# Automi a stati finiti non deterministici

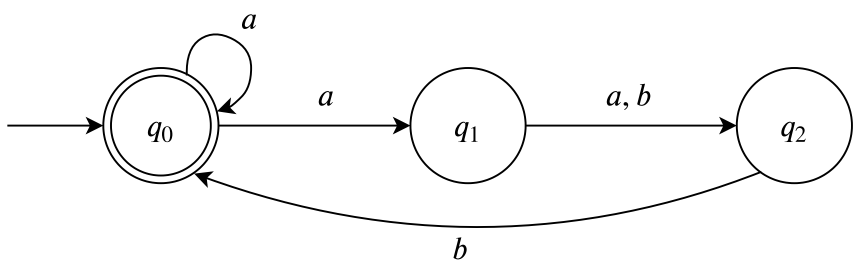
Un automa a stati finito non deterministico è una quintupla $< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ dove:

- $Q, \Sigma, q_0, F$ assumono lo stesso significato che hanno negli automi deterministici;
- $\delta$ resta la funzione di transizione, ma si definisce come: $\delta : Q \text{ x } \Sigma \to P(Q)$.

Poichè $P(Q)$ rappresenta l'insieme degli stati raggiungibili daopo aver letto un segno (più di uno essendo non deterministico l'automa), è possibile che $\delta(q, a) = \emptyset$. Il numero di stati raggiungibili è comunque limitato ($|\delta(q, a)| < \omega$ -> il numero di "fork" per stati successivi deve essere limitato).

Attualmente questi automi sono solo ideali, non ne esistono di reali. Praticamente sono macchine che operano in parallelo senza vincoli (per ogni "operazione" creo un nuovo stato dove la eseguo, così le eseguo tutte parallelamente).

Esempio:




La funzione $\hat{\delta}$ si ridefinisce come segue:

$$\hat{\delta} : Q \text{ x } \Sigma^* \to P(Q) = \begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\} \\ \hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a) \end{cases}$$

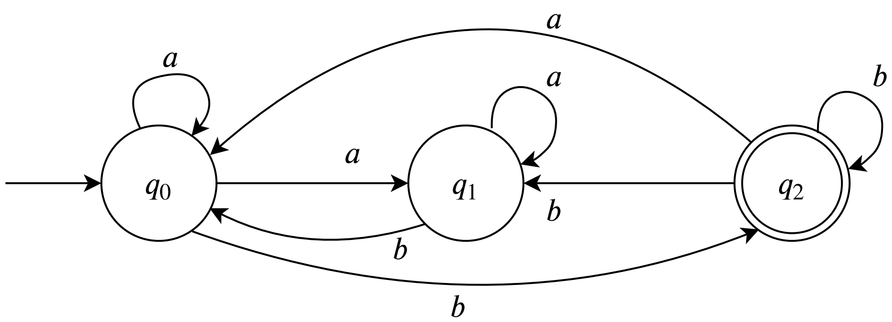
Con $\{q\}$ si intende l'insieme singoletto che contiene solo $q$, mentre $\bigcup$ indica "unione di tutti".

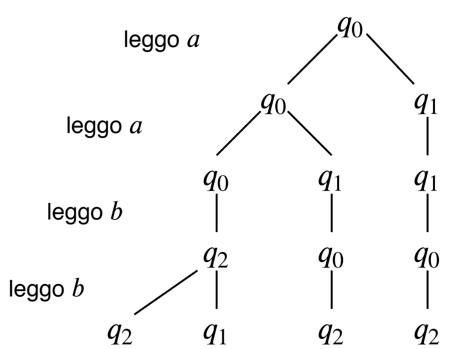
## Linguaggio accettato da un automa non deterministico

Il linguaggio accettato da questo tipo di automi è definito come segue:

$$\mathfrak{L}(M) = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, \sigma) \cap F \neq \emptyset\}$$

Esempio: Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; stringa da leggere: $aabb$.



**Teorema di Rabin - Scott (n. 1 1959)** Sia $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un automa a stati finiti non deterministico, allora esiste un automa a stati finiti deterministico $M'$ tale che $\mathfrak{L}(M) = \mathfrak{L}(M')$.

**Dimostrazione**

Definiamo $M =< Q', \Sigma', \delta', q_0', F' >$ come segue:

- $\Sigma' = \Sigma$;
- $Q' = P(Q)$;
- $q_0' = \{q_0\}$;
- $F' = \{P \subset Q : P \cap F \neq \emptyset\}$;
- $\delta'(P, a) = \bigcup_{p \in P \delta(p,a)}$, per $P \in P(Q)$;

Dimostriamo quindi, per induzione, che $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}'(q_0', x)$:

Dimostriamo per induzione che $\forall \sigma \in \Sigma^*.\hat{\delta}(q_0, \sigma) = \hat{\delta}'(q_0', \sigma)$.
Caso base $|\sigma| = 0$:

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\} = q_0' = \hat{\delta}(q_0', \varepsilon)$$

Passo induttivo:

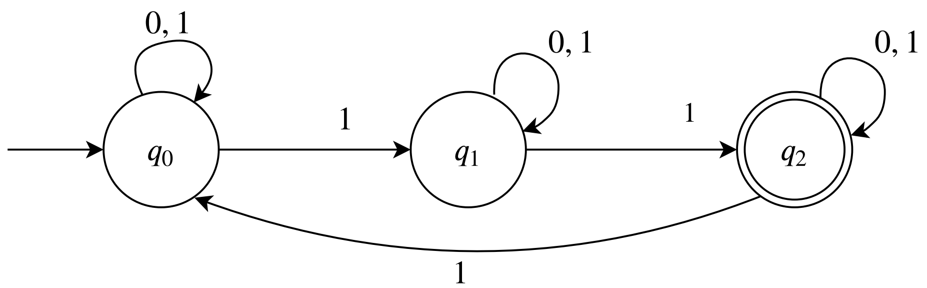
$$\hat{\delta}'(q_0', \sigma a) = \delta'(\hat{\delta}'(q_0', \sigma), a) = \delta'(\hat{\delta}(q_0, \sigma), a) = \bigcup_{P \in \hat{\delta}(q_0, \sigma)} \delta(P, a) = \hat{\delta}(q_0, \sigma a)$$

Da questo consegue che:

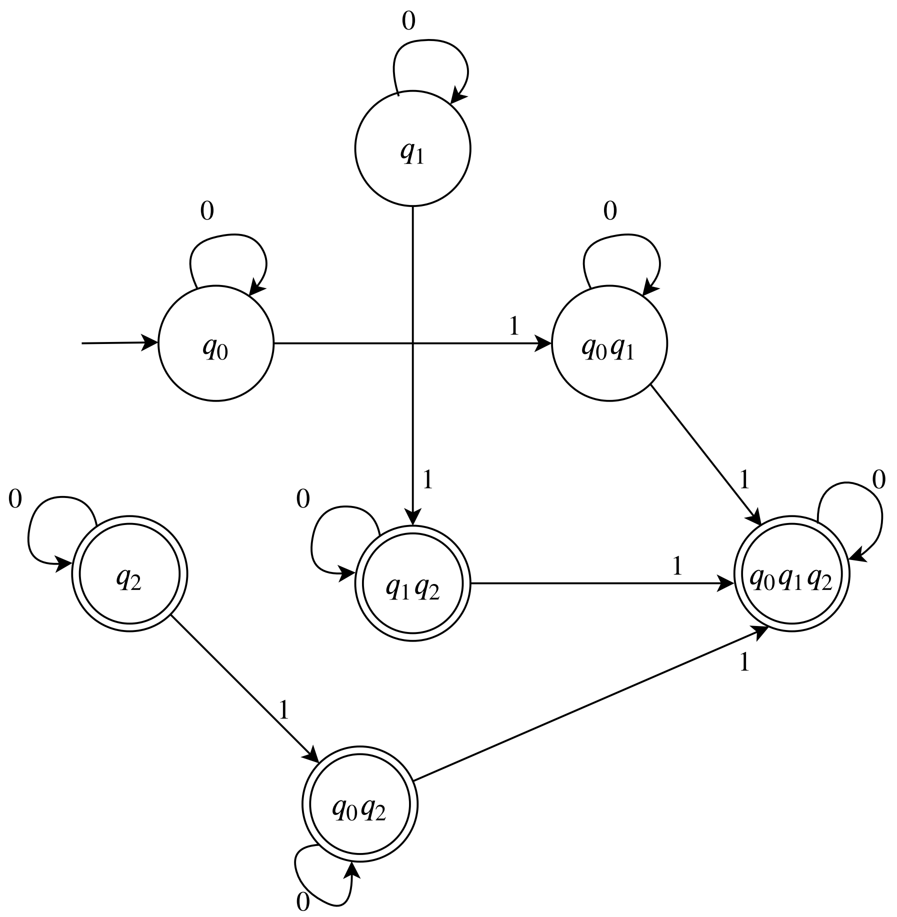
$$x \in \mathfrak{L}(M) \iff \hat{\delta}(q_0, \sigma) \cap F \neq \emptyset \iff \hat{\delta}'(q_0', \sigma) \cap F \neq \emptyset \iff \hat{\delta}'(q_0', \sigma) \in F' \iff x \in L(M')$$

Esempio:

A partire dal seguente automa a stati finiti non definito, disegnare il relativo automa di Rabin - Scott.




(Automa non definito)




(Relativo automa di Rabin - Scott)

Osservazioni:

- L'automa di Rabin - Scott avrà $2^n$ stati (con $n$ = numero stati dell'automa non definito);
- Nello schema, l'ottavo stato rappresenta l'insieme vuoto (quindi non è rappresentato);
- $q_0q_1$, ad esempio, rappresenta un insieme di stati;
- Un automa deterministico può essere visto come il caso speciale di quello non deterministico.

## Automi a stati finiti non deterministici con $\varepsilon$ - transizioni

Un automa a stati finiti non deterministico con $\varepsilon$ - transizioni è una quintupla $< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ dove:

- $Q, \Sigma, q_0, F \subseteq Q$ assumono lo stesso significato che hanno negli automi non deterministici;
- $\delta$ resta la funzione di transizione, ma si definisce come: $\delta : Q$ x $(\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to P(Q)$.

L'idea è che da uno stato è permesso passare ad un altro stato anche senza "leggere" caratteri di input.

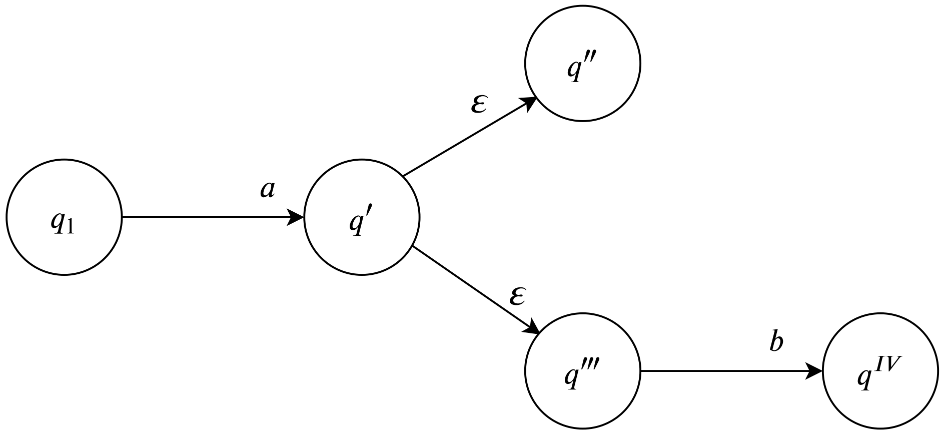
Si definisce $\varepsilon - chiusura$ la seguente funzione:

$$\varepsilon - chiusura = \{q \in Q \mid p \to Q\}$$

In pratica, applicata ad uno stato, restituisce l'insieme degli stati raggiungibili da esso (compreso se stesso) tramite $\varepsilon$ - transizioni.

la funzione $\hat{\delta}$ si può definire come segue:

$$\hat{\delta} = \begin{cases} \hat{\delta}(q, \varepsilon) = \varepsilon - chiusura(q) \\ \hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \varepsilon - chiusura[\delta(p, a)] \end{cases}$$




**Teorema di Rabin - Scott (n. 2 1952)** Sia $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un automa a stati finiti non deterministico con $\varepsilon$ - transizioni, allora esiste un automa a stati finiti non deterministico $M'$ tale che $\mathfrak{L}(M) = \mathfrak{L}(M')$.

**Dimostrazione**

Definiamo $M =< Q', \Sigma', \delta', q_0', F' >$ come segue:

- $\Sigma' = \Sigma$;
- $Q' = Q$;
- $q_0' = q_0$;
- $F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{se } \varepsilon - chiusura(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$;
- $\delta'(q, a) = \delta(\hat{q}, a)$;

Dimostriamo quindi, per induzione, che $\hat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$ se e solo se $\hat{\delta}'(q_0', x) \cap F' \neq \emptyset$ (ipotesi induttiva $\forall x \in \Sigma^* \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}'(q_0, x)$):

Caso base $|x| = 0$:

$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \varepsilon \text{ - } chiusura(q_o) = \varepsilon \text{ - } chiusura(\delta(q_o, \varepsilon))$$

Passo induttivo:

$$\hat{\delta}'(q_0', xa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}'(q_0', x)} \delta'(p, a) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}'(q_0', x)} \hat{\delta}(p, a) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, x)} \hat{\delta}(p, a) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, x)} \hat{\delta}'(p, a) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, x)} \varepsilon\text{-}chiusura(\delta(p, a)) = \hat{\delta}(q_0, xa)$$

# Linguaggi regolari

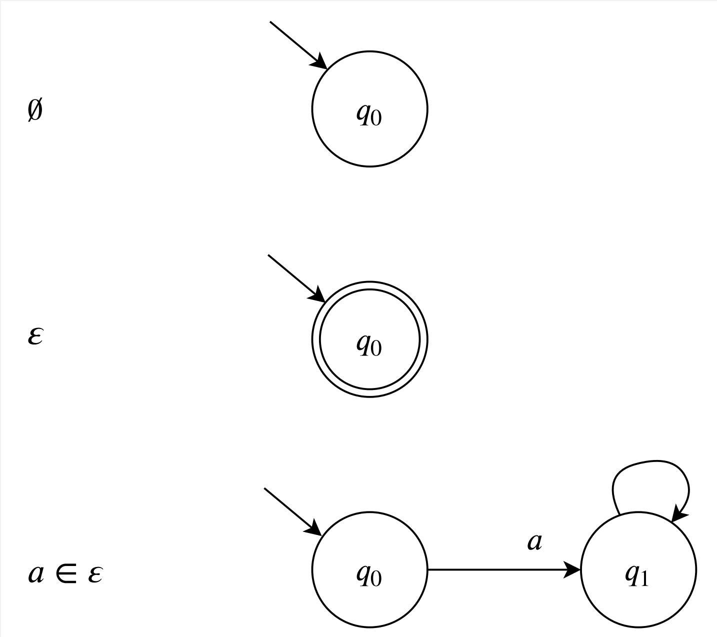
Un linguaggio è regolare, quindi, se e solo se è accettato da un automa a stati finiti deterministico, da un automa a stati finiti non deterministico oppure da un automa a stati finiti non deterministico con $\varepsilon$ - transizioni.

Gli elementi base di un linguaggio regolare sono: $\emptyset$, $\varepsilon$, $a \in \Sigma$.

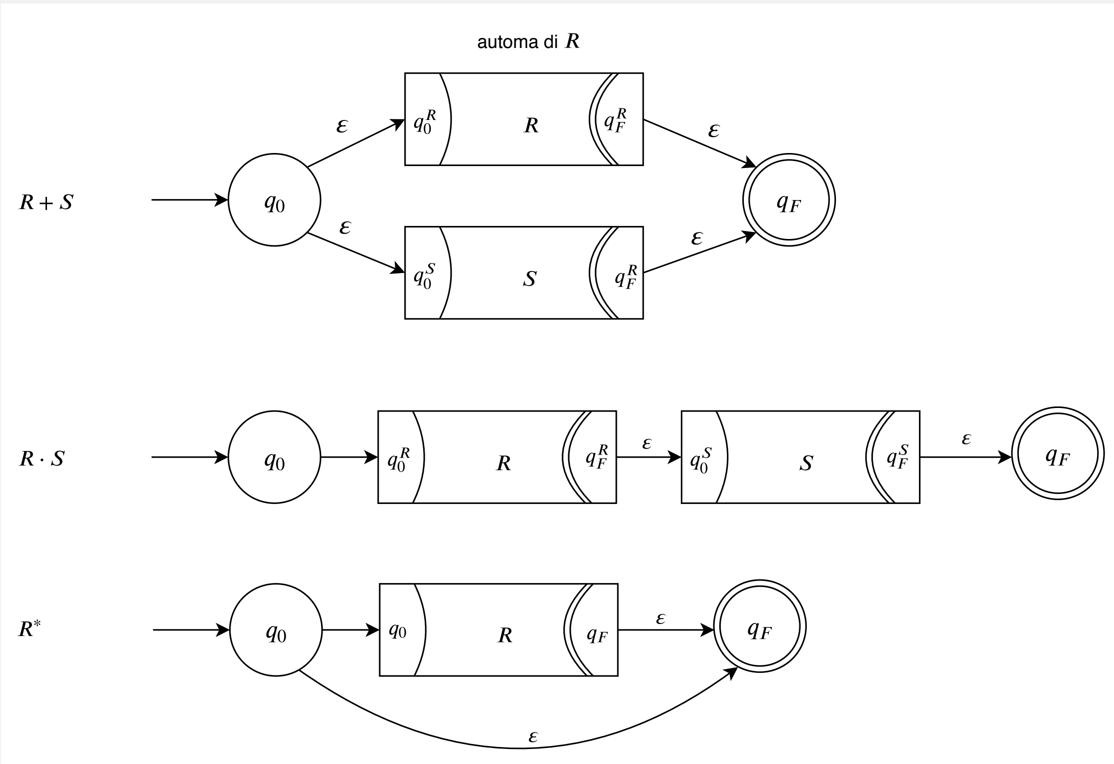
Se $R$ e $S$ sono espressioni regolari, allora anche $R + S$, $R \cdot S$ e $R*$ (== $R$, $RR$, $RRR$, ...).

**Dimostrazione (per induzione) grafica**

Caso base:




Passo induttivo: Suppongo che $R$ e $S$ siano espressioni regolari -> $R$ e $S$ sono linguaggi.




Per i linguaggi regolari valgono le seguenti proprietà:

- $e_1 \cdot (e_2 + e_3) = e_1e_2 + e_1e_3$. Lo stesso vale per $(e_1 \cdot e_2) \cdot e_3$;
- $e_1 + (e_2 + e_3) = (e_1 + e_2) + e_3$. Lo stesso vale per la moltiplicazione;
- $\emptyset^* = \varepsilon$;
- $e^* + e = e^*$;
- $(e^+)^* = e^*$;

- $(e_1 + e_2)^* = (e_1^* \cdot e_2^*)^*$;
- $e + \emptyset = e$;
- $e \cdot \emptyset = \emptyset \cdot e = \emptyset$;