

Roll No
MATS3612
B.A./B.Sc., Semester-Third
Examination-2023
MATHEMATICS
PAPER - Second
(Group Theory)

[Time : 3 Hrs.]

[Maximum Marks : 55/75]

Note : This question paper contains two sections. Section A contains Eight short answer type questions. Attempt any 05 questions from this section. Each question Carries 5/6 marks. Section B contains five long answer type questions. Attempt any 03 questions from this sections. Each questions carries 10/15 marks.

इस प्रश्नपत्र में दो खण्ड हैं। खंड-अ में आठ लघु उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं जिसमें से किन्हीं 05 प्रश्नों का उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5/6 अंकों का है। खंड-ब में पाँच दीर्घ उत्तरीय प्रश्न दिये गये हैं जिसमें से किन्हीं 03 प्रश्नों का उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10/15 अंकों का है।

SECTION - A / खण्ड - अ
(Short Answer Type Questions)
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

(5/6 Each)

Note : Attempt any 05 questions out of 08 given.

दिये गये आठ प्रश्नों में से किन्हीं 05 प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

1. Show that the set of matrices

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \right\}$$

forms a group under matrix multiplication.

दिखाइए कि आव्यूह का समुच्चय

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

आव्यूह गुणन के सापेक्ष एक समूह बनाता है।

2. Define a subgroup with example. Show that the union of two subgroups of a group G need not be a subgroup of G.

उपसमूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि किसी समूह के दो उपसमूहों का संघ जरूरी नहीं है कि एक उपसमूह हो।

- 3 Define order of an element and order of group with example. Find the order of each of the elements of the group $G = \{I, I, I, I\}$

किसी समूह एवं इसके अवयव की कोटि उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए। समूह $G = \{I, I, I, I\}$ के प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए।

- 4 Define cycle group. Show that a Subgroup of a cyclic group is cyclic.

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि चक्रीय समूह का उपसमूह भी चक्रीय होता है।

- 5 Define group homomorphism in groups. If $f: G \rightarrow G'$ is a homomorphism, then prove that

- (i) $f(e) = e'$
(ii) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}, \forall x \in G.$

समूहों में समूह समरूपता को परिभाषित कीजिए। यदि $f: G \rightarrow G'$ एक समरूपता है, तब सिद्ध कीजिए कि

- (i) $f(e) = e'$
(ii) $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}, \forall x \in G.$

- 6 If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, then find $f \circ g$ and $g \circ f$. Is $f \circ g = g \circ f$?

यदि $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, तब $f \circ g$ and $g \circ f$ ज्ञात कीजिए। क्या $f \circ g = g \circ f$ है?

7. Define equivalence relation on any set. Prove that the relation is on \mathbb{Z} (Set of integers) defined by $a \sim b$ iff $a - b$ is an integer is an equivalence relation. <https://www.ssjuonline.com>

किसी समुच्चय पर तुल्यता संबंध को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि कोई सम्बंध जो कि \mathbb{Z} (पूर्णाकों का समुच्चय) पर $a \sim b$ यदि और केवल यदि $a - b$ एक सम पूर्णांक है से परिभाषित है, एक तुल्यता सम्बंध होगा।

8. Define Normal Subgroup of a group. Give an example of normal subgroup of a non-abelian group G .

किसी समूह का प्रासामान्य उपसमूह परिभाषित कीजिए। एक अन-एबेली समूह G के प्रासामान्य उपसमूह का उदाहरण दीजिए।

SECTION - B / खण्ड - ब
(Long Answer Type Questions)
(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

(10/15 each)

Note : Attempt any 03 questions out of 05 given.

दिये गये 05 प्रश्नों में से किन्हीं तीन प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

9 If G is a group, then prove the following:

(i) Cancellation laws hold in group

(ii) $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$

(iii) $(aob)^{-1} = b^{-1}oa^{-1}, \forall a, b \in G$

यदि G एक समूह है, तब निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

(i) समूह में निरसन नियम स्थापित होते हैं।

(ii) $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$

(iii) $(aob)^{-1} = b^{-1}oa^{-1}, \forall a, b \in G$

10 Show that every homomorphic image of a group G is isomorphic to a quotient group.

दिखाइए कि किसी समूह G की होमोमोर्फिक इमेज इसके कोरसेट समूह के आइसोमोर्फिक होती है।

MATS3612/6

(5)

[P.T.O.]

<https://www.ssjuonline.com>

11 State and prove Cayley's theorem.

कैली प्रमेय का कथन लिखकर इसे सिद्ध कीजिए।

12 Define a normal subgroup of a group. If H is a Normal Subgroup of a group G and K is a Subgroup of G such that $H \subseteq K \subseteq G$, then show that H is also a Normal subgroup of K.

एक समूह के एक प्रासामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए। यदि उपसमूह H समूह G का प्रासामान्य उपसमूह है और K समूह G का ऐसा उपसमूह है कि $H \subseteq K \subseteq G$ तो दर्शाइए कि H, K का भी प्रासामान्य उपसमूह है।

13. If H and K are finite subgroups of a group G, then prove that $O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$

यदि H और K, G के परिमित उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि $O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$

<https://www.ssjuonline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

MATS3612/6

(6)

<https://www.ssjuonline.com>