Trasformata di Fourier a tempo discreto

Campionamento Sia $f(t)$ un segnale reale continuo, anche non periodico, con:

$$f :]-\infty, +\infty[\in R \to R$$

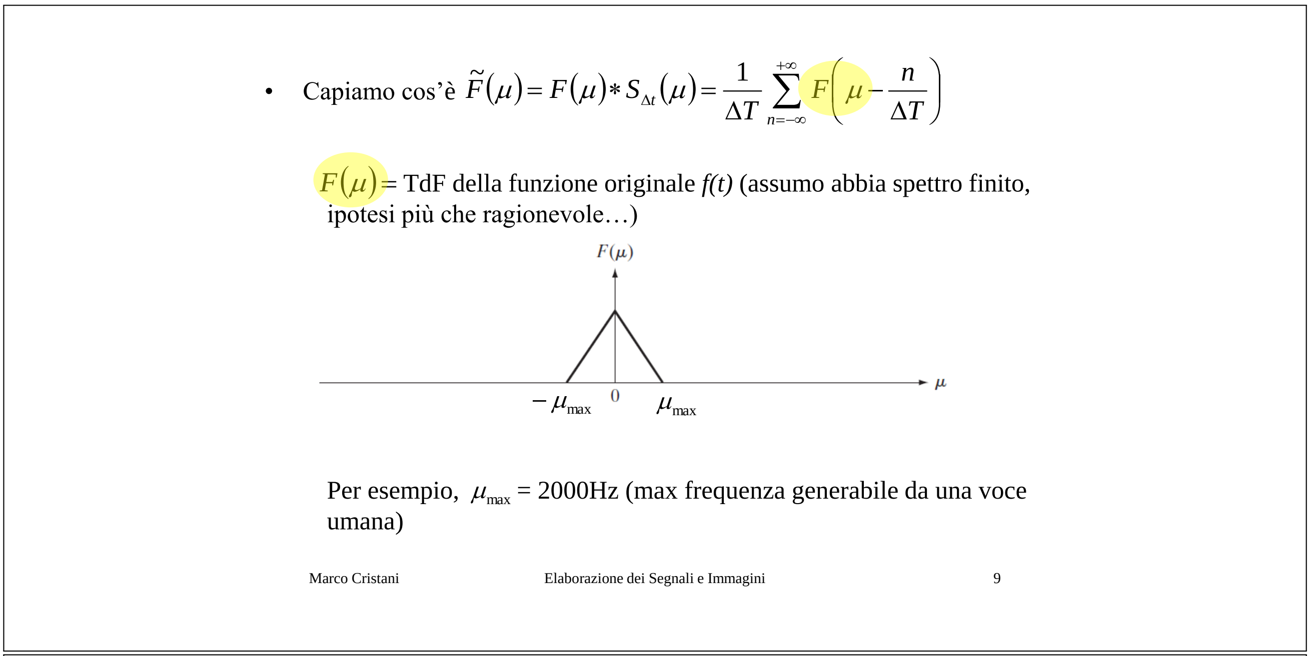
e sia $s_{\Delta T}(t)$ un trano di impulsi (non espresso con serie di Fourier) di periodo ΔT (frequenza di campionamento $\mu_s = 1/\Delta T$). Il **campionamento** di $f(t)$ sarà:

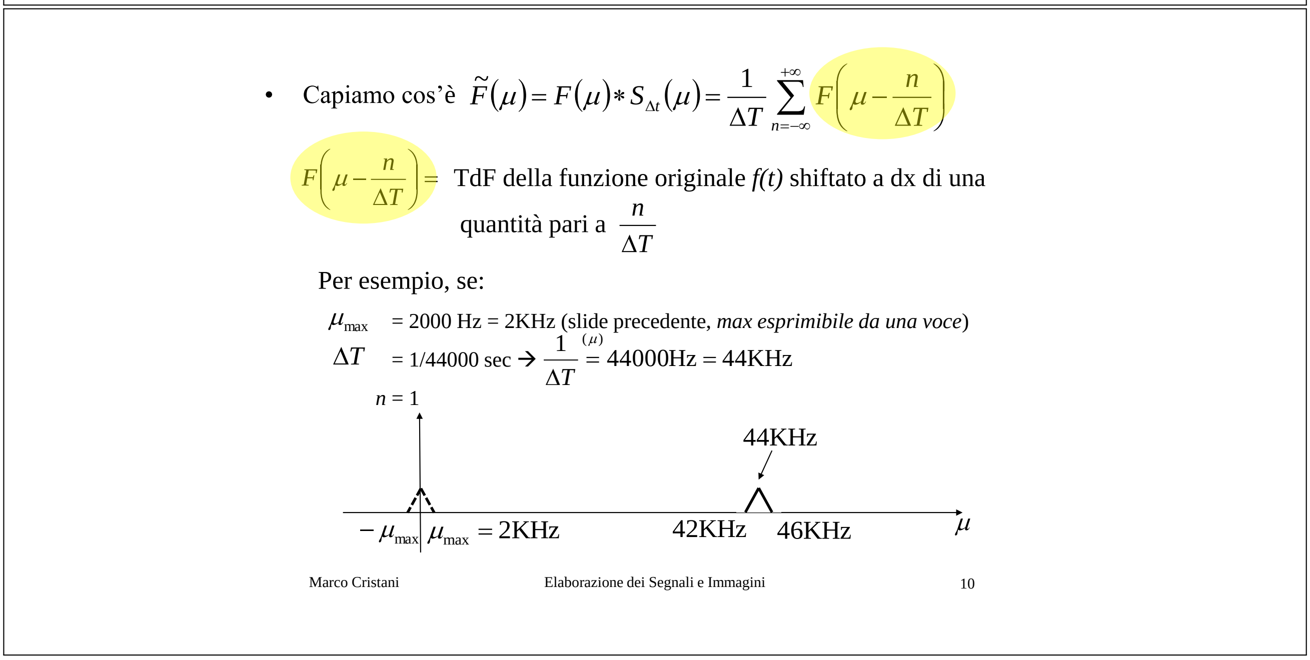
$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot s_{\Delta T}(t)$$

ovvero consiste nella moltiplicazione del segnale per il treno di impulsi (in modo da discretizzarlo).

Trasformata a tempo discreto Data la trasformata di Fourier $F(\mu)$ di un segnale reale, la sua trasformata a tempo dscreto sarà:

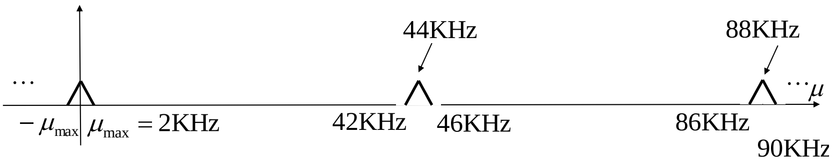
$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) = F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) S_{\Delta t}(\mu - \tau)\, dt \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)\end{aligned}$$





- Capiamo cos'è $F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$

$\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$ = infinite copie dello spettro $F(\mu)$, ripetute ogni $\frac{1}{\Delta T}$
= è un **segnale periodico** (nelle frequenze!) di periodo $\frac{1}{\Delta T}$, ovvero di ripete ogni $\frac{1}{\Delta T}$ Hz
= ho una *scalatura* nell'ampiezza di un fattore $\frac{1}{\Delta T}$
= **Trasformata di Fourier a Tempo Discreto (DTFT)**



Marco Cristani Elaborazione dei Segnali e Immagini 11

Teorema del campionamento Un segnale reale continuo $f(t)$, limitato in banda, può essere riscotruito, completamente e senza errori, a partire da un insieme di suoi campioni selo se questi sono stati acquisiti con un tempo di campionamento ΔT tale per cui:

$$\mu_s > 2\mu_{MAX} \qquad \text{con} \qquad \mu_s = \frac{1}{\Delta T}$$

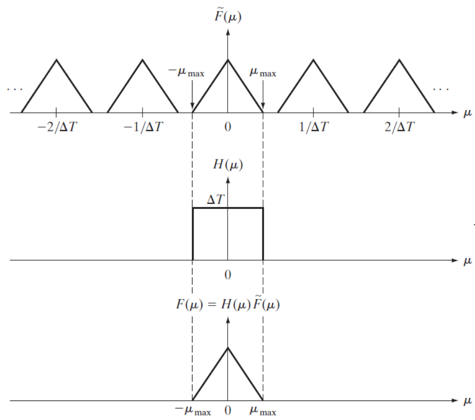
Praticamente, per evitare l'aliasing (e quindi avere campioni corretti), devo ripetere il segnale con una frequenza maggiore a $2\mu_{MAX}$ (la "dimensione" del segnale è μ_{MAX} sinistro $+\mu_{MAX}$ destro).

Il teorema del campionamento, in parole semplici, dice che tutte le proprietà di un segnale possono essere espresse dai suoi campioni.

Ricostruzione del segnale Dato un segnale campionato, la sua ricostruzione prevede 3 fasi:

1. Calcolo la trasformata di Fourier del segnale, da cui ottengo una funzione periodica (ogni periodo riporta una copia dello spettro della funzione continua);
2. Isolo un periodo della funzione;
3. Antitrasformo la sezione isolata.

- In formule:



$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & \text{se } \mu \in [-\mu_{max}, \mu_{max}] \\ 0 & \text{alt.} \end{cases}$$

$$F(\mu) = \tilde{F}(\mu) \cdot H(\mu)$$

Marco Cristani Elaborazione dei Segnali e Immagini 17

Il calcolo per ricostruire il segnale è il seguente:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathfrak{F}^{-1}[F(\mu)] \\ &= \mathfrak{F}^{-1}[H(\mu)\tilde{F}(\mu)] \\ &= h(t) * \tilde{f}(t) \end{aligned}$$