_t) ตัวแปรอิสระ (X_t) และตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (u_t) อาจเป็นอนุกรมเวลาที่มีแนวโน้มแบบสุ่ม (Stochastic trend) อยู่ด้วยหรือไม่ก็ได้ หากพบว่าตัวแปรเหล่านี้มีแนวโน้มแบบสุ่ม จะส่งผลกระทบต่อคุณสมบัติของตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดได้ กล่าวคือ แม้ว่าตัวอย่างมีขนาดใหญ่ก็ตาม ค่าความน่าจะเป็นของ b_2 ก็ยังไม่เท่ากับค่าพารามิเตอร์ β_2 หรือตัวประมาณค่าจะไม่เป็นการแจกแจงแบบปกติอันทำให้การทดสอบสมมุติฐานเชื่อถือไม่ได้ ดังจะอธิบายดังนี้

พิจารณากรณีทั้งตัวแปรตาม Y_t และตัวแปรอิสระ X_t คืออนุกรมเวลาที่อยู่ในรูปแบบการเดินแบบสุ่ม (Random Walk) ดังนี้

$$Y_t = Y_{t-1} + v_t \qquad (\text{กำหนดให้ } Y_0 = 0) \tag{9.2 ก}$$

$$X_t = X_{t-1} + w_t \qquad (\text{กำหนดให้ } X_0 = 0) \tag{9.2 ข}$$

โดยที่ v_t และ w_t คือตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคือ 1 และจากบทที่ 5 เราทราบแล้วว่า สมการที่ (9.2 ก) และ (9.2 ข) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \sum_{i=0}^{t} v_i \tag{9.3 ก}$$

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} w_i \tag{9.3 ข}$$

นั่นคือ $Y_t \sim I(1)$ และ $X_t \sim I(1)$ ถ้ากำหนดให้ v_t และ w_t ไม่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ดังนั้นอนุกรมเวลา Y_t และ X_t ก็จะไม่มีความสัมพันธ์ใด ๆ ต่อกันด้วย แต่สมมุติให้เราสร้างสมการถดถอยเพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Y_t กับ X_t ดังต่อไปนี้

$$Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_t + \varepsilon_t \tag{9.4 ก}$$

จากสมการที่ (9.4 ก) จะได้ว่า ค่าพารามิเตอร์ $\alpha_2 = 0$ หรือสมการถดถอยที่ถูกต้องเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \alpha_1 + \varepsilon_t \tag{9.4 ข}$$

นั่นคือ ε_t มีแนวโน้มแบบสุ่ม หรือ $\varepsilon_t \sim I(1)$ ทั้งนี้เพราะ

$$\varepsilon_t = Y_t - \alpha_1$$

$$= \sum_{i=0}^{t} v_i - \alpha_1 \tag{9.5}$$

Granger and Newbold (1974)[5] ได้ทำการจำลองข้อมูล Y_t และ X_t ในลักษณะดังกล่าว (Simulation) เป็นจำนวน 100 ครั้ง และพบว่า หากเราประมาณสมการถดถอย (9.4 ก) มักจะให้ผลการประมาณค่าในลักษณะดังนี้ การทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\alpha_2 = 0$ จะมีนัยสำคัญทางสถิติ[6], ค่าสัมประสิทธิ์เชิงพหุของการกำหนด (R^2) มีค่าสูง, ค่าสัมประสิทธิ์เชิงพหุของการกำหนดที่ปรับแล้ว (Adjusted R^2) มีค่าสูง แต่กลับพบว่าค่าสถิติ Durbin–Watson[7] มีค่าต่ำ **และจะเรียกผลการประมาณสมการถดถอย (9.4 ก) ว่าการถดถอยปลอม (Spurious Regression)**

---

[5] สำหรับผู้สนใจ อ่านเพิ่มเติมได้ใน Granger, C. W. J. and P. Newbold, “Spurious regressions in econometrics,” *Journal of Econometrics* 2 (1974): 111–120.

[6] จะเห็นว่า มีการสรุปผลการทดสอบสมมุติฐานผิดพลาดเกิดขึ้น เนื่องจากค่าที่ถูกต้องคือ $\alpha_2 = 0$ Granger and Newbold (1974) ให้เหตุผลว่า เป็นเพราะค่าสถิติที่ใช้ทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\alpha_2 = 0$ จะไม่มีการแจกแจงแบบปกติ

[7] ดูเพิ่มเติมได้ใน ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์. *เศรษฐมิติเบื้องต้น*, พิมพ์ครั้งที่ 2. (กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554), หน้า 155–157.

ดังนั้น การวิเคราะห์สมการถดถอยด้วยการใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาที่ตัวแปรตามและตัวแปรอิสระมีแนวโน้มแบบสุ่ม จะต้องระมัดระวังอย่างมากว่าสมการที่ถูกประมาณขึ้นจะเป็นการถดถอยปลอมหรือไม่ การตรวจสอบปัญหาดังกล่าวทำได้ดังนี้คือ ขั้นแรกต้องคำนวณค่าความผิดพลาดจากการประมาณสมการถดถอย (9.4 ก) ซึ่งคำนวณจากสมการดังนี้

$$e_t = Y_t - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 X_t$$

โดยที่ $\hat{\alpha}_1$ และ $\hat{\alpha}_2$ คือตัวประมาณค่า α_1 และ α_2 ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จากนั้นจึงนำค่า e_t ที่ได้ไปทดสอบว่าเป็น I(1) หรือไม่ ซึ่งสามารถใช้วิธีการทดสอบความนิ่งด้วยวิธี ADF ซึ่งกล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 5.5 ถ้าผลการทดสอบสรุปว่า $e_t \sim I(1)$ จะหมายถึง สมการถดถอยที่ประมาณขึ้นคือการถดถอยปลอม

9.2 การแก้ไขเมื่อพบว่าแบบจำลองเป็นสมการถดถอยปลอม

เมื่อเกิดปัญหาการถดถอยปลอมขึ้น Granger and Newbold (1974) เสนอให้ทำการหาผลต่างลำดับที่ 1 (First Difference) ของตัวแปรตามและตัวแปรอิสระก่อน เพื่อให้แนวโน้มแบบสุ่มถูกกำจัดออกไป ดังนั้น เมื่อพิจารณาสมการที่ (9.2 ก) และ (9.2 ข) จะได้ว่า ผลต่างลำดับที่ 1 ของ Y_t และ X_t เขียนได้ดังนี้

$$\Delta Y_t = v_t \qquad (9.6 ก)$$

$$\Delta X_t = w_t \qquad (9.6 ข)$$

อนุกรมเวลา ΔY_t และ ΔX_t ตามสมการที่ (9.6 ก) และ (9.6 ข) มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว นั่นคือ แนวโน้มแบบสุ่มได้ถูกกำจัดออกไปแล้ว และหากจะนำแนวคิดนี้ไปใช้กับสมการถดถอย (9.4 ก) เราสามารถทำได้โดยขั้นแรก ให้เขียนสมการถดถอย (9.4 ก) ย้อนกลับไป 1 ช่วงเวลา เขียนได้ดังนี้

$$Y_{t-1} = \alpha_1 + \alpha_2 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1} \qquad (9.7)$$

นำสมการ (9.7) ไปหักออกจาก (9.4 ก) จะได้

$$Y_t - Y_{t-1} = (\alpha_1 + \alpha_2 X_t + \varepsilon_t) - (\alpha_1 + \alpha_2 X_{t-1} + \varepsilon_{t-1})$$

$$\Delta Y_t = \alpha_2 \Delta X_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$\Delta Y_t = \alpha_2 \Delta X_t + v_t \qquad (9.8)$$[8]

จะเห็นว่า หากเรานำสมการที่ (9.8) ไปประมาณค่า จะไม่ใช่สมการถดถอยปลอมอย่างแน่นอน เนื่องจากตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน $v_t \sim I(0)$ นอกจากนี้ทั้งตัวแปรตาม (ΔY_t) และตัวแปรอิสระ (ΔX_t) ต่างก็เป็น I(0) ด้วย ดังนั้น ผลการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะมีคุณสมบัติ Consistency และ Asymptotically Normal Distributed (ดูตารางที่ 9.1) นั่นคือเราสามารถใช้ค่าสถิติ t ในการทดสอบสมมุติฐาน H_0: $\alpha_2 = 0$ และ H_1: $\alpha_2 \neq 0$ ได้[9]

แต่หากอนุกรมเวลา $Y_t \sim I(0)$, $X_t \sim I(0)$ และ $\varepsilon_t \sim I(0)$ แล้วเรากลับใช้แนวคิดของสมการที่ (9.8) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จะเกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (Autocorrelation) ทั้งนี้เพราะ $v_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ นั่นคือ $v_{t-1} = \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}$ ซึ่งจะทำให้ $Cov(v_t, v_{t-1}) \neq 0$[10] ส่วนในหัวข้อถัดไปจะทำการยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้เข้าใจถึงปัญหาการถดถอยปลอมมากขึ้น

9.3 ตัวอย่างการวิเคราะห์ว่าผลการประมาณเป็นสมการถดถอยปลอมหรือไม่

สมมุตินักเศรษฐศาสตร์ของบริษัทแห่งหนึ่ง ได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของรายจ่ายเพื่อการบริโภคต่อหัว และอัตราเงินเฟ้อ จำนวน 50 เดือนของประเทศหนึ่ง ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\ln(Con_t) = \beta_1 + \beta_2 Trend + \beta_3 Inf_t + u_t \qquad (9.9)$$[11]

---

[8] จากสมการที่ (9.5) $\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{t} v_i - \alpha_1$ ดังนั้น เราจะได้ว่า $\varepsilon_{t-1} = \sum_{i=0}^{t-1} v_i - \alpha_1$ เมื่อนำ ε_{t-1} ไปหักออกจาก ε_t จะเหลือเพียงตัวรบกวนขาว v_t เท่านั้น หรือเขียนได้ว่า $\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = v_t$

[9] หาก (9.8) เกิดปัญหาความไม่คงที่ในตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (Heteroskedasticity) หรือความสัมพันธ์กันเองของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน (Autocorrelation) จะต้องทำการแก้ไขปัญหาเหล่านี้ก่อน จากนั้นจึงใช้ค่าสถิติ t^* เพื่อทดสอบสมมุติฐานของค่าพารามิเตอร์ α_2 ได้

[10] เนื่องจาก $Cov(v_t, v_{t-1}) = E(v_t v_{t-1}) = E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) - E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_{t-1}^2) - E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) = E(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma^2$ (อย่าลืมว่าตอนนี้กำลังพิจารณากรณีที่ ε_t เป็นตัวรบกวนขาวที่มีความแปรปรวนของคงที่คือ σ^2)

[11] ตัวแปร *Trend* ถูกนำมาใช้เป็นตัวแปรอิสระหนึ่งเพื่อใช้แสดงอิทธิพลของแนวโน้มกำหนดได้ (Deterministic Trend) ที่มีอยู่ในตัวแปร $\ln(Con_t)$

โดยที่ $\ln(Con_t)$ คือ ค่าลอการิทึมฐานธรรมชาติของรายจ่ายเพื่อการบริโภคต่อหัว ณ เวลา t

Trend คือ แนวโน้มซึ่งมีค่าเป็น 1, 2, 3, …

Inf_t คือ อัตราเงินเฟ้อ ณ เวลา t

u_t คือ ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน

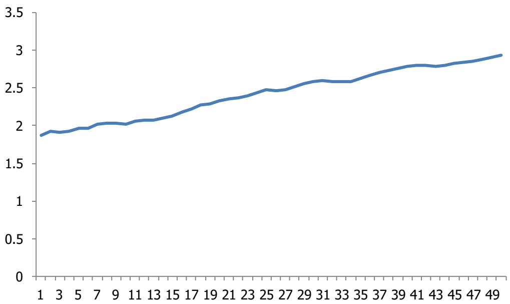
กราฟของอนุกรมเวลา ln(*Con*) และ *Inf* แสดงในรูปที่ 9.1 และ 9.2 ตามลำดับ เมื่อเราประมาณค่าสมการถดถอย (9.9) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ได้ผลการประมาณค่าดังนี้

$$\ln(\widehat{Con_t}) = 1.835 + 0.022\, Trend + 0.007\, Inf_t \qquad (9.10)$$

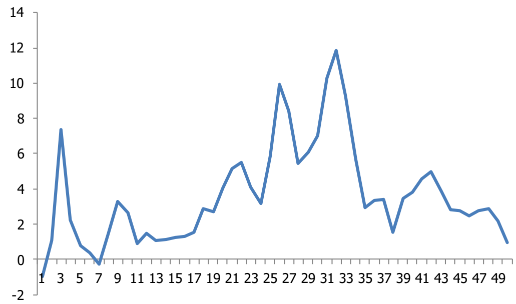
ค่าสถิติ t^* = (187.58)*** (69.06)*** (3.92)***

$R^2 = 0.9913$ *Adjusted* $R^2 = 0.9902$ D.W. Stat = 0.5766

โดยที่ *** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 1



รูปที่ 9.1 แสดงอนุกรมเวลา ln(*Con*)



รูปที่ 9.2 แสดงอนุกรมเวลา *Inf*

จากผลการประมาณดังแสดงในสมการที่ (9.10) จะเห็นว่า ผลการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของ Inf_t คือ 0.007 และมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 1 ซึ่งหมายถึง ถ้าอัตราเงินเฟ้อเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 จะทำให้รายจ่ายเพื่อการบริโภคต่อหัวเพิ่มขึ้นร้อยละ 0.007 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้ค่า R^2 และ Adjusted R^2 มีค่าสูงมาก ในขณะที่ค่าสถิติ D.W. มีค่าต่ำ ซึ่งแสดงถึงสมการที่ (9.9) อาจเป็นสมการถดถอยปลอม (Spurious Regression)ได้ เพื่อให้เกิดความแน่ใจ เราจะทำการทดสอบความนิ่งทั้งของค่าผิดพลาดที่ได้จากการประมาณสมการถดถอย (ซึ่งก็คือค่า $e_t = \ln(Con_t) -$

$\ln(\widehat{Con_t})$ นั่นเอง[12] และทดสอบความนิ่งทั้งของอนุกรมเวลาทั้งตัวแปรตาม ($\ln Con_t$) และตัวแปรอิสระ (Inf_t)[13] ด้วย

จากการทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลาข้างต้นด้วยวิธีการทดสอบของ ADF ดังที่ได้อธิบายไว้ในหัวข้อ 5.5 ซึ่งผลการทดสอบสรุปว่า $\ln(Con_t) \sim I(1)$, $Inf_t \sim I(1)$ และ $u_t \sim I(0)$ นั่นคือ สมการที่ (9.10) ไม่ใช่สมการถดถอยปลอม และเนื่องจาก u_t เป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่งแล้ว เราจึง**ไม่ต้อง**ทำการแก้ไขสมการ (9.9) ให้อยู่ในรูปผลต่าง ตามแนวคิดของ Granger and Newbold

เมื่อตัวแปรตามเป็น I(1) และตัวแปรอิสระเป็น I(1) ในขณะที่ $u_t \sim I(0)$ แล้ว เราจะกล่าวได้ว่า ตัวแปรตามและตัวแปรอิสระนี้มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Long-run equilibrium relationship หรือ Cointegration) ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป แต่เพื่อให้เข้าใจได้ดีขึ้น รูปที่ 9.3 จะสรุปข้อสังเกตที่สำคัญอันจะทำให้การศึกษาหัวข้อและบทถัดไปง่ายขึ้นดังต่อไปนี้[14]

---

[12] อย่าลืมว่า เราไม่สามารถเก็บข้อมูล u_t ได้ เราจึงต้องทดสอบความนิ่งกับค่า e_t แทน

[13] ตัวแปรอิสระ Trend คือแนวโน้มที่มีค่าเป็น 1, 2, 3, … ถือเป็นตัวแปรที่กำหนดได้แน่นอน (Deterministic) มิใช่ตัวแปรสุ่ม จึงไม่ต้องทำการทดสอบความนิ่ง

[14] ในรูปที่ 9.3 จะมีการกล่าวถึงคำว่า Consistency, Super Consistency, และ Asymptotically Normal Distributed ซึ่งมีความหมายสรุปดังนี้

- Consistency หมายถึง ความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวประมาณค่าตรงกับค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ในอัตราความเร็ว $\sqrt{N}$ โดยที่ N คือจำนวนข้อมูล
- Super Consistency หมายถึง ความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวประมาณค่าตรงกับค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ในอัตราความเร็ว N โดยที่ N คือจำนวนข้อมูล (สำหรับผู้สนใจ ดูวิธีการพิสูจน์ได้ใน Stock, J. H., "Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors," *Econometrica* 55 (1987): 1035–1056. ก
- Asymptotically Normal Distributed หมายถึง การมีคุณสมบัติที่เป็นการแจกแจงแบบปกติเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

Left branch

เมื่อ Y_t ~ I(1) และ X_t ~ I(1)

ถ้าพบว่า u_t ~ I(1) จะเรียกผลการประมาณสมการถดถอยข้างต้นว่า การถดถอยปลอม (Spurious regression)

- เนื่องจาก u_t เป็น I(1) นั่นคือแนวโน้มแบบสุ่มที่อยู่ในอนุกรมเวลา Y อาจมาจากทั้งแนวโน้มแบบสุ่มที่อยู่ใน X_t และแนวโน้มแบบสุ่มที่อยู่ใน u_t
- อนุกรมเวลา Y_t และ X_t ไม่เคลื่อนไปด้วยกัน
- b_2 จะไม่มีคุณสมบัติทั้ง Consistency และ Asymptotically Normal Distributed
- การวิเคราะห์สมการถดถอยจะใช้วิธีของ Granger and Newbold (1974)

Right branch

เมื่อ Y_t ~ I(1) และ X_t ~ I(1)

ถ้าพบว่า u_t ~ I(0) แสดงถึงอนุกรมเวลา Y_t และ X_t มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Long-run equilibrium relationship หรือ cointegration relationship)

- เนื่องจาก u_t เป็น I(0) นั่นคือ แนวโน้มแบบสุ่ม (Stochastic trend) ที่อยู่ในอนุกรมเวลา Y_t มาจากแนวโน้มแบบสุ่มที่อยู่ในอนุกรมเวลา X_t เท่านั้น เราเรียกว่า ทั้งสองตัวแปรนี้มีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (Common stochastic trend)
- อนุกรมเวลา Y_t และ X_t เคลื่อนไปด้วยกันแบบไม่ห่างจากกันมาก
- b_2 จะมีคุณสมบัติ Super Consistency แต่ไม่มีคุณสมบัติ Asymptotically Normal Distributed
- การวิเคราะห์สมการถดถอยจะใช้แนวคิดของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegration)

รูปที่ 9.3 สรุปข้อสังเกตที่สำคัญ

9.4 แนวคิดของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

นับแต่ Granger (1981) และ Engle and Granger (1987) ได้พัฒนาแนวคิดและวิธีการทางสถิติของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Long-run relationship หรือ Cointegration) การวิเคราะห์ทางเศรษฐศาสตร์และการเงินที่ใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาได้มีการประยุกต์ใช้วิธีการดังกล่าวอย่างแพร่หลาย ดังนั้น ในหัวข้อนี้เราจะมาทำความเข้าใจถึงแนวคิดความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ดังจะอธิบายต่อไปนี้

ถ้าอนุกรมเวลา Y_t และ X_t มีแนวโน้มแบบสุ่มแล้ว ความแปรปรวนของตัวแปรแต่ละตัวจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไป แต่หากพบว่าตัวแปรทั้งสองนี้มี**ระยะห่างซึ่งกันและกัน**ในรูปแบบหนึ่ง (เช่น เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Y_t - \beta_2 X_t$) และระยะห่างนี้มีความนิ่ง (Stationary) หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $(Y_t - \beta_2 X_t) \sim I(0)$ **แล้วเราจะเรียกอนุกรมเวลา Y_t และ X_t ว่ามีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกัน**[15]

ถ้ากำหนดให้ $Y_t - \beta_2 X_t = u_t$ การที่อนุกรมเวลา Y_t และ X_t มีรูปแบบระยะห่างกันที่มีความนิ่ง จะแสดงถึงค่าของตัวแปรทั้งสองจะเคลื่อนไปพร้อม ๆ กันในทิศทางหนึ่ง มิใช่ไปคนละทิศคนละทาง การที่เป็นเช่นนี้เนื่องมาจากอนุกรมเวลาทั้งสองนี้มีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (common stochastic trend) และเราจะเรียกเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta_2 \end{bmatrix}$ (หรือเขียนแทนด้วย $[1 - \beta_2]'$) ว่า **เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegrating vector)** และเรียกสมการ $Y_t - \beta_2 X_t = u_t$ ว่า **สมการถดถอยเชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegrating regression)**

เราจะใช้ค่าของ u_t ในการพิจารณาว่า ตัวแปร Y และ X ณ เวลา t อยู่ในดุลยภาพระยะยาวหรือไม่ กล่าวคือหากอนุกรมเวลา Y_t และ X_t อยู่ ณ ดุลยภาพระยะยาว จะได้ว่า $Y_t - \beta_2 X_t = 0$ หรือ $u_t = 0$ แต่หากอนุกรมเวลา Y_t และ X_t ไม่อยู่ ณ ดุลยภาพระยะยาวแล้ว จะได้ว่า $Y_t - \beta_2 X_t \neq 0$ หรือ $u_t \neq 0$ ซึ่งเมื่อกรณีนี้เกิดขึ้น เราอาจกล่าวอีกอย่างว่า X_t และ Y_t มีการเบี่ยงเบนออกไปจากดุลยภาพระยะยาว และจะต้องมีการปรับตัวในระยะสั้น เพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (ภาษาอังกฤษใช้คำว่า Equilibrium Correction หรือ Error Correction)

---

[15] การกล่าวเช่นนี้ได้จำเป็นต้องใช้อนุกรมเวลา X_t และ Y_t ที่ยาวพอสมควร (ไม่ควรต่ำกว่า 10 ปี)

เพื่อให้เข้าใจแนวคิดของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว หนังสือเล่มนี้ขอใช้ตัวอย่างของ Murray (1994)[16] ที่ใช้สุภาพสตรีและสุนัขของเธอเป็นสื่อในการอธิบายถึงแนวคิดความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวไว้ได้อย่างดีมาก โดยผู้เขียนจะมีการเพิ่มรายละเอียดอื่น ๆ เข้าไปบางส่วนเพื่อช่วยให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น รายละเอียดมีดังนี้

สุภาพสตรีคนหนึ่งเป็นเจ้าของสุนัข ซึ่งสุภาพสตรีคนนี้ได้ดื่มเหล้าในบาร์แห่งหนึ่ง และเธอได้นำสุนัขนี้มาด้วยโดยล่ามโซ่ให้รออยู่หน้าร้าน อย่างไรก็ดี โซ่ที่เธอล่ามสุนัขได้หลุดออกไป ทำให้สุนัขเดินไปตามกลิ่นที่ได้รับ ณ ขณะนั้น ๆ ซึ่งเป็นการเดินไปอย่างไม่มีทิศทาง หรือเป็นการเดินแบบสุ่ม (Random walk) ถ้ากำหนดให้ X_t คือระยะห่างจากร้านเหล้าของสุนัขตัวนี้ ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$X_t = X_{t-1} + w_t \tag{9.11 ก}$$

$$\text{หรือ} \quad X_t - X_{t-1} = w_t \tag{9.11 ข}$$

โดยที่ w_t คือระยะห่างของการก้าวเดินในแต่ละก้าวของสุนัข ซึ่งจะมีลักษณะเป็นตัวรบกวนขาว

หลังจากสุภาพสตรีซึ่งอยู่ในอาการมึนเมาทราบว่าสุนัขของตนหลุดออกไป จึงออกเดินตามหาสุนัขด้วยอาการของคนเมา ทำให้ลักษณะการก้าวเดินของเธอเป็นแบบสุ่ม (Random walk) เช่นกัน ถ้ากำหนดให้ Y_t คือระยะห่างจากร้านเหล้าของสุภาพสตรีที่กำลังเมา ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{9.12 ก}$$

$$\text{หรือ} \quad Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t \tag{9.12 ข}$$

โดยที่ ε_t คือระยะห่างของการก้าวเดินในแต่ละก้าวของสุภาพสตรี ซึ่งจะมีลักษณะเป็นตัวรบกวนขาว (White noise) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคงที่

เมื่อสุภาพสตรีคนนี้ออกตามหาสุนัขของเธอที่หายไปจากร้านเหล้า ต้องมีการคาดเดาถึงตำแหน่งที่สุนัขอยู่ และเนื่องจากการก้าวเดินของสุนัขเป็นแบบสุ่ม การคาดเดาว่าถึงตำแหน่งของสุนัขจะต้องใช้ค่าที่เพิ่งเกิดขึ้นล่าสุด นั่นคือ เธอทำได้เพียงใช้ข้อมูลล่าสุดว่า สุนัขของเธออยู่ที่หน้า

[16] Murray, M. P., “A Drunk and her Dog: An Illustration of Cointegration and Error Correction,” *The American Statistician* 48 (1994): 37–39.

ร้านเหล้านั่นเอง และยิ่งเวลาผ่านไปนานเท่าไหร่ความถูกต้องของการคาดเดาในตำแหน่งของสุนัขก็จะยิ่งลดลง เพราะระยะห่างของสุนัขจากร้านเหล้าจะยิ่งมีอณาเขตที่กว้างมากขึ้นเรื่อย ๆ ตรงนี้เองเป็นคุณสมบัติอีกอย่างหนึ่งของตัวแปรที่มีการเดินแบบสุ่ม ซึ่งจะมีความแปรปรวนเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเวลาผ่านไปนั่นเอง

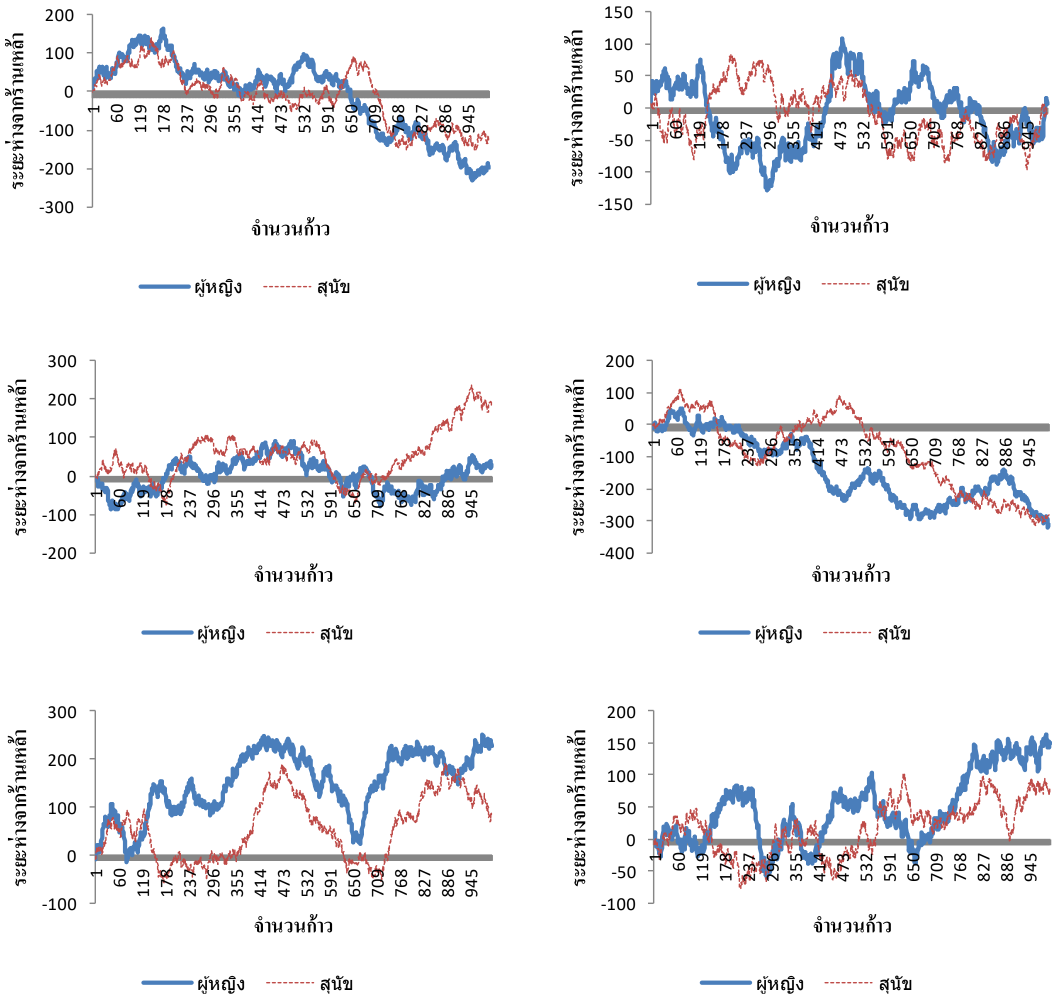
ในขณะที่สุภาพสตรีที่กำลังอยู่ในอาการมึนเมาออกตามหาสุนัขนั้น เธอได้ตะโกนเรียกชื่อสุนัขด้วย และหลังจากที่สุนัขได้ยินเสียงตะโกนเรียกจากเจ้าของ ทำให้ไม่วิ่งออกไปไกลมากนัก ทั้งนี้เพราะความผูกพันซึ่งกันและกันของเจ้าของกับสุนัข (เปรียบเสมือนมีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน) และสิ่งนี้เองที่ทำให้ตำแหน่งของสุนัขกับของสุภาพสตรีไม่ห่างกันมากขึ้นเรื่อย ๆ[17] ดังนั้น เมื่อพิจารณาระยะห่างระหว่างตำแหน่งของสุนัขกับตำแหน่งของสุภาพสตรี จะพบว่าระยะห่างนี้มีความนิ่ง ถ้าสุภาพสตรีคนนี้สามารถจับตัวสุนัขได้แล้ว หรือระยะห่างระหว่างสุนัขกับเจ้าของเป็นศูนย์ ($u_t = 0$) จะเปรียบเสมือนขณะนี้ได้เกิดดุลยภาพระยะยาวแล้ว และถ้าสุภาพสตรียังจับตัวสุนัขไม่ได้ หรือระยะห่างระหว่างสุนัขกับเจ้าของไม่เป็นศูนย์ ($u_t \neq 0$) จะเปรียบเสมือนขณะนี้ยังไม่เกิดดุลยภาพระยะยาว นั่นคือ ในช่วงเวลาถัดไป เจ้าของกับสุนัขจะต้องมีการปรับตัวให้เคลื่อนเข้าใกล้กัน หรือมีการปรับตัวให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (เรียกว่า error correction)

รูปที่ 9.4 แสดงตัวอย่างระยะทางที่ห่างจากร้านเหล้าของสุภาพสตรีและสุนัขของเธอ โดยแกนนอนบอกถึงจำนวนก้าว แกนตั้งคือระยะห่างจากร้านเหล้า[18] ซึ่งสังเกตได้ว่า เมื่อสุภาพสตรีและสุนัขมีความผูกพันต่อกัน (เปรียบเสมือนมีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน) ดังนั้น ระยะทางที่ห่างจากร้านเหล้าทั้งสุภาพสตรีและสุนัขจะเคลื่อนไปแบบไม่ห่างซึ่งกันและกันมากนัก (หรือกล่าวว่ามีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว)

---

[17] ผู้เขียนขออธิบายเพิ่มเติมจาก Murray (1994) ว่า “ความผูกพันซึ่งกันและกันระหว่างเจ้าของกับสุนัข เปรียบเสมือนแนวโน้มสุ่มร่วมกัน (Common Stochastic Trend)” เพื่อเป็นการเน้นว่า การที่ตัวแปรทั้งสองมีแนวโน้มสุ่มร่วมกันเป็นสาเหตุที่ทำให้ตัวแปรทั้งสองนี้เคลื่อนไปด้วยกัน ไม่ไปคนละทิศคนละทาง และแนวโน้มสุ่มจะเป็นเรื่องของนามธรรมที่ไม่สามารถเก็บข้อมูลเป็นตัวเลขได้

[18] เครื่องหมายเป็นบวกแสดงระยะห่างของสุภาพสตรีและสุนัขอยู่ในทิศเหนือของร้านเหล้า และถ้าเป็นลบแสดงระยะห่างของสุภาพสตรีและสุนัขอยู่ในทิศใต้ของร้านเหล้า



รูปที่ 9.4 ระยะทางที่ห่างจากร้านเหล้าของสุภาพสตรีและสุนัข

ความสัมพันธ์ของการมีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (Common Stochastic Trend) กับเวกเตอร์แสดงดุลยภาพระยะยาว (cointegrating vector) ในรูปสมการ อธิบายได้ดังนี้

กำหนดให้ อนุกรมเวลา Y_t และ X_t อยู่ในรูปแบบดังสมการข้างล่างนี้

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_{Yt} \qquad (9.13 ก)$$

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_{Xt} \qquad (9.13 ข)$$

โดยที่ μ_t คือการเดินแบบสุ่ม (Random walk) ส่วน ε_{Yt} และ ε_{Xt} คือตัวรบกวนขาว

จากสมการที่ (9.13 ก) และ (9.13 ข) เราสามารถบอกได้ว่า อนุกรม Y_t และ X_t เป็นการเดินแบบสุ่มด้วย เนื่องจากอนุกรมเวลาทั้งคู่ขึ้นอยู่กับ μ_t ซึ่งเป็นการเดินแบบสุ่ม เราสามารถกล่าวได้อีกอย่างว่า Y_t และ X_t มีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (Common Stochastic Trend) ซึ่งก็คือแนวโน้มแบบสุ่ม μ_t นั่นเอง

และเราจะใช้สมการที่ (9.13 ก) และ (9.13 ข) หาค่าของ $Y_t - X_t$ ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
Y_t - X_t &= (\mu_t - \mu_t) + \varepsilon_{Yt} - \varepsilon_{Xt} \\
&= \varepsilon_{Yt} - \varepsilon_{Xt} \qquad (9.14)
\end{aligned}
$$

จากสมการที่ (9.14) เมื่อพิจารณา ε_{Yt} และ ε_{Xt} เป็นตัวรบกวนขาว ดังนั้น $\varepsilon_{Yt} - \varepsilon_{Xt}$ ก็ยังคงเป็นตัวรบกวนขาว นั่นคือ อนุกรมเวลา $Y_t - X_t$ เป็นอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง โดยมีเวกเตอร์แสดงดุลยภาพระยะยาวคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ หรือเขียนอีกอย่างคือ $[1 \ \ -1]'$

หรือกล่าวในรูปทั่วไปได้ดังนี้ว่า หาก Y_t และ X_t มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegration) ต่อกันแล้ว จะต้องมีค่าสัมประสิทธิ์ β_1 และ β_2 ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ ที่ทำให้

(1) ผลบวกเชิงเส้นของ Y_t และ X_t $(\beta_1 Y_t + \beta_2 X_t)$ มีความนิ่ง (Stationary) และเรียกเวกเตอร์ $[\beta_1 \ \ \beta_2]'$ ว่าเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegrating Vector)

(2) แนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (Common stochastic trend) ที่อยู่ในตัวแปร X_t และ Y_t หมดไป

และเมื่อกลับไปเปรียบเทียบกับตัวอย่างเมื่อครู่ ในกรณีที่สุภาพสตรียัง**ไม่สามารถ**จับตัวสุนัขได้ (หรือกล่าวว่า ยังไม่เกิดดุลยภาพระยะยาว) ดังนั้น ตัวแปรทั้งสองนี้จะมีการปรับตัวเพื่อให้พบกัน (หรือกล่าวว่า มีการปรับตัวให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว : equilibrium correction mechanism) โดยสมมุติให้สุภาพสตรีและสุนัขมีการก้าวเดินแต่ละก้าวตามกระบวนการดังสมการต่อไปนี้

$$Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t + \phi_1(Y_{t-1} - X_{t-1}) \qquad (9.15\text{ ก})$$

$$X_t - X_{t-1} = w_t + \phi_2(Y_{t-1} - X_{t-1}) \qquad (9.15\text{ ข})$$

เราจะเรียก $\phi_1(Y_{t-1}–X_{t-1})$ และ $\phi_2(Y_{t-1}–X_{t-1})$ ว่ากลไกการปรับตัวให้เข้าสู่ดุลยภาพ (Equilibrium Correction Mechanism หรือ Error Correction Mechanism) และเรียกสมการที่ (9.15 ก) และ (9.15 ข) ว่าแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (Error Correction Model: ECM) การใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดกับแบบจำลอง ECM จะไม่เกิดปัญหาการถดถอยปลอม (Spurious regression) เนื่องจากทั้งตัวแปรตาม ตัวแปรอิสระ และตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนมีความนิ่งทั้งหมด

จากสมการที่ (9.15 ก) $Y_{t-1} - X_{t-1}$ คือระยะห่างระหว่างสุภาพสตรีกับสุนัขในช่วงเวลาก่อนหน้านี้ หรือเป็นความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegration) ระหว่างสุภาพสตรีกับสุนัข โดยเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegrating vector) คือ $[1 \;\; -1]'$ และ ϕ_1 คือ ความเร็วของการปรับตัว (speeds of adjustment) ของสุภาพสตรีว่าจะเข้าใกล้สุนัขของเธอ (หรือเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว) ได้เร็วหรือช้าเพียงใด โดย $-1 < \phi_1 < 1$

- ถ้าสุภาพสตรียังพอครองสติได้ จะพบเจอสุนัขได้เร็ว ดังนั้น $|\phi_1|$ จะมีค่าเข้าใกล้ 1
- ถ้าสุภาพสตรียังเมามาก จะพบเจอสุนัขได้ช้า $|\phi_1|$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0

ทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาสมการที่ (9.15 ข) ϕ_2 คือ speeds of adjustment (ความเร็วของการปรับตัว) ของสุนัข ว่าจะเข้าใกล้สุภาพสตรี (หรือเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว) ได้เร็วหรือช้าเพียงใด โดย $-1 < \phi_2 < 1$

- ถ้าสุนัขไม่ดื้อมาก จะเดินกลับไปหาเจ้าของเร็ว $|\phi_2|$ จะมีค่าเข้าใกล้ 1
- ถ้าสุนัขค่อนข้างดื้อ จะเดินกลับไปหาเจ้าของช้า $|\phi_2|$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0

อย่างไรก็ดี มีข้อควรสังเกตเพิ่มเติมดังนี้ เมื่ออนุกรมเวลาทั้งสองยังไม่อยู่ที่ดุลยภาพ จะมีการปรับตัวในระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวในลักษณะใดลักษณะหนึ่งดังนี้

(1) อนุกรมเวลาหนึ่งปรับตัวเพิ่มขึ้น ในขณะที่อนุกรมเวลาอีกตัวหนึ่งปรับตัวลดลง ตัวอย่างเช่น ถ้า $\phi_1 > 0$ และ $\phi_2 < 0$ เปรียบเสมือนกับการก้าวเดินของสุภาพสตรี ณ เวลา t เป็นไปในทิศทางที่ห่างจากร้านเหล้ามากขึ้น ในขณะที่การก้าวเดินของสุนัขเป็นไปในทิศทางที่ใกล้เข้าสู่ร้านเหล้าขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งท้ายสุดจะพบเจอกัน

(2) อนุกรมเวลาปรับตัวเพิ่มขึ้นทั้งคู่ ($\phi_1 > 0, \phi_2 > 0$) โดยมีอนุกรมเวลาอีกตัวหนึ่งปรับตัวเพิ่มขึ้นเร็วกว่า ตัวอย่างเช่น การเดินของสุภาพสตรีและของสุนัขห่างจากร้านเหล้ามากขึ้นทั้งคู่ แต่สุภาพสตรีมีการก้าวเดินที่ห่างจากร้านเหล้าเร็วมากกว่า ซึ่งท้ายที่สุดจะทำให้ตามสุนัขทัน

(3) อนุกรมเวลาปรับตัวลดลงทั้งคู่ ($\phi_1 < 0, \phi_2 < 0$) โดยมีอนุกรมเวลาอีกตัวหนึ่งปรับตัวลดลงเร็วกว่า ตัวอย่างเช่น การเดินของสุภาพสตรีและของสุนัขเข้าใกล้ร้านเหล้าเรื่อย ๆ ทั้งคู่ แต่สุนัขมีการก้าวเดินที่เข้าใกล้ร้านเหล้าเร็วมากกว่า ซึ่งท้ายที่สุดจะทำให้ทั้งสองพบเจอกัน

กล่าวโดยสรุป แบบจำลองการปรับตัวในระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (ECM) ตามสมการที่ (9.15 ก) และ (9.15 ข) อธิบายได้ดังนี้

พิจารณาสมการที่ (9.15 ก) : $Y_t – Y_{t–1} = \varepsilon_t + \phi_1(Y_{t–1} – X_{t–1})$ อธิบายความหมายได้ว่า ตำแหน่งที่สุภาพสตรีอยู่จะห่างจากร้านเหล้ามากขึ้นหรือลดลงนั้น ($Y_t – Y_{t–1}$) ขึ้นอยู่กับระยะการก้าวเดินตามปกติที่เป็นแบบตัวรบกวนขาว (ε_t) และความเร็วของการปรับตัวของสุภาพสตรีว่าจะเดินเข้าหาสุนัข (หรือปรับให้เข้าหาดุลยภาพ) ได้เร็วแค่ไหน ซึ่งแสดงด้วย $\phi_1(Y_{t–1} – X_{t–1})$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (9.15 ข) : $X_t – X_{t–1} = w_t + \phi_2(Y_{t–1} – X_{t–1})$ อธิบายความหมายได้ว่า ตำแหน่งที่สุนัขอยู่จะห่างจากร้านเหล้ามากขึ้นหรือลดลงนั้น ($X_t – X_{t–1}$) ขึ้นอยู่กับระยะการก้าวเดินตามปกติที่เป็นแบบตัวรบกวนขาว (w_t) และความเร็วของการปรับตัวของสุนัขว่าจะเดินเข้าหาสุภาพสตรี (หรือปรับให้เข้าหาดุลยภาพ) ได้เร็วแค่ไหน ซึ่งแสดงด้วย $\phi_2(Y_{t–1} – X_{t–1})$

จากสมการที่ (9.15 ก) และ (9.15 ข) เมื่อพบว่า $\phi_1 = 0$ ในขณะที่ $\phi_2 \neq 0$ จะหมายถึงสุภาพสตรีจะไม่เป็นผู้ปรับตัวเข้าหาสุนัข (เช่น อาจเมามากจนไม่ได้ยินเสียงสุนัขเห่าตอบ) ในกรณีนี้เราเรียกว่า ระยะการก้าวเดินของสุภาพสตรี (Y_t) เป็นตัวแปรภายนอกแบบไม่มีพลัง (weak exogenous)

บทที่ 10
การประมาณความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว : วิธีใช้สมการเดียว

จากบทที่แล้ว เราได้ทราบถึงแนวคิดของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegration) ที่เสนอโดย Granger (1981) แล้ว ซึ่งสรุปได้ดังนี้ "หากอนุกรมเวลา 2 ชุดใด ๆ เป็น I(1) และถ้ามีรูปแบบผลบวกเชิงเส้นของอนุกรมเวลาสองชุดนี้เป็น I(1) แล้วเรากล่าวว่า อนุกรมเวลา 2 ชุดนี้มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกันแล้ว" นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นอีกว่า จะสามารถหาสมการที่แสดงการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้เสมอ (Error Correction Model: ECM)

ในบทนี้ เราจะมาทำความเข้าใจถึงวิธีการประมาณความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ด้วยการใช้สมการเดียว (Single Equation) ตามแนวคิดที่เสนอโดย Engle and Granger (1987) ซึ่งจะแบ่งเป็น 4 หัวข้อหลักดังนี้ หัวข้อแรกจะกล่าวถึงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของอนุกรมเวลา 2 ชุด หัวข้อที่ 2 จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (Common Stochastic Trend)กับความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวเมื่อมีอนุกรมเวลาตั้งแต่ 3 ชุดขึ้นไป หัวข้อที่ 3 จะกล่าวถึงการอ้างอิงค่าพารามิเตอร์ในเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจากสมการเดียวด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดพลวัตรแบบทั่วไป (Dynamic Generalized Least Square: DGLS) และหัวข้อสุดท้ายจะแสดงตัวอย่างการประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวด้วยวิธี DGLS

10.1 การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของอนุกรมเวลา 2 ชุด

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของอนุกรมเวลา 2 ชุดใด ๆ ซึ่งได้แก่ (1) การทดสอบว่าอนุกรมเวลา 2 ชุดใด ๆ มีความสัมพันธ์ดุลยภาพระยะยาวหรือไม่ (2) วิธีการประมาณเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegrating Vector) (3) การประมาณแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (ECM) และ (4) ตัวอย่างการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว รายละเอียดแต่ละหัวข้อมีดังนี้

10.1.1 การทดสอบว่าอนุกรมเวลา 2 ชุดใด ๆ มีความสัมพันธ์ดุลยภาพระยะยาวหรือไม่

กำหนดให้ Y_t และ X_t เป็น I(1) และมีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกัน แล้วเราสามารถเขียนสมการถดถอยเชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegrating regression) ได้ดังนี้

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t \tag{10.1}$$

โดยที่ ε_t เป็นตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคงที่ (σ^2) หรือ $\varepsilon_t \sim I(0)$ และจะเห็นว่า ตัวแปร Y_t มีค่าสัมประสิทธิ์เป็น 1 เราจะเรียกตัวแปร Y_t ว่าตัวแปรที่ถูกทำให้เป็นปกติ (Normalized Variable)[1] จากสมการที่ (10.1) เขียนได้อีกแบบคือ

$$Y_t - \beta X_t = \varepsilon_t \tag{10.2}$$

แล้วเรากล่าวว่า เวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ[2] (Nomalized Cointegrating Vector) คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix}$ หรือเขียนได้ว่า $[1\ -\beta]'$

การทดสอบว่าอนุกรมเวลา Y_t และ X_t มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวหรือไม่นั้น Engle and Granger (1987) ได้เสนอให้ทดสอบว่า ε_t มี unit root หรือไม่นั่นเอง โดยมีขั้นตอนดังนี้ **ขั้นที่ 1** ประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (10.1) ด้วยวิธี OLS **ขั้นที่ 2** คำนวณค่าความผิดพลาดที่ได้จากการประมาณสมการถดถอย (Residual: e_t) ออกมา แล้วนำไปทดสอบว่ามี Unit Root หรือไม่ โดยหากผลการทดสอบสรุปว่า e_t มี Unit Root (หรือกล่าวว่า e_t ไม่มีความนิ่ง) นั่น

---

[1] Engle, R. F. and Granger, C. W. J., Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing, *Econometrica* 55 (1987): p. 261.

[2] เราจะใช้คำว่าแบบปกติก็ต่อเมื่อ ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่อยู่ทางซ้าย (ซึ่งในที่นี้คือ *Y*) มีค่าเท่ากับ 1 และอาจเรียกเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวก็ได้ โดยละคำว่า “แบบปกติ” ออกไป

คือ ตัวแปร X_t และ Y_t **ไม่มี**ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว แต่หากผลการทดสอบสรุปว่า e_t ไม่มี unit root (หรือกล่าวว่า e_t มีความนิ่ง) นั่นคือ ตัวแปร X_t และ Y_t **มี**ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegration)

การทดสอบ unit root ของ e_t สามารถใช้วิธีทดสอบของ ADF ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\Delta e_t = \psi^* e_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \psi_i \, \Delta e_t + \delta_0 + \delta_1 t + \omega_t \qquad (10.3)$$

โดยที่ ω_t คือตัวรบกวนขาว โดยค่าคงที่ (δ_0) กับตัวแปรอิสระแนวโน้มกำหนดได้ (Deterministic Trend: t) จะใส่ในสมการที่ (10.1) หรือ (10.3) สมการใดสมการหนึ่งเท่านั้น ดังนั้น สมมุติฐานหลักและรองเพื่อใช้ทดสอบว่า ตัวแปร X_t กับ Y_t มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวหรือไม่ เขียนได้ดังนี้

H_0: $\psi^* = 0$ และ H_1: $\psi^* < 0$

ค่าสถิติใดที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานข้างต้นคือ ค่าสถิติ t^* และค่าวิกฤตที่ต้องคำนวณจากวิธีการของ MacKinnon (1991, 1996)

10.1.2 การประมาณเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

เราทราบจากหัวข้อที่ผ่านมาแล้วว่า เวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ (Nomalized Cointegrating Vector) คือ $[1 \; -\beta]'$ Engle and Granger (1981) ได้เสนอให้ประมาณค่าพารามิเตอร์ β ด้วยการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดกับสมการที่ (10.1) ซึ่งตัวประมาณค่าที่ได้จะมีคุณสมบัติเป็น Super Consistency[3] อย่างไรก็ดี ตัวประมาณค่าที่ได้นี้จะไม่มีการแจกแจงแบบปกติแม้ว่าจะมีตัวอย่างขนาดใหญ่ก็ตาม[4] ดังนั้น การอ้างอิงค่าพารามิเตอร์จะใช้ค่าวิกฤตจากตาราง t, F, Z ไม่ได้

[3] อย่าลืมว่า จำนวนตัวอย่างใช้ประมาณค่าสมการที่ (10.1) ต้องมีขนาดใหญ่ หากใช้ตัวอย่างขนาดเล็กจะให้ผลการประมาณค่าที่เอนเอียง (Biased Estimator)

[4] สรุปไว้ในรูปที่ 9.3 ของบทที่ 9

10.1.3 แบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (Error Correction Model: ECM)

กำหนดให้ตัวแปรตาม Y_t ถูกกระทบจากค่าตัวแปรอิสระทั้งในปัจจุบันและในอดีต (X_t, X_{t-1}, …, X_{t-q}) ดังนี้

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \ldots + \gamma_q X_{t-q} + u_t \quad (10.4)$$

เราสามารถเรียกสมการที่ (10.4) ว่าแบบจำลองแจกแจงความล่าช้า (Distributed-lag Model) และผลกระทบระยะสั้น ระยะกลาง และระยะยาวของตัวแปรอิสระ X ที่มีต่อตัวแปรตาม Y สามารถหาได้ดังนี้

- **ผลกระทบระยะสั้น (Short-run) ของตัวแปรอิสระ X ที่มีต่อตัวแปรตาม Y** หมายถึง ผลกระทบที่เกิดขึ้นทันที ณ เวลาเดียวกัน นั่นคือ ผลกระทบระยะสั้นดังกล่าวสามารถแสดงได้ด้วยค่า γ_0
- **ผลกระทบระยะกลาง (Interim) ของตัวแปรอิสระ X ที่มีต่อตัวแปรตาม Y** หมายถึง ผลกระทบที่เกิดขึ้นเมื่อเวลาผ่านไปช่วงหนึ่ง เช่น เมื่อเวลาผ่านไป 2 ช่วงเวลาที่แล้ว (t–2) 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (t–1) และช่วงเวลาปัจจุบัน (t) นั่นคือ ผลกระทบระยะกลางดังกล่าวสามารถแสดงได้ด้วยค่า $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$
- **ผลกระทบระยะยาว (Long-run) ของตัวแปรอิสระ X ที่มีต่อตัวแปรตาม Y** หมายถึง ผลกระทบของตัวแปรอิสระ X ที่ผ่านมาทั้งหมดที่ส่งผลต่อตัวแปรตาม Y นั่นคือ ผลกระทบระยะยาวดังกล่าวสามารถแสดงได้ด้วยค่า $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_q$

โดยปกติแล้ว เมื่อเวลาผ่านไป ผลกระทบของตัวแปรอิสระ X จะส่งผลกระทบต่อตัวแปรตามน้อยลงเรื่อย ๆ หรือเขียนได้ว่า $\gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_q$ จากสมการที่ (10.4) เรากล่าวได้ว่า ถ้าตัวแปร X และ Y อยู่ที่ดุลยภาพ ณ เวลา t จะหมายถึงค่าของ X ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาผ่านไป หรือเขียนได้ว่า $X_t = X_{t-1} = X_{t-2} = \ldots = X_{t-q}$ และจะไม่มีความคลาดเคลื่อนใด ๆ เกิดขึ้น หรือเขียนได้ว่า $u_t = 0$ ดังนั้น ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y และ X แสดงได้ดังนี้

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_t + \gamma_2 X_t + \ldots + \gamma_q X_t$$

$$Y_t = (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_q) X_t$$

ถ้ากำหนดให้ ตัวแปรตาม Y_t ถูกกระทบจากค่าตัวแปรอิสระทั้งในปัจจุบันและในอดีต (X_t, $X_{t-1},\ldots, X_{t-q}$) และค่าของตัวแปรตามในอดีต ($Y_{t-1}, \ldots,Y_{t-p}$) ดังนั้น สมการที่แสดงการปรับตัว Y_t เขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} +\ldots+ \gamma_q X_{t-q} + \alpha_1 Y_{t-1}+ \ldots + \alpha_p Y_{t-p} + u_t \qquad (10.5)$$

สมการที่ (10.5) ก็คือแบบจำลองพลวัต (Dynamic Model) หรือแบบจำลอง Autoregressive นั่นเอง ถ้า Y และ X อยู่ที่ดุลยภาพ ณ เวลา t จะหมายถึงค่าของ X และ Y ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาผ่านไปและจะไม่มีความคลาดเคลื่อนใด ๆ เกิดขึ้น หรือเขียนได้ว่า $X_t = X_{t-1}=\ldots= X_{t-q}$, $Y_t = Y_{t-1} = \ldots = Y_{t-p}$ และ $u_t = 0$ ดังนั้น ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y และ X แสดงได้ดังนี้

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_t +\ldots+ \gamma_q X_t + \alpha_1 Y_t+ \ldots + \alpha_p Y_t$$

$$(1-\alpha_1 - \ldots - \alpha_p)Y_t= (\gamma_0 + \gamma_1+\ldots+ \gamma_q) X_t$$

$$Y_t = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 \ldots + \gamma_q}{1-\alpha_1 - \cdots - \alpha_p} X_t$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (10.5) ถ้า $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}\ldots, X_{t-q}$ ไม่มีความสัมพันธ์กับ u_t ดังนั้น เรากล่าวได้ว่า ตัวแปรอิสระ X คือตัวแปรภายนอกแบบมีพลัง (Strongly Exogenous Variables) ซึ่งหมายถึง ตัวแปร X_t ส่งผลกระทบต่อ Y_t อีกทั้ง $X_{t-1}, X_{t-2},\ldots,X_{t-q}$ ก็ส่งผลต่อ Y_t ด้วย[5] ในขณะที่อนุกรมเวลา Y_t ไม่ส่งผลกระทบใด ๆ ต่ออนุกรมเวลา X_t เลย หรือกล่าวว่า ตัวแปร X_t จะไม่มีการปรับตัวทั้งในระยะสั้นและระยะยาว เพื่อให้กลับเข้าสู่ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ดังนั้น เราจึงไม่พิจารณาแบบจำลอง ECM ของอนุกรมเวลา X_t นอกจากนี้ แบบจำลอง Autogressive (10.5) ยังสามารถแสดงให้เห็นถึงว่า เมื่อหากอนุกรมเวลา X และ Y ไม่อยู่ในดุลยภาพระยะยาวแล้ว อนุกรมเวลา Y จะปรับตัวเพิ่มขึ้นหรือลดลงเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว

เพื่อให้เข้าใจถึงการปรับตัวในระยะสั้นเพื่อเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้ง่ายขึ้น เราจะเขียนสมการที่ (10.5) ใหม่ ให้อยู่ในกรณี p=1 และ q=1 ดังนี้

---

[5] เมื่อตัวแปรล่าช้าของ X_t ซึ่งได้แก่ $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots,X_{t-q}$ ส่งผลกระทบต่อ Y_t เราจะเรียกว่า "อนุกรมเวลา X_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger หรือเรียกย่อ ๆ ว่า X Granger cause Y" รายละเอียดจะกล่าวในบทที่ 11

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t \qquad (10.6)$$

เมื่ออนุกรมเวลา Y_t และ X_t อยู่ในดุลยภาพระยะยาวหมายถึง ค่าของอนุกรมเวลาทั้งสองนี้จะคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง นั่นคือ จะได้ว่า $X_t = X_{t-1}$ และ $Y_t = Y_{t-1}$ และจะไม่มีความคลาดเคลื่อน ใด ๆ เกิดขึ้น นั่นคือ $u_t = 0$ แทนค่าเงื่อนไขเหล่านี้ลงในสมการที่ (10.5) จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวดังนี้

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_t + \alpha_1 Y_t$$

$$(1-\alpha_1)Y_t = (\gamma_0 + \gamma_1)X_t$$

$$Y_t = \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1} X_t$$

หรือเขียนได้ว่า $Y_t = \beta X_t$ (10.7)

โดยที่ $\beta = \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1}$ จากสมการที่ (10.7) แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Cointegration) ระหว่างอนุกรมเวลา Y_t และ X_t และเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ (Normalized Cointegrating vector) คือ $[1 \ \ -\beta]'$

ต่อมาเราจะมาพิจารณาถึงเงื่อนไขของค่า α_1 ที่ทำให้หาผลกระทบระยะสั้นและระยะยาวได้จากสมการที่ (10.6) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 L X_t + \alpha_1 L Y_t + u_t$$

$$(1-\alpha_1 L)Y_t = (\gamma_0 + \gamma_1 L) X_t + u_t$$

$$Y_t = \frac{\gamma_0+\gamma_1 L}{1-\alpha_1 L} X_t + \varepsilon_t \qquad (10.8)$$

โดยที่ $\varepsilon_t = \frac{u_t}{1-\alpha_1 L}$ และ L คือตัวดำเนินการความล่าช้า (Lag Operator) สมการที่ (10.8) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$Y_t = \frac{\gamma_0}{1-\alpha_1 L} X_t + \frac{\gamma_1}{1-\alpha_1 L} X_{t-1} + \varepsilon_t$$

สมการข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ได้ดังนี้

$$Y_t = \gamma_0(1+\alpha_1 L + \alpha_1^2 L^2 + \ldots)X_t + \gamma_1(1+\alpha_1 L + \alpha_1^2 L^2 + \ldots)X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$= \gamma_0(X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_1^2 X_{t-2} + \ldots) + \gamma_1(X_{t-1} + \alpha_1 X_{t-2} + \alpha_1^2 X_{t-3} + \ldots) + \varepsilon_t$$

จะเห็นว่า หาก $0 < \alpha_1 < 1$ แล้วจะทำให้สามารถหาผลกระทบทั้งระยะสั้นและระยะยาวได้[6]

ต่อมาเราจะใช้สมการที่ (10.6) สร้างแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นของตัวแปร Y เพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (Error Correction Model) ได้ดังนี้

จาก (10.6) $$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t$$

นำ Y_{t-1} ไปหักออกจากสมการนี้ทั้งสองข้างจะได้

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} - Y_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t$$

นำ $-\gamma_0 X_{t-1} + \gamma_0 X_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$$\Delta Y_t = \gamma_0(X_t - X_{t-1}) + (\gamma_0 + \gamma_1) X_{t-1} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)(Y_{t-1} - \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1} X_{t-1}) + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.9)$$ [7]

โดยที่ $\beta = \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1}$ สมการที่ (10.9) อธิบายได้ว่า เมื่อ Y_{t-1} อยู่สูงกว่าค่าที่ทำให้เกิดดุลยภาพระยะยาว (นั่นคือ $Y_{t-1} - \beta X_{t-1} > 0$) แล้วจะพบว่า ΔY_t จะติดลบ ซึ่งแสดงถึง Y_t ปรับตัวลดลงนั่นเอง ส่วน γ_0 ก็คือผลกระทบในระยะสั้นของ X ที่มีต่อ Y นั่นเอง

สมการที่ (10.6) อาจมีค่าคงที่เพิ่มเข้ามาอยู่ด้วยก็ได้ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \delta_0 + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t \qquad (10.10)$$

สมการแสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวในกรณีนี้ หาได้ด้วยการใช้แนวคิดเดิมคือ $Y_t = Y_{t-1}$, $X_t = X_{t-1}$ และ $u_t = 0$ แสดงได้ดังนี้

[6] เราไม่พิจารณากรณีที่ $-1 < \alpha_1 < 0$ เนื่องจากจะหมายถึง ผลกระทบของ X_t ที่มีต่อ Y_t จะต้องค่อย ๆ ลดลงเมื่อเวลาผ่านไปในลักษณะที่เป็นบวกบ้าง เป็นลบบ้าง ซึ่งกรณีนี้ไม่เกิดขึ้นในทางปฏิบัติ

[7] อย่าลืมว่า เรามีเงื่อนไขคือ $0 < \alpha_1 < 1$ ดังนั้นจะได้ $(1-\alpha_1) > 0$

$$Y_t = \delta_0 + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_t + \alpha_1 Y_t$$

$$(1-\alpha_1)Y_t = \delta_0 + (\gamma_0 + \gamma_1)\, X_t$$

$$Y_t = \frac{\delta_0}{1-\alpha_1} + \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1}X_t$$

หรือเขียนได้ว่า $Y_t = \mu + \beta X_t$ (10.11)

โดยที่ $\mu = \frac{\delta_0}{1-\alpha_1}$ และ $\beta = \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1}$ เราสามารถใช้วิธีเดียวกันในการหาแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้ (ECM) ของอนุกรมเวลา Y_t ดังนี้

$$Y_t = \delta_0 + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t$$

นำ Y_{t-1} ไปหักออกจากสมการนี้ทั้งสองข้างจะได้

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta_0 + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} - Y_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t$$

นำ $-\gamma_0 X_{t-1} + \gamma_0 X_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$$\Delta Y_t = \delta_0 + \gamma_0(X_t - X_{t-1}) + (\gamma_0 + \gamma_1)X_{t-1} - (1-\alpha_1)\, Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \delta_0 + \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)\left(Y_{t-1} - \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1}X_{t-1}\right) + u_t$$

$$\Delta Y_t = \delta_0 + \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.12)$$

และถ้าพบว่า $\mu = \frac{\delta_0}{1-\alpha_1}$ ดังนั้น $\delta_0 = (1-\alpha_1)\mu$ แทนค่าใน (10.12) จะได้

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)(Y_{t-1} - \mu - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.13)$$[8]

นั่นคือ ค่าคงที่จะอยู่ในเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ เขียนได้ดังนี้

$\begin{bmatrix} 1 \\ -\mu \\ -\beta \end{bmatrix}$ หรือ $[1\ -\mu\ \ -\beta]'$ และค่าคงที่ใน ECM จะหายไป

แต่หากพบว่า $\mu \neq \frac{\delta_0}{1-\alpha_1}$ โดยที่ $\delta_0 = \mu(1-\alpha_1) + \lambda$ แทนค่าใน (10.12) จะได้

$$\Delta Y_t = \lambda + \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)(Y_{t-1} - \mu - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.14)$$

---

[8] อย่าลืมว่า เรามีเงื่อนไขคือ $0 < \alpha_1 < 1$ ดังนั้นจะได้ $(1-\alpha_1) > 0$

นั่นคือ ค่าคงที่จะอยู่ในแบบจำลอง ECM และอยู่ในเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ $\begin{bmatrix} 1 \\ -\mu \\ -\beta \end{bmatrix}$ หรือ $[1\ -\mu\ \ -\beta]'$ ด้วย

สมการที่ (10.6) อาจมีตัวแปรแนวโน้มกำหนดได้ (Deterministic Trend) เพิ่มขึ้นมาด้วยก็ได้ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t \qquad (10.15)$$

สมการแสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวในกรณีนี้ หาได้ด้วยการใช้แนวคิดเดิมคือ $Y_t = Y_{t-1}$, $X_t = X_{t-1}$ และ $u_t = 0$ แสดงได้ดังนี้

$$Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_t + \alpha_1 Y_t$$

$$Y_t = \frac{\delta_0}{1-\alpha_1} + \frac{\delta_1 t}{1-\alpha_1} + \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1} X_t$$

หรือเขียนได้ว่า $$Y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \beta X_t \qquad (10.16)$$

โดยที่ $\mu_0 = \frac{\delta_0}{1-\alpha_1}$, $\mu_1 = \frac{\delta_1}{1-\alpha_1}$ และ $\beta = \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1}$ เราสามารถใช้วิธีเดียวกันในการหาแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้ (ECM) ของอนุกรมเวลา Y_t ดังนี้

จาก (10.15) $$Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t$$

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta_0 + \delta_1 t + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} - Y_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \gamma_0 (X_t - X_{t-1}) + (\gamma_0 + \gamma_1) X_{t-1} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)\left(Y_{t-1} - \frac{\gamma_0+\gamma_1}{1-\alpha_1} X_{t-1}\right) + u_t$$

$$\Delta Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.17)$$

และถ้าพบว่า $\mu_0 = \frac{\delta_0}{1-\alpha_1}$ และ $\mu_1 = \frac{\delta_1}{1-\alpha_1}$ ดังนั้น $\delta_0 = (1-\alpha_1)\mu_0$ และ $\delta_1 = (1-\alpha_1)\mu_1$ แทนค่า δ_0 และ δ_1 ลงใน (10.17) จะได้

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)(Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 t - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.18)$$

นั่นคือ ค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้จะอยู่ในเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ เขียนได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} 1 \\ -\mu_0 \\ -\mu_1 \\ -\beta \end{bmatrix}$ หรือ $[1\ -\mu_0\ \ -\mu_1\ \ -\beta]'$ และไม่อยู่ใน ECM

แต่หากพบว่า $\mu_0 \neq \frac{\delta_0}{1-\alpha_1}$ และ $\mu_1 \neq \frac{\delta_1}{1-\alpha_1}$ โดยที่ $\delta_0 = \mu_0(1-\alpha_1) + \lambda_0$ และ $\delta_1 = \mu_1(1-\alpha_1) + \lambda_1$ แทนค่า δ_0 และ δ_1 ใน (10.17) จะได้ ECM ของอนุกรม Y_t ดังนี้

$$\Delta Y_t = \lambda_0+\lambda_1 t + \gamma_0 \Delta X_t - (1-\alpha_1)(Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 t - \beta X_{t-1}) + u_t \quad (10.19)$$

นั่นคือ ค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้จะอยู่ทั้งในเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ เขียนได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} 1 \\ -\mu_0 \\ -\mu_1 \\ -\beta \end{bmatrix}$ หรือ $[1\ -\mu_0\ \ -\mu_1\ \ -\beta]'$ และอยู่ใน ECM

ทำนองเดียวกันหากสมการที่ (10.5) อยู่ในกรณี p=2 และ q=2 ดังนี้

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t \quad (10.20)$$

สมการที่ (10.20) สามารถใช้หาแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้ดังนี้

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t - \gamma_2 \Delta X_{t-1} - \alpha_2 \Delta Y_{t-1} - (1-\alpha_1-\alpha_2)(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + u_t \quad (10.21)$$ [9]

โดยที่ $\beta = \frac{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}$

ทำนองเดียวกันหากสมการที่ (10.5) อยู่ในกรณี p= 3 และ q= 3 ดังนี้

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_3 X_{t-3} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t \quad (10.22)$$

สมการที่ (10.22) สามารถใช้หาแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้ดังนี้

[9] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 10ก

$$\Delta Y_t = \gamma_0\Delta X_t - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3\Delta X_{t-2} - (\alpha_2+\alpha_3)\Delta Y_{t-1} - \alpha_3\Delta Y_{t-2} - (1-\alpha_1-\alpha_2)(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.23)$$ [10]

โดยที่ $\beta = \frac{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$

และเราจะใช้สมการที่ (10.5) เขียนให้เป็นแบบจำลอง ECM ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\Delta Y_t = \gamma_0\Delta X_t - (\gamma_2+\ldots+\gamma_q)\Delta X_{t-1} - (\gamma_3+\ldots+\gamma_q)\Delta X_{t-2} - \ldots - \gamma_q\Delta X_{t-(q-1)} - (\alpha_2 +\ldots+ \alpha_p)\Delta Y_{t-1} - (\alpha_3 +\ldots+ \alpha_p)\Delta Y_{t-2} - \ldots - \alpha_p \Delta Y_{t-(p-1)} - (1-\alpha_1-\ldots-\alpha_p)(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.23)$$

โดยที่ $\beta = \frac{\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_q}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_p}$ สมการที่ (10.23) เขียนอีกอย่างคือ

$$\Delta Y_t = \gamma_0\Delta X_t + \gamma_1^*\Delta X_{t-1} + \gamma_2^*\Delta X_{t-2} + \ldots + \gamma_{q-1}^*\Delta X_{t-(q-1)} + \alpha_1^*\Delta Y_{t-1} + \alpha_2^*\Delta Y_{t-2} + \ldots + \alpha_{p-1}^*\Delta Y_{t-(p-1)} - \alpha(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + u_t \qquad (10.24)$$

โดยที่ $\gamma_1^* = -(\gamma_2+\gamma_3+\ldots+\gamma_q)$,

$\gamma_2^* = -(\gamma_3+\ldots+\gamma_q)$,

$\vdots$

$\gamma_q^* = -\gamma_q$

$\alpha_1^* = -(\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_p)$,

$\alpha_2^* = -(\alpha_3+\ldots+\alpha_p)$,

$\vdots$

$\alpha_p^* = -\alpha_p$

และ $\alpha = (1-\alpha_1-\ldots-\alpha_p)$

[10] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 10ข

10.1.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

จากหัวข้อ 9.3 เราได้ยกตัวอย่างการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของรายจ่ายเพื่อการบริโภคต่อหัว และอัตราเงินเฟ้อ จำนวน 50 เดือนของประเทศหนึ่ง ด้วยสมการต่อไปนี้

$$\ln(Con_t) = \beta_1 + \beta_2\, Trend + \beta_3\, Inf_t + \varepsilon_t \qquad (9.9)$$

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการที่ (9.9) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด แสดงได้ดังสมการที่ (9.10)

$$\ln(\widehat{Con_t}) = 1.835 + 0.022\, Trend + 0.007\, Inf_t \qquad (9.10)$$

หรือเขียนได้อีกอย่างคือ

$$\ln(Con_t) - 1.835 - 0.022\, Trend - 0.007\, Inf_t = e_t \qquad (10.25)$$

เนื่องจาก $\ln(Con_t) \sim I(1)$, $Inf_t \sim I(1)$ และ $u_t \sim I(0)$ ดังนั้น ผลการประมาณค่าสมการที่ (9.10) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดสามารถใช้แสดงเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ซึ่งเขียนได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1.835 \\ -0.022 \\ -0.007 \end{bmatrix}$ หรือ $[1\ \ -1.835\ \ -0.022\ \ -0.007]'$ และแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Delta\ln(Con_t) = {} & \gamma_0\Delta Inf_t + \gamma_1^*\Delta Inf_{t-1} + \gamma_2^*\Delta Inf_{t-2} + \dots + \gamma_{q-1}^*\Delta Inf_{t-(q-1)} \\ & + \alpha_1^*\Delta\ln(Con_{t-1}) + \alpha_2^*\Delta\ln(Con_{t-2}) + \dots + \alpha_{p-1}^*\Delta\ln(Con_{t-(p-1)}) \\ & - \alpha(\ln(Con_{t-1}) - 1.835 - 0.022\, Trend - 0.007\, Inf_{t-1}) + u_t \qquad (10.26) \end{aligned}$$

หรือเขียนได้อีกอย่างคือ

$$\begin{aligned} \Delta\ln(Con_t) = {} & \gamma_0\Delta Inf_t + \gamma_1^*\Delta Inf_{t-1} + \gamma_2^*\Delta Inf_{t-2} + \dots + \gamma_{q-1}^*\Delta Inf_{t-(q-1)} \\ & + \alpha_1^*\Delta\ln(Con_{t-1}) + \alpha_2^*\Delta\ln(Con_{t-2}) + \dots + \alpha_{p-1}^*\Delta\ln(Con_{t-(p-1)}) \\ & - \alpha(e_{t-1}) + u_t \qquad (10.27) \end{aligned}$$

โดยที่ e_{t-1} ก็คือค่าความล่าช้า 1 ช่วงเวลาของความผิดพลาดจากการประมาณสมการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดซึ่งจะมีคุณสมบัติเป็น I(0) ด้วย

เมื่อเราสังเกตสมการที่ (10.27) จะพบว่า ทั้งตัวแปรตามและตัวแปรอิสระทุกตัวมีคุณสมบัติเป็น I(0) ดังนั้น เราสามารถใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ และสามารถใช้ค่าสถิติ t หรือ F ในการอ้างอิงค่าพารามิเตอร์ได้ด้วย ส่วนการเลือกความยาวของตัวแปรล่าช้า (q–1 และ p–1) อาจใช้วิธี General to Specific กล่าวคือ จะกำหนดความยาวของตัวแปรล่าช้าจำนวนหนึ่งและตัดตัวแปรที่ไม่มีนัยสำคัญมากที่สุดออกไปก่อนแล้วนำมาประมาณค่าใหม่ ทำเช่นนี้จนกว่าจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวที่มีนัยสำคัญทางสถิติ อย่างไรก็ดี จำนวนตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณค่าจะต้องมีขนาดใหญ่เท่านั้น

10.2 ความสัมพันธ์ระหว่างแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (Common Stochastic Trend) และความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว เมื่อมีอนุกรมเวลาตั้งแต่ 3 ชุดขึ้นไป

เมื่อพิจารณากรณีมีอนุกรมเวลา 2 ชุด คือ Y_t และ X_t โดยเป็น I(1) ทั้งคู่ และหากการวิเคราะห์สมการถดถอย

$$Y_t = \beta X_t + u_t \tag{10.28}$$

โดยที่ u_t เป็น I(0) แล้วเราจะกล่าวได้ว่า Y_t และ X_t มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวหรือไม่ โดยมีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว[11]คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix}$ หรือ $[1 \ \ -\beta]'$

ถ้ากำหนดให้ k คือค่าคงที่ จะได้ว่า $kY_t - k\beta X_t$ ยังคงมีคุณสมบัติเป็น I(0) นั่นคือ $\begin{bmatrix} k \\ -k\beta \end{bmatrix}$ ก็เป็นเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวเช่นกัน นั่นคือ เรากล่าวได้ว่า จะมีเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมากมายนับไม่ถ้วน แต่เพื่อให้สามารถอธิบายความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y และ X ได้ เราต้องหาเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ ซึ่งก็คือ $[1 \ -\beta]'$ นั่นเอง นอกจากนี้ เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติจะต้องมีเพียงแบบเดียวคือ $[1 \ \ -\beta]'$ เท่านั้น โดยจะอยู่ในรูปแบบอื่น เช่น $[1 \ \ -\gamma]'$ ไม่ได้ ดังจะแสดงวิธีการพิสูจน์ได้ดังนี้

[11] หรืออาจเรียกว่า เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติ (Normalized Cointegrating Vector)

ถ้า $[1 \quad -\gamma]'$ คือเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y และ X แล้ว เราจะเขียนได้ว่า

$$Y_t = \gamma X_t + v_t \tag{10.29}$$

โดยที่ v_t เป็น I(0) เมื่อเรานำ (10.29) ไปหักออกจาก (10.28) เราจะได้

$$0 = (\beta - \gamma)X_t + (u_t - v_t)$$

หรือเขียนได้ว่า $$(\gamma - \beta)X_t = (u_t - v_t) \tag{10.30}$$

และเนื่องจาก u_t และ v_t เป็น I(0) ทั้งคู่ ดังนั้น $(u_t - v_t)$ ย่อมต้องเป็น I(0) ด้วย และเมื่อพิจารณาพจน์ทางด้านซ้ายมือคือ X_t ซึ่งเป็น I(1) ดังนั้น สมการที่ (10.30) จะเป็นจริงได้ในกรณีเดียวก็คือ $\beta = \gamma$

เราจึงสรุปได้ว่า หาก $[1 \quad -\beta]'$ เป็นเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติของ Y และ X แล้ว จะไม่มีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติแบบอื่น ๆ อีก (Uniqueness) แต่หากมีตัวแปรตั้งแต่ 3 ตัวขึ้นไปจะพบว่า เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติสามารถมีได้มากกว่า 1 แบบได้ ดังจะอธิบายดังนี้

จากตัวอย่างเรื่องสุนัขและสุภาพสตรีในหัวข้อ 9.4 ถ้ากำหนดเพิ่มเติมว่า สุภาพสตรีคนดังกล่าวมีชายคนรักที่อยู่ในอาการมึนเมาเช่นกัน[12] และหลังจากที่ชายคนรักทราบว่าแฟนของเค้าออกตามหาสุนัขที่หลุดออกไปจากร้านเหล้า ซึ่งสุนัขตัวนี้ทั้งคู่ได้เลี้ยงมาด้วยกัน ชายคนนี้จึงออกเดินตะโกนตามหาทั้งสุภาพสตรีและสุนัข

ถ้ากำหนดให้การก้าวเดินของชายคนรักที่กำลังเมาเช่นกันเป็นแบบ Random Walk และถ้ากำหนดให้ Z_t คือระยะห่างจากร้านเหล้าของชายคนนี้ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$Z_t = Z_{t-1} + u_t \tag{10.31 ก}$$

หรือ $$Z_t - Z_{t-1} = u_t \tag{10.31 ข}$$

โดยที่ u_t คือระยะห่างของการก้าวเดินในแต่ละก้าวของชายคนนี้ ซึ่งจะมีลักษณะเป็น White Noise

---

[12] อ่านเพิ่มเติมได้ใน Aaron Smith and Robin Harrison, "A Drunk, Her Dog, and A Boyfriend: An Illustration of Multiple Cointegration and Error Correction," Department of Economics, University of Canterbury, NZ, 2004. ก

เนื่องจากทั้งสุภาพสตรี ชายคนรักของเธอ และสุนัขต่างก็มีความผูกพันต่อกัน ดังนั้น การออกตามหาด้วยการตะโกนเรียกย่อมต้องทำให้ทั้ง 3 คนนี้เคลื่อนที่ไปโดยไม่มีระยะห่างกันมากขึ้นเรื่อย ๆ เราทราบแล้วว่า กรณีที่สุภาพสตรีออกตามหาสุนัข สามารถแสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวได้ด้วยสมการที่ (9.14) ซึ่งเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$Y_t - X_t = \kappa_{1t} \tag{10.32}$$ [13]

โดยที่ $\kappa_{1t} = \varepsilon_{Yt} - \varepsilon_{Xt}$ ซึ่งมีคุณสมบัติเป็น I(0) และมีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของสุภาพสตรี สุนัข และชายคนรัก คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (เขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta_1}$)[14]

และเมื่อชายคนรักออกตามหาสุภาพสตรีคนนี้ จะเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์เชิง ดุลยภาพระยะยาวได้ดังนี้

$$Z_t - Y_t = \kappa_{2t} \tag{10.33}$$

โดยที่ κ_{2t} มีคุณสมบัติเป็น I(0) และมีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติของสุภาพสตรี สุนัข และชายคนรัก คือ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (เขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta_2}$)[15]

สำหรับอีกกรณีหนึ่งที่เป็นไปได้คือ ชายคนนี้ออกตามหาสุนัข ซึ่งจะมีสมการแสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวดังนี้

$$Z_t - X_t = \kappa_{3t} \tag{10.34}$$

โดยที่ κ_{3t} มีคุณสมบัติเป็น I(0) และมีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติของสุภาพสตรี สุนัข และชายคนรัก คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (เขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta_3}$)[16]

---

[13] κ คือตัวอักษรกรีก อ่านออกเสียงว่า KAPPA

[14] เมื่อ $\beta 1$ เป็นตัวเข้ม จะใช้แสดงว่าเป็นเวกเตอร์ ไม่ใช่เป็นสเกลาร์ดังเช่นที่ผ่านมา

[15] เมื่อ $\beta 2$ เป็นตัวเข้ม จะใช้แสดงว่าเป็นเวกเตอร์ ไม่ใช่เป็นสเกลาร์ดังเช่นที่ผ่านมา

[16] เมื่อ $\beta 3$ เป็นตัวเข้ม จะใช้แสดงว่าเป็นเวกเตอร์ ไม่ใช่เป็นสเกลาร์ดังเช่นที่ผ่านมา

แต่เนื่องจากเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติจากสมการที่ (10.34) ก็คือผลบวกของเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบปกติจากสมการที่ (10.32) และ (10.33) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

หรือ $\boldsymbol{\beta_3} = \boldsymbol{\beta_1} + \boldsymbol{\beta_2}$

เรากล่าวได้ว่า $\boldsymbol{\beta_3}$ ไม่เป็นอิสระกับ $\boldsymbol{\beta_1}$ และ $\boldsymbol{\beta_2}$ กล่าวคือ เราสามารถใช้ $\boldsymbol{\beta_1}$ และ $\boldsymbol{\beta_2}$ ในการหา $\boldsymbol{\beta_3}$ ได้ หากกรณีเช่นนี้เกิดขึ้น เราจะกล่าวว่ามีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว 2 รูปแบบเท่านั้น การมีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว 2 รูปแบบ เกิดจากการที่อนุกรมเวลาทั้ง 3 ชุดมีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (Common Stochastic Trend) เหมือนกันหมด ดังจะอธิบายต่อไปนี้

ถ้ากำหนดให้ อนุกรมเวลา Y_t , X_t และ Z_t อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_{Yt} \tag{10.35 ก}$$

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_{Xt} \tag{10.35 ข}$$

$$Z_t = \mu_t + \varepsilon_{Zt} \tag{10.35 ค}$$

โดยที่ μ_t คือการเดินแบบสุ่ม (Random walk) และ ε_{Yt} , ε_{Xt} และ ε_{Zt} คือตัวรบกวนขาว

จากสมการที่ (10.35 ก)–(10.35 ค) เรากล่าวได้ว่า อนุกรม Y_t , X_t และ Z_t เป็นการเดินแบบสุ่ม (Random Walk) ด้วยเช่นกัน เนื่องจากอนุกรมเวลาทั้งหมดนี้ขึ้นอยู่กับ μ_t และเราสามารถกล่าวได้อีกอย่างว่า Y_t, X_t และ Z_t มีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกัน (Common Stochastic Trend) เหมือนกันทั้งหมด ซึ่งก็คือ μ_t นั่นเอง

การหาเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y_t , X_t และ Z_t ก็คือเวกเตอร์ที่ทำให้ผลบวกเชิงเส้นของอนุกรมเวลาทั้งสามนี้เป็น I(0) และเวกเตอร์เหล่านี้จะต้องเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งแสดงได้ 2 แบบดังนี้

แบบที่ 1 : $Y_t - X_t = \varepsilon_{Yt} - \varepsilon_{Xt}$ จะได้เวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y_t , X_t และ Z_t คือ $\boldsymbol{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

แบบที่ 2 : $Z_t - Y_t = \varepsilon_{Zt} - \varepsilon_{Xt}$ จะได้เวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y_t , X_t และ Z_t คือ $\boldsymbol{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า **$\boldsymbol{\beta_1}$ และ $\boldsymbol{\beta_2}$ เป็นอิสระต่อกัน** ส่วนความสัมพันธ์ระหว่าง X_t กับ Z_t สามารถหาได้จากผลบวกเชิงเส้นของ $\boldsymbol{\beta_1}$ และ $\boldsymbol{\beta_2}$ จึงกล่าวได้ว่ามีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวน 2 รูปแบบ และเราอาจเขียนเวกเตอร์ทั้งสองให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขนาด 3×2 ซึ่งเขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta}$ ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta_1} \quad \boldsymbol{\beta_2}]_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ลองพิจารณากรณีที่อนุกรมเวลาแต่ละชุดมีแนวโน้มแบบสุ่มเหมือนกันแต่มีขนาดที่แตกต่างกัน ดังสมการต่อไปนี้ กำหนดให้ อนุกรมเวลา Y_t , X_t และ Z_t อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_{Yt} \qquad (10.36 \text{ ก})$$

$$X_t = 0.5\mu_t + \varepsilon_{Xt} \qquad (10.36 \text{ ข})$$

$$Z_t = 0.1\mu_t + \varepsilon_{Zt} \qquad (10.36 \text{ ค})$$

ทำนองเดียวกันกับกรณีที่ผ่านมา การหาเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y_t , X_t และ Z_t ก็คือเวกเตอร์ที่ทำให้ผลบวกเชิงเส้นของอนุกรมเวลาทั้งสามนี้เป็น I(0) และเวกเตอร์เหล่านี้จะต้องเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งแสดงได้ 2 แบบดังนี้

แบบที่ 1 : $Y_t - 2X_t = \varepsilon_{Yt} - 2\varepsilon_{Xt}$ จะได้เวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y_t , X_t และ Z_t คือ $\boldsymbol{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

แบบที่ 2 : $Z_t - 0.1Y_t = \varepsilon_{Zt} - 0.1\varepsilon_{Xt}$ จะได้เวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y_t , X_t และ Z_t คือ $\boldsymbol{\beta_2} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ในกรณีนี้เราอาจเขียนเวกเตอร์ทั้งสองให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขนาด 3×2 ซึ่งเขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta}$ ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2]_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

อย่างไรก็ดี อนุกรมเวลา 3 ชุดใด ๆ สามารถมีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว 1 รูปแบบได้ กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่ออนุกรมเวลาทั้ง 2 ชุดมีแนวโน้มแบบสุ่ม (Common Stochastic Trend) ต่างกัน ในขณะที่อนุกรมเวลาที่เหลืออีก 1 ชุด ได้รวมเอาแนวโน้มแบบสุ่มจากอนุกรมเวลา 2 ชุดข้างต้นเข้าด้วยกัน ดังจะอธิบายต่อไปนี้

กำหนดให้ อนุกรมเวลา Y_t , X_t และ Z_t อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$Y_t = \mu_{Yt} + \varepsilon_{Yt} \qquad (10.37\ \text{ก})$$

$$X_t = \mu_{Xt} + \varepsilon_{Xt} \qquad (10.37\ \text{ข})$$

$$Z_t = \mu_{Zt} + \varepsilon_{Zt} \qquad (10.37\ \text{ค})$$

โดยที่ $\mu_{Zt} = \mu_{Yt} + \mu_{Xt}$ นั่นคือ แนวโน้มแบบสุ่มมีเพียง 2 ตัว คือ μ_{Yt} และ μ_{Xt} เท่านั้น การหาเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y_t , X_t และ Z_t ก็คือเวกเตอร์ที่ทำให้ผลบวกเชิงเส้นของอนุกรมเวลาทั้งสามนี้เป็น I(0) และเวกเตอร์เหล่านี้จะต้องเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งมีเพียงแบบเดียวเท่านั้นดังนี้

$$Y_t + X_t - Z_t = \varepsilon_{Yt} + \varepsilon_{Yt} - \varepsilon_{Zt}$$

และจะได้เวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y_t , X_t และ Z_t คือ $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีเพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น

สำหรับกรณีทีทั่วไปคือ มีอนุกรมเวลา n ชุด ได้แก่ $Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{nt}$ โดยทั้งหมดนี้มีคุณสมบัติเป็น I(1) และอนุกรมเวลาทั้ง n ชุดนี้จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ $\boldsymbol{Y_t} = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{nt} \end{bmatrix}_{n\times 1}$

และหากพบว่า $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{Y_t} = u_t$ เป็น I(0) โดย $\boldsymbol{\beta}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n\times r$ $(r \le n)$ แล้วเราจะกล่าวได้ว่า $\boldsymbol{\beta}$ คือเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวน r รูปแบบ

- โดยรูปแบบที่ 1 จะแสดงได้ด้วยสดมภ์ที่ 1 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ เขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta_1}$
- โดยรูปแบบที่ 2 จะแสดงได้ด้วยสดมภ์ที่ 2 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ เขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta_2}$

:

- โดยรูปแบบที่ r จะแสดงได้ด้วยสดมภ์ที่ r ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ เขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta_r}$

นั่นคือ เมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ ขนาด $n\times r$ เขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta_1}\ \ \boldsymbol{\beta_2}\ \ldots\ \boldsymbol{\beta_r}]_{n\times r}$$

และเมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

i. สมาชิกบางตัวของ $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta_r}$ อาจเป็นศูนย์ได้

ii. ถ้าอนุกรมเวลา n ชุดนี้ $(Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{nt})$ มีเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวน n–1 รูปแบบ (นั่นคือ $r = n-1$) เรากล่าวได้ว่า อนุกรมเวลาเหล่านี้มีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกันจำนวน 1 ตัว[17]

iii. ถ้าอนุกรมเวลา n ชุดนี้ $(Y_{1t}, Y_{2t}, \ldots, Y_{nt})$ มีเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวน r รูปแบบ (โดยที่ $1 \le r \le n-1$) เรากล่าวได้ว่า อนุกรมเวลาเหล่านี้มีแนวโน้มแบบสุ่มร่วมกันจำนวน $n-r$ ตัว

10.3 การอ้างอิงค่าพารามิเตอร์ในเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจากสมการเดียวด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดพลวัตแบบทั่วไป (Dynamic Generalized Least Square: DGLS)

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราทราบแล้วว่า ตามแนวคิดของ Engle and Granger (1987) การประมาณเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของ Y กับ X ดังเช่น

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \tag{10.38}$$

สามารถทำได้โดยการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด โดยตัวประมาณค่าที่ได้แม้ว่าจะมีคุณสมบัติ Super Consistency แต่จะไม่มีคุณสมบัติ Asymptotically Normal Distributed ซึ่งหมายถึง แม้ว่าจะมีตัวอย่างมีขนาดใหญ่แล้ว จะได้ว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสอง

[17] อาจพูดสั้น ๆ ว่ามี 1 common trend

น้อยที่สุดก็ไม่เข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติ ดังนั้น เราไม่สามารถใช้ค่าสถิติ t หรือ F การอ้างอิงค่าสัมประสิทธิ์ของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวได้

Stock and Watson (1993)[18] ได้เสนอวิธีการที่เรียกว่า**วิธีกำลังสองน้อยที่สุดพลวัตแบบทั่วไป** (Dynamic Generalized Least Square: DGLS) ซึ่งก็คือ การเพิ่มตัวแปรในอดีต ปัจจุบันและอนาคตของ ΔX_t ดังสมการต่อไปนี้

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \sum_{j=-k}^{k} d_j \, \Delta X_{t-j} + v_t \tag{10.39}$$

โดยที่ v_t คือตัวรบกวนขาว และ k คือค่านำและค่าล่าช้า (Lead and Lag)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการ (10.39) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะเรียกว่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุดพลวัต (Dynamic Ordinary Least Square: DOLS) จะทำให้ได้ตัวประมาณค่าเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว อีกทั้งยังสามารถใช้ค่าสถิติ t หรือ F ในการอ้างอิงค่าสัมประสิทธิ์ของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวได้ด้วย หากพบว่า v_t ในสมการที่ (10.39) มีความสัมพันธ์กันเอง (หรือเกิดปัญหา Autocorrelation) เราจะต้องทำการแก้ไขปัญหาดังกล่าวด้วยการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบทั่วไป และเรียกตัวประมาณค่าที่ได้ว่า DGLS (Dynamic Generalized Least Square)

สำหรับวิธีการเลือกค่านำและค่าล่าช้าที่เหมาะสม (k^*) ของตัวแปร ΔX_t สามารถเลือกได้สองวิธีคือ

- ใช้วิธี General to Specific กล่าวคือ เราเริ่มจากการกำหนดค่า k ให้สูงในระดับหนึ่ง จากนั้นทดสอบความมีนัยสำคัญทางสถิติของค่าสัมประสิทธิ์ Lead and Lag ที่ระดับสุดท้ายคือ k โดยเราจะลดค่า k ที่ไม่มีนัยสำคัญลงเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ Lead and Lag สุดท้ายที่มีนัยสำคัญทางสถิติ
- เราจะเริ่มจากการกำหนดค่า k ในระดับหนึ่ง จากนั้นหา Lead and Lag ที่ทำให้ Akaike (หรือ Schwarz, หรือ Hannan-Quinn) Information Criterion ต่ำที่สุด

[18] Stock, J. and M. Watson, A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in Higher Order Integrated Systems, *Econometrica* 61 (1993): 783–820.

10.4 ตัวอย่างการประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวด้วยวิธี DGLS

จากตัวอย่างในหัวข้อ 9.3 นักเศรษฐศาสตร์ของบริษัทแห่งหนึ่งได้วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของรายจ่ายเพื่อการบริโภคต่อหัว และอัตราเงินเฟ้อ จำนวน 50 เดือนของประเทศหนึ่ง ด้วยสมการที่ (9.9) ต่อไปนี้

$$\ln(Con_t) = \beta_1 + \beta_2 Trend + \beta_3 Inf_t + u_t \qquad (9.9)$$

ซึ่งเราได้พบว่า $\ln(Con_t) \sim I(1)$, $Inf_t \sim I(1)$ และ $u_t \sim I(0)$ และจากบทก่อนหน้านี้ เราทราบแล้วว่า เมื่อตัวแปรตามเป็น I(1) และตัวแปรอิสระก็เป็น I(1) ในขณะที่ u_t เป็น I(0) แล้ว เราจะกล่าวได้ว่า ตัวแปรตามและตัวแปรอิสระนี้มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (Long-run equilibrium relationship หรือ Cointegration) และเพื่อให้สามารถอ้างอิงค่าพารามิเตอร์ของเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวด้วยการใช้ค่าสถิติ t และ F ได้ เราจะใช้**วิธีกำลังสองน้อยที่สุดพลวัตแบบทั่วไป** (Dynamic Generalized Least Square: DGLS) โดยกำหนดให้ค่านำและค่าล่าช้าจะใช้คือ 5 (k = 5) ดังนั้นแบบจำลองเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\ln(Con_t) = {} & \beta_1 + \beta_2 Trend + \beta_3 Inf_t + \gamma_5 \Delta Inf_{t-5} + \gamma_4 \Delta Inf_{t-4} + \gamma_3 \Delta Inf_{t-3} + \gamma_2 \Delta Inf_{t-2} \\ & + \gamma_1 \Delta Inf_{t-1} + \gamma_0 \Delta Inf_t + \theta_1 \Delta Inf_{t+1} + \theta_2 \Delta Inf_{t+2} + \theta_3 \Delta Inf_{t+3} + \theta_4 \Delta Inf_{t+4} \\ & + \theta_5 \Delta Inf_{t+5} + v_t\end{aligned}$$

เนื่องจาก *Trend* เป็นแนวโน้มกำหนดได้แน่นอน (Deterministic Trend) ที่ถูกนำมาใช้เป็นตัวแปรอิสระหนึ่ง เพื่อใช้แสดงอิทธิพลขอแนวโน้มที่มีอยู่ในตัวแปร $\ln(Con_t)$ จึงไม่นำมาใส่ต้องนำมาใส่ค่านำและค่าตาม ดังเช่นตัวแปรอิสระ Inf_t และจากการใช้วิธีการเลือกค่านำและค่าล่าช้าที่เหมาะสม ด้วยวิธี General to Specific ซึ่งจะเริ่มตัด $\Delta inflation_{t+5}$ ออกไปก่อนเนื่องจากไม่มีนัยสำคัญมากที่สุด และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ค่านำและค่าล่าช้าสุดท้ายที่มีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\ln(Con_t) = 1.817 + 0.022Trend + 0.011Inf_t + 0.011\Delta Inf_{t+1} + 0.006\Delta Inf_{t+2} + e_t \quad (10.40)$$

ค่าสถิติ t = $(244.1)^{***}$ $(88.95)^{***}$ $(7.63)^{***}$ $(6.32)^{***}$ $(3.29)^{***}$

$R^2 = 0.9955$ Adjusted $R^2 = 0.9951$

ค่าสถิติ Durbin-Watson = 0.4287

จากสมการที่ (10.40) จะได้ว่า เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์ดุลยภาพระยะยาวคือ $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.817 \\ -0.022 \\ -0.011 \end{bmatrix}$ ถูกประมาณขึ้นด้วยวิธี DOLS และค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวในเวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ มีนัยสำคัญทางสถิติที่ร้อยละ 0.01 อย่างไรก็ดี เมื่อพิจารณาค่าสถิติ Durbin-Watson พบว่าแบบจำลองยังคงมีปัญหาความสัมพันธ์กันเองของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ดังนั้น เราจึงต้องแก้ไขปัญหาดังกล่าวด้วยวิธี GLS ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\ln(Con_t) = 1.833 + 0.022Trend + 0.0085Inf_t + 0.009\Delta Inf_{t+1} + 0.004\Delta Inf_{t+2} + e_t \quad (10.41)$$

ค่าสถิติ t = $(58.01)^{***}$ $(23.81)^{***}$ $(3.89)^{***}$ $(5.65)^{***}$ $(2.57)^{***}$

$R^2 = 0.9984$ Adjusted $R^2 = 0.9982$

ค่าสถิติ Durbin-Watson = 1.74

จากสมการที่ (10.41) จะได้ว่า เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์ดุลยภาพระยะยาวคือ $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.833 \\ -0.022 \\ -0.0085 \end{bmatrix}$ ถูกประมาณขึ้นด้วยวิธี DGLS และค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวในเวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ มีนัยสำคัญทางสถิติที่ร้อยละ 0.01 เราจะใช้เวกเตอร์นี้ไปอธิบายความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวระหว่างตัวแปร $\ln(Con_t)$ และ Inf_t โดยในกรณีนี้ตัวแปรที่ถูกทำให้เป็นปกติ (Normalized Variable) คือ $\ln(Con_t)$

บทที่ 11
แบบจำลอง Vector Autoregressive (VAR)

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้ศึกษาถึงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวด้วยการใช้สมการเดียว (Single Equation) อย่างไรก็ดี การวิเคราะห์ดังกล่าวมีข้อจำกัดคือ การใช้วิธีการวิเคราะห์แบบสมการเดียว สามารถประมาณความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวได้ครั้งละ 1 รูปแบบเท่านั้น ดังนั้น ในกรณีที่จำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมีมากกว่า 1 รูปแบบ การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวด้วยสมการเดียว จะทำให้ไม่ได้รับข้อมูลที่แสดงด้วยเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบอื่น ๆ ที่เหลือ และความแปรปรวนของตัวประมาณค่าความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวที่ได้จะไม่ต่ำสุดเมื่อเทียบกับวิธีการประมาณค่าแบบอื่น (Inefficiency)

ดังนั้น หากมีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมากกว่า 1 รูปแบบการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ควรวิเคราะห์โดยใช้วิธีหลายสมการ (Multivariate Equations) ซึ่งมีพื้นฐานการวิเคราะห์จากแบบจำลอง Vector Autoregressive (VAR) ดังนั้น เราจึงควรมาทำความเข้าใจในเรื่องดังกล่าวเสียก่อนในบทนี้ จากนั้นจึงจะศึกษาถึงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวด้วยวิธีหลายสมการ ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 12 ซึ่งเป็นบทสุดท้ายของหนังสือเล่มนี้

11.1 แนวคิดเบื้องต้นของแบบจำลอง VAR

ในโลกแห่งความเป็นจริง ตัวแปรหลาย ๆ ตัวมักจะสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ตัวอย่างเช่น หากราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งเปลี่ยนแปลง ย่อมกระทบกับราคาหุ้นของบริษัทอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องด้วย ในทางกลับกัน หากราคาหุ้นของบริษัทอื่น ๆ บริษัทใดบริษัทหนึ่งที่เกี่ยวข้องมีการเปลี่ยนแปลงก็จะส่งผลต่อราคาหุ้นของบริษัทนี้ด้วย ดังนั้น การวิเคราะห์ราคาหุ้นของบริษัทหนึ่งจะให้ผลที่สมบูรณ์เมื่อนำราคาหุ้นของบริษัทอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องมาพิจารณาพร้อม ๆ กัน แบบจำลองอนุกรมเวลาหนึ่งที่สามารถวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่มีผลกระทบซึ่งกันและกันในลักษณะนี้ได้คือ แบบจำลอง Vector Autoregressive (VAR) ซึ่งจะศึกษาในหัวข้อนี้ โดยจะกล่าวถึงลักษณะของแบบจำลอง VAR ลำดับที่ 1 ก่อน จากนั้นจึงจะกล่าวถึงลักษณะของแบบจำลอง VAR(p) รายละเอียดมีดังนี้

11.1.1 แบบจำลอง VAR ลำดับที่ 1 : VAR(1)

สมมุติให้อนุกรมเวลา 2 ชุด Y_t กับ Z_t เป็น I(0) ทั้งคู่ ซึ่งส่งผลกระทบซึ่งกันและกันในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$Y_t = \beta_{10} - \beta_{12} Z_t + \gamma_{11} Y_{t-1} + \gamma_{12} Z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \qquad (11.1\text{ ก})$$

$$Z_t = \beta_{20} - \beta_{21} Y_t + \gamma_{21} Y_{t-1} + \gamma_{22} Z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad (11.1\text{ ข})$$

โดยที่ ε_{yt} และ ε_{zt} ตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และมีความแปรปรวนคือ σ_y^2 และ σ_z^2 ตามลำดับ เราอาจเรียก ε_{yt} และ ε_{zt} ว่าเหตุการณ์ไม่คาดฝัน (Shock) ของอนุกรมเวลา Y_t และ Z_t ตามลำดับ และเราจะสมมุติให้อนุกรม ε_{yt} และ ε_{zt} ไม่มีความสัมพันธ์ต่อกันหรือเขียนได้ว่า $\text{Cov}(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$

จากสมการที่ (11.1 ก) ค่าพารามิเตอร์ $-\beta_{12}$ แสดงถึงผลกระทบของ Z_t ที่มีต่อ Y_t ส่วนค่าพารามิเตอร์ $-\beta_{21}$ จากสมการที่ (11.1 ข) แสดงถึงผลกระทบของ Y_t ที่มีต่อ Z_t จะเห็นว่า อนุกรมเวลาทั้งสองนี้ส่งผลกระทบซึ่งกันและกัน และเมื่อแทนค่าสมการที่ (11.1 ก) ลงในสมการที่ (11.1 ข) จะได้ว่า หาก $-\beta_{21} \neq 0$ แล้ว เหตุการณ์ที่ไม่คาดฝันที่เกิดขึ้นกับอนุกรมเวลา Y_t (ε_{yt}) จะส่งผลกระทบทางอ้อมต่อ Z_t ด้วย ทำนองเดียวกันหากแทนค่าสมการที่ (11.1 ข) ลงในสมการที่

(11.1 ก) จะได้ว่า หาก $-\beta_{12} \neq 0$ แล้ว เหตุการณ์ที่ไม่คาดฝันที่เกิดขึ้นกับอนุกรมเวลา Z_t (ε_{zt}) จะส่งผลกระทบทางอ้อมต่อ Y_t ด้วย และถ้าเราจัดรูปประบบสมการใหม่ดังนี้

$$Y_t + \beta_{12} Z_t = \beta_{10} + \gamma_{11} Y_{t-1} + \gamma_{12} Z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \quad (11.2\ ก)$$

$$\beta_{21} Y_t + Z_t = \beta_{20} + \gamma_{21} Y_{t-1} + \gamma_{22} Z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (11.2\ ข)$$

เราสามารถเขียนระบบสมการที่ (11.2 ก) และ (11.2 ข) ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \quad (11.3\ ก)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\boldsymbol{B X_t} = \boldsymbol{\Gamma_0} + \boldsymbol{\Gamma_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t} \quad (11.3\ ข)$$[1]

โดยที่ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma_0} = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma_1} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon_t} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$

จาก (11.3 ข) นำ $\boldsymbol{B^{-1}}$ คูณตลอดจะได้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{B^{-1}\Gamma_0} + \boldsymbol{B^{-1}\Gamma_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{B^{-1}\varepsilon_t} \quad (11.3\ ค)$$

ถ้ากำหนดให้ $\boldsymbol{A_0} = \boldsymbol{B^{-1}\Gamma_0}$, $\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{B^{-1}\Gamma_1}$ และ $\boldsymbol{u_t} = \boldsymbol{B^{-1}\varepsilon_t}$ แล้ว สมการที่ (11.3 ค) จะเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{u_t} \quad (11.4)$$

โดยที่ $\boldsymbol{A_0} = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $\boldsymbol{u_t} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$ ดังนั้น สมการที่ (11.4) สามารถเขียนได้เป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$Y_t = a_{10} + a_{11} Y_{t-1} + a_{12} Z_{t-1} + u_{1t} \quad (11.5\ ก)$$

$$Z_t = a_{20} + a_{21} Y_{t-1} + a_{22} Z_{t-1} + u_{2t} \quad (11.5\ ข)$$

[1] ให้สังเกตว่า เมื่อตัวอักษรที่แสดงเป็นตัวเข้ม จะหมายถึงเมทริกซ์หรือเวกเตอร์ มิใช่ตัวแปรสเกลาร์ (Scalar)

จะเห็นว่า ระบบสมการที่ (11.1 ก) และ (11.1 ข) โดยแท้จริงก็คือระบบสมการที่ (11.5 ก) และ (11.5 ข) นั่นเอง เพียงแต่มีการเปลี่ยนรูปแบบการเขียนเท่านั้น

- การเขียนระบบสมการในรูปที่ (11.1 ก)–(11.1 ข) จะเรียกว่าแบบจำลอง Structural Vector Autoregressive ลำดับที่ 1 หรือเขียนย่อว่า SVAR(1)
- การเขียนระบบสมการในรูปที่ (11.5 ก)–(11.5 ข) จะเรียกว่าแบบจำลอง Vector Autoregressive ลำดับที่ 1 หรือเรียกสั้น ๆ ว่า Vector Autoregressive ลำดับที่ 1 ซึ่งเขียนย่อว่า VAR(1)[2]

แบบจำลองข้างต้นมีลำดับที่ 1 มีสาเหตุมาจากค่าของตัวแปรล่าช้าที่สูงที่สุดที่อยู่ในระบบสมการคือ 1 นั่นเอง

จากสมการ $\boldsymbol{u_t} = \boldsymbol{B^{-1}\varepsilon_t}$ เขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \qquad (11.6)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}) \\ \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}) \end{bmatrix}$$

นั่นคือ จะได้ว่า

$$u_{1t} = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}) \qquad (11.7\text{ ก})$$

$$u_{2t} = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}) \qquad (11.7\text{ ข})$$

โดย u_{1t} และ u_{2t} คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของอนุกรมเวลา Y_t และ Z_t ในแบบจำลอง VAR ตามลำดับ ส่วนคุณสมบัติของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ u_{1t} และ u_{2t} แสดงได้ดังนี้[3]

[2] แบบจำลอง VAR อาจเรียกว่าเป็นแบบจำลองลดรูป (Reduced Form) ก็ได้

[3] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 11ก

$$E(u_{1t}) = 0 \qquad (11.8\text{ ก})$$

$$E(u_{2t}) = 0 \qquad (11.8\text{ ข})$$

$$Var(u_{1t}) = \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \left(\sigma_y^2 + \beta_{12}^2\sigma_z^2\right) = \sigma_1^2 \qquad (11.8\text{ ค})$$

$$Var(u_{2t}) = \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \left(\sigma_z^2 + \beta_{21}^2\sigma_y^2\right) = \sigma_2^2 \qquad (11.8\text{ ง})$$

$$\mathrm{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) = -\frac{(\beta_{21}\sigma_y^2 + \beta_{12}\sigma_z^2)}{(1-\beta_{21}\beta_{12})^2} = \sigma_{12} \neq 0 \qquad (11.8\text{ จ})$$

สมการที่ (11.8 จ) บอกเราว่า u_{1t} และ u_{2t} มีความสัมพันธ์ต่อกัน และเราจะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix) ของ u_{1t} และ u_{2t} ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ Σ ดังแสดงต่อไปนี้

$$\boldsymbol{\Sigma} = E(\boldsymbol{u_t u_t'}) = E\left(\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} & u_{1t} \end{bmatrix}\right)$$

$$= E\begin{bmatrix} u_{1t}^2 & u_{1t}u_{2t} \\ u_{2t}u_{1t} & u_{2t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_{1t}^2) & E(u_{1t}u_{2t}) \\ E(u_{2t}u_{1t}) & E(u_{2t}^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(u_{1t}) & Cov(u_{1t}, u_{2t}) \\ Cov(u_{1t}, u_{2t}) & Var(u_{2t}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \left(\sigma_y^2 + \beta_{12}^2\sigma_z^2\right) & -\frac{(\beta_{21}\sigma_y^2 + \beta_{12}\sigma_z^2)}{(1-\beta_{21}\beta_{12})^2} \\ -\frac{(\beta_{21}\sigma_y^2 + \beta_{12}\sigma_z^2)}{(1-\beta_{21}\beta_{12})^2} & \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \left(\sigma_z^2 + \beta_{21}^2\sigma_y^2\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \qquad (11.8\text{ ฉ})$$

โดยที่ $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(u_{1t})$, $\sigma_2^2 = \mathrm{Var}(u_{2t})$, $\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) = \sigma_{21}$

และเมื่อพิจารณาค่าสมการที่ (11.5 ก) และ (11.5 ข) จะพบว่า ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนในแต่ละสมการจะไม่มีความสัมพันธ์กันเอง[4] ดังนั้น การใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการทั้งสองนี้จะมีความแปรปรวนของตัวประมาณค่าต่ำสุด

ดังนั้น เราจะหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของแบบจำลอง VAR(1) ดังแสดงในสมการที่ 11.4 ได้ดังนี้[5]

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}-\boldsymbol{A_1})^{-1}\boldsymbol{A_0} \qquad (11.9\ ก)$$[6]

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{A_1\Sigma A_1'} + \boldsymbol{A_1^2\Sigma}\left(\boldsymbol{A_1^2}\right)' + \boldsymbol{A_1^3\Sigma}\left(\boldsymbol{A_1^3}\right)' + \cdots \qquad (11.9\ ข)$$

โดยที่ $\boldsymbol{A_1^j} \to \mathbf{0}$ เมื่อ $j \to \infty$ นั่นหมายถึงความแปรปรวนของอนุกรมเวลาทุกตัวที่อยู่ในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ สามารถหาค่าได้ กล่าวโดยสรุป ลักษณะของแบบจำลอง VAR(1)

(1) $\boldsymbol{u_t}$ คือเวกเตอร์ที่รวมเหตุการณ์ไม่คาดฝันทั้งของ Y_t และ Z_t

(2) อนุกรมเวลาแต่ละตัวในแบบจำลอง VAR(1) จะขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ไม่คาดฝันในอดีตที่ผ่านมาทั้งหมดของทุก ๆ อนุกรมเวลาที่อยู่ในแบบจำลอง

(3) ยิ่งเหตุการณ์ไม่คาดฝันที่เกิดขึ้นมาแล้วนานมากเท่าไหร่จะส่งผลต่ออนุกรมเวลาใน VAR(1) น้อยลงเรื่อย ๆ เท่านั้น

11.1.2 แบบจำลอง VAR ลำดับที่ *p* : VAR(*p*)

อนุกรมเวลามี 2 ชุด คือ Y_t และ Z_t เขียนให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VAR(p) ได้ดังนี้

$$Y_t = a_{10} + a_{11,1}Y_{t-1} + a_{12,1}Z_{t-1} + a_{11,2}Y_{t-2} + a_{12,2}Z_{t-2} + \ldots + a_{11,p}Y_{t-p} + a_{12,p}Z_{t-p} + u_{1t} \qquad (11.10\ ก)$$

$$Z_t = a_{20} + a_{21,1}Y_{t-1} + a_{22,1}Z_{t-1} + a_{21,2}Y_{t-2} + a_{22,2}Z_{t-2} + \ldots + a_{21,p}Y_{t-p} + a_{22,p}Z_{t-p} + u_{2t} \qquad (11.10\ ข)$$

---

[4] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 11ข

[5] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 11ค

[6] สัญลักษณ์ $\boldsymbol{\mu}$ คือเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย โดยสมาชิกในแต่ละตัวของ $\boldsymbol{\mu}$ คือค่าเฉลี่ยในสมาชิกแต่ละตัวของเวกเตอร์ $\boldsymbol{Xt}$ (ให้สังเกตว่าถ้าเป็นตัวเข้มจะใช้แทนเวกเตอร์หรือเมทริกซ์เสมอ)

ถ้าเรามีอนุกรมเวลา n ชุด ได้แก่ $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ เราจะเขียนอนุกรมเวลาดังกล่าวให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VAR(p) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1}\boldsymbol{X_{t-1}} + \boldsymbol{A_2}\boldsymbol{X_{t-2}} + \ldots + \boldsymbol{A_p}\boldsymbol{X_{t-p}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (11.11)$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{nt} \end{bmatrix}_{n\times 1}$, $\boldsymbol{A_0} = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}_{n\times 1}$, $\boldsymbol{A_i} = \begin{bmatrix} a_{11,i} & \cdots & a_{1n,i} \\ a_{21,i} & \cdots & a_{2n,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1,i} & \cdots & a_{nn,i} \end{bmatrix}_{n\times n}$, $i=1,\ldots,p$ และ
$\boldsymbol{u_t} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{nt} \end{bmatrix}_{n\times 1}$

การหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของแบบจำลอง VAR(p) สามารถใช้วิธีเดียวกันกับของ VAR(1) ซึ่งจะไม่ขอกล่าวซ้ำอีก จากแบบจำลอง VAR(p) นี้จะพบว่ามีค่าพารามิเตอร์จำนวนมาก กล่าวคือ ค่าพารามิเตอร์ที่เป็นค่าคงที่มีจำนวน n ตัว ส่วนค่าพารามิเตอร์ที่เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของ $\boldsymbol{X_{t-1}}, \boldsymbol{X_{t-2}}, \ldots, \boldsymbol{X_{t-p}}$ มีจำนวน $n^2 + n^2 + \ldots + n^2 = pn^2$ ตัว ดังนั้น จำนวนค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดในแบบจำลอง VAR ก็คือ $n + pn^2$ ตัว ยิ่งมีจำนวนอนุกรมเวลามากขึ้นเพียง 1 ตัว หรือมีลำดับของ VAR เพิ่มขึ้นอีก 1 ความล่าช้า อาจทำให้มีค่าพารามิเตอร์เพิ่มขึ้นเยอะมาก ดังนั้น การนำอนุกรมเวลาใด ๆ มาใช้ในแบบจำลอง VAR ควรเป็นอนุกรมที่สามารถอธิบายถึงผลกระทบซึ่งกันและกันได้

11.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง VAR

จากแบบจำลอง VAR(p) ต่อไปนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1}\boldsymbol{X_{t-1}} + \boldsymbol{A_2}\boldsymbol{X_{t-2}} + \ldots + \boldsymbol{A_p}\boldsymbol{X_{t-p}} + \boldsymbol{u_t}$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_t}$ คือ เวกเตอร์มิติ $n\times 1$ ของอนุกรมเวลา n ชุด ที่มีคุณสมบัติเป็น I(0) ทั้งหมด
$\boldsymbol{A_0}$ คือ เวกเตอร์มิติ $n\times 1$ ของค่าคงที่
$\boldsymbol{A_i}$ คือ เมทริกซ์มิติ $n\times n$ ของค่าสัมประสิทธิ์ของ $\boldsymbol{X_{t-i}}$ ($i=1,\ldots, p$)
$\boldsymbol{u_t}$ คือ เวกเตอร์มิติ $n\times 1$ ของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน

เราทราบแล้วว่า อนุกรมเวลา n ชุดที่จะนำมาอยู่ในเวกเตอร์ X_t ของแบบจำลอง VAR จะต้องมีความเกี่ยวข้องต่อกันและกันได้ โดยจุดมุ่งหมายหลักของการวิเคราะห์แบบจำลอง VAR

คือต้องการหาความสัมพันธ์ที่มีซึ่งกันและกันของอนุกรมเวลาใน X_t ดังนั้น การเลือกลำดับ (p) ที่จะนำมาใช้ในแบบจำลอง VAR ควรมีค่าที่เหมาะสม ไม่ใช่ค่าที่ทำให้ต้องประมาณค่าพารามิเตอร์มากเกินจำเป็น และไม่ใช่ค่าที่น้อยจนไม่สามารถแสดงความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันของอนุกรมเวลาที่อยู่ในแบบจำลองได้ โดยหลักเกณฑ์ที่ใช้ในการเลือกลำดับ (p) ของแบบจำลอง VAR ในขั้นแรกอาจใช้หลักเกณฑ์ว่า ลำดับ p ต้องเป็นลำดับที่ทำให้ค่า Akaike Information Criterion (AIC) มีค่าต่ำที่สุด ซึ่งมีสูตรการคำนวณดังนี้

$$\mathrm{AIC}(p) = -2\left(\frac{l}{T}\right) + \frac{2}{T}k$$

โดยที่ l คือค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติแบบหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ที่จะคำนวณจากตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองของ VAR(p)[7] , T คือจำนวนตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณค่าแบบจำลอง และ k คือจำนวนพารามิเตอร์ที่ประมาณในแบบจำลอง VAR ซึ่งมีค่าเท่ากับ $n+pn^2$, n คือจำนวนอนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR

ในขั้นที่ 2 เราต้องตรวจสอบว่า ลำดับ p ที่เลือกมาในขั้นแรกนั้นจะเหมาะสมเพียงพอก็ต่อเมื่อ ต้องไม่ทำให้เกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนในแบบจำลอง VAR(p) แต่หากพบว่ายังทำให้เกิดปัญหาดังกล่าว อาจลองเลือกลำดับอื่น ๆ ที่ใกล้เคียงของเดิม เช่น เพิ่มไป 1 หรือ 2 ลำดับ สำหรับการทดสอบว่าแบบจำลอง VAR เกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองในตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนหรือไม่[8] สามารถทำได้ด้วยการทดสอบสมมุติฐานดังต่อไปนี้

---

[7] สูตรในการคำนวณค่า l คือ $l = -\frac{T}{2}\{n(1+\ln 2\pi) + \ln|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|\}$
โดยที่ $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T-(p+1)}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{e_t e_t'})$ ซึ่งก็คือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $e_{1t}, e_{2t}, \ldots, e_{nt}$ นั่นเอง

$\boldsymbol{e_t} = [\, e_{1t} \;\; e_{2t} \ldots e_{nt}]'$ และ e_{it} คือค่า Residual ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในสมการที่ i (i =1, 2, …, n) , T คือจำนวนตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณค่าแบบจำลอง, p+1 คือจำนวนพารามิเตอร์ที่ต้องประมาณค่าในแต่ละสมการ, n คือจำนวนอนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR

[8] ในกรณีแบบจำลองหลายสมการดังเช่นแบบจำลอง VAR ความสัมพันธ์กันเองของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนจะซับซ้อนกว่ากรณีแบบจำลองที่เป็นสมการเดียว โดยในกรณีนี้จะต้องทดสอบว่าตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการ m (u_{mt}) สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการ m ในอดีตหรือไม่ ($u_{m,t-i}$) รวมถึงสัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการ j ในอดีตด้วยหรือไม่ ($u_{j,t-i}$) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\mathrm{Cov}(u_t, u_{t-i}) = \mathrm{E}(u_t u_{t-i}')$ โดยที่ $u_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{nt} \end{bmatrix}$ และ $u_{t-i}' = [u_{1,t-i} \;\; \cdots \;\; u_{n,t-i}]$

H_0: ไม่เกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองใน $\boldsymbol{u}_t$ หรือ $E(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}'_{t-i}) = 0$, i =1, .., h โดยที่ $h > p$

H_1: ไม่เกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองใน $\boldsymbol{u}_t$ หรือ $E(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}'_{t-i})$ อย่างน้อย 1 ตัวไม่เป็นศูนย์

ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานข้างบนก็คือ ค่าสถิติ Ljung Box Q_h ซึ่งมีสูตรในการคำนวณดังนี้[9]

$$Q_h = T\sum_{j=1}^{h} tr\left(\widehat{\boldsymbol{C}}_j'\widehat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{0}}^{-\boldsymbol{1}}\widehat{\boldsymbol{C}}_j\widehat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{0}}^{-\boldsymbol{1}}\right) \sim \chi^2_{\left(n^2(h-p)\right)}$$

โดยที่ $\hat{C}_i' = T^{-1}\sum_{t=i+1}^{T}\boldsymbol{e}_t\boldsymbol{e}'_{t-i}$

$\boldsymbol{e}_t$ คือเวกเตอร์ค่า Residual จากแบบจำลอง VAR(p)

n คือจำนวนอนุกรมเวลาที่อยู่ในในแบบจำลอง VAR(p)

ส่วนการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละสมการของแบบจำลอง VAR สามารถประมาณได้ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด[10] หรือวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดก็ได้ ซึ่งจะให้ผลการประมาณค่าที่มีคุณสมบัติเป็นทั้ง Consistent และ Asymptotically Efficient[11] ในการประมาณค่าแบบจำลอง VAR มักพบว่า ค่าสัมประสิทธ์หลายตัวจะไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ เนื่องจากตัวแปรอิสระในแบบจำลองVAR มักมีความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อกันในระดับสูง (high multicollinearity) จะทำให้ค่าสถิติ t มีต่ำกว่าความเป็นจริง ดังนั้น เราจึงไม่ควรใช้ค่าสถิติ t^* เป็นเกณฑ์ในการกำจัดตัวแปรอิสระออกไปจากแบบจำลอง VAR นอกจากนี้ ต้องเข้าใจว่า จุดมุ่งหมายหลักของการสร้างแบบจำลอง VAR ก็คือ การหาความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันของอนุกรมเวลาที่อยู่ในแบบจำลอง การกำจัดตัวแปรอิสระออกจากแบบจำลอง VAR อย่างไม่ถูกต้อง อาจทำให้สูญเสียข้อมูลสำคัญไปได้[12]

---

[9] Lutkepohl, H., *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, 2nd edition. (Springer, 2005), p. 169.

[10] การใช้วิธี Seemingly Unrelated Regression (SUR) ก็ไม่ทำให้ตัวประมาณค่ามีประสิทธิภาพ (Efficient) มากขึ้น เพราะตัวแปรอิสระทุกตัวเหมือนกันทุกสมการ

[11] Tsay, R. S., *Analysis of Financial Time Series* (John Wiley & Sons, Inc, 2002), p. 316. ส่วน Consistency หมายถึงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่จะพบว่าความน่าจะเป็นของตัวประมาณค่าจะตรงกับค่าจริง ๆ ของมัน และ Asymptotically Efficient หมายถึงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่จะพบว่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าจะต่ำกว่าตัวประมาณค่าด้วยวิธีอื่นที่มีคุณสมบัติ Consistency เหมือนกัน

[12] Enders, W., *Applied Econometric Time Series*, 3rd edition. (John Wiley & Sons, Inc., 2010), p. 303.

11.2.1 ตัวอย่างการประมาณแบบจำลอง VAR

กำหนดให้นักเศรษฐศาสตร์คนหนึ่งรวบรวมข้อมูลรายเดือนจำนวน 264 เดือนของอนุกรมเวลาดังต่อไปนี้ ลอการิทึมฐานธรรมฐาน (Natural Logarithm) ของปริมาณเงินความหมายแคบ (LM1), ลอการิทึมฐานธรรมฐานของรายได้ (LIP) และอัตราดอกเบี้ยพันธบัตรรัฐบาล (TB3) โดยนักเศรษฐศาสตร์คนนี้ต้องการใช้แบบจำลอง VAR ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันของอนุกรมเวลาทั้งสามนี้

จากการทดสอบความนิ่งของอนุกรมเวลาทั้งสามนี้ด้วยวิธีการทดสอบ ADF พบว่าอนุกรมเวลาทั้งสามนี้เป็น I(1) ดังนั้น เพื่อให้สามารถนำอนุกรมเวลาทั้งสามนี้ไปใช้กับแบบจำลอง VAR ได้ เราต้องแปลงอนุกรมเวลาทั้งสามนี้ให้มีความนิ่งด้วยวิธีการทำผลต่างลำดับที่ 1 ดังนั้น แบบจำลอง VAR ที่นักเศรษฐศาสตร์คนนี้ใช้ในการวิเคราะห์เขียนได้ดังนี้

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2\Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_p\Delta \boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{u}_t$$

โดยที่ $\Delta \boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix}\Delta LM1_t \\ \Delta LIP_t \\ \Delta TB3_t\end{bmatrix}_{3\times1}$, $\boldsymbol{A_0} = \begin{bmatrix}\beta_{01} \\ \beta_{02} \\ \beta_{03}\end{bmatrix}_{3\times1}$, $\boldsymbol{A_i} = \begin{bmatrix}\beta_{11,i} & \beta_{12,i} & \beta_{13,i} \\ \beta_{21,i} & \beta_{22,i} & \beta_{23,i} \\ \beta_{31,i} & \beta_{32,i} & \beta_{33,i}\end{bmatrix}_{3\times3}$,

$i = 1,\ldots, p$ และ $\boldsymbol{u_t} = \begin{bmatrix}u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t}\end{bmatrix}_{\mathrm{n}\times1}$

ในขั้นแรก เราต้องหาลำดับ (p) ของแบบจำลอง VAR ที่ทำให้ได้ค่า AIC ต่ำสุด ซึ่งในที่นี้ได้ลองกำหนดให้ลำดับ p มีค่าเริ่มตั้งแต่ 1 จนถึง 8 และคำนวณค่า AIC แสดงได้ดังตาราง 11.1 ซึ่งจะเห็นว่า ค่า AIC ของแบบจำลอง VAR(3) มีค่า –14.484 ซึ่งมีค่าต่ำที่สุดเมื่อเทียบกับลำดับอื่น ๆ ตั้งแต่ 1–8 และเพื่อให้แน่ใจว่าลำดับ $p = 3$ แบบจำลอง VAR มีความเหมาะสมเพียงพอหรือไม่ เราจะตรวจสอบว่าแบบจำลองดังกล่าวเกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนหรือไม่ โดยสมมุติฐานที่ใช้ในการทดสอบเขียนได้ดังนี้

H_0: ไม่เกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองในเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}_t$ หรือ $\mathrm{E}(\boldsymbol{u_t u'_{t-i}}) = 0$, i =1,.., h โดยที่ $h > 3$ ($\because p = 3$)

H_1: เกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองในเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}_t$ หรือ $\mathrm{E}(\boldsymbol{u_t u'_{t-i}})$ อย่างน้อย 1 ตัวไม่เป็นศูนย์

ค่าสถิติที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานข้างบนก็คือ ค่าสถิติ Ljung Box Q_h แสดงได้ในตารางที่ 11.2 ซึ่งจะเห็นว่าค่า Probability ของ Ljung Box Q_h มีค่ามากกว่า 0.01 ทั้งหมด นั่นคือ เราสามารถสรุปได้ว่า แบบจำลอง VAR(3) ไม่มีปัญหาความสัมพันธ์กันเองในเวกเตอร์ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ($\boldsymbol{u_t}$) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 ดังนั้น แบบจำลอง VAR(3) จึงมีความเหมาะสมเพียงพอที่จะนำไปใช้ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันของอนุกรมเวลาทั้งสามนี้

ตารางที่ 11.1 แสดงค่า AIC ของแบบจำลอง VAR(p) , p = 1, 2, …, 8

ลำดับ *p* ของแบบจำลอง VAR	**ค่า AIC**
1	–14.451
2	–14.436
3	–14.484*
4	–14.442
5	–14.430
6	–14.465
7	–14.434
8	–14.396

หมายเหตุ : * แสดงค่าต่ำสุดของ AIC

ตารางที่ 11.2 แสดงค่าสถิติ Ljung Box Q_h (h > 3)

h	ค่าสถิติ Ljung Box Q_h	ค่า Probability ของ Ljung Box Q_h
1	NA	NA
2	NA	NA
3	NA	NA
4	13.669	0.1346
5	23.504	0.1720
6	41.071	0.0405
7	50.539	0.0546
8	56.893	0.1100
9	65.904	0.1284
10	75.725	0.1306

หมายเหตุ : NA หมายถึงไม่สามารถหาได้ (Not Available) เนื่องจากค่าสถิติ Ljung Box Q_h จะสามารถเริ่มคำนวณได้ที่ความล่าช้ามากกว่าลำดับ p ของแบบจำลอง VAR ซึ่งในที่นี้คือ 3

11.3 การระบุความสัมพันธ์ในแบบจำลอง SVAR

จากแบบจำลอง SVAR(1) ดังสมการที่ (11.1 ก) และ (11.1 ข)

$$Y_t = \beta_{10} - \beta_{12} Z_t + \gamma_{11} Y_{t-1} + \gamma_{12} Z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \quad (11.1\text{ ก})$$

$$Z_t = \beta_{20} - \beta_{21} Y_t + \gamma_{21} Y_{t-1} + \gamma_{22} Z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (11.1\text{ ข})$$

หรือเขียนได้ดังสมการที่ (11.3 ข)

$$\boldsymbol{BX_t} = \boldsymbol{\Gamma_0} + \boldsymbol{\Gamma_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t} \quad (11.3\text{ ข})$$

โดยที่ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma_0} = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma_1} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon_t} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (11.1 ก) จะได้ว่า ε_{yt} จะส่งผลกระทบต่อ Y_t และเมื่อพิจารณาสมการที่ (11.1 ข) จะได้ว่า Y_t จะส่งผลกระทบต่อ Z_t (หรือเขียนย่อ ๆ ว่า $\varepsilon_{yt} \rightarrow Y_t \rightarrow Z_t$) ดังนั้น เรากล่าวได้ว่า $\text{Cov}(Z_t, \varepsilon_{yt}) \neq 0$ หรืออนุกรมเวลา Z_t และ ε_{yt} มีความสัมพันธ์กันซึ่งผิดข้อสมมุติของ CLRM ดังนั้น การประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (11.1 ก) จะได้ตัวประมาณค่าที่เอนเอียง (Biased Estimator) และแม้ว่าตัวอย่างจะมีขนาดใหญ่ก็ตาม จะพบว่าความน่าจะเป็นของตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะได้ไม่ตรงกับค่าจริง ๆ ของมัน (Inconsistent Estimator) อีกด้วย ซึ่งสมการที่ (11.1 ข) ก็จะให้ผลเช่นนี้เหมือนกัน

อย่างไรก็ดี เมื่อเราแปลงแบบจำลอง SVAR(1) ให้เป็นแบบจำลองลดรูป หรือเรียกว่าแบบจำลอง VAR(1) ด้วยการนำ $\boldsymbol{B^{-1}}$ คูณสมการที่ (11.3 ข) ตลอดจะได้สมการที่ (11.4)

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{u_t} \quad (11.4)$$

โดยที่ $\boldsymbol{A_0} = \boldsymbol{B^{-1}\Gamma_0} = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{B^{-1}\Gamma_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $\boldsymbol{u_t} = \boldsymbol{B^{-1}\varepsilon_t} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$ หรือเขียนได้ดังสมการที่ (11.5 ก) และ (11.5 ข) ได้ดังนี้

$$Y_t = a_{10} + a_{11} y_{t-1} + a_{12} Z_{t-1} + u_{1t} \quad (11.5\text{ ก})$$

$$Z_t = a_{20} + a_{21} y_{t-1} + a_{22} Z_{t-1} + u_{2t} \quad (11.5\text{ ข})$$

จะเห็นว่าแบบจำลอง VAR(1) จะไม่ทำให้เกิดปัญหาดังเช่นที่อธิบายไปในแบบจำลอง SVAR(1) เมื่อครู่นี้ ดังนั้น เราสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง VAR(1) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดได้

จากการสังเกตแบบจำลอง SVAR(1) และแบบจำลอง VAR(1) จะพบว่า

- ค่าพารามิเตอร์ที่อยู่ในแบบจำลอง VAR(1) โดยแท้จริงแล้ว เกิดจากค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง SVAR(1) นั่นเอง หรือค่าพารามิเตอร์ของทั้ง 2 แบบจำลองมีความสัมพันธ์กัน
- จำนวนค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง VAR(1) มีทั้งหมด 9 ตัว ได้แก่ a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, ค่าพารามิเตอร์ Var(u_{1t}), ค่าพารามิเตอร์ของ Var(u_{2t}) และค่าพารามิเตอร์ของ Cov (u_{1t}, u_{2t})
- จำนวนค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง SVAR(1) มีทั้งหมด 10 ตัว ได้แก่ β_{10}, β_{11}, β_{20}, β_{21}, γ_{11}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{22} และค่าพารามิเตอร์ทั้งของ Var(ε_{1t}) และ Var(ε_{2t})[13]

จะเห็นว่าจำนวนค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง VAR(1) มีน้อยกว่าในแบบจำลอง SVAR(1) นั่นคือ แม้ว่าเราจะสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ทุกตัวจากแบบจำลอง VAR(1) ได้ แต่เราไม่สามารถใช้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของทั้งสองแบบจำลองในการใช้ตัวประมาณค่าจากแบบจำลอง VAR(1) เพื่อย้อนกลับไปหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง SVAR(1) ได้

อย่างไรก็ดี หากเราสามารถใส่ข้อจำกัดบางอันในแบบจำลอง SVAR(1) แล้วทำให้จำนวนค่าพารามิเตอร์ลดลงเหลือ 9 ตัว จะทำให้เราสามารถใช้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง VAR(1) ย้อนกลับไปหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง SVAR(1) ได้ โดยข้อจำกัดที่ใส่มักจะอยู่ภายใต้พื้นฐานทางทฤษฎีของเศรษฐศาสตร์หรือทางการเงิน

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ Y_t คืออัตราดอกเบี้ยของประเทศเล็ก ๆ ประเทศหนึ่ง ส่วน Z_t คืออัตราดอกเบี้ยของต่างประเทศที่เป็นประเทศมหาอำนาจ สมมุติว่าในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง อัตราดอกเบี้ยของประเทศเล็ก ๆ ประเทศหนึ่งย่อมไม่ส่งผลกระทบต่ออัตราดอกเบี้ยของประเทศมหาอำนาจ (แต่เมื่อเวลาผ่านไปอาจส่งผลกระทบต่ออัตราดอกเบี้ยของประเทศมหาอำนาจบ้าง) ในขณะที่อัตราดอกเบี้ยของประเทศมหาอำนาจย่อมส่งผลต่ออัตราดอกเบี้ยในประเทศเล็ก ๆ

[13] อย่าลืมว่า Cov(ε_{1t}, ε_{2t}) = 0

ประเทศหนึ่งในทันทีและเมื่อเวลาผ่านไป ดังนั้น เราสามารถใส่ข้อจำกัด $\beta_{21} = 0$ ดังนั้น แบบจำลอง SVAR(1) จะเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \beta_{10} - \beta_{12} Z_t + \gamma_{11} Y_{t-1} + \gamma_{12} Z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \quad (11.12\text{ ก})$$

$$Z_t = \beta_{20} + \gamma_{21} Y_{t-1} + \gamma_{22} Z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (11.12\text{ ข})$$

หรือจัดรูปใหม่ดังนี้

$$Y_t + \beta_{12} Z_t = \beta_{10} + \gamma_{11} Y_{t-1} + \gamma_{12} Z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \quad (11.13\text{ ก})$$

$$Z_t = \beta_{20} + \gamma_{21} Y_{t-1} + \gamma_{22} Z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (11.13\text{ ข})$$

เราสามารถเขียนระบบสมการที่ (11.13 ก) และ (11.13 ข) ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \quad (11.14\text{ ก})$$

หรือเขียนได้ดังสมการที่ (11.14 ข)

$$\boldsymbol{BX_t} = \boldsymbol{\Gamma_0} + \boldsymbol{\Gamma_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t} \quad (11.14\text{ ข})$$

โดยที่ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma_0} = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Gamma_1} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon_t} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$

จาก (11.14 ก) ใช้แก้สมการหาแบบจำลองลดรูปหรือแบบจำลอง VAR(1) จะได้

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_{10} - \beta_{12}\beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} - \beta_{12}\gamma_{21} & \gamma_{12} - \beta_{12}\gamma_{22} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \qquad (11.15)
\end{aligned}$$

หรือแบบจำลอง VAR(1) เขียนได้อีกอย่างคือ

$$Y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}Z_{t-1} + u_{1t}$$

$$Z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}Z_{t-1} + u_{2t}$$

โดยที่

$$\left.\begin{array}{ll} a_{10} = \beta_{10} - \beta_{12}\beta_{10}, & a_{20} = \beta_{20} \\ a_{11} = \gamma_{11} - \beta_{12}\gamma_{21}, & a_{12} = \gamma_{12} - \beta_{12}\gamma_{22} \\ a_{21} = \gamma_{21}, & a_{22} = \gamma_{22} \end{array}\right\} \quad (11.16)$$

และ

ส่วนตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนจะมีค่าดังนี้ $u_{1t} = \varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}$ และ $u_{2t} = \varepsilon_{zt}$ ซึ่งจะมีส่วนเมทริกซ์ความแปรปรวน เขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{E}(\boldsymbol{u_t u_t'}) = \mathrm{E}\left(\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1t} & u_{1t} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{E}\begin{bmatrix} u_{1t}^2 & u_{1t}u_{2t} \\ u_{2t}u_{1t} & u_{2t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_{1t}^2) & E(u_{1t}u_{2t}) \\ E(u_{2t}u_{1t}) & E(u_{2t}^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_y^2 + \beta_{12}^2\sigma_z^2 & -\beta_{12}\sigma_z^2 \\ -\beta_{12}\sigma_z^2 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1^2 = \sigma_y^2 + \beta_{12}^2\sigma_z^2 \\ \sigma_2^2 = \sigma_z^2 \\ \sigma_{12} = -\beta_{12}\sigma_z^2 \end{array}\right\} \quad (11.17)$$

จากระบบสมการที่ (11.16) และ (11.17)[14] จะทำให้เราสามารถแก้สมการเพื่อย้อนกลับไปหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง SVAR(1) ได้ และเมื่อพิจารณา (11.15) แสดงให้เห็นว่า เมื่อเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันขึ้นในตัวแปรอัตราดอกเบี้ยของประเทศมหาอำนาจ ($\varepsilon_{zt} \neq 0$) จะส่งผลกระทบต่อทั้งอนุกรมเวลาอัตราดอกเบี้ยของประเทศเล็กและของประเทศมหาอำนาจเองด้วย ในขณะที่หากเกิดเหตุการณ์ไม่คาดฝันขึ้นในอัตราดอกเบี้ยของประเทศเล็ก ($\varepsilon_{yt} \neq 0$) จะส่งผลกระทบเพียงแค่อนุกรมเวลาอัตราดอกเบี้ยของประเทศเล็กเท่านั้น ไม่ส่งผลกระทบใด ๆ ต่ออัตราดอกเบี้ยของประเทศมหาอำนาจ จะเห็นว่าการใส่ข้อจำกัด $\beta_{21} = 0$ จะทำให้เมทริกซ์ $\boldsymbol{B}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม

[14] เนื่องจากมี 9 สมการ สามารถนำไปใช้แก้สมการเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ 9 ตัว คือ β_{10}, β_{12}, β_{20}, γ_{11}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{22}, σ_y^2, σ_z^2 ได้

บน (Upper Triangular Matrix)[15] และจะทำให้เราสามารถบังคับให้ตัวแปรหนึ่งส่งผลกระทบต่ออีกตัวแปรหนึ่งได้

และในกรณีที่แบบจำลอง VAR มีอนุกรมเวลา จำนวน n ชุดแล้ว $\boldsymbol{B}$ จะเป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ การใส่ข้อจำกัดเพื่อให้สามารถย้อนกลับไปหาค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง SVAR ได้ จะต้องทำให้เมทริกซ์ $\boldsymbol{B}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular matrix) นั่นคือ ต้องมีข้อจำกัดจำนวน $\frac{n^2-n}{2}$ ตัว ใส่ลงในเมทริกซ์ $\boldsymbol{B}$

11.4 การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนอง (Impulse Response Analysis)

เมื่อมีการนำอนุกรมเวลาหลาย ๆ ตัวไปใช้วิเคราะห์ทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์หรือทางการเงิน หากเราสนใจว่า เมื่อมีแรงกระตุ้นจากตัวแปรหนึ่ง (Impulse) แล้วอนุกรมเวลาอื่น ๆ ในแบบจำลอง VAR จะมีการตอบสนอง (Response) อย่างไรเมื่อเวลาผ่านไป การวิเคราะห์ดังกล่าวเรียกว่าการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนอง (Impulse Response Analysis) ซึ่งสามารถวิเคราะห์ได้จากทั้งแบบจำลอง VAR หรือแบบจำลอง VMA (Vector Moving Average) ก็ได้ เราจะเริ่มจากการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองด้วยแบบจำลอง VAR รายละเอียดมีดังนี้

เพื่อให้การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองสามารถเข้าใจง่าย เราจะอธิบายด้วยแบบจำลอง VAR(1) ในการพิจารณา โดยสมมุติให้มีอนุกรมเวลา 2 ตัว คือ Y_t และ Z_t เขียนในรูปเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t \qquad (11.18\ \text{ก})$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \qquad (11.18\ \text{ข})$$

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น กำหนดให้ Y_t คืออัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (ร้อยละ) ส่วน Z_t คืออัตราการเติบโตของรายได้ (ร้อยละ) สมมุติว่าอนุกรมเวลาทั้งสองนี้มีความนิ่ง โดยที่ $E(Y_t)$ =

[15] เราอาจใส่ข้อจำกัดแล้วทำให้ $\boldsymbol{B}$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างก็ได้ (Lower Triangular Matrix) ขึ้นอยู่กับทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์หรือการเงิน

0 และ E(Z_t) = 0 (นั่นคือ $a_{10} = a_{20} = 0$) และ $Y_t = Z_t = 0$ เมื่อ $t < 0$ และกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์แบบจำลอง VAR(1) มีค่าเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \tag{11.19}$$

จากสมการที่ (11.19) จะได้ว่า ถ้า ณ เวลา $t = 0$ อัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (Y_t) เท่ากับร้อยละ 1 ในขณะที่อัตราการเติบโตของรายได้ (Z_t) ไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ จะสามารถแสดงได้ด้วย

$$\boldsymbol{u_t} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น สมการที่ (11.19) เขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{-1} \\ Z_{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} \tag{11.20}$$

เนื่องจาก $u_{10} = 1$ และ $u_{20} = 0$ และเมื่อ $t < 0$, นั่นคือ $Y_{-1} = Z_{-1} = 0$ ดังนั้น เราเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Y}_0 \\ \mathrm{Z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} \mathrm{Y}_0 \\ \mathrm{Z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

กำหนดให้ ณ เวลา $t = 1$ อนุกรมเวลาทั้งสองนี้ไม่มีแรงกระตุ้นใด ๆ มาแทรกอีก จะได้ว่าอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (Y_t) กับอัตราการเติบโตของรายได้ (Z_t) ณ เวลา $t = 1$ เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 \\ 0.286 \end{bmatrix}$$

เราจึงอธิบายได้ว่า เมื่อมีแรงกระตุ้นทำให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 แล้วหลังจากนั้นอีก 1 ช่วงเวลาถัดไปจะพบว่า อัตราการเติบโตของปริมาณเงิน**เพิ่มขึ้น**ร้อยละ 0.631 และอัตราการเติบโตของรายได้**เพิ่มขึ้น**ร้อยละ 0.286

ส่วนผลกระทบของอนุกรมเวลาทั้งสอง ณ $t = 2$ เมื่อไม่มีแรงกระตุ้นใด ๆ มาแทรกอีก จะหาได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.424 \\ 0.304 \end{bmatrix}$$

เราจะอธิบายได้ว่า เมื่อมีแรงกระตุ้นทำให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 แล้ว หลังจากนั้นอีก 2 ช่วงเวลาถัดไปจะพบว่า อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 0.424 และอัตราการเติบโตของรายได้เพิ่มขึ้นร้อยละ 0.304

ส่วนผลกระทบของอนุกรมเวลาทั้งสอง ณ $t = 3$ เมื่อไม่มีแรงกระตุ้นใด ๆ มาแทรกอีก จะหาได้ด้วยวิธีเดียวกันดังนี้

$$\begin{bmatrix} Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.295 \\ 0.252 \end{bmatrix}$$

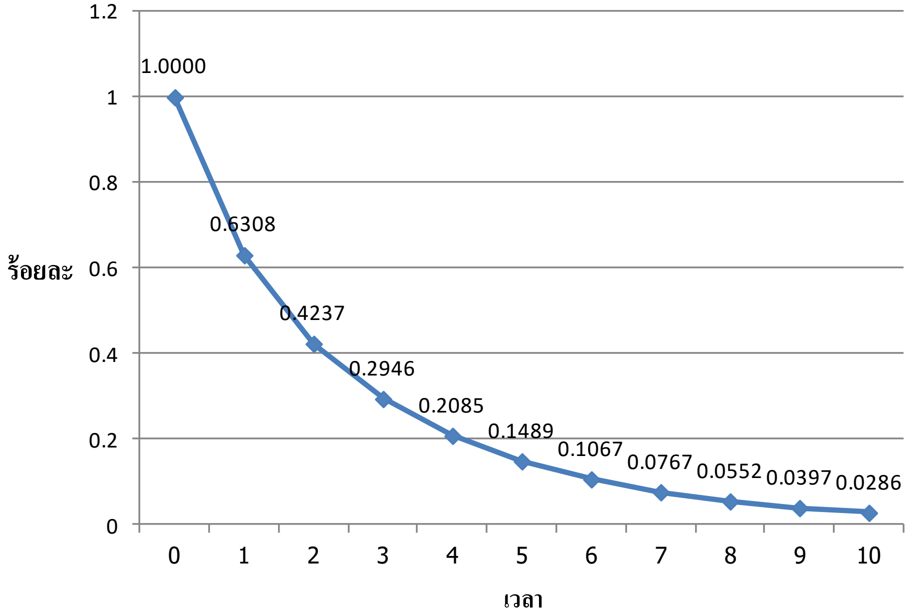
ซึ่งจะอธิบายได้ว่า เมื่อมีแรงกระตุ้นทำให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 แล้ว หลังจากนั้นอีก 3 ช่วงเวลาถัดไปจะพบว่า อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 0.295 และอัตราการเติบโตของรายได้เพิ่มขึ้นร้อยละ 0.252

ทำนองเดียวกัน ผลกระทบของอนุกรมเวลาทั้งสอง ณ $t = 9$ เมื่อไม่มีแรงกระตุ้นใด ๆ มาแทรกอีก จะหาได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} Y_9 \\ Z_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_8 \\ Z_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0397 \\ 0.0391 \end{bmatrix}$$

จากการสังเกต เรากล่าวได้ว่า เมทริกซ์ $A_1^i = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^i$ สามารถแสดงถึงการตอบสนอง (Response) ที่เกิดขึ้นของอนุกรมเวลาทุกตัวในแบบจำลอง VAR จากการที่อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ1 และเมื่อนำค่าการตอบสนองของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน ณ ช่วงเวลาที่ 1, 2, 3, … ถัดไป (Y_1, Y_2, Y_3, …) หลังเกิดแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($u_{10} = 1$) มาเขียนกราฟ จะแสดงได้ดังรูปที่ 11.1 ดังนี้[16]

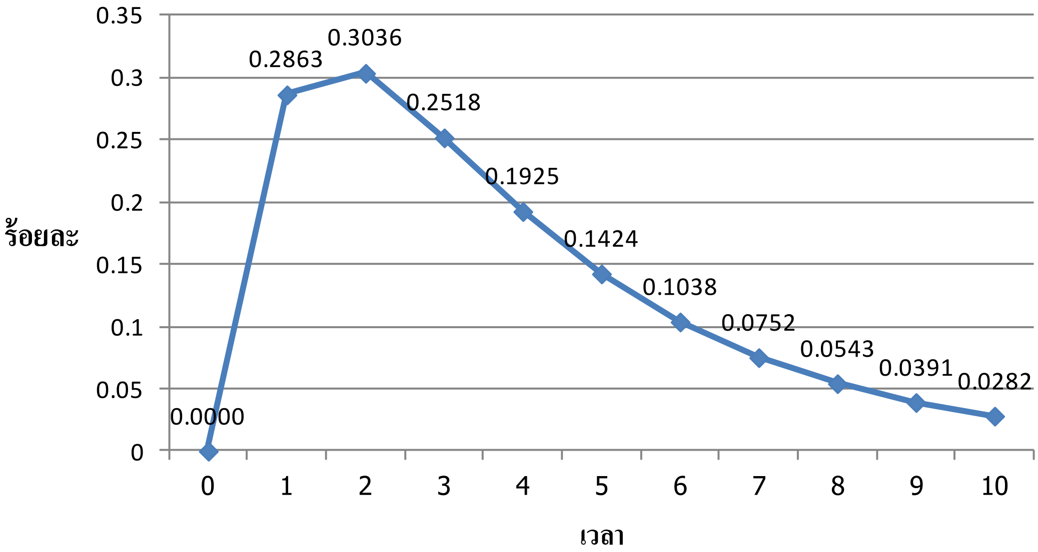
[16] เป็นค่าตัวเลขคำนวณจากโปรแกรมสำเร็จรูปซึ่งแสดงทศนิยม 4 ตำแหน่ง



รูปที่ 11.1 การตอบสนองของ Y เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Y เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Y \rightarrow Y$)

จากรูปที่ 11.1 จะเห็นว่า การเกิดแรงกระตุ้นจากอัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ณ เวลาปัจจุบัน ($t = 0$) จะทำให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นอีก 0.631 ใน 1 ช่วงเวลาถัดไป และเพิ่มขึ้น 0.424 ในอีก 2 ช่วงเวลาถัดไป และเพิ่มขึ้น 0.295 ในอีก 3 ช่วงเวลาถัดไป จากนั้นก็อัตราการเพิ่มขึ้นก็จะลดลงอย่างรวดเร็วจนเข้าใกล้ศูนย์เมื่อเวลาผ่านไป

ทำนองเดียวกัน เมื่อนำค่าการตอบสนองของอัตราการเติบโตของรายได้ ณ ช่วงเวลาที่ 1, 2, 3, … ถัดไป (Z_1, Z_2, Z_3, …) หลังเกิดแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (Y) เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 มาเขียนกราฟ จะแสดงได้ดังรูปที่ 11.2 ดังนี้



รูปที่ 11.2 การตอบสนองของ Z เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Y เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Y \rightarrow Z$)

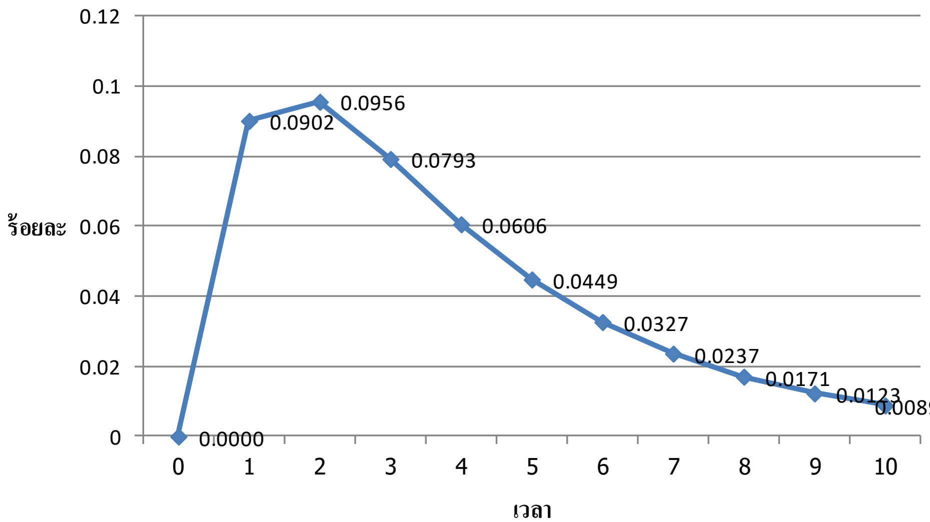
จากรูปที่ 11.2 จะเห็นว่าการเกิดแรงกระตุ้นจากอัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ณ เวลาปัจจุบัน จะพบว่าอัตราการเติบโตของรายได้เพิ่มขึ้นร้อยละ 0.2863 ใน 1 ช่วงเวลาถัดไป และเพิ่มขึ้นอีกร้อยละ 0.3036 ในอีก 2 ช่วงเวลาถัดไป และเพิ่มขึ้น 0.2518 ในอีก 3 ช่วงเวลาถัดไป จากนั้นก็อัตราการเพิ่มขึ้นก็จะลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์เมื่อเวลาผ่านไป

ในทางกลับกัน เมื่อมีแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของรายได้ (Z) เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 เราสามารถหาการตอบสนองต่ออัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (Y) และต่ออัตราการเติบโตของรายได้ (Z) ในช่วงเวลาที่ 1, 2, 3, … ถัดไปเรื่อย ๆ ด้วยวิธีเดียวกันนี้ ซึ่งผลการตอบสนองแสดงได้ดังตารางที่ 11.3 ดังนี้

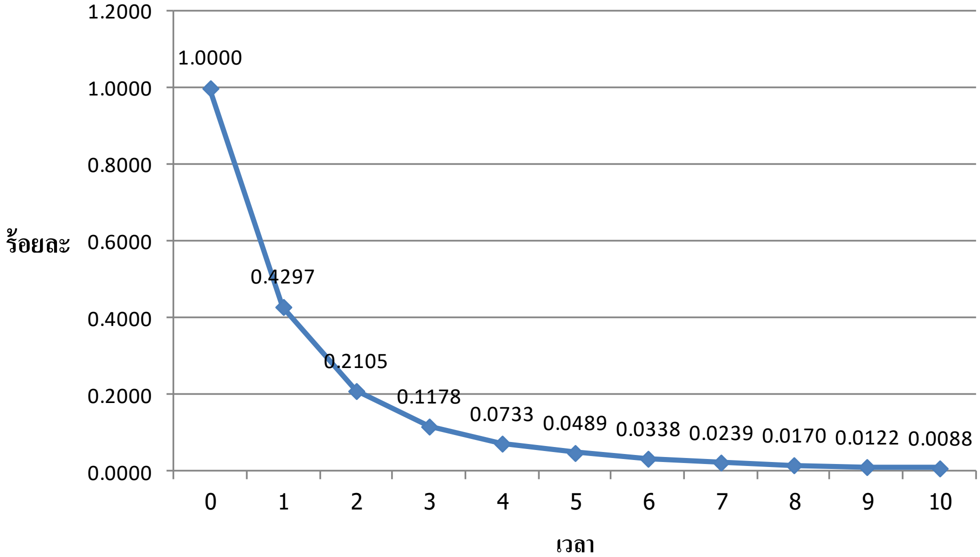
ตารางที่ 11.3 แสดงการตอบสนองของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (*Y*) และอัตราการเติบโตของรายได้ (*Z*) เมื่อมีแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของรายได้ (*Z*) เพิ่มขึ้นร้อยละ 1

ช่วงเวลา	การตอบสนองของ *Y* เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ *Z* เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Z \rightarrow Y$)	การตอบสนองของ *Z* เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ *Z* เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Z \rightarrow Z$)
0	0	1.0000
1	0.0902	0.4297
2	0.0956	0.2105
3	0.0793	0.1178
4	0.0606	0.0733
5	0.0449	0.0489
6	0.0327	0.0338
7	0.0237	0.0239
8	0.0171	0.0170
9	0.0123	0.0122
10	0.0089	0.0088

เมื่อนำค่าการตอบสนองของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน และอัตราการเติบโตของรายได้จากการเกิดแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (*Y*) เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 มาเขียนกราฟ จะแสดงได้ดังรูปที่ 11.3 และ 11.4 ตามลำดับ

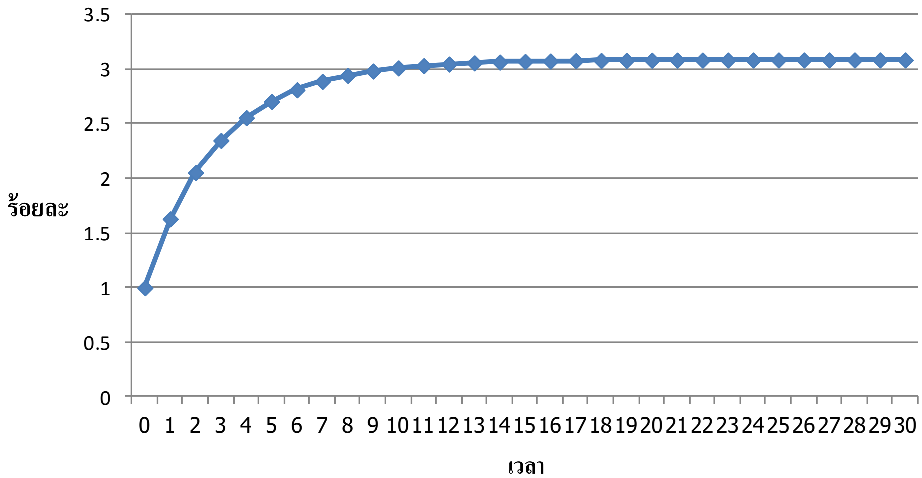


รูปที่ 11.3 การตอบสนองของ *Y* เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ *Z* เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Z \rightarrow Y$)

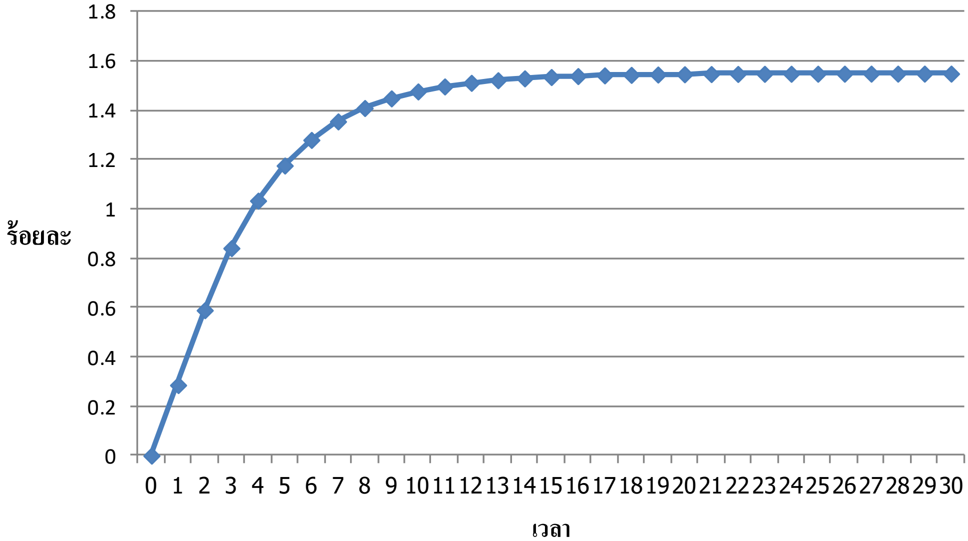


รูปที่ 11.4 การตอบสนองของ Z เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Z เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Z \rightarrow Z$)

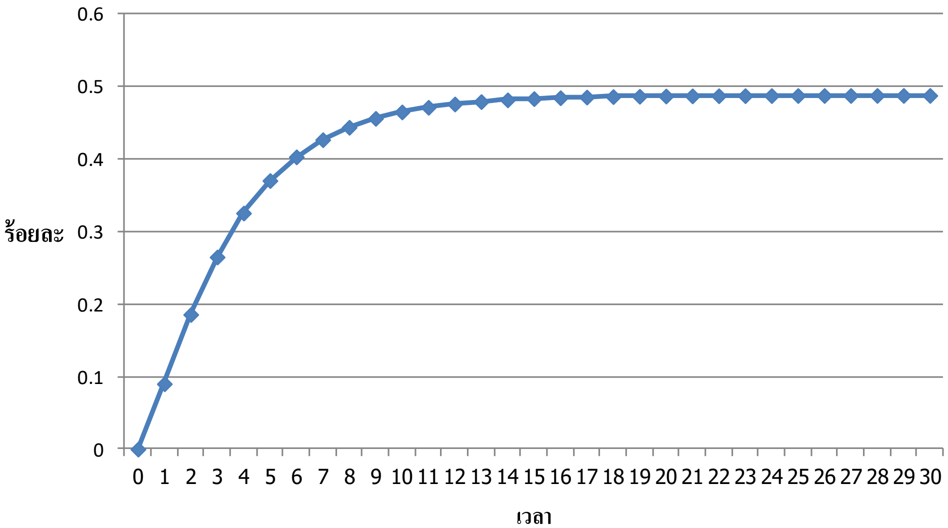
การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแสดงการตอบสนองในแต่ละช่วงเวลา อย่างไรก็ดี เราสามารถแสดงการตอบสนองแบบสะสมได้ กล่าวคือ นำค่าการตอบสนองมาบวกเพิ่มขึ้นทีละช่วงเวลา ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ และเราอาจเรียกว่าการตอบสนอง**ในระยะยาว** โดยหาอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ มีความนิ่งทั้งหมดแล้วจะได้ว่า การตอบสนองในระยะยาวจะต้องลู่เข้าหาค่าคงที่ค่าหนึ่ง รูปที่ 1.5–1.8 แสดงการตอบสนองแบบสะสมของรูปที่ 1.1–1.4



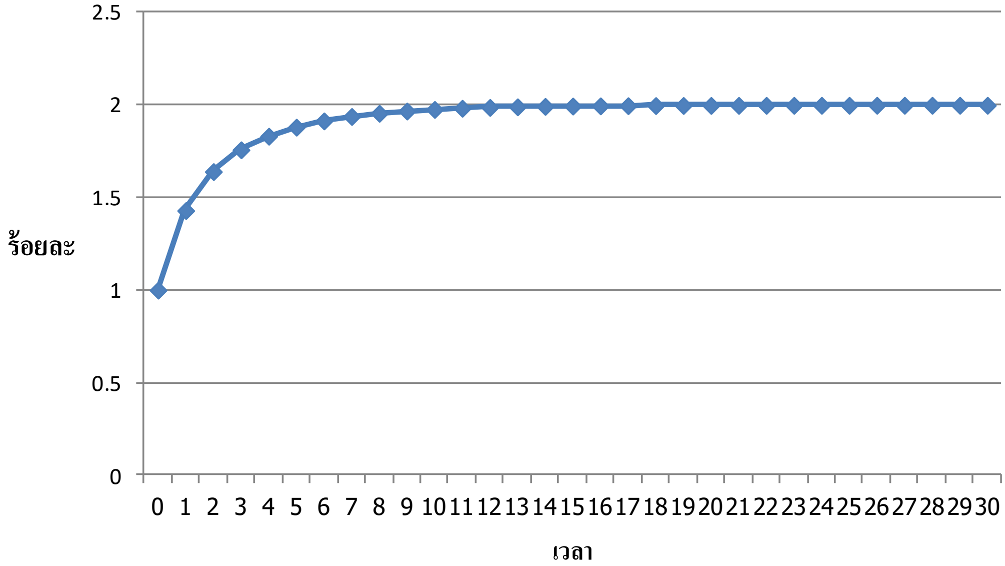
รูปที่ 11.5 การตอบสนองแบบสะสมของ Y เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Y เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Y \rightarrow Y$)



รูปที่ 11.6 การตอบสนองแบบสะสมของ Z เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Y เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Y \rightarrow Z$)



รูปที่ 11.7 การตอบสนองแบบสะสมของ Y เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Z เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Z \rightarrow Y$)



รูปที่ 11.8 การตอบสนองแบบสะสมของ Z เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Z เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 ($Z \rightarrow Z$)

จากรูปที่ 11.5–11.6 ทำให้เราทราบว่า หากเกิดแรงกระตุ้นที่ทำให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงินเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 แล้วจะพบว่าในระยะยาวอัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะเพิ่มขึ้นประมาณร้อยละ 3 ส่วนอัตราการเติบโตของรายได้จะเพิ่มขึ้นประมาณร้อยละ 1.6 ส่วนรูปที่ 11.7–11.8 อธิบายได้ว่า หากเกิดแรงกระตุ้นที่ทำให้อัตราการเติบโตของรายได้เพิ่มขึ้นร้อยละ 1 แล้วจะพบว่า ในระยะยาวอัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะเพิ่มขึ้นประมาณร้อยละ 0.5 ส่วนอัตราการเติบโตของรายได้จะเพิ่มขึ้นประมาณร้อยละ 2

ในการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองในแบบจำลอง VAR นั้น หากพบว่าอนุกรมเวลาที่อยู่ในแบบจำลอง VAR มีหน่วยที่แตกต่างกันมาก เช่น อนุกรมเวลาที่ใช้วิเคราะห์คือ GDP ซึ่งมีหน่วยเป็นล้านบาท และอัตราเงินเฟ้อ (*INF*) ซึ่งมีหน่วยเป็นร้อยละ การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองของอนุกรมเวลาทั้งสองนี้ควรพิจารณาในรูปของการเกิดแรงกระตุ้นใน GDP ขนาด 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการ GDP หรือการเกิดแรงกระตุ้นในอัตราเงินเฟ้อขนาด 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการอัตราเงินเฟ้อ การทำเช่นนี้จะช่วยให้รูปที่แสดงการกระตุ้นและการตอบสนองระหว่างตัวแปรต่าง ๆ ในแบบจำลอง VAR มีความชัดเจนและง่ายต่อการอธิบายมากขึ้น

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix: $\boldsymbol{\Sigma}$) ของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนจากสมการ GDP_t ($u_{GDP,t}$) และจากสมการอัตราเงินเฟ้อ ($u_{INF,t}$) เป็นดังนี้

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.35 \\ 0.35 & 0.01 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น แรงกระตุ้นใน GDP ขนาด 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการ GDP ก็คือ $\sqrt{1.5}$ = 1.223 ล้านบาท ส่วนแรงกระตุ้นในอัตราเงินเฟ้อขนาด 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการ INF จะคำนวณจาก $\sqrt{0.01}$ ซึ่งจะได้ร้อยละ 0.1 นั่นเอง

- **การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองด้วยแบบจำลอง Vector Moving Average**

ในบทที่ 3 เราทราบแล้วว่า แบบจำลอง AR(p) สามารถแปลงให้เป็นแบบจำลอง MA(∞) ได้ ทำนองเดียวกันแบบจำลอง VAR(p) ก็สามารถแปลงให้เป็นแบบจำลอง Vector Moving Average ลำดับ ∞ หรือเขียนย่อว่า VMA(∞) ได้เช่นกัน ดังนั้น การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองสามารถอธิบายได้ด้วยแบบจำลอง VMA(∞) ดังจะอธิบายต่อไปนี้

เพื่อให้เข้าใจง่าย เราจะใช้แบบจำลอง VAR(1) ในการอธิบาย

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (11.18\ ก)$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{X_{t-1}} = \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_0} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $\boldsymbol{u_t} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$

เมื่อเราแปลงแบบจำลอง VAR(1) ให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VMA(∞) จะเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{A_1^i u_{t-i}} \qquad (11.21\ ก)$$[17]

โดยที่ $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X_t})$ ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของเวกเตอร์ $\mathbf{X_t}$ ในแบบจำลอง VAR จะเห็นว่า สมการที่ (11.21 ก) ก็คือแบบจำลอง VMA(∞) นั่นเอง และเราสามารถเขียนได้อีกแบบคือ

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Phi_i u_{t-i}} \qquad (11.21\ ข)$$

[17] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 11ง

โดยที่ $\boldsymbol{\Phi_i} = \boldsymbol{A}_1^i$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ของค่าสัมประสิทธิ์ตัวที่ i ในแบบจำลอง VMA และ $\boldsymbol{\Phi_0} = \boldsymbol{I_n}$ (n คือจำนวนอนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR) ดังนั้น เมทริกซ์ $\boldsymbol{\Phi_i}$ จึงสามารถใช้วิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองได้เช่นกัน ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนเมื่อเราเขียนสมการที่ (11.21 ข) ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11,1} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-1} \\ u_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11,2} & \phi_{12,2} \\ \phi_{21,2} & \phi_{22,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-2} \\ u_{2,t-2} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \phi_{11,3} & \phi_{12,3} \\ \phi_{21,3} & \phi_{22,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-3} \\ u_{2,t-3} \end{bmatrix} + \cdots \quad \text{(11.21 ค)}$$

ความหมายของค่าพารามิเตอร์ $\emptyset_{11,i}, \emptyset_{12,i}, \emptyset_{21,i}$และ $\emptyset_{22,i}$ อธิบายได้ดังนี้

- ค่าพารามิเตอร์ $\emptyset_{11,i}$ จะแสดงถึงการตอบสนองของอนุกรมเวลา Y ใน i ช่วงเวลาถัดมาหลังเกิดแรงกระตุ้นของตัวแปร Y ขนาด 1 หน่วย ณ เวลา $t = 0$ โดยตัวแปรอื่น ๆ คงที่
- ค่าพารามิเตอร์ $\emptyset_{12,i}$ จะแสดงถึงการตอบสนองของอนุกรมเวลา Y ใน i ช่วงเวลาถัดมาหลังเกิดแรงกระตุ้นของตัวแปร Z ขนาด 1 หน่วย ณ เวลา $t = 0$ โดยตัวแปรอื่น ๆ คงที่
- ค่าพารามิเตอร์ $\emptyset_{21,i}$ จะแสดงถึงการตอบสนองของอนุกรมเวลา Z ใน i ช่วงเวลาถัดมาหลังเกิดแรงกระตุ้นของตัวแปร Y ขนาด 1 หน่วย ณ เวลา $t = 0$ โดยตัวแปรอื่น ๆ คงที่
- ค่าพารามิเตอร์ $\emptyset_{22,i}$ จะแสดงถึงการตอบสนองของอนุกรมเวลา Z ใน i ช่วงเวลาถัดมาหลังเกิดแรงกระตุ้นของตัวแปร Z ขนาด 1 หน่วย ณ เวลา $t = 0$ โดยตัวแปรอื่น ๆ คงที่

และผลที่ได้จะเท่ากับการวิเคราะห์การตอบสนองต่อแรงกระตุ้นด้วยแบบจำลอง VAR

11.5 การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉาก (Orthogonal Impulse Response Analysis)

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ศึกษาถึงการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนอง กล่าวคือ เมื่อมีแรงกระตุ้นในตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง เช่น ตัวแปร Z จะส่งผลกระทบต่อตัวแปรอื่น ๆ ที่เหลือทั้งหมดในแบบจำลอง VAR ในช่วงเวลาที่ 1, 2, 3, … ถัดไปเรื่อย ๆ แต่แรงกระตุ้นในตัวแปร Y และ Z มักจะไม่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งยืนยันได้จาก $\text{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) \neq 0$ ดังแสดงในเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t} และ u_{2t} จากสมการที่ (11.8 ฉ)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{E}(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \qquad (11.8\text{ ฉ})$$

นั่นคือ การสมมุติให้แรงกระตุ้นของตัวหนึ่งมีค่าเป็น 1 ในขณะที่แรงกระตุ้นของอีกตัวหนึ่งเป็นศูนย์ ดังเช่น $\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นการปิดบังถึงผลกระทบจากแรงกระตุ้นของอนุกรมเวลาหนึ่งที่มีต่ออนุกรมเวลาอีกชุดหนึ่ง**ในทันที** ปัญหาดังกล่าวสามารถแก้ไขได้ด้วยการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉาก (Orthogonal Impulse Response Analysis) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

พิจารณาแบบจำลอง VMA(∞) ดังนี้

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{u}_{t-i} \qquad (11.21\text{ ข})$$

เนื่องจากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\boldsymbol{u}_t$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\Sigma}$ จะต้องมีคุณสมบัติเป็น Positive Definite เสมอ ดังนั้นจะต้องมีเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) $\boldsymbol{P}$ ที่มีคุณสมบัติดังนี้

$$\boldsymbol{PP}' = \boldsymbol{\Sigma} \qquad (11.22\text{ ก})$$

สมการที่ (11.22 ก) เรียกว่า วิธีการแยกแบบ Choleski (Choleski Decomposition) ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t} และ u_{2t} เป็นดังนี้

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.5056719\times10^{-5} & 2.2337878\times10^{-7} \\ 2.2337878\times10^{-7} & 8.9719295\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

แล้วจะสามารถหาเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง ได้แก่ $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีคุณสมบัติคือ

$$\boldsymbol{PP}' = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0.0000576 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.5056719\times10^{-5} & 2.2337878\times10^{-7} \\ 2.2337878\times10^{-7} & 8.9719295\times10^{-5} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}$$

จากเมทริกซ์ $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปดังต่อไปนี้ได้

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{0.0000576}{0.0038803} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.014844 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}$$

หรือ $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{WD}$ (11.22 ข)

โดยที่ $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}$ ซึ่งก็คือเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกตำแหน่งทแยงมุมเหมือนกับสมาชิกตำแหน่งทแยงมุมของเมทริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ส่วน $\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.014844 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งก็คือเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างที่ทำให้สมการที่ (11.22 ข) เป็นจริงโดยมีสมาชิกตำแหน่งแนวทแยงมุมจะเป็น 1 ทั้งหมด และถ้ากำหนดให้

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{u}_t \qquad (11.22 \text{ ค})$$

จะได้ว่า เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$ (ใช้สัญลักษณ์ $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$) คำนวณได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t')$$

$$= \mathrm{E}[(\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{u}_t)(\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{u}_t)']$$

$$= \mathrm{E}[(\boldsymbol{W}^{-1})\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t'(\boldsymbol{W}^{-1})']$$

$$= (\boldsymbol{W}^{-1})\mathrm{E}[\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t'](\boldsymbol{W}^{-1})'$$ เนื่องจาก $\boldsymbol{W}^{-1}$ คือเมทริกซ์ของค่าคงที่

$$= (\boldsymbol{W}^{-1})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{W}')^{-1}$$ เนื่องจาก $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{E}[\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t']$ และ $(\boldsymbol{W}')^{-1} = (\boldsymbol{W}^{-1})'$

$$= (\boldsymbol{W}^{-1})\boldsymbol{PP}'(\boldsymbol{W}')^{-1}$$ เนื่องจาก $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{PP}'$

$$= (\boldsymbol{W}^{-1})\boldsymbol{WD}^2\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{W}')^{-1}$$ เนื่องจาก $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{WD}$

$$= \boldsymbol{D}^2 \qquad (11.22 \text{ ง})$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} var(\varepsilon_{1t}) & cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) \\ cov(\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{1t}) & var(\varepsilon_{2t}) \end{bmatrix} = D^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}^2$$

$$= \begin{bmatrix} (0.0038803)^2 & 0 \\ 0 & (0.0094719)^2 \end{bmatrix} \qquad 11.22 \text{ จ)}$$

จากสมการที่ (11.22 จ) ทำให้เราสรุปได้ว่า สมาชิกตำแหน่งทแยงมุม (j,j) ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{P}$ และ $\boldsymbol{D}$ ก็คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ε_{jt} นั่นเอง (j = 1, 2) และตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน ε_{1t} และ ε_{2t} จะเป็นอิสระต่อกันหรือไม่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ทั้งนี้เพราะ $cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = cov(\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{1t}) = 0$

ถ้านำเมทริกซ์ $\boldsymbol{WW^{-1} = I}$ เข้าไปแทรกอยู่ในสมการที่ (11.21 ข) ในรูปต่อไปนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Phi_i W W^{-1} u_{t-i}} \qquad (11.23 \text{ ก})$$

และจาก (11.22 ค) $\boldsymbol{\varepsilon_t} = \boldsymbol{W^{-1}u}$ แทนค่าลงในสมการข้างบนจะได้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Phi_i W \varepsilon_{t-i}}$$

และเนื่องจาก $\boldsymbol{P = WD}$ หรือ $\boldsymbol{W = PD^{-1}}$ แทนค่าในสมการข้างบนจะได้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Phi_i P(D^{-1}\varepsilon_{t-i})}$$

และเขียนใหม่เป็นดังนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Theta_i (D^{-1}\varepsilon_{t-i})} \qquad (11.23 \text{ ข})$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Theta_i = \Phi_i P}$, ส่วน $\boldsymbol{D}$ ก็คือเมทริกซ์ทแยงมุมโดยสมาชิกตำแหน่งแนวทแยงมุมที่ (j, j) ก็คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ ε_{jt} นั่นเอง จากสมการที่ (11.23 ข) บอกเราว่า ในการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉาก (Orthogonal Impulse Response Analysis) จะเป็นการวิเคราะห์จากการที่ค่าของ ε_{1t} (หรือ ε_{2t}) เพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานนั่นเอง ดังจะอธิบายให้เห็นภาพได้ชัดเจนขึ้นดังนี้

กำหนดให้ $$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\omega}_t \qquad (11.23\ ค)$$ [18]

แทนค่าในสมการที่ (11.23 ข) จะได้

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Theta}_i \boldsymbol{\omega}_{t-i} \qquad (11.23\ ง)$$

กำหนดให้ $\boldsymbol{\omega}_t = \begin{bmatrix}\omega_{1t}\\ \omega_{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ แทนค่าใน (11.23 ค) แล้วพิจารณาดังนี้

$$\begin{bmatrix}\sqrt{var(\varepsilon_{1t})} & 0\\ 0 & \sqrt{var(\varepsilon_{2t})}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{var(\varepsilon_{1t})} & 0\\ 0 & \sqrt{var(\varepsilon_{2t})}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{var(\varepsilon_{1t})}\\ 0\end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราจึงอธิบายได้ว่า หาก $\boldsymbol{\omega}_t = \begin{bmatrix}\omega_{1t}\\ \omega_{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ จะมีค่าเท่ากับ $\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{1t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{var(\varepsilon_{1t})}\\ 0\end{bmatrix}$ นั่นเอง หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ เมื่อ ω_{1t} เพิ่มขึ้น 1 หน่วยในขณะที่ ω_{2t} ไม่เปลี่ยนแปลง **จะมีความเท่ากับค่า ε_{1t} เพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานนั่นเอง**

จะเห็นว่า สมการที่ (11.23 ง) เป็นสมการในรูป VMA(∞) ที่เราได้เคยใช้ในหัวข้อก่อนหน้านี้มาแล้วนั่นเอง ดังนั้น เราสามารถใช้สมการดังกล่าวในการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองได้ดังนี้

สมการที่ (11.23 ง) เขียนได้อีกอย่างดังนี้

$$\begin{bmatrix}Y_t\\ Z_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu_y\\ \mu_z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\theta_{11,0} & 0\\ \theta_{21,0} & \theta_{22,0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{1t}\\ \omega_{2t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\theta_{11,1} & \theta_{12,1}\\ \theta_{21,1} & \theta_{22,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{1,t-1}\\ \omega_{2,t-1}\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}\theta_{11,2} & \theta_{12,2}\\ \theta_{21,2} & \theta_{22,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{1,t-2}\\ \omega_{2,t-2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\theta_{11,3} & \theta_{12,3}\\ \theta_{21,3} & \theta_{22,3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{1,t-3}\\ \omega_{2,t-3}\end{bmatrix} + \cdots \qquad (11.23\ จ)$$

---

[18] $\boldsymbol{\omega}$ คืออักษรกรีก อ่านว่าโอเมกา (Omega)

จากสมการข้างบน ถ้ากำหนดให้ $\boldsymbol{\omega_0} = \begin{bmatrix}\omega_{10}\\ \omega_{20}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ[19] $\begin{bmatrix}\varepsilon_{10}\\ \varepsilon_{20}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{var(\varepsilon_{1t})}\\ 0\end{bmatrix}$ ดังนั้น เราจึงอธิบายได้ว่า เมื่อเกิดแรงกระตุ้นขนาด 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ ε_{1t} ในอนุกรมเวลา Y แล้วจะส่งผลกระทบ**ในทันที**ต่อตัวแปร Z หรือเขียนได้ว่า $Z_0 = \theta_{21,0}$

เมื่อพิจารณาเมทริกซ์ความแปรปรวนของ ω_{1t} และ ω_{2t} ในสมการที่ (12.23 ง)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma_\omega} &= \boldsymbol{Var(\omega_t)} \\
&= \boldsymbol{Var(D^{-1}\varepsilon_t)} \\
&= \boldsymbol{D^{-1}Var(\varepsilon_t)D^{-1\prime}} \\
&= \boldsymbol{D^{-1}\Sigma_\varepsilon D^{-1\prime}} \\
&= \boldsymbol{D^{-1}D^2(D')^{-1}} && \text{เนื่องจาก } \boldsymbol{(D')^{-1} = D^{-1\prime}} \\
&= \boldsymbol{D^{-1}DD'(D')^{-1}} && \text{เนื่องจาก } \boldsymbol{D} \text{ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม ดังนั้น } \boldsymbol{D = D'} \\
&= \boldsymbol{I_n} && (n \text{ คือจำนวนอนุกรมเวลาในแบบจำลอง}) \qquad (11.23 \text{ ฉ})
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า Cov(ω_{1t}, ω_{2t}) = 0 นั่นคือ ω_{1t} ไม่มีความสัมพันธ์กับ ω_{2t} หรือเรียกว่าตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนทั้ง 2 ตัวนี้ตั้งฉากกัน (Orthogonal) นั่นคือ หาก ω_{1t} เปลี่ยนแปลงไป จะไม่ส่งผลกระทบใด ๆ ต่อ ω_{2t} เราจึงเรียกการวิเคราะห์การกระตุ้นและการตอบสนองจากสมการที่ (11.23 ง) หรือ (11.23 ข) ว่า **การวิเคราะห์ตอบสนองต่อแรงกระตุ้นแบบตั้งฉาก (Orthogonal Impulse Response Analysis)**

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น ขอใช้ตัวอย่างที่แล้ว Y_t คืออัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (ร้อยละ) Z_t คืออัตราการเติบโตของรายได้ (ร้อยละ) และกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์แบบจำลอง VAR(1) มีค่าเป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix}Y_t\\ Z_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.631 & 0.090\\ 0.286 & 0.430\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{t-1}\\ Z_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix} \qquad (11.24 \text{ ก})$$

หรือเขียนได้ว่า

---

[19] อย่าลืมว่า $\boldsymbol{\varepsilon_t} = \boldsymbol{W^{-1}u_t}$ และ $\boldsymbol{W^{-1}}$ คือเมทริกซ์ที่เป็นค่าคงที่ ดังนั้น $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ จึงเป็นตัวรบกวนขาวเช่นเดียวกับ $\boldsymbol{u_t}$ ด้วย นั่นคือ Var(ε_{1t}) และ Var(ε_{2t}) จึงมีค่าคงที่ทุก ๆ ช่วงเวลา

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (11.24 \text{ ข})$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}$ และ $\boldsymbol{u_t} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$ และกำหนดให้ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t} และ u_{2t} คือ $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.5056719\times10^{-5} & 2.2337878\times10^{-7} \\ 2.2337878\times10^{-7} & 8.9719295\times10^{-5} \end{bmatrix}$ และสมการที่ (11.24 ข) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VMA(∞) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi_i u_{t-i}} \qquad (11.24 \text{ ค})$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Phi_i} = \boldsymbol{A_1^i}$ นั่นคือ เราจะได้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_1^0 u_t} + \boldsymbol{A_1^1 u_{t-1}} + \boldsymbol{A_1^2 u_{t-2}} + \boldsymbol{A_1^3 u_{t-3}} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-1} \\ u_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} u_{1,t-2} \\ u_{2,t-2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} u_{1,t-3} \\ u_{2,t-3} \end{bmatrix} + \cdots \qquad (11.24 \text{ ง})$$

เราทราบแล้วว่า จากการใช้วิธีการแยกแบบ Choleski จะทำให้เราเขียนเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t} และ u_{2t} ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.5056719\times10^{-5} & 2.2337878\times10^{-7} \\ 2.2337878\times10^{-7} & 8.9719295\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0.0000576 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{PP'}$$

โดยที่ $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix}$ และจากสมการที่ (11.22 ข) เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{W \cdot D}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.014844 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.014844 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}$ ดังนั้น สมการที่ (11.24 ค) และ (11.24 ง) เขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Phi_i P}(\boldsymbol{D^{-1}\varepsilon_{t-i}}) \quad (11.24\ \text{จ})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^{2} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-2} \\ \varepsilon_{2,t-2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^{3} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0 & 0.0094719 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-3} \\ \varepsilon_{2,t-3} \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots \quad (11.24\ \text{ฉ})$$

หรือเขียนใหม่ได้ว่า

$$\boldsymbol{X_t} = \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty} \boldsymbol{\Theta_i \omega_{t-i}} \quad (11.24\ \text{ช})$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1t} \\ \omega_{2t} \end{bmatrix}$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \omega_{1,t-1} \\ \omega_{2,t-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^{2} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \omega_{1,t-2} \\ \omega_{2,t-2} \end{bmatrix}$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^{3} \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \omega_{1,t-3} \\ \omega_{2,t-3} \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1t} \\ \omega_{2t} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.00245 & 0.00085 \\ 0.00114 & 0.00407 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,t-1} \\ \omega_{2,t-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.00165 & 0.0009 \\ 0.00119 & 0.0019 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,t-2} \\ \omega_{2,t-2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.00115 & 0.00075 \\ 0.00098 & 0.00112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,t-3} \\ \omega_{2,t-3} \end{bmatrix} + \cdots \quad (11.24\ \text{ซ})$$

นั่นคือ เราจะได้ $\mathbf{\Theta_0} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Theta_1} = \begin{bmatrix} 0.002454 & 0.000852 \\ 0.001135 & 0.004073 \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Theta_2} = \begin{bmatrix} 0.001650 & 0.000904 \\ 0.001190 & 0.001995 \end{bmatrix}$, $\mathbf{\Theta_3} = \begin{bmatrix} 0.001148 & 0.000750 \\ 0.000984 & 0.001117 \end{bmatrix}$, ... จากนั้นเราจึงสามารถวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉาก ดังจะอธิบายต่อไปนี้

ถ้ากำหนดให้ $\boldsymbol{\omega_0} = \begin{bmatrix} \omega_{10} \\ \omega_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เราจะได้

$$\mathbf{\Theta_0}\boldsymbol{\omega_0} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0038803 \\ 0.0000576 \end{bmatrix}$$

ซึ่งหมายถึง เมื่อเกิดแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ร้อยละ 0.0038803) ของ ε_{1t} จะพบว่า อัตราการเติบโตของรายได้มีการตอบสนองเพิ่มขึ้น**ทันที** ร้อยละ 0.0000576

ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดให้ $\boldsymbol{\omega_0} = \begin{bmatrix} \omega_{10} \\ \omega_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เราจะได้

$$\mathbf{\Theta_0}\boldsymbol{\omega_0} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0095 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ เมื่อเกิดแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของรายได้ 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ร้อยละ 0.0095) ของ ε_{2t} แล้วจะพบว่า อัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะไม่มีการตอบสนองใด ๆ

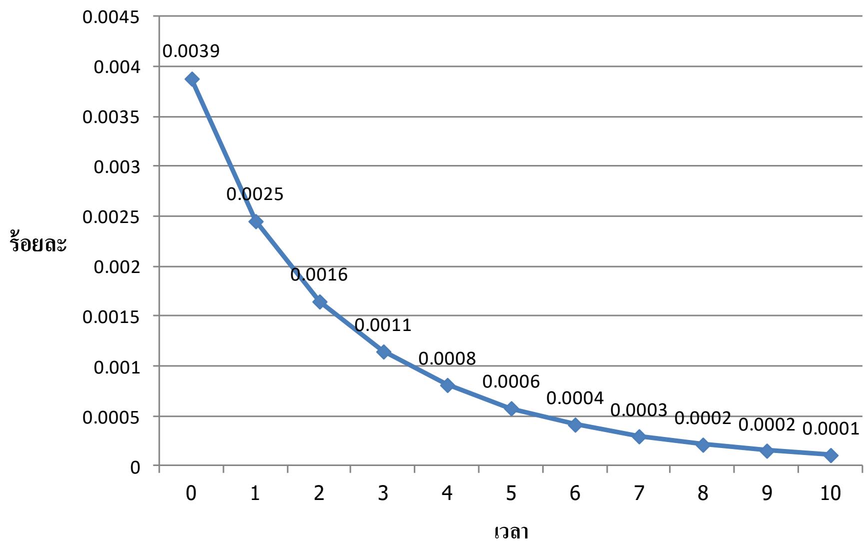
จากวิธีการแยกแบบ Choleski จะทำให้เราเห็นว่า เมื่อเกิดแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (Y_t) จะพบว่าอัตราการเติบโตของรายได้ (Z_t) **มีการตอบสนองในทันที** แต่ในทางกลับกัน หากเกิดแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของรายได้ (Z_t) จะพบว่าอัตราการเติบโตของรายได้ (Z_t) **ไม่มีการตอบสนองในทันที**

การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองในลักษณะนี้เป็นคุณสมบัติของการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉาก (Orthogonal Impulse Response Analysis) ส่วนการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉากในช่วงเวลาถัดไป สามารถทำได้ด้วยการพิจารณาจากเมทริกซ์ $\mathbf{\Theta_1}, \mathbf{\Theta_2}, \mathbf{\Theta_3}, \ldots$ ดังจะยกตัวอย่างต่อไปนี้

เราทราบแล้วว่า เมทริกซ์ของค่าพารามิเตอร์ $\mathbf{\Theta_1} = \begin{bmatrix} 0.00245 & 0.00085 \\ 0.00114 & 0.00407 \end{bmatrix}$ ซึ่งอธิบายความหมายได้ดังนี้

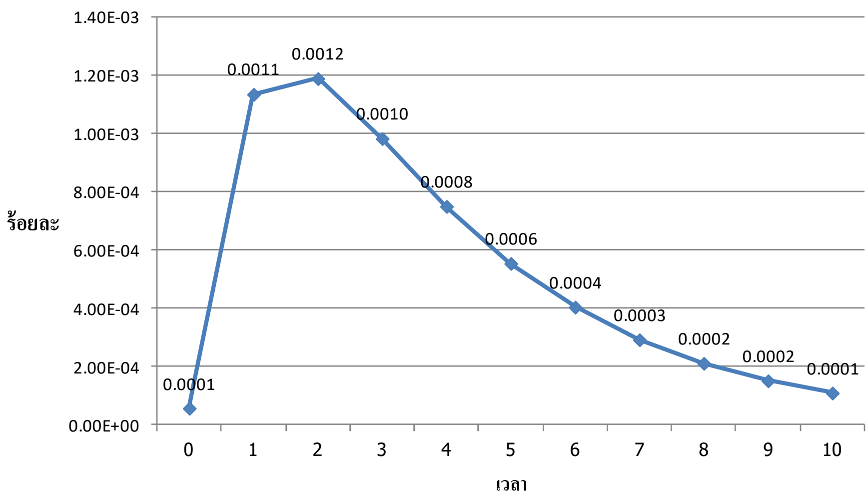
- เมื่อเกิดแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน จำนวน 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ร้อยละ 0.0038803) ของ ε_{1t} แล้ว **ใน 1 ช่วงเวลาถัดไป** จะพบว่า อัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะเพิ่มขึ้นร้อยละ 0.00245 และอัตราการเติบโตของรายได้จะเพิ่มขึ้น 0.00114
- เมื่อเกิดแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของรายได้ จำนวน 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ร้อยละ 0.0094719) ของ ε_{2t} แล้ว **ใน 1 ช่วงเวลาถัดไป** จะพบว่าอัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะเพิ่มขึ้นร้อยละ 0.00085 และอัตราการเติบโตของรายได้จะเพิ่มขึ้น 0.00407 ทำนองเดียวกันเราสามารถอธิบายเมทริกซ์ของค่าพารามิเตอร์ $\mathbf{\Theta_2} = \begin{bmatrix} 0.00165 & 0.0009 \\ 0.00119 & 0.0019 \end{bmatrix}$ ได้ดังนี้
- เมื่อเกิดแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน จำนวน 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ร้อยละ 0.0038803) ของ ε_{1t} แล้ว **ใน 2 ช่วงเวลาถัดไป** จะพบว่า อัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะเพิ่มขึ้นร้อยละ 0.00165 และอัตราการเติบโตของรายได้จะเพิ่มขึ้น 0.00119
- เมื่อเกิดแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของรายได้ จำนวน 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ร้อยละ 0.0094719) ของ ε_{2t} แล้ว **ใน 2 ช่วงเวลาถัดไป** จะพบว่าอัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะเพิ่มขึ้นร้อยละ 0.0009 และอัตราการเติบโตของรายได้จะเพิ่มขึ้น 0.0019

ส่วนการอธิบายเมทริกซ์ค่าพารามิเตอร์ $\mathbf{\Theta_3}, \mathbf{\Theta_4}$ ... สามารถอธิบายได้ในลักษณะเดียวกันนี้ จากการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉากเราสามารถนำมาเขียนเป็นกราฟได้ดังแสดงในรูปที่ 11.9–11.12 (ในกราฟจะแสดงตัวเลขเป็นทศนิยม 4 ตำแหน่ง)



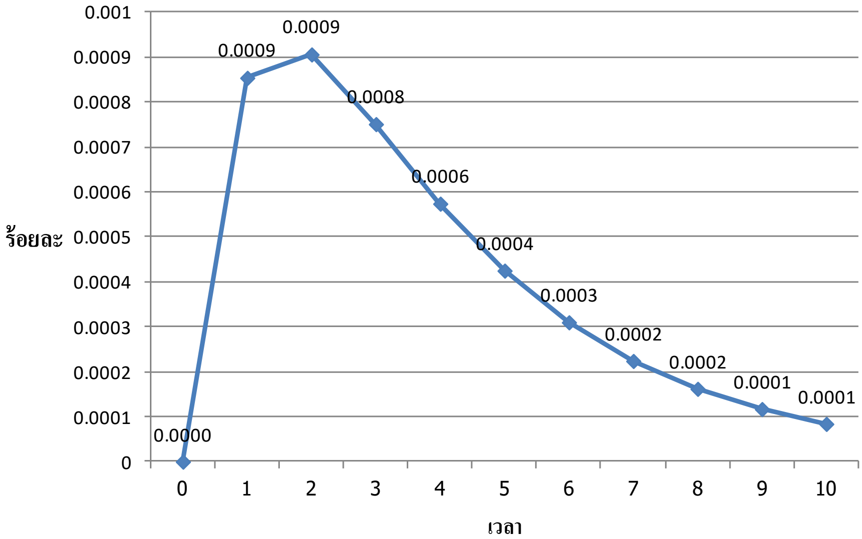
รูปที่ 11.9 การตอบสนองแบบตั้งฉากของ Y

เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Y เพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ($Y \rightarrow Y$)

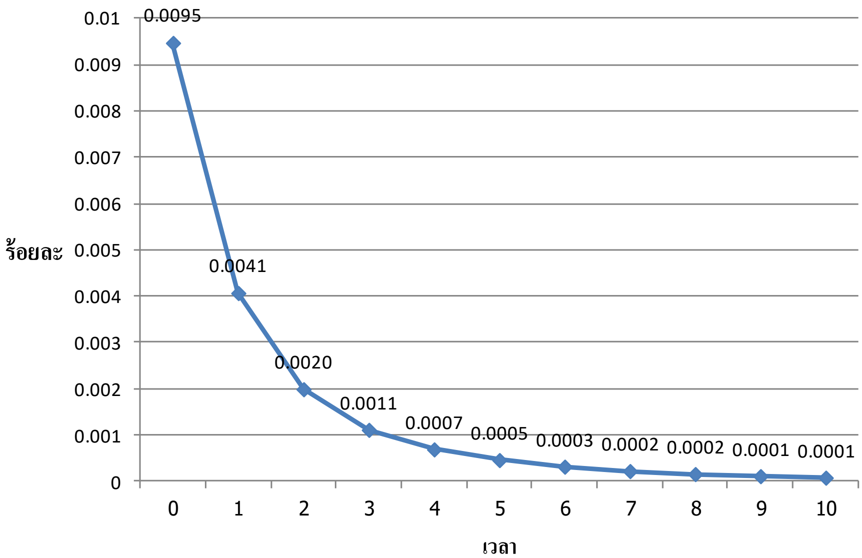


รูปที่ 11.10 การตอบสนองแบบตั้งฉากของ Z

เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Y เพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ($Y \rightarrow Z$)



รูปที่ 11.11 การตอบสนองแบบตั้งฉากของ Y
เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Z เพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ($Z \rightarrow Y$)



รูปที่ 11.12 การตอบสนองแบบตั้งฉากของ Z
เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้ Z เพิ่มขึ้น 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ($Z \rightarrow Z$)

มีสิ่งหนึ่งที่พึงระวังในการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉากก็คือ ลำดับของตัวแปรที่เปลี่ยนไปจะทำให้การวิเคราะห์ได้ผลต่างกันด้วย กล่าวคือ ที่ผ่านมาเราวิเคราะห์แบบจำลอง VAR ดังสมการที่ (11.24 ก)

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \quad (11.24\text{ ก})$$

ซึ่งมีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t} และ u_{2t} คือ

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.5056719\times10^{-5} & 2.2337878\times10^{-7} \\ 2.2337878\times10^{-7} & 8.9719295\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

และเราได้ใช้วิธีแยกแบบ Choleski กับเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}$ ข้างต้น ทำให้ได้เมทริกซ์ $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix}$ ซึ่งจะทำให้เราสามารถแสดงให้เห็นว่า เมื่อมีแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของปริมาณเงินแล้ว อัตราการเติบโตของรายได้จะมีการตอบสนองทันที ($Y \rightarrow Z$) ในขณะที่เมื่อมีแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของรายได้แล้ว อัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะ**ไม่มี**การตอบสนองทันที ($Z \nrightarrow Y$)

หากแบบจำลอง VAR มีการเรียงลำดับดังนี้

$$\begin{bmatrix} Z_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.430 \\ 0.631 & 0.090 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{2t} \\ u_{1t} \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

ดังนั้น เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{2t} และ u_{1t} หรือเขียนได้ว่า

$$\boldsymbol{\Sigma_2} = \begin{bmatrix} 8.9719295\times10^{-5} & 2.2337878\times10^{-7} \\ 2.2337878\times10^{-7} & 1.5056719\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

จะต้องถูกนำมาแยกเพื่อหาเมทริกซ์ $\boldsymbol{P_2}$ ด้วยวิธีการแยกแบบ Choleski ซึ่งจะได้

$$\boldsymbol{P_2} = \begin{bmatrix} 0.0094719 & 0 \\ 0.0000236 & 0.0038803 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะทำให้เราสามารถแสดงให้เห็นว่า เมื่อมีแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของรายได้แล้ว อัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะมีการตอบสนองทันที ($Z \rightarrow Y$) ในขณะที่เมื่อมีแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของปริมาณเงินแล้ว อัตราการเติบโตของรายได้จะ**ไม่มี**การตอบสนองทันที ($Y \nrightarrow Z$) และเรายังพบว่าการใช้เมทริกซ์ $\boldsymbol{P_2}$ ในการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉากจะทำ

ให้แรงกระตุ้นจาก Y ที่จะส่งผลต่อ Y ($Y \rightarrow Y$) และแรงกระตุ้นจาก Z ที่จะส่งผลต่อ Z ($Z \rightarrow Z$) ต่างไปจากเดิมอีกด้วย เราสามารถแสดงผลการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและผลกระทบแบบตั้งฉากจากการใช้สมการที่ (11.25) ได้ดังตารางที่ 11.4 และ 11.5 ดังนี้

ตารางที่ 11.4 แสดงการตอบสนองแบบตั้งฉากของอัตราการเติบโตของรายได้ (Z) เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของรายได้ (Z) เพิ่มขึ้นร้อยละ 0.0094719 และเมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (Y) เพิ่มขึ้น 0.0038803

ช่วงเวลา	การตอบสนองของ Z เมื่อเกิดแรงกระตุ้นจาก Z ($Z \rightarrow Z$)	การตอบสนองของ Z เมื่อเกิดแรงกระตุ้นจาก Y ($Y \rightarrow Z$)
0	0.0095	0.0000
1	0.0041	0.0011
2	0.0020	0.0012
3	0.0011	0.0010
4	0.0007	0.0007
5	0.0005	0.0006
6	0.0003	0.0004
7	0.0002	0.0003
8	0.0002	0.0002
9	0.0001	0.0002
10	0.000084	0.0001

ตารางที่ 11.5 แสดงการตอบสนองแบบตั้งฉากของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (*Y*) เมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของรายได้ (*Z*) เพิ่มขึ้นร้อยละ 0.0094719 และเมื่อเกิดแรงกระตุ้นให้อัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (*Y*) เพิ่มขึ้น 0.0038803

ช่วงเวลา	การตอบสนองของ *Y* เมื่อเกิดแรงกระตุ้นจาก *Z* (*Z*→ *Y*)	การตอบสนองของ *Y* เมื่อเกิดแรงกระตุ้นจาก *Y* (*Y*→ *Y*)
0	0.000024	0.0039
1	0.0009	0.0024
2	0.0009	0.0016
3	0.0008	0.0011
4	0.0006	0.0008
5	0.0004	0.0006
6	0.0003	0.0004
7	0.0002	0.0003
8	0.0002	0.0002
9	0.0001	0.0002
10	0.000085	0.0001

ในกรณีที่แบบจำลอง VAR มีอนุกรมเวลามากกว่า 2 ตัว เช่น

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \\ R_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.994 & 0.009 & -0.000015 \\ 0.001 & 1.001 & -0.001 \\ -0.056 & 0.078 & 1.004 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \\ R_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix} \qquad (11.26)$$

โดยที่ R_t คือผลต่างลำดับที่ 1 ของอัตราดอกเบี้ย (หรือกล่าวว่าเป็นการเปลี่ยนแปลงในอัตราดอกเบี้ยก็ได้) ถ้าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t}, u_{2t} และ u_{3t} คือ

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.19\times10^{-5} & 1.14\times10^{-6} & 3.13\times10^{-5} \\ 1.14\times10^{-6} & 0.000102 & 0.000453 \\ 3.13\times10^{-5} & 0.000453 & 0.118052 \end{bmatrix} \qquad (11.27)$$

และเมื่อใช้วิธีแยกแบบ Choleski กับเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}$ ข้างต้น ทำให้ได้เมทริกซ์ $\boldsymbol{P}$ ดังนี้

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.0034553 & 0 & 0 \\ 0.0003309 & 0.0100920 & 0 \\ 0.0090674 & 0.0446277 & 0.3405561 \end{bmatrix} \qquad (11.28)$$

ซึ่งจะทำให้เราสามารถแสดงให้เห็นว่า เมื่อมีแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของปริมาณเงินแล้ว อัตราการเติบโตของรายได้และการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ยจะมีการตอบสนองทันที ($Y \rightarrow Z$ และ $Y \rightarrow R$) และเมื่อมีแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของรายได้จะทำให้การเปลี่ยนแปลงของอัตราดอกเบี้ยจะมีการตอบสนองทันที ($Z \rightarrow R$) แต่ในทางกลับกัน เมื่อมีแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของรายได้แล้ว อัตราการเติบโตของปริมาณเงินจะ**ไม่มี**การตอบสนองทันที ($Z \nrightarrow Y$) รวมทั้งเมื่อมีแรงกระตุ้นในอัตราการเติบโตของอัตราดอกเบี้ยแล้ว อัตราการเติบโตของปริมาณเงิน และอัตราการเติบโตของรายได้จะ**ไม่มี**การตอบสนองทันที ($R \nrightarrow Y$ และ $R \nrightarrow Z$) ดังนั้น การเรียงลำดับตัวแปรจะส่งผลต่อการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉาก นอกจากนี้สิ่งที่ต้องพึงระวังเพิ่มเติมก็คือ หากตัวแปรที่มีความสำคัญมิได้ถูกนำเข้าไปร่วมวิเคราะห์ในแบบจำลอง VAR จะทำให้การวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองทั้งแบบปกติและแบบตั้งฉากอาจไม่สะท้อนค่าที่แท้จริงได้

11.6 การพยากรณ์ (Forecasting)

เราสามารถพยากรณ์อนุกรมเวลาทุกตัวที่อยู่ในแบบจำลอง VAR ได้ เพื่อให้เข้าใจง่าย พิจารณาแบบจำลอง VAR(1) จากสมการที่ (11.18 ก) และ (11.18 ข) ถ้า $t = 1, 2, \ldots, T$ ดังนั้น เราจะเขียนสมการดังกล่าว ณ เวลาที่ T ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_T} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{T-1}} + \boldsymbol{u_T} \tag{11.29 ก}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{T-1} \\ Z_{T-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1T} \\ u_{2T} \end{bmatrix} \tag{11.29 ข}$$

ดังนั้น ณ เวลา $T + 1$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_{T+1}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_T} + \boldsymbol{u_{T+1}} \tag{11.30 ก}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} Y_{T+1} \\ Z_{T+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,T+1} \\ u_{2,T+1} \end{bmatrix} \tag{11.30 ข}$$

เราสามารถใช้แนวคิดเดียวกับบทที่ 7 ในการหาค่าพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้าของอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ ได้ดังนี้

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+1}} = \mathrm{E}(\boldsymbol{X_{T+1}}|\boldsymbol{I_T}) \tag{11.30 ค}$$

โดยที่ $\boldsymbol{I_T}$ คือข่าวสาร ณ ช่วงเวลา T ของอนุกรมเวลาที่อยู่ในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}$ และสมการที่ (11.30 ค) เขียนได้ดังนี้

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+1}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_T} \tag{11.30 ง}$$

และการคำนวณค่าผิดพลาดในการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (1 step ahead forecast error) ของอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}$ จะเขียนแทนด้วย $\boldsymbol{e_T(1)}$ ซึ่งมีวิธีในการคำนวณดังนี้

$$\boldsymbol{e_T(1)} = \boldsymbol{X_{T+1}} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+1}} = \boldsymbol{u_{T+1}} \tag{11.30 จ}$$

ส่วนค่าพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้าและค่าความผิดพลาดในการพยากรณ์ของอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}$ หาได้ด้วยวิธีเดียวกัน ดังแสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_{T+2}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{T+1}} + \boldsymbol{u_{T+2}} \tag{11.31 ก}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+2}} &= \mathrm{E}(\boldsymbol{X_{T+2}}|\boldsymbol{I_T}) = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1}\mathrm{E}(\boldsymbol{X_{T+1}}|\boldsymbol{I_T}) + \mathrm{E}(\boldsymbol{u_{T+2}}) \\ &= \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1}\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+1}} \end{aligned} \tag{11.31 ข}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_T(2)} &= \boldsymbol{X_{T+2}} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+2}} = \boldsymbol{A_1}\left(\boldsymbol{X_{T+1}} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+1}}\right) + \boldsymbol{u_{T+2}} \\ &= \boldsymbol{A_1}(\boldsymbol{e_{T+1}}) + \boldsymbol{u_{T+2}} \\ &= \boldsymbol{A_1 u_{T+1}} + \boldsymbol{u_{T+2}} \end{aligned} \tag{11.31 ค}$$

ค่าพยากรณ์ 3 ช่วงเวลาล่วงหน้าและค่าความผิดพลาดในการพยากรณ์ของอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}$ หาได้ด้วยวิธีเดียวกัน ดังแสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_{T+3}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{T+2}} + \boldsymbol{u_{T+3}} \tag{11.32 ก}$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{T+3} = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_{T+3}|\boldsymbol{I}_T) = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_{T+2}|\boldsymbol{I}_T) + \mathrm{E}(\boldsymbol{u}_{T+3})$$

$$= \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\widehat{\boldsymbol{X}}_{T+2} \quad (11.32 \text{ ข})$$

$$\boldsymbol{e}_T(3) = \boldsymbol{X}_{T+3} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{T+3} = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{X}_{T+2} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{T+2}) + \boldsymbol{u}_{T+3}$$

$$= \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{e}_{T+2}) + \boldsymbol{u}_{T+3} = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_{T+1} + \boldsymbol{u}_{T+2}) + \boldsymbol{u}_{T+3}$$

$$= \boldsymbol{A}_1^2\,\boldsymbol{u}_{T+1} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_{T+2} + \boldsymbol{u}_{T+3} \quad (11.32 \text{ ค})$$

ดังนั้น ค่าพยากรณ์ h ช่วงเวลาล่วงหน้าและค่าความผิดพลาดในการพยากรณ์ของอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}$ แสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X}_{T+h} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{T+(h-1)} + \boldsymbol{u}_{T+h} \quad (11.33 \text{ ก})$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{T+h} = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_{T+h}|\boldsymbol{I}_T) = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\widehat{\boldsymbol{X}}_{T+(h-1)} \quad (11.33 \text{ ข})$$

$$\boldsymbol{e}_T(h) = \boldsymbol{A}_1^{h-1}\,\boldsymbol{u}_{T+1} + \boldsymbol{A}_1^{h-2}\boldsymbol{u}_{T+2} + \cdots + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_{T+h-1} + \boldsymbol{u}_{T+h}$$

$$= \sum_{i=0}^{h-1} \boldsymbol{A}_1^{i}\boldsymbol{u}_{T+h-i} \quad (11.33 \text{ ค})$$ [20]

11.7 การแยกความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดในการพยากรณ์ (Forecast Error Variance Decomposition)

สมมุติให้แบบจำลอง VAR มีอนุกรมเวลา 2 ตัว คือ (Y_t และ Z_t) การแยกความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดในการพยากรณ์จะทำให้เราเห็นว่า ความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของตัวแปรหนึ่ง เช่น Y_{T+h} มาจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Y_t และจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Z_t คิดเป็นสัดส่วนเท่าใด ดังนั้น การวิเคราะห์การแยกความแปรปรวนจะบอกให้ทราบว่า แรงกระตุ้นจากตัวแปรใดในแบบจำลอง VAR ที่จะส่งผลกระทบต่อความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของตัวแปรหนึ่งมากที่สุดนั่นเอง

เราจะใช้ตัวอย่างเดิมคือ เวกเตอร์ $\boldsymbol{X}_t = \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix}$ โดย Y_t คืออัตราการเติบโตของปริมาณเงินและ Z_t คืออัตราการเติบโตของรายได้ ในหัวข้อก่อนหน้านี้เราทราบแล้วว่า เมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์

[20] ดูวิธีการพิสูจน์ในภาคผนวก 11จ

$\boldsymbol{A_1}$ ในแบบจำลอง VAR(1) มีความสัมพันธ์กับเมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ในแบบจำลอง VMA(∞) ดังนี้ $\boldsymbol{\Phi_i} = \boldsymbol{A_1^i}$ (i =0, 1, 2,…) ดังนั้น ค่าความผิดพลาดจากการพยากรณ์ดังสมการที่ (11.30 จ), (11.31 ค), (11.32 ค) และ (11.33 ค) สามารถเขียนได้อีกแบบคือ

$$\boldsymbol{e_T}(\boldsymbol{1}) = \boldsymbol{\Phi_0 u_{T+1}} \tag{11.34 ก}$$

$$\boldsymbol{e_T}(\boldsymbol{2}) = \boldsymbol{\Phi_1 u_{T+1}} + \boldsymbol{\Phi_0 u_{T+2}} \tag{11.34 ข}$$

$$\boldsymbol{e_T}(\boldsymbol{3}) = \boldsymbol{\Phi_2\, u_{T+1}} + \boldsymbol{\Phi_1 u_{T+2}} + \boldsymbol{\Phi_0 u_{T+3}} \tag{11.34 ค}$$

$$\boldsymbol{e_T}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\Phi_{h-1}\, u_{T+1}} + \boldsymbol{\Phi_{h-2} u_{T+2}} + \cdots + \boldsymbol{\Phi_1 u_{T+h-1}} + \boldsymbol{\Phi_0 u_{T+h}}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{h-i}} \boldsymbol{\Phi_i u_{T+h-i}} \tag{11.34 ง}$$

จากตัวอย่างที่แล้ว $A_1 = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}$ ดังนั้น เราจะหาเมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง VMA(∞) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Phi_0} = \boldsymbol{A^0} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi_1} = \boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi_2} = \boldsymbol{A_1^2} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.4239 & 0.0955 \\ 0.3035 & 0.2106 \end{bmatrix}$$

และจากตัวอย่างที่แล้ว เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t} และ u_{2t} เป็นดังนี้

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1.5056719\times10^{-5} & 2.2337878\times10^{-7} \\ 2.2337878\times10^{-7} & 8.9719295\times10^{-5} \end{bmatrix}$$

พิจารณาสมการที่ (11.34 ก) ค่าความผิดพลาดในการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาถัดไปคือ

$$\begin{bmatrix} e_{yT}(1) \\ e_{zT}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,T+1} \\ u_{2,T+1} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนได้ว่า $e_{yT}(1) = u_{1,T+1}$ (11.35 ก)

$$e_{zT}(1) = u_{2,T+1} \tag{11.35 ข}$$

ดังนั้น ค่าความแปรปรวนของความผิดพลาดในการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาถัดไปของอนุกรมเวลา Y และ Z เป็นดังนี้

$$Var\left(e_{yT}(1)\right) = Var\left(u_{1,T+1}\right) = \sigma_1^2 = 1.5056719 \times 10^{-5} \tag{11.35 ค}$$

$$Var\left(e_{zT}(1)\right) = Var\left(u_{2,T+1}\right) = \sigma_2^2 = 8.9719295 \times 10^{-5} \tag{11.35 ง}$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (11.34 ข) ค่าความผิดพลาดที่ในการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาถัดไปคือ

$$\begin{bmatrix} e_{yT}(2) \\ e_{zT}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.090 \\ 0.286 & 0.430 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,T+1} \\ u_{2,T+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1,T+2} \\ u_{2,T+2} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนได้ว่า $$e_{yT}(2) = \left(0.631u_{1,T+1} + 0.090u_{2,T+1}\right) + u_{1,T+2} \tag{11.36 ก}$$

$$e_{zT}(2) = \left(0.286u_{1,T+1} + 0.430u_{2,T+1}\right) + u_{2,T+2} \tag{11.36 ข}$$

ค่าความแปรปรวนของความผิดพลาดในการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาถัดไปของอนุกรมเวลา Y และ Z เป็นดังนี้

$$Var\left(e_{yT}(2)\right) = \left(0.631^2\sigma_1^2 + 0.090^2\sigma_2^2 + 2(0.631)(0.090)\sigma_{12}\right) + \sigma_1^2$$

$$= 1.631^2\sigma_1^2 + 0.090^2\sigma_2^2 + 2(0.631)(0.090)\sigma_{12} \tag{11.36 ค}$$

$$Var\left(e_{zT}(2)\right) = \left(0.286^2\sigma_1^2 + 0.430^2\sigma_2^2 + 2(0.286)(0.430)\sigma_{12}\right) + \sigma_2^2$$

$$= 0.286^2\sigma_1^2 + 1.430^2\sigma_2^2 + 2(0.286)(0.430)\sigma_{12} \tag{11.36 ง}$$

โดยที่ $\sigma_1^2 = Var(u_{1t}),\ \sigma_2^2 = Var(u_{2t})$ และ $\sigma_{12} = Cov(u_{1t}, u_{2t})$

จะเห็นว่า ความแปรปรวนของค่าผิดพลาดในการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาถัดไปของอนุกรมเวลา Y จะไม่สามารถบอกได้ว่ามาจากแรงกระตุ้นของตัวแปรใดในแบบจำลอง VAR เนื่องจากมีอิทธิพลของความแปรปรวนร่วมในแรงกระตุ้นจากตัวแปรทั้งสอง (σ_{12}) ดังนั้น เราจึงไม่นำสมการที่ (11.34 ก)–(11.34 ง) มาใช้แยกความแปรปรวน

เพื่อให้สามารถแยกความแปรปรวนของค่าผิดพลาดในการพยากรณ์ว่าเกิดจากแรงกระตุ้นของตัวแปรใดบ้าง โดยไม่มีอิทธิพลของความแปรปรวนร่วมในแรงกระตุ้น เราสามารถทำได้ด้วยการใช้วิธีการแยกแบบ Choleski ดังจะอธิบายต่อไปนี้

เราทราบแล้วว่า เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t} และ u_{2t} ($\boldsymbol{\Sigma}$) สามารถแยกเป็นดังนี้

$$\boldsymbol{PP'} = \boldsymbol{\Sigma}$$

โดยที่ $\boldsymbol{P}$ คือเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง และเราสามารถเขียนได้ว่า $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{WD}$ ถ้าเรานำ $\boldsymbol{WW^{-1}}$ (โดยที่ $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{PD^{-1}}$) ไปแทรกในสมการที่ (11.34 ก)–(11.34 ง) ดังนี้

$$\boldsymbol{e_T(1) = \Phi_0 WW^{-1} u_{T+1}}$$

$$= \boldsymbol{\Theta_0 \omega_{T+1}} \quad (11.37 \text{ ก})$$

$$\boldsymbol{e_T(2) = \Phi_1 WW^{-1} u_{T+1} + \Phi_0 WW^{-1} u_{T+2}}$$

$$= \boldsymbol{\Theta_1 \omega_{T+1} + \Theta_0 \omega_{T+2}} \quad (11.37 \text{ ข})$$

$$\boldsymbol{e_T(3) = \Phi_2\, WW^{-1} u_{T+1} + \Phi_1 WW^{-1} u_{T+2} + \Phi_0 WW^{-1} u_{T+3}}$$

$$= \boldsymbol{\Theta_2 \omega_{T+1} + \Theta_1 \omega_{T+2} + \Theta_0 \omega_{T+3}} \quad (11.37 \text{ ค})$$

$$\boldsymbol{e_T(h) = \Phi_{h-1}\, WW^{-1} u_{T+1} + \Phi_{h-2} WW^{-1} u_{T+2} + \cdots + \Phi_1 WW^{-1} u_{T+h-1}}$$

$$\boldsymbol{+ \Phi_0 WW^{-1} u_{T+h}}$$

$$= \boldsymbol{\Theta_{h-1} \omega_{T+1} + \Theta_{h-2} \omega_{T+1} + \cdots + \Theta_1 \omega_{T+h-1} + \Theta_0 \omega_{T+h}}$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{h-1}} \boldsymbol{\Theta_i \omega_{T+h-i}} \quad (11.37 \text{ ง})$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Theta_i = \Phi_i P}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ และ $\boldsymbol{\omega_t = D^{-1} \varepsilon_t}$ โดยที่ $\boldsymbol{W^{-1} u_t = \varepsilon_t}$ และเราได้พิสูจน์ไว้แล้วในสมการที่ (11.23 ฉ) ว่า เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ ω_{1t} และ ω_{2t} คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)

$$\boldsymbol{\Sigma_\omega} = \boldsymbol{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.23 \text{ ฉ})$$

จากตัวอย่างที่แล้ว เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t} และ u_{2t} คือ

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}1.5056719\times10^{-5} & 2.2337878\times10^{-7}\\ 2.2337878\times10^{-7} & 8.9719295\times10^{-5}\end{bmatrix}$$

จะมีเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.0038803 & 0\\ 0.0000576 & 0.0094719\end{bmatrix}$ ที่ทำให้ $\boldsymbol{PP'}=\boldsymbol{\Sigma}$ ดังนั้น เราจะสามารถหาค่า $\boldsymbol{\Theta_0},\boldsymbol{\Theta_1},\boldsymbol{\Theta_2},\ldots$ ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Theta_0}=\boldsymbol{\Phi_0P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0038803 & 0\\ 0.0000576 & 0.0094719\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0038803 & 0\\ 0.0000576 & 0.0094719\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Theta_1}=\boldsymbol{\Phi_1P}=\begin{bmatrix}0.631 & 0.090\\ 0.286 & 0.430\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0038803 & 0\\ 0.0000576 & 0.0094719\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.002454 & 0.000852\\ 0.001135 & 0.004073\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Theta_2}=\boldsymbol{\Phi_2P}=\begin{bmatrix}0.4239 & 0.0955\\ 0.3035 & 0.2106\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.0038803 & 0\\ 0.0000576 & 0.0094719\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.001650 & 0.000904\\ 0.001190 & 0.001995\end{bmatrix}$$

พิจารณาสมการที่ (11.37 ก) ค่าความผิดพลาดที่ในการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาถัดไปคือ

$$\begin{bmatrix}e_{yT}(1)\\ e_{zT}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0038803 & 0\\ 0.0000576 & 0.0094719\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{1,T+1}\\ \omega_{2,T+1}\end{bmatrix}$$

หรือเขียนได้ว่า $e_{yT}(1)=0.0038803\omega_{1,T+1}$ (11.38 ก)

$$e_{zT}(1)=0.0000576\omega_{1,T+1}+0.0094719\omega_{2,T+1} \quad (11.38\text{ ข})$$

ดังนั้น ค่าความแปรปรวนของความผิดพลาดในการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาถัดไปของอนุกรมเวลา Y และ Z เป็นดังนี้

$$Var\left(e_{yT}(1)\right)=0.0038803^2Var(\omega_{1,T+1})=1.506\times10^{-5} \quad (11.38\text{ ค})$$

$$\begin{aligned}Var(e_{zT}(1)) &= 0.0000576^2Var(\omega_{1,T+1})+0.0094719^2Var(\omega_{2,T+1})\\ &\quad +2(0.0000576)(0.0094719)Cov(\omega_{1,T+1},\omega_{2,T+1})\\ &= 0.0000576^2(1)+0.0094719^2(1)+2(0.0000576)(0.0094719)(0)\\ &= 0.0000576^2(1)+0.0094719^2(1)\\ &= 8.972\times10^{-5}\end{aligned} \quad (11.38\text{ ง})$$

จะเห็นว่าการคำนวณความแปรปรวนดังสมการที่ (11.38 ค) และ (11.38 ง) จะสามารถแยกได้ว่าความแปรปรวนของค่าความแปรปรวนของความผิดพลาดในการพยากรณ์ 1 ช่วงเวลาถัดไปของอนุกรมเวลา Y และ Z มาจากแรงกระตุ้นตัวใดได้อย่างชัดเจน โดยไม่มีความแปรปรวนร่วมเข้ามาเกี่ยวข้อง

เมื่อพิจารณาสมการที่ (11.38 ค) จะอธิบายได้ว่า ความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (Y_{T+1}) มาจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Y คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ $\frac{1.506\times10^{-5}}{1.506\times10^{-5}}\times100$ = ร้อยละ 100 และจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Z คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 0

เมื่อพิจารณาสมการที่ (11.38 ง) จะอธิบายได้ว่า ความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของอัตราการเติบโตของรายได้ 1 ช่วงเวลาล่วงหน้า (Z_{T+1}) มาจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Y คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 0.0037 $\left(\text{คำนวณจาก } \frac{0.0000576^2}{8.972\times10^{-5}}\times100\right)$และจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Z คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 99.9963 $\left(\text{คำนวณจาก } \frac{0.0094719^2}{8.972\times10^{-5}}\times100\right)$

ส่วนค่าความผิดพลาดที่ในการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาถัดไป จะคำนวณจากสมการที่ (11.37 ข) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} e_{yT}(2) \\ e_{zT}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.002454 & 0.000852 \\ 0.001135 & 0.004073 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,T+1} \\ \omega_{2,T+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0038803 & 0 \\ 0.0000576 & 0.0094719 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,T+2} \\ \omega_{2,T+2} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$e_{yT}(2) = \left(0.002454\omega_{1,T+1} + 0.000852\omega_{2,T+1}\right) + 0.00388034\omega_{1,T+2} \qquad (11.39\text{ ก})$$

$$e_{zT}(2) = \left(0.001135\omega_{1,T+1} + 0.004073\omega_{2,T+1}\right)$$
$$+\left(0.0000576\omega_{1,T+2} + 0.0094719\omega_{2,T+2}\right) \qquad (11.39\text{ ข})$$

ดังนั้น ค่าความแปรปรวนของความผิดพลาดในการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาถัดไปของอนุกรมเวลา Y และ Z เป็นดังนี้

$$Var\left(e_{yT}(2)\right) = 0.002454^2\text{Var}(\omega_{1,T+1}) + 0.000852^2\text{Var}(\omega_{2,T+1})$$
$$+2(0.002454)(0.000852)\text{Cov}(\omega_{1,T+1},\omega_{2,T+1})$$
$$+0.0038803^2 Var(\omega_{1,T+2})$$
$$= 0.002454^2(1)+0.000852^2(1)$$
$$+2(0.002454)(0.000852)(0) + 0.0038803^2(1)$$
$$= (0.002454^2 + 0.000852^2) + 0.0038803^2$$
$$= 2.18047\times 10^{-5} \tag{11.39 ค}$$

$$Var\left(e_{yT}(2)\right) = 0.001135^2\text{Var}(\omega_{1,T+1}) + 0.004073^2\text{Var}(\omega_{2,T+1})$$
$$+2(0.001135)(0.004073)\text{Cov}(\omega_{1,T+1},\omega_{2,T+1})$$
$$+0.0000576^2\text{Var}(\omega_{1,T+2}) + 0.0094719^2\text{Var}(\omega_{2,T+2})$$
$$+2(0.0000576)(0.0094719)\text{Cov}(\omega_{1,T+2},\omega_{2,T+2})$$
$$= 0.001135^2(1)+0.004073^2(1)+2(0.001135)(0.004073)(0)$$
$$+0.0000576^2(1)+0.0094719^2(1)+2(0.0000576)(0.0094719)(0)$$
$$= \left(0.001135^2+0.004073^2\right) + \left(0.0000576^2+0.0094719^2\right)$$
$$= 1.075978\times 10^{-4} \tag{11.39 ง}$$

ทำนองเดียวกัน จะเห็นว่า การคำนวณค่าความแปรปรวนของความผิดพลาดในการพยากรณ์ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า ด้วยวิธีนี้จะสามารถแยกได้อย่างชัดเจนว่า มาจากแรงกระตุ้นจากอนุกรมเวลาใดบ้าง โดยไม่มีความแปรปรวนร่วมเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ดังจะอธิบายดังนี้

เมื่อพิจารณาสมการที่ (11.39 ค) จะอธิบายได้ว่า ความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า (Y_{T+2}) มาจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Y คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 96.67 $\left(\text{คำนวณจาก } \frac{0.002454^2+0.00388^2}{2.18047\times10^{-5}}\times100\right)$ และจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Z คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 3.33 $\left(\text{คำนวณจาก } \frac{0.000852^2}{2.18047\times10^{-5}}\times100\right)$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (11.38 ง) จะอธิบายได้ว่า ความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของอัตราการเติบโตของรายได้ 2 ช่วงเวลาล่วงหน้า (Z_{T+2}) มาจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Y คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 1.20 $\left(\text{คำนวณจาก } \frac{0.001135^2+0.0000576^2}{1.075978\times 10^{-4}}\times 100\right)$ และจากแรงกระตุ้น (หรือเหตุการณ์ไม่คาดฝัน) ของ Z คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 99.80 $\left(\text{คำนวณจาก } \frac{0.004073^2+0.0094719^2}{1.075978\times 10^{-4}}\times 100\right)$

ทำนองเดียวกัน เราก็สามารถหาความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของอัตราการเติบโตของปริมาณเงินและของอัตราการเติบโตของรายได้ 3, 4, 5, … ช่วงเวลาล่วงหน้าด้วยวิธีเดียวกันนี้ ผลการคำนวณแสดงในตารางที่ 11.6 และ 11.7 ตามลำดับ[21]

ตารางที่ 11.6 แสดงการแยกความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของอัตราการเติบโตของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน 1, 2, 3, …, 10 ช่วงเวลาล่วงหน้า

ช่วงเวลา	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราการเติบโตของปริมาณเงิน (Y)	สัดส่วนที่มาจากแรงกระตุ้นของ Y (ร้อยละ)	สัดส่วนที่มาจากแรงกระตุ้นของ Z (ร้อยละ)
1	0.00388	100	0
2	0.00467	96.6551	3.3449
3	0.00503	93.8864	6.1136
4	0.00522	92.2375	7.7625
5	0.00531	91.3411	8.6589
6	0.00536	90.8688	9.1312
7	0.00539	90.6228	9.3772
8	0.00540	90.4951	9.5049
9	0.00541	90.4290	9.5710
10	0.00541	90.3948	9.6052

ที่มา : จากการคำนวณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป

[21]ตัวเลขในตารางที่ 11.6 และ 11.7 คำนวณจากการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Eview ซึ่งมีการใช้ทศนิยมจำนวนมาก อาจทำให้ผลการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขอาจได้ผลลัพธ์ต่างกันในทศนิยมท้าย ๆ

ตารางที่ 11.7 แสดงการแยกความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของอัตราการเติบโตของอัตราการเติบโตของรายได้ 1, 2, 3, …, 10 ช่วงเวลาล่วงหน้า

ช่วงเวลา	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอัตราการเติบโตของรายได้ (*Z*)	สัดส่วนที่มาจากแรงกระตุ้นของ *Y* (ร้อยละ)	สัดส่วนที่มาจากแรงกระตุ้นของ *Z* (ร้อยละ)
1	0.00947	0.0037	99.9963
2	0.01037	1.2020	98.7980
3	0.01063	2.3987	97.6013
4	0.01073	3.1927	96.8073
5	0.01078	3.6496	96.3504
6	0.01081	3.8976	96.1024
7	0.01082	4.0287	95.9713
8	0.01082	4.0973	95.9027
9	0.01083	4.1330	95.8670
10	0.01083	4.1516	95.8484

ที่มา : จากการคำนวณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป

อย่างไรก็ดี สัดส่วนความแปรปรวนข้างต้นคำนวณภายใต้วิธีการแยกแบบ Choleski นั่นคือ สัดส่วนความแปรปรวนอาจมีค่าเปลี่ยนไปได้หากมีตัวแปรเพิ่มขึ้นหรือมีการเปลี่ยนแปลงลำดับของตัวแปร ดังเช่นการวิเคราะห์แรงกระตุ้นและการตอบสนองแบบตั้งฉาก ดังนั้น การวิเคราะห์การแยกความแปรปรวนในหัวข้อข้างต้นอยู่ภายใต้เงื่อนไขว่ามีจำนวนอนุกรมเท่าที่อยู่ในแบบจำลอง VAR เท่านั้น

11.8 ความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger (Granger Causality)

ในการศึกษาการแยกความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของตัวแปรในแบบจำลอง VAR สามารถบอกได้ว่า ตัวแปรใดเป็นตัวแปรภายใน (Endogenous Variables) หรือเป็นตัวแปรภายนอก ตัวอย่างเช่น ถ้าเราพบว่าความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ของตัวแปร Z_{t+h} (เมื่อ $h = 1, 2, \ldots$) ที่เกิดจากเหตุการณ์ไม่คาดฝันของ Y_t คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 0 แล้ว เรากล่าวได้ว่าอนุกรม Z คือตัวแปรภายนอก แต่หากพบว่าความแปรปรวนของค่าผิดพลาดจากการพยากรณ์ Z_{t+h} (เมื่อ $h = 1, 2, \ldots$) ที่เกิดจากเหตุการณ์ไม่คาดฝันของ Y_t คิดเป็นสัดส่วนร้อยละ 100 แล้ว เรากล่าวได้ว่าอนุกรมเวลา Z คือตัวแปรภายในอย่างแท้จริง (Entirely Endogenous Variable)[22] และในกรณีนี้อนุกรมเวลา Y_t สามารถช่วยให้การพยากรณ์อนุกรมเวลา Z_t มีความถูกต้องมากขึ้น

ยังมีอีกวิธีหนึ่งที่สามารถให้คำตอบได้ว่า อนุกรมเวลาหนึ่งมีส่วนช่วยให้ผลการพยากรณ์ของอนุกรมเวลาอื่นดีขึ้นหรือไม่ วิธีดังกล่าวก็คือ การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger[23] โดยวิธีนี้จะบอกว่า หากอนุกรมเวลาตัวที่ 1 เป็นสาเหตุที่จะส่งผลกระทบต่ออีกอนุกรมเวลาตัวที่ 2 ตามแนวคิดของ Granger แล้ว อนุกรมเวลาตัวที่ 1 จะมีส่วนช่วยให้การพยากรณ์อนุกรมเวลาตัวที่ 2 แม่นยำขึ้น เช่น ถ้าอนุกรมเวลา Z_t เป็นสาเหตุที่จะส่งผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t นั่นหมายถึงอนุกรมเวลา Z_t จะสามารถช่วยให้ผลการพยากรณ์อนุกรมเวลา Y_t ถูกต้องมากขึ้นด้วย[24] นอกจากนี้วิธีของ Granger ยังไม่ขึ้นอยู่กับว่าตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของ 2 สมการใด ๆ จะต้องไม่มีความสัมพันธ์กัน (หรือตั้งฉากกัน) อีกด้วย ทำให้วิธีนี้ไม่ขึ้นอยู่กับการเรียงลำดับของตัวแปรดังเช่นวิธีการแยกความแปรปรวนในหัวข้อก่อนหน้านี้ รายละเอียดของวิธีการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger อธิบายได้ดังนี้

กำหนดให้เวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ ประกอบด้วยอนุกรมเวลา Y_t และ Z_t เป็น I(0) ดังนั้นแบบจำลอง VAR(p) ในรูปเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ เขียนได้ดังนี้

---

[22] Enders, W., *Applied Econometric Time Series.* 3rd edition. (John Wiley & Sons, Inc., 2010), p. 314.
[23] Granger, C. W. J., Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica* 37 (1969): 424–438.
[24] เมื่อกรณีนี้เกิดขึ้น เรากล่าวได้ว่า อนุกรมเวลา Z_t คือตัวแปรภายนอก (Exogenous Variable)

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{A_2 X_{t-2}} + \ldots + \boldsymbol{A_p X_{t-p}} + \boldsymbol{u_t}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$Y_t = a_{10} + a_{11,1}Y_{t-1} + a_{12,1}Z_{t-1} + a_{11,2}Y_{t-2} + a_{12,2}Z_{t-2} + \ldots + a_{11,p}Y_{t-p} + a_{12,p}Z_{t-p} + u_{1t} \quad (11.40\text{ ก})$$

$$Z_t = a_{20} + a_{21,1}Y_{t-1} + a_{22,1}Z_{t-1} + a_{21,2}Y_{t-2} + a_{22,2}Z_{t-2} + \ldots + a_{21,p}Y_{t-p} + a_{22,p}Z_{t-p} + u_{2t} \quad (11.40\text{ ข})$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_0} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} a_{11,2} & a_{12,2} \\ a_{21,2} & a_{22,2} \end{bmatrix}$, …,

$\boldsymbol{A_p} = \begin{bmatrix} a_{11,p} & a_{12,p} \\ a_{21,p} & a_{22,p} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u_t} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$

สมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองที่ใช้ทดสอบว่า อนุกรมเวลา Z_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger หรือไม่ เป็นดังนี้

H_0: $a_{12,1} = a_{12,2} = \ldots = a_{12,p} = 0$ (11.40 ค)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวภายใต้สมมุติฐานหลัก (11.40 ค) ไม่เป็นศูนย์ (11.40 ง)

หากเราปฏิเสธสมมุติฐานหลักแล้ว จะหมายถึงอนุกรมเวลา Z_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger นั่นคือ อนุกรมเวลา Z_t มีส่วนช่วยในการพยากรณ์อนุกรมเวลา Y_t ในทางกลับกัน หากเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก จะหมายถึงอนุกรมเวลา Z_t มิได้เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger นั่นคือ อนุกรมเวลา Z_t ไม่มีส่วนช่วยในการพยากรณ์อนุกรมเวลา Y_t

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานหลัก (11.40 ค) คือ

$$F^* = \frac{(R_{ur}^2 - R_r^2)/q}{(1 - R_{ur}^2)/(n-K)} \quad (11.41)$$[25]

[25] นอกจากค่าสถิติ F แล้ว เราอาจใช้ค่าสถิติ Wald ที่จะแสดงในสมการที่ (11.44) ในการทดสอบสมมุติฐาน (11.40 ค) ก็ได้

โดยที่ q ก็คือจำนวนพารามิเตอร์ที่ถูกจำกัดตามสมมุติฐานหลัก (10.40 ค)

K คือจำนวนพารามิเตอร์ในแบบจำลองที่ไม่ใส่ข้อจำกัดซึ่งก็คือแบบจำลอง (11.40 ก) นั่นเอง

R_r^2 คือค่า R^2 จากสมการถดถอยที่ค่าพารามิเตอร์ถูกจำกัดให้เป็นไปตามสมมุติฐานหลัก

R_{ur}^2 ก็คือค่า R^2 จากแบบจำลองที่ไม่ใส่ข้อจำกัดซึ่งก็คือแบบจำลอง (11.40 ก)

นอกจากนี้เรายังสามารถทดสอบว่า อนุกรมเวลา Y_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Z_t ตามแนวคิดของ Granger หรือไม่ ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองต่อไปนี้

H_0: $a_{21,1} = a_{21,2} = \ldots = a_{21,p} = 0$ (11.42 ก)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวภายใต้สมมุติฐานหลัก (11.42 ก)ไม่เป็นศูนย์ (11.42 ข)

ถ้าเราปฏิเสธสมมุติฐานหลัก (11.42 ก) นั่นหมายถึงอนุกรมเวลา Y_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Z_t ดังนั้น อนุกรมเวลา Y_t จะช่วยให้ผลการพยากรณ์ Z_t ได้แม่นยำขึ้น ส่วนค่าสถิติที่ใช้ทดสอบสมมุติฐานหลัก (11.42 ก) สามารถใช้แนวคิดของค่าสถิติ F ดังที่เคยกล่าวไว้เมื่อครู่นี้[26]

- **การทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger (Granger Causality) เมื่อมีตัวแปรมากกว่า 2 ตัว**

กำหนดให้อนุกรมเวลา Y_t, Z_t, R_t เป็น I(0) พิจารณาแบบจำลอง VAR(p) ของตัวแปรทั้งสามดังต่อไปนี้

$$Y_t = a_{10} + a_{11,1} Y_{t-1} + a_{12,1} Z_{t-1} + a_{13,1} R_{t-1} + a_{11,2} Y_{t-2} + a_{12,2} Z_{t-2} + a_{13,2} R_{t-2} + \ldots$$
$$+ a_{11,p} Y_{t-p} + a_{12,p} Z_{t-p} + a_{13,p} R_{t-p} + u_{1t} \quad (11.43\ ก)$$

$$Z_t = a_{20} + a_{21,1} Y_{t-1} + a_{22,1} Z_{t-1} + a_{23,1} R_{t-1} + a_{21,2} Y_{t-2} + a_{22,2} Z_{t-2} + a_{23,2} R_{t-2} + \ldots$$
$$+ a_{21,p} Y_{t-p} + a_{22,p} Z_{t-p} + a_{23,p} R_{t-p} + u_{2t} \quad (11.43\ ข)$$

[26] ค่าสถิติ Wald ดังสมการที่ (11.44) ก็สามารถใช้ได้เช่นกัน

$$R_t = a_{30} + a_{31,1} Y_{t-1} + a_{32,1} Z_{t-1} + a_{33,1} R_{t-1} + a_{31,2} Y_{t-2} + a_{32,2} Z_{t-2} + a_{33,2} R_{t-2} + \ldots$$

$$+ a_{31,p} Y_{t-p} + a_{32,p} Z_{t-p} + a_{33,p} R_{t-p} + u_{3t} \qquad (11.43 \text{ ค})$$

สมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองที่ใช้ทดสอบว่า อนุกรมเวลา R_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t และ Z_t ตามแนวคิดของ Granger หรือไม่ เป็นดังนี้

H_0: $a_{13,1} = a_{13,2} = \ldots = a_{13,p} = a_{23,1} = a_{23,2} = \ldots = a_{23,p} = 0$ (11.43 ง)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวภายใต้สมมุติฐานหลัก (11.43 ง) ไม่เป็นศูนย์ (11.43 จ)

การสรุปผลการทดสอบสมมุติฐานจะเป็นในลักษณะเดียวกับที่ได้อธิบายไว้แล้ว กล่าวคือ หากเราปฏิเสธสมมุติฐานหลักแล้ว จะหมายถึงอนุกรมเวลา R_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t และ Z_t ตามแนวคิดของ Granger นั่นคือ อนุกรมเวลา R_t มีส่วนช่วยในการพยากรณ์อนุกรมเวลา Y_t และ Z_t

ในกรณีนี้เราจะไม่สามารถใช้ค่าสถิติ F ในการทดสอบสมมุติฐาน (11.43 ง) ได้ ทั้งนี้เพราะสมมุติฐานนี้มีทั้งค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (11.43 ก) และ (11.43 ข) เพื่อให้สามารถทดสอบสมมุติฐานนี้ได้ เราต้องประมาณค่าพารามิเตอร์สมการที่ (11.43 ก)–(11.43 ค) ด้วยวิธี SUR (Seemingly Unrelated Regression) ซึ่งเป็นวิธีที่จะให้ผลการคำนวณตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 สมการด้วยการคำนวณเพียงครั้งเดียว[27] และต้องใช้ค่าสถิติ Wald (Wald Statistics) ในการทดสอบสมมุติฐาน สูตรในการคำนวณแสดงได้ดังนี้

$$\text{Wald Statistics} = (\boldsymbol{Cb} - \boldsymbol{c})'\left[\boldsymbol{C}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \otimes \hat{\Sigma}]\,\boldsymbol{C}'\right]^{-1}(\boldsymbol{Cb} - \boldsymbol{c}) \qquad (11.44)$$[28]

---

[27] สำหรับผู้สนใจสามารถอ่านได้ใน Wooldridge, J. F., *Econometrics Analysis of Cross Section and Panel Data* (London: The MIT Press, 2002), pp. 163–168.

[28] สัญลักษณ์ $\otimes$ คือการคูณเมทริกซ์แบบ Kronecker (Kronecker Product) เช่น

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{bmatrix} & 2\begin{bmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{bmatrix}\\3\begin{bmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix}0 & 5\\6 & 7\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 5 & 0 & 10\\6 & 7 & 12 & 14\\0 & 15 & 0 & 20\\18 & 21 & 24 & 28\end{bmatrix}$$

โดยที่ $\boldsymbol{C}$ คือเมทริกซ์ของค่าคงที่มีมิติ $q\times(k^2p+k)$ เพื่อใช้แสดงให้เป็นไปตามข้อจำกัดของสมมุติฐานหลัก (11.43 ง) (q คือจำนวนสมการที่แสดงข้อจำกัดภายใต้สมมุติฐานหลัก (11.43 ง) และ k คือจำนวนอนุกรมเวลาในแบบจำลอง Var(p))

$\boldsymbol{c}$ คือเวกเตอร์ที่แสดงค่าคงที่ภายใต้สมมุติฐานหลัก (11.43 ง) ซึ่งในที่นี้ก็คือศูนย์

$\boldsymbol{b}$ คือเวกเตอร์ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดในแบบจำลอง VAR(p)

$\boldsymbol{X}$ คือเมทริกซ์ของค่าตัวแปรอิสระในสมการหนึ่งของแบบจำลอง VAR(p)[29]

$\widehat{\Sigma}$ คือตัวประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t}, u_{2t} และ u_{3t} ในแบบจำลอง VAR(p)

ค่าสถิติ Wald จะมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ โดยองศาของความเป็นอิสระ (Degree of Freedom) คือจำนวนสมการที่แสดงข้อจำกัดภายใต้สมมุติฐานหลัก (q) นั่นเอง

__ตัวอย่าง__ ถ้ากำหนดให้ p = 2 สมการที่ (11.43 ก)–(11.43 ค) จะเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = a_{10} + a_{11,1} Y_{t-1} + a_{12,1}Z_{t-1} + a_{13,1} R_{t-1} + a_{11,2} Y_{t-2} + a_{12,2}Z_{t-2} + a_{13,2}R_{t-2} + u_{1t} \tag{11.45 ก}$$

$$Z_t = a_{20} + a_{21,1} Y_{t-1} + a_{22,1}Z_{t-1} + a_{23,1} R_{t-1} + a_{21,2} Y_{t-2} + a_{22,2}Z_{t-2} + a_{23,2}R_{t-2} + u_{2t} \tag{11.45 ข}$$

$$R_t = a_{30} + a_{31,1} Y_{t-1} + a_{32,1}Z_{t-1} + a_{33,1} R_{t-1} + a_{31,2} Y_{t-2} + a_{32,2}Z_{t-2} + a_{33,2}R_{t-2} + u_{3t} \tag{11.45 ค}$$

ดังนั้น สมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองที่ใช้ทดสอบว่า อนุกรมเวลา R_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t และ Z_t ตามแนวคิดของ Granger หรือไม่ เป็นดังนี้

$$H_0: a_{13,1} = a_{13,2} = a_{23,1} = a_{23,2} = 0 \tag{11.45 ง}$$

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวภายใต้สมมุติฐานหลัก (11.45 ง)ไม่เป็นศูนย์ (11.45 จ)

สมมุติฐานหลักตามสมการที่ (11.45 ง) เขียนใหม่ได้ดังนี้

[29] เนื่องจากแบบจำลอง VAR จะมีตัวแปรอิสระเหมือนกัน จึงพิจารณาจากสมการใดก็ได้ในแบบจำลอง VAR

$$\text{H}_0\text{: } \boldsymbol{C\beta} = \boldsymbol{c} \qquad (11.45\text{ ฉ})$$

โดยที่ $\boldsymbol{\beta}$ คือเวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดในแบบจำลอง VAR(2) ซึ่งมีจำนวน 21 ตัว

$\boldsymbol{c}$ คือเวกเตอร์ที่แสดงถึงค่าคงที่ภายใต้สมมุติฐาน (11.45 ง)

$\boldsymbol{C}$ คือเมทริกซ์ของค่าคงที่เพื่อใช้แสดงให้เป็นไปตามข้อจำกัดของสมมุติฐานหลัก (11.45 ง) และเนื่องจากข้อจำกัดตามสมมุติฐานหลัก (11.45 ง) มีจำนวน 4 สมการ นั่นคือ จำนวนแถวของ $\boldsymbol{C}$ ต้องเท่ากับ 4 (q = 4) และจำนวนอนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR(2) คือ 3 อนุกรมเวลา นั่นคือ k = 3 และ p = 2 ดังนั้น จำนวนหลักของเมทริกซ์ $\boldsymbol{C}$ คือ $k^2p+k = k(kp + 1) = 3(3\times 2+1) = 21$ ซึ่งก็คือจำนวนพารามิเตอร์ทั้งหมดในแบบจำลอง VAR(2) นั่นเอง เราสามารถแสดงการเขียนเมทริกซ์ $\boldsymbol{C}$ เวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ และ $\boldsymbol{c}$ ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 001 & 000 & 0 & 000 & 000 & 0 & 000 & 000 \\ 0 & 000 & 001 & 0 & 000 & 000 & 0 & 000 & 000 \\ 0 & 000 & 000 & 0 & 001 & 000 & 0 & 000 & 000 \\ 0 & 000 & 000 & 0 & 000 & 001 & 0 & 000 & 000 \end{bmatrix}_{4\times 21},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{11,1} \\ a_{12,1} \\ a_{13,1} \\ a_{11,2} \\ a_{12,2} \\ a_{13,2} \\ a_{20} \\ a_{21,1} \\ a_{22,1} \\ a_{23,1} \\ a_{21,2} \\ a_{22,2} \\ a_{23,2} \\ a_{30} \\ a_{31,1} \\ a_{32,1} \\ a_{33,1} \\ a_{31,2} \\ a_{32,2} \\ a_{33,2} \end{bmatrix}_{21\times 1}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

จากนั้นเราจะใช้สมการที่ (11.44) ในการคำนวณค่าสถิติ Wald ถ้ากำหนดให้ข้อมูลอนุกรมเวลาที่รวบรวมมามีจำนวนทั้ง 100 ข้อมูล (t =1, 2, …, 100) จากการใช้แบบจำลอง VAR(2) เราสามารถแสดงการเขียนเมทริกซ์ X ซึ่งจะเป็นเมทริกซ์ของตัวแปรอิสระในสมการที่ (11.45 ก) ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & Y_2 & Z_2 & R_2 & Y_1 & Z_1 & R_1 \\ 1 & Y_3 & Z_3 & R_3 & Y_2 & Z_2 & R_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Y_{99} & Z_{99} & R_{99} & Y_{98} & Z_{98} & R_{98} \end{bmatrix}_{98\times 7}$$

ดังนั้น $\boldsymbol{X'X}$ คือเมทริกซ์ที่มีขนาด 7×7 และ $\hat{\sum}$ คือตัวประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u_{1t}, u_{2t} และ u_{3t} ซึ่งจะมีขนาด 3×3 ดังนั้น$[(\boldsymbol{X'X})^{-1}\otimes\hat{\sum}]$ จะเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 21×21 ส่วน $\boldsymbol{b}$ คือเวกเตอร์ของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ ซึ่งจะมีขนาด 21×1 และเมื่อเราแทนค่าลงในสมการที่ (11.44) จะได้ผลลัพธ์เป็นค่าสเกลาร์ (Scalar) ซึ่งค่านี้ก็คือค่าสถิติ Wald ที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ องศาของความเป็นอิสระคือ 4

บทที่ 12

การประมาณความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว : วิธีใช้หลายสมการ

ในบทที่10 เราได้ศึกษาการประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (cointegrating vector) ด้วยการใช้สมการเดียว (single equation) ซึ่งวิธีนี้จะทำให้ได้เวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวนเพียง 1 แบบ และจะเป็นรูปแบบที่เรากำหนดไว้ก่อนล่วงหน้าตามทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์หรือทฤษฎีการเงิน เช่น มีการกำหนดให้ $\ln(Con_t)$ คือตัวแปรตามที่ถูกทำให้เป็นปกติ (Normalized Variable) และตัวแปรอิสระคือ Inf_t ในบทนี้เราจะศึกษาการประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวอีกวิธีหนึ่ง คือการใช้หลายสมการ (Multiple Equations) วิธีดังกล่าวจะทำให้เราสามารถประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวได้มากกว่า 1 แบบ เพียงแต่เราต้องมีการทดสอบสมมุติฐานว่า จำนวนรูปแบบของเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมีจำนวนเท่าใด อีกทั้งยังไม่ต้องมีการกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวไว้ก่อนล่วงหน้าด้วย

การประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจากการใช้หลายสมการสามารถทำได้หลายวิธี แต่หนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึงวิธีที่มีการประยุกต์ใช้กับงานวิจัยทางด้านเศรษฐศาสตร์และทางด้านการเงินอย่างแพร่หลายมากที่สุด ซึ่งก็คือวิธีการของ Johansen (1988)[1] เท่านั้น วิธีนี้จะนำแนวคิดของแบบจำลอง VAR มาใช้ในการประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์ดุลยภาพระยะยาว

รายละเอียดของบทนี้จะแบ่งเป็น**หัวข้อที่ 1** จะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลอง VAR และแบบจำลอง VECM (Vector Error Correction Model) ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญ

---

[1] Johansen, S., Statistical analysis of cointegration vectors, *Journal of Economic Dynamic and Control* 12 (1988): 231-254.

ในการเข้าใจวิธีการของ Johansen (1988) จากนั้นใน**หัวข้อที่ 2** เราจะมาดูว่า เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (ซึ่งเขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\beta}$) และเวกเตอร์ที่แสดงการปรับตัวระยะสั้นให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (ซึ่งเขียนแทนด้วย $\boldsymbol{\alpha}$) เกี่ยวข้องกับแบบจำลอง VECM อย่างไร **หัวข้อที่ 3** จะกล่าวถึงการมีค่าคงที่และแนวโน้มกำหนดได้ (Deterministic Trend) อยู่ในอนุกรมเวลาที่เป็น I(1) แล้วจะทำให้เวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวเป็นอย่างไร **หัวข้อที่ 4** เป็นวิธีการประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวด้วยการใช้หลายสมการ **หัวข้อที่ 5** จะพูดถึงการทดสอบสมมุติฐานเพื่อหาข้อสรุปของจำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลย–ภาพระยะยาว **หัวข้อที่ 6** จะกล่าวถึงการทดสอบความสัมพันธ์เชิงเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger เมื่อตัวแปรเป็น I(1) ใน**หัวข้อที่ 7** เราจะมาดูวิธีการพยากรณ์อนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ ด้วยการใช้แบบจำลอง VECM และ**หัวข้อที่ 8** จะเป็นตัวอย่างในการวิเคราะห์แบบจำลอง VECM

12.1 ความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลอง VAR และแบบจำลองเวกเตอร์การปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (Vector Error Correction Model: VECM)

จากบทที่ 10 เราทราบแล้วว่าแบบจำลอง Autogressive สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบจำลองการปรับตัวระยะสั้นของอนุกรมเวลาหนึ่งเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้ (Error Correction Model: ECM) ทำนองเดียวกัน แบบจำลอง Vector Autoregressive (VAR) ก็สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบจำลองเวกเตอร์การปรับตัวระยะสั้นของอนุกรมเวลาทุกตัวให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้ (Vector Error Correction Model: VECM) แบบจำลอง VECM นี้จะให้ข้อมูลเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของอนุกรมเวลาทั้งในระยะสั้นและระยะยาว ดังจะอธิบายต่อไปนี้

กำหนดให้ $\boldsymbol{X_t}$ คือเวกเตอร์ขนาด n×1 ที่ประกอบไปด้วยอนุกรมเวลา จำนวน n ชุดที่เป็น I(1) ทั้งหมดซึ่งได้แก่ $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ หรือเขียนได้ว่า $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{nt} \end{bmatrix}_{n\times 1}$ และแบบจำลอง VAR(p) ที่เขียนในรูปเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ (เพื่อความง่ายกำหนดให้ เวกเตอร์ค่าคงที่ $\boldsymbol{A_0} = \boldsymbol{0}$) แสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_1X_{t-1}} + \boldsymbol{A_2X_{t-2}} + \ldots + \boldsymbol{A_pX_{t-p}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.1)$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{nt} \end{bmatrix}_{n\times 1}$, $\boldsymbol{A_i} = \begin{bmatrix} a_{11,i} & \cdots & a_{1n,i} \\ a_{21,i} & \cdots & a_{2n,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1,i} & \cdots & a_{nn,i} \end{bmatrix}_{n\times n}$, i=1,…, p และ $\boldsymbol{u_t} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{nt} \end{bmatrix}_{n\times 1}$

นั่นคือ $\boldsymbol{A_i}$ (i=1,..,p) คือเมทริกซ์ของค่าพารามิเตอร์ขนาด $n \times n$ ส่วน $\boldsymbol{u_t}$ ก็คือเวกเตอร์ขนาด n×1 ของตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนในแบบจำลอง VAR นั่นเอง

เมื่อกำหนดให้ $\boldsymbol{u_t}$ เป็น I(0) ดังนั้น อนุกรมเวลา $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ มีความสัมพันธ์เชิง ดุลยภาพระยะยาวต่อกัน เราจึงสามารถแปลงแบบจำลอง VAR(p) ดังสมการที่ (12.1) ให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VECM ได้ ซึ่งจะทำให้ได้ข้อมูลที่เป็นผลกระทบในระยะยาว (long-run effect) ที่จะอยู่ในเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Pi_{n\times n}}$ ดังนี้

$$\Delta\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\Pi X_{t-1}} + \boldsymbol{\Gamma_1}\Delta\boldsymbol{X_{t-1}} + \boldsymbol{\Gamma_2}\Delta\boldsymbol{X_{t-2}} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma_{p-1}}\Delta\boldsymbol{X_{t-(p-1)}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.2)$$[2]

โดยที่ $\boldsymbol{\Pi} = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_1} - \boldsymbol{A_2} - \ldots - \boldsymbol{A_p})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด n×n

$\boldsymbol{\Gamma_1} = -(\boldsymbol{A_2} + \boldsymbol{A_3} + \boldsymbol{A_4} + \ldots + \boldsymbol{A_p})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด n×n

$\boldsymbol{\Gamma_2} = -(\boldsymbol{A_3} + \boldsymbol{A_4} + \ldots + \boldsymbol{A_p})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด n×n

:

$\boldsymbol{\Gamma_{p-1}} = -(\boldsymbol{A_p})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด n×n

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น $\boldsymbol{\Gamma_i} = -(\boldsymbol{A_{i+1}} + \boldsymbol{A_{i+2}} + \ldots + \boldsymbol{A_p}) = -\sum_{m=i+1}^{p}\boldsymbol{A_m}$ สำหรับ i =1,…, p–1 สมการที่ (12.2) นี้ก็คือแบบจำลองเวกเตอร์การปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว (VECM) นั่นเอง จะเห็นว่าเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Pi}$ ได้รวมค่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวของแบบจำลอง VAR(p) เข้าไปอยู่ด้วยแล้ว ดังนั้น ข้อมูลที่เกี่ยวข้องการปรับตัวระยะยาวจะพิจารณาได้จากเมทริกซ์ค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\Pi}$ ส่วนเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\Gamma_1}, \boldsymbol{\Gamma_2}, \ldots, \boldsymbol{\Gamma_{p-1}}$ แสดงถึงผลกระทบที่ชั่วคราวที่เกิดจาก $\Delta\boldsymbol{X_{t-1}}, \Delta\boldsymbol{X_{t-2}}, \ldots, \Delta\boldsymbol{X_{t-(p-1)}}$ ตามลำดับ

แบบจำลอง VECM นอกจากจะถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (12.2) แล้วยังสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการที่ (12.3) ได้อีกด้วยดังนี้

[2] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 12ก

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\Pi X}_{t-p} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{u}_t \qquad (12.3)$$[3]

โดยที่ $\boldsymbol{\Pi} = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \ldots - \boldsymbol{A}_p)$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

$\boldsymbol{\Gamma}_1 = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

$\boldsymbol{\Gamma}_2 = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

:

$\boldsymbol{\Gamma}_{p-1} = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \ldots - \boldsymbol{A}_{p-1})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

หรือเขียนในรูปทั่วไป $\boldsymbol{\Gamma}_i = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \ldots - \boldsymbol{A}_i) = -\left(\boldsymbol{I} - \sum_{m=1}^{i} \boldsymbol{A}_m\right)$ สำหรับ $i = 1, \ldots, p-1$

จะเห็นว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\Pi}$ ที่อยู่ในสมการที่ (12.2) หรือ (12.3) จะมีค่าเท่ากัน แต่เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\Gamma}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, p-1$) ที่อยู่ในสมการที่ (12.2) หรือ (12.3) จะไม่เท่ากัน โดยเราจะแปลความหมายของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\Gamma}_1, \boldsymbol{\Gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}_{p-1}$ ที่อยู่ในสมการที่ (12.3) ว่าการสะสมของผลกระทบในระยะยาวตั้งแต่ช่วงเวลาที่ 1, 2, …, $p-1$ ตามลำดับ

ดังนั้นการวิเคราะห์เวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวสามารถหาได้จากแบบจำลอง VECM ที่อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (12.2) หรือ (12.3) ก็ได้ แต่ในหนังสือเล่มนี้จะใช้รูปแบบสมการที่ (12.2) ในการอธิบาย

12.2 การแปลความหมายของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\Pi}$ ในแบบจำลอง VECM

จากแบบจำลอง VECM สมการที่ (12.2)

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\Pi X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{u}_t \qquad (12.2)$$

เราทราบแล้วว่า $\boldsymbol{u}_t \sim$ I(0) และอนุกรมเวลา $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ เป็น I(1) หรือเขียนได้ว่า $\boldsymbol{X}_t \sim$I(1) และ $\Delta \boldsymbol{X}_t \sim$I(0) เมื่อกรณีนี้เกิดขึ้นเราจะพบว่า rank($\boldsymbol{\Pi}$) < n เสมอ ซึ่งจะพิสูจน์ง่าย ๆ ได้ดังนี้

หาก rank($\boldsymbol{\Pi}$) = n แล้วจะพบว่าสมการที่ (12.2) ไม่เป็นจริง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายที่สุด ลองกำหนดให้ $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{I}_n$ โดยที่ $\boldsymbol{I}_n$ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่ขนาด $n \times n$ ซึ่งจะมี rank($\boldsymbol{I}_n$) = n และเมื่อเรานำ $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{I}_n$ ไปแทนค่าลงใน (12.2) จะได้

[3] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 12ข

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{u}_t \qquad (12.4)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (12.4) จะพบว่าไม่เป็นจริง ทั้งนี้เพราะเวกเตอร์ทางซ้ายมือ $\Delta \boldsymbol{X}_t$ เป็น I(0) ดังนั้น พจน์ทุกพจน์ที่อยู่ทางขวามือของสมการนี้จะต้องเป็น I(0) ทั้งหมดเพื่อให้สมการเป็นจริง แต่เวกเตอร์ $\boldsymbol{X}_{t-1}$ ที่อยู่ทางขวามือพจน์แรกของสมการที่ (12.4) กลับเป็น I(1) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า rank($\boldsymbol{\Pi}$) จะต้องมีค่าน้อยกว่าจำนวนอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}_t$ เสมอ (rank ($\boldsymbol{\Pi}$) $< n$)

ถ้ากำหนดให้ rank($\boldsymbol{\Pi}$) = r และ $r < n$ แล้วเราจะเขียนได้ว่า

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta}' \qquad (12.5)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\beta}$ คือเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมีขนาด $n\times r$ โดยสดมภ์ที่ 1, 2, …, r คือเวกเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบที่ 1, 2, …, r ตามลำดับ ซึ่งจะเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นจะมีคุณสมบัติคือ rank($\boldsymbol{\beta}$) = r

$\boldsymbol{\alpha}$ คือเมทริกซ์ที่แสดงการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้เข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวมีขนาด $n\times r$ โดยสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) จะแสดงถึงการปรับตัวในระยะสั้นเพื่อเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวของตัวแปรที่ i เมื่อพบว่ามีการเบี่ยงเบนออกจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบที่ j และมีคุณสมบัติว่า rank($\boldsymbol{\alpha}$) = r ด้วย

เมื่อแทนค่า $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta}'$ ลงในสมการที่ (12.2) จะได้

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{u}_t \qquad (12.6)$$

โดยที่ผลคูณ $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1}$ คือเวกเตอร์ขนาด $r\times 1$ และมีคุณสมบัติเป็น I(0) หรือเขียนได้ว่า $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1} \sim I(0)$ โดยสมาชิกแถวที่ 1, แถวที่ 2, …, แถวที่ r ของ $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1}$ จะแสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวรูปแบบที่ 1, รูปแบบที่ 2, …, จนถึงรูปแบบที่ r ของอนุกรมเวลา $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ ตามลำดับนั่นเอง

เราทราบแล้วว่า จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมีค่าเท่ากับ r โดยที่ $r < n$ (ซึ่งหมายถึงจำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต้องมีค่าไม่เกินจำนวนอนุกรมเวลาที่อยู่ในแบบจำลอง VECM) นั่นคือ จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวที่เป็นไปได้จะเริ่มตั้งแต่ไม่มีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ($r = 0$) จนถึงมีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว $n-1$ รูปแบบ ($r = n-1$) หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ในกรณีที่อนุกรมเวลา $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ ไม่มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกันเลย ($r = 0$) จะพบว่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\Pi}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ หรือเขียนว่า $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ ในที่นี้คือ เมทริกซ์ศูนย์) แบบจำลองที่ควรใช้วิเคราะห์ในกรณีนี้ก็คือ แบบจำลอง VAR(p) ในรูปผลต่างลำดับที่ 1 ดังนี้

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}_1 \Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2 \Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_p \Delta \boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{u}_t \tag{12.7}$$

ในกรณีที่อนุกรมเวลา $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}$ มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกัน โดยจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวอาจมีได้ตั้งแต่ $1, \ldots, n-1$ รูปแบบ (หรือ $r = 1, \ldots, n-1$) แล้วเราจะสามารถเขียน $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta}'$ ได้ โดยที่ $\boldsymbol{\beta}$ เมทริกซ์ขนาด $n \times r$ ของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

การแยกเมทริกซ์ $\boldsymbol{\Pi}$ เป็นผลคูณของเมทริกซ์ $\boldsymbol{\alpha}$ และ $\boldsymbol{\beta}'$ เช่นนี้ อาจทำให้ได้เมทริกซ์ขนาด $n \times r$ อื่น ๆ อีก (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boldsymbol{\alpha}^*$ และ $\boldsymbol{\beta}^*$) ที่มีคุณสมบัติทำให้ $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}^* \boldsymbol{\beta}^{*\prime}$ ดังนั้น เราจึงสามารถใช้ $\boldsymbol{\beta}^*$ในการแสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวได้เช่นเดียวกันกับ $\boldsymbol{\beta}$ โดยจะแสดงวิธีการพิสูจน์ได้จากเมื่อนำเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non–singular Matrix) ใด ๆ ขนาด $n \times n$ (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boldsymbol{Q}$) มาคูณกับเมทริกซ์ $\boldsymbol{\alpha}$ และ $\boldsymbol{\beta}$ แล้วทำให้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\Pi}$ คงเดิมได้ แสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}^* \boldsymbol{\beta}^{*\prime} \tag{12.8}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha Q}'$ และ $\boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta Q}^{-1}$ จากสมการที่ (12.8) จะพิสูจน์ได้ว่า

$$\boldsymbol{\alpha}^* \boldsymbol{\beta}^{*\prime} = (\boldsymbol{\alpha Q}')(\boldsymbol{\beta Q}^{-1})' = \boldsymbol{\alpha Q}'(\boldsymbol{Q}^{-1})'\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha Q}'(\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\alpha\beta}'$$

ดังนั้น สมการที่ (12.5) และ (12.8) จะให้เมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\Pi}$ เท่ากัน นั่นคือ เมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวน r รูปแบบจะไม่เป็นหนึ่งเดียว (Nonuniqueness)

เพื่อให้เมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวน r รูปแบบเป็นหนึ่งเดียว (Uniqueness) เราจะต้องมีการใส่ข้อจำกัดในเมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ โดยข้อจำกัดที่ใส่นั้นอาจเป็นข้อจำกัดที่ใส่เพื่อให้สามารถอธิบายความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวให้เป็นไปตามทฤษฎีที่กำลังพิจารณาอยู่ หรือเป็นข้อจำกัดที่ใส่เพื่อความสะดวกดังตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ $\boldsymbol{\beta}$ เมทริกซ์ขนาด $n\times r$ ของความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว เขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta}_{n\times r} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2r} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \cdots & \beta_{3r} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \cdots & \beta_{4r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nr} \end{bmatrix}_{n\times r}$$

เพื่อให้ได้เมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวที่เป็นหนึ่งเดียว เราจะใช้เงื่อนไขที่สะดวกที่สุดในการจำกัดบน $\boldsymbol{\beta}$ ซึ่งก็คือการทำให้สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 ถึง r และสดมภ์ที่ 1 ถึง r เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boldsymbol{\beta}^*$ ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta}^*_{n\times r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hdashline \beta^*_{r+1,1} & \beta^*_{r+1,2} & \cdots & \beta^*_{r+1,r} \\ \beta^*_{r+2,1} & \beta^*_{r+2,2} & \cdots & \beta^*_{r+2,r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta^*_{n,1} & \beta^*_{n2} & \cdots & \beta^*_{nr} \end{bmatrix}_{n\times r} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{matrix}}\right\} r\times r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{matrix}}\right\} (n-r)\times r \end{matrix}$$

หรือเขียนสั้น ๆ ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta}^*_{n\times r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I_r} \\ \boldsymbol{\beta}_{(\boldsymbol{n-r})} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dashrightarrow & r\times r \\ \dashrightarrow & (n-r)\times r \end{matrix} \qquad (12.9)$$

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น ลองพิจารณาตัวอย่างดังนี้ กำหนดให้ $X_t = \begin{bmatrix} LCPI_{A,t} \\ LCPI_{B,t} \\ LCPI_{C,t} \end{bmatrix}$ โดยอนุกรมเวลา $LCPI_{A,t}$, $LCPI_{B,t}$ และ $LCPI_{C,t}$ คือ ค่าลอการิทึมฐานธรรมชาติ (Natural Logarithm) ของดัชนีราคาผู้บริโภคเมือง A, เมือง B และเมือง C ตามลำดับ และสมมุติให้ ค่าลอการิทึมฐานธรรมชาติของดัชนีราคาผู้บริโภคทั้ง 3 เมืองนี้เป็น I(1) และกำหนดค่าลอการิทึมฐานธรรมชาติของดัชนีราคาผู้บริโภคทั้ง 3 เมืองนี้มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกันจำนวน 2 รูปแบบ (r = 2) โดยเมทริกซ์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว แสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2.5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \text{ หรือ } \boldsymbol{\beta}'_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 5 & -2.5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \text{ จะได้ว่า rank}(\boldsymbol{\beta}) = 2$$

การใส่ข้อจำกัดที่สะดวกที่สุดดังที่ได้อธิบายในสมการที่ (12.9) ทำได้ด้วยการนำ $\begin{bmatrix} 5 & -2.5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$ ไปคูณกับ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $\begin{bmatrix} 5 & -2.5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.25 \\ 0.20 & 0.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 \\ 0.90 \end{bmatrix}$ และเราจะเขียนเมทริกซ์ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวที่ถูกใส่ข้อจำกัดได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\beta}^*_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.85 & 0.90 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad \text{หรือ} \quad \boldsymbol{\beta}^{*\prime}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.85 \\ 0 & 1 & 0.90 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของอนุกรมเวลา $LCPI_{A,t}$, $LCPI_{B,t}$ และ $LCPI_{C,t}$ จำนวน 2 รูปแบบคือ $\boldsymbol{\beta}^{*\prime}\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.85 \\ 0 & 1 & 0.90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LCPI_{A,t} \\ LCPI_{B,t} \\ LCPI_{C,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LCPI_{A,t} - 0.85LCPI_{C,t} \\ LCPI_{B,t} - 0.90LCPI_{C,t} \end{bmatrix}$ นั่นคือ รูปแบบความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบที่ 1 คือ $LCPI_{A,t} - 0.85LCPI_{C,t}$ และรูปแบบความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบที่ 2 ก็คือ $LCPI_{B,t} - 0.90LCPI_{C,t}$

12.3 การมีค่าคงที่และแนวโน้มกำหนดได้ (Deterministic Trend) อยู่ในอนุกรมเวลาที่เป็น I(1) กับแบบจำลอง VECM

ในทางปฏิบัติ อนุกรมเวลาอาจมีส่วนที่กำหนดได้แน่นอน (Deterministic Component) ซึ่งได้แก่ ค่าคงที่ (Constant) และแนวโน้มกำหนดได้ (Deterministic Trend) ร่วมอยู่ด้วย ซึ่งในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้สมมุติให้อนุกรมเวลาทุกตัวไม่มีส่วนที่กำหนดได้แน่นอน ในหัวข้อนี้เราจะมาดูว่า หากอนุกรมเวลาอย่างน้อย 1 ตัวในแบบจำลอง VAR มีส่วนที่กำหนดได้แน่นอนแล้ว จะส่งผลอย่างไรต่อค่าเฉลี่ยของผลต่างลำดับที่ 1 (หรือเขียนแทนด้วย $\mathbf{E}(\Delta \boldsymbol{X_t})$) และค่าเฉลี่ยของส่วนที่เบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพระยะยาว (หรือเขียนแทนด้วย $\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X_t})$)

เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น เราจะแบ่งหัวข้อออกเป็น 3 หัวข้อย่อย โดยหัวข้อย่อยแรก เราจะมาดูถึงการที่อนุกรมเวลาหนึ่ง (Y_t) มีส่วนที่กำหนดได้แน่นอนรวมอยู่ด้วยแล้วจะมีผลต่อ $\mathrm{E}(\Delta Y_t)$ อย่างไร ซึ่งจะเป็นพื้นฐานให้เข้าใจในหัวข้อย่อยที่ 2 ที่จะศึกษาถึงเมื่อเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ มีส่วนที่กำหนดได้แน่นอนอยู่ด้วยอย่างน้อย 1 อนุกรมเวลา จะทำให้แบบจำลอง VAR, แบบจำลอง VECM และเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมีรูปแบบอย่างไร รายละเอียดแต่ละหัวข้อเป็นดังนี้

12.3.1 แบบจำลอง AR เมื่อมีส่วนกำหนดได้แน่นอนร่วมอยู่ด้วย

พิจารณาแบบจำลองต่อไปนี้

$$Y_t = \gamma t + \mu + u_t \tag{12.10}$$

โดยที่ γ คือค่าพารามิเตอร์ที่แสดงผลกระทบของแนวโน้มกำหนดได้ที่มีต่ออนุกรม Y_t ส่วน μ คือค่าพารามิเตอร์ที่แสดงถึงค่าคงที่ และ u_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนที่อยู่ในอนุกรมเวลา Y_t

กำหนดให้ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อน u_t มีรูปแบบเป็น AR(1)

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{12.11 ก}$$

โดยที่ ε_t คือตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคงที่ และสมการที่ (12.11 ก) เขียนได้อีกอย่างดังนี้

$$u_t = \frac{\varepsilon_t}{1-\rho L} \tag{12.11 ข}$$

โดยที่ L คือตัวดำเนินการความล่าช้า (Lag Operator) เมื่อแทนค่า u_t จาก (12.11 ข) ลงใน (12.10) จะได้

$$Y_t \quad = \gamma t + \mu + \frac{\varepsilon_t}{1-\rho L} \tag{12.12 ก}$$

นำ $(1-\rho L)$ คูณตลอด

$$Y_t \quad = \rho Y_{t-1} + (1-\rho L)\gamma t + (1-\rho L)\mu + \varepsilon_t$$

$$Y_t \quad = \rho Y_{t-1} + \gamma t - \rho\gamma(t-1) + (1-\rho)\mu + \varepsilon_t$$

$$Y_t \quad = \rho Y_{t-1} + \gamma t - \rho\gamma t + \rho\gamma + (1-\rho)\mu + \varepsilon_t$$

$$Y_t \quad = \rho Y_{t-1} + \gamma(1-\rho)t + \{\rho\gamma + (1-\rho)\mu\} + \varepsilon_t \tag{12.12 ข}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$Y_t \quad = \rho Y_{t-1} + b_1 t + b_0 + \varepsilon_t \tag{12.12 ค}$$

โดยที่ $b_1 = \gamma(1-\rho)$ และ $b_0 = \rho\gamma + (1-\rho)\mu$ จะเห็นว่า เราสามารถเขียนแบบจำลอง (12.10) ให้อยู่ในรูป AR(1) ดังสมการที่ (12.12 ข) (หรือ (12.12 ค)) ได้ และจากสมการที่ (12.12 ข) ลองพิจารณาค่าพารามิเตอร์ ρ และ γ เป็น 4 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 : $\rho = 1$ และ $\gamma = 0$ แล้วสมการที่ (12.12 ข) จะเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{หรือ} \quad \Delta Y_t = \varepsilon_t \qquad (12.13\ ก)$$

นั่นคือ เรากล่าวได้ว่า หากอนุกรมเวลา Y_t เป็น I(1) และไม่มีส่วนของแนวโน้มกำหนดได้รวมอยู่ด้วย ($\gamma = 0$) แล้วค่าเฉลี่ยของ ΔY_t จะมีค่าเท่ากับศูนย์หรือเขียนได้ว่า $E(\Delta Y_t) = 0$

กรณีที่ 2 : $\rho = 1$ และ $\gamma \neq 0$ แล้วสมการที่ (12.12 ข) จะเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = Y_{t-1} + \gamma + \varepsilon_t$$

$$\text{หรือ} \quad \Delta Y_t = \gamma + \varepsilon_t \qquad (12.13\ ข)$$

นั่นคือ เรากล่าวได้ว่า หากอนุกรมเวลา Y_t เป็น I(1) และมีส่วนของแนวโน้มกำหนดได้รวมอยู่ด้วย แล้วค่าเฉลี่ยของ ΔY_t ไม่เท่ากับศูนย์ โดยมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้ดังสมการที่ (12.10) เขียนได้ว่า $E(\Delta Y_t) = \gamma$

จากกรณีที่ 1 และ 2 จะเห็นว่า เมื่ออนุกรมเวลา Y_t เป็น I(1) แล้ว $E(\Delta Y_t)$ จะขึ้นอยู่กับว่าอนุกรมเวลา Y_t มีส่วนของแนวโน้มกำหนดได้หรือไม่เท่านั้น โดยจะไม่ขึ้นอยู่กับ μ ในสมการที่ (12.10) เลย

กรณีที่ 3 : $|\rho| < 1$ และ $\gamma = 0$ แล้วสมการที่ (12.12 ข) จะเขียนได้ดังนี้

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + (1-\rho)\mu + \varepsilon_t \qquad (12.13\ ค)$$

สมการที่ (12.13 ค) ก็คือแบบจำลอง AR(1) ที่มีค่าคงที่เป็น $(1-\rho)\mu$ นั่นเอง และเรากล่าวได้ว่าหากอนุกรมเวลา Y_t เป็น I(0) และไม่มีส่วนของแนวโน้มกำหนดได้รวมอยู่ด้วย แล้วค่าเฉลี่ยของ Y_t จะมีค่าเท่ากับ μ ศูนย์หรือเขียนได้ว่า $E(Y_t) = \mu$[4]

กรณีที่ 4 : $|\rho| < 1$ และ $\gamma \neq 0$ แล้วสมการที่ (12.12 ข) ก็คือสมการที่ (12.12 ค) นั่นเอง

สมการที่ (12.13 ค) ก็คือแบบจำลอง AR(1) ที่มีส่วนของค่าคงที่เป็น $b_0 = \rho\gamma + (1-\rho)\mu$ และส่วนของแนวโน้มกำหนดได้เป็น $b_1t = \gamma(1-\rho)t$ นั่นเอง แต่ต้องระวังว่า ค่า b_0 และ b_1 นี้จะไม่สามารถใช้อธิบายว่าเป็นค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้ของอนุกรมเวลา Y_t ได้[5] แต่เราจะกล่าวว่าหากอนุกรมเวลา Y_t มีความนิ่งรอบเส้นแนวโน้ม (Trend Stationary) แล้วค่าเฉลี่ยของ Y_t จะมีค่าเท่ากับ $\gamma t+\mu$ ศูนย์หรือเขียนได้ว่า $E(Y_t) = \gamma t+\mu$ (ดูสมการที่ (12.10))

12.3.2 แบบจำลอง VAR, VECM และเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวเมื่อมีส่วนกำหนดได้แน่นอนร่วมอยู่ด้วย

ในหัวข้อย่อยนี้เราจะมาพิจารณากรณีที่ส่วนที่กำหนดได้แน่นอน (Deterministic Component) อยู่ในอนุกรมเวลาอย่างน้อย 1 ตัวในแบบจำลอง VAR และเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาแบบจำลอง VAR(1) ดังต่อไปนี้

$$\boldsymbol{X_t = A_1X_{t-1} + \mu_0 + \mu_1 t + u_t} \tag{12.14}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\mu_0}$ คือเวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์ที่แสดงถึงการมีค่าคงที่อยู่ในแบบจำลอง VAR(p)

$\boldsymbol{\mu_1}$ คือเวกเตอร์ของค่าพารามิเตอร์ที่แสดงถึงการมีแนวโน้มกำหนดได้ที่อยู่ในแบบจำลอง VAR(p) และเวกเตอร์ $\boldsymbol{\mu_0}$ และ $\boldsymbol{\mu_1}$ แสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\mu_0} = \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ \vdots \\ \mu_{0n} \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \text{และ} \quad \boldsymbol{\mu_1} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{1n} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

---

[4] จาก (12.13 ค) ใส่ค่าคาดหวังจะได้ $E(Y_t) = \rho E(Y_{t-1}) + (1-\rho)\mu$ เมื่อ $|\rho| < 1$ แสดงถึงอนุกรมเวลา Y_t ในกรณีที่ 3 นี้จะเป็น I(0) นั่นคือ $E(Y_t) = E(Y_{t-1})$ ดังนั้น เราจึงได้ว่า $(1-\rho)E(Y_t) = (1-\rho)\,\mu$ หรือ $E(Y_t) = \mu$

[5] เพราะค่าคงที่ของอนุกรมเวลา Y_t คือ μ และค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้ของอนุกรมเวลา Y_t คือ γ (ดูสมการที่ (12.10) ประกอบ) และอย่าลืมว่ากรณีนี้อนุกรมเวลา Y_t เป็น I(0)

เมื่อ $\boldsymbol{\mu}_0$ และ $\boldsymbol{\mu}_1$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้วสมการที่ (12.14) แสดงให้เห็นว่า อนุกรมเวลาอย่างน้อยหนึ่งตัวในแบบจำลอง VAR(1) จะต้องมีส่วนกำหนดได้แน่นอน (Deterministic Component) ซึ่งอาจเป็นค่าคงที่หรือแนวโน้มกำหนดได้อย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้ง 2 อย่างก็ได้ และเราสามารถแปลงแบบจำลอง VAR(p) ดังแสดงในสมการที่ (12.14) ให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VECM ได้ดังนี้

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_1 t + \boldsymbol{u}_t \qquad (12.15)$$

จะเห็นว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{\mu}_0$ และ $\boldsymbol{\mu}_1$ มีอยู่ทั้งในแบบจำลอง VAR และยังคงมีอยู่ในแบบจำลอง VECM ด้วย นั่นคือ ทั้ง $\Delta \boldsymbol{X}_t$ และ $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1}$ จะต้องมีความนิ่งรอบ ๆ ส่วนกำหนดได้แน่นอน

อย่างไรก็ดี ในการศึกษาถึงการเบี่ยงเบนออกจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแบบที่ j (j =1, 2, …, r) ซึ่งแสดงได้ด้วยเวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1}$ นั้น **ค่าเฉลี่ยของส่วนเบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพระยะยาวต้องเป็นศูนย์** ดังนั้นเพื่อให้ได้ค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ส่วนกำหนดได้แน่นอนต้องถูกกำจัดออกไปจากส่วนเบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพระยะยาว **($\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1}$)** ซึ่งทำได้ด้วยการแยกเวกเตอร์ $\boldsymbol{\mu}_0$ และ $\boldsymbol{\mu}_1$ ในแบบจำลอง VECM ดังสมการที่ (12.15) ให้ถูกรวมอยู่ใน $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1}$ ด้วย ดังจะอธิบายดังนี้

เวกเตอร์ $\boldsymbol{\mu}_0$ (และเวกเตอร์ $\boldsymbol{\mu}_1$) สามารถแยกออกเป็นผลรวมของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ได้จากการใช้เอกลักษณ์ดังนี้[6]

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\beta}' + \boldsymbol{\beta}_\perp(\boldsymbol{\alpha}_\perp'\boldsymbol{\beta}_\perp)^{-1}\boldsymbol{\alpha}_\perp' = \boldsymbol{I} \qquad (12.16)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\beta}_\perp$ และ $\boldsymbol{\alpha}_\perp$ คือเมทริกซ์ที่ตั้งฉาก (Orthogonal) กับเมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ และ $\boldsymbol{\alpha}$ ตามลำดับ นั่นคือเราจะได้ว่า $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}_\perp = \boldsymbol{0}$ และ $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}_\perp = \boldsymbol{0}$

เมื่อเรานำเวกเตอร์ $\boldsymbol{\mu}_0$ คูณสมการเอกลักษณ์ (12.16) ตลอดจะได้

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\beta}_\perp(\boldsymbol{\alpha}_\perp'\boldsymbol{\beta}_\perp)^{-1}\boldsymbol{\alpha}_\perp'\boldsymbol{\mu}_0 = \boldsymbol{\mu}_0 \qquad (12.17\ \text{ก})$$

ถ้ากำหนดให้

$$\boldsymbol{\beta}_0 = (\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\mu}_0 \qquad (12.17\ \text{ข})$$

[6] Juselius, K., *The Cointegrated VAR Model*: *Methodology and Applications* (New York: Oxford University Press Inc., 2006), p. 96.

และ $\boldsymbol{\gamma_0} = \boldsymbol{\beta}_{\perp}(\boldsymbol{\alpha}'_{\perp}\boldsymbol{\beta}_{\perp})^{-1}\boldsymbol{\alpha}'_{\perp}\boldsymbol{\mu_0}$ (12.17 ค)

แทนค่าลงใน (12.17 ข) และ (12.17 ค) ลงใน (12.17 ก) จะได้

$$\boldsymbol{\mu_0} = \boldsymbol{\alpha\beta_0} + \boldsymbol{\gamma_0} \tag{12.17 ง}$$

ทำนองเดียวกัน เมื่อเรานำเวกเตอร์ $\boldsymbol{\mu_1}$ คูณสมการเอกลักษณ์ (12.16) ตลอด เราจะได้

$$\boldsymbol{\mu_1} = \boldsymbol{\alpha\beta_1} + \boldsymbol{\gamma_1} \tag{12.17 จ}$$

โดยที่ $\boldsymbol{\beta_1} = (\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\mu_1}$ และ $\boldsymbol{\gamma_1} = \boldsymbol{\beta}_{\perp}(\boldsymbol{\alpha}'_{\perp}\boldsymbol{\beta}_{\perp})^{-1}\boldsymbol{\alpha}'_{\perp}\boldsymbol{\mu_1}$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (12.17 ง) และ (12.17 จ) ลงในสมการที่ (12.15) จะได้

$$\Delta\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\alpha\beta' X_{t-1}} + \boldsymbol{\alpha\beta_0} + \boldsymbol{\alpha\beta_1 t} + \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1} t + \boldsymbol{u_t} \tag{12.18 ก}$$

สมการที่ (12.18 ก) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\boldsymbol{\Delta X_t} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X_{t-1}} + \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{\beta_1} t) + \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1} t + \boldsymbol{u_t} \tag{12.18 ข}$$

โดยที่ $\Delta\boldsymbol{X_t}$ คือเวกเตอร์ขนาด $n\times 1$, $\boldsymbol{X_t}$ คือเวกเตอร์ขนาด $n\times 1$

$\boldsymbol{\alpha}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n\times r$, $\boldsymbol{\beta}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n\times r$

$\boldsymbol{\beta_0}$ คือเมทริกซ์ขนาด $r\times 1$, $\boldsymbol{\beta_1}$ คือเมทริกซ์ขนาด $r\times 1$

$\boldsymbol{\gamma_0}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n\times 1$, $\boldsymbol{\gamma_1}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n\times 1$

และ $\boldsymbol{u_t}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n\times 1$ โดย n คือจำนวนอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$

สมการที่ (12.18 ข) แสดงให้เห็นว่า หากเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ มีส่วนกำหนดได้ $(\boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{\mu_1} t)$ รวมอยู่ด้วยแล้ว เป็นไปได้ว่าทั้งแบบจำลอง VECM มีส่วนกำหนดได้ $(\boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1} t)$ และเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวก็จะมีส่วนกำหนดได้อยู่ด้วย $(\boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{\beta_1} t)$ และสมการที่ (12.18 ข) เขียนได้อีกอย่างคือ

$$\boldsymbol{\Delta X_t} = \boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{\beta}' \quad \boldsymbol{\beta_0} \quad \boldsymbol{\beta_1}]_{r\times(n+2)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_{t-1}} \\ 1 \\ t \end{bmatrix}_{(n+2)\times 1} + \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1} t + \boldsymbol{u_t} \tag{12.18 ค}$$

ถ้ากำหนดให้ $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}' = [\boldsymbol{\beta}' \quad \boldsymbol{\beta_0} \quad \boldsymbol{\beta_1}]$ และ $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} = [\boldsymbol{X_{t-1}} \quad 1 \quad t]'$ ดังนั้น เราจะเขียนได้ว่า

$$\boldsymbol{\Delta X_t} = \boldsymbol{\alpha}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} + \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1} t + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.18\text{ ง})$$

สมการที่ (12.18 ง) มีคุณสมบัติดังนี้

$$\mathrm{E}(\Delta \boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1} t \qquad (12.19\text{ ก})$$

และ

$$\mathrm{E}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}) = \mathbf{0} \qquad (12.19\text{ ข})$$

นอกจากนี้แล้ว สมการที่ (12.18 ง) บอกความเกี่ยวเนื่องระหว่างส่วนกำหนดได้แน่นอนแบบจำลอง VECM และเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ซึ่งแบ่งได้เป็น 5 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 : ถ้า $\boldsymbol{\gamma_0} = \boldsymbol{\gamma_1} = \boldsymbol{\beta_0} = \boldsymbol{\beta_1} = \mathbf{0}$ (หรือ $\boldsymbol{\mu_0} = \boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{0}$) กรณีนี้ทั้งแบบจำลอง VECM และเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (ส่วนเบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพระยะยาว) ไม่มีส่วนกำหนดได้แน่นอน หรือกล่าวได้ว่า $\mathbf{E}(\Delta \boldsymbol{X_t}) = \mathbf{0}$ และ $\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X_{t-1}}) = \mathbf{0}$ โดยแบบจำลอง VECM ในกรณีนี้คือ

$$\Delta \boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{X_{t-1}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.20\text{ ก})$$

ในกรณีที่ $\boldsymbol{\mu_0} = \boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{0}$ จะแสดงถึงอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ ไม่มีส่วนกำหนดได้แน่นอน (ไม่มีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มกำหนดได้) รวมอยู่ด้วย

กรณีที่ 2 : ถ้า $\boldsymbol{\gamma_0} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\gamma_1} = \boldsymbol{\beta_1} = \mathbf{0}$ (หรือ $\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{0}$) แต่ $\boldsymbol{\beta_0} \neq \mathbf{0}$ กรณีนี้เวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจะแสดงถึงการมีค่าคงที่อยู่ด้วย ($\boldsymbol{\beta_0} \neq \mathbf{0}$) หรือเขียนได้ว่า $\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X_{t-1}}) = \boldsymbol{\beta_0}$ ส่วนแบบจำลอง VECM ไม่มีส่วนกำหนดได้แน่นอนใด ๆ เลย หรือเขียนได้ว่า $\mathbf{E}(\Delta \boldsymbol{X_t}) = \mathbf{0}$ และเพื่อกำจัดค่าคงที่ออกไปจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว แบบจำลอง VECM ต้องอยู่ในรูปได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Delta X_t} = \boldsymbol{\alpha}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.20\text{ ข})$$

โดยที่ $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}' = [\boldsymbol{\beta}' \quad \boldsymbol{\beta_0}]$ และ $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} = [\boldsymbol{X_{t-1}} \quad 1]'$ และจะได้ว่า $\mathrm{E}\left(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}\right) = 0$

ในกรณีที่ $\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{0}$ และ $\boldsymbol{\gamma_0} = \mathbf{0}$ แต่ $\boldsymbol{\beta_0} \neq \mathbf{0}$ จะแสดงถึงอนุกรมเวลาอย่างน้อย 1 ตัวในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ มีค่าคงที่รวมอยู่ด้วย (แต่จะไม่มีแนวโน้มกำหนดได้รวมอยู่)

กรณีที่ 3 : ถ้า $\boldsymbol{\gamma_1} = \boldsymbol{\beta_1} = \mathbf{0}$ (หรือ $\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{0}$) แต่ $\boldsymbol{\gamma_0} \neq \mathbf{0}$ และ $\boldsymbol{\beta_0} \neq \mathbf{0}$ กรณีนี้เวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจะไม่มีแนวโน้มกำหนดได้แต่จะมีค่าคงที่อยู่ ($\boldsymbol{\beta_0} \neq \mathbf{0}$) หรือเขียนได้ว่า $\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta' X_{t-1}}) = \boldsymbol{\beta_0}$ ส่วนแบบจำลอง VECM พบว่ามีค่าคงที่ ($\boldsymbol{\gamma_0} \neq \mathbf{0}$) รวมอยู่ หรือเขียนได้ว่า $\mathbf{E}(\Delta \boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{\gamma_0}$ และค่าคงที่ที่อยู่ในเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวสามารถกำจัดออกไปด้วยการใช้ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1}$ ในแบบจำลอง VECM ดังนี้

$$\Delta \boldsymbol{X_t} = \alpha \widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{X}_{t-1} + \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.20 \text{ ค})$$

โดยที่ $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}' = [\boldsymbol{\beta}' \quad \boldsymbol{\beta_0}]$ และ $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1} = [\boldsymbol{X}_{t-1} \quad 1]'$

ในกรณีที่ $\boldsymbol{\mu_1} = \mathbf{0}$ แต่ $\boldsymbol{\gamma_0} \neq \mathbf{0}$ และ $\boldsymbol{\beta_0} \neq \mathbf{0}$ จะแสดงถึงอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ อย่างน้อย 1 ตัวต้องมีแนวโน้มกำหนดได้[7]

กรณีที่ 4 : ถ้า $\boldsymbol{\gamma_1} = \mathbf{0}$ แต่ $\boldsymbol{\gamma_0} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\beta_0} \neq \mathbf{0}$ (หรือ $\boldsymbol{\mu_0} \neq \mathbf{0}$) และ $\boldsymbol{\beta_1} \neq \mathbf{0}$ กรณีนี้ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว $\boldsymbol{\beta' X_{t-1}}$ ไม่สามารถกำจัดค่าคงที่และแนวโน้มกำหนดได้ออกไปได้ หรือเขียนได้ว่า $\mathbf{E}(\boldsymbol{\beta' X_{t-1}}) = \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{\beta_1 t}$ หรือพูดอีกอย่างคือ ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจะมีความนิ่งรอบเส้นแนวโน้ม (Trend Stationary) ส่วนแบบจำลอง VECM พบว่ามีค่าคงที่ ($\boldsymbol{\gamma_0} \neq \mathbf{0}$) หรือเขียนได้ว่า $\mathbf{E}(\Delta \boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{\gamma_0}$ ค่าคงที่และแนวโน้มกำหนดได้ที่อยู่ในเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวสามารถกำจัดออกไปด้วยการใช้ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1}$ ในแบบจำลอง VECM ดังนี้

$$\Delta \boldsymbol{X_t} = \alpha \widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{X}_{t-1} + \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.20 \text{ ง})$$

[7] อย่าลืมว่า เมื่อ $\boldsymbol{X_t}$ เป็น I(1) ค่าคงที่ $\boldsymbol{\gamma_0} \neq \mathbf{0}$ ที่อยู่ในแบบจำลอง VECM (12.20 ค) จะแสดงถึงอนุกรมเวลาอย่างน้อย 1 ตัวในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ มีส่วนของแนวโน้มกำหนดได้ ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้จะเป็นค่าคงที่ใน $\Delta \boldsymbol{X_t}$ (ดูหัวข้อ 12.3.1 สมการที่ (12.13 ข) ประกอบ)

โดยที่ $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}' = [\boldsymbol{\beta}' \quad \boldsymbol{\beta_0} \quad \boldsymbol{\beta_1}]$ และ $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_{t-1}} \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$ หรืออาจเขียนแทนด้วย $[\boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{t-1}} \quad 1 \quad t]'$ ก็ได้ ในกรณีที่ $\boldsymbol{\mu_0 \neq 0}$ และ $\boldsymbol{\gamma_1 = 0}$ แต่ $\boldsymbol{\beta_1 \neq 0}$ จะแสดงถึงอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ อย่างน้อย 1 ตัวต้องมีค่าคงที่และแนวโน้มกำหนดได้เชิงเส้นตรงแต่จะไม่อยู่ในรูปแบบแนวโน้มกำลังสอง (No Quadratic Trend)[8]

กรณีที่ 5 : ถ้า $\gamma_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\gamma_0 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\beta_0 \neq 0}$ และ $\boldsymbol{\beta_1 \neq 0}$ กรณีนี้ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจะมีความนิ่งรอบเส้นแนวโน้ม $(\boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{\beta_1}t)$ และแบบจำลองVECM จะมีค่าคงที่และแนวโน้มกำหนดได้ $(\gamma_0 + \gamma_1 t)$ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Delta X_t} = \boldsymbol{\alpha}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} + \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{\gamma_1} t + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.20\text{ จ})$$

โดยที่ $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}' = [\boldsymbol{\beta}' \quad \boldsymbol{\beta_0} \quad \boldsymbol{\beta_1}]$ และ $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} = [\boldsymbol{X_{t-1}} \quad 1 \quad t]'$ ในกรณีที่ $\boldsymbol{\mu_0 \neq 0}$ และ $\boldsymbol{\mu_1 \neq 0}$ เกิดขึ้นเมื่ออนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ อย่างน้อย 1 ตัวต้องมีแนวโน้มกำหนดในรูปแบบยกกำลังสอง $(\boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{\mu_1}t + \boldsymbol{\mu_2}t^2)$

12.4 การประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวด้วยการใช้หลายสมการ

พิจารณาแบบจำลอง VECM ดังนี้

$$\Delta \boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\alpha}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} + \boldsymbol{\Gamma_1}\Delta\boldsymbol{X_{t-1}} + \boldsymbol{\Gamma_2}\Delta\boldsymbol{X_{t-2}} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma_{p-1}}\Delta\boldsymbol{X_{t-(p-1)}} + \boldsymbol{\Phi D_t} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.21)$$

โดยที่ $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}' = [\boldsymbol{\beta}' \quad \boldsymbol{\beta_0} \quad \boldsymbol{\beta_1}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $r \times (n+2)$, $\boldsymbol{\beta}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n \times r$, $\boldsymbol{\beta_0}$ และ $\boldsymbol{\beta_1}$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $r \times 1$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} = [\boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{t-1}} \quad 1 \quad t]'$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $(n+2) \times 1$, $\boldsymbol{\alpha}$ คือเมทริกซ์ขนาด $n \times r$, และ $\text{rank}(\boldsymbol{\alpha}) = \text{rank}(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) = r$ ส่วน $\boldsymbol{D_t}$ คือเมทริกซ์ที่แสดงส่วนกำหนดได้แน่นอน (Deterministic Component)

การประมาณค่าพารามิเตอร์เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ จะใช้วิธีความน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood) โดยจะสมมุติให้เวกเตอร์ $\boldsymbol{u_t} \sim$ **Normal(0, Σ)**,

[8] และการที่ $\boldsymbol{\beta_1 \neq 0}$ แสดงถึงแนวโน้มกำหนดได้ที่รวมอยู่ในเวกเตอร์อนุกรมเวลา $\boldsymbol{X_t}$ ไม่สามารถหักล้างไปจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว $\boldsymbol{\beta' X_t}$ นั่นเอง

0 คือเวกเตอร์ศูนย์, **Σ** คือเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\boldsymbol{u_t}$ Johansen (1995)[9] ได้พิสูจน์ให้เห็นว่า ตัวประมาณค่าเวกเตอร์ $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{n\times r}$ ด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุด มีค่าเท่ากับเวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector) ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง (Eigenvalue) จากมากไปน้อยที่คำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$\left|\boldsymbol{\lambda S_{11}} - \boldsymbol{S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}}\right| = 0 \qquad (12.22)^{10}$$

โดยที่ $\boldsymbol{S_{ij}} = \dfrac{1}{T}\boldsymbol{R_{it}R_{jt}'}, \quad i = 0, 1$ และ $j = 0, 1$

T คือจำนวนข้อมูลที่ใช้ประมาณแบบจำลอง VECM

$\boldsymbol{R_{0t}}$ คือเมทริกซ์ของค่าความผิดพลาด (Residual) ขนาด $n\times T$ ที่ได้จากสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ $\Delta\boldsymbol{X_t}$ และตัวแปรอิสระคือ $\Delta\boldsymbol{X_{t-1}}, \Delta\boldsymbol{X_{t-2}}, \ldots, \Delta\boldsymbol{X_{t-p+1}}, \boldsymbol{D_t}$

$\boldsymbol{R_{1t}}$ คือเมทริกซ์ของค่าความผิดพลาด (Residual) ขนาด $(n+2)\times T$ ที่ได้จากสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ $\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}$และตัวแปรอิสระคือ $\Delta\boldsymbol{X_{t-1}}, \Delta\boldsymbol{X_{t-2}}, \ldots, \Delta\boldsymbol{X_{t-p+1}}, \boldsymbol{D_t}$

ถ้าให้ $\hat{\lambda}_i$ (i = 1, 2, …, n)[11] คือค่าเจาะจง (Eigenvalue) ที่คำนวณจากสมการ (12.22) โดยที่ $1 > \hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \cdots > \hat{\lambda}_n \geq 0$ และให้เวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector) ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n$ เขียนแทนด้วย $\widehat{\boldsymbol{V}} = [\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} \quad \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} \quad \cdots \quad \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{n}}]_{(n+2)\times(n+2)}$ แล้วเราจะได้ตัวประมาณค่าเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวดังนี้

$$\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\beta}}} = [\widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} \quad \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} \quad \cdots \quad \widehat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}]_{(n+2)\times r} \qquad (11.23)$$

ถ้าแบบจำลอง VECM และความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวไม่มีส่วนกำหนดได้แน่นอนอยู่ด้วย เราจะใช้สมการที่ (11.24) ในการประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

---

[9] สำหรับผู้ที่สนใจ ดูวิธีพิสูจน์ได้ใน Johansen, S., *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models* (New York: Oxford University Press, 1995), pp. 89–93.

[10] เราอาจใช้สมการต่อไปนี้ในหาเวกเตอร์เจาะจงก็ได้ $|S_{10}S_{00}^{-1}S_{01} - \lambda S_{11}| = 0$ (Maddala, G. S. and I. Kim. *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*, Cambridge University Press, UK, 2002, หน้า 167)

[11] อย่าลืมว่า n คือจำนวนอนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\alpha\beta}'\boldsymbol{X}_{t-1} + \Gamma_1\Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \Gamma_2\Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \ldots + \Gamma_{p-1}\Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{u}_t \qquad (12.24)$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว $\boldsymbol{\beta}$ ในกรณีนี้จะใช้แนวคิดเดิมก็คือเป็นค่าเวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector) ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง (Eigenvalue) จากมากไปน้อยที่คำนวณสมการที่ (11.22) เช่นกัน เพียงแต่การคำนวณค่า $\boldsymbol{R}_{0t}$ และ $\boldsymbol{R}_{1t}$ จะต่างออกไปเล็กน้อยดังนี้

$\boldsymbol{R}_{0t}$ คือเมทริกซ์ของค่าความผิดพลาด (Residual) ขนาด $n\times T$ ที่ได้จากสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ $\Delta \boldsymbol{X}_t$ และตัวแปรอิสระคือ $\Delta \boldsymbol{X}_{t-1}, \Delta \boldsymbol{X}_{t-2}, \ldots, \Delta \boldsymbol{X}_{t-p+1}$

$\boldsymbol{R}_{1t}$ คือเมทริกซ์ของค่าความผิดพลาด (Residual) ขนาด $n\times T$ ที่ได้จากสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ $\boldsymbol{X}_{t-1}$ และตัวแปรอิสระคือ $\Delta \boldsymbol{X}_{t-1}, \Delta \boldsymbol{X}_{t-2}, \ldots, \Delta \boldsymbol{X}_{t-p+1}$

จากนั้นเราจะใช้เมทริกซ์ $\boldsymbol{R}_{0t}$ และ $\boldsymbol{R}_{1t}$ ที่คำนวณด้วยนิยามข้างบนไปแทนค่าในสมการที่ (11.22) และเวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector) หรือเขียนแทนด้วย $\hat{V} = [\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2 \quad \cdots \quad \hat{v}_n]_{n\times n}$ ที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง $\hat{\lambda}_1,\ \hat{\lambda}_2,\ldots,\hat{\lambda}_n$ โดยที่ $1 > \hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \cdots > \hat{\lambda}_n \geq 0$ จะถูกใช้เป็นตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในเวกเตอร์ $\boldsymbol{\beta}$ หรือเขียนได้ว่า

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\boldsymbol{v}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{v}}_r]_{n\times r} \qquad (11.25)$$

12.5 การทดสอบจำนวนเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

จากหัวข้อที่แล้วเราจะประมาณเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจากเวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector) ที่สองคล้องกับค่าเจาะจง (Eigenvalue) ที่เรียงจากมากไปน้อยจำนวน r เวกเตอร์ โดยที่ $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ดังนั้น เราจึงต้องทราบด้วยว่าจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (หรือ r)ในแบบจำลอง VAR มีกี่รูปแบบ

เราสามารถตอบคำถามนี้ได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองเกี่ยวกับจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว และที่ใช้กันมากมีอยู่ 2 รูปแบบ

<u>รูปแบบที่ 1</u> H_0: จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวอย่างมากเท่ากับ r

H_1: จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมากกว่า r

โดยที่ $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ และค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานข้างต้น คือค่าสถิติ Trace (λ_{trace}) ซึ่งมีสูตรในการคำนวณดังนี้

$$\lambda_{trace}(r) = -T\sum_{i=r+1}^{n}(1-\hat{\lambda}_i) \tag{12.26}$$

หากการทดสอบพบว่า เราสามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก นั่นหมายถึง จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมากกว่า r แต่หากเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก จะหมายถึงจำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวอย่างมากเท่ากับ r

ในการทดสอบสมมุติฐานข้างต้นจะต้องเริ่มจาก $r = 0$ (H_0: ไม่มีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว) และหากผลการทดสอบพบว่า เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักนี้แล้ว เราจะสรุปว่าอนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR ไม่มีความสัมพันธ์เชิงดุลย–ภาพระยะยาวต่อกัน แต่หากเราปฏิเสธสมมุติฐานหลักเราจะต้องทำการทดสอบสมมุติฐานต่อด้วยการกำหนดให้ $r = 1$ (H_0: จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวอย่างมากเท่ากับ 1 รูปแบบ) ถ้าผลการทดสอบสรุปว่า เราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักให้สรุปว่าอนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกันจำนวน 1 รูปแบบ แต่ถ้าผลการทดสอบสรุปว่า เราสามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักนี้จะต้องการทดสอบสมมุติฐานต่อไปอีกคือกำหนดให้ $r =2$ (H_0: จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวอย่างมากเท่ากับ 2 รูปแบบ) ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าเราจะไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักและค่า r ที่กำหนดสุดท้ายจะแสดงถึงจำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

สมมุติเราทดสอบสมมุติฐานหลักไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งผลการทดสอบสมมุติฐานที่กำหนดให้ $r = n–1$ (H_0: จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวอย่างมากเท่ากับ n–1 รูปแบบ) พบว่ายังคงปฏิเสธสมมุติฐานหลักอยู่อีก กรณีนี้ให้สรุปว่าอนุกรมเวลาทุกตัวในแบบจำลอง VAR เป็น I(0) และไม่มีความจำเป็นที่จะต้องใช้แบบจำลอง VECM ในการวิเคราะห์[12]

[12] หากมีการสรุปว่าอนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกันจำนวน n รูปแบบจะทำให้ขัดแย้งกับสิ่งที่ได้พิสูจน์ไว้ในหัวข้อที่ 12.2 ที่ว่า rank($\boldsymbol{\beta}$) < n

<u>รูปแบบที่ 2</u> H_0: จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวอย่างมากเท่ากับ r
H_1: จำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวคือ $r + 1$

โดยที่ $r = 0, 1, 2, \ldots, n–1$ และค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานข้างต้น คือค่าสถิติ Maximum-Eigenvalue (λ_{max}) ซึ่งมีสูตรในการคำนวณดังนี้

$$\lambda_{max}(r, r+1) = -T(1 - \hat{\lambda}_{r+1}) \qquad (12.27)$$

การทดสอบสมมุติฐานนี้มีกระบวนการเช่นเดียวกับรูปแบบที่ 1 กล่าวคือ จะเริ่มการทดสอบสมมุติฐานจากการกำหนดให้ $r = 0$ หากปฏิเสธสมมุติฐานหลักก็จะต้องทำการทดสอบสมมุติฐานในลำดับต่อไปคือการกำหนดให้ $r = 1$ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ และเราจะหยุดการทดสอบสมมุติฐานเมื่อไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลักและจะสรุปจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวเท่ากับจำนวน r ที่กำหนดครั้งสุดท้าย

ส่วนค่าวิกฤติทั้งของ $\lambda_{trace}(r)$ และ $\lambda_{max}(r, r+1)$ สามารถหาได้จาก Johansen, S. *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, New York, 1995 อย่างไรก็ดี ปัจจุบันโปรแกรมสำเร็จรูป เช่น Eviews หรือ SAS จะคำนวณค่า $\lambda_{trace}(r)$ และ $\lambda_{max}(r, r+1)$ พร้อมกับให้ค่าวิกฤติของแต่ละค่ามาพร้อมกันด้วย ทำให้การทดสอบจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวสะดวกขึ้นมาก

12.6 ความสัมพันธ์เชิงเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger เมื่อตัวแปรเป็น I(1)

การทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger (Granger Causality) ที่ได้กล่าวในบทที่ 11 หัวข้อที่ 11.7 นั้น มีข้อสมมุติว่าอนุกรมเวลาทุกตัวที่อยู่ในแบบจำลอง VAR จะต้องเป็น I(0) ในหัวข้อนี้เราจะมาดูว่า หากอนุกรมเวลาทุกตัวเป็น I(1) แล้ว การทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger มีวิธีการอย่างไร

เพื่อให้เข้าใจง่าย กำหนดให้เวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ ประกอบด้วยอนุกรมเวลา Y_t และ Z_t ซึ่งอนุกรมเวลาทั้งสองนี้เป็น I(1) และไม่มีส่วนกำหนดได้แน่นอน แบบจำลอง VAR ที่เหมาะสมกับอนุกรมเวลาทั้งสองคือ

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{A_2 X_{t-2}} + \boldsymbol{A_3 X_{t-3}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.28)$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} Y_t \\ Z_t \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A_i}$ คือเมทริกซ์ของค่าพารามิเตอร์ขนาด 2 × 2 (i = 1, 2, 3) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} a_{11,2} & a_{12,2} \\ a_{21,2} & a_{22,2} \end{bmatrix}$ และ $\boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} a_{11,3} & a_{12,3} \\ a_{21,3} & a_{22,3} \end{bmatrix}$

สมการที่ (11.28) เขียนได้อีกอย่างคือ

$Y_t = a_{10} + a_{11,1}Y_{t-1} + a_{12,1}Z_{t-1} + a_{11,2}Y_{t-2} + a_{12,2} Z_{t-2} + a_{11,3}Y_{t-3} + a_{12,3} Z_{t-3} + u_{1t}$ (12.29 ก)

$Z_t = a_{20} + a_{21,1}Y_{t-1} + a_{22,1}Z_{t-1} + a_{21,2}Y_{t-2} + a_{22,2} Z_{t-2} + a_{21,3}Y_{t-3} + a_{22,3} Z_{t-3} + u_{2t}$ (12.29 ข)

การทดสอบว่า อนุกรมเวลา Z_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger หรือไม่ สามารถทำได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองต่อไปนี้

H_0: $a_{12,1} = a_{12,2} = a_{12,3} = 0$ (12.30 ก)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวภายใต้สมมุติฐานหลัก (12.30 ก) ไม่เป็นศูนย์ (12.30 ข)

ส่วนการทดสอบว่า อนุกรมเวลา Y_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Z_t ตามแนวคิดของ Granger หรือไม่ สามารถทำได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองต่อไปนี้

H_0: $a_{21,1} = a_{21,2} = a_{21,3} = 0$ (12.31 ก)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวภายใต้สมมุติฐานหลัก (12.31 ก) ไม่เป็นศูนย์ (12.31 ข)

ในกรณีนี้เราจะไม่สามารถใช้ค่าสถิติ F และค่าสถิติ Wald ดังที่เคยแสดงไว้ในสมการที่ (11.41) และ (11.44) ตามลำดับ ในการทดสอบสมมุติฐาน (12.30 ก) และ (12.31 ก) ได้ ทั้งนี้เพราะอนุกรมเวลา Y_t และ Z_t เป็น I(1) เพื่อให้สามารถทดสอบสมมุติฐานทั้งสองนี้ได้เราต้องพยายามทำให้อนุกรมเวลา Y_t และ Z_t ในแบบจำลอง VAR(3) มีความนิ่ง ด้วยการแปลงให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VECM ดังนี้

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\Pi X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \boldsymbol{u}_t \qquad (12.32)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Pi} = -(\mathbf{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3)$

$\boldsymbol{\Gamma}_1 = -(\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3)$

$\boldsymbol{\Gamma}_2 = -(\boldsymbol{A}_3)$

สมการที่ (12.32) เขียนได้อีกแบบคือ

$$\begin{bmatrix}\Delta Y_t \\ \Delta Z_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + a_{11,1} + a_{11,2} + a_{11,3} & + a_{12,1} + a_{12,2} + a_{12,3} \\ + a_{21,1} + a_{21,2} + a_{21,3} & -1 + a_{22,1} + a_{22,2} + a_{22,3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1}\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -(a_{11,2} + a_{11,3}) & -(a_{12,2} + a_{12,3}) \\ -(a_{21,2} + a_{21,3}) & -(a_{22,2} + a_{22,3})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Y_{t-1} \\ \Delta Z_{t-1}\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -(a_{11,3}) & -(a_{12,3}) \\ -(a_{21,3}) & -(a_{22,3})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Y_{t-2} \\ \Delta Z_{t-2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t}\end{bmatrix} \qquad (12.33)$$

ถ้ากำหนดให้

$$\pi_{11} = -1 + a_{11,1} + a_{11,2} + +a_{11,3} \qquad (12.34\ ก)$$

$$\pi_{12} = \quad +a_{12,1} + a_{12,2} + a_{12,3} \qquad (12.34\ ข)$$

$$\pi_{21} = \quad +a_{21,1} + a_{21,2} + a_{21,3} \qquad (12.34\ ค)$$

$$\pi_{22} = -1 + a_{22,1} + a_{22,2} + a_{22,3} \qquad (12.34\ ง)$$

$$\gamma_{11,1} = -(a_{11,2} + a_{11,3}) \qquad (12.34\ จ)$$

$$\gamma_{12,1} = -(a_{12,2} + a_{12,3}) \qquad (12.34\ ฉ)$$

$$\gamma_{21,1} = -(a_{21,2} + a_{21,3}) \qquad (12.34\ ช)$$

$$\gamma_{22,1} = -(a_{22,2} + a_{22,3}) \qquad (12.34\ ซ)$$

$$\gamma_{11,2} = -(a_{11,3}) \qquad (12.34\ ฌ)$$

$$\gamma_{12,2} = -\left(a_{12,3}\right) \qquad \text{(12.34 ญ)}$$

$$\gamma_{21,2} = -\left(a_{21,3}\right) \qquad \text{(12.34 ฎ)}$$

$$\gamma_{22,2} = -\left(a_{22,3}\right) \qquad \text{(12.34 ฏ)}$$

แทนค่า (12.34 ก) และ (12.34 ฏ) ลงใน (12.33) จะได้

$$\begin{bmatrix}\Delta Y_t\\ \Delta Z_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{11}\\ \pi_{21} & \pi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{t-1}\\ Z_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma_{11,1} & \gamma_{12,1}\\ \gamma_{21,1} & \gamma_{22,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Y_{t-1}\\ \Delta Z_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma_{11,2} & \gamma_{12,2}\\ \gamma_{21,2} & \gamma_{22,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Y_{t-2}\\ \Delta Z_{t-2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix} \qquad \text{(12.35)}$$

เราทราบแล้วว่า อนุกรมเวลาจำนวน 2 ชุด (ในที่นี้คือ Y_t และ Z_t) สามารถมีความสัมพันธ์เชิงดุลย-ภาพระยะยาวต่อกันอย่างมาก 1 รูปแบบเท่านั้น และจะสามารถเขียนได้ว่า $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta'}$ โดยที่ $\boldsymbol{\alpha}$ และ $\boldsymbol{\beta}$ คือเมทริกซ์ขนาด 2×1 ซึ่งเขียนได้เป็น $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\end{bmatrix}$ และ rank($\boldsymbol{\alpha}$) = rank($\boldsymbol{\beta}$) = 1

ดังนั้น จาก $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta'}$ เขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{11}\\ \pi_{21} & \pi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{21}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{21}\\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{21}\beta_{21}\end{bmatrix}$$

แทนค่าลงใน (12.35) จะได้

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Delta Y_t\\ \Delta Z_t\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{21}\\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{21}\beta_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{t-1}\\ Z_{t-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma_{11,1} & \gamma_{12,1}\\ \gamma_{21,1} & \gamma_{22,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Y_{t-1}\\ \Delta Z_{t-1}\end{bmatrix}\\ &+ \begin{bmatrix}\gamma_{11,2} & \gamma_{12,2}\\ \gamma_{21,2} & \gamma_{22,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Y_{t-2}\\ \Delta Z_{t-2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad \text{(12.36)}$$

นั่นคือ แบบจำลอง VECM เขียนได้ดังนี้

$$\Delta Y_t = \alpha_{11}(\beta_{11}Y_{t-1} + \beta_{21}Z_{t-1}) + \gamma_{11,1}\Delta Y_{t-1} + \gamma_{12,1}\Delta Z_{t-1} + \gamma_{11,2}\Delta Y_{t-2} + \gamma_{12,2}\Delta Z_{t-2} + u_{1t} \qquad \text{(12.37 ก)}$$

$$\Delta Z_t = \alpha_{21}(\beta_{11}Y_{t-1} + \beta_{21}Z_{t-1}) + \gamma_{21,1}\Delta Y_{t-1} + \gamma_{22,1}\Delta Z_{t-1} + \gamma_{21,2}\Delta Y_{t-2} + \gamma_{22,2}\Delta Z_{t-2} + u_{1t} \qquad \text{(12.37 ข)}$$

จะเห็นว่า $(\beta_{11}Y_{t-1}+\beta_{21}Z_{t-1})$ คือส่วนเบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพหรือความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ซึ่งจะเปรียบเสมือนเป็นอีกตัวแปรอิสระหนึ่งที่เป็น I(0)[13] และเนื่องจาก Y_t และ Z_t เป็น I(1) ดังนั้น ΔY_t และ ΔZ_t ต้องเป็น I(0) นั่นคือ เราสามารถใช้ค่าสถิติ t, ค่าสถิติ F หรือค่าสถิติ Wald ในการทดสอบสมมุติฐานของค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (12.37 ก) และ (12.37 ข) ได้

จากแบบจำลอง VECM ตามสมการที่ (12.34 ก) และ (12.34 ข) ถ้าแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 : Y_t และ Z_t ไม่มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกัน นั่นคือ $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}$ ดังนั้น แบบจำลอง VECM จะเขียนได้เป็น

$$\Delta Y_t = \gamma_{11,1}\Delta Y_{t-1} + \gamma_{12,1}\Delta Z_{t-1} + \gamma_{11,2}\Delta Y_{t-2} + \gamma_{12,2}\Delta Z_{t-2} + u_{1t} \qquad (12.38 \text{ ก})$$

$$\Delta Z_t = \gamma_{21,1}\Delta Y_{t-1} + \gamma_{22,1}\Delta Z_{t-1} + \gamma_{21,2}\Delta Y_{t-2} + \gamma_{22,2}\Delta Z_{t-2} + u_{1t} \qquad (12.38 \text{ ข})$$

โดยที่

$$\pi_{11} = -1 + a_{11,1} + a_{11,2} + a_{11,3} = 0 \qquad (12.38 \text{ ค})$$

$$\pi_{12} = +a_{12,1} + a_{12,2} + a_{12,3} = 0 \qquad (12.38 \text{ ง})$$

$$\pi_{21} = +a_{21,1} + a_{21,2} + a_{21,3} = 0 \qquad (12.38 \text{ จ})$$

$$\pi_{22} = -1 + a_{22,1} + a_{22,2} + a_{22,3} = 0 \qquad (12.38 \text{ ฉ})$$

- พิจารณาสมการที่ (12.38 ง) ถ้า $a_{12,2} = a_{12,3} = 0$ แล้ว $a_{12,1} = 0$
- พิจารณาสมการที่ (12.38 จ) ถ้า $a_{21,2} = a_{21,3} = 0$ แล้ว $a_{21,1} = 0$

นั่นคือ เมื่ออนุกรมเวลา X_t และ Y_t เป็น I(1) การทดสอบสมมุติฐานว่า อนุกรมเวลา Z_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger จะต้องใช้แบบจำลอง VECM ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองว่า

[13] ถ้า X_t และ Y_t มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกันแล้ว $(\beta_{11}Y_{t-1} + \beta_{21}Z_{t-1})$ ต้องเป็น I(0)

H_0: $\gamma_{12,1} = \gamma_{12,2} = 0$ (12.39 ก)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวตามสมการที่ (12.39 ก) ไม่เป็นศูนย์ (12.39 ข)

การทดสอบสมมุติฐานนี้สามารถใช้ค่าสถิติ *F* หรือค่าสถิติ Wald ก็ได้ และเมื่อสมมุติฐานหลัก (12.39 ก) ไม่สามารถถูกปฏิเสธได้จะหมายถึง $a_{12,1} = a_{12,2} = a_{12,3} = 0$ ซึ่งก็คืออนุกรมเวลา Z_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger

ทำนองเดียวกัน เราสามารถใช้แบบจำลอง VECM ตามสมการที่ (12.38 ก) และ (12.38 ข) เพื่อทดสอบว่า อนุกรมเวลา Y_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Z_t ตามแนวคิดของ Granger ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและรองดังนี้

H_0: $\gamma_{21,1} = \gamma_{21,2} = 0$ (12.40 ก)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวตามสมการที่ (12.40 ก) ไม่เป็นศูนย์ (12.40 ข)

การทดสอบสมมุติฐานนี้สามารถใช้ค่าสถิติ *F* หรือค่าสถิติ Wald ก็ได้ และเมื่อสมมุติฐานหลัก (12.40 ก) ไม่สามารถถูกปฏิเสธได้จะหมายถึง $a_{21,1} = a_{21,2} = a_{21,3} = 0$ ซึ่งก็คืออนุกรมเวลา Y_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Z_t ตามแนวคิดของ Granger

กรณีที่ 2 : Y_t และ Z_t มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกัน นั่นคือ $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta'}$ และเรากล่าวได้ว่าจะต้องมีความสัมพันธ์เชิงเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger ระหว่างอนุกรมเวลา 2 ตัวนี้ (Y_t, Z_t) ในทิศทางใดทิศทางหนึ่งหรือทั้งสองทิศทางด้วย

ในกรณีนี้แบบจำลอง VECM จะเป็นสมการที่ (12.37 ก) และ (12.37 ข) ซึ่งสามารถใช้ทดสอบความสัมพันธ์เชิงเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger ทั้งในระยะสั้นหรือในระยะยาวได้[14]

สมการที่ (12.37 ก) สามารถใช้ในการทดสอบว่า อนุกรมเวลา Z_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้น ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองดังนี้

---

[14] สำหรับกรณีทั่วไปที่มีอนุกรมเวลา *n* ตัวและมีเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมากกว่า 1 รูปแบบ สามารถอ่านได้ใน Huh, H. S., “A Simple Test of Exogeneity for Recursively Structured VAR models,” *Applied Economics* 37 (2005): 2307–2313.

H_0: $\gamma_{12,1} = \gamma_{12,2} = 0$ (12.41 ก)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวตามสมการที่ (12.41 ก) ไม่เป็นศูนย์ (12.41 ข)

กรณีนี้ก็เหมือนกับการทดสอบสมมุติฐาน (12.39 ก) และ (12.39 ข) นั่นเอง ทำนองเดียวกัน สมการที่ (12.37 ข) สามารถใช้ในการทดสอบสมมุติฐานว่า อนุกรมเวลา Y_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Z_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้น โดยตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองเหมือนกับสมการที่ (12.40 ก) และ (12.40 ข) นั่นเอง

ส่วนการทดสอบว่า อนุกรมเวลา Z_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะยาวหรือไม่ทำได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองดังนี้

H_0: $\alpha_{11} = 0$ (12.42 ก)

H_0: $\alpha_{11} \neq 0$ (12.42 ข)

ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก H_0: $\alpha_{11} = 0$ จะหมายถึงอนุกรมเวลา Y_t จะไม่ถูกกระทบจากอนุกรมเวลาอื่น ๆ (ซึ่งในที่นี้คืออนุกรมเวลา Z_t) ผ่านทางเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลย-ภาพระยะยาว หรือกล่าวได้ว่า Y_t คือตัวแปรภายนอกแบบไม่มีพลัง (Weakly Exogenous) หรืออนุกรมเวลา Z_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Y_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะยาวนั่นเอง

ทำนองเดียวกัน การทดสอบว่าอนุกรมเวลา Y_t เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Z_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะยาวหรือไม่ทำได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานหลักและสมมุติฐานรองดังนี้

H_0: $\alpha_{21} = 0$ (12.43 ก)

H_0: $\alpha_{21} \neq 0$ (12.43 ข)

ถ้าเราไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก H_0: $\alpha_{21} = 0$ จะหมายถึงอนุกรมเวลา Z_t จะไม่ถูกกระทบจากอนุกรมเวลาอื่น ๆ (ซึ่งในที่นี้คืออนุกรมเวลา Y_t) ผ่านทางเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลย-ภาพระยะยาว หรือกล่าวได้ว่า Z_t คือตัวแปรภายนอกแบบไม่มีพลัง (Weakly Exogenous) หรือ

อนุกรมเวลา Y_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา Z_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะยาวนั่นเอง

12.7 การพยากรณ์อนุกรมเวลาในเวกเตอร์ X_t โดยใช้แบบจำลอง VECM

แบบจำลองที่สะดวกที่สุดในการพยากรณ์อนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ ก็คือการใช้แบบจำลอง VAR ดังนั้น หลังจากที่ได้ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง VECM เราสามารถจะใช้ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์นี้คำนวณย้อนกลับไปเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง VAR ได้ดังจะอธิบายต่อไปนี้

เราทราบแล้วว่า เมื่ออนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ เป็น I(1) และมีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกันแล้ว เราสามารถแปลงแบบจำลอง VAR(p) ดังเคยแสดงแล้วในสมการที่ (12.1) ให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VECM ในสมการที่ (12.2) ได้

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_1X_{t-1}} + \boldsymbol{A_2X_{t-2}} + \ldots + \boldsymbol{A_pX_{t-p}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.1)$$

$$\Delta\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\Pi X_{t-1}} + \boldsymbol{\Gamma_1}\Delta\boldsymbol{X_{t-1}} + \boldsymbol{\Gamma_2}\Delta\boldsymbol{X_{t-2}} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma_{p-1}}\,\Delta\boldsymbol{X_{t-(p-1)}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.2)$$[15]

โดยที่ $\boldsymbol{\Pi} = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A_1} - \boldsymbol{A_2} - \ldots - \boldsymbol{A_p})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$

$\boldsymbol{\Gamma_1} = -(\boldsymbol{A_2} + \boldsymbol{A_3} + \boldsymbol{A_4} + \ldots + \boldsymbol{A_p})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$

$\boldsymbol{\Gamma_2} = -(\boldsymbol{A_3} + \boldsymbol{A_4} + \ldots + \boldsymbol{A_p})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$

:

$\boldsymbol{\Gamma_{p-1}} = -(\boldsymbol{A_p})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$

จากแนวคิดนี้หลังจากที่เราประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (12.3) เขียนแทนด้วย $\hat{\boldsymbol{\Pi}}$, $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{1}}$, $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{2}}$, …, $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{p-1}}$ เราจะใช้ตัวประมาณค่าเหล่านี้ไปประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง VAR(p) ด้วยสูตรต่อไปนี้

---

[15] ดูวิธีพิสูจน์ในภาคผนวก 12ก

$$\widehat{\boldsymbol{A}}_i = \begin{cases} \boldsymbol{I} + \widehat{\boldsymbol{\Pi}} + \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{1}} & \text{เมื่อ } i = 1 \\ \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{i}} - \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{i-1}} & \text{เมื่อ } 2 \le i \le p-1 \\ -\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{p-1}} & i = p \end{cases} \qquad (12.44)$$

จากนั้นจึงใช้แบบจำลอง VAR พยากรณ์อนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ โดยใช้แนวคิดเดิมที่กล่าวไว้แล้วในบทที่ 11 คือค่าพยากรณ์ค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดจากการพยากรณ์ยกกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด (Minimum Mean Square Error) ดังนั้น การหาค่าพยากรณ์ 1, 2, …, h ช่วงเวลาล่วงหน้าของอนุกรมเวลาในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ แสดงได้ดังนี้

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+1}} = \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{X_T} + \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T-1}} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T-p+1}}$$

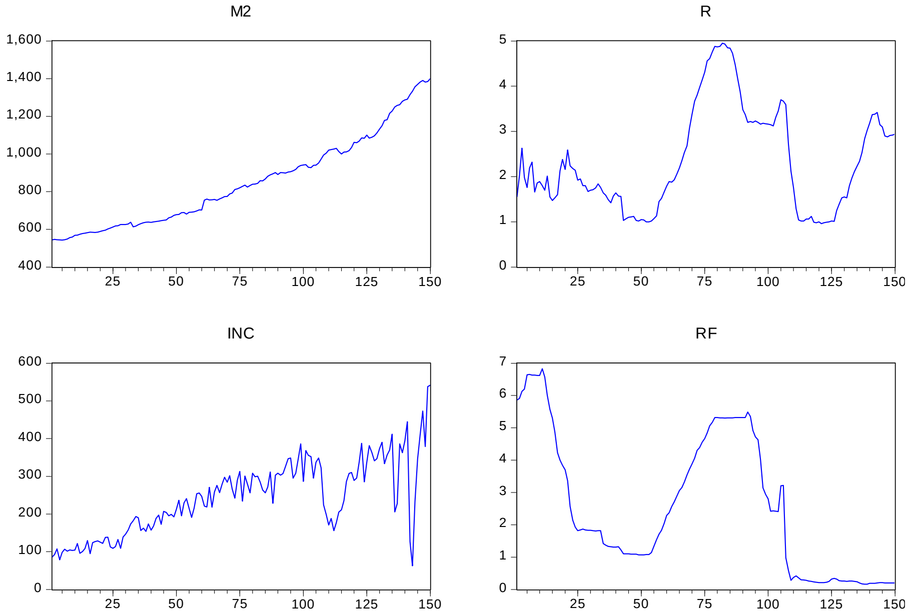
$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+2}} = \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}}\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+1}} + \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{X_T} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T-p+2}}$$

……………………..

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+h}} = \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{1}}\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+h-1}} + \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{2}}\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+h-2}} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{p}}\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T-p+h}} \quad \text{โดยที่ } \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{T+j}} = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{T+j}} \quad \text{เมื่อ } j < 0$$

12.8 ตัวอย่างการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

สมมุติว่า นักเศรษฐศาสตร์ของประเทศหนึ่งต้องการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของปริมาณเงินความหมายกว้าง ($M2$), อัตราดอกเบี้ยภายในประเทศ (R), ดัชนีรายได้ (INC) และอัตราดอกเบี้ยต่างประเทศของประเทศมหาอำนาจ (RF) และได้รวบรวมข้อมูลอนุกรมเวลา จำนวน 150 เดือน ของตัวแปรเหล่านี้ แสดงดังรูปที่ 12.1 ถ้าอนุกรมเวลาเหล่านี้เป็น I(1) เราจะต้องทดสอบว่าอนุกรมเวลาเหล่านี้มีจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวต่อกันจำนวนกี่รูปแบบ



รูปที่ 12.1 แสดงกราฟของปริมาณเงินความหมายกว้าง (*M*2), อัตราดอกเบี้ยภายในประเทศ (*R*) ดัชนีรายได้ (*INC*) และ อัตราดอกเบี้ยต่างประเทศของประเทศมหาอำนาจ (*RF*)

เมื่อสังเกตรูปที่ 12.1 อนุกรมเวลาปริมาณเงินความหมายกว้าง (*M*2) และดัชนีรายได้ (*INC*) น่าจะมีส่วนกำหนดได้แน่นอน ดังนั้น แบบจำลอง VAR ที่จะนำมาใช้เขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t = A_1X_{t-1} + A_2X_{t-2} + \ldots + A_pX_{t-p} + \mu_0 + \mu_1 t + u_t} \qquad (12.45)$$

โดยที่ $\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} M2_t \\ R_t \\ INC_t \\ RF_t \end{bmatrix}_{4\times 1}$

ในขั้นแรก เราต้องหาว่าค่าความล่าช้าที่เหมาะสมที่จะใช้กับสมการที่ (12.45) ควรเป็นเท่าไรโดยใช้หลักเกณฑ์ว่าลำดับที่เหมาะ (*p*) ของแบบจำลอง VAR จะทำให้ได้ค่า AIC ต่ำสุด นักเศรษฐศาสตร์ท่านนี้ได้ลองกำหนดให้ลำดับ *p* มีค่าเริ่มตั้งแต่ 1 จนถึง 10 และคำนวณค่า AIC แสดงได้ดังตารางที่ 11.1 ซึ่งจะเห็นว่าค่า AIC ของแบบจำลอง VAR(2) มีค่า 17.3086 ซึ่งมีค่าต่ำที่สุดเมื่อเทียบกับลำดับอื่น ๆ ตั้งแต่ 1 ถึง 10 นั่นคือ ลำดับความล่าช้าที่เหมาะสมคือ $p = 2$ หรือเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t = A_1X_{t-1} + A_2X_{t-2} + \mu_0 + \mu_1 t + u_t} \qquad (12.46)$$[16]

ตารางที่ 12.1 แสดงค่า AIC ของแบบจำลอง VAR(p) , p = 1, 2, …, 10

ลำดับ *p* ของแบบจำลอง VAR	**ค่า AIC**
1	17.6117
2	17.3086*
3	17.3351
4	17.3098
5	17.3845
6	17.3392
7	17.3856
8	17.4361
9	17.4098
10	17.4179

หมายเหตุ : * แสดงค่าต่ำสุดของ AIC

ดังนั้น เราจะใช้แบบจำลอง VECM ในการทดสอบความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ซึ่งอาจอยู่ในรูปแบบของกรณีที่ 3 และ 4 ในหัวข้อ 12.3.2 ก็ได้ซึ่งเขียนได้ดังนี้[17]

$$\boldsymbol{\Delta X_t = \alpha\tilde{\beta}'\tilde{X}_{t-1} + \Gamma_1\Delta X_{t-1} + \gamma_0 + u_t} \qquad (12.46\ ก)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\tilde{\beta}'} = [\boldsymbol{\beta'} \quad \boldsymbol{\beta_0}]$ และ $\boldsymbol{\tilde{X}_{t-1}} = [\boldsymbol{X_{t-1}} \quad 1]'$

$$\boldsymbol{\Delta X_t = \alpha\tilde{\beta}'\tilde{X}_{t-1} + \Gamma_1\Delta X_{t-1} + \gamma_0 + u_t} \qquad (12.46\ ข)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\tilde{\beta}'} = [\boldsymbol{\beta'} \quad \boldsymbol{\beta_0} \quad \boldsymbol{\beta_1}]$ และ $\boldsymbol{\tilde{X}_{t-1}} = [\boldsymbol{X_{t-1}} \quad 1 \quad t]'$

สมการที่ (12.46 ก) แสดงถึงแนวโน้มกำหนดได้นี้จะถูกกำจัดออกไปจากความสัมพันธ์เชิงดุลย-ภาพระยะยาว ในขณะที่สมการที่ (12.46 ข) ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวไม่สามารถกำจัดแนวโน้มกำหนดได้ออกไปได้

[16] เมื่ออนุกรมเวลาในแบบจำลอง VAR(p) เป็น I(1) เราจะไม่เช็กว่าเวกเตอร์ $\boldsymbol{u_t}$ เกิดปัญหาความสัมพันธ์กันเองตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนหรือไม่

[17] อย่าลืมว่าในแบบจำลอง VAR เราเลือกค่าความล่าช้าที่เหมาะสมคือ 2 (p = 2) เพราะฉะนั้นค่าความล่าช้าที่เหมาะสมในแบบจำลอง VECM คือ p–1= 2–1 = 1

และเนื่องจากเราไม่มีทางทราบได้ว่า ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวควรอยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (12.46 ก) หรือ (12.46 ข) ดังนั้น เราต้องลองทีละสมการ โดยอาจลองเลือกใช้สมการที่ (12.46 ก) ในการทดสอบความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวดูก่อน และถ้าหากพบว่าเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวที่ได้จากสมการที่ (12.46 ก) (ซึ่งจะมีค่าคงที่อยู่ด้วย) มีความนิ่ง (Stationary) รอบค่าคงที่ศูนย์ทุก ๆ รูปแบบ นั่นคือ การเลือกแบบจำลอง VECM ตามสมการที่ (12.46 ก) มีความเหมาะสมแล้ว

แต่หากพบว่ารูปแบบความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวที่ได้จากสมการที่ (12.46 ก) ไม่มีความนิ่ง เช่น มีแนวโน้มกำหนดได้ร่วมอยู่ด้วย เราต้องเปลี่ยนไปใช้แบบจำลอง VECM ตามสมการที่ (12.46 ข) และตรวจสอบว่าเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวที่ได้จากสมการที่ (12.46 ข) (ซึ่งจะรวมค่าคงที่และแนวโน้มกำหนดได้อยู่ด้วย) จะต้องมีความนิ่ง (Stationary) รอบค่าคงที่ศูนย์ทุก ๆ รูปแบบหรือไม่

เราจะเริ่มจากการใช้สมการที่ (12.46 ก) ในการประมาณเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของอนุกรมเวลา 4 ตัว คือ ปริมาณเงินความหมายกว้าง (*M*2), อัตราดอกเบี้ยภายในประเทศ (*R*), ดัชนีรายได้ (*INC*) และอัตราดอกเบี้ยต่างประเทศของประเทศมหาอำนาจ (*RF*) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\Delta X_t} = \boldsymbol{\alpha\tilde{\beta}'\tilde{X}_{t-1}} + \boldsymbol{\Gamma_1\Delta X_{t-1}} + \boldsymbol{\gamma_0} + \boldsymbol{u_t} \tag{12.47}$$

โดยที่ $\Delta\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} \Delta M2_t \\ \Delta R_t \\ \Delta INC_t \\ \Delta RF_t \end{bmatrix}_{4\times1}$ $, \Delta\boldsymbol{X_{t-1}} = \begin{bmatrix} \Delta M2_{t-1} \\ \Delta R_{t-1} \\ \Delta INC_{t-1} \\ \Delta RF_{t-1} \end{bmatrix}_{4\times1}$ $\boldsymbol{\tilde{X}_{t-1}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_{t-1}} \\ 1 \end{bmatrix}_{5\times1}$ และ $\boldsymbol{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}_0 \end{bmatrix}$

เนื่องจากอนุกรมเวลาที่เป็น I(1) มีทั้งหมด 4 ชุด (n = 4) ดังนั้น จำนวนรูปแบบความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของอนุกรมเวลาทั้งสี่ที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2 หรือ 3 รูปแบบ (r = 0, 1, 2 และ 3) เราจะต้องใช้ค่าสถิติ Trace (λ_{trace}) หรือค่าสถิติ Maximum-Eigenvalue (λ_{max}) ในการทดสอบว่า จำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (r) มีกี่รูปแบบ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 : หาเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{0t}}$ และ $\boldsymbol{R_{1t}}$

$\boldsymbol{R_{0t}}$ คือเมทริกซ์ของค่าความผิดพลาด (Residual) ขนาด $n\times T$ ซึ่งในที่นี้คือเมทริกซ์ขนาด 4×148 (T คือจำนวนข้อมูลที่ใช้ประมาณแบบจำลอง VECM ซึ่งมีค่าเท่ากับ 150 – 2 = 148)[18]

- สมาชิกแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{0t}}$ คือค่าความผิดพลาดของสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ $\Delta M2_t$ และตัวแปรอิสระคือ $\Delta M2_{t-1}, \Delta R_{t-1}, \Delta INC_{t-1}$, ΔRF_t และค่าคงที่
- สมาชิกแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{0t}}$ คือค่าความผิดพลาดของสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ ΔR_t และตัวแปรอิสระคือ $\Delta M2_{t-1}, \Delta R_{t-1}, \Delta INC_{t-1}$, ΔRF_t และค่าคงที่
- สมาชิกแถวที่ 3 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{0t}}$ คือค่าความผิดพลาดของสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ ΔINC_t และตัวแปรอิสระคือ $\Delta M2_{t-1}, \Delta R_{t-1}, \Delta INC_{t-1}$, ΔRF_t และค่าคงที่
- สมาชิกแถวที่ 4 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{0t}}$ คือค่าความผิดพลาดของสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ ΔRF_t และตัวแปรอิสระคือ $\Delta M2_{t-1}, \Delta R_{t-1}, \Delta INC_{t-1}$, ΔRF_t และค่าคงที่

$\boldsymbol{R_{1t}}$ คือเมทริกซ์ของค่าความผิดพลาด (Residual) ขนาด $n\times T$ ซึ่งในที่นี้คือเมทริกซ์ขนาด 4×148

- สมาชิกแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{1t}}$ คือค่าความผิดพลาดของสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ $M2_{t-1}$ และตัวแปรอิสระคือ $\Delta M2_{t-1}, \Delta R_{t-1}, \Delta INC_{t-1}$, ΔRF_t และค่าคงที่
- สมาชิกแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{1t}}$ คือค่าความผิดพลาดของสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ R_{t-1} และตัวแปรอิสระคือ $\Delta M2_{t-1}, \Delta R_{t-1}, \Delta INC_{t-1}$, ΔRF_t และค่าคงที่
- สมาชิกแถวที่ 3 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{1t}}$ คือค่าความผิดพลาดของสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ INC_{t-1} และตัวแปรอิสระคือ $\Delta M2_{t-1}, \Delta R_{t-1}, \Delta INC_{t-1}$, ΔRF_t และค่าคงที่
- สมาชิกแถวที่ 4 ของเมทริกซ์ $\boldsymbol{R_{1t}}$ คือค่าความผิดพลาดของสมการถดถอยที่มีตัวแปรตามคือ RF_{t-1} และตัวแปรอิสระคือ $\Delta M2_{t-1}, \Delta R_{t-1}, \Delta INC_{t-1}$, ΔRF_t และค่าคงที่

---

[18] จำนวนข้อมูลที่ใช้ประมาณสมการที่ (12.46 ก) จะต้องหายไป 2 ตัว จากการทำผลต่างลำดับที่ 1 ($\Delta \boldsymbol{X_t}$) และจากการที่ต้องใช้ $\Delta \boldsymbol{X_{t-1}}$ เป็นตัวแปรอิสระ

ขั้นที่ 2 : หาเมทริกซ์ $\boldsymbol{S}_{11}$, $\boldsymbol{S}_{10}$, $\boldsymbol{S}_{00}$ และ, $\boldsymbol{S}_{01}$ แสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{S}_{11} = \frac{1}{T}\boldsymbol{R}_{1t}\boldsymbol{R}'_{1t} = \frac{1}{148}\boldsymbol{R}_{1t}\boldsymbol{R}'_{1t}$$

$$= \begin{bmatrix} 48{,}255.8765 & 48.6378 & 14{,}502.2179 & -230.7195 \\ 48.6378 & 1.2560 & 33.4347 & 1.2354 \\ 14{,}502.2179 & 33.4347 & 7{,}764.1210 & -52.0276 \\ -230.7195 & 1.2354 & -52.0276 & 4.2788 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_{10} = \frac{1}{T}\boldsymbol{R}_{1t}\boldsymbol{R}'_{0t} = \frac{1}{148}\boldsymbol{R}_{1t}\boldsymbol{R}'_{0t}$$

$$= \begin{bmatrix} 578.7057 & 1.4459 & 572.8693 & 0.5858 \\ 0.8196 & -0.0251 & -2.5572 & -0.0133 \\ 218.2614 & 1.8094 & -957.9476 & 0.2048 \\ -3.1481 & -0.0172 & -2.8430 & -0.0601 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_{01} = \frac{1}{T}\boldsymbol{R}_{0t}\boldsymbol{R}'_{1t} = \boldsymbol{S}'_{10}$$

$$= \begin{bmatrix} 578.7057 & 0.8196 & 218.2614 & -3.1481 \\ 1.4459 & -0.0251 & 1.8094 & -0.0172 \\ 572.8693 & -2.5572 & -957.9476 & -2.8430 \\ 0.5858 & -0.0133 & 0.2048 & -0.0601 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_{00} = \frac{1}{T}\boldsymbol{R}_{0t}\boldsymbol{R}'_{0t}$$

$$= \begin{bmatrix} 82.4059 & -0.0365 & -79.7276 & -0.2738 \\ -0.0365 & 0.0361 & 0.1964 & 0.0030 \\ -79.7276 & 0.1964 & 2601.5459 & -0.0509 \\ -0.2738 & 0.0030 & -0.0509 & 0.0619 \end{bmatrix}$$

จากนั้นเราจะหาค่าเจาะจง (Eigenvalue) และเวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector) จากสมการต่อไปนี้

$$\left|\lambda \boldsymbol{S}_{11} - \boldsymbol{S}_{10}\boldsymbol{S}_{00}^{-1}\boldsymbol{S}_{01}\right| = 0 \qquad (12.48\text{ ก})$$

อย่างไรก็ดี การหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงด้วยการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ เช่น Gauss มักหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์สมมาตรใด ๆ (ในที่นี้จะใช้สัญลักษณ์ **A**) จากสมการต่อไปนี้

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \mathbf{A}| = 0 \qquad (12.48\text{ ข})$$

ดังนั้น เราต้องแปลงสมการที่ (12.48 ก) ให้อยู่ในรูปสมการที่ (12.48 ข) ด้วยการแยก $\boldsymbol{S_{11}} = \boldsymbol{CC'}$ โดยที่ $\boldsymbol{C}$ คือเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-Singular Matrix)[19] ขนาด $n\times n$ แล้วค่าเจาะจงของสมการที่ (12.48 ก) จะมีค่าเท่ากับการหาค่าเจาะจงจากสมการต่อไปนี้[20]

$$\left|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{S_{10}}\boldsymbol{S_{00}^{-1}}\boldsymbol{S_{01}}\boldsymbol{C'}^{-1}\right| = 0 \qquad (12.48\text{ ค})$$

และกำหนดให้เวกเตอร์เจาะจงจากสมการที่ (12.48 ค) เขียนแทนด้วย $\hat{\boldsymbol{e}} = [\hat{\boldsymbol{e}}_1 \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{e}}_n]$ แล้วเวกเตอร์เจาะจงจากสมการที่ (12.48 ก) หาได้จากสูตรดังนี้ $\hat{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{C'}^{-1}\hat{\boldsymbol{e}}_i$

เมื่อกำหนดให้ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}_{11}^{\frac{1}{2}}$ สมการที่ (12.48 ค) เขียนได้ดังนี้

$$\left|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{S}_{11}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{S_{10}}\boldsymbol{S_{00}^{-1}}\boldsymbol{S_{01}}\boldsymbol{S}_{11}^{-\frac{1}{2}}\right| = 0 \qquad (12.48\text{ ง})$$

เราจะได้ว่า ค่าเจาะจงของสมการที่ (12.48 ง) ที่เรียงจากมากไปน้อย $\left(1 > \hat{\lambda}_1 > \cdots > \hat{\lambda}_4\right)$ และเวกเตอร์เจาะจง $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3, \hat{\boldsymbol{e}}_4$ ที่สอดคล้องจากค่าเจาะจง $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_4$ ตามลำดับ แสดงได้ดังตารางที่ 12.2 ดังนี้

ตารางที่ 12.2 แสดงค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงที่คำนวณจากสมการที่ (12.48 ง)

ค่าเจาะจง (Eigenvalue)	**เวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector)**			
$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i$	$\hat{\boldsymbol{e}}_1$	$\hat{\boldsymbol{e}}_2$	$\hat{\boldsymbol{e}}_3$	$\hat{\boldsymbol{e}}_4$
0.177189	0.3246	0.9117	0.2339	-0.0934
0.101879	0.2830	0.0616	-0.8261	-0.4835
0.040464	-0.8978	0.3239	-0.1248	-0.2710
0.014652	0.0921	-0.2451	0.4974	-0.8271

[19] หนังสือเล่มนี้จะเลือกใช้ค่า $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}_{11}^{\frac{1}{2}}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และเป็นเมทริกซ์สมมาตรด้วย

[20] Johansen, S., Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration–with Applications to the Demand for Money, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 52 (1990): p. 177.

ส่วนค่าเจาะจงของสมการที่ (12.48 ก) จะมีค่าเท่ากับค่าเจาะจงของสมการที่ (12.48 ง) และเวกเตอร์เจาะจงของสมการที่ (12.48 ก) จะคำนวณจาก $\hat{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{S}_{11}^{-\frac{1}{2}}\hat{\boldsymbol{e}}_i \ (i = 1,2,3,4)$ แสดงได้ดังตารางที่ 12.3 ดังนี้

ตารางที่ 12.3 แสดงค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของสมการที่ (12.48 ก)

ค่าเจาะจง (Eigenvalue)	**เวกเตอร์เจาะจง (Eigenvector)**			
$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i$	$\hat{\boldsymbol{v}}_1$	$\hat{\boldsymbol{v}}_2$	$\hat{\boldsymbol{v}}_3$	$\hat{\boldsymbol{v}}_4$
0.177189	0.0053	0.0027	0.0055	-0.0021
0.101879	0.3484	0.1859	-1.3353	-0.2982
0.040464	-0.0179	0.0018	0.0007	-0.0006
0.014652	-0.0518	-0.2029	0.7222	-0.3987

จากนั้นเราจะทดสอบจำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว (r) ด้วยการใช้ค่าสถิติ Trace (λ_{trace}) และค่าสถิติ Maximum-Eigenvalue (λ_{max}) โดยจะแสดงค่าสถิติทั้งสองสำหรับการทดสอบสมมุติฐานว่า r = 1, 2 และ 3 และแสดงค่าวิกฤต (Critical Value) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ในตารางที่ 12.4 ดังนี้

ตารางที่ 12.4 แสดงค่า λ_{trace} และ λ_{max} สำหรับการทดสอบจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

HO	$\lambda trace$	Critical value 0.05	λmax	Critical value 0.05
$r = 0$	53.0643	47.8561	28.8639	27.5843
$r = 1$	24.2004	29.7971	15.9027	21.1316
$r = 2$	8.2977	15.4947	6.1132	14.2646
$r = 3$	2.18454	3.8415	2.1845	3.8415

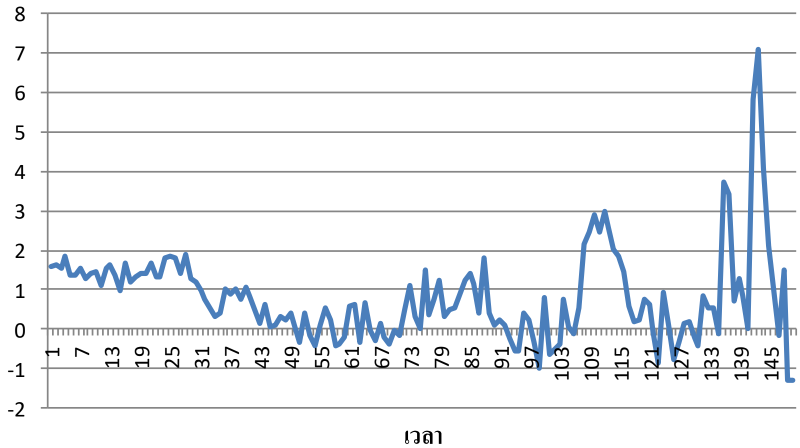
แถวที่ 1 ของตารางที่ 12.4 แสดงผลการทดสอบ H_o: $r = 0$ (อนุกรมเวลาทั้ง 4 ชุดนี้ไม่มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว) และเมื่อพิจารณาค่าสถิติ λ_{trace} พบว่ามีค่าเท่ากับ 53.0643 ซึ่งมากกว่าค่าวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 5 (47.8561) นั่นคือ เราสามารถปฏิเสธสมมติฐานหลัก

และสรุปว่ามีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว จำนวน 1 รูปแบบ ซึ่งสอดคล้องกับการทดสอบด้วยการใช้ค่าสถิติ λ_{max} คือปฏิเสธสมมติฐานหลักเช่นกัน จากนั้นจึงทดสอบสมมติฐานหลัก $H_o : r = 1$ (อนุกรมเวลาทั้ง 4 ชุดนี้มีความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว 1 รูปแบบ) ซึ่งจากการพิจารณาค่าสถิติ λ_{trace} พบว่ามีค่าเท่ากับ 24.2004 ซึ่งน้อยกว่าค่าวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญร้อยละ 5 (29.7971) นั่นคือ เราไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานหลัก ทำให้สรุปว่ามีจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวน 1 รูปแบบ สำหรับผลการทดสอบโดยใช้ค่าสถิติ λ_{max} พบว่าให้ข้อสรุปที่สอดคล้องกันคือมีจำนวนความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวจำนวน 1 รูปแบบ

ดังนั้น เราจะได้เวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวคือเวกเตอร์เจาะจงที่สอดคล้องกับค่าเจาะจง $\hat{\lambda}_1$ ซึ่งจะเขียนได้เป็น $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 0.0053 \\ 0.3484 \\ -0.0179 \\ -0.0518 \end{bmatrix}$ และความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแสดงได้ดังนี้

$$0.0053M2_t + 0.3484R_t - 0.0179INC_t - 0.0518RF_t = 0 \qquad (12.49 \text{ ก})$$

ถ้ากำหนดให้ $COINT_t = 0.0053M2_t + 0.3484R_t - 0.0179INC_t - 0.0518RF_t$ แล้วเราสามารถแสดงรูปของอนุกรมเวลา $COINT_t$ ได้ดังนี้

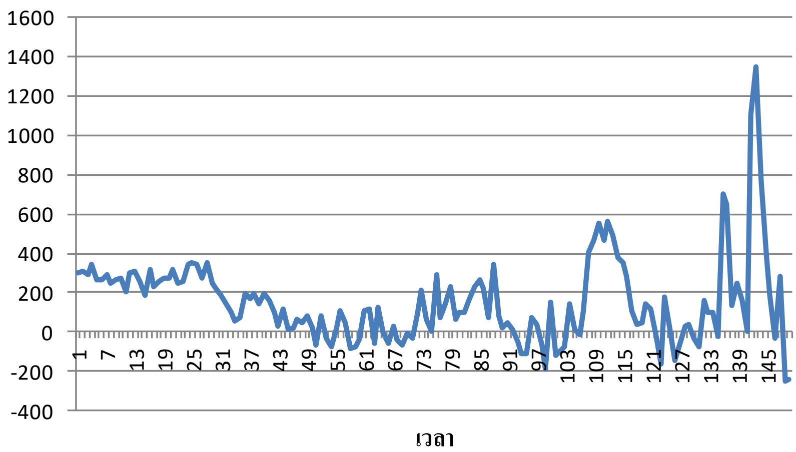


รูปที่ 12.2 แสดงอนุกรมเวลา $COINT_t$

และเพื่อให้ได้เวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพ 1 รูปแบบนี้เป็นหนึ่งเดียว (Uniqueness) เราจะต้องมีการใส่ข้อจำกัดในเมทริกซ์ $\boldsymbol{\beta}$ โดยข้อจำกัดที่ใส่นั้นอาจเป็นข้อจำกัดที่ใส่เพื่อให้สามารถอธิบายความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวให้เป็นไปตามทฤษฎีที่กำลังพิจารณาอยู่ หรือเป็นข้อจำกัดที่ใส่เพื่อความสะดวก ในกรณีนี้เราจะเลือกข้อจำกัดที่ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ของ $M2$ ในเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวมีค่าเป็นหนึ่ง ด้วยการนำ 0.0053 หารตลอด จะได้

$$M2_t + 66.1654R_t - 3.3950INC_t - 9.8434RF_t = 0 \qquad \text{(12.49 ข)}$$

ถ้ากำหนดให้ $COINT\_N_t = 0.0053M2_t + 0.3484R_t - 0.0179INC_t - 0.0518RF_t$ แล้วเราสามารถแสดงรูปของอนุกรมเวลา $COINT\_N_t$ ได้ดังนี้



รูปที่ 12.3 แสดงอนุกรมเวลา $COINT\_N_t$

และอนุกรมเวลา $COINT\_N$ นี้อาจถูกเรียกว่า ส่วนเบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพระยะยาว (Long-Run Equilibrium Error) ซึ่งจากรูปเราอาจกล่าวได้ว่า $E(COINT\_N) \neq 0$ หรือค่าเฉลี่ยของส่วนเบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพระยะยาว และเมื่อเราลองหาค่าเฉลี่ยของข้อมูล $COINT\_N$ ที่ประมาณขึ้นพบว่า $\overline{COINT\_N} = 153.078$ เป็นค่าที่ห่างจากศูนย์มาก ซึ่งแสดงถึงควรมีค่าคงที่รวมอยู่ในเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวดังสมการที่ (12.46 ก) (จะอธิบายต่อไป) และเมื่อนำอนุกรมเวลา $COINT\_N$ ไปทดสอบ Unit Root พบว่าอนุกรมเวลานี้มีความนิ่ง

จากการสังเกต หากเราเขียนสมการที่ (12.49 ข) ในรูปต่อไปนี้

$$M2_t = -66.1654R_t + 3.3950INC_t + 9.8434RF_t \qquad (12.49\ \text{ค})$$

จากสมการที่ (12.49 ค) ทำให้เรากล่าวได้ว่า จากการใส่ข้อจำกัดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของ $M2$ เป็น 1 แล้วจะทำให้เราสามารถอธิบายความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของความต้องการถือเงินในประเทศนี้ได้ เช่น หากอัตราดอกเบี้ยในประเทศเพิ่มขึ้นร้อยละ 1 จะทำให้ปริมาณความต้องการถือเงินในระยะยาวลดลง 66.1654 หน่วย สำหรับการอธิบายความหมายค่าสัมประสิทธิ์ตัวอื่นก็ใช้แนวคิดเดียวกันนี้

หลังจากที่เราทราบจำนวนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแล้ว เราสามารถประมาณแบบจำลอง VECM ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\boldsymbol{\Delta X_t} = \boldsymbol{\alpha\hat{\beta}'_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{\Gamma_1 \Delta X_{t-1}} + \boldsymbol{\mu_0} + \boldsymbol{u_t} \qquad (12.50\ \text{ก})$$

โดยที่ $\Delta \boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} \Delta M2_t \\ \Delta R_t \\ \Delta INC_t \\ \Delta RF_t \end{bmatrix}_{4\times1}, \Delta \boldsymbol{X_{t-1}} = \begin{bmatrix} \Delta M2_{t-1} \\ \Delta R_{t-1} \\ \Delta INC_{t-1} \\ \Delta RF_{t-1} \end{bmatrix}_{4\times1}$

และ $\boldsymbol{\hat{\beta}'_1 X_{t-1}} = M2_{t-1} + 66.1654R_t - 3.3950INC_{t-1} - 9.8434RF_{t-1}$

$= COINT\_N_{t-1}$

หรือเราสามารถเขียนสมการที่ (12.50 ก) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Delta M2_t \\ \Delta R_t \\ \Delta INC_t \\ \Delta RF_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \end{bmatrix} COINT_{N_{t-1}} + \begin{bmatrix} \gamma_{11,1} & \gamma_{12,1} & \gamma_{13,1} & \gamma_{14,1} \\ \gamma_{21,1} & \gamma_{22,1} & \gamma_{23,1} & \gamma_{24,1} \\ \gamma_{31,1} & \gamma_{32,1} & \gamma_{33,1} & \gamma_{34,1} \\ \gamma_{41,1} & \gamma_{42,1} & \gamma_{43,1} & \gamma_{44,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M2_{t-1} \\ \Delta R_{t-1} \\ \Delta INC_{t-1} \\ \Delta RF_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ \mu_{03} \\ \mu_{04} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \\ u_{4t} \end{bmatrix} \qquad (12.50\ \text{ข})$$

เนื่องจากตัวแปรทุกตัวมีความนิ่งทั้งหมด นั่นคือ การประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (12.50 ข) สามารถทำได้ด้วยการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Residual: OLS) ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์แสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Delta M2_t \\ \Delta R_t \\ \Delta INC_t \\ \Delta RF_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00214 \\ -0.00017 \\ 0.10216 \\ -0.000011 \end{bmatrix} COINT\_N_{t-1}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0.1408 & 2.1778 & -0.0172 & -1.4717 \\ -0.0011 & 0.2138 & -0.0002 & 0.2321 \\ -0.1589 & 10.2993 & 0.0410 & 24.0561 \\ 0.0016 & 0.0370 & -0.00007 & 0.3973 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M2_{t-1} \\ \Delta R_{t-1} \\ \Delta INC_{t-1} \\ \Delta RF_{t-1} \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 5.2815 \\ 0.0468 \\ -11.1776 \\ -0.0308 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_{1t} \\ \hat{u}_{2t} \\ \hat{u}_{3t} \\ \hat{u}_{4t} \end{bmatrix} \qquad (12.50 \text{ ค})$$

โดยที่ค่า $\hat{u}_{it}$ (i =1, 2, 3, 4) คือค่าความผิดพลาดจากการประมาณแบบจำลอง VECM ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด และเราจะได้ว่า

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{11} \\ \hat{\alpha}_{21} \\ \hat{\alpha}_{31} \\ \hat{\alpha}_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00214 \\ -0.00017 \\ 0.10216 \\ -0.000011 \end{bmatrix}, \ \hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{01} \\ \hat{\mu}_{02} \\ \hat{\mu}_{03} \\ \hat{\mu}_{04} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2815 \\ 0.0468 \\ -11.1776 \\ -0.0308 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าแบบจำลอง (12.50 ค) ยังไม่มีค่าคงที่ในเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว และอนุกรมเวลา *COINT_N* แสดงถึงการมี E(*COINT_N*) $\neq 0$ ดังนั้น เราควรมีค่าคงที่อยู่ในเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว ($\boldsymbol{\beta}_0$) ดังสมการที่ (12.47) นั่นคือ เราต้องแยกค่าคงที่ในเวกเตอร์ $\boldsymbol{\mu}_0$ ออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่ ส่วนที่ 1 คือ ค่าคงที่ $\boldsymbol{\beta}_0$ ที่จะไปอยู่ในเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว และเวกเตอร์ $\boldsymbol{\gamma}_0$ ที่จะไปอยู่ในแบบจำลอง VECM การหาค่า $\boldsymbol{\beta}_0$ และ $\boldsymbol{\gamma}_0$ หาได้จากการใช้แนวคิดของสมการที่ (12.17 ข) และ (12.17 ค) ดังนั้น เราจะได้

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\hat{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\hat{\boldsymbol{\mu}}_0 \qquad (12.51 \text{ ก})$$

และ
$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_0 = \hat{\boldsymbol{\beta}}_\perp\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_\perp\hat{\boldsymbol{\beta}}_\perp\right)^{-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_\perp\hat{\boldsymbol{\mu}}_0 \qquad (12.51 \text{ ข})$$

โดยที่ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}$ และ $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\perp}$ คือเมทริกซ์ที่ตั้งฉาก (Orthogonal) กับเมทริกซ์ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ และ $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ ตามลำดับ นั่นคือ เราจะได้ว่า $\hat{\boldsymbol{\beta}}'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\perp} = \mathbf{0}$ และ $\hat{\boldsymbol{\alpha}}'\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\perp} = \mathbf{0}$ เมทริกซ์ของ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}$ และ $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\perp}$ ประมาณได้ดังนี้[21]

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\perp} = \boldsymbol{S}_{11}[\hat{\boldsymbol{v}}_{r+1} \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{v}}_{n}]$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\perp} = \boldsymbol{S}_{00}^{-1}\boldsymbol{S}_{01}[\hat{\boldsymbol{v}}_{r+1} \quad \cdots \quad \hat{\boldsymbol{v}}_{n}]$$

และสำหรับกรณีนี้เราพบความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพ 1 รูปแบบ ($r = 1$) และมีอนุกรมเวลาทั้งหมด 4 ชุด ($n = 4$) ดังนั้น $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\perp}$ และ $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\perp}$ หาได้ดังนี้

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\perp} = \boldsymbol{S}_{11}[\hat{\boldsymbol{v}}_{2} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_{3} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_{4}]$$

$$= \begin{bmatrix} 48{,}255.8765 & 48.6378 & 14{,}502.2179 & -230.7195 \\ 48.6378 & 1.2560 & 33.4347 & 1.2354 \\ 14{,}502.2179 & 33.4347 & 7{,}764.1210 & -52.0276 \\ -230.7195 & 1.2354 & -52.0276 & 4.2788 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0027 & 0.0055 & -0.0021 \\ 0.1859 & -1.3353 & -0.2982 \\ 0.0018 & 0.0007 & -0.0006 \\ -0.2029 & 0.7222 & -0.3987 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 211.5680 & 42.9935 & -32.8966 \\ 0.1731 & -0.4954 & -0.9897 \\ 69.6128 & 2.6036 & -24.4643 \\ -1.3524 & 0.1396 & -1.5571 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\perp} = \boldsymbol{S}_{00}^{-1}\boldsymbol{S}_{01}[\hat{\boldsymbol{v}}_{2} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_{3} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_{4}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0354 & -0.0001 & -0.0023 \\ 0.1669 & 0.8637 & 0.2451 \\ 0.0011 & 0.0014 & 0.0004 \\ 0.3383 & -0.4005 & 0.4085 \end{bmatrix}$$

เมื่อแทนค่าลงใน (12.51 ก) และ (12.51 ข) จะได้

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{0}} = -129.4351 \qquad (12.52\ ก)$$

และ

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 5.0048 \\ 0.0245 \\ 2.0459 \\ -0.0323 \end{bmatrix} \qquad (12.52\ ข)$$

ดังนั้น สมการที่ (12.50 ค) เขียนได้อีกอย่างคือ

[21] Johansen, S., *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models* (New York: Oxford University Press, 1995), p. 95.

$$\begin{bmatrix} \Delta M2_t \\ \Delta R_t \\ \Delta INC_t \\ \Delta RF_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00214 \\ -0.00017 \\ 0.10216 \\ -0.000011 \end{bmatrix} \boldsymbol{\widetilde{COINT}_{N_{t-1}}}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.1408 & 2.1778 & -0.0172 & -1.4717 \\ -0.0011 & 0.2138 & -0.0002 & 0.2321 \\ -0.1589 & 10.2993 & 0.0410 & 24.0561 \\ 0.0016 & 0.0370 & -0.00007 & 0.3973 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M2_{t-1} \\ \Delta R_{t-1} \\ \Delta INC_{t-1} \\ \Delta RF_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 5.0048 \\ 0.0245 \\ 2.0459 \\ -0.0323 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_{1t} \\ \hat{u}_{2t} \\ \hat{u}_{3t} \\ \hat{u}_{4t} \end{bmatrix} \qquad (12.52 \text{ ค})$$

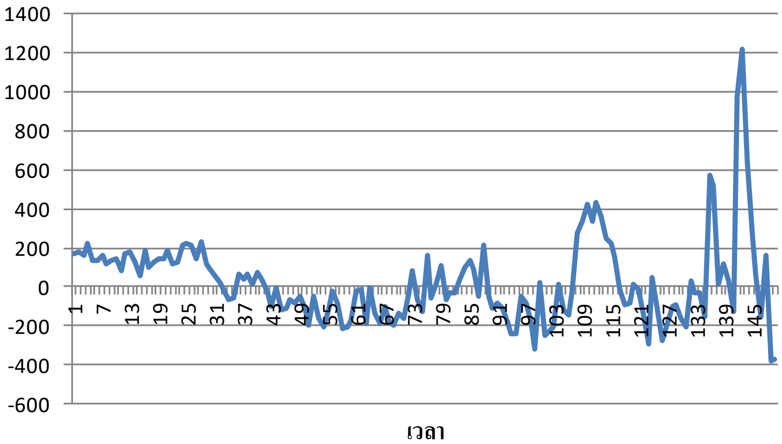
โดยที่ $\boldsymbol{\widetilde{COINT}\_N_{t-1}} = \boldsymbol{\hat{\tilde{\beta}}'\tilde{X}_{t-1}}$

$$= [\boldsymbol{\hat{\beta}'} \quad \boldsymbol{\hat{\beta}_0}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_{t-1}} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\hat{\beta}'X_{t-1}} + \boldsymbol{\hat{\beta}}_0$$

$$= M2_{t-1} + 66.1654R_t - 3.3950INC_{t-1} - 9.8434RF_{t-1} - 129.4351$$

โดยอนุกรมเวลา $\boldsymbol{\widetilde{COINT}\_N_{t-1}}$ แสดงในรูปที่ 12.4 จะมีความนิ่งรอบค่าคงที่ซึ่งเข้าใกล้ศูนย์มากขึ้นเมื่อเทียบกับรูปที่ 12.3



รูปที่ 12.4 แสดงอนุกรมเวลา $\widetilde{COINT}\_N_{t-1}$

และจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวดังรูปที่ 12.4 ไม่มีแนวโน้มกำหนดได้ร่วมอยู่ด้วย เวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวที่คำนวณขึ้นสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ได้แล้ว และเราไม่จำเป็นต้องใช้แบบจำลอง (12.46 ข) ในการหาเวกเตอร์ความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวแล้ว

สมการที่ (12.52 ค) สามารถที่จะบอกถึงการปรับตัวในระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวได้อีกด้วย ซึ่งสามารถทำได้ด้วยการทดสอบสมมุติฐานของค่าสัมประสิทธิ์ $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\beta}}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}$ (หรือ $\widehat{COINT}\_N_{t-1}$) เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น พิจารณาแบบจำลองต่อไปนี้

$$\Delta M2_t = \alpha_{11}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{1}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}) + \gamma_{11,1}\Delta M2_{t-1} + \gamma_{12,1}\Delta R_{t-1} + \gamma_{13,1}\Delta INC_{t-1} + \gamma_{14,1}\Delta RF_{t-1} + u_{1t} \qquad (12.53 \text{ ก})$$

$$\Delta R_t = \alpha_{21}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{1}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}) + \gamma_{21,1}\Delta M2_{t-1} + \gamma_{22,1}\Delta R_{t-1} + \gamma_{23,1}\Delta INC_{t-1} + \gamma_{24,1}\Delta RF_{t-1} + u_{2t} \qquad (12.53 \text{ ข})$$

$$\Delta INC_t = \alpha_{31}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{1}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}) + \gamma_{31,1}\Delta M2_{t-1} + \gamma_{32,1}\Delta R_{t-1} + \gamma_{33,1}\Delta INC_{t-1} + \gamma_{34,1}\Delta RF_{t-1} + u_{3t} \qquad (12.53 \text{ ค})$$

$$\Delta RF_t = \alpha_{41}(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{1}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}) + \gamma_{41,1}\Delta M2_{t-1} + \gamma_{42,1}\Delta R_{t-1} + \gamma_{43,1}\Delta INC_{t-1} + \gamma_{44,1}\Delta RF_{t-1} + u_{4t} \qquad (12.53 \text{ ง})$$

โดยที่ $\widehat{\widetilde{\boldsymbol{\beta}}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} = M2_{t-1} + 66.1654R_t - 3.3950INC_{t-1} - 9.8434RF_{t-1} - 129.4351$ และสมการที่ (12.52 ค) เป็นผลการประมาณค่าแบบจำลอง VECM ดังสมการที่ (12.53 ก) – (12.53 ง) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดนั่นเอง ถ้าหากต้องการทดสอบสมมุติฐานของค่าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวในแบบจำลอง VECM นี้ จำเป็นต้องใช้ค่าสถิติ t หรือค่า probability (p-value) ซึ่งจะแสดงในตารางที่ 12.2 ดังนี้

ตารางที่ 12.2 แสดงผลการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าสถิติ ของสมการที่ (12.53 ก)–(12.53 ง)

ค่าสัมประสิทธิ์	ตัวแปรตาม			
	$\Delta M2_t$	ΔR_t	ΔINC_t	ΔRF_t
$\boldsymbol{COI\widetilde{NT}\_N_{t-1}} = \boldsymbol{\widehat{\widetilde{\beta}}'\widetilde{X}_{t-1}}$	–0.00214 (0.00401) [–0.53]	–0.00017 (0.000083) [–2.08] **	0.10216 (0.02085) [4.90]***	–0.000011 (0.00011) [–0.10]
$\Delta M2_{t-1}$	0.1408 (0.08534) [1.65]*	–0.0011 (0.00176) [–0.63]	–0.1589 (0.44389) [–0.36]	0.0016 (0.00234) [0.68]
ΔR_{t-1}	2.1778 (3.67772) [0.59]	0.2138 (0.07588) [2.82] ***	10.2993 (19.1300) [0.54]	0.0370 (0.10086) [0.37]
ΔINC_{t-1}	–0.0172 (0.01634) [–1.06]	–0.0002 (0.00034) [–0.71]	0.0410 (0.08497) [0.48]	–0.00007 (0.00045) [–0.16]
ΔRF_{t-1}	–1.4717 (2.87784) [–0.51]	0.2321 (0.05938) [3.91] ***	24.0561 (14.9694) [1.61]	0.3973 (0.07892) [5.03] ***
ค่าคงที่	5.0048 (0.90726) [5.52] ***	0.0245 (0.01872) [1.31]	2.0459 (4.71919) [0.43]	–0.0323 (0.02488) [–1.30]

หมายเหตุ : ตัวเลขในวงเล็บ ( ) แสดงส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ตัวเลขในวงเล็บ [ ] แสดงค่าสถิติ t
*, **, และ**** หมายถึงมีนัยสำคัญที่ร้อยละ 10 ร้อยละ 5 และร้อยละ 1 ตามลำดับ

ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ในแบบจำลอง VECM จะต้องได้ผลการประมาณเมทริกซ์ค่าสัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\alpha}$ ออกมาด้วย ทำให้วิเคราะห์เพิ่มเติมได้ว่า เมื่อมีตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งเบี่ยงเบนออกจากดุลยภาพระยะยาวแล้ว ตัวแปรทุกตัวจะการปรับตัวในระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวหรือไม่ ดังจะอธิบายต่อไปนี้

ตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ $\boldsymbol{\widehat{\widetilde{\beta}}'\widetilde{X}_{t-1}}$ ของสมการ $\Delta M2_t$ (หรือเขียนแทนด้วย $\widehat{\alpha}_{11}$) มีค่าเท่ากับ –0.00214 ค่าสถิติ t คือ –0.53 ซึ่งไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ เราจึงสรุปได้ว่า หากมีตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเบี่ยงเบนออกจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของความต้องการถือเงิน จะ

พบว่าตัวแปรปริมาณเงินในความหมายกว้าง ($M2_t$) จะไม่มีการปรับตัวใด ๆ เพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว เราจึงกล่าวได้ว่า $M2_t$ คือตัวแปรภายนอกแบบไม่มีพลัง (Weakly Exogenous) และในกรณีนี้เราจะกล่าวได้อีกว่า อนุกรมเวลา $M2_t$ จะไม่ถูกกระทบจากอนุกรมเวลาอื่น ๆ (ซึ่งในที่นี้คืออนุกรมเวลา R_t, INC_t, RF_t) ผ่านทางเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว นั่นคือ อนุกรมเวลา R_t, INC_t, RF_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา $M2_t$ ตามแนวคิดของ Granger ในระยะยาวนั่นเอง

ตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}$ ของสมการ ΔR_t (หรือเขียนแทนด้วย $\widehat{\alpha}_{21}$) มีค่าเท่ากับ –0.00017 ค่าสถิติ t คือ –2.08 ซึ่งมีนัยสำคัญทางสถิติร้อยละ 5 เราจึงสรุปได้ว่า หากมีตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเบี่ยงเบนออกจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของความต้องการถือเงินในทิศทางที่ทำให้ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} < 0$ จะพบว่าตัวแปรอัตราดอกเบี้ยภายในประเทศ (R_t) จะปรับตัวลดลงเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว และในกรณีนี้เรากล่าวได้อีกอย่างว่าอนุกรมเวลา R_t จะถูกกระทบจากอนุกรมเวลาอื่น ๆ (ซึ่งในที่นี้คืออนุกรมเวลา $M2_t, INC_t, RF_t$) ผ่านทางเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว นั่นคือ อนุกรมเวลา $M2_t, INC_t, RF_t$ เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา R_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะยาวนั่นเอง

ตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}$ ของสมการ ΔINC_t (หรือเขียนแทนด้วย $\widehat{\alpha}_{31}$) มีค่าเท่ากับ 0.10216 ค่าสถิติ t คือ 4.90 ซึ่งมีนัยสำคัญทางสถิติร้อยละ 1 เราจึงสรุปได้ว่า หากมีตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเบี่ยงเบนออกจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของความต้องการถือเงินในทิศทางที่ทำให้ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}} > 0$ จะพบว่า ตัวแปรดัชนีรายได้ (INC_t) จะปรับตัวเพิ่มขึ้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว และในกรณีนี้เราจะกล่าวได้อีกว่า อนุกรมเวลา INC_t จะถูกกระทบจากอนุกรมเวลาอื่น ๆ (ซึ่งในที่นี้คืออนุกรมเวลา $M2_t, R_t, RF_t$) ผ่านทางเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว นั่นคือ อนุกรมเวลา $M2_t, R_t, RF_t$ เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา INC_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะยาวนั่นเอง

ตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\widetilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t-1}}$ ของสมการ ΔRF_t (หรือเขียนแทนด้วย $\widehat{\alpha}_{41}$) มีค่าเท่ากับ –0.000011 ค่าสถิติ t คือ –0.10 ซึ่งไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ เราจึงสรุปได้ว่า หากมีตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งเบี่ยงเบนออกจากความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาวของความต้องการถือเงิน จะพบว่าตัวแปรอัตราดอกเบี้ยต่างประเทศของประเทศมหาอำนาจ (RF_t) จะไม่มีการปรับตัวใด ๆ เพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาว นั่นคือ RF_t คือตัวแปรภายนอกแบบไม่มีพลัง (Weakly

Exogenous) หรือวิเคราะห์ได้อีกอย่างว่า อนุกรมเวลา RF_t จะไม่ถูกกระทบจากอนุกรมเวลาอื่น ๆ (ซึ่งในที่นี้คืออนุกรมเวลา $M2_t, R_t, INC_t$) ผ่านทางเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลย–ภาพระยะยาว หรืออนุกรมเวลา $M2_t, R_t, INC_t$ ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา RF_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะยาวนั่นเอง

ส่วนการวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงเหตุและผลตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้นสามารถทำได้ด้วยการทดสอบสมมุติฐานดังนี้

$H_0: \gamma_{12,1} = \gamma_{13,1} = \gamma_{14,1} = 0$ (12.54 ก)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวในสมมุติฐานหลักข้างบนไม่เท่ากับศูนย์

ค่าสถิติ Wald สำหรับการทดสอบสมมุติฐาน (12.54 ก) คือ 1.69 และมีค่า probability (หรือ P-value) คือ 0.6395 จึงสรุปได้ว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก (12.54 ก) ได้ เราจึงสรุปว่าอนุกรมเวลา R_t, INC_t, RF_t ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา $M2_t$ ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้น

และเมื่อต้องการทดสอบว่า อนุกรมเวลา $M2_t, INC_t, RF_t$ ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา R_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้นหรือไม่ ทำได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานดังนี้

$H_0: \gamma_{21,1} = \gamma_{23,1} = \gamma_{24,1} = 0$ (12.54 ข)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวในสมมุติฐานหลักข้างบนไม่เท่ากับศูนย์

ค่าสถิติ Wald สำหรับการทดสอบสมมุติฐาน (12.54 ข) คือ 16.75 และมีค่า probability (หรือ P-value) คือ 0.0008 นั่นคือ สมมุติฐานหลัก (12.54 ข) ถูกปฏิเสธ เราจึงสรุปว่า อนุกรมเวลา $M2_t, INC_t, RF_t$ เป็นสาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา R_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้น

เมื่อต้องการทดสอบว่า อนุกรมเวลา $M2_t, R_t, RF_t$ ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา INC_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้นหรือไม่ ทำได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานดังนี้

$H_0: \gamma_{31,1} = \gamma_{32,1} = \gamma_{34,1} = 0$ (12.54 ค)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวในสมมุติฐานหลักข้างบนไม่เท่ากับศูนย์

ค่าสถิติ Wald สำหรับการทดสอบสมมุติฐาน (12.54 ค) คือ 3.63 และมีค่า probability (หรือ P-value) คือ 0.3050 นั่นคือ ไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก (12.54 ค) เราจึงสรุปว่าอนุกรมเวลา $M2_t, R_t, RF_t$ ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา INC_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้น

เมื่อต้องการทดสอบว่า อนุกรมเวลา $M2_t, R_t, INC_t$ ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา RF_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้นหรือไม่ ทำได้ด้วยการตั้งสมมุติฐานดังนี้

H_0: $\gamma_{41,1} = \gamma_{42,1} = \gamma_{43,1} = 0$ (12.54 ง)

H_1: มีค่าพารามิเตอร์อย่างน้อย 1 ตัวในสมมุติฐานหลักข้างบนไม่เท่ากับศูนย์

ค่าสถิติ Wald สำหรับการทดสอบสมมุติฐาน (12.54 ง) คือ 0.66 และมีค่า probability (หรือ P-value) คือ 0.8835 นั่นคือ ไม่สามารถปฏิเสธสมมุติฐานหลัก (12.54 ง) เราจึงสรุปว่า อนุกรมเวลา $M2_t, R_t, INC_t$ ไม่ใช่สาเหตุที่ก่อให้เกิดผลกระทบต่ออนุกรมเวลา RF_t ตามแนวคิดของ Granger ในระยะสั้น

ภาคผนวก

ภาคผนวก 2ก

การหาค่า $\phi_{11}, \phi_{22}, \ldots, \phi_{kk}$

ในหัวข้อที่ 2.3.1 ได้กล่าวถึงวิธีการหาค่า TPAC ณ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว (หรือ ϕ_{33}) สำหรับการหาค่า TPAC ณ ช่วงเวลาอื่น ๆ ก็สามารถใช้แนวคิดเดียวกับการหาค่า ϕ_{33} ซึ่งสามารถอธิบายได้ในรูปทั่วไปด้วยการพิจารณาสมการถดถอยเชิงพหุต่อไปนี้

$$X_{t+k} = \phi_{k1}X_{t+k-1} + \phi_{k2}X_{t+k-2} + \phi_{k3}X_{t+k-3} + \ldots + \phi_{kk}X_t + u_{t+k} \qquad (2ก–1)$$

เพื่อให้อยู่ในรูปทั่วไป เรานำ X_{t+k-j} ($j = 1, \ldots, k$) ไปคูณตลอดในสมการที่ (2ก–1) จะได้

$$X_{t+k}X_{t+k-j} = \phi_{k1}X_{t+k-1}X_{t+k-j} + \phi_{k2}X_{t+k-2}X_{t+k-j} + \phi_{k3}X_{t+k-3}X_{t+k-j} + \ldots + \phi_{kk}X_tX_{t+k-j} + u_{t+k}X_{t+k-j}$$

($j = 1, 2, \ldots, k$) เมื่อเราใส่ค่าคาดหวัง (Take Expected Value) จะได้

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \phi_{k3}\gamma_{j-3} + \ldots + \phi_{kk}\gamma_{j-k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

เมื่อนำ γ_0 หารตลอดจะได้

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \phi_{k3}\rho_{j-3} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{j-k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (2ก–2)$$

เนื่องจาก $j = 1, 2, \ldots, k$ สมการที่ (2ก–2) จึงเขียนได้ดังนี้[1]

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \phi_{k3}\rho_2 + \ldots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 &= \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \phi_{k3}\rho_1 + \ldots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ &\vdots \\ \rho_k &= \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \phi_{k3}\rho_{k-3} + \ldots + \phi_{kk}\rho_0 \end{aligned}\right\} \qquad (2ก–3)^2$$

การค่า $\phi_{11}, \phi_{22}, \ldots, \phi_{kk}$ หาได้จากระบบสมการที่ (2ก–3) ดังนี้

---

[1] อย่าลืมว่า $\gamma_\tau = \gamma_{-\tau}$ นั่นคือ $\frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \frac{\gamma_{-\tau}}{\gamma_0}$ หรือ $\rho_\tau = \rho_{-\tau}$ นั่นเอง

[2] เราเรียกระบบสมการลักษณะนี้ว่า Yule-Walker Equations

- ค่า ϕ_{11} หาได้จากการกำหนดให้ $k = 1$ ดังนั้น ระบบสมการที่ (2ก–3) จะกลายเป็น

$$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0$$

- ค่า ϕ_{22} หาได้จากการกำหนดให้ $k = 2$ ดังนั้น ระบบสมการที่ (2ก–3) จะกลายเป็น

$$\rho_1 = \phi_{21}\rho_0 + \phi_{22}\rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}\rho_0$$

- ค่า ϕ_{33} หาได้จากการกำหนดให้ $k = 3$ ดังนั้น ระบบสมการที่ (2ก–3) จะกลายเป็น

$$\rho_1 = \phi_{31}\rho_0 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2$$

$$\rho_2 = \phi_{31}\rho_1 + \phi_{32}\rho_0 + \phi_{33}\rho_1$$

$$\rho_3 = \phi_{31}\rho_2 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_0$$

ค่า $\phi_{44}, \phi_{55}, \ldots, \phi_{kk}$ ก็หาได้ทำนองเดียวกันนี้ เมื่อใช้กฎของเครเมอร์ (Cramer's Rule) เราจะสรุปได้ดังนี้[3]

$\emptyset_{11} = \rho_1$ (TPAC ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้ว จะเป็นค่าเดียวกับ TAC ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้วเสมอ)

$$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\emptyset_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

:

[3] อย่าลืมว่า $\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$

$$\emptyset_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} & \rho_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-4} & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

สำหรับการหาค่า SPAC ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้วก็คือ $\widehat{\emptyset}_{11} = r_1$ และค่า SPAC ณ 2, 3, 4, …, k ช่วงเวลาที่แล้ว $\left(\widehat{\emptyset}_{22}, \widehat{\emptyset}_{33}, \widehat{\emptyset}_{44}, \dots, \widehat{\emptyset}_{kk}\right)$ ทำได้โดยการประมาณสมการถดถอยต่อไปนี้ตามลำดับด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

$$\hat{X}_{t+2} = \hat{\phi}_{21} X_{t+1} + \hat{\phi}_{22} X_t$$

$$\hat{X}_{t+3} = \hat{\phi}_{31} X_{t+2} + \hat{\phi}_{32} X_{t+1} + \hat{\phi}_{33} X_t$$

$$\hat{X}_{t+4} = \hat{\phi}_{41} X_{t+3} + \hat{\phi}_{32} X_{t+2} + \hat{\phi}_{33} X_{t+1} + \hat{\phi}_{44} X_t$$

$$\vdots$$

$$\hat{X}_{t+k} = \hat{\phi}_{k1} X_{t+k-1} + \hat{\phi}_{k2} X_{t+k-2} + \hat{\phi}_{k3} X_{t+k-3} + \cdots + \hat{\phi}_{kk} X_t$$

ภาคผนวก 3ก
การหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC ของอนุกรมเวลาที่ถูกกำหนดจาก AR(1)

- **หาค่าเฉลี่ย** จากสมการที่ (3.1)

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.1}$$

$$\mathrm{E}(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_{t-1}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t)$$

เนื่องจาก X_t มีลักษณะความนิ่งตามเงื่อนไขของวิธี Box-Jenkins ดังนั้น เราจะได้ $\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(X_{t-1})$ ทำให้สมการข้างต้นเขียนได้ว่า

$$\mathrm{E}(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_t) \tag{3ก–1}$$

$$E(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

หรือเขียนได้ว่า $\mu = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ (3.2)

- **หาค่าความแปรปรวน** จากสมการที่ (3.1)

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.1}$$

หา (3.1) – (3ก–1) จะได้

$$X_t - \mathrm{E}(X_t) = \alpha_1[X_{t-1} - \mathrm{E}(X_t)] + \varepsilon_t$$

$$[X_t - \mathrm{E}(X_t)]^2 = \alpha_1^2[X_{t-1} - \mathrm{E}(X_t)]^2 + \varepsilon_t^2 + 2\alpha_1[X_{t-1} - \mathrm{E}(X_t)]\,\varepsilon_t$$

หรือ $[X_t - \mu]^2 = \alpha_1^2[X_{t-1} - \mu]^2 + \varepsilon_t^2 + 2\alpha_1[X_{t-1} - \mu]\,\varepsilon_t$

$$\mathrm{E}[X_t - \mu]^2 = \alpha_1^2\mathrm{E}[X_{t-1} - \mu]^2 + \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + 2\alpha_1\mathrm{E}[X_{t-1} - \mu]\,\varepsilon_t$$

$$\mathrm{Var}(X_t) = \alpha_1^2\mathrm{Var}(X_{t-1}) + \mathrm{Var}(\varepsilon_t) + 2\alpha_1\mathrm{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.1) จะกล่าวได้ว่า ε_{t-1} มีความสัมพันธ์กับ X_{t-1} แต่ ε_t เป็นอิสระกับ ε_{t-1} (เนื่องจาก ε_t เป็นตัวรบกวนขาว) ดังนั้น ε_t จะต้องเป็นอิสระกับ X_{t-1} ด้วย หรือเขียนได้ว่า $\mathrm{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$ ดังนั้น สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\mathrm{Var}(X_t) = \alpha_1^2\mathrm{Var}(X_{t-1}) + \mathrm{Var}(\varepsilon_t) + 2\alpha_1\mathrm{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t)$$

และเนื่องจาก $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ อนุกรม X_t มีความนิ่ง ดังนั้น $\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(X_{t-1})$ เราจึงได้

$$\mathrm{Var}(X_t) = \alpha_1^2\mathrm{Var}(X_t) + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \alpha_1^2\,\gamma_0 + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1^2} \tag{3.3}$$

- **หา TAC**

จากสูตรของ TAC ณ k ช่วงเวลาที่แล้ว เขียนได้ดังนี้

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{Var(X_t)}$$

เราได้หาค่า $\mathrm{Var}(X_t)$ แล้วดังแสดงในสมการที่ (3.3) ดังนั้น เราต้องหาค่า $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k})$ แสดงได้ดังนี้

จาก $\mu = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$

หรือ $\alpha_0 = \mu(1-\alpha_1)$ นำไปแทนค่าในแบบจำลอง AR(1) จะได้

ณ เวลา t $\quad X_t = \mu(1-\alpha_1) + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$

$$X_t - \mu = -\alpha_1\mu + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$X_t - \mu = \alpha_1(X_{t-1}-\mu) + \varepsilon_t$$

$$(X_t-\mu)(X_{t-k}-\mu) = \alpha_1(X_{t-1}-\mu)(X_{t-k}-\mu) + \varepsilon_t(X_{t-1}-\mu)$$

$$E(X_t-\mu)(X_{t-1}-\mu) = \alpha_1 E(X_{t-1}-\mu)(X_{t-k}-\mu) \qquad \{E[\varepsilon_t(X_{t-1}-\mu)] = 0\}$$

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \alpha_1\mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-k}) \qquad \{\therefore \mathrm{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t) = 0\}$$

$$\gamma_k = \alpha_1\gamma_{k-1}$$

นำ $\mathrm{Var}(X_t)$ หรือ γ_0 หารตลอดจะได้

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \alpha_1\frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_0}$$

นั่นคือจะได้ $\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1}$

ณ $k = 1$, $\rho_1 = \alpha_1 \cdot \rho_0 = \alpha_1$

ณ $k = 2$, $\rho_2 = \alpha_1 \cdot \rho_1 = \alpha_1^2$

ณ $k = 3$, $\rho_3 = \alpha_1 \cdot \rho_2 = \alpha_1^3$

เมื่อแทนค่าเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ สุดท้ายเราจะได้

$$\rho_k = \alpha_1^k \tag{3.4}$$

หมายเหตุ $\rho_0 = 1$ เสมอ เนื่องจาก $\rho_0 = \frac{Cov(X_t, X_t)}{Var(X_t)} = \frac{Var(X_t)}{Var(X_t)} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$

- **หา TPAC**
  - **ค่า TPAC ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{11})**

จากภาคผนวก 3ก เราทราบแล้วว่าค่า TPAC ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{11}) หาได้จากการกำหนดให้ $k = 1$ ในระบบสมการที่ (2ก–3) ซึ่งจะได้

$$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0$$

นั่นคือ $$\phi_{11} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \rho_1 = \alpha_1$$

ถ้าพิจารณาอีกแบบ เราทราบจากบทที่ 1 แล้วว่า ϕ_{11} ก็คือค่าสัมประสิทธิ์ของ X_t ในสมการถดถอยต่อไปนี้

$$X_{t+1} = \phi_{10} + \phi_{11}X_t + \varepsilon_{t+1}$$

สมการนี้สามารถเขียนได้อีกอย่างคือ

$$X_t = \phi_{10} + \phi_{11}X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3ก–2}$$

จะเห็นว่า สมการที่ (3ก–2) ก็คือสมการที่แสดงว่าอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูป AR(1) นั่นเอง เพียงแต่ใช้สัญลักษณ์ของค่าสัมประสิทธิ์อีกรูปแบบหนึ่งเท่านั้นเอง ดังนั้น เราจึงกล่าวได้ว่า $\phi_{11} = \alpha_1$ นั่นเอง

- **ค่า TPAC ณ 2 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{22})** ก็คือค่าสัมประสิทธิ์ของ X_t ในสมการถดถอยต่อไปนี้

$$X_{t+2} = \phi_{20} + \phi_{21}X_{t-1} + \phi_{22}X_t + \varepsilon_{t+2}$$

สมการนี้สามารถเขียนได้อีกอย่างคือ

$$X_t = \phi_{20} + \phi_{21}X_{t-1} + \phi_{22}X_{t-2} + \varepsilon_t \qquad (3ก–2)$$

จะเห็นว่า หากอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (3.1) แล้วจะต้องไม่มีตัวแปร X_{t-2} เข้ามาเกี่ยวข้อง นั่นคือ เราสรุปได้ว่า $\phi_{22} = 0$ ทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า $\phi_{33} = 0$, $\phi_{44} = 0, \ldots.$ ดังนั้น ค่า TPAC ของ AR(1) เป็นดังนี้

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & \text{เมื่อ } k = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } k \geq 2 \end{cases} \qquad (3.5)$$

ภาคผนวก 3ข

การหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC ของอนุกรมเวลาที่ถูกกำหนดจาก AR(2)

- **หาค่าเฉลี่ย** จากสมการที่ (3.7)

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \qquad (3.7)$$

$\mathrm{E}(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_{t-1}) + \alpha_2 \mathrm{E}(X_{t-2}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t)$

เนื่องจาก X_t มีลักษณะความนิ่ง ตามเงื่อนไขของวิธี Box-Jenkins ดังนั้น เราจะได้ $\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(X_{t-1}) = \mathrm{E}(X_{t-2})$ ทำให้สมการข้างต้นเขียนได้ว่า

$$\mathrm{E}(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_t) + \alpha_2 \mathrm{E}(X_t) \qquad (3ข–1)$$

นำ (3ก –1) ไปหักออกจาก (3.6) จะได้

$$E(X_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2} = \mu \qquad (3.8)$$

- **หาความแปรปรวน**

หา (3.6) – (3ข–1) จะได้

$$X_t - \mathrm{E}(X_t) = \alpha_1[X_{t-1} - \mathrm{E}(X_t)] + \alpha_2[X_{t-2} - \mathrm{E}(X_t)] + \varepsilon_t$$

หรือ $$X_t - \mu = \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \qquad (3ข–2)$$

ยกกำลังสองจะได้

$$(X_t - \mu)^2 = \alpha_1^2(X_{t-1} - \mu)^2 + \alpha_2^2(X_{t-2} - \mu)^2 + \varepsilon_t^2$$
$$+2\alpha_1\alpha_2(X_{t-1} - \mu)(X_{t-2} - \mu) + 2\alpha_1(X_{t-1} - \mu)\varepsilon_t + 2\alpha_2(X_{t-2} - \mu)\varepsilon_t$$

เมื่อใส่ค่าคาดหวัง และใช้คุณสมบัติว่า X_t มีความนิ่งแล้ว จะได้สมการดังนี้

$$\mathrm{Var}(X_t) = \alpha_1^2\mathrm{Var}(X_t) + \alpha_2^2\mathrm{Var}(X_t) + \mathrm{Var}(\varepsilon_t)$$
$$+2\alpha_1\alpha_2\mathrm{Cov}(X_{t-1}, X_{t-2}) + 2\alpha_1\mathrm{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t) + 2\alpha_2\mathrm{Cov}(X_{t-2}, \varepsilon_t) \qquad (3ข–3)$$

เนื่องจาก $Cov(X_{t-1}, \varepsilon_t) = Cov(X_{t-2}, \varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, $Var(X_t) = \gamma_0$ และ $Cov(X_{t-1}, X_{t-2}) = \gamma_1$ ดังนั้น สมการที่ (3ข–3) จะกลายเป็น

$$\gamma_0 = \alpha_1^2 \gamma_0 + \alpha_2^2 \gamma_0 + \sigma^2 + 2\alpha_1\alpha_2(\gamma_1) \qquad (3ข–4)$$

เราจะเขียนความแปรปรวนของ X_t ในรูปค่าพารามิเตอร์ที่อยู่ใน AR(2) เท่านั้น เราจึงต้องหาค่า γ_1 ดังนี้ จากสมการที่ (3ข–2) นำ $X_{t-k} - \mu$ คูณตลอดจะได้

$$(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \alpha_1(X_{t-1} - \mu)(X_{t-k} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu)(X_{t-k} - \mu) + \varepsilon_t(X_{t-k} - \mu)$$

เมื่อใส่ค่าคาดหวังจะได้

$$\gamma_k = \alpha_1\gamma_{k-1} + \alpha_2\gamma_{k-2} \qquad (3ข–5)$$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_{-1}$

เนื่องจาก X_t มีความนิ่ง ดังนั้น เราจะได้ $\gamma_1 = \gamma_{-1}$ นั่นคือ $\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_1$

$\therefore\ \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\gamma_0$ แทนค่าลงใน (3ข–4) จะได้

$$\gamma_0 = \alpha_1^2\gamma_0 + \alpha_2^2\gamma_0 + \sigma^2 + 2\alpha_1\alpha_2\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\gamma_0$$

$$\left(1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \frac{2\alpha_1^2\alpha_2}{1-\alpha_2}\right)\gamma_0 = \sigma^2$$

$$\left(\frac{1 - \alpha_2 - \alpha_1^2 + \alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_2^2 + \alpha_2^3 - 2\alpha_1^2\alpha_2}{1-\alpha_2}\right)\gamma_0 = \sigma^2$$

$$\left(\frac{1 - \alpha_2 - \alpha_1^2 - \alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_2^2 + \alpha_2^3}{1-\alpha_2}\right)\gamma_0 = \sigma^2$$

$$\left(\frac{1 + \alpha_2^3 - \alpha_1^2(1+\alpha_2) - \alpha_2(1+\alpha_2)}{1-\alpha_2}\right)\gamma_0 = \sigma^2$$

$$(1+\alpha_2)\left(\frac{1 - \alpha_2 + \alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2}{1-\alpha_2}\right)\gamma_0 = \sigma^2$$

$$(1+\alpha_2)\left(\frac{1-2\alpha_2+\alpha_2^2-\alpha_1^2}{1-\alpha_2}\right)\gamma_0 \quad = \sigma^2$$

$$(1+\alpha_2)\left(\frac{(1-\alpha_2)^2-\alpha_1^2}{1-\alpha_2}\right)\gamma_0 \quad = \sigma^2$$

$$\gamma_0 \quad = \frac{(1-\alpha_2)\sigma^2}{(1+\alpha_2)[(1-\alpha_2)^2-\alpha_1^2]} \qquad (3.9)$$

- **หา TAC** จากสมการที่ (3ข – 5)

$$\gamma_k \quad = \alpha_1\gamma_{k-1} + \alpha_2\,\gamma_{k-2} \qquad (3ข–5)$$

นำ γ_0 หารตลอดจะได้

$$\rho_k \quad = \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\,\rho_{k-2} \qquad (3ข–6)$$

จาก (3ข–6) เมื่อ k =1 จะได้ $\rho_1 = \alpha_1\rho_0 + \alpha_2\,\rho_1$

หรือ $\rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2\,\rho_1$

นั่นคือ $\rho_1 = \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$

จาก (3ข–6) เมื่อ k =2 จะได้

$$\rho_2 = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\,\rho_0$$

$$= \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2} + \alpha_2 = \frac{\alpha_1^2+\alpha_2-\alpha_2^2}{1-\alpha_2}$$

และเมื่อ $k \geq 3$ เราสามารถคำนวณได้ด้วยวิธีเดียวกันนี้ โดยใช้สมการที่ (3ข–6)

$$\rho_k = \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\,\rho_{k-2}\,, \quad k \geq 3$$

- **หา TPAC**

จากภาคผนวก 3ก เราทราบแล้วว่า ค่า TPAC ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{11}) หาได้จากการกำหนดให้ $k = 1$ ในระบบสมการที่ (2ก–3) ซึ่งจะได้

$$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0$$

นั่นคือ
$$\emptyset_{11} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} \qquad (\rho_0 = 1 \text{ เสมอ})$$

ส่วนค่า TPAC ณ 2 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{22}) หาได้จากการกำหนดให้ $k = 2$ ในระบบสมการที่ (2ก–3) ซึ่งจะได้

$$\rho_1 = \phi_{21}\rho_0 + \phi_{22}\rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}\rho_0$$

นั่นคือ
$$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha_1^2 + \alpha_2 - \alpha_2^2}{1-\alpha_2} - \left(\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_2}\right)^2} = \alpha_2$$

ถ้าพิจารณาอีกแบบ จากบทที่ 2 เราทราบแล้วว่า ค่า TPAC ณ 2 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{22}) ก็คือค่าสัมประสิทธิ์ของ X_t ในสมการถดถอยต่อไปนี้

$$X_{t+2} = \phi_{20} + \phi_{21}X_{t-1} + \phi_{22}X_t + \varepsilon_{t+2} \qquad (3ข–7)$$

ซึ่งสมการที่ (3ข–7) นี้สามารถเปรียบกับแบบจำลอง AR(2): $X_t = \alpha_0 + \alpha_1X_{t-1} + \alpha_2X_{t-2} + \varepsilon_t$ ดังนั้นทำให้เราสรุปได้ว่า ค่า $\phi_{22} = \alpha_2$ นั่นเอง และเมื่อเราสังเกตแบบจำลอง AR(2) จะพบว่าไม่มีตัวแปร X_{t-3} ดังนั้น เรากล่าวได้ว่า $\phi_{33} = 0$ ทำนองเดียวกัน เราจะได้ว่า $\phi_{44} = 0, \phi_{55} = 0, \ldots$ ดังนั้น ค่า TPAC ของ AR(2) เป็นดังนี้

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & \text{เมื่อ } k = 1 \\ \alpha_2 & \text{เมื่อ } k = 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } k \geq 3 \end{cases} \qquad (3.11)$$

ภาคผนวก 3ค

การหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC ของอนุกรมเวลาที่ถูกกำหนดจาก MA(1)

- **หาค่าเฉลี่ย** จากสมการที่ (3.17)

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (3.17)$$

$$\mathrm{E}(X_t) = \beta_0 + \mathrm{E}(\varepsilon_t) - \beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1})$$

เนื่องจาก ε_t เป็นตัวรบกวนขาว (White Noise) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคือ σ^2 นั่นคือ $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0$ ดังนั้น เราจะได้

$$\mathrm{E}(X_t) = \beta_0 + 0 - \beta_1(0) \quad (3ค–1)$$

หรือ $$\mu = \beta_0 \quad (3.18)$$

- **หาความแปรปรวน**

นำ (3.18) ไปหักออกจาก (3.17) จะได้

$$X_t - \mu = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (3ค–2)$$

$$(X_t - \mu)^2 = \varepsilon_t^2 + \beta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 - 2\beta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$$

$$\mathrm{E}(X_t - \mu)^2 = \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + \beta_1^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) - 2\beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})$$

เนื่องจาก ε_t เป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ และมีความแปรปรวนคงที่ σ^2 ทุกช่วงเวลา ดังนั้น

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 + \beta_1^2 \sigma^2$$

หรือเขียนได้ว่า $$\gamma_0 = (1+\beta_1^2)\,\sigma^2 \quad (3.19)$$

- **หา TAC** จากสมการที่ (3ค–2)

$$X_t - \mu = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (3ค–2)$$

นำ $X_{t-k} - \mu$ คูณตลอดจะได้

$$(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = (\varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1})(X_{t-k} - \mu)$$

$$= (\varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \beta_1 \varepsilon_{t-k-1})$$

$$= \varepsilon_t \varepsilon_{t-k} - \beta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-k-1} - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k} + \beta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-k-1} \quad (3ค–3)$$

เมื่อ $k = 1$ สมการที่ (3ค–3) จะกลายเป็น

$$(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} - \beta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \beta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}$$

$$\mathrm{E}(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) = \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) - \beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) - \beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2})$$

$$\gamma_1 = -\beta_1 \sigma^2$$

เมื่อ $k = 2$ สมการที่ (3ค–3) จะกลายเป็น

$$(X_t - \mu)(X_{t-2} - \mu) = \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} - \beta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-3} - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2} + \beta_1^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3}$$

$$\mathrm{E}(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) = \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) - \beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-3}) - \beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}) + \beta_1^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-3})$$

$$\gamma_2 = 0$$

ทำนองเดียวกัน เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\gamma_3 = \gamma_4 = \ldots = 0$ กล่าวโดยสรุป ความแปรปรวนร่วมที่ต่างช่วงเวลากันของอนุกรมเวลา X_t ของรูปแบบ MA(1) เขียนได้ดังนี้

$$\gamma_k = \begin{cases} -\beta_1 \sigma^2 & , k = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases} \quad (3ค\text{-}4)$$

และเมื่อนำค่า γ_0 ไปหารค่า $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ จะได้ค่า $\rho_1, \rho_2, \ldots$ ดังต่อไปนี้

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\beta_1 \sigma^2}{(1 + \beta_1^2)\sigma^2} = \dfrac{-\beta_1}{1 + \beta_1^2} & , k = 1 \\ \dfrac{0}{(1 + \beta_1^2)\sigma^2} = 0 & , k > 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

- **หา TPAC**

จากภาคผนวก 3ก เราทราบแล้วว่า ค่า TPAC ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{11}) หาได้จากการกำหนดให้ k = 1 ในระบบสมการที่ (2ก–3) ซึ่งจะได้

$$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0$$

นั่นคือ $$\emptyset_{11} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \rho_1 = -\frac{\beta_1}{1+\beta_1^2}$$

ส่วนค่า TPAC ณ 2 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{22}) หาได้จากการกำหนดให้ k = 2 ในระบบสมการที่ (2ก–3) ซึ่งจะได้

$$\rho_1 = \phi_{21}\rho_0 + \phi_{22}\rho_1$$

$$\rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}\rho_0$$

นั่นคือ $$\emptyset_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$= \frac{-\left(-\frac{\beta_1}{1+\beta_1^2}\right)^2}{1-\left(-\frac{\beta_1}{1+\beta_1^2}\right)^2} = \frac{-\beta_1^2}{1+\beta_1^2+\beta_1^4}$$

ทำนองเดียวกัน ค่า ϕ_{33} สามารถหาได้จาก

$$\emptyset_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

และเมื่อแทนค่า ρ_1 จะได้ $\emptyset_{33} = \frac{-\beta_1^3}{1+\beta_1^2+\beta_1^4+\beta_1^6}$ ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ สุดท้ายเราจะได้รูปทั่วไปของ ϕ_{kk} เป็นดังนี้

$$\emptyset_{kk} = \frac{-\beta_1^k}{1+\beta_1^2+\beta_1^4+\cdots+\beta_1^{2k}} \quad , k \geq 1 \qquad (3.25)$$

ภาคผนวก 3ง
การหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่า TAC ของอนุกรมเวลาที่ถูกกำหนดจาก MA(2)

- **หาค่าเฉลี่ย** จากสมการที่ (3.26)

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} \quad (3.26)$$

$$\mathrm{E}(X_t) = \beta_0 + \mathrm{E}(\varepsilon_t) - \beta_1\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) - \beta_1\mathrm{E}(\varepsilon_{t-2})$$

เนื่องจาก ε_t เป็นตัวรบกวนขาว (White noise) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคือ σ^2 นั่นคือ $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t-2}) = 0$ ดังนั้น เราจะได้

$$\mathrm{E}(X_t) = \beta_0 + 0 - \beta_1(0) - \beta_2(0) \quad (3ง–1)$$

หรือ $$\mu = \beta_0 \quad (3.27)$$

- **หาความแปรปรวน** นำ (3.27) ไปหักออกจาก (3.26) จะได้

$$X_t - \mu = \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} \quad (3ง–2)$$

$$(X_t - \mu)^2 = \varepsilon_t^2 + \beta_1^2\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2^2\varepsilon_{t-2}^2 - 2\beta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - 2\beta_2\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + 2\beta_1\beta_2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}$$

$$\mathrm{E}(X_t - \mu)^2 = \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + \beta_1^2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_2^2 E(\varepsilon_{t-2}^2) - 2\beta_1\mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1})$$
$$-2\beta_2\mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + 2\beta_1\beta_2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2})$$

เนื่องจาก ε_t เป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ และมีความแปรปรวนคงที่ σ^2 ทุกช่วงเวลา ดังนั้น

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 + \beta_1^2\,\sigma^2 + \beta_2^2\,\sigma^2$$

หรือเขียนได้ว่า $$\gamma_0 = (1+\beta_1^2 + \beta_2^2)\,\sigma^2 \quad (3.28)$$

- **หา TAC** จากสมการที่ (3ง–2)

$$X_t - \mu = \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} \qquad (3ง–2)$$

นำ $X_{t-k} - \mu$ คูณตลอดจะได้

$$\begin{aligned}(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) &= (\varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2})(X_{t-k} - \mu)\\ &= (\varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-k} - \beta_1\varepsilon_{t-k-1} - \beta_2\varepsilon_{t-k-2})\\ &= \varepsilon_t\varepsilon_{t-k} - \beta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-1} - \beta_2\varepsilon_t\varepsilon_{t-k-2}\\ &\quad - \beta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k} + \beta_1^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-1} + \beta_1\beta_2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k-2}\\ &\quad - \beta_2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k} + \beta_1\beta_2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-1} + \beta_2^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-k-2}\end{aligned} \qquad (3ง–3)$$

เมื่อ $k = 1$ สมการที่ (3ง–3) จะกลายเป็น

$$(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) = \varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - \beta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} - \beta_2\varepsilon_t\varepsilon_{t-3} - \beta_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \beta_1\beta_2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3}$$
$$- \beta_2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \beta_1\beta_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_2^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3}$$

$$E(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) = -\beta_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1\beta_2 E(\varepsilon_{t-2}^2)$$

$$\gamma_1 = -\beta_1\sigma^2 + \beta_1\beta_2\sigma^2 = (-\beta_1 + \beta_1\beta_2)\sigma^2$$

เมื่อ $k = 2$ สมการที่ (3ง–3) จะกลายเป็น

$$(X_t - \mu)(X_{t-2} - \mu) = \varepsilon_t\varepsilon_{t-2} - \beta_1\varepsilon_t\varepsilon_{t-3} - \beta_2\varepsilon_t\varepsilon_{t-4} - \beta_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \beta_1^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-3} + \beta_1\beta_2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-4}$$
$$- \beta_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1\beta_2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-3} + \beta_2^2\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-4}$$

$$E(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) = -\beta_2 E(\varepsilon_{t-2}^2)$$

$$\gamma_2 = -\beta_2\sigma^2$$

และเมื่อกำหนดให้ $k = 3, 4, \ldots,$ เราจะพิสูจน์ได้ว่า $\gamma_3 = \gamma_4 = \ldots = 0$ นั่นคือ ความแปรปรวนร่วมที่ต่างช่วงเวลากันของอนุกรมเวลา X_t ของรูปแบบ MA(2) เขียนได้ดังนี้

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\beta_1 + \beta_1\beta_2)\sigma^2 & , k = 1 \\ -\beta_2\sigma^2 & , k = 2 \\ 0 & , k > 2 \end{cases} \qquad (3ง\text{-}4)$$

และเมื่อนำค่า γ_0 ไปหารค่า $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ จะได้ค่า $\rho_1, \rho_2, \ldots$ ดังต่อไปนี้

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{(-\beta_1 + \beta_1\beta_2)\sigma^2}{(1+\beta_1^2+\beta_2^2)\sigma^2} = \dfrac{-\beta_1(1-\beta_2)}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & ,k = 1 \\ \dfrac{-\beta_2\sigma^2}{(1+\beta_1^2+\beta_2^2)\sigma^2} = \dfrac{-\beta_2}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & ,k = 2 \\ \dfrac{0}{(1+\beta_1^2+\beta_2^2)\sigma^2} = 0 & ,k > 2 \end{cases} \tag{3.29}$$

ภาคผนวก 3จ

คู่ความสัมพันธ์ของแบบจำลอง MA(q) และคู่ความสัมพันธ์ของแบบจำลอง AR(p)

คู่ความสัมพันธ์ของแบบจำลอง MA(q) หมายถึง หากแบบจำลอง MA(q) สามารถแปลงให้อยู่ในรูป AR(∞) ได้แล้ว เราจะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง AR(∞) ได้อย่างไร ส่วนคู่ความสัมพันธ์ของแบบจำลอง AR(p) หมายถึง หากแบบจำลอง AR(p) สามารถแปลงให้อยู่ในรูป MA(∞) ได้แล้ว เราจะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง MA(∞) ได้อย่างไร รายละเอียดมีดังนี้

แบบจำลอง Moving Average ลำดับที่ q เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \beta_0 + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - \beta_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q\varepsilon_{t-q}$$

และกำหนดให้แบบจำลอง MA(q) นี้สามารถแปลงให้อยู่ในรูป AR(∞) ได้ (invertible) เมื่อใส่ค่าคาดหวังในสมการข้างต้นจะได้

$$E(X_t) = \beta_0$$

หรือ $\mu = \beta_0$

ดังนั้น สมการที่ (3.32) จะเขียนได้ดังนี้

$$\dot{X}_t = \beta(L)\varepsilon_t \qquad (3จ–1)$$

โดยที่ $\dot{X}_t = X_t - \mu$ และ $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_q L^q$ สมการที่ (3จ–1) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{1}{\beta(L)}\dot{X}_t = \varepsilon_t$$

หรือ $$\pi(L)\dot{X}_t = \varepsilon_t \qquad (3จ–2)$$

โดยที่ $$\pi(L) = (1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \ldots\ )$$

$$= \frac{1}{\beta(L)}$$

หรือ $$\pi(L)\beta(L) = 1 \qquad (3ข–3)$$

จะเห็นว่า สมการที่ (3ข–2) ก็คือแบบจำลอง AR(∞) นั่นเอง โดยการหาค่าของ $\pi_1, \pi_2, \ldots$ สามารถทำได้ด้วยการใช้เงื่อนไขของ (3ข–3) และเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น กำหนดให้เรากำลังพิจารณาแบบจำลอง MA(2) ดังนั้น $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2$ แทนค่าลงใน (3ข–3) จะได้

$$(1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \ldots)(1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2) = 1 \qquad (3ข–4)$$

นั่นคือจะได้

$$\begin{aligned} 1 - \pi_1 L - \pi_2 L^2 - \pi_3 L^3 + \ldots \\ - \beta_1 L + \pi_1 \beta_1 L^2 + \pi_2 \beta_1 L^3 + \ldots \\ - \beta_2 L^2 + \pi_1 \beta_2 L^3 + \pi_2 \beta_2 L^4 + \ldots = 1 \end{aligned}$$

จากสมการข้างบน เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$1 + (-\pi_1 - \beta_1)L + (-\pi_2 + \pi_1 \beta_1 - \beta_2)L^2 + (-\pi_3 + \pi_2 \beta_1 - \pi_1 \beta_2)L^3 + \ldots = 1 \qquad (3ข–5)$$

เนื่องจากผลรวมทางซ้ายมือของสมการที่ (3ข–5) ต้องเท่ากับ 1 ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า

$$-\pi_1 - \beta_1 = 0 \qquad \text{หรือ} \quad \pi_1 = -\beta_1$$

$$-\pi_2 + \pi_1 \beta_1 - \beta_2 = 0 \qquad \text{หรือ} \quad \pi_2 = \pi_1 \beta_1 - \beta_2 = -\beta_1^2 - \beta_2$$

$$-\pi_3 + \pi_2 \beta_1 - \pi_1 \beta_2 = 0 \qquad \text{หรือ} \quad \pi_3 = \pi_2 \beta_1 - \pi_1 \beta_2$$

$$\vdots$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เราจะหาค่า $\pi_4, \pi_5, \ldots$ ได้ เราจะพบว่า เมื่อ $j \geq 3$ เราสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\pi_j = \pi_{j-1}\beta_1 + \pi_{j-2}\beta_2 \qquad \text{เมื่อ } j \geq 3 \qquad (3ข–6)$$

ดังนั้น เราจึงสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง AR(∞) ได้แล้ว

ทำนองเดียวกัน เราจะสามารถหาคู่ความสัมพันธ์ของแบบจำลอง AR(p) ได้ดังนี้ กำหนดให้แบบจำลอง AR(p) เขียนได้ดังนี้

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (3จ–7)$$

และเมื่ออนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูป AR(p) มีความนิ่งแล้ว เราจะสามารถแปลงอนุกรมเวลา X_t ให้อยู่ในรูป MA(∞)ได้ ดังจะอธิบายต่อไปนี้

เมื่อใส่ค่าคาดหวังในสมการข้างต้นจะได้

$$\mathrm{E}(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_{t-1}) + \alpha_2 \mathrm{E}(X_{t-2}) + \ldots + \alpha_p \mathrm{E}(X_{t-p})$$

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu + \ldots + \alpha_p \mu \qquad (3จ–8)$$

นำสมการที่ (3จ–8) ไปหักออกจาก (3จ–7) จะได้

$$\dot{X}_t = \alpha_1 \dot{X}_{t-1} + \alpha_2 \dot{X}_{t-2} + \cdots + \alpha_p \dot{X}_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (3จ–9)$$

โดยที่ $\dot{X}_t = X_t - \mu$ และสมการที่ (3จ–9) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\alpha(L)\dot{X}_\mathrm{t} = \varepsilon_t \qquad (3จ–10)$$

โดยที่ $\dot{X}_\mathrm{t} = X_t - \mu$ และ $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p$ สมการที่ (3จ–10) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\dot{X}_\mathrm{t} = \frac{1}{\alpha(L)}\varepsilon_t \qquad (3จ-11)$$

หรือ $$\dot{X}_\mathrm{t} = \varphi(L)\varepsilon_t \qquad (3จ–12)$$

โดยที่ $$\varphi(L) = (1 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \ldots\ )$$

$$= \frac{1}{\alpha(L)}$$

หรือ $$\varphi(L)\alpha(L) = 1 \qquad (3จ–13)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (3จ–12) ก็คือแบบจำลอง MA(∞) นั่นเอง โดยการหาค่าของ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ สามารถทำได้ด้วยการใช้เงื่อนไขของ (3จ –13) และเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น กำหนดให้เรากำลังพิจารณาแบบจำลอง AR(2) ดังนั้น $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2$ แทนค่าลงใน (3จ–13) จะได้

$$(1 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \ldots)(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) = 1 \tag{3จ–14}$$

นั่นคือจะได้

$$\begin{aligned} 1 + \varphi_1 L + \quad & \varphi_2 L^2 + \quad \varphi_3 L^3 + \ldots \\ - \alpha_1 L - & \varphi_1\alpha_1 L^2 - \varphi_2\alpha_1 L^3 - \ldots \\ & - \quad \alpha_2 L^2 - \varphi_1\alpha_2 L^3 - \varphi_2\alpha_2 L^4 - \ldots \quad = 1 \end{aligned}$$

จากสมการข้างบน เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$1 + (\varphi_1 - \alpha_1)L + (\varphi_2 - \varphi_1\alpha_1 - \alpha_2)L^2 + (\varphi_3 - \varphi_2\alpha_1 - \varphi_1\alpha_2)L^3 + \ldots = 1 \tag{3จ–15}$$

เนื่องจากผลรวมทางซ้ายมือของสมการที่ (3จ–15) ต้องเท่ากับ 1 ดังนั้น เราจึงสรุปได้ว่า

$\varphi_1 - \alpha_1 = 0$ หรือ $\varphi_1 = \alpha_1$

$\varphi_2 - \varphi_1\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ หรือ $\varphi_2 = \varphi_1\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2$

$\varphi_3 - \varphi_2\alpha_1 - \varphi_1\alpha_2 = 0$ หรือ $\varphi_3 = \varphi_2\alpha_1 + \varphi_1\alpha_2$

$\vdots$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เราจะหาค่า $\varphi_4, \varphi_5, \ldots$ ได้ เราจะพบว่า เมื่อ $j \geq 2$ เราสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\varphi_j = \varphi_{j-1}\alpha_1 + \varphi_{j-2}\alpha_2 \quad \text{เมื่อ } j \geq 2 \tag{3จ–16}$$

โดยที่ $\varphi_0 = 1$ ดังนั้น เราจึงสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลอง MA(∞) ได้แล้ว

ภาคผนวก 3ฉ

การหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC ของอนุกรมเวลาที่ถูกกำหนดจาก ARMA(1,1)

- **หาค่าเฉลี่ย** จากสมการที่ (3.35)

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (3.35)$$

$$\mathrm{E}(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_{t-1}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t) - \beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1})$$

เนื่องจาก X_t มีลักษณะความนิ่ง ตามเงื่อนไขของวิธี Box-Jenkins ดังนั้น เราจะได้ $\mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(X_{t-1})$ นอกจากนี้ ε_t เป็นตัวรบกวนขาว (White Noise) ที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคือ σ^2 นั่นคือ $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0$ ดังนั้น เราจะได้

$$\mathrm{E}(X_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(X_t)$$

หรือ $$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 \mu \quad (3ฉ–1)$$

นั่นคือจะได้ $$\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad (3.36)$$

- **หาความแปรปรวน**

นำ (3ฉ–1) ไปหักออกจาก (3.35) จะได้

$$X_t - \mu = \alpha_1 (X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (3ฉ–2)$$

$$(X_t - \mu)^2 = \alpha_1^2 (X_{t-1} - \mu)^2 + \varepsilon_t^2 + \beta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2$$
$$+ 2\alpha_1 (X_{t-1} - \mu)\varepsilon_t - 2\alpha_1\beta_1 (X_{t-1} - \mu)\varepsilon_{t-1} - 2\beta_1 \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$$

$$\mathrm{E}(X_t - \mu)^2 = \alpha_1^2 \mathrm{E}(X_{t-1} - \mu)^2 + \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + \beta_1^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2)$$
$$+ 2\alpha_1 \mathrm{E}(X_{t-1} - \mu)\varepsilon_t - 2\alpha_1\beta_1 \mathrm{E}(X_{t-1} - \mu)\varepsilon_{t-1} - 2\beta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1})$$

$$\mathrm{Var}(X_t) = \alpha_1^2 \mathrm{Var}(X_t) + \sigma^2 + \beta_1^2 \sigma^2$$
$$+ 2\alpha_1(0) - 2\alpha_1\beta_1 \mathrm{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) - 2\beta_1(0) \quad (3ฉ–3)$$

เนื่องจาก $\mathrm{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = \mathrm{E}(X_{t-1} - \mu)\varepsilon_{t-1}$

$$= \mathrm{E}[\alpha_1(X_{t-2} - \mu) + \varepsilon_{t-1} - \beta_1\varepsilon_{t-2}]\varepsilon_{t-1}$$

$$= \mathrm{E}\alpha_1(X_{t-2} - \mu)\varepsilon_t + \mathrm{E}\varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1\mathrm{E}\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}$$

$$= \sigma^2$$

ดังนั้น สมการที่ (3ฉ–3) จะเขียนได้ว่า

$\mathrm{Var}(X_t) \;=\; \alpha_1^2\mathrm{Var}(X_t) + \sigma^2 + \beta_1^2\sigma^2 - 2\alpha_1\beta_1\sigma^2$

หรือ $\gamma_0 \;=\; \alpha_1^2\mathrm{Var}(X_t) + \sigma^2 + \beta_1^2\sigma^2 - 2\alpha_1\beta_1\sigma^2$

หรือเขียนได้ว่า $$\gamma_0 = \frac{\left(1 + \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1\right)}{\left(1 - \alpha_1^2\right)}\sigma^2 \qquad (3.37)$$

- **หา TAC** จากสมการที่ (3ฉ–2)

$$X_t - \mu = \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} \qquad (3ฉ–2)$$

นำ $X_{t-k} - \mu$ คูณตลอดจะได้

$$(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = [\alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1}](X_{t-k} - \mu)$$

$$(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \alpha_1(X_{t-1} - \mu)(X_{t-k} - \mu) + (X_{t-k} - \mu)\varepsilon_t - \beta_1(X_{t-k} - \mu)\varepsilon_{t-1} \qquad (3ฉ–3)$$

เมื่อ $k = 1$ สมการที่ (3ฉ–3) จะกลายเป็น

$$(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) = \alpha_1(X_{t-1} - \mu)^2 + (X_{t-1} - \mu)\varepsilon_t - \beta_1(X_{t-1} - \mu)\varepsilon_{t-1}$$

$$\mathrm{E}(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu) = \alpha_1\mathrm{E}(X_{t-1} - \mu)^2 + \mathrm{E}(X_{t-1} - \mu)\varepsilon_t - \beta_1\mathrm{E}(X_{t-1} - \mu)\varepsilon_{t-1}$$

$$\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + 0 - \beta_1\sigma^2$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1(1 + \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1)}{(1 - \alpha_1^2)}\sigma^2 - \beta_1\sigma^2$$

$$= \frac{(\alpha_1 - \beta_1)(1 - \alpha_1\beta_1)}{(1 - \alpha_1^2)}\sigma^2$$

เมื่อ $k = 2$ สมการที่ (3ฉ–3) จะกลายเป็น

$$(X_t - \mu)(X_{t-2} - \mu) = \alpha_1 (X_{t-1} - \mu)(X_{t-2} - \mu) + (X_{t-2} - \mu)\varepsilon_t - \beta_1 (X_{t-2} - \mu)\varepsilon_{t-1}$$

$$E(X_t - \mu)(X_{t-2} - \mu) = \alpha_1 E(X_{t-1} - \mu)(X_{t-2} - \mu)$$

หรือ $$\gamma_2 = \alpha_1 \gamma_1$$

ทำนองเดียวกัน เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\gamma_3 = \alpha_1 \gamma_2$, $\gamma_4 = \alpha_1 \gamma_3$, … กล่าวโดยสรุปความแปรปรวนร่วมที่ต่างช่วงเวลากันของอนุกรมเวลา X_t ของรูปแบบ ARMA(1,1) เขียนได้ดังนี้

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1 - \beta_1)(1 - \alpha_1 \beta_1)}{(1 - \alpha_1^2)} \sigma^2 & , k = 1 \\ \alpha_1 \gamma_{k-1} & , k \geq 1 \end{cases} \tag{3ฉ–4}$$

และเมื่อนำค่า γ_0 ไปหารค่า $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ จะได้ค่า $\rho_1, \rho_2, \ldots$ ดังต่อไปนี้

$$\rho_1 = \begin{cases} \dfrac{(\alpha_1 - \beta_1)(1 - \alpha_1 \beta_1)}{1 + \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1} & , k = 1 \\ \alpha_1 \rho_{k-1} & , k \geq 2 \end{cases} \tag{3.38}$$

ภาคผนวก 3ช
วิธีการคำนวณค่า ESACF

Tsay and Tiao (1984)[4] ได้เสนอแนวคิดของ ESACF (Extended Sample Autocorrelation Function) เพื่อใช้เป็นเกณฑ์ในการเลือกรูปแบบของอนุกรมเวลาที่มีรูปแบบเป็น ARMA โดยการคำนวณ ESACF จะมาจากการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบวนซ้ำ (Iterated Least- Squares: ILS) ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

ให้ X_t คืออนุกรมเวลาที่มีรูปแบบเป็น ARMA(p,q) โดยที่ไม่มีค่าคงที่[5] แสดงได้ดังนี้

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p)X_t = (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_q L^q)\varepsilon_t \qquad (3ช–1)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \ldots - \beta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} - \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (3ช–2)$$

และเราจะกำหนดให้

$$Y_t = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p)X_t$$

$$= X_t - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} \qquad (3ช–3)$$

จากสมการที่ (3ช–3) จะทำให้เราเขียนสมการที่ (3ช–1) ให้อยู่ในรูป MA(q) ได้ดังต่อไปนี้

---

[4] Tsay and Tiao, “Consistency Estimates of Autoregressive Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Models,” *Journal of the American Statistical Association* 79 (1984): 84–96.

[5]เป็นข้อสมมุติเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น

$$Y_t = \sum_{i=1}^{q} \beta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (3ช–4)$$

$$= (1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots - \beta_q L^q)\varepsilon_t$$

อย่างไรก็ดี การที่เราจะสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการที่ (3ช–4) ได้นั้น เราจำเป็นต้องมีการประมาณค่า Y ขึ้นมาเสียก่อน ถ้ากำหนดให้ $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_p$ คือตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ α_1, α_2, …,α_p ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังนั้น ตัวประมาณค่า Y_t (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hat{Y}_t$) ก็คือค่าความผิดพลาดที่ได้จากสมการถดถอยของตัวอย่าง (หรือ Residual นั่นเอง) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\hat{Y}_t = X_t - \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i X_{t-i}$$

จากนั้นเราจึงนำค่า $\hat{Y}_t$ ไปหาช่วงเวลาล่าช้า (q) ตามรูปแบบ MA ด้วยการพิจารณาค่า SAC และ SPAC ของ $\hat{Y}_t$

อย่างไรก็ดี หากอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ ARMA(p,q) โดย $q > 0$ แล้วตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_p$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่เอนเอียง (Unbiased Estimators) และแม้ว่าตัวอย่างที่ใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์จะมีขนาดใหญ่ก็ตาม ค่าความน่าจะเป็นของตัวประมาณค่าเหล่านี้ก็จะไม่เท่ากับค่าพารามิเตอร์จริง ๆ ของมัน (Inconsistent Estimators)

เพื่อให้ได้ตัวประมาณค่ามีค่าความน่าจะเป็นตรงกับค่าพารามิเตอร์จริง ๆ ของมัน เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (Consistent Estimators) เรามีวิธีการดังนี้

ตอนเริ่มต้น เราจะถือว่าอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ AR(p) ดังนี้

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i} + u_t$$

โดย u_t คือตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการถดถอย จากนั้นทำการประมาณประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (ซึ่งทำในขั้นแรก) ดังนั้น เราจะเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^{(0)} X_{t-i} + e_t^{(0)}$$

โดย $\hat{\alpha}_i^{(0)}$ คือตัวประมาณค่าในแบบจำลอง AR(p) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในขั้นเริ่มต้น (i = 1, …, p)

$e_t^{(0)}$ คือค่าความผิดพลาดที่ได้จากสมการถดถอยของตัวอย่าง (Residual) ในขั้นเริ่มต้น ซึ่งจะไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว (White Noise) ถ้าอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ ARMA(p, q) และเรากล่าวได้ว่า กระบวนการในส่วนของ Moving Average ของ X_t ($\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_{t-q}$) ก็จะถูกรวมไว้ใน $e_i^{(0)}$ นั่นเอง อย่างไรก็ดี เราไม่ทราบค่าที่แท้จริงของช่วงเวลาล่าช้าในส่วนของ Moving Average (q) ดังนั้น เราต้องลองทำซ้ำทีละขั้นดังนี้

ทำซ้ำขั้นที่ 1 : นำค่าย้อนเวลา $e_{t-1}^{(0)}$ ไปประมาณสมการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดต่อไปนี้

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^{(1)} X_{t-i} + \hat{\beta}_1^{(1)} e_{t-1}^{(0)} + e_t^{(1)}$$

โดย $\hat{\alpha}_i^{(1)}$ คือตัวประมาณค่าในส่วนของ Autoregressive ในขั้นที่ 1 (i = 1, …, p)

$\hat{\beta}_1^{(1)}$ คือตัวประมาณค่าในส่วนของ Moving Averageในขั้นที่ 1

$e_i^{(1)}$ คือค่าความผิดพลาดที่ได้จากสมการถดถอยของตัวอย่าง (Residual) ในขั้นที่ 1

ถ้าเราพบว่า $e_t^{(1)}$ ไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว เราจะต้องทำในขั้นตอนที่ 2 ต่อดังนี้

ทำซ้ำขั้นที่ 2 : นำค่าย้อนเวลา $e_{t-1}^{(1)}$ และค่าย้อนเวลา $e_{t-2}^{(0)}$ ไปประมาณสมการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดต่อไปนี้

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^{(2)} X_{t-i} + \hat{\beta}_1^{(2)} e_{t-1}^{(1)} + \hat{\beta}_2^{(2)} e_{t-2}^{(0)} + e_t^{(2)}$$

โดย $\hat{\alpha}_i^{(2)}$ คือตัวประมาณค่าในส่วนของ Autoregressive ในขั้นที่ 2 (i = 1, …, p)

$\hat{\beta}_1^{(2)}$ และ $\hat{\beta}_1^{(2)}$ คือตัวประมาณค่าในส่วนของ Moving Averageในขั้นที่ 2

$e_t^{(2)}$ คือค่าความผิดพลาดที่ได้จากสมการถดถอยของตัวอย่าง (Residual) ในขั้นที่ 2

ถ้าเราพบว่า $e_t^{(2)}$ ไม่มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว เราจะต้องทำในขั้นตอนที่ 3 ต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงขั้นที่ q ดังนี้

ทำซ้ำขั้นที่ q : เป็นการนำค่าย้อนเวลา $e_{t-1}^{(q-1)}, e_{t-2}^{(q-2)}, \dots, e_{t-q}^{(0)}$ ไปประมาณสมการด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดต่อไปนี้

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^{(q)} X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \hat{\beta}_i^{(q)} e_{t-i}^{(q-i)} + e_t^{(q)}, \qquad t = p+q+1, \dots, T \qquad (3ข–5)$$

โดย $\hat{\alpha}_i^{(q)}$ คือตัวประมาณค่าในส่วนของ Autoregressive ในขั้นที่ q ($i = 1, \dots, p$)

$\hat{\beta}_1^{(q)}, \dots, \hat{\beta}_q^{(q)}$ คือตัวประมาณค่าในส่วนของ Moving Averageในขั้นที่ q

$e_t^{(q)}$ คือค่าความผิดพลาดที่ได้จากสมการถดถอยของตัวอย่าง (residual) ในขั้นที่ q

ในขั้นนี้ เราจะได้ว่า $e_i^{(q)}$ มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาว และเมื่อกรณีนี้เกิดขึ้นจะได้ว่า $\hat{\alpha}_i^{(q)}$ ($i = 1, .., p$) คือตัวประมาณค่าที่มีค่าความน่าจะเป็นของมันเท่ากับค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริงของมันเองเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ (Consistent Estimators)

อย่างไรก็ดี ในทางปฏิบัตินั้น เราไม่สามารถทราบค่าที่แท้จริงของ p และ q ในแบบจำลอง ARMA ได้ Tsay and Tiao (1984) จึงเสนอให้มีการทำซ้ำในรูปทั่วไปคือ **ตอนเริ่มต้น** เราจะถือว่าอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบ AR(0), AR(1), AR(2), … (หรือเขียนแทนด้วย AR(m) , $m = 0, 1, 2, \dots$)

และให้ $\hat{\alpha}_i^{(j)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ คือตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในส่วนของ AR(m) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจากการทำซ้ำครั้งที่ j แล้วเราคำนวณ

$$\hat{Y}_t^{(j)} = X_t - \sum_{i=1}^{m} \hat{\alpha}_i^{(j)} X_{t-i} \qquad (3ข–6)$$

และหากเรานำค่า $\hat{Y}_t^{(j)}$ ที่ได้จากสมการ (3ข–6) ไปคำนวณค่า SAC เราจะเรียกค่าที่ได้ว่า ESACF (Extended Sample Autocorrelation Function) ซึ่งเขียนแทนด้วย $\hat{\rho}_j^{(m)}$

ดังนั้น $\hat{\rho}_j^{(m)}$ จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปตาราง 2 ทางได้ดังนี้

AR	MA 0	1	2	3	4	…
0	$\hat{\rho}_1^{(0)}$	$\hat{\rho}_2^{(0)}$	$\hat{\rho}_3^{(0)}$	$\hat{\rho}_4^{(0)}$	$\hat{\rho}_5^{(0)}$	…
1	$\hat{\rho}_1^{(1)}$	$\hat{\rho}_2^{(1)}$	$\hat{\rho}_3^{(1)}$	$\hat{\rho}_4^{(1)}$	$\hat{\rho}_5^{(1)}$	…
2	$\hat{\rho}_1^{(2)}$	$\hat{\rho}_2^{(2)}$	$\hat{\rho}_3^{(2)}$	$\hat{\rho}_4^{(2)}$	$\hat{\rho}_5^{(2)}$	…
3	$\hat{\rho}_1^{(3)}$	$\hat{\rho}_2^{(3)}$	$\hat{\rho}_3^{(3)}$	$\hat{\rho}_4^{(3)}$	$\hat{\rho}_5^{(3)}$	…
:	:	:	:	:	:	…

ภาคผนวก 4ก

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของอนุกรมเวลา X_t ที่มีรูปแบบเป็น MA(1) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข (Conditional Least Square) และวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีเงื่อนไข (Conditional Maximum Likelihood)

จากอนุกรมเวลา X_t ที่มีรูปแบบเป็น MA(1) โดยกำหนดให้ $\beta_0 = 0$ ดังนี้[6]

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} \tag{4.1}$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธีนี้อยู่ภายใต้เงื่อนไขว่า ค่าแรกเริ่มของเหตุการณ์ไม่คาดฝันเป็นศูนย์ ซึ่งในกรณีของ MA(1) จะหมายถึงการกำหนดให้ $\varepsilon_0 = 0$ นั่นเอง จากสมการที่ (4.1) เขียนได้ว่า

$$\varepsilon_t = X_t + \beta_1\varepsilon_{t-1} \tag{4ก–1}$$

เมื่อ $t = 1$ $\quad \varepsilon_1 = X_1 + \beta_1\varepsilon_0 = X_1$

เมื่อ $t = 2$ $\quad \varepsilon_2 = X_2 + \beta_1\varepsilon_1 = X_2 + \beta_1 X_1$

เมื่อ $t = 3$ $\quad \varepsilon_3 = X_3 + \beta_1\varepsilon_2 = X_3 + \beta_1(X_2 + \beta_1 X_1)$

$$= X_3 + \beta_1 X_2 + \beta_1^2 X_1$$

เมื่อ $t = 4$ $\quad \varepsilon_4 = X_4 + \beta_1\varepsilon_3 = X_4 + \beta_1(X_3 + \beta_1 X_2 + \beta_1^2 X_1^2)$

$$= X_4 + \beta_1 X_3 + \beta_1^2 X_2 + \beta_1^3 X_1$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

เมื่อ $t = T$ $\quad \varepsilon_T = X_T + \beta_1 X_{T-1} + \beta_1^2 X_{T-2} + \beta_1^3 X_{T-3} + \cdots + \beta_1^{T-1} X_1$

---

[6] หาก $\beta_0 \neq 0$ การประมาณค่าพารามิเตอร์จะทำได้ด้วยการวิเคราะห์จากการแปลงแบบจำลอง MA(1) ให้อยู่ในรูปส่วนเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยนั่นเอง ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$\dot{X}_t = \varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1}$ โดยที่ $\dot{X}_t = X_t - \mu, \mu = E(X_t) = \beta_0$

จากวิธีการหาค่าของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน $\varepsilon_0, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{T-1}$ ข้างต้น เราสามารถเขียน ε_t ให้อยู่ในรูปทั่วไปดังสมการต่อไปนี้ได้

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_1^2 X_{t-2} + \beta_1^3 X_{t-3} + \cdots + \beta_1^{t-1} X_1 \\ &= X_t + \beta_1 L X_t + \beta_1^2 L^2 X_t + \beta_1^3 L^3 X_t + \cdots + \beta_1^{t-1} L^{t-1} X_t \\ &= (1 + \beta_1 L + \beta_1^2 L^2 + \beta_1^3 L^3 + \cdots + +\beta_1^{t-1} L^{t-1}) X_t\end{aligned}$$

หรือพิจารณาอีกแบบดังนี้ เขียนสมการที่ (4.1) ในรูปดังต่อไปนี้

$$X_t = (1 - \beta_1 L)\,\varepsilon_t$$

หรือเขียนได้ว่า $\varepsilon_t = \dfrac{X_t}{1 - \beta_1 L}$ (4ก–2)

ภายใต้เงื่อนไขว่า $|\beta_1| < 1$ สมการที่ (4ก–2) ถูกเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= X_t[1 + \beta_1 L + \beta_1^2 L^2 + \beta_1^3 L^3 + \cdots] \\ &= X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_1^2 X_{t-2} + \beta_1^3 X_{t-3} + \cdots \qquad (4ก–3)\end{aligned}$$

ถึงแม้ว่าสมการที่ (4ก–3) จะอยู่ในรูปผลบวกอนันต์ แต่เราจะสามารถหาค่า ε_t ได้เสมอ หาก $|\beta_1| < 1$ ซึ่งตัวนี้ก็คือ เงื่อนไขอนุกรมเวลา X_t ที่อยู่ในรูปแบบ MA(1) จะต้องสามารถแปลงให้อยู่ในรูป AR(∞) ได้ (Invertibility) นั่นเอง

จากสมการที่ (4ก–2) เมื่อกำหนดให้ $\varepsilon_0 = 0$ จะได้ว่า

$$0 = X_0$$

จากสมการที่ (4ก–3) เราแสดงการหาค่า $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= X_1 \\ \varepsilon_2 &= X_2 + \beta_1 X_1 \\ \varepsilon_3 &= X_3 + \beta_1 X_2 + \beta_1^2 X_1 \\ &\vdots \\ \varepsilon_T &= X_T + \beta_1 X_{T-1} + \beta_1^2 X_{T-2} + \cdots + \beta_1^{T-1} X_1\end{aligned}$$

กล่าวโดยสรุป เมื่อค่า ε_t สามารถหาค่าได้ แล้วเราจะต้องสามารถหาค่า $\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2$ ได้เช่นกัน หรือพูดอีกอย่างคือ เราจะสามารถหาผลรวมกำลังสองของค่าเหตุการณ์ไม่คาดฝันภายใต้เงื่อนไขว่า $\varepsilon_0 = 0$ (ซึ่งเขียนแทนด้วย S_c) ดังนั้น สมการต่อไปนี้จะสามารถหาค่าได้

$$S_c(\beta_1) = \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_1^2 X_{t-2} + \beta_1^3 X_{t-3} + \cdots)^2 \qquad (4ก–4)$$

จะเห็นว่า ค่า S_c จะขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ β_1

และเมื่อสมมุติเพิ่มเติมว่าให้ ε_t มีการแจกแจงแบบปกติ หรือเขียนได้ว่า $\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$ ดังนั้น เราจะได้ว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ ε_t เขียนได้ดังนี้

$$f_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}\right]$$

และจะได้ว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็น $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$ เขียนได้ดังนี้

$$L(\beta_1, \sigma^2) = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_T$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{T/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{T/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} S_c(\beta_1)\right]$$

หรือเขียนว่า

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} S_c(\beta_1) \qquad (4ก\text{-}5)$$

วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไขจะใช้สมการที่ (4ก–4) เป็นแนวคิดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ส่วนวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดจะใช้สมการที่ (4ก–5) เป็นแนวคิดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

- ถ้า b_1 คือตัวประมาณค่าของ β_1 ที่ทำให้สมการที่ (4ก–4) มีค่าน้อยที่สุด เราจะเรียก b_1 ว่า ตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข

- ถ้า b_1 และ S^2 คือตัวประมาณค่าของ β_1 และ σ^2 ที่ทำให้สมการที่ (4ก–5) มีค่าสูงที่สุด เราจะเรียก b_1 และ S^2 ว่า ตัวประมาณค่าด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีเงื่อนไข

การประมาณค่าพารามิเตอร์จากสมการที่ (4ก–4) หรือ (4ก–5) จะต้องใช้การประมาณค่าแบบไม่ใช่เชิงเส้น (Nonlinear Estimation) ซึ่งจะไม่กล่าวรายละเอียดในหนังสือเล่มนี้

ภาคผนวก 4ข

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของอนุกรมเวลา X_t ที่มีรูปแบบเป็น MA(1) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Least Square) และวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Maximum Likelihood)

จากอนุกรมเวลา X_t ที่มีรูปแบบเป็น MA(1) ดังนี้

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} \qquad (4ข–1)$$

วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่มีเงื่อนไข ได้มาจากการหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ β_1 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้มีค่าน้อยที่สุด

$$S(\beta_1) = \sum_{t=-\infty}^{T} \varepsilon_t^2 \qquad (4ข–2)$$

จากสมการที่ (4ข–2) จะเห็นว่า ค่าเริ่มแรกของเหตุการณ์ไม่คาดฝัน ε_t ($t \le 0$) จะถูกนำมาร่วมใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วย ซึ่งในกรณีของ MA(1) จะหมายถึง ε_0 นั่นเอง ดังนั้น สมการที่ (4ข–2) อาจเขียนในรูป

$$S(\beta_1) = \sum_{t=0}^{T} \varepsilon_t^2 \qquad (4ข–2)$$

กรณีนี้จะต้องพยากรณ์ย้อนหลัง (Back forecasts หรือเรียกย่อ ๆ ว่า Backcasts) ของค่า ε_0 (เขียนแทนด้วย $\hat{\varepsilon}_0$) ส่วนวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไขก็ได้มาจากการหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ β_1 ที่ทำให้สมการต่อไปนี้มีค่าสูงที่สุด

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} S(\beta_1)$$

หรือ $$\ln L = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=-\infty}^{T} \varepsilon_t^2 \qquad (4ข–3)$$

จะเห็นว่า ไม่ว่าเราจะใช้สมการที่ (4ข–2) หรือ (4ข–3) ซึ่งเป็นวิธีการประมาณแบบไม่มีเงื่อนไข เราจะต้องพยากรณ์ย้อนหลังของค่า ε_0 ($\hat{\varepsilon}_0$) ซึ่งมีวิธีการดังจะอธิบายต่อไปนี้
จากอนุกรมเวลาที่มีความนิ่ง ความแปรปรวนร่วมจะขึ้นอยู่กับระยะห่างของช่วงเวลา จึงสามารถเขียนอนุกรมเวลา X_t ที่มีรูปแบบเป็น MA(1) ให้อยู่ในรูปแบบย้อนกลับ (Backward Form) ได้ดังต่อไปนี้

$$X_t = b_t - \beta_1 b_{t+1} \qquad (4ข–4)$$

หรือ

$$b_t = X_t + \beta_1 b_{t+1} \qquad (4ข–5)$$

โดยที่ b_t มีคุณสมบัติเป็นตัวรบกวนขาวของแบบจำลองในรูปแบบย้อนกลับ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนจะเท่ากับกรณีของ ε_t ซึ่งก็คือ σ^2 นั่นเอง

ถ้ากำหนดให้ T คือตัวอย่างสุดท้ายที่เก็บรวบรวมข้อมูลมา ขั้นเริ่มแรก เราจะกำหนดให้ $b_{T+1} = 0$ และใช้สมการที่ (4ข–5) ค่อย ๆ หาค่า $b_{T-1}, b_{T-2}, \ldots, b_1$ ได้ดังนี้

$$b_T = X_T - \beta_1 b_{T+1} \qquad = X_T$$

$$b_{T-1} = X_{T-1} - \beta_1 b_T \qquad = X_{T-1} - \beta_1 X_T$$

$$b_{T-2} = X_{T-2} - \beta_1 b_{T-1}$$

$$\vdots$$

$$b_1 = X_1 - \beta_1 b_2$$

และเราจะใช้วิธีเดียวกันนี้ในการหาค่า $b_0, b_{-1}, b_{-2}, \ldots$ ดังนี้

$$b_0 = X_0 - \beta_1 b_1 \quad \text{นั่นคือ} \quad X_0 = b_0 + \beta_1 b_1$$

$$b_{-1} = X_{-1} - \beta_1 b_0 \quad \text{นั่นคือ} \quad X_{-1} = b_{-1} + \beta_1 b_0$$

$$b_{-2} = X_{-2} - \beta_1 b_{-1} \quad \text{นั่นคือ} \quad X_{-2} = b_{-2} + \beta_1 b_{-1}$$

$$\vdots$$

การหาค่าพยากรณ์ของตัวแปรสุ่ม X_t ($t \le 0$) ในทางสถิตินั้นทำได้ด้วยการใส่ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มนั้น ภายใต้เงื่อนไขว่า เราทราบข้อมูลตั้งแต่ $X_1, X_2, \ldots, X_T$ หรือเขียนแทนด้วยเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}$ ดังนั้น เราจะได้ค่าพยากรณ์ย้อนหลังของ X_t เมื่อ $t \le 0$ ได้ดังนี้[7]

$$\hat{X}_0 = \mathrm{E}(X_0|\boldsymbol{X}) \quad = \mathrm{E}(b_0 + \beta_1 b_1|\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(b_0|\boldsymbol{X}) + \mathrm{E}(\beta_1 b_1|\boldsymbol{X}) = \beta_1 b_1$$

$$\hat{X}_{-1} = \mathrm{E}(X_{-1}|\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(b_{-1} + \beta_1 b_0|\boldsymbol{X}) = 0$$

$$\hat{X}_{-2} = \mathrm{E}(X_{-2}|\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(b_{-2} + \beta_1 b_{-1}|\boldsymbol{X}) = 0$$

$$\vdots$$

จากการสังเกตจะเห็นว่า ในกรณีของ MA(1) นั้น ค่า $\hat{X}_0$ จะไม่เป็นศูนย์ แต่ต่อจากนั้นค่า $\hat{X}_{-1}, \hat{X}_{-2}, \ldots$ จะมีค่าเป็นศูนย์
และจากสมการที่ (4ข–1) จะเขียนได้เป็น

$$\varepsilon_t \;=\; X_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} \tag{4ข–7}$$

ดังนั้น ค่า ε_0 เขียนได้ดังนี้

$$\varepsilon_0 \;= X_0 - \beta_1\varepsilon_{-1}$$

ทำนองเดียวกัน การหาค่าพยากรณ์ของตัวแปรสุ่ม ε_t ($t \le 0$) ทำได้ด้วยการใส่ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่มนี้ ภายใต้เงื่อนไขว่า เราทราบข้อมูลที่มีอยู่คือ $X_1, X_2, \ldots, X_T$ หรือเขียนแทนด้วยเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}$ ดังนั้น เราจะได้ค่าพยากรณ์ย้อนหลังของ ε_t เมื่อ $t \le 0$ ได้ดังนี้

$$\hat{\varepsilon}_0 \;= \mathrm{E}(\varepsilon_0|\boldsymbol{X}) \quad = \mathrm{E}(X_0 - \beta_1\varepsilon_{-1}|\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(X_0|\boldsymbol{X}) - E(\beta_1\varepsilon_{-1}|\boldsymbol{X}) = \hat{X}_0$$

จากนั้นเราจึงนำค่าพยากรณ์ย้อนหลัง $\hat{\varepsilon}_0$ ที่ได้ไปใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ β_1 ตามสมการที่ (4ข–2) และ (4ข–3) จะเรียกว่า ตัวประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่มีเงื่อนไข และตัวประมาณค่าด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไข ตามลำดับ ซึ่งต้องใช้ความรู้ของการประมาณค่าแบบไม่ใช่เชิงเส้น (Nonlinear Estimation)

---

[7] อย่าลืมว่า ε_t เป็นตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และความแปรปรวนคงที่

ภาคผนวก 5ก

การพิสูจน์ว่า การทำผลต่างลำดับที่ 1 กับอนุกรมเวลาที่มีค่าเฉลี่ยในรูปแบบแนวโน้มเชิงเส้นตรง จะทำให้ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันเอง

การหาผลต่างลำดับที่ 1 ของอนุกรมเวลา X_t ที่มีค่าเฉลี่ยอยู่ในรูปแบบแนวโน้มเชิงเส้นตรง แสดงได้จากสมการที่ (5.5) ดังนี้

$$\Delta X_t = \varphi_1 + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \qquad (5.5)$$

โดยที่ ε_t คือตัวรบกวนขาวที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และความแปรปรวนคงที่ σ^2 สมการที่ (5.5) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\Delta X_t = \varphi_1 + u_t \qquad (5ก–1)$$

โดยที่ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนคือ $u_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(u_t, u_{t-1}) &= \mathrm{E}(u_t u_{t-1}) \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})] \\
&= \mathrm{E}[\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}] \\
&= \mathrm{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) - \mathrm{E}(\varepsilon_t\,\varepsilon_{t-1}) + \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

(เนื่องจาก ε_t ต้องเป็นอิสระกับช่วงเวลาอื่น ๆ ตามคุณสมบัติตัวรบกวนขาว และมีความแปรปรวนคงที่ทุกช่วงเวลา)

นั่นคือ $\mathrm{Cov}(u_t, u_{t-1}) \neq 0$ ซึ่งแสดงถึงตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการที่ (5ก–1) มีความสัมพันธ์กันเอง (ภาษาอังกฤษใช้คำว่า Autocorrelation หรือ Serial Correlation)

ภาคผนวก 5ข

การพิสูจน์ว่า ค่าคงที่ $\boldsymbol{\alpha_0}$ ใน $\Delta^2 \boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{\alpha_0} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$ จะเกี่ยวข้องกับค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้ในสมการ $\boldsymbol{X_t = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_1 t^2 + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i}$

เพื่อความง่าย กำหนดให้ $X_t = 0$ $(t \leq 0)$

จาก $\Delta^2 X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$

$(1-L)^2 X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$

$X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = \alpha_0 + \varepsilon_t$

$X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + \alpha_0 + \varepsilon_t$

เมื่อ $t = 1$ จะได้ $X_1 = \alpha_0 + \varepsilon_1$ (5ข–1)

เมื่อ $t = 2$ จะได้ $X_2 = 2X_1 + \alpha_0 + \varepsilon_2 = 2(\alpha_0 + \varepsilon_1) + \alpha_0 + \varepsilon_2$

$= 3\alpha_0 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$= 3\alpha_0 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (5ข–2)

เมื่อ $t = 3$ จะได้ $X_3 = 2X_2 - X_1 + \alpha_0 + \varepsilon_3 = 2(3\alpha_0 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - (\alpha_0 + \varepsilon_1) + \alpha_0 + \varepsilon_3$

$= 6\alpha_0 + 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (5ข–3)

เมื่อ $t = 4$ จะได้ $X_4 = 2X_3 - X_2 + \alpha_0 + \varepsilon_4$

$= 2(6\alpha_0 + 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (3\alpha_0 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \alpha_0 + \varepsilon_4$

$= 10\alpha_0 + 4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4$ (5ข–4)

: ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

จากสมการที่ (5ข–1)–(5ข–4) ค่าคงที่คือ α_0, $3\alpha_0$, $6\alpha_0$, $10\alpha_0$, … ซึ่งเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\frac{t + t^2}{2}\alpha_0$$

และจากสมการที่ (5ข–1)–(5ข–4) ส่วนของแนวโน้มสุ่มคือ

$$\varepsilon_1,\quad 2\varepsilon_1+\varepsilon_2,\quad 3\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3,\quad 4\varepsilon_1+3\varepsilon_2+2\varepsilon_3+\varepsilon_4,\quad \ldots$$

ถ้ากำหนดให้ $v_j = \sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i$ นั่นคือ

$$v_1 = \varepsilon_1$$

$$v_2 = \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$v_3 = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$v_4 = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

$$\vdots$$

นั่นคือ เราจะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{1} v_j = \varepsilon_1$$

$$\sum_{j=1}^{2} v_j = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\sum_{j=1}^{3} v_j = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\sum_{j=1}^{4} v_j = 4\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

$$\vdots$$

ดังนั้น ถ้า $\Delta^2 X_t = \alpha_0 + \varepsilon_t$ แล้วอนุกรมเวลา X_t สามารถเขียนได้ดังนี้

$$X_t = \frac{t+t^2}{2}\alpha_0 + \sum_{j=1}^{t} v_j$$

$$X_t = \frac{\alpha_0}{2}t + \frac{\alpha_0}{2}t^2 + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i$$

หรือ $$X_t = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_i$$

โดยที่ $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = \frac{\alpha_0}{2},\ \varphi_2 = \frac{\alpha_0}{2}$ จะเห็นว่า ค่าคงที่ α_0 ก็คือค่าสัมประสิทธิ์ของแนวโน้มกำหนดได้นั่นเอง

ภาคผนวก 6ก

การหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่ถูกกำหนดจากสมการ $X_t = A_1X_{t-4} + v_t$

- **หาค่าเฉลี่ย** จากสมการที่ (6.6)

$$X_t = A_1X_{t-4} + v_t$$

$$\mathrm{E}(X_t) = A_1\mathrm{E}(X_{t-4}) + \mathrm{E}(v_t)$$

$$\mathrm{E}(X_t) = A_1\mathrm{E}(X_t) \quad \text{(เนื่องจาก } X_t \text{ มีลักษณะความนิ่ง} \rightarrow \mathrm{E}(X_t) = \mathrm{E}(X_{t-1}))$$

หรือ $\mu = A_1\mu$ นั่นคือ $\mu = \frac{0}{1-A_1} = 0$ (6.7)

แต่หากอนุกรมเวลา X_t มีค่าคงที่ ($A_0 \neq 0$) กรณีนี้จะเขียนอนุกรมเวลา X_t ได้เป็น

$X_t = A_0 + A_1X_{t-4} + v_t$

แล้วค่าเฉลี่ย $\mathrm{E}(X_t) = \frac{A_0}{1-A_1}$ และถ้า $A_1 = 1$ แล้วค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X_t จะไม่สามารถหาค่าได้

- **หาความแปรปรวน** จากสมการที่ (6.6)

$X_t = A_1X_{t-4} + v_t$

$$\mathrm{Var}(X_t) = A_1^2\mathrm{Var}(X_{t-4}) + \mathrm{Var}(v_t) + 2\mathrm{Cov}(X_{t-4}, v_t)$$

$$\mathrm{Var}(X_t) = A_1^2\mathrm{Var}(X_t) + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = A_1^2\gamma_0 + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-A_1^2} \qquad (6.8)$$

นั่นคือ เพื่อให้ความแปรปรวนของแบบจำลองตามสมการที่ (6.8) หาค่าได้ $|A_1| < 1$

- **หา TAC**

$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \mathrm{E}(X_t-\mu)(X_{t-k}-\mu) = \mathrm{E}(X_tX_{t-k})$ เนื่องจาก $\mu = 0$

จาก (6.6) $X_t = A_1X_{t-4} + v_t$

$X_t X_{t-k} = A_1X_{t-4}X_{t-k} + v_tX_{t-k}$

$\mathrm{E}(X_tX_{t-k}) = \mathrm{E}(X_{t-4}X_{t-k})$

$\mathrm{Cov}(X_tX_{t-k}) = A_1\mathrm{Cov}(X_{t-4},X_{t-k})$

$\gamma_k = A_1\,\gamma_{k-4}$

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = A_1\frac{\gamma_{k-4}}{\gamma_0}$$

$\rho_k = A_1\,\rho_{k-4}$

เมื่อ $k = 4$ $\rho_4 = A_1\rho_0 = A_1$

เมื่อ $k = 8$, $\rho_8 = A_1\rho_4 = A_1^2$

เมื่อ $k = 12$, $\rho_{12} = A_1\rho_8 = A_1^3$

ดังนั้น เราจะสรุปได้ว่า

$$\rho_k = \begin{cases} (A_1)^{\frac{k}{4}}, & k = 0,4,8,\ldots \\ 0, & \text{เมื่อเป็นกรณีอื่น ๆ} \end{cases} \qquad (6.9)$$

- **หา TPAC**
  - **ค่า TPAC ณ 1, 2 และ 3 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{11}, ϕ_{22}, ϕ_{33})**

TPAC ณ 1 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{11}) ก็คือค่าสัมประสิทธิ์ของ X_{t-1} ในสมการถดถอยต่อไปนี้

$$X_t = \phi_{01} + \phi_{11}X_{t-1} + v_t$$

แต่เนื่องจากในแบบจำลอง $X_t = A_1X_{t-4} + v_t$ จะเห็นว่าไม่มีตัวแปร X_{t-1} นั่นคือ $\phi_{11} = 0$ และเมื่อใช้วิธีเดียวกันพิจารณา TPAC ณ 2 และ 3 ช่วงเวลาที่ผ่านมา เราจะได้ว่า $\phi_{22} = 0$ และ $\phi_{33} = 0$

- **ค่า TPAC ณ 4 ช่วงเวลาที่แล้ว (ϕ_{44})**

TPAC ณ 4 ช่วงเวลาที่แล้ว (ρ_{44}) ก็คือค่าสัมประสิทธิ์ของ X_{t-4} ในสมการถดถอยต่อไปนี้

$$X_t = \phi_{04} + \phi_{14}X_{t-1} + \phi_{24}X_{t-2} + \phi_{34}X_{t-3} + \phi_{44}X_{t-4} + v_t$$

หากอนุกรมเวลา X_t อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (6.6) แล้วจะต้องไม่มีตัวแปร X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3} เข้ามาเกี่ยวข้อง นั่นคือ เราจึงสรุปได้ว่า $\phi_{14} = 0$, $\phi_{24} = 0$ และ $\phi_{34} = 0$ ดังนั้น ค่า TPAC ณ 4 ช่วงเวลาที่ผ่านมาคือ $\phi_{44} = A_1$

เมื่อพิจารณาทำนองเดียวกันนี้ เราจะสรุปค่า TPAC กรณีนี้ได้ว่า

$$\emptyset_{kk} = \begin{cases} \rho_4 & \text{เมื่อ } k = 4 \\ 0 & \text{เมื่อเป็นกรณีอื่น ๆ} \end{cases} \qquad (6.10)$$

ภาคผนวก 6ข

การหาค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่า TAC และค่า TPAC ของอนุกรมเวลา X_t ที่ถูกกำหนดจากแบบจำลอง ARMA(0,1)(0,1)$_s$

- **หาค่าเฉลี่ย** จากแบบจำลอง ARMA(0,1)(0,1)$_s$

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - B_1 \varepsilon_{t-s} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1}$$

นั่นคือ $E(X_t) = 0$

หรือ $\mu = 0$ (6.18)

- **หาความแปรปรวน** จากแบบจำลอง ARMA(0,1)(0,1)$_s$

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - B_1 \varepsilon_{t-s} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1}$$

$$\mathrm{Var}(X_t) = (1+\beta_1^2 + B_1^2 + \beta_1^2 B_1^2)\,\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}(X_t) = (1+\beta_1^2)(1+B_1^2)\,\sigma^2$$

หรือ $\gamma_0 = (1+\beta_1^2)(1+B_1^2)\,\sigma^2$ (6.19)

- **หา TAC**

จาก $\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k}) = E[(X_t - E(X_t))\,(X_{t-k} - E(X_{t-k}))]$

$= E(X_t X_{t-k})$ (เนื่องจาก $E(X_t) = 0$) (6ข–1)

จากแบบจำลอง ARMA(0,1)(0,1)$_s$

$$X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - B_1 \varepsilon_{t-s} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1}$$

และ
$$X_{t-k} = \varepsilon_{t-k} - \beta_1 \varepsilon_{t-k-1} - B_1 \varepsilon_{t-s-k} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1-k}$$

แทนค่า X_t และ X_{t-k} ใน (6ข–1) จะได้

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k}) = E(\varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - B_1\varepsilon_{t-s} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1})(\varepsilon_{t-k} - \beta_1\varepsilon_{t-k-1} - B_1\varepsilon_{t-s-k} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1-k})$$

หรือ

$$\gamma_k = E(\varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - B_1\varepsilon_{t-s} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1})(\varepsilon_{t-k} - \beta_1 \varepsilon_{t-k-1} - B_1\varepsilon_{t-s-k} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1-k})$$

$$= E(\varepsilon_t - \beta_1\varepsilon_{t-1} - B_1\varepsilon_{t-s} + \beta_1 B_1\varepsilon_{t-s-1})(\varepsilon_{t-k} - \beta_1\varepsilon_{t-k-1} - B_1 \varepsilon_{t-s-k} + \beta_1 B_1 \varepsilon_{t-s-1-k})$$

เมื่อ $k = 1$, $\gamma_1 = E(-\beta_1\varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 B_1^2\varepsilon_{t-s-1}^2) = -\beta_1(1+B_1^2)\sigma^2$

เมื่อ $k = 2$, $\gamma_2 = 0$

:

เมื่อ $k = s-1$, $\gamma_{s-1} = E(\beta_1 B_1\varepsilon_t^2) = \beta_1 B_1\sigma^2$

เมื่อ $k = s$, $\gamma_s = E(-B_1\varepsilon_{t-s}^2 - \beta_1^2 B_1\varepsilon_{t-s-1}^2) = -B_1(1+\beta_1^2)\sigma^2$

เมื่อ $k = s+1$, $\gamma_{s+1} = E(+\beta_1 B_1\varepsilon_{t-s-1}^2) = \beta_1 B_1\sigma^2$

เมื่อ $k = s+2$, $\gamma_{s+2} = 0$

จะเห็นว่า $\gamma_k = 0$ เมื่อ $k \neq 0, 1, s-1, s, s+1$ ดังนั้น

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t+k})}{var(X_t)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-\beta_1}{(1+\beta_1^2)} & k = 1 \\ \dfrac{-B_1}{(1+B_1^2)} & k = s \\ \dfrac{\beta_1 B_1}{(1+\beta_1^2)(1+B_1^2)} & k = s-1 \text{ และ } s+1 \\ 0 & k \neq 0, 1, s-1, s, s+1 \end{cases} \tag{6.20}$$

ภาคผนวก 7ก

วิธีพิสูจน์สมการที่ (7.16)

จากสมการที่ (7.4)

$$X_T = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T-1} + \varepsilon_T \qquad (7.4)$$

จากสมการที่ (7.4) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T+1$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+1} = \alpha_0 + \alpha_1 X_T + \varepsilon_{T+1} \qquad (7ก–1)$$

จากสมการที่ (7.4) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T+2$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+2} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+1} + \varepsilon_{T+2}$$

แทนค่า X_{T+1} ลงในสมการข้างบนจะได้

$$X_{T+2} = \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 X_T + \varepsilon_{T+1}) + \varepsilon_{T+2}$$

$$= \alpha_0(1+\alpha_1) + \alpha_1^2 X_T + (\alpha_1\varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}) \qquad (7ก–2)$$

จากสมการที่ (7.4) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T+3$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+3} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+2} + \varepsilon_{T+3}$$

แทนค่า X_{T+2} ลงในสมการข้างบนจะได้

$$X_{T+3} = \alpha_0 + \alpha_1[\alpha_0(1+\alpha_1) + \alpha_1^2 X_T + \alpha_1\varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}] + \varepsilon_{T+3}$$

$$= \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2) + \alpha_1^3 X_T + (\alpha_1^2\varepsilon_{T+1} + \alpha_1\varepsilon_{T+2} + \varepsilon_{T+3}) \qquad (7ก–3)$$

: ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้

$$X_{T+j} = \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_1^{j-1}) + \alpha_1^j X_T$$

$$+ \{ \alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots + \alpha_1\varepsilon_{T+j-1} + \varepsilon_{T+j}\} \qquad (7ก–4)$$

$$\hat{X}_T(j) = E(X_{T+j+1} | I_T) = \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_1^{j-1}) + \alpha_1^j X_T \qquad (7ก–5)$$

$$= \alpha_0 \cdot \frac{1-\alpha_1^j}{1-\alpha_1} + \alpha_1^j X_T$$

เนื่องจากเมื่ออนุกรมเวลา X_T มีความนิ่งจะได้ว่า $|\alpha_1| < 1$ ดังนั้น $\lim_{j\to\infty} \alpha_1^j = 0$ และเราจะได้ค่าพยากรณ์ดังนี้

$$\hat{X}_T(j) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \tag{7.16}$$

ภาคผนวก 7ข

วิธีพิสูจน์สมการที่ (7.17) และ (7.18)

จากสมการที่ (7ก–4) และ (7ก–5)

$$X_{T+j} = \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_1^{j-1}) + \alpha_1^j X_T$$

$$+ \{ \alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots. + \alpha_1\varepsilon_{T+j-1} + \varepsilon_{T+j}\} \qquad (7ก–4)$$

$$\hat{X}_T(j) = \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_1^{j-1}) + \alpha_1^j X_T \qquad (7ก–5)$$

ดังนั้น ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า (j-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$e_T(j) = X_{T+j} - \hat{X}_T(j)$$

$$= \alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots. + \alpha_1\varepsilon_{T+j-1} + \varepsilon_{T+j} \qquad (7.17)$$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า คำนวณได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(e_T(j)) = \mathrm{Var}(\alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots. + \alpha_1\varepsilon_{T+j-1} + \varepsilon_{T+j})$$

$$= \left(\alpha_1^{2(j-1)} + \alpha_1^{2(j-2)} + \cdots + \alpha_1^2 + 1\right)\sigma^2 \qquad (7.18)$$

ภาคผนวก 7ค
วิธีพิสูจน์สมการที่ (7.48)

จากสมการที่ (7.37)

$$X_T \quad = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T-1} + \varepsilon_T - \beta_1 \varepsilon_{T-1} \qquad (7.37)$$

จากสมการที่ (7.37) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + 1$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+1} \quad = \alpha_0 + \alpha_1 X_T + \varepsilon_{T+1} - \beta_1 \varepsilon_T \qquad (7ค–1)$$

จากสมการที่ (7.37) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + 2$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+2} \quad = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - \beta_1 \varepsilon_{T+1}$$

แทนค่า X_{T+1} ลงในสมการข้างบนจะได้

$$X_{T+2} \quad = \alpha_0 + \alpha_1(\alpha_0 + \alpha_1 X_T + \varepsilon_{T+1} - \beta_1 \varepsilon_T) + \varepsilon_{T+2} - \beta_1 \varepsilon_{T+1}$$

$$= \alpha_0(1+\alpha_1) + \alpha_1^2 X_T + (\alpha_1 \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}) - \beta_1(\alpha_1 \varepsilon_T + \varepsilon_{T+1}) \qquad (7ค–2)$$

จากสมการที่ (7.4) ค่าอนุกรมเวลา X ณ ช่วงเวลาที่ $T + 3$ เขียนได้ว่า

$$X_{T+3} \quad = \alpha_0 + \alpha_1 X_{T+2} + \varepsilon_{T+3} - \beta_1 \varepsilon_{T+2}$$

แทนค่า X_{T+2} ลงในสมการข้างบนจะได้

$$X_{T+3} \quad = \alpha_0 + \alpha_1[\alpha_0(1+\alpha_1) + \alpha_1^2 X_T + (\alpha_1 \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}) - \beta_1(\alpha_1 \varepsilon_T + \varepsilon_{T+1})] + \varepsilon_{T+3} - \beta_1 \varepsilon_{T+2}$$

$$= \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2) + \alpha_1^3 X_T + (\alpha_1^2 \varepsilon_{T+1} + \alpha_1 \varepsilon_{T+2} + \varepsilon_{T+3}) - \beta_1(\alpha_1^2 \varepsilon_T + \alpha_1 \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2})$$

(7ค–3)

: ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้

$$X_{T+j} = \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_1^{j-1}) + \alpha_1^j X_T + \{ \alpha_1^{j-1} \varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2} \varepsilon_{T+2} + \ldots. + \alpha_1 \varepsilon_{T+j-1} + \varepsilon_{T+j}\}$$

$$- \beta_1\{\alpha_1^{j-1} \varepsilon_T + \alpha_1^{j-2} \varepsilon_{T+1} + \ldots. + \alpha_1 \varepsilon_{T+j-2} + \varepsilon_{T+j-1}\} \qquad (7ค–4)$$

$$\hat{X}_T(j) \quad = E(X_{t+j+1} | I_t)$$

$$= \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_1^{j-1}) + \alpha_1^j X_T \qquad (7ค–5)$$

$$= \alpha_0 \cdot \frac{1-\alpha_1^j}{1-\alpha_1} + \alpha_1^j X_t$$

เนื่องจากเมื่ออนุกรมเวลา X_t มีความนิ่งจะได้ว่า $|\alpha_1| < 1$ ดังนั้น $\lim_{j\to\infty} \alpha_1^j = 0$ และเราจะได้ค่าพยากรณ์ดังนี้

$$\hat{X}_T(j) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \qquad (7.48)$$

ภาคผนวก 7ง

วิธีพิสูจน์สมการที่ (7.49) และ (7.50)

จากสมการที่ (7ค–4) และ (7ค–5)

$$X_{T+j} = \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_1^{j-1})+\alpha_1^j X_T+\{\alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots. +\alpha_1\varepsilon_{T+j-1}+ \varepsilon_{T+j}\}$$

$$-\beta_1\{\alpha_1^{j-1}\varepsilon_T + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+1} + \ldots. +\alpha_1\varepsilon_{T+j-2}+ \varepsilon_{T+j-1}\} \qquad (7ค–4)$$

$$\hat{X}_T(j) = \alpha_0(1+\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots+\alpha_1^{j-1}) + \alpha_1^j X_T \qquad (7ค–5)$$

ดังนั้น ค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า (j-step ahead forecast error) คำนวณได้ดังนี้

$$e_T(j) = X_{T+j} - \hat{X}_T(j)$$

$$= \alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots. +\alpha_1\varepsilon_{T+j-1}+ \varepsilon_{T+j}$$

$$-\beta_1\{\alpha_1^{j-1}\varepsilon_T + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+1} + \ldots. +\alpha_1\varepsilon_{T+j-2}+ \varepsilon_{T+j-1}\} \qquad (7.49)$$

และความแปรปรวนของค่าความผิดพลาดของการพยากรณ์ j ช่วงเวลาล่วงหน้า คำนวณได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(e_T(j)) = \mathrm{Var}(\alpha_1^{j-1}\varepsilon_{T+1} + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+2} + \ldots. +\alpha_1\varepsilon_{T+j-1}+ \varepsilon_{T+j})$$

$$+\beta_1^2\,\mathrm{Var}(\alpha_1^{j-1}\varepsilon_T + \alpha_1^{j-2}\varepsilon_{T+1} + \ldots. +\alpha_1\varepsilon_{T+j-2}+ \varepsilon_{T+j-1})$$

$$= \left(\alpha_1^{2(j-1)} + \alpha_1^{2(j-2)} + \cdots + \alpha_1^2 + 1\right)\sigma^2$$

$$+\beta_1^2\left(\alpha_1^{2(j-1)} + \alpha_1^{2(j-2)} + \cdots + \alpha_1^2 + 1\right)\sigma^2$$

$$= (1+\beta_1^2)\left(\alpha_1^{2(j-1)} + \alpha_1^{2(j-2)} + \cdots + \alpha_1^2 + 1\right)\sigma^2 \qquad (7.50)$$

ภาคผนวก 7จ

ตัวอย่างการหาค่า φ_i (i =1, 2, …) จากสมการที่ (7.57)

จากสมการที่ (7.57)

$$\frac{\beta(L)}{\alpha(L)} = \varphi(L) = 1 + \varphi_1 L + \varphi_1^2 L^2 + \cdots \tag{7.57}$$

โดยที่ $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \ldots - \alpha_p L^p$ และ $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_q L^q$ เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้นจะยกตัวอย่างกรณีที่ $p = 1$ และ $q = 1$ ดังนั้น เราจะได้

$$\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L \tag{7จ–1}$$

และ $$\beta(L) = 1 - \beta_1 L \tag{7จ–2}$$

แทนค่าลงสมการที่ (7.57) จะได้

$$\frac{1 - \beta_1 L}{1 - \alpha_1 L} = 1 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \varphi_3 L^3 + \cdots \tag{7จ–3}$$

$$(1 - \beta_1 L) = (1 - \alpha_1 L)(1 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \varphi_3 L^3 + \ldots)$$

$$(1 - \beta_1 L) = (1 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \varphi_3 L^3 + \ldots) - \alpha_1 L(1 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \varphi_3 L^3 + \ldots)$$

$$(1 - \beta_1 L) = (1 + \varphi_1 L + \varphi_2 L^2 + \varphi_3 L^3 + \ldots) - (\alpha_1 L + \alpha_1 \varphi_1 L^2 + \alpha_1 \varphi_2 L^3 + \alpha_1 \varphi_3 L^4 + \ldots)$$

$$(1 - \beta_1 L) = 1 + (\varphi_1 - \alpha_1)L + (\varphi_2 - \alpha_1 \varphi_1)L^2 + (\varphi_3 - \alpha_1 \varphi_2)L^3 + (\varphi_4 - \alpha_1 \varphi_3)L^4 + \ldots \tag{7จ–4}$$

จากสมการที่ (7จ–4) เราจะสรุปได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} -\beta_1 &= \varphi_1 - \alpha_1 \\ 0 &= \varphi_2 - \alpha_1 \varphi_1 \\ 0 &= \varphi_3 - \alpha_1 \varphi_2 \\ 0 &= \varphi_4 - \alpha_1 \varphi_3 \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{7จ–5}$$

จากระบบสมการที่ (7จ–5) จะทำให้เราหาค่า φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, … ได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \alpha_1 - \beta_1 \\
\varphi_2 &= \alpha_1(\alpha_1 - \beta_1) \\
\varphi_3 &= \alpha_1^2(\alpha_1 - \beta_1) \\
\varphi_4 &= \alpha_1^3(\alpha_1 - \beta_1) \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \qquad (7จ–6)$$

ภาคผนวก 8ก

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลอง ARCH ด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุด

พิจารณาแบบจำลอง ARCH(m) ต่อไปนี้

$$Y_t = \beta' X_t + \varepsilon_t \tag{8ก–1}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \tag{8ข–1}$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t | I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_m \varepsilon_{t-m}^2 \tag{8ค–1}$$

โดยที่ $X_t = (X_{1t}, \ldots, X_{Kt})'$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_K)'$, $v_t \sim N(0, 1)$ และเป็นอิสระจากช่วงเวลาอื่น ๆ นั่นคือ $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood) จะพิจารณาจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการได้ข้อมูล Y_t เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} L_t &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{\left(Y_t - E(Y_t)\right)^2}{2\,\sigma_t^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{(Y_t - \beta' X_t)^2}{2\,\sigma_t^2}\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของข้อมูล $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$ เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} L &= L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_T \\ &= \prod_{t=1}^{T} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(Y_t - \beta' X_t)^2}{2\,\sigma_t^2}\right)\right] \end{aligned}$$

นั่นคือ log-likelihood function ที่จะได้ข้อมูล $Y_1, Y_2, \ldots, Y_T$ คือ

$$\ln(L) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{(Y_t - \beta' X_t)^2}{\sigma_t^2}$$

$$= -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln(\gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_m\varepsilon_{t-m}^2)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{(Y_t - \beta' X_t)^2}{(\gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_m\varepsilon_{t-m}^2)}$$

จากนั้นเราจะหาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ $\beta_1,\ldots,\beta_K, \gamma_0, \gamma_1,\ldots,$ และ γ_m เพื่อให้ได้ค่า $\ln(L)$ ข้างบนมีค่าสูงสุด[8] โดยการประมาณพารามิเตอร์จะทำได้ก็ต่อเมื่อมีการคำนวณค่า $\varepsilon_{t-1}^2, \ldots, \varepsilon_{t-m}^2$ ขึ้นมาก่อน ซึ่งทำได้ 2 วิธีคือ (1) การกำหนดให้ $\varepsilon_0^2 = \varepsilon_{-1}^2 = \varepsilon_{-2}^2 = \ldots = \varepsilon_{-m}^2 = 0$ ซึ่งจะเรียกว่าวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบมีเงื่อนไข หรือ (2) การใช้ค่าพยากรณ์ย้อนหลัง (Backcasts) ของ $\hat{\varepsilon}_0^2,\ \hat{\varepsilon}_{-1}^2,\ \hat{\varepsilon}_{-2}^2,\ \ldots, \hat{\varepsilon}_{-m}^2$ ซึ่งจะเรียกว่าวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไข รายละเอียดเหล่านี้คล้ายกับที่ได้กล่าวแล้วในบทที่ 4

[8] จะต้องใช้ความรู้เรื่องการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบไม่ใช่เชิงเส้น (Nonlinear Parameters Estimation) ซึ่งจะไม่กล่าวถึงในหนังสือเล่มนี้ สำหรับผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ใน Mittelhammer, R. C., Judge, G. G., and Miller, D. J., *Econometrics Foundations* (Cambridge University Press, 2000), pp. 195–199.

ภาคผนวก 8ข

วิธีพิสูจน์สมการที่ (8.17)

จากสมการความแปรปรวนในระยะสั้นของ ARCH(1)

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

ค่าพยากรณ์ของความแปรปรวนระยะสั้น ณ ช่วงเวลา t, t+1, t+2 และ t+3 ดังนี้

ณ เวลา t : $$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad (8ข–1)$$

ณ เวลา t+1 : $$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \hat{\sigma}_t^2$$ แทนค่า (8ข–1) จะได้

$$= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1(\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \varepsilon_{t-1}^2)$$

$$= \hat{\gamma}_0(1 + \hat{\gamma}_1) + \hat{\gamma}_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad (8ข–2)$$

ณ เวลา t+2 : $$\hat{\sigma}_{t+2}^2 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \hat{\sigma}_{t+1}^2$$ แทนค่า (8ข–2) จะได้

$$= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1[\hat{\gamma}_0(1 + \hat{\gamma}_1) + \hat{\gamma}_1^2 \varepsilon_{t-1}^2]$$

$$= \hat{\gamma}_0(1 + \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1^2) + \hat{\gamma}_1^3 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad (8ข–3)$$

ณ เวลา t+3 : $$\hat{\sigma}_{t+3}^2 = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 \hat{\sigma}_{t+2}^2$$ แทนค่า (8ข–3) จะได้

$$= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1[\hat{\gamma}_0(1 + \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1^2) + \hat{\gamma}_1^3 \varepsilon_{t-1}^2]$$

$$= \hat{\gamma}_0(1 + \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1^2 + \hat{\gamma}_1^3) + \hat{\gamma}_1^4 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad (8ข–4)$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้

$$\hat{\sigma}_{t+j}^2 = \hat{\gamma}_0\left(1 + \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_1^2 + \cdots + \hat{\gamma}_1^j\right) + \hat{\gamma}_1^{j+1} \varepsilon_{t-1}^2$$

$$= \hat{\gamma}_0 \frac{1 - \hat{\gamma}_1^j}{1 - \hat{\gamma}_1} + \hat{\gamma}_1^{j+1} \varepsilon_{t-1}^2$$

เนื่องจาก $0 \leq \hat{\gamma}_1 < 1$ ดังนั้น เมื่อ $j \to \infty$ จะได้ว่า

$$\hat{\sigma}_{t+j}^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{1 - \hat{\gamma}_1} \qquad (8.17)$$

ภาคผนวก 8ค

การพยากรณ์ความแปรปรวนระยะสั้นกรณีใช้แบบจำลอง ARCH(m)

การพยากรณ์ความแปรปรวนระยะสั้นสามารถทำได้ด้วยการใช้สมการความแปรปรวนของแบบจำลอง ARCH(m) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_t|I_{t-1}) = \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_m\varepsilon_{t-m}^2 \qquad (8ค–1)$$

แนวคิดการพยากรณ์จะเหมือนกับที่ได้อธิบายไว้ในบทที่แล้ว ดังนั้น จากสมการที่ (8ค–1) จะขอยกตัวอย่างการคำนวณค่าพยากรณ์ของความแปรปรวนระยะสั้น ณ ช่วงเวลา t, t+1, t+2 และ t+3 ดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_t^2 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1\varepsilon_{t-1}^2 + \hat{\gamma}_2\varepsilon_{t-2}^2 + \hat{\gamma}_3\varepsilon_{t-3}^2 + \cdots + \hat{\gamma}_m\varepsilon_{t-m}^2 \\
\hat{\sigma}_{t+1}^2 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1\hat{\sigma}_t^2 + \hat{\gamma}_2\varepsilon_{t-1}^2 + \hat{\gamma}_3\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \hat{\gamma}_m\varepsilon_{t+1-m}^2 \\
\hat{\sigma}_{t+2}^2 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1\hat{\sigma}_{t+1}^2 + \hat{\gamma}_2\hat{\sigma}_t^2 + \hat{\gamma}_3\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \hat{\gamma}_m\varepsilon_{t+2-m}^2 \\
\hat{\sigma}_{t+3}^2 &= \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1\hat{\sigma}_{t+2}^2 + \hat{\gamma}_2\hat{\sigma}_{t+1}^2 + \hat{\gamma}_3\hat{\sigma}_t^2 + \cdots + \hat{\gamma}_m\varepsilon_{t+3-m}^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

หรือเขียนค่าพยากรณ์ความแปรปรวนในระยะสั้นในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\hat{\sigma}_{t+j}^2 = \hat{\gamma}_0 + \sum_{i=1}^{m}\hat{\gamma}_i\hat{\sigma}_{t+i-m}^2 \qquad (8ค–2)$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_{t+i-m}^2 = \varepsilon_{t+i-m}^2$ เมื่อ $i-m < 0$

ภาคผนวก 8ง

ตัวอย่างการคำนวณค่า $\tilde{e}_t = \dfrac{e_t}{\sigma_t}$

พิจารณาผลการประมาณค่าด้วยวิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไข[9] ดังแสดงในสมการที่ (8.20 ก) และ (8.20 ข) ดังต่อไปนี้

$$\widehat{GP}_t = 1.409 + 0.170GP_{t-1} - 1.474\,Inf_{t-1} - 1.353Tbond_{t-1} \quad (8.20 \text{ ก})$$

t–statistics = $(6.53)^{***}$ $(3.40)^{***}$ $(-3.73)^{***}$ $(-5.44)^{***}$

$$\sigma_t^2 = 8.981 + 0.160\,\varepsilon_{t-1}^2 \quad (8.20 \text{ ข})$$

t–statistics = (14.87) (3.09)

ค่าความผิดพลาดจากการประมาณสมการค่าเฉลี่ย (8.20 ก) คำนวณจาก $e_t = GP_t - \widehat{GP}_t$ ซึ่งจะถูกนำมาใช้ในการคำนวณค่ามาตรฐานของ $\boldsymbol{e_t}$ หรือเขียนได้ว่า $\tilde{e}_t = \dfrac{e_t}{\sigma_t}$ โดย σ_t จะประมาณจากรากที่สองของค่าพยากรณ์ที่ได้จากสมการความแปรปรวน (8.20 ข) นั่นเอง ซึ่งได้ยกตัวอย่างการคำนวณในตารางต่อไปนี้

---

[9] เนื่องจากภายใต้วิธีความน่าจะเป็นสูงสุดแบบไม่มีเงื่อนไขจะต้องมีการคำนวณค่าเริ่มแรก ซึ่งในกรณีนี้ก็คือ $\hat{\varepsilon}_1^2$ ซึ่งจะใช้ค่า $\widehat{\sigma}_1^2$ ด้วยโดยโปรแกรมสำเร็จรูป Eview ใช้สูตรต่อไปนี้ในการคำนวณค่าเริ่มแรกของ $\hat{\varepsilon}_1^2$

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \hat{\varepsilon}_1^2 = \lambda^T\hat{\sigma}^2 + (1-\lambda)\sum_{j=0}^{T}\lambda^{T-j-1}\,e_{T-j}^2$$

โดยที่ $\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=1}^{T}\frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{T}$ ซึ่งเป็นค่าความแปรปรวนแบบไม่มีเงื่อนไข และในการคำนวณได้เลือกใช้ $\lambda = 0.7$ และจะได้ $\widehat{\sigma}_1^2 = 3.028$

อาทิตย์ที่	e_t	e_t^2	$\hat{\sigma}_t^2$	σ_t	$\tilde{e}_t = \frac{e_t}{\sigma_t}$
1	NA	NA	NA	NA	NA
2	0.984	0.968	$8.981+0.160(\hat{\varepsilon}_1^2)$ = 8.981+0.160 (3.028) = 9.466	$\sqrt{9.466}$ = 3.077	0.320
3	2.135	4.558	$8.981+0.160(e_2^2)$ = 8.981+0.160 (0.968) = 9.136	$\sqrt{9.136}$ = 3.023	0.706
4	2.176	4.735	$8.981+0.160(e_3^2)$ = 8.981+0.160 (4.558) = 9.710	$\sqrt{9.710}$ = 3.116	0.698
:	:				
571	–3.391	11.499	$8.981+0.160(e_{570}^2)$ = 10.947	$\sqrt{10.947}$ = 3.309	–1.025
572	–12.429	154.480	$8.981+0.160(e_{571}^2)$ = 8.981+0.160 (11.499) = 10.820	$\sqrt{10.820}$ = 3.289	–3.779

หมายเหตุ : NA หมายถึงไม่สามารถหาได้ เนื่องจากในสมการค่าเฉลี่ย (8.19 ก) มีการใช้ตัวแปรอิสระ 1 ช่วงเวลาที่ผ่านมา ดังนั้นทำให้เราต้องเริ่มใช้ข้อมูลตั้งแต่ตัวอย่างที่ 2–572 เป็นต้นไปในการคำนวณค่า e_2, e_3, …, e_{572} (มี 571 ข้อมูล)

ภาคผนวก 10ก
วิธีพิสูจน์สมการที่ (10.21)

หาสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

จากสมการที่ (10.20)

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t \qquad (10.20)$$

ณ ดุลยภาพ $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2}$, $X_t = X_{t-1} = X_{t-2}$ และ $u_t = 0$ ดังนั้นจะได้ดุลยภาพระยะยาวดังนี้

$$(1-\alpha_1-\alpha_2)Y_t = (\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2)X_t$$

$$Y_t = \frac{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}X_t$$

หรือเขียนได้ว่า $Y_t = \beta X_t$

โดยที่ $\beta = \dfrac{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}$

หาแบบจำลองแสดงการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวของ *Y*

จาก (10.20) $Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$

นำ Y_{t-1} ไปหักออกจากสมการนี้ทั้ง 2 ข้างจะได้

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} - Y_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$$

นำ $-\gamma_0 X_{t-1} + \gamma_0 X_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$$\Delta Y_t = \gamma_0 X_t - \gamma_0 X_{t-1} + \gamma_0 X_{t-1} + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1) X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$$

นำ $+\gamma_2 X_{t-1} - \gamma_2 X_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1) X_{t-1} + [\gamma_2 X_{t-1} - \gamma_2 X_{t-1}] + \gamma_2 X_{t-2} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)X_{t-1} - \gamma_2(X_{t-1} - X_{t-2}) - (1-\alpha_1)\, Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)X_{t-1} - \gamma_2 \Delta X_{t-1} - (1-\alpha_1)\, Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$$

นำ $+\alpha_2 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)X_{t-1} - \gamma_2 \Delta X_{t-1} - (1-\alpha_1)\, Y_{t-1} + [\alpha_2 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-1}] + \alpha_2 Y_{t-2} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)X_{t-1} - \gamma_2 \Delta X_{t-1} - (1-\alpha_1 - \alpha_2)\, Y_{t-1} - \alpha_2(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2)X_{t-1} - \gamma_2 \Delta X_{t-1} - (1-\alpha_1 - \alpha_2)\, Y_{t-1} - \alpha_2 \Delta Y_{t-1} + u_t$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t - \gamma_2 \Delta X_{t-1} - \alpha_2 \Delta Y_{t-1} - (1-\alpha_1 - \alpha_2)\left(Y_t - \frac{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{1-\alpha_1-\alpha_2} X_t\right) + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t - \gamma_2 \Delta X_{t-1} - \alpha_2 \Delta Y_{t-1} - (1-\alpha_1 - \alpha_2)(Y_t - \beta X_t) + u_t \qquad (10.21)$$

โดยที่ $\beta = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}$

ภาคผนวก 10ข
วิธีพิสูจน์สมการที่ (10.23)

หาสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงดุลยภาพระยะยาว

จากสมการที่ (10.22)

$$Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_3 X_{t-3} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t \qquad (10.22)$$

ณ ดุลยภาพ $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y_{t-3}$, $X_t = X_{t-1} = X_{t-2} = X_{t-3}$ และ $u_t = 0$ ดังนั้นจะได้ดุลยภาพระยะยาวดังนี้

$$(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)Y_t = (\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)X_t$$

$$Y_t = \frac{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}X_t$$

หรือเขียนได้ว่า $Y_t = \beta X_t$

โดยที่ $\beta = \dfrac{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$

หาแบบจำลองแสดงการปรับตัวระยะสั้นเพื่อให้กลับเข้าสู่ดุลยภาพระยะยาวของ *Y*

จาก (10.22) $Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

นำ Y_{t-1} ไปหักออกจากสมการนี้ทั้ง 2 ข้างจะได้

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3} - Y_{t-1} + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$$

นำ $-\gamma_0 X_{t-1} + \gamma_0 X_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$$\Delta Y_t = \gamma_0 X_t - \gamma_0 X_{t-1} + \gamma_0 X_{t-1} + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1) X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3} - (1-\alpha_1) Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$$

นำ $+\gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 X_{t-1} - \gamma_2 X_{t-1} - \gamma_3 X_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1) X_{t-1} + [\gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 X_{t-1} - \gamma_2 X_{t-1} - \gamma_3 X_{t-1}] + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3}$$

$-(1-\alpha_1)\,Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} + [-\gamma_2 X_{t-1} - \gamma_3 X_{t-1}] + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3}$

$\quad -(1-\alpha_1)\,Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3}$

$\quad -(1-\alpha_1)\,Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

นำ $+\gamma_3 X_{t-2} - \gamma_3 X_{t-2}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} + [\gamma_3 X_{t-2} - \gamma_3 X_{t-2}] + \gamma_2 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3}$

$\quad -(1-\alpha_1)\,Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} + (\gamma_2 + \gamma_3)X_{t-2} - \gamma_3 X_{t-2} + \gamma_3 X_{t-3}$

$\quad -(1-\alpha_1)\,Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)(X_{t-1} - X_{t-2}) - \gamma_3(X_{t-2} - X_{t-3})$

$\quad -(1-\alpha_1)\,Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3 \Delta X_{t-2}$

$\quad -(1-\alpha_1)\,Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

นำ $+\alpha_2 Y_{t-1} + \alpha_3 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-1} - \alpha_3 Y_{t-1}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3 \Delta X_{t-2}$

$\quad -(1-\alpha_1)\,Y_{t-1} + [\alpha_2 Y_{t-1} + \alpha_3 Y_{t-1} - \alpha_2 Y_{t-1} - \alpha_3 Y_{t-1}] + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3 \Delta X_{t-2}$

$\quad -(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,Y_{t-1} - (\alpha_2 + \alpha_3)Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

นำ $+\alpha_3 Y_{t-2} - \alpha_3 Y_{t-2}$ ไปเพิ่มทางด้านขวาของสมการ

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3 \Delta X_{t-2}$

$\quad -(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,Y_{t-1} - (\alpha_2 + \alpha_3)Y_{t-1} + [\alpha_3 Y_{t-2} - \alpha_3 Y_{t-2}] + \alpha_2 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3 \Delta X_{t-2}$

$\quad -(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\,Y_{t-1} - (\alpha_2 + \alpha_3)Y_{t-1} + (\alpha_2 + \alpha_3)Y_{t-2} - \alpha_3 Y_{t-2} + \alpha_3 Y_{t-3} + u_t$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3 \Delta X_{t-2}$$

$$- (1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\, Y_{t-1} - (\alpha_2+\alpha_3)(Y_{t-1}-Y_{t-2}) - \alpha_3(Y_{t-2}-Y_{t-3}) + u_t$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t + (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) X_{t-1} - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3 \Delta X_{t-2}$$

$$- (1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\, Y_{t-1} - (\alpha_2+\alpha_3)\Delta Y_{t-1} - \alpha_3 \Delta Y_{t-2} + u_t$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\Delta Y_t = \gamma_0 \Delta X_t - (\gamma_2 + \gamma_3)\Delta X_{t-1} - \gamma_3 \Delta X_{t-2} - (\alpha_2+\alpha_3)\Delta Y_{t-1} - \alpha_3 \Delta Y_{t-2}$$

$$-(1-\alpha_1-\alpha_2)\left(Y_{t-1} - \frac{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} X_{t-1}\right) + u_t \qquad (10.23)$$

โดยที่ $\beta = \frac{\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}{1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$

ภาคผนวก 11ก

วิธีพิสูจน์สมการที่ (11.8 ก)–(11.8 จ)

จากสมการที่ (11.7 ก) และ (11.7 ข)

$$u_{1t} = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}\right) \qquad (11.7\ ก)$$

$$u_{2t} = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}\right) \qquad (11.7\ ข)$$

- พิสูจน์สมการที่ (11.8 ก)

$$E(u_{1t}) = E\left[\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}\right)\right] = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(E(\varepsilon_{yt}) - \beta_{12}E(\varepsilon_{zt})\right) = 0$$

- พิสูจน์สมการที่ (11.8 ข)

$$E(u_{2t}) = E\left[\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}\right)\right] = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(E(\varepsilon_{zt}) - \beta_{12}E(\varepsilon_{yt})\right) = 0$$

- พิสูจน์สมการที่ (11.8 ค)

$$Var(u_{1t}) = E(u_{1t}^2)$$

$$= E\left[\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}\right)\right]^2$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 E\left(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \left(\sigma_y^2 + \beta_{12}^2\sigma_z^2\right)$$

อย่าลืมว่า อนุกรมเวลา ε_{yt} และ ε_{zt} ไม่มีความสัมพันธ์ต่อกัน หรือเขียนได้ว่า $Cov(\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}) = 0$

- พิสูจน์สมการที่ (11.8 ง)

$Var(u_{2t}) = E(u_{2t}^2)$

$$= E\left[\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}\right)\right]^2$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 E\left(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \left(\sigma_z^2 + \beta_{21}^2\sigma_y^2\right)$$

- พิสูจน์สมการที่ (11.8 จ)

$\mathrm{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) = \mathrm{E}(u_{1t}u_{2t})$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}\right)\right]\left[\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \mathrm{E}\left[\left(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}\right)\left(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \mathrm{E}\left(\varepsilon_{yt}\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}^2 - \beta_{12}\varepsilon_{zt}^2 + \beta_{12}\beta_{21}\varepsilon_{zt}\varepsilon_{yt}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \left\{\mathrm{E}(\varepsilon_{yt}\varepsilon_{zt}) - \beta_{21}\mathrm{E}\left(\varepsilon_{yt}^2\right) - \beta_{12}\mathrm{E}(\varepsilon_{zt}^2) + \beta_{12}\beta_{21}\mathrm{E}\left(\varepsilon_{zt}\varepsilon_{yt}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \left\{0 - \beta_{21}\sigma_y^2 - \beta_{12}\sigma_z^2 + 0\right\}$$

$$= -\frac{(\beta_{21}\sigma_y^2 + \beta_{12}\sigma_z^2)}{(1-\beta_{21}\beta_{12})^2} \neq 0$$

ภาคผนวก 11ข

วิธีพิสูจน์ว่า ตัวแปรสุ่มคลาดเคลื่อนของสมการที่ (11.5 ก) และ (11.5 ข) ไม่มีความสัมพันธ์กันเอง

- จากสมการที่ (11. 5 ก)

$Y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}Z_{t-1} + u_{1t}$ (11.5 ก)

โดยที่

$$u_{1t} = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}) \quad (11.7\ ก)$$

$$u_{1,t-i} = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt})$$

$$E(u_{1t}u_{1,t-i}) = \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 E\left[(\varepsilon_{yt} - \beta_{12}\varepsilon_{zt})(\varepsilon_{y,t-i} - \beta_{12}\varepsilon_{z,t-i})\right]$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 E\left[\varepsilon_{yt}\varepsilon_{yt-i} - \beta_{12}\varepsilon_{yt}\varepsilon_{zt-i} - \beta_{12}\varepsilon_{zt}\varepsilon_{y,t-i} + \beta_{12}^2\varepsilon_{zt}\varepsilon_{z,t-i}\right]$$

เนื่องจาก (1) ε_{yt} และ ε_{zt} เป็น white noise นั่นคือ อนุกรมเวลาทั้งสองนี้จะเป็นอิสระกับเวลาอื่นๆ และ (2) Cov(ε_{yt}, ε_{zt}) = 0

หรือเขียนได้ว่า E($\varepsilon_{yt}\,\varepsilon_{y,t-i}$) = 0, E($\varepsilon_{zt}\varepsilon_{z,t-i}$) = 0, E($\varepsilon_{yt}\varepsilon_{z,t-i}$) = 0 และ E($\varepsilon_{zt}\varepsilon_{y,t-i}$) = 0 แทนค่าในสมการข้างต้นจะได้ว่า

E($u_{1t}u_{1,t-i}$) = 0 นั่นคือ สมการที่ (11.5 ก) ไม่มี Autocorrelation

- จากสมการที่ (11.5 ข)

$$Z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}Z_{t-1} + u_{2t} \qquad (11.5\ ข)$$

โดยที่

$$u_{2t} = \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\left(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}\right) \qquad (11.7\ ข)$$

$$E\left(u_{2t}u_{2,t-i}\right) = \left(\frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{12}}\right)^2 \mathrm{E}\left[\left(\varepsilon_{zt} - \beta_{21}\varepsilon_{yt}\right)\left(\varepsilon_{zt-1} - \beta_{21}\varepsilon_{yt-1}\right)\right]$$

และใช้เหตุผลเดียวกับข้างต้น ทำให้เราสรุปได้ว่า

$\mathrm{E}(u_{2t}u_{2,t-i}) = 0$ ดังนั้น สมการที่ (11.5 ข) ไม่มี Autocorrelation

ภาคผนวก 11ค

พิสูจน์ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของแบบจำลอง VAR(1)

จากสมการที่ (11.4)

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{u_t} \qquad (11.4)$$

- หา $\mathbf{E}(\boldsymbol{X_t})$

$\mathbf{E}(\boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1}\,\mathbf{E}(\boldsymbol{X_{t-1}})$ [เนื่องจาก $\mathbf{E}(\boldsymbol{u_t}) = \mathbf{0}$]

เนื่องจากเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ มีความนิ่ง ดังนั้น $\mathbf{E}(\boldsymbol{X_t}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{X_{t-1}})$

$$(\mathbf{I}-\boldsymbol{A_1})\mathbf{E}(\boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{A_0}$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{X_t}) = \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}-\boldsymbol{A_1})^{-1}\boldsymbol{A_0} \qquad (11.9\ \text{ก})$$

หรือเราอาจเขียนสมการค่าเฉลี่ยของเวกเตอร์ $\boldsymbol{X_t}$ ได้ในรูปต่อไปนี้

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{X_t}) = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_1^2} + \cdots\right)\boldsymbol{A_0}$$

- หา $\mathbf{Var}(\boldsymbol{X_t})$

จาก (11.9 ก) เราเขียนได้ว่า

$$\boldsymbol{A_0} = (\mathbf{I}-\boldsymbol{A_1})\boldsymbol{\mu} \qquad (11\text{ค}-1)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\boldsymbol{X_t}) = \begin{bmatrix}\mathrm{E}(Y_t)\\ \mathrm{E}(Z_t)\end{bmatrix}$ และเมื่อแทนค่า $\boldsymbol{A_0}$ จาก (11ค–1) ลงใน (11.4) จะได้

$$\boldsymbol{X_t} = (\mathbf{I}-\boldsymbol{A_1})\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{A_1 X_{t-1}} + \boldsymbol{u_t}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$\boldsymbol{X_t} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{A_1}(\boldsymbol{X_{t-1}} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{u_t} \qquad (11\text{ค}-2)$$

จาก (11ค–2) ย้อนกลับไป 1 ช่วงเวลาจะได้

$\boldsymbol{X_{t-1}} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{A_1}(\boldsymbol{X_{t-2}} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{u_{t-1}}$ แทนค่าใน (11ค–2) จะได้

$$X_t - \mu = A_1^2(X_{t-2}-\mu) + A_1 u_{t-1} + u_t \qquad (11ค–3)$$

จาก (11ค–2) ย้อนกลับไป 2 ช่วงเวลาจะได้

$X_{t-2} - \mu = A_1(X_{t-3}-\mu) + u_{t-2}$ แทนค่าใน (11ค–3) จะได้

$$X_t - \mu = A_1^3(X_{t-3}-\mu) + A_1^2 u_{t-2} + A_1 u_{t-1} + u_t \qquad (11ค–4)$$

เมื่อทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุดแล้วเราจะได้สมการต่อไปนี้

$$X_t - \mu = u_t + A_1 u_{t-1} + A_1^2 u_{t-2} + A_1^3 u_{t-3} + A_1^4 u_{t-4} + \ldots$$

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i u_{t-i} \qquad (11ค–5)[10]$$

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{E}(X_t - \mu)(X_t - \mu)'$$

$$= \mathrm{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_1^i u_{t-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_1^i u_{t-i}\right)'$$

เนื่องจาก $\mathrm{E}(u_t u_{t-i}') = 0$ สำหรับ $i \neq 0$ (เนื่องจาก u_{1t} และ u_{2t} ไม่มี autocorrelation)

$$\mathrm{Var}(X_t) = E(u_t u_t') + A_1 E(u_{t-1} u_{t-1}') A_1' + A_1^2 E(u_{t-2} u_{t-2}')(A_1^2)' + A_1^3 E(u_{t-3} u_{t-3}')(A_1^3)' + \cdots$$

$$= \Sigma + A_1 \Sigma A_1' + A_1^2 \Sigma (A_1^2)' + A_1^3 \Sigma (A_1^3)' + \cdots$$

โดยที่ $A_1^j \to 0$ เมื่อ $j \to \infty$

---

[10] สมการคือแบบจำลอง Vector Moving Average ลำดับ ∞ หรือเขียนย่อว่า VMA(∞)

ภาคผนวก 11ง

วิธีพิสูจน์การแปลงแบบจำลอง VAR(1) ให้อยู่ในรูปแบบจำลอง VMA(∞)

จากแบบจำลอง VAR(1)

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t \qquad (11.18\text{ ก})$$

ณ เวลา $t-1$; $\boldsymbol{X}_{t-1} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{t-2} + \boldsymbol{u}_{t-1}$ นำไปแทนค่าใน (11.18 ก) จะได้

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{t-2} + \boldsymbol{u}_{t-1}) + \boldsymbol{u}_t$$

$$= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1^2\boldsymbol{X}_{t-2} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t \qquad (11\text{จ}–1)$$

ณ เวลา $t-2$; $\boldsymbol{X}_{t-2} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{t-3} + \boldsymbol{u}_{t-2}$ นำไปแทนค่าใน (11จ–1) จะได้

$$\boldsymbol{X}_t = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1^2(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{t-3} + \boldsymbol{u}_{t-2}) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t$$

$$= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^2\right)\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1^3\boldsymbol{X}_{t-3} + \boldsymbol{A}_1^2\boldsymbol{u}_{t-2} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t \qquad (11\text{จ}–2)$$

ณ เวลา $t-3$; $\boldsymbol{X}_{t-3} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{t-4} + \boldsymbol{u}_{t-3}$ นำไปแทนค่าใน (11จ–2) จะได้

$$\boldsymbol{X}_t = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^2\right)\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1^3(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}_{t-4} + \boldsymbol{u}_{t-3})$$

$$+\boldsymbol{A}_1^2\boldsymbol{u}_{t-2} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t$$

$$= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^2 + \boldsymbol{A}_1^3\right)\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1^4\boldsymbol{X}_{t-4}$$

$$+\boldsymbol{A}_1^3\boldsymbol{u}_{t-3} + \boldsymbol{A}_1^2\boldsymbol{u}_{t-2} + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t \qquad (11\text{จ}–3)$$

แทนค่า $\boldsymbol{X}_{t-4}, \boldsymbol{X}_{t-5}, \ldots, \boldsymbol{X}_{t-s}$ เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เราจะได้

$$\boldsymbol{X}_t = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^2 + \cdots + \boldsymbol{A}_1^s\right)\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1^{s+1}\boldsymbol{X}_{t-(s+1)} + \sum_{i=0}^{s}\boldsymbol{A}_1^i\boldsymbol{u}_{t-i}$$

และเมื่อ $\boldsymbol{s} \to \infty$ เราจะได้ว่า $\boldsymbol{A}_1^{s+1} \to 0$ (เงื่อนไขที่ให้อนุกรมเวลาทุกตัวในเวกเตอร์ $\boldsymbol{X}_t$ มีความนิ่ง) สมการข้างบนเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_t} = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_1^2} + \cdots\right)\boldsymbol{A_0} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{A_1^i u_{t-i}}$$

$$= \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{A_1^i u_{t-i}} \qquad (11.21 \text{ ก})$$

โดยที่ $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\boldsymbol{X_t}) = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_1^2} + \cdots\right)\boldsymbol{A_0}$

ภาคผนวก 11จ

วิธีพิสูจน์สมการที่ (11.33 ค)

จากแบบจำลอง VAR(1) ณ เวลาที่ T

$$\boldsymbol{X_T} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{T-1}} + \boldsymbol{u_T} \qquad (11.29\text{ ก})$$

จากสมการที่ (11.30 ก) ณ เวลา $T + 1$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_{T+1}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_T} + \boldsymbol{u_{T+1}} \qquad (11.30\text{ ก})$$

จากสมการที่ (11.31 ก) ณ เวลา $T + 2$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_{T+2}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{T+1}} + \boldsymbol{u_{T+2}} \qquad (11\text{ง}–1)$$

แทนค่า $\boldsymbol{X_{T+1}}$ จากสมการที่ (11.30 ก) ลงในสมการที่ (11ง–1)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X_{T+2}} &= \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1}(\boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_T} + \boldsymbol{u_{T+1}}) + \boldsymbol{u_{T+2}} \\ &= (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A_1})\boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1^2 X_T} + \boldsymbol{A_1 u_{T+1}} + \boldsymbol{u_{T+2}} \qquad (11\text{ง}–2)\end{aligned}$$

จากสมการที่ (11.32 ก) ณ เวลา $T + 3$ จะเขียนได้ดังนี้

$$\boldsymbol{X_{T+3}} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1 X_{T+2}} + \boldsymbol{u_{T+3}} \qquad (11.32\text{ ก})$$

แทนค่า $\boldsymbol{X_{T+2}}$ จากสมการที่ (11ง–2) ลงในสมการที่ (11.32 ก)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X_{T+3}} &= \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1}\left((\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A_1})\boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1^2 X_T} + \boldsymbol{A_1 u_{T+1}} + \boldsymbol{u_{T+2}}\right) + \boldsymbol{u_{T+2}} \\ &= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_1^2}\right)\boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1^3 X_T} + \boldsymbol{A_1^2 u_{T+1}} + \boldsymbol{A_1 u_{T+2}} + \boldsymbol{u_{T+3}} \qquad (11\text{ง}–3)\end{aligned}$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะได้

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X_{T+h}} &= \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A_1} + \boldsymbol{A_1^2} + \cdots + \boldsymbol{A_1^{h-1}}\right)\boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1^h X_T} \\ &\quad + \boldsymbol{A_1^{h-1} u_{T+1}} + \boldsymbol{A_1^{h-2} u_{T+2}} + \cdots + \boldsymbol{A_1 u_{T+h-1}} + \boldsymbol{u_{T+h}} \qquad (11\text{ง}–4)\end{aligned}$$

หรือ $\boldsymbol{X_{T+h}} = \left(\boldsymbol{I + A_1 + A_1^2 + \cdots + A_1^{h-1}}\right)\boldsymbol{A_0 + A_1^h X_T}$

$$+ \sum_{i=0}^{h-1} \boldsymbol{A_1^i u_{T+h-i}} \qquad (11ง–5)$$

ค่าพยากรณ์ h ช่วงเวลาล่วงหน้า แสดงได้ดังนี้

$$\boldsymbol{\hat{X}_{T+h}} = \boldsymbol{E(X_{T+h}|I_T)} = \left(\boldsymbol{I + A_1 + A_1^2 + \cdots + A_1^{h-1}}\right)\boldsymbol{A_0 + A_1^h X_T} \qquad (11ง–6)$$

ดังนั้น $\boldsymbol{e_T(h)} = \boldsymbol{X_{T+h} - \hat{X}_{T+h}}$

$= \boldsymbol{A_1^{h-1} u_{T+1} + A_1^{h-2} u_{T+2} + \cdots + A_1 u_{T+h-1} + u_{T+h}}$

$$= \sum_{i=0}^{h-1} \boldsymbol{A_1^i u_{T+h-i}} \qquad (11.33\ ค)$$

ภาคผนวก 12ก
วิธีพิสูจน์สมการที่ (12.2)

จาก (12.1)

$$X_t = A_1X_{t-1} + A_2X_{t-2} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)} + A_pX_{t-p} + u_t$$

นำ X_{t-1} หักออกทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\Delta X_t = (A_1-I)X_{t-1} + A_2X_{t-2} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)} + A_pX_{t-p} + u_t$$

นำ $(A_2+A_3+\ldots+A_p)X_{t-1} - (A_2+A_3+\ldots+A_p)X_{t-1}$ บวกเข้าไปทางด้านขวาของสมการจะได้

$$\Delta X_t = (A_1+A_2+A_3+\ldots+A_p - I)X_{t-1} - (A_2+A_3+\ldots+A_p)X_{t-1}$$

$$+\{A_2X_{t-2} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)}\} + A_pX_{t-p} + u_t \qquad (12ก–1)$$

จากสมการที่ (12ก–1) พิจารณาแต่ละพจน์ใน $\{A_2X_{t-2} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)}\}$ ดังนี้

$$A_2X_{t-2} = (A_2+A_3+\ldots+A_p)X_{t-2} - (A_3+A_4+\ldots+A_p)X_{t-2}$$

$$A_3X_{t-3} = (A_3+A_4+\ldots+A_p)X_{t-3} - (A_4+A_5+\ldots+A_p)X_{t-3}$$

$$A_4X_{t-4} = (A_4+A_5+\ldots+A_p)X_{t-4} - (A_5+A_6+\ldots+A_p)X_{t-4}$$

$$\vdots$$

$$A_{p-2}X_{t-(p-2)} = (A_{p-2}+A_{p-1}+A_p)X_{t-(p-2)} - (A_{p-1}+A_p)X_{t-(p-2)}$$

$$A_{p-1}X_{t-(p-1)} = (A_{p-1}+A_p)X_{t-(p-1)} - A_pX_{t-(p-1)}$$

นำสมการข้างบนนี้มาบวกกันจะได้

$$\{A_2X_{t-2} + A_3X_{t-3} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)}\} = (A_2+A_3+\ldots+A_p)X_{t-2} - (A_3+A_4+\ldots+A_p)\Delta X_{t-2}$$

$$- (A_4+A_5+\ldots+A_p)\Delta X_{t-3} - (A_5+A_6+\ldots+A_p)\Delta X_{t-4}$$

$$+ \ldots - (A_{p-1}+A_p)\Delta X_{t-(p-2)} - A_pX_{t-(p-1)} \qquad (12ก–2)$$

แทนค่า (12ก–2) ใน (12ก–1) จะได้

$$\Delta X_t = (A_1+A_2+A_3+\ldots+A_p - I)X_{t-1} - (A_2+A_3+\ldots+A_p)X_{t-1} + (A_2+A_3+\ldots+A_p)X_{t-2}$$
$$- (A_3+A_4+\ldots+A_p)\Delta X_{t-2} - (A_4+A_5+\ldots+A_p)\Delta X_{t-3} - (A_5+A_6+\ldots+A_p)\Delta X_{t-4}$$
$$- \ldots - (A_{p-1}+A_p)\Delta X_{t-(p-2)} - A_p X_{t-(p-1)} + A_p X_{t-p} + u_t$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\Delta X_t = (A_1+A_2+A_3+\ldots+A_p - I)X_{t-1} - (A_2+A_3+\ldots+A_p)\Delta X_{t-1}$$
$$- (A_3+A_4+\ldots+A_p)\Delta X_{t-2} - (A_4+A_5+\ldots+A_p)\Delta X_{t-3} - (A_5+A_6+\ldots+A_p)\Delta X_{t-4}$$
$$- \ldots - (A_{p-1}+A_p)\Delta X_{t-(p-2)} - A_p \Delta X_{t-(p-1)} + u_t$$

เขียนสมการข้างบนใหม่ดังนี้

$$\Delta X_t = \Pi X_{t-1} + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \Gamma_2 \Delta X_{t-2} + \Gamma_3 \Delta X_{t-3} + \Gamma_4 \Delta X_{t-4} + \ldots + \Gamma_{p-1} \Delta X_{t-(p-1)} + u_t \tag{12.2}$$

โดยที่ $\Pi = -(I - A_1 - \ldots - A_P)$

$\Gamma_1 = -(A_2 + A_3 + \ldots + A_p)$

$\Gamma_2 = -(A_3 + A_4 + \ldots + A_p)$

:

$\Gamma_{p-1} = -(A_p)$

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\Gamma_i = -(A_{i+1} + A_{i+2} + \ldots + A_p) = -\sum_{m=i+1}^{p} A_m \quad \text{สำหรับ } i = 1, \ldots, p-1$$

ภาคผนวก 12ข

วิธีพิสูจน์สมการที่ (12.3)

จาก (12.1)

$$X_t = A_1X_{t-1} + A_2X_{t-2} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)} + A_pX_{t-p} + u_t$$

นำ X_{t-1} หักออกทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\Delta X_t = (A_1-I)X_{t-1} + A_2X_{t-2} + A_3X_{t-3} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)} + A_pX_{t-p} + u_t$$

นำ $-(A_1-I)X_{t-2} + (A_1-I)X_{t-2}$ บวกเข้าไปทางด้านขวาของสมการ จะได้

$$\Delta X_t = (A_1-I)X_{t-1} + \{-(A_1-I)X_{t-2} + (A_1-I)X_{t-2}\}$$
$$+ A_2X_{t-2} + A_3X_{t-3} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)} + A_pX_{t-p} + u_t$$

$$\Delta X_t = (A_1-I)\Delta X_{t-1} + (A_1 + A_2-I)X_{t-2}$$
$$+ A_3X_{t-3} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)} + A_pX_{t-p} + u_t$$

นำ $-(A_1+A_2-I)X_{t-3} + (A_1+A_2-I)X_{t-3}$ บวกเข้าไปทางด้านขวาของสมการแล้วจัดรูปใหม่ จะได้

$$\Delta X_t = (A_1-I)\Delta X_{t-1} + (A_1 + A_2-I)\Delta X_{t-2} + (A_1+A_2 + A_3-I)X_{t-3}$$
$$+ A_4X_{t-4} + \ldots + A_{p-1}X_{t-(p-1)} + A_pX_{t-p} + u_t$$

นำ $-(A_1+A_2+A_3-I)X_{t-4} + (A_1+A_2+A_3-I)X_{t-4}$ บวกเข้าไปทางด้านขวาของสมการ และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งเมื่อเรานำ

$$-(A_1+A_2+A_3+\ldots +A_{p-2}-I)X_{t-(p-1)} + (A_1+A_2+A_3+\ldots+A_{p-2}-I)X_{t-(p-1)}$$

ไปบวกทางด้านขวามือ จะได้

$$\Delta X_t = (A_1-I)\Delta X_{t-1} + (A_1+ A_2-I)\Delta X_{t-2} + (A_1+A_2 +A_3-I)\Delta X_{t-3}$$
$$+ (A_1+A_2 +A_3+A_4-I)\Delta X_{t-4} + \ldots + (A_1+A_2 +A_3+\ldots+A_{p-1}-I)X_{t-(p-1)}+A_pX_{t-p} + u_t$$

จากนั้นเราจะนำ

$$-(A_1+A_2+A_3+\ldots +A_{p-1}-I)X_{t-p} + (A_1+A_2+A_3+\ldots+A_{p-1}-I)X_{t-p}$$

ไปบวกทางด้านขวาของสมการข้างบน เราจะได้

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = (\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{I})\Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{I})\Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 - \boldsymbol{I})\Delta \boldsymbol{X}_{t-3}$$
$$+ (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4 - \boldsymbol{I})\Delta \boldsymbol{X}_{t-4} + \ldots + (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 + \ldots + \boldsymbol{A}_{p-1} - \boldsymbol{I})\Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)}$$
$$+ (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 + \ldots + \boldsymbol{A}_{p-1} + \boldsymbol{A}_p - \boldsymbol{I})\boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{u}_t$$

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)\Delta \boldsymbol{X}_{t-1} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)\Delta \boldsymbol{X}_{t-2} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3)\Delta \boldsymbol{X}_{t-3}$$
$$- \ldots - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 - \ldots - \boldsymbol{A}_{p-1})\Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 - \ldots - \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{u}_t$$

นำพจน์ $-(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 - \ldots - \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{X}_{t-p}$ ไปเขียนไว้เป็นพจน์แรกจะได้

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 - \ldots - \boldsymbol{A}_p)\boldsymbol{X}_{t-p} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)\Delta \boldsymbol{X}_{t-1} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)\Delta \boldsymbol{X}_{t-2}$$
$$- (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3)\Delta \boldsymbol{X}_{t-3} - \ldots - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 - \ldots - \boldsymbol{A}_{p-1})\Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{u}_t$$

หรือเขียนใหม่ในรูปต่อไปนี้

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{\Gamma}_1 \Delta \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}_2 \Delta \boldsymbol{X}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{\Gamma}_{p-1} \Delta \boldsymbol{X}_{t-(p-1)} + \boldsymbol{u}_t \qquad (12.3)$$

โดยที่ $\boldsymbol{\Pi} = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 - \ldots - \boldsymbol{A}_p)$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

$\boldsymbol{\Gamma}_1 = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1)$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

$\boldsymbol{\Gamma}_2 = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2)$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

:

$\boldsymbol{\Gamma}_{p-1} = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \ldots - \boldsymbol{A}_{p-1})$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

หรือเขียนในรูปทั่วไป $\boldsymbol{\Gamma}_i = -(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 - \ldots - \boldsymbol{A}_i) = -\left(\boldsymbol{I} - \sum_{m=1}^{i} \boldsymbol{A}_m\right)$ สำหรับ $i = 1, \ldots, p-1$

บรรณานุกรม

ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์. (2551). การประยุกต์แบบจำลองเวกเตอร์การปรับตัวเพื่อพยากรณ์อัตราแลกเปลี่ยน. *วารสารเศรษฐศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์* 15(2) : 19–31.

ภูมิฐาน รังคกูลนุวัฒน์. (2554). *เศรษฐมิติเบื้องต้น*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Aaron Smith and Robin Harrison. (2004). A Drunk, Her Dog, and A Boyfriend: An Illustration of Multiple Cointegration and Error Correction. Department of Economics, University of Canterbury, NZ.

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics* 31: 307–327.

Bowerman, B. L., O' Connel, R. T. and Koehler, A. B. (2005). *Forecasting, Time Series, and Regression*: *An Applied Approach*. 4th edition. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., and Reinsel, G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 3rd edition. New Jersey: Prentice Hall.

Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time Series*: *Theory and Methods*. 2nd edition. New York: Springer-Verlag.

Cryer, J. D. and K. Chan. (2008). *Time Series Analysis with Applications in R*. 2nd edition. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

Dickey, D. A., and W. A. Fuller. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of American Statistical Association* 74: 427–431.

Dickey, D. A., and W. A. Fuller. (1981). Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Econometrica* 49: 1057–1072.

Enders, W. (2010). *Applied Econometric Time Series*. 3rd edition. MA, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Engle, R. F. and Granger, C. W. J. (1987). Cointegration and error correction: Representation, estimation and testing. *Econometrica* 55: 251-276.

Franses, P. H. (2003). *Periodicity and Stochastic Trends in Economics Time Series*. New York: Oxford University Press Inc.

Granger, C. W. J. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica* 37: 424‑438.

Granger, Clive W. J. (1981). Some Properties of Time Series Data and their Use in Econometric Models Specification, *Journal of Econometrics* 16: 121-130.

Granger, C. W. J. and P. Newbold. (1974). Spurious regressions in econometrics. *Journal of Econometrics* 2: 111–120.

Harris, R. and R. Sollis. (2003). *Applied Time Series Modelling and Forecasting*. England: John Willy & Son Ltd.

Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.

Hill, R. C., W. E. Griffiths, and Lim, G. C. (2008), *Principle of Econometrics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc.

Huh, H. S. (2005). A Simple Test of Exogeneity for Recursively Structured VAR models. *Applied Economics* 37: 2307–2313.

Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamic and Control* 12: 231-254.

Johansen, S. (1990). Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration–with Applications to the Demand for Money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 52: 169-210.

Johansen, S. (1995). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. New York: Oxford University Press.

Juselius, K. (2006). *The Cointegrated VAR Model*: *Methodology and Applications*. New York: Oxford University Press Inc.

Lee, H. Y., Lin, K., S., and Wu, J. L. (2002). Pitfalls in using Granger Causality Tests to find and Engine of Growth. *Applied Economics Letters* 9: 411–414.

Lutkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. 2nd edition. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Maddala, G. S. and Kim, I. (2002). *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*. Cambridge UK: Cambridge University Press.

MacKinnon, J. G. (1991). “Critical values for cointegration tests,” Chapter 13 in *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*. ed. R. F. Engle and C. W. J. Granger. Oxford, Oxford University Press.

MacKinnon, J. G. (1996). Numerical distribution functions for unit root and cointegration tests. *Journal of Applied Econometrics* 11: 601–618.

Masih, R. and Masih, A. M. M. (1996). Macroeconomic Activity Dynamics and Granger Causality: New Evideince from a Small Developing Economy Based on VECM analysis. *Economic Modelling* 13: 407–426.

Mittelhammer, R. C. (1996). *Mathematical Statistics for Economics and Business*. New York: Springer–Verlag.

Mittelhammer, R. C., Judge, G. G., and Miller, D. J. (2000). *Econometrics Foundations*. New York: Cambridge University Press.

Murray, M. P. (2006). *Econometrics*: *A Modern Introduction*, Boston MA: Pearson Education, Inc.

Murray, M. P. (1994). A Drunk and her Dog: An Illustration of Cointegration and Error Correction. *The American Statistician* 48: 37–39.

Pankratz, A. (1983). *Forecasting with Univariate Box-Jenkins Models*: *Concepts and Cases*. USA: John Wiley & Sons Inc.

Sims, C., Stock, J. and M. W. Watson. (1990). Inference in Linear Time Series Models with some Unit Roots. *Econometrica* 58: 113–144.

Stock, J. H. (1987). Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegrating Vectors. *Econometrica* 55: 1035–1056.

Stock, J. and Watson, M. (1993). A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in Higher Order Integrated Systems. *Econometrica* 61: 783–820.

Tarvonen, M. A. (2011). Endogenous Money Creation in the European Monetary Union. Master Thesis in International Business and Economics (International Program), International College, University of the Thai Chamber of Commerce.

Tsay, R. S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Tsay, R. S. and Tiao, G. C. (1984). Consistency Estimates of Autoregressive Parameters and Extended Sample Autocorrelation Function for Stationary and Nonstationary ARMA Models. *Journal of the American Statistical Association* 79: 84–96.

Wei, W. W. S. (1990). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. USA: Addison-Wesley, Inc.

Wooldridge, J. F. (2002). *Econometrics Analysis of Cross Section and Panel Data.* London: The MIT Press.