Analisi di Fourier

L'analisi di Fourier permette di passare da segnali temporali o spaziali a frequenziale e viceversa.

Serie di Fourier

Funzione di sintesi Una funzione $f : R \to R$ periodica di periodo T, con variabile continua t, può essere espressa come:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \qquad \text{(sintesi)}$$

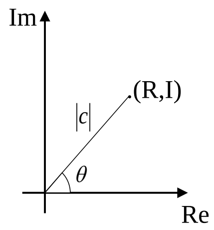
con $n \in Z$. Praticamente la funzione di analisi sintetizza ol segnale come somma di molteplici oggetti. I coefficienti c_n rappresentano i pesi, mentre le esponenziali $e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ rappresentano le fratures/caratteristiche del signali (dipendono da n).

Funzione di analisi I coefficienti c_n sono calcolati come segue:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\,dt \qquad \text{(analisi)}$$

per $n \in Z$.

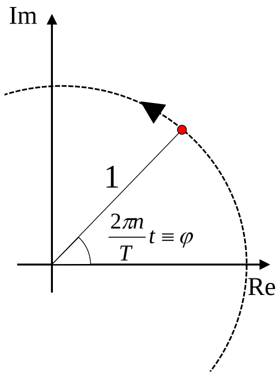
Rappresentazione dei coefficienti I coefficienti possono essere rappresentati nelle forma rettangolare ($c_n = Re + jIm$) oppure nella forma polare ($c_n = |c_n|e^{j\theta_n}$).

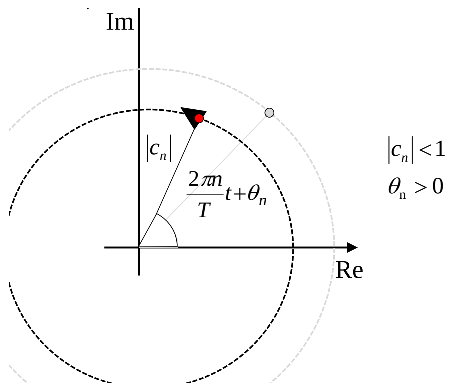


Spiegazione della funzione di sintesi L'esponenziale $e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ viene interpretata come un fasore, dove $\frac{2\pi n}{T}t$ rappresenta la sua velocità angolare[1].
Quindi ogni termine della sommatoria, ottenuto dalla moltiplicazione di un numero complesso e un fasore, sarà un altro fasore:

$$c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n|e^{j\theta_n}e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n|e^{j\frac{2\pi n}{T}t+\theta_n}$$

In questo modo, praticamente, estendo il fasore iniziale $e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$ ad una lunghezza $|c_n|$, facendolo partire con un angolo θ_n (detto angolo di fase).





[1]Più grande è n (che dipende dal coefficiente c_n), più giri vengono effettuati nell'unità di tempo, e quindi più grande è la velocità angolare.

Caso coefficiente reale

Notiamo che:

- c_n può appartenere agli $\mathbb{R}$, nel qual caso significa che θ_n non compare, avendo quindi solo un cambiamento nella lunghezza dell'n-esimo fasore pari a $|c_n|$

$$c_n = |c_n|\cancel{e^{j\theta_n}}$$

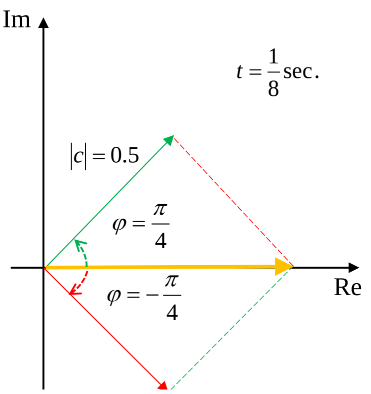
$$c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n|\cancel{e^{j\theta_n}}\, e^{j\frac{2\pi n}{T}t} = |c_n|\, e^{j\frac{2\pi n}{T}t + \cancel{\theta_n}}$$

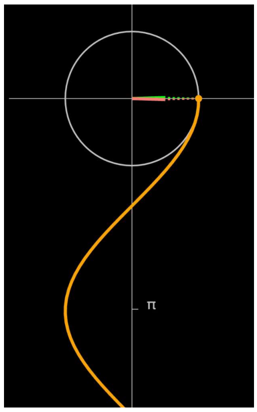
Spettro di ampiezza Prendiamo come esempio la serie di Fourier per il segnale $f(t) = cos(2\pi t)$ con $T = 1$. Dal calcolo della funzione di analisi, posso ottenere i seguenti coefficienti:

$$c_{-1} = \frac{1}{2} \qquad c_0 = 0 \qquad c_1 = \frac{1}{2} \qquad c_{i\leq 2, i\geq 2} = 0$$

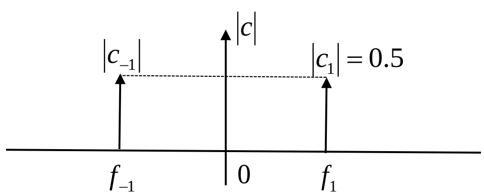
Sostituendi c_1 nell'equazione di sintesi ottengo:

$$cos(2\pi t) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j2\pi t} = \frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}$$





I coefficienti c_{-1} e c_1 rappresentano i moduli/ampiezze dei faseri complessi di frequenza $f_0 \cdot (-1)$ e $f_0 \cdot (-1)$[2]. Lo spettro di ampiezza è il seguente:



Spettro di fase Prendiamo come esempio la serie di Fourier per il segnale $f(t) = sin(2\pi t)$ con $T = 1$. Dal calcolo della funzione di analisi, posso ottenere i seguenti coefficienti:

$$c_{-1} = -\frac{1}{2j} \qquad c_0 = 0 \qquad c_1 = \frac{1}{2j} \qquad c_{i\leq 2, i\geq 2} = 0$$

[2] la frequenza fondamentale $\frac{2\pi}{T}$ è anche chiamata f_0.

PAssando alla forma esponenziale, i coefficienti possono essere riscritti come segue:

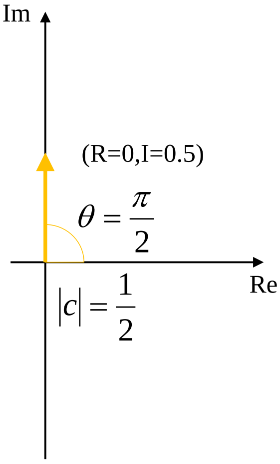
$$\pm\frac{1}{2j} = j \cdot \mp\frac{1}{2}$$

Rettangolare $j \cdot \frac{1}{2} = 0 + j \cdot \frac{1}{2}$

$$|c| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = arctg(0.5/0) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Esponenziale complessa $\frac{1}{2} e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = c_{-1}$

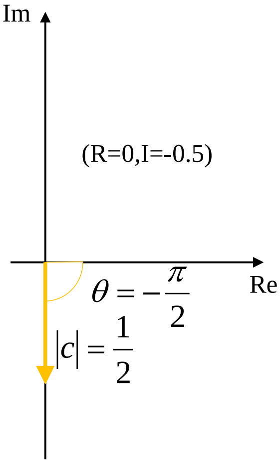


Rettangolare $j \cdot -\frac{1}{2} = 0 + j \cdot -\frac{1}{2}$

$$|c| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = arctg(-0.5/0) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Esponenziale complessa $\frac{1}{2} e^{j \cdot -\frac{\pi}{2}} = c_1$

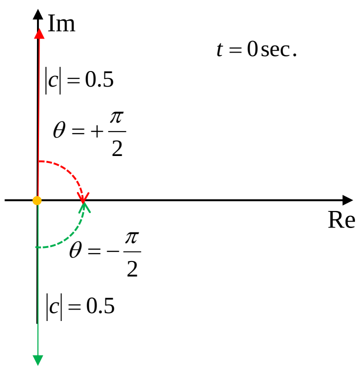


$$\boxed{\sin 2\pi t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$= c_{-1} e^{j-2\pi t} + c_1 e^{j2\pi t}$$

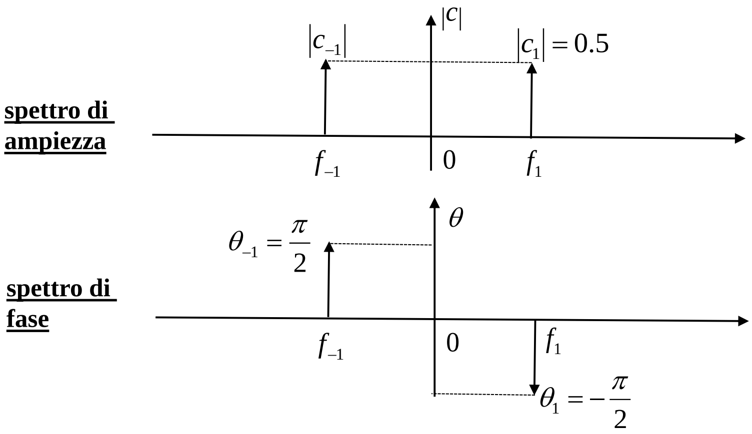
$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j-2\pi t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{-\pi}{2}} e^{j2\pi t}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} e^{j\left(-2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}} + \boxed{\frac{1}{2} e^{j\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)}}$$



Poichè, in questo caso, i coefficienti c_n appartengono al dominio complesso, rappresento, oltre all'ampiezza, anche lo spettro di fase (gli angoli del fasore).

Gli spettri sono i seguenti:



Proprietà della serie di Fourier Lo spettro di ampiezza e di fase sono funzioni nel dominio delle frequenze che formano lo spettro di Fourier. Nel caso di segnali periodici, lo spettro di Fourier gode delle seguenti proprietà:

- Lo spettro di ampiezza è simmetrico rispetto all'asse y;
- Lo spettro di fase è antisimmetrico rispetto all'asse y;
- Se i coefficienti c_n sono reale, allora lo spettro di fase non esiste;
- Entrambi gli spettri sono funzioni a pettine, definite su frequenze $\frac{2\pi n}{T}$, con $n \in Z$ (ovvero frequenze multiple rispetto a quella fondamentale $\frac{2\pi}{T}$).