Analiza i wizualizacja danych

Piotr Jastrzębski

2025-03-08

Spis treści

1 Analiza i wizualizacja danych

Aktualna wersja dotyczy zajęć realizowanych w roku akademickim 2024/25.

2 Trochę teorii...

2.1 Test racjonalnego myślenia

- Jeśli 5 maszyn w ciągu 5 minut produkuje 5 urządzeń, ile czasu zajmie 100 maszynom zrobienie 100 urządzeń?
- Na stawie rozrasta się kępa lilii wodnych. Codziennie kępa staje się dwukrotnie większa. Jeśli zarośnięcie całego stawu zajmie liliom 48 dni, to ile dni potrzeba, żeby zarosły połowę stawu?
- Kij bejsbolowy i piłka kosztują razem 1 dolar i 10 centów. Kij kosztuje o dolara więcej niż piłka. Ile kosztuje piłka?

2.2 Analiza danych

Analiza danych to proces badania, czyszczenia, przekształcania i modelowania danych w celu odkrywania użytecznych informacji, formułowania wniosków i wspierania podejmowania decyzji. Jest to wieloetapowy proces, który obejmuje:

- Zbieranie danych z różnych źródeł
- Czyszczenie danych poprzez usuwanie błędów, braków i niespójności
- Eksplorację danych w celu zrozumienia ich struktury i cech charakterystycznych
- Przekształcanie danych do odpowiedniego formatu
- Stosowanie metod statystycznych i algorytmów uczenia maszynowego
- Interpretację wyników w kontekście konkretnego problemu biznesowego lub naukowego

Analiza danych znajduje zastosowanie w niemal każdej dziedzinie, od biznesu i finansów po nauki społeczne, medycynę i badania naukowe. Celem analizy danych jest przekształcenie surowych danych w wiedzę, która może być wykorzystana do podejmowania lepszych decyzji.

2.3 Wizualizacja danych

Wizualizacja danych to graficzna reprezentacja informacji i danych. Wykorzystuje elementy wizualne, takie jak wykresy, mapy i dashboardy, aby przedstawić relacje między danymi w sposób, który jest łatwy do zrozumienia i interpretacji. Dobra wizualizacja danych:

- Przedstawia złożone informacje w przystępny i intuicyjny sposób
- Ujawnia wzorce, trendy i odstępstwa, które mogą być trudne do zauważenia w surowych danych
- Wspiera proces analizy danych poprzez umożliwienie szybkiego przeglądania dużych zbiorów danych
- Ułatwia komunikację wyników analiz do różnych odbiorców, w tym osób nietechnicznych
- Pomaga opowiadać historie zawarte w danych (data storytelling)

Do najpopularniejszych typów wizualizacji danych należą wykresy słupkowe, liniowe, kołowe, mapy cieplne, drzewa hierarchiczne, chmury słów oraz interaktywne dashboardy. Wybór odpowiedniej formy wizualizacji zależy od typu danych, celu prezentacji oraz docelowej grupy odbiorców.

Wizualizacja danych jest kluczowym elementem procesu analizy danych, ponieważ pozwala na szybkie wyciąganie wniosków i podejmowanie decyzji na podstawie danych. Jest mostem między złożonymi danymi a ludzkim zrozumieniem.

2.4 Analiza danych - podstawowe pojęcia

2.4.1 Współczesne znaczenia słowa “statystyka”:

- zbiór danych liczbowych pokazujący kształtowanie procesów i zjawisk np. statystyka ludności.
- wszelkie czynności związane z gromadzeniem i opracowywaniem danych liczbowych np. statystyka pewnego problemu dokonywana przez GUS.
- charakterystyki liczbowe np. statystyki próby np. średnia arytmetyczna, odchylenie standardowe itp.
- dyscyplina naukowa - nauka o metodach badania zjawisk masowych.

2.4.2 “Masowość”

Zjawiska/procesy masowe - badaniu podlega duża liczba jednostek. Dzielą się na:

- gospodarcze (np. produkcja, konsumpcja, usługi reklama),
- społeczne (np. wypadki drogowe, poglądy polityczne),
- demograficzne (np. urodzenia, starzenie, migracje).

2.4.3 Podział statystyki

Statystyka - dyscyplina naukowa - podział:

- statystyka opisowa - zajmuje się sprawami związanymi z gromadzeniem, prezentacją, analizą i interpretacją danych liczbowych. Obserwacja obejmuje całą badaną zbiorowość.
- statystyka matematyczna - uogólnienie wyników badania części zbiorowości (próby) na całą zbiorowość.

2.4.4 Zbiorowość/populacja

Zbiorowość statystyczna, populacja statystyczna: zbiór obiektów podlegających badaniu statystycznemu. Tworzą je jednostki podobne do siebie, logicznie powiązane, lecz nie identyczne. Mają pewne cechy wspólne oraz pewne właściwości pozwalające je różnicować.

- przykłady:
  - badanie wzrostu Polaków - mieszkańcy Polski
  - poziom nauczania w szkołach woj. warmińsko-mazurskiego - szkoły woj. warmińsko-mazurskiego.
- podział:
  - zbiorowość/populacja generalna - obejmuje całość,
  - zbiorowość/populacja próbna (próba) - obejmuje część populacji.

2.4.5 Jednostka statyczna

Jednostka statystyczna: każdy z elementów zbiorowości statystycznej.

- przykłady:
  - studenci UWM - student UWM
  - mieszkańcy Polski - każda osoba mieszkająca w Polsce
  - maszyny produkowane w fabryce - każda maszyna

2.4.6 Cechy statystyczne

Cechy statystyczne

- właściwości charakteryzujące jednostki statystyczne w danej zbiorowości statystycznej.
- dzielimy je na stałe i zmienne.

Cechy stałe

- takie właściwości, które są wspólne wszystkim jednostkom danej zbiorowości statystycznej.
- podział:
  - rzeczowe - kto lub co jest przedmiotem badania statystycznego,
  - czasowe - kiedy zostało przeprowadzone badanie lub jakiego okresu czasu dotyczy badanie,
  - przestrzenne - jakiego terytorium (miejsce lub obszar) dotyczy badanie.
- przykład: studenci WMiI UWM w Olsztynie w roku akad. 2017/2018:
  - cecha rzeczowa: posiadanie legitymacji studenckiej,
  - cecha czasowa - studenci studiujący w roku akad. 2017/2018
  - cecha przestrzenna - miejsce: WMiI UWM w Olsztynie.

Cechy zmienne

- właściwości różnicujące jednostki statystyczne w danej zbiorowości.
- przykład: studenci UWM - cechy zmienne: wiek, płeć, rodzaj ukończonej szkoły średniej, kolor oczu, wzrost.

Ważne:

- obserwacji podlegają tylko cechy zmienne,
- cecha stała w jednej zbiorowości może być cechą zmienną w innej zbiorowości.

Przykład: studenci UWM mają legitymację wydaną przez UWM. Studenci wszystkich uczelni w Polsce mają legitymacje wydane przez różne szkoły.

Podział cech zmiennych:

- cechy mierzalne (ilościowe) - można je wyrazić liczbą wraz z określoną jednostką miary.
- cechy niemierzalne (jakościowe) - określane słownie, reprezentują pewne kategorie.

Przykład: zbiorowość studentów. Cechy mierzalne: wiek, waga, wzrost, liczba nieobecności. Cechy niemierzalne: płeć, kolor oczu, kierunek studiów.

Często ze względów praktycznych cechom niemierzalnym przypisywane są kody liczbowe. Nie należy ich jednak mylić z cechami mierzalnymi. Np. 1 - wykształcenie podstawowe, 2 - wykształcenie zasadnicze, itd…

Podział cech mierzalnych:

- ciągłe - mogące przybrać każdą wartość z określonego przedziału, np. wzrost, wiek, powierzchnia mieszkania.
- skokowe - mogące przyjmować konkretne (dyskretne) wartości liczbowe bez wartości pośrednich np. liczba osób w gospodarstwie domowych, liczba osób zatrudnionych w danej firmie.

Cechy skokowe zazwyczaj mają wartości całkowite choć nie zawsze jest to wymagane np. liczba etatów w firmie (z uwzględnieniem części etatów).

2.4.7 Skale

Skala pomiarowa

- to system, pozwalający w pewien sposób usystematyzować wyniki pomiarów statystycznych.
- podział:
  - skala nominalna,
  - skala porządkowa,
  - skala przedziałowa (interwałowa),
  - skala ilorazowa (stosunkowa).

Skala nominalna

- skala, w której klasyfikujemy jednostkę statystyczną do określonej kategorii.
- wartość w tej skali nie ma żadnego uporządkowana.
- przykład:

Religia	Kod
Chrześcijaństwo	1
Islam	2
Buddyzm	3

Skala porządkowa

- wartości mają jasno określony porządek, ale nie są dane odległości między nimi,
- pozwala na uszeregowanie elementów.
- przykłady:

Wykształcenie	Kod
Podstawowe	1
Średnie	2
Wyższe	3

Dochód	Kod
Niski	1
Średni	2
Wysoki	3

Skala przedziałowa (interwałowa)

- wartości cechy wyrażone są poprzez konkretne wartości liczbowe,
- pozwala na porównywanie jednostek (coś jest większe lub mniejsze),
- nie możliwe jest badanie ilorazów (określenie ile razy dana wartość jest większa lub mniejsza od drugiej).
- przykład:

Miasto	Temperatura w $^{\circ}C$	Temperatura w $^{\circ}F$
Warszawa	15	59
Olsztyn	10	50
Gdańsk	5	41
Szczecin	20	68

Skala ilorazowa (stosunkowa)

- wartości wyrażone są przez wartości liczbowe,
- możliwe określenie jest relacji mniejsza lub większa między wartościami,
- możliwe jest określenie stosunku (ilorazu) między wartościami,
- występuje zero absolutne.
- przykład:

Produkt	Cena w zł
Chleb	3
Masło	8
Gruszki	5

2.5 Rodzaje badań statystycznych

- badanie pełne - obejmują wszystkie jednostki zbiorowości statystycznej.
  - spis statystyczny,
  - rejestracja bieżąca,

  - sprawozdawczość statystyczna.

- badania częściowe - obserwowana jest część populacji. Przeprowadza się wtedy gdy badanie pełne jest niecelowe lub niemożliwe.
  - metoda monograficzna,
  - metoda reprezentacyjna.

2.6 Etapy badania statystycznego

- projektowanie i organizacja badania: ustalenie celu, podmiotu, przedmiotu, zakresu, źródła i czasu trwania badania;
- obserwacja statystyczna;
- opracowanie materiału statystycznego: kontrola materiału statystycznego, grupowanie uzyskanych danych, prezentacja wyników danych;
- analiza statystyczna.

2.7 Analiza danych zastanych

Analiza danych zastanych – proces przetwarzania danych w celu uzyskania na ich podstawie użytecznych informacji i wniosków. W zależności od rodzaju danych i stawianych problemów, może to oznaczać użycie metod statystycznych, eksploracyjnych i innych.

Korzystanie z danych zastanych jest przykładem badań niereaktywnych - metod badań zachowań społecznych, które nie wpływają na te zachowania. Dane takie to: dokumenty, archiwa, sprawozdania, kroniki, spisy ludności, księgi parafialne, dzienniki, pamiętniki, blogi internetowe, audio-pamiętniki, archiwa historii mówionej i inne. (Wikipedia)

Dane zastane możemy podzielić ze względu na (Makowska red. 2013):

- Charakter: Ilościowe, Jakościowe
- Formę: Dane opracowane, Dane surowe
- Sposób powstania: Pierwotne, Wtórne
- Dynamikę: Ciągła rejestracja zdarzeń, Rejestracja w interwałach czasowych, Rejestracja jednorazowa
- Poziom obiektywizmu: Obiektywne, Subiektywne
- Źródła pochodzenia: Dane publiczne, Dane prywatne

Analiza danych to proces polegający na sprawdzaniu, porządkowaniu, przekształcaniu i modelowaniu danych w celu zdobycia użytecznych informacji, wypracowania wniosków i wspierania procesu decyzyjnego. Analiza danych ma wiele aspektów i podejść, obejmujących różne techniki pod różnymi nazwami, w różnych obszarach biznesowych, naukowych i społecznych.

Praktyczne podejście do definiowania danych polega na tym, że dane to liczby, znaki, obrazy lub inne metody zapisu, w formie, którą można ocenić w celu określenia lub podjęcia decyzji o konkretnym działaniu. Wiele osób uważa, że dane same w sobie nie mają znaczenia – dopiero dane przetworzone i zinterpretowane stają się informacją.

2.8 Proces analizy danych

Analiza odnosi się do rozbicia całości posiadanych informacji na jej odrębne komponenty w celu indywidualnego badania. Analiza danych to proces uzyskiwania nieprzetworzonych danych i przekształcania ich w informacje przydatne do podejmowania decyzji przez użytkowników. Dane są zbierane i analizowane, aby odpowiadać na pytania, testować hipotezy lub obalać teorie. Istnieje kilka faz, które można wyszczególnić w procesie analizy danych. Fazy są iteracyjne, ponieważ informacje zwrotne z faz kolejnych mogą spowodować dodatkową pracę w fazach wcześniejszych.

2.8.1 Zdefiniowanie wymagań

Przed przystąpieniem do analizy danych, należy dokładnie określić wymagania jakościowe dotyczące danych. Dane wejściowe, które mają być przedmiotem analizy, są określone na podstawie wymagań osób kierujących analizą lub klientów (którzy będą używać finalnego produktu analizy). Ogólny typ jednostki, na podstawie której dane będą zbierane, jest określany jako jednostka eksperymentalna (np. osoba lub populacja ludzi. Dane mogą być liczbowe lub kategoryczne (tj. Etykiety tekstowe). Faza definiowania wymagań powinna dać odpowiedź na 2 zasadnicze pytania:

- co chcemy zmierzyć?
- w jaki sposób chcemy to zmierzyć?

2.8.2 Gromadzenie danych

Dane są gromadzone z różnych źródeł. Wymogi, co do rodzaju i jakości danych mogą być przekazywane przez analityków do “opiekunów danych”, takich jak personel technologii informacyjnych w organizacji. Dane ponadto mogą być również gromadzone automatycznie z różnego rodzaju czujników znajdujących się w otoczeniu - takich jak kamery drogowe, satelity, urządzenia rejestrujące obraz, dźwięk oraz parametry fizyczne. Kolejną metodą jest również pozyskiwanie danych w drodze wywiadów, gromadzenie ze źródeł internetowych lub bezpośrednio z dokumentacji.

2.8.3 Przetwarzanie danych

Zgromadzone dane muszą zostać przetworzone lub zorganizowane w sposób logiczny do analizy. Na przykład, mogą one zostać umieszczone w tabelach w celu dalszej analizy - w arkuszu kalkulacyjnym lub innym oprogramowaniu. Oczyszczanie danych Po fazie przetworzenia i uporządkowania, dane mogą być niekompletne, zawierać duplikaty lub zawierać błędy. Konieczność czyszczenia danych wynika z problemów związanych z wprowadzaniem i przechowywaniem danych. Czyszczenie danych to proces zapobiegania powstawaniu i korygowania wykrytych błędów. Typowe zadania obejmują dopasowywanie rekordów, identyfikowanie nieścisłości, ogólny przegląd jakość istniejących danych, usuwanie duplikatów i segmentację kolumn. Niezwykłe istotne jest też zwracanie uwagi na dane których wartości są powyżej lub poniżej ustalonych wcześniej progów (ekstrema).

2.8.4 Właściwa analiza danych

Istnieje kilka metod, które można wykorzystać do tego celu, na przykład data mining, business intelligence, wizualizacja danych lub badania eksploracyjne. Ta ostatnia metoda jest sposobem analizowania zbiorów informacji w celu określenia ich odrębnych cech. W ten sposób dane mogą zostać wykorzystane do przetestowania pierwotnej hipotezy. Statystyki opisowe to kolejna metoda analizy zebranych informacji. Dane są badane, aby znaleźć najważniejsze ich cechy. W statystykach opisowych analitycy używają kilku podstawowych narzędzi - można użyć średniej lub średniej z zestawu liczb. Pomaga to określić ogólny trend aczkolwiek nie zapewnia to dużej dokładności przy ocenie ogólnego obrazu zebranych danych. W tej fazie ma miejsce również modelowanie i tworzenie formuł matematycznych - stosowane są w celu identyfikacji zależności między zmiennymi, takich jak korelacja lub przyczynowość.

2.8.5 Raportowanie i dystrybucja wyników

Ta faza polega na ustalaniu w jakiej formie przekazywać wyniki. Analityk może rozważyć róże techniki wizualizacji danych, aby w sposób wyraźnym i skuteczny przekazać wnioski z analizy odbiorcom. Wizualizacja danych wykorzystuje formy graficzne jak wykresy i tabele. Tabele są przydatne dla użytkownika, który może wyszukiwać konkretne rekordy, podczas gdy wykresy (np. wykresy słupkowe lub liniowe) dają spojrzenie ilościowych na zbiór analizowanych danych.

2.9 Skąd brać dane?

Darmowa repozytoria danych:

- Bank danych lokalnych GUS - link

- Otwarte dane - link
- Bank Światowy - link

2.10 Koncepcja "Tidy data"

Koncepcja czyszczenia danych (ang. tidy data):

- WICKHAM, Hadley . Tidy Data. Journal of Statistical Software, [S.l.], v. 59, Issue 10, p. 1 - 23, sep. 2014. ISSN 1548-7660. Date accessed: 25 oct. 2018. doi:http://dx.doi.org/10.18637/jss.v059.i10.

2.10.1 Zasady "czystych danych"

Idealne dane są zaprezentowane w tabeli:

Imię	Wiek	Wzrost	Kolor oczu
Adam	26	167	Brązowe
Sylwia	34	164	Piwne
Tomasz	42	183	Niebieskie

Na co powinniśmy zwrócić uwagę?

- jedna obserwacja (jednostka statystyczna) = jeden wiersz w tabeli/macierzy/ramce danych
- wartości danej cechy znajdują się w kolumnach
- jeden typ/rodzaj obserwacji w jednej tabeli/macierzy/ramce danych

2.10.2 Przykłady nieuporządkowanych danych

Imię	Wiek	Wzrost	Brązowe	Niebieskie	Piwne
Adam	26	167	1	0	0
Sylwia	34	164	0	0	1
Tomasz	42	183	0	1	0

Nagłowki kolumn muszą odpowiadać cechom, a nie wartościom zmiennych.

2.11 Parę rad na dobre prezentacje

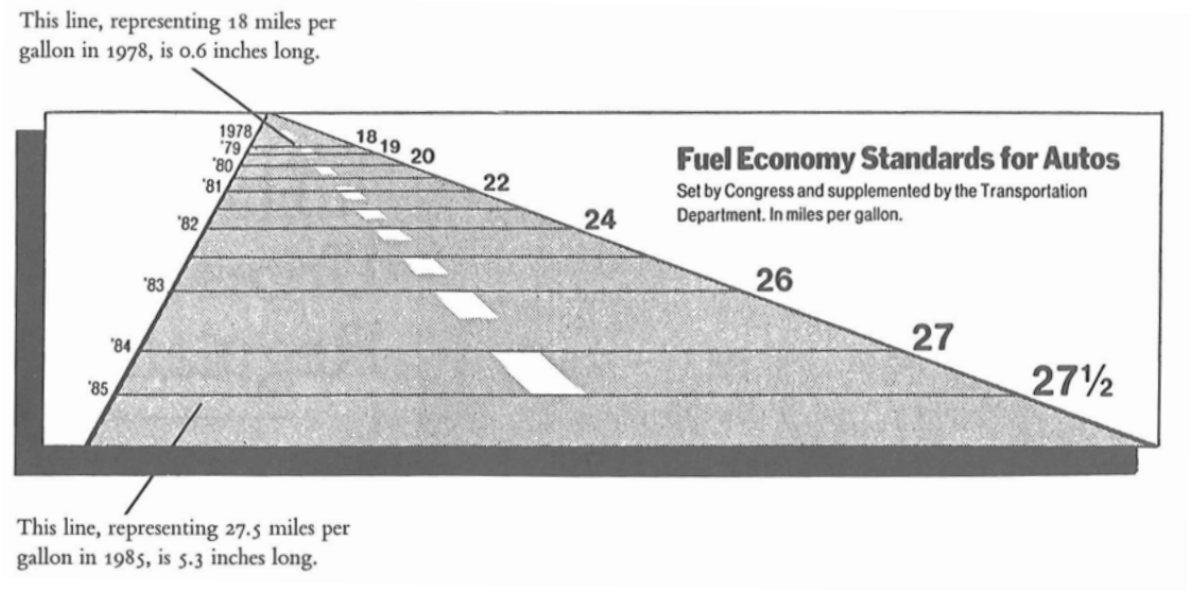
Edward Tufte, prof z Yale

1. Prezentuj dane “na bogato”.
2. Nie ukrywaj danych, pokazuj prawdę.
3. Nie używaj wykresów śmieciowych.
4. Pokazuj zmienność danych, a nie projektuj jej.
5. Wykres ma posiadać jak najmniejszy współczynnik kłamstwa (lie-factor).
6. Powerpoint to zło!

2.11.1 Współczynnik kłamstwa

- stosunek efektu widocznego na wykresie do efektu wykazywanego przez dane, na podstawie których ten wykres narysowaliśmy.

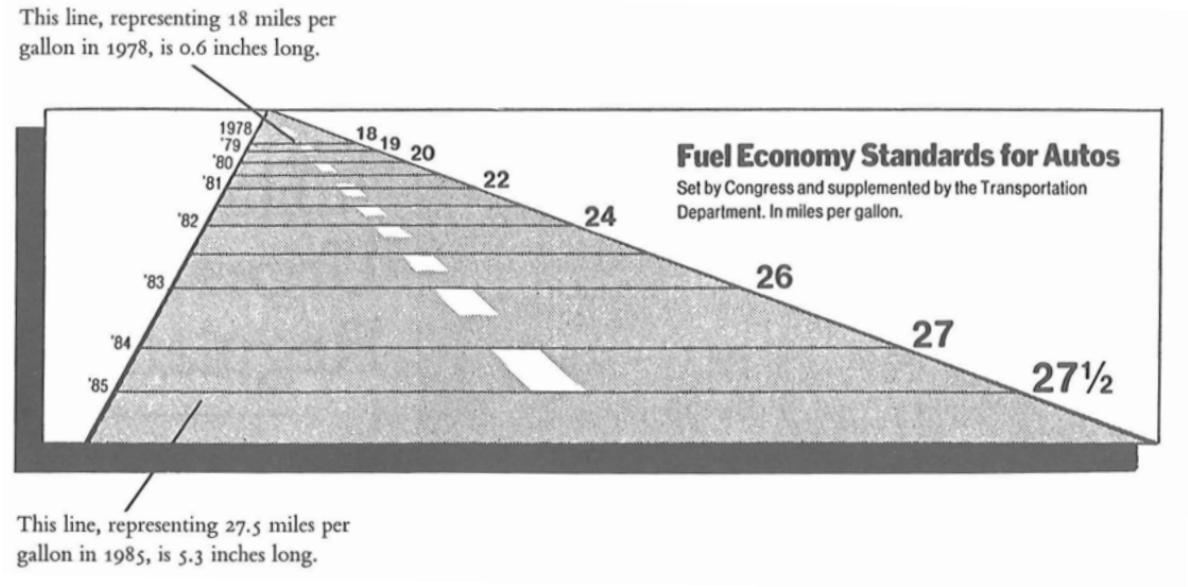
2.11.2 Współczynnik kłamstwa



[Tufte, 1991] Edward Tufte, The Visual Display of Quantitative Information, Second Edition, Graphics Press, USA, 1991, p. 57 – 69.

$$\text{LieFactor} = \frac{\text{rozmiar efektu widocznego na wykresie}}{\text{rozmiar efektu wynikającego z danych}}$$

$$\text{rozmiar efektu} = \frac{|\text{druga wartość} - \text{pierwsza wartość}|}{\text{pierwsza wartość}}$$



$$\text{LieFactor} = \frac{\frac{5.3-0.6}{0.6}}{\frac{27.5-18}{18}} \approx 14.8$$

2.12 Bibliografia

- https://pl.wikipedia.org/wiki/Wizualizacja
- https://mfiles.pl/pl/index.php/Analiza_danych, dostęp online 1.04.2019.
- Walesiak M., Gatnar E., Statystyczna analiza danych z wykorzystaniem programu R, PWN, Warszawa, 2009.
- Wasilewska E., Statystyka opisowa od podstaw, Podręcznik z zadaniami, Wydawnictwo SGGW, Warszawa, 2009.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Cognitive_reflection_test, dostęp online 20.03.2023.
- https://qlikblog.pl/edward-tufte-dobre-praktyki-prezentacji-danych/, dostęp online 20.03.2023.

Cześć I

NumPy

3 NumPy - start

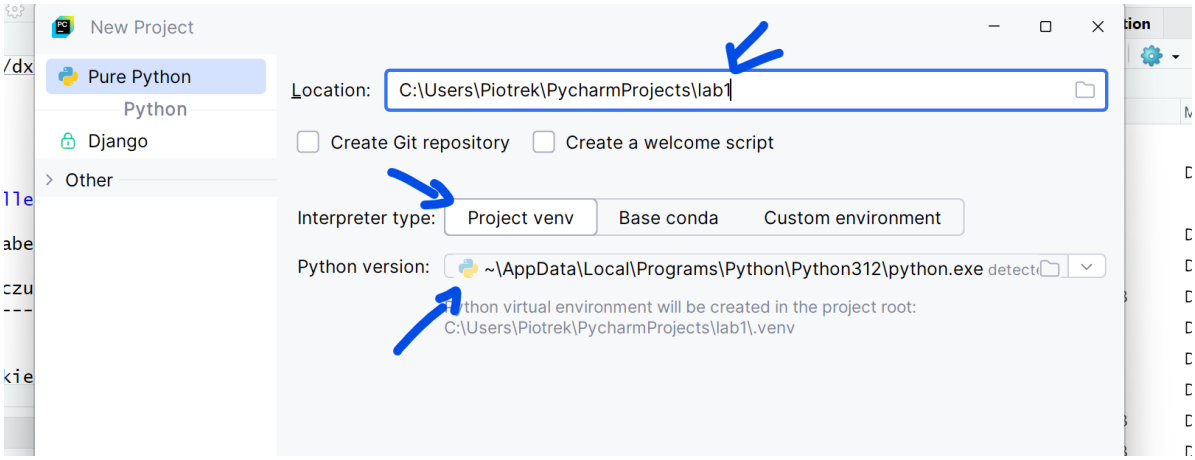
NumPy jest biblioteką Pythona służącą do obliczeń naukowych.

Zastosowania:

- algebra liniowa
- zaawansowane obliczenia matematyczne (numeryczne)
- całkowania
- rozwiązywanie równań
- ...

3.1 Instalacja pakietu NumPy - opcja łatwiejsza "do przeklikania"

- Tworzy projekt w PyCharm z venv - wersja 3.12.



- Za pomocą zakładki po lewej stronie na dole wyszukujemy pakiet i wybieramy instalację

3.2 Instalacja pakietu NumPy - opcja terminala

Komenda dla terminala:

```
python -m pip install numpy
```

```
python -m pip install numpy==2.2.0
```

3.3 Import biblioteki NumPy

```
import numpy as np
```

Podstawowym bytem w bibliotece NumPy jest N-wymiarowa tablica zwana `ndarray`. Każdy element na tablicy traktowany jest jako typ `dtype`.

```
numpy.array(object, dtype=None, *, copy=True, order='K', subok=False, ndmin=0, like=None)
```

- object - to co ma być wrzucone do tablicy
- dtype - typ
- copy - czy obiekty mają być skopiowane, domyślne `True`
- order - sposób układania: C (rzędy), F (kolumny), A, K
- subok - realizowane przez podklasy (jeśli `True`), domyślnie `False`
- ndmin - minimalny rozmiar (wymiar) tablicy
- like - tworzenie na podstawie tablic referencyjnej

```
import numpy as np

a = np.array([1, 2, 3])                                                    (1)
print("a:", a)
```

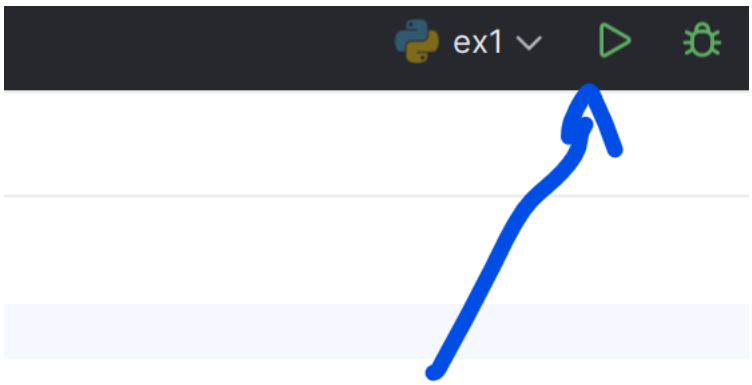
```
print("typ a:", type(a))                                                    ②
b = np.array([1, 2, 3.0])                                                   ③
print("b:", b)
c = np.array([[1, 2], [3, 4]])                                             ④
print("c:", c)
d = np.array([1, 2, 3], ndmin=2)                                            ⑤
print("d:", d)
e = np.array([1, 2, 3], dtype=complex)                                      ⑥
print("e:", e)
f = np.array(np.asmatrix('1 2; 3 4'))                                       ⑦
print("f:", f)
g = np.array(np.asmatrix('1 2; 3 4'), subok=True)                           ⑧
print("g:", g)
print(type(g))
```

① Standardowe domyślne.
② Sprawdzenie typu.
③ Jeden z elementów jest innego typu. Tu następuje zatem rozszerzenie do typu "największego".
④ Tu otrzymamy tablicę 2x2.
⑤ W tej linijce otrzymana będzie tablica 2x1.
⑥ Ustalenie innego typu - większego.
⑦ Skorzystanie z podtypu macierzowego.
⑧ Zachowanie typu macierzowego.

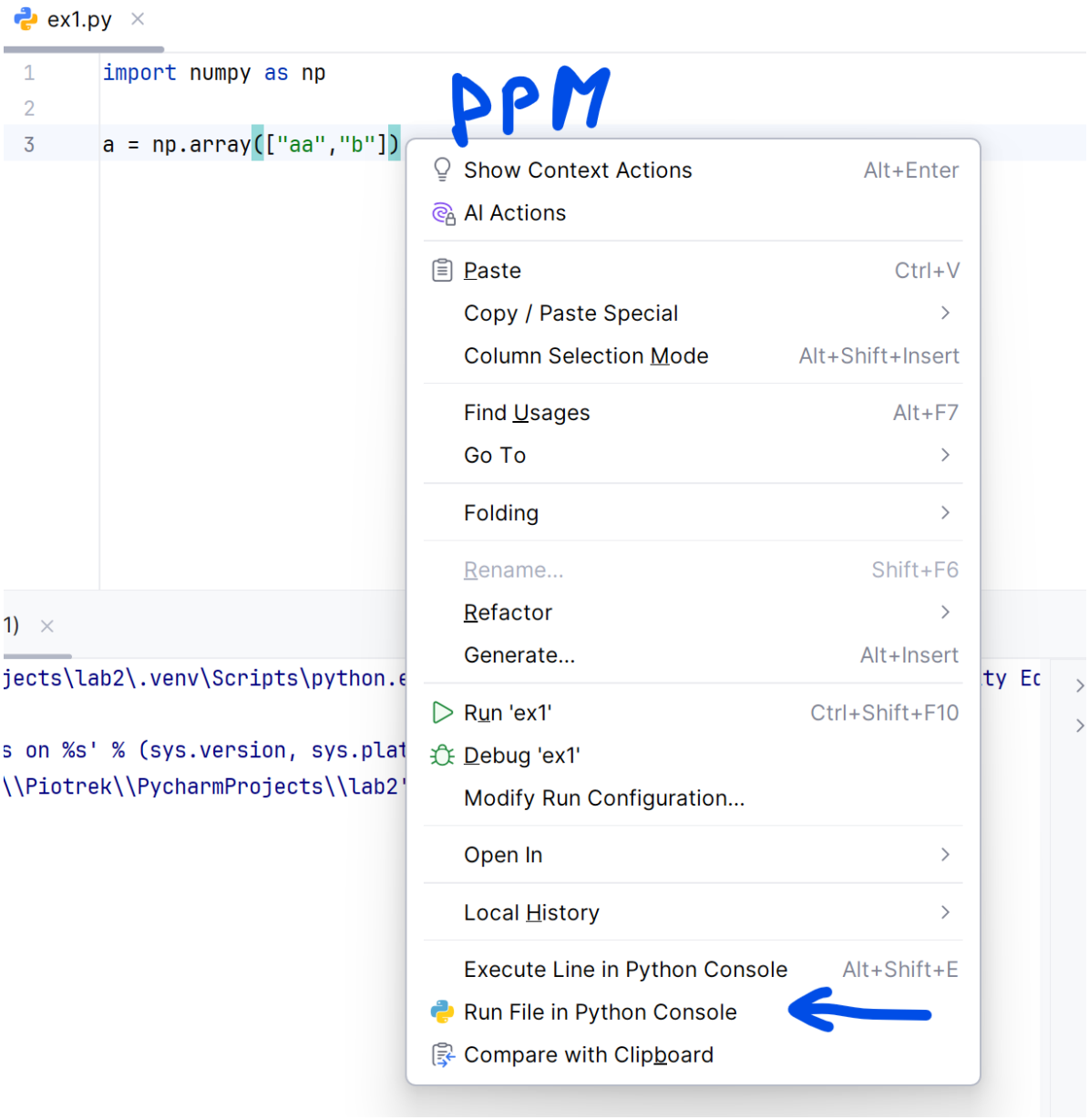
```
a: [1 2 3]
typ a: <class 'numpy.ndarray'>
b: [1. 2. 3.]
c: [[1 2]
 [3 4]]
d: [[1 2 3]]
e: [1.+0.j 2.+0.j 3.+0.j]
f: [[1 2]
 [3 4]]
g: [[1 2]
 [3 4]]
<class 'numpy.matrix'>
```

3.4 Uruchamianie - tryb "Run" (wykonawczy)

Run - zielona strzałka u góry.


ex1

3.5 Uruchamianie - tryb “Run in Python Console” (interaktywno-wykonawczy)



Ćwiczenie (`ex1.py`):

1. Stwórz proste tablice:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 & -3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} bb & cc & ww & 44 \end{bmatrix}$

4 Lista a tablica

```
import numpy as np
import time

start_time = time.time()
my_arr = np.arange(1000000)
my_list = list(range(1000000))
start_time = time.time()
my_arr2 = my_arr * 2
print("--- %s seconds ---" % (time.time() - start_time))
start_time = time.time()
my_list2 = [x * 2 for x in my_list]
print("--- %s seconds ---" % (time.time() - start_time))
```

```
--- 0.001708984375 seconds ---
--- 0.04219484329223633 seconds ---
```

5 Atrybuty tablic `ndarray`

Atrybut	Opis
`shape`	krotka z informacją o liczbie elementów dla każdego z wymiarów
`size`	liczba elementów w tablicy (łączna)
`ndim`	liczba wymiarów tablicy
`nbytes`	liczba bajtów jaką tablica zajmuje w pamięci
`dtype`	typ danych

https://numpy.org/doc/stable/reference/arrays.ndarray.html#array-attributes

```
import numpy as np

tab1 = np.array([2, -3, 4, -8, 1])
print("typ:", type(tab1))
print("shape:", tab1.shape)
print("size:", tab1.size)
print("ndim:", tab1.ndim)
print("nbytes:", tab1.nbytes)
print("dtype:", tab1.dtype)
```

```
typ: <class 'numpy.ndarray'>
shape: (5,)
size: 5
ndim: 1
nbytes: 40
dtype: int64
```

```
import numpy as np

tab2 = np.array([[2, -3], [4, -8]])
print("typ:", type(tab2))
print("shape:", tab2.shape)
```

```
print("size:", tab2.size)
print("ndim:", tab2.ndim)
print("nbytes:", tab2.nbytes)
print("dtype:", tab2.dtype)
```

```
typ: <class 'numpy.ndarray'>
shape: (2, 2)
size: 4
ndim: 2
nbytes: 32
dtype: int64
```

NumPy nie wspiera postrzępionych tablic! Poniższy kod wygeneruje błąd:

```
import numpy as np

tab3 = np.array([[2, -3], [4, -8, 5], [3]])
```

Ćwiczenia: (`ex2.py`)
Utwórz tablice numpy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.1 & 2.2 & 3.3 \\ 4.4 & 5.5 & 6.6 \end{bmatrix}$$

i sprawdź ich parametry.

6 Typy danych

https://numpy.org/doc/stable/reference/arrays.scalars.html

https://numpy.org/doc/stable/reference/arrays.dtypes.html#arrays-dtypes-constructing

Typy całkowitoliczbowe	`int`,`int8`,`int16`,`int32`,`int64`
Typy całkowitoliczbowe (bez znaku)	`uint`,`uint8`,`uint16`,`uint32`,`uint64`
Typ logiczny	`bool`
Typy zmiennoprzecinkowe	`float`, `float16`, `float32`, `float64`, `float128`
Typy zmiennoprzecinkowe zespolone	`complex`, `complex64`, `complex128`, `complex256`
Napis	`str`

```
import numpy as np

tab = np.array([[2, -3], [4, -8]])
print(tab)
tab2 = np.array([[2, -3], [4, -8]], dtype=int)
print(tab2)
tab3 = np.array([[2, -3], [4, -8]], dtype=float)
print(tab3)
tab4 = np.array([[2, -3], [4, -8]], dtype=complex)
print(tab4)
```

```
[[ 2 -3]
 [ 4 -8]]
[[ 2 -3]
 [ 4 -8]]
[[ 2. -3.]
 [ 4. -8.]]
[[ 2.+0.j -3.+0.j]
 [ 4.+0.j -8.+0.j]]
```

7 Tworzenie tablic

`np.array` - argumenty rzutowany na tablicę (coś po czym można iterować) - warto sprawdzić rozmiar/kształt

```
import numpy as np

tab = np.array([2, -3, 4])
print(tab)
print("size:", tab.size)
tab2 = np.array((4, -3, 3, 2))
print(tab2)
print("size:", tab2.size)
tab3 = np.array({3, 3, 2, 5, 2})
print(tab3)
print("size:", tab3.size)
tab4 = np.array({"pl": 344, "en": 22})
print(tab4)
print("size:", tab4.size)
```

```
[ 2 -3  4]
size: 3
[ 4 -3  3  2]
size: 4
{2, 3, 5}
size: 1
{'pl': 344, 'en': 22}
size: 1
```

`np.zeros` - tworzy tablicę wypełnioną zerami

```
import numpy as np

tab = np.zeros(4)
print(tab)
print(tab.shape)
```

```
tab2 = np.zeros([2, 3])
print(tab2)
print(tab2.shape)
tab3 = np.zeros([2, 3, 4])
print(tab3)
print(tab3.shape)
```

```
[0. 0. 0. 0.]
(4,)
[[0. 0. 0.]
 [0. 0. 0.]]
(2, 3)
[[[0. 0. 0. 0.]
  [0. 0. 0. 0.]
  [0. 0. 0. 0.]]

 [[0. 0. 0. 0.]
  [0. 0. 0. 0.]
  [0. 0. 0. 0.]]]
(2, 3, 4)
```

`np.ones` - tworzy tablicę wypełnioną jedynkami (to nie odpowiednik macierzy jednostkowej!)

```
import numpy as np

tab = np.ones(4)
print(tab)
print(tab.shape)
tab2 = np.ones([2, 3])
print(tab2)
print(tab2.shape)
tab3 = np.ones([2, 3, 4])
print(tab3)
print(tab3.shape)
```

```
[1. 1. 1. 1.]
(4,)
[[1. 1. 1.]
 [1. 1. 1.]]
(2, 3)
[[[1. 1. 1. 1.]
```

```
  [1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]]

 [[1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]
  [1. 1. 1. 1.]]]
(2, 3, 4)
```

`np.diag` - tworzy tablicę odpowiadającą macierzy diagonalnej

```
import numpy as np

print("tab0")
tab0 = np.diag([3, 4, 5])
print(tab0)
print("tab1")
tab1 = np.array([[2, 3, 4], [3, -4, 5], [3, 4, -5]])
print(tab1)
tab2 = np.diag(tab1)
print("tab2")
print(tab2)
tab3 = np.diag(tab1, k=1)
print("tab3")
print(tab3)
print("tab4")
tab4 = np.diag(tab1, k=-2)
print(tab4)
print("tab5")
tab5 = np.diag(np.diag(tab1))
print(tab5)
```

```
tab0
[[3 0 0]
 [0 4 0]
 [0 0 5]]
tab1
[[ 2  3  4]
 [ 3 -4  5]
 [ 3  4 -5]]
tab2
[ 2 -4 -5]
tab3
```

```
[3 5]
tab4
[3]
tab5
[[ 2  0  0]
 [ 0 -4  0]
 [ 0  0 -5]]
```

`np.arange` - tablica wypełniona równomiernymi wartościami

Składnia: `numpy.arange([start, ]stop, [step, ]dtype=None)`

Zasada działania jest podobna jak w funkcji `range`, ale dopuszczamy liczby "z ułamkiem".

```
import numpy as np

a = np.arange(3)
print(a)
b = np.arange(3.0)
print(b)
c = np.arange(3, 7)
print(c)
d = np.arange(3, 11, 2)
print(d)
e = np.arange(0, 1, 0.1)
print(e)
f = np.arange(3, 11, 2, dtype=float)
print(f)
g = np.arange(3, 10, 2)
print(g)
```

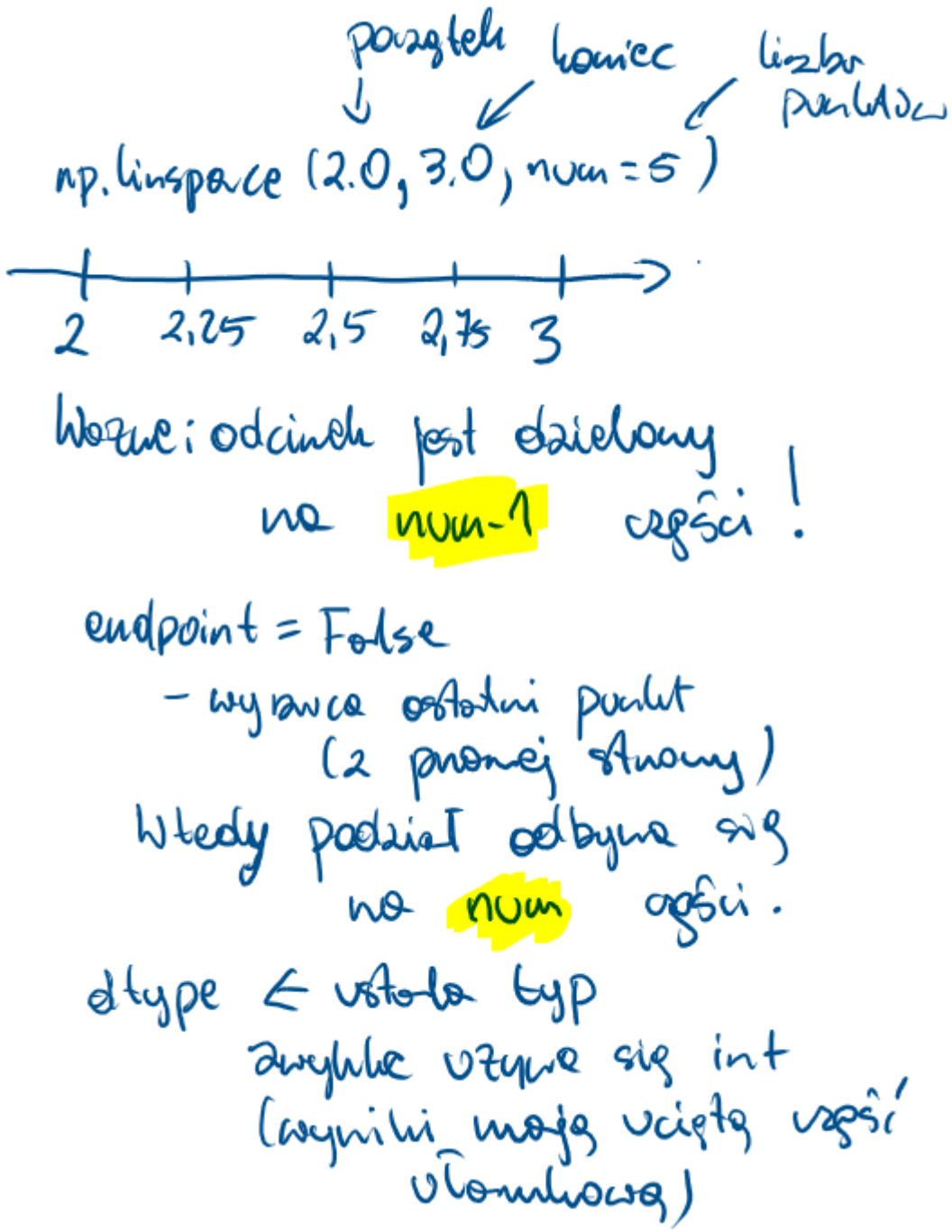
```
[0 1 2]
[0. 1. 2.]
[3 4 5 6]
[3 5 7 9]
[0.  0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9]
[3. 5. 7. 9.]
[3 5 7 9]
```

`np.linspace` - tablica wypełniona równomiernymi wartościami wg skali liniowej

```python
import numpy as np

a = np.linspace(2.0, 3.0, num=5)
print(a)
b = np.linspace(2.0, 3.0, num=5, endpoint=False)
print(b)
c = np.linspace(10, 20, num=4)
print(c)
d = np.linspace(10, 20, num=4, dtype=int)
print(d)
```

```
[2.   2.25 2.5  2.75 3.  ]
[2.  2.2 2.4 2.6 2.8]
[10.         13.33333333 16.66666667 20.        ]
[10 13 16 20]
```



`np.logspace` - tablica wypełniona wartościami wg skali logarytmicznej

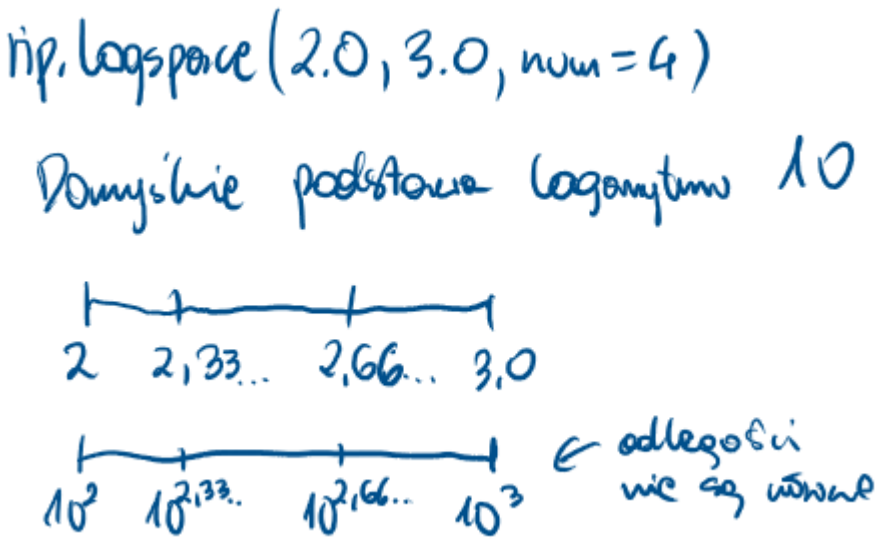
Składnia: `numpy.logspace(start, stop, num=50, endpoint=True, base=10.0, dtype=None,`

axis=0)

```
import numpy as np

a = np.logspace(2.0, 3.0, num=4)
print(a)
b = np.logspace(2.0, 3.0, num=4, endpoint=False)
print(b)
c = np.logspace(2.0, 3.0, num=4, base=2.0)
print(c)
```

```
[ 100.           215.443469    464.15888336 1000.        ]
[100.          177.827941   316.22776602 562.34132519]
[4.         5.0396842  6.34960421 8.        ]
```



`np.empty` - pusta (niezaincjowana) tablica - konkretne wartości nie są "gwarantowane"

```
import numpy as np

a = np.empty(3)
print(a)
b = np.empty(3, dtype=int)
print(b)
```

```
[0. 1. 2.]
[                   0 4607182418800017408 4611686018427387904]
```

`np.identity` - tablica przypominająca macierz jednostkową

`np.eye` - tablica z jedynkami na przekątnej (pozostałe zera)

```python
import numpy as np

print("a")
a = np.identity(4)
print(a)
print("b")
b = np.eye(4, k=1)
print(b)
print("c")
c = np.eye(4, k=2)
print(c)
print("d")
d = np.eye(4, k=-1)
print(d)
```

```
a
[[1. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 1.]]
b
[[0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 1.]
 [0. 0. 0. 0.]]
c
[[0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 1.]
 [0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0.]]
d
[[0. 0. 0. 0.]
 [1. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0.]]
```

Ćwiczenia: (`ex3.py`)

1. Utwórz jednowymiarową tablicę zawierającą liczby całkowite od 1 do 5 i przypisz ją do zmiennej `A`. Wynikowa tablica powinna mieć postać:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

2. Utwórz dwuwymiarową tablicę zawierającą elementy:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

   i przypisz ją do zmiennej `B`.

3. Utwórz tablicę zawierającą liczby od 0 do 9 (włącznie). Przypisz ją do zmiennej `C`. Oczekiwana postać:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

4. Utwórz tablicę zawierającą liczby od 10 do 30 z krokiem 5. Przypisz do `D`. Oczekiwana postać:

$$\begin{bmatrix}10 & 15 & 20 & 25 & 30\end{bmatrix}$$

5. Utwórz tablicę 5 wartości równomiernie rozłożonych pomiędzy 0 a 1. Przypisz do `E`. Przykładowa postać:

$$\begin{bmatrix}0. & 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1.\end{bmatrix}$$

6. Utwórz dwuwymiarową tablicę o wymiarach 2x3 wypełnioną zerami. Przypisz do `F`. Oczekiwana postać:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

7. Korzystając z `np.eye` utwórz macierz jednostkową 4x4. Przypisz do `J`. Oczekiwana postać:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

8 Indeksowanie, “krojenie”

```
import numpy as np

a = np.array([2, 5, -2, 4, -7, 8, 9, 11, -23, -4, -7, 16, 1])
print("1:", a[5])                                                    ①
print("2:", a[-2])                                                   ②
print("3:", a[3:6])                                                  ③
print("4:", a[:])                                                    ④
print("5:", a[0:-1])                                                 ⑤
print("6:", a[:5])                                                   ⑥
```

① Dostęp do elementu o indeksie 5.
② Dostęp do elementu drugiego od tyłu.
③ Dostęp do elementów o indeksach od 3 do 5 (włącznie) - zasada przedziałów lewostronnnie domkniętnych, prawostronnie otwartych.
④ Dostęp do wszystkich elementów.
⑤ Dostęp do wszystkich elementów z wyłączeniem ostatniego.
⑥ Dostęp od początku do elementu o indeksie 4.

```
1: 8
2: 16
3: [ 4 -7  8]
4: [  2   5  -2   4  -7   8   9  11 -23  -4  -7  16   1]
5: [  2   5  -2   4  -7   8   9  11 -23  -4  -7  16]
6: [ 2  5 -2  4 -7]
```

```
import numpy as np

print("1:", a[4:])                                                   ①
print("2:", a[4:-1])                                                 ②
print("3:", a[4:10:2])                                               ③
print("4:", a[::-1])                                                 ④
print("5:", a[::2])                                                  ⑤
print("6:", a[::-2])                                                 ⑥
```

① Dostęp do elementów od indeksu 4 do końca.
② Dostęp do elementów od indeksu 4 do końca bez ostatniego.
③ Dostęp do elementów o indeksach stanowiących ciąg arytmetyczny od 4 do 10 (z czówrką, ale bez dziesiątki) z krokiem równym 2
④ Dostęp do elementów od tyłu do początku.
⑤ Dostęp do elementów o indeksach parzystych od początku.
⑥ Dostęp do elementów o indeksach "nieparzystych ujemnych" od początku.

```
1: [ -7   8   9  11 -23  -4  -7  16   1]
2: [ -7   8   9  11 -23  -4  -7  16]
3: [ -7   9 -23]
4: [  1  16  -7  -4 -23  11   9   8  -7   4  -2   5   2]
5: [  2  -2  -7   9 -23  -7   1]
6: [  1  -7 -23   9  -7  -2   2]
```

```python
import numpy as np

a = np.array([[3, 4, 5], [-3, 4, 8], [3, 2, 9]])
b = a[:2, 1:]
print(b)
print(np.shape(b))
c = a[1]
print(c)
print(np.shape(c))
d = a[1, :]
print(d)
print(np.shape(d))
```

```
[[4 5]
 [4 8]]
(2, 2)
[-3  4  8]
(3,)
[-3  4  8]
(3,)
```

```python
import numpy as np

a = np.array([[3, 4, 5], [-3, 4, 8], [3, 2, 9]])
e = a[1:2, :]
print(e)
```

```
print(np.shape(e))
f = a[:, :2]
print(f)
print(np.shape(f))
g = a[1, :2]
print(g)
print(np.shape(g))
h = a[1:2, :2]
print(h)
print(np.shape(h))
```

```
[[-3  4  8]]
(1, 3)
[[ 3  4]
 [-3  4]
 [ 3  2]]
(3, 2)
[-3  4]
(2,)
[[-3  4]]
(1, 2)
```

**Uwaga - takie “krojenie” to tzw “widok”.

```
import numpy as np

a = np.array([[3, 4, 5], [-3, 4, 8], [3, 2, 9]])
b = a[1:2, 1:]
print(b)
a[1][1] = 9
print(a)
print(b)
b[0][0] = -11
print(a)
print(b)
```

```
[[4 8]]
[[ 3  4  5]
 [-3  9  8]
 [ 3  2  9]]
[[9 8]]
```

```
[[  3   4   5]
 [ -3 -11   8]
 [  3   2   9]]
[[-11   8]]
```

Naprawa:

```
import numpy as np

a = np.array([[3, 4, 5], [-3, 4, 8], [3, 2, 9]])
b = a[1:2, 1:].copy()
print(b)
a[1][1] = 9
print(a)
print(b)
b[0][0] = -11
print(a)
print(b)
```

```
[[4 8]]
[[ 3  4  5]
 [-3  9  8]
 [ 3  2  9]]
[[4 8]]
[[ 3  4  5]
 [-3  9  8]
 [ 3  2  9]]
[[-11   8]]
```

Indeksowanie logiczne (fancy indexing, maski boolowskie)

```
import numpy as np

a = np.array([2, 5, -2, 4, -7, 8, 9, 11, -23, -4, -7, 8, 1])
b = a[np.array([1, 3, 7])]
print(b)
c = a[[1, 3, 7]]
print(c)
```

```
[ 5  4 11]
[ 5  4 11]
```

```
import numpy as np

a = np.array([2, 5, -2, 4, -7, 8, 9, 11, -23, -4, -7, 8, 1])
b = a > 0
print(b)
c = a[a > 0]
print(c)
d = a[(a > 5) & (a%2 !=0)] # znak & odpowiada za AND
print(d)
e = a[(a > 5) | (a%2 !=0)] # znak | odpowiada za OR
print(e)
f = a[(a > 5) ^ (a%2 !=0)] # znak ^ odpowiada za XOR
print(f)
g = a[~(a > 0)]
print(g)
```

```
[ True  True False  True False  True  True  True False False False  True
  True]
[ 2  5  4  8  9 11  8  1]
[ 9 11]
[  5  -7   8   9  11 -23  -7   8   1]
[  5  -7   8 -23  -7   8   1]
[ -2  -7 -23  -4  -7]
```

```
import numpy as np

a = np.array([2, 5, -2, 4, -7, 8, 9, 11, -23, -4, -7, 8, 1])
b = a[a > 0]
print(b)
b[0] = -5
print(a)
print(b)
a[1] = 20
print(a)
print(b)
```

```
[ 2  5  4  8  9 11  8  1]
[  2   5  -2   4  -7   8   9  11 -23  -4  -7   8   1]
[-5  5  4  8  9 11  8  1]
[  2  20  -2   4  -7   8   9  11 -23  -4  -7   8   1]
[-5  5  4  8  9 11  8  1]
```

Ćwiczenia: (`ex4.py`)

1. Rozważ jednowymiarową tablicę

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \end{bmatrix}.$$

   Napisz polecenie , które zwróci trzeci element tablicy. Następnie spróbuj pobrać przedział od drugiego do czwartego elementu włącznie.

2. Dla tej samej tablicy

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \end{bmatrix},$$

   użyj "fancy indexing", aby wybrać elementy o indeksach `[0, 2, 4]`. Spróbuj także wykorzystać negatywne indeksy, aby wybrać ostatni i przedostatni element w jednej operacji.

3. Rozważ dwuwymiarową tablicę

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

   Napisz polecenie, które zwróci drugi wiersz (jako tablicę jednowymiarową). Następnie pobierz cały pierwszy wiersz oraz dwie pierwsze kolumny.

4. Dla tablicy

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

   użyj "fancy indexing", aby wybrać elementy $(B_{1,1}, B_{0,2}, B_{2,0})$ za pomocą list indeksów w `numpy`. Otrzymaj wynik w postaci tablicy jednowymiarowej `[5, 3, 7]`.

5. Rozważ tablicę

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 \end{bmatrix}.$$

   Napisz polecenie, które zwróci wszystkie elementy drugiego wiersza oprócz ostatniego. Następnie pobierz co drugi element z pierwszego wiersza.

6. Dla tablicy

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 \end{bmatrix},$$

użyj "fancy indexing", aby pobrać elementy pierwszego wiersza w kolejności `[30, 10, 40]` korzystając z tablicy indeksów np. `[2, 0, 3]`. Następnie zastosuj "fancy indexing" do drugiego wiersza, aby uzyskać `[80, 50]`.

7. Rozważ jednowymiarową tablicę

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 \end{bmatrix}.$$

Za pomocą indeksowania wytnij ostatnie trzy elementy. Następnie pobierz wszystkie elementy o parzystych indeksach.

8. Dla tablicy

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 \end{bmatrix},$$

użyj "fancy indexing" za pomocą maski boolowskiej (utwórz maskę wybierającą elementy większe niż 15) i otrzymaj odpowiednio przefiltrowaną tablicę. Następnie zastosuj tę maskę do pobrania konkretnych elementów.

9. Rozważ tablicę dwuwymiarową

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}.$$

Za pomocą indeksowania wybierz środkowy wiersz i wszystkie kolumny oprócz ostatniej. Następnie wybierz ostatni wiersz i ostatnią kolumnę.

10. Dla tablicy

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix},$$

użyj "fancy indexing", aby w jednej operacji pobrać elementy $(E_{0,2}, E_{2,1})$ i ułożyć je w nowej tablicy. Spróbuj także stworzyć maskę boolowską wybierającą elementy większe niż 10 i pobrać wybrane wartości.

9 Modyfikacja kształtu i rozmiaru

```
import numpy as np

print("a")
a = np.array([[3, 4, 5], [-3, 4, 8], [3, 2, 9]])
print(a)
print("b")
b = np.reshape(a, (1, 9))
print(b)
print("c")
c = a.reshape(9)
print(c)
```

```
a
[[ 3  4  5]
 [-3  4  8]
 [ 3  2  9]]
b
[[ 3  4  5 -3  4  8  3  2  9]]
c
[ 3  4  5 -3  4  8  3  2  9]
```

```
import numpy as np

print("a")
a = np.array([[3, 4, 5], [-3, 4, 8], [3, 2, 9]])
print(a)
print("d")
d = a.flatten()
print(d)
print("e")
e = a.ravel()
print(e)
print("f")
```

```
f = np.ravel(a)
print(f)
```

```
a
[[ 3  4  5]
 [-3  4  8]
 [ 3  2  9]]
d
[ 3  4  5 -3  4  8  3  2  9]
e
[ 3  4  5 -3  4  8  3  2  9]
f
[ 3  4  5 -3  4  8  3  2  9]
```

```
import numpy as np

print("g")
g = [[1, 3, 4]]
print(g)
print("h")
h = np.squeeze(g)
print(h)
print("i")
i = a.T
print(i)
print("j")
j = np.transpose(a)
print(j)
```

```
g
[[1, 3, 4]]
h
[1 3 4]
i
[[ 3 -3  3]
 [ 4  4  2]
 [ 5  8  9]]
j
[[ 3 -3  3]
 [ 4  4  2]
 [ 5  8  9]]
```

```
import numpy as np

print("h")
h = [3, -4, 5, -2]
print(h)
print("k")
k = np.hstack((h, h, h))
print(k)
print("l")
l = np.vstack((h, h, h))
print(l)
print("m")
m = np.dstack((h, h, h))
print(m)
```

```
h
[3, -4, 5, -2]
k
[ 3 -4  5 -2  3 -4  5 -2  3 -4  5 -2]
l
[[ 3 -4  5 -2]
 [ 3 -4  5 -2]
 [ 3 -4  5 -2]]
m
[[[ 3  3  3]
  [-4 -4 -4]
  [ 5  5  5]
  [-2 -2 -2]]]
```

```
import numpy as np

a = np.array([[1, 2], [3, 4]])
b = np.array([[5, 6]])
print("r1")
r1 = np.concatenate((a, b))
print(r1)
print("r2")
r2 = np.concatenate((a, b), axis=0)
print(r2)
print("r3")
r3 = np.concatenate((a, b.T), axis=1)
```

```
print(r3)
print("r4")
r4 = np.concatenate((a, b), axis=None)
print(r4)
```

```
r1
[[1 2]
 [3 4]
 [5 6]]
r2
[[1 2]
 [3 4]
 [5 6]]
r3
[[1 2 5]
 [3 4 6]]
r4
[1 2 3 4 5 6]
```

```
import numpy as np

a = np.array([[1, 2], [3, 4]])
print("r1")
r1 = np.resize(a, (2, 3))
print(r1)
print("r2")
r2 = np.resize(a, (1, 4))
print(r2)
print("r3")
r3 = np.resize(a, (2, 4))
print(r3)
```

```
r1
[[1 2 3]
 [4 1 2]]
r2
[[1 2 3 4]]
r3
[[1 2 3 4]
 [1 2 3 4]]
```

```python
import numpy as np

a = np.array([[1, 2], [3, 4]])
b = np.array([[5, 6]])
print("r1")
r1 = np.append(a, b)
print(r1)
print("r2")
r2 = np.append(a, b, axis=0)
print(r2)
```

```
r1
[1 2 3 4 5 6]
r2
[[1 2]
 [3 4]
 [5 6]]
```

```python
import numpy as np

a = np.array([[1, 2], [3, 7]])
print("r1")
r1 = np.insert(a, 1, 4)
print(r1)
print("r2")
r2 = np.insert(a, 2, 4)
print(r2)
print("r3")
r3 = np.insert(a, 1, 4, axis=0)
print(r3)
print("r4")
r4 = np.insert(a, 1, 4, axis=1)
print(r4)
```

```
r1
[1 4 2 3 7]
r2
[1 2 4 3 7]
r3
[[1 2]
 [4 4]
```

```
 [3 7]]
r4
[[1 4 2]
 [3 4 7]]
```

```python
import numpy as np

a = np.array([[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7, 8], [9, 10, 11, 12]])
print("r1")
r1 = np.delete(a, 1, axis=1)
print(r1)
print("r2")
r2 = np.delete(a, 2, axis=0)
print(r2)
```

```
r1
[[ 1  3  4]
 [ 5  7  8]
 [ 9 11 12]]
r2
[[1 2 3 4]
 [5 6 7 8]]
```

Ćwiczenia: (`ex5.py`)

1. Rozważ tablicę jednowymiarową

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

   Przekształć ją tak, aby uzyskać tablicę dwuwymiarową o kształcie 2×3.

2. Mając tablicę dwuwymiarową

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

   uzyskaj jednowymiarowy "widok" jej elementów bez zmiany w danych źródłowych.

3. Rozważ tablicę

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Zmień jej orientację tak, aby wiersze stały się kolumnami, a kolumny wierszami.

4. Mając dwie tablice

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

połącz je w poziomie, tworząc jedną tablicę.

5. Dwie tablice

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

połącz w pionie, aby uzyskać tablicę o kształcie 2×3.

6. Dla tablicy

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

zmień jej rozmiar tak, aby stała się tablicą jednowymiarową o 4 elementach. Pozostałe elementy usuń.

7. Mając tablicę

$$H = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{bmatrix},$$

usuń drugą kolumnę, otrzymując tablicę 3×2.

8. Rozważ tablicę

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$

zmień jej kształt tak, aby uzyskać tablicę 2×4.

9. Mając tablicę

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

przekształć ją w tablicę dwuwymiarową 2×2, a następnie "spłaszcz" ją z powrotem do postaci jednowymiarowej.

10 Broadcasting

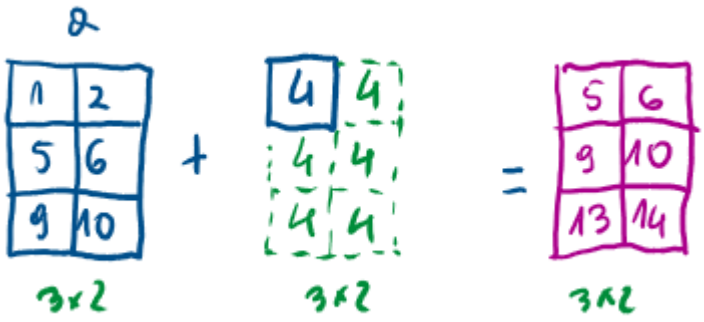
Rozważane warianty są przykładowe.

Wariant 1 - skalar-tablica - wykonanie operacji na każdym elemencie tablicy

```
import numpy as np

a = np.array([[1, 2], [5, 6], [9, 10]])
b = a + 4
print(b)
c = 2 ** a
print(c)
```

```
[[ 5  6]
 [ 9 10]
 [13 14]]
[[   2    4]
 [  32   64]
 [ 512 1024]]
```



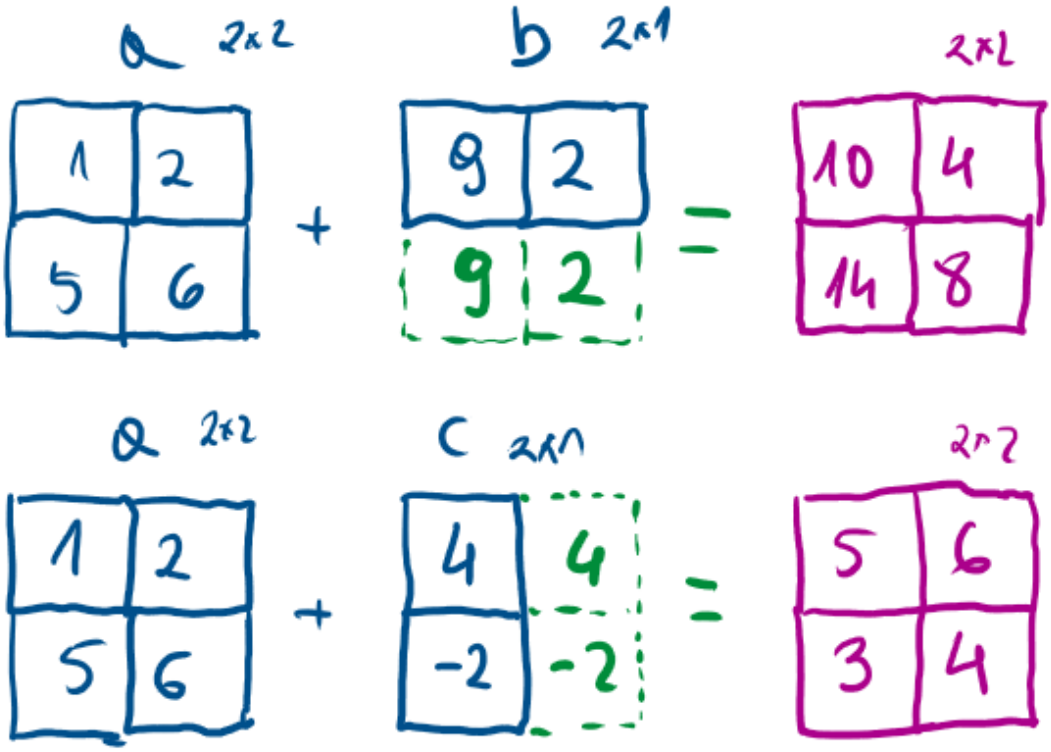
Wariant 2 - dwie tablice - "gdy jedna z tablic może być rozszerzona" (oba wymiary są równe lub jeden z nich jest równy 1)

https://numpy.org/doc/stable/user/basics.broadcasting.html

```python
import numpy as np

a = np.array([[1, 2], [5, 6]])
b = np.array([9, 2])
r1 = a + b
print(r1)
r2 = a / b
print(r2)
c = np.array([[4], [-2]])
r3 = a + c
print(r3)
r4 = c / a
print(r4)
```

```
[[10  4]
 [14  8]]
[[0.11111111 1.        ]
 [0.55555556 3.        ]]
[[5 6]
 [3 4]]
[[ 4.          2.        ]
 [-0.4        -0.33333333]]
```



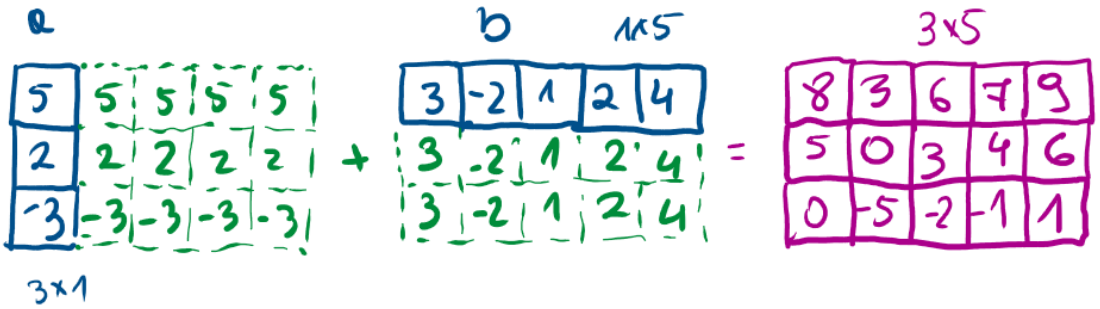
Wariant 3 - “kolumna” i “wiersz”

```
import numpy as np

a = np.array([[5, 2, -3]]).T
b = np.array([3, -2, 1, 2, 4])
print(a+b)
print(b+a)
print(a*b)
```

```
[[ 8  3  6  7  9]
 [ 5  0  3  4  6]
 [ 0 -5 -2 -1  1]]
[[ 8  3  6  7  9]
 [ 5  0  3  4  6]
 [ 0 -5 -2 -1  1]]
[[ 15 -10   5  10  20]
```

```
[  6  -4   2   4   8]
[ -9   6  -3  -6 -12]]
```



Ćwiczenia: (`ex6.py`)

1. Rozważ jednowymiarową tablicę

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   oraz skalar $k = 10$.
   Wykonaj dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie każdego elementu tablicy A przez k z wykorzystaniem broadcastingu.

2. Dla dwóch tablic jednowymiarowych

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

   wykonaj działanie $B_1 + B_2$, $B_1 - B_2$, $B_1 * B_2$ oraz B_1/B_2 używając broadcastingu.

3. Mając dwie tablice dwuwymiarowe:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix},$$

   dodaj je i odejmij od siebie, sprawdzając czy broadcasting zajdzie automatycznie.

4. Rozważ tablicę dwuwymiarową

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

oraz wektor

$$v = \begin{bmatrix} 10 & 100 & 1000 \end{bmatrix}.$$

Wykonaj mnożenie i dzielenie elementowe tablicy D przez v z wykorzystaniem broadcastingu.

5. Dla tablicy

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

podnieś każdy element do kwadratu, a następnie podziel przez wektor

$$w = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

korzystając z broadcastingu.

6. Mając tablicę dwuwymiarową

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

oraz skalar $s = 2$, wykonaj $F * s$, a następnie F^s (podnieś każdy element do potęgi s) z zastosowaniem broadcastingu.

7. Rozważ tablicę

$$G = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

oraz kolumnową tablicę dwuwymiarową

$$h = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dodaj do h tablicę G i zaobserwuj wynik broadcastingu.

8. Mając dwie tablice dwuwymiarowe o różnych wymiarach:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix},$$

spróbuj je dodać i pomnożyć przez siebie, korzystając z broadcastingu.

9. Rozważ tablicę dwuwymiarową

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

oraz skalar $m = 5$.
Wykonaj kombinację działań: najpierw pomnóż J przez m, następnie odejmij m, a na końcu podziel wynik przez m – wszystko z wykorzystaniem broadcastingu.

11 Funkcje uniwersalne (ufunc)

Funkcje uniwersalne (tzw. *ufunc*) to jedne z najważniejszych narzędzi w NumPy. Są to funkcje działające element-po-elemencie na tablicach, często implementowane w C, co zapewnia wysoką wydajność obliczeń. Dzięki *ufuncs* można w prosty i czytelny sposób wykonywać operacje arytmetyczne, trygonometryczne, statystyczne czy logiczne na całych tablicach bez konieczności pisania pętli w Pythonie.

11.1 Podstawowe operacje arytmetyczne

NumPy automatycznie przekształca operatory matematyczne w odpowiednie *ufunc*.
Na przykład:

- `+` odpowiada `np.add`
- `-` odpowiada `np.subtract`
- `*` odpowiada `np.multiply`
- `/` odpowiada `np.divide`
- `**` odpowiada `np.power`

Przykład:

```
import numpy as np

A = np.array([1, 2, 3, 4])
B = np.array([10, 20, 30, 40])

# Operacje element-po-elemencie
sum_tab = np.add(A, B)       # to samo co A + B
diff_tab = np.subtract(B, A) # to samo co B - A
mul_tab = np.multiply(A, 2)  # to samo co A * 2
pow_tab = np.power(A, 3)     # to samo co A ** 3

print("Suma:", sum_tab)
print("Różnica:", diff_tab)
print("Mnożenie przez 2:", mul_tab)
print("Potęgowanie:", pow_tab)
```

```
Suma: [11 22 33 44]
Różnica: [ 9 18 27 36]
Mnożenie przez 2: [2 4 6 8]
Potęgowanie: [ 1  8 27 64]
```

11.2 Funkcje trygonometryczne i pochodne

NumPy oferuje bogaty zestaw funkcji trygonometrycznych:

- `np.sin`, `np.cos`, `np.tan` – funkcje podstawowe,
- `np.arcsin`, `np.arccos`, `np.arctan` – odwrotne funkcje trygonometryczne,
- `np.sinh`, `np.cosh`, `np.tanh` – funkcje hiperboliczne.

Przykład:

```
import numpy as np

x = np.linspace(0, np.pi, 5) # tablica [0,  /4,  /2, 3 /4,  ]
sin_values = np.sin(x)
cos_values = np.cos(x)

print("Wartości sin(x):", sin_values)
print("Wartości cos(x):", cos_values)
```

```
Wartości sin(x): [0.00000000e+00 7.07106781e-01 1.00000000e+00 7.07106781e-01
 1.22464680e-16]
Wartości cos(x): [ 1.00000000e+00  7.07106781e-01  6.12323400e-17 -7.07106781e-01
 -1.00000000e+00]
```

11.3 Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

- `np.exp` – eksponenta,
- `np.log` – logarytm naturalny,
- `np.log10` – logarytm dziesiętny.

Przykład:

```
import numpy as np

A = np.array([1, np.e, np.e**2])
print("A:", A)
print("log(A):", np.log(A))
print("exp(A):", np.exp([0, 1, 2]))  # exp(0)=1, exp(1)=e, exp(2)=e^2
```

```
A: [1.         2.71828183 7.3890561 ]
log(A): [0. 1. 2.]
exp(A): [1.         2.71828183 7.3890561 ]
```

11.4 Funkcje zaokrąglające i wartości bezwzględne

- `np.round` – zaokrągla do najbliższej liczby,
- `np.floor` – podłoga,
- `np.ceil` – sufit,
- `np.trunc` – obcięcie do części całkowitej,
- `np.abs` – wartość bezwzględna.

Przykład:

```
import numpy as np

B = np.array([1.7, -2.5, 3.5, -4.1])
print("B:", B)
print("floor(B):", np.floor(B))
print("ceil(B):", np.ceil(B))
print("abs(B):", np.abs(B))
```

```
B: [ 1.7 -2.5  3.5 -4.1]
floor(B): [ 1. -3.  3. -5.]
ceil(B): [ 2. -2.  4. -4.]
abs(B): [1.7 2.5 3.5 4.1]
```

11.5 Funkcje statystyczne i agregujące

Choć wiele funkcji statystycznych dostępnych jest jako metody tablic (np. `A.mean()`, `A.std()`), istnieją też ufuncs działające element-po-elemencie lub akceptujące parametry osi:

- `np.minimum`, `np.maximum` – zwracają minimum/maksimum element-po-elemencie z dwóch tablic,
- `np.fmin`, `np.fmax` – podobne do wyżej wymienionych, ale ignorują wartości NaN,
- `np.sqrt` – pierwiastek kwadratowy,
- `np.square` – podniesienie do kwadratu.

Przykład:

```
import numpy as np

C1 = np.array([1, 4, 9, 16])
C2 = np.array([2, 2, 5, 20])

print("minimum elementów C1 i C2:", np.minimum(C1, C2))
print("maximum elementów C1 i C2:", np.maximum(C1, C2))
print("sqrt(C1):", np.sqrt(C1))
print("square(C2):", np.square(C2))
```

```
minimum elementów C1 i C2: [ 1  2  5 16]
maximum elementów C1 i C2: [ 2  4  9 20]
sqrt(C1): [1. 2. 3. 4.]
square(C2): [  4   4  25 400]
```

Ćwiczenia: (`ex7.py`)

1. Mając tablicę

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix},$$

   zastosuj funkcję uniwersalną, aby obliczyć pierwiastek kwadratowy każdego elementu.

2. Rozważ jednowymiarową tablicę

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

   zastosuj funkcję uniwersalną, aby otrzymać wartości bezwzględne wszystkich elementów.

3. Dla tablicy

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \pi/2 & \pi & 3\pi/2 \end{bmatrix},$$

   oblicz wartość funkcji trygonometrycznej dla każdego elementu.

4. Mając tablicę

$$D = \begin{bmatrix} 1 & e & e^2 \end{bmatrix},$$

zastosuj funkcję uniwersalną, aby obliczyć logarytm naturalny każdego elementu.

5. Dla tablicy dwuwymiarowej

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 20 \end{bmatrix},$$

podziel każdy element przez skalar, a następnie podnieś uzyskane wartości do kwadratu.

6. Rozważ tablicę

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

podnieś każdy element do trzeciej potęgi, a następnie zastosuj funkcję uniwersalną, aby obliczyć eksponentę z otrzymanych wartości.

7. Mając tablicę

$$G = \begin{bmatrix} -\pi & -\pi/2 & 0 & \pi/2 & \pi \end{bmatrix},$$

zastosuj odpowiednią funkcję uniwersalną, aby uzyskać cosinus każdego elementu.

8. Dla tablicy

$$H = \begin{bmatrix} 10 & 100 & 1000 \end{bmatrix},$$

zastosuj funkcję uniwersalną, aby obliczyć logarytm dziesiętny każdego elementu.

9. Mając tablicę

$$I = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 18 & 32 \end{bmatrix},$$

przekształć ją, stosując funkcję uniwersalną, tak aby każdy element był pierwiastkiem kwadratowym z wartości początkowej, a następnie pomnóż wyniki przez 2.

10. Rozważ tablicę

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -9 & -16 \end{bmatrix},$$

oblicz pierwiastek kwadratowy wartości bezwzględnych elementów tej tablicy, wykorzystując po kolei dwie różne funkcje uniwersalne.

12 Operacje na stringach

W `NumPy` poza dobrze znanymi tablicami liczbowymi, istnieje również zestaw funkcji pozwalających na wektorowe operacje na ciągach znaków.

Ważne: Poniższe funkcje są zazwyczaj dostępne w module `numpy.char`. W dokumentacji znajdują się one w sekcji String operations, jednak w tym materiale skupimy się na tym, jak można je wykorzystywać, zakładając interfejs z modułu `numpy.strings`. Jest to analogiczne do korzystania z `numpy.char`. Jest no nowsze podejście.

12.1 Tworzenie tablic z napisami

NumPy pozwala na przechowywanie tekstu w tablicach, np. tak:

```
import numpy as np

arr = np.array(["python", "NumPy", "data", "Science"])
print(arr)
```

```
['python' 'NumPy' 'data' 'Science']
```

12.2 Podstawowe funkcje do modyfikacji tekstu

Poniżej przedstawiono popularne funkcje do modyfikacji tekstu na tablicach stringów:

12.2.1 `numpy.strings.upper` i `numpy.strings.lower`

- `upper`: Zamiana wszystkich liter na wielkie.
- `lower`: Zamiana wszystkich liter na małe.

```
import numpy as np

arr = np.array(["python", "NumPy", "data", "Science"])

print(np.strings.upper(arr))
print(np.strings.lower(arr))
```

```
['PYTHON' 'NUMPY' 'DATA' 'SCIENCE']
['python' 'numpy' 'data' 'science']
```

12.2.2 `numpy.strings.capitalize`

Funkcja `capitalize` zamienia pierwszą literę wyrazu na wielką, a pozostałe na małe.

```
import numpy as np

arr = np.array(["python", "NumPy", "data", "Science"])
print(np.strings.capitalize(arr))
```

```
['Python' 'Numpy' 'Data' 'Science']
```

12.2.3 `numpy.strings.title`

Funkcja `title` sprawia, że każda część składowa tekstu (np. oddzielona spacją) zostaje zamieniona tak, by zaczynała się od wielkiej litery.

```
import numpy as np

arr2 = np.array(["python data science", "machine learning", "deep learning"])
print(np.strings.title(arr2))
```

```
['Python Data Science' 'Machine Learning' 'Deep Learning']
```

12.3 Łączenie i rozdzielanie tekstów

12.3.1 `numpy.strings.add`

Funkcja `add` łączy elementy tablic tekstowych, działając podobnie jak operator `+` na stringach, ale wektorowo.

```
import numpy as np

arr_a = np.array(["Hello", "Data"])
arr_b = np.array(["World", "Science"])

print(np.strings.add(arr_a, arr_b))
```

```
['HelloWorld' 'DataScience']
```

12.3.2 `numpy.strings.join`

Funkcja `join` pozwala na łączenie elementów tablicy przy użyciu wskazanego separatora.

```
import numpy as np

arr3 = np.array(["python", "numpy", "string"])
print(np.char.join("-", arr3))
```

```
['p-y-t-h-o-n' 'n-u-m-p-y' 's-t-r-i-n-g']
```

> Uwaga: `join` wektoryzuje operację, traktując każdy element tablicy jako sekwencję znaków do połączenia separatorem.

12.3.3 `numpy.strings.split`

Pozwala na rozdzielanie stringów według podanego separatora. Zwraca tablicę zawierającą listy podłańcuchów.

```
import numpy as np

arr4 = np.array(["python-data-science", "machine-learning"])
print(np.char.split(arr4, sep="-"))
```

```
[list(['python', 'data', 'science']) list(['machine', 'learning'])]
```

12.4 Wyszukiwanie i zamiana podciągów

12.4.1 `numpy.strings.find` i `numpy.strings.rfind`

- `find`: Zwraca indeks pierwszego wystąpienia podłańcucha (lub -1, jeśli nie znaleziono).
- `rfind`: Zwraca indeks ostatniego wystąpienia podłańcucha (lub -1, jeśli nie znaleziono).

```
import numpy as np

arr5 = np.array(["python", "data", "numpy"])
print(np.strings.find(arr5, "a"))
```

```
[-1  1 -1]
```

12.4.2 `numpy.strings.replace`

`replace` zamienia wszystkie wystąpienia podłańcucha na nowy ciąg znaków.

```
import numpy as np

arr6 = np.array(["python", "pydata", "pypy"])
print(np.strings.replace(arr6, "py", "PY"))
```

```
['PYthon' 'PYdata' 'PYPY']
```

12.5 Usuwanie zbędnych znaków

12.5.1 `numpy.strings.strip`, `numpy.strings.lstrip` i `numpy.strings.rstrip`

- `strip`: Usuwa wskazane znaki z początku i końca.
- `lstrip`: Usuwa wskazane znaki z lewej strony (początku).
- `rstrip`: Usuwa wskazane znaki z prawej strony (końca).

```
import numpy as np

arr7 = np.array(["   python   ", "  numpy  "])
print(np.strings.strip(arr7))
```

```
['python' 'numpy']
```

Możemy również podać niestandardowe znaki do usunięcia:

```
import numpy as np

arr8 = np.array(["###data###", "***science***"])
print(np.strings.strip(arr8, "#*"))
```

```
['data' 'science']
```

13 Alegbra liniowa w NumPy

13.1 Iloczyn skalarny (dot product)

Dla dwóch wektorów, `dot` oblicza ich iloczyn skalarny.

```
import numpy as np

# Iloczyn skalarny dwóch wektorów
a = np.array([1, 2, 3])
b = np.array([4, 5, 6])
result = np.dot(a, b)  # 1*4 + 2*5 + 3*6
print(result)  # Wynik: 32

# Alternatywny zapis za pomocą operatora @
result = a @ b
print(result)  # Wynik: 32
```

```
32
32
```

13.2 Mnożenie macierzowe

Dla macierzy (tablic dwuwymiarowych), `dot` wykonuje standardowe mnożenie macierzowe.

```
import numpy as np
# Mnożenie macierzowe
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
B = np.array([[5, 6], [7, 8]])
C = np.dot(A, B)
print(C)
# Wynik:
# [[19 22]
#  [43 50]]
```

```
# To samo za pomocą operatora @
C = A @ B
print(C)
```

```
[[19 22]
 [43 50]]
[[19 22]
 [43 50]]
```

13.3 Mnożenie macierz-wektor

Możemy również mnożyć macierz przez wektor:

```
import numpy as np
# Mnożenie macierz-wektor
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
v = np.array([5, 6])
result = np.dot(A, v)
print(result)  # Wynik: [17 39]
```

```
[17 39]
```

13.4 Rozwiązywanie układów równań liniowych

Funkcja `numpy.linalg.solve` rozwiązuje układy równań liniowych postaci $Ax = b$:

```
import numpy as np
# Rozwiązywanie układu równań liniowych
A = np.array([[3, 1], [1, 2]])
b = np.array([9, 8])
x = np.linalg.solve(A, b)
print(x)  # Wynik: [2. 3.]

# Sprawdzenie rozwiązania
np.dot(A, x)  # Powinno być równe b
```

```
[2. 3.]

array([9., 8.])
```

13.5 Wyznacznik macierzy

Funkcja `numpy.linalg.det` oblicza wyznacznik macierzy:

```
import numpy as np
# Obliczanie wyznacznika
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
det_A = np.linalg.det(A)
print(det_A)  # Wynik: -2.0
```

```
-2.0000000000000004
```

13.6 Wartości i wektory własne

Funkcja `numpy.linalg.eig` oblicza wartości i wektory własne macierzy:

```
import numpy as np
# Obliczanie wartości i wektorów własnych
A = np.array([[4, -2], [1, 1]])
eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)
print("Wartości własne:", eigenvalues)
print("Wektory własne:")
print(eigenvectors)

# Sprawdzenie: A * v = lambda * v
for i in range(len(eigenvalues)):
    lambda_i = eigenvalues[i]
    v_i = eigenvectors[:, i]
    print(f" _{i} = {lambda_i}")
    print("A * v =", np.dot(A, v_i))
    print("  * v =", lambda_i * v_i)
```

```
Wartości własne: [3. 2.]
Wektory własne:
[[0.89442719 0.70710678]
 [0.4472136  0.70710678]]
 _0 = 3.0
A * v = [2.68328157 1.34164079]
  * v = [2.68328157 1.34164079]
 _1 = 2.0
```

```
A * v = [1.41421356 1.41421356]
  * v = [1.41421356 1.41421356]
```

13.7 Rozkład wartości osobliwych (SVD)

Rozkład SVD jest potężnym narzędziem w analizie danych:

```
import numpy as np
# Rozkład SVD
A = np.array([[1, 2], [3, 4], [5, 6]])
U, s, Vh = np.linalg.svd(A)
print("Macierz U:")
print(U)
print("Wartości osobliwe:", s)
print("Macierz V^H:")
print(Vh)

# Rekonstrukcja macierzy A
S = np.zeros((A.shape[0], A.shape[1]))
S[:len(s), :len(s)] = np.diag(s)
A_reconstructed = U @ S @ Vh
print("Rekonstruowana macierz A:")
print(A_reconstructed)
```

```
Macierz U:
[[-0.2298477   0.88346102  0.40824829]
 [-0.52474482  0.24078249 -0.81649658]
 [-0.81964194 -0.40189603  0.40824829]]
Wartości osobliwe: [9.52551809 0.51430058]
Macierz V^H:
[[-0.61962948 -0.78489445]
 [-0.78489445  0.61962948]]
Rekonstruowana macierz A:
[[1. 2.]
 [3. 4.]
 [5. 6.]]
```

13.8 Norma macierzy/wektora

NumPy oferuje różne rodzaje norm:

```python
import numpy as np
# Różne normy
v = np.array([3, 4])
print("Norma L1:", np.linalg.norm(v, 1))  # Norma L1: 7.0
print("Norma L2 (Euklidesowa):", np.linalg.norm(v))  # Norma L2: 5.0
print("Norma maksimum:", np.linalg.norm(v, np.inf))  # Norma maksimum: 4.0

A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
print("Norma macierzowa Frobeniusa:", np.linalg.norm(A, 'fro'))  # Norma Frobeniusa: 5.477..
```

```
Norma L1: 7.0
Norma L2 (Euklidesowa): 5.0
Norma maksimum: 4.0
Norma macierzowa Frobeniusa: 5.477225575051661
```

13.9 Macierz odwrotna

Funkcja `numpy.linalg.inv` oblicza macierz odwrotną:

```python
import numpy as np
# Macierz odwrotna
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
A_inv = np.linalg.inv(A)
print("Macierz odwrotna:")
print(A_inv)

# Sprawdzenie: A * A^(-1) = I
print("A * A^(-1):")
print(np.dot(A, A_inv))  # Powinno być bliskie macierzy jednostkowej
```

```
Macierz odwrotna:
[[-2.   1. ]
 [ 1.5 -0.5]]
A * A^(-1):
[[1.0000000e+00 0.0000000e+00]
 [8.8817842e-16 1.0000000e+00]]
```

13.10 Funkcja `numpy.inner` - iloczyn wewnętrzny

Funkcja `inner` oblicza iloczyn wewnętrzny dwóch tablic:

```
import numpy as np
# Iloczyn wewnętrzny
a = np.array([1, 2, 3])
b = np.array([4, 5, 6])
result = np.inner(a, b)
print(result)  # 1*4 + 2*5 + 3*6 = 32

# Dla tablic 2D
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
B = np.array([[5, 6], [7, 8]])
result = np.inner(A, B)
print(result)
# Jest to równoważne wykonaniu iloczynu skalarnego wzdłuż ostatniego wymiaru
```

```
32
[[17 23]
 [39 53]]
```

13.11 Funkcja `numpy.outer` - iloczyn zewnętrzny

Funkcja `outer` oblicza iloczyn zewnętrzny dwóch wektorów:

```
import numpy as np
# Iloczyn zewnętrzny
a = np.array([1, 2, 3])
b = np.array([4, 5, 6])
result = np.outer(a, b)
print(result)
# Wynik:
# [[ 4  5  6]
#  [ 8 10 12]
#  [12 15 18]]
```

```
[[ 4  5  6]
 [ 8 10 12]
 [12 15 18]]
```

13.12 Funkcja `numpy.matmul` - mnożenie macierzowe

Funkcja `matmul` jest podobna do `dot`, ale ma nieco inne zachowanie dla tablic o wymiarach większych niż 2:

```
import numpy as np
# Porównanie dot i matmul
a = np.array([[1, 2], [3, 4]])
b = np.array([[5, 6], [7, 8]])

dot_result = np.dot(a, b)
matmul_result = np.matmul(a, b)

print("Wynik dot:")
print(dot_result)
print("Wynik matmul:")
print(matmul_result)
# Dla 2D są identyczne

# Ale dla tablic 3D i wyższych mogą się różnić
```

```
Wynik dot:
[[19 22]
 [43 50]]
Wynik matmul:
[[19 22]
 [43 50]]
```

14 Filtrowanie zaawansowane

14.1 Funkcja `nonzero()`

Zwraca indeksy elementów niezerowych w tablicy. Wynik jest zwracany jako krotka tablic, po jednej dla każdego wymiaru tablicy.

```
import numpy as np

arr = np.array([[3, 0, 0], [0, 4, 0], [5, 6, 0]])
indeksy = np.nonzero(arr)
print(indeksy)  # (array([0, 1, 2, 2]), array([0, 1, 0, 1]))

# Wydobycie wartości niezerowych
wartosci = arr[indeksy]
print(wartosci)  # [3 4 5 6]

# Alternatywnie można użyć:
indeksy_i_wartosci = np.argwhere(arr != 0)
print(indeksy_i_wartosci)
# [[0 0]
#  [1 1]
#  [2 0]
#  [2 1]]
```

```
(array([0, 1, 2, 2]), array([0, 1, 0, 1]))
[3 4 5 6]
[[0 0]
 [1 1]
 [2 0]
 [2 1]]
```

14.2 Funkcja `where()`

Zwraca elementy wybrane z `x` lub `y` w zależności od warunku. Jest to warunkowy selektor elementów.

```
import numpy as np

# Zastąp wartości ujemne przez 0
arr = np.array([1, -2, 3, -4, 5])
wynik = np.where(arr > 0, arr, 0)
print(wynik)  # [1 0 3 0 5]

# Zastosowanie w tablicy 2D
arr_2d = np.array([[1, -2, 3], [-4, 5, -6]])
wynik_2d = np.where(arr_2d < 0, -1, arr_2d)
print(wynik_2d)
# [[ 1 -1  3]
#  [-1  5 -1]]
```

```
[1 0 3 0 5]
[[ 1 -1  3]
 [-1  5 -1]]
```

14.3 Funkcje `indices()` i `ix_()`

14.3.1 `indices()`

Tworzy tablicę reprezentującą indeksy siatki.

```
import numpy as np

# Tworzenie siatki indeksów 3x4
grid = np.indices((3, 4))
print(grid.shape)  # (2, 3, 4)
print(grid[0])  # indeksy wierszy
# [[0 0 0 0]
#  [1 1 1 1]
#  [2 2 2 2]]
print(grid[1])  # indeksy kolumn
# [[0 1 2 3]
```

```
#  [0 1 2 3]
#  [0 1 2 3]]
```

```
(2, 3, 4)
[[0 0 0 0]
 [1 1 1 1]
 [2 2 2 2]]
[[0 1 2 3]
 [0 1 2 3]
 [0 1 2 3]]
```

14.3.2 `ix_()`

Konstruuje otwartą siatkę z wielu sekwencji, co jest przydatne do indeksowania wielowymiarowego.

```
import numpy as np
x = np.array([0, 1, 2])
y = np.array([3, 4, 5, 6])
indeksy = np.ix_(x, y)

# Tworzy indeksy dla wszystkich kombinacji (0,3), (0,4), ..., (2,6)
print(indeksy[0].shape, indeksy[1].shape)  # (3, 1) (1, 4)

# Użycie do wybierania podtablicy
arr = np.arange(16).reshape(4, 4)
print(arr)
# [[ 0  1  2  3]
#  [ 4  5  6  7]
#  [ 8  9 10 11]
#  [12 13 14 15]]

podtablica = arr[np.ix_([0, 2, 3], [0, 2])]
print(podtablica)
# [[ 0  2]
#  [ 8 10]
#  [12 14]]
```

```
(3, 1) (1, 4)
[[ 0  1  2  3]
 [ 4  5  6  7]
```

```
 [ 8  9 10 11]
 [12 13 14 15]]
[[ 0  2]
 [ 8 10]
 [12 14]]
```

14.4 `ogrid` i operacje na siatkach

`ogrid` pozwala na tworzenie otwartych siatek, co jest pamięciowo wydajniejsze niż pełne siatki.

```
import numpy as np

# Siatka punktów w zakresie od -2 do 2 z krokiem 0.1
x, y = np.ogrid[-2:2:0.1, -2:2:0.1]
maska = x**2 + y**2 <= 1  # Okrąg o promieniu 1
print(maska.shape)  # (40, 40)
```

```
(40, 40)
```

14.5 Funkcje `ravel_multi_index()` i `unravel_index()`

Te funkcje konwertują między indeksami wielowymiarowymi a płaskimi.

```
import numpy as np

# Konwersja indeksów wielowymiarowych na płaskie
indeksy_wielo = np.array([[0, 0], [1, 1], [2, 1]])
wymiary = (3, 3)
indeksy_plaskie = np.ravel_multi_index(indeksy_wielo.T, wymiary)
print(indeksy_plaskie)  # [0 4 7]

# Konwersja indeksów płaskich na wielowymiarowe
indeksy_plaskie = np.array([0, 3, 8])
ksztalt = (3, 3)
indeksy_wielo = np.unravel_index(indeksy_plaskie, ksztalt)
print(indeksy_wielo)  # (array([0, 1, 2]), array([0, 0, 2]))
```

```
[0 4 7]
(array([0, 1, 2]), array([0, 0, 2]))
```

14.6 Indeksy diagonalne

NumPy oferuje wiele funkcji do pracy z diagonalami macierzy.

```
import numpy as np
# Uzyskanie indeksów głównej przekątnej
n = 4
indeksy_diag = np.diag_indices(n)
print(indeksy_diag)  # (array([0, 1, 2, 3]), array([0, 1, 2, 3]))

# Zastosowanie do ustawienia głównej przekątnej
arr = np.zeros((4, 4))
arr[indeksy_diag] = 1  # Ustawienie jedynek na głównej przekątnej
print(arr)
# [[1. 0. 0. 0.]
#  [0. 1. 0. 0.]
#  [0. 0. 1. 0.]
#  [0. 0. 0. 1.]]

# Uzyskanie indeksów z istniejącej tablicy
arr2 = np.ones((3, 3))
indeksy_diag2 = np.diag_indices_from(arr2)
```

```
(array([0, 1, 2, 3]), array([0, 1, 2, 3]))
[[1. 0. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 0. 1.]]
```

14.7 3.1 Funkcja `take()`

Pobiera elementy z tablicy wzdłuż określonej osi na podstawie indeksów.

```
import numpy as np

arr = np.array([10, 20, 30, 40, 50])
indeksy = np.array([0, 2, 4])
wynik = np.take(arr, indeksy)
print(wynik)  # [10 30 50]
```

```
# W tablicach wielowymiarowych możemy wybrać oś
arr_2d = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
indeksy_wierszy = np.array([0, 2])
wynik_2d = np.take(arr_2d, indeksy_wierszy, axis=0)
print(wynik_2d)
# [[1 2 3]
#  [7 8 9]]
```

```
[10 30 50]
[[1 2 3]
 [7 8 9]]
```

##Funkcja `take_along_axis()`

Pobiera wartości z tablicy poprzez dopasowanie 1D indeksu i fragmentów danych. Jest bezpieczna dla duplikatów indeksów.

```
import numpy as np

arr = np.array([[10, 30, 20], [60, 40, 50]])
indeksy_kolejnosc = np.argsort(arr, axis=1)
wynik = np.take_along_axis(arr, indeksy_kolejnosc, axis=1)
print(wynik)
# [[10 20 30]
#  [40 50 60]]
```

```
[[10 20 30]
 [40 50 60]]
```

14.8 Funkcja `choose()`

Konstruuje tablicę wybierając elementy z listy tablic.

```
import numpy as np

opcje = [np.array([0, 1, 2, 3]),
         np.array([10, 11, 12, 13]),
         np.array([20, 21, 22, 23])]
indeksy = np.array([0, 2, 1, 0])  # Wybiera z której tablicy opcji wziąć element
wynik = np.choose(indeksy, opcje)
print(wynik)  # [ 0 22 11  3]
```

```
[ 0 21 12  3]
```

14.9 Funkcja `compress()`

Zwraca wybrane elementy tablicy wzdłuż określonej osi.

```
import numpy as np
arr = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
maska = np.array([True, False, True])
wynik = np.compress(maska, arr, axis=1)
print(wynik)
# [[1 3]
#  [4 6]]
```

```
[[1 3]
 [4 6]]
```

14.10 Funkcje `diag()` i `diagonal()`

Funkcje do pracy z przekątnymi.

```
import numpy as np

# Tworzenie tablicy diagonalnej
diag_arr = np.diag([1, 2, 3, 4])
print(diag_arr)
# [[1 0 0 0]
#  [0 2 0 0]
#  [0 0 3 0]
#  [0 0 0 4]]

# Pobieranie diagonali z tablicy
arr = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]])
diag = np.diag(arr)
print(diag)  # [1 5 9]

# Pobieranie przekątnej przesuniętej o 1
diag_offset = np.diagonal(arr, offset=1)
print(diag_offset)  # [2 6]
```

```
[[1 0 0 0]
 [0 2 0 0]
 [0 0 3 0]
 [0 0 0 4]]
[1 5 9]
[2 6]
```

14.11 Funkcja `select()`

Zwraca tablicę zbudowaną z elementów z listy opcji, w zależności od warunków.

```
import numpy as np

warunki = [arr < 3, arr < 6, arr < 9]
opcje = [100, 200, 300]
wynik = np.select(warunki, opcje, default=400)
print(wynik)
# [[100 100 200]
#  [200 200 300]
#  [300 300 400]]
```

```
[[100 100 200]
 [200 200 300]
 [300 300 400]]
```

14.12 Funkcja `place()`

Zmienia elementy tablicy na podstawie maski i podanych wartości.

```
import numpy as np

arr = np.arange(5)
maska = np.array([True, False, True, False, True])
np.place(arr, maska, [-1, -2, -3])  # Cyklicznie używa wartości [-1, -2, -3]
print(arr)  # [-1  1 -2  3 -3]
```

```
[-1  1 -2  3 -3]
```

14.13 Funkcja `put()`

Zastępuje określone elementy tablicy podanymi wartościami.

```
import numpy as np

arr = np.arange(5)
indeksy = [0, 2, 4]
np.put(arr, indeksy, [10, 20, 30])
print(arr)  # [10  1 20  3 30]
```

```
[10  1 20  3 30]
```

14.14 Funkcja `put_along_axis()`

Umieszcza wartości w tablicy docelowej, dopasowując 1D indeks i fragmenty danych wzdłuż określonej osi.

```
import numpy as np

arr = np.array([[10, 30, 20], [60, 40, 50]])
indeksy = np.argmin(arr, axis=1)
indeksy = np.expand_dims(indeksy, axis=1)  # Przekształć do kształtu (2, 1)
np.put_along_axis(arr, indeksy, 99, axis=1)
print(arr)
# [[99 30 20]
#  [60 40 99]]
```

```
[[99 30 20]
 [60 99 50]]
```

14.15 Funkcja `putmask()`

Zmienia elementy tablicy na podstawie warunku i podanych wartości.

```python
import numpy as np

arr = np.arange(5)
maska = np.array([True, False, True, False, True])
np.putmask(arr, maska, [-1, -2, -3])  # Cyklicznie używa wartości
print(arr)  # [-1  1 -2  3 -3]
```

```
[-1  1 -3  3 -2]
```

14.16 Funkcja `fill_diagonal()`

Wypełnia główną przekątną tablicy podaną wartością.

```python
import numpy as np

arr = np.zeros((4, 4))
np.fill_diagonal(arr, 5)
print(arr)
# [[5. 0. 0. 0.]
#  [0. 5. 0. 0.]
#  [0. 0. 5. 0.]
#  [0. 0. 0. 5.]]

arr_rect = np.zeros((4, 4, 4))
np.fill_diagonal(arr_rect, 9)
print(arr_rect[0])  # Wypełnia przekątną w każdym "plasterku" 3D tablicy
```

```
[[5. 0. 0. 0.]
 [0. 5. 0. 0.]
 [0. 0. 5. 0.]
 [0. 0. 0. 5.]]
[[9. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 0.]]
```

15 Numpy - inne

15.1 Stałe

`NumPy` dostarcza kilka znanych stałych matematycznych, które mogą być przydatne w obliczeniach naukowych i inżynierskich. Wbudowane stałe takie jak liczba Pi czy podstawa logarytmu naturalnego `e` ułatwiają pisanie czytelnego i zwięzłego kodu.

1. **`numpy.pi`**
   - Reprezentuje liczbę Pi ( ) z dużą dokładnością.
   - Pi to stosunek obwodu okręgu do jego średnicy.
   - W przybliżeniu: `3.141592653589793`
2. **`numpy.e`**
   - Reprezentuje podstawę logarytmu naturalnego, `e`.
   - `e` jest wykorzystywane w wielu dziedzinach, takich jak analiza matematyczna, probabilistyka, statystyka.
   - W przybliżeniu: `2.718281828459045`
3. **`numpy.eulergamma`**
   - Reprezentuje stałą Eulera-Mascheroniego, zwykle oznaczaną jako (gamma).
   - Pojawia się w analizie matematycznej, szczególnie w teorii liczb i badaniu szeregów harmonicznych.
   - W przybliżeniu: `0.5772156649015329`

```
import numpy as np

# Promień koła
r = 5.0

# Obwód koła: 2 *   * r
obwod = 2 * np.pi * r
```

```
print("Obwód koła:", obwod)

# Pole koła:   * r^2
pole = np.pi * r**2
print("Pole koła:", pole)
```

```
Obwód koła: 31.41592653589793
Pole koła: 78.53981633974483
```

```
import numpy as np

# Przykładowy punkt x
x = 1.0

# Wartość funkcji e^x
exp_value = np.e**x
print("e^x dla x=1:", exp_value)

# Porównanie z funkcją np.exp
exp_compare = np.exp(x)
print("Porównanie z np.exp(1):", exp_compare)
```

```
e^x dla x=1: 2.718281828459045
Porównanie z np.exp(1): 2.718281828459045
```

15.2 `numpy.inf`

- **Opis**: `np.inf` reprezentuje wartość nieskończoną (∞).
- Często pojawia się w obliczeniach, gdy wartość danego wyrażenia dąży do nieskończoności (np. dzielenie przez zero, pewne limity, itp.).
- Przykładowo, `1.0 / 0.0` zwróci ostrzeżenie i w konsekwencji może dać wartość `inf`.

```
import numpy as np

# Zastosowanie w tworzeniu masek logicznych
arr = np.array([1, 2, np.inf, 4, 5])
mask = np.isinf(arr)
print("Maska elementów o wartości inf:", mask)
```

```
Maska elementów o wartości inf: [False False  True False False]
```

15.3 numpy.nan

- **Opis**: `np.nan` oznacza "Not a Number" (NaN), czyli wartość nieokreśloną lub niereprezentowalną w systemie liczbowym.
- Pojawia się, gdy wynik operacji numerycznej jest nieokreślony, np. `0.0/0.0`, `inf - inf` lub przy błędach wczytywania danych.
- Operacje arytmetyczne z `nan` zazwyczaj również zwracają `nan`.

```
import numpy as np

# Zamiana wartości nan w tablicy
data = np.array([1, 2, np.nan, 4, np.nan])
print("Oryginalne dane:", data)

# Wypełnienie wartości nan zerem
data_no_nan = np.nan_to_num(data, nan=0.0)
print("Dane bez nan:", data_no_nan)
```

```
Oryginalne dane: [ 1.  2. nan  4. nan]
Dane bez nan: [1. 2. 0. 4. 0.]
```

15.4 numpy.newaxis

- **Opis**: `np.newaxis` jest specjalną "stałą"/obiektem służącym do zmiany wymiarów tablic przez zwiększenie ich liczby wymiarów o 1.

```
import numpy as np

# Mamy tablicę 1D
vec = np.array([1, 2, 3, 4])
print("Oryginalna tablica:", vec, "Kształt:", vec.shape)

# Dodajemy nowy wymiar jako wymiar wierszy
vec_as_col = vec[:, np.newaxis]
print("Tablica jako kolumna:\n", vec_as_col, "Kształt:", vec_as_col.shape)
```

```python
# Dodawanie wymiaru na początku
vec_as_row = vec[np.newaxis, :]
print("Tablica jako wiersz:\n", vec_as_row, "Kształt:", vec_as_row.shape)

# Kolejny przykład: dodanie wymiaru by z łatwością broadcastować operacje
a = np.array([10, 20, 30])
b = np.array([1, 2])
# Bez nowego wymiaru próba dodania a do b się nie powiedzie,
# bo kształty nie są kompatybilne.
# Z nowym wymiarem a ma kształt (3,1), a b (2,), co pozwala na broadcast
sum_matrix = a[:, np.newaxis] + b
print("Operacja z broadcast:\n", sum_matrix)
```

```
Oryginalna tablica: [1 2 3 4] Kształt: (4,)
Tablica jako kolumna:
 [[1]
 [2]
 [3]
 [4]] Kształt: (4, 1)
Tablica jako wiersz:
 [[1 2 3 4]] Kształt: (1, 4)
Operacja z broadcast:
 [[11 12]
 [21 22]
 [31 32]]
```

15.5 Statystyka i agregacja

Funkcja	Opis
np.mean	Średnia wszystkich wartości w tablicy.
np.std	Odchylenie standardowe.
np.var	Wariancja.
np.sum	Suma wszystkich elementów.
np.prod	Iloczyn wszystkich elementów.
np.cumsum	Skumulowana suma wszystkich elementów.
np.cumprod	Skumulowany iloczyn wszystkich elementów.
np.min,np.max	Minimalna/maksymalna wartość w tablicy.
np.argmin, np.argmax	Indeks minimalnej/maksymalnej wartości w tablicy.
np.all	Sprawdza czy wszystki elementy są różne od zera.

Funkcja	Opis
np.any	Sprawdza czy co najmniej jeden z elementów jest różny od zera.

15.6 Wyrażenia warunkowe

https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.where https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.choose https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.select https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.nonzero

15.7 Działania na zbiorach

https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.set.html

15.8 Operacje tablicowe

https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.transpose

https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.flip https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.fliplr https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.flipud

https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.sort

15.9 Data i czas

https://numpy.org/doc/stable/reference/arrays.datetime.html

15.10 Pseudolosowe

https://numpy.org/doc/stable/reference/random/index.html

16 Etapy eksploracji danych

- **Zbieranie danych**:
  - Zebranie danych z różnych źródeł (bazy danych, pliki CSV, API, itd.).
- **Zrozumienie danych**:
  - Analiza struktury danych, typów danych i ich znaczenia.
  - Eksploracja wstępnych zależności i trendów.
- **Czyszczenie danych**:
  - Usuwanie braków, błędów i anomalii w danych.
  - Obsługa brakujących wartości i duplikatów.
- **Transformacja danych**:
  - Normalizacja, standaryzacja, kodowanie zmiennych kategorycznych.
  - Tworzenie nowych zmiennych (cech).
- **Redukcja danych**:
  - Selekcja istotnych cech lub zmniejszenie wymiarowości danych (np. PCA).