Strömungslehre 1

Hydrostatik:

Druckkräfte auf geneigte Wände:

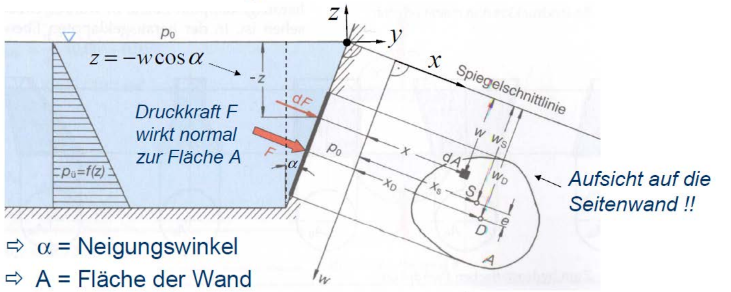
$$\boxed{\begin{aligned} F &= \rho g \cdot \cos\alpha \cdot w_S \cdot A \\ F &= -\rho g \cdot z_S \cdot A \end{aligned}}$$

(mit Schwerpunkt der geneigten Fläche: w_S)

(mit Schwerpunkt der projezierten Fläche: z_S)

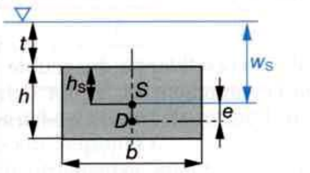
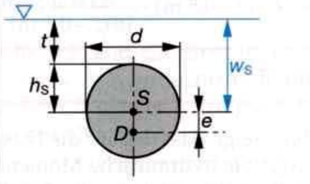
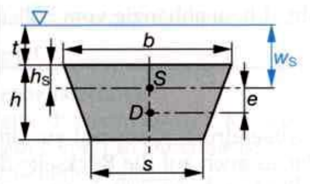
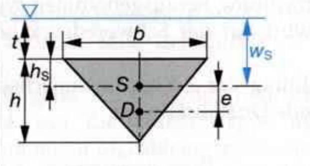
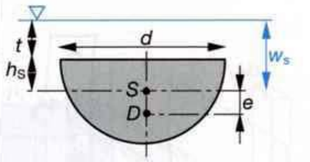
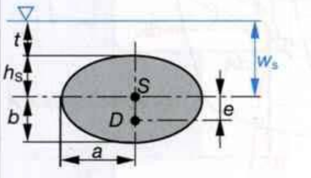
$$\boxed{w_D = \frac{I_x}{w_S \cdot A}} \qquad \boxed{w_s = \frac{\int_A w\,dA}{A}}$$

$$\boxed{x_D = \frac{I_{xw}}{w_S \cdot A}}$$



- ⇨ α = Neigungswinkel
- ⇨ A = Fläche der Wand
- ⇨ D = Angriffspunkt der Druckkraft
- ⇨ S = Flächenschwerpunkt der Seitenwand

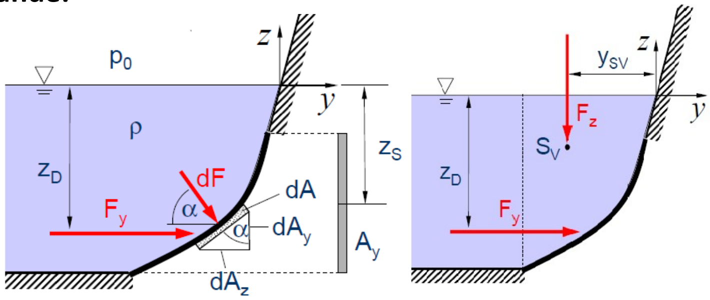
Abstand $e = w_D - w_S$ (!)

Nr.	Flächenform	Fläche A	Koordinate h_S	Trägheitsmoment I_S
1		$A = b \cdot h$	$h_S = \frac{h}{2}$	$I_S = \frac{b \cdot h^3}{12}$
2		$A = d^2 \cdot \frac{\pi}{4}$	$h_S = \frac{d}{2}$	$I_S = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$
3		$A = \frac{b+s}{2}\,h$	$h_S = \frac{h\,(b+2s)}{3\,(b+s)}$	$I_S = \frac{h^3\,(b^2+4\,bs+s^2)}{36\,(b+s)}$
4		$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$h_S = \frac{1}{3} \cdot h$	$I_S = \frac{b \cdot h^3}{36}$
5		$A = \pi \cdot \frac{d^2}{8}$	$h_S = \frac{2 \cdot d}{3 \cdot \pi}$	$I_S = 0{,}0068 \cdot d^4$
6		$A = \pi \cdot a \cdot b$	$h_S = b$	$I_S = \frac{\pi}{4} \cdot a \cdot b^3$

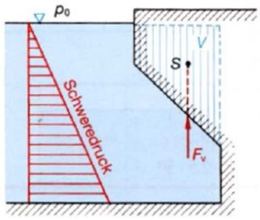
Druckkräfte auf gekrümmte Behälterwände:

$$F_y = -\rho g \cdot z_S \cdot A_y$$

$$F_z = -\rho g V \qquad z_D = \frac{I_x(A_y)}{z_S(A_y) \cdot A_y}$$



Aufdruckkraft: $$F_V = \rho g V$$ →



Hydrostatischer Auftrieb: $$F_A = \rho g V$$

__Aerostatik:__

ideale Gasgleichung: $$\frac{p}{\rho} = RT$$ oder $$pV = mRT$$

Isotherme Schichtung: $$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{g \cdot z}{RT}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{g \cdot z}{RT}}$$ (Barometrische Höhengleichung)

Isentrope Schichtung: $$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\rho_0}{p_0}\frac{\kappa-1}{\kappa} gz\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\rho_0}{p_0}\frac{\kappa-1}{\kappa} gz\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\rho_0}{p_0}\frac{\kappa-1}{\kappa} gz$$

__Kinematik und Massenerhaltung:__

Volumenstrom: $$\dot{V} = \overline{U} A = \int U_n dA$$ **Massenstrom:** $$\dot{m} = \rho \overline{U}_n A = \rho \int_A U_n dA = \rho \dot{V}$$

Kontigleichung: $$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho_1 A_1 U_1 = \rho_2 A_2 U_2 = const$$

__Energieerhaltung:__

Eulersche Bewegungsgleichung: $$\int \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=fix} ds + \frac{1}{2}\int dU^2 + \int g dz + \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dF_R}{dm} ds$$

Bernoulli: $$\frac{1}{2}U^2 + gz + \frac{p}{\rho} = E_0, \quad \frac{U^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H_0, \quad \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho g z + p = P_0$$

(spezifische Energie) (Höhengleichung) (Druckgleichung)

erweiterter Bernoulli: $$\frac{1}{2}U_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\Delta p_M}{\rho} = \frac{1}{2}U_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\Delta p_V}{\rho}$$

Druckerhöhung durch eine Pumpe ($\Delta p_M > 0$)
Druckabsenkung durch eine Turbine ($\Delta p_M < 0$)

Druckverluste ($\Delta p_V > 0$) durch Dissipation bzw. Reibung

Leistung einer Strömungsmaschine: $$P_M = \dot{m} \cdot w_{t_M} = \rho \dot{V} \cdot w_{t_M} = \rho \dot{V} \cdot \frac{\Delta p_M}{\rho} = \dot{V} \cdot \Delta p_M$$

Verlustleistung durch Reibung: $P_V = \dot{m} \cdot w_V = \rho \dot{V} \cdot w_V = \rho \dot{V} \cdot \frac{\Delta p_V}{\rho} = \dot{V} \cdot \Delta p_V$

Impulssatz:

Impulssatz in Vektorform: $\int\limits_A \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}$

Volumenkräfte: $\vec{F}_G = \int\limits_{V(t)} \rho \, \vec{g} dV$, **Oberflächenkräfte:** $\vec{F}_p = -\int\limits_A p \, \vec{n} \, dA$

Impulssatz mit den auf das Fluid wirkenden Strömungskräften

$$\int\limits_A \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_p + \vec{F}_R + \vec{F}_H$$

- $\vec{F}_H$ → Haltekraft
- $\vec{F}_R$ → Reibkraft $\vec{F}_R$
- $\vec{F}_p$ → Druckkraft $\vec{F}_p = -\int\limits_A p \, \vec{n} \, dA$
- $\vec{F}_G$ → Gewichtskraft $\vec{F}_G = \int\limits_{V(t)} \rho \, \vec{g} dV$

Reibungsbehaftete Strömungen:

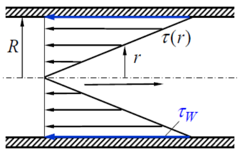
Newtonsche Flüssigkeit: $\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} = \eta \, d\gamma / dt$ **, mit** $\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$

Reynoldszahl: $Re = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$

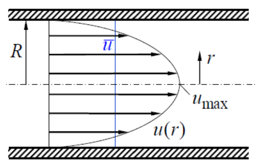
ρ = Fluiddichte ; η = Fluidviskosität (ggf. ν)
U = Charakteristische Strömungsgeschw.
L = Charakteristisches Längenmaß

Reynoldszahl der Rohrströmung: $Re = \frac{\rho \overline{U} D}{\eta}$ **kritische Zahl:** $Re_{krit} = 2320$

Schubspannung: $\tau(r) = -\frac{\Delta p}{2L} r$ →



Parabolische Geschwindigkeitsverteilung: $u(r) = \frac{\Delta p}{4 \eta L} \left(R^2 - r^2 \right)$



Volumenstrom: $\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8 \eta L} \Delta p$ bzw. $\Delta p = \frac{8 \eta L}{\pi R^4} \dot{V}$ (Gesetz von Hagen-Poiseuille)

mittlere Geschw.: $\overline{u} = \frac{R^2}{8 \eta L} \Delta p$, $\overline{u} = \frac{1}{2} u_{max}$

Druckverlust laminare Strömung: $\Delta p = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \overline{u}^2$ bzw. $\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \overline{u}^2$ $\lambda = \frac{64}{Re}$ (Widerstandsgesetz)

Rohre mit Re·k/D<65 gelten als **hydraulisch glatt** = kein Rauhigkeitseinfluss

Turbulente Rohr-strömung:

Ansatz von	Gleichung	Gültigkeit	Strömung	Rohr
Hagen-Poiseuille (1)	$\lambda = 64/\mathrm{Re}$	Re<2320	lam.	
Blasius (2)	$\lambda = 0{,}3164\,\mathrm{Re}^{-0{,}25}$	2320<Re<10^5 und Re·k/D<65	turb.	Glatt
Prandtl (3)	$\lambda = (\log(\mathrm{Re}^2\lambda) - 0{,}8)^{-2}$	Re>10^5 und Re·k/D<65	turb.	Glatt
v. Kármán (5)	$\lambda = (2\log(3{,}715 \cdot D/k))^{-2}$	Re·k/D>1300	turb.	Rau
Colebrook (4)	$\lambda = (-2\log(\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + 0{,}269 \cdot k/D))^{-2}$	65<Re·k/D<1300	turb.	Rau

Nicht-kreisförmige Querschnitte:

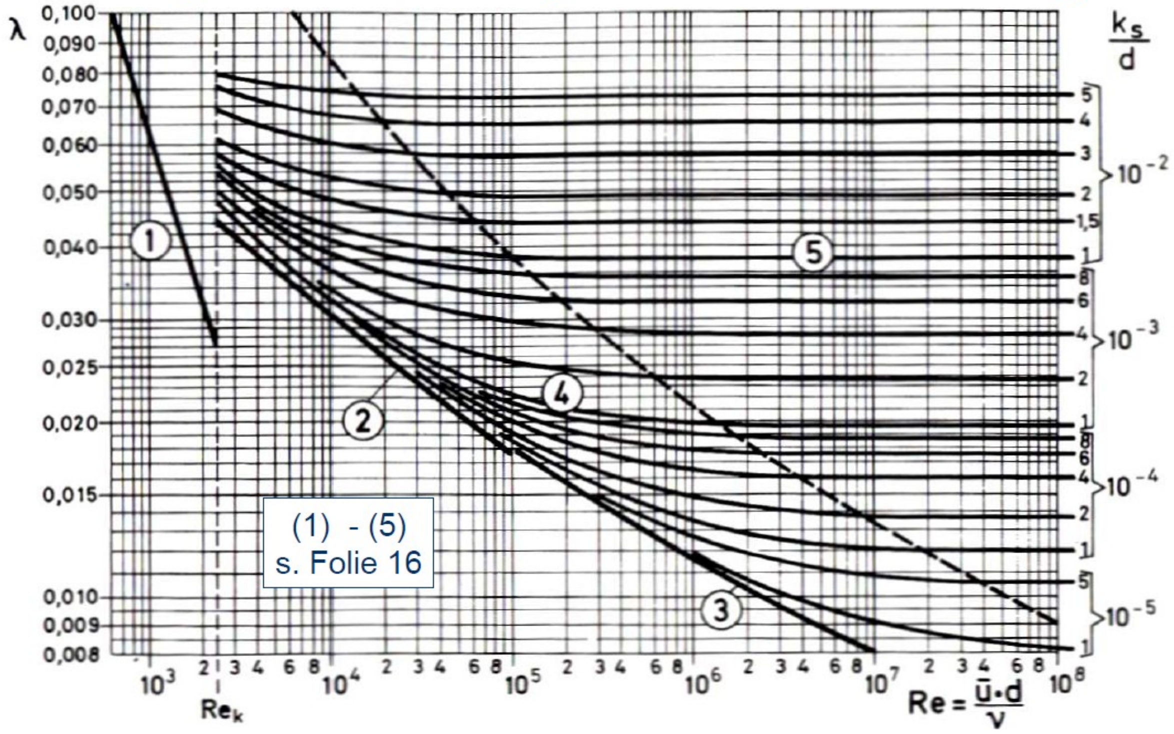
$$Re = \rho \bar{u} D_H / \eta$$
$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D_H} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2$$

allgemein Druckverlust: $\Delta p_V = \zeta \frac{\rho}{2} U^2$ **ζ – Verlustbeiwert [ ]**

erweiterter Bernoulli

$$\Delta p_V = \sum_j \lambda_j \frac{L_j}{D_j} \frac{\rho}{2} U_i^2 + \sum_i \zeta_i \frac{\rho}{2} U_i^2$$

⇨ Darstellung der Widerstandsgesetze im Colebrook-Diagramm



Durchflussmesstechnik:

Volumenstrom: $\dot{V} = \alpha \varepsilon m A_0 \sqrt{2 \frac{p_0 - p_1}{\rho}}$ **Kompressibilitätseffekt ε ,**