Proprietà di chiusura dei linguaggi regolari

Teorema Se $\mathfrak{L}$ è un linguaggio regolare, allora anche la sua chiusura $\overline{\mathfrak{L}} = \Sigma^* \backslash \mathfrak{L}$ è regolare.

> **Dimostrazione** Basta costruire un automa a stati finiti $\overline{M} =< Q, \Sigma, \delta, Q \backslash F, q_0 >$ che legge $\mathfrak{L}$ -> gli stati finali sono opposti a quelli di M.

Corollario $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$ e $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = \overline{\overline{\mathfrak{L}_1} \cup \overline{\mathfrak{L}_2}}$ sono regolari.

Partizione di un insieme

Una partizione S è, dato un insieme X, una divisione di X in sottoinsiemi, dette classi della partizione, che "coprono" X senza sovrapporsi.

Definizione formale: Una partizione $S = S_1 \cup ... \cup S_n$ è una collezione di sottoinsiemi tali che:

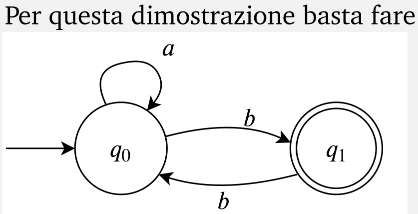
- I sottoinsiemi non sono vuoti;
- L'unione di tutti i sottoinsiemi è l'insieme di partenza;
- Dati due sottoinsiemi (distinti) qualsiasi, questi sono disgiunti.

Una **classe di equivalenza** è una qualsiasi classe di S. Se $a \in S_i$, allora si può indicare la classe di equivalenza S_i con $[a]_R$. Se il numero di classi è finito, si dice che R è di indice finito.
Date due equazioni di equvalenza R_1 ed $R_2 0$, R_1 raffina R_2 se $\forall a [a]_{R_1} \subseteq [a]_{R_2}$.

Teorema Valgono le seguenti proprietà:

1. Dati un linguaggio $\mathfrak{L} \subseteq \Sigma^*$ e la funzione $R_\mathfrak{L} \subseteq \Sigma^* x \Sigma^*$, vale che $x R_\mathfrak{L} y$ se e solo se $(\forall z \in \Sigma^*)$ $(xz \in \mathfrak{L} \longleftrightarrow yz \in \mathfrak{L})$;
2. Dati $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ e la funzione $R_M \subseteq \Sigma^* x \Sigma^*$, vale che $x R_M y$ se e solo se $\hat{\delta}(q_0, x)$ <-> $\hat{\delta}(q_0, y)$.

Entrambe le proprietà sono quindi invarianti destre, in quanto $xRy \to \forall z xzRyz$.

> **Invarianza destra**
>
> **Dimostrazione per proprietà 1** Siano $x, y \in \Sigma^*$ con $x R_L y$ se e solo se $(\forall z)$ $(xz \in \mathfrak{L} \longleftrightarrow yz \in \mathfrak{L})$ e sia $z \in \Sigma^*$. Dobbiamo dimostrare che $xz R_L yz$.
> La dimostrazione si fa per assurdo: Supponiamo che esiste w tale che $xzw \in \mathfrak{L}$ e $yzw \notin \mathfrak{L}$. Ma se poniamo $zw = z$ allora abbiamo $xz \in \mathfrak{L}$ e $yz \notin \mathfrak{L}$. Questo però è l'opposto di quanto supposto sopra, quindi si ha un assurdo.
>
> **Dimostrazione per proprietà 2** Per questa dimostrazione basta fare delle prove sul seguente automa:
>
> 
>

Il seguente teorema è un risultato molto importante, infatti afferma che esiste un unico automa minimo in grado di riconoscere un linguaggio, e ci da anche una procedura per costruirlo. Questa esistenza di minimizzazione non sarà possibile per le grammatiche CF e per le macchine di Turing.

Teorema Myhill - Nerode Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $L \in \Sigma^*$ è regolare;
2. L è l'unione di classi di equivalenza su Σ^* indotte da una relazione invariante destra di indice finito;
3. R_L è di indice finito;

Dimostrazione $(1) \rightarrow (2)$ L'obiettivo è dimostrare che R_M è la relazione che soddisfa (2).
Se $\mathfrak{L}$ è regolare esiste un automa a stati finiti tale che $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(M)$. Abbiamo quindi $\mathfrak{L} = \bigcup_{q\in F}\{x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, x) = q\}$.
Per definizione $xR_My \longleftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$ è invariante destra e di indice finito in quanto Q è finito.
Quindi gli insiemi $\mathfrak{L}_q = \{x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, x) = q\}$ costituiscono le classi di equivalenza della partizione indotta da R_M e il linguaggio $\mathfrak{L} = \bigcup_{q\in F} \mathfrak{L}_q$ è l'unione di queste classi di equivalenza.
Pertanto $\mathfrak{L} = \bigcup_{q\in F} \mathfrak{L}_q$ è un unione di classi di equivalenza indotte da una relazione invariante destra di ordine finito come volevamo dimostrare.

Dimostrazione $(2) \Rightarrow (3)$ L'obiettivo è dimostrare che R raffina $R_{\mathfrak{L}}$, ossia che $(\forall x \in \Sigma^*)([x]_R \subseteq [x]_{R_{\mathfrak{L}}})$.
Dato che R è una relazione di indice finito per (2), allora lo sarà anche R_L.

Dimostrazione $(3) \Rightarrow (1)$ Costruiamo un $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\rangle$ dove:

- $Q' = \{[x]_{R_L} : x \in \Sigma^*\}$
- $q_0 = [\varepsilon]_{R_L}$
- $\delta'([x]_{R_L}, a) = [xa]_{R_L}, a \in \Sigma^*$
- $F' = \{[x]_{R_L} : x \in L\}$

Si dimostra per induzione su $|y| \geq 0$ che $\hat{\delta}'([x]_{R_L}, y) = [xy]_{R_L}$. Quindi

$$\hat{\delta}'(q_0', x) = \hat{\delta}'([\varepsilon]_{R_L}, x) = [\varepsilon x]_{R_L} = [x]_{R_L}$$

e pertanto

$$x \in L(M') \iff \hat{\delta}'(q_0', x) \in F' \iff [x]_{R_L} \in F' \iff x \in L$$