Strömungslehre I

Dr.-Ing. Peter Wulf - Raum F219a
http://www.mp.haw-hamburg.de/pers/Wulf/

2. Hydrostatik und Aerostatik

- Hydrostatische Grundgleichung
- Vertikale Druckverteilung
- Druckkräfte auf Behälterwände
- Hydrostatischer Auftrieb
- Hydrostatik bei gleichförmiger Beschleunigung
- Hydrostatische Stabilität schwimmender Körper
- Aerostatik

Fakultät Technik und Informatik
Department Maschinenbau und Produktion

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

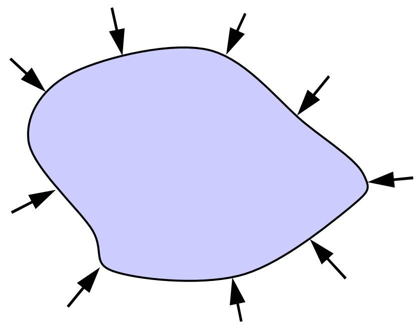
Stand: 2009-04-08

Hydrostatik

⇨ Voraussetzungen der Hydrostatik:
  ⇨ inkompressibles Fluid (ρ = const)
  ⇨ Ruhezustand (keine Bewegungen des Fluids) oder gleichförmige Bewegung (Starrkörperbewegung des Fluids)

⇨ Bedeutung der Inkompressibilität
  ⇨ Dichte ρ ist keine Funktion des Ortes (oder der Zeit)
  ⇨ Fluidmasse im Volumen ergibt sich zu $m = \int \rho dV = \rho V$

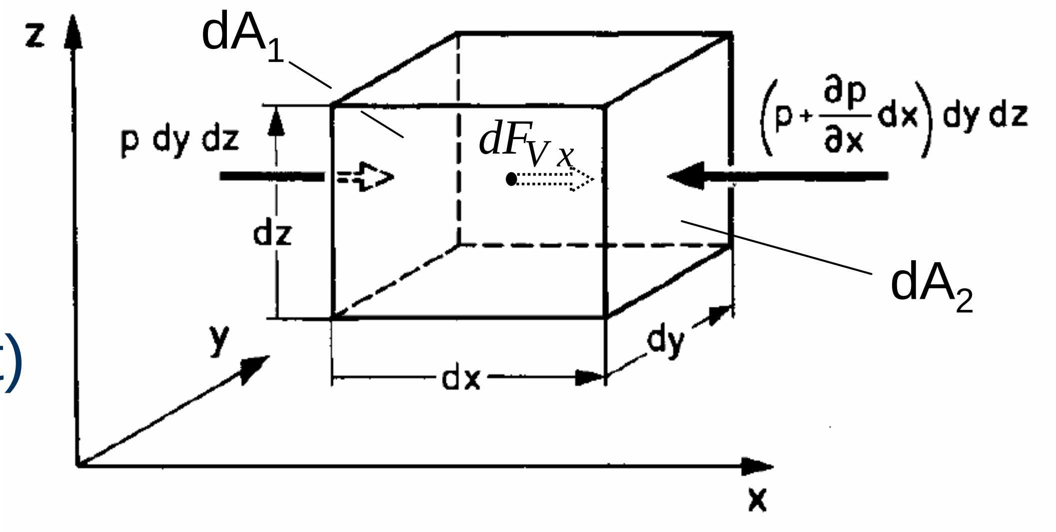
⇨ Bedeutung des Ruhezustands
  ⇨ Keine Schubspannungen, da keine Scherbewegung
  ⇨ Im Fluid werden nur Druckkräfte übertragen, die senkrecht auf den Bezugsflächen stehen
  ⇨ Druckkräfte stehen mit der Schwerkraft und den Reaktionskräften der begrenzenden Wände im statischen Gleichgewicht
  ⇨ Druckkräfte sind ortsabhängig p=p(x,y,z)



Wirkung der Druckkräfte auf ein Kontrollvolumen

Hydrostatische Grundgleichung (1/2)

- ⇨ Kräfte an einem infinitesimal kleinem Fluid-Quader
  - ⇨ Oberflächenkräfte (Druckkräfte) wirken nur auf den Flächen
  - ⇨ Volumenkräfte (hier Schwerkraft) wirken im ganzen Volumen



- ⇨ Taylorentwicklung für die Druckänderung in x-Richtung

$$p_1 = p(x,y,z) \qquad p_2 = p(x+dx,y,z) = p + \frac{\partial p}{\partial x}dx + \ldots$$

Bei Abhängigkeiten von mehreren Koordinaten müssen partielle Ableitungen verwendet werden.

- ⇨ Volumenkraft aus Erdbeschleunigung: $dF_{Vx} = dm \cdot g_x = \rho g_x dV$

- ⇨ Kräftegleichgewicht $\sum F_x = 0 = p_1 dA_1 - p_2 dA_2 + dF_{Vx}$

Hydrostatische Grundgleichung (2/2)

⇨ Kräftegleichgewicht $\sum F_x = 0 = p_1 dA_1 - p_2 dA_2 + dF_{Vx}$

$$= \cancel{p}dydz - (\cancel{p} + \frac{\partial p}{\partial x}dx)\cancel{dydz} + \rho g_x dx\cancel{dydz}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x$$

Für die y- und z-Richtung ergibt sich jeweils eine analoge Gleichung

⇨ **Eulersche Grundgleichung der Hydrostatik**

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g_x} \quad \boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y} \quad \boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z}$$

⇨ Alternative Schreibweise:

$$grad\, p = \nabla p = \begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix} = \rho \vec{g}$$

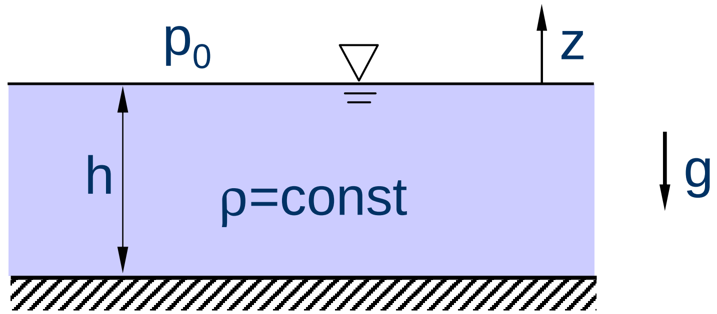
Der Druckgradient (größte räumliche Druckänderung) zeigt in Richtung des Beschleunigungsvektors

⇨ Bei weiteren Volumenkräften/Beschleunigungen gilt:

$$\vec{a}_{ges} = \sum_i \vec{a}_i + \vec{g} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_{ges,x} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_{ges,y} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho a_{ges,z}$$

Höhenabhängige Druckverteilung

- ⇨ Höhenabhängige Druckverteilung
  - ⇨ Inkompressibles Fluid der Höhe h
  - ⇨ Druck p_0 an der Oberfläche
  - ⇨ g zeigt entgegen der z-Richtung



$$\rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$ → Keine Druckänderung in der horizontalen Ebene

$$\rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$ → Druckänderung erfolgt nur in vertikaler Richtung

g zeigt entgegen z

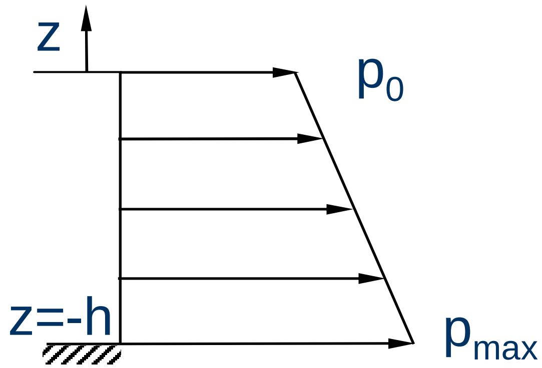
- ⇨ Druckverteilung ergibt sich aus der Integration über z

$$p = -\int \rho g dz + C = -\rho g z + C$$

- ⇨ Randbedingung an der Oberfläche: $p=p_0$ wenn z=0

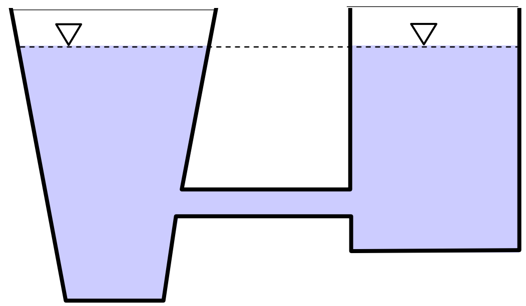
$$p(z=0) = C = p_0$$

- ⇨ Druckverteilung $\boxed{p = p_0 - \rho g z}$
  - ⇨ Der Druck steigt proportional mit der Tiefe an
  - ⇨ Der Druck wird am Behälterboden maximal

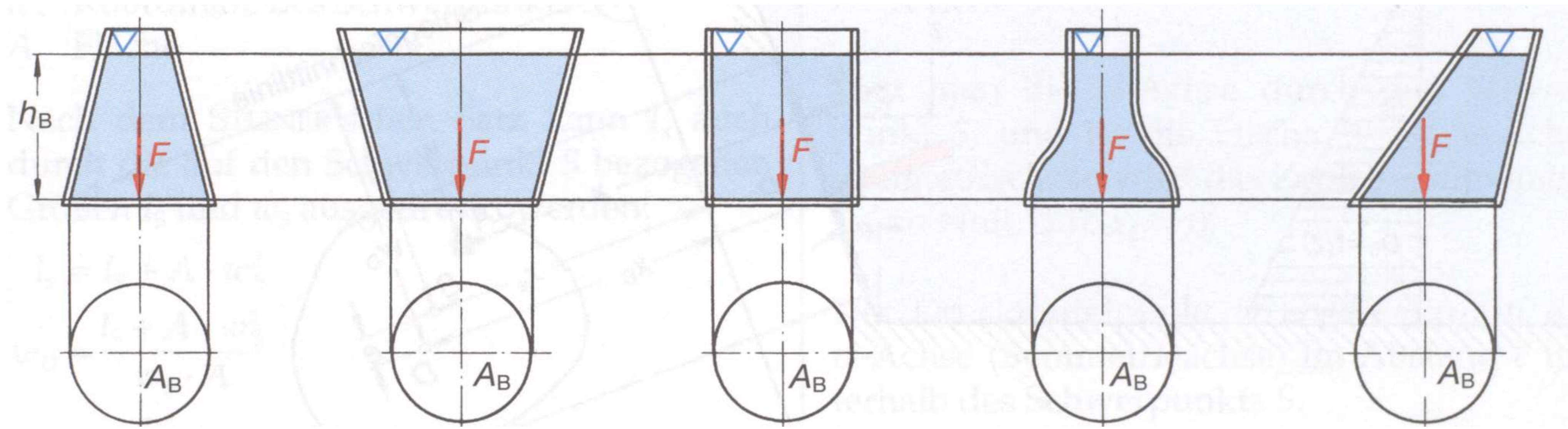


Hydrostatische Druckverteilung

- ⇨ Bei einem inkompressiblen, ruhenden, homogenen Fluid
  - ⇨ herrscht an Orten gleicher Tiefe der gleiche Druck
  - ⇨ stellt sich bei verbundenen (offenen) Gefäßen die gleiche Oberflächenhöhe ein (→ **Prinzip der kommunizierenden Röhren**)



  - ⇨ ergibt sich in Behältern mit gleicher Bodenfläche und Füllhöhe unabhängig von der Gefäßform die gleiche Bodenkraft (→ **Hydrostatisches oder Pascalsches Paradoxon**)

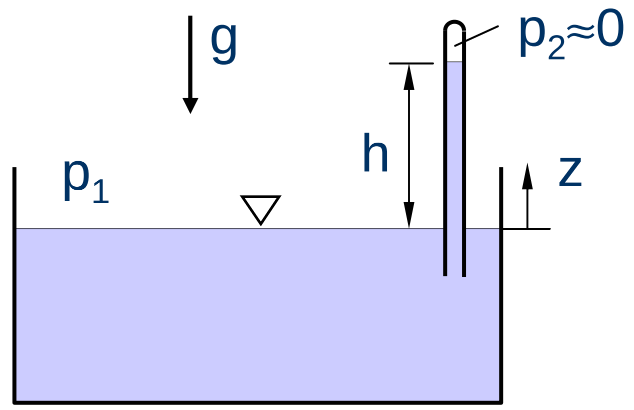


Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

Anwendungen: Messung von Drücken

⇨ **Barometer**: Messung von Absolutdrücken

$$p_1 = p_2 + \rho g h \cong \rho g h$$



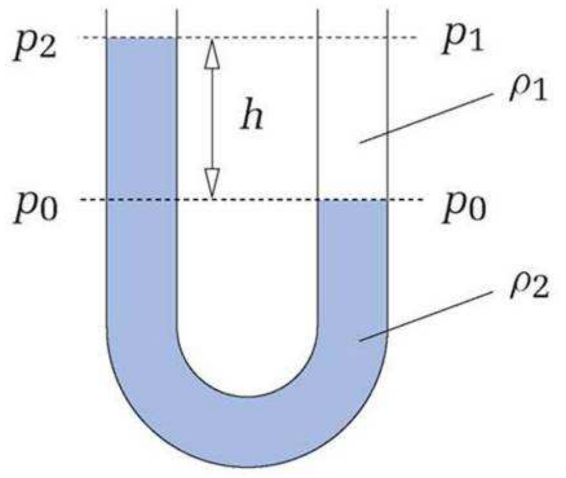
Voraussetzung: Fluid hat mit p_2 seinen Dampfdruck nicht unterschritten (z.B. Quecksilber: $p_{D,Hg}$=0,24Pa (bei 20°C))

⇨ **Manometer**: Messung von Differenzdrücken

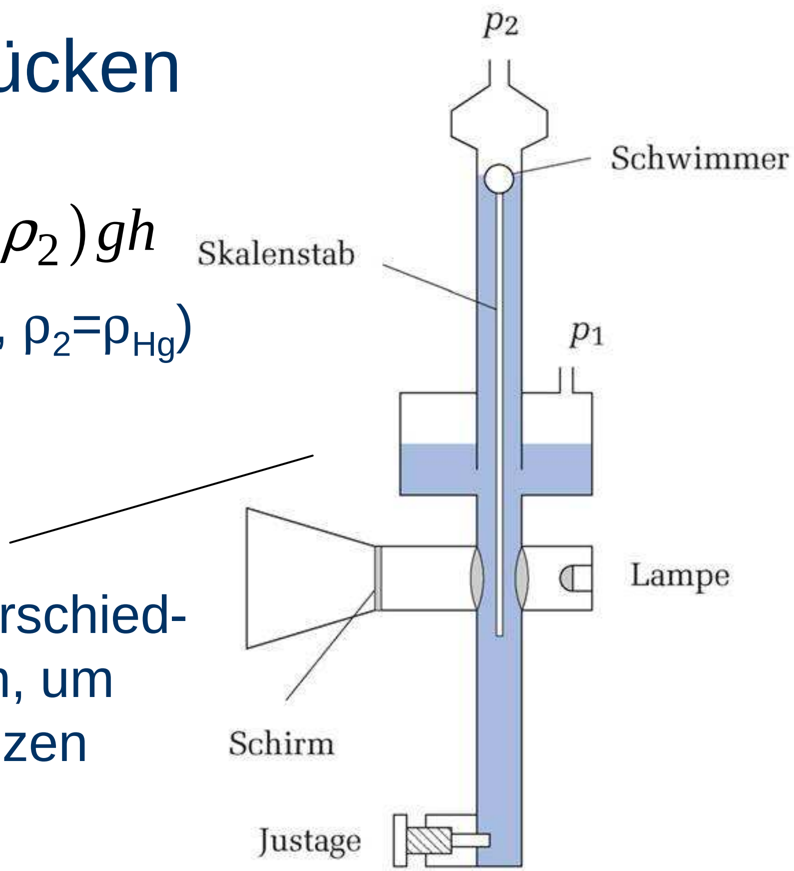
⇨ U-Rohr Manometer

$$\Delta p = p_2 - p_1 = (p_0 - \rho_2 g h) - (p_0 - \rho_1 g h) = (\rho_1 - \rho_2) g h$$

$$\approx -\rho_2 g h$$ (wenn $\rho_1 << \rho_2$, z.B. $\rho_1 = \rho_{Luft}$, $\rho_2 = \rho_{Hg}$)



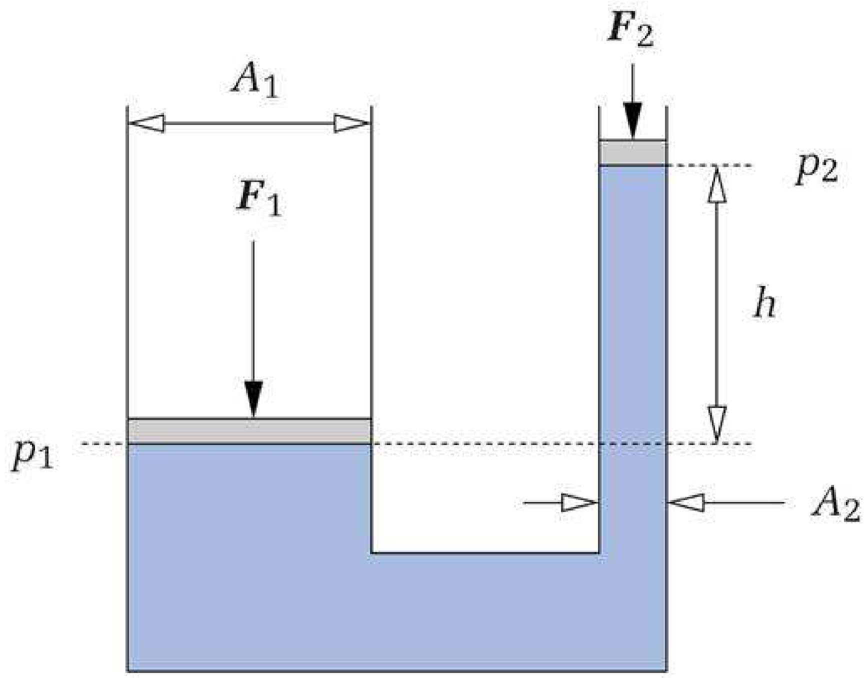
Technische Ausführung: <u>Betz-Manometer</u> mit unterschiedlich großen Querschnitten, um auch kleine Druckdifferenzen auflösen zu können



Quelle: Kuhlmann, Strömungsmechanik, 2007

⇨ Hydraulische Presse

- ⇨ basiert auf dem Prinzip der kommunizierenden Röhren
- ⇨ Kraftverstärkung ergibt sich über das Flächenverhältnis A_1/A_2
- ⇨ Druck der Flüssigkeitssäule kann gegenüber dem Gesamtdruck im System vernachlässigt werden



Quelle: Kuhlmann, Strömungsmechanik, 2007

⇨ Kräfte an den Stempeln: $F_1 = p_1 A_1 \qquad p_1 = F_1 / A_1$

$$F_2 = p_2 A_2 \qquad p_2 = F_2 / A_2$$

⇨ Hydrostatische Druckverteilung: $p_1 = p_2 + \rho g h \quad \rightarrow \quad \dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2} + \rho g h$

im allg. gilt: $\rho g h << \dfrac{F_2}{A_2}$

⇨ Hydraulische Verstärkung $F_1 = F_2 \dfrac{A_1}{A_2} \qquad F_1 >> F_2$ wenn $A_1 >> A_2$

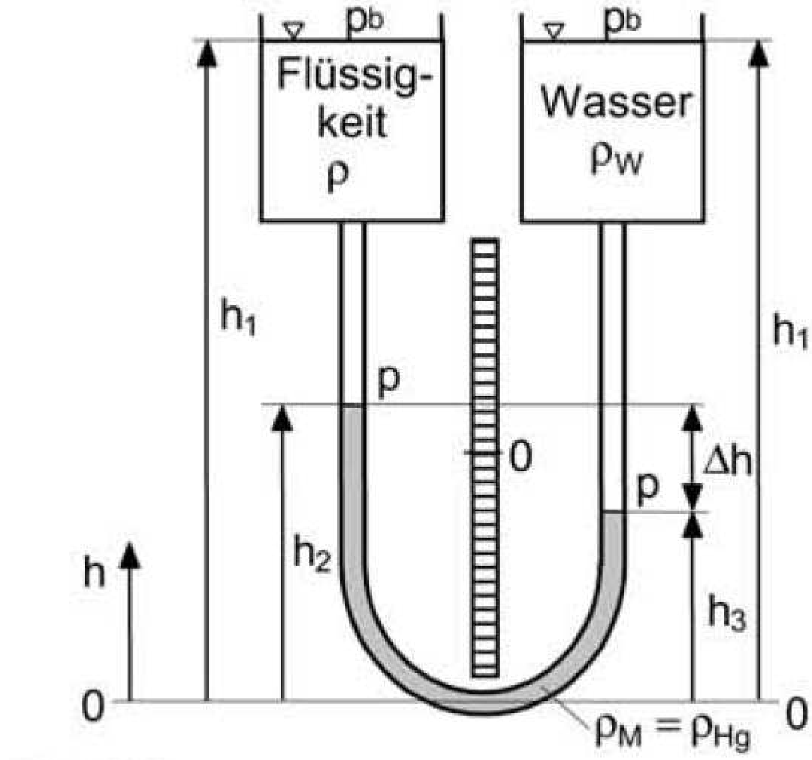
Beispiel

- ⇨ Die Dichte einer Flüssigkeit soll mit der skizzierten Anordnung ermittelt werden

  Geg.: h_1=150mm, h_2=70mm, h_3=66mm,
  ρ_W=1000kg/m^3, ρ_{Hg}=13500kg/m^3

  Ges.: ρ

- ⇨ Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet



Druckkräfte auf senkrechte Behälterwände

⇨ Druckkraft auf einen Behälterboden $F = (p_i - p_a)A$

(gilt für alle Begrenzungsflächen, die senkrecht zu g stehen)

"i" =innen
"a"=außen

⇨ Druckkraft auf eine senkrechte gerade Behälterwand

- ⇨ Druckdifferenz ändert sich mit z
- ⇨ Integration über die Druckdifferenz

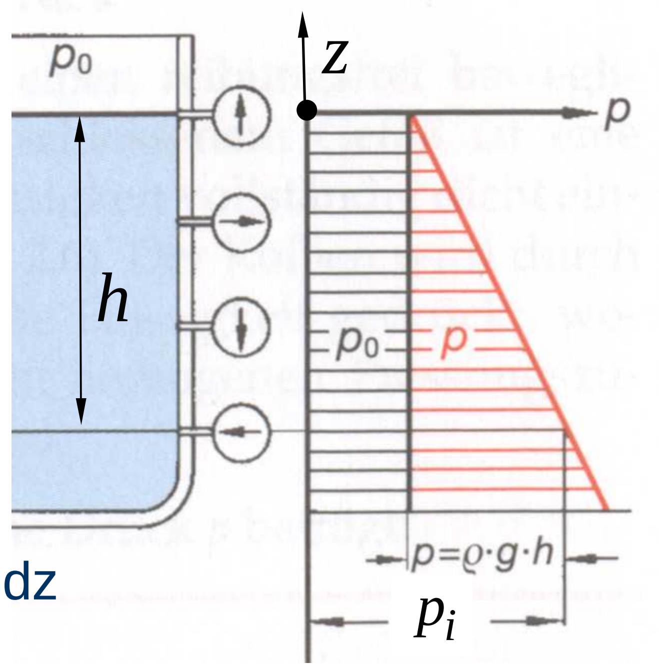
$$F = \int_A (p_i - p_a)\,dA \qquad p_i = p_0 - \rho g z \quad \text{(!)}$$

bei konstantem Außendruck $p_a = p_0$

$$\rightarrow \quad F = -\int_A \rho g z\,dA$$

bei konstanter Behälterbreite B: A=B·h bzw. dA=B·dz

$$\rightarrow \quad F = -\int_{z=-h}^{z=0} \rho g z B\,dz = \rho g B \frac{h^2}{2}$$



⇨ Resultierende Druckkraft nimmt mit der Tiefe h quadratisch zu

⇨ Angriffspunkt liegt im Schwerpunkt der Druckverteilung $z_S = -\frac{2}{3}h$

Achtung: Senkrechte gerade Wand ist ein Sonderfall!

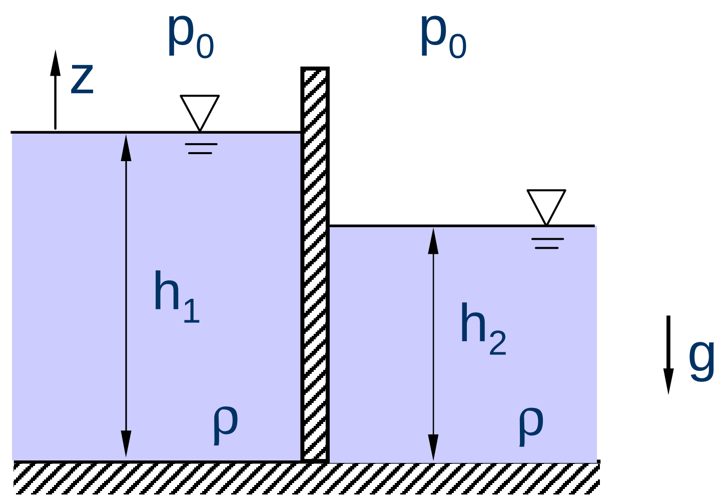
Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

Beispiel

⇨ Zwei Wasserbecken werden durch eine Wand (Breite B) getrennt.

Geg.: h_1=2,0m, h_2=1,5m, g=9,81m/s²
ρ=1000kg/m³, B=10m

Ges.: a) Resultierende Druckkraft auf die Trennwand
b) Vertikaler Kraftangriffspunkt der resultierenden Druckkraft

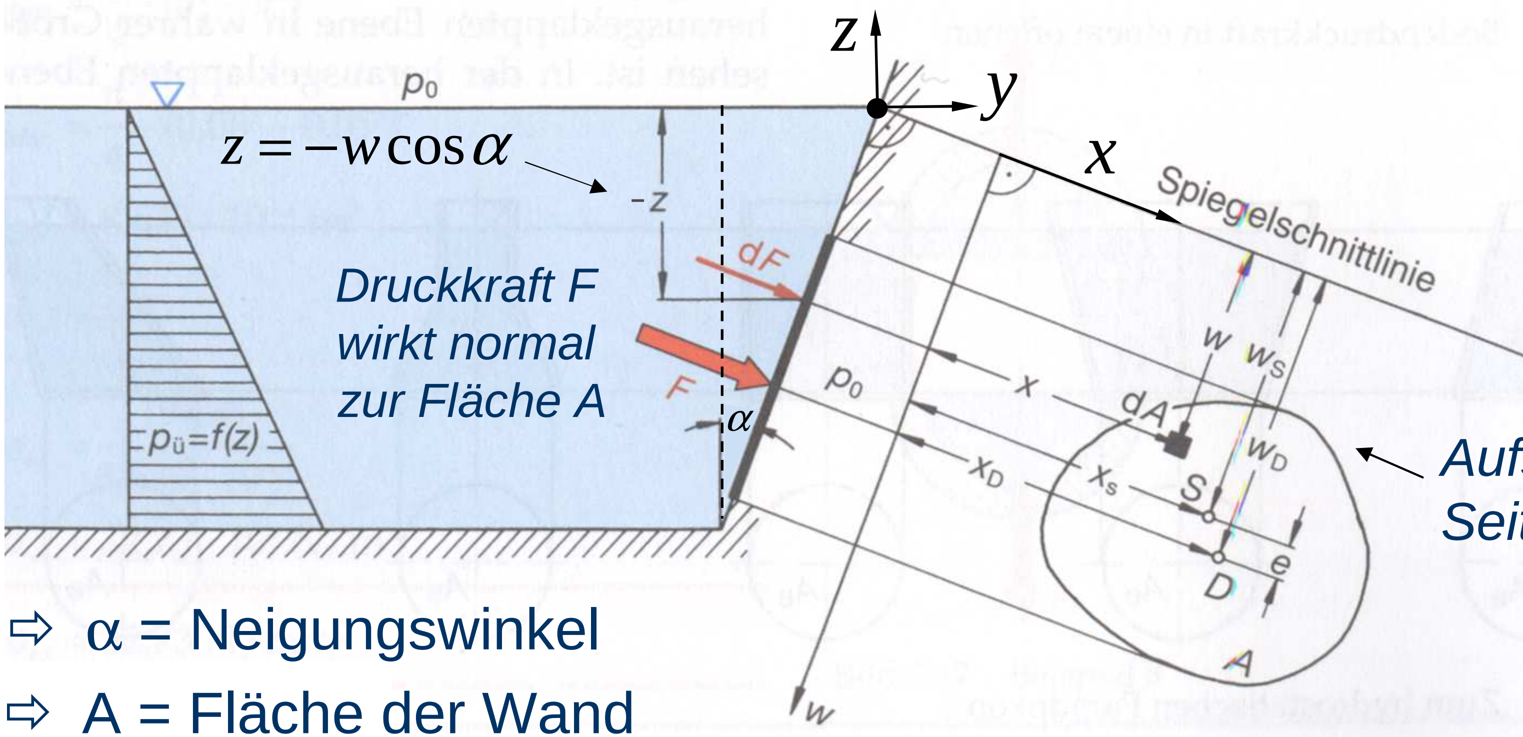


⇨ Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet

Druckkräfte auf geneigte Behälterwände (1/5)

⇨ Neues Koordinatensystem für geneigte gerade Behälterwand

- ⇨ Für die Wand wird das Koordinatensystem x-w eingeführt
- ⇨ x-Achse liegt in der Spiegelschnittlinie (=oberer Rand)
- ⇨ w-Achse weist von der Spiegelschnittlinie nach unten
- ⇨ Aber: Druck ändert sich weiterhin mit z



- ⇨ α = Neigungswinkel
- ⇨ A = Fläche der Wand
- ⇨ D = Angriffspunkt der Druckkraft
- ⇨ S = Flächenschwerpunkt der Seitenwand

Abstand $e = w_D - w_S$ **(!)**

Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

(Quelle: Strybny, Ohne Panik Strömungsmechanik, 2007)

Druckkräfte auf geneigte Behälterwände (2/5)

- ⇨ Druckkraft auf eine geneigte gerade Behälterwand
  - ⇨ Integration über die Druckdifferenz (analog zur senkrechten Wand)

$$F = \int_A (p_i - p_a)\, dA \qquad p_i = p_0 - \rho g z \quad \text{(!)}$$

bei konstantem Außendruck $p_a = p_0$

$$\rightarrow \quad F = -\int_A \rho g z\, dA \qquad z = -w\cos\alpha$$

$$\rightarrow \quad F = \rho g \cos\alpha \int_A w\, dA$$

- ⇨ Integral $\int_A w dA$ ist bekannt aus TM1: **Statisches Moment** zur Bestimmung eines **Flächenschwerpunkts**: $w_s = \frac{\int_A w dA}{A}$

$$\rightarrow \quad w_s \cdot A = \int_A w dA$$

(Bei bekannter Lage des Flächenschwerpunkts w_S kann das Integral leicht bestimmt werden)

- ⇨ Druckkraft*

$$\boxed{F = \rho g \cdot \cos\alpha \cdot w_S \cdot A}$$ (mit Schwerpunkt der geneigten Fläche: w_S)

$$\boxed{F = -\rho g \cdot z_S \cdot A}$$ (mit Schwerpunkt der projezierten Fläche: z_S)

*Druckkraft F steht senkrecht auf der Fläche A

Druckkräfte auf geneigte Behälterwände (3/5)

⇨ Vertikaler Angriffspunkt der Druckkraft: $w = w_D$

⇨ Drehmoment um die x-Achse: $F \cdot w_D = \int_A w dF$

$$dF = (p_i - p_a) dA \quad \text{bzw.} \quad dF = -\rho g z dA = \rho g \cdot \cos\alpha \cdot w \cdot dA \quad \text{(s.o.)}$$

$$\rightarrow \quad w_D = \frac{\int_A w dF}{F} = \frac{\int_A \cancel{\rho g \cdot \cos\alpha} \cdot w^2 \cdot dA}{\cancel{\rho g \cdot \cos\alpha} \cdot w_S \cdot A} = \frac{\int_A w^2 \cdot dA}{w_S \cdot A}$$

⇨ Integral $\int_A w^2 dA$ ist bekannt aus TM2 zur Bestimmung des axialen **Flächenträgheitsmoments**: $I_x = \int_A w^2 dA$

Ist zu der Fläche das Flächenträgheitsmoment um die x-Achse bekannt, kann der Angriffspunkt der Druckkraft nur aus geometrischen Größen bestimmen werden:

⇨ Kraftangriffspunkt in w-Richtung $\boxed{w_D = \frac{I_x}{w_S \cdot A}}$

Druckkräfte auf geneigte Behälterwände (4/5)

⇨ <u>Seitlicher Angriffspunkt</u> der Druckkraft: $x = x_D$

⇨ Drehmoment um die w-Achse: $F \cdot x_D = \int_A x dF$

$$dF = (p_i - p_a) dA \quad \text{bzw.} \quad dF = -\rho g z dA = \rho g \cdot \cos\alpha \cdot w \cdot dA \quad \text{(s.o.)}$$

$$\rightarrow \quad x_D = \frac{\int_A x dF}{F} = \frac{\int_A \cancel{\rho g \cdot \cos\alpha} \cdot x \cdot w \cdot dA}{\cancel{\rho g \cdot \cos\alpha} \cdot w_S \cdot A} = \frac{\int_A x \cdot w \cdot dA}{w_S \cdot A}$$

⇨ Integral $\int_A xwdA$ ist bekannt aus TM2 zur Bestimmung des **Deviationsmoments**: $I_{xw} = \int_A xwdA$

Ist zu der Fläche das Deviationsmoment um die w-Achse bekannt, kann der Angriffspunkt der Druckkraft nur aus geometrischen Größen bestimmen werden:

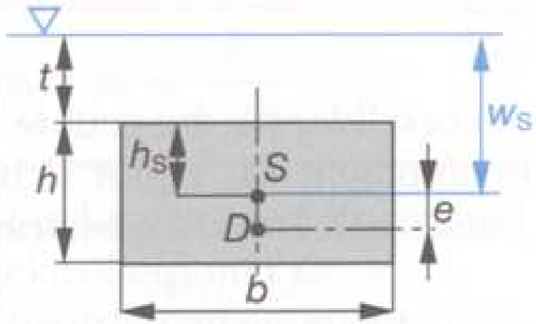
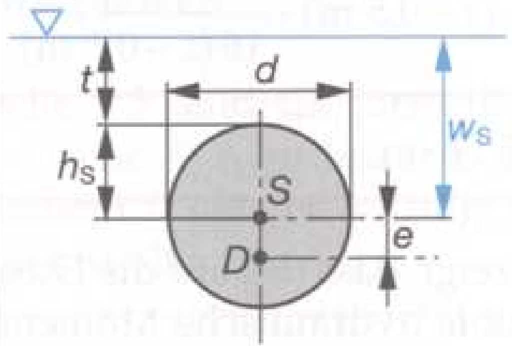
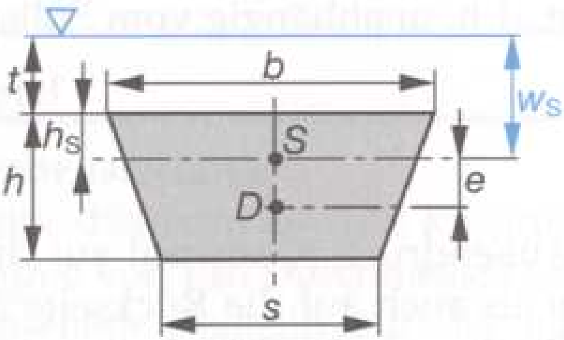
⇨ Kraftangriffspunkt in x-Richtung $\boxed{x_D = \dfrac{I_{xw}}{w_S \cdot A}}$

⇨ Das Deviationsmoment verschwindet bei symmetrischen Querschnitten, wenn die w-Achse im Schwerpunkt S liegt: $I_{xw}=0$

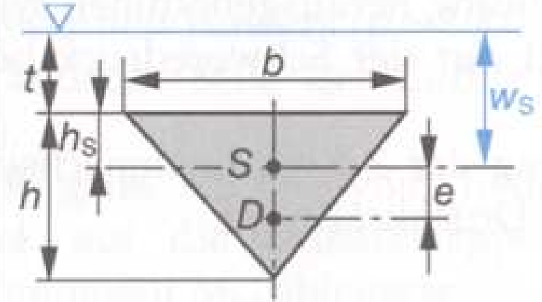
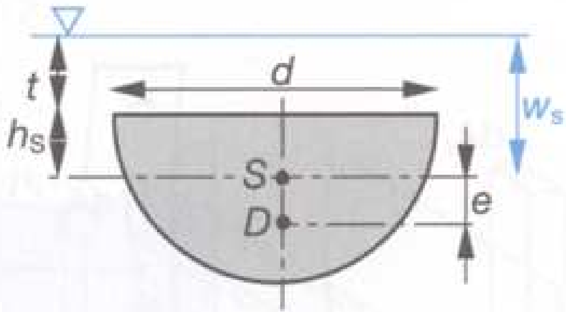
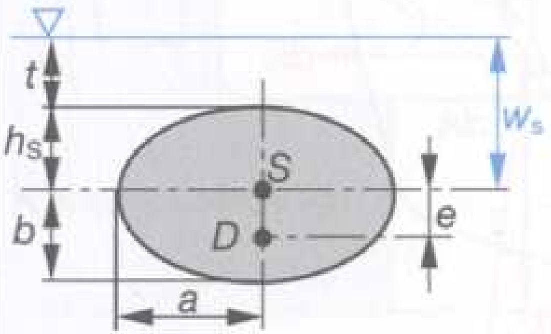
Druckkräfte auf geneigte Behälterwände (5/5)

- ⇨ Flächenträgheitsmoment I_x bezieht sich auf die Spiegellinie
- ⇨ Deviationsmoment I_{xw} bezieht sich auf die Spiegellinie (x-Achse) und auf die w-Achse
- ⇨ Beide Momente sind häufig nur für den Flächenschwerpunkt tabelliert
- ⇨ **Satz von Steiner** (s. TM2) $I_x = I_{x_s} + w_S^2 A$ $\quad I_{xw} = I_{xw_s} + x_S w_S A$
  - ⇨ Schwerpunktachsen: Index x_s bzw. w_s
  - ⇨ w_S und x_S sind die Abstände der x- bzw. w-Achse zum Schwerpunkt

Ausgewählte Flächenträgheitsmomente (1/2)

Nr.	Flächenform	Fläche A	Koordinate h_S	Trägheitsmoment I_S
1		$A = b \cdot h$	$h_S = \frac{h}{2}$	$I_S = \frac{b \cdot h^3}{12}$
2		$A = d^2 \cdot \frac{\pi}{4}$	$h_S = \frac{d}{2}$	$I_S = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$
3		$A = \frac{b+s}{2} h$	$h_S = \frac{h\,(b+2s)}{3\,(b+s)}$	$I_S = \frac{h^3 (b^2 + 4\,bs + s^2)}{36\,(b+s)}$

Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

Nr.	Flächenform	Fläche A	Koordinate h_S	Trägheitsmoment I_S
4		$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$h_S = \frac{1}{3} \cdot h$	$I_S = \frac{b \cdot h^3}{36}$
5		$A = \pi \cdot \frac{d^2}{8}$	$h_S = \frac{2 \cdot d}{3 \cdot \pi}$	$I_S = 0{,}0068 \cdot d^4$
6		$A = \pi \cdot a \cdot b$	$h_S = b$	$I_S = \frac{\pi}{4} \cdot a \cdot b^3$

Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

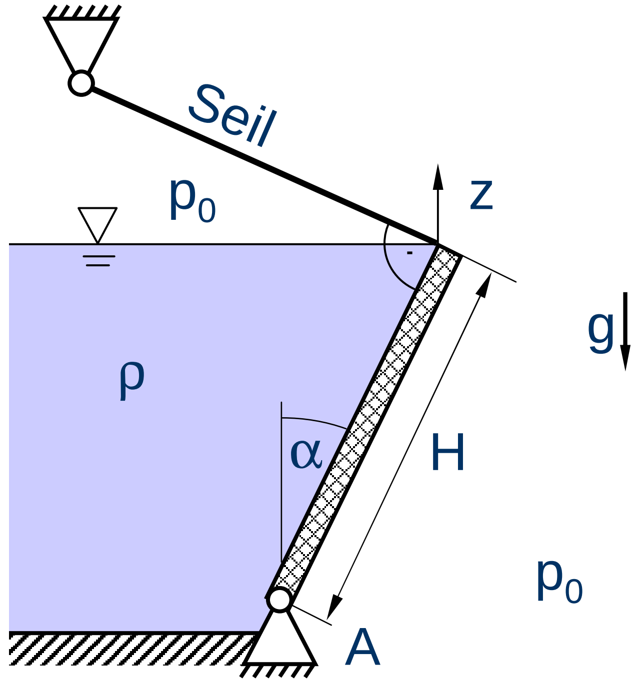
Beispiel

⇨ Eine in A drehbar gelagerte rechteckige Platte (H x B) wird an der Spiegellinie mit einem Seil gehalten

Geg.: $H=2m$, $B=4m$, $\alpha=20°$,
$\rho=1000kg/m^3$, $g=9{,}81m/s^2$

Ges.: Seilkraft S

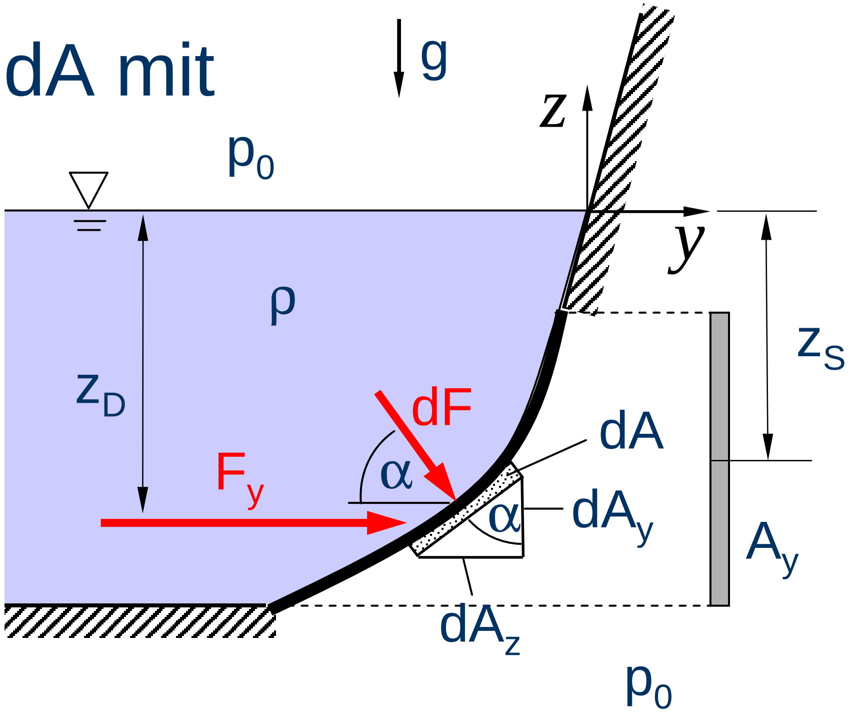
⇨ Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet



Druckkräfte auf gekrümmte Behälterwände (1/3)

⇨ Beschränkung auf Behälterwände mit einer Krümmung und konstanter Breite B

⇨ Betrachtung eines Flächenelements dA mit dem lokalen Neigungswinkel α



⇨ Kraft F_y in y-Richtung $dF_y = dF\cos\alpha$

⇨ Wie oben gilt $dF = (p_i - p_a)\,dA$

$$\rightarrow\quad dF_y = (p_i - p_a)\underbrace{dA\cos\alpha}_{dA_y}$$

$$\rightarrow\quad F_y = \int_{A_y}(p_i - p_a)\,dA_y = -\rho g\int_{A_y} z\,dA_y \quad \text{(s.o.)}$$

⇨ Integration über **projezierte Fläche A_y** kann wie bei der geraden geneigten Wand erfolgen (s.o.)

$$\rightarrow\quad \boxed{F_y = -\rho g\cdot z_S\cdot A_y}$$

A_y=projezierte Fläche (rechteckig, da hier B=const)
z_S=Schwerpunktkoordinate der projezierten Fläche A_y

Druckkräfte auf gekrümmte Behälterwände (2/3)

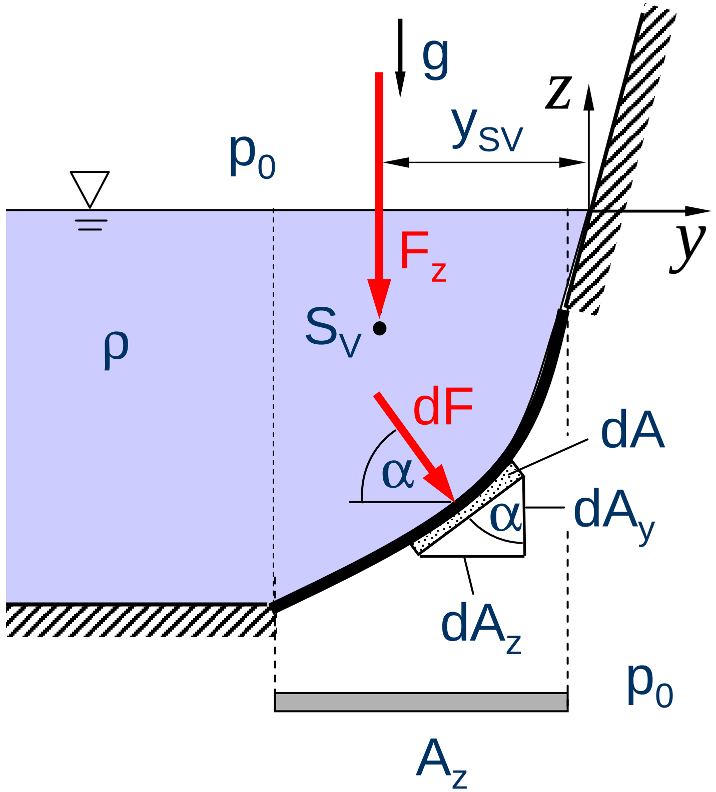
⇨ Kraft F_z in z-Richtung $dF_z = dF \sin\alpha$

⇨ Wie oben gilt $dF = (p_i - p_a)\,dA$

$$\rightarrow \quad dF_z = (p_i - p_a)\underbrace{dA\sin\alpha}_{dA_z}$$

$$\rightarrow \quad F_z = \int_{A_z} (p_i - p_a)\,dA_z = -\rho g \underbrace{\int_{A_z} z\,dA_z}_{V} \qquad \text{(s.o.)}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{F_z = -\rho g V}$$ (nach unten gerichtet)



⇨ Integration der Flüssigkeitshöhe z über die projezierte Fläche dA_z entspricht dem Flüssigkeitsvolumen V oberhalb der Wand $V = \int_{A_z} z\,dA_z$

⇨ F_z entspricht damit dem **Flüssigkeitsgewicht über der Wand**

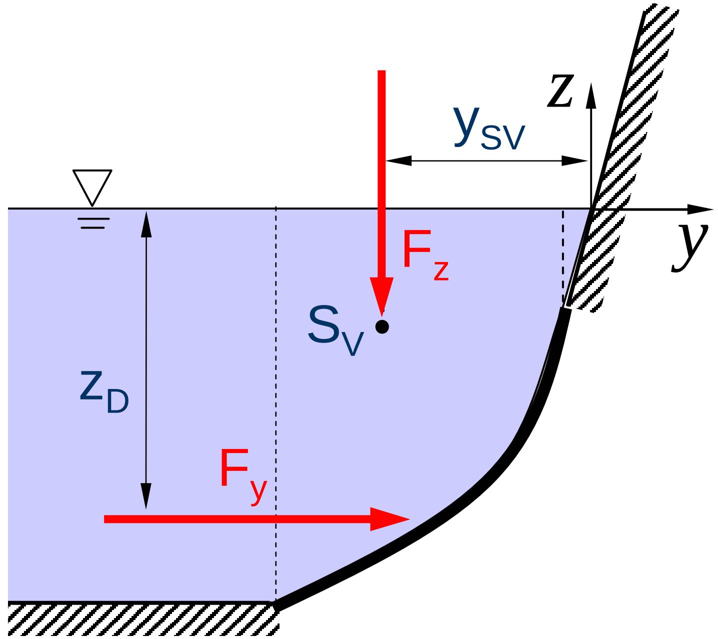
Druckkräfte auf gekrümmte Behälterwände (3/3)

- ⇨ Vertikaler Angriffspunkt der Druckseitenkraft F_y
  - ⇨ ähnlich **wie bei den geneigten Wänden**, wobei
    - ⇨ das Flächenträgheitsmoment,
    - ⇨ der Flächenschwerpunkt,
    - ⇨ und die Fläche

    der Projektionsfläche einzusetzen sind

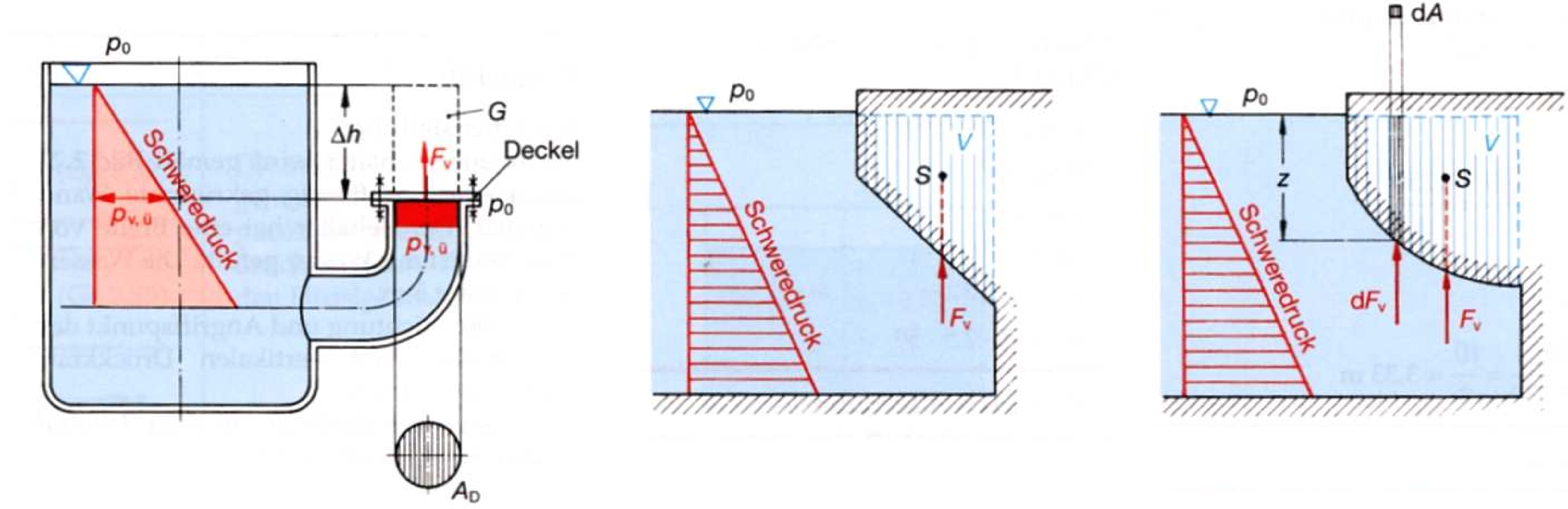
$$\rightarrow \boxed{z_D = \frac{I_x(A_y)}{z_S(A_y) \cdot A_y}}$$

Hinweis: Es zählt nur die Projektionsfläche A_y. Mehrfachüberdeckungen der gekrümmten Wand haben keinen Einfluss auf F_y oder z_D.



- ⇨ Horizontaler Angriffspunkt der Gewichtskraft F_z
  - ⇨ im Massen- bzw. **Volumenschwerpunkt S_V**
  - ⇨ Koordinate y_{VS}

Aufdruckkraft



Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

⇨ Aufdruckkraft: Vertikal nach oben gerichtete Kraft F_V wirkt an von unten mit Druck beaufschlagten Flächen

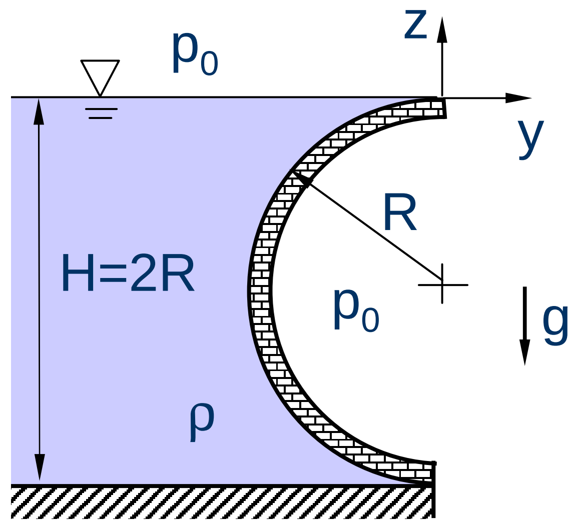
⇨ Aufdruckkraft entspricht dem **Gewicht** einer gedachten über der Fläche stehenden Flüssigkeitssäule: $F_V = \rho g V$

⇨ z.B. Links am Deckel $F_V = (p_i - p_a) A_D = \rho g \cdot \Delta h \cdot A_D = \rho g \cdot V = G$

⇨ Angriffspunkt der Aufdruckkraft ist der Volumenschwerpunkt S

Beispiel

⇨ Für eine halbkreisförmige Sperrmauer ist die resultierende Druckkraft und ihr Angriffspunkt gesucht.



Geg.: R, ρ, g, B

Ges.: a) F_{Dy}, F_{Dz}
b) z_D, y_D

Hinweis: Schwerpunkt im Halbkreis: $r_s=4R/3\pi$

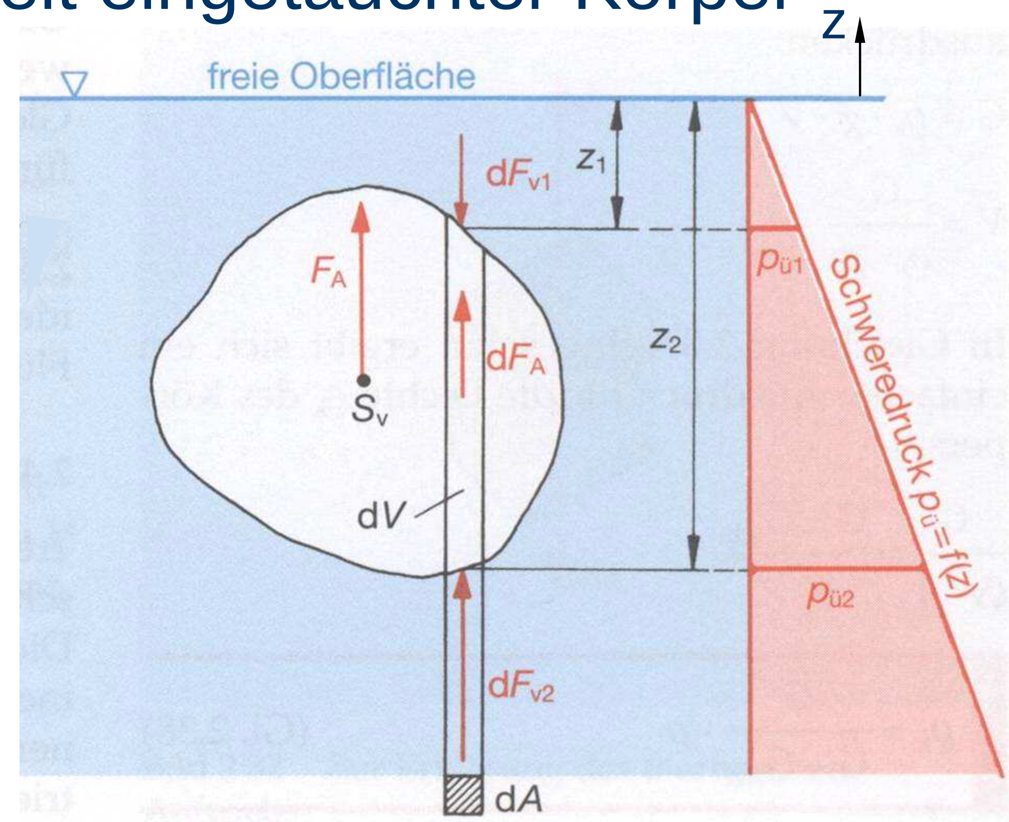
⇨ Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet

Hydrostatischer Auftrieb (1/2)

- Ein <u>vollständig</u> in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt eine Auftriebskraft F_A
- Auftriebskraft resultiert aus den hydrostatischen Druck-differenzen
- Druckkräfte an der Fläche dA
  - Oben: $dF_{V1} = (p_0 - \rho g z_1) dA$
  - Unten: $dF_{V2} = (p_0 - \rho g z_2) dA$
  - Differenz: $dF_A = dF_{V2} - dF_{V1}$

$$= \rho g (z_1 - z_2) dA$$

$$= \rho g dV$$



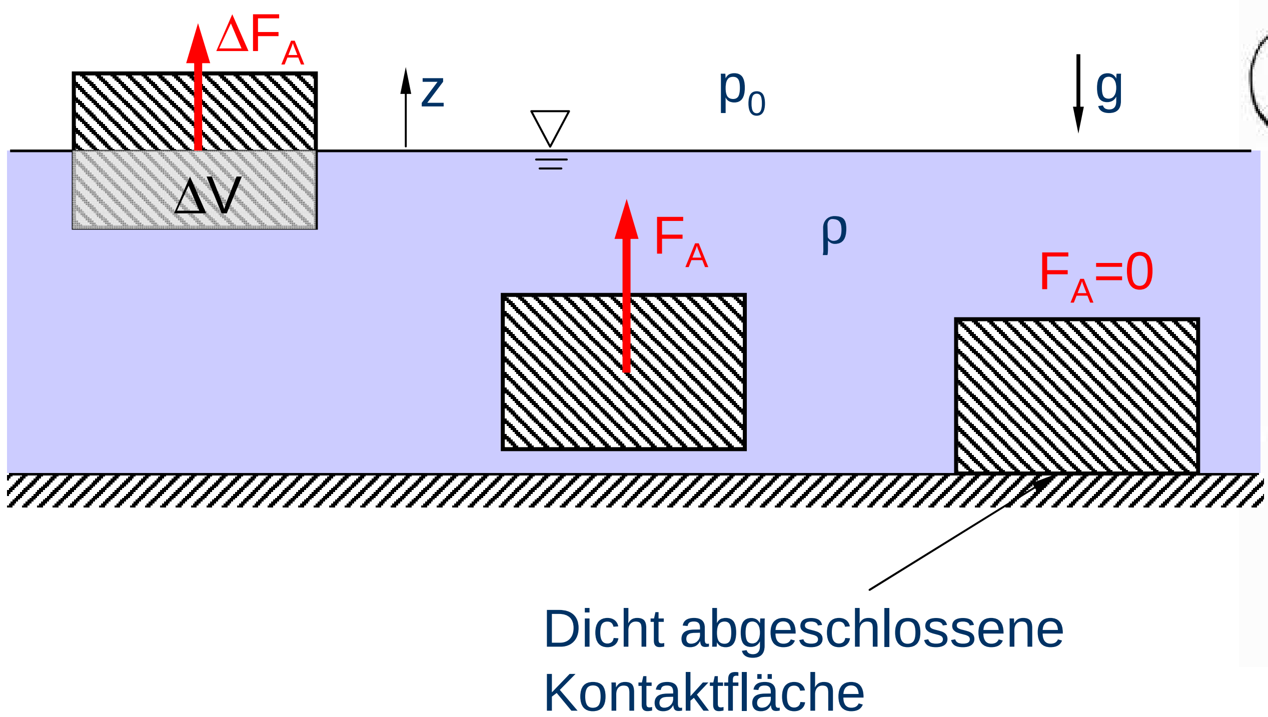
Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

- Integration über das gesamte Volumen ergibt: $\boxed{F_A = \rho g V}$
- Auftriebskraft entspricht dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit und greift im Volumenschwerpunkt S_V an

Hydrostatischer Auftrieb (2/2)

⇨ Ein <u>teilweise</u> in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt eine Auftriebskraft ΔF_A, die zum verdrängten Volumen ΔV proportional ist: $\Delta F_A = \rho g \Delta V$

⇨ Sind Teile des eingetauchten Körper nicht mit der Flüssigkeit benetzt, tragen diese u.U. nicht zum Auftrieb bei



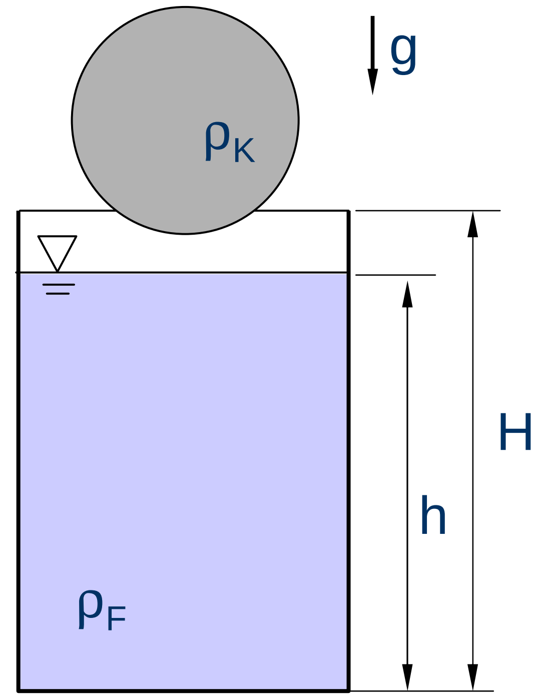
(Quelle: Strybny, Ohne Panik Strömungsmechanik, 2007)

Beispiel

⇨ Ein zylindrischer Behälter (Höhe H, Fläche A) ist bis zur Höhe h mit einer Flüssigkeit (ρ_F) gefüllt. In den Behälter wird langsam eine Kugel ($\rho_K < \rho_F$) gegeben, die dann an der Oberfläche schwimmt.

Geg.: H, h, A, ρ_F, ρ_K, g

Ges.: Durchmesser der Kugel, so dass der Behälter gerade noch nicht überläuft

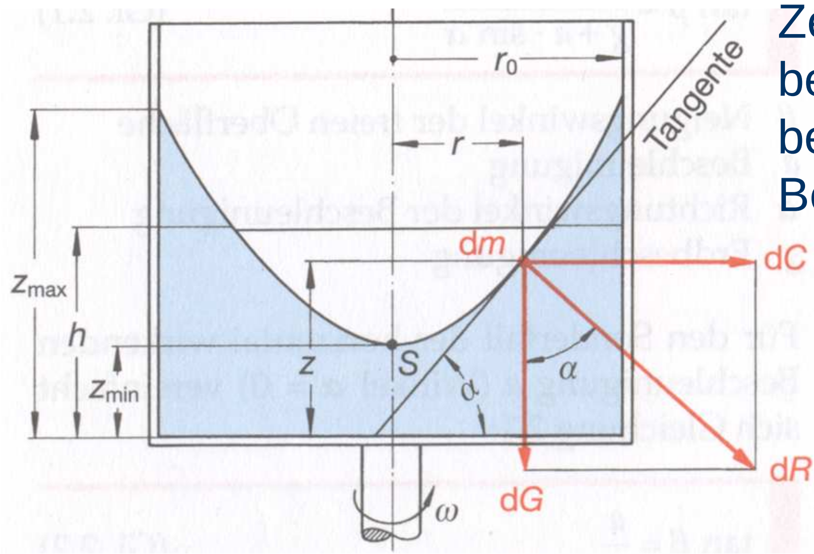


⇨ Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet

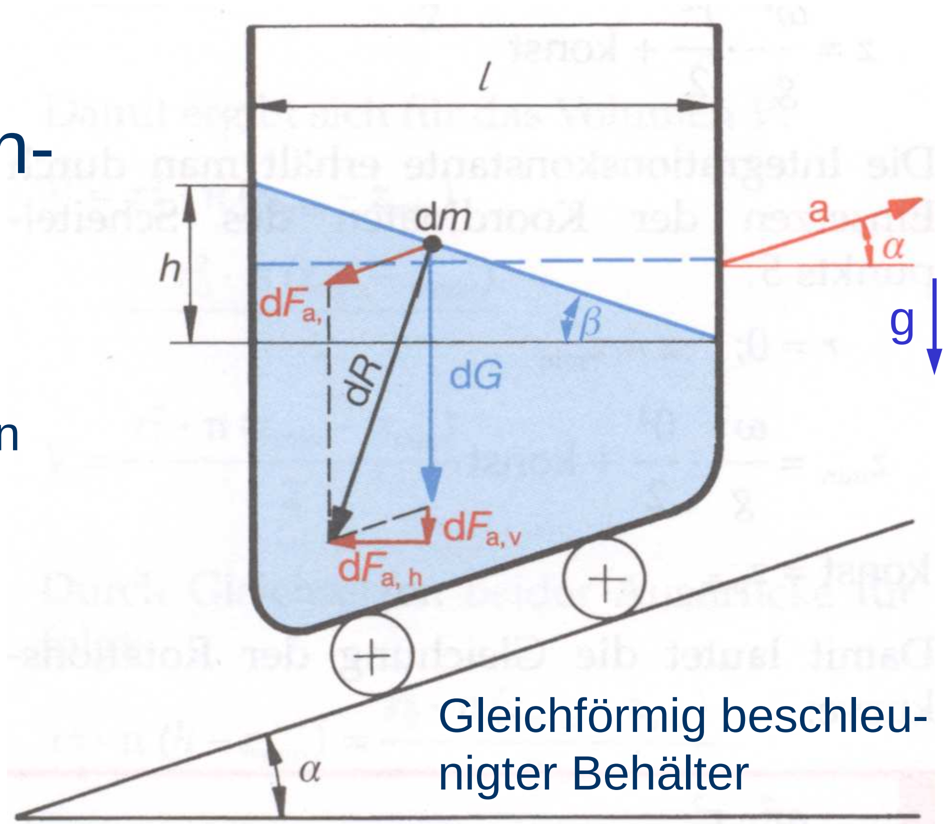
- ⇨ Treten neben der Erdbeschleunigung weitere stationäre Volumenkräfte bzw. Beschleunigungen auf, so gilt: $\vec{a}_{ges} = \sum_i \vec{a}_i + \vec{g}$
- ⇨ Modifizierte Eulersche Grundgleichung der Hydrostatik

$$\rightarrow \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_{ges,x} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_{ges,y} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho a_{ges,z}$$

- ⇨ Die Oberfläche steht dabei lokal immer senkrecht zum resultierenden Kraftvektor dR



Zentrifugalbeschleunigung beim rotierenden Behälter



Gleichförmig beschleunigter Behälter

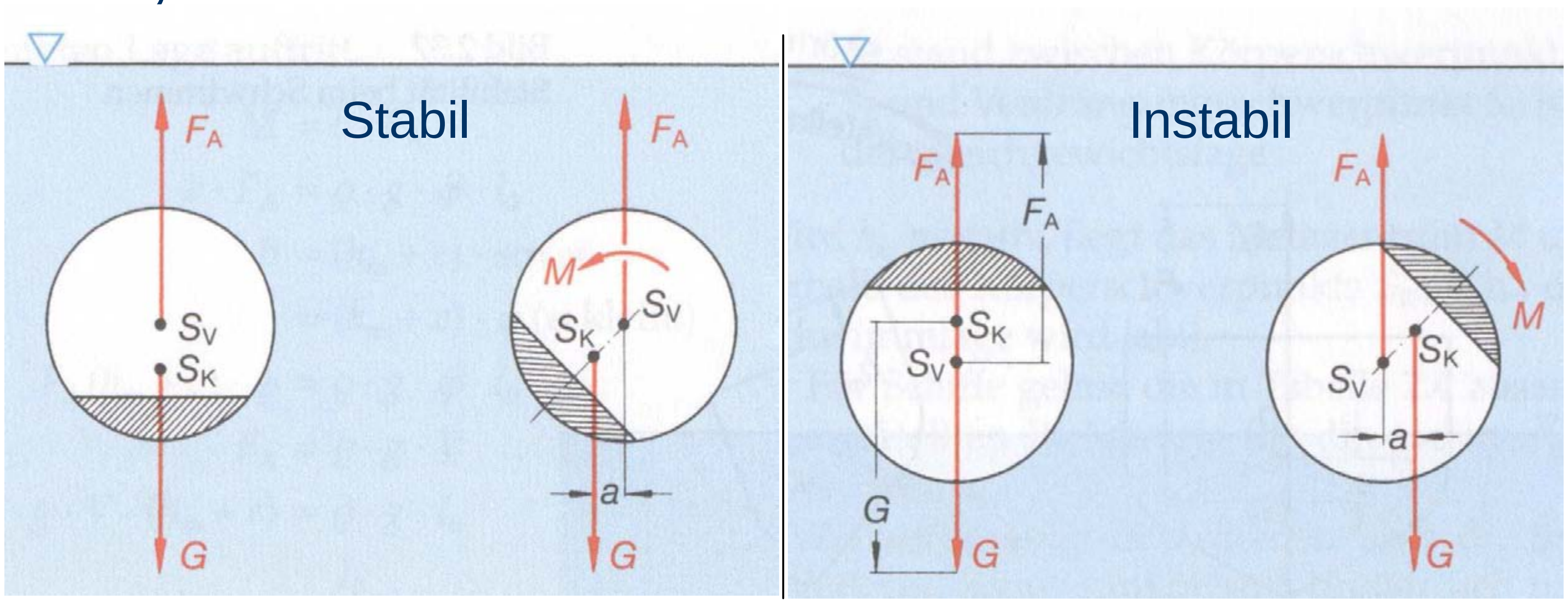
Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

Stabilität schwimmender Körper (1/3)

- ⇨ Ein Körper **schwimmt** bei Eigengewicht = Auftrieb: $G = F_A$
- ⇨ Ist der Körper vollständig eingetaucht, **schwebt** er
- ⇨ Gleichgewicht bei nur zwei Kräften
  - ⇨ liegt vor, wenn beide Wirkungslinien übereinander liegen und die Kräfte gleich sind
  - ⇨ reicht für die **Stabilität gegenüber Drehung** nicht aus
- ⇨ Schwimmende oder schwebende Körper sind gegenüber Drehungen stabil, wenn rückstellende Momente auftreten

S_K=Massenschwerpunkt, Angriffspunkt von G

S_V= Volumen- bzw. Verdrängungsschwerpunkt, Angriffspunkt von F_A



Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

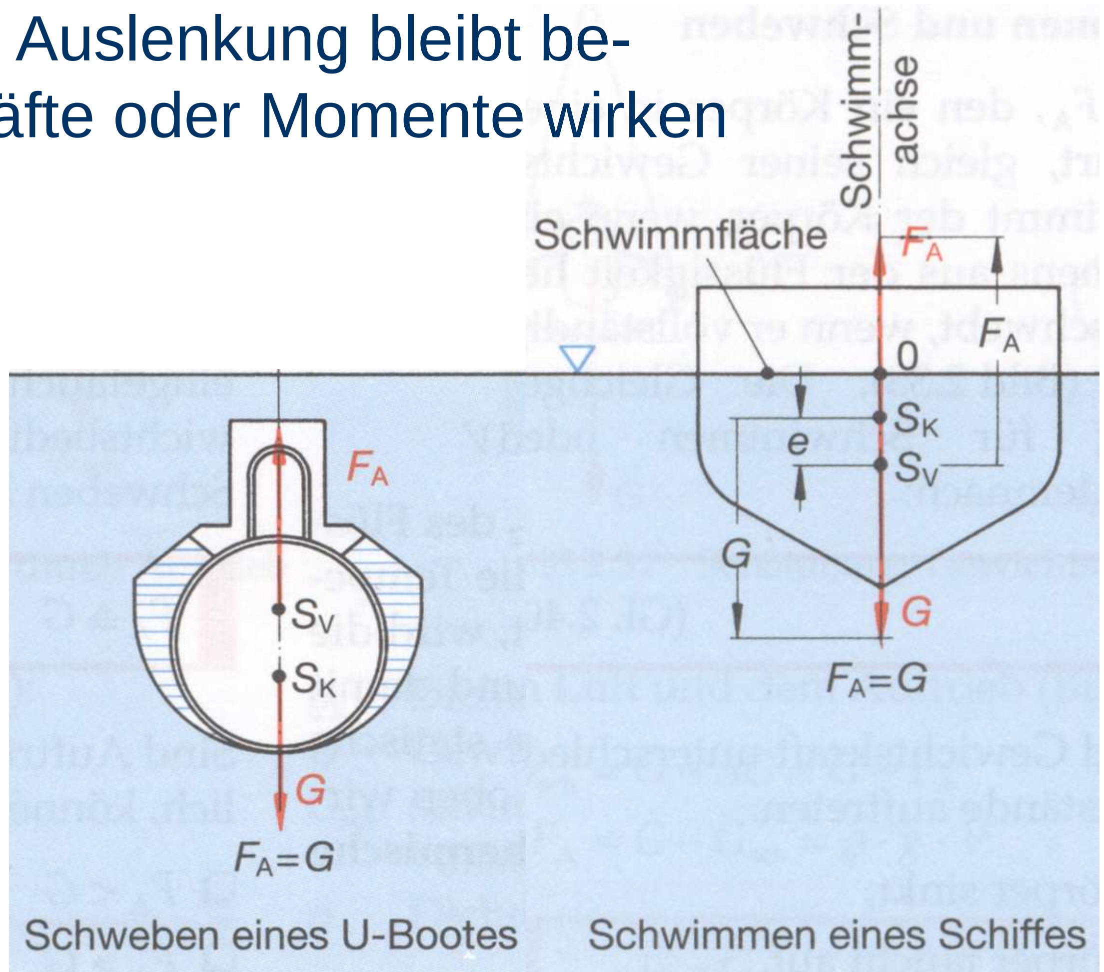
Stabilität schwimmender Körper (2/3)

- ⇨ **Stabile Schwimmlage**: Nach einer Auslenkung kehrt der Schwimmkörper in seine Ausgangslage zurück.
- ⇨ **Instabile Schwimmlage**: Die Auslenkung wird verstärkt → Kippen oder Kentern bis neue stabile Lage erreicht
- ⇨ **Indifferente Schwimmlage**: Die Auslenkung bleibt bestehen, sofern keine äußeren Kräfte oder Momente wirken
- ⇨ Für Schiffe ist die Stabilität von entscheidender Bedeutung

  Gewichtstabil: S_K liegt tiefer als S_V z.B. links beim U-Boot

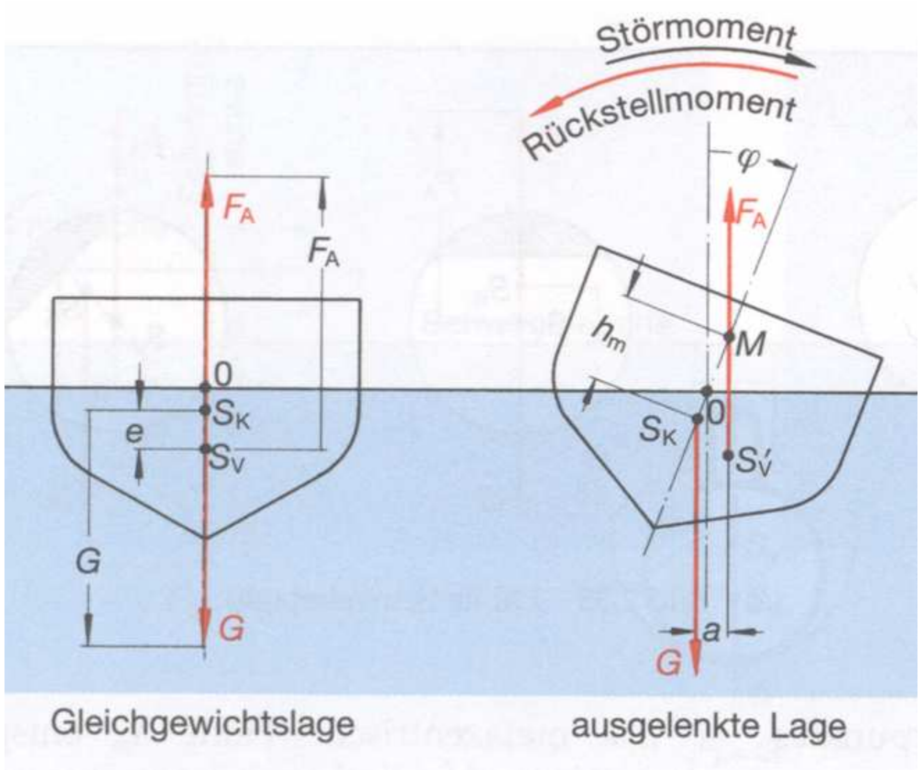
  oder

  Formstabil: Metazentrum M liegt über S_K, z.B. rechts beim Schiff (Definition s. nächste Folie)

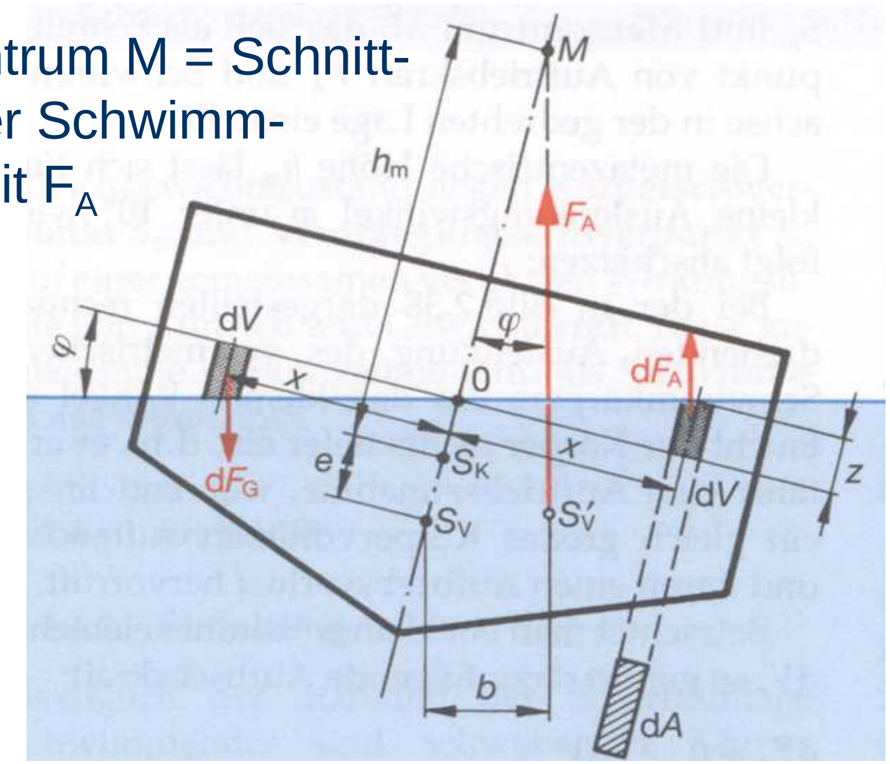


Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

Stabilität schwimmender Körper (3/3)



Metazentrum M = Schnittpunkt der Schwimmachse mit F_A



Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

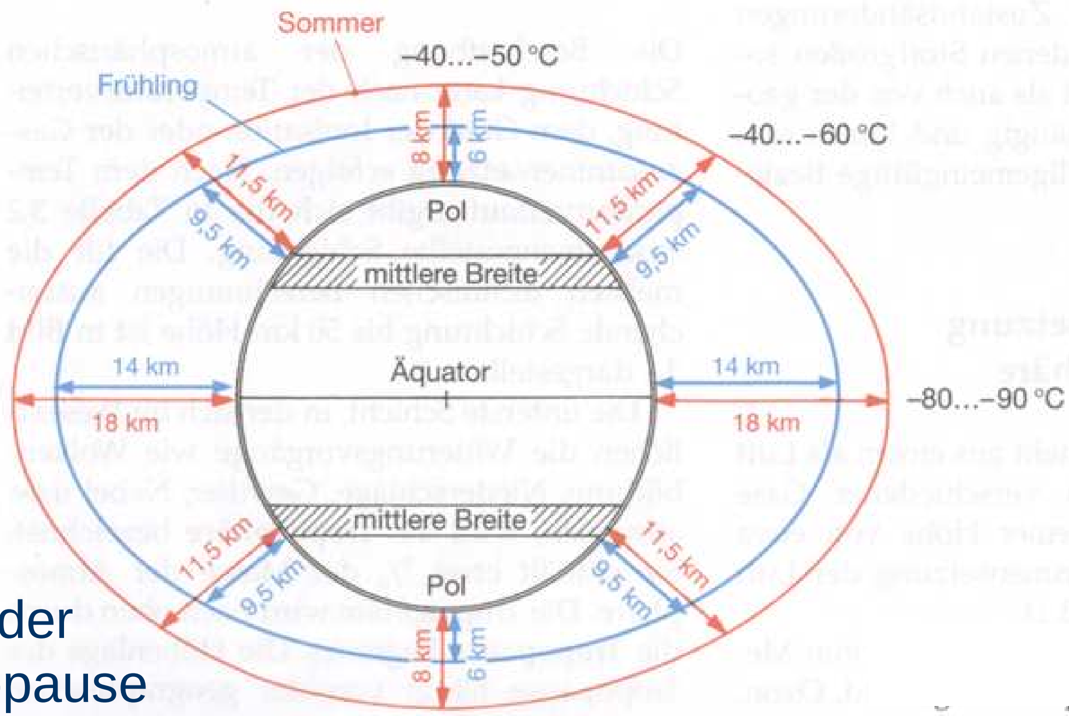
⇨ Ohne Herleitung:

- ⇨ **Metazentrische Höhe**: $h_M = \dfrac{I_0}{V} - e$ = Abstand zwischen Körperschwerpunkt S_K und **Metazentrum M**
- ⇨ V = verdrängtes Flüssigkeitsvolumen
- ⇨ I_0=Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche bezogen auf die Drehachse 0
- ⇨ e = Abstand zwischen S_K und S_V

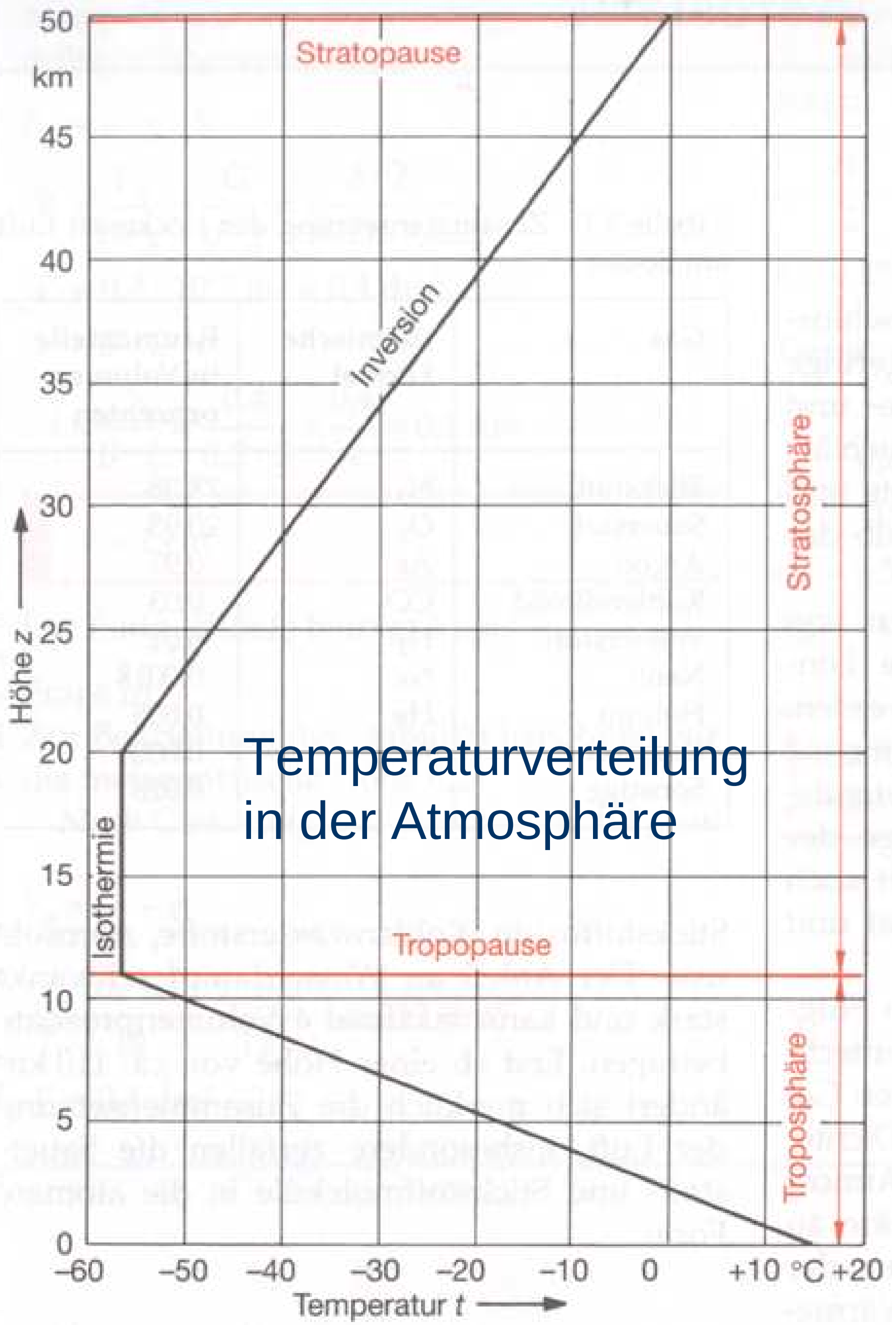
h_M>0 für Formstabilität

Segelschiffe: h_M=0,9-1,5m
Frachtschiffe: h_M=0,6-0,9m

- ⇨ **Ruhende kompressible Gase**
- ⇨ Abgrenzung zur Hydrostatik: $\rho \neq const \;\rightarrow\; \rho = \rho(p,T)$
- ⇨ Bei großen Höhenunterschieden ist auch $g \neq const$. Hier soll aber gelten: $g = const$



Lage der Tropopause



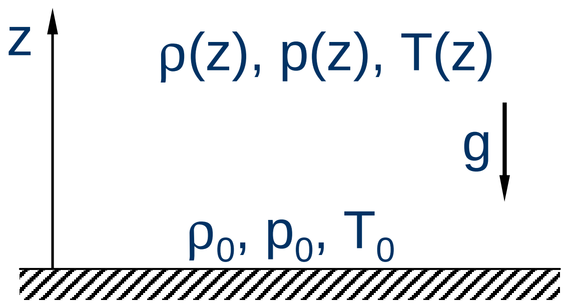
Temperaturverteilung in der Atmosphäre

Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

Grundgleichung der Aerostatik

⇨ **Eulersche Grundgleichung** (mit ρ=ρ(z))

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g}$$



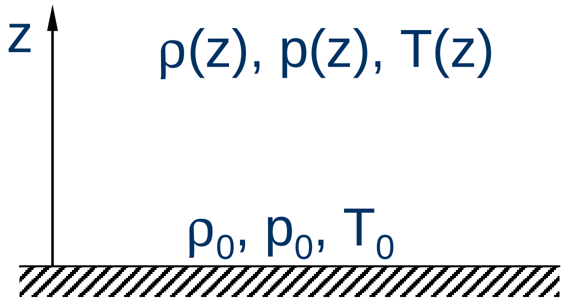
⇨ Luft kann in guter Näherung als **ideales Gas** betrachtet werden:

$$\boxed{\frac{p}{\rho} = RT}$$ oder $$\boxed{pV = mRT}$$ (***R = spezifische Gaskonstante***, z.B. R=287J/(kgK) für Luft)

⇨ Für die Änderung mit der Höhe können drei grundsätzliche alternative Annahmen zur Atmosphäre gemacht werden:

1. die Atmosphäre ist **isotherm**, d.h. T=const, <u>oder</u>
2. die Entropie bleibt konstant (= **isentrop**), <u>oder</u>
3. es gilt die **Normatmosphäre** (Standardatmosphäre) nach ICAO (werden wir hier nicht betrachten)

Isotherme Schichtung



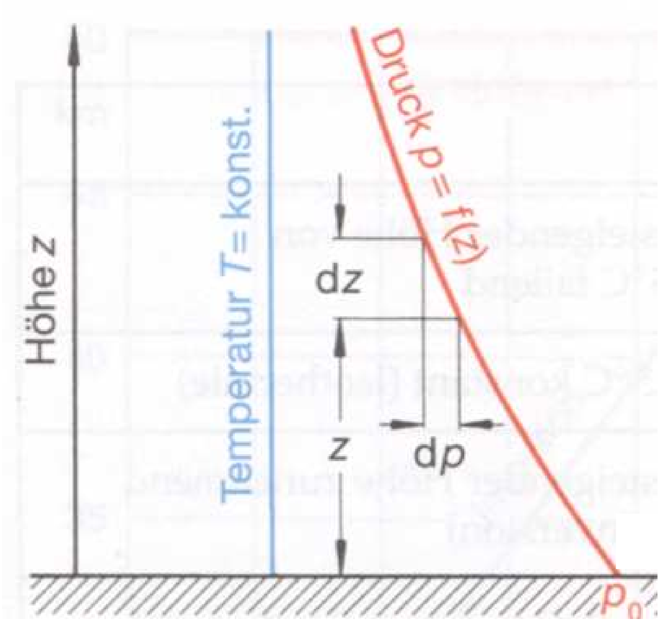
⇨ Temperatur T=const $\longrightarrow \quad \dfrac{p}{\rho} = RT = const$

⇨ Damit gilt $\dfrac{p}{\rho} = \dfrac{p_0}{\rho_0} \quad \rightarrow \quad \rho = \rho_0 \dfrac{p}{p_0}$

⇨ Für eine infinitesimal dicke Schicht dz folgt aus der Grundgleichung $dp = -\rho(z) g dz = -\rho_0 \dfrac{p}{p_0} g dz$

⇨ Trennung der Variablen und Integration

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int dz \quad \rightarrow \quad \ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g \cdot z + C$$



⇨ p=p_0 bei z=0: $\ln p_0 = C$

⇨ Mit $\ln p - \ln p_0 = \ln \dfrac{p}{p_0} \quad \rightarrow \quad \dfrac{p}{p_0} = e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g \cdot z} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dfrac{p}{p_0} = e^{-\frac{g \cdot z}{RT}}}$

⇨ Mit $p = \rho \dfrac{p_0}{\rho_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dfrac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{g \cdot z}{RT}}}$

Barometrische Höhengleichung

Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

Isentrope Schichtung

⇨ Isentrope Änderung = kein Wärmeaustausch mit der Umgebung

⇨ Damit gilt $\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}} \quad \rightarrow \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa}$ (κ = ***Isentropenexponent***, Luft: κ=1,4 s. Thermodynamik)

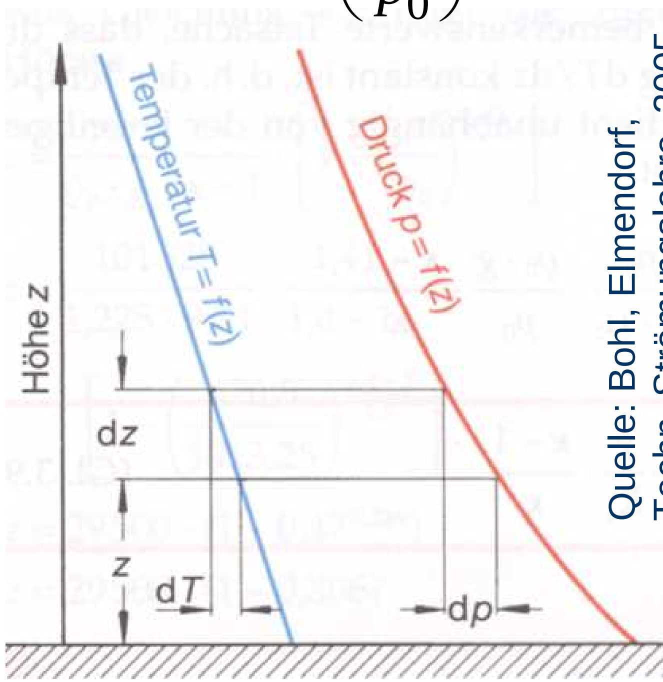
⇨ Für eine infinitesimal dicke Schicht dz folgt aus der Grundgleichung

$$dp = -\rho(z) g dz \quad = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} g dz$$

⇨ Trennung der Variablen und Integration

$$\int p^{-1/\kappa} dp = -\frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}} g \int dz \quad \rightarrow \quad \frac{\kappa}{\kappa-1} p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = -\frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}} g \cdot z + C$$

⇨ $p=p_0$ bei $z=0$: $\frac{\kappa}{\kappa-1} {p_0}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = C$



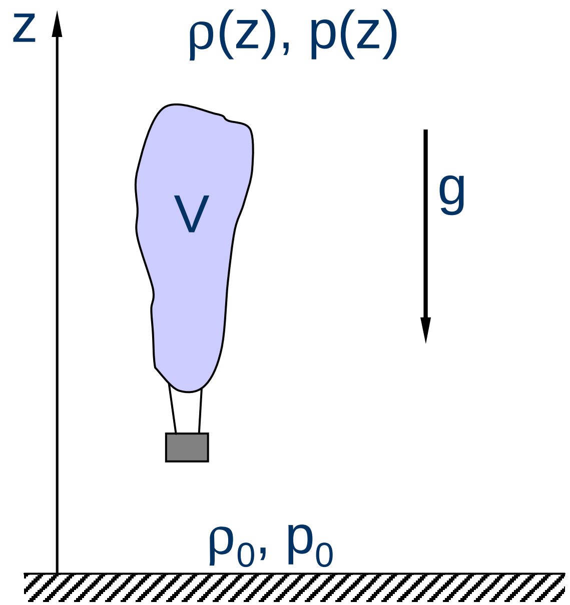
Quelle: Bohl, Elmendorf, Techn. Strömungslehre, 2005

⇨ Nach Umstellung $\boxed{\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\rho_0}{p_0} \frac{\kappa-1}{\kappa} g z \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$

⇨ Mit $\frac{p}{p_0} = \frac{\rho^{\kappa}}{\rho_0^{\kappa}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\rho_0}{p_0} \frac{\kappa-1}{\kappa} g z \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}$, mit $\frac{T}{T_0} = \frac{p/p_0}{\rho/\rho_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\rho_0}{p_0} \frac{\kappa-1}{\kappa} g z}$

Beispiel

- Ein Wetterballon mit Masse m und Anfangsvolumen V_0 steigt in einer isothermen Atmosphäre auf. Bis zum Erreichen des maximalen Volumens V_1 ist die Hülle schlaff ($V<V_1$).



Geg.: $m=2{,}5kg$, $V_0=2{,}8m^3$, $V_1=10m^3$, $p_0=10^5Pa$,
$\rho_0=1{,}27kg/m^3$, $R_{Luft}=287J/kgK$, $g=9{,}81m/s^2$

Ges.: a) Notwendige Haltekraft am Boden ($V=V_0$)
b) In welcher Höhe wird V_1 erreicht?
c) Wie hoch steigt der Ballon ($V=V_1$)?

- Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet

Zusammenfassung

- ⇨ Vertikale Druckverteilung der Hydrostatik $p = p_0 - \rho g z$
- ⇨ Druckkräfte und Angriffspunkte bei geneigten geraden Wänden $F = \rho g \cdot \cos\alpha \cdot w_S \cdot A$ $\quad w_D = \dfrac{I_x}{w_S \cdot A}$ $\quad x_D = \dfrac{I_{xw}}{w_S \cdot A}$

  $F = -\rho g \cdot z_S \cdot A$
- ⇨ Druckkräfte und Angriffspunkte bei einfach gekrümmten Wänden (A_y = projezierte Fläche)

  $F_y = -\rho g \cdot z_S \cdot A_y$ $\quad F_z = -\rho g V$ $\quad z_D = \dfrac{I_x(A_y)}{z_S(A_y) \cdot A_y}$
- ⇨ Aufdruckkraft = Gewicht der fiktiven Flüssigkeitssäule $F_V = \rho g V$
- ⇨ Auftrieb = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit $F_A = \rho g V$
- ⇨ Gewichts- und Formstabilität schwimmender Körper
- ⇨ Isotherme Atmosphärenschichtung: $p = p_0 e^{-\frac{g \cdot z}{RT}}$
- ⇨ Isentrope Atmosphärenschichtung: $p = p_0 \left(1 - \dfrac{\rho_0}{p_0} \dfrac{\kappa - 1}{\kappa} g z\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$