Zadanie 1

Wyznacz macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2

Rozwiąż z wzorami Cramera
$$\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 3x+y=-2 \\ 2x+3y+z=-1 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$D=-14 \quad D_1=10 \quad D_2=-2 \quad D_3=0$

$x=-\frac{5}{7} \quad y=\frac{1}{7} \quad z=0$

$(x,y,z)=\left(-\frac{5}{7},\frac{1}{7},0\right)$

$$\begin{cases} \left(-\frac{5}{7}\right)-2\cdot\frac{1}{7}-3\cdot 0=-1 \\ 3\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)+\frac{1}{7}=2 \\ 2\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)+3\cdot\frac{1}{7}+0=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1=-1 \\ -2=-2 \\ -1=1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$(x,y,z)=\left(-\frac{5}{7},\frac{1}{7},0\right)$

Zadanie 3

Rozwiąż metodą eliminacji Gaussa $\begin{cases} 2x+2y-3z=-3 \\ 3x+y=2 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 19 & 0 & 0 & 19 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$$

Zadanie 4

Oblicz granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{\sin^2(4x)}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{2x+3}$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+3)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$$

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{\sin^2(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin(3x)}{4\sin(8x)}=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos(3x)}{32\cos(8x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos(3\cdot 0)}{32\cos(8\cdot 0)}=\frac{9}{32}$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\cancel{x}-3}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\frac{1}{x-3}}{1}\right)^{\frac{x-3}{1}}\right]^{\frac{x-3}{1}\cdot(2x+3)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+3)\cdot(2x+3)}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+9}{1}}=e^2$$

Zadanie 5

wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 4x - \frac{2}{x}$

$f(x) = 4x - \frac{2}{x}$

$D = R - \{0\}$

$f'(x) = 4 + \frac{2}{x^2}$ $\qquad$ $f'(x) = 0 \iff 4 + \frac{2}{x^2} = 0$

$f'(x) = 4 + \frac{2}{x^2} \quad | \cdot x^2$

$f'(x) = 4x^2 + 2$

$\Delta = 0 - 32 = -32 < 0$

funkcja nie ma miejsc zerowych funkcja jest malejąca

Zadanie 6
Oblicz całki

a) $\int x\sqrt{3-x^2}\,dx$

$\int -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{t}\, dt$

$-\frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{t}\, dt$

$-\frac{1}{2} \cdot \int t^{\frac{1}{2}}\, dt$

$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2t\sqrt{t}}{3}$

$-\frac{1}{2} \cdot \frac{2(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}{3}$

$-\frac{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}{3}$

$-\frac{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{3x}{x^2+4}\, dx$

$\int \frac{3}{2t}\, dt$

$\frac{3}{2} \cdot \int \frac{1}{t}\, dt$

$\frac{3}{2} \cdot \ln(|t|)$

$\frac{3}{2} \cdot \ln(|x^2+4|)$

$\frac{3}{2} \cdot \ln(x^2+4)$

$\frac{3}{2} \cdot \ln(x^2+4) + C, \quad C \in \mathbb{R}$