Operazioni fondamentali con i segnali (pt. 2)

Cross-correlazione

Cross - correlazione

Dati due segnali continui $f_1(\tau), f_2(\tau)$, con $\tau \in R$, il segnale di cross-correlazione è

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(\tau) f_2(\tau - t)\, d\tau$$

dove:

- $f_1^*(\tau)$ è il complesso coniugato di f_1;
- $f_1^*(\tau) == f_1(\tau)$ quando f_1 è reale;
- Con $t = 0$ si ha l'intergrale di cross-correlazione;

La cross - correlazione (che consiste nell'integrazione del risultato del prodotto di due funzioni) permette di riconoscere il grado si somiglianza tra due segnali.
Il risultato è definito solo se l'integrale converge (se ho segnali nè di energia nè di potenza non ho convergenza). Più alto è il valore risultante dalla cross - correlazione, più simili sono i segnali. Quando $f_1 = f_2$, si parla di autocorrelazione.
La cross - correlazione è però soggetta a problemi quando il range (asse y) dei valori dei due grafici differisce di molto.

cross - correlazione normalizzata

Risolve i problemi della cross - correlazione. Viene definita come:

$$f_1 \overline{\otimes} f_2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(\tau) f_2(\tau - t)\, d\tau}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}}$$

dove E_f rappresenta l'energia del segnale f.
Osservazioni:

- Il risultato della cross - correlazione normalizzata appartiene a $[-1, 1]$;
- Se $|f_1 \overline{\otimes} f_2(t)| = 1$, allora $f_1(\tau) = \alpha f_2(\tau - t)$.

Cross - correlaizone con segnali discreti

Nel caso di **segnali disceti**, la cross - correlazione diventa:

$$x_1 \overline{\otimes} x_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k x_2(k - n))$$

con $k \in Z$ e la serie convergente. Se $x_1(k)$ è lungo M e $x_2(k)$ è lungo N, allora $x_1 \overline{\otimes} x_2(x)$ sarà lungo $M + N - 1$.[1]

[1] Fintanto chè i due segnali non hanno valori sull'asse x in comune (sono completamente separati), il risultato della moltiplicazione sarà 0. Inizio ad avere valori appena il segnale statico viene sormontato nel suo punto iniziale da quello che faccio shiftare tramite il suo punto finale (shifto da destra a sinistra).

Cross - correlazione con immagini	Nel caso in cui i due segnali siano **immagini**, la cross - correlazione diventa: $$x_1 \otimes x_2(m,n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} x_1(u,v)x_2(u-m, v-n)$$ dove $u, v, m, n \in Z$. Osservazioni: - Solitamente le due immagini hanno dimensione finita (e quindi le sommatorie sono limitate); - Il primo segnale x_1 prenden il nome di template (o matrice kernel), mentre il segnale x_2 prende il nome di immagine; - Di solito la metrice kernel ha dimensioni minori rispetto all'immagine; - Nel caso in cui $x_1 = x_2$, si parla di autocorrelazione 2D.