

Analisi di Fourier

L'analisi di Fourier permette di passare da segnali temporali o spaziali a frequenziale e viceversa.

Serie di Fourier

Funzione di sintesi Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo T , con variabile continua t , può essere espressa come:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} \quad (\text{sintesi})$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Praticamente la funzione di analisi sintetizza il segnale come somma di molteplici oggetti. I coefficienti c_n rappresentano i pesi, mentre le esponenziali $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$ rappresentano le frature/caratteristiche del segnali (dipendono da n).

Funzione di analisi I coefficienti c_n sono calcolati come segue:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt \quad (\text{analisi})$$

per $n \in \mathbb{Z}$.

Rappresentazione dei coefficienti I coefficienti possono essere rappresentati nelle forma rettangolare ($c_n = \text{Re} + j\text{Im}$) oppure nella forma polare ($c_n = |c_n| e^{j\theta_n}$).

FOTO1

Spiegazione della funzione di sintesi L'esponenziale $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$ viene interpretata come un fasore, dove $\frac{2\pi n}{T} t$ rappresenta la sua velocità angolare¹.

Quindi ogni termine della sommatoria, ottenuto dalla moltiplicazione di un numero complesso e un fasore, sarà un altro fasore:

$$c_n e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j\theta_n} e^{j \frac{2\pi n}{T} t} = |c_n| e^{j \frac{2\pi n}{T} t + \theta_n}$$

In questo modo, praticamente, estendo il fasore iniziale $e^{j \frac{2\pi n}{T} t}$ ad una lunghezza $|c_n|$, facendolo partire con un angolo θ_n (detto angolo di fase).

FOTO2

FOTO3

Caso coefficiente reale

Proprietà della serie di Fourier Lo spettro di ampiezza e di fase sono funzioni nel dominio delle frequenze che formano lo spettro di Fourier. Nel caso di segnali periodici, lo spettro di Fourier gode delle seguenti proprietà:

- Lo spettro di ampiezza è simmetrico rispetto all'asse y ;
- Lo spettro di fase è antisimmetrico rispetto all'asse y ;
- Se i coefficienti c_n sono reale, allora lo spettro di fase non esiste;
- Entrambi gli spettri sono funzioni a pettine, definite su frequenze $\frac{2\pi n}{T}$, con $n \in \mathbb{Z}$ (ovvero frequenze multiple rispetto a quella fondamentale $\frac{2\pi}{T}$).

¹Più grande è n (che dipende dal coefficiente c_n), più giri vengono effettuati nell'unità di tempo, e quindi più grande è la velocità angolare.