

# Materiaalmodellen

Opgaven met Antwoorden bij de cursus  
"Modelleren van Mechanisch Materiaalgedrag"

dr.ir. P.J.G. Schreurs

Technische Universiteit Eindhoven  
Faculteit Werktuigbouwkunde  
Materials Technology  
6 augustus 2012



## **Inhoudsopgave**

<b>1</b>	<b>Three-dimensional deformation</b>	<b>V - 1</b>
<b>2</b>	<b>Truss structures</b>	<b>V - 11</b>
<b>3</b>	<b>Elastic material behavior</b>	<b>V - 15</b>
<b>4</b>	<b>Elastoplastic material behavior</b>	<b>V - 29</b>
<b>5</b>	<b>Viscoelastic material behavior</b>	<b>V - 55</b>
<b>6</b>	<b>Numerical analyses</b>	<b>V - 73</b>



## OPGAVEN

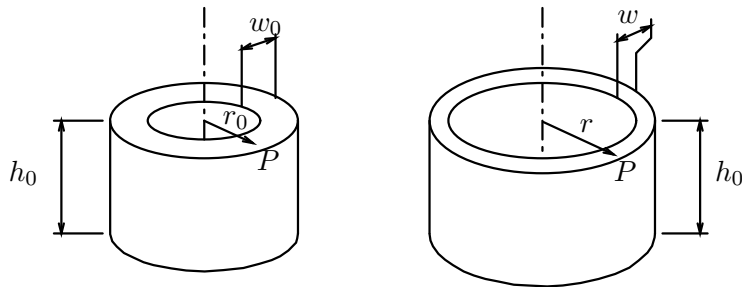


# 1 Three-dimensional deformation

---

## Vraagstuk 1.1

Een open buis wordt radiaal opgerekt, zoals in onderstaande figuur is getekend.



De afmetingen (hoogte, diameter, wanddikte) zijn in de figuur aangegeven.

Geef de drie hoofdverlengingsfactoren in punt  $P$  (straal  $r_0$  respectievelijk  $r$ ).

---

## Vraagstuk 1.2

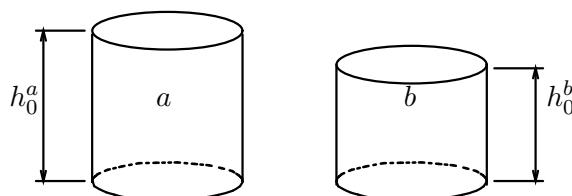
Een dunwandige bol, gemaakt van een aluminium legering wordt opgeblazen door een inwendige druk. De oorspronkelijke, onvervormde diameter  $D_o$  van de bol is 200 mm. Experimenten hebben uitgewezen dat het materiaal bi-axiaal kan worden verstrekt tot een uniforme biaxiale lineaire rek van 40 %.

Tot welke diameter  $D_f$  kan de bol maximaal worden opgeblazen ?

---

**Vraagstuk 1.3**

Twee cilindrische proefstukken  $a$  en  $b$  van incompressibel materiaal hebben hetzelfde cirkelvormige dwarsdoorsnede-oppervlak  $A_0$ , maar een verschillende hoogte :  $h_0^a$  en  $h_0^b$  .



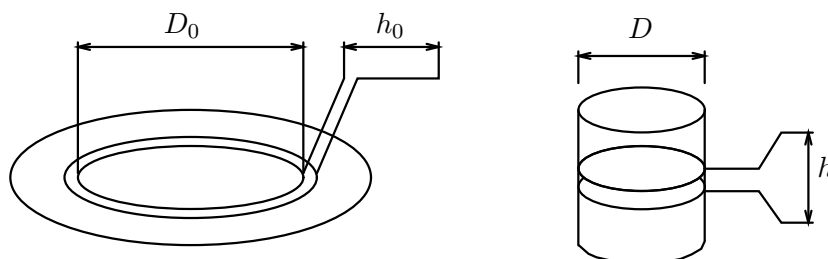
Beide proefstukken worden met een pers samengedrukt tot de hoogte  $h^a$  respectievelijk  $h^b$ . De gerealiseerde hoogtereductie ( $h/h_0$ ) is gelijk voor beide proefstukken.

Wat is de verhouding van hun diameter  $d$  na deformatie ?

---

**Vraagstuk 1.4**

Een ronde schijf met dikte  $d$  wordt diepgetrokken zodat er een beker met binnendiameter  $D$  ontstaat. Het deformatieproces wordt zodanig uitgevoerd dat de wanddikte van de beker bij benadering overal gelijk is aan  $d$ . Er geldt :  $d \ll D$ . Het materiaal kan incompressibel worden verondersteld.



We beschouwen een ringvormig gedeelte van de schijf met binnendiameter  $D_0$  en buitendiameter  $D_0 + 2h_0$ , waarbij  $h_0 \ll D_0$  is. In de beker treffen we het materiaal van de beschouwde ring aan als een cilindertje, zoals in de figuur is aangegeven.

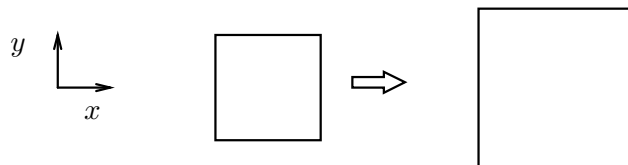
Hoe groot is de hoogte  $h$  van deze cilinder ?



---

**Vraagstuk 1.5**

Een oorspronkelijk vierkant stuk plaatmateriaal wordt bi-axiaal in gelijke mate opgerekt, zoals in onderstaande figuur is getekend.



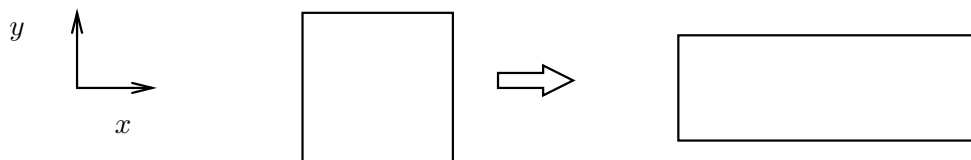
De verlengingsfactor in  $x$ - en  $y$ -richting is  $\lambda$ . De verlengingsfactor loodrecht op het  $(xy)$ -vlak is  $\mu$ .

Hoe groot is  $\mu$  als het materiaalgedrag incompressibel is?

---

**Vraagstuk 1.6**

Een oorspronkelijk vierkant stuk plaatmateriaal wordt in  $x$ -richting opgerekt, zoals in onderstaande figuur is getekend.



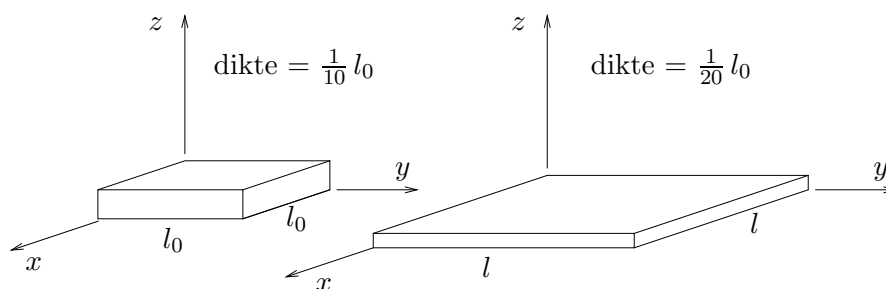
De verlengingsfactor in  $x$ -richting is  $\lambda$ . De verlengingsfactor in  $y$ -richting is  $\mu$ . Loodrecht op het  $(xy)$ -vlak vindt er geen vervorming plaats.

Hoe groot is  $\mu$  als het materiaalgedrag incompressibel is?

---

### Vraagstuk 1.7

Een vierkant plaatje met constante dikte wordt bi-axiaal verstrekt zoals in onderstaande figuur is getekend.

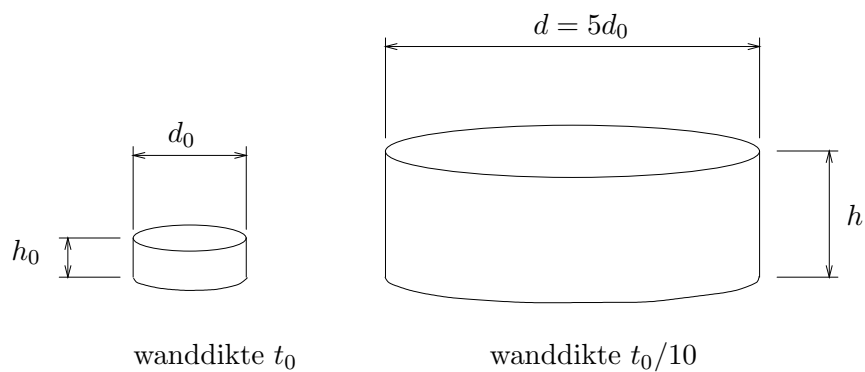


Hoe groot is de afmeting  $l$  in de vervormde toestand als het materiaal incompressibel mag worden verondersteld?

---

### Vraagstuk 1.8

Een kunststof folie wordt met het folieblaasproces gefabriceerd. Daarbij wordt een "ring" van de kunststof vervormd zoals in de figuur is geschetst. Het materiaal van de folie kan incompressibel worden verondersteld.

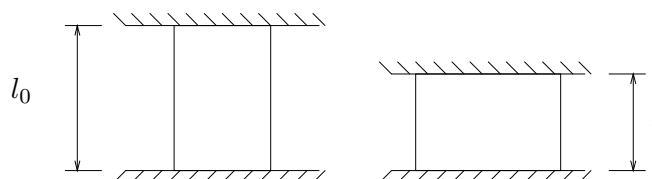


Hoe groot is de lengte  $h$  ?

---

**Vraagstuk 1.9**

Een cilindrisch stuk staal met cirkelvormige dwarsdoorsnede wordt tijdens een drukproef gedeformeerd, zoals in onderstaande figuur getekend is. Tussen staal en stempels treedt geen wrijving op. Het materiaal kan incompressibel worden verondersteld. De snelheid waarmee de stempels naar elkaar toe bewegen is zodanig gekozen dat de logarithmische reksnelheid in axiale richting constant ( $\dot{\epsilon}_{ln} = -c; c > 0$ ) is.

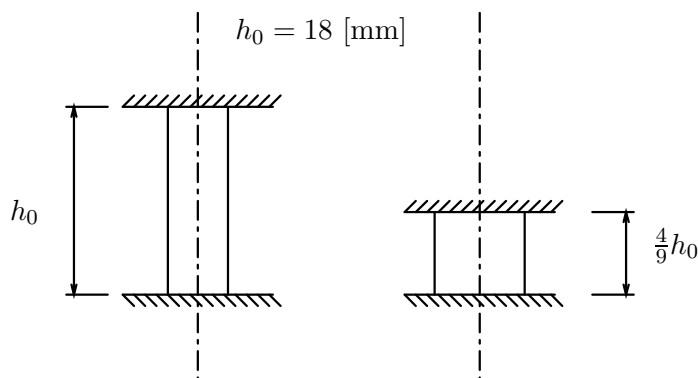


Hoe groot is de lengte op een tijdstip  $t$  na het begin van de proef ?

---

**Vraagstuk 1.10**

Een cilindrisch stuk staal met cirkelvormige dwarsdoorsnede wordt tussen twee stempels van een schroefpers gedeformeerd, zoals in onderstaande figuur getekend is. Tussen staal en stempels treedt geen wrijving op. De snelheid waarmee de stempels naar elkaar toe bewegen is  $1 \text{ [m/s]}$ . Het materiaal kan incompressibel worden verondersteld.



Hoe groot is de logarithmische reksnelheid aan het eind van het deformatieproces ?

---

**Vraagstuk 1.11**

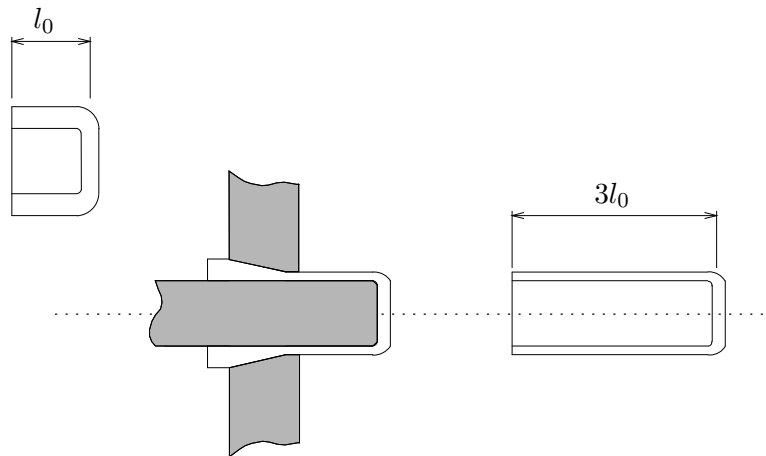
Een strip wordt door walsen verstrekt zodat in de walsrichting geldt :  $\lambda = 4$ . De strip is na het walsen bovendien tweemaal zo breed als ervoor. Het materiaal kan incompressibel worden verondersteld. De snelheid van de strip vóór de walszone is  $v_0$ .

Hoe groot is de snelheid  $v$  van de verstrekte strip achter de walszone?

---

**Vraagstuk 1.12**

In onderstaande figuur is het *strijk*proces geschetst, waarmee o.a. bierblikjes worden gefabriceerd. Een diepgetrokken cupje wordt tussen een doorn en een treksteen gedeformeerd waarbij het driemaal zo lang wordt. De wanddikte neemt daarbij flink af. De procestijd voor één blikje bedraagt  $\frac{1}{5}$  seconde.

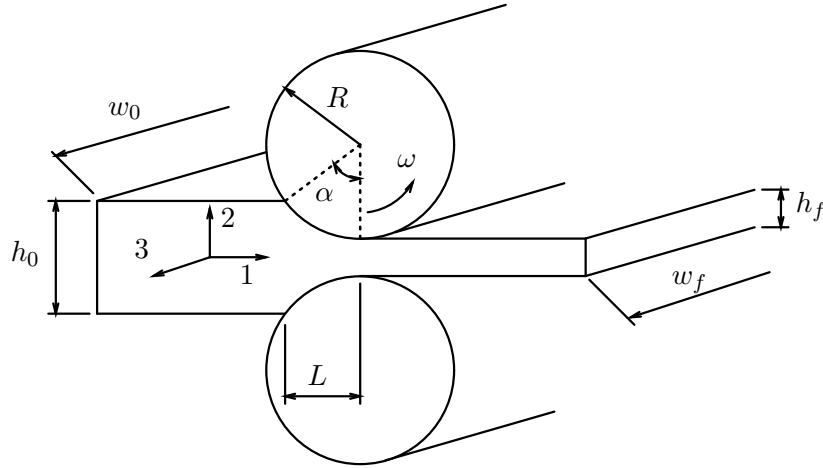


Hoe groot is – bij benadering – de logarithmische reksnelheid in axiale richting, die in de wand van het blikje aan het eind van het proces optreedt ?

---

### Vraagstuk 1.13

Beschouw het walsproces, dat geschetst is in onderstaande figuur.



Verondersteld wordt dat het materiaal gedurende het walsen geen volumeverandering ondergaat. Bovendien wordt aangenomen dat de plaat niet deformeert in de richting evenwijdig met de rol-assen :  $w_f = w_0$ .

- Wijs de hoofdrichtingen van de deformatie aan in de figuur.
- Bereken de hoofdverlengingsfactoren en druk ze uit in  $h_0$  en  $h_f$ .

De deformatie van het materiaal vindt plaats in de *roll gap*  $L$ . De rotatiesnelheid van de rollen is  $\omega$  [rad/s].

- Bereken de tijd  $t_d$  die nodig is om het materiaal te vervormen.  
Druk  $t_d$  uit in  $\alpha$  en  $\omega$ .
- Noem de verlengingsfactor in de walsrichting  $\lambda_1$ .  
Bereken de verlengingssnelheid  $\dot{\lambda}_1$ .

De volgende waarden zijn gegeven :

$$h_0 = 25 \text{ [mm]} \quad ; \quad h_f = 20 \text{ [mm]} \quad : \quad R = 300 \text{ [mm]}$$

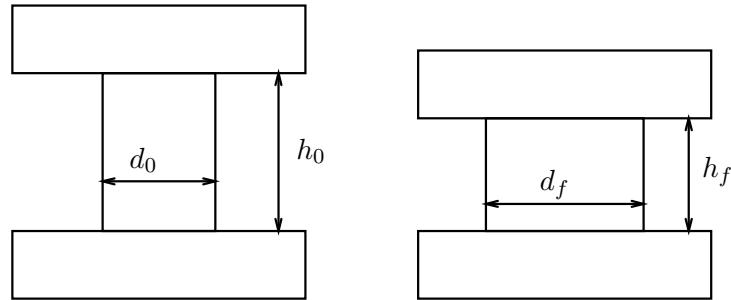
De rollen draaien rond met een toerental  $N = 100$  [r/min].

- Bereken de verlengingssnelheid  $\dot{\lambda}_1$ .
- Bereken de logarithmische reksnelheid  $\dot{\epsilon}_{ln_1}$ .

---

**Vraagstuk 1.14**

In onderstaande figuur is een smeedproces geschetst.



We veronderstellen hier dat er geen wrijving optreedt tussen stempel en het cilindrische werkstuk. De onvervormde diameter en hoogte is  $d_0$  en  $h_0$ . Na vervorming is de diameter en de hoogte  $d_f$  en  $h_f$ .

- Wijs de hoofdrichtingen van de deformatie aan in de figuur.
- Druk de hoofdverlengingsfactoren uit in de gegeven afmetingen.
- Druk  $d_f$  uit in  $h_0$ ,  $h_f$  en  $d_0$  als gegeven is dat het materiaal incompressibel is.

We veronderstellen dat gebruik wordt gemaakt van een mechanische pers met een hamersnelheid van 1 [m/s]. Verder is het volgende gegeven :

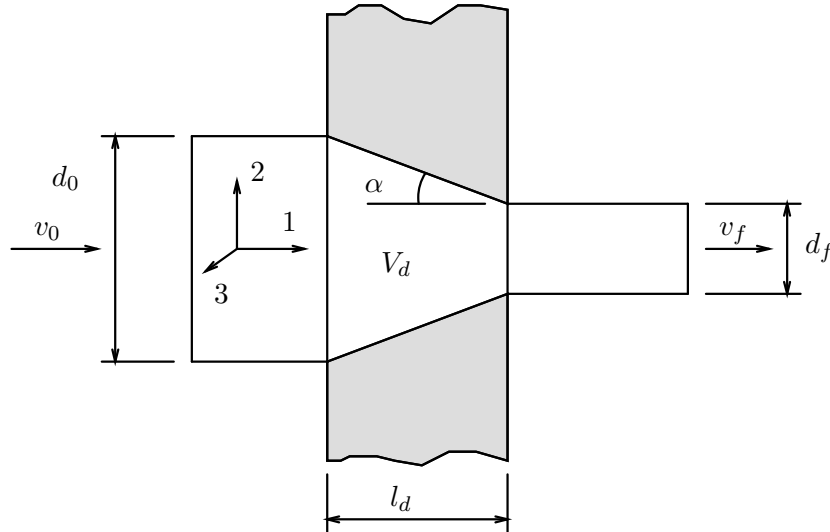
$$d_0 = 150 \text{ [mm]} \quad ; \quad h_0 = 100 \text{ [mm]} \quad ; \quad h_f = 50 \text{ [mm]}$$

- Hoe groot is de verlengingsfactor  $\lambda_1$  die de vervorming in axiale richting beschrijft ?
- Hoe groot is de verlengingssnelheid  $\dot{\lambda}_1$  ?
- Hoe groot is de logarithmische rek  $\dot{\epsilon}_{ln_1}$  ?

---

**Vraagstuk 1.15**

We beschouwen het draadtrekproces dat geschetst is in onderstaande figuur.



Verondersteld wordt dat het volume van het materiaal niet verandert tijdens deformatie. Het gebied waarin de vervorming van het materiaal plaatsvindt, heeft een lengte  $l_d$ , die eventueel is uit te drukken in de onvervormde diameter  $d_0$ , de vervormde diameter  $d_f$  en de hoek  $\alpha$ . Het volume van deze afgeknotte kegel is  $V_d = \frac{1}{12}\pi l_d(d_0^2 + d_f^2 + d_0 d_f)$ . De treksnelheid is  $v_f$ .

- Wijs de hoofdrichtingen van de deformatie aan in de figuur.
- Bereken de hoofdverlengingsfactoren en druk ze uit in  $A_0$  en  $A_f$ .
- Hoe groot is de snelheid  $v_0$  waarmee de draad de treksteen inloopt ?
- Hoeveel tijd  $t_d$  is nodig om het materiaal in de treksteen - dus in het gebied met volume  $V_d$  - te vervormen ?
- Noem de verlengingsfactor in de trekrichting  $\lambda_1$ .  
Hoe groot is de verlengingssnelheid  $\dot{\lambda}_1$  ?

---

**Vraagstuk 1.16**

A cylindrical tube, a cylindrical vessel and a sphere are loaded with an internal pressure  $p$ . The tube is open at its ends, while the vessel can be considered as a tube, which is closed at its ends.

The tube and vessel have their axis in the axial direction  $a$ . The radial direction is indicated as  $r$  and the tangential direction as  $t$ .

In the undeformed state the inner diameter of the three structures is  $D_0$  and their uniform wall thickness is  $w_0 \ll D_0$ . The inner pressure results in homogeneous deformation, leading to an inner diameter  $D$  and a wall thickness  $w \ll D$ .

- a. Determine the relation between the tangential stress  $\sigma_t$  and the internal pressure  $p$ , the inner diameter  $D$  and the wall thickness  $w$  for the tube.
- b. Determine the relation between the tangential stress  $\sigma_t$  and the internal pressure  $p$ , the inner diameter  $D$  and the wall thickness  $w$  for the vessel.
- c. Determine the relation between the axial stress  $\sigma_a$  and the internal pressure  $p$ , the inner diameter  $D$  and the wall thickness  $w$  for the vessel.
- c. Determine the relation between the tangential stress  $\sigma_t$  and the internal pressure  $p$ , the inner diameter  $D$  and the wall thickness  $w$  for the sphere.

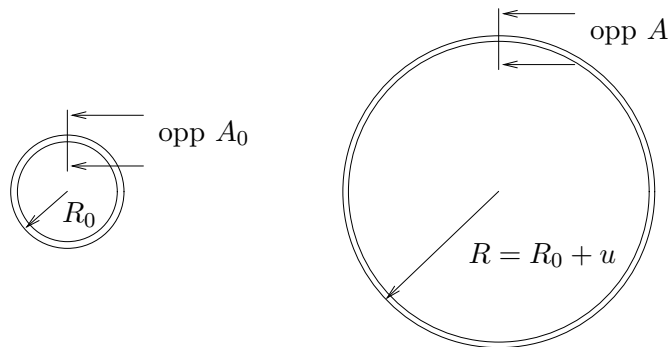


## 2 Truss structures

---

### Vraagstuk 2.1

Een rond elastiekje wordt opgerekt zoals in onderstaande figuur is getekend (bovenaanzicht elastiekje !). Het dwarsdoorsnede-oppervlak in onvervormde en vervormde toestand is  $A_0$  respectievelijk  $A$ .



Hoe groot is de lineaire rek  $\varepsilon$  in lengterichting?

---

### Vraagstuk 2.2

Een cilindervormige trekstaaf (onvervormd dwarsdoorsnede-oppervlak  $A_0$ ) wordt met constante verlengingssnelheid ( $\dot{\lambda} = c$ ) verlengd. Het materiaal is incompressibel en het materiaalgedrag wordt beschreven door een constant verband tussen de axiale spanning  $\sigma$  en de logarithmische reksnelheid :  $\sigma = k\dot{\varepsilon}_{ln}$ .

Hoe groot is de axiale trekkracht op het moment dat de staaf tweemaal zijn oorspronkelijke lengte heeft ?

---

### Vraagstuk 2.3

Een trekstaaf met onvervormde lengte  $l_0$  wordt tijdens een trekproef verlengd met constante logarithmische reksnelheid  $\dot{\varepsilon}_{ln} = c$ . De actuele lengte is  $l$ .

Hoe groot is de verlengingssnelheid  $v = \dot{l}$  ?

---

### Vraagstuk 2.4

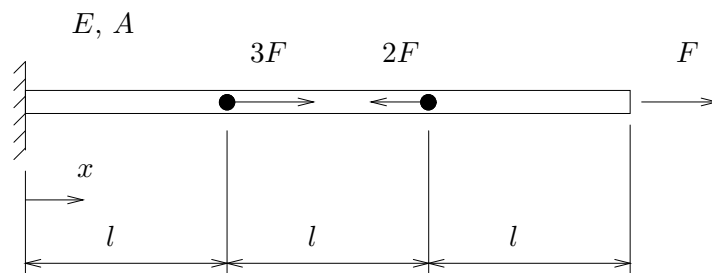
Een trekstaaf met onvervormde lengte  $l_0$  wordt in een trekproef met een constante verlengingssnelheid  $v$  verlengd, zodanig dat op tijdstip  $t$  voor de lengte  $l$  geldt :  $l = l_0 + vt$ .

Hoe groot is de logarithmische reksnelheid  $\dot{\varepsilon}_{ln}$  ?

---

### Vraagstuk 2.5

In onderstaande figuur is een staaf getekend met lengte  $3l$  en oppervlak van de dwarsdoorsnede  $A$ . Dwarsdoorsneden van de staaf worden aangeduid met een materiële coördinaat  $x$  langs de staafas waarbij  $0 \leq x \leq 3l$ . De verplaatsing van het linker uiteinde  $x = 0$  is onderdrukt. De staaf wordt (statisch) belast met geconcentreerde krachten: bij  $x = l$  een kracht  $3F$  in positieve  $x$ -richting, bij  $x = 2l$  een kracht  $2F$  in negatieve  $x$ -richting en bij  $x = 3l$  een kracht  $F$  in positieve  $x$ -richting. Het materiaalgedrag is lineair elastisch, gekarakteriseerd door de elasticiteitsmodulus  $E$ .

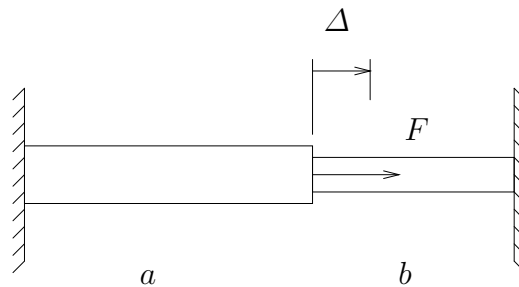


- Bepaal het verloop van de normaalkracht  $N(x)$  in de staaf.
- Bepaal de verplaatsing van het uiteinde  $x = 3l$  van de staaf ten opzichte van de onbelaste situatie.

---

### Vraagstuk 2.6

In onderstaande figuur is een samengestelde staaf getekend, bestaande uit de onderdelen  $a$  en  $b$ . Staaf  $a$  heeft lengte  $l^a$ , oppervlak van de dwarsdoorsnede  $A^a$  en elasticiteitsmodulus  $E^a$ ; voor staaf  $b$  zijn deze grootheden respectievelijk  $l^b$ ,  $A^b$  en  $E^b$ . Met betrekking tot de samengestelde staaf is zowel voor het linker als voor het rechter uiteinde de axiale verplaatsing onderdrukt; de initiële configuratie is spanningsloos. Ter plaatse van de verbinding werkt (statisch) een geconcentreerde axiale kracht  $F$ .

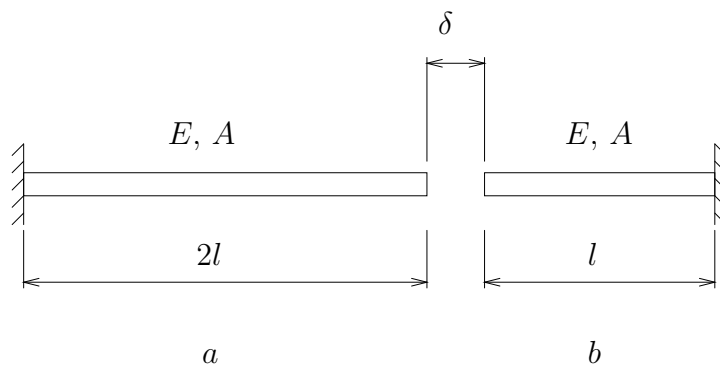


- Bepaal de verplaatsing  $\Delta$  van het aangrijpingspunt van de kracht  $F$ , gerelateerd aan de onbelaste toestand.
- Bepaal de normaalkracht in de onderdelen  $a$  en  $b$ .

---

### Vraagstuk 2.7

Twee staven,  $a$  (lengte:  $2l$ ) en  $b$  (lengte:  $l$ ), met gelijke doorsnede  $A$  en met dezelfde elasticiteitsmodulus  $E$ , blijken tijdens de montage niet aan te sluiten, zie onderstaande figuur. Het lengteverschil  $\delta$  moet overbrugd worden hetgeen met enige hulpmiddelen wordt gerealiseerd.



- Bereken de verlengingen  $\delta^a$  en  $\delta^b$  van de staven  $a$  en  $b$ , betrokken op de ongespannen referentietoestand.
- Hoe groot is na montage de voorspanning  $\sigma$  in de beide staven  $a$  en  $b$ ?

### 3 Elastic material behavior

---

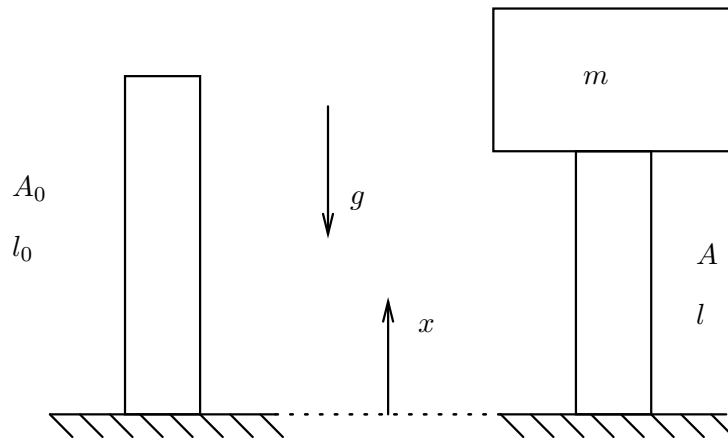
#### Vraagstuk 3.1

Experimenteel is vastgesteld dat tijdens een monotone trekproef de volgende relatie bestaat tussen de axiale spanning  $\sigma$  en de logaritmische rek :  $\sigma = K\varepsilon_{ln}^n$ , waarbij  $K$  en  $n$  positieve materiaalconstanten zijn.

Als de axiale logaritmische rek de waarde  $\epsilon$  bereikt, hoe groot is dan de arbeid per volume-eenheid  $W$  die aan het materiaal is toegevoegd?

---

### Vraagstuk 3.2



In bovenstaande figuur is een kunststof staaf getekend, waarvan in onvervormde toestand de lengte  $l_0$  is en het dwarsdoorsnede-oppervlak  $A_0$ .

Bovenop de staaf wordt een massa  $m$  geplaatst. De versnelling van de zwaartekracht is  $g$ . T.g.v. van de (statische) gewichtsbelaasting veranderen de lengte en het dwarsdoorsnede-oppervlak van de staaf. De staaf blijft cilindrisch. In vervormde toestand zijn de lengte en het dwarsdoorsnede-oppervlak :  $l$  en  $A$ .

De vervorming wordt beschreven m.b.v. twee verlengingsfactoren :  $\lambda = \frac{l}{l_0}$  en  $\mu = \sqrt{\frac{A}{A_0}}$ .

Het materiaal van de staaf is incompressibel. De axiale spanning  $\sigma$  in de staaf is als volgt gerelateerd aan de verlengingsfactor  $\lambda$  :

$$\sigma = \frac{1}{2}E\lambda(\lambda^2 - 1)$$

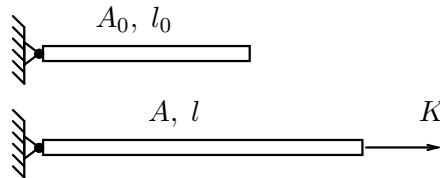
waarbij  $E$  een positieve elasticiteitsconstante is.

- Welke relatie tussen  $\mu$  en  $\lambda$  volgt uit het feit dat het staafmateriaal incompressibel is ?
- Bereken de normaalkracht  $N$  in de staaf als functie van  $\lambda$ .  
Druk deze kracht uit in  $E$ ,  $A_0$  en  $\lambda$ .  
Schets het verloop van  $N$  als functie van  $\lambda$  in een figuur.
- Bereken de verlengingsfactor  $\lambda$  in de vervormde toestand.

---

### Vraagstuk 3.3

Met behulp van een trekproef wordt het materiaalgedrag gemeten van een stuk rubber. Het gebruikte proefstuk is cilindrisch en homogeen van samenstelling. In onderstaande figuur is aangegeven wat de afmetingen zijn in onvervormde en in vervormde toestand.



De verlenging wordt gekarakteriseerd met de verlengingsfactor  $\lambda = \frac{l}{l_0}$ , de dwarscontractie met  $\mu = \sqrt{\frac{A}{A_0}}$ . Vastgesteld wordt dat het verband tussen de axiale spanning  $\sigma$  en de verlengingsfactor  $\lambda$  beschreven kan worden door :

$$\sigma = \alpha \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \quad \text{met} \quad \alpha = \text{constant}$$

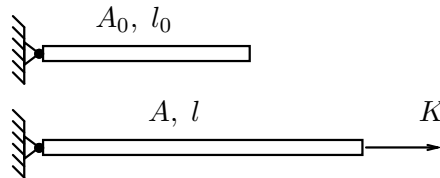
Vastgesteld wordt ook dat het materiaal incompressibel is.

- Druk het dwarsdoorsnede-oppervlak  $A$  uit in  $A_0$  en  $\lambda$ .
- Bepaal het verloop van de axiale trekkracht  $K$  als functie van de verlengingsfactor  $\lambda$ .

---

### Vraagstuk 3.4

Van een kunststof worden de mechanische materiaaleigenschappen bepaald met behulp van een trekproef. Het gebruikte proefstuk is cilindrisch en homogeen. In onderstaande figuur is het getekend en zijn enkele relevante afmetingen aangegeven.



De axiale spanning  $\sigma = \frac{K}{A}$ , de verlenging en de dwarscontractie worden gemeten. Vastgesteld wordt dat onderstaande relaties gelden :

$$\sigma = E(\lambda^2 - 1) \quad \text{met} \quad \lambda = \frac{l}{l_0} \quad \text{en} \quad E = \text{constant}$$

$$\mu^2 = \frac{A}{A_0} = 1 - \nu(\lambda^2 - 1) \quad \text{met} \quad \nu = \text{constant}$$

- Bepaal het verband tussen de axiale trekkracht  $K$  en de verlengingsfactor  $\lambda$ . Schets het verloop in een grafiek.
- Bereken de volumeverandering van het proefstuk als functie van  $\lambda$ .
- Wat is de relatie tussen de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$  en de verlengingsfactor  $\lambda$  indien het materiaal incompressibel is ?
- Wat is in dat geval de waarde van  $\nu$  voor zeer kleine verlengingen ( $\lambda \approx 1$ ) ?



---

**Vraagstuk 3.5**

A tensile test has revealed that the elastic behaviour of a material is described very well by a linear relation between the engineering stress  $\sigma_n$  and a nonlinear function of the elongation factor  $\lambda$ .

$$\sigma_n = C \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda) \quad \text{with} \quad \begin{array}{ll} \sigma_n &= \text{engineering stress} \\ C &= \text{elasticity constant} \\ \lambda &= \text{axial elongation factor} \end{array}$$

The undeformed cross-sectional area of the truss is  $A_0$ . Poisson's ratio is  $\nu$ .

- Determine the relation between the axial force  $F$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Determine the value for  $\lambda$  for which the axial force reaches a maximum value. What is the maximum value of the force?
- Plot the  $F(\lambda)$  relation for parameter values  $C = 1000$  and  $A_0 = 1$ .

---

**Vraagstuk 3.6**

A tensile test has revealed that the elastic behaviour of a material is described very well by a linear relation between the Cauchy stress and the logarithmic strain  $\varepsilon_{ln} = \ln(\lambda)$ .

$$\sigma = C \ln(\lambda) \quad \text{with} \quad \begin{array}{ll} \sigma &= \text{true stress} \\ C &= \text{elasticity constant} \\ \lambda &= \text{axial elongation factor} \end{array}$$

The undeformed cross-sectional area of the truss is  $A_0$ . Poisson's ratio is  $\nu$ .

- Is there a limit to the value of the axial stretch factor?
- Determine the relation between the current cross-sectional area  $A$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Determine the relation between the axial force  $F$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Determine the value for  $\lambda$  for which the axial force reaches a maximum value. What is the maximum value of the force?
- Plot the  $F(\lambda)$  and  $A(\lambda)$  relations for parameter values  $C = 1000$ ;  $A_0 = 1$ ;  $\nu = 0.3$ .

---

**Vraagstuk 3.7**

A tensile test has revealed that the elastic behaviour of a material is described very well by a linear relation between the second Piola-Kirchhoff stress  $\sigma_{p2}$  and the Green-Lagrange strain  $\varepsilon_{gl} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$ .

The second Piola-Kirchhoff stress is related to the Cauchy stress by :

$$\sigma_{p2} = J \frac{1}{\lambda^2} \sigma \quad \text{with} \quad J = \lambda \mu^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{p2} = \frac{\mu^2}{\lambda} \sigma$$

as can be concluded by evaluating the work done by the external axial load.

The elastic material model is :

$$\sigma_{p2} = C \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad \text{with} \quad \begin{array}{ll} \sigma_{p2} &= \text{2nd Piola-Kirchhoff stress} \\ C &= \text{elasticity constant} \\ \lambda &= \text{axial elongation factor} \end{array}$$

The undeformed cross-sectional area of the truss is  $A_0$ . Poisson's ratio is  $\nu$ .

- Is there a limit to the value of the axial stretch factor?
- Determine the relation between the current cross-sectional area  $A$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Determine the relation between the axial force  $F$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Plot the  $F(\lambda)$  and  $A(\lambda)$  relations for parameter values  $C = 1000$ ;  $A_0 = 1$ ;  $\nu = 0.3$ .

---

**Vraagstuk 3.8**

A tensile test has revealed that the elastic behaviour of a material is described very well by a linear relation between the engineering stress  $\sigma_n$  and the linear strain  $\varepsilon_l = \lambda - 1$ .

$$\sigma_n = C(\lambda - 1) \quad \text{with} \quad \begin{array}{ll} \sigma_n &= \text{engineering stress} \\ C &= \text{elasticity constant} \\ \lambda &= \text{axial elongation factor} \end{array}$$

The undeformed cross-sectional area of the truss is  $A_0$ . Poisson's ratio is  $\nu$ .

- Is there a limit to the value of the axial stretch factor?
- Determine the relation between the current cross-sectional area  $A$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Determine the relation between the axial force  $F$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Plot the  $F(\lambda)$  and  $A(\lambda)$  relations for parameter values  $C = 1000$ ;  $A_0 = 1$ ;  $\nu = 0.3$ .

---

**Vraagstuk 3.9**

A tensile test has revealed that the elastic behaviour of a material is described very well by a linear relation between the Cauchy stress  $\sigma$  and the Green-Lagrange strain  $\varepsilon_{gl} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$ .

$$\sigma = C \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad \text{with} \quad \begin{array}{ll} \sigma &= \text{true stress} \\ C &= \text{elasticity constant} \\ \lambda &= \text{axial elongation factor} \end{array}$$

The undeformed cross-sectional area of the truss is  $A_0$ . Poisson's ratio is  $\nu$ .

- Determine the relation between the cross-sectional area  $A$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Determine the relation between the axial force  $F$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- Determine the value for  $\lambda$  for which the axial force reaches a maximum value. What is the maximum value of the force?
- Plot the  $F(\lambda)$  and  $A(\lambda)$  relations for parameter values  $C = 1000$ ;  $A_0 = 1$ ;  $\nu = 0.3$ .

---

**Vraagstuk 3.10**

A tensile test has revealed that the elastic behaviour of a material is described very well by a linear relation between the engineering stress  $\sigma_n$  and a nonlinear function of the elongation factor  $\lambda$ .

$$\sigma_n = C \frac{1}{2} \lambda (\lambda^2 - 1) \quad \text{with} \quad \begin{array}{ll} \sigma_n &= \text{engineering stress} \\ C &= \text{elasticity constant} \\ \lambda &= \text{axial elongation factor} \end{array}$$

The undeformed cross-sectional area of the truss is  $A_0$ . Poisson's ratio is  $\nu$ .

- a. Determine the relation between the axial force  $F$  and the axial stretch factor  $\lambda$ .
- b. Plot the  $F(\lambda)$  relation for parameter values  $C = 1000$ ;  $A_0 = 1$ ;  $\nu = 0.3$ .

---

**Vraagstuk 3.11**

De specifieke energie voor een Neo-Hookean rubber is gegeven als :

$$W = C_{10} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \}$$

met  $C_{10} > 0$  een materiaalconstante en  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$  de hoofdverlengingsfactoren. Van dit rubber is een trekstaaf gemaakt die axiaal wordt belast.

- a. Bepaal de axiale spanning  $\sigma$  in de trekstaaf als functie van de axiale verlengingsfactor  $\lambda$ .
- b. Ga na dat geldt  $C_{10} = \frac{1}{6}E$  waarbij  $E$  de initiële modulus van het materiaal is waarvoor geldt :  $\sigma = E\varepsilon_l$  met  $\varepsilon_l = \lambda - 1 \approx 0$ .
- c. Hoe luidt de relatie tussen de nominale spanning  $\sigma_n$  en  $\lambda$  ?

---

**Vraagstuk 3.12**

De specifieke energie voor een Mooney-Rivlin rubber is gegeven als :

$$W = C_{10} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \} + C_{01} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right\}$$

met  $C_{10}$  en  $C_{01}$  materiaalconstanten en  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$  de hoofdverlengingsfactoren.

Van dit rubber is een trekstaaf gemaakt die axiaal wordt belast.

Het materiaal is incompressibel.

- a. Bepaal de axiale spanning  $\sigma$  in de trekstaaf als functie van de axiale verlengingsfactor  $\lambda$ .
- b. Bepaal de axiale trekkracht als functie van  $\lambda$ .

---

**Vraagstuk 3.13**

The three-dimensional Neo-Hookean model is the simplest elastomer model as it has only one material parameter. The specific energy function is given by :

$$W = C_{10} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \}$$

where  $C_{10} > 0$  is a material parameter and  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$  are the principal elongation factors.

A tensile bar made from this elastomer is axially loaded with a force  $F$ . The undeformed cross-sectional area of the truss is  $A_0$ .

The material is incompressible.

- a. Determine the specific energy  $W$  for the one-dimensional tensile experiment and express it in the axial elongation factor  $\lambda$ .
- b. Determine the axial stress  $\sigma$  in the tensile bar as a function of  $\lambda$ .
- c. Determine the cross-sectional area  $A$  as a function of  $\lambda$ .
- d. Determine the axial force  $F$  as a function of  $\lambda$ .
- e. Plot the  $F(\lambda)$  and  $A(\lambda)$  relations for parameter values  $C_{10} = 300; A_0 = 1$

---

**Vraagstuk 3.14**

The Mooney-Rivlin model for elastomers has two material parameters  $C_{10}$  and  $C_{01}$ . The three-dimensional specific energy function is given by :

$$W = C_{10} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \} + C_{01} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right\}$$

where  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$  are the principal elongation factors.

A tensile bar made from this elastomer is axially loaded with a force  $F$ . The undeformed cross-sectional area of the truss is  $A_0$ .

The material is incompressible.

- a. Determine the specific energy  $W$  for the one-dimensional tensile experiment and express it in the axial elongation factor  $\lambda$ .
- b. Determine the axial stress  $\sigma$  in the tensile bar as a function of  $\lambda$ .
- c. Determine the cross-sectional area  $A$  as a function of  $\lambda$ .
- d. Determine the axial force  $F$  as a function of  $\lambda$ .
- e. Plot the  $F(\lambda)$  and  $A(\lambda)$  relations for parameter values  $C_{10} = 300; C_{01} = 500; A_0 = 1$

---

**Vraagstuk 3.15**

A cylindrical tube with circular cross-section has an inner diameter  $D_0$  and a uniform wall thickness  $w_0 \ll D_0$  in the undeformed state. The tube is loaded with an internal pressure  $p$  whereupon it deforms homogeneously to have an innerdiameter  $D$  and wall thickness  $w$ .

To describe the mechanics of the tube, we use three coordinate axes : the tangential direction  $t$ , the radial direction  $r$  and the axial direction  $a$ . The ends of the tube are open and can move freely in axial direction.

The tube wall is made from elastomeric material, the behaviour of which is characterised by the Neo-Hookean elastic energy function, expressed in the principal stretch ratios  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$  :

$$W = C_{10} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \}$$

where  $C_{10}$  is a material constant.

The material is incompressible.

- a. Express the principal elongation factors  $\lambda_t (= \lambda)$ ,  $\lambda_r (= \mu)$  and  $\lambda_a = \lambda_r$  in the dimensions  $D_0$ ,  $D$ ,  $w_0$  and  $w$ .
- b. Express the elastic energy function in the tangential elongation factor  $\lambda$ .
- c. Determine the tangential stress  $\sigma_t$  and express it in  $\lambda$ .
- d. Determine the relation between the internal pressure  $p$  and the tangential stress  $\sigma_t$ . Express the answer in  $\sigma_t$ , and the current dimensions  $D$  and  $w$ .
- e. Combine the answers from *a*, *c* and *d* to express the internal pressure  $p$  in  $\lambda$  and the initial dimensions  $D_0$  and  $w_0$ .

---

**Vraagstuk 3.16**

A cylindrical tube with circular cross-section has an inner diameter  $D_0$  and a uniform wall thickness  $w_0 \ll D_0$  in the undeformed state. The tube is loaded with an internal pressure  $p$  whereupon it deforms homogeneously to have an innerdiameter  $D$  and wall thickness  $w$ .

To describe the mechanics of the tube, we use three coordinate axes : the tangential direction  $t$ , the radial direction  $r$  and the axial direction  $a$ . The ends of the tube are open but are prevented to move in axial direction.

The tube wall is made from elastomeric material, the behaviour of which is characterised by the Neo-Hookean elastic energy function, expressed in the principal stretch ratios  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$  :

$$W = C_{10} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \}$$

where  $C_{10}$  is a material constant.

The material is incompressible.

- a. Express the principal elongation factors  $\lambda_t (= \lambda)$ ,  $\lambda_r (= \mu)$  and  $\lambda_a$  in the dimensions  $D_0, D, w_0$  and  $w$ .
- b. Express the elastic energy function in the tangential elongation factor  $\lambda$ .
- c. Determine the tangential stress  $\sigma_t$  and express it in  $\lambda$ .
- d. Determine the relation between the internal pressure  $p$  and the tangential stress  $\sigma_t$ . Express the answer in  $\sigma_t$ , and the current dimensions  $D$  and  $w$ .
- e. Combine the answers from *a*, *c* and *d* to express the internal pressure  $p$  in  $\lambda$  and the initial dimensions  $D_0$  and  $w_0$ .



---

**Vraagstuk 3.17**

A spherical balloon has an inner diameter  $D_0$  and a uniform wall thickness  $w_0 \ll D_0$  in the undeformed state. The balloon is loaded with an internal pressure  $p$  whereupon it deforms homogeneously to have an inner diameter  $D$  and wall thickness  $w$ .

To describe the mechanics of the balloon, we use three coordinate axes : two perpendicular tangential directions  $t$  and the radial direction  $r$ .

The wall of the balloon is made from elastomeric material, the behaviour of which is characterised by the Neo-Hookean elastic energy function, expressed in the principal stretch ratios  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$  :

$$W = C_{10} \{ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 \}$$

where  $C_{10}$  is a material constant. The material is incompressible.

- a. Express the principal elongation factors  $\lambda_t (= \lambda)$  and  $\lambda_r (= \mu)$  in the dimensions  $D_0, D, w_0$  and  $w$ .
- b. Express the elastic energy function in the tangential elongation factor  $\lambda$ .
- c. Determine the tangential stress  $\sigma_t$  and express it in  $\lambda$ .
- d. Determine the relation between the internal pressure  $p$  and the tangential stress  $\sigma_t$ . Express the answer in  $\sigma_t$ , and the current dimensions  $D$  and  $w$ .
- e. Combine the answers from *a*, *c* and *d* to express the internal pressure  $p$  in  $\lambda$  and the initial dimensions  $D_0$  and  $w_0$ .
- f. Sketch the  $p \sim \lambda$  graph for  $1 \leq \lambda \leq 6$ .

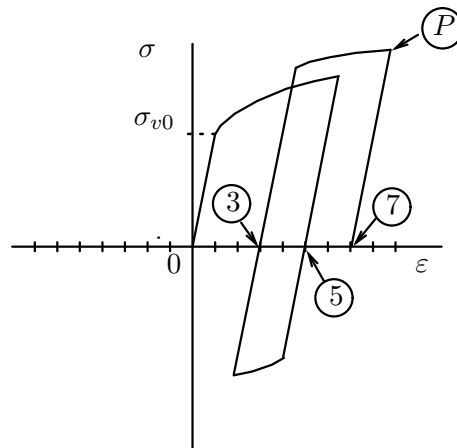


## 4 Elastoplastic material behavior

---

### Vraagstuk 4.1

Tijdens een trekproef is onderstaande trekkromme geregistreerd. Waarden van de rek zijn aangegeven.

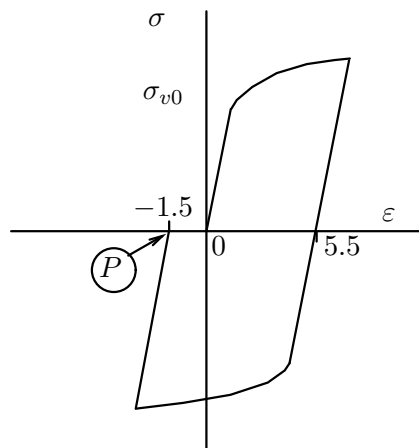


Hoe groot is de effectieve plastische rek in punt  $P$  ?

---

### Vraagstuk 4.2

Tijdens een trekproef is onderstaande trekkromme geregistreerd.

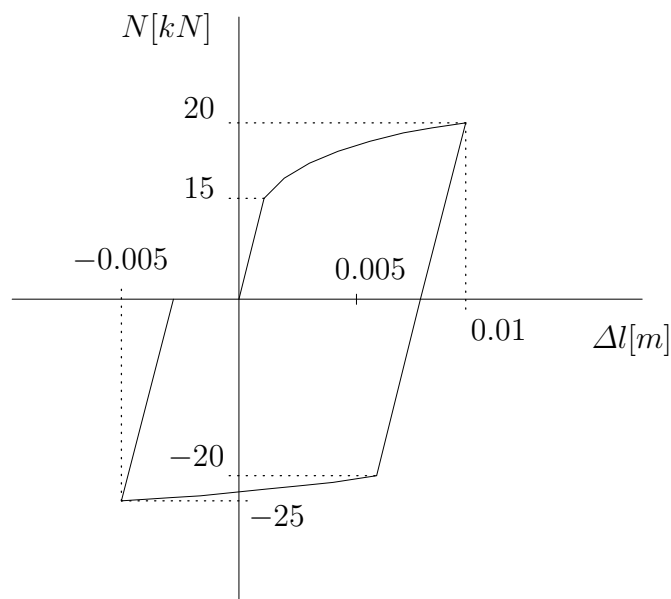


Hoe groot is de effectieve plastische rek in punt  $P$  ?

---

### Vraagstuk 4.3

Voor een staaf met oppervlak  $A=100[\text{mm}^2]$  en lengte  $l=1[\text{m}]$  wordt een experiment uitgevoerd waarbij het verband tussen de normaalkracht  $N$  en de verlenging  $\Delta l$  wordt geregistreerd. Eerst wordt de staaf op trek belast tot  $N=20[\text{kN}]$ ; voor de bijbehorende verlenging, gerelateerd aan de begintoestand, geldt dan:  $\Delta l=0.01[\text{m}]$ . Daarna wordt de staaf op druk belast tot  $N = -25[\text{kN}]$ ; daarbij is gemeten:  $\Delta l = -0.005[\text{m}]$ . Tenslotte wordt de staaf ontlast. In onderstaande figuur is het verband tussen de normaalkracht  $N$  en de verlenging  $\Delta l$  geschetst. Er is duidelijk sprake van elasto-plastisch materiaalgedrag met isotrope versterking.



De elasticiteitsmodulus  $E$  van het materiaal bedraagt  $200[\text{GPa}]$ .

- Bepaal de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$  van het materiaal.
- Bereken de rek  $\varepsilon$  en de blijvende rek  $\varepsilon^p$  als de normaalkracht  $N$  de maximale waarde van  $20[\text{kN}]$  heeft bereikt.
- Bereken de blijvende rek  $\varepsilon^p$  bij de minimale normaalkracht  $N = -25[\text{kN}]$ .
- Bereken de effectieve plastische rek  $\bar{\varepsilon}^p$  voor het eind van het belastingsproces waarbij de staaf ontlast is. Veronderstel daarbij dat  $\bar{\varepsilon}^p = 0$  aan het begin van het proces.

---

**Vraagstuk 4.4**

Niet-lineaire versterking kan worden beschreven met onderstaande relatie tussen de vloeispanning  $\sigma_v$  en de logarithmische plastische rek  $\varepsilon_{ln}^p$  :

$$\sigma_v = \sigma_{v0} + K (\varepsilon_{ln}^p)^n$$

waarbij  $\sigma_{v0}$  de initiële vloeispanning is en  $K$  en  $n$  materiaalconstanten zijn.

Omdat de elastische rek erg klein is, kunnen we het elasto-plastisch materiaalgedrag bij een monotone trekproef ook modelleren met :

$$\sigma = K (\varepsilon_{ln})^n$$

waarbij  $K$  en  $n$  gefit moeten worden op experimentele data.

Verondersteld mag worden dat het materiaalgedrag incompressibel is.

Bij welke waarde van de logarithmische rek  $\varepsilon_{ln}$  treedt tijdens de trekproef insnoering van de trekstaaf op?

---

**Vraagstuk 4.5**

Het versterkingsmodel van Voce is gegeven door onderstaande relatie tussen de vloeispanning  $\sigma_v$  en de logarithmische plastische rek :

$$\sigma_y = \sigma_0 \left( 1 - C e^{-B \varepsilon_{ln}^p} \right)$$

waarbij  $\sigma_0$ ,  $C$  en  $B$  materiaalconstanten zijn.

Voor een monotone trekproef is bij plastisch deformeren de totale rek vrijwel gelijk aan de plastische rek, terwijl bovendien geldt  $\sigma = \sigma_y$ . Het versterkingsmodel beschrijft dan in goede benadering het verband tussen de Cauchy spanning  $\sigma$  en de logarithmische rek  $\varepsilon_{ln}$  :

$$\sigma = \sigma_0 \left( 1 - C e^{-B \varepsilon_{ln}} \right) = \sigma_0 \left( 1 - C \lambda^{-B} \right)$$

Het materiaalgedrag kan incompressibel worden verondersteld.

- a. Bepaal de verlengingsfactor  $\lambda$  op het moment dat de axiale trekkracht een maximum waarde bereikt.
- b. Bereken de maximale kracht voor  $\sigma_0 = 500$  [MPa],  $C = 0.6$  [-], en  $B = 3$  [-]. Gegeven is ook nog het onvervormde dwarsdoorsnede-oppervlak :  $A_0 = 10$  [mm<sup>2</sup>].

---

#### Vraagstuk 4.6

Het verstevigingsmodel van Swift is gegeven door onderstaande relatie tussen de vloeispanning  $\sigma_v$  en de logarithmische plastische rek :

$$\sigma_v = k(\varepsilon_{ln}^p + C)^n$$

waarbij  $k$ ,  $C$  en  $n$  materiaalconstanten zijn.

Voor een monotone trekproef is bij plastisch deformeren de totale rek vrijwel gelijk aan de plastische rek, terwijl bovendien geldt  $\sigma = \sigma_v$ . Het verstevigingsmodel beschrijft dan in goede benadering het verband tussen de Cauchy spanning  $\sigma$  en de logarithmische rek  $\varepsilon_{ln}$  :

$$\sigma = k(\varepsilon_{ln} + C)^n$$

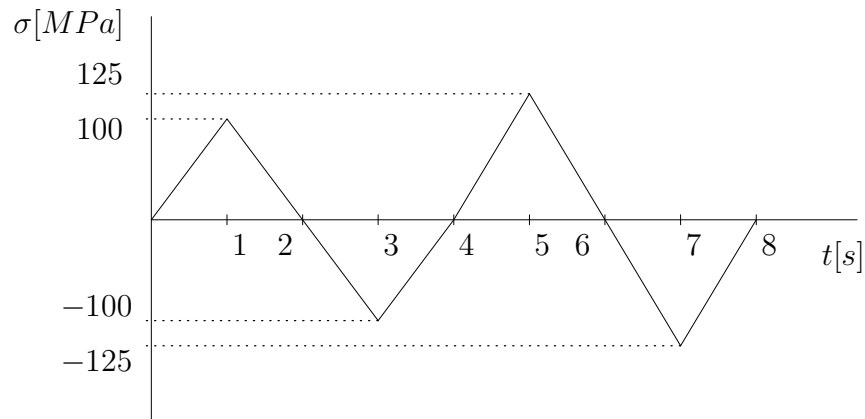
Het materiaalgedrag kan incompressibel worden verondersteld.

- a. Bepaal de verlengingsfactor  $\lambda$  op het moment dat de axiale trekkracht een maximum waarde bereikt.
- c. Bereken de maximale kracht voor  $k = 500$  [MPa],  $C = 0.05$  [-] en  $n = 0.25$  [-] als bovendien gegeven is dat het onvervormde dwarsdoorsnede-oppervlak van de trekstaaf  $A_0 = 10$  [mm<sup>2</sup>] is en de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu = 0.5$  [-].

---

### Vraagstuk 4.7

Voor een axiaal belaste staaf is het verloop van de normaalspanning  $\sigma$  als functie van de tijd  $t$  grafisch weergegeven in de figuur, waarmee voor de staaf een belastingsproces is gedefinieerd.



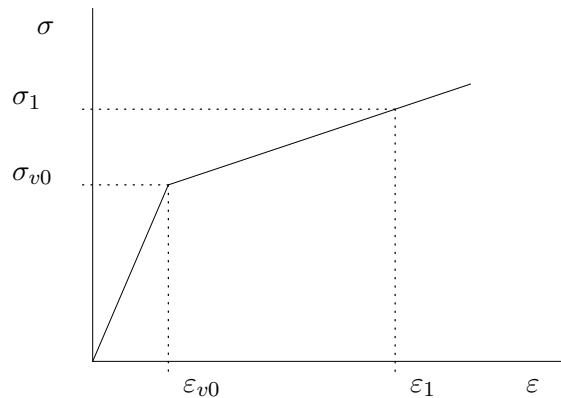
De initiële vloeigrens is bij trek  $75[\text{MPa}]$  en bij druk  $-75[\text{MPa}]$ .

- Bereken de tijdsintervallen waarvoor plastisch gedrag zal optreden wanneer het materiaal isotroop versterkend is.
- Bereken de tijdsintervallen waarvoor plastisch gedrag zal optreden wanneer het materiaal kinematisch versterkend is.
- Wat gebeurt er bij ideaal plastisch materiaalgedrag (geen versterking)?

---

### Vraagstuk 4.8

De trekkromme voor een lineair verstevigend materiaal, zie onderstaande figuur, wordt gekarakteriseerd door twee punten: het initiële vloeipunt ( $\sigma = \sigma_{v0}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{v0}$ ) en een willekeurig punt in het verstevigingstraject ( $\sigma = \sigma_1$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ).



Het materiaal wordt uni-axiaal belast waarbij de axiale rek als functie van de tijd wordt voorgeschreven:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 \sin(\omega t) \quad (\omega \text{ positieve constante})$$

Beschouwd wordt het deformatieverloop nadat inschakelverschijnselen zijn verdwenen (dus als ook de spanning zuiver cyclisch varieert).

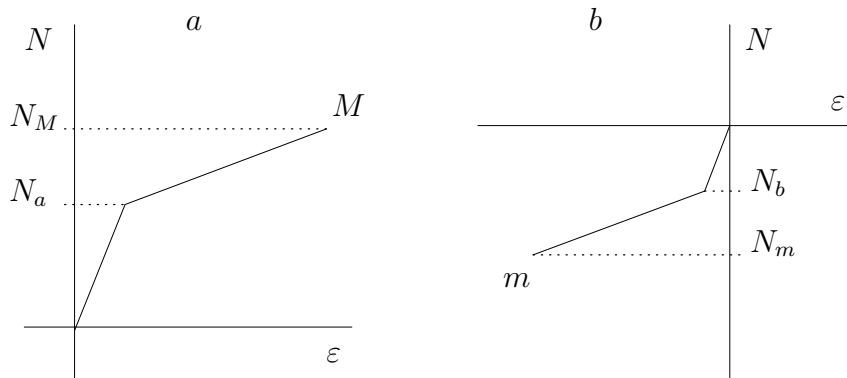
- Veronderstel dat het materiaal isotroop verstevigend is. Tussen welke grenzen verloopt de spanning  $\sigma(t)$ ? Wat geldt daarbij voor de plastische rek  $\varepsilon^p(t)$ ?
- Veronderstel dat het materiaal kinematisch verstevigend is en dat initieel het elastisch gebied niet is verschoven (in absolute zin is initieel de vloeispanning bij trek gelijk aan die bij druk). Tussen welke grenzen verloopt nu de spanning  $\sigma(t)$ ?



---

### Vraagstuk 4.9

Een homogene cilindrische staaf van kinematisch verstevigend materiaal wordt in drie delen  $a$ ,  $b$  en  $c$  gezaagd. Deel  $a$  wordt op trek belast en deel  $b$  op druk. De in onderstaande figuur geschetste procesdiagrammen (normaalkracht  $N$  in afhankelijkheid van de rek  $\varepsilon$ ) worden daarbij gevonden.



Voor de waarden van de normaalkracht waarbij vloeien optreedt geldt:  $N_a > |N_b|$ .

- Als staafgedeelte  $a$  vanuit punt  $M$  wordt ontlast en vervolgens wordt belast op druk, voor welke waarde van  $N$  wordt dan de vloeigrens bereikt?
- Als staafgedeelte  $b$  vanuit punt  $m$  wordt ontlast en daarna op trek wordt belast, voor welke waarde van  $N$  wordt dan de vloeigrens bereikt?
- Hoe groot is de *shiftspanning* van staaf  $c$  ?  
Hoe groot is de vloeispanning van staaf  $c$  ?

---

**Vraagstuk 4.10**

Een homogene cilindrische staaf van *isotroop versterkend* materiaal wordt experimenteel onderworpen aan een vanaf de onbelaste toestand monotoon toenemende trekkracht. Het verband tussen de spanning  $\sigma$  en de rek  $\varepsilon$  blijkt beschreven te kunnen worden met de relaties:

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{zolang} \quad \sigma \leq \sigma_{v0}$$

$$\sigma = \sigma_{v0} + S \left( \varepsilon - \frac{\sigma_{v0}}{E} \right) \quad \text{als} \quad \sigma > \sigma_{v0}$$

met  $E$  de elasticiteitsmodulus,  $\sigma_{v0}$  de initiële vloeigrens en met  $S$  een positieve versterkingsconstante (lineaire versterking). De staaf wordt belast tot  $\sigma = 1.2 \sigma_{v0}$  en daarna ontlast.

- Bepaal de rek  $\varepsilon$  bij de maximale spanning  $\sigma = 1.2 \sigma_{v0}$ .
- Bepaal de plastische rek  $\varepsilon^p$  en de effectieve plastische rek  $\bar{\varepsilon}^p$  in de staaf na het ontlasten.
- Door vervolgens de staaf op druk te belasten en daarna weer te ontlasten wil men de staaf weer de oorspronkelijke lengte geven. Welke drukspanning is daarvoor nodig?
- Hoeveel bedraagt de effectieve plastische rek na dit kringproces in de deformatie? Kan men zeggen dat de staaf weer in de oorspronkelijke toestand is teruggebracht?

---

**Vraagstuk 4.11**

Een homogene cilindrische staaf van *kinematisch verstevigend* materiaal wordt experimenteel onderworpen aan een vanaf de onbelaste toestand monotoon toenemende trekkracht. Het verband tussen de spanning  $\sigma$  en de rek  $\varepsilon$  blijkt beschreven te kunnen worden met de relaties:

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{zolang} \quad \sigma \leq \sigma_{v0}$$

$$\sigma = \sigma_{v0} + S \left( \varepsilon - \frac{\sigma_{v0}}{E} \right) \quad \text{als} \quad \sigma > \sigma_{v0}$$

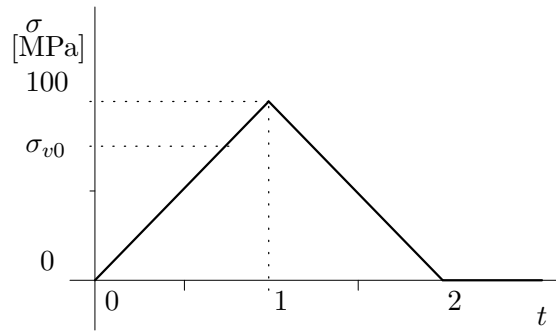
met  $E$  de elasticiteitsmodulus,  $\sigma_{v0}$  de initiële vloeigrens en met  $S$  een positieve verstevigingsconstante (lineaire versteviging). Aanvullend wordt aangenomen dat er in de initiële toestand (in absolute zin) geen verschil is tussen de vloeigrens bij trek en de vloeigrens bij druk (het elastisch gebied is voor trek en voor druk even groot). De staaf wordt belast tot  $\sigma = 1.2 \sigma_{v0}$  en daarna ontlast.

- Bepaal de rek  $\varepsilon$  bij de maximale spanning  $\sigma = 1.2 \sigma_{v0}$ .
- Bepaal voor de staaf de plastische rek  $\varepsilon^p$  en de verschuiving van het elastische gebied  $\alpha$  na het ontlasten.
- Door vervolgens de staaf op druk te belasten en daarna weer te ontlasten wil men de staaf weer de oorspronkelijke lengte geven. Welke drukspanning is daarvoor nodig?
- Hoeveel bedraagt de verschuiving van het elastisch gebied na dit kringproces in de deformatie? Kan men zeggen dat de staaf weer in de oorspronkelijke toestand is teruggebracht?

---

**Vraagstuk 4.12**

Voor een axiaal belaste staaf is het verloop van de normaalspanning  $\sigma$  als functie van de tijd  $t$  grafisch weergegeven in onderstaande figuur.



De elasticiteitsmodulus van het materiaal is  $E$ . De initiële vloeigrens  $\sigma_{v0}$  is 75 [MPa]. Het materiaal is isotroop verstevigend met constante verstevigingsparameter  $H$ . Tijdens elasto-plastische vervorming geldt onderstaande relatie tussen de verandering van de spanning en de verandering van de rek :

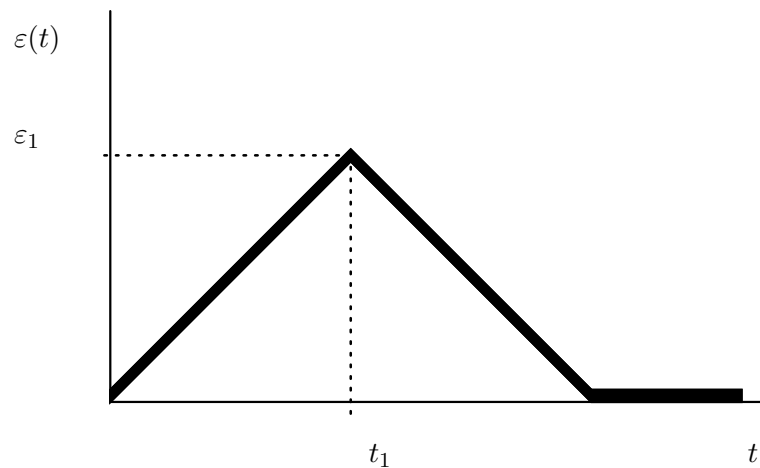
$$\dot{\sigma} = \frac{EH}{E + H} \dot{\epsilon}$$

- a Voor welke  $t$  met  $0 \leq t < \infty$  zal elasto-plastische vervorming optreden?
- b Bereken de plastische rek  $\epsilon^p$  na volledig ontlasten, dus voor  $t > 2$ .

---

**Vraagstuk 4.13**

Van een trekstaaf wordt de rek  $\varepsilon(t)$  als functie van de tijd voorgeschreven, zoals in onderstaande figuur is weergegeven.



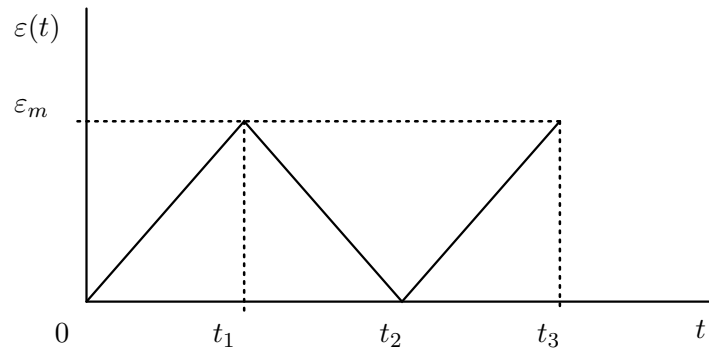
Het materiaalgedrag van de staaf is lineair elastisch (elasticiteitsmodulus  $E$ ) zolang voor de axiale spanning  $\sigma$  geldt :  $\sigma \leq \sigma_{v0}$ , waarbij  $\sigma_{v0}$  de initiële vloeispanning is. De rek  $\varepsilon_1$  heeft een zodanige waarde dat de bijbehorende axiale spanning groter is dan de initiële vloeispanning. Na het bereiken van de initiële vloeispanning vertoont het materiaal lineaire, isotrope versterking met constante verstevigingsparameter  $H$ .

- a Bereken de spanning  $\sigma_1$  waarbij de rek de maximale waarde  $\varepsilon_1$  bereikt.  
Druk  $\sigma_1$  uit in  $\varepsilon_1$ ,  $E$ ,  $\sigma_{v0}$  en  $H$ .
- b Bereken de rek  $\varepsilon_2$  waarbij de spanning, na afname van de rek ( $t > t_1$ ) de waarde  $\sigma_2 = 0$  bereikt.
- c Treedt bij verdere afname van de rek tot  $\varepsilon = 0$  nog vloeien op ?  
Licht uw antwoord toe in een  $(\sigma, \varepsilon)$ -diagram.

---

#### Vraagstuk 4.14

In onderstaande figuur is het verloop van de axiale rek  $\varepsilon$  als functie van de tijd  $t$  weergegeven, zoals dat tijdens een trekproef wordt voorgeschreven.



De elasticiteitsmodulus van het materiaal is  $E$ . De initiële vloeigrens is  $\sigma_{v0}$ . Het materiaal vertoont isotrope versterking met constante versterkingsparameter  $H$ .

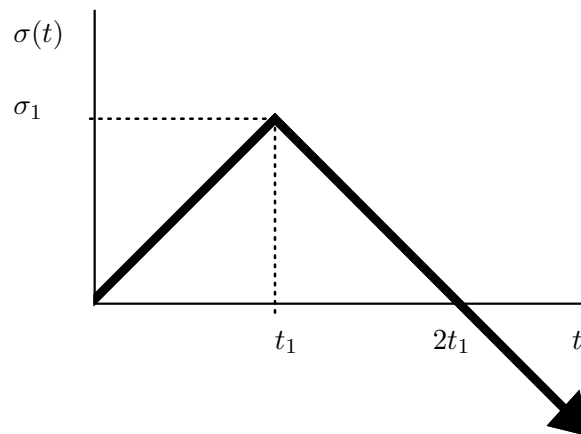
Voor de maximale waarde  $\varepsilon_m$  van de axiale rek geldt :  $E\varepsilon_m > \sigma_{v0}$ .

- Bereken de spanning  $\sigma$  op tijdstip  $t_1$ .  
Druk deze spanning uit in  $\sigma_{v0}$ ,  $\varepsilon_m$ ,  $E$  en  $H$ .
- Hoe groot is de plastische rek  $\varepsilon^p$  op tijdstip  $t_1$  ?
- Welke voorwaarde moet aan  $\varepsilon_m$  gesteld worden opdat voor  $t_1 < t < t_2$  opnieuw vloeien optreedt ?
- Schets het  $(\sigma, \varepsilon)$ -verloop voor het gehele experiment  $0 < t < t_3$  in een duidelijke figuur, als voldaan is aan de bij c gevonden voorwaarde.

---

### Vraagstuk 4.15

Van een trekstaaf wordt de spanning  $\sigma(t)$  als functie van de tijd  $t$  voorgeschreven, zoals in onderstaande figuur is weergegeven.



Het materiaalgedrag van de staaf is lineair elastisch (elasticiteitsmodulus  $E$ ) zolang voor de axiale spanning  $\sigma$  geldt :  $|\sigma| \leq \sigma_{v0}$ , waarbij  $\sigma_{v0}$  de initiële vloeispanning is. Er geldt :  $\sigma_1 > \sigma_{v0}$ .

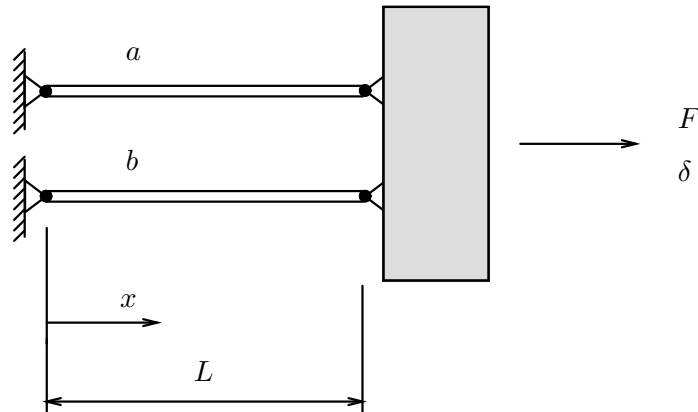
Na het bereiken van de initiële vloeispanning vertoont het materiaal lineaire, isotrope versterking met constante versterkingsparameter  $H$ .

- Bereken de rek  $\varepsilon_1$  wanneer de spanning de maximale waarde  $\sigma_1$  bereikt.  
Druk  $\varepsilon_1$  uit in  $\sigma_1$ ,  $E$ ,  $\sigma_{v0}$  en  $H$ .
- Bereken de plastische rek  $\varepsilon_1^p$  wanneer de spanning de maximale waarde  $\sigma_1$  heeft bereikt.
- Vanaf  $t = t_1$  neemt de spanning af en wordt vervolgens negatief. Het materiaal van de staaf zal op zeker moment opnieuw vloeien.  
Bij welke waarde van de rek ( $\varepsilon_2$ ) gebeurt dit ?  
Druk  $\varepsilon_2$  uit in  $\varepsilon_1$ ,  $\sigma_1$  en  $E$ .  
Licht uw antwoord toe in een duidelijk  $(\sigma, \varepsilon)$ -diagram.

---

### Vraagstuk 4.16

In onderstaande figuur zijn twee parallelle staven  $a$  en  $b$  getekend, die bij  $x = 0$  aan de vaste wereld zijn verbonden en bij  $x = L$  aan een star blok, dat uitsluitend in  $x$ -richting kan transleren.



Het dwarsdoorsnede-oppervlak  $A$  van beide staven is gelijk, evenals de elasticiteitsmodulus  $E$  van het materiaal.

De staven worden axiaal belast, door middel van een kracht  $F$ , aangrijpend op het starre blok. De hierdoor optredende verlenging is  $\delta$ .

Staaft  $a$  heeft een initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ . Na het bereiken van deze spanning vertoont de staaf lineaire, isotrope versteviging, gekarakteriseerd door de constante verstevigingsparameter  $H$ .

Staaft  $b$  heeft een initiële vloeispanning  $2\sigma_{v0}$ . Na het bereiken van deze spanning deformeert de staaf ideaal plastisch.

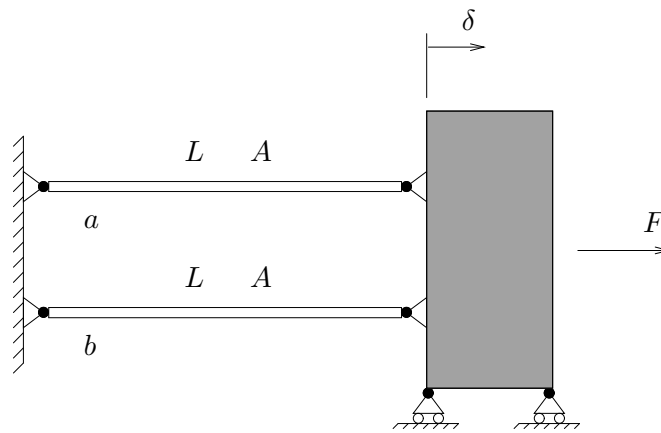
- Bij welke verplaatsing  $\delta_0$  zal staaf  $a$  vloeien ?  
Hoe groot is dan de kracht  $F_0$  ?
- Bij welke verplaatsing  $\delta_1$  bereikt de spanning in staaf  $b$  de vloeispanning ?  
Hoe groot is dan de kracht  $F_1$  ?
- De kracht wordt nu verder opgevoerd tot de waarde  $F = F_2 = 2F_0$ . Bereken de axiale spanning in beide staven :  $\sigma_2^a$  en  $\sigma_2^b$ .



---

**Vraagstuk 4.17**

Een mechanisch systeem bestaat uit twee parallel geschakelde prismatische staven  $a$  en  $b$  met dezelfde lengte  $L$  en hetzelfde oppervlak van de dwarsdoorsnede  $A$ . De koppeling is zodanig uitgevoerd dat bij deformaties de lengte van staaf  $a$  hetzelfde blijft als de lengte van staaf  $b$ . De linker zijde van het systeem is aan de vaste wereld verbonden, van de rechter zijde wordt de horizontale verplaatsing  $\delta > 0$  voorgeschreven. De daarvoor benodigde uitwendige kracht wordt met  $F$  aangeduid. In onderstaande figuur is het systeem geschetst. Initieel (in de referentietoestand met  $\delta = 0$ ) zijn de beide staven spanningsloos.

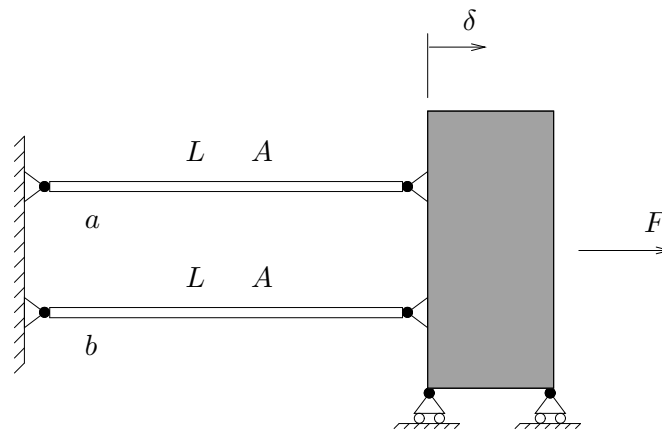


Voor staaf  $a$  is het materiaal lineair elastisch (met elasticiteitsmodulus  $E$ ) zolang de normaalspanning  $\sigma$  (in absolute zin) onder de vloeigrens  $\sigma_v$  blijft; indien  $|\sigma|$  gelijk is aan  $\sigma_v$  kan het materiaal zonder versteviging elasto-plastisch deformeren (ideaal plastisch materiaalgedrag). Staaf  $b$  heeft eveneens elasticiteitsmodulus  $E$ , de vloeigrens (waarbij ideaal plastisch gedrag mogelijk is) bedraagt echter  $3\sigma_v$ .

- a Bepaal de verplaatsing  $\delta = \delta_0$  waarbij staaf  $a$  elasto-plastisch begint te deformeren. Hoe groot is de daarbij behorende kracht  $F_0$  ?
- b Bij voldoende toenemende verplaatsing  $\delta$  zal ook de deformatie in staaf  $b$  elasto-plastisch worden. Vanaf welke waarde  $\delta_1$  voor  $\delta$  zal dat het geval zijn? Hoe groot is de bijbehorende waarde  $F_1$  voor  $F$  ?
- c De verplaatsing  $\delta$  wordt verder opgevoerd tot de waarde  $\delta_2 = 2\delta_1$  is bereikt. Bepaal de bijbehorende kracht  $F_2$  die dan op het systeem moet worden uitgeoefend.
- d Bepaal de (blijvende) verplaatsing  $\delta_r$  van het rechter uiteinde van het systeem na volledige ontlasting ( $F = 0$ ). Bepaal welke restspanningen  $\sigma_r^a$  en  $\sigma_r^b$  (residuele spanningen) dan nog in de staven aanwezig zijn.

### Vraagstuk 4.18

Een mechanisch systeem bestaat uit twee parallel geschakelde prismatische staven  $a$  en  $b$  met dezelfde lengte  $L$  en hetzelfde oppervlak van de dwarsdoorsnede  $A$ . De koppeling is zodanig uitgevoerd dat bij deformaties de lengte van staaf  $a$  hetzelfde blijft als de lengte van staaf  $b$ . De linker zijde van het systeem is aan de vaste wereld verbonden, van de rechter zijde wordt de horizontale verplaatsing  $\delta > 0$  voorgeschreven. De daarvoor benodigde uitwendige kracht wordt met  $F$  aangeduid. In onderstaande figuur is het systeem geschetst. Initieel (in de referentietoestand met  $\delta = 0$ ) zijn de beide staven spanningsloos.



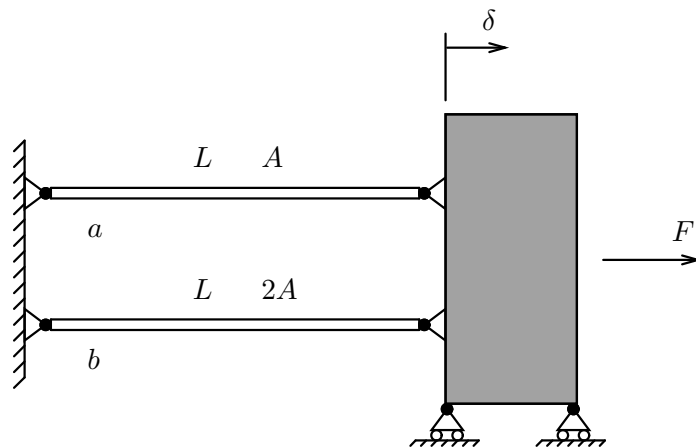
Voor staaf  $a$  is het materiaal lineair elastisch (met elasticiteitsmodulus  $E$ ) zolang de normaalspanning  $\sigma$  (in absolute zin) onder de vloeigrens  $\sigma_v$  blijft; indien  $|\sigma|$  gelijk is aan  $\sigma_v$  kan het materiaal zonder versteviging elasto-plastisch deformeren (ideaal plastisch materiaalgedrag). Staaf  $b$  heeft eveneens elasticiteitsmodulus  $E$ , de vloeigrens (waarbij ideaal plastisch gedrag mogelijk is) bedraagt echter  $5\sigma_v$ .

- Bepaal de verplaatsing  $\delta = \delta_0$  waarbij staaf  $a$  elasto-plastisch begint te deformeren. Hoe groot is de daarbij behorende kracht  $F_0$ ?
- Bij voldoende toenemende verplaatsing  $\delta$  zal ook de deformatie in staaf  $b$  elasto-plastisch worden. Vanaf welke waarde  $\delta_1$  voor  $\delta$  zal dat het geval zijn? Hoe groot is de bijbehorende waarde  $F_1$  voor  $F$ ?
- De verplaatsing  $\delta$  wordt verder opgevoerd tot de waarde  $\delta_2 = 2\delta_1$  is bereikt. Bepaal de bijbehorende kracht  $F_2$  die dan op het systeem moet worden uitgeoefend.
- Vervolgens wordt het systeem langzaam ontlast. In eerste instantie is dan in beide staven sprake van elastisch gedrag. Voor welke waarde  $\delta_3$  van  $\delta$  begint staaf  $a$  (onder druk) elasto-plastisch te deformeren? Welke waarde  $F_3$  van de kracht  $F$  behoort daarbij?
- Bepaal de (blijvende) verplaatsing  $\delta_4$  van het rechter uiteinde van het systeem na volledige ontlasting ( $F_4 = 0$ ). Bepaal welke restspanningen  $\sigma_r^a$  en  $\sigma_r^b$  (residuele spanningen) dan nog in de staven aanwezig zijn.

---

### Vraagstuk 4.19

In onderstaande figuur zijn twee parallelle staven  $a$  en  $b$  getekend, die verbonden zijn met de vaste wereld en met een star blok, dat alleen in horizontale richting kan bewegen. De oorspronkelijke lengte van beide staven is  $L$ . Het dwarsdoorsnede-oppervlak van staaf  $a$  en  $b$  is respectievelijk  $A$  en  $2A$ . De staven hebben dezelfde elasticiteitsmodulus  $E$  en dezelfde initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ .



Deformatie van beide staven treedt op doordat het starre blok een verplaatsing  $\delta$  in horizontale richting ondergaat. De daarvoor benodigde kracht is  $F$ .

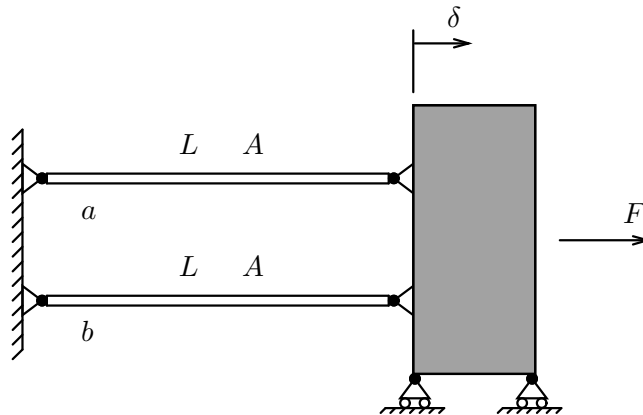
Staaft  $a$  vertoont na het bereiken van de vloeispanning ideaal plastisch materiaalgedrag. Staaft  $b$  vertoont tijdens elasto-plastische deformatie zuiver isotrope versteviging. De constante verstevigingsparameter is  $H$ .

- Bepaal de kracht  $F_0$  op het moment dat staaf  $a$  vloeit.  
Hoe groot is dan de verplaatsing  $\delta_0$  ?
- De kracht  $F$  wordt opgevoerd tot :  $F = F_1 = \frac{5}{3}F_0$ .  
Hoe groot is de verplaatsing  $\delta_1$  ?  
Hoe groot is nu de plastische rek in beide staven ?
- De kracht  $F$  op het starre blok wordt vervolgens helemaal weggenomen.  
Hoe groot is na deze ontlasting de restspanning in beide staven ?

---

### Vraagstuk 4.20

In onderstaande figuur zijn twee parallelle staven  $a$  en  $b$  getekend, die verbonden zijn met de vaste wereld en met een star blok, dat alleen in horizontale richting kan bewegen. De oorspronkelijke lengte van beide staven is  $L$ , hun dwarsdoorsnede-oppervlak  $A$ . De staven hebben dezelfde elasticiteitsmodulus  $E$  en dezelfde initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ .



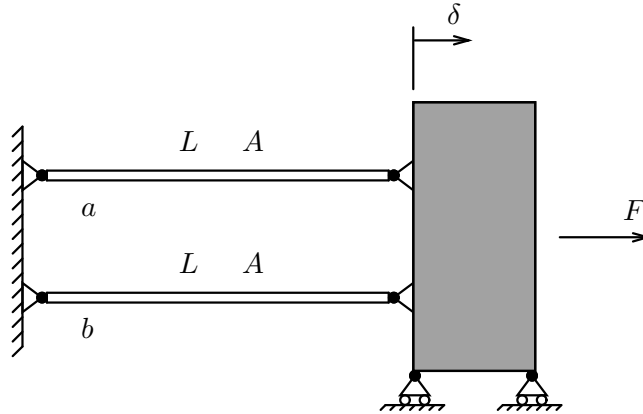
Deformatie van beide staven treedt op doordat het starre blok een verplaatsing  $\delta$  in horizontale richting ondergaat. De daarvoor benodigde kracht is  $F$ .

Staa  $a$  vertoont na het bereiken van de vloeispanning ideaal plastisch materiaalgedrag. Staa  $b$  vertoont tijdens elasto-plastische deformatie zuiver kinematische versterking. De constante versterkingsparameter is  $K$ .

- Bepaal de kracht  $F_0$  op het moment dat staa  $a$  vloeit.  
Hoe groot is dan de verplaatsing  $\delta_0$  ?  
Hoe groot is op dat moment de spanning in staa  $b$  ?
- De verplaatsing  $\delta$  wordt nu voorgeschreven :  $\delta = \delta_1 = 5\delta_0$ .  
Hoe groot is de totale kracht  $F_1$  die nodig is om de verplaatsing te realiseren ?  
Hoe groot is nu de plastische rek in beide staven ?
- De kracht  $F$  op het starre blok wordt vervolgens helemaal weggenomen.  
Hoe groot is na deze ontlasting de restspanning in beide staven ?

### Vraagstuk 4.21

In onderstaande figuur zijn twee parallelle staven  $a$  en  $b$  getekend, die verbonden zijn met de vaste wereld en met een star blok, dat alleen in horizontale richting kan bewegen. De oorspronkelijke lengte van beide staven is  $L$ , hun dwarsdoorsnede-oppervlak  $A$ . De staven hebben dezelfde elasticiteitsmodulus  $E$  en dezelfde initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ .



Deformatie van beide staven treedt op doordat het starre blok een verplaatsing  $\delta$  in horizontale richting ondergaat. De daarvoor benodigde kracht is  $F$ .

Beide staven vertonen na het bereiken van de vloeispanning zuiver isotrope versterking. Staaf  $a$  heeft daarbij een constante versterkingsparameter  $H$ . Staaf  $b$  heeft een constante versterkingsparameter  $2H$ .

- Bepaal de kracht  $F_0$  op het moment dat staaf  $a$  vloeit.  
Hoe groot is dan de verplaatsing  $\delta_0$  ?
- De verplaatsing wordt nu verder voorgeschreven tot de waarde  $\delta_1 = 5\delta_0$ .

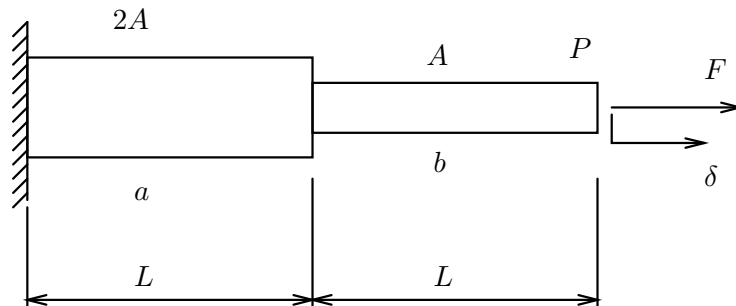
Bereken de spanning in beide staven ( $\sigma_1^a$  en  $\sigma_1^b$ ) en de kracht  $F_1$  die op het starre blok wordt uitgeoefend.

- Vervolgens wordt de kracht weggenomen :  $F = F_2 = 0$ .  
In deze toestand blijkt in staaf  $b$  een restspanning  $\sigma_2^b = \sigma_r$  aanwezig te zijn, die te berekenen is als functie van  $\sigma_{v0}$ ,  $E$  en  $K$ .  
Hoe groot is dan de restspanning  $\sigma_2^a$  in staaf  $a$  ?

---

**Vraagstuk 4.22**

De staaf, die in onderstaande figuur is getekend bestaat uit twee delen  $a$  en  $b$ . Beide staafdelen hebben lengte  $L$ . Het dwarsdoorsnede-oppervlak van deel  $a$  is  $2A$  en dat van deel  $b$  is  $A$ . Het materiaalgedrag van beide delen is gelijk en wordt gegeven door de elasticiteitsmodulus  $E$  en de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ . Het materiaalgedrag na bereiken van de initiële vloeigrens is ideaal plastisch.



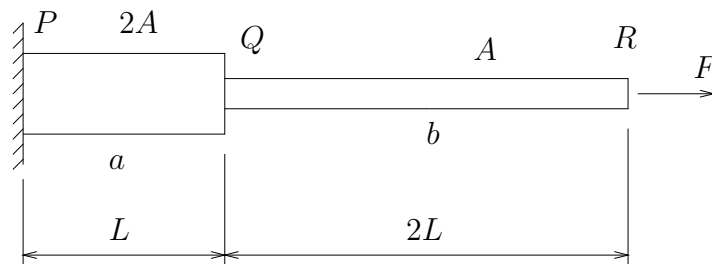
De verplaatsing  $\delta$  van het uiteinde  $P$  van de staaf wordt voorgeschreven. De axiale kracht die daarvoor nodig is wordt aangeduid met  $F$ .

- a Bij welke verplaatsing  $\delta = \delta_0$  treedt er voor het eerst elasto-plastische deformatie op?
- b De verplaatsing wordt vergroot tot  $\delta = \delta_1 = 2\delta_0$ . Bereken de kracht  $F_1$  die hiervoor nodig is.
- c Vervolgens wordt de kracht  $F$  tot nul gereduceerd. Bereken de blijvende verplaatsing  $\delta_2$  van het punt  $P$  die daarna over blijft.

---

**Vraagstuk 4.23**

Met een serieschakeling van twee staven  $a$  en  $b$  wordt een samengestelde staaf  $PQR$  gevormd. De prismatische staaf  $a$ , tussen de punten  $P$  en  $Q$ , heeft lengte  $L$  en oppervlak van de dwarsdoorsnede  $2A$ ; de prismatische staaf  $b$ , tussen de punten  $Q$  en  $R$ , heeft lengte  $2L$  en oppervlak van de dwarsdoorsnede  $A$ . Punt  $P$  is aan de vaste wereld verbonden, punt  $R$  wordt belast door een geconcentreerde kracht  $F > 0$  in de richting van de staafas. De verplaatsing van het aangrijpingspunt  $R$  van de kracht  $F$ , in de richting van  $F$ , wordt met  $\delta$  aangegeven. In onderstaande figuur is de situatie geschetst.



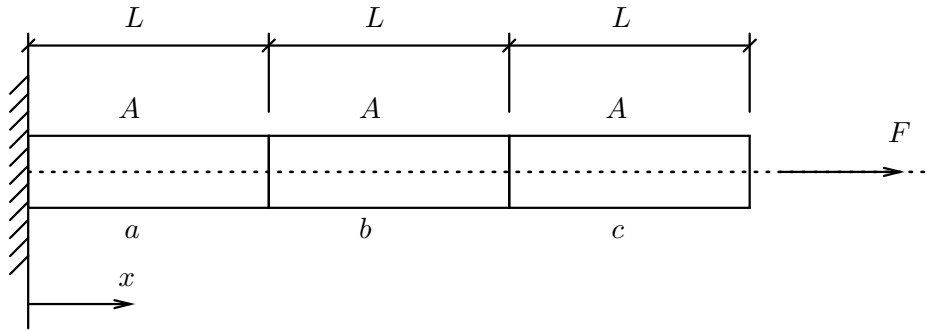
Het materiaal van beide staven  $a$  en  $b$  is lineair elastisch (met elasticiteitsmodulus  $E$ ) zolang de normaalspanning  $\sigma$  (in absolute zin) onder de initiële vloeigrens  $\sigma_{v0}$  blijft; bij verder toenemende  $|\sigma|$  treedt isotrope versteviging op (lineair, met verstevigingsparameter  $H$ ).

- Bepaal de grootte  $F_0$  van de kracht  $F$  waarbij in de samengestelde staaf sprake is van een begin van elasto-plastische deformatie. Hoe groot is daarbij de verplaatsing  $\delta_0$  van het aangrijpingspunt  $R$ ?
- Bij verder toenemende kracht  $F$  zal, vanaf  $F = F_1 > F_0$ , overal in de samengestelde staaf elasto-plastische deformatie optreden. Bepaal  $F_1$  en de bijbehorende verplaatsing  $\delta_1$  van punt  $R$ .
- Nadat de kracht  $F$  de waarde  $\frac{6}{5}F_1$  heeft bereikt wordt de staaf langzaam ontlast. Bepaal de (blijvende) verplaatsing  $\delta_2$  van punt  $R$  na volledige ontlasting.

---

**Vraagstuk 4.24**

In onderstaande figuur zijn drie onderling gekoppelde staven  $a$ ,  $b$  en  $c$  getekend. De staven zijn in onvervormde toestand even lang (lengte  $L$ ) en hebben hetzelfde dwarsdoorsnede-oppervlak  $A$ . De elasticiteitsmodulus  $E$  van de staven is eveneens gelijk.



Bij  $x = 0$  is de staafconstructie aan de vaste wereld verbonden. De constructie wordt axiaal belast, door een monotoon toenemende kracht  $F$  in positieve  $x$ -richting, aangrijpend in het punt  $x = 3L$ . De verplaatsing van het aangrijpingspunt van deze kracht is  $\delta$ .

De staven  $a$ ,  $b$  en  $c$  hebben respectievelijk een initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ ,  $2\sigma_{v0}$  en  $3\sigma_{v0}$ . Na het bereiken van de initiële vloeispanning vertoont elke staaf lineaire, isotrope versterking, gekarakteriseerd door de constante versterkingsparameter  $H$ .

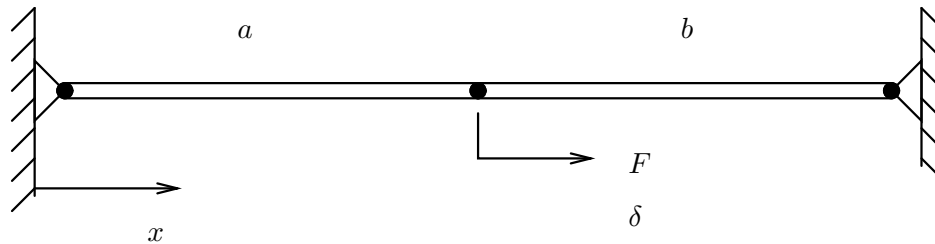
- Bij welke verplaatsing  $\delta_0$  zal staaf  $a$  vloeien ?  
Hoe groot is dan de kracht  $F_0$  ?
- Bij welke verplaatsing  $\delta_1$  bereikt de spanning in staaf  $b$  de vloeispanning ?  
Hoe groot is dan de kracht  $F_1$  ?
- Bij welke verplaatsing  $\delta_2$  bereikt de spanning in staaf  $c$  de vloeispanning ?  
Hoe groot is dan de kracht  $F_2$  ?



---

### Vraagstuk 4.25

In onderstaande figuur zijn twee onderling gekoppelde staven  $a$  en  $b$  getekend, die bij  $x = 0$  en  $x = 2L$  aan de vaste wereld zijn verbonden. De staven zijn in onvervormde toestand even lang (lengte  $L$ ) en hebben hetzelfde dwarsdoorsnede-oppervlak  $A$ . De elasticiteitsmodulus  $E$  van beide staven is eveneens gelijk.



De staven worden axiaal belast, door middel van een monotoon toenemende kracht  $F$  in positieve  $x$ -richting, aangrijpend in het punt  $x = L$ . De verplaatsing van het aangrijpingspunt van deze kracht is  $\delta$ .

Staaft  $a$  heeft een initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ . Na het bereiken van deze spanning vertoont de staaf lineaire, isotrope versteviging, gekarakteriseerd door de constante verstevigingsparameter  $H$ .

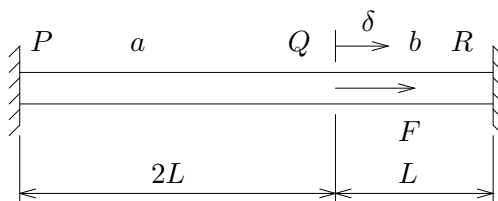
Staaft  $b$  heeft een initiële vloeispanning  $2\sigma_{v0}$ . Na het bereiken van deze spanning deformeert de staaf ideaal plastisch.

- a      Bij welke verplaatsing  $\delta_0$  zal staaf  $a$  vloeien ?  
Hoe groot is dan de kracht  $F_0$  ?
- b      Bij welke verplaatsing  $\delta_1$  bereikt de spanning in staaf  $b$  de vloeispanning ?  
Hoe groot is dan de kracht  $F_1$  ?
- c      De kracht wordt nu verder opgevoerd tot de waarde  $F = F_2 = 4\sigma_{v0}A$ .  
Bereken de axiale spanning in beide staven :  $\sigma_2^a$  en  $\sigma_2^b$ .

---

**Vraagstuk 4.26**

Tussen twee aan de vaste wereld verbonden punten  $P$  en  $R$  wordt een prismatische staaf  $PQR$  (lengte  $3L$  en oppervlak van de dwarsdoorsnede  $A$ ) geplaatst. De staaf past precies en derhalve is de begintoestand (die is op te vatten als referentietoestand) spanningsloos. Op de doorsnede  $Q$  (zie onderstaande figuur) van de staaf werkt een geconcentreerde kracht  $F > 0$  in de richting van de staafas. De verplaatsing van het aangrijpingspunt  $Q$  van de kracht  $F$ , in de richting van  $F$ , wordt met het symbool  $\delta$  aangegeven.



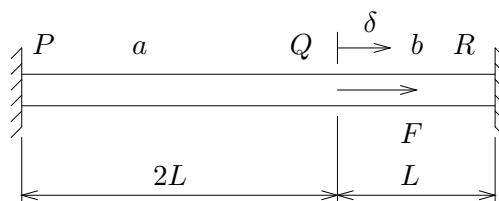
Het staafmateriaal is lineair elastisch (met elasticiteitsmodulus  $E$ ) zolang de normaalspanning  $\sigma$  (in absolute zin) onder de initiële vloeigrens  $\sigma_{v0}$  blijft; bij verder toenemende  $|\sigma|$  treedt isotrope versterking op (lineair, met versterkingsparameter  $H$ ).

- Bepaal de grootte  $F_0$  van de kracht  $F$  waarbij de staaf elasto-plastisch begint te deformeren. Hoe groot is daarbij de verplaatsing  $\delta_0$  van het aangrijpingspunt  $Q$  ?
- Bij voldoende toenemende kracht  $F$  zal de deformatie in de staaf overal elasto-plastisch worden. Vanaf welke waarde  $F_1$  voor  $F$  zal dat het geval zijn? Hoe groot is de bijbehorende waarde  $\delta_1$  voor  $\delta$  ?
- De kracht  $F$  wordt verder opgevoerd tot de waarde  $F_2=2F_0$  is bereikt. Bepaal de bijbehorende verplaatsing  $\delta_2$  van punt  $Q$  .
- Vervolgens wordt de staaf langzaam ontlast. Bepaal de (blijvende) verplaatsing  $\delta_3$  van punt  $Q$  na volledige ontlasting ( $F_3=0$ ). Bepaal (na het nu uitgevoerde kringproces in de belasting) welke restspanning  $\sigma_r$  (residuele spanning) dan nog in de staaf aanwezig is.

---

**Vraagstuk 4.27**

Tussen twee aan de vaste wereld verbonden punten  $P$  en  $R$  wordt een prismatische staaf  $PQR$  (lengte  $3L$  en oppervlak van de dwarsdoorsnede  $A$ ) geplaatst. De staaf past precies en derhalve is de begintoestand (die is op te vatten als referentietoestand) spanningsloos. De verplaatsing  $\delta > 0$  van de doorsnede  $Q$  (zie onderstaande figuur) van de staaf, in de richting van de staafas, wordt voorgeschreven; de daarvoor benodigde kracht wordt met  $F$  aangegeven.



Het staafmateriaal is lineair elastisch (met elasticiteitsmodulus  $E$ ) zolang de normaalspanning  $\sigma$  (in absolute zin) onder de vloeigrens  $\sigma_v$  blijft; indien  $|\sigma|$  gelijk is aan  $\sigma_v$  kan het materiaal zonder versteviging elasto-plastisch deformeren (ideaal plastisch materiaalgedrag).

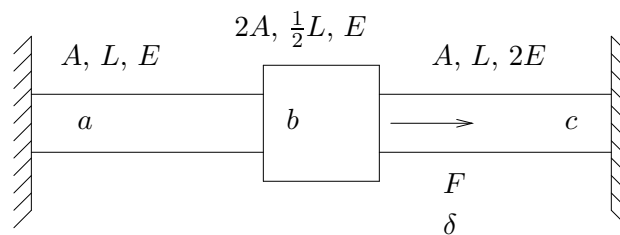
- Bepaal de verplaatsing  $\delta = \delta_0$  waarbij de staaf elasto-plastisch begint te deformeren. Hoe groot is de daarbij behorende kracht  $F_0$  ?
- Bij voldoende toenemende verplaatsing  $\delta$  zal de deformatie in de staaf overal elasto-plastisch worden. Vanaf welke waarde  $\delta_1$  voor  $\delta$  zal dat het geval zijn? Hoe groot is de bijbehorende waarde  $F_1$  voor  $F$  ?
- De verplaatsing  $\delta$  wordt verder opgevoerd tot de waarde  $\delta_2 = 3\delta_0$  is bereikt. Bepaal de bijbehorende kracht  $F_2$  die dan op punt  $Q$  moet werken.
- Vervolgens wordt de staaf langzaam ontlast. Bepaal de (blijvende) verplaatsing  $\delta_3$  van punt  $Q$  na volledige ontlasting ( $F_3 = 0$ ). Bepaal welke restspanning  $\sigma_r$  (residuele spanning) dan nog in de staaf aanwezig is.

---

**Vraagstuk 4.28**

In onderstaande figuur is een staaf getekend, die bestaat uit drie delen :  $a$ ,  $b$  en  $c$ . Lengte, dwarsdoorsnede-oppervlak en elasticiteitsmodulus van de afzonderlijke delen zijn in de figuur aangegeven.

De staaf is ingeklemd tussen twee starre wanden. Op de overgang van staafdeel  $b$  en staafdeel  $c$  wordt de staaf belast met een kracht  $F$ . De verplaatsing van het aangrijpingspunt van die kracht is  $\delta$ . In de aangegeven richting zijn zowel  $F$  als  $\delta$  positief.



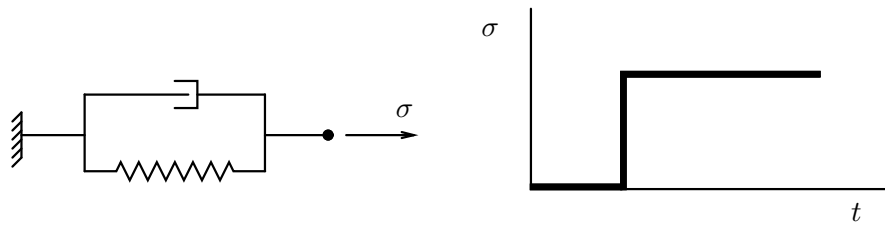
De initiële vloeispanning van de staafdelen is gelijk :  $\sigma_{v0}$ . Tijdens elasto-plastische deformatie gedraagt het materiaal van elk staafdeel zich ideaal plastisch.

- a. Welk van de drie staafdelen zal het eerst vloeien als de kracht  $F$  vanaf waarde 0 monotoon toeneemt ?  
Hoe groot is op het moment van vloeien de kracht  $F_0$  ?  
Hoe groot is op het moment van vloeien de verplaatsing  $\delta_0$  ?
- b. De kracht  $F$  neemt nu verder toe.  
  
Hoe groot is de maximale kracht  $F_m$  die kan worden uitgeoefend ?  
Hoe groot is de verplaatsing  $\delta_m$  op het moment dat die waarde wordt bereikt ?
- c. Hoe groot is de plastische rek in staaf  $c$  bij de maximale kracht  $F_m$  ?

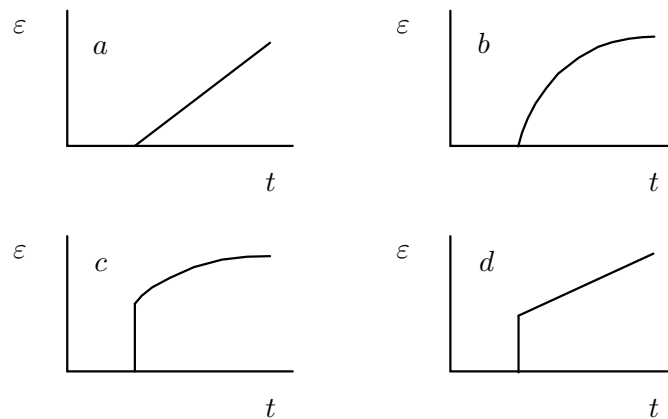
## 5 Viscoelastic material behavior

### Vraagstuk 5.1

Een Kelvin-Voigt element bestaat uit een veer met stijfheid  $E$  en een demper met viscositeit  $\eta$ . Het element wordt belast met een axiale spanning, waarvan het verloop in onderstaande figuur is getekend.



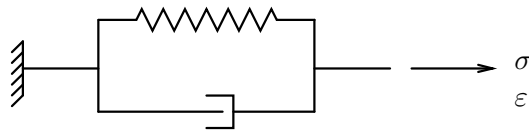
Welke van onderstaande figuren representeert het correcte verloop van de rek  $\varepsilon$  ?



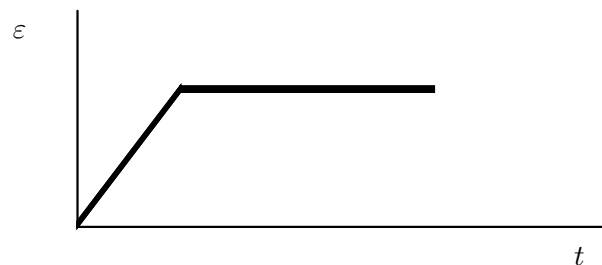
---

### Vraagstuk 5.2

In onderstaande figuur is een veer-demper model getekend, dat bestaat uit een lineaire veer en een lineaire demper. Het model wordt gebruikt voor de beschrijving van het verband tussen de spanning  $\sigma$  en de rek  $\varepsilon$  bij visco-elastisch materiaalgedrag.



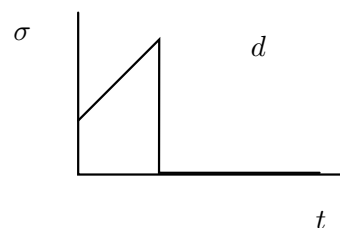
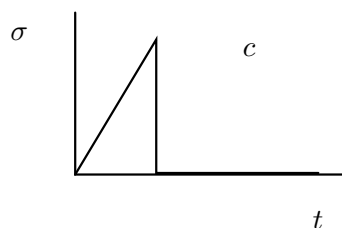
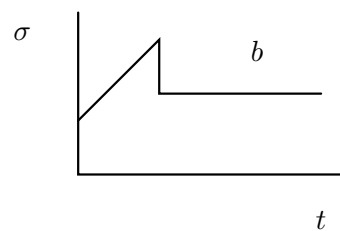
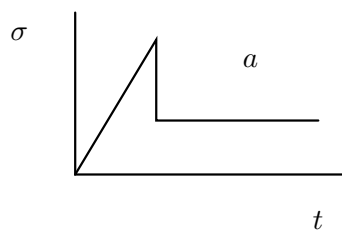
Een staaf, bestaande uit het bedoelde visco-elastische materiaal wordt belast door een axiale rek  $\varepsilon$ . Het verloop van deze rek als functie van de tijd  $t$  is weergegeven in onderstaande figuur.



De axiale spanning  $\sigma(t)$  in de staaf kan eveneens als functie van de tijd in een figuur worden weergegeven.

Welke van onderstaande vier figuren –  $a$ ,  $b$ ,  $c$  of  $d$  – representeert het verloop van  $\sigma(t)$ , zoals dat door het gebruikte model wordt beschreven?

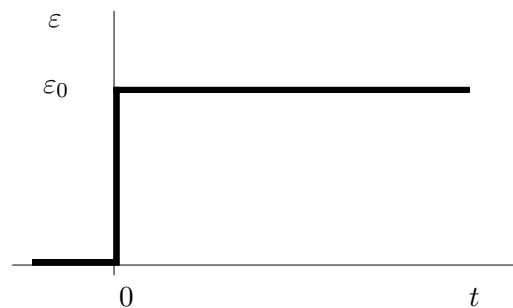
Motiveer uw keuze !



### Vraagstuk 5.3

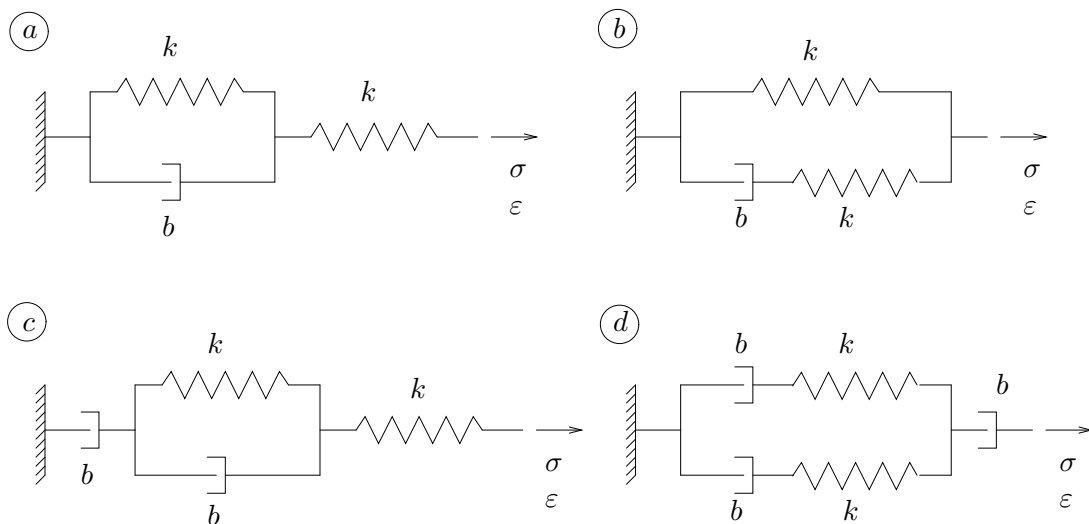
In onderstaande figuur zijn een viertal veer-demper modellen getekend, bestaande uit lineaire veren en dempers. De veer- en dempingsconstanten zijn in de figuur aangegeven. Elk van de modellen representeert lineair visco-elastisch materiaalgedrag.

Stel dat we een trekstaaf van zo'n materiaal belasten met een stapvormig rekverloop, dat weergegeven is in onderstaande figuur.



Schets voor elk van de vier modellen het verloop van de spanning als functie van de tijd.

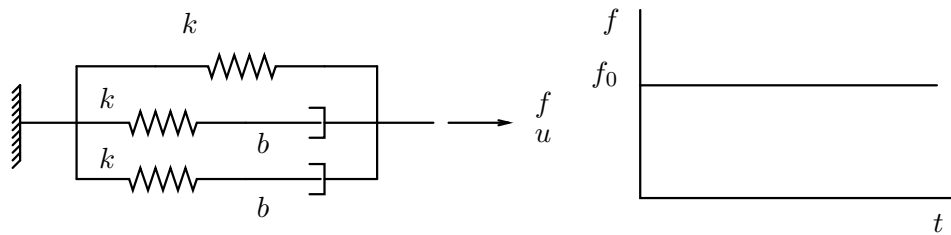
Geef relevante waarden van  $\sigma$  - initiële waarden, asymptoten, etc. - duidelijk in de figuren aan.



---

**Vraagstuk 5.4**

In onderstaande figuur is een systeem van veren en dempers getekend. De kracht  $f$  wordt voorgeschreven als functie van de tijd  $t$ , zoals weergegeven is in de figuur.

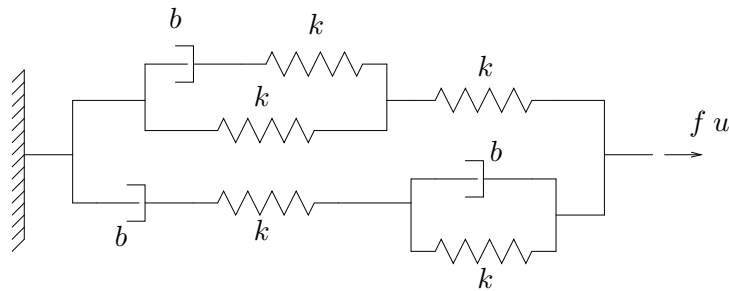


Hoe groot is de verplaatsing  $u$  onmiddellijk nadat de kracht op tijdstip  $t = 0$  is aangebracht?

---

**Vraagstuk 5.5**

In onderstaande figuur is een veer-demper systeem getekend. De kracht in het rechter uiteinde wordt op tijdstip  $t = 0$  van waarde nul stapvormig verhoogd tot waarde  $F$ . Hoe groot is de verplaatsing van het rechter uiteinde onmiddellijk na het aanbrengen van de stap?





---

### Vraagstuk 5.6

Voor een lineair visco-elastisch materiaal kan de rekresponsie  $\varepsilon(t)$  bij een in de tijd  $t$  variërende uniaxiale spanning  $\sigma(t)$  berekend worden als de kruipfunctie  $D(t)$  bekend is. Veronderstel:

$$D(t) = C (t + \alpha)$$

met  $C$  en  $\alpha$  positieve materiaalconstanten.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < t_1$  wordt vanaf tijdstip  $t = t_1$  het materiaal onderworpen aan een spanningsverloop gespecificeerd volgens:

$$\sigma(t) = \bar{\sigma} [H(t, t_1) - H(t, t_2)] \quad (\text{met } \bar{\sigma} > 0 \text{ en } t_2 > t_1)$$

waarbij  $H(, )$  de Heaviside stapfunctie representeert.

- a. Wat is de fysische interpretatie van de kruipfunctie  $D(t)$  ?
- b. Schets het spanningsverloop als functie van de tijd.
- c. Bepaal de rek  $\varepsilon$  als functie van de tijd en maak een schets van het verloop. Merk op dat voor  $t > t_2$  de rek constant blijft (na afloop van het belastingsproces is er een constante blijvende deformatie).

---

**Vraagstuk 5.7**

Voor een lineair visco-elastisch materiaal kan de rekresponsie  $\varepsilon(t)$  bij een in de tijd  $t$  variërende uniaxiale spanning  $\sigma(t)$  berekend worden als de kruipfunctie  $D(t)$  bekend is. Veronderstel:

$$D(t) = D_0 + C \left[ 1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \right] \quad \text{met } C = \frac{D_0}{2}$$

met  $D_0$  en  $\tau$  positieve materiaalconstanten.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t = 0$  het materiaal onderworpen aan een kringproces in de spanning gespecificeerd volgens:

$$\sigma(t) = \bar{\sigma} [H(t, 0) - 2H(t, \beta\tau) + H(t, 2\beta\tau)]$$

waarbij  $H(, )$  de Heaviside stapfunctie representeert, met  $\bar{\sigma}$  een positieve constante die een maat is voor de grootte van de belasting en met  $\beta$  een positieve constante die maatgevend is voor de tijd waarin het belastingsproces wordt uitgevoerd.

- Schets het spanningsverloop als functie van de tijd.
- Bepaal de rek  $\varepsilon$  als functie van de tijd en maak een schets van het verloop. Merk op dat voor  $t \gg 2\beta\tau$  de rek van het materiaal weer nagenoeg verdwenen is.
- Bewijs dat, onafhankelijk van de numerieke waarden van de relevante parameters, voor  $t \geq 2\beta\tau$  altijd geldt:  $\varepsilon(t) < 0$ .

---

**Vraagstuk 5.8**

Voor een lineair visco-elastisch materiaal kan de spanningsresponsie  $\sigma(t)$  bij een in de tijd  $t$  variërende axiale rek  $\varepsilon(t)$  berekend worden als de relaxatiefunctie  $E(t)$  bekend is. Veronderstel:

$$E(t) = E_0 \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right)^{(-n)}$$

met  $E_0$ ,  $\tau$  en  $n$  positieve materiaalconstanten.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t = 0$  aan het materiaal een lineair in de tijd toenemende rek opgelegd:  $\varepsilon(t) = \gamma t$  waarbij met  $\gamma$  de (constante) reksnelheid is aangegeven.

- Bepaal, voor  $t \geq 0$ , het spanningsverloop als functie van de tijd. Geldt het gevonden resultaat ook als  $n = 1$ ?
- Laat zien dat voor  $n \leq 1$  de spanning  $\sigma(t)$  onbegrensd is voor  $t \rightarrow \infty$  terwijl voor  $n > 1$  de spanning nadert tot een van de reksnelheid  $\gamma$  afhankelijke eindwaarde (welke?).

---

### Vraagstuk 5.9

Voor een lineair visco-elastisch materiaal kan de spanningsresponsie  $\sigma(t)$  bij een in de tijd  $t$  variërende axiale rek  $\varepsilon(t)$  berekend worden als de relaxatiefunctie  $E(t)$  bekend is. Veronderstel:

$$E(t) = E_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{(-2)}$$

met  $E_0$  en  $\tau$  positieve materiaalconstanten.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t = 0$  aan het materiaal een in de tijd zaagtandvormig rekpatroon opgelegd (met een constante periodetijd  $\beta\tau$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{voor } 0 \leq t < \beta\tau : & \varepsilon(t) = \gamma t \\ \text{voor } \beta\tau \leq t < 2\beta\tau : & \varepsilon(t) = \gamma(t - \beta\tau) \\ \text{voor } 2\beta\tau \leq t < 3\beta\tau : & \varepsilon(t) = \gamma(t - 2\beta\tau) \quad \text{enz.} \end{array}$$

waarbij de constante  $\gamma$  de reksnelheid binnen een periode representeert.

- a. Bepaal, voor  $0 \leq t < \beta\tau$ , het spanningsverloop als functie van de tijd.
- b. Een (in de tijd) zaagtandvormige rek kan worden opgevat als een lineair verlopende rek die periodiek (op een stapvormige manier) wordt gereduceerd. Maak daarvan gebruik om het spanningsverloop voor  $\beta\tau \leq t < 2\beta\tau$  en voor  $2\beta\tau \leq t < 3\beta\tau$  te bepalen.

---

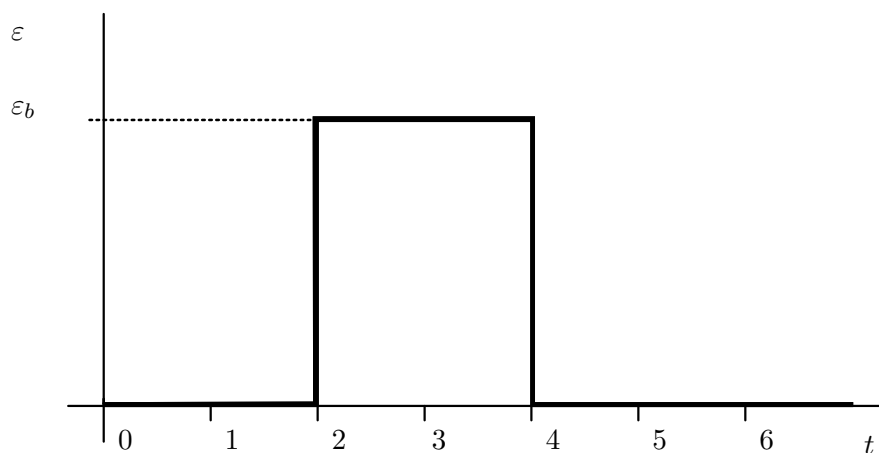
**Vraagstuk 5.10**

Voor een lineair visco-elastisch materiaal is de relaxatiefunctie  $E(t)$  gegeven :

$$E(t) = Ee^{-\alpha t}$$

waarbij  $E$  en  $\alpha$  positieve materiaalconstanten zijn.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t = 0$  het materiaal onderworpen aan een rekverloop, zoals dat in onderstaande figuur is geschetst. De grootte van de rekstap is  $\varepsilon_b$ .



- a Schets de spanning  $\sigma(t)$  in het materiaal als functie van de tijd voor  $0 \leq t \leq 6$ .
- b Bereken de spanning op het tijdstip  $t = 3$ .
- c Bereken de spanning op het tijdstip  $t = 5$ .

---

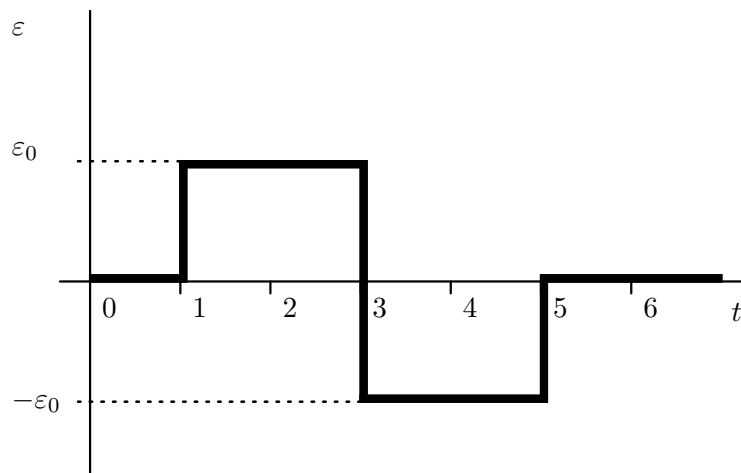
**Vraagstuk 5.11**

Voor een lineair visco-elastisch materiaal is de relaxatiefunctie  $E(t)$  gegeven :

$$E(t) = Ee^{-\alpha t}$$

waarbij  $E$  en  $\alpha$  positieve materiaalconstanten zijn.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t = 1$  het materiaal onderworpen aan een rekverloop, bestaande uit drie opeenvolgende rekstappen, zoals dat in onderstaande figuur is geschetst.



- a Hoe luidt de algemene uitdrukking voor de Boltzmann-integraal, waarmee de spanningsresponsie kan worden berekend ?
- b Bereken de spanning op het tijdstip  $t = 2$ .
- c Bereken de spanning op het tijdstip  $t = 4$ .
- d Bereken de spanning op het tijdstip  $t = 6$ .

---

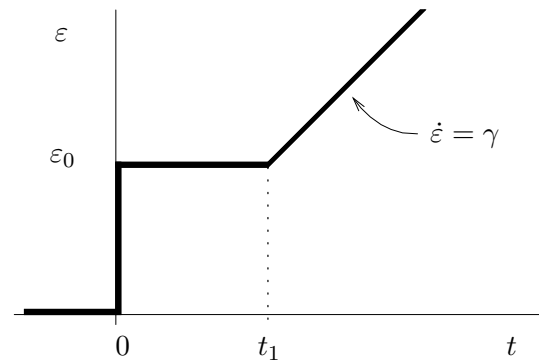
**Vraagstuk 5.12**

Voor een lineair visco-elastisch materiaal is de relaxatiefunctie  $E(t)$  gegeven :

$$E(t) = E_{\infty} + E_1 e^{-\alpha t}$$

waarbij  $E_{\infty}$ ,  $E_1$  en  $\alpha$  positieve materiaalconstanten zijn.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze uitgangstoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t = 0$  het materiaal onderworpen aan een rekverloop, zoals dat in onderstaande figuur is geschetst. Relevante waarden zijn in de figuur aangegeven.



- a. Bereken de spanning  $\sigma(t)$  voor  $0 < t < t_1$ .
- b. Bereken de spanning  $\sigma(t)$  voor  $t > t_1$ .

---

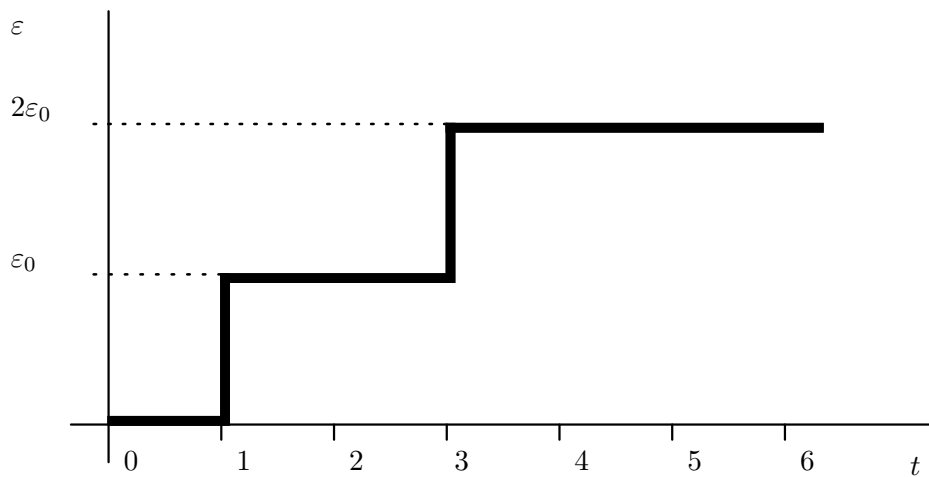
**Vraagstuk 5.13**

Voor een lineair visco-elastisch materiaal is de relaxatiefunctie  $E(t)$  gegeven :

$$E(t) = Ee^{-\alpha t}$$

waarbij  $E$  en  $\alpha$  positieve materiaalconstanten zijn.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t = 1$  het materiaal onderworpen aan een rekverloop, bestaande uit twee opeenvolgende rekstappen, zoals dat in onderstaande figuur is geschetst. De grootte van elke rekstap is  $\varepsilon_0$ .



- a Hoe luidt de algemene uitdrukking voor de Boltzmann-integraal, waarmee de spanningsresponsie kan worden berekend ?
- b Bereken de spanning op het tijdstip  $t = 2$ .
- c Bereken de spanning op het tijdstip  $t = 4$ .

---

**Vraagstuk 5.14**

Een lineair visco-elastisch materiaal wordt gekarakteriseerd door de relaxatiefunctie  $E(t)$  :

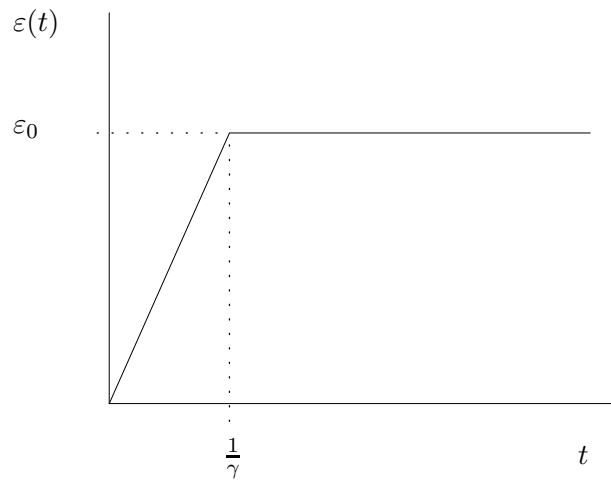
$$E(t) = Ee^{-\alpha t} \quad \text{met } E, \alpha : \text{ materiaalconstanten}$$

- a      Hoe luidt de Boltzmann-integraal waarmee de spanningsresponsie  $\sigma(t)$  kan worden berekend als de rekexcitatie  $\varepsilon(t)$  gegeven is ?

De rek wordt nu als volgt voorgeschreven :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon_0 \gamma t && \text{voor } 0 \leq t \leq \frac{1}{\gamma} \\ \varepsilon(t) &= \varepsilon_0 && \text{voor } t \geq \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

Dit is weergegeven in onderstaande figuur.



- b      Bereken de spanningsresponsie  $\sigma(t)$  op een tijdstip  $t > \frac{1}{\gamma}$ .



---

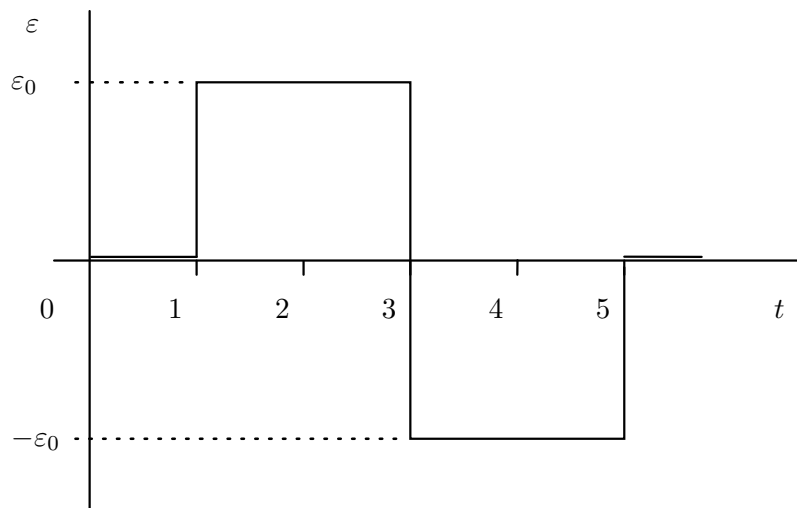
**Vraagstuk 5.15**

Voor een lineair visco-elastisch materiaal kan de spanningsresponsie  $\sigma(t)$  bij een in de tijd  $t$  variërende axiale rek  $\varepsilon(t)$  berekend worden als de relaxatiefunctie  $E(t)$  bekend is. Veronderstel:

$$E(t) = E_0 \tau_m^2 (\tau_m + t)^{(-2)}$$

met  $E_0$  en  $\tau_m$  positieve materiaalconstanten.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t=0$  aan het materiaal een rekpatroon opgelegd zoals weergegeven in onderstaande figuur.



- Bepaal, voor  $1 \leq t < 3$ , het spanningsverloop als functie van de tijd.
- Bereken de spanning op tijdstip  $t = 2$ .
- Bereken de spanning op tijdstip  $t = 4$ .

---

**Vraagstuk 5.16**

Voor een lineair visco-elastisch materiaal kan de spanningsresponsie  $\sigma(t)$  bij een in de tijd  $t$  variërende axiale rek  $\varepsilon(t)$  berekend worden als de relaxatiefunctie  $E(t)$  bekend is. Veronderstel:

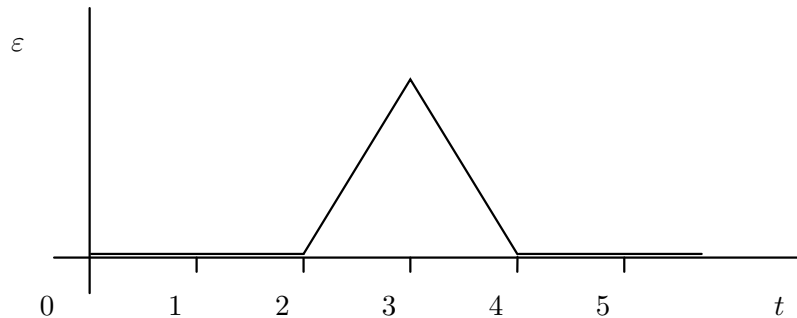
$$E(t) = E_0 \tau_m^2 (\tau_m + t)^{(-2)}$$

met  $E_0$  en  $\tau_m$  positieve materiaalconstanten.

Uitgaande van een rek- en spanningsloze referentietoestand voor  $t < 0$  wordt vanaf tijdstip  $t=0$  aan het materiaal een rekpatroon opgelegd zoals weergegeven in onderstaande figuur. Voor de rek geldt :

voor $t < 2$ :	$\varepsilon(t) = 0$
voor $2 \leq t < 3$ :	$\varepsilon(t) = \gamma(t - 2)$
voor $3 \leq t < 4$ :	$\varepsilon(t) = -\gamma(t - 4)$
voor $4 \leq t$ :	$\varepsilon(t) = 0$

waarbij de constante  $\gamma$  de reksnelheid binnen een periode representeert.



- a Bepaal, voor  $2 \leq t < 3$ , het spanningsverloop als functie van de tijd.
- b Bereken de spanning op tijdstip  $t = 3$ .
- c Bereken de spanning op tijdstip  $t = 5$ .

---

**Vraagstuk 5.17**

In een laboratorium ligt een kunststof staaf met een cirkelvormige dwarsdoorsnede, diameter 10 [mm], en met lengte 1 [m]. De staaf is initieel in een stationaire toestand (spanningsloos, constante lengte) die als referentie gehanteerd kan worden. Het materiaalgedrag is lineair visco-elastisch, gekarakteriseerd door de kruipfunctie  $D(t)$  volgens:

$$D(t) = 2 - e^{(-0.00003 \ t)}$$

waarbij de tijd  $t$  in [s] wordt uitgedrukt en  $D(t)$  in  $[\text{GPa}^{-1}]$ . In een proefopstelling wordt de staaf gedurende 10 uur belast met een trekkracht van 1000 [N] en vervolgens volledig ontlast.

- Bereken de verlenging  $\Delta l_1$  van de staaf onmiddellijk nadat de belasting is verwijderd.
- Bereken de verlenging  $\Delta l_2$  van de staaf na 1 dag (24 uur) in onbelaste toestand.

---

**Vraagstuk 5.18**

Een nylon bout met een diameter van 8 [mm] wordt gebruikt om twee stijve (als star te beschouwen) platen aan elkaar te bevestigen. Initieel (referentie) verkeert de bout in een stationaire toestand (spanningsloos en rekloos). Het nylon gedraagt zich lineair visco-elastisch met een relaxatiefunctie  $E(t)$  die benaderd kan worden door:

$$E(t) = 5 \ e^{(-0.07 \ t^{0.3})}$$

waarbij de tijd  $t$  in [s] wordt uitgedrukt en  $E(t)$  in [GPa]. Op een zeker tijdstip wordt de bout (snel) aangedraaid zodanig dat de doorgeleide trekkracht gelijk is aan 1 [kN].

- Bereken de axiale rek  $\varepsilon_1$  in de bout na het aandraaien.
- Bereken de trekkracht  $N_1$  in de bout, 24 uur na het aandraaien.

Na die 24 uur wordt de bout weer snel aangedraaid zodanig dat de trekkracht opnieuw gelijk wordt aan 1 [kN].

- Bereken in die toestand de rek  $\varepsilon_2$  in de bout.
- Hoe groot is de trekkracht  $N_2$  na weer 24 uur?

---

**Vraagstuk 5.19**

Een lineair visco-elastisch materiaal wordt belast met een harmonisch (hoekfrequentie  $\omega$ ) variërende rek  $\varepsilon(t)$  volgens:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (\text{met constante amplitude } \varepsilon_0)$$

Na het uitdempen van inschakelverschijnselen geldt dan voor de spanning  $\sigma(t)$  :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E' \sin(\omega t) + \varepsilon_0 E'' \cos(\omega t)$$

met  $E'(\omega)$  de opslagmodulus en  $E''(\omega)$  de verliesmodulus. Voor het faseverschil  $\delta(\omega)$  tussen  $\sigma(t)$  en  $\varepsilon(t)$  geldt:

$$\delta(\omega) = \arctan \left[ \frac{E''}{E'} \right]$$

- a. Veronderstel dat het materiaal zich zuiver lineair elastisch gedraagt waarbij  $\sigma(t) = E \varepsilon(t)$  met  $E$  de elasticiteitsmodulus. Bepaal  $E'$ ,  $E''$  en  $\delta$  en interpreteer het resultaat.
- b. Bepaal dezelfde set grootheden voor het geval dat het materiaal zich zuiver lineair visceus gedraagt (als een Newtonse vloeistof) waarbij  $\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t)$  met  $\eta$  de viscositeit. Geef weer een interpretatie van het resultaat.

---

**Vraagstuk 5.20**

Voor materiaal dat gemodelleerd kan worden als een Kelvin-Voigt element (een parallelschakeling van een lineaire veer en een lineaire demper) kan het gedrag wiskundig worden vastgelegd door middel van de uitdrukking waarmee de spanning  $\sigma(t)$  kan worden berekend bij gegeven verloop  $\varepsilon(t)$  van de rek:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

waarbij  $E$  de elasticiteitsmodulus (stijfheid) aangeeft en  $\eta$  de viscositeit (damping). Bij een harmonisch (hoekfrequentie  $\omega$ ) variërende rek  $\varepsilon(t)$  volgens:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (\text{met constante amplitude } \varepsilon_0)$$

behoort, na het uitdempen van inschakelverschijnselen, de spanning  $\sigma(t)$  volgens:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E' \sin(\omega t) + \varepsilon_0 E'' \cos(\omega t)$$

met  $E'(\omega)$  de opslagmodulus en  $E''(\omega)$  de verliesmodulus.

- a. Bepaal de moduli  $E'(\omega)$  en  $E''(\omega)$ .
- b. Bepaal het faseverschil  $\delta(\omega)$  tussen  $\sigma(t)$  en  $\varepsilon(t)$  bij harmonische excitatie, na het uitdempen van inschakelverschijnselen.
- c. Bepaal de amplitude  $\sigma_0$  van  $\sigma(t)$  bij harmonisch variërende  $\varepsilon(t)$ , na het uitdempen van inschakelverschijnselen.
- d. Ga na wat er gebeurt wanneer  $\eta \rightarrow 0$  en geef daarvoor een fysische verklaring.
- e. Ga na wat er gebeurt wanneer  $E \rightarrow 0$  en geef ook daarvoor een fysische verklaring.
- f. Wat is er aan de hand als  $\eta \rightarrow \infty$  of  $E \rightarrow \infty$ ?

---

**Vraagstuk 5.21**

Voor materiaal dat gemodelleerd kan worden als een gegeneraliseerd Maxwell element (parallelschakeling van een aantal Maxwell elementen, desgewenst nog aangevuld met een extra lineair elastisch element) kan het gedrag worden vastgelegd met de relaxatiefunctie  $E(t)$  :

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_i E_i e^{\left(-\frac{E_i}{\eta_i} t\right)}$$

waarbij voor de Maxwell elementen  $E_i$  de elasticiteitsmoduli (stijfheden) aangeven en  $\eta_i$  de viscositeiten (damping);  $E_{\infty}$  representeert de stijfheid (evenwichtsmodulus) van het extra elastische element.

Bij een harmonisch (hoekfrequentie  $\omega$ ) variërende rek  $\varepsilon(t)$  volgens:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (\text{met constante amplitude } \varepsilon_0)$$

behoort, na het uitdempen van inschakelverschijnselen, de spanning  $\sigma(t)$  volgens:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E' \sin(\omega t) + \varepsilon_0 E'' \cos(\omega t)$$

met  $E'(\omega)$  de opslagmodulus en  $E''(\omega)$  de verliesmodulus.

- Bepaal de moduli  $E'(\omega)$  en  $E''(\omega)$  .
- Bepaal het faseverschil  $\delta(\omega)$  tussen  $\sigma(t)$  en  $\varepsilon(t)$  bij harmonische excitatie, na het uitdempen van inschakelverschijnselen.
- Bepaal de amplitude  $\sigma_0$  van  $\sigma(t)$  bij harmonisch variërende  $\varepsilon(t)$  , na het uitdempen van inschakelverschijnselen.

---

**Vraagstuk 5.22**

Voor het materiaal van een lineair visco-elastische staaf is de verliescompliantie  $D''$  bij een excitatiefrequentie van 50 [Hz] gelijk aan  $3.7 [\text{GPa}^{-1}]$ . De betreffende staaf, met lengte 240 [mm] en oppervlakte van de dwarsdoorsnede  $40 [\text{mm}^2]$  , wordt belast met een sinusvormig variërende kracht tussen -150 [N] en 150 [N] met een frequentie van 50 [Hz].

- Bereken de energie  $W_d$  die per belastingscyclus door de staaf wordt gedissipeerd.
- Bereken het vermogen  $P$  dat aan de staaf moet worden toegevoerd tijdens het belastingsproces.

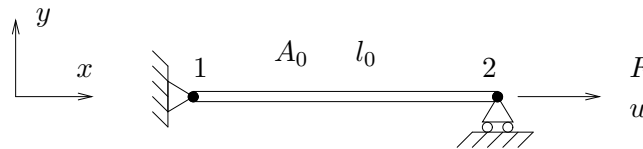
## 6 Numerical analyses

De resultaten van de numerieke berekeningen kunnen vergeleken worden met de analytische oplossingen van de overeenkomstige vraagstukken uit de hoofdstukken 3, 4 en 5.

---

### Vraagstuk 6.1

Van een elastomeer wordt het mechanisch gedrag beschreven door de Mooney-Rivlin energiefunctie. Een staaf van dit materiaal wordt gemodelleerd met één staafelement, zoals in onderstaande figuur is getekend. Afmetingen en randvoorwaarden zijn in de figuur aangegeven. De verplaatsing  $u$  van knooppunt 2 wordt voorgeschreven en neemt toe van 0 tot  $u_{max}$ . De toename verloopt lineair als functie van de (fictieve) tijd.



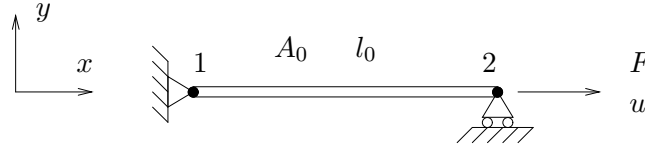
Gegevens staan in onderstaande tabel.

oorspr. lengte	$l_0$	100	[mm]
oorspr. dwarsdsn.-opp.	$A_0$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Mooney parameter 1	$C_{10}$	0.5	[MPa]
Mooney parameter 2	$C_{01}$	1	[MPa]
maximale verlenging	$u_{max}$	400	[mm]

- Bereken de axiale trekkracht en geef de resultaten weer in een grafiek, waarbij  $F$  tegen de verlenging  $u = \Delta l$  wordt weergegeven.
- Vergelijk het resultaat met de analytische oplossing.
- Schrijf nu eens een axiale verplaatsing voor in de range  $-25 \leq u \leq 400$  mm.

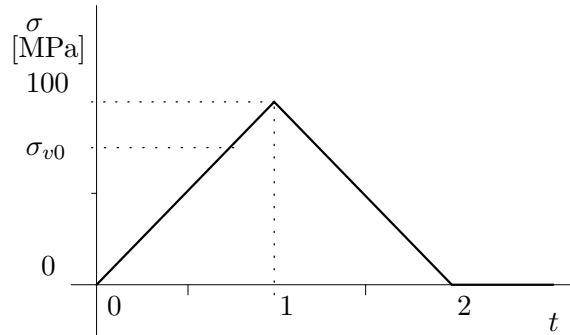
## Vraagstuk 6.2

In onderstaande figuur is een trekstaaf getekend met afmetingen en randvoorwaarden.



Wanneer de axiale spanning  $\sigma$  vanaf de waarde nul (0) toeneemt, is het materiaalgedrag aanvankelijk lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Als  $\sigma$  de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$  overschrijdt, deformeert de staaf elasto-plastisch en vertoont daarbij lineaire, isotrope versterking met verstergingsconstante  $H$ .

De spanning wordt voorgeschreven als functie van de (fictieve) tijd volgens onderstaande figuur.



Gegevens staan in onderstaande tabel.

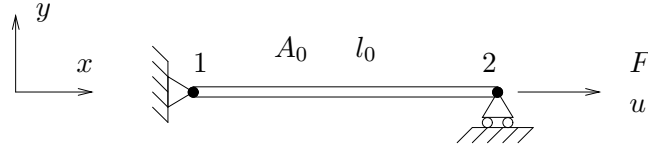
oorspr. lengte	$l_0$	100	[mm]
oorspr. dwarsdsn-opp.	$A_0$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E$	200	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}$	75	[MPa]
hardening parameter	$H$	10	[GPa]

- Bereken de verlenging  $u = \Delta l$  van de staaf en geef het resultaat weer in een  $\sigma(\epsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.12.



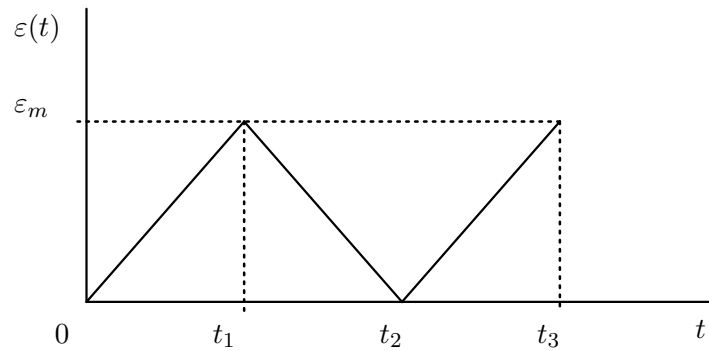
### Vraagstuk 6.3

In onderstaande figuur is een trekstaaf getekend met afmetingen en randvoorwaarden.



Wanneer de axiale spanning  $\sigma$  vanaf de waarde nul (0) toeneemt, is het materiaalgedrag aanvankelijk lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Als  $\sigma$  de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$  overschrijdt, deformeert de staaf elasto-plastisch en vertoont daarbij lineaire, isotrope versterking met verstergingsconstante  $H$ .

De rek van de staaf wordt voorgeschreven als functie van de (fictieve) tijd volgens onderstaande figuur, waarbij geldt  $\{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$  [s].



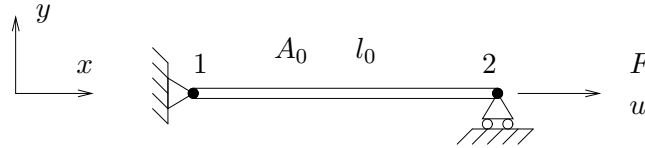
Gegevens staan in onderstaande tabel.

oorspr. lengte	$l_0$	100	[mm]
oorspr. dwarsdsn-opp.	$A_0$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E$	200	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}$	250	[MPa]
hardening parameter	$H$	10	[GPa]
maximale rek	$\varepsilon_m$	0.1	[-]

- Bereken de spanning  $\sigma$  in de staaf en geef het resultaat weer in een  $\sigma(\varepsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.14.

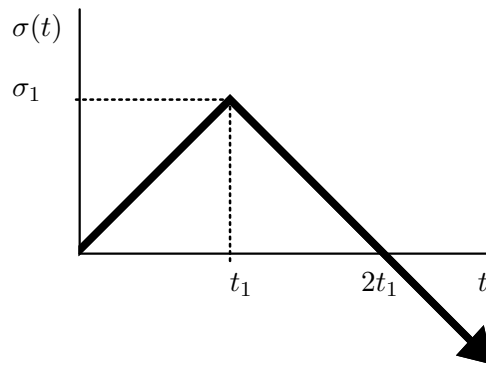
### Vraagstuk 6.4

In onderstaande figuur is een trekstaaf getekend met afmetingen en randvoorwaarden.



Wanneer de axiale spanning  $\sigma$  vanaf de waarde nul (0) toeneemt, is het materiaalgedrag aanvankelijk lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Als  $\sigma$  de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$  overschrijdt, deformeert de staaf elasto-plastisch en vertoont daarbij lineaire, isotrope versterking met versterkingsconstante  $H$ .

De axiale spanning in de staaf wordt voorgeschreven als functie van de (fictieve) tijd volgens onderstaande figuur, waarbij geldt  $t_1 = 1$  [s].



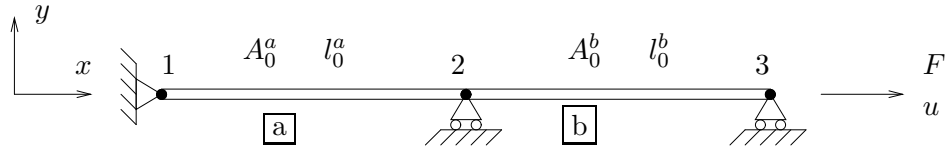
Gegevens staan in onderstaande tabel.

oorspr. lengte	$l_0$	100	[mm]
oorspr. dwarsdsn-opp.	$A_0$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E$	200	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}$	250	[MPa]
hardening parameter	$H$	10	[GPa]
maximale spanning	$\sigma_1$	400	[MPa]

- Bereken de spanning  $\sigma$  in de staaf en geef het resultaat weer in een  $\sigma(\varepsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.15.

### Vraagstuk 6.5

Een staafconstructie, bestaande uit twee staven in serie, wordt gemodelleerd met twee elementen zoals in onderstaande figuur is weergegeven. In de figuur zijn relevante afmetingen en randvoorwaarden aangegeven.



Wanneer de axiale spanning  $\sigma$  vanaf de waarde nul (0) toeneemt, is het materiaalgedrag aanvankelijk lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Na het bereiken van de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$  deformeren de staven elasto-plastisch en vertonen daarbij ideaal plastisch gedrag.

De verplaatsing van het staafuiteinde wordt voorgeschreven en neemt lineair als functie van de (fictieve) tijd toe van nul (0) tot  $u_{max}$  om daarna weer (lineair) nul te worden.

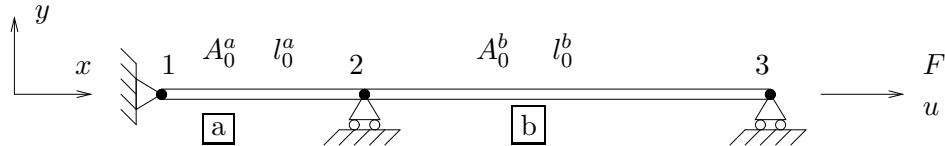
Gegevens staan in onderstaande tabel

oorspr. lengte	$l_0^a$	100	[mm]	$l_0^b$	100	[mm]
oospr. dwarsdsn-opp.	$A_0^a$	20	[mm <sup>2</sup> ]	$A_0^b$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E^a$	20	[GPa]	$E^b$	20	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu^a$	0	[-]	$\nu^b$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}^a$	100	[MPa]	$\sigma_{v0}^b$	100	[MPa]
maximale verplaatsing	$u_{max}$	1.5	[mm]			

- Bereken de spanning in beide staven en geef de waarden weer in één  $\sigma(\varepsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.22.

### Vraagstuk 6.6

Een staafconstructie bestaat uit twee delen met verschillende lengte  $l_0$  en dwarsdoorsnedeoppervlak  $A_0$ . De constructie wordt gemodelleerd met twee staafelementen, zoals in onderstaande figuur is getekend. Afmetingen en randvoorwaarden zijn in de figuur aangegeven.



Wanneer de axiale spanning  $\sigma$  vanaf de waarde nul (0) toeneemt, is het materiaalgedrag aanvankelijk lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Na het bereiken van de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$  deformeren de staven elasto-plastisch en vertonen daarbij lineaire, isotrope versterking met versterkingsconstante  $H$ .

De axiale kracht neemt vanaf nul (0) toe tot een maximum  $F_{max}$  en wordt daarna weer nul.

Gegevens staan in onderstaande tabel.

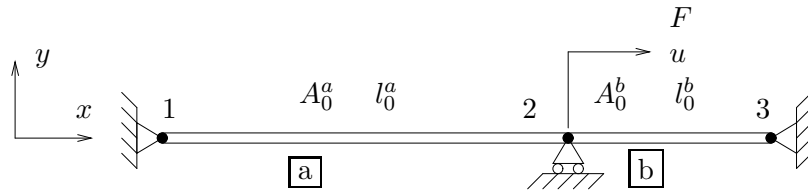
oorspr. lengte	$l_0^a$	100	[mm]	$l_0^b$	200	[mm]
oospr. dwarsdsn-opp.	$A_0^a$	20	[mm <sup>2</sup> ]	$A_0^b$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E^a$	20	[GPa]	$E^b$	20	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu^a$	0	[-]	$\nu^b$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}^a$	100	[MPa]	$\sigma_{v0}^b$	100	[MPa]
hardening parameter	$H^a$	1	[GPa]	$H^b$	1	[GPa]
maximale kracht	$F_{max}$	2400	[N]			

- Bereken de spanning in beide staven en geef de waarden weer in één  $\sigma(\varepsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.23.

### Vraagstuk 6.7

Een staaf wordt bevestigd tussen twee starre wanden en is daarna spanningsloos. Vervolgens wordt in een punt van de staaf een axiale kracht uitgeoefend, die vanaf waarde nul (0) aangroeit tot  $F_{max}$  en daarna weer nul wordt.

De staafconstructie wordt gemodelleerd met twee in serie geschakelde staafelementen, zoals in onderstaande figuur is getekend. In de figuur zijn afmetingen en randvoorwaarden aangegeven.



Bij toenemende kracht zal in de staven een axiale spanning ontstaan. Wanneer die spanning in absolute zin kleiner is dan de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ , is het gedrag van het materiaal lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Na bereiken van de initiële vloeispanning vertoont het materiaal lineaire, isotrope versterking met versterkingsconstante  $H$ .

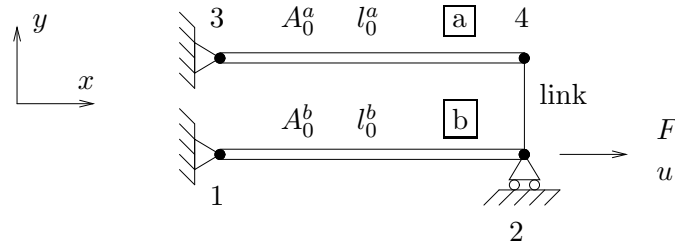
In onderstaande tabel zijn gegevens opgenomen.

oorspr. lengte	$l_0^a$	200	[mm]	$l_0^b$	100	[mm]
oorspr. dwarsdsn-opp.	$A_0^a$	10	[mm <sup>2</sup> ]	$A_0^b$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E^a$	20	[GPa]	$E^b$	20	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu^a$	0	[-]	$\nu^b$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}^a$	100	[MPa]	$\sigma_{v0}^b$	100	[MPa]
hardening parameter	$H^a$	1	[GPa]	$H^b$	1	[GPa]
maximale kracht	$F_{max}$	3000	[N]			

- Bereken de spanning in beide staven en geef de waarden weer in één  $\sigma(\varepsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.26.

### Vraagstuk 6.8

Een staafconstructie bestaat uit twee parallelle staven die via een starre verbinding axiaal worden belast. De constructie wordt gemodelleerd met twee staafelementen, zoals in onderstaande figuur is getekend.



Afmetingen en randvoorwaarden zijn aangegeven in de figuur. Knooppunt 2 en 4 zijn via een *link* star verbonden. In knooppunt 2 wordt een kracht aangebracht die vanaf nul (0) toeneemt tot een maximale waarde  $F_{max}$  en daarna weer nul wordt.

Bij toenemende kracht worden beide staven opgerekt waarbij in de staven een axiale spanning  $\sigma$  ontstaat. Wanneer die spanning in absolute zin lager is dan de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ , is het materiaalgedrag lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Voor  $|\sigma| > \sigma_{v0}$  deformeert het materiaal elasto-plastisch. Staal *a* vertoont daarbij lineaire, isotrope versterking met versterkingsconstante  $H$  en staaf *b* deformeert ideaal plastisch.

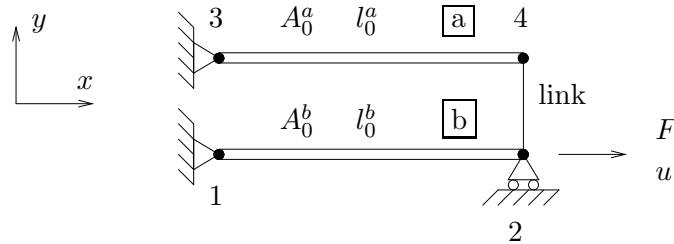
Gegevens staan in onderstaande tabel.

oorspr. lengte	$l_0^a$	100	[mm]	$l_0^b$	100	[mm]
oospr. dwarsdsn-opp.	$A_0^a$	10	[mm <sup>2</sup> ]	$A_0^b$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E^a$	20	[GPa]	$E^b$	20	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu^a$	0	[-]	$\nu^b$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}^a$	100	[MPa]	$\sigma_{v0}^b$	200	[MPa]
hardening parameter	$H^a$	1	[GPa]	$H^b$	0	[MPa]
maximale kracht	$F_{max}$	4000	[N]			

- Bereken de spanning in beide staven en geef het resultaat weer in één  $\sigma(\varepsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.16.

### Vraagstuk 6.9

Een staafconstructie bestaat uit twee parallelle staven die via een starre verbinding axiaal worden belast. De constructie wordt gemodelleerd met twee staafelementen, zoals in onderstaande figuur is getekend.



Afmetingen en randvoorwaarden zijn aangegeven in de figuur. Knooppunt 2 en 4 zijn via een *link* star verbonden. In knooppunt 2 wordt de verplaatsing voorgeschreven. Deze neemt vanaf nul (0) toe tot een maximale waarde  $u_{max}$  en daarna weer af tot nul.

Bij toenemende verlenging van beide staven neemt de axiale spanning  $\sigma$  toe. Wanneer die spanning in absolute zin lager is dan de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ , is het materiaalgedrag lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Voor  $|\sigma| > \sigma_{v0}$  deformeert het materiaal elasto-plastisch. Beide staven vertonen daarbij ideaal plastisch materiaalgedrag.

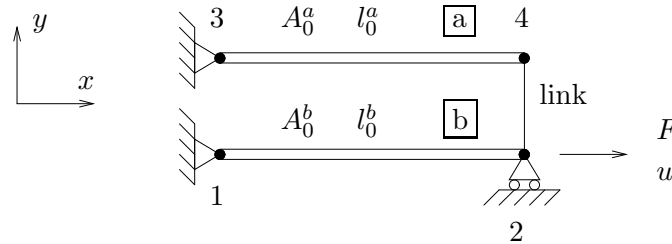
Gegevens staan in onderstaande tabel.

oorspr. lengte	$l_0^a$	100	[mm]	$l_0^b$	100	[mm]
oospr. dwarsdsn-opp.	$A_0^a$	10	[mm <sup>2</sup> ]	$A_0^b$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E^a$	20	[GPa]	$E^b$	20	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu^a$	0	[-]	$\nu^b$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}^a$	100	[MPa]	$\sigma_{v0}^b$	500	[MPa]
maximale verplaatsing	$u_{max}$	5	[mm]			

- Bereken de spanning in beide staven en geef het resultaat weer in één  $\sigma(\varepsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.18.

### Vraagstuk 6.10

Een staafconstructie bestaat uit twee parallelle staven die via een starre verbinding axiaal worden belast. De constructie wordt gemodelleerd met twee staafelementen, zoals in onderstaande figuur is getekend.



Afmetingen en randvoorwaarden zijn aangegeven in de figuur. Knooppunt 2 en 4 zijn via een *link* star verbonden. In knooppunt 2 wordt de verplaatsing voorgeschreven. Deze neemt vanaf nul (0) toe tot een maximale waarde  $u_{max}$  en daarna weer af tot nul.

Bij toenemende verlenging van beide staven neemt de axiale spanning toe. Wanneer die spanning  $\sigma$  in absolute zin lager is dan de initiële vloeispanning  $\sigma_{v0}$ , is het materiaalgedrag lineair elastisch met elasticiteitsmodulus  $E$  en dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$ . Voor  $|\sigma| > \sigma_{v0}$  deformeert het materiaal elasto-plastisch. Staaf *a* vertoont dan ideaal plastisch gedrag, terwijl staaf *b* lineaire, isotrope versterking laat zien met versterkingsconstante  $H$ .

Gegevens staan in onderstaande tabel.

oorspr. lengte	$l_0^a$	100	[mm]	$l_0^b$	100	[mm]
oorspr. dwarsdsn-opp.	$A_0^a$	10	[mm <sup>2</sup> ]	$A_0^b$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Young's modulus	$E^a$	20	[GPa]	$E^b$	20	[GPa]
Poisson's ratio	$\nu^a$	0	[-]	$\nu^b$	0	[-]
initial yield stress	$\sigma_{v0}^a$	100	[MPa]	$\sigma_{v0}^b$	100	[MPa]
hardening parameter	$H^a$	0	[GPa]	$H^b$	1	[GPa]
maximale verplaatsing	$u_{max}$	2.5	[mm]			

- Bereken de spanning in beide staven en geef het resultaat weer in één  $\sigma(\varepsilon)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 4.20.



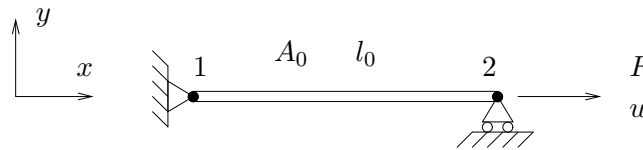
---

### Vraagstuk 6.11

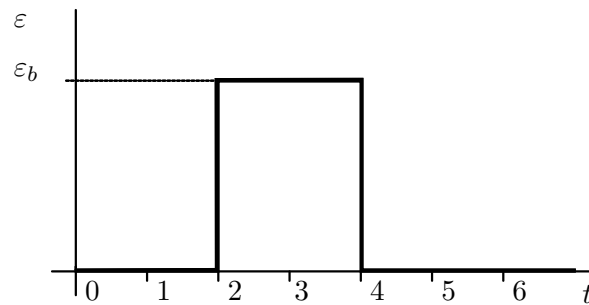
Voor een lineair elastisch materiaal is de relaxatiefunctie gegeven :

$$E(t) = E_{\infty} + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

Een trekstaaf van dit materiaal wordt gemodelleerd met een staafelement zoals in onderstaande figuur is getekend.



Afmetingen en randvoorwaarden zijn in de figuur aangegeven. De staaf wordt belast door het voorschrijven van de axiale rek  $\varepsilon$  als functie van de tijd  $t$  volgens onderstaande figuur.



Gegevens staan in onderstaande tabel.

oorspr. lengte	$l_0$	100	[mm]
oospr. dwarsdsn-opp.	$A_0$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Poisson's ratio	$\nu$	0	[-]
equilibrium modulus	$E_{\infty}$	0	[GPa]
tensile modulus	$E_1$	1	[GPa]
time constant	$\tau_1$	1	[s]
maximale rek	$\varepsilon_b$	0.01	[-]

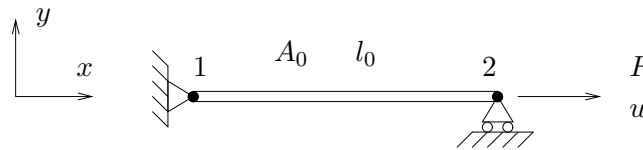
- Bereken de axiale spanning  $\sigma$  als functie van de tijd  $t$ . Geef het resultaat weer in  $\sigma(t)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 5.10.

### Vraagstuk 6.12

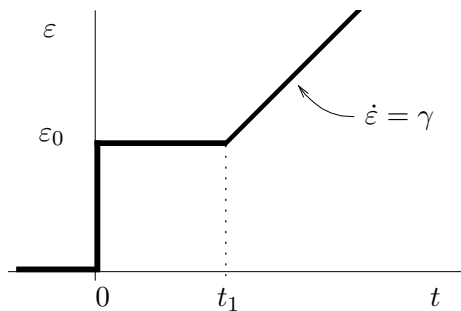
Van een lineair visco-elastisch materiaal is de relaxatiefunctie  $E(t)$  gegeven :

$$E(t) = E_{\infty} + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

Een trekstaaf van dit materiaal wordt gemodelleerd met een staafelement zoals in onderstaande figuur is getekend.



Afmetingen en randvoorwaarden zijn in de figuur aangegeven. De staaf wordt belast door het voorschrijven van de axiale rek  $\varepsilon$  als functie van de tijd  $t$  volgens onderstaande figuur, waarbij geldt  $t_1 = 1$  [s]. Gegevens staan in de tabel.



oorspr. lengte	$l_0$	100	[mm]
oorspr. dwarsdsn-opp.	$A_0$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Poisson's ratio	$\nu$	0	[-]
equilibrium modulus	$E_{\infty}$	1	[GPa]
tensile modulus	$E_1$	1	[GPa]
time constant	$\tau_1$	1	[s]
rek stap	$\varepsilon_0$	0.01	[-]
reksnelheid	$\gamma$	0.01	[s <sup>-1</sup> ]

- Bereken de axiale spanning  $\sigma$  als functie van de tijd  $t$ .  
Geef het resultaat weer in  $\sigma(t)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 5.12.

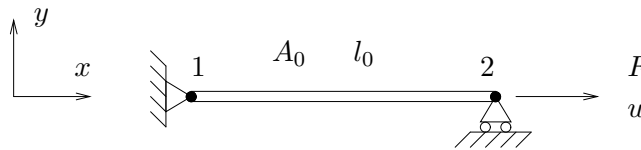
---

### Vraagstuk 6.13

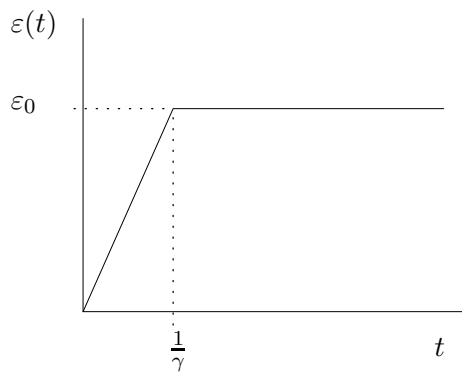
Van een lineair visco-elastisch materiaal is de relaxatiefunctie  $E(t)$  gegeven :

$$E(t) = E_{\infty} + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

Een trekstaaf van dit materiaal wordt gemodelleerd met een staafelement zoals in onderstaande figuur is getekend.



Afmetingen en randvoorwaarden zijn in de figuur aangegeven. De staaf wordt belast door het voorschrijven van de axiale rek  $\varepsilon$  als functie van de tijd  $t$  volgens onderstaande figuur. Gegevens staan in onderstaande tabel.



oorspr. lengte	$l_0$	100	[mm]
oorspr. dwarsdsn-opp.	$A_0$	10	[mm <sup>2</sup> ]
Poisson's ratio	$\nu$	0	[-]
equilibrium modulus	$E_{\infty}$	0	[GPa]
tensile modulus	$E_1$	1	[GPa]
time constant	$\tau_1$	1	[s]
maximale rek	$\varepsilon_0$	0.01	[-]
reksnelheid	$\varepsilon_0 \gamma$	2	[s <sup>-1</sup> ]

- Bereken de axiale spanning  $\sigma$  als functie van de tijd  $t$ .  
Geef het resultaat weer in  $\sigma(t)$ -grafiek.
- Vergelijk het resultaat met de antwoorden verkregen bij opgave 5.14.



## ANTWOORDEN



---

**Antwoord 1.1**

$$\lambda_{\text{radiaal}} = \frac{w}{w_0} \quad ; \quad \lambda_{\text{tangenciaal}} = \frac{r}{r_0} \quad ; \quad \lambda_{\text{axiaal}} = 1$$

---

**Antwoord 1.2**

$$D_f = 280 \quad [\text{mm}]$$

---

**Antwoord 1.3**

$$d^a = d^b$$

---

**Antwoord 1.4**

$$h = \frac{D_0}{D} h_0$$

---

**Antwoord 1.5**

$$\lambda^2 \mu = 1 \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{1}{\lambda^2}$$

---

**Antwoord 1.6**

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

---

**Antwoord 1.7**

$$l = \sqrt{2} \, l_0$$

---

**Antwoord 1.8**

$$h = 2h_0$$

---

**Antwoord 1.9**

$$l(t) = l_0 e^{-ct}$$

---

**Antwoord 1.10**

$$-125 \quad [\text{s}^{-1}]$$

---

**Antwoord 1.11**

$$v = 4v_0$$

---

**Antwoord 1.12**

$$\dot{\varepsilon}_{ln} = \frac{10}{3} [\text{s}^{-1}]$$

---

**Antwoord 1.13**

a. hoofdrichtingen : 1, 2, 3

$$\text{b.} \quad \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{h_0}{h_f} \quad [-]$$

$$\text{c.} \quad t_d = \frac{\alpha}{\omega}$$

$$\text{d.} \quad \lambda_1 = \frac{l_1}{l_0} = 1 + \frac{\Delta l}{l_0} \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda}_1 = \frac{\dot{\Delta l}}{l_0} = \frac{1}{t_d} \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{t_d} (\lambda_1 - 1) = \frac{\omega}{\alpha} (\lambda_1 - 1) \quad [\text{s}^{-1}]$$

$$\text{e.} \quad \lambda_1 = \frac{5}{4} \quad [-] \quad ; \quad \omega = 10.47 \quad [\text{rad s}^{-1}] \quad ; \quad \alpha = 0.13 \quad [\text{rad}]$$
$$\dot{\lambda}_1 = 20.2 \quad [\text{s}^{-1}]$$

$$\text{f.} \quad \dot{\varepsilon}_{ln_1} = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} = 16.16 \quad [\text{s}^{-1}]$$

---

**Antwoord 1.14**

a. hoofdrichtingen : axiaal en radiaal

$$\text{b.} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{d_f}{d_0}$$

$$\text{c.} \quad \text{Volume} = h_0 \frac{\pi}{4} d_0^2 = h_f \frac{\pi}{4} d_f^2 \quad \rightarrow \quad d_f = d_0 \sqrt{\frac{h_0}{h_f}}$$

$$\text{d.} \quad \lambda_1 = \frac{h_f}{h_0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e.} \quad \dot{\lambda}_1 = \frac{\dot{\Delta h}}{h_0} = -10 \quad [\text{s}^{-1}]$$

$$\text{f.} \quad \dot{\varepsilon}_{ln_1} = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} = -20 \quad [\text{s}^{-1}]$$



---

**Antwoord 1.15**

a. hoofdrichtingen : axiaal en radiaal (1, 2, 3)

b.  $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{A_0}{A_f}$

c.  $v_0 = v_f \frac{A_f}{A_0} = v_f \frac{1}{\lambda_1}$

d.  $t_d = \frac{V_d}{v_f A_f} = \text{tijd nodig om } V_d \text{ "leeg" te trekken}$

e.  $\dot{\lambda}_1 = \frac{\dot{\Delta} l}{l_0} = \frac{1}{t_d} \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{t_d} (\lambda_1 - 1) = \frac{v_f A_f}{V_d} \left( \frac{A_0}{A_f} - 1 \right) \quad [\text{s}^{-1}]$

---

**Antwoord 1.16**

a.  $pD = 2\sigma_t w \rightarrow p = 2\sigma_t \frac{w}{D}$

b.  $pD = 2\sigma_t w \rightarrow p = 2\sigma_t \frac{w}{D}$

c.  $p \frac{\pi}{4} D^2 = \sigma_a \pi D w \rightarrow p = 4\sigma_a \frac{w}{D}$

d.  $\frac{\pi}{4} p D^2 = \sigma_t w \pi D \rightarrow p = 4\sigma_t \frac{w}{D}$

---

**Antwoord 2.1**

$$\varepsilon = \frac{u}{R_0}$$

---

**Antwoord 2.2**

$$F = \frac{1}{4}kA_0c$$

---

**Antwoord 2.3**

$$v = cl$$

---

**Antwoord 2.4**

$$\dot{\varepsilon}_{ln} = \frac{v}{l}$$

---

**Antwoord 2.5**

- a.  $N(0 < x < l) = 2F$  ;  $N(l < x < 2l) = -F$  ;  $N(2l < x < 3l) = F$   
b.  $u(x = 3l) = \frac{2Fl}{EA}$

---

**Antwoord 2.6**

- a.  $\Delta = \frac{F}{k} = \frac{F}{k^a + k^b}$   
b.  $N^a = k^a \Delta$  ;  $N^b = -k^b \Delta$

---

**Antwoord 2.7**

- a.  $\delta^b = \frac{1}{3}\delta$  ;  $\delta^a = \frac{2}{3}\delta$   
b.  $\sigma = \frac{E}{3l} \delta$

---

**Antwoord 3.1**

$$W = \frac{K}{n+1} \epsilon^{n+1}$$

---

**Antwoord 3.2**

a.  $\mu^2 = \frac{1}{\lambda}$   
b.  $N = \frac{1}{2} E A_0 (\lambda^2 - 1)$   
c.  $\lambda = \sqrt{1 - \frac{2mg}{E A_0}}$

---

**Antwoord 3.3**

a.  $\lambda \mu^2 = 1 \quad \rightarrow \quad A = A_0 \frac{1}{\lambda}$   
b.  $K = \alpha A_0 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$

---

**Antwoord 3.4**

a.  $K = E A_0 (\lambda^2 - 1) \{1 - \nu(\lambda^2 - 1)\}$   
b.  $\frac{V}{V_0} = \lambda \mu^2 = (1 + \nu) \lambda - \nu \lambda^3$   
c.  $\nu = \frac{1}{\lambda(\lambda + 1)}$   
d.  $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \nu = \frac{1}{2}$

---

**Antwoord 3.5**

a.  $\lambda = e$   
b.  $F_{max} = C A_0 \frac{1}{e}$

---

**Antwoord 3.6**

a. no  
b.  $A = \mu^2 A_0 = \lambda^{-2\nu} A_0$   
c.  $F = \sigma A = C A_0 \lambda^{-2\nu} \ln(\lambda)$

---

**Antwoord 3.7**

a.  $\mu^2 = 1 - \nu(\lambda^2 - 1) > 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \nu\lambda^2 + \nu > 0 \quad \rightarrow \quad \lambda < \sqrt{\frac{1+\nu}{\nu}}$   
b.  $A = \mu^2 A_0 = A_0 \{1 - \nu(\lambda^2 - 1)\}$   
c.  $F = \sigma A = \frac{\lambda}{\mu^2} \sigma_{p2} A = \frac{1}{2} C A_0 \lambda (\lambda^2 - 1)$

---

**Antwoord 3.8**

a.  $\lambda = \frac{1 + \nu}{\nu}$

b.  $A = \mu^2 A_0 = A_0 \{1 - \nu(\lambda - 1)\}^2$

c.  $F = \sigma A = C A_0 \{1 - \nu(\lambda - 1)\}^2 (\lambda - 1)$

---

**Antwoord 3.9**

a.  $A = \mu^2 A_0 = A_0 \{1 - \nu(\lambda^2 - 1)\}$

b.  $F = \sigma A = \sigma \mu^2 A_0 = C A_0 \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \{1 - \nu(\lambda^2 - 1)\}$

c.  $\lambda = \sqrt{\frac{2\nu + 1}{2\nu}}$

---

**Antwoord 3.10**

a.  $F = \sigma_n A_0 = C A_0 \frac{1}{2} \lambda (\lambda^2 - 1)$

---

**Antwoord 3.11**

a.  $\sigma = 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)$

c.  $\sigma_n = \frac{\sigma}{\lambda} = 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$

---

**Antwoord 3.12**

a.  $\sigma = 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2C_{01} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda}$

b.  $K = A_0 \frac{1}{\lambda} \left[ 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2C_{01} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda} \right]$

---

**Antwoord 3.13**

a.  $W = C_{10} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)$

b.  $\sigma = \frac{dW}{d\varepsilon_{ln}} = 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)$

c.  $A = \frac{1}{\lambda} A_0$

d.  $F = \sigma A = \sigma \frac{1}{\lambda} A_0 = 2C_{10} A_0 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$

---

**Antwoord 3.14**

a.  $W = C_{10} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + C_{01} \left( \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda - 3 \right)$

- b.  $\sigma = \frac{dW}{d\lambda} \lambda = 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2C_{01} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda}$
- c.  $A = \frac{1}{\lambda} A_0$
- d.  $F = \sigma A = \sigma \frac{1}{\lambda} A_0 = A_0 \frac{1}{\lambda} \left[ 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2C_{01} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{\lambda} \right]$
- 

**Antwoord 3.15**

- a.  $\lambda_t = \frac{D}{D_0} = \lambda$  ;  $\lambda_r = \frac{w}{w_0} = \mu$  ;  $\lambda_a = \lambda_r = \mu$
- b.  $W = C_{10} \left( \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - 3 \right)$
- c.  $\sigma_t = \frac{dW}{d\lambda} \lambda = 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)$
- d+e.  $p = 2\sigma_t \frac{w}{D} = 4C_{10} \frac{w_0}{D_0} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$
- 

**Antwoord 3.16**

- a.  $\lambda_t = \frac{D}{D_0} = \lambda$  ;  $\lambda_r = \frac{w}{w_0} = \mu$  ;  $\lambda_a = 1$
- b.  $W = C_{10} \left( \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 1 - 3 \right)$
- c.  $\sigma_t = \frac{dW}{d\lambda} \lambda = 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right)$
- d.  $p = 2\sigma_t \frac{w}{D}$
- e.  $p = 4C_{10} \frac{w_0}{D_0} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^4} \right)$
- 

**Antwoord 3.17**

- a.  $\lambda_t = \frac{D}{D_0} = \lambda$  ;  $\lambda_r = \frac{w}{w_0} = \mu$
- b.  $W = C_{10} \left( \lambda^2 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right)$
- c.  $\sigma_t = \frac{1}{2} \frac{dW}{d\lambda} \lambda = 2C_{10} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right)$
- d.  $p = 4\sigma_t \frac{w}{D}$
- e.  $p = 8C_{10} \frac{w_0}{D_0} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$

---

**Antwoord 4.1**

11

---

**Antwoord 4.2**

12.5

---

**Antwoord 4.3**

- a.  $\sigma_{v0} = 150$  [MPa]
- b.  $\varepsilon = 0.01$  [-] ;  $\varepsilon^p = 0.009$  [-]
- c.  $\varepsilon^p = -0.00375$  [-]
- d.  $\bar{\varepsilon}^p = 0.02175$  [-]

---

**Antwoord 4.4**

$$\varepsilon_{ln} = n$$

---

**Antwoord 4.5**

- a.  $\lambda = [C(B+1)]^{\frac{1}{B}} = 1.34$
- b.  $F_{max} = 2800$  [N]

---

**Antwoord 4.6**

- a.  $\lambda = e^{-C} e^{\frac{n}{2\nu}} = e^{\frac{n}{2\nu} - C}$
- b.  $K_{max} = kA_0 e^{2\nu C} e^{-n} \left(\frac{n}{2\nu}\right)^n = 2895$  [N] met  $\nu = \frac{1}{2}$

---

**Antwoord 4.7**

- a.  $0.75[s] < t < 1[s]$  en  $4.8[s] < t < 5[s]$
- b.  $0.75[s] < t < 1[s]$  ,  $2.5[s] < t < 3[s]$  ,  $4.4[s] < t < 5[s]$  en  $6.2[s] < t < 7[s]$
- c. Bij ideaal plastisch materiaal gedrag kan het beschreven belastingsproces niet gerealiseerd worden omdat  $|\sigma|$  de waarde van 75[MPa] niet kan overschrijden.

---

**Antwoord 4.8**

- a.  $-\sigma_{v0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{v0}} \leq \sigma(t) \leq \sigma_{v0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{v0}}$  ;  $\varepsilon^p(t) = 0$
- b.  $-\sigma_1 \leq \sigma(t) \leq \sigma_1$

---

**Antwoord 4.9**

- a. Staafgedeelte  $a$  gaat (weer) vloeien als  $N = N_M - N_a + N_b$ .
- b. Staafgedeelte  $b$  gaat (weer) vloeien als  $N = N_m + N_a - N_b$ .
- c. Voor de initiële toestand van staafgedeelte  $c$  geldt dat er verschil is (in absolute zin) tussen de vloeigrens bij trek en de vloeigrens bij druk: het elastisch traject is verschoven over de "afstand":

$$q = \frac{N_a + N_b}{2A} \quad (A: \text{oppervlak dwarsdoorsnede})$$

De grootte van het elastisch traject wordt bepaald door de (constante) vloeispanning  $\sigma_v$  waarvoor geldt:

$$\sigma_v = \frac{N_a - N_b}{2A}$$

---

**Antwoord 4.10**

- a.  $\varepsilon = \sigma_{v0} \left( \frac{0.2}{S} + \frac{1}{E} \right)$
- b.  $\varepsilon^p = \bar{\varepsilon}^p = 0.2 \sigma_{v0} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{E} \right)$
- c.  $\sigma = -1.4 \sigma_{v0}$
- d.  $\bar{\varepsilon}^p = 0.4 \sigma_{v0} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{E} \right)$

De toestand waarin de staaf dan verkeert is zeker niet dezelfde als de oorspronkelijke toestand: ten opzichte van die toestand is de effectieve rek, die onder andere bepalend is voor de momentane vloeigrens, toegenomen. De geschiedenis die de staaf heeft doorgemaakt is bepalend voor de momentane toestand: geschiedenisafhankelijk materiaalgedrag.

---

**Antwoord 4.11**

- a.  $\varepsilon = \sigma_{v0} \left( \frac{0.2}{S} + \frac{1}{E} \right)$
- b.  $\varepsilon^p = 0.2 \sigma_{v0} \left( \frac{1}{S} - \frac{1}{E} \right) \quad ; \quad q = 0.2 \sigma_{v0}$
- c.  $\sigma = -\sigma_{v0}$
- d. Na opnieuw ontlasten geldt:  $q=0$ . De toestand waarin de staaf dan verkeert is dezelfde als de oorspronkelijke toestand.

---

**Antwoord 4.12**

- a.  $0.75 \leq t < 1 \quad [\text{s}]$
- b.  $\varepsilon^p = \frac{25}{H}$

---

**Antwoord 4.13**

- a.  $\sigma_1 = \sigma_{v0} \left( \frac{E}{E+H} \right) + \varepsilon_1 \left( \frac{EH}{E+H} \right)$

- b.  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \left( \frac{E}{E+H} \right) - \sigma_{v0} \left( \frac{1}{E+H} \right)$   
c. vloeien als  $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - \frac{\sigma_1}{E} = \varepsilon_1 - \frac{2\sigma_1}{E} > 0$

**Antwoord 4.14**

- a.  $\sigma(t_1) = \frac{E}{E+H} \sigma_{v0} + \frac{EH}{E+H} \varepsilon_m$   
b.  $\varepsilon^p(t_1) = \frac{E}{E+H} \left( \varepsilon_m - \frac{\sigma_{v0}}{E} \right)$   
c.  $\varepsilon_m > 2\varepsilon^e(t_1) = 2 \frac{\sigma(t_1)}{E} \rightarrow \varepsilon_m > \frac{2\sigma_{v0}}{E-H}$

**Antwoord 4.15**

- a.  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{v0}}{E} + \frac{E+H}{EH} (\sigma_1 - \sigma_{v0})$   
b.  $\varepsilon_1^p = \varepsilon_1 - \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_{v0}}{H}$   
c.  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - 2 \frac{\sigma_1}{E}$  bij  $\sigma = -\sigma_1$

**Antwoord 4.16**

- a.  $\delta_0 = L \frac{\sigma_{v0}}{E}$  ;  $F_0 = 2\sigma_{v0}A$   
b.  $\delta_1 = 2L \frac{\sigma_{v0}}{E}$  ;  $F_1 = \sigma_{v0}A \left( \frac{3E+4H}{E+H} \right)$   
c.  $\sigma_2^a = 2\sigma_{v0}$  ;  $\sigma_2^b = 2\sigma_{v0}$

**Antwoord 4.17**

- a.  $\delta_0 = L \frac{\sigma_v}{E}$  ;  $F_0 = 2\sigma_v A$   
b.  $\delta_1 = 3L \frac{\sigma_v}{E}$  ;  $F_1 = 4\sigma_v A$   
c.  $\delta_2 = 6L \frac{\sigma_v}{E}$  ;  $F_2 = F_1 = 4\sigma_v A$   
d.  $\delta_r = 4L \frac{\sigma_v}{E}$  ;  $\sigma_r^a = -\sigma_v$  ;  $\sigma_r^b = \sigma_v$

**Antwoord 4.18**

- a.  $\delta_0 = \frac{\sigma_v}{E} L$  ;  $F_0 = 2\sigma_v A$   
b.  $\delta_1 = 5 \frac{\sigma_v}{E} L$  ;  $F_1 = 6\sigma_v A$   
c.  $\delta_2 = 2\delta_1 = 10 \frac{\sigma_v}{E} L$  ;  $F_2 = F_1 = 6\sigma_v A$   
d.  $\delta_3 = 8 \frac{\sigma_v}{E} L$  ;  $F_3 = 2\sigma_v A$   
e.  $F_4 = 0$  ;  $\delta_4 = 6 \frac{\sigma_v}{E} L$  ;  $\sigma_r^a = -\sigma_v$  ;  $\sigma_r^b = \sigma_v$

**Antwoord 4.19**

- a.  $F_0 = 3\sigma_{v0}A$  ;  $\delta_0 = L \frac{\sigma_{v0}}{E}$



$$\begin{aligned} \text{b.} \quad & \delta_1 = L\varepsilon_1^b = L\sigma_{v0} \frac{E+2H}{EH} \quad ; \quad \varepsilon_1^{pa} = \sigma_{v0} \frac{E+H}{EH} \quad ; \quad \varepsilon_1^{pb} = \sigma_{v0} \frac{1}{H} \\ \text{c.} \quad & \sigma_r^a = -\frac{2}{3}\sigma_{v0} \quad ; \quad \sigma_r^b = \frac{1}{3}\sigma_{v0} \end{aligned}$$


---

**Antwoord 4.20**

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & F_0 = 2\sigma_{v0}A \quad ; \quad \delta_0 = L \frac{\sigma_{v0}}{E} \quad ; \quad \sigma^b = \sigma_{v0} \\ \text{b.} \quad & F_1 = \sigma_{v0}A \left( \frac{6K+2E}{K+E} \right) \quad ; \quad \varepsilon^{pa} = 4 \frac{\sigma_{v0}}{E} \quad ; \quad \varepsilon^{pb} = \frac{4\sigma_{v0}}{E+K} \\ \text{c.} \quad & \sigma^a = -\frac{2K}{E+K} \sigma_{v0} \quad ; \quad \sigma^b = \frac{2K}{E+K} \sigma_{v0} \end{aligned}$$


---

**Antwoord 4.21**

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & F_0 = 2\sigma_{v0}A \quad ; \quad \delta_0 = L \frac{\sigma_{v0}}{E} \quad ; \\ \text{b.} \quad & \sigma_1^a = \frac{E+5H}{E+H} \sigma_{v0} \quad ; \quad \sigma_1^b = \frac{E+10H}{E+2H} \sigma_{v0} \quad ; \quad F_1 = (\sigma_1^a + \sigma_1^b)A \\ \text{c.} \quad & \sigma_2^a = -\sigma_r \quad ; \quad \sigma_2^b = +\sigma_r \quad ; \quad \sigma_r = \frac{(E+10H)(E+H) - (E+5H)(E+2H)}{2(E+2H)(E+H)} \sigma_{v0} \end{aligned}$$


---

**Antwoord 4.22**

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & \delta_0 = \delta_0^a + \delta_0^b = \frac{3}{2} L \frac{\sigma_{v0}}{E} \\ \text{b.} \quad & F_1 = \sigma_{v0}A \\ \text{c.} \quad & \delta_2 = 2\delta_0 - \frac{1}{2}L \frac{\sigma_{v0}}{E} - L \frac{\sigma_{v0}}{E} = \frac{3}{2}L \frac{\sigma_{v0}}{E} \end{aligned}$$


---

**Antwoord 4.23**

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & F_0 = \sigma_{v0}A \quad ; \quad \delta_0 = \frac{5}{2} \frac{\sigma_{v0}}{E} L \\ \text{b.} \quad & F_1 = 2\sigma_{v0}A \quad ; \quad \delta_1 = \frac{\sigma_{v0}}{E} \left( \frac{2E+5H}{H} \right) L \\ \text{c.} \quad & \delta_2 = 3 \frac{\sigma_{v0}}{H} L \end{aligned}$$


---

**Antwoord 4.24**

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & \delta_0 = 3L \frac{\sigma_{v0}}{E} \quad ; \quad F_0 = \sigma_{v0}A \\ \text{b.} \quad & \delta_1 = L \frac{\sigma_{v0}}{E} \left( 6 + \frac{E}{H} \right) \quad ; \quad F_1 = 2\sigma_{v0}A \\ \text{c.} \quad & \delta_2 = L \frac{\sigma_{v0}}{E} \left( 9 + 3\frac{E}{H} \right) \quad ; \quad F_2 = 3\sigma_{v0}A \end{aligned}$$


---

**Antwoord 4.25**

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & \delta_0 = L \frac{\sigma_{v0}}{E} \quad ; \quad F_0 = 2\sigma_{v0}A \\ \text{b.} \quad & \delta_1 = L \frac{2\sigma_{v0}}{E} \quad ; \quad F_1 = \sigma_{v0}A \left( \frac{E+2H}{E+H} \right) + 2\sigma_{v0}A \\ \text{c.} \quad & \sigma_2^a = 2\sigma_{v0} \quad ; \quad \sigma_2^b = -2\sigma_{v0} \end{aligned}$$

---

**Antwoord 4.26**

- a.  $F_0 = \frac{3}{2}\sigma_{v0}A$  ;  $\delta_0 = \frac{\sigma_{v0}}{E}L$
- b.  $F_1 = \sigma_{v0}A \left( \frac{2E+3H}{E+H} \right)$  ;  $\delta_1 = 2\frac{\sigma_{v0}}{E}L$
- c.  $F_2 = 2F_0 = 3\sigma_{v0}A$  ;  $\delta_2 = \frac{\sigma_{v0}}{E}L \left( \frac{6H+2E}{3H} \right)$
- d.  $F_3 = 0$  ;  $\delta_3 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_{v0}}{H}L$  ;  $\sigma_r = \sigma_{v0} \left( \frac{E}{3(E+H)} \right)$
- 

**Antwoord 4.27**

- a.  $\delta_0 = \frac{\sigma_v}{E}L$  ;  $F_0 = \frac{3}{2}\sigma_v A$
- b.  $\delta_1 = 2\frac{\sigma_v}{E}L$  ;  $F_1 = 2\sigma_v A$
- c.  $\delta_2 = 3\delta_0 = 3\frac{\sigma_v}{E}L$  ;  $F_2 = F_1 = 2\sigma_v A$
- d.  $F_3 = 0$  ;  $\delta_3 = \frac{5}{3}\frac{\sigma_v}{E}L$  ;  $\sigma_r = \frac{1}{3}\sigma_v$
- 

**Antwoord 4.28**

- a.  $F_0 = \frac{7}{5}\sigma_{v0}A$  ;  $\delta_0 = \frac{1}{2}L \frac{\sigma_{v0}}{E}$
- b.  $F_m = 2\sigma_{v0}A$  ;  $\delta_m = \frac{5}{4}L \frac{\sigma_{v0}}{E}$
- c.  $\varepsilon_m^{cp} = -\frac{3}{4}\frac{\sigma_{v0}}{E}$

---

**Antwoord 5.1**

b

---

**Antwoord 5.2**

b

---

**Antwoord 5.3**

---

**Antwoord 5.4**

$$u(t = 0^+) = \frac{f_0}{3k}$$

---

**Antwoord 5.5**

$$u = \frac{3}{5k} F$$

---

**Antwoord 5.6**

- a. De kruipfunctie  $D(t)$  is te interpreteren als de rekresponsie  $\varepsilon(t)$  als gevolg van een eenheidsstap in de spanning  $\sigma$  op tijdstip  $t=0$ , dus:

$$\varepsilon(t) = D(t) \quad \text{is de responsie bij} \quad \sigma(t) = H(t, 0)$$

- b. voor  $t < t_1$  :  $\sigma(t) = 0$   
voor  $t_1 \leq t < t_2$  :  $\sigma(t) = \bar{\sigma}$   
voor  $t \geq t_2$  :  $\sigma(t) = 0$
- c. voor  $t < t_1$  :  $\varepsilon(t) = 0$   
voor  $t_1 \leq t < t_2$  :  $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} D(t - t_1) = C \bar{\sigma} (t - t_1 + \alpha)$   
voor  $t \geq t_2$  :  $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} [D(t - t_1) - D(t - t_2)] = C \bar{\sigma} (t_2 - t_1)$

---

**Antwoord 5.7**

- a. voor  $t < 0$  :  $\sigma(t) = 0$   
voor  $0 \leq t < \beta\tau$  :  $\sigma(t) = \bar{\sigma}$   
voor  $\beta\tau \leq t < 2\beta\tau$  :  $\sigma(t) = -\bar{\sigma}$   
voor  $t \geq 2\beta\tau$  :  $\sigma(t) = 0$
- b.  $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} \frac{D_0}{2} \left[ 3 - e\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{voor } 0 \leq t < \beta\tau$   
 $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} \frac{D_0}{2} \left[ -3 - e\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 2e\left(\beta - \frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{voor } \beta\tau \leq t < 2\beta\tau$   
 $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} \frac{D_0}{2} \left[ -e\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 2e\left(\beta - \frac{t}{\tau}\right) - e\left(2\beta - \frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{voor } t \geq 2\beta\tau$

---

**Antwoord 5.8**

a. 
$$\sigma(t) = \gamma \frac{E_0 \tau}{n-1} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right)^{(1-n)} \right] \quad ; \quad n \neq 1$$

b. 
$$\sigma(t) = \gamma E_0 \tau \ln \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) \quad ; \quad n = 1$$

$$\sigma(t) \rightarrow \gamma \frac{E_0 \tau}{n-1} \quad \text{voor} \quad t \rightarrow \infty \quad ; \quad n > 1$$

---

**Antwoord 5.9**

Voor  $0 \leq t < \beta\tau$  geldt:

$$\sigma(t) = \gamma E_0 \tau \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right)^{(-1)} \right]$$

Voor  $\beta\tau \leq t < 2\beta\tau$  geldt:

$$\sigma(t) = \gamma E_0 \tau \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right)^{(-1)} - \beta \left( 1 + \frac{t - \beta\tau}{\tau} \right)^{(-2)} \right]$$

Voor  $2\beta\tau \leq t < 3\beta\tau$  geldt:

$$\sigma(t) = \gamma E_0 \tau \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right)^{(-1)} - \beta \left( 1 + \frac{t - \beta\tau}{\tau} \right)^{(-2)} - \beta \left( 1 + \frac{t - 2\beta\tau}{\tau} \right)^{(-2)} \right]$$

---

**Antwoord 5.10**

a.

$$2 \leq t \leq 4 \quad \rightarrow \quad \sigma(t) = \varepsilon_b E e^{-\alpha(t-2)}$$

$$4 \leq t \leq \infty \quad \rightarrow \quad \sigma(t) = \varepsilon_b E e^{-\alpha(t-2)} - \varepsilon_b E e^{-\alpha(t-4)}$$

b.

$$\sigma(t=3) = \varepsilon_b E e^{-\alpha}$$

c.

$$\sigma(t=5) = \varepsilon_b E e^{-3\alpha} - \varepsilon_b E e^{-\alpha}$$

---

**Antwoord 5.11**

a. 
$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$$

b. 
$$\sigma(t=2) = \varepsilon_0 E e^{-\alpha}$$

c. 
$$\sigma(t=4) = \varepsilon_0 E \{ e^{-3\alpha} - 2e^{-\alpha} \}$$

d. 
$$\sigma(t=6) = \varepsilon_0 E \{ e^{-5\alpha} - 2e^{-3\alpha} + e^{-\alpha} \}$$

---

**Antwoord 5.12**

- a.  $\sigma(t) = \varepsilon_0 \{E_\infty + E_1 e^{-\alpha t}\}$   
b.  $\sigma(t) = \varepsilon_0 \{E_\infty + E_1 e^{-\alpha t}\} + E_\infty \gamma(t - t_1) + \frac{1}{\alpha} E_1 \gamma \{1 - e^{-\alpha(t-t_1)}\}$
- 

**Antwoord 5.13**

- a.  $\sigma(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} E(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$   
b.  $\sigma(t = 2) = \varepsilon_0 E e^{-\alpha(2-1)}$   
c.  $\sigma(t = 4) = \varepsilon_0 E \{e^{-\alpha(4-1)} + e^{-\alpha(4-3)}\}$
- 

**Antwoord 5.14**

- a.  $\sigma(t) = E \int_{\xi=0}^{\xi=t} e^{-\alpha(t-\xi)} \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi$   
b.  $\sigma(t) = E e^{-\alpha t} \frac{\gamma}{\alpha} (e^{\alpha/\gamma} - 1)$
- 

**Antwoord 5.15**

- a.  $\sigma(t) = \varepsilon_0 E_0 \tau_m^2 (\tau_m + t - 1)^{-2}$   
b.  $\sigma(t = 2) = \varepsilon_0 E_0 \tau_m^2 (\tau_m + 1)^{-2}$   
c.  $\sigma(t = 4) = \varepsilon_0 E_0 \tau_m^2 \{(\tau_m + 3)^{-2} - 2(\tau_m + 1)^{-2}\}$
- 

**Antwoord 5.16**

- a.  $\sigma(t) = \gamma E_0 \tau_m^2 \left[ \frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{\tau_m + t - 2} \right]$   
b.  $\sigma(t = 3) = \gamma E_0 \tau_m^2 \left[ \frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{\tau_m + 1} \right]$   
c.  $\sigma(t = 5) = \gamma E_0 \tau_m^2 \left[ \frac{2}{\tau_m + 2} - \frac{1}{\tau_m + 3} - \frac{1}{\tau_m + 1} \right]$
- 

**Antwoord 5.17**

- a.  $\Delta l_1 = 8.41 \quad [\text{mm}]$   
b.  $\Delta l_2 = 0.63 \quad [\text{mm}]$
- 

**Antwoord 5.18**

- a.  $\varepsilon_1 = 3.98 * 10^{-3} \quad [-]$   
b.  $N_1 = 120 \quad [\text{N}]$   
c.  $\varepsilon_2 = 7.48 * 10^{-3} \quad [-]$   
d.  $N_2 = 179 \quad [\text{N}]$

---

**Antwoord 5.19**

- a.  $E'(\omega) = E$  ,  $E''(\omega) = 0$  ,  $\delta(\omega) = 0$   
b.  $E'(\omega) = 0$  ,  $E''(\omega) = \eta \omega$  ,  $\delta(\omega) = \frac{\pi}{2}$
- 

**Antwoord 5.20**

- a.  $E'(\omega) = E$  ,  $E''(\omega) = \omega \eta$   
b.  $\delta(\omega) = \arctan \left[ \omega \frac{\eta}{E} \right]$   
c.  $\sigma_0 = \varepsilon_0 \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} = \varepsilon_0 \sqrt{E^2 + \omega^2 \eta^2}$
- 

**Antwoord 5.21**

- a.  $E'(\omega) = E_\infty + \sum_i \frac{E_i \omega^2}{\left(\frac{E_i}{\eta_i}\right)^2 + \omega^2}$  ,  $E''(\omega) = \sum_i \frac{E_i \omega \frac{E_i}{\eta_i}}{\left(\frac{E_i}{\eta_i}\right)^2 + \omega^2}$   
b.  $\delta(\omega) = \arctan \left[ \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \right] = \arctan \left[ \frac{\sum_i \frac{E_i \omega \frac{E_i}{\eta_i}}{\left(\frac{E_i}{\eta_i}\right)^2 + \omega^2}}{E_\infty + \sum_i \frac{E_i \omega^2}{\left(\frac{E_i}{\eta_i}\right)^2 + \omega^2}} \right]$   
c.  $\sigma_0 = \varepsilon_0 \sqrt{(E')^2 + (E'')^2} = \varepsilon_0 \sqrt{\left[ E_\infty + \sum_i \frac{E_i \omega^2}{\left(\frac{E_i}{\eta_i}\right)^2 + \omega^2} \right]^2 + \left[ \sum_i \frac{E_i \omega \frac{E_i}{\eta_i}}{\left(\frac{E_i}{\eta_i}\right)^2 + \omega^2} \right]^2}$
- 

**Antwoord 5.22**

- a.  $W_d = 1.57$  [Joule].  
b. Benodigd vermogen:  $P = 78.5$  [Watt].