Álgebra Lineal
Licenciatura en Actuaría

Primer Examen Parcial

Alumno: ____

8 de noviembre de 2022

Instrucciones: Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios.

1. (**2 puntos**) Sea $V := \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$, el conjunto de parejas ordenadas de números reales. Para $(a, b), (x, y) \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $(x, y), (a, b) \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ definamos la **suma** y la **multiplicación por escalar** de la siguiente manera:

$$(a, b) + (x, y) := (a + 2x, b + 3y)$$

$$\alpha(x, y) := (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)$$

¿Es V con estas operaciones, un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? Justifica tu respuesta

2. (**3 puntos**) Sean $\mathbb{F}$ un campo y $(V, \mathbb{F}, \boxplus, \boxdot), (W, \mathbb{F}, \oplus, \odot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Consideremos el siguiente conjunto:

$$Z := \{(v, w) \,|\, v \in V, w \in W\}$$

Demuestra que Z es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con las siguientes operaciones:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 \boxplus v_2, w_1 \oplus w_2)$$

$$\alpha(v, w) := (\alpha \boxdot v, \alpha \odot w)$$

donde $(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v, w) \in Z$.

Observación: En este ejercicio la operación $\oplus$ no tiene relación con la suma directa, es sólo utilizado para denotar la suma de vectores en el espacio vectorial W .

3. (**1 punto**) Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Si H es un subespacio vectorial de V sobre $\mathbb{F}$ ¿Quién es H+ H? Justifica tu respuesta

4. (**2 puntos**) Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ con la suma de vectores y multiplicación por escalar usual. Determine si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. En cada caso justifica tu respuesta.

   a) $H_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 0\}$
   b) $H_2 := \{(x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$
   c) $H_3 := \{(0, y) \colon y \in \mathbb{R}\}$
   d) $H_4 := \{(x, x) \colon x \in \mathbb{R}\}$

5. (**2 puntos**) Da un contrajemplo para demostrar que la siguiente proposición es falsa.
   Sea V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Si H_1, H_2 y W son subespacios vectoriales de V sobre $\mathbb{F}$, tales que $V = H_1 \oplus W$ y $V = H_2 \oplus W$, entonces $H_1 = H_2$