Trasformata di Fourier

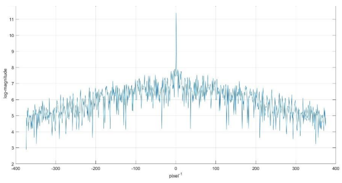
Trasformata Sia $f(t)$ un segnale continuo su $f : R \to R$, anche non periodico. Si chiama trasformata di Fourier $\mathfrak{F}(f(t)) = F(\mu)$ il segnale $\mathfrak{F} : R \to C$:

$$\mathfrak{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}\,dt$$

dove μ rappresenta l'angolo $\frac{n}{T}$ della serie di Fourier. La trasformata esiste se il segnale $f(t)$ è di energia (se il segnale è di energia può comunque avere trasformata).
In pratica, la trasformata restituisce un coefficiente di presenza $F(\mu)$ per la frequenza μ. Se $f(t)$ è reale, la sua trasformata è generalmente complessa, dove:

- Se t rappresenta il tempo, μ rappresenta gli Hertz (cicli/secondi);
- Se t rappresenta lo spazio, μ rappresenta la frequenza spaziale (cicli/metri).

Gli spettri di fase e ampiezza qui diventano continui o continui a tratti.



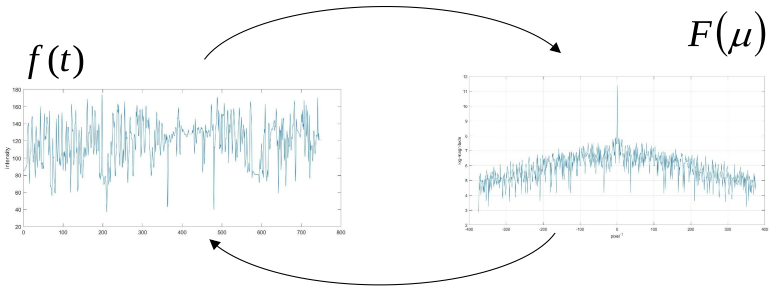
$F(\mu)$

Antitrasformata Sia $F(\mu)$ la trasformata di Fourier di un segnale $f : R \to R$. Si dice trasformata inversa di Fourier il segnale

$$\mathfrak{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t}\,d\mu$$

L'antitrasformata permette di ricostruire f a partire da F.

$$\mathfrak{F}\left(f(t)\right) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt$$



$$\mathfrak{F}^{-1}\left(F(\mu)\right) = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu$$

Proprietà della trasformata Le proprietà della trasformata di Fourier sono:

Linearità $a_1f_1(t) + a_2f_2(t) -> a_1F_1(\mu) + a_2F_2(\mu)$

Scalatura temporale $z(t) = f(at) -> Z(\mu) = \frac{1}{a}F(\frac{\mu}{a})$

dualità $f(t) -> F(\mu)$
$F(t) -> f(-\mu)$

Funzione sinc La trasformata di Fourier della box generica è:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\left(f(t)\right) = F(\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A\Pi\left(\frac{t}{w}e^{-j2\pi\mu t}\right)\,dt \\
&= \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} Ae^{-j2\pi\mu t}\,dt \\
&= \dots \\
&= \frac{A}{\pi\mu}sin(\pi\mu w) \\
&= Aw\frac{sin(\pi\mu w)}{\pi\mu w} \qquad \text{FUNZIONE SINC}
\end{aligned}$$

In generale, la funzione sinc è definita come segue:

$$sinc(m) = \frac{sin(\pi m)}{\pi m} \qquad \text{dove} \qquad sinc(0) = 1, sinc(m) = 0$$

Trasformata di un Impulso La trasformata di Fourier di un generico impulso è la seguente:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f(t)) = F(\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi\mu t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0)e^{-j2\pi\mu 0}\,dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

La trasformata genera quindi una costante. Nel caso l'impulso sia centrato in t_0, la trasformata diventa:

$$F(\mu) = e^{-j2\pi\mu t_0}$$

ovvero un numero complesso. Può essere quindi scomposto in fase e ampiezza:

$$1 \cdot e^{-j2\pi\mu t_0}$$

Trasformata di un treno di impulsi Dato un treno di impulsi

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \qquad \text{con} \qquad n \in Z$$

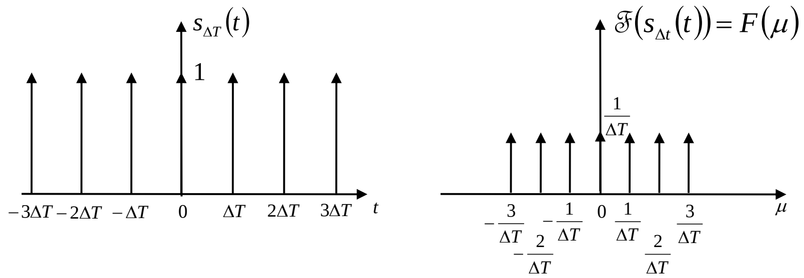
lo posso rappresentare tramite la serie di Fourier (essendo periodico) come segue:

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T}e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

La trasformata della serie è:

$$\mathfrak{F}(S_{\Delta T}(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T}\delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

Più lungo è il periodo di campionamento ΔT nella serie, più è fitto il periodo di campionamento e meno alti sono gli impulsi della trasformata.



Trasformata della convoluzione La trasformata di Fourier della convoluzione è la seguente:

$$\mathfrak{F}[f * h](t) = H(\mu) \cdot F(\mu)$$

Quindi:

- La convoluzione di due segnali reali nel continuo diventa il prodotto delle loro trasformate;
- Il prodotto di due segnali reali nel continuo diventa la convoluzione delle loro trasformate.

Per questo motivo si tende ad eseguire il filtraggio sui segnali trasformati.