

Dr.-Ing. Peter Wulf - Raum F219a
<http://www.mp.haw-hamburg.de/pers/Wulf/>

4. Energieerhaltung (Bernoulli-Gleichung)

- Eulersche Bewegungsgleichung
- Bernoulli-Gleichung
- Anwendungen der Bernoulli-Gleichung
- Erweiterte Bernoulli-Gleichung

Fakultät Technik und Informatik
Department Maschinenbau und Produktion



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Hamburg University of Applied Sciences

Stand: 2009-09-14

Eulersche Gleichung für 1D-Strömungen (1/3)

- ⇒ Betrachtung eines längs einer Strombahn bewegten Fluidteilchens $dm = \rho \cdot ds \cdot dA$
- ⇒ Entlang der Strombahn ändern sich die Höhe z des Teilchens, Geschwindigkeit U und Druck p
- ⇒ 2. Newtonsches Axiom (s. TM3)

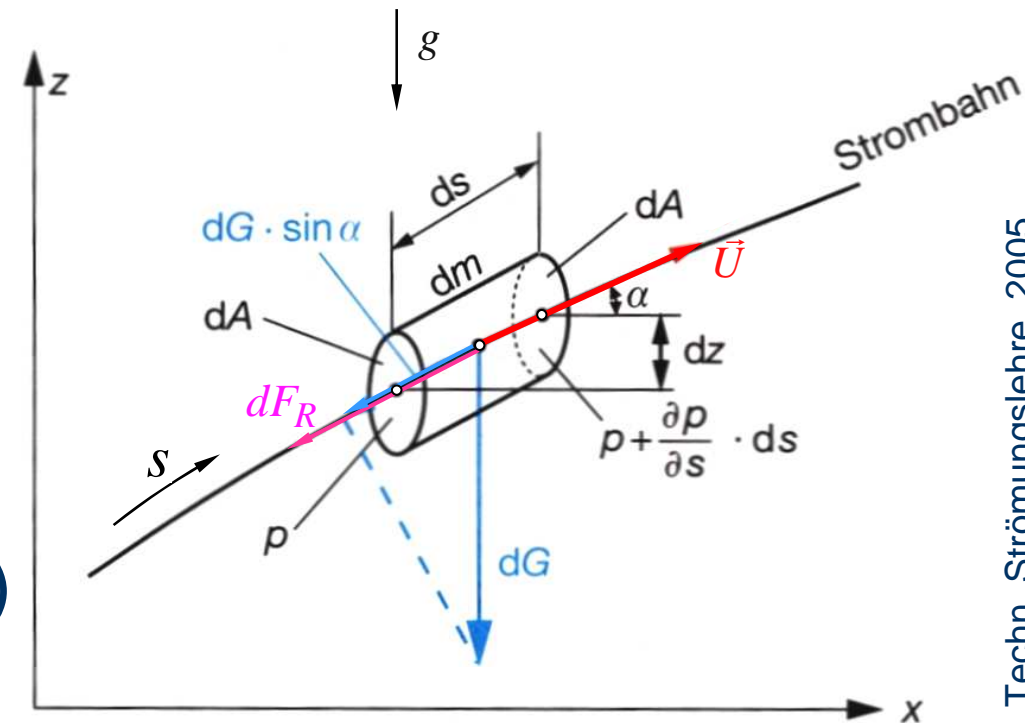
$$dm \cdot a_s = dm \cdot \frac{dU}{dt} = \sum F_s$$

a_s = Beschleunigung in Bahnrichtung

F_s = Kräfte in Bahnrichtung

- ⇒ Aufspaltung der substantiellen Beschleunigung in lokale und konvektive Beschleunigung (s. Kap. 3)

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \quad \rightarrow \quad dm \cdot \frac{dU}{dt} = \rho ds dA \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \right) = \sum F_s$$



Eulersche Gleichung für 1D-Strömungen (2/3)

- ⇒ Kräfte, die auf das Fluidteilchen wirken
 - ⇒ Gewichtskraft dG
 - ⇒ Druckkraft dF_p aus Druckdifferenz entlang ds
 - ⇒ Antriebs- und/oder Reibungskräfte dF_R

- ⇒ Gewichtskraft $dG = gdm = g\rho dsdA$
 - ⇒ Komponente in Bahnrichtung

$$dG_s = -dG \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \partial z / \partial s$$

$$dG_s = -g\rho dsdA \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

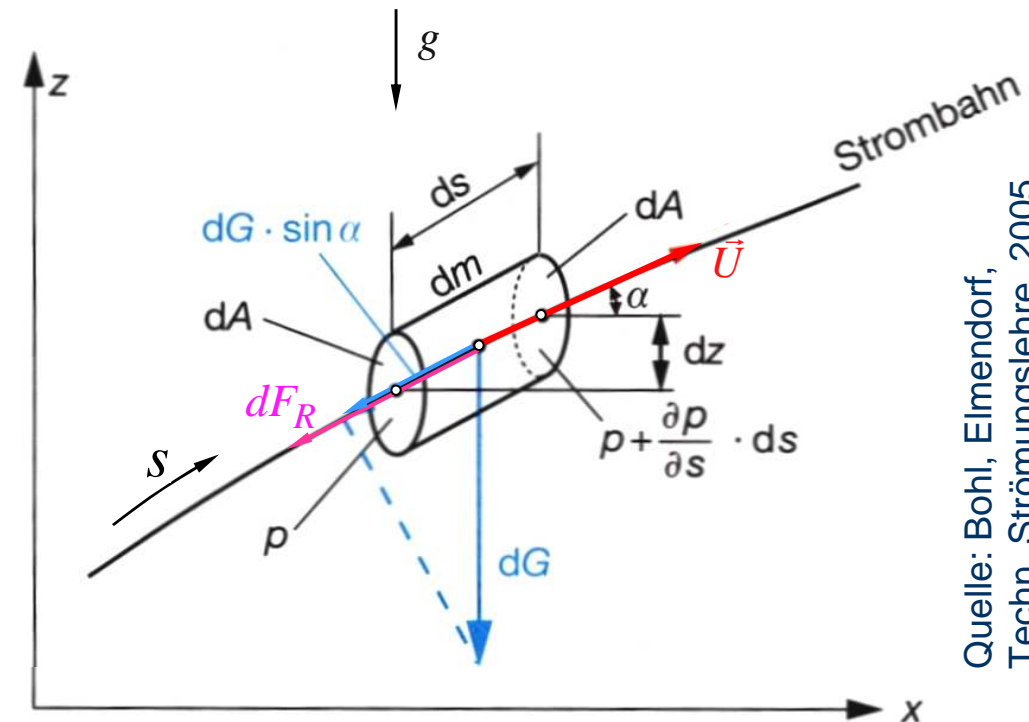


- ⇒ Druckkraft

$$dF_p = p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA = -dsdA \frac{\partial p}{\partial s}$$

- ⇒ Antriebs- und/oder Reibkräfte

- ⇒ werden als allein ortsabhängige Größen angesehen: $F_R = F_R(s)$



Quelle: Bohl, Elmendorf,
Techn. Strömungslehre, 2005

Eulersche Gleichung für 1D-Strömungen (3/3)

⇒ Eingesetzt $dm \cdot \frac{dU}{dt} = dG_s + dF_P + dF_R$

$$\rightarrow \rho ds dA \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \right) = -g \rho ds dA \frac{\partial z}{\partial s} - ds dA \frac{\partial p}{\partial s} + dF_R \quad \left| \cdot \frac{1}{\rho ds dA} \right.$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} = -g \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{dF_R}{\rho ds dA} \quad \text{--- } dm$$

⇒ Für eine feste Zeit t ($t=\text{fix}$) können alle Größen nur noch vom Ort s abhängig sein ($\partial s \rightarrow ds$). Mit $U dU / ds = \frac{1}{2} dU^2 / ds$ folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=\text{fix}} + \frac{1}{2} \frac{dU^2}{ds} = -g \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + \frac{dF_R}{dm} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=\text{fix}} ds + \frac{1}{2} dU^2 + g dz + \frac{dp}{\rho} = \frac{dF_R}{dm} ds$$

⇒ Diese Gleichung kann formal entlang der Strombahn bzw. Stromlinie ($t=\text{fix}$) integriert werden

$$\int \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=\text{fix}} ds + \frac{1}{2} \int dU^2 + \int g dz + \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dF_R}{dm} ds$$

Eulersche Bewegungsgleichung
für einen Stromfaden

Bernoulli-Gleichung für 1D-Strömungen (1/2)

⇒ Für eine stationäre ($\partial U/\partial t=0$) sowie antriebs- und reibungsfreie ($dF_R=0$) Strömung folgt: $\frac{1}{2} \int dU^2 + \int g dz + \int \frac{dp}{\rho} = 0$

⇒ Unbestimmte Integration $\frac{1}{2}U^2 + gz + \int \frac{1}{\rho} dp = const$

↑ Zustandsgleichung für Integration notwendig

⇒ Für ein inkompressibles Fluid ($\rho = \text{const}$) ergibt sich die **Bernoulli-Gleichung** längs eines Stromfadens

$$\frac{1}{2}U^2 + gz + \frac{p}{\rho} = E_0$$

1. Schreibweise als spezifische Energie. Dimension: J/kg
(die spezifische Energie bleibt erhalten: $E_0 = \text{const}$)

$$\frac{U^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H_0$$

2. Schreibweise als Höhengleichung. Dimension: m
(die hydraulische Höhe bleibt erhalten: $H_0 = \text{const}$)

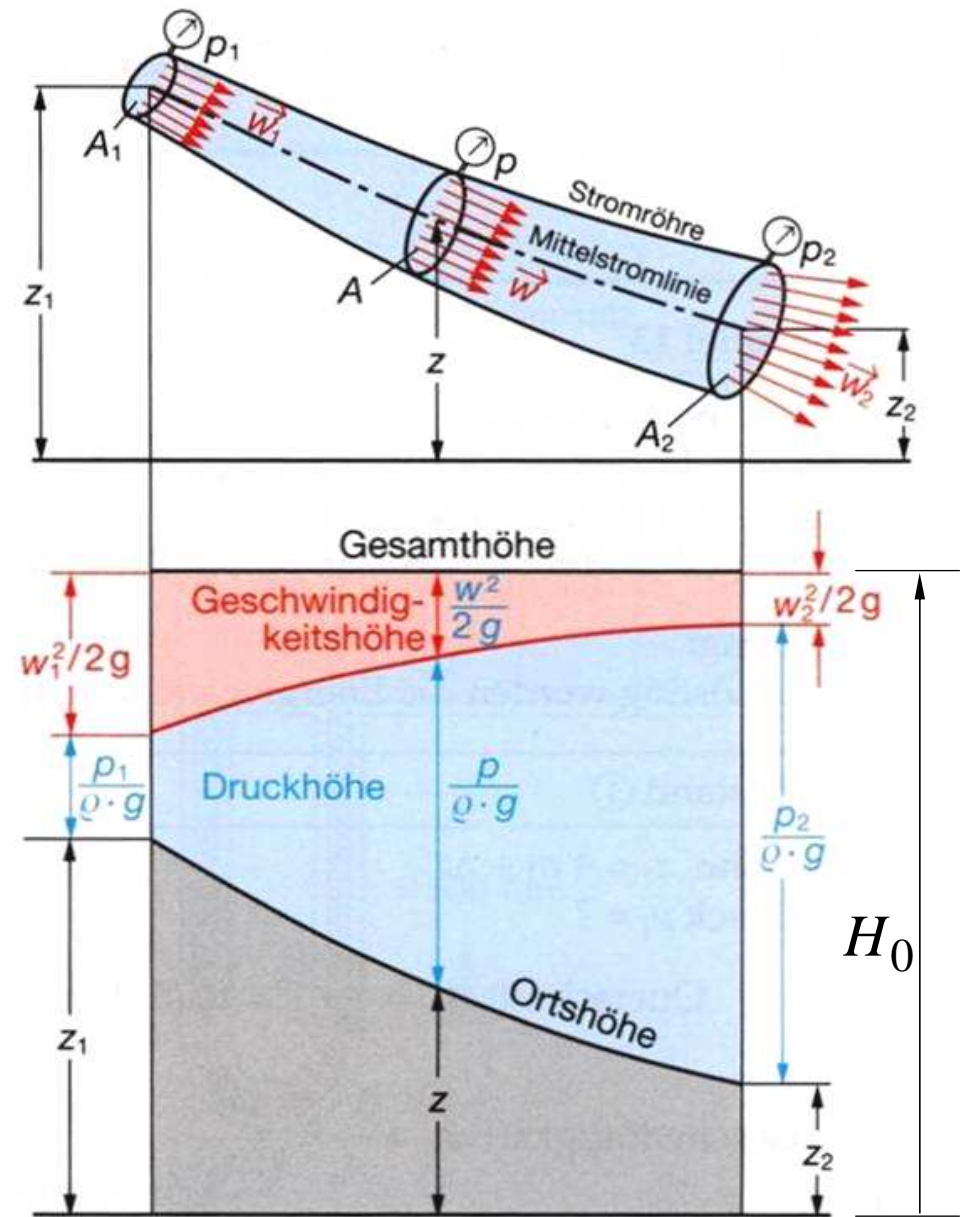
$$\frac{1}{2}\rho U^2 + \rho g z + p = P_0$$

3. Schreibweise als Druckgleichung. Dimension: Pa
(das Druckniveau bleibt erhalten: $P_0 = \text{const}$)

Bernoulli-Gleichung für 1D-Strömungen (2/2)

- ⇒ Stromröhre: Anwendung der Bernoulli-Gleichung auf die repräsentative Mittelstromlinie
- ⇒ Anschauliche Deutung für die Schreibweise in Höhenform
 - ⇒ Ortshöhe z
 - ⇒ Druckhöhe $p/\rho g$
 - ⇒ Geschwindigkeitshöhe $U^2/2g$

$$\frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = H_0$$



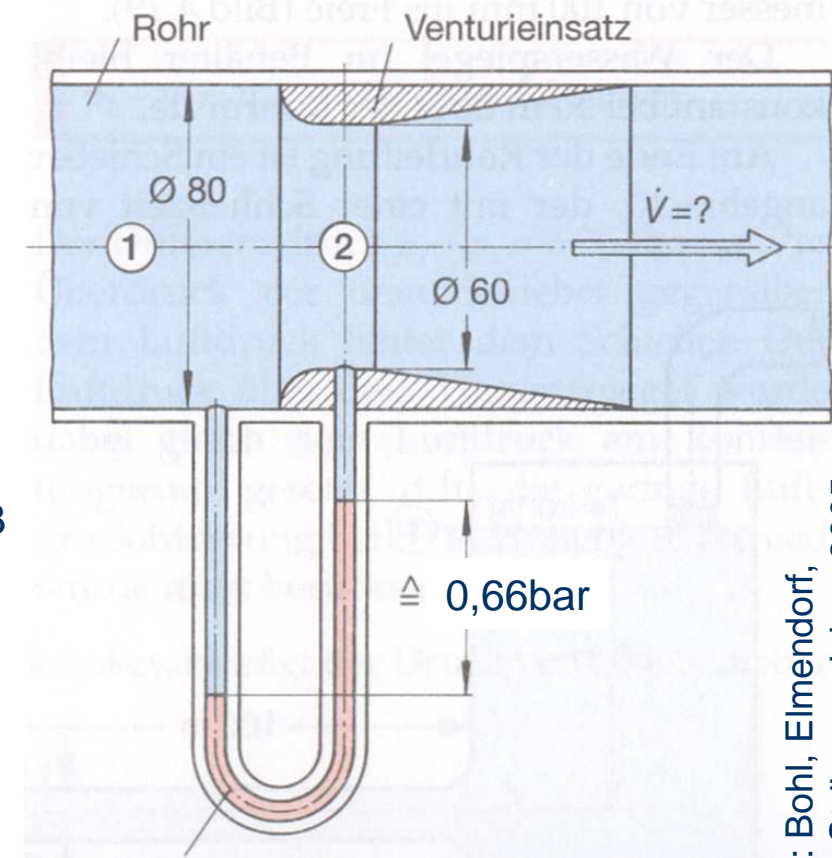
Beispiel

⇒ Ein horizontales zylindrisches Rohr mit Venturi-Einsatz wird reibungsfrei und stationär durchströmt. Zwischen der Strömung im Rohr und in der Einschnürung wird ein Druckunterschied von 0,66bar gemessen.

Geg.: $\varnothing_1=80\text{mm}$, $\varnothing_2=60\text{mm}$, $\rho=1000\text{kg/m}^3$

Ges.: Volumenstrom \dot{V}

⇒ Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet



Quelle: Bohl, Elmendorf,
Techn. Strömungslehre, 2005

Bedeutung der Bernoulli-Gleichung

- ⇒ Interpretation der Bernoulli-Gleichung als Energiegleichung
 - ⇒ Energiebeiträge durch
 - ⇒ Spezifische Druckarbeit p/ρ
 - ⇒ Spezifische potentielle Energie gz
 - ⇒ Spezifische kinetische Energie $U^2/2$
 - ⇒ Energiezufuhr oder -abfuhr durch Term $\int dF_R/dm \cdot ds$ (später)
 - ⇒ Herleitung erfolgte über die Bewegungsgleichung
 - ⇒ Daher: Beschränkung auf mechanische Energie
- ⇒ Alternative Herleitung
 - ⇒ Erster Hauptsatz der Thermodynamik
 - ⇒ Bilanziert alle auftretenden Energiearten
 - ⇒ Beinhaltet Energietransfer durch Wärmeübertragung
 - ⇒ Enthält Bernoulli-Gleichung als Spezialfall

Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

⇒ Stationärer reibungsfreier Ausfluss aus einem Behälter

- ⇒ Ausflussquerschnitt $A_S \ll$ Behälterquerschnitt A_B
- ⇒ Quasi-Stationärer Prozess
- ⇒ Reibungsfreie Strömung
- ⇒ Inkompressible Flüssigkeit

⇒ Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}U_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}U_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

⇒ Kontinuitäts-Gleichung

$$\rho U_1 A_B = \rho U_2 A_S$$

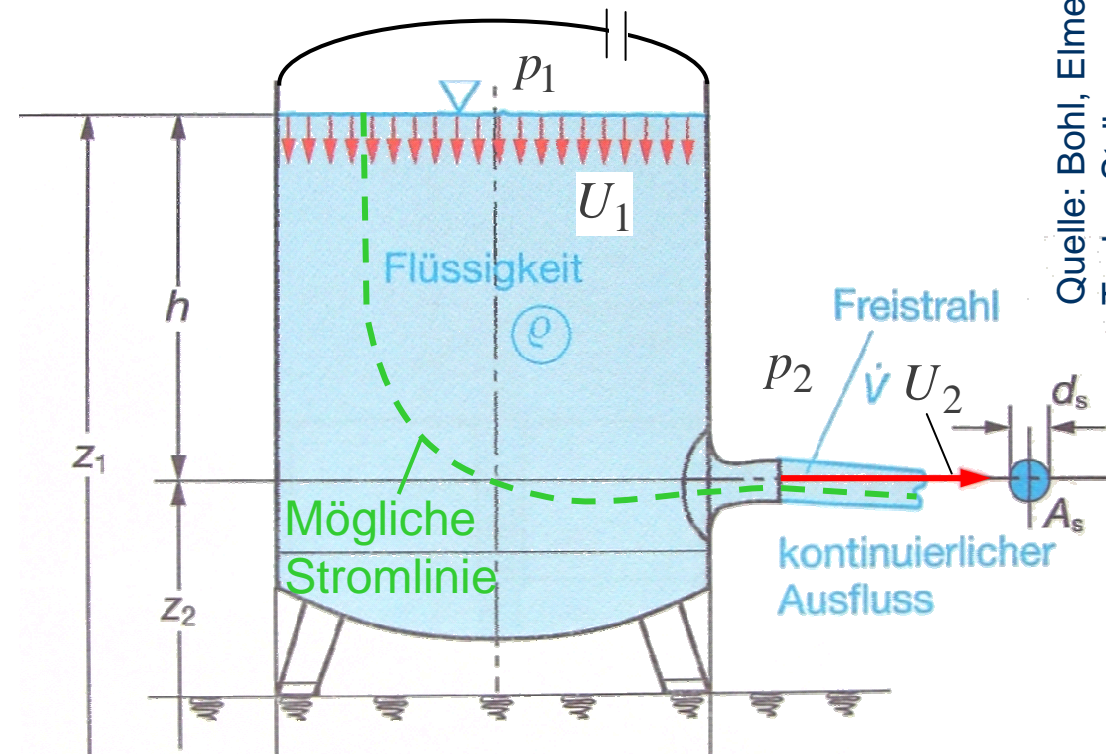
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{A_S}{A_B} \ll 1 \rightarrow U_1 \approx 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}U_2^2 = g \underbrace{(z_1 - z_2)}_h + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \rightarrow U_2 = \sqrt{2gh + \frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}$$

Bei offenen Behältern: $p_1 = p_2$

$$U_2 = \sqrt{2gh}$$

Ausflussformel nach Torricelli (1644)



Quelle: Bohl, Elmendorf,
Techn. Strömungslehre, 2005

Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

⇒ Staupunktströmungen: Geschwindigkeit im Staupunkt $U_S=0$

⇒ Bernoulli-Gleichung für Staupunktstromlinie

$$\frac{1}{2}U_\infty^2 + gz_\infty + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{1}{2}U_S^2 + gz_S + \frac{p_S}{\rho}$$

$$p_S = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 + \underbrace{\rho g(z_\infty - z_S)}_0$$

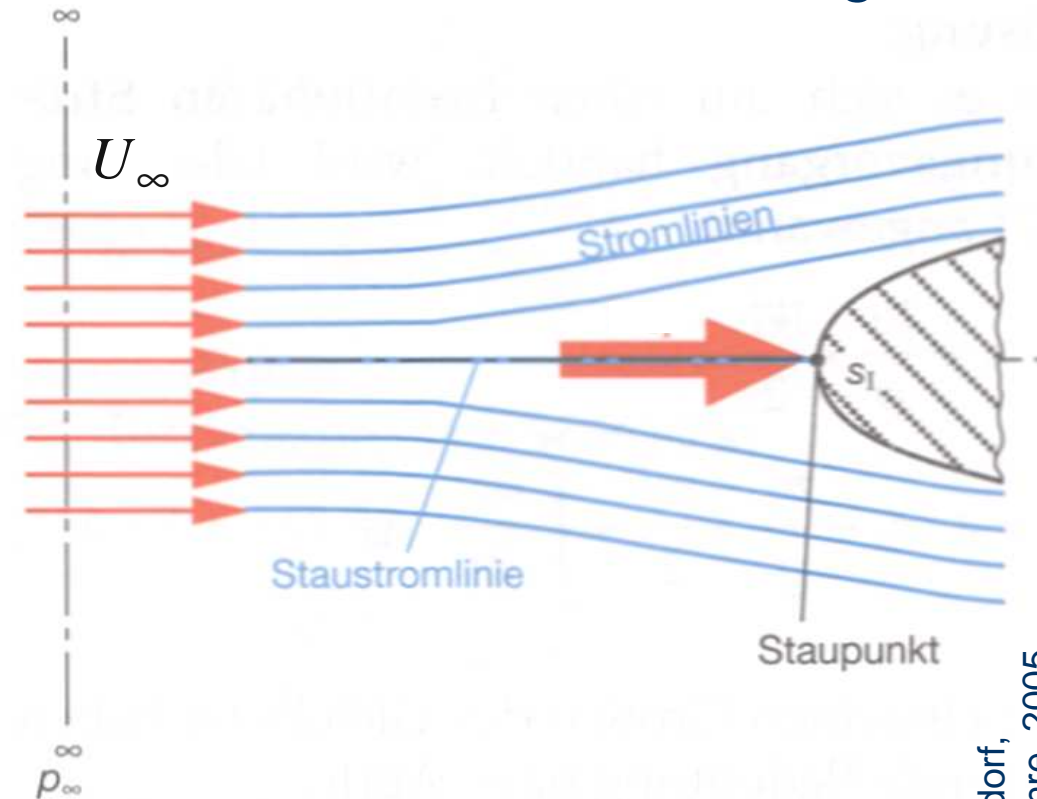
⇒ Druck im Staupunkt entspricht dem **Totaldruck**

$$p_t = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_{stat} + p_{dyn}$$

bestehend aus statischen und dynamischen Druck

⇒ **Statischer Druck** $p_{stat} = p_\infty = p_t - p_{dyn}$

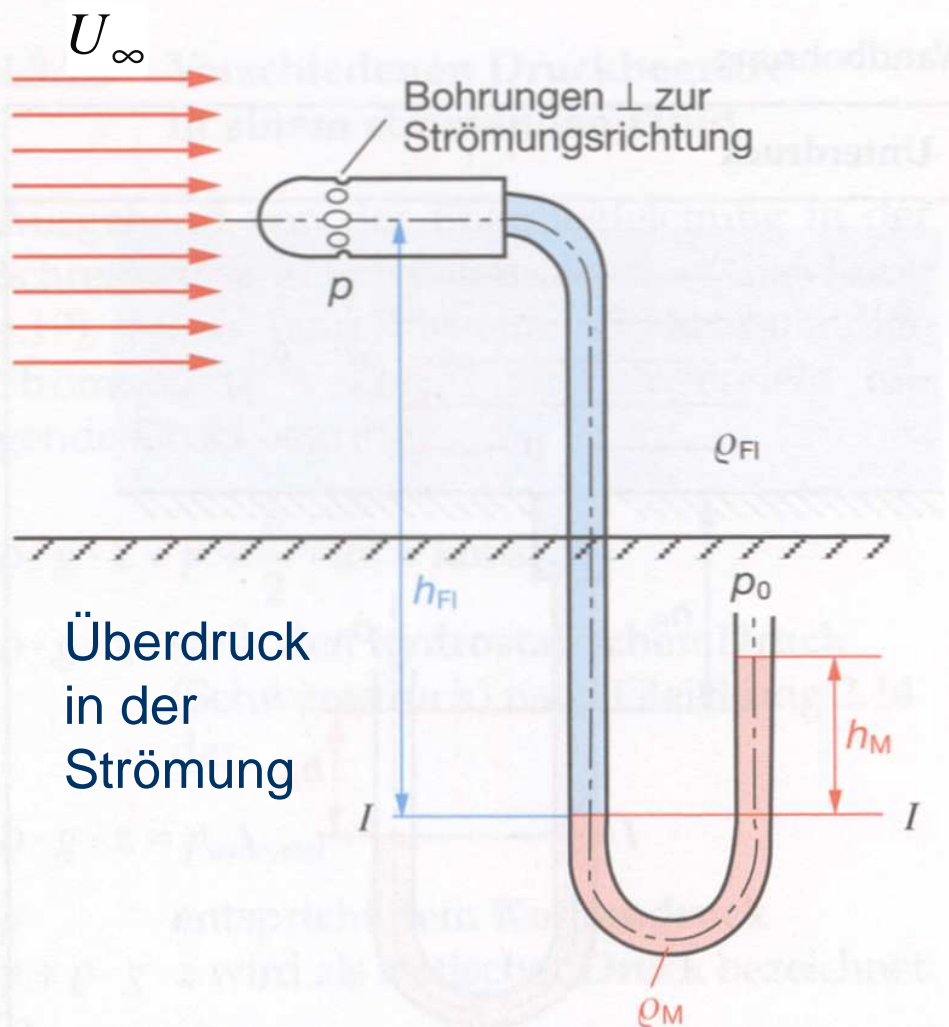
⇒ **Dynamischer Druck** $p_{dyn} = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_t - p_{stat}$ (Staudruck)



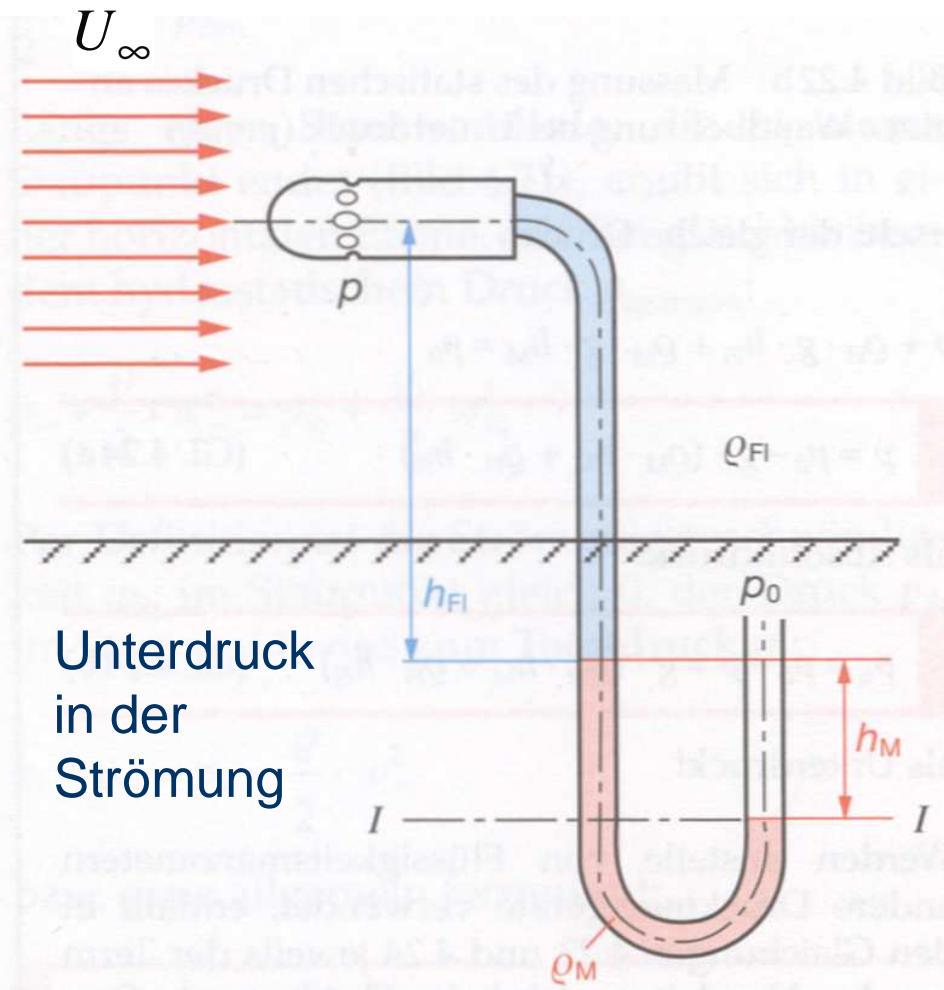
Quelle: Bohl, Elmendorf,
Techn. Strömungslehre, 2005

Messung des statischen Drucks

⇒ Messung des Statischen Drucks durch eine Wandbohrung oder eine statische Sonde. Wichtig: Bohrung \perp Strömung



$$p_{\ddot{u}} = p_{stat} - p_0 = g(\rho_M h_M - \rho_{Fl} h_{Fl})$$



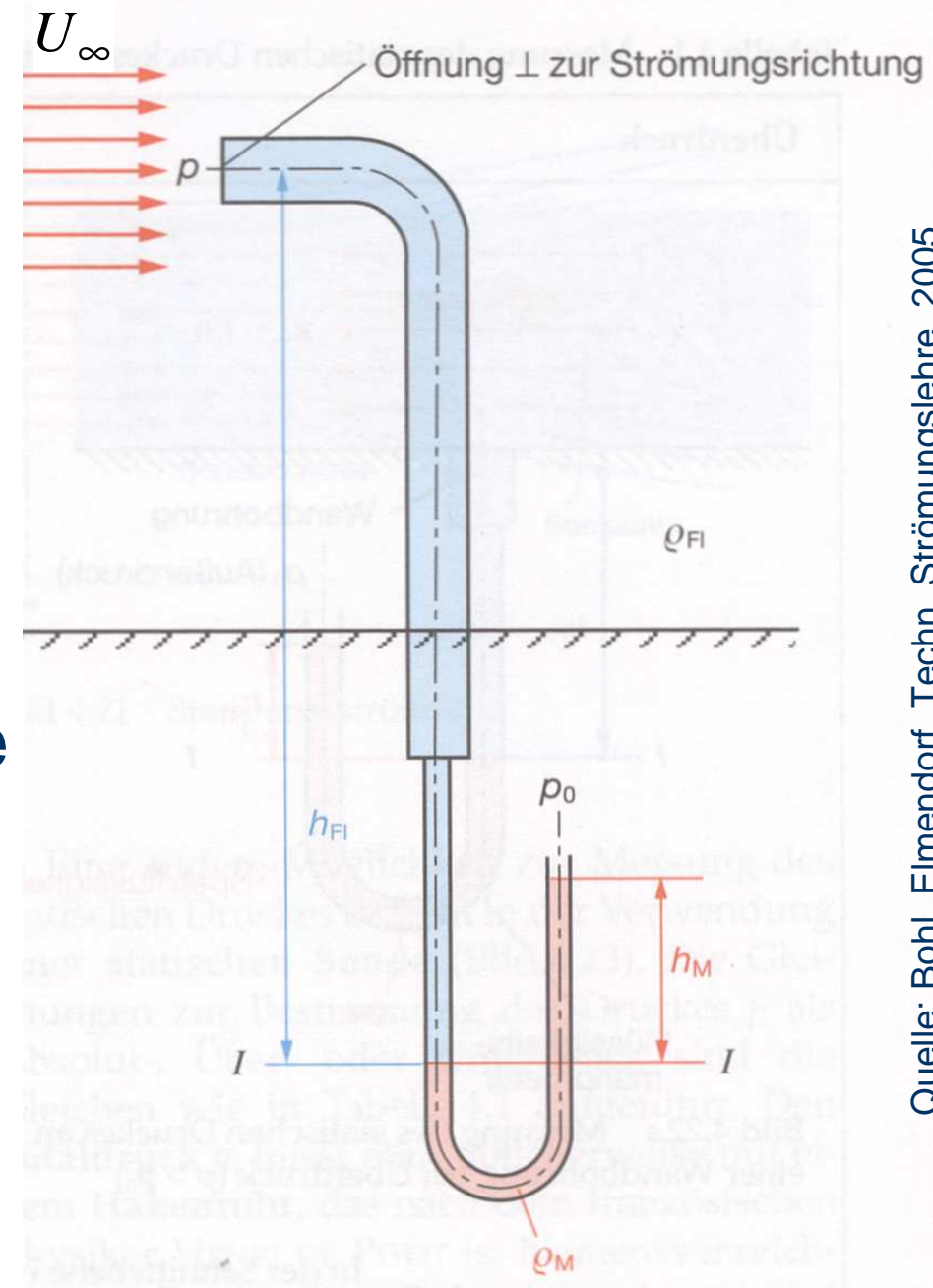
$$p_u = p_0 - p_{stat} = g(\rho_M h_M + \rho_{Fl} h_{Fl})$$

Messung des Totaldrucks (Gesamtdruck)

- ⇒ Messung des Totaldrucks durch eine Bohrung im Staupunkt mit Ausrichtung zur Strömung (Öffnung \perp Strömung)

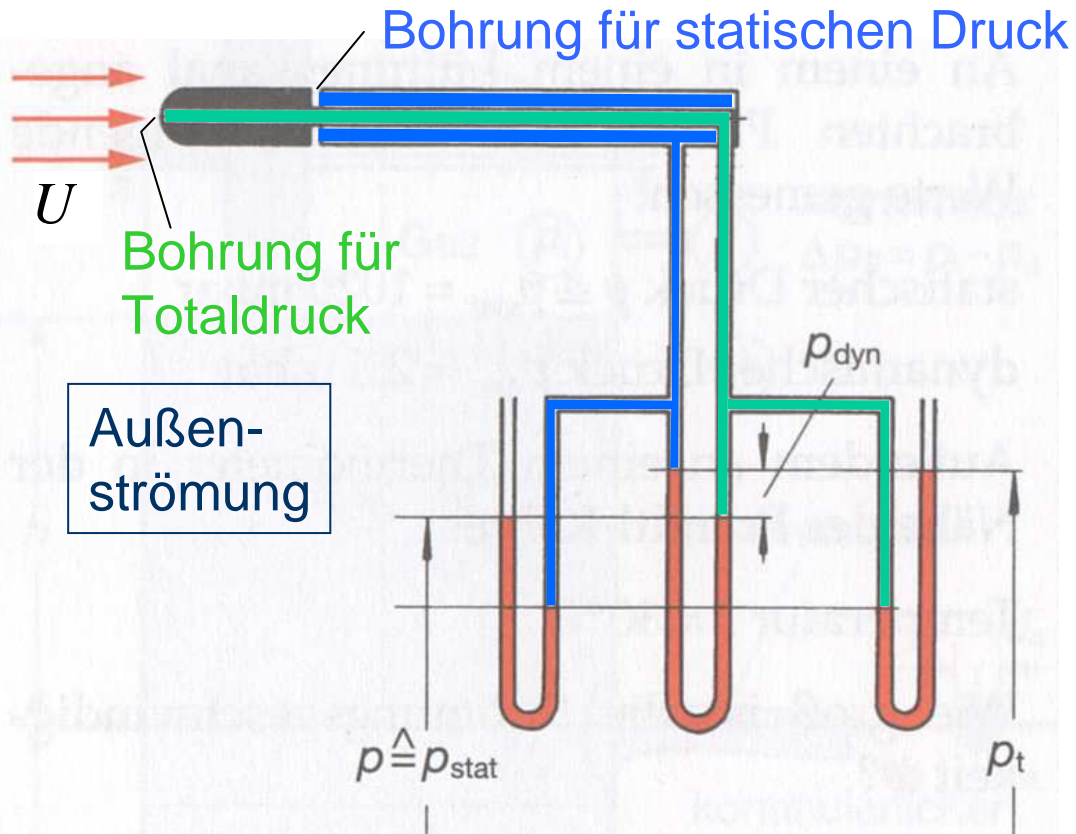
$$\begin{aligned} p_t &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho_{Fl} U_\infty^2 \\ &= p_0 + g(\rho_M h_M - \rho_{Fl} h_{Fl}) \end{aligned}$$

- ⇒ Typische Ausführung als schlanke Hakensonde (Pitot-Rohr)

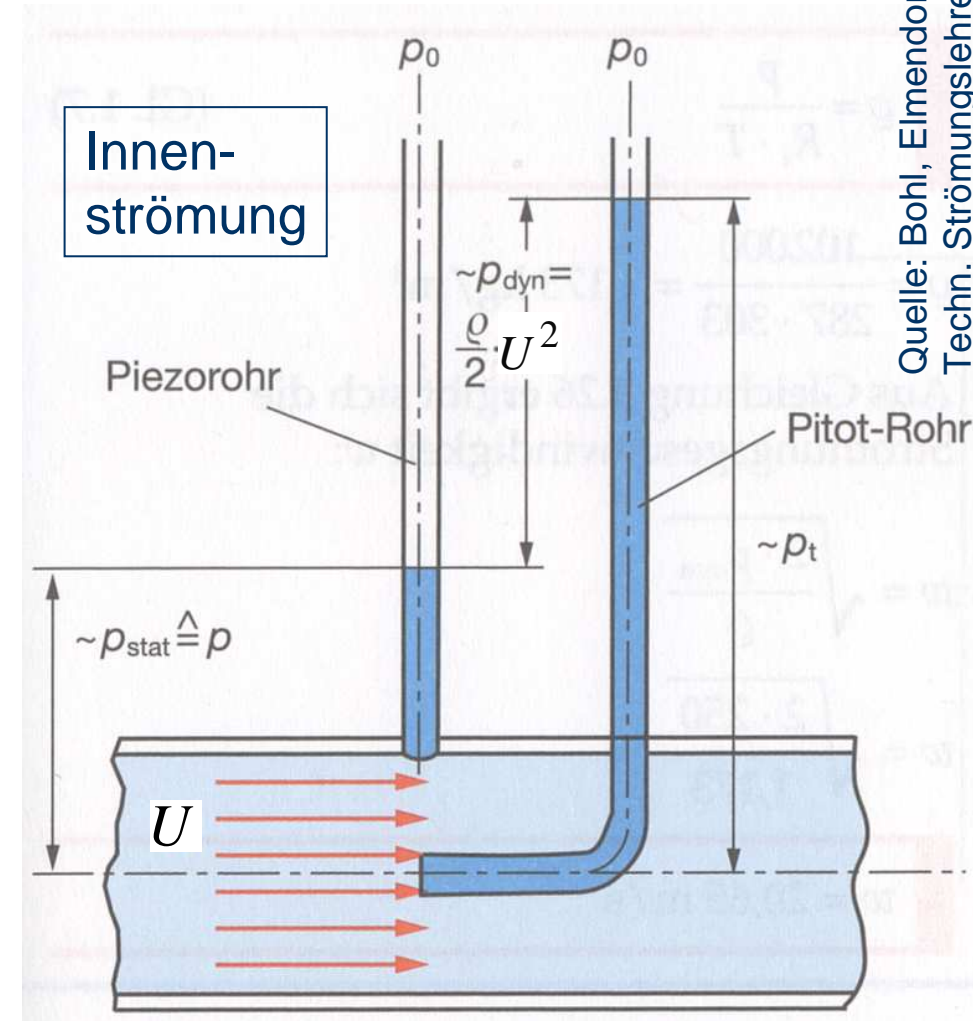


Messung des dynamischen Drucks

⇒ Kombination aus Totaldrucksonde und statischer Sonde



Prandtl-Sonde

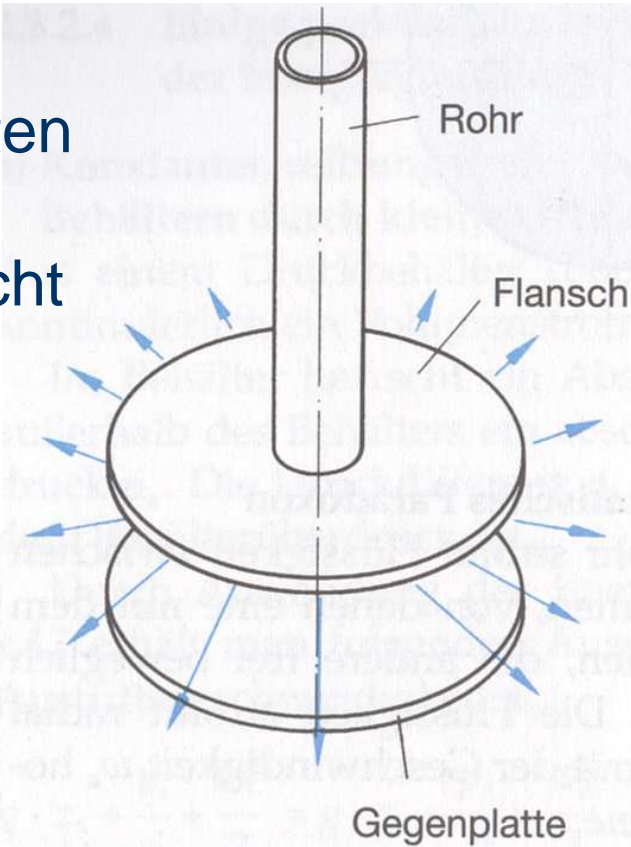
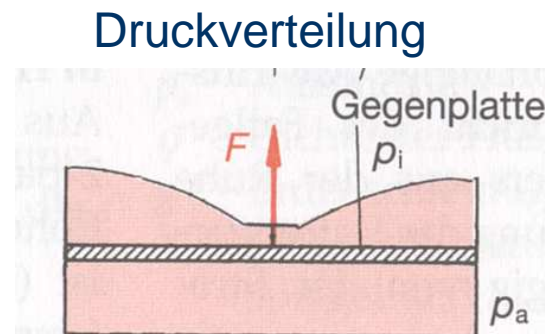
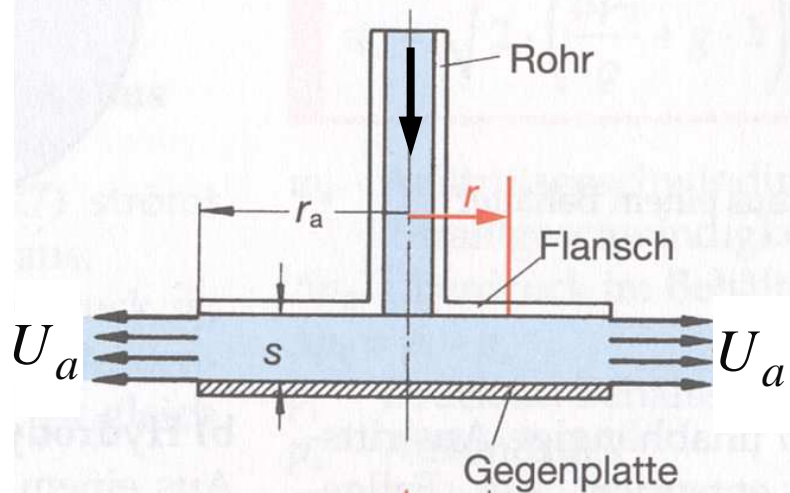


⇒ Strömungsgeschwindigkeit
$$U = \sqrt{\frac{2}{\rho} p_{dyn}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_t - p_{stat})}$$

Anwendungen der Bernoulli-Gleichung

⇒ Hydrodynamisches Paradoxon

- ⇒ Radial durchströmter Spalt zwischen zwei Platten
- ⇒ Zuströmung durch zentral positioniertes Rohr
- ⇒ Am Außenrand wird Umgebungsdruck p_a erreicht
- ⇒ Spalthöhe s , Außenradius r_a



⇒ Bernoulli-Gleichung (Spalt) $\frac{1}{2}U^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}U_a^2 + \frac{p_a}{\rho} \rightarrow p - p_a = \frac{\rho}{2}(U_a^2 - U^2)$

⇒ Kontinuitäts-Gleichung $\rho U(r) \cdot 2\pi r s = \rho U_a \cdot 2\pi r_a s \rightarrow U(r) = U_a \frac{r_a}{r}$

⇒ Druckdifferenz $p - p_a = \frac{\rho}{2}U_a^2 \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2}\right) < 0$ { Saugkraft F trotz des Gegenstroms aus dem Rohr

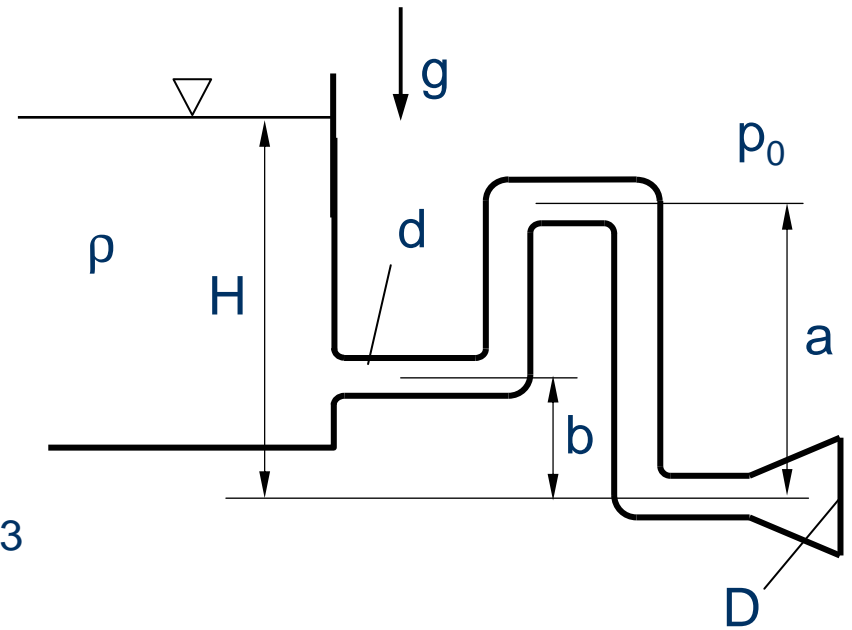
Beispiel

⇒ Aus einem großen Behälter fließt eine Flüssigkeit (Dichte ρ) durch eine Rohrleitung (Durchmesser d) ab. Am Ende der Leitung befindet sich ein Diffusor mit Auslassdurchmesser D .

Geg.: $H=10\text{m}$, $a=6\text{m}$, $b=2\text{m}$, $d=0,1\text{m}$
 $p_0=1\text{bar}$, $g=9,81\text{m/s}^2$, $\rho=1000\text{kg/m}^3$

Ges.: a) Maximal möglicher Durchmesser D , ohne dass der Druck in der Rohrleitung unter $p_{\text{kav}}=0,15\text{bar}$ fällt
b) Volumenstrom \dot{V} (mit D aus a))
c) Strömungsgeschwindigkeit im Rohr

⇒ Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet



Erweiterte Bernoulli-Gleichung für 1D-Strömungen (1/3)

⇒ Zusätzliche Änderungen der mechanischen Energie

- ⇒ Spezifische kinetische Energie $U^2/2$ entlang des Stromfadens ist durch U_1 (oder U_2) und die Kontinuitätsgleichung festgelegt
- ⇒ Spezifische potentielle Energie gz ist durch die Lage der Strombahn festgelegt
- ⇒ Zufuhr oder Abfuhr von mechanischer Energie kann sich daher nur in einer zusätzlichen Druckänderung Δp bemerkbar machen
 - ⇒ Druckverluste Δp_V durch Reibung bzw. Dissipation → rechte Seite ($\Delta p_V > 0$)
 - ⇒ Druckerhöhung $\Delta p_M > 0$ bei einer Pumpe (Zufuhr von Energie)
 - ⇒ Druckabsenkung $\Delta p_M < 0$ bei einer Turbine (Entnahme von Energie)

⇒ Erweiterte Bernoulli-Gleichung für inkompressible Fluide

$$\frac{1}{2}U_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\Delta p_M}{\rho} = \frac{1}{2}U_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\Delta p_V}{\rho}$$

↑
Druckerhöhung durch eine Pumpe ($\Delta p_M > 0$)
Druckabsenkung durch eine Turbine ($\Delta p_M < 0$)

↑
Druckverluste ($\Delta p_V > 0$) durch
Dissipation bzw. Reibung

Erweiterte Bernoulli-Gleichung für 1D-Strömungen (2/3)

- ⇒ Druckänderungen $\Delta p / \rho$ entsprechen dem bisher vernachlässigten Term $\int dF_R / dm \cdot ds$ (Eulersche Gleichung, s. Folie 3)
- ⇒ Druckänderungen $\Delta p / \rho$ können als spezifische Arbeit w interpretiert werden
 - ⇒ Spezifische technische Arbeit einer Pumpe $w_{t_M} = W_M / m = P_M / \dot{m} > 0$
 - ⇒ Spezifische technische Arbeit einer Turbine $w_{t_M} = W_M / m = P_M / \dot{m} < 0$
 - ⇒ Spezifische Verlustarbeit der Reibung $w_V = W_V / m = P_V / \dot{m}$
 - ⇒ $W_M =$ entlang der Stromlinie geleistete oder entzogene Arbeit
 - ⇒ $W_V =$ entlang der Stromlinie entstandene Verlustarbeit
 - ⇒ $P_M =$ zu- oder abgeführte Leistung entlang der Stromlinie
 - ⇒ $P_V =$ Verlustleistung entlang der Stromlinie

Leistung einer Strömungsmaschine:

$$P_M = \dot{m} \cdot w_{t_M} = \rho \dot{V} \cdot w_{t_M} = \rho \dot{V} \cdot \frac{\Delta p_M}{\rho} = \dot{V} \cdot \Delta p_M$$

Verlustleistung durch Reibung:

$$P_V = \dot{m} \cdot w_V = \rho \dot{V} \cdot w_V = \rho \dot{V} \cdot \frac{\Delta p_V}{\rho} = \dot{V} \cdot \Delta p_V$$

Erweiterte Bernoulli-Gleichung für 1D-Strömungen (3/3)

⇒ Wirkungsgrad einer Pumpe $\eta = \frac{P_M}{P_W} = \frac{\dot{m} \cdot w_{t_M}}{P_W} < 1$

⇒ Wirkungsgrad einer Turbine $\eta = \frac{P_W}{P_M} = \frac{P_W}{\dot{m} \cdot w_{t_M}} < 1$

⇒ P_W = an der Welle aufgewendete oder genutzte Leistung

⇒ Berücksichtigung zusätzlicher Energieformen

- ⇒ Bernoulli-Gleichung wurde aus der Bewegungsgleichung hergeleitet
- ⇒ Enthält nur mechanische Energiearten
- ⇒ Reibung wird nur über den Druckverlust ausgedrückt
- ⇒ Änderungen der inneren Energie (i.S. der Thermodynamik) werden nicht wiedergegeben, d.h. Erwärmung durch Dissipation, Wärmeleitung und Zustandsänderungen von Gasen werden nicht erfasst

⇒ Bestimmung der Druckverluste durch Reibung

- ⇒ Ansätze werden im Kapitel 6 vorgestellt

Beispiel

⇒ Eine Turbinenanlage (Wirkungsgrad η) nutzt die Fallhöhe zwischen dem Ober- und Unterwasser eines Stausees. Dabei fließt der Volumenstrom \dot{V} durch die Anlage. In der Rohrleitung tritt der Druckverlust Δp_v auf.

Geg.: $H=30\text{m}$, $\dot{V}=4\text{m}^3/\text{s}$, $U_2=1\text{m/s}$, $\Delta p_v=100\text{Pa}$,
 $\eta=0,85$, $\rho=1000\text{kg/m}^3$, $g=9,81\text{m/s}^2$

Ges.: Nutzleistung P_w der Turbine

⇒ Beispiel wird an der Tafel vorgerechnet

